

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

**MODELOS DINÁMICOS AVANZADOS
DE EJES FERROVIARIOS**

Presentada por: D. José Martínez Casas

Dirigida por: Dr. D. Luis Baeza González

Dr. D. Francisco D. Denia Guzmán

Valencia, Noviembre de 2013

TESIS DOCTORAL

**MODELOS DINÁMICOS AVANZADOS
DE EJES FERROVIARIOS**

que para la obtención
del grado de
Doctor Ingeniero Industrial

presenta

D. José Martínez Casas

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales
de la Universitat Politècnica de València

Dirigida por

Dr. D. Luis Baeza González

Dr. D. Francisco D. Denia Guzmán

Valencia, Noviembre de 2013

RESUMEN

En esta Tesis se aborda el estudio de la interacción dinámica de un vehículo ferroviario con la vía a través de la incorporación en el modelado de la flexibilidad de los elementos que componen el sistema. La dinámica acoplada del vehículo con la vía determina algunos problemas importantes de la ingeniería ferroviaria como son el ruido de rodadura y la generación de determinados desgastes anormales de la rueda y del carril, lo cual afecta a la seguridad, al impacto ambiental y al coste de la explotación.

Las principales contribuciones de esta Tesis se enmarcan en el modelado del eje montado donde, además de la flexibilidad, se consideran los efectos inerciales asociados al giro. Los trabajos realizados abarcan desde la profundización en el campo de la Mecánica de Rotores en el que se fundamentan los modelos del eje montado, hasta la aplicación a los casos de interés industrial que las hipótesis adoptadas más avanzadas hacen posible plantear.

Para la obtención de la ecuación del movimiento del eje se propone una metodología para sólidos de revolución basada en el uso de un sistema de coordenadas en el que, aprovechando la simetría axial, se utilizan las geometrías deformadas modales en ejes fijos como base para definir el desplazamiento de una partícula en función de su posición espacial en la configuración no deformada (planteamiento modal Euleriano). Al estar formulado en coordenadas espaciales fijas, el modelo es eficiente en aquellos casos en los que hay interacción entre el sólido rotatorio con una estructura no rotatoria, tal como corresponde al caso de un eje ferroviario con la vía. Las hipótesis adoptadas permiten considerar tanto la dinámica cuando el sólido describe una trayectoria arbitraria añadida al movimiento de rotación como el efecto del amortiguamiento interno.

La adopción de un sistema de coordenadas de trayectoria que se mueve según el eje de la vía en combinación con el planteamiento modal Euleriano, han hecho posible obtener una formulación del eje montado en curva cuyo coste computacional asociado es muy bajo. Para ello se desarrolla la ecuación del movimiento adoptando la hipótesis de pequeños desplazamientos con respecto al sistema de trayectoria, e incorporando un modelo de contacto rueda-carril flexible basado en el método de penalti, que considera los perfiles reales de la rueda y del carril.

El modelado general del sistema se lleva a cabo adoptando técnicas de subestructuración en las que los diferentes subsistemas se formulan de manera separada, acoplándose posteriormente a través de las fuerzas que se transmiten entre ellos. En el modelo de la vía se adoptan condiciones de contorno cíclicas que reducen el efecto de borde asociado a la longitud finita de ésta. Los modelos permiten la posibilidad de considerar tanto una vía recta como una vía curva de radio constante.

Los trabajos muestran resultados asociados a determinados casos prácticos que dan origen a la dinámica de alta frecuencia del sistema vía - masas no suspendidas. Se abordan los efectos de las irregularidades de la banda de rodadura y del camino de rodadura en el carril, tales como los planos de rueda (o planos de bloqueo), la corrugación del carril (o desgaste ondulatorio) y la presencia de defectos pseudoaleatorios de onda media o corta (rugosidad). Las simulaciones presentadas en esta Tesis muestran el cálculo de las tensiones en el cuerpo del eje y las fuerzas en el contacto rueda-carril.

Palabras clave: Sólido flexible rotatorio, amortiguamiento modal, coordenadas Eulerianas, vehículo ferroviario, interacción dinámica vehículo-vía, vía curva flexible, rugosidad de carril, plano de rueda, fuerzas de contacto rueda-carril, tensiones dinámicas en eje, fatiga de ejes ferroviarios.

ABSTRACT

In this Thesis the dynamic interaction of a railway vehicle with the track is studied through the incorporation in the modelling of the flexibility associated with the elements of the system. The coupled dynamics of the vehicle with the track determines some important railway engineering problems, such as rolling noise and generation of abnormal wear of wheel and rail, which affects the safety, environmental impact and cost of exploitation.

The main contributions of this Thesis are related to the modelling of the wheelset, where in addition to flexibility, inertial effects associated with the rotation are considered. The works carried out range from deepening in the field of Rotors Dynamics in which wheelset models are based, to application to cases of industrial interest where the more advanced assumptions are fulfilled.

A methodology suitable for flexible rotating solids of revolution is proposed to obtain the equation of motion of the wheelset. Taking advantage of the axial symmetry, the model makes use of the vibration mode shapes in a non-rotating frame as basis functions, in order to define the displacements of a particle depending on its spatial position in the undeformed configuration (Eulerian modal approach). Due to the fixed coordinate system, the model is effective in those cases where there is an interaction between the rotating solid and the non-rotating structure, as the case of a wheelset with the track. The considered assumptions allow to consider the dynamics when the solid describes an arbitrary trajectory added to the rotation as well as the effect of internal damping.

Adopting a trajectory-based coordinate system moving along the axis of the track, in combination with the Eulerian modal approach, it is possible to obtain a formulation of the wheelset in curve, whose associated computational cost is very low. This is achieved by combining the equation of motion and the hypothesis of small displacements with respect to the trajectory system. In addition, a wheel-rail flexible contact model is incorporated, which is based on a penalty method that considers the actual profiles of the wheel and rail.

The model of the overall system is performed by adopting a substructuring technique, where the different substructures are formulated separately and then are coupled through the forces transmitted between

them. Cyclic boundary conditions are taken in the model of the track that reduce the edge effect associated with the finite length of the track. The models are able to consider a straight track as well as a curved track of constant radius.

The works show results associated with a number of practical scenarios that give rise to the high frequency dynamics of the track - unsprung masses system. The effects of irregularities of the wheel surface and the rail head are addressed, such as wheel-flat, the rail corrugation (or harmonic wear) and the presence of random defects of mid and short wavelength (roughness). The simulations presented in this Thesis show the calculation of stresses in the wheelset axle and the wheel-rail contact forces.

Keywords: rotating flexible solid, modal damping, Eulerian coordinates, railway vehicle, vehicle-track interaction, flexible curved track, rail roughness, wheelflat, wheel-rail contact forces, dynamic stresses in the wheelset axle, wheelset axle fatigue.

RESUM

En esta Tesi s'aborda l'estudi de la interacció dinàmica d'un vehicle ferroviari amb la via a través de la incorporació en el modelatge de la flexibilitat dels elements que componen el sistema. La dinàmica acoblada del vehicle amb la via determina alguns problemes importants de l'enginyeria ferroviària com són el soroll de rodament i la generació de determinats desgastos anormals de la roda i del carril, la qual cosa afecta la seguretat, a l'impacte ambiental i al cost de l'explotació.

Les principals contribucions d'esta Tesi s'emmarquen en el modelatge de l'eix muntat on, a més de la flexibilitat, es consideren els efectes inercials associats al gir. Els treballs realitzats comprenen des de l'aprofundiment en el camp de la Mecànica de Rotors en què es fonamenten els models de l'eix muntat, fins a l'aplicació als casos d'interés industrial que les hipòtesis adoptades més avançades fan possible plantejar.

Per a l'obtenció de l'equació del moviment de l'eix es proposa una metodologia per a sòlids de revolució basada en l'ús d'un sistema de coordenades en què, aprofitant la simetria axial, s'utilitzen les geometries deformades modals en eixos fixos com a base per a definir el desplaçament d'una partícula en funció de la seua posició espacial en la configuració no deformada (plantejament modal Eulerià). Degut a la formulació en coordenades espacials fixes, el model és eficient en aquells casos en què hi ha interacció entre el sòlid rotatori amb una estructura no rotatòria, tal com correspon al cas d'un eix ferroviari amb la via. Les hipòtesis adoptades permeten considerar la dinàmica quan el sòlid descriu una trajectòria arbitrària afegida al moviment de rotació i també l'efecte de l'amortiment intern.

L'adopció d'un sistema de coordenades de trajectòria que es mou segons l'eix de la via en combinació amb el plantejament modal Eulerià, han fet possible obtindre una formulació de l'eix muntat en corba amb un cost computacional associat molt reduït. Per a això es desenrotlla l'equació del moviment adoptant la hipòtesi de xicotets desplaçaments respecte al sistema de trajectòria, i incorporant un model de contacte roda-carril flexible basat en un mètode de penal, que considera els perfils reals de la roda i del carril.

El modelatge general del sistema es du a terme adoptant tècniques de subestructuració en les quals els diferents subsistemes es formulen de manera separada, acoblant-se a través de les forces que es transmeten entre

ells. En el model de la via s'adopten condicions de contorn cíclics que reduïxen l'efecte de bord associat a la longitud finita de la via. Els models consideren una via recta i també una via corba de ràdio constant.

Els treballs mostren resultats associats a determinats casos pràctics que donen origen a la dinàmica d'alta freqüència del sistema via - masses no suspeses. S'aborden els efectes de les irregularitats de la banda de rodament i del camí de rodament en el carril, com ara els plans de roda (o plans de bloqueig), la corrugació del carril (o desgast ondulatori) i la presència de defectes pseudoaleatoris d'ona mitjana o curta (rugositat). Les simulacions presentades en esta Tesi mostren el càlcul de les tensions en el cos de l'eix i les forces en el contacte roda-carril.

Paraules clau: sòlid flexible rotatori, amortiment modal, coordenades Eulerianes, vehicle ferroviari, interacció dinàmica vehicle-via, via corba flexible, rugositat de carril, pla de roda, forces de contacte roda-carril, tensions dinàmiques en eix, fatiga d'eixos ferroviaris.

PREFACIO

Esta Tesis Doctoral se enmarca en el área de Ingeniería Mecánica, y pertenece a la línea de investigación sobre dinámica ferroviaria. Contiene las investigaciones originales llevadas a cabo por el candidato, excepto aquellas explícitamente referenciadas. La Tesis consiste en dos partes, la primera de las cuales contiene una memoria que proporciona una introducción del trabajo y describe los diferentes modelos desarrollados y las simulaciones dinámicas llevadas a cabo. Además esta parte incluye diversos resultados mostrados en los artículos adjuntos y las conclusiones que se derivan. La segunda parte de la Tesis es una colección de los siguientes artículos:

Artículo 1. José Martínez-Casas, Juan Fayos, Francisco D. Denia, Luis Baeza, *Dynamics of damped rotating solids of revolution through an Eulerian modal approach*, Journal of Sound and Vibration 331 (2012) 868-882.

Artículo 2. José Martínez-Casas, Laura Mazzola, Luis Baeza, Stefano Bruni, *Numerical estimation of stresses in railway axles using a train-track interaction model*, International Journal of Fatigue 47 (2013) 18-30.

Artículo 3. José Martínez-Casas, Egidio Di Gialleonardo, Stefano Bruni, Luis Baeza, *A comprehensive model of the railway wheelset-track interaction in curves*, enviado a Journal of Sound and Vibration en 2013.

Otras publicaciones del autor

Artículo A1. Laura Mazzola, Stefano Bruni, José Martínez-Casas, Luis Baeza, *Numerical estimation of stresses in railway axles using flexible wheelset-track models*, Proceedings of the 22nd Symposium of the International Association for Vehicle System Dynamics (ISBN 978-1-905476-59-6), Manchester, England, 2011.

Artículo A2. José Martínez-Casas, Francisco D. Denia, Paloma Vila, Luis Baeza, *Modelo dinámico de sólidos rotatorios de revolución con amortiguamiento: planteamiento modal Euleriano*, Actas del X Congreso Iberoamericano de Ingeniería Mecánica – CIBIM 10 (ISBN 978-989-96276-2-8), Oporto, Portugal, 2011.

Artículo A3. José Martínez-Casas, Luis Baeza, Laura Mazzola, Stefano Bruni, *Estimación numérica de las tensiones en ejes de vehículos ferroviarios*, Actas del XIX Congreso Nacional de Ingeniería Mecánica (ISSN 0212-5072), Castellón, España, 2012.

Artículo A4. José Martínez-Casas, Stefano Bruni, Egidio Di Gialleonardo, Luis Baeza, *On the dynamics of a rotating flexible wheelset running on a flexible curved track*, Proceedings of the 9th International Conference on Railway Bogies and Running Gears, Budapest, Hungary, 2013.

Artículo A5. Paloma Vila, Luis Baeza, José Martínez-Casas, Javier Carballeira, *Rail corrugation growth analysis using advanced dynamic models*, Proceedings of the 23rd International Symposium on Dynamics of Vehicles on Roads and Tracks, Qingdao, China, 2013.

Artículo A6. José Martínez-Casas, Juan Fayos, Francisco D. Denia, Luis Baeza, *An analysis of the backward mode in damped rotating beams*, enviado a revista internacional en 2013.

AGRADECIMIENTOS

En primer lugar, quiero expresar mi más sincero agradecimiento a mis directores de Tesis. Luis, qué decirte que no sepas. Ambos sabemos lo mucho que hemos luchado por este trabajo desde el principio. Y así y sólo así, es como se consiguen hacer bien las cosas, en equipo. Sin duda alguna, el éxito de este trabajo es en gran parte gracias a ti. Nunca olvidaré estos últimos meses de angustia en los que has estado a mi lado codo con codo, animándome y dándome energías para acabar. “Acho, que esto sale, hazme caso, échale horas y saldrá”. Maldito creepage, cuántas horas de sueño me ha quitado. En fin Luis, muchísimas gracias por todo, por estar ahí siempre que te necesitaba tanto a nivel laboral como personal. Me tendrás para todo lo que me necesites, como compañero de trabajo y sobre todo como amigo. Gracias RailMan.

A Paco, mi mentor. No tengo palabras de agradecimiento, de verdad. Decirte lo que siempre grito a los cuatro vientos haya quien haya, eres mi ejemplo a seguir. Desde que te conocí en clase, dije: “quiero ser como él”, y créeme, lucho cada día porque así sea. Descubrirte como profesor fue mi motivación para estar aquí, para llegar tan lejos, y ahora además me siento afortunado de tenerte como amigo. Agradécerte enormemente tus sabios consejos, tu grata compañía durante tanto tiempo, la preocupación que siempre has mostrado por mí, y sobre todo, agradécerte que siempre me hayas tendido tu mano para levantarme cuando me has visto caído. Eres mi ejemplo profesional y personal. Gracias de corazón, amigo mío.

Desidero ringraziare Stefano Bruni per la possibilità che mi ha dato di lavorare a Milano presso il suo gruppo e per tutto l'aiuto e il sostegno datomi da quando ci conosciamo. È stato un enorme piacere lavorare al tuo fianco, come ricercatore ho appreso e sono cresciuto molto grazie a te. Sei un gran professore e una persona meravigliosa. Ti considero come un ulteriore direttore della mia Tesi. Questo è solo l'inizio della nostra collaborazione e spero di continuare a lavorare al tuo fianco. Mille grazie Stefano per tutto. Desidero anche ringraziare Laura Mazzola e Egidio per la loro collaborazione in questa Tesi, grazie ragazzi.

Mis agradecimientos también para todos mis compañeros del departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales. Paloma, Vicente, Paco V., Manolo, Pepe, Suñer, Juanjo, Jose Enrique, Juanvi, Toni, Ana V. y Ana P., Alex, Paco Rubio, muchas gracias a todos por vuestro compañerismo y por hacer del lugar de trabajo un sitio tan agradable. A Juan Fayos, con el que empecé mi andadura en el mundo de los Rotores peleándome por descifrar su gran Tesis. Eugenio, como no agradécerte esos raticos que aunque cortos son tan especiales contigo, raticos en los que hablamos de todo, nos reímos y me aconsejas. Eres una persona excepcional. Gracias campeón. Javi, axo hotia

pijo, cuántos cafés y cigarrillos hemos compartido, cuántas conversaciones sobre mi tesis hemos tenido, y cuántas ideas y ánimos me has dado. Eres muy grande y siempre te estaré agradecido, Javié. Federico Manuel, sin ti se me hubiera colgado Matlab una y otra vez, hubiera explotado algún servidor, se me hubiera formateado el ordenador y el Intelaim perdiendo toda la Tesis, y un largo etcétera. Gracias por todo el soporte informático que me has dado, y por esa sonrisa que me regalas todos los días pese al follón que te doy. No puedo olvidarme de mis secretarias, Marga, Ángels, Amparo y Eva. Agradeceros la disposición, preocupación y apoyo que siempre habéis mostrado conmigo, y esa felicidad con la que me recibís siempre, sin olvidarme del folclore. Sois un encanto. Gracias.

Javier Fuenmayor, decirte que te estaré eternamente agradecido por haber apostado por mí, por haber luchado durante tanto tiempo para poder brindarme la oportunidad de cumplir mi sueño, ser profesor. Gracias a ti empecé esta andadura. Como hasta ahora, me seguiré esforzando al máximo en mi trabajo y en hacer que te sientas orgulloso de mí. Muchísimas gracias de corazón.

Este agradecimiento debo extenderlo a Alfonso. Has confiado en mí y lo sigues haciendo, te implicas y preocupas por todo lo que me rodea, mis renovaciones, la evolución de mi Tesis, mis hojas de ruta, me has dado muchísimos consejos y ratos de desconexión y folclore tan necesarios. Por todo ello, gracias Alfonso.

A todos los becarios con los que empecé esta andadura, muchas gracias chic@s. En especial a Enrique, Eva, Onofre, Camila y Luca. Hemos compartido momentos inolvidables, (véase fiestas de Planes). Os deseo lo mejor a todos en el futuro. Gracias. Y Juan, ha sido un descubrimiento conocerte, primero como alumno, después como compañero y ahora como amigo. Quiero darte las gracias por todo el apoyo que me has dado, y por compartir conmigo tantos eventos deportivos. Llegarás donde te propongas, eres un fiero aun siendo del Valencia, y tendrás mi ayuda siempre. Ánimo y gracias chaval. A Antoine, Moha y Octavio, se os echa mucho de menos, dejasteis un gran vacío cuando os fuisteis. Me alegro de que todo os vaya genial, y gracias por regalarme todo el tiempo que compartimos. Rafa y Vir, gracias por vuestro apoyo aún en la distancia que nos separa, y por todos los momentos inolvidables que vivimos y nos quedan por vivir.

Mis amigos del pueblo, mis queridos amigos que tan abandonados he tenido estos últimos años por razones obvias y que tanto he echado de menos. Habéis sido muy comprensivos conmigo, me habéis apoyado y animado en todo, me habéis demostrado muchísimo cariño pese a mi prolongada ausencia. Os pido perdón por la cantidad de veces que no he podido compartir vivencias con vosotros, pero deciros que ya estoy de vuelta, ahora sí. Gracias por estar ahí chic@s. Eloy, bendigo aquel día que nos

conocimos en Valencia, fue sin duda mi mejor época aquí. Agradecerte todo el tiempo que me has dedicado y todo tu apoyo. Ahora te puedo decir, “½ kilo, que tiemble el Crillas!” Joven, que ganas tenías de que acabase. Cuantas veces me habrás dicho: “Muchacho, tengo una gana de que acabes y seas doctor de una vez”. Pues se acabó, y ahora podré dedicarte el tiempo que te mereces. Gracias por pertenecer a mi vida Piwy!

Al grupico SuperGuay de Valencia, María, Rafa, Tere, Ana, Manu, Laura, Benja, Juan, deciros que para mí habéis caído del cielo, conoceros ha sido un regalo y lo pienso disfrutar de por vida. Os he conocido en el momento más duro de mi carrera, y aun así conseguís que desconecte y que saque lo mejor de mí. Felicidades por ser como sois, y muchísimas gracias chic@s. María, Tere, Ana, os merecéis mención aparte. Gracias por preocuparos, por preguntarme, por escucharme, por animarme en todo momento, por el calor humano, por estar ahí. Me habéis demostrado muchísimo en muy poco tiempo. Os quiero mucho nenas.

A mis padres, de los cuales me separé a los 17 años siendo un crío para poder llegar hasta aquí. Aún en la distancia que nos separa me habéis transmitido una fuerza y motivación indispensable para afrontar esta etapa. Gracias por haberme dado la oportunidad de cumplir un sueño, por confiar en mí y ayudarme en todo lo que he necesitado. Mi hermana Nata, gracias por esas frases llenas de cariño y motivación, me han impulsado en este camino. A mi hermano Salvi, te agradezco todo el apoyo y los momentos que has compartido conmigo, esos partidos de fútbol y descensos por el río. A todos, os quiero y os echo de menos.

Dedico esta Tesis a la persona más importante de mi vida, a la que más quiero, la que ha estado a mi lado en todo momento, la que ha compartido todos mis estados de ánimo, ayudándome a levantarme en mis fracasos y disfrutando de mis éxitos. Eva, va por ti, te lo mereces. Este logro es gracias a ti, una Tesis no se acaba sin motivación, sin cariño y sin apoyo, y tú has sido mi principal fuente en todo. Te debo infinito tiempo, imposible de recuperar, pero cada minuto a partir de ahora será eterno. Te lo prometo. Gracias cariño, te quiero mucho.

Noviembre de 2013

Índice general

Resumen	i
Abstract	iii
Resum	v
Prefacio	vii
Agradecimientos	ix
Índice general	xiii

PARTE I. MEMORIA

1 INTRODUCCIÓN.....	1
1.1 MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES	1
1.2 OBJETIVOS.....	6
1.3 ORGANIZACIÓN Y DESARROLLO DE LA TESIS	8
2 MODELO DINÁMICO DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN FLEXIBLES Y ROTATORIOS.....	11
2.1 MODELO UNIDIMENSIONAL DE VIGA DE RAYLEIGH ROTATORIA.....	11
2.2 MODELO DINÁMICO DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN FLEXIBLES Y ROTATORIOS	14
2.3 MODELO DINÁMICO DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN FLEXIBLES Y ROTATORIOS EN TRAYECTORIA GENÉRICA.....	18
3 MODELO DE VÍA FLEXIBLE.....	23
3.1 MODELO DE VÍA RECTA	24
3.2 MODELO DE VÍA EN CURVA	26
4 MODELO DE INTERACCIÓN DINÁMICA VEHÍCULO-VÍA	27
5 RESULTADOS.....	29
5.1 ESTUDIO DEL AMORTIGUAMIENTO INTERNO.....	29
5.2 INTERACCIÓN DINÁMICA VEHÍCULO-VÍA EN RECTA	35
5.2.1 <i>Resultados para corrugación armónica del carril</i>	<i>36</i>
5.2.2 <i>Resultados para rugosidad pseudoaleatoria del carril y para el plano de rueda</i>	<i>42</i>
5.3 INTERACCIÓN DINÁMICA VEHÍCULO-VÍA EN CURVA	47

5.3.1	<i>Resultados para corrugación armónica del carril</i>	48
5.3.2	<i>Resultados para rugosidad pseudoaleatoria del carril</i>	50
5.3.3	<i>Resultados para un plano de rueda</i>	53
6	CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS	57
6.1	CONCLUSIONES.....	57
6.2	DESARROLLOS FUTUROS.....	60
7	RESUMEN DE ARTÍCULOS	61
7.1	ARTÍCULO 1	61
7.2	ARTÍCULO 2	62
7.3	ARTÍCULO 3	63
	BIBLIOGRAFÍA	65

PARTE II. ARTÍCULOS

- Artículo 1.** Dynamics of damped rotating solids of revolution through an Eulerian modal approach
- Artículo 2.** Numerical estimation of stresses in railway axles using a train-track interaction model
- Artículo 3.** A comprehensive model of the railway wheelset-track interaction in curves

Parte I
Memoria

1 INTRODUCCIÓN

1.1 MOTIVACIÓN Y ANTECEDENTES

Esta Tesis Doctoral se enmarca en la línea de investigación de dinámica ferroviaria desarrollada en el Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la Universitat Politècnica de València. Dentro de esta línea se realizan modelos correspondientes a la dinámica acoplada entre el vehículo ferroviario y la vía, que afectan a problemas de corrugación de los carriles, ovalización y poligonalización de las ruedas, planos de bloqueo en ruedas (desgastes producidos por abrasión del carril sobre la rueda durante una pérdida de adherencia) y otros tipos de desgastes anormales que afectan a la emisión acústica, a la conservación de la vía y a la fiabilidad de los órganos de rodadura de los vehículos. Estos fenómenos se asocian a un rango de altas frecuencias y están caracterizados por la dinámica estructural de los elementos que conforman el sistema.

La importancia de este tema ha favorecido que numerosos investigadores hayan propuesto metodologías para la simulación dinámica de la interacción del vehículo con la vía. Resulta destacable comprobar que la práctica totalidad de los modelos publicados correspondientes a la interacción vía-vehículo adoptan modelos del eje rígidos, con muy pocas excepciones. Encontramos un reducido primer grupo en el cual se considera la flexibilidad de un eje que no gira en las Referencias [1 - 4]. Con excepción del trabajo de Szolc [1] que desarrolla una metodología basada en parámetros concentrados, las referencias correspondientes a la Escuela de Bilbao, KTH y Chalmers [2, 3, 4] incorporan un modelo de elementos finitos del eje montado. Uno de los avances más significativos es llevado a cabo en la tesis de Thompson [5, 6] para abordar problemas de ruido de rodadura. En su modelo no se consideran los efectos inerciales asociados al giro de la rueda, pero sí se incorpora el efecto correspondiente al movimiento relativo de la fuerza de contacto rueda-carril con respecto a la rueda. Esta misma hipótesis ha sido adoptada recientemente por Pieringer *et al.* [7] a través de una metodología de cálculo basada en el producto de convolución.

Fuera de aquellos trabajos presentados por el grupo en el que se enmarca la presente Tesis Doctoral, sólo los artículos de Kaiser *et al.* [8, 9] muestran resultados de un eje flexible que incorpora los efectos inerciales al giro. La metodología empleada por este grupo no ha sido sin embargo publicada; este modelo lo incorpora el software de simulación dinámica SIMPACK [10]. El reducido número de modelos asociados a Dinámica de Rotores que incorporan las hipótesis más realistas del efecto del giro en la dinámica del sólido puede explicar la práctica ausencia de modelos avanzados del eje ferroviario.

Los referentes más cercanos a la dinámica de sólidos rotatorios flexibles tridimensionales los encontramos en los rotores de Jeffcott (cero dimensionales) y las vigas rotatorias (unidimensionales). Las publicaciones en estos casos son profusas, encontrándose referencias que datan de principios del siglo pasado. El desdoblamiento de los modos de multiplicidad dos (o superior) en modos forward (cuya deformada modal gira en el sentido de la rotación) y backward (en sentido contrario), así como la variación de las frecuencias naturales con la velocidad de giro se encuentran publicados en trabajos clásicos de Mecánica y en monografías [11]. Los estudios sobre la dinámica de ejes amortiguados se iniciaron en las primeras décadas del siglo XX [12, 13] y se centran principalmente en el efecto desestabilizante del amortiguamiento interno sobre el rotor, el cual origina una velocidad angular crítica por encima de la cual el rotor se vuelve inestable [11, 14].

Un modelo de sólidos elásticos rotatorios con geometría genérica requiere estar definido en un dominio tridimensional, como es el caso de un eje ferroviario. El Método de los Elementos Finitos (MEF) es un planteamiento numérico que se puede adaptar fácilmente a una geometría genérica tridimensional [15]. Se han desarrollado planteamientos numéricos mediante el MEF para modelar sólidos rotatorios flexibles con geometría genérica, mediante elementos tipo viga [16 - 21] y elementos sólidos 3D [22 - 24]. Brown y Shabana [25] desarrollaron un modelo dinámico para sólidos rotatorios flexibles basado en un sistema de referencia flotante [26], donde mediante un planteamiento modal estándar (Lagrangiano) se analiza la cinemática de la partícula material. Estos planteamientos que describen la cinemática de la partícula material presentan un gran inconveniente cuando el sólido interactúa con una estructura no rotatoria, como es el caso de la interacción dinámica rueda-carril en ferrocarriles, pues la fuerza de contacto resulta aplicada en un punto espacial fijo, y en consecuencia existe un

movimiento relativo entre la carga y el sólido rotatorio (problema de carga móvil). En consecuencia, el coeficiente de velocidad asociado al término de fuerzas generalizadas debe ser calculado en cada paso temporal de integración, aumentando considerablemente el coste computacional. Además, la Función de Respuesta en Frecuencia (FRF) que relaciona la respuesta estacionaria con la excitación armónica producida por una fuerza fija en el espacio no puede ser obtenida directamente. Los modelos para el rotor de Jeffcott y para viga rotatoria no presentan estos inconvenientes, ya que están definidos en dominios cero-dimensional y unidimensional, respectivamente.

La referencia [27] correspondiente a autores que forman parte del grupo en el que se enmarca la Tesis desarrollaron un modelo que resuelve los problemas mencionados anteriormente. El método está desarrollado para sólidos rotatorios no amortiguados con geometría de revolución. Parte del planteamiento Lagrangiano descrito en [25] y, mediante una transformación de coordenadas, deduce la ecuación de movimiento en coordenadas modales Eulerianas. La técnica considera las propiedades de los sólidos de revolución cuyos modos de vibración no dependen de la rotación del mismo. En consecuencia, la base del sistema está formada por los modos de vibración del sólido no rotatorio en un sistema de referencia fijo, y permite definir un desplazamiento genérico de cualquier punto espacial del sólido flexible rotatorio.

Los primeros ejemplos de aplicación del modelo presentado en [27] al caso ferroviario fueron publicados en las Referencias [28, 29], si bien sólo recientemente se han llevado a cabo estudios de utilidad industrial. En la actualidad, la durabilidad de ejes ferroviarios es un tema clave en el diseño y mantenimiento de vehículos ferroviarios, donde conocer con precisión las cargas de servicio es esencial para cumplir con los altos estándares de seguridad. Sin embargo, la normativa para el diseño a fatiga de ejes ferroviarios [30, 31] no contempla dichas cargas reales de servicio, las cuales dependen en gran medida de los parámetros de diseño del vehículo (masas no suspendidas, rigidez y amortiguamiento de las suspensiones, etc.) y del tipo de servicio que presta [32, 33]. En consecuencia, y pese a que se diseñan a vida infinita, aún se siguen produciendo fallos por fatiga de ejes ferroviarios, algunos de ellos con consecuencias catastróficas [32].

El desarrollo de esta Tesis se justifica en base a la creciente importancia de la mejora de los modelos del eje ferroviario, con el fin de

disponer de un modelo de interacción dinámica vehículo-vía capaz de considerar los efectos de alta frecuencia asociados a la flexibilidad de los componentes que lo integran, tanto en recta como en curva. De tal modo se puede obtener una estimación de las cargas en servicio del vehículo ferroviario en condiciones reales de funcionamiento, y llevar a cabo estudios de fatiga de ejes, simulación del desgaste de componentes (ruedas y carriles), cálculo del ruido de rodadura, etc.

El trabajo presentado en esta Tesis se centra en el desarrollo de modelos dinámicos avanzados de sólidos flexibles rotatorios con geometría de revolución, aplicados al modelado del eje montado ferroviario para el estudio de la interacción dinámica del eje ferroviario con la vía. Las investigaciones realizadas abarcan desde la profundización en el campo de la Mecánica de Rotores en el que se fundamentan los modelos del eje montado, hasta la aplicación a los casos de interés industrial que las hipótesis adoptadas más avanzadas hacen posible plantear. En este sentido, la presente Tesis pretende, en primer lugar, ahondar en el modelado de sólidos flexibles rotatorios y desarrollar la formulación para aquellos casos que no han sido tratados en la literatura, y en segundo lugar, llevar a cabo la aplicación a casos prácticos correspondientes a la dinámica ferroviaria.

El desarrollo de esta Tesis tiene por objeto, entre otros, profundizar en aspectos fundamentales que no han sido tratados mediante el método modal propuesto por el grupo investigador de Valencia [34], como el amortiguamiento interno y la existencia de un movimiento de arrastre sumado al vibratorio del sólido.

La implementación del amortiguamiento interno en los modelos del rotor a través de coordenadas modales Eulerianas supone un aspecto clave de la línea que demuestra las posibilidades de la metodología y cierra el proceso de validación a través de modelos de referencia que, sin este aspecto, había sido cuestionada. El modelo con movimiento relativo con respecto al movimiento de arrastre impuesto, resulta fundamental para cubrir la dinámica del eje montado cuando circula en curva. En este último caso no se han encontrado soluciones de referencia, por lo que la validación queda abierta, habiéndose comparado los resultados con aquellos del modelo rígido del eje cuando en el modelo propuesto se trunca la base hasta los modos de cuerpo rígido.

La simulación de la interacción dinámica del vehículo, que en esta Tesis se realiza tanto en vía recta como en curva, precisa disponer de un

INTRODUCCIÓN

modelo global del sistema. Para ello se adopta una técnica de subestructuración, donde en primer lugar el modelo de cada subestructura (vehículo, carriles y soportes discretos) se analiza separadamente. A continuación, se realiza el acoplamiento entre subestructuras utilizando únicamente las fuerzas transmitidas entre ellas. Por último se llevan a cabo diversas simulaciones donde se analizan los resultados de interacción dinámica en vía recta y en vía curva para diferentes fuentes de excitación (corrugación, rugosidad aleatoria y plano de rueda), mostrando magnitudes relevantes como fuerzas de contacto, tensiones en el eje y factores de amplificación dinámica.

1.2 OBJETIVOS

El transporte ferroviario se encuentra inmerso en continua evolución y desarrollo a nivel mundial, orientado en los últimos años hacia vehículos de mayores velocidades y mayores cargas, acompañados con mejoras de prestaciones en el servicio y de fiabilidad de componentes. Es por ello que la mayoría de investigaciones recientes están enfocadas al desarrollo de metodologías eficientes que permitan abordar el problema de interacción dinámica vehículo-vía con mayor precisión, donde sin duda alguna el modelo de eje ferroviario juega un papel de vital importancia.

Hasta la fecha, la mayoría de trabajos han considerado en sus modelos de interacción el eje ferroviario como un sólido rígido, limitando así el rango de estudio al intervalo de bajas frecuencias. Por este motivo, los modelos disponibles no han sido capaces de representar la dinámica de alta frecuencia asociada a la flexibilidad del eje, excitada por irregularidades de longitud de onda corta presentes en los elementos de rodadura.

El objetivo último de la Tesis es el desarrollo de modelos dinámicos del eje ferroviario que consideren la flexibilidad y efectos giroscópicos asociados a la rotación del mismo. De este modo, los modelos permitirán incluir la dinámica de alta frecuencia en los fenómenos de interacción del vehículo con la vía en condiciones reales de servicio, así como analizar su influencia en la dinámica acoplada. Para la consecución de este objetivo final se plantea la obtención de los siguientes objetivos parciales:

- Realizar un análisis profundo de los modelos existentes en la bibliografía correspondientes a vigas rotatorias y sólidos flexibles rotatorios. Estos modelos sirven de punto de partida para la comprensión del problema a abordar.
- Desarrollar y analizar modelos simplificados de tipo unidimensional basados en vigas rotatorias que puedan establecer las bases del comportamiento dinámico de sistemas más complejos. Además estos modelos unidimensionales han de proporcionar soluciones de referencia en problemas con geometría sencilla y deben permitir validar modelos de sólidos más completos.

- Definir e implementar una metodología para el modelado de sólidos flexibles de revolución rotatorios con amortiguamiento interno. El modelo de sólidos se aplica a un cilindro rotatorio cuyos parámetros se calculan a través de modelos simples (cilindro modelado como una viga) y mediante otros más generales (cilindro modelado mediante elementos finitos), para analizar su comportamiento dinámico y la influencia del amortiguamiento interno. Esta geometría sencilla ha de permitir la validación del modelo de sólidos con teorías de vigas rotatorias.
- Obtener la respuesta dinámica, fuerzas de contacto y tensiones en el eje asociadas a la circulación de un vehículo sobre una vía recta con irregularidades en el carril o bien con un plano de rueda. Los resultados de un modelo del eje rígido deben ser comparados con los proporcionados por el modelo del eje flexible propuesto, estudiando la influencia de la flexibilidad en la dinámica acoplada del vehículo con la vía.
- Desarrollar un modelo de eje flexible rotatorio circulando sobre una vía curva y llevar a cabo su implementación en una herramienta de cálculo de la interacción dinámica del vehículo ferroviario con la vía flexible en curva.
- Estudiar el comportamiento dinámico del eje en curva y las fuerzas de contacto rueda-carril que se producen como consecuencia de la circulación del vehículo sobre una vía en curva cuyos carriles tienen irregularidades o bien debido al impacto producido por un plano de rueda. Los resultados han de permitir analizar la transferencia de carga que se produce de una rueda a otra en vía curva, y el consecuente aumento de las fuerzas de contacto en la rueda exterior a la curva. De nuevo se estudia la influencia de la flexibilidad y los efectos de alta frecuencia en la dinámica acoplada, al comparar resultados con un modelo de eje rígido.

1.3 ORGANIZACIÓN Y DESARROLLO DE LA TESIS

La Tesis está organizada en torno a dos núcleos principales. El primero consiste en una memoria que contiene la introducción del trabajo, y en él se describen los modelos dinámicos desarrollados de sólidos flexibles rotatorios, el modelo de vía y de interacción dinámica y las simulaciones llevadas a cabo, junto con diversos resultados extraídos y las conclusiones que se derivan de estos últimos. En el segundo núcleo de la Tesis se recogen las aportaciones científicas asociadas al presente trabajo, y consiste en una colección de tres artículos en los que participa el autor de la Tesis.

La estructuración de la memoria de la Tesis se lleva a cabo mediante siete capítulos descritos a continuación:

El capítulo 1 está dedicado a los antecedentes del trabajo, al planteamiento de objetivos a satisfacer y a la organización de la Tesis.

En el capítulo 2 se presentan los modelos dinámicos para sólidos flexibles rotatorios con geometría de revolución desarrollados en este trabajo, y con los que se modela la dinámica del eje ferroviario. Es por tanto el capítulo más importante de la Tesis. Se presentan principalmente dos modelos: el modelo dinámico para sólidos flexibles rotatorios que describen una trayectoria recta, y el modelo de sólidos cuando éstos trazan una trayectoria genérica (aplicado posteriormente para el estudio dinámico del vehículo en curva). Para cada modelo se describen los sistemas de referencia utilizados, su ecuación de movimiento asociada y todos los términos de los que depende. Además, se resume brevemente la teoría de viga rotatoria de Rayleigh con la que se compara el modelo de sólidos propuesto.

El modelo de vía flexible utilizado en la Tesis se describe en el capítulo 3. Se ha adoptado un planteamiento cíclico que permite modelar la vía como un sistema infinito en el cual se estudia una sección finita apoyada en soportes discretos, reduciendo así el coste computacional. Se describen tanto el modelo de vía recta (publicado previamente en [35]) como el modelo de vía en curva (contribución de esta Tesis) utilizados en las simulaciones dinámicas.

El capítulo 4 presenta el modelo de interacción dinámica vehículo-vía considerado en este trabajo. Se ha adoptado una técnica de subestructuración [36] que permite considerar la dinámica acoplada del

vehículo y la vía de una forma eficiente y de bajo coste computacional, distinguiendo tres subestructuras: vehículo, carriles y soportes discretos (traviesas, normalmente).

Tras definir los modelos de sólidos flexibles rotatorios, de vía flexible y de interacción dinámica, se llevan a cabo diversas simulaciones dinámicas. Los resultados que se derivan de las simulaciones están recogidos en el capítulo 5. Inicialmente se presentan resultados asociados a la dinámica libre de un cilindro rotatorio biarticulado con amortiguamiento interno, comparando resultados según el modelo de sólidos y el de viga. Este primer estudio permite validar el modelo de sólidos propuesto con el modelo de viga rotatoria de Rayleigh. Posteriormente se muestran resultados de interacción dinámica vehículo-vía, considerando en primer lugar vía recta y en segundo lugar vía en curva. Como fuentes de excitación se han considerado corrugación, rugosidad pseudoaleatoria del carril y plano de rueda. Las simulaciones han sido realizadas para diversas longitudes de onda y amplitudes de corrugación que excitan resonancias del eje y de la vía, además de estudiarse diferentes velocidades del vehículo. Se detallan resultados de fuerzas de contacto rueda-carril, tensiones axiales en el eje y factores de amplificación dinámica que cuantifican la influencia de la dinámica en ambas magnitudes. Todos los resultados se estudian para eje rígido y eje flexible, evaluando la influencia que tiene la dinámica de alta frecuencia asociada a la flexibilidad del eje en la interacción vehículo-vía.

En el capítulo 6 se recogen las conclusiones que se extraen del trabajo realizado. También se indican posibles trabajos futuros que pueden desarrollarse para continuar mejorando esta línea de investigación.

Un resumen de las aportaciones científicas derivadas de este trabajo y que han sido publicadas se encuentra en el capítulo 7.

La memoria termina con la lista de referencias bibliográficas citadas en la misma.

El documento se cierra con el segundo núcleo de la Tesis, donde se recogen los tres artículos con los que se ha contribuido a la literatura especializada en revista internacional.

2 MODELO DINÁMICO DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN FLEXIBLES Y ROTATORIOS

En este apartado se desarrolla el modelo dinámico de sólidos flexibles rotatorios con geometría de revolución, distinguiendo si al movimiento de rotación y al vibratorio se le suma o no un movimiento impuesto. Se detallan los diferentes sistemas de referencia utilizados en los modelos, el cálculo de la cinemática del sólido y la ecuación de movimiento final para cada caso de estudio, describiendo cada uno de los términos de los que depende.

Se ha llevado a cabo un estudio preliminar que ha consistido en analizar el comportamiento dinámico de un cilindro rotatorio biarticulado con el modelo propuesto de sólidos (ver Figura 2.1). Esta geometría sencilla puede ser estudiada mediante modelos de vigas de Rayleigh rotatorios o mediante modelos de sólidos rotatorios, por lo que este ejemplo supone un referente para la validación de los modelos más avanzados.

2.1 MODELO UNIDIMENSIONAL DE VIGA DE RAYLEIGH ROTATORIA

En este apartado se resume la formulación sobre viga de Rayleigh biarticulada (véase Ref. [11]), incluyendo la rotación y el amortiguamiento viscoso interno considerado en este caso como amortiguamiento modal. En concordancia con el sistema de referencia fijo **XYZ** mostrado en la Figura 2.1, el modo *j*-ésimo de vibración a flexión de la viga de Rayleigh normalizado a masa unitaria y calculado respecto al eje neutro es:

$$\phi_j(z) = \frac{1}{\sqrt{m_j}} \operatorname{sen}\left(\frac{j\pi z}{L}\right), \quad (2.1)$$

y la frecuencia natural *j*-ésima:

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}, \quad (2.2)$$

donde la masa modal m_j y la rigidez modal k_j tienen las siguientes expresiones:

$$m_j = \frac{\rho AL}{2} + \frac{\rho I(j\pi)^2}{2L}, \quad k_j = \frac{EI(j\pi)^4}{2L^3}. \quad (2.3)$$

El desplazamiento transversal de cualquier punto de estudio z en el sistema de referencia fijo \mathbf{XYZ} y para cualquier instante de tiempo t , se calcula mediante el siguiente planteamiento modal:

$$\begin{Bmatrix} x(z,t) \\ y(z,t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z) \begin{Bmatrix} q_x^j(t) \\ q_y^j(t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \mathbf{q}^j, \quad (2.4)$$

donde \mathbf{q}^j es el vector bidimensional de coordenadas modales asociado al modo de flexión j -ésimo. La ecuación de movimiento en coordenadas modales para una viga biarticulada de Rayleigh rotatoria y con amortiguamiento interno resulta ser:

$$\ddot{\mathbf{q}}^j + 2(\Omega g_j \mathbf{G} + c_j \mathbf{I}) \dot{\mathbf{q}}^j + (\omega_j^2 \mathbf{I} + 2\Omega c_j \mathbf{G}) \mathbf{q}^j = \mathbf{Q}^j, \quad (2.5)$$

siendo \mathbf{Q}^j el vector de fuerzas generalizadas asociadas al modo j -ésimo, \mathbf{I} la matriz identidad 2×2 y Ω la velocidad de rotación de la viga. El término c_j representa el amortiguamiento interno modal del modo j -ésimo y se calcula a partir de la tasa de amortiguamiento ξ_j . El término giroscópico modal g_j se determina a partir de la esbeltez ζ de la viga y está acotado por definición entre 0 y 1. Por último \mathbf{G} es una matriz antisimétrica que origina el acoplamiento de ambos modos de flexión ortogonales. Estos últimos tres términos se formulan a continuación:

$$c_j = \omega_j \xi_j, \quad g_j = \frac{(j\pi)^2}{\zeta^2 + (j\pi)^2}, \quad \mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

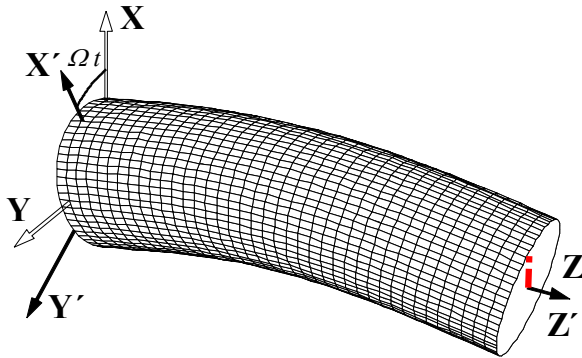


Figura 2.1. Sistemas de referencia fijo XYZ y móvil $X'Y'Z'$ para viga rotatoria y cilindro biarticulado.

2.2 MODELO DINÁMICO DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN FLEXIBLES Y ROTATORIOS

En trabajos anteriores del grupo investigador relacionados con la Tesis [27] se plantea el desarrollo de la dinámica del sólido rotatorio a partir de la transformación de un sistema de coordenadas modal Lagrangiano a otro de tipo Euleriano. En esta sección se propone una explicación alternativa en la que se prescinde de desarrollos anteriores proporcionados por otros autores y se parte directamente de principios generales de la dinámica.

Con el fin de modelar la cinemática del sólido flexible, se definen dos configuraciones del sólido, asociadas a la geometría no deformada y deformada, según se detalla en la Figura 2.2. La configuración no deformada está asociada con el movimiento de rotación de cuerpo rígido del eje (velocidad angular constante), mientras que la configuración deformada considera la flexibilidad y los pequeños desplazamientos de sólido rígido.

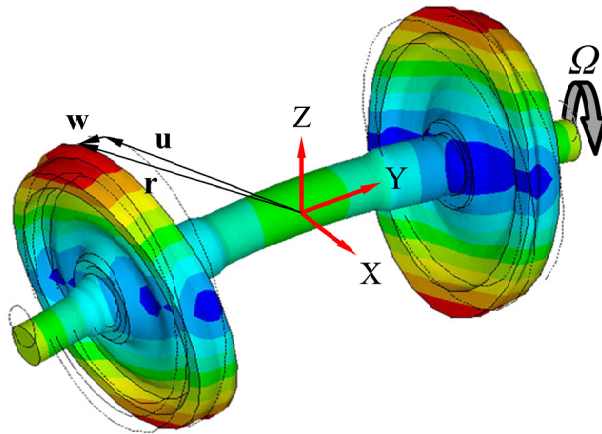


Figura 2.2. Sistema de referencia fijo XYZ. Configuración no deformada (en trazo discontinuo) y deformada.

Las coordenadas implementadas en el modelo no siguen la trayectoria de la partícula material del sólido, procedimiento más común en mecánica, sino que están asociadas a puntos espaciales fijos (planteamiento Euleriano). Definiendo \mathbf{u} como el vector de coordenadas Eulerianas en un sistema de referencia fijo, cualquier propiedad del sólido $\varphi(\mathbf{u}, t)$ corresponde a la partícula material cuya posición en la configuración no deformada en el instante t es \mathbf{u} . Según este criterio, el vector de posición final \mathbf{r} es:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{u}, t), \quad (2.7)$$

\mathbf{w} es el desplazamiento asociado a la flexibilidad y movimientos de sólido rígido.

Adoptando un planteamiento modal, el vector \mathbf{w} puede expresarse a partir de los modos de vibración del sólido no rotatorio $\Phi(\mathbf{u})$ y las coordenadas modales $\mathbf{q}(t)$ como sigue:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t). \quad (2.8)$$

Es importante destacar que los modos de vibración del sólido no dependen del tiempo debido a la simetría axial que presenta, de tal forma que son obtenidos respecto del sistema de referencia fijo.

El tensor de velocidad angular asociado a la rotación del sólido se describe a continuación:

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega \mathbf{J}. \quad (2.9)$$

De tal forma, la velocidad asociada a la rotación de cuerpo rígido es:

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T = \tilde{\Omega} \mathbf{u} = \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} = \Omega \tilde{\mathbf{u}}, \quad (2.10)$$

siendo $\tilde{\mathbf{u}} = (u_3 \quad 0 \quad -u_1)^T$. Conocido el vector de posición de la partícula según Ec. (2.7) y la velocidad asociada a la rotación del sólido Ec. (2.10), se puede obtener la velocidad de la partícula mediante la derivada material del vector de posición \mathbf{r} , considerando el término local y convectivo, como sigue:

$$\begin{aligned}
 \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_i} + \dot{\mathbf{w}} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \\
 &= \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{w}} + \Omega \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i}.
 \end{aligned} \tag{2.11}$$

Conocida la velocidad de la partícula en el sistema de referencia fijo, se obtiene la energía cinética del sólido rotatorio y se aplica el principio de Lagrange con la particularidad de que se emplean derivadas materiales, deduciéndose los términos de la ecuación del movimiento asociados a la inercia:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dV \dot{\mathbf{q}} \\
 + \Omega^2 \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_j \sum_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \right) dV \mathbf{q} & \\
 - \Omega^2 \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dV \mathbf{q} - \Omega^2 \int_{Vol} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u} dV. &
 \end{aligned} \tag{2.12}$$

El cálculo de las integrales obtenidas en la ecuación anterior se lleva a cabo numéricamente mediante un procedimiento análogo al método de los elementos finitos, obteniéndose la siguiente ecuación del movimiento:

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega \tilde{\mathbf{V}} \dot{\mathbf{q}} + \left(\tilde{\mathbf{D}} + \Omega^2 (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}) \right) \mathbf{q} = \Omega^2 \tilde{\mathbf{c}} + \mathbf{Q}, \tag{2.13}$$

donde la matriz $\tilde{\mathbf{V}}$ representa las fuerzas de inercia debidas a la aceleración de Coriolis, $\tilde{\mathbf{A}}$ está relacionada con la aceleración convectiva, $\tilde{\mathbf{C}}$ considera las fuerzas de inercia que surgen tras la deformación del sólido y $\tilde{\mathbf{c}}$ las fuerzas de inercia constantes asociadas a la configuración no deformada del sólido. El vector \mathbf{Q} representa la fuerza generalizada debida a las cargas externas aplicadas en el sólido y la matriz $\tilde{\mathbf{D}}$ es la matriz de rigidez modal, representada por una matriz diagonal que contiene el cuadrado de las frecuencias naturales no amortiguadas del sólido.

Para más detalles sobre la formulación del modelo dinámico de sólidos rotatorios, véase el **Artículo 2** de la Tesis. En el **Artículo 1** se desarrolla el mismo modelo considerando amortiguamiento interno modal, pero con una demostración diferente, pues se parte del modelo Lagrangiano para llegar al Euleriano, y la nomenclatura de las matrices es ligeramente distinta respecto a la Ec. (2.13).

2.3 MODELO DINÁMICO DE SÓLIDOS DE REVOLUCIÓN FLEXIBLES Y ROTATORIOS EN TRAYECTORIA GENÉRICA

Con el fin de obtener una formulación del eje cuando circula por una vía curva, se va a adoptar una metodología basada en coordenadas de trayectoria (adopción de un sistema de coordenadas móvil) que discurre siguiendo el eje de la vía (su posición es en todo instante conocida). La principal hipótesis adoptada es que los desplazamientos del eje con respecto al sistema de trayectoria son pequeños. Para el desarrollo del modelo se han considerado dos sistemas de referencia (ver Figura 2.3). El primero es un sistema de referencia fijo $X_0Y_0Z_0$, y el segundo es un sistema de referencia móvil $X_TY_TZ_T$ que describe la trayectoria conocida. Un vector expresado en el sistema de referencia fijo y móvil se denotará como a_0 y a respectivamente.

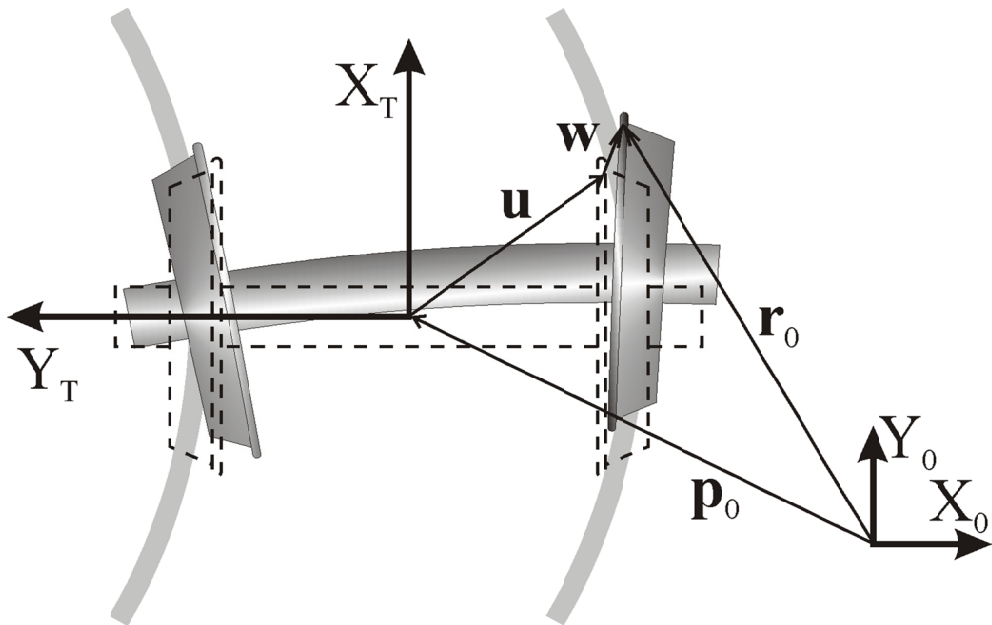


Figura 2.3. Sistemas de referencia y vectores de posición. Configuración no deformada (en trazo discontinuo) y deformada.

Al igual que en el apartado anterior, el procedimiento considerado para el desarrollo del modelo está basado en un planteamiento modal Euleriano. En consecuencia se puede analizar para cada instante de tiempo t la cinemática de la partícula material que ocupa una posición espacial \mathbf{u} en la configuración no deformada y en un sistema de referencia no rotatorio con el sólido. El vector de posición de la partícula material \mathbf{r}_0 , en el sistema de referencia fijo $\mathbf{X}_0\mathbf{Y}_0\mathbf{Z}_0$, será:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{u}, t)), \quad (2.14)$$

donde \mathbf{p}_0 es el vector de posición del sistema de referencia móvil, \mathbf{T} es la matriz de rotación que relaciona ambos sistemas de referencia y \mathbf{w} se corresponde con el vector de desplazamientos asociado a la deformada del sólido y a los pequeños desplazamientos de cuerpo rígido.

Al igual que en el apartado anterior, se adopta un planteamiento modal que permite expresar el vector \mathbf{w} según la matriz de modos de vibración del sólido no rotatorio $\Phi(\mathbf{u})$ y el vector de coordenadas modales Eulerianas $\mathbf{q}(t)$ de la siguiente manera:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{T}(\mathbf{u} + \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t)). \quad (2.15)$$

La velocidad de la partícula material en el sistema de referencia móvil $\mathbf{X}_T\mathbf{Y}_T\mathbf{Z}_T$ se obtiene mediante la derivada material de \mathbf{r}_0 como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{p}}_0 + \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \dot{\mathbf{w}} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_i} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \\ &= \dot{\mathbf{p}} + \tilde{\boldsymbol{\omega}}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \dot{\mathbf{w}} + \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} + \Omega \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i}, \end{aligned} \quad (2.16)$$

siendo $\tilde{\boldsymbol{\omega}} = \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}}$ el tensor de velocidades angulares del sistema de referencia móvil. Los dos primeros términos de velocidad están asociados al movimiento de traslación y rotación del sistema de referencia móvil, respectivamente. El término $\dot{\mathbf{w}}$ representa la velocidad del punto espacial ocupado por la partícula debido a la deformación del sólido. El término $\Omega \mathbf{J} \mathbf{u}$ se debe a la velocidad de rotación de sólido rígido y el último

término es la velocidad convectiva debido al movimiento relativo de rotación entre el sólido y el sistema de referencia móvil.

Conocida la velocidad de la partícula en el sistema de referencia móvil, se lleva a cabo el cálculo de la energía cinética del sólido rotatorio y se aplica el principio de Lagrange empleando derivadas materiales. Así se deducen los términos de la ecuación del movimiento asociados a la inercia:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\mathbf{q}} + \left[2\Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv + 2 \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \Phi dv \right] \dot{\mathbf{q}} \\
 & + \left[\Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \sum_j \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \right) dv \right. \\
 & - \Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv + 2\Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \quad (2.17) \\
 & \left. + \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \Phi dv - \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \Phi dv \right] \mathbf{q} \\
 & = \Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u} dv - 2\Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \mathbf{J} \mathbf{u} dv - \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \mathbf{u} dv \\
 & + \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \mathbf{u} dv - \int_{vol} \rho \Phi^T dv \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{p}}_0 + \mathbf{Q}.
 \end{aligned}$$

Para llevar a cabo el cálculo de las integrales obtenidas en la ecuación anterior se utiliza un procedimiento numérico similar al empleado en el método de los elementos finitos. Finalmente se obtiene la siguiente ecuación del movimiento:

$$\begin{aligned}
 & \ddot{\mathbf{q}} + (2\Omega \tilde{\mathbf{V}} + 2\tilde{\mathbf{P}}) \dot{\mathbf{q}} + (\Omega^2 (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}) + 2\Omega \tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}}) \mathbf{q} \\
 & = \Omega^2 \tilde{\mathbf{c}} - 2\Omega \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{N}} - \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{Q}.
 \end{aligned} \quad (2.18)$$

Si comparamos esta última ecuación de movimiento con la asociada al sólido en trayectoria recta descrita en la Ec. (2.13), se observa que han surgido nuevas matrices y vectores debido a la generalidad en la trayectoria descrita por el sólido. Las matrices $\tilde{\mathbf{V}}$, $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$ y el vector $\tilde{\mathbf{c}}$ tienen las mismas expresiones que en el modelo de sólidos en trayectoria inercial, detallado en el apartado anterior. El resto de términos se comentan a

continuación. La matriz $\tilde{\mathbf{P}}$ representa los efectos giroscópicos sobre el sólido debido a la rotación del sistema de referencia móvil. La matriz $\tilde{\mathbf{S}}$ y el vector $\tilde{\mathbf{U}}$ están asociados a las fuerzas de inercia causadas por la aceleración de Coriolis, para la configuración deformada y no deformada, respectivamente. La matriz $\tilde{\mathbf{B}}$ y el vector $\tilde{\mathbf{N}}$ consideran las fuerzas centrífugas debidas a la rotación del sistema de referencia móvil, para la configuración deformada y no deformada. La matriz $\tilde{\mathbf{R}}$ y el vector $\tilde{\mathbf{H}}$ determinan las fuerzas asociadas a la aceleración angular del sistema de referencia móvil, para la configuración deformada y no deformada, respectivamente. Por último, la matriz $\tilde{\mathbf{G}}$ tiene en cuenta los efectos centrífugos sobre el sólido asociados a la traslación del sistema móvil, y el vector \mathbf{Q} es el término de fuerzas generalizadas que actúan sobre el sólido.

Para más detalles sobre el modelo dinámico de sólidos rotatorios flexibles que describen una trayectoria genérica, véase el **Artículo 3**. En este artículo se ha adoptado dicho modelo para analizar el comportamiento dinámico de un vehículo ferroviario en vía curva.

3 **MODELO DE VÍA FLEXIBLE**

La vía es un sistema de grandes dimensiones que puede ser considerado como una estructura infinita soportada por balasto y materiales elastoméricos no lineales. Debido a estas complejas características, en la literatura se encuentran modelos lineales de vías infinitas [37 - 42] y modelos no lineales de vías finitas [36, 43 - 46].

Los modelos de vía de longitud infinita se basan en técnicas de propagación de ondas y análisis de Fourier que requieren adoptar hipótesis lineales. Por otra parte, los modelos de vía de longitud finita están muy condicionados por los fenómenos de reflexión de onda que ocurren en el extremo del carril. Si la distancia del vehículo al extremo del carril no es lo suficientemente grande, la onda generada en el carril por la interacción con el vehículo puede reflejarse en el extremo del carril e interactuar en la dinámica del vehículo. Por lo tanto, es necesario modelar longitudes de vía considerables, aumentando el coste computacional. Además, los intervalos temporales de integración deben ser considerablemente menores que el tiempo necesario para recorrer la vía.

Para evitar estos inconvenientes citados anteriormente, en la presente Tesis se ha adoptado un modelo de vía cíclica desarrollada en [35]. Este modelo cíclico puede considerar elementos no lineales, evita fenómenos de reflexión de ondas y la longitud de la vía no depende del intervalo temporal de integración.

3.1 MODELO DE VÍA RECTA

El planteamiento cíclico de la vía [35] es un modelo de vía infinita sobre el cual hay un número infinito de vehículos equidistantes separados por una longitud característica L . Se asume además que dichos vehículos circulan a la misma velocidad V (ver Figura 3.1). Como valor de la distancia característica L se escoge un múltiplo de la longitud de vano L_b suficientemente grande para garantizar que los vehículos estén dinámicamente desacoplados, es decir, que la onda generada por un vehículo no alcance al vehículo adyacente. La condición de vía cíclica consiste en que dos puntos análogos de la vía separados una distancia L tienen el mismo desplazamiento y velocidad.

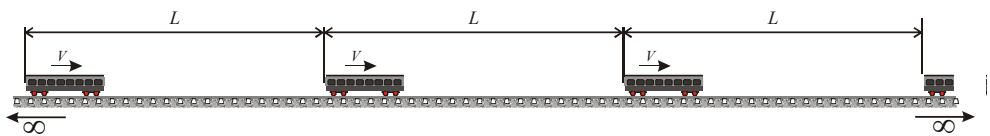


Figura 3.1. Modelo de vía cíclica infinita.

Por lo tanto, el planteamiento cíclico permite modelar una vía infinita analizando solamente una sección finita de longitud L (véase Figura 3.2), imponiendo como condiciones de contorno que los desplazamientos y velocidades en los extremos del modelo coinciden.

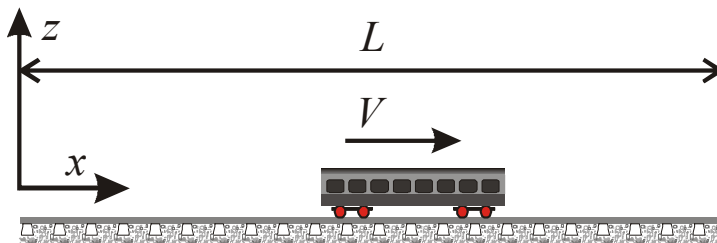


Figura 3.2. Tramo finito de vía cíclica analizada.

En este planteamiento se adopta una técnica de subestructuración donde los carriles y las traviesas se modelan por separado. Para los carriles se considera una representación en base a vigas de Timoshenko, incluyendo la deformación a flexión lateral, vertical y deformación a torsión. La dinámica se ha analizado mediante un planteamiento modal a partir de las propiedades modales de los carriles con condiciones de contorno cíclicas, resultando un sistema de ecuaciones de un grado de libertad desacoplado.

Los soportes discretos de la vía se han modelado como elementos de parámetros visco-elásticos concentrados, según se observa en la Figura 3.3. Las placas de asiento se representan como elementos visco-elásticos concentrados a partir de su rigidez y amortiguamiento, y generan las fuerzas de interacción entre los carriles y las traviesas. Las traviesas se modelan como masas concentradas, y el balasto como elemento concentrado a partir de su rigidez y amortiguamiento equivalente, despreciando su dinámica.

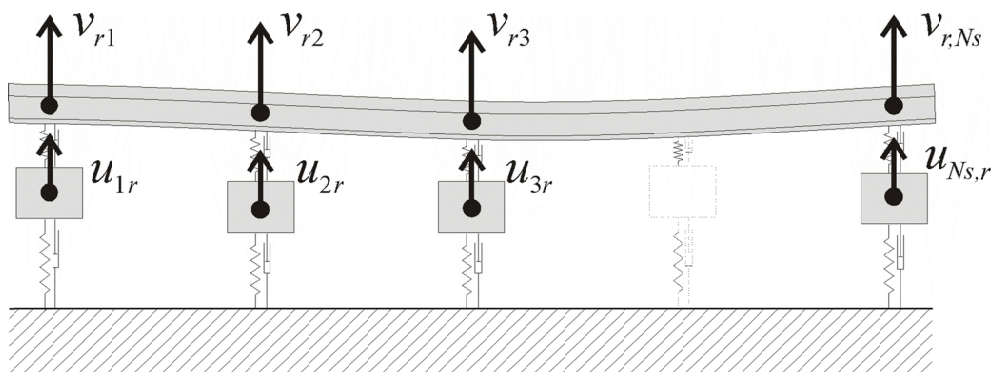


Figura 3.3. Detalle del modelo de algunos vanos de la vía.

Al tratarse de una vía recta, debido a la simetría de la estructura respecto al centro de la vía, es suficiente con modelar un solo carril, reduciendo el coste computacional. En el **Artículo 2** de la presente Tesis se consideró este modelo de vía recta cíclica para el estudio de la interacción dinámica con un vehículo ferroviario.

3.2 MODELO DE VÍA EN CURVA

Al igual que para la configuración recta, en vía curva también se ha adoptado el planteamiento de tipo cíclico desarrollado por investigadores del grupo en el que enmarca esta Tesis [35], adaptado al caso de vía curva. En este caso se han considerado diferentes longitudes de vano para el carril interior y exterior, por lo que cada carril tiene longitud y propiedades modales diferenciadas.

El planteamiento de vía cíclica modela una vía en curva de radio constante. Puede interpretarse como una vía circular por la que circulan un conjunto de vehículos idénticos a la misma velocidad V y separados una distancia L (ver Figura 3.4). Las hipótesis de periodicidad en vía curva pueden adoptarse sin embargo aun cuando la longitud del perímetro de la circunferencia no es múltiplo de la longitud característica L . Al igual que en vía recta, debido a la periodicidad de la estructura y de las cargas, el planteamiento cíclico permite reducir el estudio de la vía curva a un tramo circular finito de longitud L .

El modelado de los carriles y de los soportes discretos se lleva a cabo de manera análoga al de la vía recta, descrito en el apartado anterior. En el **Artículo 3** de la presente Tesis se consideró este modelo de vía cíclica en curva para el estudio de interacción dinámica con un vehículo ferroviario.

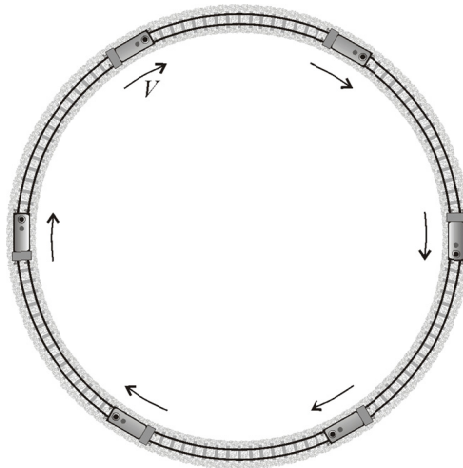


Figura 3.4. Modelo de vía cíclica en curva.

4 MODELO DE INTERACCIÓN DINÁMICA VEHÍCULO-VÍA

El modelo de interacción dinámica vehículo-vía adoptado en este trabajo corresponde con el modelo desarrollado en [36], donde se plantea una técnica de subestructuración modal. En base a ello, el sistema completo se divide en tres subestructuras según se muestra en la Figura 4.1: el vehículo ferroviario, los carriles y sus soportes discretos (traviesas y balasto). Cada subestructura presenta su ecuación de movimiento de manera independiente, y los efectos de interacción entre ellas se consideran mediante las fuerzas de contacto rueda-carril y las fuerzas transmitidas por la placa de asiento.

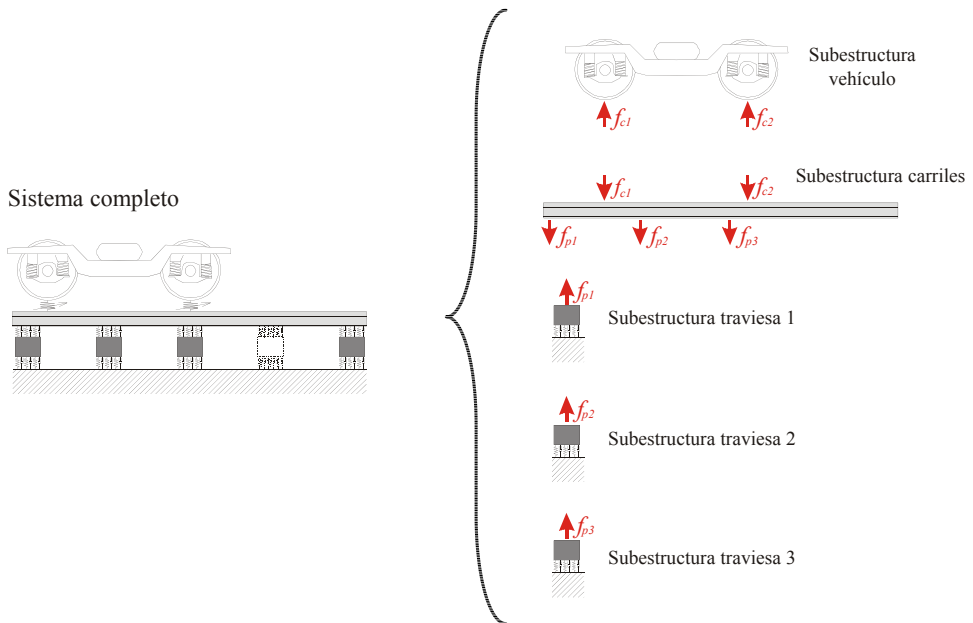


Figura 4.1. Técnica de subestructuración para la interacción dinámica vehículo-vía.

Los análisis que se incluyen en esta Tesis sobre la interacción dinámica vehículo-vía vienen excitados por imperfecciones geométricas de longitud de onda corta en los perfiles del carril y de la rueda y por imperfecciones localizadas como un plano de rueda. Es por ello que se incluye la dinámica de alta frecuencia, trabajando en un rango de frecuencias hasta 2.7 kHz aproximadamente. En este rango de frecuencias, la dinámica de las masas suspendidas del vehículo está perfectamente aislada del movimiento de las masas no suspendidas. Por lo tanto, la subestructura del vehículo ferroviario considerado en esta Tesis consiste en un eje modelado como un sólido flexible rotatorio según se detalló en el apartado 2, junto con la suspensión primaria representada mediante elementos de parámetros visco-elásticos concentrados. La carga estática asociada al peso de las masas suspendidas se representa mediante dos fuerzas aplicadas en la suspensión primaria en ambos extremos del eje.

Las otras dos subestructuras, carriles y soportes discretos, forman la vía flexible descrita en el apartado 3. En este apartado se detalló el planteamiento llevado a cabo para modelar los carriles y los soportes discretos de la vía. La interacción dinámica entre los carriles y las traviesas se lleva a cabo mediante las fuerzas generadas en las placas de asiento, y las fuerzas de contacto rueda-carril nos permiten acoplar la dinámica entre el eje ferroviario y la vía.

5 RESULTADOS

Los resultados que se muestran a continuación corresponden en primer lugar a los estudios que contribuyen a validar la metodología considerando amortiguamiento interno. A continuación se muestran resultados de la simulación de la interacción dinámica en recta, calculándose las fuerzas en el contacto rueda carril y las tensiones en el cuerpo del eje. Finalmente se obtiene la respuesta dinámica del eje en curva.

5.1 ESTUDIO DEL AMORTIGUAMIENTO INTERNO

En esta sección se analizan la estabilidad, las propiedades modales y FRF (Función de Respuesta en Frecuencia) de un cilindro rotatorio biarticulado con amortiguamiento interno. El objetivo es comparar los resultados de tres planteamientos diferentes: primero, el modelo de viga de Rayleigh rotatoria (en lo que resta, modelo de viga) cuya formulación se encuentra en el apartado 2.1; en segundo lugar, el método propuesto de sólidos amortiguados donde los modos de vibración se calculan analíticamente según teoría de vigas (modelo analítico de sólidos); y por último, el método propuesto donde los cálculos se llevan a cabo numéricamente mediante MEF (modelo numérico de sólidos).

En el presente estudio se considera el primer modo de vibración a flexión, siendo el modo de flexión forward el que puede presentar inestabilidad (como se mostrará más adelante y también puede encontrarse en la bibliografía [11]). Las propiedades del cilindro biarticulado están definidas en la Tabla 5.1. Las tres primeras frecuencias naturales asociadas con modos de flexión se encuentran en la Tabla 5.2. La malla del cilindro considerada en el modelo numérico de sólidos se muestra en la Figura 5.1. El modelo de EF implementa elementos lineales tridimensionales.

Tabla 5.1. Propiedades del cilindro.

Longitud	$L = 1.5 \text{ m}$
Radio	$R = 0.05 \text{ m}$
Densidad	$\rho = 7800 \text{ kg / m}^3$
Módulo de Young	$E = 2.1 \times 10^{11} \text{ N / m}^2$
Tasa amortiguamiento interno	$\xi = 0.03$
Coefficiente de Poisson	$\nu = 0.3$

Tabla 5.2. Frecuencias naturales del cilindro [Hz].

Índice de modo	Tipo de modo	EF	Modelo viga de Rayleigh
1	1 ^{er} modo de flexión	90.14	90.44
2	2 ^{do} modo de flexión	355.21	360.27
3	3 ^{er} modo de flexión	780.51	805.17

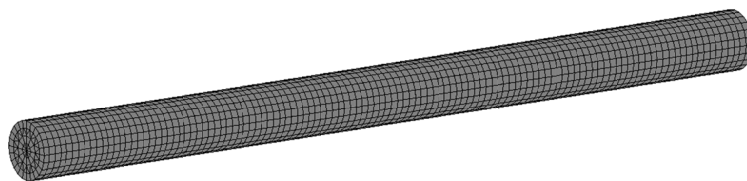


Figura 5.1. Malla de EF del cilindro.

La Figura 5.2 muestra los autovalores para las tres formulaciones descritas anteriormente. Éstos se han calculado con un barrido en velocidad de giro, alcanzando casi el doble de la velocidad crítica ($\Omega_{cr} = 5416 \text{ rpm}$) a partir de la cual el modo forward se vuelve inestable. A la izquierda se presenta un diagrama de Argand de los autovalores, y se puede observar cierta discrepancia entre modelos. A la derecha se muestra la parte real de los autovalores, donde todos los modelos describen prácticamente la misma

evolución. Además, se observa claramente como la parte real del autovalor del modo backward es siempre negativa y por tanto estable, a diferencia de lo que ocurre con el modo forward, cuya parte real se hace positiva para velocidades superiores a la velocidad crítica, volviéndose inestable.

Las discrepancias entre modelos están asociadas a la parte imaginaria de los autovalores, como se observa en la Figura 5.3. A la izquierda de esta figura se muestra la evolución de las frecuencias naturales respecto a la velocidad de rotación (diagrama de Campbell) para las tres formulaciones. Los modelos analítico y numérico de sólidos predicen prácticamente la misma evolución, pero difieren respecto al modelo de viga. Como se puede observar, la discrepancia aumenta con la velocidad de giro.

A la derecha de la Figura 5.3 se muestra la FRF receptancia del cilindro biarticulado calculada mediante las tres formulaciones, para una velocidad de giro $\Omega=5000\text{rpm}$ y una tasa de amortiguamiento interno $\xi=0.03$. La fuerza está aplicada transversalmente en el nodo central del cilindro, y el desplazamiento está medido en el mismo punto y dirección. Se puede observar que el modo backward de flexión está altamente amortiguado y ha desaparecido. En consecuencia, la respuesta estacionaria está únicamente influenciada por el modo forward de flexión. Como se observó en magnitudes anteriores, los modelos analítico y numérico de sólidos predicen el mismo comportamiento con curvas indistinguibles, pero difieren del modelo de viga.

RESULTADOS

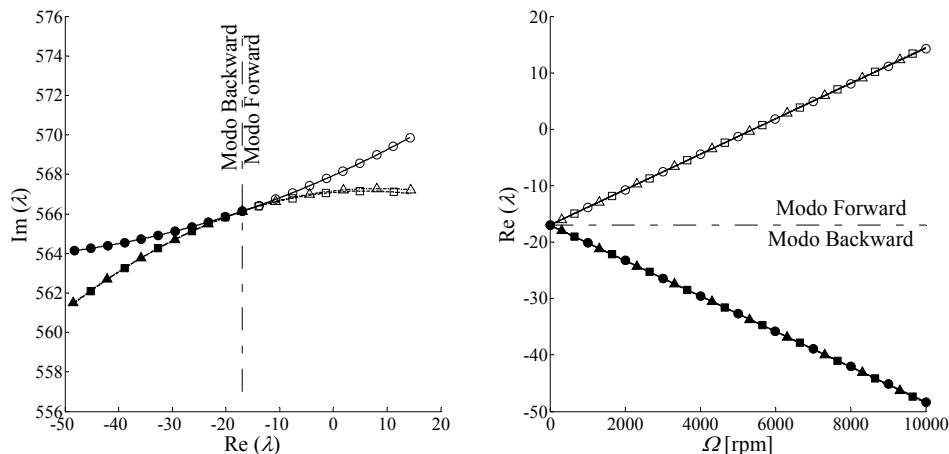


Figura 5.2. Izquierda: autovalores en diagrama de Argand. Derecha: parte real de los autovalores. $\circ-\circ$, $\bullet-\bullet$, modos forward y backward, modelo de viga; $\triangle-\triangle$, $\blacktriangle-\blacktriangle$, modos forward y backward, modelo analítico de sólidos; $\square-\square$, $\blacksquare-\blacksquare$, modos forward y backward, modelo numérico de sólidos.

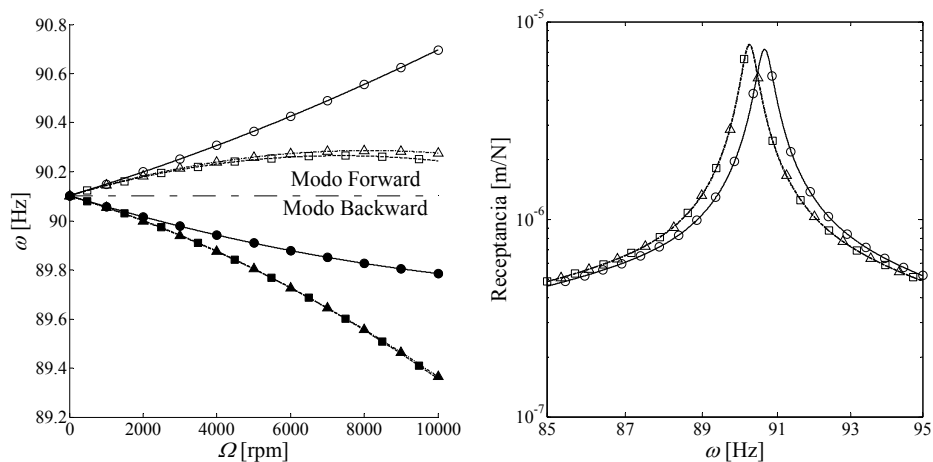


Figura 5.3. Izquierda: Diagrama de Campbell. Derecha: FRF directa (receptancia). $\circ-\circ$, $\bullet-\bullet$, modos forward y backward, modelo de viga; $\triangle-\triangle$, $\blacktriangle-\blacktriangle$, modos forward y backward, modelo analítico de sólidos; $\square-\square$, $\blacksquare-\blacksquare$, modos forward y backward, modelo numérico de sólidos.

Estas discrepancias observadas entre el modelo de sólidos amortiguados y el modelo unidimensional de viga, se deben al efecto realizado por las fuerzas centrífugas asociadas a la deformación del sólido. Este efecto centrífugo dependiente de la deformada se representa mediante el término $\Omega^2 \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}$ de la ecuación de movimiento para sólidos amortiguados descrita en el **Artículo 1**, y es equivalente al término $\Omega^2 (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}})\mathbf{q}$ presente en la Ec. (2.13) del modelo de sólidos propuesto en el apartado 2.2, término que no se considera y por tanto no aparece en el modelo de viga (véase Ec. (2.5)). Con el fin de reproducir la dinámica de la viga rotatoria con el modelo de sólidos, se desprecia el término $\Omega^2 \tilde{\mathbf{C}}\mathbf{q}$, por lo que se obtiene la misma ecuación de movimiento para el modelo analítico de sólidos y el modelo de viga rotatoria. A continuación se muestran los resultados para el modelo de viga de Rayleigh rotatoria y el modelo numérico de sólidos una vez omitido este término.

El modelo de sólidos mostró no solo discrepancias en la parte imaginaria de los autovalores, sino también una tendencia bastante diferente respecto al modelo de viga. Una vez despreciado el efecto causado por las fuerzas centrífugas asociadas a la deformación del sólido, ambos modelos describen una evolución de la frecuencia natural y una receptancia prácticamente iguales, como se refleja en la Figura 5.4.

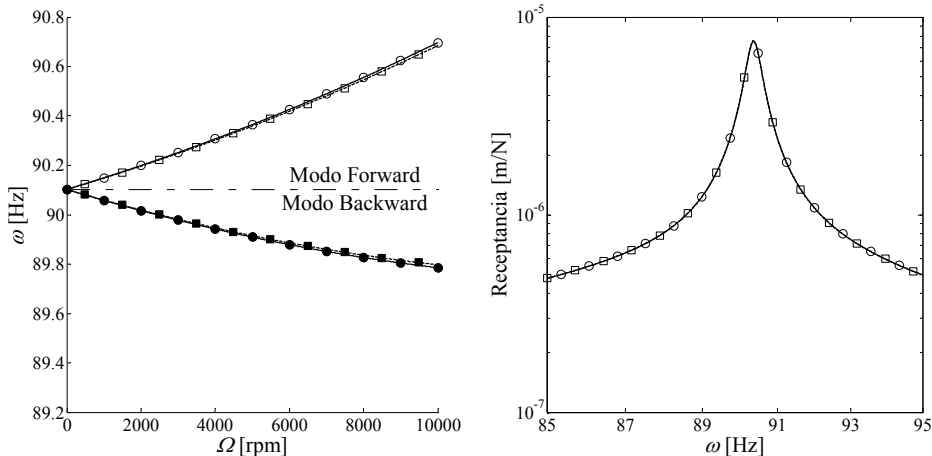


Figura 5.4. Izquierda: Diagrama de Campbell. Derecha: FRF directa (receptancia).
 ○—○, ●—●, modos forward y backward, modelo de viga; □—□, ■—■, modos forward y backward, modelo numérico de sólidos.

RESULTADOS

Para más detalles sobre el estudio dinámico del cilindro biarticulado, consúltese el **Artículo 1** de la presente Tesis.

5.2 INTERACCIÓN DINÁMICA VEHÍCULO-VÍA EN RECTA

En esta sección se muestran diversos resultados de la interacción dinámica vehículo-vía en tramo recto considerando diferentes fuentes de excitación: corrugación armónica simple, rugosidad pseudoaleatoria del carril, y un plano de bloqueo en la banda de rodadura de la rueda. El modelo de interacción dinámica vehículo-vía se define mediante la técnica de subestructuración definida en el apartado 4. El eje flexible rotatorio se modela mediante la formulación de sólidos flexibles desarrollada en 2.2, y la vía recta flexible con el planteamiento cíclico detallado en 3.1.

El vehículo ferroviario considerado en este caso de estudio es un coche de una unidad ETR 500 (tren italiano de alta velocidad). Se ha considerado el tipo de vía “rígida” según los parámetros descritos en el proyecto EUROBALT [47].

Las propiedades modales que constituyen los datos para el modelo del eje se obtienen de un modelo de elementos finitos cuya malla se muestra en la Figura 5.5, donde además se observa la sección de estudio escogida para el cálculo de las tensiones axiales del eje. Dicha sección de estudio se encuentra entre dos discos de freno, alejada de cambios de diámetro, ya que éstos introducen concentración de tensiones que no puede considerarse con precisión con la malla de elementos finitos considerada.

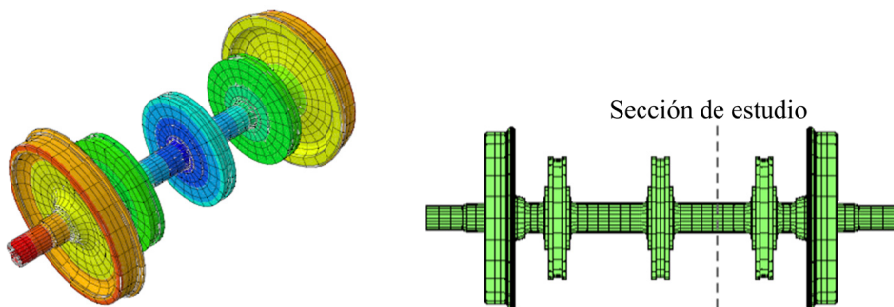


Figura 5.5. Malla de elementos finitos del eje flexible y sección de estudio.

En la Tabla 5.3 se resumen los parámetros considerados para llevar a cabo la simulación. Además, en todos los análisis que se mostrarán a continuación (menos en los que se considera el eje como sólido rígido), se han implementado los primeros 100 modos de vibración, cubriendo un rango de frecuencia de hasta 2.7 kHz aproximadamente.

Tabla 5.3. Parámetros de simulación.

Datos del modelo de eje		Datos del modelo de vía	
Masa del eje	1375 kg	Longitud del vano	0.6 m
Peso por eje	120 kN	Número de traviesas	70
Rigidez longitudinal de suspensión primaria	7.5 MN/m	Masa de la traviesa	324 kg
Rigidez lateral de suspensión primaria	7.1 MN/m	Rigidez del balasto	200 MN/m
Rigidez vertical de suspensión primaria	0.81 MN/m	Amortiguamiento del balasto	150 kNs/m
Amort. longitudinal de suspensión primaria	100 kNs/m	Rigidez de la placa de asiento	1 GN/m
Amort. lateral de suspensión primaria	100 kNs/m	Amortiguamiento de la placa de asiento	50 kNs/m
Amort. vertical de suspensión primaria	30 kNs/m	Perfil del carril	UIC60

5.2.1 Resultados para corrugación armónica del carril

Para la simulación asociada a la corrugación del carril, se han considerado diferentes longitudes de onda y amplitudes, incluyendo valores que excitan algunas frecuencias naturales del eje y las frecuencias P1 y P2 de la vía (ver resonancias P1 y P2 en [35]). El primer caso estudiado corresponde a una corrugación de longitud de onda de 60 mm (la décima parte de la longitud del vano). En la Figura 5.6 se representa la fuerza de contacto vertical entre el eje ferroviario y la vía corrugada para dos velocidades (100 y 300 km/h) y para dos amplitudes de corrugación. En la figura superior se considera un valor pico-pico de corrugación de 4.84 μm ,

correspondiente a la amplitud límite según la normativa UNE-EN ISO 3095 [48]. Para la velocidad de 300 km/h se muestran los resultados para el eje rígido, con la finalidad de comparar el efecto de la flexibilidad del eje. En la figura se detalla el contorno de la rugosidad del carril en una escala apropiada.

Se observan claramente dos partes en la fuerza de contacto. La primera, que tiene la misma longitud de onda que la corrugación del carril, y la segunda con longitud de onda igual a la longitud del vano. La amplitud de la primera fuerza componente está muy influenciada por la velocidad del vehículo, siendo aproximadamente tres veces mayor para 300 km/h que para 100 km/h. También afecta la flexibilidad del eje en la fuerza de contacto, pues si se comparan para 300 km/h el eje rígido y flexible, se observa que despreciar la flexibilidad del eje conduce a sobrestimar aproximadamente en un 25% el valor pico-pico de la fuerza de contacto. Este fenómeno se debe a que, para la frecuencia de excitación considerada (1390 Hz aproximadamente), la masa del eje involucrada en la vibración vertical es menor que la masa global de éste debido a los efectos de la flexibilidad, mecanismo que no se considera en el modelo de eje rígido.

Una amplitud pico-pico de corrugación de $4.84 \mu\text{m}$ no es alta para las longitudes de onda estudiadas, pues frecuentemente se encuentran en el rango de decenas o centenas de micras. Por lo tanto, en el gráfico inferior de la Figura 5.6 se muestra la fuerza de contacto para el eje flexible a 300 km/h para dos valores de amplitudes de corrugación, una correspondiente al valor límite según la norma ISO 3095 (como en el caso anterior), y otra diez veces mayor. Se puede observar como aumenta la amplitud de la fuerza de contacto con la amplitud de corrugación. Para el caso de mayor amplitud, se obtiene un valor pico-pico máximo de 93 kN, que representa un 78% de la carga estática. Por último, es importante señalar la poca influencia de los efectos no lineales asociados al contacto rueda-carril para este caso, pues la máxima variación dinámica de la fuerza de contacto para la mayor amplitud es diez veces mayor que para el caso de menor amplitud.

RESULTADOS

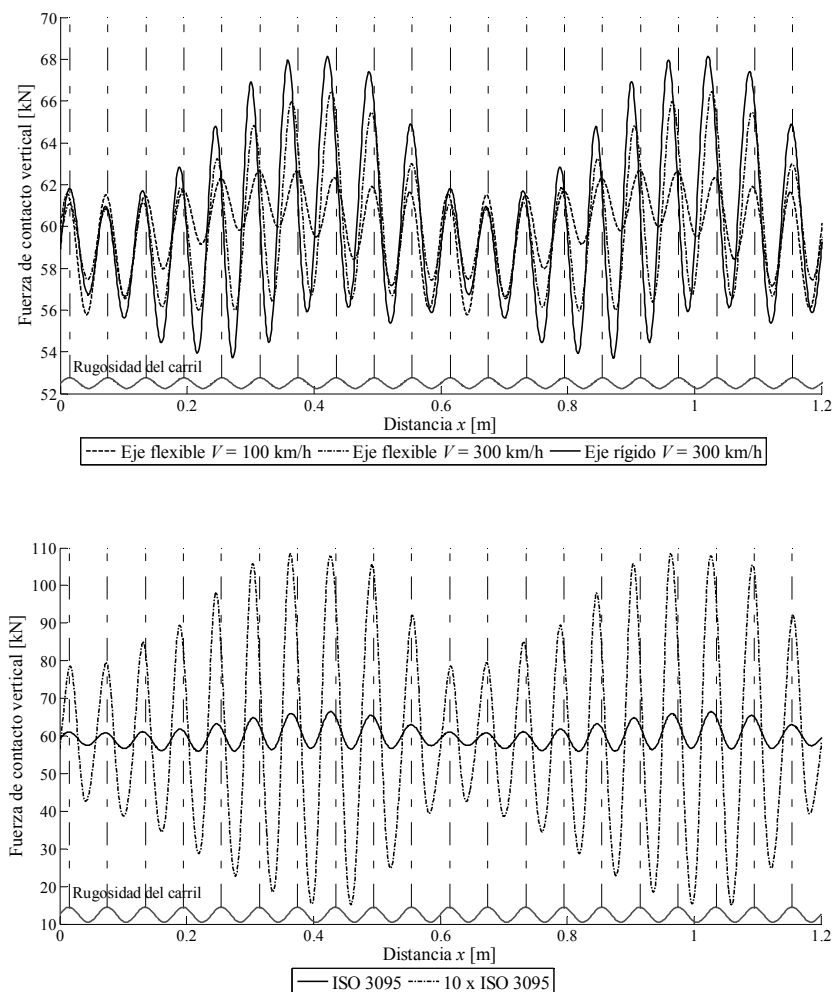


Figura 5.6. Fuerza de contacto rueda-carril cuando el vehículo circula sobre una vía corrugada con longitud de onda 60 mm. Arriba: efecto de la velocidad y de la flexibilidad del eje con amplitud de corrugación según ISO 3095. Abajo: efecto de la amplitud de corrugación para una velocidad de 300 km/h y eje flexible.

En la Figura 5.7 se muestra la tensión axial en la sección de estudio del eje (ver Figura 5.5), representada en función de la rotación del eje y para los mismos casos de estudio mostrados en las fuerzas de contacto de la Figura 5.6. A la izquierda se ha analizado el efecto de la velocidad del vehículo comparando los resultados para 100 y 300 km/h, considerando la amplitud de corrugación límite según ISO 3095. Se observa que la forma de

onda de la tensión axial se aproxima bastante a una senoide, y su amplitud pico-pico aumenta de 78.3 MPa a 88 MPa cuando la velocidad se incrementa de 100 a 300 km/h. En la figura de la derecha se estudia el efecto de la amplitud de corrugación sobre la tensión axial del eje. Se ha considerado una velocidad de 300 km/h y las mismas amplitudes de corrugación analizadas en la Figura 5.6. Se observa que las tensiones para ambos casos son prácticamente idénticas y no pueden distinguirse, mostrando que para este caso la amplitud de corrugación no tiene influencia en la amplitud de tensión axial, a diferencia de lo que ocurría en la fuerza de contacto (véase Figura 5.6 inferior).

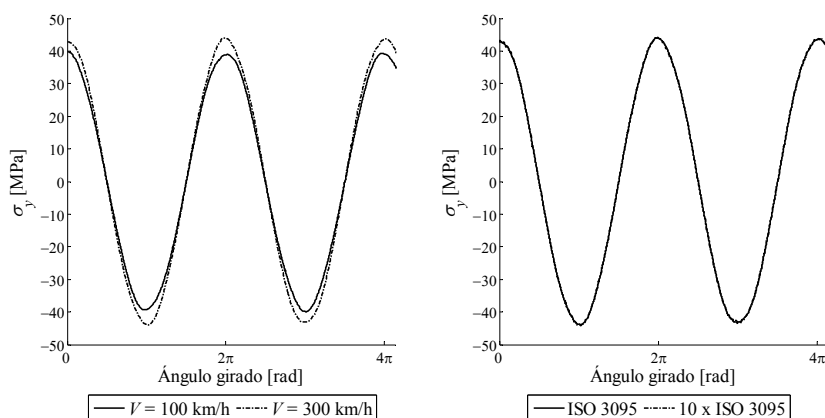


Figura 5.7. Tensión axial en la sección de estudio del eje cuando el vehículo circula sobre una vía corrugada con longitud de onda 60 mm. Izquierda: dos velocidades de vehículo, amplitud de corrugación según límite de ISO 3095. Derecha: dos amplitudes de corrugación (resultados indistinguibles).

Además de los casos de cálculo mostrados hasta el momento para corrugación armónica, se han considerado diversas longitudes de onda de corrugación tales que excitan ciertas frecuencias de la vía y del eje. En concreto se han excitado la frecuencia P1 de la vía (1068.3 Hz aproximadamente, ver Ref. [35]) y los dos primeros modos de flexión forward (rotatorios) del eje, cuyos resultados detallados pueden encontrarse en el **Artículo 2** de la Tesis.

Con la finalidad de cuantificar la influencia de los efectos dinámicos en la fuerza de contacto rueda-carril y en las tensiones dinámicas en el eje, se define un factor dinámico como cociente entre el valor dinámico máximo de la magnitud de estudio y su correspondiente valor estático. Para la fuerza de contacto, el factor dinámico k_Q se expresa como sigue:

$$k_Q = \frac{Q_{d,\max}}{Q_s}, \quad (5.1)$$

donde $Q_{d,\max}$ es el máximo valor dinámico de la fuerza vertical de contacto y Q_s es el correspondiente valor estático. De igual forma, el factor dinámico para las tensiones normales del eje k_σ se define como:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{d,\max}}{\sigma_{s,\max}}, \quad (5.2)$$

siendo $\sigma_{d,\max}$ la máxima tensión dinámica en el punto de estudio considerado y $\sigma_{s,\max}$ el máximo valor estático asociado a la flexión rotativa originada por la carga estática en el eje.

En la Figura 5.8 se muestran los factores dinámicos k_Q y k_σ respectivamente en función de la velocidad del vehículo, para los casos de corrugación del carril comentados anteriormente y considerando una amplitud de la misma diez veces mayor que el límite descrito por la norma ISO 3095. Para el factor de amplificación dinámico de la fuerza de contacto k_Q , se observa que para todo el rango de velocidades estudiadas se alcanzan los mayores valores para el caso en el que se excita el primer modo de flexión forward del eje, alcanzando un valor máximo cercano a 1.8. Para la mayoría de casos de corrugación considerados en este trabajo, aparece un máximo local entre 125 y 135 km/h, fenómeno asociado a la frecuencia P2 de la vía excitada por la frecuencia de paso por traviesa. Referente al factor dinámico de tensiones k_σ (Figura 5.8 derecha), se observa que para el caso de cálculo sin corrugación y con corrugación que excita la frecuencia P1 de la vía, tienen tendencias y valores muy similares, mostrando amplificaciones dinámicas bajas en la tensión, con un valor máximo por debajo de 1.2. Sin embargo cuando la corrugación excita las frecuencias naturales del eje, la

RESULTADOS

amplificación dinámica es significativamente mayor, alcanzando valores cercanos a 1.8 cuando el primer modo forward es excitado y de 1.4 cuando se excita el segundo modo. La tendencia de las curvas es prácticamente creciente con respecto a la velocidad, pues en este caso el efecto de la resonancia asociada al paso por travesía es menor que en la fuerza de contacto.

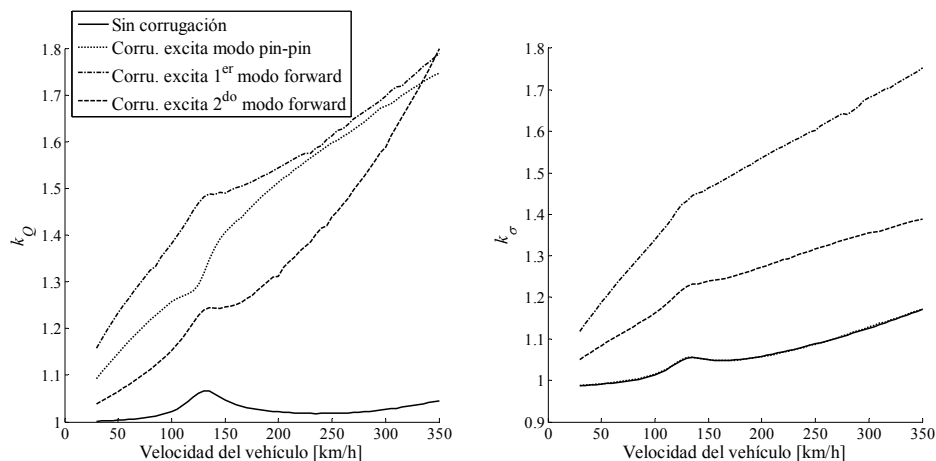


Figura 5.8. Factor dinámico k_Q (figura izquierda) y k_σ (figura derecha) para diferentes velocidades y casos de excitación. La amplitud de corrugación es diez veces mayor que el límite de ISO 3095.

5.2.2 Resultados para rugosidad pseudoaleatoria del carril y para el plano de rueda

En la Figura 5.9 se representa la fuerza de contacto frente a la distancia recorrida por el vehículo para las velocidades de 100 y 300 km/h, considerando como excitación la rugosidad pseudoaleatoria del carril con amplitudes determinadas por la norma ISO 3095. Además se han comparado los resultados para un modelo de eje rígido y flexible. Se observan importantes variaciones dinámicas de la fuerza de contacto, con un valor máximo de 1.6 veces la carga estática, aproximadamente, para una velocidad de 300 km/h. Sin embargo no se aprecian variaciones significativas en este cálculo entre el eje flexible y rígido.

En la Figura 5.10 se representa la fuerza de contacto frente a la distancia recorrida para la velocidad del vehículo de 50 km/h cuando la fuente de excitación es un plano de rueda, considerando de nuevo los modelos de eje flexible y rígido. Se pueden apreciar efectos dinámicos muy severos, que consisten en primer lugar en una pérdida total del contacto rueda-carril, seguidos de un impacto que origina un valor máximo de fuerza de contacto entre 3 y 4 veces mayor que la carga estática, terminando con una vibración transitoria. Las diferencias entre el modelo de eje rígido y flexible son pequeñas en cuanto a duración de la pérdida de contacto y valor máximo de fuerza se refiere, pero la flexibilidad del eje influye mucho en el contenido en frecuencia de la fase transitoria final tras el impacto, como puede apreciarse en la vista aumentada a la derecha de la Figura 5.10.

Para estos dos casos de excitación de rugosidad pseudoaleatoria del carril y plano de rueda, la tensión normal del eje se muestra en la Figura 5.11. Para el caso de rugosidad del carril se observan pequeñas variaciones dinámicas de la tensión, alcanzando una amplitud pico-pico máxima alrededor de 91.2 MPa (corresponde con un factor de amplificación dinámica en tensiones de 1.18 aproximadamente). Si se considera el defecto de plano de rueda, se observa que la tensión está altamente influenciada por la velocidad del vehículo, con mayores efectos dinámicos a baja velocidad (factor de amplificación dinámica de 1.34 aproximadamente) a causa de la pérdida de contacto de la rueda con el carril. A mayores velocidades se reducen las tensiones dinámicas máximas alcanzadas.

RESULTADOS

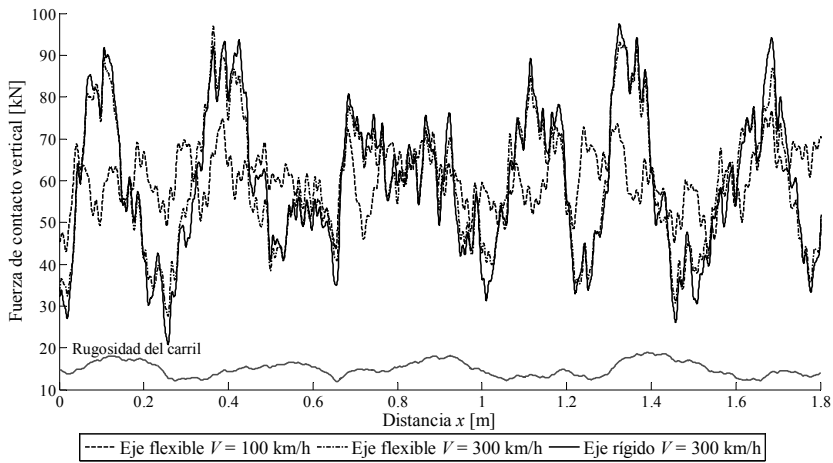


Figura 5.9. Fuerza de contacto rueda-carril cuando el vehículo circula a velocidades de 100 y 300 km/h sobre una vía corrugada aleatoriamente.

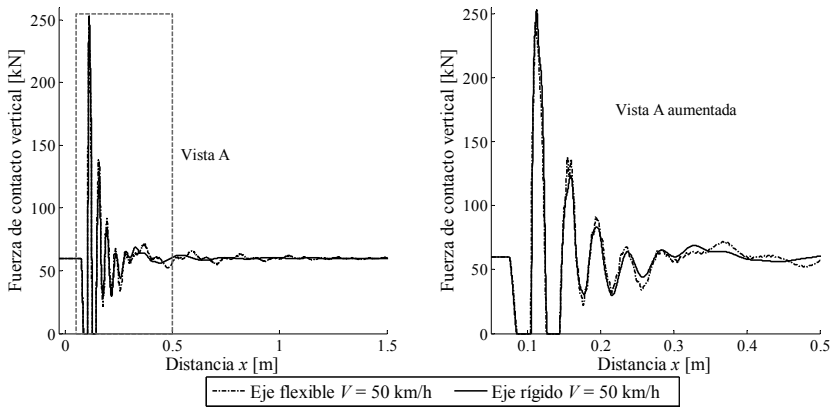


Figura 5.10. Fuerza de contacto rueda-carril cuando el vehículo circula a 50 km/h sobre un carril perfectamente uniforme en presencia de un plano de rueda de 50 mm.

RESULTADOS

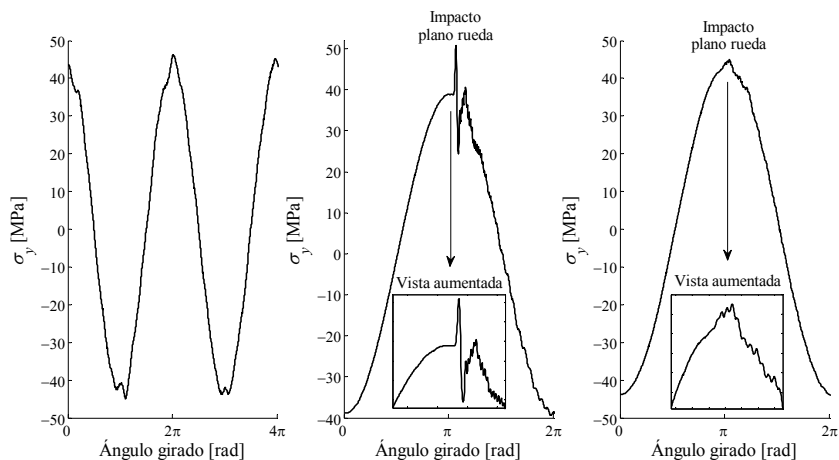


Figura 5.11. Tensión axial en la sección de estudio del eje cuando el vehículo circula a 300 km/h sobre una vía corrugada aleatoriamente (izquierda), sobre un carril perfectamente uniforme en presencia de un plano de rueda de 50 mm a 50 km/h (centro) y 300 km/h (derecha).

Por último, en la Figura 5.12 se detalla la evolución de los factores dinámicos k_Q y k_σ frente a la velocidad del vehículo, para ambos casos de excitación considerados en este apartado. El factor dinámico de la fuerza de contacto k_Q es casi monótono creciente para la excitación proveniente de la rugosidad aleatoria, alcanzando un valor máximo próximo a 1.8. En el caso de plano de rueda, el factor dinámico de la fuerza es mucho mayor, estando acotado entre 2.8 y 4.2, con valores mayores para bajas velocidades. Este fenómeno se debe a que a bajas velocidades la duración de la pérdida de contacto es mayor, y el impacto por lo tanto es más elevado. Respecto al factor dinámico de las tensiones k_σ , se observa que de nuevo en el caso de rugosidad aleatoria es casi monótono creciente con la velocidad, alcanzando un valor máximo cercano a 1.3. Sin embargo se observa una tendencia muy diferente para el caso de plano de rueda, siendo el factor k_σ inicialmente decreciente con la velocidad, para volver a crecer a partir de 200 km/h aproximadamente. El mayor factor dinámico para la tensión axial se obtiene a la menor velocidad considerada en este análisis, y se encuentra ligeramente por debajo de 1.5.

RESULTADOS

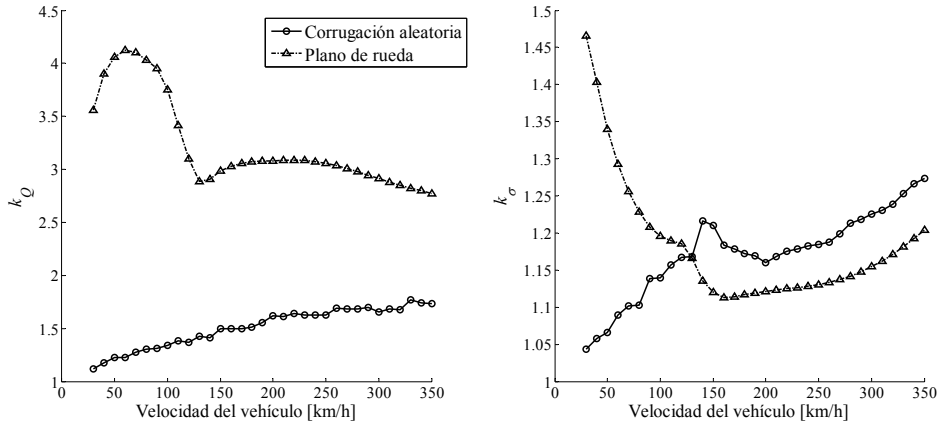


Figura 5.12. Factores dinámicos k_Q (figura izquierda) y k_σ (figura derecha) para los casos de excitación de rugosidad aleatoria y plano de rueda.

Es importante señalar que la normativa europea EN13103 y EN13104 [30, 31] prescribe los métodos de diseño para ejes ferroviarios, y asume un factor de amplificación dinámica de 1.25 sobre las fuerzas generadas en la suspensión primaria. Como el cálculo de tensiones se deriva de un planteamiento estático, también se consideran aumentadas en un 25%. Para el caso de excitación mediante corrugación armónica presentado en la Figura 5.8, es interesante observar que en algunas condiciones el factor dinámico k_σ puede superar el valor de 1.25 asumido por la norma. Si la excitación procede de un plano de rueda, el factor de 1.25 es superado a bajas velocidades (por debajo de 75 km/h, véase Figura 5.12), por lo que el escenario más crítico en este caso será en vehículos de mercancías, los cuales a menudo circulan a bajas velocidades. Por último, para el caso de rugosidad aleatoria del carril solamente se sobrepasa el valor del factor dinámico de 1.25 para velocidades por encima de 300 km/h (Figura 5.12), en cuyo caso sólo es relevante en vehículos de alta velocidad. Indicar finalmente que los resultados mostrados sobre amplificación dinámica en la Figura 5.8 y Figura 5.12 dependen de la amplitud considerada del defecto, y si se consideran irregularidades más severas se obtendrían mayores tensiones dinámicas.

RESULTADOS

Para más detalles sobre el estudio de la interacción dinámica vehículo-vía en recta y el cálculo de las tensiones dinámicas que se derivan, consúltese el **Artículo 2** de la Tesis.

5.3 INTERACCIÓN DINÁMICA VEHÍCULO-VÍA EN CURVA

En esta sección se presentan diversos resultados de simulación para la interacción dinámica vehículo-vía en curva, considerando diferentes fuentes de excitación: corrugación armónica del carril, rugosidad pseudoaleatoria del carril, y un plano de bloqueo en la banda de rodadura de la rueda. Se incluyen simulaciones para el eje rígido (considerando en el planteamiento modal sólo los modos de cuerpo rígido del eje), con el fin de analizar el efecto de la flexibilidad. Para la excitación procedente de un plano de rueda los resultados se comparan con los correspondientes para una vía recta, evaluándose así la influencia de la curva sobre la interacción dinámica de alta frecuencia entre el vehículo y la vía, principal aportación de este trabajo.

Se ha considerado el modelo de interacción dinámica vehículo-vía explicado en el apartado 4. El eje ferroviario en curva se modela mediante la formulación de sólidos flexibles desarrollada en el punto 2.3, y la vía flexible en curva con el planteamiento cíclico detallado en 3.2.

Para las simulaciones en curva se ha considerado los datos del eje y vía del apartado 5.2. La malla de elementos finitos del eje montado se muestra en la Figura 5.5, y los parámetros de simulación para este caso son los que aparecen en la Tabla 5.3. Se han considerado los primeros 100 modos de vibración del eje flexible, cubriendo un rango de frecuencia de hasta 2.7 kHz aproximadamente. En los casos de simulación presentados en este apartado se considera que el vehículo circula a 150 km/h sobre una curva de 1000 m de radio que presenta un peralte de 150 mm (peralte práctico).

Para poder considerar las condiciones estacionarias de circulación que se producen cuando el vehículo circula por una curva de radio constante, se ha realizado una simulación dinámica del vehículo ferroviario completo en curva mediante un programa basado en un modelo de parámetros concentrados tipo multibody (software ADTreS [49]). De esta simulación se obtienen los parámetros asociados a fuerzas y desplazamientos a nivel de la suspensión primaria que son impuestos como condiciones de contorno del eje flexible en curva en la Ec. (2.18). Los

valores estacionarios calculados mediante el modelo propuesto en esta Tesis y los correspondientes al software ADTreS se muestran en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4. Fuerzas de contacto rueda-carril estacionarias para el planteamiento multicuerpo rígido del vehículo completo (software ADTreS [49]) y el modelo de eje flexible.

	Rueda exterior		Rueda interior	
	Modelo rígido multicuerpo	Modelo eje flexible	Modelo rígido multicuerpo	Modelo eje flexible
Fuerza vertical	69.57 kN	70.01 kN	49.82 kN	49.71 kN
Fuerza lateral	5.68 kN	5.91 kN	-3.75 kN	-3.99 kN
Fuerza longitudinal	14.39 kN	15.16 kN	-14.39 kN	-15.16 kN

5.3.1 Resultados para corrugación armónica del carril

El primer caso de excitación estudiado es una corrugación armónica del carril con longitud de onda de 60 mm (la décima parte de la longitud del vano). En la Figura 5.13 se representa la fuerza de contacto vertical generada entre el eje ferroviario y la vía, para ambas ruedas y para la velocidad de 150 km/h. Se considera un valor pico-pico de corrugación de 4.84 μm , correspondiente a la amplitud límite según la normativa UNE-EN ISO 3095 [48]. En la figura se representa la geometría de la rugosidad de los carriles fuera de escala.

En la fuerza de contacto vertical se observan dos partes bien diferenciadas. La primera tiene la misma longitud de onda que la corrugación del carril, y la segunda presenta una longitud de onda igual a la longitud del vano. Este último caso se debe a la variación periódica de la rigidez del carril vista por el eje como consecuencia de los soportes discretos de la vía. La fuerza de contacto está muy influenciada por la flexibilidad del eje, pues se observa que el modelo de eje rígido sobrestima el valor pico-pico de la fuerza de contacto en un 15% para la rueda interna y en un 40% para la externa. Tal como se comentó anteriormente en la Figura

RESULTADOS

5.6, esta sobreestimación se debe a que la masa involucrada en la vibración de alta frecuencia del eje flexible es menor que la masa global de éste debido a los efectos de la flexibilidad, mecanismo que no se considera en el modelo de eje rígido.

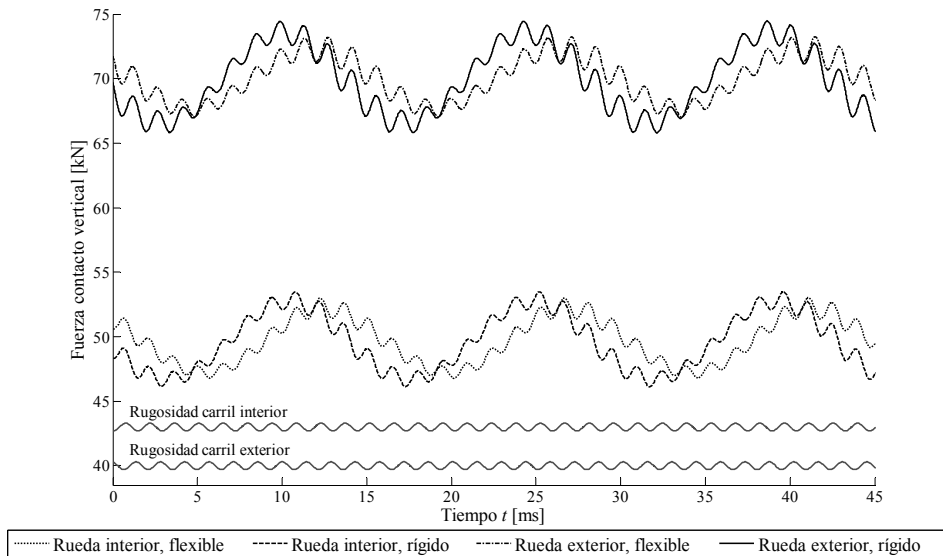


Figura 5.13. Fuerza de contacto rueda-carril vertical cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva corrugada con longitud de onda 60 mm. Amplitud de corrugación corresponde al límite de ISO 3095.

La Figura 5.14 muestra la componente transversal de la fuerza de contacto en ambas ruedas, para las mismas condiciones de circulación consideradas anteriormente. Las condiciones del eje en curva se reflejan en los valores estacionarios de las fuerzas de contacto (véase Tabla 5.4). En este trabajo se considera el primer eje del bogie delantero, el cual está sometido a un pequeño ángulo de ataque negativo debido a la circulación en curva, lo que produce una fuerza transversal estacionaria que apunta hacia fuera de la curva. Esta fuerza es equilibrada por la componente lateral de la fuerza en la pestaña de la rueda exterior, dando lugar a la condición típica de dos fuerzas laterales con sentidos opuestos que tienden a “abrir” los carriles. Al igual que para la fuerza de contacto vertical, la componente transversal presenta dos armónicos, uno correspondiente a la frecuencia de paso por

RESULTADOS

travesía, y el otro asociado a la longitud de onda de la corrugación introducida como fuente de excitación. Se observa como también en este caso simplificar el problema a un modelo de eje rígido produce ligeras sobreestimaciones en la fuerza de contacto transversal.

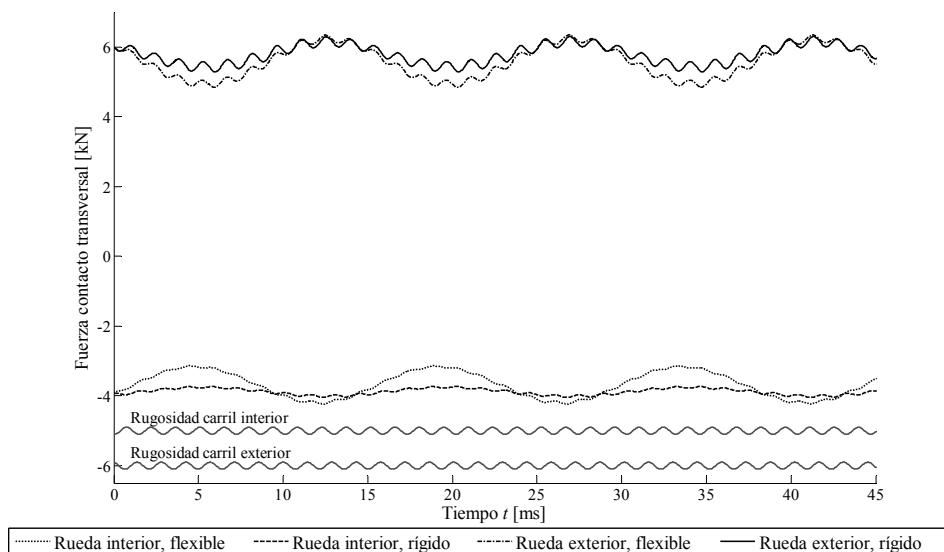


Figura 5.14. Fuerza de contacto rueda-carril transversal cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva corrugada con longitud de onda 60 mm. Amplitud de corrugación corresponde al límite de ISO 3095.

5.3.2 Resultados para rugosidad pseudoaleatoria del carril

Las Figuras 5.15-5.17 muestran la historia temporal de las fuerzas de contacto vertical, transversal y longitudinal, considerando como excitación una rugosidad pseudoaleatoria. Las amplitudes en tercios de octava correspondientes a la frecuencia espacial son los correspondientes al límite de la norma ISO 3095. Los resultados para un modelo de eje rígido y flexible se comparan de nuevo. Las variaciones dinámicas de todas las componentes de la fuerza de contacto muestran una forma de onda compleja, y están originadas por la respuesta dinámica del sistema vehículo-

RESULTADOS

vía a una excitación aleatoria con un rango ancho en frecuencia. Respecto a la fuerza de contacto vertical, se observa un valor máximo en la rueda exterior de 1.75 veces el valor estacionario en curva, mientras que en la rueda interior la mínima fuerza dinámica es aproximadamente 0.52 veces el valor estacionario.

Comparando los modelos de eje rígido y flexible, se observa que el uso del modelo de eje rígido conduce a una sobreestimación significativa de la máxima fuerza vertical en la rueda externa y de la máxima descarga en la rueda interna. Sin embargo, las componentes transversal y longitudinal de la fuerza de contacto presentan una situación diferente, ya que la máxima amplitud dinámica para ambos modelos es similar tanto para la rueda interna como externa, pero con grandes diferencias en la forma de la señal.

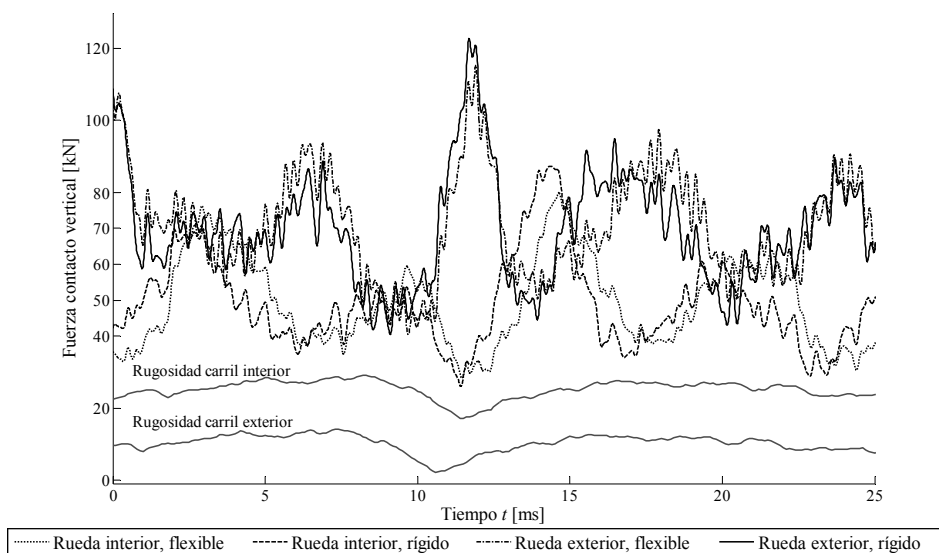


Figura 5.15. Fuerza de contacto rueda-carril vertical cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva con rugosidad aleatoria en los carriles.

RESULTADOS

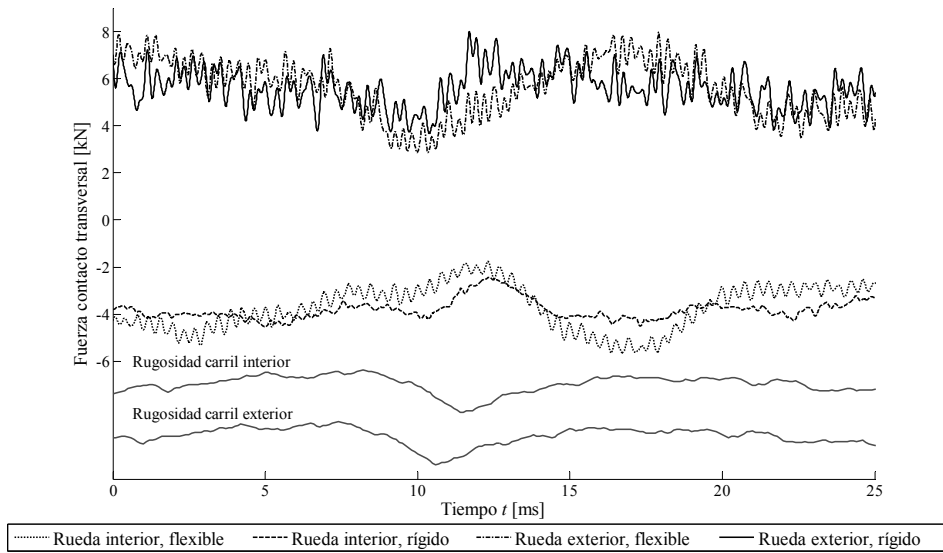


Figura 5.16. Fuerza de contacto rueda-carril transversal cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva con rugosidad aleatoria en los carriles.

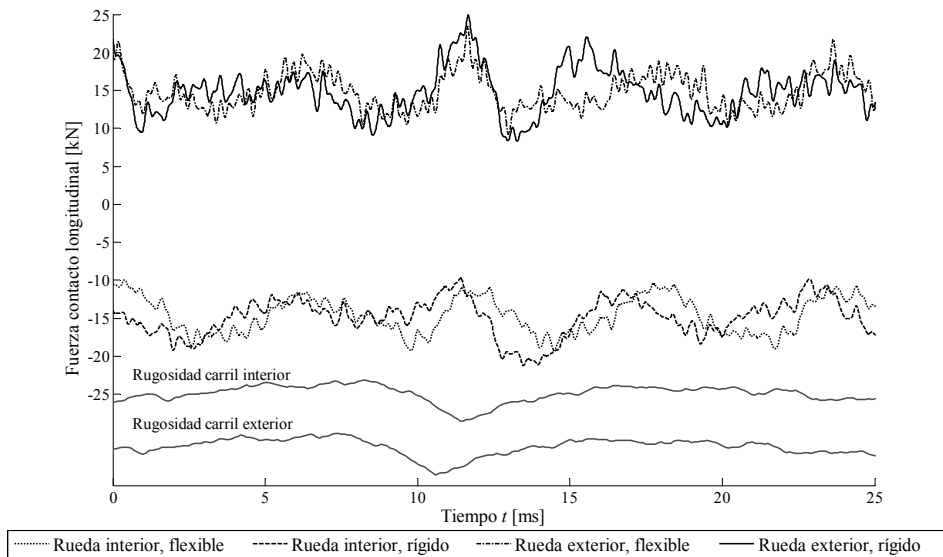


Figura 5.17. Fuerza de contacto rueda-carril longitudinal cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva con rugosidad aleatoria en los carriles.

5.3.3 Resultados para un plano de rueda

La historia temporal de la fuerza de contacto vertical, transversal y longitudinal causada por un plano de rueda se muestran en las Figuras 5.18-5.20. Se supone que el plano de rueda impacta simultáneamente en ambas ruedas. Los resultados se presentan para el vehículo circulando en vía curva sin irregularidades bajo las mismas consideraciones anteriores, y se muestran ambos modelos, eje flexible y rígido. Además, se comparan con resultados de la interacción dinámica vehículo-vía originada por un plano de rueda en tramo recto.

Se observan intensos efectos dinámicos, dando lugar a una pérdida total del contacto en ambas ruedas por el plano de bloqueo, el cual es seguido de un impacto severo que produce grandes picos en todas las componentes de la fuerza de contacto, terminando con una vibración transitoria que genera grandes fluctuaciones dinámicas.

Respecto a la fuerza de contacto vertical, la máxima sobrecarga en la rueda interior es el 308% del valor estacionario, mientras que en la rueda exterior se alcanza un valor del 362% respecto el estacionario. En lo referente a la fuerza transversal (ver Figura 5.19), ésta presenta un valor pico mucho más elevado en la rueda exterior que en la interior, debido al mayor ángulo de contacto presente en la rueda externa como consecuencia del desplazamiento lateral del eje hacia fuera de la curva, efecto no considerado en los modelos que desprecian los efectos en curva. También en la fuerza de contacto longitudinal (Figura 5.20) se observa un valor máximo mayor en la rueda externa, en este caso debido a que esta rueda presenta una fuerza de contacto vertical mayor, originando por tanto una mayor fuerza de contacto tangencial para las mismas o similares velocidades de pseudodeslizamiento.

Las discrepancias entre el modelo de eje rígido y flexible son pequeñas en cuanto a la duración de la pérdida de contacto y a la máxima sobrecarga en dirección vertical se refiere (el modelo de eje rígido sobreestima un 7% el valor pico de la componente vertical respecto el modelo de eje flexible), pero la vibración transitoria seguida del impacto se ve afectada muy notoriamente por la flexibilidad del eje, reflejado por el diferente contenido en frecuencia que presenta. Además, en la componente transversal de la fuerza de contacto, se observa que el valor máximo tras el

RESULTADOS

impacto para la rueda exterior es bastante más elevado para el modelo de eje rígido, con un incremento del 40 % respecto del modelo flexible. Sin embargo, la componente longitudinal está menos afectada por la flexibilidad del eje.

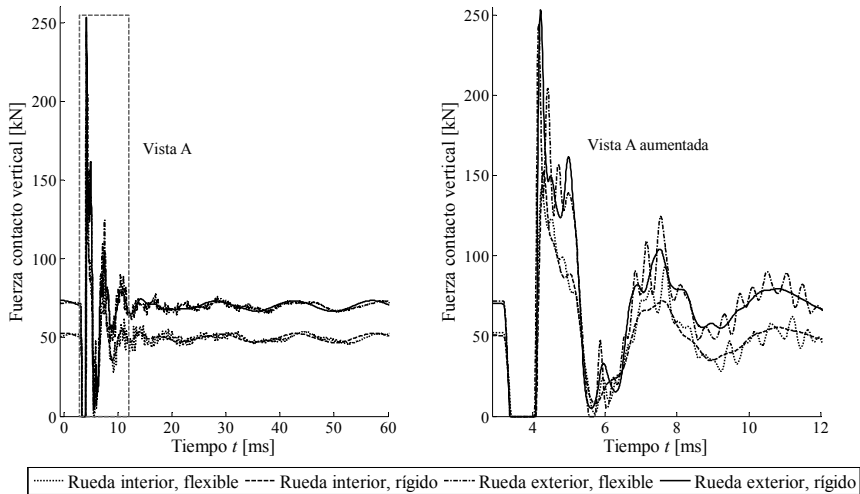


Figura 5.18. Fuerza de contacto rueda-carril vertical cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva perfectamente uniforme en presencia de un plano de rueda de 50 mm.

RESULTADOS

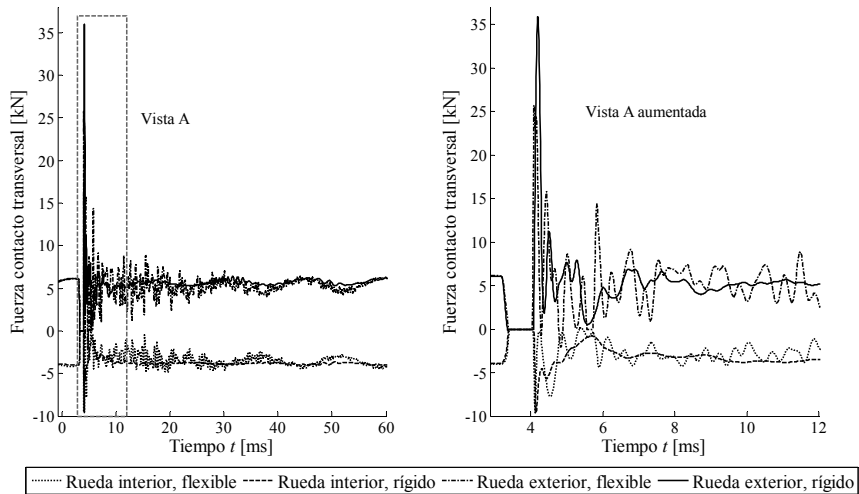


Figura 5.19. Fuerza de contacto rueda-carril transversal cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva perfectamente uniforme en presencia de un plano de rueda de 50 mm.

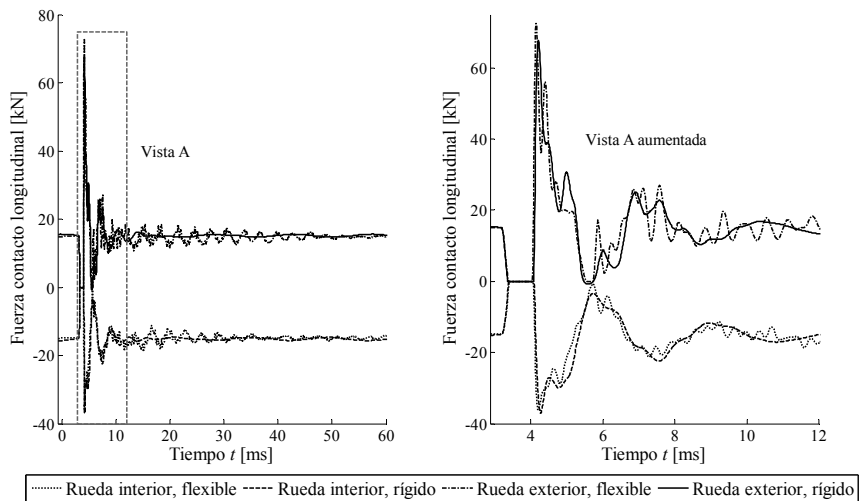


Figura 5.20. Fuerza de contacto rueda-carril longitudinal cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva perfectamente uniforme en presencia de un plano de rueda de 50 mm.

RESULTADOS

En la Figura 5.21 se presenta la fuerza de contacto vertical considerando el plano de rueda cuando el vehículo circula en vía recta, a la misma velocidad de 150 km/h. Debido a la simetría del sistema y de las cargas, las fuerzas en ambas ruedas son iguales, por lo que se muestran solo para una rueda. Aparte de los diferentes valores estacionarios de las fuerzas de contacto en curva y recta, se observa que la forma de la historia temporal de la fuerza de contacto en la Figura 5.21 es muy similar a la presentada en curva en la Figura 5.18. Sin embargo, la fuerza pico en recta es de 180 kN, sensiblemente inferior que los 250 kN que se alcanzan en condiciones de curva en la rueda exterior. De tal modo se refleja que la excitación de un plano de rueda en curva produce una sobrecarga considerable en el eje y en los carriles, por lo que se espera que acelere el daño y la degradación de las superficies de contacto, a la par que un incremento de ruido y vibración.

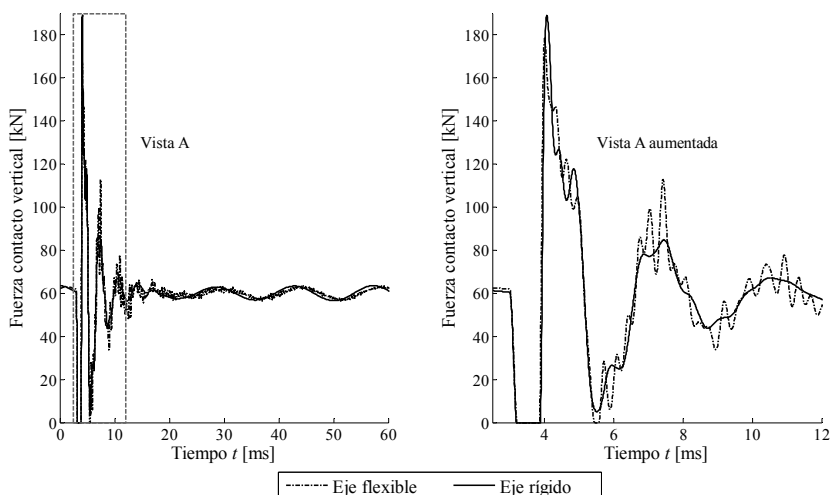


Figura 5.21. Fuerza de contacto rueda-carril vertical cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía recta perfectamente uniforme en presencia de un plano de rueda de 50 mm.

6 CONCLUSIONES Y DESARROLLOS FUTUROS

En este apartado se recogen las principales conclusiones extraídas de la Tesis Doctoral aquí presentada y se enumeran posibles desarrollos futuros que continúen la línea de investigación en la que se enmarca.

6.1 CONCLUSIONES

Se ha desarrollado una metodología completa para modelar la dinámica de sólidos elásticos rotatorios con geometría de revolución, tanto cuando describen una trayectoria recta como una trayectoria genérica. Este modelo resulta adecuado para aquellos casos donde el interés yace en los puntos espaciales del sólido más que en los puntos materiales. Por lo tanto, es especialmente útil para estructuras complejas donde hay interacción entre sólidos no rotatorios y rotatorios, como el caso de la interacción eje ferroviario-vía.

El método está basado en un planteamiento modal Euleriano donde la base modal del sistema está formada por las propiedades modales del sólido no rotatorio, aprovechando la simetría de revolución. La formulación final consiste en un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias y lineales cuyos coeficientes son independientes del tiempo. En consecuencia, las matrices se calculan únicamente al principio de la simulación, reduciéndose considerablemente el coste computacional. En el caso de describir una trayectoria curva, se ha adoptado un sistema de coordenadas de trayectoria que se mueve según el eje de la vía y permite modelar el movimiento de arrastre. Añadiendo además el movimiento vibratorio del eje respecto a la vía según el planteamiento modal Euleriano, se ha obtenido la ecuación de movimiento del eje en curva con un coste computacional muy reducido.

Inicialmente el modelo de sólidos se ha aplicado para estudiar la dinámica de un cilindro rotatorio biarticulado, geometría sencilla que

presenta una solución de referencia mediante la teoría de vigas rotatorias. Se han obtenido sus autovalores y se han calculado las correspondientes FRFs. Se ha mostrado que el modelo de sólidos presenta ciertas discrepancias con el modelo de viga de Rayleigh. Estas discrepancias son debidas al efecto de las fuerzas centrífugas asociadas con la deformación del sólido, término no considerado por el modelo de vigas. Para corroborar esta afirmación, se ha procedido a prescindir de dicho término y se ha podido comprobar que el modelo de sólidos reproduce el comportamiento dinámico predicho por la teoría de vigas (véase el apartado 5.1 y el **Artículo 1** de la Tesis).

Tras analizar la validez del modelo de sólidos, se ha llevado a cabo una simulación de la interacción dinámica entre el vehículo ferroviario y la vía en tramo recto. Se han presentado resultados de la interacción tales como fuerzas de contacto rueda-carril y tensiones en el eje, considerando como fuentes de excitación la rugosidad del carril y el plano de rueda, además de considerar diversas longitudes de onda y amplitudes de corrugación y diferentes velocidades del vehículo ferroviario. Los resultados han dejado constancia de que los efectos dinámicos de alta frecuencia producen amplificaciones dinámicas significativas en las tensiones del eje, en algunos casos cercanas al 80% con respecto al valor estático, muy por encima del 25% reflejado en la normativa EN13103/104. Hay que destacar que esta influencia de los efectos dinámicos en las tensiones depende fuertemente del tipo de excitación y de la velocidad del vehículo.

En el caso de que la fuente de excitación sea la rugosidad del carril, los factores de amplificación dinámica son relativamente bajos, excepto cuando se excitan los modos de vibración del eje, situación en la que se pueden alcanzar factores cercanos al 80%. Para todos los casos de rugosidad considerados, el factor de amplificación dinámica de tensiones aumenta con la velocidad de giro, por lo que se alcanza el caso más crítico para altas velocidades.

Un comportamiento muy diferente se ha reflejado para el caso de que la excitación provenga de un plano de bloqueo en la rueda. Se han obtenido factores de amplificación dinámica hasta del 45-50%, lo que refleja una influencia muy crítica en la vida a fatiga del eje. Las amplificaciones dinámicas más severas se producen a baja velocidad, siendo el escenario más crítico el asociado a los vehículos de mercancías dado que éstos a menudo circulan a velocidades reducidas.

Tras los resultados de amplificación dinámica mostrados en esta Tesis, es posible afirmar que los efectos dinámicos son muy importantes para estimar correctamente la vida a fatiga del eje ferroviario, y por lo tanto necesitan ser debidamente considerados en el proceso de diseño de éste con vistas a mejorar la seguridad del transporte ferroviario (véase el apartado 5.2 y el **Artículo 2** de la Tesis).

Una vez analizada la interacción dinámica vehículo-vía en recta, se han llevado a cabo diversas simulaciones dinámicas de interacción en vía curva, considerando de nuevo las mismas fuentes de excitación (corrugación armónica y rugosidad pseudoaleatoria del carril y plano de rueda). Se han presentado las fuerzas de contacto rueda-carril cuando el vehículo circula a 150 km/h sobre una vía curva de 1000 m de radio y 150 mm de peralte. Para analizar la influencia de la flexibilidad del eje, se han presentado resultados para el modelo de eje flexible y rígido. Se han incluido también resultados en vía recta para las mismas condiciones de circulación del vehículo, con el fin de analizar el efecto de circulación en curva sobre la dinámica acoplada.

Para todos los casos de excitación considerados, el modelo de eje rígido produce sobreestimaciones de los valores máximos de las fuerzas de contacto respecto al modelo de eje flexible. Esta sobreestimación es más significativa en la componente vertical de la fuerza de contacto cuando se considera la rugosidad del carril (alcanzando el 40%), mientras que en el caso de plano de rueda es menos importante. Sin embargo, la fuerza de contacto transversal para el plano de rueda presenta una gran sobreestimación con el modelo de eje rígido respecto al modelo flexible (aproximadamente un 40%).

Finalmente, tras comparar los resultados obtenidos para vía curva y recta considerando la excitación proveniente del plano de rueda, se ha observado que la fuerza de contacto vertical es aproximadamente un 39% mayor cuando el vehículo circula en curva respecto al caso de trayectoria rectilínea. De este modo se concluye que un plano de bloqueo en curva produce un incremento de la carga en el eje y en los carriles, acelerando por tanto el daño y la degradación de las superficies en contacto e incrementando el ruido y la vibración de los distintos componentes (véase el apartado 5.3 y el **Artículo 3** de la Tesis).

6.2 DESARROLLOS FUTUROS

La metodología presentada en esta Tesis para modelar la interacción dinámica vehículo-vía en tramo recto y curvo en base a un modelo dinámico avanzado de eje flexible rotatorio, abre la posibilidad de ampliar el trabajo realizado a otros problemas dentro del campo de la dinámica ferroviaria. Las áreas de trabajo que se proponen como continuación de la línea de investigación presentada son las siguientes:

- Aplicar la metodología de eje flexible en trayectoria curvilínea para realizar un análisis tensional del eje ferroviario y evaluar los factores de amplificación dinámica asociados a la circulación del vehículo en vía curva, considerando diversas fuentes de excitación.
- Extender el modelo de interacción dinámica vehículo-vía en recta y curva a un problema vibro-acústico, acoplándolo al problema de emisión acústica, con el fin de evaluar el ruido de rodadura asociado al tránsito del vehículo sobre la vía en diversas condiciones de servicio.
- Incluir modelos de desgaste en el sistema dinámico completo, con el objeto de profundizar en los mecanismos físicos asociados y ser capaces de predecir las causas que originan el fenómeno de desgaste ondulatorio del carril.

7 RESUMEN DE ARTÍCULOS

7.1 ARTÍCULO 1

Dynamics of damped rotating solids of revolution through an Eulerian modal approach.

En este artículo se ha presentado una técnica para modelar la respuesta dinámica de sólidos flexibles rotatorios con amortiguamiento interno modal. El método es aplicable a sólidos de revolución que giran a velocidad angular constante sobre su eje de axisimetría. En el modelo se considera un sistema de coordenadas modales Eulerianas, el cual adopta como base los modos de vibración del sólido no rotatorio en un sistema de referencia fijo. Este planteamiento parte de un modelo Lagrangiano desarrollado previamente, por lo que se desarrollan las relaciones matemáticas entre ambos conjuntos de coordenadas. Considerando el sistema de coordenadas utilizado, el modelo es muy adecuado para analizar la interacción dinámica entre sólidos rotatorios y estructuras no rotatorias, además de permitir la obtención de Funciones de Respuesta en Frecuencia. La metodología propuesta sólo puede ser formulada analíticamente en casos sencillos, como modelos de vigas. Por ello se ha desarrollado una metodología numérica para analizar estructuras más complejas con geometría genérica de revolución, siendo el Método de Elementos Finitos la técnica numérica adoptada para obtener las matrices asociadas con la ecuación de movimiento del sólido flexible rotatorio.

Con el modelo presentado se ha estudiado el comportamiento dinámico de un cilindro rotatorio biarticulado y amortiguado internamente, y se ha analizado su estabilidad, obtenido su receptancia y sus propiedades modales. Esta geometría simple proporciona una solución de referencia que ha permitido comparar la formulación analítica de la teoría de viga rotatoria de Rayleigh con los resultados del modelo propuesto.

7.2 ARTÍCULO 2

Numerical estimation of stresses in railway axles using a train-track interaction model.

En este artículo se ha descrito una metodología numérica para la estimación de tensiones en ejes ferroviarios originadas por la interacción dinámica entre el vehículo ferroviario y la vía. Como modelo de interacción dinámica se ha adoptado una técnica de subestructuración, que divide el sistema en tres tipos de subestructuras: el vehículo, los carriles y sus soportes. Del vehículo ferroviario se han modelado las masas no suspendidas, donde el eje es un sólido flexible rotatorio modelado mediante un planteamiento Euleriano. Los carriles se han modelado como vigas de Timoshenko, considerando la dinámica vertical, lateral y torsional. Por último, los soportes (placas de asiento, traviesas y balasto) se han representado como sistemas de parámetros concentrados, en los que las traviesas reciben un tratamiento de masas concentradas, y las placas de asiento y el balasto como elementos visco-elásticos.

Para llevar a cabo el cálculo de fuerzas de contacto rueda-carril y de tensiones dinámicas en el eje, se han considerado diversas fuentes de excitación: corrugación armónica, rugosidad pseudoaleatoria del carril, y plano de rueda. Además, se han analizado diferentes longitudes de onda de corrugación que excitan resonancias del eje y de la vía, niveles de rugosidad (referenciadas al límite de la UNE-EN ISO 3095) y velocidades del vehículo. Para todos los escenarios de cálculo se han obtenido las fuerzas de contacto rueda-carril y las tensiones en el eje. Por último, se han evaluado los factores de amplificación dinámica para las fuerzas de contacto y las tensiones axiales, con el fin de cuantificar la importancia de los efectos dinámicos en la vida a fatiga del eje ferroviario.

7.3 ARTÍCULO 3

A comprehensive model of the railway wheelset-track interaction in curves.

La interacción vehículo-vía ha sido ampliamente estudiada en los últimos 40 años, dando lugar a planteamientos de modelado que pueden describir satisfactoriamente muchos problemas dinámicos que surgen en la interfaz rueda-carril. Sin embargo, los modelos disponibles generalmente no consideran de manera específica la dinámica del vehículo circulando sobre una vía curva. Dicha dinámica tiene asociada una serie de fenómenos de interacción vehículo-vía característicos de la circulación en curva que la hacen merecedora de un tratamiento en profundidad.

El objetivo de este artículo es definir un modelo de eje flexible circulando sobre una vía curva flexible. La principal novedad de este trabajo es combinar un sistema de coordenadas de trayectoria con coordenadas modales Eulerianas; el sistema de trayectoria permite considerar la vía curva, y las coordenadas modales modelar los pequeños desplazamientos relativos entre el sistema de trayectoria y el sólido. El modelo de eje está acoplado al modelo cíclico de vía curva de radio constante mediante un modelo de contacto rueda-carril, que considera la geometría real de los perfiles en contacto y la relación no lineal entre las velocidades y fuerzas de pseudodeslizamiento.

El método propuesto puede ser usado para analizar una variedad de problemas dinámicos de vehículos ferroviarios, incluyendo la dinámica originada por la rugosidad del carril o bien un plano de rueda, la generación de ruido de rodadura y estimaciones de las cargas de servicio en ejes. En este artículo se aplica el modelo propuesto para algunas condiciones de circulación en curva, y se presentan resultados de simulación de casos realistas de interacción vehículo-vía, señalando la importancia de los efectos de circulación en curva abordados específicamente en este trabajo.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] T. Szolc, Simulation of dynamic interaction between the railway bogie and the track in the medium frequency range, *Multibody System Dynamics* 6 (2001) 99-122.
- [2] I. Gomez, E. G. Vadillo, A linear model to explain short pitch corrugation on rails, *Wear* 255 (2003) 1127-1142.
- [3] N. Chaar, M. Berg, Simulation of vehicle-track interaction with flexible wheelsets, moving track models and field tests, *Vehicle System Dynamics* 44 (2006) 921-931.
- [4] C. Andersson, *Modelling and simulation of train-track interaction including wear prediction*, PhD thesis, Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology, Gothenburg, Sweden, 2003.
- [5] D. J. Thompson, Wheel-rail noise generation, part II: wheel vibration, *Journal of Sound and Vibration* 161 (1993) 401-419.
- [6] D. J. Thompson, *Railway noise and vibration. Mechanisms, modelling and means of control*, Elsevier, 2009.
- [7] A. Pieringer, L. Baeza, W. Kropp, Modelling of railway curve squeal including effects of wheel rotation, *Proceedings of the 11th International Workshop on Railway Noise*, Uddevalla, Suecia, 2013.
- [8] K. Popp, H. Kruse, I. Kaiser, Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range, *Vehicle System Dynamics* 31 (1999) 423-464.
- [9] J. Arnold, I. Kaiser, G. Schupp, Simulation of a railway vehicle's running behaviour: How elastic wheelsets influence the simulation results, *Vehicle System Dynamics* 41 (2004) 242-251.
- [10] *SIMPACK AG*, Multi-Body simulation software, 2013. URL <http://www.simpack.com>.

- [11] G. Genta, *Dynamics of rotating systems*, Springer, New York, 2005.
- [12] B. L. Newkirk, Shaft whipping, *General Electric Review* 27 (1924) 169-178.
- [13] A. L. Kimball, Internal friction theory of shaft whirling, *General Electric Review* 27 (1924) 224-251.
- [14] C. W. Lee, *Vibration analysis of rotors*, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [15] O. C. Zienkiewicz, R. L. Taylor, J. Z. Zhu, *The finite element method: its basis & fundamentals*, (Sixth edition), Elsevier, 2005.
- [16] H. D. Nelson, J. M. McVaugh, The dynamics of rotor-bearing systems using finite element, *Journal of Engineering for Industry* 98 (1976) 593-600.
- [17] E. S. Zorzi, H. D. Nelson, Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping, *Journal of Engineering for Power* 99 (1977) 71-76.
- [18] L. W. Chen, D. M. Ku, Analysis of whirl speeds of rotor-bearing systems with internal damping by C^0 finite elements, *Finite Elements in Analysis and Design* 9 (1991) 169-176.
- [19] D. Ku, Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping, *Mechanical Systems and Signal Processing* 12 (1998) 599-610.
- [20] R. Sino, E. Chatelet, O. Montagnier, G. Jacquet-Richardet, Dynamic instability analysis of internally damped rotors, *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007 Power for Land, Sea and Air*, Vol. 5, Montréal, May 2007, pp. 727-736.
- [21] M. A. Hili, T. Fakhfakh, M. Haddar, Vibration analysis of a rotating flexible shaft-disk system, *Journal of Engineering Mathematics* 57 (2007) 351-363.

BIBLIOGRAFÍA

- [22] G. Jacquet-Richardet, G. Ferraris, P. Rieutord, Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies: a global cyclic symmetry approach, *Journal of Sound and Vibration* 191 (1996) 901-915.
- [23] J. Yu, A. Craggs, 3-D solid finite element modeling of rotating shafts, *Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference - Imac*, Vols I and II, Vol. 3089, Orlando, 1997, pp. 1488-1494.
- [24] E. Chatelet, D. Lornage, G. Jacquet-Richardet, A three dimensional modeling of the dynamic behavior of composite rotors, *International Journal of Rotating Machinery* 8 (2002) 185-192.
- [25] M. A. Brown, A. A. Shabana, Application of multibody methodology to rotating shaft problems, *Journal of Sound and Vibration* 204 (1997) 439-457.
- [26] A. A. Shabana, *Dynamics of multibody systems*, (Third edition), Cambridge University Press, 2005.
- [27] J. Fayos, L. Baeza, F. D. Denia, J. E. Tarancón, An Eulerian coordinate-based method for analysing the structural vibrations of a solid of revolution rotating about its main axis, *Journal of Sound and Vibration* 306 (2007) 618-635.
- [28] L. Baeza, J. Fayos, A. Roda and R. Insa, High frequency railway vehicle-track dynamics through flexible rotating wheelsets, *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 647-662.
- [29] P. T. Torstensson, J. C. O. Nielsen, L. Baeza, Dynamic train-track interaction at high vehicle speeds-Modelling of wheelset dynamics and wheel rotation, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 5309-5321.
- [30] EN 13103, *Railway applications - Wheelsets and bogies - Non-powered axles - Design method*, CEN, Brussels, April 2001.
- [31] EN 13104, *Railway applications - Wheelsets and bogies - Powered axles - Design method*, CEN, Brussels, April 2001.

BIBLIOGRAFÍA

- [32] R. A. Smith, Railway fatigue failures: an overview of a long standing problem, *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 36:11 (2005) 697-705.
- [33] V. Grubisic, G. Fischer, Procedure for reliable durability validation of train axles, *Materialwissenschaft und Werkstofftechnik* 37:12 (2006) 973-982.
- [34] J. Fayos, *Dinámica estructural de cuerpos de revolución rotatorios: aplicación al eje de un vehículo ferroviario*, Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, España, 2008.
- [35] L. Baeza, H. Ouyang, A railway track dynamics model based on modal substructuring and cyclic boundary condition, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 75-86.
- [36] L. Baeza, A. Roda, J. C. O. Nielsen, Railway vehicle/track interaction analysis using a modal substructuring approach, *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 112-124.
- [37] L. Jézéquel, Response of periodic system to a moving load, *Journal of Applied Mechanics-ASME* 48 (1981) 613-618.
- [38] M. Shamalta, A. V. Metrikine, Analytical study of the dynamic response of an embedded railway track to a moving load, *Archive of Applied Mechanics* 73 (2003) 131-146.
- [39] M. F. M. Hussein, H. E. M. Hunt, Modelling of floating-slab tracks with continuous slabs under oscillating moving loads, *Journal of Sound and Vibration* 297 (2006) 37-54.
- [40] A. V. Vostroukhov, A. V. Metrikine, Periodically supported beam on a visco-elastic layer as a model for dynamic analysis of a high-speed railway track, *International Journal of Solids and Structures* 40 (2003) 5723-5752.
- [41] G. Lombaert, G. Degrande, D. Clouteau, Numerical modelling of free field traffic-induced vibrations, *Soil Dynamics and Earthquake Engineering* 19 (2000) 473-488.

BIBLIOGRAFÍA

- [42] P. M. Belotserkovskiy, On the oscillations of infinite periodic beams subjected to a moving concentrated force, *Journal of Sound and Vibration* 193 (1996) 705-712.
- [43] R. G. Dong, S. Sankar, R. V. Dukkipati, A finite-element model of railway track and its application to the wheel flat problem, *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part F – Journal of Rail and Rapid Transit* 208 (1994) 61-72.
- [44] X. Lei, N.-A. Noda, Analyses of dynamic response of vehicle and track coupling system with random irregularity of track vertical profile, *Journal of Sound and Vibration* 258 (2002) 147-165.
- [45] J. C. O. Nielsen, A. Igeland, Vertical dynamic interaction between train and track—influence of wheel and track imperfections, *Journal of Sound and Vibration* 187 (1995) 825-839.
- [46] A. A. Shabana, R. Chamorro, C. Rathod, A multi-body system approach for finite-element modelling of rail flexibility in railroad vehicle applications, *Proc. Instn. Mech. Engrs. Part K – Journal of Multi-body* 222 (2008) 1-15.
- [47] L. Mazzola, Y. Bezin, S. Bruni, Vehicle – Track interaction: MB simulation for track loading limits and damage identification, *ECCOMAS Thematic Conference Multibody Dynamics*, Bruxelles, Belgium, 2011.
- [48] UNE-EN ISO 3095, *Railway applications - Acoustics - Measurement of noise emitted by railbound vehicles*, December 2006.
- [49] S. Bruni, A. Collina, G. Diana, P. Vanolo, Lateral dynamics of a railway vehicle in tangent track and curve: tests and simulation, *Vehicle System Dynamics* 33 (2000) 464-477.

Parte II
Artículos

Artículo 1



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

Journal of Sound and Vibration

journal homepage: www.elsevier.com/locate/jsvi

Dynamics of damped rotating solids of revolution through an Eulerian modal approach

José Martínez-Casas^a, Juan Fayos^b, Francisco D. Denia^a, Luis Baeza^{a,*}

^a Centro de Investigación de Tecnología de Vehículos, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain

^b Instituto de Biomecánica de Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain

ARTICLE INFO

Article history:

Received 12 January 2011

Received in revised form

24 July 2011

Accepted 1 October 2011

Handling Editor: S. Ilanko

Available online 24 October 2011

ABSTRACT

This article presents a technique for modelling the dynamic response of rotating flexible solids with internal modal damping. The method is applicable to solids with geometry of revolution that rotate around their main axis at constant spinning velocity. The model makes use of an Eulerian modal coordinate system which adopts the vibration modes in a non-rotating frame as basis functions. Due to the coordinate system, the technique is particularly suitable for studying the dynamic interaction between rotating solids and non-rotating structures and permits to obtain Frequency Response Functions. The current investigation presents the development of the proposed technique from a previous Lagrangian model, and consequently the mathematical relationships between the two coordinate sets are found. The approach has been adopted to study the dynamics of a simply supported cylinder including damping in order to obtain the receptance function and the modal properties of the rotating solid.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

The dynamics of damped shafts was investigated in early works at the first decades of the twentieth century [1,2]. The unstabilising consequence of the internal damping is a well-known phenomenon that produces a critical angular velocity above which the rotor becomes unstable (see monographs in Refs. [3,4]). The literature shows many articles that analyse internal damping in Jeffcott rotors and rotating beams but few reported attempts have been found regarding the dynamic models for generic geometries.

The model of flexible rotating solids with generic geometry has to define different shaft section properties (e.g. axles with non-constant cross-sections) and sometimes it needs to be based on a three dimensional domain (e.g. railway wheelsets; Jeffcott rotors and rotating beams are based on a zero- and one-dimensional domains, respectively). The Finite Element (FE) Method is possibly the numerical approach that can be more easily adapted to a generic geometry. FE Method has been adopted through beam elements [5–10], and 3D solid elements [11–13]. The main inconveniences of this technique are found when the solid interacts with a non-rotating structure. The force that the non-rotating system exerts on the rotating one is applied at fixed spatial points, and consequently there is a relative motion between the load and the rotating solid (moving load problem). This fact requires the computation of the contribution of the external force to the generalised force term in each integration step during the simulation. Furthermore the Frequency Response Function (FRF) that correlates the steady response to harmonic excitation produced by a non-mobile force cannot be obtained directly. In addition, a constant and non-mobile force applied on an external surface of a rotating FE mesh produces a parametric

* Corresponding author.

E-mail address: baeza@mcm.upv.es (L. Baeza).

excitation because the force has different effect if it is applied in a node or in the middle of a FE solid. The Jeffcott rotor model and the rotating beam model solve this difficulty because they are based on zero-dimensional and one-dimensional domains, respectively. Moreover, the displacements and velocities of these models are obtained in rotating or non-rotating coordinates indistinctly.

The work presented in Ref. [14] proposed a method that solved the above mentioned problems. The method is applied to undamped solids with geometry of revolution; it is based on Eulerian modal coordinates and provides satisfactory results. Lagrangian coordinates are the most frequently adopted reference in classic Mechanics; by means of this coordinate system, the position vectors and other kinematic properties are associated with material points of the solid. Eulerian coordinates are commonly used in Fluid Mechanics, and they relate spatial points through a fixed coordinate frame. These coordinates determine spatial points through which the material flows as time passes. The technique exploits the properties of the solids of revolution whose mode shapes in a fixed coordinate frame do not depend on the rotation of the solid. Consequently the mode shapes of the solid are used as basis functions in order to define a generic displacement of the flexible solid.

The present work develops a methodology based on Ref. [14] for modelling the dynamic behaviour of rotating solids of revolution with internal modal damping. Results of the proposed model are presented for a simply supported rotating cylinder. This simple geometry provides a reference solution which permits to compare the analytical formulation by means of the rotating Rayleigh beam theory with the results from the proposed method. The formulation associated with damped rotating beams which are needed in this article was developed in Ref. [3] and can be found in the Appendix. For further details in the dynamic behaviour of rotating solids with complex geometry, readers are referred to Ref. [14].

Section 2 presents the development of the equation of motion associated with the proposed model. A modal approach is carried out and consequently the modal properties of the non-rotating solid need to be obtained. Section 3 builds the matrices of the equation of motion from the analytical modes of the simply supported Rayleigh beam. At this point, the differences of the new formulation in comparison with the well-established methods (like spinning beam theories) can be found.

The proposed methodology can only be formulated analytically in simple cases, e.g. beam models. In Section 4, a numerical methodology is given to analyse more complex structures such as railway wheelsets, non-vented disc brakes or other solids with generic geometry of revolution. Given that theoretical modal analysis of general structures is usually made with the finite element method, this technique is adapted in this paper to obtain the matrices associated with the equation of motion.

The results are presented in Section 5 of this article, where the FRF of the rotating cylinder is obtained and the stability analysis is carried out. The main conclusions of this paper are remarked in Section 6.

2. Proposed model

The development of the proposed model is based on a previous article from Brown and Shabana [15]. This work models rotating undamped solids and makes use of the floating frame of reference, which is a coordinate system described in detail in Ref. [16]. The proposed method develops an Eulerian modal coordinate system, and the present section shows its properties and a procedure to derive this coordinate system from the floating frame of reference. This mathematical development leads the equation of motion from the model presented in Ref. [15] through a change of variables.

2.1. Coordinate reference set and its properties

2.1.1. Floating frame of reference

The coordinate system proposed by Shabana [16] obtains the global position of a flexible solid as a sum of two different displacement types. The former can be considered as a rigid body displacement, while the latter corresponds to the displacements due to the deformation of the solid. In order to develop the model of a solid of revolution, the method considers two reference frame systems (see Fig. 1): a fixed frame \mathbf{XYZ} , where the Z-axis is the rotation axis; and a mobile frame $\mathbf{X'Y'Z'}$ which rotates at the constant angular velocity of the solid Ω and it is fixed with the undeformed solid; \mathbf{XYZ} and $\mathbf{X'Y'Z'}$ coincide at instant $t=0$. A vector referred to the fixed and the mobile frames is denoted by \mathbf{a} and \mathbf{a}' , respectively. The position vector \mathbf{r} of a material particle of the solid in relation to the origin of the fixed frame can be expressed as follows:

$$\mathbf{r} = \mathbf{A}(\mathbf{u}' + \Phi(\mathbf{u}')\mathbf{p}(t)), \quad (1)$$

where \mathbf{u}' is the position vector of the particle in the undeformed configuration, the product $\Phi(\mathbf{u}')\mathbf{p}(t)$ corresponds to the displacement of the particle due to the elastic deformation of the solid in the rotating frame, $\Phi(\mathbf{u}')$ contains the mass-normalised mode shapes of the non-rotating solid, $\mathbf{p}(t)$ is the vector of modal coordinates and \mathbf{A} is the rotation matrix,

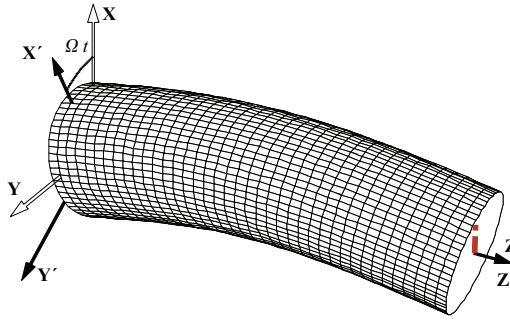


Fig. 1. Coordinate frame systems.

defined by

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \Omega t & -\sin \Omega t & 0 \\ \sin \Omega t & \cos \Omega t & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tag{2}$$

$\theta = \Omega t$ being the angle of rotation.

2.1.2. Eulerian modal coordinates

It must be highlighted that the mode shape matrix Φ is computed for the non-rotating solid. In general geometries, they can only be used to define the displacements due to the deformation if the modes are computed in a frame associated with the solid, that is, $\Phi(\mathbf{u}')$. The properties of the solids of revolution allow to obtain any deformed geometry of the solid through the mode shapes in non-rotating coordinates as follows. Let \mathbf{v} be the position vector of a spatial point in relation to the origin of the fixed frame. The vector \mathbf{v} is defined in the undeformed domain or the volume occupied by the undeformed solid. The position vector of a particle of the solid that occupies the spatial position \mathbf{v} in the undeformed configuration at the instant t verifies

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{u}'. \tag{3}$$

The position of the particle after deformation is

$$\mathbf{r} = \mathbf{v} + \Phi(\mathbf{v})\mathbf{q}(t), \tag{4}$$

if the particle occupies the spatial position \mathbf{v} in the undeformed configuration, where $\mathbf{q}(t)$ is defined the Eulerian-modal coordinate vector.

From Eqs. (1) and (4), it follows:

$$\Phi(\mathbf{v})\mathbf{q}(t) = \mathbf{A}\Phi(\mathbf{u}')\mathbf{p}(t). \tag{5}$$

Eq. (5) is multiplied by $\rho\Phi(\mathbf{v})^T$, where ρ is the density, and an integration is then carried out over the volume of the solid. Due to the orthogonality of the modes, the integral yields

$$\mathbf{q}(t) = \left(\iiint_{\text{Volume}} \rho\Phi(\mathbf{v})^T\mathbf{A}\Phi(\mathbf{u}')\mathbf{p}(t) d\mathbf{v} \right) \mathbf{p}(t). \tag{6}$$

Eq. [6] provides the coordinate transformation, which can be written as follows:

$$\mathbf{q}(t) = \mathbf{B}(t)\mathbf{p}(t). \tag{7}$$

2.1.3. Two basic properties of the integrals on the solid of revolution

Taking into account that the jacobian is equal to 1, any scalar field μ integrable on the domain of the solid of revolution has the following property:

$$\iiint_{\text{Volume}} \mu(\mathbf{v})d\mathbf{v} = \iiint_{\text{Volume}} \mu(\mathbf{u}')d\mathbf{v}. \tag{8}$$

Let us consider the matrix $\tilde{\mathbf{M}}$ which is defined as follows:

$$\tilde{\mathbf{M}} = \iiint_{\text{Volume}} \rho\Phi(\mathbf{u}')^T\mathbf{M}\Phi(\mathbf{u}')d\mathbf{v}, \tag{9}$$

where \mathbf{M} is a constant 3×3 matrix. If matrix \mathbf{M} verifies that

$$\mathbf{M} = \mathbf{A}^T\mathbf{M}\mathbf{A}, \tag{10}$$

the transformation matrix $\mathbf{B}(t)$ has no influence if it is applied to the matrix $\tilde{\mathbf{M}}$, that is

$$\mathbf{B}(t)^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{B}(t) = \tilde{\mathbf{M}}. \tag{11}$$

The proof is the following:

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(t)^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{B}(t) &= \mathbf{B}(t)^T \left(\iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{M} \Phi(\mathbf{u}') d v \right) \mathbf{B}(t) \\ &= \iiint_{\text{Volume}} \rho \mathbf{B}(t)^T \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{M} \Phi(\mathbf{u}') \mathbf{B}(t) d v \\ &= \iiint_{\text{Volume}} \rho \mathbf{B}(t)^T \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{M} \Phi(\mathbf{v}) \mathbf{B}(t) d v \\ &= \iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}^T \mathbf{M} \mathbf{A} \Phi(\mathbf{u}') d v \\ &= \iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{M} \Phi(\mathbf{u}') d v = \tilde{\mathbf{M}}. \end{aligned} \tag{12}$$

2.1.4. Orthogonality of the transformation matrix $\mathbf{B}(t)$

The transformation matrix $\mathbf{B}(t)$ can be proved to be orthogonal. If Eq. (7) is substituted into Eq. (5), one obtains

$$\Phi(\mathbf{v}) \mathbf{B}(t) = \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v}). \tag{13}$$

Each side of the last equation is multiplied by itself (transposed) and the density, giving

$$\rho \mathbf{B}(t)^T \Phi(\mathbf{v})^T \Phi(\mathbf{v}) \mathbf{B}(t) = \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v})^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v}). \tag{14}$$

Eq. (14) is now integrated over the solid volume

$$\mathbf{B}(t)^T \left(\iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi(\mathbf{v})^T \Phi(\mathbf{v}) d v \right) \mathbf{B}(t) = \iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v})^T \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v}) d v. \tag{15}$$

Considering now Eq. (15), the property obtained in Eq. (8), and the mode shapes orthogonality, the relation $\mathbf{B}(t)^T \mathbf{B}(t) = \mathbf{I}$ is found and consequently $\mathbf{B}(t)$ is an orthogonal matrix.

2.1.5. Structure of the transformation matrix $\mathbf{B}(t)$

Let us consider different n th and m th modes and the corresponding mode shapes $\Phi^{<n>}$ and $\Phi^{<m>}$. Eq. (13) can be written for the n th mode as follows:

$$\Phi(\mathbf{v}) \mathbf{B}^{<n>} = \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v})^{<n>}. \tag{16}$$

Now, Eq. (16) is pre-multiplied by $\rho \Phi^{<m>}$ (transposed), and then integrated on the solid volume, giving

$$B_{mn} = \iiint_{\text{Volume}} \rho (\Phi^{<m>})^T \mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v})^{<n>} d v. \tag{17}$$

If the modes $\Phi^{<n>}$ and $\Phi^{<m>}$ are orthogonal, due to the geometry of revolution $\mathbf{A} \Phi(\mathbf{A}^T \mathbf{v})^{<n>}$ and $\Phi^{<m>}$ are also orthogonal, and consequently $B_{mn} = 0$.

The rows and columns of matrix $\mathbf{B}(t)$ associated with modes with multiplicity 1 have null entries except the diagonal entry, which is equal to 1. Due to the orthogonality property of $\mathbf{B}(t)$, the diagonal blocks associated with modes with multiplicity 2 contain rotation matrices, that is

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \cos\theta & \pm \sin\theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \mp \sin\theta & \cos\theta & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & & \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & & & \end{bmatrix}. \tag{18}$$

2.1.6. Additional remark

Let $\tilde{\mathbf{M}}$ be a diagonal matrix of dimension $N \times N$, where N is the number of degrees of freedom of the solid model. The following relationship:

$$\mathbf{B}(t)^T \tilde{\mathbf{M}} \mathbf{B}(t) = \tilde{\mathbf{M}} \tag{19}$$

is verified if the pair of entries associated with each mode with multiplicity 2 are equal. The proof is found through the structure of the matrix $\mathbf{B}(t)$ showed in the previous section.

If $\tilde{\mathbf{M}}$ is a column matrix of dimension $N \times 1$, the following relation is fulfilled:

$$\mathbf{B}(t)^T \tilde{\mathbf{M}} = \tilde{\mathbf{M}} \tag{20}$$

only if the non-zero entries in $\tilde{\mathbf{M}}$ are associated with modes of multiplicity 1.

2.2. Development of the equation of motion

2.2.1. Damped equation of motion through Lagrangian coordinates

The method presented in Ref. [15] develops the following equation of motion for rotating solids:

$$\ddot{\mathbf{p}} + 2\Omega\tilde{\mathbf{J}}\dot{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{K}} - \Omega^2\tilde{\mathbf{E}})\mathbf{p} = \mathbf{Q}_p + \Omega^2\tilde{\mathbf{L}}. \tag{21}$$

The components of Eq. (21) are detailed next. Matrix $\tilde{\mathbf{K}}$ is the modal stiffness matrix, whose diagonal contains the square of the undamped natural frequencies of the solid. Matrix $\tilde{\mathbf{J}}$ is associated with the gyroscopic effect, and it is computed as follows:

$$\tilde{\mathbf{J}} = \iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi^T \mathbf{J} \Phi dv, \tag{22}$$

where

$$\mathbf{J} = \mathbf{A}_\theta \mathbf{A}^T = \mathbf{A}^T \mathbf{A}_\theta, \tag{23}$$

\mathbf{A}_θ being the derivative of the matrix \mathbf{A} with respect to θ , that is

$$\mathbf{A}_\theta = \begin{pmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{24}$$

The development of the Eq. (23) shows that

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{25}$$

Some vibration modes produce deformed shapes which may permit centrifugal forces to produce work. This effect is considered through the matrix $\tilde{\mathbf{E}}$ which is calculated as

$$\tilde{\mathbf{E}} = \iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi^T \mathbf{E} \Phi dv, \tag{26}$$

where

$$\mathbf{E} = -\mathbf{A}_{\theta\theta} \mathbf{A}^T = -\mathbf{A}^T \mathbf{A}_{\theta\theta}, \tag{27}$$

$\mathbf{A}_{\theta\theta}$ being the second derivative of the matrix \mathbf{A} with respect to θ , that is

$$\mathbf{A}_{\theta\theta} = \begin{pmatrix} -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & -\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{28}$$

It can be easily obtained that

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \tag{29}$$

The centrifugal forces that do not depend on the solid deformation are implemented by means of $\tilde{\mathbf{L}}$. These forces are associated with modes of multiplicity 1, and only the entries of $\tilde{\mathbf{L}}$ associated with these modes are non-zero. The column matrix $\tilde{\mathbf{L}}$ is obtained as follows:

$$\tilde{\mathbf{L}} = \iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u}' dv. \tag{30}$$

If the external forces are applied in fixed material points, the generalised force term is computed by

$$\mathbf{Q}_p(t) = \iiint_{\text{Volume}} \Phi(\mathbf{u}')^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{f}^v(\mathbf{u}', t) dv, \tag{31}$$

where $\mathbf{f}^v(\mathbf{u},t)$ are the external volume forces. However, if the external forces $\mathbf{g}^v(\mathbf{v},t)$ are applied in fixed spatial points, the generalised force term can be calculated from the following expression

$$\mathbf{Q}_p(t) = \iiint_{\text{Volume}} \Phi(\mathbf{A}(t)^T \mathbf{v})^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{g}^v(\mathbf{v},t) d\mathbf{v}. \tag{32}$$

Internal modal damping can be implemented in Eq. (21) as detailed next. Let $\tilde{\mathbf{D}}$ be the diagonal modal damping matrix, where the modes of double multiplicity contain two equal terms. The generalised force due to damping is computed by means of

$$\mathbf{Q}_d(t) = -\tilde{\mathbf{D}}\dot{\mathbf{p}}. \tag{33}$$

Introducing Eq. (33) into Eq. (21), the equation of motion of the internally damped solid is

$$\ddot{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{D}} + 2\Omega\tilde{\mathbf{J}})\dot{\mathbf{p}} + (\tilde{\mathbf{K}} - \Omega^2\tilde{\mathbf{E}})\mathbf{p} = \mathbf{Q}_p + \Omega^2\tilde{\mathbf{L}}. \tag{34}$$

2.2.2. Damped equation of motion through Eulerian coordinates

The coordinate change expressed by Eq. (7) is introduced in Eq. (34), and then the resulting equation is multiplied by $\mathbf{B}(\tilde{\mathbf{t}})$, giving

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{B}^T + 2\Omega\mathbf{B}\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{B}^T + 2\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T)\dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{B}^T - \Omega^2\mathbf{B}\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B}^T + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T + \mathbf{B}\tilde{\mathbf{D}}\tilde{\mathbf{B}}^T + 2\Omega\mathbf{B}\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{B}^T)\mathbf{q} \\ = \mathbf{B}\mathbf{Q}_p + \Omega^2\mathbf{B}\tilde{\mathbf{L}}. \end{aligned} \tag{35}$$

Due to the properties stated in Sections 2.1.3 and 2.1.6, the following equations are found:

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{B}^T = \tilde{\mathbf{J}}, \tag{36}$$

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{E}}\mathbf{B}^T = \tilde{\mathbf{E}}, \tag{37}$$

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{B}^T = \tilde{\mathbf{K}}, \tag{38}$$

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{B}^T = \tilde{\mathbf{D}}, \tag{39}$$

$$\mathbf{B}\tilde{\mathbf{L}} = \tilde{\mathbf{L}}. \tag{40}$$

The calculation of the terms $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{B}^T$ and $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{B}^T$ is reduced to the evaluation of $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{B}}\tilde{\mathbf{B}}^T$, because $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{D}}\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{D}}\mathbf{B}$ and $\mathbf{B}\tilde{\mathbf{J}} = \mathbf{B}\tilde{\mathbf{J}}\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \tilde{\mathbf{J}}\mathbf{B}$. From Eq. (13)

$$\mathbf{B}\Phi(\mathbf{u}')^T = \Phi(\mathbf{v})^T\mathbf{A}. \tag{41}$$

Eq. (41) is derivated with respect to time

$$\dot{\mathbf{B}}\Phi(\mathbf{u}')^T = \dot{\Phi}(\mathbf{v})^T\mathbf{A} + \Phi(\mathbf{v})^T\dot{\mathbf{A}}. \tag{42}$$

In Eq. (42) the function $\Phi(\mathbf{u}')$ is constant because it is associated with a material point. On the other hand, $\Phi(\mathbf{v})$ has to be computed as the convective term of the material derivative, that is

$$\dot{\Phi}(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} \frac{dv_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} \frac{d(\mathbf{A}\mathbf{u}')_i}{dt} = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\Omega\mathbf{A}_\theta\mathbf{u}')_i = \Omega \sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{J}\mathbf{v})_i. \tag{43}$$

Eq. (42) is now post-multiplied by $\Phi(\mathbf{u}')\mathbf{B}^T$, yielding

$$\dot{\mathbf{B}}\Phi(\mathbf{u}')^T\Phi(\mathbf{u}')\mathbf{B}^T = \Omega \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{J}\mathbf{v})_i \right) \mathbf{A}\Phi(\mathbf{u}')\mathbf{B}^T + \Omega\Phi(\mathbf{v})^T\mathbf{A}_\theta\Phi(\mathbf{u}')\mathbf{B}^T. \tag{44}$$

Recalling the result in Eq. (13), Eq. (44) becomes

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{B}}\Phi(\mathbf{u}')^T\Phi(\mathbf{u}')\mathbf{B}^T &= \Omega \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{J}\mathbf{v})_i \right) \Phi(\mathbf{v})\mathbf{B}\mathbf{B}^T + \Omega\Phi(\mathbf{v})^T\mathbf{A}_\theta\mathbf{A}^T\Phi(\mathbf{v})\mathbf{B}\mathbf{B}^T \\ &= \Omega \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{J}\mathbf{v})_i \right) \Phi(\mathbf{v}) + \Omega\Phi(\mathbf{v})^T\mathbf{J}\Phi(\mathbf{v}). \end{aligned} \tag{45}$$

Now Eq. (45) is multiplied by the density ρ and it is integrated on the volume of the solid. Applying the orthogonality property, yields

$$\dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T = \Omega \iiint_{\text{Volume}} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial\Phi(\mathbf{v})}{\partial v_i} (\mathbf{J}\mathbf{v})_i \right) \Phi(\mathbf{v})\rho d\mathbf{v} + \Omega\tilde{\mathbf{J}}. \tag{46}$$

Considering now the first property in Section 2.1.3, the integral in Eq. (46) does not depend on time. With the definition

$$\tilde{\mathbf{G}} = \iiint_{\text{Volume}} \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \Phi(\mathbf{u}')^T}{\partial u_i} (\mathbf{J}\mathbf{u}')_i \right) \Phi(\mathbf{u}') \rho dv, \tag{47}$$

Eq. (46) turns into

$$\dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T = \Omega(\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{J}}) \tag{48}$$

The calculation of $\mathbf{B}\ddot{\mathbf{B}}^T$ is performed as follows. The product $\mathbf{B}\dot{\mathbf{B}}^T$ is constant and consequently

$$0 = \frac{d}{dt} \dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T = \ddot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T + \dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{B}}^T. \tag{49}$$

From Eqs. (48) and (49), it is deduced

$$\ddot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T = -\dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{B}}^T = -\dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\dot{\mathbf{B}}^T = -\Omega^2(\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{J}})(\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{J}})^T. \tag{50}$$

Further analysis shows that $\tilde{\mathbf{G}}$ is antisymmetric, and Eq. (50) can be written as

$$\ddot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T = -\dot{\mathbf{B}}\dot{\mathbf{B}}^T = -\dot{\mathbf{B}}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\dot{\mathbf{B}}^T = \Omega^2(\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{J}})(\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{J}}). \tag{51}$$

The generalised force of the Eq. (35) is, from Eq. (32)

$$\mathbf{Q}_q(t) = \mathbf{B}\mathbf{Q}_p(t) = \mathbf{B} \iiint_{\text{Volume}} \Phi(\mathbf{A}(t)^T \mathbf{v})^T \mathbf{A}(t)^T \mathbf{g}^v(\mathbf{v}, t) dv. \tag{52}$$

By substituting Eq. (13) in Eq. (52), it is found

$$\mathbf{Q}_q(t) = \mathbf{B} \iiint_{\text{Volume}} \mathbf{B}^T \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{g}^v(\mathbf{v}, t) dv = \iiint_{\text{Volume}} \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{g}^v(\mathbf{v}, t) dv. \tag{53}$$

In standard cases, the vector associated with external volume forces can be written as

$$\mathbf{g}^v(\mathbf{v}, t) = \mathbf{F}^v(\mathbf{v})\gamma(t), \tag{54}$$

and the generalised force expression is

$$\mathbf{Q}_q(t) = \iiint_{\text{Volume}} \Phi(\mathbf{v})^T \mathbf{F}^v(\mathbf{v}) dv \gamma(t) = \tilde{\mathbf{F}}\gamma(t). \tag{55}$$

Now Eqs. (36)–(40), (48), (51) and (55) are substituted into Eq. (35), yielding

$$\ddot{\mathbf{q}} + (\tilde{\mathbf{D}} - 2\Omega\tilde{\mathbf{G}})\dot{\mathbf{q}} + (\tilde{\mathbf{K}} + \Omega^2\tilde{\mathbf{C}} - \Omega\tilde{\mathbf{D}}(\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{J}}))\mathbf{q} = \tilde{\mathbf{F}}\gamma(t) + \Omega^2\tilde{\mathbf{L}}, \tag{56}$$

where

$$\tilde{\mathbf{C}} = \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{G}} + \tilde{\mathbf{G}}\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{G}} - \tilde{\mathbf{J}}\tilde{\mathbf{J}} - \tilde{\mathbf{E}}. \tag{57}$$

Attention must be drawn to the fact that the matrices $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{G}}$, $\tilde{\mathbf{J}}$, $\tilde{\mathbf{K}}$, $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{F}}$ and $\tilde{\mathbf{L}}$ are constant matrices and they are computed at the beginning of the simulation. An advantage of this Eulerian approach is that, if external forces do not rotate with the solid, the generalised force vector in Eulerian coordinates $\mathbf{Q}_q(t)$ is calculated by integrating the volume of the solid independently of time. Therefore, it may be also calculated at the beginning of the simulation, unlike in the Lagrangian approach where the generalised force term $\mathbf{Q}_p(t)$ must be evaluated at each time instant by using a costly integration over the volume. Moreover, the equation of motion (56) is linear and it can be adopted for obtaining the FRFs associated with forces or displacements that are applied or measured at fixed spatial points.

Finally, it is worth noting that Eq. (56) is expressed in a non-rotating reference frame whereas the Lagrangian methods such as Finite Element Method or Eq. (34) are based in a floating frame.

3. Application of the method to a simply supported beam

The parameters of the beam that are considered in the model are the radius R , length L , Young’s modulus E , cross-sectional area A and second moment of area I . In order to find a parallelism between the proposed method and beam theories, in the following the variables of the rotating Rayleigh beam formulation which are presented in the Appendix are adopted.

If N bending modes of the Rayleigh beam are consider, the matrix of mode shapes Φ becomes

$$\Phi = \begin{bmatrix} \phi_1(z) & 0 & \dots & \phi_N(z) & 0 \\ 0 & \phi_1(z) & \dots & 0 & \phi_N(z) \\ -x \frac{d\phi_1}{dz} & -y \frac{d\phi_1}{dz} & \dots & -x \frac{d\phi_N}{dz} & -y \frac{d\phi_N}{dz} \end{bmatrix}, \tag{58}$$

where ϕ_j is computed from Eq. (A.1). Taking into account the modal gyroscopic term g_j defined in (A.8) and the modal functions detailed in Eq. (58), the matrices that define the equation of motion for rotating solids, Eq. (56), become

$$\tilde{\mathbf{G}} = \begin{bmatrix} 0 & -g_1 & \cdots & 0 & 0 \\ g_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -g_N \\ 0 & 0 & \cdots & g_N & 0 \end{bmatrix}, \tag{59}$$

$$\tilde{\mathbf{J}} = \begin{bmatrix} 0 & -(1-g_1) & \cdots & 0 & 0 \\ (1-g_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -(1-g_N) \\ 0 & 0 & \cdots & (1-g_N) & 0 \end{bmatrix}, \tag{60}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} (1-g_1) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & (1-g_1) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & (1-g_N) & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & (1-g_N) \end{bmatrix}, \tag{61}$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \mathbf{0}, \tag{62}$$

and

$$\tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} -g_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -g_1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -g_N & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -g_N \end{bmatrix}. \tag{63}$$

The matrices of Eqs. (59)–(63) uncouple the influence between the modes in Eq. (56). Therefore, Eq. (56) can be written for each pair of modal coordinates associated with the j th mode \mathbf{q}^j , that is

$$\ddot{\mathbf{q}}^j + 2(\Omega \mathbf{g}_j \mathbf{G} + c_j \mathbf{I}) \dot{\mathbf{q}}^j + ((\omega_j^2 - \Omega^2 \mathbf{g}_j) \mathbf{I} + 2\Omega c_j \mathbf{G}) \mathbf{q}^j = \mathbf{Q}^j, \tag{64}$$

where all the terms are defined in the Appendix. Eq. (64) is identical to Eq. (A.6) with the exception of the term $\Omega^2 \mathbf{g}_j$ that accounts for the effect of the centrifugal forces when the section is deformed. The one-dimensional Rayleigh beam model does not consider this effect and therefore, some differences are expected in the results. Further discussion will be provided in Section 5.

The eigenvalues of the Eq. (64) are

$$\begin{aligned} \lambda_{j,1} &= -c_j + i g_j \Omega + \sqrt{c_j^2 - \omega_j^2 + g_j \Omega^2 - g_j^2 \Omega^2 - 2i \Omega c_j (g_j - 1)}, \\ \lambda_{j,2} &= -c_j + i g_j \Omega - \sqrt{c_j^2 - \omega_j^2 + g_j \Omega^2 - g_j^2 \Omega^2 - 2i \Omega c_j (g_j - 1)}, \\ \lambda_{j,3} &= \lambda_{j,1}^*, \\ \lambda_{j,4} &= \lambda_{j,2}^*. \end{aligned} \tag{65}$$

Instable behaviour happens when the first eigenvalue in Eq. (65) has positive real part. It is then concluded that the critical speed is

$$\Omega_{cr} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1-g_1}}, \tag{66}$$

such critical velocity being lower than that predicted by the one-dimensional beam model (A.11).

4. Computational method

In general, an analytical expression of the mode shapes cannot be obtained and consequently, numerical techniques like the FE Method are used to compute the modal properties. This section presents a method for obtaining the matrices of the equation of motion in Eq. (56) from the FE modal solution.

FE modal analysis provides the modal solution in the nodes of the solid mesh. The modal matrix Φ_{FE} is obtained with the FE model, whose columns contain the values given by $\Phi(\mathbf{u})$ on each node.

The modal function in the domain of an eth element can be interpolated as

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{N}_e(\mathbf{u})\Phi_{FE}, \tag{67}$$

where the matrix $\mathbf{N}_e(\mathbf{u})$ contains the shape functions (or basis) of the eth element.

Bearing in mind the nodal interpolation defined in Eq. (67), the matrices of the equation of motion in Eulerian coordinates, Eq. (56), are shown below

$$\tilde{\mathbf{J}} = \iiint_{\text{Volume}} \rho \Phi^T \mathbf{J} \Phi dV = \sum_{e=1}^{n_e} \iiint_{V_e} \rho \Phi^T \mathbf{J} \Phi dV = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \iiint_{V_e} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{J} \mathbf{N}_e dV \right) \Phi_{FE}, \tag{68}$$

$$\tilde{\mathbf{E}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \iiint_{V_e} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{E} \mathbf{N}_e dV \right) \Phi_{FE}, \tag{69}$$

$$\tilde{\mathbf{L}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \iiint_{V_e} \rho \mathbf{N}_e^T \mathbf{E} \mathbf{u} dV \right), \tag{70}$$

$$\tilde{\mathbf{G}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \iiint_{V_e} \rho \left(\sum_{i=1}^3 \frac{\partial \mathbf{N}_e(\mathbf{u})^T}{\partial u_i} (\mathbf{J} \mathbf{u})_i \right) \mathbf{N}_e dV \right) \Phi_{FE}, \tag{71}$$

where n_e is the number of elements in the FE mesh, and V_e is the volume of the eth element.

5. Results

This section analyses the stability, modal properties and FRF of the simply supported rotating flexible cylinder with internal damping. The aim of the present section is to compare the results from three different approaches: (1) the Rayleigh rotating beam model (in the following, the beam model) whose formulas can be found in the Appendix of the present paper; (2) the proposed method in which the modes are computed analytically (analytical solid model); and (3) the proposed method where the computations are performed numerically (numerical solid model).

The present study considers the first bending mode, the forward mode being unstable (further details can be found in Ref. [3] and will be also shown later). The properties of the simply supported cylinder are defined in Table 1. The first three natural frequencies associated with bending modes are given in Table 2. The cylinder mesh considered in the numerical solid model is depicted in Fig. 2. The FE model implements three-dimensional linear elements.

Table 1
Cylinder properties.

Length	$L = 1.5$ m
Radius	$R = 0.05$ m
Density	$\rho = 7800$ kg/m ³
Young's modulus	$E = 2.1 \times 10^{11}$ N/m ²
Internal damping ratio	$\xi = 0.03$
Poisson's ratio	$\nu = 0.3$

Table 2
Natural frequencies of the cylinder (Hz).

Mode number	Mode type	FE	Rayleigh beam model
1	1st bending mode	90.14	90.44
2	2nd bending mode	355.21	360.27
3	3rd bending mode	780.51	805.17

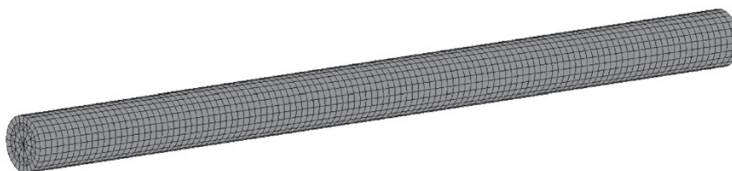


Fig. 2. FE mesh of the cylinder.

Fig. 3 plots the eigenvalues in the Argand diagram for the three formulations previously indicated. These have been calculated with a spin speed sweep, reaching almost twice the critical speed. The differences between the models are analysed in the following figures. Fig. 4a shows the real part of the eigenvalues. All the models describe virtually the same evolution of the real part of the eigenvalues. In addition, it is clearly shown that the real part of the backward eigenvalue is always negative and therefore stable, while the real part of the eigenvalue associated with the forward mode is positive beyond critical speed and hence becomes unstable. For the forward mode, Fig. 4b presents the real part of the associated eigenvalue against the ratio angular velocity/forward natural frequency. The instability of the forward mode takes place if the angular velocity is higher than the forward mode frequency, in the absence of external damping as in the case under analysis.

The critical speed is now shown in Fig. 5 for several internal damping ratios ζ . The critical velocity does not depend on the internal damping rate in the absence of external damping [17]. These results are in accordance with the conclusions of rotating shaft literature [3].

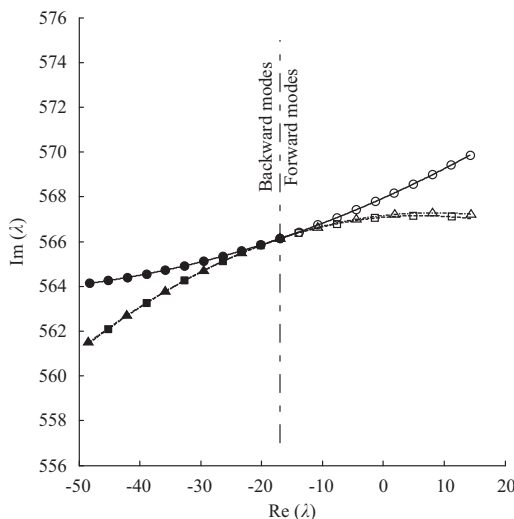


Fig. 3. Real and imaginary part of the eigenvalues: $\circ-\circ-$, $\bullet-\bullet-$, forward and backward modes, beam model; $\triangle-\triangle-$, $\blacktriangle-\blacktriangle-$, forward and backward modes, analytical solid model; $\square-\square-$, $\blacksquare-\blacksquare-$, forward and backward modes, numerical solid model.

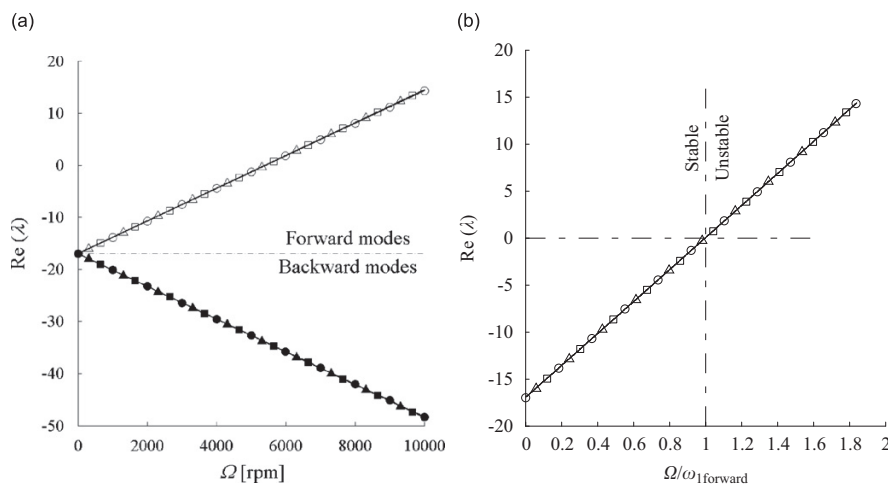


Fig. 4. Real part of the eigenvalues: $\circ-\circ-$, $\bullet-\bullet-$, forward and backward modes, beam model; $\triangle-\triangle-$, $\blacktriangle-\blacktriangle-$, forward and backward modes, analytical solid model; $\square-\square-$, $\blacksquare-\blacksquare-$, forward and backward modes, numerical solid model.

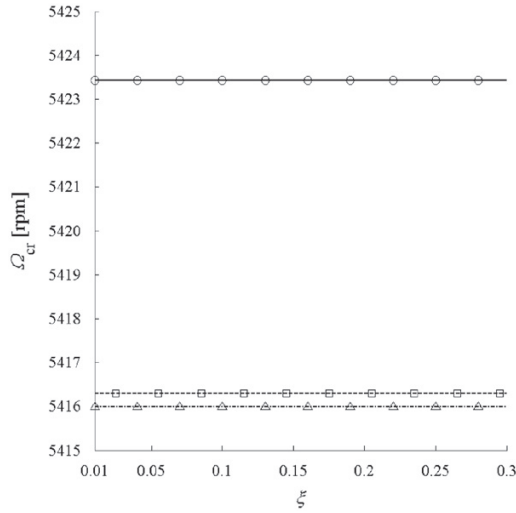


Fig. 5. Critical speed for different internal damping ratios: \circ — \circ , beam model; Δ — Δ , analytical solid model; \square — \square , numerical solid model.

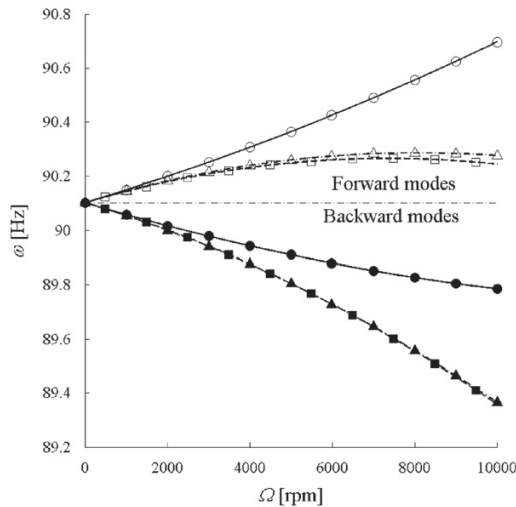


Fig. 6. Campbell diagram: \circ — \circ , \bullet — \bullet , forward and backward modes, beam model; Δ — Δ , \blacktriangle — \blacktriangle , forward and backward modes, analytical solid model; \square — \square , \blacksquare — \blacksquare , forward and backward modes, numerical solid model.

The discrepancies between the models are associated with the imaginary part of the eigenvalues as can be seen in Fig. 6. The evolution of the natural frequency with the angular velocity (Campbell diagram) for the three formulations is shown. The analytical and numerical solid models predict virtually the same evolution, but differ in comparison with the beam model. As can be seen, this discrepancy increases with spin speed. Although the difference between models is less than 0.5%, the proposed solid model describes a very different evolution and trend compared with the beam model.

In the introduction section of this article, it was stated that one advantage of the proposed solid model is to allow the calculation of FRF associated with forces or displacements that are applied or measured at fixed spatial points. The FRF for the simply supported cylinder is shown in Fig. 7 for different internal damping ratios. The force is applied transversely in the central node of the cylinder, and the displacement is measured at the same point and same direction. It can be seen that the backward bending mode is highly damped and its effect disappears for $\zeta = 0.01$ or higher. In this way, the steady

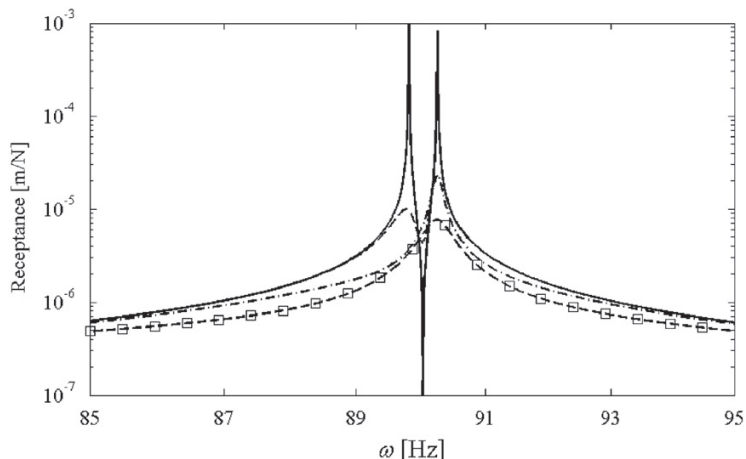


Fig. 7. Direct FRF (receptance) (numerical solid model, $\Omega=5000$ rev/min) for different internal damping ratios: $\circ-\circ$, $\xi=0$; $\triangle-\triangle$, $\xi=0.001$; $\blacktriangle-\blacktriangle$, $\xi=0.01$; $\square-\square$, $\xi=0.03$.

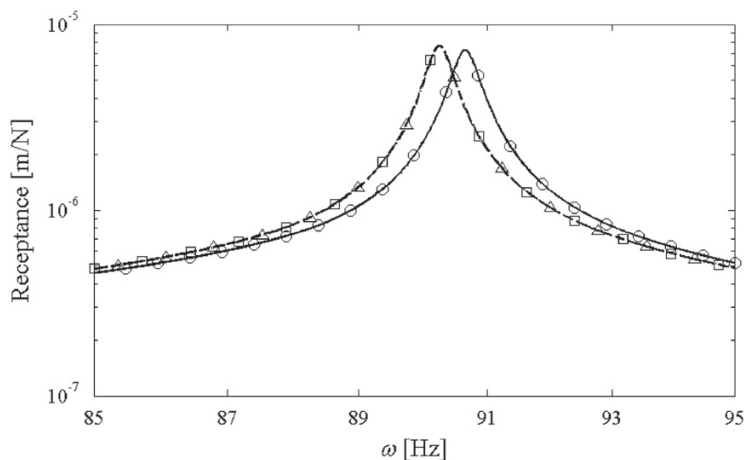


Fig. 8. Direct FRF (receptance) for $\Omega=5000$ rev/min and $\xi=0.03$: $\circ-\circ$, beam model; $\triangle-\triangle$, analytical solid model; $\square-\square$, numerical solid model.

response is only influenced by the forward bending mode. The same case is calculated through the three formulations for $\xi=0.03$ and the associated FRFs are shown in Fig. 8. As observed previously, the analytical and numerical solid models predict the same behaviour with undistinguishable curves, but they differ from the beam model. It is worth noting that the backward mode has disappeared, remaining only the forward bending mode.

It is important to emphasise the effect done by the centrifugal forces associated with the deformation, being the fundamental difference between the proposed solid model and the one-dimensional beam model. This effect is represented by the term $\Omega^2 g_j$ for the analytical solid model in Eq. (64) or its equivalent $\Omega^2 \hat{C}$ in the solid model from Eq. (56), and it does not appear in the beam model. The proposed model by means of analytical data produces the same equation of motion in Eq. (64) than the rotating beam model in Eq. (A.6) if the term $\Omega^2 g_j$ is neglected in the former model. Therefore, the following calculations show the results from the rotating Rayleigh beam model and the proposed numerical solid model where the term $\Omega^2 \hat{C}$ is omitted.

The solid model showed not only the discrepancies in the imaginary part but also a quite different tendency in comparison with the beam model. Once neglected the effect done by the centrifugal forces associated with the solid deformation, both models describe a very similar evolution of the natural frequency, as shown in Fig. 9.

Finally, Fig. 10 shows the FRF when the influence of the centrifugal forces is neglected. As can be seen the predictions associated with both models are almost undistinguishable, with overlapped FRF curves in the frequency range considered.

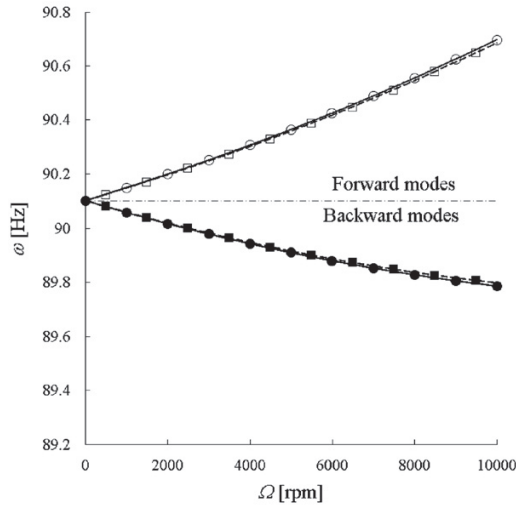


Fig. 9. Campbell diagram: \circ — \circ , \bullet — \bullet , forward and backward modes, beam model; \square — \square , \blacksquare — \blacksquare , forward and backward modes, numerical solid model.

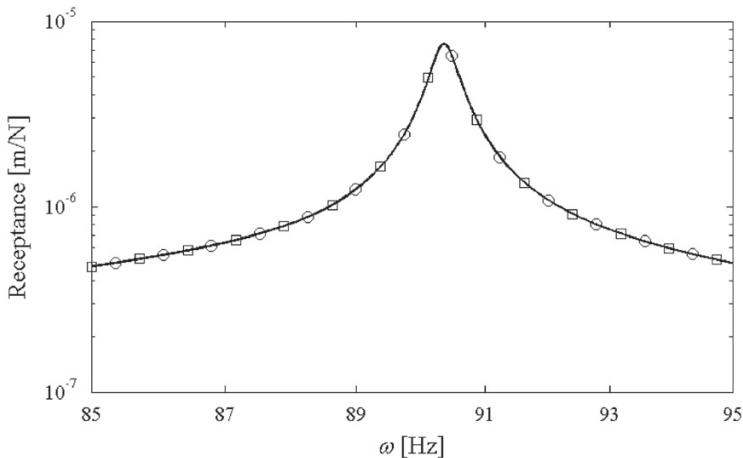


Fig. 10. Direct FRF (receptance) for $\Omega=5000$ rev/min and $\zeta=0.03$. \circ — \circ , beam model; \square — \square , numerical solid model.

6. Conclusions

A complete methodology to model the dynamics of damped elastic solids of revolution rotating about their axis of revolution has been developed in this article. This model is designed for those cases in which the interest lies in spatial points of the solid rather than material points. Therefore, it is especially suitable for complex systems consisting of rotating and non-rotating solids that are in mutual interaction.

The method is based on a modal approach where the modal properties of the non-rotating solid form the modal basis of the system. The final formulation consists of a set of linear ordinary differential equations where the coefficients are time independent. Therefore the matrices are calculated only once at the beginning of the simulation, leading to a considerable reduction of the computational cost.

The proposed method can be applied to the study of the stability, to obtain the equivalent modal properties of the rotating solid and also to compute the FRFs of the solid. Two versions of the method have been presented: analytical consideration of the modal properties of the solid (as a Rayleigh beam), and numerical implementation from FE data.

In addition, these two approaches are compared with a one-dimensional Rayleigh beam model. It has been shown that the analytical and numerical solid models predict virtually the same dynamic behaviour of the case under study. However, the proposed solid model shows discrepancies with the Rayleigh beam model. These discrepancies are due to the effect of the centrifugal forces associated with the deformed shape of the solid, which is only considered in the proposed solid model, represented by the terms $\Omega^2 \mathbf{g}_j$ and $\Omega^2 \tilde{\mathbf{C}}$ in Eqs. (64) and (56), respectively.

Finally, in order to describe the dynamic behaviour of a beam by means of the proposed solid model, the terms $\Omega^2 \mathbf{g}_j$ or $\Omega^2 \tilde{\mathbf{C}}$ have been eliminated. In this case, the calculations show that the proposed solid model behaves like the Rayleigh beam model (see Figs. 9–10).

Acknowledgement

The authors gratefully acknowledge the support for this work provided by the Project TRA2010-15669 (Ministerio de Ciencia e Innovación).

Appendix

In this appendix, the formulation associated with the one-dimensional simply supported Rayleigh beam model, including rotation and internal modal viscous damping is summarised. Further details can be found in Ref. [3].

In accordance with the frame of reference in Fig. 1, the *j*th mass normalised bending mode calculated in the neutral axis of Rayleigh beam is

$$\phi_j(z) = \frac{1}{\sqrt{m_j}} \sin\left(\frac{j\pi z}{L}\right), \tag{A.1}$$

and the *j*th natural frequency is

$$\omega_j = \sqrt{\frac{k_j}{m_j}}, \tag{A.2}$$

where the constants *k_j* and *m_j* have the following expressions:

$$k_j = \frac{EI(j\pi)^4}{2L^3}, \tag{A.3}$$

$$m_j = \frac{\rho AL}{2} + \frac{\rho I(j\pi)^2}{2L}. \tag{A.4}$$

The transverse displacements are computed from the fixed frame through the following modal approach:

$$\begin{Bmatrix} x(z,t) \\ y(z,t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z) \begin{Bmatrix} q_x^j(t) \\ q_y^j(t) \end{Bmatrix} = \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j \mathbf{q}^j, \tag{A.5}$$

where \mathbf{q}^j is the two-dimensional vector with modal coordinates associated with the *j*th orthogonal bending mode shape. The equation of motion for the damped simply supported rotating Rayleigh beam in modal coordinates is

$$\ddot{\mathbf{q}}^j + 2(\Omega \mathbf{g}_j \mathbf{G} + c_j \mathbf{I}) \dot{\mathbf{q}}^j + (\omega_j^2 \mathbf{I} + 2\Omega c_j \mathbf{G}) \mathbf{q}^j = \mathbf{Q}^j, \tag{A.6}$$

\mathbf{Q}^j being the generalised external force, \mathbf{I} is the identity matrix 2×2 , Ω is the beam spin speed and ω_j is the natural frequency of the *j*th bending mode of the simply supported non-rotating Rayleigh beam [18–20]. The term *c_j* is computed from the internal modal damping ratio of the *j*th bending mode ξ_j as

$$c_j = \omega_j \xi_j. \tag{A.7}$$

The modal gyroscopic term *g_j* is obtained from the following expression:

$$g_j = \frac{(j\pi)^2}{\zeta^2 + (j\pi)^2}, \tag{A.8}$$

where *g_j* is, by definition, bounded between 0 and 1, and ζ is the slenderness of the beam. The matrix \mathbf{G} is anti-symmetric and couples both orthogonal bending modes. It can be expressed as

$$\mathbf{G} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{A.9}$$

The eigenvalues of the Eq. (A.6) are

$$\lambda_{j,1} = -c_j + i \mathbf{g}_j \Omega + \sqrt{c_j^2 - \omega_j^2 - \mathbf{g}_j^2 \Omega^2 - 2i \Omega c_j (\mathbf{g}_j - 1)},$$

$$\begin{aligned}\lambda_{j,2} &= -c_j + i g_j \Omega - \sqrt{c_j^2 - \omega_j^2 - g_j^2 \Omega^2 - 2i \Omega c_j (g_j - 1)}, \\ \lambda_{j,3} &= \lambda_{j,1}^*, \\ \lambda_{j,4} &= \lambda_{j,2}^*,\end{aligned}\tag{A.10}$$

where the notation z^* represents the complex conjugate of z , $\lambda_{j,1}$ and $\lambda_{j,3}$ are the eigenvalues for the forward mode, and $\lambda_{j,2}$ and $\lambda_{j,4}$ are associated with the backward mode. The forward modes reveal a critical speed beyond which the real part of their eigenvalues is positive. The modes become then unstable (a conclusion also made in Ref. [21]) beyond the critical angular velocity given by

$$\Omega_{cr} = \frac{\omega_1}{\sqrt{1 - 2g_1}}.\tag{A.11}$$

References

- [1] B.L. Newkirk, Shaft whipping, *General Electric Review* 27 (1924) 169–178.
- [2] A.L. Kimball, Internal friction theory of shaft whirling, *General Electric Review* 27 (1924) 224–251.
- [3] G. Genta, *Dynamics of Rotating Systems*, Springer, New York, 2005.
- [4] C.W. Lee, *Vibration Analysis of Rotors*, Kluwer, Dordrecht, 1993.
- [5] H.D. Nelson, J.M. McVaugh, The dynamics of rotor-bearing systems using finite element, *Journal of Engineering for Industry* 98 (1976) 593–600.
- [6] E.S. Zorzi, H.D. Nelson, Finite element simulation of rotor-bearing systems with internal damping, *Journal of Engineering for Power* 99 (1977) 71–76.
- [7] L.W. Chen, D.M. Ku, Analysis of whirl speeds of rotor-bearing systems with internal damping by C^0 finite elements, *Finite Elements in Analysis and Design* 9 (1991) 169–176.
- [8] D. Ku, Finite element analysis of whirl speeds for rotor-bearing systems with internal damping, *Mechanical Systems and Signal Processing* 12 (1998) 599–610.
- [9] R. Sino, E. Chatelet, O. Montagnier, G. Jacquet-Richardet, Dynamic instability analysis of internally damped rotors, *Proceedings of ASME Turbo Expo 2007 Power for Land, Sea and Air*, Vol. 5, Montréal, May 2007, pp. 727–736.
- [10] M.A. Hilli, T. Fakhfakh, M. Haddar, Vibration analysis of a rotating flexible shaft-disk system, *Journal of Engineering Mathematics* 57 (2007) 351–363.
- [11] G. Jacquet-Richardet, G. Ferraris, P. Rieutord, Frequencies and modes of rotating flexible bladed disc-shaft assemblies: a global cyclic symmetry approach, *Journal of Sound and Vibration* 191 (1996) 901–915.
- [12] J. Yu, A. Craggs, 3-D solid finite element modeling of rotating shafts, *Proceedings of the 15th International Modal Analysis Conference—Imac*, Vols I and II, Vol. 3089, Orlando, 1997, pp. 1488–1494.
- [13] E. Chatelet, D. Lornage, G. Jacquet-Richardet, A three dimensional modeling of the dynamic behavior of composite rotors, *International Journal of Rotating Machinery* 8 (2002) 185–192.
- [14] J. Fayos, L. Baeza, F.D. Denia, J.E. Tarancón, An Eulerian coordinate-based method for analysing the structural vibrations of a solid of revolution rotating about its main axis, *Journal of Sound and Vibration* 306 (2007) 618–635.
- [15] M.A. Brown, A.A. Shabana, Application of multibody methodology to rotating shaft problems, *Journal of Sound and Vibration* 204 (1997) 439–457.
- [16] A.A. Shabana, *Dynamics of Multibody Systems*, Third Edition, Cambridge University Press, 2005.
- [17] J. Melanson, J.W. Zu, Free vibration and stability analysis of internally damped rotating shafts with general boundary conditions, *Journal of Vibration and Acoustic* 120 (1998) 776–783.
- [18] A.A. Shabana, *Theory of Vibration, Vol. II, Discrete and Continuous Systems*, Springer-Verlag, New York, Inc., 1991.
- [19] W. Weaver Jr., S.P. Timoshenko, D.H. Young, *Vibration Problems in Engineering*, Fifth Edition, Wiley, New York, 1990.
- [20] G. Genta, *Vibration of Structures and Machines, Practical Aspects*, Third Edition, Springer, New York, 1999.
- [21] G.J. Sheu, S.M. Yang, Dynamic analysis of a spinning Rayleigh beam, *International Journal of Mechanical Sciences* 47 (2005) 157–169.

Artículo 2



Contents lists available at SciVerse ScienceDirect

International Journal of Fatigue

journal homepage: www.elsevier.com/locate/ijfatigue

Numerical estimation of stresses in railway axles using a train–track interaction model

José Martínez-Casas^a, Laura Mazzola^b, Luis Baeza^a, Stefano Bruni^{b,*}

^a Centro de Investigación en Tecnología de Vehículos, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain

^b Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano, Via La Masa 1, 20156 Milano, Italy

ARTICLE INFO

Article history:

Received 8 March 2012

Received in revised form 5 July 2012

Accepted 9 July 2012

Available online 28 July 2012

Keywords:

Railway vehicles

Wheelset design

Wheelset axle fatigue

Dynamic loads

Train–track interaction

ABSTRACT

The fatigue design of railway axles requires that the stresses arising in the axle in real service are accurately quantified. This paper describes a method to compute the dynamic stresses arising in railway axles as the effect of train–track interaction, based on the numerical simulation of the dynamic interaction between a flexible wheelset and a flexible track. The wheelset is modelled as a flexible rotating body using an Eulerian approach, whereas track is regarded as an infinite periodic system with the rail modelled as a Timoshenko beam resting on discrete elastic supports, considering the inertia associated with the sleepers.

The paper presents an application of the proposed procedure to the calculation of the dynamic stresses caused in the axle by different types of geometric imperfection occurring on the wheel and rail surfaces, considering the cases of a single harmonic rail corrugation, random rail roughness and a wheelflat.

© 2012 Elsevier Ltd. All rights reserved.

1. Introduction

Railway axle durability is a key issue in designing and correctly maintaining railway vehicles, to ensure that the highest safety standards are met and, at the same time, to optimise life-cycle costs from a system point of view, i.e. considering not only the vehicle but also the interacting infrastructure. From the single point of view of fatigue resistance, the axle design should tend towards increasing the size to reduce stresses, but this component also represents a significant contribution to the wheelset unsprung mass, which, on the contrary, shall be minimised to reduce the generation of dynamic force at wheel–rail contact and hence damage in the track and in the wheels, especially for high-speed trains.

At present, wheelset axles are designed for infinite fatigue life, however a small number of axle failures due to fatigue continues to be reported, sometimes with catastrophic consequences. One of the reasons which have been proposed to explain these unforeseen failures is that the loads assumed by the standard for the purpose of fatigue design verification do not fully reflect the actual service loads of the vehicle, which are largely depending on the vehicle design parameters (e.g. unsprung masses, suspension stiffness and damping, etc.) and on the vehicle service profile [1,2]. The precise knowledge of service loads is also pivotal to the definition of appropriate intervals for the non-destructive inspection of rail-

way axles [3,4], which are nowadays part of standard maintenance practice to remove from service cracked axles before failure.

Detailed information on the service loads is often derived experimentally, using instrumented wheelsets [5–7]. This approach however presents some drawbacks: first of all, the physical measure is not applicable at the design stage of a new vehicle, setting-up and running the tests is expensive and demanding due to the harsh measuring environment and extensive test campaigns are required to cover all service conditions (different lines and speeds, operation at tare/full load, new/worn wheel profiles, etc.). Furthermore, the experimental measure of the service load is normally not able to fully explain the causes of extreme loads, which result in stress peaks mostly affecting the fatigue resistance of the axle and crack propagation.

For this reason, in the last year attempts have been made to define procedures based on the use of multi-body models of a railway vehicle or train set, to provide a numerical estimate of the service loads [6–8]. This approach can be used to complement measurements, e.g. addressing service conditions not covered by the tests and to provide a better physical understanding of the factors influencing the service spectra, including (among others) vehicle design parameters, the condition of the wheel and rail surfaces and the service scenario. To the Authors' knowledge, these approaches have however until now been developed considering the wheelset as a rigid body. Hence, axle stresses can be correctly computed only in the low-frequency range (approximately 0–20 Hz), whereas their high-frequency components, mainly responsible for the occurrence of stress peaks, are excluded from the analysis [8].

* Corresponding author.

E-mail address: stefano.bruni@mecc.polimi.it (S. Bruni).

This paper aims therefore at establishing a method to define numerically the stresses in a railway axle, including the high frequency components, as function of vehicle–track parameters and of the vehicle’s running condition, thereby extending the scope and detail of the existing numerical approaches to predict the wheelset service loads. To this end, a model of a flexible wheelset interacting with a flexible track in tangent track is derived and used to simulate typical service scenarios for a high-speed railway vehicle. The wheelset is modelled as a flexible rotating body, using an Eulerian approach to take advantage from axial symmetry and modal synthesis to reduce the size of the problem. The track is modelled as an infinite periodic system, with the rail modelled as a Timoshenko beam resting on discrete elastic supports, considering the inertia associated with the sleepers. The numerical simulation considers the effect of geometric irregularities appearing on the rail and wheel surfaces, allowing to consider the effect of e.g. rail corrugation, rail dips, wheel polygonalisation, wheelflats, etc.

Train–track interaction models including a detailed description of the wheelset as an elastically deformable body have been proposed by several authors. Some models, e.g. [9] are defined in the frequency domain and derive the dynamic forces at wheel–rail contact by combining the wheelset and track frequency response functions with the assumed rail corrugation. This approach is inherently linear and does not allow to consider the rails as discretely supported. Modelling approaches which incorporate a discrete-support track model and the effect of nonlinearities in the track and in wheel–rail contact have been developed in Refs. [10–14]: in this case, the train–track model is defined in the time domain and the wheelset and track models are defined using the finite element method, introducing a reduction of the degrees of freedom using mode superposition.

These approaches have been mostly applied to the study of damage phenomena in the track and at wheel–rail interface, and therefore focus on the definition of wheel–rail contact forces rather than axle stresses. Therefore, a simplified model of the wheelset axle (sometimes based on beam elements) can be used. Furthermore, the effect of wheelset rotation is neglected or considered with some approximation, whereas this effect may importantly affect the wheelset resonance conditions, which in turn can be a cause of extreme stress peaks arising in the axle: the present paper aims therefore at developing a modelling and simulation approach specifically tailored on the prediction of axle stresses.

The paper describes the wheelset–track interaction model developed and the procedure to compute the dynamic stresses in the axle. Results of the numerical procedure are presented for different excitation cases including rail corrugation having different wavelength and a wheelflat, and considering the effect of wheelset speed.

2. The vehicle–track interaction model

The vehicle–track interaction model, see Fig. 1, is defined adopting a sub-structuring technique [15,16], according to which the

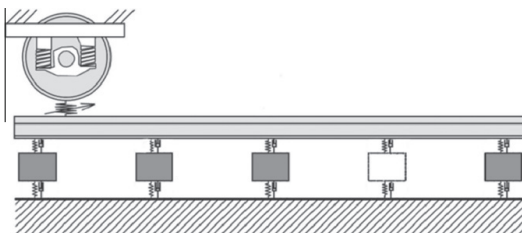


Fig. 1. The vehicle–track interaction model.

whole system is divided into substructures: the vehicle, the rails and the rail supports. For each substructure, the equations of motion are written separately, and interaction effects between vehicle and track are represented by the wheel–rail contact forces and by the forces generated at the rail pads [15]. The simulation approach is developed considering the motion of the wheelset in tangent track.

Given the range of frequencies addressed, the vehicle model is confined to one wheelset with primary suspension, see Section 2.1. The vibration of the flexible wheelset is expressed using Eulerian modal coordinates, see Section 3, taking advantage from the axial symmetry of the body. Furthermore the modal approach is chosen to describe the wheelset motion in order to reduce the computational effort required by the simulation.

The track is modelled by means of a cyclic approach, which provides some benefit with respect to classical track modelling or the finite one. The sub-structuring technique is still adopted here to simplify the system modelling; a detailed description of the track is provided in Section 2.2.

2.1. The vehicle model

The dynamic stresses arising in the wheelset axle are mostly related with train–track interaction effects in the frequency range above 20 Hz, which are excited by short wavelength geometric imperfections in the wheel and rail profiles and by singularities such as rail dips and wheelflats.

In this frequency range the dynamics of the sprung masses (bogie frame and car body) are effectively isolated from the motion of the un-sprung masses (wheelsets and axle boxes) on account of the mechanical filter introduced by the suspensions. Therefore, the vehicle model used in this paper considers one single wheelset, modelled as an elastically flexible body, and the primary suspension, represented using visco-elastic lumped parameter elements. The static load associated with the gravitational forces acting on the bogie and on the carbody masses is represented by two static forces applied through the primary suspension on the two sides of the wheelset.

2.2. The track model

The track is modelled by means of a cyclic approach, where a finite section of the track is defined, introducing cyclic boundary conditions at the ends of the model, hence the track, see Fig. 2, can be interpreted as an infinite track, negotiated by an infinite set of identical vehicles, uniformly distributed in such a way that each vehicle is set at a constant distance L apart from the adjacent ones. Due to the periodicity of the structure and of the loading conditions, the study is reduced to a single section having finite length L , whose value is set large enough to avoid interaction between the vehicles.

The model adopted for the different track components is illustrated in Fig. 3: the rails are modelled as Timoshenko beams, including bending deformations in vertical/lateral directions, as well as torsional deformations. Rail vibration is introduced in terms of modal superposition for the unconstrained rail with cyclic boundary conditions, hence resulting into a set of de-coupled 1-d.o.f. equations. Moreover due to the symmetry of the sub-system with respect to the track centreline, only one rail is modelled in the present study.

The discrete rail supports are introduced in the form of lumped parameter systems, see Fig. 3 right. The rail pads are modelled as lumped visco-elastic elements generating the interaction forces between the rails and the sleepers, represented as lumped masses. Ballast dynamics is neglected here, being not relevant for the stress analysis on the wheelset, but the equivalent ballast stiffness and

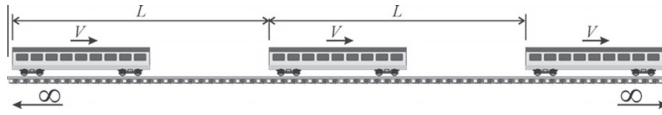


Fig. 2. The cyclic track model.

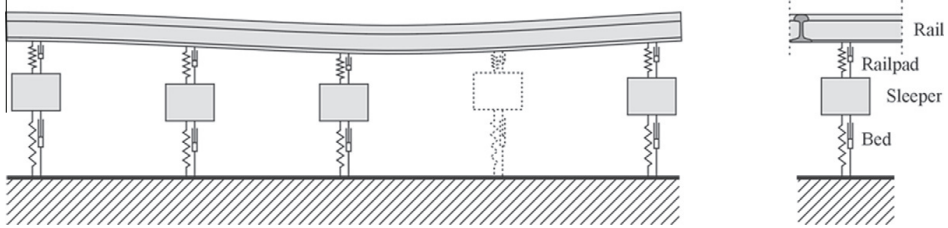


Fig. 3. Detail of the track model. Left: model of some sleeper bays. Right: sleeper and rail pad model.

damping are accounted for by means of lumped spring and dash-pot elements.

2.3. The model of wheel–rail contact forces

The track model is coupled with the flexible wheelset via the wheel–rail contact forces, which are expressed as function of the relative wheel–rail displacement and velocity in the contact patch. In the numerical model presented here, the theory of Hertz is adopted to define the normal contact force component and FAST-SIM [17] is used to define the tangential contact forces as function of the normal contact force and of the creepage components.

At each time step, the displacement and velocity of the wheel in the contact point are obtained using Eq. (1) evaluated at the contact point position.

3. The flexible wheelset model

In order to model the kinematics of the flexible wheelset, two configurations (undeformed and deformed) are defined. The undeformed configuration is associated with the spinning velocity of the wheelset (at constant angular velocity Ω). The deformed configuration considers the flexibility and small rigid solid displacements. The displacement field relates the deformed configuration with the undeformed configuration as it will be shown in Eq. (1).

The coordinates that are implemented in the wheelset model do not follow the material points of the solid which is the commonest procedure in Mechanics, nevertheless they are associated with spatial points (Eulerian approach). Let \mathbf{u} an Eulerian vector coordinate in a fixed coordinate frame. Any property of the solid $\varphi(\mathbf{u}, t)$ corresponds to the material point of the solid whose undeformed configuration is in the spatial point \mathbf{u} at instant t . Following this criterion, the displacement field is defined by means of the following formula:

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{u}, t), \quad (1)$$

where \mathbf{r} is the final position of the particle, and \mathbf{w} is the displacements associated with flexibility and small rigid body displacements.

The coordinate frame is chosen so that the spin rotation is in the second axle. The following matrices are defined as follows:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2)$$

The angular velocity tensor verifies:

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega \mathbf{J}; \quad \text{and} \quad \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} = -\Omega^2 \mathbf{E}. \quad (3)$$

The velocity due to the rigid body spinning is:

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T = \tilde{\Omega} \mathbf{u} = \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} = \Omega \tilde{\mathbf{u}}, \quad (4)$$

where $\tilde{\mathbf{u}} = (u_3 \quad 0 \quad -u_1)^T$. The velocity of the particle is computed through the material derivative of \mathbf{r} , and that is

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_i} + \dot{\mathbf{w}} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \\ &= \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{w}} + \Omega \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i}. \end{aligned} \quad (5)$$

In order to calculate the kinetic energy of the solid, the square of the particle velocity Eq. (5) has to be obtained. It has the following formula:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{r}^T}{Dt} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \Omega^2 \mathbf{u}^T \mathbf{E} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{w}}^T \dot{\mathbf{w}} + \Omega^2 \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial u_i} \right) \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \right) \\ &\quad + 2\Omega \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{J} \mathbf{u} + 2\Omega^2 \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} \\ &\quad + 2\Omega \dot{\mathbf{w}}^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \right). \end{aligned} \quad (6)$$

The next modal approach is adopted:

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}, t) = \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t), \quad (7)$$

being $\Phi(\mathbf{u})$ the mode shape functions matrix of the free-boundary wheelset. The small rigid displacements of the solid are considered in this approach through the rigid modes of the wheelset. It must be pointed out that the mode shape functions do not depend on time since the rotation of the solid does not change the mode shapes functions in fixed coordinates, because the axial symmetry of the wheelset. The use of the mode shapes in fixed coordinates as basis function when the solid is in motion is called Eulerian modal approach. Once the formula Eq. (7) is applied in Eq. (6), the kinetic energy results in the following expression:

$$\begin{aligned}
 E_k &= \frac{1}{2} \int_{Vol} \rho \frac{D\mathbf{r}^T}{Dt} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} dv \\
 &= \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \int_{Vol} \rho \Phi^T \Phi dv \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \Omega^2 \int_{Vol} \rho \mathbf{u}^T \mathbf{E} \mathbf{u} dv + \frac{1}{2} \Omega^2 \mathbf{q}^T \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q} + \Omega \dot{\mathbf{q}}^T \int_{Vol} \rho \Phi^T \mathbf{J} \mathbf{u} dv \\
 &\quad + \Omega^2 \mathbf{q}^T \int_{Vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} dv + \Omega \dot{\mathbf{q}}^T \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q}. \tag{8}
 \end{aligned}$$

Two terms of Lagrange's equation are computed as follows:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T &= \int_{Vol} \rho \Phi^T \Phi dv \dot{\mathbf{q}} + \Omega \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \dot{\mathbf{q}} - \Omega^2 \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u} dv + \Omega \int_{Vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \Phi dv \dot{\mathbf{q}} \\
 &\quad + \Omega \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} dv - \Omega^2 \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q} + \Omega^2 \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q} + \Omega^2 \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_j \sum_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \right) dv \mathbf{q}. \tag{9}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \Omega^2 \int_{Vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q} + \Omega^2 \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} dv \\
 &\quad + \Omega \int_{Vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \Phi dv \dot{\mathbf{q}}. \tag{10}
 \end{aligned}$$

Finally, the equation of motion is obtained:

$$\begin{aligned}
 \frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left(\frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \dot{\mathbf{q}} + 2\Omega \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_j \sum_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \right) dv \mathbf{q} \\
 &\quad - \Omega^2 \int_{Vol} \rho \Phi^T \left(\sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q} - \Omega^2 \\
 &\quad \times \int_{Vol} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u} dv. \tag{11}
 \end{aligned}$$

The modal properties are computed from a finite element (FE) model, therefore it is convenient to use the FE methodology for computing the equation of motion numerically. The mode shape functions are obtained into the eth element of the FE mesh as follows

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{u}) \Phi_{FE}^e, \tag{12}$$

being $\mathbf{N}^e(\mathbf{u})$ the basis function matrix of the eth element, and Φ_{FE}^e the mode shapes computed in the nodes of the eth element through the FE model.

One first step in the FE method is to compute each integral on the volume of the solid as the sum of integrals on the volume of the FE elements, that is:

$$\int_{Vol} \cdot dv = \sum_{elements} \int_{Vol^e} \cdot dv. \tag{13}$$

This approach can be performed if the integrand is bounded in the element edges. Once this step is complete, the method is centered on obtaining the matrices of the elements. These matrices have to be assembled in global matrices, following the standard FE assembling technique. The first matrix of the element in Eq. (11) is obtained by means of the approach in Eq. (12) as follows:

$$\begin{aligned}
 2\Omega \int_{Vol^e} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv &= 2\Omega \Phi_{FE}^{eT} \\
 &\quad \times \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv \Phi_{FE}^e, \tag{14}
 \end{aligned}$$

being defined \mathbf{V}^e as the corresponding matrix of the element, that is:

$$\mathbf{V}^e = \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv. \tag{15}$$

Following the same procedure than Eq. (14), the remaining matrices of the elements are obtained:

$$\mathbf{A}^e = \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \left(\sum_j \sum_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \mathbf{N}^e}{\partial u_i \partial u_j} \right) dv, \tag{16}$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \left(\sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv, \tag{17}$$

$$\mathbf{c}^e = \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{E} \mathbf{u} dv. \tag{18}$$

The term where \mathbf{V}^e appears can be identified as inertial force due to Coriolis acceleration associated with the convective velocity. Matrix \mathbf{A}^e is related to convective acceleration. Matrix \mathbf{C}^e is associated with centrifugal forces that appear after deformation of the solid. Finally, column matrix \mathbf{c}^e corresponds to constant centrifugal forces. Integrals in Eqs. (15)–(18) are computed numerically following Gauss quadrature.

The presence of the second derivative in Eq. (16) does not guarantee the convergence to the integral (because there is C^0 continuity between FE elements). However, the convergence can be proved if one integrates Eq. (16) by parts.

The terms of Lagrange's equation related with non-conservative forces and elastic energy are computed like standard modal approach procedure (because Eulerian displacements and virtual displacements do not depend on time). The matrices of the elements (e.g. \mathbf{A}^e) are assembled into the global matrices (giving matrix \mathbf{A}), and the following equation of motion is found

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega \Phi_{FE}^T \mathbf{V} \Phi_{FE} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \Omega^2 \Phi_{FE}^T (\mathbf{A} - \mathbf{C}) \Phi_{FE}) \mathbf{q} = \Omega^2 \Phi_{FE}^T \mathbf{c} + \mathbf{Q}, \tag{19}$$

being \mathbf{Q} the generalised forces, and \mathbf{D} a diagonal matrix that contains the square of the undamped natural frequencies of the free-boundary solid.

3.1. Calculation of stresses in the wheelset

The simulation of train-track interaction is finalised in this paper towards the calculation of dynamic stresses arising in the wheelset axle. To perform the stress calculation, first of all some sections of interest are identified along the axle. These sections

were chosen sufficiently far from diameter changes, to avoid stress concentration effects which cannot be captured with the simple mesh adopted, see Fig. 4. In this paper, results are reported for one single section of the axle, which is set at mid distance between the central brake disc and one of the side brake discs, see Fig. 5.

In order to derive the dynamic stresses, the simulation results in terms of the Eulerian modal coordinates vector $\mathbf{q}(t)$ are processed according to Eq. (1) to derive the strains and stresses in different spatial points along the exterior surface of the considered axle section. Then, one material point is chosen in the section and followed during the rotation of the wheelset, to derive the time history of the stress in the selected point.

4. Results

In this section, results of train–track interaction calculations are shown considering different sources of excitation: a single harmonic rail corrugation, random rail roughness and a wheelflat. The case study considered here refers to the trailed car of a concentrated power train for high-speed passenger service. The vehicle is equipped with a solid axle wheelset with monobloc, light design wheels. The track considered features UIC60 rails and track parameters are based on the EUROBALT project, considering a “stiff” track.

Table 1 summarises the input data used to set-up the simulation model. In all analyses reported below (unless those considering the wheelset as a rigid body), the first 100 modes of vibration of the flexible wheelset are considered, covering the frequency range up to 2.7 kHz approximately.

Results are shown starting from the simple excitation case represented by a single harmonic rail corrugation and then extended to the cases of random rail corrugation and wheelflat.

4.1. Results for single harmonic rail corrugation

The first excitation case considered is rail corrugation having sinusoidal waveform. Different corrugation wavelengths are considered, including values exciting some resonances of the track and wheelset. The first case considered refers to a corrugation wavelength of 60 mm (i.e. one tenth of the sleeper bay). In Fig. 6 the vertical contact force generated by the wheelset travelling on the corrugated rail is plotted as function of the distance travelled for different vehicle speeds (100 and 300 km/h) and for different corrugation amplitudes. In the upper subfigure, a corrugation peak-to-peak depth of 4.84 μm is considered, corresponding to the limit amplitude defined by the ISO 3095 standard. For the high-

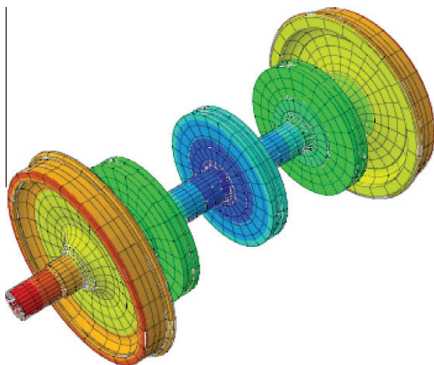


Fig. 4. Finite element model of the flexible wheelset.

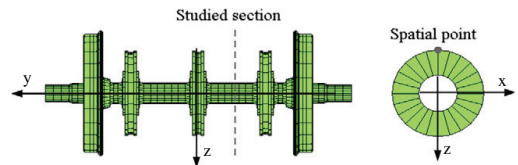


Fig. 5. Studied section of wheelset and spatial point where the stresses have been calculated.

er speed, the result obtained for the case of a rigid wheelset (i.e. excluding from the analysis all modes except the rigid ones) is also shown, to evaluate the effect of wheelset flexibility. Finally, the rail roughness profile is also reported in the figure using an appropriate scaling and offset to obtain a proper visualisation.

Two harmonic contents are observed in the vertical contact force, the largest one having the same wavelength as the rail corrugation and a second one with wavelength equal to the sleeper bay. This second harmonic component is due to the periodic variation of the rail stiffness seen by the wheelset as the consequence of the discrete rail support. The amplitude of the dynamic contact force component having the same wavelength as the corrugation is highly influenced by the wheelset speed, being approximately three times greater at 300 km/h than at 100 km/h. The contact force is also highly affected by wheelset flexibility: the comparison of the results obtained for the rigid and flexible wheelset at the speed of 300 km/h shows that neglecting wheelset flexibility leads to over-estimating the peak-to-peak amplitude of the dynamic force by 25% approximately. This is due to the fact that at the considered excitation frequency of 1390 Hz approximately (corresponding to the ratio of the wheelset speed over the corrugation wavelength) the wheelset mass participating to the vertical motion is lower than the whole mass of the wheelset due to flexibility effects, a mechanism which is not captured by the rigid wheelset model.

The corrugation peak–peak amplitude of 4.84 μm is relatively small compared to the typical amplitude of rail corrugation, which is in the range of tens or even hundreds of μm . Indeed, ISO 3095 limit is defined for a random corrugated profile including several wavelengths which altogether would lead to a greater peak–peak amplitude. Therefore, in the lower subfigure of Fig. 6 the vertical contact force obtained for the flexible wheelset at 300 km/h is compared for two corrugation amplitudes, one corresponding to the ISO 3095 limit (same as in the upper subfigure) and the other 10 times greater; this comparison also allows to assess the importance of non-linear effects in the case considered. For the larger corrugation amplitude, the peak-to-peak amplitude of the vertical force is approximately 93 kN, and leads to a maximum wheel overloading/unloading which is approximately 78% of the static load. For the case considered here, non-linear effects appear to play a relatively marginal role, since the maximum dynamic variation of the vertical load for the larger corrugation amplitude is with good approximation 10 times greater than for the small corrugation amplitude. However, the force fluctuation component having the same wavelength as the sleeper bay is in this case less visible (note that the amplitude of excitation associated with this effect does not change with the corrugation amplitude).

Fig. 7 shows the y-axis normal stress in the studied section of the axle (cfr. Fig. 5), plotted as function of the wheelset rotation for the same cases considered in Fig. 6. On the left, the effect of vehicle speed is analysed by comparing the results obtained at 100 and 300 km/h for the same corrugation amplitude corresponding to the ISO 3095 limit: the waveform of the stress is with good approximation sinusoidal with 2π periodicity, and the peak–peak

Table 1
Simulation parameters.

Wheelset model data		Track model data	
Mass of wheelset	1375 kg	Sleeper bay	0.6 m
Axle load	120 kN	Sleeper number	70
Primary suspension longitudinal stiffness	7.5 MN/m	Sleeper mass	324 kg
Primary suspension lateral stiffness	7.1 MN/m	Track bed stiffness	200 MN/m
Primary suspension vertical stiffness	0.81 MN/m	Track bed damping	150 kN s/m
Primary suspension vertical damping	30 kN s/m	Rail pad stiffness	1 GN/m
Primary suspension longitudinal damping	100 kN s/m	Rail pad damping	50 kN s/m
Primary suspension lateral damping	100 kN s/m	Rail section	UIC60

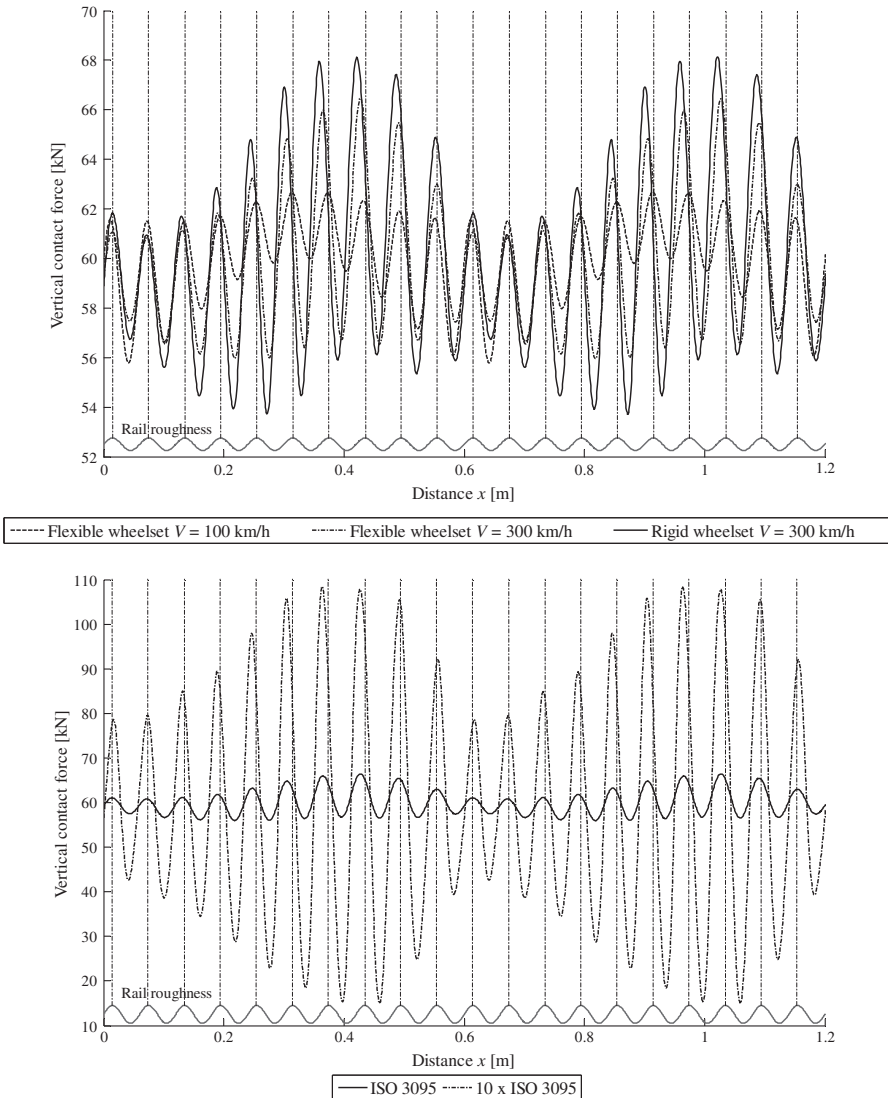


Fig. 6. Wheel–rail contact force when the vehicle circulates on a corrugated track with corrugation wavelength 60 mm. Above: effect of speed and of wheelset flexibility for corrugation amplitude corresponding to the ISO 3095 limit. Below: effect of corrugation amplitude for speed 300 km/h and flexible wheelset.

amplitude is increased from 78.3 MPa to 88 MPa when the speed is increased from 100 to 300 km/h. On the right, the effect of corrugation amplitude is considered by comparing the two results obtained for the two corrugation amplitudes considered in Fig. 6 at 300 km/h speed: these results are so close to each other that cannot be distinguished, showing that the corrugation amplitude, despite highly affecting the dynamic variation of the contact force (see Fig. 6) bears almost no effect on the amplitude of the axial stresses.

In Fig. 8 the vertical wheel–rail contact forces obtained for single harmonic corrugation are compared for the same vehicle speed (300 km/h) and for different corrugation wavelengths and amplitudes: in particular, the upper subfigure shows the results obtained for a corrugation wavelength exciting the pinned–pinned resonance of the track [15], considering two corrugation amplitudes, one corresponding to the ISO 3095 limit and the other 10 times greater. The peak–peak amplitude of the dynamic force fluctuation is approximately 81 kN, and is therefore considerably lower than for the 60 mm wavelength (cfr. Fig. 6), on account of the rail showing a greater mobility in this resonance condition. Also in this case, the peak–peak force amplitude is nearly proportional to the corrugation amplitude.

The lower subfigure shows the vertical contact force plotted vs. the travelled distance for a corrugation wavelength exciting the first forward bending mode of the wheelset. In this case, the peak–peak amplitude of the contact force for the larger corrugation amplitude is 82.2 kN, again significantly lower than for the 60 mm wavelength. In this second case however the increase of the peak–peak force amplitude with the corrugation amplitude is significantly less than proportional, and also the waveform of the contact force is different for the two corrugation amplitudes: this shall be ascribed to the different importance of the sleeper–passing effect in the two cases, rather than to the effect of non-linearities.

In Fig. 9, the y-axis normal stress in the axle is shown for the same cases as in Fig. 8. For the corrugation wavelength exciting the pinned–pinned resonance of the track, no significant difference is observed with respect to the cases reported in Fig. 7 for the same speed (300 km/h), and again an increase of the corrugation amplitude leaves unaffected the amplitude of the axial stress. However,

when the corrugation wavelength exciting the wheelset resonance and the large corrugation amplitude is considered, the stress amplitude becomes 33% higher than in Fig. 7 (despite the contact force being lower in this case than for the 60 mm wavelength) and deviates significantly from the sinusoidal waveform. This result is justified by the effect of wheelset flexibility playing a particularly important role in the case considered, on account of one mode of vibration being excited in resonance.

A useful parameter to quantify the relevance of dynamic effects affecting the wheel–rail contact forces and the stresses in the axle is the dynamic factor, defined as the ratio between the maximum dynamic value of the quantity considered and the corresponding static value. For the contact force, the dynamic factor k_Q is defined according to the following equation:

$$k_Q = \frac{Q_{d,max}}{Q_s}, \tag{20}$$

with $Q_{d,max}$ the maximum value of the contact force and Q_s the static wheel load. For the stress in the axle the dynamic factor k_σ is defined as:

$$k_\sigma = \frac{\sigma_{d,max}}{\sigma_{s,max}}, \tag{21}$$

with $\sigma_{d,max}$ maximum dynamic stress in the material point considered and $\sigma_{s,max}$ the corresponding maximum stress under the action of rotating bending produced by the static loads acting on the wheelset.

In Fig. 10 the dynamic factors k_Q and k_σ are reported as function of the vehicle speed for the different types of rail corrugation presented above, considering a corrugation amplitude 10 times greater than the ISO 3095 limit; in this case, also the results for a corrugation wavelength exciting the second forward bending mode of the wheelset are presented. For the contact force dynamic factor k_Q , in the entire speed range considered, the largest values are obtained for the corrugation wavelength exciting the first forward bending mode of the wheelset, with a maximum value close to 1.8. A local maximum appears for most of the corrugation cases considered for speeds in the 125–135 km/h range, this is due to a

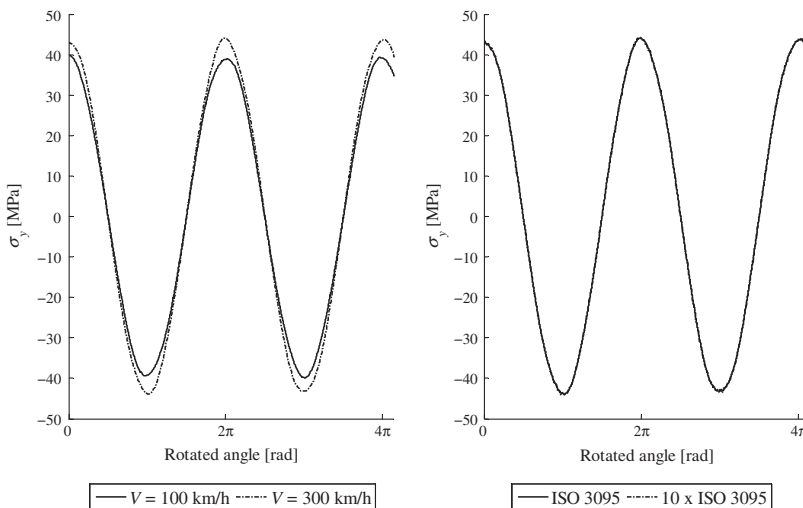


Fig. 7. y-Axis normal stress in the studied section of the axle (cfr. Fig. 5) when the vehicle circulates on a corrugated track with corrugation wavelength 60 mm. Left: two vehicle speeds, corrugation amplitude corresponding to the ISO 3095 limit. Right: two corrugation amplitudes (the results are undistinguishable).

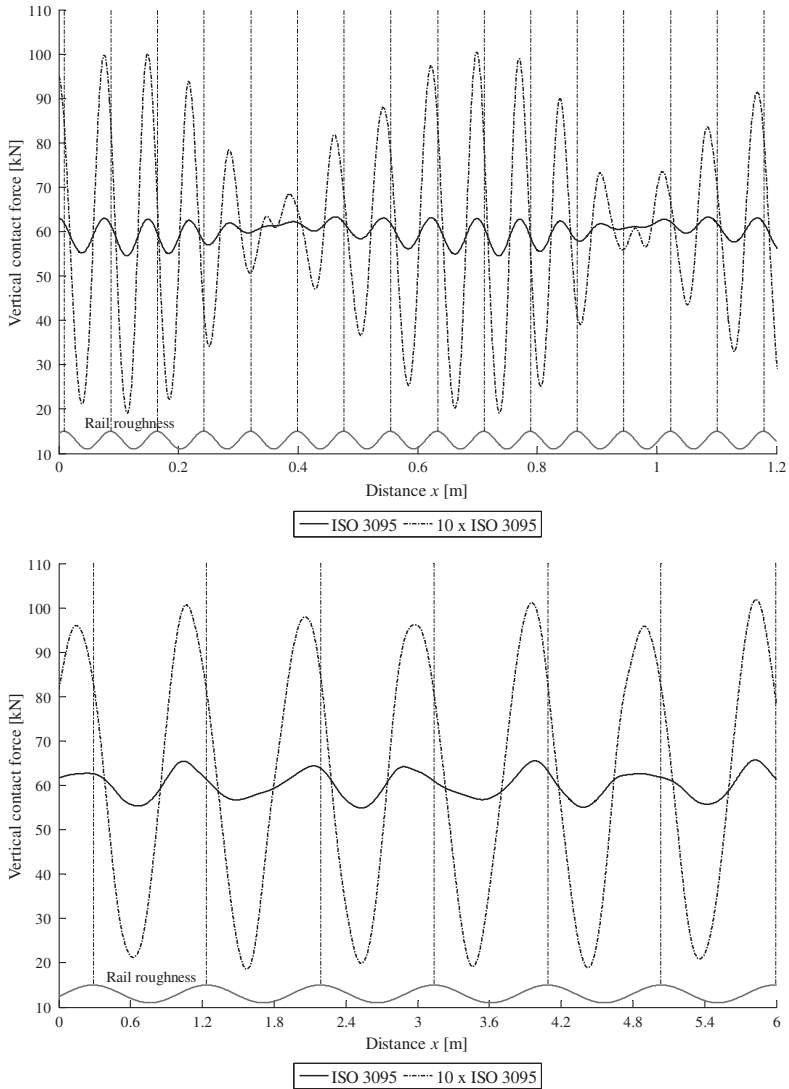


Fig. 8. Wheel–rail contact force when the vehicle circulates on a corrugated track with different corrugation wavelengths. Two corrugation amplitudes are considered, corresponding to the ISO 3095 limit and 10 times the ISO 3095 limit. Above: the corrugation wavelength excites the pinned–pinned mode of the rail. Below: the corrugation wavelength excites the first forward bending mode of the wheelset.

resonance effect associated with the sleeper passing frequency that excites P2 frequency (see P1 and P2 frequencies in Ref. [15]).

As far as the stress dynamic factor k_Q is concerned, very similar trends and values are obtained for the case with no roughness, for roughness wavelength exciting the pinned–pinned frequency, leading to low values of stress amplification (max. value below 1.2). Otherwise, for corrugation wavelength exciting one of the wheelset bending resonances the stress dynamic factor is significantly higher and can be up to about 1.8 for the case of corrugation wavelength exciting the first forward and up to 1.4 approximately for corrugation wavelength exciting the second forward bending mode. The trends with speed are close to monotonically increasing,

and the effect of the resonance associated with the sleeper passing is less evident than in the trend of the k_Q dynamic factor.

These results suggest that the bending stresses in the axle are highly affected by the wavelength of rail corrugation, and that combinations of train speed and corrugation wavelength leading to a resonance of a bending mode may be especially relevant in view of axle resistance to fatigue. Particularly significant in view of real applications is the case of rail corrugation, a form of irregular wear of the rail often appearing in railway systems and characterised quasi-harmonic wear patterns developing on the rail head in longitudinal direction [18]. Corrugation wavelength can range from 50 mm or less up to more than 1 m in the case of heavy haul

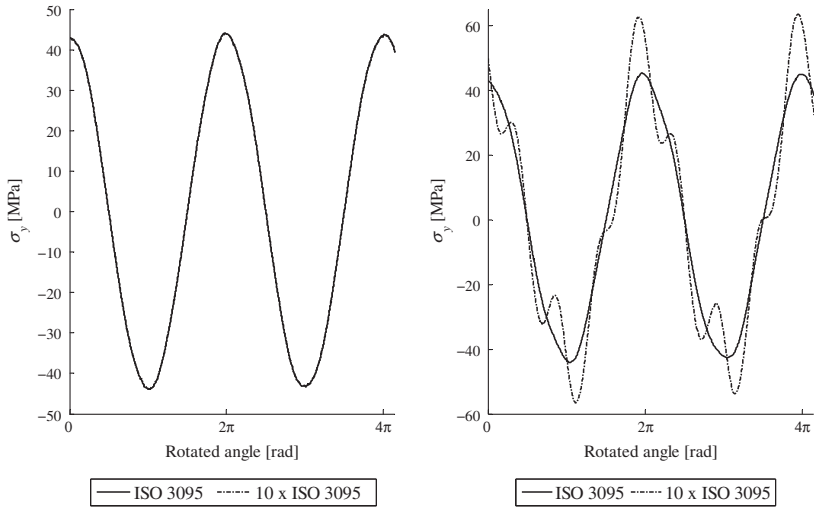


Fig. 9. y-Axis normal stress in the studied section of the axle (cfr. Fig. 5) when the vehicle circulates on a corrugated track at 300 km/h speed. Left: the corrugation wavelength excites the pinned–pinned mode of the rail. Right: the corrugation wavelength excites the first forward bending mode of the wheelset.

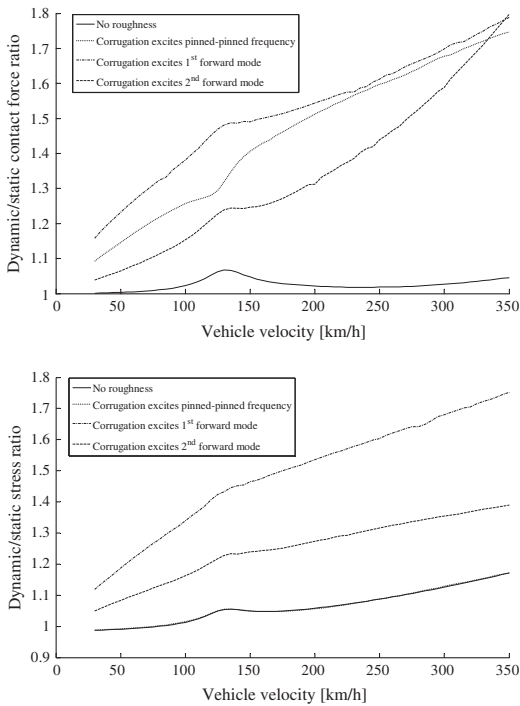


Fig. 10. Dynamic factors k_Q (vertical contact force, upper subfigure) and k_y (y-axis stress, lower subfigure) for different excitation cases and vehicle velocities. The roughness amplitude is 10 times higher the ISO 3095 limit.

corrugation, and typical wear depth values are in the range of some tenths of millimetre.

To quantify the relevance to fatigue of rail corrugation, we note that the design methods prescribed for railway axles by the Euro-

pean Standards EN13103 and EN13104 [19,20] assume a 1.25 dynamic amplification factor on the loads generated at the primary suspension. Since the calculation of the bending stresses is then based on static equilibrium, also the bending stresses are magnified by 25% with respect to the static case, whereas the results in Fig. 10 suggest that larger dynamic factors might apply when a particular combination of corrugation wavelength and train speed excites one bending mode. For instance, a sinusoidal rail corrugation having approximately 350 mm wavelength and 0.15 mm depth (i.e. 10 times the ISO3095 limit for the considered wavelength) would produce a dynamic stress amplification close to 40%. It shall be pointed out however that the equivalent static loads prescribed by EN13103/104 also include lateral wheel–rail contact forces due to curving, which are not included in the analysis presented here.

4.2. Results for random rail corrugation and for a wheelflat

The simple excitation cases considered in Section 4.1 allow to point out the influence of different dynamic effects on train–track interaction and on the stresses in the wheelset, but in real service dynamic excitation may be of a more complex nature. In this Subsection, two sources of excitation typically occurring in serviced trains are considered: random rail roughness and a wheelflat. Random roughness takes place on the rail head on account of different causes: geometric imperfections associated with the manufacturing and installation of the rail, irregular wear caused by train passage and, for larger wavelengths, non-uniform track settlement due to permanent deformations in the soil and ballast (in this case, the term “track irregularities” is used instead of corrugation). Studies have shown that rail roughness and track irregularity take the form of stationary random processes characterised by their power spectral density, which can be defined based on the quality of track maintenance [21]. On the other hand, wheelflats are localised defects occurring on the wheel surface as the result of full slip of the wheel, typically caused by poorly adjusted or faulty brakes [22].

Fig. 11 shows the vertical contact force plotted vs. the travelled distance for the train speeds of 100 and 300 km/h, considering the

excitation produced by random rail corrugation (amplitude corresponding to the ISO 3095 limit). The results obtained considering a rigid and flexible wheelset model are compared. Important dynamic fluctuations of the contact force are evidenced, with the maximum dynamic value corresponding to approximately 1.6 times the static load. The differences between the results obtained for the rigid and flexible wheelset are relatively small in this case, and do not affect significantly the maximum contact force value.

Fig. 12 presents the vertical contact force vs. travelled distance for a vehicle affected by a wheelflat. The calculation has been carried out for 50 and 300 km/h by means of the rigid and flexible wheelset models. A severe dynamic effect is observed, consisting of the complete loss of contact between the wheel and the rail, followed by an impact leading to a maximum value of the contact force which is between 3 and 4 times the static load and finally by a transient vibration. The differences between the results for the rigid and flexible wheelset model are small in terms of duration of the contact loss and of maximum overloading, but the transient following the impact is affected quite remarkably by wheelset flexibility, as demonstrated by the different frequency contents of the contact force signal, see particularly the zoomed view on the right side of the figure.

The y-axis stresses for the random rail corrugation and wheelflat excitation cases are shown in Fig. 13. In the random corrugation case, the dynamic fluctuations of the stress component are relatively low and lead to a maximum peak–peak stress amplitude around 91.2 MPa, corresponding to a dynamic amplification with respect to the maximum stress produced by the static load k_{σ} of 1.23 approximately. When the wheelflat defect is considered, the results are highly affected by the vehicle speed, with large dynamic effects taking place at low speed (with a dynamic factor k_{σ} of 1.34 approximately) on account of the repeated loss of contact of the wheel to the rail, and with a reduction of the dynamic stresses at higher speed.

Finally, in Fig. 14 the dynamic factors k_Q and k_{σ} are reported for the random corrugation and wheelflat as function of the vehicle speed. The contact force dynamic factor k_Q is nearly monotonically increasing up to a maximum value close to 1.8 for random corru-

gation excitation, whereas in case of wheelflat excitation the dynamic factor is much higher, in the range of 2.8–4.2, with larger values occurring at lower speeds: this is because at low speed the duration of the contact loss caused by the wheelflat is longer and hence the following impact is larger. The stress dynamic factor k_{σ} for the random corrugation excitation case is almost monotonically increasing with speed, with a maximum value close to 1.3. For the wheelflat excitation case, a completely different trend is observed, the stress dynamic factor k_{σ} being initially decreasing with the speed and then increasing above 200 km/h. The maximum value of the stress dynamic factor for this excitation case is obtained at the lowest speed considered in the analysis and is slightly below 1.5.

As in the case of excitation generated by a single-harmonic rail corrugation, it is interesting to observe that in some cases the dynamic factor k_{σ} exceeds the 1.25 value assumed in EN13103/104. For wheelflat excitation, this happens at low speeds (below 75 km/h) which are typical e.g. of freight application whereas for random rail roughness the 1.25 value is exceeded only at very high speeds above 300 km/h, which are only relevant to very high speed trains. It shall be stressed however that the results shown in Fig. 14 depend on the amplitude of the defects being considered and, in case of more severe irregularities, larger dynamic stresses shall be expected.

It is also interesting to point out that by using a static calculation to derive the bending stresses, Standards EN13103/104 inherently imply a proportionality between the contact forces and the stresses, whereas the results in Figs. 10 and 14 show that the stress dynamic factor k_{σ} is generally lower (sometimes much lower) than the dynamic factor for the vertical contact force k_Q . This circumstance is due to the inertia forces generated in the wheels and to the different magnification of wheelset flexible modes produced when resonance conditions occur and suggests that a method based on a static calculation could be not fully suited to estimate service stresses in the axle. Dynamic train–track interaction models such as the one proposed in this paper could be envisaged as a means to derive a more realistic estimate of service stresses in the axle, but this requires the study to be extended to consider the ef-

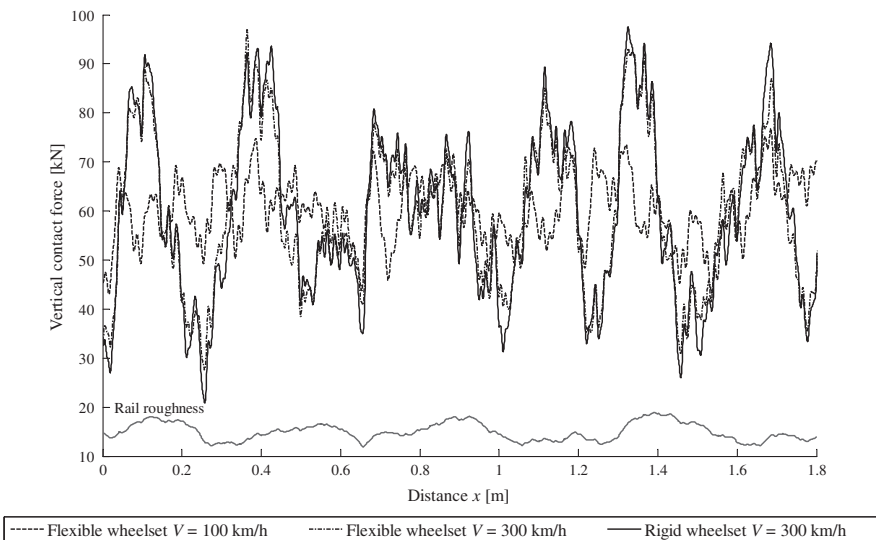


Fig. 11. Wheel–rail contact force when the vehicle circulates at 100 and 300 km/h speeds on a randomly corrugated track.

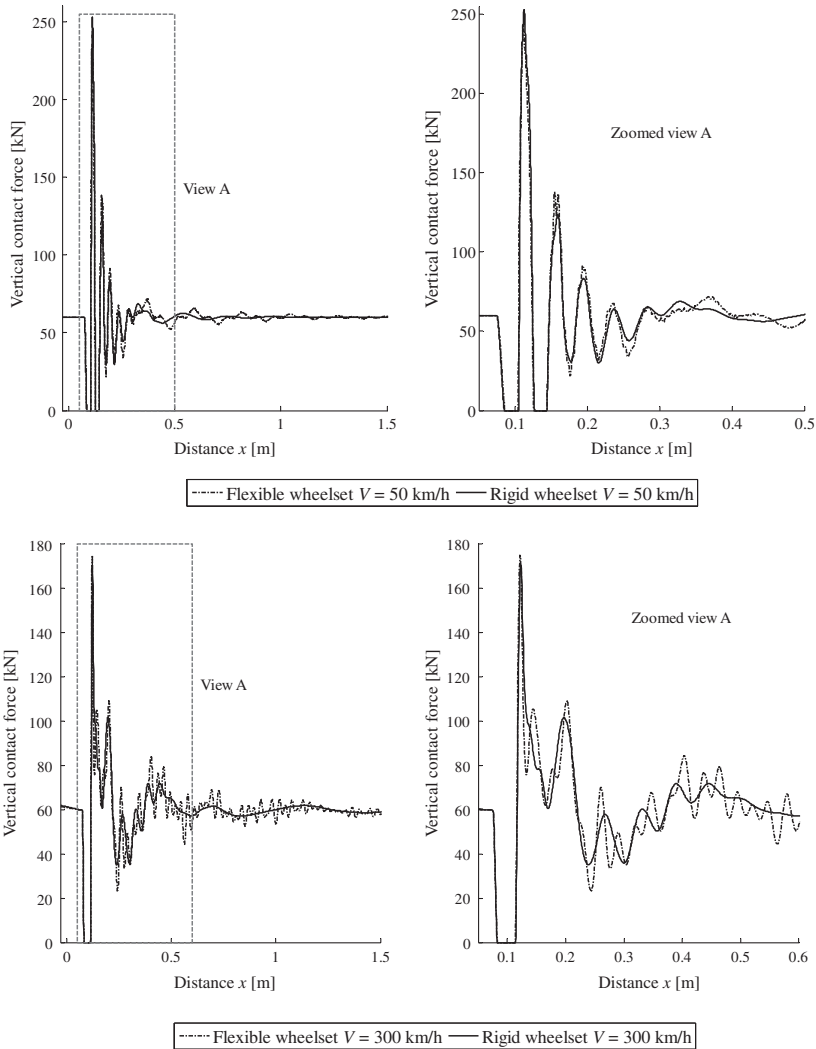


Fig. 12. Wheel–rail contact force when the vehicle circulates at 50 (above) and 300 km/h (below) speeds on a perfectly even rail in presence of a 50 mm wheelflat.

fect of curving, which is envisaged as a next development of the work described here.

5. Conclusions

Dynamic effects may be extremely important in determining the fatigue resistance of railway axles, and need to be properly considered in the axle design process. This paper has presented a method for the numerical estimation of the dynamic stresses in railway axles, based on the simulation of the interaction between a flexible wheelset and a flexible track. The method is presently limited to the case of tangent track running of the wheelset, but the extension to the curving condition is envisaged as a next step of the research, to consider the additional axle loading due to wheel–rail contact forces in a curve.

Results of the numerical procedures were presented in the paper, considering the dynamic excitation caused by rail corrugation and by a wheelflat for different wheelset speed values. The results clearly show that dynamic effects may lead to a significant dynamic amplification of the stresses in the axle, which is in some cases close to 70%. However, the actual relevance of dynamic effects affecting axle stresses is strongly depending upon the type of excitation and the vehicle speed.

When single harmonic corrugation is considered, the dynamic amplification of axle stresses is relatively low except in the case when the corrugation wavelength excites the bending modes of the wheelset. In the case of random multi-harmonic rail corrugation, the dynamic amplification factors are relatively low because the excitation is spread over a wide range of frequencies, thus reducing the importance of resonance effects. In all rail corrugation cases considered, regardless the waveform of the excitation, the

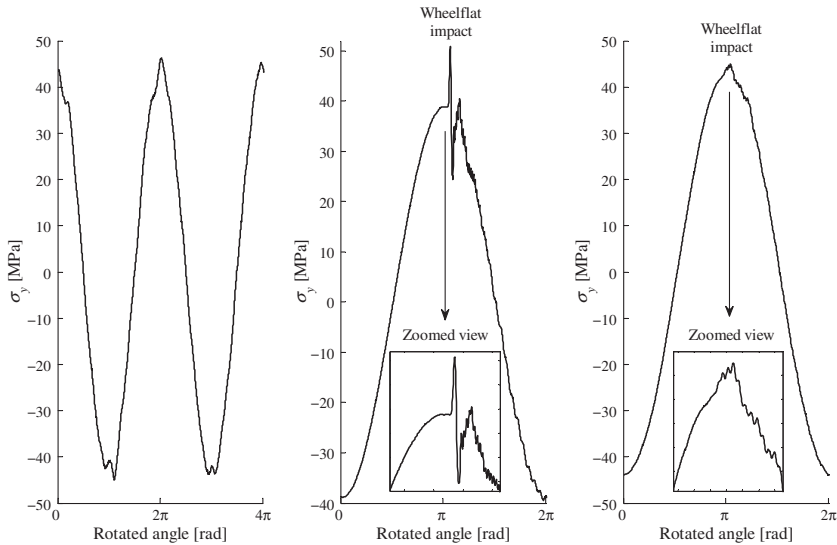


Fig. 13. y-Axis normal stress in the studied section of the axle (cfr. Fig. 5) when the vehicle circulates at 300 km/h speed on a randomly corrugated track (left) and on a perfectly even rail in presence of a 50 mm wheelflat at 50 km/h (centre) and 300 km/h (right).

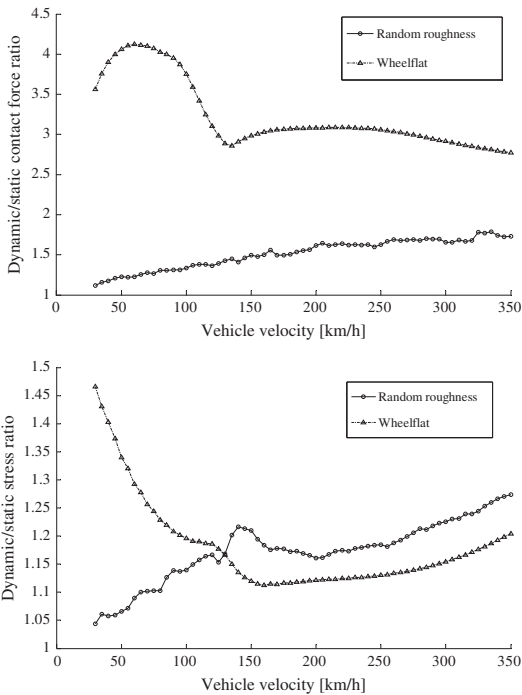


Fig. 14. Dynamic factors k_Q (vertical contact force, upper subfigure) and k_σ (y-axis stress, lower subfigure) for the random corrugation and wheelflat excitation cases.

dynamic stress amplification tends to increase with the vehicle speed, so that the most critical case is obtained for high-speed applications.

Wheelflat excitation also appears to be critical in view of the axle fatigue life, because high dynamic amplification factors up to 45–50% are obtained, but on account of the localised nature of this defect in this case the most severe dynamic excitation occurs at low speeds, at which the frequency of the excitation generated by the flat excites the bending resonances of the axle. For the wheelflat case, therefore, the most critical case appears to be that of freight cars, which may be often travelling at low speed.

Overall, the analyses presented in this paper show that a careful estimation of dynamic effects is essential to correctly estimate the wheelset's fatigue life. More research and validation is needed to transfer the findings presented here into axle design practices. Hopefully however the paper has highlighted an important area for future research, in view of further improving the reliability of railway transport.

Acknowledgements

The authors gratefully acknowledge the support for this work provided by the Project TRA2010-15669 (Ministerio de Ciencia e Innovación) and TRA2007-67167 (Ministerio de Educación y Ciencia-FEDER).

References

- [1] Smith RA. Railway fatigue failures: an overview of a long standing problem. *Materialwiss Werkstofftech* 2005;36(11):697–705.
- [2] Grubisic V, Fischer G. Procedure for reliable durability validation of train axles. *Materialwiss Werkstofftech* 2006;37(12):973–82.
- [3] Beretta S, Carboni M. Variable amplitude fatigue crack growth in a mild steel for railway axles: experiments and predictive models. *Eng Fract Mech* 2011;78:848–62.
- [4] Luke M, Varfolomeev I, Lüthepol K, Esderts A. Fatigue crack growth in railway axles: assessment concept and validation tests. *Eng Fract Mech* 2011;78:714–30.
- [5] Grubisic V, Fischer G. Bemessung von Radsatzwellen – Einflussgrößen und Vorgehen bei der Auslegung. Bericht FB-226, LBF, Darmstadt; 2005.
- [6] Alfi S, Braghin F, Bruni S. Numerical and experimental evaluation of extreme loads for improved wheelset design. *Vehicle Syst Dyn* 2008;46S:431–44.
- [7] Watson AS, Timmis K. A method of estimating railway axle stress spectra. *Eng Fract Mech* 2011;78:836–47.

- [8] Bruni S, Corradi R, Mazzola L. Wheel rail contact forces as input for optimal and robust axle design. In: 8th international conference on contact mechanics and wear of rail/wheel systems (CM2009), Firenze, Italy; September 15–18, 2009.
- [9] Thompson DJ, Jones Thompson CJ. A review of the modelling of wheel/rail noise generation. *J Sound Vib* 2000;231:519–36.
- [10] Nielsen JCO, Igeland A. Vertical dynamic interaction between train and track—influence of wheel and track imperfections. *J Sound Vib* 1995;187(5):825–39.
- [11] Diana G, Cheli F, Bruni S, Collina A. Experimental and numerical investigation on subway short pitch corrugation. *Vehicle Syst Dyn* 1998;29S:234–45.
- [12] Nielsen JCO, Oscarsson J. Simulation of dynamic train-track interaction with state-dependent track properties. *J Sound Vib* 2004;275:515–32.
- [13] Fayos J, Baeza L, Tarancón JE, Denia FD. An Eulerian coordinate-based method for analysing the structural vibrations of a solid of revolution rotating about its main axis. *J Sound Vib* 2007;306:618–35.
- [14] Baeza L, Fayos J, Roda A, Insa R. High frequency railway vehicle-track dynamics through flexible rotating wheelsets. *Vehicle Syst Dyn* 2008;46:647–59.
- [15] Baeza L, Huajiang O. A railway track dynamics model based on modal substructuring and cyclic boundary condition. *J Sound Vib* 2011;330:75–86.
- [16] Baeza L, Roda A, Nielsen JCO. Railway vehicle/track interaction analysis using a modal substructuring approach. *J Sound Vib* 2006;293:112–24.
- [17] Kalker JJ. A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. *Vehicle Syst Dyn* 1982;11:1–13.
- [18] Grassie SL, Kalousek J. Rail corrugation: characteristics, causes and treatments. *Proc Inst Mech Eng Part F J Rail Rapid Transit* 1993;207:57–68.
- [19] EN 13103. Railway applications - Wheelsets and bogies - Non-powered axles - Design method. Brussels: CEN; April 2001.
- [20] EN 13104. Railway applications - Wheelsets and bogies - Powered axles - Design method. CEN, Brussels, April 2001.
- [21] ORE B 176: Bogies with steered or steering wheelsets. Report no. 1: specifications and preliminary studies. Specification for a bogie with improved curving characteristics, vol. 2. Utrecht: ORE; 1989.
- [22] Johansson A, Nielsen JCO. Out-of-round railway wheels - wheel-rail contact forces and track response derived from field tests and numerical simulations. *Proc Inst Mech Eng Part F J Rail Rapid Transit* 2003;217:135–46.

Artículo 3

A comprehensive model of the railway wheelset-track interaction in curves

Authors: José Martínez-Casas¹, Egidio Di Gialleonardo², Stefano Bruni², Luis Baeza^{1*}

Affiliation:

¹Centro de Investigación de Tecnología de Vehículos, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain

²Dipartimento di Meccanica, Politecnico di Milano, Via La Masa 1, 20156 Milano, Italy

* Corresponding author

E-mail corresponding author: *baeza@mcm.upv.es*

Abstract

Train-track interaction has been extensively studied in the last 40 years at least, leading to modelling approaches that can deal satisfactorily with many dynamic problems arising at the wheel/rail interface. However, the available models are usually not considering specifically the running dynamics of the vehicle in a curve, whereas a number of train-track interaction phenomena are specific to curve negotiation.

The aim of this paper is to define a model for a flexible wheelset running on a flexible curved track. The main novelty of this work is to combine a trajectory coordinate set with Eulerian modal coordinates; the former permits to consider curved tracks, and the latter models the small relative displacements between the trajectory frame and the solid. The wheelset model is coupled to a cyclic track model having constant curvature by means of a wheel/rail contact model which accounts for the actual geometry of the contacting profiles and for the non-linear relationship between creepages and creep forces.

The proposed model can be used to analyse a variety of dynamic problems for railway vehicles, including rail corrugation and wheel polygonalisation, squeal noise, numerical estimation of the wheelset service loads. In this paper, simulation results are presented for some selected running conditions to exemplify the application of the model to the study of realistic train-track interaction cases and to point out the importance of curve negotiation effects specifically addressed in the work.

Keywords

Flexible wheelset, flexible curved track, train-track interaction

1. INTRODUCTION

Train-track interaction consists of the coupled vibration of a railway vehicle or train set and of a flexible track, with coupling of the two sub-systems being provided by wheel-rail contact forces and excitation arising mainly from surface imperfections in the rails and wheels, such as rail roughness and wheel out-of-roundness. In some cases, large level of vibration and large dynamic fluctuations of the contact forces may take place, leading to unwanted phenomena such as high levels of noise and vibration [1], damage of the rolling surfaces in the form of corrugation [2] or rolling contact fatigue [3]. Furthermore, train-track interaction also leads to dynamic stresses in the track components and in the wheelsets, which need to be carefully considered in order to avoid failures due to metal fatigue.

For these reasons, a large effort has been spent over the last 40 years to define suitable models for studying train-track interaction. Early models were mostly based on the representation of the vehicle as a system formed by rigid bodies, possibly simplified to considering only the wheelset as a rigid mass resting on a Hertzian stiffness [4]. More recently, the need to widen the frequency range of analysis led to the incorporation of wheelset flexibility in the models, leading to more realistic representation of wheel-rail interaction effects at higher frequencies. For the study of rail corrugation and wheel polygonalisation, generally a modal synthesis is introduced to reduce the size of the problem [5 – 7], whereas in case the frequency range of interest up to 1kHz and above (such as for the study of rolling noise) a Finite Element model of the wheel or wheelset is used without condensation [8, 9]. Only very recently, a further model refinement was introduced to consider the inertial effects due to wheelset rotation [10, 11].

It should be noted that many phenomena related with train-track interaction, particularly squeal noise, short pitch rail corrugation and the largest stresses generated in the wheels and axle, are mostly occurring when the rail vehicle negotiates a curved track, calling for a proper consideration of the effects related with wheelset curving in train-track interaction models. When a rail vehicle runs through a curve, two mutually influencing phenomena take place at wheel rail contact: on one hand, contact parameters such as the contact point position, the normal and creep forces, creepages are slowly evolving in response to curve negotiation. On the other hand, the same quantities are subject to faster changes due to high-frequency interaction of the flexible bodies in contact. On account of the non-linearity of the problem, the two effects cannot be superimposed and a more comprehensive approach needs to be deployed which, to the Authors' knowledge, has not been presented yet.

The aim of this paper is therefore to propose a mathematical model for the dynamics of a flexible wheelset running through a curve and interacting with a flexible railway track, considering in full the non-linearities introduced by wheel-rail contact. In order to keep within reasonable limits the computational complexity of the problem, a trajectory coordinates set is introduced that permits to describe the large motion of the wheelset along the curved track, and the small relative movements of the wheelset with respect to the trajectory frame are described by means of Eulerian modal coordinates introduced with respect to a set of modal shapes obtained from a finite element model of the wheelset. The first 100 modes of vibration of the flexible wheelset are considered, covering a frequency range up to 2.7 kHz approximately. The wheelset model is coupled to a cyclic track model having constant curvature by means of a wheel/rail contact model which accounts for the actual geometry of the contacting profiles and for the non-linear relationship between creepages and creep forces.

Results for the proposed modelling approach are presented for a selected vehicle type and curving condition, and for different excitation sources including short wavelength geometric imperfections in the rail profiles and singularities such as wheel flats. Results are also presented for the wheelset running in tangent track, to point out the importance of curve negotiation effects specifically addressed in this work.

The paper is organised as follows: in Section 2 the equations of motion for the flexible wheelset in a curve are introduced. In Section 3 the model of a cyclic curved flexible track is presented. In Section 4 the model of wheel-rail contact forces is introduced and the final equations of the train-track interaction problem are derived. In Section 5 simulation results are presented for some selected running conditions and finally in Section 6 conclusive remark are provided.

2. THE FLEXIBLE WHEELSET MODEL IN CURVED TRACK

The study of vehicle-track interaction is carried out in this paper considering one single wheelset, given that in the frequency range of interest the dynamics of the sprung masses (bogie frame and car body) are effectively isolated from the motion of the un-sprung masses (wheelsets and axle boxes) on account of the mechanical filter introduced by the suspensions. The effect of low frequency curving dynamics of the complete vehicle needs however to be included in the model, in order to obtain suitable mean values for the creepages and contact forces, which affect the coupled wheelset-track vibration also at higher frequency. This is accomplished by prescribing the forces applied by the primary suspension to the wheelset in the vertical plane and the yaw displacement of the bogie at the primary suspension, as explained in Section 2.2.

2.1. Equations of motion of the flexible wheelset

In order to model the flexible wheelset travelling on curved track, two frames of reference are considered (see Fig. 1). The first one is an inertial frame $X_0Y_0Z_0$ which is fixed in an arbitrary point. The second is a trajectory coordinate frame $X_TY_TZ_T$ that follows the motion of the wheelset. The system $X_TY_TZ_T$ is centred in the undeformed configuration of the wheelset, being the X_T -axis parallel to the forward speed, the Y_T -axis parallel to wheelset axis and the Z_T -axis is vertically up. A vector referred to the fixed and trajectory frame is denoted by \mathbf{a}_0 and \mathbf{a} , respectively.

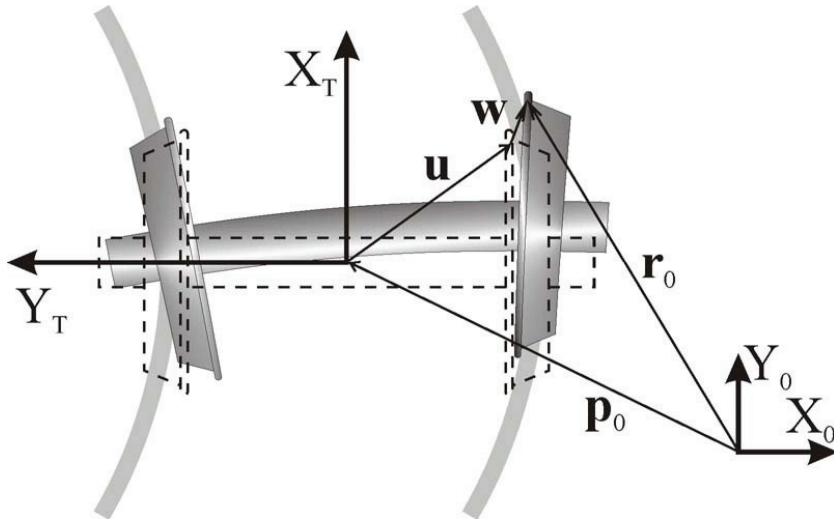


Figure 1: Frames of reference and position vectors. In dashed trace is shown the undeformed configuration of the wheelset. In solid colours is sketched a generic position of the flexible wheelset.

The coordinates that are implemented in the wheelset model do not follow the material points of the solid which is the commonest procedure in Mechanics, nonetheless they are associated with spatial points (Eulerian approach). The position vector \mathbf{r}_0 of a material particle which is in the spatial position \mathbf{u} at instant t for the undeformed configuration, can be defined by means of the following formula:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{p}_0 + \mathbf{T}(\mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{u}, t)), \quad (1)$$

where \mathbf{p}_0 is the position vector of the track frame; \mathbf{w} corresponds to the displacement vector due to the elastic deformation and small rigid body displacement of the solid; \mathbf{T} is the rotation matrix that relations the trajectory frame of the track with the fixed frame.

Considering that the coordinate frame is chosen so that the wheelset spin rotation Ω is in the second axle \mathbf{Y}_T , the angular velocity tensor $\tilde{\Omega}$ is defined as follows:

$$\tilde{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{bmatrix} = \Omega \mathbf{J}; \text{ and } \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (2)$$

The velocity due to the rigid body spinning is:

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T = \tilde{\Omega} \mathbf{u} = \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} = \Omega \tilde{\mathbf{u}}, \quad (3)$$

where $\tilde{\mathbf{u}} = (u_3 \quad 0 \quad -u_1)^T$. The velocity of the particle is computed through the material derivative of \mathbf{r}_0 , and in the trajectory frame that is:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{p}}_0 + \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \dot{\mathbf{w}} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_i} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i}, \\ &= \dot{\mathbf{p}} + \tilde{\omega}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \dot{\mathbf{w}} + \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} + \Omega \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i}, \end{aligned} \quad (4)$$

being $\dot{\mathbf{p}}$ the speed of the track frame centre (expressed in the trajectory frame) and $\tilde{\omega} = \mathbf{T}^T \dot{\mathbf{T}}$ the angular velocity matrix of the track frame. The two first velocity terms are associated to translational and rotational movement of the track frame, respectively; $\dot{\mathbf{w}}$ represents the velocity of the spatial point due to the flexibility; the term $\Omega \mathbf{J} \mathbf{u}$ is the velocity due to the rigid body spinning; and the last term is the convective velocity associated with the Eulerian coordinate system.

In order to obtain the expression of the kinetic energy for the wheelset, the square of the particle velocity is obtained, which reads:

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{r}^T}{Dt} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}} + 2\dot{\mathbf{p}}^T \tilde{\omega}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + 2\Omega \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{J} \mathbf{u} + 2\dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{w}} + 2\Omega \dot{\mathbf{p}}^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \right) \\ &+ (\mathbf{u}^T + \mathbf{w}^T) \tilde{\omega}^T \tilde{\omega}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + 2(\mathbf{u}^T + \mathbf{w}^T) \tilde{\omega}^T \dot{\mathbf{w}} + 2\Omega(\mathbf{u}^T + \mathbf{w}^T) \tilde{\omega}^T \mathbf{J} \mathbf{u} \\ &+ 2\Omega \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial u_i} \right) \tilde{\omega}(\mathbf{u} + \mathbf{w}) + \dot{\mathbf{w}}^T \dot{\mathbf{w}} + 2\Omega \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{J} \mathbf{u} + 2\Omega \dot{\mathbf{w}}^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \right) \\ &+ \Omega^2 \mathbf{u}^T \mathbf{J}^T \mathbf{J} \mathbf{u} + 2\Omega^2 \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} + \Omega^2 \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial u_i} \right) \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \right). \end{aligned} \quad (5)$$

Due to the geometry of revolution of the wheelset, the displacement vector \mathbf{w} can be calculated through superposition of mode shapes in the non-rotating trajectory frame $\mathbf{X}_T \mathbf{Y}_T \mathbf{Z}_T$:

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}, t) = \mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t), \quad (6)$$

where $\mathbf{\Phi}(\mathbf{u})$ is the mode shape functions matrix of the free-boundary wheelset and $\mathbf{q}(t)$ is the Eulerian-modal coordinate vector. The small rigid body displacements of the solid are considered in this approach through the rigid body modes of the wheelset. It must be pointed out that the mode shape functions do not depend on time since the rotation of the solid does not change the mode shapes functions in spatial coordinates, because of the axial symmetry of the wheelset. Once the formula Eq. (6) is applied in Eq. (5), the kinetic energy results in the following expression:

$$\begin{aligned} E_K &= \frac{1}{2} \int_{vol} \frac{D\mathbf{r}^T}{Dt} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} \rho \, dv = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{p}}^T \dot{\mathbf{p}} m_w + \dot{\mathbf{p}}^T \tilde{\omega} \int_{vol} \rho \mathbf{u} \, dv + \dot{\mathbf{p}}^T \tilde{\omega} \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi} \, dv \mathbf{q} + \Omega \dot{\mathbf{p}}^T \mathbf{J} \int_{vol} \rho \mathbf{u} \, dv \\ &+ \dot{\mathbf{p}}^T \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi} \, dv \dot{\mathbf{q}} + \Omega \dot{\mathbf{p}}^T \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) \, dv \mathbf{q} + \frac{1}{2} \int_{vol} \rho \mathbf{u}^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \mathbf{u} \, dv \\ &+ \int_{vol} \rho \mathbf{u}^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \mathbf{\Phi} \, dv \mathbf{q} + \frac{1}{2} \mathbf{q}^T \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \mathbf{\Phi} \, dv \mathbf{q} + \int_{vol} \rho \mathbf{u}^T \tilde{\omega}^T \mathbf{\Phi} \, dv \dot{\mathbf{q}} \\ &+ \mathbf{q}^T \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \tilde{\omega}^T \mathbf{\Phi} \, dv \dot{\mathbf{q}} + \Omega \int_{vol} \rho \mathbf{u}^T \tilde{\omega}^T \mathbf{J} \mathbf{u} \, dv + \Omega \mathbf{q}^T \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \tilde{\omega}^T \mathbf{J} \mathbf{u} \, dv \\ &+ \Omega \mathbf{q}^T \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \tilde{\omega} \mathbf{u} \, dv + \Omega \mathbf{q}^T \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \tilde{\omega} \mathbf{\Phi} \, dv \mathbf{q} \\ &+ \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \dot{\mathbf{q}} + \Omega \dot{\mathbf{q}}^T \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \mathbf{J} \mathbf{u} \, dv + \Omega \dot{\mathbf{q}}^T \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) \, dv \mathbf{q} \\ &+ \frac{1}{2} \Omega^2 \int_{vol} \rho \mathbf{u}^T \mathbf{E} \mathbf{u} \, dv + \Omega^2 \mathbf{q}^T \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} \, dv \\ &+ \frac{1}{2} \Omega^2 \mathbf{q}^T \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) \, dv \mathbf{q} \end{aligned} \quad (7)$$

Once the kinetic energy is known, the two terms of Lagrange's equation are computed as follows:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \, dv \tilde{\omega}^T \dot{\mathbf{p}} + \Omega \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \, dv \dot{\mathbf{p}} + \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \mathbf{u} \, dv \\ &+ \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \mathbf{\Phi} \, dv \mathbf{q} + \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \tilde{\omega}^T \mathbf{\Phi} \, dv \dot{\mathbf{q}} + \Omega \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \tilde{\omega}^T \mathbf{J} \mathbf{u} \, dv \\ &+ \Omega \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \tilde{\omega} \mathbf{u} \, dv + \Omega \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \tilde{\omega} \mathbf{\Phi} \, dv \mathbf{q} \quad , \quad (8) \\ &+ \Omega \int_{vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \tilde{\omega}^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) \, dv \mathbf{q} + \Omega \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{\Phi} \, dv \dot{\mathbf{q}} \\ &+ \Omega^2 \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} \, dv + \Omega^2 \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) \, dv \mathbf{q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \left(\frac{\partial E_K}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T &= \int_{vol} \rho \Phi^T dv \ddot{\mathbf{p}} + \int_{vol} \rho \Phi^T \dot{\tilde{\omega}} \mathbf{u} dv + \int_{vol} \rho \Phi^T \dot{\tilde{\omega}} \Phi dv \mathbf{q} + \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \Phi dv \dot{\mathbf{q}} \\
&+ \ddot{\mathbf{q}} + \Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \dot{\mathbf{q}} + \Omega \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) dv \dot{\mathbf{p}} \\
&+ \Omega \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \tilde{\omega} \mathbf{u} dv + \Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \mathbf{J} \mathbf{u} dv \\
&+ \Omega \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \tilde{\omega} \Phi dv \mathbf{q} + \Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q} \\
&+ \Omega^2 \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} dv - \Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u} dv \\
&+ \Omega^2 \int_{vol} \rho \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q} - \Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \mathbf{q} \\
&+ \Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \sum_j \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \right) dv \mathbf{q}
\end{aligned} \tag{9}$$

being $\mathbf{E} = -\mathbf{J} \mathbf{J} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

The equation of motion of the flexible and rotating wheelset is derived by means of Lagrange's equation. Considering Eqs. (8) and (9) and taking into account that matrix $\tilde{\omega}$ is anti-symmetric, the following equation is obtained:

$$\begin{aligned}
&\ddot{\mathbf{q}} + \left[2 \Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv + 2 \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \Phi dv \right] \dot{\mathbf{q}} \\
&+ \left[\Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \sum_j \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \Phi}{\partial u_i \partial u_j} \right) dv - \Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv \right. \\
&+ 2 \Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv + \int_{vol} \rho \Phi^T \dot{\tilde{\omega}} \Phi dv - \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \Phi dv \left. \right] \mathbf{q}. \tag{10} \\
&= \Omega^2 \int_{vol} \rho \Phi^T \mathbf{E} \mathbf{u} dv - 2 \Omega \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega} \mathbf{J} \mathbf{u} dv - \int_{vol} \rho \Phi^T \dot{\tilde{\omega}} \mathbf{u} dv \\
&+ \int_{vol} \rho \Phi^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \mathbf{u} dv - \int_{vol} \rho \Phi^T dv \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{p}}_0 + \mathbf{Q}
\end{aligned}$$

The modal properties are computed from a finite element (FE) model, therefore it is adequate to use the FE methodology for computing the equation of motion numerically. The mode shape functions are obtained into the e -th element of the FE mesh as follows:

$$\Phi(\mathbf{u}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{u}) \Phi_{FE}^e, \tag{11}$$

where $\mathbf{N}^e(\mathbf{u})$ is the basis (or shape) function matrix of the e -th element, and Φ_{FE}^e the mode shapes computed in the nodes of the e -th element through the FE model.

This approach allows obtaining the matrices of the equation of motion by means of the matrices of the elements. These matrices have to be assembled in global matrices by following the standard FE assembling technique. The first matrix in Eq. (10) is obtained by means of the approach in Eq. (11) as follows:

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{V}} &= \int_{vol} \rho \Phi^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv = \sum_{e=1}^{n_e} \int_{vol^e} \rho \Phi_{FE}^e{}^T \mathbf{N}^e{}^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) \Phi_{FE}^e dv, \\ &= \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv \right) \Phi_{FE}\end{aligned}\quad (12)$$

being defined \mathbf{V}^e as the corresponding matrix of the e -th element, that is:

$$\mathbf{V}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv, \quad \tilde{\mathbf{V}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{V}^e \right) \Phi_{FE}, \quad (13)$$

where n_e is the number of elements in the FE mesh, vol is the volume domain associated with the undeformed solid, and vol^e is the volume of the e -th element. Following the same procedure as in Eq. (12), the remaining matrices of the equation of motion are obtained:

$$\mathbf{P}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \tilde{\omega} \mathbf{N}^e dv, \quad \tilde{\mathbf{P}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{P}^e \right) \Phi_{FE}, \quad (14)$$

$$\mathbf{A}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \left(\sum_i \sum_j \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \mathbf{N}^e}{\partial u_i \partial u_j} \right) dv, \quad \tilde{\mathbf{A}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{A}^e \right) \Phi_{FE}, \quad (15)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \left(\sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv, \quad \tilde{\mathbf{C}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{C}^e \right) \Phi_{FE}, \quad (16)$$

$$\mathbf{S}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \tilde{\omega} \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv, \quad \tilde{\mathbf{S}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{S}^e \right) \Phi_{FE}, \quad (17)$$

$$\mathbf{R}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \dot{\tilde{\omega}} \mathbf{N}^e dv, \quad \tilde{\mathbf{R}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{R}^e \right) \Phi_{FE}, \quad (18)$$

$$\mathbf{B}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \tilde{\omega}^T \tilde{\omega} \mathbf{N}^e dv, \quad \tilde{\mathbf{B}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{B}^e \right) \Phi_{FE}, \quad (19)$$

$$\mathbf{c}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \mathbf{E} \mathbf{u} dv, \quad \tilde{\mathbf{c}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{c}^e \right), \quad (20)$$

$$\mathbf{U}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \tilde{\omega} \mathbf{J} \mathbf{u} dv, \quad \tilde{\mathbf{U}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{U}^e \right), \quad (21)$$

$$\mathbf{H}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^e{}^T \dot{\tilde{\omega}} \mathbf{u} dv, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \Phi_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{H}^e \right), \quad (22)$$

$$\mathbf{N}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \tilde{\boldsymbol{\omega}}^T \tilde{\boldsymbol{\omega}} \mathbf{u} \, dv, \quad \tilde{\mathbf{N}} = \boldsymbol{\Phi}_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{N}^e \right), \quad (23)$$

$$\mathbf{G}^e = \int_{vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \, dv, \quad \tilde{\mathbf{G}} = \boldsymbol{\Phi}_{FE}^T \left(\sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{G}^e \right) \mathbf{T}^T \ddot{\mathbf{p}}_0, \quad (24)$$

resulting the following equation of motion for the flexible wheelset running along a curved track:

$$\ddot{\mathbf{q}} + (2\Omega \tilde{\mathbf{V}} + 2\tilde{\mathbf{P}})\dot{\mathbf{q}} + (\Omega^2 (\tilde{\mathbf{A}} - \tilde{\mathbf{C}}) + 2\Omega \tilde{\mathbf{S}} + \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{B}} + \tilde{\mathbf{D}})\mathbf{q} = \Omega^2 \tilde{\mathbf{c}} - 2\Omega \tilde{\mathbf{U}} - \tilde{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{N}} - \tilde{\mathbf{G}} + \mathbf{Q}_c + \mathbf{Q}_s. \quad (25)$$

The matrices $\tilde{\mathbf{V}}$, $\tilde{\mathbf{P}}$, $\tilde{\mathbf{A}}$, $\tilde{\mathbf{C}}$, $\tilde{\mathbf{S}}$, $\tilde{\mathbf{R}}$ and $\tilde{\mathbf{B}}$ account for inertial effects associated with the deformed configuration originated by Coriolis, centrifugal and tangential acceleration of the wheelset, as produced by the track frame motion and by the rotation of the wheelset around its axis. The vectors $\tilde{\mathbf{c}}$, $\tilde{\mathbf{U}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{N}}$ and $\tilde{\mathbf{G}}$ account for inertial effects not depending on wheelset deformation, which are also originated by Coriolis, centrifugal and tangential acceleration experienced by the wheelset. The diagonal matrix $\tilde{\mathbf{D}}$ is the modal stiffness matrix that contains the square of the undamped natural frequencies of the free-boundary wheelset. Finally, \mathbf{Q}_c and \mathbf{Q}_s are the vectors of the generalized forces acting on the flexible wheelset resulting respectively from wheel-rail contact forces, see Section 4, and from the forces applied by the primary suspension, see Section 2.2.

2.2. Boundary conditions

While running through a curve, the wheelset develops steady-state values of the creepages and contact forces that are substantially different from the case of tangent track running. On account of the non-linearity of wheel-rail contact, these steady-state contact forces and creepages strongly affect the coupled dynamics of the wheelset and of the track in the entire frequency range addressed in this paper, and therefore need to be properly taken into account in the numerical simulation procedure.

To this aim, the flexible wheelset model introduced in 2.1 is subjected to appropriate boundary conditions that are obtained from a simulation of the low frequency running dynamics of the complete vehicle along the curve considered. The low frequency simulation is performed using a multi-body model of the vehicle defined in software ADTreS developed at Politecnico di Milano [12] and considers the carbody, two bogies and four wheelsets all modelled as rigid bodies. Given that the interest of the rigid body simulation is only to derive the steady-state curving condition for the vehicle, no effect of track irregularity or wheel imperfections is considered.

In order to ensure that the contact forces and creepages are correctly initialised, the steady-state forces applied on the wheelset at the axle boxes via the primary suspension along the \mathbf{Z}_T and \mathbf{Y}_T axes of the trajectory coordinate frame are prescribed in Eq. (25) to match the values obtained in the low-frequency simulation: in this way, the steady state \mathbf{Z}_T component of the contact forces on the two wheels and the sum of the steady-state contact forces along the \mathbf{Y}_T axis are correctly reproduced by the flexible wheelset - track model. Furthermore, the longitudinal stiffness of the primary suspension is introduced in Eq. (25) and the longitudinal displacements (i.e. directed along axis \mathbf{X}_T) of the bogie at the primary suspension are prescribed to match the values obtained from the low-frequency simulation. By doing so, the steady-state longitudinal and lateral creep forces on both wheels are correctly initialised in the high-frequency model. As shown in Section 5, cf. comments to Table 2, this procedure allows to obtain a very good agreement of the steady state forces for the rigid body model of the complete vehicle and for the model of the single flexible wheelset.

All the above described boundary conditions are applied on the flexible wheelset model Eq. (25) by appropriately setting the terms in vector \mathbf{Q}_s . These consist of the generalised forces associated with the modal coordinates \mathbf{q} of the concentrated forces applied at the axle-box seats, defined as explained above in this section.

3. THE TRACK MODEL

The track model has been adapted from the one presented in reference [13] where cyclic boundary conditions were adopted. With respect to this previous work, here different sleeper bay distances have been considered in order to take into account the dynamics of a constant radius curved track.

The cyclic track approach that is used in the present paper models a circumferential constant radius track negotiated by a set of identical vehicles, uniformly distributed in such a way that each vehicle is set at a constant distance L apart from the adjacent ones and travel at the same velocity V , see Figure 2. The constant distance L is set large enough to avoid the dynamic interaction between the vehicles and cyclic boundary conditions are introduced at the ends of the model. Hence, due to the periodicity of the structure and of the loading conditions, the study of the track is reduced to a single section having finite length L .

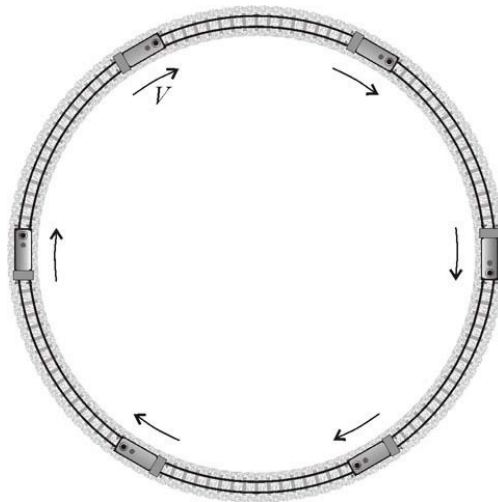


Figure 2: The cyclic track model.

The approach adopts a substructuring technique where rails and sleepers are treated separately. The rails are modelled as Timoshenko beams, including bending deformations in vertical/lateral directions, as well as torsional deformations. Rail vibration is introduced in terms of modal superposition for the unconstrained rail with cyclic boundary conditions, hence resulting into a set of de-coupled 1-d.o.f. equations.

The discrete rail supports are introduced in the form of lumped parameter systems. The rail pads are modelled as lumped visco-elastic elements generating the interaction forces between the rails and the sleepers, represented as lumped masses. Ballast dynamics is neglected here, being not relevant for the dynamic behaviour of the wheelset, but the equivalent ballast stiffness and damping are accounted for by means of lumped spring and dashpot elements.

The lateral and vertical displacements of the rail axis are [13]:

$$w^y(x, t) = \sum_r W_r^y(x) q_r^y(t), \quad (26)$$

$$w^z(x, t) = \sum_r W_r^z(x) q_r^z(t), \quad (27)$$

and the torsion and the rotations of the rail's cross-section are:

$$\psi^x(x, t) = \sum_r \Psi_r^x(x) q_r^x(t), \quad (28)$$

$$\psi^y(x, t) = \sum_r \Psi_r^y(x) q_r^y(t), \quad (29)$$

$$\psi^z(x, t) = \sum_r \Psi_r^z(x) q_r^z(t), \quad (30)$$

where $W_r^y(x)$, $W_r^z(x)$, $\Psi_r^x(x)$, $\Psi_r^y(x)$ and $\Psi_r^z(x)$ are the r -th modal functions of the Timoshenko periodic beam, and $q_r^x(t)$, $q_r^y(t)$ and $q_r^z(t)$ are the modal coordinates associated with torsional, lateral and vertical rail vibrations, respectively.

The resulting equations of motion for the cyclic track model in modal coordinates take the form:

$$\ddot{q}_r + 2\xi_r \omega_r \dot{q}_r + \omega_r^2 q_r = f_r, \quad (31)$$

being ω_r the r -th undamped frequency and ξ_r is the modal damping. The modal forces f_r are computed from the wheel rail contact forces acting on the track.

In this way, the displacements of the rail in the present contact point can be evaluated from the displacements and rotations of the rail axis as follows:

$$\mathbf{x}_{r,j} = \mathbf{E}_j \begin{pmatrix} w_j^y & w_j^z & \psi_j^x & \psi_j^y & \psi_j^z \end{pmatrix}^T, \quad (32)$$

where $\mathbf{x}_{r,j}$ is the vector of contact point displacements in j -th rail, and the matrix \mathbf{E}_j relates the displacements in rail axis and contact points.

4. THE MODEL OF THE WHEEL-RAIL CONTACT FORCES

Equations (25) and (31) are coupled by the wheel-rail contact forces, which can be defined as function of the wheelset modal coordinates \mathbf{q} and their time derivatives $\dot{\mathbf{q}}$ and of the track displacements \mathbf{x}_r together with their time derivatives $\dot{\mathbf{x}}_r$. The calculation of the contact forces is performed within the time step integration of the equations of motion for the wheelset and the track. First the motion (position and speed) of the contact points on wheel and rail surfaces is determined, then the normal and tangential wheel-rail contact forces are computed as a function of the relative wheel-rail motion at the contact point, finally the generalised forces on the vehicle and track coordinates are defined based on the principle of virtual work.

4.1 Contact kinematics

Using the modal superposition principle, the vectors $\mathbf{r}_{w,j}$ of the wheel displacements at the contact point (with $j = 1, 2$ representing the left and right wheel) are computed as:

$$\mathbf{r}_{w,j} = \Phi(\mathbf{u}_{w,j})\mathbf{q}(t) + \mathbf{r}_{w,j}^{(irr)}(t), \quad (33)$$

with $\mathbf{u}_{w,j}$ the position of the contact point on the wheel and $\mathbf{r}_{w,j}^{(irr)}$ a vector accounting for the effect of wheel out-of-roundness, which is defined as a periodical function of time. In the same way, the “material velocity” vectors $\dot{\mathbf{r}}_{w,j}^{(M)}$ of the wheel at the contact point, i.e. the velocity of the material point on each wheel instantaneously in contact with the rail are defined as:

$$\dot{\mathbf{r}}_{w,j}^{(M)} = \Phi(\mathbf{u}_{w,j})\dot{\mathbf{q}}(t) + \Omega \left(\sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) \mathbf{q}(t). \quad (34)$$

The rail displacements at the contact points on the left and right rails $\mathbf{r}_{r,j}$ are obtained according to the following expression:

$$\mathbf{r}_{r,j} = \mathbf{x}_{r,j}(t) + \mathbf{r}_{r,j}^{(irr)}(t), \quad (35)$$

where $\mathbf{r}_{r,j}^{(irr)}$ is a vector accounting for the effect of geometric imperfections in the track due to irregularity and rail roughness, whereas the material velocity of the rails at the contact points is computed as:

$$\dot{\mathbf{r}}_{r,j}^{(M)} = \dot{\mathbf{x}}_{r,j}^{(M)} = \mathbf{E}_j \begin{pmatrix} \dot{w}_j^y & \dot{w}_j^z & \dot{\psi}_j^x & \dot{\psi}_j^y & \dot{\psi}_j^z \end{pmatrix}^T + V \mathbf{E}_j \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} w_j^y & w_j^z & \psi_j^x & \psi_j^y & \psi_j^z \end{pmatrix}^T, \quad (36)$$

being V the speed of the wheelset.

4.2 Calculation of wheel-rail contact forces

The model of wheel-rail contact used to reproduce the dynamic coupling between the vehicle and the track is a pre-tabulated, multi-Hertzian one [14]. Prior to the simulation, wheel-rail contact geometry is processed starting from measured or theoretical wheel and rail profiles and the contact parameters required to compute wheel-rail contact forces are stored in a contact table. These include the contact angle, the variation of the wheel rolling radius with respect to the nominal one, the curvatures of the wheel and rail profiles in the contact point region and an undeformed distance which is equal to zero for the geometric contact point and greater than zero for the other potential contact points. More details on the process used to derive the contact table can be found in [15], note that with respect to the theory presented there, in this work the effect of the angle of attack is neglected, thus leading to a simplified planar contact problem.

In order to compute the contact forces at time t , the relative wheel – rail lateral displacement is computed and the contact tables are interpolated, finding the contact parameters for one or more wheel-rail potential contact points. Then, for each i -th potential contact point of the j -th wheel-rail couple the so-called “normal problem” is solved. To this aim, an elastic inter-penetration is computed by projecting the relative wheel-rail displacements in the contact point along the direction normal to the contact plane, which is defined by the contact angle parameter in the contact table. To consider the change with time of the normal direction, the inter-penetration is computed according to an incremental definition, so that the penetration $p_{i,j}^{(t)}$ at time t is defined as the sum of the penetration at the previous time step $t-\Delta t$ plus the penetration increment from the previous to the present time step:

$$p_{i,j}^{(t)} = p_{i,j}^{(t-\Delta t)} + \mathbf{n}_i^T \left(\left(\mathbf{r}_{w,j}^{(t)} - \mathbf{r}_{w,j}^{(t-\Delta t)} \right) - \left(\mathbf{r}_{r,j}^{(t)} - \mathbf{r}_{r,j}^{(t-\Delta t)} \right) \right) - \left(\delta_{i,j}^{(t)} - \delta_{i,j}^{(t-\Delta t)} \right), \quad (37)$$

where \mathbf{n}_i is the vector defining the normal direction for the i -th contact, $\delta_{i,j}$ is the undeformed distance for the i -th contact of the j -th wheel-rail couple, and superscripts “(t)” and “(t- Δt)” denote quantities evaluated at the present and previous time step respectively.

The normal force $N_{i,j}^{(t)}$ is computed as function of the elastic inter-penetration according to Hertz’s formulae using the profile curvatures retrieved from the contact table:

$$\begin{cases} N_{i,j}^{(t)} = 0 & \text{if } p_{i,j}^{(t)} \leq 0 \\ N_{i,j}^{(t)} = C_{i,j} (p_{i,j}^{(t)})^{\frac{3}{2}} & \text{if } p_{i,j}^{(t)} > 0 \end{cases} \quad (38)$$

The creep forces are then computed as function of the creepages, according to the heuristic formulae by Shen, Hedrick & Elkins [16]. The longitudinal and transversal creepages, $\varepsilon_{L_{i,j}}$ and $\varepsilon_{T_{i,j}}$ respectively, are computed as follows:

$$\varepsilon_{L_{i,j}} = \frac{\mathbf{I}_i^T (\dot{\mathbf{r}}_{w,j}^{(M)} - \dot{\mathbf{r}}_{r,j}^{(M)})}{V} - \frac{\Delta R_{i,j}}{R_0} + \frac{s}{R_0} (-1)^j, \quad (39)$$

$$\varepsilon_{T_{i,j}} = \frac{\mathbf{t}_i^T (\dot{\mathbf{r}}_{w,j}^{(M)} - \dot{\mathbf{r}}_{r,j}^{(M)})}{V} - \sigma_j \cos(\gamma_j), \quad (40)$$

with \mathbf{I}_i and \mathbf{t}_i the vectors defining the longitudinal and transversal direction for the i -th contact, V the speed of the wheelset, $\Delta R_{i,j}$ the rolling radius variation for the contact point under consideration, σ_j the angle of attack of the wheel, s half-distance between the wheel nominal running circles and γ_j the contact angle of the wheel at the actual contact point.

Finally, the normal and creep forces obtained at each i -th wheel-rail contact point are projected along the trajectory frame $\mathbf{X}_T \mathbf{Y}_T \mathbf{Z}_T$ and summed over all active contacts occurring in the same wheel-rail couple, and the components of the resulting contact forces along the modal coordinates \mathbf{q} are derived by standard application of the principle of virtual work, providing vector \mathbf{Q}_s in Eq. (25).

5. RESULTS

In this section, results of wheelset-track interaction simulations are presented considering different sources of excitation: a single harmonic rail corrugation, random rail roughness and a wheelflat. Results are also presented for a rigid wheelset model, i.e. including in the modal synthesis only the rigid modes of vibration of the unconstrained wheelset. In this way, the effect of wheelset flexibility is pointed out. Furthermore, for the wheelflat excitation case, results are also presented for the wheelset running at the same speed in tangent track, to assess the effect of curving on high-frequency wheelset-track interaction, which is the main innovation introduced in this paper.

The case study considered here refers to the trailed car of a concentrated power train for high-speed passenger service. The vehicle is equipped with a solid axle wheelset with monobloc, light design wheels. The track considered features UIC60 rails and track parameters are based on the EUROBALT project [17], considering a “stiff” track. Table 1 summarises the input data used to set-up the simulation model.

Wheelset model data		Track model data	
Mass of wheelset	1375 kg	Sleeper bay	0.6 m
Axle load	120 kN	Sleeper number	70
Primary suspension longitudinal stiffness	7.5 MN/m	Sleeper mass	324 kg
Primary suspension lateral stiffness	7.1 MN/m	Track bed stiffness	200 MN/m
Primary suspension vertical stiffness	0.81 MN/m	Track bed damping	150 kNs/m
Primary suspension longitudinal damping	100 kNs/m	Rail pad stiffness	1 GN/m
Primary suspension lateral damping	100 kNs/m	Rail pad damping	50 kNs/m
Primary suspension vertical damping	30 kNs/m	Rail section	UIC60

Table 1: Simulation parameters

All simulation cases presented below consider the wheelset running at 150 km/h through a curve with radius 1000 m with cant deficiency 150 mm approximately. For this running condition, Table 2 compares the steady-state values of the contact force components for the rigid body model of the complete vehicle and for the model of the single flexible wheelset: a very good agreement of the two series of data is observed, leading to the conclusion that, at least for the considered running condition, the procedure introduce in Section 2.2 is able to correctly set-up the boundary conditions for the flexible wheelset model. Note that in Table 2 and below in this section ‘vertical’, ‘lateral’ and ‘longitudinal’ force respectively mean the component of the contact force along the Z_T , Y_T and X_T axis of the track following reference.

	Outer wheel		Inner wheel	
	Rigid multi-body model	Flexible wheelset model	Rigid multi-body model	Flexible wheelset model
Vertical force	69.57 kN	70.01 kN	49.82 kN	49.71 kN
Lateral force	5,68 kN;	5,91 kN	-3,75 kN;	-3,99 kN
Longitudinal force	14.39 kN;	15.16 kN	-14.39 kN;	-15.16 kN

Table 2: Steady-state wheel-rail contact forces for the rigid multi-body model of the entire vehicle and for the single flexible wheelset model.

5.1 Results for single harmonic rail corrugation

The first excitation case considered is rail corrugation having sinusoidal waveform with wavelength 60 mm, i.e. one tenth of the sleeper bay. In Figure 3 the vertical contact force generated by the wheelset travelling on the corrugated rail at 150 km/h is plotted as a function of time. The rail roughness profile is also reported in the figure using an appropriate scaling and offset to obtain a proper visualisation.

Two harmonic contents are observed in the vertical contact force, the largest one having the same wavelength as the rail corrugation and a second one with wavelength equal to the sleeper bay. This second harmonic component is due to the periodic variation of the rail stiffness seen by the wheelset as the consequence of the discrete rail support. The contact force is also highly affected by wheelset flexibility: considering a rigid wheelset leads to an over-estimation of the peak-to-peak dynamic force by approximately 15% on the inner wheel and 40% on the outer wheel. This is due to the fact that the mass participating in the high frequency vibration of the flexible wheelset is lower than the whole mass of the wheelset, mainly due to bending deformations occurring in the axle, a mechanism which is not captured by the rigid wheelset model.

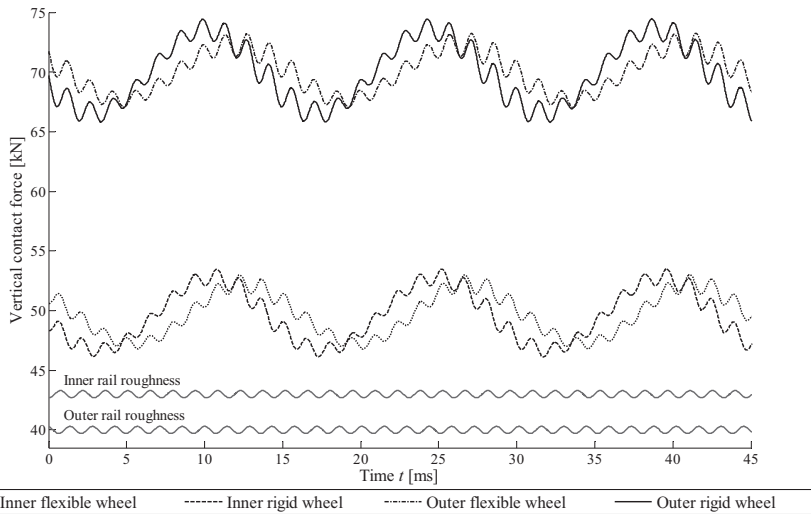


Figure 3. Vertical wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a corrugated curved track (1000 m curve radius) with corrugation wavelength 60 mm. Corrugation amplitude corresponding to the ISO 3095 limit

Figure 4 shows the lateral component of the contact force on the two wheels, for the same running condition considered above. The steady state values of the contact forces (see also Table 2) reflect the curving condition of the wheelset. Here, the leading wheelset in the front bogie of the vehicle is considered, for which a small negative angle of attack takes place on account of curve negotiation, causing a steady component of the transversal creep force which points towards the outside of the curve. This is balanced by the lateral component of the flange force on the outer wheel, leading to the typical condition of the two lateral forces pointing in opposite directions in a way that tends to widen the track gauge. Like for the vertical contact force component, the dynamic component of the lateral contact force shows two harmonic contents, one corresponding to the sleeper-passing frequency, the other corresponding to the wavelength of the harmonic corrugation introduced as the source of excitation. Also in this case, simplifying the problem to the case of a rigid wheelset leads to an over-estimation of the dynamic contact force harmonics synchronous with the corrugation. The longitudinal contact force component caused by a single harmonic rail corrugation is not shown as the level of dynamic excitation for this case is very low.

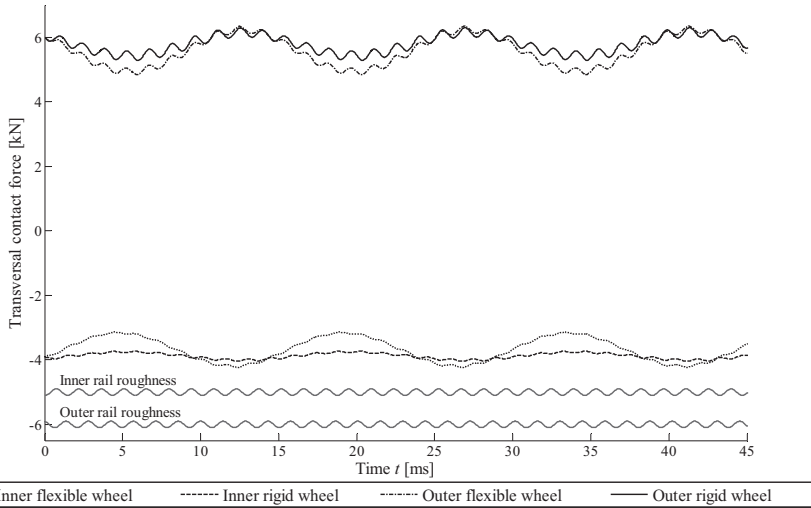


Figure 4. Lateral wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a corrugated curved track (1000 m curve radius) with corrugation wavelength 60 mm. Corrugation amplitude corresponding to the ISO 3095 limit

5.2 Results for random rail corrugation

Figures 5, 6 and 7 show the time history of the vertical, lateral and longitudinal contact forces for excitation caused by randomly corrugated rails, assuming a corrugation spectrum corresponding to the ISO 3095 limit. The results obtained for a flexible and a rigid wheelset model are again compared. As expected, the dynamic fluctuations of all contact force components show a complex waveform, arising from the dynamic response of the wheelset-track system to broadband random excitation. As far as the vertical contact force component is concerned, this leads to a maximum dynamic force on the outer wheel which is 1.75 times the steady-state value in full curve, whereas on the inner wheel the minimum contact force is approximately 0.52 times the steady state value.

Compared to the results obtained using the flexible wheelset model, the use of a rigid wheelset model results in a significant over-estimation of the maximum force on the outer wheel and of the maximum wheel unloading on the inner wheel. However, for the lateral and longitudinal contact force components the situation is somehow different, as the maximum amplitude of dynamic variations for the flexible and rigid wheelset model is comparable on both the outer and inner wheels, but with important differences in the waveform of the signals.

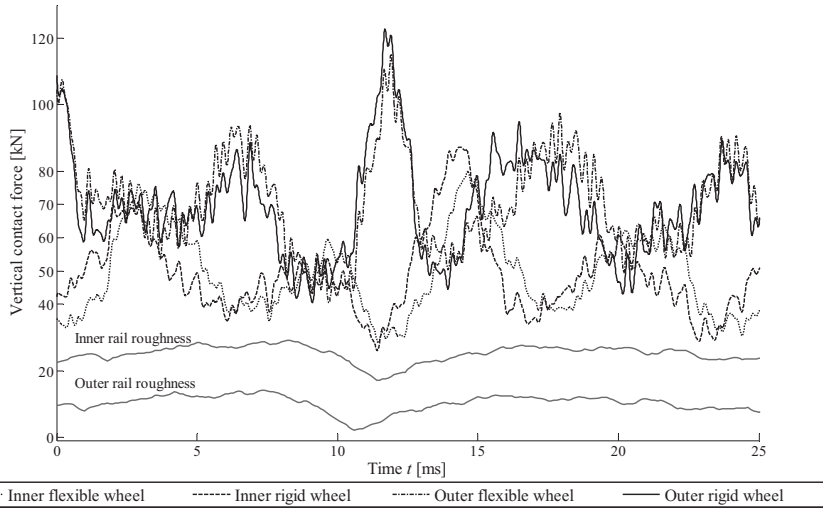


Figure 5. Vertical wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a randomly corrugated curved track (1000 m curve radius). Amplitudes corresponding to the ISO 3095 limit.

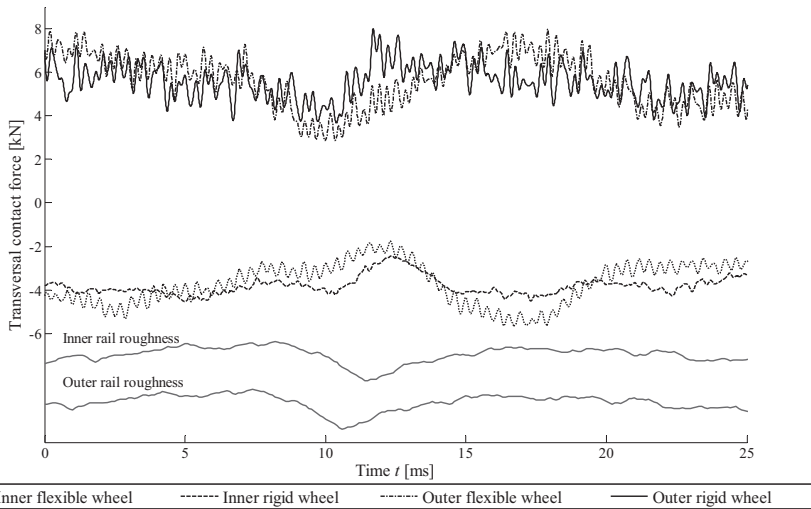


Figure 6. Lateral wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a randomly corrugated curved track (1000 m curve radius). Amplitudes corresponding to the ISO 3095 limit.

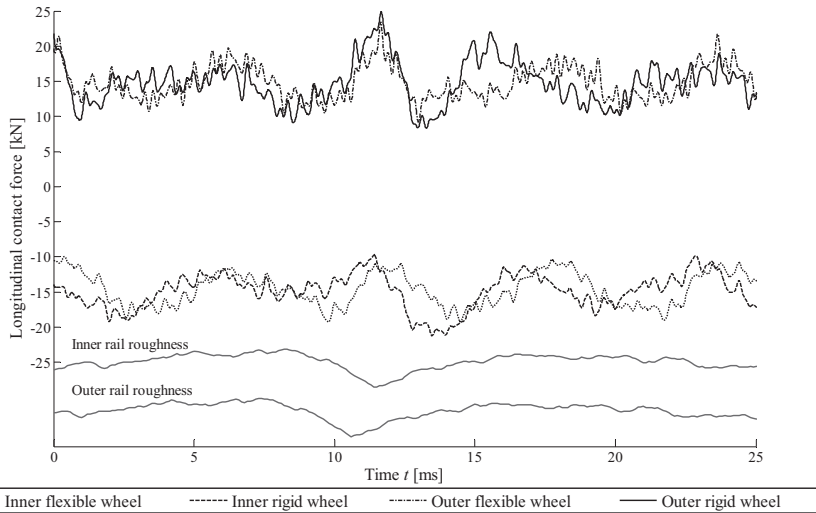


Figure 7. Longitudinal wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a randomly corrugated curved track (1000 m curve radius). Amplitudes corresponding to the ISO 3095 limit.

5.3 Results for a wheel flat

Figures 8, 9 and 10 show the time history of the vertical, lateral and longitudinal contact forces caused by a wheelflat when the wheelset runs over a perfectly even track. Results are presented for the same running condition in curved track considered in 5.1 and 5.2. The wheel flat is assumed to occur on the inner and outer wheel at the same time. Intense dynamic effects are observed, initially leading to the occurrence of full loss of contact at both wheels, then followed by a severe impact causing peaks in all force components, and finally by a transient vibration that generates further dynamic fluctuations in all contact force components.

As far as the vertical contact force component is concerned, the maximum overloading on the inner wheel is 308% of the steady-state load, whereas on the outer wheel the maximum overloading reaches 362% of the steady state load. For the lateral force component (Figure 9), the peak load is much larger on the outer wheel than on the inner one, on account of the greater contact angle experienced by the outer wheel as a consequence of the lateral shift of the leading wheelset towards the outside of the curve: this is an effect that is not captured by models neglecting curving effects. Also for the longitudinal contact force component (Figure 10) the peak value is larger on the outer wheel, on account of the larger normal contact force occurring on that wheel, which generates then a larger creep force for the same or similar creepage condition.

The differences between the results for the rigid and flexible wheelset model are small in terms of duration of the contact loss and of maximum overloading in vertical direction (the rigid wheelset model over-estimates the peak vertical load on the outer wheel by 7% approximately with respect to the flexible wheelset model), but the transient following the impact is affected quite remarkably by wheelset flexibility, as demonstrated by the fluctuations of the contact force components following the impact. Furthermore, the maximum value of the lateral contact force on the outer wheel is much larger when the rigid wheelset model is used, with an increase in the range of 40%, whereas the maximum value of the longitudinal contact force is less affected by wheelset flexibility.

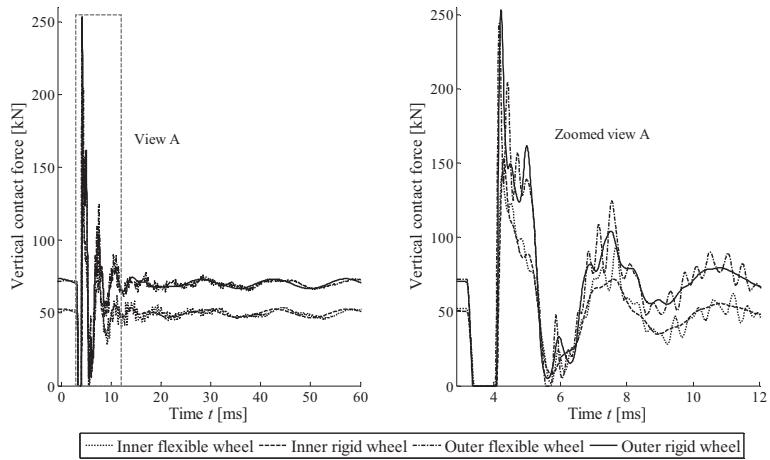


Figure 8. Vertical wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a perfectly even curved track (1000 m curve radius) in presence of a 50 mm wheelflat.

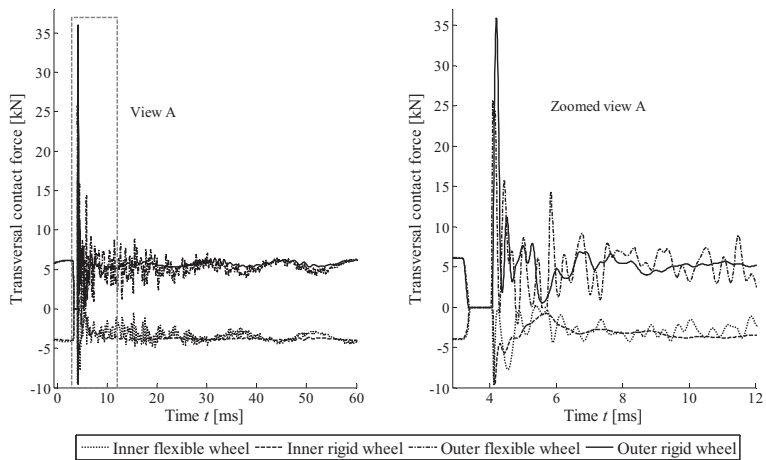


Figure 9. Lateral wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a perfectly even curved track (1000 m curve radius) in presence of a 50 mm wheelflat.

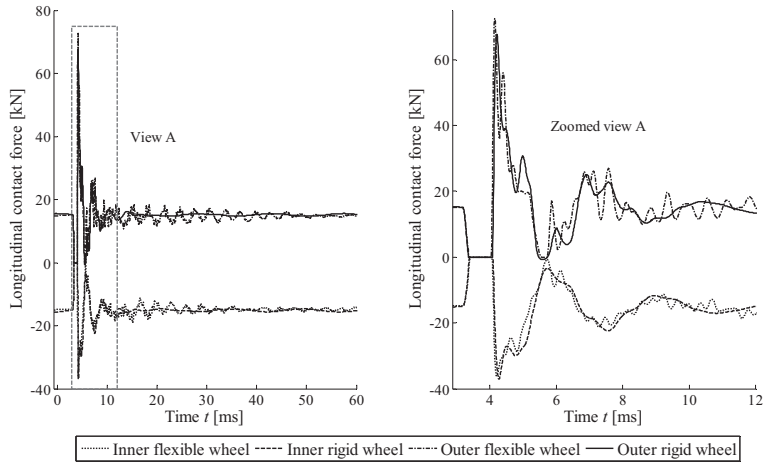


Figure 10. Longitudinal wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a perfectly even curved track (1000 m curve radius) in presence of a 50 mm wheelflat.

In Figure 11 results are presented for the same wheelset excitation considering the vehicle running at the same speed (150 km/h) in tangent track. Because dynamic effects in lateral and longitudinal direction are in this case relatively modest, only the vertical force component is shown. Furthermore, because of the symmetry in the running condition considered, the forces on the two wheels are the same and therefore results are shown for one single wheel. Apart from the difference in the steady state value of the contact forces, the waveform of the contact force time history in Figure 11 looks similar to the result obtained for curve negotiation in Figure 8. However, the peak force is approximately 180 kN, compared to 250 kN for the outer wheel in the curving condition, showing that wheelflat excitation in a curve may lead to considerable overloading of the wheelset and rails and can therefore be expected to cause accelerated damage and degradation of the contacting surfaces as well as increased noise and vibration.

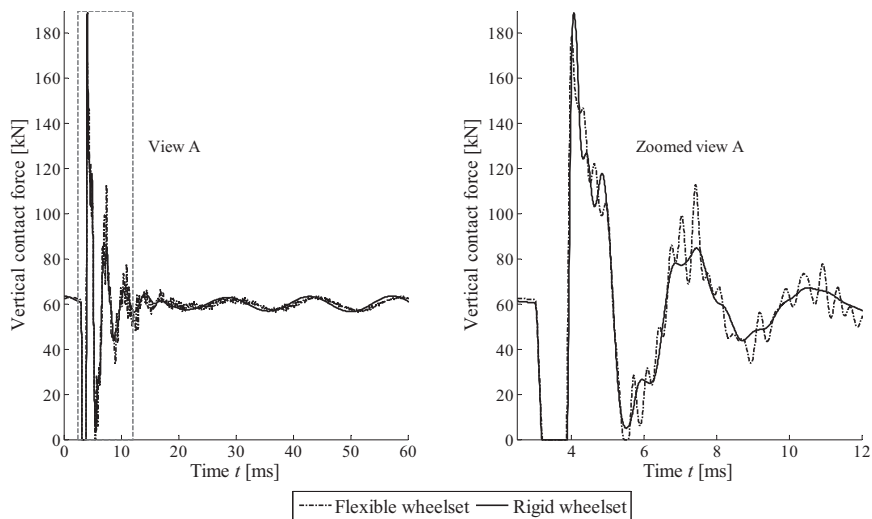


Figure 11. Vertical wheel-rail contact forces when the vehicle circulates at 150 km/h speed on a perfectly even tangent track in presence of a 50 mm wheelflat.

6. CONCLUSIONS

This paper has presented a model for a flexible wheelset running on a flexible curved track. By introducing a trajectory coordinates set describing the large motion of the wheelset along the curved track and assuming small relative movements of the wheelset with respect to the trajectory frame, the terms appearing in the wheelset equations of motion can be efficiently computed, keeping the time required to carry the numerical simulation within acceptable limits. At the same time, the model accurately describes the vibration of the flexible wheelset in the frequency range up to 2.7 kHz. The flexible wheelset is coupled to a periodic curved track model by a non-linear description of wheel-rail contact forces.

Appropriate boundary conditions are prescribed at the wheelset axle-boxes in terms of vertical and lateral forces and longitudinal displacements above the primary suspension, to correctly reproduce the steady state contact forces and creepages as obtained from a simulation of the low frequency running dynamics of the complete vehicle along the curve considered. The results reported in Table 2 show that this method succeeds in establishing the appropriate steady state contact condition on both wheels, for the exemplary curving condition considered in this paper.

Results are presented for three types of excitation: single harmonic rail corrugation, randomly corrugated track and excitation arising from a wheel flat when the wheelset runs over a perfectly even track. One exemplary curving condition was considered, which consists of the wheelset running along a 1000 m radius curve at 150 km/h and 150 mm cant deficiency. To point out the implications of modelling wheelset flexibility, results are also presented for the case of a rigid wheelset.

In all three excitation cases considered, the rigid wheelset model leads to an over-estimation of the maximum contact forces, compared to the flexible wheelset model. For the vertical contact force component, this effect is particularly significant with excitation coming from a corrugated rail (either with single harmonic or random corrugation) whereas differences between the two models

are less important in the case of wheel flat excitation. However, in case of wheel flat excitation a very large difference of the results obtained for the rigid and flexible wheelset model is observed for the lateral component of the contact force.

Finally, for the case of wheel flat excitation results obtained for the wheelset running in curve where compared to the case of the wheelset running at the same speed in tangent track: this comparison shows that the peak load in the vertical force component is approximately 39% larger when the wheelset runs in curve compared to the tangent track running case, leading to the conclusion that wheelflat excitation in a curve may lead to considerable overloading of the wheelset and rails and can therefore be expected to cause accelerated damage and degradation of the contacting surfaces as well as increased noise and vibration.

It is worth noticing that the effects of wheel flat excitation in a curve have not been extensively studied in the past, so this topic is suggested for further investigation in the future, looking e.g. at the effect of parameters such as curve radius, cant deficiency, wheel profiles, bogie and suspension design. Further use of the model presented here is also envisaged to investigate problems such as rail corrugation, squeal noise, dynamic stresses in wheels, axles and rails.

ACKNOWLEDGEMENTS

The authors acknowledge the financial contribution of the Spanish Ministry of Economy and Competitiveness through the project TRA2010-15669.

REFERENCES

- [1] D. J. Thompson, *Railway Noise and Vibration: Mechanisms, Modelling and Means of Control*, Elsevier, 2009.
- [2] J. C. O. Nielsen, R. Lundén, A. Johansson and T. Vernersson, *Train-track Interaction and Mechanisms of Irregular Wear on Wheel and Rail Surfaces*, *Vehicle System Dynamics* (2003) 40 (1-3), 3-54.
- [3] A. Ekberg, *Fatigue of railway wheels*, In: *The Wheel/Rail Interface Handbook* Woodhead Publishing in Mechanical Engineering, Pages: 211-244, 2009.
- [4] S.L. Grassie, R.W. Gregory, D. Harrison, K. L. Johnson, *Dynamic response of railway track to high frequency vertical excitation*, *Journal of Mechanical Engineering Science* 24 (1982) 77-90
- [5] G. Diana, F. Cheli, S. Bruni, A. Collina, *Experimental and numerical investigation on subway short pitch corrugation*, *Vehicle System Dynamics* (1998) 29 (Suppl.), 234-245.
- [6] A. Johansson, *Out-of-round railway wheels – causes and consequences: an investigation including field tests, out-of-roundness measurements and numerical simulations*, Doctoral dissertation, Chalmers University, September 2005.
- [7] K. Popp and I. Kaiser, *Interaction of elastic wheelsets and elastic rails: modelling and simulation*, *Vehicle System Dynamics* (2006) 44 (Suppl.), 932-939.

- [8] D. J. Thompson and C. J. C. Jones, A Review of the Modelling of Wheel/Rail Noise Generation, *Journal of Sound and Vibration* (2000) 231(3), 519-536.
- [9] I. Kaiser, Refining the modelling of vehicle-track interaction, *Vehicle System Dynamics* (2012) 50 (SI), 229-243.
- [10] L. Baeza, J. Fayos, A. Roda and R. Insa, High frequency railway vehicle-track dynamics through flexible rotating wheelsets, *Vehicle System Dynamics* (2008) 46 (7) 647 – 662.
- [11] P. T. Torstensson, J. C. O. Nielsen and L. Baeza, Dynamic train-track interaction at high vehicle speeds-Modelling of wheelset dynamics and wheel rotation, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011), 5309-5321.
- [12] S. Bruni, A. Collina, G. Diana, P. Vanolo, Lateral dynamics of a railway vehicle in tangent track and curve: tests and simulation, *Vehicle System Dynamics* (2000) 33 (Suppl.) 464-477.
- [13] L. Baeza, H. Ouyang, A railway track dynamics model based on modal substructuring and a cyclic boundary condition, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 75–86.
- [14] J. Piotrowski, H. Chollet, Wheel-rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact, *Vehicle System Dynamics*, 43 (6), 455-483. 2005.
- [15] F. Braghin, S. Bruni, G. Diana, Experimental and numerical investigation on the derailment of a railway wheelset with solid axle, *Vehicle System Dynamics* (2006) 44 (4), 305 – 325.
- [16] Z. Y. Shen, J. K. Hedrick and J. A. Elkins, A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamic analysis, *Vehicle System Dynamics*, (1983) 12 (Suppl.) 79 – 82.
- [17] L. Mazzola, Y. Bezin, S. Bruni, Vehicle – Track interaction: MB simulation for track loading limits and damage identification ECCOMAS Thematic Conference Multibody Dynamics 2011, July 4-7 2011, Bruxelles, Belgium.

