

Resumen

La presente memoria “Operadores en espacios ponderados de funciones holomorfas” trata diferentes áreas del análisis funcional tales como espacios de funciones holomorfas, holomorfía en dimensión infinita y dinámica de operadores.

Después de un primer capítulo introductorio en el que incluimos la notación, las definiciones y los resultados básicos que usaremos a lo largo de la tesis, el texto queda dividido en dos partes. Una primera, correspondiente a los Capítulos 1 y 2, centrada en el estudio de espacios (LB)-ponderados de funciones enteras sobre espacios de Banach, y una segunda, correspondiente a los Capítulos 3 y 4, en la que estudiamos el comportamiento dinámico de los operadores de diferenciación e integración actuando sobre diferentes clases de espacios ponderados de funciones enteras. A continuación, presentamos una breve descripción de los capítulos:

En el Capítulo 1, dada una familia decreciente de pesos radiales y continuos sobre un espacio de Banach X , consideramos los límites inductivos ponderados de funciones enteras $VH(X)$ y $VH_0(X)$. Los espacios ponderados de funciones holomorfas aparecen de forma natural en el estudio de condiciones de crecimiento de funciones holomorfas y han sido investigados por varios autores desde los trabajos de Williams en 1967, Rubel y Shields en 1970, y Shields y Williams en 1971. Primero determinamos condiciones suficientes sobre la familia de pesos para que el correspondiente espacio ponderado sea un álgebra o tenga una descomposición de Schauder polinómica. Estudiamos álgebras de Hörmander de funciones enteras definidas sobre un espacio de Banach y damos una descripción de ellas como espacios de sucesiones. Estudiamos homomorfismos de álgebras entre estos espacios y obtenemos un teorema de tipo Banach-Stone para familias de pesos de tipo exponencial. Finalmente, analizamos el espectro de estas álgebras ponderadas, dotándolo de una estructura analítica, y demostramos que cada función $f \in VH(X)$ puede extenderse de forma natural a una función analítica definida sobre el espectro. Dado un homomorfismo de álgebras, también investigamos cómo la aplicación inducida entre los espectros actúa sobre las correspondientes estructuras analíticas. Vemos que en nuestro contexto los operadores de composición tienen un comportamiento diferente del que tienen cuando consideramos funciones holomorfas de tipo acotado. Este trabajo ha sido motivado por un artículo reciente de Carando, García, Maestre y Sevilla-Peris. Los resultados obtenidos han sido publicados por Beltrán en [1].

En el Capítulo 2 obtenemos una linearización del espacio $VH(X)$ a través de un predual. Éste lo obtenemos aplicando el teorema de completación de Mujica para espacios (LB), que además nos permite probar que el espacio $VH(X)$ es regular y completo. Estudiamos condiciones para asegurar la igualdad $VH_0(X)'' = VH(X)$, observando algunas diferencias entre los casos finito e infinito dimensional. Finalmente damos condiciones suficientes para extender funciones definidas en un subconjunto A de X , con valores en otro espacio de Banach E , y admitiendo algunas extensiones débiles en un espacio de funciones holomorfas, a funciones en el correspondiente espacio de funciones holomorfas

sobre X con valores vectoriales. La mayoría de los resultados incluidos en este capítulo han sido publicados por Beltrán en [2].

El resto de la tesis analiza el comportamiento dinámico de los siguientes operadores sobre espacios ponderados de funciones enteras: el operador de diferenciación $Df(z) = f'(z)$, el operador de integración $Jf(z) = \int_0^z f(\zeta)d\zeta$ y el operador de Hardy $Hf(z) = \frac{1}{z} \int_0^z f(\zeta)d\zeta$, $z \in \mathbb{C}$.

En el Capítulo 3 estudiamos la dinámica de estos operadores sobre espacios de Banach ponderados de funciones enteras definidos por normas de tipo integral o supremo: los espacios ponderados de funciones enteras $B_{p,q}(v)$, $1 \leq p \leq \infty$, y $1 \leq q \leq \infty$. Cuando $q = \infty$ se conocen como espacios generalizados de Bergman ponderados de funciones enteras, y si además $p = \infty$, se denotan por $H_v(\mathbb{C})$ y $H_v^0(\mathbb{C})$. Analizamos cuándo los operadores son hipercíclicos, caóticos, de potencias acotadas o (uniformemente) ergódicos en media, complementando así el trabajo de Bonet y Ricker sobre operadores de multiplicación ergódicos en media. Además, para pesos verificando ciertas condiciones, estimamos la norma de los operadores y estudiamos su espectro. Se presta especial atención a pesos de tipo exponencial. El contenido de este capítulo se ha publicado en [4] y en [3]. En el caso de operadores diferenciales $\phi(D) : B_{p,q}(v) \rightarrow B_{p,q}(v)$, con $D : B_{p,q}(v) \rightarrow B_{p,q}(v)$ continuo y ϕ una función entera de tipo exponencial, estudiamos la hiperciclicidad y el caos. El capítulo finaliza con un ejemplo de un operador hipercíclico y uniformemente ergódico en media. Éste ha sido proporcionado por A. Peris, al que agradecemos haber permitido su inclusión en esta tesis. Creemos que es el primer ejemplo de un operador verificando estas dos propiedades al mismo tiempo.

El último capítulo se ha dedicado al estudio de la dinámica de los operadores de diferenciación e integración actuando sobre límites inductivos y proyectivos ponderados de funciones enteras. Damos condiciones suficientes para que D y J sean continuous sobre los espacios y caracterizamos cuándo el operador de diferenciación es hipercíclico, topológicamente mezclante o caótico en el caso de límites proyectivos. Finalmente investigamos la dinámica de estos operadores sobre las álgebras de Hörmander $A_p(\mathbb{C})$ y $A_p^0(\mathbb{C})$. Los resultados obtenidos en este capítulo han sido incluidos por Bonet, Fernández y la autora en [5].

References

- [1] M. J. Beltrán, *Spectra of weighted (LB)-algebras of entire functions on Banach spaces*. J. Math. Anal. Appl. **387**(2) (2012), 604–617.
- [2] M. J. Beltrán, *Linearization of weighted (LB)-spaces of entire functions on Banach spaces*. RACSAM **106**(1) (2012), 275–286.
- [3] M. J. Beltrán, *Dynamics of differentiation and integration operators on weighted spaces of entire functions*. To appear in Studia Math.
- [4] M. J. Beltrán, J. Bonet and C. Fernández, *Classical operators on weighted Banach spaces of entire functions*, Proc. Amer. Math. **141** (2013), 4293–4303.
- [5] M. J. Beltrán, J. Bonet and C. Fernández, *Classical operators on the Hörmander algebras*, Preprint 2013