

**TRABAJO FINAL DE MÁSTER EN DIRECCIÓN
FINANCIERA Y FISCAL**

**Estudio y desarrollo del modelo
estocástico de Vasicek para la
predicción de tipos de interés
“short term”**

Validación y aplicación al tipo de interés
interbancario Euribor a 1 mes

Curso 2013-2014

Autor:

Gala Ribera Esteve

Directores:

Dr. Juan Carlos Cortes López

Dra. Almudena Sánchez Sánchez



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN Y
DIRECCIÓN DE EMPRESAS. UPV

Índice de contenido

Índice de figuras	1
Índice de gráficos	1
Índice de tablas	1
Resumen del trabajo final de máster	3
Objetivos del trabajo final de máster	7
Antecedentes. Situación actual	9
Capítulo 1. El impacto de los tipos de interés en la Economía	13
1.1. La importancia de los tipos de interés en los mercados financieros.....	15
1.1.1. Los mercados financieros	16
1.2. Los tipos de interés a corto plazo	19
1.2.1. El mercado interbancario	19
1.2.2. Europe Interbank Offered Rate: EURIBOR.....	20
1.3. La política monetaria de la Unión Europea.....	21
1.4. Aspectos macroeconómicos	25
Capítulo 2. Preliminares estocásticos	27
2.1. Movimiento Browniano o proceso de Wiener.....	27
2.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano.....	29
2.3. Simulación del Movimiento Browniano.....	30
2.4. El cálculo de Itô	31
2.4.1. La integral de Itô.....	33
2.4.2. Propiedades de la integral de Itô.....	37
Capítulo 3. Modelo estocástico de tipos de interés de Vasicek	39
3.1. Motivación del modelo determinista de los tipos de interés	41
3.2. Motivación del modelo estocástico de los tipos de interés: modelo de Vasicek ..	43

3.3. Solución del modelo estocástico de Vasicek mediante el cálculo de Itô.....	44
3.4. Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek	47
3.5. Simulación del modelo de Vasicek.....	51
3.5.1. Simulación por re-escalado del tiempo del Movimiento Browniano.....	51
3.6. Estudio asintótico del modelo de Vasicek	52
3.7. Estimación de parámetros del modelo de Vasicek	53
3.7.1. Estimación de los parámetros del modelo por Método de Máxima Verosimilitud ...	54
3.7.2. Estimación de los parámetros del modelo por un método no paramétrico	57
3.8. Validación del modelo de Vasicek.....	59
3.8.1. Medidas de bondad de ajuste: Error cuadrático medio y error porcentual medio ...	60
3.8.2. Validación por intervalos de confianza.....	61
3.8.3. Gráficos comparativos.....	63
3.9. Simulación mediante Monte Carlo: aplicación al caso del modelo de Vasicek.....	63
3.10. Predicción.....	65
Capítulo 4. Aplicación del modelo de Vasicek al Euribor a 1 mes.....	67
4.1. Estimación de parámetros del modelo de Vasicek	69
4.1.1. Estimación de los parámetros del modelo por Método de Máxima Verosimilitud ...	70
4.1.2. Estimación de los parámetros del modelo por un método no paramétrico	73
4.2. Validación del modelo de Vasicek	75
4.2.1. Modelo teórico de Vasicek.....	75
4.2.2. Simulación mediante Monte Carlo: aplicación al caso del modelo de Vasicek	82
4.3. Predicciones del tipo de interés Euribor a 1 mes	92
4.3.1. Predicciones del Euribor a 1 mes por el modelo de Vasicek	93
4.3.2. Predicciones del Euribor a 1 mes por el método de Monte Carlo: aplicación al caso del modelo de Vasicek.....	94
Conclusiones	97
Bibliografía	101

Agradecimientos

En los complicados tiempos que corren, cualquier logro o motivación que le pueda surgir a un estudiante es motivo del más sentido agradecimiento hacia los suyos. Por ello, nuevamente en esta ocasión, no me olvido de mis padres, hermana, amigos y personas especiales que, una vez más, me han mostrado su apoyo, así como su comprensión.

Durante el transcurso de este trabajo, la formación y enriquecimiento que he obtenido ha sido muy satisfactorio. Gracias a mis directores de tesina, Juan Carlos y Almudena, así como a la profesora Ana Blasco por toda la confianza depositada en mí y por llegar a convertirse en referentes a seguir.

Finalmente, a todos y cada uno de los componentes del equipo de profesionales de Taxo Valoración quienes, desde el primer día, me han apoyado, enseñado, ayudado y dado muchísimas facilidades.

Por todo ello, GRACIAS.

Índice de figuras

Figura 1.1. Mecanismo de transmisión de los tipos de interés a los precios.....	24
Figura 4.1.1. Estimación de parámetros del modelo de Vasicek mediante Solver.....	70
Figura 4.1.2. Sistema de 3 Ecuaciones No Lineales con 3 incógnitas para modelo de Vasicek	73

Índice de gráficos

Gráfico 2.1. Simulación del Movimiento Browniano.....	21
Gráfico 3.1. Representación de la solución del modelo determinista dado por el p.v.i. (3.1.1).. ..	42
Gráfico 4.1. Tipo de Interés Euribor a 1 mes. Periodo: 02/01/2002- 11/07/2013.....	68
Gráfico 4.2. Tipo de Interés Euribor a 1 mes, año 2013. Período 02/01/2013-11/07/2013..69	
Gráfico 4.2.1. Análisis de los intervalos de confianza y medias teóricas.....	81
Gráfico 4.2.2. Análisis medias empíricas y los intervalos de confianza PERCENTILES.....	90
Gráfico 4.2.3. Análisis medias empíricas los intervalos de confianza ESTADÍSTICOS.....	90
Gráfico 4.2.4. Comparativa de los intervalos de confianza del 95% teóricos y empíricos.....	91

Índice de tablas

Tabla 2.1. Justificación de fórmula (2.3.1) para la simulación del Movimiento Browniano...30	
Tabla 3.3.1. Álgebra operacional de los diferenciales en el Cálculo de Itô.....	45
Tabla 4.1.1. Resultados de los parámetros por Método de Máxima Verosimilitud.....	72
Tabla 4.1.2. Resultado de las estimaciones de parámetros del modelo de Vasicek.....	74
Tabla 4.2.1. Cálculo de la media y varianza teórica del tipo de interés Euribor a 1 mes.....	76
Tabla 4.2.2. Estudio medidas Bondad de Ajuste (Modelo de Vasicek): RMSE y MAPE.....	78
Tabla 4.2.3. Cálculo de los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza.....	80
Tabla 4.2.4. Cálculo del número M de simulaciones de la v.a. $Z \sim N[0; 1]$	84
Tabla 4.2.5. Simulaciones del modelo de Vasicek por Monte Carlo.....	85
Tabla 4.2.6. Cálculo de la media y varianza empírica del tipo de interés Euribor a 1 mes.....	86
Tabla 4.2.7. Estudio medidas Bondad de Ajuste (Monte Carlo): RMSE y MAPE.....	87
Tabla 4.2.8. Comparativa de los resultados de las medidas de bondad de ajuste.....	88
Tabla 4.2.9. Cálculo de los intervalos de confianza empíricos con 95% de probabilidad.....	88
Tabla 4.3.1. Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. del 95% teóricos del Euribor a 1 mes	93
Tabla 4.3.2. Predicciones del Euribor a 1 mes por el modelo de Vasicek (5 días).....	94
Tabla 4.3.3. Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. del 95% empíricos del Euribor a 1 mes	95
Tabla 4.3.4. Predicciones del Euribor a 1 mes por método de Monte Carlo (5 días).....	96

RESUMEN DEL TRABAJO FINAL DE MÁSTER

El impacto directo que las variaciones de los tipos de interés ofertados tienen sobre los mercados bursátiles, así como el consecuente efecto indirecto que ello produce en las Economías, es de especial relevancia. Cuando los tipos de interés presentan subidas prolongadas en el tiempo, las cotizaciones de las acciones bajan y con estas, la Bolsa (fase bajista). De la relación existente entre el ciclo bursátil y el ciclo económico, deriva el efecto indirecto que finalmente las variaciones de los tipos de interés provocan en las economías.

Ante elevados tipos de interés, las cargas financieras a soportar tanto por empresas, como por familias, son mayores y por tanto, los beneficios de unas y el nivel de consumo de las otras, se ven reducidos. Todo esto, a su vez, deriva en un descenso de los dividendos repartidos y de las cotizaciones. Por otro lado, la subida de los tipos de interés es traducida en una subida de la rentabilidad de las inversiones en renta fija (obligaciones, bonos, etc.), atrayendo así al inversor y al flujo de dinero, en contra de las inversiones en renta variable (acciones), provocando la caída de las cotizaciones y con la de éstas, la de la Bolsa.

Todo esto, desde tiempo atrás, es lo que viene motivando el desarrollo y estudio de modelos para predecir tipos de interés. A fecha actual, existe una amplia y diversa variedad de esta clase de modelos, los cuales con el tiempo, se han ido perfeccionando y ampliando.

En el TFM que aquí se propone, se estudiará, aplicará y validará el **modelo estocástico de Vasicek** al tipo de interés interbancario Euribor a 1 mes, atendiendo éste, a un tipo de interés "*short term*" (a corto plazo). El resultado final que se esperará de la modelización validada de este tipo de interés, será la obtención de sus predicciones.

Como se puntualizaba en párrafos anteriores, a fecha actual, son diversos los modelos de predicción de tipos de interés conocidos y disponibles, presentando cada uno de ellos una serie de particularidades. El **modelo de Vasicek** atiende a modelos estocásticos de un factor, quedando estos representados por una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô que contiene en su formulación la tendencia y la volatilidad del tipo de interés. La aleatoriedad se introduce en dicha ecuación mediante la derivada del **Movimiento Browniano** (o proceso estocástico de Wiener), llamado proceso de ruido blanco (White noise).

El **modelo de Vasicek** se caracteriza por una serie de hipótesis de partida asumidas y el éxito de la aplicación del mismo, guarda relación con éstas. Una de ellas es que la tendencia de los tipos de interés tiene un comportamiento regresivo hacia un valor fijo, es decir, que en el largo plazo (estudio asintótico), los tipos de interés tienden a un valor estable. Por otro lado, este modelo viene siendo utilizado con éxito en aquellos casos de modelización de tipos de interés "*short term*" (en el corto plazo) y la razón de ello se encuentra en la hipótesis de varianza constante que el mismo asume.

La elección del período de tiempo para el cual aplicar este modelo, es uno de los aspectos claves. En esta propuesta de TFM, se trabajará con el histórico diario del tipo de interés interbancario Euribor a 1 mes extraído de las publicaciones del Banco de España.

Para poder proceder a aplicar este modelo, es necesaria una previa estimación de sus parámetros. En base a la hipótesis de volatilidad constante asumida, se aplicará el **método de máxima verosimilitud** de manera satisfactoria y, con objeto de reforzar la calibración de los parámetros, se volverán a estimar tales parámetros empleando un **método no paramétrico**.

Estimados los parámetros del modelo, se llevará a cabo la validación del mismo para la cual, se adoptarán dos enfoques: **Modelo Teórico de Vasicek** y simulaciones por el **Método de Monte Carlo**. En este apartado se detallarán y calcularán, para ambos enfoques, diversas medidas de bondad de ajuste tales como, el **error cuadrático medio (RMSE)** y el **error porcentual absoluto medio (MAPE)**.

El cálculo de las estimaciones puntuales (función media) y por intervalos (intervalos de confianza del 95%) a realizar por ambos enfoques, quedarán representados gráficamente junto con los valores observados de la muestra. De esta manera, tanto visualmente a través de las gráficas, como numéricamente a través de los resultados obtenidos en las medidas de bondad de ajuste, la modelización realizada podrá quedar validada. Finalmente, validado el modelo por ambos enfoques, se realizarán las correspondientes predicciones (puntuales y por intervalos) del tipo de interés en cuestión y para los varios días posteriores al último de los datos de la muestra seleccionada.

OBJETIVOS DEL TRABAJO FINAL DE MÁSTER

El **objeto principal** del presente trabajo es el estudio de técnicas cuantitativas para la predicción de tipos de interés a corto plazo, incluyendo su posterior aplicación a un caso práctico. El estudio teórico llevado a cabo en este trabajo es aplicado a la modelización y predicción del tipo de interés interbancario Euribor a 1 mes, siendo el mismo uno de los índices de referencia en el mercado interbancario de la zona euro.

Este estudio se lleva a cabo a través del modelo estocástico de predicción de tipos de interés de Vasicek, cuya resolución requiere del conocimiento y aplicación del Cálculo de Itô. En relación a todo ello, otros **objetivos** a plantearse con el desarrollo de esta memoria son:

- Estudiar y aplicar las herramientas estocásticas pertenecientes al Cálculo de Itô necesarias para el modelo de Vasicek, así como las propiedades estadísticas de las mismas.
- Conocer el desarrollo del modelo de Vasicek y su proceso estocástico solución, así como sus propiedades estadísticas.
- Modelizar a partir de una muestra de datos reales y en un adecuado horizonte temporal, el tipo de interés Euribor a 1 mes.
- Validar la modelización realizada sobre el tipo de interés Euribor a 1 mes a través de dos enfoques diferentes.
- Estudiar y aplicar técnicas estadísticas: construcción de intervalos de confianza, medidas de bondad de ajuste y realización de simulaciones.
- Obtener las predicciones probabilísticas del tipo de interés Euribor a 1 mes.
- Evaluar los resultados del modelo aplicado comparando cada una de predicciones resultantes con el correspondiente dato real del tipo de interés.

ANTECEDENTES. SITUACIÓN ACTUAL

El comportamiento presentado por los tipos de interés ofrecidos por las entidades financieras tienen un efecto directo en los mercados bursátiles y, consecuentemente, en las Economías. El ciclo bursátil y el ciclo económico guardan relación, a partir del desfase temporal existente entre uno y otro, la Bolsa anticipa lo que sucederá en la Economía.

Ante subidas prolongadas de los tipos de interés, las cotizaciones de las empresas participantes en Bolsa descienden. Son diferentes las razones que justifican este efecto producido. Por un lado está el aumento de las cargas financieras que ello provoca y por tanto, las empresas y particulares se ven afectados dado que endeudarse o financiarse cuesta más. La venta a crédito se encarece y las familias reducen su consumo, lo que tiene su efecto en las ventas y beneficios de las empresas. Las empresas ven empeorados sus resultados, sus ventas se ven reducidas y las cargas financieras a soportar son mayores, los dividendos disminuyen y se produce el descenso de sus cotizaciones, la Bolsa cae. Otra de las razones es el aumento de la rentabilidad de las inversiones en renta fija que tiene lugar a partir de las subidas de los tipos de interés. La renta fija cobra atractivo y concentra el flujo inversor en contra de la renta variable, por tanto las cotizaciones descienden y la Bolsa cae.

Efecto diferente e inverso a lo mencionado es el que se produce ante bajadas prolongadas de los tipos de interés. Por tanto, en base a las ideas expuestas en el párrafo anterior, se puede concluir la siguiente relación:

- Subidas de los tipos de interés – Fase bajista de la Bolsa.
- Bajadas de los tipos de interés – Fase alcista de la Bolsa.

No obstante, la repercusión del comportamiento presentado por los tipos de interés va más allá de la visión inversora de empresas y particulares que participan en los mercados financieros, desempeñando un papel fundamental en las políticas monetarias desarrolladas en cada país (véase Capítulo 1).

Los tipos de interés han sido y son una de las variables de mayor influencia sobre la evolución del mercado bursátil, de su comportamiento depende en gran parte que la Bolsa sea alcista o bajista. Cualquier información relativa a su evolución tiene un impacto directo sobre dicho mercado y con ello se justifica la importancia que adquiere el estudio de técnicas cuantitativas para modelizar el comportamiento de los tipos de interés, con objeto de anticiparse o predecir su valor futuro.

La modelización de tipos de interés en una tarea compleja dada la volatilidad asociada al comportamiento de los mismos. No obstante, la investigación económica que se viene desarrollando desde tiempo atrás en esta área, trata de desarrollar modelos apropiados para los tipos de interés, estando en continua mejora y perfeccionamiento.

El origen de las finanzas cuantitativas se ubica en Estados Unidos y por los años setenta. Por aquel entonces, inversores comenzaron a hacer uso de fórmulas matemáticas para la determinación de precios de acciones y bonos. Los primeros modelos continuos de tipos de interés fueron desarrollados a partir de ecuaciones diferenciales determinísticas, sin por entonces, contemplarse aleatoriedad alguna. Estos primeros modelos apuntan a un comportamiento estable de los tipos de interés y se denominan, modelos de tipos de interés con regresión a la media.

La hipótesis base de este tipo de modelos se sustenta en las propias leyes del mercado o en el objeto de las autoridades reguladoras de los mismos, puesto que las medidas que tienden a adoptar, en definitiva, persiguen que los tipos de interés tengan un valor estable, dada su influencia en la dinámica de los mercados.

No obstante, haciendo referencia a lo que sucede en la práctica y en especial, en los últimos años, en los tipos de interés se puede observar una gran volatilidad que, con estos primeros modelos de predicción no queda recogida. Esto se puede atribuir a la gran cantidad de factores influyentes en el valor final de un determinado tipo de interés. Sin embargo, estos factores influyentes, en muchos casos, pueden considerarse de naturaleza aleatoria y la aleatoriedad es posible de modelizar. Todo ello lleva a la necesidad de reformular los clásicos modelos deterministas en los que la aleatoriedad quedaba fuera, en nuevos modelos matemáticos en los que se contemplara. Por tanto, los modelos estocásticos de predicción de tipos de interés tienen su origen o vienen motivados por los determinísticos (véase Apartado 3.1). La introducción de la aleatoriedad en estos modelos se ha realizado formalmente mediante el Movimiento Browniano, también conocido como proceso estocástico de Wiener (véase Apartado 2.1). La inclusión de la misma da lugar a nuevas ecuaciones a resolver, ecuaciones diferenciales estocásticas pasan a representar los nuevos modelos.

En relación a ello, el cálculo estocástico clásico, técnicamente, es una herramienta adecuada para la resolución de este tipo de ecuaciones. Esta evolución de los modelos de tipos de interés, requirió del desarrollo de un cálculo estocástico especial. El precursor de ello, en el ámbito matemático, fue Kiyoshi Itô¹ en 1951 (véase Apartado 2.4). No obstante, en 1969, Robert C. Merton fue quien introdujo y aplicó el cálculo estocástico en el campo de las finanzas².

¹ Kiyoshi, Itô (1951) On stochastic differential equations. *Memoirs, American Mathematical Society*, nº 4 pp. 1–51.

Kiyoshi, Itô (1944) Stochastic Integral. *Proc. Imperial Acad. Tokyo* 20, pp. 519-524.

Kiyoshi, Itô (1961) Lectures on stochastic processes. Tata Institute, Bombay.

² Merton, Robert C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, nº 4 pp. 141–183.

A fecha de hoy, son diversos los modelos de predicción de tipos de interés disponibles en la literatura especializada. Los primeros modelos continuos de tipo estocástico orientados a la modelización de tipos de interés se deben a Roll (1970,1971)³, Merton (1973, 1974)⁴ y Long (1974)⁵. No obstante, O. Vasicek (1977) fue quien en un trabajo pionero, propuso un modelo estocástico de regresión a la media para los tipos de interés⁶. Este trabajo de Vasicek representó un punto de inflexión en la modelización de los tipos de interés. Con posterioridad se han desarrollado otros modelos más elaborados como es el caso del modelo Cox-Ingersoll-Ross (1985)⁷, también conocido como el modelo CIR o su generalización que se debe a Maghsoodi (1996)⁸. No obstante, todos ellos están basados en las ideas que en su día Vasicek formuló en su trabajo y que han tenido una gran repercusión en el ámbito financiero.

³ Roll, R. (1970) *The behavior of interest rates: The application of the efficient market model to U.S. treasury bills*. Nueva York: Basic Books.

Roll, R. (1971) Investment diversification and bond maturity. *Journal of Finance*, nº 26 pp. 51-66

⁴ Merton, R.C. (1973) An inter temporal capital asset pricing model. *Econometrica*, nº 41 pp. 867-887.

Merton, R.C. (1974) On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, nº 29 pp. 449-470.

⁵ Long, J.B. (1974) Stock prices, inflation, and the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, nº 1 pp. 131-170.

⁶ Vasicek, O. (1977) An Equilibrium Characterisation of the Term Structure. *Journal of Financial Economics*, nº 5 pp. 177-188.

⁷ Cox, J.C.; Ingersoll J.E.; Ross, S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, nº 53 pp. 385-407.

⁸ Maghsoodi, Y. (1996) Solution of the extended CIR Term Structure and Bond Option Valuation. *Mathematical Finance*, nº 6 pp. 89-109.

1 EL IMPACTO DE LOS TIPOS DE INTERÉS EN LA ECONOMÍA

El papel que los tipos de interés desempeñan en el mundo de las finanzas, así como en la economía de un país, radica en el efecto que el comportamiento de los mismos provoca no sólo en la visión inversora de familias y empresas participantes en los mercados (véase Apartado 1.1), sino que también en el desarrollo de las políticas monetarias de los países (véase Apartado 1.3), por parte de las correspondientes autoridades monetarias gobernantes. Los tipos de interés demuestran su importancia en diversos ámbitos tales como:

- En el nivel de ahorro: Una subida de los tipos de interés incentiva el ahorro y una bajada, dado el abaratamiento del endeudamiento, lo desincentiva.
- En la lucha contra la inflación: Ante una subida de los tipos de interés, el ahorro se fomenta y el consumo se desalienta, consiguiéndose así contribuir a la estabilidad de los precios.

- En los movimientos internacionales de capital: Ante dos países de igual nivel de riesgo, los capitales se dirigirán hacia el que mayor tasa de interés tenga.
- En la inversión: La elevación de los tipos de interés encarece la financiación y el crédito para inversores.
- En la asignación de recursos: Considerando que las empresas desarrollan sólo aquellos proyectos cuya tasa de retorno supera al coste de financiación, ante tasas de interés más elevadas, el nivel de exigencia aumenta viéndose obligadas y limitadas a ejecutar únicamente aquellos proyectos de mayor rentabilidad.

En el desarrollo de este primer capítulo, con objeto de dejar reflejado el rol que a nivel macroeconómico desempeñan los tipos de interés en los mercados y en la economía, así como la importancia o impacto del mismo, se detalla la cadena de efectos que tienen lugar ante las posibles variaciones dadas en los tipos de interés ofertados.

Por otro lado, en este mismo capítulo introductorio, con motivo del estudio y aplicación de un modelo estocástico para la modelización de tipos de interés a corto plazo o "*short-term*", se hace referencia a diferentes tipos de interés a corto plazo, entrando en un mayor nivel de detalle en el caso del tipo de interés interbancario Euribor. En relación a todo ello y dada la referencia que se hará en todo el desarrollo de esta memoria a mercados y operaciones interbancarias, a dicho capítulo se incorporan subapartados en los que se profundiza sobre tales conceptos. Finalmente, se cita la política monetaria desarrollada en la Unión Europea, así como el papel desarrollado por los tipos de interés sobre la misma según las decisiones tomadas por el Banco Central Europeo (en adelante, BCE).

1.1. La importancia de los tipos de interés en los mercados financieros

Los efectos de las variaciones de los tipos de interés ofertados por las entidades financieras en los mercados financieros, tienen un importante impacto. A esta variable se le atribuye la mayor influencia en los mercados bursátiles.

Ante subidas de los tipos de interés, se observan descensos en las cotizaciones de las empresas de Bolsa, existiendo una serie de razones que explican lo sucedido. En primer lugar, ante subidas prolongadas de tipos de interés, la carga financiera a soportar por las empresas también se ve incrementada y con ello, sus resultados son menores y, consecuentemente, los dividendos también, dando lugar al descenso de sus cotizaciones y por tanto, a una caída de la Bolsa. Simultáneamente, la inversión en renta fija (deuda pública, bonos y obligaciones) gana atractivo con respecto a la inversión en renta variable. Se produce una huida de inversiones y la Bolsa cae. Por último, los altos tipos de interés tienen también un impacto directo en las familias y no exclusivamente en empresas. El encarecimiento de la financiación da lugar a un descenso en el consumo, endeudarse es caro y cabe pensárselo bien. Con la caída del consumo, las ventas disminuyen y las empresas, como se comentaba, vuelven a ver sus resultados afectados y con ello, nuevamente sus dividendos y cotizaciones, provocando la caída de la Bolsa.

Descrito y argumentado el impacto de las subidas de los tipos de interés en los mercados bursátiles, ante posibles descensos prolongados de los mismos, los efectos son justo los contrarios a los mencionados: mejoran las cargas financieras de las empresas, la inversión en renta variable gana atractivo con respecto a la renta fija y endeudarse lleva menor coste para las familias. Todo ello da lugar a una subida de las cotizaciones de las empresas y por tanto, de la Bolsa.

Pese a que en el Apartado 1.4 los aspectos macroeconómicos quedan detallados, a priori, cabe puntualizar que son una serie de variables macroeconómicas las que tienen impacto en la economía de un país y que los tipos de interés constituyen una fuerte herramienta de gran impacto sobre el comportamiento de las mismas.

A partir de esto, se vuelve a dejar evidencia del importante rol que desempeñan los tipos de interés sobre la economía de un país. No obstante, el comportamiento de los tipos de interés tiene una repercusión más allá de la mera visión inversora de particulares y entidades privadas que acuden a los mercados financieros. También juegan un papel fundamental en las políticas monetarias desarrolladas por las autoridades que gobiernan en cada país para la obtención de financiación (véase Apartado 1.3). Siendo los tipos de interés el instrumento principal de dichas políticas, la correspondiente autoridad monetaria gobernante, los sube y baja con el objetivo de regular el coste del crédito y con ello, alcanzar el equilibrio requerido para el buen funcionamiento de la economía.

1.1.1. Los mercados financieros

Los mercados financieros son el espacio donde acuden ahorradores e inversores a realizar los intercambios de instrumentos financieros y en el cual se determinan sus precios. En dichos mercados, se puede encontrar una gama de tipos de interés como: tipos de interés como instrumento de la política monetaria, tipos de interés de la banca, tipos de interés nominales y reales y tipos de interés del mercado.

En relación al trabajo que se desarrolla en la presente memoria, cabe centrar la atención en los tipos de interés de la banca. La tasa interbancaria es aquella tasa de interés fijada por el banco central de cada país para préstamos del Estado a otros bancos o para préstamos entre los bancos. Esta tasa corresponde a la política macroeconómica del país, responsabilidad de la autoridad monetaria del mismo para promover el crecimiento económico, la estabilidad financiera y la situación en los mercados de acciones del país en cuestión. Si los precios de las acciones suben, la demanda de dinero aumenta y consecuentemente, la tasa de interés.

▪ **Funciones de los mercados financieros**

Las principales funciones de los mercados financieros son:

- Establecer la posibilidad de los mecanismos en el contacto entre los participantes en la negociación.
- Fijar los precios de los productos financieros en función de su oferta y su demanda.
- Reducir los costes de intermediación.
- Administrar los flujos de liquidez de productos o mercado.

▪ **Clasificación de los mercados financieros**

Son diferentes clasificaciones las que se pueden realizar sobre los mercados financieros en base al criterio al que se atiende y a partir del cual, observar las características. No obstante, las clasificaciones que aquí se presentan son las siguientes:

1. Según plazo de vencimiento de las operaciones

En base a dicho criterio se efectúa una distinción entre el vencimiento inferior a un año y el vencimiento igual o superior a un año, dando lugar a los mercados monetarios y de capitales respectivamente.

El mercado monetario suele ser un mercado interbancario mayorista con operaciones de gran volumen y que pueden influir directamente en el Eurosistema a través de sus operaciones de política monetaria. Debido a que el BCE tiene el monopolio de la oferta de activos de liquidez, puede llegar a fijar las condiciones de financiación para las entidades de crédito de la zona euro. Esto puede llegar a influir en las condiciones en las que las entidades de crédito y otros participantes en el mercado de dinero cruzan sus operaciones.

2. Según tipo de operación

Si la operación financiera se refiere a la primera compra de una emisión se encontrará en el mercado primario, mientras que si se trata de una negociación posterior entre los tenedores de los valores se tratará de un mercado secundario. Dentro de este último, se identifican dos tipos: el organizado, en el que compradores y vendedores se encuentran en un lugar común para realizar operaciones, (definido como mercado bursátil) y el mercado no organizado (OTC), que es aquel en el que los intermediarios compran y venden valores a otras contrapartes de forma bilateral.

3. Según tipo de instrumento financiero negociado

Esta clasificación se basa en la forma del instrumento financiero negociado en un mercado. Una distinción importante es la diferencia entre los mercados de renta variable y los de renta fija. La principal diferencia entre la renta variable y la renta fija consiste en que la primera no tiene que ser reembolsada por el emisor, mientras que la renta fija comprende instrumentos financieros que, habitualmente hay que reembolsar (por importes específicos, a un determinado tipo de interés y en una fecha concreta).

1.2. Los tipos de interés a corto plazo

En base al modelo estocástico de tipos de interés que se estudia y aplica en el desarrollo de esta memoria, el modelo de Vasicek, el tipo de interés objeto de la modelización a realizar, dadas las características inherentes a dicho modelo, debe atender a un tipo de interés "*short-term*".

Uno de los tipos de interés que realizan operaciones a corto plazo son los referentes al mercado interbancario, el tipo de interés interbancario. Como se anticipaba en una de las clasificaciones de mercados financieros contemplada (véase Apartado 1.1.1), los mercados monetarios son aquellos en los que tienen lugar las operaciones a corto plazo, atendiendo los mismos con frecuencia a mercados interbancarios. Cabe señalar algunos tipos de interés a corto plazo que operan en el mercado interbancario: Sterling Over Night Index Average (SONIA), Swiss Average Rate Overnight (SARON), Europe Interbank Offered Rate (EURIBOR), London Interbank Offered Rate (LIBOR) y Euro Over Night Index Average (EONIA).

1.2.1. El Mercado interbancario

Los tipos de interés anteriormente mencionados, son negociados dentro de los denominados mercados interbancarios y son fruto de las operaciones de préstamos interbancarias que se realizan. Este mercado se define como un mercado en el que los bancos se prestan dinero unos a otros en un plazo determinado. La mayor parte de préstamos interbancarios se realizan con vencimiento máximo en una semana, siendo la mayoría de ellos a un día. Para dichas operaciones, se utiliza el tipo interbancario de acuerdo a la zona en la que éstas se realicen.

La principal razón por la que entidades bancarias realizan este tipo de operaciones es debido a que los principales órganos institucionales les exigen mantener una cantidad adecuada de activos líquidos como puede ser dinero en efectivo, con objeto de poder afrontar posibles salidas de capitales de las entidades bancarias que tengan lugar.

En el caso de que un banco no pueda cumplir con los requisitos de liquidez, deberá tomar prestado dinero del mercado interbancario para cubrir el descubierto que pudiera tener. Por otra parte, se pueden encontrar bancos que tengan activos líquidos por encima de los requisitos legales de liquidez y por lo tanto, estos bancos prestan dinero en el mercado interbancario, obteniendo a cambio un rendimiento por sus activos prestados. De esta manera, los bancos prestan y toman prestado en el mercado interbancario, al tipo interbancario de la zona, para poder gestionar su liquidez y cumplir con regulaciones como el coeficiente de caja.

El tipo interbancario es el tipo de interés cargado a los préstamos a corto plazo entre los bancos, es decir, es el tipo de interés que los bancos utilizan para las operaciones que realizan en el mercado interbancario. Las condiciones establecidas en el mercado interbancario derivan en una serie de efectos dentro del sistema financiero y por tanto, en la economía real, influyendo sobre las decisiones de inversión y financiación tanto de empresas, como de hogares. Los préstamos interbancarios en el sistema financiero se toman como referencia para préstamos a corto plazo, es decir, sirven como referente para asignar un precio a numerosos instrumentos financieros mientras que, por otra parte, sirven para la transmisión de la política monetaria.

1.2.2. Europe Interbank Offered Rate: EURIBOR

En base al tipo de interés a corto plazo escogido para el desarrollo de esta memoria (Euribor a 1 mes), conviene centrarse en el tipo de interés interbancario EURIBOR el cual, junto al mencionado EONIA, son indicadores de referencia del mercado interbancario europeo. Con la llegada del euro, la transformación de numerosos mercados nacionales a una sola moneda común, dio lugar a una excelente oportunidad para desarrollar nuevos índices de referencia para el mercado de dinero, así como a un mercado de intercambios en la zona euro cada vez más homogéneo e integrado.

Los nuevos índices de referencia para el mercado de dinero de la zona euro a los que dio oportunidad de creación la llegada de una única moneda común (Euro) han sido, el EURIBOR (sin garantía), el EUREPO (garantizado) y el EONIA. Cabe puntualizar que Euribor ®, EUREPO ® y EONIA ® son marcas de Euribor EBF y están registradas en todo el mundo.

El EURIBOR fue creado en 1999 con la entrada del euro y es el índice de coste de préstamos de dinero entre bancos de la zona euro, es decir, el tipo de interés que los bancos cobran por prestarse dinero entre sí. Este tipo interbancario se determina en base a los datos de 47 entidades europeas, dentro de las cuales, 3 son españolas (BBVA, BSCH y CECA). Diariamente, la European Banks Federation (EBF) junto con la ayuda del BCE, autoridad monetaria de la zona euro, piden a estas entidades que coticen el tipo al que están dispuestas a prestarse dinero en los períodos desde 1 mes a 1 año (tipo tomado como referencia para los préstamos hipotecarios), de esta manera se procede al cálculo del EURIBOR para los diferentes períodos a contemplar. Esta memoria se centra en el tipo interbancario Euribor a 1 mes, siendo este un tipo de interés "*short-term*" negociado en el mercado interbancario de la zona euro y cuyas cotizaciones diarias están publicadas. Es el coste medio de las operaciones de crédito interbancarias con plazo de un mes y sobre el cual, como se verá en el Capítulo 4, en base a sus datos diarios, el modelo de Vasicek será aplicado.

1.3. La política monetaria de la Unión Europea

Una vez queda establecido que las variaciones de los tipos de interés ofertados no sólo provocan un impacto en la visión inversora de empresas y familias, cabe entrar en el detalle de la política monetaria desarrollada en la Unión Europea y en la cual, los tipos de interés son el principal instrumento de cara a alcanzar el equilibrio económico adecuado. Las políticas monetarias desarrolladas por las autoridades monetarias gobernantes en cada estado, tienen un impacto directo en la correspondiente economía.

En el caso particular de la Unión Europea, el BCE es el único emisor de billetes, así como el único proveedor de reservas bancarias, teniendo el monopolio de la oferta de la base monetaria. Es por tanto que, el BCE puede influir en las condiciones del mercado monetario y controlar los tipos de interés a corto plazo. Cuando se cita a los tipos de interés como principal herramienta de la política monetaria desarrollada, ello hace referencia a cuando el mismo BCE induce una variación de los tipos de interés del mercado monetario, ello pone en marcha una serie de mecanismos y de acciones de los agentes económicos que, finalmente, provocan un determinado efecto en la evolución de determinadas variables económicas tales como, el producto o los precios.

Con la entrada del euro, el 1 de enero de 1999, el BCE se adjudica la responsabilidad de la política monetaria de la zona del euro. Dicha política en el marco institucional se sustenta en dos principios fundamentales, en primer lugar, el mandato del BCE se centrará claramente en el mantenimiento de la estabilidad de precios y en segundo lugar, el BCE será independiente. El principal objetivo del BCE es la estabilidad de precios, pero ello no quiere decir que los tipos de interés no sean importantes dentro de la institución, ya que depende de la decisión que se tome respecto a los tipos de interés oficiales, se producirán cambios en la economía. Como se afirmaba en párrafos anteriores (véase Apartado 1.1), el papel jugado por los tipos de interés en los mercados financieros, así como en las economías, es de especial relevancia.

Respecto a la estrategia llevada a cabo por la política monetaria, cabe destacar que se sustenta en dos pilares esenciales denominados, análisis económico y análisis monetario.

- *Análisis económico:* Dentro de éste, el BCE puede actuar sobre la demanda agregada mediante los tipos de interés. Si sube los tipos de interés aplica una política monetaria restrictiva, los créditos se encarecen, lo que tiende a moderar el consumo y la inversión. Esto es lo que hace el BCE ante una perturbación de demanda que ponga en peligro el cumplimiento del objetivo de inflación. No obstante, para ver el efecto final de las variaciones de los tipos de interés sobre el comportamiento de los precios, es necesario el transcurso de un determinado período de tiempo, puesto que no es algo inmediato.

- *Análisis monetario:* En lo que respecta a este tipo de análisis, en los dos primeros años de existencia del euro, cuando se mantuvieron altos los tipos de interés para contrarrestar el aumento de la demanda agregada, la tasa de expansión monetaria fue más moderada y se respetó. Sin embargo, se bajan los tipos de interés sin que se haga nada por impedirlo.

Es en el primer pilar, el análisis económico, donde han de buscarse los fundamentos de las decisiones de política monetaria del BCE sobre los tipos de interés. Primero, se analizarán las perturbaciones de oferta y demanda que pueden tener consecuencias para la inflación a corto plazo. Después, en el análisis monetario, simplemente se reflexiona sobre los efectos a largo plazo de esas decisiones, para no perder de vista, mientras se responde a las perturbaciones, dada la relación existente entre la cantidad de dinero y los precios.

Dentro del mercado monetario, el tipo de interés es determinado por la igualdad de la oferta y la demanda de dinero que se encuentra en dicha economía. Modificando la oferta monetaria, es el modo en el que el BCE puede influir en el tipo de interés. Las operaciones de mercado abierto en las que el BCE eleva la oferta monetaria comprando bonos provocan una subida de precio y una bajada del tipo de interés mientras que en el caso en el que reduce la oferta monetaria vendiendo bonos provocan un descenso del precio de los bonos y una subida del tipo de interés.

Las decisiones de política monetaria con el nivel de precios comienzan con una modificación de los tipos de interés oficiales que fija el BCE para sus propias operaciones de financiación a las entidades de crédito. Debido a su monopolio sobre la creación de la base monetaria, el BCE puede determinar los tipos de interés que aplicará a sus operaciones. Dado que, con ello, el banco central influye en el coste de financiación de la liquidez de las entidades de crédito, estas tienen que trasladar dichos costes a las operaciones de préstamo con su clientela. A través de este proceso, el BCE puede ejercer una influencia dominante en las condiciones del mercado monetario y controlar los tipos de interés de dicho mercado.

A su vez, las variaciones de los tipos de interés del mercado monetario repercuten en otros tipos. Por ejemplo, las variaciones de los tipos del mercado monetario influyen en los tipos de interés que las entidades de crédito aplican a los préstamos y depósitos a corto plazo.

En la Figura 1.1 se representa el mecanismo existente por parte de la política monetaria llevada a cabo por el BCE, de la transmisión de los tipos de interés a los precios.



Figura 1.1. Mecanismo de transmisión de los tipos de interés a los precios.

Fuente. BCE (2011), "La Política Monetaria del BCE". Página 64.

Las variaciones de los tipos de interés influyen en las decisiones de ahorro, gasto e inversión de los hogares y las empresas. Por ejemplo, manteniéndose constantes las demás variables, unos tipos de interés más altos tienden a provocar que a los hogares y/o empresas les resulte menos atractivo endeudarse para financiar su consumo o su inversión y, también, que se prefiera ahorrar en vez de gastar los ingresos corrientes, ya que la rentabilidad del ahorro es mayor.

1.4. Aspectos macroeconómicos

A nivel macroeconómico, las políticas de carácter monetario, cambiario y fiscal pueden ayudar a corregir los desequilibrios de la economía. En este caso se tendrá en cuenta la política monetaria. En el caso de encontrarse ante una fase expansiva, los tipos de interés disminuirán mientras que si se estuviese en una fase contractiva ocurrirá el efecto contrario, los tipos de interés aumentarán.

Por último, se afirma que el mercado, en el que se negocian valores tales como bonos, acciones, futuros, etc., por efecto de la oferta y la demanda, fija para cada clase de activos un tipo de interés el cual depende de factores tales como las expectativas existentes sobre la tasa de inflación. El riesgo asociado al tipo de activo y la preferencia por la liquidez, es decir, cuanto menos líquido sea un activo, mayor compensación exigirán los inversores. Sin embargo, en los mercados bursátiles, cuando suben los tipos de interés a un año actual y futuros esperados, el precio de las acciones baja dado el mayor atractivo que adquiere la inversión en activos de renta fija.

Mientras que el tipo de interés a largo plazo es una media geométrica de los tipos de interés a corto plazo, hasta el momento del vencimiento. Una vez que el tipo de interés a corto plazo es conocido, pero no así los que prevalecerán en el futuro, los agentes utilizan las expectativas de los mismos. Aunque la diferencia entre los tipos de interés a corto y a largo plazo en el presente está determinada por las expectativas de los agentes de las condiciones económicas futuras, la estructura temporal de los tipos de interés contiene información sobre las expectativas de los agentes de la evolución futura de la economía.

2 | PRELIMINARES ESTOCÁSTICOS

2.1. Movimiento Browniano o proceso de Wiener

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico de tipo *gaussiano*⁹. Inicialmente, en 1827 el botánico escocés Robert Brown observó a través de un microscopio el movimiento aleatorio de las partículas de polen en el agua debido a la interacción molecular. A este fenómeno se le denominó “Movimiento Browniano” y en la actualidad, se usa para describir numerosos fenómenos aleatorios.

Un proceso estocástico describe la evolución temporal de una variable aleatoria. Existen diferentes tipos de procesos estocásticos, no obstante, en esta memoria, y en base al Movimiento Browniano, se estudiará un proceso estocástico de variable y en tiempo continuo, que resulta adecuado para describir el comportamiento de variables económico-financieras, como es el caso de los tipos de interés.

⁹ Se recuerda que un proceso estocástico $\{X(t; \omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ se dice que es *gaussiano* si $X(t; \cdot)$ es una variable *gaussiana* para cada $t \in T$.

Las ideas de R. Brown, en el siglo XX pasaron a ser utilizadas en el campo de las finanzas. Se descubre la utilidad de dicho instrumento matemático en múltiples campos, en concreto, en la modelización del comportamiento de los precios bursátiles. Louis Bachelier (1900) hizo uso de las mismas en su tesis doctoral "*La Teoría de la Especulación*" para modelizar ciertos activos financieros¹⁰. No obstante, el trabajo de L. Bachelier no fue comprendido en su época y durante mucho tiempo permaneció ignorado. Con posterioridad, fue Norbert Wiener quien consiguió formalizar matemáticamente el concepto de Movimiento Browniano y de ahí que, en ocasiones, se le denomine también proceso de Wiener¹¹. A lo largo de esta memoria, el Movimiento Browniano o proceso de Wiener se denotará por: $\{B(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ o brevemente por $\{B(t): t \geq 0\}$, aunque en muchos textos se utiliza indistintamente la notación: $\{W(t): t \geq 0\}$.

Como ya se indicó, el objeto de esta memoria es el estudio y aplicación de un modelo estocástico de tipos de interés denominado modelo de Vasicek. El ingrediente que dota de aleatoriedad a dicho modelo es el Movimiento Browniano. Este proceso se define a través de una serie de propiedades características del mismo. El Movimiento Browniano, $\{B(t): t \geq 0\}$, es un proceso estocástico que cumple:

MB.1. Comienza en el origen con probabilidad 1: $P[B(0) = 0] = 1$.

MB.2. Los incrementos del Browniano dados por, $B(t) - B(s)$, son variables aleatorias independientes:

$$B(t_1) - B(t_0); B(t_2) - B(t_1); \dots; B(t_{n+1}) - B(t_n), \text{ con } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1} \leq +\infty.$$

MB.3. Tiene incrementos estacionarios:

$$B(t + \Delta t) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + \Delta t) - B(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \in [0, +\infty[$$

donde el símbolo $\stackrel{d}{=}$ denota que la igualdad anterior es en distribución.

MB.4. Los incrementos del proceso son *gaussianos* de media 0 y una varianza $t - s$:

$$B(t) - B(s) \sim N[0, \sqrt{t - s}], \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t.$$

¹⁰Bachelier, L. (1900) *Théorie de la spéculation*. Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure, pp. 21-86

¹¹Klebaner, C. (2011) *Introduction to Stochastic Calculus With Applications to Finance*. Imperial College Press.

Considerando la propiedad MB.1., en el caso particular en que $s = 0$, se deduce que $B(t) \sim N[0, \sqrt{t}]$, es decir, que fijado t , la variable aleatoria $B(t)$ sigue una distribución normal o *gaussiana* de media 0 y desviación típica \sqrt{t} .

2.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano

A continuación, se especifican las principales propiedades estadísticas del Movimiento Browniano $\{B(t), t \geq 0\}$. Una demostración de las mismas puede encontrarse en el libro de Øksendal, Bernt K.¹².

P.1. Función Media: A partir de las condiciones MB.1 y MB.4, se deduce que la función media del Movimiento Browniano es idénticamente nula:

$$\mu_{B(t)} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

En la Gráfica 2.1 se ilustra esta propiedad.

P.2. Función Covarianza: Mide el grado de relación lineal entre las variables aleatorias, $B(s)$ y $B(t)$, que se obtienen al fijar dos instantes s y t , respectivamente.

$$\text{Cov} [B(t), B(s)] = \text{Min} [t, s], \quad \forall s, t \geq 0.$$

Obsérvese que si en la relación anterior tomamos $s = t$, se obtiene la propiedad MB.4, es decir, que la varianza del Movimiento Browniano es t .

P.3. $B(t)$ es $\frac{1}{2}$ -autosemejante: Esta es, únicamente, una propiedad geométrica que formalmente se denota de la siguiente manera.

$$B(T \cdot t) = \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall t \geq 0, \forall T \geq 0.$$

P.4. Las trayectorias muestrales de $B(t)$ son continuas, pero no diferenciables en ningún punto. No es de variación acotada y por tanto, no es derivable (el Movimiento Browniano tiene infinitos picos, como se puede apreciar en la Gráfica 2.1.).

¹²Øksendal, B.K. (2003) *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer.

2.3. Simulación del Movimiento Browniano

Como se verá posteriormente cuando se estudie y resuelva el modelo de Vasicek para modelizar los tipos de interés, la solución quedará expresada en términos del Movimiento Browniano. Para poder realizar predicciones del tipo de interés será necesario poder realizar simulaciones del Movimiento Browniano. A continuación, se indica una forma de simular dicho proceso, aunque cabe señalar que el software especializado disponible tiene implementados otros algoritmos para realizar dicha simulación.

Una manera sencilla de simular el Movimiento Browniano es a través variables aleatorias normales tipificadas, haciendo uso para ello de la identidad:

$$B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N(0; 1). \quad (2.3.1)$$

Para justificar esta identidad en distribución es suficiente con probar que ambos miembros de la identidad tienen la misma distribución. Más específicamente, es sencillo ver que dicha distribución es *gaussiana* y justificar que la media y varianza de ambos miembros coinciden. Esto se muestra en la Tabla 2.1.

	$B(t)$	$\sqrt{t}Z$
<i>Distribución</i>	<i>Gaussiana</i> [MB.4]	<i>Gaussiana</i> Transformación lineal de una variable Gaussiana
<i>Media</i>	0 [MB.4]	$E[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t} \cdot E[Z] = 0$
<i>Varianza</i>	t [MB.4]	$Var[\sqrt{t}Z] = (\sqrt{t})^2 \cdot Var[Z] = t$

Tabla 2.1. Justificación de la fórmula (2.3.1) para la simulación del Movimiento Browniano.

Fuente: Elaboración propia.

En el Gráfico 2.1 se muestra una simulación de Movimiento Browniano sobre la ventana temporal $[0,100]$. En esta gráfica se ilustra la propiedad MB.1 y la propiedad estadística P.5 introducidas anteriormente. No obstante, cabe puntualizar que, pese a que el Movimiento Browniano es lo que introduce la componente de aleatoriedad en el modelo de Vasicek, éste no se corresponde directamente con el Browniano, sino con su diferencial. El diferencial de éste, $\{dB(t), \forall t \geq 0\}$, genera un nuevo proceso estocástico, también de tipo *gaussiano* y denominado Ruido Blanco.



Gráfico 2.1. Simulación del Movimiento Browniano.

Fuente: Elaboración propia. Software Mathematica.

En base al Teorema Central del Límite, la diferencial del Browniano se empleará para modelizar la aleatoriedad o “ruido” en el modelo. Son numerosos y diferentes los factores que en el mundo real pueden llegar a determinar el valor de un activo financiero. En condiciones generales, este teorema indica que, si S_n es la suma de n variables aleatorias independientes, la función de distribución de S_n se aproxima a una distribución normal (o *gaussiana*). En definitiva, modelizando el “ruido” con el Teorema Central del Límite, éste sigue una distribución *gaussiana* o normal, lo que otorga consistencia a la decisión de modelizar la aleatoriedad mediante un proceso *gaussiano*, como lo son el Movimiento Browniano y su diferencial.

2.4. El cálculo de Itô

Kiyoshi Itô fue un matemático japonés cuyo trabajo ahora se reconoce como el Cálculo de Itô. El concepto básico de este cálculo es la Integral de Itô y el más importante de sus resultados, es el Lema de Itô. Cabe puntualizar que la Integral de Itô es el corazón del análisis estocástico, facilita la comprensión matemática de sucesos aleatorios y difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación.

La teoría y fórmula de K. Itô tiene numerosas aplicaciones de interés, no obstante, en este apartado se detalla la versión del cálculo de Itô que se adecúa al objeto de la presente memoria. Se centra en el cálculo exacto de la solución de una ecuación diferencial estocástica definida de la siguiente forma:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t). \quad (2.4.1)$$

Dicha solución se obtiene, en algunos casos que dependen de la forma específica de los coeficientes $f(t, X(t))$ y $g(t, X(t))$, utilizando el Lema de Itô. El Lema de Itô es una versión estocástica de la regla de la cadena para procesos estocásticos $X(t)$. Para el modelo de Vasicek, que es el caso que ocupa el presente trabajo (véase el desarrollo del Capítulo 3), se verá como ello sí es factible.

Considérese la ecuación diferencial estocástica (2.4.1) con una condición X_0 , la cual se asume que es una variable aleatoria de segundo orden, es decir, tal que, su momento de segundo orden es finito: $E[(X_0)^2] < +\infty$. Sea $F = F(t, x)$ una función $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ de modo que las siguientes derivadas parciales son continuas:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial F(t, x)}{\partial x}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t^2}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial t \partial x}, \quad 0 \leq t \leq T, x \in \mathbb{R}$$

y tal que:

I. Existe $k_1 > 0$ tal que:

$$E \left[|F(t_2, X(t_2)) - F(t_1, X(t_1))|^2 \right] \leq k_1 (|t_2 - t_1| + E[|X(t_2) - X(t_1)|^2]), \forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

II. $F(0, X(0))$ es una variable aleatoria de segundo orden.

Entonces, F satisface una ecuación diferencial estocástica del tipo (2.4.1):

$$dF(t, X(t)) = \left(\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} + f(t, X) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} + \frac{1}{2} g^2(t, X) \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} \right) dt + \left(g(t, X) \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} \right) dB(t).$$

2.4.1. La Integral de Itô

En la siguiente sección se va a introducir el concepto de Integral de Itô de una función determinista, puesto que, la solución del modelo de Vasicek se expresa en términos de ésta y, en el presente trabajo, dicha integral sólo se requerirá para integrar funciones deterministas.

No obstante, cabe puntualizar que es más general y usual, definir dicha integral para procesos estocásticos y para dar un enfoque más generalizado, se incorporará la Integral de Itô de forma general.

Como se indicaba en la introducción de este apartado, la Integral de Itô difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación, definiendo lo que debería entenderse por integración de un proceso estocástico con respecto al Movimiento Browniano (u otro proceso estocástico). El objetivo de esta sección, por tanto, es dar una interpretación a la siguiente expresión:

$$\int_0^t X(s)dB(s), \quad (2.4.2)$$

donde $X(s)$ es un proceso estocástico que cumple determinadas condiciones que a continuación se detallarán. Se dice que la expresión (2.4.2) es la Integral de Itô de $X(t)$ con respecto al Movimiento Browniano. La exposición seguirá las ideas dadas en el libro de E. ALLEN¹³. Primero recuérdese la interpretación de dicha integral si $X(s)$ y $B(s)$ no fueran procesos estocásticos, sino funciones deterministas. Se asume que $f(s)$ y $g(s)$ son dos funciones suaves del tiempo s y se considera la siguiente integral:

$$\int_0^t g(s)df(s). \quad (2.4.3)$$

Cuando $f(s)$ atiende a una función diferenciable, se escribe $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$, o equivalentemente, $df(s) = f'(s)ds$. Sustituyendo esto en la integral (2.4.3), se llega a:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)df'(s) ds,$$

¹³ALLEN, E. (2007) "Modelling with Itô Stochastic Differential Equations". Springer (Series Mathematical Modelling: Theory and Applications).

quedando ésta definida como una integral estándar (de tipo Riemann). Si $f(s)$ no fuese diferenciable, todavía se puede utilizar la teoría determinista para definir la integral anterior. En efecto, cuando $f(s)$ no es demasiado irregular como función del argumento s , es decir, cuando $f(s)$ es lo que se denomina función de variación acotada, se puede probar que la integral está bien definida como el siguiente límite:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)).$$

Puesto que $f(s)$ tiene una variación acotada, $f(s_{i+1})$ está próximo a $f(s_i)$. A partir de esto es posible probar que el límite anterior existe siempre que $g(s)$ no varíe demasiado. Por supuesto, si la función $g(s)$ es extremadamente fluctuante en diferentes puntos en el tiempo, el límite puede ser divergente.

Se define la integral (2.4.2) de forma análoga mediante el siguiente límite:

$$\int_0^t X(s, \omega)dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega) (B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)). \quad (2.4.4)$$

Nótese que se toma el límite para cada ω fijo en el espacio muestral Ω de la variable aleatoria $B(s)$. El problema aquí es que el límite para cada ω en general no existe (empieza en $\pm\infty$) para muchos procesos estocásticos $X(s)$. Para cada ω , la función $s \rightarrow B(s, \omega)$ es extremadamente volátil. Como se indicaba con anterioridad (véase la propiedad estadística P.4), el Movimiento Browniano es un ejemplo de un proceso estocástico con trayectorias muestrales continuas, pero no diferenciables en ningún punto. Todavía peor, el Movimiento Browniano como función del tiempo no es de variación acotada para cada ω , tal y como se requiere para $f(s)$. Para compensar la irregularidad de las trayectorias del Movimiento Browniano, se tienen que exigir dos condiciones en el proceso integrador $X(s)$. Bajo estas condiciones el límite existirá a pesar de la irregularidad del Movimiento Browniano.

La primera condición es que se asume que $X(s)$ es independiente de los incrementos del Movimiento Browniano. La segunda condición guarda relación con la variación del integrando (similar a la condición de que $g(s)$ en (2.4.3) no debe variar demasiado).

A partir de la propiedad MB.2 del Movimiento Browniano se sabe que la variación de un incremento del mismo, está dada por:

$$E[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2] = s_{i+1} - s_i.$$

Si $X(s_i)$ es independiente del incremento $B(s_{i+1}) - B(s_i)$, se obtiene

$$\begin{aligned} E\left[\left(X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] &= E[X^2(s_i)] E\left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2\right] \\ &= E[X^2(s_i)](s_{i+1} - s_i). \end{aligned}$$

Considerando el segundo momento de la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)), \quad (2.4.5)$$

y asumiendo que $X(s_i)$ es independiente de $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ para cada $i = 1, \dots, n-1$, puede verse por la independencia de los incrementos del Movimiento Browniano que:

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[X^2(s_i)](s_{i+1} - s_i).$$

La suma del lado derecho es reconocida como una aproximación de la integral $\int_0^t E[X^2(s)] ds$. Por tanto, si esta integral existe, se deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] = \int_0^t E[X^2(s)] ds,$$

esto conduce a la conclusión de que la varianza de la suma en (2.4.5) converge a $\int_0^t E[X^2(s)] ds$. Asumiendo que esta integral existe, se demuestra:

$$E\left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] = \int_0^t E[X^2(s)] ds. \quad (2.4.6)$$

Cabe subrayar que la integral que aparece en el lado derecho de la ecuación (2.4.6), en algunos casos, puede no existir. Existirá siempre que sea finita, es decir, siempre que el proceso estocástico $X(s)$ es tal que su segundo momento puede ser integrado de 0 a t .

Por ejemplo, para el proceso $X(s) = s^{-1}B(s)$, por la condición MB.2 del Movimiento Browniano, se tiene

$$\int_0^t E[X^2(s)]ds = \int_0^t s^{-1}ds = \ln t - \ln 0 = +\infty.$$

Por otro lado, tomando $X(s) = B(s)$, fácilmente se puede reconocer que $X(s)$ satisface la condición de integralidad. Afortunadamente, esto también se cumple para una larga clase de procesos estocásticos.

Retomando la relación (2.4.6), considerando concretamente el límite de la parte izquierda que $X(s_i)$ debe ser independiente de incrementos $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ para todos los valores de $i = 1, \dots, n - 1$. Esto conduce a introducir la condición denominada de adaptabilidad del proceso integrador:

- **Definición 1.** *Una variable aleatoria X es llamada \mathcal{F}_s -adaptada si X puede ser escrita como (un límite de una sucesión de) funciones de $B(\tau)$ para uno o más $\tau \leq s$, pero no como función de cualquier $B(u)$ con $u > s$. Un proceso estocástico $X(s)$ se dice que es adaptado si para cada tiempo $s \in [0, t]$, la variable aleatoria $X(s)$ es \mathcal{F}_s -adaptada.*

Puntualizando en algunos aspectos de la Definición 1 cabe señalar en primer lugar, procesos que se derivan de composiciones simples del Movimiento Browniano tales como $X(s) = f(s, B(s))$ son adaptados, mientras que procesos tales como $X(s) = B(s + 1)$, no lo son.

Si se considera la integral $X(s) = \int_0^s B(\tau)d\tau$, también define un proceso estocástico adaptado, puesto que la integral es el límite de sumas del Movimiento Browniano en diferentes tiempos menores que s . En definitiva, por la definición de la integral, se tiene

$$X(s) = \int_0^s B(\tau)d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} B(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Por tanto, focalizando sobre la Integral de Itô, véase que siempre que el proceso integrando $X(s)$ sea adaptado, la integral $\int_0^t X(s)dB(s)$ tiene sentido como el límite puntual en (2.4.4). Además, este límite (2.4.4) puede probarse que converge en media cuadrática y por lo tanto, también para cada $\omega \in \Omega$. Se concluye la exposición con la definición de la Integral de Itô.

▪ **Definición 2.** *Un proceso estocástico $X(s)$, según Itô es integrable en el intervalo $[0, t]$ si:*

1. $X(s)$ es adaptado para $s \in [0, t]$, y
2. $\int_0^t E[X^2(s)] ds < \infty$.

La Integral de Itô se define como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s, \omega)dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega)(B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad (2.4.7)$$

donde el límite es considerado por cada $\omega \in \Omega$.

2.4.2. Propiedades de la Integral de Itô

Introducido el concepto de Integral de Itô de una función determinista, se da paso a las propiedades estadísticas de dicha integral, las cuales se necesitarán con posterioridad para el cálculo de las principales funciones estadísticas (media, varianza y covarianza) de la solución del modelo de Vasicek. Esta solución vendrá expresada en términos de una Integral de Itô de una función determinista (véase apartado 3.3.).

Puede demostrarse que la Integral de Itô tiene las siguientes propiedades, las cuales en el presente apartado no se van a enunciar con la máxima generalidad, sino que se hace en el contexto requerido para el desarrollo de la presente memoria. Por tanto, se citan sólo en el caso particular en el que el integrando $X(s)$ es una función determinista $h(s)$ tal que $\int_0^t (h(s))^2 ds < +\infty$:

I.1. Media: $E \left[\int_0^t h(s) dB(s) \right] = 0.$

I.2. Varianza: $Var \left[\int_0^t h(s) dB(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds.$

I.3. Covarianza: $Cov \left[\int_0^t h_1(\tau) dB(\tau), \int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau,$

siendo $t \wedge s = \min(t, s).$

En particular, $E \left[\left(\int_0^t h_1(\tau) dB(\tau) \right) \left(\int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau,$

I.4. Normalidad: $\int_0^t h(s) dB(s) \sim N \left[0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right].$

3 | MODELO ESTOCÁSTICO DE TIPOS DE INTERÉS DE VASICEK

Como se mencionó en el Capítulo 1 de esta memoria, el impacto que tienen las variaciones de los tipos de interés en los mercados financieros es de especial relevancia. Tienen un efecto directo sobre la toma de decisiones de inversión, así como en la gestión de riesgos de estos mercados. La dinámica o comportamiento del tipo de interés a corto plazo recibe en la literatura financiera una especial atención puesto que constituye el principal factor en la modelización de la Estructura Temporal de los Tipos de Interés (en adelante, ETTI) y, en particular, su volatilidad es pieza clave, al menos bajo un punto de vista teórico, en la determinación de las primas de riesgo¹⁴.

Actualmente existe una gran cantidad de modelos para la ETTI, siendo los más conocidos y usados aquellos en tiempo continuo con un único factor, identificados generalmente con el tipo de interés a corto plazo.

¹⁴HULL, J.C. (2002) *"Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones"*. Pearson Education. 4º Edición.

BAXTER, M.; RENNIE A. (2012) *Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing*. Cambridge University Press. 20th Edition.

Tal y como se ha comentado, la presente memoria se centra en la modelización unifactorial en tiempo continuo de tipos de interés a corto plazo, $r(t)$, asumiendo que el comportamiento de sus movimientos sigue un proceso de difusión de Itô. Todo ello queda representado a través de la siguiente ecuación diferencial estocástica:

$$dr(t) = \mu(r(t))dt + \sigma(r(t))dB(t),$$

donde se identifican:

- μ , deriva o tendencia de tipo de interés $r(t)$.
- σ , volatilidad del proceso de tipo de interés $r(t)$.
- $dB(t)$, denota la derivada del Movimiento Browniano, el Ruido Blanco.

Una de las especificaciones más utilizada en los trabajos sobre tipos de interés ha sido la del modelo de Vasicek (1973), el cual atiende a la clase de modelos de un único factor. Las hipótesis asumidas en el mismo son:

I. El término $\mu(r(t))$ es una función lineal del tipo de interés $r(t)$ con la propiedad de que induce un comportamiento estable a largo plazo (asintóticamente estable) hacia un valor medio μ , quedando representada de la siguiente manera:

$$\mu(r(t)) = \alpha(r_e - r(t)).$$

II. El término de volatilidad o parámetro de difusión, $\sigma(r(t))$, se asume constante. El modelo de Vasicek es un modelo de volatilidad constante:

$$\sigma(r(t)) = \sigma.$$

Finalmente, la ecuación diferencial estocástica que se obtiene queda reescrita de la siguiente forma:

$$dr(t) = \alpha(r_e - r(t))dt + \sigma dB(t).$$

Esta ecuación es conocida como ecuación de Ornstein-Uhlenbeck con coeficientes constantes¹⁵. Este tipo de ecuaciones ha sido usado extensamente para la evaluación de bonos, futuros y derivados que requieren una estimación de la estructura temporal.

¹⁵El proceso de Ornstein-Uhlenbeck es un proceso estocástico que describe la velocidad de una partícula bajo los efectos de la fricción provocada por un movimiento de tipo browniano. El proceso es estacionario, *Gaussiano* y *Markoviano*.

3.1. Motivación modelo determinista de tipos de interés

En este apartado se motiva la introducción del modelo estocástico de tipos de interés de Vasicek, a partir de un modelo determinista que a continuación se detalla. Las variables de dicho modelo son:

- $r(t)$, el tipo de interés en el instante t .
- μ , el tipo de interés medio a largo plazo.
- k , constante que medirá la velocidad de ajuste de los tipos de interés ($k > 0$).
- $r(t_0) = r_0$, el tipo de interés inicial.

Con el siguiente problema de valoración inicial se describe, de forma determinística, la evolución del tipo de interés, $r = r(t)$. El modelo que se obtiene es un "modelo determinístico de tipos de interés con regresión a la media".

$$\left. \begin{aligned} r'(t) &= k(\mu - r(t)), & k > 0, \mu \in \mathbb{R}, \\ r(0) &= r_0, & r_0 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.1.1)$$

A continuación se detalla el significado del modelo determinístico, así como la solución temporal del mismo y su comportamiento a largo plazo (asintótico). En primer lugar, a partir de la ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) dada en el problema de valor inicial (p.v.i.) y la interpretación que se hace de la derivada, se observa que:

- Si $\mu > r(t) \stackrel{k \geq 0}{\Rightarrow} r'(t) > 0 \Rightarrow r(t)$ es creciente.
- Si $\mu < r(t) \stackrel{k \geq 0}{\Rightarrow} r'(t) < 0 \Rightarrow r(t)$ es decreciente.

Ello indica que, si el tipo de interés actual $r(t)$ es menor (mayor) que el tipo de interés medio a largo plazo μ , entonces $r(t)$ tiende a crecer (decrecer). La interpretación que se hace de esto indica que, el tipo de interés $r(t)$, aunque fluctúe, a largo plazo tiende a regresar a un valor medio μ . Según la e.d.o. mostrada, la variación instantánea del tipo de interés, $r'(t)$, es directamente proporcional a la diferencia existente entre el tipo de interés actual $r(t)$ y su valor medio en el largo plazo: $k(\mu - r(t))$. La constante k quedó anteriormente definida como la velocidad de ajuste del tipo de interés actual hacia el valor medio a largo plazo.

La e.d.o. en la que queda basado el p.v.i. (3.1.1), es de tipo lineal y no homogénea o completa ya coeficientes constantes, y su solución es comúnmente conocida (véase 3.1.2):

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + b \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow x(t) = \left(x_0 + \frac{b}{a}\right) e^{a(t-t_0)} - \frac{b}{a}, \quad \text{si } a \neq 0. \quad (3.1.2)$$

Identificando los parámetros del modelo general (3.1.2) con el determinístico de los tipos de interés (3.1.1), se deduce:

$$\left. \begin{aligned} x'(t) &= ax(t) + b \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} r'(t) &= k(\mu - r(t)) = k\mu - kr(t) \\ r(t_0) &= r_0. \end{aligned}$$

Por tanto:

$$x(t) = r(t), \quad x_0 = r_0, \quad a = -k \neq 0, \quad t_0 = 0, \quad b = k\mu. \quad (3.1.3)$$

Teniendo en cuenta la hipótesis: $k > 0$, según (3.1.2), la evolución temporal del tipo de interés (solución del modelo determinista) viene dada por:

$$r(t) = (r_0 - \mu)e^{-k(t-t_0)} + \mu, \quad t > 0. \quad (3.1.4)$$

El comportamiento asintótico (a largo plazo) del tipo de interés, se calcula con el siguiente límite: $\lim_{t \rightarrow \infty} r(t)$. A partir de la solución obtenida (3.1.4) y que $k > 0$, se puede observar que, efectivamente, el tipo de interés medio a largo plazo tiende a μ :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} r(t) = \mu + (r_0 - \mu) \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-kt} = \mu.$$

En la Gráfica 3.1 queda ilustrado este comportamiento asintótico del modelo determinístico en un caso particular.

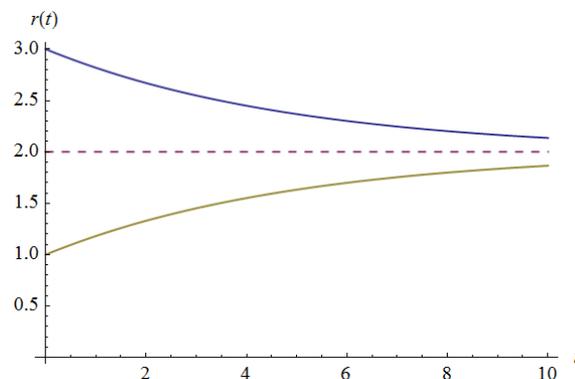


Gráfico 3.1. Representación de la solución del modelo determinista dado por el p.v.i. (3.1.1)

Fuente: Elaboración propia.

3.2. Motivación modelo estocástico de tipos de interés: modelo de Vasicek

El modelo presentado anteriormente era una modelo de tipos de interés con regresión a la media completamente determinista en el cual, no se contemplaba aleatoriedad alguna. En la práctica, el valor al cual tiende en el largo plazo el modelo determinista (μ), depende de un gran número de factores económicos tales como, políticas monetarias, riesgo financiero y riesgo país,... En definitiva, factores con elevada incertidumbre dada la complejidad de su determinación.

Considerando el grado de incertidumbre existente, es más conveniente y adecuado, introducir aleatoriedad en el modelo de tipos de interés. El parámetro μ pasa a ser una cantidad aleatoria en lugar de una cantidad determinística. Como se mencionó en el Capítulo 2, la aleatoriedad en el modelo era introducida con el Movimiento Browniano $B(t)$, más concretamente, con su derivada, el denominado proceso de Ruido Blanco. Todo ello motiva la siguiente expresión estocástica del parámetro μ :

$$\mu \rightarrow \mu + \lambda B'(t), \quad \lambda > 0. \quad (3.2.1)$$

De la expresión obtenida (3.2.1) se sigue denotando al parámetro μ como el valor medio de tipo de interés a largo plazo, pero en este caso, se le han añadido fluctuaciones aleatorias, siendo $B'(t)$ el Ruido Blanco y $\lambda > 0$ su intensidad.

Introduciendo en el modelo la notación diferencial de la derivada $r'(t) = \frac{dr(t)}{dt}$ y considerando la aleatoriedad en μ , éste se reescribe de la siguiente forma:

$$\frac{dr(t)}{dt} = k [(\mu + \lambda B'(t)) - r(t)] \implies dr(t) = k [(\mu + \lambda B'(t)) - r(t)]d(t).$$

Agrupando los diferentes parámetros se obtiene:

$$dr(t) = k(\mu - r(t))dt + k\lambda B'(t)dt \quad (3.2.2)$$

donde se puede diferenciar claramente una parte determinista y otra estocástica en la cual se recoge al Ruido Blanco. Formalmente, dado que $dB(t) = B'(t)dt$, nuevamente el modelo se puede reescribir como:

$$\left. \begin{aligned} dr(t) &= k(\mu - r(t))dt + k\lambda dB(t), \\ r(0) &= r_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.2.3)$$

En la literatura financiera, este modelo de tipos de interés con regresión a la media, se denomina modelo de Vasicek o de Ornstein-Uhlenbeck.

3.3. Solución del modelo estocástico de Vasicek mediante el cálculo de Itô

Realizado el planteamiento estocástico del modelo de tipos de interés de Vasicek, en el presente apartado se procede a estudiar y analizar su solución (la cual es un proceso estocástico). Para mayor claridad en el desarrollo, se identifican los siguientes parámetros: $\alpha = k > 0$, $r_e = \mu$, $\sigma = k\lambda > 0$. El modelo de Vasicek planteado en el apartado anterior (3.2.3) queda reescrito de la siguiente forma equivalente:

$$\left. \begin{aligned} dr(t) &= \alpha(r_e - r(t))dt + \sigma dB(t), \\ r(0) &= r_0. \end{aligned} \right\} \quad (3.3)$$

La expresión obtenida (3.3) es una ecuación diferencial estocástica (e.d.e.) de tipo Itô la cual, se resolverá con el Cálculo de Itô (véase Apartado 2.4) y se calculará $r(t)$.

Para calcular el proceso estocástico $r(t)$ que satisface la ecuación (3.3), en primer lugar, se reformula dicha ecuación introduciendo el siguiente cambio de variable:

$$X(t) = r(t) - r_e \Rightarrow \begin{cases} r(t) &= X(t) + r_e, \\ dX(t) &= dr(t), \end{cases} \quad (3.3.1)$$

sustituyendo en (3.3) se obtiene:

$$dr(t) = \alpha(-X(t))dt + \sigma dB(t) = -\alpha X(t)dt + \sigma dB(t), \quad (3.3.2)$$

siendo ahora la condición inicial

$$X(0) = r(0) - r_e = r_0 - r_e. \quad (3.3.3)$$

Para calcular la solución de este nuevo p.v.i. dado por (3.3.2)-(3.3.3), ahora se aplicará la fórmula de Itô (véase Apartado 2.4). Para ello se toma

$$F(t, X) = e^{\alpha t} X,$$

y se identifican los datos del problema de valor inicial (3.3.2)-(3.3.3) con el patrón general de la ecuación diferencial estocástica de tipo Itô (2.4.1):

$$f(t, X) = -\alpha X, \quad g(t, X) = \sigma.$$

Con vistas a la aplicación de la fórmula de Itô, es necesario proceder al cálculo de las siguientes derivadas parciales:

$$\frac{\partial F(t, X)}{\partial t} = \alpha e^{\alpha t} X,$$

$$\frac{\partial F(t, X)}{\partial X} = e^{\alpha t},$$

$$\frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial X^2} = 0.$$

	<i>dt</i>	<i>dB(t)</i>
<i>dt</i>	$(dt)^2 = 0$	$(dt)(dB(t)) = 0$
<i>dB(t)</i>	$(dt)(dB(t)) = 0$	$(dB(t))^2 = dt$

Tabla3.3.1. Álgebra operacional de los diferenciales en el Cálculo de Itô.

Fuente: Elaboración propia.

Calculadas éstas, se aplica la fórmula de Itô:

$$dF(t, X) = \frac{\partial F(t, X)}{\partial t} dt + \frac{\partial F(t, X)}{\partial X} dX(t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 F(t, X)}{\partial X^2} (dX(t))^2, \quad (3.3.4)$$

y, utilizando el álgebra operacional para diferenciales determinísticas y estocásticas (véase Tabla 3.3.1) se obtiene:

$$dF(t, X) = d(e^{\alpha t} X),$$

$$d(e^{\alpha t} X) = \alpha e^{\alpha t} X dt + e^{\alpha t} (-\alpha X(t) dt + \sigma dB(t)) + \frac{1}{2} 0(-\alpha X(t) dt + \sigma dB(t))^2,$$

$$d(e^{\alpha t} X) = (\alpha e^{\alpha t} X - \alpha e^{\alpha t} X) dt + \sigma e^{\alpha t} dB(t),$$

$$d(e^{\alpha t} X) = \sigma e^{\alpha t} dB(t).$$

Por tanto, integrando ambos miembros entre $[0, t]$ con $t \leq T$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_0^t d(e^{\alpha s} X) &= \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s), \\ e^{\alpha t} X(t) - X(0) &= \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s). \end{aligned}$$

Despejando $X(t)$, se llega a:

$$X(t) = e^{-\alpha t} \left(X(0) + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s) \right).$$

Puesto que la incógnita a calcular desde el inicio era $r(t)$, llegados a este punto se deshace el cambio de variable que se introdujo [$X(t) = r(t) - r_e$; $X(0) = r(0) - r_e$]

$$r(t) - r_e = e^{-\alpha t} \left(r(0) - r_e + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s) \right),$$

$$r(t) = r_e + e^{-\alpha t} \left(r(0) - r_e + \sigma \int_0^t e^{\alpha s} dB(s) \right).$$

Simplificando la última expresión, se obtiene, teniendo en cuenta la condición inicial $r(0) = r_0$:

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB(s). \quad (3.3.5)$$

En definitiva, a partir de la e.d.e. del modelo de Vasicek y aplicando el cálculo de Itô, se obtiene la solución del mismo (un proceso estocástico), $r(t)$. Véase en el término de la derecha de la expresión final (3.3.5), la ya definida Integral de Itô de una función determinística.

3.4. Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek

Con anterioridad se introdujeron las propiedades estadísticas de la Integral de Itô (véase Apartado 2.4.2), las cuales como se puntualizó, aquí serán de aplicación para el análisis de las principales funciones estadísticas de la solución del modelo de Vasicek que recordemos es (véase (3.3.5)):

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB(s).$$

Concretamente a continuación se determinarán las funciones media, varianza y covarianza, así como la distribución estadística de $r(t)$. Para ello, primero se recuerdan las propiedades estadísticas básicas que se requerirán.

▪ Esperanza

La esperanza matemática (también llamada valor esperado, media poblacional o media) de una variable aleatoria X , es el número $E[X]$ que formaliza la idea de valor medio de un fenómeno aleatorio. Para el caso concreto de una variable aleatoria continua, como es nuestro caso, la esperanza se calcula mediante la integral de todos los valores y la función de densidad de probabilidad $f(x)$:

$$E[X] = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx. \quad (3.4.1)$$

La siguiente propiedad de la esperanza será utilizada posteriormente:

$$E[\sum_{i=1}^n a_i X_i \pm b_i] = \sum_{i=1}^n a_i E[X_i] \pm E[b_i]. \quad (3.4.2)$$

▪ Varianza

La varianza de una variable aleatoria es una medida de dispersión en torno a la media y se define como la esperanza del cuadrado de la desviación de dicha variable respecto a su media:

$$Var[X] = E[(X - E[X])^2].$$

Esta medida está dada en unidades distintas a las de la variable aleatoria, es conveniente entonces introducir la desviación estándar o típica, la cual se define como la raíz cuadrada de la varianza. La varianza siempre será no negativa.

Si la variable aleatoria X es continua y con función de densidad de probabilidad $f(x)$, entonces

$$\text{Var}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x - E[X])^2 f(x) dx,$$

donde $E[X]$ está definido en (3.4.1).

Las propiedades estadísticas de la varianza que se necesitarán posteriormente son:

1. $\text{Var}[X] \geq 0$.
2. $\text{Var}[aX + b] = a^2 \text{Var}[X]$ siendo a y b números reales cualesquiera. De esta propiedad a su vez se deduce que la varianza de una constante es cero, es decir, $\text{Var}[b] = 0$.
3. $\text{Var}[X + Y] = \text{Var}[X] + \text{Var}[Y] + 2\text{Cov}[X, Y]$, siendo $\text{Cov}[X, Y]$ la covarianza de X e Y .

▪ **Distribución normal o *gaussiana***

La distribución normal o *gaussiana* es una de las distribuciones de probabilidad de variables aleatorias continuas que con mayor frecuencia se emplea en la modelización estadística de fenómenos reales.

Se dice que una variable aleatoria continua X sigue una distribución normal o *gaussiana* de parámetros μ y $\sigma > 0$, denotándose como $X \sim N[\mu; \sigma]$, cuando su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x; \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}.$$

Las dos propiedades de la distribución normal de mayor interés para el desarrollo posterior de la presente memoria son:

1. Si $X \sim N[\mu; \sigma^2]$ y a y b son números reales, entonces $aX + b \sim N[a\mu + b; a^2\sigma^2]$.
2. Si $X \sim N[\mu_x; \sigma_x^2]$ e $Y \sim N[\mu_y; \sigma_y^2]$ son variables aleatorias normales independientes, entonces:

- Su suma está normalmente distribuida: $X + Y \sim N[\mu_x + \mu_y; \sigma_x^2 + \sigma_y^2]$.
- Su diferencia está normalmente distribuida: $X - Y \sim N[\mu_x - \mu_y; \sigma_x^2 + \sigma_y^2]$.

➤ **Función Media del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek**

Tomando el operador esperanza en la expresión (3.3.5) y considerando la propiedad (3.4.2), así como la propiedad I.1 de la Integral de Itô, se obtiene:

$$E[r(t)] = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma E\left[\int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB(s)\right] = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}. \quad (3.4.3)$$

➤ **Función Varianza del proceso estocástico solución del modelo Vasicek**

A partir de la propiedad estadística básica 2 dada sobre la varianza, se obtiene la siguiente expresión de la varianza para el proceso estocástico solución (3.3.5):

$$Var[r(t)] = \sigma^2 \int_0^t (e^{-\alpha(t-s)})^2 ds,$$

desarrollando el término de la derecha, se obtiene la función varianza del proceso estocástico solución:

$$Var[r(t)] = \sigma^2 e^{-2\alpha t} \int_0^t e^{2\alpha s} ds = \frac{\sigma^2}{2\alpha} e^{-2\alpha t} [e^{2\alpha s}]_{s=0}^{s=t} = \frac{\sigma^2}{2\alpha} [1 - e^{-2\alpha t}]. \quad (3.4.4)$$

➤ **Función Covarianza del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek**

Para calcular la función covarianza del proceso solución $r(t)$, aplicando la definición de covarianza, se tiene:

$$Cov[r(t), r(s)] = E[r(t), r(s)] - E[r(t)]E[r(s)], \quad (3.4.5)$$

y por tanto, como $E[r(t)]$ y $E[r(s)]$ están dadas por (3.4.3), es suficiente con determinar el término de correlación $E[r(t)]E[r(s)]$. Para ello, se escribe el proceso solución dado en (3.3.5) como sigue:

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dB(u),$$

y se calcula primero $r(t) r(s)$ y luego se toma el operador esperanza:

$$\begin{aligned}
 r(t) r(s) &= \left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma e^{-\alpha t} \int_0^t e^{\alpha u} dB(u) \right) \\
 &\times \left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha s} + \sigma e^{-\alpha s} \int_0^s e^{\alpha u} dB(u) \right) \\
 &= (r_e)^2 + (r_0 - r_e)^2 e^{-\alpha(t+s)} + r_e + (r_0 - r_e)(e^{-\alpha t} + e^{-\alpha s}) \\
 &+ \sigma r_e (e^{-\alpha t} + e^{-\alpha s}) \int_0^s e^{\alpha u} dB(u) \\
 &+ \sigma (r_0 - r_e) e^{-\alpha(t+s)} \left(\int_0^s e^{\alpha u} dB(u) + \int_0^t e^{\alpha u} dB(u) \right) \\
 &+ \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} \left(\int_0^t e^{\alpha u} dB(u) \right) \left(\int_0^s e^{\alpha u} dB(u) \right).
 \end{aligned}$$

Ahora se toma el operador esperanza y se aplican la propiedad (3.4.2) de la esperanza y la I.3 de la Integral de Itô:

$$\begin{aligned}
 E[r(t) r(s)] &= (r_e)^2 + (r_0 - r_e)^2 e^{-\alpha(t+s)} + r_e (r_0 - r_e) (e^{-\alpha t} + e^{-\alpha s}) \\
 &+ \sigma^2 e^{-\alpha(t+s)} \int_0^{t \wedge s} e^{2\alpha u} dB(u) \\
 &= (r_e)^2 + (r_0 - r_e)^2 e^{-\alpha(t+s)} + r_e (r_0 - r_e) (e^{-\alpha t} + e^{-\alpha s}) \\
 &+ \frac{\sigma^2 e^{-\alpha(t \wedge s)}}{2\alpha} (e^{2\alpha(t \wedge s)} - 1).
 \end{aligned}$$

Sustituyendo esta expresión en (3.4.5) y considerando las expresiones $E[r(t)]$ y $E[r(s)]$ dadas en (3.4.3) y simplificando, se obtiene:

$$Cov[r(t), r(s)] = \frac{\sigma^2 e^{-\alpha(t+s)}}{2\alpha} (e^{2\alpha(t \wedge s)} - 1).$$

Obsérvese que haciendo $s = t$ a la expresión anterior, se obtiene la expresión de la varianza dada en (3.4.4).

➤ **Función Distribución del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek**

La función distribución del proceso solución $r(t)$ es normal o *gaussiana*, este proceso dado en (3.3.5) es una transformación lineal de una normal y considerando la propiedad I.4 de la Integral de Itô, se obtiene:

$$r(t) \sim N \left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha t}) \right).$$

3.5. Simulación del modelo de Vasicek

Con la finalidad de evaluar la calidad que tiene el modelo de Vasicek en la modelización de tipos de interés en casos prácticos, obsérvese que su solución $r(t)$ dada en (3.3.5) está en términos de la integral estocástica

$$\int_0^t e^{\alpha u} dB(u), \quad (3.5.1)$$

siendo entonces necesario disponer de estrategias para la simulación de dicha integral. La manera de abordar dicha simulación se detalla a continuación (véase Apartado 3.5.1) y además, con posterioridad, será considerada en la aplicación y validación del modelo al caso práctico analizado en el Capítulo 4.

3.5.1. Simulación por re-escalado del tiempo del Movimiento Browniano

Se observa que, dada la propiedad I.4 de la Integral de Itô, se sabe

$$\int_0^t e^{\alpha u} dB(u) \sim N \left[0; \int_0^t e^{2\alpha u} du \right].$$

Por otro lado,

$$\int_0^t e^{2\alpha u} du = \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1),$$

obteniendo por tanto:

$$\int_0^t e^{\alpha u} dB(u) \sim N \left[0; \frac{1}{2\alpha} (e^{2\alpha t} - 1) \right],$$

o equivalentemente, usando la definición del Movimiento Browniano (véase Apartado 2.1),

$$\int_0^t e^{\alpha u} dB(u) \stackrel{d}{=} B\left(\int_0^t e^{2\alpha u} du\right) = B\left(\frac{1}{2\alpha}(e^{2\alpha t} - 1)\right),$$

donde $\stackrel{d}{=}$ denota que la igualdad es en distribución.

Ahora, considerando la propiedad de $\frac{1}{2}$ - autosemejante del Movimiento Browniano (véase Apartado 2.1), se obtiene

$$\int_0^t e^{\alpha u} dB(u) = \frac{1}{\sqrt{2\alpha}} B(e^{2\alpha t} - 1).$$

Esto permite que, la representación del proceso solución $r(t)$ dada en (3.3.5) se pueda dar en términos del Movimiento Browniano re-escalado en el tiempo:

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t}}{\sqrt{2\alpha}} B(e^{2\alpha t} - 1). \quad (3.5.2)$$

Para facilitar más el proceso de simulación, se recuerda el uso de variables aleatorias normales tipificadas (véase Apartado 2.3) y la identidad dada en (2.3.1):

$$B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N(0; 1),$$

que, sustituyendo dicha expresión en (3.5.2), ésta puede reescribirse como:

$$r(t) \stackrel{d}{=} r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z, \quad Z \sim N(0; 1). \quad (3.5.3)$$

3.6. Estudio asintótico del modelo de Vasicek

Hasta ahora se ha estudiado el modelo de tipos de interés de Vasicek en tiempos finitos ($0 \leq t < \infty$) y cuya solución es el proceso estocástico $r(t)$ dado en (3.3.5). De dicha solución se han analizado sus principales propiedades estadísticas, también conocidas como leyes probabilísticas condicionales de $r(t)$. No obstante, en la propia formulación del modelo se considera el comportamiento a largo plazo (o asintótico) del tipo de interés, recuérdese que el parámetro r_e denotaba el tipo de interés a largo plazo al cual, en principio, el modelo *retorna* para tiempos grandes.

En el presente apartado se procederá a analizar el modelo de tipos de interés de Vasicek asintóticamente, i.e., cuando $t \rightarrow \infty$. Para ello se toma como punto de partida la representación de la solución en tiempos finitos anteriormente definida como,

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \sigma \int_0^t e^{-\alpha(t-s)} dB(s).$$

La normalidad procede de la representación, de la propiedad I.4 de la Integral de Itô y de la propiedad 1 de las variables aleatorias Gaussianas (Distribución Normal). La media y varianza del proceso estocástico solución $r(t)$, ya fueron calculadas en el apartado anterior (véase Apartado 3.4).

$$r(t) \sim N\left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right).$$

Cuando $t \rightarrow \infty$, tomando límites en la expresión de $r(t)$ y teniendo en cuenta que $\alpha > 0$, se obtiene que

$$r_\infty \sim N\left(r_e; \frac{\sigma^2}{2\alpha}\right).$$

El límite de variables aleatorias Gaussianas, es una variable aleatoria Gaussiana y en este caso, la media de la variable aleatoria límite, tal y como queda expresada, es el valor de equilibrio r_e . Obsérvese por tanto que con ello, se refuerza el modelo de Vasicek de los tipos de interés como un modelo de regresión a la media ya que r_e denota en el planteamiento asintótico del modelo, el tipo de interés a largo plazo.

3.7. Estimación de parámetros del modelo de Vasicek

El modelo (estocástico) de tipos de interés de Vasicek quedó representado con una ecuación diferencial estocástica de Itô (véase Apartado 3.2) del siguiente tipo:

$$\left. \begin{aligned} dr(t) &= k(\mu - r(t))dt + k \lambda dB(t), \\ r(0) &= r_0. \end{aligned} \right\}$$

Por tanto, los parámetros del modelo a estimar son:

α = la velocidad hacia la convergencia (r_e).

σ = la intensidad de la variabilidad.

r_e = el valor al que el tipo de interés tiende a largo plazo.

Estos parámetros serán estimados empleando 2 metodologías diferentes pero complementarias y que, al final, ambas llevarán al mismo resultado o vector de parámetros del modelo. A continuación se desarrollan teórica y conceptualmente el Método de Máxima Verosimilitud y un método no paramétrico.

3.7.1. Estimación de los parámetros del modelo por el Método de Máxima Verosimilitud

El Método de Máxima Verosimilitud determina los valores de los parámetros que maximizan la función de verosimilitud de la muestra. En el contexto de este trabajo, la función de verosimilitud de la muestra r_0, r_1, \dots, r_N (tomada en intervalos de tiempo de longitud constante Δt) viene dada por la función de densidad conjunta de dicha muestra:

$$L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N) .$$

Empleando el Teorema de la Probabilidad Total y considerando la propiedad del modelo de Vasicek consistente en que la solución del mismo $r(t)$ es un proceso estocástico Markoviano de primer orden¹⁶, se obtiene que:

$$L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N) = L(\alpha, r_e, \sigma; r_0)L(\alpha, r_e, \sigma; r_1 | r_0) \dots (L(\alpha, r_e, \sigma; r_N | r_0, r_1, \dots, r_{N-1})),$$

$$L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N) = L(\alpha, r_e, \sigma; r_1 | r_0)L(\alpha, r_e, \sigma; r_2 | r_1) \dots L(\alpha, r_e, \sigma; r_N | r_{N-1}).$$

¹⁶Informalmente, un proceso estocástico se denomina Markoviano de primer orden cuando el suceso asociado al proceso en un instante t solo depende del suceso asociado al proceso en el instante anterior, $t - 1$, y de ningún otro suceso acontecido en instantes anteriores al $t - 1$.

En la primera igualdad se ha aplicado el Teorema de la Probabilidad Total y en la segunda, que el proceso estocástico solución es Markoviano de primer orden (sólo depende del instante temporal anterior). A partir de esta segunda igualdad obtenida y considerando la normalidad del proceso solución del modelo de Vasicek

$$r(t) \sim N\left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right),$$

se llega a la siguiente expresión para la función de verosimilitud, la cual se aplica sobre cada subintervalo de longitud Δt donde se dispone de un valor de la muestra:

$$\begin{aligned} L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_1 - (r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2} \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_2 - (r_e + (r_1 - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2} \\ &\times \dots \\ &\times \frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{r_N - (r_e + (r_{N-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2} \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^N e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2} \\ &= \left(2\pi \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right)^{-\frac{N}{2}} e^{-\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2}. \end{aligned}$$

En el desarrollo anterior, se pueden apreciar aspectos cualitativos del modelo de Vasicek de gran importancia. Obsérvese que, mientras que la media es variable en cada subintervalo, el modelo asume que la varianza es constante, lo cual ha sido motivo de crítica del modelo y ha motivado la aparición de otros modelos más avanzados donde la varianza se considera que varía con el tiempo¹⁷. Además, estos comentarios sobre el modelo de Vasicek ayudan a entender mejor por qué, con frecuencia, se le denomina un modelo de tipos de interés de corto plazo o *short-term*, ya que, en intervalos cortos (de longitud Δt) se asumen determinadas hipótesis para poner en práctica el modelo.

Como la función de verosimilitud contiene términos exponenciales, es más sencillo (y equivalente) optimizar el logaritmo neperiano de dicha función. A esta nueva función, se denomina función de log-verosimilitud

$$\hat{L}(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N) = \ln(L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N)),$$

que en este caso está dada por:

$$\begin{aligned} \ln(L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N)) &= -\frac{N}{2} \left(\ln(2\pi) + \ln \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_i - (r_e + (r_{i-1} - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2 \\ &= -\frac{N}{2} \left(\ln(2\pi) + \ln \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_{i+1} - (r_e + (r_i - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2. \end{aligned}$$

¹⁷Cox, J.C.; Ingersoll, J.E.; Ross, S.A. (1985) A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, nº 53 pp. 385–407.

3.7.2. Estimación de los parámetros del modelo por un método no paramétrico

En esta sección se complementa la estimación de parámetros del modelo de Vasicek realizada por el Método de Máxima Verosimilitud mediante un método no paramétrico¹⁸. Para describir con mayor generalidad este método de estimación, se parte de una ecuación diferencial estocástica tipo Itô general:

$$dx(t) = f(t, x(t); \vec{\vartheta})dt + g(t, x(t); \vec{\vartheta})dB(t) \quad (3.7.1)$$

siendo $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^p$ el vector de parámetros que se desea estimar. En el caso del modelo de Vasicek, $\vec{\vartheta} = (\alpha, r_e, \sigma) \in \mathbb{R}^3$. A continuación se discretiza la ecuación (3.7.1) por algún método numérico, por ejemplo, mediante un esquema de Euler:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(t, x(t); \vec{\vartheta})\Delta t + g(t, x(t); \vec{\vartheta})\Delta B(t),$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(t, x(t); \vec{\vartheta})\Delta t + g(t, x(t); \vec{\vartheta})\Delta B(t). \quad (3.7.2)$$

Fijada una partición del intervalo de tiempo $[0, T]$ donde se quiere aproximar la ecuación (3.7.1):

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} = T.$$

Con paso fijo: $\Delta t = \frac{T}{N}$, obsérvese que se está dividiendo el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de la forma:

$$[t_i, t_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq N - 2$$

siendo $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, y denotando por x_i la aproximación de $x(t)$ en el punto t_i , por ejemplo, $x_i \cong x(t_i)$, $0 \leq i \leq N - 1$, según (3.7.2) se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i; \vec{\vartheta})\Delta t + g(t_i, x_i; \vec{\vartheta})\sqrt{\Delta t}\eta_i, \quad \eta_i \sim N(0; 1), \quad 0 \leq i \leq N - 1,$$

¹⁸Stanton, R. (1997) A non parametric model of term structure dynamic and the market Price of interest rate risk. *Journal of Finance*, nº 52.

donde se ha utilizado que (véase propiedad MB.4)

$$B(t_i + \Delta t) - B(t_i) \sim N[0, \sqrt{\Delta t}].$$

Ahora utilizando que la solución de la ecuación diferencial estocástica (3.7.1) es un proceso de difusión¹⁹, se cumplen las siguientes relaciones:

$$E \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - f(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) \right] = \vartheta(\Delta t), \quad (3.7.3)$$

$$E \left[\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta t} - \left(g(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) \right)^2 \right] = \vartheta(\Delta t), \quad (3.7.4)$$

que indican que el tamaño de los órdenes de los momentos de los términos que aparezcan en los miembros de la izquierda.

Para estimar el vector de parámetros a partir de una muestra $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ se utilizan las relaciones (3.7.3)-(3.7.4) en su versión muestral:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i), \quad (3.7.5)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(g(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) \right)^2 = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2, \quad (3.7.6)$$

En el caso del modelo de Vasicek, considerando el vector de parámetros a estimar $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$, se necesitará introducir una ecuación más que, en el contexto general anterior, sería:

$$E \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - x_i f(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) \right] = \vartheta(\Delta t),$$

que muestralmente se escribe

$$\sum_{i=0}^{N-1} x_i (x_{i+1} - x_i) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} x_i f(t_i, x_i; \vec{\vartheta}), \quad (3.7.7)$$

¹⁹Øksendal, B. (1980) *Stochastic Differential Equations*. Nueva York: Springer-Verlag, 2nd Edition.

a partir de la muestra $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$, que en el caso del modelo de Vasicek son los tipos de interés $\{r_0, r_1, \dots, r_{N-1}\}$, resolviendo el sistema de ecuaciones (3.7.5)-(3.7.7), se estimaría el vector de parámetros $\vec{\vartheta} \in \mathbb{R}^3$. Obsérvese que en el contexto del modelo de Vasicek,

$$\begin{aligned}f(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) &= (\alpha, r_e, \sigma) = \alpha(r_e - r), \\g(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) &= (\alpha, r_e, \sigma) = \sigma.\end{aligned}$$

Por supuesto, la aplicación de este método se basa en disponer de un asistente numérico para resolver el sistema de ecuaciones no lineales. En el caso de esta memoria, se utilizará *Mathematica*.

3.8. Validación del modelo de Vasicek.

Con objeto de analizar el buen ajuste del modelo se pueden emplear diversas herramientas. No obstante, en esta memoria las medidas de bondad de ajuste que se emplearán para la validación del modelo de Vasicek aplicado al tipo de interés del Euribor a 1 mes (véase Apartado 4.2), serán:

- Error cuadrático medio (Root Mean Squared Error, RMSE).
- Error porcentual absoluto medio (Mean Absolute Percentage Error, MAPE)
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.
- Gráfico de observaciones y predicciones (puntuales y por intervalos).

El desarrollo de la validación del modelo se lleva a cabo bajo 2 enfoques diferentes, primero se aplica el modelo teórico de Vasicek y después, mediante el método de simulación de Monte Carlo. En base a los resultados obtenidos según las medidas de bondad del ajuste anteriormente especificadas, se evalúa la adecuación y ajuste del modelo en cada uno de ellos, para proceder así a realizar las predicciones del tipo de interés en cuestión.

3.8.1. Medidas de bondad de ajuste:

- **Error cuadrático medio (RMSE)**

La medida de bondad de ajuste RMSE, mide la distancia euclídea por término medio entre los valores observados y los estimados. Cuanto menor sea el resultado del RMSE, entonces se podrá decir que el error en el modelo presentado será menor.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K (S_i - \hat{S}_i)^2}{K}}$$

El cálculo de la misma se realizará una primera vez, considerando las predicciones puntuales (función media) que se obtengan de aplicar el modelo teórico de Vasicek. Estimado el RMSE con este enfoque, se repetirán los mismos cálculos, pero esta vez, empleando las predicciones puntuales resultantes de las simulaciones del tipo de interés obtenidas con el método de Monte Carlo. Calculados y contrastados los resultados del RMSE que muestren cada uno de los enfoques de la validación, será posible tener una primera idea de cuál de ellos muestra un mejor ajuste.

- **Error porcentual absoluto medio (MAPE)**

La segunda de las medidas de precisión de pronóstico a emplear, el MAPE, se calcula como el promedio de las diferencias absolutas entre los valores pronosticados y los observados, quedando expresado como un porcentaje de los valores reales. Es decir, si se pronostican k periodos y los valores reales corresponden a k periodos, el MAPE se calcula como:

$$MAPE = \frac{100}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}$$

Del mismo modo que con el RMSE, el MAPE será calculado por un lado, considerando las predicciones puntuales dadas a partir de la aplicación del modelo teórico de Vasicek y por otro lado, empleando las estimaciones obtenidas a través del método de Monte Carlo. Además de realizar el correspondiente contraste de los resultados que esta medida presente en cada uno de los enfoques, individualmente, se considerará un error global de diagnóstico tolerable, cuando el MAPE obtenido sea inferior al 10%.

3.8.2. Validación por intervalos de confianza

La construcción y estudio de intervalos de confianza (IC) del 95% es otra de las herramientas a emplear de cara a validar la aplicación del modelo de Vasicek al tipo de interés Euribor a 1 mes. En la construcción de los IC, hay dos elementos fundamentales a considerar. Por un lado, la amplitud del intervalo da la precisión de la estimación y por tanto, deberá ser la menor posible y, por otro lado, la probabilidad de que el intervalo contenga el verdadero valor del parámetro a estimar (Euribor a 1 mes), que se llama nivel de confianza e interesará que sea la mayor posible. En base a esto, es cierto que se puede ganar en precisión a costa de perder confianza en la estimación. En la presente memoria, como se ha indicado, los intervalos de confianza construidos atienden a un nivel de confianza del 95%.

Este apartado se centra en la estimación de la variable en cuestión (Euribor a 1 mes) a partir del intervalo que tiene por extremos los valores de dos funciones para una muestra, siendo esta una estimación de la variable por intervalos de confianza.

Para centrar ideas, supongamos que se selecciona una muestra aleatoria simple de una población descrita por la función $f(x; \theta)$ dependiente del parámetro θ que se pretende estimar. El problema se plantea como sigue: se fija un nivel de confianza, que se denota por $1 - \alpha$, en donde $0 < \alpha < 1$, y se trata de determinar dos funciones $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de forma que:

$$P[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1 - \alpha .$$

Al intervalo $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ se le denomina *intervalo de confianza* del parámetro θ al nivel de confianza del $(1 - \alpha)100\%$. Es importante observar que sería un error afirmar que la probabilidad indicada anteriormente, es la probabilidad de que θ esté entre los números reales $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$, puesto que θ no es una variable aleatoria sino un parámetro que tendrá un valor concreto. Las variables aleatorias son $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ al variar la muestra, luego la probabilidad anterior debe considerarse como la probabilidad de que el intervalo aleatorio $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$ contenga el verdadero valor de θ .

Dicho en términos de frecuencias esto significa que de cada 100 muestras aleatorias que se tomen, cabe esperar que el $(1 - \alpha)100\%$ de ellas contenga el verdadero valor de θ entre $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

Suponiendo que (x_1, x_2, \dots, x_n) es una muestra aleatoria simple y que \bar{x} es la media muestral. La variable aleatoria \bar{x} media muestral se distribuye según una normal $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$, suponiendo que la población es $N[\mu, \sigma]$ con σ conocida. Esta propiedad permite asegurar que la variable tipificada $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$ sigue una $N[0, 1]$, y por lo tanto, fijando un nivel de confianza $1 - \alpha$, obtener el valor $\lambda_{\alpha/2}$ tal que

$$P\left[\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Operando, resulta:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \lambda_{\alpha/2}\right], \\ &= P\left[-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \\ &= P\left[-\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right], \\ &= P\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]. \end{aligned}$$

Con lo que las funciones buscadas son:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ \theta_2 &= \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional al nivel de confianza del $(1 - \alpha) 100\%$ es:

$$\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right].$$

Nótese que se puede ganar en precisión de dos formas, bien perdiendo confianza lo que, en general, no interesa, o bien aumentando el tamaño n de la muestra seleccionada.

3.8.3. Gráficos comparativos

Finalmente, calculada la función media (predicción puntual) y los intervalos de confianza (predicción por intervalos) para cada uno de los instantes de tiempo que comprenden el horizonte temporal observado y bajo cada uno de los enfoques dados para la validación del modelo, se realizarán sus representaciones gráficas.

A través de estas, se realizará un estudio comparativo mediante el cual, visualmente, se podrá observar por un lado, el grado de ajuste existente entre las observaciones de la muestra (valor real del Euribor a 1 mes publicado por el Banco de España) y las predicciones puntuales (medias) obtenidas en cada uno de los enfoques. Por otro lado, este análisis cualitativo se reforzará cuantitativamente calculando las medidas de bondad de ajuste anteriormente señaladas y una comparativa de los intervalos de confianza obtenidos en ambos casos.

3.9. Simulación mediante método Monte Carlo: aplicación al caso del modelo de Vasicek

En el Método Monte Carlo (MC) o Simulación Monte Carlo se agrupan procedimientos que analizan distribuciones de variables aleatorias usando una simulación de número aleatorios. Este método, da una solución a una gran variedad de problemas matemáticos haciendo experimentos con muestreos estadísticos en un ordenador. Por lo tanto, generalmente se emplea en cualquier tipo de esquema capaz de poder emplear números aleatorios, utilizando variables aleatorias con distribuciones de probabilidad conocidas.

La denominación de dicho método deriva del principado de Mónaco, por ser “la capital del juego de azar”, al considerar una ruleta como un generador simple de números aleatorios. El nombre y desarrollo sistemático de los métodos de MC datan aproximadamente de 1944 con el desarrollo de los ordenadores. El uso real de éstos como una herramienta de investigación, proviene del trabajo de la bomba aleatoria durante la Segunda Guerra Mundial.

Es por tanto que este método MC será aplicable a cualquier tipo de problema, bien sea estocástico o determinístico. Se puede realizar en condiciones diferentes y determinar la mejor solución en el marco de los resultados obtenidos. Son muchos los autores que han apostado por utilizar hojas de cálculo para realizar simulación MC. La potencia de las hojas de cálculo reside en su universalidad, sencillo uso, en su capacidad para recalcular valores y, sobre todo, en la posibilidad que ofrece con respecto al análisis de escenarios.

Para poder realizar el Método MC, lo primero es crear el modelo matemático del sistema, proceso o actividad que se quiere analizar, identificando las variables cuyo comportamiento aleatorio determina el comportamiento global del sistema. Identificados dichas variables aleatorias, se lleva a cabo un experimento consistente en:

- Primero, generar muestras aleatorias con ayuda del ordenador (obtención de valores concretos).
- Segundo, analizar el comportamiento del sistema ante los valores generados.

Repetido N veces este experimento, se dispone de N observaciones sobre el comportamiento del sistema, lo cual es de utilidad para entender el funcionamiento del sistema: por lo tanto, a mayor número de N observaciones, más precisión tendrá el análisis. Para un trato más extenso sobre el tema, consultar el texto *Gilks, Richardson y Spiegelhalter (1996)*.

Una vez estimados los parámetros μ , σ y r_e , se sustituyen en la expresión:

$$r(t) = \hat{r}_e + (r_0 - \hat{r}_e)e^{-\hat{\alpha}t} + \frac{\hat{\sigma}e^{-\hat{\alpha}t}\sqrt{e^{2\hat{\alpha}t}-1}}{\sqrt{2\hat{\alpha}}}Z, \quad Z \sim N[0,1].$$

De esta manera, generando diferentes valores de Z , se obtendrán diferentes estimaciones puntuales de $r(t)$ para la valoración del tipo de interés interbancario Euribor a 1 mes, para un instante de tiempo fijo t .

Las hojas de cálculo como Excel son capaces de generar números aleatorios procedentes de una distribución normal con media 0 y desviación típica 1. Este tipo de números son elementos básicos a partir de los cuales se desarrolla cualquier simulación por ordenador. En Excel, es posible obtener los valores de dicha variable aleatoria empleando la función `DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO())`.

3.10. Predicción

Uno de los objetivos que se persigue con los modelos económicos es el poder realizar predicciones de la variable en cuestión. El modelo ajustado debe permitir predecir el valor medio (estimación puntual) de la misma, o encontrar un intervalo que contenga el valor real con una determinada probabilidad (estimación por intervalos).

Obtener una estimación puntual será posible mediante el valor esperado de la variable estudiada Y , asociado a determinados valores de las variables explicativas del modelo ajustado. Para ello, se calcula la estimación de Y correspondiente a su valor medio condicionado $E(Y|x_1, \dots, x_k)$, como se expresa:

$$\hat{Y} = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z.$$

Por otro lado, la predicción puntual debe completarse con la varianza de la estimación, conociéndose así el error de la predicción puntual y obteniendo con ambos valores, el intervalo de confianza. El intervalo de confianza a nivel α para la estimación de Y se muestra a continuación:

$$\hat{Y} + \mu \pm (1,96 \cdot S)$$

4 | APLICACIÓN DEL MODELO DE VASICEK AL EURIBOR A 1 MES

Para la aplicación y validación del modelo de Vasicek, el tipo de interés interbancario escogido es el Euribor a 1 mes. Esta elección está condicionada al tipo de modelo que se estudia en esta memoria (modelo de Vasicek) y a los supuestos básicos del mismo. La formulación del modelo de tipos de interés de Vasicek, en sus hipótesis, exige que el tipo de interés sea de corto plazo o "short-term". En el Gráfico 4.1 queda ilustrado el comportamiento del tipo de interés interbancario Euribor a 1 mes, en el período de tiempo que va desde el 2 de Enero de 2002 hasta el 11 de Julio de 2013.

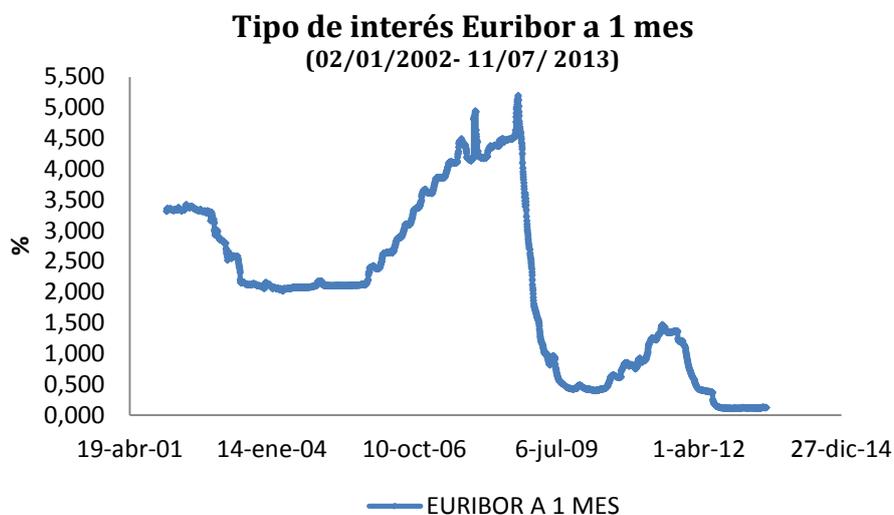


Gráfico 4.1. Tipo de Interés Euribor a 1 mes. Período: 02/01/2002- 11/07/2013

Fuente: Banco de España. Elaboración propia.

Con objeto de poder aplicar el modelo de Vasicek y testear su validez para el tipo de interés Euribor a 1 mes, se hace necesario seleccionar un período en el cual se observe un comportamiento con regresión a la media, es decir, donde se observe una cierta estabilización asintótica. La elección de dicho período supone una decisión de compromiso que satisfaga dicha condición de reversión hacia un valor estable y que el período sea aceptablemente actual. El Gráfico 4.1 ayuda, en un primer momento, a elegir candidatos al período de aplicación del modelo. Un análisis estadístico básico ha permitido finalmente elegir el período 02/01/2013 – 11/07/2013. En el Gráfico 4.2 se muestran los valores diarios del tipo de interés Euribor a 1 mes durante el período de referencia. Estos valores han sido publicados por el Banco de España. Tal y como se observa en el Gráfico 4.2, dichos valores no muestran ninguna fluctuación acentuada a lo largo del correspondiente período, manteniéndose la tendencia central y mostrando un comportamiento bastante estable, desde el 0,109% del 02/01/2013 hasta el 0,123% del 11/07/2013. Estos son requerimientos para aplicar el modelo de Vasicek.

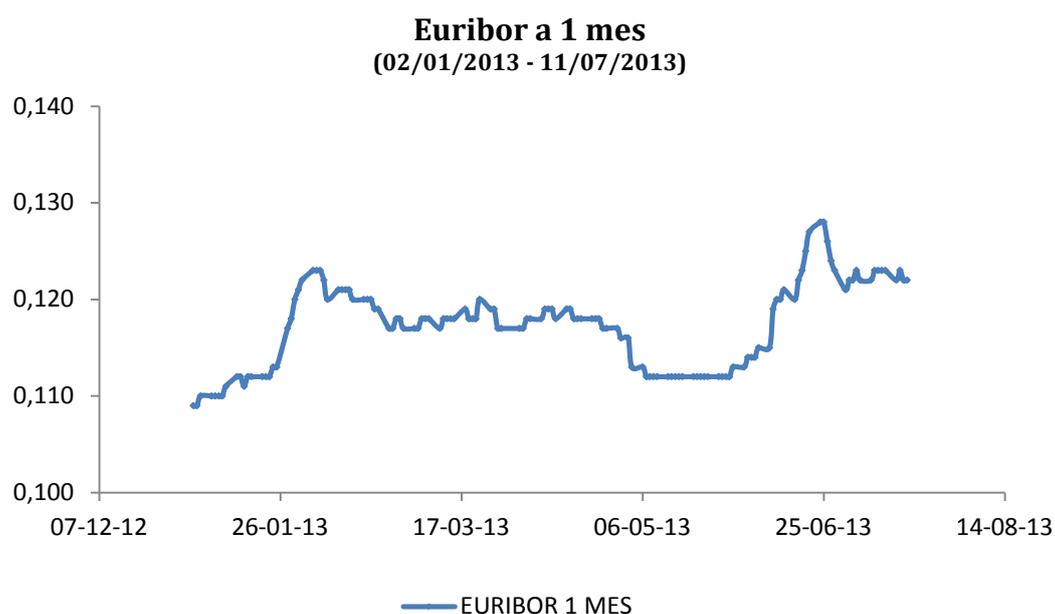


Gráfico 4.2. Tipo de Interés Euribor a 1 mes, año 2013. Período: 02/01/2013 - 11/07/2013

Fuente: Banco de España. Elaboración propia.

Cabe señalar que no ha sido necesario eliminar datos extremos, también denominados en la literatura estadística "outliers", para aplicar el modelo de Vasicek.

4.1. Estimación de parámetros para el modelo de Vasicek

Tal y como se introdujo en el Capítulo 3 (véase Apartado 3.7), el modelo de Vasicek (véase (3.3.5)) requiere estimar 3 parámetros: α , r_e , σ . Para llevar a cabo dicha estimación, en primer lugar se ha aplicado el Método de Máxima Verosimilitud (véase Apartado 3.7.1) y con posterioridad y, de manera complementaria con objeto de reforzar la estimación de los parámetros, se volverán a estimar los mismos a partir de un método no paramétrico (véase Apartado 3.7.2).

4.1.1. Estimación de parámetros por el Método de Máxima Verosimilitud

La primera estimación de parámetros obtenida se realizará mediante el Método de Máxima Log-Verosimilitud, a partir de la aplicación de la solución del modelo de Vasicek (véase (3.3.5)). Este análisis se realiza con la macro Solver de Excel (Figura 4.1.1).

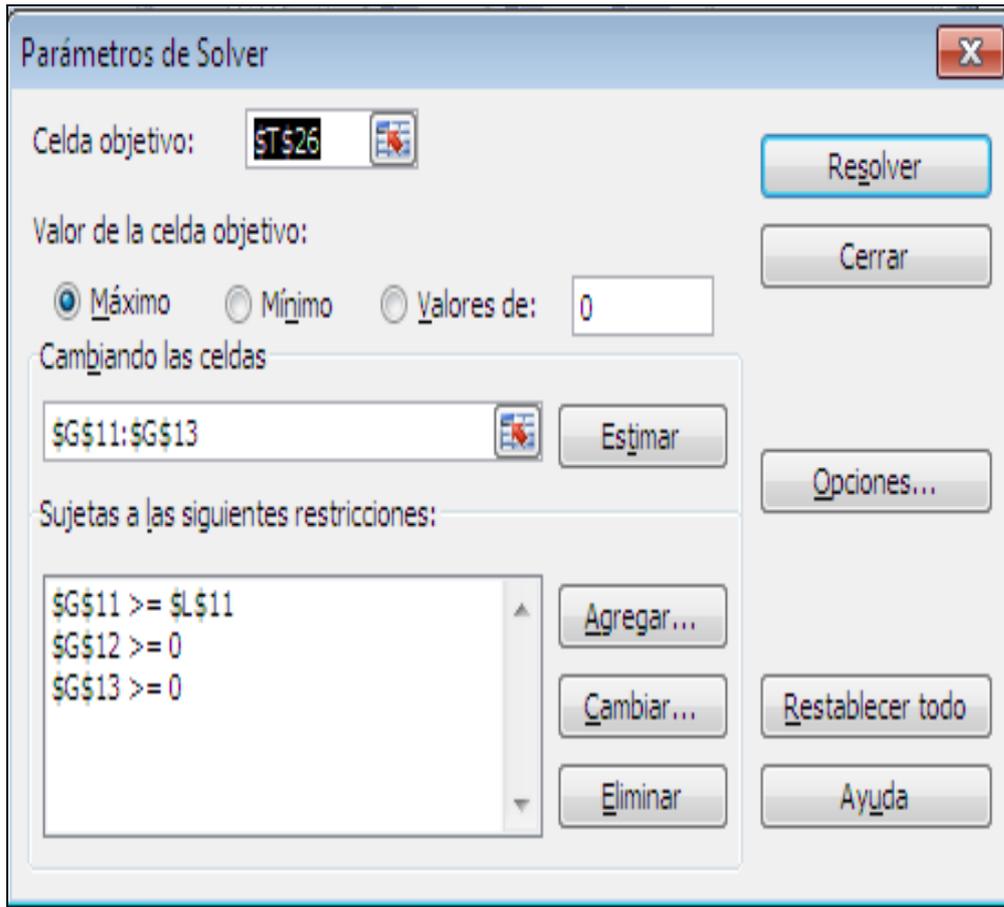


Figura 4.1.1. Estimación de parámetros del modelo de Vasicek mediante Solver.

Fuente: Elaboración propia. Software Solver (Excel).

Entrando en el detalle del proceso de análisis mostrado en la Figura 4.1.1 cabe puntualizar por un lado, que la celda objetivo a maximizar atiende a la función de log-verosimilitud ya descrita en el Capítulo 3 (véase Apartado 3.7.1):

$$\ln(L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N)) = -\frac{N}{2} \left(\ln(2\pi) + \ln \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \right) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{r_{i+1} - (r_e + (r_i - r_e)e^{-\alpha\Delta t})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t})}} \right)^2,$$

$$\ln(L(\alpha, r_e, \sigma; r_0, r_1, \dots, r_N)) = -\frac{N}{2} \left(\ln(2\pi) + \ln \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right) \right) - \frac{1}{2 \left(\frac{\sigma^2}{2\alpha} (1 - e^{-2\alpha\Delta t}) \right)} \sum_{i=1}^N \left(r_{i+1} - (r_e + (r_i - r_e)e^{-\alpha\Delta t}) \right)^2.$$

Por otro lado, las celdas cambiantes que hacen referencia a los 3 parámetros necesariamente se han de estimar para el modelo de Vasicek: α , r_e , σ . Las semillas o valores iniciales tomados para cada uno de ellos son:

- Para α se fija un número fijado previamente por tanteo. En este caso, ha sido de 1,1.
- Para r_e se ha tomado como referencia el promedio muestral de los datos, 0,117. Esta elección está motivada por la interpretación del parámetro r_e como el que determina el comportamiento asintótico de la solución del modelo de Vasicek.
- Para σ , nuevamente, se toma como referencia el estadístico muestral, la desviación típica de los datos, 0,00433. Del mismo modo que sucede con el parámetro r_e , la semilla de este parámetro σ se ha elegido motivado por su interpretación como la volatilidad de la solución del modelo de Vasicek.

Por último, atendiendo a la interpretación dada a cada uno de los parámetros a estimar, se introducen las siguientes restricciones con objeto de obtener la solución óptima:

$$\begin{aligned} \sigma &\geq 0, \\ r_e &\geq 0, \\ \alpha &\geq 0,00001. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta el proceso descrito (véase Figura 4.1.1), los resultados de los parámetros del modelo de Vasicek obtenidos mediante el Método de Máxima Log-Verosimilitud se detallan en la Tabla 4.1.1.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
1										
2			MUESTRA:	EURIBOR 1 MES						
3										
4	VALORES INICIALES:		PARÁMETROS A ESTIMAR:				CELDA CAMBIANTES			
5										
6	α	1,1	α	Velocidad hacia la convergencia			8,255108829			
7	r_e	0,117157	r_e	Valor al que se tiende			0,120379			
8	σ	0,0043388	σ	Intensidad de la viaribilidad			0,015519045			
9										
10			FUNCIÓN DE LOG-VEROSIMILITUD:			740,719				
11										
12			DATOS:	N	134	1 día = 1/252	3,141592654			
13				t	r	N	Δt	Π		
14			02-ene-13	0	0,109	1	0,003968254			0,000123962
15			03-ene-13	1	0,109	2	0,003968254	3,141592654	1,34481E-07	
16			04-ene-13	2	0,110	3	0,003968254	3,141592654	4,01048E-07	
17			07-ene-13	3	0,110	4	0,003968254	3,141592654	1,11883E-07	
18			08-ene-13	4	0,110	5	0,003968254	3,141592654	1,11883E-07	
19			09-ene-13	5	0,110	6	0,003968254	3,141592654	1,11883E-07	
20			10-ene-13	6	0,110	7	0,003968254	3,141592654	1,11883E-07	
21			11-ene-13	7	0,111	8	0,003968254	3,141592654	4,42905E-07	
22			14-ene-13	8	0,112	9	0,003968254	3,141592654	4,86839E-07	
23			15-ene-13	9	0,112	10	0,003968254	3,141592654	7,29183E-08	
24			16-ene-13	10	0,111	11	0,003968254	3,141592654	1,61299E-06	
25			17-ene-13	11	0,112	12	0,003968254	3,141592654	4,86839E-07	
26			18-ene-13	12	0,112	13	0,003968254	3,141592654	7,29183E-08	
27			21-ene-13	13	0,112	14	0,003968254	3,141592654	7,29183E-08	
28			22-ene-13	14	0,112	15	0,003968254	3,141592654	7,29183E-08	
29			23-ene-13	15	0,112	16	0,003968254	3,141592654	7,29183E-08	
30			24-ene-13	16	0,113	17	0,003968254	3,141592654	5,3285E-07	
31			25-ene-13	17	0,113	18	0,003968254	3,141592654	5,65518E-08	

Tabla 4.1.1. Resultados de los parámetros por Método de Máxima Verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Los resultados de la Columna I son empleados en la Celda F10 (Función Objetivo: Función de Log-Verosimilitud), en la que se obtiene el valor máximo del período con los respectivos parámetros resultantes en las Celdas G6-G8, los cuales corresponden a los valores de α , r_e , σ . Además, para el resultado de la Celda F10 se tiene en cuenta que, el incremento de t en el período a utilizar es de 1/252, correspondiéndose al paso unitario de un año medio con los 252 días de aperturas de los mercados financieros.

4.1.2. Estimación de parámetros por un método no paramétrico

Como se anticipó en el Capítulo 3 (véase Apartado 3.7.2), de forma complementaria, se vuelve a realizar la estimación de los parámetros necesarios en el modelo de Vasicek, pero en este caso, mediante un método no paramétrico. El objeto de estimar los parámetros por dos métodos distintos, es confrontar los resultados y asegurarnos de la robustez del modelo. Este es un aspecto crítico del estudio porque una mala estimación de los parámetros arruinaría nuestro modelo. Para el desarrollo del mismo se ha utilizado el software de cálculo simbólico *Mathematica*.

A partir de este *software* es posible resolver el sistema de 3 ecuaciones no lineales planteado a partir del método no paramétrico (véase (3.7.5)-(3.7.7)) que en *Mathematica* queda escrito e introducido como se detalla en la Figura 4.1.2.

Método no paramétrico

Modelo

```
f[t_, x_, θ1_, θ2_] := θ1 * (θ2 - x)
g[t_, x_, θ3_] := θ3
```

Datos

```
time = Range[1, 134];
Δ = 1 / 252;
xx;
n = Length[xx]

134
```

Resolución del sistema de 3 ecuaciones con 3 incógnitas

```
NSolve[
{Sum[f[time[[i]], xx[[i]], θ1, θ2], {i, 1, n - 1}] ==
  1/Δ * Sum[xx[[i + 1]] - xx[[i]], {i, 1, n - 1}],
Sum[(g[time[[i]], xx[[i]], θ3])^2, {i, 1, n - 1}] ==
  1/Δ * Sum[(xx[[i + 1]] - xx[[i]])^2, {i, 1, n - 1}],
Sum[xx[[i]] * f[time[[i]], xx[[i]], θ1, θ2], {i, 1, n - 1}] ==
  1/Δ * Sum[xx[[i]] * (xx[[i + 1]] - xx[[i]]), {i, 1, n - 1}], {θ1, θ2, θ3}]
{{θ1 → 8.255108829, θ2 → 0.120379, θ3 → 0.015519045},
{θ1 → 8.255108829, θ2 → 0.120379, θ3 → -0.015519045}}
```

Figura 4.1.2. Sistema de 3 Ecuaciones No Lineales con 3 incógnitas para modelo de Vasicek.

Fuente: Elaboración propia. (*Mathematica*).

A partir del contexto de Vasicek (véase (3.3)) se hace la siguiente identificación,

$$f(t_i, x_i; \vec{\theta}) = (\alpha, r_e, \sigma) = \alpha(r_e - r),$$

$$g(t_i, x_i; \vec{\theta}) = (\alpha, r_e, \sigma) = \sigma.$$

Por tanto, $\theta_1 = \alpha$, $\theta_2 = r_e$, $\theta_3 = \sigma$. A partir de la muestra observada de los 134 datos del tipo de interés interbancario Euribor a 1 mes durante el período de análisis (02/01/2013-11/07/2013) y volviendo a tener en cuenta que el incremento de tiempo a utilizar es de $1/252$, *Mathematica* resuelve el sistema de ecuaciones y estima el vector de parámetros definido $\{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}$ (véase Figura 4.1.2).

En relación a la solución obtenida, por un lado puntualizar que se obtienen 2 soluciones. No obstante, en base a la negatividad de θ_3 , en una de ellas, ésta queda descartada, puesto que $\theta_3 = \sigma > 0$. Por otro lado, realizando el oportuno contraste (véase Tabla 4.1.2) con la primera estimación de parámetros obtenida a través del Método de Log-Verosimilitud, se observa cómo los resultados dados por ambos métodos de estimación son completamente coincidentes en todos y cada uno de los 3 parámetros a considerar en el modelo de Vasicek. De esta manera se consigue reforzar la estimación de los parámetros a emplear en el modelo.

PARÁMETRO A ESTIMAR:	MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD	MÉTODO NO PARAMÉTRICO
r_e	0,120379	0,120379
α	8,25510	8,25510
σ	0,015519	0,015519

Tabla 4.1.2. Resultado de las estimaciones de parámetros del modelo de Vasicek.

Fuente: Elaboración propia.

4.2. Validación del modelo de Vasicek

Una vez estimados los parámetros requeridos para aplicar el modelo de Vasicek, es necesario proceder a la validación del modelo para lo cual, se emplean 2 enfoques. La validación llevada a cabo a través de criterios estadísticos, permitirá aceptar la solución del modelo para el caso concreto del tipo de interés aquí empleado, el Euribor a 1 mes. Estos criterios atienden por un lado, a medidas de bondad de ajuste y por otro lado, a la construcción de intervalos de confianza. El principal objeto de este estudio es, en base a los resultados obtenidos, poder validar las predicciones para el Euribor a 1 mes, indicando que son fiables y que no dependen de los métodos y datos empleados.

Los enfoques utilizados para la validación del modelo son, en primer lugar el modelo teórico de Vasicek y, en segundo lugar, el método de simulación Monte Carlo. El procedimiento a seguir es común en ambos casos, no obstante, atendiendo a los resultados obtenidos en cada uno de ellos, se escogerá y empleará con objeto de realizar predicciones, aquel que resulte más adecuado.

En el presente apartado, a través de los dos enfoques de la validación del modelo y de las medidas de bondad de ajuste a calcular en cada uno de ellos, se procederá a calcular la función media (estimación puntual del tipo de interés Euribor a 1 mes) y a construir los correspondientes intervalos de confianza (estimación por intervalos del tipo de interés Euribor a 1 mes), representando gráficamente los resultados obtenidos por ambas metodologías.

4.2.1. Modelo teórico de Vasicek

- **Estimaciones puntuales por el modelo teórico de Vasicek: Cálculo de la media y varianza teórica**

Se obtendrá una estimación puntual mediante el valor esperado (media) de la variable estudiada. A partir de la estimación de parámetros obtenida (véase Apartado 4.1) y de la solución del modelo de Vasicek (véase (3.3.5)), cabe recordar las propiedades estadísticas de la misma: función media (3.4.3) y función varianza (3.4.4).

En este enfoque, siguiendo el modelo teórico de Vasicek, lo primero a realizar es, calcular la media y varianza teórica del tipo de interés Euribor a 1 mes para cada instante de tiempo fijo t (véase Tabla 4.2.1). Aplicando la ecuación (3.4.3) y (3.4.4) con los parámetros estimados (Columna J de la Tabla 4.2.1), el resultado obtenido atiende a la media teórica (Columna F de la Tabla 4.2.1) y varianza teórica (Columna G de la Tabla 4.2.1) para cada $r(t)$ del período fijo estudiado. Cabe puntualizar que r_0 en el modelo de Vasicek se corresponde al tipo de interés Euribor a 1 mes en el instante inicial del estudio y que, el incremento de t en el período a utilizar es de $1/252$.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
1											
2	FECHA	Nº dato	t	EURIBOR A 1 MES	Predicción Euribor a 1 mes	Var[r(t)]	Desv.Típ				
3	02-ene-13	0	0,000000	0,109	0,109	0,0000000	0,000000				
4	03-ene-13	1	0,003968	0,109	0,109	0,0000009	0,000962				
5	04-ene-13	2	0,007937	0,110	0,110	0,0000018	0,001338				
6	07-ene-13	3	0,011905	0,110	0,110	0,0000026	0,001613				
7	08-ene-13	4	0,015873	0,110	0,110	0,0000034	0,001834				
8	09-ene-13	5	0,019841	0,110	0,111	0,0000041	0,002019				
9	10-ene-13	6	0,023810	0,110	0,111	0,0000047	0,002177				
10	11-ene-13	7	0,027778	0,111	0,111	0,0000054	0,002316				
11	14-ene-13	8	0,031746	0,112	0,112	0,0000060	0,002439				
12	15-ene-13	9	0,035714	0,112	0,112	0,0000065	0,002549				
13	16-ene-13	10	0,039683	0,111	0,112	0,0000070	0,002648				
14	17-ene-13	11	0,043651	0,112	0,112	0,0000075	0,002737				
15	18-ene-13	12	0,047619	0,112	0,113	0,0000079	0,002818				
16	21-ene-13	13	0,051587	0,112	0,113	0,0000084	0,002892				
17	22-ene-13	14	0,055556	0,112	0,113	0,0000088	0,002959				
18	23-ene-13	15	0,059524	0,112	0,113	0,0000091	0,003021				
19	24-ene-13	16	0,063492	0,113	0,114	0,0000095	0,003078				
20	25-ene-13	17	0,067460	0,113	0,114	0,0000098	0,003130				
21	28-ene-13	18	0,071429	0,117	0,114	0,0000101	0,003178				
22	29-ene-13	19	0,075397	0,118	0,114	0,0000104	0,003223				
23	30-ene-13	20	0,079365	0,120	0,114	0,0000107	0,003264				
24	31-ene-13	21	0,083333	0,121	0,115	0,0000109	0,003302				
25	01-feb-13	22	0,087302	0,122	0,115	0,0000111	0,003337				
26	04-feb-13	23	0,091270	0,123	0,115	0,0000114	0,003370				

PARÁMETROS ESTIMADOS

α 8,25510883

re 0,12037896

σ 0,01551905

Δt 0,00396825

$E[r(t)] = r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}$

$Var[r(t)] = \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})$

Tabla 4.2.1. Cálculo de la media y varianza teórica del tipo de interés Euribor a 1 mes.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Calculada la función media y función varianza para cada una de las 134 observaciones que componen la muestra observada, todo queda preparado para la posterior construcción de los intervalos de confianza.

- **Medidas de bondad de ajuste: Cálculo del error cuadrático medio (RMSE) y del error porcentual absoluto medio (MAPE)**

El error cuadrático medio (MSE), como ya se indicó (véase Apartado 3.8.1), mide la distancia al cuadrado por término medio entre los valores observados y los estimados. Cuanto menor sea el resultado de la raíz de éste (denotado por RMSE), entonces, se podrá decir que el error en el modelo, será menor. Por otro lado y de manera complementaria, se calcula el error porcentual absoluto medio (MAPE), el cual se considerará tolerable siempre que se muestre inferior a un 10% (véase Apartado 3.8.1).

La Tabla 4.2.2 recoge los resultados de estas medidas de precisión de pronóstico referentes a las estimaciones puntuales obtenidas con el modelo teórico de Vasicek (media teórica). Para mayor claridad, se detallan los pasos seguidos para el cálculo de ambas.

Para la estimación del RMSE (Tabla 4.2.2. Columna O13), primero se obtiene la media de la predicción del período (Tabla 4.2.2. Columna Q) en la Celda O7. Segundo, se obtiene la media en este caso de las observaciones de la muestra del período (Tabla 4.2.2. Columna R) en la Celda O8. Calculadas ambas medias, el tercer paso es obtener la diferencia en valores absolutos entre la media estimada y la real (Celda O9), dando lugar al error absoluto de medias diarias del período contemplado. Cuarto, en la Columna S se obtiene el residuo entre las observaciones y las predicciones. Quinto, se elevan al cuadrado los residuos obtenidos anteriormente (Columna T). Finalmente, para obtener el MSE (Celda O12) se suman los datos de la Columna T y se divide entre el número de datos del período (134 datos). Llegado a este punto, a la Celda O12 se le aplica la raíz cuadrada y se obtiene así el error cuadrático medio (RMSE) del período analizado en la celda O13.

Obtenido el RMSE, el procedimiento de cálculo seguido para hallar el error porcentual absoluto medio (MAPE) también pasa a ser desarrollado. Primero, se obtiene el error absoluto siendo este la diferencia en términos absolutos entre el dato observado y la estimación obtenida del mismo, para cada uno de los instantes de tiempo t (Tabla 4.2.2. Columna U). Segundo, este error absoluto obtenido para cada uno de los instantes de tiempo t pasa a ser dividido entre el correspondiente valor observado del instante de tiempo en cuestión (Tabla 4.2.2. Columna V). Realizado esto para cada uno de los instantes de tiempo que comprende la muestra observada, el tercer paso es obtener el sumatorio de los mismos, dando lugar con ello al error porcentual. Cuarto, dicho sumatorio obtenido pasa a dividirse entre el número total de datos que comprende la muestra (134 datos) y se multiplica por 100, quedando así en términos porcentuales el error medio (Tabla 4.2.2. Celda O14).

	M	N	O	P	Q	R	S	T	U	V
1										
2	MODELO TEÓRICO VASICEK				<i>Predicciones</i>	<i>Observaciones</i>	<i>Residuo</i>	<i>Residuo^2</i>	<i>Error Absoluto</i>	<i>Error Abs/Observ</i>
3					0,109	0,109	0,000	0,000000000	0,000	0,0000000
4					0,109	0,109	0,000	0,000000142	0,000	0,0034604
5					0,110	0,110	0,000	0,000000067	0,000	0,0023498
6					0,110	0,110	0,000	0,000000009	0,000	0,0008496
7	Media Estimada del periodo		0,1176736		0,110	0,110	0,000	0,000000188	0,000	0,0039401
8	Media Real del periodo		0,1171567		0,111	0,110	-0,001	0,000000580	0,001	0,0069254
9	Error Absoluto Medias periodo		0,0005169		0,111	0,110	-0,001	0,000001164	0,001	0,0098090
10	Suma Residuos al cuadrado		0,0023358		0,111	0,111	0,000	0,000000149	0,000	0,0034720
11					0,112	0,112	0,000	0,000000102	0,000	0,0028450
12	MSE		1,7431E-05		0,112	0,112	0,000	0,000000001	0,000	0,0002924
13	RMSE		0,00417505		0,112	0,111	-0,001	0,000001546	0,001	0,0112019
14	MAPE		2,63726312	(%)	0,113	0,112	-0,001	0,000000260	0,001	0,0045551
15					0,113	0,112	-0,001	0,000000590	0,001	0,0068557
16					0,113	0,112	-0,001	0,000001034	0,001	0,0090781
17					0,113	0,112	-0,001	0,000001580	0,001	0,0112247
18					0,113	0,112	-0,001	0,000002218	0,001	0,0132983
19					0,114	0,113	-0,001	0,000000509	0,001	0,0063163
20					0,114	0,113	-0,001	0,000000866	0,001	0,0082340
21					0,114	0,117	0,003	0,000008181	0,003	0,0244465
22					0,114	0,118	0,004	0,000013381	0,004	0,0310004
23					0,115	0,120	0,005	0,000029841	0,005	0,0455228
24					0,115	0,121	0,006	0,000039364	0,006	0,0518519
25					0,115	0,122	0,007	0,000050294	0,007	0,0581299
26					0,115	0,123	0,008	0,000062660	0,008	0,0643562
27					0,115	0,123	0,008	0,000059997	0,008	0,0629738

Tabla 4.2.2. Estudio medidas Bondad de Ajuste (Modelo de Vasicek): RMSE y MAPE

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Los valores obtenidos del RMSE y MAPE (véase Tabla 4.2.2) son de 0,00418 y 2,64%, respectivamente, lo que indica que el modelo es aceptable. El RMSE calculado es bajo y el MAPE con un valor inferior al 10%, evidencian un alto grado de aceptación del modelo. Esta validación realizada a través de estas dos medidas de bondad de ajuste, se volverá a efectuar, para reforzar nuestras conclusiones, en el Apartado 4.2.2 (véase Tabla 4.2.7) mediante la aplicación de la técnica de Monte Carlo.

▪ **Validación por intervalos de confianza: Cálculo de los intervalos de confianza teóricos**

Obtenidas las estimaciones puntuales (media teórica), se completará la estimación del Euribor a 1 mes mediante la estimación por intervalos de confianza (I.C.) al 95% (véase Apartado 3.8.2).

Empleando las propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del modelo de Vasicek (véase Apartado 3.4), se recuerda que la función distribución del proceso solución $r(t)$ es normal o *gaussiana*. Este proceso dado en (3.3.5) es una transformación lineal de una normal y considerando la propiedad I.4 de la Integral de Itô, se obtiene:

$$r(t) \sim N\left(r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t}; \frac{\sigma^2}{2\alpha}(1 - e^{-2\alpha t})\right).$$

En base a la normalidad de la función de distribución del proceso solución, la construcción de los intervalos de confianza de una distribución normal, a un nivel de confianza del 95%, se lleva a cabo de la manera que se detalla a continuación. A priori, cabe puntualizar que la predicción por intervalos de confianza debe complementarse con la varianza de la estimación ya calculada (véase Tabla 4.2.1. Columna G), conociéndose así el error en la predicción. La manera de presentar ambos valores es mediante los intervalos de confianza. El intervalo de confianza a un nivel $\alpha = 5\%$ para la estimación de Y es:

$$\hat{Y} + \mu \pm (1,96 \cdot S),$$

donde, recordando (3.4.3) y (3.4.4),

$$\mu = \hat{r}_e + (r_0 - \hat{r}_e)e^{-\hat{\alpha}t},$$

$$S = \sqrt{\frac{\hat{\sigma}^2}{2\hat{\alpha}}(1 - e^{-2\hat{\alpha}t})}.$$

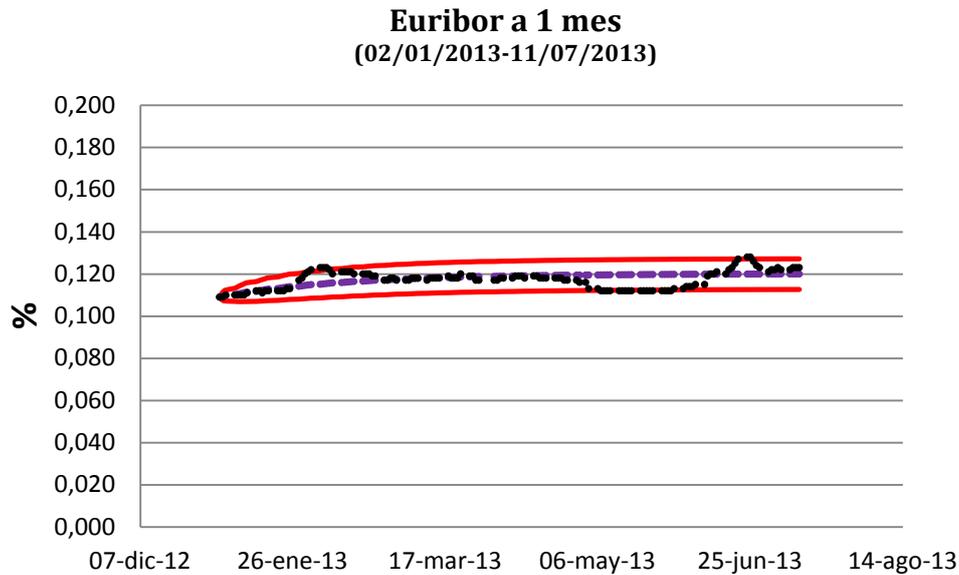
En la Tabla 4.2.3 se muestran los intervalos de confianza teóricos contruidos a partir de la media y desviación típica teóricas previamente obtenidas (véase Tabla 4.2.1, Columnas F y H, respectivamente). Calculando la raíz cuadrada de la varianza teórica, se obtiene la correspondiente desviación típica (Tabla 4.2.1 Columna H), siendo este el parámetro que realmente se requiere en la construcción de los intervalos. Para obtener el I.C. superior se suma a la estimación puntual calculada con el modelo teórico de Vasicek (media teórica), 1,96 veces el valor de la desviación típica obtenida, mientras que para hallar el I.C. inferior, la operación a seguir es exactamente la misma pero, sustituyendo la suma por una resta.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L
150												
151	I.C. 95%	02-ene-13	03-ene-13	04-ene-13	07-ene-13	08-ene-13	...		08-jul-13	09-jul-13	10-jul-13	11-jul-13
152		0	1	2	3	4			130	131	132	133
153	E[r(t)]	0,109	0,109	0,110	0,110	0,110			0,120	0,120	0,120	0,120
154	Desv.Tip[r(t)]	0,0000000	0,0009549	0,0013276	0,0015989	0,0018158			0,0036907	0,0036907	0,0036907	0,0036907
155	I.C. Superior 95%	0,109	0,111249	0,112344	0,113227	0,113992			0,127190	0,127194	0,127198	0,127202
156	I.C. Inferior 95%	0,109	0,107506	0,107139	0,106960	0,106874			0,112722	0,112726	0,112730	0,112734
157												

Tabla 4.2.3. Cálculo los de intervalos de confianza teóricos con 95% de confianza.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Calculada la estimación puntual (función media) y contruidos los intervalos de confianza teóricos para cada $r(t)$ del período observado a partir del modelo teórico de Vasicek, en el Gráfico 4.2.1 se muestra la representación de los mismos junto con los datos reales del Euribor a 1 mes publicados por el Banco de España en dicho período. De este modo se realiza la correspondiente comparativa gráfica entre las observaciones de la muestra y las estimaciones puntuales obtenidas con el modelo teórico de Vasicek, lo cual permite completar la validación del mismo.



- Media Teórica (Euribor a 1 mes)
- Histórico Euribor a 1 mes
- I.C. 95% TEÓRICOS

Gráfico 4.2.1. Análisis de los intervalos de confianza y medias teóricas.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

A partir del Gráfico 4.2.1 se observa cómo los intervalos de confianza teóricos obtenidos a partir del modelo teórico de Vasicek recogen de manera aceptable las fluctuaciones producidas en la muestra observada (Febrero, Mayo y Junio de 2013) y por tanto, cabe hablar que el modelo de Vasicek recoge satisfactoriamente la dinámica del Euribor a 1 mes. Esta afirmación queda corroborada con los valores que se han obtenido para las medidas de bondad de ajuste (RMSE y MAPE).

Entrando en mayor nivel de detalle, se aprecia que el tipo de interés Euribor a 1 mes de la muestra presenta una mayor volatilidad que la que se ha obtenido a partir de las predicciones resultantes de la aplicación del modelo, así como una menor estabilidad con respecto a las mismas. Esto queda justificado y razonado por la definición del propio modelo, la estabilidad asintótica (a largo plazo) es un aspecto inherente al mismo. Con la aplicación del modelo a este período, se llega a la estabilidad de su solución.

4.2.2. Simulación mediante el Método de Monte Carlo: Aplicación al caso del modelo de Vasicek

Descrito el método de Monte Carlo (véase Apartado 3.9), en este apartado se aplica al caso del modelo de Vasicek desarrollado en esta memoria. Una vez obtenidas las estimaciones de los parámetros requeridos (véase Apartado 4.1), estos son sustituidos en la expresión (3.5.3), obteniendo:

$$r(t) = \hat{r}_e + (r_0 - \hat{r}_e)e^{-\hat{\alpha}t} + \frac{\hat{\sigma}e^{-\hat{\alpha}t}\sqrt{e^{2\hat{\alpha}t}-1}}{\sqrt{2\hat{\alpha}}}Z, \quad Z \sim N[0; 1].$$

Con objeto de obtener diferentes estimaciones puntuales de $r(t)$ para la valoración del tipo de interés Euribor a 1 mes en cada momento fijo t del período estudiado, es necesario generar diferentes valores de la variable aleatoria $Z \sim N[0; 1]$. Las hojas de cálculo son capaces de generar números aleatorios procedentes de una distribución normal inversa con media 0 y desviación típica 1. Este tipo de números aleatorios son elementos básicos a partir de los cuales se desarrolla cualquier simulación por ordenador. En Excel, es posible obtener los valores de dicha variable aleatoria empleando la función DISTR.NORM.ESTAND.INV(ALEATORIO()).

Cuando se aplica el método de Monte Carlo para el cálculo de la estimación puntual (media) y la posterior estimación por intervalos de confianza, lo primero que se ha de determinar es el número M de veces que se simulará la v.a. Z . Este aspecto guarda relación con la anchura del intervalo de confianza, ya que, la medida de la variación diaria producida (δ), como mínimo, deberá estar contenida en dicha amplitud. Por tanto, siendo (véase Apartado 3.8.2):

$$IC_{95}(r(t)) = \left[\bar{x} - 1,96 \cdot \frac{\sigma(t)}{\sqrt{M}}, \bar{x} + 1,96 \cdot \frac{\sigma(t)}{\sqrt{M}} \right],$$

donde M denota al número de simulaciones y la anchura del intervalo es

$$2 \cdot 1,96 \cdot \frac{\sigma(t)}{\sqrt{M}},$$

se establece la siguiente restricción mediante la desigualdad

$$2 \cdot 1,96 \cdot \frac{\sigma(t)}{\sqrt{M}} \leq \delta. \quad (4.2.4)$$

Despejando de la expresión (4.2.4) el parámetro M , se obtiene el número mínimo de simulaciones a realizar de la v.a. Z , que queda expresado de la siguiente manera

$$\left(2 \cdot 1,96 \cdot \frac{\sigma(t)}{\delta}\right)^2 \leq M. \quad (4.2.5)$$

Existen diferentes criterios para definir la variación diaria δ y en función de éstos, variará el número M de simulaciones a realizar. En esta memoria, la forma de calcular el número de simulaciones a realizar ha sido mediante un proceso previo de filtrado de los "outliers" y que se describe paso a paso a continuación (véase Tabla 4.2.4):

1. Se calcula la diferencia entre cada dato del Euribor a 1 mes y su consecutivo (Tabla 4.2.4. Columna I). Si la muestra es de 134 datos inicialmente, se obtienen 133 datos referentes a dichas diferencias.
2. Se calcula la media, m_1 , y la desviación típica, s_1 , de esos 133 datos que componen el conjunto de diferencias calculadas (Tabla 4.2.4. Celdas N3 y N4, respectivamente).
3. A partir de m_1 y s_1 , se calcula el intervalo $[m_1 - 3s_1, m_1 + 3s_1]$ (Tabla 4.2.4. Celdas N8 y N9) y se eliminan todos los datos de las diferencias que queden fuera del mismo. De esta manera se consigue eliminar los "outliers" que son un total de 3 y se pasa a trabajar con 130 datos de diferencias.
4. Eliminados los "outliers" (Tabla 4.2.4. Columna L), se calcula de nuevo la media, m_2 , y la desviación típica, s_2 , de, ahora, los 130 datos de diferencias (Tabla 4.2.4. Celdas N11 y N12, respectivamente).
5. Para proceder a determinar el número M de simulaciones a realizar, el rango diario δ a emplear en la igualdad (véase (4.2.5)) se calcula de la siguiente manera:

- o Se seleccionan $r(t)$ máximo y $r(t)$ mínimo de la muestra (Tabla 4.2.4. Celdas N14 y N15, respectivamente).
 - o Se calcula la diferencia entre ambos, obteniéndose así el rango muestral (Tabla 4.2.4. Celda N17).
 - o Obtenido el rango muestral, éste se divide por el número total de datos que integran la muestra (134 datos), dando con ello lugar a la medida de rango diario δ a emplear (Tabla 4.2.4. Celda N18).
6. Obtenida ya una medida del rango diario, se hace la correspondiente sustitución en la igualdad (4.2.5) para la cual, como medida de desviación típica se emplea la calculada a partir de las diferencias que se obtuvieron una vez quedaron eliminados los "outliers", es decir, s_2 . El resultado es de 550 simulaciones (Tabla 4.2.4. Celda N20).

	A	B	C	I	L	M	N	O
2		FECHA	EURIBOR A 1 MES	Diferencias	Diferencias (sin outliers)			
3	0	02-ene-13	0,109	0,000	0,000	m1 Media Diferencias	0,0001053	
4	1	03-ene-13	0,109	0,001	0,001	s1 Desv. Tip Diferencias	0,000979047	
5	2	04-ene-13	0,110	0,000	0,000			
6	3	07-ene-13	0,110	0,000	0,000	INTERVALO PARA ELIMINAR OUTLIERS DE LAS DIFERENCIAS		
7	4	08-ene-13	0,110	0,000	0,000			
8	5	09-ene-13	0,110	0,000	0,000	Superior	0,0030424	
9	6	10-ene-13	0,110	0,001	0,001	Inferior	-0,0028319	
10	7	11-ene-13	0,111	0,001	0,001			
11	8	14-ene-13	0,112	0,000	0,000	m2 Media Diferencias	0,000069	
12	9	15-ene-13	0,112	-0,001	-0,001	s2 Desv. Tip Diferencias	0,000818284	
13	10	16-ene-13	0,111	0,001	0,001			
14	11	17-ene-13	0,112	0,000	0,000	Máx r(t)	0,128	
15	12	18-ene-13	0,112	0,000	0,000	Mín r(t)	0,109	
16	13	21-ene-13	0,112	0,000	0,000			
17	14	22-ene-13	0,112	0,000	0,000	Rango muestral	0,019	
18	15	23-ene-13	0,112	0,001	0,001	Rango diario	0,000136691	
19	16	24-ene-13	0,113	0,000	0,000			
20	17	25-ene-13	0,113	0,004	0,001	M(t)	550	
21	18	28-ene-13	0,117	0,001	0,002			
22	19	29-ene-13	0,118	0,002	0,001			
23	20	30-ene-13	0,120	0,001	0,001			
24	21	31-ene-13	0,121	0,001	0,001			
25	22	01-feb-13	0,122	0,001	0,000			
26	23	04-feb-13	0,123	0,000	0,000			

Tabla 4.2.4. Cálculo del número M de simulaciones de la v.a. $Z \sim N[0; 1]$.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

▪ **Estimaciones puntuales por el Método de Monte Carlo: Cálculo de la media y varianza empíricas**

Determinado el número M de simulaciones a realizar para la v.a. Z , éstas se realizan para el tipo de interés Euribor a 1 mes a partir del modelo de Vasicek (véase (3.5.3)).

$$r(t) = \hat{r}_e + (r_0 - \hat{r}_e)e^{-\hat{\alpha}t} + \frac{\hat{\sigma}e^{-\hat{\alpha}t}\sqrt{e^{2\hat{\alpha}t} - 1}}{\sqrt{2\hat{\alpha}}}Z, \quad Z \sim N[0; 1].$$

Para este estudio se han realizado las M simulaciones de Z determinadas (Tabla 4.2.5. Celda T12). Estas simulaciones de Z (Columna X) se emplean para llevar a cabo las predicciones del tipo de interés en cuestión de cada día del período observado (Columnas Y-FC).

	S	T	U	V	W	X	Y	Z	AA	AD	EZ	FA	FB	FC
					FECHA	Z	r(t0) modelo	r(t1) modelo	r(t2) modelo	...	r(t130) modelo	r(t131) modelo	r(t132) modelo	r(t133) modelo
2														
3					02-ene-13	0,510593501	0,109	0,109857812	0,110405029		0,122167971	0,122173169	0,122178200	0,122183068
4					03-ene-13	-0,75113691	0,109	0,108644264	0,108716242		0,117349472	0,117354640	0,117359642	0,117364483
5					04-ene-13	0,225624636	0,109	0,109583725	0,110023607		0,121079686	0,121084877	0,121089902	0,121094764
6					07-ene-13	-0,82010707	0,109	0,108577928	0,108623927		0,117086078	0,117091244	0,117096244	0,117101084
7					08-ene-13	-0,39535663	0,109	0,108986458	0,109192443		0,118708183	0,118713359	0,118718370	0,118723218
8					09-ene-13	1,7521472	0,109	0,111051953	0,112066810		0,126909415	0,126914644	0,126919702	0,126924597
9					10-ene-13	-1,27738956	0,109	0,108138108	0,108011869		0,115339734	0,115344889	0,115349879	0,115354709
10					11-ene-13	-0,59780859	0,109	0,108791737	0,108921467		0,117935027	0,117940199	0,117945204	0,117950049
11					14-ene-13	-0,10990941	0,109	0,109261005	0,109574505		0,119798294	0,119803478	0,119808495	0,119813350
12					15-ene-13	-0,21543314	0,109	0,109159511	0,109433265		0,119395304	0,119400485	0,119405499	0,119410351
13					16-ene-13	-0,571598	0,109	0,108816947	0,108956549		0,118035124	0,118040296	0,118045302	0,118050148
14					17-ene-13	-1,68985733	0,109	0,107741392	0,107459794		0,113764536	0,113769681	0,113774662	0,113779483
15					18-ene-13	0,873314786	0,109	0,110206681	0,110890520		0,123553189	0,123558396	0,123563435	0,123568311
16					21-ene-13	-0,4201947	0,109	0,108962569	0,109159198		0,118613327	0,118618503	0,118623513	0,118628361
17					22-ene-13	0,190505105	0,109	0,109549947	0,109976600		0,120945566	0,120950756	0,120955780	0,120960641
18					23-ene-13	-0,30168215	0,109	0,109076555	0,109317823		0,119065922	0,119071101	0,119076113	0,119080964
19					24-ene-13	1,034731673	0,109	0,110361934	0,111106571		0,124169633	0,124174845	0,124179887	0,124184767
20					25-ene-13	-0,83473797	0,109	0,108563856	0,108604344		0,117030203	0,117035369	0,117040369	0,117045209
21					28-ene-13	-0,67962552	0,109	0,108713045	0,108811958		0,117622571	0,117627741	0,117632745	0,117637587
22					29-ene-13	0,731987657	0,109	0,110070751	0,110701358		0,123013466	0,123018670	0,123023706	0,123028579
23					30-ene-13	-0,67025196	0,109	0,108722060	0,108824504		0,117658368	0,117663538	0,117668542	0,117673385
24					31-ene-13	0,736271883	0,109	0,110074872	0,110707092		0,123029827	0,123035031	0,123040067	0,123044940
25					01-feb-13	0,56327186	0,109	0,109908478	0,110475537		0,122369147	0,122374347	0,122379379	0,122384248
26					04-feb-13	2,080333614	0,109	0,111367607	0,112506077		0,128162746	0,128167983	0,128173049	0,128177950

Tabla 4.2.5. Simulaciones del modelo de Vasicek por Monte Carlo.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Obtenidas las diferentes simulaciones del tipo de interés, el siguiente paso es obtener la media (Tabla 4.2.6. Fila 553) y la desviación típica (Tabla 4.2.6. Fila 554) en cada instante de tiempo t del período observado, a partir de los M valores simulados en cada uno de ellos.

En este caso, los resultados atienden a la media y desviación típica empíricas. A partir de la media empírica se obtiene una estimación puntual del total de las M simulaciones realizadas en cada uno de los instantes de tiempo. La desviación típica de las mismas, se deja calculada para la posterior construcción de los respectivos intervalos de confianza (véase Apartado 3.8.2).

	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	FA	FB	FC
1										
2			$r(t0)$ modelo	$r(t1)$ modelo	$r(t2)$ modelo	$r(t3)$ modelo	$r(t131)$ modelo	$r(t132)$ modelo	$r(t133)$ modelo
553		MEDIA	0,10900000	0,10930149	0,10963085	0,10995567		0,11996425	0,11996926	0,11997412
554		DESVIACIÓN TÍPICA	0,00000000	0,00097590	0,00135807	0,00163700		0,00387491	0,00387494	0,00387496
559										

Tabla 4.2.6. Cálculo de la media y varianza empírica del tipo de interés Euribor a 1 mes.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

- **Medidas de bondad de ajuste: Cálculo del error cuadrático medio (RMSE) y del error porcentual absoluto medio (MAPE)**

Del mismo modo que en el enfoque del modelo teórico de Vasicek se procedía a calcular el error cuadrático medio y el error porcentual absoluto medio, en este caso, los cálculos de ambas medidas se llevan a cabo a partir de las medias empíricas de $r(t)$ obtenidas con las simulaciones realizadas. En la Tabla 4.2.7 se recogen los resultados de estas medidas de bondad de ajuste (Celdas D11 y D12, respectivamente), sin ser necesario volver a detallar los pasos seguidos, puesto que son comunes al caso anterior.

	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K
1										
2	SIMULACIONES MÉTODO MC				<i>Predicciones</i>	<i>Observaciones</i>	<i>Residuo</i>	<i>Residuo^2</i>	<i>Error Absoluto</i>	
3					0,109	0,109	0,000	0,0000000	0,000	0,00000000
4					0,109	0,109	0,000	0,0000002	0,000	0,00421620
5	Media Estimada del período		0,1179697		0,110	0,110	0,000	0,0000000	0,000	0,00130850
6	Media Real del período		0,1171567		0,110	0,110	0,000	0,0000001	0,000	0,00210368
7	Error Absoluto Medias período		0,0008130		0,111	0,110	-0,001	0,0000003	0,001	0,00536430
8	Suma Residuos al cuadrado		0,0023954		0,111	0,110	-0,001	0,0000009	0,001	0,00849174
9					0,111	0,110	-0,001	0,0000016	0,001	0,01149727
10	MSE		1,78763E-05		0,112	0,111	-0,001	0,0000003	0,001	0,00525036
11	RMSE		0,004228036		0,112	0,112	0,000	0,0000000	0,000	0,00099041
12	MAPE		2,703996309 (%)		0,112	0,112	0,000	0,0000000	0,000	0,00164419
13					0,112	0,111	-0,001	0,0000022	0,001	0,01323008
14					0,113	0,112	-0,001	0,0000006	0,001	0,00663136
15					0,113	0,112	-0,001	0,0000010	0,001	0,00899197
16					0,113	0,112	-0,001	0,0000016	0,001	0,01126876
17					0,114	0,112	-0,002	0,0000023	0,002	0,01346504
18					0,114	0,112	-0,002	0,0000030	0,002	0,01558395
19					0,114	0,113	-0,001	0,0000009	0,001	0,00862287
20					0,114	0,113	-0,001	0,0000014	0,001	0,01057826
21					0,114	0,117	0,003	0,0000067	0,003	0,02214890
22					0,115	0,118	0,003	0,0000115	0,003	0,02869174
23					0,115	0,120	0,005	0,0000269	0,005	0,04322497
24					0,115	0,121	0,006	0,0000359	0,006	0,04954773
25					0,115	0,122	0,007	0,0000464	0,007	0,05582141
26					0,115	0,123	0,008	0,0000582	0,008	0,06204527
27					0,116	0,123	0,007	0,0000556	0,007	0,06064321

Tabla 4.2.7. Estudio medidas Bondad de Ajuste (Monte Carlo): RMSE y MAPE

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Realizando de manera aislada la evaluación de los resultados obtenidos para ambas medidas de bondad de ajuste, nuevamente, en este caso también es posible observar unos valores del RMSE y MAPE totalmente aceptables, de 0,00423 y 2,70% respectivamente. La diferencia producida entre el valor real y el estimado a través de las simulaciones vuelve a mostrarse poco significativa, siendo por tanto buenos indicadores para la validación del modelo.

Realizando la comparativa entre los resultados de las medidas de bondad de ajuste empleadas en cada uno de los enfoques (véase Tabla 4.2.8), con independencia de que en la aplicación del modelo teórico de Vasicek los resultados obtenidos hayan sido ligeramente inferiores a los del enfoque del método de Monte Carlo, el bajo valor de los RMSE y los MAPE inferiores a un 10%, permiten validar la modelización del tipo de interés Euribor a 1 mes por ambos enfoques aplicados. Por tanto, las predicciones a realizar de dicho tipo de interés, también serán llevadas a cabo por ambos enfoques (véase Apartados 4.3.1 y 4.3.2).

ENFOQUE:	RMSE	MAPE
Modelo Vasicek	0,00418	2,64%
Monte Carlo	0,00423	2,70%

Tabla 4.2.8. Comparativa de los resultados de las medidas de bondad de ajuste.

Fuente: Elaboración propia.

- Validación por intervalos de confianza: Cálculo de los intervalos de confianza empíricos (estadísticos y percentiles)

En la Tabla 4.2.9, la construcción de los intervalos de confianza empíricos se ha realizado de dos formas diferentes, pero ambas, a partir de las estimaciones puntuales obtenidas mediante la simulación por Monte Carlo. Realizadas M veces las correspondientes simulaciones de la v.a. Z y aplicado dicho método al caso del modelo de Vasicek, la media empírica empleada para el cálculo de estos intervalos de confianza (Tabla 4.2.9. Fila 553), atiende al promedio de las M simulaciones. De igual modo, a través de la función DESVEST de Excel, a partir de las M estimaciones obtenidas del tipo Euribor a 1 mes para cada uno de los instantes t del horizonte temporal contemplado, se obtienen las desviaciones típicas empíricas (Tabla 4.2.9. Fila 554) que se requieren para el cálculo de los correspondientes intervalos de confianza.

	W	X	Y	Z	AA	AB	AC	FA	FB	FC		
1												
2					$r(t0)$ modelo	$r(t1)$ modelo	$r(t2)$ modelo	$r(t3)$ modelo	...	$r(t131)$ modelo	$r(t132)$ modelo	$r(t133)$ modelo
553		MEDIA	0,10900000	0,10930149	0,10963085	0,10995567		0,11996425	0,11996926	0,11997412		
554		DESVIACIÓN TÍPICA	0,00000000	0,00097590	0,00135807	0,00163700		0,00387491	0,00387494	0,00387496		
555	IC ESTADISTICO 95%	Inferior	0,109	0,10921993	0,10951735	0,10981886		0,1196404	0,11964542	0,11965027		
556		Superior	0,109	0,10938305	0,10974435	0,11009248		0,12028809	0,12029311	0,12029797		
557	IC PERCENTIL 95%	Inferior	0,109	0,10741535	0,10700607	0,1067918		0,1124751	0,11248008	0,11248489		
558		Superior	0,109	0,11115886	0,11221559	0,11307128		0,12733914	0,1273442	0,1273491		
559												

Tabla 4.2.9. Cálculo de los intervalos de confianza empíricos con 95% de probabilidad.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Los intervalos de confianza estadísticos (Tabla 4.2.9, Filas 555-556) son calculados de la misma manera descrita para los intervalos de confianza teóricos pero, en este caso, se hace a partir de la media y desviación típica empírica obtenidas a partir de las simulaciones, así como considerando el número M simulaciones realizadas (550 simulaciones para cada instante de tiempo).

Para un nivel de confianza del 95% para la media, en el caso del intervalo de confianza superior, se le suma 1,96 veces la desviación típica dividida entre la raíz de las M simulaciones realizadas y para la construcción del inferior, dicha suma vuelve a sustituirse por una resta:

$$\left[\bar{x} + 1,96 \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{M}} , \quad \bar{x} - 1,96 \frac{\bar{\sigma}}{\sqrt{M}} \right].$$

Como se anticipaba, la otra forma de calcular estos intervalos de confianza del 95%, es a través de la función PERCENTIL de Excel (Tabla 4.2.9, Filas 557-558). Los resultados obtenidos, al comparar con los de los intervalos de confianza estadísticos son similares, pero no idénticos. La razón que da base al uso de esta última forma de construcción de intervalos de confianza, es para contrastar la posible falta de robustez que puede darse en el cálculo de los intervalos de confianza estadísticos.

A la hora de llevar a cabo la correspondiente gráfica comparativa entre las estimaciones puntuales obtenidas por Monte Carlo y los datos reales observados, por un lado se han representado los intervalos de confianza construidos mediante los percentiles (véase Gráfico 4.2.2) y por otro, el estadístico (véase Gráfico 4.2.3).

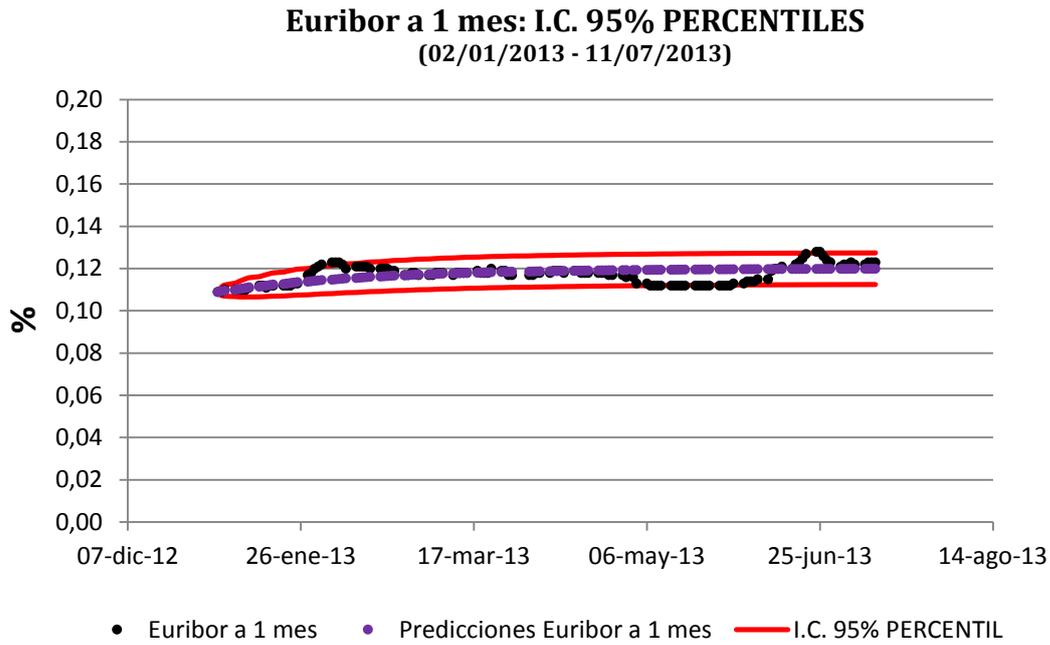


Gráfico 4.2.2. Análisis de las medias empíricas y los intervalos de confianza PERCENTILES.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

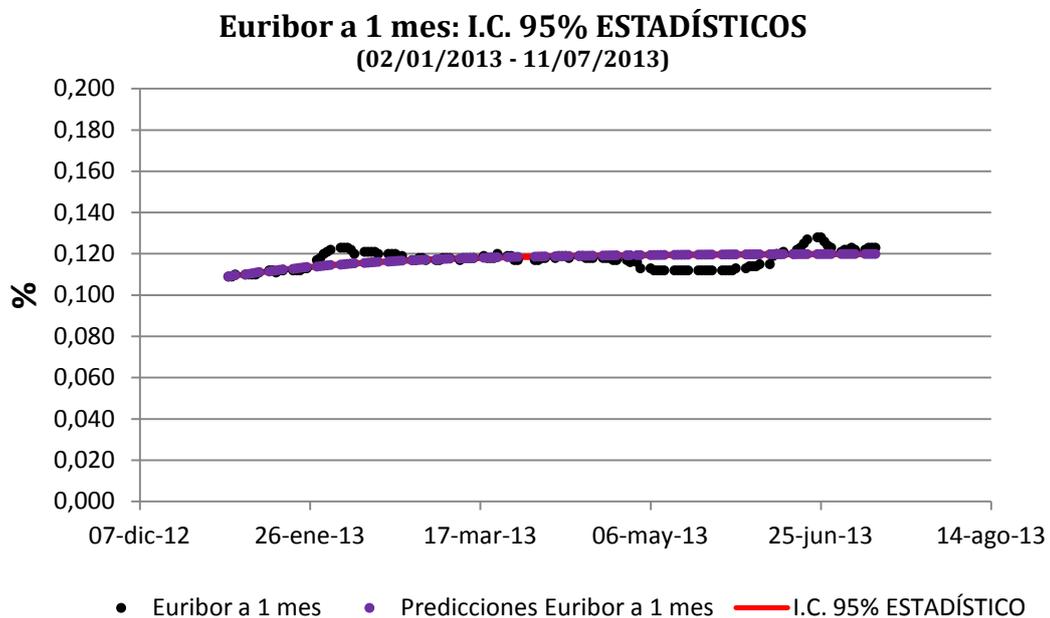


Gráfico 4.2.3. Análisis de las medias empíricas los intervalos de confianza ESTADÍSTICOS.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Analizándose ambas gráficas resultantes donde quedan representados los valores observados de la muestra del Euribor a 1 mes, las estimaciones de este tipo de interés realizadas a partir de la aplicación del método Monte Carlo y ambos tipos de intervalos de confianza del 95% obtenidos, se observa a simple vista la excesiva estrechez que presentan los I.C. estadísticos (véase Gráfico 4.2.3). Si ya se anticipó una posible falta de robustez, ahora, visualmente, esta queda confirmada y el uso y estudio de estos intervalos queda descartado, limitándose al análisis de los I.C. obtenidos con la función PERCENTIL de la Excel (véase Gráfico 4.2.2).

Del mismo modo que se ha hecho una comparativa entre los resultados obtenidos de las medidas de bondad de ajuste en cada uno de los enfoques aplicados, ahora también se realiza el correspondiente contraste entre los I.C. teóricos (aplicación del modelo teórico de Vasicek) y los I.C. empíricos (aplicación del método de Monte Carlo) resultantes. Esta comparación se lleva a cabo a través de la representación gráfica de ambos tipos de intervalos, junto con el histórico de valores de la muestra observada (véase Gráfico 4.2.4).

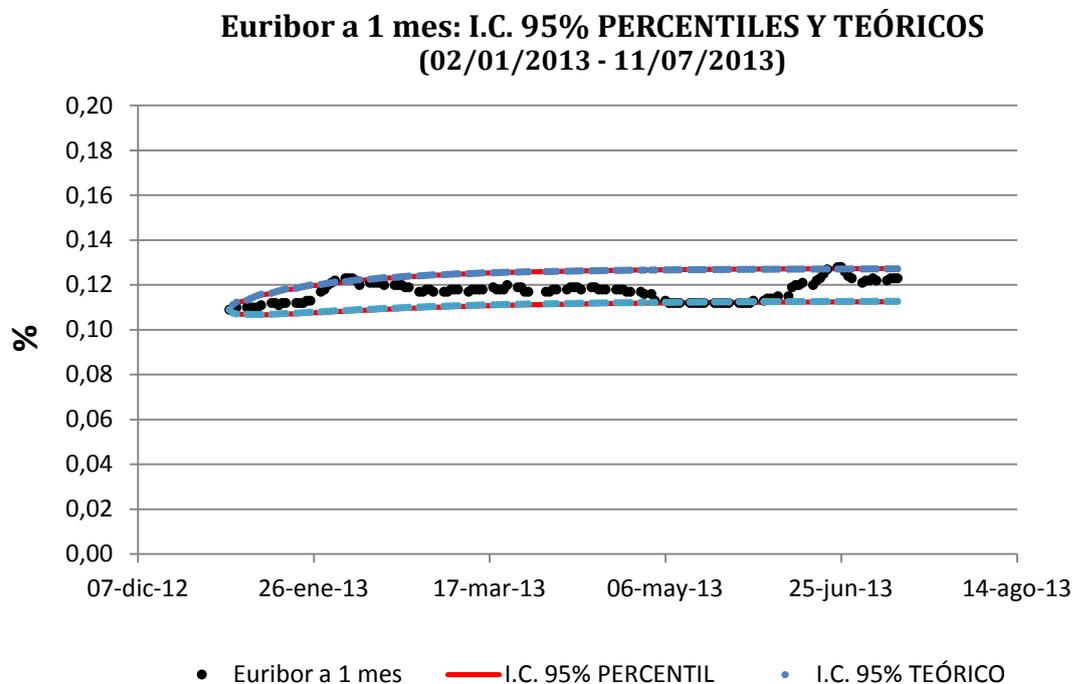


Gráfico 4.2.4. Comparativa de los intervalos de confianza del 95% teóricos y empíricos.

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Tal y como queda representado en el Gráfico 4.2.4, así como recordando la similitud que guardaban los valores tanto del RSME, como del MAPE, entre uno y otro enfoque, ambos intervalos de confianza calculados a partir de cada uno de ellos, presentan una gran similitud. Por tanto, tanto los intervalos teóricos, como empíricos, recogen de manera muy aceptable las perturbaciones que presentó este tipo de interés en determinados períodos (Febrero, Mayo y Junio de 2013) del horizonte temporal objeto de estudio de la presente memoria. El buen ajuste logrado con el modelo de predicción por ambos enfoques, vuelve a quedar evidenciado a través de la validación por intervalos.

4.3. Predicciones del tipo de interés Euribor a 1 mes

Con la realización de modelos económicos, uno de los objetivos perseguidos es el poder hacer predicciones de los valores de una variable objetivo la cual, en esta memoria, es el tipo de interés Euribor a 1 mes. El modelo ajustado debe permitir predecir el valor medio (estimación puntual) de dicha variable, y encontrar un intervalo que, con una probabilidad determinada, contenga el valor real de la misma (estimación por intervalos o intervalos de confianza).

Validado el modelo por ambos enfoques, en este apartado se realizan por cada uno de ellos, como ya se anticipaba, las predicciones puntuales y por intervalos de confianza en los que el tipo de interés fluctuará con una probabilidad de un 95%. Estas estimaciones atenderán al tipo de interés Euribor a 1 mes de los días de la siguiente semana a la última observada en los que los mercados están operativos (12/07/2013-18/07/2013).

4.3.1. Predicciones del tipo de interés Euribor a 1 mes por el modelo de Vasicek

Estas primeras predicciones, puntuales y por intervalos, se llevan a cabo mediante la aplicación del modelo teórico de Vasicek (véase Tabla 4.3.1).

	L	M	N	O	P	Q	R
1	PREDICCIONES:						
8							
9		12-jul-13	15-jul-13	16-jul-13	17-jul-13	18-jul-13	
10	Predicción	0,120238	0,1202423	0,1202467	0,1202510	0,1202551	
11	Desv.Tip[r(t)]	0,00381905	0,00381907	0,00381908	0,00381910	0,00381912	
12	I.C. Superior 95%	0,12772313	0,12772772	0,12773216	0,127736448	0,127740602	
13	I.C. Inferior 95%	0,11275246	0,11275698	0,11276134	0,112765572	0,112769666	
14							

Tabla 4.3.1. Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. del 95% teóricos del Euribor a 1 mes
Fuente: Elaboración propia. (Excel).

Cabe puntualizar que para la elaboración de éstas se han vuelto a emplear los parámetros que ya se estimaron con anterioridad (véase Tabla 4.1.2) y que el r_0 tomado, se corresponde con el dato inicial del tipo de interés Euribor a 1 mes de la muestra observada.

Por un lado, los resultados obtenidos para las predicciones puntuales son los mostrados en la Tabla 4.3.1, Fila 10 y por otro lado, las predicciones por intervalos son las que figuran en la Tabla 4.3.1, Filas 12-13. No se considera necesario entrar en el detalle del cálculo de las mismas puesto que con anterioridad ya se hizo una descripción exhaustiva (véase apartado 4.2.1).

En la tabla 4.3.2 quedan recogidas ambas predicciones del Euribor a 1 mes para los 5 días en cuestión, junto con el valor real que finalmente, para cada uno de esos instantes de tiempo, presentó dicho tipo de interés y publicó el Banco de España (Tabla 4.3.2. Columna P).

	N	O	P	Q	R	S
15	PREDICCIONES CON MODELO TEÓRICO DE VASICEK					
16						
17						
18						
19						
20						
21						
22						

FECHA	EURIBOR 1 MES (DATO)	ESTIMACIÓN PUNTUAL (MEDIA)	INTERVALO SUPERIOR	INTEVALO INFERIOR
12-jul-13	0,123	0,1202378	0,12772313	0,11275246
15-jul-13	0,122	0,1202423	0,12772772	0,11275698
16-jul-13	0,123	0,1202467	0,12773216	0,11276134
17-jul-13	0,122	0,1202510	0,12773645	0,11276557
18-jul-13	0,122	0,1202551	0,12774060	0,11276967

Tabla 4.3.2. Predicciones del Euribor a 1 mes por el modelo de Vasicek (5 días).

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

A partir de los resultados que se recogen en la Tabla 4.3.2, se observa como la predicción puntual (Columna Q) de la semana se encuentra, en todos y cada uno de los días que la comprenden, por debajo del dato real del Euribor a 1 mes (Columna P), mostrando nuevamente una menor volatilidad. Este hecho se vuelve a razonar en base a la hipótesis de varianza constante que asume el modelo de predicción de tipos de interés de Vasicek. No obstante, si centramos la atención en las predicciones por intervalos obtenidas (Columnas R-S), se observa como el dato real del Euribor a 1 mes publicado para dicha semana, queda dentro del mismo en todos y cada uno de los días de dicha semana, siendo ello un buen resultado.

4.3.2. Predicciones del tipo de interés Euribor a 1 mes por el Método de Monte Carlo: aplicación al caso del modelo de Vasicek

Al haber quedado también validado el enfoque del método de simulación de Monte Carlo, las predicciones puntuales y por intervalos del Euribor a 1 mes, vuelven a realizarse mediante éste. Para proceder a su cálculo, se aplicará la ecuación (3.5.2):

$$r(t) = r_e + (r_0 - r_e)e^{-at} + \frac{\sigma e^{-at}}{\sqrt{2\alpha}} B(e^{2\alpha t} - 1).$$

En dicha ecuación, como se hizo con anterioridad, se emplean los parámetros ya estimados y para la simulación del Movimiento Browniano $B(t)$ se recurre al uso de variables aleatorias normales tipificadas (véase Apartado 2.3) y a la identidad en distribución $B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t} Z$, $Z \sim N(0; 1)$. En base a ello, la ecuación (3.5.2) a emplear para la obtención de las correspondientes predicciones puntuales del Euribor a 1 mes, queda reescrita como:

$$r(t) \stackrel{d}{=} r_e + (r_0 - r_e)e^{-\alpha t} + \frac{\sigma e^{-\alpha t} \sqrt{e^{2\alpha t} - 1}}{\sqrt{2\alpha}} Z, \quad Z \sim N(0; 1).$$

La predicción puntual a obtener será la media empírica de las M simulaciones realizadas para cada instante de tiempo. Cabe puntualizar que para dichas predicciones, el número M de simulaciones a realizar ha sido el mismo que el obtenido para el desarrollo de la validación del modelo (550 simulaciones). Este proceso predictivo se completa construyendo los intervalos de confianza del 95%, a través de la función PERCENTIL de Excel. Los resultados de este estudio quedan recogidos en la Tabla 4.3.3.

	FI	FJ	FK	FL	FM	FN	FO
1							
2	PREDICCIONES						
3							
4							
5							
6							
7							
8							

		12-jul-13	15-jul-13	16-jul-13	17-jul-13	18-jul-13
	Predicción	0,119979	0,119983	0,119988	0,119992	0,119996
	Desv.Tip[r(t)]	0,003875	0,003875	0,003875	0,003875	0,003875
I.C. PERCENTIL	I.C. Inferior 95%	0,112490	0,112494	0,112498	0,112503	0,112507
	I.C. Superior 95%	0,127354	0,127358	0,127363	0,127367	0,127371

Tabla 4.3.3. Cálculo de predicciones puntuales y por I.C. del 95% empíricos del Euribor a 1 mes

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

En este caso, los resultados de las predicciones puntuales quedan recogidos en la Tabla 4.3.3, Fila 5 y las predicciones por intervalos figuran en la Tabla 4.3.3. Filas 7-8.

En la Tabla 4.3.4 vuelven a quedar recogidos los resultados de ambas predicciones del tipo de interés, junto con el valor real que finalmente, para cada uno de esos instantes de tiempo, presentó.

	FH	FI	FJ	FK	FL	FM
10						
11						
12	PREDICCIONES CON MONTE CARLO					
13						
14						
15						
16						
17						
18						

FECHA	EURIBOR 1 MES (DATO REAL)	ESTIMACIÓN PUNTUAL (MEDIA)	INTERVALO SUPERIOR	INTEVALO INFERIOR
12-jul-13	0,123	0,1199788	0,12735384	0,1124896
15-jul-13	0,122	0,1199834	0,12735842	0,1124941
16-jul-13	0,123	0,1199878	0,12736286	0,1124984
17-jul-13	0,122	0,1199920	0,12736715	0,1125027
18-jul-13	0,122	0,1199962	0,12737130	0,1125068

Tabla 4.3.4. Predicciones del Euribor a 1 mes por método de Monte Carlo (5 días).

Fuente: Elaboración propia. (Excel).

A rasgos generales, las principales conclusiones que se pueden extraer de dicho resultado serían comunes y muy similares a las ya comentadas en el caso anterior (véase Apartado 4.3.1), volviendo a quedar reflejado el buen ajuste y resultado logrado con el modelo de Vasicek aplicado al Euribor a 1 mes en el período de tiempo seleccionado.

CONCLUSIONES FINALES

El principal objeto de la presente memoria ha sido el estudio, desarrollo y aplicación del modelo estocástico de predicción de tipos de interés de Vasicek. Tras la realización de un análisis previo de posibles tipos de interés en los que aplicar dicho modelo, finalmente, el escogido ha sido el tipo de interés interbancario Euribor a 1 mes. Un aspecto de especial relevancia de cara al desarrollo de esta memoria ha sido la elección del período de tiempo sobre el cual aplicar el modelo al tipo de interés escogido, siendo necesario que éste mostrara un comportamiento con reversión a un valor medio, es decir, con comportamiento asintóticamente estable.

Esto ha motivado que, finalmente, este modelo haya sido aplicado al tipo de interés interbancario Euribor a 1 mes (tipo de interés a corto plazo) en el periodo temporal correspondiente al primer semestre de 2013, manteniendo el compromiso de pretende mostrar la viabilidad de un modelo matemático de tipo estocástico con la actualidad de los datos históricos sobre los cuales se ha aplicado y la ejecución de esta memoria.

La realización del presente Trabajo Final de Máster ha requerido de una ampliación de los conocimientos adquiridos durante la realización del máster en Dirección Financiera y Fiscal, guardando éstos relación con varias de las materias impartidas tales como, Mercados Financieros, Modelización y Valoración de Opciones Financieras o Banca y Operaciones Financieras.

En el Capítulo 1 se ha hecho mención del relevante impacto que los tipos de interés ofertados tienen tanto en los mercados y mundo de la finanzas, como en la economía de un país. Se ha particularizado sobre los tipos de interés "*short term*" (a corto plazo), analizando con cierto grado de detalle el tipo de interés interbancario Euribor. Siendo este primer capítulo una motivación de las razones que han motivado la decisión de realizar este Trabajo Final de Máster, se consigue a través del mismo dejar establecido el atractivo que, a día de hoy, tienen los modelos estocásticos de predicción de tipos de interés, con independencia de que los mismos estén inmersos en un proceso de continua mejora y perfeccionamiento.

Particularizando el estudio al tipo de interés Euribor a 1 mes (y por tanto, a corto plazo), con origen en las operaciones de crédito interbancarias y concretamente, en un período de tiempo en el cual ha mostrado un comportamiento relativamente estable, la literatura especializada, de cara a la modelización del mismo, recomienda emplear procesos estocásticos solución de ecuaciones diferenciales estocásticas de tipo Itô con un comportamiento asintótico, o a largo plazo, estable. Todo ello, considerando los diferentes modelos de predicción de tipos de interés, existentes y disponibles hasta la fecha, nos ha llevado al estudio del modelo de Vasicek, constituyendo el mismo un patrón básico para la modelización de este tipo de escenario planteado.

El Capítulo 3 de esta memoria abarca el estudio, desarrollo y proceso de validación del modelo estocástico de Vasicek desde un punto de vista puramente teórico. Este estudio incluye una introducción al Cálculo Estocástico de Itô que es imprescindible para la resolución teórica del modelo y el cálculo de sus principales funciones estadísticas, las cuales son imprescindibles para la puesta en práctica del modelo en el análisis del Euribor a 1 mes.

En el Capítulo 4, se pone en práctica el modelo de Vasicek con objeto de modelizar el tipo de interés Euribor a 1 mes y realizar predicciones. Cabe puntualizar que la determinación del período de aplicación correspondiente al intervalo: 02/01/2013 – 11/07/2013, conlleva un importante estudio previo donde se testeó la validez del modelo de Vasicek manteniendo al mismo tiempo un nivel de compromiso con el grado de actualidad con respecto a la ejecución de esta memoria.

Para la construcción del modelo se ha requerido estimar los parámetros del modelo de Vasicek. Esta tarea se ha realizado con diferentes métodos para mostrar la robustez de las estimaciones (se ha utilizado un método de máxima verosimilitud y un método no paramétrico para ecuaciones diferenciales estocásticas tipo Itô). A partir de dichas estimaciones se ha validado el modelo, también mediante dos técnicas complementarias que muestran la robustez del estudio, concretamente mediante la solución teórica y mediante simulaciones de Monte Carlo. Esta validación se ha hecho calculando estimaciones tanto puntuales como por intervalos de confianza al 95% para los datos históricos y utilizando medidas estadísticas de bondad de ajuste, las cuales han mostrado la buena calidad del modelo. En base a la validación del modelo, se han realizado predicciones puntuales y por intervalos de confianza del Euribor a 1 mes mediante el modelo teórico y mediante simulaciones de Monte Carlo. Los resultados obtenidos en ambos casos son consistentes y muy precisos.

Queremos subrayar que como cualquier modelo matemático, su aplicación se limita a las hipótesis teóricas que lo soportan. En el caso del modelo de Vasicek, éste puede considerarse una piedra angular de los modelos dinámicos basados en ecuaciones estocásticas tipo Itô que asume en su formulación un tipo de interés del tipo "*short term*", con varianza constante y con comportamiento asintótico de reversión a la media, condiciones todas ellas que se asumen implícitamente en la aplicación del modelo. No obstante, como ya se ha señalado en la memoria, existen modelos más sofisticados como el modelo CIR debido a Cox-Ingersoll-Ross (véase [7]) que generalizan el modelo de Vasicek y que asumen varianza dependiente del tiempo y, cuyo estudio pueden constituir una continuación de esta memoria.

En este sentido, en futuros estudios que se quisieran realizar y/o incluso para ampliar y perfeccionar el trabajo de la presente memoria, bien con objeto de obtener unas predicciones de intervalos temporales más largos en los que es más complejo que se dé un comportamiento asintótico estable, o bien para captar los saltos que puede tener el Euribor a 1 mes, sería muy interesante estudiar la viabilidad de otros modelos estocásticos más complejos disponible en la literatura especializada. Ejemplos interesantes en este sentido son los basados en ecuaciones diferenciales estocásticas cuyo proceso conductor de la aleatoriedad es una mezcla de un proceso continuo como el movimiento Browniano, y un proceso discontinuo o de salto tipo *Poisson*²⁰.

²⁰Benth, F.E.; Kholodnyi, V.; Laurence, P. (2014). *Quantitative Energy Finance: Modeling, pricing and hedging in energy and commodity markets*. Springer Science+Business.

BIBLIOGRAFÍA

Libros:

ALLEN, E. (2007) *Modelling With Itô Stochastic Differential Equations*. Springer, Series Mathematical Modelling: Theory and Applications.

BAXTER, M.; REMIE, A. (2012) *Financial Calculus: An Introduction to Derivate Pricing*. Cambridge Univ. Press, 20th Edition.

BENTH, F.E.; KHOLODNYI, V.; LAURENCE, P. (Ed. 2014) *Quantitative Energy Finance: Modeling, Pricing and Hedging in Energy and Commodity Markets*. Springer, Science+Business. Media B.V.

HULL, J.C. (2002) *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Pearson Education, 4^º Edición.

KIYOSHI, I. (1944) *Stochastic Integral*. Tokio. Proc. Imperial Acad.

KIYOSHI, I. (1961) *Lectures on Stochastic Processes*. Bombay. Tata Institute.

KLEBANER, F. C. (2011) *Introduction to Stochastic Calculus With Applications to Finance*. Imperial College Press.

LAMBERTON, D.; LAPEYRE, B. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus to Finance*. Chapman & Hall/CRC.

ØKSEND AHL, B. (1980) *Stochastic Differential Equations*. Nueva York. Springer.

ØKSEND AHL, B. (1998) *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer.

ROLL, R. (1970) *The Behavior of Interés Rates: The Application of the Efficient Market Model to U.S. Treasury Bills*. New York. Basic Books.

Artículos:

BACHELIER, L. (1900) Théorie de la spéculation. *Annales du Science de L'Ecole Normale Supérieure*, 17, pp. 21-86.

COX, J.C.; INGERSOLL, J.E.; ROSS, S.A. (1985) A theory of the term structure of interest rates. *Econometrica*, fascículo 53 pp. 385–407.

KIYOSHI, I. (1951) On stochastic differential equations. *Memoirs, American Mathematical Society*, fascículo 4, pp. 1–51.

LONG, J.B. (1974) Stock prices, inflation, and the term structure of interest rates. *Journal of Financial Economics*, fascículo 1 pp. 131-170.

MAGHSOODI, Y. (1996) Solution of the extended CIR term structure and bond option valuation. *Mathematical Finance*, fascículo 6 pp. 89–109.

MERTON, R.C. (1973) An inter temporal capital asset pricing model. *Econometrica*, fascículo 41 pp. 867-887.

MERTON, R.C. (1973) Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science (The RAND Corporation)*, volumen 4, fascículo 1 pp. 141–183.

MERTON, R.C. (1974) On the pricing of corporate debt: The risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, fascículo 29 pp. 449-470.

ROLL, R. (1971) Investment diversification and bond maturity. *Journal of Finance*, fascículo 26 pp. 51-66.

STATON, R. (1997) A non parametric model of term structure dynamic and the market price of interest rate risk. *Journal of Finance*, fascículo 52.

VASICEK, O. (1977) An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, fascículo 5 pp. 177–188.

