



# **Extensión multivariable del método de Gauss de determinación orbital con alto orden de convergencia**

Carlos Andreu Estellés

Julio de 2013

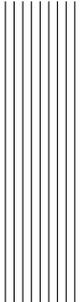
Directores

Dr. Alicia Cordero Barbero

Dr. Juan Ramón Torregrosa Sánchez

Proyecto Final de Carrera presentado en la Universitat Politècnica de València  
para obtener el título de Ingeniero Superior en Telecomunicaciones.





## Agradecimientos

Realmente todavía no me creo del todo que tal día como hoy esté escribiendo esta página, recordando que años atrás llegar a este punto parecía una quimera. Quizá la palabra agradecimientos se queda corta para referirme a las personas que han contribuido a que, en pocos días, me digan la famosa frase...

Para mi, la palabra que más se adecua es admiración. Siento admiración por Noelia Cambil Teba la cual ha sido todo y nada durante todos mis años de carrera. Mi todo porque con su lealtad, honestidad, cariño y respeto han hecho que sea una mejor persona que valora todo lo que le rodea. Mi nada porque cuando ella no ha estado a mi lado, sólo ha habido fracaso. A más de uno hemos hecho callar cuando nos hemos puesto a trabajar en equipo, apoyándonos siempre uno en el otro y disfrutando cuando los reconocimientos eran para ambos. No hay suficientes páginas en el mundo para agradecerte que sigas siendo mi compañera y amiga, ni hay suficientes vocablos para describir todo lo que te admiro. Si te vale, que a mi no porque la palabra se me queda corta, gracias cariño.

Siento admiración por mis padres de los que he aprendido que con constancia, trabajo y humildad en esta vida todo reto se hace pequeño. Les agradezco que siempre hayan visto el vaso medio lleno y que me hayan levantado tantas veces como hicieran falta para seguir caminando por muy grande que pareciera el obstáculo, sólo por amor y cariño. Sabéis que sin vosotros, hoy no sería ni la mitad de persona que soy hoy.

Quiero agradecer a Cari, a mis abuelos y a mis familiares haber estado ahí. Además, me gustaría dedicar todo este trabajo a dos personas que nos han dejado recientemente que son mi bis Carmen y mi abuela Lola. Aunque no estéis y os eche de menos, sigo sintiendo esa fuerza que siempre me habéis transmitido y sé que donde quiera que estéis, seguro que os sentís orgullosas de vuestro nieto el inquieto. Siento enormemente no haber cumplido vuestro sueño de verme un día delante de un tribunal, pero este trabajo es un homenaje para las dos, os quiero...

También quiero agradecer a mis amigos y compañeros el haber estado cuando más los necesitaba, el haber comprendido que no pudiera amoldarme a todos los planes y buscar huecos para no perder relaciones que continúan desde la infancia. Gracias a todos por formar parte de mi vida.

Este proyecto no tendría sentido si no mencionara, agradeciera y expresara mi admiración por dos personas, mejor dicho, amigos que siempre han estado cuando más se les necesitaba. Siempre han sido un apoyo incondicional y espero que sigamos trabajando juntos, porque en todos estos años de universidad jamás he trabajado tan agusto como ahora. Alicia y Juan Ramón, gracias por vuestra paciencia, humildad y sinceridad.

Me gustaría agradecer a todos los profesores que fueron un antes y un después. Fueron un antes y un después porque después de sus clases hicieron de mí una persona más madura y formada. Sin vuestras ganas, empeño y vocación hoy tampoco estaría aquí sentado escribiendo. Gracias a todos y espero que nunca abandonéis la docencia porque no hay mejores que vosotros para seguir formando a las generaciones venideras.

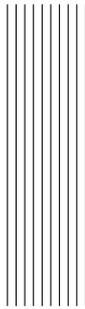
Por último, quiero agradecer a Nacho haber confiado en aquel niño callado y con ralla al lado que educó desde los 11 años. Gracias por creer en mí. Nacho, lo conseguimos.

Valencia, 2013.



A. Estellés, M. Clemente, Rak, Andreu,  
C. Teruel, Carlos, MACO, Vicente, P. Díaz,  
V. Garro, C. City, Akademia, T. Araúz, M. Estellés,  
J. Chuan,  
Adrián,  
J. Andrés,  
Carlo, Emil, J.F. Andreu,  
R. Morant,  
Jorge, Kika, J.  
Rosa  
C. Albelda, D. Bellés, F. Andreu, B. Estellés, C.  
Piero, Nicho, D. Estellés, Chimo, E. García,  
E.S.Y.M.J Cambil, E. Tebe, mis sobrinos...



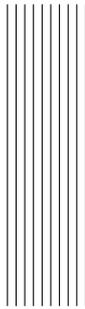


# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>10</b>
1.1. Resumen y objetivos . . . . .	11
<b>2. Conceptos numéricos previos</b>	<b>13</b>
2.1. Condicionamiento de un sistema . . . . .	13
2.2. La matriz Jacobiana . . . . .	14
2.3. Métodos iterativos basados en sistemas de ecuaciones no lineales . . . . .	15
2.4. Orden de convergencia . . . . .	16
2.4.1. Índice de eficiencia . . . . .	16
2.4.2. Índice operacional . . . . .	16
2.4.3. Índice de eficiencia aproximado . . . . .	16
2.4.4. Índice operacional aproximado . . . . .	17
2.5. Descripción de las órbitas bajo estudio . . . . .	17
2.6. Criterio de parada . . . . .	21
2.7. Desarrollo en serie de Taylor . . . . .	21
<b>3. El Problema de Dos Cuerpos</b>	<b>23</b>
3.1. Introducción . . . . .	23
3.2. Descripción del problema . . . . .	24
Integral de las áreas . . . . .	26
Teorema de las fuerzas vivas . . . . .	27
3.2.1. Cálculo de la posición $\vec{r}$ . . . . .	27
3.2.2. Cálculo de la velocidad $\vec{v}$ . . . . .	28
3.3. Cálculo de efemérides . . . . .	29
3.3.1. Definición de los parámetros orbitales . . . . .	29
<b>4. Determinación preliminar de órbitas con el método Gaussiano.</b>	<b>34</b>
4.1. Contexto histórico. Gauss y la Astronomía . . . . .	34

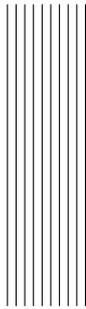
4.2.	Método de determinación de órbitas a partir de dos posiciones y su separación temporal . . . . .	35
4.3.	El vector velocidad $\vec{v}$ . . . . .	37
4.4.	Algoritmo computacional para la obtención de la velocidad. Trabajando con Punto Fijo. . . . .	38
4.5.	Obtención de los parámetros keplerianos a partir de los vectores posición $\vec{r}$ y velocidad $\vec{v}$ . . . . .	40
4.5.1.	Cálculo del semieje mayor $a$ y la excentricidad $e$ . . . . .	41
4.5.2.	Obtención de la inclinación $i$ . . . . .	41
4.5.3.	Cálculo de la ascensión recta del nodo ascendente $\Omega$ y del argumento del perigeo $\omega$ . . . . .	42
4.5.4.	Cálculo de la anomalía media $M$ . . . . .	42
4.6.	Determinación preliminar de órbitas con Newton-Raphson. Método Danckich . . . . .	43
4.6.1.	Primer estudio. Nuevo método de determinación preliminar de órbitas. Iteración en $X$ . . . . .	44
<b>5.</b>	<b>Métodos de determinación de órbitas con sistemas de ecuaciones.</b>	<b>49</b>
5.1.	Métodos para sistemas de ecuaciones no lineales . . . . .	49
5.1.1.	El método de Gauss con 2 variables . . . . .	49
5.2.	Métodos de orden superior. Traub y Jarratt . . . . .	50
5.3.	Nueva familia de métodos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales . . . . .	51
5.3.1.	Segundo Estudio. Métodos iterativos vectoriales para el cálculo de órbitas preliminares de satélites artificiales . . . . .	51
5.3.2.	Demostración del orden de convergencia . . . . .	52
5.3.3.	Expresiones de las funciones peso $H$ y $G$ . . . . .	56
5.3.4.	Análisis de eficiencia de <b>NAJC1</b> y <b>NAJC2</b> . . . . .	57
<b>6.</b>	<b>Resultados numéricos.</b>	<b>59</b>
6.1.	Elección de Wolfram Mathematica . . . . .	59
6.2.	Resultados numéricos de las órbitas bajo estudio. . . . .	60
6.2.1.	Conclusiones . . . . .	63
6.3.	Estudio de la estabilidad. Representación de los planos dinámicos . . . . .	64
6.3.1.	Conclusiones . . . . .	67
6.4.	Resultados numéricos sobre problemas académicos . . . . .	68
6.4.1.	Conclusiones . . . . .	70
<b>7.</b>	<b>Conclusiones y líneas futuras.</b>	<b>71</b>
7.1.	Reflexiones finales y líneas de investigación futuras . . . . .	71
<b>Anexos</b>		<b>73</b>

<b>A. Representación del plano Dinámico de un método iterativo</b>	<b>74</b>
<b>B. Métodos iterativos.</b>	<b>76</b>
B.1. Método de Danchick <b>DANC</b> .	76
B.2. Método de Gauss con dos variables <b>SNR</b> .	77
B.3. Método de Traub <b>STR</b> .	77
B.4. Método de Jarrat <b>SJ</b> .	78
B.5. Nueva familia de métodos de orden seis.	78
B.5.1. Método <b>NAJC1</b> .	78
B.5.2. Método <b>NAJC2</b> .	79
<b>C. Órbitas bajo estudio</b>	<b>80</b>
C.1. Programa para la obtención de $l$ , $m$ y $\nu_2 - \nu_1$ .	80
C.2. Órbitas de referencia.	81
C.2.1. Programa para el cálculo de posiciones en las órbitas de referencia.	81
C.2.2. Órbita de referencia I.	82
C.2.3. Órbita de referencia III.	82
C.2.4. Órbita de referencia VI.	83
C.2.5. Condiciones iniciales, $F$ y $F'$ en órbitas de referencia I, III y VI.	83
C.3. Órbitas de satélites artificiales comerciales.	84
C.3.1. Programa para el cálculo de posiciones en las órbitas destinadas a comunicaciones.	84
C.3.2. Órbita Molniya	85
C.3.3. Órbita Tundra	86
C.3.4. Condiciones iniciales, $F$ y $F'$ en órbitas comerciales.	86
C.4. Cálculo de la velocidad	87
C.5. Cálculo de los parámetros orbitales a partir de la velocidad y la posición.	87
<b>D. Ejemplos académicos.</b>	<b>89</b>
D.1. Sistema con $n = 2$	89
D.2. Sistema con $n = 3$	90
D.3. Sistema con $n = 4$	90



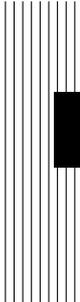
## Índice de figuras

2.1.	Representación aproximada de una órbita de tipo Molniya . . . . .	19
2.2.	Representación aproximada de una órbita de tipo Tundra . . . . .	20
3.1.	Diagrama de fuerzas de dos cuerpos sin perturbaciones externas . . . . .	24
3.2.	Órbita en el plano . . . . .	29
3.3.	Órbita en el espacio . . . . .	30
3.4.	Representación sistema de coordenadas definido por plano orbital . . . . .	33
4.1.	Diagrama de Flujo para obtención de la velocidad con Punto Fijo. . . . .	39
4.2.	Relación sector-triángulo con $\nu_2 - \nu_1 > \pi/4$ . . . . .	40
4.3.	Diagrama de Flujo del método de R.Danchick . . . . .	43
4.4.	Gráfica de $x$ en función de $y$ . . . . .	46
4.5.	Primera raíz de $y$ en función de $X$ . . . . .	47
4.6.	Segunda raíz de $y$ en función de $X$ . . . . .	47
4.7.	Tercera raíz de $y$ en función de $X$ . . . . .	47
4.8.	Gráfica de $F(X)$ . . . . .	48
5.1.	Evolución del índice de eficiencia. . . . .	57
5.2.	Evolución del índice operacional. . . . .	58
6.1.	Ciclo de trabajo . . . . .	59
6.2.	Plano dinámico de <b>SNR</b> . . . . .	65
6.3.	Plano dinámico de <b>STR</b> . . . . .	65
6.4.	Plano dinámico de <b>SJ</b> . . . . .	66
6.5.	Plano dinámico de <b>NAJC1</b> . . . . .	66
6.6.	Plano dinámico de <b>NAJC2</b> . . . . .	67



## Índice de tablas

6.1. Resultados Órbita de Referencia I. . . . .	61
6.2. Resultados Órbita de Referencia III. . . . .	61
6.3. Resultados Órbita de Referencia VI. . . . .	62
6.4. Resultados Órbita Molniya. . . . .	62
6.5. Resultados Órbita Tundra. . . . .	63
6.6. Resultados de sistema (a) con $x^{(0)} = (4, -3)^T$ . . . . .	69
6.7. Resultados de sistema (b) con $x^{(0)} = (12, -2, -1)^T$ . . . . .	69
6.8. Resultados de sistema (c) con $x^{(0)} = (5, 5, 5, -1)^T$ . . . . .	69



# 1

## Introducción

En todas las ramas de la ingeniería no pasan inadvertidos dos nombres propios como Newton y Gauss. Ambos matemáticos han hecho grandes contribuciones a la ciencia reduciendo la complejidad de muchos problemas matemáticos y físicos con algoritmos y métodos de fácil aplicación que se siguen utilizando en la actualidad.

Es erróneo pensar que una vez se han pasado los primeros años de ingeniería y se dejan de resolver sistemas de ecuaciones con el método de Gauss, que hemos utilizado todos los aspirantes a ingeniero en nuestro primer año de universidad, los únicos perfiles profesionales que aprovechan sus aportaciones son los matemáticos puros o físicos. Los ingenieros agrónomos siguen apoyándose en el método de los mínimos cuadrados que citó Gauss en “*Theoria Motus Corporum Coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*”, para desarrollar muchas de sus tesis e investigaciones basadas en el tratamiento de datos. Además, cualquier ingeniero que trabaje con procesos estadísticos conoce la famosa campana de Gauss. Probablemente, Newton no era consciente del impacto que iban a tener sus leyes fundamentales. Nos aparece relacionado con la ingeniería alimentaria en el equilibrio biológico de los nutrientes y sus calorías con el peso y la masa y la aceleración en el desplazamiento de personas obesas y sanas. También podemos encontrar aplicaciones de este genio en la medición de la desviación del flujo de aire, básica en aeronáutica.

Por lo que respecta al ingeniero de telecomunicaciones, las aportaciones son mayores si caben. Desde la resolución de sistemas lineales y no lineales por parte de Isaac Newton, hasta las aportaciones de Gauss con la resolución del problema de dos cuerpos del cual hacemos eco en la actualidad con un alto grado de aplicaciones. Por todo ello, este estudio de investigación queremos que sea un homenaje a estos dos genios que han hecho mucho más sencillo nuestro trabajo durante todos nuestros años de ingeniería.

## 1.1. Resumen y objetivos

---

Como no podía ser de otra manera, este proyecto partirá de una de las muchas aportaciones que facilitó Karl Friedrich Gauss durante su vida y en la que hizo uso de las leyes fundamentales de Newton que éste citó 122 años antes.

A modo introductorio, en el primer capítulo de este trabajo veremos conceptos numéricos necesarios para la comprensión de los capítulos venideros. A continuación, abordaremos la resolución del problema de dos cuerpos que dió Gauss a partir de las aportaciones de Newton y Kepler, para la posterior definición de los parámetros que caracterizan una órbita y que serán la base fundamental de nuestro estudio. En el cuarto capítulo, describiremos la determinación preliminar de órbitas que propuso Gauss para la obtención de la velocidad de un cuerpo en órbita a partir de dos observaciones del mismo y en la que hizo uso del método de punto fijo. Además, en este capítulo introduciremos una variante de la determinación Gaussiana que expuso el autor Roy Danckich en el año 2007 y propondremos nuestro propio método iterativo del que estudiaremos su convergencia y estabilidad.

En los capítulos siguientes basaremos nuestro estudio en el uso de métodos que utilizan sistemas de ecuaciones no lineales. En el primero de estos capítulos, citaremos métodos consolidados para la resolución de sistemas como son Newton, Jarratt o Traub y aportaremos una nueva familia de métodos con alto orden de convergencia en la que haremos uso de funciones peso matriciales. Los últimos capítulos están dedicados a la comparativa de resultados entre métodos, tanto para la determinación de órbitas como para la resolución de ejemplos académicos. En ellos evaluaremos la precisión, eficiencia y velocidad de nuestra familia de métodos frente a métodos consolidados. Estudiaremos la estabilidad mediante la representación de planos dinámicos en una órbita de referencia concreta y, por último, daremos las conclusiones finales y líneas futuras de investigación que tendrán como punto de partida lo aportado en este proyecto. Por lo tanto, nuestros objetivos prioritarios en este trabajo van a consistir en:

- Replantear la determinación preliminar de órbitas de Gauss, partiendo del método de Roy Danckich para, posteriormente, aportar un nuevo método iterativo.
- Utilizar métodos basados en sistemas de ecuaciones no lineales con alto orden de convergencia, estudiando su comportamiento en la obtención de distintos parámetros que describen las órbitas.
- Aportar una nueva familia de métodos eficientes desde el punto de vista operacional y computacional para la caracterización de órbitas, así como para

la resolución de gran cantidad de sistemas de ecuaciones de una o varias variables.

- Estudiar tanto la estabilidad como el grado de convergencia de los nuevos métodos comparándolos con otros que están consolidados en la resolución de sistemas.



## 2

# Conceptos numéricos previos

El objetivo central de este proyecto es la resolución aproximada de sistemas de ecuaciones no lineales con el siguiente aspecto:

$$\left. \begin{aligned} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \\ &\vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.1)$$

donde  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , son funciones reales cualesquiera.

Si definimos la función vectorial  $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  cuyas funciones coordenadas son  $f_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , podemos expresar el sistema (2.1) en la forma  $F(x) = 0$ .

La mayor parte de métodos de resolución aproximada de sistemas no lineales son esquemas iterativos que, partiendo de una aproximación inicial  $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$ , generan mediante una función de punto fijo una sucesión de vectores  $\{x^{(k)}\}_{k \geq 0}$  que, bajo ciertas condiciones, converge a una solución  $\bar{x}$  del sistema  $F(x) = 0$ .

## 2.1. Condicionamiento de un sistema

---

En la resolución de un sistema no lineal de ecuaciones mediante técnicas iterativas, tendremos que resolver en cada paso al menos un sistema lineal, por lo que es interesante conocer si un sistema está bien o mal condicionado.

Partiendo de un sistema de ecuaciones lineal que tiene el siguiente aspecto:

$$Ax = b \quad (2.2)$$

decimos que el sistema está **bien condicionado** cuando los errores cometidos en los componentes de la matriz  $A$  y del vector  $b$  producen en la solución  $\bar{x}$  un error de orden similar. Diremos que una matriz está **mal condicionada** si el error que induce en la solución del sistema es de orden superior, es decir, si introducimos

ligeras variaciones en  $A$  y nos repercute en que la solución del sistema (2.2) varía considerablemente, entonces diremos que el sistema está mal condicionado y vice-versa.

$$\begin{aligned} \|A - \bar{A}\| < \epsilon \\ \|b - \bar{b}\| < \epsilon \end{aligned} \implies \begin{cases} \|x - \bar{x}\| \approx \epsilon, & \text{sistema bien condicionado,} \\ \|x - \bar{x}\| \gg \epsilon, & \text{sistema mal condicionado.} \end{cases}$$

siendo  $\epsilon$  el error cometido y  $\bar{A}, \bar{b}$  la matriz y vector modificados, respectivamente.

**Definición 1.** Sea  $A$  una matriz cuadrada. Definimos el **número de condición** de la matriz  $A$  como:

$$K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|. \quad (2.3)$$

Con este valor conoceremos el condicionamiento del sistema (2.2).

Si  $\|I - A\| < 1$ , entonces existe matriz inversa y además  $\|A^{-1}\| \leq \frac{\|I\|}{1 - \|I - A\|}$ .  
De este modo, una matriz estará bien condicionada si:

$$K(A) \leq \|A\| \cdot k \quad \text{con} \quad k = \frac{\|I\|}{1 - \|I - A\|}.$$

## 2.2. La matriz Jacobiana

---

La matriz Jacobiana de la función  $F$  es la matriz de tamaño  $n \times n$ , cuyas columnas son los gradientes de las funciones componentes de  $F$ , es decir, que las columnas contienen las derivadas parciales de cada función en las variables del sistema. Teniendo en cuenta que:

$$F(x) = (f_1(x), \dots, f_n(x)),$$

la forma de denotar la matriz jacobiana será la siguiente:

$$F'(x_1, \dots, x_n) = \nabla f(x_1, \dots, x_n) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

## 2.3. Métodos iterativos basados en sistemas de ecuaciones no lineales

---

Cuando trabajamos con múltiples variables hacemos uso de vectores y matrices jacobianas para definir  $F$  y  $F'$ , respectivamente, para la resolución del sistema  $F(x) = 0$ . Esto nos lleva a que a la hora de escribir el método en el caso multidimensional, debemos de hacer un estudio de cual será la forma correcta de reescribir el método a partir del caso unidimensional para que no varíen sus características. No es más que un proceso de ensayo-error teniendo en cuenta los productos matriz-vector. Veamos un ejemplo para entender este concepto.

De [7] obtenemos el siguiente método escalar:

$$\begin{aligned} z_k &= x_k - \frac{2}{3} \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \\ x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2} \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \left( \frac{3F'(z_k) + F'(x_k)}{3F'(z_k) - F'(x_k)} \right). \end{aligned} \quad (2.4)$$

En el paso al caso multidimensional, debemos tener en cuenta que los cocientes no se pueden hacer de forma literal ya que trabajamos con  $F(x)$  que es un vector y  $F'$  que es la matriz jacobiana asociada al sistema que hemos comentado anteriormente. Lo que en una variable es:

$$\frac{F(x^{(k)})}{F'(x^{(k)})},$$

en el caso multidimensional se reescribe en la forma:

$$[F'(x^{(k)})]^{-1} \cdot F(x^{(k)}). \quad (2.5)$$

En el caso del método de Jarratt expuesto en (2.4), no podemos expresar los cocientes con la forma (2.5) en el orden que queramos. De hecho de [7] extraemos:

$$z^{(k)} = x^{(k)} - \frac{2}{3} [F'(x^{(k)})]^{-1} F[x^{(k)}], \quad (2.6)$$

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - \frac{1}{2} [3F'(z^{(k)}) - F'(x^{(k)})]^{-1} \cdot (3F'(z^{(k)}) - F'(x^{(k)})) [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \quad (2.7)$$

Aquí entra la parte de ensayo-error por parte del autor, ya que son necesarias diferentes pruebas hasta que obtenga el orden de convergencia esperado.

## 2.4. Orden de convergencia

---

En cálculo numérico, el orden de convergencia es la velocidad con la cual una sucesión converge a su límite. Es muy útil en el uso de métodos iterativos ya que nos hace ver rápidamente cual será la velocidad de nuestro método.

Sea  $\bar{x}$  un cero de la función  $F$  y  $x^{(k-2)}, x^{(k-1)}, x^{(k)}, x^{(k+1)}$  son cuatro estimaciones consecutivas de  $\bar{x}$ , de [1] extraemos una aproximación del orden de convergencia conocida como ACOC  $\rho$  (approximated computational order of convergence):

$$p \approx \rho = \frac{\ln(\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| / \|x^{(k)} - x^{(k-1)}\|)}{\ln(\|x^{(k)} - x^{(k-1)}\| / \|x^{(k-1)} - x^{(k-2)}\|)}. \quad (2.8)$$

### 2.4.1. Índice de eficiencia

---

A partir del orden de convergencia podemos definir varios indicadores que nos permiten medir la eficiencia de nuestro método. El primero es el **índice de eficiencia**,  $I$ , el cual extraemos de [2]:

$$I = p^{1/d}, \quad (2.9)$$

donde  $p$  es el orden de convergencia y  $d$  es el número de evaluaciones funcionales por iteración requeridas para cada iteración de nuestro método.

### 2.4.2. Índice operacional

---

La eficiencia de un método iterativo viene dada, no sólo por el índice de eficiencia, sino también por la complejidad de la fórmula iterativa. Esta complejidad la marca el **índice operacional**, definido como el orden elevado al inverso del número de productos y cocientes. En [4] se define como:

$$I_c = p^{1/op}, \quad (2.10)$$

donde  $op$  es el número de productos y cocientes.

### 2.4.3. Índice de eficiencia aproximado

---

Podemos dar un nuevo indicador para medir la eficiencia de nuestro método. Éste lo denotaremos como **índice de eficiencia aproximado** y comparte la misma estructura que el índice de eficiencia clásico pero sustituyendo el orden de conver-

gencia teórico  $p$  por el ACOC  $\rho$ .

$$\tilde{I} = \rho^{1/d}. \quad (2.11)$$

#### 2.4.4. Índice operacional aproximado

---

De forma análoga a lo que hemos explicado en el apartado anterior, podemos definir un nuevo indicador de la eficiencia operacional que denotaremos como **índice operacional aproximado**.

$$\tilde{I}_c = \rho^{1/op}. \quad (2.12)$$

### 2.5. Descripción de las órbitas bajo estudio

---

Para mostrar la eficiencia de los métodos que utilizaremos durante este trabajo, hemos extraído de [5] tres órbitas de referencia en las que aumenta progresivamente la separación entre observaciones. Utilizaremos las siguientes unidades:

- $k = 0.07436574 \text{ (e.r)}^{3/2}/\text{min}$
- $\mu = 1.0 \text{ e.m.}$
- $a_e = 1.0 \text{ e.r.}$

donde  $a_e$  es la distancia entre el centro de masas y el foco donde se sitúa, en este caso, la Tierra; **e.r.** es una unidad de distancia relativa al radio ecuatorial de la Tierra,  $1 \text{ e.r} \approx 6373.0024 \text{ km}$ ; **e.m.** es una unidad de la masa terrestre. También debemos mencionar que D.J. hace referencia a días julianos y  $t$  es la época de paso por el perigeo.

#### ☛ Órbita de referencia I

- **Vectores de posición e instante de observación**

$x_1 = 2.460809 \text{ e.r.}$	$x_2 = 1.988041 \text{ e.r.}$	$t = 1 \text{ Enero } 1964$
$y_1 = 2.040523 \text{ e.r.}$	$y_2 = 2.503334 \text{ e.r.}$	$\Delta t = 0.01044412 \text{ D.J.}$
$z_1 = 0.143819 \text{ e.r.}$	$z_2 = 0.314554 \text{ e.r.}$	

- **Parámetros orbitales**

$a = 4.0$ e.r.	$i = 15^\circ$
$e = 0.2$ e.r.	$\Omega = 30^\circ$
$T = 1$ Enero 1964 $0^{hr}, 0^{min}, 0^{seg}$	$\omega = 10^\circ$

- **Órbita de referencia III**

- **Vectores de posición e instante de observación**

$x_1 = 0.41136$ e.r.	$x_2 = 0.97757$ e.r.	$t = 23$ Diciembre 1963
$y_1 = -1.66250$ e.r.	$y_2 = -1.64428$ e.r.	$\Delta t = 0.01316924$ D.J.
$z_1 = 0.82272$ e.r.	$z_2 = -0.042363$ e.r.	

- **Parámetros orbitales**

$a = 2.0$ e.r.	$i = 60^\circ$
$e = 0.05$ e.r.	$\Omega = 120^\circ$
$T = 23$ Diciembre 1963 $0^{hr}, 0^{min}, 0^{seg}$	$\omega = 150^\circ$

- **Órbita de referencia VI**

- **Vectores de posición e instante de observación**

$x_1 = -2.57823$ e.r.	$x_2 = 3.49838$ e.r.	$t = 30$ Enero 1964
$y_1 = 2.13649$ e.r.	$y_2 = -2.94610$ e.r.	$\Delta t = 0.21227310$ D.J.
$z_1 = 0.59004$ e.r.	$z_2 = 0.23276$ e.r.	

- **Parámetros orbitales**

$a = 4.0$ e.r.	$i = 88^\circ$
$e = 0.15$ e.r.	$\Omega = 140^\circ$
$T = 30$ Enero 1964 $0^{hr}, 0^{min}, 0^{seg}$	$\omega = 10^\circ$

Además, introducimos dos órbitas de satélites artificiales comerciales definidas en [9], para probar los métodos en casos reales. En ambas escogemos dos posiciones de observación con una separación cercana a  $\pi$ .

### • Órbita Molniya

Este tipo de órbita da cobertura completa en regiones polares con el uso de constelaciones de 3 satélites. El 23 de Agosto de 1965 fue puesto en órbita el primer satélite, al que le pusieron el nombre de Molniya 1-01 y que fue lanzado por la antigua Unión Soviética, URSS. Como podemos ver en la Figura 2.1, la órbita Molniya posee una alta excentricidad,  $e = 0.75$ , lo que hace que proporcione mayor cobertura en zonas puntuales. Su periodo es medio día sidéreo. También puede llamar la atención el valor de su inclinación respecto al plano del Ecuador,  $i = 63.42^\circ$ , elegido para evitar en lo posible las perturbaciones de la esfericidad terrestre y reducir el gasto en combustible para hacer correcciones por este efecto.

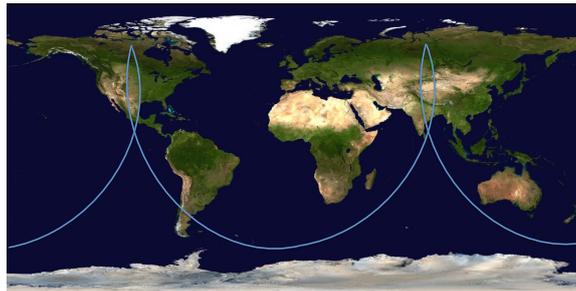


Figura 2.1. Representación aproximada de una órbita de tipo Molniya

### • Vectores de posición e instante de observación

$x_1 = 0.40195$ e.r.	$x_2 = -2.23654$ e.r.	$\Delta t = 0.196268$ D.J.
$y_1 = -0.22547$ e.r.	$y_2 = 2.36235$ e.r.	
$z_1 = -0.92113$ e.r.	$z_2 = 6.20863$ e.r.	

- **Parámetros orbitales**

$a = 4.12 \text{ e.r.}$	$i = 63.43^\circ$
$e = 0.75 \text{ e.r.}$	$\Omega = 60^\circ$
$M = 144^\circ$	$\omega = 270^\circ$

- **Órbita Tundra**

En sus inicios, el servicio de espionaje ruso utilizó este tipo de órbitas durante la Guerra Fría. En la actualidad se usa para las comunicaciones por satélite. Además guarda una gran relación con la órbita Molniya ya que tiene la misma inclinación respecto al Ecuador para evitar perturbaciones y está pensada para dar cobertura en zonas polares. Las grandes diferencias entre ambas residen en el valor de la excentricidad que es menor en ésta, por lo que Tundra define una trayectoria más circular y su periodo es el doble que el de la Molniya, es decir, un día sidéreo.



Figura 2.2. Representación aproximada de una órbita de tipo Tundra

- **Vectores de posición e instante de observación**

$x_1 = -2.02862 \text{ e.r.}$	$x_2 = 4.24372 \text{ e.r.}$	$\Delta t = 0.399753 \text{ D.J.}$
$y_1 = -0.74638 \text{ e.r.}$	$y_2 = -1.68938 \text{ e.r.}$	
$z_1 = -4.32222 \text{ e.r.}$	$z_2 = 6.79724 \text{ e.r.}$	

• **Parámetros orbitales**

$a = 6.62$ e.r.	$i = 63.43^\circ$
$e = 0.27$ e.r.	$\Omega = 290.2^\circ$
$M = 144^\circ$	$\omega = 270^\circ$

## 2.6. Criterio de parada

---

El criterio de parada que utilizaremos en nuestros métodos iterativos vendrá dado por:

$$\|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| + \|F(x^{(k+1)})\| < tol, \quad (2.13)$$

siendo  $tol$  una cierta tolerancia.

## 2.7. Desarrollo en serie de Taylor

---

Para demostrar el orden de convergencia de un método iterativo, haremos uso del desarrollo en serie de Taylor como veremos a continuación.

Sea  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  suficientemente diferenciable en  $D$ . La derivada  $q$ -ésima de  $F$  en  $u \in \mathbb{R}^n$ ,  $q \geq 1$ , es la función  $q$ -lineal  $F^{(q)}(u) : \mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  tal que  $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) \in \mathbb{R}^n$ . Es fácil observar que:

- $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_{q-1}, \cdot) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$
- $F^{(q)}(u)(v_{\sigma(1)}, \dots, v_{\sigma(q)}) = F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q)$ , para toda permutación  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, q\}$ .

A partir de las propiedades anteriores, podemos usar la siguiente notación:

- (a)  $F^{(q)}(u)(v_1, \dots, v_q) = F^{(q)}(u)v_1, \dots, v_q$
- (b)  $F^{(q)}(u)v^{q-1}F^{(p)}v^p = F^{(q)}(u)F^{(p)}(u)v^{q+p-1}$ .

Por otro lado, para  $\bar{x} + h \in \mathbb{R}$  cercano a la solución  $\bar{x}$  en  $F(x) = 0$ , podemos aplicar el desarrollo en serie de Taylor, asumiendo que la matriz Jacobiana  $F'(\bar{x})$  es no singular, de la siguiente forma:

$$F(\bar{x} + h) = F'(\bar{x}) \left[ h + \sum_{k=2}^{p-1} C_k h^k \right] + O(h^k), \quad (2.14)$$

donde  $C_k = (1/k!)[F'(\bar{x})]^{-1}F^{(k)}(\bar{x})$ ,  $k \geq 2$  Observamos que  $C_k h^k \in \mathbb{R}^n$  ya que  $F^{(q)}(\bar{x}) \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$  y  $[F'(\bar{x})]^{-1} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . Además, podemos

expresar  $F'$  como:

$$F'(\bar{x} + h) = F'(\bar{x}) \left[ I + \sum_{k=2}^{p-1} k C_k h^k \right] + O(h^k), \quad (2.15)$$

donde  $I$  es la matriz identidad. Además,  $k C_k h^k \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n)$ . De (2.15), obtenemos

$$[F'(\bar{x} + h)]^{-1} = \left\{ I + X_2 e^{(k)} + X_3 e^{(k)^2} + X_4 e^{(k)^3} + \dots \right\} [F'(\bar{x})]^{-1} + O(h^p), \quad (2.16)$$

donde

$$\begin{aligned} X_2 &= 2C_2, \\ X_3 &= 4C_2^2 - 3C_3, \\ X_4 &= 8C_2^3 - 6C_2C_3 - 6C_3C_2 + 4C_4, \\ &\vdots \end{aligned}$$

Denotamos  $e_k = x_k - \bar{x}$  y  $e^{(k)} = x^{(k)} - \bar{x}$  al error en la iteración  $k$ -ésima en los casos escalar y multidimensional, respectivamente. Las ecuaciones

$$e_{k+1} = M e_k^p + O(e_k^{p+1}) \quad (2.17)$$

y

$$e_{k+1} = L e^{(k)p} + O(e^{(k)p+1}) \quad (2.18)$$

donde  $M \in \mathbb{R}$  y  $L$  es una función  $p$ -lineal  $L \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n \times \dots \times \mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ , son conocidas como las *ecuaciones del error* siendo  $p$  el orden de convergencia. Obsérvese que  $e^{(k)p}$  es  $(e^{(k)}, e^{(k)}, \dots, e^{(k)})$ .

### 3.1. Introducción

---

Desde tiempos inmemoriales, la Astronomía siempre ha suscitado interés a lo largo de la historia de nuestro planeta. Ya en las primeras civilizaciones prehistóricas y medievales hicieron uso de ella, inconscientemente, para establecer las fechas de recogida y siembra de sus cosechas, así como las festividades de veneración a sus dioses. En la antigua Grecia filósofos como Aristocles Podros, más conocido como Platón, heredaron de los pitagóricos la idea de geometría perfecta planetaria y postularon el geocentrismo en el que la esfera hiperurániana, la luna, el sol y los planetas giraban alrededor de la Tierra en la disposición establecida por el Demiurgo. En el renacimiento, Nicolás Copérnico replanteó la teoría de Aristarco de Samos dando una visión heliocentrista de la disposición del sistema solar. Todo esto nos lleva a pensar que realmente siempre ha habido un cierto conocimiento de la mecánica celeste aunque no se le llamara como tal o no se hubieran citado todavía sus leyes y principios básicos.

Por tanto, es lícito preguntarse si realmente alguno de estos investigadores, filósofos o teólogos se había planteado cual era el motivo por el cual un cuerpo gira alrededor de otro. A este fenómeno físico que contempla la relación de fuerzas en ausencia de fuentes perturbadoras se le conoce como problema de dos cuerpos, cuya solución proporciona la posición de ambos. Es aplicable en múltiples ramas de la física. En la mecánica cuántica podemos determinar el movimiento descrito por un electrón alrededor de un núcleo atómico. En la mecánica celeste podemos determinar el movimiento de los satélites que giran alrededor de Júpiter o el de un satélite artificial orbitando alrededor de la Tierra.

La resolución del problema de dos cuerpos es compleja pero se reduce haciendo uso de las leyes de Newton. En nuestro caso de estudio que se centra en la caracterización de órbitas, debemos hacer uso también de las leyes de Kepler para obtener la trayectoria que siguen los cuerpos, es decir, la órbita que describen.

## 3.2. Descripción del problema

---

Sean  $m_1$  y  $m_2$  las masas de dos cuerpos aislados de perturbaciones externas, siendo  $\ddot{\vec{r}}_{m_1}$  y  $\ddot{\vec{r}}_{m_2}$  sus respectivas aceleraciones. En un sistema de referencia inercial (véase Figura 3.1), definimos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_{m_1} = \vec{F}_{12} \quad (3.1)$$

$$m_2 \ddot{\vec{r}}_{m_2} = \vec{F}_{21} \quad (3.2)$$

que describen la atracción mutua de ambos cuerpos.

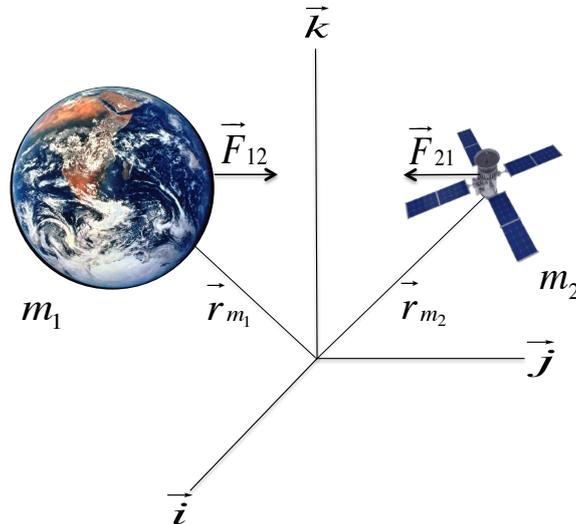


Figura 3.1. Diagrama de fuerzas de dos cuerpos sin perturbaciones externas

El objetivo es obtener las trayectorias de ambos cuerpos en cualquier instante. Sumando las ecuaciones (3.1) y (3.2), obtenemos:

$$m_1 \ddot{\vec{r}}_{m_1} + m_2 \ddot{\vec{r}}_{m_2} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{21} = 0 \quad (3.3)$$

Como podemos observar en (3.3) hemos aplicado la tercera Ley de Newton, también conocida como ley de acción-reacción

“Para toda acción hay siempre una reacción opuesta e igual. Las acciones recíprocas de dos cuerpos entre sí son siempre iguales y dirigidas hacia partes contrarias”. *Isaac Newton.*

Por tanto, se deduce que la aceleración del centro de masas es nula, es decir, el centro de masas de un sistema aislado se mueve con velocidad constante. De ello se concluye que la cantidad total de movimiento  $m_1v_1 + m_2v_2$ , siendo  $v_1$  y  $v_2$  la velocidad en cada cuerpo, también es constante. De esta forma, al cumplir la conservación de la cantidad de movimiento somos capaces de hallar la posición y velocidad del centro de masas en cualquier instante, conocidos sus valores en su posición inicial  $t = 0$ .

Si ahora restamos (3.1) y (3.2):

$$\ddot{\vec{r}}_{m_1} - \ddot{\vec{r}}_{m_2} = \vec{F}_{12} \left( \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right), \quad (3.4)$$

definimos el vector de posición de la masa  $m_1$  respecto a la masa  $m_2$  como

$$\vec{r} = \vec{r}_{m_1} - \vec{r}_{m_2}, \quad (3.5)$$

cuyo módulo viene dado por:

$$r = \sqrt{\vec{r} \cdot \vec{r}}.$$

De esta forma se define un nuevo sistema inercial centrado en  $m_1$  ya que podemos reescribir (3.4) como:

$$L \ddot{\vec{r}} = F(r), \quad (3.6)$$

siendo  $L$  una constante dependiente de las masas  $m_1$  y  $m_2$ . Particularizando para nuestro caso práctico, renombraremos a  $m_1$  como el cuerpo primario o el de mayor masa (siendo en nuestro caso la Tierra), que denotaremos como  $M$ . Al cuerpo secundario o satélite,  $m_2$ , lo denotaremos de ahora en adelante como  $m$ .

Aplicando las expresiones de la segunda ley de Newton y la ley de gravitación universal, combinadas con lo concluido en (3.5) y (3.6), tenemos:

$$\ddot{\vec{r}} = -G \frac{(M + m)}{r^3} \cdot \vec{r}, \quad (3.7)$$

siendo  $G$  la constante de gravitación universal dada por  $G = 6,67384 \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$ . A partir de (3.7) definimos el parámetro gravitacional estándar de la Tierra como  $\mu = G(M + m) \approx GM = 398598,309 \text{ km}^3/\text{s}^2$ .

Finalmente reescribimos (3.7) consiguiendo una ecuación diferencial que se conoce como **ecuación del movimiento relativo**:

$$\ddot{\vec{r}} + \frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} = 0 \quad (3.8)$$

La resolución de la ecuación del movimiento relativo la dió Karl Friedrich Gauss

a los 24 años en su publicación “*Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*”, de la cual se extraen las expresiones que resuelven finalmente el Problema de Dos Cuerpos. A continuación mostraremos algunos aspectos de dicha resolución.

### Integral de las áreas

---

Si multiplicamos vectorialmente la ecuación del movimiento relativo de la sección anterior por  $\vec{r}$  tenemos:

$$\vec{r} \times \ddot{\vec{r}} = 0,$$

es decir

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) = \dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} + \vec{r} \times \ddot{\vec{r}}. \quad (3.9)$$

Como el producto vectorial de un vector por si mismo es nulo, es decir,  $\dot{\vec{r}} \times \dot{\vec{r}} = 0$ , podemos decir que el argumento de la derivada de (3.9) debe ser constante del movimiento. Por lo que tenemos:

$$\frac{d\vec{h}}{dt} = 0 \quad (3.10)$$

donde  $\vec{h} = \vec{r} \times \dot{\vec{r}}$  es el **momento angular**. Si tomamos coordenadas polares  $(\rho, \theta)$  y sustituimos en la expresión del momento angular:

$$\vec{h} = \rho^2 \cdot \dot{\theta} \vec{k} \quad (3.11)$$

Finalmente, por la definición de diferencial de área tenemos que:

$$dA = \frac{||\vec{r} \times d\vec{r}||}{2} = \frac{1}{2} \cdot r^2 \cdot d\theta. \quad (3.12)$$

Concluimos que lo obtenido en (3.12) demuestra la **segunda ley de Kepler**:

“El radio vector que une un planeta y el Sol barre áreas iguales en tiempos iguales” *Johannes Kepler*.

Podemos finalizar diciendo que, por tanto, la velocidad areolar del secundario en su órbita se mantiene constante.

## Teorema de las fuerzas vivas

---

Multiplicando escalarmente la expresión del movimiento relativo dada en (3.8), con el vector velocidad  $\dot{\vec{r}} \equiv \vec{v}$ , tenemos:

$$\dot{\vec{r}} \cdot \ddot{\vec{r}} + \dot{\vec{r}} \cdot \frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \dot{\vec{v}} + \frac{\mu}{r^3} \cdot \vec{r} \cdot \dot{\vec{r}} = 0 \Leftrightarrow \vec{v} \cdot \vec{r} + \frac{\mu}{r^3} \cdot r \cdot \dot{r}.$$

Como

$$\frac{d}{dt} \left[ \frac{v^2}{2} \right] = v \cdot \dot{v} \quad (3.13)$$

y, por otro lado,

$$\frac{d}{dt} \left[ -\frac{\mu}{r} \right] = \frac{\mu}{r^2} \cdot \dot{r}. \quad (3.14)$$

Integrando y sumando las expresiones (3.13) y (3.14), obtenemos:

$$E_c = \frac{v^2}{2} - \frac{\mu}{r} + C \quad (3.15)$$

donde  $C$  es una constante de integración. De este modo, podemos afirmar que la energía mecánica  $E_c$  es conservativa.

### 3.2.1. Cálculo de la posición $\vec{r}$

---

Sea  $\vec{h}$  el **momento angular**, multiplicándolo vectorialmente con (3.8).

$$\ddot{\vec{r}} \times \vec{h} + \frac{\mu}{r^3} \cdot (\vec{h} \times \vec{r}) = 0.$$

Operando, podemos reescribir la expresión anterior como

$$\mu \frac{d}{dt} \left[ \frac{\vec{r}}{r} \right] = \frac{\mu}{r^3} \cdot (\vec{h} \times \vec{r}),$$

por lo que, reformulando:

$$\dot{\vec{r}} \times \vec{h} = \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{B}, \quad (3.16)$$

donde  $\vec{B}$  es una constante de integración. Multiplicando escalarmente (3.16) por la posición  $\vec{r}$ , tenemos:

$$\vec{r} \cdot (\dot{\vec{r}} \times \vec{h}) = \vec{r} \cdot \mu \frac{\vec{r}}{r} + \vec{r} \cdot \vec{B},$$

y operando de nuevo, obtenemos:

$$(\vec{r} \times \dot{\vec{r}}) \cdot \vec{h} = \mu \cdot \vec{r} + \vec{r} \cdot \vec{B},$$

$$h^2 = \mu \cdot r + r \cdot B \cdot \cos \nu,$$

$$r = \frac{\frac{h^2}{\mu}}{1 + \left(\frac{B}{\mu}\right) \cos \nu}. \quad (3.17)$$

Por lo tanto, si reescribimos la ecuación (3.17)

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \nu}, \quad (3.18)$$

tenemos la ecuación de una sección cónica como solución a la ecuación del movimiento relativo donde  $p = \frac{h^2}{\mu}$  y  $e = \frac{B}{\mu}$ , que son el **semi-latus rectum** y la **excentricidad**, respectivamente. En conclusión, sabemos que las únicas trayectorias posibles para resolver el Problema de Dos Cuerpos son las que siguen la ecuación de la cónica que hemos dado en (3.18). Por tanto, podemos concluir que la **primera ley de Kepler** que cita:

“Todos los planetas se desplazan alrededor del Sol describiendo órbitas elípticas. El Sol se encuentra en uno de los focos de la elipse.”

*Johannes Kepler.*

Es un resultado directo de la ley de gravitación universal y la segunda ley de Newton.

### 3.2.2. Cálculo de la velocidad $\vec{v}$

---

Partiendo de la expresión (3.16) y sustituyendo la constante  $\vec{B}$  por  $\vec{e} = \frac{\vec{B}}{\mu}$ , tenemos:

$$\vec{v} \times \vec{h} = \mu \left( \frac{\vec{r}}{r} + \vec{e} \right),$$

siendo  $\vec{e}$  el vector excentricidad. Multiplicando la expresión anterior por  $\vec{h}$  y despejando  $\vec{v}$ :

$$\vec{v} = \frac{1}{p} \cdot \vec{h} \times \frac{\vec{r}}{r} + \frac{1}{p} \cdot \vec{h} \times \vec{e}.$$

Por lo que podemos concluir que el Problema de Dos cuerpos está totalmente resuelto ya que conocemos la posición y la velocidad del satélite en cualquier instante.

### 3.3. Cálculo de efemérides

---

#### 3.3.1. Definición de los parámetros orbitales

---

De la resolución del Problema de Dos Cuerpos que proporcionó Gauss hemos concluido que seguía la ecuación de una sección cónica. A partir de este concepto, vamos a adoptar que la trayectoria descrita por la órbita es una elipse de excentricidad  $e$  y semieje mayor  $a$  ya que las órbitas parabólicas o hiperbólicas no son adecuadas para satélites artificiales, debido a que no son acotadas.

A partir de la Figura 3.2, consideramos la proyección en el plano de un satélite  $P$  que orbita alrededor de la Tierra, la cual se encuentra en el foco  $S$ . Tomamos la posición del punto Aries o vernal,  $\Upsilon$ , como la de referencia fundamental.

De esta figura podemos extraer parámetros básicos para determinar la posición del satélite dentro de la órbita.

$\nu \equiv$  Anomalía verdadera. Ángulo polar ASP que describe el desplazamiento del secundario por la elipse tomando como origen el perigeo  $A$  y centrado en el foco  $S$ .

$E \equiv$  Anomalía Excéntrica. Ángulo ACQ entre el apogeo  $A$  y la proyección  $Q$  de la posición  $P$  sobre una semicircunferencia de radio el semieje mayor de la órbita.

$b \equiv$  Semieje menor de la órbita dado por  $CB$  o  $CB'$ .

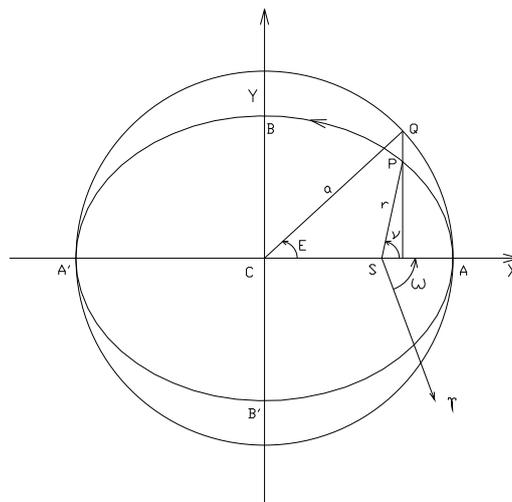


Figura 3.2. Órbita en el plano

Los **elementos orbitales** son aquellos que definió Kepler para parametrizar la órbita en cualquier instante. También son conocidos como **elementos Keplerianos**. A partir de las Figuras 3.2 y 3.3 obtenemos estos parámetros que terminan de caracterizar la órbita en el espacio.

$a$   $\equiv$  Semieje mayor de la órbita. Longitud del segmento  $CA$  o  $CA'$ .

$e$   $\equiv$  Excentricidad. Dada por la relación  $\frac{CS}{CA}$ .

$i$   $\equiv$  Inclinación. Orientación de la órbita respecto al plano del Ecuador.

$\omega$   $\equiv$  Argumento del perigeo. Describe la ubicación del perigeo en el plano orbital medida desde el punto vernal  $\Upsilon$ .

$\Omega$   $\equiv$  Ascensión recta del nodo ascendente. Define como está orientada la órbita del satélite respecto a la órbita de la Tierra.

$M$   $\equiv$  Anomalía Media. Fracción de un periodo que ha transcurrido desde el último paso por el perigeo expresado en forma angular.

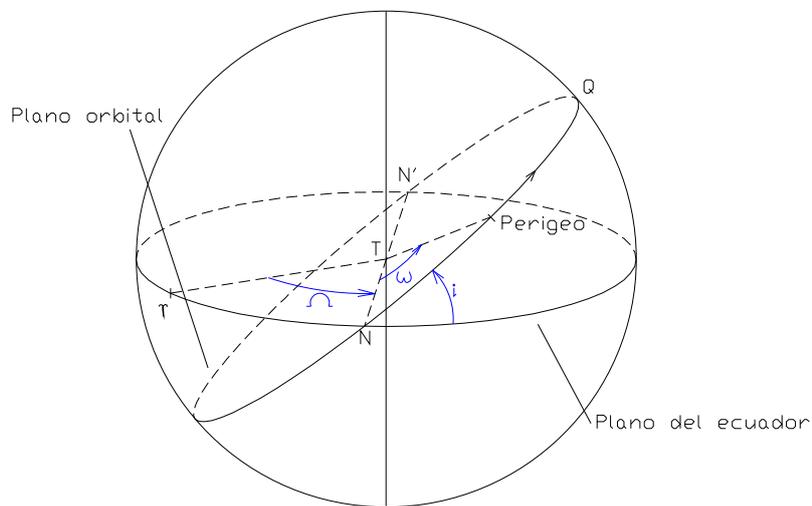


Figura 3.3. Órbita en el espacio

Por lo tanto, podemos reescribir (3.18)

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos(\theta - \omega)},$$

habiendo sustituido la expresión del semi-latus rectum por  $p = SQ = a(1 - e^2)$ , que extraemos de la Figura 3.2.

Debemos mencionar que para calcular la Anomalía Excéntrica,  $E$ , podemos hacer uso de la **ecuación de Kepler**, la cual relaciona la Anomalía Media y la Excéntrica de la siguiente manera:

$$M = E + \sin E, \quad (3.19)$$

o también podemos utilizar la relación entre la anomalía verdadera y la excéntrica del siguiente modo:

$$\tan\left(\frac{\nu}{2}\right) = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan\left(\frac{E}{2}\right). \quad (3.20)$$

Definimos el movimiento medio como la velocidad angular de un cuerpo dentro de su órbita suponiendo movimiento circular uniforme. Se expresa:

$$n = \frac{2\pi}{T},$$

siendo  $T$  el periodo orbital.

De la tercera ley de Kepler, obtenemos:

$$a = \frac{\mu}{\frac{2\mu}{r} - v^2},$$

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} = 2\pi \left( v^2 - \frac{2\mu}{r} \right).$$

Por otro lado, retomando el teorema de las fuerzas vivas (3.15), disponemos de la relación que guardan la geometría de la órbita y la energía mecánica:

$$e = \sqrt{1 + \frac{2E_c \cdot h^2}{\mu^2}}. \quad (3.21)$$

Sea  $\tau$  la época de paso por el perigeo, el ángulo de barrido o anomalía media  $M$  de un radio-vector al girar alrededor de la tierra con una determinada velocidad

angular, viene dado también por la siguiente expresión:

$$M = n(t - \tau). \quad (3.22)$$

Además, si llamamos  $\phi$  al ángulo que forman el vector velocidad y el radio-vector o vector de posición, obtenemos:

$$\sin \phi = \sqrt{\frac{a^2(1 - e^2)}{r(2a - r)}}. \quad (3.23)$$

Por lo que ya tenemos definidos todos los elementos de la órbita y podemos dar las expresiones de posición y velocidad en el plano orbital.

$$x = r \cos \nu = a \cdot (\cos E - e), \quad y = r \sin \nu = a \cdot \sin E \cdot \sqrt{1 - e^2};$$

$$\dot{x} = -\frac{n \cdot a \cdot \sin E}{1 - e \cdot \cos E}, \quad \dot{y} = -\frac{n \cdot a \cdot \sqrt{1 - e^2} \cdot \cos E}{1 - e \cdot \cos E}.$$

Cabe destacar que para definir la órbita en el espacio, trabajaremos con un sistema de coordenadas distinto al convencional **I, J, K**. Utilizaremos el sistema de coordenadas definido por el plano de la órbita con los vectores unitarios ortogonales **P, Q, W**. Realizando las rotaciones pertinentes al sistema de coordenadas cartesiano por medio de  $i, \Omega$  y  $\omega$ , tenemos el siguiente sistema:

$$\left. \begin{aligned} P_x &= \cos \omega \cos \Omega - \sin \omega \sin \Omega \cos i, \\ P_y &= \cos \omega \sin \Omega + \sin \omega \cos \Omega \cos i, \\ P_z &= \sin \omega \sin i. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} Q_x &= -\sin \omega \cos \Omega - \cos \omega \sin \Omega \cos i, \\ Q_y &= -\sin \omega \sin \Omega + \cos \omega \cos \Omega \cos i, \\ Q_z &= \cos \omega \sin i. \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} W_x &= \sin \Omega \sin i, \\ W_y &= -\cos \Omega \sin i, \\ W_z &= \cos i. \end{aligned} \right\}$$

con los siguientes rangos en cada uno de los elementos que definen el sistema:

$$\begin{aligned} 0 &\leq i \leq \pi, \\ 0 &\leq \Omega \leq 2\pi, \\ 0 &\leq \omega \leq 2\pi. \end{aligned}$$

En la siguiente figura veremos con claridad este cambio de coordenadas:

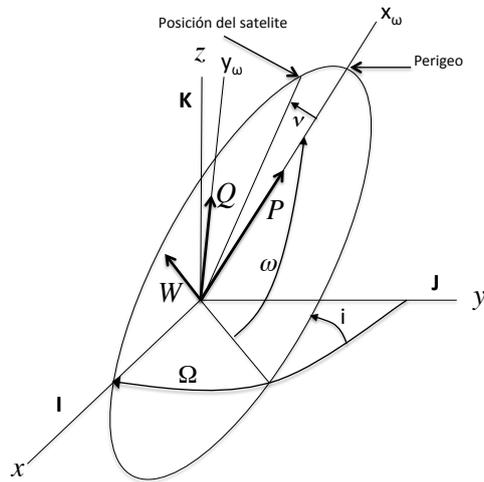


Figura 3.4. Representación sistema de coordenadas definido por plano orbital

## 4

## Determinación preliminar de órbitas con el método Gaussiano.

### 4.1. Contexto histórico. Gauss y la Astronomía

---

Cuando leemos sobre la vida y creencias a finales del siglo XVIII, comprobamos que la palabra de los filósofos de la Grecia clásica tenía mayor peso que la de los propios matemáticos de la época. Tiene sentido ya que las herramientas matemáticas que poseían los científicos por aquel entonces para demostrar sus teorías eran realmente complejas. Por lo que la gran mayoría de matemáticos continuaba con la mecánica celeste descubierta hasta el momento, sujeta a la teoría de los siete planetas perfectos y únicos, que defendieron grandes pensadores como Georg Hegel en su *“Disertación filosófica sobre las órbitas de los planetas”*. Con lo que no contaban filósofos como Hegel era que empezaba a aparecer un movimiento de disconformidad entre los matemáticos y físicos que dominaban con soltura las distintas ramas científicas. Entre ellos destaca Carl Friedrich Gauss, al que le criticaron severamente su libro *“Disquisitiones Arithmeticae”* que escribió con tan solo 21 años, en el que dudaba de la fiabilidad de teorías como la de la geometría Euclídea y en el que definió leyes que siguen vigentes como la de los mínimos cuadrados o la de los errores de observación.



Karl F. Gauss (1777-1855)

Gauss dominaba a la perfección ramas de la Matemática clásica como, por ejemplo, la Aritmética de la que hizo especial uso para la publicación de su segundo libro “*Theoria Motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*”. En éste, Gauss resolvió el problema de dos cuerpos haciendo uso de secciones cónicas utilizando las observaciones proporcionadas por el astrónomo italiano Giuseppe Piazzi, el cual también fue duramente criticado por huir de la idea de perfección del número siete. Piazzi descubrió la órbita que describe el planeta menor Ceres a partir de sus observaciones, las cuales Gauss no desaprovechó y vio una oportunidad para aplicar lo que describió en su primera publicación para, finalmente, demostrar la veracidad de sus aportaciones. Tras su publicación, los astrónomos hicieron uso de sus cálculos obteniendo resultados muy satisfactorios ya que sirvieron para descubrir asteroides como Pallas, Vesta o Juno.

## 4.2. Método de determinación de órbitas a partir de dos posiciones y su separación temporal

---

El estudio preliminar de determinación de órbitas que aportó Gauss tras la resolución del problema de dos cuerpos a través de secciones cónicas, parte del conocimiento de dos posiciones del cuerpo dentro de la órbita que describe. En nuestro caso particularizaremos para un satélite artificial. Estas posiciones dentro de la órbita las denotaremos como  $\vec{r}_1$  y  $\vec{r}_2$ , particularizadas en dos instantes de tiempo  $t_1$  y  $t_2$  respectivamente, asumiendo que  $t_2 > t_1$ . Una descripción completa de dicho método la podemos encontrar en [5]. No vamos a detallar el procedimiento pero mostraremos las ecuaciones necesarias para llevar a cabo nuestro estudio. Por lo tanto, vamos a dar las tres ecuaciones con las que trabajaremos para obtener la velocidad del satélite en un punto de la órbita.

- Relación sector-triángulo.

$$y = \frac{\sqrt{\mu\rho} \cdot \tau}{r_2 r_1 \sin(\nu_2 - \nu_1)} = \frac{\sqrt{\mu\tau}}{2\sqrt{a}\sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}. \quad (4.1)$$

- Primera Ecuación de Gauss.

$$y^2 = \frac{m}{l + x}. \quad (4.2)$$

- Segunda ecuación de Gauss.

$$y^2(y - 1) = mX, \quad (4.3)$$

donde

- $y$  es la relación sector-triángulo o también se conoce como **parámetro de Gauss**.
- $\rho$  es el **semi-latus rectum**.
- $\nu_2 - \nu_1$  es la **diferencia de anomalías verdaderas** de las dos posiciones de observación.
- $\tau$  es la **diferencia de instantes de observación** que definiremos con mayor detalle más adelante.

Además, Gauss identificó cuatro parámetros para trabajar de forma más sencilla con las expresiones, tanto en la primera como en la segunda ecuación, facilitando la construcción del algoritmo a partir del cual se obtiene la velocidad del satélite. Teniendo en cuenta que  $r_1 = \sqrt{\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_1}$  y  $r_2 = \sqrt{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_2}$ , los parámetros de la primera ecuación son:

$$(a) \quad l = \frac{r_1 + r_2}{4 \sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}\right)} - \frac{1}{2}, \quad (4.4)$$

$$(b) \quad m = \frac{\mu \tau^2}{\left[2 \sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}\right)\right]^3}, \quad (4.5)$$

$$(c) \quad x = \frac{1}{2} \left[1 - \cos\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)\right] \quad (4.6)$$

y en la segunda ecuación de Gauss definimos el término:

$$(d) \quad X = \frac{E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)}{\sin^3\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)}. \quad (4.7)$$

Nótese que en (4.4) y en (4.5) existe una singularidad cuando la diferencia de anomalías verdaderas toma el valor de  $\pi$ .

### 4.3. El vector velocidad $\vec{v}$

---

Definimos la **ecuación unificada** como una combinación de (4.2) y (4.3), llegando a la siguiente expresión:

$$y = 1 + X(l + x) . \quad (4.8)$$

La expresión de la ecuación unificada hace que reduzcamos el problema a una variable, como se hizo en la primera formulación del algoritmo. Por ello, a partir de (4.2) definimos:

$$x = \frac{m}{y^2} - l. \quad (4.9)$$

A partir de (4.6) podemos obtener la anomalía excéntrica fijando completamente su cuadrante de la siguiente forma:

$$\cos\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) = 1 - 2x \quad (4.10)$$

y teniendo en cuenta que la anomalía excéntrica está definida en el intervalo  $0 \leq (E_2 - E_1)/2 \leq \pi$ , tenemos:

$$\sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right) = +\sqrt{4x(1-x)}. \quad (4.11)$$

Por lo tanto, una vez obtenido el parámetro de Gauss y la anomalía excéntrica, podemos obtener el semieje mayor de la elipse como consecuencia de (4.1) de tal forma que:

$$a = \frac{\tau^2 \mu}{\left\{2y\sqrt{r_2 r_1} \cos\left(\frac{\nu_2 - \nu_1}{2}\right) \sin\left(\frac{E_2 - E_1}{2}\right)\right\}^2}. \quad (4.12)$$

Utilizando la forma cerrada de las series  $f$  y  $g$ , desarrolladas en [5], que se definen como:

$$f = 1 - \frac{a}{r_1} [1 - \cos(E_2 - E_1)], \quad (4.13)$$

y

$$g = \tau - \frac{a^{3/2}}{\sqrt{\mu}} [E_2 - E_1 - \sin(E_2 - E_1)], \quad (4.14)$$

podemos dar finalmente la expresión de la velocidad ya que:

$$\vec{r}_2 = f\vec{r}_1 + g\dot{\vec{r}}_1 \quad (4.15)$$

y por lo tanto

$$\vec{v}_1 = \dot{\vec{r}}_1 = \frac{\vec{r}_2 - f\vec{r}_1}{g}. \quad (4.16)$$

## 4.4. Algoritmo computacional para la obtención de la velocidad. Trabajando con Punto Fijo.

---

El primer método iterativo empleado para la resolución del problema de la determinación orbital preliminar fue punto fijo. Vamos a presentar la primera resolución en la que se utilizó únicamente una variable, que en este caso fue el parámetro de Gauss  $y$ .

1. A partir de los instantes de observación  $t_1$  y  $t_2$ , definimos  $\tau = k(t_2 - t_1)$ , siendo  $k = 0,07436574$  (e.r)<sup>3/2</sup>/min, en la Tierra.
2. Dados los vectores de posición  $\vec{r}_1(x_1, y_1, z_1)$  y  $\vec{r}_2(x_2, y_2, z_2)$ , obtenemos sus módulos  $r_1 = \sqrt{\vec{r}_1 \vec{r}_1}$  y  $r_2 = \sqrt{\vec{r}_2 \vec{r}_2}$ .
3. Calculamos  $\cos(\nu_2 - \nu_1) = \frac{\vec{r}_2 \cdot \vec{r}_1}{r_2 r_1}$ .
4. Para definir correctamente el cuadrante de la diferencia de anomalías verdaderas tenemos:

- Si  $W_z \geq 0$ , es decir, si el movimiento es directo o **prógrado**:

$$\sin(\nu_2 - \nu_1) = \frac{x_1 x_2 - x_2 y_1}{|x_1 y_2 - x_2 y_1|} \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\nu_2 - \nu_1)}.$$

- Si por el contrario el movimiento es **retrógrado**:

$$\sin(\nu_2 - \nu_1) = -\frac{x_1 x_2 - x_2 y_1}{|x_1 y_2 - x_2 y_1|} \cdot \sqrt{1 - \cos^2(\nu_2 - \nu_1)}.$$

5. Calculamos  $l$  y  $m$  de (4.4) y (4.5), respectivamente.
6. Aplicamos Punto Fijo:
  - a) Damos estimación inicial de  $y_0 = 1$ .
  - b) Calculamos  $x$  a partir de (4.9).
  - c) Obtenemos la diferencia de anomalías excéntricas de (4.10) y (4.11).
  - d) Adquirimos el valor de  $X$  de la ecuación (4.7).
  - e) Calculamos  $y_{k+1}$  con la ecuación unificada (4.8).
  - f) Si  $|y_{k+1} - y_k| > tol$ , siendo  $tol$  la tolerancia, volvemos al paso b).
7. Obtenemos el semieje mayor  $a$  a partir de (4.12).
8. Evaluamos las series cerradas  $f$  y  $g$  con (4.13) y (4.14).
9. Finalmente, calculamos la velocidad  $\vec{v}$  haciendo uso de (4.16)

A continuación, en la Figura 4.1, presentamos el flujograma del algoritmo que acabamos de describir.

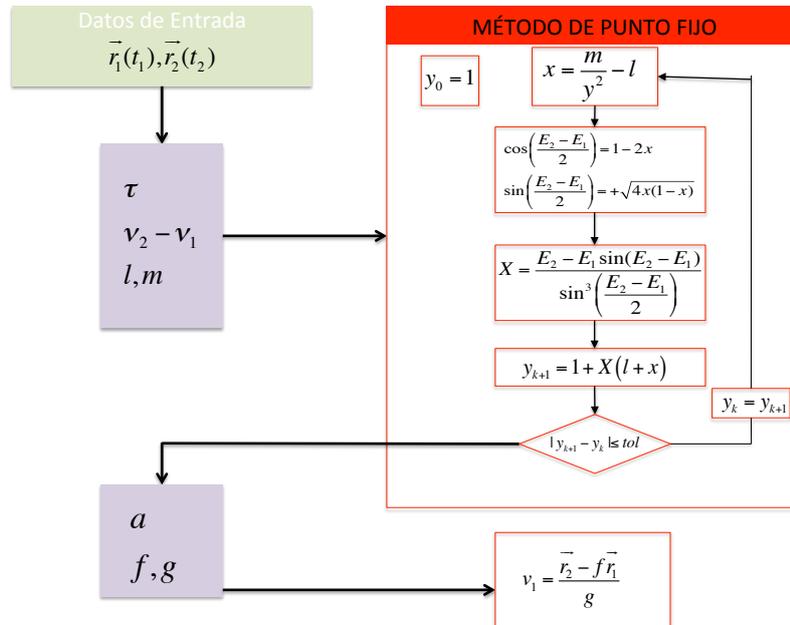


Figura 4.1. Diagrama de Flujo para obtención de la velocidad con Punto Fijo.

De [5] extraemos una de las debilidades de trabajar con la determinación preliminar de órbitas Gaussiana iterando sobre el parámetro de Gauss, la cual consiste en que no podemos tomar posiciones de observación mayores a  $\pi/4$  ya que el método diverge. Esto es debido a que la relación sector-triángulo  $y$ , explicada con mayor detalle en [5], se aleja de la unidad ya que el área del sector empieza a no ser comparable a la del triángulo. Al trabajar únicamente con la ecuación unificada y una condición inicial muy estricta, el método sufre de inestabilidad. En la Figura 4.2, podemos observar que el área del sector  $\widehat{ABC}$  no es comparable al área del triángulo  $\widehat{ABC}$ .

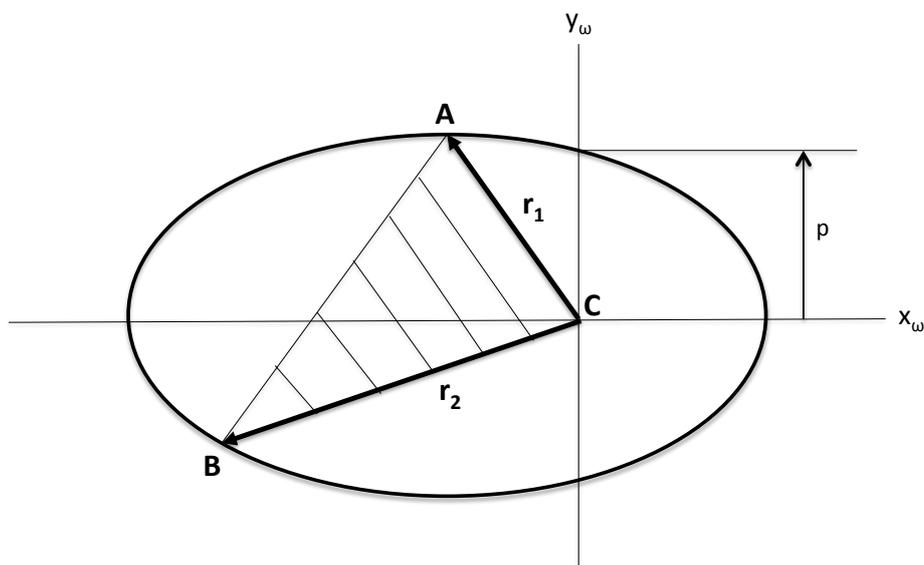


Figura 4.2. Relación sector-triángulo con  $\nu_2 - \nu_1 > \pi/4$

#### 4.5. Obtención de los parámetros keplerianos a partir de los vectores posición $\vec{r}$ y velocidad $\vec{v}$

Una vez tenemos calculada la velocidad en una de las posiciones de observación dadas, ya podemos calcular los elementos orbitales.

Previamente al cálculo de los elementos keplerianos, vamos a definir una serie de parámetros que nos servirán para simplificar los posteriores cálculos:

- Expresamos el módulo del vector velocidad como  $V = \sqrt{\dot{\vec{r}} \cdot \dot{\vec{r}}}$
- Definimos el coseno del ángulo que forman el vector de posición y el vector velocidad como:

$$\cos \phi = \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{r \cdot V}. \quad (4.17)$$

- Las componentes del momento angular  $\vec{h}$  pueden expresarse como:

$$\left. \begin{aligned} h_x &= y\dot{z} - z\dot{y}, \\ h_y &= z\dot{x} - x\dot{z}, \\ h_z &= x\dot{y} - y\dot{x}. \end{aligned} \right\} \quad (4.18)$$

#### 4.5.1. Cálculo del semieje mayor $a$ y la excentricidad $e$

---

Recordando que  $\mu$  es el parámetro gravitacional estándar de la tierra, calculamos el **semieje mayor de la órbita** con la siguiente fórmula:

$$a = \frac{1}{\frac{2}{r} - \frac{V^2}{\mu}}. \quad (4.19)$$

Con este cálculo podemos definir la **excentricidad** a partir de:

$$e = \sqrt{\left(1 - \frac{r}{a}\right)^2 + \frac{\vec{r} \cdot \dot{\vec{r}}}{\sqrt{\mu a}}}. \quad (4.20)$$

#### 4.5.2. Obtención de la inclinación $i$

---

La expresión del coseno de la **inclinación de la órbita** respecto al plano del ecuador,  $i$ , la obtenemos al combinar la componente  $W_z$  y la expresión del momento angular que hemos dado en (4.18). De esta forma,

$$\cos i = \frac{x\dot{y} - y\dot{x}}{\sqrt{\mu a(1 - e^2)}}, \quad (4.21)$$

pudiendo calcular el momento angular a partir de  $\vec{W}$

$$\left. \begin{aligned} h_x &= h \sin \Omega \sin i, \\ h_y &= -h \cos \Omega \sin i, \\ h_z &= h \cos i. \end{aligned} \right\} \quad (4.22)$$

Podemos utilizar (4.22) para definir correctamente el cuadrante al que pertenece.

### 4.5.3. Cálculo de la ascensión recta del nodo ascendente $\Omega$ y del argumento del perigeo $\omega$

---

Dividiendo las componentes  $h_x$  y  $h_y$  del momento angular, definimos la tangente de la **ascensión recta del nodo ascendente** como:

$$\tan \Omega = -\frac{y\dot{z} - z\dot{y}}{z\dot{x} - x\dot{z}}. \quad (4.23)$$

Para eliminar la indeterminación de signo que nos introduce la tangente, podemos combinar (4.22) y (4.23) para calcular la tangente en  $\Omega$  y  $\Omega + \pi$  y determinar finalmente el cuadrante.

Para calcular el **argumento del perigeo** partimos de la componente  $z$  de la posición del satélite dada por:

$$z = r \sin(\omega + \nu) \sin i,$$

siendo  $\nu$  la anomalía verdadera del vector de posición. Por tanto, la expresión será:

$$\sin(\omega + \nu) = \frac{z}{r \sin i}. \quad (4.24)$$

Como caso particular de la expresión (4.24) tenemos dos singularidades en  $i = 0$  y en  $i = \pi$ , en ambos casos utilizaremos la siguiente expresión:

$$\sin(\omega + \nu) = \frac{y \cos \Omega - x \sin \Omega}{r}. \quad (4.25)$$

De forma análoga a (4.25),

$$\cos(\omega + \nu) = \frac{x \cos \Omega + y \sin \Omega}{r}.$$

### 4.5.4. Cálculo de la anomalía media $M$

---

Calculamos el movimiento medio:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}.$$

Definimos el parámetro

$$A = \frac{e}{1 + \sqrt{1 - e^2}},$$

y de esta forma podemos calcular la anomalía excéntrica a partir de la verdadera:

$$\tan\left(\frac{\nu - E}{2}\right) = \frac{A \sin \nu}{1 + A \cos \nu}. \quad (4.26)$$

Finalmente, utilizando la ecuación de Kepler podemos calcular la anomalía media:

$$M = E - e \sin E. \quad (4.27)$$

## 4.6. Determinación preliminar de órbitas con Newton-Raphson. Método Danchick

Hasta ahora, hemos estudiado el método de determinación preliminar de órbitas que aportó Gauss, el cual hace uso de punto fijo para la resolución del algoritmo. Como hemos visto, éste presenta un gran inconveniente ya que tenemos una limitación en cuanto a la diferencia de anomalías verdaderas (es decir, entre los instantes de observación) que no puede ser superior a  $\pi/4$ .

El método de determinación de órbitas con el que vamos a empezar nuestro estudio es el que proporcionó en [6] Roy Danchick ya que da un paso más en el estudio preliminar de determinación de órbitas que facilitó Gauss. En el siguiente flujograma expuesto en la Figura 6.2, vemos el proceso que sigue R. Danchick para la obtención de la velocidad.

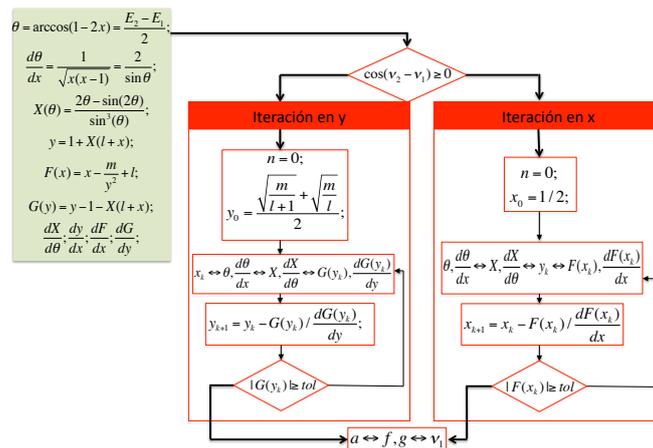


Figura 4.3. Diagrama de Flujo del método de R.Danchick

Del flujograma anterior observamos que utiliza el método de Newton para la obtención de los parámetros haciendo una distinción según sea el valor de la diferencia de anomalías verdaderas. En la iteración en  $x$ , hace uso de la primera ecuación de Gauss:

$$F(x) = x - \frac{m}{y^2} + l, \quad (4.28)$$

obteniendo por Newton el nuevo estimado:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{F(x_k)}{\frac{dF}{dx}(x_k)}. \quad (4.29)$$

Y en la iteración en  $y$ , hace uso de la ecuación unificada para definir  $G$ :

$$G(y) = y - 1 - X(l + x). \quad (4.30)$$

Aplicando nuevamente Newton, obtenemos la siguiente expresión iterativa:

$$y_{k+1} = y_k - \frac{G(y_k)}{\frac{dG}{dy}(y_k)}. \quad (4.31)$$

Con este nuevo método de determinación de órbitas conseguimos, según el autor:

- Aumentar la diferencia de anomalías verdaderas hasta valores cercanos a  $\pi$ .
- Estimación inicial generalizada con cualesquiera que sean los datos de entrada. Para la iteración en  $x$  toma  $x_0 = \frac{1}{2}$  y para la iteración en  $y$  la estimación inicial es el valor medio de la primera ecuación de Gauss en  $x = 0$  y en  $x = 1$ , siendo:

$$y_0 = \frac{\sqrt{\frac{m}{l}} + \sqrt{\frac{m}{l+1}}}{2}. \quad (4.32)$$

- Orden de convergencia mayor que utilizando punto fijo. Aumenta de lineal a cuadrático.
- Número máximo de iteraciones igual a 8 con una tolerancia de  $5 \times 10^{-11}$ .

#### 4.6.1. Primer estudio. Nuevo método de determinación preliminar de órbitas. Iteración en $X$

---

Como alternativa al método de Danckwerts en el que se consigue ampliar la diferencia de anomalías verdaderas a valores cercanos a  $\pi$ , decidimos iterar sobre otra de las variables dadas en las ecuaciones de Gauss para comprobar si podíamos conseguir un método de determinación preliminar de órbitas que:

- Aumente la diferencia de anomalías verdaderas a valores mayores a  $\pi$ .

- No haga uso de sistemas con más de una variable para mantener las buenas condiciones de estabilidad.
- Sea óptimo y eficiente en cuanto a número de operaciones y orden de convergencia.
- No sea tan restrictivo en la elección de la estimación inicial como pasa en el método de Gauss original.

Decidimos iterar sobre la única variable disponible,  $X$ , tomando la idea de Dan-chick, es decir, trabajando sobre las dos ecuaciones de Gauss aplicando Newton-Raphson.

Reescribiendo las ecuaciones de Gauss en función de  $X$  nos cercioramos de que definiendo  $y$  a partir de la segunda ecuación

$$y^3 + y^2 - mX = 0,$$

tenemos que tener en cuenta las raíces del polinomio de grado 3:

$$y_1(X) = \frac{1}{3} + \frac{2^{1/3}}{3 \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}} + \frac{\left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}}{3 \times 2^{1/3}}, \quad (4.33)$$

$$y_2(X) = \frac{1}{3} - \frac{1 + i\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2/3} \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}} - \frac{(1 - i\sqrt{3}) \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}}{6 \times 2^{1/3}}, \quad (4.34)$$

$$y_3(X) = \frac{1}{3} - \frac{1 - i\sqrt{3}}{3 \cdot 2^{2/3} \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}} - \frac{(1 + i\sqrt{3}) \left(2 + 27mX + \sqrt{-4 + (2 + 27mX)^2}\right)^{1/3}}{6 \times 2^{1/3}}. \quad (4.35)$$

Es muy importante tener esto en cuenta ya que si las raíces son imaginarias para valores concretos de  $X$ , esta solución no sería válida ya que los valores de todas los parámetros deben ser reales y positivos.

Los sucesivos pasos del algoritmo vendrían dados por las siguientes ecuaciones:

a) A partir de la primera ecuación de Gauss,  $x = \frac{m}{y^2} - l$ .

b) Reescribimos  $\tan \theta = \frac{1 - 2x}{\sqrt{4x(1 - x)}}$ .

c) Ahora tenemos  $F(X) = X - \frac{2\theta - \sin(2\theta)}{\sin^3 \theta}$ .

Dados los problemas de convergencia que pueden surgir al calcular  $y$  en función de  $X$ , hicimos un estudio previo. Fijándonos en la ecuación definida en el paso b), un valor de  $x < 0$  nos proporcionaría un valor de  $\theta$  imaginaria puro, lo que no tiene interés práctico. Para estudiar la convergencia del nuevo método, decidimos hacer uso de la órbita de referencia I extraída de [5] para hacer un primer estudio del comportamiento del método con valores de diferencia de anomalías verdaderas pequeños ya que, en este caso,  $\nu_2 - \nu_1 \ll \pi/4$ .

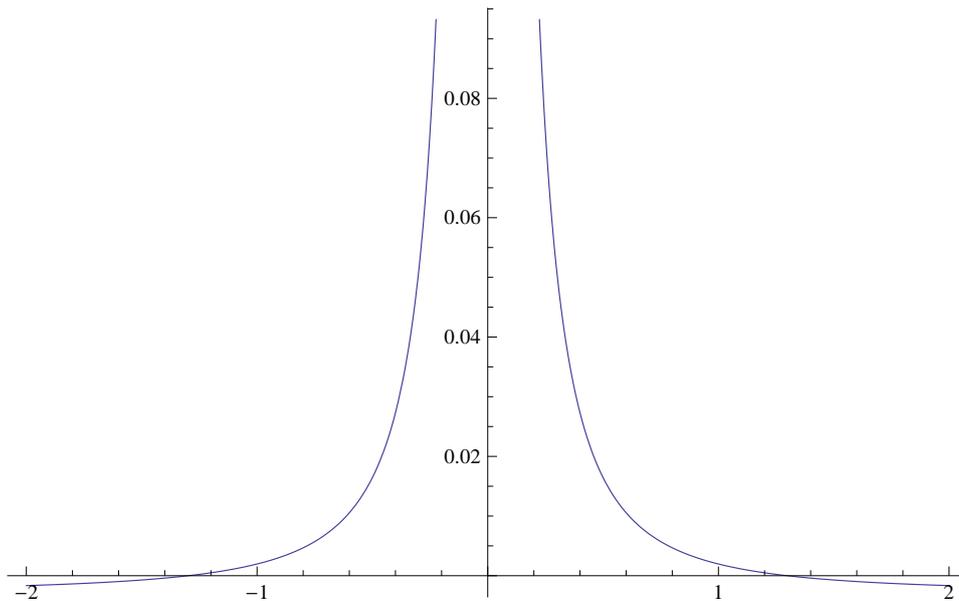


Figura 4.4. Gráfica de  $x$  en función de  $y$

De la Figura 4.4 extraemos que para que  $x$  e  $y$  sean positivas, el parámetro de Gauss debe oscilar entre  $1 < y < 1,29$ . Después de esta primera conclusión, representamos las funciones de las tres raíces del polinomio cúbico en  $y$  en función de  $X$  para ver sus restricciones.

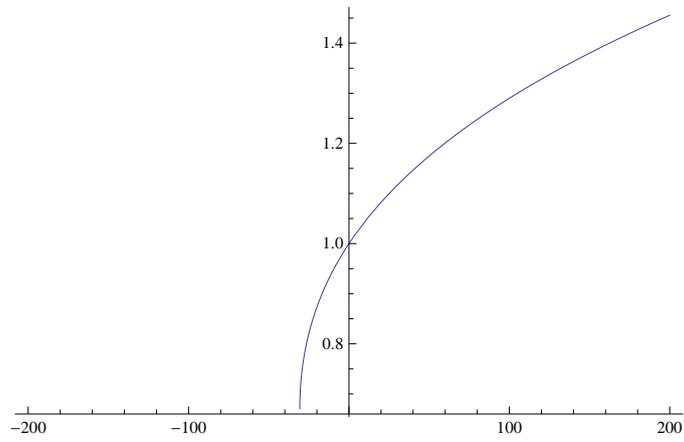


Figura 4.5. Primera raíz de  $y$  en función de  $X$

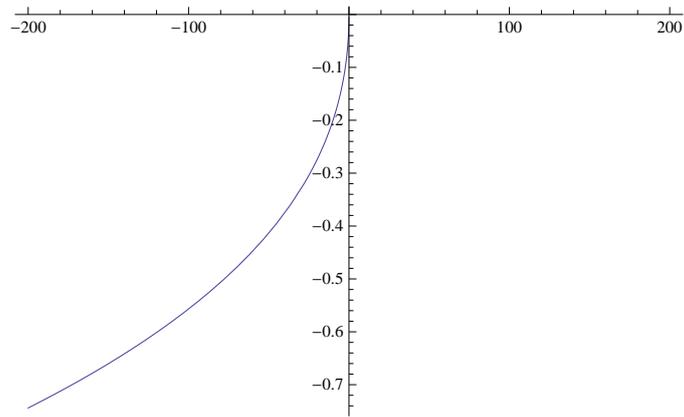


Figura 4.6. Segunda raíz de  $y$  en función de  $X$

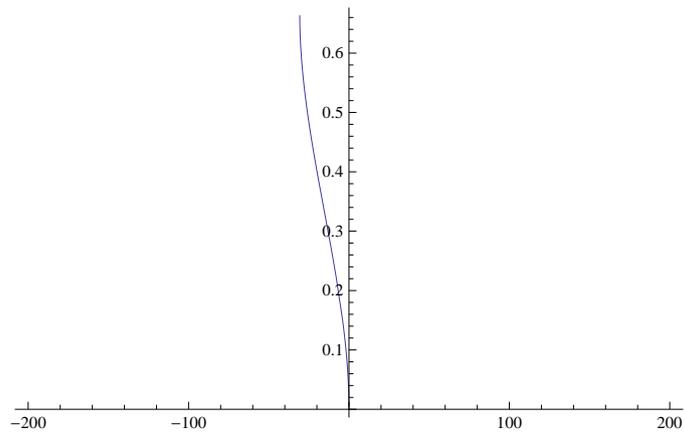


Figura 4.7. Tercera raíz de  $y$  en función de  $X$

Por lo tanto, observando las figuras que acabamos de representar debemos encontrar un intervalo para  $X$  que tenga las tres posibles raíces reales y positivas. Por lo que añadiendo las restricciones que tenemos en  $y$  que hemos comentado anteriormente, sólo nos es válida la Figura 4.5 restringiendo a  $X$  a estar dentro del intervalo  $0 < X < 100$ . Teniendo en cuenta estas restricciones, debemos ver en que valores conseguimos  $F(X) = 0$  para que nuestro nuevo método tenga solución. En la Figura 4.8 vemos rápidamente que la función es creciente, es decir, no podemos obtener las condiciones necesarias para que tengamos solución real y positiva con este método. Por lo que concluimos que el método iterativo  $X$  diverge.

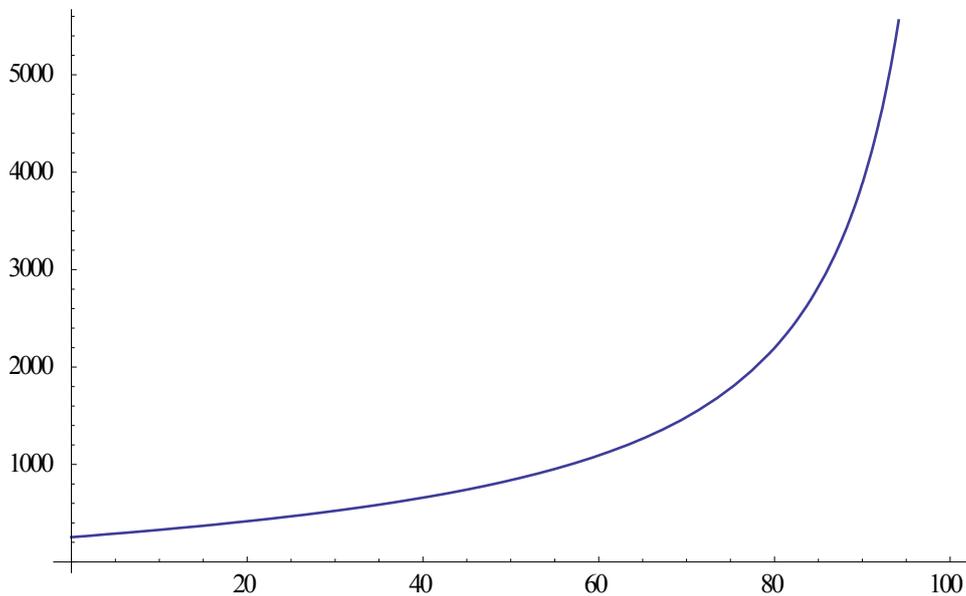


Figura 4.8. Gráfica de  $F(X)$

Por tanto, a partir de este punto nos podemos plantear mejorar partiendo de un método de determinación preliminar de órbitas como el de Danchick y utilizar métodos de orden superior que sustituyan al de Newton-Raphson o decidimos por la resolución de sistemas de ecuaciones partiendo del método de determinación preliminar de órbitas que proporcionó Gauss, que es finalmente la decisión que hemos adoptado y que a continuación vamos a desarrollar.

## 5 Métodos de determinación de órbitas con sistemas de ecuaciones.

### 5.1. Métodos para sistemas de ecuaciones no lineales

#### 5.1.1. El método de Gauss con 2 variables

Como se establece en la Sección 4.4, el primer método que se utilizó para la determinación de la velocidad a partir de la determinación preliminar de órbitas que facilitó Gauss fue punto fijo, iterando sobre el parámetro de Gauss  $y$ . Como alternativa para aumentar el rango máximo de separación de los instantes de observación y el orden de convergencia, podemos utilizar el método de Newton-Raphson iterando sobre dos variables. A partir de las ecuaciones de Gauss definimos las siguientes ecuaciones de punto fijo:

$$\begin{aligned} y_{k+1} &= y_k^2 - \frac{m}{l + \sin^2\left(\frac{dE_k}{4}\right)}, \\ dE_{k+1} &= y_k^2 (y_k - 1) - m \frac{dE_k - \sin dE_k}{\sin^3\left(\frac{dE_k}{2}\right)}, \end{aligned} \quad (5.1)$$

siendo  $dE_k = (E_2 - E_1)_k$ , la diferencia de anomalías excéntricas en la iteración  $k$ -ésima.

Por tanto, si denotamos por  $x^{(k)}$  el vector columna siguiente

$$x^{(k)} = \begin{pmatrix} y_k \\ dE_k \end{pmatrix},$$

aplicando el método de Newton-Raphson, tendremos:

$$x^{(k+1)} = x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}). \quad (5.2)$$

donde  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  es una función vectorial, cuyas funciones coordenadas son las ecuaciones (5.1). Cuando en secciones posteriores nos refiramos a este método lo denotaremos como **SNR**.

## 5.2. Métodos de orden superior. Traub y Jarratt

---

El método de Newton-Raphson que hemos expresado en (5.2) tiene orden de convergencia cuadrático bajo ciertas condiciones. Para mejorar la eficiencia podemos hacer uso de métodos de orden superior como son los métodos de Traub [8] y Jarratt [7].

### *Método de Traub (STR)*

Para una variable, el método de Traub es un esquema de 2 pasos, con expresión iterativa

$$\begin{aligned}y_k &= x_k - \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \\x_{k+1} &= y_k - \frac{F(y_k)}{F'(x_k)},\end{aligned}\tag{5.3}$$

y si lo generalizamos para más de una variable, nos queda:

$$\begin{aligned}y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}), \\x^{(k+1)} &= y^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1}F(y^{(k)}).\end{aligned}\tag{5.4}$$

### *Método de Jarratt (SJ)*

Recordando (2.4), el método de Jarratt para ecuaciones de una variable viene dado por:

$$\begin{aligned}z_k &= x_k - \frac{2}{3} \frac{F(x_k)}{F'(x_k)}, \\x_{k+1} &= x_k - \frac{1}{2} \frac{F(x_k)}{F'(x_k)} \left( \frac{3F'(z_k) + F'(x_k)}{3F'(z_k) - F'(x_k)} \right),\end{aligned}\tag{5.5}$$

y reescribiendo (5.5) para  $n$  variables tenemos:

$$\begin{aligned}z^{(k)} &= x^{(k)} - \frac{2}{3} [F'(x^{(k)})]^{-1}F[x^{(k)}], \\x^{(k+1)} &= x^{(k)} - \frac{1}{2} [3F'(z^{(k)}) - F'(x^{(k)})]^{-1} \cdot (3F'(z^{(k)}) - F'(x^{(k)})) [F'(x^{(k)})]^{-1}F(x^{(k)}).\end{aligned}\tag{5.6}$$

## 5.3. Nueva familia de métodos para resolver sistemas de ecuaciones no lineales

---

### 5.3.1. Segundo Estudio. Métodos iterativos vectoriales para el cálculo de órbitas preliminares de satélites artificiales

---

En el apartado 4.6.1 demostramos que no podemos plantearnos otro método de determinación preliminar de órbitas a partir de las dos ecuaciones de Gauss como ya hizo Danchick en [6]. Por tanto, nos planteamos mejorar la eficiencia del estudio preliminar de Gauss trabajando con sistemas de varias variables. Aquí es donde empieza nuestro segundo estudio, en el cual proporcionamos una familia de métodos iterativos de resolución de sistemas no lineales que trabaja con  $n$  variables.

Esta familia ha sido obtenida mediante el uso de funciones peso matriciales, con la siguiente expresión iterativa:

$$\begin{aligned}y^{(k)} &= x^{(k)} - [F'(x^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\z^{(k)} &= y^{(k)} - H(\mu^{(k)}) [F'(y^{(k)})]^{-1} F(x^{(k)}), \\x^{(k+1)} &= z^{(k)} - G(\mu^{(k)}) [F'(y^{(k)})]^{-1} F(z^{(k)}),\end{aligned}\tag{5.7}$$

donde  $\mu^{(k)} = [F'(y^{(k)})]^{-1} F'(x^{(k)})$  y las funciones peso  $H, G : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ .

En secciones posteriores demostraremos que haciendo uso de (5.7) conseguimos, bajo ciertas condiciones:

- Orden de convergencia 6.
- Aumentar el rango de diferencia de anomalías verdaderas a valores cercanos a  $\pi$ .
- Mejoramos la eficiencia mediante:
  - La evaluación funcional de, únicamente, dos matrices Jacobianas.
  - En el esquema (5.7) del primer paso al segundo congelamos  $F[x^{(k)}]$  y del segundo al tercero congelamos  $F'[y^{(k)}]$ , para reducir el número de evaluaciones funcionales y el tiempo computacional.

### 5.3.2. Demostración del orden de convergencia

Formulamos el siguiente teorema para la posterior demostración del orden local de convergencia de la nueva familia de métodos iterativos de orden 6.

**Teorema 1.** *Sea  $\alpha \in D$  un cero de una función suficientemente diferenciable  $F : D \subseteq \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  en un conjunto convexo  $D$  tal que su Jacobiana es no singular en  $\alpha$ . Sean  $H$  y  $G$  cualesquiera funciones,  $H, G : \mathbb{R}^{n \times n} \rightarrow \mathbb{R}^{n \times n}$ , que cumplan las siguientes condiciones:  $H(I) = 0$ ,  $H'(I) = \frac{1}{2}I$ ,  $H''(I) = 0$ ; y  $G(I) = I$ ,  $G'(I) = 0$ ,  $G''(I) = \frac{1}{2}I$ , siendo  $I$  la matriz identidad. Tomando como estimación inicial un  $x^{(0)}$  próximo a la solución, el esquema definido en (5.7) proporciona orden de convergencia seis, cuya ecuación del error viene dada por:*

$$e^{(k+1)} = \left[ -\frac{3}{2}C_3C_2C_3 + \frac{1}{4}C_2C_3^2 + 6C_3C_2^2 - C_2C_3C_2^2 + C_2^3C_3 - 4C_2^5 \right] e^{(k)6} + O(e^{(k)7}),$$

donde  $C_k = (1/k!)[F'(\alpha)]^{-1}F^{(k)}(\alpha)$   $k = 2, 3, 4, \dots$ , y  $e^{(k)} = x^{(k)} - \alpha$

**Demostración.** Si expresamos el desarrollo en serie de Taylor de  $F(x^{(k)})$  alrededor de  $\alpha$  con la notación definida en la Sección 2.7:

$$F(x^{(k)}) = F'(\alpha) \left\{ e^{(k)} + C_2e^{(k)2} + C_3e^{(k)3} + C_4e^{(k)4} + C_5e^{(k)5} + C_6e^{(k)6} \right\} + O(e^{(k)7}) \quad (5.8)$$

y, de forma análoga, para el desarrollo de la Jacobiana asociada a  $F$  tenemos:

$$F'(x^{(k)}) = F'(\alpha) \left\{ I + 2C_2e^{(k)} + 3C_3e^{(k)2} + 4C_4e^{(k)3} + 5C_5e^{(k)4} + 6C_6e^{(k)5} \right\} + O(e^{(k)6}). \quad (5.9)$$

Conjeturamos que

$$\left[ F'(x^{(k)}) \right]^{-1} = \left\{ I + X_2e^{(k)} + X_3e^{(k)2} + X_4e^{(k)3} + X_5e^{(k)4} + X_6e^{(k)5} \right\} [F'(\alpha)]^{-1} + O(e^{(k)6}), \quad (5.10)$$

Vamos a determinar los  $X_i$  a partir del hecho de que  $[F'(x^{(k)})]^{-1}F'(x^{(k)}) = F'(x^{(k)})[F'(x^{(k)})]^{-1} = I$ , obteniendo

$$X_2 = -2C_2, \quad X_3 = 4C_2^2 - 3C_3, \quad X_4 = 6C_3C_2 - 6C_2C_3 - 8C_2^3 - 4C_4,$$

$$X_5 = -5C_5 + 8C_2C_4 + 8C_4C_2 - 12C_2^2C_3 - 12C_3C_2^2 - 12C_2C_3C_2 + 9C_3^2 + 16C_2^4,$$

$$X_6 = -6C_6 + 10C_2C_5 + 10C_5C_2 - 16C_2^2C_4 - 16C_4C_2^2 - 16C_2C_4C_2 + 12C_3C_4$$

$$+ 12C_4C_3 - 18C_3C_2C_3 - 18C_2C_3^2 - 18C_3^2C_2 + 24C_2^3C_3 + 24C_2^2C_3C_2 + 24C_2C_3C_2^2$$

$$+ 24C_3C_2^3 - 32C_2^5.$$

Entonces, la expresión de  $y^{(k)} - \alpha$  vendrá dada por:

$$\begin{aligned} y^{(k)} - \alpha &= C_2 e^{(k)2} + (-2C_2^2 + 2C_3) e^{(k)3} + (4C_2^3 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 4C_2^3) e^{(k)4} \\ &\quad + (4C_5 - 6C_2C_4 - 4C_4C_2 + 8C_2^2C_3 + 6C_3C_2^2 + 6C_2C_3C_2 - 6C_3^2 - 8C_2^4) e^{(k)5} \\ &\quad + O(e^{(k)6}). \end{aligned} \quad (5.11)$$

Además, sabemos:

$$\begin{aligned} F(y^{(k)}) &= F'(\alpha)\{(y^{(k)} - \alpha) + C_2(y^{(k)} - \alpha)^2 + C_3(y^{(k)} - \alpha)^3 + C_4(y^{(k)} - \alpha)^4 \\ &\quad + C_5(y^{(k)} - \alpha)^5\} + O(e^{(k)6}) \end{aligned}$$

y si reemplazamos  $(y^{(k)} - \alpha)$  por la expresión dada en (5.11), tenemos:

$$\begin{aligned} F(y^{(k)}) &= F'(\alpha)\{C_2 e^{(k)2} + 2(-C_2^2 + C_3)e^{(k)3} + (3C_4 - 4C_2C_3 - 3C_3C_2 + 5C_2)e^{(k)4} \\ &\quad + (4C_5 - 6C_2C_4 - 4C_4C_2 + 8C_2^3C_3 + 6C_3C_2^2 + 6C_2C_3C_2 + 2C_2^2C_3 + 2C_2C_3C_2 \\ &\quad - 6C_3^2 - 12C_2^4)e^{(k)5}\} + O(e^{(k)6}) \end{aligned}$$

y de forma análoga,

$$\begin{aligned} F'(y^{(k)}) &= F'(\alpha)\{I + 2C_2^2 e^{(k)2} + 4(C_2C_3 - C_2^3)e^{(k)3} + (6C_2C_4 - 8C_2^2C_3 - 6C_2C_3C_2 \\ &\quad + 8C_2^4 + 3C_3C_2^2)e^{(k)4} + (8C_2C_5 - 12C_2^2C_4 - 8C_2C_4C_2 + 16C_2^3C_3 + 12C_2C_3C_2^2 \\ &\quad + 12C_2^2C_3C_2 - 12C_3C_2^3 - 12C_2C_3^2 + 6C_3C_2C_3 + 6C_3^2C_2 - 16C_2^5)e^{(k)5}\} + O(e^{(k)6}). \end{aligned}$$

Como hemos hecho en (5.10), ahora expresamos la inversa de  $F'(y^{(k)})$  en términos del error  $e^{(k)}$

$$\left[F'(y^{(k)})\right]^{-1} = \left\{I + Y_2 e^{(k)} + Y_3 e^{(k)2} + Y_4 e^{(k)3} + Y_5 e^{(k)4} + Y_6 e^{(k)5}\right\} [F'(\alpha)]^{-1} + O(e^{(k)6}),$$

y exigimos  $[F'(y^{(k)})]^{-1} F'(y^{(k)}) = F'(y^{(k)}) [F'(y^{(k)})]^{-1} = I$ , obteniendo

$$Y_2 = 0, \quad Y_3 = -2C_2^2, \quad Y_4 = 4(C_2^3 - C_2C_3),$$

$$Y_5 = -6C_2C_4 + 8C_2^2C_3 + 6C_2C_3C_2 - 4C_2^4 - 3C_3C_2^2,$$

$$Y_6 = -8C_2C_5 + 12C_2^2C_4 + 8C_2C_4C_2 - 16C_2^3C_3 - 12C_2C_3C_2^2 - 12C_2^2C_3C_2$$

$$+ 12C_3C_2^3 + 8C_2^3C_3 + 8C_2C_3C_2^2 + 12C_2C_3^2 - 6C_3C_2C_3 - 6C_3^2C_2.$$

Así que,

$$\begin{aligned} \left[ F' \left( y^{(k)} \right) \right]^{-1} F \left( x^{(k)} \right) &= e^{(k)} + C_2 e^{(k)2} + (-2C_2^2 + C_3) e^{(k)3} + (C_4 + 2C_2^3 - 4C_2C_3) e^{(k)4} \\ &\quad + (C_5 + 6C_2^2C_3 + 2C_2C_3C_2 - 3C_3C_2^2 - 6C_2C_4) e^{(k)5} + O(e^{(k)6}). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Por otro lado, podemos expresar el desarrollo en serie de Taylor de  $\mu^{(k)}$  entorno a  $\alpha$  haciendo uso de (5.9) y (5.12):

$$\begin{aligned} \mu^{(k)} &= \left[ F' \left( y^{(k)} \right) \right]^{-1} F \left( x^{(k)} \right) = I + 2C_2 e^{(k)} + (-2C_2^2 + 3C_3) e^{(k)2} + 4(C_4 - C_2C_3) e^{(k)3} \\ &\quad + (5C_5 + 2C_2^2C_3 - 2C_2C_3C_2 - 3C_3C_2^2 + 4C_2^4 - 6C_2C_4) e^{(k)4} \\ &\quad + (6C_6 + 4C_2^2C_4 - 4C_2C_4C_2 + 4C_2^3C_3 + 4C_2^2C_3C_2 + 8C_2C_3C_2^2 + 6C_3C_2^3 \\ &\quad - 6C_3C_2C_3 - 6C_3^2C_2 - 8C_2^5 - 8C_2C_5) e^{(k)5} + O(e^{(k)6}), \end{aligned} \quad (5.13)$$

obtenemos que  $\mu^{(k)}$  tiende a la matriz identidad  $I$  cuando  $x^{(k)}$  e  $y^{(k)}$  tienden a  $\alpha$ , con ello el polinomio de Taylor de segundo grado asociado a  $H(\mu^{(k)})$  es:

$$H \left( \mu^{(k)} \right) = H(I) + H'(I) \left( \mu^{(k)} - I \right) + \frac{H''(I)}{2} \left( \mu^{(k)} - I \right)^2. \quad (5.14)$$

En adelante, consideraremos la siguiente notación:

$$H(I) \equiv H_0, \quad H'(I) \equiv H_1, \quad \frac{H''(I)}{2} \equiv H_2. \quad (5.15)$$

De esta forma,

$$\begin{aligned} z^{(k)} - \alpha &= y^{(k)} - \alpha - H \left( \mu^{(k)} \right) \left[ F' \left( y^{(k)} \right) \right]^{-1} F \left( x^{(k)} \right) \\ &= -H_0 e^{(k)} + (I - H_0 - 2H_1) C_2 e^{(k)2} + [(-2I + 2H_0 - 4H_2) C_2^2 \\ &\quad + (2I - H_0 - 3H_1) C_3] e^{(k)3} + [(3I - H_0 - 4H_1) C_4 + (4I - 2H_0 + 6H_1 + 4H_2) C_2^3 \\ &\quad + (-4I + 4H_0 + 2H_1 - 6H_2) C_2C_3 + (-3I - 3H_1 - 6H_2) C_3C_2] e^{(k)4} \\ &\quad + [(4I - H_0 - 5H_1) C_5 + (-6I - 8H_2 + 6H_0 + 4H_1) C_2C_4 + (-4I - 8H_2 - 4H_1) C_4C_2 \\ &\quad + (8I + 10H_2 - 6H_0 + 8H_1) C_2^2C_3 + (6I + 3H_0 + 9H_1) C_3C_2^2 + (6I - 2H_0 + 2H_2 \\ &\quad + 6H_1) C_2C_3C_2 + (-6I - 9H_2 - 3H_1) C_3^2 + (-8I + 12H_2 - 12H_1) C_2^4] e^{(k)5} + O(e^{(k)6}). \end{aligned} \quad (5.16)$$

Por lo que,

$$\begin{aligned}
F\left(z^{(k)}\right) &= F'(\alpha)\{-H_0e^{(k)} + (I - H_0 - 2H_1 + H_0^2)C_2e^{(k)^2} \\
&\quad + [(-2I + 2H_0^2 - 4H_2 + 4H_0H_1)C_2^2 + (2I - H_0 - 3H_1 - H_0^3)C_3]e^{(k)^3} \\
&\quad + [(3I - H_0 - 4H_1 + H_0^4)C_4 + (5I + 2H_1 + 4H_2 - 3H_0^2 + 8H_0H_2 + 4H_1^2 + 4H_0H_1)C_2^3 \\
&\quad + (-4I + 2H_1 - 6H_2 + 2H_0^2 + 6H_0H_1)C_2C_3 \\
&\quad + (-3I - 3H_1 - 6H_2 + 3H_0^2 - 6H_0^2H_1 - 3H_0^3)C_3C_2]e^{(k)^4} \\
&\quad + [(4I - H_0 - H_0^5 - 5H_1)C_5 + (-6I + 4H_1 - 8H_2 + 2H_0^2 + 8H_0H_1)C_2C_4 \\
&\quad + (-4I - 4H_1 - 8H_2 - 4H_0^3 + 4H_0^4 + 8H_0^3H_1)C_4C_2 + (10I - H_0 + H_1 + 10H_2 \\
&\quad + H_0H_1 + 12H_0H_2 - 7H_0^2 + 6H_1^2)C_2^2C_3 + (6I + 9H_1 + 12H_0H_1 - 12H_0^2H_1 \\
&\quad - 12H_0H_1^2 - 12H_0^2H_2 + 3H_0^3)C_3C_2^2 + (8I + H_0 - H_1 + 2H_2 + 11H_0H_1 \\
&\quad + 12H_0H_2 + H_0^2 + 6H_1^2)C_2C_3C_2 + (-6I + 6H_0^2 - 3H_0^3 - 3H_1 - 9H_0^2H_1 \\
&\quad - 9H_2)C_3^2 + (-12I - 4H_1 - 20H_0H_1 + 4H_2 + 16H_1H_2)C_2^4]e^{(k)^5}\} + O(e^{(k)^6}).
\end{aligned}$$

Igual que hicimos en (5.14), el polinomio de Taylor de segundo grado asociado a  $G\left(\mu^{(k)}\right)$  es

$$G\left(\mu^{(k)}\right) = G_0 + G_1(\mu^{(k)} - I) + G_2(\mu^{(k)} - I)^2, \quad (5.17)$$

donde usamos la siguiente notación:

$$G_0 \equiv G(I), \quad G_1 = G'(I), \quad G_2 = \frac{G''(I)}{2}. \quad (5.18)$$

Finalmente, la ecuación del error se expresa como:

$$\begin{aligned}
e^{(k+1)} &= H_0(I - G_0)e^{(k)} + [(I - H_0 - G_0 + G_0H_0 + 2G_1H_0 - G_0H_0^2 - 2H_1 \\
&\quad + 2G_0H_1)C_2]e^{(k)^2} + [(-2I + 2G_0 - 2G_1 + 2H_0 - 2G_0H_0 + 4G_2H_0 - 2G_0H_0^2 \\
&\quad - 2G_1H_0^2 + 4G_1H_1 - 4G_0H_0H_1 - 4H_2 + 4G_0H_2)C_2^2 + (2I - H_0 - 3H_1 - 2G_0 \\
&\quad + G_0H_0 + 3G_0H_1 + G_0H_0^3 + 3G_1H_0)C_3]e^{(k)^3} + O(e^{(k)^4}).
\end{aligned}$$

Si elegimos  $H_0 = 0$ ,  $H_1 = \frac{1}{2}I$ ,  $H_2 = 0$ , obtenemos:

$$e^{(k+1)} = \left[(-2I + 2G_0)C_2^2 + \left(\frac{1}{2}I - \frac{G_0}{2}\right)C_3\right] e^{(k)^3} + O(e^{(k)^4}). \quad (5.19)$$

Por tanto, para alcanzar orden cuatro es necesario que  $G_0 = I$ , y la ecuación del error es

$$e^{(k+1)} = G_1 \left[-C_3 + 4C_2^2\right] e^{(k)^4} + O(e^{(k)^5}). \quad (5.20)$$

Así, para conseguir orden de convergencia cinco,  $G_1$  debe ser nulo. Por lo tanto, la expresión del error nos quedará:

$$e^{(k+1)} = [(I - 2G_2)C_2^2C_3 + (-4I + 8G_2)C_2^4] e^{(k)5} + O(e^{(k)6}). \quad (5.21)$$

Finalmente, escogiendo  $G_2 = \frac{1}{2}I$ , la ecuación del error nos queda:

$$e^{(k+1)} = \left[ -\frac{3}{2}C_3C_2C_3 + \frac{1}{4}C_2C_3^2 + 6C_3C_2^3 - C_2C_3C_2^2 + C_2^3C_3 - 4C_2^5 \right] e^{(k)6} + O(e^{(k)7}), \quad (5.22)$$

quedando el teorema demostrado. ■

Queremos comentar que los cálculos que hemos realizado en la demostración tienen una dificultad añadida ya que no existe ningún software de cálculo simbólico que no aplique la propiedad conmutativa, cosa impensable cuando trabajamos con matrices ya que el producto  $C_1C_2$ , en general, no tiene porque ser igual a  $C_2C_1$ .

### 5.3.3. Expresiones de las funciones peso $H$ y $G$

---

Bajo las hipótesis del Teorema 1, podemos proporcionar distintas funciones peso que cumplan estas condiciones, lo que da lugar a métodos iterativos diferentes.

#### NAJC1

Denotaremos con este acrónimo al método iterativo resultante de utilizar las funciones peso:

$$H(t) = \frac{1}{2}(t - I),$$

$$G(t) = [I + t]^{-1}(2I - t + t^2).$$

#### NAJC2

Podemos dar otra combinación de las funciones peso, como:

$$H(t) = \frac{1}{2}(t - I),$$

$$G(t) = I + \frac{1}{2}(t - I)^2,$$

lo que da lugar a otro método de orden 6, que denotaremos en adelante por NAJC2.

### 5.3.4. Análisis de eficiencia de NAJC1 y NAJC2

A partir del orden de convergencia teórico de cada método y de las definiciones del índice de eficiencia y del índice operacional extraídas de los apartados 2.4.1 y 2.4.2 respectivamente, hacemos la siguiente comparativa:

Método	SNR	STR	SJ	NAJC1	NAJC2
$p$	2	3	4	6	6
$I$	$\frac{1}{2^{n+n^2}}$	$\frac{1}{3^{2n+n^2}}$	$\frac{1}{4^{n+2n^2}}$	$\frac{1}{6^{2n+2n^2}}$	$\frac{1}{6^{2n+2n^2}}$
$I_c$	$2^{-\frac{n}{3}+n^2+\frac{n^3}{3}}$	$3^{-\frac{n}{3}+2n^2+\frac{n^3}{3}}$	$4^{n^2+2\left(-\frac{n}{3}+n^2+\frac{n^3}{3}\right)}$	$6^{-\frac{2n}{3}+5n^2+\frac{5n^3}{3}}$	$6^{-\frac{2n}{3}+5n^2+\frac{5n^3}{3}}$

siendo  $n$  el número de variables del sistema de ecuaciones.

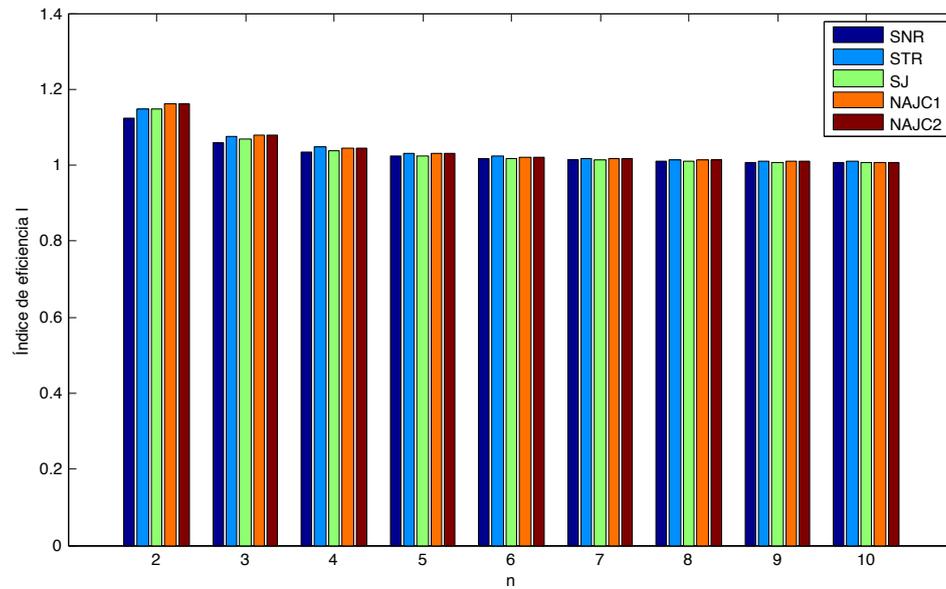


Figura 5.1. Evolución del índice de eficiencia.

Como podemos observar en la Figura 5.1, con  $n = 2$  la relación entre los diferentes índices de eficiencia de los métodos es:

$$I_{SNR} < I_{STR} < I_{SJ} < I_{NAJC1} = I_{NAJC2}.$$

Para  $n > 2$ , el índice de eficiencia de los métodos NAJC1 y NAJC2 mejora con respecto a los demás llegando a ser los más eficientes.

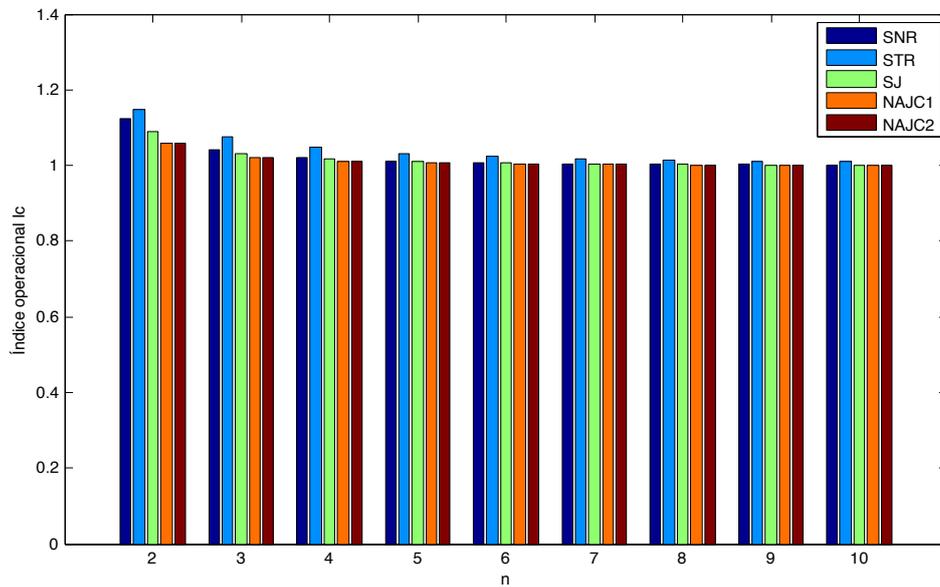


Figura 5.2. Evolución del índice operacional.

En cuanto al índice operacional, con  $n = 2$  tenemos:

$$I_{NAJC1} = I_{NAJC2} < I_{SJ} < I_{SNR} < I_{STR}.$$

A medida que crece  $n$ , podemos ver en la Figura 5.2 que los valores del índice operacional de los distintos métodos se estabiliza.

## 6

## Resultados numéricos.

## 6.1. Elección de Wolfram Mathematica

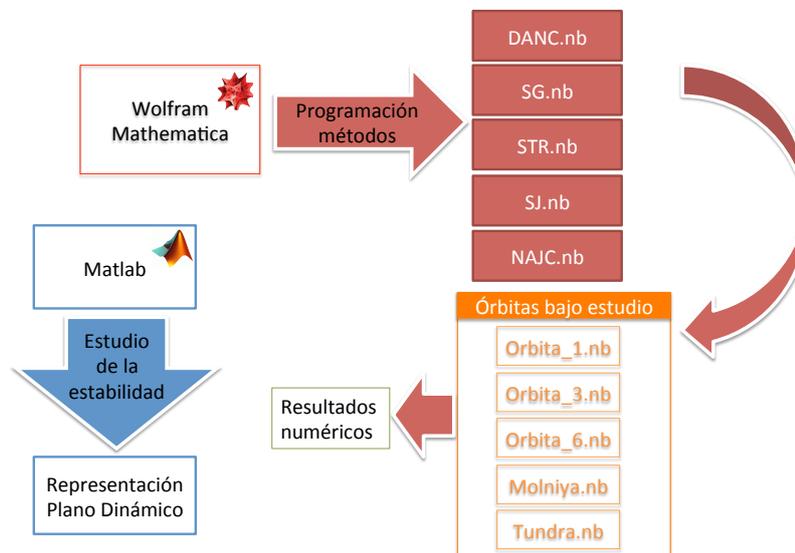


Figura 6.1. Ciclo de trabajo

Aunque durante toda la carrera hemos trabajado con Matlab como software de cálculo para programar diferentes métodos iterativos así como para diferentes aplicaciones más específicas, para este trabajo decidimos utilizar el Wolfram Mathematica principalmente por dos motivos:

- A la hora del cálculo simbólico, Mathematica es una herramienta muy potente además de que, en este aspecto, es más intuitiva que Matlab.
- La fiabilidad en el cálculo de tiempos, ya que Matlab no posee un comando tan fiable como el “AbsolutTiming” de Mathematica.

Aunque utilizamos Mathematica para los resultados numéricos de los distintos métodos que compararemos posteriormente, utilizamos Matlab en casos puntuales ya que consideramos que éste es más completo, por ejemplo, en el tratamiento de imágenes y en la velocidad de cálculo a la hora de trazar los planos dinámicos, es decir, las zonas de estabilidad de cada método para las órbitas bajo estudio.

## **6.2. Resultados numéricos de las órbitas bajo estudio.**

---

Vamos a proceder a proporcionar las tablas con los resultados que cada método nos facilita. Como hemos comentado en la Sección 6.1, el programa que vamos a utilizar para dar los resultados a partir de los datos de entrada es el Wolfram Mathematica 8, trabajando con aritmética de precisión variable de 250 dígitos. Los criterios que hemos asumido por igual para todos los métodos que vamos a comparar son los siguientes:

- Para todos los métodos hemos escogido los siguientes criterios de parada
  - Con una tolerancia de  $tol = 10^{-100}$ , tomamos como criterios de parada  $||F(x)|| + ||x^{(k+1)} - x^{(k)}|| < tol$ .
- Para todos los métodos hemos escogido una estimación inicial cercana a la solución.
- Los elementos que conformarán cada tabla comparativa son los siguientes:
  - Iter: Número de iteraciones que realiza el método hasta obtener el resultado final.
  - $\rho$ : Estimación del orden de convergencia computacional, definido en la Sección 2.4.
  - $\tilde{I}$ : Índice de eficiencia aproximado, definido en el apartado 2.4.3.
  - $\tilde{I}_c$ : Índice operacional aproximado, definido en el apartado 2.4.4.
  - $\varepsilon_a$ : Error absoluto cometido en el semieje mayor  $a$ .
  - $\varepsilon_e$ : Error absoluto cometido en la excentricidad  $e$ .
  - $\varepsilon_i$ : Error absoluto cometido en la inclinación de la órbita  $i$ .
  - $\varepsilon_w$ : Error absoluto cometido en el argumento del perigeo  $\omega$ .
  - $\varepsilon_\Omega$ : Error absoluto cometido en la ascensión recta del nodo ascendente  $\Omega$ .
  - Tiempo (s) : Tiempo computacional en segundos obtenido con el comando “AbsolutTiming” de Mathematica.

Cuando nos referimos al error absoluto cometido, lo que hacemos para dar cada uno de los valores es la resta en valor absoluto entre el valor teórico dado y el obtenido a partir de la velocidad que nos proporcionan los métodos numéricos especificados.

$$\varepsilon = |\text{valor}_{teorico} - \text{valor}_{aproximado}|.$$

Por lo tanto, mostraremos dicha información en cada una de las tablas a partir de las órbitas de referencia proporcionadas en la Sección 2.5.

Método	Iter	$\rho$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}_c$	Errores absolutos					Tiempo (s)
					$\varepsilon_a$	$\varepsilon_e$	$\varepsilon_i$	$\varepsilon_\omega$	$\varepsilon_\Omega$	
<b>SNR</b>	7	1.9999	1.1112	1.1112	3.2757e-109	4.8982e-110	7.3653e-109	2.6237e-108	0	0.005049
<b>STR</b>	5	2.9995	1.1396	1.1102	2.0466e-120	3.0603e-121	4.6017e-120	1.6393e-119	0	0.005463
<b>SJ</b>	4	4.0000	1.1264	1.0771	4.8431e-200	8.8034e-201	3.9324e-200	1.4008e-199	0	0.005906
<b>NAJC1</b>	3	5.7569	1.1347	1.0485	3.6731e-148	4.3049e-148	1.5905e-146	5.6659e-146	0	0.009218
<b>NAJC2</b>	3	5.7821	1.1352	1.0487	3.9057e-149	4.6174e-149	1.7089e-147	6.0879e-147	0	0.007306

Tabla 6.1. Resultados Órbita de Referencia I.

Método	Iter	$\rho$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}_c$	Errores absolutos					Tiempo (s)
					$\varepsilon_a$	$\varepsilon_e$	$\varepsilon_i$	$\varepsilon_\omega$	$\varepsilon_\Omega$	
<b>SNR</b>	7	2.0025	1.0962	1.0962	1.6280e-132	8.9829e-132	1.3613e-131	1.2689e-129	0	0.006094
<b>STR</b>	5	3.0093	1.1188	1.0938	7.1508e-202	2.7325e-202	1.0162e-201	9.4735e-200	0	0.006825
<b>SJ</b>	4	4.0232	1.1303	1.0795	7.1508e-202	2.7325e-202	1.0162e-201	9.4735e-200	0	0.006064
<b>NAJC1</b>	3	5.3699	1.1248	1.0451	2.7711e-140	1.8029e-139	2.7711e-139	2.5831e-137	0	0.008396
<b>NAJC2</b>	3	5.5364	1.1258	1.0454	7.9126e-142	5.8982e-141	9.1569e-141	8.5355e-139	0	0.007454

Tabla 6.2. Resultados Órbita de Referencia III.

Método	Iter	$\rho$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}_c$	Errores absolutos					Tiempo (s)
					$\varepsilon_a$	$\varepsilon_e$	$\varepsilon_i$	$\varepsilon_\omega$	$\varepsilon_\Omega$	
<b>SNR</b>	7	1.9998	1.1044	1.1044	2.5975e-153	5.7469e-154	6.9779e-156	4.4779e-153	0	0.006215
<b>STR</b>	5	2.9998	1.1275	1.1007	1.7359e-202	3.6985e-202	1.2488e-202	8.0140e-200	0	0.006669
<b>SJ</b>	4	3.9858	1.1399	1.0853	1.7359e-202	3.6985e-202	1.2488e-202	8.0140e-200	0	0.006392
<b>NAJC1</b>	3	5.7638	1.1319	1.0476	1.0246e-135	2.2937e-136	3.5756e-138	2.2946e-135	0	0.008498
<b>NAJC2</b>	3	5.7741	1.1322	1.0477	1.8360e-136	4.1009e-137	6.1235e-139	3.9297e-136	0	0.007506

Tabla 6.3. Resultados Órbita de Referencia VI.

Método	Iter	$\rho$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}_c$	Errores absolutos					Tiempo (s)
					$\varepsilon_a$	$\varepsilon_e$	$\varepsilon_i$	$\varepsilon_\omega$	$\varepsilon_\Omega$	
<b>SNR</b>	7	2.0000	1.0935	1.0935	7.6605e-17	1.1902e-19	2.4595e-16	4.3998e-16	0	0.006084
<b>STR</b>	5	2.9999	1.1192	1.0942	7.6605e-17	1.1902e-19	2.4595e-16	4.3998e-16	0	0.006522
<b>SJ</b>	4	3.5191	1.1264	1.0771	7.6605e-17	1.1902e-19	2.4595e-16	4.3998e-16	0	0.004714
<b>NAJC1</b>	3	4.9478	1.1243	1.0449	7.6605e-17	1.1902e-19	2.4595e-16	4.3998e-16	0	0.008329
<b>NAJC2</b>	3	5.7930	1.1249	1.0451	7.6605e-17	1.1902e-19	2.4595e-16	4.3998e-16	0	0.007574

Tabla 6.4. Resultados Órbita Molniya.

Método	Iter	$\rho$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}_c$	Errores absolutos					Tiempo (s)
					$\varepsilon_a$	$\varepsilon_e$	$\varepsilon_i$	$\varepsilon_\omega$	$\varepsilon_\Omega$	
<b>SNR</b>	6	2.0121	1.1041	1.1041	3.1284e-16	1.6038e-17	2.4321e-16	6.5148e-15	0	0.005069
<b>STR</b>	5	2.9852	1.1331	1.1051	3.1284e-16	1.6038e-17	2.4321e-16	6.5148e-15	0	0.005493
<b>SJ</b>	3	3.9931	1.1409	1.0859	3.1284e-16	1.6038e-17	2.4321e-16	6.5148e-15	0	0.004457
<b>NAJC1</b>	3	4.9478	1.1336	1.0482	3.1284e-16	1.6038e-17	2.4321e-16	6.5148e-15	0	0.009004
<b>NAJC2</b>	3	5.2465	1.1337	1.0482	3.1284e-16	1.6038e-17	2.4321e-16	6.5148e-15	0	0.007704

Tabla 6.5. Resultados Órbita Tundra.

### 6.2.1. Conclusiones

- Al trabajar con dos ecuaciones de forma simultánea, iterando sobre  $y$  y  $dE$ , ampliamos el rango de la diferencia de anomalías verdaderas hasta valores cercanos a  $\pi$ .
- El que mejor ACOC  $\rho$  presenta es **NAJC2**. Podemos observar que según los datos de entrada, este indicador varía por encima o por debajo del valor teórico  $p$ . En el caso de los métodos **SJ** y **NAJC1** el valor de  $\rho$  desciende cuanto más separados están los instantes de observación.
- Si nos referimos al índice de eficiencia aproximado y al índice operacional aproximado, el que mejor comportamiento presenta es **SNR** debido a que es el método que menos evaluaciones funcionales realiza. Por esto, es coherente el resultado de tiempo computacional que obtenemos que, en media, es más bajo que el de algunos métodos de orden superior. Por contra, es el método que peor precisión posee y más iteraciones realiza de todos los utilizados para este trabajo.
- En cuanto a tiempo computacional se refiere, el que mejores valores presenta es el método **SJ**. Además, en media es el que mejor precisión presenta en cuanto a los errores absolutos cometidos se refiere, teniendo en cuenta que nos movemos en estimaciones iniciales muy cercanas a la solución final.
- Tanto en orden de convergencia como en número de iteraciones, los métodos que mejor comportamiento presentan son **NAJC1** y **NAJC2** en todas las órbitas presentadas. Ambos métodos presentan valores similares. Si tuviéramos que decantarnos por alguno, el método **NAJC2** presenta mayor

precisión que **NAJC1**, además de que emplea menor tiempo para obtener los resultados, consigue mejores valores de eficiencia y mayor ACOC.

- La precisión de los resultados obtenidos por los diferentes métodos sobre órbitas de tipo Molniya y Tundra, decrecen en relación a otras órbitas. Es coherente con lo que hemos comentado en la explicación de los datos de entrada que hemos utilizado para calcular los parámetros keplerianos de estas órbitas, ya que estamos en valores prácticamente extremos en cuanto a diferencia de anomalías verdaderas se refiere, es decir, en distancias cercanas a  $\pi$ .

### 6.3. Estudio de la estabilidad. Representación de los planos dinámicos

---

---

Como hemos avanzado al principio de este capítulo, para el estudio de la estabilidad de los métodos hemos utilizado como herramienta de software el programa Matlab, la versión R2010a. Lo que hemos hecho consiste en representar los planos dinámicos de cada método definiendo una malla de puntos en un rango determinado para estudiar donde se encuentran los mejores puntos de salida, es decir, donde el método es capaz de llegar a la solución final a partir de una estimación inicial dada por esta malla de puntos. Las zonas donde sí converge están sombreadas en naranja, con tonos más intensos donde realiza menos iteraciones. En las zonas negras el método no ha sido capaz de dar una solución cercana a la solución con el número de iteraciones disponible. En estos caso puede pasar que el método diverja o que necesite más iteraciones para aproximarse a la solución final. Como criterios de representación hemos utilizado:

- La órbita de referencia I.
- En el eje de abcisas tenemos como variable el parámetro de Gauss  $y$ , y en el eje de ordenadas tenemos la diferencia de anomalías excéntricas denotadas como  $dE$ .
- Representamos en el intervalo  $[0, 3] \times [-1, 1]$  ya que la solución es, aproximadamente, el punto  $(1, 0.1)$ .
- En el programa que representa los planos dinámicos, que se encuentra en el Anexo A y del que nos ayudamos de [11] para programarlo, utilizaremos 2000 puntos con 500 iteraciones en cada uno, suficiente para dar una representación fiable tanto en la zona de estabilidad como en los bordes de la misma.

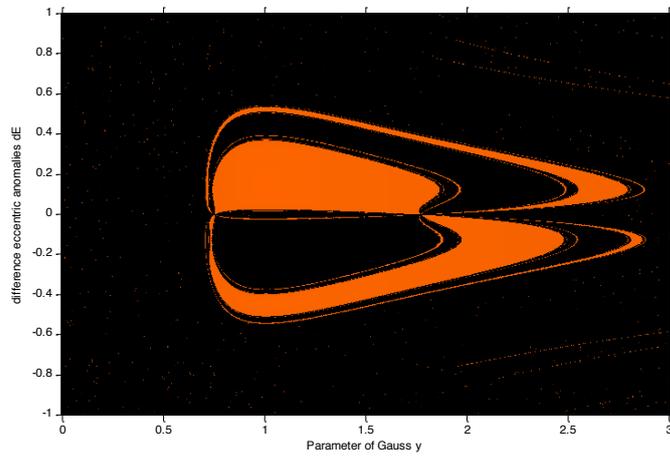


Figura 6.2. Plano dinámico de **SNR**.

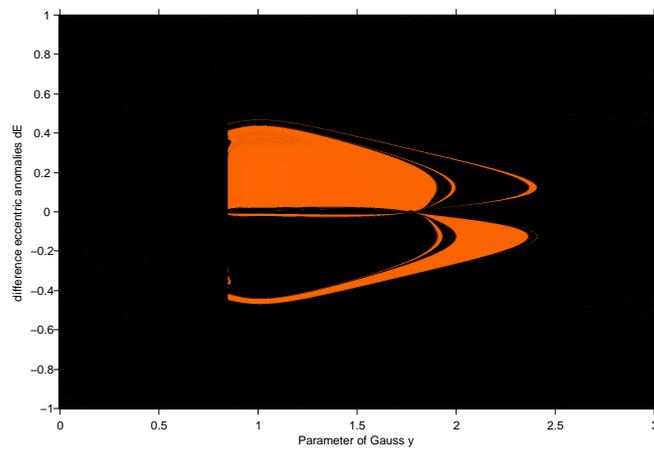


Figura 6.3. Plano dinámico de **STR**.

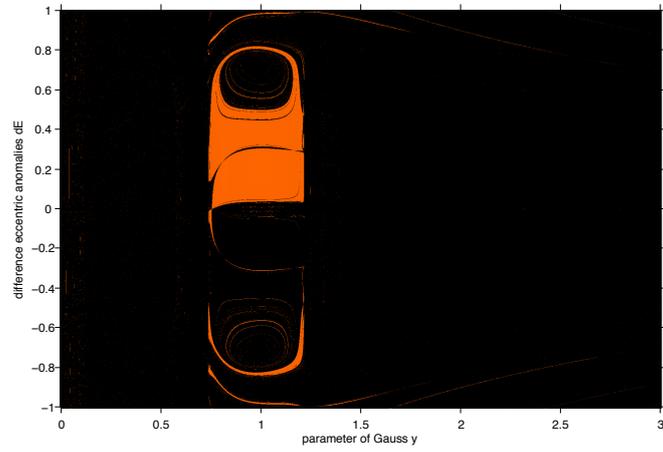


Figura 6.4. Plano dinámico de **SJ**.

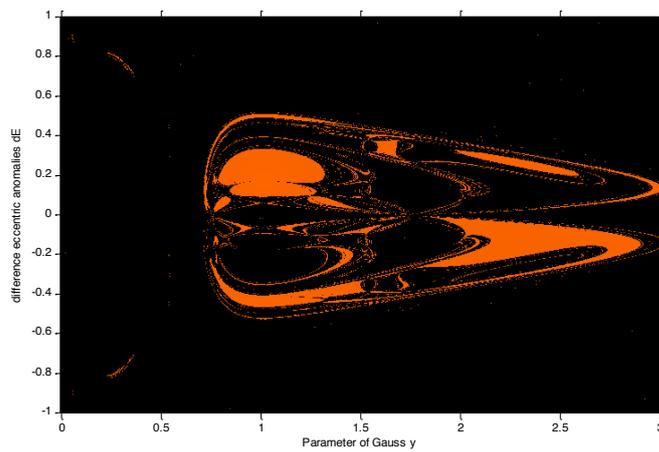


Figura 6.5. Plano dinámico de **NAJC1**.

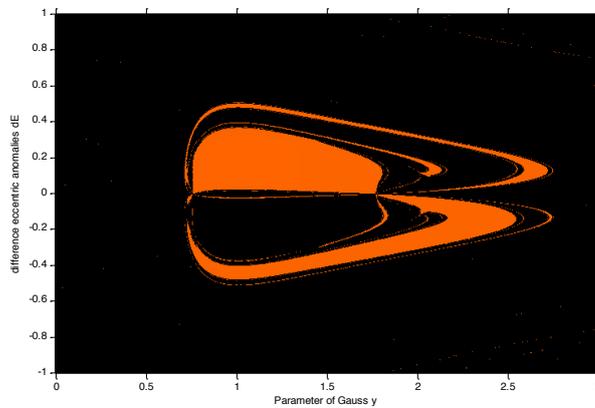


Figura 6.6. Plano dinámico de **NAJC2**.

### 6.3.1. Conclusiones

---

- El método **SJ** es el que mejor precisión obtiene con un número relativamente bajo de iteraciones realizadas. Viendo su plano dinámico debemos añadir que es el que mejor precisión proporciona pero con una estimación inicial más cercana a la solución. Posee una región central estable pero predominan las zonas negras donde el método no llega a la solución con las iteraciones proporcionadas.
- Tanto **NAJC1** y **NAJC2** poseen grandes zonas de comportamiento estable, es decir que dada una estimación inicial que dista considerablemente de la solución, son los dos métodos que mejor comportamiento poseen para dar finalmente una solución final tan próxima a la solución como se desee.
- En general, es conocido que al crecer el orden de convergencia las zonas de estabilidad se van haciendo más reducidas. Si observamos las zonas de estabilidad de **NAJC1** y **NAJC2** esto no pasa ya que sus zonas anaranjadas son comparables a **SNR** que es el que posee el menor orden de convergencia y mayor región de estabilidad.
- **NAJC2** es más estable que **NAJC1**. Lo podemos observar en sus regiones de estabilidad ya que a partir del conjunto de puntos iniciales donde el método converge, **NAJC1** tiene sus cuencas de convergencia más dispersas y deslocalizadas.

## 6.4. Resultados numéricos sobre problemas académicos

---

Antes de dar finalmente las conclusiones a las que hemos llegado sobre nuestra nueva familia de métodos de orden 6, vimos interesante hacer un estudio sobre casos académicos partiendo de una estimación inicial alejada de la solución, ya que observando los resultados de los planos dinámicos de la sección anterior, es fácil observar que las regiones de estabilidad de nuestra familia de métodos son bastante amplias en comparación a otros métodos descritos. El software que vamos a utilizar durante esta sección sigue siendo Wolfram Mathematica 8 y trabajaremos con una aritmética de precisión variable de 250 dígitos. El criterio de parada será nuevamente  $\|F(x)\| + \|x^{(k+1)} - x^{(k)}\| < tol$  con una tolerancia de  $tol = 10^{-100}$

Los sistemas [15] en los que vamos a aplicar nuestros métodos son los siguientes:

- (a)  $F_1(x) = (f_1(x), f_2(x))^T$  con  $x = (x_1, x_2)^T$  y  $f_i : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, 2$ ,  
 $\bar{x} \approx (3.47063096, -2.47063096)$ .

$$\begin{aligned} f_1(x) &= e^{x_1} e^{x_2} + x_1 \cos x_2, \\ f_2(x) &= x_1 + x_2 - 1. \end{aligned}$$

- (b)  $F_2(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x))^T$  con  $x = (x_1, x_2, x_3)^T$  y  $f_i : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  
 $i = 1, 2, 3$ ,  $\bar{x} \approx (2.14025, -2.09029, -0.223525)$ .

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 9, \\ f_2(x) &= x_1 x_2 x_3 - 1, \\ f_3(x) &= x_1 + x_2 - x_3^2. \end{aligned}$$

- (c)  $F_3(x) = (f_1(x), f_2(x), f_3(x), f_4(x))^T$  siendo  $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$  y  
 $f_i : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $i = 1, \dots, 4$ ,  $\bar{x} = (\pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}, \pm \frac{2}{\sqrt{3}})$ .

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x_2 x_3 + x_4 (x_2 + x_3), \\ f_2(x) &= x_1 x_3 + x_4 (x_1 + x_3), \\ f_3(x) &= x_1 x_2 + x_4 (x_1 + x_2), \\ f_4(x) &= x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 - 1. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $\varepsilon_{f_i}$  a  $|f_i(x^{(k+1)})|$ , siendo  $x^{(k+1)}$  la última iteración calculada y  $f_i$  cada una de las funciones coordenadas de  $F$ .

Método	Iter	$\rho$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}_c$	$\varepsilon_{f_1}$	$\varepsilon_{f_2}$	Tiempo (s)
<b>SNR</b>	8	1.9999	1.1734	1.1078	7.5993e-174	0	0.004658
<b>STR</b>	6	3.0000	1.3841	1.1251	5.8838e-206	0	0.006098
<b>SJ</b>	4	3.9887	1.1174	1.0715	2.0217e-113	0	0.004620
<b>NAJC1</b>	4	6.0051	1.1259	1.0451	0	0	0.009178
<b>NAJC2</b>	4	6.0028	1.1289	1.0462	0	0	0.008030

Tabla 6.6. Resultados de sistema (a) con  $x^{(0)} = (4, -3)^T$ .

Método	Iter	$\rho$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}_c$	$\varepsilon_{f_1}$	$\varepsilon_{f_2}$	$\varepsilon_{f_3}$	Tiempo (s)
<b>SNR</b>	13	1.9948	1.0281	1.0201	3.4121e-125	2.7759e-125	1.0794e-125	0.007766
<b>STR</b>	-	-	-	-	-	-	-	-
<b>SJ</b>	8	3.9940	1.0301	1.0158	0	0	0	0.009805
<b>NAJC1</b>	5	4.9496	1.0646	1.0171	0	0	0	0.013722
<b>NAJC2</b>	6	4.9329	1.0716	1.0190	0	0	0	0.013029

Tabla 6.7. Resultados de sistema (b) con  $x^{(0)} = (12, -2, -1)^T$ .

Método	Iter	$\rho$	$\tilde{I}$	$\tilde{I}_c$	$\varepsilon_{f_1}$	$\varepsilon_{f_2}$	$\varepsilon_{f_3}$	$\varepsilon_{f_4}$	Tiempo (s)
<b>SNR</b>	10	2.0244	1.0249	1.0249	6.5830e-102	6.5830e-102	6.5830e-102	2.7466e-103	0.007272
<b>STR</b>	7	3.0909	1.0356	1.0162	2.9862e-145	2.9862e-145	2.9862e-145	7.8319e-147	0.009802
<b>SJ</b>	5	4.1871	1.0349	1.0141	6.5830e-102	6.5830e-102	6.5830e-102	2.7466e-103	0.007952
<b>NAJC1</b>	5	6.4193	1.0493	1.0104	0	0	0	0	0.017668
<b>NAJC2</b>	5	6.1729	1.0520	1.0110	0	0	0	0	0.014849

Tabla 6.8. Resultados de sistema (c) con  $x^{(0)} = (5, 5, 5, -1)^T$ .

### 6.4.1. Conclusiones

---

- En cuanto a tiempo computacional, el que mejor comportamiento posee es el método **SJ** aún cuando el número de iteraciones dista en dos respecto a otros métodos como **NAJC2**.
- En general, los dos métodos que presentan mejor precisión son **NAJC1** y **NAJC2**. Esto es importante remarcarlo ya que en la determinación de órbitas habíamos concluido que el mejor en cuanto al error cometido era **SJ**, el cual no tiene el mismo comportamiento cuando la estimación inicial no ronda próxima a la solución.
- El método **STR** en el sistema (b) diverge, por ello no hemos dado resultados.
- En los métodos **SNR** y **STR** se dispara el número de iteraciones cuando la estimación inicial está lejos de la solución.

### 7.1. Reflexiones finales y líneas de investigación futuras

---

En este estudio de investigación empezamos analizando el método de Danchick descrito en [6] para, finalmente, diseñar otro método de determinación preliminar de órbitas que tenga mejores condiciones en cuanto a eficiencia y tiempo computacional ampliando a su vez el rango de diferencia de anomalías verdaderas. Comprobamos que no era posible a partir de las ecuaciones de Gauss modificar el método de Danchick utilizando otras variables disponibles, que en nuestro caso fue la variable  $X$ . Por ello, pensamos en trabajar con sistemas ya que al utilizar las dos ecuaciones de Gauss en lugar de la unificada, ampliamos el rango a valores cercanos a  $\pi$ . De esta forma, podemos centrarnos únicamente en mejorar la eficiencia y el tiempo computacional del método iterativo. Una posible vía de investigación consistiría en optimizar el método de Danchick en sus dos ramas de iteración,  $x$  e  $y$ , con métodos de orden superior que hagan uso de una variable para mantener las buenas condiciones de estabilidad que se tienen al trabajar con una sola ecuación. A continuación, podríamos seguir mejorando haciendo uso de métodos libres de derivadas también con alto orden de convergencia.

Para ampliar el rango de diferencia de anomalías verdaderas, quedaría como línea de investigación futura replantear el método de Gauss en el que hace uso de la relación triángulo-sector para calcular la velocidad. Pensamos en hacer esta relación entre dos figuras geométricas que no hagan que la distancia de observación se limite a  $\pi/4$  cuando trabajamos con una única ecuación.

Sería interesante probar también nuestros métodos en otros estudios preliminares de determinación de órbitas extraídos de [5] como iterar sobre el semi-latus rectum  $\rho$ , sobre las series cerradas  $f$  y  $g$  o sobre la excentricidad  $e$ .

Centrándonos en lo que ha sido nuestro segundo caso de estudio en el que ya trabajábamos con sistemas de ecuaciones no lineales con más de una variable, los nuevos métodos **NAJC1** y **NAJC2** de orden de convergencia 6 que hemos obteni-

do a partir del uso de funciones peso matriciales (las cuales no se habían utilizado anteriormente), son los que mejores condiciones globales consiguen ya que para estimaciones iniciales que distan considerablemente de la solución final, hemos visto en el estudio de la estabilidad que consiguen converger con muy pocas iteraciones en comparación a otros métodos que también son de orden superior. Tanto uno como otro están a la altura de métodos consolidados como Jarrat o Traub ya que superamos sus ordenes de convergencia haciendo menos iteraciones.

La idea de introducir las órbitas comerciales de los tipos Molniya y Tundra fue para probar nuestros métodos en el cálculo de parámetros orbitales en órbitas existentes. Los resultados han sido satisfactorios ya que si tenemos en cuenta los dígitos de precisión con los que se trabaja en la realidad, nosotros damos incluso mayor precisión que la requerida. Sería interesante poder probar nuestra nueva familia de métodos en casos en los que se tengan en cuenta fuentes perturbadoras ya que las trayectorias de las órbitas que describen los satélites se ven gravemente alteradas por fuentes perturbadoras externas como pueden ser el Sol, planetas adyacentes o distintas condiciones atmosféricas. Para ello deberíamos replantear la ecuación del movimiento relativo que resolvió Gauss, introduciendo distintas perturbaciones externas y resolviendo la ecuación diferencial que nos quede.

# **ANEXOS**



## A Representación del plano Dinámico de un método iterativo

Para representar los planos dinámicos de los métodos iterativos utilizados, definimos una malla de puntos con distintos valores de estimación inicial de nuestras variables y comparamos con la solución conocida “pa”. A partir de la representación, estudiaremos donde hay puntos de divergencia, zonas negras, y donde el algoritmo llega a la solución con una precisión determinada, zonas anaranjadas. Recordemos que esta parte está implementada en Matlab con la versión R2010a.

```
function [I,it,s,sant]=Plan_Dinamic(lim,ptos,maxiter,pa,tol,metodo,r1,r2,incrt)

% lim: Limites de representacion en cada eje [yini|yfin|dEini|dEfin]
%
xini=lim(1); xfin=lim(2); yini=lim(3); yfin=lim(4);

% Hacemos que la imagen tenga un nmero impar de puntos
if(mod(ptos,2)==0)
    ptos=ptos+1;
end

% Creamos la malla de puntos
dx=xfin-xini; dy=yfin-yini; d=max(dx,dy);
paso=d/ptos;
x=xini:paso:xfin;
y=yini:paso:yfin;
[X,Y]=meshgrid(x,y);

it=zeros(size(X));
rla=zeros(size(X));
R=zeros(size(X)); G=zeros(size(X)); B=zeros(size(X));

[f,col]=size(X);
for j=1:f
    for k=1:col
        s(1)=X(j,k);s(2)=Y(j,k); raizencontrada=0;s=s(:);it(j,k)=0;
        while (raizencontrada==0 && it(j,k)<maxiter)
            switch metodo
```

```

        case 'SG'
            s=SNR(r1,r2,s,incrt,tol,maxiter);
        case 'STR'
            s=STR(r1,r2,s,incrt,tol,maxiter);
        case 'SJ'
            s=SJ(r1,r2,s,incrt,tol,maxiter);
        case 'NAJC1'
            s=NAJC1(r1,r2,s,incrt,tol,maxiter);
        case 'NAJC2'
            s=NAJC2(r1,r2,s,incrt,tol,maxiter);
    end
    it(j,k) = it(j,k) + 1;
    if norm(s)>2000
        it(j,k)=maxiter;
        R(j,k)=0; G(j,k)=0; B(j,k)=0;
        raizencontrada=1;
    else
        if norm(s'-pa(1,:))<1e-2
            r1a(j,k)=maxiter-1.5*it(j,k);
            R(j,k)=r1a(j,k)/maxiter;
            G(j,k)=r1a(j,k)/maxiter*102/255;
            raizencontrada=1;
        end
    end
end
end
end
end

I(:, :, 1)=R(:, :);
I(:, :, 2)=G(:, :);
I(:, :, 3)=B(:, :);
imshow(I, 'Xdata', [xini xfin], 'Ydata', [yini yfin])
xlabel('Parameter of Gauss y'); ylabel('difference eccentric anomalies dE');
hold on
axis on
axis xy

```

**B**

## Métodos iterativos.

Tengamos en cuenta que la programación de los métodos que expondremos a continuación, sólo sirve para sistemas con  $n = 2$ . Si quisieramos extrapolarlo a casos con  $n > 2$ , debemos ajustar tanto  $F$  como  $F'$ . El software en el que hemos programado cada uno de los métodos ha sido Wolfram Mathematica 8.

### **B.1. Método de Danchick DANC.**

---

---

```
theta[x_]=ArcTan[1-2*x,2*Sqrt[x*(1-x)]];
dtheta[x_]=D[theta[x],x];
X[x_]=(2*theta[x]-Sin[2*theta[x]])/Sin[theta[x]]^3;
dX[x_]=D[X[x],x];
yx[x_]=1+X[x]*(1+x);
dy[x_]=D[yx[x],x];
F[x_]=x-m/yx[x]^2+1;
dF[x_]=D[F[x],x];

If[cosver<0,
x0=1/2;
While[Abs[F[x0]]>=10^-100,
x0=x0-F[x0]/dF[x0];
iterF=iterF+1;];
ysol=yx[x0];
thetasol=theta[x0];
];

xg[y_]=m/y^2-1;*)
thetag[y_]=ArcTan[1-2*xg[y],2*Sqrt[xg[y]*(1-xg[y])]];
Xg[y_]=(2*thetag[y]-Sin[2*thetag[y]])/Sin[thetag[y]]^3;
G[y_]=y-1-Xg[y]*(1+xg[y]);
dG[y_]=D[G[y],y];
```

```

If[cosver>=0,
y0=(Sqrt[m/(1+1)]+Sqrt[m/1])/2;
While[Abs[G[y0]]>=10^-100,
y0=y0-G[y0]/dG[y0];
iterG=iterG+1;];
ysol=y0;
xsol=xg[ysol];
thetasol=thetag[ysol];
]

```

## B.2. Método de Gauss con dos variables SNR

---

```

While[Abs[nf]>10^-100 && Abs[nor]>10^-100,
jsol={{df1y[y0,dE0],df1dE[y0,dE0]},{df2y[y0,dE0],df2dE[y0,dE0]}};
fsol={f1[y0,dE0],f2[y0,dE0]};
v=v0-LinearSolve[jsol,fsol];
y0=v[[1,1]];
dE0=v[[2,1]];
nor=Norm[v-v0];
nf=Abs[f1[y0,dE0]-f2[y0,dE0]];
v0=v;
iter=iter+1;
]

```

## B.3. Método de Traub STR.

---

```

While[Abs[nf]>10^-100 && Abs[nor]>10^-100,
jsol={{df1y[y0,dE0],df1dE[y0,dE0]},{df2y[y0,dE0],df2dE[y0,dE0]}};
fsol={f1[y0,dE0],f2[y0,dE0]};
vy=v0-LinearSolve[jsol,fsol];
yy=vy[[1,1]];
dEy=vy[[2,1]];
fsoly={f1[yy,dEy],f2[yy,dEy]};
v=vy-LinearSolve[jsol,fsoly];
y0=v[[1,1]];
dE0=v[[2,1]];
nor=Norm[v-v0];
nf=Sqrt[(f1[y0,dE0])^2+(f2[y0,dE0])^2];
v0=v;
iter=iter+1;
]

```

## B.4. Método de Jarrat SJ.

---

```
While[Abs[nf]>10^-100 && Abs[nor]>10^-100,
  jsol={{df1y[y0,dE0],df1dE[y0,dE0]},{df2y[y0,dE0],df2dE[y0,dE0]}};
  fsol={f1[y0,dE0],f2[y0,dE0]};
  ls=LinearSolve[jsol,fsol];
  vz=v0-(2/3)*ls;
  yz=vz[[1,1]];
  dEz=vz[[2,1]];
  jsolz={{df1y[yz,dEz],df1dE[yz,dEz]},{df2y[yz,dEz],df2dE[yz,dEz]}};
  v=v0-(1/2)*LinearSolve[3*jsolz-jsol,3*jsolz+jsol].ls;
  y0=v[[1,1]];
  dE0=v[[2,1]];
  nor=Norm[v-v0];
  nf=Sqrt[(f1[y0,dE0])^2+(f2[y0,dE0])^2];
  v0=v;
  iter=iter+1;
]
```

## B.5. Nueva familia de métodos de orden seis.

---

### B.5.1. Método NAJC1.

---

```
Ident=SetAccuracy[IdentityMatrix[Length[v0]],M];
While[Abs[nf]>10^-100 && Abs[nor]>10^-100,
  jsol={{df1y[y0,dE0],df1dE[y0,dE0]},{df2y[y0,dE0],df2dE[y0,dE0]}};
  fsol={f1[y0,dE0],f2[y0,dE0]};
  vy=v0-LinearSolve[jsol,fsol];
  yy=vy[[1,1]];
  dEy=vy[[2,1]];
  jsoly={{df1y[yy,dEy],df1dE[yy,dEy]},{df2y[yy,dEy],df2dE[yy,dEy]}};
  mu=LinearSolve[jsoly,jsol];
  H=(1/2)*(mu-Ident);
  vz=vy-H.LinearSolve[jsoly,fsol];
  yv=vz[[1,1]];
  dEv=vz[[2,1]];
  fsolz={f1[yv,dEv],f2[yv,dEv]};
  G=LinearSolve[Ident+mu,2*Ident-mu+MatrixPower[mu,2]];
  v=vz-G.LinearSolve[jsoly,fsolz];
  nor=Norm[v-v0];
  y0=v[[1,1]];
]
```

```

dE0=v[[2,1]];
nf=Sqrt[(f1[y0,dE0])^2+(f2[y0,dE0])^2];
v0=v;
iter=iter+1;
]

```

## B.5.2. Método NAJC2.

---

```

Ident=SetAccuracy[IdentityMatrix[Length[v0]],M];

While[Abs[nf]>10^-100 && Abs[nor]>10^-100,
  jsol={{df1y[y0,dE0],df1dE[y0,dE0]},{df2y[y0,dE0],df2dE[y0,dE0]}};
  fsol={f1[y0,dE0],f2[y0,dE0]};
  vy=v0-LinearSolve[jsol,fsol];
  yy=vy[[1,1]];
  dEy=vy[[2,1]];
  jsoly={{df1y[yy,dEy],df1dE[yy,dEy]},{df2y[yy,dEy],df2dE[yy,dEy]}};
  mu=LinearSolve[jsoly,jsol];
  H=(1/2)*(mu-Ident);
  vz=vy-H.LinearSolve[jsoly,fsol];
  yv=vz[[1,1]];
  dEv=vz[[2,1]];
  fsolz={f1[yv,dEv],f2[yv,dEv]};
  G=Ident+(1/2)*MatrixPower[mu-Ident,2];
  v=vz-G.LinearSolve[jsoly,fsolz];
  nor=Norm[v-v0];
  y0=v[[1,1]];
  dE0=v[[2,1]];
  nf=Sqrt[(f1[y0,dE0])^2+(f2[y0,dE0])^2];
  v0=v;
  iter=iter+1;
]

```



## Orbitas bajo estudio

Cada una de las órbitas que especificamos en este capítulo están programadas con el Wolfram Mathematica 8. Además, es el software de cálculo que utilizaremos para el resto de programas a excepción, como hemos comentado anteriormente, de la representación de los planos dinámicos.

En Mathematica no hay una interfaz principal como en Matlab, se ejecutan los distintos “notebooks” en orden secuencial. El orden de ejecución que hemos seguido consiste en, primeramente, ejecutar el fichero .nb de la órbita que queremos estudiar. Posteriormente tomamos dos posiciones de observación, ejecutamos las condiciones iniciales de la órbita bajo estudio, calculamos los parámetros  $l$ ,  $m$  y  $\nu_2 - \nu_1$  y, finalmente, aplicamos el método que deseemos probar.

### C.1. Programa para la obtención de $l$ , $m$ y $\nu_2 - \nu_1$

```
M=250;
k=SetAccuracy[0.07436574,M] ; (*unidades sqrt (e.r.)^3/min*)
mhu=SetAccuracy[1,M] ; (*unidades e.m.*)
tao=SetAccuracy[k*incrt,M];
modr1=SetAccuracy[Sqrt[Dot[r1,r1]],M];
modr2=SetAccuracy[Sqrt[Dot[r2,r2]],M];
cosver=SetAccuracy[Dot[r2,r1]/(modr1*modr2),M];
Wz=SetAccuracy[Norm[Cross[r1,r2]]/
               (modr1*modr2*Norm[Cross[r2,r1]]/(modr1*modr2)),M];
If[Wz>=0,
sinver=
  SetAccuracy[((r1[[1]]*r2[[2]]-r2[[1]]*r1[[2]])/
              (Abs[r1[[1]]*r2[[2]]-r2[[1]]*r1[[2]])*)
              (Sqrt[1-cosver^2]),M];,
sinver=
  SetAccuracy[-((r1[[1]]*r2[[2]]-r2[[1]]*r1[[2]])/
              (Abs[r1[[1]]*r2[[2]]-r2[[1]]*r1[[2]])*)
              (Sqrt[1-cosver^2]),M];;
```

```
AnomVer=SetAccuracy[ArcTan[cosver, sinver], M];
```

```
l=SetAccuracy[ ((modr1+modr2) / (4*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2])) - (1/2), M];  
m=SetAccuracy[ (mhu*tao^2) / (2*Sqrt[modr1*modr2]*Cos[AnomVer/2])^3, M];
```

## C.2. Órbitas de referencia.

---

### C.2.1. Programa para el cálculo de posiciones en las órbitas de referencia.

---

```
tol=SetAccuracy[1, M];  
Omega=SetAccuracy[Omega*2*Pi/360, M];  
incrt=SetAccuracy[0.01044412*24*60, M];  
k=SetAccuracy[0.07436574, M]; (*unidades sqrt (e.r.)^3/min*)  
mhu=SetAccuracy[1, M]; (*unidades e.m.*)  
n=SetAccuracy[ (Sqrt[mhu]*k) / (a^(3/2)), M];  
M1=SetAccuracy[0, M];  
M2=SetAccuracy[n*incrt, M];  
at=SetAccuracy[a*6378.15, M];  
h2=SetAccuracy[mhu*at*(1-ex^2), M];  
p=SetAccuracy[h2/mhu, M];  
(*M1---> posicion inicial*)  
Eant=SetAccuracy[M1, M];  
E1=SetAccuracy[1, M];  
While[tol>=10^-200,  
E1=SetAccuracy[M1+ex*Sin[Eant], M];  
tol=SetAccuracy[Abs[Eant-E1], M];  
Eant=SetAccuracy[E1, M];]  
rmod1=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E1]), M];  
vmod1=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod1)-(1/at))], M];  
xr1=SetAccuracy[at*(Cos[E1]-ex), M];  
yr1=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E1], M];  
n1=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3], M];  
xv1=SetAccuracy[-(n1*at*Sin[E1]/(1-ex*Cos[E1])), M];  
yv1=SetAccuracy[((n1*at*Sqrt[1-ex^2]*Cos[E1])/(1-ex*Cos[E1])), M];  
(*M2--> posicion2*)  
Eant1=SetAccuracy[M2, M];  
E2=SetAccuracy[1, M];  
tol2=SetAccuracy[1, M];  
While[tol2>=10^-200,  
E2=SetAccuracy[M2+ex*Sin[Eant1], M];  
tol2=Abs[Eant1-E2];  
Eant1=SetAccuracy[E2, M];]  
rmod2=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E2]), M];
```

```

vmod2=SetAccuracy[Sqrt[mhu*(2/rmod2)-(1/at)],M];
xr2=SetAccuracy[at*(Cos[E2]-ex),M];
yr2=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E2],M];
n2=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv2=SetAccuracy[-(n2*at*Ssin[E2]/(1-ex*Cos[E2])),M];
yv2=SetAccuracy[(n2*at*Ssqrt[1-ex^2]*Cos[E2]/(1-ex*Cos[E2])),M];
P={0,0,0};
Q={0,0,0};
P[[1]]=SetAccuracy[Cos[w]*Cos[Omega]-Sin[w]*Sin[Omega]*Cos[i],M];
P[[2]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[Omega]+Sin[w]*Cos[Omega]*Cos[i],M];
P[[3]]=SetAccuracy[Sin[w]*Sin[i],M];
Q[[1]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Cos[Omega]-Cos[w]*Sin[Omega]*Cos[i],M];
Q[[2]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Sin[Omega]+Cos[w]*Cos[Omega]*Cos[i],M];
Q[[3]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[i],M];
r11=SetAccuracy[xr1*P+yr1*Q,M];
r21=SetAccuracy[xr2*P+yr2*Q,M];
RT=SetAccuracy[6378.15,M];

r1=SetAccuracy[r11/RT,M];
r2=SetAccuracy[r21/RT,M];

```

### C.2.2. Órbita de referencia I.

---

```

Clear["Global`*"]
M=250;
i=SetAccuracy[15,M];
w=SetAccuracy[10,M];
Omega=SetAccuracy[30,M];
a=SetAccuracy[4,M];
ex=SetAccuracy[0.2,M];

```

### C.2.3. Órbita de referencia III.

---

```

Clear["Global`*"]
M=250;
incrt=SetAccuracy[0.01316924*24*60,M];
a=SetAccuracy[2,M];
ex=SetAccuracy[0.05,M];
i=SetAccuracy[60,M];
Omega=SetAccuracy[120,M];
w=SetAccuracy[150,M];

```

#### C.2.4. Órbita de referencia VI.

---

```
Clear["Global`*"]*)
M=250;
i=SetAccuracy[88,M];
w=SetAccuracy[10,M];
Omega=SetAccuracy[140,M];
a=SetAccuracy[4,M];
ex=SetAccuracy[0.15,M];
```

#### C.2.5. Condiciones iniciales, $F$ y $F'$ en órbitas de referencia I, III y VI.

---

Comentamos con el comando (\*\*) todas las condiciones iniciales expuestas excepto las de la órbita que vayamos a utilizar y las funciones que componen  $F$  y  $F'$ .

```
(*Condiciones iniciales, F y F' orbita de referencia I.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[1,M];
dE0=SetAccuracy[0.1,M];
v0={{y0},{dE0}};

(*Condiciones iniciales orbita de referencia III.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[1,M];
dE0=SetAccuracy[0.5,M];
v0={{y0},{dE0}};

(*Condiciones iniciales orbita de referencia VI.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[12,M];
dE0=SetAccuracy[2.8,M];
v0={{y0},{dE0}};

(*Condiciones iniciales orbita Molniya.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[28,M];
dE0=SetAccuracy[2.7,M];
v0={{y0},{dE0}};
```

```

(*Condiciones iniciales orbita Tundra.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[7.1,M];
dE0=SetAccuracy[2.6,M];
v0={{y0},{dE0}};

(*F y F' comunes *)

f1[y_,dE_]=y^2-m/(1+Sin[dE/4]^2);
f2[y_,dE_]=y^2*(y-1)-m*((dE-Sin[dE])/Sin[dE/2]^3);
df1y[y_,dE_]=D[f1[y,dE],y];
df1dE[y_,dE_]=D[f1[y,dE],dE];
df2y[y_,dE_]=D[f2[y,dE],y];
df2dE[y_,dE_]=D[f2[y,dE],dE];

```

### C.3. Órbitas de satélites artificiales comerciales.

---

En esta sección damos los programas que hemos ejecutado para dar las posiciones dentro de las órbitas Molniya y Tundra.

#### C.3.1. Programa para el cálculo de posiciones en las órbitas destinadas a comunicaciones.

---

```

mhu=SetAccuracy[1,M]; (*unidades e.m.*)
tol=SetAccuracy[1,M];
Omega=SetAccuracy[Omega*2*Pi/360,M];
k=SetAccuracy[0.07436574,M]; (*unidades sqrt (e.r.)^3/min*)
n=SetAccuracy[(Sqrt[mhu]*k)/(a^(3/2)),M];
M1=SetAccuracy[0,M];
M2=SetAccuracy[n*575.6439,M];
incrt=575.6439;
at=SetAccuracy[a*6378.15,M];
h2=SetAccuracy[mhu*at*(1-ex^2),M];
p=SetAccuracy[h2/mhu,M];
(*M1---> posicion inicial*)
Eant=SetAccuracy[M1,M];
E1=SetAccuracy[1,M];
While[tol>=10^-200,
E1=SetAccuracy[M1+ex*Sin[Eant],M];
tol=SetAccuracy[Abs[Eant-E1],M];
Eant=SetAccuracy[E1,M];]
rmod1=SetAccuracy[at*(1-ex*Cos[E1]),M];
vmod1=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod1)-(1/at))],M];
xrl=SetAccuracy[at*(Cos[E1]-ex),M];

```

```

yrl=SetAccuracy[at*Sqrt[1-ex^2]*Sin[E1],M];
n1=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv1=SetAccuracy[-(n1*at*Ssin[E1]/(1-ex*Ccos[E1])),M];
yv1=SetAccuracy[((n1*at*Ssqrt[1-ex^2]*Ccos[E1])/(1-ex*Ccos[E1])),M];
(*M2--> posicion2*)
Eant1=SetAccuracy[M2,M];
E2=SetAccuracy[1,M];
tol2=SetAccuracy[1,M];
While[tol2>=10^-200,
E2=SetAccuracy[M2+ex*Ssin[Eant1],M];
tol2=Abs[Eant1-E2];
Eant1=SetAccuracy[E2,M];]
rmod2=SetAccuracy[at*(1-ex*Ccos[E2]),M];
vm2=SetAccuracy[Sqrt[mhu*((2/rmod2)-(1/at))],M];
xr2=SetAccuracy[at*(Ccos[E2]-ex),M];
yr2=SetAccuracy[at*Ssqrt[1-ex^2]*Sin[E2],M];
n2=SetAccuracy[Sqrt[mhu/at^3],M];
xv2=SetAccuracy[-(n2*at*Ssin[E2]/(1-ex*Ccos[E2])),M];
yv2=SetAccuracy[((n2*at*Ssqrt[1-ex^2]*Ccos[E2])/(1-ex*Ccos[E2])),M];
P={0,0,0};
Q={0,0,0};
P[[1]]=SetAccuracy[Cos[w]*Ccos[Omega]-Sin[w]*Sin[Omega]*Ccos[i],M];
P[[2]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[Omega]+Sin[w]*Ccos[Omega]*Ccos[i],M];
P[[3]]=SetAccuracy[Sin[w]*Sin[i],M];
Q[[1]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Ccos[Omega]-Ccos[w]*Sin[Omega]*Ccos[i],M];
Q[[2]]=SetAccuracy[-Sin[w]*Sin[Omega]+Ccos[w]*Ccos[Omega]*Ccos[i],M];
Q[[3]]=SetAccuracy[Cos[w]*Sin[i],M];
r11=SetAccuracy[xr1*P+yrl*Q,M];
r21=SetAccuracy[xr2*P+yr2*Q,M];
RT=SetAccuracy[6378.15,M];

r1=SetAccuracy[r11/RT,M];
r2=SetAccuracy[r21/RT,M];

```

### C.3.2. Órbita Molniya

---

```

Clear["Global`*"]
M=250;
i=SetAccuracy[63.42,M];
w=SetAccuracy[270,M];
Omega=SetAccuracy[60.71,M];
a=SetAccuracy[4.12,M];
ex=SetAccuracy[0.75,M];
i=SetAccuracy[i*2*Pi/360,M];
w=SetAccuracy[w*2*Pi/360,M];
M1=SetAccuracy[0,M];
M2=SetAccuracy[n*282.6264,M]; (*Dato de entrada en min*)

```

### C.3.3. Órbita Tundra

---

```
Clear["Global`*"]
M=250;
i=SetAccuracy[63.43,M];
w=SetAccuracy[270,M];
Omega=SetAccuracy[290.2,M];
a=SetAccuracy[6.62,M];
ex=SetAccuracy[0.27,M];
i=SetAccuracy[i*2*Pi/360,M];
w=SetAccuracy[w*2*Pi/360,M];
M1=SetAccuracy[0,M];
M2=SetAccuracy[n*575.6439,M]; (*Dato de entrada en min*)
```

### C.3.4. Condiciones iniciales, $F$ y $F'$ en órbitas comerciales.

---

```
(*Condiciones iniciales, F y F' orbita de referencia I.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[1,M];
dE0=SetAccuracy[0.1,M];
v0={{y0},{dE0}};

(*Condiciones iniciales orbita de referencia III.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[1,M];
dE0=SetAccuracy[0.5,M];
v0={{y0},{dE0}};

(*Condiciones iniciales orbita de referencia VI.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[12,M];
dE0=SetAccuracy[2.8,M];
v0={{y0},{dE0}};

(*Condiciones iniciales orbita Molniya.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[28,M];
dE0=SetAccuracy[2.7,M];
v0={{y0},{dE0}};
```

```

(*Condiciones iniciales orbita Tundra.*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
y0=SetAccuracy[7.1,M];
dE0=SetAccuracy[2.6,M];
v0={{y0},{dE0}};

(*F y F' comunes *)

f1[y_,dE_]=y^2-m/(1+Sin[dE/4]^2);
f2[y_,dE_]=y^2*(y-1)-m*((dE-Sin[dE])/Sin[dE/2]^3);
df1y[y_,dE_]=D[f1[y,dE],y];
df1dE[y_,dE_]=D[f1[y,dE],dE];
df2y[y_,dE_]=D[f2[y,dE],y];
df2dE[y_,dE_]=D[f2[y,dE],dE];

```

## C.4. Cálculo de la velocidad

---

Después de ejecutar cada método, debemos ejecutar este notebook para calcular la velocidad.

```

a=SetAccuracy[((tao*Sqrt[mhu])/(2*y0*Sqrt[modr1*modr2]
*Cos[AnomVer/2]*Sin[dE0/2]))^2,M];

f=SetAccuracy[1-(a/modr1)*(1-Cos[dE0]),M];
g=SetAccuracy[tao-(Sqrt[a^3]/Sqrt[mhu])*(dE0-Sin[dE0]),M];

velocidad=SetAccuracy[(r2-f*r1)/g,M]

```

## C.5. Cálculo de los parámetros orbitales a partir de la velocidad y la posición.

---

```

tanresta=SetAccuracy[1,M];
Omegar=SetAccuracy[0,M];

rcuad=Dot[r1,r1];
modr=Sqrt[rcuad];
rporr=Dot[r1,velocidad];
Vcuad=Dot[velocidad,velocidad];
modV=Sqrt[Vcuad];
cosphi=(rporr)/(modr*modV);
ar=1/((2/modr)-(Vcuad/mhu));
er=Sqrt[(1-modr/ar)^2+(rporr/Sqrt[(mhu*ar)^2])];

```

```

h=Cross[r1, velocidad];

cosi=(r1[[1]]*velocidad[[2]]-r1[[2]]*velocidad[[1]])/(Sqrt[mhu*ar*(1-er^2)]);
ir=ArcCos[cosi];
Omegar=ArcTan[-(r1[[2]]*velocidad[[3]]-r1[[3]]*velocidad[[2]])/(r1[[3]]
*velocidad[[1]]-r1[[1]]*velocidad[[3]])];
modh=Sqrt[Dot[h,h]];
hx1=modh*Sin[Omegar]*Sin[ir];
hx2=modh*Sin[Omegar+Pi]*Sin[ir];
If[(Abs[(hx1-h[[1]])]<=10^-6),
Omegar=Omegar, Omegar=Omegar+Pi];
p=ar*(1-er^2);
cE=(1-modr/ar)/er; sE=(rporr/Sqrt[mhu*ar])/er; Er=ArcTan[cE,sE]; E2r=E1+Er;
cnu=(ar*Cos[Er]+ar*er)/modr;
snu=ar*Sqrt[1-er^2]*Sin[Er]/modr;
anomVer=ArcTan[cnu,snu];
anomVer2=AnomVer+anomVer;
If[ir==0 || ir==Pi,
sinsuma=(r1[[2]]*Cos[Omegar]-r1[[1]]*Sin[Omegar])/modr, sinsuma=r1[[3]]
/(modr)/Sin[ir]];
cossuma=(r1[[1]]*Cos[Omegar]+r1[[2]]*Sin[Omegar])/modr;
suma=ArcTan[cossuma, sinsuma];
wr=suma-anomVer;
Mr=Er-er*Sin[Er];

Mr=Mr*360/2/Pi;
ir=ir*360/2/Pi;
wr=wr*360/2/Pi;
Omegar=Omegar*360/2/Pi;
nr=k*Sqrt[mhu/a^3];
t1=0;t2=incrt;
T=(er*(Sin[E2r]+Sin[Er])-E2r-Er)/2/nr+(t2+t1)/2;
T=T/60/24;

```

**D**

## Ejemplos académicos.

Para los sistemas de ecuaciones con  $n > 2$  debemos cambiar  $F$  y  $F'$  en cada método por un vector columna  $n \times 1$  en el caso de  $F$  y por una matriz  $n \times n$  en el caso de la jacobiana  $F'$ .

### D.1. Sistema con $n = 2$

---

```
(*Sol=[3.4706,-2.4706]*)
M=250;
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
x10=SetAccuracy[4,M];
x20=SetAccuracy[-3,M];

v0={{x10},{x20}};
f1[x1_,x2_]=Exp[x1]*Exp[x2]+x1*Cos[x2];
f2[x1_,x2_]=x1+x2-1;
df1y[x1_,x2_]=D[f1[x1,x2],x1];
df1dE[x1_,x2_]=D[f1[x1,x2],x2];
df2y[x1_,x2_]=D[f2[x1,x2],x1];
df2dE[x1_,x2_]=D[f2[x1,x2],x2];

jsol={{df1y[x10,x20],df1dE[x10,x20]},{df2y[x10,x20],df2dE[x10,x20]}};
fsol={f1[x10,x20],f2[x10,x20]};
```

## D.2. Sistema con n = 3

---

---

```
(*Sol=[2.1402,-2.0902,-0.2235]*)
M=250;
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
x10=SetAccuracy[12,M];
x20=SetAccuracy[-2,M];
x30=SetAccuracy[-1,M];

v0={{x10},{x20},{x30}};*)
f1[x1_,x2_,x3_]=x1^2+x2^2+x3^2-9;
f2[x1_,x2_,x3_]=x1*x2*x3-1;
f3[x1_,x2_,x3_]=x1+x2-x3^2;

df1x1[x1_,x2_,x3_]=D[f1[x1,x2,x3],x1];
df2x1[x1_,x2_,x3_]=D[f2[x1,x2,x3],x1];
df3x1[x1_,x2_,x3_]=D[f3[x1,x2,x3],x1];

df1x2[x1_,x2_,x3_]=D[f1[x1,x2,x3],x2];
df2x2[x1_,x2_,x3_]=D[f2[x1,x2,x3],x2];
df3x2[x1_,x2_,x3_]=D[f3[x1,x2,x3],x2];

df1x3[x1_,x2_,x3_]=D[f1[x1,x2,x3],x3];
df2x3[x1_,x2_,x3_]=D[f2[x1,x2,x3],x3];
df3x3[x1_,x2_,x3_]=D[f3[x1,x2,x3],x3];

jsol={{df1x1[x10,x20,x30],df1x2[x10,x20,x30],df1x3[x10,x20,x30]},
      {df2x1[x10,x20,x30],df2x2[x10,x20,x30],df2x3[x10,x20,x30]},
      {df3x1[x10,x20,x30],df3x2[x10,x20,x30],df3x3[x10,x20,x30]}};
fsol={f1[x10,x20,x30],f2[x10,x20,x30],f3[x10,x20,x30]};
```

## D.3. Sistema con n = 4

---

---

```
(*Sol=[0.5773,0.5773,0.5773,-0.2886]*)
nor=SetAccuracy[1,M];
nf=SetAccuracy[1,M];
x10=SetAccuracy[5,M];
x20=SetAccuracy[5,M];
x30=SetAccuracy[5,M];
x40=SetAccuracy[-1,M];

v0={{x10},{x20},{x30},{x40}};*)
f1[x1_,x2_,x3_,x4_]=x2*x3+x4*(x2+x3);
f2[x1_,x2_,x3_,x4_]=x1*x3+x4*(x1+x3);
```

```

f3[x1_, x2_, x3_, x4_] = x1*x3 + x4*(x1 + x2);
f4[x1_, x2_, x3_, x4_] = x1*x2 + x1*x3 + x2*x3 - 1;

df1x1[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f1[x1, x2, x3, x4], x1];
df2x1[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f2[x1, x2, x3, x4], x1];
df3x1[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f3[x1, x2, x3, x4], x1];
df4x1[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f4[x1, x2, x3, x4], x1];

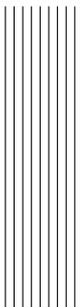
df1x2[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f1[x1, x2, x3, x4], x2];
df2x2[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f2[x1, x2, x3, x4], x2];
df3x2[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f3[x1, x2, x3, x4], x2];
df4x2[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f4[x1, x2, x3, x4], x2];

df1x3[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f1[x1, x2, x3, x4], x3];
df2x3[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f2[x1, x2, x3, x4], x3];
df3x3[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f3[x1, x2, x3, x4], x3];
df4x3[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f4[x1, x2, x3, x4], x3];

df1x4[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f1[x1, x2, x3, x4], x4];
df2x4[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f2[x1, x2, x3, x4], x4];
df3x4[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f3[x1, x2, x3, x4], x4];
df4x4[x1_, x2_, x3_, x4_] = D[f4[x1, x2, x3, x4], x4];

jsol = {{df1x1[x10, x20, x30, x40], df1x2[x10, x20, x30, x40], df1x3[x10, x20, x30, x40],
df1x4[x10, x20, x30, x40]}, {df2x1[x10, x20, x30, x40], df2x2[x10, x20, x30, x40],
df2x3[x10, x20, x30, x40], df2x4[x10, x20, x30, x40]}, {df3x1[x10, x20, x30, x40],
df3x2[x10, x20, x30, x40], df3x3[x10, x20, x30, x40], df3x4[x10, x20, x30, x40]},
{df4x1[x10, x20, x30, x40], df4x2[x10, x20, x30, x40], df4x3[x10, x20, x30, x40],
df4x4[x10, x20, x30, x40]}};
fsol = {f1[x10, x20, x30, x40], f2[x10, x20, x30, x40], f3[x10, x20, x30, x40],
f4[x10, x20, x30, x40]};

```



## Bibliografía

- [1] A. CORDERO, J.R. TORREGROSA. Variants of Newton's Method using fifth-order quadrature formulas. *Applied Mathematics and Computation* 190, 686-698, 2007.
- [2] A.M OSTROWSKI. *Solutions of Equations and Systems of Equations*. New York, Academic, 1966.
- [3] H.T KUNG, J.F. TRAUB. Optimal order of one-point and multi-point iteration. *Applied Mathematics and Computation* 21, 643-651, 1974.
- [4] N. ROMERO ALVAREZ, J.A. EZQUERRO, M.A HERNANDEZ. Aproximación de soluciones de algunas ecuaciones integrales de Hammerstein mediante métodos iterativos tipo Newton. XXI Congreso de ecuaciones diferenciales y aplicaciones, Universidad Castilla-La Mancha, 2009.
- [5] P. R. ESCOBAL. *Methods of Orbit Determination*. Florida, Robert E. Krieger Publishing Company, 1965.
- [6] R. DANCHICK. Gauss meets Newton again: How to make Gauss orbit determination from two position vectors more efficient and robust with Newton-Raphson iterations. Los Angeles, *Applied Mathematics and Computation* 195, 364-375, 2008.
- [7] P. JARRAT. Some fourth order multipoint iterative methods for solving equations. *Math Comput.* 20, 434-437, 1966.
- [8] J. F. TRAUB. *Iterative methods for the solution of equations*. New York, Chelsea Publishing Company, 222-230, 1982.
- [9] M. CAPDEROU. *Satellites: Orbits and missions*. France, Springer-Verlag, 222-228, 2005.

- [10] A. CORDERO, M. FARDI, M. GHASEMI, J.R. TORREGROSA. A family of iterative methods with accelerated eighth-order convergence. *Journal of Applied Mathematics*. Volume 2012, Article ID 282561.
- [11] F.I. CHICHARRO. Dimensión fractal de métodos iterativos de resolución de ecuaciones no lineales. Aplicación a la determinación de órbitas de satélites artificiales. Valencia, Proyecto final de carrera por la UPV, Septiembre 2011.
- [12] R.D. KORGI. El universo Latex. Bogotá, Universidad Nacional de Colombia, Unibiblos, 2003.
- [13] V. RAMÍREZ, P. GONZÁLEZ, M. PASADAS, D. BARRERA. Introducción a Mathematica y primeras aplicaciones. Granada, Proyecto Sur, 1997.
- [14] E. T. BELL. Los grandes matemáticos. Buenos Aires, Ed. Losada, 2010.
- [15] M. PENKOVA. Métodos iterativos eficientes para la resolución de sistemas no lineales. Valencia, Tesis Doctoral por la UPV, 2013.
- [16] S. ARTIDIELLO, F. CHICHARRO, A. CORDERO, J.R. TORREGROSA. Local convergence and dynamical analysis of a new family of optimal fourth-order iterative methods. London, *International Journal of Computer Mathematics*, 2012.
- [17] A.CORDERO, M.J. MARTÍNEZ. Mecánica orbital: movimiento de satélites. Libro CD. Ref.2004.676 Ed. UPV