

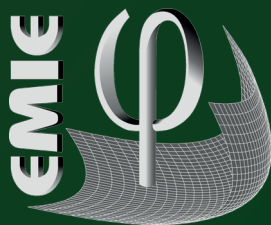
2^o Congreso Nacional

sobre la enseñanza de las matemáticas en ingeniería de edificación

18 -19 julio 2013

Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación
Universitat Politècnica de València

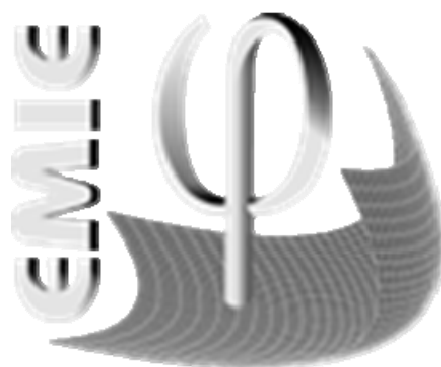
www.congresoemie.upv.es



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
INGENIERÍA DE
EDIFICACIÓN



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



**ACTAS_ 2º CONGRESO NACIONAL SOBRE
LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN INGE-
NIERÍA DE EDIFICACIÓN -EMIE-**

18-19 Julio 2013
ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR DE INGENIERÍA DE
EDIFICACIÓN
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA



ESCUELA TÉCNICA SUPERIOR
**INGENIERÍA DE
EDIFICACIÓN**



**UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA**

Los contenidos de esta publicación han sido evaluados por los miembros del Comité Editorial que en él se relacionan

Primera edición, 2013

© Editores: Joaquín Moreno Torres
Ángeles Rodrigo Molina
Francisco J. Sanchis Sampedro
José Luis Ponz Tienda

© de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València
Distribución: Telf. 963 877 012 / <http://www.lalibreria.upv.es> / Ref. 6092

ISBN: 978-84-8363-992-4 (Versión CD)

Producido bajo demanda

Queda prohibida la reproducción, la distribución, la comercialización, la transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

Dirección

Dr. Joaquín Moreno Flores

Secretario

Dr. José Luis Ponz Tienda

Comité Científico

Presidente: Dr. Javier Benlloch Marco

Dr. Joaquín Moreno Flores (Materia de Matemáticas)

Dr. José Albiach Vicent (Materia de Matemáticas)

Dr. Francisco Pedroche Sánchez (Materia de Matemáticas)

Dra. Ángeles Rodrigo Molina (Materia de Expresión Gráfica Arquitectónica)

Dr. Antoni Montañana i Aviñó (Materia de Empresa)

Dr. Jaime Llinares Millán (Materia de Construcción)

Dr. Manuel Jesús Ramírez Blanco (Materia de Construcción)

Dr. Francisco Taberner Pastor (Materia de Gestión Urbanística y Derecho)

Dr. José Luis Ponz Tienda (Materia de Organización del Proceso Constructivo)

Dr. Antonio Manuel Romero Sedó (Materia de Instalaciones en la Edificación)

Dr. Antoni Cladera Bohigas (Materia de Estructuras en la Edificación)

Dr. Antonio Garrido Hernández (Materia de Calidad en la Edificación)

Dr. Joaquín Catalá Alís (Materia de Prevención y Seguridad)

Dr. Javier Benlloch Marco (Materia de Materiales de Construcción)

Dra. Isabel María Escobar García (Materia Física)

Comité Organizador

Presidente: Joaquín Moreno Flores

Prof.: Jaime Llinares Millán

Prof.: Esther Valiente Ochoa

Prof.: María Teresa Broseta Palanca

Prof.: José Luis Pons Tienda

Prof.: Ángeles Rodrigo Molina

Prof.: Marta Pérez-de los Cobos Cassinello

Prof.: Enrique David Llacer

Prof.: Francisco Javier Sanchis Sampedro

Universidades colaboradores

Prof.: Raquel Martínez Lucas (Universidad de Castilla – La Mancha)

Prof.: Antonio Pérez Carrió (Universidad de Alicante)

Prof.: Maite Grau Montaña (Universitat de Lleida)

Prof.: Joan Muñoz Gomila (Universitat de les Illes Balears)

Prof.: Álvaro Pérez Raposo (Universidad Politécnica de Madrid)

Prof.: Ioana Necula (Universidad de Sevilla)

Prof.: María Victoria Fernández Muñoz (Universidad de Granada)

Presentación

Este congreso va dirigido a todos los profesores de las materias de Ingeniería de Edificación o similares y, en particular, a los de Matemáticas, con el fin de reflexionar conjuntamente sobre el papel que juega esta disciplina como fundamento científico en la ingeniería de la edificación. Trataremos de definir, entre todos, qué contenidos matemáticos han de aprender los alumnos, y cómo hacerlo, en el marco de las nuevas titulaciones.

Es continuación de las Primeras Jornadas para la Enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería de Edificación (EMIE), celebradas en la Universidad Politécnica de Madrid en Octubre de 2011 y presentaremos, entre otros temas, los resultados de los trabajos de investigación que allí se sugirieron, sobre la elaboración de un plan de estudios de Matemáticas común, como referencia para las Escuelas de Edificación españolas

Puesto que la metodología es perfectamente extrapolable a cualquier otra ingeniería, también se dirige a los ingenieros que quieran profundizar en los fundamentos científicos de su profesión.

Se pretende, asimismo, reflexionar sobre la interrelación entre las materias curriculares puramente académicas y el tejido socio-económico mediante la incorporación al debate del mundo empresarial.

Finalmente, se da voz al alumnado con el fin de que manifieste su punto de vista sobre el papel de las Matemáticas en su formación como profesional.

Por ello, te invitamos a participar, bien como asistente, bien como ponente, en este Segundo Congreso para la Enseñanza-Aprendizaje de las Matemáticas en Ingeniería de Edificación.

ACTAS
2º CONGRESO NACIONAL SOBRE
LA ENSEÑANZA DE LAS MATEMÁTICAS EN
INGENIERÍA DE EDIFICACIÓN

Índice

COMUNICACIONES INVITADAS

Primeros resultados del proyecto Diseño Curricular de Matemáticas en Ingeniería de Edificación y Afines

Joaquín Moreno

Universitat Politècnica de València.

Experiencias en matemática aplicada tras finalizar los estudios de Ingeniería de Edificación

Pedro Escudero González, Francisco Sanchís Mullor, José Carlos Gómez Silvestre, ETSIE. Universitat Politècnica de València

COMUNICACIONES

Optimización heurística aplicada al diseño automático de forjados de losa postesa

Ángel Manuel Rodríguez-Calderita Facundi, Julián Alcalá González, Víctor Yepes Piqueras, José V. Martí Albiñana.

Universitat Politècnica de València.

Cuando la creatividad tiene base geométrica

Juana María Sánchez González, Ascensión Moratalla de la Hoz, M^a Carmen Ferreiro, M^a Agripina Sanz García.

Universidad Politécnica de Madrid

Optimización Memética de Vigas Artesa prefabricadas con criterios sostenibles de Hormigón con Fibras

José Vicente Martí Albiñana, Víctor Yepes Piqueras, Julián Alcalá González, Tatiana García Segura.

Universitat Politècnica de València.

Propuestas de revisión metodológica en la enseñanza de las matemáticas

Pedro García Pallares, Juan Roldan Ruiz, Vegara Meseguer, Carmen Carazo Díaz, Juan Gómez Acosta,

Universidad Católica San Antonio de Murcia.

Cómo predimensionar muros óptimos sin calculadora usando la inteligencia artificial

Víctor Yepes Piqueras, Julián Alcalá González, José V. Martí Albiñana, Fernando González-Vidosa.

Universitat Politècnica de València.

Optimización Multiobjetivo de Viga en I de Hormigón Armado con Criterios Sostenibles

Tatiana García Segura, Víctor Yepes Piqueras, Julián Alcalá González, José Vicente Martí Albiñana.

Universitat Politècnica de València.

Maximización de beneficios en una empresa de gestión de residuos de construcción y demolición

María del Carmen Escribano Agraz, Mar Gascón Miguel, María José Oliver Torres, David Soler Fernández
Universitat Politècnica de València.

Diseño automático de forjados de chapa nervada, con criterios de economía sostenible.

Ángela Bárcena Saiz, Víctor Yepes Piqueras, Julián Alcalá González, José Vicente Martí Albiñana.
Universitat Politècnica de València.

Cinco ideas-fuerza en la docencia universitaria

Francisco Pedroche Sánchez
Universitat Politècnica de València.

Relación entre el grado de corrosión y el comportamiento mecánico de armaduras B500SD corroídas

Esther Moreno, Luisa Martín, J. Gabriel Palomo
Universidad Politécnica de Madrid.

Proyecto de Innovación Didáctica: “Una experiencia en Gestión de la Edificación”

Marta García Valldecabres,
Centro Universitario Villanueva
Ana Teresa García Valldecabres.
Doctoranda Universitat Politècnica de València.

Por una enseñanza de las matemáticas realmente aplicadas: control acústico

Anna Vidal Meló, Bernardino Roig Sala, Vicente D. Estruch Fuster, Francisco J. Boigues Planes, Romina del Rey Tormos, Jesús Alba Fernández, Xesc Canet Carbonell.
Escuela Politécnica Superior de Gandía.

Las matemáticas en la evaluación interdisciplinar de competencias mediante análisis de edificaciones

Miguel Ángel López Guerrero, Juan Carlos Jiménez Castillejo, Raquel Martínez Lucas.
Escuela Politécnica de Cuenca. Campus Universitario de Cuenca.

Planteamiento matemático para el cálculo estructural de vigas Boyd

Rubén Galindo Aires, Alberto Sanz Rubio.
Universidad Politécnica de Madrid

Cálculo de aprovechamientos lucrativos y derechos de propiedad en una actuación de transformación urbanística.

Mª Teresa Broseta Palanca.
Universitat Politècnica de València.

Optimización económica de una unidad de ejecución

Miguel Ángel López Guerrero, Juan Pedro Ruiz Fernández, Nelia Valverde Gascueña.
Escuela Politécnica de Cuenca. Campus Universitario de Cuenca.

Métodos empleados en el proyecto HORSOST sobre diseño sostenible con hormigón no convencional

Víctor Yepes Piqueras, José V. Martí Albiñana, Julián Alcalá González, Tatiana García Segura.

Universitat Politècnica de València.

Matemáticas + Arquitectura + Urbanismo = mau.mau

Débora Domingo Calabuig, Rafael Rivera Herráez, Macarena Trujillo Guillén.

Universitat Politècnica de València.

Aplicaciones de la geometría proyectiva al cálculo grafostático. Núcleo central de una sección

Juan Gómez Acosta, Juan Roldán Ruiz, Carmen Carazo Díaz, Josefina Vegara Meseguer, Pedro García Pallarés.

Universidad Católica San Antonio de Murcia

Diseño de Vigas en “U” de Hormigón con Fibras mediante la heurística SA con criterios económicos

José Vicente Martí Albiñana, Víctor Yepes Piqueras, Julián Alcalá González, Tatiana García Segura.

Universitat Politècnica de València.

Sistema de Evaluación de la Calidad del Proyecto Fin de Grado de la E.T.S. de Ingeniería de Edificación de Granada, mediante Funciones Matemáticas

Antonio Burgos Núñez, M. Victoria Fernández Muñoz, M. Dolores Gámez Montalvo, José Antonio Méndez Serrano.

Universidad de Granada.

Modelo de optimización para la gestión del mantenimiento de una infraestructura de edificación

Cristina Torres-Machí, Víctor Yepes, Eugenio Pellicer.

Universitat Politècnica de València.

Alondra Chamorro.

Pontificia Universidad Católica de Chile.

Fundamentos matemáticos para el cálculo de una Cúpula Geodésica Icosaédrica de Orden n. Diseño y aplicación a la Edificación.

Milagro Iborra Lucas, Marino Bañón Muñoz.

Universitat Politècnica de València.

Modelo Empírico para nuevos materiales de construcción

Romina del Rey Tormos, Jesús Alba Fernández.

Universitat Politècnica de València.

Aproximación al MEF en el cálculo de estructuras: Resolución paso a paso de una estructura sencilla desde las funciones de forma.

Enrique David Llácer

Universitat Politècnica de València

Besse y Ecuación Universal de la Línea Elástica: El juego matemático de las ménsulas

Juan José Cajal Montañés, M. Victoria Fernández Muñoz
Universidad de Granada.

Cálculo estructural de vigas por el Método de las Diferencias Finitas Generalizadas

Rubén Galindo Aires, Alejandro Clemente García
Universidad Politécnica de Madrid

Las formulas en la docencia de la ingeniería de edificación, en general, y el caso de la curva normal, en particular

Antonio Garrido Hernández, Carlos Parra Costa, Eusebio Martínez Conesa.
Universidad Politécnica de Cartagena

Un modelo dinámico del número de visados colegiales. Aplicación de caso práctico.

Joan C. Micó, Pau Serrano Rodrigo, Nuria González Roura, Igor Fernández Plazaola.
Universitat Politècnica de València

Diseño y despiece de un arco catenario

Álvaro Pérez Raposo, Paola Villoria Sáez
Universidad Politécnica de Madrid

Aplicaciones de la programación matemática entera en la edificación

Maite Grau, Eduard Gregorio

Primeros resultados del proyecto Diseño Curricular de Matemáticas en Ingeniería de Edificación y Afines

Cordinador: Joaquín Moreno Flores, jmflores@mat.upv.es

Introducción: a la búsqueda de un método

El 8 de junio de 1637 se terminó de imprimir en Leyden Discurso del método, cuyo título completo es Discurso del método para dirigir bien la razón y encontrar la verdad en las ciencias. Se considera, junto a *Novum organum*, de Francis Bacon, la primera obra genuinamente moderna de occidente, que dibuja una línea simbólica, un antes y un después respecto de la Edad Media. Su publicación significa la inauguración, el punto de partida, del nuevo pensamiento que acabará instalándose en el tejido intelectual de la Europa del siglo XVII. ¿Qué nuevas ideas encierran estas dos obras filosóficas, capaces de producir semejantes cambios?

Analicemos el contexto. En aquellos momentos, la escolástica, aunque cuestionada, todavía constituía el pensamiento institucional de la época. Fundamentaba su doctrina en la autoridad de dos grandes intelectos, Aristóteles y Santo Tomás de Aquino, a partir de cuyos principios, considerados inmutables, se había construido todo un sistema filosófico y de análisis de la realidad. El hecho de que algo hubiera sido dicho por alguno de ellos valía como justificación última ante la cual toda posible duda quedaba zanjada. En la sociedad medieval la autoridad era el criterio de verdad filosófico y científico, extendiéndose su vigencia hasta bien entrado el siglo XVII. Piénsese que, sólo cuatro años antes de la publicación de *Discurso del método*, en 1633, tiene lugar el proceso a Galileo.

Las dos obras antes mencionadas, *Novum Organum* de Francis Bacon y *Discurso del método* de René Descartes, irrumpen en ese escenario negando la mayor. Ambos autores descartan la autoridad como criterio de verdad para alcanzar el conocimiento, tanto en el terreno filosófico, como científico. Rechazan el prestigio de las doctrinas personales como fundamentos de certeza o falsedad. Más que de una nueva doctrina, que también lo era, se trató de una nueva actitud, que plantea la necesidad de encontrar un instrumento que permita, por sí mismo, la búsqueda de la verdad: El Método, definido por el propio Descartes como: “Reglas ciertas y fáciles gracias a las cuales el que las observa exactamente no tomará nunca lo falso por verdadero”.

El antes era la autoridad; el después, el método. En medio, dos hombres con pasión por la verdad. La consecuencia, sorprendente. Todas las áreas de conocimiento, que han conseguido implantar y perfeccionar métodos fiables de investigación, se han desarrollado de una manera increíble, desde entonces. Véanse las Matemáticas, la Física, la Química, la Biología; todas ellas están consiguiendo cotas de conocimiento impensables por aquel entonces. No valen las doctrinas u opiniones

personales, por muy relevantes que sean, sino el rigor con que el método es aplicado. He aquí el punto de partida del pensamiento moderno, frente al medieval.

Sin embargo hoy en día, todavía continúan existiendo áreas de conocimiento, con reconocimiento académico de ciencia, donde el método no acaba de implantarse, incluso se rechaza, aplicándose en contraposición, tanto en su utilización institucional práctica, como en su literatura de investigación, la autoridad de la opinión más influyente o prestigiosa, como criterio de verdad científica. Como antaño. Así, por ejemplo, piénsese sin más, en el tema que ocupa esta disertación: la selección de los contenidos curriculares de matemáticas en las ingenierías, tarea institucional y académicamente reconocida, propia del diseño curricular y perteneciente a las ciencias sociales. La pregunta es: ¿Con qué método se realiza esta importante tarea actualmente en la universidad? Sencillamente ninguno.

Permítaseme humildemente presentar uno, como representante del Proyecto para el Diseño Curricular de las Matemáticas en Ingeniería de Edificación y Afines, de ahora en adelante Proyecto DCMIE, bajo la cobertura institucional de la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación de la Universitat Politècnica de València.

Visión general del método propuesto

Antes de comenzar el análisis propiamente dicho, sería interesante describir la situación de partida. La idea surge como una de las consecuencias de las Primeras Jornadas sobre Enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería de Edificación (EMIE) de Octubre en Madrid, de las que este Congreso es continuación.

Allí, se planteó el interés de establecer unos contenidos mínimos de Matemáticas para ser impartidos en el Grado en Ingeniería de Edificación de todas, o al menos gran parte, de las Escuelas de España. Los asistentes a este interesante encuentro caímos en la cuenta, nada más comenzar a tantear el asunto, de su inviabilidad en el plano real, debido al variado mosaico de circunstancias diferentes, que cada uno de nosotros teníamos que afrontar en nuestras respectivas Escuelas, siendo la más importante de todas ellas el significativo rango del número de créditos asignado a las Matemáticas en los diferentes planes de estudios, que oscila entre 10,5 y 18, solo respecto de las Escuelas asistentes, llegando en otros casos, incluso a 24.

Por este motivo, aparece la meta de diseñar un currículum de Matemáticas, no para ser impartido en ninguna escuela en concreto, sino un plan de estudios ideal que nos sirviese de referencia a todos.

Una idea llevó a la otra y finalmente se configura un equipo de profesores de matemáticas fundamentalmente (véase la Tabla 1) y un proyecto, el DCMIE, cuya configuración, desarrollo y aplicación se explican a lo largo de estas líneas.

Tabla 1 Equipo de Profesores

Universidades	Nombre y apellidos
Universitat de les Illes Balears	María Jesús Álvarez Torres
	Carmentxu Erice Ruiz
	Pilar Fuster Parra
	José Luis Lisani Roca
	Joan Muñoz Gomila
Universidad de Sevilla	María José de Diego Chávez M ^a José
	Yolanda De la Riva Moreno
	Raúl Falcón Ganfornina
	Aurora Fernández León
	María Ángeles Garrido Vizquete
	Iona Necula
	Pastora Revuelta Marchena
	María Isabel Sanz Domínguez
Universidad de Granada	Phillippe Bechouche
	María Isabel Berenguer Maldonado
	María Victoria Fernández Muñoz
	Domingo Gámez Domingo
	Ana Isabel Garralda Guillem
	Antonio J López Linares
	Antono F Palomares Bautista
	Manuel Ruiz Galán
	Carmen Serrano Pérez
Olga Valenzuela Cansino	
Universitat de Lleida	Maite Grau Montaña
Universidad de Castilla-La Mancha	Juan Carlos Jiménez Castillejo
	Miguel Ángel López Guerrero
	Raquel Martínez Lucas
Universidad de Zaragoza	Antonio Laliena Bielsa
Universidad Jaume I	Sergio Macario Vives
Universidad Politécnica de Valencia	José Albiach Vicent
	Joaquín Moreno Flores
	Andrés Saiz Martínez
Universidad Politécnica de Cartagena	Antonio Garrido
Universidad Politécnica de Madrid	Marina Delgado Téllez de Cepeda
	Luisa Martín Horcajo
	José Gabriel Palomo Sánchez
	Álvaro Pérez Raposo
	Dolores Redondas Marrero
Universidad de Alicante	Antonio Pérez Carrió

A continuación, se explica el proyecto DCMIE empezando por su justificación.

La selección de los contenidos resulta un componente clave de la enseñanza, porque define los parámetros generales donde se desarrollan tanto las tareas docentes como el nivel de exigencia a nuestros estudiantes. En ese sentido, no cabe duda de que las Matemáticas cumplen un papel fundamental tanto en el desarrollo intelectual y moral de los estudiantes como en su formación como profesionales. Las Matemáticas son una herramienta excelente para buscar la razón de ser, fundamentar, hacer inteligible el conocimiento científico y, por otra parte, proporcionan modelos muy eficaces para la resolución de todo tipo de problemas técnicos. Posee un papel determinante en la configuración de los esquemas mentales y en la adquisición de patrones mentales operativos. Como disciplina curricular, las Matemáticas “disciplinan” el pensamiento, misión esencial en una carrera técnica. Pero ¿qué proceso seguir para configurar un tipo de materia o materias que esté bien alineada con la propuesta curricular (es decir, el proyecto formativo) de la que forma parte?

Con el propósito de responder a esta cuestión, se presenta un método para la selección de sus contenidos curriculares, dentro de la titulación de Ingeniería de Edificación y afines, siguiendo tres líneas básicas: Que las Matemáticas cumplan la función formativa que el currículo institucional de la carrera les atribuye, especialmente en lo que se refiere a su formación básica en los conceptos y operaciones que constituyen los contenidos esenciales del pensamiento matemático. Que los egresados sean capaces de integrar su formación matemática en las consolidación de las competencias profesionales necesarias para su posterior inserción en el tejido económico social. Que los egresados adquieran un fundamento científico-técnico de calidad para poder entender los procesos básicos de la ciencia y la tecnología. El método propuesto se vertebra en diferentes partes:

- Elaboración de un cuestionario.
- Su análisis estadístico.
- Elaboración de una colección de problemas.
- Contraste de ambas fuentes de información.
- Selección de contenidos, propiamente dicha.
- Contraste con las empresas de los contenidos seleccionados.

No se trata solo de seleccionar, también se pretende discriminar los contenidos más importantes con el propósito de dotarles de una mayor dedicación y profundidad en el desarrollo curricular posterior de la asignatura.

En la siguiente sección se trata el primer paso del Proyecto DCMIE: El Diseño del cuestionario.

Elaboración y cumplimentación del cuestionario

En este proceso el cuestionario juega un papel propedéutico. Aunque el propósito fundamental se centra en la selección de los contenidos, se aprovecha el cuestionario como una primera fuente de información que resultará valiosa en etapas posteriores del diseño de la asignatura.

La “unidad” de referencia para este proceso de selección de contenidos es cada una de las materias de la titulación. La población a quien se dirige esta primera fase del proceso es el conjunto del profesorado. Todo el profesorado, aunque sus aportaciones serán consideradas de forma individual. Todo el profesorado, incluyendo a todos aquellos que imparten materias en la carrera. Puesto que el marco de referencia es cada materia, en el caso en que sean varios los profesores que imparten la misma asignatura, sería conveniente que se pusieran de acuerdo y dieran una respuesta única.

Selección de los ítems del cuestionario.

La demanda que se hace al profesorado a través del cuestionario tiene que ver con las posibles aportaciones de las Matemáticas a su disciplina. Cada profesor deberá pronunciarse sobre determinadas características, (se precisarán más adelante), de una serie de conceptos y habilidades matemáticas que se plantean como ítems en el cuestionario. La elección de dichos ítems (unidades conceptuales u operativas de la disciplina Matemática) se confeccionará mediante la realización de un estudio comparativo de los programas, actualmente en vigor, en las universidades más relevantes de nuestro entorno. Tras la primera selección de esos ítems, habrá una segunda fase para contrastar los resultados obtenidos con un equipo de profesores de la titulación, tanto de Matemáticas como de otras disciplinas, con el objetivo de evitar las redundancias y que falten contenidos relevantes y propiciando, a la vez, la posibilidad de añadir nuevos ítems no contemplados en la primera fase. La fase de selección debe acabar con un nivel de consenso lo más amplio posible.

Como en todo cuestionario, se cuidará que la denominación de los ítems sea clara y precisa evitando un vocabulario excesivamente específico, propio de matemáticos. Así por ejemplo no se hablará de variedades lineales, sino de rectas y planos. Se tomará, igualmente, en consideración, el criterio de parsimonia y viabilidad del instrumento, reduciendo al máximo posible el número de ítems: en torno a 100 y siempre menos de 125. No es necesaria una excesiva minuciosidad, ya que la información obtenida a partir del cuestionario se completará posteriormente con una amplia colección de problemas (cuyas particularidades se abordarán más tarde), y cuya resolución aportará los detalles complementarios necesarios.

Los ítems se agruparán en módulos afines, con el propósito de facilitar la respuesta.

La tabla 2 muestra la lista de los ítems seleccionados en el cuestionario del proyecto DCMIE, propuesto por el equipo de profesores, siguiendo estas pautas.

Tabla 2: Lista de ítems

Álgebra	Sistemas de ecuaciones lineales
	Operaciones aritméticas con matrices
	Determinantes y sus propiedades
	Operaciones con vectores: aritméticas
	Productos escalar y vectorial
	Base de un espacio vectorial
	Autovalores y autovectores
	Diagonalización de matrices
	Números complejos
	Resolución exacta de sistemas no lineales
Geometría	Rectas y planos
	Cónicas
	Cuádricas
	Movimientos
Cálculo	Funciones elementales
	Derivada direccional
	Representación de curvas y superficies
	Campos vectoriales
	Integración
	Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes
	Cálculo de momentos
	Integración sobre curvas y superficies
	Teoremas de Green, divergencia y Stokes
	Ecuaciones diferenciales ordinarias
Ecuaciones en derivadas parciales	
Métodos numéricos	Resolución numérica de ecuaciones lineales
	Resolución numérica de ecuaciones no lineales
	Resolución numérica de sistemas no lineales
	Interpolación polinómica
	Resolución numérica de ecuaciones diferenciales
	Derivación numérica
	Integración numérica
	Método de elementos finitos
Nociones de lenguajes de programación	

Optimización	Programación lineal
	Optimización no lineal
Estadística	Estadística descriptiva
	Variabes aleatorias discretas
	Variabes aleatorias continuas
	Estimación de parámetros
	Contraste de hipótesis
	Técnicas estadísticas de control de calidad
	Análisis de la varianza y diseño de experimentos
	Regresión lineal
Teoría de grafos	Optimización en redes
	Emparejamiento
	Galería de arte e ilustración
	Localización de servicios
	La distribución real en planta

Determinación de las respuestas al cuestionario.

Una vez terminada la selección, enumeración y categorización de los ítems del cuestionario, el siguiente paso consiste en definir qué características de los ítems interesa considerar, de manera que, a partir de su estudio, podamos deducir con propiedad en qué medida los diferentes conceptos y/u operaciones matemáticas resultan necesarios como soporte y fundamento científico de las diferentes materias de la carrera y, por tanto, de la profesión para la que estas preparan. El análisis de las respuestas permitirá, también, acciones de coordinación tanto vertical como horizontal del programa de estudios.

Las valoraciones que se solicitan al profesorado sobre cada uno de los ítems (contenidos matemáticos) pertenecen a cuatro categorías: (1) Frecuencia; (2) Importancia; (3) Nivel de conocimiento previos y (4) Temporalidad.

La Tabla 3 recoge el sentido de cada categoría y las opciones de respuesta.

Se informará al profesorado de que, a efectos cuantitativos, se considerará la frecuencia proporcional a 1/4, 1/2, 3/4 y 1 respectivamente a cada uno de los niveles señalados.

Se recomienda al profesorado que, a poder ser, base su respuesta en la realización de una prueba objetiva de conocimiento, mejor que en su impresión subjetiva. Deficiente podría corresponder con una calificación entre 0 y 4. Suficiente, de 4 a 6. Buena, de 6 a 8. Y Excelente, de 8 a 10.

En el presente trabajo se analiza el proceso matemático para llegar a establecer una visión válida de la variable frecuencia y de la variable importancia. Las dos

restantes (conocimientos previos y temporalidad) se analizarán en un trabajo posterior.

Tabla 3: categorías y opciones de respuesta

Categoría	Significado	Opciones de respuesta
Frecuencia	Número de veces que aparece en la asignatura correspondiente	1. Poco frecuente 2. Medianamente frecuente 3. Bastante frecuente 4. En todos los temas
Importancia	La transcendencia de ese ítem como fundamento de la comprensión y desarrollo de la asignatura de que se trate	1. Poco importante 2. Medianamente importante 3. Bastante importante 4. Imprescindible
Nivel de conocimiento previo	Conocimiento previo que traen los estudiantes al aparecer ese tema en la disciplina en cuestión	1. Deficiente 2. Suficiente 3. Bueno 4. Excelente
Temporalidad	Período de tiempo lectivo, durante el cual estará trabajándose el ítem matemático implicado, dentro del desarrollo curricular de la asignatura correspondiente	Respuesta abierta para indicar momento y duración Interest, sobre todo el momento de su primera utilización

El cuestionario introduce un apartado titulado Otros Conceptos, donde puedan añadirse y evaluarse aquellos ítems matemáticos, que se consideren de interés para el desarrollo del currículum de la asignatura consultada, y no figuren en el cuestionario, por cualquier motivo. De esta manera fueron considerados los ítems: Matemáticas financieras, con una valoración de Frecuente y muy importante, en la materia de Peritaciones y tasaciones. Postulado de Boss (mínimos cuadrados) con una valoración de poco frecuente y muy importante en la materia de Organización. Trigonometría plana con una valoración de permante y esencial en las materias de Topología y replanteos; y en Construcción con una valoración de muy frecuente y muy importante.

En la Figura 1 se ilustra el diseño del cuestionario elaborado por el profesorado del proyecto DCMIE.

Organización de la cumplimentación del cuestionario

Una vez elaborado el cuestionario, se presenta la tarea de su distribución y cumplimentación en cada una de las doce universidades del proyecto. El problema de distribución se solventa por medio de la página web del proyecto, donde cada

miembro del equipo dispone del material común, comparte sus propias aportaciones y dispone de un correo interno de comunicación con el resto. Allí se encuentran disponibles dos versiones del cuestionario: una en formato pdf, y otra que permite su cumplimentación online.

CONTENIDOS A EVALUAR	AMB												
	Frecuencia					Importancia							
	No se usa	Poco frecuente	Frecuente	Muy frecuente	Permanente	Poco importante	Importante	Muy importante	Esencial	1	2	3	4
A) Álgebra 1. Sistemas de ecuaciones lineales 2. Operaciones aritméticas con matrices 3. Determinantes y sus propiedades 4. Operaciones con vectores: aritméticas 5. Productos escalar y vectorial 6. Base de un espacio vectorial 7. Autovalores y autovectores 8. Diagonalización de matrices 9. Números complejos 10. Resolución exacta de sistemas no lineales	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
B) Geometría 11. Rectas y planos 12. Cónicas	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

Figura 1 primera página del cuestionario

En esta fase, los miembros del equipo del proyecto DCMIE (profesores de matemáticas) pertenecientes a una misma universidad (véase la Tabla 1) tienen la responsabilidad de coordinar la cumplimentación del cuestionario entre el profesorado de su propia escuela (no matemático, sino de asignaturas profesiones específicas), teniendo en cuenta que no son entrevistadores asépticos y que no se trata de una encuesta de opinión, sino de la investigación de las matemáticas que subyacen en la edificación, y que, en ocasiones, el propio profesional desconoce. De ser así, no podría dar razón de las cuestiones planteadas, siendo importante, en

estos casos, el intercambio de criterios de ambas partes para obtener la respuesta adecuada.

La organización de esta tarea se presentó complicada. Lo ideal hubiese sido, sin duda, someter el cuestionario a la consideración del profesorado al completo de cada una de las doce universidades, pero esta labor pronto se presentó como inasumible en la práctica. Como consecuencia, se consideró que el equipo del proyecto DCMIE de una escuela concreta, no se responsabilizasen de coordinar la cumplimentación de los cuestionarios relativos a todas las asignaturas de su propia titulación, sino solo de aquellas con cuyo profesorado se mantuviese una relación personal más amable y cercana.

Por otra parte, enseguida fuimos conscientes de que la unidad de organización de este proceso no podía ser la asignatura, debido a su considerable disparidad de contenidos y denominaciones según las diferentes escuelas; sirva como ilustración el ejemplo siguiente: La asignatura Construcción I en Sevilla es Historia de la Construcción, mientras que en Valencia los contenidos de Historia de la Construcción se imparten en la asignatura Construcción III; el denominador común hubo que buscarlo en los módulos y las materias estipuladas en la orden ministerial ECI/3855/2007, que todas las escuelas deben compartir por imperativo legal. Estas razones condujeron a la distribución de las materias por universidades que se presenta en la Tabla 4, asegurándose además que, cada materia estuviese cubierta al menos por dos universidades.

Una vez que cada universidad tiene asignada una materia, según la Tabla 4, cada materia se subdivide, no en asignaturas, sino en los denominados niveles. Un nivel son bien todos, bien parte de los contenidos curriculares pertenecientes a una misma materia, que pueden pertenecer ya a la misma asignatura, ya a asignaturas diferentes según las distintas universidades. Por ejemplo, el nivel tres de la materia construcción recoge los contenidos curriculares pertenecientes a Historia de la Construcción que, sin embargo, no se corresponde con las mismas asignaturas de las universidades de Valencia y Sevilla; en la primera, Construcción I, y Construcción III, en la segunda. Los niveles se muestran en la Tabla 4.

A partir de estas consideraciones, se llevó a cabo la asignación de los cuestionarios por materia, nivel y universidad, organizándolos con la siguiente referencia:

Materia – Nivel – (Asignatura) – Universidad – (cursos en que se imparte)

donde Materia y nivel se asignaron según se explica en la Tabla 4; siendo el apartado (Asignatura) opcional, considerándose solo en los casos en los que haya varios niveles, o tenga una denominación diferente que la Materia. Así por ejemplo el cuestionario referenciado como: Instalaciones-1-Baleares-23, cubre el nivel 1 de la materia Instalaciones correspondiente a la universidad de Baleares, que se imparte en los años segundo y tercero de la titulación.

Tabla 4: Distribución de las materias por universidades

Módulos (ECI/3855/2007)	Materia	Niveles	Universidades
Fundamentos científicos	Fundamentos físicos	Único	Alicante, Castellón, Granada, Madrid
Empresa	Empresa	Único	Granada, Madrid, Valencia
Derecho	Derecho	Único	Madrid, Valencia
Expresión Gráfica	Expresión Gráfica	Geometría Descriptiva	Castellón, Granada, Madrid, Valencia
		Dibujo	Granada, Madrid
	Topografía y Repanteos	Único	Baleares, Madrid
Técnicas y Tecnología	Materiales	Único	Cartagena, Valencia
		Patología	Baleares, Valencia
		Equipos	Baleares, Sevilla
		Historia	Madrid, Sevilla, Valencia
		Construcciones	Madrid, Sevilla, Valencia
		Sostenible	Madrid, Sevilla
Urbanística y economía	Gestión urbanística	Único	Valencia, Zaragoza
	Peritaciones y tasaciones	Único	Castilla-La Mancha, Valencia
	Medic. y presupuestos	Único	Castilla-La Mancha, Granada, Lérida
Gestión del Proceso	Organización	Ejec. y gest. Económ.	Castilla-La Mancha, Valencia
		Planif. y organiz.	Castilla-La Mancha, Valencia
	Calidad	Único	Valencia, Zaragoza
	Prevención y seguridad	Único	Madrid, Valencia
Proyectos técnicos	Proyectos técnicos	Único	Granada, Lérida

Finalmente, se realiza un estudio comparativo de los cuestionarios que cubren los mismos contenidos curriculares en diferentes universidades, derivando en un único cuestionario integrado, que se etiquetará como:

Integrado – Materia – Nivel

A continuación se detallan los cincuenta y cuatro cuestionarios cumplimentados en las doce universidades del proyecto durante su proceso de ejecución, así como los correspondientes cuestionarios integrados.

Cuestionario de la Materia Topografía y replanteos.

TopografíaReplanteos-1-Baleares-2 TopografíaReplanteos-1- Madrid 12	Integrado-TopografíaReplanteos
--	--------------------------------

Cuestionarios de la materia de Estructuras

Estructuras-1-Granada-23 Estructuras-1-Baleares-23	Integrado-Estructuras-1
---	-------------------------

Cuestionarios de la materia de Instalaciones

Instalaciones-1-Baleares-23 Instalaciones-1-Castilla-L.Mancha-23	Integrado-Instalaciones-1
---	---------------------------

Cuestionarios de la materia de materiales de construcción

MaterialesConstrucc.-1-Valencia-12 MaterialesConstrucc.-1-Cartagena-2	Integrado-MaterialesConstrucc.-1
--	----------------------------------

Cuestionarios de la materia de Gestión Urbanística

GestUrbanística-1-Valencia-2 GestUrbanística-(DerechoConstr.)-Zaragoza-3	Integrado-Gest.Urban.-1
---	-------------------------

Cuestionarios de la materia de Peritaciones y Tasaciones

PeritacTasaciones-1-Castilla-La Mancha-4 PeritacTasaciones-1-Granada-4	Integrado-PeritTasac-1
---	------------------------

Cuestionarios de la materia de Gestión Presupuestaria

GestiónPresup.-1(Med.Presup.)-C.L.Mancha-4 GestiónPresup.-1(Med.Presup.)-Granada- 3 GestiónPresup.-1(Med.Presup.)-Lérida-3	Integrado-GestPresup-1
--	------------------------

Cuestionarios de la materia de Organización del Proceso Constructivo

Org-1(Planif)-Madrid-3 Org-1(Planif)-Valencia-4 Org-1(Planif)-Castilla-La Mancha-3	Integrado-Organización-1
Org-2(EjecGestiónPresup)-Valencia-3 Org-2(EjecnGestiónEcon)-C.La Mancha-4	Integrado-Organización-2

Cuestionarios de la materia de Calidad

CalidadEdificación-1-Valencia-3 CalidadEdificación-1-Zaragoza-4 CalidadEdificación-1-Baleales-4	Integrado-Calidad-1
---	---------------------

Cuestionarios de la materia de Construcción

Const-1(Patología)-Valencia-4 Const-1(Patología)-Baleares-4	Integrado-Const-1
Const-2(Equipos)-Baleares-3 Const-2(Equipos)-Sevilla-3	Integrado-Const-2
Const-3-(HistoriaConst)-Madrid-3 Const-3-(Construcc.Históricas)-Valencia-3 Const-3-(HistoriaConst)-Sevilla-1	Integrado-Const-3
Const-4-(Construcciones)-Madrid-123 Const-4-(Construcciones)-Valencia-1234 Const-4-(Construcciones)-Sevilla-1234	Integrado-Const-4
Const-5-(ConstDesarrSostenible)-Madrid-3 Const-5-(ConstV:ConstSostenible)-Sevilla-1	Integrado-Const-5

Cuestionarios de la materia de Derecho y Legislación

DerechoLegisgación-1-Valencia-2 DerechoLegislación-1-Madrid-24	Integrado-Derecho-1
---	---------------------

Cuestionarios de la materia de Expresión Gráfica

ExprGráfica-1(GeomDescriptiva)-Madrid-1 ExprGráfica-1(GeomDescriptiva)-Castellón-1 ExprGráfica-1(GeomDescriptiva)-Granada-1 ExprGráfica-1(GeomDescriptiva)-Valencia-1	Integrado-ExprGráfica-1
ExprGráfica-2(Dibujos)-Granada-12 ExprGráfica-2(Dibujos)-Madrid-12	Integrado-ExprGráfica-2

Cuestionarios de la materia de Prevención y seguridad

PrevenciónSeguridad-1-Madrid-34 PrevenciónSeguridad-1-Valencia34	Integrado-PrevenciónSeguridad-1
---	---------------------------------

Cuestionarios de la materia de Proyectos Técnicos

ProyectosTécnicos-1-Lérida-4 ProyectosTécnicos-1-Granada-3	Integrado-ProyectosTécnicos-1
---	-------------------------------

Cuestionarios de la materia de Física

Física-1-Alicante-12 Física-1-Granada-1 Física-1-Madrid-1 Física-1-Castellón-1	Integrado-Física-1
---	--------------------

Cuestionarios de la materia de Empresa

Empresa-1-Valencia-1 Empresa-1-Granada-1 Empresa-1-Madrid-2	Integrado-Empresa-1
---	---------------------

Una vez cumplimentados los cuestionarios en papel, se rellenaron online, registrándose las respuestas en un fichero excel, que permitió su estudio estadístico, según los modelos teóricos generales explicados a continuación, y que posteriormente se adaptarán a las características concretas del proyecto DCMIE.

Modelo teórico para el estudio de la frecuencia

El propósito del estudio de la frecuencia consiste en la discriminación de los ítems del cuestionario entre sí, según su utilización global en el resto de las materias curriculares.

Para facilitar el desarrollo de la exposición se va a suponer sin pérdida de generalidad que el número de asignaturas de la titulación es 24, y que todas tienen el mismo número de créditos.

En el cuestionario, cada asignatura se ha pronunciado afirmando o negando la utilización de cada uno de los ítems en el campo de su materia y, en su caso, matizando si su necesidad en el desarrollo curricular ha de considerarse *poco frecuente*, *medianamente frecuente*, *bastante frecuente* o *prácticamente en todos los temas*. Entonces; y a partir de esta información particular de cada asignatura, se ha de dar razón de la frecuencia en el conjunto de la titulación de cada uno de los ítems.

Se empieza el estudio de la frecuencia reuniendo los datos relativos a cada ítem mediante un vector de cuatro coordenadas (de ahora en adelante suceso), de manera que, por ejemplo, un supuesto suceso, $(2,5,0,3)$, representaría a un ítem con los resultados siguientes:

1. El ítem se utiliza en $2+5+0+3=10$ asignaturas.
2. Hay 2 asignaturas donde el ítem es muy poco frecuente.
3. Hay 5 asignaturas donde el ítem es medianamente frecuente.
4. Hay 0 asignaturas donde el ítem es bastante frecuente.
5. Hay 3 asignaturas donde el ítem es utilizado en casi todos los temas.

Generalizar esta idea es fácil. A cada ítem, n , le asignamos el suceso obtenido a través del cuestionario, $S_n = (i, j, k, l)$, siendo i , j , k y l números enteros no negativos, de manera que:

1. El ítem n aparece en $i + j + k + l$ asignaturas. Por tanto $i + j + k + l \leq 24$.
2. El ítem n aparece valorado en i asignaturas con el nivel 1 de frecuencia en el cuestionario.
3. El ítem n aparece valorado en j asignaturas con el nivel 2 de frecuencia en el cuestionario.
4. El ítem n aparece valorado en k asignaturas con el nivel 3 de frecuencia en el cuestionario.
5. El ítem n aparece valorado en l asignaturas con el nivel 4 de frecuencia en el cuestionario.

Según el modelo presentado, dado un ítem, n , se dispone de una amplia gama de sucesos, S_n , para valorar la frecuencia, según el valor que el profesorado asigne a los parámetros i , j , k y l . Se dispone, pues, de amplias posibilidades de discriminación de los ítems.

Así, hay un suceso para los ítems que, hipotéticamente, no apareciesen en ninguna asignatura, a saber: $(0,0,0,0)$.

Cuatro sucesos posibles para aquellos ítems que, hipotéticamente, solo apareciesen en una asignatura, a saber y ordenadas como si fuesen números (1, 10, 100 y 1000):

$$(0,0,0,1), (0,0,1,0), (0,1,0,0), (1,0,0,0). \quad (1)$$

(De ahora en adelante, siempre presentaremos las secuencias de sucesos en este orden). Diez sucesos posibles para aquellos ítems que, hipotéticamente, solo apareciesen en dos asignaturas, a saber:

$$(0,0,0,2), (0,0,1,1), (0,0,2,0), (0,1,0,1), (0,1,1,0), \\ (0,2,0,0), (1,0,0,1), (1,0,1,0), (1,1,0,0), (2,0,0,0)' \quad (2)$$

que son las combinaciones con repetición de cuatro sobre dos:

$$C_2^{r4} = C_2^5 = \frac{5!}{3!2!} = 10 \quad (3)$$

Veinte sucesos posibles para aquellos ítems que, hipotéticamente, sólo apareciesen en tres asignaturas, a saber:

$$(0,0,0,3), (0,0,1,2), (0,0,2,1), (0,0,3,0), (0,1,0,2) \\ (0,1,1,1), (0,1,2,0), (0,2,0,1), (0,2,1,0), (0,3,0,0) \\ (1,0,0,2), (1,0,1,1), (1,0,2,0), (1,1,0,1), (1,1,1,0) \\ (1,2,0,0), (2,0,0,1), (2,0,1,0), (2,1,0,0), (3,0,0,0) \quad (4)$$

que son las combinaciones con repetición de cuatro sobre tres:

$$C_3^{r4} = C_3^6 = \frac{6!}{3!3!} = 20 \quad (5)$$

Treinta y cinco respuestas posibles para aquellos ítems que, hipotéticamente, sólo apareciesen en cuatro asignaturas, a saber:

$$(1,0,0,3), (1,0,1,2), (1,0,2,1), (1,0,3,0), (1,1,0,2) \quad (6)$$

que son las combinaciones con repetición de cuatro sobre cuatro:

$$C_4^{r4} = C_4^7 = \frac{7!}{4!3!} = 35 \quad (7)$$

Y, así, hasta completar las 24 asignaturas. En general, el número de sucesos posibles para aquellos ítems que, hipotéticamente, apareciesen en m asignaturas, viene dado por las combinaciones con repetición de cuatro sobre m . Simbólicamente, C_m^{r4} . Que equivalen a las combinaciones sin repetición de $m+3$ sobre m . O sea que si,

$$\Omega_F = \{(i, j, k, l), 0 \leq i + j + k + l \leq 24, \text{ siendo } i, j, k, l, \text{ enteros nonegativos}\},$$

es el conjunto de todas los sucesos posibles. Entonces, su cardinal, N , es decir, la suma del número de todas las distintas posibles respuestas, sería:

$$N = \text{card}(\Omega_F) = \sum_{m=0}^{24} (C_m^4)' = \sum_{m=1}^{24} C_m^{m+3} = 20.475$$

Es decir. Fijado un ítem, n , el número de posibles sucesos diferentes entre sí que, a través del cuestionario, pueden asignársele es 20.475, siendo los ejemplos (1), (2), (4) y (6) algunas de ellas

Por otra parte estos mismos ejemplos ponen de manifiesto que aunque un ítem, n_1 , aparezca en un mismo número de asignaturas que otro, n_2 , no tienen por qué tener la misma frecuencia, globalmente considerada, en la titulación completa.

Así, el ítem $(1,0,0,0)$, obviamente, es menos frecuente que el ítem $(0,0,0,1)$; ya que, aunque ambos aparezcan en una única asignatura, no es lo mismo utilizarse con muy poca frecuencia, que en casi todos los temas.

Lo mismo podría decirse de los ítems $(2,0,0,0)$ y $(0,0,0,2)$, o $(3,0,0,0)$ y $(0,0,0,3)$.

Por consiguiente, no es lo mismo la frecuencia localmente considerada, asignatura a asignatura, (de ahora en adelante frecuencia local), que a nivel global en el conjunto de la titulación, (de ahora en adelante frecuencia global). Se hace pues necesario dar el salto de los datos por asignaturas al resultado global.

Lo que no siempre es obvio. Por ejemplo, ¿qué ítem es más frecuente aquél cuya respuesta a través del cuestionario ha sido $(3,0,0,0)$ o el $(0,2,0,0)$?; ¿el $(1,0,1,1)$ o $(0,0,0,2)$?; ¿ $(2,1,1,2)$ o $(1,0,3,1)$?

Para contestar a esta cuestión, de manera general, debemos asignar, a cada una de las 20.475 posibles respuestas, una puntuación que nos permita discriminarlas, según su frecuencia global. Con tal propósito definimos la variable puntuación, para el ámbito frecuencia, $X_F : \Omega_F \rightarrow R$, como sigue,

$$X_F(i, j, k, l) = 1 \cdot i + 2 \cdot j + 3 \cdot k + 4 \cdot l \text{ para todo } (i, j, k, l) \text{ perteneciente a } \Omega_F. \quad (8)$$

Así, por ejemplo, el ítem cuya respuesta a través del cuestionario fuese $(1,1,3,0)$, recibiría una puntuación de $1+2+9=12$.

Obsérvese que la mínima puntuación posible corresponde a la respuesta $(0,0,0,0)$, con $X_F(0,0,0,0) = 0$; y la máxima, a $(0,0,0,24)$, $X_F(0,0,0,24) = 96$. Así a la puntuación 0 le hacemos corresponder el 0 % de frecuencia global y a la puntuación 96, el 100 %; y al resto, proporcionalmente. O sea a la puntuación arbitraria, p , le correspondería una frecuencia global del x %, según la fórmula,

$$\frac{100}{96} = \frac{x}{p}. \quad (9)$$

Como resultado, la frecuencia asignada, en tanto por ciento, es directamente proporcional a la puntuación, según la ratio $100/96$.

Para que la definición de la variable puntuación, X_F , sea coherente ha de satisfacer:

1. Si dos ítems tienen la misma puntuación, entonces deben tener la misma frecuencia global.

2. Si un ítem, n , tiene mayor puntuación que otro, m , entonces el ítem n ha de tener mayor frecuencia global que el m , y viceversa.

3. Al mismo incremento de puntuación, le corresponde el mismo incremento del tanto por ciento de frecuencia global.

Respecto del primer punto. La variable puntuación, X_F , toma todos los valores enteros comprendidos entre 0 y 96. Se dispone, pues, de 97 puntuaciones para valorar las 20.475 posibles respuestas. Habrá, entonces, muchas de ellas con la misma puntuación. De forma que, por ejemplo, existen 54 respuestas que obtendrían una puntuación de 15, que ordenadamente son:

{ (0,0,1,3), (0,0,5,0), (0,1,3,1), (0,2,1,2), (0,3,3,0), (0,4,1,1), (0,6,1,0), (1,0,2,2), (1,1,0,3), (1,1,4,0), (1,2,2,1), (1,3,0,2), (1,4,2,0), (1,5,0,1), (1,7,0,0), (2,0,3,1), (2,1,1,2), (2,2,3,0), (2,3,1,1), (2,5,1,0), (3,0,0,3), (3,0,4,0), (3,1,2,1), (3,2,0,2), (3,3,2,0), (3,4,0,1), (3,6,0,0), (4,0,1,2), (4,1,3,0), (4,2,1,1), (4,4,1,0), (5,0,2,1), (5,1,0,2), (5,2,2,0), (5,3,0,1), (5,5,0,0), (6,0,3,0), (6,1,1,1), (6,3,1,0), (7,0,0,2), (7,1,2,0), (7,2,0,1), (7,4,0,0), (8,0,1,1), (8,2,1,0), (9,0,2,0), (9,1,0,1), (9,3,0,0), (10,1,1,0), (11,0,0,1), (11,2,0,0), (12,0,1,0), (13,1,0,0), (15,0,0,0)}.

Por consiguiente a estas 54 respuestas se les asignaría la misma frecuencia de aparición. Es decir 15. De modo que, si el método es coherente, ha de asignarles a todas ellas la misma frecuencia global. En efecto, la respuesta (15,0,0,0), según se explicó en la sección 0, indica que el correspondiente ítem aparece en 15 asignaturas, con una frecuencia proporcional a $1/4$. Lo que supondría una frecuencia global proporcional a $15/4$.

(13,1,0,0) significa que el ítem considerado aparece en 13 asignaturas con frecuencia proporcional a $1/4$ y en 1 asignatura con una frecuencia proporcional a $1/2$. Luego su frecuencia global sería proporcional a $13 \cdot 1/4 + 1 \cdot 1/2 = 15/4$.

Siguiendo el mismo razonamiento, al ítem correspondiente a la respuesta (11,2,0,0) le correspondería una frecuencia global proporcional a $11 \cdot 1/4 + 2 \cdot 1/2 = 15/4$.

Si ahora consideramos, en general, cualquiera de las respuestas anteriores, todas ellas puntuadas con 15, (i, j, k, l) , es decir cumpliéndose que $i + 2j + 3k + 4l = 15$, tendríamos que su frecuencia global sería proporcional a,

$$i \frac{1}{4} + j \frac{1}{2} + k \frac{3}{4} + l = \frac{i + 2j + 3k + 4l}{4} = \frac{15}{4}.$$

Este razonamiento puede generalizarse fácilmente, no sólo al caso de ítems que puntúen 15, sino a cualquier otro arbitrario. Por consiguiente podemos afirmar que, a ítems con igual puntuación, el método presentado les asigna la misma frecuencia global.

Respecto del segundo punto. A mayor puntuación, mayor frecuencia. Efectivamente supongamos dos ítems n y m , de manera que al primero se le ha asignado una puntuación p y al segundo, q , siendo $p > q$. El ítem n ha obtenido, a través del cuestionario, la respuesta (i_1, j_1, k_1, l_1) ; y el q , (i_2, j_2, k_2, l_2) . El ítem n tendrá una frecuencia global proporcional a

$$i_1 \frac{1}{4} + j_1 \frac{1}{2} + k_1 \frac{3}{4} + l_1 = \frac{i_1 + 2j_1 + 3k_1 + 4l_1}{4} = \frac{p}{4}.$$

El ítem m tendrá una frecuencia global proporcional a

$$i_2 \frac{1}{4} + j_2 \frac{1}{2} + k_2 \frac{3}{4} + l_2 = \frac{i_2 + 2j_2 + 3k_2 + 4l_2}{4} = \frac{q}{4}.$$

Como $p > q$, entonces el ítem n tendrá una frecuencia global mayor que el ítem m . Respecto del tercer punto. Es evidente, ya que cada punto, según (9), añade regularmente un aumento de 100/96 % a la frecuencia global.

Una vez establecida la coherencia de la variable puntuación, X_F , pasamos a realizar su estudio estadístico. Pretendemos resaltar, sobre todo, dos propiedades que subrayan su idoneidad. A saber: su simetría y ausencia de dispersión en torno a la media. La Tabla 5 presenta los datos y cálculos necesarios, agrupados en cinco columnas:

columna 1: Representa las puntuaciones, de 0 a 96, o sea los diferentes valores que la variable puntuación, X_F , definida en (??), asigna a las diferentes respuestas obtenidas a partir del cuestionario.

columna 2: Representa la frecuencia, f , de cada una de las puntuaciones respectivas. Así por ejemplo, según vimos un poco más arriba, la puntuación 15 aparece 54 veces.

Columna 3: Representa las frecuencias acumuladas.

Columna 4: Representa los correspondientes productos de cada puntuación, X_i , por su frecuencia, f_i , para el cálculo de la media, según la fórmula:

$$\bar{X} = \frac{1}{20.475} \sum_{k=0}^{96} X_i \cdot f_i = \frac{982.800}{20.475} = 48.$$

Columna 5: Representa los correspondientes productos, $(X_i - 48)^2$, por su frecuencia, f_i , para el cálculo de la varianza, V , y desviación típica, σ , según las fórmulas:

$$V = \frac{1}{20.475} \sum_{k=0}^{96} (X_i - 48)^2 \cdot f_i = \frac{4.750.200}{20.475} = 232; \sigma = \sqrt{232} = 15,23$$

Variable	X_F	1 c	X_F	1c	f	1c	fac	1c	$X \cdot f$	$(X - 48)^2 \cdot f$	1c	X_F	1c	f

En los datos relativos a la frecuencia de la Tabla 5, puede observarse la perfecta simetría respecto de la media, 48, de todos los valores tomados por la variable puntuación. Así, por ejemplo, la frecuencia de 47 y 49 es 514; y de 40 y 56, 458.

Por otra parte, la figura 2 representa el diagrama de barras de frecuencia de la variable puntuación, ilustrándose su simetría.

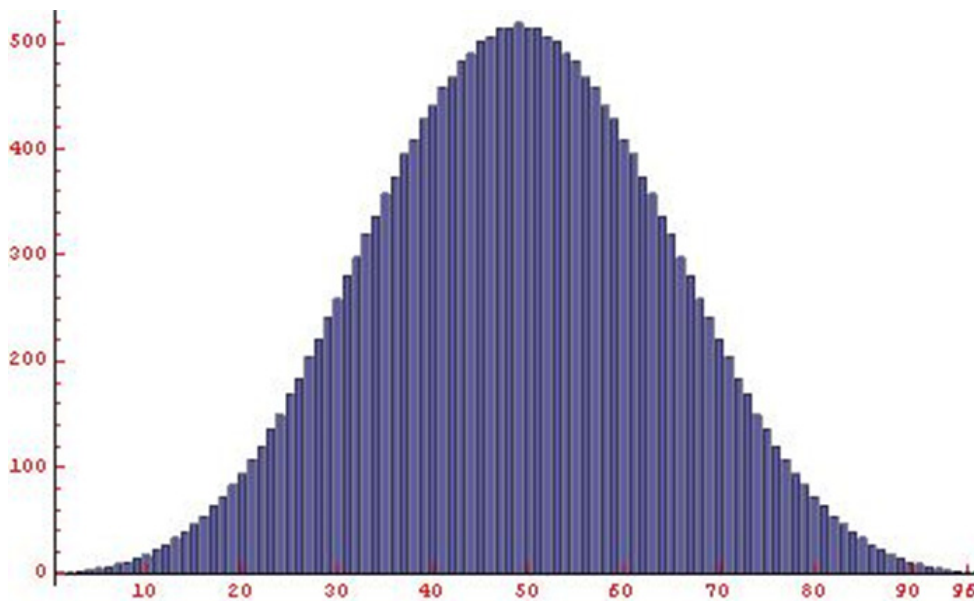


Figura 2. Distribución de la variable aleatoria X_F

No existe dispersión de los datos, ya que el intervalo $(\bar{X} - 1,65\sigma, \bar{X} + 1,65\sigma) = (22,74)$ contiene 90,6 % de los casos, prácticamente como en la distribución normal.

Tabla 5: Variable XF

X_F	f	fac	$X_F f$	$(X_F-48)^2 f$	X_F	f	fac	$X_F f$	$(X_F-48)^2 f$
0	1	1	0	2304	49	514	11011	25186	514
1	1	2	1	2209	50	514	11525	25700	2056
2	2	4	4	4232	51	506	12031	25806	4554
3	3	7	9	6075	52	502	12533	26104	8032
4	5	12	20	9680	53	490	13023	25970	12250
5	6	18	30	11094	54	483	13506	26082	17388
6	9	27	54	15876	55	468	13974	25740	22932
7	11	38	77	18491	56	458	14432	25648	29312
8	15	53	120	24000	57	441	14873	25137	35721
9	18	71	162	27378	58	428	15301	24824	42800
10	23	94	230	33212	59	409	15710	24131	49489
11	27	121	297	36963	60	395	16105	23700	56880
12	34	155	408	44064	61	374	16479	22814	63206
13	39	194	507	47775	62	358	16837	22196	70168
14	47	241	658	54332	63	337	17174	21231	75825
15	54	295	810	58806	64	320	17494	20480	81920
16	64	359	1024	65536	65	298	17792	19370	86122
17	72	431	1224	69192	66	281	18073	18546	91044
18	84	515	1512	75600	67	259	18332	17353	93499
19	94	609	1786	79054	68	242	18574	16456	96800
20	108	717	2160	84672	69	221	18795	15249	97461
21	120	837	2520	87480	70	204	18999	14280	98736
22	136	973	2992	91936	71	184	19183	13064	97336
23	150	1123	3450	93750	72	169	19352	12168	97344
24	169	1292	4056	97344	73	150	19502	10950	93750
25	184	1476	4600	97336	74	136	19638	10064	91936
26	204	1680	5304	98736	75	120	19758	9000	87480
27	221	1901	5967	97461	76	108	19866	8208	84672
28	242	2143	6776	96800	77	94	19960	7238	79054
29	259	2402	7511	93499	78	84	20044	6552	75600
30	281	2683	8430	91044	79	72	20116	5688	69192
31	298	2981	9238	86122	80	64	20180	5120	65536
32	320	3301	10240	81920	81	54	20234	4374	58806
33	337	3638	11121	75825	82	47	20281	3854	54332
34	358	3996	12172	70168	83	39	20320	3237	47775
35	374	4370	13090	63206	84	34	20354	2856	44064
36	395	4765	14220	56880	85	27	20381	2295	36963
37	409	5174	15133	49489	86	23	20404	1978	33212
38	428	5602	16264	42800	87	18	20422	1566	27378
39	441	6043	17199	35721	88	15	20437	1320	24000
40	458	6501	18320	29312	89	11	20448	979	18491
41	468	6969	19188	22932	90	9	20457	810	15876
42	483	7452	20286	17388	91	6	20463	546	11094
43	490	7942	21070	12250	92	5	20468	460	9680
44	502	8444	22088	8032	93	3	20471	279	6075
45	506	8950	22770	4554	94	2	20473	188	4232
46	514	9464	23644	2056	95	1	20474	95	2209
47	514	9978	24158	514	96	1	20475	96	2304
48	519	10497	24912	0	Sumas	20475		982800	4.750.200

Modelo para el estudio de la importancia

Ahora se trata de discriminar los ítems por su importancia. Es decir, la relevancia que se otorga a cada ítem, como soporte y fundamento científico, en la construcción del conocimiento propio de cada una de las asignaturas restantes; de manera que, para el estudiante, constituya algo inteligible y con significado propio, convirtiéndose en un pensamiento personalmente asumido e integrado.

Con este propósito, se han clasificado los ítems, en el caso de necesitarse, como *poco importante*, *importante*, *muy importante* o *imprescindible*. Entonces; y a partir de esta información particular de cada asignatura, se ha de dar razón de la importancia de cada uno de los ítems en el conjunto de la titulación.

Como en el caso de la frecuencia, se empieza el estudio de la importancia reuniendo los datos relativos a cada ítem mediante un vector de cuatro coordenadas, de manera que, por ejemplo, un supuesto vector, $(2,5,0,3)$, representaría a un ítem con los resultados siguientes:

1. Hay 2 asignaturas donde el ítem es poco importante.
2. Hay 5 asignaturas donde el ítem es importante.
3. Hay 0 asignaturas donde el ítem es muy importante.
4. Hay 3 asignaturas donde el ítem es imprescindible.

En general a un ítem cualquiera, n , vamos a asignarle la respuesta obtenida a través del cuestionario, $S_n = (i, j, k, l)$, siendo i , j , k y l números enteros no negativos, de manera que:

1. El ítem n aparece valorado en i asignaturas como muy poco importante.
2. El ítem n aparece valorado en j asignaturas como importante.
3. El ítem n aparece valorado en k asignaturas como muy importante.
4. El ítem n aparece valorado en l asignaturas como imprescindible.

De manera que el conjunto de sucesos respecto de la importancia es el mismo que en el caso de la frecuencia. Esto es:

$$\Omega_I = \{(i, j, k, l), 0 \leq i + j + k + l \leq 24, \text{siendo } i, j, k, l, \text{ enteros no negativos}\}$$

Como en el caso de la frecuencia, se nos presenta la cuestión: ¿qué ítem es más importante en el ámbito de la titulación completa aquél cuya respuesta a través del cuestionario ha sido $(3,0,0,0)$ o el $(0,2,0,0)$?; ¿el $(1,0,1,1)$ o $(0,0,0,2)$?; ¿ $(2,1,1,2)$ o $(1,0,3,1)$?

Para contestar a esta pregunta, de manera general, debemos asignar, a cada una de las 20.475 posibles respuestas, una puntuación que nos permita discriminarlas,

según su importancia global. Con tal propósito tenemos que definir una nueva variable puntuación para el ámbito importancia, $X_I : \Omega \rightarrow R$. En principio, podríamos pensar en utilizar la misma variable puntuación, X_F , que ya se ha utilizado para el estudio de la frecuencia, sin embargo el siguiente contraejemplo pone claramente de manifiesto la poca idoneidad de X_F para puntuar la importancia:

Considérense las respuestas $A=(5,0,0,0)$ y $B=(0,0,0,1)$. La respuesta A representa a un ítem muy poco importante en cinco asignaturas de las 24 consultadas. Es decir, podría prescindirse de él como soporte científico de la titulación. Por otro lado, la respuesta B representa a un ítem imprescindible para el seguimiento de una asignatura, llamémosla X , de la titulación. Por lo tanto, su eliminación del currículum significaría una incorrecta asimilación de la asignatura X . Sin embargo, la puntuación asignada, según la variable X_F , a las respuestas A y B serían respectivamente $X_F(5,0,0,0)=5$ y $X_F(0,0,0,1)=4$, de manera que a un ítem con muy poca importancia global dentro del currículum de la carrera se le asignaría una importancia mayor, que a otro ítem imprescindible para el seguimiento de una asignatura obligatoria de la carrera. Esta contradicción es consecuencia de la diferencia entre los conceptos de frecuencia e importancia. Así, si un ítem resulta esencial en una sólo asignatura, entonces adquiere una relevancia en la totalidad del currículum, independientemente de su frecuencia. Este rasgo diferencial entre frecuencia e importancia impone la necesidad de introducir una nueva definición para el estudio de la importancia.

Para empezar se realiza la siguiente clasificación:

Primero. Hay un único ítem con importancia cero: $(0,0,0,0)$, que constituye el *nivel cero* de importancia:

$$I_0 = \{(0, 0, 0, 0)\}. \quad (10)$$

Segundo. Un ítem, A , tiene un *nivel uno* de importancia, si sus respuestas asociadas en el cuestionario son de la forma:

$$I_1 = \{(y_1, 0, 0, 0) \in \Omega; y_1 > 0\}. \quad (11)$$

Son *poco importantes* en al menos una asignatura, pero no llegan a ser ni importantes, ni muy importantes ni imprescindibles en ninguna asignatura.

Tercero. Un ítem, A , tiene un *nivel dos* de importancia si sus respuestas asociadas en el cuestionario son de la forma:

$$I_2 = \{(y_1, y_2, 0, 0) \in \Omega; y_1 \geq 0, y_2 > 0\}. \quad (12)$$

Son *importantes* en al menos una asignatura, pero no llegan a ser ni muy importantes ni imprescindibles en ninguna asignatura.

Cuarto. Un ítem, A , tiene *un nivel tres* de importancia si sus respuestas asociadas en el cuestionario son de la forma:

$$I_3 = \{(y_1, y_2, y_3, 0) \in \Omega; y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 > 0\}. \quad (13)$$

Son *muy importantes* en al menos una asignatura, pero no llegan a ser imprescindibles en ninguna asignatura.

Quinto. Un ítem, A , tiene un *nivel cuatro* de importancia si sus respuestas asociadas en el cuestionario son de la forma:

$$I_4 = \{(y_1, y_2, y_3, y_4) \in \Omega; y_1 \geq 0, y_2 \geq 0, y_3 \geq 0, y_4 > 0\}. \quad (14)$$

Son *imprescindibles* en al menos una asignatura.

Nótese que son claramente disjuntos. Sucesos de nivel uno de importancia El conjunto:

$$I_1 = \{(1,0,0,0), (2,0,0,0), \dots, (22,0,0,0), (23,0,0,0), (24,0,0,0)\} \quad (15)$$

define todos los sucesos de nivel de importancia uno, siendo su cardinal:

$$\text{Card}(I_1) = 24 \quad (16)$$

Nótese que en I_1 los sucesos están ordenados de menor a mayor importancia global, ya que cada uno de ellos es *poco importante* en una asignatura más que el anterior. Sucesos de nivel dos de importancia El nivel de importancia dos se constituye con los sucesos proporcionados a continuación:

$$\begin{aligned} I_2 = \{ & (0,1,0,0), (1,1,0,0), (2,1,0,0), \dots, (22,1,0,0), (23,1,0,0), \\ & (0,2,0,0), (1,2,0,0), \dots, (21,2,0,0), (22,2,0,0), \\ & (0,3,0,0), \dots, (20,3,0,0), (21,3,0,0), \\ & \dots, \dots, \dots, \\ & (0,23,0,0), (1,23,0,0), \\ & (0,24,0,0)\} \end{aligned} \quad (17)$$

El cardinal de I_2 es:

$$\begin{aligned} \text{Card}(I_2) &= \sum_{m=1}^{24} C_m^2 - \text{Card}(I_1) = \sum_{m=1}^{24} C_m^{m+1} - \text{Card}(I_1) \\ &= \sum_{m=1}^{24} (m+1) - \text{Card}(I_1) = 324 - 24 = 300 \end{aligned} \quad (18)$$

Los elementos del conjunto I_2 se han presentado describiendo 24 filas y 24 columnas. La primera fila muestra los sucesos *importantes* para una sola asignatura de la titulación (segunda coordenada igual a uno). La segunda fila da razón de los sucesos *importantes* para solo dos asignaturas de la titulación (segunda coordenada igual a dos); y así sucesivamente.

Por un lado, los elementos de I_2 ubicados en una misma fila se ordenan de forma que cada elemento tiene una importancia mayor que el anterior; ya que es *poco importante* en una asignatura más.

Por otro lado, aquellos situados en una misma columna también se ordenan de manera que cada elemento tiene una importancia mayor que el anterior; ya que pierde una asignatura *poco importante*, pero gana otra *importante*.

Sin embargo el orden ya no está tan claro, si dos elementos pertenecen a distinta fila o columna: ¿qué suceso es globalmente más importante el (0,5,0,0) o el (24,0,0,0)?, ¿el (23,1,0,0) o el (10,3,0,0)?, ¿el (0,2,0,0) o el (12,1,0,0)? Aquí radica el principal problema. Para resolverlo hay que establecer una equivalencia entre el nivel de importancia uno y el nivel de importancia dos. La respuesta está en el propio modelo. Considere el conjunto $P(\Omega_1)$ (partes de Ω), entonces la función real de conjunto, μ , que a cada subconjunto, A , de Ω_1 le hace corresponder su cardinal:

$$\mu : P(\Omega_1) \rightarrow \mathbb{R}; \text{ tal que } \mu(A) = \text{cardinal}(A)$$

define una medida matemática en $P(\Omega_1)$, que proporciona una comparación coherente entre los tamaños de las diferentes partes de Ω_1 . El cardinal de I_1 es 24 y el cardinal de I_2 es 300. Luego existen doce sucesos y medio *importantes* por cada suceso *poco importante*. Esto justifica la equivalencia de los sucesos (12,0,0,0) y (0,1,0,0), y la fórmula:

$$X_1(i, j, 0, 0) = i + 12j \tag{19}$$

restringida al nivel de importancia dos, y que se ampliará en su momento.

Sucesos de nivel tres de importancia En el nivel de importancia tres el número de sucesos aumenta considerablemente, por consiguiente, para mayor claridad en la exposición, se presentan agrupados en 24 subconjuntos: $I_3(1)$, $I_3(2)$, ..., $I_3(24)$. Siguiendo el mismo criterio que en los casos anteriores, $I_3(1)$ representa los sucesos de I_3 *muy importantes* para una sola asignatura de la titulación (uno en su tercera coordenada); $I_3(2)$, los sucesos *muy importantes* para solo dos asignaturas de la titulación (dos en su tercera coordenada), y así sucesivamente. Es decir:

$$I_3(1) = \{(0,0,1,0), (1,0,1,0), (2,0,1,0), (3,0,1,0), \dots, (22,0,1,0), (23,0,1,0), \\ (0,1,1,0), (1,1,1,0), (2,1,1,0), \dots, (21,1,1,0), (22,1,1,0), \\ (0,2,1,0), (1,2,1,0), \dots, (20,2,1,0), (21,2,1,0), \dots\}$$

(0,3,1,0),,(19,3,1,0), (20,3,1,0),
 ,(18,4,1,0), (19,4,1,0),

 (0,22,1,0), (1,22,1,0)
 (0,23,1,0) }

El cardinal de $I_3(1)$ es:

$$\sum_{m=0}^{23} C_m^{r2} = \sum_{m=0}^{23} C_m^{m+1} = \sum_{m=0}^{23} (m+1) = 300 \quad (20)$$

En segundo lugar consideramos aquellos que tienen 2 en su tercera coordenada:

$I_{-3}(2)=\{(0,0,2,0),(1,0,2,0),(2,0,2,0),(3,0,2,0),,(21,0,2,0), (22,0,2,0),$
 $(0,1,2,0),(1,1,2,0),(2,1,2,0),,(20,1,2,0), (21,1,2,0),$
 $(0,2,2,0),(1,2,2,0),,(19,2,2,0), (20,2,2,0),$
 $(0,3,2,0),,(18,3,2,0), (19,3,2,0),$
 $, (17,4,2,0), (18,4,2,0),$
 $.....$
 $(0,21,2,0) (1,21,2,0)$
 $(0,22,2,0) \}$

El cardinal de $I_3(2)$ es:

$$Card(I_3(2)) = \sum_{m=0}^{22} C_m^{r2} = \sum_{m=0}^{22} C_m^{m+1} = \sum_{m=0}^{22} (m+1) = 276 \quad (21)$$

Continuando este proceso llegaríamos a aquellos sucesos con k en su coordenada tercera:

$I_{-3}(k)=\{(0,0,k,0),(1,0,k,0),(2,0,k,0),,(23-k,0,k,0), (24-k,0,k,0),$
 $(0,1,k,0),(1,1,k,0),,(22-k,1,k,0), (23-k,1,k,0),$
 $(0,2,k,0),,(21-k,2,k,0), (22-k,2,k,0),$
 $, (20-k,3,k,0), (21-k,3,k,0),$
 $.....$
 $(0,23-k,k,0), (1,23-k,k,0)$
 $(0,24-k,k,0) \}$

El cardinal de $I_3(k)$ es:

$$card(I_3(k)) = \sum_{m=0}^{24-k} C_m^{r^2} = \sum_{m=0}^{24-k} C_m^{m+1} = \sum_{m=0}^{25-k} (m+1) = \frac{(26-k)(25-k)}{2} \quad (22)$$

Terminaríamos con aquellos ítems cuya tercera coordenada es 24, que tendría un solo elemento. El total de elementos de I_3 es:

$$\begin{aligned} Card(I_3) &= \sum_{m=1}^{24} C_m^{r^3} - Card(I_2) - Card(I_1) = \sum_{m=1}^{24} C_m^{m+2} - Card(I_2) - Card(I_1) \quad (23) \\ &= \sum_{m=1}^{24} \frac{(m+2)(m+1)}{2} - Card(I_2) - Card(I_1) = 2.924 - 300 - 24 = 2.600 \end{aligned}$$

Si consideramos los sucesos de $I_3(1)$ ordenados en filas y columnas según se ha definido; entonces en una misma fila cada suceso tiene una importancia global mayor que el anterior; y en una misma columna, también. Sin embargo, la conclusión no está clara si comparamos elementos ubicados en distinta fila y columna: ¿cuál es más importante globalmente hablando el suceso $(0,1,1,0)$ o el $(23,0,1,0)$?, ¿el $(0,5,1,0)$ o $(23,0,1,0)$?

Lo mismo puede decirse del resto de los subgrupos $I_3(2), \dots, I_3(24)$.

Tampoco está claro, por el momento, si un suceso, A , de un subgrupo cualquiera, digamos $I_3(k)$, es globalmente más importante que otro suceso, B , del subgrupo anterior $I_3(k-1)$: ¿cuál es más importante globalmente el suceso $(0,0,2,0)$ perteneciente a $I_3(2)$ o el suceso $(0,23,1,0)$ perteneciente a $I_3(1)$?

Nuevamente la solución está en el propio método. El cardinal del conjunto I_2 es trescientos y el cardinal del conjunto I_3 es dos mil seiscientos. Es decir existen ocho coma seis sucesos *muy importantes* por cada suceso *importante*, lo que justifica la relación entre los sucesos $(0,0,1,0)$ y $(0,8,0,0)$ y la fórmula:

$$X_I(i, j, k, 0) = i + 12j + 96k \quad (24)$$

restringida a los sucesos propios del nivel de importancia tres.

Sucesos de nivel de importancia cuatro El problema es similar en el caso del nivel de importancia cuatro. Su Cardinal es:

$$Card(I_4) = \sum_{m=1}^{24} C_m^{r^4} - Card(I_3) - Card(I_2) - Card(I_1) = 17.550$$

Razonando como en los casos anteriores, el cardinal I_3 es dos mil seiscientos y el cardinal del conjunto I_4 es diecisietemil quinientos cincuenta. Es decir existen seis coma setenta y cinco sucesos *imprescindibles* por cada suceso *muy importante*, lo que justifica la relación entre los sucesos $(0,0,0,1)$ y $(0,0,6,0)$ y la fórmula:

$$X_I(i, j, k, l) = i + 12j + 96k + 576l \quad (25)$$

considerada en todo el conjunto de sucesos Ω_I , y que definimos como la variable importancia, y que asignará a cada respuesta del cuestionario su correspondiente puntuación en importancia. Sucesos equivalentes en importancia Igual que sucedía en el caso de la frecuencia, también existen sucesos con la misma puntuación en importancia, según las equivalencias descritas en el apartado anterior:

$$(12, 0, 0, 0) \leftrightarrow (0, 1, 0, 0)$$

$$(0, 8, 0, 0) \leftrightarrow (0, 0, 1, 0)$$

$$(0, 0, 6, 0) \leftrightarrow (0, 0, 0, 1)$$

O de forma combinada:

$$(15, 1, 7, 1) \leftrightarrow (3, 2, 1, 2)$$

$$(6, 12, 6, 0) \leftrightarrow (6, 4, 0, 6)$$

$$(0, 8, 12, 4) \leftrightarrow (0, 0, 13, 4) \leftrightarrow (0, 0, 1, 6)$$

$$(24, 0, 0, 0) \leftrightarrow (12, 1, 0, 0) \leftrightarrow (0, 2, 0, 0)$$

Es decir para obtener sucesos con la misma puntuación de importancia se han de transformar 12 asignaturas donde el ítem es *poco importante* por una asignatura donde el ítem es *importante*; 8 asignaturas donde el ítem es *importante* por una asignatura donde el ítem es *muy importante*; 6 asignaturas donde el ítem es *muy importante* por una asignatura donde el ítem es *imprescindible*. El proceso puede repetirse varias veces, hasta que las tres primeras componentes sean menores que 12, 8 y 6 respectivamente.

Proposición 1 Si dos sucesos $A = (i_1, j_1, k_1, l_1)$ y $B = (i_2, j_2, k_2, l_2)$ cumplen que $i_1, i_2 < 12$ y $j_1, j_2 < 8$ y $k_1, k_2 < 6$, entonces o son iguales o tienen una puntuación diferente en importancia.

Proof. Efectivamente. Supongamos que la puntuación es la misma, pero que A y B son diferentes; por consiguiente o $l_1 \neq l_2$ o $k_1 \neq k_2$ o $j_1 \neq j_2$ o $i_1 \neq i_2$. Si $l_1 > l_2$ (o equivalentemente $l_2 > l_1$), entonces tendríamos que:

$$0 \geq -11 + 12(-7) + 96(-5) + 576$$

Contradicción que prueba que $l_1 = l_2$. Si $k_1 > k_2$ (o equivalentemente $k_2 > k_1$), entonces tendríamos que:

$$0 \geq -1 + 12(-7) + 96$$

Contradicción que prueba que $k_1 = k_2$. Si $j_1 > j_2$ (o equivalentemente $j_2 > j_1$), entonces tendríamos que:

$$0 = i_1 - i_2 + 12(j_1 - j_2)$$

$$0 \geq i_1 - i_2 + 12$$

$$0 \geq -11 + 12$$

$$= 1$$

Contradicción que prueba que $j_1 = j_2$; y finalmente $i_1 = i_2$.

Estos hechos conducen a dividir Ω_I en clases de equivalencia, considerando equivalentes los sucesos con la misma puntuación; y a elegir como representante de cada clase, el de componentes más pequeñas.

Definición 1 Dos sucesos $A = (i_1, j_1, k_1, l_1)$ y $B = (i_2, j_2, k_2, l_2)$ se dicen equivalentes si $X_I(i_1, j_1, k_1, l_1) = X_I(i_2, j_2, k_2, l_2)$. De esta manera se introduce en Ω_I una relación de equivalencia, R , entre sus elementos, definiéndose como el representante canónico de cada clase, aquel cuya suma de sus coordenadas sea menor o igual que el resto de los elementos de su clase. El conjunto de clases de equivalencia vendría dado por:

$$\Omega_I / R = \{(i, j, k, l); 0 \leq i \leq 11, 0 \leq j \leq 7, 0 \leq k \leq 5, 0 \leq l \leq 24, i + j + k + l \leq 24\}$$

Siendo su cardinal:

$$\text{Card}(\Omega_I / R) = \sum_{i=0}^{24} \binom{3+i}{i} - \sum_{i=11}^{24-6} \binom{3+i}{i} - \sum_{i=7}^{24-12} \binom{3+i}{i} - \sum_{i=5}^{24-8} \binom{3+i}{i} = 7776$$

Dentro del conjunto Ω_I / R ya no hay duda respecto a su orden de importancia, según se indica en la siguiente proposición

Proposición 2 Sean A y B los representantes canónicos de dos sucesos, $A = (i_1, j_1, k_1, l_1)$ y $B = (i_2, j_2, k_2, l_2)$, entonces $X_I(A) \leq X_I(B)$ si, y solo si

1. $l_2 > l_1$
2. Si $l_2 = l_1$, entonces $k_2 > k_1$
3. Si $l_2 = l_1$ y $k_2 = k_1$, entonces $j_2 > j_1$
4. Si $l_2 = l_1$ y $k_2 = k_1$ y $j_2 = j_1$, entonces $i_2 \geq i_1$

Demostración. Primero.

$$i_1 + 12j_1 + 96k_1 + 576l_1 < 11 + 12 \cdot 7 + 96 \cdot 5 + 576l_1 = 11 + 84 + 480 + 576l_1 \\ = 575 + 576l_1 < 576(l_1 + 1) \leq i_2 + 12j_2 + 96k_2 + 576l_2$$

Segundo.

$$i_1 + 12j_1 + 96k_1 + 576l_1 < 11 + 12 \cdot 7 + 96k_1 + 576l_1 = 11 + 84 + 96k_1 + 576l_1 \\ = 95 + 96k_1 + 576l_1 < 96(k_1 + 1) + 576l_1 \leq 96k_2 + 576l_1 \\ \leq i_2 + 12j_2 + 96k_2 + 576l_2$$

Tercero.

$$i_1 + 12j_1 + 96k_1 + 576l_1 < 11 + 12j_1 + 96k_1 + 576l_1 \leq 12(j_1 + 1) + 96k_1 + 576l_1 \\ \leq 12j_2 + 96k_2 + 576l_1 \leq i_2 + 12j_2 + 96k_2 + 576l_2$$

Cuarto.

$$i_1 + 12j_1 + 96k_1 + 576l_1 \leq i_2 + 12j_2 + 96k_2 + 576l_2$$

Y el recíproco es obvio.

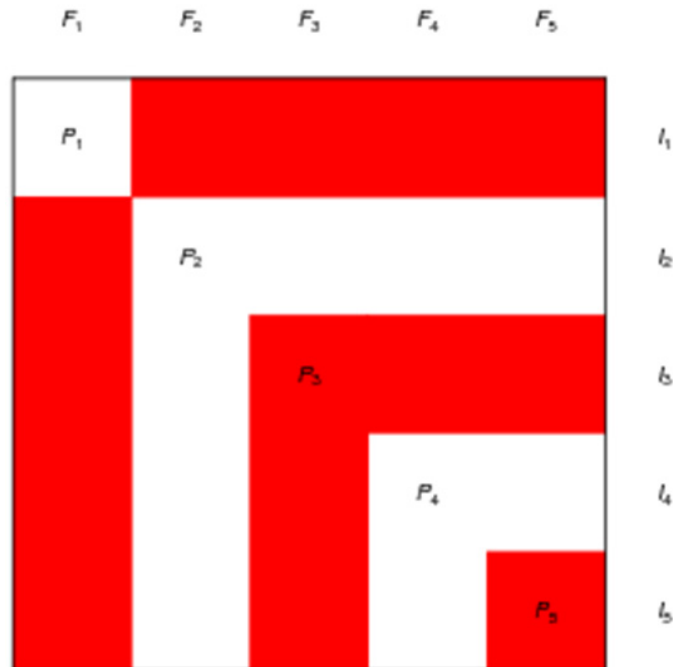


Figura 3: Clasificación de los ítems

El modelo proporciona 7776 puntuaciones diferentes para discriminar la importancia, lo que garantiza una matización muy fina de los resultados obtenidos.

Clasificación de los ítems según su frecuencia e importancia La variable X_F asigna a cada ítem del cuestionario una puntuación, que permite ordenarlos de menor a mayor según su frecuencia de aparición y uso en la titulación completa.

Clasificación de los ítemsfig:6 ! A efectos prácticos de discriminación se clasifican los ítems teniendo en cuenta los percentiles del 20% en cinco grupos de frecuencia:

$$\begin{aligned}
 FRE_1 &:= \{\text{ítems } i : X_F(i) \text{ pertenece al primer percentil}\} \\
 FRE_2 &:= \{\text{ítems } i : X_F(i) \text{ pertenece al segundo percentil}\} \\
 FRE_3 &:= \{\text{ítems } i : X_F(i) \text{ pertenece al tercer percentil}\} \\
 FRE_4 &:= \{\text{ítems } i : X_F(i) \text{ pertenece al cuarto percentil}\} \\
 FRE_5 &:= \{\text{ítems } i : X_F(i) \text{ pertenece al quinto percentil}\}
 \end{aligned} \tag{26}$$

Y, de manera equivalente de acuerdo con X_I :

$$\begin{aligned}
 IMP_1 &:= \{\text{ítems } i : X_I(i) \text{ pertenece al primer percentil}\} \\
 IMP_2 &:= \{\text{ítems } i : X_I(i) \text{ pertenece al segundo percentil}\} \\
 IMP_3 &:= \{\text{ítems } i : X_I(i) \text{ pertenece al tercer percentil}\} \\
 IMP_4 &:= \{\text{ítems } i : X_I(i) \text{ pertenece al cuarto percentil}\} \\
 IMP_5 &:= \{\text{ítems } i : X_I(i) \text{ pertenece al quinto percentil}\}
 \end{aligned} \tag{27}$$

A partir de (26) y (27) llegamos a una única clasificación de los ítems, teniendo en cuenta ambas variables X_F y X_I simultáneamente de la manera siguiente:

$$\begin{aligned}
 PRIO_1 &:= FRE_1 \cap IMP_1 \\
 PRIO_{j+1} &:= (FRE_j \cup IMP_j) \setminus \bigcup_{k=1}^j PRIO_k \text{ para } j = 1, \dots, 5
 \end{aligned} \tag{28}$$

Los conjuntos (26), (27) y (28) se ilustran en la figura 3.

Los grupos de prioridad establecidos sirven de fundamento para:

1. Establecer los ítems a los que dedicar un tratamiento preferente en el desarrollo posterior de la asignatura.
2. Precisar de que ítems podría prescindirse, en caso necesario.
3. Determinar las asignaturas relacionadas con los ítems preferentes, con el fin de priorizarlas para la coordinación y planificación de actividades comunes.

Es muy posible que, la lista de ítems prioritarios obtenida, constituya un conjunto disperso e inconexo. Por consiguiente, será necesario añadir los conceptos

matemáticos necesarios para construir una asignatura compacta, coherente e inteligible.

Resultados sobre la selección de ítems En esta sección se aplican los modelos para el estudio de la frecuencia, importancia y clasificación de los ítems desarrollados en las secciones anteriores, tomando los niveles como asignaturas. La Tabla 6 refleja las puntuaciones obtenidas de la frecuencia y la importancia.

Las Tablas 7 y 8 reflejan los grupos de prioridad.

Tabla 7: Grupos de prioridad 1, 2 y 3

Grupo de prioridad 1	Grupo de prioridad 2	Grupo de prioridad 3
Funciones elementales	Resolución numérica de ecuaciones lineales	Integración de curvas y superficies
Cálculo de longitudes, áreas, volúmenes	Estimación de Parámetros	Productos escalar y vectorial
Sistemas lineales	Análisis de varianza y diseño de experimentos	Derivada direccional
Rectas y planos	Nociones de programación	Ecuaciones en derivadas parciales
Operaciones con vectores: aritméticas	Contraste de hipótesis	Campos vectoriales
Representación de curvas y superficies	Cuádricas	Interpolación polinomial
Estadística descriptiva	Variables aleatorias discretas	Optimización no lineal
Control de calidad	Operaciones aritméticas con matrices	Localización de servicios
Momentos	Cuádricas	Distribución en planta
Optimización en redes	Variables aleatorias continuas	Sistemas no lineales
Cónicas	Programación lineal	Base de un espacio vectorial
Integración	Determinantes y sus propiedades	Ecuaciones diferenciales ordinarias
Estadística descriptiva	Trigonometría plana (añadido)	Postulado de Boss (añadido)
Regresión lineal	Grupo de prioridad 2	Matemáticas financieras (añadido)

Tabla 8: Grupos de prioridad 4 y 5

Grupo de prioridad 4	Grupo de prioridad 5
Resolución numérica de ecuaciones no lineales	Emparejamiento
Números complejos	Elementos Finitos
Integración numérica	Galería de arte e ilustración
Optimización no lineal	
Autovalores y autovectores	
Resolución numérica de sistemas no lineales	
Diagonalización de matrices	
Solución numérica de ecuaciones diferenciales	

Es muy posible que, la lista de ítems prioritarios obtenida, constituya un conjunto disperso e inconexo. Por consiguiente, será necesario añadir a la lista aquellos ítems complementarios necesarios para construir una asignatura compacta, coherente e inteligible.

Una vez seleccionados los ítems según sus grupos de prioridad, hay que relacionarlos con las competencias profesionales y analizar su implicación real en el ejercicio cotidiano de las tareas propias de la edificación. Esta tarea se realiza, inicialmente, a partir de la colección de ejercicios que se describe en la siguiente sección.

Tabla 9 Puntuaciones de frecuencia e importancia.

Funciones elementales	60	Cálculo de longitudes, áreas y volúmenes	7789
Cálculo de longitudes, áreas, volúmenes	58	Funciones elementales	6792
Sistemas lineales	50	Sistemas lineales	5257
Rectas y planos	43	Rectas y planos	4848
Operaciones con vectores: aritméticas	27	Operaciones con vectores: aritméticas	3589
Representación de curvas y superficies	27	Momentos	2594
Estadística descriptiva	26	Control de calidad	1922
Momentos	25	Optimización en redes	1848
Cónicas	22	Representación de curvas y superficies	1584
Integración	22	Estadística descriptiva	1525
Regresión lineal	22	Cónicas	1428
Resolución numérica de ecuaciones lin.	19	Estimación de Parámetros	1368
Estimación de parámetros	18	Análisis de varianza y diseño de experimentos	1296
Control de calidad	18	Nociones de programación	1189
Contraste de hipótesis	17	Cuádricas	1178
Análisis de varianza y diseño de exper.	16	Integración	1095
Variables aleatorias discretas	15	Contraste de hipótesis	972
Optimización en redes	15	Regresión lineal	938
Operaciones aritméticas con matrices	14	Resolución numérica de ecuaciones lineales	831
Cuádricas	14	Variables aleatorias continuas	804
Programación lineal	14	Determinantes y sus propiedades	782
Variables aleatorias continuas	14	Programación lineal	732
Integración de curvas y superficies	13	Variables aleatorias discretas	732
Nociones programación	13	Productos escalar y vectorial	709
Determinantes y sus propiedades	12	Movimientos	686
Derivada direccional	12	Ecuaciones en derivadas parciales	686
Ecuaciones en derivadas parciales	11	Campos vectoriales	685
Interpolación polinomial	11	Optimización no lineal	588
Productos escalar y vectorial	10	Localización de servicios	588
Movimientos	10	Distribución en planta	588
Sistemas no lineales	9	Base de un espacio vectorial	578
Ecuaciones diferenciales ordinarias	9	Operaciones aritméticas con matrices	423
Campos vectoriales	8	Integración de curvas y superficies	409
Resolución numérica de ecuac. no lineales	7	Derivada direccional	156
Base de un espacio vectorial	6	Interpolación polinomial	145
Números complejos	6	Integración numérica	145
Derivación numérica	6	Ecuaciones diferenciales ordinarias	135
Integración numérica	6	Números complejos	133
Localización de servicios	6	Sistemas no lineales	50
Distribución en planta	6	Derivación numérica	49
Optimización no lineal	5	Resolución numérica de ecuaciones no lineales	38
Autovalores y autovectores	4	Resolución numérica de sistemas no lineales	25
Diagonalización de matrices	4	Solución numérica de ecuaciones diferenciales	25
Green, divergencia Stokes	4	Green, divergencia y Stokes	24
Resolución numérica de sist. no lineales	3	Autovalores y autovectores	14
Solución numérica de ecuac. diferenciales	3	Diagonalización de matrices	14
Emparejamiento	2	Elementos Finitos	12
Galería de arte e ilustración	2	Emparejamiento	12
Elementos finitos	1	Galería de arte e ilustración	12
		Ítems añadidos	
Trigonometría Plana	7	Trigonometría plana	672
Postulado de Boss	2	Postulado de Boss	96
Matemáticas financieras	2	Matemáticas financieras	96

Contraste y desarrollo de los ítems: la colección de problemas Esta fase del proyecto DCMIE consiste en la configuración multidisciplinar de una colección completa de problemas (CPP). Su contenido ha de centrarse en situaciones profesionales de la vida real, con un alto índice de verosimilitud y datos coherentes. Su enfoque no debe ser el académico usual sino que ha de contextualizarse convincentemente en las tareas de relevante interés propias de la edificación o similares. Su solución debe basarse en el desarrollo de modelos matemáticos, que aporten fundamento científico-técnico y eficiencia, y de acuerdo con las competencias legalmente establecidas.

A partir de la colección de problemas se pretende: Detallar: como se dijo en la sección 3, la lista de ítems presentada en el Tabla 1 no debe ser farragosamente larga, lo que confiere a los ítems allí señalados un carácter genérico, a todas luces insuficiente para la posterior configuración pormenorizada de los contenidos matemáticos que deben integrar el currículum académico. Por ejemplo, en la Tabla 1 aparece el ítem *programación lineal*, pero no aparecen otros que precisen qué algoritmos de programación matemática se requieren y cuáles no; ni que sirvan para detallar la profundidad con que la programación matemática debe ser desarrollada.

Si el ítem *programación lineal* resulta seleccionado entonces la colección de problemas debe cubrir las situaciones profesionales más relevantes donde la programación matemática aparezca como modelo de resolución. Ahí aparecerán, en el contexto propio de las actividades del oficio, todos los conocimientos y destrezas matemáticas necesarias con el suficiente detalle en relación con este ítem. Contrastar: la generalización de esta idea a la globalidad de los ítems seleccionados, permite establecer una relación entre ítems y las competencias profesionales legalmente establecidas en la orden ECI/3855/2007, debiendo ser rechazados aquellos en los que tal relación no pueda ser probada. Facilitar la incorporación de metodologías multidisciplinarias y activas en la enseñanza, como el aprendizaje basado en problemas o proyectos con aquellas asignaturas implicadas en cada uno de los ejercicios. Motivar el aprendizaje de las matemáticas al aproximarlas a los intereses profesionales del alumno.

Hasta ahora el equipo del proyecto DCMIE ha emprendido la coordinación de dos iniciativas para estimular la creación de la CPP a mi juicio de gran interés: la publicación del libro Problemas resueltos de matemáticas para la edificación y otras ingenierías (véase [1]), la convocatoria del presente Congreso, habiendo sido en ambas imprescindible la colaboración del profesorado de materias profesionales específicas.

El citado libro y las comunicaciones publicadas en las actas del Segundo Congreso para la Enseñanza de las Matemáticas en Ingeniería de Edificación y similares constituyen una fuente de referencia de indudable valor, configurando, como punto

de partica, una colección de más de cien ejercicios, cuyas características cubren con un alto grado de satisfacción los requisitos exigidos.

A continuación se presentan algunos ejemplos ilustrativos, siguiendo con el ítem programación lineal.

Ejercicio 6.1.3 de [1]

Una empresa es subcontratada por una constructora para realizar los trabajos de tabiquera, pavimentación y alicatado de una obra en construcción. Debido a problemas de liquidez de la constructora, no hay garantías a priori de acabar la obra y la empresa recibirá una cantidad fija semanal correspondiente al trabajo realizado en ese periodo, al menos durante las primeras semanas.

La empresa tiene en nómina a 8 obreros, por lo que el número total de horas semanales de que dispone es de 400 (10 horas diarias por obrero). Tras muchos años de experiencia y trabajo en común, todos los obreros pueden realizar las tres faenas indistintamente, con un rendimiento similar medio de 2 m^2 por hora de tabiquera, $1,5 \text{ m}^2$ por hora de terrazo y 1 m^2 por hora de alicatado.

Por problemas de acopio, para realizar estas faenas los obreros dispondrán de un máximo semanal de 2.700 kg de cemento y de 6.000 kg de arena y se sabe que aproximadamente 1 m^2 de tabique precisa de 8 kg de cemento y 16 kg de arena, 1 m^2 de pavimento precisa de 4 kg de cemento y 11 kg de arena, y 1 m^2 de alicatado precisa de 6 kg de cemento y 9 kg de arena.

Por otra parte, como compromiso de resultados con la constructora, la empresa está obligada a realizar semanalmente un mínimo de 150 m^2 de tabique, 120 m^2 de pavimento y 75 m^2 de alicatado.

Por último, cálculos previos de la empresa indican que sus beneficios netos, una vez descontados los salarios, serán de 5 por cada m^2 de tabique, 7 por cada m^2 de pavimento y 10 por cada m^2 de alicatado.

Dado que la periodicidad de los resultados es semanal y sin garantías de acabar la obra, la empresa desea saber cuántos m^2 de cada tipo interesa realizar semanalmente, de manera que se cumplan los mínimos establecidos y que el beneficio neto obtenido por la empresa sea máximo.

Ejercicio 6.1.4 de [1]

Una empresa promotora compró en su día un solar en las afueras de una gran ciudad en el que puede construir 20.000 m^2 de techo edificable, deseando como estudio previo conocer, a grosso modo, el máximo beneficio que podrá obtener con esta promoción.

Las condiciones con las que se cuenta para este estudio son las siguientes: La empresa está dispuesta a invertir un máximo de 29 millones de euros en la promoción. Se construirán viviendas tipo de 1, 2 y 3 dormitorios, con una superficie de 55, 75 y 90 m² respectivamente, con unos costes de construcción estimados de 80.000, 110.000 y 130.000 respectivamente (costes proporcionados por la empresa constructora con la que trabaja habitualmente) y con unos beneficios netos tras su venta de 60.000, 80.000 y 100.000 respectivamente, una vez estudiados los precios de mercado en esa zona. Un estudio previo de la demanda en esa ciudad arroja que un 37 % de los potenciales compradores preferirá una vivienda con 3 dormitorios, un 48 % con dos dormitorios, y solo un 15 % preferirá una vivienda de un dormitorio. Con estos datos, y buscando optimizar el beneficio, supuesto que se venda toda la promoción, la empresa acepta una horquilla de construcción de ± 10 %, respecto de los resultados de la encuesta para las viviendas de 3 y 2 dormitorios y de un ± 5 % para las de un dormitorio.

Ejercicio 6.1.6 de [1]

Una empresa dedicada al movimiento de tierras dispone de tres obras y cuatro vertederos, como se indica en la Figura 4. Una vez considerados los correspondientes coeficientes de esponjamiento, se determina que la cantidad de metros cúbicos a vaciar de cada obra es la siguiente: 10.000 m³ en Alicante, 30.000 m³ en Valencia y 10.000 m³ en Castellón. Por otra parte, la capacidad actual de cada vertedero es la siguiente: 5.000 m³ en Morella, 10.000 m³ en Utiel, 20.000 m³ en Requena y 25.000 m³ en Pedreguer. Teniendo en cuenta que los trayectos indicados en el mapa son los únicos posibles, se trata de obtener la cantidad de m³ a transportar desde cada obra a cada vertedero, de manera que el coste total del transporte sea mínimo, suponiendo que el coste de transportar un metro cúbico de tierra es proporcional al número de kilómetros recorridos.

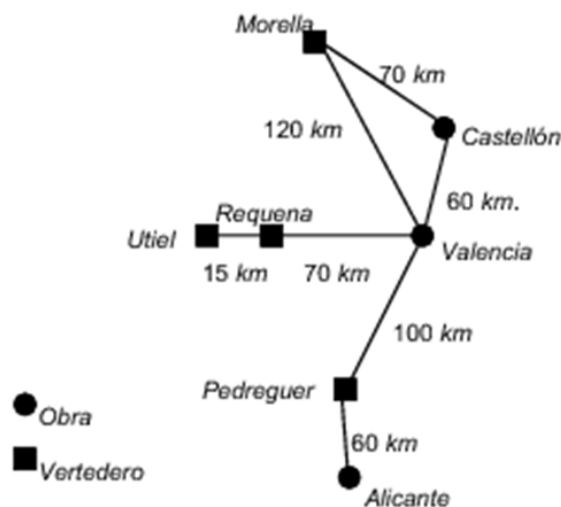


Figura 4 Mapa de las distancias entre las poblaciones

Ejercicio 6.1.9 de [1]

Un jefe de grupo de una empresa constructora de ámbito nacional tiene que decidir cuál de los siete jefes de obras debe asignar a cada una de las obras ubicadas en las ciudades de Barcelona, Bilbao, Madrid, Mallorca, Sevilla y Valencia. A la empresa le gustara minimizar el coste de ubicar a cada jefe de obra en cada ciudad. En la Tabla 9 se muestran los costes estimados en miles de euros anuales.

Tabla 9: Jefe de obra-ciudad

	Barcelona	Bilbao	Madrid	Mallorca	Sevilla	Valencia
Jefe de obra 1	65	73	55	58	60	65
Jefe de obra 2	90	67	87	75	80	85
Jefe de obra 3	106	86	96	89	90	83
Jefe de obra 4	84	69	79	77	82	75
Jefe de obra 5	91	60	82	70	90	92
Jefe de obra 6	96	103	90	85	102	93
Jefe de obra 7	87	75	70	87	88	89

Establezca la asignación óptima y el coste estimado anual de dicha asignación.

Todos estos ejercicios son una sencilla ilustración de ejercicios de una gran variedad de aplicaciones que se pueden clasificar en: optimización de beneficios en general, el problema de asignación, el problema de secuenciación con recursos limitados, el problema de nivelación de recursos, el problema del transporte.

Para algunos problemas de gran complejidad computacional se están desarrollando algoritmos heurísticos con el fin de obtener soluciones factibles, y metaheurísticos que, a partir de soluciones factibles previamente calculadas, obtienen mejoras considerables; basándose normalmente en fenómenos naturales, como por ejemplo los denominados algoritmos genéticos.

La consideración de toda esta problemática conduce a las siguientes conclusiones sobre el Ítem Programación lineal:

Tabla 10: Ficha técnica del ítem Programación linealitemprogramacionlineal

Grupo de prioridad	Dos
Detalle de su desarrollo curricular	Conocimiento detallados de los métodos:
	1. Simplex
	2. Ramificación y acotación
	3. Adaptación del método simplex al problema del transporte
Contraste con las competencias	4. Adaptación al problema de asignación: método húngaro
	Nociones de programación de algoritmos
Metodologías activas	Introducción a los algoritmos heurísticos y metaheurísticos
	Se cubren las competencias 1, 3 y 7 de la orden ECI/3855/2007
	Propuesta de proyectos multidisciplinares con planificación y organización

Esta fase del proyecto concluye con la elaboración de la ficha técnica correspondiente a cada uno de los ítems seleccionados en la sección anterior, según los parámetros ilustrados en la Tabla 10.

A partir de la información aportada por el conjunto de todas las fichas técnicas se construye finalmente la selección de los contenidos del currículum de matemáticas de la titulación.

Conclusiones El diseño curricular es un proceso de toma de decisiones que puede realizarse de muy diversas maneras y con muy diferente nivel de fundamentación. Pese a que parece convincente suponer que las buenas decisiones son aquellas que parten de procedimientos objetivos que las fundamentan y legitiman, nuestras instituciones universitarias son testigos de que la realidad atiende más a criterios de poder o conveniencia; a veces, a la tradición o la desidia burocrática sin más.

En este artículo se ha sustituido el criterio de la opinión más influyente (actualmente vigente para la selección de los contenidos curriculares) por el método, en el sentido introducido por Descartes en el XVII, como se ha comentado en la introducción. Se cumplen así algunas de las condiciones relevantes de un desarrollo curricular avanzado: se hace un planteamiento institucional (no uno basado en la discrecionalidad y juicio de cada docente); se da voz a todo el profesorado (no solamente a quienes presionen más o a quienes posean mayor peso en la toma de decisiones); se consideran globalmente todas las disciplinas de la carrera; se tratan los datos a través de procedimientos rigurosos y bien justificados; se llega a conclusiones tendencialmente ciertas de las que se pueden extraer importantes conclusiones a la hora de planificar los contenidos de las disciplinas matemáticas en las carreras de ingenierías. Podríamos decir que, además, se resuelve con ello uno de los problemas relevantes que ha venido sufriendo el diseño curricular de estos estudios universitarios: la difícil conjunción entre las disciplinas Matemáticas (sobre todo, las del primer curso) con el resto de la carrera.

Cabe señalar que el mismo razonamiento matemático que se ha empleado en este caso para dilucidar los contenidos pertinentes a trabajar en las Matemáticas de la ingeniería, podría aplicarse a cualquier otra disciplina que jugara un papel similar en cualquiera de las carreras. El procedimiento puede parecer desmesurado para mentalidades menos numéricas, pero el proceso desarrollado es, en realidad, muy simple aunque aquí lo hayamos diseccionado de manera muy analítica para visibilizar el razonamiento que le servía de base.

Debido a las importantes y recientes aportaciones de las comunicaciones de este Congreso se ha retrasado la finalización de la elaboración de las fichas técnicas, publicándose próximamente los resultados definitivos.

Como líneas de continuación de este trabajo, nuestra intención es llevar a cabo un contraste directo de sus resultados con el tejido socioeconómico, adaptando la

metodología propuesta al estudio de las necesidades y problemática de las empresas de edificación en sus actividades cotidianas; de manera que exista una relación eficiente entre currículum académico y sociedad, en una interacción mutuamente enriquecedora.

Referencias

[1] Moreno, J. y otros *Problemas resueltos de matemáticas para la edificación y otras ingenierías* Paraninfo, 2011

Experiencias en matemática aplicada tras finalizar los estudios de Ingeniería de Edificación

Pedro Escudero González

Francisco Sanchís Mullor

José Carlos Gómez Silvestre

ETSIE. Universitat Politècnica de València

Resumen

En el presente trabajo se pretende poner de manifiesto la necesidad de adquirir una formación matemática que aporten al Ingeniero de Edificación la suficiente base para afrontar los problemas cada vez más complejos que plantea una sociedad globalizada y en permanente desarrollo.

Esta problemática se desarrolla a través de tres casos de estudio a los se puede enfrentar un técnico a lo largo de su vida profesional. Ejemplo de ello son, la optimización de recursos aplicados al ámbito de la construcción, así como la seguridad y la sostenibilidad en la edificación.

Palabras Clave: *Edificación, Optimización, Ingeniero de Edificación, Formación matemática.*

Introducción

Los casos expuestos a continuación guardan una relación directa con el sector de la edificación así como con el desarrollo y puesta en práctica de la profesión de Arquitecto Técnico / Ingeniero de Edificación. Conviene reseñar que la resolución de los distintos casos prácticos planteados en la presente comunicación, no hubieran podido llevarse a cabo sin la aplicación de los conocimientos matemáticos impartidos en la asignatura de Optimización y Simulación matemática. Dicha asignatura se encuadra dentro de la formación científica ofrecida por la ETSIE al cursar los estudios de Master de Edificación en la especialidad de tecnología, sin embargo no está recogida dentro de los planes de estudio que conforman el actual título de Ingeniería de Edificación.

Desarrollo de los casos estudiados

Optimización en la fabricación y distribución de hormigones

Como técnicos del sector de la construcción se nos planteó colaborar en la resolución de un problema relacionado con la capacidad de fabricación y optimización de recursos de una planta hormigonera.

La planta productora de hormigón recibía semanalmente una cantidad fija de cemento (175 Toneladas) la cual era empleada principalmente para la producción de Hormigón HA-25 y HA-30. Sin embargo, la petición de un nuevo cliente había alterado por completo la planificación y organización de la planta. Para hacer frente a esta nueva demanda, era necesario producir semanalmente un mínimo de 150 m³ de Hormigón de alta resistencia HA-100. Este hormigón requería mayor tiempo de preparación, así como mayor cantidad de cemento. No obstante, el beneficio asociado a éste era mucho mayor.

Así pues para hacer frente a esta nueva demanda de hormigón de alta resistencia y al mismo tiempo continuar atendiendo a los clientes habituales, a los cuales se les suministraba semanalmente un mínimo de 100 m³ de hormigón HA-25, era necesario optimizar los recursos de la planta, de modo que todas las peticiones de los clientes pudieran quedar satisfechas, pero sin olvidar que al aspecto económico debía concederse la misma importancia, de modo que el beneficio mensual generado no podían verse menguado por estos nuevos reajustes.

A esta situación debían incorporarse además las condiciones particulares de la empresa, puesto que la cantidad de horas trabajadas semanalmente por los trabajadores de planta no podía exceder de 50 y por otro lado, la demanda total de hormigón debía ser suministrada con la flota de camiones existente, sin la posibilidad de adquirir un nuevo vehículo.

Resolución del problema

La primera restricción que era necesario tener en cuenta fue la cantidad de cemento de la que podíamos disponer, la cual no podía exceder del suministro semanal de 175 T.

En segundo lugar, se partía de los requerimientos necesarios para la fabricación de los distintos tipos de hormigón. Para la resolución de este problema, se utilizaron las siguientes cantidades: Para fabricar 1 m³ de HA-25 se precisaban 250 kg de cemento, para fabricar el HA-30 era necesario emplear 350 kg de cemento y para el hormigón HA-100, 450 Kg.

Con el fin de acotar los tiempos de fabricación, se consideró la cantidad de tiempo que era necesario invertir en la fabricación de cada tipo de hormigón. De este modo, para 1 m³ de HA-25 se requerían 0,05 horas, para fabricar el hormigón HA-30 se

requerían 0,08 horas y por último para la fabricación del hormigón HA-100, 0,13 horas.

Con respecto al transporte a obra de este hormigón, recordemos que éste debía realizarse con la flota de camiones disponible, a saber:

- Camiones para el transporte de hormigón HA-25: 8 camiones de 6 m³ de capacidad.
- Camiones para el transporte de hormigón HA-30: 8 camiones de 6 m³ de capacidad.
- -Camiones para el transporte de hormigón HA-100: 4 camiones de 9m³ de capacidad.

Por último era necesario tener en cuenta el aspecto económico, pues como dijimos en el enunciado del problema, tan importante era ser capaces de acometer todas las peticiones de nuestros clientes, como de maximizar los beneficios empresariales. En este caso, los márgenes netos de beneficio atendiendo al hormigón fabricado en cada caso fueron los siguientes:

- 1m³ HA-25 generaba 10 euros de beneficio.
- 1m³ HA-30 generaba 15 euros de beneficio.
- 1m³ HA-100 generaba 25 euros de beneficio

Para la resolución de este tipo de casos se aplicaron los conceptos relacionados con el algoritmo del Simplex (Bazaraa, et.al 2008). En la figura 1 puede observarse el procedimiento de optimización de la función objetivo. Para resolver el algoritmo de ramificación se utilizó el programa Mathematica 7.0.

Optimización de dispositivos de detección de incendios

Se plantea la posibilidad de resolver una exigencia normativa de aplicación a nivel nacional, que se encuentra en el documento básico de seguridad frente a incendios del código técnico de la edificación, y que se refiere a la detección de incendios mediante la instalación automática de detectores (CTE-DB-SI)

Por un lado, las características que debe valorar cualquier sistema de detección en su conjunto son la rapidez y la fiabilidad en la detección. De la rapidez dependerá la demora en la puesta en marcha del plan de emergencia y por tanto sus posibilidades de éxito; la fiabilidad será imprescindible para evitar que las falsas alarmas resten credibilidad y confianza al sistema, lo que propiciaría una pérdida de rapidez en la puesta en marcha del plan de emergencia. Por otro lado, aparecen los requisitos económicos que nos obligan a la correcta colocación y cuantificación del número de dichos detectores para optimizar recursos. En definitiva, se propone, a partir de las matemáticas que se han im-

partido en la formación universitaria; ejecutar un programa fiable y eficaz a partir de la optimización combinatoria aplicada al campo de la construcción según Salazar, J.J (2001); que asegure la correcta colocación y cuantificación de los detectores a emplear en la ejecución de un proyecto arquitectónico.

Con todo, se parte de una superficie dada en la que se deben colocar los detectores; para cubrir toda la superficie resulta necesario superponer la superficie vigilada de varios detectores, que será la superficie que cubrirá cada detector en planta, con el objeto de optimizar las áreas vigiladas y no superponer más superficie vigilada de la necesaria, optando por inscribir en el círculo determinadas figuras geométricas que se ajusten lo mejor posible a las formas reales de los edificios, y que a la vez permitan que la superficie superpuesta sea la menor posible. De este modo, la solución más eficiente para conseguir el menor solapamiento de superficies de las circunferencias de detección fue inscribir el hexágono, que permitió adaptarse o aproximarse mucho a casi cualquier forma que pudiera tener la planta de un edificio.

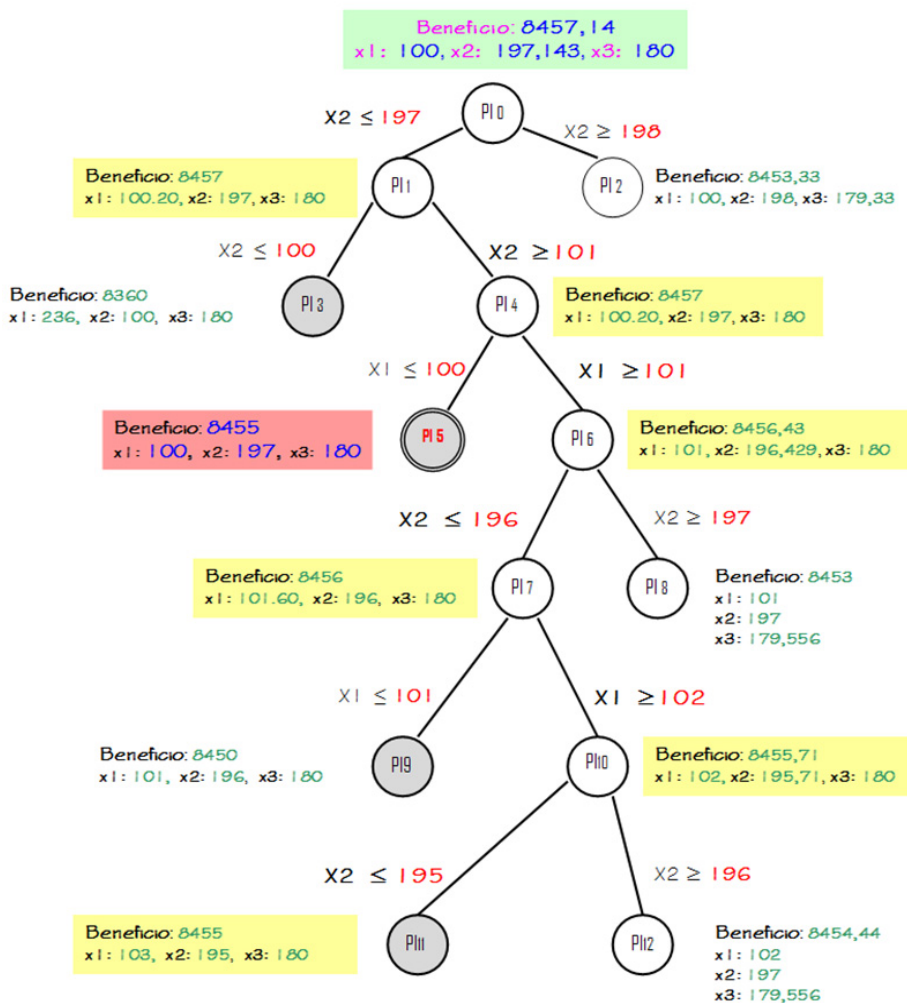


Figura 1 Algoritmo de ramificación utilizado para resolver PLE

Resolución del problema

Se resolvió el problema a partir de programación lineal: “buscando un óptimo de una función objetivo, donde todos los coeficientes, tanto de las restricciones como de la función objetivo son números reales.” (Bazaraa, et.al 2008)

Por una parte se localizó una función objetivo, que fue la de minimizar el número de detectores de humo en un edificio tipo.

Por otro lado se fijaron las restricciones según:

- Restricción económica; el número de detectores a instalar no debía de sobrepasar el precio estipulado en el presupuesto del proyecto del edificio, ya que esta situación no sería aceptada por la dirección facultativa, al exceder el precio estipulado
- Cantidad máxima de detectores; según la normativa consultada para la detección de incendios, el número máximo de detectores a colocar en un área de detección no debía de ser mayor a 32.
- Restricción por superficie; la superficie máxima de un área de detección no debía exceder los 1600 m², por tanto el sumatorio de las distintas superficies de detección de cada uno de los detectores no debía sobrepasar dicho límite.
- Restricción geométrica; para la correcta ejecución del programa fue necesario generar un parámetro que relacionaba la restricción geométrica con las restricciones económicas; obteniendo el precio por unidad de superficie; teniendo en cuenta al mismo tiempo, que el sumatorio de estos rendimientos no podía superar la unidad en el conjunto de todos los detectores colocados. Este parámetro fue generado para resolver dichos problemas y limitó la funcionalidad del programa; puesto que a partir de ciertas áreas no se generaban resultados fiables.

Análisis del ciclo de vida en Edificación. Posibilidad de implantación del sistema.

El siguiente caso estudiado abarca el Análisis del Ciclo de Vida (en adelante ACV), como una herramienta de gestión, principalmente ambiental, la cual ha cobrado auge en gran parte del mundo en los últimos años. Ahora bien, puede y de hecho ha de jugar un papel fundamental en el desarrollo sostenible del sector de la construcción en todo el mundo y sobre todo a nivel nacional. Está incide en el análisis y estudio de tres impactos importantes: medioambiental, social y económico de la edificación como producto. Estos a su vez determinan y pueden ser de ayuda en la elección de los materiales, soluciones constructivas empleadas y en la eficiencia energética de los edificios tanto de nueva planta como los actualmente construidos.

La optimización y puesta en práctica de estos conocimientos vendrá dada como se podrá observar en el presente caso, mediante la técnica, el diseño, elaboración de modelos

matemáticos estudiados mediante la estadística, simulación y optimización. Por último, se debe resolver mediante un análisis de resultados, con el objetivo de obtener los modelos más eficientes energéticamente hablando y respetuosos no solo con el medio ambiente, sino con la sociedad y la economía dentro del entorno en el que se desarrollan, la edificación.

En este caso práctico se realizó el ACV de un cerramiento del prototipo E3 (Edificación Eco Eficiente) compuesto por una serie de materiales.

Haciendo hincapié en la parte matemática de este caso de estudio, cobra especial importancia:

- La simulación de escenarios.

Los datos son introducidos en el software SimaPro 7.3.3 (PRé Consultants. SimaPro 7.3.3; 2012) y son relacionados entre sí obteniendo gráficamente un diagrama de flujo como el de la Figura 2.

- El tratamiento estadístico de los resultados.

Los datos de ACV están llenos de números inciertos. Estas incertidumbres pueden tener diferentes causas, como mediciones inciertas o la incertidumbre acerca la representatividad de los datos. Por ello, se debe hacer un tratamiento estadístico de los resultados analizados a partir de datos obtenidos de bases de datos o por los cuestionarios realizados como se muestra en la Figura 3, por ejemplo entre muchas otras las emisiones de amoniaco al ambiente.

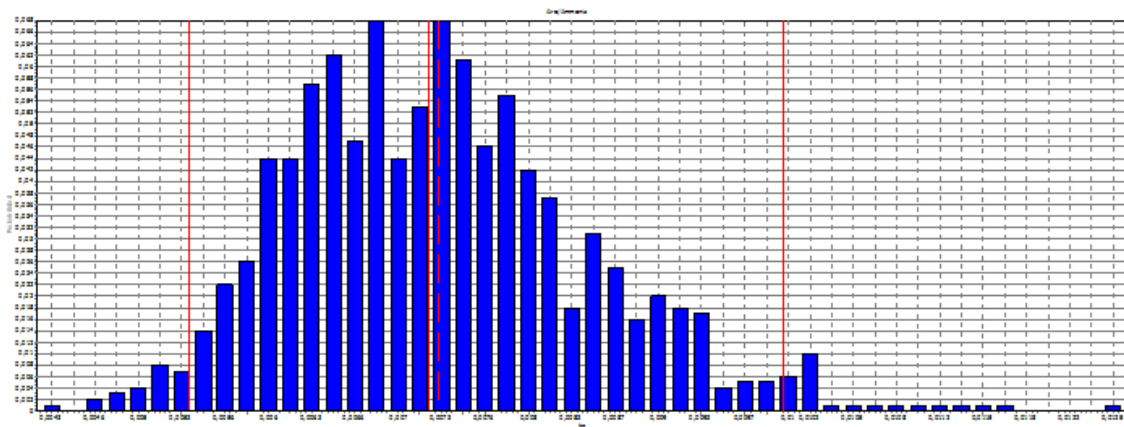


Figura 3 Tratamiento estadístico de los datos de las emisiones de amoniaco del escenario en SimaPro.

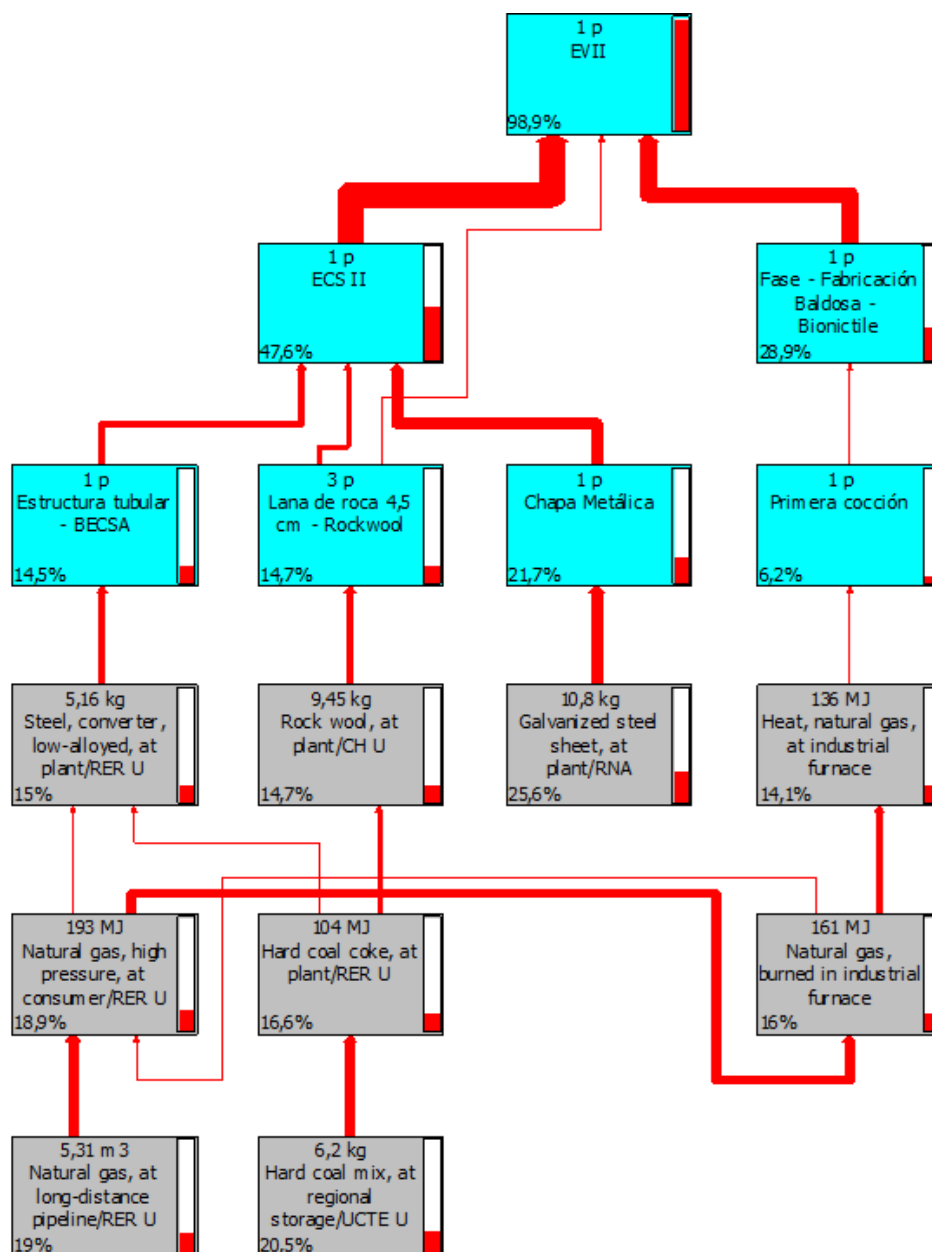


Figura 2 Simulación del escenario en SimaPro.

Resolución del problema

La obtención de los datos para simular los diferentes escenarios y seguidamente tratarlos estadísticamente se realizó de dos formas diferentes:

- Mediante cuestionarios específicos a las empresas que fabrican los materiales que componen el cerramiento.

- Recurriendo a las bases de datos como Ecoinvent v 2.2. (Frischknecht R. et al. 2005)

Por último, destacar que la experiencia al realizar este caso práctico no fue tan satisfactoria como inicialmente se esperaba a la hora de realizar el análisis estadístico de los datos. El principal motivo se debió a la escasa formación recibida en esta área de conocimiento en la diplomatura, lo que conllevó a que no se pudieran resolver todas las incógnitas planteadas con éxito. Por ello, esta parte del estudio queda pendiente, entre otros aspectos, para ser tratado en futuros estudios de doctorado.

Conclusiones

A lo largo de los diferentes casos de estudio, se pone de manifiesto la importancia que para un ingeniero de edificación tienen la optimización, simulación y tratamiento estadístico de datos, así como los conocimientos matemáticos en los que ha sido instruido un arquitecto técnico o actualmente un ingeniero de edificación.

No obstante, la resolución de estos casos no hubiera sido posible sin la formación académica recibida en los estudios de postgrado, puesto que a lo largo de los estudios de Arquitectura Técnica / Ingeniera de Edificación muchos de los conceptos utilizados en los casos expuestos no fueron desarrollados. Por este motivo, la formación recibida puede ser considerada como insuficiente para resolver numerosas situaciones y problemas a los que debe hacer frente un técnico de este ámbito en el día a día de la profesión.

Referencias

- [1] BAZARAA, M. SHERALI, H.D.; JARVIS, J.J. Programación Lineal y Flujo en Redes. Editorial Limusa, 1998. 781p.
- [2] SALAZAR, JJ. Programación Matemática. Editorial Díaz de Santos, 2001. 425p.
- [3] MINISTERIO DE FOMENTO. Código Técnico de la Edificación. Documento básico. Seguridad en caso de incendio. 31-03-2010
- [4] WOLFRAN Mathematica 7.0. Technical Computing Software.
- [5] PRé Consultants. SimaPro 7.3.3. PRé consultants, amersfoort. 2012.
- [6] FRISCHKNECHT R, JUNGBLUTH N, ALTHAUS HJ, et al. The ecoinvent database: Overview and methodological framework. *International Journal of Life Cycle Assessment*. 2005;10(1):3-9.

Optimización heurística aplicada al diseño automático de forjados de losa postesa

Ángel Manuel Rodríguez-Calderita Facundi, afacundi@posgrado.upv.es

Julián Alcalá González, jualgon@upv.es

Víctor Yepes Piqueras, vyepesp@upv.es

José V. Martí Albiñana, jvmartia@upv.es

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Resumen

En ese trabajo se muestran las características principales de los forjados de losa postesa obtenidos tras aplicar métodos heurísticos de optimización. Estos forjados son ventajosos frente a soluciones más convencionales a partir de ciertas luces. El proceso de diseño de estos forjados se puede plantear como un problema de optimización, que abordado con métodos heurísticos puede ser formulado de un modo totalmente realista. Se pueden encontrar diseños completos de forjados optimizados no solo con criterios de economía, sino también de sostenibilidad, pudiendo comparar ambos casos. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran una clara tendencia a disponer cantos muy estrictos en los resultados óptimos. Aplicando criterios de sostenibilidad se tiende a hormigones de mayores resistencias que con criterios económicos. Finalmente se han realizado pruebas de sensibilidad a los precios, que muestran mucha independencia de los forjados óptimos frente a las variaciones de precios ensayadas.

Palabras clave: *Optimización, forjados postesados, sostenibilidad, simulated annealing, threshold accepting, old bachelor algorithm.*

Introducción

El objetivo de este trabajo ha sido el de desarrollar un procedimiento basado en técnicas de optimización capaz de automatizar el diseño de forjados de losa postesa. Para ello se han considerado criterios de optimización económica y de la sostenibilidad, expresándola en términos de emisiones de CO₂.

La aplicación de técnicas heurísticas de optimización ya han sido aplicadas con éxito a otras tipologías estructurales [1-9], incluso a algunas de hormigón pretensado, pero no se han encontrado en la literatura referencias a trabajos de optimización de forjados de losa postesa.

Este estudio es relevante dada la gran cantidad de variables que intervienen en el problema y su relación entre ellas. Encontrar un forjado que cumpla los requerimientos resulta relativamente sencillo pero con los procedimientos de cálculo habituales no se tendrá la certeza de haber encontrado una solución óptima del problema.

Forjados de losa postesa

Los forjados de losa postesa o forjados postensados son forjados que han sido elaborados mediante la técnica de tesar cables de acero (armadura activa), después del fraguado del hormigón y cuando éste ha alcanzado una resistencia suficiente para soportar las tensiones provocadas por dicho tesado. Se requieren hormigones y aceros de alta resistencia [10].

Como consecuencia del trazado curvo de los tendones también aparecen fuerzas de desviación que pueden llegar a equilibrar el peso propio de la estructura, las cargas muertas e incluso parte de las sobrecargas. Existen dos variantes de la técnica: armadura postesa adherente y armadura postesa no adherente. Para forjados de edificación se suelen emplear armadura no adherente, por lo estricto de los cantos y por la facilidad de montaje.

Definición del problema de optimización

La optimización de un forjado de losa postesa se puede expresar matemáticamente como:

Hallar $x = (x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ tal que haga mínima o máxima la función siguiente:

$$f(x, p) \quad (1)$$

Sujeto a: $g_j(x, p) \geq 0 \quad j = 1, m \quad (2)$

$$x_i \in S \quad i = 1, n \quad (3)$$

f es la función objetivo, x representa las variables que lo definen, p son los parámetros, que no son objeto de optimización, y las expresiones (2) y (3) son las restricciones del problema.

Las variables definen completamente el forjado. Contienen valores referentes a propiedades de los materiales, geometrías y cuantías (hormigón, acero pasivo y activo). Estas variables toman valores discretos dentro de unos rangos establecidos por la expresión (3).

Los parámetros son datos de partida, que no varían durante la resolución del problema, geometrías del tipo número de pilares, longitud total del forjado, longitud de los pilares, etc. También son conocidas las cargas, o se pueden calcular en cada momento en función de los valores de las variables en cada momento.

Al final el resultado debe ser traducido a una magnitud comparable (típicamente un coste), por lo que la función objetivo tomaría la siguiente forma:

$$f(\bar{x}, \bar{p}) = \sum_{i=1, m} c_i m_i(\bar{x}, \bar{p}) \quad (4)$$

Donde c_i y m_i son respectivamente los costes y mediciones de las unidades de obra.

Parámetros

Los forjados deben ser tales que cumplan las condiciones impuestas por este método de cálculo (pórticos virtuales) en cuanto a regularidad geométrica y de las cargas aplicadas (EHE-98). También deben serlo respecto del uso que habitualmente se hace de este tipo de forjados.

- La malla definida en planta por los soportes será sensiblemente ortogonal.
- La relación entre el lado mayor y menor del recuadro no debe ser mayor que 2.
- La diferencia entre luces de vanos consecutivos no debe ser mayor que un tercio de la luz del vano mayor.
- La sobrecarga debe ser uniformemente distribuida y no mayor que 2 veces la carga permanente.
- Deberán existir tres vanos como mínimo en cada dirección.

El forjado tipo que se va a optimizar sin que ello suponga una limitación en la metodología propuesta es el mismo que figura como ejemplo en la Guía de Aplicación de la Instrucción de Hormigón Estructural [10]. Es un forjado que consta de 6 vanos en sentido x y 5 en sentido y con las dimensiones que se especifican (figura 1).

Variables

Todas las variables a excepción de las dos primeras hacen referencia a las armaduras, ya sean pasivas o activas. La primera define la resistencia del hormigón y la segunda el canto del forjado.

Tabla 2.- Variables del problema

	Tipo	Posición	EJE	Variable
Tipo de hor-	-	-	-	fck
Canto del forja-	-	-	-	canto
Armadura Activa				
	Núm. de cables	Interior	X	AAix
	Núm. de cables	Borde	X	AAbx
	Núm. de cables	Interior	Y	AAiy
	Núm. de cables	borde	Y	AAby
Armadura Pasiva				
General				
	Diámetro	Superior	X	AGxsd
	Diámetro	Inferior	X	AGxid
	Diámetro	Superior	Y	AGysd
	Diámetro	Inferior	Y	AGyid
	Separación	-	X	AGxs
	Separación	-	Y	AGys
Sobre pilares				
	Diámetro	Interior	X	Apxd
	Diámetro	Borde	X	AP1xd
	Diámetro	Borde	X	AP2xd
	Diámetro	Interior	Y	APyd
	Diámetro	Borde	Y	AP1yd
	Diámetro	Borde	Y	AP2yd
	Núm. de barras	Interior	X	APxn
	Núm. de barras	Borde	X	AP1xn
	Núm. de barras	Borde	X	AP2xn
	Núm. de barras	Interior	Y	APyn
	Núm. de barras	Borde	Y	AP1yn
	Núm. de barras	Borde	Y	AP2yn
centro de vano				
	Diámetro		X	AVxd
	Diámetro		Y	AVyd
	Núm. de barras		X	AVxn
	Núm. de barras		Y	AVyn

Comprobación de forjados postensados

Si bien este tipo de forjado no se encuentra específicamente contemplado en la normativa de referencia, constituida por la Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08 [11]. Ello no impide su utilización ni exige de su cumplimiento. Es más, en la Guía de Aplicación de la Instrucción de Hormigón Estructural del año 2002 en la que se desarrolla la EHE-98 hay un ejemplo de cómo se deben calcular estos forjados. En la actualidad esta Guía y la norma en que se basó ha quedado superada por la aparición de la EHE-08.

Por ello se ha tomado el ejemplo de la Guía como referencia y se ha utilizado la

actual EHE-08i como norma de referencia. También se han consultado otras normas internacionales. (ACI-318, ACI-423, BS-8110)

Se analizan cuatro alineaciones (o pórticos planos) distintos, dos en sentido x y dos alineaciones en y , en cada uno de los sentidos una alineación de borde y otra interior. Figura 2.

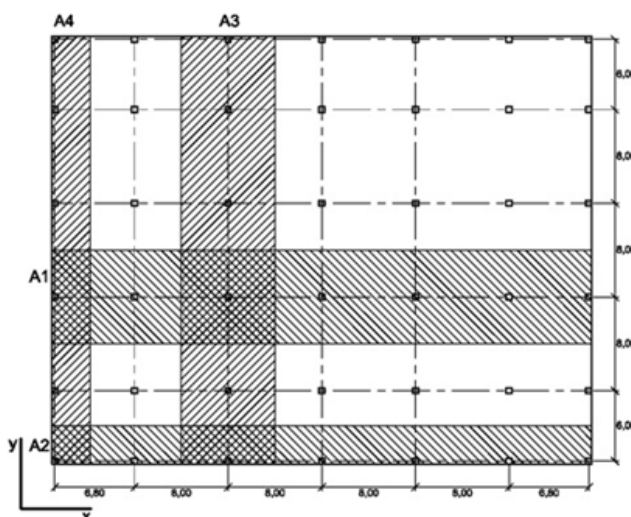


Figura 2.- Pórticos virtuales diferentes a considerar.

Así se tiene una alineación A1 o pórtico paralelo al eje x de seis vanos, con un ancho de 8 metros y vanos extremos de 6.8 metros y centrales de 8 (podría ser cualquiera de los iguales), una tipo A2 igual a la anterior pero de borde con 3 metros de ancho.

Y las tipo A3 y A4 en dirección y y con 5 vanos, los exteriores de 6 metros y las interiores de 8 metros, con 8 y 3.40 metros de ancho respectivamente.

Como criterio general se tomarán siete valores de cada vano, coincidiendo con los extremos y separados uniformemente función de la luz del vano. Sobre dichos puntos se controlarán todos los valores.

Para cualquier otro forjado se seguirían considerando cuatro alineaciones tipo, el algoritmo elegiría las cuatro más desfavorables una de borde y una interior, para x e y , que serán los pórticos de mayor ancho. El resto de los pórticos virtuales serían menores y quedarían del lado de la seguridad.

Los pilares analizados a efectos de armado y punzonamiento son los situados en los puntos de cruce de estas alineaciones. De esta manera se evalúa un pilar de cada tipo. Uno interior, uno de esquina y dos de borde uno sobre el eje x y otro sobre el eje y .

Las comprobaciones realizadas son las siguientes [2]

1. Análisis estructural, selección de las alineaciones a calcular.
2. Comprobación de las tensiones en servicio del hormigón
 - a. Pérdidas de Pretensado
 - i. Pérdidas instantáneas
 - ii. Pérdidas diferidas
 - b. Comprobación de tensiones en vacío y servicio.
3. Comprobación de estado límite último.
 - a. Comprobación de la armadura pasiva.
 - b. Comprobación a punzonamiento.
4. Estados límite de servicio
 - a. Deformaciones

Metaheurísticas empleadas en el desarrollo del proyecto

Los métodos heurísticos utilizados se basarán en el concepto de movimientos, los cuales determinan un entorno que dan nombre a estas *heurísticas de búsqueda secuencial por entornos*.

Algoritmos de búsqueda secuencial por entornos

Son algoritmos que parten de una solución inicial a partir de la cual comienza un proceso iterativo. En cada iteración se realiza una pequeña modificación de la solución, esta modificación reemplaza a la anterior si se cumple algún criterio de aceptación.

Los criterios de aceptación son distintos para cada metaheurística que es precisamente lo que las diferencia. Se habrán definido criterios de parada, una vez alcanzados, la mejor solución para los para los criterios fijados será la solución de la optimización.

El concepto *movimiento* se usa para hacer referencia a las modificaciones que transforman una solución en otra que se justifica porque en realidad supone un cambio de posición en el espacio de soluciones del problema. Análogamente se denomina a la sucesión de movimientos *trayectoria*. También se puede definir el *entorno* o *vecindario* de una solución como el conjunto de soluciones que se pueden alcanzar con un solo movimiento.

Los movimientos serán pequeños con el fin de que la nueva solución sea similar a la anterior y guarde relación al objeto de que la trayectoria del movimiento también lo sea. Para ello es necesario que los valores que puede tomar una variable se encuentren ordenados crecientemente, ya que es la manera más simple de conseguir movimientos “pequeños”.

Otros trabajos consultados [5][8] coinciden en señalar como los movimientos más eficaces los que varían simultáneamente un 20% de las variables del problema elegidas al azar.

Recocido simulado

El recocido simulado o *Simulated Annealing* (SA en adelante) [12] se basa en la analogía de la energía de un sistema termodinámico con la función de coste de un problema de optimización. Conceptualmente es un algoritmo de búsqueda por entornos, que selecciona candidatos de forma aleatoria. Si una solución sustituye a la anterior si mejora a la anterior ($\Delta c \leq 0$) es aceptada de forma inmediata; en caso contrario, será aceptada en función de una probabilidad ($e^{(-\Delta c/T)}$ si $\Delta c > 0$, donde T es un parámetro de control denominado *temperatura*) decreciente con el aumento Δ de la diferencia entre los costes de la solución candidata y la actual. Permitir soluciones peores impide que la heurística acabe en un mínimo local de poca calidad.

Aceptación por umbrales

La aceptación por umbrales o *Threshold Accepting* (TA en adelante) [13] admite una degradación de la solución con arreglo a un umbral establecido y que disminuye a medida que avanza el algoritmo, de tal forma que al final solo se aceptan soluciones si estas mejoran la actual.

Old bachelor algorithm (algoritmo del solteron).

Este algoritmo se puede considerar como una implementación adaptativa del algoritmo anterior, propuesto en 1995 por T.C Hu, A.B. Kahng C.A Tsao [14] (*Old Bachelor Acceptance*, OBA en adelante) consiste en permitir modificaciones no monótonas del umbral. Dichas variaciones en el umbral van a depender de la proximidad o lejanía a un óptimo local, se acepta una solución peor pero se aumenta el umbral y al revés el umbral disminuye cuando se produce un movimiento que mejora la solución para explorar de forma más intensiva las soluciones vecinas. Lo que se consigue por este procedimiento es intercalar fases de intensificación entre otras de diversificación.

Aplicación de las heurísticas al problema de los forjados de losa postesa.

Para poder aplicar estas heurísticas al problema previamente deben ser convenientemente calibradas, los parámetros que regulan el funcionamiento de la heurística como el movimiento adecuado a realizar en cada cambio de solución, la temperatura, longitud de cadena de Markov en el caso del SA o del TA y los parámetros a,b,c, que definen el OBA. Se han calculado nueve reinicios y sus correspondientes medias para asegurar la influencia de la solución inicial.

Discusión de los resultados

En la figura 3 se ha establecido una frontera de Pareto para evaluar las mejores relaciones costes-iteraciones.

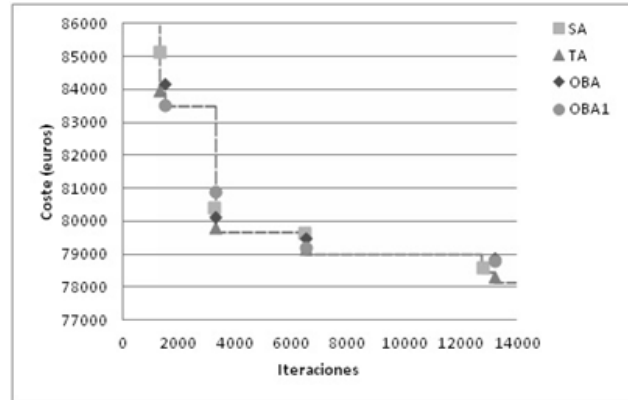


Figura 3.- Frontera de Pareto y relación costes medios e iteraciones medias de las soluciones más representativas de los distintos algoritmos utilizados.

De la gráfica se pueden extraer las siguientes conclusiones: El TA es el algoritmo que más veces conforma la frontera de Pareto, es decir que es más eficaz encontrando soluciones.

El OBA1 ofrece en la mayoría de los casos mejores resultados que el OBA, superando al SA si el número de iteraciones es bajo. De hecho si no estuvieran los resultados del TA la frontera de Pareto la conformaría casi siempre él. Con la ventaja que supone de antemano saber cuántas iteraciones vamos a necesitar o lo que es lo mismo cuanto tiempo va a tardar.

Estudio de sostenibilidad

Medir emisiones de CO₂ o el coste energético presenta ventajas frente a evaluar el coste económico, y es que éste puede presentar fluctuaciones importantes en cortos periodos de tiempo difícilmente predecibles y que únicamente responden a criterios de mercado. Mientras que una variación en el coste energético o en el CO₂ tendría que ver con una evolución de las técnicas de fabricación y su variación estaría regida por dicha mejora. Parece por tanto que los resultados obtenidos atendiendo a criterios de sostenibilidad serán más perdurables y objetivos que los criterios económicos.

Si bien la primera conclusión que sacamos es que ambos criterios producen optimizaciones en el otro, ya que ambos son criterios de coste y una reducción cuantitativa se refleja favorablemente en ambos resultados. Si bien una con solución optimizada con criterios económicos es un 3% más barata y la realizada con criterios de sostenibilidad un 5% más sostenible.

Estudio de sensibilidad

Se valorará como se adapta la solución óptima al producirse incrementos en los costes económicos que presentan más variables y combinaciones posibles que los energéticos tal y como están planteados. Al aumentar el coste de un material en particular la solución óptima pasará por contener una menor cantidad de éste utilizándolo en favor de otro que no lo haya aumentado su coste. Sin embargo esto será así si la carencia de un material puede ser compensado por otro y en la medida que lo sea.

Se han considerado incrementos del coste de los distintos materiales que forman el forjado, del hormigón, de la armadura pasiva y de la activa, por separado incrementando en un 5, 10, 15, 20, 30 40 y 50%, en cada uno y manteniendo los demás constantes con lo que revisaremos las variaciones relativamente pequeñas, más probables y con mayor influencia hoy en día. Posteriormente ampliaremos el estudio con porcentajes muy superiores 75, 100, 150, 200, 300 y 400% a fin de concretar las líneas de tendencia. Las conclusiones observadas fueron:

- Los incrementos de precio que tienen más repercusión en el coste final del forjado por este orden son, en el hormigón, en la armadura pasiva y en la armadura activa.
- Incrementos de precio significativos en el hormigón no afecta sustancialmente al canto del forjado, afectan muy poco si son sobre armadura pasiva con tendencia a disminuirlos y bastante si se producen en la armadura activa que los aumenta, tomando como referencia una solución óptima.
- Incrementos de precio significativos en cualquier componente produce incrementos en la resistencia del hormigón, tomando como referencia una solución óptima.
- La cantidad de hormigón que utiliza una solución no se ve reducida por su incremento de precio, no es rentable compensar su uso con los demás componentes, al revés sí en parte, y en mayor medida en el caso de la armadura activa que en el de la pasiva.

Conclusiones

Comparando la solución de la partida, solución aportada por la Guía de Aplicación de la Instrucción de Hormigón Estructural y con el resto de resultados obtenidos de las calibraciones y de los estudios de sostenibilidad y sensibilidad a la variación de los precios podemos sacar las siguientes conclusiones.

- El canto del forjado es decisivo a la hora de obtener un forjado óptimo siendo necesario considerar cantos muy ajustados.

- Los forjados optimizados son hasta un 31.6% más económicos atendiendo a criterios de precio y tienen un coste energético un 30.9% menor que el forjado de referencia.
- El hormigón bajo criterio de menor coste para este forjado es HP-35 y HP-50 bajo el de menor consumo energético.
- Los forjados optimizados están formados por un 99.1% de hormigón, un 0.45% de armadura pasiva y un 0.43% de armadura activa.
- La repercusión en el precio medio del forjado del hormigón es del 55%, de la armadura pasiva el 23% y de la armadura Activa el 22%. Con los precios utilizados.
- Los incrementos de precio que tienen más repercusión en el coste final del forjado por este orden son, en el hormigón, en la armadura pasiva y en la armadura activa.
- Incrementos de precio significativos en el hormigón no afecta sustancialmente al canto del forjado, afectan muy poco si son sobre armadura pasiva con tendencia a disminuirlos y bastante si se producen en la armadura activa que los aumenta, tomando como referencia una solución óptima.
- Incrementos de precio significativos en cualquier componente produce incrementos en la resistencia del hormigón, tomando como referencia una solución óptima.
- La cantidad de hormigón que utiliza una solución no se ve reducida por su incremento de precio, no es rentable compensar su uso con los demás componentes, al revés sí en parte, y en mayor medida en el caso de la armadura activa que en el de la pasiva.
- Cuando se consumen los mismos recursos si se utiliza un hormigón de mayor resistencia o no, (caso del estudio energético). La optimización pasa por poner el hormigón más resistente y disminuir al máximo el canto del forjado.
- Las soluciones óptimas no han necesitado refuerzo de armadura para momentos positivos.

Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto de Investigación BIA2011-23602) y por la Universitat Politècnica de València (Proyecto de Investigación PAID-06-12).

Referencias

- [7] Carbonell, A.; Yepes, V.; González-Vidosa, F. (2012). Automatic design of concrete vaults using iterated local search and extreme value estimation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 9(6), 675-689.
- [8] Martí, J.V.; González-Vidosa, F.; Yepes, V.; Alcalá, J. (2013). Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing. *Engineering Structures*, 48, 342-352. [doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.014]
- [9] Martínez-Martín, F.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2012). Multi-objective optimization design of bridge piers with hybrid heuristic algorithms. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering)*, 13(6), 420-432. [doi:10.1631/jzus.A1100304]
- [10] Martínez-Martín, F.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2013). A parametric study of optimum tall piers for railway bridge viaducts. *Structural Engineering and Mechanics*, 45(6), 723-740.
- [11] Payá-Zaforteza I.; Yepes, V.; Hospitaler, A.; González-Vidosa, F. (2009). CO₂-Efficient Design of Reinforced Concrete Building Frames. *Engineering Structures*, 31, 1501-1508. [doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.02.034]
- [12] Perea, C.; Alcalá, J.; Yepes, V.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A. (2008). Design of Reinforced Concrete Bridge Frames by Heuristic Optimization. *Advances in Engineering Software*, 39(8), 676-688. [doi:10.1016/j.advengsoft.2007.07.007]
- [13] Torres-Machí, C.; Yepes, V.; Alcalá, J.; Pellicer, E. (2013). Optimization of high-performance concrete structures by variable neighborhood search. *International Journal of Civil Engineering, Transaction A: Civil Engineering*, 11(2), (in press).
- [14] Yepes, V.; Alcalá, J.; Perea, C.; González-Vidosa, F. (2008). A Parametric Study of Optimum Earth Retaining Walls by Simulated Annealing. *Engineering Structures*, 30(3), 821-830. [doi:10.1016/j.engstruct.2007.05.023]
- [15] Yepes, V.; González-Vidosa, F.; Alcalá, J.; Villalba, P. (2012). CO₂-Optimization Design of Reinforced Concrete Retaining Walls based on a VNS-Threshold Acceptance Strategy. *Journal of Computing in Civil Engineering ASCE*, 26 (3), 378-386. [doi:10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000140]
- [16] Comisión Permanente del Hormigón España, *Guía de Aplicación de la Instrucción de Hormigón Estructural: Edificación (in Spanish)*, M.Fomento, Madrid, 2002.
- [17] EHE-08. *Instrucción de Hormigón Estructural (in Spanish)*, M.Fomento, Madrid, 2008.
- [18] Kirkpatrick S., Gelatt C.D. and Vecchi M.P., Optimization by simulated annealing, *Science*, 220(4598), pp. 671-680, 1983. [doi:10.1126/science.220.4598.671]
- [19] Dueck, G.; Scheuert, T. "Threshold Accepting: A general Purpose Optimization Algorithm appearing Superior to Simulated Annealing". *Journal of Computational Physics* 90:161-175. 1990. [doi:10.1016/0021-9991(90)90201-B]

- [20] T. Hu, A. Kahng y C.-W. Tsao, «Old bachelor acceptance: a new class of non-monotone threshold accepting methods,» *ORSA Journal on Computing*, nº 7, pp. 417-425, 1995.[doi: 10.1287/ijoc.7.4.417]

Cuando la creatividad tiene base geométrica

Juana María Sánchez González*, juanamarca.sanchez@upm.es.

Ascensión Moratalla de la Hoz*. ascension.moratalla.delahoz@upm.es

Mª Carmen Ferreiro*. mariacarmen.ferreiro@upm.es

Mª Agripina Sanz García. Dpto. Matemática e Informática Aplicadas a la Ingeniería Civil. ET-SICCP, UPM. mariaagripina.sanz@upm.es

*Dpto. Matemática Aplicada a la Edificación, el Medio Ambiente y el Urbanismo, ETSAM, UPM

Resumen

La situación actual en la que se desarrollan los estudios de Ingeniería y en particular los de Arquitectura es significativamente distinta a la existente hace tres años. Por una parte el plan académico es diferente, en 2010 se implanta el Plan de Bolonia, y eso ha motivado que la programación y los tiempos dedicados al desarrollo de las distintas asignaturas cambien. Y por otra, los alumnos acceden a una educación, enfocada de una forma distinta a la recibida en Bachillerato.

Es posible que el beneficio esperado de la reforma educativa en carreras de carácter humanístico, no sea el mismo que el que se pueda esperar en las carreras técnicas debido, en gran parte, a que el tiempo de asimilación y maduración de algunas asignaturas de carácter técnico sea distinto a las de tipo humanístico.

Siendo conscientes de las dificultades que presentan los alumnos de primero, en cuanto a sus conocimientos de Matemáticas de refiere, nuestro Grupo de Innovación Educativa ha ensayado nuevos métodos de enseñanza-aprendizaje destinadas a desarrollar y potenciar el sistema clásico de impartir asignaturas troncales.

Nuestro planteamiento parte de la obra arquitectónica como punto de interés del alumno, para analizar qué aportan las Matemáticas al proyecto arquitectónico y conseguir un modelo matemático que permita al alumno plantear su propuesta personal.

Palabras clave: *Didáctica, Geometría, Arquitectura, Composición, Modelización.*

Comunicación

El nuevo Plan de estudios conocido como Plan Bolonia ha querido remover el viejo concepto de enseñanza aportando nuevos métodos de aprendizaje sin tener en cuenta, en principio, si ese afán de renovación ha tenido, como debiera, una base previa en los estudios de Bachillerato.

En el primer año de la carrera de Fundamentos de la Arquitectura nos enfrentamos a la enseñanza de unos alumnos que, en su mayoría, han tenido un recorrido escolar sin problemas, con resultados brillantes, como lo demuestra la alta nota de corte necesaria para cursar estos estudios, pero formados en una enseñanza que contempla las asignaturas encerradas en compartimentos estancos con poca o nula relación entre ellas.

Partiendo de esas premisas y teniendo en cuenta el tiempo escaso con el que contamos para, además de impartir el programa oficial, conseguir que el alumno capte el cambio de enfoque que supone cursar unas asignaturas conocidas de antemano, aplicadas a un fin concreto y relacionadas con el resto de las que cursan simultáneamente; hemos recurrido al intento de sumergir a los alumnos en el mundo de las imágenes que les rodean y que comprueben la existencia de formas matemáticas que subyace en muchas de ellas. Formas manejadas hasta entonces por ellos sólo de forma analítica.

En esta experiencia, se ha utilizado la posibilidad de destinar parte de la nota final de una asignatura a la calificación de un trabajo práctico. Con el fin de obtener una continuidad en el aprendizaje del alumno, se han planteado las dos asignaturas de Matemáticas del primer año de Grado: Geometría Afín y Proyectiva y Cálculo, como una continuidad en la que determinados puntos del programa se analizan desde distintas perspectivas.

En el comienzo del primer cuatrimestre, y con el objetivo de que el alumno aprenda de una manera más activa, se plantea un trabajo a desarrollar en distintas fases a lo largo de todo el período lectivo. Unas veces de manera individual y otras en equipo, se les pide que sean capaces de buscar y relacionar formas geométricas sencillas con objetos que usen o perciban diariamente en su entorno, se les aconseja que observen preferentemente temas relacionados con la arquitectura, con la intención de que buscando, indagando y preguntando inicien actividades distintas de las que consideran “puramente matemáticas” que les aporten creatividad y autonomía y, como consecuencia, aumenten su motivación en la asignatura.

La primera fase consiste, básicamente, en captar esa imagen de la manera más sencilla para cada uno de ellos: cámara de fotos, móvil, dibujo... pero de forma que pueda ser exhibida en clase y comentada por todos.

En este primer momento no se les pide que aporten otra idea que no sea la de asociar el aspecto de la imagen que hayan elegido a la de alguna otra forma que interpreten como geométrica. En esos debates se comienza a hablar de arquitectura, composición de formas, etc.

A esta primera forma de contacto pertenecen, entre otras, las figuras 1, 2, y 3 y 4 que corresponden a otras tantas imágenes tomadas por alumnos como representativas de algún tipo de geometría. Simultáneamente se les indica la necesidad de aportar las propiedades de la imagen con el fin de que reconozcan su adecuación, o no, para ser utilizadas en un determinado trabajo.



Figura 1

Alumna: Macarena Prieto. Dimensiones: 1069-1600 Tomada: 02/10/2011 Cámara: DMC-FZ48 Imagen JPEG. Tamaño: 213 KB



Figura 2

Alumna: Olga Romero. Dimensiones: 2592-1944 Tomada: 12/10/2011 Cámara: DSC-3750 Imagen JPEG. Tamaño: 1.84 MB



Figura 3

Alumno: Pablo García. Dimensiones: 1920-2560, tomada 18/09/2010, Cámara: FE115,X715, tamaño 1,06MB



Figura 4

Alumna: Beatriz Barrio. Dimensiones: 436-500. Tomada: 17/08/2009. Cámara: u750, S750. Imagen JPEG. Tamaño: 79,2 KB

Una vez obtenidas se proyectan en clase y se dialoga, se opina e, incluso se comienza a plantear el tema de la importancia de la geometría en una obra de arquitectura en diversos momentos de la historia.

La segunda fase consiste en la búsqueda, orientada por el profesor, de imágenes arquitectónicas en las que algunos de los conocimientos que ya se han visto en clase de forma analítica, como pueden ser los de simetría, giro, traslación, homotecia...y que manejan por medio de matrices y calculan manualmente o, de forma incipiente, con programas informáticos como el Maple, se hagan patentes y necesarios para el diseño de un determinado edificio.

Llegado este punto, y ya que con la experiencia docente que analizamos lo que se persigue es, no lo olvidemos, el tratar de complementar una docencia perfectamente regulada, y que tiene su mayor carga lectiva en clases teóricas y clases prácticas consistentes en la resolución de problemas dando, al mismo tiempo, una nueva perspectiva a una materia troncal como es la Geometría Afín y Proyectiva; la actividad tiene que estar debidamente enfocada por el profesor que indicará, con precisión, tanto los temas a elegir como la forma de llevarlos a cabo incidiendo en la manera de su evaluación, ya que es importante que se perciba desde el principio, y claramente, la vinculación de la actividad con la asignatura troncal de la que forma parte y a la que complementa.

En este instante, se proporciona al alumno Referencias para que se familiarice con la búsqueda de información en bibliotecas, libros, revistas o en la red, siempre identificando la fuente que se haya utilizado

Dado que el programa de Geometría contempla, entre otros, temas como los que analizan los movimientos en el plano: traslaciones, giros o simetrías muy apropiados para analizar y discutir cómo esos conceptos ha tenido relevancia en el desarrollo, tanto de estilos arquitectónicos en general, como en ejemplos de edificios concretos en particular (muchos de ellos tratados en clase). Hemos considerado que los últimos temas del programa, dedicados a cónicas y cuádricas, podrían ser muy adecuados para dar continuidad a la experiencia que planteamos, ya que son cuestiones que, desde puntos de vista distintos, se contemplan en los dos cuatrimestres del primer curso de Grado.

Cuando llegamos a tratar estos temas, el alumno lleva ya un cierto tiempo en la Escuela y tiene unos conocimientos de dibujo más amplios y, sobre todo, mejor enfocados a su futuro quehacer, que los que ha adquirido en Bachillerato. Ya saben qué es un proyecto de arquitectura, aunque no lo puedan crear aún, y se les ha introducido en la Historia de la Arquitectura. Es el momento de que reconozcan la importancia que el conocimiento matemático de determinados arquitectos ha sido, en muchas de sus obras, un elemento compositivo decisivo a la hora de optar por un diseño determinado para un proyecto determinado.

Por ejemplo, pueden entender por qué se elige la elipse como elemento definidor de la planta de una iglesia en un momento en que lo usual es la planta cruciforme, qué diferencia existe entre esa misma elipse y un óvalo; qué paralelismo estructural se puede plantear entre dos formas tan parecidas como la parábola y la catenaria; cómo una forma como la hipérbola es considerada por un arquitecto, la ideal para resolver un problema espacial y de uso.... Si pasamos a las cuádricas, el planteamiento se hace más rico cuando a su imagen se añaden elementos tan importantes, para un arquitecto, como pueden ser la facilidad de construcción de algunas de ellas (las cuádricas regladas), su resistencia y belleza plástica.

Esta etapa del trabajo permite que adopte distintas modalidades, en función del interés que demuestre el alumno por un determinado tipo de investigación. Se puede apostar por un enfoque en términos históricos en el que se hable de óvalos y elipses analizando sus diferencias matemáticas y sus analogías plásticas y la importancia de su diferente utilización (Figura 5).

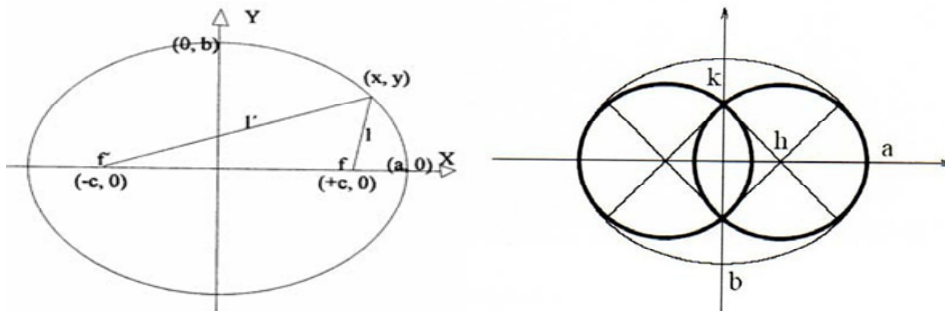


Figura 5

Ana Palau Lage. Exp. 5334. Curva cónica: Elipse de semiejes a y b y óvalo de semiejes a y b .

O bien acometer el análisis de la planta de un edificio que permita extender el estudio a un arquitecto o al lugar o momento histórico en que se ha llevado a cabo [1].

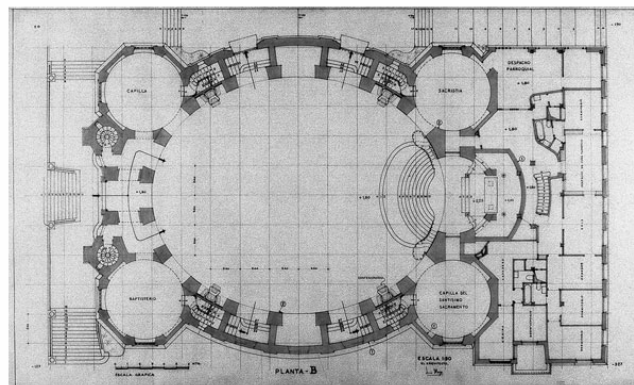


Figura 6

Planta de la Iglesia de San Agustín en Madrid. Fecha de realización: (1945-1956)
Autor: Luis Moya Blanco.

Como es el caso planteado por la alumna Elena Escudero Lázaro en un trabajo sobre iglesias de planta elíptica que amplió para su presentación en la convocatoria de Becas de Excelencia de la Comunidad de Madrid. Un estudio de este tipo abre la posibilidad de proponer otras formas de enfocar otros ejercicios que permita analizar el tema desde perspectivas distintas como pueden ser, por ejemplo, el realizar dibujos sencillos con la ayuda de programas informáticos en los que se hable de propiedades matemáticas como relación entre ejes, excentricidad, etc. (Figura 7)

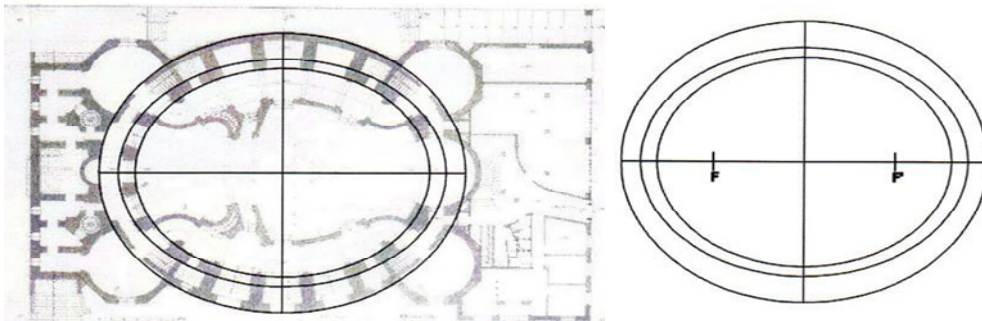


Figura 7

Trazados geométricos tomando como base la planta de la Iglesia de San Agustín en Madrid del arquitecto Luis Moya

O el estudio más amplio que hace que, en otras culturas distintas de la nuestra, se utilice en arquitectura la imagen de esa misma curva cónica gracias a propiedades distintas de las puramente geométricas. Este es el caso de la propuesta de María Ester Rioja del Campo. (Exp. 05382) en la que se estudia la arquitectura del arquitecto japonés Tadao Ando y su Templo del Agua donde el uso de la elipse como elemento definidor de la obra adquiere tanta importancia filosófica como geométrica.



Figura 8

Templo del Agua. Ampliación de templo budista en la isla Awaji, construido por Tadao Ando en 1989. 8

El hecho de que exista una ecuación o una expresión matricial que represente a cada una de esas formas, la necesidad de conocer esas expresiones y manejarlas adecuadamente si queremos utilizarlas en nuestros diseños, hacen que los alumnos de primero vean de forma distinta la resolución de problemas y se interesen más por el

funcionamiento de programas informáticos que, además del puro dibujo, contemplen la posibilidad de incorporar medios de cálculo que permitan manejarlas incluyendo sus propiedades matemáticas.

El primer cuatrimestre termina con los temas relativos a cuádricas. Analíticamente conllevan un cálculo más complejo pero, al mismo tiempo, suponen un ejemplo claro de las posibilidades que suponen a nivel de diseño arquitectónico. La expresión matemática, en el momento que se eleva al nivel de imagen puede representar, y de hecho representa, toda una obra de arquitectura. Uno de los ejemplos que despiertan más interés en los alumnos es el del arquitecto Félix Candela[2] y su forma de construir con rectas superficies de forma curva. La frase “toda creación arquitectónica es geometría” la han encontrado en muchos de los textos de Geometría Descriptiva que han manejado.

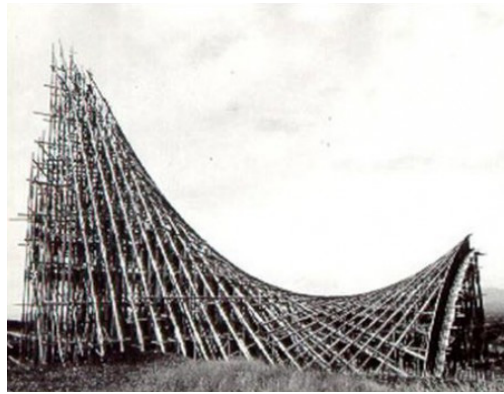


Figura 9

Capilla abierta en Lomas de Cuernavaca, Palmira (Morelos), México, construida por Félix Candela en 1958

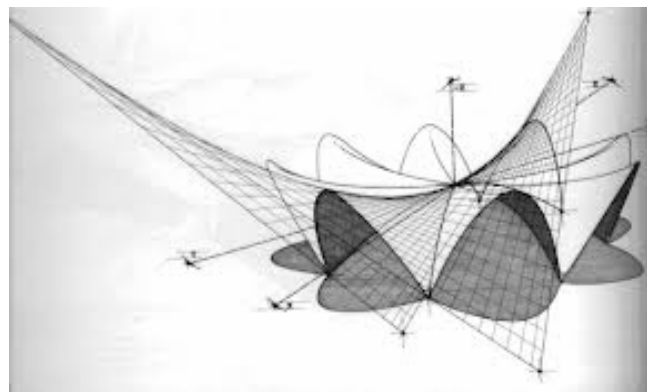


Figura 10

Modelo geométrico del Restaurante Los Manantiales en Xochimilco, México D.F. construido por Félix Candela en 1957.

En ese tiempo se han estudiado los temas desde un punto de vista en el que ha prevalecido la geometría. Retomando estos conocimientos de geometría comenzamos nuestra andadura por el cálculo.

El análisis de funciones de varias variables permite abordar el estudio de superficies como elemento compositivo de la cubierta, o de la envolvente de un edificio, de forma que el alumno reconoce la necesidad de que sus diseños respondan a modelos matemáticos que le permitan su posterior manejo analítico e informático.

Tomando referentes arquitectónicos como Félix Candela, proponemos analizar el modelo matemático que rige algunas de sus obras. Así, su famosa estructura del restaurante Los Manantiales, realizada con paraboloides hiperbólicos, nos posibilitan un análisis tanto geométrico como de cálculo. (Figura 11)



Figura 11.

Restaurante los Manantiales, Félix Candela

En primer lugar elegimos el recinto que queremos cubrir. Partimos de una forma que iremos modificando hasta obtener la planta deseada.

Podemos empezar con algo sencillo, un círculo (Figura 12)

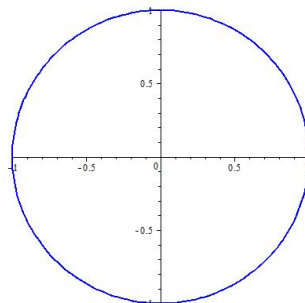


Figura 12.

y cubrirlo con un determinado número de paraboloides, por ejemplo 4 (Figura 13)



Figura 13.

Complicuemos un poco la planta. Para ello elijamos curvas que respondan a la siguiente ecuación $r=a+c\cos(bt)$, en coordenadas polares. Así para los valores $a=9$, $b=8$ y $c=1$ tendremos la curva $r=9+\cos(8t)$ cuya representación es (Figura 14)

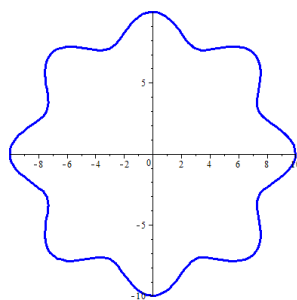


Figura 14.

Cada paraboloides nos proporciona dos hojas de la cubierta (Figura 15).

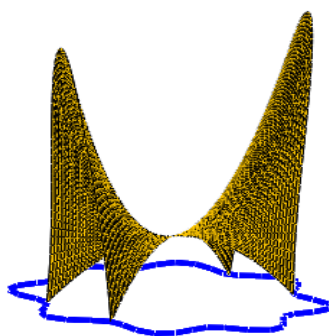


Figura 15.

Al cubrir este recinto con 4 paraboloides obtenemos nuestro propio diseño (Figura 16).

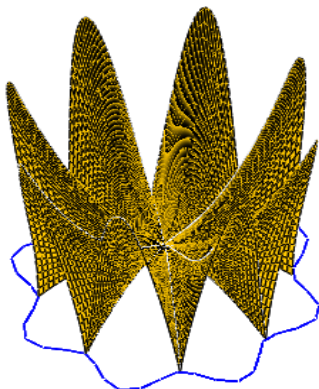


Figura 16.

Pero nuestra curiosidad nos lleva a seguir investigando sobre la forma, y damos nuevos valores a los parámetros.

Para $a=5$, $b=6$ y $c=1$, la curva sobre la que construiremos la cubierta tiene ecuación $r=5+\cos(6t)$ y su representación es (Figura 17)

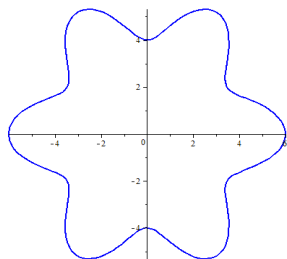


Figura 17.

Una vez cubierta con paraboloides queda (Figura 18)

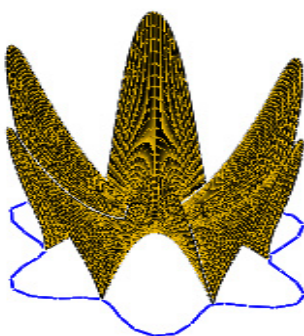


Figura 18.

La manipulación de estos objetos geométricos se consigue de forma sencilla utilizando un programa de cálculo simbólico. En este caso hemos utilizado el programa Maple pues se comunica fácilmente con el programa de diseño Rhinoceros.

Con sólo unas cuantas líneas visualizamos la forma que mejor se adapta a nuestra idea

```
restart: with(plots):  
a:=6: b:=8: c:=1  
recinto:=plot([(a+c*cos(b*t))*cos(t),(a+c*cos(b*t))*sin(t),t=0..2*Pi]):  
display(recinto);
```

La obtención de los paraboloides es más elaborada. Dependiendo del recinto que queramos cubrir, así deberemos definir el paraboloide. Posteriormente habrá que determinar las ecuaciones de los giros con los que completaremos la figura.

Si continuamos experimentando con nuestra ecuación, para $a=0$, $b=3$ y $c=3$, la curva sobre la que vamos a construir la cubierta tiene ecuación $r=3\cos(3t)$ y es conocida como el trifolio de Descartes (Figura 19).

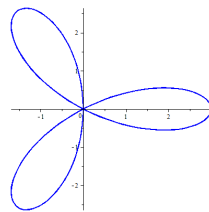


Figura 19.

Podríamos cubrir esta vez el recinto con un cono (Figura 20)

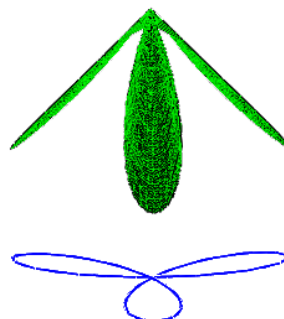


Figura 20.

Tras plantear cuestiones geométricas de cómo a determinadas formas le podemos hacer corresponder una ecuación y cómo cada ecuación tiene asociada una forma, pasamos a cuestiones más propias del Cálculo: la determinación del volumen del recinto obtenido.

Si la cubierta es el cono de ecuación $f(x, y) = 5 - \sqrt{x^2 + y^2}$ el volumen será

$$V = 6 \int_0^{\frac{\pi}{6}} \int_0^{3\cos(3t)} r(5-r) dr dt$$

Integral que podemos resolver con Maple

$$V = 6 * \text{int} \left(\text{int} (r * (5 - r), r = 0..3 * \cos(3 * t)), t = 0.. \frac{\pi}{6} \right)$$

Las operaciones del cálculo integral dejan de ser un problema para nuestra experimentación. Puedo plantear tantas propuestas como desee y su resolución no es un obstáculo.

Conclusiones

Al plantear una experiencia de este tipo, introduciendo una intención que trate de poner de manifiesto la unión indiscutible que debe existir, y de hecho existe, entre el conocimiento matemático y el resto de los que componen su formación como arquitectos; hemos querido poner de manifiesto lo importante que es, para los alumnos de Arquitectura, descubrir que el proyecto arquitectónico tiene una base geométrica y que, en muchos casos existe una ecuación que la define, y que es la responsable, y la base, de sus propiedades estéticas y mecánicas. La correcta manipulación de esa ecuación es la que les puede llevar a controlar formas que, por un lado potencien su creatividad y, por otro les proporcionen el fundamento técnico que propicie el posterior desarrollo y construcción del proyecto.

Referencias

- [1] Catálogo de la Exposición sobre el arquitecto, *Félix Candela Arquitecto*, Ministerio de Obras Públicas, Transportes y Medio Ambiente, Madrid 1994. Pp. 90-96 . ISBN 84-600-8871-5.
- [2] Capitel, A. , *La Arquitectura de Luis Moya Blanco*, COAM, Madrid, 1982. Pp. 120. ISBN: 84-85572-39-4.

Optimización Memética de Vigas Artesa prefabricadas con criterios sostenibles de Hormigón con Fibras

José Vicente Martí Albiñana, jvmartia@upv.es

Víctor Yepes Piqueras, vyepesp@upv.es

Julián Alcalá González, jualgon@upv.es

Tatiana García Segura, tagarse@cam.upv.es

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Palabras Clave: Optimización, sostenibilidad, heurística, vigas artesa, fibras, puentes

Resumen

Esta comunicación describe una metodología heurística empleada para diseñar estructuras bajo criterios sostenibles, con reducción de la emisión de gases de efecto invernadero (CO₂) durante la fase de ejecución. La estructura presentada es un tablero de un paso superior de carreteras de vigas artesa prefabricadas de hormigón reforzado con fibras, empleando para ello un algoritmo memético híbrido, que combina la búsqueda poblacional de soluciones mediante algoritmos genéticos y una búsqueda por entornos variable (VDNS). Este algoritmo se aplica a un tablero formado por dos vigas isostáticas para una luz de 30 metros y una losa de 12 metros de ancho. La estructura analizada consta de 41 variables discretas. El módulo de la evaluación considera los estados límite último y de servicio que se aplican habitualmente para estas estructuras. El uso del algoritmo memético requiere previamente su calibración. Cada una de las heurísticas se procesa 9 veces, obteniéndose información estadística sobre el valor mínimo, el medio y las desviaciones. El procedimiento presentado permite la aplicación práctica al diseño real y su adaptación al proceso de prefabricación.

Introducción

El diseño tradicional de las estructuras de hormigón se concentra principalmente en la reducción del coste económico. Sin embargo, y por una preocupación ambiental, en los últimos años se ha dado cada vez más importancia a la reducción de las emisiones de dióxido de carbono. Distintas organizaciones [1,2] han recopilado datos relacionados con el impacto medioambiental de la fabricación de la mayor parte de los materiales de construcción y, de ahí, que se pueda calcular el impacto de CO₂ sobre una estructura. El hecho que la industria de cemento produce el 5 % de las emisiones de gas invernadero, justifica ya de por sí obtener diseños óptimos de estructuras de hormigón [3]. Por lo tanto, parece importante incorporar criterios de diseño que permitan reducir al mínimo las emisiones de CO₂ producidas en la construcción de estructuras de hormigón armado (HA). En cuanto a esto, Paya-Zaforteza et al. [4] y Yepes et al. [5] han conducido estudios de optimización que comparan los diseños basados en la eficiencia de emisión-CO₂ y el coste en estructuras como marcos de carreteras y muros de HA.

El desarrollo reciente de las técnicas de optimización está ligado a la evolución de la inteligencia artificial que proporciona buenas soluciones en un tiempo computacional razonable. Una revisión exhaustiva de los métodos estructurales de la optimización fue realizada por Cohn y Dinovitzer [6], que expresaron el distanciamiento existente entre los estudios teóricos y la aplicación práctica de los métodos de la optimización, y confirmaron que la mayoría de la investigación realizada hasta ese momento estaba centrada en las estructuras de acero mientras que solamente una fracción pequeña se había ocupado de las estructuras de HA. Siguiendo esta línea del trabajo, el grupo de investigación al que pertenecen los autores ha aplicado metaheurísticas a distintas tipologías estructurales [7-14]. La optimización de los puentes prefabricados (Fig.1), estructuras grandes y repetitivas, presenta gran interés en este ámbito de la optimización debido al gran volumen de materiales utilizados en su proceso de fabricación.

La investigación en hormigones no convencionales constituye hoy día una de las líneas de investigación más importantes dentro del mundo de los nuevos materiales de construcción. Sus propiedades permiten mejorar las prestaciones del hormigón, como la durabilidad y la resistencia. Los hormigones reforzados con fibras de acero (HRFA), tal como se entienden hoy, empezaron a emplearse en la década de 1960 (Romualdi, Baston y Mandel 1964)[15]. Mecánicamente, las fibras de acero soportan esfuerzos a tracción que transmiten por adherencia al hormigón, controlan la fisuración y reducen la intensidad de la misma a la vez que mejoran la tenacidad. A pesar del potencial de las fibras en el hormigón, su aplicación actual es escasa por varias razones: coste elevado de las fibras de acero y conocimiento incompleto del comportamiento de estos hormigones (Slater et al., 2012)[16]. El hormigón autocompactante (HAC) ha mejorado significativamente la tecnología del hormigón en

la última década. Ello se consigue con cambios en la dosificación que provocan que las propiedades mecánicas cambien respecto al hormigón convencional, por ejemplo en lo concerniente al comportamiento adherente (Martí et al., 2006)[17]. Un reciente trabajo de Vilanova et al. (2010)[18] evalúa la estimación de las propiedades del HAC según distintas normas. Sin embargo, a veces es imposible estudiar por separado estos hormigones con los de altas prestaciones, puesto que a modo de ejemplo un HRFA suele ser HAC. Todo ello abre horizontes inexplorados, donde una simple optimización económica de las estructuras haría inviable el empleo de muchos hormigones especiales, pero donde una visión más amplia que contemple criterios de sostenibilidad y de análisis del ciclo de vida, puede cambiar la perspectiva en cuanto a su empleo.

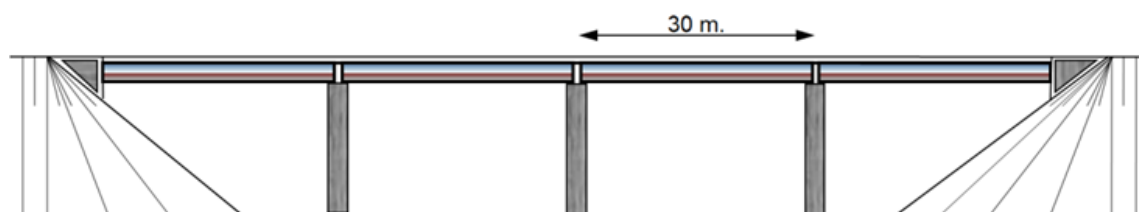


Figura 1 Perfil longitudinal del puente

Este artículo describe una metodología para el diseño de los puentes prefabricados de carreteras de vigas artesa de HRFA y HAC, con la sección representativa de la doble U que integra una losa de hormigón armado en la parte superior para el tráfico de vehículos (Fig. 2). El diseño de esta estructura queda definido en la comunicación del mismo congreso denominada “Diseño de vigas en U de hormigón con fibras mediante la heurística SA con criterios económicos” por los mismos autores[19], donde las variantes en esta comunicación respecto a la indicada son las siguientes: a) luz del vano de 30 metros, b) la separación entre vigas s_v (Fig.2) se convierte en una variable y c) los refuerzos de la armadura transversal se unifican cada dos secciones consecutivas del modelo, reduciendo el número de variables a un total de 41. La metodología consiste en desarrollar un módulo de evaluación computacional a partir de las dimensiones de la sección transversal, los materiales y el refuerzo de acero. Este módulo evalúa el peso de las emisiones de CO_2 de una solución y comprueba todos los estados límite y de servicio relevantes. El procedimiento utilizado para resolver el problema es un algoritmo memético (MA) que combina un algoritmo genético (GA) en cada generación para una población dada de soluciones y un algoritmo de búsqueda local (VDNS) para cada una de estas soluciones en cada nueva generación (GA-VDNS). El algoritmo se aplica a una función objetivo: las emisiones generadas de CO_2 de estas estructuras en diversas etapas de la producción de materiales, de la fabricación, del transporte y de la construcción, y simultáneamente obtiene el coste económico de la solución.

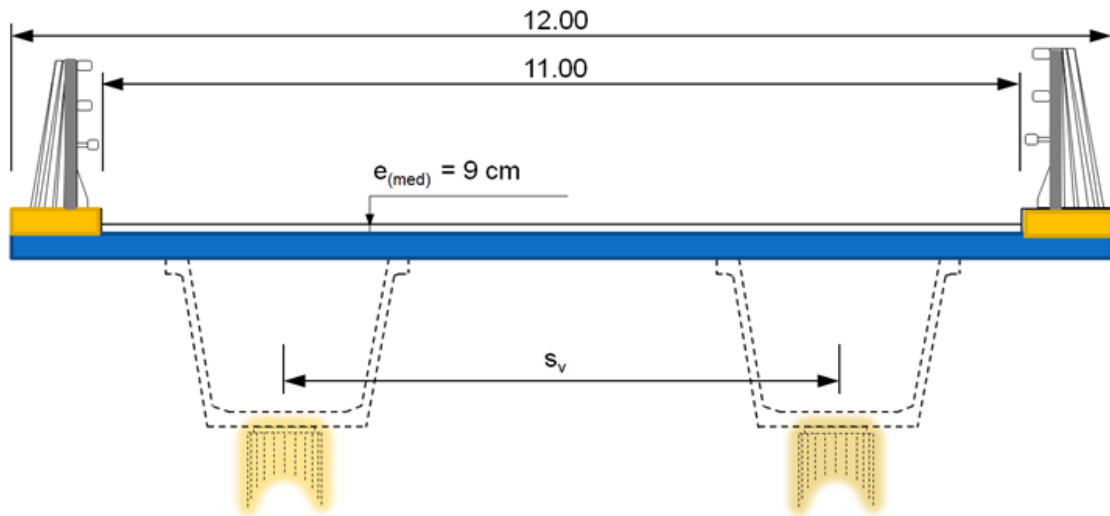


Figura 2. Sección transversal del puente

El problema del diseño óptimo

En este estudio, el problema de la optimización estructural se enmarca en una optimización mono-objetivo del CO₂ emitido. Esta optimización apunta a reducir al mínimo la función objetivo f_1 o ecuación (1) y a calcular f_2 o ecuación (2) mientras que satisface las restricciones de la ecuación (3).

$$\text{CO}_2 = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$C = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (3)$$

Obsérvese que x_1, x_2, \dots, x_n son variables de diseño discretas elegidas para la formulación. El análisis incluye 41 variables del diseño. Las variables contemplan ocho valores geométricos (Fig. 3): la profundidad de la viga (h_1), la anchura del ala inferior de la viga (b_1) y del canto del ala inferior (e_1), la anchura y el canto de las alas superiores de la viga (b_3 y e_3), el ancho de las almas (e_2), el canto de la losa (e_4) y el espaciamiento entre las vigas (s_v). Con respecto a la resistencia del material, dos variables definen el tipo de hormigón de la losa y de la viga, y una tercera variable define la resistencia a tracción del HRFA. El pretensado formado por torones de 0.6" se define por cuatro variables: primera, el número de torones en las alas superiores, segunda, el número de torones en la primera, segunda y tercera capa del ala inferior, tercera, el número de secciones desde el exterior hacia el interior en que se modeliza la viga con fundas que envuelven los torones en la segunda capa y cuarta, el número de secciones con fundas en la tercera capa. Finalmente, 26 variables defi-

nen los diámetros de las barras, el espaciamiento y las longitudes de los refuerzos de barras siguiendo una disposición estándar para la viga y la losa superior. Los parámetros son todos los valores fijados en el problema planteado. La Tabla 1 proporciona los detalles de los 21 parámetros principales analizados.

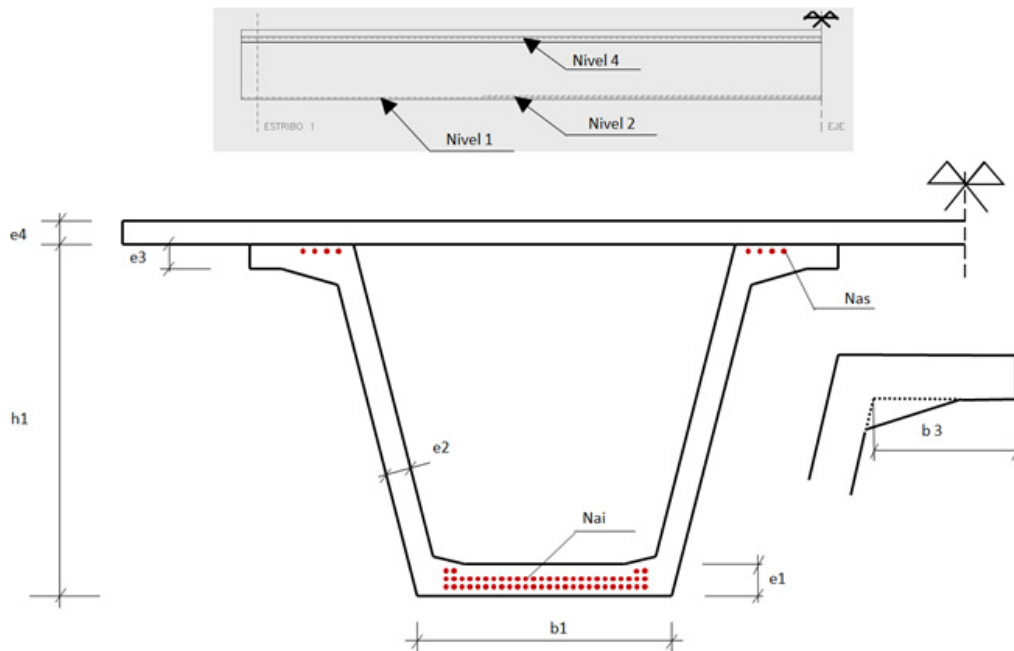


Figura 3. Variables geométricas

La función objetivo cuantifica las emisiones generadas en todo el proceso constructivo hasta finalizar la obra. Para ello se consideran los valores de la base de datos de los materiales de BEDEC [2]. Se aplican unos valores de emisión de CO_2 a cada unidad de obra que interviene en la ejecución. Ello permite analizar diversas alternativas estructurales y compararlas desde un punto de vista ambiental. El actual estudio analiza los puentes prefabricados de HRFA con criterios sostenibles en base a una función de emisiones de CO_2 , expresándose la función (1) como sigue:

$$CO_2 = \sum_{i=1,r} e_i \times m_i \quad (4)$$

Considerando que e_i son las unidades de las emisiones de CO_2 unidad; m_i son las mediciones de las unidades de obra (dependiendo de la geometría y armado de las variables de diseño), mientras que r es el número total de unidades de obra.

Tabla 1. Parámetros principales del problema

Parámetros	Notación y valores
<i>Geométricos</i>	
Ancho del tablero	b _{total} = 12.00 m
Inclinación alma (°sexagesimales)	I _a = 80°
Pendiente cartela ala superior (1: ns ₃)	ns ₃ = 3
División base ala superior	s ₃ = 3
Pendiente cartela ala inferior (1: ni ₃)	ni ₃ = 3
División base ala inferior	i ₄ = 4
Entrega de la viga	Ent = 0.47 m
Esbeltez mínima viga	Esb = (L/18)
<i>De carga</i>	
Ancho de las barreras	a _{bar} = 2 x 0,5 m.
Espesor nominal del pavimento	e _{pav} = 9 cm.
Carga muerta no procedente del pavimento	Q _m = 2 x 5.0 kN/m
<i>De coste</i>	
Distancia transporte (ida)	d _{transporte} = 25 Km.
Despunte armadura activa	25%
<i>De armado</i>	
Tipo de acero pasivo (B-500-S)	f _{yk} = 500 N/mm ²
Tipo de acero activo (Y1860-S7)	f _{pk} = 1700 N/mm ²
Diámetro torones acero activo	Φ = 0.6"
Fundas torones	Nivel 2 y 3
Esbeltez vertical cercos	200 (longitud / Φ)
<i>De exposición</i>	
Ambiente de exposición externo	I lb (EHE)

La función coste de la estructura se define en la ecuación (5), donde p_i son los precios unitarios; m_i son las mediciones de las unidades de obra, y r es el número total de unidades de obra. La función coste incluye el valor de los materiales (hormigón, pretensado, armadura pasiva, fibras de acero) y todos los elementos necesarios para evaluar el coste total del proceso constructivo del puente. Los precios básicos se han obtenido de una encuesta de 2012 de contratistas y figuran en la Tabla 2, y el criterio aplicado para la formación de los precios es el desarrollado en la tesis doctoral del primer autor [20].

$$C = \sum_{i=1,r} p_i \times m_i \quad (5)$$

El presente problema sólo minimiza la función objetivo de las emisiones del CO₂ (4), y calcula para dicha solución la función coste (5). Las restricciones g_j en la ecuación (3) contempla todos los estados límite de servicio (ELS) y los estados límite últimos (ELU) que debe satisfacer la estructura, así como las limitaciones geométricas y de constructibilidad del problema. Este estudio no sólo se limita a

soluciones viables, sino que durante el proceso de optimización toma en consideración soluciones no viables aplicando una penalización al valor de las emisiones (4).

Tabla 2. Precios básicos y emisiones CO₂

<i>Descripción</i>	<i>CO₂ (Kg.)</i>	<i>Precio unitario (€)</i>
Kilogramo del acero pasivo viga (B-500-S)	3.03	2.81
Kilogramo del acero pasivo losa (B-500-S)	3.04	1.50
Kilogramo del acero activo (Y-1860-S7)	3.13	3.62
Kilogramo del acero fibras	2.35	1.10
m de molde en viga	15.49	80.37
m ² de encofrado en losa	41.91	32.00
m ³ de hormigón HA-25	282.08	70.00
m ³ de hormigón HA-30	303.47	75.00
m ³ de hormigón HA-35	303.47	80.00
m ³ de hormigón HA-40	303.47	85.00
m ³ de hormigón HP-35	332.21	130.81
m ³ de hormigón HP-40	332.21	142.74
m ³ de hormigón HP-45	332.21	152.10
m ³ de hormigón HP-50	332.21	163.59

Módulo de evaluación estructural

Una vez generados los datos necesarios que definen una estructura, el módulo de evaluación estructural calcula los estados tensionales y comprueba todos los estados límite y las restricciones geométricas representadas por la ecuación (3). Las restricciones estructurales consideradas siguen los estándares seguidos por la Normativa Española [21,22] para este tipo de estructuras, incluyendo las comprobaciones en los ELS y ELU a flexión, cortante y torsión debido a las cargas. Este módulo es descrito en la comunicación de estos autores en este mismo congreso [19].

Algoritmo memético híbrido

Los algoritmos meméticos constituyen una clase de metaheurísticas estocásticas que combinan la naturaleza de búsqueda en paralelo realizada por los algoritmos evolutivos con la búsqueda local que mejora cada una de las soluciones que forman una población. El calificativo de meméticos lo aplicó por primera vez Moscato [23] en 1989 a estos algoritmos híbridos inspirándose en el término inglés meme, acuñado por Dawkins [24] para referirse al análogo del gen en el contexto de la evolución cultural. La idea de emplear la hibridación entre metaheurísticas basadas tanto en algoritmos poblacionales como en otros de búsqueda local permite mejorar la efectividad de los híbridos al combinar los esfuerzos de diversificación e intensificación [25]. Krasnogor y Smith [26] proporcionan una guía y ejemplos de aplicación para este tipo de algoritmos.

En cuanto al algoritmo de búsqueda local empleado dentro del algoritmo memético, se presenta en este trabajo una variedad de la técnica de búsqueda de entornos a gran escala denominada Very Large-Scale Neighborhood Search (VLSN). En particular, y siguiendo la clasificación propuesta por Ahuja et al. [27], la variante empleada pertenece a los métodos de búsqueda por entornos variable, Variable-Depth Neighborhood Search (VDNS). Aunque una de las primeras aplicaciones de esta estrategia puede encontrarse en la resolución de problemas de rutas [28], por lo que hemos podido averiguar, esta es la primera vez que se aplica este tipo de búsqueda local en la optimización de estructuras con un objetivo ambiental. VDNS se basa en realizar una búsqueda local con un movimiento hasta alcanzar un óptimo local; a continuación se cambia el movimiento a otro más amplio que permita escaparse de dicho óptimo y se sigue así hasta completar un número predefinido de movimientos, cada uno de ellos más amplio que el inmediatamente anterior. En el algoritmo propuesto en el presente artículo, el primer movimiento se define por el cambio aleatorio de una sola variable, eligiendo siempre la nueva solución si mejora a la anterior. El segundo movimiento mueve dos variables simultáneamente, y así sucesivamente. Debe definirse, en este caso, un número de movimientos sin mejora para pasar de un movimiento al siguiente.

Por tanto, el proceso del algoritmo híbrido completo se inicia con la generación aleatoria de una población, en nuestro caso de 500 individuos (n). Cada una de estas soluciones se mejora mediante una búsqueda VDNS, hasta alcanzar un óptimo local. Para ello, comienza moviendo sólo una variable, y cuando lleva diez movimientos continuos sin mejora (*no_mej*), se incrementa en uno el número variables (*var*) simultáneas que se mueven, hasta un máximo de ocho, equivalente al 20% del total. Con esta nueva población mejorada de 500 individuos, se procede a la aplicación de un algoritmo genético, con una calibración similar a la mejor que obtuvo Martí [20]: cruzamiento igual a 0.50 y elitismo. Para la evaluación de la población se valora el CO₂ penalizado; sin embargo, en la heurística VDNS el CO₂ considerado está sin penalizar para evitar la divergencia prematura del algoritmo. A la nueva generación obtenida, se le vuelve a aplicar el VDNS, repitiéndose el proceso hasta un máximo de 150 generaciones.

Análisis y discusión de los resultados

Los algoritmos y el módulo de comprobación estructural se programaron en Intel® Visual Fortran Compiler Integration for Microsoft Visual Studio 2008. Cada proceso duró una media de 1500 minutos sobre un ordenador con un procesador INTEL®

Core™ i7 CPU X980 processor con 3.33 GHz. Se procesaron 9 ejecuciones, y descartando los valores extremos superior e inferior, se obtuvo valores mínimos, medios y desviaciones de los resultados obtenidos para el CO₂, el coste, las variables geométricas y la armadura activa. En la Tabla 3 se muestran los valores medios, comparándolos con los valores medios obtenidos al optimizar con criterios de

coste. Se hace notar que el valor medio de las variables no toma necesariamente los valores normalizados permitidos para cada variable.

Tabla 3. Resumen de los valores medios de las emisiones, costes y de las principales variables

	CO_2 (Kg.)	Coste (€)	$h1$ (m)	$e4$ (m)	$b1$ (m)	$b3$ (m)	$e1$ (m)	$e2$ (m)	$e3$ (m)	Hv (3)	Hl (3)	$p1$ (n)	$p2$ (n)	$p3$ (n)	$p4$ (n)	S (m)	$fR3k$ (3)
(1)	137245	85197	1,58	0,19	1,39	0,28	0,17	0,10	0,14	36	31	25	20	0	3	5,54	5,1
(2)	133409	85210	1,56	0,17	1,53	0,29	0,15	0,10	0,11	37	29	27	20	0	2	5,56	5,1
(1)	Optimización de la función Coste																
(2)	Optimización de la función CO_2																
(3)	<i>Mpa.</i>																

La Figura 4 muestra una evolución típica del CO_2 respecto al tiempo de cálculo. Se observa la dificultad en la obtención de las primeras 500 soluciones, alrededor de 20000 segundos. Ello se debe a la complejidad que encuentra el algoritmo en alcanzar una combinación de variables en la que encaje el pretensado, para elaborar una solución factible -alrededor de 40 segundos-. El punto de partida para la aplicación del GA viene determinado por la aproximación a un óptimo local mediante el VDNS. El comportamiento de todos los procesos es similar, donde los valores medios van reduciéndose rápidamente al principio, para después ir haciéndolo más lento, y a continuación permanecer prácticamente constante. Se aprecia que a partir de unos 52000 segundos, equivalente a la generación 50, el mejor CO_2 mejora poco -1,7%-, y es prácticamente inapreciable a partir de los 75000 segundos, generación 106, hasta el final -0,5%-.

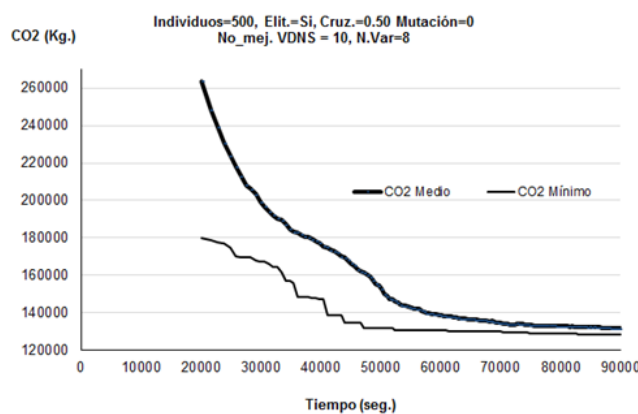


Figura 4. Evolución típica del coste medio y del menor coste de la población de 500 soluciones respecto al tiempo de cálculo

Esta heurística híbrida permite dos tipos de mejoras, la genética para la población de 500 individuos y la local para cada uno de ellos en las 150 combinaciones gené-

ticas. Las mejoras genéticas se producen a lo largo de las generaciones, con un valor medio de 33 mejoras genéticas. El algoritmo VDNS produce como valor medio 72 mejoras que se originan en las primeras generaciones. En la Figura 5 se observa las diferencias en su funcionamiento, mostrándose la última generación donde ha habido mejora local y mejora genética, señalando la concentración en ambos casos.

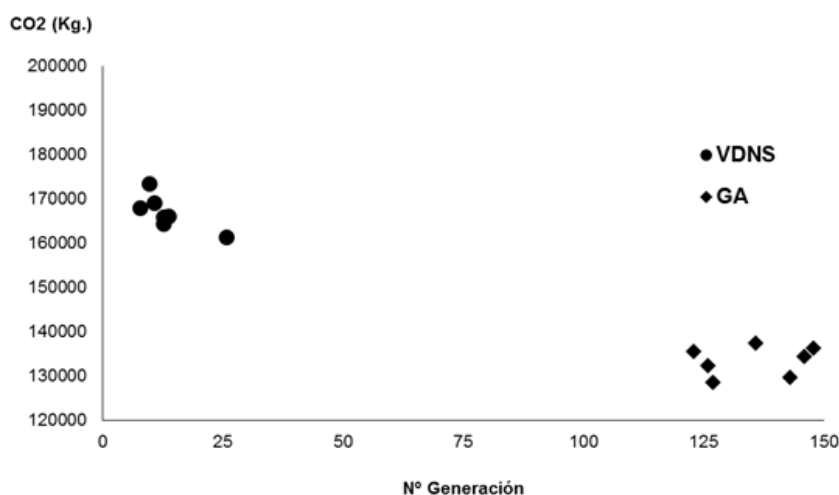


Figura 5. Última generación con mejora VDNS/GA para las soluciones

De los resultados geométricos obtenidos, mostrados en la Tabla 4 se pueden comprobar los siguientes extremos:

El canto medio de la viga tiene una esbeltez $L/19.2$, inferior al límite impuesto de $L/18$, pero aun así, bastante cercano. El espesor medio de la losa es muy reducido, de 0.17 m., tendente a reducir el peso propio del tablero, pero necesario para resistir la flexión transversal de las sobrecargas variables.

Los espesores de las alas y alma de la viga son los mínimos para permitir reducir su peso, pero a la vez, poder albergar las armaduras activas en las alas y resistir a cortante y torsor en las almas. La longitud de las alas superiores de las vigas es reducido, con un valor medio de 0.29 m, espacio suficiente para ubicar la armadura activa superior. El ala superior colabora con la losa para incrementar el canto del conjunto y así resistir mejor la sollicitación a flexión transversal que produce la acción de la sobrecarga variable; sin embargo, su dimensión no se ve muy condicionada.

Las calidades del hormigón requerido no son elevadas. En la viga, el valor medio de la resistencia característica f_{ck} es de 37 Mpa, para un máximo de 50 Mpa; y en la losa, f_{ck} es de 29 Mpa para un máximo de 40 Mpa. Las fibras de acero contribuyen a la resistencia del hormigón con un valor de f_{R3k} de 5.1 Mpa, para un valor máximo de 7 Mpa. El número de torones medio en el ala inferior es de 47, distribuidos en dos niveles, y dos torones en las alas superiores, lo mínimo para que no fisuren a

tracción las alas en el banco de la planta de prefabricados cuando se tesan los torones inferiores. La separación media entre vigas s_v es de 5.56 m. Esta separación es inferior a la mitad de la dimensión del tablero -6 metros-, para poder ajustarse mejor a la distribución de la sobrecarga variable, en la que el carro se encuentra desplazado del extremo.

En la Figura 6 se representan los valores obtenidos de las producciones de CO₂ y del coste de las soluciones para las distintas funciones objetivo. Se aprecia que ambos objetivos van muy ligados, de tal modo que si se optimiza económicamente una estructura, por cada euro que se ahorra de valor medio, se dejan de emitir 1.61 Kg de CO₂ a la atmósfera (ver Tabla 4).

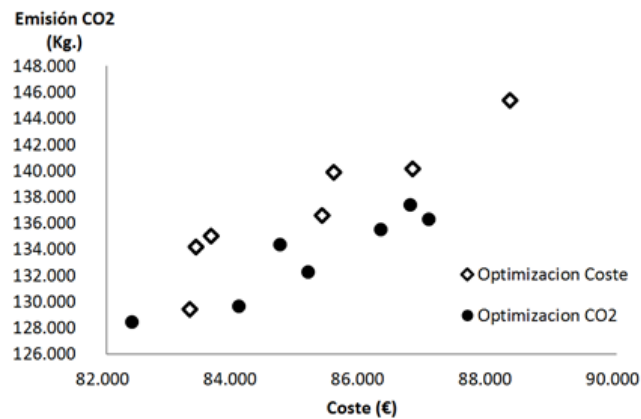


Figura 6. Valores de CO₂ y Coste de las distintas soluciones con distintos criterios de optimización

Conclusiones

El trabajo presenta un algoritmo memético que realiza una hibridación entre un GA y un algoritmo VDNS de búsqueda local aplicado con éxito al diseño automático y a la optimización en reducciones de emisiones de CO₂ de tableros de puentes isostáticos de vigas artesa pretensadas de HRFA. Este algoritmo, ejecutado varias veces, proporciona escasas variaciones respecto a la media de los valores encontrados, alcanzando buenas soluciones, incluso en el caso de una sola ejecución. Del estudio realizado para luces de 30 m, se ha comprobado un valor medio en la relación del canto de la viga con la luz, $L/19.2$. El espesor medio de la losa resultante es de apenas 0.17 m, de forma que las soluciones optimizadas tienden a reducir al máximo el peso de la estructura, pues los espesores de alas y alma de la viga también son muy reducidos. La resistencia característica del hormigón en la viga es superior al de la losa, con valores medios de 37 MPa y 29 Mpa, respectivamente, no habiendo sido necesario llegar hasta la máxima resistencia posible en ninguno de los casos. De igual modo, las fibras de acero contribuyen a la resistencia del hormigón a tracción con un valor de 5.1 Mpa, sin acercarse al límite posible. Por último, las heurísticas

muestran que los resultados en las reducciones del CO₂ y del coste están íntimamente ligados cuando se optimizan las estructuras, por cada euro que se ahorra de valor medio, se dejan de emitir 1.61 Kg de CO₂ a la atmósfera.

Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto de Investigación BIA2011-23602) y por la Universitat Politècnica de València (Proyecto de Investigación PAID-06-12).

Referencias

- [1] Goedkoop M, Spriensma R. The Ecoindicator 99: A damage oriented method for life cycle impact assessment. Methodology Report. Product Ecology Consultants, Amersfoort, Netherlands; 2001.
- [2] Catalonia Institute of Construction Technology. BEDEC PR/PCT ITEC materials database, (<http://www.itec.es/nouBedec.e/presentaciobedec.aspx>); 2009.
- [3] Worrell E, Price L, Martin N, Hendriks C, Meida LO. (2001). Carbon dioxide emissions from the global cement industry. *Annu Rev Energy Env* 2001;26:303-29. [DOI: 10.1146/annurev.energy.26.1.303]
- [4] Paya-Zaforteza I, Yepes V, Hospitaler A, Gonzalez-Vidosa F. CO₂-efficient design of reinforced concrete building frames. *Eng Struct* 2009;31(7):1501-8. [doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.02.034]
- [5] Yepes V, Gonzalez-Vidosa F, Alcalá J, Villalba P. CO₂-Optimization Design of Reinforced Concrete Retaining Walls based on a VNS-Threshold Acceptance Strategy. *J Comput Civil Eng ASCE*, DOI: 10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000140. [doi:10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000140]
- [6] Cohn MZ, Dinovitzer AS. Application of structural optimization. *J Struct Eng* 1994;120(2),617-49. [doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:2(617)]
- [7] Yepes V, Alcalá J, Perea C, Gonzalez-Vidosa, F. A parametric study of optimum earth retaining walls by simulated annealing. *Eng Struct* 2008;30(3):821-30. [doi:10.1016/j.engstruct.2007.05.023]
- [8] Perea C, Alcalá J, Yepes V, Gonzalez-Vidosa F, Hospitaler A. Design of reinforced concrete bridge frames by heuristic optimization. *Adv Eng Softw* 2008;39(8):676-88. [doi:10.1016/j.advengsoft.2007.07.007]
- [9] Paya I, Yepes V, González-Vidosa F, Hospitaler F. Multiobjective Optimization of Reinforced Concrete Building Frames by Simulated Annealing. *Comput Aid Civil Infrast Eng* 2008; 23(8):596-610.
- [10] Martínez FJ, Gonzalez-Vidosa F, Hospitaler A, Yepes V. Heuristic optimization of RC bridge piers with rectangular hollow sections. *Comput Struct* 2010;88(5-6):375-86. [doi:10.1016/j.compstruc.2009.11.009]
- [11] Martínez FJ, Gonzalez-Vidosa F, Hospitaler A, Alcalá J. Design of tall bridge piers by ant colony optimization. *Eng Struct* 2011;33(8):2320-9. [doi:10.1016/j.engstruct.2011.04.005]

- [12] Carbonell A, Gonzalez-Vidoso F, Yepes V. Design of reinforced concrete road vaults by heuristic optimization. *Adv Eng Softw* 2011;42(4):151-9. [doi:10.1016/j.advengsoft.2011.01.002]
- [13] Martí JV, Gonzalez-Vidoso F. Design of prestressed concrete precast pedestrian bridges by heuristic optimization. *Adv Eng Softw* 2010;41(7-8):916-22. [doi:10.1016/j.advengsoft.2010.05.003]
- [14] Martí, J.V., González-Vidoso F, Yepes, V., Alcalá, J.: Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing. *Eng. Struct.* 48, 342–352 (2013) [doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.014]
- [15] Romualdi. J.P. & Mandel. J.A. 1964. “Tensile Strength of Concrete Affected by Uniformly Distributed Closely Spaced Short Lengths of Wire Reinforcement”. *ACI J. Proc.* 61(6)
- [16] Slater, E.; Moni, M.; Alam, M. (2012). “Predicting the shear strength of steel fiber reinforced concrete beams”. *Construction and Building Materials*, 423-436. [doi:10.1016/j.conbuildmat.2011.06.042]
- [17] Martí, J.R.; Serna-Ros, P.; Arbeláez, C.A.; Rigueira-Víctor, J.W. (2006). “Comportamiento adherente del hormigón autocompactante en transmisión y anclaje”. *Materiales de Construcción*, 56(284): 27-42. [doi:10.3989/mc.2006.v56.i284.16]
- [18] Vilanova, A.; Fernández, J.; Agranati, G. (2010). “Evaluación de los modelos de predicción del ACI-08, Eurocódigo 2 y EHE-08, para estimar las propiedades mecánicas del hormigón autocompactante”. *Informes de la Construcción*, 62(520): 43-55.
- [19] Martí, J.V. et al. “Diseño de Vigas en “U” de Hormigón con Fibras mediante la heurística SA con criterios económicos”. 2º Congreso EMIE Universidad Politécnica de València. 2013.
- [20] Martí, J.V.; “Diseño óptimo de tableros isostáticos de vigas artesas prefabricadas pretensadas, Tesis doctoral”. Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Universitat Politècnica de València, 2010.
- [21] M. Fomento, *EHE. Instrucción de Hormigón Estructural (in Spanish)*, M.Fomento, Madrid, 2008.
- [22] M. Fomento, IAP-98. Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera, M.Fomento: Madrid, 1998.
- [23] Moscato P.; On evolution, search, optimization, genetic algorithms and martial arts: Towards memetic algorithms, Technical Report Caltech Concurrent Computation Program Report 826, Caltech, Pasadena, California, USA, 1989.
- [24] Dawkins, R; *The selfish gene*, Clarendon Press, Oxford, UK, 1976.
- [25] Blum, C.; Puchinger, J.; Raidl, G.R.; Roli, A.; Hybrid metaheuristics in combinatorial optimization: A survey, *Applied Soft Computing* 11 (2011) 4135-4151. [doi:10.1016/j.asoc.2011.02.032]
- [26] Krasnogor, N.; Smith, J.; A tutorial for competent memetic algorithms: model, taxonomy, and design issues, *IEEE Transactions on Evolutionary Computation* 9 (2005) 474-488.[doi: 10.1109/TEVC.2005.850260]

- [27] Ahuja, R.K.; Ergun, Ö.; Orlin, J.B.; A.P. Punnen, A survey of very large-scaleneighborhood search techniques, *Discrete Applied Mathematics* 123 (2002) 75-102. [doi:10.1016/S0166-218X(01)00338-9]
- [28] Lin, S.; Kernighan, B.; An effective heuristic algorithm for the traveling salesman problem, *Operations Research* 21 (1973) 498-516. [doi:10.1007/978-3-642-12494-5_34]

Propuestas de revisión metodológica en la enseñanza de las matemáticas

Pedro García Pallares, Arquitecto. (*). pgarcia@ucam.edu

Juan Roldan Ruiz, Dr. Arquitecto. (*). jroldan@ucam.edu

Josefina Vegara Meseguer, Dra. en Ciencias Físicas. (*). jvegara@ucam.edu

Carmen Carazo Díaz, Dra. en Ciencias Matemáticas. (*). ccarazo@ucam.edu

Juan Gómez Acosta, Dr. Arquitecto. (*). jacosta@ucam.edu

(*). Departamento de Ciencias Politécnicas. Escuela de Arquitectura e Ingeniería de Edificación. Universidad Católica San Antonio de Murcia (UCAM).

Resumen

Desde que la tecnología puso a nuestra disposición las máquinas calculadoras comunes ya nadie cuestiona la resolución de una raíz cuadrada con el auxilio de una de ellas, considerando absolutamente irrelevante, de forma más o menos deliberada, cuales son los mecanismos que la máquina emplea para mostrar el resultado, que goza, por otra parte, de un índice absoluto de fiabilidad. Ante este hecho, desde un planteamiento puramente operativo, parece inevitable cuestionar si, en un hipotético proceso de formación docente que tiene entre otros objetivos la consecución de la “competencia” para resolver raíces cuadradas, se ha de invertir tiempo y esfuerzo en enseñar, con mayor o menor profundidad, el algoritmo o algoritmos a aplicar para conocer el resultado, cuáles son sus fundamentos, y cuáles los mecanismos que lo avalan, o si, alternativamente, será suficiente con enseñar el uso correcto de “máquinas” capaces de suministrar la resolución del problema con total fiabilidad, en un proceso de aprendizaje notablemente más operativo en el segundo supuesto que en el primero, puesto que muchos más estudiantes alcanzarán el objetivo previsto con un evidente ahorro de tiempo y esfuerzo, estructuralmente limitados en la actualidad, que podrán destinar a la consecución de otros objetivos del plan de formación conjunto. La disyuntiva está servida y viene a quedar resuelta por la ineludible adaptación al marco académico actual reglamentariamente establecido que, en nuestra opinión y en el entorno socioeconómico en que se aplica, pone en elevado riesgo la formación potencial de futuros especialistas e investigadores en materias vinculadas a la ingeniería.

Palabras clave: *competencias, atribuciones profesionales, planes de estudios, especialización, investigación.*

Introducción

Con carácter general, la formación que permite la consecución de un título universitario se desarrolla en el marco de un determinado plan de formación o estudios que se estructura en base al alcance de una serie de objetivos predeterminados por el perfil característico de la titulación de que se trate. Son estos objetivos, y no otra cosa, lo que determina el contenido de los conocimientos, habilidades y/o competencias que se pretenden transmitir mediante el proceso docente. Si en un hipotético plan de formación establecemos como objetivo la capacidad para obtener la resolución de una raíz cuadrada, y en su aplicación entendemos que solo nos interesa llegar a ser capaces de obtener e interpretar su resultado, nuestro marco de actuación como docentes pasa necesariamente por la calculadora, y casi con toda seguridad con ello bastará. Si alternativamente, además de obtener la resolución de esa raíz cuadrada, entendemos que nuestro objetivo exige saber cómo se abordan los procesos de resolución, cuáles son en este caso los algoritmos más eficaces, en qué consisten y en qué se basan, etc., nuestro objetivo pasa, de la capacidad para conocer e interpretar el resultado de la raíz cuadrada mostrado por una “máquina”, a la capacidad para determinar los parámetros necesarios para sistematizar el proceso de cálculo y obtención del resultado e incluso facilitar su mecanización.

Se reconocen por tanto así dos líneas de formación claramente diferenciadas, a la primera le basta con tener conocimiento de los datos necesarios para la consecución de las “competencias”[1] adscritas a la formación de que se trate, independientemente de cómo se hayan obtenido esos datos, sin embargo, a la segunda esto no le es suficiente, sino que precisa además del conocimiento de los fundamentos que producen esos resultados, sus mecanismos, su validez, su eficacia, y en definitiva su aval científico, es decir, se trata de una línea de formación que invoca en todo caso la actividad investigadora como garante de la consolidación del saber o el conocimiento en su sentido más amplio, en la que cada experiencia acumulada pone fundamento a la capacidad para abordar experiencias posteriores. En cierto sentido, la primera línea de formación se podría hacer corresponder con un proceso de “producción en serie”, en la que sólo existen respuestas para las cuestiones ya predeterminadas, quedando la segunda línea destinada a la “producción especializada” en la que las respuestas a problemas específicos surgen de un proceso de permanente análisis y revisión de conceptos que le proporciona un potencial casi ilimitado.

Conforme a lo señalado, el análisis de la cuestión que se plantea aquí no es, en modo alguno, ajeno al escenario socio-académico en el que actualmente se desarrolla la actividad docente, que podemos calificarlo de tránsito entre dos marcos académicos sustantivamente distintos. Es por ello que, con carácter previo, sea necesario esbozar al menos un perfil general de ese escenario actual en el que

podamos identificar con la mayor claridad posible aquellas variables que, al menos con las experiencias acumuladas en el tiempo ya transcurrido desde la implantación del nuevo marco académico, se han mostrado mas determinantes en el proceso docente correspondiente, en particular, en los títulos de naturaleza politécnica. Este análisis nos ayudará a fundamentar la toma de decisiones, en una cuestión que, fuera de toda duda, es de la mayor trascendencia. No hemos de olvidar que un sistema educativo, y en particular su desarrollo y aplicación, viene a determinar la formación reglada de toda una sucesión de promociones de estudiantes que pueden llegar a constituir una o más generaciones. Una vez concluida la formación en cada uno de los estadios en los que el proceso formativo se ha estructurado, queda prácticamente sin ninguna capacidad de rectificación y de muy difícil o imposible retorno, con unas consecuencias de enorme trascendencia social y económica fáciles de imaginar.

Por todo ello, y puesto que el nuevo marco formativo es ya una realidad, es necesario que reflexionemos sobre el modo en que éste ha de desarrollarse y aplicarse, procurando actuar de forma meditada y responsable, con los mayores avales posibles y tratando de no dejar lugar a la improvisación. De una u otra forma, nos ha correspondido ser participes de esta transición entre sistemas educativos que da paso a un nuevo marco académico, con el que en muchas ocasiones no estaremos de acuerdo, pero al que hemos de responder, al menos, de la forma más positiva y constructiva posible.

Cuestiones Previas. Título académico y ejercicio profesional

Si pretendemos clarificar cual de las dos líneas de formación reseñadas hemos de seguir para la enseñanza de las matemáticas en el título de grado en Ingeniería de Edificación, es imprescindible establecer, como cuestión previa, las actividades que corresponden o se adscriben profesionalmente al mismo, puesto que su formación deberá orientarse hacia ellas.

Como sabemos, la estructura de las titulaciones en el nuevo marco académico se compone de un título base denominado de grado, con una vocación claramente habilitante para el ejercicio profesional¹, que puede ampliarse posteriormente al título denominado máster, y aun puede culminar en un título posterior de doctorado adscrito a la actividad investigadora [2]. En suma, la formación universitaria, una vez acreditada, permite desempeñar una determinada labor profesional en el marco social al que sirve, que establece básicamente dos clases de profesiones de carácter

¹ ANECA. Libro blanco del título de grado en arquitectura técnica. Madrid, 2006.

complementario, por una parte las profesiones denominadas reguladas, en las que se determinan atribuciones de carácter reglamentario y que básicamente corresponden a aquellas profesiones cuya actividad puede poner en riesgo la salud, integridad física y seguridad de las personas, entre las que se encuentran de forma genérica, las profesiones vinculadas con los títulos de ingeniería y, por otra parte, las profesiones no reguladas que serían las demás. En principio, el marco actual plantea una clara desvinculación entre título universitario y ejercicio profesional, regulado o no, de manera que en la práctica se puede afirmar que, en términos jurídicos, no existe la profesión de Grado en Ingeniería de Edificación, ni la de Grado en Arquitectura, ni la de tantos otros Grados, Másteres o Doctorados. El panorama actual se corresponde con el siguiente grafo en el que se explicita la concurrencia de diversas atribuciones profesionales en una sola titulación, a la vez que diversas titulaciones pueden atender una misma atribución profesional.

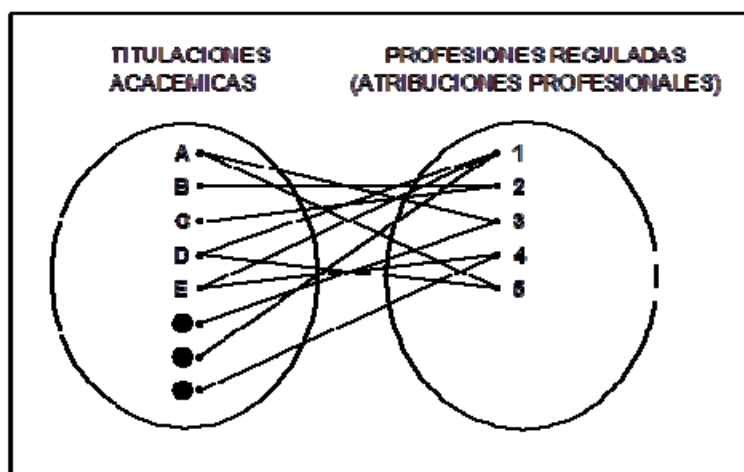


Figura 1 Correspondencia entre Titulaciones académicas y Atribuciones profesionales en la actualidad

Este aspecto, de indudable carácter estructural, genera una base de cierta confusión que condiciona enormemente la orientación de la formación de los estudiantes, y los de grado en particular, ya que al tratarse de un título habilitante para el ejercicio profesional, las “competencias” [1] que se establecen en sus planes de estudios, deberían hacerlo fundamentalmente en correspondencia directa con las atribuciones profesionales más específicas que el marco legal establece para aquellas profesiones que serían el ámbito natural en el que estos grados deberían desarrollar su actividad profesional. Por tanto, no confundir título académico con ejercicio profesional parece aquí especialmente relevante, sobre todo en el caso del grado en el que, como ya se ha señalado, tiene declarada su vocación claramente habilitante para ejercer profesionalmente, aunque paradójicamente bajo un marco de atribuciones que, en lo que se refiere a la Ingeniería de Edificación, se muestra especialmente difuso en la actualidad.

Por otra parte, es claro que el futuro profesional en el ámbito tecnológico pasa necesariamente por ejercer la profesión en el seno de equipos de trabajo multidisciplinares compuestos por titulados especializados en las distintas disciplinas que requieran los servicios profesionales que ofrecen esos mismos equipos, por lo que la formación, en cualquiera de sus niveles, debe orientarse también de manera singular en ese sentido.

Entorno socio-académico actual. Variables del proceso.

Se identifican aquí una serie de variables fundamentales cuya conjunción es determinante en el entorno socio-académico actual en que se desarrolla el proceso formativo de los titulados universitarios, en particular los de grado. La consideración de estas variables es imprescindible en cualquier reflexión acerca de la enseñanza de cualquier materia que forme parte de los planes de estudios a aplicar, y de las matemáticas en particular.

1) Planes de estudios

En España, la consecución de un título universitario se produce en todo caso al amparo de las políticas educativas y formativas a través de las correspondientes leyes y reglamentos establecidos y aplicados por los poderes públicos². Ello supone, en la práctica, que la formación docente que permite la consecución de cualquier título universitario queda estructurada en el documento que se define como plan de estudios, que es específico para cada titulación y centro docente que oferta ese título universitario. En consecuencia, la enseñanza de las matemáticas, o de cualquier otra materia integrante de la formación del título, debe someterse a lo dispuesto por el plan de estudios correspondiente, que evidentemente será diferente en cada centro docente, en base a las “competencias” [1], genéricas y específicas, que en ese mismo plan de estudios se hayan determinado.

Por ello, para hablar de contenidos curriculares, metodologías, sistemas de evaluación, etc, de cualquier módulo, bloque, materia o asignatura, es obligado hacer referencia previa al plan de estudios que se está aplicando, puesto que es el marco de éste en el que han de desarrollarse. Los docentes responsables de la formación universitaria, en cualquier área del conocimiento, no pueden olvidar en ningún momento que su asignatura o asignaturas forman parte de un plan de formación global, al que deben de ajustarse conociendo las exactas determinaciones

² Ministerio de Educación. *Real Decreto 1125/2003 de 5 de septiembre por el que se establece el sistema europeo de créditos y el sistema de calificaciones de las titulaciones universitarias de carácter oficial y validez en todo el territorio nacional*. BOE 2003.

que éste les reclama, evitando en lo posible derivas, no ya discordantes con el plan de estudios, sino incluso contrarias o ajenas al mismo. Después de todo, podemos constatar que, en general, los planes de estudios para los nuevos títulos politécnicos parecen establecer las “competencias” que integran sus objetivos, no desde la perspectiva de la asimilación de conocimientos en una serie de materias que posibilita su consecución, sino más bien desde la consecución en sí misma. Para el título de grado en Ingeniería de Edificación del que hablamos, la orden ECI-3855-2007³, establece las “competencias” que se requieren alcanzar para la consecución del título, en cada una de las cuales se puede reconocer con mayor o menor evidencia la necesidad de contar al menos con una básica formación matemática que en lógica correspondencia será la que constituya los contenidos y temarios de las asignaturas de matemáticas previstas por el propio plan de estudios. Por otra parte, si consultamos a profesionales en activo con experiencia, en ejercicio en el ámbito de la ingeniería, y en particular en el sector de la edificación, construcción y urbanismo, acerca de cuál es el nivel de conocimientos matemáticos que han necesitado aplicar para desarrollar con solvencia su actividad profesional ordinaria, probablemente nos trasladaran la idea de que les ha bastado con el nivel que corresponde a un bachiller bien aprovechado, lo que claramente nos señala la principal dirección en la que inicialmente debe orientarse, con carácter general, la formación en matemáticas de los nuevos titulados de grado, en el marco de la dotación de esfuerzo académico programado para esta materia por el plan de estudios correspondiente que, en la materia que nos ocupa, tiene un mínimo reglamentado de seis ECTS³, aunque la dotación más común oscila entre seis y doce ECTS y extraordinariamente podemos encontrar algún caso de dieciocho ECTS, de un total de doscientos cuarenta ECTS comúnmente exigidos para la consecución del título de grado.

2) Cuerpos docentes

La enseñanza de las matemáticas, como materia o asignatura, al igual que cualquier otra, corresponde a los cuerpos docentes pertenecientes a cada centro universitario encargados de la formación para la consecución de sus títulos. En el caso de títulos de naturaleza politécnica, estos cuerpos docentes están fundamentalmente integrados por tres grupos de titulados bien diferenciados. Un primer grupo está formado por docentes titulados en materias básicas o transversales, (matemáticas, física, química, informática, idioma, etc.)

³ Orden ECI/3855/2007 de 27 de diciembre, por el que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de Arquitecto Técnico.

generalmente, poco o nada próximos, por su propia formación, a las “competencias” [1] que se adscriben a cada título politécnico concreto, lo que supone, en general, una barrera mas a añadir a la ya difícil tarea de su actividad como docentes. Un segundo grupo formado por docentes titulados en materias vinculadas a las “competencias” que se adscriben a cada título politécnico concreto, con intensa dedicación a la actividad docente y escasa o nula actividad en el campo profesional vinculado a esos títulos. Por último, un tercer grupo formado por docentes de la misma naturaleza que el segundo pero que en materia docente invierten su nivel de dedicación respecto a éste último, de manera que desarrollan una media o baja dedicación a la actividad docente y una intensa actividad en el campo profesional vinculado a esos títulos. La proporción de docentes entre cada uno de estos grupos depende básicamente del centro docente, y en cierto modo determina la línea formativa representativa de cada centro.

En relación a la enseñanza de las matemáticas, lo más relevante a señalar aquí es que, de forma mayoritaria, los docentes integrantes de cualquiera de los grupos señalados anteriormente han obtenido sus títulos y formación pedagógica en un marco académico radicalmente distinto al actual que, con carácter general, vino a determinar una forma de entender un proceso de formación asimilado y aplicado durante muchos años. La implantación de un nuevo marco académico supone ineludiblemente la aplicación de nuevos procesos que, con el mismo carácter general, exigen al cuerpo de docentes existente un proceso de adaptación y asimilación que cabría decirse es en el que estamos y entre otros aspectos justifica, en nuestra opinión, plena y oportunamente la celebración de eventos como el que aquí nos congrega. Estos nuevos procesos son de esencial importancia por cuanto el nuevo marco supone, en general, una gran convulsión en los procesos formativos respecto al marco académico anterior independientemente del título universitario del que se trate, particularmente incidente en las actuales titulaciones de grado de las denominadas escuelas politécnicas en cuyos planes de estudios es imprescindible considerar la interconexión de todas las materias que integran los contenidos de la formación, que obligan de forma ineludible a la coordinación y colaboración entre los respectivos docentes de cada una de ellas, haciendo en lo posible que la formación se configure como un todo.

Por todo ello, siendo conscientes de que cualquier medio consolidado ofrece una resistencia natural a su transformación, es imprescindible llevar a cabo entre los docentes una insistente labor de concienciación de la necesidad de dejar definitivamente atrás el marco anterior, destinando a su vez los esfuerzos necesarios para asimilar y sustraer del nuevo marco académico sus mejores virtudes y mayores potenciales.

3) Los estudiantes

En cierto sentido, los estudiantes universitarios pueden considerarse como la materia prima que soporta el proceso de transformación académica por la que, tras el cumplimiento por su parte del pertinente plan de estudios, se convierten en titulados universitarios. En el título de grado en particular es evidente que el perfil académico y personal que muestra el estudiante al iniciar este proceso es claramente determinante del mayor o menor éxito en la consecución de los objetivos marcados por el plan de estudios. Recordemos que los estudiantes de la asignatura de matemáticas en el grado, generalmente programada en el primer curso de la titulación, son mayoritariamente estudiantes de nuevo ingreso en la universidad, cuyo perfil personal es resultado de todo un proceso de desarrollo social y cultural en el marco generacional que les ha correspondido en el tiempo, que les ha dejado una manera genuina de entender su propia formación en todos los órdenes, y en el orden académico en particular.

Este perfil con el que los estudiantes se incorporan al marco actual de la formación universitaria para el título de grado se configura como un elemento esencial que condicionará su desarrollo formativo, puesto que el propio marco predimensiona el esfuerzo (240 ECTS) que corresponde a los estudiantes para la consecución de objetivos, lo que convierte el proceso en una “carrera” en la que para cubrir las expectativas previstas por el sistema educativo se ha de disponer de la preparación adecuada que permita cumplir en el tiempo previsto con los objetivos previstos. Esta cuestión es particularmente incidente en la enseñanza de las matemáticas, a la luz de las referencias obtenidas en las distintas promociones que ya han cursado esta materia en el grado, y de los datos estadísticos que se conocen acerca de las dificultades de aprendizaje que esta materia presenta, con carácter general en los niveles de formación preuniversitaria, no solamente en la asimilación de conceptos y procesos, sino sobre todo en la aplicación y desarrollo de mecanismos de análisis que obviamente tienen mayor trascendencia docente, en lo que comúnmente se denominan matemáticas aplicadas.

4) La herramienta informática

A todo lo anterior hay que añadir la implantación en la actividad profesional, de una forma invasiva, convulsa y con carácter de plena dependencia, al igual que en casi todos los aspectos de nuestro entorno sociocultural, de la herramienta informática, que sin embargo parece no acabar de integrarse plenamente en los procesos docentes.

Con carácter general, hoy es impensable el ejercicio de la actividad profesional, no ya sin el uso de la herramienta informática, sino sin su dominio a nivel medio-avanzado. Ello afecta de forma determinante a todos los procesos de desarrollo social y desde luego, y en un altísimo grado, a los que atienden la formación, más

aún si es de naturaleza politécnica. No reconocer este hecho por parte de los que, en todo o en parte, nos dedicamos a la actividad docente, resistirse a las inevitables consecuencias que tiene sobre ella, queda, en nuestra opinión, en el campo de la irresponsabilidad. La velocidad con la que crece la influencia de esta nueva herramienta sobre nuestras vidas en general, y sobre nuestra formación y actividad profesional en particular, es tan alta, que las alternativas sólo son: adaptación o extinción.

Son muy evidentes las ventajas que, en todos los ámbitos, nos proporciona esa herramienta, al punto que el número de actividades que estamos dispuestos a llevar a cabo sin ella es cada vez más reducido. Considerando además que este hecho es irreversible, parece la actitud más inteligente dedicar una buena parte de nuestra formación al aprendizaje del manejo de esa herramienta, pues de lo contrario y en un plazo no muy dilatado, nuestro potencial docente y profesional se verá seriamente reducido y desorientado.

En particular, en relación con el asunto que aquí nos ocupa, hemos de admitir inicialmente que cualquier actividad de naturaleza matemática que profesionalmente debamos acometer, adscrita a cualquiera de las “competencias” que se señalan en la orden ECI-3855-2007³, la vamos a llevar a cabo, en general, con herramienta informática, lo que en el ámbito de la formación nos abre dos frentes muy concretos, por un lado el aprendizaje del uso de la herramienta, que ordinariamente se nos presenta como una “máquina”, y por otro, realmente trascendente, la adecuada interpretación de los resultados producidos por esa herramienta, su depuración y validación para la aplicación en la actividad profesional concreta que se trate.

En todo caso hay que señalar de forma contundente que la herramienta informática en ningún caso plantea los problemas, y aún menos su proceso de resolución, solo nos ayudará potencialmente a mecanizarlo una vez que lo hemos determinado tras el correspondiente análisis del planteamiento y bajo unas condiciones muy concretas, nada más y nada menos.

Análisis y propuestas de revisión metodológica

Por tanto, sobre el escenario descrito, la enseñanza de las matemáticas en la Ingeniería de Edificación queda claramente determinada por el entorno que el propio escenario condiciona. Básicamente, debe responder a la consecución de “competencias” establecidas por la orden ECI-3855-2007³, en las que la necesidad de formación matemática más o menos avanzada es fácilmente reconocible en unas, en otras es sensiblemente reconocible y en otras podríamos decir que prácticamente no es necesaria. En todo caso, y considerando la escasa dotación académica que a esta materia le otorgan en general los planes de estudios en aplicación, en nuestra opinión, la formación matemática debiera centrarse por un lado, en el dominio de

los mecanismos de análisis y planteamiento de los problemas que pueden adscribirse a la consecución de las “competencias” previstas conforme a esos mismos planes de estudios, disponiendo de un cuadro de correspondencia entre esas “competencias” y los contenidos que se incluyen en el proceso docente que permita dar respuesta fundada y coherente al permanente cuestionamiento por los estudiantes de la pertinencia de la asimilación y aprendizaje de esos contenidos, y por otro, en la capacidad de validación y contraste de los resultados que la tecnología pone a su disposición, dejando a un lado, en cierta manera, los aspectos puramente mecánicos del proceso de obtención de resultados.

La tradicional división entre álgebra y cálculo que presidía anteriormente la formación matemática en los títulos de ingeniería y afines, tiene una difícil inserción en el nuevo enfoque que plantean los planes de estudios, al igual que la aplicación de una metodología docente concordante con una formación matemática más propia de “matemáticos” que la correspondiente a las demandas de lo exigido por los objetivos previstos en esos mismos planes de estudios.

Por otra parte, y en referencia a la metodología docente en general, al igual que casi de forma general en la enseñanza de las matemáticas en la ingeniería, desde el pasado reciente se fue eliminando de forma paulatina hasta su práctica extinción, la formulación de preguntas teóricas en los exámenes o pruebas de evaluación, más acordes en su tiempo con un perfil de formación puramente matemática, probablemente sea hora de dar un paso más y establecer estas pruebas en base a la capacidad para la identificación de problemas de naturaleza matemática adscritos al marco de “competencias” mencionado, de sus variantes y, como ya se ha señalado, de los posibles procesos de análisis, resolución y validación de sus resultados, pruebas en las que además los estudiantes tengan la posibilidad de disponer de todos los medios a su alcance para dar respuesta a las cuestiones que se le plantean (calculadoras, apuntes, tablas, gráficos, etc), en las que los medios no sean un obstáculo para mostrar el nivel de desarrollo de sus capacidades. Una muestra de lo poco que hemos evolucionado en este sentido, a modo de ejemplo, la podemos encontrar comparando dos pruebas de tipo examen convencional correspondientes a la asignatura de matemáticas en cualquiera de los centros docentes a los que corresponde la enseñanza que nos ocupa, una en la actual formación para el título de Ingeniería de Edificación, y otra para el ya extinto título de Arquitecto Técnico e incluso para las últimas promociones del título predecesor de éste, el de Aparejador, pudiendo comprobar que, en esencia, han cambiado muy poco.

En este nuevo escenario parece, por ejemplo, mucho más relevante disponer de la capacidad para construir un sistema de ecuaciones cuya resolución da respuesta a un problema, que la capacidad para resolverlo, esto ya lo hacen, o pueden hacerlo, las “maquinas”. Lo mismo se puede decir de un cálculo basado en la resolución de límites, derivadas, primitivas, desarrollos en serie, etc, parece claro, una vez más,

que si no hemos sido capaces de plantear correctamente el problema, y no somos capaces de analizar los resultados del cálculo, poco importa que tengamos capacidad para abordar los procesos de resolución, sin olvidar en ningún momento que como en todo proceso de enseñanza-aprendizaje lo realmente fructífero es el “camino” que se recorre para culminar ese proceso.

Significar por otra parte, la vinculación directa que la formación matemática tiene con otras materias de formación básica en el título del que hablamos, en particular con la física y la geometría, que obligarán a atender una mínima formación básica en álgebra vectorial, en la misma línea de consolidación de conceptos, análisis y formulación de problemas e interpretación de resultados. Por último, es ineludible garantizar una mínima formación básica en estadística, sobre todo inferencial, presente en mayor o menor grado en cualquier actividad vinculada al sector de la edificación.

Retomando aquí la línea argumental en lo que al inicio se identificaba como “producción en serie” y “producción especializada”, parece, a tenor del conocimiento que tenemos de la mayoría de los planes de estudios actuales para esta titulación o afines, que la apuesta general pasa por hacer corresponder la formación de grado con un proceso de “producción en serie”, de manera que el sistema educativo garantiza así la puesta a disposición de la sociedad de una serie de titulados cuya formación se ha basado en la adquisición de una serie de “competencias” adscritas al desempeño de un determinado ejercicio profesional, de aquí su “formación en serie”, dejando claramente a un lado la formación especializada, que el sistema educativo supuestamente deja en manos de los estudios de postgrado, a los que corresponde el título denominado máster, reservando el título de doctor a los máster que obtengan el reconocimiento de la capacidad investigadora.

Si como parece ser, hay que considerar al título de grado como el predecesor de los títulos de especialización, es imprescindible considerar entre los objetivos no escritos en los planes de estudios del grado una competencia que vendría a ser la de “disponer de la formación básica necesaria para cursar estudios de postgrado”, puesto que sólo los grados pueden acceder a ellos, lo que supone, en lo que a la formación matemática básica del grado se refiere, que no basta con responder desde el plan de estudios a los estrictos objetivos que este marque, sino que es necesario dar cobertura a nuevos y ampliados requerimientos que emanan de los estudios de postgrado. El titulado de grado aspirante a un título de especialización requiere por tanto de una mayor formación de base para conseguirlo, tanto de matemáticas como de otras materias asimismo clasificadas como básicas o propedéuticas. En nuestra opinión, esta formación complementaria en ningún caso debe quedar ausente de los objetivos del plan de estudios del grado, ya que cuanto más especializado es un proceso mas preparación de base requiere, teórica desde luego pero sobre todo

práctica. La experiencia nos ha enseñado que cuando pretendemos construir algo en fases expansivas, una sobre otra, (de grado a doctor), lo sensato y racional es dotar la primera fase con las fundaciones necesarias que requiere el resultado final, evitando procesos de reciclado, refuerzo o refundación, en un equilibrio imprescindible entre los distintos procesos formativos que se pretendan poner en desarrollo. Parece por tanto que la formación del grado debe atender en todo caso a este requerimiento o de otro modo difícilmente un titulado de grado podrá alcanzar una adecuada formación especializada y aun menos acceder con solvencia a la actividad investigadora.

Conclusiones

De todo lo expuesto se pueden sustraer las siguientes conclusiones:

1 La eficacia en la formulación de los planes de estudios para la consecución de los títulos de grado en Ingeniería de Edificación u otras afines, precisaría con toda urgencia la máxima clarificación de las regulaciones de la actividad profesional adscrita a esas titulaciones. Ello permitiría optimizar mejor los contenidos de las materias que se integran en el proceso docente, entre ellos los que corresponden a la enseñanza de las matemáticas.

2 Los planes de estudios de títulos de Ingeniería de Edificación o afines deben considerar, en todo caso que, como otras materias, el carácter básico de la formación matemática incluyendo la proporción curricular que corresponde tanto al grado como al postgrado, ya que de otra manera se pondría en riesgo la formación potencial de futuros profesionales especializados y de investigadores en materias vinculadas a la ingeniería, puesto que solo se puede acceder a la formación de postgrado siendo grado. En particular, el dimensionamiento del esfuerzo docente asignado (ECTS) a las materias básicas, debe considerar el hecho de que es más eficaz la asimilación y aplicación de mecanismos predeterminados por el ejercicio profesional si se dispone una afianzada formación básica, aunque ello suponga discretizar en extremo la formación específica del grado, que optar por cubrir una formación del grado abarcando una extraordinaria cantidad de materias específicas que, por razones obvias, obliga a detenerse muy poco en principios y bases de aplicación cuya asimilación es fundamental para garantizar en alto grado un desarrollo solvente del ejercicio profesional.

3 Los cuerpos docentes deben ser conscientes del proceso de transformación que supone el nuevo marco académico en el que están inmersos, actuando en consecuencia con la mayor responsabilidad y poniendo al servicio del mismo el esfuerzo potencial que permita la consecución de los resultados mas óptimos. En particular, aquellos que son responsables de la formación matemática deben centrar sus esfuerzos en la consolidación de conceptos, desarrollo de procesos de análisis y planteamiento de problemas, y manejo e interpretación de resultados facilitados por

la herramienta informática, incorporando al proceso docente las innegables altas prestaciones que esta herramienta nos ofrece. Los contenidos curriculares y la metodología docente aplicada debe tener como referencia permanente la formación global del grado, conforme al plan de estudios que se aplica, a través de las oportunas actuaciones de coordinación entre las distintas materias que la configuran, transmitiendo y potenciando así la idea del trabajo en equipo.

Referencias

- [1] Roldán, J., Aprender a enseñar para enseñar a aprender. Innovación pedagogía en nuestras titulaciones técnicas, *I Jornada Pedagógica en las Enseñanzas Técnicas. Universidad Católica San Antonio de Murcia, UCAM. Murcia, 2013.* ISBN: 978-84-92986-45-3, pág.161-170 .
- [2] Roldán, J., El nuevo marco universitario del arquitecto, *II Congreso de Arquitectos de la Región de Murcia: Forma, estructura, modo. Colegio Oficial de Arquitectos de la Región de Murcia. Murcia, 2011.* ISBN: 978-84-920285-9-9, pág. 41 a 52.

Cómo predimensionar muros óptimos sin calculadora usando la inteligencia artificial

Víctor Yepes Piqueras, vyepesp@upv.es

Julián Alcalá González, jualgon@upv.es

José V. Martí Albiñana, jymartia@upv.es

Fernando González-Vidoso, fgonzale@upv.es

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Resumen

El trabajo presenta un estudio de diseño automático de muros ménsula de hormigón armado basado en el recocido simulado, dentro de un esquema de búsqueda en entornos variables, como metaheurística de optimización económica. Cada solución se caracteriza por 20 variables de diseño: 4 geométricas relacionadas con el espesor del alzado y de la zapata, así como con las longitudes de la puntera y del talón; 4 tipos de material y 12 variables relacionadas con el armado. El trabajo estudia la importancia relativa de factores tales como el coeficiente de rozamiento suelo-zapata, el ángulo de rozamiento muro-relleno y la limitación de la flecha del alzado. Por último, se presenta un estudio paramétrico de muros de 4 a 10 metros de altura total para diferentes rellenos y condiciones de carga. Se aportan valores medios de costes, volúmenes de hormigón, espesor de alzados y zapatas, longitudes de punteras y talones que pueden ser útiles para el predimensionado económico de muros. Los resultados muestran cómo la inteligencia artificial es capaz de dimensionar de forma automática los muros ménsula de hormigón armado, detectando relaciones aportadas por la experiencia en el cálculo de este tipo de estructuras. Se aporta, como novedad de gran interés práctico, unas reglas sencillas que permiten predimensionar y estimar económicamente de forma rápida este tipo de estructuras.

Palabras clave: *Optimización heurística, diseño estructural, muros ménsula, hormigón armado, predimensionamiento*

Introducción

Los muros de contención de tierras constituyen una de las estructuras más frecuentes en la construcción de obras civiles y de edificación, siendo habitual la tipología de muros ménsula de hormigón armado. El proyecto de estos elementos constituye un problema de interacción entre el suelo y la estructura cuya finalidad consiste en retener un material de forma suficientemente segura y económica.

Los muros se proyectan basándose en la validación de un diseño inicial que se modifica sucesivamente hasta cumplir con todas las exigencias. En primer lugar, se adopta una geometría previa empleando reglas de predimensionamiento sancionadas por la práctica o referencias de casos similares [1]. Sobre este diseño tentativo se analiza el cumplimiento de los requisitos de seguridad (estabilidad y resistencia) y durabilidad. Si la estructura no cumple estos requerimientos, o si lo hace de forma muy holgada, se modifica el esquema inicial y se repite el proceso. Todo ello conforma un panorama de procedimientos artesanales de diseño alejados de una metodología objetiva en la elección de las dimensiones y los materiales. Tales métodos conducen a proyectos seguros estructuralmente, pero cuya economía queda muy ligada a la experiencia del ingeniero. Con todo, una estructura no sólo debe cumplir las condiciones de seguridad, calidad y funcionalidad, sino que además debe construirse al menor coste posible.

La optimización condicionada puede resolverse en algunas ocasiones de forma eficiente con métodos de resolución exactos, basados en técnicas de programación matemática, capaces de proporcionar el mejor conjunto posible de valores de las variables de diseño [2,3]. Los procedimientos de resolución exactos permiten resolver la optimización cuando el número de variables es suficientemente reducido para abordarse con algoritmos eficientes. En el caso de los muros ménsula de hormigón armado, Saribaş y Erbatur [4] emplearon la programación condicionada no lineal para minimizar el coste con siete variables de decisión, cuatro geométricas y tres cuantías mecánicas de armado.

Las combinaciones de los valores de las variables independientes que definen una estructura crecen exponencialmente con el número de elementos que la integran. Esta circunstancia provoca que los algoritmos exactos no resuelvan el problema en un tiempo de cálculo razonable. En estos casos existen procedimientos que han emulado estrategias eficientes empleadas por la Naturaleza y utilizados en la inteligencia artificial, (evolución biológica, funcionamiento del cerebro, comportamiento de los insectos, mecánica estadística, etc.), proporcionando soluciones satisfactorias en numerosos campos. Una revisión y una clasificación de estas técnicas de optimización aproximada pueden verse en Yepes [5]. El diseño de estructuras de hormigón es un claro ejemplo de problema de elección de variables de diseño sujeto a restricciones en el que la aplicación de métodos de inteligencia artificial tiene pleno

sentido. Destacamos aquí algunos de los trabajos sobre optimización heurística realizados por nuestro grupo de investigación [6-14].

En el caso de la optimización de muros ménsula de hormigón, Ceranic *et al.* [15] aplicaron el recocido simulado para el diseño de mínimo coste, donde las variables fueron siete dimensiones geométricas del muro y los costes se reducen al del hormigón, el de la ferralla y el del encofrado. En dicho trabajo, el armado se dimensionaba tras la definición geométrica; además, sólo se comprobaban los estados límite de deslizamiento, vuelco y la tensión admisible del terreno. Recientemente en los trabajos de Yepes *et. al.* [13,14], también se optimizaron muros mediante recocido simulado, pero usando 20 variables de diseño y optimizando no sólo el coste sino también las emisiones de CO₂. El resultado más destacable de estos trabajos estriba en la necesidad de comprobar el estado límite de deformaciones, que normalmente no se consideran; ello debido a las excesivas esbelteces de los muros optimizados.

Los muros objeto de este estudio son estructuras que se proyectan habitualmente con un espesor en la base del alzado que es igual a 1/10 de su altura. El prediseño del espesor de la zapata suele ser de 1/10 de la altura del alzado. La anchura de la zapata normalmente oscila entre el 50 y el 80% de la altura del muro. La sistemática empleada en el trabajo consiste, en primer lugar, en el desarrollo de un módulo de evaluación donde las dimensiones, materiales y armaduras se consideran como variables. Este módulo evalúa el coste de la solución y comprueba todos los estados límites relevantes. Posteriormente, se emplea una versión del recocido simulado (*simulated annealing*) dentro de un esquema de búsqueda en entornos variables con elección aleatoria de múltiples operadores para estudiar cómo afectan los factores más importantes al diseño del muro óptimo. Por último, se realiza un estudio paramétrico de muros para diferentes alturas, rellenos y suelos de cimentación. Tras discutir los resultados obtenidos, se aportan algunas conclusiones de carácter práctico y criterios de predimensionamiento económico que no precisan de calculadora para su uso.

Definición del problema de optimización

Los métodos heurísticos pueden ser aplicados a cualquier problema de optimización condicionada, es decir, problemas que respondan al siguiente planteamiento:

$$\text{encontrar } \underline{x} \text{ que haga } f(\underline{x})=\text{min (o max)} \quad (1)$$

$$\text{sujeto a } g_j(\underline{x})\leq 0 \quad (2)$$

En estas expresiones $f(\underline{x})$ es la función objetivo a optimizar, \underline{x} son las variables del problema, y $g_j(\underline{x})$ representan restricciones que las variables deben satisfacer.

El problema de la optimización económica de un muro ménsula de hormigón armado responde a este planteamiento. La función objetivo es la suma de mediciones por

costes de las unidades que intervienen en la construcción del muro, y que depende de las variables que definan la geometría, cuantías de armado, tipos de hormigón y tipos de acero del muro. Las restricciones expresadas en (2) son los requisitos de estabilidad, resistencia y durabilidad que el muro debe satisfacer.

En la Tabla 1 se recogen los datos necesarios para proyectar el muro considerado, tanto en lo referente a la geometría como a las cargas, parámetros geotécnicos, coeficientes de seguridad y grados de exposición de la estructura. Se ha optado por ciertas simplificaciones que no afectan a la metodología planteada, como es la pendiente nula del relleno del trasdós o la no reducción del empuje pasivo a efectos de cálculo de estabilidad y deslizamiento. Por razones económicas y de facilidad de construcción, no se consideran alzados ni cimentaciones de sección variable, ni tampoco la presencia de tacón en la cimentación. Asimismo, se ha contemplado una longitud fija para los refuerzos de tracción del alzado, ello para simplificar la elaboración de la ferralla y evitar los errores. La longitud L_1 de refuerzo se corresponde con $\frac{1}{2}$ del alzado, y la longitud L_2 con $\frac{1}{4}$, incluyéndose en ambos casos la longitud necesaria de anclaje. En la Figura 1 se representan los parámetros geométricos y la sobrecarga del trasdós.

Tabla 1 Parámetros considerados para el proyecto de muro ménsula

Parámetros geométricos	
H_1	Desnivel de tierras a contener [m].
H_2	Profundidad del plano de cimentación [m].
Parámetros relativos a cargas y parámetros geotécnicos	
q_{sc}	Sobrecarga sobre la coronación del trasdós [kN/m^2].
γ_{ap}	Peso específico aparente del relleno del trasdós [t/m^3].
φ	Ángulo de rozamiento interno del material de relleno [grados sexagesimales].
δ	Ángulo de rozamiento del relleno con el hormigón del trasdós [grados sexagesimales].
M	Coefficiente de rozamiento del material de la cimentación con la zapata.
σ_{adm}	Tensión admisible del terreno de cimentación [kp/cm^2].
Parámetros relativos a los coeficientes de seguridad exigidos a la estructura	
Γ_{sv}	Coefficiente de seguridad a vuelco.
Γ_{sd}	Coefficiente de seguridad a deslizamiento.
CTR	Nivel de control de ejecución [normal o intenso].
γ_c	Coefficiente de seguridad del hormigón en estado límite último.
γ_s	Coefficiente de seguridad del acero en estado límite último.
Parámetros relativos al grado de exposición de la estructura	
A_{alz}	Tipo de ambiente en el alzado.
A_{cim}	Tipo de ambiente en la zapata.
Parámetros relativos a los refuerzos de las armaduras en alzado	
L_1	Longitud del primer refuerzo del trasdós del alzado [m], igual a $\frac{1}{2}$ del alzado.
L_2	Longitud del segundo refuerzo del trasdós del alzado [m], igual a $\frac{1}{4}$ del alzado.

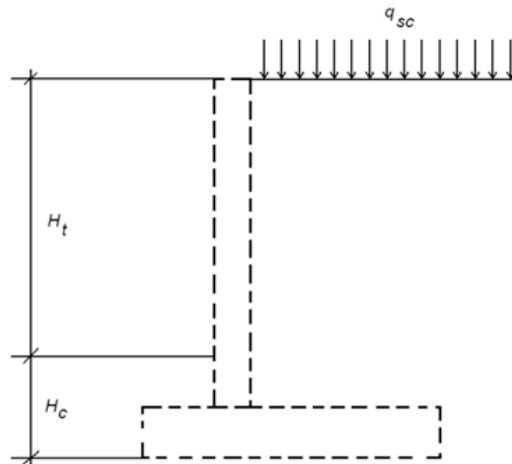


Figura 1 Parámetros geométricos y de sobrecarga del trasdós

En este trabajo los muros se definen con 20 variables, de las cuales cuatro son geométricas, cuatro están relacionadas con el tipo de hormigón y acero en alzados y zapatas, y 12 describen los armados. La Figura 2 muestra las variables geométricas y de armado, tratadas como continuas excepto los hormigones y aceros, que consideran la discretización de la Instrucción de Hormigón Estructural EHE [16].

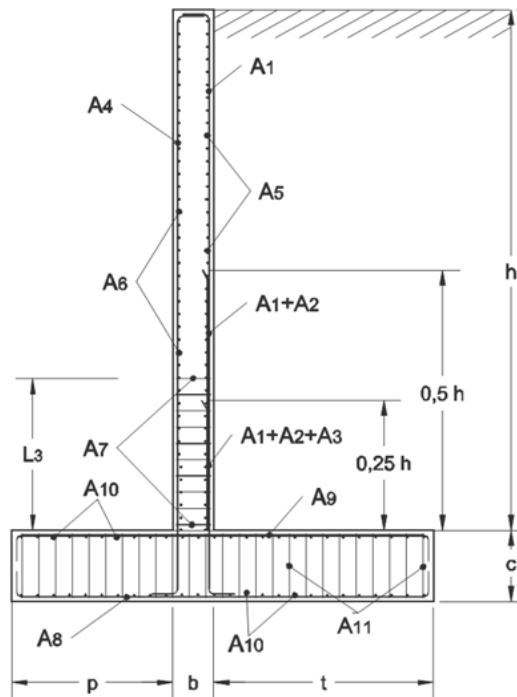


Figura 2 Variables consideradas en la definición del muro

Cada combinación de las 20 variables que define una solución debe comprobarse para validar su diseño. Las restricciones consideradas son, por un lado, las necesi-

rias para evitar valores de las variables sin significado físico (espesores negativos por ejemplo). Por otro lado, los muros representados deben verificar las condiciones habituales para este tipo de estructuras, que son la de estabilidad a deslizamiento y vuelco, tensiones al terreno inferiores a las admisibles, no alcanzar estados límites últimos de rotura por flexión y cortante (en alzados y zapatas), no alcanzar el estado límite de servicio de fisuración, y verificar cuantías mínimas geométricas, mecánicas de flexión y de cortante. Además, se ha hecho necesaria una comprobación de deformabilidad del muro: se aplica una limitación flecha/altura de 1/150 [13]. No se consideran otro tipo de mecanismos de fallo como la rotura por deslizamiento profundo del terreno que dependerá de consideraciones geotécnicas que escapan a los objetivos del trabajo.

Algoritmo de optimización empleado

El recocido simulado “*Simulated Annealing*” (SA) constituye una de las estrategias a las que se recurre en la resolución de los problemas de optimización condicionada. Kirkpatrick *et al.* [17] y Černý [18] propusieron de forma independiente esta técnica inspirándose en los trabajos sobre mecánica estadística. La energía de un sistema termodinámico se compara con la función de coste evaluada para una solución admisible de un problema de optimización. El acceso de un estado a otro de menor energía se alcanza reduciendo lentamente un parámetro denominado temperatura. El algoritmo converge estadísticamente a la solución óptima con independencia de la solución inicial.

En el presente trabajo se han aplicado parámetros de definición del algoritmo similares a los de Yepes *et al.* [13], es decir, una longitud de cadena de Markov de 1,000 iteraciones. Sin embargo, se han utilizado criterios que intensifican la búsqueda de soluciones, aunque ello suponga cierto incremento de tiempo de cálculo: el coeficiente de enfriamiento empleado ha sido de 0.85 y el criterio de parada, alcanzar una temperatura de 0.01% respecto de la inicial. Con este ajuste de parámetros, el número de muros analizados por el algoritmo oscila entre 50,000 y 60,000 para cada uno de los casos.

El algoritmo SA propuesto para optimizar el coste de los muros se describe a continuación:

- Paso 1: Generación aleatoria de un muro inicial, S_0*
- Paso 2: Determinar como parámetros iniciales el coeficiente de enfriamiento r y la longitud de la cadena de Markov.*
- Paso 3: Evaluar el coste del muro inicial $F(S_0)$. Asignar $T_0 = F(S_0)/20$.*
- Paso 4: Repetir durante una cadena de Markov:*
 - Calcular el coste para el muro actual $F(S)$ y para un muro nuevo obtenido tras un movimiento $F(S')$*
 - Evaluar $\Delta = F(S') - F(S)$*

- Aceptar $S=S'$ si $\{(\Delta \leq 0) \text{ o } (\Delta > 0 \text{ y } \exp(-\Delta/T_0) \geq \theta, \text{ donde } \theta \text{ es un número aleatorio entre } [0,1]\}$*
- Paso 5: Calcular el porcentaje de aceptaciones respecto al total de movimientos. Si es superior a 0,2 e inferior a 0,4 entonces:
Tomar como temperatura inicial T_0
Tomar como solución inicial S_0
Determinar $T_0=T_k$
Ir al Paso 6
En caso contrario
Duplicar T_0 si el porcentaje es menor a 0,2 o dividir por la mitad si es mayor a 0,4
Ir al Paso 4*
- Paso 6: Repetir durante un número de veces igual a la cadena de Markov:
Calcular el coste para el muro actual $F(S)$ y para uno nuevo $F(S')$ obtenido tras un movimiento
Evaluar $\Delta=F(S')-F(S)$
Aceptar $S=S'$ si $\{(\Delta \leq 0) \text{ o } (\Delta > 0 \text{ y } \exp(-\Delta/T_k) \geq \theta, \text{ donde } \theta \text{ es un número aleatorio entre } [0,1]\}$
Si $\Delta \leq 0$ entonces $S_b=S$*
- Paso 7: Si la temperatura $T_k > 0.0001 T_k$:
Hacer $k=k+1$. Modificar la temperatura $T_k \leftarrow r \cdot T_k$
Ir al Paso 6
En caso contrario
Tomar como mejor solución S_b y terminar.*

Aplicación del algoritmo

El algoritmo descrito se ha aplicado a una familia de muros para analizar la influencia que tienen en el diseño automatizado de estas estructuras la altura total, el tipo de relleno de tierras en el trasdós y la tensión admisible del terreno que sirve de cimiento. En la Tabla 2 se describen los parámetros que permanecen invariables en los muros estudiados. En la Tabla 3 se detallan los valores de los parámetros que se analizan en el presente trabajo.

Tabla 2 Parámetros invariantes de los muros analizados

Pendiente del plano de tierras en el trasdós	0°
Sobrecarga sobre rellenos del trasdós	10 kN/m ²
Coefficiente de seguridad a deslizamiento	1.5
Control de ejecución EHE	Normal
Coefficiente de seguridad E.L.U. hormigón	1.50
Coefficiente de seguridad E.L.U. acero	1.15
Tipo de ambiente EHE, para alzado y cimiento	IIa

Tabla 3 Valores de los parámetros de los muros analizados

Altura total del muro	4, 5, 6, 7, 8, 9, 10 m
Ángulo de rozamiento interno de las tierras del relleno	24°, 30°, 35°
Peso específico aparente de las tierras del relleno	18, 20, 22 kN/m ³
Coefficiente de seguridad a vuelco	1.6, 1.8, 2.0
Coefficiente de rozamiento terreno-zapata	tg 25, tg 30, tg 35, tg 40
Relación máx. flecha/altura en el alzado	1, 150, 250, 375, 500
Ángulo de rozamiento tierras-muro	0°, 10°, 20°, 30°

En todos los casos se ha supuesto que los muros están cimentados a 2 m de profundidad. Las alturas totales de muro estudiadas, medidas desde la coronación del alzado hasta el plano de apoyo de la zapata, oscilan entre 4 y 10 m, de forma discreta de metro en metro, lo cual corresponde con desniveles de tierras que varían entre 2 y 8 m. Se han estudiado tres casos de capacidad portante del terreno: 0.2, 0.3 y 0.4 N/mm². Asimismo, se han considerado tres tipos de relleno, con pesos específicos aparentes y coeficientes de rozamiento interno definidos en la Tabla 4 [19]. Los muros se valoran a coste de mercado con precios según la Tabla 5.

Tabla 4 Caracterización de los tipos de rellenos empleados en el trasdós del muro (MOPT, 1989)

Tipo de relleno	Descripción	Peso específico aparente (*)	Coefficiente de rozamiento interno
F1	Pedraplenes y terraplenes granulares gruesos (GW, GP)	22 kN/m ³	35°
F2	Suelos granulares con más del 12% de finos (GM, GS, SM, SL) y suelos finos con más del 25% de gruesos (CL-ML)	20 kN/m ³	30°
F3	Suelos finos de baja plasticidad con menos del 25% de gruesos (CL-ML).	18 kN/m ³	24°

Tabla 5 Costes unitarios aplicables

Unidad	Precio unitario
Excavación en cimientos	3.01 €/ m ³
Encofrado en cimientos	18.03 €/ m ²
Encofrado alzados	18.63 €/ m ²
Acero en armaduras B-500S	0.58 €/ kg
Acero en armaduras B-400S	0.56 €/ kg
Hormigón HA-25 colocado en cimientos	50.65 €/ m ³
Hormigón HA-30 colocado en cimientos	54.79 €/ m ³
Hormigón HA-35 colocado en cimientos	59.31 €/ m ³
Hormigón HA-40 colocado en cimientos	64.40 €/ m ³
Hormigón HA-45 colocado en cimientos	69.21 €/ m ³
Hormigón HA-50 colocado en cimientos	74.02 €/ m ³
Hormigón HA-25 colocado en alzados	56.66 €/ m ³
Hormigón HA-30 colocado en alzados	60.80 €/ m ³
Hormigón HA-35 colocado en alzados	65.32 €/ m ³
Hormigón HA-40 colocado en alzados	70.41 €/ m ³
Hormigón HA-45 colocado en alzados	75.22 €/ m ³
Hormigón HA-50 colocado en alzados	80.03 €/ m ³
Relleno en trasdós e intradós	4.81 €/ m ³

El algoritmo se ha implementado en FORTRAN 95 con un compilador Compaq Visual FORTRAN Professional 6.6.0. El tiempo de computación para la resolución de cada caso tarda menos de 2 segundos de CPU TM2 Quad Q6600 con 2.40 GHz.

Resultados y discusión

En este apartado se presenta un estudio paramétrico de muros habitualmente empleados en la construcción de carreteras. Las alturas varían entre 4 y 10 m, los rellenos son los definidos como F1, F2 y F3 (ver Tabla 6), y las tensiones admisibles contempladas son 0.2, 0.3 y 0.4 N/mm². Ello supone un total de 63 tipos distintos de muros. Como para cada muro se ejecutan 9 ensayos del algoritmo propuesto, ello significa que se han realizado 567 ejecuciones.

El coste por metro lineal del muro guarda una elevada correlación con el cuadrado de su altura (ver Figura 3). Para los precios empleados, en todos los muros óptimos encontrados, el acero utilizado ha sido el de 500 N/mm². En 55 de los 63 casos, el hormigón empleado es el de menor resistencia característica permitida, es decir, de 25 N/mm², siendo en el resto de 30 N/mm². Sin embargo, siempre existe un muro sustituto con un coste muy similar, con hormigón de 25 N/mm².

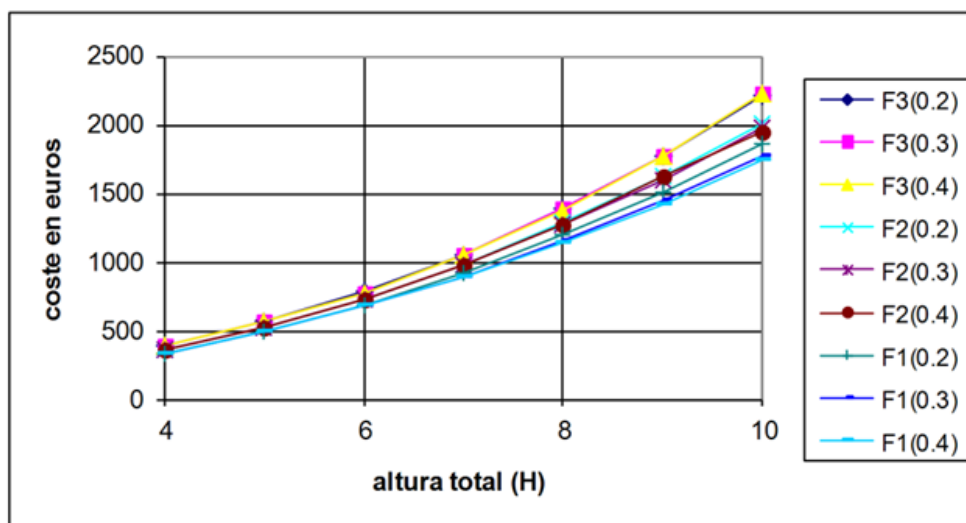


Figura 3 Relación entre la altura total del muro (H), en metros, y su coste por metro lineal en euros

Se comprueba una alta relación entre el volumen de hormigón y el cuadrado de la altura total, lo que permite enunciar la siguiente regla práctica: “el volumen de hormigón necesario en un muro es igual al cuadrado de su altura total dividido por seis”. En la Figura 4 se ha representado el ajuste parabólico por mínimos cuadrados y el criterio de predimensionamiento citado, comprobándose la validez de la regla propuesta para los casos analizados.

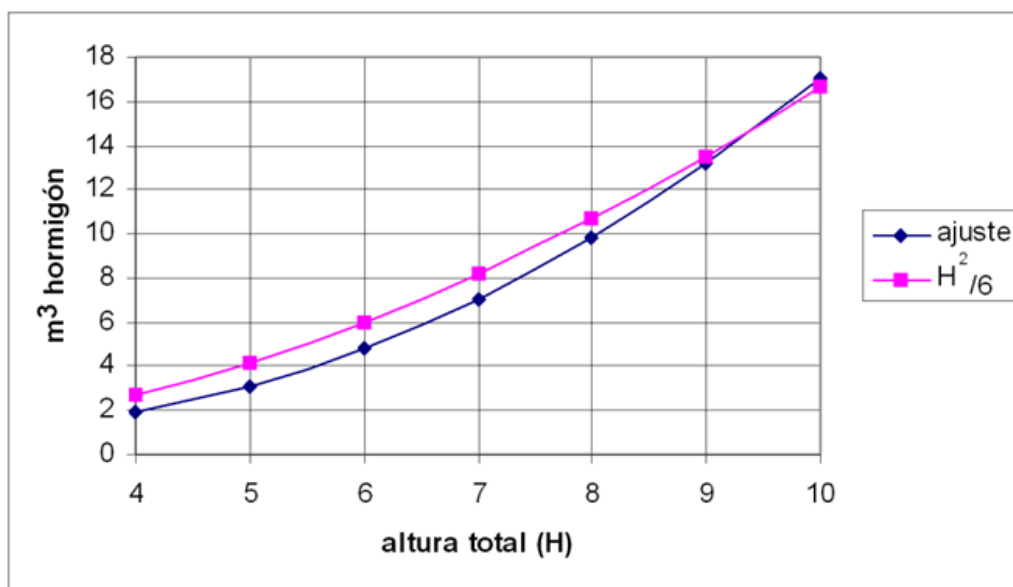


Figura 4 Relación entre la altura total del muro (H) y el volumen de hormigón, tanto con el ajuste como por el predimensionamiento propuesto

En la Figura 5 representa la relación entre los volúmenes de hormigón necesarios en alzado y en zapata y la altura total del muro. Se aprecia que dicho ratio desciende suavemente con la altura, siendo su valor medio de 1.47. Por tanto, se puede añadir a la regla práctica anterior lo siguiente: “El volumen de hormigón necesario en un muro se reparte en una proporción de 3 a 2 entre el alzado y el cimiento”.

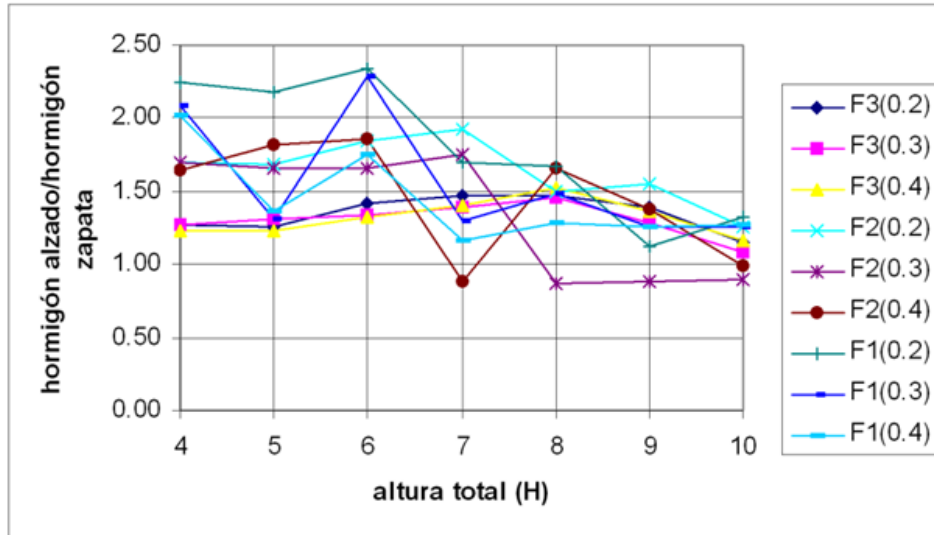


Figura 5 Relación entre la altura total del muro (H) y el ratio del volumen de hormigón necesario en alzado y en zapata

El espesor del alzado también depende de su altura (ver Figura 6). Los ensayos han validado la práctica que la experiencia en el predimensionamiento del alzado de los muros asigna: un espesor igual a la décima parte de la altura del alzado.

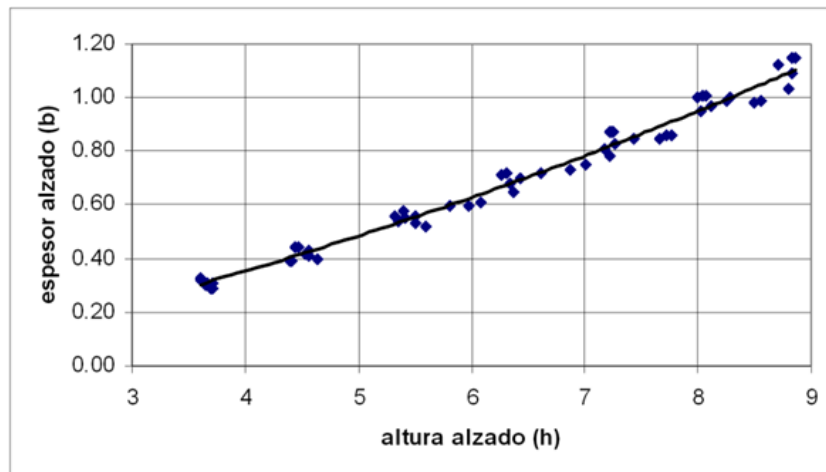


Figura 6 Relación entre la altura del alzado (h) y su espesor (b)

Existe una fuerte dependencia lineal entre el canto de la zapata (c) y la altura total del muro (H), (Figura 7). Del promedio de todas las relaciones entre el canto de

zapata y altura total encontrados (0.1094), se puede aportar la siguiente regla de predimensionamiento económico: “tanto el alzado como el cimiento tendrán un canto de la décima parte de la altura total del muro”.

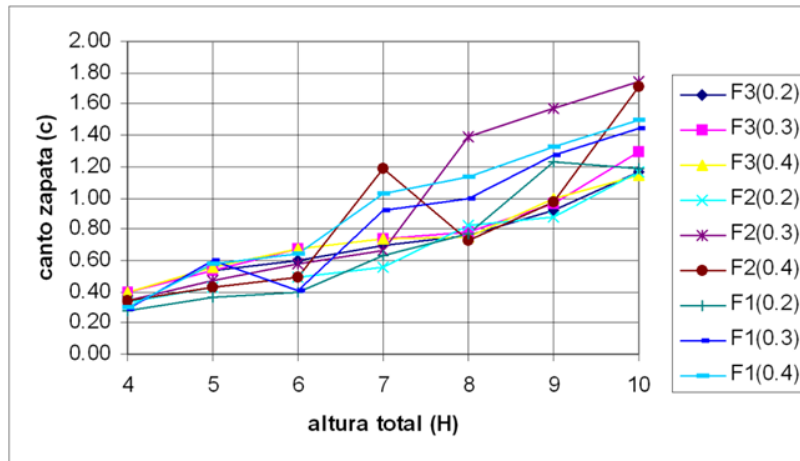


Figura 7 Relación entre la altura total del muro (H) y el canto de la zapata (c)

Una regla práctica [20] establece que la longitud de la zapata debe ser aproximadamente un tercio de la altura del alzado. La metaheurística ha mostrado para los casos analizados que dicho criterio se quedaría corto. Un criterio más adecuado, del lado de la seguridad, y que sería coherente con lo reflejado en la Figura 8, sería el siguiente: “La longitud de la zapata de un muro en ménsula será dos terceras partes de su altura total”. Sin embargo, se trata de un criterio de diseño aproximado, pues se evidencia que la longitud del cimiento depende, además, de la capacidad portante del suelo (en particular los terrenos de 0.2 N/mm^2).

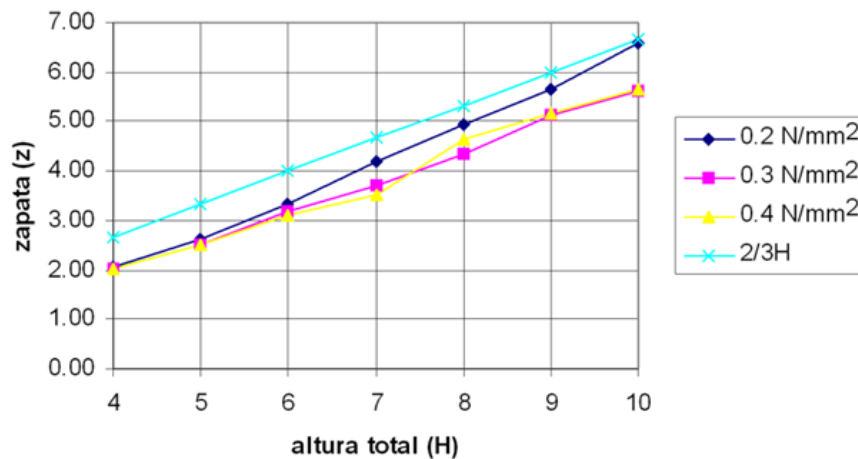


Figura 8 Relación entre la altura total del muro (H) y la longitud de la zapata (z), en función de la capacidad portante del suelo y del criterio de predimensionamiento $z \approx 2/3H$

En la Figura 9 se comprueba que un criterio aproximado para el predimensionamiento del talón para un relleno medio, del tipo F2, sería el siguiente: “*el talón de un muro será igual a un quinto de su altura total más 1 metro*”. Con rellenos de mayor empuje, sería necesario algo más de talón y viceversa.

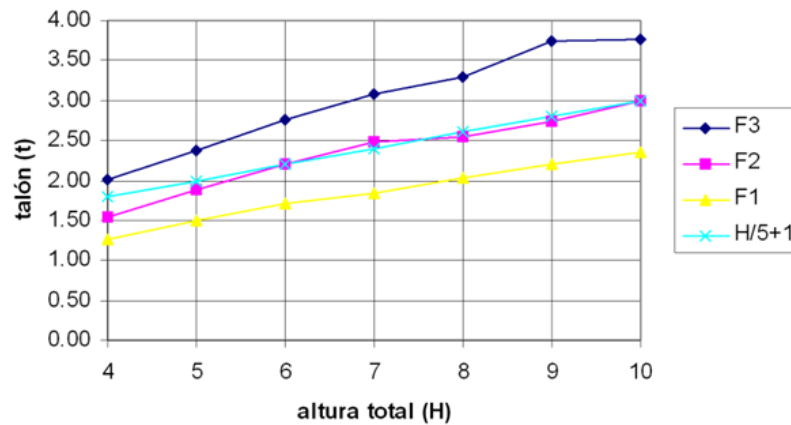


Figura 9 Relación entre la altura total del muro (H) y la longitud del talón (t), en función de la capacidad portante del suelo y del criterio de predimensionamiento $t \approx H/5 + 1$

El canto de la zapata presenta cierta estabilidad en relación con el espesor del alzado, según se observa en la Figura 10. Se puede establecer como criterio de predimensionamiento que el canto es del mismo orden que el espesor del alzado.

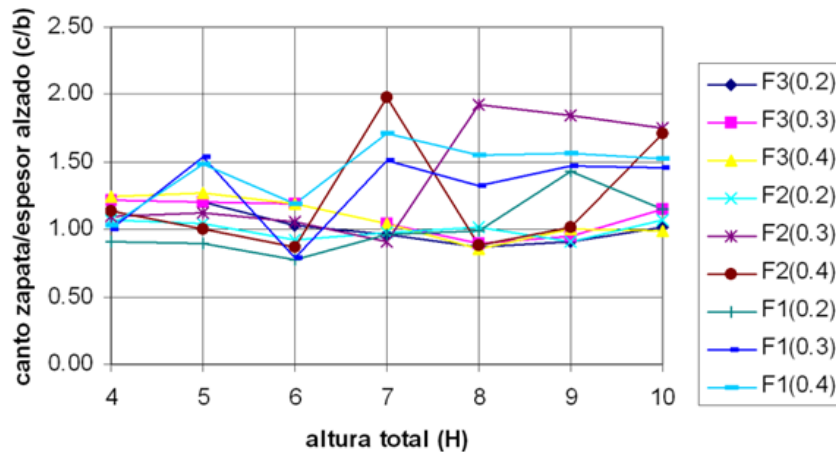


Figura 10 Relación entre la altura total del muro (H) y la razón entre el canto de la zapata y el espesor del alzado (c/b), en función del tipo de relleno

La Figura 11 indica una relación estable entre el peso del acero necesario por cada unidad de volumen total de hormigón y la altura total del muro (H). El promedio de todos los datos corresponde a 55.56 kg/m^3 . Un valor que supone un límite superior sería 60 kg/m^3 .

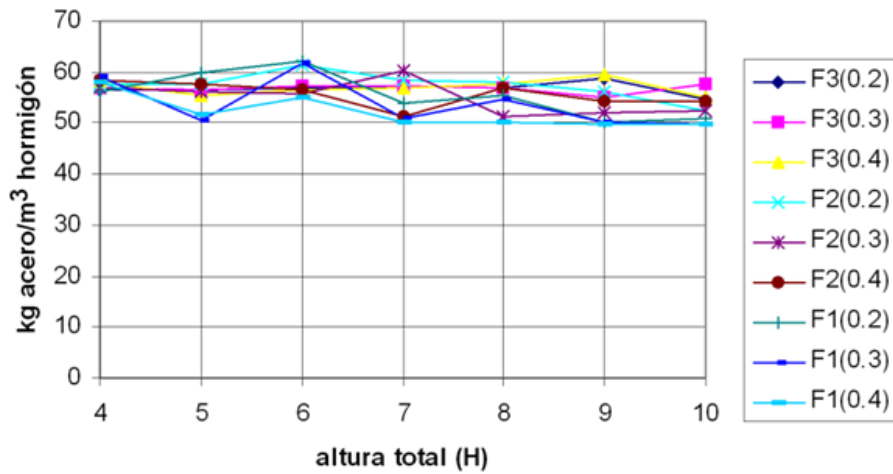


Figura 11 Relación entre la altura total del muro (H) y los kg de acero necesarios por m³ de hormigón

Por último, en el ábaco representado en la Figura 12 se han dibujado las dimensiones de predimensionamiento normalizadas para un muro en función de la altura total, para rellenos F1, F2 y F3 y para tensiones admisibles entre 0.2 y 0.4 N/mm².

relleno: F1,F2,F3; tensión admisible: 0.2-0.4 N/mm²

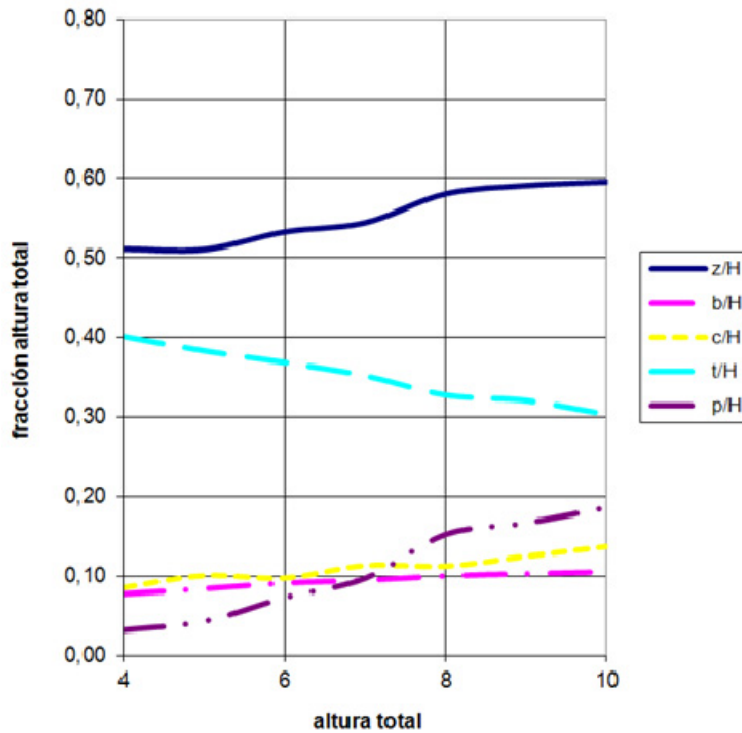


Figura 12 Ábaco de dimensiones normalizadas para un muro

Conclusiones

Se aportan las siguientes reglas prácticas de predimensionamiento económico:

- La zapata de un muro tendrá una longitud igual a las dos terceras partes de su altura total. El canto de la zapata y el espesor del alzado serán la décima parte de la altura total. La longitud del talón será la quinta parte de la altura total más 1 metro.
- El volumen de hormigón necesario será la sexta parte del cuadrado de la altura total, repartido en proporción 3 a 2 entre el alzado y la zapata. Además, se precisan en torno a 60 kg de acero por cada metro cúbico de hormigón.
- Con los costes de mercado actuales, los muros económicos encontrados emplean siempre el acero de mayor límite elástico, de 500 N/mm², y hormigones de la menor resistencia característica posible, 25 N/mm².

Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto de Investigación BIA2011-23602) y por la Universitat Politècnica de València (Proyecto de Investigación PAID-06-12).

Referencias

- [1] Calavera, J. (2001). *Muros de contención y muros de sótano*. 3ª edición, INTEMAC, Madrid.
- [2] Fletcher, R. (2001). *Practical Methods of Optimization*. Wiley, Chichester.
- [3] Hernández, S.; Fontan, A. (2002). *Practical Applications of Design Optimization*. WIT, Southampton.
- [4] Saribas, A.; Erbatur, F. (1996). Optimization and Sensitivity of Retaining Structures. *Journal of Geotechnical Engineering, ASCE*, 122(8), 649-656.
- [5] Yepes, V. (2002). *Optimización heurística económica de redes de transporte del tipo VRPTW*. Tesis doctoral, Universitat Politècnica de València.
- [6] Carbonell, A.; González-Vidosa, F.; Yepes, V. (2011). Heuristic optimization of reinforced concrete road vault underpasses. *Advances in Engineering Software*, 42(4), 151-159. [doi:10.1016/j.advengsoft.2011.01.002]
- [7] Martí, J.V.; González-Vidosa, F.; Yepes, V.; Alcalá, J. (2013). Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing. *Engineering Structures*, 48, 342-352. [doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.014]
- [8] Martínez-Martín, F.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2010). Heuristic Optimization of RC Bridge Piers with Rectangular Hollow Sections. *Computers & Structures*, 88(5-6), 375-386. [doi:10.1016/j.compstruc.2009.11.009]

- [9] Martínez-Martín, F.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2013). A parametric study of optimum tall piers for railway bridge viaducts. *Structural Engineering and Mechanics*, 45(6), 723-740.
- [10] Payá-Zaforteza, I.; Yepes, V.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A. (2010). On the Weibull cost estimation of building frames designed by simulated annealing. *Mecánica*, 45(5), 693-704. [doi:10.1007/s11012-010-9285-0]
- [11] Perea, C.; Alcalá, J.; Yepes, V.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A. (2008). Design of Reinforced Concrete Bridge Frames by Heuristic Optimization. *Advances in Engineering Software*, 39(8), 676-688. [doi:10.1016/j.advengsoft.2007.07.007]
- [12] Torres-Machí, C.; Yepes, V.; Alcalá, J.; Pellicer, E. (2013). Optimization of high-performance concrete structures by variable neighborhood search. *International Journal of Civil Engineering, Transaction A: Civil Engineering*, 11(2), 90-99.
- [13] Yepes, V.; Alcalá, J.; Perea, C.; González-Vidosa, F. (2008). A Parametric Study of Optimum Earth Retaining Walls by Simulated Annealing. *Engineering Structures*, 30(3), 821-830. [doi:10.1016/j.engstruct.2007.05.023]
- [14] Yepes, V.; González-Vidosa, F.; Alcalá, J.; Villalba, P. (2012). CO₂-Optimization Design of Reinforced Concrete Retaining Walls based on a VNS-Threshold Acceptance Strategy. *Journal of Computing in Civil Engineering ASCE*, 26 (3), 378-386. [doi:10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000140]
- [15] Ceranic, B.; Fryer, C.; Baines, R.W. (2001). An application of simulated annealing to the optimum design of reinforced concrete retaining structures. *Computers and Structures*, 79(17), 1569-81. [doi:10.1016/S0045-7949(01)00037-2]
- [16] Ministerio de Fomento (2008). *Instrucción de Hormigón Estructural EHE*, Madrid.
- [17] Kirkpatrick, S.; Gelatt, C.D.; Vecchi, M.P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671-680. [doi:10.1126/science.220.4598.671]
- [18] Cerny, V. (1985). Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Optimization Theory and Applications*, 45, 41-51. [doi:10.1007/BF00940812]
- [19] Ministerio de Obras Públicas y Transportes (1989). *Colección de pequeñas obras de paso. Obras de paso de carreteras*. 3ª edición, Madrid.
- [20] Arroyo, J. (2001). *Números gordos en el proyecto de estructuras*. 1ª edición. Cintra Divulgación Técnica. Madrid.

Optimización Multiobjetivo de Viga en I de Hormigón Armado con Criterios Sostenibles

Tatiana García Segura, tagarse@cam.upv.es

Víctor Yepes Piqueras, vyepesp@upv.es

Julián Alcalá González, jualgon@upv.es

José Vicente Martí Albiñana, jvmartia@upv.es

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Resumen

Este estudio tiene como objetivo presentar una metodología de diseño de una viga en I de hormigón armado de alta resistencia autocompactable o convencional. Algoritmos heurísticos como recocido simulado multiobjetivo “Multiobjective Simulated Annealing” (MOSA) son utilizados para buscar dentro del espacio de soluciones factibles aquellas que mejoren criterios como coste, emisiones de CO₂ o durabilidad. Se tomará como ejemplo una viga en I biapoyada de 15 m de luz definida por 20 variables. La viga deberá cumplir de acuerdo a la Instrucción de Hormigón Estructural (EHE-08) los requisitos de seguridad estructural, así como aspectos constructivos o geométricos. El análisis comparativo de los objetivos servirá como guía para el diseño sostenible de estructuras de hormigón. Los resultados obtenidos muestran una clara tendencia de diseño de estructuras de hormigón hacia la sostenibilidad.

Palabras clave: *Optimización, multiobjetivo, sostenibilidad, viga en I, autocompactable, durabilidad.*

Introducción

Las reglas de diseño tradicionales utilizan la experiencia del proyectista para seleccionar la sección transversal y el tipo de hormigón. El diseño de la armadura es finalmente consecuencia de los requisitos estructurales que debe cumplir la estructura. Sólo los proyectistas expertos son capaces de seleccionar un diseño económico, seguro y sencillo. La optimización heurística ha roto estas reglas de diseño. La inteligencia artificial es capaz de buscar dentro del espacio de soluciones posibles, una solución factible y buena.

La investigación en algoritmos de optimización se ha inspirado en fenómenos naturales. Los algoritmos genéticos [1] se basan en la formación de organismos más complejos y eficientes a partir de la mutación y el cruce entre otros organismos. El recocido simulado [2, 3] representa el proceso mediante el cual las moléculas del cristal adquieren un estado de mínima energía. Fenómenos biológicos basados en comportamientos colectivos como el enjambre de Partículas [4], la colonia de hormigas [5], la colonia de abejas [6, 7] y el enjambre de luciérnagas [8] también han sido utilizados como inspiración en la formulación de algoritmos.

Se ha probado la eficiencia de estos métodos en la optimización de estructuras. Los algoritmos genéticos fueron muy utilizados en la optimización de estructuras metálicas [9, 10], y en la optimización de vigas y columnas de hormigón armado [11-13]. Nuestro grupo de investigación ha aplicado el recocido simulado, algoritmos genéticos y la colonia de hormigas a problemas de ingeniería civil y edificación como muros de contención de tierras [14], pórticos de edificación, [15], pilas de puentes [16], bóvedas para pasos de carretera [17] y tableros de puentes de carreteras de hormigón pretensado prefabricado [18].

El coste ha sido hasta el momento el objetivo a minimizar por los proyectistas estructurales. En cambio, estructuras más económicas, durables y con menor impacto ambiental son cada vez más demandadas. Consecuentemente, muchos estudios de optimización estructural han incorporado las emisiones de CO₂ como objetivo a minimizar [19-21].

Este estudio utiliza un algoritmo multiobjetivo para optimizar el coste, las emisiones de CO₂ y la durabilidad de una viga en I de hormigón armado de alta resistencia autocompactable o convencional. El análisis comparativo de la sostenibilidad en hormigones convencionales y no convencionales nos lleva a conclusiones relevantes para futuras elecciones estructurales.

Definición del problema

El objetivo de este problema es la optimización multiobjetivo del coste C , emisión de CO₂ y durabilidad D . En este caso, la técnica de optimización va a comparar dos objetivos en cada análisis. Se trata de minimizar las funciones objetivo f_1 de la expresión (1) y f_2 de la expresión (2), y maximizar la función objetivo f_3 de la expresión (3), satisfaciendo las restricciones formuladas en la expresión (4).

$$C = f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$CO_2 = f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (2)$$

$$D = f_3(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (3)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (4)$$

Obsérvese que x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de diseño que definirán la solución del problema. Las restricciones del problema dividen el espacio de soluciones en soluciones factibles y soluciones no factibles. Una solución factible es aquella que cumple los requisitos estructurales, geométricos y constructivos.

Variables de diseño y parámetros

En este caso la definición de la sección transversal, la armadura y el tipo de hormigón requiere de 20 variables (Figura 1). Las siete primeras variables son geométricas: canto (h), ancho del ala superior (b_{fs}), ancho del ala inferior (b_{fi}), espesor ala superior (t_{fs}), espesor ala inferior (t_{fi}), espesor del alma (t_w) y recubrimiento (r).

La armadura pasiva requiere de doce variables. La armadura longitudinal se define mediante el número y diámetro de las barras. La armadura superior se dispone en toda la longitud de la viga (n_1, \varnothing_1). La armadura inferior se divide en dos sistemas, uno que cubre toda la longitud (n_2, \varnothing_2) y otro que sólo cubre la parte central (n_3, \varnothing_3). La armadura superior puede estar dispuesta en dos capas y la inferior en tres. Las zonas de apoyo se considera que tienen una longitud de $L/5$ cada una y la zona central tiene por tanto una longitud de $3L/5$. La armadura de cortante se define por el número de estribos por metro y su diámetro en la zona de apoyos (n_4, \varnothing_4) y en la zona central (n_5, \varnothing_5). La armadura de rasante se dispone del mismo modo que la de cortante por motivos constructivos, es decir, el número de estribos por metro es el mismo pero el diámetro es diferente. Así que, la armadura de rasante en zona de apoyos (n_4, \varnothing_6) y en la zona central (n_5, \varnothing_7) queda definida.

Por último, una variable recoge ocho posibles dosificaciones de hormigón. Cuatro hormigones convencionales CC y cuatro hormigones autocompactables SCC representan cuatro clases de resistencias características a compresión del hormigón. Todas las dosificaciones utilizan árido calizo y son descritas por Sideris y Anagnostopoulos [22].

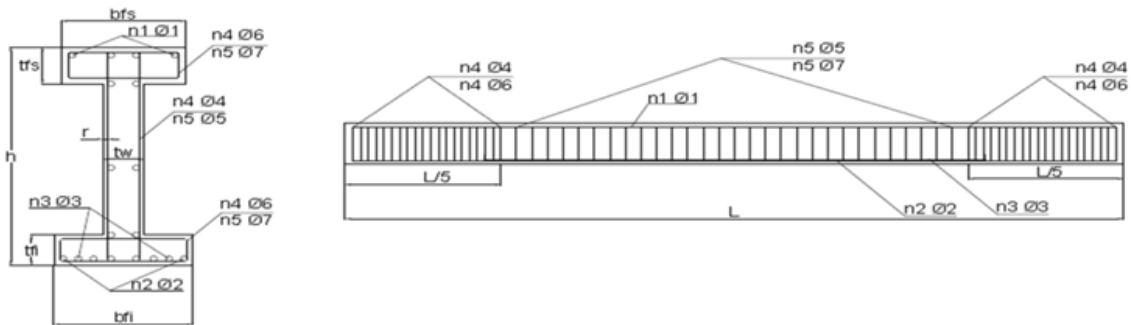


Figura 1. Variables de diseño de la viga en I.

Los parámetros son aquellos valores constantes en todas las soluciones y necesarios para completar la definición de la solución. En este caso, los parámetros son la luz de la viga (15m), la carga permanente (20 kN/m) y la carga variable (10 kN/m). También se ha considerado que el acero utilizado es siempre B500SD.

Restricciones estructurales

Este módulo comprueba las restricciones estructurales. Estas restricciones son las requeridas por la Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08 [23] e incluyen la comprobación de los Estados Límite Últimos ELU y Estados Límite de Servicio ELS. Referente al ELU, se comprueba la flexión, el cortante y la rasante. En cuanto al ELS, se limita la flecha total, es decir, instantánea más diferida a 1/250 la luz de la viga; y la abertura de fisura a 0.3mm para condiciones de carga cuasipermanente. Además, la sección debe cumplir unas condiciones geométricas y constructivas. Se ha exigido una vida útil mínima de la estructura de 100 años. En el apartado siguiente se explica con más detalle el modelo que se ha seguido para su obtención.

Funciones objetivo

Este estudio tiene como funciones objetivo el coste, las emisiones CO₂ y la durabilidad. Para valorar estos objetivos nos hemos basado en las dosificaciones y valores de la velocidad de carbonatación de Sideris y Anagnostopoulos [22]. Cada material de la dosificación ha sido multiplicado por la emisión y el precio unitario correspondiente. Al precio y emisión de CO₂ del hormigón se ha incluido el transporte y colocación. Los valores unitarios se han obtenido de la base de datos BEDEC-Instituto de Tecnología de la Construcción de Cataluña [24], a excepción de las emisiones de CO₂ del plastificante que se han obtenido de la Federación Europea de Asociaciones de aditivos para hormigón “*European Federation of Concrete Admixtures Associations*” [25], ya que diferencia entre plastificante (usado en el CC) y superplastificante (usado en SCC). Respecto al humo de sílice, se considera que no produce emisiones de CO₂ debido a su origen residual. Además se ha considerado el precio de las emisiones de CO₂ [26].

La tabla siguiente (Tabla1) recoge las emisiones y los costes unitarios. Comparando los los hormigones, cabe comentar que el hormigón autocompactable SCC es más económico, excepto en el caso del hormigón SCC4 que es más caro que el hormigón CC4. Aunque el coste de material es mayor, al tener un coste de ejecución por mano de obra mucho más reducido, el resultado es un coste menor. En cambio, las emisiones asociadas son mayores en SCC, ya que las emisiones del material son mayores y en la ejecución sólo se ahorra en emisiones de vibrado. Esta comparativa cambia si se analiza la emisión por MPa. En este caso, el hormigón autocompactable tiene menos emisiones por Mpa.

Tabla 1. Emisiones y costes unitarios en una viga en I de hormigón armado.

Unidad	Descripción	Emisión (kg CO2)	Coste (€)
m ³	Hormigón SCC1	282.46	86.01
m ³	Hormigón SCC2	312.01	93.06
m ³	Hormigón SCC3	343.12	96.27
m ³	Hormigón SCC4	400.10	124.33
m ³	Hormigón CC1	278.56	99.32
m ³	Hormigón CC2	303.48	102.87
m ³	Hormigón CC3	336.10	106.52
m ³	Hormigón CC4	401.42	113.95
t	Acero B-500-SD	3031.50	1237.59
m ²	Encofrado	2.08	33.81
m	Colocación de la viga	39.43	16.86
t CO ₂	Precio del CO ₂		6.00

Como medida de durabilidad se ha evaluado la vida útil según la Instrucción de Hormigón Estructural EHE-08 [23]. En este caso, al tratarse de un ambiente de exposición normal, el proceso de degradación será la carbonatación. El modelo para evaluar la vida útil está basado en el modelo de Tuutti [27]. La expresión (5) modeliza el tiempo necesario para que el ataque o degradación sean significativos, como la suma del período de iniciación de la corrosión y el período de propagación. El primer período es el tiempo que tarda el frente de carbonatación en penetrar el recubrimiento de hormigón dando lugar a la pérdida de la pasividad del acero. El segundo período, empieza con la despasivación del acero y acaba cuando se alcanza un límite a partir del cual las consecuencias de la corrosión no pueden ser toleradas. Este artículo presenta soluciones con vidas útiles de 800 años. Estos valores se escapan de cualquier estudio real llevado a cabo. Sin embargo, se demuestra que un buen diseño es capaz de prolongar la vida útil sin que ello suponga un aumento significativo del coste.

$$t = \left(\frac{d}{k}\right)^2 + \frac{80 \cdot d}{\Phi \cdot v_c} \quad (5)$$

Obsérvese que t son los años de vida útil; d es el recubrimiento de hormigón (mm); k es el coeficiente de carbonatación, Φ es el diámetro de la armadura (mm), y v_c es la velocidad de carbonatación ($\mu\text{m}/\text{year}$). La velocidad de carbonatación para un ambiente de exposición IIb es de $2 \mu\text{m}/\text{año}$ [23]. Respecto al coeficiente de carbonatación, se toman el correspondiente evaluado por Sideris y Anagnostopoulos [22] según la dosificación del hormigón. Los valores de la resistencia característica a

compresión del hormigón fck y el coeficiente de carbonatación se muestran en la Tabla 2.

Tabla 2. Propiedades y contenido en cemento del hormigón.

Descripción	fck (MPa)	k (mm/year ^{0.5})	Cemento (kg/m ³)
Hormigón SCC1	35.80	7.42	302
Hormigón SCC2	45.30	5.14	336
Hormigón SCC3	54.20	3.40	374
Hormigón SCC4	57.10	1.45	436
Hormigón CC1	31.10	9.99	300
Hormigón CC2	41.00	6.23	330
Hormigón CC3	52.70	3.65	370
Hormigón CC4	56.70	1.49	450

Se ha tenido en cuenta la absorción de CO₂ por carbonatación que se produce durante la vida útil de la estructura. Se considera que la estructura está en servicio hasta que finaliza su vida útil y durante este tiempo no requiere mantenimiento. Para estimar la absorción de CO₂ se sigue la propuesta de [28], cuyo modelo se basa en la Primera Ley de Fick y en el estudio de [29]. La absorción de CO₂ estimada según la expresión (6) se restará a las emisiones de CO₂ calculadas a partir de las emisiones unitarias.

$$CO_2 = k * \sqrt{t} * c * CaO * r * A * M \quad (6)$$

Obsérvese que CO_2 son los kg de CO₂ absorbidos por carbonatación, k es el coeficiente de carbonatación descrito anteriormente, t son los años de vida útil de la estructura, c son los kg de cemento Portland por metro cúbico de hormigón (ver Tabla 2), CaO representa su contenido en el cemento (se asume 0.65 [28]), r es la proporción de CaO que puede ser carbonatado (se asume 0.75 [28]), A es el superficie de hormigón expuesta, y M es la fracción molar CO₂/CaO (0.79).

Algoritmo de optimización MOSA

Recocido simulado “Simulated Annealing” (SA) es un algoritmo propuesto por Kirkpatrick et al. [2] que se basa en la analogía de formación de cristales. Este algoritmo permite encontrar un óptimo global gracias a su capacidad de escapar de los óptimos locales. La aceptación de una nueva solución está gobernada por la expresión probabilística $\exp(-\Delta E/T)$, donde ΔE es el incremento de energía de una nueva configuración y T es la temperatura.

MOSA es un algoritmo multiobjetivo basado en SA. Este algoritmo fue propuesto por Suppaitnarm et al. [30]. En primer lugar, se generan soluciones aleatorias hasta encontrar una solución factible. Después, se fija la temperatura inicial T_0 para cada

función objetivo siguiendo el método de Medina [31]. Este método reduce a la mitad la temperatura cuando el porcentaje de aceptación es superior al 40%, y duplica la temperatura cuando el porcentaje es inferior al 20%. Una vez la temperatura queda fijada, se elige una nueva solución haciendo un pequeño movimiento al valor de algunas variables de la solución anterior. Seguidamente, se comprueba si es factible y si es así, se verifica si cumple la condición de Pareto. Esta condición exige que la solución no quede ensombrecida por ninguna otra solución que esté en la frontera de Pareto, es decir, que haya una solución cuyos objetivos sean mejores. En el caso de cumplir la condición, entra a formar parte de la frontera de Pareto. La solución será igualmente aceptada si el valor de la expresión (7) es mayor a un número aleatorio entre 0 y 1. Este proceso se repite teniendo en cuenta que la temperatura se reduce geométricamente ($T = kT$) cada vez que finaliza una cadena de Markov M_c , según un coeficiente de enfriamiento k . Por tanto, la probabilidad de aceptar una solución peor es cada vez menor. Cada 5 cadenas de Markov se reinicia desde una solución de la frontera de Pareto. El algoritmo finaliza cuando la temperatura ha llegado a un cierto valor o cuando ha habido dos M_c sin cambios en la frontera de Pareto.

$$\text{random} < \prod_{i=1}^{i=2} e^{-\frac{f_{i,1}-f_{i,0}}{T_i}} \quad (7)$$

Resultados

Optimización monoobjetivo

La calibración de los parámetros del SA recomendó una cadena de Markov de 30000, un coeficiente de enfriamiento de 0.99 y con un movimiento de 4 variables aleatorias. La solución obtenida de menor coste (S1) fue una viga de 2922.95 euros y la solución de menor emisión de CO₂ (S2) obtuvo un valor de emisión de CO₂ de 2142.49 kg. La tabla 3 recoge las características geométricas, los coeficientes de seguridad de cada estado límite, las cantidades de hormigón y acero utilizadas, y los objetivos de estas soluciones. Comparando dichas soluciones se puede comentar que la solución S2 es un 14% más cara y emite un 33% menos de emisiones de CO₂. La solución S1 utiliza el hormigón CC4 de 56.70 MPa. En cambio, la solución S2 utiliza un hormigón SCC1 con bajas emisiones unitarias y resistencia. La absorción de CO₂ de la solución 2, es en torno a 2 veces mayor gracias al aumento de la superficie expuesta de hormigón.

Optimización multiobjetivo

Tras la optimización multiobjetivo se ha obtenido una frontera de Pareto que refleja las mejores soluciones respecto a dos objetivos. Para establecer el criterio de parada se ha estudiado la evolución de la frontera de Pareto. La Figura 2 muestra que a partir de 10 millones de iteraciones la frontera se estabiliza. Por tanto, el algoritmo finaliza cuando la temperatura es 100 veces menor a la inicial y no se ha encontrado

ningún elemento en la cadena de Pareto durante dos cadenas de Markov consecutivas. El algoritmo se ejecuta 15 veces, siendo la frontera de Pareto final la resultante de las mejores soluciones.

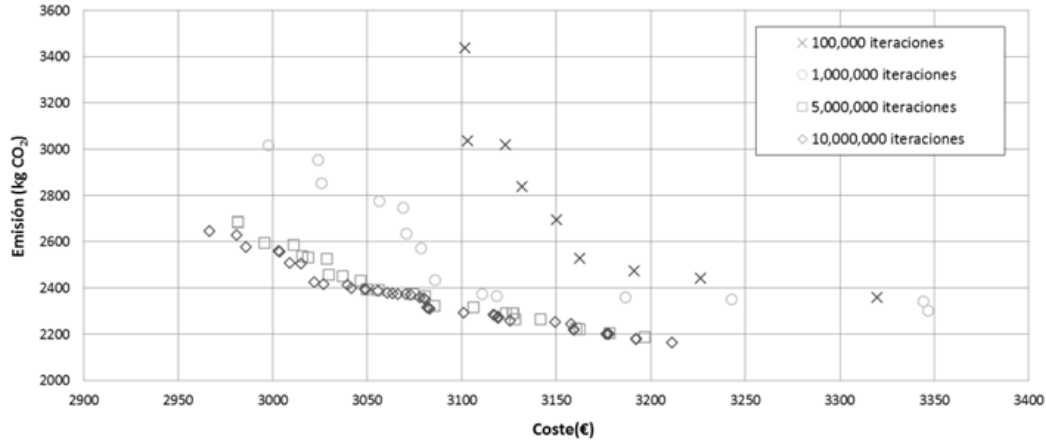


Figura 2. Coste frente emisión de CO₂. Evolución de la frontera de Pareto

Coste frente emisión de CO₂

La frontera de Pareto del coste frente a la emisión de CO₂ se muestra en la Figura 3. En primer lugar se aprecia que la solución S1 no aparece. En este caso, la solución de menor coste S3 es un 1% más cara y sus emisiones son 14% inferiores a la solución S1. Como solución intermedia a destacar, la solución S4 ha conseguido, una reducción de las emisiones de CO₂ del 26% con incremento de coste del 5%. De los resultados se destaca que las emisiones de CO₂ se reducen cuando se aumenta el canto de la sección, pues así aumenta la absorción de CO₂. Estas soluciones tienden a utilizar menor cantidad de acero y mayor cantidad de hormigón de menor resistencia.

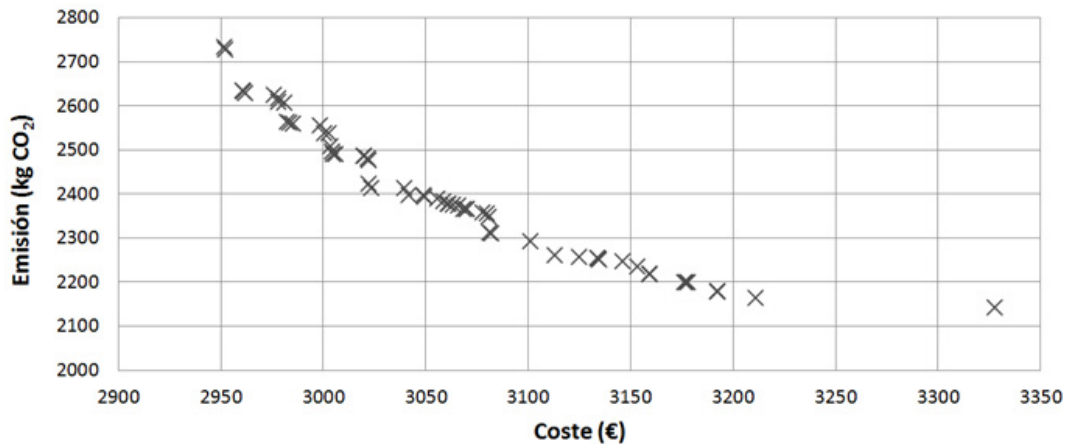


Figura 3. Coste frente emisión de CO₂. Frontera de Pareto

Coste frente durabilidad

La Figura 4 refleja las mejores soluciones de coste frente durabilidad. La solución más económica S5 no es la misma que la obtenida con la optimización monobjetivo. La solución S5 es un 3% más cara pero, en contrapartida, su vida útil ha aumentado un 51% gracias al aumento del recubrimiento. Si se observan todas las soluciones de la frontera de Pareto, se concluye que todas tienden a buscar el máximo recubrimiento, ya que éste es el parámetro más eficaz para maximizar la vida útil sin que ello suponga un gran coste añadido. Otro parámetro influyente como es la velocidad de carbonatación, en este caso, una disminución de la velocidad de carbonatación (aumento de la resistencia del hormigón) supone mayores variaciones tanto de coste como de vida útil. Cabe destacar que la solución con mayor durabilidad tiene un recubrimiento de 35 mm y utiliza un hormigón SCC4.

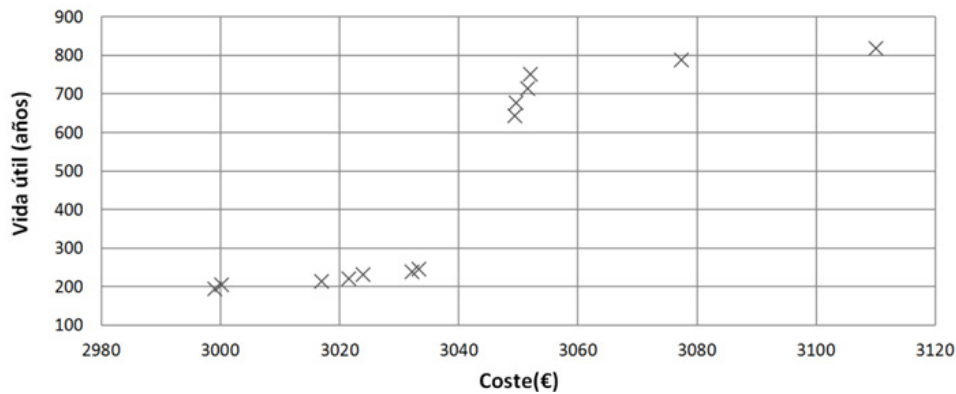


Figura 4. Coste frente durabilidad. Frontera de Pareto

Emisión de CO₂ frente durabilidad

Al analizar la frontera de Pareto de las emisiones de CO₂ frente a la durabilidad (Figura 5), se observa la solución de menor emisión de CO₂ es la solución S2. Las conclusiones obtenidas en este caso son las mismas que en el apartado anterior.

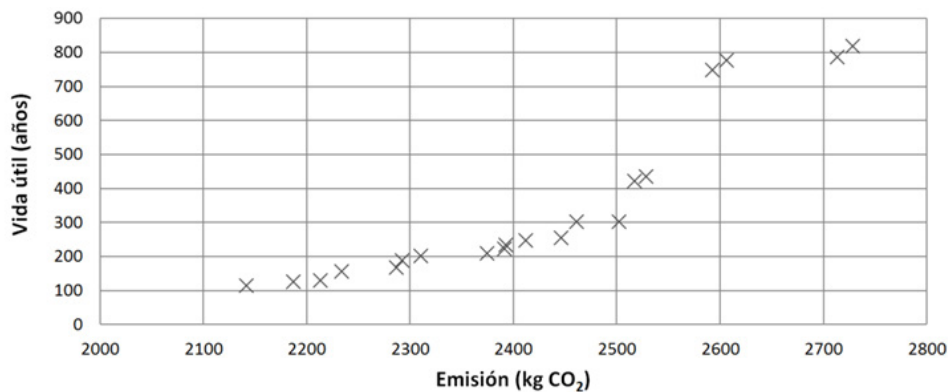


Figura 5. Emisión de CO₂ frente durabilidad. Frontera de Pareto

Tabla 3. Resultados de cinco soluciones óptimas de MOSA

	S1	S2	S3	S4	S5
<i>h</i> (mm)	1250	2000	1400	1650	1300
<i>b_{fs}</i> (mm)	350	350	350	350	400
<i>b_{fi}</i> (mm)	300	300	300	300	300
<i>t_{fs}</i> (mm)	130	80	100	110	130
<i>t_{fi}</i> (mm)	140	110	110	120	180
<i>t_w</i> (mm)	70	70	70	70	100
<i>r</i> (mm)	13	19	16	19	33
<i>n₁</i>	16	6	9	6	9
<i>n₂</i>	4	14	13	12	4
<i>n₃</i>	4	7	17	13	5
<i>n₄</i>	4	6	6	8	10
<i>n₅</i>	10	10	10	10	9
Ø1 (mm)	8	6	8	6	8
Ø2 (mm)	25	10	12	12	25
Ø3 (mm)	25	10	12	10	25
Ø4 (mm)	10	6	8	6	6
Ø5 (mm)	6	6	6	6	6
Ø6 (mm)	6	6	6	6	6
Ø7 (mm)	6	6	6	6	6
Hormigón	CC4	SCC1	SCC3	SCC2	SCC3
ELS deformación ¹	1.00	1.09	1.00	1.00	1.00
ELS fisuración ¹	3.76	2.52	4.26	3.01	2.50
ELS fisuración ²	6.25	4.46	7.13	5.23	4.25
ELU flexión ¹	1.46	1.00	1.43	1.19	1.62
ELU flexión ²	1.19	1.05	1.00	1.08	1.18
ELU cortante ³	1.04	1.00	1.13	1.04	1.01
ELU cortante ²	1.32	1.90	1.45	1.64	1.30
ELU rasante ala comprimada	1.30	2.28	1.62	2.07	1.69
ELU rasante ala traccionada	1.63	3.04	2.09	2.75	3.12
Cantidad de acero (kg)	576.75	309.99	516.96	388.44	577.32
Volumen de hormigón (m ³)	2.27	2.78	2.20	2.56	3.00
Absorción de CO ₂ (kg CO ₂)	160.47	322.88	294.01	331.14	388.78
Coste (€)	2922.95	3327.55	2952.04	3070.34	2999.18
Emisión (kg CO ₂)	3193.11	2142.49	2733.36	2364.53	3088.75
Vida útil (años)	128.12	111.35	102.15	106.99	193.97

Conclusiones

MOSA muestra su capacidad para optimizar el coste, la emisión de CO₂ y la durabilidad de una estructura de hormigón. Pareto demuestra que una reducción de las emisiones de CO₂ y un aumento de la durabilidad es económicamente viable. De hecho, incrementando un 3% el coste se consigue un aumento de la vida útil de la estructura del 51%. En el caso la estructura más ecológica, una disminución de las emisiones de CO₂ del 33% implica un aumento de coste del 14%. También hay soluciones intermedias en las que se ha reducido un 14% y un 26% las emisiones de CO₂, con un aumento del coste del 1 y 5%, respectivamente.

Este estudio revela que la solución más económica utiliza un hormigón convencional de alta resistencia CC4, pues tiene un menor coste por MPa que el hormigón autocompactable SCC4. En cambio, la solución más ecológica utiliza un hormigón autocompactable SCC1 de 35.80 MPa. Como norma general se puede decir que para reducir las emisiones de CO₂ se tiende a aumentar el canto de la sección, utilizar mayor cantidad de hormigón de menor resistencia y reducir la cantidad de acero.

A la vista de los resultados obtenidos sobre durabilidad, se concluye que para estas dosificaciones el recubrimiento es el parámetro más eficaz para maximizar la vida útil sin que ello suponga un gran coste añadido.

Esta herramienta proporciona al proyectista estructural una gran herramienta para elegir soluciones más ecológicas y durables con un sobrecoste razonable. Cabe destacar que esta metodología es aplicable a cualquier estructura de hormigón.

Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto de Investigación BIA2011-23602) y por la Universitat Politècnica de València (Proyecto de Investigación PAID-06-12).

Referencias

- [1] Holland, J., *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press, Ann Arbor, USA, 1975.
- [2] Kirkpatrick, S., Gelatt, C.D, Vecchi, M.P., Optimization by simulated annealing, *Science*, 220(4598), 671-680, 1983. [doi:10.1126/science.220.4598.671]
- [3] Cerny, V., Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm, *Optimization Theory and Applications*, 45, 41-51, 1985. [doi:10.1007/BF00940812]

- [4] Kennedy, J. Eberhart, R., Particle swarm optimization. In: *Proceedings IEEE International Conference on Neural Networks 1942–1948*, IEEE Press, New York 1995.
- [5] Dorigo, M., Maniezzo, V., Colorni, A., The ant system: Optimization by a colony of cooperating agents, *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics - Part B: Cybernetics*, 26(1), 29–41, 1996. [doi:10.1109/3477.484436]
- [6] Basturk, B., Karaboga, D., An Artificial Bee Colony (ABC) algorithm for numerical function optimization, In: *IEEE Swarm Intelligence Symposium*, Indianapolis, Indiana, USA, 2006.
- [7] Karaboga, D., Basturk, B, On the performance of Artificial Bee Colony (ABC), *Applied Soft Computing*, 8(1), 687–697, 2008. [doi.org/10.1016/j.asoc.2007.05.007]
- [8] Krishnanand, K.N., Ghose, D., Glowworm swarm optimization: a new method for optimizing multi-modal functions, *International Journal of Computational Intelligence Studies*, 1(1), 93–119, 2009. [doi.org/10.1504/IJCISTUDIES.2009.515637]
- [9] Jenkins, W.M., Plane frame optimum design environment based on genetic algorithm., *ASCE Journal of Structural Engineering*, 118(11), 3103–3112, 1992. [doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:11(3103)]
- [10] Rajeev, S., Krishnamoorthy, C.S., Discrete optimization of structures using genetic algorithms, *ASCE Journal of Structural Engineering*, 118(5), 1233–1250, 1992. [doi.org/10.1061/(ASCE)0733-9445(1992)118:5(1233)]
- [11] Coello, C.A.C., Christiansen, A.D, Hernandez, F.S, A simple genetic algorithm for the design of reinforced concrete beams, *Engineering with Computers*, 13, 85–96, 1997. [doi.org/10.1007/BF01200046]
- [12] Kousmouisis, V.K., Arsenis, S.J., Genetic algorithms in optimal detailed design of reinforced concrete members, *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 13, 43–52, 1998. [doi.org/10.1111/0885-9507.00084]
- [13] Rafiq, M.Y., Southcombe, C., Genetic algorithms in optimal design and detailing of reinforced concrete columns supported by a declarative approach for capacity checking, *Computers & Structures*, 69(4), 443–457, 1998. [doi.org/10.1016/S0045-7949(98)00108-4]
- [14] Yepes, V., Alcalá, J., Perea, C., Gonzalez-Vidoso, F., A parametric study of optimum earth retaining walls by simulated annealing, *Engineering Structures*, 30(3), 821–830, 2008. [doi:10.1016/j.engstruct.2007.05.023]

- [15] Paya-Zaforteza, I., Yepes, V., González-Vidosa, F., Hospitaler, A., On the Weibull cost estimation of building frames designed by simulated annealing, *Meccanica*, 45, 693–704, 2010. [doi:10.1007/s11012-010-9285-0]
- [16] Martínez-Martín, F.J, González-Vidosa, F., Hospitaler, A, Heuristic optimization of RC bridge piers with rectangular hollow sections, *Computers & Structures* , 88(5-6), 375–386 , 2010. [doi:10.1016/j.compstruc.2009.11.009]
- [17] Carbonell, A., Gonzalez-Vidosa, F., Yepes, V., Design of reinforced concrete road vaults by heuristic optimization, *Advances in Engineering Software*, 42(4), 151-159, 2011. [doi:10.1016/j.advengsoft.2011.01.002]
- [18] Martí, J.V., González-Vidosa F, Yepes, V., Alcalá, J., Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing, *Engineering Structures*, 48, 342–352, 2013. [doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.014]
- [19] Paya-Zaforteza, I., Yepes, V., Hospitaler, A., González-Vidosa, F., CO₂-Efficient Design of Reinforced Concrete Building Frames, *Engineering Structures*, 31(7),1501-1508, 2009. [doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.02.034]
- [20] Yepes, V., González-Vidosa, F., Alcalá, J., Villalba, P., CO₂-Optimization Design of Reinforced Concrete Retaining Walls based on a VNS-Threshold Acceptance Strategy, *Journal of Computing in Civil Engineering*, 26(3), 378-386, 2012. [doi:10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000140]
- [21] Camp, C.V., Huq, F., CO₂ and cost optimization of reinforced concrete frames using a big bang-crunch algorithm, *Engineering Structures*, 48, 363-372, 2013. [doi.org/10.1016/j.engstruct.2012.09.004]
- [22] Sideris, K.K, Anagnostopoulos, N.S, Durability of normal strength self-compacting concretes and their impact on service life of reinforced concrete structures, *Construction and Building Materials* 41, 491–497, 2013. [doi.org/10.1016/j.conbuildmat.2012.12.042]
- [23] Fomento, M., Instrucción de Horimigón Estructural EHE-08, *M. Fomento*, Madrid, Spain, 2008.
- [24] BEDEC, Institute of Construction Technology of Catalonia, Barcelona, Spain, 2013.
- [25] European Federation of Concrete Admixtures Associations.
<http://www.efca.info/publications.html>
- [26] SENDECO₂, Precios CO₂, http://www.sendeco2.com/es/precio_co2.asp?ssidi=1, 2013.

- [27] Tuutti, K., Corrosion of steel in Concrete, *Swedish Cement and Concrete Research Institute*. Stockholm, Sweden, 1982.
- [28] Collins, F., Inclusion of carbonation during the life-cycle of built and recycled concrete: influence on their carbon footprint, *International Journal of Life Cycle Assessment*, 15(6), 549-556, 2010. [doi.org/10.1007/s11367-010-0191-4]
- [29] Lagerblad, B., Carbon dioxide uptake during concrete life-cycle: State of the art, *Swedish Cement and Concrete Research Institute*, Stockholm, Sweden, 2005.
- [30] Suppakitnarm, A., Seffen, K.A., Parks, G.T., Clarkson, P.J., A simulated annealing algorithm for multiobjective optimization, *Engineering Optimization*, 33, 59–85, 2000. [doi.org/10.1080/03052150008940911]
- [31] Medina, J., Estimation of incident and reflected waves using simulated annealing, *Journal of Waterway, Port, Coastal, and Ocean Engineering*, 127(4), 213–21, 2001. [doi.org/10.1061/(ASCE)0733-950X(2001)127:4(213)]

Maximización de beneficios en una empresa de gestión de residuos de construcción y demolición

María del Carmen Escribano Agraz

Mar Gascón Miguel

María José Oliver Torres

David Soler Fernández

Resumen

Una de las aplicaciones más usuales de la Programación Lineal Entera (PLE) es la maximización de los beneficios obtenidos por una empresa que fabrica o gestiona determinados productos, teniendo en cuenta todos sus condicionantes (mano de obra, material, maquinaria, demanda, etc.). Centramos este estudio en una empresa real de gestión de residuos de construcción y demolición (RCDs) ubicada en la provincia de Valencia, con el objetivo de maximizar los beneficios obtenidos con el suministro/recogida a sus clientes de los diversos tipos de contenedores que necesitan para los diversos tipos de RCDs que generan. El suministro/recogida de un contenedor a un cliente lleva asociado un beneficio que depende del tipo de contenedor, del tipo de residuo para el cual se utiliza y de la ubicación del cliente (principalmente de la distancia a la base). Con la previsión del volumen de RCDs que genera cada cliente en un periodo de tiempo y otras restricciones (preferencias de los clientes, jornada laboral, etc.), se trata de determinar los tipos y número de contenedores de cada tipo que a la empresa le interesa suministrar en ese periodo a cada uno de los clientes, de manera que, garantizando la absorción de todo el volumen de RCDs generado, se maximice el beneficio total obtenido. En esta comunicación modelizamos este problema real como un problema de PLE, y para su resolución utilizaremos como software la hoja de cálculo Excel.

Palabras clave: *Residuos de construcción y demolición, programación lineal entera, optimización.*

Introducción

Existe un creciente interés investigador en los temas de gestión de RCDs, con el propósito de evitar y reducir la generación de éstos, promover su reutilización y reciclaje y mejorar la gestión de aquellos residuos que no se pueden evitar. Todo ello debido fundamentalmente al fuerte impacto medioambiental que provocan estos residuos y a la cada vez más exigente normativa al respecto. En este sentido, decenas de artículos se han publicado en los últimos años en revistas científicas

especializadas en construcción o gestión de residuos. Para abreviar, y como artículo muy reciente que sirve para repasar el estado del arte, citaremos a Aldana y Serpell (2012) que presentan un meta-análisis de los contenidos de las publicaciones sobre la gestión de RCDs y recopila los avances sobre los temas más tratados en los últimos años. Cabe decir no obstante que en el último año ya han aparecido una treintena de artículos sobre RCDs, fundamentalmente centrados en el reciclaje de RCDs, en su impacto ambiental y en su cuantificación. Citaremos sólo a modo de ejemplo, el de Sabai et al., (2013) sobre producción de bloques de hormigón con RCDs, el de Herrador et al., (2012) sobre fabricación de pavimento con este tipo de residuo, el de Coelho y de Brito (2012) sobre impacto medioambiental y el de Villoria et al., (2013) sobre estimación de volumen de RCDs generado en España.

Si bien desde el punto de vista conceptual la definición de RCD abarca a cualquier residuo que se genere en una obra de construcción y demolición, realmente la legislación existente limita el concepto de RCD a los residuos codificados en el Capítulo 17 de la Lista Europea de Residuos (lista LER), aprobada por la Orden MAM/304/2002, de 8 de febrero: 17 01 Hormigón, ladrillos, tejas y materiales cerámicos; 17 02 Madera, vidrio y plástico; 17 03 Mezclas bituminosas, alquitrán de hulla y otros productos alquitranados; 17 04 Metales (incluidas sus aleaciones); 17 05 Tierra (incluida la excavada de zonas contaminadas), piedras y lodos de drenaje; 17 06 Materiales de aislamiento y materiales de construcción que contienen amianto; 17 08 Materiales de construcción a partir de yeso y finalmente 17 09 Otros residuos de construcción y demolición.

En España y de forma complementaria, el Real Decreto 105/2008, de 1 de febrero, fomenta una mayor valorización de los RCDs al final de su vida útil, lo que lleva asociadas numerosas dificultades al romper la tendencia en la gestión de los residuos de la construcción, históricamente considerados como inertes. Estas dificultades se centran en tres ámbitos que coinciden con las principales obligaciones derivadas de la aplicación de esta normativa: segregación de los residuos en origen, estimación a priori de la generación de RCDs, y gestión de forma diferenciada las fracciones generadas.

De esta forma, el productor de RCDs difícilmente podrá eludir la contratación de una empresa especializada en la gestión y valorización de RCDs para tratar aquellos residuos que no se puedan reutilizar en la propia obra. Las funciones rutinarias de este tipo de empresas son cinco: suministro de contenedores vacíos a los distintos clientes, recogida y traslado de los contenedores llenos de residuos a la base, clasificación de los distintos tipos de residuos, valorización de aquellos residuos que pueden reciclarse y eliminación de aquéllos no reciclables.

Los mayores ingresos en estas empresas vienen del suministro/recogida a sus clientes de los diversos tipos de contenedores que necesitan para los diversos tipos de RCDs que generan. Una empresa de este tipo dispone de varios clientes y cada

cliente genera unos tipos y cantidades de RCDs según su condición (obra nueva, reformas, talleres,...). La empresa tiene varios tipos de contenedores para la recogida por separado de estos residuos, según la legislación vigente. El suministro/recogida de un contenedor a un cliente supone un beneficio que depende básicamente del tipo de contenedor, del tipo de residuo para el cual se utiliza y de la distancia del cliente a la base. Con la previsión (obligatoria por ley) del volumen de RCDs que genera cada cliente en un periodo de tiempo y otras restricciones (preferencias de los clientes, jornada laboral, etc.), se trata de determinar los tipos y número de contenedores de cada tipo que a la empresa le interesa suministrar en ese periodo a cada uno de los clientes, de manera que, garantizando la absorción de todo el volumen de RCDs generado, se maximice el beneficio total obtenido en esta gestión.

Por otro lado, la Programación Lineal Entera (PLE) -ver por ejemplo el texto de Salazar (2001)-, ha mostrado su efectividad para modelizar matemáticamente problemas reales en los que se busca la maximización de los beneficios obtenidos por una empresa que fabrica, gestiona o transporta determinados productos, teniendo en cuenta todos sus condicionantes (mano de obra, material, maquinaria, demanda, vehículos disponibles, distancias, etc.). En particular, gracias a la Teoría de Grafos, muchos problemas de optimización que tienen que ver con rutas de vehículos o transporte de todo tipo material, pueden ser modelizados y resueltos como un problema de PLE. Sólo a título de curiosidad citaremos el artículo de Öncan et al., (2009) en el que comparan 24 formulaciones diferentes como problema de PLE existentes para el conocido como Problema del Agente Viajero Asimétrico, muy importante debido a sus aplicaciones en diversos campos de la ingeniería. Citar también el clásico Problema del Transporte, de indudable aplicación en el campo de la Construcción (minimizar el coste del transporte de todo tipo de material desde las fábricas o almacenes a las obras) y que es uno de los ejemplos típicos de aplicación de la PLE (Salazar, 2001).

En esta comunicación presentamos la resolución al problema de maximización de beneficios anteriormente citado en el caso real de una empresa de gestión y valorización de RCDs de la provincia de Valencia, modelizándolo como un PLE y utilizando el complemento *Solver* de EXCEL como medio informático para obtener la solución óptima. Notar que esta modelización podría extenderse a casos más complejos del visto aquí, como comentaremos en las conclusiones.

Aplicación de la PLE a un problema real de gestión de RCDs

Presentamos en esta sección la resolución de un problema real de optimización de beneficios en el suministro/recogida de contenedores de RCDs. Tanto la empresa como los clientes están ubicados en la provincia de Valencia, pero por solicitud de

anonimato, no mencionaremos ni sus nombres ni las ubicaciones de las obras que ejecutan.

Datos del problema

Por razones de operatividad, la empresa asigna a uno de sus operarios el suministro/recogida de contenedores de RCDs en exclusiva de tres de sus clientes durante el próximo mes, siendo la jornada laboral del operario de ocho horas, los 22 días laborables de ese mes. Notar que por las características del trabajo a realizar, se pacta una cierta flexibilidad en la jornada laboral, pudiendo ser alargada un día concreto dentro de un margen si las condiciones lo requieren, compensándolo entonces con un acortamiento en días posteriores, o al revés, de ahí que la disponibilidad horaria se considere en bloque para todo el periodo de tiempo.

Dada la naturaleza de las obras, la empresa pone a disposición del operario cinco tipos de contenedores para la recogida de los distintos tipos de residuos, que también son cinco. Notar que asociamos cada cliente a una única obra, por lo que será indistinto hablar de cliente que de obra y utilizaremos uno u otro vocablo en función del contexto.

Denotaremos los contenedores por: **C1** contenedor de 2,5 m³; **C2** contenedor de 5 m³; **C3** contenedor de 5,5 m³ cerrado; **C4** contenedor de 8 m³ y **C5** contenedor de 14 m³.

Denotaremos los tipos de residuos por: **R1** escombros limpios; **R2** escombros mezclados; **R3** plástico; **R4** madera y **R5** papel y cartón.

Una vez conocida la cantidad de metros cúbicos de un determinado tipo de residuo que un cliente prevé generar en el periodo de tiempo establecido, y en función de otros factores, principalmente la experiencia, para una mayor operatividad de la empresa se establecen un mínimo y un máximo (un intervalo) sobre el volumen de residuo previsto, de manera que dado el volumen definitivo dentro de ese intervalo, la empresa tendrá la garantía de absorción de ese volumen con los contenedores asignados. Téngase en cuenta a este respecto que un contenedor podría ser retirado sobrepasando ligeramente la capacidad establecida. La Tabla 1 muestra los valores mínimo y máximo de volumen asignados por la empresa a cada tipo de residuo por cada cliente, en función de los datos proporcionados por éstos.

Por las características de cada obra (accesibilidad, emplazamiento, condiciones municipales), por las exigencias de cada cliente y también por estrategia de la empresa, el número de cada tipo de contenedor para cada tipo de residuo y cliente está sujeto a unos márgenes, según indican los siguientes párrafos.

El **Cliente 1** produce los 5 tipos de residuos y sólo usará contenedores de los tipos C1 y C2. El número de contenedores del tipo C1 para el residuo R2 en esta obra no

debe ser menor de 4 ni superar los 7. Para el tipo C2 y residuo R4 serán necesarios al menos 2. Por último, para el tipo C2 y residuo R5 no menos de 3.

El **Cliente 2** produce también los 5 tipos de residuos pero sólo usará contenedores de los tipos C2, C3 y C4. El número de contenedores del tipo C4 para el residuo R1 en esta obra no debe ser menor de 7. Para el tipo C2 y residuo R2 serán necesarios al menos 10 pero no más de 23. Para el tipo C3 y residuo R3 no menos de 6. Para el tipo C2 y residuo R4 no menos de 5. Por último, para el tipo C3 y residuo R5 no menos de 15 pero no más de 22.

El **Cliente 3** produce residuos R3, R4 y R5 y usará contenedores de los tipos C2 y C5. El número de contenedores del tipo C2 para el residuo R3 estará comprendido entre 12 y 20 unidades. Para el tipo C5 y residuo R4 serán necesarios al menos 20 pero no más de 36. Por último, para el tipo C2 y residuo R5, no menos de 17 y no más de 25.

Tabla 1. Valores mínimo y máximo de cada residuo por cada cliente en m³.

Tipo residuo	Cliente 1		Cliente 2		Cliente 3	
	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo	Mínimo	Máximo
R1	9,00	11,00	108,00	132,00	-	-
R2	15,75	19,25	117,90	144,10	-	-
R3	9,20	10,80	50,05	59,95	92,00	108,00
R4	13,65	16,35	42,32	49,68	458,64	549,36
R5	22,50	27,50	111,32	130,68	112,50	137,50

El tiempo en horas establecido para realizar un servicio de recogida/reparto (un servicio incluye ambos hechos) a un cliente de un tipo de contenedor para un tipo concreto de residuo, depende de varios factores, fundamentalmente de la ubicación del cliente (camino más corto de la base al cliente y viceversa) y del tiempo de carga/descarga de ese tipo de contenedor, tanto vacío como lleno de ese residuo. La dependencia del tipo de residuo viene dada por la diferencia de peso a igual volumen entre diferentes residuos. Por otro lado, de manera obvia, el beneficio obtenido en cada servicio de recogida/reparto dependerá también del cliente (ubicación, tiempo de servicio), del tipo de contenedor y del tipo de residuo. Las Tablas 2 y 3 muestran los tiempos y beneficios respectivamente estimados por la empresa de cada recogida/reparto por cliente, tipo de contenedor y tipo de residuo. Un vacío en una celda indicará que ese cliente no genera ese tipo de residuo o no usa ese tipo de contenedor.

Tabla 2. Tiempo de cada recogida/reparto en horas.

Contenedor	Cliente	R1	R2	R3	R4	R5
C1	1	1,50	1,50	1,38	1,43	1,38
C2	1	1,70	1,70	1,45	1,52	1,45
	2	1,12	1,12	1,02	1,06	1,02
	3	-	-	0,95	1,05	0,95
C3	2	1,12	1,12	1,02	1,06	1,02
C4	2	1,28	1,28	1,17	1,22	1,17
C5	3	-	-	1,05	1,12	1,05

Tabla 3. Beneficio de cada recogida/reparto en euros.

Contenedor	Cliente	R1	R2	R3	R4	R5
C1	1	9,50	10,50	15,00	12,50	17,50
C2	1	11,50	12,50	16,50	14,50	19,00
	2	9,60	10,20	14,70	12,80	17,60
	3	-	-	15,60	13,60	18,50
C3	2	10,75	12,80	16,80	13,50	19,10
C4	2	13,80	14,60	17,50	15,20	21,00
C5	3	-	-	24,90	20,80	27,80

Como dijimos en la introducción, con todos los datos dados en este apartado, se trata de determinar los tipos y número de contenedores de cada tipo que a la empresa le interesa suministrar en ese periodo a cada uno de los clientes, de manera que, garantizando la absorción de todo el volumen de RCDs generado, se maximice el beneficio total obtenido en esta gestión.

Formulación del problema

Si denotamos por x_{ijk} la variable que indica el número de contenedores de tipo C_i servidos al cliente j para residuo del tipo R_k en los 22 días laborables estipulados, podemos formular el problema anterior como un problema de PLE en la siguiente forma:

Función objetivo: Maximizar $(9,5x_{111} + 10,5x_{112} + 15x_{113} + 12,5x_{114} + 17,5x_{115} + 11,5x_{211} + 12,5x_{212} + 16,5x_{213} + 14,5x_{214} + 19x_{215} + 9,6x_{221} + 10,2x_{222} + 14,7x_{223} + 12,8x_{224} + 17,6x_{225} + 15,6x_{233} + 13,6x_{234} + 18,5x_{235} + 10,75x_{321} + 12,8x_{322} + 16,8x_{323} + 13,5x_{324} + 19,1x_{325}$

$$+ 13,8x_{421} + 14,6x_{422} + 17,5x_{423} + 15,2x_{424} + 21x_{425} + 24,9x_{533} + 20,8x_{534} + 27,8x_{535})$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

- De tiempo:

$$1,5x_{111} + 1,5x_{112} + 1,38x_{113} + 1,43x_{114} + 1,38x_{115} + 1,7x_{211} + 1,7x_{212} + 1,45x_{213} + 1,52x_{214} + 1,45x_{215} + 1,12x_{221} + 1,12x_{222} + 1,02x_{223} + 1,06x_{224} + 1,02x_{225} + 0,95x_{233} + 1,05x_{234} + 0,95x_{235} + 1,12x_{321} + 1,12x_{322} + 1,02x_{323} + 1,06x_{324} + 1,02x_{325} + 1,28x_{421} + 1,28x_{422} + 1,17x_{423} + 1,22x_{424} + 1,17x_{425} + 1,05x_{533} + 1,12x_{534} + 1,05x_{535} \leq 176$$

- De garantía de absorción de todos los residuos:

En obra 1:

$$\begin{aligned} 9 \leq 2,5x_{111} + 5x_{211} \leq 11; & \quad 15,75 \leq 2,5x_{112} + 5x_{212} \leq 19,25 \\ 9,2 \leq 2,5x_{113} + 5x_{213} \leq 10,80; & \quad 13,65 \leq 2,5x_{114} + 5x_{214} \leq 16,35 \\ 22,5 \leq 2,5x_{115} + 5x_{215} \leq 27,5 \end{aligned}$$

En obra 2:

$$\begin{aligned} 108 \leq 5x_{221} + 5,5x_{321} + 8x_{421} \leq 132; & \quad 117,9 \leq 5x_{222} + 5,5x_{322} + 8x_{422} \leq 144,10; \\ 50,05 \leq 5x_{223} + 5,5x_{323} + 8x_{423} \leq 59,95; \\ 42,32 \leq 5x_{224} + 5,5x_{324} + 8x_{424} \leq 49,68; \\ 111,32 \leq 5x_{225} + 5,5x_{325} + 8x_{425} \leq 130,68 \end{aligned}$$

En obra 3:

$$\begin{aligned} 92 \leq 5x_{233} + 14x_{533} \leq 108 \quad ; \quad 458,64 \leq 5x_{234} + 14x_{534} \leq 549,36 \\ 112,5 \leq 5x_{235} + 14x_{535} \leq 137,5 \end{aligned}$$

- De número de contenedores de cada tipo:

$$\text{En obra 1: } 4 \leq x_{112} \leq 7 \quad ; \quad x_{214} \geq 2 \quad ; \quad x_{215} \geq 3$$

$$\text{En obra 2: } 10 \leq x_{222} \leq 23 \quad ; \quad x_{224} \geq 5 \quad ; \quad x_{323} \geq 6 \quad ; \quad 15 \leq x_{325} \leq 22 \quad ; \quad x_{421} \geq 7$$

$$\text{En obra 3: } 12 \leq x_{233} \leq 20 \quad ; \quad 17 \leq x_{235} \leq 25 \quad ; \quad 20 \leq x_{534} \leq 36$$

- De no negatividad e integridad de las variables: $x_{ijk} \in Z^+ \cup \{0\} \quad \forall i, j, k$

La función objetivo es la suma de cada variable multiplicada por su beneficio unitario (dado en Tabla 3). La restricción de tiempo indica que la suma de las variables

multiplicadas por sus tiempos de recogida/reparto (dados en Tabla 2) no debe superar las 176 horas de trabajo del operario (8 horas diarias por 22 días). Las restricciones de garantía de absorción de los residuos indican que el volumen total de los contenedores asignados a cada cliente y residuo debe estar comprendido entre los valores mínimo y máximo asignados (dados en Tabla 1). Las restricciones de número de contenedores de cada tipo se obtienen directamente del enunciado. Por último, destacar la necesidad de exigir la no negatividad e integridad de cada variable, para evitar soluciones no realistas.

Resolución del problema

Dada la complejidad exponencial de un problema de PLE, éste no puede ser resuelto sin ayuda de ordenador, salvo ejemplos pequeños de manual. Existen en el mercado programas informáticos capaces de resolver problemas de PLE con miles de variables y de restricciones. Podemos citar por ejemplo CPLEX (<http://www-01.ibm.com/software/commerce/optimization/cplex-optimizer/>) o LINGO (http://www.lindo.com/index.php?option=com_content&view=article&id=2&Itemid=10). Para problemas con no muchas variables (varias decenas de variables), se puede usar software más accesible a los no expertos en PLE, como MATHEMATICA (<http://www.wolfram.com/>) si se trabaja en entorno universitario, o EXCEL (<http://office.microsoft.com/es-es/excel/>), a través de su complemento *Solver*, no activado por defecto. Se puede decir que EXCEL es de acceso casi universal para aquellos usuarios de entorno WINDOWS.

Nuestro problema contiene 31 variable enteras, así que hemos optado por resolverlo con EXCEL (v. 2010). La solución óptima que proporciona (notar que la solución óptima a un problema de PLE no tiene por qué ser única), se muestra a través de la Tabla 4, y supone un beneficio total de **2.643,20** euros en el periodo establecido.

Tabla 4. Valor de las variables en la solución óptima a nuestro problema de PLE.

Contenedor	Cliente	R1	R2	R3	R4	R5
C1	1	x111=0	x112=5	x113=0	x114=0	x115=1
C2	1	x211=2	x212=1	x213=2	x214=3	x215=4
	2	x221=0	x222=10	x223=0	x224=5	x225=0
	3	-	-	x233=12	x234=0	x235=17
C3	2	x321=0	x322=1	x323=8	x324=2	x325=19
C4	2	x421=14	x422=8	x423=1	x424=1	x425=1
C5	3	-	-	x533=3	x534=33	x535=2

Conclusiones

El objetivo de esta comunicación ha sido demostrar que el problema de maximizar beneficios en la gestión de entrega/recogida de contenedores de RC&D puede ser modelizado y resuelto óptimamente mediante un problema de PLE. Aquí hemos formulado un caso concreto correspondiente a una empresa real ubicada en la provincia de Valencia, pero esta formulación puede generalizarse a situaciones aquí no contempladas, bien relajando o modificando algunas de sus restricciones, bien añadiendo nuevas restricciones. Así por ejemplo, una generalización natural sería el considerar más de un operario para la recogida/reparto de contenedores. En este caso, tanto los tiempos como los beneficios unitarios dependerían también del trabajador que realizara la recogida/reparto, en función de su productividad, tipo de contrato, sueldo, etc.

Referencias

- [1] Aldana, J. & Serpell, A. (2012). Temas y tendencias sobre residuos de construcción y demolición: un meta-análisis. *Revista de la Construcción*, 12, 4-16.
- [2] Coelho, A. & de Brito, J. (2012). Influence of construction and demolition waste management on the environmental impact of buildings. *Waste Management*, 32, 532-541.
- [3] Herrador, R., Pérez, P., Garach, L. & Ordóñez, J. (2013). Use of recycled construction and demolition waste aggregate for road course surfacing. *Journal of Transportation Engineering*, 138, 182-190.
- [4] Öncan, T., Altinel, I. K. & Laporte, G. (2009). A comparative analysis of several asymmetric traveling salesman problem formulations. *Computers & Operations Research*, 36, 637-654.
- [5] Sabai, M.M., Cox, M.G.D.M., Mato, R.R., Egmonda, E.L.C. & Lichtenberga, J.J.N. (2013). Concrete block production from construction and demolition waste in Tanzania. *Resources Conservation and Recycling*, 72, 9-19.
- [6] Salazar, J.J. Programación Matemática. Díaz de Santos (Ed.). 2001.
- [7] Villoria, P., del Río, M. & Porras, C. (2012). Estimation of construction and demolition waste volume generation in new residential buildings in Spain. *Waste Management & Research*, 30, 137-146.

Diseño automático de forjados de chapa nervada, con criterios de economía sostenible.

Ángela Bárcena Saiz, anbarsai@posgrado.upv.es

Víctor Yepes Piqueras, vyepesp@upv.es

Julián Alcalá González, jualgon@upv.es

José Vicente Martí Albiñana, jvmartia@upv.es

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Palabras clave: Optimización, heurística, forjado mixto, sostenibilidad.

Resumen

Los forjados mixtos con chapa colaborante son una tipología de estructuras horizontales que está experimentando un crecimiento continuo en las últimas décadas. Su optimización presenta un enorme interés para conseguir diseños más asequibles y sostenibles, que permitan un mejor aprovechamiento de los recursos necesarios. El objetivo de este trabajo es aplicar técnicas heurísticas para este tipo de forjados, permitiendo plantearse el problema de una manera más compleja, utilizando una definición completa del forjado mixto y sus componentes, mientras que al mismo tiempo satisface las restricciones de este tipo de estructuras. Los algoritmos de optimización aplicados a la estructura se basan en tres metaheurísticas: búsqueda local de descenso (DLS), recocido simulado (SA) y el umbral de aceptación (TA). Se muestran las principales características, los parámetros que deben calibrarse y los diferentes modos de selección de dichos parámetros, para cada una de las heurísticas. La comparación de los resultados ha permitido señalar la SA como la mejor heurística de todas ellas. Por último, una vez seleccionado el mejor calibración de la SA, se ha estudiado la sensibilidad del modelo y un estudio paramétrico con diferentes tramos horizontales.

Introducción.

Desde su aparición a mediados del siglo XX la inteligencia artificial se ha introducido en diferentes campos, entre los que cabe destacar la programación automatizada para la resolución de problemas con restricciones. La optimización estructural forma parte de este tipo de problemas. Ello ha permitido cambiar el proceso tradi-

cional de diseño de estructuras, basado en un predimensionamiento inicial fruto de la experiencia y conocimiento del proyectista, y una posterior comprobación del diseño hasta que se verifique la normativa en vigor, debiendo aplicar ajustes y correcciones sobre el diseño inicial. Con la aplicación de la inteligencia artificial se aleja el planteamiento artesanal exacto de diseño para conseguir un procedimiento objetivo en la elección de dimensiones y materiales. Para la optimización de las estructuras es posible el uso de métodos heurísticos tales como algoritmos genéticos, aceptación por umbrales, búsqueda tabú, colonias de hormigas, etc. [1-9].

En este trabajo se muestra la aplicación de un proceso de optimización de este tipo. La estructura es un forjado mixto con chapa nervada colaborante. Está formado por hormigón dispuesto sobre una chapa nervada, comportándose como un forjado unidireccional donde la armadura necesaria que trabaja a tracción para soportar los momentos positivos es la propia chapa, colaborando el hormigón como bloque comprimido en esas secciones. Además la sección del hormigón se ve complementada con un mallazo en la parte superior como armadura para repartir cargas y absorber esfuerzos de retracción. Si existen zonas de momentos negativos es preciso incorporar armadura superior mediante barras corrugadas. La losa mixta va conectada a las vigas mediante el uso de fijaciones o conectores.

El principal objetivo de este trabajo es optimizar este tipo de estructuras de edificación. Para obtener el diseño, el primer paso es la comprobación estructural, para lo que es necesario conocer la normativa vigente, tanto en el ámbito español como europeo relativo al diseño de forjados mixtos con chapa nervada. En segundo lugar se realiza la optimización, de modo que se consiga la estructura de menor consumo energético o coste posible. Para ello es necesario realizar un estudio de diferentes heurísticas, buscando la que mejor se adapte al problema y de mejores resultados, tanto en relación a los valores medios y mínimos en función de los tiempos de ejecución, como en la dispersión de los resultados.

Planteamiento del problema

El diseño automático de forjados de chapa nervada planteado se basa en una optimización económica-sostenible. Se trata de disminuir la función objetivo (1), que toma la forma (2), modificando las variables x_i y fijando los parámetros p_n , verificando que cumple todas las restricciones (3).

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \quad (1)$$

$$f(\bar{x}, \bar{p}) = \sum_{i=1, m} c_i m_i(\bar{x}, \bar{p}) \quad (2)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n; p_1, p_2, \dots, p_n) \leq 0 \quad j = 1, m \quad (3)$$

Variables

Las variables son valores que definen la estructura, que son modificadas por el algoritmo de búsqueda durante el proceso de optimización. Se definen ocho variables discretas para poder construir el forjado objeto con el resultado del proceso de optimización como se puede observar en la Figura 1.



Figura 1 Variables del problema.

La primera de las variables es geométrica, con la que queda definido el canto total del forjado (h_i). En este caso, todas las chapas con las que trabajamos para hacer el estudio tienen una altura de 60 mm, y según lo especificado en la EN 1994, el espesor mínimo de hormigón sobre la superficie plana principal de la parte superior de los nervios de las chapas deber ser de 40 mm, por ello tomamos valores entre 100 y 350 mm en intervalos de 5 mm, por lo que podrá tomar 51 valores distintos.

La siguiente variable es la resistencia característica a compresión a 28 días de edad del hormigón armado HA. El hormigón a emplear será alguno de los tipos especificados en la EHE-08 [5], exceptuando aquellos con $f_{ck} \leq 20$, los cuales quedan restringidos para hormigones armados. Estos tipos pueden tomar 25, 30, 35, 40, 45 y 50 N/mm².

Las variables que definen a las armaduras pasivas se distinguen entre armadura longitudinal y armadura antisifuración. La primera se dispone en toda la longitud de los nervios de la chapa como armadura inferior si es necesario por flexión de momentos positivos, se supone que la armadura superior de momentos negativos no es necesaria al tratarse de un forjado de un vano simplemente apoyado. Depende de dos variables, una de ellas el número de barras, que tendrá un máximo de 11 barras, y la posibilidad de no necesitar de su colocación, por lo que son 12 valores deferentes. La otra variable es su diámetro que se define en los párrafos siguientes.

La armadura antisifuración es colocada en la parte superior del forjado, distribuida por toda la superficie, tanto en dirección longitudinal como transversal. Las mallas serán cuadradas, teniendo la misma separación entre barras en ambas direcciones.

La separación máxima dispuesta es de 33 cm con un número de cuatro barras por metro lineal, y una separación mínima de 11 cm con 10 barras por metro lineal. Esta variable toma siete valores diferentes.

Todas las armaduras pasivas dispuestas pueden tomar como variable uno de los ocho valores distintos según la dimensión del diámetro en mm de la barra dispuesta y de acuerdo con la instrucción EHE-08 [10] son: 6-8-10-12-16-20-25-32.

Las variables que determinan la chapa son dos, una de ellas depende de sus características geométricas y la otra de las mecánicas. Debido a la complejidad de la geometría de los perfiles de chapa nervada es necesario disponer de las características de los mismos facilitadas por le empresa HIASA [11], la cual suministra nueve tipos de chapa HLM 60-220. La primera variable será el espesor de la chapa t_s que podrá tomar 3 valores distintos, 0,8 , 1 o 1,20 mm. Y por el otro lado dependerá del valor del límite elástico del acero de la placa nervada f_{yp} que toma valores de 250, 320 o 350 N/mm².

De acuerdo con los posibles valores descritos anteriormente que pueden tomar las variables definidas, la dimensión total del problema será de $1,48 \cdot 10^7$, como se puede observar en la Tabla 1.

Tabla 1 Tamaño del problema

Parámetro	Valor
Geométrico	
ancho del forjado	5.00 m
luz del forjado	3.50 m
Características geométricas del perfil	
b ancho	967 mm
h_p altura	60 mm
cdg altura del cdg	32.11mm
d_n distancia entre ejes de nervios contiguos	220 mm
n anchura de la cara superior de los nervios	80 mm
c_n Anchura de la base de los contranervios	60 mm
rad ángulo de las diagonales con la horizontal	0.98 rad
Características mecánicas del perfil	
E módulo de elasticidad del acero	210000 N/mm ²
mk	101.365
kk	0.045
Características del hormigón armado	
tipo de ambiente	IIa
recubrimiento mínimo	20 mm
tipo de acero	B500S
Relacionado con las cargas	
Carga muerta procedente del pavimento	1 KN/m
Sobrecarga de uso	3 KN/m
Otras cargas	0 KN/m

Parámetros

Con el fin de limitar los casos a estudiar, pues la casuística que puede presentar un forjado mixto con chapa nervada es muy amplia, solamente se ha contemplado el uso de forjados simplemente apoyados con chapas de determinadas características geométricas fijadas, sin que suponga pérdida de generalidad en la investigación.

Tabla 2 Parámetros del problema

Variables	Valores
Geométricas	
	51
Hormigón	
	6
Armadura pasiva	
Nº de barras por nervio	12
Ø de la armadura inferior	8
Nº de barras p.m.l.	7
Ø de la armadura <u>antifisuración</u>	8
Chapa Nervada	
t_s espesor(mm)	3
f_{yp} límite elástico del acero	3
Dimensión total = $\prod_{i=1}^8 x_i$	
	1.48 10 ⁷

Se trata de un forjado de 5 m de ancho y 3,50 m de luz, formado por una sección en todo el desarrollo de su longitud, compuesta por una placa conformada de la casa HIASA, con las características geométricas y mecánicas fijadas que parecen en la Tabla 2.

También forma parte de esta sección el hormigón armado, que de acuerdo con el artículo 37 de la instrucción EHE-08 [10], tendrá un recubrimiento superior de 20 mm, situando el forjado en un ambiente IIa y con un control de ejecución normal. El recubrimiento inferior en nervio de 33 mm.

La armadura pasiva se supone siempre de acero soldable B500S con un límite elástico $f_{sk} \geq 500$. El acero B400S no se utiliza en forjados debido a su menor límite elástico, que no se compensa con la diferencia de consumo energético o coste, ya que muchas veces es inexistente.

Se considerar que el forjado se encuentra en una zona residencial destinada a trasteros con una sobrecarga de uso de 3 KN/m² según el CTE-SE-AE [12], y un peso propio del solado y la tabiquería de 1KN/m² de superficie construida.

Función objetivo

La función objetivo es resultado del sumatorio del producto de la medición de una unidad de obra por su valor, ya sea consumo energético o coste, según la finalidad del estudio.

Un forjado mixto con chapa nervada es una unidad de obra compleja, la cual se divide las siguientes unidades simples: el volumen de hormigón armado, los pesos del acero en armaduras pasivas y la superficie de la chapa. Las mediciones de estas unidades de obra se obtienen a partir de las variables y parámetros elegidos.

El cálculo de los pesos de las armaduras también se obtiene a partir de las variables y los parámetros de la función, pero además deben cumplir unas condiciones y dimensiones dispuestas por la normativa.

Será necesario conocer los valores de todas las unidades de obra simple que intervienen en la medición, tanto su consumo energético como su precio. Los utilizados se pueden apreciar en la Tabla 3, los pertenecientes a los tipos de chapa han sido facilitados por la empresa HIASA, y el resto proceden del banco BEDEC del ITEC [13].

Tabla 3 Valores de las unidades de obra

Unidad	Descripción de la unidad de obra	Consumo energético (Kw-h)	Precio(€)
m ³	Hormigón HA-25	371.28	76.00
m ³	Hormigón HA-30	385.05	80.00
m ³	Hormigón HA-35	398.83	86.00
m ³	Hormigón HA-40	412.60	90.00
m ³	Hormigón HA-45	426.37	94.00
m ³	Hormigón HA-50	440.14	99.00
m ²	Chapa 1	106.36	26.97
m ²	Chapa 2	119.48	28.47
m ²	Chapa 3	132.60	29.97
m ²	Chapa 4	141.81	30.15
m ²	Chapa 5	154.93	31.65
m ²	Chapa 6	168.05	33.15
m ²	Chapa 7	177.26	35.18
m ²	Chapa 8	190.38	36.68
m ²	Chapa 9	203.50	38.18
kg	Acero	10.44	1.21

Restricciones estructurales

Para la comprobación de los estados límite de este tipo de estructura, hemos tenido en cuenta tanto la normativa española, Instrucción EHE-08, como la normativa europea, Eurocódigo 4, UNE-ENV 1994-1-1 [14]. También se han aplicado las recomendaciones del estudio de Iglesias [15] y de monografía M-14 ACHE [16].

En este tipo de forjados, podemos observar dos estados estructurales completamente distintos, por lo que es necesario estudiar las acciones en cada uno de esos estados:

- Fase de ejecución. La chapa de acero nervada actúa como encofrado, y por tanto debe ser capaz de resistir las cargas mientras actúa como molde del hormigón fresco.
- Fase de uso. El hormigón ya se ha solidarizado con el acero, formando una sección mixta acero-hormigón.

En ambas fases descritas se realizará las comprobaciones de los estados límite últimos y de servicio.

Heurísticas empleadas

Las tres heurísticas empleadas para realizar la optimización del problema definido en este trabajo son denominadas como técnicas de búsqueda secuencial por entornos. Estos algoritmos comienzan en una solución inicial, a partir de la cual comienza un proceso iterativo. En cada iteración la solución es ligeramente modificada mediante un movimiento que genera otra solución que reemplaza a la anterior si se cumple algún criterio de aceptación. Cada heurística de esta familia emplea un criterio de aceptación diferente y que las caracteriza. El algoritmo se detiene cuando se cumple alguna condición de parada, y la mejor solución que haya surgido durante el proceso, es el resultado de la optimización.

El primer método empleado es búsqueda de máximo gradiente o también denominado *descent local search* (DLS en adelante), toma un criterio de admitir solo movimientos de mejora o una aceptación voraz, que consiste en no admitir ninguna nueva solución que no mejore a las anteriormente buscadas. Todas las trayectorias que se obtienen con este algoritmo son decrecientes al tratarse de un problema de minimización. Únicamente se admiten las soluciones que cumplan con un criterio de aceptación anteriormente definido, y que además sean soluciones factibles. Este tipo de algoritmo tiene una gran desventaja, cuando se encuentra con un óptimo local, ya sea de buena o mala calidad, se queda atrapado en él, sin poder escapar en búsqueda de más soluciones, por lo que como mucho llegará a alcanzar el óptimo más cercano a la solución inicial.

Seguidamente se ha programado el recocido simulado (*simulated annealing*, SA en adelante), conocido también como recocido simulado. Su funcionamiento se asimila a un proceso físico de recocido que inicialmente reblandece el sólido mediante su calentamiento a una temperatura muy elevada, y luego esta temperatura va disminuyendo lentamente hasta que las partículas por sí mismas se van ordenando hasta conseguir el estado fundamental del sólido. Para simular la evolución de un sólido en el baño térmico se emplea el Algoritmo de Metrópolis [17], el cuál fue desarro-

llado introduciendo optimización combinatoria por Kirkpatrick y otros [18]. Desarrollaron la relación de los sistemas físicos que llevan asociados los estados de energía, con los problemas de optimización, del siguiente modo:

- La energía de los estados con el valor de la función objetivo (consumo energético o coste)
- El estado fundamental con el óptimo global, y los estados meta-estables con los óptimos locales.
-

De este modo se deja a un lado la aceptación voraz, y se introduce una aceptación probabilística de soluciones de peor calidad durante la búsqueda, basada en la siguiente expresión:

$$P = e^{-\frac{\Delta C}{T}} \quad (1)$$

Donde ΔC es el incremento del valor de dos soluciones, y T un parámetro de control de la heurística denominado temperatura. Si se analiza su comportamiento en función de la temperatura, vemos que, conforme disminuye ésta, disminuye rápidamente la probabilidad de que aceptemos una solución peor que la actual. La temperatura inicial se va disminuyendo geométricamente mediante un coeficiente de enfriamiento K ($T=KT$).

El último método programado es la aceptación por umbrales o *threshold accepting*, TA en adelante, desarrollada por Dueck y Scheuert [19]. Consiste en un criterio de aceptación de soluciones deterministas. Se establece un empeoramiento permitido, y se admite cualquier solución que no suponga una degradación mayor que la determinada. El empeoramiento permitido se define como umbral, y se va reduciendo durante el proceso, pudiendo llegar al final de la búsqueda a convertirse en un DLS, si esta tiene un número alto de iteraciones. El umbral inicial, la reducción del umbral o el criterio de parada, son parámetros del algoritmo que se deben determinar mediante una calibración del algoritmo. La aceptación de soluciones peores a la actual nos ayuda, al igual que ocurre en el SA, a alcanzar soluciones de alta calidad.

Aplicación de las heurísticas

Las tres heurísticas descritas en el apartado anterior se han aplicado al mismo forjado mixto de 3,50 m de luz, para obtener una muestra de resultado y poder comparar la eficiencia de éstas. A continuación se observan los resultados obtenidos.

Resultados del método DLS

El principal objetivo de éste método es examinar los movimientos. Se han empleado dos tipos diferentes de movimiento, el primero "FX", ha consistido en fijar el

número de variables que va a modificar, variando 1, 2, 3, 4, 5 ó 6 variables simultáneamente. El otro tipo de movimiento “HX” se ha realizado estableciendo un número máximo de variables a modificar en cada iteración, que son de 1 a 6. Previamente el movimiento selecciona aleatoriamente el número de variables a modificar, que estará entre una y el número máximo establecido. Se han obtenido soluciones con todos los movimientos para 10, 100, 1000, 10000 y 100000 iteraciones sin mejora.

Los consumos medios obtenidos para el forjado se muestran en la Figura 2. En ella se han representado los consumos medios de los veinte reinicios ejecutados para los cinco criterios de parada. Finalmente el consumo medio mínimo ha sido obtenido por el movimiento FX_3 de 4226,722 KW·h, con una duración media de 0,051 seg. Entre sus veinte reinicios el consumo mínimo obtenido es de 3983,53 con un tiempo de 0,437 seg.

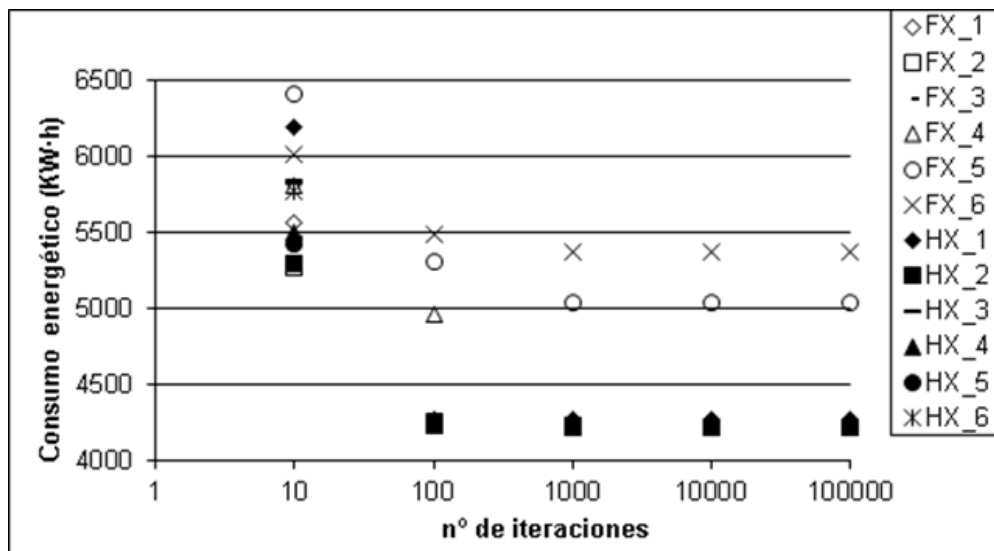


Figura 2 Consumos medios de las soluciones óptimas con distintos movimientos empleando el método DLS.

Resultados del método SA

Para la aplicación a la estructura objeto de la heurística SA, se he generado la solución inicial como en el método descrito anteriormente, y para la ejecución de los movimientos se ha utilizado el movimiento FX_3. Para determinar la temperatura inicial se han efectuado pruebas sobre el algoritmo implementado, tomando temperaturas equivalentes a un 20, 40, 60 y 80% del coste de la solución inicial. Según las soluciones obtenidas, se ha optado por tomar una temperatura inicial de un 20% sobre el coste inicial. Por otro lado se ha seleccionado que el número de cadenas de Markov sea de 15, ya que tras un estudio sobre el algoritmo con diferentes cadenas, este número de cadenas ha obtenido soluciones de calidad en menores tiempos.

Como en el apartado anterior, el criterio de parada en el algoritmo de descenso necesitaba al menos 100 iteraciones sin mejora para que el algoritmo converja a soluciones de cierta calidad, se han probado longitudes de cadena de Markov de 150, 200, 250 y 300. En cuanto a la temperatura inicial, dado que la cadena de Markov es larga y se deben alcanzar un número mínimo de cadenas antes de detener el algoritmo, valores excesivamente altos resultan poco prácticos pues suponen duraciones excesivas del algoritmo, se han probado valores del coeficiente de 0,80, 0,85, 0,90 y 0,95. Como en el caso anterior, cada tipo de ejecución se reiniciará durante 20 veces, obteniendo finalmente su consumo medio representado en la Figura 3.

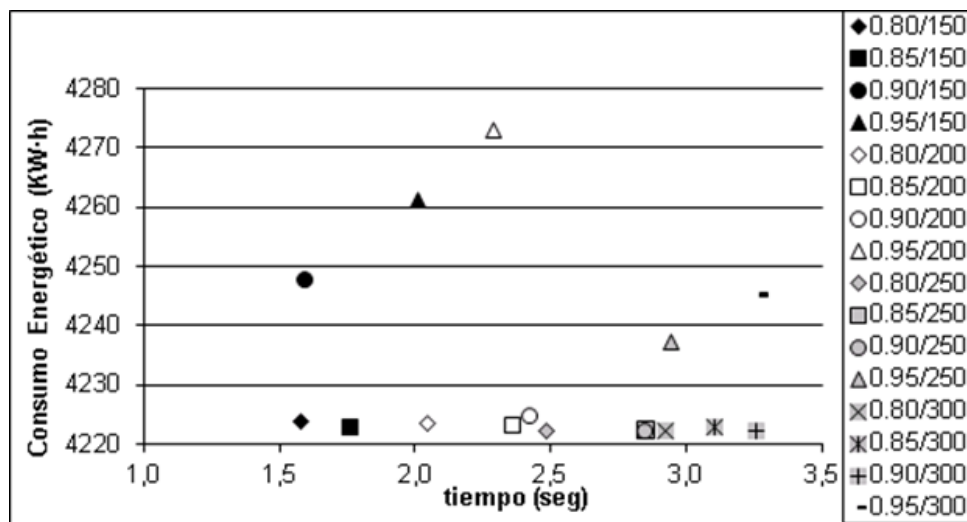


Figura 3 Consumos medios de las soluciones óptimas empleando el método SA.

Con resultados obtenidos, se observa que el algoritmo converge ahora a soluciones mucho mejores que las obtenidas en el apartado anterior, y lo hace con desviaciones menores entre el consumo medio y el mínimo, por lo que le da más robustez. Estas desviaciones no superan en ninguno de los casos el 7,26%. El resultado óptimo que se obtenido es de un consumo energético medio de 4222,382 kW·h en un tiempo de 2,481 seg.

Resultados del método TA

Para la aplicación de la heurística TA en el diseño del forjado objeto, se ha empleado el movimiento FX_3. El método se ha ejecutado con longitudes de iteraciones a umbral constante de 500, 1000, 5000, 10000 y 50000 iteraciones, y empleando diferentes tipos de umbral inicial T_0 , tomando valores de un 20, 40, 60 y 80% del consumo inicial. De nuevo estas pruebas se han realizado para 20 reinicios consecutivos del algoritmo.

En la Figura 6, se observa la solución media óptima obtenida con la heurística TA, del mismo valor que en el SA, 4222,382kW·h, pero el tiempo de computación necesario aumenta un 51,28%. Las diferencias entre consumo mínimo-consumo medio en TA han sido menores que las obtenidas en el DLS, pero mayores que en el SA.

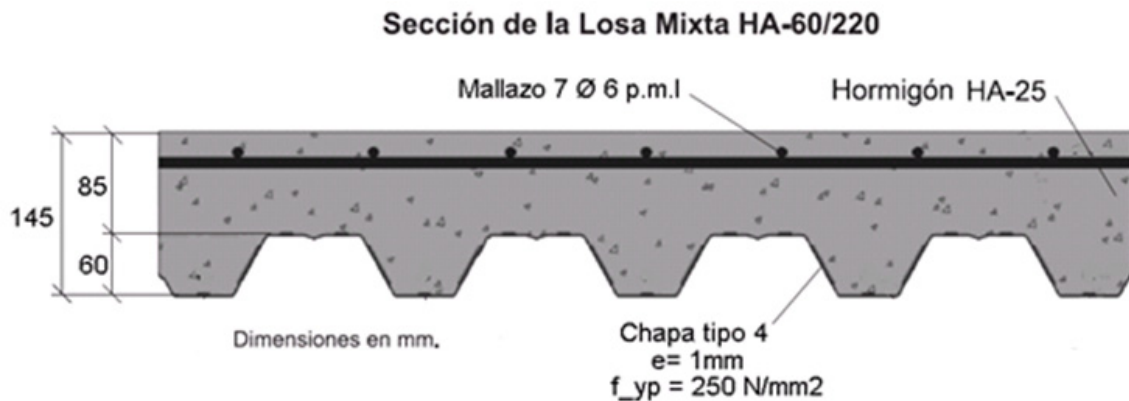


Figura 6 Forjado óptimo para una luz de 3,50m.

Una vez calibrada la heurística más eficiente para el diseño de nuestro forjado, se ha realizado un estudio paramétrico para poder estudiar el comportamiento de este tipo de estructuras, modificando las luces. Con los resultados obtenidos se observa que:

- A mayores luces, menor es la esbeltez obtenida.
- Las cuantías tanto del hormigón como del acero aumentan a medida que aumentamos las luces.
- El tipo de hormigón seleccionado casi en la totalidad de los casos es de un HA-25
- En el caso de las chapas, se observa que para luces menores de 3,75 m la mayoría de las chapas utilizadas son de 1 mm de espesor. Además destacar que en el intervalo de luces de mayores de 3 m, nunca se utilizan chapas de 0,8 mm con un límite elástico de 250 N/mm².

Conclusiones

Los algoritmos utilizados han resultado ser muy eficaces para el diseño óptimo de este tipo de estructura. Ninguno de ellos había sido implementado nunca para la optimización de forjados mixtos con chapa nervada, y en su funcionamiento no se han encontrado obstáculos.

Destacar el comportamiento del SA, ya que al alcanzado buenos resultados en tiempos muy cortos. El TA también llegó a alcanzar buenos resultados, pero necesitando

más tiempo para su ejecución. En el caso de los DLS, se obtiene resultados no tan buenos como en los casos anteriores, pero el tiempo de ejecución es menor.

La aplicación de la programación con métodos heurísticos para el diseño de forjados mixtos ha sido capaz de sustituir la experiencia del proyectista en la búsqueda de la solución óptima.

Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto de Investigación BIA2011-23602) y por la Universitat Politècnica de València (Proyecto de Investigación PAID-06-12).

Referencias

- [1] Carbonell, A.; Yepes, V.; González-Vidosa, F. (2012). Automatic design of concrete vaults using iterated local search and extreme value estimation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 9(6), 675-689.
- [2] Martí, J.V.; González-Vidosa, F.; Yepes, V.; Alcalá, J. (2013). Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing. *Engineering Structures*, 48, 342-352. [doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.014]
- [3] Martínez-Martín, F.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2012). Multi-objective optimization design of bridge piers with hybrid heuristic algorithms. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering)*, 13(6), 420-432. [doi:10.1631/jzus.A1100304]
- [4] Martínez-Martín, F.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2013). A parametric study of optimum tall piers for railway bridge viaducts. *Structural Engineering and Mechanics*, 45(6), 723-740.
- [5] Payá-Zaforteza I.; Yepes, V.; Hospitaler, A.; González-Vidosa, F. (2009). CO₂-Efficient Design of Reinforced Concrete Building Frames. *Engineering Structures*, 31, 1501-1508. [doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.02.034]
- [6] Perea, C.; Alcalá, J.; Yepes, V.; González-Vidosa, F.; Hospitaler, A. (2008). Design of Reinforced Concrete Bridge Frames by Heuristic Optimization. *Advances in Engineering Software*, 39(8), 676-688. [doi:10.1016/j.advengsoft.2007.07.007]
- [7] Torres-Machí, C.; Yepes, V.; Alcalá, J.; Pellicer, E. (2013). Optimization of high-performance concrete structures by variable neighborhood search. *International Journal of Civil Engineering, Transaction A: Civil Engineering*, 11(2), (in press).
- [8] Yepes, V.; Alcalá, J.; Perea, C.; González-Vidosa, F. (2008). A Parametric Study of Optimum Earth Retaining Walls by Simulated Annealing. *Engineering Structures*, 30(3), 821-830. [doi:10.1016/j.engstruct.2007.05.023]
- [9] Yepes, V.; González-Vidosa, F.; Alcalá, J.; Villalba, P. (2012). CO₂-Optimization Design of Reinforced Concrete Retaining Walls based on a VNS-Threshold Ac-

- ceptance Strategy. *Journal of Computing in Civil Engineering ASCE*, 26 (3), 378-386. [doi:10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000140]
- [10] EHE-08. *Instrucción de Hormigón Estructural (in Spanish)*, M.Fomento, Madrid, 2008.
- [11] HIASA, empresa del Grupo Invarri. Avilés (Asturias) www.hiasa.com
- [12] CTE-SE-AE. Código Técnico de la Edificación. Seguridad Estructural. Acciones en la Edificación.
- [13] Institut de Tecnologia de la Construcció de Catalunya (2009). BEDEC PR/PCT ITEC materials database. Disponible online en: <http://www.itec.es/nouBedec.e/presentaciobedec.aspx>
- [14] UNE-EN_1994-1-1;2011. Eurocódigo 4: Proyecto de estructuras mixtas de acero y hormigón. Parte 1-1: Reglas generales y reglas para edificación.
- [15] Iglesias, J. M^a. “Proyecto y cálculo de forjados mixtos con chapa nervada”. Tesina de especialización en Análisis de estructuras. Departamento de Ingeniería de la construcción. Universidad Politécnica de Cataluña. 2009.
- [16] Ache. Monografía M-14. Recomendaciones para el Proyecto y Construcción de Forjados Mixtos de Chapa Nervada. Diciembre 2008.
- [17] Metropolis, N.; Rosenbluth, A.W.; Rosenbluth, M.N.; Teller, A.H.; Teler, E. “Equation of state calculation by Fast Computing Machines”. *Journal of Chemical Physics*, 21: 1087-1092. 1953.
- [18] Kirkpatrick S., Gelatt C.D. and Vecchi M.P., Optimization by simulated annealing, *Science*, 220(4598), pp. 671-680, 1983. [doi:10.1126/science.220.4598.671]
- [19] Dueck, G.; Scheuert, T. “Threshold Accepting: A general Purpose Optimization Algorithm appearing Superior to Simulated Annealing”. *Journal of Computational Physics* 90:161-175. 1990. [doi:10.1016/0021-9991(90)90201-B]

Cinco ideas-fuerza en la docencia universitaria

Francisco Pedroche Sánchez, pedroche@mat.upv.es

Departament de Matemàtica Aplicada, Institut de Matemàtica Multidisciplinar, E.T.S.E. Edificació , Universitat Politècnica de València,

Resumen

En esta ponencia se detallan cinco características esenciales que, a juicio del autor, deben estar presentes en el acto de enseñanza-aprendizaje en nuestras aulas. Estas consideraciones son fruto de la experiencia acumulada en veinte años de docencia y en el intercambio de opiniones con profesores, profesoras, y estudiantes de universidad. ¿Se pueden resumir los aspectos importantes de la docencia en cinco ideas-fuerza? Muchas veces las ideas más importantes son las que surgen del sentido común. Como estas cinco consideraciones que se exponen, argumentándolas convenientemente, en esta comunicación.

Palabras clave: *pedagogía matemática, argumentación, comunicación, competencias sociales*

Introducción

*El exordio es el comienzo del discurso,
o sea, lo que en la poesía es el prólogo,
y en la música de flautas, el preludio:
todos estos son, efectivamente, comienzos
y como preparación del camino
para lo que sigue después.
Aristóteles, Retórica. Libro II, 14.1.*

En este tiempo de abundancia informativa es útil disponer de una serie de reglas de sentido común que nos permitan transitar amablemente por diversos ámbitos de la vida. Libros como “Los 7 hábitos de la gente altamente efectiva” se centran en recetas rápidas, fáciles de aprender como, por ejemplo, “Poner primero lo primero” [1], que bien merece ser una regla para orientarse, pero también es cierto que ya fue formulada por otros, como Descartes [2]. El caso es que en mis cursos de exposición oral para profesores siempre hago repaso de varias ideas, que me han perseguido a lo largo de los años, para elaborar una *captatio benevolentiae* amable y sugerente. De esta forma he ido coleccionando una serie de ideas-fuerza en la docencia, basadas en la experiencia y en citas extraídas de varios lugares, que ahora he decidido ponerlas por escrito, ordenarlas, dar adecuadamente las fuentes. Estas cinco ideas son las siguientes:

- 1) Los alumnos y las alumnas piensan.
- 2) Las personas aprendemos usando modelos.
- 3) Se enseña con ejemplos.
- 4) Se aprende de las personas a quienes se enseña.
- 5) Enseñar es conversar.

Los alumnos y las alumnas piensan

*Es normal tener en cuenta las reacciones,
denegaciones y vacilaciones y,
cuando se las constata, no es cuestión de esquivarlas;
es necesario probar el punto controvertido,
informarse sobre las razones que causan
la resistencia del interlocutor,
empaparse de sus objeciones,
y el discurso degenera
invariablemente en diálogo.
Ch. Perelman, L. Olbrechts-Tyteca,
Tratado de la argumentación, p.78.*

Cuando hemos sido alumnos, alguna vez hemos oído decir al profesor o a la profesora aquello de “¿Es que estoy hablando a la pared?”, o aquello otro de “Las matemáticas son importantes porque sirven para que yo me gane la vida”. Hemos sido testigos de profesores que daban clase al margen de si había alumnos en clase o no. Es decir, clases (magistrales) donde no importaba si había personas o no: como una rueda de prensa televisada y sin preguntas.

En la universidad, hace ya casi 30 años, me cansé de oír aquello de “los alumnos vienen cada vez peor preparados”. Si esto fuera así, si cada vez se sabe menos, es difícil entender cómo ha conseguido progresar la ciencia y la técnica en estos años. Los que nos dedicamos a investigar, una vez acabada la carrera, pasamos entonces por una dirección de tesis un poco accidentada, y luego (o a la vez) ponte a dar clases, a repetir el método docente que sufriste. Hasta que un día, en un curso sobre docencia alguien te dice algo evidente: las alumnas y los alumnos piensan. Trátalos como personas, sé proactivo, tienes derechos asertivos, tienes varias inteligencias, usa la inteligencia emocional... Los alumnos y alumnas son personas que están pensando mientras tú intentas enseñar algo en clase. Como personas que son hay que mirarles a los ojos y tratarles con dignidad, saber qué están pensando, y contar con ello. Desde el punto de vista de la teoría de la argumentación [3] el auditorio es decisivo: reconócelo como tal y dirígete a él, teniendo en cuenta los elementos comunes de vuestra cultura. Tus estudiantes piensan, sienten emociones: miedo, tristeza, asco, enfado, alegría, sorpresa... Pregúntate qué emoción despertarás hoy en tu

clase. De acuerdo con [4] nos podemos preguntar: “¿Qué tendrían que ser capaces de hacer intelectualmente, físicamente o emocionalmente mis estudiantes como resultado de su aprendizaje?” Pregúntate: ¿Qué harán hoy mis estudiantes?

Las personas aprendemos usando modelos

*Una buena parte de la argumentación
estriba en inducir a los auditorios
a que piensen en el hecho anulador, es decir,
que reconozcan que los hechos admitidos por ellos
contravienen a las reglas que también aceptan.
Ch. Perelman, L. Olbrechts-Tyteca,
Tratado de la argumentación, p.544.*

Aquí usamos el término “modelo” para referirnos a un concepto abstracto, a un esquema teórico. Por ejemplo, un modelo de cómo funciona el corazón, la circulación de la sangre, el movimiento de los planetas, el modelo de proporciones del cuerpo humano de Vitruvio, un modelo de conjugación verbal, etc. Nuestra idea del funcionamiento del mundo la construimos a partir de modelos ideales, abstractos, concepciones, representaciones sobre cómo son las cosas. Por ejemplo, todos tenemos nuestro *modelo*, nuestra idea, de lo que es un *taxi*. Es un vehículo donde hay un conductor o conductora, entramos en el asiento de detrás, indicamos donde queremos ir, quizás haya que negociar, hay un taxímetro (o no), etc. Es un modelo ideal, general, pero flexible. Lo podemos adaptar a varias situaciones, y, de hecho, lo vamos adaptando a medida que avanza nuestra experiencia. Es un modelo que nos permite entender la realidad (identificar lo que es un taxi, en este caso, y cómo usarlo para nuestro beneficio). Los modelos son flexibles y son necesarios para vivir. Los modelos teóricos en las ciencias físicas son los paradigmas sobre los que descansa la ciencia normal, hasta que hay una revolución científica (v. por ejemplo [5]). La ciencia avanza perfeccionando modelos: el modelo de Newton, el modelo del átomo de Bohr, etc. Nótese que la física (las ingenierías en general) usa la matemática como lenguaje. Por ello, sus modelos son modelos matemáticos.

En mi opinión, la tarea como profesores consiste en contraponer el modelo de la universidad, el modelo científico de la asignatura que sea, con el modelo que traen los estudiantes. Como los alumnos y las alumnas piensan, siempre traen algún modelo. Por ejemplo, en física suelen ser aristotélicos. Piensan que los objetos se mueven debido a fuerzas y cuando se acaba la fuerza se para el objeto. Hace poco en un concurso televisivo le preguntaron a una persona qué color se obtiene por la mezcla de todos los colores del arco iris. Y dijo que el color negro. Eso refleja que esta persona tiene una concepción, una idea, un modelo, de cómo funciona el mundo de los colores. La tarea del docente es hacerle ver dónde falla su modelo.

Esta idea la expuso Ken Bain en una conferencia donde presentaba su libro sobre lo que hacen los mejores profesores universitarios [4]. Venía a cuento de contraponer el modelo tradicional de enseñanza basado en la transmisión al modelo basado en el aprendizaje, en las actividades de los estudiantes. Los estudiantes deben hacerse y responder preguntas significativas sobre sus modelos.

Se enseña con ejemplos

*El camino de la doctrina es largo,
breve y eficaz el del ejemplo*
L. A. Séneca, *Epístolas, Libro I, 16*

En una entrevista radiofónica el investigador Juan Ignacio Cirac (Premio Príncipe de Asturias de Investigación Científica y Técnica en 2006) decía que *aprender es poder comparar con algo familiar*. Estoy de acuerdo con esta opinión y creo que los ejemplos son una forma de establecer esta conexión con algo familiar. Hacen que podamos conectar conceptos nuevos con contenidos conocidos. Así, una *variedad lineal afin* se ilustra con un plano, que a su vez se ilustra con una hoja de un libro. Los ejemplos pueden usarse como casos a partir de los cuales podemos generalizar (por ejemplo, una tiza cae, cualquier cuerpo se siente atraído en un campo gravitatorio), ejemplos para ilustrar, para mostrar una práctica establecida (una foto de una mañana cualquiera en el ágora de la UPV sirve de ilustración de cómo transcurre la vida en el campus) y ejemplos para imitar (modelo como imitación), por ejemplo, imitar un estilo artístico, imitar los movimientos del profesor de gimnasia, recrear la demostración de un teorema, copiar una obra de arte, etc.

También hacemos uso del contraejemplo (ejemplos en contrario o hecho anulador), aquel que contradice hipótesis, o que limita una norma. Los matemáticos usamos frecuentemente el contraejemplo: no todas las matrices cuadradas son invertibles ya que, por ejemplo, la matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

no es invertible.

Los ejemplos han de ser significativos, importantes para los alumnos. Así para ilustrar una aplicación de la potenciación de matrices podemos hacer notar que si F es la matriz de adyacencia de un conjunto de usuarios de Facebook entonces la matriz F^2 tiene como elemento (i,j) , con i distinto de j , el número de caminos de longitud 2 desde el usuario i al usuario j . Los ejemplos permiten conectar varias disciplinas. Si hablamos de aplicación de las bases ortonormales podemos citar la compresión jpeg y mp3 usada en el mundo digital. Si hablamos de superficies regladas es imprescin-

dible poner como ejemplo algunas obras de Gaudí. Si hablamos de cosenos hiperbólicos hay que decir que una catenaria lo es, etc. Para muchos ejemplos en matemáticas en edificación véase [6]. En el mundo de la construcción también tenemos multitud de ejemplos en negativo, ejemplos para no seguir, como esculturas que se caen, puentes que resbalan, que vibran y caen, etc. Por otra parte, creo que hay que evitar los ejemplos artificiales, del tipo “Un platillo extraterrestre nos envía una señal...” o los ejemplos exóticos como “Los misioneros y los caníbales” (v. [7]).

Nótese que la técnica del ejemplo es muy potente, pero es solo una de las muchas técnicas argumentativas que podemos usar en el aula.

Se aprende de las personas a quienes se enseña

*Vosotros mandáis a vuestros hijos al maestro,
pero son los niños de la escuela los que lo educan*
R. W. Emerson, *Culture*.

El profesor aprende de sus estudiantes. Igual que el médico aprende de sus pacientes. Como consecuencia de tratar a los alumnos como seres pensantes, de hacer el esfuerzo de enfrentar los modelos del profesor con los de los alumnos y de buscar los ejemplos que sean familiares a los alumnos, el profesor deberá adecuar los contenidos a la experiencia de los alumnos y verá que ciertas cuestiones que plantean los alumnos le hacen mirar los contenidos desde otro punto de vista. Por tanto, un primer aprendizaje del profesor consiste en un cambio de perspectiva, de enfoque, motivado por los alumnos. Por ejemplo, en matemáticas siempre usamos la medida en radianes para los ángulos (sobre todo en integración), mientras que los alumnos usan la medida sexagesimal o bien la centesimal en otras asignaturas. Sabiendo esto vemos que sus dudas son razonables a la hora de usar una unidad de medida.

También se aprenden contenidos nuevos. Dado que los alumnos son fuente de información y tienen acceso a la fuente de información universal que es Internet, los alumnos pueden sorprendernos citando hechos desconocidos para nosotros. Por ejemplo, allá por 1998 fue un alumno quien me dijo que existía un buscador en Internet llamado Google (que fue estrenado en septiembre de ese año). Otro alumno me enseñó aplicaciones para una antigua calculadora programable HP. Una alumna me dijo que había usado el teorema de Ptolomeo (que yo desconocía) para resolver un problema que propuse en clase. Otra alumna me indicó que, en el teclado, la combinación “CTRL+ rueda de ratón” solía servir de zoom. Otro ejemplo de una colaboración que tuve en clase es la siguiente. La regla de integración por partes, que solemos escribir:

$$\int u \, dv = u v - \int v \, du$$

se memoriza con frases como “un día vi una vaca vestida de uniforme”. Les comenté a mis estudiantes del grupo en valenciano que sería interesante encontrar una versión propia en valenciano, a lo que un alumno comenzó: “un dia Vicent..”. Comienzo que me gustó y que completé de esta forma: “un dia Vicent i un vell venien d’Utiel”. De la misma forma podemos citar muchos ejemplos de hechos que aprendemos de los alumnos y alumnas.

Los alumnos también te pueden hacer ver que improvisar en el aula no suele ser buena idea. Esa experiencia la tuvo un profesor de álgebra del Massachusetts Institute of Technology: durante la grabación de una clase cometió un error y no se percató hasta el final, cuando una alumna se lo dijo [8]. En el video siguiente dedica los primeros minutos a explicar y corregir el error [9].

Enseñar es conversar

*Conversar es entrar en el surco que ha trazado el otro,
y proseguir en el trazo y perfección de aquel surco;
Diálogo es colaboración.
M.Bontempelli, La donna del Nadir, 23*

Como complemento a las ideas-fuerza anteriores me gusta añadir una que, de hecho, puede considerarse implícita. Si hemos de aprender de los alumnos, que piensan, poner ejemplos significativos para ellos, y evaluar si entienden los modelos que enseñamos entonces es necesario conversar con ellos. Conversar en el sentido de diálogo. *Dialéctica* entendida como intercambio de ideas, con objeto de llegar a un acuerdo, frente a *retórica* como clase magistral. El diálogo ha sido ampliamente usado en las obras docentes. Platón usó frecuentemente el diálogo como forma literaria para dar a conocer sus ideas y las de su maestro Sócrates, protagonista de muchos diálogos (v. por ejemplo, [10]). La misma técnica usó Galileo en [11] donde sus discípulos y amigos Salviati y Sagredo conversan con Simplicius, prototipo de los defensores de la física aristotélica. El diálogo permite el intercambio de opiniones, nos permite evaluar si los estudiantes han aprendido. El diálogo permite centrar las explicaciones en grandes cuestiones: ¿Qué es una ecuación? ¿Qué significa “1=0.9999...” (v. [12]) ¿Cómo se miden los ángulos?, ¿Por qué se cae un edificio?

Este acto de conversación es una forma de poner de manifiesto que uno considera, se cree, que los alumnos piensan y que vale la pena dialogar con ellos con objeto de instruirles. Los profesores tenemos un mandato de la sociedad para formar a sus

hijos. Dialogando con ellos los conoceremos y sabremos cómo ayudarles a aprender. Conversar es una manera de evaluar cómo se desarrolla el proceso individual de aprendizaje.

Conclusiones

*El epílogo consiste en cuatro puntos:
inclinarse al auditorio a nuestro favor
y en contra del adversario;
amplificar y minimizar;
excitar las pasiones en el oyente;
y hacer que recuerde.
Aristóteles, Retórica, Libro III, 19.*

El hecho de tener presente a nuestros estudiantes como personas, personas pensantes, es el primer paso para una docencia efectiva. Tomando esta idea como partida he desgranado otras cuatro ideas más (aprendemos usando modelos, se enseña con ejemplos, se aprende de los estudiantes, enseñar es conversar) que en mi opinión dan sentido a la enseñanza como proceso de crecimiento intelectual y humano de estudiante y profesor. Es obvio que factores como una excesiva carga de contenido y un excesivo número de estudiantes en clase dificultan esta manera de poner en práctica la docencia. Asimismo, en la modalidad de docencia virtual es difícil llevarlas a cabo. Pienso que estas ideas-fuerza permiten transmitir valores como la solidaridad, el diálogo y, en general, permiten trabajar competencias sociales.

Referencias

- [1] Covey, S. R. *Los 7 hábitos de la gente altamente efectiva: lecciones magistrales sobre el cambio personal*. Ed. Paidós. Barcelona, 2013.
- [2] Descartes, R. *Discurso del método: reglas para la dirección de la mente*. Ed. Orbis, Barcelona, 1983.
- [3] Perelman, C., Olbrechts-Tyteca, L. *Tratado de la argumentación. La nueva retórica*. Ed. Gredos. 2009. (Edición original, 1958)
- [4] Bain, K. *Lo que hacen los mejores profesores de universidad*. Servei de Publicacions de la Universitat de València . Valencia, 2005.
- [5] Kuhn, T. S. *La estructura de las revoluciones científicas*. Fondo de Cultura Económica . México. 2006.
- [6] Moreno, J. *Problemas resueltos de Matemáticas para la edificación y otras ingenierías*. Ed. Paraninfo. Madrid, 2011.
- [7] Alsina, C. *Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿cuántas tuvo Enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes*. Revista Iberoamericana de Educación. n.º 43 (2007), pp. 85-101.

- [8] <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/lecture-9-independence-basis-and-dimension/>
- [9] <http://ocw.mit.edu/courses/mathematics/18-06-linear-algebra-spring-2010/video-lectures/lecture-10-the-four-fundamental-subspaces/>
- [10] Platón. *Protágoras*. Ed. Losada, Buenos Aires, 2011.
- [11] Galilei, G. *Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo ptolemaico y copernicano*. Edición de Antonio Beltrán. Alianza Editorial, Madrid, 1994.
- [12] Byers, W. *How mathematicians think: using ambiguity, contradiction, and paradox to create mathematics*. Princenton Univ. Press, New Jersey, USA, 2007.

Relación entre el grado de corrosión y el comportamiento mecánico de armaduras b500sd corroídas

Esther Moreno¹ esther.moreno@upm.es

Luisa Martín² luisa.martin.horcajo@upm.es

J. Gabriel Palomo² gabriel.palomo@upm.es

1.- Departamento de Construcciones Arquitectónicas. EUAT de la UPM.

2.- Departamento de Matemática Aplicada. EUAT de la UPM.

Resumen

Las propiedades mecánicas de las armaduras varían como consecuencia de un proceso de corrosión. Al realizar un ensayo de tracción sobre barras corroídas, se observan disminuciones en los valores de los alargamientos últimos y bajo carga máxima, así como de las tensiones en el límite elástico y de rotura. Por lo tanto, la corrosión tiene como consecuencia la disminución de las propiedades mecánicas de la armadura.

En este trabajo se discuten las herramientas de orden matemático necesarias para la presentación, a los alumnos de grado en edificación, de una metodología para el análisis de la incidencia de la corrosión de armaduras en su límite elástico y su resistencia a tracción, discutiendo los resultados de un ensayo de tracción.

Palabras clave: *Corrosión; Acero corrugado; Hormigón armado; Regresión lineal; Análisis de la varianza; Contrastes.*

Introducción y objetivos

Dentro de las asignaturas de materiales que forman parte del plan de estudios conducente a la obtención del <<Grado en Edificación>> se estudia, por su importancia, el problema de la corrosión de armaduras, que es el principal factor de deterioro de las estructuras de hormigón. Esta corrosión tiene como consecuencia la reducción de la vida útil de la estructura, siendo extremadamente costosa su rehabilitación una vez que el proceso se ha desencadenado.

La ductilidad de la armadura es una propiedad mecánica relacionada con la capacidad de absorción de energía antes de la fractura. Esta energía depende del grado de deformación plástica que puede experimentar un acero hasta la rotura. La ductilidad de un acero viene cuantificada por los valores de su resistencia en el límite elástico, su resistencia máxima y su alargamiento bajo carga máxima.

En las estructuras dañadas por corrosión, uno de los efectos más importantes es la reducción de la ductilidad. La pérdida de ductilidad de la armadura se manifiesta principalmente por la reducción de la deformación bajo carga máxima y última, y por la disminución de la resistencia máxima y del límite elástico.

Para la presentación a los alumnos de los problemas que origina la corrosión en aceros corrugados, se lleva a cabo el análisis de los resultados de un ensayo experimental en el que se observa la variación de la resistencia máxima y del límite elástico en función del grado de corrosión.

El ensayo experimental consiste en someter a las armaduras a un proceso de corrosión acelerada, que da lugar a distintos grados de deterioro en cada una de ellas, ensayándolas posteriormente a tracción para obtener sus características mecánicas.

Se han utilizado barras de acero B 500 SD de diámetro 16 mm y longitud 50 cm. (figura 1). Este tipo de acero está definido en la Norma UNE 36065 EX2000, posee características especiales de ductilidad, y es el que se emplea de forma mayoritaria en España en obras de edificación.



Figura 1: barras con y sin corrosión

Los resultados experimentales, que se facilitan a los alumnos, se encuentran en la siguiente tabla.

Porcentaje de corrosión	Resistencia	Límite elástico
0	649,1	540,9
4,01	632,38	517,5
4,97	636,94	533,8
5,12	652,92	531
6,55	672,61	562,1
7,43	645,23	525,6
7,55	634,05	505,8
7,92	633,08	530,3
8,01	642,55	543,2
8,52	653,04	550,1
9,09	647,8	528,9
9,16	658,14	554,1
10,09	626,51	523,6
10,36	582,36	474,7
11,42	578,87	458,9
11,76	616,48	469,3
11,91	591	495,8
12,31	617,62	517,4
12,35	593,73	491,9
12,42	609,23	512,1
13	594,38	504,4
13,34	621,47	506,7
13,64	633,2	527,7
13,67	620,42	514,4
15,12	574,25	519,3
15,21	622,61	521,1

El objetivo de este trabajo es analizar, como se haría con los alumnos del grado en edificación, el conjunto de datos experimentales, resaltando las herramientas de tipo matemático necesarias para encontrar modelos que expliquen las variaciones de las propiedades mecánicas de las barras en función de su grado de corrosión.

Análisis descriptivo de los datos

Un primer análisis del conjunto de datos muestra la existencia de una barra que no ha sido sometida al proceso de corrosión y que, por lo tanto, posee un porcentaje de corrosión nulo. Esta barra se ha incluido en el ensayo con objeto de tomarla como referencia, por lo que parece razonable transformar el conjunto de datos original, de manera que cada nuevo dato represente la proporción de la variable correspondiente, en cada nivel de corrosión, frente al valor de la variable en la barra sin corroer. Para ello basta con dividir cada dato de la variable *Resistencia* por 649,1 y cada

valor de la variable *Límite elástico* por 540,9. Los análisis a los que se hará referencia a partir de este momento se referirán a este nuevo conjunto de datos transformados.

Una primera idea acerca de cómo puede depender cada una de las características mecánicas observadas en el ensayo del grado de corrosión puede obtenerse con un gráfico X-Y. Así, los siguientes gráficos (figuras 2 y 3) representan la resistencia y el límite elástico de cada una de las barras frente a su grado de corrosión.

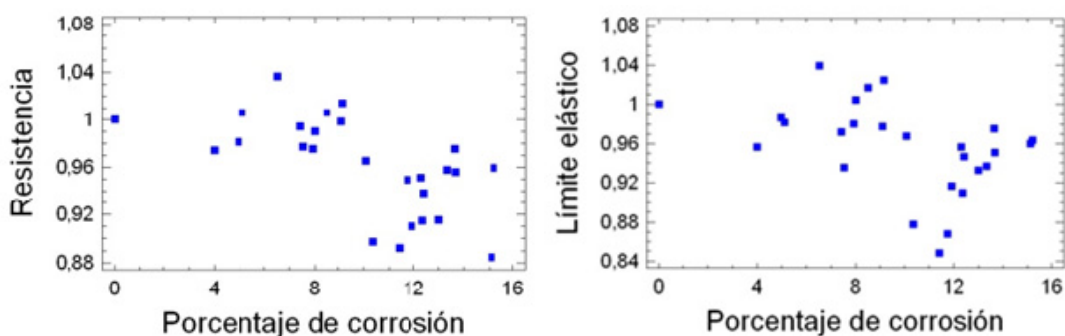


Figura 2: corrosión frente a resistencia Figura 3: corrosión frente a límite elástico

La observación de la estructura de estos gráficos permite obtener las siguientes conclusiones:

- Parece que existe una relación de dependencia entre ambas variables y el grado de corrosión de las mismas, ya que, en general, el valor de las dos características mecánicas disminuye conforme aumenta el grado de corrosión de las barras.
- La dispersión de los puntos de estos gráficos parece indicar que la relación de dependencia entre estas variables no se puede expresar por medio de un modelo determinista, por lo que será necesario emplear modelos estadísticos. De manera más precisa, modelos de regresión.
- Por último, cabe señalar la existencia de datos que muestran una mayor resistencia, y un mayor límite elástico, en barras corroídas que en la barra de referencia sin corroer. Es importante, en opinión de los autores de esta comunicación, que los alumnos entiendan que este hecho no supone una contradicción en el contexto del problema. Pues, si bien es verdad que las propiedades estudiadas disminuyen, en general, con la corrosión, no tiene porqué ser cierto que, necesariamente, una barra menos corroída que otra presente mayor valor de resistencia o de límite elástico que otra con mayor índice de corrosión. Explicándose este hecho por la variabilidad asociada a cualquier fenómeno que contenga componentes aleatorias.

Análisis de Regresión

El objetivo básico de las técnicas de regresión es el de encontrar modelos que expliquen de forma aproximada la relación de dependencia entre distintas variables. La forma de los modelos de regresión simple, en los que se relaciona una variable explicada con otra explicativa es del tipo:

$$y_i = f(x_i) + e_i$$

Donde y representa la variable explicada, en este caso la resistencia o el límite elástico, y x es la variable explicativa, en este caso el grado de corrosión. Por otra parte, e representa una componente aleatoria, el error experimental, cuya presencia evita que un valor de la variable explicativa determine exactamente un valor de la variable explicada. El subíndice i hace referencia a la observación concreta a la que se aplica el modelo.

En este caso, los coeficientes de correlación entre el grado de corrosión y la resistencia de las barras, y entre el grado de corrosión y el límite elástico de dichas barras son $-0,6217$ y $-0,43$, respectivamente. Y si bien estos coeficientes no son demasiado altos, el hecho de que estos coeficientes sean significativos al 95%, (p valores respectivos 0,0007 y 0,0268), junto con los gráficos X-Y presentados anteriormente, justifica que se calculen los modelos de regresión lineal que permitan modelizar el comportamiento de la resistencia y del límite elástico, en función del grado de corrosión.

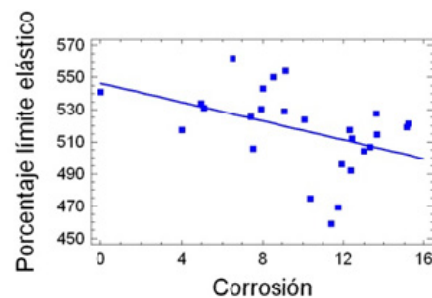
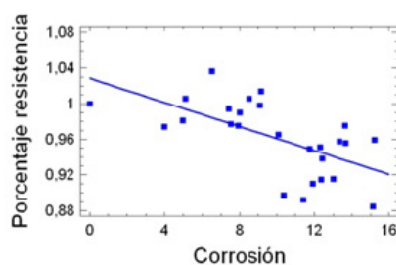
Empleando un paquete estadístico apropiado como *R* o *Statgraphics* se tiene que el modelo de regresión estimado en el caso de la resistencia es:

$$\text{Resistencia} = 1,028 - 0,00674 \times \text{Corrosión} + e$$

Y para el caso del límite elástico este modelo es:

$$\text{Límite elástico} = 546,402 - 2,9257 \times \text{Corrosión} + e$$

Los siguientes gráficos (figuras 4 y 5) permiten observar el ajuste de las rectas de regresión calculadas a los datos empíricos, mostrados en gráficos anteriores.



Figuras 4 y 5: rectas de regresión estimadas entre corrosión y resistencia (izquierda) y entre corrosión y límite elástico.

La interpretación de los coeficientes de los modelos estimados indica que un aumento de un uno por ciento en el porcentaje de la corrosión produce una disminución en la proporción de resistencia, con respecto a la barra sin corroer, de 0,0067, mientras que, en el caso del límite elástico, esta disminución es de 2,9257.

Por otra parte, los contrastes de linealidad realizados en los dos modelos, con objeto de discutir si la pendiente de la recta de regresión podría ser cero, arrojan unos p valores respectivos de 0,0007 y de 0,0268. Lo que indica que, en ambos casos, el modelo es significativo, al 95%.

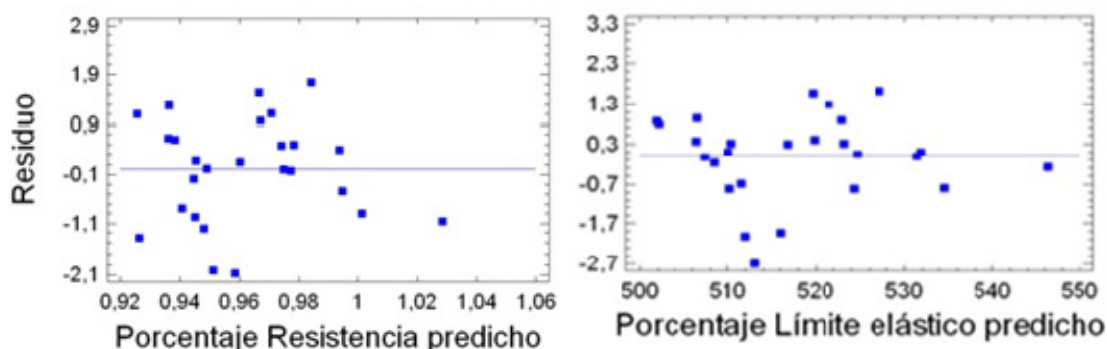
Además, los coeficientes de determinación en ambos modelos son, respectivamente, el 38,65% y el 18,83%. Estos coeficientes se interpretan como el porcentaje de variabilidad de la resistencia y del límite elástico, respectivamente, explicados por la variación del porcentaje de corrosión. El hecho de que este porcentaje sea, en ambos casos, relativamente pequeño indica que, si bien el grado de corrosión de las armaduras tiene una incidencia significativa en las variables mecánicas estudiadas, deben existir otras variables, no tenidas en cuenta en el ensayo experimental, que expliquen, también de manera significativa, la variabilidad de la resistencia y del límite elástico de las armaduras.

Para terminar el análisis de regresión es necesario proceder a la validación o diagnóstico del modelo. Esta necesidad procede del hecho de que la realización de la estimación del modelo de regresión, y de los contrastes relativos al mismo, se basan en el cumplimiento de las siguientes hipótesis acerca del comportamiento del error experimental, además de la linealidad entre la variable explicativa y la explicada:

- Todos los errores experimentales, e_i son variables aleatorias normales de media cero y con la misma desviación típica, σ , (homocedasticidad).
- Todos los errores experimentales son independientes entre sí.

La verificación de estas condiciones se realiza por medio del análisis de los residuos, obtenidos como la diferencia entre cada una de las observaciones, y_i , y el valor previsto por el modelo para x_i , $f(x_i)$.

Los gráficos que se muestran a continuación (figuras 6 y 7) representan los valores de los residuos frente a cada uno de los valores predichos por el modelo, en cada uno de los casos analizados, y no poseen características que hagan sospechar el incumplimiento de las hipótesis básicas, en lo que se refiere a la linealidad, a la independencia y a la homocedasticidad. Por otra parte, se comprueba que tampoco existe evidencia de falta de normalidad en el error experimental, por lo que, en consecuencia, el modelo queda validado en ambos casos.



Figuras 6 y 7: gráficos de residuos frente a valores predichos de resistencias (izquierda) y frente a valores predichos del límite elástico

Conclusión. Herramientas de tipo matemático necesarias para la comprensión del análisis del problema

Como se ha mostrado en los párrafos precedentes, se puede afirmar que el alumno debe conocer las técnicas básicas de regresión para estar en condiciones de interpretar, desde el punto de vista aplicado de los materiales, los resultados del ensayo experimental, cuyos datos se le han facilitado. Ahora bien, si se tiene en cuenta el conjunto de conocimientos que requiere el proceso de regresión completo, y los elementos en que dicho proceso se apoya, este conjunto de conocimientos se puede resumir en la siguiente tabla:

- Estadística descriptiva. Gráficos de dispersión.
- Coeficiente de correlación lineal. Propiedades e interpretación.
- Modelos de probabilidad. El modelo normal.
- Parámetros de un modelo de probabilidad. Esperanza matemática y desviación típica.
- Inferencia estadística. Estimación y contrastes.
- La significación estadística. El p valor de un contraste.
- Contrastes de normalidad.
- Los conceptos básicos del análisis de la varianza. Variabilidad explicada y no explicada.

Referencias

- [1] Peña, D. Fundamentos de Estadística. *Alianza editorial*, 2001.
- [2] Peña, D. Regresión y diseño de experimentos. *Alianza editorial*, 2002.
- [3] Cánovas, M.F. Patología y terapéutica del hormigón armado. pp 443-473. *Editorial Dossat, S.A. Barcelona* 1984
- [4] González, J.A. Miranda, J. Corrosión en las estructuras de hormigón armado: Fundamentos, medida, diagnosis y prevención. *Consejo Superior de Investigaciones Científicas. Madrid* 2007.

- [5] Moreno, E. Corrosión de armaduras en estructuras de hormigón: Estudio experimental de la variación de la ductilidad en armaduras corroídas aplicando el criterio de acero equivalente. *Tesis Doctoral. Dpto. de Ciencia e Ingeniería de Materiales e Ingeniería Química. Universidad Carlos III de Madrid* 2008.
- [6] Pescador, J.E. Metodologías de enseñanzas y aprendizaje para el desarrollo de competencias. Orientaciones para el profesorado universitario ante el EEES. *Revista de Formación de Profesorado Universitario. Vol. 20 nº3, Zaragoza* 2006.
- [7] Benito, A.S. Cruz, A. Nuevas claves para la docencia universitaria en el Espacio Europeo de Educación Superior. *Editorial Narcea, Madrid* 2005.
- [8] Boix-Masilla, V. Duraising, E.D. Targeted assessment of student's interdisciplinary work: an empirically grounded framework proposed. *Journal of Higher Education, 78, 215-237, 2007*
- [9] Chandramohan, B. Fallows S. Interdisciplinary learning and teaching in higher education. *New York. Routledge. (Eds.)* 2009.
- [10] Cuadrado, M. Ruz Rolina, M.E. Coc M. Participación y rendimiento del estudiante universitario en un proyecto docente interdisciplinar, bilingüe y virtual. *Revista de Educación. Madrid. 348, 505-518* 2009.

Proyecto de Innovación Didáctica: “Una experiencia en Gestión de la Edificación”

Marta García Valldecabres¹, mgarciav@villanueva.edu

Ana Teresa García Valldecabres², anateresagv@yahoo.es

1.- Profesor Adjunto. Dedicación Plena. Departamento de Didáctica de la Matemática. Área de Educación. Centro Universitario Villanueva. Adscrito a la UCM.

2.- Doctorando del programa arquitectura, edificación, urbanística y paisaje, en la Universitat Politècnica de València. Con 15 años de experiencia profesional sector de la construcción.

Resumen

Los profesores universitarios de las carreras de ingeniería de Universidades Politécnicas de España, desde hace varias décadas, están buscando alternativas metodológicas para promover en sus estudiantes la adquisición de la competencia matemática tan esencial para el desarrollo profesional de los futuros ingenieros de la edificación.

Los planteamientos de la enseñanza tradicional, han quedado obsoletos en una sociedad cambiante a un ritmo vertiginoso. Los alumnos universitarios actuales reclaman propuestas atractivas de aprendizaje en las asignaturas de matemática, que realmente sean significativas porque constituyan experiencias contextualizadas de la profesión de ingeniero.

La reflexión acerca de las prácticas laborales de profesionales de esta rama de la ingeniería con los de enseñanza de matemáticas a nivel universitario, ha motivado la propuesta metodológica de aprendizaje de este proyecto de innovación didáctica. Se perciben ya, las consecuencias positivas de los encuentros entre profesionales de diversos ámbitos.

El Proyecto de Innovación Didáctica: “Una experiencia en Gestión de la Edificación” quiere promover un aprendizaje colaborativo en estos estudiantes, de manera que durante su periodo de formación universitaria experimenten activamente la competencia matemática en el trabajo en equipo. Se presenta una atractiva propuesta basada en la teoría de las inteligencias múltiples para la realización de los grupos de trabajo.

Palabras Claves: *Innovación didáctica. Competencia matemática. Resolución de problemas. Aprendizaje cooperativo. Matemática significativa y contextualizada. Magnitudes y medidas. Técnicas de mediciones.*

Introducción

Los profesores universitarios de las carreras de ingeniería de Universidades Politécnicas de España, desde hace varias décadas, están buscando alternativas metodológicas para promover en sus estudiantes la adquisición de la competencia matemática tan esencial para el desarrollo profesional de los futuros ingenieros de la edificación.

Durante la última década del siglo pasado, tres profesores de la Universitat Politècnica de València, Sánchez-Pérez, E., García Raffi, L., y Sánchez-Pérez J. (1999) aunaron esfuerzos poniendo en marcha un programa de educación matemática para el estudio simultáneo de física y matemáticas en los primeros cursos de carreras técnicas, con experiencias positivas tanto en profesores como en los estudiantes. Ese programa trataba de optimizar el esfuerzo dedicado a la formación científica de los ingenieros, desde dos puntos de vista, por una parte, intentando contextualizar los conocimientos, y por otra, procurando una participación activa de los alumnos en formación.

Ante la demanda de profesionales competentes en matemáticas aplicadas a la ingeniería y con capacidad de trabajo efectivo en grupo, los profesores García y Amante (2007; 2006a; 2006b) de la Universidad Politécnica de Cataluña y de la Universidad Europea de Madrid respectivamente, describen experiencias de aplicación del trabajo cooperativo y del aprendizaje basado en problemas, realizadas con sus alumnos.

Esos esfuerzos continuados de innovaciones metodológicas en universidades politécnicas españolas muestran con evidencia que los planteamientos de la enseñanza tradicional han quedado obsoletos en una sociedad cambiante a un ritmo vertiginoso y con unos estudiantes inmersos en un mudo digital. Estas experiencias reflejan el reclamo de profesores innovadores que sean capaces de realizar propuestas atractivas de aprendizaje en las asignaturas de matemática y mejor si el trabajo de esos profesores se realiza colaborativamente (Gavilán 2002; Gómez y Fortuny, 2002; García, 2007 y 2009). La investigación de Camilli y otros (2011) puede servir de modelo para la formación de grupos docentes que investiguen sobre su propia práctica a nivel universitario; además, los retos de formación del profesorado de la Universidad Europea actual son cada vez mayores (Castillo y Cabrerizo, 2006; Benito y Cruz, 2005; Knight, 2005; Zabalza, 2006), y exigen una reflexión permanente de su propia práctica (Flores 2007; Schön, 1992).

La reflexión acerca de las prácticas laborales de profesionales de esta rama de la ingeniería, los arquitectos técnicos, con los de enseñanza de matemáticas a nivel universitario, ha motivado la propuesta metodológica de aprendizaje de este proyecto de innovación didáctica. También, se ha tenido presente la realidad profesional de bastantes profesores de las universidades politécnicas, quienes ejercen de arquitectos técnicos más horas al día de las que están en las aulas, transmitiendo con vivacidad sus ricas experiencias laborales a los estudiantes.

Los estudiantes escuchan atentamente esas batallas del jefe de obra, del arquitecto técnico en el despacho de arquitectos..., recogéndolas en su bagaje estudiantil, pero no siempre les impulsan a una práctica personal que promueva las competencias que necesitarán como profesionales. Esta propuesta se trata de un proyecto motivador y significativo que llevará a una inmersión activa de los estudiantes en auténticos retos profesionales, resolviendo situaciones problemáticas como cualquier jefe de obras, a pie de obra, trabajando en equipo con sus compañeros de carrera, como cualquier arquitecto en el despacho. Situaciones en las que las matemáticas son herramientas principales para resolver las necesidades de cálculos y mediciones, hacer gráficas de proyecciones en el tiempo, etc., para la vida real de su futura profesión, es decir, más en concreto se trata de que tengan experiencia de aplicaciones específicas de planificación valorada de las obras a lo largo de esta, control económico, costos, compras, etc.

Ahora pasamos a presentar los referentes teóricos y prácticos, la propuesta del proyecto, y algunas conclusiones previsibles.

Referentes teóricos y prácticos

Existen numerosas experiencias a nivel universitario que facilitan un aprendizaje interactivo en las aulas, promoviendo una dinámica de flujo de información, que apuesta por unos procesos didácticos basados en una enseñanza funcional de las matemáticas. Este tipo de innovaciones consisten primordialmente en un proceso de análisis de tareas, de síntesis de argumentos, de evaluación de problemas, así como de soluciones alternativas.

Los referentes teóricos de este trabajo que se exponen a continuación son, por una parte, qué entendemos por resolver problemas en el ámbito de educación matemática, qué es la teoría de las inteligencias múltiples, y qué implica la metodología del aprendizaje basado en problemas.

Referentes teóricos

Resolución de problemas en educación matemáticas

La alfabetización matemática es cada vez más necesaria en la sociedad de la información, por esto la resolución de problemas para el aprendizaje de matemáticas a todos los niveles educativos se considera fundamental para la adquisición de la competencia matemática necesaria para el desarrollo profesional en cualquier sector, en unos de ellos tiene repercusiones directas, como es en el caso de las carreras de ingeniería, arquitectura y en general las carreras del ámbito científico. Autores como Poyla (1975) son puntos de referencia para los procesos didácticos de enseñanza y aprendizaje de matemáticas a través de la resolución de problemas.

El trabajo intelectual de un buen resolutor de problemas matemáticos cuenta con unas fases de trabajo, que varían de tres a cinco según los autores. Mason, Burton y

Stacey (1989) proponen tres: la primera es el *abordaje*, en la que alumno busca responder a varias preguntas básicas: ¿qué es lo que sé?, ¿qué es lo que quiero?, ¿qué puedo usar?, ¿por dónde empiezo?, ¿con cuál estrategia?, etc.; la segunda es el *ataque*, que intenta responder a: ¿qué hipótesis puedo formular?, ¿cómo empiezo?, ¿cómo sigo?, etc.; y finaliza con la fase de *revisión*, es decir, por una parte, la comprobación tanto del proceso como de los resultados: ¿tienen sentido los resultados obtenidos?, ¿puedo comprobar la solución?, y por otra parte, la reflexión acerca de las ideas y momentos claves, en las implicaciones de las conjeturas y los razonamientos.

Dos procesos elementales para trabajar en resolución de problemas matemáticos son, por una parte, el proceso meta-comprensivo, y por otra, el proceso propiamente de resolución. El primero, implica al estudiante en la adecuada comprensión del enunciado del problema, por lo cual necesita saber leer estratégicamente el enunciado, en este momento los estudiantes están en la fase de abordaje, y esa forma de lectura tendrán que retomarla tantas veces como sea necesario, revisando vocabulario, conceptos, técnicas..., hasta haber comprendido el problema *que tienen delante*, detectando los datos ofrecidos por el enunciado del problema, con el fin de seleccionar y aplicar las estrategias más adecuadas. El segundo, comienza después de entender bien qué se pretende, pasando a las siguientes fases, con la aplicación de la estrategia seleccionada para resolverlo, en estos momentos los estudiantes pasan por las fases de ataque y de revisión.

Esta forma de trabajar en matemáticas es básicamente la misma que dio origen a esta ciencia. Los descubrimientos matemáticos normalmente han llegado después de un problema de la vida social o cotidiana que necesitaba una respuesta. Por lo tanto, esa forma paciente de trabajo esforzado de esos reconocidos científicos es una manera idónea para que el estudiante utilice, desarrolle y mejore su razonamiento matemático. La confianza en uno mismo con un trabajo autónomo, la confianza entre los miembros de un equipo con el trabajo colaborativo, crean un ambiente favorable para esos nuevos descubrimientos.

La teoría de las Inteligencias múltiples de Gardner

La teoría de las Inteligencias múltiples de Gardner (1987, 1995), que nace y se desarrolla en la década de los años 90, hace referencia a las diversas formas en que el ser humano interpreta, desde su acto cognitivo, la realidad que lo rodea. La inteligencia personal se desarrolla progresivamente durante todo el ciclo vital, sin que cada uno domine todas las destrezas y habilidades de resolución de problemas que pueden poseer los hombres globalmente. El aspecto material de la inteligencia está en diferentes áreas del cerebro interconectadas, que pueden trabajar más o menos unidas, pero mantienen la propiedad de desarrollarse -como explica Garnett (2009)- siempre que encuentran un ambiente educativo que ofrezca las condiciones necesarias.

La teoría de Gardner refleja que la *inteligencia* humana tiene diversas facetas, denominadas *inteligencias múltiples*, que se desarrollan en diferentes niveles en cada persona. Estas *inteligencias* son: la *lingüística-verbal*, capacidad de emplear eficazmente las palabras; la *física-cenestésica*, habilidad para expresar ideas y sentimientos adecuadamente; la *lógico-matemática*, capacidad para operar números, relaciones y patrones lógicos eficazmente, para realizar generalizaciones y abstracciones, permitiendo analizar planteamientos y problemas con facilidad; la *espacial*, destreza para apreciar el espacio físico y representarlo; la *musical*; la *interpersonal* -especialmente valorada en la sociedad actual-, posibilidad de distinguir y percibir los estados emocionales y los signos interpersonales de los demás respondiendo asertiva y efectivamente; la *intra-personal*, habilidad de la autoinspección que facilita actuar en consecuencia, basándose en el conocimiento propio, en la autoimagen acertada, así como en la capacidad de autodisciplina, comprensión y amor propio, especialmente, está presente en las personas que son reflexivas, de razonamiento acertado, quienes suelen ser consejeras de sus pares; y, la *naturalista*, capacidad que incluye habilidades de observación, experimentación y reflexión respecto al entorno.

La metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP)

La metodología del Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) es una innovación de la forma de trabajar en el ámbito universitario, que se utiliza en la enseñanza de distintas áreas de conocimiento y, específicamente, para promover las competencias profesionales determinantes del perfil del estudiante de una carrera concreta. Así pues, el ABP construye pequeñas comunidades de aprendizaje colaborativo utilizando problemas reales de la futura profesión. Características básicas de esta metodología, que interesan para la propuesta de innovación, son, por una parte, que el aprendizaje se centra en el estudiante porque los miembros de los pequeños grupos bajo la guía de un tutor, utilizan las herramientas aprendidas hasta ese momento y asumen con responsabilidad el problema, y, por otra parte, que se trabaja una situación problemática, caso real de la vida laboral, ante la que el grupo de estudiantes ha de enfrentarse sin ninguna preparación o explicación previa (Escribano y González, 2008).

La aplicación de esta metodología implica conocer los principios didácticos que la sustentan, los cuales combinan dos modalidades de aprendizaje, la personal o el aprendizaje autorregulado, y la grupal o aprendizaje colaborativo, estimulando procesos evaluativos tanto del proceso de resolución como del resultado. La competencia docente para gestionar esta metodología de trabajo es clave para el buen desarrollo de las experiencias.

Caso Fuertes y otros (2006), dicen de esta metodología didáctica que se asemeja al “modelo de enseñanza/aprendizaje en el que se combina la adquisición de conocimientos con el desarrollo de habilidades y actitudes útiles para la práctica profesio-

nal a través del trabajo en grupos con un tutor para resolver problemas propios de la profesión” (p. 397).

Ahora, se recogerá brevemente en qué consiste esta metodología. Se realiza la distribución de los grupos de estudiantes y tutores, y, a continuación, se les presenta una situación problemática que está relacionada con su futura profesión, que han de resolver a lo largo de las sucesivas etapas a través del desarrollo de un trabajo colaborativo - creativo de búsqueda de soluciones e interpretaciones de la problemática objeto de estudio. El número de reuniones de cada grupo varía según el programa, el tiempo, la asignatura, la situación problemática. En las primeras sesiones del trabajo en grupo, se establecen las normas básicas sobre el funcionamiento, se comentan las expectativas de cada uno y del tutor, etc., seleccionando una forma de trabajo coordinada que facilite la gestión del conocimiento –del previo, del necesario o del conveniente para avanzar-, de las habilidades de los integrantes del grupo, etc.

Los miembros del grupo seleccionan las temáticas que serán objeto de aprendizaje – es preferible que todos estudien los temas básicos para así partir de unos referentes comunes al buscar las soluciones-, luego cada uno de los estudiantes toma un tiempo de trabajo individual. Más adelante, los miembros del grupo debaten, discuten, comparan y contrastan sus aprendizajes, intercambian ideas aplicando las nuevas informaciones a la situación problemática, reevaluando y elaborando una nueva síntesis del trabajo realizado hasta ese momento. Si es necesario, se plantearan nuevos temas objetos de aprendizaje y, si no, se reflexiona sobre el progreso realizado tanto por el equipo como por cada persona pasando a la redacción del informe final. Así pues, la metodología del ABP se desarrolla en un proceso cíclico con tres fases (Perrenet, 2000): la primera, es la reflexión cooperativa sobre el problema inicial identificando las necesidades de profundización en diversos temas; la segunda, el estudio personal autodirigido sobre los temas objeto de estudio; y, finalmente, grupalmente se realiza la aplicación de los nuevos conocimientos al problema haciendo una síntesis de lo aprendido. Este proceso se realiza tantas veces como sea conveniente, durante la realización del proyecto.

Referentes prácticos

Además de los referentes de las escuelas politécnicas españolas, un referente importante para la elaboración de esta propuesta es la innovación didáctica realizada en una universidad venezolana, con próximos estudiantes de diversas ingenierías y de arquitectura; referente que expondremos sin ser exhaustivos en la explicación del desarrollo de la investigación-innovación didáctica acerca de los resultados obtenidos en la competencia matemática a través de un trabajo en equipo.

La particularidad de esa investigación consistió en la formación y desarrollo de actividades de Grupos Inteligentes Homogéneos (GIH), a través de pequeños proyectos de resolución de problemas matemáticos mediante la modelización de ecua-

ciones lineales siguiendo parte de la metodología de Polya (1975), adaptada al contexto del programa de formación específico. El propósito fundamental de esa investigación consistió en presentar los resultados obtenidos al implementar el uso de estrategias didácticas para el desarrollo de las Inteligencias Múltiples (IM) en varios cursos del Ciclo de Iniciación Universitaria (CIU) de la Universidad Simón Bolívar, Caracas-Venezuela (Malatesta y Quintana, 2004 y 2007). Específicamente, se presentaron los resultados asociados a la formación y desarrollo del trabajo de esos grupos de alumnos (García 2009; García, Malatesta y Quintana, 2010).

Propuesta del Proyecto de Innovación Didáctica

Las tareas profesionales del arquitecto técnico son variadas, externamente podrán parecer iguales para quien sea ajeno a este trabajo, pero realmente las situaciones problemáticas que se le presentan son inéditas, es decir, la práctica real de la profesión de arquitecto técnico no es un proceso sistemático y metódico, sino cambiante y con muchas variables y tipos de casos o problemas. Se puede afirmar con propiedad que ninguna obra o proyecto que pasa por sus manos sea igual a otro, ya que hay factores y variables que siempre la hacen diferente.

Por tanto, la formación de los universitarios actuales será más eficaz a largo plazo, en la medida que realicen trabajos cualitativamente significativos y contextualizados en la profesión de ingeniero. Un taller inspirado en la metodología de ABP que trabaje esas situaciones problemáticas es un ambiente idóneo para la etapa de formación universitaria, ya que esta forma de aprender –o *estudiar*– de los futuros ingenieros facilita la adquisición de las herramientas y competencias necesarias para capacitarse en la resolución de cualquier tipo de casuística que se presenta en la vida profesional.

Stewart, Redlin y Wastson (2006) explican que una manera de hacer participar a los estudiantes y volverlos alumnos activos es fomentar trabajos en la universidad que los involucren en proyectos extensos haciéndoles sentir que logran algo importante cuando los terminan, es decir, esta propuesta consiste en un conjunto de actividades desafiantes pero accesibles, con el objeto de que los estudiantes exploren con mayores detalles un aspecto de la vida profesional y apliquen integrándolo lo que han aprendido en otras asignaturas.

La naturaleza de este Proyecto de Innovación permite realizarlo en grupos, y en nuestro caso, la clave del éxito está precisamente en el criterio elegido para la formación de grupos de trabajo, ya que supone una garantía inicial de un trabajo colaborativo eficiente durante el desarrollo de esa práctica o de otras similares.

Objetivos del Proyecto

Los objetivos de la Innovación Didáctica: “Una experiencia en Gestión de la Edificación” son los siguientes:

Objetivo general

Incentivar la adquisición de competencias profesionales a través de un aprendizaje activo y colaborativo de estudiantes de ingeniería de la edificación, aplicando una metodología didáctica innovadora para facilitar concretamente el desarrollo de la competencia matemática en situaciones problemáticas reales de la vida profesional del arquitecto técnico.

Objetivo Específicos

- Formar Grupos Inteligentes Homogéneos (GIH) de estudiantes de ingeniería de la edificación que permitan un trabajo en un ambiente agradable de colaboración en el que el trabajo en equipo permita una optimización de recursos.
- Promover una actitud activa y cooperativa dentro de cada GIH para que cada miembro asuma los retos y roles de pensar y actuar como si fueran profesionales, gestionando de una manera asertiva los posibles conflictos.
- Proponer situaciones problemáticas adaptadas de situaciones reales para que los estudiantes se familiaricen con lo peculiar de su futura profesión a través de experiencias significativas, y puedan proyectar esas soluciones en decisiones acertadas.
- Proporcionar oportunidades para que los alumnos puedan integrar sus conocimientos, destrezas y habilidades técnicas aplicándolas a la resolución de problemas de ingeniería de la edificación.
- Experimentar y desarrollar competencias profesionales importantes del futuro arquitecto técnico, en concreto, la competencia matemática tan necesaria y útil al realizar mediciones, calcular proporciones, así como para argumentar propuestas.

Desarrollo de la Innovación

Teniendo en cuenta los referentes descritos y los objetivos del proyecto, pasamos a describir la propuesta concreta, que puede ser más o menos extensa en el tiempo: “Una experiencia en Gestión de la Edificación”.

Hemos partido de una experiencia laboral reciente de un arquitecto técnico, adaptándola para que pueda ser propuesta a los estudiantes de la carrera. En ella, los alumnos han de asumir el rol de jefe de obras para atender eficazmente a los intervinientes en el proceso constructivo, introduciendo a los alumnos en la percepción de que las tareas del arquitecto técnico son muy variadas, y aunque algunas se parezcan, en la realidad ninguna es idéntica a las otras. El enunciado puede leerse en el Anexo, allí se encuentran los documentos imprescindibles para entender la experiencia.

El contenido matemático involucrado en el Proyecto es el de magnitudes y medidas, cambios de unidades, etc. Un jefe de obras ha de ser experto en la tarea de medicio-

nes, pues todo el trabajo posterior depende de esos cálculos. Los modelos matemáticos necesarios –que incluyen el uso de algún programa básico de cálculo–, son las técnicas de cálculo para medir las magnitudes involucradas de la cantidad de materiales necesarios para la construcción de obra, así como de los costos de ejecución de la misma. Las magnitudes involucradas son, entre otras, longitud (m), superficie (m^2), volumen (m^3), masa (Kg), tiempo (mano de obra) y costo (euros). Para los cálculos es necesario el conocimiento de los criterios de aplicación de las tablas normalizadas de datos para cálculos de mediciones de cimentación y estructura. Por ejemplo: un conocimiento imprescindible para calcular los Kg de acero corrugado es saber la equivalencia de la longitud de las barras de acero (m) de un determinado diámetro (mm) con la masa de dicha barra (Kg); otro, sería el cálculo de la masa (Kg) de hormigón armado a partir de los materiales con los que se elabora la mezcla.

Ahora no nos detendremos en los detalles de la secuencia de innovación didáctica que ya están descritos en el apartado de referentes teóricos y prácticos, en el que se inspira este proyecto de innovación didáctica: “Una experiencia en Gestión de la Edificación”. Sin embargo, sí nos interesa recordar, por una parte, que es importante para los alumnos tener claro desde el principio cómo será la evaluación del proceso del trabajo tanto grupal como individual, cuál será el cronograma básico al que atenerse; y, por otra parte, hacerles conscientes del interés particular que tiene en su aprendizaje que todo el trabajo sea fruto de un proceso de reflexión continuada, insistiéndoles en que el informe escrito final, con la solución de la situación problemática debe ser un producto maduro de consenso y esfuerzo de todos los integrantes del grupo.

Algunas conclusiones

Las conclusiones que podemos recoger hasta ahora son, en primer lugar, la satisfacción de los autores de este proyecto al analizar las prácticas docentes de las carreras de ingeniería de la edificación y otras afines, y la realización de una reflexiva propuesta factible.

Y, en segundo lugar, teniendo en cuenta las conclusiones de investigaciones y de innovaciones didácticas análogas, podemos adelantar también un resultado satisfactorio en los estudiantes de ingeniería de la edificación, porque al tratarse de una metodología didáctica innovadora, en este caso concreto, sobre gestión de la edificación, estamos adelantando lo que serán sus actuaciones profesionales del futuro próximo. Además, la capacidad de reflexión y la madurez en la toma de decisiones sin duda crecerá notoriamente en los estudiantes.

Referencias

- [1] Benito, A. y Cruz, A. (Coord.) (2005). *Nuevas Claves para la docencia universitaria en el espacio Europeo de Educación Superior*. Madrid. Narcea. Colección Universitaria.
- [2] Camilli, C., López, E., Barceló, M.L., y García, M. *La investigación-acción colaborativa aplicada a las TIC: innovación metodológica en un grupo interdisciplinar de profesores universitario*. Actas de VIII Jornadas Internacionales de Innovación Universitaria "Retos y oportunidades del desarrollo de los nuevos títulos en Educación Superior". Universidad Europea de Madrid. Julio 2011. Madrid.
- [3] Caso Fuertes, A. D., García Sánchez, J. N., Arias Gundín, O., Fidalgo Redondo, R., y Fernández Martínez, M. (2006). El aprendizaje basado en problemas: revisión de estudios empíricos internacionales. *Revista de educación*, (341), 397-418.
- [4] Castillo Arredondo, S. y Cabrerizo Diago, J. (2006). *Formación del Profesorado en Educación Superior. Desarrollo Curricular y Evaluación*. Volumen I y II. Madrid. Mc Graw Hill.
- [5] Escribano, A., y González, A. E. (2008). *El aprendizaje basado en problemas: una propuesta metodológica en educación superior*. Madrid. Narcea.
- [6] Flores, P. (2007). Profesores de matemáticas reflexivos: formación y cuestiones de investigación. *PNA*, 1(4), 139-159. Revista de investigación en didáctica de la matemática. Editada por el grupo *Didáctica de la Matemática. Pensamiento Numérico* del Plan Andaluz de Investigación de la Junta de Andalucía.
- [7] García Almiñana, D., y Amante García, B. *Algunas reflexiones en torno a la enseñanza de Proyectos basada en entornos colaborativos*. Actas del 15º Congreso Universitario de Innovación Educativa en las Enseñanzas Técnicas. Escuela Universitaria Politécnica de Valladolid, 18-20 de julio, 2007. Valladolid.
- [8] García Almiñana, D y Amante García, B., *Algunas experiencias de aplicación del aprendizaje cooperativo y del aprendizaje basado en proyectos*. Actas de las Primeras jornadas de innovación educativa. Escuela Politécnica Superior de Zamora, Junio 2006a. Zamora.
- [9] García Almiñana, D., y Amante García, B. *Metodologías de aplicación del AC y del ABP en asignaturas técnicas – teoría y laboratorios*. Actas del XIV Congreso Universitario de Innovación en las Enseñanzas Técnicas de Gijón. Septiembre 2006b. Gijón.
- [10] García, M., Malatesta, S., y Quintana, Y. (2010). Sobre formación de grupos inteligentes homogéneos en programas de iniciación universitaria, *Sapiens* 2010. Aprobado y pendiente de publicar.

- [11] García Valldecabres, M. *Trabajo colaborativo de profesores de matemáticas como vivencia práctica del docente investigador*. Actas I Congreso Internacional de Nuevas Tendencias en la Formación Permanente del Profesorado, septiembre 2007. Universidad de Barcelona- ICE. Barcelona.
- [12] García Valldecabres, M. (2009). *Transición Bachillerato – Universidad: Valoración de una práctica de modelización*. Master en Investigación en Didáctica de la Matemática. Universidad Autónoma de Barcelona. Barcelona.
- [13] Gardner, H. (1993). *Frames of the Mind: The Theory of Multiple Intelligences*. New York. Basic Books, INC
- [14] Gardner, H. (1995). *Inteligencias Múltiples. La teoría en la Práctica*. Madrid. Paidós Ibérica.
- [15] Garnett, S. (2009) *Cómo usar el cerebro en las aulas*. Madrid. Narcea.
- [16] Knight, P. T. (2005). *El profesorado de Educación Superior. Formación para la excelencia*. Colección Universitaria. Madrid. Narcea.
- [17] Gavilán, P (2002). Comparación de modelos de resolución de problemas en una clase tradicional y en una clase cooperativa. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas* 31, 34-43.
- [18] Gómez, J. y J. Fortuny (2002). Contribución al estudio de los procesos de modelización en la enseñanza de las matemáticas en escuelas universitarias. *Uno: Revista de didáctica de las matemáticas* 31, 7-23.
- [19] Malatesta, M. y Quintana, Y. (2004). Metodologías e Implicaciones Docentes de la Enseñanza: Inteligencias Múltiples. *Educare*, 8(2), 85-100.
- [20] Malatesta, M., y Quintana, Y. (2007). *Inteligencias Múltiples y Enseñanza de Geometría*. Escuela Venezolana para la Enseñanza de la Matemática. Colección Aula. Mérida, Venezuela.
- [21] Mason J., Burton L., y Stacey (1989). *Pensar matemáticamente*. MEC. Labor.
- [22] Moreno Flores, J. (coord.) (2011). *Problemas resueltos de Matemáticas para la edificación y otras ingenierías*. Gráficas Eujaa. Asturias.
- [23] Perrenet, J. C. (2000). The suitability of problem-based learning for engineering education: theory and practice. *Teaching in Higher Education*, 5, 3, 345-358.
- [24] Polya, G. (1975). *Como resolver y plantear problemas*. Mexico. Trillas.
- [25] Sánchez – Pérez E., Garcia Raffi L., y Sanchez-Perez, J. Introducción de las técnicas de modelización para el estudio de la física y de las matemáticas en los primeros cursos de las carreras técnicas. *Enseñanza de las Ciencias*, 1999, 17 (1), 119-129.

- [26] Schön, D. (1992). *La formación de profesionales reflexivos. Hacia un nuevo diseño de la formación y el aprendizaje en las profesiones*. Madrid. Paidós, MEC.
- [27] Stewart, J., Redlin, L. y Watson, S. (2006). *Precálculo. Matemáticas para el Cálculo*. D. F., México. Thomson Editores.
- [28] Zabalza, M. A. (2006). *Competencias docentes del profesorado universitario. Calidad y desarrollo profesional*. Colección Universitaria Segunda edición. Madrid. Narcea.

Por una enseñanza de las matemáticas realmente aplicadas: control acústico

Anna Vidal Meló*; avidal@mat.upv.es

Bernardino Roig Sala*; broig@mat.upv.es

Vicente D. Estruch Fuster*; vdestruc@mat.upv.es

Francisco J. Boigues Planes*; fraboipl@mat.upv.es

Romina del Rey Tormos*; roderey@doctor.upv.es

Jesús Alba Fernández*; jesalba@fis.upv.es

Xesc Canet Carbonell*; xescacar@epsg.upv.es

*Escuela Politécnica Superior de Gandía

Resumen

La enseñanza de las matemáticas en la ingeniería debe insistir en su aspecto de herramienta susceptible de ser utilizada para analizar realidades concretas. Mostramos una metodología de enseñanza para estudiantes de primer curso de grado, basada en el estudio y resolución de problemas contextualizados. En este trabajo, exponemos un proceso de construcción y utilización de los mapas de color para la representación de diversos fenómenos relacionados con el sonido, en particular los asociados a la contaminación acústica. La exposición de un caso real de arreglo de subgraves sirvió como elemento motivador del proyecto.

Palabras clave: *mapas de color, mapas de ruido, subgraves, interpolación.*

Introducción

Las matemáticas siempre han estado presentes en los planes de estudios para la formación de ingenieros. No obstante, las diferentes reformas universitarias han conllevado que las asignaturas básicas experimenten una disminución en cuanto a su peso en los currículos, un sacrificio en aras de una mayor especialización. De todas maneras, nadie pone en cuestión que siga siendo esencial la presencia de las matemáticas en los planes de formación de los ingenieros. No solo está el clásico argumento de que las matemáticas ayudan a estructurar la mente del científico, que gracias a las matemáticas aprende a argumentar correctamente, a utilizar con precisión las terminologías o a justificar con rigor los resultados. También es importante que la matemática ofrece una herramienta fundamental para el análisis de la realidad.

Es evidente que el aprendizaje de las matemáticas conlleva dificultades. Muchas de ellas tienen que ver con la naturaleza propia de las matemáticas: su lenguaje propio, el rigor en las deducciones, conocimientos que se basan en otros previos, etc. Pero no podemos olvidar otras variables, de carácter emocional, que afectan el trabajo del estudiante y su motivación ([1]). Lograr que las actitudes de los estudiantes hacia las matemáticas tengan un carácter positivo ayuda, sin duda, a mejorar los rendimientos. El cambio de actitud se puede facilitar si los estudiantes experimentan la utilidad de las matemáticas para entender y resolver problemas de otros campos de estudio. Plantear problemas a partir de la modelización matemática, y obtener soluciones contrastables, debería ser una de las características del proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en la ingeniería.

En este trabajo mostramos un proyecto relacionado con el control acústico que se plantea a estudiantes de primer curso de un Grado en Telecomunicaciones, en la asignatura de matemáticas. En el desarrollo del proyecto se utilizan algunas nociones teóricas explicadas en clase, aunque también se introducen nuevos tópicos, especialmente los relacionados con el cálculo numérico. Destacar el uso de TIC, en concreto de MatLab[®], sobre todo como herramienta gráfica.

Antecedentes

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) proporciona un marco teórico que contextualiza la actividad matemática en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales. La TAD introduce en los sistemas de enseñanza procesos de estudio funcionales, que permiten superar la matemática como un todo acabado, tanto a nivel cognitivo como procedimental, mediante procesos que permiten analizar y resolver situaciones problemáticas cercanas a la realidad. Los Recorridos de Estudio y de Investigación (REI) son mecanismos didácticos, propuestos por la TAD, que se diseñan a partir de la búsqueda de respuestas a cuestiones que, para ser resueltas, requieren de la construcción de una secuencia más o menos compleja de praxeologías completas y articuladas ([2])

En base al marco teórico que establece la TAD, desde hace años, componentes del Grup d'Innovació Educativa i Recerca en Mètries Científiques (GIERMAC) han trabajado en la incorporación de problemas contextualizados, que denominamos proyectos, en la enseñanza de las matemáticas en las ingenierías ([3]). Levantamientos topográficos, control de plagas, optimización de recursos pesqueros, etc., han sido algunos proyectos elaborados por el grupo. Más recientemente, en el contexto de proyectos de innovación, varios profesores de GIERMAC, de los Departamentos de Matemática Aplicada y Física Aplicada, del Campus de Gandia de la Universitat Politècnica de València (UPV), colaboran en el desarrollo de experiencias para las clases de prácticas en aula informática, en el primer curso del Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen (GISTSI), en concreto en la asignatura Matemáticas 2. Durante los cursos 2011-2012 y 2012-2013 se

ha trabajado en la elaboración y utilización de mapas de color para la comparación de mapas de ruido de una misma zona, cuando se aplican medidas correctoras.

Un proyecto de contaminación acústica

En el curso 2011-2012 partimos de dos mapas acústicos distintos, “Caso 0” y “Caso 1”, pero correspondientes a una misma zona de una ciudad, con un hospital y un sector residencial (ver figura 1). Un mapa acústico es un mapa común sobre el que se ha representado el nivel de ruido medio soportado. En nuestro caso el nivel de ruido en los mapas iniciales se representan mediante curvas de nivel. Los dos casos se corresponden a dos situaciones distintas en lo que respecta a niveles sonoros. El “Caso 0” representaba la situación inicial en cuanto a niveles de ruido. El “Caso 1” reflejaba los niveles de ruido después de determinadas correcciones llevadas a cabo en la zona: el cambio del tipo de asfalto a asfalto poroso, la redistribución del tráfico rodado, el aumento de la vegetación en determinadas zonas, etc. El objetivo es observar y cuantificar las posibles mejoras, de haberlas, respecto al nivel de ruido, al comparar el “Caso 0” (inicial) y el “Caso 1” (con medidas correctoras). Los resultados obtenidos fueron una mejora por toda la zona.

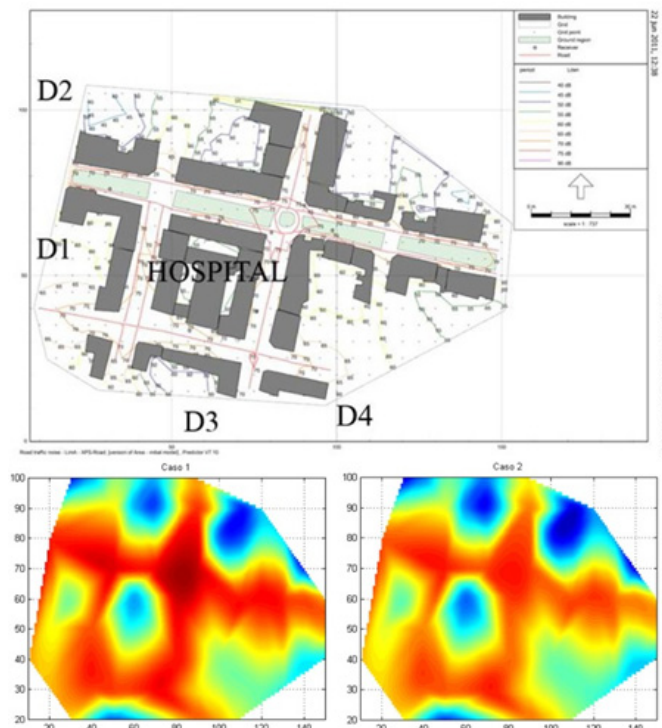


Figura 1. Proyecto 2011-2012

Durante este curso, se ha partido de 3 situaciones en una misma zona con un colegio y una zona residencial junto con una carretera. El caso 0 se corresponde con un mapa sin barrera acústica alguna; en el caso 1 se dispone una barrera acústica en la

cara inferior de la carretera y en el caso 2 dos barreras, una delante del colegio y otra delante de la zona residencia. En el siguiente apartado explicamos la modelización de este último proyecto y los resultados obtenidos.

Modelización Matemática del proyecto

Partiendo de los mapas acústicos correspondientes (ver figura 2), una primera forma de estudiar el impacto sonoro es comparar en determinadas direcciones las tres situaciones.

Para ello se siguen las siguientes pautas:

1. Se marcan direcciones (segmentos) verticales a lo largo del mapa sonoro, teniendo en cuenta que la escala del mapa verifica la relación 4.7 cm son 200m. Se fijan los puntos iniciales.
2. Eligiendo una misma dirección sobre los tres mapas, se define una variable x , que es la distancia desde el punto inicial de la dirección a los puntos de corte con las curvas de nivel de ruidos. También se define la variable y correspondiente al nivel de ruido, en dB, correspondiente al punto de corte.
3. Utilizando las herramientas gráficas de MatLab[®] representamos aproximadamente la función que definen los puntos (x,y) , a partir de la tabla de valores, en los dos casos. Finalmente solapamos las dos gráficas para compararlas.

En la mayoría de casos, a partir de la visualización de las gráficas (poligonales) ya se puede sacar conclusiones (ver figura 3), de carácter direccional.

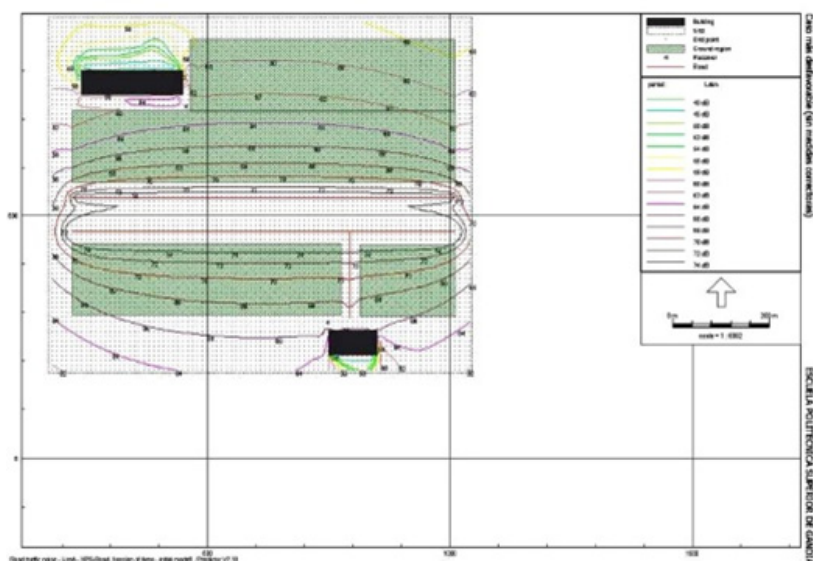


Figura 2. Mapa del caso 0.

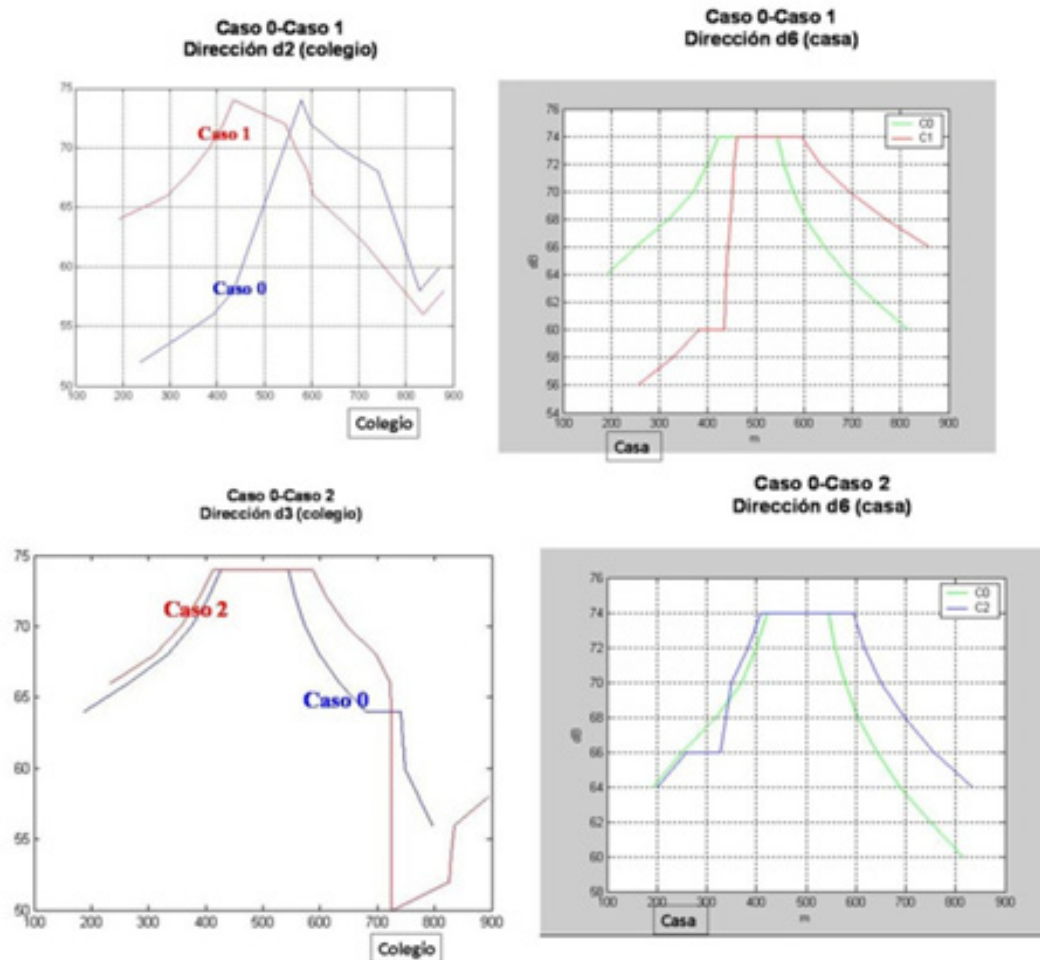


Figura 3. Comparando direcciones

Otra manera de analizar la situación es a través de la modelización mediante funciones de dos variables. Si cuadrículamos todo el mapa de ruido y determinamos en cada nodo su nivel de dB, obtendremos una tabla de valores (x,y,z) para una función de dos variables. Usando las herramientas gráficas 3D con sus correspondientes interpolaciones a través del comando **interp2()**, por ejemplo con el método de spline, podremos obtener posteriormente una representación gráfica del ruido. Otra forma y es la que se ha utilizado en este proyecto, es la de partir de una serie de medidas del nivel de dB en un conjunto disperso de puntos que no determinan una malla rectangular. En este caso el comando para la interpolación utilizado es el **griddata()**, bien por el método cubic o v4. Con la utilización posterior de **pcolor()** y **shading interp**, se obtienen los mapas de colores (ver Figura 4).

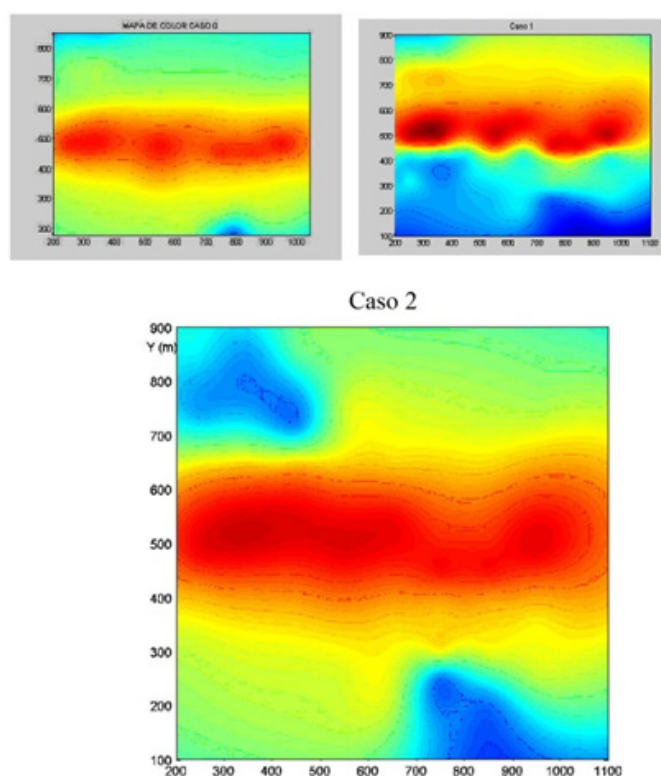


Figura 4. Mapas de color proyecto 2012-2013

Como conclusión, se observa que en el “Caso 1” se consigue amortiguar gran parte del ruido en la zona residencial, aunque no en la zona del colegio, debido a la reflexión del sonido de la carretera en la barrera. Por otra parte, en el caso 2 se consigue amortiguar el nivel de decibelios justo en las dos zonas, el colegio y la casa, al estar ambos protegidos. Por tanto es preferible la situación del caso 2.

Implementación del proyecto

La asignatura de Matemáticas 2

El proyecto se realizó en la asignatura anual de 9 créditos ECTS llamada Matemáticas 2, de primer curso del GISTSI que se imparte en la Escuela Politécnica Superior de Gandía (EPSG). Sus créditos se reparten en clases de teoría y práctica de aula (4.6 ECTS), clases de seminario de problemas (3 ECTS) de una hora semanal y prácticas de laboratorio informático (1.4 ECTS) con la realización de 7 prácticas de 2 horas. Para el desarrollo del proyecto se usaron una clase teórica y dos prácticas. El alumno puede consultar la guía docente de esta asignatura así como obtener los recursos que proporciona el profesor en la plataforma institucional Poliformat.

Metodología

En la realización de las prácticas se utilizan diversas metodologías. Los alumnos disponen de un guion de la práctica, ([4]), en el que se distinguen una primera parte de desarrollo de la base teórica necesaria y una segunda parte donde se interactúa directamente con el programa Matlab[®], que denominamos “manos a la obra” (MAO). Habitualmente el profesor se encarga de explicar el contenido teórico de la práctica al principio de la sesión, dejando tiempo para que el alumnado, posteriormente, realicen los apartados correspondientes al MAO. En otras prácticas se utiliza una técnica de aprendizaje cooperativo, el puzle de Aronson ([5],[6],[7]). Además, después de cada práctica se exige a los alumnos la realización de un pequeño trabajo en grupo, teniendo que presentar, una memoria, utilizando Poliformat, en un plazo de 15 días. Un 20% de la nota final de la asignatura corresponde a la valoración de dichas memorias.

Desarrollo de la clase teórica

La sesión teórica se estructuró en dos partes: en la primera el profesor explica las nociones teóricas necesarias, y en la segunda parte se contó con la colaboración de un alumno de segundo año del GISTSI, que explicó un caso práctico, el arreglo de subgraves y la utilización de mapas de color.

Parte 1

El profesor explica el concepto de gráfica de una función escalar $f(x,y)$ y la define las curvas de nivel. Estos conceptos dan lugar a las siguientes formas de representación de la función dada por $f(x,y)$:

1. Representación 3D, correspondiente a los puntos de la gráfica, que da lugar a una superficie en el espacio.
2. Representación 2D:
 - a. La asociada a la representación del mapa de curvas de nivel, al igual que un mapa topográfico.
 - b. La del mapa de color muy utilizada en el estudio de determinados fenómenos, como en el caso de temperaturas o niveles acústicos, en donde el color en un punto (x,y) representa el valor de la función escalar en dicho punto.

Entre las aplicaciones de los mapas de color, comentamos el artículo de la revista Muy Interesante Online, [8], relacionado con el denominado “efecto Pinocho”. Posteriormente enlazamos con la página sobre contaminación acústica y ruido de la Conselleria d’Infraestructures, Territori i Medi Ambient de la Generalitat Valenciana ([9]) donde, además de diversas normativas, aparecen mapas estratégicos de ruidos que se corresponden con mapas de color diseñados para poder evaluar glo-

balmente la exposición al ruido de una zona determinada, debido a la existencia de distintas fuentes de ruido, o para poder realizar predicciones globales para dicha zona (ver figura 5). De esta forma los alumnos también toman conciencia de la importancia de la contaminación acústica y de la existencia de normativas que intentan ordenar los problemas derivados del exceso de ruido en zonas residenciales ([10]).



Figura 5. Página de la GVA sobre Contaminación Acústica

Parte 2

La breve charla que ofrece el alumno colaborador, expone a los alumnos cómo se puede actuar para formalizar un problema acústico de cara a interpretar resultados mediante el uso de mapas de color.

En aplicaciones profesionales de refuerzo de sonido se ven involucrados muchos sistemas de sonido diferentes, con diferentes tipos de altavoces. A grandes rasgos en un concierto los altavoces dirigidos al público, a menudo llamados PA, se componen, en la configuración más simple de todas, de dos sistemas diferentes:

- Un sistema dedicado a reproducir las frecuencias bajas del espectro audible (20-250Hz), encargándose de su reproducción los altavoces de graves, a los que nos referiremos como subgraves.
- Otro para reproducir las medias y altas frecuencias del espectro (250-20000Hz).

Tanto los subgraves como los altavoces de medios-agudos, no pueden ser tan estrictos en el corte de frecuencia arriba citado. Existe una zona de solapamiento entre ambos sistemas (ver figura 6).

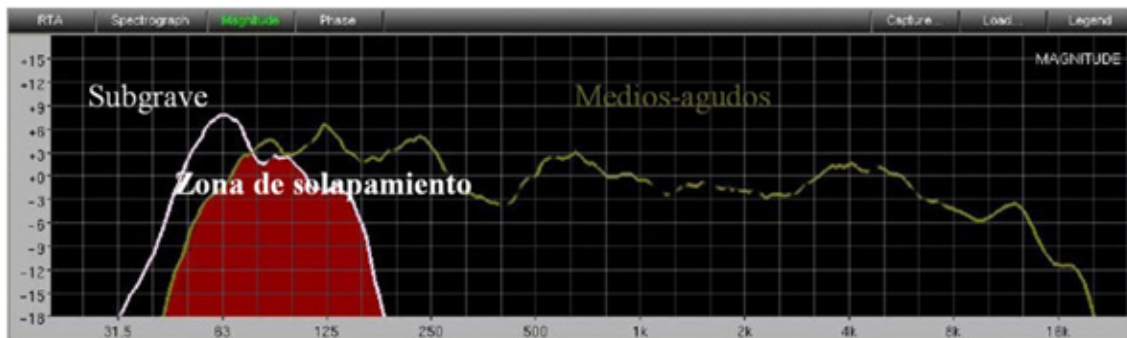


Figura 6. Zona de solapamiento

En una aplicación de público reducido, un pequeño bar por ejemplo, tal vez sea suficiente la presión acústica que puede ofrecer un subgrave, pero en eventos multitudinarios como grandes conciertos, festivales etc., es necesario el “trabajo en equipo” de muchos subgraves para conseguir elevados niveles de presión sonora en toda la zona de audiencia. Pero es necesario conocer el comportamiento de varias unidades de subgraves para realizar un correcto ajuste del sistema de bajas frecuencias.

Existen muchos programas informáticos para la predicción acústica de sistemas de refuerzo de sonido, en los que el usuario, añadiendo altavoz por altavoz, recrea todo el sistema que va a utilizar para cierta aplicación. El programa se encarga de calcular en cada punto de una malla muy fina (zona de audiencia), la contribución de todas las presiones sonoras de todos los altavoces. De este modo, almacena punto a punto los valores de presión. Este tipo de programas muestran al usuario la interacción entre diferentes subgraves para buscar una distribución de los altavoces que mejore el comportamiento en la zona de audiencia. En las figuras 7 y 8 se muestran diferentes mapas de color asociados a diferentes configuraciones de subgraves. En la Figura 7, existen máximos y mínimos en toda la zona de audiencia. Los espectadores, en función de su posición, escucharán o no ciertas frecuencias.

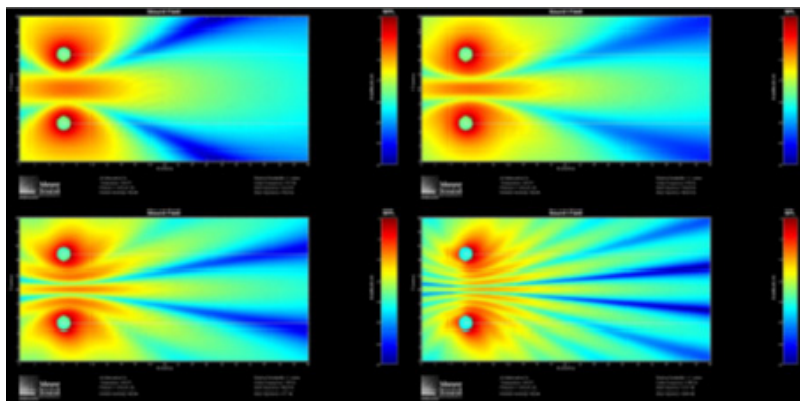


Figura 7. Configuración en L-R

Simplemente cambiando la ubicación de los altavoces el comportamiento es mucho más uniforme en toda la zona de audiencia (ver figura 8).

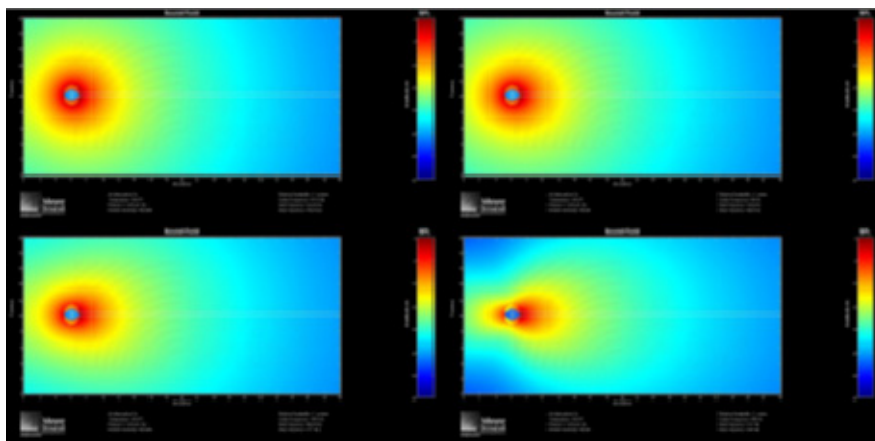


Figura 8. Configuración de graves en el centro

Los subgraves al ser tan omnidireccionales igual que radian hacia la zona de audiencia, también lo hacen hacia detrás, en la zona del escenario. Esto puede ser molesto para los músicos. Para evitar estas situaciones se pueden realizar configuraciones cardioides para variar el patrón polar de radiación del sistema de subgraves y evitar que radie hacia detrás, como se ve en la Figura 9.

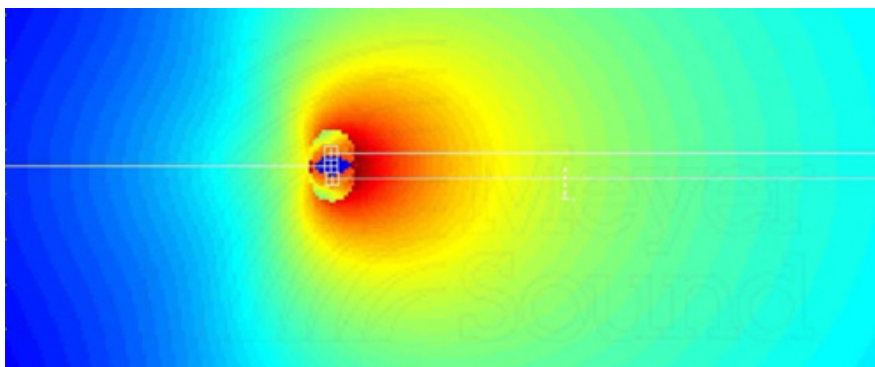


Figura 9. Configuración cardioide

Desarrollo de las clases prácticas

El proyecto descrito se realiza en dos de las prácticas de la asignatura. En la primera de ellas, el alumno aprende, entre otras cosas, a representar puntos y gráficas correspondientes a funciones de una variable, uniendo puntos de la gráfica situados a poca distancia. En ésta, y por grupos de dos, el alumnado toma las medidas sobre los mapas acústicos y en la memoria a realizar presentan las poligonales correspondientes a los dB medidos, de las que son ejemplo las de la Figura 3. En una segunda práctica el alumno aprende, principalmente, a representar funciones de dos variables, aquellas definidas a través de una función $f(x,y)$, o funciones de las que sólo se

conoce un conjunto de valores correspondientes a puntos dispersos, y también a utilizar métodos de interpolación en este segundo caso y que permiten, entre otros, obtener los mapas de color.

Comentarios finales

Los resultados en rendimiento y motivación han sido alentadores: un 81'4% del alumnado le ha parecido interesante o muy interesante este proyecto. Aunque existen aspectos mejorables, normalmente relacionados con la organización, estamos convencidos de que con estas experiencias, mediamos en regenerar la actitud de los alumnos frente a las matemáticas, con lo cual a su vez influimos en mejorar la dinámica del proceso de enseñanza/aprendizaje de las matemáticas en la ingeniería.

Referencias

- [1] Gómez Chacon, I.M. Actitudes de los estudiantes en el aprendizaje de la matemática con tecnología. *Enseñanza de las ciencias*, 28(2), pp. 227-244, 2010.
- [2] Serrano, L.; Bosch, M.; Gascón, J. (2007). Cómo hacer una previsión de ventas: propuesta de recorrido de estudio e investigación en un primer curso universitario de administración y dirección de empresas. En A. Bronner, M. Larguier, M. Artaud, M. Bosch, Y. Chevillard, G. Cirade & C. Ladage (Eds.) *Diffuser les mathématiques (et les autres savoirs) comme outils de connaissance et d'action* pp. 835-857, 2010.
- [3] Boigues, F.J, Estruch, V.D., Roig, B., Vidal, A. Un modelo de transmisión de plagas para la enseñanza del álgebra lineal en el contexto de estudios en ciencias ambientales. *Modelling in Science Education and Learning*, 4, nº 8, pp.105-117, 2011.
- [4] Alamar, M. et al. *Fonaments Matemàtics: pràctiques de laboratori*, Editorial UPV, Valencia, 2008.
- [5] Aronson, E. et all, *The Jigsaw Classroom*, Sage Publications, Beverly Hills, California, 1978.
- [6] Aronson, E; Patnoe, S. *The Jigsaw Classroom, Building Cooperation in the Classroom*, Longman (second edition), United States, 1997.
- [7] Goikoetxea, E; Pascual, G. Aprendizaje cooperativo: bases teóricas y hallazgos empíricos que explican su eficacia, *Educación XXI*, Sumario 2002 (Nº5), 2002.
- [8] Sanz, E. Demostrado el "efecto Pinocho". *Revista Muy Interesante* (versión online), 2012. Disponible en: <http://www.muyinteresante.es/salud/preguntas-respuestas/demostrado-el-qefecto-pinochoq>
- [9] Generalitat Valenciana, Conselleria d'Infraestructures, Territori i Medi Ambient. Acceso en: <http://www.cma.gva.es/web/indice.aspx?nodo=4596&idioma=C>
- [10] *Acústica Ambiental: análisis, legislación y soluciones*. Editorial: Sociedad Española de Acústica. ISBN: 84-87985-18-1, 2009.

Las matemáticas en la evaluación interdisciplinar de competencias mediante análisis de edificaciones

Miguel Ángel López Guerrero*, mangel.lopez@uclm.es

Juan Carlos Jiménez Castillejo*, juancarlos.jimenez@uclm.es

Raquel Martínez Lucas*, raquel.martinez@uclm.es

*Departamento de Matemáticas de la UCLM. Escuela Politécnica de Cuenca. Campus Universitario de Cuenca C.P. 16071.

Resumen

Con esta comunicación se pretende mostrar la participación de las matemáticas en la evaluación interdisciplinar de competencias mediante prácticas dirigidas sobre edificios y proyectos de edificación. Se presentan las experiencias realizadas en el primer curso del Grado en Ingeniería de Edificación de la Escuela Politécnica de Cuenca de la Universidad de Castilla-la Mancha.

Palabras clave: *Matemática aplicada, evaluación interdisciplinar de competencias, prácticas dirigidas, análisis de edificaciones.*

Introducción

En la Escuela Politécnica de Cuenca de la Universidad de Castilla-La Mancha se imparte el título de Grado en Ingeniería de Edificación desde el curso académico 2009/10. En el primer curso se imparten dos asignaturas de matemáticas de carácter básico y de 6 ECTS cada una.

En esta comunicación se presenta la participación de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas I en la evaluación interdisciplinar de competencias mediante prácticas dirigidas sobre edificios.

Esta participación se inició a través de la inclusión de las asignaturas de matemáticas en un proyecto de innovación docente titulado "Introducción a Proyectos de Edificación Mediante Prácticas Dirigidas" que fue financiado en la convocatoria de ayudas de la UCLM, para proyectos de este tipo, a través del Vicerrectorado de Ordenación Académica y Formación Permanente. En él participaron un total de 13 profesores de la totalidad de las asignaturas de primer curso del Grado. Con este proyecto se perseguía que el estudiante integrase y contextualizase de forma práctica diferentes conocimientos de las diversas asignaturas que estudia durante el primer curso de la titulación de Ingeniería de Edificación de la Universidad de Castilla-La Mancha.

El objetivo general del proyecto era:

Aplicar coordinadamente el método de aprendizaje por prácticas dirigidas al primer curso de Ingeniería de Edificación para mejorar la adquisición de competencias genéricas de forma horizontal.

En este marco, los objetivos específicos eran:

De cara al alumnado:

Realizar actividades que interrelacionen las diferentes disciplinas y favorezcan la comprensión de la función de la Ingeniería de Edificación integrando los conocimientos teóricos adquiridos en cada asignatura.

De cara al profesorado:

Programar actividades coordinadas que permitan comparar los currículos de las distintas materias de la titulación de Ingeniería de Edificación (Matemáticas, Física, Sistemas de Representación, Materiales y Construcción) permitiendo realizar actividades conjuntas de evaluación de competencias.

Este proyecto partió de varios profesores del Departamento de Ingeniería Civil y de la Edificación de la UCLM y después se incorporaron otros departamentos como el de Matemáticas.

El proyecto se inició en el primer semestre del curso académico 2010/11 partiendo de las asignaturas “Construcción I” y “Fundamentos de Materiales de Construcción” siendo la primera de ellas la asignatura coordinadora. A partir de esta asignatura de referencia los estudiantes en grupos de 3 (organizados por ellos mismos) debían elegir un modelo próximo de edificio de especial interés. Para dicha elección se debe realizar una visita previa al edificio por parte del grupo y presentar posteriormente un informe a la asignatura coordinadora. Una vez seleccionados los edificios se plantean las diferentes exigencias de las asignaturas involucradas.

La realización de este trabajo conjunto de todas las asignaturas fue voluntario en el curso académico 2010/11, pasando a ser obligatorio en los cursos académicos 2011/12 y 2012/13.

A continuación se presenta la participación de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas I en la realización de estos trabajos conjuntos dirigidos sobre análisis de edificaciones: los objetivos o resultados que se esperan que alcancen los estudiantes, el procedimiento de trabajo, la documentación a entregar, la evaluación y la exposición. También se presenta el enunciado y desarrollo de un problema realizado por los estudiantes.

Participación en el proyecto y problema propuesto

La asignatura de Fundamentos de Matemáticas I, en la que se imparten los contenidos de Álgebra Lineal, Geometría y los Métodos Numéricos, ha participado en el proyecto inicial y en los siguientes dos cursos académicos aplicando la parte de Interpolación e Integración correspondiente a los Métodos Numéricos. En un futuro se intentará aplicar otros contenidos de la materia.

En esta asignatura se les propuso a los estudiantes que, según los grupos establecidos y sobre el edificio en el que estaban trabajando en las otras asignaturas, calcularan una serie de datos (áreas y longitud).

Con el planteamiento de resolución de problemas al aplicar métodos numéricos de interpolación e integración se pretende que los estudiantes transfieran lo aprendido a otras situaciones profesionales siempre que se encuentren con problemas definidos o que son posibles definir mediante funciones tabuladas.

Las instrucciones que a estos estudiantes se les dio respecto del trabajo que se les quería solicitar en la asignatura de matemáticas citada son las siguientes:

Objetivos o resultados que esperamos el estudiante alcance:

- Reconocer problemas reales para cuya resolución se puedan utilizar métodos numéricos de interpolación e integración.
- Aplicar algunos métodos numéricos de interpolación e integración a la resolución de problemas reales aplicados a la construcción.
- Relacionar los conceptos teóricos y prácticos.
- Utilizar la terminología propia de la materia.
- Presentar y defender trabajos con una correcta comunicación oral y escrita.

Procedimiento de trabajo:

- Visitar el edificio elegido.
- Analizar dónde se pueden aplicar los métodos numéricos de interpolación e integración.
- Tomar los datos necesarios para poder resolver el problema.
- Aplicar los métodos numéricos de interpolación e integración numérica a una parte del edificio elegido en el proyecto.
- Tutorías personalizadas del grupo.

Documentación a entregar:

- Documentación escrita en formato Microsoft Word o PDF DIN A4.
- Los trabajos se estructurarán según el siguiente orden:

- Título: Breve y conciso.
- Autores: Nombre y apellidos.
- Enunciado del problema.
- Fotografía/as del problema que se pretende resolver.
- Resolución del problema.
- Objetivos alcanzados.
- Presentación de los datos y resultados.
- Referencias bibliográficas.

Evaluación:

El trabajo se evalúa sobre 10 puntos repartidos de la siguiente forma: 4 puntos por la realización, 3 puntos por la exposición y 3 puntos por la defensa.

Este trabajo supone el 30% de la evaluación de la parte de la asignatura correspondiente a la realización, entrega, exposición y defensa de 3 ejercicios de los propuestos en cada tema, que se evalúa con el 35% de la calificación final de la asignatura, por lo que supone el 10% de la calificación final de toda la asignatura.

La calificación final del trabajo del grupo es asumida por todas las asignaturas involucradas en las prácticas dirigidas sobre el análisis de edificaciones y esta es trasladada, en el porcentaje que cada asignatura ha propuesto, en nuestro caso el 10%, a la calificación final de cada asignatura.

Las competencias genéricas transversales evaluadas conjuntamente mediante estas prácticas dirigidas son:

- G1.- Capacidad de análisis y síntesis.
- G4. Resolución de problemas.
- G6.- Razonamiento crítico.
- G7.- Trabajo en equipo.
- G22.- Correcta comunicación oral y escrita.

Además se evalúa parte de la competencia específica de la materia de matemáticas:

E1. Aptitud para utilizar los conocimientos aplicados relacionados con el cálculo numérico e infinitesimal, el álgebra lineal, la geometría analítica y diferencial, y las técnicas y métodos probabilísticos y de análisis estadístico.

Exposición de trabajos:

La exposición de los trabajos se realiza mediante la ayuda de un póster o panel que permite al grupo exponer los resultados sintetizados de los proyectos de las asignaturas implicadas. Cada póster es defendido por todos los miembros del grupo,

los cuales exponen partes del trabajo individualmente. También se pueden utilizar medios audiovisuales para la exposición.

Durante la jornada de exposición los estudiantes también evalúan los trabajos del resto de grupos mediante una plantilla sencilla que desarrolla los criterios de evaluación originales.

A continuación se presenta, a modo de ejemplo, un problema desarrollado por los estudiantes Nuria Atiénzar Denia, Marina A. Moreno Lara y Jesús Paterna García de la Escuela Politécnica de Cuenca.

Problema propuesto

Aplicación de métodos numéricos de interpolación e integración en el arco situado en el coro de la iglesia parroquial de San Bartolomé de Tarazona de la Mancha (Albacete).



Figura 1: Coro de la iglesia de San Bartolomé

Los estudiantes realizan el trabajo de campo en el propio edificio y luego utilizan los medios materiales y de infraestructuras que les ofrece la Escuela.

Este problema propuesto se ha desarrollado en un mes al final del primer semestre.

El plan de seguimiento a los estudiantes seguido por el profesor ha sido mediante tutorías presenciales al grupo en su despacho:

- La primera tutoría es obligatoria y se hace al comienzo del trabajo de matemáticas ya que los estudiantes deben proponer el enunciado del problema que quieren resolver y este debe ser aprobado por el profesor.
- La segunda tutoría es voluntaria y se hace cuando los estudiantes tienen todos los datos y han esquematizado lo que quieren presentar. Con esta tutoría pueden asegurarse que tienen bien enfocado el problema.

Enunciado y solución del problema

Enunciado:

Analizado el arco situado en el coro de la iglesia parroquial de San Bartolomé de Tarazona de la Mancha (Albacete):

1. Obtener el área que hay bajo el arco mediante una tabla de 7 valores utilizando los siguientes métodos:
 - a. Simpson 1/3.
 - b. Simpson 1/3 de segmentos múltiples.
 - c. Simpson 3/8.
 - d. Simpson 3/8 de segmentos múltiples.
 - e. Regla del Trapecio con segmentos múltiples.
2. Calcular la altura del arco a 2 m. del lateral izquierdo de este mediante el método de Newton.
3. Objetivos alcanzados con este problema.
4. Referencias utilizada.

Solución:

La tabla que han construido los estudiantes y que han plasmado en la sección con vistas al coro es la siguiente.

Tabla 1: Datos del coro que relaciona metros en la horizontal (x) con metros en la vertical $f(x)$

	x_0	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
x	0	0,822	1,645	2,467	3,289	4,112	4,934
$f(x)$	6,789	8,628	9,115	9,256	9,115	8,628	6,789

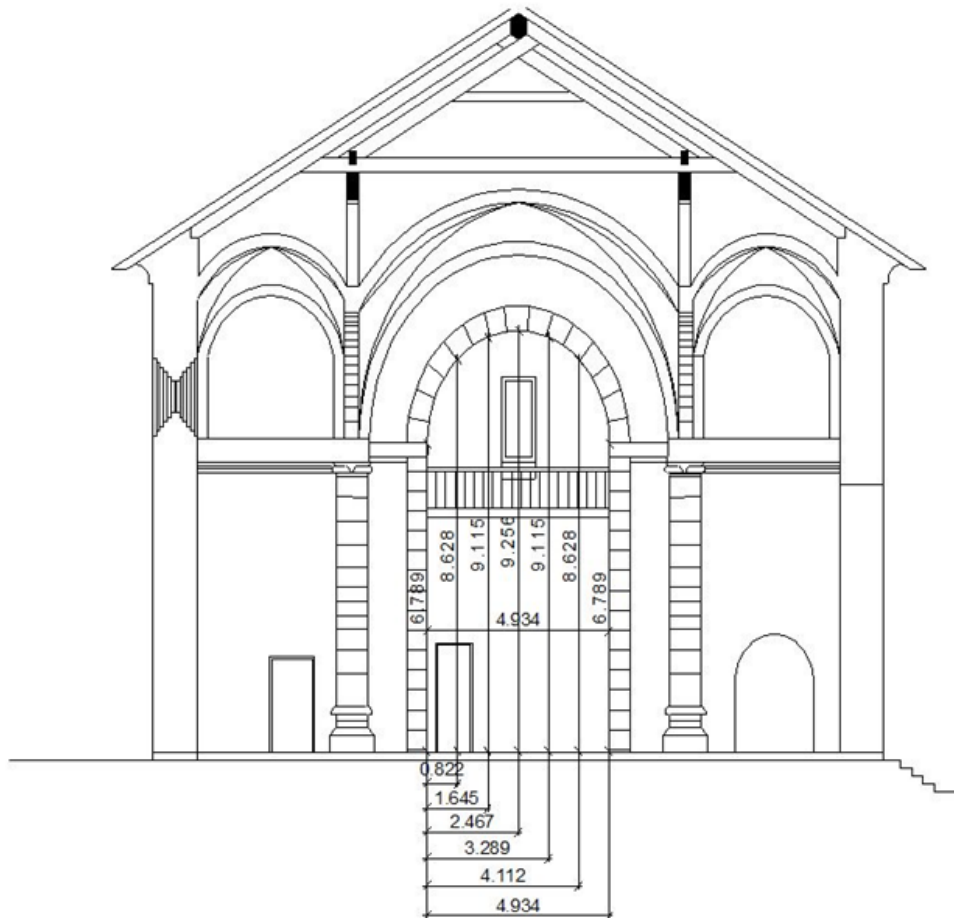


Figura 2: Sección con vistas al coro

A continuación se presenta la resolución del problema con algunos de los cálculos aportados por los estudiantes.

1.a) Regla de Simpson 1/3.

Para aplicar esta regla se utilizan tres puntos igualmente espaciados de los presentados en la tabla de datos del coro.

Como $h = \frac{x_n - x_0}{2} = 2,467$ los puntos utilizados serán:

	x_0	x_1	x_2
x	0	2,467	4,934
$f(x)$	6,789	9,256	6,789

El área bajo el arco con la regla de Simpson 1/3 es

$$A = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4f(x_1) + f(x_2)].$$

Sustituyendo los datos se tiene que

$$A = \frac{2,467}{3} [6,789 + 4 \cdot 9,256 + 6,789] = 41,612 \text{ m}^2.$$

1.b) Regla de Simpson 1/3 de segmentos múltiples.

Para aplicar esta regla se utilizan todos los puntos dados en la tabla de datos del coro.

En este caso el área bajo el arco es

$$A = \frac{h}{3} [f(x_0) + 4(f(x_1) + f(x_3) + f(x_5)) + 2(f(x_2) + f(x_4)) + f(x_6)].$$

Como $h = 0,822$, se tiene que

$$A = \frac{0,822}{3} [6,789 + 4(8,628 + 9,256 + 8,628) + 2(9,115 + 9,115) + 6,789] = 42,768 \text{ m}^2.$$

1.c) Regla de Simpson 3/8.

Para aplicar esta regla se utilizan cuatro puntos igualmente espaciados de los dados en la tabla de datos del coro.

Como $h = \frac{x_n - x_0}{3} = 1,645$ los puntos utilizados serán:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	1,645	3,289	4,934
$f(x)$	6,789	9,115	9,115	6,789

El área bajo el arco con la regla de Simpson 3/8 es

$$A = \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)].$$

Sustituyendo los datos se tiene que

$$A = \frac{3}{8} 1,645 [6,789 + 3 \cdot 9,115 + 3 \cdot 9,115 + 6,789] = 42,113 \text{ m}^2.$$

1.d) Regla de Simpson 3/8 de segmentos múltiples.

Para aplicar esta regla se utilizan todos los puntos presentados en la tabla de datos del coro, pero como hay simetría en el arco podemos aplicar la regla de Simpson 3/8 a los primeros cuatro puntos de la tabla y luego multiplicar por dos.

Así pues, los puntos utilizados serán:

	x_0	x_1	x_2	x_3
x	0	0,822	1,645	2,467
$f(x)$	6,789	8,628	9,115	9,256

Como $h = 0,822$ el área bajo el arco es

$$A = 2 \cdot \frac{3}{8} h [f(x_0) + 3f(x_1) + 3f(x_2) + f(x_3)].$$

Sustituyendo los datos se tiene que

$$A = 2 \cdot \frac{3}{8} 0,822 [6,789 + 3 \cdot 8,628 + 3 \cdot 9,115 + 9,256] = 42,707 \text{ m}^2.$$

Esta solución es la mejor aproximación al área bajo el arco.

1.e) Regla del Trapecio con segmentos múltiples.

Para aplicar esta regla se utilizan todos los puntos dados en la tabla de datos del coro.

En este caso el área bajo el arco es

$$A = \frac{h}{2} [f(x_0) + 2(f(x_1) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_4) + f(x_5)) + f(x_6)].$$

Como $h = 0,822$, se tiene que

$$\begin{aligned} A &= \frac{0,822}{2} [6,789 + 2(8,628 + 9,115 + 9,256 + 9,115 + 8,628) + 6,789] \\ &= 42,358 \text{ m}^2. \end{aligned}$$

Los estudiantes ven claramente las diferencias entre los diferentes métodos y la forma de mejorar el cálculo del área.

2) Calcular la altura del arco a 2 m. del lateral izquierdo de este mediante el método de Newton.

Para resolver este problema lo que se necesita es calcular una función $f(x)$ que se ajuste a los valores recogidos en la tabla de datos del coro. Para ello se hace uso de los métodos numéricos de interpolación y así se calcula el polinomio a partir de los datos conocidos. Como los puntos están igualmente espaciados podemos utilizar la fórmula de Newton modificada. La expresión general de esta fórmula para $n+1$ puntos conocidos es

$$f(x) \approx P_n(x) = f(x_0) + \sum_{r=0}^{n-1} (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_r) \frac{\Delta^{r+1}f(x_0)}{(r+1)! h^{r+1}}$$

donde $\Delta^{r+1}f(x_0)$ es la $(r+1)$ -ésima diferencia finita no dividida de f en el punto x_0 .

Así pues, como en este caso se tienen 7 puntos, $n+1=7$, y por tanto $n=6$.

Como $h = 0,822$, entonces

$$f(x) \approx P_6(x) = f(x_0) + (x - x_0) \frac{\Delta^1 f(x_0)}{1! 0,822^1} + (x - x_0)(x - x_1) \frac{\Delta^2 f(x_0)}{2! 0,822^2} + \cdots \\ + (x - x_0)(x - x_1) \cdots (x - x_5) \frac{\Delta^6 f(x_0)}{6! 0,822^6}$$

Ahora habrá que calcular $\Delta^1 f(x_0)$, $\Delta^2 f(x_0)$, ..., $\Delta^6 f(x_0)$ sabiendo que $\Delta^1 f(x_0) = f(x_1) - f(x_0)$, $\Delta^1 f(x_1) = f(x_2) - f(x_1)$, ..., $\Delta^2 f(x_0) = \Delta^1 f(x_1) - \Delta^1 f(x_0)$, ...

Si se sustituyen todos los datos en la fórmula de Newton se tiene que

$$f(x) \approx P_6(x) = 6,789 + (x - 0) \frac{1,839}{1! 0,822^1} + (x - 0)(x - 0,822) \frac{(-1,352)}{2! 0,822^2} \\ + \cdots + (x - 0)(x - 0,822) \cdots (x - 4,112) \frac{(-1,628)}{6! 0,822^6}$$

y si se evalúa en $x=2$ se obtiene $f(2)$, que es la altura del arco a 2 metros del lateral izquierdo de este.

Tabla 2: Cálculo de las diferencias finitas no divididas $\Delta^{r+1}f(x_0)$.

x	$f(x)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$	$\Delta^5 f(x)$	$\Delta^6 f(x)$
0	6,789	1,839	-1,352	1,006	-0,942	0,814	-1,628
0,822	8,628	0,487	-0,346	0,064	-0,128	-0,814	
1,645	9,115	0,141	-0,282	-0,064	-0,942		
2,467	9,256	-0,141	-0,346	-1,006			
3,289	9,115	-0,487	-1,352				
4,112	8,628	-1,839					
4,934	6,789						

$$\begin{aligned}
 f(2) \approx P_6(2) &= 6,789 + 2 \frac{1,839}{1! 0,822^1} + 2(2 - 0,822) \frac{(-1,352)}{2! 0,822^2} + \dots \\
 &+ 2(2 - 0,822)(2 - 1,645) \dots (2 - 4,112) \frac{(-1,628)}{6! 0,822^6} = \\
 &= 9,209 m.
 \end{aligned}$$

3) Objetivos alcanzados con este problema.

Según los estudiantes, los objetivos que han alcanzado antes de la exposición y defensa de este trabajo son:

- Reconocer un problema real utilizando métodos numéricos de interpolación e integración para su resolución.
- Aplicar los conceptos básicos y técnicas fundamentales de interpolación e integración numérica.

- Relacionar conceptos teóricos y prácticos.
- Utilizar la terminología propia de la materia.

4) Referencias utilizada.

- GARCÍA, A.; GARCÍA, F.; GUTIÉRREZ, A. y Otros. *CÁLCULO I. Teoría y problemas de análisis matemático en una variable*. Ed. CLAGSA, Madrid, 1993.
- MARTÍN, I. y PÉREZ, V.M. *Cálculo numérico para computación en Ciencia e Ingeniería. Desarrollo práctico con MATLAB*. Ed. Síntesis, Madrid, 1998.
- SCHEID, F.; DI CONSTANZO, R.E. *Métodos numéricos*. Ed. McGraw Hill, México, 1991.

Conclusiones

- La experiencia ha sido muy positiva para los estudiantes y los profesores que han participado en estos sistemas de trabajo y evaluación conjunta. Cuando el trabajo era voluntario el número de participantes fue muy bajo. De ahí que es recomendable la obligatoriedad de este.
- Se debe hacer el esfuerzo de ampliar a más temas de la asignatura de Fundamentos de Matemáticas I la participación en los trabajos coordinados y también se debería aumentar el porcentaje de la evaluación de esta asignatura. Asimismo, se debería intentar trasladar esta experiencia a las asignaturas del segundo semestre.
- La exposición pública y conjunta de los trabajos ha resultado una herramienta eficaz para la evaluación de competencias comunes entre asignaturas, que de otro modo deberían evaluarse por quintuplicado, repercutiendo negativamente en la escasa disponibilidad de horas presenciales.
- Creemos que puede ser muy positivo para los estudiantes que integren los conocimientos de matemáticas en la presentación conjunta de las demás asignaturas con la ayuda de un póster o panel, ya que deberán realizar una labor de síntesis y análisis mediante la exposición pública conjunta del trabajo de varias asignaturas.
- Los resultados académicos demuestran un mayor índice de éxito en la consecución de las competencias, con menor tasa de abandono y mejora de las calificaciones medias en las asignaturas. No obstante, se aprecia una cierta tendencia a la homogenización de calificaciones en detrimento de los valores extremos y del reconocimiento de estudiantes destacados.

Referencias

- [1] CASTILLA PASCUAL, F.J. *et al.* *Introducción a proyectos de edificación mediante prácticas dirigidas*. III Congreso Internacional UNIVEST 2011, Girona, 2011.
- [2] DEL RINCÓN, B. y EQUIPO MULTIDISCIPLINAR. *¿Qué es evaluar en ECTS?* Vicerrectorado de Docencia y Ordenación Académica de la UCLM, Unidad de Innovación Educativa (UIE), Cuenca, 2009.
- [3] LOPEZ GUERRERO, M.A. *et al.* *Las competencias básicas. Competencias profesionales del docente*. Ediciones de la UCLM. Ciudad Real, 2013. (pp.783-790).
- [4] MOUST, J.; BOUHUIJS, P. y SCHMIDT, H.. *El aprendizaje basado en problemas: guía del estudiante*. Ediciones de la UCLM. Cuenca, 2007.
- [5] ROMERO MEDINA, R. *et al.* *El Aprendizaje Basado en Problemas (ABP) como práctica multiasignatura con grupos grandes*. International Workshop on Problem Based Learning and Enquire Based Learning Madrid, 2009.

Planteamiento matemático para el cálculo estructural de vigas Boyd

Rubén Galindo Aires, ragalindoa@hotmail.com

Alberto Sanz Rubio,

Departamento de Ingeniería del Terreno, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

In this paper we use the mathematical theory of homogenization to obtain the forces and movements in Bernoulli periodic Boyd beams subjected to perpendicular load to the guideline of the piece. Subsequently, we compare results obtained using the theory of the homogenization with the values calculated in the one-dimensional space using the numerical technique of finite elements. This comparison is presented as a means of validation of the method in the one-dimensional space, as it is known that currently the high accuracy is achieved by using these numerical methods appropriately.

Introducción

La variedad de los problemas estructurales y formas empleadas hoy día en la construcción es tan grande que resulta imposible exponer, dentro del marco de la resistencia de materiales, las particularidades específicas de los cálculos para toda la casuística de formas estructurales que se pueden concebir [1]. Así, frente a problemas concretos no estandarizados surgen apreciaciones relacionadas con el cálculo de tensiones y deformaciones con determinadas estimaciones matemáticas; especialmente surge la posibilidad de desprestigiar cierto término en las fórmulas de cálculo o se plantean asimilaciones a casos ya resueltos.

Un análisis de esta naturaleza es a menudo, injustificadamente, considerado como válido para cálculos prácticos, salvándose los errores cometidos con el margen de seguridad. No obstante, cuando no se dispone de una metodología general adecuada a problemas particulares, lo deseable es disponer de métodos precisos de cálculo para cada problema concreto.

El problema concreto de estudio sobre el que centramos nuestra atención son las estructuras constituidas por un elemento que se repite en una o varias direcciones. Tal es el caso por ejemplo de:

- Losas aligeradas o alveolares que constituyen el tablero de puentes, o bien se utilizan como forjado, habitualmente prefabricado, en edificación.

- Puentes constituidos por vigas, habitualmente prefabricadas, y por una losa superior o bien de tipologías más singulares [2].
- Vigas aligeradas metálicas. Cabe destacar la amplia utilización que han tenido vigas de este tipo de gran canto en el caso de forjados que debían soportar unas altas sobrecargas de uso.
- Los forjados sin vigas o reticulares de amplio uso en edificación.
- Láminas nervadas utilizadas en cubiertas de grandes luces.

Las construcciones examinadas tienen gran cantidad de elementos del mismo tipo, que debido a su gran número no permiten o no aconsejan su consideración por separado. Entonces, se puede dar un paso más en su esquematización extendiendo estos elementos por todo el sólido resistente y considerar el material como homogéneo pero dotado de ciertas propiedades nuevas en conformidad con las peculiaridades de la pieza.

La heterogeneidad de la geometría de estas estructuras introduce una cierta dificultad en su cálculo, que actualmente se resuelve utilizando algunos de los siguientes procedimientos:

- Técnicas numéricas como el método de los elementos finitos que, efectuando una discretización suficientemente fina de malla, puede conducir a resultados suficientemente aproximados. No obstante, en algunas situaciones el número de ecuaciones y de incógnitas que es preciso resolver es muy elevado, y por tanto el tiempo de cálculo por ordenador podría ser importante.
- Métodos simplificados que pretenden sustituir la geometría de la estructura por otra uniforme sin ninguna base lógica, como por ejemplo el método de la losa ortótropa para el cálculo de tableros de puentes de losa o de vigas. Algo similar sucede cuando se aplica el método de los pórticos virtuales para el caso de los forjados reticulares; en este caso el principal problema surge al considerar la rigidez constante del forjado, que se calcula de una forma intuitiva mediante alguna media, y que no se ajusta a la realidad.

En particular, se estudia en el presente trabajo, el caso de una viga con aligeramientos repetitivos a lo largo de su luz.

Ante esta situación, lo que se pretende es sustituir la geometría repetitiva, pero heterogénea, de la estructura real por una estructura homogeneizada equivalente deducida matemáticamente utilizando las técnicas de homogeneización y analizar los límites admisibles de dicho planteamiento estudiando el problema de la viga alveolar (unidimensional) en un espacio bidimensional que permita estudiar la influencia

en los resultados de la concentración de tensiones provocada por los alveolos. De este modo, si se obtiene una estructura homogénea pero con idéntico comportamiento que la estructura inicial, su cálculo será indudablemente más sencillo que el uso de las técnicas numéricas utilizadas actualmente. Además, se obtendrá una mayor precisión que la obtenida por los métodos simplificados anteriormente citados.

Objetivos

Los objetivos que se pretenden abordar en este trabajo son:

- Utilizar la teoría matemática de la homogenización para la obtención de esfuerzos y movimientos en vigas alveolares periódicas Bernoulli frente a carga perpendicular a la directriz de la pieza.
- Comparar los resultados obtenidos utilizando la teoría de homogenización con lo que sucede utilizando en el espacio unidimensional la técnica numérica de los elementos finitos. Esta comparación se plantea como una forma de validación del método en el espacio unidimensional, ya que es conocida la gran precisión que actualmente se consigue empleando adecuadamente estos métodos numéricos.
- Comparar las desviaciones en las que se puede incurrir si se utilizan métodos simplificados que sean puramente apriorísticos y carezcan de base sólida.

Teoría de la homogeneización

La homogeneización puede definirse como un proceso que consiste en sustituir un medio fuertemente heterogéneo por uno homogéneo equivalente.

Anteriormente se comentaron distintos ejemplos en el ámbito de la ingeniería civil donde pueden utilizarse las técnicas de homogeneización, sin embargo su ámbito de aplicación es mucho más amplio: deformaciones o temperaturas en cuerpos con heterogeneidades debidas a la presencia de impurezas distribuidas de una cierta manera en los mismos, fluidos que atraviesan medios porosos, paredes perforadas, etc.

El uso de técnicas de homogeneización surgen de la necesidad de intentar simplificar la resolución de los problemas, debido a lo costoso que en ocasiones pueden resultar los conocidos medios de resolución de tipo numérico ante una geometría del problema muy heterogénea.

Al adoptar el esquema de medio continuo, prescindimos también del cálculo de las tensiones locales relacionadas con las peculiaridades estructurales introducidas por las oquedades y hallamos tan solo tensiones medias inherentes al sistema material

continuo. El valor de las tensiones reales puede discrepar sensiblemente del de las tensiones medias, este fenómeno se estudiará más adelante.

No obstante el determinar las propiedades de este medio homogéneo equivalente, también conocido como medio efectivo, es algo que no puede determinarse de forma apriorística y que, como quedará de manifiesto en esta investigación, es a veces delicado. De este modo, se comprobará que al adoptar las propiedades del medio homogéneo de un modo intuitivo, como en ocasiones se hace, se pueden cometer a veces graves errores. Por ello debe huirse de la tentación de considerar a priori valores “razonables” para las propiedades del medio efectivo equivalente, como por ejemplo adoptar la media aritmética de la rigidez en el caso de una pieza heterogénea estructural.

Los procesos de homogeneización han sido estudiados por numerosos autores [3], sin embargo, la definición matemática del medio homogéneo equivalente no ha tenido un significado matemático preciso hasta fecha relativamente reciente. Son quizá los trabajos de Sánchez-Palencia y Babuska hacia 1970 los que han contribuido a dar una formulación clara de un problema dependiente de un pequeño parámetro.

Si bien la teoría de la homogeneización tiene un carácter general, en este punto de la exposición introducimos que el medio heterogéneo de partida sea periódico, es decir que esté compuesto por celdas repetitivas, que quedarán definidas mediante el parámetro ϵ indicador de la longitud de la celda. De esta forma, se puede hablar de un problema de partida P^ϵ , que se trata de sustituir por un problema P^0 , que refleje el comportamiento de P^ϵ para ϵ pequeño. El método más habitual para obtener el problema P^0 es el método de escalas múltiples, que consiste en suponer que la solución se puede desarrollar de la siguiente forma para el caso de la coordenada x , si bien para otras sería completamente análogo:

$$u^\epsilon(x) = u_0\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \epsilon u_1\left(x, \frac{x}{\epsilon}\right) + \dots$$

Esta técnica de escalas múltiples tiene la ventaja de ser aplicable a muy diversos tipos de problemas y para casos tanto unidimensionales como multidimensionales. Pero por el contrario esta técnica solo permite obtener el primer término del desarrollo, no pudiendo obtener por tanto los términos de orden superior, también denominados correctores.

Sin embargo, en algunas situaciones conviene obtener una mayor aproximación, para lo cual resulta fundamental obtener estos correctores. Por ello en este trabajo, se adopta un método diferente, que permite obtener estos términos de orden superior con precisión en el caso de problemas de una dimensión.

Viga Bernoulli periódica

En este apartado se presenta el estudio realizado para una viga de Bernoulli periódica sometida a una carga distribuida siguiendo la dirección perpendicular a la directriz de la pieza.

En el primer subapartado se desarrolla la solución del problema partiendo de su ecuación diferencial y aplicando la teoría de homogeneización. Esto permite obtener tanto el desarrollo en desplazamientos como en esfuerzos. No obstante, es inmediato observar directamente del problema de contorno de la viga como la obtención de los esfuerzos por ser independiente de la rigidez de la viga carece de interés, al contrario de lo que sucede con los movimientos.

En el segundo subapartado se presentan otros métodos que podrían ser utilizados para resolver el problema como son el conocido método de los elementos finitos y un método heurístico que a priori pudiera parecer “razonable” y ser usado en la práctica profesional de la ingeniería. En este apartado se realiza una experimentación numérica de la teoría propuesta de la homogeneización y se utiliza el método de los elementos finitos para realizar la validación del método. En cuanto al método heurístico, el objetivo es constatar las desviaciones que se producen y llamar la atención al respecto.

Viga Bernoulli periódica

Se considera una viga Bernoulli de directriz recta, sección variable, longitud L y apoyo fijo en sus dos extremos. Esta viga se encuentra sometida a una distribución de carga perpendicular a la directriz definida por la función $P(X)$, en donde X es la distancia de la sección al origen de coordenadas situado en el apoyo izquierdo (figura 1). La variación de la rigidez a flexión $EI(X)$ es periódica, es decir $EI(X) = EI(X + nL/N)$, con $n = 0, 1, \dots, N - 1$ y siendo N el número de celdas de la viga.

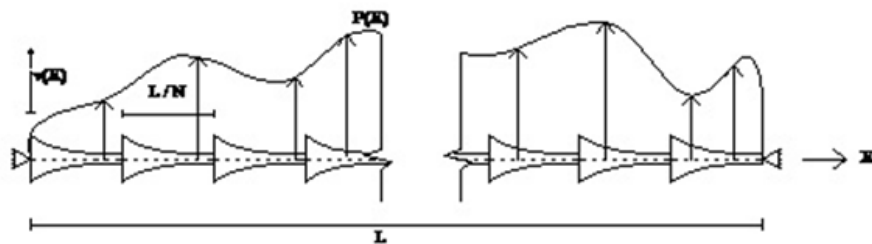


Figura 1. Viga de Bernoulli sometida a una fuerza distribuida vertical y detalle del equilibrio de fuerzas en una rebanada de la misma.

La ecuación diferencial del problema de la viga de Bernoulli es [4]:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(EI(X) \frac{d^2 v(X)}{dX^2} \right) = p(X); X \in (0, L) \quad (1)$$

Las condiciones de contorno son de flecha y momento nulos en los extremos de la viga:

$$\begin{aligned} v(0) &= v(L) = 0 \\ v''(0) &= v''(L) = 0 \end{aligned}$$

Con objeto de realizar un estudio comparativo y sistemático se normaliza el problema de forma que la luz de la viga sea la unidad, para lo cual se introduce el cambio de variable $x = X/L$.

El objetivo es obtener una rigidez de la viga EI_h homogeneizada, es decir un valor constante independiente de x de forma que reproduzca el comportamiento de la viga real cuando $N \rightarrow \infty$. Cuando N crece indefinidamente la variable $\epsilon = L/N \rightarrow 0$.

Con objeto de estudiar el comportamiento local de una celda genérica n se amplifican las celdas de longitud ϵ a la unidad introduciendo la variable aumentada y , que se define como $y = x/\epsilon$. Por tanto, se puede observar como $EI(y) = EI(y + n)$, con $n = 0, 1, \dots, N - 1$, aspecto que permite tomar únicamente la primera celda, por ejemplo, para definir las propiedades de las distintas secciones de la viga.

Tras el cambio de variable X a x y la introducción de la nueva variable y , el problema de contorno para la viga Bernoulli se convierte en el siguiente:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \left(EI(y) \frac{dv^2(x)}{dx^2} \right) &= L^4 P(xL) = p(x); x \in (0, 1) \\ v(0) &= v(1) = 0 \\ v''(0) &= v''(1) = 0 \end{aligned} \quad (2)$$

De la resolución del problema (2) mediante integración directa resulta:

$$\begin{aligned} EI \left(\frac{x}{\epsilon} \right) v'' &= g(x) \\ v(0) &= v(1) = 0 \end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned} g(x) &= \int_0^x \int_0^t p(s) ds dt - x \int_0^1 \int_0^t p(s) ds dt \\ g(0) &= g(1) = 0 \end{aligned}$$

siendo s y t variables mudas de x .

Nuevamente integrando por partes:

$$v(x) = \int_0^x \int_0^t \frac{g(s)}{EI\left(\frac{s}{\epsilon}\right)} ds dt - x \int_0^1 \int_0^t \frac{g(s)}{EI\left(\frac{s}{\epsilon}\right)} ds dt \quad (3)$$

A continuación consideramos el siguiente lema:

$$\int_0^a f\left(\frac{x}{\epsilon}\right) g(x) dx = \bar{f} \int_0^a g(x) dx - \epsilon \int_0^a \tilde{f}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) g'(x) dx + \epsilon \tilde{f}\left(\frac{a}{\epsilon}\right) g(a)$$

siendo:

f periódica de periodo p

g función de C^1

$$\bar{f} = \frac{1}{p} \int_0^p f(x) dx$$

$$\tilde{f} = \frac{1}{p} \int_0^x (f(x) - \bar{f}) dx$$

Demostración del lema.

Simplemente integrando por partes:

$$\begin{aligned} \int_0^a f\left(\frac{x}{\epsilon}\right) g(x) dx &= \bar{f} \int_0^a g(x) dx + \int_0^a \left(f\left(\frac{x}{\epsilon}\right) - \bar{f}\right) g(x) dx = \\ &= \bar{f} \int_0^a g(x) dx - \epsilon \int_0^a \left(\int_0^x \frac{f\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \bar{f}}{\epsilon} ds \right) g'(x) dx \\ &\quad + \epsilon \left[\int_0^x \frac{f\left(\frac{s}{\epsilon}\right) - \bar{f}}{\epsilon} ds g(x) \right]_0^a \\ &= \bar{f} \int_0^a g(x) dx - \epsilon \int_0^a \left(\int_0^{\frac{x}{\epsilon}} (f(y) - \bar{f}) dy \right) g'(x) dx \\ &\quad + \epsilon \int_0^{\frac{a}{\epsilon}} (f(y) - \bar{f}) dy g(a) = \\ &= \bar{f} \int_0^a g(x) dx - \epsilon \int_0^a \tilde{f}\left(\frac{x}{\epsilon}\right) g'(x) dx + \epsilon \tilde{f}\left(\frac{a}{\epsilon}\right) g(a) \quad c. q. d \end{aligned}$$

Aplicamos este lema a los términos de la ecuación (3):

$$\int_0^t \frac{g(s)}{EI \left(\frac{s}{\epsilon}\right)} ds = \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \int_0^t g(s) ds - \epsilon \int_0^t \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{s}{\epsilon}\right) g'(s) ds + \epsilon \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{t}{\epsilon}\right) g(t)$$

Sustituyendo en la ecuación (3):

$$\begin{aligned} v(x) &= \int_0^x \left[\overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \int_0^t g(s) ds - \epsilon \int_0^t \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{s}{\epsilon}\right) g'(s) ds + \epsilon \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{t}{\epsilon}\right) g(t) \right] dt \\ &\quad - \\ &\quad -x \int_0^1 \left[\overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \int_0^t g(s) ds - \epsilon \int_0^t \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{s}{\epsilon}\right) g'(s) ds + \epsilon \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{t}{\epsilon}\right) g(t) \right] dt \\ v(x) &= \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left[\int_0^x \int_0^t g(s) ds dt - x \int_0^1 \int_0^t g(s) ds dt \right] + \\ &\quad + \epsilon \left[- \int_0^x \int_0^t \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{s}{\epsilon}\right) g'(s) ds dt + \int_0^x \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{t}{\epsilon}\right) g(t) dt + \right. \\ &\quad \left. + x \int_0^1 \int_0^t \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{s}{\epsilon}\right) g'(s) ds dt - x \int_0^1 \epsilon \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left(\frac{t}{\epsilon}\right) g(t) dt \right] \end{aligned}$$

Aplicando el lema a los cuatro términos de orden ϵ resulta:

$$v(x) = \overline{\left(\frac{1}{EI}\right)} \left[\int_0^x \int_0^t g(s) ds dt - x \int_0^1 \int_0^t g(s) ds dt \right] +$$

$$\begin{aligned}
 & +\epsilon \left[-\int_0^x \left[\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \int_0^t g'(s) ds - \epsilon \int_0^t \left(\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \right) \left(\frac{s}{\epsilon} \right) g''(s) ds \right. \right. \\
 & \quad \left. \left. + \epsilon \left(\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \right) \left(\frac{t}{\epsilon} \right) g'(t) \right] dt \\
 & \quad + \left[\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \int_0^x g(t) dt - \epsilon \int_0^x \left(\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \right) \left(\frac{t}{\epsilon} \right) g'(t) dt \right. \\
 & \quad \left. + \epsilon \left(\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \right) \left(\frac{x}{\epsilon} \right) g(x) \right] \\
 & \quad + x \int_0^1 \left[\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \int_0^t g'(s) ds - \epsilon \int_0^t \left(\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \right) \left(\frac{s}{\epsilon} \right) g''(s) ds \right. \\
 & \quad \left. + \epsilon \left(\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \right) \left(\frac{t}{\epsilon} \right) g'(t) \right] dt \\
 & \quad - x \left[\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \int_0^1 g(t) dt - \epsilon \int_0^1 \left(\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \right) \left(\frac{t}{\epsilon} \right) g'(t) dt \right. \\
 & \quad \left. \left. + \epsilon \left(\overline{\left(\frac{1}{EI} \right)} \right) \left(\frac{1}{\epsilon} \right) g(1) \right] \right]
 \end{aligned}$$

Cálculo de aprovechamientos lucrativos y derechos de propiedad en una actuación de transformación urbanística.

M^a Teresa Broseta Palanca, mabropa@urb.upv.es,

Arquitecta (Departamento de Urbanismo, ETSIE- ETSAV, Universitat Politècnica de València)

Resumen

El aprovechamiento lucrativo del suelo incorporado a un proceso de urbanización, es un dato imprescindible para conocer su valoración inmobiliaria, así como la viabilidad económica de las operaciones de compra-venta y reparcelación del suelo, destinado a la urbanización y posterior edificación. Ambas disciplinas, la tasación del suelo, como el estudio de la viabilidad económica de una actuación de edificación, en su fase inicial de obtención de suelo, son parte integrante del proceso de gestión inmobiliaria: competencia profesional de la titulación del Arquitecto Técnico, recogidas en la Orden ECI/3855/2007¹.

A través del planteamiento de un ejercicio de cálculo del aprovechamiento lucrativo de un suelo, inmerso en unas condiciones complejas del planeamiento urbanístico de la zona, pondremos en práctica los conocimientos matemáticos necesarios para abordarlo, consistentes en el cálculo matricial, la resolución de ecuaciones lineales y el cálculo con índices y porcentajes.

El conocimiento del aprovechamiento asignado a un suelo por el planeamiento, permite ajustar el precio de tasación del suelo con distintas finalidades, así como detectar y desprestigiar los casos de especulación o sobrevaloración de suelo, en un buen sistema de gestión integral del proceso inmobiliario.

Palabras clave: *Cálculo de aprovechamientos urbanísticos del suelo*

¹ Orden ECI/3855/2007, de 27 de diciembre, por la que se establecen los requisitos para la verificación de los títulos universitarios oficiales que habiliten para el ejercicio de la profesión de arquitecto técnico. El Apartado 3 del Anexo I establece: “Competencias que los alumnos deben adquirir: [...] 3. Llevar a cabo actividades técnicas de cálculo, mediciones, valoraciones, tasaciones y estudios de viabilidad económica.

Legislación Urbanística. Conceptos y datos de partida

A través de la resolución de un ejercicio, obtendremos el aprovechamiento subjetivo² de un propietario de suelo, en un sector urbanizable sujeto a una futura transformación urbanística (Figura 1), lo que en definitiva, sería su derecho de propiedad o indemnización.



Figura 1: Zona de crecimiento de un tejido urbano consolidado, que integra diferentes usos, con diferentes densidades edificatoria, como es común en la ciudad europea tradicional, lo que produce distintas rentabilidades del suelo, de acuerdo con el diseño discrecional del planificador: usos terciarios en parcela aislada (centros comerciales), polígonos industriales, usos dotacionales sin destino lucrativo, usos residenciales de carácter plurifamiliar o unifamiliar, etc.

El Texto Refundido de la Ley del Suelo³ y La Ley Urbanística Valenciana⁴ vigentes en la actualidad, define los conceptos a utilizar en esta materia, en base al principio de equidistribución de cargas y beneficios, que debe regir entre los propietarios de una misma área de reparto.

Desde la Ley del Suelo del 75, el régimen de planificación pública promueve la igualdad entre los propietarios del suelo urbanizable a través de la figura del apro-

² El aprovechamiento subjetivo definido como la edificabilidad susceptible de apropiación; los metros cuadrados edificables a los que tiene derecho un propietario.

³ Real Decreto Legislativo 2/2008, de 20 de junio, por el que se aprueba el texto refundido de la ley de suelo.

⁴ Ley 16/2005, de 30 de diciembre, de la Generalitat, Urbanística Valenciana (LUV).

vechamiento medio (aprovechamiento tipo, en la legislación valenciana actual), asumiendo el supuesto de que si la creación de la ciudad es obra del plan de ordenación, es justo que todos los propietario del suelo urbanizable sean tratados igual.

Debemos partir de las siguientes premisas:

- A. Los **conceptos y preceptos** definidos por la Ley Urbanística Valenciana en este ámbito, que debe regir en la gestión urbanística del suelo urbanizable: *Área de reparto, Edificabilidad, Índice de edificabilidad Bruto/Neto, Aprovechamiento Objetivo, Aprovechamiento Tipo, Red Primaria Adscrita y Coeficientes de Homogeneización por uso y tipología.*

El *Área de Reparto* se define como el conjunto de terrenos respecto de los que el planeamiento determina un mismo Aprovechamiento Tipo⁵; comprenderá uno o varios sectores completos y el suelo dotacional público, clasificado como urbanizable, perteneciente a la red primaria o estructural del municipio (*red primaria adscrita, RPA*), que se adscribirá de forma proporcionada entre las áreas de reparto definidas por el plan general. La adscripción al Área de Reparto de suelo destinado a servicios públicos del municipio, supone el incremento de los gastos de urbanización y a su vez, el aumento de propietarios con derecho a aprovechamiento en el sector, aquéllos sobre cuyos terrenos se implanta la infraestructura pública adscrita.

La densidad edificatoria sobre parcelas se cuantifica mediante la *edificabilidad neta* (EN), definida como la suma de la edificabilidad total, destinada a cualquier uso lucrativo (sin incluir la edificabilidad dotacional), que se puede materializar en dicha parcela, expresada en metros cuadrados de techo (m²t).

El *índice de edificabilidad neta* (IEN) es el cociente entre la edificabilidad neta y la superficie de parcela, entendiéndose como tal la parcela privada que queda tras las correspondientes cesiones de dotaciones públicas; Se expresa en m²t/m²s⁶.

Cuando en un Área de Reparto, la ordenación urbanística prevea usos tipológicamente diferenciados que puedan dar lugar, por unidad de edificación, a rendimientos económicos muy diferentes, en el cálculo del Aprovechamiento Tipo se podrán ponderar coeficientes correctores de edificabilidad (*coeficiente de homogeneiza-*

⁵ Artículo 55, LUV.

⁶ Artículo 199, Decreto 67/2006, de 12 de mayo, del Consell, por el que se aprueba el Reglamento de Ordenación y Gestión Territorial y Urbanística (ROGTU). Reglamento de desarrollo de la Ley Urbanística Valenciana.

ción), a fin de compensar con más aprovechamiento subjetivo la menor rentabilidad unitaria de éste⁷.

El Aprovechamiento Tipo se define como la edificabilidad unitaria ponderada por coeficientes correctores, es decir un índice que asigna unidades de aprovechamiento UAP por unidad de suelo, o lo que es lo mismo, metros cuadrado de techo, corregidos según su rentabilidad, por metros cuadrados de suelo (UAP/m²s).

- B. Los **datos** aportados por la **planificación urbanística**, con distribución espacial y dimensiones del suelo público dotacional y del suelo de uso lucrativo privado, con asignación de superficies, densidades edificatorias, tipologías y usos principales por manzana.
- C. Los **datos** aportados por el **estudio de mercado** de muestras de inmuebles similares, obtenidas en entornos próximos o asimilables a la zona estudiada, tratados por métodos de tasación inmobiliaria, de los que obtenemos los valores de repercusión de suelo (VRS) y *los coeficientes de homogeneización* del aprovechamiento por uso y tipologías edificatorias.

Situación de partida. La ordenación urbanística y la rentabilidad del suelo.

Consideramos una situación de partida compleja, un Área de Reparto constituida por tres sectores de suelo urbanizable con presencia de múltiples combinaciones de usos y tipologías, en manzanas de diferentes superficies: uso residencial en manzana cerrada de renta libre (Rm) y de renta protegida (Rm VPP), uso residencial en tipología adosada (Rado) y unifamiliar aislada (Rais), uso terciario en manzana cerrada (Tm) y bloque aislado (Tais), y uso industrial en bloque aislado (I). Con cargo a esta Área de Reparto se costeará la ejecución de un parque público (PQL) de 57.000m², la superficie del Área de Reparto integra la superficie de los tres sectores y del parque adscrito, es decir, 640.063,26m². (Figura2).

⁷ Artículo 119, ROGTU.

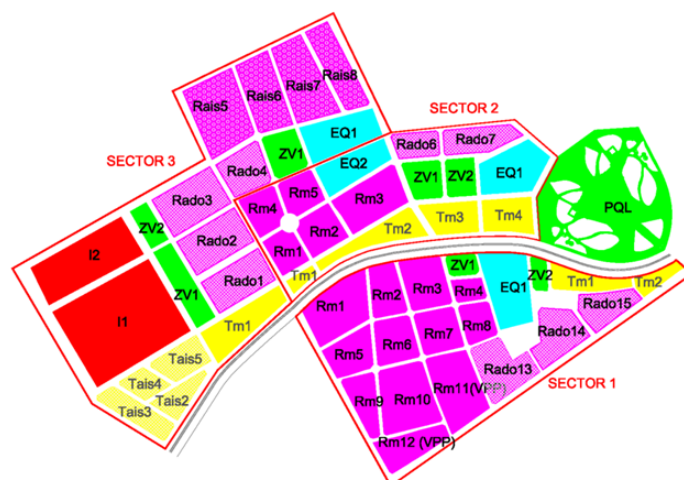


Figura 2: Área de Reparto constituida por tres sectores de suelo urbanizable, con división de manzanas de diferentes usos y tipologías de destino privado y manzanas de destino dotacional público (ZV, EQ), a la que se adscribe un parque público (PQL), como red dotacional primaria que se ejecutará con cargo a la actuación.

A partir del Plan General del municipio, obtenemos los datos de ordenación de la zona, como son los usos característicos (residencial, terciario e industrial) y los sistemas de ordenación y tipologías característicos. La ordenación pormenorizada del Plan, nos aporta la propuesta de diseño urbanístico, y las dimensiones de manzana en cada sector (Tablas 1 a 3)

Tabla 1: Superficies netas de manzanas destinadas a cada uso y tipología, pertenecientes al sector 1.

SECTOR	USO	TIPOLOGÍA	MANZANA	Superficie (m2s)
1	RESIDENCIAL	MANZANA CERRADA	Rm1 a Rm10	72.954,51
			Σ Rm	
		VDA. ADOSADA	Rm11 a Rm12 (VPP)	19.463,58
			Σ Rm(VPP)	
	VDA. UNIF AISLADA	Rado13 a 15	24.654,09	
		Σ Rado		
	TERCIARIO	MANZANA CERRADA	Tm1 a Tm2	8.460,47
BLOQUE AISLADO		Tais	0,00	
DOTACIONAL		ZV+EQ+RV	64.853,61	
	TOTAL			190.386,26

Tabla 2: Superficies netas de manzanas destinadas a cada uso y tipología, pertenecientes al sector 2.

SECTOR	USO	TIPOLOGÍA	MANZANA	Superficie (m2s)
2	RESIDENCIAL	MANZANA CERRADA	Rm1 a Rm5 ΣRm	32.204,09
		VDA ADOSADA	Rado6 a Rado7 $\Sigma Rado$	11.307,18
		VDA UNIF AISLADA	Rais	0,00
	TERCIARIO	MANZANA CERRADA	Tm1 a Tm4 ΣTm	21.968,89
		BLOQUE AISLADO	Tais	0,00
	DOTACIONAL		ZV+EQ+RV	65.197,84
	TOTAL			130.678,00

Tabla 3: Superficies netas de manzanas destinadas a cada uso y tipología, pertenecientes al sector 3.

SECTOR	USO	TIPOLOGÍA	MANZANA	Superficie m2s
3	RESIDENCIAL	MANZANA CERRADA	Rm	0,00
		VDA ADOSADA	Rado1 a Rado 4 $\Sigma Rado$	38.843,42
		VDA UNIF AISLADA	Rais5 a Rais8 $\Sigma Rais$	47.009,84
	TERCIARIO	MANZANA CERRADA	Tm1	9.595,98
		BLOQUE AISLADO	Tais2 a Tais5 $\Sigma Tais$	19.947,62
	INDUSTRIAL	BLOQUE AISLADO	I1 y I2 ΣI	56.327,88
	DOTACIONAL		ZV+EQ+RV	99.274,26
TOTAL			270.999,00	

Otros datos que podemos obtener desde la ordenación aprobada por el planeamiento, son los índices de edificabilidad neto en manzana (IEN), asignando la edificabilidad máxima permitida a las superficies de manzana tabuladas, así como los coeficientes de ponderación por uso y tipología.

La rentabilidad del suelo urbanizable debida a su mayor y mejor uso, proviene de su rendimiento edificatorio, estimado por el valor de repercusión del suelo (VRS), obtenido a partir del método residual estático.

El método del valor residual permite obtener el valor del suelo a partir del conocimiento de los datos de la promoción inmobiliaria de mayor rentabilidad que se pueda desarrollar en el solar, a partir de la ecuación:

$$V_s = V_v - (C_c + G + B_p)$$

Conocidos el coste de construcción (C_c) y los gastos (G) y beneficios de la promoción (B_p) y aportado el valor de venta del inmueble (V_v), de la depuración y homogeneización de muestras de productos inmobiliarios similares propuestos por el

estudio de mercado inmobiliario, se puede deducir el valor del suelo, y su valor relativo respecto de su aprovechamiento, el valor de repercusión del suelo (VRS) en euros/m² techo.

Los diferentes valores del suelo, que influirán en las diferentes rentabilidades para sus propietarios, nos aportarán los coeficientes de homogeneización, adoptando el índice 1 para el valor con mayor representatividad en el sector, y obteniendo el resto de índices, en proporción al valor del primero. (Tabla 4)

Tabla 4: Asignación de Índices de Edificabilidad Neta y Coeficientes de homogeneización por uso y tipología

USO	Tipo		IENT ⁸ m ² t/m ² s	VRS ⁹ €/m ² t	Coef. VRS
RESIDENCIAL	MANZANA CERRADA	Rm	1,80	1.000,00	1
		Rm (VPP)	1,80	800,00	0,8
	VDA ADOSADA	Rado	1,00	900,00	0,9
	VDA UNIF AISLADA	Rais	0,30	1.100,00	1,1
TERCIARIO	MANZANA CERRADA	Tm	2,25	1.200,00	1,2
	BLOQUE AISLADO	Tais	7,00	1.350,00	1,35
INUSTRIAL	BLOQUE AISLADO	I	1,50	800,00	0,8

La propuesta de la incógnita y su resolución.

Una vez recopilados todos los datos de partida, la incógnita a resolver es el derecho urbanístico de los propietarios de suelo, que se pueden materializar de diferentes maneras: en forma de aprovechamiento, suscrito en un convenio urbanístico, que se obtendrá en un futuro en otra área de actuación; en metálico, a modo de indemnización por el aprovechamiento no desarrollado una vez descontados los costes de urbanización; o bien, en suelo urbanizado a modo de solar dentro del área de reparto.

Utilizaremos el cálculo matricial para la obtención de la *edificabilidad total o Aprovechamiento Objetivo*⁸, AO*, en cada sector, es decir la cantidad total de metros cuadrados de techo que puede albergar el área; Lo alcanzaremos operando con tres matrices: la matriz de índices de edificabilidad [E], la matriz de coeficientes de homogeneización por uso y tipología [H] y la matriz de superficies por uso [S]:

⁸ Utilizamos las siglas AO*, afectadas por un superíndice asterisco, para denotar que el aprovechamiento objetivo está ponderado por coeficientes de homogeneización de uso y tipología diferentes de uno, lo que variará las unidades de medida y valoración del aprovechamiento, que dejarán de ser directamente materializable sobre el suelo como techo edificable (m²t) para convertirse en unidad contable con valor en metálico como son las Unidades de Aprovechamiento (UAP).

$$[E]_{1,7} = [IENRm \quad IENRmVpp \quad IENRado \quad IENRais \quad IENTm \quad IENTais \quad IENI]$$

$$[H]_{7,7} = \begin{bmatrix} HRm & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & HRmVpp & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & HRado & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & HRais & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & HTm & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & HTais & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & HI \end{bmatrix}$$

$$[S]_{7,3} = \begin{bmatrix} S1Rm & S2Rm & S3Rm \\ S1RmVpp & S2RmVpp & S3RmVpp \\ S1Rado & S2Rado & S3Rado \\ S1Rais & S2Rais & S3Rais \\ S1Tm & S2Tm & S3Tm \\ S1Tais & S2Tais & S3Tais \\ S1I & S2I & S3I \end{bmatrix}$$

Sustituimos los valores conocidos en las matrices:

$$[E]_{1,7} = [1,80 \quad 1,80 \quad 1,00 \quad 0,30 \quad 2,25 \quad 7,00 \quad 1,50]$$

$$[H]_{7,7} = \begin{bmatrix} 1,00 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0,80 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,90 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1,10 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,20 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1,35 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0,80 \end{bmatrix}$$

$$[S]_{7,3} = \begin{bmatrix} 72954,51 & 32.204,09 & 0 \\ 19.463,58 & 0 & 0 \\ 24.654,09 & 11.307,18 & 38.843,42 \\ 0 & 0 & 47.009,84 \\ 8.460,47 & 21.968,89 & 9.595,98 \\ 0 & 0 & 19.947,62 \\ 0 & 0 & 56.327,88 \end{bmatrix}$$

$$[AO^*]_{1,3} = [AO_{S1}^*, AO_{S2}^*, AO_{S3}^*] = [E]_{1,7} \times [H]_{7,7} \times [S]_{7,3}$$

Con el desarrollo del cálculo obtenemos la matriz de aprovechamiento objetivo; cada uno de sus términos establece el aprovechamiento ponderado en cada uno de los sectores que integran el área de reparto, medido en unidades de aprovechamiento (UAP):

$$[AO^*]_{1,3} = [204.377,62 \quad 127.459,83 \quad 332.479,94]$$

El aprovechamiento *unitario* ponderado (Aprovechamiento Tipo, AT) se obtendrá aplicando el dato obtenido (AO*) por unidad de superficie del área de reparto, entendida ésta como la suma de superficies de los sectores y la red primaria adscrita, un parque público, en nuestro caso:

$$AT = \frac{\sum_i AO^*}{\sum_i S + S_{RPA}} \quad i = \text{Sectores}$$
$$AT = \frac{204.377,62 + 127.459,83 + 332.479,94}{190.386,26 + 130.678,00 + 270.999,00 + 57.000,00} = \frac{664.317,39}{649.063,26}$$
$$AT = 1,0235 \frac{UAP}{m^2s}$$

Llegados a este punto, una vez obtenido el Aprovechamiento Tipo del Área de Reparto, para cualquier propietario, o posible futuro propietario, en calidad de comprador, podríamos conocer el aprovechamiento lucrativo y el derecho de superficie urbanizada que se le proporcionaría a cambio de una parcela rústica de superficie conocida incluida en el ámbito de actuación.



Figura 3: Parcela rústica incluida en suelo urbanizable, que constituye el derecho de propiedad previo a la transformación urbanística.

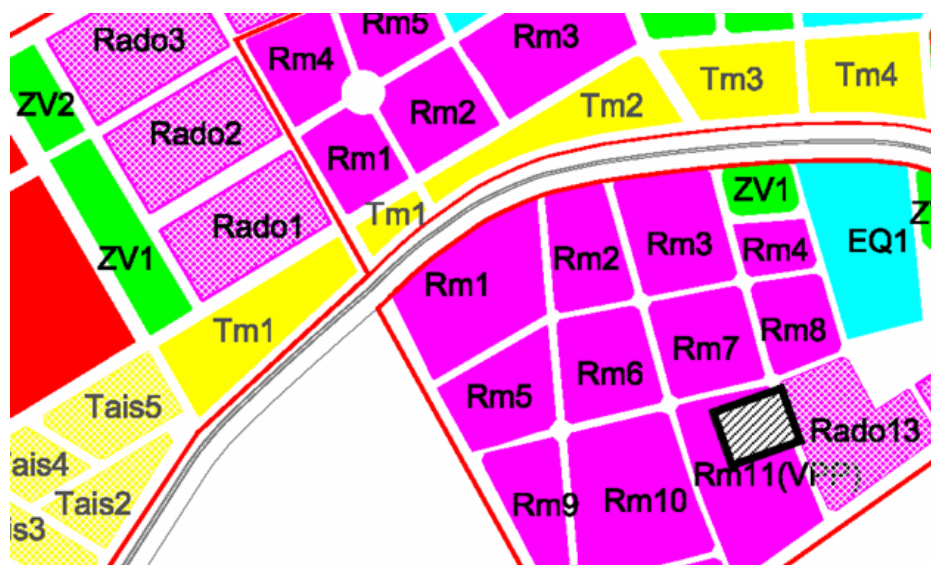


Figura 4: Superposición de la delimitación de la parcela rústica en la ordenación urbanística del sector.

Conforme a los criterios de localización de las adjudicaciones reparcelatorias⁹, la finca o fincas adjudicadas se formarán, si es posible, con terrenos integrantes de su antigua propiedad. Para la aplicación de esta regla, se exigirá la íntegra coincidencia de superficies y que el aprovechamiento subjetivo complete el derecho adjudicado. Subsidiariamente, se procurará la adjudicación según criterio de proximidad respecto de la ubicación inicial de la finca aportada.

Los beneficiarios de actuaciones de transformación urbanística, según su naturaleza y alcance, tienen el deber legal de ceder gratuitamente, a la administración competente, el suelo planificado con destino público en la actuación o adscrito a ella, para viales, zonas verdes y equipamientos, así como el suelo libre de cargas de urbanización, correspondiente al porcentaje de la edificabilidad media ponderada de la actuación, que fije la legislación autonómica competente en ordenación territorial y urbanística. Este porcentaje no podrá ser inferior al 5% ni superior al 15%¹⁰. En la Comunidad Valenciana, el porcentaje de cesión de aprovechamiento con destino al

⁹ Artículos 174 LUV y 406 ROGTU

¹⁰ Artículo 16, Real Decreto Legislativo 2/2008, de 20 de junio, por el que se aprueba el texto refundido de la ley del suelo.

patrimonio público del suelo es del 10%¹¹, por lo que el aprovechamiento subjetivo, o susceptible de apropiación por los interesados será del 90% del total del área.

Conocemos que la superficie rústica aportada por un propietario es de 20.000m², y de acuerdo con el criterio de localización mencionado anteriormente, la parcela adjudica debe ubicarse en una manzana de uso residencial plurifamiliar en manzana cerrada, destinada a la promoción de viviendas de protección pública (Figura 4), con un Índice de Edificabilidad Neto (IENp) de 1,8 m²t/m²s y un coeficiente de homogeneización por uso y tipología de 0,8 UAP/m²t (Tabla 4).

La superficie de la finca adjudicada urbanizada que resarce los derechos de aprovechamiento del propietario se obtiene mediante la resolución de un sistema de ecuaciones sencillas:

$$X = 0,9 (AT \times S_0)$$
$$Y = \frac{X}{IENp \times Hp}$$

Donde:

X, es el aprovechamiento lucrativo que le corresponde al propietario,

Y, es el derecho de superficie urbanizada del propietario,

AT, es el Aprovechamiento Tipo obtenido mediante cálculo matricial,

IENp, es el Índice de Edificabilidad Neta en la manzana donde se ubica la parcela adjudicada (dato conocido),

Hp, Coeficiente de Homogeneización por uso y tipología en la manzana donde se ubica la parcela adjudicada (dato conocido), y,

S0, superficie de parcela rústica aportada por el propietario (dato conocido).

De modo que sustituyendo los datos conocidos en las ecuaciones obtenemos:

$$X = 0,9 \left(1,0235 \frac{UAP}{m^2s} \times 20.000 m^2s \right) = 18.423 UAP$$
$$Y = \frac{X}{IENp \times Hp} = \frac{X}{1,8 \times 0,8} = \frac{X}{1,44} = \frac{18.423 UAP}{1,44 \frac{UAP}{m^2s}} = 12.793,75 m^2s$$

¹¹ Artículo 2, Decreto Ley 1/2008, de 27 de junio, del Consell, de medidas urgentes para el fomento de la vivienda y el suelo.

Los derechos del propietario en esta actuación urbanística son 18.423 unidades de Aprovechamiento (UAP), que se valorarán en metálico de acuerdo con los costes de urbanización del sector, equivalentes a un solar urbanizado de 12.793,75m²s destinado a la promoción de viviendas plurifamiliares en manzana cerrada de protección pública.

Conclusión

Se desarrolla un método estandarizado para la obtención y manejo de aprovechamientos urbanísticos, entendidos como edificabilidades y actividades potenciales en el suelo, que es competencia fundamental para abordar la tasación y la gestión de procesos inmobiliarios, desde su fase inicial de obtención de suelo.

El conocimiento del aprovechamiento tipo es la base de la que parte la asignación de derechos a los afectados por una actuación urbanística, y por tanto fundamental en este ámbito de la gestión inmobiliaria. A partir de datos conocidos aportados por la ordenación urbanística y la valoración del suelo, podemos alcanzar, mediante un procedimiento matemático reglado, el aprovechamiento tipo de un ámbito determinado.

Las situaciones de partida para la obtención del Aprovechamiento Tipo van desde las más sencillas, en sectores pequeños monofuncionales, a las más complejas, en Áreas de Reparto con varios sectores, que pueden llegar a incluir municipios completos, con diversidad de usos y tipologías y con adscripción de red primaria estructural, que asignan al suelo incluido diferentes rentabilidades económicas.

Con el ejemplo del Área de Reparto propuesta, se muestra cómo a través del cálculo matricial puede obtenerse su Aprovechamiento Tipo, asignando una matriz a cada uno de los elementos que determina su valor: Superficies, edificabilidades y coeficientes de homogeneización, por uso y tipología. Una vez obtenido el Aprovechamiento Tipo del Área de Reparto, podemos establecer la adjudicación de superficies urbanizadas a los propietarios mediante la resolución de un sistema de ecuaciones.

Referencias

AAVV.: *Transferencias de aprovechamiento urbanístico, una nueva técnica de gestión gratuita de los equipamientos en suelo urbano*. Ciudad y Territorio 3/79, 1988.

AA.VV.: «*Derecho urbanístico de la Comunidad Valenciana*», El consultor de los Ayuntamientos (La Ley), Madrid, 2006

AAVV: *La valoración inmobiliaria: teoría y práctica*, La Ley, Madrid, 2006.

AAVV: *Urbanismo en la Comunidad Valenciana, Homenaje a José Luis Lorente Tallada*, Tirant Lo Blanch, Valencia, 2008.

AAVV: *Manual de casos prácticos de gestión urbanística*, Universitat Politècnica de València, Valencia, 2011.

Baño León, J.M.: *Derecho Urbanístico Común*, Iustel, Madrid, 2009.

García de Enterría, E y Parejo Alfonso, L.: *Lecciones de derecho urbanístico*, Civitas, Madrid, 1979.

González-Varas Ibáñez, S., De la Fuente Cabero, I.: «*La nueva legislación urbanística valenciana: doctrina y texto legal*», Tirant Lo Blanch, Valencia, 2006.

Lorente Tallada, J.L., Romero Saura, F.: *El Régimen urbanístico de la Comunidad Valenciana*, Servicio de Publicaciones de la U.P.V., Valencia, 1996

Ferrando Corell, J.V.: *Valoración de inmuebles de naturaleza urbana*, Universitat Politècnica de València, Valencia, 2008.

Martín Hernández, P.: *El aprovechamiento tipo como componente de la gestión urbanística del medio urbano. La experiencia madrileña*, Revista de derecho urbanístico, 118, 1990.

Roca Cladera, J.: *Manual de valoraciones inmobiliarias*, Ariel, Madrid, 1989.

Optimización económica de una unidad de ejecución

Miguel Ángel López Guerrero¹, mangel.lopez@uclm.es

Juan Pedro Ruiz Fernández², juanpedro.ruiz@uclm.es

Nelia Valverde Gascueña³, nelia.valverde@uclm.es

1.- Departamento de Matemáticas de la UCLM. Escuela Politécnica de Cuenca. Campus Universitario de Cuenca C.P. 16071

2,3.- Departamento de Ingeniería Civil y de la Edificación de la UCLM. Escuela Politécnica de Cuenca. Campus Universitario de Cuenca C.P. 16071

Palabras clave: Optimización económica, programación lineal, unidad de ejecución urbanística, unidad de aprovechamiento.

Resumen

En esta comunicación se presenta el problema real de optimizar los m² edificables de cada uso permitido en una determinada unidad de ejecución urbanística para que su venta genere el máximo beneficio a los promotores.

Introducción

La propiedad privada y el bien común se encuentran en muchos casos enfrentados. El urbanismo es parte esencial de la intervención administrativa, que en sentido amplio se entiende como “el conjunto de normas y actos administrativos que limitan la libertad y propiedad privadas, para asegurar la consecución de un fin de interés público definido por las leyes”.

El legislador urbanista trata de repartir cargas y beneficios por igual, en proporción al terreno aportado por los particulares, ordenando el territorio de forma racional y sostenible. Este ordenamiento precisa, entre otras cosas, regular los usos y las tipologías edificatorias, limitar la ocupación de los edificios, limitar superficies, volúmenes, alturas, establecer cuotas de edificabilidad, reservas dotacionales, etc. Dichas limitaciones y requerimientos se plantean en el ordenamiento urbanístico en términos de necesidad, de máximos y mínimos.

Por otro lado, los dueños de los terrenos y otros agentes urbanizadores públicos o privados podrán tener el legítimo interés de optimizar beneficios o minimizar costes, ya sean sociales o económicos, durante el desarrollo de la actuación urbanizadora.

Tras lo expuesto no es difícil colegir que la investigación operativa, más concretamente la programación lineal, puede ser un instrumento matemático que permite optimizar las realidades económicas descritas en el ámbito del ordenamiento urbanístico donde encontramos: en términos de variables de decisión, los distintos productos urbanísticos; en términos de función objetivo, maximizar beneficios o minimizar costes; y en términos de restricciones, las limitaciones impuestas por la legislación urbanística.

Así pues, se presenta un ejemplo de optimización económica de una unidad de ejecución urbanística que cuenta con un suelo bruto total de 360.000 m², con diferentes usos permitidos (vivienda protegida, vivienda libre, comercial y hotelero), con cesiones, aprovechamiento tipo, suelo neto, unidades de aprovechamiento, etc. Los resultados se obtendrán a través de la hoja de cálculo Excel.

Objeto del trabajo

Se pretende optimizar los m² edificables de cada uso permitido en una determinada unidad de ejecución urbanística para que su venta genere el máximo beneficio a los promotores.

En urbanismo se define Unidad de Ejecución o Unidad de Actuación Urbanizadora como el ámbito territorial delimitado dentro de un área de reparto, para permitir el cumplimiento conjunto de los deberes urbanísticos básicos, conforme a lo establecido por la legislación urbanística vigente.

Planteamiento del problema

Un Plan General establece las siguientes condiciones objetivas para la Unidad de Ejecución en cuestión que cuenta con un suelo bruto (sb) total de 360.000,00 m². Los usos permitidos son:

- Vivienda protegida en bloque.
- Vivienda libre en bloque.
- Vivienda libre adosada.
- Comercial.
- Hotelero.

Las cesiones son el 50% del suelo bruto.

El aprovechamiento tipo es 1,20 Unidades de Aprovechamiento (UA)/m² de suelo bruto.

El suelo neto (sn) es el 50% s/360.000,00 = 180.000,00 m²sn.

Las Unidades de Aprovechamiento son 360.000,00 m²sb x 1,20 UA/m²sb = 432.000,00 UA.

El Plan General también establece las siguientes condiciones en Unidades de Aprovechamiento para el área de reparto:

- ✓ Vivienda protegida en bloque: $\geq 30\%$ del total de las UA.
- ✓ Vivienda libre adosada: $\geq 10\%$ y $\leq 20\%$ del total de las UA.
- ✓ Comercial: $\geq 10\%$ y $\leq 15\%$ del total de las UA.
- ✓ Hotelero: $\geq 3\%$ y $\leq 5\%$ del total de las UA.

Asimismo establece las siguientes condiciones de ocupación y alturas:

- Vivienda protegida en bloque:
 ≤ 4 plantas; 80% de ocupación máxima.
- Vivienda libre en bloque:
 ≤ 4 plantas; 80% de ocupación máxima.
- Vivienda libre adosada:
 ≤ 2 plantas; 30% de ocupación máxima.
- Comercial:
 ≤ 2 plantas; 50% de ocupación máxima.
- Hotelero:
 ≤ 5 plantas; 60% de ocupación máxima.

Si se calculan los límites en Unidades de Aprovechamiento se obtienen los siguientes valores:

- Vivienda protegida en bloque:
 - $\geq 30\%$ s/ 432.000,00 UA = 129.600,00 UA.
- Vivienda libre adosada:
 - $\geq 10\%$ s/ 432.000,00 UA = 43.200,00 UA.
 - $\leq 20\%$ s/ 432.000,00 UA = 86.400,00 UA.
- Comercial:
 - $\geq 10\%$ s/ 432.000,00 UA = 43.200,00 UA.
 - $\leq 15\%$ s/ 432.000,00 UA = 64.800,00 UA.
- Hotelero:
 - $\geq 3\%$ s/ 432.000,00 UA = 12.960,00 UA.
 - $\leq 5\%$ s/ 432.000,00 UA = 21.600,00 UA.

En el Plan General se realiza un estudio de mercado para conocer los precios de venta de las diferentes tipologías edificatorias y determinar los coeficientes correctores de ponderación a fin de compensar las diferencias de rentabilidad de las mismas.

Resultan ser:

- Vivienda protegida en bloque: $1 \text{ UA} = 1 \text{ m}^2\text{c}$ (m^2 construido).
- Vivienda libre en bloque: $1,3 \text{ UA} = 1 \text{ m}^2\text{c}$.
- Vivienda libre adosada: $1,8 \text{ UA} = 1 \text{ m}^2\text{c}$.
- Comercial: $1,5 \text{ UA} = 1 \text{ m}^2\text{c}$.
- Hotelero: $2 \text{ UA} = 1 \text{ m}^2\text{c}$.

Las alturas máximas permitidas para las diferentes tipologías, conjuntamente con la ocupación máxima del suelo neto, permite obtener los coeficientes mínimos de manzana. Dichos coeficientes determinan la cantidad mínima necesaria de suelo neto por cada m^2 de superficie construida de cada tipología.

A continuación se obtienen los coeficientes mínimos de manzana:

- Vivienda protegida en bloque: $1/(4 \times 0,8) = 0,3125$.
- Vivienda libre en bloque: $1/(4 \times 0,8) = 0,3125$.
- Vivienda libre adosada: $1/(2 \times 0,3) = 1,6667$.
- Comercial: $1/(2 \times 0,5) = 1,0000$.
- Hotelero: $1/(5 \times 0,6) = 0,3333$.

Aunque el Plan General trata de repartir cargas y beneficios por igual y compensar la rentabilidad de las distintas tipologías, el libre mercado cambia con el tiempo, como bien se ha puesto de manifiesto en los últimos años. Los parámetros usados en un momento suelen ser distintos en otro, amén de otras muchas consideraciones cambiantes de macroentorno y microentorno que afectan a los flujos de caja.

Así pues, con el Plan General en vigor y en un momento posterior, los promotores realizan otro estudio de mercado para conocer los nuevos precios de venta y los costes actuales de la promoción. De esta forma, los promotores estiman el beneficio medio por m^2 construido para las diferentes tipologías edificatorias permitidas.

En este problema planteado se supone que los beneficios estimados por tipologías son:

- Vivienda protegida en bloque: $33,00 \text{ €/m}^2\text{c}$.
- Vivienda libre en bloque: $44,00 \text{ €/m}^2\text{c}$.
- Vivienda libre adosada: $65 \text{ €/m}^2\text{c}$.
- Comercial: $45,00 \text{ €/m}^2\text{c}$.
- Hotelero: $69,00 \text{ €/m}^2\text{c}$.

Modelización matemática

Se pretende resolver el problema planteado a través de la programación lineal modelizando la realidad económica descrita de acuerdo a la siguiente estructura:

Variables de decisión:

- m² a edificar de vivienda protegida en bloque: x_1
- m² a edificar de vivienda libre en bloque: x_2
- m² a edificar de vivienda libre adosada: x_3
- m² a edificar de uso comercial: x_4
- m² a edificar de uso hotelero: x_5

Función objetivo:

$$[\text{Maximizar}] Z = 33 x_1 + 44 x_2 + 65 x_3 + 45 x_4 + 69 x_5$$

Restricciones:

- ✓ Limitación de UA por usos:
 - Vivienda protegida en bloque: $1,00 x_1 \geq 129.600,00$
 - Vivienda libre adosada: $1,80 x_3 \geq 43.200,00$
 - Vivienda libre adosada: $1,80 x_3 \leq 86.400,00$
 - Comercial: $1,50 x_4 \geq 43.200,00$
 - Comercial: $1,50 x_4 \leq 64.800,00$
 - Hotelero : $2,00 x_5 \geq 12.960,00$
 - Hotelero: $2,00 x_5 \leq 21.600,00$
- ✓ Limitación de UA totales:
 $1,00 x_1 + 1,30 x_2 + 1,80 x_3 + 1,50 x_4 + 2,00 x_5 \leq 432.000,00$
- ✓ Limitación de ocupación en suelo neto:
 $0,3125 x_1 + 0,3125 x_2 + 1,6667 x_3 + 1,0000 x_4 + 0,3333 x_5 \leq 180.000,00$
- ✓ No negatividad de las variables.
 $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0.$

Resolución

Una vez planteado el problema y modelizado matemáticamente se procede a su resolución a través de la aplicación del complemento “Solver” de la hoja de cálculo Excel de Microsoft Office. A continuación se presenta una ilustración con la resolución del problema.

OPTIMIZACIÓN ECONÓMICA DE UNA UNIDAD DE EJECUCIÓN						
Resolución						
	x1	x2	x3	x4	x5	
Maximizar Z	33,00 €	44,00 €	65,00 €	45,00 €	69,00 €	
SOLUCIONES (m2 a construir)	129.600,00	126.682,60	40.507,01	28.800,00	10.800,00	
SOLUCIONES (Beneficio)	4.276.800,00 €	5.574.034,27 €	2.632.955,86 €	1.296.000,00 €	745.200,00 €	14.524.990 €
R1. UA Vivienda protegida bloque. Mínimo	1,00					129.600,00 >= 129.600,00
R2. UA Vivienda libre adosada. Mínimo			1,80			72.912,62 >= 43.200,00
R3. UA Vivienda libre adosada. Máximo			1,80			72.912,62 <= 86.400,00
R4. UA Comercial. Mínimo				1,50		43.200,00 >= 43.200,00
R5. UA Comercial. Máximo				1,50		43.200,00 <= 64.800,00
R6. UA Hotelero. Mínimo					2,00	21.600,00 >= 12.960,00
R7. UA Hotelero. Máximo					2,00	21.600,00 <= 21.600,00
R8. UA totales. Máximo	1,00	1,30	1,80	1,50	2,00	432.000,00 <= 432.000,00
R9. Ocupación de Suelo Neto. Máximo	0,3125	0,3125	1,6667	1,0000	0,3333	180.000,00 <= 180.000,00

RESUMEN DE RESULTADOS	V. Protegida B.	V. Libre Blo.	V. Libre Ad.	Comercial	Hotelero	TOTALES
m2 a construir	129.600,00	126.682,60	40.507,01	28.800,00	10.800,00	336.389,61
Beneficio en €	4.276.800,00	5.574.034,27	2.632.955,86	1.296.000,00	745.200,00	14.524.990,13
Ponderación	1,00	1,30	1,80	1,50	2,00	
UA consumidas	129.600	164.687	72.913	43.200	21.600	
UA Mínimas	129.600	0	43.200	43.200	12.960	
UA Máximas	332.640	203.040	86.400	64.800	21.600	

Figura 1. Optimización económica de una unidad de ejecución mediante la hoja de cálculo Excel.

Así pues, en el problema planteado, el beneficio estimado por los promotores será de 14.524.990,13 € y se deberán construir 336.389,61 m² repartidos de la siguiente manera según las distintas tipologías:

- Vivienda protegida en bloque:
 - 4.276.800,00 € de beneficio.
 - 129.600,00 m² construidos, que corresponden a 129.600,00 UA (mínimas exigidas en el Plan General).
- Vivienda libre en bloque:
 - 5.574.034,27 € de beneficio.
 - 126.682,60 m² construidos que corresponden a 164.687,38 UA.
- Vivienda libre adosada:
 - 2.632.955,86 € de beneficio.
 - 40.507,01 m² construidos, que corresponden a 72.912,62 UA (entre el mínimo exigido y el máximo permitido en el Plan General).
- Comercial:
 - 1.296.000,00 € de beneficio.
 - 28.800,00 m² construidos, que corresponden a 43.200,00 UA (mínimas exigidas en el Plan General).

➤ Hotelero:

- 745.200,00 € de beneficio.
- 10.800,00 m² construidos, que corresponden a 21.600,00 UA (máximas permitidas en el Plan General).

Conclusiones

- Con la resolución del problema planteado se muestra una vez más la conexión de las matemáticas con la realidad de la construcción, permitiendo hacer el seguimiento desde la intuición del problema real hasta la formalización y solución matemática.

- Para la resolución o cálculos matemáticos se utiliza un programa informático, lo que pone de manifiesto la importancia del uso de las TIC en la enseñanza de las matemáticas, en este caso para resolver problemas de la construcción. Además, el uso de una hoja de cálculo (Microsoft Office Excel, muy utilizada en otras materias) hace que se optimice el uso de los recursos.

- Más allá de los resultados de este ejemplo particular donde se demuestra que es de aplicación la Programación Lineal en un caso concreto de actuación urbanística, se pone de manifiesto la importancia de esta herramienta matemática cuando se estudian problemas de optimización en los que tanto la función objetivo como las restricciones son lineales.

- Por último, destacar que esta comunicación ha sido desarrollada por dos profesores ingenieros de edificación y por un profesor matemático. Esto manifiesta lo interesante y fructífera que puede ser la colaboración entre docentes de las diferentes materias que se imparten en una titulación, que sin duda repercutirá en los futuros profesionales que se están formando y que ayudará a que alcancen con mayor éxito las competencias generales y específicas.

Referencias

- [1] “Diccionario de planeamiento y ordenación territorial”. Miliarium.com. Ingeniería Civil y Medio Ambiente. Fecha de consulta: Mayo 2013, <http://www.miliarium.com/Proyectos/Urbanismo/Planeamiento/diccionario.htm>
- [2] MORENO FLORES, *et al.* *Problemas resueltos de matemáticas para la edificación y otras ingenierías*. Paraninfo, Madrid, 2011.
- [3] OLIVER PINA, J. *Planificación y seguimiento de obras. Teoría y aplicaciones*. Servicio de Publicaciones de la UPV, Valencia, 1998.
- [4] Programa Informático. Microsoft Office Excel 2007.
- [5] RAMOS MÉNDEZ, E. Programación lineal y métodos de optimiza

Métodos empleados en el proyecto HORSOST sobre diseño sostenible con hormigón no convencional

Víctor Yepes Piqueras, vyepesp@upv.es

José V. Martí Albiñana, jvmartia@upv.es

Julián Alcalá González, jualgon@upv.es

Tatiana García Segura, tagarse@cam.upv.es

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Resumen

El objetivo fundamental del proyecto de investigación HORSOST consiste en establecer pautas de diseño eficiente de estructuras realizadas con hormigón no convencional optimizadas heurísticamente con funciones multiobjetivo relacionadas con la sostenibilidad. Se pretende avanzar en el establecimiento de nuevos diseños que permitan extraer las ventajas que aportan los hormigones especiales, en particular hormigones de alta resistencia, hormigones con fibras, hormigones auto-compactantes. Para ello se utiliza el análisis del ciclo de vida de dichas estructuras (elaboración, transporte, procedimientos constructivos, mantenimiento, etc.) considerando aspectos energéticos, medioambientales, sociales y económicos. La optimización heurística permite evaluar los diseños más eficientes, comparar soluciones y generar bases de datos sobre las que aplicar herramientas procedentes de la minería de datos y del aprendizaje automático para extraer información no trivial que permita fórmulas de predimensionamiento. La posibilidad de análisis se debe a que las herramientas matemáticas empleadas presentan un carácter general. Se aplican técnicas como redes neuronales o la teoría del valor extremo además de otras herramientas más habituales como la regresión lineal múltiple o el análisis por componentes principales.

Palabras clave: *Optimización multiobjetivo, metaheurísticas, hormigones no convencionales, sostenibilidad, minería de datos, redes neuronales*

Introducción

Las evidencias del actual cambio climático, entre otras, han provocado una creciente preocupación por la sostenibilidad [1]. Ello ha impulsado la investigación en aspectos relacionados con la sostenibilidad en el ámbito de la construcción. Así, se

han desarrollado indicadores [2] y se han elaborado bases de datos que miden el impacto ambiental de los materiales [3,4], que han servido en algunas investigaciones para reducir las emisiones de CO₂ en estructuras [5,6]. Sin embargo, la sostenibilidad requiere contemplar aspectos energéticos, medioambientales, sociales y económicos que deben afectar a todo el ciclo de vida de la estructura [7]. Un antecedente fue el Modelo Integrado de Cuantificación de Valor de un Proyecto Constructivo Sostenible: Aplicación a la Edificación Industrial y de Servicios (MIVES) y MIVES II, la sostenibilidad a través del análisis de valor aplicado a diversos ámbitos [8], que fueron el punto de partida para el Anejo 13 de la actual EHE.

La disponibilidad de ordenadores de elevada potencia de cálculo, junto con el desarrollo de técnicas de análisis inteligente, ha permitido el crecimiento en el diseño de estructuras óptimas [9-11]. Se ha insistido en la necesidad de optimizar estructuras reales, constatándose la escasez de la optimización del hormigón estructural frente a las estructuras metálicas. La optimización [12] puede realizarse desde numerosos puntos de vista (geométrico, topológico, seccional, etc.). Además de los métodos basados en la programación matemática [13], el problema de la optimización se puede abordar mediante técnicas metaheurísticas y bioinspiradas tales como los algoritmos genéticos, el recocido simulado, las colonias de hormigas o las redes neuronales, entre otras [14,15]. Recientemente, el trabajo desarrollado por nuestro grupo ha minimizado el coste de estructuras reales [16-28].

Sin embargo, la optimización ha requerido un intenso trabajo de investigación para extraer conclusiones aplicables a la realidad de las obras. Una forma que tiene el ingeniero para avanzar en el diseño de estructuras que se acerquen a las óptimas es que se difundan fórmulas de predimensionamiento [26,28]. Pues bien, para mejorar los diseños de las estructura, es posible extraer información no trivial de bases de datos de estructuras óptimas empleando la inteligencia artificial.

El descubrimiento de conocimiento en bases de datos (“*Knowledge Discovery from Databases*”, KDD) constituye un área donde se están realizando muchos esfuerzos, tanto en metodología como en investigación. En este contexto, la minería de datos constituye un conjunto de herramientas empleadas para la extracción de información no trivial que reside de manera implícita en los datos [29]. Mediante este tipo de técnicas se pueden solucionar problemas de predicción, clasificación y segmentación [30]. Algunas de sus herramientas más representativas son las redes neuronales, las máquinas de soporte vectorial, los árboles de decisión, modelos estadísticos avanzados multivariantes y de diseños de experimentos y el agrupamiento o “*clustering*”. Estas herramientas construyen modelos abstractos a partir de datos basándose en métodos de aprendizaje automático “*machine learning*”.

Por otra parte, la investigación en hormigones no convencionales constituye una de las líneas de investigación relevantes relacionada con los nuevos materiales de construcción. Sus propiedades permiten mejorar las prestaciones y la durabilidad, y

ello se encuentra relacionado con la sostenibilidad de su uso. Así, el refuerzo con fibras (HRF) reduce la fisuración y mejora la durabilidad al impedir el acceso de agua y contaminantes [31]. Sin embargo, razones económicas han llevado al empleo de fibras sólo en casos puntuales, cuando existen beneficios adicionales relativos a mano de obra, durabilidad o congestión del refuerzo [32]. El hormigón autocompactante (HAC) ha mejorado significativamente la tecnología del hormigón, al conseguir estructuras más durables, mejorar la producción y los procesos constructivos, facilitar el diseño de elementos complejos y acabados. Ello se consigue con dosificaciones que cambian las propiedades mecánicas respecto al hormigón convencional [33]. Todo ello abre horizontes inexplorados, donde una simple optimización económica de las estructuras haría inviable el empleo de muchos hormigones especiales, pero donde una visión más amplia que contemple criterios de sostenibilidad y de análisis del ciclo de vida, puede cambiar la perspectiva en cuanto a su empleo.

El artículo trata, por tanto, de explicar qué metodología y métodos matemáticos se han utilizado en el desarrollo del proyecto de investigación HORSOST. Se desarrollará en primer lugar las hipótesis de partida y los objetivos del proyecto, se describirá la metodología empleada y se describirán brevemente las metaheurísticas y otras técnicas matemáticas empleadas. Por último se aportan los trabajos de investigación desarrollados con estas técnicas y las conclusiones.

Hipótesis de partida y objetivos del proyecto

El objetivo fundamental de HORSOST consiste en establecer criterios de diseño eficiente basados en el análisis del ciclo de la vida de estructuras de hormigón no convencional, aplicando para ello técnicas procedentes de la inteligencia artificial y la minería de datos a amplios conjuntos de estructuras optimizadas heurísticamente bajo objetivos múltiples de sostenibilidad (ahorro energético y de recursos naturales, aspectos ambientales, sociales y económicos).

Hipótesis de partida

- a) Es posible mejorar los diseños de las estructuras de hormigón a través de pautas de predimensionamiento sólo disponibles por algunos proyectistas de gran experiencia.
- b) Existen criterios de diseño que permiten compatibilizar las exigencias derivadas de la sostenibilidad con reducciones de coste, con aumentos en seguridad y constructibilidad. Sin embargo, estos criterios no son triviales.
- c) Los hormigones no convencionales presentan propiedades que permiten contribuir a la sostenibilidad de las estructuras cuando se analiza el ciclo de vida.
- d) La inteligencia artificial y la minería de datos permiten aflorar relaciones no triviales cuando existen bases de datos suficientemente amplias.

- e) La optimización heurística permite elaborar bases masivas de datos de estructuras optimizadas bajo objetivos múltiples basados en la sostenibilidad (huella ecológica, reducción de CO₂, etc.).

Objetivos del proyecto

1. Desarrollar una metodología capaz de extraer información no trivial de bases de datos masivas de estructuras de hormigón no convencional optimizadas con múltiples objetivos basados en la sostenibilidad.
2. Obtener reglas de predimensionamiento optimizadas para cada una de las tipologías estructurales. La novedad y relevancia consiste en utilizar herramientas procedentes del “*data mining*” y de “*machine learning*”.
3. Comparar las reglas de diseño obtenidas para hormigones convencionales y no convencionales, así como con criterios obtenidos de la práctica habitual de diseño y de la Referencias existente.
4. Divulgar el conocimiento adquirido para que los proyectistas puedan utilizar estos criterios de predimensionamiento, de forma que se puedan conseguir mejoras respecto a la sostenibilidad a lo largo del ciclo de vida de las estructuras de hormigón no convencional.

Descripción de la metodología empleada en el proyecto

La **metodología** empleada consta de una secuencia iterativa de fases (Figura 1):

- a. **Integración y recopilación de datos**, donde se determinan las fuentes de información que pueden ser útiles y dónde conseguir las.
- b. **Selección, limpieza y transformación de datos**, donde se eliminan o corrigen los datos incorrectos y se decide la estrategia a seguir con los datos incompletos.
- c. **Minería de datos**, donde se decide la tarea a realizar, ya sea la clasificación, la regresión, el agrupamiento o las reglas de asociación.
- d. **Evaluación e interpretación**, donde se evalúan los patrones y se analizan por el equipo investigador, volviéndose a fases anteriores para nuevas iteraciones si fuera necesario.
- e. **Difusión**, donde se hace uso del nuevo conocimiento adquirido y se hace partícipe de él a todos los posibles usuarios.

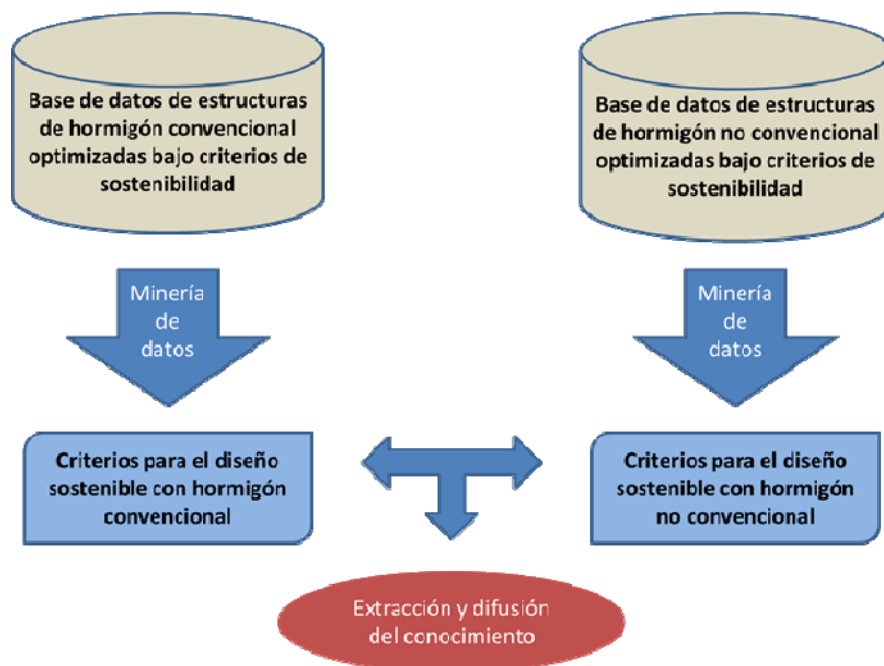


Figura 1 Extracción y difusión del conocimiento por contraste de criterios de diseño sostenible

Uno de los **aspectos clave** es la **disposición de datos utilizables**, en cantidad y calidad suficientes, para aplicar las técnicas de “*data mining*”. Se trata de aplicar un procedimiento convergente para la generación de bases de datos (CGD, para abreviar). A continuación se describe el fundamento y la forma de proceder de CGD.

Una estructura de hormigón se puede representar mediante una serie de variables y parámetros. Pues bien, la complejidad de un problema aumenta drásticamente con el número variables involucradas [34], efecto denominado como la “*maldición de la dimensión*” [35]. Para poder extraer información, como regla práctica [36] se necesita una muestra cuyo número sea, al menos, de 10 veces el número de variables independientes, siendo deseable que ese ratio fuera mayor a 20. En el caso de un puente pretensado [37], el número de factores que son combinación lineal de las variables originales y que, además sean independientes entre sí es de 4, por lo que se precisaría en torno a 40-80 casos para poder realizar inferencias lineales, lo cual no contemplaría relaciones cruzadas entre variables (ello implicaría muestra mayor). Otras técnicas como las redes neuronales o las máquinas de soporte vectorial, que son capaces de inferir modelos no lineales e incluso discontinuos o discretos, requieren un número mayor de individuos. Además, se aconseja la reserva un grupo de validación, que puede oscilar entre 1/3 y 1/4 de la muestra necesaria, para comprobar que las inferencias presentan una calidad adecuada.

Por tanto se propuso la siguiente metodología para establecer el número de individuos necesarios en la muestra: La base de datos se forma con estructuras optimiza-

das heurísticamente a partir de un conjunto de parámetros de diseño elegidos aleatoriamente dentro de un rango de variación habitual. Modificando de forma aleatoria estos parámetros, se deberá obtener un primer número de soluciones óptimas que será de 10 veces el número de variables independientes. Tras aplicar el algoritmo de aprendizaje, se inferirán las pautas de diseño de dicha estructura, es decir, cómo las variables dependientes se modelan con las variables independientes y los parámetros. Para asegurar la validez de los resultados, se duplicará el número de soluciones óptimas y se repetirá dicho proceso de inferencia. El resultado se dará por bueno si es estable (por ejemplo, la diferencia entre los resultados inferidos es inferior a un umbral determinado del 1%). En caso contrario, se duplicará el número de datos hasta que el proceso converja. En la Figura 2 se ha descrito el flujo de la estrategia CGD. De este modo se asegura que la base de datos es suficientemente amplia como para permitir la inferencia. Se hace notar que la generación de nuevas estructuras optimizadas es un procedimiento factible y de bajo coste –sólo depende del tiempo disponible de cálculo de ordenador-. Esta vía abre una puerta a la aplicación de métodos de aprendizaje incremental, que es un área de gran interés científico en el ámbito del KDD [38].

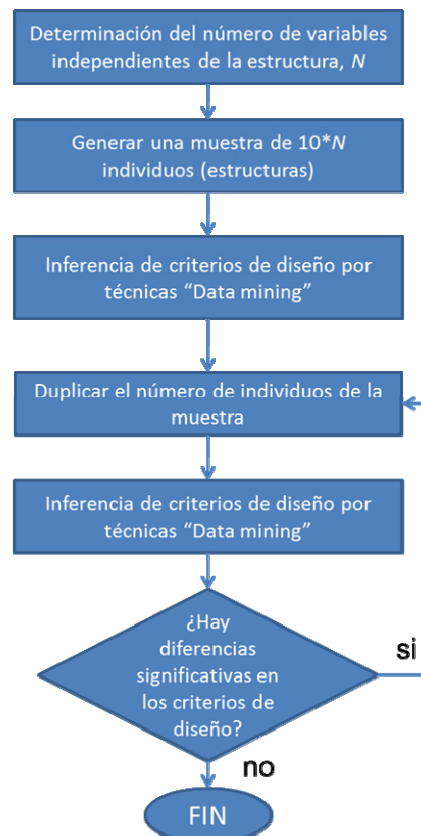


Figura 2 Flujo del procedimiento CGD para la generación de bases de datos de estructuras óptimas

Metaheurísticas empleadas en el desarrollo del proyecto

Desde los primeros años de la década de los 80, la investigación de los problemas de optimización se centra en el diseño de métodos aproximados basados en conceptos derivados de la inteligencia artificial, la evolución biológica y la mecánica estadística. En la Figura 3 se recoge una clasificación propuesta por Yepes [39] que debería complementarse con metaheurísticas híbridas que emplean, en mayor o menor medida, estrategias de unos grupos y otros. A continuación se describen algunas técnicas empleadas en HORSOST.

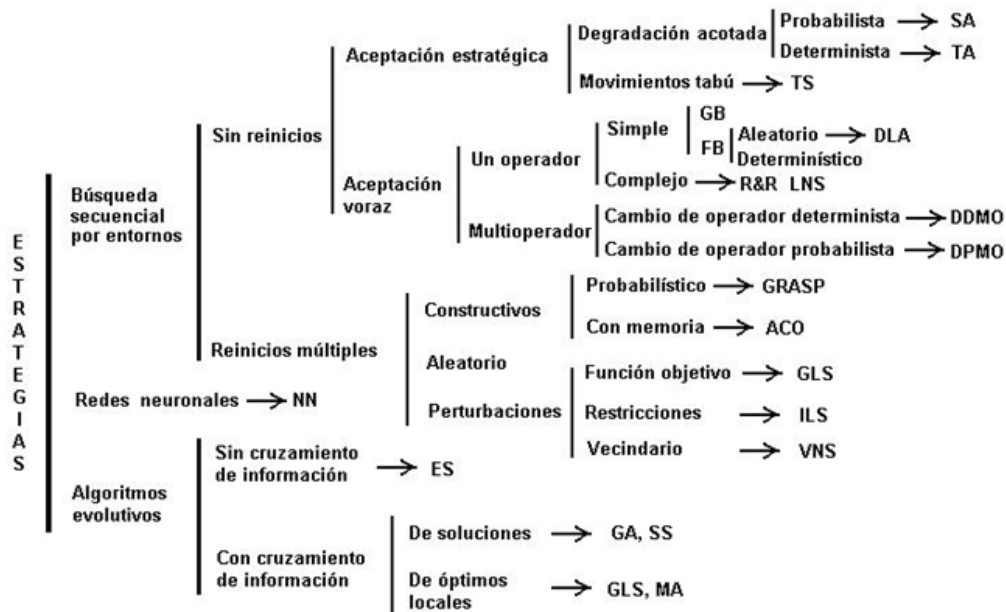


Figura 3 Taxonomía de estrategias empleadas en la resolución aproximada de problemas de optimización combinatoria (Yepes, 2002)

Recocido simulado

El recocido simulado “*Simulated Annealing*” (SA) [40,41] se basa en la analogía de la energía de un sistema termodinámico con la función de coste de un problema de optimización. Conceptualmente es un algoritmo de búsqueda por entornos, donde una solución sustituye a la anterior si mejora a la anterior ($\Delta \leq 0$); en caso contrario, será aceptada con una probabilidad ($e^{-\Delta/T}$) si $\Delta > 0$, donde T es un parámetro denominado *temperatura*) decreciente con el aumento Δ de la diferencia entre los costes de la solución candidata y la actual. La selección aleatoria de soluciones degradadas permite eludir los óptimos locales.

Aceptación por umbrales

La aceptación por umbrales “*Threshold Accepting*” (TA) [42] emplea un enfoque parecido a SA para eludir los óptimos locales, pero donde la toma de decisiones es

más sencilla. Se autoriza el menoscabo en la calidad de las soluciones siempre y cuando no se exceda en cierta magnitud la aptitud de la solución actual.

Sistema de colonia de hormigas

El sistema de colonia de hormigas “*Ant System Optimization*” (ACO) [43] se basa en la analogía del comportamiento de estos insectos cuando encuentran el camino más corto entre la comida y su hormiguero. Tan pronto como un individuo encuentra una fuente de comida, evalúa su cantidad y calidad y transporta un poco al hormiguero. Durante el regreso, la hormiga deja por el camino feromonas, para que las demás puedan seguirla. Después de un tiempo, el camino hacia el alimento se indicará por un rastro oloroso que crece con el número de hormigas que pasen por él, y que va desapareciendo en caso contrario. El resultado final es la optimización del trabajo de todo el hormiguero en su búsqueda de comida.

Búsqueda local iterada

La idea de la búsqueda local iterada “*Iterated Local Search*” (ILS) [44] consiste en rastrear la solución entre el subespacio definido por los óptimos locales. Dado que un algoritmo de búsqueda es capaz de transformar una solución s en otra s^* que es un óptimo local, para pasar a otro óptimo local cercano s' , se provoca una pequeña perturbación. Aplicando el algoritmo de búsqueda a s' se encuentra otra solución s^{*} . La metaheurística acepta el paso de s^* a s^{*} mediante algún criterio como el de máximo gradiente (si s^{*} es mejor que s^* , se acepta) o no (se puede pensar en un mecanismo TA o SA para evitar estancamientos dentro del subespacio de los óptimos locales s^*).

Búsqueda en entornos variables

La búsqueda en entornos variables “*Variable Neighborhood Search*” (VNS) [45] consiste en cambiar de operador de búsqueda cuando el anterior ha llegado a un óptimo local. De este modo, VNS oscilará entre dos o más operadores con la esperanza que los cambios en la estructura del entorno permitirán escapar de muchos óptimos locales. Para que este principio trabaje bien, los operadores empleados deberán ser lo suficientemente distintos en relación con la estructura del vecindario que generan.

Algoritmos genéticos

Los algoritmos genéticos “*Genetic Algorithms*” (GA) [46] simulan el proceso de evolución de las especies que se reproducen sexualmente. Un nuevo individuo se genera a través del *cruzamiento*, que combina parte del patrimonio genético de cada progenitor para elaborar el del nuevo individuo, y de la *mutación*, que supone una modificación espontánea de esta información genética. Si los hijos heredan buenos

atributos de sus padres, su probabilidad de supervivencia será mayor, reproduciéndose con mayor probabilidad.

Algoritmos meméticos

Los algoritmos meméticos “*Memetic Algorithms*” (MA) [47] derivan de GA, donde el empleo de una población de soluciones se compagina con heurísticas de búsqueda local. La idea consiste en recombinar la información de las soluciones provenientes del subespacio de óptimos locales. El éxito de estos métodos puede ser atribuido a su balance entre la búsqueda rápida, y el mantenimiento de la diversidad para evitar la convergencia prematura.

Otras técnicas empleadas en el proyecto

Regresión lineal múltiple

Los modelos de regresión lineal múltiple (RLM) se ajustan por mínimos cuadrados de forma que la variable de respuesta se encuentre explicada al máximo posible por las variables independientes. El proceso se inicia intentando explicar la respuesta en función de aquella variable con la que presenta una mayor correlación. El objetivo es aumentar el coeficiente de regresión agregando variables independientes explicativas, usando para ello el método *stepwise* de pasos sucesivos [48].

Análisis por componentes principales

El análisis de componentes principales (ACP) examina la interdependencia entre variables para reducir su dimensión a un nuevo subconjunto formado por variables no observables. En síntesis, calcula unos factores que sean combinación lineal de las variables originales y que, además, sean independientes entre sí. La primera componente principal se escoge de forma que explique la mayor parte de la varianza posible, y así sucesivamente. Para facilitar la interpretación, se emplea una rotación ortogonal que minimiza el número de variables que tienen saturaciones altas en cada factor [49].

Redes neuronales artificiales

Las redes neuronales artificiales “*Artificial Neural Networks*” (ANN) simulan un sistema de procesamiento de la información altamente complejo, no lineal y en paralelo parecido al cerebro humano. McCulloch y Pitts [50] presentaron el primer modelo de neurona como un dispositivo no lineal multientrada con interconexiones “con peso”. La neurona suma las entradas ya ponderadas, les aplica una función no lineal y transmite una salida. La red puede ser preparada, utilizando ejemplos, para reconocer ciertas estructuras, como puede ser la clasificación de objetos por sus características o la inferencia a partir de los datos de entrada.

Teoría del valor extremo

Si se acepta que el óptimo local encontrado por un algoritmo de búsqueda estocástico puede considerarse como una solución extrema de una muestra aleatoria simple constituida por las soluciones visitadas, entonces se podría aplicar la teoría del valor extremo “*Extreme Value Theory*” (EVT) [51,52] para estimar el óptimo global del problema. Para ello se ha comprobado que los óptimos locales encontrados constituyen valores extremos que ajustan a una función Weibull de tres parámetros, siendo el de posición, γ , una estimación del óptimo global.

Tabla 1 Referencias del empleo de técnicas respecto a tipologías estructurales

	SA	TA	ACO	ILS	VNS	GA	MA	EVT	ANN	ACP	RLM
Muros	[28]	[6]			[6]						
Pórticos de edificación	[5,24]							[24]			
Vigas de hormigón armado		[27]			[27]			[27]			
Vigas pretensadas									[23]		
Bóvedas de paso inferior	[16]	[16]		[17]				[17]			
Marcos de paso inferior	[25]	[25,26]									
Pilas de puente	[21]		[20,22]			[20]					
Puentes de vigas artesa	[18]						[19]				
Puentes losa postesados										[37]	[37]

Conclusiones

Como conclusiones generales del planteamiento del proyecto HORSOST se pueden citar las siguientes:

- 1) Existe una importante área de mejora en los diseños de estructuras de hormigón no convencional de forma que se obtenga un importante beneficio social si estos diseños maximizan la sostenibilidad en la construcción de estas estructuras considerando todo el ciclo de vida del producto.
- 2) Es posible emplear técnicas procedentes del descubrimiento de conocimiento en bases de datos (KDD) para extraer información no trivial de bases de datos de estructuras de hormigón generadas a partir de la optimización heurística multiobjetivo basada en la sostenibilidad.
- 3) Los hormigones no convencionales presentan prestaciones que favorecen su durabilidad y, por ello, pueden contribuir a la sostenibilidad si se consideran aspectos medioambientales, sociales y económicos a lo largo de toda

su vida útil. Por tanto, se deben analizar en detalle para comprobar su validez frente a los hormigones convencionales y ofrecer criterios de diseño aplicables por los proyectistas.

Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto de Investigación BIA2011-23602) y por la Universitat Politècnica de València (Proyecto de Investigación PAID-06-12).

Referencias

- [1] Baldasano, J.M. (2007). Evidencias del actual cambio climático, en *Cambio climático y sus consecuencias*. Generalitat Valenciana, pp. 43-56.
- [2] Rodríguez, F.; Fernández, G. (2010). Ingeniería sostenible: nuevos objetivos en los proyectos de construcción. *Revista Ingeniería de Construcción*, 25(2), 147-160. [doi:10.4067/S0718-50732010000200001]
- [3] Goedkoop, M.; Spriensma, R. (2001). The Ecoindicator 99: A damage oriented method for life cycle impact assessment. Methodology Report. Product Ecology Consultants, Amersfoort, Netherlands.
- [4] Institut de Tecnologia de la Construcció de Catalunya (2009). BEDEC PR/PCT ITEC materials database. Available online at:<http://www.itec.es/nouBedec.e/presentaciobedec.aspx>
- [5] Payá-Zaforteza I.; Yepes, V.; Hospitaler, A.; González-Vidoso, F. (2009). CO2-Efficient Design of Reinforced Concrete Building Frames. *Engineering Structures*, 31, 1501-1508. [doi.org/10.1016/j.engstruct.2009.02.034]
- [6] Yepes, V.; González-Vidoso, F.; Alcalá, J.; Villalba, P. (2012). CO2-Optimization Design of Reinforced Concrete Retaining Walls based on a VNS-Threshold Acceptance Strategy. *Journal of Computing in Civil Engineering ASCE*, 26 (3), 378-386. [doi:10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000140]
- [7] Burón, M. (2007). La sostenibilidad de las construcciones de hormigón. *Revista Técnica Cemento Hormigón*, 897, 58-65.
- [8] Aguado, A.; Alarcón, D.B.; Manga, R. (2008). Razón de ser del anejo ICES de la EHA y características del mismo. *Revista Técnica Cemento Hormigón*, 913, 16-23.
- [9] Sriram, R.D. (2006). Artificial intelligence in engineering: personal reflections. *Advanced Engineering Informatics*, 20, 3-5. [doi:10.1016/j.aei.2005.12.002]
- [10] Sarma, K.C.; Adeli, H. (1998). Cost optimization of concrete structures. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 124(5), 570-578. [doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1998)124:5(570)]

- [11] Cohn, M.Z.; Dinovitzer, A.S. (1994). Application of structural optimization. *ASCE Journal of Structural Engineering*, 120(2), 617-649. [doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:2(617)]
- [12] Martínez, P.; Martí, P.; Querín, O.M. (2007). Growth method for size, topology, and geometry optimization of truss structures. *Structural and Multidisciplinary Optimization*, 33, 13-26. [doi:10.1007/s00158-006-0043-9]
- [13] Hernández, S.; Fontan, A. (2002). *Practical Applications of Design Optimization*. WIT Press, Southampton.
- [14] Adeli, H.; Sarma, K.C. (2006). "Cost optimization of structures. Fuzzy logic, genetic algorithms and parallel computing", Wiley, Chichester.
- [15] Dreoj, J.; Petrowsky, A.; Siarry, P.; Taillard, E. (2006). *Metaheuristics for hard optimization. Methods and case studies*. Springer, Berlin Heidelberg.
- [16] Carbonell, A.; González-Vidoso, F.; Yepes, V. (2011). Heuristic optimization of reinforced concrete road vault underpasses. *Advances in Engineering Software*, 42(4), 151-159. [doi:10.1016/j.advengsoft.2011.01.002]
- [17] Carbonell, A.; Yepes, V.; González-Vidoso, F. (2012). Automatic design of concrete vaults using iterated local search and extreme value estimation. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 9(6), 675-689.
- [18] Martí, J.V.; González-Vidoso, F.; Yepes, V.; Alcalá, J. (2013). Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing. *Engineering Structures*, 48, 342-352. [doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.014]
- [19] Martí, J.V.; Yepes, V.; González-Vidoso, F.; Luz, A. (2013). Diseño automático de tableros óptimos de puentes de carretera de vigas artesa prefabricadas mediante algoritmos meméticos híbridos. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*, (en prensa).
- [20] Martínez-Martín, F.; González-Vidoso, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2010). Heuristic Optimization of RC Bridge Piers with Rectangular Hollow Sections. *Computers & Structures*, 88(5-6), 375-386. [doi:10.1016/j.compstruc.2009.11.009]
- [21] Martínez-Martín, F.; González-Vidoso, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2012). Multi-objective optimization design of bridge piers with hybrid heuristic algorithms. *Journal of Zhejiang University-SCIENCE A (Applied Physics & Engineering)*, 13(6), 420-432. [doi:10.1631/jzus.A1100304]
- [22] Martínez-Martín, F.; González-Vidoso, F.; Hospitaler, A.; Yepes, V. (2013). A parametric study of optimum tall piers for railway bridge viaducts. *Structural Engineering and Mechanics*, 45(6), 723-740.
- [23] Martí-Vargas, J.R.; Ferri, F.J.; Yepes, V. (2013). Prediction of the transfer length of prestressing strands with neural networks. *Computers and Concrete*, (in press).
- [24] Payá-Zaforteza, I.; Yepes, V.; González-Vidoso, F.; Hospitaler, A. (2010). On the Weibull cost estimation of building frames designed by simulated annealing. *Meccanica*, 45(5), 693-704. [doi:10.1007/s11012-010-9285-0]

- [25] Perea, C.; Alcalá, J.; Yepes, V.; González-Vidoso, F.; Hospitaler, A. (2008). Design of Reinforced Concrete Bridge Frames by Heuristic Optimization. *Advances in Engineering Software*, 39(8), 676-688. [doi:10.1016/j.advengsoft.2007.07.007]
- [26] Perea, C.; Yepes, V.; Alcalá, J.; Hospitaler, A.; González-Vidoso, F. (2010). A parametric study of optimum road frame bridges by threshold acceptance. *Indian Journal of Engineering & Materials Sciences*, 17(6), 427-437.
- [27] Torres-Machí, C.; Yepes, V.; Alcalá, J.; Pellicer, E. (2013). Optimization of high-performance concrete structures by variable neighborhood search. *International Journal of Civil Engineering, Transaction A: Civil Engineering*, 11(2), 90-99.
- [28] Yepes, V.; Alcalá, J.; Perea, C.; González-Vidoso, F. (2008). A Parametric Study of Optimum Earth Retaining Walls by Simulated Annealing. *Engineering Structures*, 30(3), 821-830. [doi:10.1016/j.engstruct.2007.05.023]
- [29] Fayyad, U.M. (1996). Data Mining and Knowledge Discovery: Making Sense Out of Data. *IEEE Expert*, 11(5), 20-25. [doi:10.1109/64.539013]
- [30] Hernández, J.; Ramírez, M.J.; Ferri, C. (2004). *Introducción a la minería de datos*. Pearson, Madrid.
- [31] Rossi, P.; Chanvillard, G. (eds.) (2000). "Fibre-Reinforced Concretes (FRC)". *Proceedings of the 5th International RILEM Symposium (BEFIB 2000)*. RILEM Publications S.A.R.L., Cachan, France.
- [32] Massicotte, B. (2000). *Fiber Reinforce Concrete: a Structural Perspective*, RILEM Proceedings 15, BEFIB 2000.
- [33] Martí-Vargas, J.R.; Serna-Ros, P.; Arbeláez, C.A.; Rigueira-Víctor, J.W. (2006). Comportamiento adherente del hormigón autocompactante en transmisión y anclaje. *Materiales de Construcción*, 56(284), 27-42.
- [34] Pettis, K.W.; Bailey, T.A.; Jain, A.K.; Dubes, R.C. (1979). An intrinsic dimensionality estimator from near-neighbor information. *IEEE Transactions on pattern analysis and machine intelligence*, 1, 25-37. [doi:10.1109/TPAMI.1979.4766873]
- [35] Bellman, R.E. (1961). *Adaptive Control Processes*. Princeton University Press, Princeton, N.J.
- [36] Fukunaga, M. (1990). *Introduction to Statistical Pattern Recognition*. 2nd Edition. Academic Press, San Diego, USA.
- [37] Yepes, V.; Díaz, J.; González-Vidoso, F.; Alcalá, J. (2009). Caracterización estadística de tableros pretensados para carreteras. *Revista de la Construcción*, 8(2), 95-109.
- [38] Ferri, J.; Diaz-Chito, K.; Diaz-Villanueva, W. (2010). Efficient dimensionality reduction on undersampled problems through incremental discriminative common vectors, *ICDM'10 (OEDM Workshop)*, pp. 1159-1166.
- [39] Yepes, V. (2002). *Optimización heurística económica de redes de transporte del tipo VRPTW*. Tesis doctoral, Universitat Politècnica de València.

- [40] Kirkpatrick, S.; Gelatt, C.D.; Vecchi, M.P. (1983). Optimization by simulated annealing. *Science*, 220(4598), 671-680. [doi:10.1126/science.220.4598.671]
- [41] Cerny, V. (1985). Thermodynamical approach to the traveling salesman problem: An efficient simulation algorithm. *Optimization Theory and Applications*, 45, 41-51. [doi:10.1007/BF00940812]
- [42] Dueck G, Scheuer T. (1990). Threshold accepting: a general purpose optimization algorithm superior to simulated annealing. *Journal of Computational Physics*, 90(1), 161–75. [doi:10.1016/0021-9991(90)90201-B]
- [43] Dorigo, M.; Maniezzo, V.; Colorni, A. (1996). The ant system: optimization by a colony of cooperating agents. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics-Part B*, 26(1), 29-41. [doi:10.1109/3477.484436]
- [44] Lourenço, H.R.; Martin, O.C.; Stülze, T. (2003). Iterated local search. In F.W. Glover and G.A. Kochenberger, edi-tors, *Handbook of metaheuristics*, pages 321-353, Boston, Dordrecht, London. Kluwer Academic Publishers.
- [45] Mladenovic, N.; Hansen, P. (1997). Variable neighborhood search. *Computers and Operations Research*, 24(11), 1097-1100. [doi:10.1016/S0305-0548(97)00031-2]
- [46] Holland, J.H. (1975). *Adaptation in natural and artificial systems*. University of Michigan Press, Ann Arbor.
- [47] Moscato, P. On evolution, search, optimization, genetic algorithms and martial arts: Towards memetic algorithms. Technical Report Caltech Concurrent Computation Program Report 826, Caltech, Pasadena, California, USA.
- [48] Hocking, R. (1976). The Analysis and Selection of Variables in Linear Regression. *Biometrics*, 32, 1-49.
- [49] Kaiser H.F. (1958). The Varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, 23(3), 187-200. [doi:10.1007/BF02289233]
- [50] McCulloch, W.; Pitts, W. (1943). A logical calculus of ideas immanent in nervous activity. *Bulletin of Mathematical Biophysics*, 5, 115-133. [doi:10.1016/S0092-8240(05)80006-0]
- [51] McRoberts, K. (1971). A search model for evaluating combinatorially explosive problems. *Operations Research*, 19(6), 1331-1349. [doi:10.1287/opre.19.6.1331]
- [52] Golden, B.L.; Alt, F.B. (1979). Interval estimation of a global optimum for large combinatorial problems. *Naval Research Logistics Quarterly*, 26(1), 69-77. [doi:10.1002/nav.3800260108]

Matemáticas+Arquitectura+Urbanismo = mau.mau

Débora Domingo Calabuig, Departamento de Proyectos Arquitectónicos , dedoca@pra.upv.es

Rafael Rivera Herráez, Departamento de Urbanismo, ETS de Arquitectura, rariher@urb.upv.es

Macarena Trujillo Guillén, Departamento de Matemática Aplicada, matrugui@mat.upv.es

ETS de Arquitectura, Universitat Politècnica de València.

Resumen

En esta comunicación presentamos una experiencia de aprendizaje que hemos llevado a cabo en la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia con el objetivo de que el alumnado perciba el papel y la conexión existente entre tres disciplinas aparentemente inconexas, como son matemáticas, proyectos arquitectónicos y urbanismo (mau_mau). El interés de la propuesta se centra en la colaboración de las tres disciplinas dentro del grado de arquitectura.

Además de ser una propuesta que combina tres asignaturas, también mezclamos alumnos de tres niveles de conocimiento. Concretamente, alumnos de primero y segundo de grado con alumnos de los últimos cursos del ciclo.

Nuestro punto de partida es el lenguaje como elemento común a las tres disciplinas. Y la materialización del trabajo se concreta en un trabajo práctico en el que los alumnos han de plasmar sus conocimientos fruto de la combinación de las tres materias.

En la comunicación relatamos los preparativos y el desarrollo de este taller que hemos llamado mau.mau y una reflexión sobre esta experiencia interdisciplinar.

Palabras clave: *experiencia interdisciplinar, matemáticas, proyectos arquitectónicos, urbanismo, mau.mau*

Introducción

En la enseñanza de la arquitectura en las escuelas españolas es común encontrar en los primeros cursos las materias relacionadas con las ciencias básicas, como son las matemáticas. En la formación de un estudiante de arquitectura esta disciplina puede contribuir fundamentalmente como herramienta de cálculo, fomentando la creatividad del arquitecto desde el punto de vista del diseño y como útil para estructurar el pensamiento. Sin embargo, estas aplicaciones de las matemáticas a la arquitectura caen en saco roto si los profesores tanto de esta disciplina como de otras relacionadas con la arquitectura no son conscientes de ellas. Si queremos darle algún sentido a las clases de matemáticas, éstas deben abrirse a otras disciplinas y no deben quedar aisladas en los primeros cursos.

mau.mau es un ejemplo de cómo se pueden integrar las matemáticas en otras disciplinas. mau.mau es una propuesta de taller vertical que aborda el aprendizaje explicando las relaciones que existen entre diferentes asignaturas, en este caso matemáticas, arquitectura y urbanismo, esas relaciones que justifican su presencia en los programas docentes. El objeto general de la propuesta se centra en la colaboración de las tres disciplinas dentro del grado de arquitectura. Este objetivo se concreta en la obtención de un modelo teórico volumétrico que recoja una propuesta de ordenación de una parcela, incluyendo el elemento residencial y la configuración de los espacios públicos. Se trata de crear tejido urbano residencial considerando las diferentes escalas que intervienen en el proceso. Obtener viviendas eficaces ordenadas en un tejido de calidad.

Los objetivos particulares de mau.mau se pueden agrupar en tres apartados:

- Conocimiento y comprensión. Identificar y explicar, desde las diferentes disciplinas implicadas, aquellos elementos que completan la metodología de intervención en el territorio. Describir e interpretar las variables propuestas como piezas básicas.
- Análisis y síntesis. Definición los conceptos teóricos propuestos y sus relaciones, así como experimentar la explicación de los mismos ejercitando la comunicación y la claridad de argumentos.
- Intervención. Aplicar todo el método teórico a la intervención en el territorio explicando el papel de las diferentes disciplinas y sus relaciones.

La experiencia mau.mau

El universo docente son alumnos y alumnas de la Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Valencia, de primer, segundo, cuarto y quinto curso, formando grupos de trabajo que mezclan los diferentes niveles de conocimiento. Los alumnos de los dos primeros cursos pertenecen al plan de estudios de grado de 2010 (plan Bolonia), mientras que los de los cursos superiores estudian según el plan de ciclo de 2002.

Para el desarrollo del trabajo hemos seleccionado diferentes conceptos que se utilizan en las tres disciplinas, con definiciones aparentemente distintas pero que se refieren a variables muy semejantes, cuya explicación homogeneiza no sólo las propias disciplinas, sino también los métodos de trabajo [1]. Hemos empezado por el lenguaje como instrumento horizontal por excelencia que une todo en el plano de la comunicación. En nuestra sociedad, estamos obligados a entendernos y, para ello, el lenguaje resulta una pieza básica. Dentro del lenguaje, hemos seleccionado conceptos utilizados también en sentido coloquial, ajeno a la arquitectura, pero que, por eso mismo, unen la conversación cotidiana con la especialización, haciendo esta última más accesible y más comprensible. Un especialista nunca debe estar separado de la realidad próxima.

Estos conceptos tienen su explicación desde las ciencias básicas, pero también su traducción arquitectónica y urbanística, sin perder su esencia conceptual, lo que facilita no sólo la comprensión profunda de cada concepto, sino el descubrimiento y la percepción de las áreas comunes de las disciplinas. Esta es la clave de la propuesta, cada disciplina es útil porque ayuda a entender las otras. Así tiene sentido la coherencia curricular [2].

La experiencia que proponemos está planteada en dos niveles. El primero en relación con los conceptos en sí y su explicación en el contexto de las tres disciplinas. El segundo es un trabajo práctico donde matemáticas, arquitectura y urbanismo aparecen como piezas imprescindibles para entender la globalidad del enunciado y desarrollar las diferentes propuestas. Todo ello tutorizado por los profesores de las tres disciplinas.

Concretamente, el ejercicio práctico a desarrollar parte de un emplazamiento ficticio, plano, y de una hectárea de superficie donde hay que situar una serie de piezas que recogen las funciones básicas de la ciudad. Se trata de un juego de composición abstracto que permite estudiar las diferentes posibilidades de resolución desde múltiples reflexiones. ¿Qué modelo de ciudad se persigue?, ¿qué espacios públicos se proponen?, ¿cuál es la forma concreta de la ciudad? o ¿qué viviendas, qué dotaciones, qué espacios verdes son posibles?, son las preguntas que se pretenden contestar poniendo en práctica un vocabulario que es conceptualmente común a las tres asignaturas, pero diversamente acotado en cada una. La mecánica de trabajo comprende la resolución numérica y gráfica de algunas cuestiones, aunque fundamentalmente los alumnos se acercan a la resolución espacial del ejercicio mediante sencillas maquetas (ver Figura 1).

La experiencia se inicia en septiembre de 2012 cuando los profesores de las asignaturas implicadas empezamos a pensar cómo mezclarnos, cómo plantear una actividad en la que los alumnos trabajaran combinando conocimientos de las tres materias. En febrero de 2013 tiene lugar la primera sesión de mau.mau con los alumnos participantes. Esta sesión fue de carácter informativo. En ella se formaron los grupos de trabajo y se presentó mau.mau a los alumnos haciendo una breve y general descripción del trabajo que tenían que realizar. El trabajo se divide en tareas que a su vez se agrupan en 4 etapas. Al finalizar cada una de estas etapas hay una sesión de seguimiento (aproximadamente una vez al mes). En las sesiones de seguimiento el objetivo es poner en común los resultados obtenidos en las tareas asignadas en cada etapa. Estas tareas además son revisadas por cada uno de los profesores tras la sesión de seguimiento y recogidas en un informe para que su revisión sea tenida en cuenta para la continuación del trabajo.



Figura 1. Fotografías de un ejemplo del emplazamiento ficticio sobre el que se va a desarrollar el ejercicio con la colocación de algunas piezas de distintos tipos.

Las matemáticas en mau.mau

Durante el desarrollo del trabajo se tienen que utilizar las matemáticas para diversos cálculos. Además de estos cálculos ya incluidos en el enunciado, se proponen dos tareas concretas complementarias. En la primera tarea se sitúan en la parcela de intervención dos yacimientos arqueológicos ficticios, alrededor de los cuales se habilitan unos lindes de tal forma que en estas dos zonas no es posible actuar quedando incorporadas estas áreas al espacio público. Los alumnos deben calcular la superficie ocupada por los yacimientos de la forma más aproximada posible para indemnizar su valor. Las formas de los yacimientos conforman recintos cuya área es conocida y otros que deben ser calculados mediante integración. Los alumnos tienen que realizar mediciones de los yacimientos, para intentar modelizar las formas de los yacimientos a curvas cuya ecuación sea conocida y posteriormente plantear el cálculo del área correspondiente mediante integración. Las integrales pueden abordarse de forma analítica o utilizando el software Mathematica.

La segunda tarea consiste en cuadrricular la parcela de intervención y en esas cuadrículas (con un tamaño determinado) estimar la densidad de población teniendo en cuenta la ordenación urbana y el tipo de viviendas de cada cuadrícula. Una vez calculada dicha densidad se pide calcular donde estaría situado aproximadamente el centro de masas de la población para vincularlo a los criterios de ordenación. En este ejercicio se trata de discretizar la parcela y asignar a cada nodo el peso correspondiente a la densidad de población. Se parte por tanto de una ordenación urbana real a una abstracción de la misma en cuadrículas cada una con sus correspondientes pesos.

Situación actual

En el momento de escribir esta comunicación (mayo de 2013) la experiencia todavía está en desarrollo. En concreto, estamos entre la tercera y cuarta sesión de seguimiento. Dada la etapa en la que se encuentra la experiencia no contamos con muchos resultados por parte de los alumnos. Quizá es un poco atrevido por nuestra parte presentar una experiencia de la que a priori no sabemos cuál va a ser la respuesta. Sin embargo, hemos querido hacerlo de igual forma porque estamos convencidos de la oportunidad de esta línea de trabajo, y para que se conozcan algunos pequeños pasos que se pueden dar hacia una interdisciplinariedad que creemos que no se trabaja suficientemente en la Escuela.

La experiencia relatada rompe las líneas de algunas fronteras a priori asentadas en la lógica de la enseñanza. El seminario combina en una misma actividad a alumnos de dos planes de estudios; los grupos de trabajo están formados por estudiantes que pertenecen a cursos muy distantes de los estudios de Arquitectura, y que tienen por lo tanto niveles desiguales de conocimiento; las asignaturas implicadas pertenecen a departamentos diferentes; incluso la situación del profesorado que participa es académica y contractualmente heterogénea. Sin embargo, el taller se pone en marcha alimentado por el convencimiento del objetivo por encima de los aparentes impedimentos. Tal vez en el tamaño de esta innovación –pocos alumnos, pocas asignaturas, poca carga de trabajo- reside la clave para poder llevarla a cabo satisfactoriamente, desde luego, también en la ilusión y en la motivación. El hecho de mezclar alumnos de dos planes de estudios diferentes no resulta un impedimento para el desarrollo de la actividad. Mientras los alumnos de grado incorporan el trabajo desarrollado en el taller a la carga ordinaria de las asignaturas de matemáticas y urbanismo, los alumnos de ciclo obtienen créditos de libre elección por la participación en el taller. El problema que se plantea al mezclar alumnos de diferentes cursos fundamentalmente se centra en problemas de horarios, en encontrar tiempo común para trabajar.

Aunque en estos momentos no tenemos resultados de la experiencia por parte de los alumnos, sí que tenemos la opinión de la otra parte implicada: los profesores. En nuestro caso la experiencia está siendo muy positiva. Nos está ayudando a reflexionar sobre qué enseñamos, por qué lo enseñamos y cómo lo enseñamos. La experiencia nos está enriqueciendo viendo otras formas de enseñar y de trabajar. Y sin duda hemos aprendido y estamos aprendiendo mucho.

Reconocer la utilidad de lo aprendido es un buen instrumento contra el olvido y ayuda a garantizar la pervivencia de unos conocimientos cuya eficacia y vinculación hemos de ser capaces de evidenciar con claridad.

Reflexiones

Nuestra pequeña experiencia trata de abrir un camino hacia otra manera de entender el aprendizaje dentro del grado y de incentivar la curiosidad y el interés hacia el conocimiento. No sólo hablamos de utilitarismo, hablamos de relaciones, de aprendizaje cruzado, de experiencias compartidas, para entender, en toda su dimensión, el sentido de lo que enseñamos y el sentido de lo que aprenden.

Descubrir el hilo conductor que hilvana los diferentes conocimientos es un instrumento muy poco desarrollado en los programas docentes pero que, desde nuestro punto de vista, resulta fundamental porque aporta coherencia y explica lo global desde lo particular; desborda el marco estrecho de cada parte aislada y ofrece un panorama diferente de la docencia que facilita el aprendizaje. Si el alumno descubre desde el principio la cadena lógica del conocimiento y los enlaces que vinculan unos conceptos con otros, habremos conseguido evidenciar y clarificar la hoja de ruta que supone desarrollar un grado.

Somos conscientes de que existen muchas más relaciones que explicar entre todas las asignaturas que componen el programa docente. *mau.mau* solo es la punta del iceberg que trata de poner de manifiesto otra manera de explicar la arquitectura que complementa los programas oficiales.

Las diferentes asignaturas suelen ser compartimentos estancos, lo cual es sin duda un desaprovechamiento de recursos y potencial tanto material como humano. Es evidente que todas las materias necesitan un espacio para sí mismas y con diferente peso, pero ¿por qué la intersección entre la mayoría de ellas es vacía? ¿Acaso no estamos convencidos que el profesional que tiene que salir de la Escuela tiene que tener todas ellas en su pasaporte y saber combinarlas? La interdisciplinariedad necesita que nos dejemos de mirar el ombligo para empezar a mirarnos a los ojos. Y esto es difícil. Es difícil porque la costumbre es un arma muy poderosa que cuesta vencer, los cambios siempre sugieren incertidumbre. Pero tenemos que darnos cuenta que nuestro universo docente ha cambiado y va a seguir cambiando y tenemos que avanzar con ellos no imposibles con lo que nos van a deparar, sino como parte activa y protagonista. Recordando a Quevedo “Cuando decimos que todo tiempo pasado fue mejor, condenamos el futuro sin conocerlo”. También es difícil porque en muchas ocasiones somos especialistas de nuestras propias materias y desconocemos lo que podemos aportar o lo que nos pueden aportar otras materias. Por otro lado está el esfuerzo que esto supone. No vamos a engañar a nadie diciendo que plantear un trabajo de este tipo no supone un trabajo extra, porque sí lo es. Sin embargo, es un esfuerzo de la forma en la que está planteado, pero podría darse otro tipo de fórmulas para que la convivencia de disciplinas no fuera más carga docente. Por ejemplo, haciendo que la combinación de materias tuviera entidad propia y no fuesen parte de las asignaturas raíz.

Desde el punto de las matemáticas es esencial que estas no se queden aisladas y se integren en el resto de la formación de los estudiantes de arquitectura de una forma activa. Así ganarán no sólo las matemáticas, sino también las otras disciplinas a las que puede “salpicar” y, lo que es más importante, la formación de los futuros arquitectos.

El problema que se propone en la experiencia es un todo, es decir, intentamos que se vea como un problema a resolver en su conjunto por estudiantes de Arquitectura. Aún así si extraemos las matemáticas que intervienen en ella, podríamos extrapolar los cálculos realizados en algún problema relacionado con la Arquitectura Técnica, concretamente a los referentes en la competencia 3 de la orden ministerial ECI/3855/2007 (Cálculos de mediciones dentro de la materia de gestión urbanística para la tasación del suelo, como el estudio de la viabilidad económica de una actuación de edificación, en su fase inicial de obtención de suelo, son parte integrante del proceso de gestión inmobiliaria: competencia profesional de la titulación del Arquitecto Técnico).

Referencias

- [1] Piaget, J. 1979. La epistemología de las relaciones interdisciplinarias. En: L. Apostel, G. Bergerr, A. Brigg y G: Michaud. Interdisciplinariedad. Problemas de la enseñanza y de la Investigación en las Universidades. México: Asociación Nacional de Universidades e Institutos de Enseñanza Superior.
- [2] Martínez Ruíz, M. A. y Sauleda Parés, N., Terminología relativa al Espacio Superior de Educación Superior, Editorial Marfil, Alicante, 2007.

Aplicaciones de la geometría proyectiva al cálculo grafostático. Núcleo central de una sección

Juan Gómez Acosta, Dr. Arquitecto. (*). jacosta@ucam.edu

Juan Roldán Ruiz, Dr. Arquitecto. (*). jroldan@ucam.edu

Carmen Carazo Díaz, Dra. en Ciencias Matemáticas. (*). ccarazo@ucam.edu

Josefina Vegara Meseguer, Dra. en Ciencias Físicas. (*). jvegara@ucam.edu

Pedro García Pallarés, Arquitecto. (*). pgarcia@ucam.edu

(*). Departamento de Ciencias Politécnicas. Escuela de Arquitectura e Ingeniería de Edificación. Universidad Católica San Antonio de Murcia (UCAM).

Resumen

La historia de las Matemáticas está repleta de aplicaciones prácticas que han facilitado el desarrollo de otras ciencias. Nos interesamos aquí por la acción recíprocamente ejercida entre la Geometría Proyectiva y la Estática Gráfica, nacida de ella junto con los conceptos de la Nueva Mecánica.

Nuestra comunicación está relacionada con el comportamiento estructural de elementos que, como los arcos y bóvedas de fábrica, deben trabajar sólo a compresión, para lo que resulta fundamental el conocimiento de la posición del Eje Neutro, que en el análisis tensional de sus secciones, determina tensiones de distinto signo a uno y otro lado del mismo, cuando corta a dichas secciones. La aplicación de los conceptos de Polaridad y Reciprocidad que la Geometría de Posición (después, Geometría Proyectiva) puso en manos de arquitectos e ingenieros desde mediados del S. XIX, nos permite, a través de la Grafostática, la determinación del Núcleo Central de Inercia de cualquier sección, independientemente de su geometría, obviando las dificultades del cálculo analítico, a veces complicado, de Polos, anti-polos y ecuaciones de Rectas Polares.

Asimismo, en la comprobación de la estabilidad de dichas estructuras de fábrica, es decisiva la determinación del punto de paso de la resultante de los empujes por el interior, o no, del Núcleo Central.

Nuestra metodología se circunscribe a la determinación grafostática de la Elipse Central de Inercia de la sección. Los vértices del Núcleo Central se obtienen como los Anti-polos de las Rectas tangentes al perímetro de la sección, respecto a la Elipse Central de Inercia.

Palabras clave: *Polaridad. Reciprocidad. Núcleo Central. Grafostática.*

Conceptos proyectivos de Dualidad, Polaridad y Reciprocidad.

...“Contrariwise” ...Y al contrario... ¿Cuántos planos hay contenidos en un punto? Tanto como puntos pasan por un plano. Y... “contrariwise”, que diría Tweedledee.



Figura 1. Ilustración de John Tenniel de Patachunta y Patachún para el capítulo 4º de *Alicia a través del espejo* (Lewis Carroll), originalmente publicado en 1871. Ilustración (Wikimedia Commons. P.D. *copyright expired*)

Tweedledum and Tweedledee (Patachunta y Patachún o Tararí y Tarará en la traducción española) son personajes del cuento *Alicia a través del espejo* y lo que encontró al otro lado de Lewis Carroll y de una canción de cuna inglesa anónima.(Fig. 1) Los nombres fueron tomados de un poema de John Byrom y parece que provienen del hecho de enredar con los dedos o agitarlos sin ningún sentido práctico (tweedle). 1

Si en el primer libro de Carroll, Alicia tomaba contacto con el mundo de los adultos, en el segundo ingresa en él. Al "atravesar el espejo" Alicia está atravesando el umbral de su niñez. El mundo que le espera "al otro lado" es, a la vez, igual y radicalmente distinto al suyo propio. Tal como observa Martin Gardner (1998) "en un espejo... todos los objetos asimétricos van en dirección contraria". Se produce, a lo largo de la narración, una inversión de la realidad. Para llegar donde está la Reina Roja, Alicia camina hacia atrás; reparte el pastel del León y el Unicornio y después lo parte; Alicia contempla el mundo de los adultos no como la "realidad" sino, lo contrario; como una inversión de la realidad. (Gardner, 1998: 216-228).

La dualidad es un concepto omnipresente en toda la Matemática, pero tal vez sea en Geometría Proyectiva donde mejor puede ilustrarse su interés. Es un diccionario que permite traducir de un contexto a otro nociones y resultados. En el

plano proyectivo, una recta tiene por dual un haz de rectas, que se identifica con su punto base, y se obtiene lo siguiente:

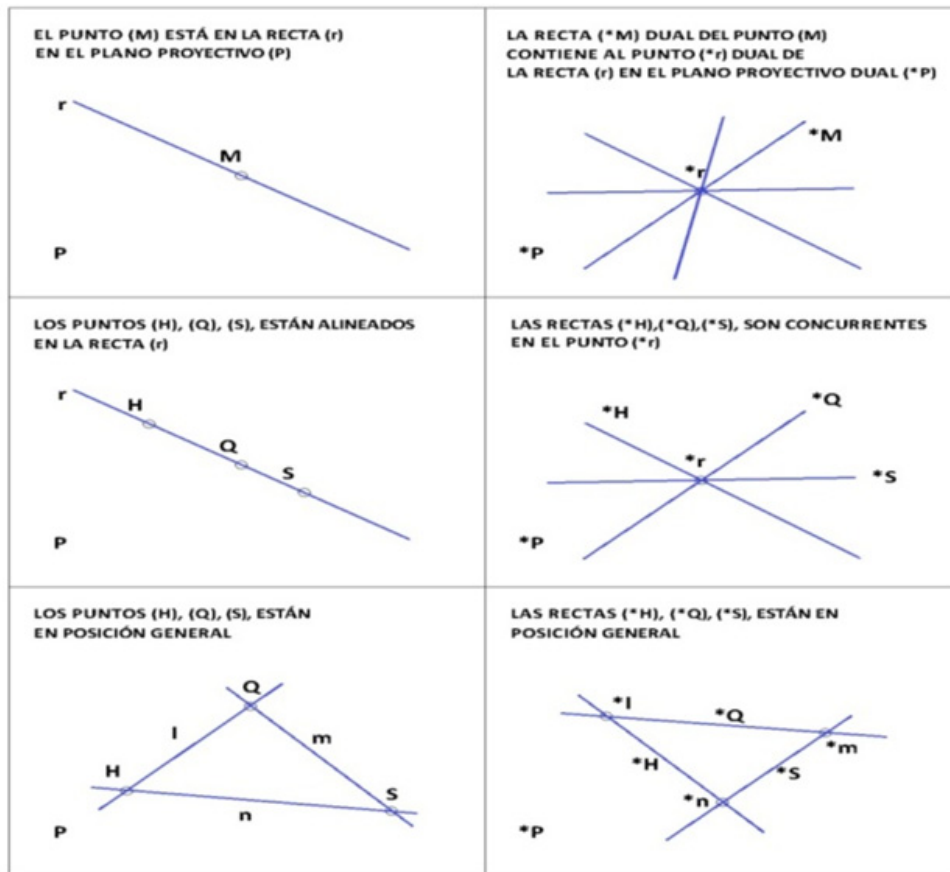


Figura 2. Esquema representativo de elementos de un espacio proyectivo y los elementos duales en el espacio proyectivo dual.

Una vez se conoce el diccionario entre variedades y variedades duales, se cumple el denominado Principio de dualidad, según el cual una proposición relativa a variedades proyectivas es cierta si y sólo si es cierta su dual. Este principio fue establecido inicialmente por Jean-Victor Poncelet, ligado a la noción de polaridad respecto de una cónica dada.²

Tal vez uno de los ejemplos más bellos de dualidad sea el denominado Teorema de Brianchon (Fig. 3 Dcha.) que es el enunciado dual del Teorema de Pascal. En efecto, utilizando la dualidad asociada a una cónica, Julien Brianchon (1785–1864)³ demostró lo siguiente: Suponemos que seis rectas distintas dadas ordenadamente son tangentes a una cónica regular. Entonces las rectas son los lados sucesivos de un hexágono cuyos vértices opuestos determinan tres rectas concurrentes.

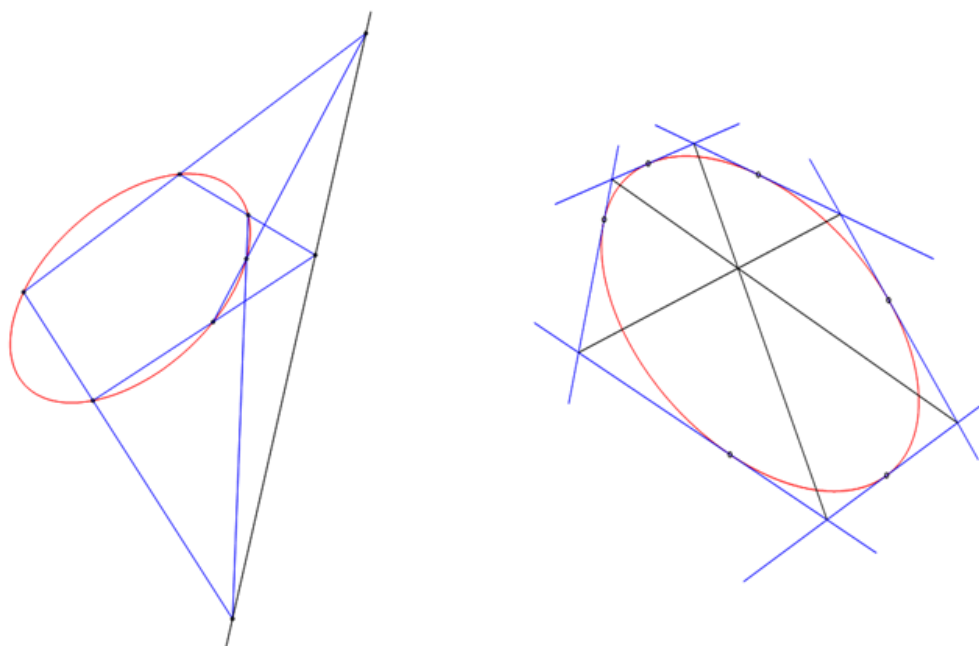


Figura 3. Representación del teorema de Pascal y su dual teorema de Brianchon.

Si tenemos en cuenta que las rectas tangentes a una cónica regular son duales de los puntos de la cónica tangencial asociada y si recordamos el teorema de Pascal, suponemos seis puntos distintos dados ordenadamente que están contenidos en una cónica regular. Entonces los puntos son los vértices sucesivos de un hexágono, cuyos lados opuestos se cortan en tres puntos alineados. (Fig. 3 Izda.)

La teoría de los polos y de las rectas polares se encontraba ya, con otras denominaciones en las obras de Desargues (*Oeuvres réunies et publiées par M. Poudra*. Paris 1864. t. I, p. 164, 186, 190 y ss.) y en las de La Hire (*Sections conicae*. Paris, 1685, I, 21-28; II, 23-30.). Conviene recordar que en los orígenes, se debe a Apolonio el célebre teorema que La Hire tomó como fundamento de su teoría de las cónicas y que enunció: “*Si por el punto de concurrencia de dos tangentes a una sección cónica se lleva una transversal que corte a la cónica en dos puntos y a la cuerda que une los puntos de contacto, en un tercer punto; ese tercer punto y el de intersección de las dos tangentes serán conjugados armónicos con relación a los dos primeros*”. (Fig. 4)

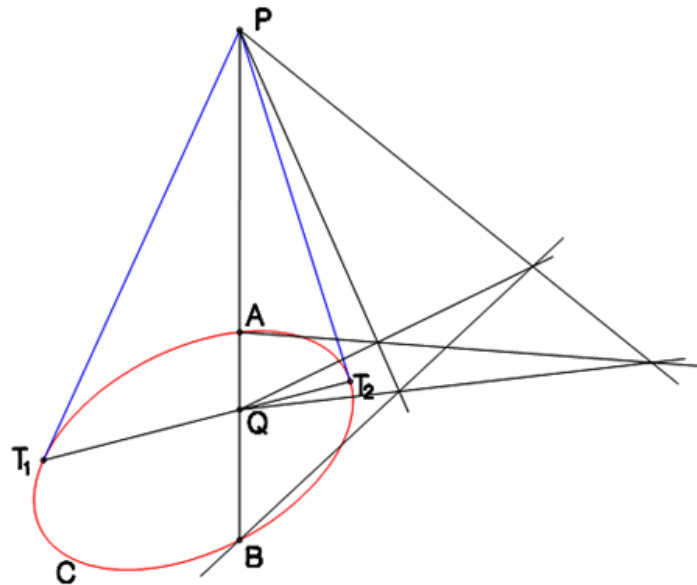


Figura 4. Representación del teorema enunciado donde se demuestra, con la construcción auxiliar de la derecha, que los puntos (P) de concurrencia de las tangentes a la cónica (C) en (T1) y (T2) y (Q), de intersección de la secante transversal (PB) con la cuerda de las tangencias (T1) y (T2), son conjugados armónicos de los puntos (A) y (B) de la cónica (C). La razón doble $[P, A, Q, B] = -1$

Poncelet había ya expuesto en el Capítulo II. Sección II. *Théorie Générale des Polaires Réciproques* de su *Traité des propriétés projectives...* los fundamentos, que aquí exponemos y que resultan útiles para la comprensión de la figuras recíprocas, origen de la Estática Gráfica.⁴ En particular los conceptos de polos y rectas polares en relación a curvas de segundo orden.

Por un punto (U) del plano de una curva (en el estudio que hemos representado, una elipse), que no esté situado sobre ella, se trazan dos secantes que cortan a la curva en (A), (C), (B) y (D). El cuadrángulo (ABCD) queda, pues, inscrito en la elipse. Los puntos (P), (Q) de intersección de los lados opuestos y (R), (S) de intersección de las tangentes a la elipse en los vértices opuestos, están situados sobre una misma recta (u). Si designamos como (V) y (W) a los puntos de intersección de la recta (u) respectivamente con (AC) y (BD), se encuentra que (V) está armónicamente separado de (U) por los puntos (A) y (C). En efecto, en el cuadrángulo (PBQD) los lados opuestos se cortan dos a dos respectivamente en (A) y (C), la diagonal (BD) pasa por el punto (U) y la diagonal (PQ) por (V). De la misma manera, los puntos (U) y (W) están armónicamente separados por (B) y (D).

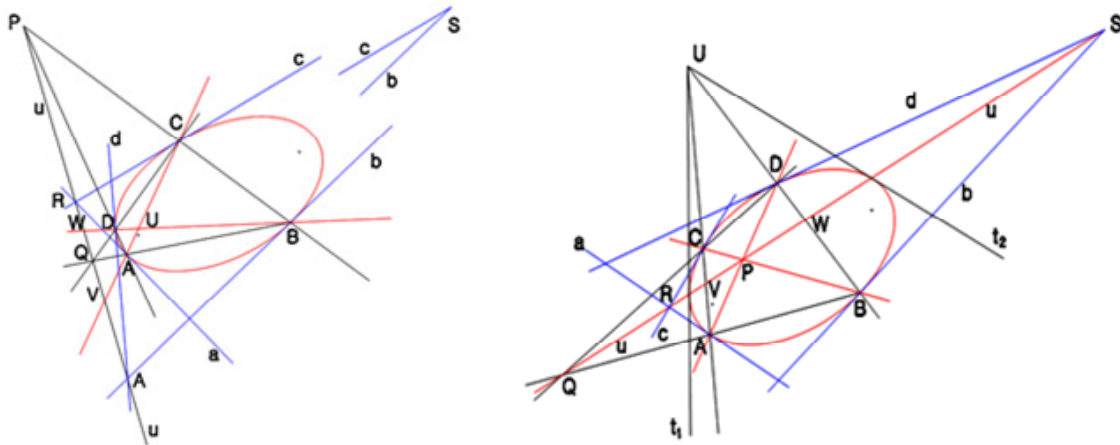


Figura 5. Representaciones de la construcción de la recta Polar de un punto respecto a una cónica. Cuando el punto (U) es interior a la cónica (en este caso una elipse) y cuando el punto (U) es exterior.

Se determina, entonces, la recta (u), haciendo pasar por (U) una secante (AC) y buscando sobre esta recta el punto (V) armónicamente separado de (U) por los puntos (A) y (C) de la curva que hay que unir con el punto (R) de intersección de las tangentes a la curva por los puntos (A) y (C) . Como la segunda secante pasa también por (U) , se tendrá siempre los siguientes puntos sobre la recta (u) ya determinada por la primera secante (AC) :

Los puntos de intersección (P) y (Q) de los lados opuestos del cuadrángulo (ABCD).

El punto de intersección (S) de las dos tangentes en (B) y en (D).

El punto (W) armónicamente separado de (U) por los puntos (B) y (D).

El punto (U) es el Polo de la recta (u) así determinada y viceversa la recta (u) es la recta Polar del punto (U).

Es de crucial importancia la obtención de el Polo de una recta respecto a una cónica y “recíprocamente”, la Recta Polar de un punto respecto a esa cónica, para el Cálculo del Núcleo Central de una Sección, como demostraremos a continuación.

Consideraciones sobre el Eje Neutro y el Núcleo Central de una sección sometida a Flexión Compuesta.

La posición de una fuerza normal a una sección, determina en ella un estado tensional que conocemos bien, por la Resistencia de Materiales y que viene expresado por:

$$\sigma = \frac{N}{S} + \frac{N \cdot e_y}{I_x} y + \frac{N \cdot e_x}{I_y} x = \frac{N}{S} \left[1 + \frac{e_y}{I_x} y + \frac{e_x}{I_y} x \right] = \frac{N}{S} \left[1 + \frac{e_y}{i_x^2} y + \frac{e_x}{i_y^2} x \right]$$

donde σ es la tensión normal en una sección de área S , originada por una carga axial N , actuando sobre la sección con excentricidades e_x y e_y , con Momentos de Inercia I_x e I_y respecto a los ejes X e Y , baricéntricos y con radios de giro i_x e i_y relativos a dichos ejes y va desde un valor de tensiones, uniforme en todos los puntos que la componen, hasta una variación de estas tensiones en cada punto, llegando a la situación de cambio de signo dentro de la propia sección, pudiéndose dar posiciones particulares de la carga que determinan en todo caso la construcción del núcleo central. Si analizamos el desplazamiento de la fuerza colocada sobre el baricentro de la sección y la desplazamos hacia cualquier lado, se comprueba que el eje neutro se mueve acompañando a la fuerza, y las tensiones cambiarán con el movimiento de ésta. En un determinado lugar de la aplicación de la carga las tensiones comienzan a cambiar de signo formándose diagramas que pasan de rectangulares a trapezoidales, triangulares y doblemente triangulares. Cuando el diagrama es exactamente un triángulo, el eje neutro se sitúa tangente a la sección, esa es la posición límite que determina el contorno del Núcleo Central de la sección, pudiéndose definir, pues, como el lugar geométrico de los puntos de la sección en los que al aplicar en ellos la carga, generan tensiones del mismo signo en toda la sección.

El Núcleo Central de una sección es la región geométrica de todos los puntos sobre los cuales se puede aplicar una carga axial N , de manera que los esfuerzos normales resultantes en toda la sección sean del mismo signo.

Resulta fundamental, pues, conocer la posición del Eje Neutro que originará tensiones de distinto signo a un lado y otro de sí mismo, en caso de cortar a la sección como sucedería con la recta ($m-n$) de la Figura 6.

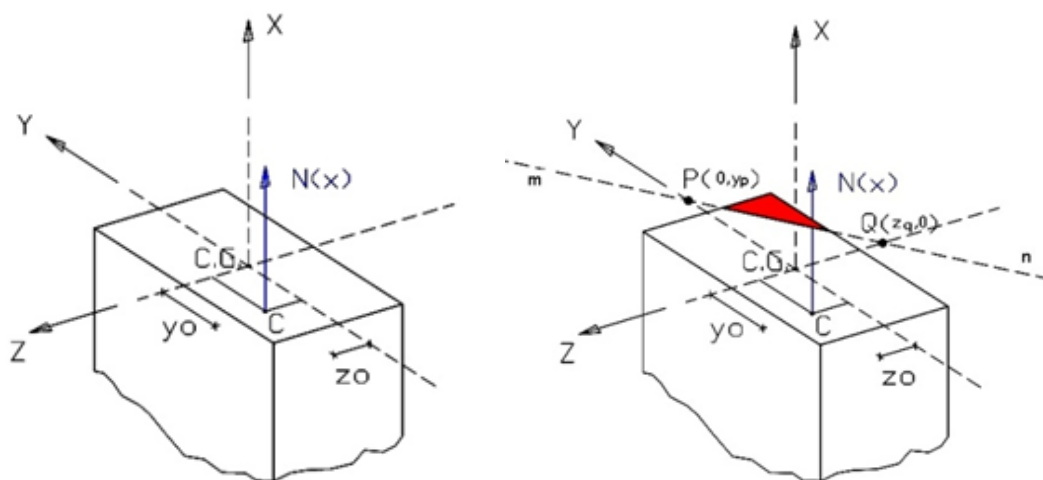


Figura 6. Ubicación del eje neutro ($m-n$) en una sección rectangular, solicitada por una carga axial, $N(x)$, excéntrica, que origina en ella flexión compuesta.

La particularidad de nuestra propuesta consiste en la elaboración de un Procedimiento exclusivamente grafostático para la determinación del Núcleo Central de cualquier sección, con el apoyo de los siguientes conceptos de la Mecánica, Resistencia de materiales y los de Polaridad respecto a una cónica de la Geometría Proyectiva:

- El Eje Neutro no pasa por el Centro de Gravedad de la sección.
- El Eje Neutro interseca los cuadrantes (Y-Z) donde no se ubica el punto (C) sollicitación, pudiendo ser interior, tangente o exterior a la sección transversal.
- Su posición depende del esfuerzo predominante en la tensión normal (σ_x). Si predomina el esfuerzo axial, el Eje Neutro tiende a ubicarse fuera de la sección, mientras que el predominio del momento flector, lo sitúa en el interior.
- Cuando el Eje Neutro es exterior o tangente a la sección, las tensiones normales en todos los puntos de la misma son del mismo signo, o todas tracciones o todas compresiones.
- El Núcleo Central es un polígono convexo que tiene tantos lados como vértices tiene la sección transversal y su contorno es el lugar geométrico de los puntos (C) sollicitación, para que sus Ejes Neutros asociados sean tangentes a dicha sección.

Los vértices del contorno del Núcleo Central, los obtendremos como los anti-polos de las rectas tangentes al perímetro de la sección, respecto a la Elipse Central de Inercia de la sección transversal y como comprobaremos, los conceptos de la Geometría Proyectiva, (en tiempos de Culmann, Geometría de Posición), de Dualidad y Polaridad nos permiten afirmar que los lados (a, b,d y e) del Núcleo Central de la sección, son las rectas polares de los vértices (A,B,D y E) de dicha sección respecto a la Elipse Central de Inercia, cuyos semiejes son los Radios de Giro de la sección $i_z = (I_z / A)^{1/2}$ e $i_y = (I_y / A)^{1/2}$.

En los esquemas de la Fig. 7, se ha representado una sección rectangular en perspectiva, grafiándose la Elipse Central de Inercia y dibujando los polos de las rectas que delimitan el contorno de la sección.

Cuando la carga axil N_x actúa en la dirección X, perpendicular al plano de la sección YZ, sobre el vértice del Núcleo Central (intersección de d-e) la Fibra Neutra (m-n) se sitúa sobre el lado AB del rectángulo.

Se origina un Diagrama de Tensiones triangular, estando toda la sección traccionada, al tratarse de una tracción.

Las posiciones mostradas en las otras tres figuras no muestran más que la misma circunstancia de aplicación del axil N sobre los restantes vértices del rombo que constituye el Núcleo Central.

Hacemos notar que la doble simetría de una sección rectangular determina la nulidad del producto de inercia J_{xy} .

Por otra parte los polos, respecto a la Elipse de Inercia, de las rectas que constituyen el perímetro de la sección rectangular, coinciden con los antipolos de las rectas que contienen a los lados simétricos, por lo que basta con determinar aquellos para conseguir la correcta geometría del Núcleo Central, aunque se trate de puntos homólogos en una simetría radial respecto al baricentro de la sección, que naturalmente coincide con el centro de la Elipse Central de Inercia.

La nomenclatura empleada en las figuras en las que se escribe J_x , J_y , J_{xy} en lugar de las I_x , I_y , I_{xy} , para la expresión de Momentos y Productos de Inercia, no obedece a más motivo que el del intento de eliminar la posible confusión que la letra mayúscula (I) pudiera originar.

Se emplean ambas formas de escritura indistintamente.

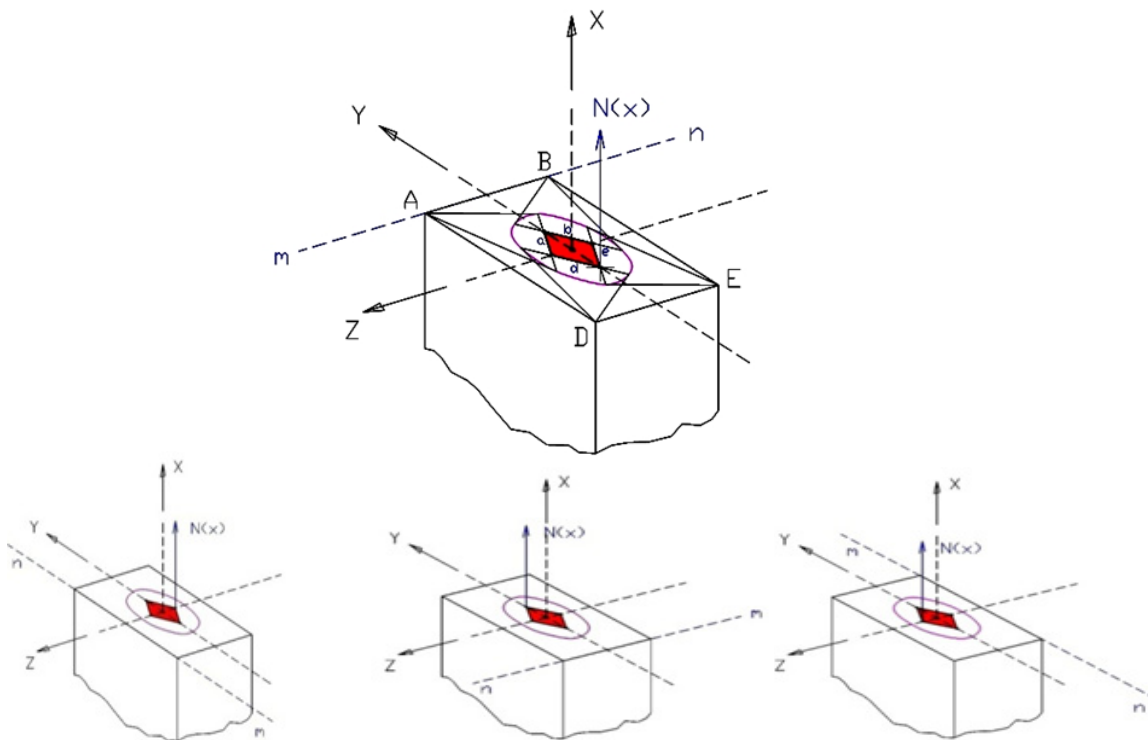


Figura 7. Sección rectangular ABCD sometida a una carga excéntrica N , situada en los vértices del Núcleo Central, obtenidos como los polos, recíprocos de las rectas polares m - n , respecto a la Elipse Central de Inercia de la sección.

Algunos ejemplos del cálculo grafostático propuesto para determinar el Núcleo Central de diferentes secciones.

Mostraremos a continuación los cálculos realizados por procedimientos grafostáticos, para determinar:

- El baricentro de las secciones.
- Los Momentos de Inercia respecto a dos Ejes perpendiculares baricéntricos, J_x y J_y que, naturalmente será Ejes Principales de Inercia si al menos uno de ellos es Eje de Simetría, con lo que el Producto de Inercia $J_{xy} = 0$. Si la sección carece de ejes de simetría, calcularemos el Producto de inercia J_{xy} .
- La Elipse Central de Inercia de la Sección. Sus semiejes son los Radios de Giro deducidos de los Momentos de Inercia.
- Con ayuda del Círculo de Mohr para Momentos de Inercia, determinamos las direcciones principales (Ejes Principales de Inercia) en caso de ausencia de simetría.
- La Elipse Central de Inercia, que es la Cónica, respecto a la que determinamos los polos recíprocos de las rectas que constituyen el perímetro de la sección, si éste es recto o las rectas tangentes en caso de cualquier curvatura. A continuación se determinan los anti-polos de estos puntos, que no son más que los puntos simétricos (mediante simetría radial) respecto al Centro de Gravedad de la Sección, que, naturalmente, coincide con el centro de la Elipse Principal de Inercia.

Para todos los ejemplos que mostramos, hemos realizado los cálculos grafostáticos con la ayuda de los programas de dibujo asistido por ordenador, (ATOCAD) con cuya precisión, se puede comprobar la absoluta correspondencia con los valores calculados mediante procedimientos analíticos, en los casos en que éstos son conocidos o fácilmente deducibles.

En algunos casos la determinación analítica de los momentos y productos de inercia supone una cierta complejidad, mientras que la Estática Gráfica, produce siempre resultados claramente válidos con la misma sencilla metodología.

En la Fig. 8. se ha dibujado el cálculo del Centro de Gravedad de una sección semi-circular, obtenido grafostáticamente como la intersección de los Ejes Centrales de dos Sistemas de Vectores deslizantes paralelos, representando cada vector un fragmento de área en que se ha dividido la sección.

Naturalmente, por su simetría respecto al Eje de ordenadas, éste coincide con el Eje Central del posible Sistema de Vectores gravitando paralelamente a dicho eje.

La Fig. 9. muestra algunos procedimientos geométricos para la determinación del C.D.G. de figuras elementales, como el trapecio o los triángulos, que pueden servir-

nos de apoyo en la determinación de las rectas soporte de los vectores de nuestro Sistema de vectores-áreas.

Núcleo Central de un Semicírculo.

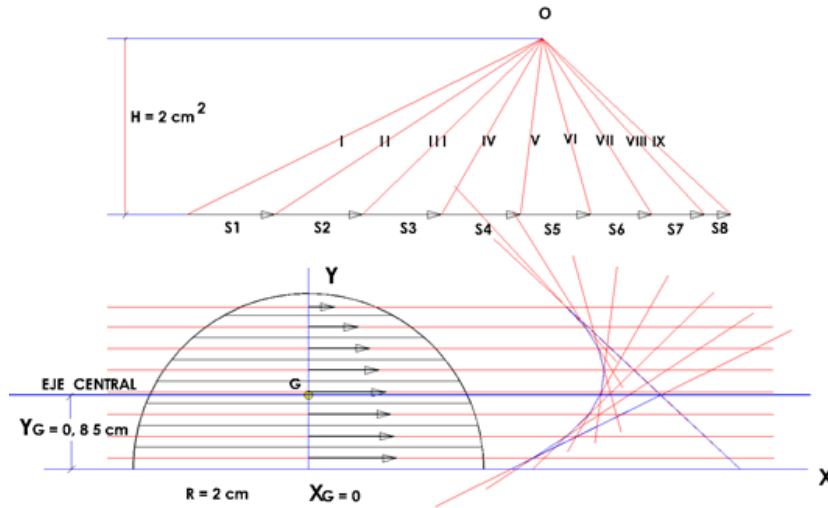


Figura 8. Determinación grafostática del Centro de Gravedad de la superficie de un semicírculo con centro en el origen de coordenadas y radio $R = 2$ cm.

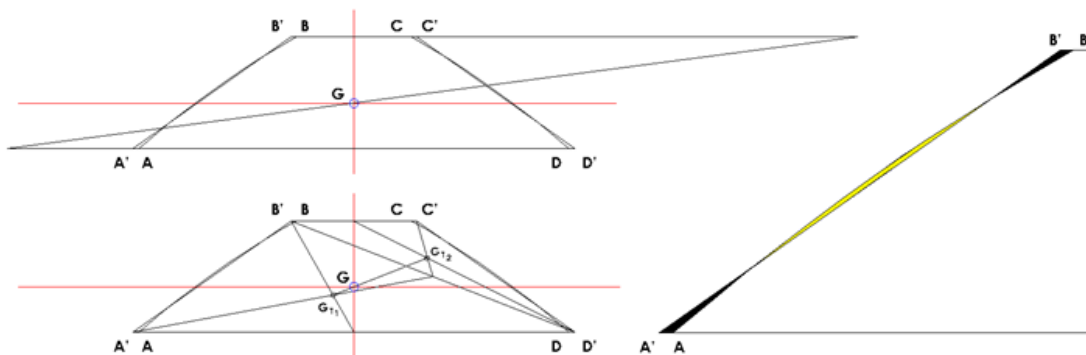


Figura 9. Cálculo de los C.D.G. de los trapecios “rebanadas” (acortados para simplificar el dibujo) que dividen la superficie total del semicírculo. Aproximación utilizada para convertir el trapecio curvilíneo ABCD en otro rectilíneo A'B'C'D' mediante una secante A'B' de la curva AB que iguala la superficie en amarillo con la de los triángulos en negro.

En la Fig. 10. se ha resuelto en la parte izquierda el cálculo de los C.D.G. de cada una de las rebanadas verticales en que se ha dividido la sección, consideradas como trapecoides, con uno de los lados curvilíneos y con las aproximaciones que acabamos de indicar, procediéndose al cálculo del Momento de Inercia de la sección respecto al Eje Y, baricéntrico, mediante la metodología que la Estática Gráfica de

Culmann o Mohr preconizaron desde hace un siglo y medio.

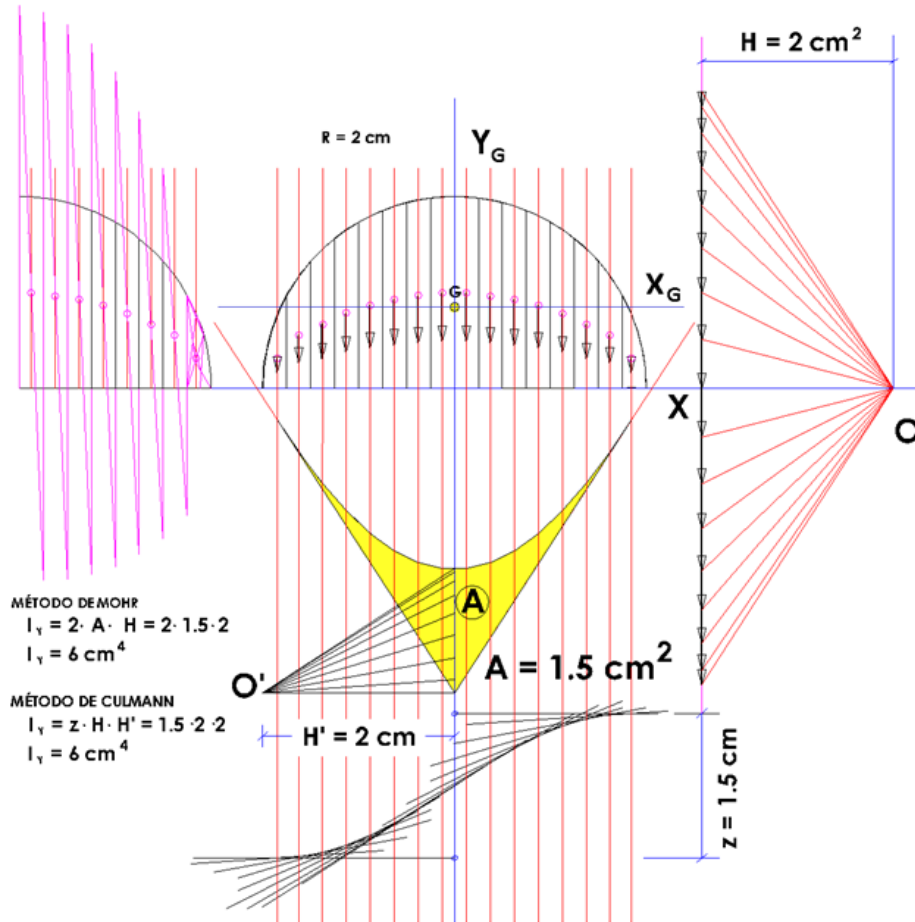


Figura 10. Cálculo del Momento de Inercia de un semicírculo de radio 2 cm respecto a su Eje de Simetría, mediante el método Culmann y el método de Mohr del Área encerrada entre el funicular y el Eje de Momentos.

En la Fig. 11. se ha procedido de manera análoga para encontrar el Momento de Inercia de la sección respecto al Eje X, teniendo en cuenta, como en este caso, el eje X no es baricéntrico, es más útil calcular grafostáticamente el Momento I_{X_G} , aunque siempre se puede recurrir a la aplicación inmediata del Teorema de Steiner de los ejes paralelos.

En este caso concreto, el conocimiento de la Mecánica ya nos indica, sin más cálculos, que el Momento $I_x = I_y$ por tratarse de las mismas masas elementales y sus respectivas distancias.

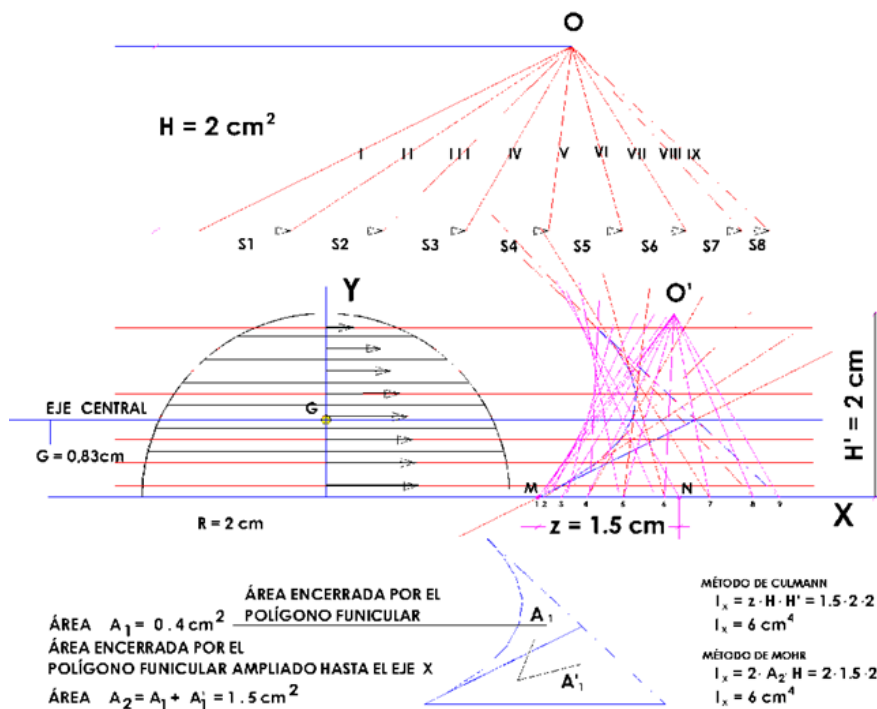


Figura 11. Cálculo del Momento de Inercia de un semicírculo de radio 2 cm, respecto a su diámetro, situado en el eje X. El Momento Principal de Inercia, respecto al Eje paralelo al anterior, que pasa por el C.D.G. de la sección es de inmediata deducción aplicando el Teorema de Steiner de los Ejes paralelos.

La Fig. 12. muestra la geometría de la sección y la Elipse Central de Inercia, cuyos semiejes son los Radios de Giro derivados de los Momentos de Inercia ya calculados.

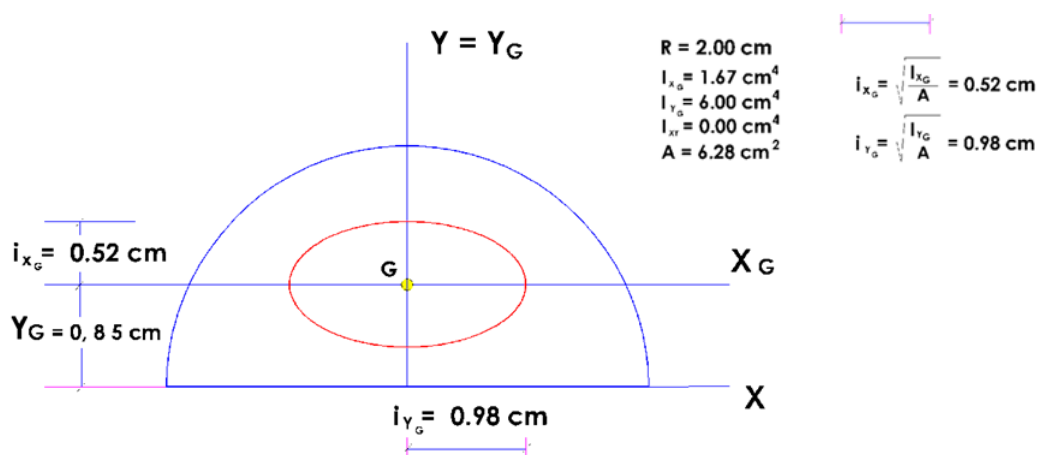


Figura 12. Cálculo de la Elipse central de Inercia de un semicírculo de radio 2 cm. Los semiejes de la Elipse coinciden con los Radios de Giro, i_{x_G} e i_{y_G} , cuyos cuadrados son $i_{x_G}^2 = I_{x_G}/A$ e $i_{y_G}^2 = I_{y_G}/A$.

Hemos elegido un semicírculo por no tener doble simetría y por no contar con un contorno totalmente recto. Hemos buscado los Polos de las rectas tangentes al contorno de la sección ($T_i \rightarrow N_i$) para tangentes cualesquiera a la circunferencia (Fig. 13) Son especialmente significativas T_1 , T_2 y T_3 . Los polos N_1 y N_2 marcan la transición de la zona elíptica superior a la zona rectilínea inferior que converge en N_{1-2} del Núcleo Central, punto que es el polo de la recta 1-2, Diámetro del semicírculo. Por otra parte, el punto N_3 , es el polo de la recta T_3 , tangente horizontal al semicírculo.

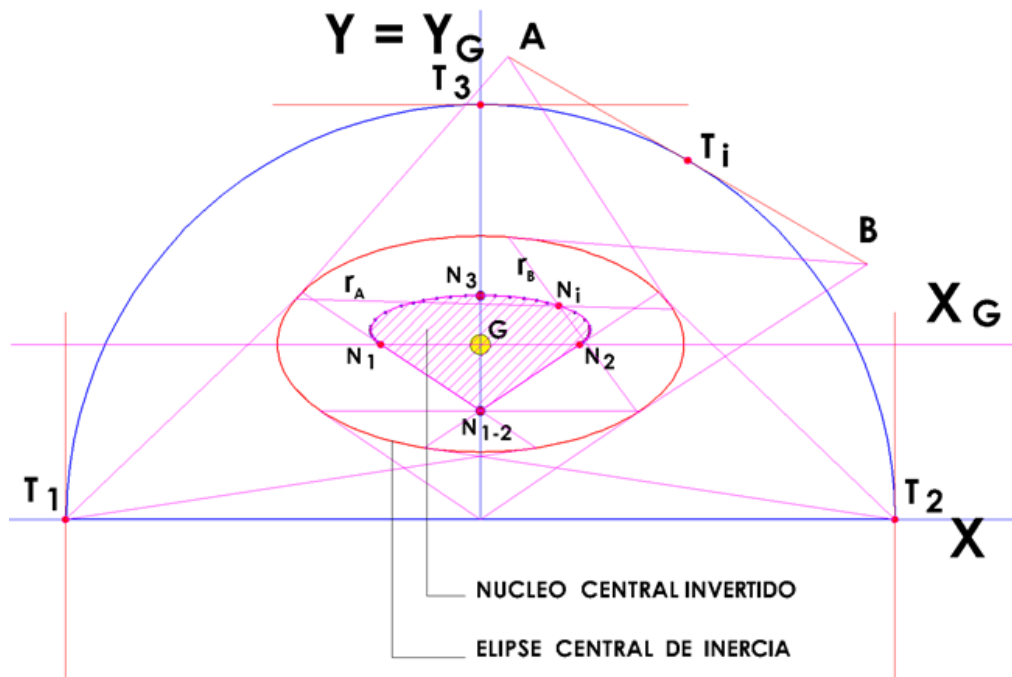


Figura 13. Detalles del trazado de la tangente T_i y el método grafostático para encontrar el polo recíproco de la recta $AB = T_i$. También se muestran las Rectas polares N_1-N_{1-2} y $N_{1-2} - N_2$, elementos duales o recíprocos de los Polos 1 y 2, extremos del diámetro del semicírculo.

Las relaciones de reciprocidad estudiadas en la Geometría de Posición y puestas en práctica por Culmann, nos llevan al planteamiento de calcular el Polo y la recta Polar de forma recíproca. Por ejemplo en la Figura 14. hemos determinado N_2 como Polo de la tangente T_2 , trazada por el extremo derecho del diámetro del semicírculo y hemos calculado la recta N_2N_{2-1} como recta polar del polo 2, extremo derecho de dicho diámetro y la recta N_1N_{2-1} como recta polar de su extremo izquierdo. Hemos hecho girar la tangente T_3 desde la horizontal superior, pasando por T_i , hasta la vertical T_2 , consiguiendo tantos polos N_3, N_i, \dots, N_2 como tangentes queramos trazar. Aprovechando la rapidez del Dibujo asistido por ordenador,

hemos trazado tangentes de 10° en 10° para la parte superior de la elipse del Núcleo y de 5° en 5° para la zona de menor radio de curvatura.

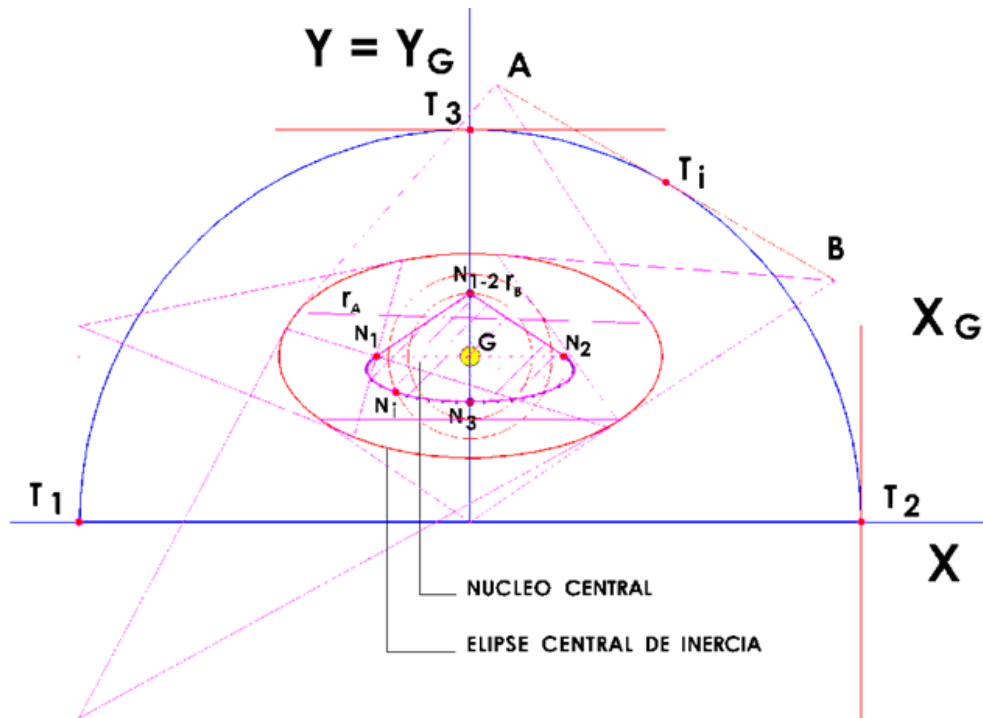


Figura 14. Cálculo del Núcleo Central de de la sección semicircular de radio 2cm. Los puntos del Núcleo han sido obtenidos mediante el cálculo de los Polos recíprocos, respecto a la Elipse Central de inercia calculada previamente, de las rectas tangentes al perímetro de la superficie. Cada recta tangente tiene un polo recíproco respecto a la elipse. Su simétrico respecto al C.D.G. (Centro de la Elipse), antipolo, es un punto del Núcleo Central.

Núcleo Central de una sección trapezoidal irregular

Por lo expresado anteriormente se podría colegir que la ausencia de ejes de simetría, complica los cálculos de la geometría del Núcleo Central que aquí se trata.

Para demostrar la simplicidad de nuestra metodología, hemos considerado conveniente mostrar el procedimiento para una sección irregular carente de ejes de simetría, con lo que quedaría totalmente puesto de manifiesto.

Es el caso de una sección trapezoidal con los cuatro lados y ángulos desiguales, como la que se muestra en la Fig. 15. en la que hemos determinado el Centro de Gravedad y los Momentos de Inercia J_x y J_y y el Producto de Inercia J_{xy} , por los procedimientos de doble integración gráfica, debidos a Karl Culmann. En el caso del cálculo del Producto de Inercia, J_{xy} , los segmentos intersección de los lados del polígono funicular con el eje baricéntrico X , se convierten a continuación en un

nuevo sistema de vectores (segmentos orientados) para los que se vuelve a repetir el proceso inicial, ahora orientados según la dirección ortogonal Y.

La repetición del proceso, tal y como indicamos determina el Producto J_{xy} como el producto de las sucesivas Distancias Polares por la distancia extrema entre las intersecciones del segundo funicular con el eje Y (z') quedando finalmente $J_{xy} = H \cdot H'' \cdot z'$.

En la Fig. 16. hemos utilizado el Círculo de Mohr para Momentos de Inercia en la determinación de las direcciones de los Ejes Principales de Inercia X^* e Y^* , que señalan, a su vez, los ejes de la Elipse Central de Inercia.

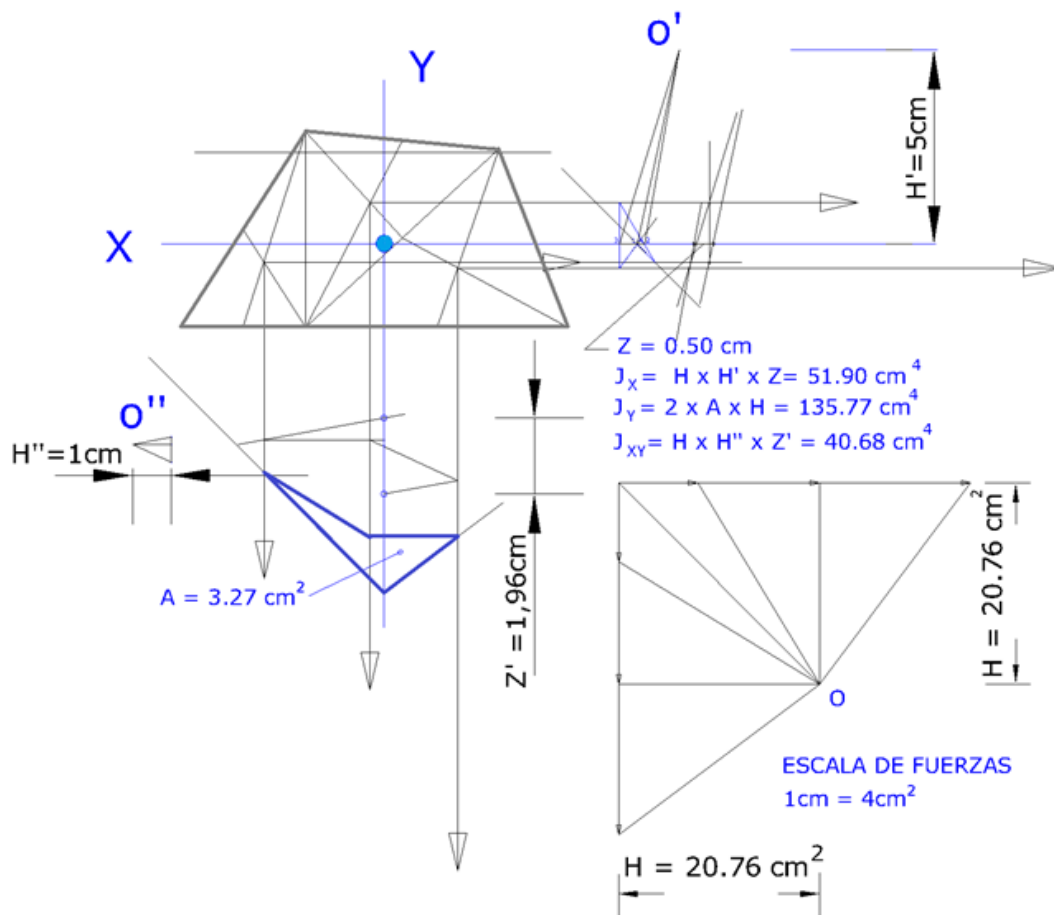


Figura 15. Cálculo de los Momentos y el Producto de Inercia de la sección cuyo contorno es un cuadrilátero cualquiera, sin ejes de simetría..

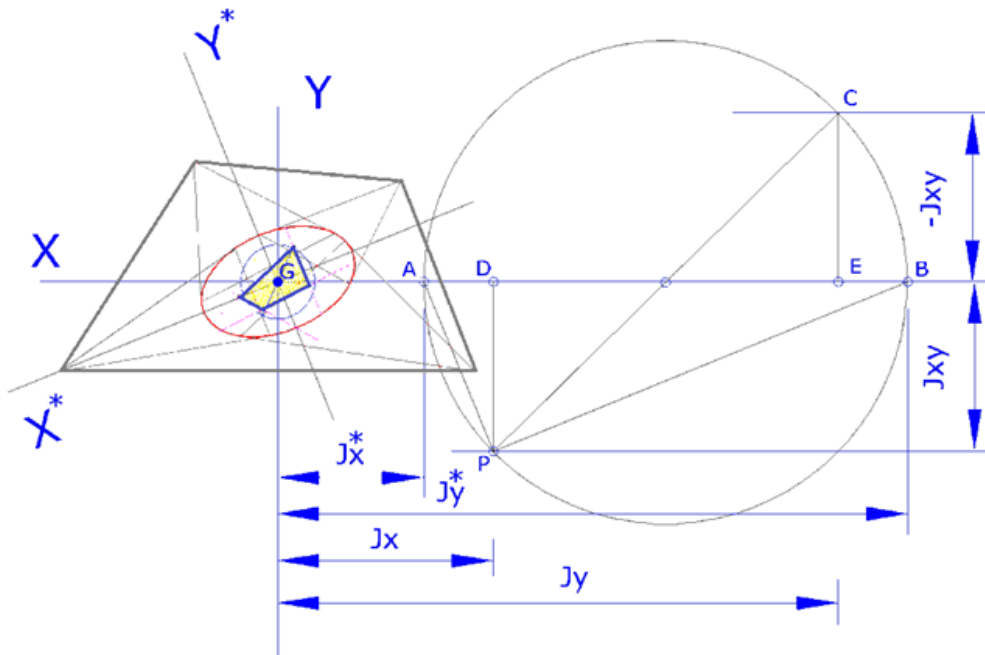


Figura 16. Cálculo de los Ejes y Momentos Principales de Inercia.

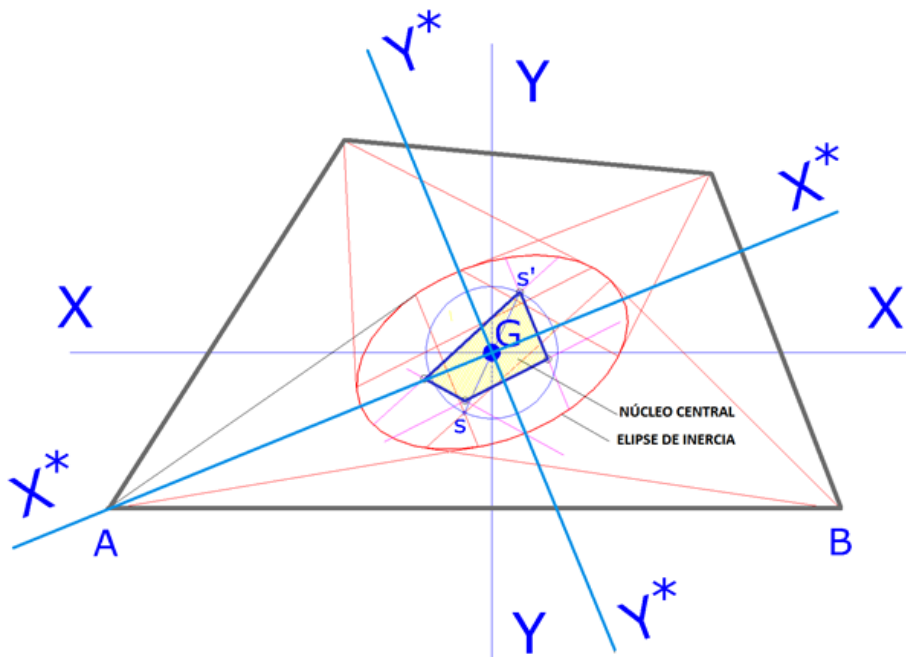


Figura 17. Dibujo definitivo del Núcleo Central de la sección. Mediante los Polos de las rectas que conforman el perímetro y sus simétricos anti-polos. La recta AB del contorno es polar de su polo S . Su anti-polo S' sería el punto del Núcleo Central donde aplicada una carga normal, provocaría un diagrama tensional triangular con Eje Neutro en AB .

La Figura 16. muestra el trazado del Circulo de Mohr para esta sección. Sobre el Eje X y a partir del baricentro G , grafostáticamente ya calculado, se llevan los segmentos GD y GE que representan (a la escala que se determine para los Momentos de Inercia) los Momentos de Inercia J_x y J_y respectivamente. En nuestro caso hemos dibujado a la escala $1\text{cm} : 10\text{ cm}^4$. Por los puntos E y D se trazan perpendiculares al eje X, llevando el valor de $-J_{xy}$ hacia arriba y de J_{xy} hacia abajo, obteniendose los puntos P y C. Uniendo P con C se tiene el diámetro del Circulo de Mohr buscado, siendo P su Foco. El Círculo corta al Eje X en los puntos A y B . Los segmentos PA y PB señalan las direcciones de los Ejes Principales de Inercia, puesto que estos ejes determinarían Productos de Inercia Nulos, al convertirse los puntos P y C, en los A y B.

Conclusiones

La Geometría de Posición (actual Geometría Proyectiva) proporciona una valiosa aplicación a la Estática Gráfica para el cálculo exclusivamente gráfico de la silueta del Núcleo Central de una Sección. El concepto de Polaridad entre las rectas contorno y sus polos respecto a la cónica Elipse Central de Inercia de la sección es determinante. Los cálculos y dibujos que hemos realizado con AUTOCAD para esta comunicación, revelan la sencillez y precisión del proceso grafostático.

Referencias

- [1] Carroll, Lewis. Alicia anotada: Alicia en el país de las maravillas. A través del espejo. edición de Martin Gardner. Traducción de Francisco Torres Oliver. Colección Grandes Libros. Ediciones Akal: Madrid, 1998.
- [2] Poncelet, Jean Victor. *Traité des propriétés projectives des figures*. Bachelier, libraire: Paris, 1822.
- [3] Brianchon, Charles Julien. *Mémoire sur les surfaces courbes du second degré*. Journal de l'Ecole Polytechnique. Avril 1806: Paris, 1806.
- [4] Culmann, Karl. *Die graphische statik*. Von Meyer & Zeller: Zürich, 1866.

Diseño de Vigas en “U” de Hormigón con Fibras mediante la heurística SA con criterios económicos

José Vicente Martí Albiñana, jvmartia@upv.es

Víctor Yepes Piqueras, vyepesp@upv.es

Julián Alcalá González, jualgon@upv.es

Tatiana García Segura, tagarse@cam.upv.es

Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Resumen

Este artículo se ocupa de la optimización económica de los puentes de carreteras formados por tableros constituidos por una losa de hormigón ejecutada in situ y dos vigas artesa de hormigón reforzado con fibras metálicas pretensadas prefabricadas. Se demuestra la eficacia de la optimización heurística por el método del recocido simulado “simulated annealing” (SA). Los cálculos de las tensiones y de sus envolventes, son programados en lenguaje fortran directamente por los autores. Los algoritmos de optimización heurística se aplican a un tablero de 35 m de luz y 12 m de ancho. Los parámetros que definen la forma de la sección de la viga se adaptan prácticamente a cualquier tipo de molde de una instalación de prefabricados. El ejemplo que se analiza consta de 60 variables discretas. El módulo de la evaluación incluye los estados límite último y de servicio que se aplican comúnmente para estas estructuras: flexión, cortante, torsor, fisuración, flechas, etc. El uso del algoritmo del SA requiere previamente su calibración. La heurística se procesa 9 veces, obteniéndose información estadística sobre el valor mínimo, el medio y las desviaciones. El mejor resultado obtenido tiene un coste de 109.127 €. Finalmente, entre las principales conclusiones de este estudio, destaca que económicamente es factible el uso de fibras de acero en el hormigón estructural y que las soluciones y los tiempos de proceso computacional son tales, que este método se puede aplicar de un modo práctico a casos reales.

Palabras Clave: *Optimización, heurística, vigas artesa, fibras, puentes, Simulated Annealing*

Introducción

La inteligencia artificial, desde sus comienzos hacia mediados de 1950, se ha ido introduciendo en distintos campos tecnológicos, tales como la programación automatizada, la resolución de problemas restringidos, la investigación operacional, la organización y planificación, la robótica, etc. En su aplicación al diseño de estructuras, se selecciona un grupo de variables conforme a unos condicionantes estructurales de contorno. Las variables del diseño incluyen entre otros, la tipología de los distintos materiales, las dimensiones de las secciones transversales y los refuerzos de acero. A pesar del alto potencial y los buenos resultados obtenidos con la inteligencia artificial, en el presente, el diseño económico de estructuras de hormigón, está muy condicionado por la experiencia de los ingenieros calculistas. En el diseño tradicional de estructuras de hormigón se tiene como objetivo la obtención de estructuras seguras que soporten las cargas y las deformaciones, así como los condicionantes de durabilidad a lo largo de su vida útil [1]. Hay que añadir que, tradicionalmente los diseños se han basado en la previa experiencia del ingeniero proyectista, que diseña y predimensiona las distintas partes y secciones de la estructura, para a continuación, mediante la utilización de programas informáticos comprobar la bonanza del diseño inicial, y ajustar éste en los puntos críticos que presentan. Si las dimensiones geométricas o la resistencia de los materiales son insuficientes, la estructura se redefine sobre una base del ensayo de prueba y error. Tal proceso conduce a diseños seguros, pero en cambio, la economía de las estructuras de hormigón queda muy condicionada a la experiencia del diseñador estructural.

Los métodos heurísticos de optimización pretenden minimizar una función objetivo, que en este caso es el coste de la estructura. Su aplicación al hormigón ha sido muy reducida comparada con las desarrolladas para las estructuras de acero [2]. De un modo general, los métodos de optimización estructural se pueden clasificar en dos amplios grupos: métodos exactos y métodos heurísticos. Los métodos exactos se corresponden con el sistema tradicional. Se basan en el cálculo de soluciones óptimas siguiendo las técnicas iterativas de la programación lineal [3.4]. El segundo grupo principal es el de los métodos heurísticos, cuyo reciente desarrollo va ligado a la evolución de los procedimientos de la inteligencia artificial. Este grupo incluye un amplio número de algoritmos de búsqueda [5-8], tales como algoritmos genéticos (GA), cristalización simulada (SA), aceptación por umbrales (TA), búsqueda tabú (TS), colonias de hormigas (ACO), etc. Dichos métodos se han aplicado con éxito en áreas diferentes de la ingeniería estructural [9]. Se basan en algoritmos simples, pero que requieren un gran esfuerzo computacional al incluir un número elevado de iteraciones en las cuales se evalúa la función objetivo y se comprueban las restricciones estructurales.

Descripción de la estructura

Las estructuras objeto de este trabajo son los puentes de carreteras con vigas prefabricadas de hormigón pretensado. Ocupan alrededor del 50% de todos los puentes que se construyen en la actualidad. En los países más desarrollados de Europa y en los Estados Unidos, la mayor parte de ellos están contruidos con vigas prefabricadas pretensadas sobre las que se ejecutan losas in situ. Esta tipología de puente se corresponde con la del más largo del mundo que se encuentra en Estados Unidos, y tiene 38.4 kilómetros de largo (“Lake Pontchartrain Causeway”, 1956). El Puente Vasco de Gama en Lisboa, es el puente más largo de Europa y uno de los más largos del mundo, con sus más de diecisiete kilómetros de largo.

En la actualidad, el mejor conocimiento del comportamiento de los hormigones no convencionales, y su inclusión en distintos anejos de la actual instrucción EHE[10], permite considerarlos como otro material estructural disponible para la construcción de estructuras; sin embargo, su introducción en este campo de aplicación sigue siendo lenta. Para poder avanzar en el uso de estos hormigones, es necesario profundizar en el conocimiento del comportamiento mecánico en estas estructuras. Los hormigones no convencionales permiten ampliar el horizonte de investigación en aspectos de sostenibilidad; al aumentar las prestaciones y durabilidad del hormigón convencional, de forma que el coste de fabricación y puesta en obra no sea el único factor determinante en su elección.

La presente comunicación se centra en el diseño automatizado de puentes, de vigas artesa de HP reforzadas con fibras de acero prefabricadas, empleados como pasos superiores sobre otras vías de comunicación. Está basada en la tesis doctoral del primer autor [11]. La luz del vano es la habitual de 35 m. Estos puentes consisten en vigas de HP con forma de “U” con losa superior colaborante (ver Fig.1 y Fig. 2) y un tablero de hormigón, parcialmente prefabricado o construido in situ. Esta tipología cuenta a su favor, entre otras, con las ventajas derivadas de la prefabricación como son la construcción industrializada, los moldes reutilizables, los plazos de ejecución en obra reducidos y la baja interferencia con el tráfico inferior. La solución de la viga en “U” permite eliminar completamente los poco agraciados cabezales sobre pila de los tableros de viga en doble T. Las dos vigas son de hormigón autocompactable reforzado con fibras de acero, que integran en la parte superior una losa de HA para el tráfico de vehículos de 12 m de anchura (Fig. 2). El método para realizar la optimización se ha basado en el cálculo del coste de cada una de las soluciones evaluadas, en función de las variables geométricas, los materiales y los refuerzos activo y pasivo. A continuación se ha implementado un módulo que evalúa todos los estados límites relevantes, y posteriormente se ha desarrollado, específicamente para este trabajo, un algoritmo recocido simulado (SA) capaz de encontrar soluciones optimizadas en coste. El artículo, tras realizar el planteamiento del

problema de optimización, define el algoritmo citado y presenta los resultados obtenidos, recogiendo las principales conclusiones.

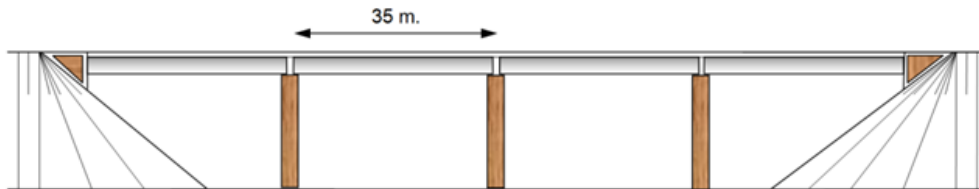


Figura 1 Perfil longitudinal del puente

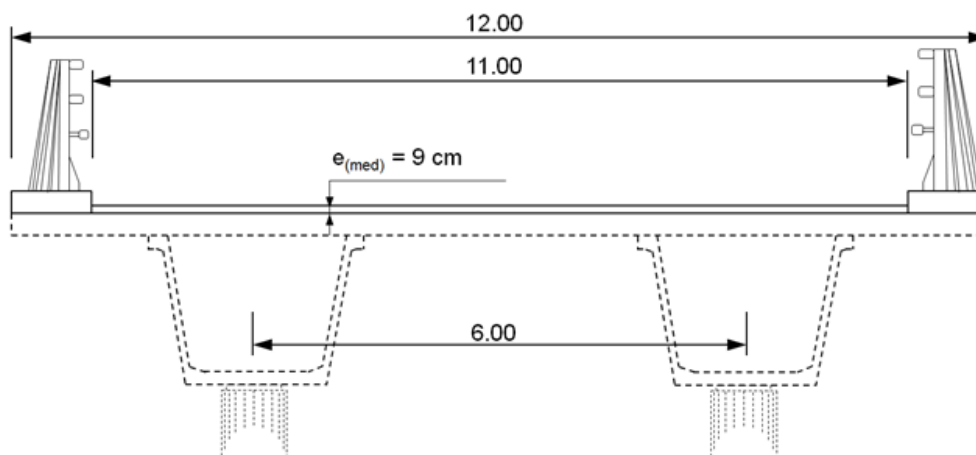


Figura 2 Sección transversal del puente

Aplicación del recocido simulado (SA) al proceso de optimización

La optimización económica de la estructura se ocupa de la minimización de la función objetivo F de la expresión (1), satisfaciendo también las restricciones formuladas en la expresión (2).

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^r p_i \cdot m_i(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad (1)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (2)$$

$$x_i \in (d_{i1}, d_{i2}, \dots, d_{iq_i}) \quad (3)$$

Los valores x_1, x_2, \dots, x_n son las variables de diseño del problema, que pueden tomar uno de los valores discretos indicados en la expresión (3). Obsérvese que la función objetivo en la expresión (1) es la suma de los precios unitarios multiplicados por las mediciones de las unidades de obra (hormigón, acero, encofrado, transporte, colocación, etc.). La expresión (2) indica las restricciones geométricas y de constructivi-

lidad, así como todos los estados últimos y de servicio que la estructura ha de cumplir. Las soluciones que satisfacen las restricciones en la expresión (2) se denominan factibles, y las que no, soluciones no factibles. Se distinguen dos procesos: la construcción de la viga pretensada en planta, y la de la losa de hormigón en la obra. Se aplican precios a los aceros –activos, pasivos y fibras-, hormigones y encofrados, que incluyen precio de los materiales, mano de obra y costes indirectos. Además, se consideran coeficientes correctores en la manipulación de los distintos diámetros del acero. Los precios unitarios básicos considerados se dan en la tabla 1.

Tabla 1 Precios unitarios básicos

<i>Descripción</i>	<i>Precio unitario en viga (€)</i>	<i>Precio unitario en losa (€)</i>
Kilogramo del acero pasivo (B-500-S)	2.63	1.40
Kilogramo del acero activo (Y-1860-S7)	3.38	NA
m de molde en viga	75.11	NA
m ² de encofrado en losa	NA	30.00
m ³ de hormigón HA-25	NA	64.99
m ³ de hormigón HA-30	NA	69.95
m ³ de hormigón HA-35	NA	74.03
m ³ de hormigón HA-40	NA	79.12
m ³ de hormigón HP-35	122.25	NA
m ³ de hormigón HP-40	133.40	NA
m ³ de hormigón HP-45	142.15	NA
m ³ de hormigón HP-50	152.89	NA
Kilogramo de fibras de acero	1.00	NA

El método de búsqueda de soluciones aplicado en este trabajo es el del recocido simulado -simulated annealing (SA)-, que fue propuesto originalmente por Kirkpatrick et al. [12] para el diseño de circuitos electrónicos. “Annealing”, en castellano “recocido”, es el proceso químico de calentar y enfriar un material de manera controlada. Cuando un metal se calienta por encima de su punto de fundición sus propiedades cuando se enfría dependerán, en gran medida, del proceso de enfriamiento. En el punto de fundición una gran cantidad de energía está presente en el material las moléculas se podrán mover libremente, si se reduce la temperatura se reducirá la energía en el sistema y simultáneamente los movimientos del material. Si el metal se enfría lentamente se formarán cristales cuya disposición es la de energía mínima. Si se enfría demasiado rápido, las moléculas pueden llegar a estados meta-estables, sin alcanzar configuraciones adecuadas. El algoritmo comienza con una solución generada aleatoriamente. Esta solución se comprueba bajo las restricciones estructurales, y si es factible se toma como una solución inicial con una alta temperatura. La solución de trabajo inicial es cambiada por un movimiento al azar pequeño de los valores de las variables. La nueva solución actual se comprueba estructuralmente, y si es factible se evalúa en términos de coste. Se aceptan soluciones de mayor

coste cuando un número aleatorio entre 0 y 1 es más pequeño que la expresión $\exp(-\Delta E/T)$, donde ΔE es el incremento del coste y T es la temperatura actual, y se adopta como la nueva solución de trabajo. La temperatura inicial se reduce geométricamente ($T=kT$) por medio de un coeficiente de enfriamiento k . En cada paso de temperatura se ejecutan un número determinado de iteraciones llamado *cadena de Markov*. El algoritmo se detiene cuando la temperatura queda reducida a un porcentaje pequeño de la temperatura inicial y, simultáneamente, no hay mejoras en un número consecutivo de *cadena de Markov* (típicamente 1% y 1 ó 2 cadenas de Markov). Este método, es capaz de sobrepasar óptimos locales en temperaturas de rango alto-medio para converger gradualmente cuando la temperatura se reduce a cero. El método del SA requiere la calibración de la temperatura inicial, de la longitud de las cadenas de Markov y del coeficiente de enfriamiento.

Ejemplo de puente de vigas en “U” prefabricadas reforzadas con fibras de acero

El ejemplo estudiado se corresponde con los puentes de carreteras de vigas artesa prefabricada de hormigón reforzado con fibras de acero pretensado. El análisis incluye 60 variables del diseño. La Figura 3 muestra las variables geométricas principales consideradas en este análisis. Las variables geométricas incluyen siete variables: el canto de la viga (h_1), el espesor de la losa (e_4), el ancho del ala inferior de la viga (b_1) y su espesor (e_1), el ancho y espesor de las alas superiores de la viga (b_3 y e_3) y el espesor de las almas (e_2). Con respecto a la resistencia del material, son dos las variables que definen el tipo de hormigón, el de la losa y el de la viga. Otra variable identifica la resistencia a tracción del hormigón debido a la aportación de las fibras de acero. El pretensado con armadura activa se encuentra definido por cuatro variables: el número de torones en las alas superiores, el número de torones dispuesto entre las primeras, segundas y terceras capas del ala inferior, el número de secciones con fundas dispuestas en la segunda capa y el número de secciones con fundas en la tercera capa. Finalmente, son 46 variables las que definen la armadura pasiva estándar dispuesta para la viga y la losa superior (Fig. 4). Todas las variables en este análisis son discretas, pudiendo tomar cada una de ellas un determinado rango de valores que forman un espacio aproximado de 1.44×10^{66} soluciones. Este desorbitado espacio de soluciones es el que justifica la adopción de algoritmos heurísticos para encontrar soluciones económicas en tiempos de cálculo razonables.

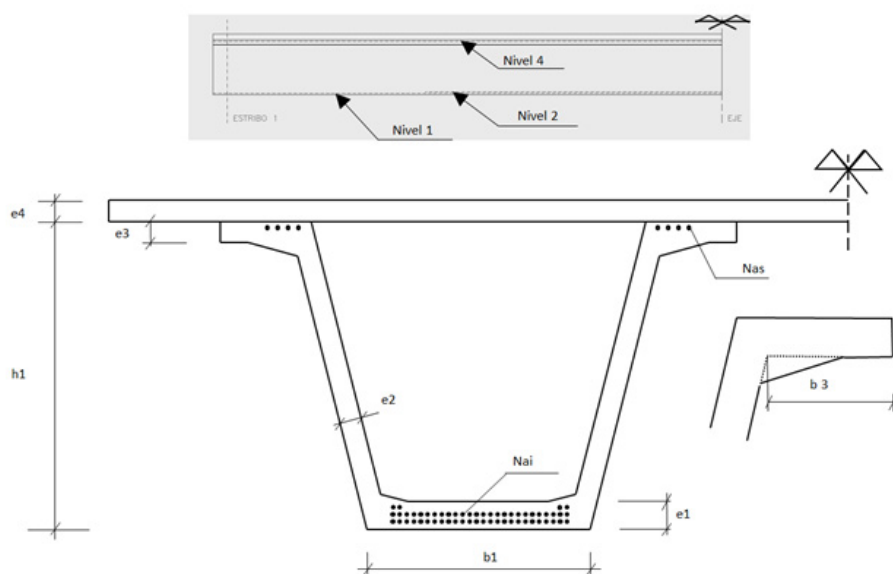


Figura 3. Variables y parámetros geométricos. Alzado y sección

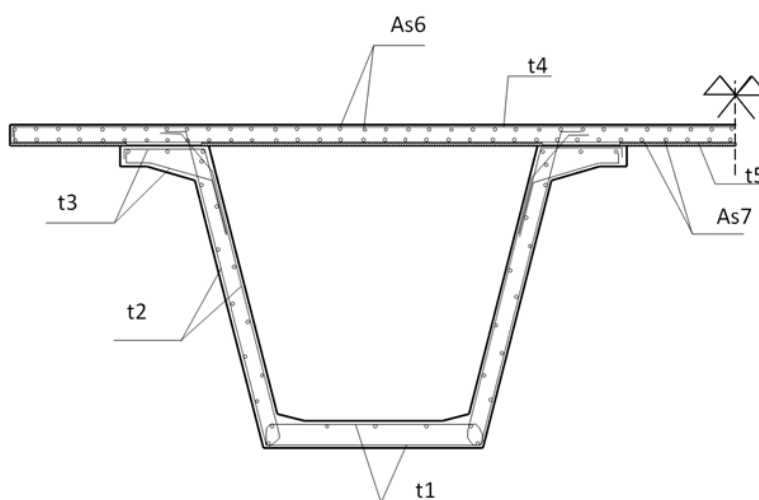


Figura 4. Variables de la armadura pasiva en losa y viga

En cuanto a los parámetros, éstos son magnitudes que se toman como datos fijos y que, por tanto, no afectan a la optimización de la estructura. Los principales parámetros se han dividido en geométricos, de carga, de coste, de armado y de exposición. Entre ellos destacan el ancho del tablero, la inclinación de las almas, la luz de las vigas, la esbeltez mínima de la viga, las cargas muertas, la distancia de transporte, la dificultad de montaje de las vigas y los tipos de acero. Las condiciones de durabilidad son las relativas a la instrucción de hormigón EHE [10].

Se han considerado las restricciones estructurales de la IAP-98 [13], eso incluye comprobaciones en los estados límite últimos y de servicio para flexión, cortante y

torsor, así como fatiga, fisuración y las deformaciones para la envolvente de tensiones debida al peso propio y a las cargas del tráfico. Las tensiones y las reacciones se obtienen como resultado de un programa de desarrollo propio que considera los distintos estados tensionales que se producen en la fabricación de la viga y en su puesta en obra, mediante dos modelos de elementos finitos de emparrillado plano aplicando el conocido método de la rigidez. El primer modelo está compuesto por 20 barras y 21 nodos, y el segundo por 103 barras y 84 nudos.

Para la modelización del comportamiento de las fibras de acero en el hormigón se consideran las recomendaciones específicas del anejo 14 de la EHE[10], teniéndose en cuenta su aportación en las sollicitaciones a flexión y a cortante. Las resistencias residuales a flexotracción características f_{R3d} que puede tomar el hormigón en *Mpa* son: 3, 3.5, 4, 4.5, 5, 5.5, 6, 6.5 y 7.

Los algoritmos del SA se programaron en Fortran 95 con un compilador Compaq Visual Fortran Professional 6.6.0. Cada proceso duró alrededor de 320 minutos sobre un ordenador con un procesador Intel Core TM2 Quad CPU Q6600 2.40 GHz. La calibración de la heurística recomendó cadenas de Markov de 2500 iteraciones, coeficiente reductor de la temperatura de 0.95, temperatura inicial ajustada al 0.5% del coste de la solución inicial; la mutación más eficiente se corresponde con un movimiento aleatorio de nueve variables, y criterio de parada del 2% de la temperatura inicial y 2 cadenas sin mejora. Se procesaron 9 ejecuciones, obteniéndose valores mínimos, medios y desviaciones de los resultados (Tabla 2). Se detallan los principales valores de las variables, de las soluciones obtenidas en la misma Tabla 2.

Tabla 2 Resumen de los costes y de las principales variables

N	Coste (€)	h1 (m)	e4 (m)	b1 (m)	b3 (m)	e1 (m)	e2 (m)	e3 (m)	Hv (MPa)	Hl (Mpa)	p1 (n)	p2 (n)	p3 (n)	p4 (n)	fR3k (Mpa)
9	109668	1,91	0,20	1,92	0,30	0,19	0,10	0,24	45	35	35	14	0	2	6,5
8	109701	1,94	0,20	1,92	0,23	0,15	0,10	0,16	45	40	35	13	0	2	7,0
7	111812	1,90	0,24	1,83	0,34	0,16	0,10	0,29	45	35	33	19	0	2	6,5
6	110001	1,90	0,20	1,99	0,30	0,18	0,10	0,24	45	35	36	13	0	2	6,0
5	109668	1,90	0,19	1,98	0,30	0,18	0,10	0,24	45	40	36	14	0	2	6,0
4	109128	1,91	0,21	1,83	0,24	0,15	0,10	0,17	45	35	33	16	0	2	7,0
3	109258	1,86	0,20	1,97	0,30	0,15	0,10	0,24	45	35	36	15	0	2	7,0
2	111563	1,88	0,24	1,88	0,25	0,15	0,10	0,18	50	40	34	18	0	2	6,5
1	110037	1,94	0,20	1,93	0,24	0,15	0,10	0,17	45	40	35	14	0	2	6,0
(a)	110093	1,90	0,21	1,92	0,28	0,16	0,10	0,21	46	37	35	15	0	2	6,5

(b) 0,9%

(a) Valor medio

(b) Desviación de la media respecto al mínimo

El canto medio de la viga resulta ser de 1.90 metros, muy cerca del límite impuesto del 1/18 de su luz. La geometría transversal de la sección toma valores muy esbeltos, con cantos estrechos y alas cortas, buscando mayores inercias con menores volúmenes. El número medio de torones de 0.6” es de 50 en el ala inferior y dos en cada una de las alas superiores. Las resistencias de los hormigones en vigas y losas son altas sin llegar a las máximas posibles. En cuanto a las fibras de acero, también existe una tendencia a valores altos en su dosificación.

La Figura 5 muestra una típica evolución del coste de la estructura respecto al tiempo computacional. Se distinguen dos fases, en la primera denominada de diversificación, admite soluciones con mayor coste mientras va mejorando la solución, para llegar a una segunda fase de intensificación, donde las soluciones aceptadas difieren en poca medida de la mejor. El coste mínimo ha sido de 109127 euros, la media de los resultados de 110093 euros, y la desviación de la media respecto al mínimo del 0.9%. Si se comparan estos datos con los costes de la misma estructura realizada con hormigón convencional [11], tomando los siguientes valores 109004 euros, 110477 euros y 1.4% respectivamente, se observa que para los precios considerados, no existe diferencia apreciable en el coste de la construcción del puente con ambos materiales.

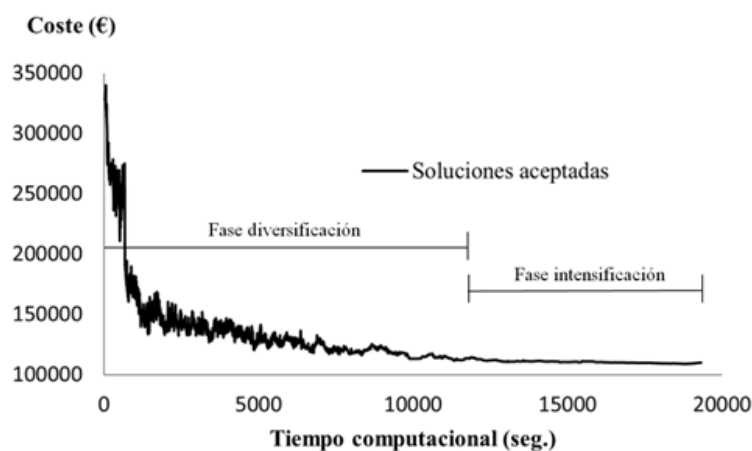


Figura 5. Evolución del coste respecto al tiempo para la mejor solución

Conclusiones

Del trabajo realizado, se derivan las siguientes conclusiones:

- El algoritmo SA se ha aplicado con éxito en el análisis de optimización de puentes de vigas artesas en “U” con fibras de acero pretensadas.
- El procedimiento de optimización SA se ha probado como un algoritmo de búsqueda eficiente, obteniéndose escasas desviaciones respecto a la media en la mayoría de los distintos procesos, alcanzando soluciones buenas, incluso en una sola ejecución.

- El ejemplo presentado, considerando los tiempos de proceso computacional, muestra el potencial de la heurística de búsqueda local SA, para su aplicación a casos reales.
- El coste del puente obtenido mediante el uso del hormigón con fibras de acero autocompactante pretensado, para los precios considerados y en especial al precio de las fibras, resulta muy similar al realizado con hormigón tradicional, variaciones del 0.3%. Este margen es muy estrecho, lo que hace que sea muy sensible el resultado a una leve variación de precios. Por lo que se puede concluir que el uso de fibras es económicamente competitivo y que, mediante un buen control de este material, puede aplicarse también donde se aplica el hormigón tradicional.

Agradecimientos

Los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto de Investigación BIA2011-23602) y por la Universitat Politècnica de València (Proyecto de Investigación PAID-06-12).

Referencias

- [1] British Standards, BS 8110-1: 1997 Structural use of concrete. Part 1: Code of practice for design and construction, British Standards, London, 1997.
- [2] Cohn M.Z. and Dinovitzer A.S., Application of structural optimization. *ASCE Journal of Structural Engineering*, **120**(2), pp 617-649, 1994. [doi:10.1061/(ASCE)0733-9445(1994)120:2(617)]
- [3] Hernández S. and Fontan A., *Practical Applications of Design Optimization*, WIT Press: Southampton, 2002.
- [4] Fletcher R., *Practical Methods of Optimization*, Wiley: Chichester, 2001.
- [5] Jones M.T., *Artificial Intelligence Application Programming*, Charles River Media: Hingham (Massachussets), 2003.
- [6] Holland J.H., *Adaptation in natural and artificial systems*, University of Michigan Press: Ann Arbor, 1975.
- [7] Goldberg D.E., *Genetic algorithms in search, optimization and machine learning*, Addison-Wesley, 1989.
- [8] Glover F. and Laguna M., *Tabu Search*, Kluwer Academic Publishers: Boston, 1997.
- [9] Yepes V. and Medina J.R. Economic heuristic optimization for the heterogeneous fleet VRPHESTW. *ASCE Journal of Transportation Engineering*, **132**(4), pp 303-311, 2006. [doi: [http://dx.doi.org/10.1061/\(ASCE\)0733-947X\(2006\)132:4\(303\)](http://dx.doi.org/10.1061/(ASCE)0733-947X(2006)132:4(303))]
- [10] M. Fomento, EHE. *Instrucción de Hormigón Estructural* (in Spanish), M.Fomento, Madrid, 2008.
- [11] Martí, J.V., *Diseño óptimo de tableros isostáticos de vigas artesas prefabricadas pretensadas*, Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Universitat Politècnica de València, 2010.

- [12] Kirkpatrick S., Gelatt C.D. and Vecchi M.P., Optimization by simulated annealing, *Science*, **220**(4598), pp. 671-680, 1983. [doi:10.1126/science.220.4598.671]
- [13] M. Fomento, IAP-98. Instrucción sobre las acciones a considerar en el proyecto de puentes de carretera, M.Fomento: Madrid, 1998.

Sistema de Evaluación de la Calidad del Proyecto Fin de Grado de la E.T.S. de Ingeniería de Edificación de Granada, mediante Funciones Matemáticas

Antonio Burgos Núñez,* Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, E.T.S.I.E., abn@ugr.es

M. Victoria Fernández Muñoz,* Departamento de Matemática Aplicada, E.T.S.I.E., mvfm@ugr.es)

M. Dolores Gámez Montalvo,* Departamento de Construcciones Arquitectónicas, E.T.S.I.E., mdgamez@ugr.es

José Antonio Méndez Serrano, * Departamento de Expresión Gráfica Arquitectónica y en la Ingeniería, E.T.S.I.E., jamendez@ugr.es

* Universidad de Granada.

Resumen

Presentamos la primera fase de un sistema de evaluación, basado en la definición de diversas funciones matemáticas con ayuda del programa Mathematica, que nos sirve en gran medida para minimizar la subjetividad a la hora de puntuar tanto los contenidos como la calidad de los distintos documentos del Proyecto Fin de Grado de la E.T.S.I.E. de la Universidad de Granada.

Introducción

En esta comunicación, presentamos un sistema racional de la evaluación de la calidad y contenidos de los proyectos fin de grado, en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación de la Universidad de Granada. Nuestro objetivo, es ofrecer a los tribunales evaluadores, una herramienta objetiva, que facilite su trabajo y que estamos seguros favorecerá, que tanto alumnos como sus tutores, desarrollen estos trabajos con calidad y adecuados a las exigencias de los proyectos técnicos relacionados con la edificación.

La implantación del Espacio Europeo de Educación Superior, es un largo proceso aún no finalizado, que han iniciado las universidades españolas, y que constituye una reforma del sistema educativo universitario en sintonía con otros países europeos, que afecta, entre otras, a la designación de títulos, estructura de los estudios, metodologías docentes y sistemas de evaluación de los contenidos y la calidad. La citada reforma, en su aspecto relacionado con la docencia, implica

ineludiblemente la propuesta de sistemas de evaluación que se adecuen a las exigencias planteadas. Estas exigencias se multiplican, cuando la docencia de una asignatura está compartida por todas las áreas de conocimiento que imparten docencia en una titulación, como es el caso de Proyecto Fin de Grado.

En una primera fase, con vista a implementarlo en la próxima convocatoria del presente curso, hemos trabajado exclusivamente con los documentos gráficos (planos). En una segunda fase, lo ampliaremos para considerar el resto de documentos que componen el proyecto (memoria, anexos a la memoria, pliego de condiciones y mediciones y presupuesto).

Se busca descartar las incertidumbres que se puedan generar y reducir al máximo el componente subjetivo que toda evaluación de este tipo genera. Para ello, se ha desarrollado una formulación matemática, basada en la composición de funciones continuas y/o discretas, para generar un único índice que sea suficientemente fiable en la evaluación de estos trabajos. Y todo ello, mediante una efectiva coordinación interdisciplinar entre distintos departamentos y áreas de conocimiento de la ETSIE de Granada.

Objetivos

Elaborar un sistema racional de la evaluación de la calidad y contenidos de los proyectos fin de grado, en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación de la Universidad de Granada.

Minimizar la subjetividad a la hora de puntuar tanto los contenidos como la calidad de los distintos documentos del Proyecto Fin de Grado.

Ofrecer a los tribunales evaluadores, una herramienta objetiva, que facilite su trabajo.

Mejorar la calidad de los Proyectos Fin de Grado.

Metodología

Análisis de los documentos que forman parte de un Proyecto Fin de Grado y selección de aquellos que formarán parte de nuestro trabajo

Según lo descrito en el Código Técnico de la Edificación (Parte I, Anejo I)¹ los documentos que forman parte del proyecto son:

1. Memoria (descriptiva, constructiva, cumplimiento del Código Técnico)
2. Planos (de situación, de emplazamiento, de urbanización, plantas generales, de cubiertas, alzados y secciones, de estructura, de instalaciones, definición constructiva y memorias gráficas)

3. Pliego de condiciones
4. Mediciones
5. Presupuesto

De estos cinco bloques, en una primera fase, con vista a implementarlo en la próxima convocatoria del presente curso (2012-13), vamos a trabajar exclusivamente con los documentos gráficos (planos). De los documentos gráficos incidiremos especialmente en todos aquellos que definen la tecnología que hará posible la materialización del edificio. Después de su implantación en la próxima evaluación de los Proyectos Fin de Grado y, corregidas las posibles deficiencias detectadas en su aplicación, en una segunda fase lo ampliaremos al resto de documentos que componen el proyecto (memoria, pliego de condiciones, mediciones y presupuesto).

Identificación y estructuración de parámetros a evaluar y ponderación de los mismos

Para enlazar lo normalizado en el Código Técnico sobre los documentos que forman parte de un proyecto con la estructura de la docencia impartida en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación, hemos establecido siete conjuntos generales de planos que a su vez se subdividen en otros más específicos relacionados en el esquema que a continuación se detalla:

2. DESCRIPCIÓN GENERAL		≤ 8
1. CUESTIONES GENERALES		≤ 5
Adecuación de formato		SI(1)-NO(0)
Escala apropiada		1-0
Indicación de escala específica en cada elemento		1-0
Jerarquía de texto		1-0
Cajetines		1-0
	título del proyecto	1/5
	autor del proyecto	1/5
	tutor del proyecto	1/5
	nombre del plano	1/5
	número del plano	1/5
Situación		máx. 1-0

Referencia al planeamiento vigente	[0, 1/3]
Referencia a puntos localizables	[0, 1/3]
Indicación del norte geográfico	1/3 - 0
Emplazamiento	máx.1-0
Justificación urbanística	[0,1/2], [0,1/3],[0,1/4]
Alineaciones	[0,1/2], [0,1/3],[0,1/4]
Retranqueos*	[0,1/2], [0,1/3], [0,1/4]
Referencias topográficas*	[0,1/3], [0,1/4]
Plano de urbanización	máx.1-0
Red viaria	[0,1/2]
Identificación de acometidas	1/2 - 0
Abastecimiento de agua	[0,1/8], [0,1/10]
Saneamiento	[0,1/8], [0,1/10]
Electricidad	[0,1/8], [0,1/10]
Telecomunicaciones	[0,1/8], [0,1/10]
Gas*	[0,1/10]
Planos de distribución	máx.1-0
Especificación de usos	1/4- 1/6- 0
Representación de mobiliario y adecuación	[0,1/4],[0,1/6]
Apertura de puertas	[0,1/4],[0,1/6]
Superficies y usos	[0,1/4],[0,1/6]
Sentido de escaleras*	[0,1/6]
Sección de escaleras*	[0,1/6]
Alzados (Suposición: Edificio exento)	máx.1-0
Alzado Norte	máx.1/4
Sombras de diferentes planos	[0, 1/20]
Sombras elementos carpinterías	[0, 1/20]
Texturas de materiales	[0, 1/20]
Representación del material de cubierta	[0, 1/20]
Representación del entorno próximo	[0, 1/20]
Alzado Sur	máx. 1/4
Sombras de diferentes planos	[0, 1/20]
Sombras elementos carpinterías	[0, 1/20]
Texturas de materiales	[0, 1/20]
Representación del material de cubierta	[0, 1/20]

	Representación del entorno próximo	[0, 1/20]
	Alzado Este	máx. 1/4
	Sombras de diferentes planos	[0, 1/20]
	Sombras elementos carpinterías	[0, 1/20]
	Texturas de materiales	[0, 1/20]
	Representación del material de cubierta	[0, 1/20]
	Representación del entorno próximo	[0, 1/20]
	Alzado Oeste	máx. 1/4
	Sombras de diferentes planos	[0, 1/20]
	Sombras elementos carpinterías	[0, 1/20]
	Texturas de materiales	[0, 1/20]
	Representación del material de cubierta	[0, 1/20]
	Representación del entorno próximo	[0, 1/20]
Secciones		máx. 1-0
	Sección transversal y longitudinal	máx. 1-1/2
	Resaltar el plano de la sección	[0,1/6],[0,1/7],[0,1/12],[0,1/14]
	Representación de alejamientos	[0,1/6],[0,1/7],[0,1/12],[0,1/14]
	Representación de volúmenes por texturas	[0,1/6],[0,1/7],[0,1/12],[0,1/14]
	Altura total de la edificación	[0,1/6],[0,1/7],[0,1/12],[0,1/14]
	Indicación de alturas libres, espesor de forjados y elementos complementarios	[0,1/6],[0,1/7],[0,1/12],[0,1/14]
	Definición de altura de ventanas y puertas	[0,1/6],[0,1/7],[0,1/12],[0,1/14]
	Representación de escaleras con barandilla incluida*	[0,1/7],[0,1/14]
	Otras secciones necesarias*	máx. 1/2
	Resaltar el plano de la sección	[0,1/6]
	Representación de alejamientos	[0,1/6]
	Representación de volúmenes por texturas	[0,1/6]
Cubiertas		máx. 1-0
	Geometría y volumetría	[0, 1/3]
	Pendientes	[0, 1/3]
	Puntos de recogida de aguas	[0, 1/3]
Carpintería		1-1/2-1/3-0
	Soluciones concretas	1/2-1/3-0
	Cerrajería	1/2-1/3-0
	Elementos singulares*	1/3-0

3. DESCRIPCIÓN GRÁFICA DEL SISTEMA ESTRUCTURAL		≤ 3 ≤ 4
Cimentación		máx. 1-0
	Planta General	máx. 1/5 - 1/6 - 1/7
	Relación con el entorno inmediato y el conjunto de la obra	[0, 1/25],[0,1/30],[0,1/35]
	Jerarquía de líneas	[0, 1/25],[0,1/30],[0,1/35]
	Replanteo	[0, 1/25],[0,1/30],[0,1/35]
	Instalación de saneamiento	[0, 1/25],[0,1/30],[0,1/35]
	Instalación Puesta a tierra	[0, 1/25],[0,1/30],[0,1/35]
	Cuadro de Características Técnicas conforme a normativa vigente	[0,1/5],[0,1/6],[0,1/7]
	Especificación de ductilidad y condiciones sismorresistentes*	[0, 1/6],[0,1/7]
	Cuadro de zapatas o encepados	[0,1/5],[0,1/6],[0,1/7]
	Canto y armado de la losa	[0,1/5],[0,1/6],[0,1/7]
	Cuadro de vigas centradas y de atado	[0,1/5],[0,1/6],[0,1/7]
	Definición de juntas y huecos	[0,1/5],[0,1/6],[0,1/7]
	Secciones de muro de sótano*	[0,1/6],[0,1/7]
	Detalles constructivos	máx. 1/5 - 1/6 - 1/7
	Cotas	[0,1/30],[0,1/36],[0,1/42]
	Jerarquía de líneas	[0,1/30],[0,1/36],[0,1/42]
	Enlaces de armaduras	[0,1/30],[0,1/36],[0,1/42]
	Denominación de elementos	[0,1/30],[0,1/36],[0,1/42]
	Representación planos de sección	[0,1/30],[0,1/36],[0,1/42]
	Soluciones tecnológicas	[0,1/30],[0,1/36],[0,1/42]
Forjados		máx. 1- 0
	Planta General	máx. 1/4 - 1/5
	Identificación de pilares	[0,1/36],[0,1/45]
	Jerarquía de líneas	[0,1/36],[0,1/45]
	Replanteo	[0,1/36],[0,1/45]
	Replanteo de viguería	[0,1/36],[0,1/45]
	Replanteo de huecos	[0,1/36],[0,1/45]
	Representación esperas de escaleras	1/36 - 1/45 - 0
	Huecos instalaciones	[0,1/36],[0,1/45]
	Momentos positivos de diseño en vanos(unidireccionales)	[0,1/36],[0,1/45]
	Cuatro armaduras de flexión(reticulares)	[0,1/36],[0,1/45]
	Armadura de negativos	[0,1/36],[0,1/45]
	Armadura de punzonamiento y cortante	[0,1/36],[0,1/45]
	Cuadro de Características Técnicas conforme a	[0, 1/4],[0,1/5]

normativa vigente		
Longitudes de anclaje y solape en H.A.	Definición del tipo de uniones en Estructura Metálica.	[0, 1/4],[0,1/5]
Especificación de ductilidad y condiciones sismorresistentes*		[0, 1/5]
Detalles constructivos		[0, 1/4],[0,1/5]
	Cotas	[0, 1/24],[0,1/30]
	Jerarquía de líneas	[0, 1/24],[0,1/30]
	Enlaces de armaduras	[0, 1/24],[0,1/30]
	Denominación de elementos	[0, 1/24],[0,1/30]
	Representación planos de sección	[0, 1/24],[0,1/30]
	Soluciones tecnológicas	[0, 1/24],[0,1/30]
Despiece de ferralla		máx. 1-0
Planos de despiece de vigas		[0,1/2],[0,1/3]
Armado longitudinal y transversal (H.A.)	Identificación de perfil metálico	[1/8,0], [1/12,0]
Esperas y longitudes de anclaje/solape	Definición de uniones	[1/8,0], [1/12,0]
	Cotas	[1/8,0], [1/12,0]
	Diámetros de barras	[1/8,0], [1/12,0]
Especificación de ductilidad y condiciones sismorresistentes*		[0,1/3]
Detalles constructivos		[0,1/2],[0,1/3]
	Cotas	[0,1/12],[0,1/18]
	Jerarquía de líneas	[0,1/12],[0,1/18]
	Enlaces de armaduras	[0,1/12],[0,1/18]
	Denominación de elementos	[0,1/12],[0,1/18]
	Representación planos de sección	[0,1/12],[0,1/18]
	Soluciones tecnológicas	[0,1/12],[0,1/18]
Escaleras*		máx. 1-0
Plano de replanteo planta/alzado		[0, 1/4]
Definición de armaduras		máx. 1/4
Longitudes de armaduras	Longitudes de perfiles de acero o madera	[0, 1/12]
Diámetro de las barras	Perfiles acero/madera	[0, 1/12]
Solapes de armaduras	Enlaces entre perfiles	[0, 1/12]
Detalles constructivos conexión con forjados/cimentación		máx. 1/4

	Cotas	[0, 1/24]
	Jerarquía de líneas	[0, 1/24]
	Enlaces de armaduras	[0, 1/24]
	Denominación de elementos	[0, 1/24]
	Representación planos de sección	[0, 1/24]
	Soluciones tecnológicas	[0, 1/24]
	Cuadro de Características Técnicas conforme a normativa vigente	[0, 1/4]
4. CUBIERTAS		
	Planta general	≤ 1
	Replanteo de faldones y/o cuencas de evacuación	máx. 1/2
	Cotas	[0, 1/6]
	Identificación de elementos singulares	[0, 1/6]
	Detalles constructivos	máx. 1/2
	Cotas	[0, 1/12]
	Jerarquía de líneas	[0, 1/12]
	Denominación de elementos	[0, 1/12]
	Representación planos de sección	[0, 1/12]
	Representación de elementos estructurales	[0, 1/12]
	Soluciones tecnológicas	[0, 1/12]
5. FABRICAS.		
	Plantas generales	≤ 1
	Cotas	máx. 1/3 – 1/4
	Jerarquía de líneas	[0, 1/15],[0,1/20]
	Identificación de fábricas	[0, 1/15],[0,1/20]
	Identificación de carpintería	[0, 1/15],[0,1/20]
	Identificación de revestimientos	[0, 1/15],[0,1/20]
	Planos de replanteo de revestimientos*	máx. 1/4
	Cotas	[0,1/12]
	Jerarquía de líneas	[0,1/12]
	Aplicación de texturas	[0,1/12]
	Detalles constructivos	máx. 1/3 – 1/4
	Cotas	[0,1/18],[0,1/24]
	Jerarquía de líneas	[0,1/18],[0,1/24]
	Denominación de elementos	[0,1/18],[0,1/24]
	Representación planos de sección	[0,1/18],[0,1/24]

Representación de elementos estructurales	[0,1/18],[0,1/24]
Soluciones tecnológicas	[0,1/18],[0,1/24]
Memoria de carpintería	máx. 1/3 – 1/4
Alzados	[0,1/9],[0,1/12][0,1/16]
Cotas	[0,1/9],[0,1/12][0,1/16]
Características plásticas*	[0,1/9],[0,1/12][0,1/16]
Cuadro de características técnicas	[0,1/9],[0,1/12][0,1/16]
6. INSTALACIONES	
Fontanería	máx. 1-0
Planos de suministro y distribución de agua fría y caliente.	máx. 1/2
Jerarquía de líneas	[0, 1/6]
Identificación de suministros	[0, 1/6]
Red exterior de agua fría.	[0, 1/6]
Contadores y esquema unifilar	máx. 1/2
Saneamiento	máx. 1-0
Planos de instalaciones interiores de aguas fecales, ventilación y pluviales	máx. 1/2
Jerarquía de líneas	[0, 1/4]
Identificación de redes de evacuación	[0, 1/4]
Esquema unifilar	máx. 1/2
Electricidad	máx. 1-0
Planos de instalaciones interiores de electricidad	máx. 1/2
Jerarquía de líneas	[0, 1/4]
Identificación de líneas y mecanismos	[0, 1/4]
Esquema unifilar	1/2 - 0
Calefacción*	máx. 1-0
Planos de instalaciones interiores de calefacción	máx. 1/2
Jerarquía de líneas	[0, 1/8], [0, 1/10]
Identificación de líneas y radiadores	[0, 1/8], [0, 1/10]
Identificación de depósito de combustible*	[0, 1/10]
Identificación de caldera	[0, 1/8], [0, 1/10]
Salida de humos	[0, 1/8], [0, 1/10]
Esquema de la red de distribución	máx. 1/2
Aire acondicionado*	máx. 1-0
Planos de sistemas de aire acondicionado y ventilación forzada.	máx. 1/2
Identificación de la condensadora	[0, 1/2]

Esquema de la red de distribución de conductos	1/2 - 0
Elevadores*	1-0
Ascensores, montacargas, escaleras mecánicas: Graficarlos en los planos correspondientes: la caja del aparato, cabina, puertas, contrapeso y cuarto de máquinas.	1- 0
7. SECCIONES CONSTRUCTIVAS	≤ 1
Plano de la sección	máx. 1/3
Resaltar el plano de la sección	[0,12]
Representación de alejamientos	[0,12]
Representación de texturas	[0,12]
Jerarquía de líneas	[0,12]
Detalles de cimentación	máx. 1/3
Cotas	[0,18]
Jerarquía de líneas	[0,18]
Enlaces de armaduras	[0,18]
Denominación de elementos	[0,18]
Representación planos de sección	[0,18]
Interacción con otros elementos del edificio	[0,18]
Detalles de estructura y fabricas (interacciones)	máx. 1/3
Cotas	[0,18]
Jerarquía de líneas	[0,18]
Enlaces de armaduras	[0,18]
Denominación de elementos	[0,18]
Representación planos de sección	[0,18]
Interacción con otros elementos del edificio	[0,18]

Implementación de funciones definidas sobre variables continuas y/o discretas para evaluar los distintos ítems y parámetros

En la tabla anterior, hemos asociado a cada uno de los ítems un color que nos ayuda a identificar las variables que debemos usar para su valoración.

Los apartados generales que son imprescindibles en el contenido a entregar en un Proyecto Fin de Grado, se han identificado sobre fondo gris y texto en color amarillo, se les ha asociado funciones de varias variables. Cada una de estas funciones, se descompone en otras (color azul), también de varias variables. Estas variables están identificadas en color marrón o rojo.

Las variables que asociamos a los ítems de color marrón, tomarán valores discretos 1 o 0, dependiendo evidentemente de si el trabajo contempla o no, este apartado. El programa, reconvierte en la nota equivalente, según el apartado.

Las variables que asociamos a los ítems de color rojo, tomarán valores pertenecientes a intervalos cerrados $[0,10]$, que será la nota que el evaluador estime oportuno en ese apartado, que a su vez, el sistema reconvierte en la nota equivalente.

Indicamos las siguientes aclaraciones: los ítems con igual categoría, ocupan la misma posición, es decir, unos están centrados y otros justificados a la derecha; aquellos ítems con asterisco, pueden ser estudiados o no, según el trabajo.

Las definiciones de las distintas funciones que intervienen en este trabajo, así como las relaciones existentes entre ellas, se han desarrollado mediante el programa informático Mathematica 9¹¹. Esta aplicación está preparada para crear una interfaz de comunicación que la haga accesible a cualquier usuario, por lo que todas las expresiones matemáticas, que subyacen en las definiciones de las distintas funciones, se utilizan para crear dicha interfaz. Este proceso aún no lo hemos concluido.

Determinación de la calificación global del proyecto.

Cada una de las partes anteriormente descritas, en las que se ha dividido la documentación gráfica a valorar, no tiene el mismo peso en la calificación final puntuada sobre 10. Esta diferencia viene determinada por la relevancia que hemos dado a cada apartado y que detallamos a continuación:

Apartados	Puntuación máxima
Cuestiones generales	0.25
Descripción gráfica general	2
Descripción gráfica del sistema estructural	2
Cubiertas	1.5
Fábricas	2
Instalaciones	1
Secciones constructivas	1.25

Referencias

- [1] Calabera J., *Manual de Detalles Constructivos en Obras de Hormigón Armado*, Ed. Intemac, Madrid, 1993.
- [2] Ching F., Steven P., Juroszek , *Dibujo y Proyecto*, Ed. G. Gili. México, 1998.
- [3] Ching F., *Arquitectura: Forma, Espacio y Orden*, Ed. G. Gili. México, 1998.
- [4] Código Técnico de la Edificación (CTE): Real Decreto 314/2006, de 17 de marzo de 2006.
- [5] Hansmann Ch. R., *Las Escaleras en la Arquitectura. Construcción y Detalles*, Ed. G. Gili, Barcelona, 1994.
- [6] Ministerio de Fomento, Secretaría General Técnica, *Instrucción para el proyecto y la ejecución de forjados unidireccionales de hormigón estructural realizado con elementos prefabricados (EFHE)*, Ed. Ministerio de Fomento, Madrid, 2003.
- [7] Ministerio de Fomento, Comisión Permanente del Hormigón, *Instrucción EHE de hormigón estructural*, Ed. Ministerio de Fomento, Madrid, 2008.
- [8] Parramón J.M., *Dibujo a Mano Alzada para Arquitectos*, Parramón Ediciones. Barcelona, 2004.
- [9] Smith, S., *La Obra de Fábrica de Ladrillo*, Ed. Blume.
- [10] Urbán Brotons, P., *Construcción de Estructuras. Hormigón Armado. Detalles Constructivos y Perspectivas*, Editorial Club Universitario, ECU. Escuela Politécnica Superior de Alicante, 2004.
- [11] Wolfram Mathematica 9,
<http://reference.wolfram.com/mathematica/guide/Mathematica.html>

Modelo de optimización para la gestión del mantenimiento de una infraestructura de edificación

Cristina Torres-Machí, critorma@upv.es Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ing. Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Víctor Yepes, vyepesp@upv.es Instituto de Ciencia y Tecnología del Hormigón (ICITECH), Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Eugenio Pellicer, pellicer@upv.es Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ing. Civil, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universitat Politècnica de València.

Alondra Chamorro, achamorro@ing.puc.cl Departamento de Ingeniería y Gestión de la Construcción Escuela de Ingeniería, Pontificia Universidad Católica de Chile.

Resumen

En una sociedad desarrollada en la que el nivel de inversión en nuevas infraestructuras tiende a estabilizarse, su conservación pasa a ser uno de los retos a los que deben enfrentarse sus gestores, de forma que los recursos escasos de los que disponen, sean destinados en la mejor alternativa posible. Sin embargo, la asignación óptima de recursos de conservación es un problema que no tiene una solución directa. De hecho, la resolución del problema de asignación de recursos para el mantenimiento de una infraestructura presenta un problema de explosión combinatoria, pues existen S^T soluciones factibles para la gestión una infraestructura con S posibles tratamientos de conservación y un periodo de análisis de T años. El objetivo de esta comunicación es presentar un modelo matemático que permite optimizar los recursos asignados al mantenimiento de una infraestructura de edificación, de forma que se maximice el nivel de servicio de la misma, cumpliendo además con unas restricciones presupuestarias y unos niveles mínimos de conservación.

Introducción

Las infraestructuras suponen uno de los mayores patrimonios de los países, ya que contribuyen a su desarrollo económico, competitividad, productividad y calidad de vida (Miller, 2007). Si bien la inversión en infraestructuras induce estos efectos beneficiosos en la economía de los países, también es cierto que una falta de inversión en el mantenimiento de las mismas puede generar los efectos contrarios (ASCE, 2013). La necesidad de inversión en mantenimiento es especialmente importante a medida que los países van alcanzando mayores cotas de desarrollo, momento en

el cual sus redes de infraestructuras tienden a estabilizarse, disminuyendo la necesidad de inversión en nuevos proyectos; pero aumentando, por el contrario, los requerimientos de conservación. Así ocurre que los presupuestos destinados a conservación suelen superar a los destinados a la construcción (Gutiérrez-Bolivar & Achútegui, 2003).

Sin embargo, las administraciones cuentan con presupuestos limitados que resultan insuficientes para satisfacer las necesidades de mantenimiento existentes. Esta escasez de recursos, que se agudiza en los tiempos actuales de crisis económica, provoca el retraso en la ejecución de actividades de mantenimiento. Se genera así una diferencia entre las necesidades de mantenimiento de infraestructuras y las inversiones llevadas a cabo. Es el denominado "*infrastructure gap*" o brecha de infraestructuras (Kemp, 2005).

La asociación americana de ingenieros ASCE (American Society of Civil Engineers) publica cada cuatro años un informe en el que evalúa el "*infrastructure gap*" americano. En este informe se evalúan el estado de las infraestructuras en base a su capacidad, condición, necesidades futuras, estado de mantenimiento y seguridad, y se otorga una calificación de su estado, siendo: A excepcional, B bueno, C mediocre, D malo y F fallo. En base al último informe publicado (ASCE, 2013), las infraestructuras americanas presentan actualmente un estado deficiente de conservación, con muchos de sus elementos cercanos al fin de su vida útil (Tabla 1). Si bien las calificaciones obtenidas en el último informe mejoran en muchos casos las obtenidas en 2009, los niveles de inversión actuales continúan siendo insuficientes: la inversión necesaria para que mantener un adecuado nivel de mantenimiento de las infraestructuras prácticamente duplica los niveles de inversión actuales. De esta forma, se estima una necesidad de inversión hasta 2020 de un total de 3.600 billones de dólares, frente a los 2.000 previstos. Este déficit presenta una tendencia al alza desde la primera evaluación del ASCE en 2001 (Tabla 1), evidenciando así la necesidad de abordar el problema de forma urgente ante un deterioro continuado de las infraestructuras.

Tabla 1 Estado de las infraestructuras americanas y necesidades previstas de inversión (ASCE, 2013)

Infraestructura	2001	2005	2009	2013
Transporte aéreo	D	D+	D	D
Puentes	C	C	C	C+
Presas	D	D	D	D
Agua potable	D	D-	D-	D
Energía	D+	D	D+	D+
Residuos tóxicos	D+	D	D	D
Canales	D+	D-	D-	D-
Carreteras	D+	D	D-	D

Colegios	D-	D	D	D
Residuos sólidos	C+	C+	C+	B-
Transporte público	C-	D+	D	D
Aguas residuales	D	D-	D-	D
<i>Necesidad de inversión (trillones de dólares)</i>	<i>1.3</i>	<i>1.6</i>	<i>2.2</i>	<i>3.6</i>
<i>Calificación global</i>	<i>D+</i>	<i>D</i>	<i>D</i>	<i>D+</i>

Necesidad de mantenimiento en estructuras de edificación

El diseño de infraestructuras en general y, concretamente, de estructuras de edificación, está sujeto a una reglamentación a partir de la cual se establece el periodo de diseño de las mismas. En la práctica, los periodos de vida útil varían en función del uso de la estructura y del país de aplicación (Tabla 2). En este sentido se han desarrollado recientemente modelos que permiten predecir la vida útil de una edificación (Grant & Ries, 2013). En cualquier caso, si bien es cierto que existe divergencia entre los valores de vida útil para distintas estructuras de edificación, existe una tendencia generalizada a considerar largos periodos de tiempo y, más concretamente, 50 años (Grant & Ries, 2013). A pesar de considerar estos largos periodos de vida útil en el diseño, el desgaste propio del uso y del paso del tiempo exige que las estructuras cuenten con un mantenimiento adecuado. De hecho, se estima que, a lo largo de la vida útil de una estructura de edificación, los costes de operación, mantenimiento y reparación llegan a duplicar e incluso triplicar los costes iniciales de capital (Spedding, 1994).

Tabla 2 Periodos de vida útil de distintas estructuras de edificación (Hudson et al., 1997)

Tipo de edificación	Canadá	Reino Unido	Japón
Industrial	25-49	Mínimo 30	25-40
Comercial, residencial, sanitaria, educacional	50-99	Mínimo 60	60-100
Cívica, monumental	Mínimo 100	Mínimo 120	60-100

En el caso concreto de las estructuras de edificación, el informe del ASCE evalúa la condición de los colegios públicos y estima como necesaria una inversión en mantenimiento y renovaciones por valor de 270 billones de dólares (ASCE, 2013). Esto es así porque en EEUU, la mayoría de colegios se construyeron entre los años 1950-1970 y se enfrentan actualmente a un deterioro importante. Tal y como puede apreciarse en la Fig. 1, la tendencia en inversión en estas infraestructuras ha decaído en los últimos años debido, principalmente, a la crisis económica. Este descenso en la inversión total se refleja especialmente en una reducción de gastos en renovaciones y mantenimiento, mientras que las inversiones en nuevas construcciones no han descendido de forma tan significativa. Teniendo en cuenta que los costes energéticos (incluyendo gastos de calefacción y tecnología) suponen el segundo mayor coste de estas instalaciones después de los costes de personal (ASCE, 2013), una

mejor gestión del mantenimiento de los mismos con un análisis a lo largo del ciclo de vida supondrá una importante mejora en la gestión económica de estas estructuras.

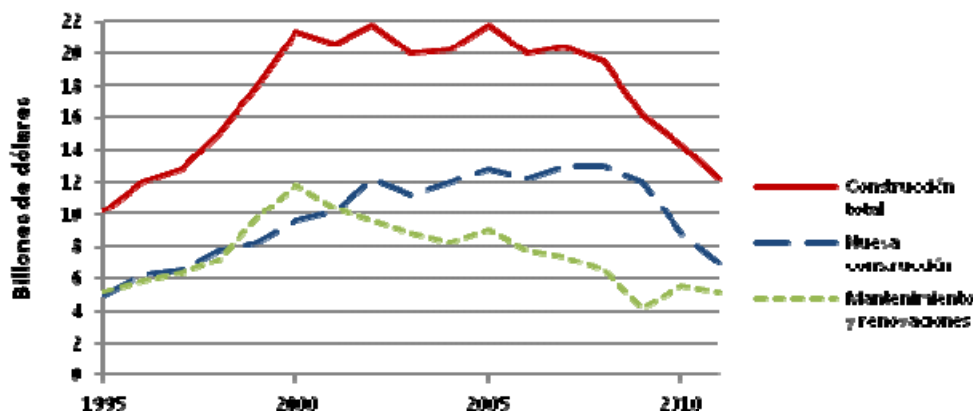


Figura 1 Evolución de las inversiones en construcción y mantenimiento realizadas en EEUU (ASCE, 2013)

Sistemas de gestión de activos

Ante esta escasez de recursos y la necesidad de optimizar el uso de los mismos, surge la necesidad de disponer de una metodología que permita analizar de forma objetiva las posibles alternativas de inversión. Nace así la denominada gestión de activos, que combina los principios de la ingeniería con las prácticas de gestión económica con el objetivo de conseguir una óptima asignación de recursos en la gestión, operación y mantenimiento de activos (OECD, 2001). El objetivo básico de la gestión de activos es usar información segura y consistente para desarrollar criterios de decisión, otorgar alternativas realistas y contribuir a la eficiencia de la toma de decisiones; de forma que se diseñe un programa de acción económicamente óptimo incluyendo, además, una retroalimentación de las consecuencias de las decisiones tomadas (Hudson et al., 1997). Se identifican tres niveles de gestión: proyecto, red y estratégico. El nivel de gestión, además de incidir en el horizonte temporal y en la cobertura espacial del análisis, también incide en el nivel de detalle de los datos necesarios para la toma de decisiones.

La presente comunicación presenta un modelo matemático que permite optimizar, a nivel de proyecto, la gestión del mantenimiento de una infraestructura de edificación teniendo en cuenta restricciones presupuestarias y niveles mínimos de servicio a lo largo de su ciclo de vida. La descripción del modelo se estructura de la siguiente manera: en primer lugar, se definirá el problema de optimización abordado por el modelo; a continuación, se describirán los principios del método planteado para la

resolución del problema; finalmente, se extraerán conclusiones y futuras líneas de investigación.

Definición del problema de optimización

Para comprender los fundamentos del modelo de optimización propuesto en esta ponencia, es necesario conocer previamente los datos que alimentan al modelo que son, básicamente, los modelos de deterioro.

Modelos de deterioro

Los modelos de deterioro o comportamiento permiten predecir las condiciones futuras de la infraestructura. Para ello, debe definirse un indicador de condición (IC, de aquí en adelante) que permita evaluar el grado en el que una infraestructura satisface las necesidades de los usuarios o aquellas para las que fue diseñada o construida (Hudson et al., 1997). En la literatura se han empleado indicadores de condición desarrollados para distintas infraestructuras: pavimentos (Chamorro et al. 2009a, 2009b, 2010), puentes (Neves & Frangopol, 2005), trenes (El-Sibaie & Zhang, 2004), etc. En el caso de estructuras de edificación, el IC a utilizar podría reflejar alguno de los índices de desempeño en edificación recogidos en la literatura (Latorre et al., 2010; Radujković et al., 2010). La elección del IC más adecuado deberá definirse a nivel estratégico y su definición queda fuera del alcance de este estudio.

Mediante expresiones matemáticas, los modelos de deterioro determinan el estado de la infraestructura a lo largo del tiempo y permiten pronosticar los efectos, a corto y largo plazo, del mantenimiento efectuado sobre ellas. El objetivo de estos modelos es realizar estimaciones razonables de los efectos de distintas actuaciones de mantenimiento, el nivel de deterioro resultante de las mismas y su progresión en el tiempo (Hudson et al., 1997, Chamorro et al., 2011).

Función objetivo

Fundamentalmente existen tres métodos para la evaluación económica a largo plazo de una actuación en infraestructuras: análisis del coste del ciclo de vida (ACCV); análisis coste-beneficio (ACB); y análisis coste-efectividad (ACE). La primera de ellas evalúa la idoneidad de una inversión en base a sus flujos de costes a lo largo del ciclo de vida. El análisis coste-beneficio incorpora en la evaluación los beneficios (tanto presentes como futuros) derivados de cada alternativa. Estos beneficios deben cuantificarse en términos monetarios, lo cual dificulta la consideración de efectos sociales y ambientales. Es por esto que el ACB, utilizado como único indicador, no es capaz de recoger la diversidad de aspectos a tener en cuenta en la gestión sostenible de infraestructuras (Parkin et al., 2003). Por último, el método coste-efectividad permite comparar alternativas que generan respuestas no cuantificables en términos monetarios. En este método, los costes se recogen con su valor presente

y los beneficios se evalúan a través de un indicador que mide la efectividad de la inversión.

La efectividad de una alternativa dependerá de la medida en que ésta mejora la condición de la infraestructura y retrasa el proceso de deterioro (Khurshid et al., 2009). Como medida de la efectividad puede emplearse la curva de comportamiento, ya que refleja de forma indirecta las mejoras derivadas de una operación de conservación. Así pues, la efectividad de cada alternativa puede calcularse como el área entre la curva de comportamiento (ABC) y un valor mínimo de IC (IC_{min}).

La evaluación de la efectividad de una alternativa a partir del ABC es un buen indicador de su efectividad porque, en primer lugar, una infraestructura con un buen mantenimiento (y, por tanto, una mayor ABC) genera mayores beneficios a los usuarios que una alternativa de peor mantenimiento (Khurshid et al., 2009). En segundo lugar, permite incluir en la evaluación beneficios que son difíciles de cuantificar monetariamente, (Khurshid et al., 2009; Haas, Tighe, & Cowe Falls, 2006).

Así pues, el modelo propuesto optimiza la gestión del mantenimiento de una infraestructura maximizando la efectividad de la secuencia de operaciones. Se trata, por tanto, de una optimización mono-objetivo de la efectividad de una secuencia de operaciones de mantenimiento a largo plazo (F , definida en Eq. (1)), satisfaciendo unas restricciones presupuestarias y de condición mínimas (g_j , definida en Eq. (2))

$$\max F = \max(ABC) \quad (1)$$

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_m) \leq 0 \quad (2)$$

Donde x_1, x_2, \dots, x_m son las variables de diseño del problema; y ABC es la medida de efectividad a largo plazo de una solución de operaciones de mantenimiento.

Restricciones

Las restricciones expresadas en la Eq. (2) incluyen tanto limitaciones presupuestarias (Eq. (3)) como una restricción de condición mínima de la infraestructura (Eq. (4)).

$$\sum_{t=1}^T \text{coste}(x_m) \cdot \frac{1}{(1+i)^t} \leq B_t; \forall t \quad (3)$$

$$IC_t \geq IC_{min}; \forall t \quad (4)$$

Donde t es el año de análisis ($t \leq T$, siendo T el periodo de análisis); $\text{coste}(x_m)$ es el coste unitario de la operación de mantenimiento x ; $1/(1+i)^t$ es el factor para el cálculo del valor presente en el año t considerando una tasa de descuento i ; B_t es el presupuesto disponible en el año t ; IC_t es el indicador de condición de la infraes-

estructura en el año t ; y IC_{min} es el valor mínimo admisible del indicador de condición.

Variables

Las variables del problema de optimización definen la secuencia de operaciones de mantenimiento óptimas que deben aplicarse a lo largo del periodo de análisis para maximizar la efectividad a largo plazo. Existen $m=T$ variables en el problema de optimización, siendo T el periodo de análisis. Cada una de estas variables pueden tomar s valores, siendo s el número de alternativas de tratamiento disponibles. Dado un conjunto de valores de estas variables, la evaluación del ABC y el coste de esta solución es directo.

El conjunto de combinaciones de los posibles valores de las variables define el espacio de soluciones, que cuenta con S^T posibles soluciones del problema. Este espacio de soluciones crece exponencialmente con el número de tratamientos o años de análisis, sufriendo del efecto de la explosión combinatoria.

Parámetros

Los parámetros del problema son aquellos valores que se toman como datos y permanecen constantes a lo largo del proceso de optimización. En el modelo propuesto, los parámetros considerados son el periodo de análisis (T); la tasa de descuento (i); los modelos de deterioro ($IC(t)$) y los costes de los tratamientos ($coste(x_m)$).

Método de resolución del problema

El método propuesto para resolver el problema de optimización consiste en la aplicación de métodos de optimización heurística. Las heurísticas son métodos que parten de una solución factible del problema y exploran el espacio de soluciones en búsqueda de mejores soluciones. La principal ventaja de estos métodos es que proporcionan una solución cercana a la óptima con una mayor eficiencia computacional que los métodos de optimización matemática. Existen diversos métodos: gradiente, aceptación por umbrales, cristalización simulada, etc. Estos métodos han sido aplicados por los autores para la resolución óptima de problemas de explosión combinatoria, especialmente en el campo del diseño de estructuras de hormigón (Carbonell et al., 2011; Yepes et al. 2012; Martí et al., 2013; Torres-Machi et al., 2013).

Conclusiones y futuras líneas de investigación

En la presente ponencia se propone un modelo que permite la optimización de la gestión del mantenimiento de infraestructuras y, concretamente, de una estructura de edificación. Las ventajas de la aplicación de esta herramienta son las siguientes:

Se establece un criterio objetivo para la evaluación a largo plazo de alternativas de inversión en mantenimiento de infraestructuras: la efectividad, medida como el área entre la curva de comportamiento de la infraestructura y un umbral mínimo de condición.

Se define un procedimiento para la determinación de la secuencia óptima de tratamientos que debe aplicarse a la infraestructura de forma que se cumplan las restricciones presupuestarias y un nivel mínimo de condición.

Se propone un método de resolución del problema de optimización mediante técnicas heurísticas. Estas técnicas son capaces de abordar problemas de explosión combinatoria dando soluciones cercanas a las óptimas con un tiempo de computación menor que los métodos de optimización matemáticos.

Una vez definido los principios del modelo, se prevé profundizar en el mismo con una aplicación práctica a una infraestructura real.

Agradecimientos

Los autores agradecen la financiación obtenida a través de Santander Universidades en el marco del programa de Becas Iberoamérica para Jóvenes Profesionales e Investigadores. Adicionalmente, los autores agradecen el aporte financiero realizado para este trabajo por el Ministerio de Ciencia e Innovación (Proyecto de Investigación BIA2011-23602).

Referencias

- [1] ASCE, ASCE 2013 Report Card for America's Infrastructure, 2013, fecha de consulta: mayo de 2013, <http://www.infrastructurereportcard.org>
- [2] Carbonell, A., González-Vidosa, F., Yepes, V., Design of reinforced concrete road vaults by heuristic optimization. *Advances in Engineering Software*, 42(4), 151-159, 2011. [doi:10.1016/j.advengsoft.2011.01.002.]
- [3] Chamorro, A., de Solminihac, H., Salgado, M., Barrera, E., Development and validation of a method to evaluate unpaved road condition with objective distress measures. *Transportation Research Record*, 2101, 3-9, 2009a. [doi: 10.3141/2101-01]
- [4] Chamorro, A., Tighe, S., Li, N., Kazmierowski, T.J., Development of distress guidelines and condition rating to improve network management in Ontario, Canada. *Transportation Research Record*, 2093, 128-135, 2009b. [doi: 10.3141/2093-15]

- [5] Chamorro, A., Tighe, S., Li, N, Kazmierowski, T.J., Validation and implementation of Ontario, Canada, network-level distress guidelines and condition rating. *Transportation Research Record*, 2153, 49-57, 2010. [doi: 10.3141/2153-06]
- [6] Chamorro, A., Tighe, S., Condition performance models for network-level management of unpaved roads. *Transportation Research Record*, 2204, 21-28, 2011. [doi: 10.3141/2204-03]
- [7] El-Sibaie, M., Zhang, Y.J., Objective Track Quality Indices. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1863, 81-87, 2004. [doi:10.3141/1863-11]
- [8] Grant, A.; Ries, R., Impact of building service life models on life cycle assessment. *Building Research and Information*, 41(2), 168-186, 2013. [doi:10.1080/09613218.2012.730735]
- [9] Gutiérrez-Bolivar, O., Achútegui, F., *Desarrollo Práctico de los Sistemas de Gestión de Firmes*. Madrid, España: CEDEX, Centro de Estudios de Carreteras, 2003.
- [10] Haas, R., Tighe, S. L., Cowe Falls, L., Determining return on long-life pavement investments. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 1974, 10-17, 2006.
- [11] Hudson, W. R., Uddin, W., Haas, R. C., *Infrastructure Management: Integrating Design, Construction, Maintenance, Rehabilitation and Renovation*. McGraw-Hill Professional Publishing, 1997.
- [12] Kemp, R., Is America on the road to ruin? *Public Works*, 136(8), 21-22, 2005.
- [13] Khurshid, M. B., Irfan, M., Labi, S., Comparison of methods for evaluating pavement interventions: Evaluation and case study. *Transportation Research Record: Journal of the Transportation Research Board*, 2108, 25-36, 2009.
- [14] Latorre, V., Roberts, M., Riley, M. J., Development of a systems dynamics framework for KPIs to assist project managers' decision making processes. *Revista de la Construcción*, 9(1), 39-49, 2010.
- [15] Martí, J. V., Gonzalez-Vidoso, F., Yepes, V., Alcalá, J., Design of prestressed concrete precast road bridges with hybrid simulated annealing. *Engineering Structures*, 48, 342-352, 2013. [doi:10.1016/j.engstruct.2012.09.014]
- [16] Miller, J. D. *Infrastructure 2007: A global perspective*. Washington, D.C., USA: ULI—the Urban Land Institute and Ernst & Young, 2007.
- [17] Neves, L. C., Frangopol, D. M., Condition, safety and cost profiles for deteriorating structures with emphasis on bridges. *Reliability Engineering & System Safety*, 89(2), 185-198, 2005. [doi:10.1016/j.res.2004.08.018]
- [18] OECD - Organization of Economic Cooperation and Development, *Asset management for the roads sector*. Paris: OECD Publishing, 2001.
- [19] Parkin, S., Sommer, F., Uren, S., Sustainable development: understanding the concept and practical challenge. *Proceedings of the ICE - Engineering Sustainability*, 156(1), 19-26, 2003. [doi:10.1680/ensu.2003.156.1.19]

- [20] Radujković, M., Vukomanović, M., Dunović, I.B. Application of Key Performance Indicators in South-Eastern European construction. *Journal of Civil Engineering and Management*, 16(4), 521-530, 2010. doi:10.3846/jcem.2010.58
- [21] Spedding, P. A., *CIOB Handbook of Facilities Management* (1.^a ed.). Longman, 1994.
- [22] Torres-Machi, C., Yepes, V., Alcalá, J., Pellicer, E., Optimization of high-performance concrete structures by Variable Neighborhood Search. *International Journal of Civil Engineering*, 11(2), 90-99, 2013.
- [23] Yepes, V.; González-Vidosa, F.; Alcalá, J.; Villalba, P. CO₂-Optimization Design of Reinforced Concrete Retaining Walls based on a VNS-Threshold Acceptance Strategy. *Journal of Computing in Civil Engineering ASCE*, 26 (3), 378-386, 2012. [doi:10.1061/(ASCE)CP.1943-5487.0000140]

Fundamentos matemáticos para el cálculo de una Cúpula Geodésica Icosaédrica de Orden n. Diseño y aplicación a la Edificación.

Milagro Iborra Lucas; Universitat Politècnica de València. miborra1@csa.upv.es

Marino Bañón Muñoz. marinosk8@gmail.com

Resumen

Son de especial interés la aplicación de las estructuras tridimensionales en el campo arquitectónico y objeto de estudio en el caso específico de la asignatura de Construcción de las Estructuras, Construcción IV y Construcción V, cursada en el quinto y sexto semestre de los estudios impartidos en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación. Se propone como objetivo del trabajo complementar la construcción de las estructuras espaciales a partir de mallas tridimensionales, que actualmente es objeto de estudio en la asignatura, con el estudio teórico y con base matemática, del caso particular de una Cúpula Geodésica que ayude al alumno a una mejor comprensión de esta tipología estructural.

Palabras clave: *Cúpulas geodésicas, mallas espaciales, geometría analítica, icosaedro.*

Introducción

Las estructuras tridimensionales o mallas espaciales están formadas por un gran número de barras, de longitudes pequeñas comparadas con la totalidad de la estructura, uniéndose a través de sus extremos, constituyendo los nudos y configurando finalmente una red tridimensional. En estas redes, los elementos que las componen, siguen unos determinados principios de organización y disposición estructural establecida. Las tramas trianguladas se generan básicamente a partir de figuras geométricas que se rigen por determinadas leyes que unen estabilidad estática e indeformabilidad, partiendo dichas figuras de poliedros regulares que dividen el espacio de forma más o menos regular. El interés particular en esta tipología estructural radica en su gran resistencia para el mínimo peso de material por superficie construida, tratándose de obtener el máximo rendimiento del material con la máxima ligereza, resistencia y estabilidad.

Son de especial interés, la aplicación de las estructuras tridimensionales en el campo arquitectónico y objeto de estudio en el caso específico de la asignatura de Construcción de las Estructuras, Construcción IV y Construcción V, cursada en el quinto y sexto semestre de los estudios impartidos en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación. Se propone como objetivo del trabajo complementar la parte práctica y constructiva, que actualmente es objeto de estudio en la asignatura, con la

parte más teórica y con base matemática que ayude al alumno a una mejor comprensión de esta tipología estructural.

Es objeto del presente trabajo, el estudio particular de las mallas tridimensionales que forman las Cúpulas Geodésicas, obteniéndose estas a partir de sólidos regulares conocidos como sólidos platónicos. Para formar la cúpula se parte, en este caso particular, del poliedro convexo llamado Icosaedro, cuyas caras son polígonos regulares, en este caso triángulos equiláteros. Para hacer que un Icosaedro se aproxime a la esfera, y consigamos la Cúpula Geodésica, los triángulos que lo configuran irán subdividiéndose por triángulos más pequeños, así pues iremos generando Cúpulas de frecuencia u orden “n” en función de las subdivisiones que se realicen en las aristas de los correspondientes triángulos que conforman el Icosaedro. Una consecuencia del proceso de subdivisión de los triángulos es que al proyectar los vértices de los mismos hacia la esfera, los lados de dichos triángulos cambian, dejando de ser todos de la misma longitud y por tanto equiláteros. A medida que aumentamos la frecuencia de la Cúpula Geodésica, aumentamos el número de longitudes distintas. Ahí radica la base matemática objeto del presente estudio, en la obtención espacial de cada uno de los vértices que se genera en la subdivisión del Icosaedro y la obtención de las distintas aristas de los triángulos que la componen.

Como última parte del trabajo, se expone la experiencia de la construcción de una cúpula geodésica, llevada a cabo en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación, de la Universitat Politècnica de València, con alumnos matriculados en el título de Grado de Arquitecto Técnico.

Antecedentes

Las cúpulas como elemento matemático, geométrico, como solución a la cubrición de un espacio, optimización energética y de aprovechamiento del espacio, como elemento estable, sagrado, muchas son las acepciones que se asignan a la forma geométrica esfera/cúpula.

A lo largo de la historia, numerosas son las edificaciones en las que se ha buscado la forma esférica como solución constructiva, ya sea por motivos estéticos o prácticos. Las cúpulas pueden presentar muchas formas, siendo la más sencilla la superficie de revolución, donde todas las secciones horizontales son circulares.

En el ámbito arquitectónico son conocidas la construcción de cúpulas desde la antigüedad hasta épocas más recientes, como son el Panteón de Roma (117-128); Santa Sofía en Estambul (532-537); Santa María de las Flores en Florencia (1438-147); San Pedro de Roma, (1506-1626); el Salón del Centenario, en Breslau (1911-1913) y el Gran Mercado de Leipzig (1927-1929), construidas de ladrillo, piedra y hormigón armado en las construcciones más actuales, buscando en ello la disminución del espesor y por tanto la ligereza del conjunto, para mayores luces de cubrición,

siendo el hormigón armado (segunda mitad del s.XIX) el material más eficaz para permitir esas necesidades.

Particularizando en el campo de las cúpulas geodésicas, objeto del presente estudio, las primeras referencias, a su aplicación/construcción, nos hablan de Walther Bauersfeld (1879-1959), ingeniero alemán empleado de Carl Zeiss Optical Works Corporation, para quién diseñó y construyó (1923) un domo geodésico en el techo de uno de los edificios de la Zeiss, domo desarrollado a partir de un icosaedro de 16 m. de diámetro.

Otra figura relevante y quizá con mayor trayectoria y profundidad en el estudio de las cúpulas geodésicas fue el arquitecto, ingeniero, matemático, inventor, diseñador?, R. Buckminster Fuller (Massachusetts, 1895-1983), (1), que se dedicó a la investigación de grandes superficies portantes y diseñó (patentó en 1951) las cúpulas geodésicas, basadas en la combinación regular de superficies triangulares, es conocida la esfera geodésica del Pabellón Americano de la Feria Mundial del Montreal de Canadá (1967), de 76 metros de diámetro, ocupando tres cuartas partes de una esfera. Entre otras cúpulas, diseñó la formada por planchas de acero hexagonales para la Union Tank Car Company, en Baton Rouge (1958), Louisiana, de 117 metros y también una cúpula geodésica que se mostró en la Exposición norteamericana de Moscú (1959). Dentro de sus proyectos ideó una cúpula geodésica de dos millas de diámetro sobre Manhattan, el objeto era conseguir un espacio de alguna manera artificial, donde se permitiera proteger a la ciudad de la climatología exterior, conseguir un control de la temperatura y por tanto permitir un mayor ahorro energético. En todos sus diseños destaca el interés por conseguir la máxima eficiencia en las construcciones, minimizando recursos, en combinación con la tecnología, la durabilidad y la confortabilidad, siendo todos estos aspectos de especial interés y relevancia en la actualidad.

Fuller simboliza una aparente independencia frente a la burocracia industrial, haciendo ello que se convirtiera en un ídolo y fuera admirado por muchos jóvenes estadounidenses, siendo el propio Fuller y la construcción de las cúpulas geodésicas una fuente de inspiración para las casas escogidas por muchos habitantes de comunas (Drop City) del ámbito rural (2). Es este un factor importante que ha llevado al actual interés creciente por este tipo de construcciones, y tal como ocurriera en los años 60 en EEUU, siguen siendo de especial interés actualmente en el área de la autoconstrucción, la sostenibilidad, etc.

Por qué una Cúpula Geodésica.

Algunos de los aspectos que despiertan más interés sobre las cúpulas geodésicas son los relacionados con: (1), (3)

Su reducido peso por unidad de superficie, ya que hablamos de construcciones muy ligeras, formadas a partir de la subdivisión de una esfera en triángulos, figuras indeformables, polígonos estables. Por ejemplo la cúpula geodésica del Pabellón de Montreal pesó 53 kg/m².

La superficie esférica encierra un menor volumen por m² frente a una solución porticada, con la ventaja que ello ofrece desde un punto de vista energético como es el control de la temperatura, interiormente se producen flujos de aire caliente/frío que se utilizan para el control de la temperatura interior.

Se considera una estructura estable por estar formada por múltiples elementos poligonales ya estables por sí mismos, los triángulos. Estos se interconectan formando círculos máximos que a su vez dan fuerza y estabilidad a la totalidad de la construcción.

Además son estructuras que permiten una cierta prefabricación, mediante trabajo de taller, de forma que se optimiza el montaje, reduciéndolo a semanas, días o pocas horas dependiendo de la magnitud de la cúpula, con el valor añadido de que además puede desmontarse y montarse nuevamente.

Comportamiento estructural.

El comportamiento estructural de los diferentes tipos de cúpulas se puede analizar desde los conceptos de la Estática. La cúpula como membrana estaría definida dentro de la teoría moderna de las estructuras como una superficie curva, considerándose un espesor muy pequeño comparado con el resto de dimensiones de la estructura. Los esfuerzos que actúan sobre la membrana curva, tanto peso propio como sobrecargas, deben resistirse mediante esfuerzos que se consideran actuando dentro de la propia superficie, considerando que dichos esfuerzos son de tracción o compresión. Pero aquí no estamos hablando de una membrana continua, sino de una superficie generada a partir de muchos elementos/barras que finalmente generan una malla espacial.

Estructuras espaciales.

Una malla espacial es una disposición estructural consistente en un gran número de barras, de longitud pequeña comparada con toda la estructura, unidas entre sí a través de sus extremos, dando lugar a una red tridimensional, en la que los elementos siguen determinados principios de organización y una disposición estructura determinada. Las mallas se basan en la triangulación, por ser el triángulo el polígono más rígido que puede obtenerse en el plano. La disposición de dichos triángulos hará que la red de barras que constituya la malla, estén trabajando unas a compresión y otras a tracción, absorbiendo los esfuerzos cortantes. Las tramas que originan las redes tridimensionales se generan a partir de figuras geométricas (poliedros regulares) regidas por la estabilidad estática e indeformabilidad. Con estos sistemas

se obtienen grandes resistencias con el máximo rendimiento y con el mínimo peso por m².

La cúpula geodésica. ¿Una construcción segura?

Dentro de las estructuras espaciales, es de especial atención la construcción de las cúpulas geodésicas. Estas se basan en los principios básicos de las estructuras de Tensegridad, que permiten montar estructuras simples asegurando su integridad tensorial. Desde un punto de vista estable, resistente, estamos ante una construcción que se considera segura, confiriéndole esa estabilidad la propia triangulación de la malla, de forma que la interconexión de sus lados forman, a su vez, una red Geodésica de círculos máximo o hiladas que otorgan equilibrio y seguridad al conjunto.

Las cúpulas transmiten su peso propio y el de las sobrecargas uniformemente a la base a través del anillo inferior y además la disposición del centro de gravedad del conjunto es bajo, confiriendo una gran ventaja frente a las acciones sísmicas. Su forma aerodinámica le confiere mayor resistencia o protección frente a vientos de cualquier dirección.

Así pues, como cualquier estructura, la seguridad estructural de una construcción tipo cúpula geodésica, estará garantizada si el edificio resiste los esfuerzos previstos, es estable y si se puede utilizar con normalidad, es decir si las condiciones de servicio se cumplen.

Fundamentos matemáticos de una cúpula geodésica.

En primer lugar señalar que, la cúpula objeto de estudio se genera a partir del icosaedro, este se encuentra dentro de un pequeño grupo de poliedros regulares, denominados **sólidos platónicos**, caracterizándose por tratarse de poliedros convexos cuyas caras son polígonos regulares iguales y en cuyos vértices se unen el mismo número de caras. Para generar la cúpula geodésica se dividen las aristas de cada cara del poliedro en partes iguales, “n”, de forma que se van subdividiendo las caras iniciales por otras de menor dimensión. Cada una de las caras va generando a su vez vértices que se proyectarán hacia la esfera inicial definida por el icosaedro de partida, teniendo como referencia el centro de esa esfera. Así pues partimos de un icosaedro, nuestro poliedro origen, y llegamos a la definición de una cúpula geodésica 4v, es decir, de orden o frecuencia 4, hemos subdividido la cara inicial del icosaedro en cuatro partes.

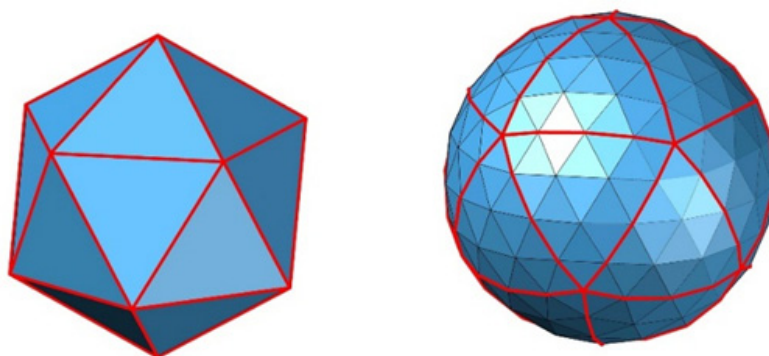


Figura 1. Icosaedro Regular y Subdivisión Geodésica del Icosaedro 4v

A continuación enunciaremos y detallaremos el proceso matemático.

Enunciado del problema: Partiendo de la arista “a” de un icosaedro regular, hallar las coordenadas de los vértices de la esfera geodésica resultantes de la subdivisión de frecuencia 4, por el Método I, Clase I.

Cálculo de las coordenadas de los vértices del Icosaedro

Sean **I**, un icosaedro de arista **a** inscrito en una esfera de radio **R**; **P**; un pentágono regular (véase la Subfigura 2A) y un triángulo rectángulo **T** (véase la Subfigura 2B) inscritos ambos en el icosaedro.



Subfigura 2A. Pentágono P



Subfigura 2B. Triángulo rectángulo T

Figura 2. Icosaedro inscrito en la esfera; pentágono y triángulo rectángulo utilizado en los cálculos

En primer lugar, se calculan la diagonal **d** y el radio **r** del pentágono **P** (véase la Figura 3) de arista **a**, mediante las fórmulas:

$$d = 2a \operatorname{sen}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 2a \operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{10}\right) = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})a \quad (1)$$

$$r = \frac{a}{2\text{sen}(\beta)} = \frac{a}{2\text{sen}\left(\frac{\pi}{5}\right)} = \frac{a}{\sqrt{\frac{5}{2}} \frac{\sqrt{5}}{2}}$$

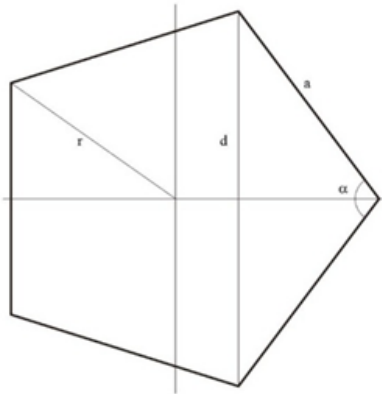


Figura 3. Pentágono P

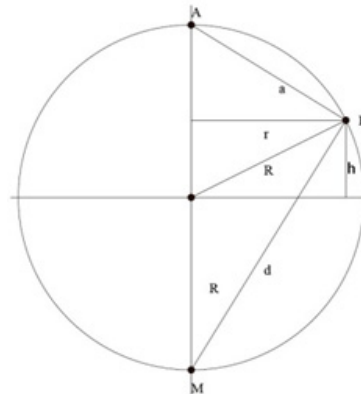


Figura 4. Triángulo T

Sean A, B y M los vértices del triángulo rectángulo **T** (véase la Figura 4), a partir del cual se calcula el radio **R** de la esfera, mediante las ecuaciones:

$$4R^2 = a^2 + d^2$$

Sustituyendo **d** según (1) se obtiene:

$$R = \sqrt{\frac{5a^2}{8} + \frac{\sqrt{5}a^2}{8}}$$

Se calculan a continuación las coordenadas de los vértices del icosaedro. **A**, compartido por el pentágono y el rectángulo, se toma por simplicidad como:

$$A = (0,0,R)$$

Y **B**; tomando también por simplicidad $y=0$, compartidos por el pentágono y el triángulo rectángulo y, por ello, son también vértices el icosaedro; mediante las ecuaciones:

$$B = (r,0,h) = (r,0\sqrt{R^2 - r^2})$$

Con h introducido en la Figura 4.

A continuación se calculan el resto de los de los vértices del icosaedro, coplanarios con B en el mismo plano horizontal, mediante el giro sucesivo del punto **B**, de radio **r**, eje **Z** y ángulo $2\pi/5$, obteniéndose:

$$C = \left(r \cos\left(\frac{2\pi}{5}\right), r \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{5}\right), \frac{a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right)$$

$$D = \left(r \cos\left(\frac{4\pi}{5}\right), r \operatorname{sen}\left(\frac{4\pi}{5}\right), \frac{a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right)$$

$$E = \left(r \cos\left(\frac{6\pi}{5}\right), r \operatorname{sen}\left(\frac{6\pi}{5}\right), \frac{a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right)$$

$$F = \left(r \cos\left(\frac{8\pi}{5}\right), r \operatorname{sen}\left(\frac{8\pi}{5}\right), \frac{a}{\sqrt{10-2\sqrt{5}}} \right)$$

Y por último se calculan los puntos de la semiesfera inferior, que serán los simétricos de los anteriores respecto del centro de la esfera.



Figura 5. Coordenadas de los vértices

Cálculo de la subdivisión geodésica de clase I, de un triángulo generador del icosaedro.

Sea **ABC** la cara del icosaedro definida en la *Figura 5*. Se divide cada uno de sus lados en 4 partes iguales (subdivisión de frecuencia 4), generando 16 subtriángulos

equiláteros iguales. A continuación se calculan las coordenadas de cada uno de los 15 vértices resultantes.

Sean los vectores \vec{u} y \vec{v} los vectores definidos por:

$$\vec{u} = \frac{B-A}{4}; \quad \vec{v} = \frac{C-A}{4}$$

y la referencia afín: $\{A, \vec{u}, \vec{v}\}$, entonces el conjunto V de todos los vértices de los citados subtriángulos viene definido por:

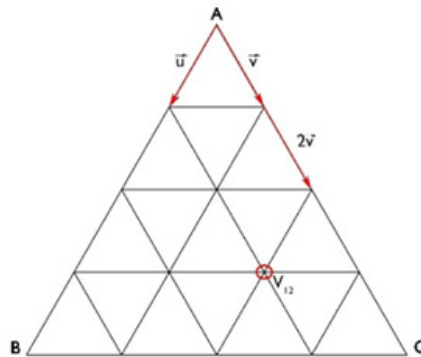


Figura 6. Subtriángulos

$$V = \left\{ V_{ij} = A + i\vec{u} + j\vec{v}; \quad 0 \leq i \leq 4; \quad 0 \leq j \leq 4; \quad 0 \leq i + j \leq 4 \right\} \quad (2)$$

Este proceso se repite para de cada una de las restantes caras del icosaedro.

Proyección del conjunto V de vértices, sobre la superficie de la esfera.

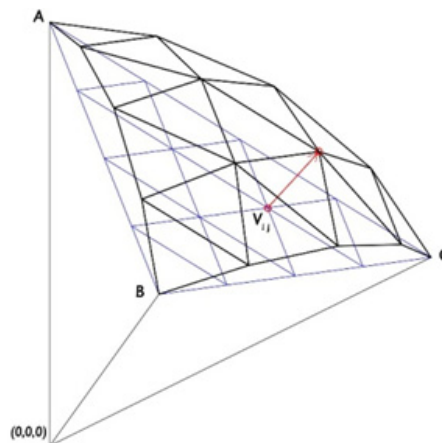


Figura 7. Proyecciones de los vértices del triángulo sobre la esfera.

Las proyecciones P_{ij} de los vértices V_{ij} del conjunto V sobre la esfera son:

$$P_{ij} = \frac{V_{ij}}{\|V_{ij}\|}$$

Véase la Figura 7, repitiéndose la misma operación para el resto de las caras del icosaedro. Véase la Figura 8.

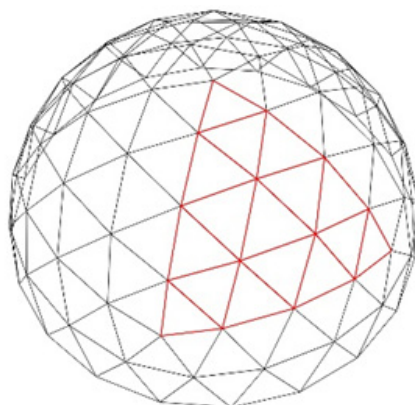


Figura 8

Experiencia. Construcción de una cúpula geodésica.

A partir de la experiencia de la construcción de una cúpula geodésica en la ETSIE, pretendemos justificar la vinculación de las matemáticas con parte de las competencias asignadas al título de Grado y a la profesión.

A continuación se expone el proceso constructivo de una cúpula geodésica llevado a cabo en la Escuela Técnica Superior de Ingeniería de Edificación, con el afán de demostrar que el presente proyecto además de enunciar un problema matemático, describe una situación real, en nuestro caso la construcción de las estructuras, objeto de los contenidos que se imparten en las asignaturas de Construcción IV (Construcción de las Estructuras Metálicas) y Construcción V (Construcción de las Estructuras de Hormigón Armado y Pretensado).

Descripción de la cúpula.

Tipología constructiva: estructura espacial, malla geodésica hemisférica.

Definición de la cúpula y materiales: se trata de una cúpula geodésica formada a partir del polígono regular icosaedro de frecuencia 4 y radio 2,64 metros, constituida por listones de madera de sección 20x30 mm, ensamblados con fijaciones mecánicas.

Diseño de la cúpula: tomando como base los estudios geométricos y matemáticos descritos en el apartado anterior, se ha obtenido la descomposición exacta de la cúpula, es decir, dimensiones de barras, ángulos axiales y verticales de cada una de ellas, que quedan plasmados en unas tablas o planillas de corte y montaje.

En la tabla 1, se describen las características de la cúpula objeto de la experiencia.

Tabla 1. Características Cúpula geodésica 4v, Radio 2,64m

Características Cupula Geodesica 4v, Radio 2,64m		Frecuencia de subdivisión	4
ARISTAS		CARAS / Triangulos	
250	ARISTAS	160	Unidades
6	tipos distintos de puntal	5	tipos distintos
Area Media esfera	43,96	m2 (Paneles triangulares exteriores)	
	43,08	m2 (Paneles triangulares interiores) Aprox.	
Circunferencia	16,62	m perimetro	
Area de la base	21,98	m2 (Suelo)	
Volumen Cupula	38,76	m3	

Proceso constructivo.

Previo al inicio de los trabajos de construcción de la cúpula, partimos de una base de datos, que se materializa en “planillas de taller”, en la que se donde se plasman todos los datos geométricos de cada una de las barras que compondrán la cúpula para proceder a su corte en taller, como se muestra en la tabla.

Tabla 2. Ejemplo de tabla para corte en taller.

TABLA DE ANGULOS PARA CORTAR EN TALLER									
TRIANGULO AAC			30		h listón		2		cm
Nº	ARISTA	LONGITUD DE CALCULO (m)	LONGITUD A RESTAR (cm)	LONGITUD REAL (m)	IZQUIERDA		DERECHA		Comprobación Geométrica
					Ang. Horiz.	Ang. Vertical	Ang. Horiz.	Ang. Vertical	
30	A 1	0,6696611	2,111	64,8551	7,27	18,667	7,27	35,666	ok
30	A 2	0,6696611	2,462	64,5043	7,27	35,666	7,27	18,667	ok
30	C 1	0,7809098	2,462	75,6292	8,49	35,666	8,49	35,666	ok

h = altura del listón

EJEMPLO TRIANGULO BDE

La construcción de la cúpula geodésica comprende dos fases diferenciadas. En primer lugar hay un proceso de trabajo en taller, entendiéndose por taller, un espacio físico habilitado para ello a pie de obra o bien en una instalación industrial específica. Con los datos, se procede al corte de longitudes y ángulos de los listones de madera, que configurarán cada una de las barras de la malla geodésica, y a un acopio ordenado por tipo de las mismas, para posteriormente realizar el montaje de dichas barras que conformarán los distintos tipos de triángulos que generaran la cúpula geodésica. Es importante en estas fases hacer hincapié en el “acopio ordenado”, dado que dependiendo de la magnitud de la cúpula la variabilidad de triángulos que se originan es muy alta, conllevando ello a una mayor o menor facilidad posterior del montaje de la cúpula.



Imagen 1. Corte de listones.



Imagen 2. Montaje de triángulos.

Finalizado el trabajo de taller y con todos los triángulos que configuran la cúpula se procede al transporte y montaje in situ. En el caso particular que nos ocupa se utilizaron fijaciones mecánicas de forma que la única herramienta necesaria en el proceso fue de un atornillador.



Imagen 3. Acopio triángulos



Imagen 4. Montaje Cúpula

Tras la experiencia, se están estudiando otros medios de unión de barras que mejoren el sistema estructural a la vez que facilitarán el posterior montaje/desmontaje

de la misma, pudiendo ello conllevar procesos de mecanizado adicionales en las barras de madera.



Imagen 5. Cúpula Geodésica 4v, instalada en la ETSIE

Paralelamente al trabajo de taller, se hizo un estudio de modelización y simulación de la cúpula geodésica construida, integrando en ella un posible espacio, con el objeto de hacer un pequeño análisis de la viabilidad de esta construcción en el ámbito de la edificación.

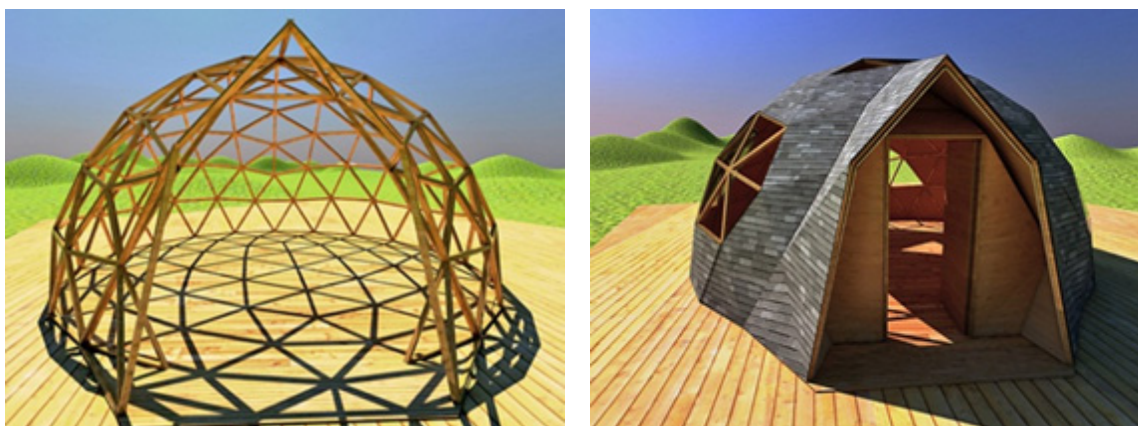


Imagen 6 y 7. Recreación virtual de la estructura y el acabado exterior de la Cúpula Geodésica 4v

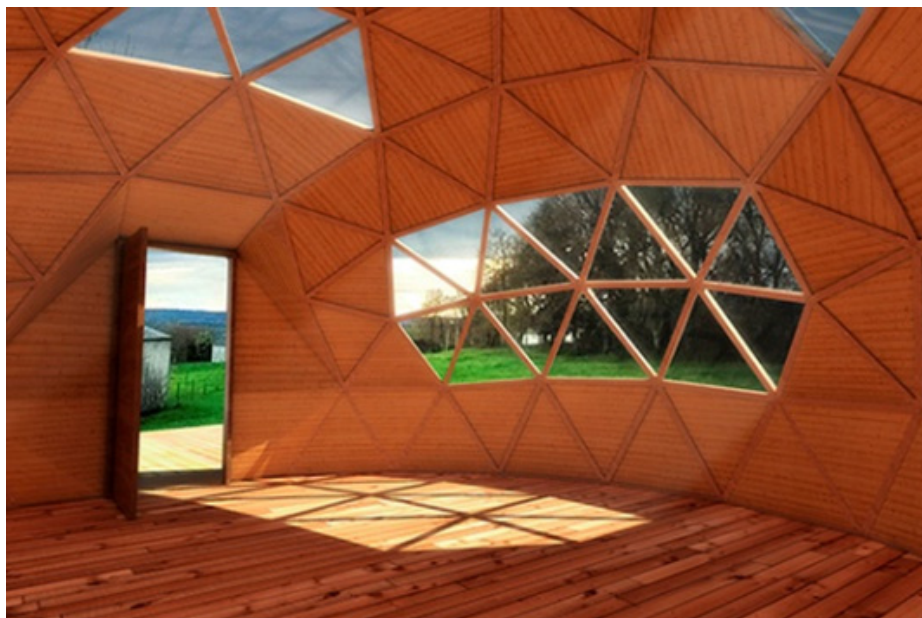


Imagen 8. Simulación Virtual del interior de la Cúpula Geodésica 4v

Conclusiones

Son muchas las disciplinas que intervienen en el proceso de cualquier “producto”, y a veces la exhaustiva especialización impide conexas el origen y razón de ser de muchas formas que actualmente vemos en el ámbito de la edificación/arquitectura/construcción.

Con este trabajo queremos hacer una pequeña contribución en cuanto a los fundamentos matemáticos que rigen la geometría de las cúpulas geodésicas y contribuir a la transmisión del conocimiento a través de nuestra experiencia.

Referencias

- [1] IBÁÑEZ, R. “El vientre de un arquitecto”. Un paseo por la geometría. 2003/04. Universidad del País Vasco,
- [2] TURNER, F. “Un tecnócrata para la contracultura”. Arquitectura Viva. Monografías. Buckminster Fuller, nº 143, (2010).
- [3] KAHN, LI. El Cobijo-Domebook 3. Ed. Shelter, California USA, 1973.

Modelo Empírico para nuevos materiales de construcción

Romina del Rey Tormos*

Jesús Alba Fernández*

*IGIC. Institut per a la Gestió Integrada de Zones Costeres. Escola Politècnica Superior de Gandia. Universitat Politècnica de València.

Resumen

En este trabajo se obtienen modelos empíricos que permiten conocer el comportamiento acústico de nuevas soluciones constructivas en la edificación. Este trabajo se engloba dentro del Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen, donde los alumnos de las materias específicas referidas a imagen y sonido deben de ser capaces de hacer cumplir la legislación vigente en cuanto a Protección frente al ruido se refiere. En ocasiones, es necesario analizar cada una de las diferentes componentes constructivas de todo el elemento constructivo para conocer el comportamiento global frente al ruido de este. Existe normativa donde se describen los procedimientos tanto de ensayo como de simulación. Algunas de estas normativas son de los años 80, donde las lanas minerales eran la base de los materiales absorbentes acústicos. El alumno se encuentra con que la normativa vigente no refleja las soluciones actuales de edificación, y a partir de este trabajo es capaz de solucionar el problema mediante la aplicación de modelos empíricos.

Palabras clave *Modelo empírico, materiales absorbentes, ajuste, función de error.*

Introducción

Dentro del bloque de tecnologías específicas del GITSI (Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen), se debe formar al alumno para que al terminar el grado sea capaz de poder aplicar y hacer cumplir el Código Técnico de la Edificación, en concreto el Documento de Protección frente al Ruido [1]. Para ello es necesario conocer las características acústicas de los elementos que componen la edificación sometida a estudio: valores de masa, datos de aislamiento acústico, de absorción sonora, rigidez dinámica, coeficiente de absorción, etc. Existen distintas posibilidades entre las que se encuentran el uso de modelos físicos de gran complejidad de uso, o que necesitan del conocimiento de parámetros muy complicados de determinar. Por ello se ha extendido el uso de modelos empíricos para describir el comportamiento acústico de los materiales absorbentes que forman las distintas soluciones constructivas. El uso de estos modelos, permite obtener información directa de los materiales, y combinados con otros, ayudan a obtener

datos de un conjunto de materiales que pueden definir una solución constructiva concreta.

Si se realiza un repaso histórico, los materiales más estudiados en este sentido han sido la lana de roca, la lana de vidrio y las familias de lanas minerales. Son muchos los autores que han descrito de forma empírica estas lanas minerales, siendo el más conocido el modelo de Delany & Bazley [2]. En este contexto además, normativas, como la UNE-EN 12354:2003 [3] “Estimación de las características acústicas de las edificaciones a partir de las características de sus elementos”, y en concreto la parte 6, “Absorción sonora en espacios cerrados” aconsejan el uso de fórmulas para la predicción de la absorción acústica de materiales absorbentes. En el caso de materiales compuestos por fibras, Delany & Bazley es la referencia obligada.

Es sabido que las lanas minerales han ido perdiendo protagonismo en la edificación para que nuevos materiales más sostenibles hagan la misma función. La dificultad de dar salida a diferentes residuos con la consiguiente búsqueda de materiales que se basen en ellos, o la opción de utilizar fibras naturales y/o recicladas ha ido abriendo un nuevo abanico de materiales reciclados y/o de fibra natural cuya huella de carbono es más baja, tanto en su fabricación como en su posterior reciclado. Algunos ejemplos son materiales elaborados a partir de poliéster, de distintos materiales reciclados como espumas, o de fibras naturales, como coco o kenaf. En este trabajo que se propone el alumno es capaz de obtener un modelo semi-empírico desarrollado por él mismo, tomando como referencia los pasos seguidos por Delany&Bazley [2] y Garai&Pompoli [3]. Se realiza un ajuste para determinar los coeficientes que mejor describen el comportamiento acústico de los materiales absorbentes acústicos utilizados, sea cual sea su origen. Para llevar a cabo el ajuste es necesario disponer de datos del coeficiente de absorción para incidencia normal y de resistencia al flujo del material en cuestión. Estos parámetros los obtiene el propio alumno en el laboratorio de acústica de la Escuela Politécnica Superior de Gandía de la Universitat Politècnica de València.

Desarrollo

El modelo semi-empírico que el alumno obtiene pretende describir el comportamiento acústico de todo tipo de material fibroso utilizando el menor número posible de parámetros físicos no intrínsecos, atenuando de esta forma algunos errores de propagación que se cometen al utilizar parámetros obtenidos experimentalmente para implementar modelos empíricos. Se les muestra a los alumnos distintos tipos de materiales absorbentes acústicos de los que se dispone en el laboratorio. Al mismo tiempo se les muestra imágenes de microscopio de los mismos materiales. De esta forma nace la motivación del alumnado de encontrar un modelo propio para cada tipo de material, ya que a partir de las imágenes que muestran la distribución de fibras, los alumnos entienden que el comportamiento de la onda acústica en el

seno del mismo es particular en cada caso. En la Figura 1 se muestra algunos ejemplos.

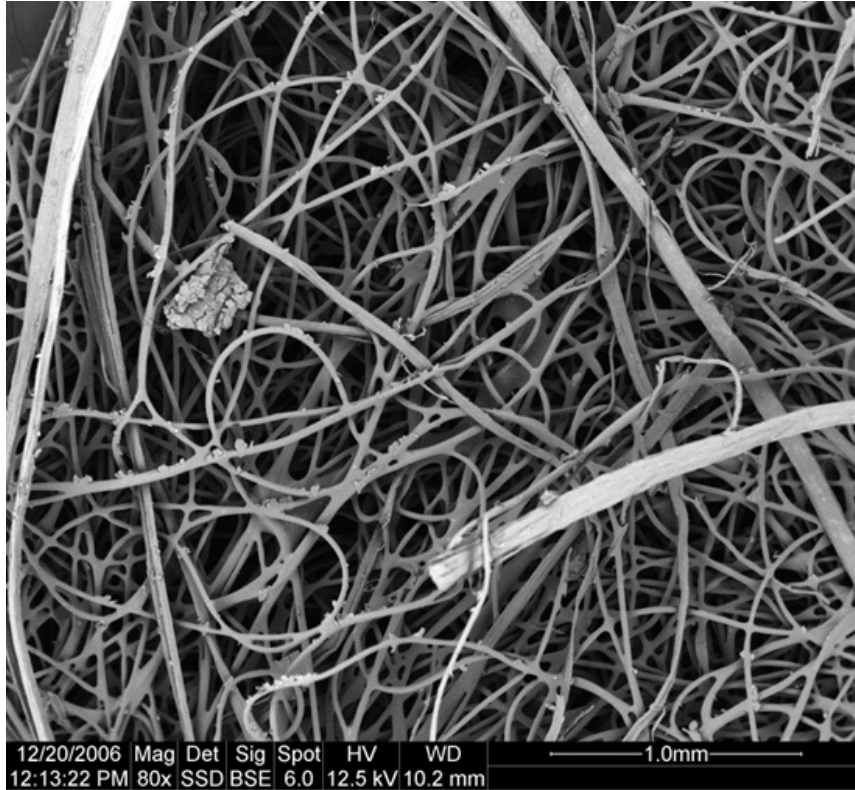


Figura 1 Imágenes de microscopio de distintos tipos de fibras.

Modelo Semiempírico

Básicamente, se trata de encontrar los coeficientes C_i ($i=1\dots 8$) que mejor ajusten las ecuaciones ya descritas por Delany&Bazley [2] para el caso del material que se esté tratando:

$$\alpha = \left(\frac{2 \times \pi \times f}{c_0} \right) \times \left[C_5 \times \left(\frac{\rho_0 \times f}{r} \right)^{-C_6} \right] \quad (1)$$

$$\beta = \left(\frac{2 \times \pi \times f}{c_0} \right) \times \left[1 + C_7 \times \left(\frac{\rho_0 \times f}{r} \right)^{-C_8} \right] \quad (2)$$

$$Z_R = \rho_0 \times c_0 \left[1 + C_1 \times \left(\frac{\rho_0 \times f}{r} \right)^{-C_2} \right] \quad (3)$$

$$Z_I = -\rho_0 \times c_0 \left[C_3 \times \left(\frac{\rho_0 \times f}{r} \right)^{-C_4} \right] \quad (4)$$

A partir de estas ecuaciones se ha de modelar el coeficiente de absorción del material. Estas ecuaciones describen parte real y parte compleja de la constante de propagación e impedancia acústica, a partir de la frecuencia, f , densidad del aire (1.2 kg/m^3), velocidad de propagación del sonido en el aire (343 m/s^2) y la variable resistencia al flujo, en N*s/m^4 . Es necesario, pues, conocer los valores de la resistencia al flujo para el material sometido a estudio. Además, para obtener el coeficiente de absorción a partir de la constante de propagación y la impedancia descrita en [4] se utiliza la siguiente expresión:

$$\alpha_n = \frac{4 \cdot Z_{IR} \cdot \rho_0 \cdot c_0}{|Z_I| + 2 \cdot \rho_0 \cdot c_0 \cdot Z_{IR} + (\rho_0 \cdot c_0)^2} \quad (5)$$

Siendo l el espesor de la muestra y la expresión para la impedancia de cierre, Z_I

$$Z_I = (Z_R + j \times Z_I) \times [\coth(\alpha + j \times \beta) \times l] \quad (6)$$

Para llevar a cabo el ajuste es necesario disponer de datos del coeficiente de absorción para incidencia normal y de resistencia al flujo del material en cuestión. Los datos de entrada básicos son los de la resistencia al flujo ya que nos permiten obtener la parte real e imaginaria de la constante de propagación del material, así como la parte real e imaginaria de la impedancia característica normalizada.

Para obtener los coeficientes que describen de mejor forma el comportamiento acústico de las muestras de cada material, los alumnos han de utilizar un método iterativo de disminución de función de error cuadrática. Como valores iniciales de entrada, cada alumno escoge los coeficientes propuestos por diferentes autores. Todos los valores convergen a los coeficientes que cada alumno toma como propios. La función de error cuadrática del método iterativo utilizado, se define a partir de la diferencia entre el valor del coeficiente de absorción que se obtiene de forma experimental y el coeficiente de absorción que nos proporciona las expresiones de la (1) a la (4):

$$\varepsilon = \sum_{i=1}^N (\alpha_{n,i} - \hat{\alpha}_{n,i})^2 \quad (7)$$

Variables de entrada. Técnicas experimentales

Para llevar a cabo el ajuste es necesario disponer de datos del coeficiente de absorción para incidencia normal y de resistencia al flujo del material en cuestión. Los datos de entrada básicos es la resistencia al flujo ya que nos permiten obtener la parte real e imaginaria de la constante de propagación del material, así como la parte real e imaginaria de la impedancia característica normalizada.

La resistencia al flujo, se obtiene experimentalmente en el laboratorio utilizando el método de Ingard&Dear [5], que constituye una alternativa ventajosa a la Norma UNE-EN 29053:1994 [6]. La muestra a caracterizar se coloca en un tubo (tubo de Kundt) como el que se muestra en la figura 2. Deben verificarse una serie de condiciones en el montaje que se les resume a los alumnos en un guion de laboratorio. La resistencia al flujo puede obtenerse a partir de la función de transferencia de las señales de los dos micrófonos. Para los alumnos es bastante sencillo ya que midiendo el cociente de presiones entre dos puntos pueden obtener este parámetro, bajo unas condiciones que ya se les ha preparado anticipadamente.

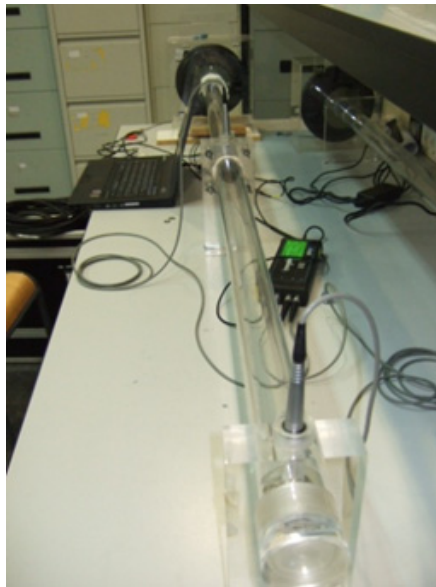


Figura 2 dispositivo de medida de la resistencia al flujo según Ingard&Dear.

Para obtener el coeficiente de absorción en incidencia normal, se aplica el método de la función de transferencia [7]. El procedimiento seguido se describe de forma detallada en [8]. En la figura 3 se presenta un esquema del dispositivo experimental con las posiciones de los micrófonos y la muestra. Las señales recogidas por los dos

micrófonos, previo tratamiento descrito en la normativa, permiten determinar el coeficiente de absorción.



Figura 3 dispositivo de medida del coeficiente de absorción en incidencia normal según UNE EN 10534-2:2002

Resultados

Los materiales absorbentes acústicos de los que disponen los alumnos aunque son de distintas familias todos ellos, para la realización de esta práctica son todos materiales fibrosos. Se disponen distintas muestras de kenaf, coco, yute, mezclas de distintas fibras naturales y poliéster reciclado. En este trabajo se muestran resultados de algunos de los ajustes que han realizado parte de los alumnos, y se comparan con distintos modelos. Los resultados que se muestran son de muestras de la fibra vegetal kenaf y muestras de poliéster reciclado. En las figuras 4 y 5 se muestran los resultados para dos muestras de kenaf de distinto gramaje y espesor. Se compara los valores de la absorción que se obtiene con el modelo propio, modelo kenaf, con las previsiones según normativa vigente, Delany&Bazley, o Pompoli&Garai. En las figuras 6 y 7 se muestran los resultados para dos muestras de poliéster reciclado. Las dos muestran diferentes gramaje y presentan un espesor de 40 mm. Se compara el modelo propio, PET, con el modelo de Pompoli&Garai. En ambos casos la absorción empírica se compara con los valores experimentales. El trabajo de los alumnos de grado termina con la obtención de los coeficientes C_i . Es el profesorado el que realiza las comparaciones que se observan en estas figuras.

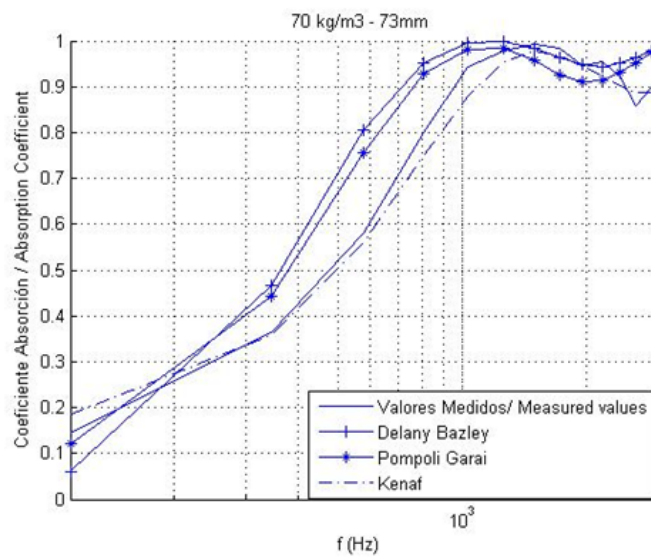


Figura 4 coeficiente de absorción en incidencia normal, comparación entre valores medidos y predichos por distintos modelos. Kenaf 70 kg/m³ y 73 mm de espesor.

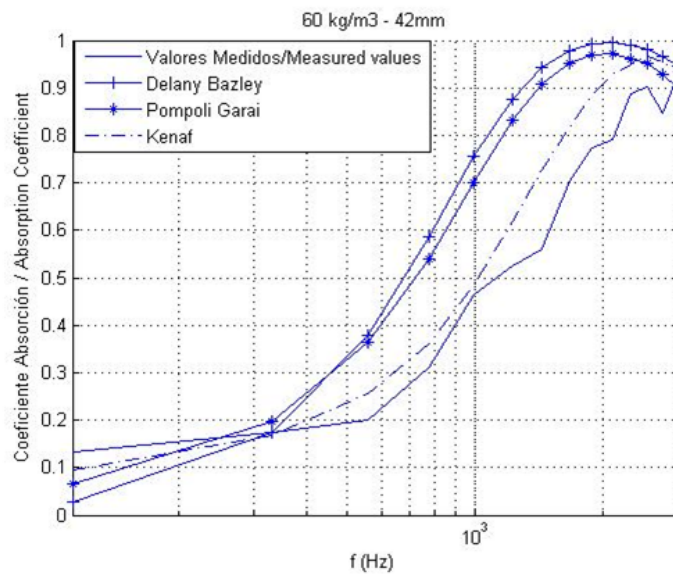


Figura 5 coeficiente de absorción en incidencia normal, comparación entre valores medidos y predichos por distintos modelos. Kenaf 60 kg/m³ y 42 mm de espesor.

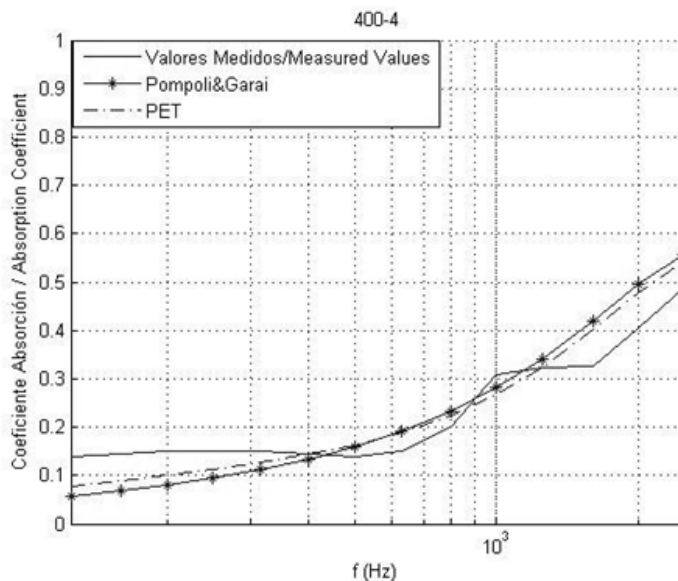


Figura 6 coeficiente de absorción en incidencia normal, comparación entre valores medidos y predichos por distintos modelos. Poliéster Reciclado 1200 g/m² y 40 mm de espesor

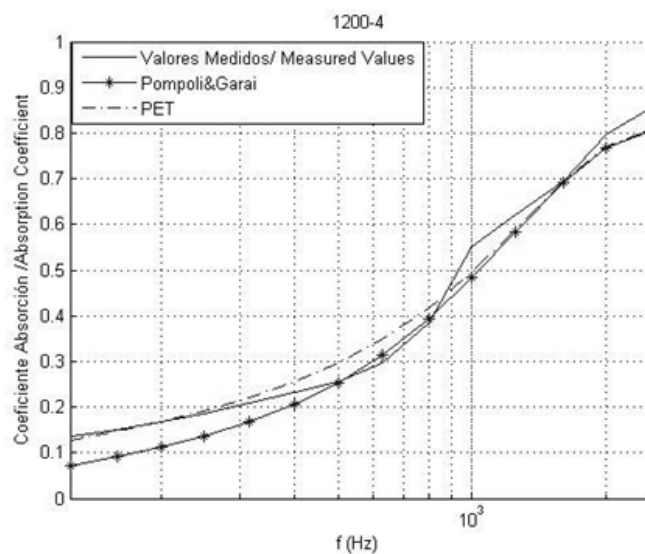


Figura 7 coeficiente de absorción en incidencia normal, comparación entre valores medidos y predichos por distintos modelos. Poliéster Reciclado 400 g/m² y 40 mm de espesor.

Conclusiones

Las conclusiones desde el punto de vista de la teoría de materiales para soluciones acústicas se describen a continuación. Se puede observar que la correlación entre los valores medidos en laboratorio y valores predichos, utilizando el modelo frecuencial (constante de propagación e impedancia acústica), con los coeficientes obtenidos en cada caso en particular es satisfactoria. El modelo de Delany&Bazley [2] se ajusta a los valores experimentales en algunos materiales, como lana de roca. El modelo de Pompoli&Garai [3] también se ajusta de forma satisfactoria a los valores experimentales para las fibras de poliéster tradicionales. Pero para nuevos materiales fibrosos, cada vez más presentes en los mercados y aplicables a edificaciones sostenibles es necesario obtener modelos propios para poder mejorar las predicciones que ofrecen otros modelos más clásicos, y conocer mejor, por tanto, su comportamiento acústico.

Desde el punto de vista de la enseñanza, el proyecto que se describe en este trabajo ha sido muy completo e enriquecedor no solamente para el alumnado, sino también para el profesorado. Para poder llevar a cabo este proyecto con el alumnado, éste debe de ser capaz de adquirir conocimientos no solamente propios de acústica sino también de programación matemática. En este sentido, es el departamento de matemática aplicada el responsable de proporcionar dichos conocimientos. Como herramienta, en el GITSI (Grado en Ingeniería de Sistemas de Telecomunicación, Sonido e Imagen) el programa Matlab ®, es la más utilizada. En cuanto a conocimientos de acústica, son necesarios conocimientos básicos de caracterización acústica de materiales para poder obtener en laboratorio resistencia al flujo y coeficiente de absorción en incidencia normal. Conocimientos fundamentales para un futuro ingeniero en la materia y que pueden servirle más adelante en el desarrollo de sus atribuciones profesionales. Por otra parte, el profesor debe de ser capaz de convertir unas prácticas de grado en un pequeño laboratorio de investigación. Esto requiere, por parte del profesorado, tener todas las variables muy bien definidas y controladas, lo que implica una inversión temporal considerable.

Como trabajos futuros, quedaría por evaluar el error asociado a cada uno de los modelos propios. Aunque las gráficas ya evidencian a simple vista la mejora de los ajustes, es muy recomendable poder cuantificar esta mejora. Además, como ampliación del proyecto y como base de un proyecto multidisciplinar, se podría conseguir que el alumno, además de ser capaz de obtener los coeficientes descriptores propios de cada material fuese capaz de elaborar una herramienta informática que pudiese comparar las predicciones con los valores experimentales, de forma que el resultado final fuese las figuras que se presentan en este trabajo, figuras de la 4 a la 7.

Referencias

- [1] Real Decreto 1371/2007, de 19 de octubre, por el que se aprueba el Documento Básico "DB-HR Protección frente al ruido" del Código Técnico de la Edificación y se modifica el Real Decreto 314/2006, de 17 de marzo, por el que se aprueba el Código Técnico de la Edificación. (BOE 23-octubre-2007). Corrección de errores y erratas de la orden VIV/984/2009, de 15 de abril, por la que se modifican determinados documentos básicos del Código Técnico de la Edificación, aprobados por el Real Decreto 314/2006, de 17 de marzo, y el Real Decreto 1371/2007, de 19 de octubre. (BOE 23-septiembre-2009)
- [2] Delany M. E., Bazley E. N.: "Acoustical Properties of Fibrous Absorbent Materials", *Applied Acoustics* 3, 1970.
- [3] M.Garai, F. Pompoli,: "A simple empirical model of polyester fibre materials for acoustical applications", *Applied Acoustics* 66, 2005.
- [4] UNE-EN 12354-6:2004: Acústica en la edificación. "Estimación de las características de las edificaciones a partir de las características de sus elementos", parte 6, "Absorción sonora en espacios cerrados".
- [5] K. U. Ingard, T. A. Dear: "Measurement of Acoustic Flow Resistance". *Journal of sound and Vibration* 103 (1985).
- [6] UNE-EN 29053.1994. Acústica. Materiales para aplicaciones acústicas. Determinación de la resistencia al flujo de aire. (ISO9053:1991)
- [7] UNE-EN ISO 10534-2: Acústica. "Determinación del coeficiente de absorción acústica y de la impedancia acústica en tubos de impedancia", parte 2, "Método de la función de transferencia". (ISO 10534-2:1998).
- [8] M. A. Navacerrada, C. Díaz, A. Pedrero, L.E. García: "Absorción acústica de espumas de aluminio". *Materiales de Construcción*. Vol. 58.Nº 291, 2008.

Aproximación al MEF en el cálculo de estructuras: Resolución paso a paso de una estructura sencilla desde las funciones de forma.

Enrique David Llácer;; endalla@mat.upv.es

Universitat Politècnica de València

Resumen

El Método de los Elementos Finitos (MEF) como sistema de modelización numérica para problemas complejos es bien conocido en múltiples ramas de la ingeniería. Aplicado a la concepción y diseño de estructuras, resulta fundamental como técnica de reducción de un problema continuo a un problema discreto, fácilmente manejable con las herramientas de cálculo al alcance de cualquiera, tanto en hardware como software necesarios. Para muchos estudiantes, la comprensión del método pasa por revisar, paso a paso, su adaptación a una sencilla estructura como una barra de dos nodos.

Las competencias concretas de la Orden ECI/3855/2007 que se pretenden desarrollar son: *3.- Llevar a cabo actividades técnicas de cálculo; 5.- Gestionar nuevas tecnologías edificatorias; 7.- Asesorar técnicamente en los procesos de fabricación de materiales y elementos utilizados en la construcción de edificios.*

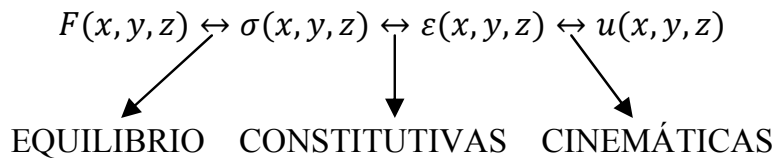
Ciertamente tanto nuevas tecnologías, materiales y cálculo estructural están íntimamente relacionados con el MEF sin cuyo uso pueden abordarse estudios medianamente complejos en la actualidad.

El Método de los Elementos Finitos

Es bien conocido el actual uso generalizado del MEF desde que a mitad del S. XX aparecieran sus primeros antecedentes matemáticos. Por tanto, resultaría ocioso insistir aquí en las bondades y virtudes del MEF, ampliamente aplicado tanto en el campo de la ingeniería como la arquitectura. Únicamente recordemos que la idea base que animó su aparición fue la conversión de un problema (una estructura, un cuerpo, una superficie) continuo en un problema discreto, y por tanto, fácilmente manejable. Es del todo evidente que en su éxito ha tenido mucho que ver el desarrollo de la tecnología informática, que permite la fácil introducción de datos y su interpretación. Baker [1] destaca recientemente una multitud de aplicaciones computacionales que tienen su base en el MEF.

En el cálculo de estructuras, las fuerzas exteriores y las tensiones están relacionadas por ecuaciones de equilibrio. A su vez, las tensiones y las deformaciones están relacionadas por ecuaciones constitutivas. Finalmente, las deformaciones y los despla-

zamientos están relacionados por ecuaciones cinemáticas. Estos fundamentos aparecen claramente referenciados por Zienkiewicz [7] en la formulación básica del método.



Todas estas funciones son campos continuos para los que el problema estructural ha de resolverse en cada estadio.

El MEF convierte el problema continuo en un problema discreto, mediante la introducción del concepto de “elemento finito”: Aquella región en la que se aplica una misma interpolación.

Problema continuo → *Problema discreto*

$$u(x, y, z) = C(x, y, z) \cdot A$$

Donde $C(x, y, z)$ son polinomios predefinidos

A: coeficientes a determinar, tanto incógnitas como grados de libertad.

La continuidad dentro de cada elemento está garantizada por el uso de funciones polinómicas para las funciones de forma. Los “saltos” en el comportamiento estructural se producen en las funciones de desplazamientos o deformaciones de un elemento a otro.

Desarrollo de un elemento finito paso a paso

Existe en el mercado una amplísima Referencias aplicada al ámbito de la Ingeniería de Edificación y la arquitectura, y entre ella se han indicado algunas referencias en el apartado final de esta comunicación. Rao [6] destaca (pp.10) una completa lista de aplicaciones del método para la ingeniería. Aunque las bases teóricas del método se pueden entender a través de la lectura y el estudio de la Referencias, quizá la mejor forma de entender la directa aplicabilidad del método es a través del planteamiento y cálculo de un elemento finito sencillo, como a continuación se hace.

Enunciado

Para comprobar de forma práctica las cualidades del MEF conviene definir un elemento finito bidimensional sencillo, que en este caso se trata de una barra de 2 nodos con 6 grados de libertad (3 por nodo). Dichos grados de libertad representan: Deformación axial, deformación transversal y rotación. Para ello emplearemos un polinomio de primer grado para la deformación axial y uno cúbico para describir la

flexión y el desplazamiento transversal. Véase también la definición dada por Kattan [5] pp. 27 al elemento lineal barra.

En el espacio bidimensional se desacoplan los axiles del resto de esfuerzos, ya que podemos describir el comportamiento estructural como suma del efecto axil por un lado y de la deformación transversal y giro por otro:

$$U = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (1)$$

$$W = \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x^3 \quad (2)$$

$$\left(\frac{dw}{dx} \right) = \alpha_3 + 2\alpha_4 x + 3\alpha_5 x^2 \quad (3)$$

La expresión (3) indica que el giro es igual a la pendiente de la deformada del eje.

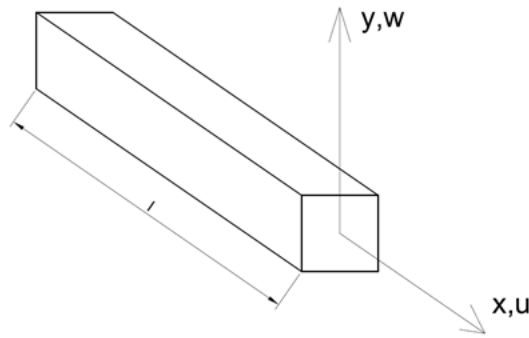


Figura 1: Esquemización del elemento barra y ejes de referencia

Dichas ecuaciones, definidas para cada uno de los nodos:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_1 \\ w_1 &= \alpha_2 + \alpha_3 x_1 + \alpha_4 x_1^2 + \alpha_5 x_1^3 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 &= \alpha_3 + 2\alpha_4 x_1 + 3\alpha_5 x_1^2 \\ u_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 x_2 \\ w_2 &= \alpha_2 + \alpha_3 x_2 + \alpha_4 x_2^2 + \alpha_5 x_2^3 \\ \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 &= \alpha_3 + 2\alpha_4 x_2 + 3\alpha_5 x_2^2 \end{aligned} \quad (4)$$

Así el modelo para las deformaciones axiales será:

$$U(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x \quad (5)$$

Expresado matricialmente:

$$U(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Análogamente el modelo para las deformaciones transversales y curvaturas:

$$W(x) = \alpha_2 + \alpha_3 x + \alpha_4 x^2 + \alpha_5 x^3 \quad (7)$$

$$W(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & x & x^2 & x^3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \alpha_0 \\ \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \\ \alpha_5 \end{bmatrix} \quad (8)$$

En el trabajo de Celigüeta [2] pp. 15 puede verse la formulación general del vector deformaciones nodales del elemento.

Las funciones de forma: aproximaciones

Las funciones de forma se utilizan para aproximar una función en un dado intervalo, a través del *polinomio de Lagrange*. Sería válido cualquier método de aproximación al valor de la función. Chaves [3] y Fish [4] presentan una completa lista de posibilidades para ello.

Para ello expresamos la geometría en función de las coordenadas de los nodos:

$$U(x) = N_1 u_1 + N_2 w_1 + \bar{N}_2 \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 + N_3 u_2 + N_4 w_2 + \bar{N}_4 \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 = u(x) + w(x) \quad (9)$$

Para calcular las constantes α_i necesitamos establecer condiciones en los nodos. Si tomamos los valores para $x=-1$ y $x=+1$ obtendremos las funciones en las que sólo quedará sustituir

$$x = \frac{\xi L}{2} \text{ por simple proporcionalidad entre términos.} \quad (10)$$

Para $x=-1$ tenemos:

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_0 - \alpha_1 \\ w_1 &= \alpha_2 - \alpha_3 + \alpha_4 - \alpha_5 \\ \frac{dw_1}{dx} &= \alpha_3 - 2\alpha_4 + 3\alpha_5 \end{aligned} \quad (11)$$

Análogamente para $x=+1$:

$$\begin{aligned} u_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \\ w_2 &= \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 + \alpha_5 \\ \frac{dw_2}{dx} &= \alpha_3 + 2\alpha_4 + 3\alpha_5 \end{aligned} \quad (12)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones, en $u(x)$, tomando primero u_1 y u_2 :

$$\begin{aligned} u_1 &= \alpha_0 - \alpha_1 \\ u_2 &= \alpha_0 + \alpha_1 \\ u_1 - u_2 &= -\alpha_1 - \alpha_1 = -2\alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{u_2 - u_1}{2} \\ u_1 + u_2 &= 2\alpha_0 \Rightarrow \alpha_0 = \frac{u_1 + u_2}{2} \end{aligned} \quad (13)$$

Sustituyendo en la expresión inicial:

$$\begin{aligned} u(x) &= \frac{u_1 + u_2}{2} + \frac{u_2 - u_1}{2} x = \frac{u_1 + u_2 + u_2 x - u_1 x}{2} \\ u(x) &= \frac{1-x}{2} u_1 + \frac{1+x}{2} u_2 \end{aligned} \quad (14)$$

Expresión cartesiana, de donde:

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-x)$$

y si $x = \frac{\xi L}{2}$ por proporcionalidad, donde $L=2$, podemos sustituir

$$N_3 = \frac{1}{2}(1+x)$$

directamente por ξ .

Así,

$$N_1 = \frac{1}{2}(1-\xi)$$

como por otra parte ya era conocido.

$$N_3 = \frac{1}{2}(1+\xi)$$

Por otro lado, en $w(x)$:

$$w_1 - w_2 = -\alpha_3 - 2\alpha_5 \quad (15)$$

$$w_1 + w_2 = 2\alpha_2 + 2\alpha_4$$

$$\frac{dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} = -4\alpha_4 \Rightarrow \alpha_4 = \frac{-dw_1}{4dx} + \frac{dw_2}{4dx} \quad (16)$$

$$w_1 + w_2 = 2\alpha_2 - \frac{2dw_1}{4dx} + \frac{2dw_2}{4dx} \Rightarrow \alpha_2 = \frac{w_1}{2} + \frac{w_2}{2} + \frac{dw_1}{4dx} - \frac{dw_2}{4dx} \quad (17)$$

$$\frac{dw_1}{dx} + \frac{dw_2}{dx} = 2\alpha_3 + 6\alpha_5 \quad ,, \quad \alpha_3 = \frac{dw_1}{2dx} + \frac{dw_2}{2dx} - 3\alpha_5$$

$$w_1 - w_2 = \frac{-dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{2dx} + 6\alpha_5 - 2\alpha_5$$

$$w_1 - w_2 = \frac{-dw_1}{dx} - \frac{dw_2}{dx} + 4\alpha_5 \Rightarrow \alpha_5 = \frac{w_1}{4} - \frac{w_2}{4} + \frac{dw_1}{4dx} + \frac{dw_2}{4dx} \quad (18)$$

$$\boxed{\alpha_3} = \frac{dw_1}{2dx} + \frac{dw_2}{2dx} - \frac{3w_1}{4} + \frac{3w_2}{4} - \frac{3dw_1}{4dx} - \frac{3dw_2}{4dx} = \boxed{\frac{-1}{4} \frac{dw_1}{dx} - \frac{1}{4} \frac{dw_2}{dx} - \frac{3w_1}{4} + \frac{3w_2}{4}} \quad (19)$$

Términos que, sustituyendo en la expresión inicial:

$$w(x) = \frac{w_1}{2} + \frac{w_2}{2} + \frac{dw_1}{4dx} - \frac{dw_2}{4dx} - \frac{1}{4} \frac{dw_1}{dx} x - \frac{1}{4} \frac{dw_2}{dx} x - \frac{3w_1}{4} x + \frac{3w_2}{4} x - \frac{dw_1}{4dx} x^2 + \frac{dw_2}{4dx} x^2 + \frac{w_1}{4} x^3 - \frac{w_2}{4} x^3 +$$

$$+ \frac{dw_1}{4dx} x^3 + \frac{dw_2}{4dx} x^3 = \left[\frac{1}{2} - \frac{3}{4} x + \frac{1}{4} x^3 \right] w_1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{3}{4} x - \frac{1}{4} x^3 \right] w_2 + \left[\frac{1}{4} - \frac{1}{4} x - \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x^3 \right] \frac{dw_1}{dx} +$$

$$+ \left[\frac{-1}{4} - \frac{1}{4} x + \frac{1}{4} x^2 + \frac{1}{4} x^3 \right] \frac{dw_2}{dx} \quad (20)$$

$$N_2 = \frac{1}{4} (2 - 3x + x^3) \quad N_4 = \frac{1}{4} (2 + 3x - x^3)$$

$$\bar{N}_2 = \frac{1}{4} (1 - x - x^2 + x^3) \quad \bar{N}_4 = \frac{1}{4} (-1 - x + x^2 + x^3)$$

Con lo que finalmente puede expresarse, en naturales:

$$W(x) = \frac{1}{2} (1 - \xi) u_1 + \frac{1}{4} (2 - 3\xi + \xi^3) w_1 + \frac{1}{4} (1 - \xi - \xi^2 + \xi^3) \frac{L}{2} \left(\frac{dw_1}{d\xi} \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} (1 + \xi) u_2 + \frac{1}{4} (2 + 3\xi - \xi^3) w_2 + \frac{1}{4} (-1 - \xi + \xi^2 + \xi^3) \frac{L}{2} \left(\frac{dw_2}{d\xi} \right) \quad (21)$$

Donde el término $\frac{L}{2}$ proviene de $\frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L}$

Matriz N de funciones de forma

Las deformaciones transversales y curvaturas W se expresan como el producto:

$$W = N \cdot r \quad ,, \quad \text{donde} \quad W = \begin{bmatrix} u(x) \\ w(x) \end{bmatrix}$$

$$W = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & 0 & N_3 & 0 & 0 \\ 0 & N_2 & \bar{N}_2 & 0 & N_4 & \bar{N}_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_1 \\ w_1 \\ \frac{dw_1}{d\xi} \\ u_2 \\ w_2 \\ \frac{dw_2}{d\xi} \end{bmatrix} \quad (22)$$

Matriz funciones de forma
Vector desplazamientos nodales a^(e)

Matriz de rigidez K del elemento.

Para el cálculo de la matriz B de deformación, podemos considerar desacoplados los esfuerzos axiales, siguiendo el proceso anterior de cálculo, por lo que se considerarán por separado las deformaciones axiales de las transversales y curvaturas.

En primer lugar, y por lo que respecta a las tensiones y deformaciones axiales podemos expresar:

$$\sigma = [EA]\varepsilon = DBa^{(e)} \text{ y entonces podemos decir que } D = [EA]$$

La deformación axial en un punto cualquiera de cada elemento viene dada por:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} = \frac{dN_1}{dx}u_1 + \frac{dN_3}{dx}u_2 \quad (23)$$

Con lo que la matriz B₁ puede expresarse:

$$B_1 = [B_{1_1}, B_{1_2}] = \left[\frac{dN_1}{dx}, \frac{dN_3}{dx} \right] = \left[\frac{-1}{L}, \frac{1}{L} \right] = \frac{1}{L} [-1, 1] \quad (24)$$

Y por tanto **la matriz de rigidez K₁** queda:

$$K_1 = \int_L \left\{ \begin{matrix} -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{L} \end{matrix} \right\} (EA) \left[-\frac{1}{L}, \frac{1}{L} \right] = \left(\frac{EA}{L} \right) \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (25)$$

En segundo lugar, en cuanto a las deformaciones transversales y las curvaturas, sabemos por teoría de la elasticidad que el giro es igual a la pendiente de la deformada en el eje:

$$\theta = \frac{dw}{dx} \quad ,, \quad u = -z \frac{dw}{dx}$$

Por tanto, las deformaciones en un punto cualquiera se obtienen por:

$$\varepsilon_x = \frac{du}{dx} = -z \frac{d^2w}{dx^2} \quad (26)$$

La tensión por flexión se relaciona con su correspondiente deformada por la expresión:

$$\sigma_x = E\varepsilon_x = -zE \frac{d^2w}{dx^2} \quad (27)$$

Y, para cualquier punto de la barra, la expresión del momento es:

$$M = -\iint_A z \sigma_x dA = \iint_A z^2 E \frac{d^2w}{dx^2} dA \quad (28)$$

Si recordamos que la inercia es $I = z^2 A$, la expresión del momento queda:

$$M = EI \frac{d^2w}{dx^2} = EI\chi \quad (29)$$

Donde: I es el momento de inercia de la sección transversal con respecto al eje “y”

$$\chi \text{ es la curvatura del eje de la viga: } \chi = \frac{d^2w}{dx^2}$$

Para el caso de las deformaciones y giros, habíamos llegado en (22) a la expresión:

$$w = Na^{(e)}$$

Donde teníamos $N = [N_2, \bar{N}_2, N_4, \bar{N}_4]$ y también $a^{(e)} = \left[w_1, \left(\frac{dw}{dx} \right)_1, w_2, \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \right]^T$

Al estar definida la transformación lineal del elemento de dos nodos por:

$$\xi = \frac{2}{L}(x - x_m) \quad (30)$$

Tenemos también

$$\frac{dx}{d\xi} = \frac{L}{2} \Rightarrow dx = \frac{L}{2} d\xi$$

$$\frac{dw}{dx} = \frac{2}{L} \frac{dw}{d\xi}$$

Y también:

$$\frac{d^2w}{dx^2} = \frac{4}{L^2} \frac{d^2w}{d\xi^2} \quad (31)$$

Por tanto, la deformación en un punto cualquiera del elemento de coordenada ξ se obtiene por la expresión:

$$\chi = \frac{d^2w}{dx^2} \text{ que por la expresión anterior es igual a } \chi = \frac{4}{L^2} \frac{d^2w}{d\xi^2} \quad (32)$$

Así que no hay más que hacer las segundas derivadas de cada función de forma:

$$\chi = \frac{4}{L} \left(\frac{d^2N_2}{d\xi^2} w_1 + \frac{L}{2} \frac{d^2N_2}{d\xi^2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_1 + \frac{d^2N_4}{d\xi^2} w_2 + \frac{L}{2} \frac{d^2N_4}{d\xi^2} \left(\frac{dw}{dx} \right)_2 \right) \quad (33)$$

Que, en expresión matricial:

$$B_2 = [B_{2_1}, B_{2_2}, B_{2_3}, B_{2_4}] = \left[\frac{6\xi}{L^2}, \frac{(-1+3\xi)}{L}, \frac{-6\xi}{L^2}, \frac{(1+3\xi)}{L} \right] \quad (34)$$

La **matriz de rigidez** correspondiente a deformaciones transversales y curvaturas, K_2 viene dada por:

$$K_2 = \int_{-1}^{+1} B^T DB dx = \int_{-1}^{+1} B^T (EI) B \frac{L}{2} d\xi \quad (35)$$

Siendo $D=(EI)$, que operando la integral definida obtenemos:

$$K_2 = \frac{EI}{L^3} \begin{bmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L \end{bmatrix} \quad (36)$$

Que es la matriz de rigidez a flexión.

Finalmente, sólo queda componer la matriz de rigidez del elemento completo, es decir, sometido tanto a axil como a deformación transversal y giro.

Para ello, hay que proceder al **ensamblaje** de dicha matriz de rigidez, con la precaución de haber definido previamente cada una de las **submatrices** en las coordenadas totales del vector $a^{(e)}$:

$$K = [K_1 + K_2] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Que es la matriz de rigidez del elemento finito.

Este planteamiento cambiaría si las propiedades mecánicas del material y la sección no fuesen constantes durante todo el proceso de carga y comportamiento de la estructura.

Planteamiento del ejemplo de una estructura de barras sobre la que ensayar el MEF.

Definido el elemento finito barra, se puede utilizar directamente en el cálculo de una sencilla estructura para poder probar el MEF. Se plantea la siguiente estructura, con su numeración de nodos y barras:

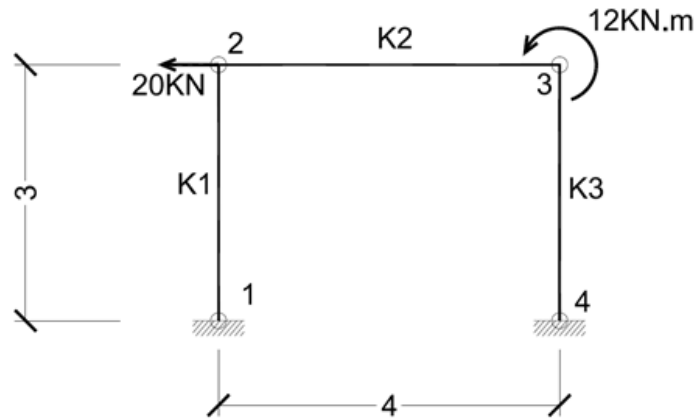


Figura 2: Croquis del pórtico a calcular

Tomamos como datos $E= 210 \text{ Gpa}$; el área de todas las secciones $A=2 \times 10^{-2}$ metros y la inercia de la sección $I=5 \times 10^{-5} \text{ m}^4$.

Discretización de la estructura.

La discretización de la estructura es la que plantea el modelo: 4 nodos y 3 barras, con las conexiones que indica la siguiente tabla:

Tabla 1: Correspondencia entre elementos y nodos de la estructura a calcular

Número del elemento	Nodo i	Nodo j
1	1	2
2	2	3
3	3	4

En *Matlab*, introducimos primero los valores de las constantes de los materiales de nuestra estructura:

```

Command Window
>> E=210e6
E =
    210000000
>> A=2e-2
A =
    0.0200
>> I=5e-5
I =
    5.0000e-005
>>
    
```

Figura 3: Introducción de datos del módulo E, área e inercia, iguales en todas las barras.

Asignamos también las longitudes de cada una de las barras a las constantes L1, L2 y L3. Estos valores los introducimos directamente de la lectura del croquis acotado de la estructura, aunque podríamos utilizar la función para *Matlab* "LongitudDeBarraEnPorticoPlano", que calcula la longitud dando las coordenadas de los nodos de cada barra.

Así tenemos:

L1=3
L2=4
L3=3

A continuación montamos las matrices de rigidez k_1 , k_2 y k_3 utilizando para ello la función *MatrizDeRigidezElementoBarra* definida anteriormente en *Matlab*.

Así, k_1 :

1.0e+006 *					
0.0047	0.0000	-0.0070	-0.0047	-0.0000	-0.0070
0.0000	1.4000	0.0000	-0.0000	-1.4000	0.0000
-0.0070	0.0000	0.0140	0.0070	-0.0000	0.0070
-0.0047	-0.0000	0.0070	0.0047	0.0000	0.0070
-0.0000	-1.4000	-0.0000	0.0000	1.4000	-0.0000
-0.0070	0.0000	0.0070	0.0070	-0.0000	0.0140

Figura 4: Matriz de rigidez k_1 .

Para k_2 :

1.0e+006 *					
1.0500	0	0	-1.0500	0	0
0	0.0020	0.0039	0	-0.0020	0.0039
0	0.0039	0.0105	0	-0.0039	0.0053
-1.0500	0	0	1.0500	0	0
0	-0.0020	-0.0039	0	0.0020	-0.0039
0	0.0039	0.0053	0	-0.0039	0.0105

Figura 5: Matriz de rigidez k_2 .

Y para k_3 :

1.0e+006 *					
0.0047	0.0000	0.0070	-0.0047	-0.0000	0.0070
0.0000	1.4000	-0.0000	-0.0000	-1.4000	-0.0000
0.0070	-0.0000	0.0140	-0.0070	0.0000	0.0070
-0.0047	-0.0000	-0.0070	0.0047	0.0000	-0.0070
-0.0000	-1.4000	0.0000	0.0000	1.4000	0.0000
0.0070	-0.0000	0.0070	-0.0070	0.0000	0.0140

Figura 6: Matriz de rigidez k_3 .

Ensamblaje de la matriz de rigidez de la estructura.

Paso 1: Inicializamos el número de elementos n_e de la estructura como el número de filas de la matriz de conectividad, el número de nodos n_n del sistema se obtendrá como el máximo valor de la matriz de conectividad $n_n = \max c_{ij}$.

En nuestro caso, dado que la estructura tiene cuatro nodos, el tamaño de la matriz global de rigidez de la estructura será de 12x12.

Paso 2: Inicializamos la matriz de rigidez del sistema con dichas dimensiones y todo ceros.

Paso 3: Para el ensamblaje de los elementos utilizamos la función “EnsamblajeDePorticoPlano” definida previamente en Matlab. El procedimiento consiste en recorrer todas las matrices de rigidez de los elementos $k_{\text{num-elementos}}$ y obtener las submatrices de cada nodo, matrices que tienen las dimensiones de los grados de libertad de cada nodo 3x3 cuyos índices de fila y columna varían de la siguiente manera:

$$((k-1)n_{g_n} + 1 : kn_{g_n}, (l-1)n_{g_n} + 1 : l \cdot n_{g_n}) \quad (38)$$

Donde k varía desde 1 hasta el número de nodos por elemento (2);

n_{g_n} es el número de grados de libertad por nodo (3);

Y l varía desde 1 hasta el número de nodos por elemento (2).

Los elementos así obtenidos son sumados en cada sub-bloque c ($c_{n_{el},k}, c_{n_{el},l}$) de la matriz global de rigidez K cuyos índices de fila y columna varían de la siguiente manera:

$$((c_{n_{el},k} - 1)n_{g_n} + 1 : c_{n_{el},k} \cdot n_{g_n}, (c_{n_{el},l} - 1)n_{g_n} + 1 : c_{n_{el},l} \cdot n_{g_n}) \quad (39)$$

```
>> K=zeros(12,12)
K =
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0    0
```

Figura 7: Matriz inicial de ceros 12x12.

Ensamblando la primera barra, entre los nudos 1 y 2:

```
K =
1.0e+006 *
    0.0047    0.0000   -0.0070   -0.0047   -0.0000   -0.0070         0         0         0         0         0         0
    0.0000    1.4000    0.0000   -0.0000   -1.4000    0.0000         0         0         0         0         0         0
   -0.0070    0.0000    0.0140    0.0070   -0.0000    0.0070         0         0         0         0         0         0
   -0.0047   -0.0000    0.0070    0.0047    0.0000    0.0070         0         0         0         0         0         0
   -0.0000   -1.4000   -0.0000    0.0000    1.4000   -0.0000         0         0         0         0         0         0
   -0.0070    0.0000    0.0070    0.0070   -0.0000    0.0140         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0         0
```

Figura 8: Matriz tras el ensamblaje de la primera barra.

Ensamblando la segunda y tercera barras:

K =											
1.0e+006 *											
0.0047	0.0000	-0.0070	-0.0047	-0.0000	-0.0070	0	0	0	0	0	0
0.0000	1.4000	0.0000	-0.0000	-1.4000	0.0000	0	0	0	0	0	0
-0.0070	0.0000	0.0140	0.0070	-0.0000	0.0070	0	0	0	0	0	0
-0.0047	-0.0000	0.0070	1.0547	0.0000	0.0070	-1.0500	0	0	0	0	0
-0.0000	-1.4000	-0.0000	0.0000	1.4020	0.0039	0	-0.0020	0.0039	0	0	0
-0.0070	0.0000	0.0070	0.0070	0.0039	0.0245	0	-0.0039	0.0053	0	0	0
0	0	0	-1.0500	0	0	1.0500	0	0	0	0	0
0	0	0	0	-0.0020	-0.0039	0	0.0020	-0.0039	0	0	0
0	0	0	0	0.0039	0.0053	0	-0.0039	0.0105	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Figura 9: Matriz tras el ensamblaje de la segunda barra.

K =											
1.0e+006 *											
0.0047	0.0000	-0.0070	-0.0047	-0.0000	-0.0070	0	0	0	0	0	0
0.0000	1.4000	0.0000	-0.0000	-1.4000	0.0000	0	0	0	0	0	0
-0.0070	0.0000	0.0140	0.0070	-0.0000	0.0070	0	0	0	0	0	0
-0.0047	-0.0000	0.0070	1.0547	0.0000	0.0070	-1.0500	0	0	0	0	0
-0.0000	-1.4000	-0.0000	0.0000	1.4020	0.0039	0	-0.0020	0.0039	0	0	0
-0.0070	0.0000	0.0070	0.0070	0.0039	0.0245	0	-0.0039	0.0053	0	0	0
0	0	0	-1.0500	0	0	1.0547	0.0000	0.0070	-0.0047	-0.0000	0.0070
0	0	0	0	-0.0020	-0.0039	0.0000	1.4020	-0.0039	-0.0000	-1.4000	-0.0000
0	0	0	0	0.0039	0.0053	0.0070	-0.0039	0.0245	-0.0070	0.0000	0.0070
0	0	0	0	0	0	-0.0047	-0.0000	-0.0070	0.0047	0.0000	-0.0070
0	0	0	0	0	0	-0.0000	-1.4000	0.0000	0.0000	1.4000	0.0000
0	0	0	0	0	0	0.0070	-0.0000	0.0070	-0.0070	0.0000	0.0140

Figura 9: Matriz tras el ensamblaje de la tercera barra.

Aplicación de las condiciones de contorno.

Las condiciones de contorno de una estructura son las restricciones que se dan en la estructura estudiada.

El vector de desplazamientos nodales viene dado por los tres grados de libertad, para los 4 nodos del problema:

$$U(x) = \begin{Bmatrix} u_{1x} \\ w_{1y} \\ \theta_1 \\ u_{2x} \\ u_{2y} \\ \theta_2 \\ u_{3x} \\ u_{3y} \\ \theta_3 \\ u_{4x} \\ u_{4y} \\ \theta_4 \end{Bmatrix} \quad \text{y el vector fuerzas aplicadas en los nodos es } F(x) = \begin{Bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ M_1 \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ M_2 \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ M_3 \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ M_4 \end{Bmatrix}$$

Las condiciones de contorno en nuestro caso son:

$$u_{1x} = u_{1y} = \theta_1 = u_{4x} = u_{4y} = \theta_4 = 0 \quad (\text{los empotramientos en el suelo})$$

$$F_{2x} = -20 \quad M_3 = 12 \quad (\text{fuerza y momento aplicados})$$

El resto de fuerzas son cero: $F_{2y} = M_2 = F_{3x} = F_{3y} = 0$

Resolución de las ecuaciones.

Para este caso, podemos resolver el sistema parcialmente a mano, eliminando las filas y columnas 1, 2, 3, 10, 11 y 12 que son aquellas en las que en el vector de desplazamientos nodales existen ceros. Quedará entonces una matriz configurada por las filas y columnas 4 a 9, cuadrada:

```

>> k=K(4:9,4:9)

k =

1.0e+006 *

    1.0547    0.0000    0.0070   -1.0530         0         0
    0.0000    1.4020    0.0039         0   -0.0320    0.0039
    0.0070    0.0039    0.0245         0   -0.0339    0.0053
   -1.0500         0         0    1.0547    0.0300    0.0070
         0   -0.0020   -0.0039    0.0000    1.4320   -0.0039
         0    0.0039    0.0053    0.0070   -0.0339    0.0245
    
```

Figura 10: Matriz simplificada de la estructura.

Sólo queda resolver el sistema de ecuaciones de Gauss, que automáticamente lo resuelve *Matlab*:

```
>> f=[-20 ; 0 ; 0 ; 0 ; 0 ; 12]

f =

    -20
     0
     0
     0
     0
    12

>> u=k\f

u =

   -0.0038
   -0.0000
    0.0008
   -0.0038
    0.0000
    0.0014
```

Figura 11: Resultado del sistema de ecuaciones, vector *u* desplazamiento en los nudos.

Que nos proporciona el desplazamiento de los nudos.

En particular, comprobamos que el desplazamiento horizontal en el nudo 2 es de -0,0038 metros, y que el vertical es 0. En el nudo 3, el desplazamiento horizontal es de -0,0038 metros; y las rotaciones de los nudos 2 y 3 son 0,0008 rad y 0,0014 rad respectivamente, en el sentido de las agujas del reloj.

Postproceso de la estructura.

Una vez conocidos los desplazamientos nodales de la estructura, podemos calcular las reacciones, y cualesquiera otros datos de la misma.

Así, primero calculamos los esfuerzos sobre los nodos de la estructura (vector *F*) completo, a partir del vector *u* (desplazamientos nodales) también completo:

```
>> U=[0 ; 0 ; 0 ; u ; 0 ; 0 ; 0 ; 0]
U =
      0
      0
      0
    -0.0038
    -0.0000
     0.0000
    -0.0038
     0.0000
     0.0014
      0
      0
      0
```

Figura 12: Vector u completo, desplazamientos nodales.

El vector F lo calculamos como el producto de la matriz de rigidez de la estructura por los desplazamientos nodales calculados:

```
>> F=K*U
F =
    12.1897
     8.5865
    -21.0253
    -20.0000
     -0.0000
     0.0000
     -0.0000
     -0.0000
    12.0000
     7.8103
     -8.5865
    -16.6286
```

Figura 13: Vector F completo, esfuerzos sobre los nodos de la estructura.

Por lo tanto, las reacciones en el nudo 1 son 12,1897 KN hacia la derecha, y vertical de 8,5865 KN.

En el nudo 4, la reacción horizontal es 7,8103 KN hacia la derecha, y vertical de 8,5865 KN.

El siguiente paso es obtener los vectores de desplazamientos nodales para cada elemento barra 1, 2 y 3, y tras ello y con la función “FuerzasEnLosElementosBarra”, obtener las fuerzas aplicadas en cada elemento, paso previo al cálculo seccional, es decir, el dimensionado de las barras según la teoría de la elasticidad.

```
>> u1 = [U(1) ; U(2) ; U(3) ; U(4) ; U(5) ; U(6)]
u1 =
     0
     0
     0
    -0.0038
    -0.0000
     0.0008

>> u2 = [U(4) ; U(5) ; U(6) ; U(7) ; U(8) ; U(9)]
u2 =
    -0.0038
    -0.0000
     0.0008
    -0.0038
     0.0000
     0.0014

>> u3 = [U(7) ; U(8) ; U(9) ; U(10) ; U(11) ; U(12)]
u3 =
    -0.0038
     0.0000
     0.0014
     0
     0
     0
```

Figura 14: Vectores u , desplazamientos nodales para cada barra.

```
>> f1=FuerzasEnLosElementosBarra(E, A, I, L1, 90, u1)
x =
     1.5708

C =
     6.1232e-017

S =
     1

f1 =
     8.5865
    -12.1897
    -21.0253
     -8.5865
     12.1897
    -15.5438
```

Figura 15: Resultado fuerzas aplicadas en el elemento barra 1.

```
>> f2=FuerzasEnLosElementosBarra(E,A,I,L2,0,u2)

x =

    0

C =

    1

S =

    0

f2 =

   -7.8103
    8.5865
   15.5438
    7.8103
   -8.5865
   16.8023
```

Figura 16: Resultado fuerzas aplicadas en el elemento barra 2.

```
>> f3=FuerzasEnLosElementosBarra(E,A,I,L3,270,u3)

x =

   4.7124

C =

  -1.8370e-016

S =

   -1

f3 =

   -8.5865
   -7.8103
   -6.8023
    8.5865
    7.8103
  -16.6286
```

Figura 17: Resultado fuerzas aplicadas en el elemento barra 3.

Finalmente, sólo queda llamar las funciones “DiagramaAxilesPortico”, “DiagramaCortantesPortico” y “DiagramaMomentosPortico” para dibujar los diagramas correspondientes a cada una de las barras.

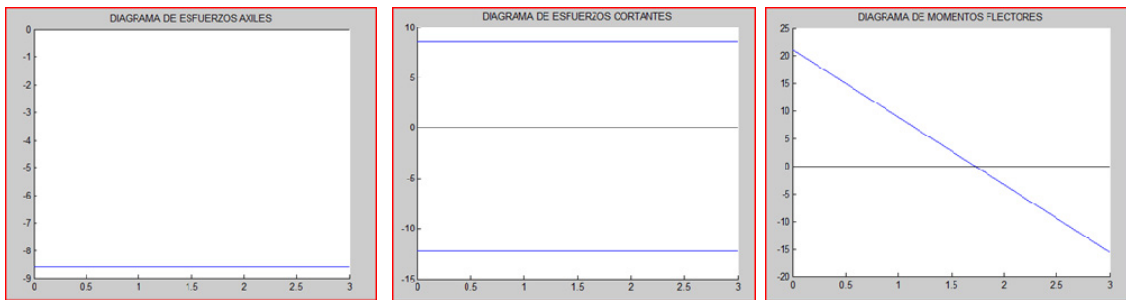


Figura 18: Diagramas de axiles, cortantes y flectores para la barra 1.

Referencias:

- [1] Baker AJ. Finite elements: Computational engineering sciences. West Sussex: Willey; 2012.
- [2] Celigüeta Lizarza JT. Método de los elementos finitos para análisis estructural. San Sebastián; 2000.
- [3] Chaves EWV, Mínguez R. Mecánica computacional en la ingeniería con aplicaciones en MATLAB. : Universidad de Castilla-La Mancha, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos; 2010.
- [4] Fish J, Belitschko T. A first course in finite elements. West Sussex: Willey; 2007.
- [5] Kattan PI. MATLAB guide to finite elements: an interactive approach. : Springer; 2008.
- [6] Rao SS. The finite element method in engineering. Oxford; 2011.
- [7] Zienkiewicz O, Taylor R. El Método de los Elementos Finitos: Vol. 1: Formulación Básica y Problemas Lineales. CIMNE, Barcelona, España, 1994.

Bresse y Ecuación Universal de la Línea Elástica: El juego matemático de las ménsulas

Juan José Cajal Montañés,* Departamento de Mecánica de Estructuras e Ingeniería Hidráulica, E.T.S.I.E., jjcajal@ugr.es

M. Victoria Fernández Muñoz,* Departamento de Matemática Aplicada, E.T.S.I.E., mvfm@ugr.es

* Universidad de Granada.

Resumen

En esta comunicación presentamos un modelo genérico, basado en una viga de directriz recta y sección constante, sometida a una carga variable, distribuida en toda su longitud, con objeto de determinar el desplazamiento vertical de un punto cualquiera de su directriz, por esfuerzo de flexión. Para resolver este problema, utilizamos dos de los distintos métodos existentes: Fórmula integral de *Bresse* y la Ecuación Universal de la Línea Elástica (E.U.L.E.).

Introducción

En las sociedades contemporáneas, el conocimiento científico juega un papel fundamental en todos los ámbitos de su funcionamiento y puede sostenerse que constituye la clave del desarrollo y el bienestar de los países. Desde hace años estamos asistiendo a una nueva revolución industrial y tecnológica, en la que la generación de riqueza se apoya más en el conocimiento que en los recursos materiales.

Frente a la necesidad de educar para el conocimiento, se han planteado diversas estrategias, de las cuales, la principal insiste en que el propósito del proceso de enseñanza y aprendizaje no es tanto el de poblar la memoria con datos provenientes de las distintas disciplinas, sino el de *enseñar a pensar*, entendiendo por tal, el lograr que los alumnos incorporen las estructuras de pensamiento para comprender y explicar los sucesos naturales, sociales o incluso laborales con los que han de enfrentarse. La expresión “*enseñar a pensar*”, es compartida por diversas corrientes de pensamiento pero sin advertir las diferencias que entre ellas existen y que habrán de resultar fundamentalmente decisivas a la hora de concretar estrategias educativas en las que deberán encontrarse involucradas, tanto el tipo de estructuras epistémicas que implica el “pensar”, como el propio proceso educativo mediante el cual sean eficazmente asimiladas.

Una corriente particular, emparentada con la anterior, sostiene que las estructuras de pensamiento provienen de la enseñanza de las matemáticas, y por lo tanto, se adquieren en el proceso de aprendizaje de esta disciplina formal. El problema central

de esta posición, es argumentar que efectivamente esta disciplina es un instrumento útil para *enseñar a pensar* la ciencia.

Enseñar a pensar consiste en llegar a familiarizar al alumno con las estructuras de pensamiento que encuentra la epistemología en las distintas disciplinas científicas, y que son inseparables de sus contenidos específicos, de la misma manera que el lenguaje posee una estructura gramatical y semántica que es descubierta sólo mediante estudios específicos.

Lejos quedan ya los días en que el bagaje de conocimientos adquiridos durante la escolaridad duraba toda la vida. La obsolescencia de los saberes que hoy se poseen deja en pie únicamente la habilidad de pensar, de variar los puntos de vista, de asimilar propuestas incluso antagónicas con las que se poseían. Quizás, los contenidos ya no tengan ahora tanta importancia. Por este motivo, la propuesta de “enseñar a pensar” se separa de las estrategias pedagógicas tradicionales, y se identifica con una didáctica específicamente diseñada para lograrlo, no porque se crea que anteriormente no se aprendía a pensar, sino porque se considera que no coinciden con la mejor manera de hacerlo en el contexto actual.

Con respecto a las matemáticas, hay quienes sostienen que son una herramienta indispensable para aprender a pensar, sea cualquiera el contexto en el que se emplee esta expresión. Pero para aceptarlo, sería necesario sostener que el conocimiento en general puede ser reducido a las estructuras vacías de las matemáticas. Todavía se encuentra sin resolver la discusión acerca de si la física es matemática aplicada, o simplemente conocimiento físico que utiliza herramientas matemáticas.

Un ejemplo ilustrativo

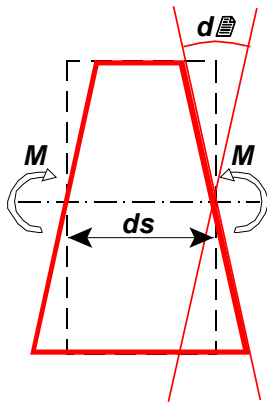
Determinación del desplazamiento vertical (flecha), por esfuerzo de flexión, de un punto del eje baricéntrico de una viga con un extremo empotrado y el otro libre, de directriz recta y sección constante, sometida a la acción de un conjunto cualquiera de cargas (véanse las figuras 2 y 3).

Con este ejemplo, propio de la ciencia de las estructuras, se pretende ilustrar, gráfica y literariamente, lo expuesto en el apartado anterior, mediante dos alternativas: la fórmula integral de Bresse y la ecuación diferencial, bien conocida, como la Ecuación Universal de la Línea Elástica (E.U.L.E.).

Esquematizamos la resolución de este problema, por las dos vías:

Las fórmulas de Bresse (1854)

Necesitamos tener en cuenta, como conocimiento previo, la relación existente entre el esfuerzo de flexión que solicita a una rebanada (porción material de una viga comprendida entre dos secciones normales infinitamente próximas) y la deformación inducida en la rebanada por dicho esfuerzo (véase la Figura 1)

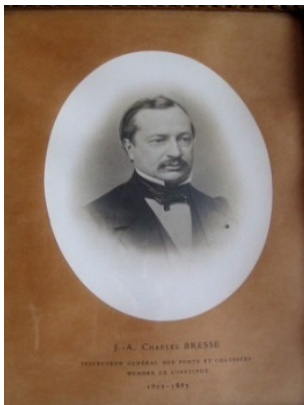


$$d\theta = \frac{M}{E \cdot I} ds$$

$E \cdot I$ es la rigidez a flexión de la viga, siendo E el módulo de elasticidad del material que la constituye e I el momento de inercia de la sección normal respecto a un eje horizontal y perpendicular a su eje baricéntrico.

Figura 1

La deformación característica del esfuerzo de flexión al actuar sobre una rebanada, es un giro relativo de los dos planos que la limitan de magnitud $d\theta$ ^{2,3)}.



Antes de presentar estas fórmulas, haremos una breve reseña biográfica de su autor **Jacques Antoine Charles Bresse**, que nació en Vienne (provincia de Isère) en 1822 y tras graduarse en la Escuela Politécnica de París en 1843, obtuvo la cátedra de Mecánica Aplicada en la Escuela de Caminos y Puentes en 1853, cargo que desempeñó hasta su muerte en el año 1883. En 1874 recibió el premio Poncelet de la Academia Francesa por la publicación de sus trabajos sobre Mecánica Aplicada e Hidráulica, siendo nombrado miembro de esta misma Academia en 1880.

Sus primeros trabajos estuvieron relacionados con la Cinemática pero su obra principal, la que hará su nombre inolvidable, es la titulada **”Recherches analytiques sur la flexion et la résistance des pièces courbés”**, publicada en 1854.

Fue reconocido como gran ingeniero y matemático, al incluir su nombre entre los 72 sabios franceses que se encuentran grabados en los pretilos de la primera línea de balcones de la torre Eiffel, justo encima del primer arco, y a razón de 18 nombres por cada fachada⁽⁵⁾.

Las fórmulas de BRESSE permiten determinar los desplazamientos de una sección normal correspondiente a un punto cualquiera del eje baricéntrico de una viga, como consecuencia de su deformación por *flexión* cuando se encuentra empotrado el origen de la misma, como se observa en la Figura 2^(1,4).

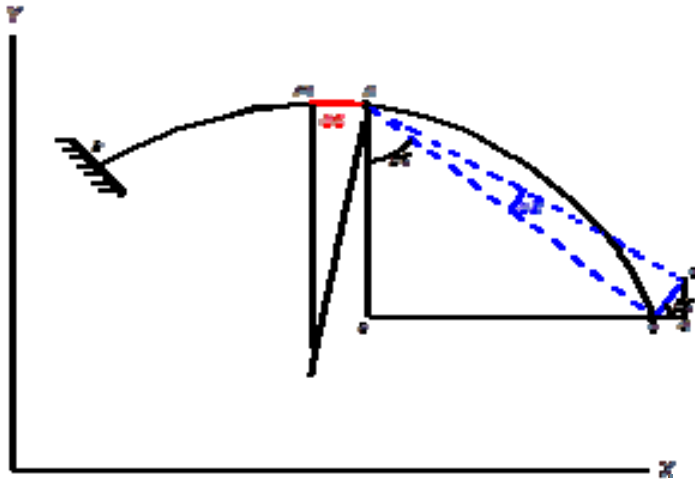


Figura 2

El desplazamiento del punto “c” en la dirección X, se obtiene según las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\overline{cd} &= \overline{cc_1} \cdot \frac{\overline{cd}}{\overline{cc_1}} = \overline{cc_1} \cdot \frac{\overline{ne}}{\overline{nc}} = \frac{\overline{cc_1}}{\overline{nc}} \cdot \overline{ne} = \operatorname{tg}(d\theta) \cdot \overline{ne} \cong d\theta \cdot \overline{ne} \\ &= \frac{M}{E \cdot I} ds \cdot (y_n - y_e)\end{aligned}$$

Y el desplazamiento horizontal total del punto c, “ u_c ” será:

$$u_c = - \int_a^c \frac{M}{E \cdot I} (y_c - y) \cdot ds$$

De igual manera se obtiene el desplazamiento en la dirección Y:

$$\begin{aligned}\overline{c_1d} &= \overline{cc_1} \cdot \frac{\overline{c_1d}}{\overline{cc_1}} = \frac{\overline{ec}}{\overline{nc}} \cdot \overline{cc_1} = \frac{\overline{cc_1}}{\overline{nc}} \cdot \overline{ec} = \operatorname{tg}(d\theta) \cdot \overline{ec} \cong d\theta \cdot \overline{ec} \\ &= \frac{M}{E \cdot I} ds \cdot (x_c - x_n)\end{aligned}$$

Y el desplazamiento vertical total del punto c, “ v_c ” será:

$$v_c = \int_a^c \frac{M}{E \cdot I} (x_c - x) \cdot ds$$

El giro experimentado por la sección normal en el punto c, “ ϕ_c ” será:

$$\phi_c = \int_a^c d\phi = \int_a^c \frac{M}{E \cdot I} \cdot ds$$

Para el caso de una viga de directriz recta, la formulación anterior se transforma:

$$\mathbf{u}_c = 0 ; \mathbf{v}_c = \int_a^c \frac{M}{E \cdot I} (x_c - x) \cdot dx ; \boldsymbol{\phi}_c = \int_a^c \frac{M}{E \cdot I} \cdot dx$$

Años más tarde, *Mohr (1873)* y *Castigliano (1875)*, obtuvieron idénticas expresiones con planteamientos y razonamientos bien distintos.

Ecuación Universal de la Línea Elástica (E.U.L.E.)

Una interpretación geoméricamente sencilla de la flecha que una viga de directriz recta presenta en un punto cualquiera, como consecuencia de su deformación por Esfuerzo de Flexión, es la que se alcanza tras analizar la Figura 3:

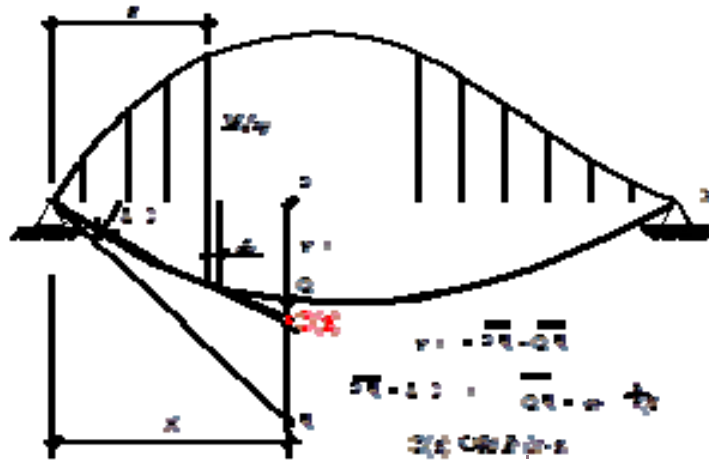


Figura 3

$$v(x) = \phi(0) \cdot x - \int_0^x \frac{M(s)}{EI} (x - s) \cdot ds$$

Para una viga recta de sección constante en la que la ley del Momento Flector es multifórme, esto es, posee una expresión formal distinta en varios tramos (intervalos) de su eje baricéntrico por encontrarse sometida a distintos estados de carga en esos tramos, la anterior expresión de $v(x)$ cobrará la siguiente forma:

$$v(x) = \phi(0) \cdot x - \left[\int_0^{x_1} \frac{M_0(s)}{EI} (x - s) \cdot ds + \int_{x_1}^{x_2} \frac{M_1(s)}{EI} (x - s) \cdot ds + \dots + \int_{x_n}^x \frac{M_n(s)}{EI} (x - s) \cdot ds \right]$$

En donde aparece la suma de n+1 integrales del mismo tipo

$$; J = \int_a^b \frac{M(s)}{EI} (x - s) \cdot ds$$

Siendo el producto "E·I" constante, el problema a resolver ahora es la integral genérica que aparece en la siguiente igualdad:

$$EI \cdot J = \int M(s) (x - s) \cdot ds$$

Procediendo a resolver esta integral por partes

$$M(s) = u \quad ; \quad (x - s) \cdot ds = dv$$

$$du = \frac{d[M(s)]}{ds} ds \quad ; \quad v = -\frac{(x - s)^2}{2}$$

$$EI \cdot J = \left[-M(s) \frac{(x-s)^2}{2} + \int \frac{d[M(s)]}{ds} \frac{(x-s)^2}{2} \cdot ds \right]$$

según se observa en la Figura 4, al tener en cuenta las condiciones de equilibrio mecánico de la rebanada se tiene:

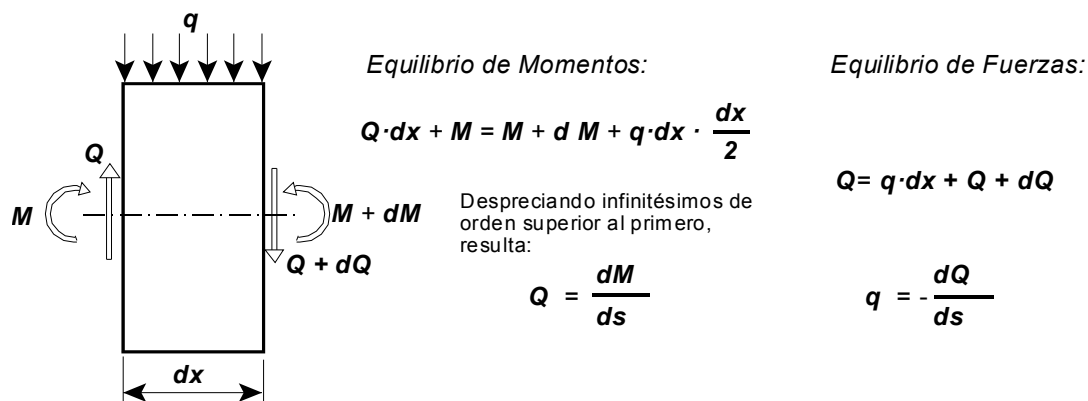


Figura 4

Así resulta:

$$EI \cdot J = \left[-M(s) \frac{(x-s)^2}{2} + \int Q(s) \frac{(x-s)^2}{2} \cdot ds \right],$$

e integrando nuevamente por partes y haciendo las sustituciones pertinentes:

$$Q(s) = u \quad ; \quad \frac{(x-s)^2}{2} \cdot ds = dv \quad ,$$

$$du = \frac{d[Q(s)]}{ds} ds = -q(s) \quad ; \quad v = -\frac{(x-s)^3}{2 \cdot 3}$$

obtenemos:

$$EI \cdot J = \left[-M(s) \frac{(x-s)^2}{2} - Q(s) \frac{(x-s)^3}{2 \cdot 3} - \int q(s) \cdot \frac{(x-s)^3}{2 \cdot 3} ds \right].$$

Volviendo a integrar por partes,

$$q(s) = u \quad ; \quad \frac{(x-s)^3}{2 \cdot 3} \cdot ds = dv \quad ,$$

$$du = \frac{d[q(s)]}{ds} ds = -q'(s) \quad ; \quad v = -\frac{(x-s)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4}$$

y en consecuencia:

$$EI \cdot J = \left[-M(s) \frac{(x-s)^2}{2} - Q(s) \frac{(x-s)^3}{2 \cdot 3} + q(s) \frac{(x-s)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} - \int q'(s) \cdot \frac{(x-s)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} ds \right]$$

Aplicando sucesivas integraciones por partes se llega a la expresión final:

$$EI \cdot J = \left[-M(s) \frac{(x-s)^2}{2} - Q(s) \frac{(x-s)^3}{2 \cdot 3} + q(s) \frac{(x-s)^4}{2 \cdot 3 \cdot 4} + q'(s) \frac{(x-s)^5}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + q^{(n)}(s) \frac{(x-s)^{n+4}}{(n+4)!} + \dots \right]$$

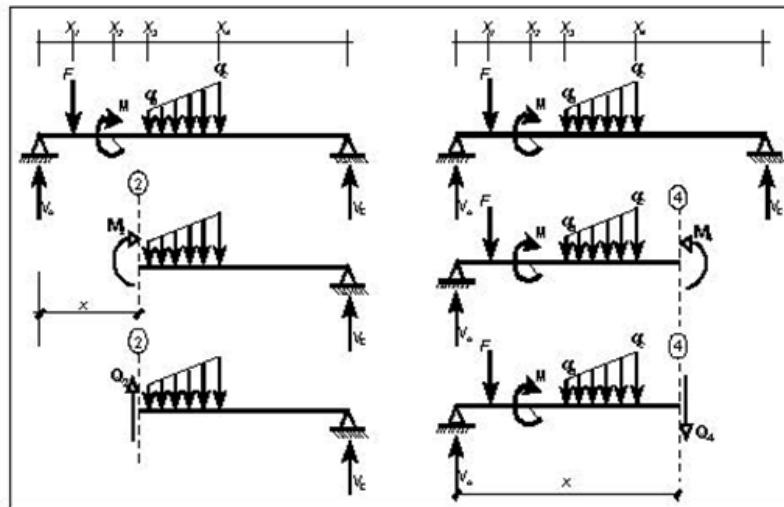


Figura 6

Dado que todas las rebanadas de la viga se encuentran en equilibrio mecánico, en un determinado punto de su eje baricéntrico, puede obtenerse, tanto el Momento Flector como el Esfuerzo Cortante, considerando todas las cargas actuando a uno u otro lado de dicho punto.

Momento Flector ⁽⁶⁾

En la figura anterior, para un punto de abscisa “ x ” con $x_2 \leq x \leq x_3$ el Momento flector se obtiene sumando los productos de todas las fuerzas situadas a su izquierda por sus respectivas distancias a dicho punto, teniendo en cuenta que para aquellas fuerzas que marcan un sentido de giro respecto al punto, igual al de las agujas del reloj, se le asigna signo “+” a su momento, y signo “-” para las que marcan sentido contrario.

En consecuencia:

$$M_2 = V_0 x - F (x-x_1)$$

Para un punto de abscisa “ x ”; $x_4 \leq x \leq l$, siendo “ l ” la longitud de la viga, el Momento flector se obtiene sumando los productos de todas las fuerzas situadas a su derecha por sus respectivas distancias a dicho punto, teniendo en cuenta que para aquellas fuerzas que marcan un sentido de giro respecto al punto, contrario al de las agujas del reloj, se le asigna signo “+” a su momento, y signo “-” para las que marcan el mismo sentido.

En consecuencia:

$$M_4 = V_E (l - x)$$

Para la rebanada en equilibrio mecánico, despreciando magnitudes infinitesimales de Momento flector solamente caben dos estados, diferenciados por el signo “+” ó “-“, véase la Figura 7.

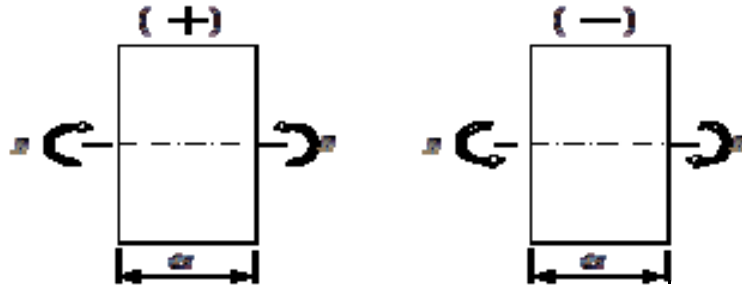


Figura 7

Esfuerzo Cortante ⁽⁶⁾

Para un punto de abscisa “ x ” con $x_2 \leq x \leq x_3$, el Esfuerzo Cortante se obtiene sumando todas las fuerzas verticales situadas a la izquierda de dicho punto, teniendo en cuenta que para aquellas fuerzas con sentido “hacia arriba” se le asigna signo “+” a su esfuerzo, y signo “-“ para las de sentido contrario, es decir:

$$Q_2 = V_0 - F$$

Para un punto de abscisa “ x ”; $x_4 \leq x \leq l$, siendo “ l ” la longitud de la viga, el Esfuerzo Cortante se obtiene sumando todas las fuerzas verticales situadas a su derecha, teniendo en cuenta que para aquellas fuerzas con sentido “hacia abajo” se le asigna signo “+” y signo “-“ para las de sentido contrario. En consecuencia:

$$Q_4 = - V_E$$

Para la rebanada en equilibrio mecánico, despreciando magnitudes infinitesimales de Esfuerzo Cortante solamente caben dos estados, diferenciados por el signo “+” o “-“, véase la Figura 8.

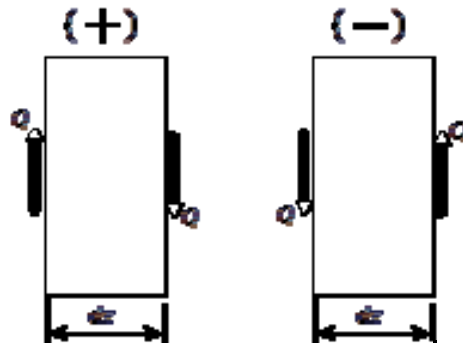


Figura 8

El juego matemático de las ménsulas

Obviamente, la flecha en un punto de una determinada viga presentará un valor único e independiente del procedimiento seguido para obtenerlo. En particular, si se considera una viga de longitud unitaria empotrada en el origen y libre en el extremo (ménsula), sometida a una carga distribuida a lo largo de ella y definida por cierta función $q(x)$, al igualar la flecha en el extremo, punto de abscisa $x = 1$, se tendrá:

$$E \cdot I \cdot v(1) = - \int_0^1 M(x) \cdot (1 - x) dx \quad (\text{Bresse})$$

$$(E \cdot I) \cdot v(1) = - M(0) \frac{1}{2} - Q(0) \frac{1}{2 \cdot 3} + q(0) \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + q'(0) \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + q^{(n)}(0) \frac{1}{(n+4)!}$$

(E.U.L.E)

Y en consecuencia,

$$- \int_0^1 M(x) \cdot (1 - x) dx = - M(0) \frac{1}{2!} - Q(0) \frac{1}{3!} + q(0) \frac{1}{4!} + q'(0) \frac{1}{5!} + \dots + q^{(n)}(0) \frac{1}{(n+4)!}$$

Cuando la función $q(x)$ sea infinitamente derivable, se podrá obtener la suma de series infinitas tales como la que aparece en el segundo miembro de la última igualdad tras resolver la integral

$$- \int_0^1 M(x) \cdot (1 - x) dx.$$

En esta expresión $M(x)$ es la ley de Momento Flector de la viga que se describe, a continuación, en la Figura 9.

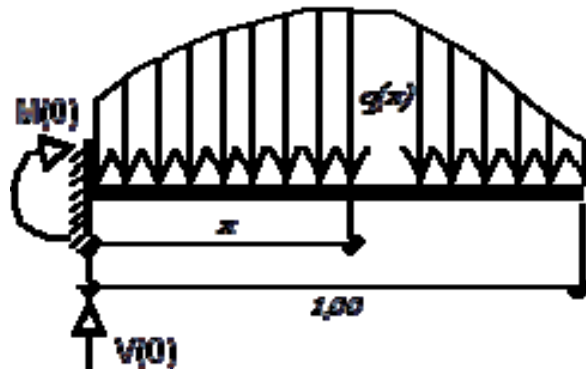


Figura 9

$$M(x) = \int_x^1 -[q(t) \cdot dt \cdot (t - x)]$$

Haciendo

$$(t-x) = u \quad y \quad q(t) \cdot dt = dv$$

e integrando por partes, se tiene

$$M(x) = \left| (t-x) \cdot \int q(t) \cdot dt - \int \left[\int q(t) \cdot dt \right] \cdot dt \right|_x^1$$

Sustituyendo

$$\int q(t) \cdot dt = p(t) \quad y \quad \int p(t) \cdot dt = r(t),$$

se obtiene la siguiente expresión de $M(x)$:

$$M(x) = -(1-x) \cdot p(1) + r(1) - r(x)$$

Considerando la relación entre el Momento Flector $M(x)$ y el Esfuerzo Cortante $V(x)$

$$V(x) = \frac{d[M(x)]}{dx}$$

obtenemos:

$$M(0) = -p(1) + r(1) - r(0); \quad V(0) = p(1) - p(0).$$

En consecuencia:

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^1 M(x) \cdot (1-x) dx \\
 &= \int_0^1 [(1-x) \cdot p(1) - r(1) + r(x)] \cdot (1-x) \cdot dx = \\
 &= \left[-p(1) \frac{(1-x)^3}{3} + r(1) \frac{(1-x)^2}{2} + \int (1-x) \cdot r(x) \cdot dx \right]_0^1
 \end{aligned}$$

Haciendo las sustituciones convenientes

$$\int r(t) \cdot dt = s(t), \int s(t) \cdot dt = w(t)$$

e integrando, de nuevo, por partes, obtenemos finalmente:

$$- \int_0^1 M(x) \cdot (1-x) dx = w(1) - w(0) + \frac{p(1)}{3} - \frac{r(1)}{2} - s(0)$$

Por consiguiente, la flecha $v(l)$ que se obtiene en el extremo de la ménsula mediante la fórmula de Bresse, es:

$$(E \cdot I) \cdot v(1) = w(1) - w(0) + \frac{p(1)}{3} - \frac{r(1)}{2} - s(0)$$

y, utilizando la Ecuación Universal de la Línea Elástica, se obtiene la siguiente expresión

$$(E \cdot I) \cdot v(1) = -M(0) \frac{1}{2} - Q(0) \frac{1}{2 \cdot 3} + q(0) \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4} + q'(0) \frac{1}{2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} + \dots + q^{(n)}(0) \frac{1}{(n+4)!} =$$

$$= \frac{p(1) + r(0) - r(1)}{2!}$$

$$+ \frac{p(0) - p(1)}{3!} + q(0) \frac{1}{4!} + q'(0) \frac{1}{5!} + \dots + q^{(n)}(0) \frac{1}{(n+4)!}$$

Igualando ambas expresiones, obtenemos el siguiente resultado:

$$\frac{p(1) + r(0) - r(1)}{2!}$$

$$+ \frac{p(0) - p(1)}{3!} + q(0) \frac{1}{4!} + q'(0) \frac{1}{5!} + \dots + q^{(n)}(0) \frac{1}{(n+4)!} =$$

$$= w(1) - w(0) + \frac{p(1)}{3} - \frac{r(1)}{2} - s(0)$$

Que permite obtener la suma de series del tipo

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$$

Veamos a continuación un ejemplo:

Supongamos una función de carga distribuida

$$q(x) = e^{ax},$$

para esta función se tiene:

$$q(0) = 1, \quad q'(0) = a, \quad q''(0) = a^2,$$

$$q'''(0) = a^3, \dots, \dots, \quad q^{(n)}(0) = a^n$$

siendo, para este caso

$$p(x) = \frac{1}{a} e^{ax}, \quad r(x) = \frac{1}{a^2} e^{ax}, \quad s(x) = \frac{1}{a^3} e^{ax}, \quad w(x) = \frac{1}{a^4} e^{ax}$$

$$= \frac{1}{a^4} e^{ax}$$

por lo que obtenemos:

$$p(0) = \frac{1}{a}, \quad r(0) = \frac{1}{a^2}, \quad s(0) = \frac{1}{a^3}, \quad w(0) = \frac{1}{a^4}$$

$$p(1) = \frac{e^a}{a}, \quad r(1) = \frac{e^a}{a^2}, \quad s(1) = \frac{e^a}{a^3}, \quad w(1) = \frac{e^a}{a^4}$$

$$M(0) = -\frac{e^a}{a} + \frac{e^a}{a^2} - \frac{1}{a^2}; \quad V(0) = \frac{e^a}{a} - \frac{1}{a}$$

Finalmente:

$$\frac{e^a}{a^4} - \frac{1}{a^4} + \frac{e^a}{3a} - \frac{e^a}{2a^2} - \frac{1}{a^3}$$

$$= \frac{e^a}{2a} - \frac{e^a}{2a^2} + \frac{1}{2a^2} - \frac{e^a}{3!a} + \frac{1}{3!a} + \frac{1}{4!} + \frac{a}{5!} + \frac{a^2}{6!}$$

$$+ \frac{a^3}{7!} + \dots + \frac{a^n}{(n+4)!} + \dots$$

Y agrupando términos:

$$\frac{e^a - 1}{a^4} = \frac{1}{a^3} + \frac{1}{2a^2} - \frac{e^a}{3!a} + \frac{1}{3!a} + \frac{1}{4!} + \frac{a}{5!} + \frac{a^2}{6!} + \frac{a^3}{7!}$$

$$+ \dots + \frac{a^n}{(n+4)!} + \dots$$

Multiplicando por a^4 los dos miembros de la igualdad anterior se obtiene la siguiente:

$$e^a - 1 = \frac{a}{1!} + \frac{a^2}{2!} + \frac{a^3}{3!} + \frac{a^4}{4!} + \frac{a^5}{5!} + \frac{a^6}{6!} + \frac{a^7}{7!} + \dots + \frac{a^n}{n!} + \dots$$

según la cual:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a - 1 \quad \text{ó} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} = e^a$$

Conclusión

El ejercicio que se acaba de presentar, debe ofrecer escasa dificultad de comprensión a una persona experta en el lenguaje matemático cuando haya prestado suficiente atención a las indicaciones específicamente relacionadas con la teoría de estructuras, aun careciendo de formación en esta disciplina. Así mismo, otra persona experta en teoría de estructuras y con sólidos fundamentos matemáticos, es capaz de resolver un determinado problema matemático apoyándose, fundamentalmente, en el conocimiento de la ciencia de las estructuras.

Para la mayoría de los problemas estructurales, el análisis y tratamiento del problema meramente físico (estructural) presenta un corto recorrido, acabando justo donde empieza un problema puramente matemático. El lenguaje matemático viene a sistematizar y codificar un razonamiento previo.

Pero el conocimiento fáctico, el de los hechos, en definitiva, el conocimiento científico, no puede apoyarse en estructuras matemáticas vacías; su comprensión no permite prescindir de los contenidos no matemáticos, aprendidos mediante textos, con la experiencia que se adquiere manipulando los propios materiales en la reproducción de experimentos, y en las reflexiones, con lápiz y papel, sobre muchos y variados ejemplos.

Referencias

- [1] Bresse J.A.Ch., Recherches analytiques sur la flexion et la resistance des pieces courbes, Mallet - Bachelier, Paris , 1854.
- [2] Courbon, J., Resistance des materiaux, Editions Dunod, Paris, 1965.

- [3] Charon, P., Cálculo práctico de vigas, pórticos y marcos, *Editorial Reverté*, Barcelona, 1979.
- [4] Kerguignas, M., Caignaert, G., Resistencia de materiales, *Editorial Reverté*, Barcelona, 1980.
- [5] Timoshenko S.P., History of strength of materials, *Mc. Graw Hill Book Company Inc.*, New York, 1958.
- [6] Toutlemonde, G., Notions de mécanique statique et de résistance des matériaux, *Editions Technip*, Paris, 1979.

Cálculo estructural de vigas por el Método de las Diferencias Finitas Generalizadas

Rubén Galindo Aires, ragalindoa@hotmail.com

Alejandro Clemente García

Departamento de Ingeniería del Terreno, Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

This paper applies the generalized finite difference method to solve a classic problem of engineering, outlining its scope, its comparison with the finite element method and is exposed the improvement line of classical finite difference methods by means of use the generalized finite difference method.

To this end, is studied the structural problem of the Bernoulli beam in several cases with different load and boundary conditions. We compare the result with that obtained with the finite element method calculated by SAP 2000 program and we obtained conclusions regarding the use of the numerical method for solving engineering problems in situations where the classic schemes of finite differences are limited.

Introducción

La resolución de problemas estructurales, una vez planteadas las ecuaciones, se reducen en muchas ocasiones a su resolución numérica; es importante comprender que no es en general posible resolver mediante métodos exactos los sistemas de ecuaciones obtenidos y es preciso recurrir a técnicas numéricas.

El método de las diferencias finitas como método de resolución de problemas planteados en ecuaciones en derivadas parciales ha ido perdiendo fuerza en aplicaciones numéricas frente a otros métodos de resolución, sobre todo el método de los elementos finitos. Sin embargo, son muchos los autores que han seguido confiando en el desarrollo del método de diferencias finitas, proponiendo diferentes soluciones para poder aplicar las diferencias finitas a cualquier tipo de dominio. Así, de las limitaciones del método clásico de diferencias finitas se proyecta el método de las diferencias finitas generalizadas, aplicable a cualquier dominio con distribución irregular de puntos.

En este trabajo se aplica el método de las diferencias finitas al cálculo de estructuras, se indica su alcance, su comparación con el método de los elementos finitos y se expone la línea de mejora de los métodos de diferencia finitas clásicos a los de diferencias finitas generalizadas.

Con el propósito anterior se estudia el problema estructural de la viga Bernoulli en varios casos de carga y con diversas condiciones de contorno, comparando el resultado con el obtenido mediante el método de los elementos finitos obtenido a través del programa SAP 2000.

El método de las diferencias finitas

Las ecuaciones en derivadas parciales o los sistemas de ecuaciones en derivadas parciales rigen muchos fenómenos de ingeniería según establecen los principios físicos y sus correspondientes desarrollos matemáticos.

Se topa con importantes dificultades, en la resolución de este tipo de ecuaciones y sus condiciones de contorno aún con coeficientes constantes, con lo que se recurre a la búsqueda de soluciones aproximadas. Entre los diversos métodos que permiten la obtención de este tipo de solución uno de los más clásicos es el denominado de diferencias finitas. Dicho método se basa en discretizar de forma regular el dominio, estableciendo un conjunto finito de puntos interiores y de la frontera donde se va a calcular el valor de la función. Para hallar el valor aproximado de la función en dichos puntos llamados nodos, es necesario sustituir las derivadas parciales para cada punto por cocientes de diferencias entre los valores de la solución en diferentes puntos, obteniéndose un sistema algebraico de ecuaciones lineales con el mismo número de ecuaciones que incógnitas. A las expresiones de transformación de cada operador diferencial en cocientes de diferencias, se le denomina fórmula en diferencias finitas.

Las fórmulas en diferencias clásicas centradas, para una función f donde se define como h y k los incrementos de las variables de dicha función x e y respectivamente, tienen la siguiente forma:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{f(x+h, y) - f(x-h, y)}{2h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{f(x, y+k) - f(x, y-k)}{2k}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{f(x+h, y) - 2f(x, y) + f(x-h, y)}{h^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{f(x, y+k) - 2f(x, y) + f(x, y-k)}{k^2}$$

Dichas ecuaciones se pueden generalizar para órdenes superiores, que sustituyendo en las ecuaciones diferenciales y de contorno, permiten obtener un sistema de ecuaciones algebraicas, con tantas ecuaciones como incógnitas, de igual número que

nodos tenga el dominio. Al resolver el sistema se obtienen valores aproximados de la función en los puntos del dominio discretizado.

Este método de resolución tiene la gran ventaja de su planteamiento aunque tiene limitaciones. Por un lado la malla debe ser regular, ya que en caso contrario para cada malla se debería encontrar una fórmula en diferencias finitas; por otro lado, el número de nodos y la selección de dichos nodos en la malla para la obtención de las fórmulas en diferencias finitas, es fijo.

Al discretizar un dominio, surgen como más habituales el método de diferencias finitas clásico de cinco nodos y de nueve nodos. En ambos métodos la frontera debe ser una poligonal cerrada de lados contiguos perpendiculares, los puntos de estimación deben estar repartidos de forma regular y los nodos que rodean al nodo central debe ser 4 u 8 pero no arbitrario.

Para el método de diferencias finitas de cinco nodos (siendo el nodo central el nodo cero, el uno el de su derecha y el resto creciendo en sentido antihorario), de manera que se elige una discretización del dominio de igual paso h en ambas variables y llamando f_i al valor de la función f a aproximar en el nodo i , se tiene:

$$D_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{f_1 - f_3}{2h} \\ \frac{f_2 - f_4}{2h} \\ \frac{f_1 + f_3 - 2f_0}{2h} \\ \frac{f_1 + f_4 - 2f_0}{2h} \end{bmatrix}$$

Análogamente, para el método de diferencias finitas de nueve nodos (siendo el nodo central el nodo cero, el uno el de su derecha y el resto creciendo en sentido antihorario) se tiene:

$$D_F = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5} f_1 + \frac{f_2}{20} - \frac{f_4}{20} - \frac{2}{5} f_5 - \frac{f_6}{20} + \frac{f_8}{20} \right) \\ \frac{1}{h} \left(\frac{2}{5} f_3 + \frac{f_2}{20} + \frac{f_4}{20} - \frac{2}{5} f_7 - \frac{f_6}{20} - \frac{f_8}{20} \right) \\ \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{3} f_0 + \frac{5f_1}{6} + \frac{f_2}{12} - \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{12} + \frac{5f_5}{6} + \frac{f_6}{12} - \frac{f_7}{6} + \frac{f_8}{12} \right) \\ \frac{1}{h^2} \left(-\frac{5}{3} f_0 + \frac{f_1}{6} + \frac{f_2}{12} + 5 \frac{f_3}{6} + \frac{f_4}{12} - \frac{f_5}{6} + \frac{f_6}{12} + \frac{5f_7}{6} + \frac{f_8}{12} \right) \\ \frac{1}{4h^2} (f_2 - f_4 + f_6 - f_8) \end{bmatrix}$$

El método de las diferencias finitas generalizadas

El método de las diferencias finitas generalizadas [1] supone una evolución del método clásico de diferencias finitas, el cual permite resolver problemas donde la nube de puntos generada sea irregular. Se plantea el método para ecuaciones en derivadas parciales de segundo orden, evidentemente su generalización es inmediata, al igual que hemos generalizado el método de diferencias finitas clásico.

Sea un problema gobernado por una ecuación en derivadas parciales de segundo orden en el dominio bidimensional:

$$L_2[U] = f \quad \text{en } \Omega \quad (1)$$

con las condiciones de contorno:

$$L_1[U] = g \quad \text{en } \Gamma \quad (2)$$

donde la función U es al menos dos veces diferenciable en el dominio $\Omega \subset R^2$, con frontera Γ . L_2 es una ecuación en derivadas parciales lineal de segundo orden, L_1 es una ecuación lineal diferencial de primer orden, mientras que f y g son dos funciones conocidas.

Se establecen un conjunto de nodos que se reparte en todo el dominio, de tal forma que a cada nodo del dominio se le asocia una estrella, es decir un conjunto de nodos de influencia alrededor de un nodo central.

El número y la posición de los nodos en cada estrella son factores decisivos que afectan a la aproximación mediante fórmulas en diferencias finitas. Se utilizará una nube de nodos lo más regular posible buscando un buen condicionamiento de las estrellas. El criterio de selección de nodos empleado será el de los cuatro cuadrantes, es decir, el área alrededor del punto central se divide en 4 sectores correspondientes a los cuadrantes de un sistema de coordenadas cartesianas con origen en el nodo central. En cada cuadrante se seleccionan los dos nodos más cercanos (se seleccionan dos nodos para tener un conjunto de nodos alrededor del central de 8 que parece ser un número óptimo [1]), si esto no fuera posible (por ejemplo en un contorno) se pueden añadir nodos para conseguir el número de nodos necesarios para la resolución de las ecuaciones en diferencias.

Por su parte las funciones de ponderación definen un dominio relativamente pequeño en el que su valor es distinto de cero, siendo nulo en el resto del dominio. Cada función de ponderación se asocia a un nodo, pudiéndose superponer con otros subdominios. Se usará la función de peso potencial $w(x, y)$ (las mejores funciones de ponderación son las exponenciales y las potenciales [1]) que se define a continuación:

$$w(x, y) = \frac{1}{(dist)^3}$$

donde $dist$ es la distancia del nodo central al nodo considerado de la estrella.

Llamando U_0 al valor de la función en el nodo central de la estrella de coordenadas (x_0, y_0) y U_i al valor de la función en el resto de los nodos de coordenadas (x_i, y_i) , con $i = 1, 2, \dots, N$, entonces el desarrollo en serie de Taylor es:

$$U_i = U_0 + h_i \frac{\partial U_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 U_0}{\partial x \partial y} \right) + \dots$$

donde $h_i = x_i - x_0$; $k_i = y_i - y_0$.

Por tanto, despreciando los términos de orden superior al segundo, la aproximación u_i de U_i es:

$$u_i = u_0 + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)$$

La expresión anterior es válida para cualquier $i = 1, 2, \dots, N$ con lo que, sumando todas las expresiones que resultan para los diferentes valores de i se obtiene:

$$\sum_{i=1}^N (u_i - u_0) = \sum_{i=1}^N \left(h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right)$$

Se define el funcional $B(u)$ como sigue:

$$B(u) = \sum_{i=1}^N \left[\left(u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right) w(h_i, k_i) \right]^2$$

donde $w(h_i, k_i)$ es una función de ponderación.

A continuación minimizamos el funcional $B(u)$ con respecto a las derivadas parciales y así obtenemos un conjunto de cinco ecuaciones lineales con cinco incógnitas

$$\left(\frac{\partial u_0}{\partial x}, \frac{\partial u_0}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right)$$

cuya resolución proporciona expresiones explícitas de las incógnitas en términos del valor de las aproximaciones de segundo orden en todos los nodos de la estrella u_i , de los valores h_i y k_i , y de la función de ponderación w . Así, el sistema que se obtiene es:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] h_i w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] k_i w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{h_i^2}{2} w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] \frac{k_i^2}{2} w^2 = 0 \\ \sum_{i=1}^N \left[u_0 - u_i + h_i \frac{\partial u_0}{\partial x} + k_i \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(h_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} + k_i^2 \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} + 2h_i k_i \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right) \right] h_i k_i w^2 = 0 \end{array} \right.$$

donde $w = w(h_i, k_i)$.

Expresándolo matricialmente:

$$AD_u = b$$

$$D_u = \left\{ \frac{\partial u_0}{\partial x} \quad \frac{\partial u_0}{\partial y} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 u_0}{\partial x \partial y} \right\}^T$$

$$b = \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) k_i w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{h_i^2}{2} w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) \frac{k_i^2}{2} w^2 \\ \sum_{i=1}^N (-u_0 + u_i) h_i k_i w^2 \end{array} \right.$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^N h_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^2}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i w^2 \\ & \sum_{i=1}^N k_i^2 w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^3}{2} w^2 & \sum_{i=1}^N h_i k_i^2 w^2 \\ & & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^2 k_i^2}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i^3 k_i}{2} w^2 \\ & & & \sum_{i=1}^N \frac{k_i^4}{4} w^2 & \sum_{i=1}^N \frac{h_i k_i^3}{2} w^2 \\ & & & & \sum_{i=1}^N h_i^2 k_i^2 w^2 \end{pmatrix}$$

SIM

Para la resolución del sistema es evidente que se necesitan al menos cinco nodos (sin incluir el central).

Para la resolución del sistema se puede aplicar el método de Cholesky ya que la matriz \mathbf{A} es simétrica. Se puede descomponer \mathbf{A} como producto de una matriz triangular por su transpuesta $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T$. Con lo que se puede escribir:

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T \mathbf{D}_u = \mathbf{b}$$

Y ahora resolvemos en dos etapas:

$$\mathbf{Q}^T \mathbf{D}_u = \mathbf{Y} \tag{3}$$

$$\mathbf{Q}\mathbf{Y} = \mathbf{b} \tag{4}$$

Así, resolviendo el sistema (4) en orden descendente se obtienen los valores de \mathbf{Y} , después a partir del sistema (3) se obtienen las fórmulas en diferencias siguientes:

$$\begin{cases} \mathbf{Y}(k) = -u_0 \sum_{i=1}^5 M_{ki} c_i + \sum_{j=1}^N u_j (\sum_{i=1}^p M_{ki} d_{ji}), & k = 1, \dots, 5 \\ \mathbf{D}(k) = \frac{1}{q_{kk}} (\mathbf{Y}(k) - \sum_{i=1}^{5-k} q_{(k+1)k} \mathbf{D}(k+i)), & k = 1, \dots, 5 \end{cases} \tag{5}$$

donde:

$$M_{ij} = \begin{cases} (-1)^{1-\delta_{ij}} \frac{1}{q_{ij}} \sum_{k=j}^{i-1} q(ik)M(kj) & \text{for } j < i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \\ \frac{1}{q_{ij}} & \text{for } j = i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \\ 0 & \text{for } j > i, i = 1, \dots, 5 \quad j = 1, \dots, 5 \end{cases}$$

con δ_{ij} el delta de Kronecker, y:

$$c_i = \sum_{j=i}^N d_{ji}$$

$$d_{j1} = h_j w^2; \quad d_{j2} = k_j w^2; \quad d_{j3} = \frac{h_j^2}{2} w^2; \quad d_{j4} = \frac{k_j^2}{2} w^2; \quad d_{j5} = h_j k_j w^2$$

Incluyendo en la ecuación en derivadas parciales (1) y (2) los valores explícitos de las derivadas parciales expresados en (5) se obtiene la ecuación de la estrella, que es posible expresarla como:

$$u_0 = \sum_{i=1}^N m_i u_i + m_f f_0 \quad (6)$$

La expresión (6) es una ecuación lineal que relaciona el valor de la función en el nodo central de la estrella (u_0) con los valores de la función en el resto de los nodos de la estrella (u_i).

La formulación dada debe ser aplicada a cada uno de los nodos del dominio, obteniéndose un número de ecuaciones e incógnitas igual al número de nodos seleccionados para calcular el valor de la función. La resolución del sistema de ecuaciones lineales resuelve el problema.

Por tanto, el método de las diferencias finitas generalizadas puede ser aplicado a problemas con forma irregular de frontera y una distribución aleatoria de los nodos centrales de las estrellas, de tal forma que cada nodo central está rodeado por un número de puntos que no tienen que ser necesariamente iguales para todos ellos.

Estudio de la viga Bernoulli

Planteamiento de las ecuaciones

Se considera una viga Bernoulli de directriz recta, sección variable, longitud L y apoyo fijo en sus dos extremos. Esta viga se encuentra sometida a una distribución de carga perpendicular a la directriz definida por la función $P(X)$, en donde X es la

distancia de la sección al origen de coordenadas situado en el apoyo izquierdo. La variación de la rigidez a flexión es $EI(X)$.

El comportamiento de la viga en las anteriores condiciones se rige por medio de un problema de contorno conocido, cuya deducción a partir de las ecuaciones de equilibrio, de compatibilidad y constitutivas se indica a continuación:

1. Ecuaciones de equilibrio (figura 1):

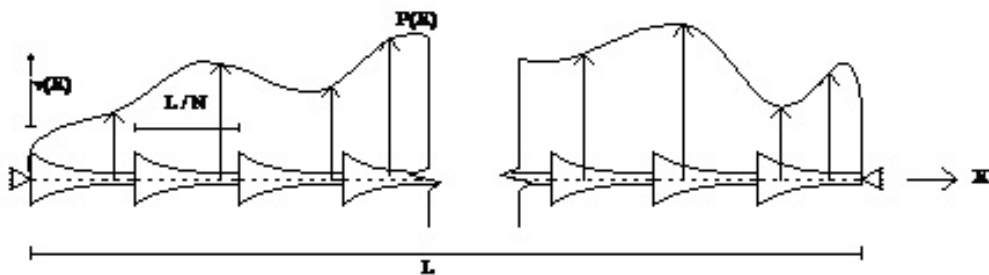
- Equilibrio de fuerzas verticales:

$$\frac{dV(X)}{dX} + p(X) = 0$$

- Equilibrio de momentos en el punto:

$$\frac{dM(X)}{dX} + V(X) = 0$$

Figura 1. Viga de Bernoulli sometida a una fuerza distribuida vertical y detalle del



equilibrio de fuerzas en una rebanada de la misma.

2. Ecuaciones de compatibilidad:

$$\chi(X) = \frac{d\theta(X)}{dX}$$

$$\gamma(X) = \frac{dv(X)}{dX} - \theta(X)$$

3. Ecuaciones constitutivas:

$$M(X) = EI(X)\chi(X)$$

$$V(X) = GA(X)\gamma(X)$$

La viga Bernoulli carece de deformación por cortante, por tanto: $GA(X) \rightarrow \infty$ y $\gamma(X) \rightarrow 0$.

Luego, de la ecuación:

$$\gamma(X) = \frac{dv(X)}{dX} - \theta(X)$$

resulta que:

$$\theta(X) = \frac{dv(X)}{dX}$$

Por tanto al considerar la ecuación de la curvatura, se observa que puede obtenerse como derivada segunda de la flecha:

$$\chi(X) = \frac{d^2v(X)}{dX^2}$$

Luego de la ecuación expresión del momento es:

$$M(X) = EI(X) \frac{d^2v(X)}{dX^2}$$

Derivando la ecuación de equilibrio en fuerzas verticales se obtiene la ecuación diferencial del problema de la viga de Bernoulli [2]:

$$\frac{d^2}{dX^2} \left(EI(X) \frac{d^2v(X)}{dX^2} \right) = p(X); X \in (0, L)$$

Las condiciones de contorno son de flecha y momento nulos en los extremos de la viga en el caso de viga biapoyada:

$$\begin{aligned} v(0) &= v(L) = 0 \\ v''(0) &= v''(L) = 0 \end{aligned}$$

Estudiamos la viga biapoyada bajo condiciones de carga uniforme y puntual.

Resolución de la viga biapoyada bajo carga uniforme

Adoptamos un esquema en diferencias finitas centradas con la distribución de nodos de la figura 2.

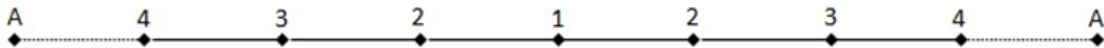


Figura 2. Distribución de nodos en viga apoyada.

Se sabe que la ecuación diferencial de la viga Bernoulli para inercia constante es:

$$\frac{d^4 u}{dx^4} = \frac{P}{EI}$$

Adoptamos el esquema en diferencias centradas se tiene que:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 u}{dx^2} &= \frac{d^2}{dx^2} \left(\frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} \right) = \\ &= \frac{1}{h^2} \left(\frac{u_{i+2} - 2u_{i+1} + u_i}{h^2} - 2 \frac{u_{i+1} - 2u_i + u_{i-1}}{h^2} + \frac{u_i - 2u_{i-1} + u_{i-2}}{h^2} \right) = \\ &= \frac{1}{h^4} (u_{i+2} - 4u_{i+1} + 6u_i - 4u_{i-1} + u_{i-2}) \end{aligned}$$

Aplicando la ecuación general a los nodos:

Nudo 1:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 u_1}{dx^2} = \frac{1}{h^4} (2u_3 - 8u_2 + 6u_1)$$

Nudo 2:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 u_2}{dx^2} = \frac{1}{h^4} (u_4 - 4u_3 + 7u_2 - 4u_1)$$

Nudo 3:

$$\frac{d^2}{dx^2} \frac{d^2 u_3}{dx^2} = \frac{1}{h^4} (u_A - 4u_4 + 6u_3 - 4u_2 + u_1)$$

Teniendo en cuenta que las condiciones de contorno son:

$$u_4 = 0$$

$$u_A = -u_3$$

Queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2u_3 - 8u_2 + 6u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \\ -4u_3 + 7u_2 - 4u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \\ 5u_3 - 4u_2 + u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \end{aligned} \right\}$$

De la que se obtiene que:

$$u_1 = 17,25 \frac{h^4 P}{EI}$$

$$u_2 = 15 \frac{h^4 P}{EI}$$

$$u_3 = 8,75 \frac{h^4 P}{EI}$$

Adoptamos una viga de acero de un metro de sección maciza de 0,1m x 0,1 m y carga uniformemente repartida de 100 kN. Así:

$$u_1 = 17,25 \frac{h^4 P}{EI} = 17,25 \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^4 100}{2 \times 10^8 \frac{1}{12} (0,1)^4} = 7,99 \times 10^{-4} \text{ m}$$

Resultado similar al que se obtiene con un modelo de elementos finitos con el SAP 2000 [3], según se muestra en la figura 3.

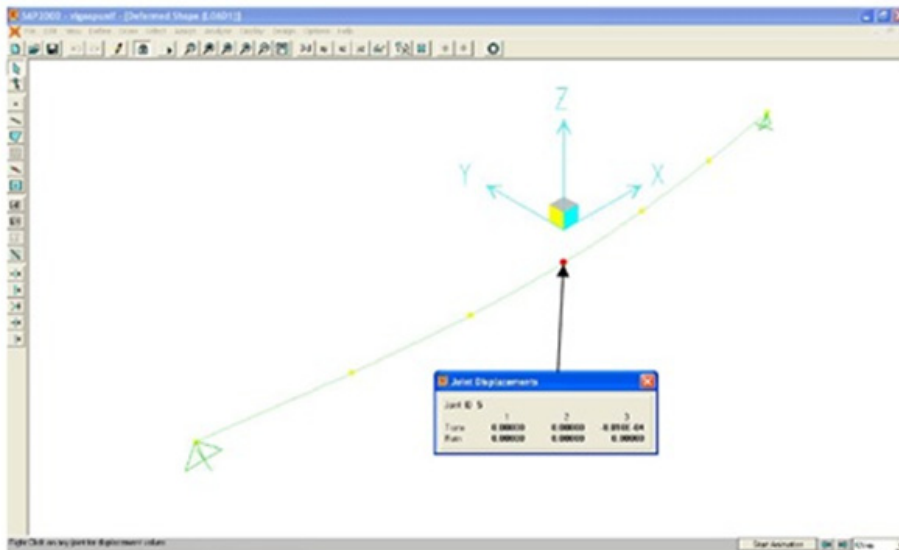


Figura 3. Viga Bernouilli biapoyada con carga uniforme con SAP 2000.

Resolución de la viga biapoyada bajo carga puntual

Para resolver el caso de carga puntual sobre viga biapoyada usamos la misma estrategia usada en el cálculo de placas, es decir colocamos la carga uniforme únicamente en el entorno del nodo donde se carga puntualmente, abarcando el intervalo de discretización realizado. Evidentemente una mejor aproximación se alcanza con una discretización de nodos más fina entorno a la carga puntual.

En nuestro caso supondremos cargado el centro de la viga con una carga puntual de 100kN y resolveremos el caso para la discretización del dominio igual a como se hizo en el caso de carga uniforme y con otra más fina según se indica en la figura 4.

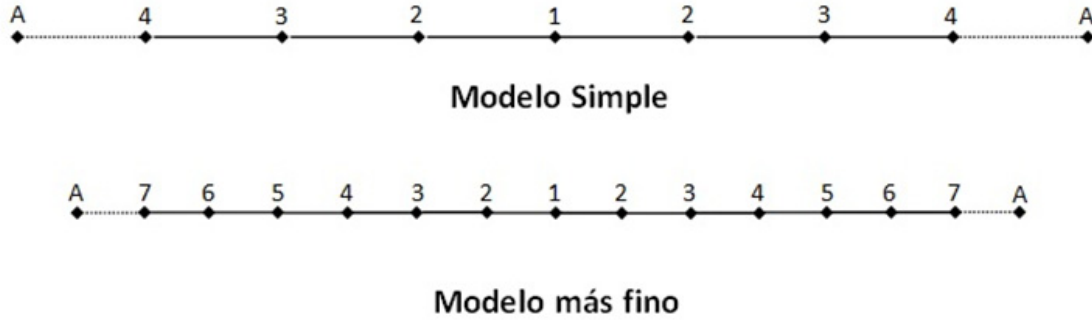


Figura 4. Distribución de los nodos para carga puntual en viga Bernoulli biapoyada.

Para el modelo más simple se tienen las siguientes ecuaciones de forma análoga a como se obtuvieron en el apartado anterior:

$$\left. \begin{aligned} 2u_3 - 8u_2 + 6u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \\ -4u_3 + 7u_2 - 4u_1 &= \frac{h^4 P/2}{EI} \\ 5u_3 - 4u_2 + u_1 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Se observa que son las mismas ecuaciones que las obtenidas para el caso de carga uniforme con la única variación del término independiente que supone la carga de influencia que llega a cada nudo, es decir que al tener cargado uniformemente solo el dominio que va del nodo 1 al 2 en ambos sentidos, al aplicar la ecuación de la viga al nudo 1 se lleva toda la carga de influencia; sin embargo al hacer el equilibrio en el nudo 2 solo se lleva la mitad de la carga pues para el nodo 2 de la derecha solo recibe carga de la parte de dominio de su izquierda y para el nodo 2 de la izquierda de la viga solo recibe carga de la parte derecha. Evidentemente al nodo 3 no llega carga pues los dominios discretizados a ambos lados están descargados.

Resolviendo el sistema se obtiene que:

$$u_1 = 8,75 \frac{h^4 P}{EI}$$

Donde la carga P es la carga de 100 kN repartida en el tercio central del dominio, es decir que es una carga repartida de 300 kN/m. Así:

$$u_1 = 8,75 \frac{h^4 P}{EI} = 8,75 \frac{\left(\frac{1}{6}\right)^4 300}{2 \times 10^8 \frac{1}{12} (0,1)^4} = 1,22 \times 10^{-3} m$$

Resultado similar al que se obtiene con un modelo de elementos finitos con el SAP 2000, según se muestra en la figura 5.

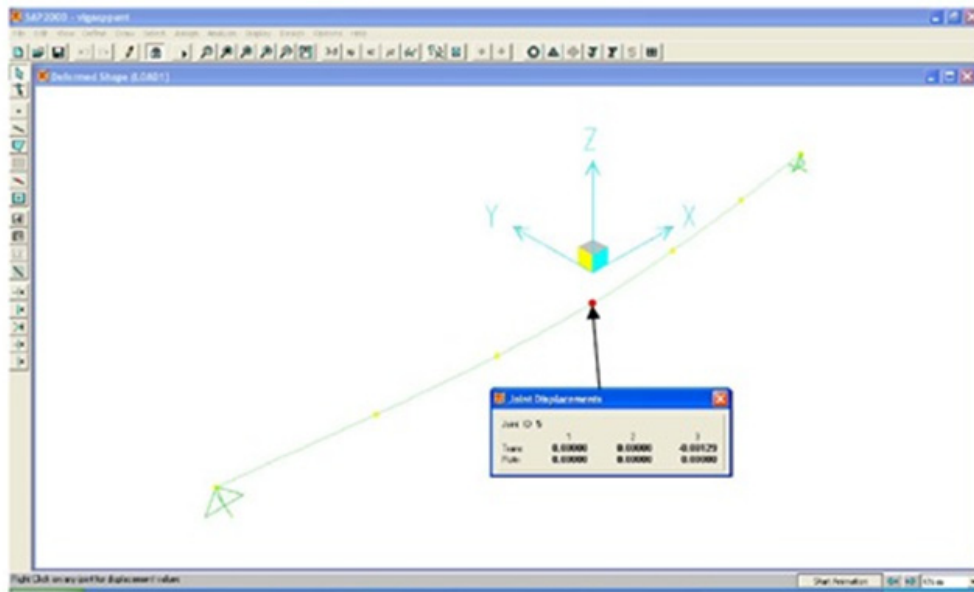


Figura 5. Viga Bernoulli biapoyada con carga puntual con SAP 2000.

Para la discretización más fina del dominio realizada para la aplicación del método de diferencias finitas se obtienen las siguientes ecuaciones:

$$\left. \begin{aligned} 2u_3 - 8u_2 + 6u_1 &= \frac{h^4 P}{EI} \\ u_4 - 4u_3 + 7u_2 - 4u_1 &= \frac{h^4 P}{2EI} \\ u_5 - 4u_4 + 6u_3 - 4u_2 + u_1 &= 0 \\ u_6 - 4u_5 + 6u_4 - 4u_3 + u_2 &= 0 \\ u_7 - 4u_6 + 6u_5 - 4u_4 + u_3 &= 0 \\ 5u_6 - 4u_5 + u_4 &= 0 \end{aligned} \right\}$$

Que permite obtener el valor:

$$u_1 = 71,5 \frac{h^4 P}{EI} = 71,5 \frac{\left(\frac{1}{12}\right)^4 600}{2 \times 10^8 \frac{1}{12} (0,1)^4} = 1,23 \times 10^{-3} m$$

Como hemos visto, si el dominio no es lineal, las dificultades para incorporar las condiciones de contorno al sistema lineal se incrementan notablemente. De igual forma se producen complicaciones para construir esquemas en diferencias finitas sobre mallas no uniformes. En ambas situaciones se pueden utilizar ideas como la que exponemos a continuación: la aproximación en diferencias finitas definida por una estrella de 5 nodos es:

$$-\frac{U_{i+1,j} - 2U_{ij} + U_{i-1,j}}{h^2} - \frac{U_{i,j+1} - 2U_{ij} + U_{i,j-1}}{h^2} = f_{ij}$$

Pues bien, esta condición sobre los puntos en los que la estrella está contenida en el interior supone que en los puntos en los que al menos un nodo caiga fuera del dominio no regular definido es necesario modificar la forma de la ecuación según la distancia de los nodos de la estrella real que se puede formar. Así, se aproxima el valor de la función en los puntos P que define el dominio irregular por el polinomio de segundo orden en la variable que corresponda (por ejemplo x) alrededor del nodo $(i=N, j=M)$ como se expresa en las siguientes relaciones:

$$u(P) = u(N, M) + \alpha h \frac{\partial u}{\partial x}(N, M) + \frac{(\alpha h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) + O(h^3)$$

Donde α representa la distancia de P a $(i=N, j=M)$ dividida por h , y:

$$u(N-1, M) = u(N, M) - h \frac{\partial u}{\partial x}(N, M) + \frac{(h)^2}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) + O(h^3)$$

Si se desprecian los términos de orden superior, se multiplica la segunda ecuación por α y se suman ambas ecuaciones, se obtiene que:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(N, M) = \frac{\alpha U_{n-1,m} - (1 + \alpha)U_{n,m} + u(P)}{\frac{\alpha(1 + \alpha)}{2} h^2} + O(h)$$

A la vista de esta aproximación, se puede plantear la siguiente ecuación en diferencias finitas:

$$-\frac{\alpha U_{n-1,m} - (1 + \alpha)U_{n,m} + u(P)}{\frac{\alpha(1 + \alpha)}{2} h^2} - \frac{U_{n,m+1} - 2U_{n,m} + U_{n,m-1}}{h^2}$$

Es de notar la caída en una unidad del orden de la aproximación, el orden de la aproximación de la derivada segunda es 1, mientras que si $\alpha = 1$, el orden sube a 2.

Cuando se compara la versión clásica del método de diferencias finitas en mallas regulares con el método de los elementos finitos, se comprueba que éste último es más efectivo en el tratamiento de las condiciones de contorno, especialmente en dominios irregulares y cuando se producen condensaciones locales de nodos. Si se

podiera usar una malla arbitraria de diferencias finitas se vencerían estas dificultades, manteniendo las ventajas del método de las diferencias finitas. Una evolución del método de las diferencias finitas ha dado lugar al desarrollo del método de las diferencias finitas generalizadas, el cual se puede aplicar sobre mallas irregulares de nodos según se indica en el apartado 3 y permite resolver las dificultades asociadas a los esquemas clásicos.

Conclusiones

El artículo pone de manifiesto las siguientes conclusiones:

- Los resultados obtenidos mediante la simulación numérica por el método de las diferencias finitas clásicas son correctos al ser comparados con otros métodos que implementan algunos programas de cálculo (en particular se ha utilizado el SAP 2000) en el cálculo de elementos estructurales.
- En el caso de cargas localizadas ya sea en el interior o contornos de elementos estructurales es necesario refinar el mallado en torno a las cargas concentradas.
- Mediante el método de diferencias finitas generalizadas se podría resolver la aplicación de los problemas con geometrías más estrictas o necesidades locales de remallado. Se propone dicho método como línea de investigación aplicable al tipo de problemas expuestos. La resolución para el caso propuesto es metódica e inmediata.
- Queda expuesta la posibilidad y necesidad de seguir usando los métodos de las diferencias finitas para la resolución numérica de ecuaciones que representan problemas de ingeniería donde tradicionalmente ha sido empleado el método de los elementos finitos. El uso de los esquemas de diferencias finitas permite un mejor análisis del problema matemático planteado, al entrar directamente en las ecuaciones matemáticas del problema, abordando con éxito los problemas bien estudiados de existencia, unicidad, convergencia, inestabilidad o bloqueo de la solución.

References

- [1] Benito, J.J.; Ureña, F., Gavete, L., The Generalized Finite Difference Method, *Applied Mathematical Modeling Research*, pp. 251-293, 2007.
- [2] Timoshenko S., Goodier J.N., Theory of Elasticity, Ed. McGraw-Hill, New York, 1987.
- [3] Manual SAP 2000 Advanced 9.0.3 Structural Analysis Program, *Computer and Structures*, Berkley, 2004.

Las formulas en la docencia de la ingeniería de edificación, en genera, y el caso de la curva normal, en particular

Antonio Garrido Hernández. Doctor, Ingeniero de Edificación,, antonio.garrido@upct.es

Carlos Parra Costa. Doctor, Arquitecto, carlos.parra@upct.es

Eusebio Martínez Conesa. Doctor, Ingeniero Industrial, Eusebio.martinez@upct.es

Universidad Politécnica de Cartagena

Resumen

Esta comunicación aborda los problemas de aprendizaje de las fórmulas en los estudios de ingeniería como consecuencia de una inadecuada comprensión de las mismas. Para ello, propone una clasificación de las fórmulas más habituales y un método para su análisis en función de su naturaleza. Finalmente aplica el método a la curva normal por su importancia en la comprensión de los fenómenos de control de calidad en la Ingeniería de Edificación.

Introducción

Los textos de la ingeniería contienen fórmulas como parte esencial de los mismos, pues no se concibe una ingeniería que no sea capaz de modelar las variables que definen los fenómenos que le son propios. Por eso, parece de interés, en el contexto didáctico en el que se encuadra esta comunicación, reflexionar sobre cómo se aborda el estudio de las fórmulas en la práctica discente y cómo debería abordarse para una mejor comprensión de su naturaleza y un mejor empleo en la resolución de problemas en la edificación.

Que los alumnos, una vez superados los exámenes, olviden las fórmulas por no haberlas comprendido y como mucho en el futuro se limiten a usar tablas deducidas de ellas es una lamentable pérdida de riqueza que paga la economía del país y la seguridad de las personas.

Es muy habitual en los ejercicios y exámenes que los alumnos, en un contexto muy restringido y alejado de la realidad, identifiquen la fórmula correcta a partir del enunciado, aunque se la hayan aprendido de memoria. Una vez identificada empieza una titánica lucha para asociar cada símbolo de la fórmula a un valor del enunciado a la búsqueda de una sola variable desconocida que despejar. Si operan correctamente el resultado es correcto sin que el alumno haya comprendido el significado de las variables y las interrelaciones entre ellas.

En tiempos tan necesitados de ahorro de energía es necesario identificar la energía cognitiva como un factor de cambio fundamental. Cuanto más técnico actúen comprendiendo más eficaz será su desempeño.

Estructura de una fórmula

Las fórmulas de la ingeniería tienen dos componentes fundamentales, uno racional y otro irracional. Puede haber fórmulas sólo racionales pero no totalmente irracionales. El carácter racional de las fórmulas está constituido por aquello que la razón ve o pone en el fenómeno sin necesidad de experimentar: las relaciones entre variables. Por ejemplo, el equilibrio entre las solicitaciones y la resistencia de una estructura. Este equilibrio es una condición racional, no es necesario experimentar para afirmar, primero, y expresar con símbolos, después. Es resultado de una intuición, que puede ser comprobada pero que es captada antes de tal experimentación. El carácter irracional de las fórmulas viene expresado por los valores relativos que acoplan la estructura racional a la realidad mediante experimento. Un ejemplo de valor relativo es el coeficiente de dilatación térmica. Con esto no hemos alcanzado todo el conocimiento de la realidad al que aspiramos, pues, a la postre, aunque sabemos cuánto se dilata un metal no sabemos por qué. Y ni siquiera cuando hagamos una interpretación energética del fenómeno habremos llegado la final, pues allí, en el fondo, no espera la constante de Plank imperturbable guardando el secreto de la irracionalidad de la realidad. La constante de Plank es, también, un valor relativo que tiene de especial su carácter universal por describir una realidad que subyace a todos los fenómenos. Cuando se dice que es un valor relativo no referimos a que se puede expresar como la energía por unidad de frecuencia, del mismo modo que el coeficiente de dilatación lo es por unidad de longitud inicial y gradiente térmico. Evidentemente el coeficiente de dilatación térmica no es una constante universal sino una constante particular de un tipo de material. Otra cosa sería que se encontrara una constante común a todos los materiales que multiplicada, pongamos, por el número atómico del mismo cumpliera la misma función.

Naturalmente, en este contexto, irracionalidad no quiere decir brutal o primitivo sino que quiere decir no racionalizable, es decir, no extraíble de la razón sin exploración de la naturaleza. En todo caso la razón matemática procede de la naturaleza pero de la de nuestro cerebro. Por eso no debe extrañar el acople de las matemáticas a la realidad, pues son producto en sus propuestas más complejas de la más compleja de las realidades (nuestra mente) que reserva todos sus secretos para nuestra paciencia exploradora.

Tipos de fórmulas

Vamos a ocuparnos de las fórmulas que dan respuesta a fenómenos no dinámicos, es decir dejamos al margen las ecuaciones diferenciales.

Como hemos dicho, las fórmulas son resultado de una primera intuición que establece la estructura y una fase experimental que permite determinar los valores relativos particulares o universales.

En ingeniería encontramos los siguientes grupos de fórmulas:

Definitorias de nivel 0.- Son las que definen unidades de las magnitudes. Por ejemplo cuando se expresan las unidades de fuerza de este modo:

$$N = \frac{kg \cdot m}{s^2}$$

Definitorias de nivel 1.- son las que definen de forma convencional una variable útil para expresar en fórmulas de otro tipo. Son, en realidad, definiciones expresadas con símbolos. Por tanto su grado de irracionalidad es cero. Ejemplos son las fórmulas de la tensión o la deformación:

$$\sigma = \frac{F}{A}; \quad \varepsilon = \frac{\Delta L}{L}; \quad M = F \cdot L$$

Con ellas estamos definiendo que llamamos tensión a la fuerza por unidad de superficie y deformación unitaria al incremento de longitud por unidad de longitud. El carácter convencional de estas fórmulas debe ser explicitado al alumno para que el concepto de valor unitario sea comprendido. Es muy habitual que los alumnos no diferencien o, al menos, no sepan expresar la diferencia entre fuerza y tensión. Este tipo de fórmulas son lógicas porque no necesitan que se acuda a ninguna experiencia para demostrarlas o comprenderlas y son instrumentales porque se incluyen en otras más complejas. Tienen mucho valor porque permiten caracterizar a los materiales reales mediante estos valores relativos que llamamos coeficientes y hacerlos participar en construcciones abstractas más complejas donde los materiales juegan un papel fundamental.

Definitorias de nivel 2.- Son aquellas que definen propiedades complejas a partir de las de nivel 1. Por ejemplo el límite elástico:

$$E = \frac{\sigma}{\varepsilon}$$

Estas fórmulas permiten determinar constantes particulares como el módulo de elasticidad a partir de la tensión y la deformación unitaria; o la resistencia eléctrica a partir de la diferencia de potencial y la intensidad de corriente; o el coeficiente de conductividad térmica a partir del flujo de calor, el espesor de la pieza y el gradiente de temperatura.

Ejemplos:

$$\alpha = \frac{\Delta L}{\Delta T \cdot L}$$

$$\lambda = \frac{Q \cdot L}{\Delta t \cdot A \cdot \Delta T}$$

Con las definiciones de unidades y variables y con la determinación de los coeficientes se está en condiciones de formular procesos más complejos.

Operativas.- Son las fórmulas que permite determinar acciones, dimensionar elementos e interpretar fenómenos y sus disfunciones. Es decir, la esencia de la ingeniería. En estas fórmulas es dónde se presenta con toda claridad la relación entre los componentes racional e irracional de la descripción de un fenómeno. Estas fórmulas están en relación circular con las que permiten determinar los coeficientes. De hecho, son previas:

$$\Delta L = \alpha \cdot \Delta T \cdot L$$

$$\frac{Q}{\Delta t} = \lambda \frac{A \cdot \Delta T}{L}$$

Estas fórmulas debidamente transformadas responden a preguntas del tipo ¿qué longitud máxima ha de tener un pórtico o qué ancho una junta?, ¿qué espesor ha de tener una pared o un aislante térmico? Además, así presentadas, permiten definir los coeficientes como la magnitud por unidad del resto de variables en juego. En el caso del coeficiente de dilatación, como la dilatación por unidad de longitud inicial y gradiente térmico o la conductividad como el flujo de calor por unidad de superficie expuesta, espesor de pared y gradiente térmico. También el módulo de elasticidad como la tensión que dobla la longitud de un material (si es posible sin entrar en fase plástica, donde rigen otras leyes).

En las que se puede comprobar cómo el coeficiente (parte irracional) actúa como una tasa o tanto por 100 que multiplica a las cantidades presentes en el caso concreto que se quiere resolver. El resto es la parte racional resultado de la intuición o la inferencia de la relación entre variables en un fenómeno.

A veces estas fórmulas aparecen en su formato final con la dimensión buscada como variable independiente sin que el alumno pueda comprender que tiene ante la vista. Veamos el caso de la fórmula que la Instrucción EHE-08 proporciona para establecer la longitud básica de anclaje de una barra en el hormigón para que pueda ser agotada:

$$l_b = \frac{\phi f_{yd}}{4\tau_{bd}}$$

Esta fórmula se presenta lista para su uso. El alumno ante su formato incomprensible, pues no sabe de dónde sale el “4” o porqué “ ϕ ” multiplica a f_{yd} , acabará aprendiéndola de memoria y adquiriendo un conocimiento superficial de ella. Por lo que en una prueba actuará palpando a ciegas.

Esta situación se puede evitar si le explica que procede de una intuición original en la que ellos pueden convenir:

“la barra debe estar anclada al menos hasta que el acero alcance su límite. Si no se cumple esta premisa, las deformaciones serán importantes e incluso la barra puede llegar a ser arrancada y no se cumplirán las hipótesis con las cuales se calculan las secciones de hormigón armado que configuran la estructura”

Esta verbalización de la situación debe ser convertida en símbolos matemáticos para que se pueda operar, a pesar de que este paso es muy complicado para determinados alumnos:

$$F_a \geq F_b$$

Siendo F_a la fuerza de anclaje y F_b la fuerza que agotaría la barra.

Sin perjuicio de sustituir el mayor o igual por igual para simplificar la explicación, tenemos ahora que mostrarle a los alumnos que las fuerzas, para permitir operar, deben ser analizadas en el formato de una fórmula definitoria tipo 1 como:

$$\sigma = \frac{F}{A}, \text{ o lo que es lo mismo: } F = A \cdot \sigma$$

En efecto,

$$F_a = S_a \cdot \tau_{bd}$$

S_a es la superficie de contacto de la barra con el hormigón y τ_{bd} es la tensión rasante (la que el alumno experimenta en su mano si tiramos de una barra que agarra). Por tanto:

$$S_a = l_b \cdot \pi \phi$$

$$F_a = l_b \cdot \pi \phi \cdot \tau_{bd}$$

Ahora veamos la otra fuerza, que ha de equilibrar la de anclaje y agotaría la barra:

$$F_b = S_b \cdot f_{yd}$$

S_b es la superficie de la sección de la barra y f_{yd} es el límite elástico de cálculo de la barra.

$$S_b = \frac{\pi\phi^2}{4}$$

Finalmente a equilibrar las fuerzas:

$$l_b \cdot \pi\phi \cdot \tau_{bd} = \frac{\pi\phi^2}{4} \cdot f_{yd}$$

Resultando la fórmula de la EHE-08 con toda naturalidad al despejar l_b :

$$l_b = \frac{\phi f_{yd}}{4\tau_{bd}}$$

El proceso seguido desvela al alumno el sentido de la fórmula que pierde arbitrariedad y gana en significado. Por tanto, las fórmulas de este tipo pueden ser presentadas a los alumnos en este orden y siempre dentro de su contexto de aplicación:

1. Se describe el fenómeno con conceptos
2. Se asocian los conceptos a variables
3. Se identifican las relaciones entre ellas (parte racional)
4. Se añade el coeficiente (parte irracional)
5. Se presenta el método de determinación de coeficientes
6. Se aplica la fórmula en contextos verosímiles

La función de densidad de probabilidad

Las variables que se usan en las fórmulas de la ingeniería han tenido un carácter determinista como si fueran valores sin incertidumbre. Sin embargo, es sabido que las sollicitaciones y las resistencias son variables aleatorias. Además cuando se llevan a cabo operaciones de control con muestras relativamente pequeñas las decisiones de aceptación y rechazo están sometidas a incertidumbres debido al carácter aleatorio de los resultados de operar con las muestras.

El alumno medio de ingeniería tiene dificultades con el concepto de probabilidad y aleatorio. Dado que la distribución normal describe un gran número de variables que representan características o procesos de la ingeniería, es razonable pensar una buena comprensión de sus fórmulas es un buen cimiento para la comprensión de este especial carácter de los problemas con los que trabaja la ingeniería.

Escogemos la función de densidad de la curva normal estándar por su claridad para explicar el proceso docente de conocimiento significativo de funciones de densidad. Previamente es necesario que los alumnos manejen al menos mecánicamente las funciones de la hoja de cálculo que se utilice. También por se trata de una

fórmula matemática que tiene las propiedades que observamos a menudo en observaciones empíricas, sobre todo asociados a mediciones: simetría y decrecimiento rápido de las colas.

El paso siguiente sería destacar una propiedad fundamental: la reproducibilidad. La suma de dos variables normales sigue una distribución normal. Y finalmente, el resultado que seguramente explica la importancia de la normal en la práctica: el teorema central del límite. La media muestral sigue, aproximadamente, una distribución normal si el tamaño de la muestra es grande, aunque la distribución inicial en la población no sea normal.

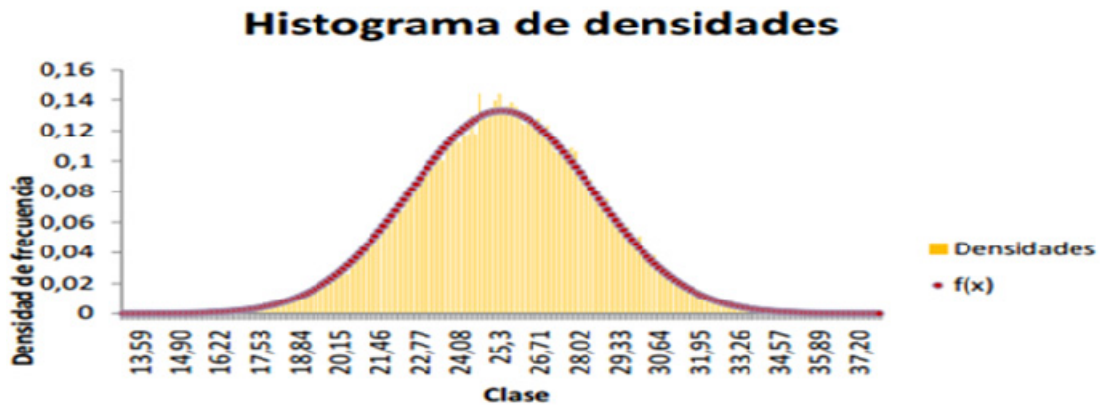
La conocida expresión de la distribución normal es la siguiente:

$$f(x) = \frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Que mediante el cambio de variable $z = \frac{x-\mu}{\sigma}$ se convierte en:

$$f(Z) = \frac{e^{-\frac{1}{2}Z^2}}{\sqrt{2\pi}}$$

Z es una variable cuyos valores oscilan entre menos infinito y más infinito que sigue la distribución normal. La distribución normal tiene forma de campana porque también la tiene la línea que une los extremos de los *histos* (mástiles en griego) de un histograma de densidades en el que el área coincide con la frecuencia relativa o proporción en la que un determinado valor o intervalo de valores de una variable se da.



Esta fórmula produce gran perplejidad en los alumnos por la extraña forma que presenta con tres números irracionales, por cierto, el número e , el número π y $\sqrt{2}$.

Para analizar la fórmula diferenciamos entre la parte que da forma de campana y la produce un cambio de escala:

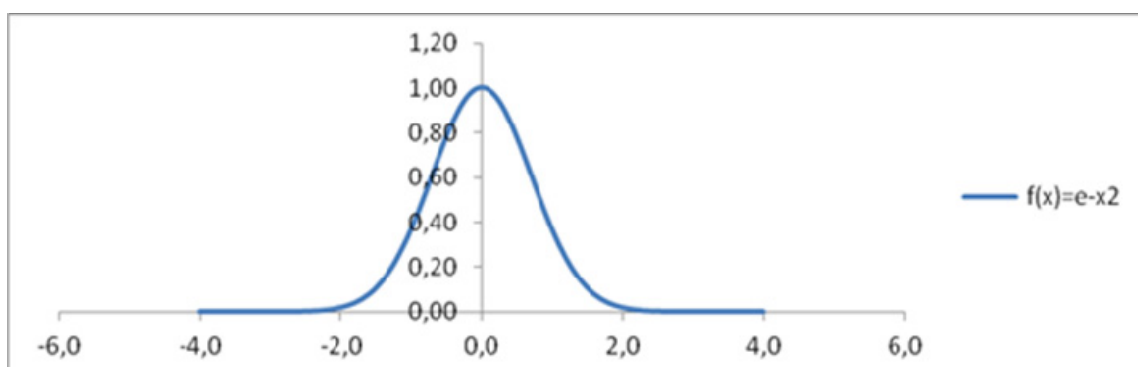
$$f(x) = \frac{1}{e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}} \cdot \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$$

Es decir:

$$\frac{1}{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}}, y \tag{1}$$

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \tag{2}$$

La primera fracción proporciona la forma de campana, pues es conocido que la forma de campana tiene la expresión general $f(x) = e^{-x^2}$ y la segunda consigue que el área bajo la curva sea igual a 1 con lo que conseguimos el ajuste a «la línea que une los extremos de los histos del histograma de densidades».



Los alumnos pueden comprobar lo afirmado con una hoja de cálculo en la que den valores de una variable que siga la curva normal, como es la altura de los alumnos presentes en el aula y aplicando los valores de la muestra como si fueran los parámetros media y desviación estándar de una hipotética población. Aplicando la fórmula (1) se obtiene la campana y aplicando (2) se obtiene la distribución normal, lo que se puede comprobar, por ejemplo, con el valor obtenido para la densidad que corresponde a la media.

También se puede mostrar como a medida que disminuye x disminuye la densidad por ambos extremos o como cuando x crece hacia la media μ se dibuja la parte izquierda de la campana y cuando decrece desde la media se dibuja la parte derecha de la campana. Resulta de interés complementario comprobar que el punto de inflexión está a una distancia σ de la media, por lo que el valor de z será ± 1 .

En definitiva que el genio de los matemáticos les permite, una vez identificada la forma a expresar, encontrar la fórmula que permite su uso eficaz. Por otra parte como la suma de los *histos* del histograma de densidades es la suma de las frecuencias relativas ésta debe ser igual a 1, por lo que encuentran el factor que consigue tal efecto. Juntas ambas expresiones componen la *extraña* fórmula, que, ahora se convierte en familiar. Unas pocas prácticas con las funciones de integración y derivación de la hoja de cálculo hace posible que el alumno utilice ya la curva normal para tomar decisiones al pasar de las proporciones en la discontinuidad de los histogramas a la probabilidad en la continuidad de la función.

Conclusiones

Para evitar el problema didáctico del uso memorístico de las fórmulas y la total inoperancia práctica de los egresados cuando afronten problemas en un entorno complejo se propone la deconstrucción de las fórmulas ante los alumnos como paso previo a su utilización generalizando el proceso utilizado en el ejemplo de la curva normal:

1. Presentación de un problema que requiera decisiones
2. Histograma de frecuencias absolutas

3. Histograma de frecuencias relativas
4. Histograma de densidades
5. Paso a la curva continua
6. Historia y explicación de la fórmula
7. Integración y derivación de la función
8. Toma de decisiones en el caso propuesto

que se convertiría en la siguiente secuencia de cuatro pasos:

1. Presentación de un problema verosímil
2. Antecedentes necesarios para la fórmula
3. Historia y deconstrucción de la fórmula
4. Aplicación a la resolución de problemas

References

- [1] ANECA (2004). Libro Blanco de la Ingeniería de Edificación. <http://cort.as/20X0>
- [2] AUSUBEL, David. (2002). Adquisición y retención del conocimiento. Una perspectiva cognitiva. Editorial Paidós, Barcelona.
- [3] BIGGS, J. (1982). The process of learning. Prentice Hall Australia.
- [4] BIGGS, J. B. (1993). From Theory to Practice: A Cognitive Systems Approach. Higher Education Research & Development, 12: 1, 73-85.
- [5] BIGGS, J. (2008). Calidad del aprendizaje universitario. Narcea, Madrid
- [6] BURKE, J.W. (2004). Competency based education and training. RoutledgeFalmer.
- [7] COSTAMAGNA, A. (2001). Mapas conceptuales como expresión de procesos de interrelación para evaluar la evolución del conocimiento de alumnos universitarios. Revista Enseñanza de las Ciencias, vol. 19(2) 2001, pp. 309-317.
- [8] COWAN, J. (2004). On becoming an innovative teacher. RoutledgeFalmer.
- [9] DANIELS, H., Vygotsky y la Pedagogía, Paidós, Madrid, 2003
- [10] DE CAMILLONI, Alicia et al. (2001). Los obstáculos epistemológicos en la enseñanza, Gedisa Editorial, Barcelona.
- [11] FELDER, R. and BRENT, R. (2004). The Intellectual Development of Science and Engineering Students Part 1. Models and Challenges. Journal of Engineering Education, 93 (4), 269–277.

- [12] FELDER, Richard M. (1988). Learning and teaching styles in engineering education. <http://www4.ncsu.edu/unity/lockers/users/f/felder/public/Papers/LS-1988.pdf>
- [13] FINELLI, C.J. (2001). Strategies for Improving the Classroom Environment. *Journal of Engineering Education*, October, pp 491-497
- [14] FINK, L.D. (2005). Becoming a Professional Engineering Educator. *Journal of Engineering Education*, January.
- [15] MARTON, F. et al. (1984). The experience o learning: Implications for teaching and studying in higher education. Scottish Academic Press.
- [16] NOVAK, J. y GOWIN, B. (1988). *Aprendiendo a Aprender*, Editorial Martínez Roca, Madrid.
- [17] NOVAK, J. (1997). *Teoría y práctica de la educación*, Alianza Editorial, Madrid.
- [18] VALCARCEL, M.V. y SANCHEZ, G. (2008). ¿Cómo preparar mis clases para trabajar con los niños sobre los materiales y sus propiedades? En A. de Pro (dr.) *El desarrollo del pensamiento científico-técnico en Educación Primaria*, pp. 295-341. Instituto Superior de Formación y Recursos en red para el Profesorado. Ministerio de Educación, Política Social y Deportes.

Un modelo dinámico del número de visados colegiales. Aplicación de caso práctico.

Joan C. Micó. Departament de Matemàtica Aplicada, jmico@mat.upv.es

Pau Serrano Rodrigo. PHD, paserrod@arqt.upv.es

Nuria González Roura

Igor Fernández Plazaola. Dpto. Organización de Empresas , iplazaola@doe.upv.es

Universitat Politècnica de València

Resumen

Esta comunicación se contextualiza en la aplicación de las matemáticas en la Ingeniería de Edificación, en concreto en el ámbito de la asignatura de posgrado de Optimización, Simulación y Tratamiento de Datos en Edificación. El objetivo de la comunicación abarca la octava competencia de los estudios de Ingeniería de Edificación, relacionada con los visados colegiales. En concreto, se presenta un modelo matemático dinámico para realizar previsiones de futuro del número de visados colegiales. Para obtener este modelo se ha utilizado la Metodología de Modelización General (MMG). Siguiendo las etapas de la MMG, a partir del objetivo planteado en lenguaje natural, se seleccionan los factores implicados más importantes, concretándolos en variables matemáticas dinámicas. Con la ayuda del diagrama causal y el diagrama hidrodinámico se obtienen las ecuaciones dinámicas del modelo: un sistema acoplado de ecuaciones en diferencias finitas y funcionales. Siguiendo la MMG, se programan las ecuaciones en ordenador para su fácil manejo. Por último se realiza una validación simple del modelo para estimar su aproximación a la realidad y unas simulaciones de futuro para distintos escenarios posibles. La profundización en la estructura matemática de este trabajo con el fin de estudiar más rigurosamente aún la evolución del mercado de los visados colegiales sería relevante para gestores de la administración pública, analistas económicos, promotores y agentes de la edificación en general.

Palabras Clave: *visados colegiales, modelo matemático dinámico, metodología de modelización general, simulación.*

Introducción

Una de las variables económicas estudiadas actualmente e índice estatal presente y futuro en todos los países desarrollados es la producción y venta de cemento. Se

trata de un indicador que merece especial atención dada la importancia del sector construcción y su capacidad de arrastre sobre otros sectores y subsectores. En España, la importancia del indicador proviene también de su peso específico, de un 18% del PIB según el INE. Por todo ello y como puesta en práctica de las competencias que la titulación de Ingeniero de Edificación tiene definidas por ley decidimos aunar y poner en práctica conceptos matemáticos y atribuciones laborales de un futuro Ingeniero de Edificación con formación de posgrado.

Para conseguir una estimación del índice nombrado, se plantea predecir cuántos edificios se van a construir. Para ello, se decide tomar como parámetro principal para predecir el número de nuevas construcciones los visados colegiales. El estudio de un indicador como es la variación del número de visados colegiales, determina la cantidad de proyectos que se realizarán en años siguientes y, por tanto, las construcciones que se llevarán a cabo. Además, también será útil para realizar una previsión de las necesidades de los distintos colegios profesionales.

Resultados como los que arroja el presente estudio son muy valorados por diversos organismos públicos y privados, ya que son datos indicativos del estado económico del sector de la construcción.

Objetivos e hipótesis

Como se ha comentado anteriormente, el objetivo principal del estudio es conocer la tendencia de uno de los índices más determinantes que aparecen en el sector inmobiliario, el del número aproximado de visados colegiales, la cual se puede prever mediante un modelo matemático dinámico. El uso de este modelo matemático aportaría luz sobre otros valores como son el precio del suelo por m² o el número total de viviendas construidas anualmente.

Además del objetivo concreto planteado, intrínsecamente también se persiguen en la comunicación dos objetivos más:

- Desarrollo de la competencia nº 8 indicada en la orden ECI 3855-2007.
- Aplicación de las matemáticas a competencias profesionales.

Para dar solución a todo ello, se plantea la utilización de simulaciones con modelos matemáticos dinámicos.

Material y métodos

Para obtener el modelo matemático dinámico, se ha utilizado la Metodología de Modelización General (MMG). La MMG ha sido creada por Caselles [1] en el contexto de la Teoría General de Sistemas que ha sido desarrollada por el mismo autor. Caselles, en [2], [3] y [4], propone un proceso de modelización que trata no sólo de organizar métodos parciales, sino también de incluir las ideas de Forrester ([5] [6]),

el creador de la Dinámica de Sistemas, y las de otros autores. La MMG intenta generalizar el método científico o el método hipotético-deductivo para ser aplicada a la modelización de sistemas complejos.

En primer lugar, para llevar a cabo la MMG aplicada a nuestro problema, se ha procedido a realizar una lluvia de ideas de factores relacionados con el tema del estudio que se pretende realizar. Posteriormente se escogen de entre ellos los factores determinantes a la hora del estudio de la variación del número de visados colegiales. Se concluye que los dos factores más influyentes son el parque de viviendas (npv) y el precio del suelo (ps).

De estos factores pueden extraerse las distintas variables implicadas en el modelo. Las variables han de ser posteriormente clasificadas como “variables input” o “variables output”, en función de si poseen o no ecuación que las calcule, respectivamente. Las variables obtenidas en nuestro caso de aplicación son:

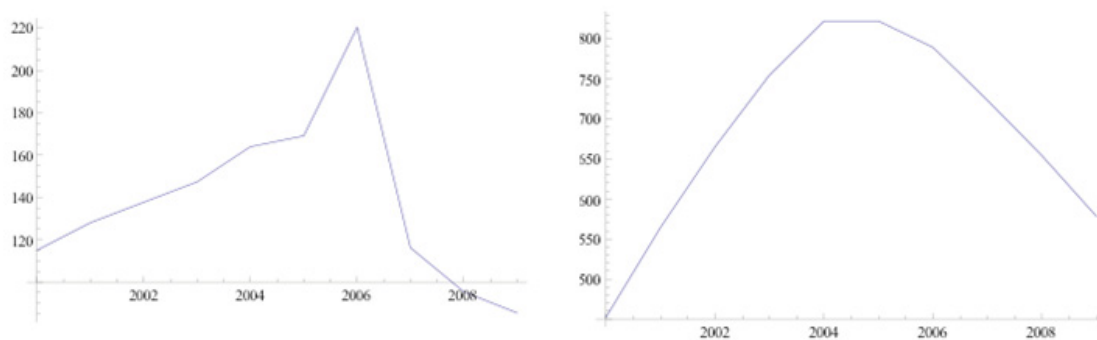
- npv: número anual de proyectos visados.
- app: Aumento proyectos por parque de viviendas disponibles.
- tds: Tasa de aumento de proyectos debido a la disminución del stock de viviendas.
- dpp: Disminución de proyectos por parque de viviendas disponibles.
- tas: Tasa de disminución de proyectos debido al aumento del stock de viviendas.
- nvs: Número de viviendas en stock, parque de viviendas.
- vvs: Variación del stock o parque de viviendas.
- npp: Número de proyectos realizados por promotores.
- npr: Número de promotores.
- tpp: Tasa de proyecto por promotor.
- dpc: Disminución de proyectos por el CTE.
- aps: Aumento de proyectos debido a la disminución del precio del suelo.
- tap: Tasa de aumento de proyectos debido a la disminución del precio del suelo.
- dps: Disminución de proyectos debido al aumento del precio del suelo.
- tdp: Tasa de disminución de proyectos debido al aumento del precio del suelo.
- ps: Precio del suelo.
- as: Aumento del precio del suelo.
- tam: Tasa de aumento del precio del suelo por m2 liberado.
- ds: disminución del precio del suelo.
- tdm: Tasa de disminución del precio del suelo por m2 liberado.
- ls: Liberación del suelo anual.
- vls: Variación de la liberación del suelo anual.

Una vez conocidas las variables del sistema se formulan hipótesis sobre las relaciones causales existentes entre ellas. Surge así el diagrama causal, el cual recoge los

En general, si las funciones que definen las ecuaciones del modelo cumplen las adecuadas propiedades topológicas, el modelo es un sistema de ecuaciones diferenciales acopladas, como es el caso de los modelos para estudiar la personalidad humana desde un punto de vista dinámico [7], que además incluyen ecuaciones con retraso integro-diferenciales. Si el modelo contiene variables auxiliares, éste se presenta como un sistema de ecuaciones diferenciales y funcionales acopladas, como es el caso del estudio de la calidad de vida con índices de las Naciones Unidas y la demografía en [8]. Sin embargo, como es nuestro caso, algunas de las funciones se definen a trozos y es mucho más ventajoso escribir las ecuaciones en forma de ecuaciones en diferencias finitas, el cual era el método común en las primeras etapas de la Dinámica de Sistemas ([5] [6]). Éstas son:

$$\begin{aligned} npv(t) &= dt [app(t) + npp(t) + aps(t) - dpp(t) - dpc(t) - dps(t)] \\ npp(t) &= tpp \cdot npr(t) \\ dps(t) &= ps(t) \cdot tdp \\ vvs(t) &= nvs(t-dt) - nvs(t-2dt) \\ \text{Si } vvs > 0 &\text{ entonces } app(t) = tds \cdot nvs(t) \text{ y } dpp(t) = 0 \\ \text{Si } vvs < 0 &\text{ entonces } dpp(t) = tas \cdot nvs(t) \text{ y } app(t) = 0 \\ ps(t) &= ps(t-dt) + dt [as(t) - ds(t)] \\ vls(t) &= ls(t-dt) - ls(t-2dt) \\ \text{Si } vls > 0 &\text{ entonces } ds(t) = lsm \cdot ls(t) \text{ y } as(t) = 0 \\ \text{Si } vls < 0 &\text{ entonces } as(t) = tam \cdot ls(t) \text{ y } ds(t) = 0 \end{aligned}$$

Las ecuaciones encontradas se programan con el software Wolfram Mathematica. Los principales resultados que nos proporciona el modelo se han resumido en dos gráficas de la Figura 3.



*Figura 3 Graficas de los resultados de npv y ps
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)*

Estos resultados son los que nos permiten validar este modelo comparándolo con datos reales y con ello se comprueba que esta metodología es válida. Se han comparado los resultados obtenidos con datos estadísticos reales [9] [10] observando que son muy aproximados y que tienen la misma tendencia.

Con la validación del modelo realizado se plantean una serie de escenarios para poder observar qué decisiones se deben tomar, sobre las variables de control o acción (que son sobre las que se pueden influir directamente) para saber qué se debe hacer para conseguir los objetivos que se plantean.

Para poder tener criterios de valor cuantificables se concretaron los siguientes aspectos:

Definir las **variables de escenario o exógenas**. Se trabajó con 2 variables principales como son el número de viviendas en stock (**nvs**) y el número de promotores (**npr**). De cada una de estas variables se hicieron los supuestos incrementar y disminuir sus tendencias, con lo que la combinación de las mismas nos proporciona 4 escenarios posibles que llamamos E_i , $i=1,2$:

- E1 aumento nvs, aumento npr.
- E2 disminución nvs, aumento npr.
- E3 aumento nvs, disminución npr.
- E4 disminución nvs, disminución npr.

Definir las **variables de control o acción**. Se trabajó con la variable principal que permite el control del sistema, es decir, la capacidad de liberación de suelo (**ls**), con los supuestos incrementar y disminuir sus tendencias, con lo que la combinación de las mismas nos proporciona 2 estrategias posibles que llamamos S_j , $j=1,2$:

- S1 aumento de la liberación de suelo.
- S2 disminución de la liberación de suelo.

Seguidamente se marcó la **variable objetivo**. En este caso “conocer el número de proyectos que se visan en los colegios profesionales y su variación en el tiempo (**npv**)”. Aunque de un modo paralelo también se tuvo en cuenta la variación del precio del suelo (**ps**).

Y por último se concretó el **objetivo final**. Conseguir un aumento progresivo en el tiempo de la tasa interanual del número de visados de los distintos colegios profesionales. Se considera válido cualquier aumento respecto al año anterior de esta cifra.

Esta serie de combinaciones dan 8 simulaciones de futuro distintas que presentamos a continuación.

Resultados de las simulaciones de futuro

1. EE1 Aumento de nvs, npr, y ls.

Este sería un escenario de recesión económica moderada en el que el stock de viviendas se ha visto aumentado en un 30% por falta de transacciones económicas pero debido a una política económica agresiva se ha liberado el doble de suelo y el número de promotores aumenta hasta situarse a cotas semejantes a las de antes de la crisis. Con esta situación la variable objetivo aumenta cumpliendo con los objetivos establecidos, con lo que se trata de un escenario favorable, y una estrategia adecuada para alcanzar el objetivo.

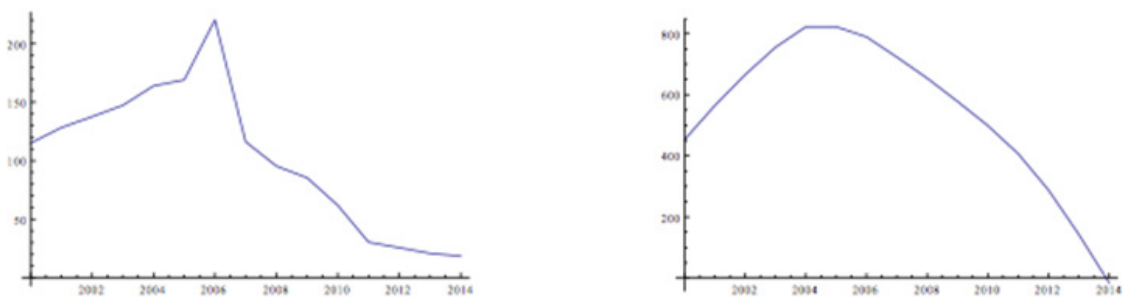


Figura 4 EE1. Variación de visados y del precio del suelo en el tiempo
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)

2. EE2 Disminución nvs, aumento de npr aumento de ls.

En este escenario por una coyuntura económica ha disminuido el número de viviendas en stock en un 30%, aumentado por tanto el número de promotores y además el gestor del sistema decide la estrategia y se encuentra en disposición de seguir liberando suelo para seguir con la tendencia y evaluar el mercado. Según la simulación la variable objetivo aumenta y eso cumple con los objetivos marcados, con lo que se trata de un escenario favorable y una estrategia adecuada para alcanzar el objetivo.

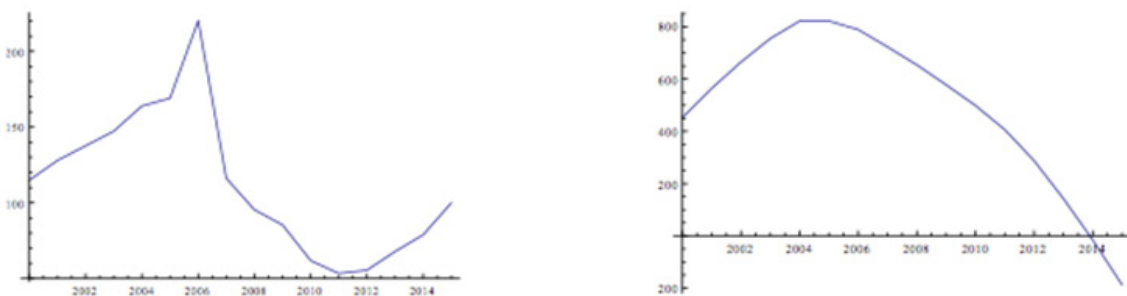


Figura 5 EE2. Variación de visados y del precio del suelo en el tiempo
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)

3. **EE3** Aumento de nvs, disminución de npr, aumento de ls.

Este sería un escenario similar al de recesión económica en el que el stock de viviendas se ha visto aumentado en un 30% por falta de transacciones económicas, esto ha llevado también a una disminución del número de promotores de aproximadamente un 30%. Pero se ha decidido una estrategia de aumento importante, en torno al doble de años anteriores, en la liberalización del suelo. En este caso la variable objetivo nos indica que no cumplimos el objetivo. Es un escenario desfavorable. Ante un escenario de aumento del stock de viviendas y una disminución del número de promotores, la estrategia del gestor del sistema de liberación de suelo por sí misma no es suficiente.

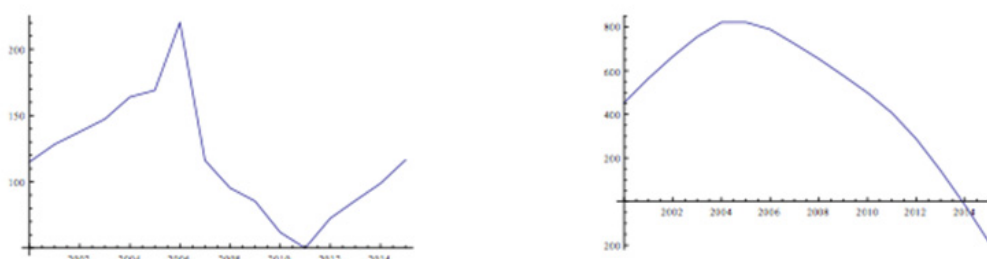


Figura 6 EE3. Variación de visados y del precio del suelo en el tiempo
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)

4. **EE4** Disminución de nvs disminución de npr, aumento de ls.

En este escenario se parte de la hipótesis que tanto el número de viviendas en stock como el número de promotores disminuyen entorno al 30%. Esta opción no es lógica, pero sirve para dar validez a la simulación. En cuanto a la liberación del suelo vamos a adoptar la estrategia de aumentarla como en los casos anteriores. En este caso, es un escenario desfavorable. Ante un escenario de disminución del stock de viviendas y una disminución del número de promotores, la estrategia del gestor del sistema de liberación de suelo por sí misma no es suficiente. Teniendo en cuenta este resultado y el EE3 deberíamos buscar la forma de gestionar o influir en alguna de las variables exógenas.

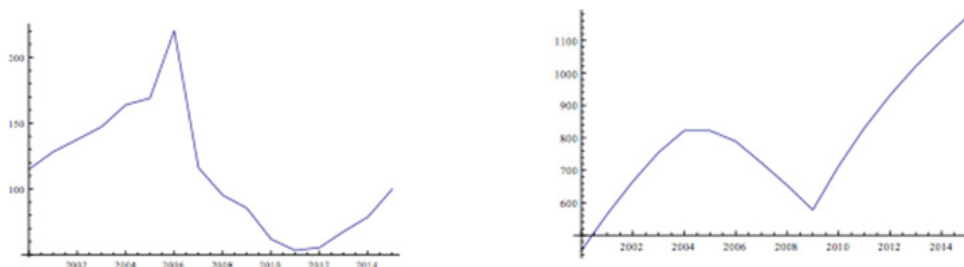


Figura 7 EE4. Variación de visados y del precio del suelo en el tiempo
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)

5. EE5 Aumento de nvs, npr, disminución de ls.

Este sería un escenario no muy normal o coherente en el que el stock de viviendas se ha visto aumentado en un 30% y que a pesar de ello el número de promotores se ve aumentado otro 30%. Ante esta situación la estrategia adoptada es la de disminuir la liberalización del suelo a ver cómo reacciona el mercado. Como resultado de esta anormal solución resulta que la variable objetivo nos indica que cumplimos los objetivos establecidos y que el resultado es válido. Pero se observa que el precio del suelo tiene una clara tendencia alcista. Esto indica que el número de promotores tiene un peso importante en la consecución de los objetivos ya que el resto de variables son a priori desfavorables.

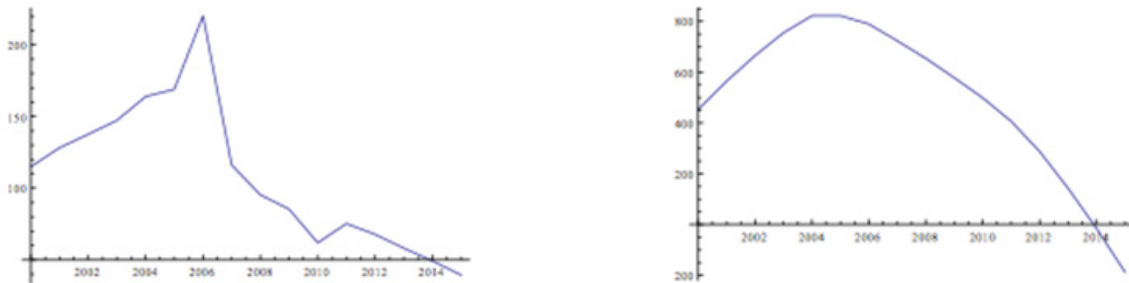


Figura 8 EE5. Variación de visados y del precio del suelo en el tiempo
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)

6. EE6 Disminución nvs, aumento de npr disminución de ls.

Este escenario presenta una bajada del número de viviendas en stock, lo que conlleva un aumento del número de promotores y se adopta la estrategia de contener y disminuir la liberación del suelo. En este escenario la variable objetivo aumenta, con lo que se consigue un escenario favorable, y una estrategia adecuada para alcanzar el objetivo, pero con la consecuencia del aumento del precio del suelo de manera significativa.



Figura 9 EE6. Variación de visados y del precio del suelo en el tiempo
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)

7. EE7 Aumento de nvs, disminución de npr, disminución de ls.

Este sería un escenario similar al de recesión económica en el que el stock de viviendas se ha visto aumentado en un 30% por falta de transacciones económicas, esto ha llevado también a una disminución del número de promotores de aproximadamente un 30%. La estrategia adoptada ante este caso ha sido la de disminución de liberación de suelo para estudiar y conocer la tendencia del mercado. En este caso se observa que ni el escenario es favorable y ni la estrategia escogida es acertada, además se provoca un aumento del precio del suelo. Escenario desfavorable.

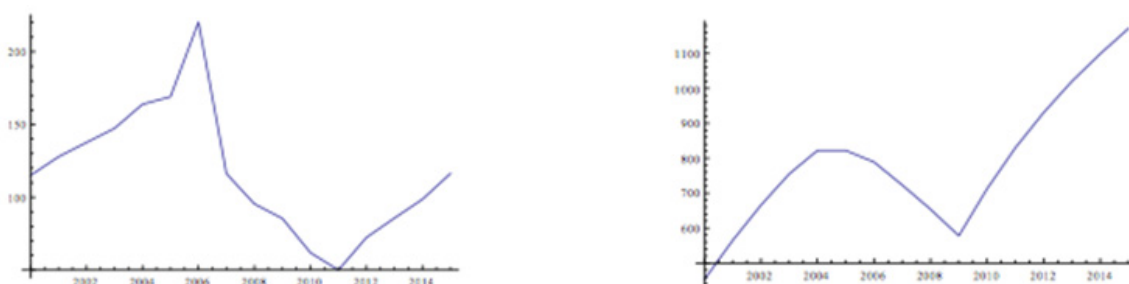


Figura 10 EE7. Variación de visados y del precio del suelo en el tiempo
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)

8. EE8 Disminución de nvs disminución de npr, disminución de ls.

En el último escenario se parte de la hipótesis que tanto el número de viviendas en stock como el número de promotores disminuyen entorno al 30% y se aumenta la liberación del suelo. Como el EE4 no es una opción lógica. Se observa que ni el escenario es favorable ni la estrategia adoptada acertada, dando unos resultados negativos y una tendencia alcista del precio del suelo. Escenario desfavorable.



Figura 11 EE8. Variación de visados y del precio del suelo en el tiempo
(UNIDADES EJES: X = años; Y1 = N^a proyectos visados; Y2 = Euros)

Como análisis de los resultados obtenidos en función de los distintos escenarios planteados y como resultado de las distintas estrategias adoptados por el gestor del sistema simulado se resumen los resultados en el siguiente cuadro.

RESUMEN SIMULACIÓN	E1	E2	E3	E4
S1	NVS - ↑ NPR - ↑ LS - ↑	NVS - ↓ NPR - ↑ LS - ↑	NVS - ↑ NPR - ↓ LS - ↑	NVS - ↓ NPR - ↓ LS - ↑
	EE1 VALIDO	EE2 VALIDO	EE3 NO VALIDO	EE4 NO VALIDO
S2	NVS - ↑ NPR - ↑ LS - ↓	NVS - ↓ NPR - ↑ LS - ↓	NVS - ↑ NPR - ↓ LS - ↓	NVS - ↓ NPR - ↓ LS - ↓
	EE5 VALIDO	EE6 VALIDO	EE7 NO VALIDO	EE8 NO VALIDO

Figura 12 EE8. Tabla resumen escenarios y estrategias

Conclusiones

Como conclusión a todo lo anteriormente expuesto se puede analizar el estado actual del mercado en base a los datos estadísticos obtenidos y la simulación aceptada y validada. Esto arroja un estado del mercado negativo y una tendencia a la baja de la misma que no cumplen con los objetivos marcados.

Ante los escenarios y las estrategias planteadas, se plantean varios aspectos:

Son iguales las posibilidades de conseguir resultados positivos, pero si se tiene en cuenta la variable precio del suelo, son menores las posibilidades de conseguir objetivos positivos, lo que indica que se debe tener cuidado con las decisiones. Siempre que baja el número de promotores la solución no es válida y cuando este sube los resultados son positivos, lo cual da una idea del peso que tiene esta variable por sí misma en el resultado final. Esto indica que aun tratándose de una variable que hemos considerado como exógena se debe buscar alternativas para conseguir fomentar la aparición de estos empresarios bien de manera privada o pública.

El parque existente de viviendas afecta a la simulación pero no tanto como la variable del número de promotores, puesto que hemos podido obtener una solución válida tanto con una subida como con una bajada del stock. De todas formas a la vista de los resultados se puede aconsejar que el escenario favorable es aquel en el que el stock es bajo. En cuanto a la liberación de suelo que es la variable sobre la que se tiene mayor control, al igual que ocurre con el stock, no tiene tanta influencia como el número de promotores puesto que se ha podido obtener una solución válida tanto con una subida como con una bajada de la liberación de suelo. Sin embargo se puede decir que se aconseja, para conseguir un alza en el número de visados, una política favorable de liberalización de suelo porque lo que sí queda plasmado en las gráficas es que esto afecta directamente al precio del suelo.

Ante estos datos y de manera racional se puede decir que el modelo matemático responde positivamente y de una manera coherente a los estímulos introducidos en

el sistema, y que por tanto cumple su función y podría utilizarse como herramienta de análisis del mercado.

En el modelo se podrían tener en cuenta otras variables que influyen en los objetivos planteados. Posteriormente se ha realizado la ampliación de este modelo cambiando la variable input de tendencia nvs (número de viviendas en stock) por una variable de nivel viv (viviendas vacías) basado en un modelo simple de mercado inmobiliario, donde esta variable de nivel se calcula a través de variables como la población y la viviendas ocupadas, con el fin de ir afinando cada vez más los resultados teniendo en cuenta más variables. Los resultados de esta simulación en estudio, se expondrán en publicaciones posteriores.

Referencias

- [1] Caselles, A. (1994). Improvements in the Systems Based Program Generator SIGEM. *Cybernetics and Systems: An International Journal*. 25, 81-103.
- [2] Caselles, A. (1992). Structure and Behavior in General Systems Theory. *Cybernetics and Systems: An International Journal*. 23, 549-560.
- [3] Caselles, A. (1993). System Decomposition and coupling. *Cybernetics and Systems: An International Journal*. 24, 305-323.
- [4] Caselles, A. (1995). Systems Autonomy and Learning from Experience. *Advances in Systems Science and Applications, Special Issue I*, 1-000, 1-6.
- [5] Forrester, J. W. (1961). *Industrial dynamics*. Cambridge: MIT Press.
- [6] Forrester, J. W. (1970). *Urban dynamics*. Cambridge: MIT Press.
- [7] Micó, J.C., Amigó, S., Caselles, A. (2012). Changing the General Factor of Personality and the c-fos expression with methylphenidate and Self-Regulation Therapy. *The Spanish Journal of Psychology*, 15(2): 850-867.
- [8] Sanz, M.T., Micó, J.C., Caselles, A., & Soler, D. (2013). A stochastic model for population and well-being dynamics. *Journal of Mathematical Sociology*. In press.
- [9] Datos Oficina d'Estadística. Ajuntament de València, EDIFICACIÓ I HABITATGE, (2005 - 2010).
- [10] Datos Observatorio Valenciano de la vivienda. (2005 - 2010) <http://www.cma.gva.es>.

Diseño y despiece de un arco catenario

Alvaro Pérez Raposo, Dpto. de Matemática Aplicada E.U. de Arquitectura Técnica
alvaro.p.raposo@upm.es

Paola Villoria Sáez Dpto. Construcciones Arquitectónicas y su Control E.U. de Arquitectura Técnica , paola.villoria@upm.es

Universidad Politécnica de Madrid

Resumen

Durante siglos el arco ha sido el elemento que permitía la apertura de huecos en los muros cubriendo grandes luces en fábricas de mampostería. Tradicionalmente los arcos se han diseñado como un segmento de circunferencia, o una combinación de varios segmentos. La razón para ajustarse a esta curva no es estructural, sino de sencillez en el diseño: tanto la directriz del arco, como el intradós y el trasdós siguen el mismo tipo de curva y, además, el diseño de las dovelas es muy sencillo (los radios de dichas circunferencias marcan sus divisiones).

Sin embargo actualmente las herramientas del cálculo diferencial y la asistencia de los ordenadores dan la posibilidad, incluso a alumnos de primer curso, de diseñar un arco que siga cualquier otra curva, en el cual el trazado de las dovelas tiene una complejidad mayor. En esta ponencia se propone un problema cuyo objetivo es el diseño y trazado de un arco con directriz no circular, así como el despiece de las dovelas indicando cada una de sus dimensiones. Se enuncian como condiciones del diseño la luz y la altura del arco, el tipo de curva que define la directriz, la regla para obtener las curvas del intradós y del trasdós, y las reglas para definir las dovelas que lo componen. La resolución de este problema implica el uso varias herramientas del cálculo diferencial e integral de una variable, cálculo numérico, así como programas de representación gráfica de funciones elementales.

Introducción

El arco es un elemento estructural que ha sido objeto de estudio de numerosos científicos y arquitectos a lo largo de la historia de la arquitectura, pues en un inicio era el único elemento capaz de permitir la apertura de huecos en los muros para cubrir grandes luces con fábricas de mampostería [1].

Su uso se remonta a las primeras civilizaciones, siendo la época de los romanos donde obtuvo un mayor esplendor. En concreto utilizaron ampliamente el arco semicircular de mampostería para puentes y acueductos, perfeccionando la técnica de construcción y consiguiendo que a día de hoy se mantengan en pie numerosos ejemplos.

A pesar de ello, los primeros estudios teóricos sobre la estabilidad de los arcos surgen durante el Renacimiento (siglos XV-XVI) [2]. En concreto, los manuscritos de Leonardo da Vinci intentan establecer los empujes de los arcos, su forma y grosor ideal. Sin embargo, no es hasta el siglo XIX cuando los fundamentos estructurales son completamente comprendidos, ilustrando el concepto de polígono funicular y estableciendo que la forma ideal de un arco capaz de resistir cargas determinadas por un estado de compresión simple, pueden hallarse siempre con la forma del polígono funicular correspondiente invertido [3]. La idea, por supuesto, es que la tensión tenga la misma dirección que la curva directriz del arco.

En este sentido, se observó que un arco que sostenga únicamente su propio peso debe adoptar la forma de la curva catenaria, y no de una parábola como se estableció en los primeros estudios. Efectivamente, en el siglo XVII se planteó el problema de calcular la curva que describe una cadena colgada por sus extremos, curva que se llamó catenaria, y en 1638 Galileo estableció erróneamente que la cadena asumiría la forma de una parábola. Hubo que esperar hasta 1691 cuando los hermanos Bernoulli, simultáneamente con Leibniz y Huygens, determinaron dicha forma como la curva catenaria que hoy denominamos coseno hiperbólico [4].

Esta debería ser la característica que hiciese prevalecer a los arcos catenarios frente a los parabólicos en arquitectura, pero la facilidad de dibujar las parábolas frente a las catenarias hizo que el uso de estas últimas fuera relativamente reducido en la arquitectura tradicional [5]. Han sido escasos los arquitectos que han utilizado este tipo de arco en sus obras. Uno de los primeros arquitectos que investiga y hace uso de la catenaria es Antoni Gaudí. En concreto en la casa Batlló, en la Pedrera, en la Sagrada Familia o en el parque Güell se pueden observar en las fachadas, sótanos o azoteas arcos catenarios que desvían el peso de las cubiertas dejando amplias zonas abiertas. El método utilizado por Gaudí consistía en una laboriosa maqueta funicular de hilos colgados con pesos representativos de las diferentes partes del edificio, cuyo giro de 180, mediante croquis o fotografía, daba la dirección en el espacio de la directriz de los arcos los cuales estarían sometidos solo a esfuerzos de compresión pura [6].

Sin embargo, cuando se quiere construir un arco que verdaderamente esté sometido únicamente a su propio peso, y no tenga ninguna carga adicional ni tampoco ningún refuerzo adicional para absorber los esfuerzos, es imprescindible que estos esfuerzos se desarrollen a lo largo de la directriz del arco y, por tanto, este debe ser catenario [7]. Un magnífico ejemplo de tal estructura es el arco central (Gateway Arch) del Jefferson National Expansion Memorial (véase figura 1) en Saint Louis, Missouri (Estados Unidos) realizado por Eero Saarinen, el cual simbolizaba la puerta de entrada al Oeste. Cuenta con 192 metros de altura máxima, lo que lo convierte en el edificio accesible más alto del estado de Missouri y también en la mayor estructura arquitectónica con forma de arco catenario aplastado [8].



Figura 2 El arco catenario Gateway Arch, en Saint Louis, Missouri, Estados Unidos

En cualquier caso, a pesar de la óptima calidad del arco catenario en cuanto a resistencia que se ha venido demostrado a lo largo de la historia, la cultura occidental sigue diseñando arcos y bóvedas derivadas del círculo, más fáciles de construir aunque menos eficientes como los arcos circulares y los apuntados [9].

Enunciado

Proponemos el siguiente problema para ser resuelto por estudiantes de un curso básico de cálculo diferencial e integral: Realizar el diseño y despiece de un arco que cumpla las siguientes condiciones:

- Debe cubrir una luz de 3 m y una altura de 4 m.
- La directriz del arco debe ser una curva catenaria (coseno hiperbólico).
- Las curvas del intradós y el trasdós se definen a partir de la directriz: por cada punto de la directriz se considera la recta normal a la misma, y en ella se definen dos puntos a distancia $e/2$ del punto referido, donde e es el espesor del arco que se establece en 40 cm. Cada uno de estos puntos define, respectivamente, el correspondiente punto del intradós y del trasdós.
- El número de dovelas debe ser 15.
- Las divisiones entre dovelas serán rectas normales a la directriz.

- Cada dovela contiene un segmento de la curva directriz, y se calculan bajo la condición de que dichos segmentos sean de igual longitud en todas las dovelas.

Como respuesta los estudiantes deben presentar, en primer lugar, las expresiones de las curvas: directriz, intradós y trasdós, con una gráfica de las mismas. En segundo lugar, las expresiones de las curvas que delimitan cada dovela, con la correspondiente gráfica. Todo ello acompañado de las explicaciones sobre los cálculos necesarios para llegar a los diseños y sus resultados.

Planteamiento

Como se puede observar en el enunciado, el uso del cálculo diferencial e integral es indispensable en varias etapas de la resolución de este ejercicio. A grandes rasgos la resolución sigue el siguiente proceso:

1. Obtención de la expresión de la curva directriz. Se trata de calcular una curva catenaria que se ajuste a las condiciones de luz y altura, teniendo en cuenta que estas se miden desde el intradós.
2. A partir de la directriz obtención de las curvas del intradós y el trasdós. Estas curvas se obtienen de forma paramétrica. En su cálculo es necesario utilizar la condición de normalidad a la curva directriz.
3. Cálculo de las dovelas. Se definen las divisiones, y se calcula la longitud de la curva directriz mediante una integral. Esta longitud se dividirá en 15 partes que definen las correspondientes dovelas.
4. Dados los límites de una dovela sobre la curva directriz, el diseño de la dovela viene dado por las rectas normales a la directriz en dichos límites y los segmentos correspondientes de las curvas del intradós y el trasdós.
5. Mediante un programa de representación gráfica de funciones elementales se obtiene una gráfica de cada dovela a partir de las ecuaciones de las curvas que la definen.

Resolución

Se presenta aquí la resolución del problema planteado siguiendo los pasos señalados anteriormente.

Curva directriz

El propio enunciado señala que la curva ha de ser un coseno hiperbólico, el cual, sin más adornos, tiene la gráfica representada en la figura 2 (todas las figuras de este trabajo han sido realizadas con el programa Geogebra [10]).

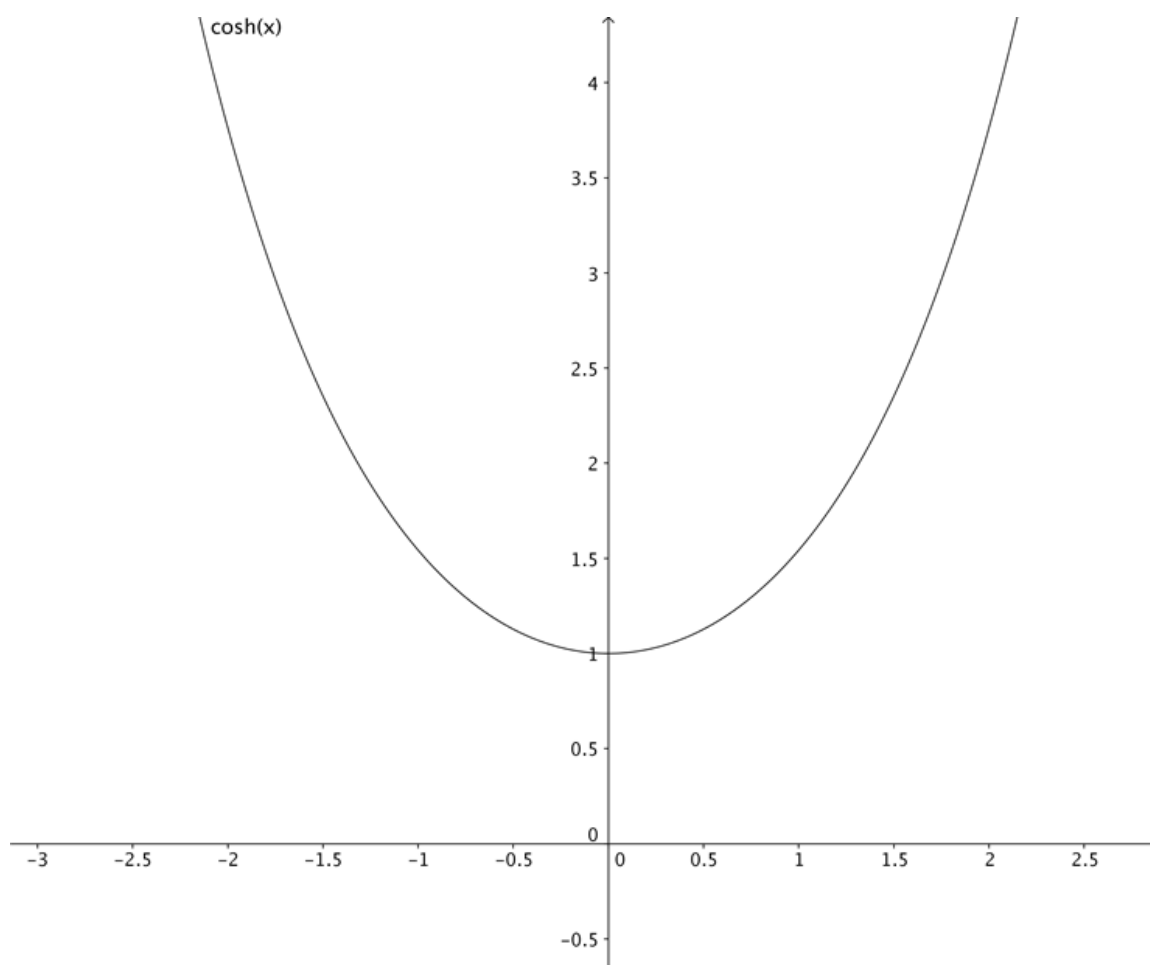


Figura 2: Gráfica de la función coseno hiperbólico.

Para adaptar esta curva a nuestro propósito observemos que, primero, debemos voltearla para que tenga forma de arco y, segundo, tenemos que ajustar la luz y la altura. Para ajustar dos datos tenemos que introducir dos parámetros. Jugando un poco con la función coseno hiperbólico vemos que añadiendo una constante podemos ajustar la altura del arco, mientras que introduciendo un factor en el argumento

del coseno hiperbólico podemos ajustar la apertura del arco, y con ella la luz. En la figura 3 se aprecian claramente estas dos propiedades.

Por tanto debemos utilizar para la curva directriz una expresión de la forma

$$y(x) = a - \cosh(b x), \quad (1)$$

donde a y b son los dos parámetros a ajustar con las condiciones de luz y altura. En esta elección hemos asumido que los ejes cartesianos se colocan en la base del arco y con el origen centrado. Además tomamos como unidad de medida el metro. La altura del arco, de 4 metros, nos indica que el intradós ha de pasar por el punto $x = 0$, $y = 4$. Pero la directriz va separada del intradós por la mitad del espesor e, es decir, 20 centímetros. Por tanto la condición de la altura es que la curva directriz pase por el punto $x = 0$, $y = 4,2$. Sustituyendo en la ecuación (1) obtenemos directamente $a = 5,2$.

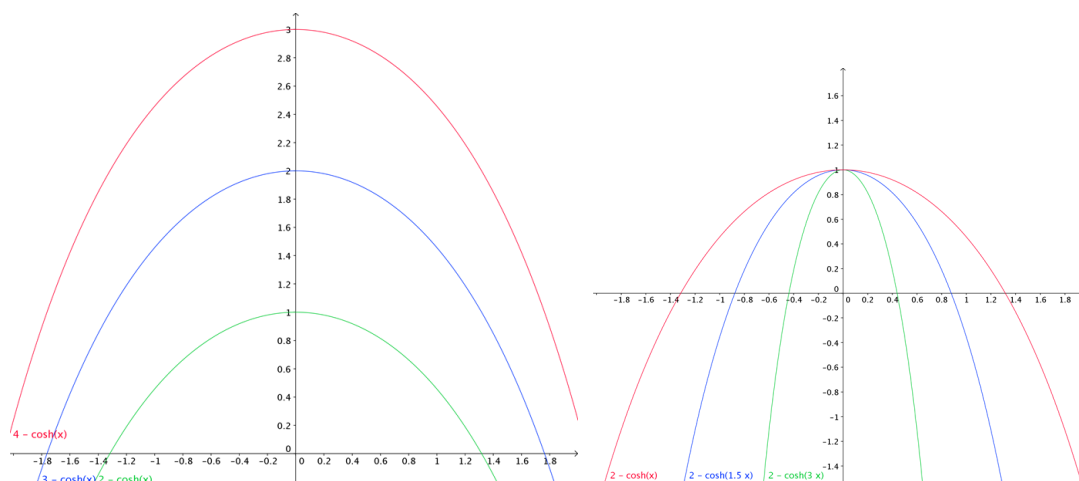


Figura 3: Variedad de gráficas de la función coseno hiperbólico. En la izquierda se varía el término constante. En la derecha se varía la escala de medida de x.

La luz del arco, por otro lado, abarca desde el punto $x = -1,5$ hasta el punto $x = 1,5$, ambos en la base. Pero, teniendo en cuenta el espesor del arco, la directriz deberá tener una luz algo mayor, concretamente 20 centímetros a cada lado. Por tanto la condición para fijar la luz es $y = 0$ en $x = \pm 1,7$. Sustituyendo de nuevo en la ecuación (1) obtenemos

$$\cosh(1,7 b) = 5,2 \quad (2)$$

que es una ecuación trascendente que es necesario resolver numéricamente. Hemos utilizado el programa wxMaxima [11] para todos los cálculos numéricos involucrados en este ejercicio. Con su ayuda obtenemos el valor del segundo parámetro: $b = 1,372$. Por tanto la curva directriz queda descrita por

$$y(x) = 5,2 - \cosh(1,372 x) \quad (3)$$

En la figura 4 se puede apreciar su gráfica. Su derivada será necesaria en varios pasos de los cálculos posteriores:

$$y_0(x) = -1,372 \sinh(1,372 x) \quad (4)$$

Intradós y trasdós

Para calcular las curvas del intradós y del trasdós asociamos a cada punto (x, y) de la directriz un punto correspondiente en el intradós, (x_i, y_i) , y otro en el tradós, (x_t, y_t) . El punto del intradós verifica dos condiciones; a saber:

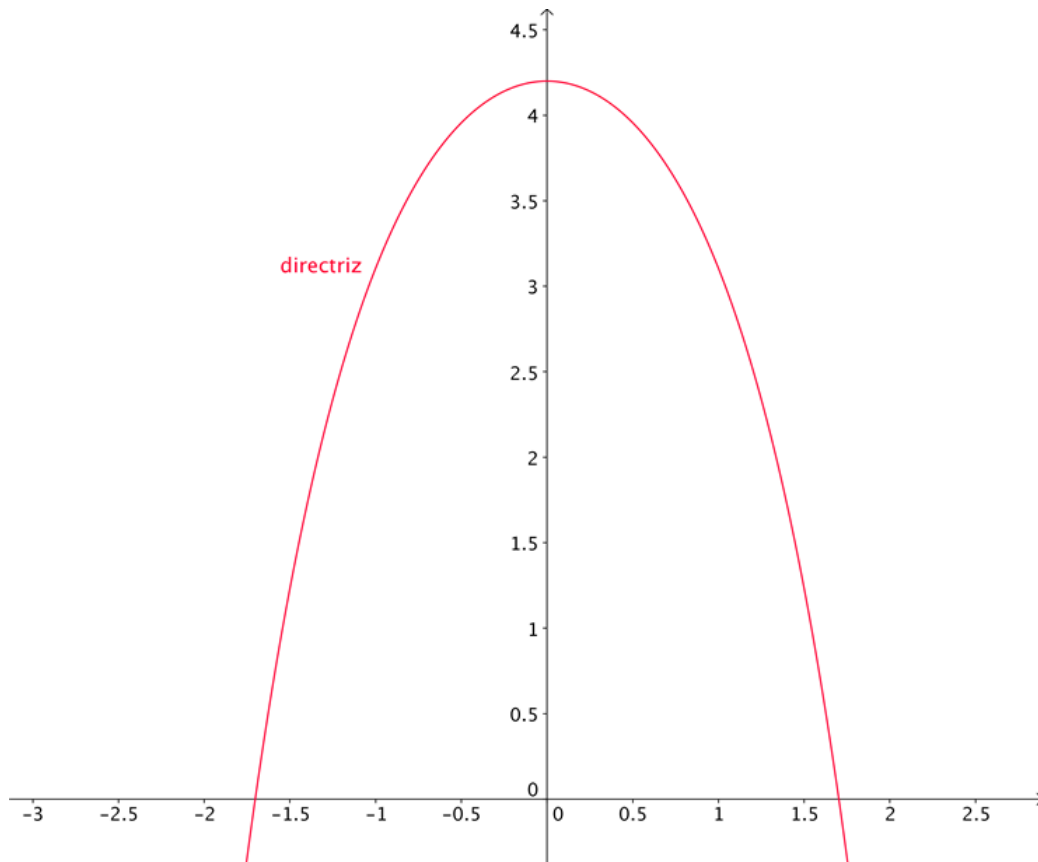


Figura 4: La directriz del arco catenarior.

la recta que define junto con el punto de la directriz debe ser normal a la directriz y, además, la distancia entre el punto (x_i, y_i) y el punto (x, y) debe ser la mitad del espesor e definido para el arco. Ahora expresamos estas condiciones matemáticamente. La condición sobre la alineación de los puntos en la normal a la directriz se expresa como

$$\frac{y_i - y}{x_i - x} = -\left(\frac{dy}{dx}\right)^{-1} \quad (5)$$

pues el segundo miembro de esta ecuación es la pendiente de la recta normal a la directriz en dicho punto.

La condición sobre la distancia es, simplemente,

$$(x_i - x)^2 + (y_i - y)^2 = \left(\frac{e}{2}\right)^2 \quad (6)$$

De las ecuaciones (5) y (6) se pueden despejar x_i , y_i en función de x e y . Además, recordemos que esta última está dada por la ecuación (3) en función de x . Por tanto todo queda en función de x . Dicho de otro modo, la curva del intradós la obtenemos en forma paramétrica, siendo el parámetro la coordenada x del punto correspondiente en la directriz. Tras realizar las operaciones correspondientes, el resultado es

$$\begin{cases} x_i = t - 0,4 \frac{1,372 \sinh(1,372t)}{\sqrt{1 + (1,372)^2 \sinh(1,372)^2}} \\ y_i = 5,2 - \cosh(1,372t) - 0,4 \frac{1}{\sqrt{1 + (1,372)^2 \sinh(1,372)^2}} \end{cases} \quad (7)$$

donde hemos llamado t al parámetro. Como se ha dicho, este parámetro no es otra cosa que la coordenada x del punto correspondiente en la directriz y , por tanto, su recorrido es $1,7 \leq t \leq 1,7$.

El cálculo del trasdós es similar. Las ecuaciones son las mismas que en el intradós, con el detalle de tener en cuenta que está al otro lado de la curva directriz y , por ello, hay un cambio de signo. El resultado es, con el mismo parámetro que antes,

$$\begin{cases} x_i = t - 0,4 \frac{1,372 \sinh(1,372t)}{\sqrt{1 + (1,372)^2 \sinh(1,372)^2}} \\ y_i = 5,2 - \cosh(1,372t) - 0,4 \frac{1}{\sqrt{1 + (1,372)^2 \sinh(1,372)^2}} \end{cases} \quad (8)$$

Aunque las expresiones parecen complicadas, no son más que unas curvas dadas en forma paramétrica y como tal se pueden representar como muestra la figura 5.

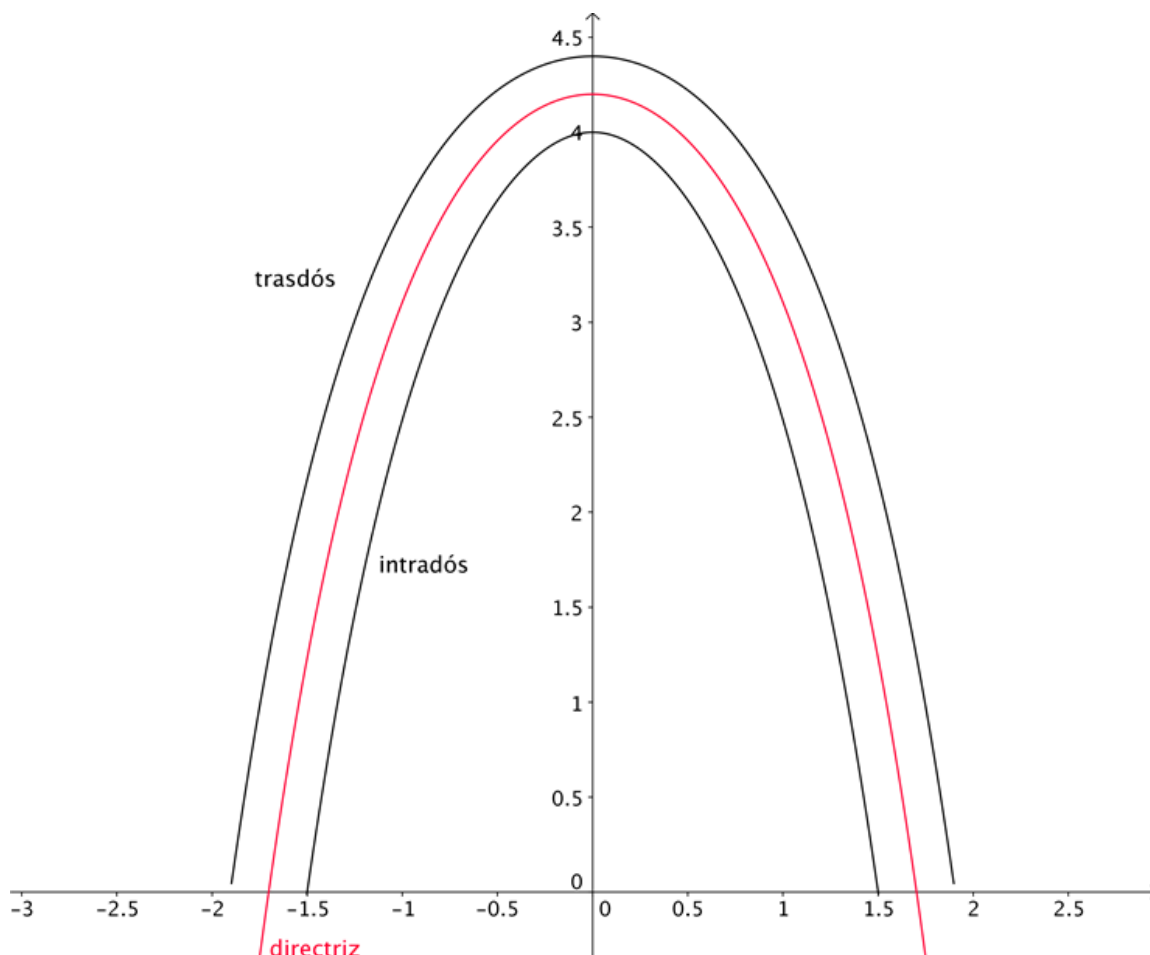


Figura 5: Las curvas del intradós y el trasdós del arco, que no son curvas catenarias, junto con la directriz, que sí lo es. Obsérvese que el intradós cumple las especificaciones de luz, 3 metros, y altura, 4 metros, requeridas.

Longitud de la directriz y de cada dovela

El siguiente paso es el cálculo de la longitud de la directriz para poder definir a partir de ella cada una de las dovelas. El cálculo se realiza con la conocida expresión del cálculo integral

$$L = \int_{-1,7}^{1,7} \sqrt{1 + y^2} dx = \int_{-1,7}^{1,7} \sqrt{1 + (1,372)^2 \sinh(1,372x)^2} dx \quad (9)$$

Esta integral, por la presencia del factor $(1,372)^2$ delante del seno hiperbólico, no se puede resolver por medio de funciones elementales, y necesita una integración

numérica. Recurriendo de nuevo al programa wxMaxima obtenemos el valor $L = 9,507$ metros.

A partir de este dato definimos las dovelas, pues se especifica que todas tengan la misma longitud medida sobre la curva directriz. Puesto que se piden 15 dovelas, la longitud de cada una ha de ser $l = L/15 = 0,634$ metros. Vamos a redondear esta cifra y tomaremos $l = 63$ centímetros.

Los errores de redondeo han de ser tenidos en cuenta. En nuestro caso lo que haremos es diseñar todas las dovelas iguales, excepto la clave, que absorberá todos los excesos o defectos de manera que no se altere la simetría del arco.

Diseño de cada dovela

El diseño de cada dovela queda definido si damos las curvas del intradós y trasdós y las rectas que la delimitan. Estas rectas, según dice el enunciado, serán normales a la directriz. A continuación se detalla el cálculo de la primera dovela, en la base del arco.

Llamamos x_0 a la coordenada x del punto de la directriz en la base del arco, es decir $x_0 = -1,7$, que es donde arranca la primera dovela. Y llamamos x_1 a la coordenada x del punto de la directriz donde termina la primera dovela. Para calcular x_1 tenemos la condición de que la longitud de la directriz entre estos dos puntos debe ser 63 cm, es decir

$$\int_{-1,7}^{x_1} \sqrt{1 + (1,372)^2 \sinh(1,372t)^2} dt = 0,63 \quad (10)$$

Esta ecuación requiere de nuevo un cálculo numérico para hallar x_1 , y el resultado es $x_1 = -1,605$. Conocida la coordenada x_1 obtenemos la coordenada y_1 con la ecuación (3), ya que este punto se sitúa en la directriz, y tenemos $y_1 = 0,623$.

Los puntos $P_0 = (x_0, y_0)$ y $P_1 = (x_1, y_1)$ delimitan la primera dovela sobre la directriz. Ahora solo queda hallar las ecuaciones de las rectas normales a la directriz en estos puntos. En el caso del punto (x_0, y_0) se trata de la recta que pasa por dicho punto con pendiente m dada por $-1/y'$, evaluando la derivada de la directriz, ecuación (4), precisamente en dicho punto. Por tanto la recta se obtiene como $y - y_0 = m(x - x_0)$ y el resultado es

$$y = -0,1428x - 0,243 \quad (11)$$

La recta que pasa por el punto P_1 se obtiene de forma similar, siendo el resultado

$$y = -0,1632x - 0,361 \quad (12)$$

Estas dos rectas están representadas en la figura 6.

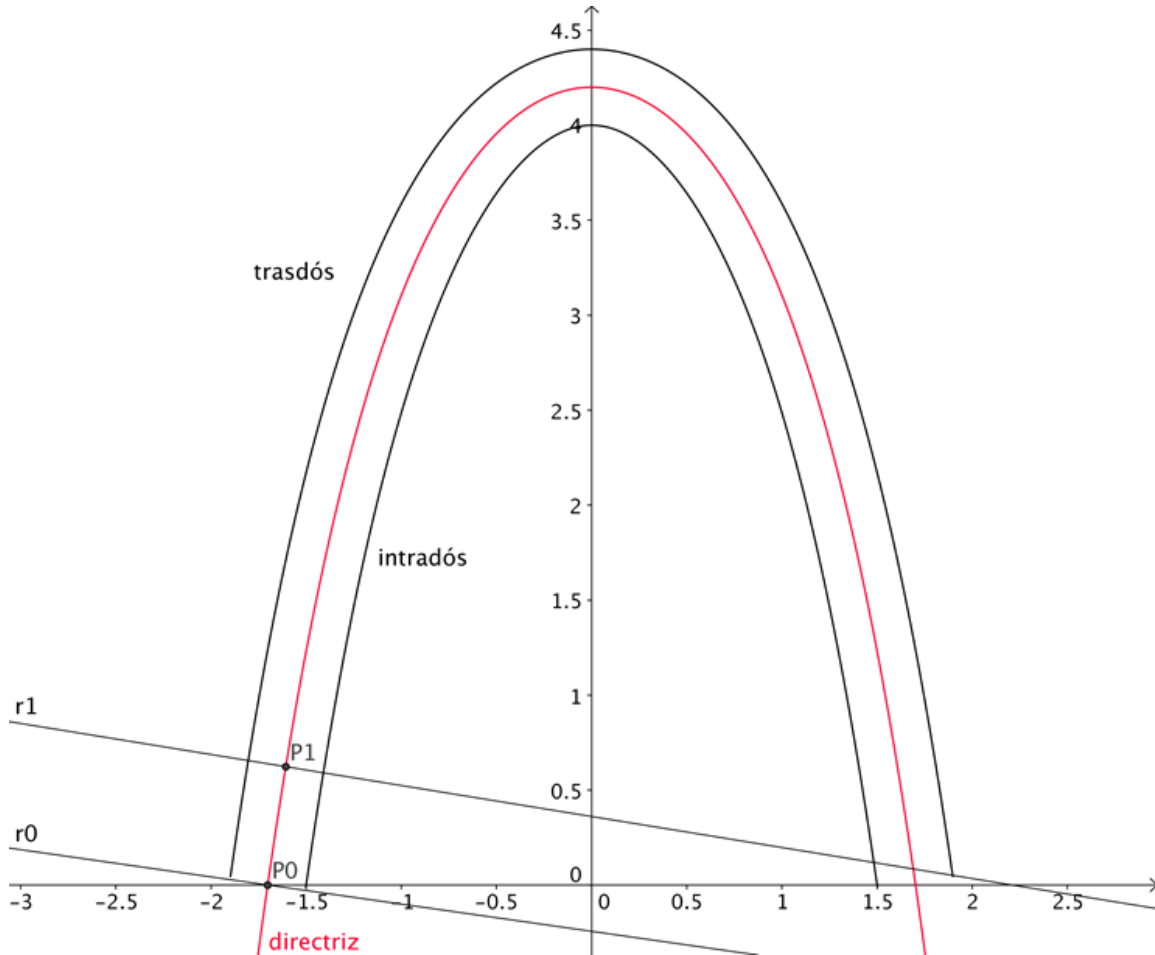


Figura 6: Las rectas r_0 y r_1 delimitan la primera dovela del arco.

El proceso se repite del mismo modo en los puntos P_2 , P_3 . . . hasta P_7 . Los puntos P_6 y P_7 delimitan la séptima dovela. El punto P_7 , por tanto, también es límite de la clave, en la cual queremos absorber los errores de redondeo habidos hasta el momento. Por ello, aprovechando la simetría del arco, el otro límite lo tomaremos simétrico, es decir $P_8 = (-x_7, y_7)$. Del mismo modo, todas las dovelas del lado derecho del arco son simétricas respecto a las del lado izquierdo y, por tanto, no hace falta realizar ningún cálculo.

En el cuadro 1 se recogen los datos relevantes para el cálculo de cada dovela, es decir, las coordenadas del punto de intersección con la directriz y la pendiente de la recta normal en dicho punto.

Punto	xP	yP	m
P0	-1,700	0,000	-0,1428
P1	-1,605	0,623	-0,1632
P2	-1,496	1,242	-0,1903
P3	-1,368	1,857	-0,2285
P4	-1,212	2,468	-0,2867
P5	-1,014	3,066	-0,3866
P6	-0,743	3,634	-0,6447
P7	-0,326	4,098	-1,5765

Cuadro 1: Datos de los puntos que definen los límites de las dovelas y la pendiente de la recta normal a la directriz en cada uno de los puntos.

Con dichos puntos se pueden trazar finalmente todas las dovelas del arco como se muestran en la figura 7.

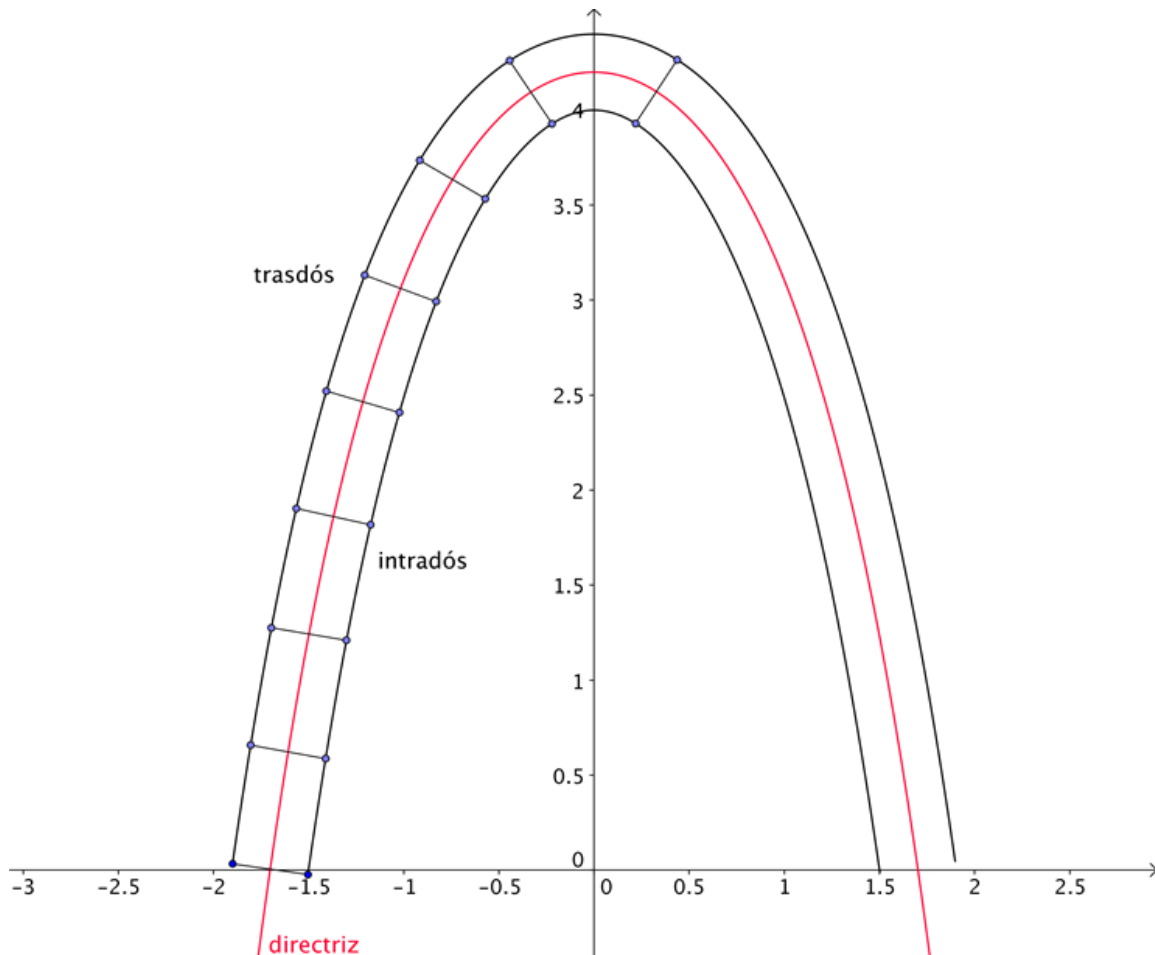


Figura 7: Despiece completo del arco catenario. Las dovelas de la parte derecha son simétricas a las de la izquierda

Referencias

- [1] Guardiola VÍllora, A.; Basset Salom, L. Evolución Histórica del ARCO como Elemento Estructural en Arquitectura. Escuela Técnica Superior de Arquitectura, Universitat Politècnica de València. 2012. Disponible en <http://riunet.upv.es/bitstream/handle/10251/12871/los%20arcos.pdf?sequence=7i>
- [2] Cervera Bravo, J. Calculo de estructuras y resistencia de materiales. Origen y desarrollo histórico de los conceptos utilizados. Tesis doctoral. 1982. Disponible en http://oa.upm.es/850/1/JAIME_CERVERA_BRAVO.pdf [3] Fernández, C.; Casañas, V. Cables y Arcos. 2012. Disponible en ([http://www.farq.edu.uy/estabilidad-i/files/2012/02/estructuras traccionadas.pdf](http://www.farq.edu.uy/estabilidad-i/files/2012/02/estructuras_traccionadas.pdf))
- [4] Leibniz, G.W. Acta Eruditorum. 1691. 12
- [5] Universidad Politécnica de Madrid. La catenaria en la arquitectura. Escuela Técnica Superior de Ingenieros de caminos, canales y puertos. 2012. Disponible en <http://www2.caminos.upm.es/Departamentos/matematicas/Fdistancia/PIE/Chip%20geom%C3%A9trico/Catenaria.pdf>
- [6] Giralt Miracle, D. Gaudí, la búsqueda de la forma: espacio, geometría, estructura y construcción. Tectónica, 2002.
- [7] Huerta, S. Arcos, bóvedas y cúpulas. Geometría y equilibrio en el cálculo tradicional de estructuras de fábrica. Escuela Técnica Superior de Arquitectura de Madrid, Universidad Politécnica de Madrid. 2004.
- [8] Jefferson Memorial. Control gráfico de formas y superficies de transición. Jefferson National Expansion Memorial. Saint Louis, Missouri
- [9] Medina, O.J. Sistemas estructurales básicos. Sistemas Estructurales. Facultad de Arquitectura y Diseño. Universidad de Los Andes, Venezuela, 2006.
- [10] <http://www.geogebra.org>, visitado en julio de 2013.
- [11] <http://maxima.sourceforge.net>, visitado en julio de 2013

Aplicaciones de la programación matemática entera en la edificación

Maite Grau

Eduard Gregorio

Resumen

Se referencian diversos algoritmos clásicos de resolución de problemas de programación lineal tanto continua como entera y de programación cuadrática y se describen algunas aplicaciones de los mismos para abordar problemas que un ingeniero de edificación/arquitecto técnico puede encontrarse en el desarrollo de su labor profesional. La mayoría de las aplicaciones se enmarcan en las competencias correspondientes a la materia planificación, programación y control. En particular, se dan ejemplos del problema de nivelación de recursos, del problema de asignación de recursos y del problema del viajante junto con una formulación mediante programación matemática que permite tratarlos.

Introducción y conceptos básicos

La optimización de recursos es imprescindible en cualquier ámbito. En esta comunicación se desarrollan tres aplicaciones de la programación matemática, en particular de optimización lineal y cuadrática, que pueden ser útiles para un arquitecto técnico. La primera sección pretende ser un resumen, no exhaustivo, de las nociones y conceptos matemáticos y de planificación de un proyecto, junto con algunas referencias, necesarios para poder seguir con las aplicaciones que se desarrollan en la segunda sección.

Programación matemática

Se considera un conjunto finito de variables, que pueden ser reales, enteras o binarias, y que denotamos por $x_1, x_2, x_3, \dots, x_n$. Se pretende optimizar (maximizar o minimizar) una función de estas variables (la función objetivo) asumiendo que las variables deben verificar un conjunto finito de restricciones, que en los ejemplos serán lineales. En el caso que la función objetivo sea una función lineal se tiene un problema de programación lineal. En el caso que la función objetivo sea cuadrática, se habla de un problema de programación cuadrática.

Así un problema de programación lineal puede tomar la forma:

$$\begin{array}{ll} \text{Maximizar} & c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \dots + c_nx_n \\ \text{bajo las restricciones} & \\ & a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n \leq b_1, \\ & a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n \leq b_2, \\ & a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \dots + a_{3n}x_n \leq b_3, \\ & \vdots \\ & a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n \leq b_m, \\ & \text{con } x_i \text{ reales y positivas, } i = 1, 2, 3, \dots, n. \end{array}$$

Los coeficientes c_i , a_{ij} , b_j son reales, $i = 1, 2, 3, \dots, n$, $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

El método del *simplex* permite resolver problemas de programación lineal de manera algorítmica cuando las variables x_i son reales. El método de ramificación y acotación da un algoritmo cuando las variables x_i son enteras. Estos métodos resuelven, de manera eficiente y mediante el uso de programas informáticos, problemas con muchas variables (n grande) y muchas restricciones (m grande) y se suelen aplicar a casos en que la función objetivo y las restricciones son lineales. También se han desarrollado métodos más generales para el caso en que no se satisface la linealidad de la función objetivo y/o de las restricciones. Karmarkar (1984) desarrolló un algoritmo alternativo al método *simplex* que permite resolver problemas de programación lineal en tiempo polinomial y que se denomina *método del punto interior*. Para aumentar la eficiencia computacional, se han desarrollado métodos heurísticos para problemas concretos. Por otro lado, en el caso que la función objetivo sea cuadrática se han desarrollado métodos de resolución que se basan en el método del *simplex*. Para mayor información se puede ver, por ejemplo, (Ros, 1988; Montufar et al., 2009) y las referencias que contienen.

Representación de un proyecto: diagramas

La forma clásica de representar un proyecto consiste en dividirlo en actividades, establecer la duración de cada actividad y determinar sus relaciones de precedencia. En un primer momento se resume esta información mediante un cuadro, pero con el fin de calcular la temporalidad de cada actividad y del proyecto en total, se construyen diversos tipos de diagramas. Los que se usan en esta comunicación son:

- El diagrama de Gantt.
- El grafo CPM.
- El grafo Roy.

El *diagrama de Gantt* (también denominado cronograma) es la forma habitual de presentar el plan de ejecución de un proyecto, recogiendo en las filas la relación de actividades a realizar y en las columnas la escala de tiempos que se manejan, mientras que la duración y situación de cada actividad se representan mediante una línea o rectángulo dibujado en el lugar correspondiente, ver Figura 1.

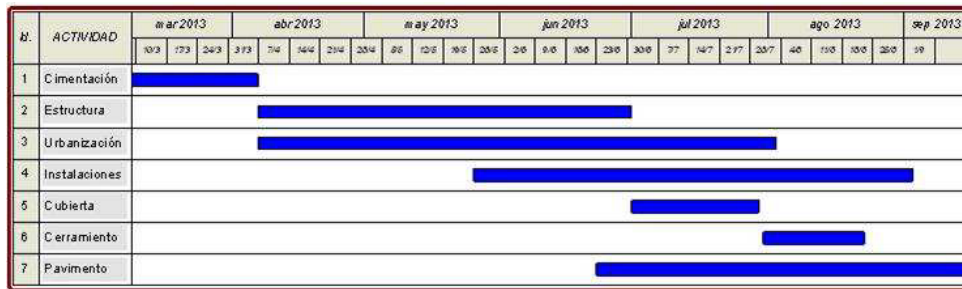


Figura 1: Diagrama de Gantt

El *grafo CPM* (acrónimo de *Critical Path Method*) es un grafo dirigido cuyos nodos (denotados por índices i enteros y que toman los valores $1, 2, 3, \dots, n$) representan los sucesos inicio y final de una o varias actividades y cuyos arcos (denotados por pares ordenados ij de enteros que indican el nodo inicial i y el nodo final j del arco) representan las actividades. En cada nodo se detalla una etiqueta del suceso ($1, 2, 3, \dots, n$), el tiempo *early* y el tiempo *last*. El tiempo *early* de un suceso es el tiempo mínimo necesario para llegar a ese suceso. Su cálculo se realiza en orden cronológico, comenzando por el suceso inicio del proyecto al que se le asigna un tiempo *early* de 0 unidades temporales (días, semanas, meses, ...). Los tiempos *early* de los restantes sucesos se obtienen teniendo en cuenta que cada suceso se dará por realizado cuando hayan finalizado todas las actividades que confluyen en él y por tanto, el tiempo *early* de cada suceso será aquel que se deriva de considerarlo como suceso final de la actividad que mayor tiempo necesita.

El tiempo *last* de un suceso es el tiempo más tarde en que se puede llegar a ese suceso de manera que la duración del proyecto no se alargue. Su cálculo se realiza en orden cronológico inverso, comenzando por el suceso final del proyecto al que se le asigna un tiempo *last* igual al tiempo *early* previamente calculado. Los tiempos *last* de los restantes sucesos se obtienen teniendo en cuenta que el objetivo de alcanzar el final del proyecto con éxito está condicionado por el camino de máxima duración (o camino crítico), considerando como origen este vértice. Se van restando los tiempos de cada actividad, escogiendo el menor de todos los posibles. El cálculo de los tiempos *last* proporciona los datos necesarios para el estudio de las holguras y por lo tanto, del camino crítico.

La *holgura* de una actividad es el exceso de tiempo disponible para realizar dicha actividad en relación al tiempo previsto para esa actividad. Se pueden determinar

diferentes tipos de holguras de una actividad (total, libre, independiente, ...), siendo la holgura total la más ampliamente utilizada. La *holgura total* de la actividad ij se denota por H_{ij} y se define como:

$$H_{ij} = T_{Lj} - T_{Ei} - D_{ij},$$

donde T_{Lj} es el tiempo *last* del suceso j , T_{Ei} es el tiempo *early* del suceso i y D_{ij} es la duración de la actividad ij . La *holgura total* de una actividad es lo que ésta puede retrasarse sin que afecte a la duración del proyecto. La *holgura* de un suceso es el exceso de tiempo disponible para su situación. La holgura del suceso i se denota por H_i y se define por

$$H_i = T_{Li} - T_{Ei}.$$

Una actividad se denomina *crítica* cuando cualquier retraso en la realización de la misma implica un retraso en la finalización del proyecto. En las actividades críticas coinciden los tiempos *early* y *last* de sus correspondientes sucesos. Una actividad ij es crítica cuando $H_{ij} = 0$. En la Figura 2 se muestra un ejemplo de grafo CPM donde se marcan en rojo las actividades críticas y para cada actividad se indica entre paréntesis su holgura total.

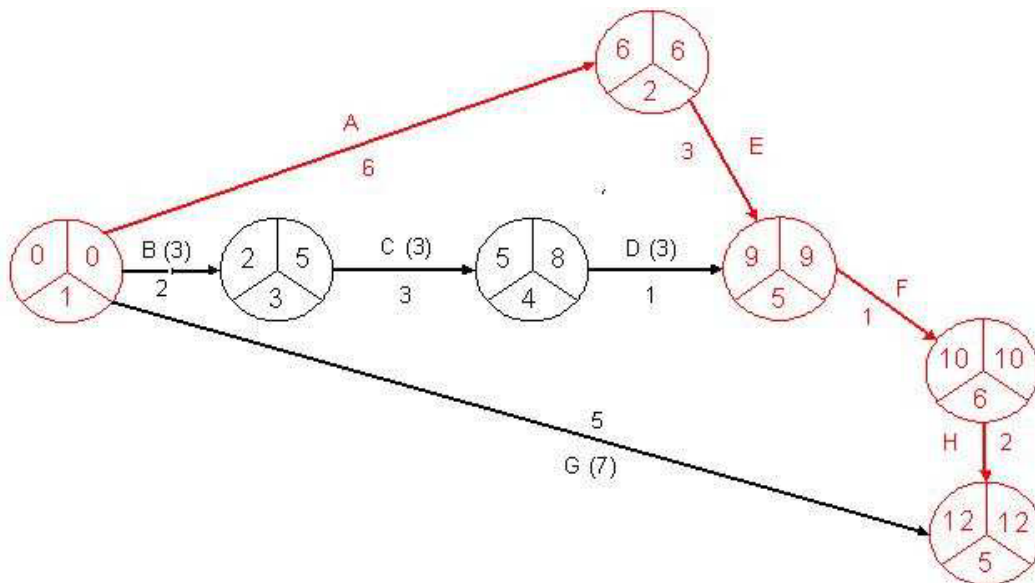


Figura 2: Grafo CPM

El *grafo Roy* es un grafo dirigido cuyos nodos representan actividades y cuyos arcos representan las relaciones de precedencia. En esta comunicación se etiquetan las actividades con letras mayúsculas. Si K es una de las actividades, en el nodo que

la representa se detalla la etiqueta (K), el tiempo de inicio más temprano de la actividad T_K , el tiempo de inicio más tarde T_K^* y la duración de la actividad D_K , ver Figura 3.

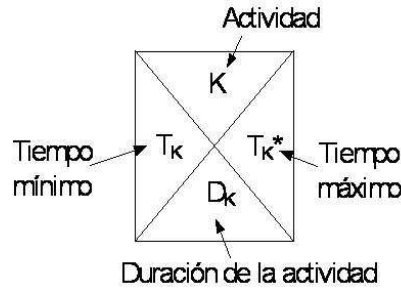


Figura 3: Un nodo en el grafo Roy

En la Figura 4 se muestra un ejemplo de grafo Roy donde se marcan en rojo las actividades críticas y para cada actividad se indica entre paréntesis su holgura total.

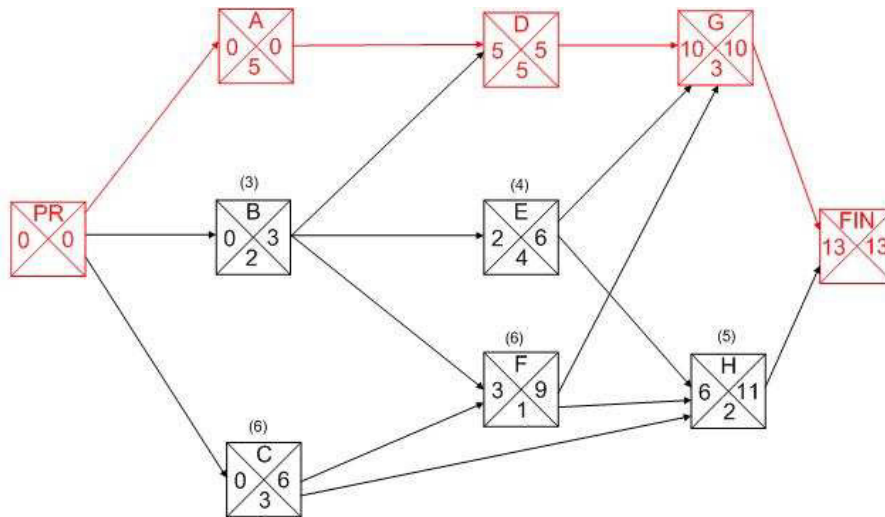


Figura 4: Grafo Roy

Se pueden consultar las referencias (Ortigueira, 1976; Pomares, 1977; Romero, 1997; Klein, 1999; Capuz et al, 2000; Demeulemestee & Herroelen, 2002) para mayor información.

Aplicaciones: tres problemas

Se plantean tres problemas junto con su solución. Los dos primeros son problemas cruciales en la planificación de un proyecto y suelen ser vistos en la materia de planificación, programación y control. El tercer problema no suele ser visto en ningún currículum y lo incluimos debido a su interés como problema de optimización y por ser un problema clásico. La solución mediante programación matemática de estos problemas requiere buenos conocimientos de investigación operativa y puede ser computacionalmente ineficiente. Se presentan algunas

heurísticas que dan soluciones cercanas al óptimo y enlaces a software que las aplica. Los tres problemas que planteados son:

- La nivelación de recursos.
- La asignación de recursos.
- El problema del viajante.

No se da una descripción genérica de cada problema sino un ejemplo con datos fijados. Las heurísticas o los métodos que permiten tratar estos problemas son muy variados, ver por ejemplo (Klein, 1999; Demeulemester & Herroelen, 2002). En esta comunicación se describe una posible manera de abordar cada uno de los problemas en un ejemplo.

La nivelación de recursos

Los *recursos* son los medios que se interponen en el proceso productivo para llevar a cabo la realización del producto, ver (Carvajal, 2001). Los principales recursos que intervienen en una obra son: 1) mano de obra, 2) materiales, 3) maquinaria, equipos y medios auxiliares y 4) recursos económicos. La *carga diaria* de un recurso es el número de unidades del mismo que es absorbido por el proyecto en cada día de ejecución. El *diagrama de carga* es una gráfica que muestra el consumo diario (carga diaria) del recurso que se está estudiando. La Figura 5 muestra un ejemplo de programación con recursos no nivelados.

En los métodos de programación básicos se supone que los diferentes tipos de recursos necesarios para ejecutar las actividades se encuentran disponibles en cantidades ilimitadas. Este supuesto de recursos ilimitados no suele cumplirse, lo cual puede originar alteraciones con respecto al calendario de ejecución establecido en la programación inicial. Por ejemplo, en una obra se deben realizar 2 actividades A y B que según la programación realizada pueden ejecutarse simultáneamente con unos tiempos estimados de 3 y 5 días respectivamente. Estos tiempos se han calculado suponiendo que cada actividad va a ser realizada por 1 albañil. Si únicamente se dispone 1 albañil, entonces no podrán ejecutarse simultáneamente aunque así nos lo indique el grafo de precedencias. El anterior ejemplo, basado en una disponibilidad limitada de mano de obra, es extensible a cualquier otro tipo de recurso (materiales, maquinaria, capital) que intervenga en la ejecución del proyecto.

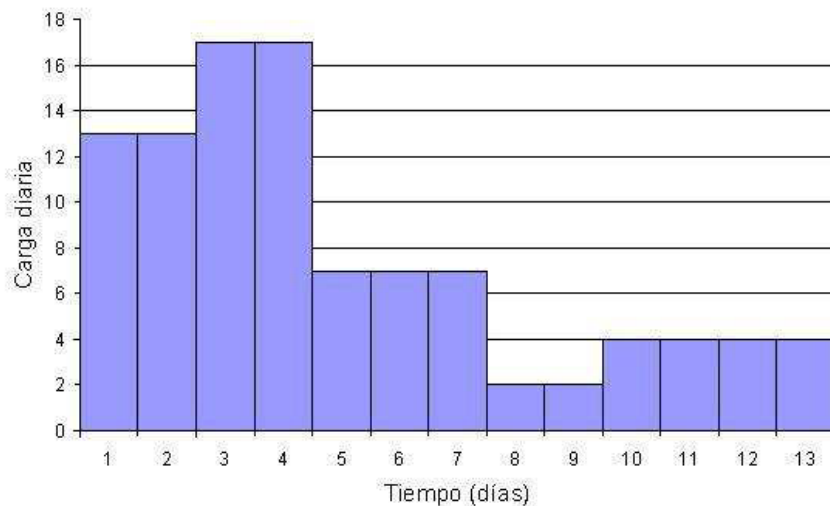
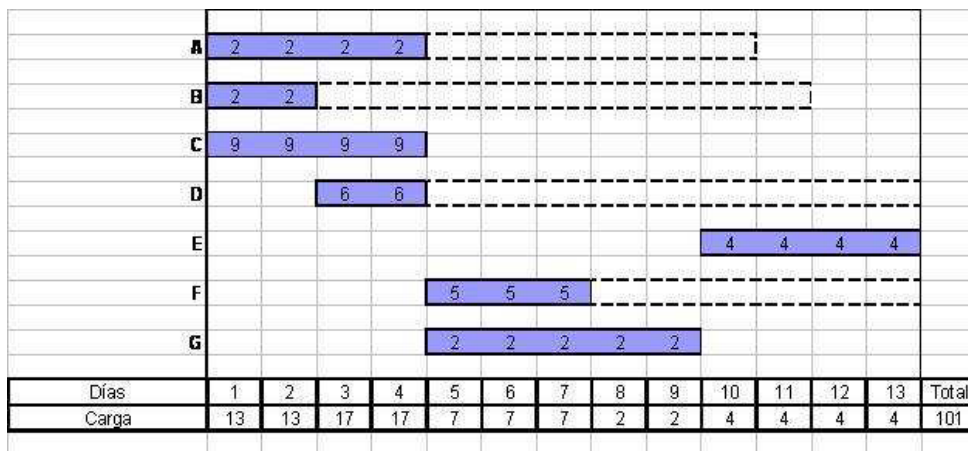


Figure 5: Calendario de ejecución y diagrama de carga (recursos no nivelados)

Dentro del contexto de los recursos limitados existen dos problemas claramente diferenciados: la nivelación y la asignación de recursos.

- La *nivelación de recursos* tiene por objetivo conseguir que los consumos de los diferentes tipos de recursos se ajusten a una disponibilidad estimada de forma eficiente y evitando que la duración del proyecto exceda de la prevista. Este tipo de problemas se denominan con el acrónimo RLP (*Resource Leveling Problem*).

- La *asignación de recursos* pretende minimizar la duración del proyecto, de forma que en ningún período de tiempo, el consumo de algún recurso supere a su disponibilidad. Este tipo de problemas se denominan como problemas de *secuenciación de proyectos con recursos limitados* y con el acrónimo RCPS (*Resource-Constrained Project Scheduling Problem*).

En (Harris, 1978; Easa, 1989; Harris, 1990) se pueden encontrar diversos métodos heurcos para abordar el problema de nivelación. Ver también los libros (Klein,

1999; Demeulemester & Herroelen, 2002). La Figura 6 muestra el ejemplo de programación ya representado en la Figura 5 pero ahora los recursos han sido nivelados.

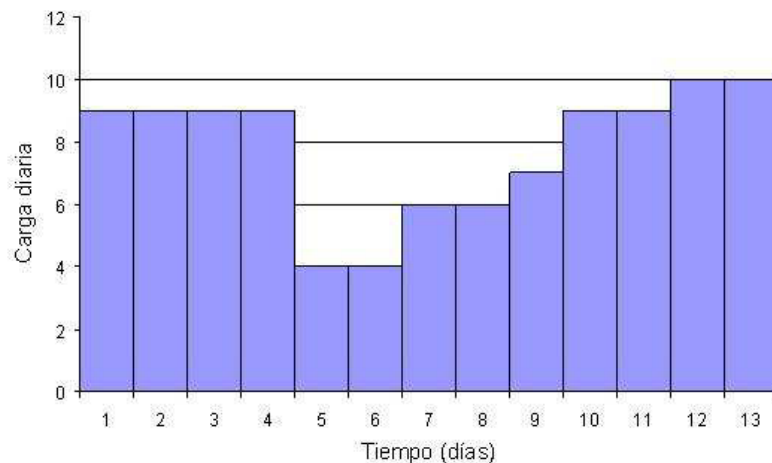
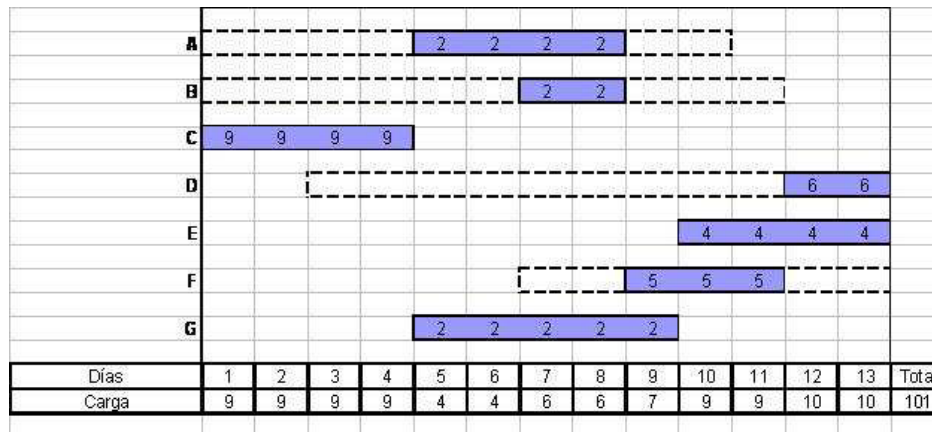


Figure 6: Calendario de ejecución y diagrama de carga (recursos nivelados)

Se considera el grafo CPM de la Figura 2 y se sabe que las actividades A, C y D necesitan 10 obreros para poder ser ejecutadas en los tiempos previstos y que las restantes actividades requieren 5 obreros. Se pretende realizar la nivelación de este recurso.

Vamos a usar el algoritmo de Burgess–Killebrew (1962) para dar una solución cercana a la óptima del resultado. El primer paso a seguir es construir el calendario de ejecución del proyecto en el que se representan únicamente las fechas de comienzo y de finalización más temprana de cada actividad a partir de los datos anteriores. Se añaden dos filas en la parte inferior del calendario:

- Primera fila: se representa la carga diaria del recurso estudiado.

• Segunda fila: se representa el cuadrado de la carga diaria. Se verá como este parámetro juega un importante papel en la nivelación mediante el algoritmo de Burgess–Killebrew.

Se representa el diagrama de cargas del recurso mano de obra. Se observa que el consumo de este recurso se realiza de una forma poco eficiente y por tanto, requiere su nivelación, ver la Figura 7.

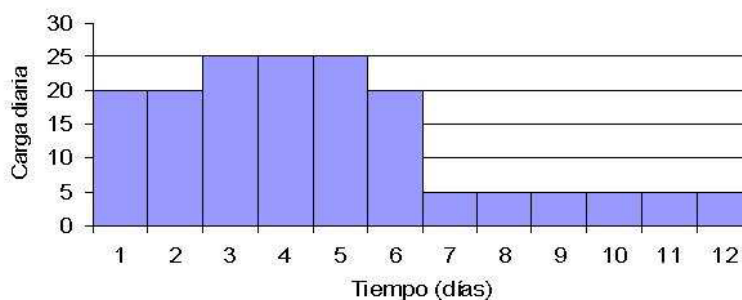
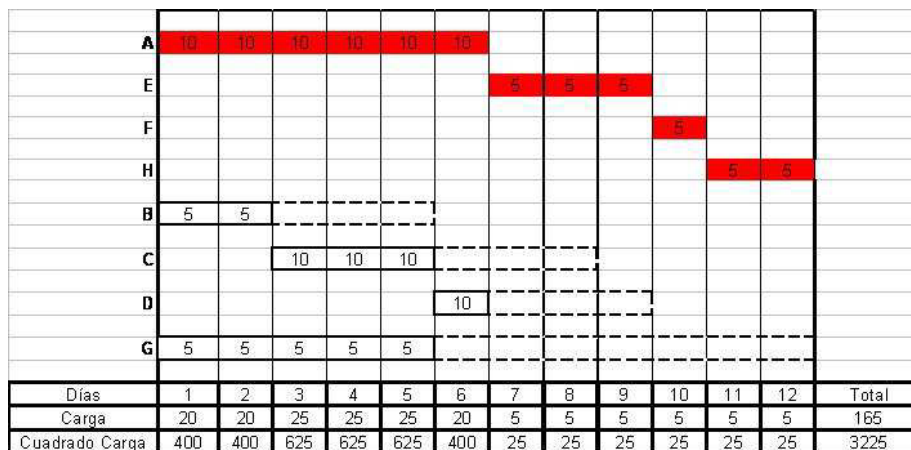


Figura 7: Calendario de ejecución y diagrama de cargas (sin nivelar)

El segundo paso a seguir es buscar en el calendario de ejecución aquella actividad no crítica que tenga la fecha temprana de finalización más tarde. Se retrasa su finalización unidad por unidad de tiempo, de acuerdo con lo que permita su holgura. Se elige como fecha de finalización más temprana la que haga mínima la suma de los cuadrados de las cargas. A igual valor de la suma se desplaza lo más a la derecha posible. En nuestro ejemplo, la actividad D es la no crítica con fecha temprana de finalización más tarde. Su holgura total es de 3 días. Si se retrasa su finalización 1 día, se observa que la suma de los cuadrados de las cargas ha descendido 100 unidades, por lo que conviene aplicar este retraso. Si se retrasa su finalización otro día más, la suma de cuadrados mantiene su valor, por tanto se aplica este retraso. Si se retrasa un día más, el valor de la suma de cuadrados se mantiene, consumiéndose toda la holgura de esta actividad. Por tanto, se aplica un retraso total de 3 días, ver Figura 8.

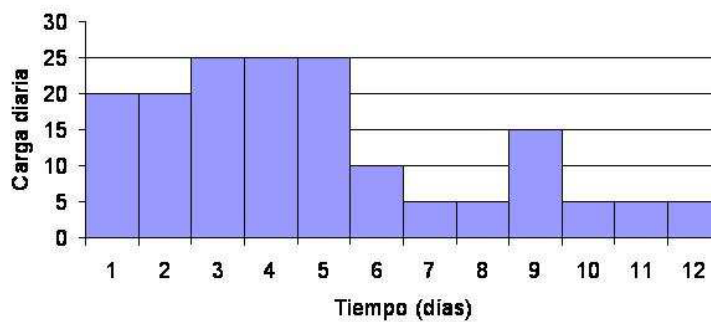
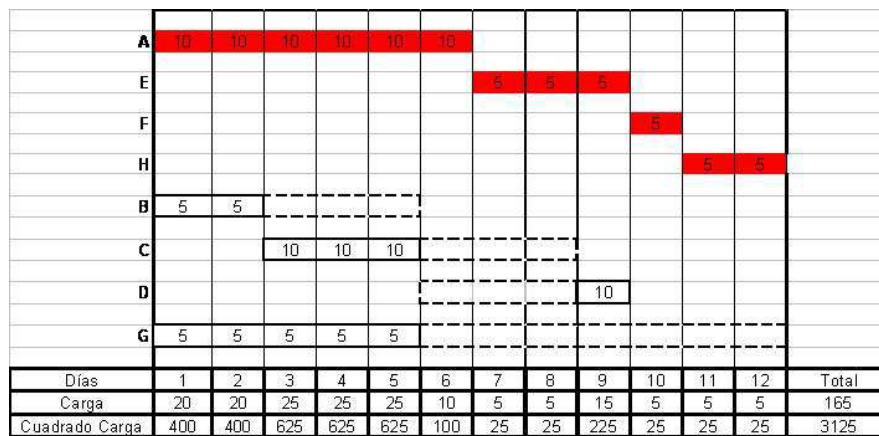


Figure 8: Calendario de ejecución y diagrama de cargas (1ª nivelación)

Se itera el proceso anterior. Se vuelve a elegir la actividad no crítica que tenga la fecha temprana de finalización más tarde, excluida la actividad estudiada en la primera fase. Se aplica el mismo procedimiento que antes hasta llegar a la actividad que posea una fecha temprana de finalización más retrasada. Cuando varias actividades tienen la misma fecha temprana de finalización se actúa prioritariamente sobre aquella cuya holgura permita un mayor retraso. En nuestro ejemplo, se escoge la actividad G puesto que presenta la misma fecha temprana de finalización que C pero cuya holgura es de 7 frente a 3 de C. Resulta conveniente un retraso de 7 días en la finalización de G, disminuyendo la suma de cuadrados en 550 unidades, ver la Figura 9.

En nuestro ejemplo, una vez retrasada la actividad G se aplica el mismo procedimiento a la actividad C. Resulta conveniente un retraso de 3 días en la finalización de C, disminuyendo la suma de cuadrados en 100 unidades, ver la Figura 10.

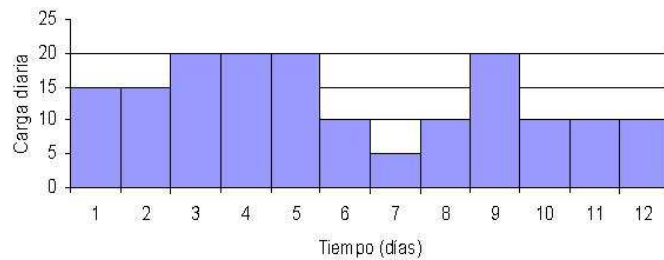
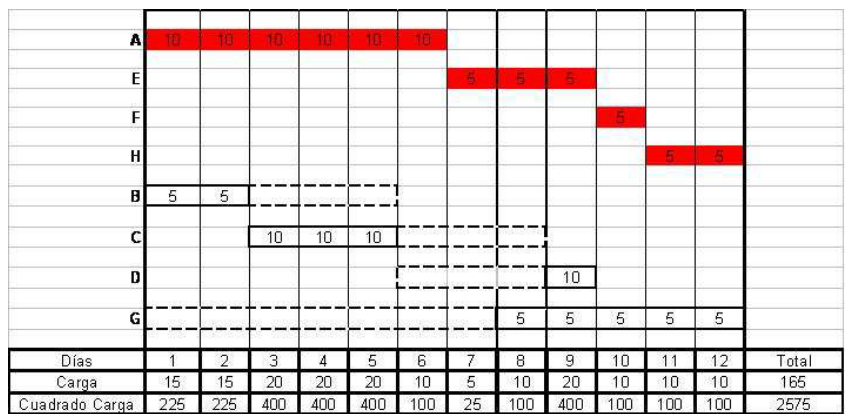


Figure 9: Calendario de ejecución y diagrama de cargas (2ª nivelación)

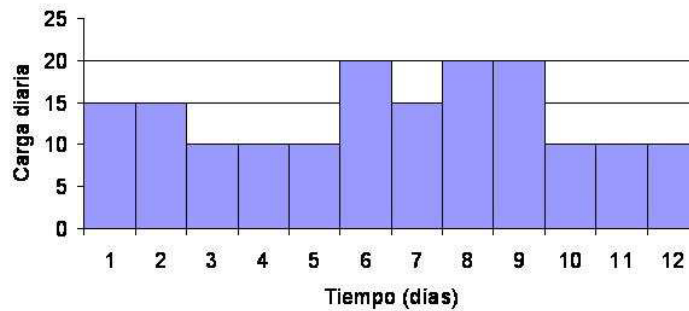
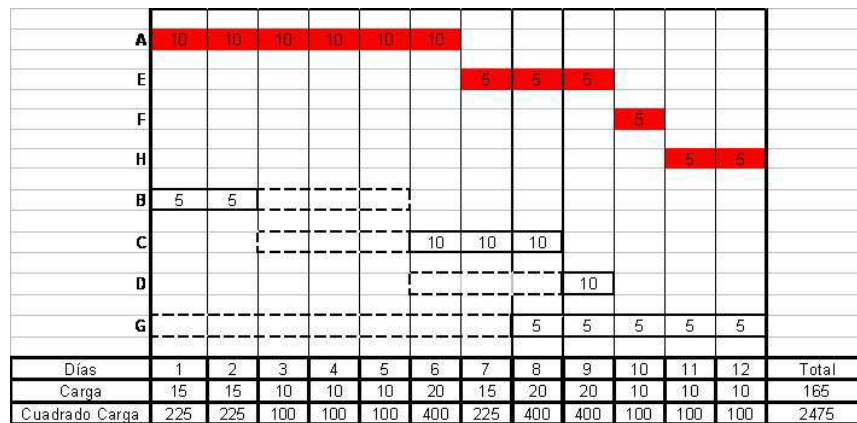


Figure 10: Calendario de ejecución y diagrama de cargas (nivelación final)

El algoritmo finaliza cuando se ha conseguido un alisamiento mejorado, que en este caso se alcanza en la primera iteración. Así finaliza el proceso de nivelación del recurso mano de obra de nuestro ejemplo. Se observa que se ha mejorado substancialmente la nivelación en las primeras iteraciones. Sin embargo en general, deberán realizarse tantas iteraciones como sea necesario finalizando el proceso de cálculo cuando al final de un ciclo, no resulte posible disminuir la suma de los cuadrados de carga. Dado que el algoritmo de Burgess–Killebrew es de tipo heurístico, en general no nos indicará si se ha alcanzado la solución óptima, salvo en caso de nivelación total. Las ventajas del algoritmo son su sencillez y que permite ser procesado en computador y por tanto, aplicado a proyectos complejos. Los inconvenientes del algoritmo son que deben corregirse las holguras de las actividades precedentes pues al trabajar con holguras totales se corre el riesgo de incumplir las relaciones de precedencia. Con el fin de no incumplir estas relaciones se aplican los siguientes criterios:

1. Si se pide nivelar los recursos, se aplicará el algoritmo de Burgess–Killebrew respetando durante todo el proceso de nivelación, las relaciones de precedencia existentes. Es decir, una actividad no se retrasará si se va a incumplir una relación de precedencia.

2. Si se pide un determinado grado de nivelación que no sea alcanzable mediante el algoritmo de Burgess–Killebrew, deberán contemplarse otras opciones como:

- En caso que una actividad haya consumido toda su holgura libre pero aún le quede holgura total por consumir, se estudia el posible retraso simultáneo de dicha actividad y de aquella a la que está condicionando.

- Estudiar el retraso o adelanto de otras actividades no críticas.

Resolución mediante programación matemática

En el apartado anterior se explica, mediante un ejemplo, como aplicar una heurística para encontrar una solución próxima a la óptima para el problema de nivelación de recursos. También es posible abordar este problema usando programación matemática, tal como se explica en (Romero, 1997; Medina, 2008). Ver también (Kaplan, 1988; Ponz–Tienda et al., 2013).

Se considera un recurso para ser nivelado en un proyecto

• con m actividades que denotadas por A_j con $j = 1, 2, 3, \dots, m$. El índice j hace referencia a la actividad j -ésima.

• Se denota por $L(j)$ la lista de valores r tales que la actividad A_r precede a la actividad A_j , para cada $j = 1, 2, 3, \dots, m$. Cuando una actividad no es precedida por ninguna otra, la lista es vaca. Se denota por L a la suma de los cardinales de $L(j)$ para $j = 1, 2, 3, \dots, m$, es decir,

$$L = \sum_{j=1}^m L(j).$$

• Se supone que el proyecto tiene una duración prescrita de T unidades y se denota por t la unidad de tiempo t -ésima.

Se conocen, además, los siguientes datos para cada $j = 1, 2, 3, \dots, m$.

• La duración D_j para cada actividad A_j . El valor D_j es entero y positivo. Nótese que $\max\{D_j : j = 1, 2, \dots, T\} \leq T$.

• La demanda C_j del recurso considerado en la actividad A_j .

Las variables del problema son las variables binarias x_{jt} , con $j = 1, 2, 3, \dots, m$ y $t = 1, 2, 3, \dots, T$. La variable x_{jt} toma el valor 1 cuando la actividad A_j se desarrolla en el periodo t y 0 en caso contrario. Se puede pensar la matriz formada por estas variables como el diagrama de Gantt, de manera que la casilla correspondiente a la actividad A_j (fila j) y periodo T_t (columna t) está coloreada sólo cuando x_{jt} toma el valor 1. Se tienen $m \times T$ variables, que pueden tomar los valores 0 ó 1. Así, el espacio de valores de las variables tiene cardinal 2^{mT} .

Las restricciones hacen referencia a que se están considerando un proyecto de planificación y son las que se describen en (Romero, 1997; Medina, 2008).

La duración de cada actividad es conocida:

$$\sum_{t=1}^T x_{jt} = D_j, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m.$$

Se tienen así m restricciones.

Las relaciones de precedencia deben respetarse con lo que, para cada actividad A_j , si $|L(j)| \neq 0$ entonces $x_{j1} = 0$ y

$$\sum_{p=1}^{t-1} x_{rp} \geq D_r x_{jt}, \quad r \in L(j), j = 1, 2, 3, \dots, m; t = 2, 3, \dots, T.$$

Se tienen LT restricciones.

Dado que las actividades del proyecto deben sucederse de forma continua

$$D_j \geq D_j x_{jt} - D_j x_{j,t+1} + \sum_{p=t+2}^n x_{jp}, \quad j = 1, 2, 3, \dots, m; t = 1, 2, 3, \dots, T - 2.$$

Se tienen $m(T - 2)$ restricciones.

Se tienen un total de $LT + m(T - 1)$ restricciones.

Tal como señala el algoritmo de Burgess–Killebrew, la función a minimizar para el problema de nivelación de recursos es

$$\sum_{t=1}^T \left[\sum_{j=1}^m C_j x_{jt} \right]^2.$$

El mnimo de esta función provoca la nivelación óptima del histograma que muestra el diagrama de cargas del problema. Nótese que la función a minimizar es la varianza de la variable estadstica representada en el histograma del diagrama de cargas.

La asignación de recursos

El objetivo de los métodos de asignación de recursos consiste en obtener un nuevo calendario de ejecución que haga mínima la duración del proyecto, satisfaciendo las restricciones impuestas por las disponibilidades de los recursos. Es decir, la *asignación de recursos* busca el calendario de duración mínima en el que se cumpla que los consumos diarios (cargas) de los recursos considerados no superen a las disponibilidades de los mismos. Se han desarrollado una serie de algoritmos heurísticos que hallan una solución cercana a la óptima del problema de la asignación de recursos. Entre estos cabe destacar, ver (Ortigueira, 1976; Klein, 1999; Demeulemester & Herroelen, 2002): Wiest–Levy, ALTAI, CORUA, RAMPS, RPSM, SPAR, etc. La mayor parte de estos algoritmos están pensados para ser procesados en computador. Al igual que sucedía en nivelación de recursos, el problema de asignación puede resolverse obteniendo la solución óptima, aplicando un modelo de programación matemática. Sin embargo estos modelos se caracterizan por su elevado coste computacional.

Se considera el proyecto representado en el grafo Roy de la Figura 4. El problema es encontrar la asignación de recursos que suponga la duración mnima del proyecto bajo la condición que los recursos diarios consumidos no superen las disponibilidades de los mismos.

Las necesidades de mano de obras se indican en la tabla siguiente.

Actividad	A	B	C	D	E	F	G	H
Mano de obra por día	5	4	3	6	4	2	2	8

Se pretende resolver el problema de asignación a tiempo mínimo sabiendo que la disponibilidad máxima de mano de obra no puede superar los 10 trabajadores por día.

El primer paso a aplicar consiste en representar el diagrama de Gantt con los tiempos de inicio más pronto y calculando las necesidades de mano de obra para cada día, ver la Figura 11.

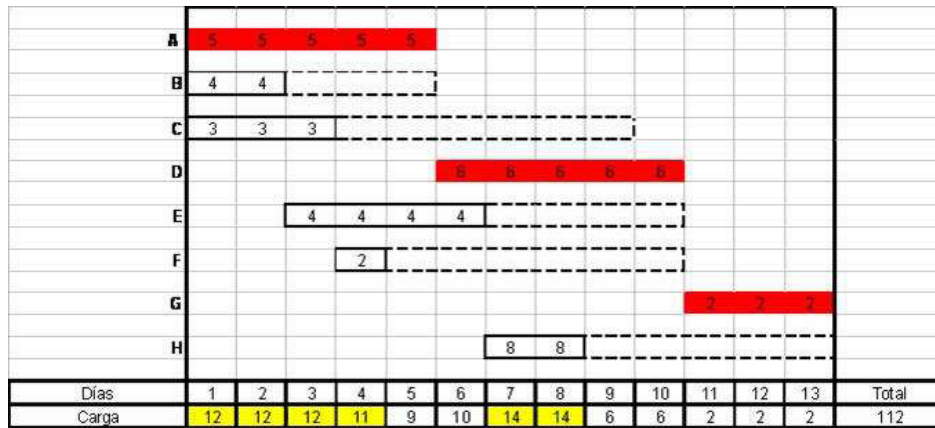


Figure 11: Diagrama de Gantt con sobreasignaciones a partir del día 1

El primer conflicto se presenta el día 1 con un total de 12 trabajadores (actividades A, B y C) frente a los 10 disponibles. La actividad A exige 5 trabajadores, la B requiere 4 mientras que la C necesita 3. Está claro que puede mantenerse la simultaneidad entre dos de estas actividades y ejecutar la tercera de ellas inmediatamente antes o después de aquéllas.

Si se ejecutan antes las actividades B y C, deberá retrasarse la A 2 días. Por ser A una actividad crítica, el retraso del proyecto sería el mismo: 2 días. Si se ejecutan antes las actividades A y C, la actividad B deberá retrasarse 3 días consumiéndose toda su holgura. Si se ejecutaran antes las actividades A y B, debería retrasarse la C 2 días. Puesto que C tiene una holgura de 6 días, ello implica que aún le quedan 4 días de holgura disponible. Por tanto, se elige la solución de retrasar C 2 días.

Se representa el diagrama de Gantt calculando las necesidades de mano de obra para cada día una vez retrasada la actividad C, ver Figura 12. Nótese que el retraso de dicha actividad conlleva asimismo el retraso de F en 2 días con objeto de respetar las relaciones de precedencia.

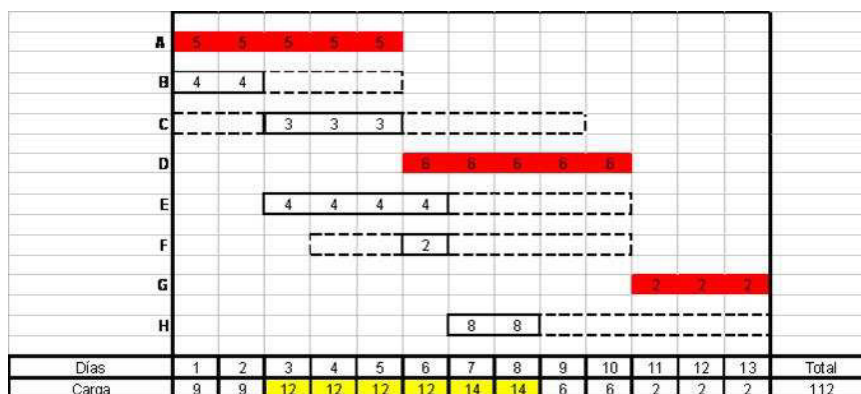


Figure 12: Diagrama de Gantt con sobreasignaciones a partir del día 3

El siguiente conflicto se produce el día 3 en que la simultaneidad de A, C y E exige 12 trabajadores y sólo hay 10 disponibles. Si se ejecutan primero las actividades C y E, A deberá retrasarse 5 días, dado que A es crítica ello supone un retraso total del proyecto igual a 5 días. Si se realizan primero A y E, entonces la actividad C deberá retrasarse 3 días, ello implica que aún le queda 1 día de holgura disponible. De forma similar, si primero se ejecutan A y C, la actividad E deberá retrasarse 3 días, quedándole 1 día de holgura disponible. Puesto que resulta indiferente retrasar C o E, se opta por retrasar la C por ser la actividad que requiere menos recursos de las dos.

Se representa el diagrama de Gantt calculando las necesidades de mano de obra para cada día una vez retrasada la actividad C, ver Figura 13. Nótese que el retraso de dicha actividad ha obligado a retrasar F y H 3 días para respetar las relaciones de precedencia.

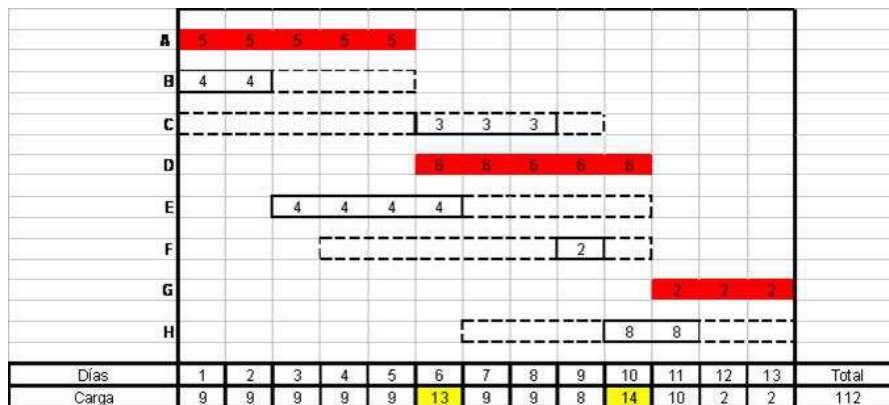


Figure 13: Diagrama de Gantt con sobreasignaciones a partir del día 6

El siguiente conflicto se produce el día 6 con una exigencia de 13 trabajadores frente a sólo 10 disponibles. Las actividades en pugna son la C, la D y la E. Eligiendo realizar primero la C y la E, la actividad D debe retrasarse 1 día y puesto que es una actividad crítica, igualmente la fecha de finalización del proyecto se retrasará 1 día. Eligiendo ejecutar primero C y D, la actividad E debe retrasarse 6 días y dado que su holgura es de 4 días, esto implica un retraso de 2 días en el proyecto. Si se escoge realizar primero D y E, entonces se debe retrasar la actividad C 1 día, consumiéndose toda su holgura, pero evitando retrasos en la finalización del proyecto. Se opta pues por retrasar C.

Se representa el diagrama de Gantt, calculando las necesidades de mano de obra para cada día una vez retrasada la actividad C, ver Figura 14. Se observa que el retraso de C obliga retrasar F y H 1 día para respetar las relaciones de precedencia. Nótese que las actividades C y F son ahora críticas. El diagrama de Gantt resultante

ya no presenta problemas de sobreasignación, con lo cual se ha alcanzado el final del proceso.

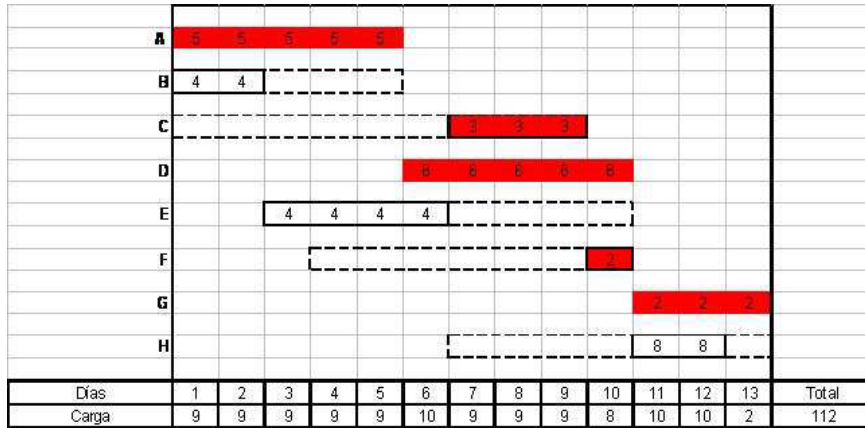


Figure 14: Diagrama de Gantt sin sobreasignaciones

En algunas ocasiones la mejor solución puede ser fraccionar una de las actividades en competencia, haciendo parte de ella, interrumpiéndola para ejecutar luego otra completa y terminar a continuación la primera. Es el caso por ejemplo de dos actividades A y B en conflicto dibujadas en el diagrama de la Figura 15.

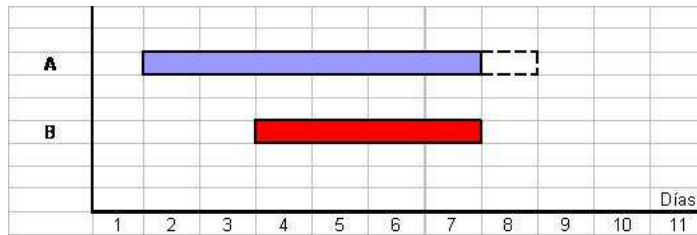


Figure 15: Diagrama de Gantt: conflicto de dos actividades.

El orden A-B supone retrasar la actividad B 4 días y puesto que es crítica, implica un retraso en el plazo final de 4 días. El orden B-A supone retrasar la actividad A 6 días y puesto que tiene una holgura de 1 día, supone un retraso en el plazo final de 5 días. La mejor solución, si fuera posible por las condiciones de trabajo, sería empezar en su momento la actividad A, interrumpirla después de 2 días de trabajo, hacer completa la B y luego terminar la A. De esta manera el retraso sería sólo de 3 días, ver Figura 16.

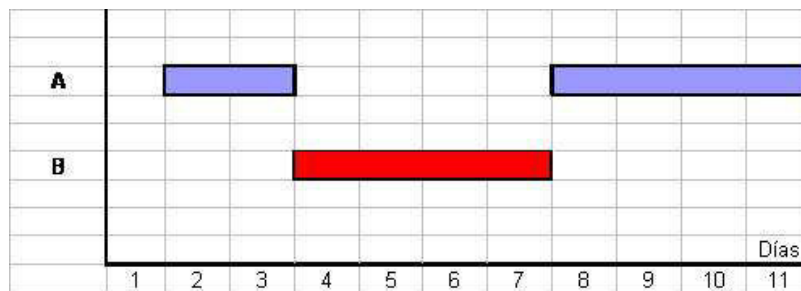


Figure 16: Diagrama de Gantt: fraccionamiento de dos actividades.

El problema de la asignación de recursos es más difícil que el de nivelación de recursos desde un punto de vista de complejidad algorítmica. Consideremos para simplificar el caso particular de un sólo recurso. Las variables a usar y las restricciones coinciden con las que han sido detalladas en la subsección 2.1.1. En este caso también se tiene la cantidad Q_t de recurso disponible en la unidad de tiempo t -ésima, con $t = 1, 2, 3, \dots, T$. Y hay que añadir las T restricciones

$$\sum_{j=1}^m C_j x_{jt} \leq Q_t, \quad t = 1, 2, 3, \dots, T,$$

ya que los consumos diarios (cargas) de los recursos considerados no deben superar a las disponibilidades de los mismos. Se tiene así un problema con mT variables binarias y $(L + m)(T - 1) + T$ restricciones lineales.

En este caso se pueden considerar distintas funciones objetivo a minimizar para tener un calendario de ejecución que haga mínima la duración del proyecto. Siguiendo (Wiest–Levy, 1972), ver también (Romero, 1997), se puede proponer como función objetivo una función lineal de la forma

$$\sum_{j=1}^m \sum_{t=1}^T \varphi(t) x_{jt},$$

donde $\varphi(t)$ es una función real discreta que toma valores reales en $t = 1, 2, 3, \dots, T$ y que es estrictamente positiva y creciente. Esta función objetivo toma un valor mínimo con la realización temprana de las actividades ya que dados dos periodos t_1 y t_2 con $t_1 < t_2$, el “peso” $\varphi(t_1)$ del periodo t_1 es estrictamente menor que el “peso” $\varphi(t_2)$ del periodo t_2 , es decir $0 < \varphi(t_1) < \varphi(t_2)$. Se puede tomar, por ejemplo, $\varphi(t) = t$ o bien $\varphi(t) = t!$. Se podrá hacer un estudio de qué funciones φ aseguran la resolución del problema de asignación de recursos y, entre ellas, determinar cuál da resultados computacionalmente más rápidos.

El problema del viajante

Un arquitecto técnico dirige diversas obras situadas en distintas localidades. Según su agenda debe realizar una visita semanal a cada obra de construcción y todas en el mismo día. Con el fin de ahorrar combustible pretende establecer cuál es la ruta óptima que le permita visitar todas las obras con el mínimo desplazamiento. La Figura 17 muestra el mapa con las distintas obras y el despacho donde trabaja el

ingeniero; figura extraída de *Google maps*. Este tipo de problemas se denominan con el acrónimo TSP (*Traveling Salesman Problem*).

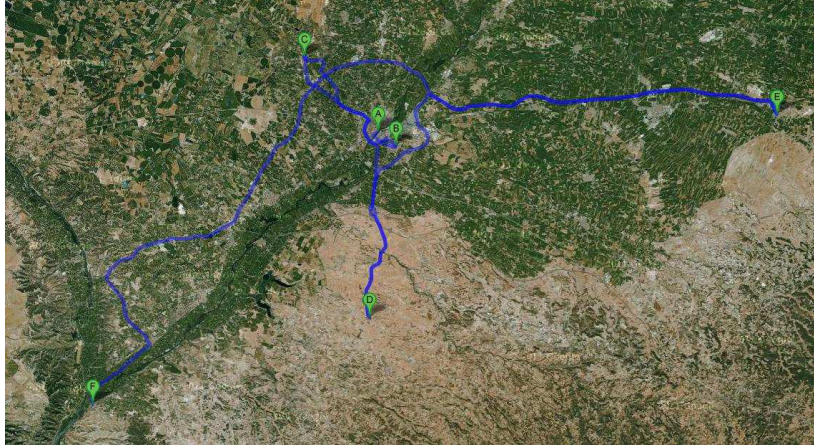


Figure 17: Mapa con los desplazamientos a realizar

La Figura 18 muestra el grafo que representa en el nodo A el despacho donde trabaja el técnico y en el resto de nodos las distintas obras a visitar. Las aristas representan las vas de conexión entre las distintas localidades. El costo de cada va viene dado por la distancia entre localidades que se detallan en la tabla siguiente.

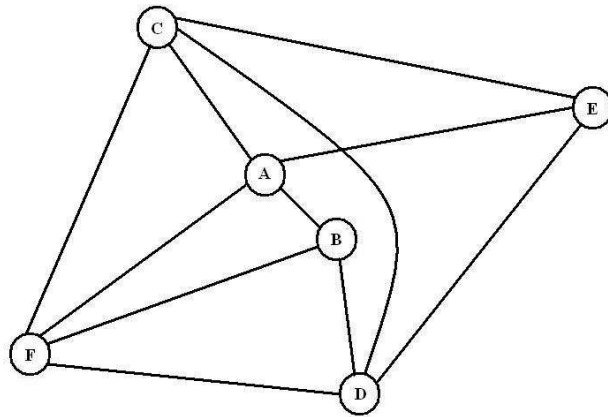


Figure 18: Grafo de los desplazamientos a realizar

La siguiente tabla muestra la distancia en kilómetros entre los distintos nodos. Cabe destacar que hay localidades que tienen una va de conexión que no pasa por la ciudad donde está el despacho y otras en las que no existe una va directa, por lo que la distancia es la suma de las distancias pasando por otra localidad intermedia. También cabe destacar que se ha usado la distancia por carretera entre localidades, pero este valor podrá sustituirse por el tiempo de recorrido puesto que los trayectos por una va de peaje pueden resultar más rápidos que la misma distancia por una va secundaria, por ejemplo. Se podrán tomar como costes entre dos nodos del grafo

valores ponderados de la distancia que tuvieran en cuenta el tiempo de recorrido y el combustible gastado.

	A	B	C	D	E	F
A	0	2,9	11,5	16,8	37,1	42,4
B	2,9	0	13,4	13,9	35,2	40,2
C	11,5	13,4	0	26,0	43,9	41,5
D	16,8	13,9	26,0	0	44,5	45,4
E	37,1	35,2	43,9	44,5	0	75,4
F	42,4	40,2	41,5	45,4	75,4	0

El problema consiste en encontrar la ruta óptima que permita al técnico visitar todas las obras con el mnimo coste.

Este problema es un ejemplo del *problema del viajante* ya que el técnico sale del despacho, debe visitar una vez cada obra y vuelve al despacho. Este problema, de gran dificultad computacional, se ha abordado mediante heurísticas bastante eficientes que se especializan en la estructura del problema y que no son tratadas aquí, ver por ejemplo (Jünger et al., 1995; Lawler et al., 1997). Aunque el grafo del ejemplo no es completo, siempre consideraremos grafos completos (todo nodo está unido a otro mediante una arista) puesto que, como se ha comentado, se puede suponer que todas las localidades están conectadas aunque sea mediante otra intermedia. Esta hipótesis no cambia la solución del problema.

Si el viajante debe visitar n ciudades, nótese que el problema se resume en encontrar la permutación de estas ciudades cuya ruta correspondiente tiene el menor coste. Como se trata de una permutación cíclica, se tienen $(n-1)!$ posibles ciclos y como no nos importa el sentido, se tienen $(n-1)!/2$ rutas a investigar. Así para valores pequeños de n , el método más eficaz consiste en determinar las $(n-1)!/2$ rutas posibles, calcular el coste para cada una de ellas y decidir cuál es la de menor coste. Esta estrategia se denomina *método de enumeración explícita* (o *fuerza bruta*) y no tiene posibilidad de error puesto que se analizan todos los casos. Sin embargo, y tal como muestra la tabla siguiente, el número de rutas crece rápidamente con n :

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11	...
$(n-1)!/2$	1	3	12	60	360	2520	20160	181440	1814400	...

Etiquetamos las ciudades a visitar con las primeras letras del abecedario: A, B, C, D, \dots . La tabla siguiente contiene todas las rutas a investigar para $n=3$, $n=4$ y $n=5$ con el fin de ilustrar la dificultad del método de la *fuerza bruta*. Nótese que para $n=3$ sólo hay una ruta puesto que las dos posibles permutaciones cíclicas $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ y $A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow A$ son equivalentes ya que no nos importa el sentido de la ruta, como ya habamos comentado. La notación $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$ significa que el técnico sale de la localidad A , va hacia B , después va a C y vuelve a A .

<i>n</i>	rutas
3	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow A$
4	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$
	$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$
	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$
5	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A$
	$A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$
	$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$
	$A \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow A$
	$A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$
	$A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow A$
	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow A$
	$A \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow A$
	$A \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A$
	$A \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow B \rightarrow D \rightarrow A$
	$A \rightarrow D \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow E \rightarrow A$
	$A \rightarrow D \rightarrow C \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow A$

El método de la *fuerza bruta* deviene inabordable para valores grandes de n .

Tal como se explica en las páginas 273–274 del libro (Ros, 1988), una forma bastante natural y sencilla de formular el problema del viajante es como un problema de programación lineal entera (cuyo acrónimo es PLE). Escribimos la formalización matemática del problema de esta manera, de forma que se puede abordar usando los algoritmos y el programario de PLE. Sea $L = \{A, B, C, D, E, F\}$ el conjunto de etiquetas para los nodos y se denota por $n = |L|$ el cardinal de este conjunto. En nuestro caso $n = 6$. Se consideran las variables binarias x_{ijk} , donde $i, j \in L$ y $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, que toma el valor 1 si se realiza el trayecto del nodo i al nodo j en el tramo k -ésimo y 0 si no se realiza.

Por ejemplo, el camino $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow E \rightarrow F \rightarrow A$

se describe con los valores $x_{AB1} = x_{BC2} = x_{CD3} = x_{DE4} = x_{EF5} = x_{FA6} = 1$,

y $x_{ijk} = 0$ para cualquier otro valor de los subndices i , j y k .

El coste del trayecto del nodo i al nodo j se denota por c_{ij} . As, el valor c_{ij} en nuestro caso se corresponde al número dado por la fila i , columna j de la tabla anterior. El problema de optimización lineal a resolver es:

$$\begin{aligned}
 & \text{Minimizar} && \sum_{i,j \in L} \sum_{k=1}^n c_{ij} x_{ijk} && 0.3cm \\
 & \text{bajo las condiciones} && && \\
 & && \sum_{j \in L} \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1, && \forall i \in L, 0.2cm \\
 & && \sum_{i \in L} \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1, && \forall j \in L, 0.2cm \\
 & && \sum_{i \in L} \sum_{j \in L} x_{ijk} = 1, && \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, 0.2cm \\
 & && \sum_{i \in L} \sum_{k=1}^n x_{iik} = 0, && 0.2cm \\
 & && \sum_{i \in L} x_{ijk} = \sum_{\ell \in L} x_{j\ell(k+1)}, && \forall j \in L, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, 0.3cm \\
 & && x_{ijk} \text{ binaria} && \forall i, j \in L, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}.
 \end{aligned}$$

Se tiene que las primeras n condiciones (una para cada valor de $i \in L$)

$$\sum_{j \in L} \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in L,$$

imponen que para cada nodo i haya exactamente una arista de salida.

Las segundas n condiciones (una para cada valor de $j \in L$)

$$\sum_{i \in L} \sum_{k=1}^n x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in L,$$

imponen que para cada nodo j haya exactamente una arista de llegada.

Las terceras n condiciones (una para cada valor de $k \in \{1, 2, \dots, n\}$)

$$\sum_{i \in L} \sum_{j \in L} x_{ijk} = 1, \quad \forall k \in \{1, 2, \dots, n\},$$

imponen que en el tramo k sólo se pueda asignar una única ruta.

La condición

$$\sum_{i \in L} \sum_{k=1}^n x_{iik} = 0,$$

implica que todas las variables de la forma x_{iik} sean cero, puesto que son binarias. Esta condición impone que si se está en el nodo i se salga de éste hacia otro nodo.

Y las últimas n^2 condiciones (una para cada valor de $j \in L$ y cada valor de $k \in \{1, 2, \dots, n\}$)

$$\sum_{i \in L} x_{ijk} = \sum_{\ell \in L} x_{j\ell(k+1)}, \quad \forall j \in L, \forall k \in \{1, 2, \dots, n\}, \quad (1)$$

imponen que si el k -ésimo tramo finaliza en la ciudad j , el siguiente tramo (el $(k+1)$ -ésimo) se inicie en la ciudad j . Nótese que en estas últimas condiciones el valor de k y de $k+1$ se toman módulo n .

Se dice que una permutación contiene *subtours* cuando no es cíclica. La existencia de *subtours* implica que el grafo que representa el trayecto del viajante no es conexo. Cabe destacar que la formulación presentada garantiza la no existencia de *subtours*. En efecto, supongamos que la solución presenta un *subtour* en las ciudades $C_{j_1} \rightarrow C_{j_2} \rightarrow \dots \rightarrow C_{j_p} \rightarrow C_{j_1}$ con $2 \leq p < n$, siendo n el número de ciudades a visitar. Dado que todos los nodos poseen exactamente una arista de salida y una arista de llegada, el resto de nodos se encontrarían en otro u otros *subtours* disconexos del anterior. En este caso algunas de las últimas n^2 condiciones (1) no se satisfacen, puesto que éstas imponen que si el k -ésimo tramo finaliza en la ciudad j , el siguiente tramo (el $(k+1)$ -ésimo) se inicie en la ciudad j . Las últimas n^2 condiciones imponen que el grafo solución sea conexo.

A pesar que este planteamiento del problema del viajante es sencillo, conlleva un alto número de variables y de restricciones según el número de ciudades a visitar. Así, si hay n ciudades a visitar, se tienen n^3 variables binarias y $1+3n+n^2$ condiciones lineales.

La solución del problema planteado es:

Tramo	Ruta	Distancia
1	de A a C	11,5
2	de C a F	41,5
3	de F a D	45,4
4	de D a E	44,5
5	de E a B	35,2
6	de B a A	2,9
		TOTAL: 181,0.

Nótese que el trayecto inverso

$$A \rightarrow B \rightarrow E \rightarrow D \rightarrow F \rightarrow C \rightarrow A$$

también es solución del problema de optimización, con la misma distancia mínima.

El problema del viajante también puede resolverse mediante las siguientes aplicaciones :

- *optimap*: obtiene soluciones cercanas a la óptima usando *Google Maps*,

<http://www.gebweb.net/optimap/> <http://www.gebweb.net/optimap/>

- *tsp*: obtiene soluciones exactas usando *Google Maps*,

<http://travellingsalesmanproblem.appspot.com/>

<http://travellingsalesmanproblem.appspot.com/>

- *Traveling Salesman Problem*, by *TapAddiction Apps, LLC*: para teléfono móvil inteligente,

<https://itunes.apple.com/us/app/traveling-salesman-problem/id407011429?mt=8>

<https://itunes.apple.com/us/app/traveling-salesman-problem/id407011429?mt=8>

Conclusiones

En esta comunicación se han dado algunas referencias básicas sobre programación matemática y planificación que se dirigen a un lector inexperto en una o ambas disciplinas. Tres problemas que pueden ser abordados por un arquitecto técnico han sido descritos y se han usado ejemplos numéricos para ilustrarlos. Cada problema se formaliza mediante programación matemática.

Nótese que mediante la opción Solver de Excel se puede resolver de manera aproximada cada uno de los problemas de optimización. Nótese también que el software libre WinQSB (<http://winqsb.softonic.com/http://winqsb.softonic.com/>) permite resolver estos problemas de forma exacta u aproximada:

- con el módulo *Quadratic Programming* para el problema de nivelación de recursos,
- con el módulo *Linear and Integer Programming* para el problema de asignación de recursos,
- y con el módulo *Network Modeling* para el problema del viajante, usando distintas heurísticas o bien la formalización descrita.

El servidor NEOS (acrónimo de *Network-Enabled Optimization System*) permite resolver problemas de optimización de forma remota.

<http://www.neos-server.org/neos/http://www.neos-server.org>

En los dos primeros problemas se ha descrito la formalización matemática del problema considerando un sólo recurso. Se podría generalizar esta formalización considerando distintos recursos.

También será interesante cuantificar el beneficio económico o social a raíz de la resolución de los problemas planteados.

Para un arquitecto técnico puede ser útil la resolución de los problemas planteados cuando el volumen de proyectos que aborde o la magnitud de los mismos tenga suficiente masa crítica para ser ventajoso el esfuerzo de resolución tal y como ha sido planteado.

Agradecimientos

Los autores quieren agradecer al revisor de esta comunicación su informe ampliamente detallado y con múltiples referencias. La presente comunicación ha mejorado de forma substancial tras la revisión.

Referencias

- [1] N. Karmarkar, *A new polynomial-time algorithm for linear programming*. *Combinatorica* **4** (1984), 373–395.
- [2] M. Montufar, H.R. Flores, N. Hein, J.F. López, O.F. Martínez, S. Miquel, J. Medina, L.M. Plà, A. Redchuck y G. Santori., *Operational Research*. [Investigación de Operaciones]. Ed. Patria. Mexico D.F. México, 2009.
- [3] S. Ros Insua, *Investigación Operativa. Optimización.*, Editorial Centro de Estudios Ramon Areces, 1988.
- [4] E.L. Demeulemestere & W.S. Herroelen, *Project scheduling: a research handbook*. International series in operations research & management science. Volume 49. Springer, 2002.
- [5] R. Klein, *Scheduling of Resource-Constrained Projects*. Kluwer Academic Publishers, 1999.
- [6] M. Ortigueira, *Programación reticular*. Ediciones ICE, 1976.
- [7] S. Capuz Rizo, E. Gómez-Senet Martínez, A. Torrealba López, P. Ferrer Gisbert; T. Gómez Navarro, J.L. Vivancos Bono, *Cuadernos de Ingeniería de Proyectos III: Dirección, Gestión y Organización de Proyectos*. Servicio de Publicaciones Universitat Politècnica de València, 2000.
- [8] J. Pomares Martínez, *Planificación Gráfica de Obras*. Ed. Gustavo Gili, Barcelona, 1977.
- [9] C. Romero López, *Técnicas de Programación y Control de Proyectos*. Ed. Pirámide, Madrid, 1997.
- [10] E. Carvajal, *Las funciones básicas de la producción en la construcción*. Centro Internacional para la Conservación del Patrimonio. CICOP. Sevilla, 2001.
- [11] S.M. Easa, *Resource leveling in construction by optimization*. *Journal of Construction Engineering and Management*–ASCE **115** (2) (1989), 302–316.

- [12] R. Harris, *Precedence and arrow networking techniques for construction*, Wiley, New York, 1978.
- [13] R.B. Harris, *Packing method for resource leveling (Pack)*. Journal of Construction Engineering and Management–ASCE **116** (2) (1990) 331–350.
- [14] A.R. Burgess, J.B. Killebrew, *Variation in Activity Level on a Cyclic Arrow Diagram*. Journal of Industrial Engineering, **v.13**, pp. 76–83, 1962.
- [15] F.J. Medina Ramón, *Diseño óptimo de redes para la programación de obras de edificación, para una nivelación y distribución de recursos personales constante*. Tesis Doctoral, Departamento de Construcciones Arquitectónicas. Universidad Politécnica de Valencia, 2008.
<https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=803526>
<https://www.educacion.es/teseo/mostrarRef.do?ref=803526>
- [16] L.A. Kaplan, *Resource-constrained project scheduling with preemption of jobs*, Unpublished Ph. D. Thesis, University of Michigan, 1988.
- [17] J.L. Ponz–Tienda, V. Yepes, E. Pellicer, J. Moreno–Flores, *The Resource Leveling Problem with multiple resources using an adaptive genetic algorithm*. Automation in Construction **29** (2013) 161–172.
- [18] J.D. Wiest, F.K. Levy, *Técnicas PERT y CPM*. Ed. Paraninfo, 1972.
- [19] M. Jünger, G. Reinelt, G. Rinaldi, *The traveling salesman problem*, Handbooks in Operations Research and Management Science, Volume 7, chapter 4, pp. 225–330, 1995.
- [20] E.L. Lawler, J.K. Lenstra, A.H.G. Rinnooy Kan, D.B. Shmoys, edited by. *The traveling salesman problem. A guided tour of combinatorial optimization*. Reprint of the 1985 original. Wiley–Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization. A Wiley–Interscience Publication. John Wiley & Sons, Ltd., Chichester, 1997.

