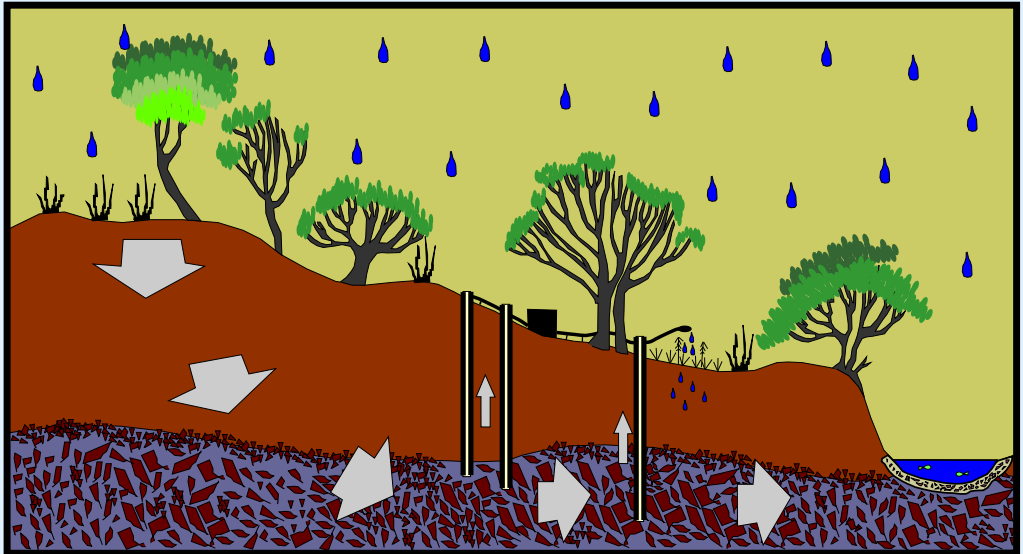




UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

**SIMULACIÓN EFICIENTE DE LAS RELACIONES  
RÍO-ACUÍFERO EN SISTEMAS DE UTILIZACIÓN  
CONJUNTA MEDIANTE TÉCNICAS DE  
REDUCCIÓN DE MODELOS LINEALES  
INVARIANTES EN EL TIEMPO**



Tesis doctoral presentada por:  
**Oscar David Álvarez-Villa**

Dirigida por:  
**Andrés Sahuquillo y  
Eduardo Cassiraga**

Julio de 2014







UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

grupo  
de **HIDROGEOLOGIA**

**SIMULACIÓN EFICIENTE DE LAS RELACIONES  
RÍO-ACUÍFERO EN SISTEMAS DE UTILIZACIÓN  
CONJUNTA MEDIANTE TÉCNICAS DE  
REDUCCIÓN DE MODELOS LINEALES  
INVARIANTES EN EL TIEMPO**

Tesis doctoral presentada por:  
Oscar David Álvarez-Villa

Dirigida por:  
Andrés Sahuquillo y  
Eduardo Cassiraga

**Universitat Politècnica de València**  
Departamento de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente  
Grupo de Hidrogeología  
Julio de 2014

## **Dirección del autor**

Oscar David Álvarez Villa

Grupo de Hidrogeología  
Departamento de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente  
Universitat Politècnica de València  
Camino de Vera, S/N  
46022 Valencia, España

e-mail: [odalvare@gmail.com](mailto:odalvare@gmail.com), [osdaalvi@gmail.com](mailto:osdaalvi@gmail.com)  
tel: + 57 2606370 (Colombia); + 34 961335917 (España)  
móvil: + 57 300 2424728 (Colombia); + 34 682 883 669 (España)

## A mi padre

*Yo no sabía que el azul mañana  
es vago espectro del brumoso ayer;  
que agitado por soplos de centurias  
el corazón anhela arder, arder.*

*Siento su influjo, y su latencia, y cuando  
quiere sus luminarias encender.  
Pero la vida está llamando,  
y ya no es hora de aprender.*

*Yo no sabía que tu sol, ternura,  
da al cielo de los niños rosicler,  
y que, bajo el laurel, el héroe rudo  
algo de niño tiene que tener.*

*¡Oh, quién pudiera de niñez temblando,  
a un alba de inocencia renacer!  
Pero la vida está pasando,  
y ya no es hora de aprender.*

### Lamentación de octubre

Porfirio Barba-Jacob

*...Ciñe su talle esbelto su ancho río  
cual cinturón de perlas y de plata  
y en su monda limpia la beldad retrata  
y allí su imagen sonreída ve.  
Murmura el río enamoradas voces  
para adormir a su coqueta reina  
y ella en sus aguas sus cabellos peina  
y moja en ellas su desnudo pie...*

### A Medellín desde el cerro de Santa Helena

Gregorio Gutiérrez González



# Agradecimientos

Primero que nada, debo agradecer a mis padres Arturo y Cándida por su apoyo a lo largo de más de cinco años de trabajo en España y un año más en Colombia, sin ustedes no hubiera sido posible. A mi hermana Ángela María, mi tía Marta, mis primos Andrés, Astrid, Paula, Bibiana y Sara, gracias por toda su ayuda y la motivación para seguir adelante en los momentos más difíciles. Millones de gracias a Mónica, por su constante aliento acerca de mi trabajo e interés por mi bienestar personal.

Asimismo, de todo corazón agradezco al Grupo de Hidrogeología de la Universitat Politècnica de València. Al profesor Eduardo Cassiraga por invitarme a trabajar en España, por el constante ánimo que me ha brindado y por estar siempre dispuesto a colaborar en cualquier problema, sea de índole académico como personal. Al profesor Andrés Sahuquillo por su motivación, su constante aliento y el gran entusiasmo que siempre ha demostrado hacia mi trabajo; es un ejemplo de dedicación a la investigación. Al profesor Jaime Gómez Hernández por acogerme en el seno de su grupo de trabajo y por darme la posibilidad de participar en muchos eventos académicos muy importantes para mi formación como investigador. A los tres les agradezco la amistad brindada. Muchas gracias también a mis compañeros de trabajo en el Grupo de Hidrogeología, con quienes he compartido muy buenos momentos: Julio Gutiérrez y familia, Francisco Morillas, Liangping Li, Haiyan Zhou, Teresa Martínez, Pilar Mejía y familia, Teng Xu, Manuela Gómez, Anja Geiger y Claudia Garzón; a los profesores Manuel y David Pulido, Javier Rodrigo y José Capilla.

Muchas gracias a la Generalitat Valenciana por su apoyo económico durante mis años como estudiante de maestría en Valencia, al Ministerio de Ciencia e Innovación de España por apoyar mi investigación como parte del proyecto “Modelado de las relaciones rio acuífero. Aplicación al sistema de La Mancha Oriental” y a la Confederación Hidrográfica del Júcar por soportar mi investigación como parte de los proyectos “Modelo de flujo subterráneo de los acuíferos de La Mancha Oriental y sus relaciones con los ríos Júcar y Cabriel” y “Realización de un estudio sobre la actualización y ampliación del modelo de flujo subterráneo de los acuíferos de La Mancha Oriental y sus relaciones con los ríos Júcar y Cabriel”. Muchas gracias al Instituto de Desarrollo Regional de la Universidad de Castilla-La Mancha, especialmente a los profesores David Sanz y Santiago Castaño; en mi memoria quedarán para siempre las caminatas en los senderos recorridos por El Quijote.

Enorme gratitud para los profesores Jaime Ignacio Vélez y Germán Poveda del Postgrado en Aprovechamiento de Recursos Hidráulicos de la Universidad Nacional de Colombia Sede Medellín, con quienes he seguido desarrollando trabajos y me han apoyado desde hace tanto tiempo. De nuevo, gracias a Olver Hernández y Felipe Quintero, mis amigos, su apoyo ha sido fundamental para mantener mi salud mental a lo largo de mi aventura en Europa. Igualmente, muchas gracias a GOTTA Ingeniería por haberme apoyado al final de este trabajo, un gran sentimiento de gratitud y amistad para Carlos Restrepo, Joany Sánchez, Cristian Ortiz, Oscar Estrada, Mario Jiménez, Oscar Rueda y Marcela Jaramillo.

Igualmente, muchas gracias a todas las personas con quienes he compartido momentos a lo largo del desarrollo de este trabajo. Valoro con gran cariño la amistad brindada, que

es recíproca. Gracias a Luis Chaparro, Esteban Alvarado, Gloria Castillo, Luis García, Bárbara Arteta, Elisa Martínez, Txelo Cuenca, Carolina Rubio, Ismael Orozco, Johanna Gutiérrez, Jesús López, Camilo Múnera, Diana Quevedo, José Daniel Rosales, Maru Briceño, Jorge Hernández, Oscar Ardila, Vanessa Escobar, Paola Arias, Marcela Cadavid, Liliana Castañeda, Luzma Ramírez, Paola Roldán, Lina Marín, Marcela Arenas, Astrid Montes y Camilo Baena. También, gracias por su apoyo y compañía a Carolina Moreno, Luisa Martínez, Nancy Estela Sánchez, Diana Restrepo y Arantxa Sánchez.

# Resumen

En este trabajo se ha estudiado la posibilidad de usar algunas técnicas de reducción para lograr una simulación más eficiente del flujo subterráneo en los acuíferos contenidos en modelos de uso conjunto. Así, el principal enfoque de esta investigación ha sido relacionar la parametrización de las relaciones río-acuífero con las características del modelo reducido para encontrar los efectos de dicha parametrización sobre la eficiencia de la reducción.

La primera metodología propuesta, denominada Método de los AutoValores con Compresión Selectiva y Enmascaramiento Modal (MAV-CSEM), puede reducir dramáticamente el tamaño de un modelo de flujo subterráneo, aumentando la eficiencia de su ejecución y disminuyendo la memoria virtual requerida. A efectos prácticos, el MAV-CSEM utiliza los siguientes conceptos novedosos: (i) modos efectivos, (ii) modos residuales, (iii) límite de participación modal, (iv) máscara de estados efectivos y (v) nivel de continuidad. Este marco conceptual no solamente ayuda a identificar los modos que más contribuyen a la respuesta del acuífero por causa de las excitaciones externas, sino que también ayuda a lograr una simulación más rápida del flujo en el acuífero que la obtenida por el MAV clásico. La principal ventaja del MAV-CSEM es que, aumentando el número de celdas del modelo, se puede considerar más detalladamente la variabilidad espacial de los parámetros hidráulicos del acuífero en la modelación del flujo subterráneo, sin que la eficiencia computacional de las simulaciones se vea considerablemente afectada, especialmente cuando dicho acuífero forma parte del modelo de un sistema de uso conjunto. El MAV-CSEM ha sido probado en acuíferos rectangulares homogéneos simples. Los resultados obtenidos tienen un comportamiento similar a los simulados usando el MAV clásico o las Diferencias Finitas (DF), pero la simulación es mucho más eficiente. Se ha efectuado un análisis de sensibilidad del impacto de cambiar la parametrización de las condiciones de contorno tipo río, en función de la conductancia del lecho, sobre algunos parámetros de control del acuífero como las alturas piezométricas, los volúmenes almacenados y los caudales de intercambio río-acuífero. De los resultados de dicho análisis se concluye que, al disminuir la conductancia del río, se mejora el comportamiento del MAV-CSEM por que se necesitan menos modos para obtener resultados confiables en las variables antes mencionadas.

El MAV-CSEM permite desarrollar criterios de base física para generar modos efectivos más eficientemente, para remover los modos residuales y para construir las máscaras de estados efectivos que aceleran la ejecución de las simulaciones. En base a estas ideas, se han propuesto algoritmos para generar los modos efectivos y configurar las máscaras de estados efectivos. Estos algoritmos se basan en métodos iterativos para resolver Problemas Generalizados de AutoValores Simétricos y Dispersos (PGAVSD), combinándolos con índices de base física que permiten evaluar la efectividad de un modo generado y detener la secuencia de generación modal. La detección de los modos efectivos se ha basado en la evaluación de sus coeficientes de reparto, comparándolos con el límite de participación modal impuesto. La parada de la generación de los modos efectivos ha sido evaluada calculando los coeficientes de reparto acumulados modales y comparándolos con el nivel de conservación impuesto sobre el modelo reducido. Las ventajas de incluir dichos criterios en

la resolución de un PGAVSD son: *(i)* se evita la ejecución de operaciones innecesarias, *(ii)* se preserva la ecuación de continuidad para el volumen que entra al acuífero proveniente de las acciones exteriores de forma relativamente adecuada y *(iii)* al usar algoritmos iterativos basados en el producto matriz-vector disperso para resolver PGAVSD, se mantiene la estructura dispersa de las matrices que componen el modelo de flujo, la cual se puede usar para ahorrar operaciones computacionales y disminuir el almacenamiento requerido en las simulaciones.

En este trabajo se han implementado dos generadores dispersos de modos efectivos. El primero de ellos está basado en una modificación de la iteración de gradiente conjugado con deflación que usa preconditionamiento ILU para acelerar las iteraciones vectoriales y minimizar el cociente de Rayleigh. La antes mencionada generación vectorial ha probado ser muy eficiente cuando es necesario calcular una pequeña cantidad de los modos asociados a los autovalores de menor magnitud. El algoritmo genera cada modo, calcula sus coeficientes de reparto para verificar si dicho modo es efectivo, evalúa los coeficientes de reparto acumulados y verifica el criterio de parada para finalizar la generación. El segundo generador de modos efectivos está basado en la iteración racional de Lanczos con reinicio explícito y reortogonalización parcial para calcular secuencialmente subconjuntos de modos. El reinicio explícito aplica una deflación sobre un nuevo vector inicial de Lanczos para prevenir la convergencia a uno de los autovectores previamente disponibles. Una vez que cada reinicio ha construido otro conjunto de modos, el generador calcula los coeficientes de reparto de cada nuevo modo para detectar cuales de éstos son efectivos. El proceso se repite para todos los nuevos modos. Posteriormente, se calculan los coeficientes de reparto acumulados y el generador revisa si se ha alcanzado el criterio de parada de la generación para todas las acciones exteriores. Si dicho criterio no ha sido alcanzado, se efectúa un nuevo reinicio imponiendo un desplazamiento espectral conveniente para mejorar la convergencia modal. Los resultados de muchos experimentos numéricos efectuados han demostrado que el generador racional de Lanczos es muy eficiente, incluso para modelos de flujo subterráneo de gran tamaño donde el dominio espacial del acuífero ha sido discretizado usando decenas de miles de nodos pertenecientes a una malla de DF. Los generadores propuestos han sido usados para reducir los modelos de flujo subterráneo para: *(i)* acuíferos rectangulares homogéneos e isótropos conectados con un río recto, *(ii)* acuíferos rectangulares heterogéneo conectados con un río recto y *(iii)* un acuífero altamente heterogéneo con contornos irregulares, conectado con un río sinuoso e inclinado. Los resultados de las simulaciones muestran que la generación iterativa es más eficiente que calcular el espectro completo del PGAVSD y permite reducir modelos heterogéneos de gran tamaño, aún cuando muchas acciones exteriores están aplicadas sobre el acuífero.

También se ha propuesto una extensión del Método racional de LANczos (MLAN) para reducir eficientemente las relaciones río-acuífero en modelos de sistemas de uso conjunto. El MLAN clásico se usa para generar una base ortogonal de un subespacio de Krylov de reducción. Además, los factores de participación acumulados de los vectores de Lanczos se usan como criterio de parada de la generación antes mencionada, evaluando si la ecuación de conservación de masa para el volumen de agua entrando de las acciones exteriores se satisface apropiadamente. El esquema de reducción se aplica sobre el modelo de flujo subterráneo con el propósito de ensamblar una secuencia de sistemas de ecuaciones lineales reducidas, cuyas soluciones representan los estados del acuífero a lo largo del horizonte de simulación. Para hacer posible el cálculo de los volúmenes agregados de intercambio entre el río y el acuífero, se ha propuesto un esquema de integración numérica temporal de los estados de Lanczos; también se incluye el concepto de parámetros de control en el MLAN con el fin de acelerar los cálculos de las relaciones río-acuífero y otras variables



de estado requeridas. Por último, el MLAN ha sido probado para reducir los modelos de flujo en acuífero rectangulares homogéneos. Los resultados han sido comparados con los obtenidos mediante: (i) modelos pluricelulares englobados, (ii) modelos resueltos usando el MAV clásico y (iii) modelos resueltos por DF espacio-temporales. Se ha encontrado que el MLAN se comporta mejor que las DF, alcanzando un desempeño comparable al exhibido por el MAV clásico con truncamiento conservativo, pero es menos eficiente que los modelos pluricelulares englobados. Un análisis del impacto de modificar la parametrización de las relaciones río-acuífero, en función de la conductancia de río, sobre algunos parámetros de control como alturas piezométricas, volúmenes almacenados y flujos internos, ha demostrado que, al disminuir dicha conductancia, el desempeño del MLAN mejora por que se necesitan menos vectores de Lanczos para obtener resultados adecuados.

El MAV-CSEM, junto con el MLAN, han probado ser poderosas herramientas para reducir modelos de flujo subterráneo de gran tamaño. Aquí, el MAV-CSEM y el MLAN han sido aplicados para reducir dos acuíferos lineales altamente discretizados, complejos y heterogéneos. El primero es un acuífero rectangular, conectado con un río recto, compuesto por tres bandas con propiedades hidráulicas uniformes. El segundo es un acuífero altamente heterogéneo y anisótropo, de contornos irregulares, conectado con un río sinuoso e inclinado. En ambos acuíferos, la aplicación de cada técnica de reducción ha consistido en un análisis de sensibilidad de la influencia de modificar la parametrización de las relaciones río-acuífero, en función de la conductancia del río y de los parámetros de reducción (límite de participación modal para MAV-CSEM y tamaño del subespacio de Krylov de reducción para el MLAN), en la representación más adecuada de algunos parámetros de control seleccionados, como lo son las alturas piezométricas, los volúmenes almacenados y los flujos internos. Los resultados han mostrado el poder de ambas técnicas para reducir eficientemente los modelos de flujo subterráneo planteados. Sin embargo, las principales diferencias encontradas entre ambos son: (i) el MAV-CSEM es más demandante computacionalmente para calcular el subespacio de reducción de autovectores, pero su ejecución del modelo de flujo es más rápida, (ii) el MLAN calcula más adecuadamente las variables distribuidas en el acuífero como alturas piezométricas, volúmenes almacenados y flujos internos si la parametrización de la iteración de Lanczos se realiza apropiadamente y (iii) el MAV-CSEM obtiene más eficiente y adecuadamente las relaciones río-acuífero agregadas a lo largo de toda la red de drenaje. La principal conclusión de estas aplicaciones es que la selección de uno u otro método de reducción depende del tipo de problema que se está enfrentando y de los parámetros de control requeridos por éste.



# Abstract

In this work, the possibility of using techniques to reduce linear systems to achieve more efficient groundwater flow modeling in systems of conjunctive use of water is studied. Thus, the main focus of this investigation is to relate the parameterization of the surface-ground water relationships with the characteristics of the reduced models and to find the consequences of such parameterization on the efficiency of the model's reduction.

The first proposed methodology, called Eigenvalue Method with Selective Compression and Modal Masking (EVM-SCMM), dramatically reduces the size of a groundwater flow model, increasing its execution's efficiency and decreases its required virtual memory. For practical purposes, EVM-SCMM uses the following new concepts: (*i*) effective modes, (*ii*) residual modes, (*iii*) modal participation limit, (*iv*) effective modes mask and (*v*) percentage of mass conservation. Those concepts not just allow to identify the modes that contribute to the most of the aquifer response to the external excitations; they also help to achieve a faster aquifer flow simulation than it is obtained with classical EVM. The main advantage of EVM-SCMM is that, augmenting the number of cells, allows to consider a more detailed description on the spatial variability of the aquifer's hydraulics parameters in groundwater flow modeling, having a little effect on the computational efficiency of the simulations, especially when a system of conjunctive use of surface and ground water is modeled. The EVM-SCMM has been tested on simple homogenous rectangular aquifers. The results have an accuracy similar to those obtained using EVM or Finite Differences (FD), but the simulation is more efficient. A sensitivity analysis of the impact of changing the parameterization of the river's boundary conditions, in function of the riverbed's conductance, over some control parameters as heads, stored volumes and internal fluxes is presented. It has been found that decreasing the riverbed's conductance improves the performance of EVM-SCMM because fewer modes are needed to obtain accurate results.

The conceptual framework of the EVM-SCMM allows to develop physically based criteria to generate effective modes more efficiently, to remove residual modes and to build the modal mask that accelerates the execution of the simulations. Based on the above ideas, algorithms to generate effective modes and to configure modal masks are proposed. These algorithms are based on iterative methods to solve a sparse symmetric generalized eigenvalue problem (SSGEVP), combined with physical indexes that allow to evaluate the effectiveness of any generated mode and to stop a sequence of the eigenpair's generation. The detection of the effective modes is carried out evaluating their participation factors and comparing them with the modal participation limit. The stop of the effective modes generation process is evaluated calculating the aggregate percentage of mass conservation on the aquifer and comparing it with a lower limit previously imposed to the reduced model. The advantage of include those criteria on solving a SSGEVP are that, first, they avoid to perform unnecessary iterations and, second, they approximate accurately the mass conservation equation for the water volume entering to the aquifer from the External Actions (EA). Another advantage of using iterative based on the sparse matrix-

vector product methods for solving SSGEVP is that the disperse matrix structure of the model can be use to save arithmetic operations and storage in the generation of modes.

In this work, two iterative sparse generators of effective modes have been implemented. The first generator of effective modes is based on a modification of the deflated conjugate gradient iteration; it uses ILU preconditioning to accelerate the vector iterations and to minimize the Rayleigh quotient. This vector generation has proven to work very fast when a small amount of the lesser magnitude effective modes are needed. The algorithm generates sequentially each mode, calculates the modal allocation coefficients to check if such mode is effective, computes the accumulated allocation coefficients and checks the stop criteria to finish the generation. On the other hand, the second generator of effective modes is based on the rational Lanczos iteration with explicit restart to calculate sequentially sets of modes. The explicit restart deflates a new initial Lanczos vector to prevent the convergence towards one of the already available eigenvectors. Once each restart has built another set of modes, the generator calculates the allocation coefficients for each new mode and checks which of them are effective. This process is repeated for all new modes. Then, the accumulated allocation coefficients are calculated and the generator checks if the stop criteria has been achieved for all EA to stop the generation. If the stopping criteria has not been achieved, another restart is performed using a new spectral shift to improve the modal convergence. The results of many numerical experiments have shown that rational Lanczos generator is very efficient, even for large scale models where the spatial domain of the aquifer has been discretized using tens of thousands of nodes belonging to a FD network. The two proposed generators of effective modes have been applied to reduce models for: (i) a rectangular homogeneous aquifer connected with an straight river, (ii) a rectangular heterogeneous aquifer connected with a straight river and (iii) a highly heterogeneous aquifer with irregular boundaries connected with a sinuous sloped river. The results of the simulations show that the iterative generation of effective modes is more efficient than calculating the complete spectra of the respective SSGEVP.

An extension of the Rational Lanczos Reduction Method (RLANRM) to simulate efficiently surface-ground water relationships in models of conjunctive use systems is proposed. The classical RLANRM is used to form an orthogonal base of a Krylov reduction subspace. Also, the accumulated volumetric allocation factors of the Lanczos vectors are used as criteria for stopping the generation of the Krylov subspace, evaluating if the mass conservation equation for the income volume from the external excitations is satisfied properly. The reduction scheme is applied on the groundwater flow model to obtain a sequence of reduced systems of linear equations, whose solutions represent the states of the aquifer along the simulation horizon. To allow the calculation of the aggregated exchange volumes of water between aquifer and river during each simulation step, a discrete time pendent integration procedure of the aquifer's Lanczos states has been proposed. The concept of control parameters is included on the RLANRM to accelerate the calculations of surface-ground water relations and other required state variables. Finally, the RLANRM has been tested on simple homogenous rectangular aquifers. The results are compared to those obtained using: (i) embedded multi-reservoir models, (ii) models solved using classical EVM and (iii) models solved using FD. It was found that RLANRM behaves better than FD, achieving a comparable performance to the exhibited by the truncated EVM, but it is less efficient than the embedded multi-reservoir models. An analysis of the impact of changing the parameter of the river's boundary conditions, in function of the riverbed's conductance, over some control parameter as heads, stored volumes and internal fluxes is presented. It has been found that decreasing the conductance improves the performance of RLANRM because fewer Lanczos vectors are needed to obtain accurate results.

The EVM-SCMM and the RLANRM have proven to be powerful tools to reduce groundwater models. Here, EVM-SCMM and RLANRM have been applied to reduce groundwater models of two complex highly discretized linear heterogeneous aquifers. The former is a rectangular aquifer, connected with a straight river with three bands of homogenous values for the hydraulic properties; the second one is a highly heterogeneous aquifer with irregular boundaries connected with a sinuous sloped river. In both aquifers, the application of each reduction technique consisted in an sensitivity analysis of the influence of the river boundary condition's parameterization, in function of the riverbed's conductance and the reduction's parameters (modal participation limit for the EVM-SCMM and the size of Krylov reduction subspace for the RLANRM) in a more accurate representation of some selected control parameters as heads, stored volumes and surface-ground water relationships. The results have shown the power of both techniques to reduce efficiently groundwater flow models, but the main differences between them are: (i) EVM-SCMM is more computationally demanding than RLANRM to calculate the reduction subspace, but the execution of the flow model is faster, (ii) RLANRM calculates more accurately distributed aquifer's state variables as heads, stored volumes and internal fluxes if the parameterization of the rational Lanczos iteration is set appropriately, (iii) EVM-SCMM obtains global surface-ground water relations more efficiently and accurately than RLANRM. The main conclusion of these applications is that the choice of any of both methodologies depends on the type of the problem to be solved and/or the desired control parameters to be better represented in the reduced simulations.



# Resum

En aquest treball s'ha estudiat la possibilitat d'utilitzar algunes d'aquestes tècniques de reducció per aconseguir una simulació més eficient del flux subterrani en els aquífer continguts en models d'ús conjunt. Així, el principal enfocament d'aquesta investigació ha estat relacionar la parametrització de les relacions riu-aquífer amb les característiques del model reduït per trobar els efectes d'aquesta parametrització en l'eficiència de la reducció.

La primera metodologia proposada, anomenada Mètode dels Autovalors amb compressió selectiva i emmascarament modal (MAV-CSEM), pot reduir dramàticament la mida d'un model de flux subterrani, augmentant l'eficiència de la seva execució i disminuint la memòria virtual requerida. Per efectes pràctics, el MAV-CSEM utilitza els següent conceptes nous: (i) modes efectius, (ii) modes residuals, (iii) límit de participació modal, (iv) màscara d'estats efectius i (v) nivell de continuïtat. Aquest marc conceptual no només ajuden a identificar les modes que més contribueixen a la resposta de l'aquífer per causa de les excitacions externes, sinó que també ajuden a aconseguir una simulació més ràpida del flux en l'aquífer que obtinguda pel MAV clàssic. El principal avantatge del MAV-CSEM és que, augmentant el nombre de nodes del model, permet considerar més detalladament la variabilitat espacial dels paràmetres de l'aquífer en la modelació del flux subterrani, augmentant l'eficiència computacional de les simulacions, especialment quan aquest aquífer forma part del model d'un sistema d'ús conjunt. El MAV-CSEM ha estat provat en aquífers rectangulars homogenis simples. Els resultats obtinguts tenen un comportament similar als simulats utilitzant el MAV clàssic o les diferències finites (DF), però la simulació és molt més eficient. Igualment, s'ha efectuat una anàlisi de sensibilitat de l'impacte de canviar la parametrització de les condicions de contorn tipus riu, en funció de la conductància del seu llit, sobre alguns paràmetres de control de l'aquífer com ara piezomètriques, volums emmagatzemats i cabals parcial d'intercanvi riu-aquífer. Dels resultats d'aquesta anàlisi s'ha trobat que, en disminuir la conductància del riu, millora el comportament del MAV-CSEM perquè menor quantitat de modes efectius és necessària per obtenir resultats fiables en les variables abans esmentades.

El marc conceptual del MAV-CSEM permet desenvolupar criteris de base física per generar modes efectius més eficientment, per remoure les modes residuals i per construir les màscares d'estats efectius que acceleren l'execució de les simulacions. Amb base a aquestes idees, s'han proposat algorismes per generar les modes efectius i configurar les màscares d'estats efectius. Aquests algorismes es basen en mètodes iteratius per resoldre problemes generalitzats de autovalors simètrics i dispersos (PGAVSD), conminándolos amb índexs de base física que permet avaluar l'efectivitat d'un mode generat i aturar la seqüència de generació modal. La detecció de les modes efectius s'ha basat en l'avaluació dels seus coeficients de repartiment, comparant-los amb el límit de participació modal impost. La parada de la generació de les modes efectius ha estat avaluada calculant els coeficients de repartiments acumulats modals, comparant-los amb el nivell de conservació impost sobre el model reduït. Els avantatges d'incloure aquests criteris en la resolució d'un PGAVSD són les següents. Primer, s'evita l'execució d'operacions innecessàries i, segon, es preserva, de

manera relativament adequada, l'equació de continuïtat per al volum que entra a l'aquífer provinent de les accions exteriors (AE). Un altre avantatge és que, en usar algorismes iteratius basats en el producte matriu-vector dispers per resoldre PGAVSD, es conserva l'estructura dispersa de les matrius que componen el model de flux, la qual es pot utilitzar per estalviar operacions computacionals i disminuir l'emmagatzematge requerit.

En aquest treball s'han implementat dos generadors dispersos de modes efectius. El primer d'ells està basat en un modificació de la iteració de gradient conjugat amb deflació que utilitza preconditionament ILU per accelerar les iteracions vectorials i minimitzar el quocient de Rayleigh. L'abans esmentada generació vectorial ha provat ser molt eficient quan és necessari calcular una petita quantitat dels modes associats als autovalors de menor magnitud. L'algorisme genera cada mode calcula seus coeficients de repartiment per verificar si aquest mode és efectiu, avalua els coeficients de repartiment acumulats i verifica el criteri de parada per finalitzar la generació. D'altra banda, el segon generador de modes efectius està basat en la iteració racional Lanczos amb reinici explícit i reortogonalització parcial per calcular seqüencialment subconjunts de modes. El reinici explícit aplica una deflació sobre un nou vector inicial de Lanczos per prevenir la convergència a un dels autovectors prèviament disponibles. Quan cada reinici ha construït un altre conjunt de modes, el generador calcula els coeficients de repartiment de cada nou mode per detectar quins d'aquests són efectius. El procés es repeteix per tot les noves modes. Posteriorment, els coeficients de repartiment acumulats es calculen i el generador revisa si s'ha assolit el criteri d'aturada de la generació per a totes les AE. Si aquest criteri no ha estat assolit, s'efectua un nou reinici imposant un desplaçament espectral convenient per millorar la convergència modal. Els resultats de molts experiments numèrics efectuats han demostrat que el generador racional de Lanczos és molt eficient, fins i tot per models de flux subterrani de grans dimensions on el domini espacial de l'aquífer ha estat discretizado utilitzant desenes de milers de nodes pertanyents a una xarxa de DF. Els generadors proposats han estat usats per reduir els models de flux subterrani per: (i) aquífers rectangulars homogenis i isòtrops connectats amb un riu recte, (ii) aquífers rectangulars heterogeni connectats amb un riu recte i (iii) un aquífer altament heterogeni amb contorns irregulars, connectat amb un riu sinuós i inclinat. Els resultats de les simulacions mostren que la generació iterativa de modes és més eficient de calcular l'espectre complet del PGAVSD i permet reduir models heterogenis de grans dimensions, tot i que moltes AE estan aplicades sobre l'aquífer.

També s'ha proposat una extensió del mètode racional de Lanczos (MLAN) per reduir eficientment les relacions riu-aquífer en models de sistemes d'ús conjunt. El MLAN s'usa per generar una base ortogonal d'un subespai de Krylov de reducció. A més, els factors de participació acumulats dels vectors de Lanczos s'usen com a criteri d'aturada de la generació abans esmentada, avaluant si l'equació de conservació de massa per el volum d'aigua entrant de les AE es satisfà apropiadament. L'esquema de reducció s'aplica sobre el model de flux subterrani amb i propòsit d'acoblar una seqüència de sistemes d'equacions lineals reduïdes, les solucions representen els estats de l'aquífer al llarg de l'horitzó de simulació. Per fer possible el càlcul dels volums integrats d'intercanvi entre el riu i l'aquífer, s'ha proposat un esquema d'integració numèrica dels estats de Lanczos. A part d'això, també s'inclouen els conceptes de paràmetres de control al MLAN per tal d'accelerar els càlculs de les relacions riu-aquífer i altres variables d'estat requerides. Finalment, el MLAN ha estat provat per reduir els models de flux en aquífer rectangulars homogenis. Els resultats han estat comparats amb els obtinguts mitjançant: (i) models pluri cellulars englobats, (ii) models resolts utilitzant el MAV clàssic i (iii) models resolts per DF espai-temporals. S'ha trobat que el MLAN es comporta millor que les DF, aconseguint un acompliment comparable al exhibit pel MAV clàssic amb truncament conservatiu, però és menys eficient



que els models pluri cellulars englobats. Una anàlisi de l'impacte de modificar la parametrització de les relacions riu-aqüífer, en funció de la conductància de riu, sobre alguns paràmetres de control com ara piezomètriques, volums emmagatzemats i fluxos interns, ha demostrat que, en disminuir la conductància, el desenvolupament del MLAN millora ja que es necessiten menys vectors de Lanczos per obtenir resultats adequats.

El MAV-CSEM i el MLAN han provat ser poderoses eines per reduir models de flux subterrani de grans dimensions. Aquí, el MAV-CSEM i el MLAN han estat aplicats per reduir dos aqüífers lineals altament discretizados, complexos i heterogenis. El primer és un aqüífer rectangular, connectat amb un riu recte, que manifesta tres bandes amb propietats hidràuliques uniformes. El segon és un aqüífer altament heterogeni i anisòtrop, de contorns irregulars, connectat amb un riu sinuós i inclinat. En ambdós aqüífers, l'aplicació de cada tècnica de reducció ha consistit en una anàlisi de sensibilitat de la influència de modificar la parametrització de les relacions riu-aqüífer, en funció de la conductància del riu i dels paràmetres de reducció (límit de participació modal per MAV-CSEM i mida del subespai de Krylov de reducció per al MLAN), en la representació més adequada d'alguns paràmetres de control seleccionats, com ho són les altures piezomètriques, volums emmagatzemats i fluxos interns. Els resultats han mostrat el poder d'ambdues tècniques per reduir eficientment els models de flux subterrani plantejats. No obstant això, les principals diferències trobades entre ambdós són: *(i)* el MAV-CSEM és més demandant computacionalment per calcular el subespai de reducció de autovectors, però la seva execució del model de flux és més ràpida, *(ii)* el textsc MLAN calcula més adequadament les variables distribuïdes a l'aqüífer com ara piezomètriques, volums emmagatzemats i fluxos interns si la parametrització de la iteració de Lanczos es realitza correctament *(iii)* el MAV-CSEM obté més eficient i adequadament les relacions riu-aqüífer agregades al llarg de tota la xarxa de drenatge. La principal conclusió d'aquestes aplicacions és que la selecció d'un o altre mètode de reducció depèn del tipus de problema que s'està enfrontant i dels paràmetres de control requerits per aquest.



# Notación matemática

A continuación se presenta una breve explicación de la notación matemática utilizada en este documento. Las letras mayúsculas en negrita ( $\mathbf{B}$ ) representan matrices, mientras que la letras minúsculas en negrita ( $\mathbf{x}$ ) denotan vectores. El  $j$ -ésimo vector columna de una matriz ( $\mathbf{B}$ ) se denota con la letra minúscula de su nombre en negrita y el subíndice correspondiente ( $\mathbf{b}_j$ ). Igualmente, el elemento de dicha matriz ubicado en la  $i$ -ésima fila y  $j$ -ésima columna se escribe usando la letra minúscula de su nombre en itálica con los subíndices correspondientes separados por una coma ( $b_{i,j}$ ). El  $i$ -ésimo componente de un vector ( $\mathbf{x}$ ) se denota con la letra minúscula de su nombre en itálica y el subíndice correspondiente ( $x_i$ ). Un subconjunto de una matriz ( $\mathbf{B}$ ), formada por los elementos comprendidos entre las filas  $r$  y  $s$  y las columnas  $p$  y  $q$ , se escribe usando el nombre de la matriz original con los subíndices de las filas y columnas a extraer separados por dos puntos y una coma, primero las filas y luego las columnas ( $\mathbf{B}_{r:s,p:q}$ ). La letra  $\mathbf{I}$  se reserva para representar a la matriz identidad y  $\mathbf{e}_j$  denota su  $j$ -ésimo vector columna. Asimismo, la notación  $\mathbf{B}^{-1}$  se usa para la inversa de la matriz  $\mathbf{B}$ , mientras que  $\mathbf{B}^*$  corresponde a su transpuesta.

El producto matriz vector se denota como  $\mathbf{B}\mathbf{x}$ . Cuando la matriz  $\mathbf{B}$  es transpuesta, dicha operación se escribe como  $\mathbf{B}^*\mathbf{x}$ , donde  $*$  denota únicamente la transposición de  $\mathbf{B}$ . De forma similar, el producto entre dos matrices se denota como  $\mathbf{B}\mathbf{X}$  o, análogamente,  $\mathbf{B}^*\mathbf{X}$  si la operación involucra la transposición de  $\mathbf{B}$ . Por otro lado, el determinante de una matriz  $\mathbf{B}$  se escribe como  $\det(\mathbf{B})$  y el subespacio generado por sus vectores columnas se denota como  $\text{span}\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \dots, \mathbf{b}_n\}$ . Si  $\mathbf{B}$  es una matriz diagonal se define usando la notación  $\text{diag}(b_1, b_2, \dots, b_n)$ , donde  $b_i$  es el  $i$ -ésimo componente de su diagonal. De forma alternativa, un vector columna también se representa como  $\mathbf{x} = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]^*$  y una matriz en términos de sus vectores columna se escribe como  $\mathbf{B} = [\mathbf{b}_1 \ \mathbf{b}_2 \ \dots \ \mathbf{b}_n]$ .

Los símbolos  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{Z}^n$ ,  $\mathbb{Z}^{m \times n}$  representan a los conjuntos de los números, vectores  $n$  dimensionales y matrices  $(m \times n)$  dimensionales enteros. Análogamente,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{R}^n$ ,  $\mathbb{R}^{m \times n}$  representan a los conjuntos de los números, vectores  $n$  dimensionales y matrices  $(m \times n)$  dimensionales reales. Además, la parte positiva de los números enteros y reales se denota como  $\mathbb{Z}^+$  y  $\mathbb{R}^+$ , respectivamente, mientras que sus contrapartes negativas se escribe como  $\mathbb{Z}^-$  y  $\mathbb{R}^-$ . Igualmente,  $\mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^n$ ,  $\mathbb{C}^{m \times n}$  se emplean para denotar a los conjuntos de los números, vectores  $n$  dimensionales y matrices  $(m \times n)$  dimensionales complejos.

Por otra parte, una función matemática se denota en letras itálicas seguida de las variables independientes de las cuales depende encerradas en paréntesis en letras itálicas, por ejemplo,  $f(t)$ . Alternativamente, si se trata de una función vectorial, los argumentos dentro del paréntesis se escriben en minúsculas negritas, así  $f(\mathbf{u}(t))$ . Además, un vector o una matriz de funciones se representa en letras latinas, minúsculas o mayúsculas, respectivamente, seguida de las variables independientes de las cuales depende encerradas en paréntesis y escritas en letras itálicas, así  $\Phi(t)$ . Las constantes o coeficientes se denotan en letras latinas y/o griegas minúsculas. Finalmente, el dominio de una función se denota como un subconjunto de los conjuntos de número enteros reales o complejos usando una letra mayúscula negrita encerrada con su respectiva dimensión  $\mathbb{T}$ ,  $\mathbb{T}^n$  o  $\mathbb{T}^{(m \times n)}$ .



# Glosario de abreviaturas

AE: Acciones exteriores.  
BIAS: Coeficiente de sesgo.  
CC: Condiciones de contorno.  
DF: Diferencias finitas.  
DOA: Descomposición ortogonal apropiada.  
E: Coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe.  
EDO: Ecuaciones diferenciales ordinarias.  
EDP: Ecuaciones en derivadas parciales.  
EF: Elementos finitos.  
ICR: Iteración del cociente de Rayleigh.  
II: Iteración inversa.  
ILU: Factorización LU incompleta.  
KD: Kernels discretos.  
MAGCD: Método acelerado de los gradientes conjugado con deflación.  
MAV: Método de los autovalores.  
MAV-CSEM: MAV con compresión selectiva y enmascaramiento modal.  
MGCLOP: Método de los gradiente conjugado localmente óptimo.  
MLAN: Método de reducción racional de Lanczos.  
MPE: Modelos pluricelulares englobados.  
MRORA: Método de Rorabaugh.  
PGS: Proceso de Gram Schmidt.  
PRSL: Problema regular de Sturm-Liouville.  
RMS: Error cuadrático medio relativo.  
RNA: Redes neuronales artificiales.  
ROP: Reortogonalización parcial.  
SELD: Sistemas de ecuaciones lineales dispersos.  
SLIT: Sistema lineal invariante en el tiempo.



# Índice general

<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Resumen</b>	<b>IX</b>
<b>Abstract</b>	<b>XIII</b>
<b>Resum</b>	<b>XVII</b>
<b>Notación matemática</b>	<b>XXI</b>
<b>Glosario de abreviaturas</b>	<b>XXIII</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Las relaciones río-acuífero . . . . .	2
1.2. La utilización conjunta . . . . .	4
1.3. La modelación de la interacción río-acuífero para fines de aprovechamiento . . . . .	6
1.4. Propósitos y alcances . . . . .	7
1.5. Organización del documento . . . . .	8
<b>2. Sistemas hidrogeológicos lineales invariantes en el tiempo</b>	<b>11</b>
2.1. Introducción . . . . .	11
2.2. Sistemas lineales, superposición y reducción . . . . .	12
2.2.1. Descripción matemática de un sistema . . . . .	13
2.2.2. Clasificación de los sistemas . . . . .	13
2.2.3. El principio de superposición . . . . .	14
2.2.4. Esquema general para la reducción de modelos . . . . .	14
2.3. Modelos lineales clásicos para cuantificar la relación río-acuífero en la utilización conjunta . . . . .	16
2.3.1. Modelos agregados . . . . .	16
2.3.2. Modelos distribuidos analíticos . . . . .	16
2.3.3. Funciones de influencia . . . . .	17
2.4. Esquemas de reducción de SLIT para la modelación hidrogeológica y la cuantificación de la relación río-acuífero en la utilización conjunta . . . . .	18
2.4.1. Reducción modal . . . . .	18
2.4.2. Reducción semiempírica . . . . .	20
2.4.3. Reducción basada en los datos . . . . .	21
2.4.4. Reducción en los subespacios de Krylov . . . . .	21
2.5. EDP lineal de flujo de agua subterránea . . . . .	23
2.6. Condiciones inicial y de contorno . . . . .	23
2.6.1. Condición inicial . . . . .	23

2.6.2.	Condiciones de contorno . . . . .	24
2.6.3.	Formulación matemática para la interacción río-acuífero en un sistema hidrogeológico lineal . . . . .	24
2.7.	Descomposición del problema de flujo subterráneo mediante el principio de superposición . . . . .	26
2.8.	Ecuación matricial-diferencial para la simulación del flujo subterráneo en acuíferos lineales . . . . .	28
2.8.1.	Solución numérica de la ecuación de flujo subterráneo mediante el uso de las diferencias finitas . . . . .	29
2.8.2.	El problema en régimen permanente . . . . .	32
2.8.3.	El problema en régimen transitorio . . . . .	32
2.9.	Cálculo de las variables de respuesta del acuífero en modelos de simulación numérica por reducción . . . . .	33
2.9.1.	Cálculo de alturas piezométricas . . . . .	35
2.9.2.	Cálculo del volumen de agua almacenado . . . . .	36
2.9.3.	Cálculo del caudal de intercambio entre el acuífero y el contorno dependiente de una altura externa . . . . .	36
2.10.	Tratamiento de condiciones de contorno no invariantes en modelos lineales de flujo subterráneo . . . . .	37
2.11.	Conclusiones . . . . .	39
<b>3.</b>	<b>Reducción modal analítica de sistemas hidrogeológicos</b>	<b>41</b>
3.1.	Introducción . . . . .	41
3.2.	Solución del problema en régimen permanente . . . . .	42
3.3.	Solución del problema en régimen transitorio . . . . .	42
3.3.1.	Solución general: acciones exteriores nulas . . . . .	42
3.3.2.	Solución particular: acciones exteriores dadas . . . . .	44
3.3.3.	Solución total transitoria: principio de superposición . . . . .	45
3.4.	Cálculo del caudal de intercambio entre el río y el acuífero: el modelo pluricelular englobado . . . . .	46
3.5.	Algunas soluciones analíticas de interés en la modelación de sistemas de recursos hídricos . . . . .	49
3.5.1.	Acuífero perfectamente conectado y acción distribuida . . . . .	49
3.5.2.	Acuífero perfectamente conectado y acción puntual . . . . .	53
3.5.3.	Acuífero parcialmente conectado y acción distribuida . . . . .	53
3.5.4.	Acuífero parcialmente conectado y acción puntual . . . . .	55
3.6.	Caso de referencia . . . . .	56
3.6.1.	Autovalores, autofunciones y factores de reparto . . . . .	56
3.6.2.	Simulaciones para acción distribuida . . . . .	59
3.6.3.	Simulaciones para acción puntual . . . . .	65
3.7.	Conclusiones y discusión . . . . .	66
<b>4.</b>	<b>Reducción modal numérica con el método de los autovalores</b>	<b>73</b>
4.1.	Introducción . . . . .	73
4.2.	Solución numérica del flujo subterráneo por el método de los autovalores . . . . .	74
4.2.1.	El problema en régimen permanente . . . . .	74
4.2.2.	El problema en régimen transitorio . . . . .	75
4.2.3.	Volumen de intercambio acuífero-masa superficial de agua . . . . .	78
4.3.	Truncamiento modal de un modelo de flujo subterráneo mediante el método de los autovalores . . . . .	79



4.4.	Caso de referencia . . . . .	81
4.4.1.	Estudio comparativo del problema de autovalores para las soluciones analíticas y numéricas . . . . .	82
4.4.2.	Simulaciones para acción distribuida . . . . .	87
4.4.3.	Simulaciones para acción puntual . . . . .	97
4.5.	Conclusiones y discusión . . . . .	100
<b>5.</b>	<b>Estimación de parámetros hidrogeológicos usando hidrogramas de flujo base y modelos lineales reducidos</b>	<b>103</b>
5.1.	Introducción . . . . .	103
5.2.	Modelación de la interacción río-acuífero para el análisis de curvas de agotamiento en ríos ganadores . . . . .	104
5.2.1.	Soluciones analíticas para el drenaje de un acuífero a un río como respuesta a la recarga natural . . . . .	104
5.2.2.	Reducción empírica de soluciones analíticas para acuíferos lineales en el análisis de curvas de agotamiento . . . . .	107
5.3.	Características del acuífero sintético irregular . . . . .	109
5.4.	Método de Halford y Mayer para la estimación de la longitud del modelo unidimensional equivalente . . . . .	111
5.5.	Análisis por el MAV . . . . .	112
5.5.1.	Resultados para los problema de autovalores . . . . .	112
5.5.2.	Componente permanente de la solución por el MAV . . . . .	114
5.5.3.	Simulaciones en régimen transitorio por el MAV . . . . .	115
5.5.4.	Influencia de la componente permanente en la relación río-acuífero transitoria simulada por el MAV . . . . .	117
5.6.	Efectos producidos por la variación de las conductancias del lecho del río sobre el índice de agotamiento estimado del hidrograma . . . . .	120
5.7.	Resultados de las simulaciones mediante la solución de Rorabaugh y comparación cuantitativa con las simulaciones por el MAV . . . . .	122
5.8.	Validación de los modelos resueltos por el MAV con respecto a soluciones de referencia por DF . . . . .	124
5.9.	Consideraciones para la reducción del modelo . . . . .	126
5.10.	Conclusiones y discusión . . . . .	133
<b>6.</b>	<b>Compresión selectiva, enmascaramiento y generación modal en la reducción por el método de los autovalores</b>	<b>135</b>
6.1.	Introducción . . . . .	135
6.2.	Compresión selectiva y enmascaramiento de los modos efectivos en un modelo de flujo subterráneo resuelto mediante el MAV . . . . .	136
6.3.	Métodos para resolver el problema de autovalores . . . . .	140
6.3.1.	Métodos de iteraciones en el polinomio característico . . . . .	140
6.3.2.	Métodos basados en transformaciones . . . . .	141
6.3.3.	Métodos de iteración en vectores . . . . .	142
6.3.4.	Métodos de minimización del cociente de Rayleigh . . . . .	144
6.3.5.	Métodos de proyección . . . . .	145
6.4.	EVMPACK, la librería para la simulación del flujo subterráneo mediante el MAV-CSEM . . . . .	148
6.5.	Generación eficiente de modos efectivos para simular el flujo subterráneo usando el MAV-CSEM . . . . .	148

6.5.1.	Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales en la generación de los autovectores para el MAV . . . . .	149
6.5.2.	Deflación y reortogonalización . . . . .	155
6.5.3.	Generador por minimización del cociente de Rayleigh mediante gradiente conjugado acelerado con deflación . . . . .	156
6.5.4.	Generador racional de Lanczos con reinicio explícito . . . . .	160
6.5.5.	Generadores de modos efectivos para modelos reducidos de flujo subterráneo mediante el MAV-CSEM . . . . .	169
6.6.	Aplicación del MAV-CSEM al caso de referencia . . . . .	174
6.6.1.	Generación de los modos efectivos . . . . .	174
6.6.2.	Análisis de los resultados de las simulaciones para acciones exteriores uniformemente distribuida y puntual . . . . .	177
6.7.	Simulación reducida del flujo en un acuífero heterogéneo rectangular mediante el MAV-CSEM . . . . .	181
6.7.1.	Generación selectiva de los modos efectivos . . . . .	181
6.7.2.	Análisis de los resultados de las simulaciones . . . . .	187
6.8.	Conclusiones y discusión . . . . .	191
<b>7.</b>	<b>Reducción de modelos de flujo subterráneo mediante la transformación de Lanczos</b> . . . . .	<b>193</b>
7.1.	Introducción . . . . .	193
7.2.	Procedimiento de reducción de un modelo de flujo subterráneo mediante el MLAN . . . . .	194
7.2.1.	El problema en regimen permanente . . . . .	194
7.2.2.	El problema en regimen transitorio . . . . .	194
7.2.3.	Volumen de intercambio acuífero-masa superficial de agua . . . . .	199
7.3.	Aplicación del MLAN al caso de referencia . . . . .	199
7.3.1.	Características de los subespacios de Krylov generados . . . . .	200
7.3.2.	Simulaciones para acción exterior distribuida . . . . .	204
7.3.3.	Simulaciones para acción exterior puntual . . . . .	210
7.4.	Simulación reducida de un acuífero heterogéneo de geometría regular sometido a acciones exteriores sencillas mediante el MLAN . . . . .	211
7.4.1.	Generación del subespacio de Krylov de reducción . . . . .	211
7.4.2.	Análisis de los resultados de las simulaciones . . . . .	216
7.5.	Conclusiones y discusión . . . . .	220
<b>8.</b>	<b>Modelación reducida del flujo subterráneo en un acuífero heterogéneo bidimensional</b> . . . . .	<b>223</b>
8.1.	Introducción . . . . .	223
8.2.	Campo de transmisividad . . . . .	224
8.3.	Modelos conceptuales de los acuíferos de prueba . . . . .	224
8.3.1.	Geometría de las condiciones de contorno, la conexión río-acuífero y discretización espacial . . . . .	224
8.3.2.	Parámetros hidráulicos . . . . .	226
8.3.3.	Acciones exteriores . . . . .	228
8.3.4.	Condiciones iniciales . . . . .	230
8.3.5.	Parámetros de control . . . . .	230
8.4.	Aplicación del MAV-CSEM a la reducción de modelos de flujo subterráneo . . . . .	231
8.4.1.	Solución de los problemas de autovalores, generación de modos efectivos y enmascaramiento de modelos reducidos . . . . .	231

---

8.4.2. Análisis de las simulaciones reducidas por el MAV-CSEM . . . . .	247
8.5. Aplicación del MLAN a la reducción de los modelos de flujo subterráneo . .	261
8.5.1. Generación de los subespacios racionales de Krylov . . . . .	261
8.5.2. Análisis de las simulaciones reducidas por el MLAN . . . . .	273
8.6. Conclusiones y discusión . . . . .	287
<b>9. Conclusiones y futuras líneas de investigación</b>	<b>293</b>
9.1. Conclusiones . . . . .	293
9.2. Futuras líneas de investigación . . . . .	298
<b>Referencias</b>	<b>301</b>



# Índice de figuras

1.1. Relaciones río-acuífero. Arriba: río ganador conectado. Centro: río perdedor conectado. Abajo: río perdedor desconectado o río efímero. Adaptada de Sahuquillo y Cassiraga (2010b). . . . .	3
2.1. Esquema de un sistema. . . . .	12
2.2. Esquema general para la reducción de un SLIT. Adaptada de Antoulas (2005). . . . .	15
2.3. Configuración de la condición de contorno tipo Cauchy para representar la relación río-acuífero. Adaptada de Sahuquillo y Cassiraga (2010c). . . . .	25
2.4. Principio de superposición aplicado para obtener una solución de la EDP de flujo subterráneo en acuíferos lineales. Adaptada de Sahuquillo y Cassiraga (2010c). . . . .	27
2.5. Esquema de cinco puntos usado para la aproximación de las derivadas parciales espaciales en la ecuación de flujo mediante las DF. . . . .	30
2.6. Esquema de la numeración topológica de los bloques activos para la discretización de un acuífero lineal usando DF. . . . .	30
2.7. Representación de las relaciones río-acuífero mediante las DF para río completamente penetrante (arriba) y parcialmente penetrante (abajo). . . . .	37
3.1. Infinitos depósitos virtuales que representan la solución para la relación río-acuífero mediante un MPE. Adaptada de Sahuquillo (1983b). . . . .	48
3.2. Acuífero rectangular conectado con un río, sometido a acción exterior distribuida uniformemente. Se presentan esquemas de: (i) la vista en planta del acuífero, arriba; (ii) el perfil en $y = 0$ para caso de río completamente penetrante y perfectamente conectado, centro; (iii) el perfil en $y = 0$ para caso de río completamente penetrante e imperfectamente conectado, abajo. . . . .	50
3.3. Acuífero rectangular conectado con un río, sometido a acción exterior puntual concentrada. Se presenta el esquema de: (i) vista en planta del acuífero, arriba; (ii) el perfil en $y = y_p$ para caso de río completamente penetrante y perfectamente conectado, centro; (iii) el perfil en $y = y_p$ para caso de río completamente penetrante e imperfectamente conectado, abajo. . . . .	51
3.4. Distribución de los primeros trece autovalores en orden ascendente para seis diferentes conductividades hidráulica del lecho del río, $\hat{K}$ , correspondientes al acuífero rectangular de referencia estudiado por el MAV. . . . .	57
3.5. Distribución de los primeros trece valores absolutos de los volúmenes bajo las autofunciones correspondientes para el acuífero rectangular estudiado para diferentes valores de conductividad hidráulica del lecho del río, $\hat{K}$ . . . . .	57

3.6. Distribución de los primeros quince factores de reparto acumulados en orden ascendente para el acuífero rectangular estudiado considerando diferentes valores de conductividad hidráulica del lecho del río, $\hat{K}$ , y acciones exteriores distribuida (izquierda) y puntual (derecha). . . . .	58
3.7. Recargas actuando sobre el acuífero de referencia durante 1000 días de simulación. . . . .	59
3.8. Hidrogramas de caudal de descarga al río calculados por un modelo numérico por DF (arriba) y un MPE (abajo) para diferentes niveles de conexión río-acuífero. . . . .	62
3.9. Alturas piezométricas para las cuatro localizaciones de control, calculadas con un modelo numérico por DF y un MPE de once depósitos virtuales para diferentes niveles de conexión río-acuífero en función de la conductividad hidráulica del lecho del río. . . . .	63
3.10. Bombeos concentrados actuando en el centro del acuífero de referencia durante 1000 días de simulación. . . . .	66
3.11. Hidrogramas de caudal detraído por el acuífero simulados por modelos numérico por DF (arriba) y MPE (abajo) para seis diferentes parámetros de conexión entre río y acuífero. . . . .	66
3.12. Porcentaje de participación en los caudales descargados por los cinco primeros modos, para las seis conductividades de río consideradas en los MPE y acción exterior distribuida. . . . .	68
3.13. Primeros cinco componentes modales para el caudal detraído simulado usando un MPE, para seis diferentes conductividades de lecho de río. . . . .	69
4.1. Autovalores para el acuífero de referencia según las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. Se ha superpuesto los autovalores calculados para los modelos numéricos por el MAV, de acuerdo con las viñetas rellenas, con los correspondientes a los PRSL asociados al MPE equivalente, a su vez representados mediante viñetas huecas. . . . .	82
4.2. Valores absolutos de los volúmenes por debajo de los autovectores en el acuífero de referencia, para las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. . . . .	83
4.3. Distribución de los coeficientes de reparto del acuífero de referencia sometido a acción exterior distribuida actuando uniformemente en todo su dominio espacial, para seis diferentes conductancias de bloque en la interacción río-acuífero. . . . .	85
4.4. Distribución de los coeficientes de reparto acumulado para el acuífero de referencia sometido a acción exterior distribuida actuando uniformemente en todo su dominio espacial, para seis diferentes conductancias de bloque en la interacción río-acuífero. . . . .	85
4.5. Distribución de los coeficientes de reparto del acuífero de referencia sometidos a acción exterior puntual concentrada actuando en su centro, para seis diferentes conductancias de bloque en la interacción río-acuífero. . . . .	86
4.6. Distribución de los coeficientes de reparto acumulado para el acuífero de referencia sometido a acción exterior puntual concentrada actuando en su centro, para seis diferentes conductancias de bloque en la interacción río-acuífero. . . . .	86

4.7. Hidrogramas de descarga para el acuífero de referencia sometido a una acción exterior distribuida simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MAV con truncamiento conservativo de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 5 y 5000 m<sup>2</sup>/d. . . . 88

4.8. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MAV, considerando diferentes cantidades de modos, con respecto a las soluciones completas por el MAV para acción uniformemente distribuida. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloque de interacción río-acuífero. Índices **BIAS** a la izquierda, **RMS** en el centro y **E<sub>2</sub>** a la derecha. . . . . 90

4.9. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MAV, considerando diferentes cantidades de modos, con respecto a soluciones numéricas por DF, para acción uniformemente distribuida. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloque de interacción río-acuífero. Índices **BIAS** a la izquierda, **RMS** en el centro y **E<sub>2</sub>** a la derecha. . . . . 91

4.10. Alturas piezométricas para las cuatro localizaciones de control, calculadas con un modelo numérico por DF y un modelo discreto resueltos por el MAV sin truncamiento, para diferentes niveles de conexión río-acuífero en función de la conductancia de los bloques de río. . . . . 93

4.11. Índices de comportamiento para las series piezométricas en los puntos de control, simuladas con modelos reducidos por el MAV para diferentes niveles de truncamiento, con respecto a soluciones de referencia por el MAV que incluyen todos los modos del modelo de flujo. . . . . 94

4.12. Índices de comportamiento para las alturas piezométricas en los puntos de control, simuladas con modelos reducidos por el MAV para diferentes niveles de truncamiento, con respecto a una solución numérica por DF. . . 95

4.13. Hidrogramas de detracciones para el acuífero de referencia sometido a un bombeo concentrado, simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MAV con truncamiento conservativo de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 5 y 5000 m<sup>2</sup>/d. . . . 98

4.14. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MAV, con respecto a las soluciones que incluyen todos los modos y una acción puntual de extracción localizada en el centro del acuífero de referencia. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloque de interacción río-acuífero. Índices **BIAS** a la izquierda, **RMS** en el centro y **E<sub>2</sub>** a la derecha. . . . . 99

4.15. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MAV, con respecto a las soluciones numéricas por DF y una acción puntual de extracción localizada en el centro del acuífero de referencia. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloque de interacción río-acuífero. Índices **BIAS** a la izquierda, **RMS** en el centro y **E<sub>2</sub>** a la derecha. . . . . 100

- 5.1. Configuración geométrica del acuífero irregular utilizado para el análisis de las curvas de agotamiento de los hidrogramas de descarga subterránea. A la derecha: puntos de control para alturas piezométricas y balances internos sobre la red de drenaje. A la izquierda: configuración de tramos para el análisis de las ganancias y pérdidas del río en régimen permanente. Abajo: Perfil longitudinal del río. Adaptada de Halford y Mayer (2000). . . . . 110
- 5.2. Serie diaria de intensidades de recarga actuando sobre el acuífero irregular durante los 365 días de simulación transitoria. Adaptada de Halford y Mayer (2000). . . . . 110
- 5.3. Configuración geométrica del modelo del acuífero y simulaciones en régimen permanente del flujo en respuesta a una acción exterior distribuida impuesta sobre éste. Se presenta (de izquierda a derecha): (*i*) la discretización del modelo numérico del acuífero por DF, (*ii*) las alturas piezométricas simuladas en régimen permanente considerando lecho del río horizontal y (*iii*) las alturas piezométricas simuladas en régimen permanente considerando lecho del río inclinado. . . . . 111
- 5.4. Distribución ascendente de los autovalores para cuatro diferentes conductancias de bloques en la conexión río-acuífero, asociados al acuífero irregular analizado. . . . . 113
- 5.5. Volúmenes de control definidos para el cálculo de los balances de intercambio a lo largo de la red de drenaje conectada con el acuífero. En el esquema de la izquierda se muestran los bloques correspondientes a la subcuenca superior, el esquema central muestra los bloques asociados a la subcuenca intermedia y el esquema de la derecha presenta los bloques seleccionados para efectuar el balance a la salida del acuífero. Los bloques grises señalan aquellos considerados en los balances, mientras que los de color negro señalan los que se han dejado por fuera. . . . . 116
- 5.6. Hidrograma de caudales subterráneos descargados a lo largo de toda la red de drenaje conectada con el acuífero, para diferentes condiciones de conexión entre el río y el acuífero. El hidrograma presentado corresponde tanto al río horizontal como al inclinado, puesto que las simulaciones obtenidas fueron idénticas. . . . . 116
- 5.7. Hidrogramas de descarga al río para las diferentes conductancias consideradas, para las subcuencas superior e intermedia. Las líneas gruesas representan los hidrogramas para el río inclinado. Las líneas regulares representan el hidrograma para río horizontal, equivalente a la componente transitoria con condiciones de contorno nulas para el río inclinado. Las líneas horizontales representan las componentes de recarga del río al acuífero en régimen permanente. . . . . 118
- 5.8. Hidrogramas de descargas al río, para diferentes conexiones río-acuífero, calculados mediante: (*i*) El método de Daniel y el MAV con conexión perfecta y (*ii*) el método de las trayectorias para acuífero horizontal y el MAV con conexión perfecta, (*iii*) el método de las trayectorias para acuífero inclinado y el MAV con conexión perfecta, (*iv*) método de la curva ajustable para calcular  $K_{RI}$  y el MAV para conductancias que varían entre  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ . . . . . 123



5.9. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas de descarga simulados mediante modelos reducidos por el MAV con diferentes niveles de truncamiento, para las diferentes subcuencas de análisis y diferentes valores de conductancia de bloques de un río horizontal, con respecto a las soluciones numéricas por DF correspondientes. . . . . 127

5.10. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas de descarga simulados mediante modelos reducidos por el MAV con diferentes niveles de truncamiento, para las diferentes subcuencas de análisis y diferentes valores de conductancia de bloques de un río inclinado, con respecto a las soluciones numéricas por DF correspondientes. . . . . 128

5.11. Índices de comportamiento para las alturas piezométricas en los puntos de control  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  simuladas con modelos reducidos por el MAV truncado, para diferentes valores de conductancia de bloque en un río horizontal, con respecto a una solución numérica por DF. . . . . 129

5.12. Índices de comportamiento para las alturas piezométricas en los puntos de control  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  simuladas con modelos reducidos por el MAV truncado, para diferentes valores de conductancia de bloque en un río inclinado, con respecto a una solución numérica por DF. . . . . 131

5.13. Distribución de los coeficientes de reparto acumulados para el acuífero propuesto por Halford y Mayer (2000), correspondientes a cuatro diferentes conductancias de bloque de río. . . . . 132

6.1. Esquema del funcionamiento de la compresión selectiva y el enmascaramiento modal en el EVM-CSEM. . . . . 138

6.2. Autovalores efectivos para el acuífero de referencia, ordenados de acuerdo a las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. Las viñetas rellenas representan los modos efectivos tanto para acción exterior distribuida como puntual, mientras que las viñetas huecas corresponden a los modos efectivos únicamente para la acción exterior puntual. . . . . 175

6.3. Valores absolutos de los volúmenes debajo de los autovectores efectivos para el acuífero de referencia según las seis conductancias asignadas a los bloques de río. Las viñetas rellenas representan los modos efectivos tanto para acción exterior distribuida como puntual. Las viñetas huecas corresponden a los modos efectivos únicamente para la acción exterior puntual. . . . . 175

6.4. Coeficientes de reparto efectivos del acuífero rectangular de referencia cuando se encuentra sometido a una acción exterior distribuida actuando uniformemente en todo su dominio espacial, para las seis diferentes conductancias de bloque de río. . . . . 176

6.5. Coeficientes de reparto efectivos del acuífero rectangular de referencia cuando se encuentra sometido a acción exterior puntual actuando en su centro, para las seis diferentes conductancias de bloque de río. . . . . 176

6.6. Coeficientes de reparto efectivos acumulados para el acuífero rectangular de referencia en función de las conductancias impuestas en los bloques de río. El gráfico de la izquierda presenta los resultados correspondientes a acción exterior uniformemente distribuida, mientras que en la derecha se muestran los resultados para acción exterior puntual. . . . . 177

6.7. Hidrogramas de descarga al río calculados mediante modelos numéricos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (abajo), para diferentes grados de conexión entre el río y el acuífero de referencia sometido a acción exterior uniformemente distribuida. . . . . 178

6.8. Hidrogramas de detracciones al río calculados mediante modelos numéricos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (abajo), para diferentes grados de conexión entre el río y el acuífero de referencia sometido a acción exterior puntual en el centro. . . . .	180
6.9. Configuración geométrica del acuífero rectangular heterogéneo. (i) Distribución espacial de las propiedades hidráulicas del acuífero en el gráfico superior izquierdo, (ii) Configuración espacial de las acciones exteriores y el modelo de conexión río-acuífero en el gráfico inferior izquierdo, (iii) Localización de los puntos de observación de las alturas piezométricas en el gráfico superior derecho y (iv) Convenciones de la figura en la parte inferior derecha. . . . .	182
6.10. Itinerario de los bombeos impuestos sobre cada bloque perteneciente a las zonas de extracción $E_i$ , con $i = 1, \dots, 5$ , pertenecientes al acuífero rectangular heterogéneo. El eje de ordenadas izquierdo representa el volumen diario extraído por cada pozo; el eje de ordenadas izquierdo indica el volumen total que sale del acuífero. . . . .	182
6.11. Autovalores efectivos para el acuífero rectangular heterogéneo según las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. Las viñetas rellenas representan los modos efectivos tanto para acción exterior distribuida como puntual. . . . .	183
6.12. Valores absolutos de los volúmenes contenidos por los autovectores efectivos del acuífero rectangular heterogéneo según las conductancias asignadas a los bloques de río. Las viñetas rellenas representan los modos efectivos para acciones exteriores distribuida y puntual. . . . .	183
6.13. Coeficientes de reparto efectivos del acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior distribuida, clasificados de acuerdo a 6 conductancias de río. Las viñetas rellenas corresponden a modos efectivos tanto para la acción exterior distribuida como puntual, mientras que las viñetas huecas se asocian a los modos efectivos únicamente para acción distribuida. . . . .	184
6.14. Coeficientes de reparto efectivos del acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior puntual, clasificados de acuerdo a 6 conductancias de río. Las viñetas rellenas corresponden a modos efectivos tanto para la acción exterior distribuida como puntual, mientras que las viñetas huecas se asocian a los modos efectivos únicamente para acción distribuida. . . . .	184
6.15. Distribución de los coeficiente de reparto acumulados para los modos efectivos del acuífero rectangular heterogéneo para acción exterior distribuida, en función de las seis conductancias de bloque de río. . . . .	185
6.16. Distribución de los coeficiente de reparto acumulados para los modos efectivos del acuífero rectangular heterogéneo para acción exterior puntual, en función de las seis conductancias de bloque de río. . . . .	185
6.17. Hidrogramas subterráneos para el acuífero rectangular heterogéneo calculados mediante modelos numéricos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (abajo), correspondientes a diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero. . . . .	187
6.18. Alturas piezométricas para el acuífero rectangular heterogéneo calculadas mediante modelos numéricos resueltos por DF (línea gris gruesa) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (línea delgada coloreada), correspondientes a diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos a priori. . . . .	189

7.1. Valores absolutos de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos para diferentes grados de conexión entre el acuífero de referencia y un río adyacente. La línea horizontal señala el valor límite donde se cumple que  $|f_i| \leq 10^{-7} m$ . . . . . 200

7.2. Distribución de los primeros cien factores de participación volumétricos de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado al acuífero de referencia, para acción exterior uniformemente distribuida. . . . . 202

7.3. Distribución de los primeros cien factores de participación volumétricos acumulados de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado al acuífero de referencia, para acción exterior uniformemente distribuida. . . . . 202

7.4. Distribución de los primeros cien factores de participación volumétricos de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado al acuífero de referencia, para acción exterior puntual actuando en su centro. . . . . 203

7.5. Distribución de los primeros cien factores de participación volumétricos acumulados de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado al acuífero de referencia, para acción exterior puntual actuando en su centro. . . . . 203

7.6. Hidrogramas de descarga para el acuífero de referencia sometido a una acción exterior distribuida simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MALN de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 5000 y 5 m<sup>2</sup>/d. . . . . 205

7.7. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados mediante modelos reducidos por el MLAN, considerando diferentes tamaños en los subespacios de Krylov de reducción, con respecto a las soluciones completas por DF para acción uniformemente distribuida. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloques de interacción río-acuífero. . . . . 206

7.8. Índices de comportamiento para las alturas piezométricas en los puntos de control, simuladas con modelos reducidos por el MLAN para diferentes niveles de truncamiento, con respecto a una solución numérica por DF. Se muestran los resultados de **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, en las columnas izquierda, central y derecha, respectivamente. . . . . 207

7.9. Hidrogramas de detracciones para el acuífero de referencia sometido a una acción puntual actuando en su centro, simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MLAN de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 5000 y 5 m<sup>2</sup>/d. . . . . 209

7.10. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MLAN, considerando diferentes tamaños en los subespacios de Krylov de reducción, con respecto a las soluciones completas por DF para acción puntual en el centro del acuífero. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloques de interacción río-acuífero. . . . . 210

7.11. Valores absolutos de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos del acuífero rectangular heterogéneo según las conductancias asignadas a los bloques de río. . . . .	212
7.12. Factores de participación de los vectores de Lanczos para el acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior distribuida, clasificados de acuerdo a seis diferentes conductancias impuestas sobre el río. . . . .	214
7.13. Factores de participación de los vectores de Lanczos para el acuífero rectangular heterogéneo para las extracciones puntuales, clasificados de acuerdo a seis diferentes conductancias impuestas sobre el río. . . . .	214
7.14. Factores de participación volumétrica acumulados de los vectores de Lanczos para el acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior distribuida, clasificados de acuerdo a seis diferentes conductancias impuestas sobre el río. . . . .	215
7.15. Factores de participación volumétrica acumulados de los vectores de Lanczos para el acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior puntual, clasificados de acuerdo a seis diferentes conductancias impuestas sobre el río. . . . .	215
7.16. Hidrogramas subterráneos para el acuífero rectangular heterogéneo calculados mediante modelos numéricos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (abajo), correspondiente a diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero. . . . .	216
7.17. Alturas piezométricas para el acuífero rectangular heterogéneo calculadas mediante modelos numéricos resueltos por DF (línea gris gruesa) y modelos reducidos por el MLAN (línea delgada coloreada), correspondientes a diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos a priori. . . . .	218
8.1. Subdominio de la base de datos de Walker Lake utilizado en este capítulo. . . . .	225
8.2. Geometría y condiciones de contorno para los modelos conceptuales de los acuíferos de prueba. Izquierda: localización de los bloques activos, la geometría del contorno del acuífero y los puntos para seguimiento de la piezometría. Derecha: forma de la conexión río-acuífero y las zonas donde se calculan los intercambios de caudal entre el río y el acuífero. Debajo de ésta, se presenta la variación de las altitudes del lecho del río a lo largo de la red de drenaje. . . . .	225
8.3. Parámetros hidráulicos y acciones exteriores impuestas en los acuíferos de prueba. El gráfico superior izquierdo presenta el campo de transmisividades y el superior derecho muestra el coeficiente de almacenamiento, el gráfico inferior izquierdo contiene las zonas de recarga y el gráfico inferior derecho presenta las zonas de extracciones. . . . .	227
8.4. Intensidades aplicadas en las zonas homogéneas de recarga. . . . .	228
8.5. Bombeos aplicados por bloque en las zonas de extracción. . . . .	229
8.6. Volúmenes totales de agua recargada y extraída integrados sobre el dominio espacial del acuífero. . . . .	230
8.7. Volúmenes acumulados totales de agua recargada y extraída integrados sobre el dominio espacial del acuífero. . . . .	230
8.8. Primeros 1000 autovalores para el acuífero rectangular heterogéneo, correspondientes a las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. . . . .	232

8.9. Valores absolutos de los volúmenes encerrados por los autovectores asociados a los 1000 autovalores de menor magnitud para el acuífero irregular heterogéneo, correspondientes a las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. . . . . 233

8.10. Coeficientes de reparto para los primero cien modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 1 a la 3, para cada conductancia impuesta sobre el río. . 235

8.11. Coeficientes de reparto para los primero cien modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 4 a la 6, para cada conductancia impuesta sobre el río. . 236

8.12. Coeficientes de reparto para los primero cien modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 7 a la 9, para cada conductancia impuesta sobre el río. . 237

8.13. Coeficientes de reparto para los primero cien modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 10 y 11, para cada conductancia impuesta sobre el río. . 238

8.14. Coeficientes de reparto acumulados para los primero mil modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 1 a la 3, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . . 240

8.15. Coeficientes de reparto acumulados para los primero mil modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 4 a la 6, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . . 241

8.16. Coeficientes de reparto acumulados para los primero mil modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 7 a la 9, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . . 242

8.17. Coeficientes de reparto acumulados para los primero mil modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 1 y 11, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . . 243

8.18. Cantidad de modos efectivos para diferentes parametrizaciones de la compresión selectiva y el enmascaramiento modal obtenidos al aplicar el MAV-CSEM sobre los modelos de flujo subterráneo del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los resultados se presentan en función de la acción exterior correspondiente, para las seis conductancias impuestas sobre el río. . . . . 245

8.19. Hidrogramas de caudales intercambiados entre el acuífero y la red de drenaje simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MAV-SCEM para diferentes límites de participación modal. En la parte superior se pueden ver los valores de las conductancias utilizados. . . 248

8.20. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas a lo largo de toda la red de drenaje conectada con el acuífero heterogéneo, simulados con modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF. . . . . 249

8.21. Hidrogramas de caudales intercambiados entre el acuífero y los diferentes tramos de la red de drenaje, simulados mediante modelos resueltos en DF y modelos reducidos por el MAV-CSEM. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río varían entre 1000 y 20 m <sup>2</sup> /d. . . . .	250
8.22. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas en cada tramo de la red de drenaje conectada con el acuífero heterogéneo, simulados con modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF. . . . .	253
8.23. Alturas piezométricas en seis localizaciones del acuífero heterogéneo simuladas mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MAV-CSEM de diferentes tamaños, de acuerdo con los $b_{lim}$ impuestos como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, los cuales se han variado entre $10^{-5}$ y $5 \times 10^{-5}$ , para diferentes valores de conductancia del río. . . . .	256
8.24. Índices de comportamiento estimados para las alturas piezométricas en el acuífero heterogéneo, usando modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF. . . . .	258
8.25. Valores absolutos de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos del acuífero rectangular heterogéneo según las conductancias asignadas a los bloques de río. . . . .	262
8.26. Factores de participación para los primero 100 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 1 a 3, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . .	264
8.27. Factores de participación para los primero 100 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 4 a 6, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . .	265
8.28. Factores de participación para los primero 100 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 7 a 9, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . .	266
8.29. Factores de participación para los primero 100 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 10 y 11, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . .	267
8.30. Factores de participación acumulados para los primero 1000 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. En cada cuadro se consignan los gráficos que corresponden a las AE de recarga 1 a 3, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . .	269
8.31. Factores de participación acumulados para los primero 1000 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. En cada cuadro se consignan los gráficos que corresponden a las AE de recarga 4 a 6, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . .	270
8.32. Factores de participación acumulados para los primero 1000 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. En cada cuadro se consignan los gráficos que corresponden a las AE de extracción 7 a 9, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . .	271

8.33. Factores de participación acumulados para los primero 1000 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. En cada cuadro se consignan los gráficos que corresponden a las AE de recarga 10 y 11, para cada conductancia impuesta sobre el río. . . . . 272

8.34. Hidrogramas de caudales intercambiados entre el acuífero y la red de drenaje conectada con éste, simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MLAN para diferentes límites de participación modal. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 1000 y 20 m<sup>2</sup>/d. . . . . 274

8.35. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas a lo largo de toda la red de drenaje conectada con el acuífero heterogéneo, simulados con modelos reducidos por el MLAN, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF. . . . . 275

8.36. Hidrogramas de caudales intercambiados entre el acuífero y los diferentes tramos de la red de drenaje, simulados mediante modelos resueltos en DF y modelos reducidos por el MLAN. Las conductancias del río se han variado entre 1000 y 20 m<sup>2</sup>/d. . . . . 278

8.37. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas en los tramos de la red de drenaje conectada con el acuífero heterogéneo, simulados con modelos reducidos por el MLAN, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF. . . . . 279

8.38. Alturas piezométricas en seis localizaciones del acuífero heterogéneo simuladas mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MLAN de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 1000 y 20 m<sup>2</sup>/d. . . . . 282

8.39. Índices de comportamiento estimados para las alturas piezométricas en el acuífero heterogéneo, usando modelos reducidos por el MLAN, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF. . . . . 284





# Índice de tablas

3.1. Valores para $b_i$ para diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero en función del parámetro $\omega$ y acción distribuida. Tomada de Sahuquillo (1983b). . . . .	54
3.2. Valores para $\rho_i^2$ y $\chi_i = b_i / \cos[\rho_i \pi x_p / (2L)]$ para diferente condiciones de conectividad entre el río y el acuífero en función de $\omega$ . Tomada de Sahuquillo (1983b). . . . .	55
3.3. Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado ( <b>RMS</b> ), coeficiente de Nash-Sutcliffe original ( <b>E<sub>1</sub></b> ), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado ( <b>E<sub>2</sub></b> ) y coeficiente de sesgo relativo ( <b>BIAS</b> ) para los hidrogramas de descarga simulados por un MPE formado por once depósitos virtuales (uno residual) para acción exterior distribuida, con respecto a los calculados mediante los modelos en DF. . . . .	62
3.4. Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio relativo ( <b>RMS</b> ) y coeficiente de Nash-Suttcliffe modificado ( <b>E<sub>2</sub></b> ) para la alturas piezométricas calculadas en los puntos de control mediante un MPE formado por once depósitos virtuales (uno residual), comparadas con las correspondientes simuladas mediante los modelo por DF. . . . .	64
3.5. Estimaciones la raíz del error cuadrático medio normalizado ( <b>RMS</b> ), coeficiente de Nash-Sutcliffe original ( <b>E<sub>1</sub></b> ) y coeficiente de sesgo relativo ( <b>BIAS</b> ) para los hidrogramas de las detracciones simulados por un MPE formado por once depósitos virtuales (uno residual) para acción exterior puntual, con respecto a los calculados mediante los modelos en DF. . . . .	67
5.1. Valores estimados del índice de agotamiento, $K_{RI}$ , primer exponente, $\alpha_1$ , y tiempo crítico, $t_c$ , para diferentes metodologías de cálculo de $L$ y diferentes inclinaciones del lecho del río, considerando conexión perfecta entre el río y el acuífero. . . . .	111
5.2. Primeros autovalores, $\alpha_1$ , índices de agotamiento $K_{RI}$ y tiempos críticos asociados, $t_c$ , obtenidos mediante el MAV para diferentes conductancia en los bloques de río. . . . .	113
5.3. Solución del problema permanente con condiciones de contorno del problema original y acciones externas nulas en el MAV, en términos del caudal acumulado al final de cada tramo de río, para acuífero parcialmente conectado con un río con conductancia de lecho de 200 m <sup>2</sup> /d. Notación: <b>OH</b> : orden de Horton de cada tramo, <b>P</b> : tramo de río perdedor para recarga y calado de río nulos y <b>G</b> : tramo de río ganador para recarga y calado de río nulos. . . . .	114

5.4. Solución del problema permanente con condiciones de contorno del problema original y acciones externas nulas en el MAV, en términos del caudal diferencial para cada tramo de río, para acuífero parcialmente conectado con un río con conductancia de lecho de 200 m<sup>2</sup>/d. Se usa la notación, **OH**: orden de Horton de cada tramo, **P**: tramo de río perdedor para recarga y calado de río nulos y **G**: tramo de río ganador para recarga y calado de río nulos. . . . . 119

5.5. Primeros autovalores estimados de los hidrogramas simulados mediante el MAV usando el método de la cuerda ajustable, para las diferentes condiciones consideradas de conductancia e inclinación del río, de acuerdo con las zonas de balance predeterminadas. . . . . 120

5.6. Índices de bondad de ajuste para los hidrogramas de descarga obtenidos por la solución de Rorabaugh usando diferentes metodologías de cálculo de *L*, con respecto a las correspondientes soluciones de referencia por el MAV. 122

5.7. Índices de bondad de ajuste para los diferentes hidrogramas simulados mediante el MAV con respecto al modelo numérico de referencia por DF, para las diferentes cuencas de balance, usando diferentes parámetros de conectividad entre el río y el acuífero. . . . . 125

5.8. Índices de bondad de ajuste para las series piezométricas simuladas mediante el MAV con respecto a las obtenidas por el modelo numérico de referencia en DF, para los cuatro puntos de control considerados, utilizando diferentes parámetros de conectividad entre el río y el acuífero. . . . . 125

6.1. Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas de descarga simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM con respecto a los simulados por modelos numéricos resueltos por DF, para diferentes conductancias de río y acción exterior uniformemente distribuida actuando sobre el acuífero de referencia. . . . . 178

6.2. Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio relativo (**RMS**) y el coeficiente de eficiencia de Nash-Suttcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) para las series de alturas piezométricas calculadas en los puntos de control mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, comparadas con las simuladas mediante los modelos resueltos utilizando las DF, cuando el acuífero de referencia se ha sometido a una acción exterior uniformemente distribuida. . . . . 179

6.3. Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas de descarga simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM con respecto a los simulados por modelos numéricos en DF, para varios niveles de conexión entre el río y el acuífero de referencia, sometido a acción exterior puntual actuando en su centro. . . 180

6.4. Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas subterráneos simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a los simulados por modelos numéricos en DF, para el acuífero rectangular heterogéneo, clasificados de acuerdo con el grado de su conexión con el río. . . . . 187

6.5. Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**) para las alturas piezométricas en el acuífero rectangular heterogéneo calculadas mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a las simuladas por los modelos numéricos resueltos por DF de referencia. Los resultados se han clasificado de acuerdo con el grado de conexión entre el río y el acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos a priori. . . . . 190

6.6. Estimaciones del coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) para las alturas piezométricas en el acuífero rectangular heterogéneo calculadas mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a las simuladas por los modelos numéricos resueltos por DF de referencia. Los resultados se han clasificado de acuerdo con el grado de conexión entre el río y el acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos a priori. . . . . 190

7.1. Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas subterráneos simulados mediante modelos reducidos por el MLAN, con respecto a los simulados por modelos numéricos en DF, para el acuífero rectangular heterogéneo, clasificados de acuerdo con el grado de su conexión con el río. . . . . 217

7.2. **RMS** estimados para las alturas piezométricas en el acuífero rectangular heterogéneo, calculadas mediante modelos reducidos por el MLAN con respecto a las simuladas por los modelos numéricos resueltos por DF de referencia. Los resultados se han clasificado de acuerdo con el grado de conexión río-acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos. . . . 219

7.3. **E<sub>2</sub>** estimados para las alturas piezométricas en el acuífero rectangular heterogéneo, calculadas mediante modelos reducidos por el MLAN con respecto a las simuladas por los modelos numéricos resueltos por DF de referencia. Los resultados se han clasificado de acuerdo con el grado de conexión río-acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos. . . . . 219



*“Todo debe hacerse tan simple como sea posible...pero no más simple”.*  
**Albert Einstein**

# 1

## Introducción

El desarrollo de modelos matemáticos basados en la física de los fenómenos a estudiar es una práctica habitual en la investigación hidrológica. El éxito de estos modelos se fundamenta, entre otras cosas, en la mejor representación posible de la variabilidad espacio-temporal de los parámetros en juego. El desarrollo de nuevas tecnologías de medición hace posible disponer de gran cantidad de datos susceptibles de ser utilizados en el procedimiento de modelación, lo cual supone una ventaja importante de cara al entendimiento de la dinámica de las variables de estado del sistema. Sin embargo, si la cantidad de información disponible es exagerada y redundante, el procesamiento y análisis de los datos para convertirlos en información potencialmente valiosa puede ser largo y complicado. En el caso de un acuífero, si se desea representar la variabilidad espacio-temporal de los fenómenos hidrogeológicos de la manera más detallada posible, éste debe representarse mediante un modelo numérico de discretización fina, con parámetros hidrodinámicos y acciones exteriores variables tanto espacial como temporalmente.

La solución de un modelo hidrogeológico detallado utilizando técnicas numéricas tradicionales puede ser altamente costosa en términos de recursos informáticos. Por un lado, la memoria virtual del ordenador puede ser insuficiente para almacenar las matrices que surgen al resolver las ecuaciones dinámicas durante el proceso de modelación. Por otro lado, si la discretización espacio-temporal es muy fina, su ejecución computacional puede ser muy lenta, imposibilitando su utilización en aplicaciones prácticas. Estas dificultades se hacen más evidentes cuando se requiere cuantificar el intercambio de agua con masas superficiales conectadas con el acuífero o cuando éste es un elemento contenido dentro de un sistema de mayor tamaño. Es más, la falta de velocidad en la ejecución de un modelo numérico hidrogeológico es un problema crítico cuando éste debe ser ejecutado repetidamente o se dispone de muchos submodelos que se ejecutan simultáneamente. Resulta claro que debe definirse un tamaño para que la ejecución de dicho modelo sea eficiente, de acuerdo con los recursos existentes de almacenamiento virtual y velocidad de procesamiento del ordenador. Aparentemente, la ventaja de representar más detalladamente el acuífero, dado que se dispone de grandes cantidades de datos, se convierte en una desventaja al momento de requerir la ejecución repetida de un modelo hidrogeológico dentro de algoritmos de

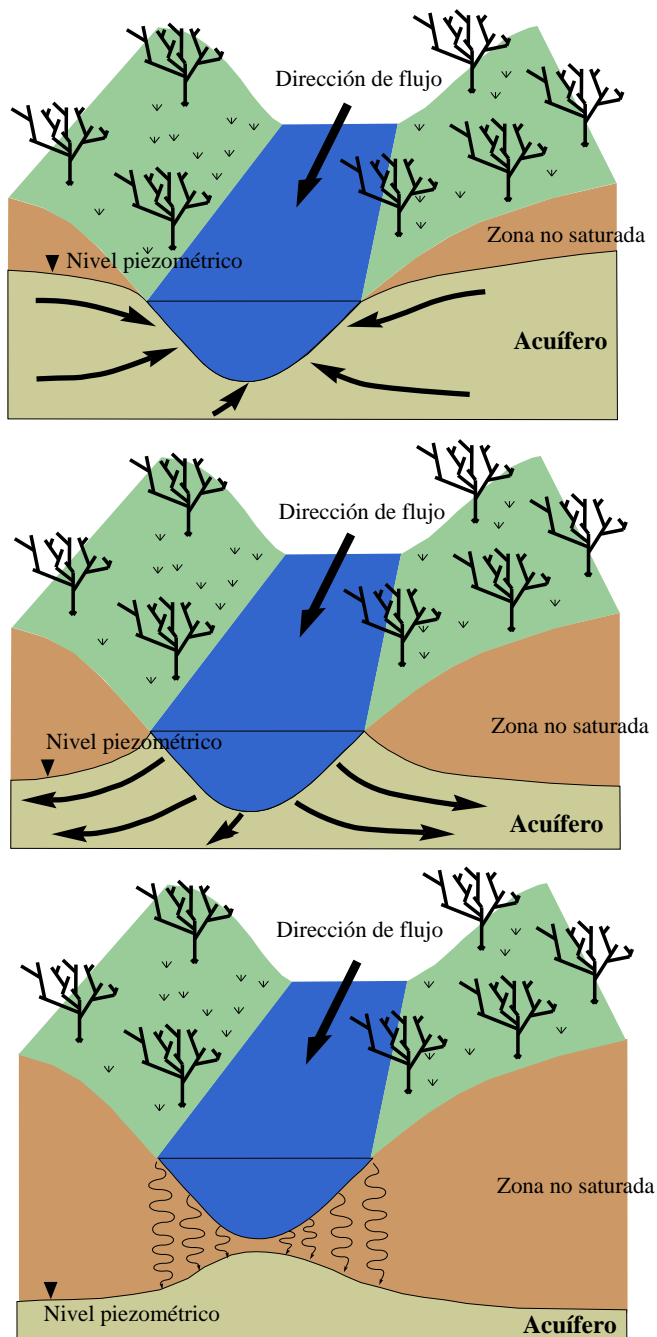
optimización, simulación estocástica para cuantificar la incertidumbre de sus variables de estado o para establecer estrategias óptimas de uso conjunto. Una forma efectiva de superar estos inconvenientes es aplicar técnicas matemáticas para la reducción del tamaño de los modelos numéricos de flujo y transporte en el acuífero. Desde esta perspectiva, se sacrifica algo de precisión en los resultados obtenidos con los modelos para lograr que su solución numérica sea simple y su ejecución computacional sea veloz.

Los sistemas de recursos hídricos que implementan estrategias de uso conjunto pueden ser de gran tamaño y estar compuestos por varios acuíferos, muchos embalses y diferentes tipos de estructuras de captación y explotación. Dichos elementos se encuentran interconectados, formando una red de flujo que debe operarse y/o simularse óptimamente. Las técnicas existentes para incorporar modelos de acuíferos en modelos de sistemas de aprovechamiento hídrico son, en esencia, iterativas. De ahí que, durante el procedimiento de optimización, el modelo de flujo de un acuífero debe ser ejecutado repetidamente hasta lograr convergencia en las diferentes variables de decisión, por lo que se desea que el tiempo de cómputo de dicho modelo sea lo más corto posible. Además, dado que las estrategias de operación de cada acuífero y/o embalse son diferentes, se plantean un gran número de restricciones que hacen compleja la resolución numérica de dicho problema de optimización. Así, el objetivo de reducir un modelo de flujo subterráneo es construir un esquema matemático de mínima complejidad que se aproxime lo mejor posible al modelo original, imponiendo a priori una cota de error máximo permisible de aproximación. Este esquema simplificado se usa posteriormente para llevar a cabo la simulación, con la ventaja de que el sistema original se encuentra bien representado a poco costo computacional. Una implementación exitosa del anterior procedimiento ha sido desarrollada para el modelo de simulación SIMGES del sistema de apoyo a la decisión AQUATOOL (Andreu *et al.*, 1996), que usa un proceso iterativo de optimización del flujo en redes en el cual se ejecuta repetidamente el método de los autovalores (Sahuquillo, 1983a) para incluir explícitamente el cálculo de las relaciones río-acuífero en la modelación del uso conjunto.

En esta tesis se discute principalmente acerca del uso de técnicas de reducción de sistemas dinámicas aplicadas a modelos numéricos de flujo del agua subterránea. La motivación principal es explorar, adaptar matemáticamente e implementar algunas de dichas técnicas con el fin de simular eficientemente la interacción entre el río y el acuífero en sistemas hidrogeológicos complejos, irregulares y heterogéneos. Además, en el contexto de la modelación de sistemas de aprovechamiento de recursos hídricos, dichos modelos reducidos se usan para estudiar la influencia de la explotación subterránea en el cambio del comportamiento de las variables del acuífero, ya sean alturas piezométricas, volúmenes de agua almacenados, flujos internos e intercambio de agua con masas superficiales.

## 1.1. Las relaciones río-acuífero

Según su relación con un acuífero, un río puede ser ganador, perdedor y/o efímero (ver figura 1.1). Un río se dice ganador cuando existe un flujo de agua desde el acuífero hacia él, como se presenta en la figura 1.1, esquema superior. Esto es habitual en zonas templadas húmedas y se genera debido a que los niveles piezométricos están por encima del nivel de agua del río. Las salidas hacia los ríos ganadores conectados con el acuífero son una de las componentes de la escorrentía de una cuenca y mantiene el flujo del río durante una sequía prolongada o, particularmente, en una estación seca. Dicha componente se conoce como flujo base y se define como la parte del caudal fluyendo por el río que es aportada directamente desde el acuífero. En épocas de agotamiento, asumiendo que el acuífero está rodeado por barreras impermeables y no existe aprovechamiento, el caudal



**Figura 1.1.** Relaciones río-acuífero. Arriba: río ganador conectado. Centro: río perdedor conectado. Abajo: río perdedor desconectado o río efímero. Adaptada de Sahuquillo y Cassiraga (2010b).

base es la única componente de salida del acuífero (Hall, 1968; Singh, 1968; WMO, 1974; Brutsaert y Nieber, 1977; Zecharias y Brutsaert, 1988; Tallaksen, 1995; Smakhtin, 2001). Un fenómeno que también se debe tener en cuenta en el esquema de río ganador es el almacenamiento en las riberas. Éste sucede cuando se presenta una crecida en la cual el calado del río aumenta rápidamente, generando una infiltración desde el río hacia el acuífero. Una vez desaparecen los efectos de respuesta rápida, la mayor parte del agua recargada en ese proceso permanece durante un tiempo limitado en el acuífero, que puede ser del orden de semanas o meses, antes del volver al río (Sahuquillo y Cassiraga, 2010b).

Un río perdedor alimenta al acuífero pudiendo estar o no hidráulicamente conectado con él, como se muestra en los esquemas central e inferior de la figura 1.1. Esta situación es típica en zonas áridas, donde la recarga es pequeña, pero también puede ocurrir en acuíferos muy permeables aunque la recarga sea importante. Además, un río ganador puede recibir menos agua de un acuífero sometido a explotación, llegando incluso a convertirse en perdedor. Así pues, cuando las alturas piezométricas del acuífero en la región de interacción caen por debajo del nivel del lecho del río, éstos se encuentran desconectados. En este caso, el caudal de pérdida del río está controlado por la altura de agua en el río y por la conductividad hidráulica y el espesor de su lecho, mientras que el tiempo de viaje del agua hacia el acuífero depende del grado de saturación en la zona de transición entre el lecho del río y el nivel freático. El fenómeno anterior se conoce popularmente como efecto ducha (Sahuquillo y Cassiraga, 2010b).

Por último, un río efímero es aquel que fluye únicamente como respuesta a lluvias intensas. La existencia de este tipo de ríos es frecuente en regiones áridas y semiáridas, donde los niveles del acuífero se encuentran muy por debajo del lecho del río a causa de la poca recarga. Sin embargo, aguas abajo de la cuenca, el acuífero puede alimentar humedales y marismas salinas o fluir hacia el mar o un lago.

## 1.2. La utilización conjunta

La carencia o disponibilidad del agua condiciona importantes aspectos de una sociedad. Influye en la calidad de vida de los individuos que la componen, repercutiendo en la disminución o el aumento de los niveles de salud y la sensación de bienestar. De la misma forma, puede acelerar o frenar el crecimiento de su economía puesto que las dinámicas de producción en los sectores agrario, industrial y energético están fuertemente condicionadas por las políticas de asignación del agua. En la actualidad, el incremento de la población y la necesidad de cubrir sus servicios básicos de consumo, la preservación de las condiciones medio-ambientales de los ecosistemas, la creciente degradación de la calidad de las fuentes de agua superficiales y las incertidumbres impuestas por el cambio climático sobre la disponibilidad hídrica, entre otros, son factores que han generado que la presión ejercida sobre la disponibilidad del recurso hídrico se haya incrementado considerablemente.

Estos factores pueden alcanzar condiciones críticas en regiones donde la disponibilidad natural de agua superficial y/o su regulación es limitada, de forma que no alcanza a atender efectivamente las crecientes demandas. Una alternativa efectiva para abordar la solución de estos problemas de gestión es considerar la utilización conjunta de aguas superficiales y subterráneas (Hall y Dracup, 1970). Mediante este enfoque se propone la integración de ambas fases del recurso hídrico en el aprovechamiento, teniendo en cuenta su relación mutua y los efectos conjuntos producidos por los cambios en las diferentes fenómenos del ciclo hidrológico. Al respecto, las variables más importantes del acuífero son: (i) los flujos internos en regiones de interés, (ii) el intercambio de agua en los sitios donde existe contacto entre las masas de agua superficial y subterránea, (iii) los niveles piezométricos



en zonas críticas, (*iv*) los calados y caudales en las masas de agua superficial y (*v*) algunos indicadores de la calidad del agua (Sahuquillo, 2007; Sahuquillo y Cassiraga, 2010a).

La tendencia actual para los esquemas de uso conjunto es considerar a los acuíferos como componentes de un sistema de recursos hídricos que debe operarse adecuadamente, procurando cumplir diferentes tipos de criterios simultáneamente. El argumento más generalizado para la consideración de los acuíferos en la gestión del agua es que, si éstos se incorporan a un sistema de recursos hídricos, se aumentan las alternativas factibles, no sólo en número sino especialmente en su funcionalidad, mejorando las probabilidades de obtener una mayor eficacia. Esto se debe principalmente a que, desde la perspectiva del uso conjunto, el acuífero se conceptualiza como un elemento que almacena y distribuye lentamente el agua hacia otros componentes del sistema hídrico.

En su carácter de subsistema de almacenamiento, el acuífero permite la acumulación de agua que puede ser aprovechada eficientemente y proporciona una regulación natural del recurso hídrico almacenado. Igualmente, aporta la posibilidad de establecer políticas eficientes de recarga artificial en las estaciones húmedas con el fin de utilizar este agua para satisfacer las demandas del sistema en las estaciones más secas. Por otro lado, como subsistema de distribución, el acuífero direcciona el flujo de agua hacia las salidas, permitiendo la utilización del recurso subterráneo en superficies más amplias. Es más, la inclusión de las fuentes subterráneas de agua en la explotación para aprovechamiento disminuye la vulnerabilidad del sistema de recursos hídricos, aumentando su eficiencia, confiabilidad del suministro y resiliencia, disminuyendo la relación coste beneficio de la explotación (Sahuquillo, 1983c, 1985, 1989a,b, 2000; Rivera *et al.*, 2002).

Si se consideran las interrelaciones entre las aguas superficiales y subterráneas y la influencia del aprovechamiento de unas sobre las otras, la utilización conjunta surge como una necesidad en las zonas con problemas de suministro de agua (Fowler, 1981; Sahuquillo, 1983c). También hace posible detectar problemas debidos a la interconexión entre ambos subsistemas que el análisis por separado no resolvería. Por ejemplo, aumentos en la eficiencia de riego u otros cambios en el uso del suelo pueden ocasionar una disminución de la recarga del acuífero, generando efectos negativos para la disponibilidad del recurso hídrico aguas abajo. También es factible que las entradas de agua al acuífero aumenten artificialmente por llenado de embalses, retornos de riego o pérdidas en canales, las cuales pueden llegar a producir elevaciones de los niveles piezométricos. Por el contrario, la menor variabilidad temporal de los caudales en un río generada al construir embalses puede disminuir la recarga de los acuíferos localizados aguas abajo de los tramos donde el río es perdedor, dependiendo de como se modifiquen los flujos del río y las zonas en las que éste pierde. Así, el aprovechamiento individual de las aguas superficiales o subterráneas puede tener consecuencias funcionales y ambientales importantes como: (*i*) alterar el flujo y la calidad química de los ríos y acuíferos, (*ii*) transformar el carácter de los ríos de ganadores a perdedores y viceversa y (*iii*) ocasionar o aliviar problemas de drenaje o salinización de aguas. Al respecto, el uso conjunto puede utilizarse para reforzar los efectos positivos, o para solucionar o paliar los efectos negativos. Las estimaciones de dichas consecuencias usando un análisis conjunto serán diferentes a los resultados obtenidos siguiendo la consideración simplista de la disminución de caudales derivados para regar (Sahuquillo y Cassiraga, 2010a).

Pulido-Velázquez (2003) afirma que la utilización coordinada de aguas superficiales y subterráneas proporciona ventajas significativas a distintos niveles, tanto en términos de mejorar la calidad del suministro y su distribución temporal, como en el aumento de la calidad del agua a un menor coste y en los resultados económicos globales de la explotación y expansión del sistema. Además, la implementación de esquemas de uso conjunto

puede considerarse como una opción segura para mitigar los efectos de las sequías sobre la confiabilidad del sistema, puesto que la variabilidad espacio-temporal de los caudales en el río es mucho mayor que la de los flujos del acuífero. Con lo anterior se asegura que la respuesta del sistema sea robusta con respecto al incremento de la demanda o la disminución de la oferta superficial, puesto que se dispone de una cantidad firme de agua dada por el almacenamiento efectivo del acuífero (Sahuquillo, 2000; Sahuquillo y Cassiraga, 2010b).

En sistemas en los que se utilizan conjuntamente las aguas superficiales y los acuíferos es necesario determinar la variabilidad temporal de las aportaciones de los ríos en los embalses existentes o potenciales, y en los puntos de posibles tomas o derivaciones. También es necesario conocer la respuesta de los acuíferos ante las acciones exteriores entre las que se encuentran: (i) los bombeos de extracción para los diferentes usos del agua, (ii) la recarga natural en respuesta al régimen climático y (iii) la recarga artificial impuesta por la metodología adoptada de uso conjunto. Asimismo, se debe determinar la variabilidad espacio-temporal de los caudales de intercambio entre las aguas superficiales y subterráneas producida por la implementación de diferentes alternativas de uso conjunto. Al respecto, en algunos casos sólo interesa conocer los intercambios de agua de los acuíferos con los ríos, zonas húmedas o el mar, pero en la mayoría también conviene conocer la variación piezométrica en algunas zonas del acuífero a lo largo de todo el horizonte de planificación. Así, un sistema de utilización conjunta de recursos hídricos, concebido y ampliado dinámicamente, desarrollado y operado con las particularidades de la demanda de agua y variabilidad hidrológica, requiere del análisis de más alternativas y de una tecnología más depurada (Sahuquillo y Cassiraga, 2010a).

### 1.3. La modelación de la interacción río-acuífero para fines de aprovechamiento

La variabilidad espacio-temporal de los fenómenos relacionados con el ciclo del agua se manifiesta en diferentes escalas espaciales y temporales y, a pesar de que no puede ser descrita de manera exacta, es representable mediante un modelo matemático que incorpore la estimación o predicción de variables de estado del sistema a partir de otras variables con las que se encuentra físicamente relacionada. Esta relación se describe mediante el uso de una ecuación diferencial que, en sí misma, constituye el modelo matemático asociado al fenómeno que se está caracterizando. En el caso particular del agua subterránea, dicho modelo viene dado por una solución de la ecuación diferencial de continuidad para el flujo de agua en medio poroso saturado, obtenida mediante algún método analítico, semi-analítico o por aproximación numérica. Cuando se desea cuantificar la interacción entre el río y el acuífero, el modelo viene dado por una ecuación que relaciona el caudal suministrado al río por el acuífero en función de su volumen almacenado o de sus niveles piezométricos.

Las soluciones propuestas para considerar la relación entre el río y el acuífero varían de acuerdo con el uso que se desea hacer de ellas. Por ejemplo, el modelo usado para realizar un análisis de las curvas de agotamiento de un río puede llegar a ser mucho más simple que un modelo detallado para representar el almacenamiento de ribera en una zona particular del río.

En muchas ocasiones, es imprescindible considerar la utilización conjunta de aguas superficiales y subterráneas en modelos diseñados para otros propósitos. Un ejemplo de ello, analizado en detalle por Kendy y Bredehoeft (2006), es el efecto sobre los caudales de un río producido por los retornos de riego. El caudal base llega a superar los caudales naturales de forma importante y persistente, y los hidrólogos, los gestores del agua e

incluso los usuarios llegan a considerarlos naturales. Este ejemplo muestra que la unicidad del ciclo hidrológico obliga al tratamiento simultáneo de las fases superficial y subterránea del mismo (Winter *et al.*, 1998). Esta unicidad es clave para estudios hidrológicos que buscan dividir las distintas componentes de la escorrentía a la salida de la cuenca en períodos de agotamiento (Smakhtin *et al.*, 1998; Lamb y Beven, 1997). Por consiguiente, los modelos de simulación del uso conjunto deben ser capaces de reproducir los caudales de los ríos y canales, los niveles piezométricos en los acuíferos y las transferencias de caudal entre los ríos y los acuíferos, estando dirigidos a la satisfacción de las demandas de agua y debiendo cumplir las restricciones físicas y ecológico-ambientales.

Al respecto, en muchos estudios clásicos se han utilizado los denominados modelos globales o agregados, que tratan al acuífero como si fuese una entidad, cuya entrada por recarga de lluvia y salidas por bombeo y/o interacción con el río han sido agregadas. Este tipo de modelos no tienen en cuenta la distribución espacial de las acciones exteriores actuando sobre el acuífero ni tampoco la variabilidad espacial de sus parámetros hidráulicos. Con frecuencia esta simplificación se usa en niveles jerárquicos más elevados en los que se pueden aplicar métodos de optimización (Haines, 1977). Por el contrario, los modelos de parámetros distribuidos consideran la variación espacial y temporal de: (i) la recarga y las entradas por conexión del acuífero con unidades geológicas adyacentes, (ii) los parámetros hidráulicos del acuífero, (iii) las extracciones de agua y (iv) las salidas arrojadas por el modelo, en especial las alturas piezométricas y el caudal de intercambio entre el río y el acuífero. La simulación de una gran cantidad de alternativas de operación de los acuíferos presenta problemas de tiempo de cálculo cuando se requiere considerar con precisión la variabilidad de los fenómenos, representables únicamente mediante modelos de diferencias finitas o elementos finitos. Una opción eficiente para superar este inconveniente, cuando se desea modelar adecuada y eficientemente la interacción río-acuífero en sistemas de gestión de recursos hídricos, es la aplicación de métodos de reducción sobre el modelo numérico.

## 1.4. Propósitos y alcances

En el marco de las soluciones numéricas de la EDP del flujo de agua subterránea para la modelación de las relaciones río-acuífero, el objetivo principal de esta investigación es proponer métodos para reducir el orden del modelo. En otras palabras, se desea representar adecuadamente las relaciones río-acuífero y las alturas piezométricas en algunas localizaciones importantes del acuífero de la forma más eficiente desde un punto de vista computacional, minimizando tanto el tiempo de cómputo de las simulaciones transitorias como el espacio virtual requerido en el ordenador. Con el propósito de alcanzar este objetivo principal, se proponen los siguientes objetivos específicos:

- (i) Revisar la bibliografía en relación a técnicas de reducción de SLIT.
- (ii) Desarrollar un código que resuelva la EDP del flujo subterráneo por el método de los autovalores y que calcule eficientemente la interacción río-acuífero.
- (iii) Programar algoritmos eficientes para calcular los autovalores y autovectores asociados con la discretización espacial de la EDP del flujo a utilizar en la simulación por el método de los autovalores.
- (iv) Explorar y proponer metodologías para reducir el tamaño de los modelos de flujo subterráneo resueltos por el método de los autovalores.

- (v) Implementar otros métodos de reducción en la solución de la EDP del flujo del agua subterránea, proponiendo modificaciones para calcular eficientemente las relaciones río-acuífero y otras variables de respuesta del acuífero.
- (vi) Aplicar los métodos de reducción implementados en acuíferos sintéticos heterogéneos con geometría irregular, realizar un análisis comparativo de su funcionamiento computacional y evaluar la representatividad de las variables de respuesta más comúnmente usadas en la gestión del uso conjunto.

## 1.5. Organización del documento

Este documento se ha organizado como se describe a continuación. Después de esta introducción (capítulo 1), en el capítulo 2 se presenta la discusión acerca de las características generales de los SLIT. Inicialmente, se presenta una revisión bibliográfica acerca de la modelación de la interacción río-acuífero para el análisis del uso conjunto en sistemas de aprovechamiento hidráulicos. Seguidamente, se discute en detalle acerca de las técnicas de reducción de modelos numéricos aplicada a la solución de problemas hidrogeológicos. Por último, se propone un esquema del principio de superposición que permite la simulación transitoria eficiente del flujo subterráneo mediante métodos de reducción. Igualmente, se plantean los sistemas de EDO lineales a reducir junto con expresiones para el cálculo eficiente de las variables de estado críticas del acuífero analizado.

En el capítulo 3 se presenta la reducción analítica de modelos de flujo para sistemas hidrogeológicos lineales en base a la representación de la solución mediante series de Fourier, analizando las propiedades espacio-temporales de dicha solución para el caso de un acuífero rectangular sometido a acciones exteriores distribuidas y concentradas, las cuales se utilizan como referencia para desarrollos numéricos en los capítulos posteriores.

En el capítulo 4 se presenta el método de los autovalores como una alternativa eficiente de reducción modal de modelos de flujo subterráneo y se discuten algunas de sus características numéricas, las cuales se pueden aprovechar para plantear modelos reducidos con el menor tamaño posible.

En el capítulo 5 se explora el método de los autovalores como una herramienta para el análisis de las curvas de agotamiento en ríos ganadores en condiciones naturales, para lo cual se analiza el flujo en un acuífero lineal irregular conectado con una red de drenaje sinuosa.

En el capítulo 6 se propone un esquema de reducción modal para modelos lineales de flujo subterráneo que consiste en una extensión del método de los autovalores mediante la compresión y selección de los modos efectivos del problema. Se discute ampliamente acerca de la manera más eficiente de generar los modos usados en la simulación transitoria reducida. La metodología propuesta se aplica al caso de acuífero rectangular de referencia y a un caso sintético heterogéneo de geometría regular sometido a acciones exteriores sencillas.

En el capítulo 7 se presenta un marco conceptual para la reducción de modelos de flujo subterráneo utilizando los subespacios de Krylov. El método desarrollado permite considerar eficientemente muchas acciones exteriores actuando simultáneamente sobre el acuífero. Asimismo, el método de reducción en subespacios de Krylov se aplica sobre el caso de referencia y sobre el mismo acuífero heterogéneo sencillo analizado en el capítulo 6.

En el capítulo 8 se presenta una aplicación de los algoritmos propuestos para analizar de forma reducida el flujo subterráneo en un acuífero heterogéneo, de geometría irregular, que se encuentra sometido a muchas acciones exteriores distribuidas en el espacio. Se

presenta un análisis comparativo de la eficiencia en la reducción del modelo por parte de dichos algoritmos, con respecto a la variación de las condiciones en las relaciones río acuífero. Igualmente, se discute acerca de las implicaciones para el cálculo de las diferentes variables de estado del acuífero. Los resultados obtenidos se contrastan, desde el punto de vista de la eficiencia, con las soluciones clásicas que integran temporalmente la EDP de flujo subterráneo mediante la diferencias finitas.

Finalmente, en el capítulo 9 se presentan las conclusiones obtenidas durante la investigación y las futuras líneas de trabajo.



*“Divide las dificultades que examines en tantas partes como sea posible, para su mejor solución”.*  
**René Descartes**

# 2

## Sistemas hidrogeológicos lineales invariantes en el tiempo

### 2.1. Introducción

A pesar de que la mayoría de los sistemas físicos son no lineales, en la práctica suelen aproximarse mediante el planteamiento de modelos lineales. La ventaja de ello es que la teoría de sistemas lineales proporciona soluciones sencillas y aplicables en muchos campos de la ingeniería. La EDP del flujo de agua subterránea es lineal cuando se trata de acuíferos confinados o semi-confinados. Aún así, el comportamiento de muchos acuíferos libres se puede aproximar usando técnicas de linealización sin que el error cometido sea significativo, cuando la variación relativa del espesor saturado del acuífero es pequeña con respecto al espesor del acuífero.

Un sistema hidrogeológico es invariante cuando es posible considerar que los parámetros del acuífero y sus condiciones de contorno no se modifican en el tiempo. En la práctica, dicha hipótesis puede violarse puesto que los caudales superficiales fluyendo en los canales de la red de drenaje permanentemente conectada con el acuífero son muy variables. Dependiendo de la configuración geomorfológica de la red de drenaje, esto puede ocasionar variaciones importantes de los calados de los ríos, los cuales influyen en las relaciones río-acuífero, lo que a su vez afecta la dinámica de flujo subterráneo. Igualmente, cuando existe explotación subterránea intensiva, la superficie piezométrica puede descender hasta desconectarse del río, invalidando incluso la asunción de linealidad de las condiciones de contorno. Aún así, es posible plantear esquemas de cálculo iterativos para considerar las condiciones de contorno no lineales y variables en el tiempo sin modificar la asunción de linealidad, de forma que no se afecte dramáticamente la eficiencia de cómputo en las simulaciones.

En este capítulo se propone un esquema conceptual unificado para el tratamiento matemático de sistemas hidrogeológicos lineales. Se repasan los conceptos de sistema, linealidad, superposición y reducción y se revisan los modelos lineales clásicos para representar

las relaciones río-acuífero en la utilización conjunta de aguas superficiales y subterráneas. Además, se presenta una revisión acerca de los métodos de reducción de SLIT aplicados a la resolución de modelos hidrogeológicos. A continuación se enuncian las condiciones necesarias para conceptualizar un acuífero como un SLIT. Seguidamente, se describen las formas generales de las condiciones inicial y de contorno que no violan la asunción de linealidad. Posteriormente, se propone un esquema conceptual general del principio de superposición con el fin de lograr una reducción eficiente de modelos de flujo de acuíferos lineales. Igualmente, se plantea la ecuación matricial-diferencial para la simulación del flujo subterráneo en acuíferos lineales, formulada como un sistema dinámico, y se presenta un esquema general de cálculo de las variables de respuesta del acuífero cuando se usan esquemas de reducción por proyección. Finalmente, se revisan esquemas conceptuales para detectar y corregir la aparición de condiciones de contorno no lineales en modelos de flujo subterráneo lineales.

## 2.2. Sistemas lineales, superposición y reducción

Los fenómenos que subyacen al ciclo hidrológico son extremadamente complejos y manifiestan una alta variabilidad espacio-temporal a diferentes escalas. Por ello, su comportamiento suele estudiarse de forma simplificada usando el concepto de sistema. Un sistema se define como una colección de componentes interconectados, que forman un todo y que pueden ser analizados separadamente para luego combinar los resultados y conocer su estado global, sobre los que existen una serie de acciones exteriores o excitaciones y una serie de respuestas o efectos. En general, se desea conocer como se comporta el sistema ante esta serie de excitaciones. La propiedad fundamental de los sistemas es la causalidad, es decir, cualquier modificación en éstos será debida a excitaciones previas, por lo cual existe una relación causa-efecto (Antoulas, 2005). En este sentido, y de acuerdo con la teoría clásica de sistemas (Martins de Carvalho, 1993; Arrowsmith, 1998; Brin y Stuck, 2002; Fernández *et al.*, 2003; Matía y Jiménez, 2003), entre las variables que relacionan al sistema con su entorno, se puede distinguir un grupo que sirven de excitación, denominadas variables de entrada,  $u(t)$ , y otras que sufren el efecto de las excitaciones, denominadas variables de salida,  $y(t)$ . Igualmente, existen otras variables que caracterizan el comportamiento interno del sistema como respuesta a las excitaciones, denominadas variables de estado,  $x(t)$ . Esto quiere decir que el sistema  $\Sigma$  actúa como un operador que transforma las entradas en las salidas y se caracteriza por sus variables de estado. La forma más habitual de representar un sistema es el esquema mostrado en la figura 2.1, en la cual se presentan los componentes previamente descritos.

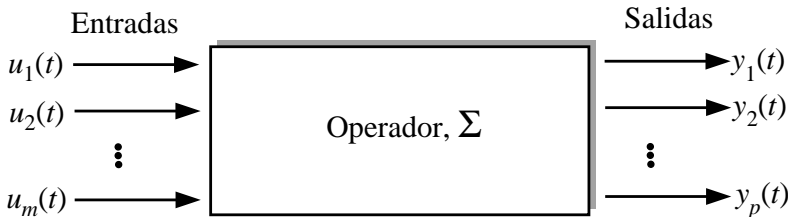


Figura 2.1. Esquema de un sistema.



### 2.2.1. Descripción matemática de un sistema

La modelación matemática es el proceso por el cual se describe el comportamiento de un fenómeno natural o artificial mediante un conjunto de ecuaciones, en función de sus variables de entrada y sus estados. Inicialmente, como paso previo a la modelación propiamente dicha, se identifica el dominio espacio-temporal del sistema físico y se recopilan las mediciones de las variables de interés. Posteriormente, durante la fase de modelación conceptual, se deriva un conjunto de Ecuaciones Diferenciales Ordinarias (EDO) o Ecuaciones en Derivadas Parciales (EDP) que describen matemáticamente las características principales del sistema, junto con unas condiciones iniciales y de contorno que hacen posible obtener una solución del modelo matemático planteado. En gran parte de los casos prácticos, la resolución de las EDP se ejecuta numéricamente, para lo cual se discretizan los términos correspondientes a las derivadas parciales de las variables de estado con respecto a las coordenadas espaciales. Esto conduce al planteamiento de un conjunto de EDO que debe resolverse eficientemente para realizar la simulación del sistema.

En este contexto, la reducción de un modelo consiste en desarrollar un sistema equivalente  $\hat{\Sigma}$  que disminuye apropiadamente el número de EDO asociadas al modelo original. Por consiguiente, el sistema reducido  $\hat{\Sigma}$  se usa para efectuar la simulación y, posiblemente, el control eficiente del sistema original  $\Sigma$ . El concepto de sistema se formaliza estableciendo un dominio temporal, por simplicidad se asume que éste corresponde al conjunto de los números reales  $\mathbb{R}$ . Igualmente, se asume que el comportamiento de  $\Sigma$  se representa mediante un conjunto de EDO de primer orden escritas de la siguiente manera:

$$\Sigma = \begin{cases} \mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad (2.1)$$

donde el vector  $\mathbf{u}(t)$  contiene las variables de entrada, el vector  $\mathbf{x}(t)$  contiene las variables internas o de estado y el vector  $\mathbf{y}(t)$  contiene las variables de salida del sistema. Igualmente,  $\mathbf{h}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ ,  $\mathbf{f}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  y  $\mathbf{g}(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$  son funciones vectoriales con dimensiones apropiadas que varían con respecto a las variables de entrada e internas del sistema.

### 2.2.2. Clasificación de los sistemas

Desde el punto de vista temporal, un sistema puede ser estático o dinámico. Es estático cuando la relación entre las entradas y las salidas es de la forma  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(t))$ , es decir, cada una de las salidas  $y_j(t)$  en un instante dependen únicamente del valor de las entradas  $u_i(t)$  en ese mismo instante, para  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, p$ , donde  $m$  es el número de variables de entrada del sistema y  $p$  es el número de variables de salida. Por el contrario, el sistema es dinámico cuando el valor de la salida en un instante  $t$ , depende de los valores de la entrada no sólo en el instante actual  $t$  sino también en instantes anteriores, esto es  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{u}(\tau))$ ,  $\forall \tau \leq t$ .

Teniendo en cuenta la relación existente entre las entradas y las salidas, un sistema puede ser lineal o no lineal. El sistema presentado en (2.1) será lineal si la relación entre las variables de entrada y las de salida es lineal pero puede ser no lineal si dicha relación es no lineal.

Por último, considerando sistemas lineales, éstos se pueden clasificar en variantes e invariantes en el tiempo. Un sistema variable en el tiempo se escribe:

$$\Sigma = \begin{cases} \mathbf{S}(t) \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{B}(t) \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C}(t) \mathbf{x}(t) + \mathbf{D}(t) \mathbf{u}(t) \end{cases}$$

donde  $\mathbf{A}(t)$ ,  $\mathbf{S}(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son matrices de estados,  $\mathbf{B}(t) \in \mathbb{R}^{n \times p}$  es la matriz de entradas,  $\mathbf{C}(t) \in \mathbb{R}^{m \times n}$  es la matriz de salidas y  $\mathbf{D}(t) \in \mathbb{R}^{m \times p}$  es la matriz de transmisión directa, todas variando con el tiempo. Por el contrario, los sistemas invariantes en el tiempo o estacionarios son aquellos cuyas características no se modifican con el tiempo; es decir, ante unas entradas  $\mathbf{u}(t)$ , el sistema produce unas salidas  $\mathbf{y}(t)$  y bajo las mismas condiciones, ante unas entradas  $\mathbf{u}(t + \tau)$ , el mismo sistema produce unas salidas  $\mathbf{y}(t + \tau)$ , siendo  $\tau$  un incremento de tiempo. Dicho sistema lineal y estacionario se denomina Sistema Lineal Invariante en el Tiempo (SLIT) y se describe matemáticamente como:

$$\Sigma_{\text{LIT}} = \begin{cases} \mathbf{S} \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \mathbf{A} \mathbf{x}(t) + \mathbf{B} \mathbf{u}(t) \\ \mathbf{y}(t) = \mathbf{C} \mathbf{x}(t) + \mathbf{D} \mathbf{u}(t) \end{cases} \quad (2.2)$$

donde se aprecia que las matrices del sistema ahora no dependen del tiempo.

### 2.2.3. El principio de superposición

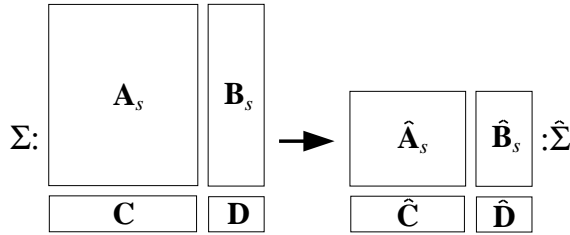
Los SLIT se caracterizan por cumplir el principio de superposición o aditividad lineal, el cual puede definirse como sigue, según Doodge (1973). Sea un sistema con una entrada o acción exterior  $u_i(t)$  que produce una salida o efecto  $y_i(t)$  en un período de tiempo  $t$ , expresado de la forma  $u_i(t) \rightarrow y_i(t)$ . Para el caso de superponer dos sistemas, definiendo que  $i = 1, 2$ , se tiene que  $u_1(t) \rightarrow y_1(t)$  y  $u_2(t) \rightarrow y_2(t)$ , esto es, la acción 1 produce un efecto 1 y la acción 2 produce un efecto 2. Si el sistema tratado es lineal, se cumple que  $c_1 u_1(t) + c_2 u_2(t) \rightarrow c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)$ , donde  $c_1$  y  $c_2$  son constantes. En general, para sistemas lineales, la superposición se escribe como:

$$\sum_i^n c_i u_i(t) \rightarrow \sum_i^n c_i y_i(t)$$

de donde se concluye que los efectos producidos por causas diferentes en el sistema no son dependientes entre sí. Para efectos prácticos, la linealidad es una propiedad que interesa de cara a poder aplicar la superposición, puesto que permite separar el cálculo de las diferentes acciones actuando sobre el sistema. En consecuencia, en la mayoría de los problemas de simulación de SLIT se consigue una importante reducción del trabajo de modelación. En este orden de ideas, el ciclo hidrológico puede ser estudiado recurriendo al concepto de sistema. Al respecto, un SLIT hidrológico se define como una estructura o volumen en el espacio, rodeada por una frontera, que acepta agua y otras entradas, opera en ellas internamente y produce unas salidas (Chow *et al.*, 1976). Por ejemplo, el proceso de flujo de agua subterránea a través de un acuífero puede ser analizado como un sistema hidrológico, según el marco conceptual presentado en Sahuquillo y Cassiraga (2010c).

### 2.2.4. Esquema general para la reducción de modelos

El planteamiento general de un problema de reducción del orden de un modelo se enuncia de la siguiente manera. Dado un sistema generalizado  $\Sigma$  con variable de entrada  $\mathbf{u}(t)$ , variable de estado  $\mathbf{x}(t)$  y variable de salida  $\mathbf{y}(t)$ , encontrar un sistema generalizado aproximado  $\hat{\Sigma}$ , con variable de entrada  $\mathbf{u}(t)$ , variable de salida  $\mathbf{y}(t)$  y variable de estado reducida  $\hat{\mathbf{x}}(t)$ . Este sistema aproximado tiene un tamaño mucho menor que el sistema original y se conoce como modelo reducido. En la figura 2.2 se presenta un esquema del procedimiento general de reducción de modelos donde, por simplicidad de notación y asumiendo que  $\mathbf{S}$  es invertible, se define que  $\mathbf{A}_s = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}_s = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{B}$ .



**Figura 2.2.** Esquema general para la reducción de un SLIT. Adaptada de Antoulas (2005).

Así, utilizando la notación antes mencionada, el SLIT de la ecuación (2.2) se reescribe como:

$$\Sigma = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{A}_s & \mathbf{B}_s \\ \hline \mathbf{C} & \mathbf{D} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(n+l) \times (n+m)} \tag{2.3}$$

y, entonces, el objetivo es formar un sistema reducido que se formula de la siguiente manera:

$$\hat{\Sigma} = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}}_s & \hat{\mathbf{B}}_s \\ \hline \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{array} \right] \in \mathbb{R}^{(k+l) \times (k+m)}$$

donde  $k \ll n$ . Ahora bien, es oportuno aclarar que el procedimiento para construir matemáticamente el sistema reducido debe cumplir tres condiciones (Antoulas, 2005): (i) se preserva la estabilidad y la pasividad del sistema, (ii) el procedimiento es eficiente computacionalmente y (iii) el error de aproximación del nuevo sistema es pequeño y acotado. Para lograr lo anterior, las técnicas de reducción operan en dos pasos. Primero, se realiza un cambio de base sobre la variable de estado, el cual se expresa como  $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{T}\mathbf{x}(t)$ , donde las columnas de la matriz  $\mathbf{T} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  contienen los vectores generadores del espacio  $n$ -dimensional de proyección del SLIT. Posteriormente, se configura una partición del SLIT transformado, la cual se obtiene estableciendo las siguientes definiciones:

$$\bar{\mathbf{x}}(t) = \left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{x}}(t) \\ \tilde{\mathbf{x}}(t) \end{array} \right\}, \mathbf{T}^{-1} = [\mathbf{V} \quad \mathbf{T}_1], \mathbf{T} = \left[ \begin{array}{c} \mathbf{W}^* \\ \mathbf{T}_2 \end{array} \right] \tag{2.4}$$

donde  $\hat{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^k$  es el vector de variables de estado a considerar en el truncamiento,  $\tilde{\mathbf{x}}(t) \in \mathbb{R}^{n-k}$  es el vector de variables de estado a despreciar en el truncamiento,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  y  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  son las componentes del subespacio de proyección que se mantienen durante el truncamiento,  $\mathbf{T}_1 \in \mathbb{R}^{n \times n-k}$  y  $\mathbf{T}_2 \in \mathbb{R}^{n \times n-k}$  son los componentes del subespacio de proyección que se eliminan durante el truncamiento y  $*$  denota matriz traspuesta. Asimismo, se establece que  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}$  son S-ortonormales, es decir  $\mathbf{W}^*\mathbf{S}\mathbf{V} = \mathbf{I}$ . Entonces, reemplazando las anteriores definiciones en la ecuación (2.3) sin considerar los términos del truncamiento, se llega a:

$$\hat{\Sigma} = \left[ \begin{array}{c|c} \hat{\mathbf{A}} & \hat{\mathbf{B}} \\ \hline \hat{\mathbf{C}} & \hat{\mathbf{D}} \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c|c} \mathbf{W}^*\mathbf{A}\mathbf{V} & \mathbf{W}^*\mathbf{B} \\ \hline \mathbf{C}\mathbf{V} & \mathbf{D} \end{array} \right] \tag{2.5}$$

Por último, debe aclararse que la ecuación (2.5) representa al modelo reducido. En ésta se observa que, al establecer la S-ortonormalidad entre  $\mathbf{V}$  y  $\mathbf{W}^*$ , la matriz  $\mathbf{S}$  desaparece durante el procedimiento de reducción. También debe enfatizarse que las diferencias entre los métodos de reducción existentes radican en la forma como se construyen las matrices de proyección y el tipo de propiedades del sistema original que conservan en el reducido.

## 2.3. Modelos lineales clásicos para cuantificar la relación río-acuífero en la utilización conjunta

### 2.3.1. Modelos agregados

El modelo agregado más simple para obtener la relación río-acuífero es el unicelular (Buras, 1963; Buras y Bear, 1964). En éste se considera al acuífero como un tanque que posee un coeficiente de desagüe  $\alpha$  [1/T] y cuyas variables de estado son  $v(t)$  [ $L^3/T$ ] y  $Q(t)$  [ $L^3/T$ ], las cuales representan el volumen almacenado en el acuífero y la descarga al río en el tiempo  $t$ , respectivamente. Así, asumiendo que se simula en períodos temporales de igual duración  $\Delta t$  [T], las variables de estado del acuífero se evalúan como sigue:

$$v(t) = v(t-1)e^{-\alpha\Delta t} + \frac{R(\tau)}{\alpha} (1 - e^{-\alpha\Delta t}) \quad (2.6)$$

$$Q(t) = Q(t-1)e^{-\alpha\Delta t} + R(\tau) (1 - e^{-\alpha\Delta t}) \quad (2.7)$$

siendo  $R(\tau)$  la intensidad de las acciones exteriores agregadas sobre el acuífero durante el intervalo  $\tau(t-1, t)$ . Las principales ventajas del modelo unicelular son: (i) no es necesario almacenar las acciones exteriores anteriores dado que el comportamiento del acuífero depende explícitamente de  $v(t)$  y  $Q(t)$ , (ii) puede usarse el principio de superposición para actualizar las variables de estado y para cuantificar la influencia de las acciones exteriores durante cada intervalo del horizonte de simulación. Por otra parte, su mayor desventaja es que representa una simplificación importante del comportamiento del acuífero que, en muchos casos, puede estar alejada de la realidad al no tener en cuenta la distribución espacial de las propiedades hidrodinámicas del mismo, condiciones de contorno y las acciones exteriores que se encuentran actuando sobre éste (Sahuquillo y Cassiraga, 2010c). Existe software especializado en la gestión conjunta de recursos hídricos en los cuales se implementa el modelo unicelular como una alternativa para representar la componente subterránea, entre los que cabe mencionar a HEC-5 (USACE, 1989), SIMGES de AQUATOOL (Andreu *et al.*, 1996), MIKE-BASIN (DHI, 2003) e IRAS (Loucks, 2002).

### 2.3.2. Modelos distribuidos analíticos

Theis (1941) y posteriormente Glover y Balmer (1945), proponen un modelo analítico para el caso de río con conexión perfecta y totalmente penetrante en un acuífero homogéneo, isótropo y semi-infinito. Este modelo asume que las propiedades del acuífero son invariantes en el tiempo e independientes de las fluctuaciones del nivel saturado, con lo cual se supone comportamiento lineal y es aplicable el principio de superposición. Particularmente, el modelo de Glover y Balmer (1945) determina la detracción al río causada por un bombeo constante como función de la distancia entre el pozo y el río, el tiempo de bombeo y las propiedades hidrodinámicas del acuífero. Al respecto, diferentes autores implementan modelos numéricos para evaluar las estimaciones de la ecuación de Glover y Balmer; sus resultados demuestran que ésta tiende a sobreestimar los efectos de la disminución del caudal en el río cuando éste se encuentra conectado parcialmente con el acuífero (Spalding y Khaleel, 1991; Sophocleus *et al.*, 1995; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005).

Hantush (1965) incorpora el efecto de la conexión imperfecta río-acuífero debido a una capa vertical semipermeable en la solución analítica para acuífero semi-infinito, sugiriendo que puede usarse una distancia efectiva entre el río y el pozo para considerar el efecto de la penetración parcial del río. Esta solución fue modificada por Hunt (1999) para considerar un lecho de río ligeramente penetrante y colmatado en el caso de acuífero infinito. La

solución analítica de Hunt está basada en las siguientes hipótesis: (i) el acuífero es de extensión infinita, es homogéneo e isotrópico, (ii) es válida la aproximación de Dupuit y (iii) los descensos son pequeños comparados con el espesor saturado, con lo cual es válida la primera linealización de la ecuación de Boussinesq (Polubarinova-Kochina, 1962).

Jenkins (1968a) define al factor de detracción del río como  $SDF = d^2(S/T)$ , con dimensiones de [T], que representa al tiempo necesario para que  $(T/S)d^{-2}t = 1$ , siendo  $d$  [L] la distancia entre el pozo y el río. Dicho tiempo resulta ser el necesario para detraer del río el 28 % del volumen bombeado desde el inicio del bombeo. Al respecto, Jenkins presenta dos curvas adimensionales, una que da el valor del volumen detraído dividido por el volumen bombeado y otra para el caudal instantáneo que se detrae dividido por el caudal bombeado. La primera proporciona el valor de 0.28 para  $tT/d^2S$  igual a 1, es decir, que se ha detraído del río el 28 % del volumen bombeado desde el principio del bombeo. Asimismo, ambas curvas son asintóticas a 1 para tiempo infinito. En Custodio y Llamas (1983) también se dan estas curvas en función del valor  $SDF/t$  y se explica con detalle la aplicación de este modelo. Jenkins (1968b) usa un modelo analógico eléctrico del acuífero aluvial del río Arkansas para estimar valores de  $SDF$  en un campo de pozos. Dichos valores se usan para construir un mapa de líneas con igual  $SDF$ , permitiendo evaluar el efecto del bombeo sobre los caudales como combinación del  $SDF$  y el tiempo. Cabe decir que el método de Jenkins ha sido utilizado hasta hace relativamente poco tiempo para cuantificar la relación río-acuífero y determinar el efecto de los bombeos en modelos de gestión (Sophocleus *et al.*, 1995), pero el desarrollo de los métodos de las funciones de influencia y, sobre todo, del método de los autovalores, ha hecho que su utilidad relativa sea cada vez menor. Aún así, el concepto del  $SDF$  es útil para tener una primera idea del efecto de un bombeo sobre el caudal detraído del río (Andreu, 1983; Sahuquillo, 1983d).

### 2.3.3. Funciones de influencia

Cuando se acepta la linealidad, los principios de superposición y traslación en el tiempo son aplicables y, en consecuencia, es posible el uso de funciones de influencia o matrices de respuesta para representar el comportamiento del flujo del acuífero. Con lo anterior se aumenta considerablemente la eficiencia de las simulaciones para modelos de uso conjunto. El procedimiento básico consiste en usar las funciones de respuesta de las componentes físicas para simular el comportamiento del sistema cuando éste es sometido a diferentes acciones unitarias exteriores. Entonces, la variación en el tiempo de la respuesta se calcula mediante la convolución de las acciones exteriores y la respuesta para el tiempo de simulación. Las funciones de influencia deben calcularse previamente por métodos analíticos, en casos simples, o métodos numéricos en casos reales para: (i) las condiciones iniciales y de contorno nulas, (ii) todas las acciones unitarias que intervengan en el problema a resolver y (iii) todos los puntos que sea necesario controlar; hasta que la suma de los errores que se cometan sea despreciable. Dado lo anterior, para problemas reales en acuíferos poco extensos es habitual considerar funciones de influencia para periodos mensuales durante 20 años después de finalizar la aplicación de la acción unitaria. Más aún, estas acciones unitarias no tienen que limitarse a bombeos o recargas puntuales o distribuidas uniformemente en un entorno determinado, sino que también pueden estar impuestas no uniformemente, ya sea de forma puntual, distribuida, o pueden venir compuestas por acciones de ambos tipos.

Chun *et al.* (1964) fueron los primeros en aplicar esta técnica en la hidrología subterránea para modelar el acuífero costero de Los Ángeles. Maddock (1972), usando la función de Green, define una función tecnológica algebraica, que estima los descensos en un punto debido a un bombeo previo en otros puntos del acuífero. Morel-Seytoux y Daly (1975) denominan a su método Kernels Discretos (KD) por el uso de una integral de

convolución para obtener la matriz de respuesta y proponen el uso de un modelo en diferencias finitas, al que llaman generador de KD, para desarrollar la matriz de respuesta sobre los caudales o las alturas piezométricas como respuesta a un bombeo. El método de las funciones de influencia ha sido ampliamente usado en casos prácticos de uso conjunto (Andreu *et al.*, 1982; Illangasakare y Morel-Seytoux, 1982; Fredericks *et al.*, 1998; Belaineh *et al.*, 1999). Su principal ventaja reside en el uso de los resultados de un modelo externo de simulación de forma condensada para estudios de otro nivel de detalle. Sin embargo, el método implica la consideración y almacenamiento en memoria de todas las funciones de influencia y acciones previas. Cuando el sistema es complejo y el horizonte temporal largo, esto puede implicar una importante exigencia de tiempo de cálculo. Otro problema que plantea es el de la estimación de las influencias anteriores (Andreu, 1984).

## **2.4. Esquemas de reducción de SLIT para la modelación hidrogeológica y la cuantificación de la relación río-acuífero en la utilización conjunta**

### **2.4.1. Reducción modal**

Los inconvenientes en la aplicación práctica de las funciones de influencia se resuelven efectivamente mediante la aplicación del Método de los Autovalores (MAV). Esta técnica, propuesta por Sahuquillo (1983a), consiste básicamente en una descomposición espectral para solucionar semianalíticamente la EDP de flujo subterráneo, obteniendo ecuaciones de estado como función explícita del tiempo, expresadas en términos de series de Fourier. El marco conceptual del MAV permite desarrollar tanto soluciones analíticas como numéricas para diferentes tipos de geometrías, distribuciones espaciales de los parámetros hidrodinámicos y tipos de acciones exteriores, para diversas variables de respuesta del acuífero. Particularmente para la relación río-acuífero, los Modelos Pluricelulares Englobados (MPE) permiten realizar los cálculos de forma eficiente, directa y explícita mediante expresiones simples y operativas (Sahuquillo, 1983b; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005).

Mediante una solución por el MAV, se deduce que el comportamiento de la descarga de un acuífero a una masa superficial se asimila a la respuesta de un conjunto de depósitos virtuales. Al respecto, cuando dicha solución se obtiene mediante una aproximación analítica, el número de depósitos es infinito, mientras que, para las soluciones numéricas, se obtiene un conjunto finito de depósitos. En ambos casos, cada uno de estos depósitos virtuales tiene un coeficiente de desagüe asociado y el porcentaje de acción exterior que asimila viene expresado en función de unos coeficientes de reparto que dependen del tipo de acción exterior considerada y de los parámetros hidrodinámicos del acuífero.

Existen soluciones analíticas por el MAV para problemas transitorios con condiciones de contorno nulas que han sido desarrolladas para geometrías rectangulares y circulares y acciones exteriores sencillas, como lo presentan diferentes investigadores (Sahuquillo, 1983b; Ramos *et al.*, 1983; Sahuquillo y Octavio, 1984; Sahuquillo, 1985, 1992; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005; Sahuquillo y Cassiraga, 2010d). El esquema analítico de solución propuesto conduce al planteamiento de un problema de Sturm-Liouville (Zettl, 2005) del cual se obtienen los autovalores y autofunciones asociados con el problema no influenciado por acciones externas. En el caso de las soluciones numéricas, la ecuación de flujo subterráneo se plantea como un SLIT, de forma similar a la ecuación (2.1), es decir, en la forma del espacio de estados, de donde se extrae un problema generalizado de autovectores que debe resolverse eficientemente para hallar los autovalores y los autovectores del SLIT

hidrogeológico. En este punto es oportuno comentar que el par autovalor-autofunción (o autovector en el caso numérico) se conoce como modo del SLIT. Finalmente, tanto en el caso analítico como en el numérico, la simulación transitoria se efectúa mediante una ecuación de estado explícita obtenida mediante integración directa de cada modo de flujo.

Ya sea partiendo de soluciones analíticas o numéricas de la EDP de flujo subterráneo, se pueden plantear modelos reducidos mediante el MAV cuando sólo se usan los modos dominantes en dichas soluciones. En el caso numérico, el MAV es equivalente a aplicar el procedimiento de reducción modal propuesto por Davison (1966) y posteriormente extendido por diferentes autores (Marshall, 1966; Chidambara y Davison, 1967; Fossard, 1970), quienes proponen que se llega a un modelo reducido equivalente modal a partir de la proyección del original sobre el subespacio generado por los autovectores dominantes de la matriz de estados. Además, los modos dominantes del sistema pueden calcularse eficientemente usando métodos de cálculo de autovalores especializados (Rommes, 2008).

Al respecto, Sahuquillo y Andreu (1988) plantean la posibilidad de disminuir la carga computacional operativa de un modelo por autovalores reduciendo el número de modos a considerar en la formulación. Ellos proponen un truncamiento de los términos correspondientes a los mayores autovalores, los cuales están asociados con los modos de respuesta más rápida en las variables de estado del acuífero, y analizan el error de aproximación y el incremento de la eficacia. Este tipo de aproximación ha sido llamada truncamiento traumático. También es posible expresar el modelo numérico de flujo como un SLIT de salida única usando una formulación por el MAV, donde dicha salida corresponde a la relación río-acuífero. Así, con el fin de calcular directamente la descarga o detracción al río, Pulido-Velázquez *et al.* (2007b) proponen su analogía con los MPE, expresando las relaciones río-acuífero en función del volumen almacenado, con la ventaja de proporcionar un acotamiento explícito al error de aproximación del caudal descargado.

Para la planificación de recursos hídricos no es necesario conocer el nivel piezométrico en todos los nodos en los que se ha discretizado al acuífero, por lo cual se introducen los conceptos de acciones elementales y parámetros de control aplicadas al MAV con el propósito de incrementar su eficiencia computacional. Las ventajas de aplicar dichos conceptos en la integración de la componente subterránea en los modelos de uso conjunto han sido demostradas para el sistema Mijares-Plana de Castellón (Andreu, 1984). Igualmente, el MAV se ha usado para construir modelos de flujo eficientes de acuíferos regionales para la simulación conjunta de aguas superficiales y subterráneas en sistemas complejos ubicados en distintas cuencas españolas (Andreu, 1984; Andreu y Sahuquillo, 1987; Andreu *et al.*, 1996; Pulido-Velázquez *et al.*, 2007b; Pulido-Velázquez, 2003; Pulido-Velázquez *et al.*, 2008). Para fines meramente operativos, AQUATOOL (Andreu *et al.*, 1996) incluye el módulo AQUIVAL (Capilla y Andreu, 1996; Blanco, 2001), que facilita al usuario el procesamiento de la información y la simulación del flujo en un acuífero lineal mediante el MAV.

Trabajos más recientes sobre el MAV (Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2007a, 2009) han extendido su marco conceptual para posibilitar la consideración de no linealidades en la modelación del flujo del acuífero y su interacción con el río. Las soluciones propuestas permiten tratar casos en los que: (i) existe variación temporal de las condiciones de contorno, (ii) se genera un efecto ducha cuando el río se desconecta del acuífero, (iii) se presenta variación espacial de la topografía en los estratos del acuífero y (iv) se afronta la modelación de un acuífero libre o no es válida la asunción de que los descensos son despreciables con respecto al espesor saturado. Con respecto al último caso, el desarrollo más importante se ha logrado proponiendo una solución a la ecuación de Boussinesq para acuífero libre mediante linealización y la resolución numérica usando el MAV (Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2006, 2007a, 2008).

### 2.4.2. Reducción semiempírica

Esta categoría agrupa los métodos de reducción que hacen uso tanto de los datos disponibles para las variables de estado del acuífero como de la estructura matemática del modelo para lograr una reducción efectiva de su tamaño. De ellos, el más ampliamente utilizado es la Descomposición Ortogonal Apropriada (DOA), conocido también como el método de la autofunciones empíricas, introducido por Lorenz (1956) y extendido posteriormente en los trabajos de Sirovich (1987) y Berkooz *et al.* (1996). En las aproximaciones por DOA se extrae una muestra de la distribución de las variables de estado usando un modelo completo calibrado para, posteriormente, seleccionar diferentes realizaciones de las variables de decisión relevantes al propósito del modelo durante ciertos intervalos de tiempo críticos. Estas muestras de los estados del sistema se conocen como imágenes (traducción para *snapshot*) y se usan en un esquema de interpolación que aproxima al modelo original (Sirovich, 1987). Así, DOA se usa para lograr dos objetivos principales: (i) disminuir la dimensión del modelo a ejecutar y (ii) propiciar su proyección a un subespacio ortogonal, más parsimonioso, generado de forma que se capture la mayor parte de la varianza del modelo original en el modelo aproximado. El segundo paso asegura que el modelo original pueda proyectarse efectivamente en el subespacio construido a partir de las imágenes. Después de someterlo a la DOA y reducir su tamaño, el nuevo modelo se resuelve mediante alguna técnica numérica convencional con el propósito de simular eficientemente el comportamiento del sistema como un componente contenido en uno de mayor tamaño.

Vermeulen *et al.* (2004a) fueron los primeros en presentar las aproximaciones por DOA para reducir modelos lineales de flujo subterráneo. En Vermeulen *et al.* (2004b) se extiende la metodología para poder considerar modelos no lineales. Alternativamente, Vermeulen *et al.* (2005) y Vermeulen *et al.* (2006) usan técnicas de reducción DOA para resolver problemas de modelación inversa, reduciendo tanto el modelo original como el adjunto. La principal desventaja de las técnicas de reducción por DOA es que su eficiencia computacional depende fuertemente de la cantidad de imágenes extraídas del modelo sin reducir que deben usarse para obtener la base de patrones o autofunciones empíricas y del número de intervalos en los cuales deba disponerse de éstas.

Para enfrentar este problema, Siade *et al.* (2010) proponen una técnica para la toma de dichas imágenes empleando una aproximación a la solución analítica del modelo lineal sin reducir. Cabe comentar que la representatividad del modelo reducido por DOA es mejor para las variables de respuesta del acuífero usadas para capturar las imágenes, lo cual implica que, como paso previo al procedimiento de reducción, debe establecerse claramente cuales son las variables del acuífero que se desean representar con menores errores. Por ejemplo, si se desean representar adecuadamente alturas piezométricas localizadas cerca de una condición de contorno o un pozo de extracción, deben usarse imágenes extraídas en localizaciones cercanas. A propósito de lo anterior, McPhee y Yeh (2008) sugieren que la precisión de un modelo unidimensional sencillo reducido usando DOA es menor cerca de los contornos cuando se usan imágenes extraídas de localizaciones alejadas.

En los últimos años, la reducción de modelos de flujo subterráneo empleando la DOA ha sido usada como una herramienta efectiva en la gestión de acuíferos, especialmente en la toma de decisiones en tiempo real. McPhee y Yeh (2008) aplican DOA para un modelo de optimización que busca la maximización del agua que se puede extraer sujeta a restricciones de niveles en el acuífero. Para lo anterior, se usa el modelo reducido de flujo para establecer las restricciones del modelo de gestión usando el método embebido de optimización. Asimismo, el objetivo del modelo de manejo es establecer políticas de extracción que mantengan los niveles piezométricos del acuífero por encima de los límites permisibles. Una aplicación similar es presentada por Siade *et al.* (2010), quienes plantean



un modelo de simulación reducido por DOA con el objetivo de desarrollar estrategias de manejo en el acuífero del Valle de Veneto, cerca de la ciudad de Venecia, donde los niveles piezométricos han disminuido debido al exceso de las extracciones. Para ambos casos, el modelo reducido está formado por un sistema de ecuaciones lineales de menor tamaño que el original del cual se obtienen las alturas piezométricas en todos los nodos del acuífero, sin considerar la relación entre el acuífero y las masas de agua superficiales.

### 2.4.3. Reducción basada en los datos

La reducción basada en los datos reemplaza el sistema original por un modelo de caja negra donde el único objetivo es ajustar unos pocos parámetros de calibración con el fin de que las salidas obtenidas representen adecuadamente los datos disponibles como respuesta a los impulsos de entrada. Este tipo de aproximaciones son muy usadas en la simulación de fenómenos físicos para los cuales es difícil disponer de un modelo físico-matemático sencillo que represente su dinámica. En la hidrología superficial es innumerable la cantidad de aplicaciones en las cuales se usan este tipo de modelos para representar de forma simple procesos complejos en las cuencas o para la predicción de caudales (Chow *et al.*, 1976).

Las Redes Neuronales Artificiales (RNA) son un ejemplo de este tipo de modelos (McCulloch y Pitts, 1943). En estas aproximaciones, el modelo original es reemplazado por una RNA que es mucho más fácil de ejecutar. El procedimiento básico es disponer de datos que representen las entradas y salidas del sistema real, para proponer una estructura de red que se entrena, es decir, asimila el comportamiento del sistema usando la información disponible (Hebb, 1949; Rumelhart *et al.*, 1986). Una vez entrenada, la red se usa para realizar las predicciones de las variables de salida del sistema usando sólo datos de entrada. Debido a que el número de parámetros de la red es, en general, muy inferior al del modelo original, la reducción es eficiente desde el punto de vista computacional.

En la hidrogeología, Rogers y Dowla (1994) usan RNA para reemplazar los modelos de flujo y transporte en un acuífero bajo un escenario de manejo, en el cual el objetivo era prevenir la migración de la pluma del contaminante. Chu y Chang (2009) proponen un esquema de reducción por RNA para integrar la modelación del flujo subterráneo en el establecimiento de políticas de manejo de la explotación subterránea, procurando minimizar el costo de operación de los pozos de extracción de un acuífero. Coppola Jr. *et al.* (2003) y Nikolos *et al.* (2008) usan un modelo reducido por RNA para simular los cambios de niveles piezométricos en pozos de observación como respuesta a la explotación y condiciones climáticas ampliamente variables con el fin de diseñar estrategias ambientales. Bhattacharjya y Datta (2009) reemplazan un modelo de flujo subterráneo con densidad variable por una RNA que modela el flujo subterráneo en un modelo de gestión de un acuífero costero y comparan los resultados con el método de la matriz de respuesta de Gorelick (1983). Al respecto, revisiones bibliográficas recientes discuten acerca de las perspectivas de investigación y la aplicabilidad de la reducción por RNA en cuestiones medio ambientales, problemas de gestión de recursos hídricos y modelación de sistemas fluviales (Maier y Dandy, 2000; Maier *et al.*, 2010).

### 2.4.4. Reducción en los subespacios de Krylov

Los métodos de reducción en subespacios de Krylov se basan en la generación iterativa de un subespacio ortogonal que permite reducir el SLIT original aproximando convenientemente una fracción del espectro de modos del sistema. El uso de este tipo de métodos implica la generación de los subespacios de Krylov asociados al sistema a reducir, para lo cual existen dos métodos iterativos: Lanczos (1950) y Arnoldi (1951). La iteración de

Lanczos puede aplicarse tanto a matrices simétricas como no simétricas, en cuyo caso deberá usarse la versión por dos lados o no simétrica del algoritmo. Por el contrario, la iteración de Arnoldi se usa de forma general cuando se tienen matrices no simétricas.

El Método de Lanczos (MLAN) ha sido empleado para la reducción de modelos en muchas áreas de la ingeniería. En particular, como lo señalan algunos investigadores (Grimme, 1997; Olson, 2005; Heres, 2005), el primer campo en proponer esquemas de reducción para obtener la eficiencia en las simulaciones temporales fue el análisis estructural por elementos finitos, ámbito en el cual es ampliamente extendido el uso del método de Lanczos simétrico y no simétrico (Nour-Omid y Clough, 1984; Kim y Craig Jr., 1988, 1990; Bathe, 1996).

Dunbar y Woodbury (1989) reconocen la utilidad de los métodos de Krylov en el campo de la hidrogeología, y usan MLAN para reducir modelos de flujo subterráneo en acuíferos sintéticos homogéneos y heterogéneos, discretizados en elementos finitos. Ellos utilizan una transformación inversa de la matriz de transmisividades para la generación del subespacio ortogonal de proyección del modelo, con lo cual se ajustan mejor autovalores del modelo que se encuentran más cercanos al eje imaginario, es decir, los menores. Además, reconocen la necesidad de usar el principio de superposición para lograr la reducción eficiente de los modelos en régimen transitorio. Los resultados mostrados en este trabajo muestran una disminución considerable del tamaño del modelo de flujo, con mejores aproximaciones para la estimación de las alturas piezométricas en algunos puntos críticos del acuífero.

Gambolati (1993) compara el MLAN y el MAV para la reducción de dos modelos de flujo sintéticos en acuíferos discretizados finamente mediante elementos finitos. Sus resultados demuestran que, cuando la variable de interés es la altura piezométrica cercana a pozos de extracción o condiciones de contorno, el MLAN proporciona mejores estimaciones que el MAV. Igualmente, afirma que la carga computacional que implica estimar el espectro completo de la solución por autovalores es excesiva, proponiendo un esquema de truncamiento modal eficiente que busca aproximar mejor los autovalores más pequeños.

El MLAN también ha sido aplicado para reducir modelos de flujo subterráneo más realistas y complejos. Zhang *et al.* (2000) lo usan para simular el flujo en un acuífero con porosidad dual, mientras que Woodbury y Zhang (2001) afrontan el problema de modelar el flujo en medio poroso con fracturas discretas. En ambos casos, el planteamiento matemático del modelo es mucho más complejo que la ecuación matricial vectorial para un medio heterogéneo. Si a ello se le agrega el hecho de que la discretización del acuífero debe ser muy fina en ciertas zonas para capturar adecuadamente la variabilidad y heterogeneidad de sus características espaciales, el resultado es un modelo de gran tamaño, con varios cientos de miles de nodos y varios millones de elementos. Así, se hace necesario una herramienta de reducción eficiente para posibilitar la simulación numérica. Los resultados obtenidos en ambos trabajos muestran un ahorro de más del 80 % de trabajo computacional para lograr una representación adecuada de las alturas piezométricas. Igualmente, Woodbury y Zhang (2001), siguiendo las recomendaciones propuestas por Farrell (1997), proponen el uso del MLAN, usando una transformación inversa y desplazamiento modal, para la generación del espacio de proyección para reducción, con la ventaja de que se puede escoger la parte del espectro modal del problema que se desea representar mejor.

Los métodos de reducción por subespacios de Krylov también han sido aplicados en la modelación eficiente del transporte de masa en el agua subterránea. Li *et al.* (1999) usan el MLAN no simétrico para modelar el transporte de radionucleidos con decaimiento exponencial. Zhang (2000) extiende dicho estudio para el flujo y el transporte en acuíferos fracturados. Woodbury *et al.* (1990) aplican el método de Arnoldi para resolver la ecuación de advección-dispersión usando una discretización por elementos finitos. La elección de Arnoldi en vez de Lanczos se debe a que la matriz de conductividad no es simétrica.

Extensiones de trabajo de Zhang (2000) permitieron resolver eficientemente la EDP del transporte de radionucleidos en acuífero con porosidad dual (Zhang y Woodbury, 2000). El problema de la simulación eficiente del transporte multi-especie en acuíferos fracturados mediante el método de Arnoldi ha sido tratado por Zhang y Woodbury (2002), quienes demuestran las ventajas computacionales de usar un método de Krylov racional con desplazamiento para la reducción junto con una implementación de métodos iterativos para resolver los sistemas de ecuaciones lineales recurrentes que surgen en la generación del subespacio ortogonal de proyección. Allí se concluye que la introducción del desplazamiento de los modos del sistema mejora las propiedades de las diagonales dominantes de las matrices de los elementos finitos y aumenta las propiedades de convergencia del método de Arnoldi, con lo cual la reducción del modelo resulta ser más efectiva.

## 2.5. EDP lineal de flujo de agua subterránea

En acuíferos bidimensionales lineales, con parámetros hidráulicos y condiciones de contorno invariantes en el tiempo, el flujo de agua subterránea en un medio poroso saturado, anisótropo y heterogéneo, donde los ejes de anisotropía coinciden con las direcciones principales de análisis, se describe mediante la siguiente EDP:

$$\mathfrak{L}\{h\} + Q(x, y) = S(x, y) \frac{\partial h}{\partial t} \quad (2.8)$$

donde el operador matemático  $\mathfrak{L}\{h\}$ , se define como:

$$\mathfrak{L}\{h\} = \frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \frac{\partial \{h\}}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \frac{\partial \{h\}}{\partial y} \right) \quad (2.9)$$

siendo  $T_x$  y  $T_y$  [ $L^2/T$ ] son las componentes principales del tensor de transmisividades en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente. Por su parte,  $S(x, y)$  [adimensional] es el coeficiente de almacenamiento,  $Q(x, y)$  [ $L/T$ ] son las acciones exteriores actuando sobre el acuífero,  $h = h(x, y, t)$  [ $L$ ] es el nivel o altura piezométrica, y  $t$  [ $T$ ] es el tiempo.

El término  $Q(x, y)$  agrupa la suma de todas las acciones exteriores distribuidas y puntuales actuando sobre el acuífero y se expresa como sigue:

$$Q(x, y) = Q_d(x, y) + \sum_p Q_p \delta(x - x_p, y - y_p) \quad (2.10)$$

donde  $Q_d(x, y)$  [ $L/T$ ] representa la acción distribuida,  $Q_p$  [ $L^3/T$ ] es la  $p$ -ésima acción puntual de bombeo o inyección y  $\delta(x, y)$  es la función delta de Dirac [ $1/L^2$ ].

## 2.6. Condiciones inicial y de contorno

Para obtener la unicidad en solución de la ecuación (2.8), deben definirse una condición inicial y condiciones de contorno, como se presenta a continuación.

### 2.6.1. Condición inicial

De forma general, la condición inicial establece el valor de las alturas piezométricas en el dominio espacial  $\Omega$  del acuífero para el instante en que  $t = 0$ , y se escribe como:

$$h(x, y, 0) = f(x, y) \quad \forall x, y \in \Omega \quad y \quad t = 0 \quad (2.11)$$

### 2.6.2. Condiciones de contorno

En el caso particular de acuíferos lineales, las condiciones de contorno deben poder escribirse mediante funciones lineales y no deben variar en el tiempo. Cuando se violan estas hipótesis, se dice que las condiciones de contorno son no lineales y el modelo de flujo subterráneo se vuelve no lineal variable en el tiempo, requiriendo técnicas matemáticas más complejas para su solución. Así, en el siguiente desarrollo matemático se supone que las condiciones de contorno del acuífero cumplen las hipótesis de linealidad e invariabilidad temporal. Entonces, es posible obtener soluciones únicas de la ecuación de flujo estableciendo algunos de los siguientes tipos de condiciones de contorno.

**Dirichlet:** Si  $\Upsilon_1$  es un borde de altura piezométrica prescrita se cumple que:

$$h(x, y, t) = f_1(x, y, t) \quad \forall x, y \in \Upsilon_1 \quad y \quad t > 0 \quad (2.12)$$

donde  $f_1$  es una función matemática que expresa los valores de la altura piezométrica en el contorno  $\Upsilon_1$ . Si la altura piezométrica en  $\Upsilon_1$  tiene un valor constante  $h_1$  entonces la condición se expresa como  $h(x, y, t) = h_1 \quad \forall x, y \in \Upsilon_1 \quad y \quad t > 0$ .

**Neuman:** Si  $\Upsilon_2$  es un borde de flujo prescrito se cumple que:

$$q_n = f_2(x, y, t) \quad \forall x, y \in \Upsilon_2 \quad y \quad t > 0 \quad (2.13)$$

donde  $q_n$  [L/T] es la componente del flujo normal al borde considerado, y  $f_2(x, y, t)$  es una función matemática para evaluar los flujos de agua a través de  $\Upsilon_2$ .  $f_2$  se expresa mediante la ley de Darcy para medio isótropo como  $q_n = -K(\partial h/\partial n)$ , donde  $n$  representa la dirección perpendicular al borde considerado, en este caso  $\Upsilon_2$ . Si el contorno es impermeable  $q_n$  debe ser cero y, dado que  $K$  es distinta de cero, la condición se escribe como  $\partial h/\partial n = 0$ , es decir, el gradiente hidráulico en la dirección perpendicular al contorno es nulo.

**Cauchy:** Si  $\Upsilon_3$  es un borde donde el flujo depende de la altura piezométrica en los dos lados de una capa semipermeable:

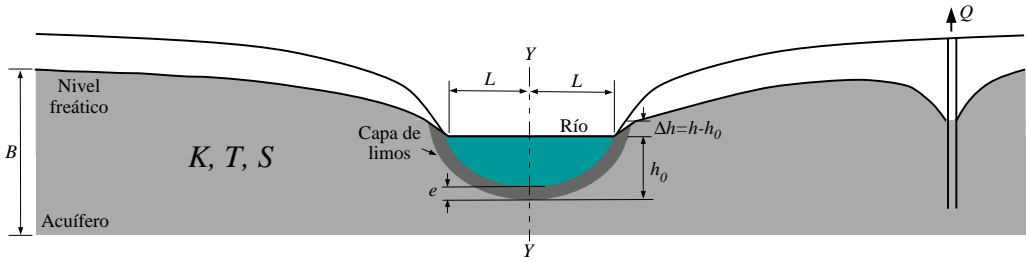
$$q_n = f_3(x, y, t) \quad \forall x, y \in \Upsilon_3 \quad y \quad t > 0 \quad (2.14)$$

donde  $q_n$  [L/T] es la componente del flujo normal al borde considerado y  $f_3$  es una función que expresa los valores del flujo de agua a través de  $\Upsilon_3$  teniendo en cuenta la diferencia de alturas piezométricas entre dicho borde y el exterior.

### 2.6.3. Formulación matemática para la interacción río-acuífero en un sistema hidrogeológico lineal

La condición de contorno tipo Cauchy es útil cuando el acuífero modelado está en contacto con un cuerpo de agua pero separado por una capa semipermeable, de acuerdo con el esquema gráfico presentado en la figura 2.3.

Esta situación se encuentra frecuentemente en las zonas bajas de la cuenca, donde la red de drenaje se ha desarrollado completamente y está en contacto con un acuífero aluvial, o cuando existe un contacto entre el acuífero y un lago. En la zona de interacción entre las masas de agua superficial y subterránea suele existir una capa de sedimento fino y poco conductivo que actúa como lecho semiconfinante del acuífero en la región del



**Figura 2.3.** Configuración de la condición de contorno tipo Cauchy para representar la relación río-acuífero. Adaptada de Sahuquillo y Cassiraga (2010c).

contacto. Dado lo anterior, el flujo horizontal por unidad de ancho  $q'_n$  [ $L^2/T$ ] circulando por el acuífero se calcula como:

$$q'_n = -KBi = -T \frac{\partial h}{\partial x} \tag{2.15}$$

donde  $K$  [ $L/T$ ] es la conductividad hidráulica del río,  $B$  [ $L$ ] es el espesor saturado en el acuífero y  $T$  [ $L^2/T$ ] es la transmisividad del acuífero cerca de su conexión con el río. Igualmente, el flujo por unidad de ancho que atraviesa la capa semipermeable se escribe, según la ley de Darcy, como  $q'_n = -\hat{K}B(h_0 - h)/e$ , donde  $\hat{K}$  [ $L/T$ ] y  $e$  [ $L$ ] son la conductividad hidráulica y el espesor de la capa semipermeable, respectivamente;  $(h_0 - h)$  es la diferencia entre las alturas piezométricas a un lado y otro de dicho borde, siendo  $h$  la altura en el acuífero y  $h_0$  la correspondiente a la masa exterior de agua conectada en el contorno, sea río, lago u otro acuífero. Si se considera el nivel exterior como referencia, se escribe que:

$$q'_n = \hat{K}B \frac{h}{e} \tag{2.16}$$

y aplicando la ecuación de continuidad, los flujos en los contornos del acuífero con conexión río-acuífero, dados por (2.15) y (2.16), deben ser iguales, de donde se llega a:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\hat{K}B}{eT} h$$

En particular, para el caso especial de acuíferos rectangulares de ancho  $L$  [ $L$ ] hasta la pared impermeable, multiplicando y dividiendo por  $L$  y estableciendo que:

$$\omega = \frac{\hat{K}B L}{eT} \tag{2.17}$$

se obtiene finalmente la expresión:

$$\frac{\partial h}{\partial x} = -\frac{\omega}{L} h \tag{2.18}$$

que cumple con la asunción de linealidad de la condición de contorno. Si esta conceptualización se aplica a la conexión entre un acuífero y una masa superficial completamente penetrante, la conexión entre el nivel piezométrico del acuífero y la altura externa del río se mantiene invariante durante todo el horizonte de simulación. De la ecuación (2.17) resulta claro que el parámetro adimensional  $\omega$  contiene información tanto de los parámetros y la geometría del acuífero,  $T$  y  $L$ , como de las asociadas con la relación río-acuífero,  $b$  y  $\hat{K}$ .

## 2.7. Descomposición del problema de flujo subterráneo mediante el principio de superposición

La ecuación (2.8) es lineal en derivadas parciales y, en consecuencia, puede aplicarse convenientemente el principio de superposición para obtener su solución de forma más sencilla. Dado lo anterior, se propone un esquema general de superposición para la solución por reducción de modelos hidrogeológicos lineales, siguiendo el esquema presentado en la figura 2.4. Definiendo  $h(x, y, t)$  como una solución para las alturas piezométricas de la EDP lineal de flujo, ésta se descompone como la suma de las tres siguiente partes:

1.  $u = u(x, y)$  [L] es una solución en régimen permanente que satisface la siguiente EDP:

$$\mathfrak{L}\{u\} = 0 \quad (2.19)$$

siendo análoga a (2.8), pero cambiando  $h$  por  $u$ . Además,  $Q(x, y) = 0$  y desaparecen los términos relacionados con la parte transitoria de la solución, por lo cual  $\partial h / \partial t = 0$ . Las condiciones de contorno son las mismas establecidas para el problema original.

2.  $w_g = w_g(x, y, t)$  [L] es una solución general en régimen transitorio que satisface la siguiente EDP:

$$\mathfrak{L}\{w_g\} = S(x, y) \frac{\partial w_g}{\partial t} \quad (2.20)$$

siendo análoga a la expresión (2.8), pero cambiando  $h$  por  $w_g$  y haciendo nulas las acciones exteriores que actúan sobre el acuífero. También se establece que las condiciones de contorno son nulas, por lo cual la condición inicial del problema resulta ser la diferencia entre la condición inicial del problema original y la solución en régimen permanente, es decir,  $w_g(x, y, 0) = h(x, y, 0) - u(x, y) = w(x, y, 0) \quad \forall x, y \in \Omega$  y  $t = 0$ .

3.  $w_l = w_l(x, y, t)$  [L] es una solución particular en régimen transitorio para una de las acciones exteriores actuando sobre el acuífero,  $Q_l(x, y)$ , con  $l = 1, 2, \dots, n_a$ , cuando existen  $n_a$  acciones exteriores diferentes. Cada una de estas soluciones satisface que:

$$\mathfrak{L}\{w_l\} + Q_l(x, y) = S(x, y) \frac{\partial w_l}{\partial t} \quad (2.21)$$

siendo análoga a la ecuación (2.8), pero sustituyendo a  $h$  por  $w_l$  y estableciendo condiciones iniciales y de contorno nulas. Igualmente, se han considerado todas las acciones exteriores originales que actúan simultáneamente sobre el acuífero. Este conjunto de soluciones suelen designarse como funciones de influencia cuando la integral definida de  $Q_l(x, y)$  sobre todo el dominio del acuífero vale la unidad.

De acuerdo con el esquema de superposición propuesto, la solución del problema original se representa como la suma de las soluciones correspondientes a los tres problemas parciales planteados y, por su parte, la solución transitoria  $w(x, y, t)$  está compuesta por una parte general y  $n_a$  partes particulares, con lo que se plantea la siguiente ecuación:

$$h(x, y, t) = u(x, y) + w(x, y, t), \quad \text{con } w(x, y, t) = w_g(x, y, t) + \sum_{l=1}^{n_a} w_l(x, y, t) \quad (2.22)$$

y cumple las condiciones inicial y de contorno establecidas originalmente.

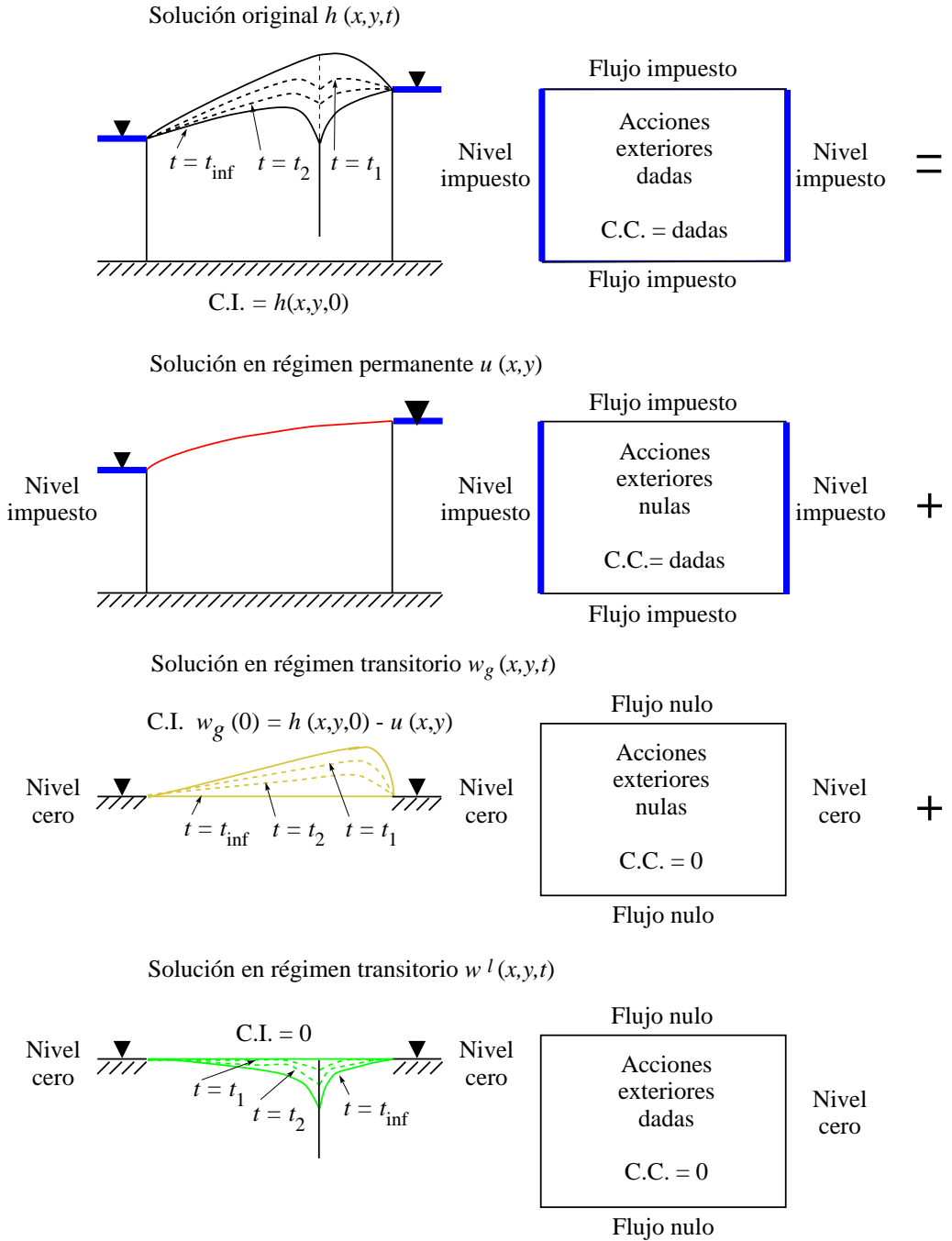


Figura 2.4. Principio de superposición aplicado para obtener una solución de la EDP de flujo subterráneo en acuíferos lineales. Adaptada de Sahuquillo y Cassiraga (2010c).

Esta formulación del principio de superposición puede usarse para resolver la ecuación de flujo analítica y numéricamente. En el primer caso se obtienen expresiones matemáticas para las variables de respuesta del acuífero; en el segundo caso, cuando se discretiza el dominio espacial del acuífero mediante diferencias o elementos finitos, la traslación de las condiciones de contorno permite resolver los sistemas de ecuaciones de forma sencilla y encontrar una ecuación de estado continua en el tiempo, siguiendo el marco conceptual del MAV. Al aplicar un método de reducción que resuelve la ecuación de flujo mediante integración numérica temporal, el principio de superposición propuesto elimina las rutinas de separación de los nodos correspondientes a las condiciones de contorno en cada intervalo temporal. Según Dunbar y Woodbury (1989), usar un esquema de solución como el presentado en la ecuación (2.22) supone un ahorro importante de gasto de ordenador en soluciones numéricas cuando el número de intervalos temporales a simular es grande y se tienen muchos nodos de contorno en la discretización del dominio espacial del acuífero.

Para efectos prácticos de simulación, se resuelve previamente el problema permanente (2.19) y luego se obtienen las soluciones transitorias. El mismo razonamiento se puede hacer para la ecuación del flujo de un acuífero semiconfinado, a la que sólo habría que añadir el término correspondiente al flujo a través del acuitardo, equivalente a una condición de contorno de tipo Cauchy. Es importante insistir en que, para aplicar correctamente la superposición, es preciso distinguir la componente que se debe al efecto exclusivo de las condiciones de contorno que se agrupan en la solución estacionaria. También se deben considerar las condiciones iniciales definidas para el problema y como influyen en la variación posterior del flujo en el acuífero. En acuíferos extensos y de almacenamiento importante, variaciones relativamente pequeñas de las alturas iniciales pueden influir durante periodos largos en los resultados del modelo numérico (Sahuquillo y Cassiraga, 2010c).

## 2.8. Ecuación matricial-diferencial para la simulación del flujo subterráneo en acuíferos lineales

Partiendo de la expresión (2.8) se deduce una ecuación matricial-diferencial que describe el flujo del agua en un acuífero confinado, bidimensional, irregular y heterogéneo. Para lograr lo anterior, se discretiza el dominio espacial del acuífero, representándolo en forma de nodos pertenecientes a una malla de Diferencias Finitas (DF) o Elementos Finitos (EF). Ambas aproximaciones tienen ventajas y desventajas en lo relacionado con su aplicabilidad e implementación computacional. Por un lado, las DF son menos costosas en cuanto a recursos informáticos y representatividad topológica, además los resultados obtenidos son fácilmente visualizables en herramientas de despliegue interactivo (Hendricks-Franssen, 2000). Desafortunadamente, las DF tienen la desventaja de que algunas características espaciales del acuífero o del flujo no pueden representarse adecuadamente para cierto tipo de configuraciones geométricas de los contornos o acciones exteriores. Por ejemplo, si se desea conocer en detalle la variación de las alturas piezométricas en las zonas aledañas a un pozo, cercanas a un manantial o dentro de un medio fracturado en una matriz rocosa, una discretización mediante EF puede ser más conveniente. De hecho, los EF tienen la ventaja de poder refinar la discretización en zonas críticas del acuífero, ya sea en sus contornos o en las zonas próximas a las localizaciones de pozos. A pesar de ello, la principal desventaja de los EF es que son más intensivos en el uso de recursos del ordenador, tanto de procesamiento como de memoria física. Igualmente, la construcción de una estructura topológica para representar la conectividad espacial del acuífero y el despliegue virtual de resulta-



dos deben usar estructuras de datos vectoriales, altamente demandantes al momento de efectuar la implementación numérica, especialmente en los casos tridimensionales.

En el caso de modelación de sistemas de gestión del uso conjunto, dado que se desea detalle en la preservación del balance de masa en zonas del acuífero y apenas una representación adecuada de las alturas piezométricas, para los desarrollos numéricos propuestos se ha efectuado una implementación por DF, permitiendo tamaños variables de los bloques asociados a los nodos, con el propósito de lograr el refinamiento de la malla en zonas críticas cercanas a las zonas de explotación del acuífero o las condiciones de contorno.

### 2.8.1. Solución numérica de la ecuación de flujo subterráneo mediante el uso de las diferencias finitas

Considérese una región de flujo en el acuífero, cuyo esquema gráfico se muestra en la figura 2.5, contenida dentro de una malla rectangular de DF formada por  $n_x$  bloques en dirección del eje  $x$  y  $n_y$  bloques en dirección del eje  $y$ ; por lo tanto, se dispone de  $n_t = n_x \times n_y$  bloques para representar el dominio espacial irregular del acuífero. Los bloques que se encuentran dentro del contorno del acuífero son los activos, mientras que los bloques exteriores se consideran inactivos. La posición relativa de cada bloque dentro de la malla se indica mediante los índices  $(i, j)$ , en las direcciones de los ejes coordenados  $y$  y  $x$ , respectivamente, y puede tener tamaño variable en ambas direcciones. En este punto cabe aclarar que estos índices se definen en notación matricial, por lo que  $i$  representa la  $i$ -ésima fila del arreglo de bloques, mientras que  $j$  representa la  $j$ -ésima columna.

Como se dijo antes, para efectos de implementación computacional, se considera una malla irregular de bloques rectangulares. En su interior se encuentran embebidos  $n$  bloques activos (de color blanco y verde-azul en la figura 2.5) que representan el dominio espacial de flujo efectivo en el acuífero, los bloques inactivos que representan los contornos de no flujo (de color verde en la figura 2.5) y las zonas con nivel piezométrico prescrito (de color marrón en la figura 2.5). Además, se incluyen los bloques asociados a las condiciones de contorno del tipo Cauchy (de color verde-azul en la figura 2.5), los cuales son activos debido a que, de acuerdo con la ecuación (2.18), el flujo entre el acuífero y el contorno depende tanto del nivel externo como de la altura piezométrica en el interior del acuífero.

Antes de presentar las ecuaciones matriciales-diferenciales para los problemas en regímenes permanente y transitorio resultantes de la descomposición de la ecuación de flujo según el principio de superposición presentado en la sección 2.7, se define una convención de numeración de las celdas activas. Esta convención se usa para crear la topología espacial del acuífero, término que se refiere a la estructura matemática que representa la conexión de los bloques activos del acuífero entre sí, con los bloques inactivos y con los asociados con las condiciones de contorno. La numeración topológica se usa para ordenar las alturas piezométricas en los sistemas de ecuaciones lineales, de forma que, al resolver la ecuación matricial-diferencial de flujo, se conoce en todo momento a que bloque de la malla de DF pertenece. Para ello se ha adoptado el esquema secuencial presentado en la figura 2.6.

Sea  $k \in \mathbb{Z}^+$  el índice topológico de un bloque activo embebido en la malla de DF. Su numeración topológica se inicia en el bloque activo localizado más cerca de la esquina inferior izquierda ( $k = 1$ ) y termina en el bloque activo situado más cerca de la esquina superior derecha ( $k = n$ ). El recorrido de la numeración se realiza por filas, es decir, se comienza desde la fila inferior, se numera cada bloque por columna de dicha fila, continuando en la superior adyacente y se repite el procedimiento para cada fila. Así, para una fila intermedia  $i$ , la numeración comienza en la primera columna de la izquierda ( $j = 1$ ) de la malla y crece en la dirección del eje  $x$ , aumentando los índices de columnas y to-

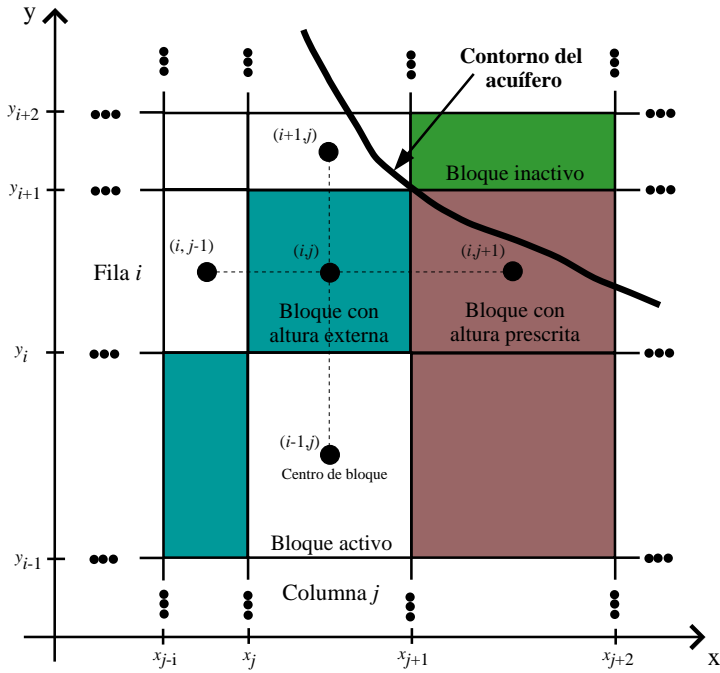


Figura 2.5. Esquema de cinco puntos usado para la aproximación de las derivadas parciales espaciales en la ecuación de flujo mediante las DF.

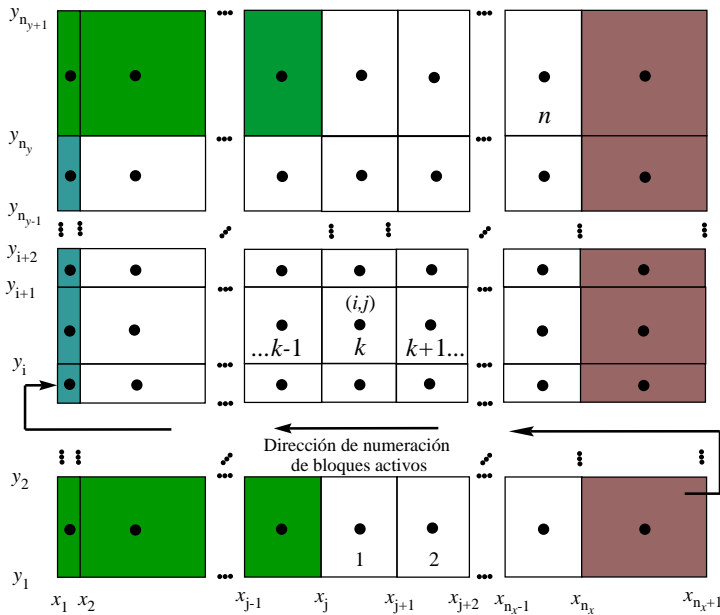


Figura 2.6. Esquema de la numeración topológica de los bloques activos para la discretización de un acuífero lineal usando DF.

pológico, de manera que se establece  $j = j + 1$  y  $k = k + 1$ . Cuando se llega al último bloque activo de una fila  $i$ , el índice de dicha fila aumenta, por consiguiente  $i = i + 1$ , avanzando en dirección del eje  $y$  y se continúa la numeración desde la primera columna ( $j = 1$ ) en la fila siguiente. Este procedimiento continúa hasta llegar bloque activo  $n$ . La numeración topológica adoptada es sencilla y consistente, lo cual es importante puesto que proporciona simplicidad en la representación de la conectividad espacial del acuífero y establece una relación biunívoca entre la localización espacial de un bloque en el dominio del acuífero y la ubicación de la altura piezométrica correspondiente en los sistemas de ecuaciones matriciales-diferenciales.

Las aproximaciones discretas para las derivadas parciales espaciales de la ecuación de flujo se han deducido usando el esquema de DF de cinco nodos presentado en la figura 2.5. Con el propósito de obtener expresiones de validez general, se define  $\xi(x, y, t)$  como una función de altura piezométrica que entra al operador lineal presentado en (2.9) con dimensiones de [L]. Entonces,  $\xi(x, y, t)$  puede corresponder tanto a  $u(x, y)$ , la solución estacionaria con condiciones de contorno del problema original según la ecuación (2.19), como a  $w(x, y, t)$ , la solución transitoria con condiciones de contorno nulas y acciones exteriores dadas de acuerdo con las ecuaciones (2.20) y (2.21). Así, la aproximación numérica para la derivada parcial en dirección del eje  $x$  para el bloque activo  $(i, j)$  es:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left( T_x \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) \approx \frac{\hat{T}_{i-1,j}^{i,j}}{\Delta x_{i,j}} \left( \frac{\xi_{i-1,j} - \xi_{i,j}}{\Delta x_{i-1,j}^{i,j}} \right) + \frac{\hat{T}_{i,j}^{i+1,j}}{\Delta x_{i,j}} \left( \frac{\xi_{i,j} - \xi_{i+1,j}^{\ominus}}{\Delta x_{i,j}^{i+1,j}} \right) \quad (2.23)$$

siendo  $\hat{T}_{i-1,j}^{i,j}$  y  $\hat{T}_{i,j}^{i+1,j}$  [ $L^2/T$ ] las transmisividades equivalentes inter-bloque en dirección del eje  $x$  entre los bloques  $(i-1, j)$  e  $(i, j)$  y los bloques  $(i, j)$  e  $(i+1, j)$ , respectivamente;  $\xi_{i-1,j}$ ,  $\xi_{i,j}$  [L] son las alturas piezométricas desconocidas en los bloques  $(i-1, j)$  y  $(i, j)$ , respectivamente;  $\xi_{i+1,j}^{\ominus}$  [L] es la altura piezométrica impuesta en el bloque  $(i+1, j)$ ;  $\Delta x_{i,j}$  [L] es el ancho del bloque  $(i, j)$  en dirección del eje  $x$ ;  $\Delta x_{i-1,j}^{i,j}$  y  $\Delta x_{i,j}^{i+1,j}$  [L] son las distancias en la dirección del eje  $x$  entre los centros de los bloques  $(i-1, j)$  e  $(i, j)$  y los bloques  $(i, j)$  e  $(i+1, j)$ , respectivamente. Análogamente se escribe la aproximación de la derivada parcial de la altura piezométrica en dirección del eje  $y$ :

$$\frac{\partial}{\partial y} \left( T_y \frac{\partial \xi}{\partial y} \right) \approx \frac{\hat{T}_{i,j-1}^{i,j}}{\Delta y_{i,j}} \left( \frac{\xi_{i,j-1} - \xi_{i,j}}{\Delta y_{i,j-1}^{i,j}} \right) + \frac{\hat{T}_{i,j}^{i,j+1}}{\Delta y_{i,j}} \left( \frac{\xi_{i,j} - \xi_{i,j+1}}{\Delta y_{i,j}^{i,j+1}} \right) \quad (2.24)$$

donde  $\hat{T}_{i,j-1}^{i,j}$  y  $\hat{T}_{i,j}^{i,j+1}$  [ $L^2/T$ ] son las transmisividades equivalentes inter-bloque en dirección del eje  $y$  entre los bloques  $(i, j-1)$  e  $(i, j)$  y los bloques  $(i, j)$  e  $(i, j+1)$ , respectivamente;  $\xi_{i,j-1}$ ,  $\xi_{i,j}$  y  $\xi_{i,j+1}$  [L] son las alturas piezométricas desconocidas en los bloques  $(i, j-1)$ ,  $(i, j)$  y  $(i, j+1)$ , respectivamente;  $\Delta y_{i,j}$  [L] es el ancho en dirección del eje  $y$  del bloque  $(i, j)$ ;  $\Delta y_{i,j-1}^{i,j}$  y  $\Delta y_{i,j}^{i,j+1}$  [L] son las distancias entre los centros de los bloques  $(i, j-1)$  e  $(i, j)$  y los bloques  $(i, j)$  e  $(i, j+1)$  en dirección del eje  $y$ , respectivamente.

Las transmisividades inter-bloque  $\hat{T}$  [ $L^2/T$ ] se calculan como la media armónica o la media geométrica de las transmisividades de los bloques adyacentes. Igualmente, si al bloque  $(i, j)$  le corresponde una condición de contorno dependiente de una altura externa y suponiendo goteo lineal, representado mediante la ley de Darcy, se llega a:

$$q_{i,j}^{\Xi} = cv_{i,j} (\xi_{i,j}^{\Xi} - \xi_{i,j}) \quad (2.25)$$

en la cual  $q_{i,j}^{\Xi}$  [ $L/T$ ] es el flujo por unidad de área generado por la condición de contorno y el acuífero en el bloque  $(i, j)$ ,  $\xi_{i,j}^{\Xi}$  y  $\xi_{i,j}$  [L] son la altura externa y la altura piezométrica

en el bloque  $(i, j)$ , respectivamente, y  $cv_{i,j} = \hat{K}_{i,j}/e_{i,j} [1/T]$  es el factor de goteo semi-confinante sobre el bloque  $(i, j)$ , donde  $\hat{K}_{i,j}$  y  $e_{i,j}$  se definen, según la ecuación (2.16), como la conductividad hidráulica y el espesor del lecho semipermeable del río en el bloque  $(i, j)$ . Por último, la parte derecha de (2.8) se escribe como:

$$S(x, y) \frac{\partial \xi}{\partial t} \approx S_{i,j} \left( \frac{d\xi_{i,j}}{dt} \right) \quad (2.26)$$

siendo  $S_{i,j}$  el coeficiente de almacenamiento para el bloque  $(i, j)$ . Además, los flujos generados por efecto de las acciones exteriores sobre el bloque  $(i, j)$  se denominan  $q_{i,j} [L/T]$ .

### 2.8.2. El problema en régimen permanente

La aproximación por DF para la ecuación matricial-diferencial de flujo en régimen permanente se obtiene sustituyendo las ecuaciones (2.23), (2.24) y (2.25) en (2.19); al tiempo que se define que  $\xi(x, y, t) = u(x, y)$ , se multiplica por el área del bloque  $(i, j)$  y se hacen nulos los sumandos dependientes del tiempo. Por lo tanto, considerando las  $n$  ecuaciones algebraicas lineales correspondientes a todos los nodos activos de las DF, la ecuación matricial de flujo en régimen permanente para un acuífero lineal es:

$$\mathbf{A}_e \mathbf{u} = \mathbf{q}_e \quad (2.27)$$

donde  $\mathbf{A}_e \in \mathbb{R}^{n \times n} [L^2/T]$  es una matriz cuadrada de transmisividades simétrica y definida positiva que tiene en cuenta las condiciones de contorno no nulas del problema original,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n [L]$  es el vector de las alturas piezométricas permanentes y  $\mathbf{q}_e \in \mathbb{R}^n [L^3/T]$  es el vector de flujos permanentes generados por las condiciones de contorno del problema original. La ecuación (2.27) es análoga a la (2.19) y su solución se obtiene resolviendo el sistema lineal para las alturas piezométricas, a partir de las cuales se estiman los caudales de intercambio con las masas de agua superficiales realizando un balance de masa en los bloques pertenecientes a las condiciones de contorno tipo Dirichlet o Cauchy.

### 2.8.3. El problema en regimen transitorio

La aproximación por DF para el problema en régimen transitorio se obtiene sustituyendo las ecuaciones (2.23), (2.24) y (2.25) en la EDP de flujo subterráneo (2.8), al tiempo que se define que  $\xi(x, y, t) = w(x, y, t)$  y se multiplica por el área del bloque  $(i, j)$ . Así, considerando las  $n$  EDO correspondientes a todos los nodos activos de las DF, el sistema de ecuaciones matricial-diferencial para la solución transitoria se escribe como:

$$\mathbf{A} \mathbf{w} + \mathbf{q} = \mathbf{S} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \quad (2.28)$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n} [L^2/T]$  es una matriz de transmisividades simétrica, dispersa y definida positiva, que tiene en cuenta las condiciones de contorno nulas y las propiedades hidráulicas del acuífero;  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n} [L^2]$  es la matriz diagonal de almacenamientos;  $\mathbf{w} = \mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^n [L]$  es el vector que contiene las alturas piezométricas transitorias en cada uno de los nodos en los que se ha discretizado el acuífero y  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n [L^3/T]$  es el vector que contiene las acciones exteriores actuando sobre cada nodo del acuífero. De esta forma, la ecuación (2.28) es análoga a la (2.21) y está sujeta a condiciones de contorno nulas y condiciones iniciales  $w_{i,j}(0) = h_{i,j}(0) - u_{i,j} \quad \forall i, j \in \Omega$  y  $t = 0$ , donde  $h_{i,j}(t) [L]$  es la altura piezométrica total por superposición en el bloque  $(i, j)$ , es decir,  $h_{i,j}(t) = u_{i,j} + w_{i,j}(t)$ .

Según Andreu (1984), se puede llevar a cabo una simulación más eficiente que considere la variabilidad espacio-temporal de  $n_a$  excitaciones exteriores actuando sobre el acuífero usando el concepto de acciones elementales. Así pues, se supone que las acciones exteriores  $\mathbf{q}$  se representan como una combinación lineal de un conjunto reducido de estímulos unitarios elementales con distribución espacial invariante para todo el horizonte de simulación. Suponiendo que se discretiza todo el período de simulación en intervalos de tiempo  $\tau(t-1, t)$  de igual duración  $\Delta t$ , que dichos intervalos finalizan en un instante  $t$  y que en cada período  $\tau$  el vector de acciones externas se aproxima por un vector invariante  $\mathbf{q}(\tau)$ , es posible simular por superposición temporal para acciones exteriores variables en el tiempo. Con esto, el vector de acciones exteriores actuando sobre el acuífero se escribe como:

$$\mathbf{q}(\tau) = \Psi \mathbf{r}(\tau) \quad (2.29)$$

donde  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n_a}$  es la matriz de acciones elementales invariantes en el tiempo de simulación. Ésta representa la distribución espacial de las acciones exteriores en el dominio del acuífero y tiene la propiedad de que sus columnas suman uno, por principio de conservación de masa. El valor de cada acción elemental equivale a la proporción de la acción exterior total que es ejercida sobre cada bloque del acuífero. Igualmente,  $\mathbf{r}(\tau) \in \mathbb{R}^{n_a}$  [ $\text{L}^3/\text{T}$ ] es el vector de intensidades que adoptan las acciones exteriores en un paso de tiempo  $\tau(t-1, t)$ . Cada una de sus componentes representa el volumen de agua, integrado sobre el dominio espacial del acuífero, que sale o entra del mismo durante el intervalo  $\tau(t-1, t)$ . Este procedimiento representa una separación de la parte invariante en el tiempo, dada por la matriz de acciones elementales, de la parte variable temporalmente, representada por el vector de intensidades. De lo anterior, la ecuación de flujo toma la siguiente forma:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} + \Psi \mathbf{r} = \mathbf{S} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \quad (2.30)$$

que representa a la EDP de flujo subterráneo como un SLIT generalizado, según (2.2).

## 2.9. Cálculo de las variables de respuesta del acuífero en modelos de simulación numérica por reducción

Sean  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n$  y  $\mathbf{w}(t) \in \mathbb{R}^n$  las soluciones discretas de los problemas permanente (2.27) y transitorio (2.28), respectivamente. La solución completa discreta del problema de flujo se expresa, mediante el principio de superposición, como:

$$\mathbf{h}(t) = \mathbf{u} + \mathbf{w}(t), \quad \text{con } \mathbf{w}(t) = \mathbf{w}_g(t) + \sum_{l=1}^{n_a} \mathbf{w}_l(t) \quad (2.31)$$

Para encontrar la solución transitoria  $\mathbf{w}(t)$ , se propone un esquema de simulación por reducción como el método más eficiente para incluir el modelo de flujo subterráneo del acuífero en la modelación de sistemas de aprovechamiento de recursos hídricos para uso conjunto. Primero, asume que se ha construido una matriz  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  que contiene los  $m$  vectores columna generadores del subespacio ortonormal de reducción, con  $m \ll n$ . Igualmente, se asume que se dispone de algún procedimiento computacional para calcular el vector  $\Phi(t) \in \mathbb{R}^m$  que contiene las variables de estado del sistema hidrogeológico.

Ahora, siguiendo el procedimiento de proyección presentado en el apartado 2.2.4 e imponiendo que las salidas del modelo son las alturas piezométrica en todos los nodos de las DF, se escribe que:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{V}\Phi(t) \quad (2.32)$$

sin importar el método de reducción utilizado. En consecuencia, al sustituir la ecuación (2.32) en (2.31), las alturas piezométricas totales se calculan como  $\mathbf{h}(t) = \mathbf{u} + \mathbf{V}\Phi(t)$ .

En casos prácticos de modelación para gestión conjunta lo habitual es que sólo se desea determinar un número pequeño  $n_c$  de variables críticas de respuesta del flujo para el acuífero analizado. Éstas se han denominado parámetros de control (Andreu, 1984) y pueden corresponder a: (i) niveles piezométricos en diferentes localizaciones del acuífero, (ii) volúmenes de agua almacenados en diferentes regiones del acuífero y/o (iii) flujos de intercambio entre el acuífero y sus contornos. Dado que todos los esquemas de reducción por proyección son análogos, la fórmula de cálculo de dichos parámetros de control puede utilizarse sin importar el método seleccionado. Aún así, los errores de aproximación pueden ser mayores para unos parámetros que para otros, dependiendo del tipo de técnica de reducción utilizada. Por ejemplo, los errores en los niveles piezométricos simulados cerca de pozos o ríos suelen ser mayores que aquellos calculados en zonas del acuífero alejadas de la influencia de las acciones concentradas o de los contornos. En general, dichos errores son mayores cuando se analizan los descensos en la vecindad de un pozo de extracción.

En ese orden de ideas, los parámetros de control de un acuífero se escriben como una combinación lineal de las filas de  $\mathbf{V}$  y su cálculo se basa en la siguiente expresión:

$$\mathbf{c}(t) = \mathbf{V}_r \Phi(t) \quad (2.33)$$

donde el vector  $\mathbf{c}(t) \in \mathbb{R}^{n_c}$  contiene los valores de los  $n_c$  parámetros de control en el tiempo  $t$  al final del intervalo de tiempo  $\tau$ .  $\mathbf{V}_r \in \mathbb{R}^{n_c \times m}$  es la matriz de proyección reducida cuyas filas se definen como una combinación lineal de las filas de la matriz de proyección original  $\mathbf{V}$ , de acuerdo con los parámetros de control críticos definidos antes de la simulación.

La principal ventaja de usar (2.33) en un esquema de simulación por reducción es que permite evaluar eficientemente algunos parámetros de control de interés, sin la necesidad de obtener las alturas piezométricas en todos los bloques del acuífero. Ello se debe a que la matriz de proyección se reordena para eliminar las filas innecesarias o combinar filas pertinentes y, por lo tanto, disminuir el número de operaciones efectuadas por el ordenador. Si la construcción de las diferentes matrices de proyección reducidas se lleva a cabo de forma previa a la simulación temporal, se evitan operaciones redundantes o innecesarias a lo largo de la simulación transitoria. Cabe agregar que lo anterior es de suma importancia en problemas en los cuales se desea simular u optimizar la gestión de sistemas de recursos hídricos que implementan esquemas de uso conjunto durante largos períodos de tiempo, del orden de décadas, a resolución temporal diaria o mensual.

Igualmente, el hecho de poder seleccionar a priori los parámetros de control del acuífero ahorra recurso físico de memoria puesto que no se deben almacenar las alturas piezométricas de todos los bloques del acuífero para cada intervalo de simulación. Aún más, considerando el esquema de solución de los códigos tradicionales como MODFLOW (McDonald y Harbaugh, 1988), que dividen cada intervalo temporal o de esfuerzo en subintervalos más cortos y escriben resultados del flujo para cada subintervalo, el requerimiento de memoria física del ordenador puede ser prohibitivo cuando la discretización del modelo es muy detallada.

En el procedimiento de construcción de la matriz de proyección reducida se usa la numeración topológica de bloques activos presentada en el apartado 2.8.1 de acuerdo con el esquema de la figura 2.6. Por consiguiente, sea  $k \in \mathbb{Z}^+ : 1 \leq k \leq n$  el índice que representa dicha numeración de acuerdo con la convención establecida previamente. Así, en los siguientes apartados se presentan las expresiones para determinar las variables de control de especial interés en la modelación de sistemas de uso conjunto. Cabe aclarar que el planteamiento de las expresiones para los parámetros de control se ha basado en el esquema del principio de superposición propuesto en la sección 2.7, por lo tanto éstas se

expresan como la suma de dos componentes; una que proviene de la solución del problema transitorio con acciones exteriores impuestas y condiciones de contorno nulas y otra que corresponde a la solución permanente sujeta a las condiciones de contorno originales.

### 2.9.1. Cálculo de alturas piezométricas

La altura piezométrica en un bloque con numeración topológica  $k$ , denotada como  $h_k(t)$ , se calcula como:

$$h_k(t) = \mathbf{V}_r^{h_k} \Phi(t) + u_k \quad (2.34)$$

donde:

$$\mathbf{V}_r^{h_k} = \mathbf{V}_{k:k,1:m} \in \mathbb{R}^{1 \times m} \quad (2.35)$$

es la matriz de proyección reducida. Es decir,  $\mathbf{V}_r^{h_k}$  equivale a la  $k$ -ésima fila de la matriz de proyección original y  $u_k$  es la altura piezométrica en régimen permanente para el mismo bloque obtenida mediante la solución del sistema de ecuaciones lineales presentado en (2.27). En la práctica, lo usual es seleccionar un conjunto de  $f$  bloques activos relevantes, denominado  $\mathbb{I}$ , y calcular sus alturas piezométricas correspondientes aplicando la ecuación (2.34). Considerando lo anterior, sea un vector de numeración topológica de alturas piezométricas  $\mathbf{k}^h \in \mathbb{Z}^f$  cuya  $z$ -ésima componente contiene al índice topológico  $k_z$  asociado con cada bloque contenido en el conjunto  $\mathbb{I}$ , para  $1 \leq k_z \leq n$  y  $z = 1, \dots, f$ . Sea además el vector  $\mathbf{h}^{\mathbb{I}}(t) \in \mathbb{R}^f$  que contiene las alturas piezométricas de cada bloque en  $\mathbb{I}$ . Por lo tanto, la operación matricial para calcular la altura piezométrica de un conjunto de bloques es:

$$\mathbf{h}^{\mathbb{I}}(t) = \mathbf{V}_r^{\mathbb{I}} \Phi(t) + \mathbf{u}^{\mathbb{I}} \quad (2.36)$$

donde:

$$\mathbf{V}_r^{\mathbb{I}} = \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{k_1:k_1,1:m} \\ \mathbf{V}_{k_2:k_2,1:m} \\ \vdots \\ \mathbf{V}_{k_f:k_f,1:m} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{f \times m} \quad (2.37)$$

es la matriz de proyección reducida, formada por las filas de la matriz original de proyección que corresponden a los bloques numerados topológicamente según el vector  $\mathbf{k}^h$  y  $\mathbf{u}^{\mathbb{I}} \in \mathbb{R}^f$  es el vector de alturas piezométricas permanentes de los bloques contenidos en  $\mathbb{I}$ . A veces es conveniente conocer el nivel piezométrico promedio del mismo conjunto de bloques activos  $\mathbb{I}$ , denominado  $h_p^{\mathbb{I}}(t)$ . Para realizar este cálculo se usa la expresión:

$$h_p^{\mathbb{I}}(t) = \frac{1}{f} \sum_{z=1}^f h_{k_z}(t) + u_p^{\mathbb{I}} = \left( \frac{1}{f} \sum_{z=1}^f \mathbf{V}_{k_z:k_z,m:m} \right) \Phi(t) + u_p^{\mathbb{I}} \quad (2.38)$$

donde  $u_p^{\mathbb{I}}$  es la altura piezométrica promedio permanente para los bloques contenidos en  $\mathbb{I}$ . De la ecuación (2.38) se deduce que la matriz de proyección reducida se calcula como el promedio de las filas de la matriz original de proyección que corresponden a los bloques numerados topológicamente según el vector  $\mathbf{k}^h$ , así:

$$\mathbf{V}_r^{h_p} = \left[ \frac{1}{f} \sum_{z=1}^f \mathbf{V}_{k_z:k_z,m:m} \right] \in \mathbb{R}^{1 \times m} \quad (2.39)$$

### 2.9.2. Cálculo del volumen de agua almacenado

El volumen de agua almacenado en un bloque de acuífero con numeración topológica  $k$  se define como  $v_k(t) = s_{k,k}h_k(t)$ , donde  $s_{k,k}$  es la  $k$ -ésima componente diagonal de la matriz de almacenamientos  $\mathbf{S}$ . Por consiguiente, usando la expresión (2.34), se llega a:

$$v_k(t) = \mathbf{V}_r^{v_k} \Phi(t) + s_{k,k} u_k \quad (2.40)$$

donde:

$$\mathbf{V}_r^{v_k} = s_{k,k} \mathbf{V}_{k:k,1:m} \in \mathbb{R}^{1 \times m} \quad (2.41)$$

es la matriz de proyección reducida. Cuando se desea conocer el volumen almacenado en un conjunto de bloques  $\mathbb{I}$  del acuífero, es más eficiente ensamblar una matriz de proyección reducida que calcular los volúmenes individuales por bloque y sumarlos posteriormente. Así, suponiendo que  $\mathbb{I}$  está conformado por  $f$  bloques activos y que cada uno de ellos tiene una numeración topológica definida previamente, se define el vector de numeración topológica de volúmenes  $\mathbf{k}^v \in \mathbb{Z}^f$ . En este vector cada componente  $z$  contiene el valor del índice topológico  $k_z$  asociado con cada bloque perteneciente a  $\mathbb{I}$ , para  $1 \leq k_z \leq n$  y  $1 \leq z \leq f$ . Con lo anterior, el volumen almacenado en  $\mathbb{I}$  se calcula como:

$$v^{\mathbb{I}}(t) = \left( \sum_{z=1}^f s_{k_z, k_z} \mathbf{V}_{k_z:k_z, 1:m} \right) \Phi(t) + \sum_{z=1}^f s_{k_z} u_{k_z} \quad (2.42)$$

de la cual se deduce que:

$$\mathbf{V}_r^v = \left[ \sum_{z=1}^f s_{k_z, k_z} \mathbf{V}_{k_z:k_z, 1:m} \right] \in \mathbb{R}^{1 \times m} \quad (2.43)$$

es la matriz de proyección reducida para el cálculo del volumen y se calcula como la suma de los vectores fila de proyección  $k_z$ -ésimos correspondientes a las celdas implicadas en  $\mathbb{I}$ , ponderados por sus respectivas componentes diagonales de la matriz de almacenamiento.

### 2.9.3. Cálculo del caudal de intercambio entre el acuífero y el contorno dependiente de una altura externa

Ahora se consideran los contornos del acuífero dependientes de alturas externas, denominado  $\Upsilon_3$  según la ecuación (2.14). En este caso se desea determinar el caudal de intercambio entre una zona del acuífero no contenida en los contornos y un subconjunto de  $\Upsilon_3$ . En la discretización por DF, dicho subconjunto  $\mathbb{I}$  contiene  $f$  bloques activos y cada uno de ellos tiene una numeración topológica definida previamente. También se define el vector de numeración topológica de intercambio con condiciones de contorno de altura externa  $\mathbf{k}^q \in \mathbb{Z}^f$ , que contiene bloques de contorno cuya dinámica responde a la relación dada por (2.16). Por lo tanto, el caudal de intercambio depende de las dimensiones de cada bloque en  $\mathbb{I}$ , denotadas como  $\Delta x_{k_z}$  y  $\Delta y_{k_z}$  en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$ , respectivamente, y de un factor de goteo definido como  $cv_{k_z} = \hat{K}_{k_z}/e_{k_z} [1/T]$ , donde  $\hat{K}_{k_z}$  y  $e_{k_z}$  son la conductividad hidráulica y el espesor de la capa semi-confiante, respectivamente. De lo anterior se obtiene que el caudal total de intercambio  $Q_r^{\mathbb{I}}(t)$  [ $L^3/T$ ] se expresa como:

$$Q_r^{\mathbb{I}}(t) = \left[ \sum_{z=1}^f cv_{k_z} \Delta x_{k_z} \Delta y_{k_z} \mathbf{V}_{k_z:k_z, 1:m} \right] \Phi(t) + \sum_{z=1}^f cv_{k_z} \Delta x_{k_z} \Delta y_{k_z} (u_{k_z} - u_{k_z}^e) \quad (2.44)$$



donde  $u_{k_z}$  es la altura piezométrica permanente para el bloque  $k_z$  y  $u_{k_z}^e$  es el nivel externo permanente para el bloque  $k_z$ . Con esto se tiene que la matriz de proyección reducida es:

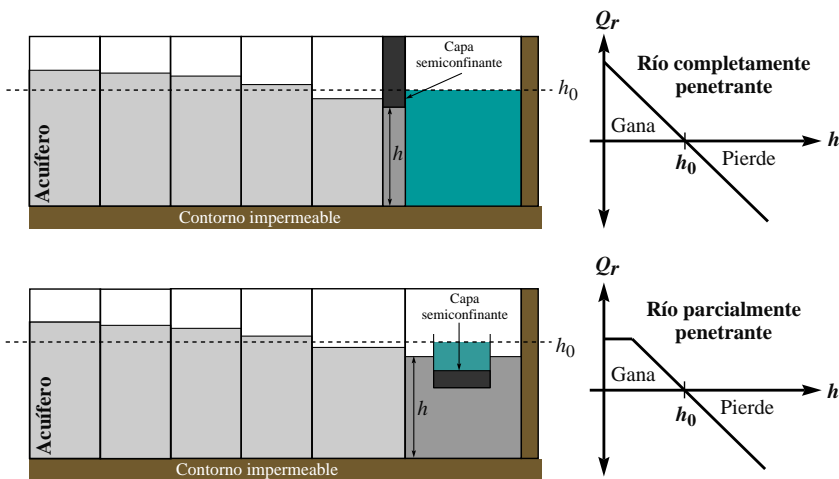
$$\mathbf{V}_r^q = \left[ \sum_{z=1}^f cv_{k_z} \Delta x_{k_z} \Delta y_{k_z} \mathbf{V}_{k_z:k_z,1:m} \right] \in \mathbb{R}^{1 \times m} \tag{2.45}$$

que se expresa como la suma de las filas de la matriz de proyección original ponderada por las dimensiones del bloque correspondiente y el factor de goteo asociado, siguiendo al vector de numeración topológica  $\mathbf{k}^q$ .

## 2.10. Tratamiento de condiciones de contorno no invariantes en modelos lineales de flujo subterráneo

Para conservar la linealidad e invariabilidad temporal de un modelo de flujo subterráneo que va a ser sometido a un procedimiento de reducción, la interacción río-acuífero se representa como una condición de contorno tipo Cauchy impuesta en los bloques correspondientes a la localizaciones de los canales. Como se muestra en el gráfico superior de la figura 2.7, cuando dicha interacción se modela mediante un río completamente penetrante, dichas propiedades se conservan en las condición de contorno debido a que se mantiene una interacción invariante entre la altura externa y el nivel piezométrico en la capa semipermeable durante todo el horizonte de simulación del modelo. Este fenómeno se representa mediante el modelo de decrecimiento lineal en el gráfico  $Q_r$  vs  $h$  superior de la figura 2.7.

Desafortunadamente, cuando la condición de contorno debe representarse usando un río parcialmente penetrante, de forma análoga a la implementación desarrollada en los paquetes RIVER o STREAM de MODFLOW (McDonald y Harbaugh, 1988), puede ocurrir que, para algunos intervalos temporales de simulación, el río y el acuífero se desconecten, produciendo la modificación de la condición de contorno asignada a priori. Como consecuencia



**Figura 2.7.** Representación de las relaciones río-acuífero mediante las DF para río completamente penetrante (arriba) y parcialmente penetrante (abajo).

de lo anterior, se viola la hipótesis de invariabilidad temporal de dichas condiciones de contorno, complicando significativamente el esquema de modelación reducido. En el esquema inferior de la figura 2.7 se presenta un ejemplo gráfico de dicha situación. De ella se deduce que si el nivel piezométrico cae por debajo del fondo del canal, el bloque correspondiente deja de relacionarse con la zona de río correspondiente, de forma que la entrada de agua es constante y deja de depender del nivel piezométrico en el acuífero.

Sahuquillo (1992) describe tres situaciones en las cuales las condiciones de contorno lineales impuestas, presentadas en la sección 2.6.2, dejan de ser válidas: (i) cuando el valor estimado con el modelo lineal para la infiltración procedente del bloque superficial conectado supera el agua disponible, (ii) al desconectarse hidráulicamente el acuífero de la masa de agua superficial y (iii) cuando el acuífero descarga por un manantial y los bombeos anulan las salidas. Dado(s) alguno(s) de los casos anterior, deben plantearse estrategias de corrección para tener en cuenta los efectos de dichas variaciones, definiendo una cota máxima de infiltración procedente de las condiciones de contorno. En el caso (i) esta cota máxima hace referencia al volumen total de intercambio en un determinado intervalo temporal, por estar limitada el agua disponible en el río. En los casos (ii) y (iii) se limita el flujo instantáneo de intercambio entre el río y el acuífero, bien a la recarga existente al desconectarse el río o a una infiltración nula en el manantial cuando deja de salir el agua por éste. El procedimiento para incluir el efecto de las no linealidades es análogo en los tres casos (Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2009).

Inicialmente, se identifica la existencia de condiciones de contorno no lineales respecto a las consideradas para definir el modelo. Así, las expresiones para identificar si se producen no linealidades en un intervalo de tiempo son: (i)  $Q_r(\tau) > Q_d(\tau)$  cuando el volumen de recarga al acuífero procedente de la masa de agua superficial que se obtiene con el modelo lineal para el intervalo  $\tau$ ,  $Q_r(\tau)$ , es superior al agua disponible a ese momento en dicha masa de agua superficial,  $Q_d(\tau)$ ; y (ii)  $h(t) < h_c$  si de descuelga el acuífero o se anulan las salidas por un manantial, donde  $h(t)$  es el nivel piezométrico del acuífero y  $h_c$  es el nivel piezométrico a partir del cual el flujo de intercambio acuífero-masa de agua superficial obtenido con el modelo lineal supera el máximo físicamente posible, el cual, si se trata de un manantial, coincide con la cota del manantial y el caudal de infiltración es nulo.

Posteriormente, se corrigen los resultados obtenidos con el modelo lineal cuando se produce no linealidad en alguna condición de contorno. En el caso en el que se cumplan los requisitos establecidos para que la condición de contorno no sea lineal durante el intervalo de tiempo  $\tau(t-1, t)$ , el procedimiento a seguir para corregirlas es semejante en las tres condiciones previamente descritas. Es decir, se trata de modificar las entradas en la zona de conexión, imponiendo que sean iguales los valores límite a los establecidos en la condición de contorno. Por lo tanto, el volumen almacenado en el acuífero debe cumplir la ecuación de continuidad. En modelos distribuidos lineales, para cada una de las zonas en las que se calcula una infiltración superficial superior al agua disponible, se requerirá suponer un bombeo ficticio que corrija el efecto de estas infiltraciones imposibles. Al superponer los bombeos ficticios a las acciones realmente existentes en cada zona, se ha de cumplir que la diferencia entre la infiltración del río y la obtenida con el modelo lineal, incluyendo también las nuevas acciones consideradas, y el agua desalojada por los bombeos ficticios en la zona coincida con el agua disponible para la infiltración en esa condición de contorno. En consecuencia, la intensidad de cada acción ficticia se obtiene imponiendo que se cumpla la condición anteriormente citada y las variables de control del acuífero deberán ser determinadas incluyendo el efecto de los bombeos ficticios. Ahora bien, si se han detectado  $p$  celdas de contorno donde existen no linealidades, la corrección debe efectuarse planteando sucesivamente sistemas de  $p$  ecuaciones simultáneas que se resuelven

para las  $p$  intensidades de los bombeos ficticias, cada uno de los cuales se impone a una de las anteriormente mencionadas celdas de contorno. Dichos sistemas de ecuaciones se resuelven hasta que el número de no linealidades detectadas en los contornos sea cero.

## 2.11. Conclusiones

La tendencia actual más aceptada para incluir a los acuíferos como elementos pertenecientes a un sistema de recursos hídricos se basa en lograr una modelación adecuada de la dinámica del flujo subterráneo mediante la aplicación de alguna técnica de reducción de un modelo numérico complejo a una forma más simple. La característica principal del modelo reducido obtenido es que su ejecución es más eficiente que la del modelo numérico original y representa lo más adecuadamente posible los diferentes parámetros de control del acuífero. Al respecto, en la revisión bibliográfica presentada en la sección 2.3, se ha puesto de manifiesto que las técnicas de reducción más utilizadas en el campo de la modelación de sistemas de recursos hídricos que incluyen esquemas de utilización conjunta han sido el MAV y la DOA. A pesar de que el propósito de ambas técnicas es el mismo, sus marcos conceptuales manifiestan grandes diferencias, tanto de tipo teórico como práctico. Aún así, en diferentes publicaciones (Andreu, 1984; Andreu y Sahuquillo, 1987; Sahuquillo y Andreu, 1988; Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2007b, 2008) se ha mostrado que el MAV es la técnica más eficiente para cuantificar las relaciones río-acuífero cuando se desea simular u optimizar la gestión de grandes sistemas de recursos hídricos.

Entre las diferencias de tipo teórico se destaca el hecho de que la reducción por el MAV está basada únicamente en la estructura matemática del modelo, es decir, depende exclusivamente de la configuración de las condiciones de contorno y los parámetros de flujo establecidos para construir el subespacio de proyección. En cambio, la reducción por la DOA utiliza datos o simulaciones previas para construir un subespacio empírico de proyección. Como se comentó en el apartado 2.4.2, dichos datos previos, conocidos bajo el nombre de imágenes, consisten básicamente de alturas piezométricas en diferentes localizaciones del acuífero o caudales de intercambio entre el acuífero y sus contornos.

La principal diferencia de tipo práctico entre el MAV y la DOA tiene que ver con el cálculo numérico de la base del subespacio de proyección. Para el MAV, dicha operación es directa y consiste en ejecutar un algoritmo que calcule los autovalores y autovectores del sistema, resolviendo eficientemente un problema generalizado de autovalores. Para la DOA, la construcción del subespacio de proyección requiere ejecutar previamente el modelo de flujo que se desea reducir y extraer de éste las imágenes necesarias. Como consecuencia de lo anterior, la representatividad óptima del modelo reducido depende fuertemente de una pocas variables de estado críticas que a menudo no se conocen previamente, requiriendo la ejecución de un proceso de tanteo y error para identificarlas adecuadamente.

Asimismo, aunque hasta ahora no han sido usados en problemas de uso conjunto, los métodos de reducción en los subespacios de Krylov surgen como una posible alternativa para simular las relaciones río-acuífero y otras variables de estado de forma reducida y eficiente. Como se ha comentado previamente, la principal ventaja de esta familia de técnicas es que la base del subespacio de proyección se construye eficientemente usando las iteraciones de Lanczos y/o Arnoldi, las cuales se basan exclusivamente en la estructura matemática del modelo. A pesar de lo anterior, su principal desventaja es que el modelo reducido sólo preserva adecuadamente una porción del espectro del sistema original, con lo cual algunas variables de estado del acuífero no pueden representarse adecuadamente.

En este capítulo se ha planteado un marco conceptual general para el tratamiento de modelos lineales de flujo subterráneo, representándolos en la forma de SLIT para

hacer posible el uso de métodos de reducción y, en consecuencia, posibilitar su ejecución eficiente. Al respecto, la atención se centra en un esquema de resolución basado en la aplicación del principio de superposición, proponiéndose que la reducción se aplique sobre el problema transitorio con condiciones de contorno nulas. Ello evita tener que someter al modelo de flujo a técnicas de eliminación de los nodos de contorno, creando una partición explícita del problema, la cual puede ser complicada especialmente cuando se discretiza finamente las zonas de los contorno del acuífero. Dado que las condiciones de contorno del modelo reducido son nulas, resulta sencillo evaluar eficientemente los parámetros de control seleccionados pues su variabilidad temporal se representa como un término de corrección por superposición, como se presenta desde la ecuación (2.34) hasta la (2.45).

En resumen, con el planteamiento conceptual presentado en esta sección es posible construir diferentes esquemas de reducción de modelos hidrogeológicos por proyección, cuyos planteamientos matemáticos se presentan en los capítulos siguientes.

“La vida es un proceso de modificación,  
una combinación de estados que tenemos que pasar.  
Cuando la gente no cambia de estado y  
permanece en él, es una especie de muerte”.  
Anais Nin

# 3

## Reducción modal analítica de sistemas hidrogeológicos

### 3.1. Introducción

En este capítulo se plantean modelos distribuidos de parámetros agregados mediante el desarrollo de las soluciones analíticas por el MAV, que conducen a la cuantificación de la relación río-acuífero mediante los MPE (Sahuquillo, 1983b, 1992; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005). El MAV aprovecha el esquema de superposición presentado en la sección 2.7 para separar el problema transitorio con condiciones de contorno nulas, según las ecuaciones (2.20) y (2.21), el cual es más fácil de solucionar analíticamente que el problema original, y se resuelve mediante la técnica de separación de variables de Fourier, lo cual conduce al planteamiento de dos problemas. Uno en el que la variable independiente es el tiempo y está formulado como un conjunto de EDO lineales y de primer orden, con una condición inicial asociada. Otro, en el que las variables independientes son las coordenadas espaciales y se encuentra expresado como un Problema Regular de Sturm-Liouville (PRSL).

Un PRSL es un problema de condiciones de contorno representado por medio de una EDO de segundo orden, lineal, homogénea con coeficientes constantes, la cual tiene un parámetro desconocido que se determina para satisfacer las condiciones de contorno nulas (Zettl, 2005). En consecuencia, la solución del PRSL consiste en encontrar valores del parámetro desconocido para los cuales la ecuación diferencial tiene soluciones distintas de la trivial. Los valores del parámetro se llaman autovalores y las soluciones encontradas en correspondencia con esos valores se llaman autofunciones. Las soluciones encontradas se combinan siguiendo el principio de superposición. Posteriormente, verificando las condiciones de contorno, se halla la solución única como serie infinita de soluciones particulares que cumplen con la ecuación diferencial original. Por último, desarrollando la condición inicial en forma de serie de Fourier e imponiéndola sobre la forma de solución única, previamente obtenida, se llega a la solución completa del problema de flujo subterráneo.

## 3.2. Solución del problema en régimen permanente

La solución analítica del problema en régimen permanente, ecuación (2.19), depende de la geometría del acuífero y las condiciones de contorno particulares para cada problema abordado, por lo cual no existe una forma general. Para geometrías irregulares y medios heterogéneos es imposible obtener una solución analítica. Por el contrario, para medios homogéneos e isótropos, la expresión (2.19) se convierte en la ecuación de Laplace y por lo tanto se vuelve aplicable la teoría analítica de campos potenciales de flujo. Existen soluciones analíticas para dicha ecuación y, de nuevo, su complejidad vendrá dada por las condiciones de contorno adoptadas para el problema y por la geometría del dominio espacial. Gran cantidad de soluciones para acuífero de geometrías sencillas sometidos a acciones exteriores simples pueden encontrarse en los textos clásicos de dinámica de flujo en medios porosos (Polubarinova-Kochina, 1962; Bear, 1972; Bruggeman, 1999).

## 3.3. Solución del problema en régimen transitorio

La solución del problema en régimen transitorio  $w(x, y, t)$ , sujeta a condiciones de contorno nulas y condiciones iniciales dadas por las del problema original  $h_0(x, y)$ , menos la solución estacionaria  $u(x, y)$ , se efectúa en dos partes. Primero, se obtiene una solución general  $w_g(x, y, t)$  que no considera el efecto de las acciones exteriores. Posteriormente, se obtienen las soluciones particulares  $w_l(x, y, t)$  considerando el efecto individual de las acciones exteriores. Finalmente, siguiendo el principio de superposición, estas soluciones se suman para obtener una solución transitoria completa que se denota por  $w(x, y, t)$ .

### 3.3.1. Solución general: acciones exteriores nulas

Para encontrar una solución general, asumiendo que el acuífero se encuentra sometido a acciones exteriores nulas, la EDP de flujo subterráneo se expresa como sigue:

$$\mathfrak{L}\{w_g\} = S(x, y) \frac{\partial w_g}{\partial t}$$

sujeta a una condición inicial  $w_g(x, y, 0) = h_0(x, y) - u(x, y) \forall x, y \in \Omega$  y  $t = 0$  y condiciones de contorno nulas, donde  $w_g = w_g(x, y, t)$  representa una solución general de la parte transitoria del problema. Usando el método de la separación de variables, se propone que:

$$w_g(x, y, t) = \phi(t)V(x, y) \quad (3.1)$$

donde  $\phi(t)$  es la parte temporal de la solución y  $V(x, y)$  es su parte espacial. A partir de la definición dada en la expresión (3.1) se verifica inmediatamente que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_g}{\partial x} &= \phi(t) \frac{\partial V(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w_g}{\partial y} &= \phi(t) \frac{\partial V(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial w_g}{\partial t} &= V(x, y) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.2)$$

y sustituyendo las derivadas de (3.2) en las correspondientes en la ecuación (2.20), resulta la siguiente EDP:

$$\phi(t)\mathfrak{L}\{V(x, y)\} = S(x, y)V(x, y) \frac{\partial \phi(t)}{\partial t}$$

que dividida por  $S(x, y)V(x, y)\phi(t)$ , separando las variables independientes espaciales de las temporales e igualando a ambos lados a una constante arbitraria  $-\lambda$ , se escribe como:

$$\frac{\mathfrak{L}\{V(x, y)\}}{S(x, y)V(x, y)} = \frac{1}{\phi(t)} \frac{\partial\phi(t)}{\partial t} = -\lambda$$

de donde se obtienen las dos siguientes ecuaciones separadas:

$$\mathfrak{L}\{V(x, y)\} + \lambda S(x, y)V(x, y) = 0 \tag{3.3}$$

$$\frac{d\phi(t)}{dt} + \lambda\phi(t) = 0 \tag{3.4}$$

La ecuación (3.3) sujeta a condiciones de contorno nulas es un PRSL; resolverlo implica encontrar los valores del parámetro  $\lambda$  [T<sup>-1</sup>] que definen soluciones distintas de la trivial. Estos parámetros  $\lambda$ , junto con las funciones asociadas  $V(x, y)$  [L<sup>-1</sup>], se denominan, respectivamente, autovalores y autofunciones del problema definido por (3.3) y por las condiciones de contorno correspondientes. La expresión de las autofunciones  $V(x, y)$  depende de los valores que puedan tomar los autovalores  $\lambda$ . Cada una de las soluciones posibles será denotada  $V_i(x, y)$  y el autovalor que la define  $\lambda_i$ , formando el  $i$ -ésimo modo de la solución de la ecuación de flujo. Además, de acuerdo al teorema de Sturm-Liouville existen una cantidad infinita de autovalores reales, a cada uno de los cuales le corresponde una autofunción. Las autofunciones, así definidas, forman un conjunto completo, es decir, cualquier función suave a trozos se puede representar como una serie de Fourier generalizada de dichas autofunciones. Además, si un par de autofunciones corresponden a autovalores diferentes, éstas son ortogonales respecto a una función peso  $S(x, y)$  (Sahuquillo, 1983a).

Por su parte, la ecuación (3.4) tiene una solución general de la forma:

$$\phi(t) = c e^{-\lambda t} \tag{3.5}$$

donde  $c$  es una constante que se determina de la condición inicial, la cual se expresa como  $\phi(t)|_{t=0} = \phi(0)$ , donde se observa que  $c = \phi(0)$ , por lo que (3.5) finalmente queda:

$$\phi(t) = \phi(0) e^{-\lambda t} \tag{3.6}$$

es decir, presenta la forma de una función de decaimiento exponencial del estado inicial con el tiempo. La solución (3.6) depende de los valores que puede tomar el parámetro  $\lambda$  es decir, de los autovalores determinados al resolver el PRSL antes presentado. Por consiguiente, para la ecuación (3.4) se dispone de un conjunto de soluciones, una para cada autovalor  $\lambda_i$ , tal que  $\phi_i(t) = \phi_i(0) e^{-\lambda_i t}$ . Finalmente, de acuerdo con (3.6), una solución al problema definido por las ecuaciones (2.20) y condiciones de contorno nulas es:

$$w_{g_i}(x, y, t) = V_i(x, y)\phi_i(t) = V_i(x, y)\phi_i(0) e^{-\lambda_i t}$$

con lo cual, teniendo en cuenta el principio de superposición para considerar las infinitas soluciones posibles, se propone la siguiente solución general:

$$w_g(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x, y) \phi_i(0) e^{-\lambda_i t} \tag{3.7}$$

que se encuentra compuesta por una serie infinita de funciones de decaimiento exponencial de las alturas piezométricas transitorias y representa la dinámica del estado del sistema hidrogeológico cuando no existen acciones exteriores actuando sobre éste.

### 3.3.2. Solución particular: acciones exteriores dadas

Ahora se desea resolver la EDP de flujo subterráneo expresada en función de la solución transitoria  $w = w(x, y, t)$ , considerando que la  $l$ -ésima acción exterior  $Q_l(x, y)$  está actuando sobre el acuífero. Con lo anterior, la ecuación (2.21) se escribe como:

$$\mathfrak{L}\{w\} + Q_l(x, y) = S(x, y) \frac{\partial w}{\partial t}$$

y se encuentra sujeta a condiciones de contorno e iniciales nulas, siguiendo la forma de la solución presentada en (3.7); el resultado a obtener es  $w_l(x, y, t)$ , la solución particular que corresponde a la acción exterior  $Q_l(x, y)$ . En principio, las primeras derivadas parciales de la solución general con respecto a las coordenadas espaciales y temporal son:

$$\begin{aligned} \frac{\partial w_g}{\partial x} &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) \frac{\partial V_i(x, y)}{\partial x} \\ \frac{\partial w_g}{\partial y} &= \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) \frac{\partial V_i(x, y)}{\partial y} \\ \frac{\partial w_g}{\partial t} &= \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x, y) \frac{\partial \phi_i(t)}{\partial t} \end{aligned} \quad (3.8)$$

y sustituyendo (3.8) en la ecuación (2.8), operando algebraicamente y ordenando términos, se llega a:

$$\sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) \mathfrak{L}\{V_i(x, y)\} + Q_l(x, y) = \sum_{i=1}^{\infty} S(x, y) V_i(x, y) \frac{\partial \phi_i(t)}{\partial t} \quad (3.9)$$

Ahora bien, de acuerdo con la ecuación (3.3),  $\mathfrak{L}\{V_i(x, y)\} = -\lambda_i S(x, y) V_i(x, y)$ . Así, al sustituir esta equivalencia en la expresión (3.9), multiplicando todos los miembros de la ecuación resultante por  $V_j(x, y)$  e integrándola sobre todo el dominio espacial del acuífero,  $\Omega$ , se llega a un sistema con infinitas EDO, que viene expresado de la forma:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^{\infty} \phi_i(t) \lambda_i \int_{\Omega} S(x, y) V_i(x, y) V_j(x, y) d\Omega + \int_{\Omega} Q_l(x, y) V_j(x, y) d\Omega = \\ \frac{\partial \phi_i(t)}{\partial t} \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\Omega} S(x, y) V_i(x, y) V_j(x, y) d\Omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

La simplificación de (3.10) se ejecuta considerando que  $\{V_i(x, y), V_j(x, y)\}$  es un conjunto de funciones ortogonales con respecto a la función peso  $S(x, y)$ , y que cualquier conjunto ortogonal se puede normalizar para obtener un conjunto ortonormal. En consecuencia:

$$\int_{\Omega} S(x, y) V_i(x, y) V_j(x, y) d\Omega = \begin{cases} 0, & \text{si } i \neq j \\ 1, & \text{si } i = j \end{cases}$$

y se reordenando adecuadamente (3.10) se obtiene la siguiente expresión simplificada:

$$\frac{\partial \phi_i(t)}{\partial t} + \phi_i(t) \lambda_i = \int_{\Omega} Q_l(x, y) V_i(x, y) d\Omega, \text{ con } i = 1, 2, 3 \dots \quad (3.11)$$

siendo una EDO lineal de primer orden cuya solución general se formula como sigue:

$$\phi_i(t) = \frac{1}{\lambda_i} \int_{\Omega} Q_l(x, y) V_i(x, y) d\Omega + c_i e^{-\lambda_i t} \quad (3.12)$$



donde  $c_i$  es una constante que se halla utilizando la condición inicial. Si dicha condición se describe mediante  $\phi_i(t)|_{t=0} = \phi_i(0)$ , al sustituirla en la ecuación (3.12) se verifica que:

$$c_i = \phi_i(0) - \frac{1}{\lambda_i} \int_{\Omega} Q_l(x, y) V_i(x, y) d\Omega$$

por lo tanto la expresión (3.12) queda:

$$\phi_i(t) = \phi_i(0)e^{-\lambda_i t} + \left( \frac{1 - e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i} \right) \int_{\Omega} Q_l(x, y) V_i(x, y) d\Omega \quad (3.13)$$

que es una ecuación que representa el estado del acuífero en función de las acciones exteriores actuando sobre éste, los autovalores y las autofunciones que resultan de resolver el PRSL asociado. Aplicando el principio de superposición para considerar las infinitas soluciones posibles, se obtiene la solución formal para las alturas piezométricas transitorias:

$$w(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x, y) \left[ \phi_i(0)e^{-\lambda_i t} + \left( \frac{1 - e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i} \right) \int_{\Omega} Q_l(x, y) V_i(x, y) d\Omega \right] \quad (3.14)$$

y cumple las condiciones de contorno e inicial establecidas en la sección 2.6. De la ecuación (3.14) se observa que la solución está formada por la suma de dos componentes; la primera, corresponde a la solución general presentada en (3.7), mientras que la segunda es la solución particular correspondientes a la  $l$ -ésima acción exterior, que se escribe como:

$$w_l(x, y, t) = \sum_{i=1}^{\infty} V_i(x, y) \left( \frac{1 - e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i} \right) \int_{\Omega} Q_l(x, y) V_i(x, y) d\Omega$$

Por último, para obtener  $\phi_i(0)$  a partir de  $w(x, y, 0)$  se consideran las condiciones iniciales del problema transitorio, expresadas en términos de las funciones de estado como  $w(x, y, 0) = \sum \phi_i(0) V_i(x, y)$ . Con ello, multiplicando  $w(x, y, 0)$  por  $S(x, y) V_i(x, y)$  e integrando en el dominio del acuífero, las condiciones iniciales se plantean como:

$$\int_{\Omega} h(0) S(x, y) V_i(x, y) d\Omega = \sum \phi_i(0) \int_{\Omega} V_i(x, y) S(x, y) V_i(x, y) d\Omega$$

en la cual, considerando la condición de ortonormalidad de las autofunciones, se tiene:

$$\phi_i(0) = \int_{\Omega} h(x, y, 0) S(x, y) V_i(x, y) d\Omega$$

que es una expresión para obtener las condiciones iniciales en la base de las autofunciones. Los valores de  $\phi_i(t)$  representan cada componente del vector de orden infinito que contiene las funciones de estado del acuífero; así, cuando se conocen los valores para  $\phi_i(t)$ , se pueden calcular los niveles piezométricos usando directamente la expresión (3.1).

### 3.3.3. Solución total transitoria: principio de superposición

Considerando las  $n_a$  acciones exteriores actuando sobre el acuífero, se obtiene la solución transitoria completa para el problema  $w(x, y, t) = w_g(x, y, t) + \sum_{l=1}^{n_a} w_l(x, y, t)$ , donde la solución general,  $w_g$ , ha sido definida previamente en la ecuación (3.7) y:

$$\sum_{l=1}^{n_a} w_l(x, y, t) = \sum_{l=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{\infty} \left[ V_i(x, y) \left( \frac{1 - e^{-\lambda_i t}}{\lambda_i} \right) \int_{\Omega} Q_l(x, y) V_i(x, y) d\Omega \right] \quad (3.15)$$

es la suma de las soluciones particulares correspondientes a cada una de las acciones exteriores actuando sobre el acuífero. Con ella se tienen definidos todos los términos de la solución analítica por el MAV para la EDP de flujo subterráneo.

### 3.4. Cálculo del caudal de intercambio entre el río y el acuífero: el modelo pluricelular englobado

Una variable de gran interés en la simulación de flujo del acuífero en sistemas de uso conjunto es el caudal de interacción entre el río y el acuífero,  $Q_r(t)$  [ $L^3/T$ ]. Suponiendo que el fondo y los bordes laterales del acuífero son impermeables, las únicas salidas de agua se presentan en el contacto con una masa de agua superficial. Se define a  $v(t)$  [ $L^3$ ] como el volumen de agua almacenado en el acuífero por encima de la salida o nivel de referencia cero, y se calcula así:

$$v(t) = \int_{\Omega} S(x, y)w(x, y, t) d\Omega = \int_{\Omega} S(x, y) \left( \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t)V_i(x, y) \right) d\Omega \quad (3.16)$$

donde cada uno de los volúmenes de agua almacenada asociados a cada modo es:

$$v_i(t) = \phi_i(t) \int_{\Omega} S(x, y)V_i(x, y) d\Omega \quad (3.17)$$

Ahora bien, definiendo a  $F_i$  [ $L$ ] como el volumen bajo la superficie de la  $i$ -ésima autofunción, expresado como (Sahuquillo, 1983b; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005):

$$F_i = \int_{\Omega} S(x, y)V_i(x, y) d\Omega \quad (3.18)$$

y escribiendo el volumen de agua  $v_i(t)$ , correspondiente la  $i$ -ésima autofunción,  $V_i(x, y)$ , como  $\phi_i(t)F_i$ , la expresión (3.16), se transforma en:

$$v(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \phi_i(t)F_i \quad (3.19)$$

En el siguiente desarrollo matemático se considera que, para efectos de simulación, es válida la traslación temporal. Por lo tanto, sea  $\tau(t-1, t)$  [ $T$ ] un intervalo temporal en el cual actúan  $n_a$  acciones exteriores sobre el acuífero, cada una de las cuales se denota como  $Q_l(x, y, \tau)$ , con  $l = 1, \dots, n_a$ . Se considera que la duración de cada intervalo  $\tau(t-1, t)$  es constante y se denota dicha duración como  $\Delta t$  [ $T$ ]. De la misma forma, se asume que las magnitudes de las acciones exteriores varían en el tiempo, pero son constantes durante la duración de cada intervalo. Entonces, sea la  $l$ -ésima acción exterior,  $Q_l(x, y, \tau)$  [ $L^3/T$ ], que actúa en un intervalo genérico  $\tau(t-1, t)$  y  $v(t-1)$  [ $L^3$ ] el volumen de agua acumulado en el acuífero al final del intervalo anterior  $\tau(t-2, t-1)$ . Combinando las ecuaciones (3.13) y (3.19) y usando la traslación temporal, el volumen de agua almacenado en el acuífero por encima del nivel de referencia al final del intervalo  $\tau(t-1, t)$  se expresa como:

$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t-1)e^{-\lambda_i \Delta t} + \sum_{i=1}^{\infty} F_i \left( \frac{1 - e^{-\lambda_i \Delta t}}{\lambda_i} \right) \int_{\Omega} Q_l(x, y, \tau)V_i(x, y)d\Omega \quad (3.20)$$

Por otro lado, la  $l$ -ésima acción exterior integrada sobre el dominio espacial del acuífero se define de la siguiente forma:

$$Q_l(\tau) = \int_{\Omega} Q_l(x, y, \tau) d\Omega$$

que se reemplaza en el sumando derecho de (3.20) para definir la variable adimensional:

$$b_{l_i} = \frac{F_i}{Q_l(\tau)} \int_{\Omega} Q_l(x, y, \tau) V_i(x, y) d\Omega \quad (3.21)$$

donde  $b_{l_i}$  son los factores o coeficientes de reparto que representan el porcentaje de la  $l$ -ésima acción exterior total actuando sobre el acuífero. Consecuentemente, por conservación de la masa, estos coeficientes tienen la propiedad de que (Sahuquillo, 1983b):

$$\sum_{i=0}^{\infty} b_{l_i} = 1$$

es decir, para cada acción exterior actuando, existe un conjunto infinito de factores adimensionales cuya sumatoria es unitaria que dependen de la geometría del acuífero y de la configuración espacial de cada excitación.

A partir de un esquema apropiado de tratamiento de los factores de reparto y de la ecuación de continuidad, se puede lograr la reducción efectiva del tamaño de la solución analítica, como se presenta a continuación. Si se multiplica en el numerador y el denominador del segundo sumando de la derecha en (3.20) por las acciones integradas  $Q^l(\tau)$  y se reemplaza el coeficiente de reparto de la ecuación (3.21), el volumen total de agua almacenada en el acuífero se expresa como (Sahuquillo, 1983b):

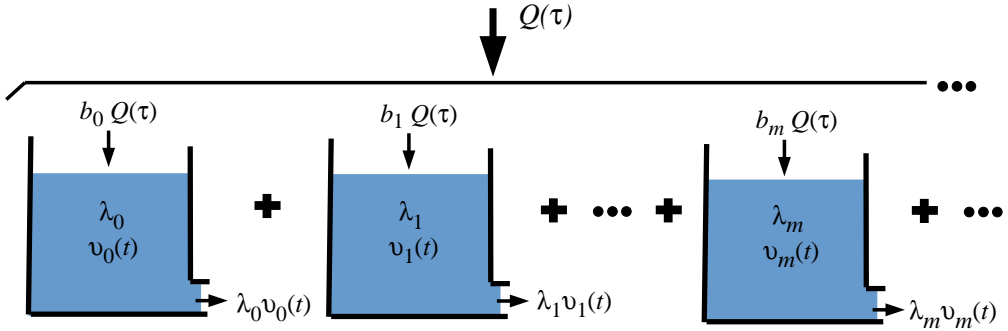
$$v(t) = \sum_{i=1}^{\infty} v_i(t-1)e^{-\lambda_i \Delta t} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{l_i} \left( \frac{1 - e^{-\lambda_i \Delta t}}{\lambda_i} \right) Q_l(\tau) \quad (3.22)$$

Igualmente, asumiendo que el nivel de referencia es el de la conexión acuífero-masa superficial, se puede establecer una analogía entre la ecuación (3.22) y la correspondiente al modelo unicelular, expresión (2.6). Considerando la ecuación de continuidad, el cambio de volumen almacenado en el acuífero será la diferencia entre la acción integrada  $Q$  y el efecto  $Q_r$  sobre el caudal del río, es decir,  $Q_r = Q - dV/dt$ . Por lo tanto, derivando (3.22), por conservación de masa, la ecuación de estado para la relación río-acuífero se expresa como (Sahuquillo, 1983b, 1985, 1992; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005):

$$Q_r(t) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{r_i}(t-1)e^{-\lambda_i \Delta t} + \sum_{i=1}^{\infty} b_{l_i} (1 - e^{-\lambda_i \Delta t}) Q_l(\tau) \quad (3.23)$$

que corresponde a la solución analítica general del problema de la detracción o aumento del caudal de un río en respuesta a un bombeo o recarga en un acuífero conectado con éste. Sea un depósito virtual  $i$ , su caudal descargado al río se escribe en función de su volumen acumulado como  $Q_{r_i}(t) = \lambda_i v_i(t)$  que equivale a  $v_i(t) = \lambda_i^{-1} Q_{r_i}(t)$ . Con ello se pone de manifiesto que la ecuación de estado del volumen de agua almacenado en el acuífero corresponde a una suma infinita de modelos unicelulares, cada uno de los cuales tiene asociado un parámetro de descarga dado por el autovalor correspondiente y un parámetro de recarga dado por el coeficiente de reparto asociado. Dicha formulación matemática ha sido denominada MPE (Sahuquillo, 1983b), y establece que para calcular la relación río-acuífero se aplica el mismo proceso de cálculo que para un modelo unicelular, pero aumentando el número de depósitos mediante los cuales se representa al acuífero.

En consecuencia, la solución para el caudal de intercambio entre el río y el acuífero se concibe como la respuesta de un conjunto infinito de depósitos virtuales lineales entre los que se reparten las acciones exteriores, como se presenta en el esquema de la figura 3.1. Dichos depósitos son meramente conceptuales y no corresponden a porciones físicas



**Figura 3.1.** Infinitos depósitos virtuales que representan la solución para la relación río-acuífero mediante un MPE. Adaptada de Sahuquillo (1983b).

del acuífero, contrario a lo que sucede cuando se discretiza el dominio espacial de un acuífero utilizando DF o EF. En otras palabras, estas celdas virtuales sólo tienen existencia conceptual estando englobadas o embebidas en la solución analítica resultante (Sahuquillo, 1983b; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005; Sahuquillo y Cassiraga, 2010c).

En aplicaciones prácticas usando un MPE, el número de términos a considerar en (3.23) puede limitarse como consecuencia de dos cosas: (i) los autovalores son números reales, positivos y crecientes, entonces la influencia de los términos exponenciales asociados en la solución decrecen con el tiempo y llegan a ser despreciables después de un cierto tiempo y (ii) los coeficientes de reparto son sucesiones decrecientes que tienden a cero mientras el índice modal aumenta. Ahora, utilizando el principio de superposición para considerar explícitamente los efectos de todas las  $n_a$  acciones exteriores actuando sobre el acuífero, se obtiene la siguiente ecuación de estado para el caudal extraído o aportado (Pulido-Velázquez, 2005):

$$Q_r(t) = \sum_{i=1}^{\infty} Q_{r_i}(t-1)e^{-\lambda_i \Delta t} + \sum_{l=1}^{n_a} \sum_{i=1}^{\infty} b_{l_i} (1 - e^{-\lambda_i \Delta t}) Q_l(\tau) \quad (3.24)$$

y el modelo analítico de flujo para la relación río-acuífero se reduce efectivamente como sigue. Primero, se ordenan los autovalores de forma creciente, se desprecian los términos para los que  $i > m$ . Consecuentemente, se sugiere considerar la serie de los  $m$  primeros términos de (3.23), correspondientes a los  $\lambda_i$  más pequeños, expresada como:

$$\hat{Q}_r(t) = \sum_{i=1}^{m-1} Q_{r_i}(t-1)e^{-\lambda_i \Delta t} + \sum_{l=1}^{n_a} \left\{ \sum_{i=1}^{m-1} b_{l_i} (1 - e^{-\lambda_i \Delta t}) + \left( 1 - \sum_{i=1}^{m-1} b_{l_i} \right) (1 - e^{-\lambda_m \Delta t}) \right\} Q_l(\tau) \quad (3.25)$$

expresión que no modifica la recarga o descarga total, o la distribución entre las celdas, excepto la proporción correspondiente a la última (celda  $p = m + 1$ ), la cual acumula el efecto no considerado de los modos tales que  $i \geq p$  con el fin de preservar la ecuación de continuidad agregada en el acuífero a lo largo de todo el horizonte de simulación.

Finalmente, el error de aproximación,  $err(m)$ , se define como la diferencia entre la solución exacta, ecuación (3.23), y la solución reducida, dada por la expresión (3.25):

$$err(m) = Q_r(t) - \hat{Q}_r(t) = \sum_{i=m}^{\infty} Q_{r_i}(t-1)e^{-\lambda_i \Delta t} + \sum_{l=1}^{n_a} \left\{ \sum_{i=m}^{\infty} e^{-\lambda_i \Delta t} + \left( 1 - \sum_{i=1}^{m-1} b_{l_i} \right) e^{-\lambda_m \Delta t} \right\} Q_l(\tau) \quad (3.26)$$

así, una vez fijado el error admisible,  $m$  se determina iterativamente. En publicaciones previas (Pulido-Velázquez *et al.*, 2005) se ha mostrado que, para acuíferos con geometría sencilla, el número de celdas virtuales a considerar puede ser de unas pocas, casi siempre inferior a cinco. Dicha configuración es efectiva en los casos en los que es necesario hacer una determinación precisa de la influencia de las acciones en el acuífero sobre los caudales superficiales para periodos de simulación con intervalos temporales de un mes, que son los habituales en modelos de simulación para la planificación de recursos hidráulicos.

### 3.5. Algunas soluciones analíticas de interés en la modelación de sistemas de recursos hídricos

Sea un acuífero rectangular, homogéneo e isótropo conectado con un río, en el que  $T$  es la transmisividad,  $S$  es el coeficiente de almacenamiento,  $L$  es la distancia del río al borde impermeable y  $W$  es la distancia entre las dos paredes impermeables perpendiculares al río. Para los casos en que se considere una acción puntual, ésta se localiza a una distancia  $x_p$  del borde impermeable del acuífero paralelo al río. Los esquemas básicos de la configuración geométrica del acuífero, la distribución de las acciones exteriores y las consideraciones de conexión de los casos considerados se presentan en las figuras 3.2 y 3.3, para acción puntual y distribuida, respectivamente. A continuación, se analizan las situaciones de acuífero perfecta y parcialmente conectado con un río, sobre el cual actúa una acción puntual o una distribuida. En los cuatro casos considerados se determinan los coeficientes de reparto  $b_i$ , las autofunciones bidimensionales  $V_{ij}(x, y)$  y los autovalores  $\lambda_i$ .

#### 3.5.1. Acuífero perfectamente conectado y acción distribuida

Se considera una acción distribuida uniformemente, por ejemplo la recarga por infiltración de lluvia o los retornos de riego, actuando sobre toda el área del acuífero presentado en la figura 3.2, gráficos (i) y (ii). Puede demostrarse que, para este caso, las autofunciones se calculan usando la siguiente expresión (Sahuquillo y Cassiraga, 2010d):

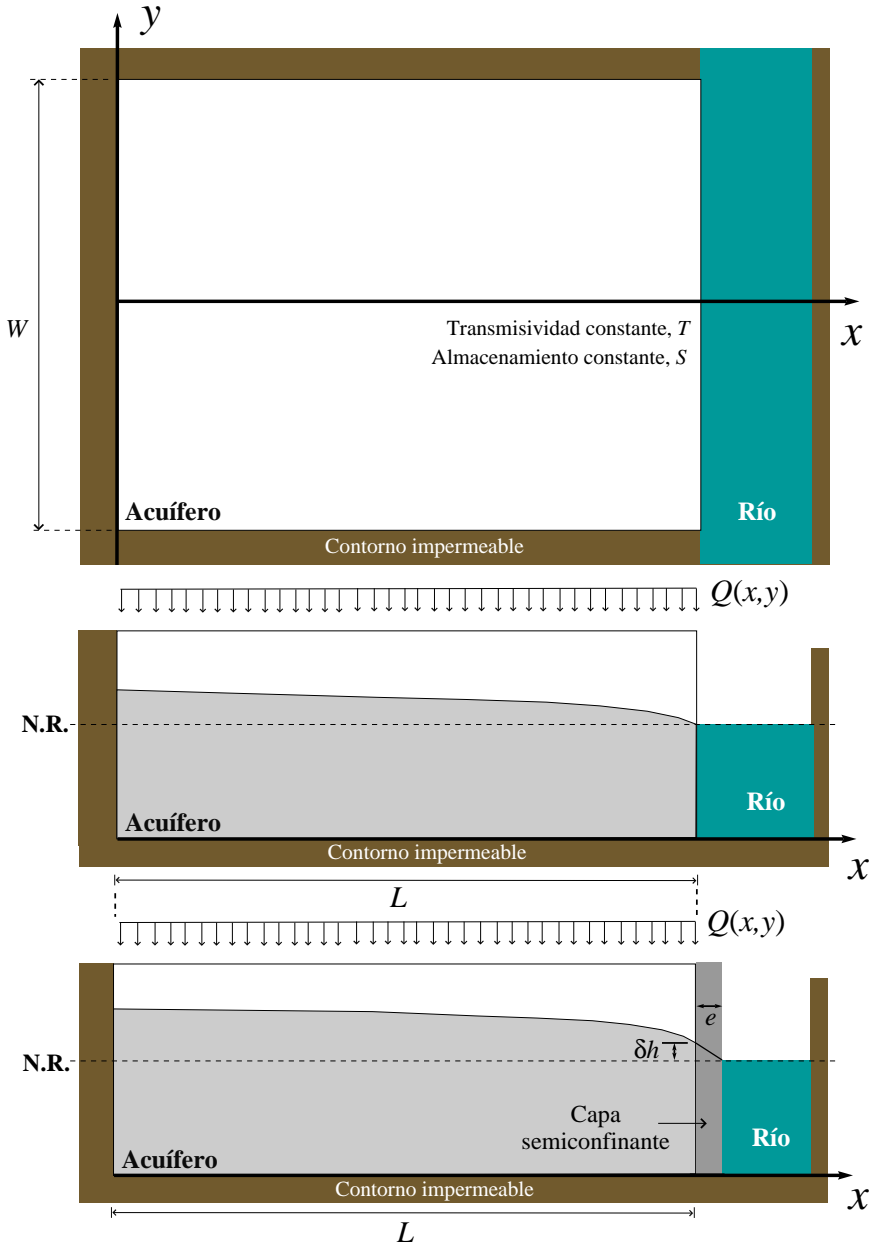
$$V_{i,j}(x, y) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{k}} \cos \left[ \frac{(2i-1)\pi}{2L} x \right] & i = 1, 2, \dots; j = 0 \\ \frac{2}{\sqrt{k}} \cos \left[ \frac{(2i-1)\pi}{2L} x \right] \cos \left[ \frac{j\pi}{W} y \right] & i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.27)$$

donde  $k = SLW$ , mientras que los autovalores o coeficientes de descarga se calculan como:

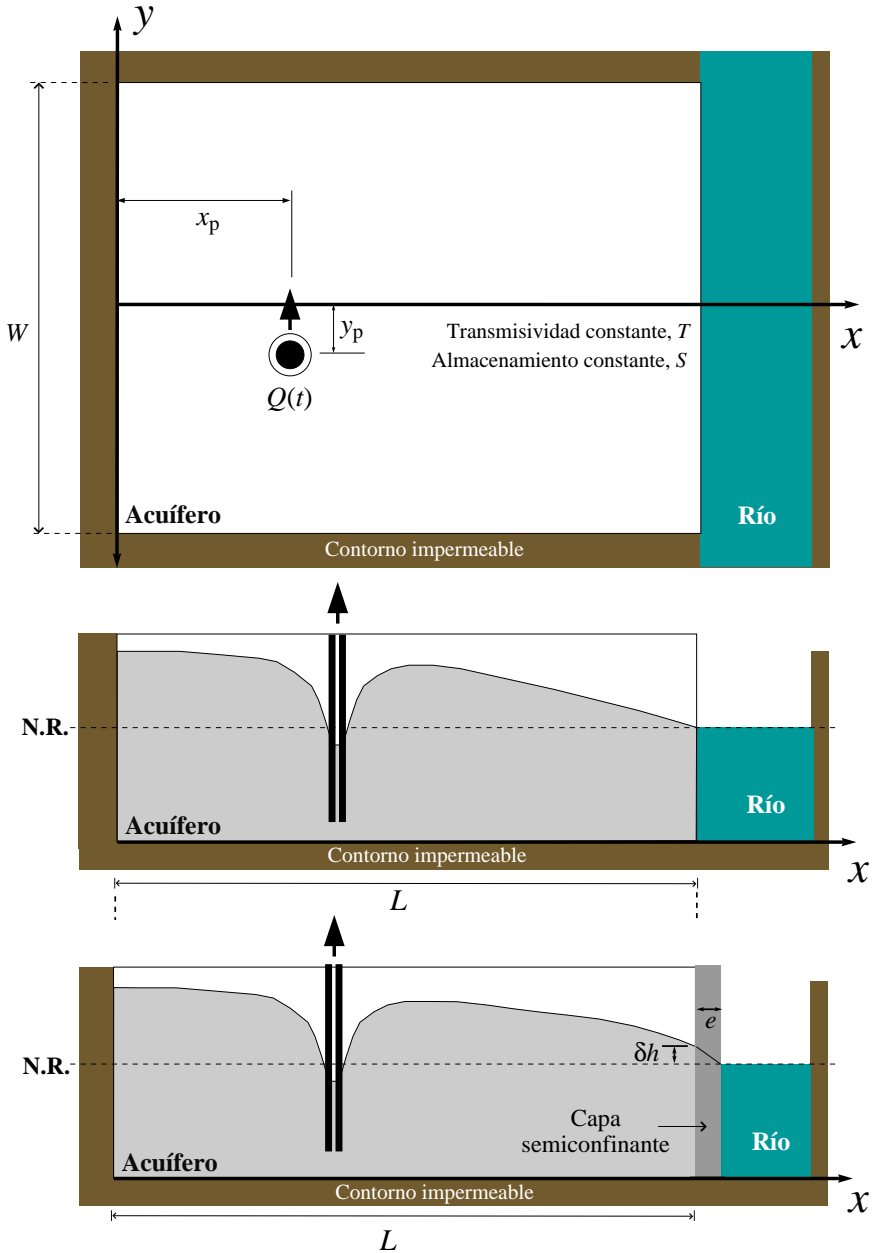
$$\lambda_i = (2i - 1)^2 \lambda \quad \text{siendo } \lambda = \frac{\pi^2 T}{4SL^2} \quad (3.28)$$

para  $i = 1, 2, \dots, \infty$ . De (3.27), usando la ecuación (3.21), los coeficientes de reparto,  $b_i$ , vienen dados por la expresión:

$$b_i = \frac{8}{\pi^2 (2i - 1)^2} \quad (3.29)$$



**Figura 3.2.** Acuífero rectangular conectado con un río, sometido a acción exterior distribuida uniformemente. Se presentan esquemas de: (i) la vista en planta del acuífero, arriba; (ii) el perfil en  $y = 0$  para caso de río completamente penetrante y perfectamente conectado, centro; (iii) el perfil en  $y = 0$  para caso de río completamente penetrante e imperfectamente conectado, abajo.



**Figura 3.3.** Acuífero rectangular conectado con un río, sometido a acción exterior puntual concentrada. Se presenta el esquema de: (i) vista en planta del acuífero, arriba; (ii) el perfil en  $y = y_p$  para caso de río completamente penetrante y perfectamente conectado, centro; (iii) el perfil en  $y = y_p$  para caso de río completamente penetrante e imperfectamente conectado, abajo.

De la ecuación (3.29) se deduce que, para un acuífero rectangular, los coeficientes de reparto son diferentes de cero únicamente cuando  $j = 0$ . En consecuencia, según la expresión (3.23), el caudal de descarga generado por un pulso instantáneo de recarga  $R$ , para un tiempo  $t$  posterior a dicho evento se escribe como:

$$Q_r(t) = R \left( 1 - \sum_{i=1}^{\infty} \frac{8}{\pi^2(2i-1)^2} e^{-\frac{(2i-1)^2 \pi^2 T}{4SL^2} t} \right) \quad (3.30)$$

y corresponde a la solución presentada por Rorabaugh (1964, ecuación (5), página 435). Ahora bien, la solución para la descarga por unidad de longitud producida por un incremento instantáneo del nivel piezométrico en un acuífero unidimensional conectado perfectamente con un río completamente penetrante es (Rorabaugh, 1964):

$$q_r(t) = \frac{2Th_0}{L} \sum_{m=0}^{\infty} e^{-\lambda_m t}, \quad \lambda_m = (2m-1)^2 \frac{\pi^2 T}{4L^2 S} \quad (3.31)$$

donde  $q$  [ $L^2/T$ ] es la descarga al río por unidad de longitud,  $T$  y  $S$  son la transmisividad y el coeficiente de almacenamiento del acuífero, respectivamente,  $L$  es la distancia del río al límite impermeable,  $t$  es el tiempo posterior a la recarga y  $h_0$  es el aumento de la altura piezométrica como consecuencia del evento de recarga. Además,  $\lambda_m$  es el parámetro de descarga asociado con la  $m$ -ésima componente de la sumatoria en la ecuación (3.31) y representa la tasa a la cual cada componente de la solución descarga agua hacia el río, siendo idénticos a los presentados en (3.28), correspondientes a la solución por MPE. Rorabaugh (1964) propone que si los valores de  $\lambda_m$  son elevados, las funciones exponenciales decrecientes tienden a cero rápidamente mientras  $t$  aumenta. Entonces, se considera que cuando ha transcurrido cierto intervalo de tiempo crítico  $t_c$  [T] desde el último episodio de recarga sobre el acuífero, únicamente la primera componente de la sumatoria en (3.31) es significativa. De esto se deduce que la expresión (3.31) queda representada mediante una simple ecuación de decaimiento exponencial, análoga a la presentada por Maillet (1905). Rorabaugh y Simmons (1966) proponen una expresión para  $t_c$ , dada por:

$$t_c = \frac{0.2 L^2 S}{T} \quad (3.32)$$

Dado un valor de  $t_c$ , Rorabaugh y Simmons (1966) agrupan  $T$ ,  $S$  y  $L$  en una variable denominada índice de agotamiento,  $K_{RI}$  [T], la cual caracteriza la descarga del acuífero, así:

$$K_{RI} = \frac{0.933 L^2 S}{T} \quad (3.33)$$

donde  $K_{RI}$  es el tiempo para el cual el caudal drenado del acuífero disminuye a un décimo y se estima como el inverso de la pendiente del logaritmo del hidrograma para un período de agotamiento (Rutledge, 1993). Daniel (1976) propone utilizar un acuífero rectangular equivalente con los valores  $S$  y  $T$  y un ancho  $L$ , que sería la distancia media desde el cauce al borde del acuífero, el cual se estima de propiedades geomorfológicas de la cuenca como:

$$L = \frac{A}{L_p} \quad (3.34)$$

donde  $A$  [ $L^2$ ] es el área de la cuenca que drena al acuífero y  $L_p$  [L] es la longitud de los cauces perennes en la red de drenaje de la cuenca. La ecuación (3.34) implica que el agua subterránea descarga uniformemente a todos los canales del río y que las líneas de flujo son



perpendiculares al cauce. Esta consideración es violada en la mayoría de las condiciones de flujo, inclusive para casos de geometría sencilla como los presentados por Rutledge (2000).

De forma alternativa, Halford y Mayer (2000) proponen un método empírico para la estimación de  $L$ , basado en la implementación computacional de modelos de flujo y de transporte advectivo de seguimiento de partículas para el acuífero en estudio. Dicho procedimiento consiste en resolver el problema de flujo, para, posteriormente, trazar las trayectorias de las líneas de corriente, usando los códigos MODFLOW (McDonald y Harbaugh, 1988) y MODPATH (Pollock, 1994), respectivamente. Se asume que para la trayectoria de una partícula es válida la ecuación (3.31), lo cual lleva implícito la suposición de flujo unidimensional en la dirección del vector tangente a cada punto de la trayectoria. Con base en lo anterior, se asume que la distancia  $L$  corresponde a la longitud de la línea de corriente para una partícula lanzada desde el borde impermeable del acuífero. Halford y Mayer proponen que una longitud promedio, para muchas partículas lanzadas desde los bordes de no flujo, es un buen estimador de las condiciones medias del acuífero en lo que se refiere a la distancia al borde impermeable del modelo unidimensional, con lo cual se estima un índice de agotamiento promedio en el acuífero. Esto es análogo a establecer un ancho equivalente que representa las condiciones de flujo en un acuífero de geometría irregular.

### 3.5.2. Acuífero perfectamente conectado y acción puntual

Se considera una acción puntual actuando en una localización ubicada en las coordenadas  $(x_p, y_p)$  en el dominio del acuífero, como se presenta en la figura 3.3, gráficos (i) y (ii). Dado que las autofunciones y los autovalores del problema de flujo dependen exclusivamente de la configuración geométrica del acuífero y sus condiciones de contorno, éstos se calculan directamente aplicando las ecuaciones (3.27) y (3.28). En cambio, la expresión para calcular los coeficientes de reparto,  $b_i$ , es diferente al caso anterior y viene dada como (Sahuquillo y Cassiraga, 2010d):

$$b_i = \frac{4(-1)^i}{\pi(2i-1)} \cos \left[ \frac{(2i-1)\pi x_p}{2L} \right] \quad (3.35)$$

donde  $x_p$  [L] es la distancia del pozo al límite impermeable paralelo al río. Pulido-Velázquez *et al.* (2005) presentan un análisis respecto al número de depósitos virtuales necesarios para obtener un error mínimo en la estimación del caudal de descarga usando la ecuación (3.26). En dicho trabajo se concluye que, para un error relativo respecto al bombeo del 1%, es necesario usar más depósitos virtuales a medida que la acción exterior se acerca al río.

### 3.5.3. Acuífero parcialmente conectado y acción distribuida

En este caso, la conexión del río con el acuífero es parcial debido a la existencia de una capa semipermeable que dificulta las transferencias de flujo entre ellos. En la figura 3.2, gráficos (i) y (iii), se observa un esquema de esta situación. La conexión entre el río y el acuífero se expresa mediante una condición de contorno de tipo Cauchy, como se presentó en el apartado 2.6.2. Las autofunciones correspondientes a este problema son:

$$V_{i,j}(x,y) = \begin{cases} \sqrt{2k_i} \cos \left[ \frac{\rho_i \pi}{2L} x \right] & i = 1, 2, \dots; j = 0 \\ \sqrt{4k_i} \cos \left[ \frac{\rho_i \pi}{2L} x \right] \cos \left[ \frac{j\pi}{W} y \right] & i = 1, 2, \dots; j = 1, 2, \dots \end{cases} \quad (3.36)$$

donde  $k_i$ , depende de las propiedades del acuífero, su geometría e interacción con el río, así:

$$k_i = \frac{\rho_i \pi}{S^2 L W [\rho_i \pi + \text{sen}(\rho_i \pi)]} \quad i = 1, 2, \dots$$

y los autovalores obtenidos por la resolución el PRSL asociado son:

$$\lambda_i = \rho_i^2 \lambda \quad \text{siendo } \lambda = \frac{\pi^2 T}{4 S L^2} \quad (3.37)$$

en la que se observa que la variable  $\lambda$  es el primer autovalor en el caso de conexión perfecta, dado por la expresión (3.28). Nuevamente, de la ecuación (3.27) y usando los resultados en (3.21), los valores de los coeficientes de reparto tienen la siguiente forma:

$$b_i = \frac{8 \text{sen}^2(\pi \rho_i / 2)}{\pi \rho_i [\pi \rho_i + \text{sen}(\pi \rho_i)]} \quad (3.38)$$

que son diferentes de cero únicamente cuando  $j = 0$ . Igualmente, para conexión parcial río-acuífero, tanto los factores de reparto como los autovalores dependen del parámetro de conexión hidráulica  $\omega$ , definido previamente en (2.17), mediante el coeficiente  $\rho$ , cuyos valores son las infinitas soluciones de la siguiente recurrencia trigonométrica:

$$\frac{\pi \rho}{2} \tan\left(\frac{\pi \rho}{2}\right) = \omega \quad \text{con} \quad \omega = \frac{F_r L}{T} \quad (3.39)$$

donde todas las variables han sido definidas previamente. De la ecuación (3.37) se deduce que  $\rho_i^2$  representa la relación entre los  $i$ -ésimos autovalores para conexión perfecta e imperfecta en función de las características hidráulicas del acuífero y del grado de su conexión con el río.

$\omega$	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
0.001	$1.0000 \times 10^0$	$2.1000 \times 10^{-8}$	$1.3000 \times 10^{-9}$	$2.5000 \times 10^{-10}$	$8.0000 \times 10^{-11}$
0.01	$1.0000 \times 10^0$	$2.0000 \times 10^{-6}$	$1.3000 \times 10^{-7}$	$2.5000 \times 10^{-8}$	$8.0000 \times 10^{-9}$
0.1	$9.9980 \times 10^{-1}$	$2.0000 \times 10^{-4}$	$1.3000 \times 10^{-5}$	$2.5000 \times 10^{-6}$	$8.0000 \times 10^{-7}$
1	$9.8610 \times 10^{-1}$	$1.2400 \times 10^{-2}$	$1.1000 \times 10^{-3}$	$2.0000 \times 10^{-4}$	$7.7000 \times 10^{-5}$
10	$8.7430 \times 10^{-1}$	$8.3900 \times 10^{-2}$	$2.3600 \times 10^{-2}$	$9.0000 \times 10^{-3}$	$4.0000 \times 10^{-3}$
100	$8.1850 \times 10^{-1}$	$9.0800 \times 10^{-2}$	$3.2600 \times 10^{-2}$	$1.6500 \times 10^{-2}$	$9.9000 \times 10^{-3}$
1000	$8.1140 \times 10^{-1}$	$9.0200 \times 10^{-2}$	$3.2500 \times 10^{-2}$	$1.6600 \times 10^{-2}$	$1.0000 \times 10^{-2}$

**Tabla 3.1.** Valores para  $b_i$  para diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero en función del parámetro  $\omega$  y acción distribuida. Tomada de Sahuquillo (1983b).

La variación de los factores de reparto y el parámetro  $\rho_i^2$ , para cinco depósitos virtuales, en función del parámetro  $\omega$ , se presentan en la tablas 3.1 y 3.2, respectivamente. En la tabla 3.1 se observa que el factor de reparto del primer depósito virtual embebido se vuelve menor a medida que la conexión entre el río y el acuífero aumenta, lo cual implica que la influencia de los demás tanques en la solución total se vuelven mayor. En consecuencia, para casos perfectamente conectados no es conveniente representar la curva de agotamiento del hidrograma de descarga empleando una reducción empírica mediante la hipótesis de Maillet, siendo más conveniente usar (3.30) considerando varios términos, cuya selección para capturar adecuadamente el comportamiento de la descarga al río depende de los autovalores del sistema y del intervalo temporal utilizado para la simulación. De la tabla 3.2 se observa que, para valores elevados de  $\omega$ , se considera que el río está bien conectado

con el acuífero y los valores de  $\rho_i^2$  son muy próximos a los números impares al cuadrado (1, 9, 25, 49, ...), que son los exponentes de la ecuación (3.31). Por el contrario, cuando el acuífero está poco conectado con el río el valor de  $\rho_1^2$  para el primer depósito es muy inferior a la unidad, lo que derivaría un valor demasiado pequeño de la difusividad ( $T/S$ ) al aplicarse el método del desplazamiento de la curva de agotamiento.

$\omega$		$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$	$i = 4$	$i = 5$
0.001	$\rho_i^2$	0.0004	4.0008	16.0008	36.0008	64.0008
	$\chi_i$	1.0002	-0.0002	0.0001	0.0000	0.0000
0.01	$\rho_i^2$	0.0040	4.0081	16.0081	36.0081	64.0081
	$\chi_i$	1.0017	-0.0002	0.0005	-0.0002	-0.0001
0.1	$\rho_i^2$	0.0392	4.0806	16.0809	36.0810	64.0810
	$\chi_i$	1.0161	-0.0197	0.0050	-0.0022	0.0013
1	$\rho_i^2$	0.3000	4.7560	16.7945	36.8032	64.8064
	$\chi_i$	1.1191	-0.1517	0.0466	-0.0217	0.0124
10	$\rho_i^2$	0.8275	7.5139	21.1743	42.1680	70.7687
	$\chi_i$	1.2620	-0.3934	0.2104	-0.1309	0.0881
100	$\rho_i^2$	0.9803	8.8228	24.5084	48.0382	79.4141
	$\chi_i$	1.2731	-0.4240	0.2539	-0.1808	0.1401
1000	$\rho_i^2$	0.9980	8.9820	24.9501	48.9022	80.8383
	$\chi_i$	1.2732	-0.42424	0.2546	-0.1819	0.1415

**Tabla 3.2.** Valores para  $\rho_i^2$  y  $\chi_i = b_i / \cos[\rho_i \pi x_p / (2L)]$  para diferente condiciones de conectividad entre el río y el acuífero en función de  $\omega$ . Tomada de Sahuquillo (1983b).

### 3.5.4. Acuífero parcialmente conectado y acción puntual

En la figura 3.3, gráficos (i) y (iii), se presentan esquemas de la configuración del acuífero rectangular parcialmente conectado con el río. En ellos,  $e$  es el espesor de la capa semipermeable,  $K$  es su conductividad hidráulica, y  $B$  es el espesor saturado del acuífero. Este caso, para acuífero finito, es el mismo que resolvió Hantush (1965) para un acuífero semi-infinito. Los autovalores y las autofunciones para conexión parcial y acción puntual son idénticos a los obtenidos para la acción exterior distribuida, según (3.36) y (3.37), dado que éstos no dependen de las acciones exteriores actuando sobre el acuífero. Por el contrario, la expresión para los coeficientes de reparto es diferente y viene dada como:

$$b_i = \frac{4 \cos(\pi \rho_i x_p / 2L) \operatorname{sen}(\pi \rho_i)}{\pi \rho_i [1 + (1/\pi \rho_i) \operatorname{sen}(\pi \rho_i)]} \tag{3.40}$$

donde todas la variables han sido definidas previamente. La variación del coeficiente de reparto en función del parámetro de conexión  $\omega$  se muestra en la tabla 3.2 para los cinco primeros depósitos virtuales. En ésta se observa que, de forma análoga a la solución para acción distribuida, a medida que la conexión entre el río y el acuífero aumenta, el valor del factor de reparto del primer depósito virtual se aleja de uno. Lo anterior indica que se debe usar una mayor cantidad de términos en la sumatoria para lograr una representación más adecuada de la detracción del río al acuífero. Al respecto, Pulido-Velázquez *et al.* (2005) comparan las detracciones al río causadas por un bombeo puntual constante, localizado en diferentes sitios del acuífero, calculadas mediante algunas soluciones analíticas existentes (Glover y Balmer, 1945; Hantush, 1965; Hunt, 1999) con las obtenidas usando el MPE. La bondad de las soluciones analíticas se calcula con respecto a los resultados obtenidos en un modelo numérico por DF de referencia. Los resultados obtenidos por Pulido-Velázquez *et*

al. muestran que el MPE obtiene mejores resultados que cualquier otra solución analítica considerada, tanto para conexión perfecta como para conexión parcial, a un bajo costo computacional puesto que, en general, se necesitan menos de cinco depósitos virtuales para obtener un error casi nulo, cuando se consideran intervalos temporales de un mes, que son los habituales en modelos de simulación para la planificación de recursos hídricos.

### 3.6. Caso de referencia

Se considera un acuífero con la configuración mostrada en las figuras 3.2 y 3.3. Su transmisividad es  $T = 500 \text{ m}^2/\text{d}$ , su almacenamiento específico es  $S = 0.1$ , la distancia del borde impermeable al río es  $L = 5000 \text{ m}$  y el ancho entre paredes impermeables es  $W = 7500 \text{ m}$ . Se examina el MPE para dos tipos de acciones exteriores: (i) una recarga distribuida uniforme sobre el dominio espacial del acuífero, variable en el tiempo actuando durante 1000 días y (ii) un bombeo puntual de extracción constante de  $Q = 2000 \text{ m}^3/\text{d}$  actuando durante 950 días en el centro del acuífero. En ambos casos, se ha considerado conexión parcial entre el río y el acuífero con parámetros  $B = 100 \text{ m}$ ,  $e = 0.2 \text{ m}$  y seis diferentes conductividades hidráulicas de lecho del río,  $\hat{K}$ . Para analizar la bondad de las simulaciones mediante los MPE planteados, se han implementado seis modelos numéricos en DF con configuraciones idénticas a las previamente comentadas, cada uno formado por una malla cuadrada de  $50 \times 75 = 3750$  nodos activos y 75 nodos de conexión río-acuífero, con lo cual el número total de nodos es  $n = 3825$ , asignando un tamaño de bloque de 100 m. La conexión río-acuífero ha sido modelada mediante una condición de contorno de tipo Cauchy, donde el grado de interacción entre acuífero y río viene expresado en función de una conductancia dada, asumiendo que dicho río penetra completamente al acuífero. Los valores de  $\hat{K}$  para los MPE se han seleccionado para representar una variación logarítmica de la conductancia del río,  $C \text{ [L}^2/\text{T]}$ , según su definición para modelos por DF (McDonald y Harbaugh, 1988):

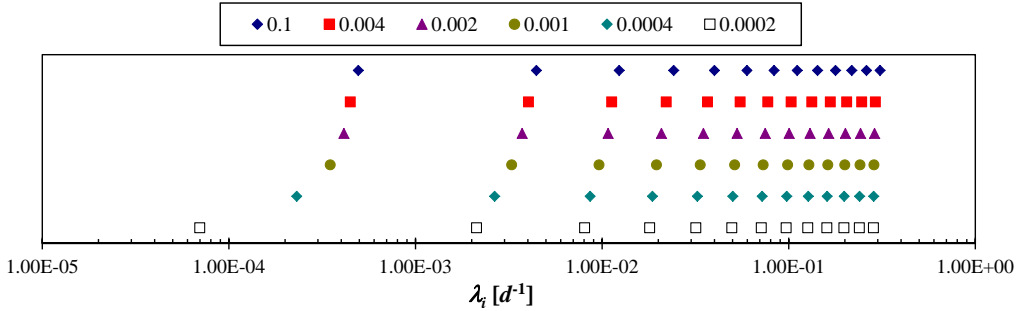
$$C = \frac{\hat{K} \Delta x \Delta y}{e} \Rightarrow \hat{K} = \frac{C e}{\Delta x \Delta y} \quad (3.41)$$

donde  $\Delta x = B$  y  $\Delta y = 100 \text{ m}$ . Para efectos prácticos, la conductancia varía entre  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ , obteniéndose conductividades hidráulicas de lecho con valores entre  $0.1 \text{ m/d}$  y  $0.0002 \text{ m/d}$ , las cuales cubren diferentes grados de conexión entre el río y el acuífero, comenzando por una casi perfecta y finalizando con una prácticamente nula.

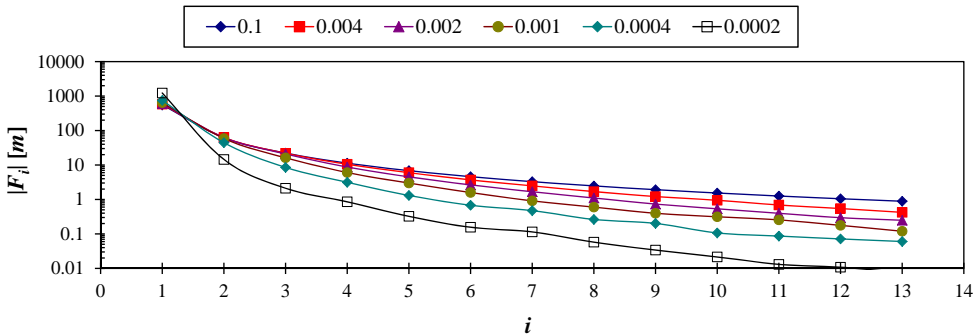
#### 3.6.1. Autovalores, autofunciones y factores de reparto

Para realizar una reducción eficaz de un modelo de flujo por el MAV es necesario analizar en detalle los seis conjuntos de autovalores, autofunciones y factores de reparto, obtenidos al resolver el PRSL asociado a cada conductividad hidráulica considerada. Inicialmente, en la figura 3.4 se presentan los primeros trece autovalores, ordenados de forma ascendente, calculados usando la ecuación (3.37) para todas las conductividades de lecho de río asignadas a los MPE planteados, que corresponden a valores de conductancias de  $5000, 200, 100, 50, 20$  y  $5 \text{ m}^2/\text{d}$  en los modelos numéricos por DF análogos. En dicha figura se observa que la amplitud espectral de los modelos, de acuerdo con la solución del PRSL correspondiente, aumenta a medida que la conexión río-acuífero disminuye, básicamente por que los primeros cinco autovalores disminuyen dramáticamente, de acuerdo con la relación establecida por el factor  $\rho_1^2$ , primera raíz de la recurrencia (3.38). Por ejemplo, considerando los primeros 25 autovalores para la conexión perfecta se obtiene una amplitud espectral  $\lambda_{25}/\lambda_1 = 2209$ , mientras que para una conexión parcial con conductividad

hidráulica del lecho de  $\hat{K} = 0.0004$  m/d se obtiene que  $\lambda_{25}/\lambda_1 = 4525$ , más del doble de la anteriormente mencionada. De la misma forma, puede afirmarse que la relación río-acuífero que corresponde a una conductancia de 5000 m<sup>2</sup>/d en la configuración geométrica rectangular planteada es prácticamente perfecta debido a que del parámetro de conexión alcanza un valor de  $\omega = 2.5 \times 10^6$ , es decir, infinito a efectos prácticos.



**Figura 3.4.** Distribución de los primeros trece autovalores en orden ascendente para seis diferentes conductividades hidráulica del lecho del río,  $\hat{K}$ , correspondientes al acuífero rectangular de referencia estudiado por el MAV.



**Figura 3.5.** Distribución de los primeros trece valores absolutos de los volúmenes bajo las autofunciones correspondientes para el acuífero rectangular estudiado para diferentes valores de conductividad hidráulica del lecho del río,  $\hat{K}$ .

Los valores absolutos del volumen por debajo de las autofunciones,  $|F_i|$ , para las seis conductividades asociadas a los MPE, se presentan en la figura 3.5, donde el eje de las ordenadas se encuentra en escala logarítmica. Usando las ecuaciones (3.18), (3.36) y (3.37), puede deducirse que, para todos los casos tratados en este capítulo,  $F_i$  se expresa como:

$$F_i = \sqrt{\frac{8LSW}{\pi\rho_i(\pi\rho_i + \text{sen}[\pi\rho_i])}} \text{sen} \left[ \frac{\pi\rho_i}{2} \right] \quad i = 1, 2, 3, \dots$$

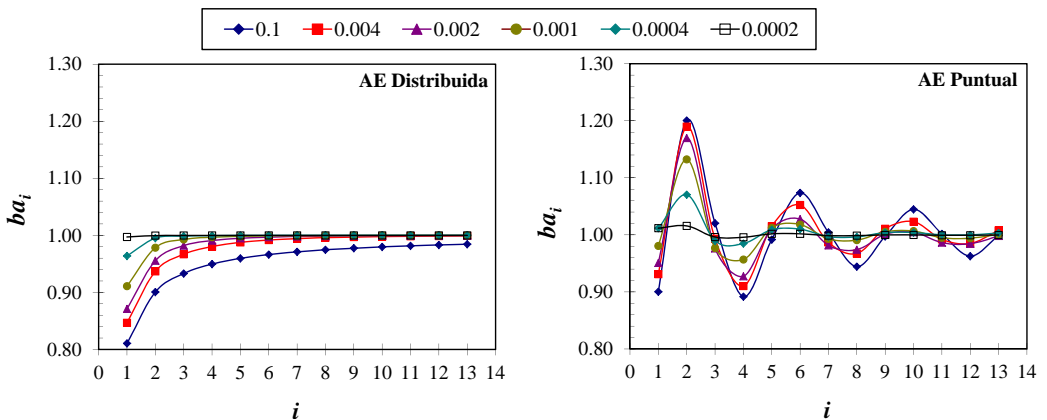
donde todas las variables han sido previamente descritas. Los valores de  $F_i$  tienen signos positivo y negativo alternados para cada modo; además, los resultados presentados en la figura 3.5 muestran que, para todas las  $\hat{K}$  consideradas, el volumen bajo la primera autofunción,  $F_1(x, y)$ , es mucho mayor que las calculadas para los modos superiores.

En dicha figura también se observa que  $|F_i|$  disminuye progresivamente hacia cero mientras  $i$  tiende a infinito, es decir, las autofunciones asociadas a los modos superiores tienen asociados volúmenes casi nulos. Por el contrario,  $F_1$  aumenta cuando decrece el grado de conectividad entre el río y el acuífero, variando de 555 m para conexión casi perfecta hasta 2226 m para una conductividad hidráulica de lecho del río de  $\hat{K} = 0.0002$  m/d. Más aún, la velocidad de aproximación al volumen nulo con respecto a  $i$  depende del nivel de conexión río-acuífero. En general,  $|F_i|$  tiende a cero más rápidamente para los menores valores de  $\hat{K}$ , lo cual es una consecuencia lógica de que la primera autofunción contiene un mayor volumen bajo de sí a medida que la conexión entre el río y el acuífero tiende a la perfección. Esto indica que las primeras autofunciones tienen mayor preponderancia en el cálculo de las variables espaciales del flujo subterráneo, como lo son las alturas piezométricas y los volúmenes de agua almacenados en ciertas regiones del acuífero.

Ahora bien, en la figura 3.6 se presentan los factores reparto acumulados tanto para acción exterior puntual (izquierda), como distribuida (derecha), calculados como:

$$ba_i = \sum_{i=1}^p b_i, \quad i = 1, 2, \dots \quad (3.42)$$

cuya variación modal depende del tipo de excitación considerada. De acuerdo con lo anterior, para el caso de acción exterior distribuida se observa un crecimiento monótono de  $ba_i$ , hasta alcanzar el valor de uno. Por el contrario, para el caso de acción exterior puntual,  $ba_i$  manifiesta una tendencia de aproximación no monótona y sus valores fluctúan alrededor la unidad con una amplitud que disminuye a medida que aumenta  $i$ . Este comportamiento se asocia a la existencia de coeficientes de reparto negativos, generados por la alternancia de signos en los volúmenes acumulados bajo las autofunciones para cada modo. Para un caso de conexión perfecta entre río y acuífero sobre el cual actúa una acción exterior distribuida, según los resultados representados por la línea azul oscura en la gráfica izquierda de la figura 3.6, se ha obtenido que la velocidad de convergencia a uno por parte del factor de reparto acumulado es más lenta que para los casos parcialmente conectados. Como se ha comentado antes, esto tiene como consecuencia tener que usar mayor cantidad de modos en las ecuaciones de estado para un MPE para conexión perfecta que en uno



**Figura 3.6.** Distribución de los primeros quince factores de reparto acumulados en orden ascendente para el acuífero rectangular estudiado considerando diferentes valores de conductividad hidráulica del lecho del río,  $\hat{K}$ , y acciones exteriores distribuida (izquierda) y puntual (derecha).

planteado para conexión parcial, cuando se desea representar el caudal de descarga con el mismo error de truncamiento. En general, a medida que  $\hat{K}$  disminuye, el primer factor de reparto aumenta en todos los casos, por lo cual el número de modos o depósitos virtuales necesarios para representar adecuadamente la descarga al río disminuye.

El comportamiento de los factores de reparto para una acción puntual es análogo al correspondiente a una acción distribuida, en el sentido de que la cancelación de los efectos generados por factores de repartos de signo contrario es más lenta para la conexión perfecta (ver línea de color azul oscuro en la gráfica derecha de la figura 3.6), lo cual tiene la consecuencia de que es necesario utilizar mayor cantidad de depósitos virtuales para alcanzar un error bajo de truncamiento del MPE reducido. Las características particulares asociadas con la tendencia de aproximación a la unidad por parte de  $ba_i$ , para el caso particular de bombeo localizado en el centro del acuífero, permiten establecer criterios de reducción con el propósito de usar menos tanques virtuales que en el caso de acción exterior distribuida, para un error de truncamiento establecido a priori. En dicho caso, el MPE reducido se puede construir localizando los modos espectrales donde los factores de reparto acumulados se encuentran cerca de la unidad y seleccionándolos apropiadamente. De la figura 3.6 se observa que para los índices modales  $i = 3, 5, 7, 9, \dots$ , el factor de reparto correspondiente al término del residuo por conservación de masa sería muy pequeño. Así, es de esperarse que los modelos reducidos formados por  $p = 2, 4, 6, 8, \dots$  modos espectrales, es decir 3, 5, 7, 9,  $\dots$  depósitos virtuales, donde el modo final contiene al término residual que se construye para mantener la ecuación de continuidad en el acuífero, presenten un bajo error de truncamiento que disminuye a medida que se usan más depósitos. En los casos parcialmente conectados con  $\hat{K} < 0.002 \text{ m/d}$  es posible aplicar un truncamiento directo sin analizar el comportamiento de  $b_i$  para los modos correspondientes a  $i > 5$ , aunque también sería posible aplicar el criterio previamente propuesto.

### 3.6.2. Simulaciones para acción distribuida

Se ha realizado la simulación del flujo subterráneo para el acuífero rectangular de referencia sometido a una acción exterior distribuida uniformemente, actuando en todo su dominio espacial en forma de recarga. En la figura 3.7 se presenta la serie de recargas generada de forma sintética,  $R \text{ [L/T]}$ , para los 1000 días considerados en la simulación. En ésta se observa la presencia de dos períodos secos y dos períodos húmedos que se han generado con el objetivo de distinguir claramente las características dinámicas de recarga y descarga del acuífero. También se observa que la serie contiene 72 días de recarga, con valores que varían entre  $2.98 \times 10^{-7}$  y  $7.51 \times 10^{-3} \text{ m/d}$ , correspondientes a  $1.11 \times 10$  y  $2.8 \times 10^5 \text{ m}^3$  de agua alimentando al volumen almacenado en el acuífero, respectivamente.

Para efectos prácticos, en las simulaciones del flujo mediante los MPE se consideraron únicamente los primeros diez depósitos virtuales asociados a los menores autovalores, pre-

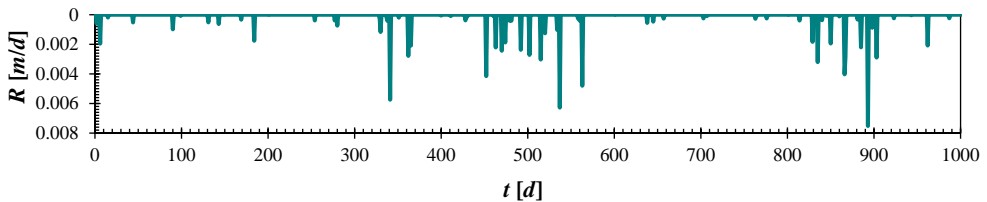


Figura 3.7. Recargas actuando sobre el acuífero de referencia durante 1000 días de simulación.

sentados previamente en la figura 3.4, y a los mayores factores de reparto según el esquema gráfico superior de la figura 3.6. Fuera de dichos depósitos, se considera otro adicional que contiene el factor de reparto residual para preservar la ecuación de continuidad en todo momento en el acuífero, según se presenta en la ecuación (3.25). Las series de caudal de descarga,  $Q_r(t)$ , y de alturas piezométricas,  $h(x, y, t)$ , en localizaciones del acuífero simuladas con MPE se comparan con series de referencia obtenidas mediante un modelo numérico por DF para un acuífero con exactamente las mismas características geométricas, hidráulicas y de conexión con el río. Las localizaciones  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_3$  y  $\mathbf{P}_4$  seleccionadas para el control de la alturas piezométricas en el acuífero se ubican a 1250 m, 2500 m, 3750 m y 4750 m de distancia desde la pared impermeable paralela al río, en una sección longitudinal del acuífero localizada en su centro. Como condición inicial de las simulaciones de los MPE se usó un caudal de descarga del acuífero al río de 3000 m<sup>3</sup>/d, mientras que para los modelos por DF las condiciones iniciales se asignaron a partir de modelos análogos en régimen permanente, de los cuales se obtuvieron alturas piezométricas como respuesta a una recarga uniforme, de forma que el caudal total estacionario de descarga fuera igual al asignado al MPE. Lo anterior asegura que las condiciones iniciales de ambos tipos de modelos son casi idénticas, lo cual tiene la consecuencia favorable de que se minimizan los efectos del calentamiento de los modelos en DF sobre los resultados obtenidos.

Recientemente se han publicado varios artículos donde se presentan revisiones extensas acerca de índices cuantitativos y cualitativos para medir el comportamiento o para la evaluación comparativa de modelos hidrológicos (Legates y McCabe, 1999; Krausse *et al.*, 2005; Moriasi *et al.*, 2007). A partir del análisis de gran cantidad de resultados previos, Moriasi *et al.* (2007) proponen el uso del coeficiente adimensional de Nash y Sutcliffe (1970), la raíz del error cuadrático medio y el coeficiente de sesgo relativo (Gupta *et al.*, 1999) como los mejores indicadores para caracterizar la bondad de ajuste en la calibración automática de modelos hidrológicos o para la comparación de resultados obtenidos aplicando diferentes modelos del mismo sistema hidrológico. A lo largo del desarrollo de este documento, la bondad de las series simuladas con los modelos reducidos, con respecto a las obtenidas por medio de los modelos por DF, se miden usando variantes de los indicadores previamente mencionados. En el caso particular de esta sección, el análisis de dichos índices se usa para medir la representatividad de las series de  $Q_r(t)$  y  $h(x, y, t)$  calculadas con los MPE, con respecto a las obtenidas por simulación mediante las DF.

La eficiencia de Nash-Sutcliffe,  $\mathbf{E}_1$ , es un estadístico normalizado que determina la magnitud relativa de la varianza de los residuales comparada con la varianza de la muestra de referencia. Por lo tanto, indica que tanto se ajustan las series de referencia y la simulada a la línea de pendiente unitaria. La expresión clásica para calcular la eficiencia es:

$$\mathbf{E}_1 = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_t} (R_i - P_i)^2}{\sum_{i=1}^{n_t} (R_i - \bar{R})^2} \right] \times 100\% \quad (3.43)$$

donde  $n_t$  es el número de observaciones en las series,  $R_i$  es el  $i$ -ésimo valor de referencia,  $\bar{R}$  es el promedio de la serie de referencia y  $P_i$  es el  $i$ -ésimo valor simulado. Existe un consenso general de que la principal desventaja de  $\mathbf{E}_1$  es que las diferencias entre los valores observados y los valores predichos se representa de forma cuadrática, con lo cual los errores de estimación en lo máximos tienen mayor influencia que los correspondientes a los mínimos (Legates y McCabe, 1999; McCuen *et al.*, 2006). En el presente análisis interesa cuantificar apropiadamente los caudales mínimos de descarga en períodos de agotamiento y el valor medio de las series simuladas, por lo cual también se usa la siguiente versión



modificada del índice de Nash-Sutcliffe (Chiew y McMahon, 1994; Krausse *et al.*, 2005):

$$\mathbf{E}_2 = \left[ 1 - \frac{\sum_{i=1}^{n_t} (\sqrt{R_i} - \sqrt{P_i})^2}{\sum_{i=1}^{n_t} (\sqrt{R_i} - \sqrt{\bar{R}})^2} \right] \times 100 \% \quad (3.44)$$

con la ventaja de permitir amplificar el efecto de los valores simulados en los períodos de agotamiento sobre  $\mathbf{E}_2$ . Ahora bien, los valores de  $\mathbf{E}$  varían entre  $-\infty$  y 1 (100 %), siendo éste último el valor óptimo para ajuste perfecto entre las series analizadas. Valores de  $\mathbf{E} < 0$  indican que la media de los valores observados es una mejor predicción que la media simulada, con lo cual el modelo de simulación reducido no es aceptable y debe replantearse. Igualmente, el coeficiente de sesgo relativo,  $\mathbf{BIAS}$ , mide la tendencia de los valores simulados a ser menores o mayores que los de referencia, por lo cual los valores óptimos se encuentran cuando éste tiende a cero, en cuyo caso se entiende que la media de la serie de referencia se ha reproducido perfectamente. Entonces,  $\mathbf{BIAS}$  se estima como:

$$\mathbf{BIAS} = \left[ \frac{\sum_{i=1}^{n_t} (R_i - P_i)}{\sum_{i=1}^{n_t} R_i} \right] \times 100 \% \quad (3.45)$$

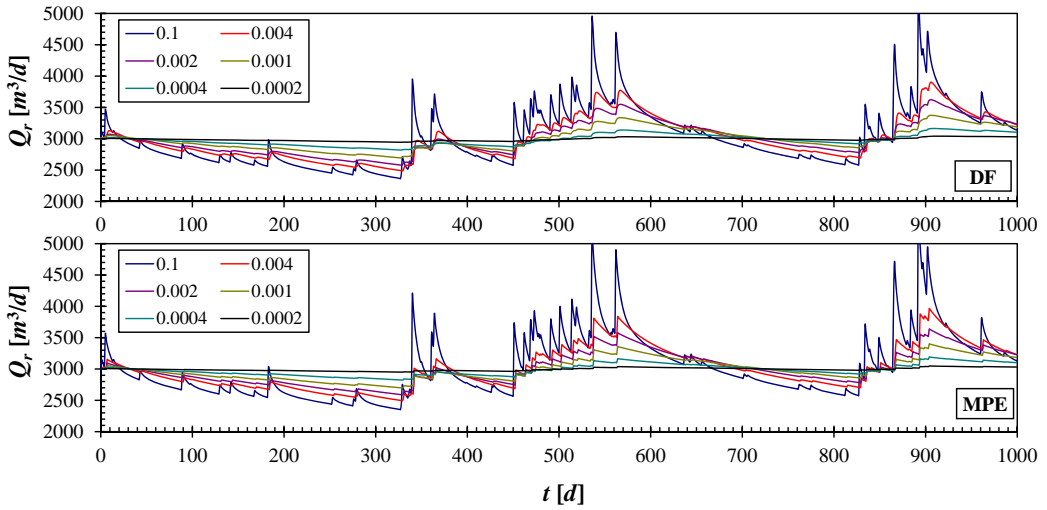
Por otra parte, la raíz del error cuadrático medio relativo,  $\mathbf{RMSE}$ , se calcula como sigue:

$$\mathbf{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{n_t} \sum_{i=1}^{n_t} (R_i - P_i)^2}$$

y se usa para evaluar la diferencia entre los valores simulados y de referencia, en las unidades de la variable de análisis.  $\mathbf{RSME}$  cercanos a cero indican ajuste perfecto entre las series simuladas y de referencia. Singh *et al.* (2004) proponen que si  $\mathbf{RMSE} < \sigma_R$ , donde  $\sigma_R$  es la desviación estándar de los datos de referencia, el ajuste entre ambas series es aceptable. Ahora bien, el estadístico  $\mathbf{RSM}$  se estandariza  $\mathbf{RMSE}$  según la siguiente expresión:

$$\mathbf{RMS} = \frac{\mathbf{RMSE}}{\bar{R}} \times 100 \% = \left[ \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^{n_t} (R_i - P_i)^2}}{\sum_{i=1}^{n_t} R_i} \right] \times 100 \% \quad (3.46)$$

representando la raíz de la media de los errores cuadráticos como un porcentaje del valor promedio de la serie de observaciones que se ha adoptado como referencia. El análisis de las estimaciones de  $\mathbf{RMS}$  y  $\mathbf{BIAS}$  se puede hacer considerando los efectos de la solución en régimen permanente  $u(x, y)$  sobre la solución total  $h(x, y, t)$ . En las ecuaciones (3.45) y (3.46), en el numerador se restan los valores de  $u(x, y)$  que coinciden en los modelos de referencia y simulado, mientras que en el denominador sólo aparecen los valores de referencia. De ahí que las estimaciones de  $\mathbf{RMS}$  y  $\mathbf{BIAS}$  pueden ser muy distintas si se usa la solución transitoria  $w(x, y, t)$  con respecto a las obtenidas usando la solución total  $h(x, y, t)$ . En efecto, en los casos de acuífero conectado con una red de drenaje no inclinada, la solución en régimen permanente es nula, con lo cual la solución total  $h(x, y, t)$  coincide con la solución transitoria con condiciones de contorno nulas  $w(x, y, t)$ . Por el contrario, si el río conectado con el acuífero es inclinado, la componente permanente de la solución no es nula y, por lo tanto, las estimaciones de  $\mathbf{RMS}$  y  $\mathbf{BIAS}$  se ven afectada según lo comentado antes. Esto lleva a considerar estos índices de comportamiento de forma más relativa y a no darles un carácter absoluto, es decir, sirven para comparar las simulaciones de un parámetro de control dado, pero no para aceptar o rechazar dicha simulación.



**Figura 3.8.** Hidrogramas de caudal de descarga al río calculados por un modelo numérico por DF (arriba) y un MPE (abajo) para diferentes niveles de conexión río-acuífero.

En la figura 3.8 se presentan los hidrogramas de caudales de descarga simulados por medio del modelo numérico por DF (arriba) y el MPE usando once depósitos virtuales (abajo), para seis diferentes valores de conductividad hidráulica del lecho del río. Cabe resaltar que la selección de los once depósitos se basó en la mejor representación del flujo para niveles altos de conexión entre el río y el acuífero para MPE. Dicho número de depósitos se obtuvo mediante ensayo y error hasta obtener un valor de  $E_2$  aceptable para  $\hat{K} = 0.1 \text{ m/d}$ . En los demás casos de conexión, la asignación de ese número de depósitos se hizo a priori, sin ningún tipo de análisis cuantitativo asociado. Al respecto, se quiso mantener el número de depósitos para los diferentes MPE con el fin de comparar la variación de los índices de comportamiento en las ecuaciones (3.44), (3.45) y (3.46) en función de los cambios impuestos a los parámetros de conexión río-acuífero.

Mediante una inspección visual de los hidrogramas presentados en la figura 3.8, es evidente que se ha obtenido una representación bastante aceptable del caudal descargado al río por medio de los MPE (abajo), con respecto a los resultados obtenidos con el modelo por DF (arriba), para todos los valores de  $\hat{K}$  considerados. En general, los mejores resul-

Índice [%]	Conductividad de lecho [ $m/d$ ]					
	0.1	0.004	0.002	0.001	0.0004	0.0002
<b>RMS</b>	1.87	0.88	0.51	0.41	0.31	0.14
<b>E<sub>1</sub></b>	98.51	99.34	99.65	99.50	99.00	97.59
<b>E<sub>2</sub></b>	98.77	99.39	99.65	99.50	99.00	97.58
<b>BIAS</b>	0.57	0.33	0.04	-0.06	0.13	0.11

**Tabla 3.3.** Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe original (**E<sub>1</sub>**), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas de descarga simulados por un MPE formado por once depósitos virtuales (uno residual) para acción exterior distribuida, con respecto a los calculados mediante los modelos en DF.

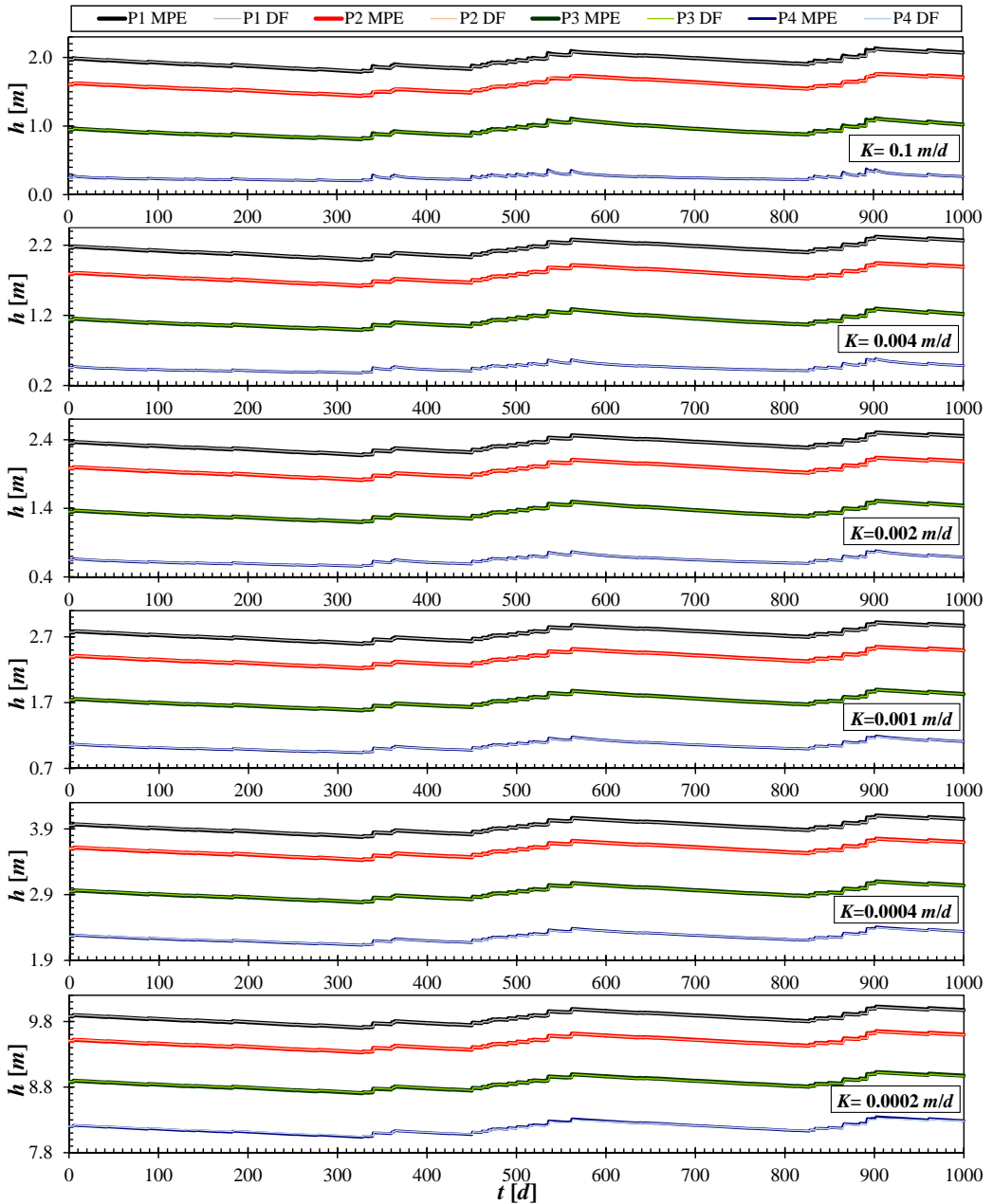


Figura 3.9. Alturas piezométricas para las cuatro localizaciones de control, calculadas con un modelo numérico por DF y un MPE de once depósitos virtuales para diferentes niveles de conexión río-acuífero en función de la conductividad hidráulica del lecho del río.

$\hat{K}$	$P_1$		$P_2$		$P_3$		$P_4$	
	RMS	$E_2$	RMS	$E_2$	RMS	$E_2$	RMS	$E_2$
[m/d]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]	[%]
0.1	0.39	99.78	0.31	99.65	0.76	99.10	2.74	95.44
0.004	0.31	99.92	0.35	99.92	0.64	99.91	2.29	99.92
0.002	0.32	99.98	0.36	99.98	0.63	99.98	2.36	99.98
0.001	0.32	99.99	0.37	99.99	0.64	99.99	2.57	99.99
0.0004	0.34	100.00	0.40	100.00	0.67	100.00	2.73	100.00
0.0002	0.33	100.00	0.41	100.00	0.77	100.00	4.35	100.00

**Tabla 3.4.** Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio relativo (RMS) y coeficiente de Nash-Suttcliffe modificado ( $E_2$ ) para la alturas piezométricas calculadas en los puntos de control mediante un MPE formado por once depósitos virtuales (uno residual), comparadas con las correspondientes simuladas mediante los modelo por DF.

tados se obtuvieron para los períodos secos, donde domina la dinámica de los términos asociados con los menores autovalores. Igualmente, en la tabla 3.3 se presentan los índices de comportamiento para los hidrogramas de descarga simulados mediante MPE con respecto a los obtenidos con los modelos por DF; donde se observa que, para conexión casi perfecta ( $K = 0.1$  m/d), se obtuvieron los peores resultados. Lo anterior se debe a la existencia de una amplificación sistemática en los  $Q_r$  simulados mediante MPE en los picos del hidrograma, es decir, en los periodos donde se presentan los episodios de recarga. Esta característica puede deducirse de la ecuación (3.25), donde se advierte la presencia de un elevado factor de reparto residual,  $b_{11}$  junto con un elevado autovalor,  $\lambda_{11}$ , para conexión río-acuífero perfecta. En dichos casos, para obtener mejores aproximaciones de los picos del hidrograma es recomendable implementar MPE compuestos por una mayor cantidad de modos, donde sea menor la influencia del término residual. Otro factor que influye en las diferencias obtenidas entre los picos de los hidrogramas subterráneos simulados por MPE y DF es el esquema adoptado para repartir la recarga durante cada intervalo de simulación. En los modelos implementados por DF cada recarga diaria se dividió en diez subintervalos de integración temporal numérica, mientras que en los MPE dicha integración es explícita, con lo cual el efecto de la aplicación de la recarga sobre el acuífero se representa de forma más confiable.

El efecto sobre los índices de comportamiento del deposito residual se hace menos notorio a medida que la conexión entre el río y el acuífero es menor debido a que, como se mostró en la figura 3.6, la convergencia de los factores de reparto acumulados hacia uno es más rápida para menores valores de  $\hat{K}$ . Esto tiene como consecuencia que, para dichos casos, puedan usarse menor cantidad de depósitos virtuales sin que los índices de comportamiento se vean demasiado afectados. Lo anterior es confirmado por la mejoría de los índices de comportamiento a medida que el nivel de desconexión aumenta. Igualmente, se observa la gran influencia que tiene la sobreestimación de los picos del hidrograma de descarga sobre los valores de  $E_1$ , considerando que existen sólo 72 episodios de recarga durante 1000 días de simulación, lo cual indica que, en algunos intervalos, la sobreestimación del caudal pico subterráneo es significativa para el caso de conexión casi perfecta.

A pesar de lo anterior, los índices de comportamiento estimados han sido bastante aceptables. Particularmente, dado que todos los **BIAS** estimados resultaron ser cercanos a cero, las series simuladas conservan bastante bien la media de los caudales de referencia. Esto es consecuente con el esquema de continuidad asignado al término residual de la solución. Sin embargo, en experimentos numéricos efectuados para MPE con truncamiento

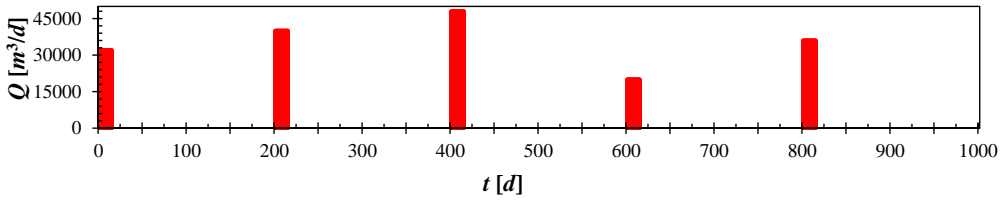
traumático, es decir, sin considerar el término que asegura mantener la ecuación de continuidad en el acuífero, suelen encontrarse valores negativos del coeficiente de sesgo. Lo anterior indica que el modelo de flujo reducido subestima de forma sistemática los caudales de descarga al río como consecuencia de que el volumen de agua no contabilizado en los términos truncados es una parte considerable del volumen total recargado.

En la figura 3.9 se presentan las alturas piezométricas calculadas en las cuatro localizaciones de control del acuífero. Nuevamente, por inspección visual, parece que se ha logrado representar adecuadamente dichas alturas con respecto a las obtenidas mediante el modelo por DF. Para realizar un análisis más a fondo de lo anterior, se han calculado los índices de comportamiento de dichas series simuladas en las cuatro localizaciones, para los seis diferentes valores de  $\hat{K}$ , como se presenta en la tabla 3.4. En ella sólo se muestran los resultados para **RMS** y para  $\mathbf{E}_2$  por dos razones: (i) los valores de **BIAS** en todos los casos de conexión río-acuífero fueron del 99.9% y (ii) las estimaciones del coeficiente de Nash-Sutcliffe original ( $\mathbf{E}_1$ ) usando la ecuación (3.44) fueron idénticas al modificado. De esto se concluye que las series simuladas de altura piezométrica reproducen adecuadamente la media de la serie de referencia y, contrariamente al caso del caudal de interacción río-acuífero, no se presentan sobreestimaciones significativas de las alturas piezométricas pico. Igualmente, las estimaciones de los índices de comportamiento empeoran a medida que la localización de control se encuentra más cerca de la conexión río-acuífero. Esto quiere decir que para una mejor evaluación de las alturas piezométricas cercanas al río se hace necesario implementar MPE formados por un mayor número de modos, lo cual es consecuente con los resultados presentados por Pulido-Velázquez *et al.* (2005) quienes sostienen que, para capturar adecuadamente el comportamiento de las alturas piezométricas cerca de regiones singulares como los contornos o las localizaciones de los pozos, se deben considerar una gran cantidad de términos de la ecuación de estado del acuífero. Dicho efecto disminuye a medida de aumenta el nivel de desconexión entre el río y el acuífero.

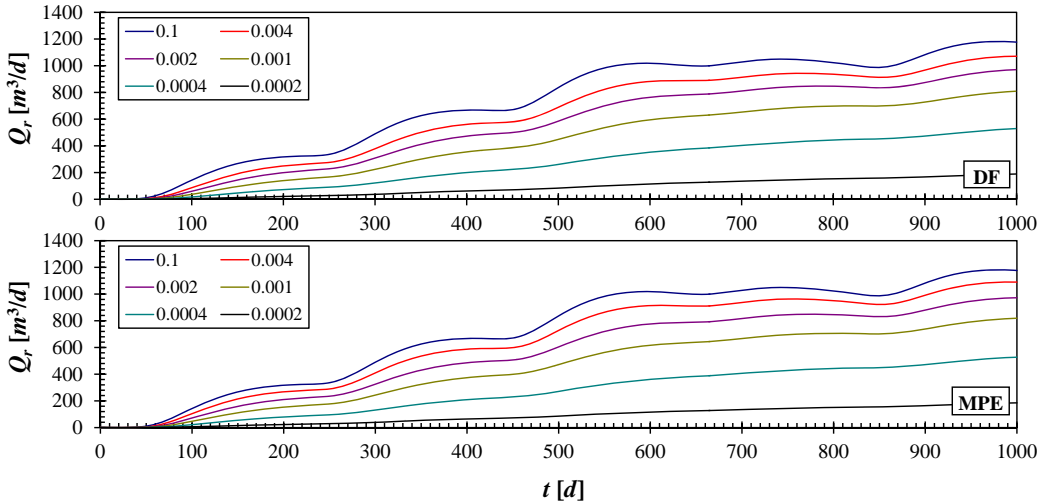
### 3.6.3. Simulaciones para acción puntual

A continuación se presenta un análisis de la dinámica del flujo subterráneo en el acuífero rectangular de referencia sometido a una acción puntual de extracción de magnitud variable que actúa en su centro durante mil días. Las magnitudes de los bombeos impuestos se presentan en la figura 3.10, donde se observa que éstas varían entre los 20000 y 50000 m<sup>3</sup>/d. Además, dichos bombeos tienen una duración de quince días y se aplican con una separación de doscientos días. El esquema de implementación de los MPE, en este caso, es idéntico al utilizado en el apartado anterior para una recarga distribuida uniformemente, es decir, se consideran diez depósitos virtuales más uno, que combina los términos residuales de la expresión (3.23), para preservar la ecuación de continuidad en el dominio espacial del acuífero. Asimismo, en este ejercicio se han impuesto las siguientes condiciones iniciales: (i) caudales de detracción nulos sobre los MPE y (ii) alturas piezométricas cero en todos los nodos activos para los modelos de referencia en DF.

En la figura 3.11 se presentan los hidrogramas de caudales de detracción calculados con los modelos numéricos por DF (arriba) y por el MPE (abajo), donde se observa un comportamiento casi idéntico para todas las conductividades de lecho de río asignadas. Lo anterior se confirma cuantitativamente de las estimaciones de los índices de comportamiento, que se consignan en la tabla 3.5. En ella sólo se presenta la eficiencia no modificada puesto que ambos hidrogramas son monótonamente crecientes, con lo cual no se presenta influencia de la sobreestimación en los picos sobre las estimaciones. Se notan dos características principales en los resultados obtenidos. Primero, todos los coeficientes de sesgo relativo son negativos, lo cual indica que los valores medios de las detracciones han si-



**Figura 3.10.** Bombeos concentrados actuando en el centro del acuífero de referencia durante 1000 días de simulación.



**Figura 3.11.** Hidrogramas de caudal detráido por el acuífero simulados por modelos numérico por DF (arriba) y MPE (abajo) para seis diferentes parámetros de conexión entre río y acuífero.

do ligeramente subestimados en las simulaciones mediante el MPE y, segundo, todos los índices de comportamiento mejoran a medida que disminuye el grado de conexión entre el río y el acuífero. Este comportamiento se atribuye a las diferencias en el cálculo de los caudales detráidos en los intervalos donde se aplica el bombeo, las cuales se vuelven más críticas a medida que la permeabilidad del río aumenta puesto que se hace necesario incluir una mayor cantidad de modos para representar mejor la relación río-acuífero. En dichos casos, los modos de respuesta rápida tienen mayor influencia y, por lo tanto, aumenta la influencia del término residual del MPE. A pesar de lo anterior, los índices de comportamiento obtenidos, para todas las conductancias consideradas, son bastante aceptables y los hidrogramas de detracción en ambos casos manifiestan tendencias idénticas al final de cada intervalo de doscientos días, justo antes de iniciar la aplicación de los bombeos.

### 3.7. Conclusiones y discusión

Se han planteado modelos de flujo subterráneo para acuíferos de geometría sencilla sometidos a la excitación de acciones exteriores simples. Los resultados obtenidos se utilizan en capítulos posteriores como soluciones de referencia para mostrar algunos comportamientos numéricos anómalos de modelos discretos de flujo resueltos con el MAV. Con

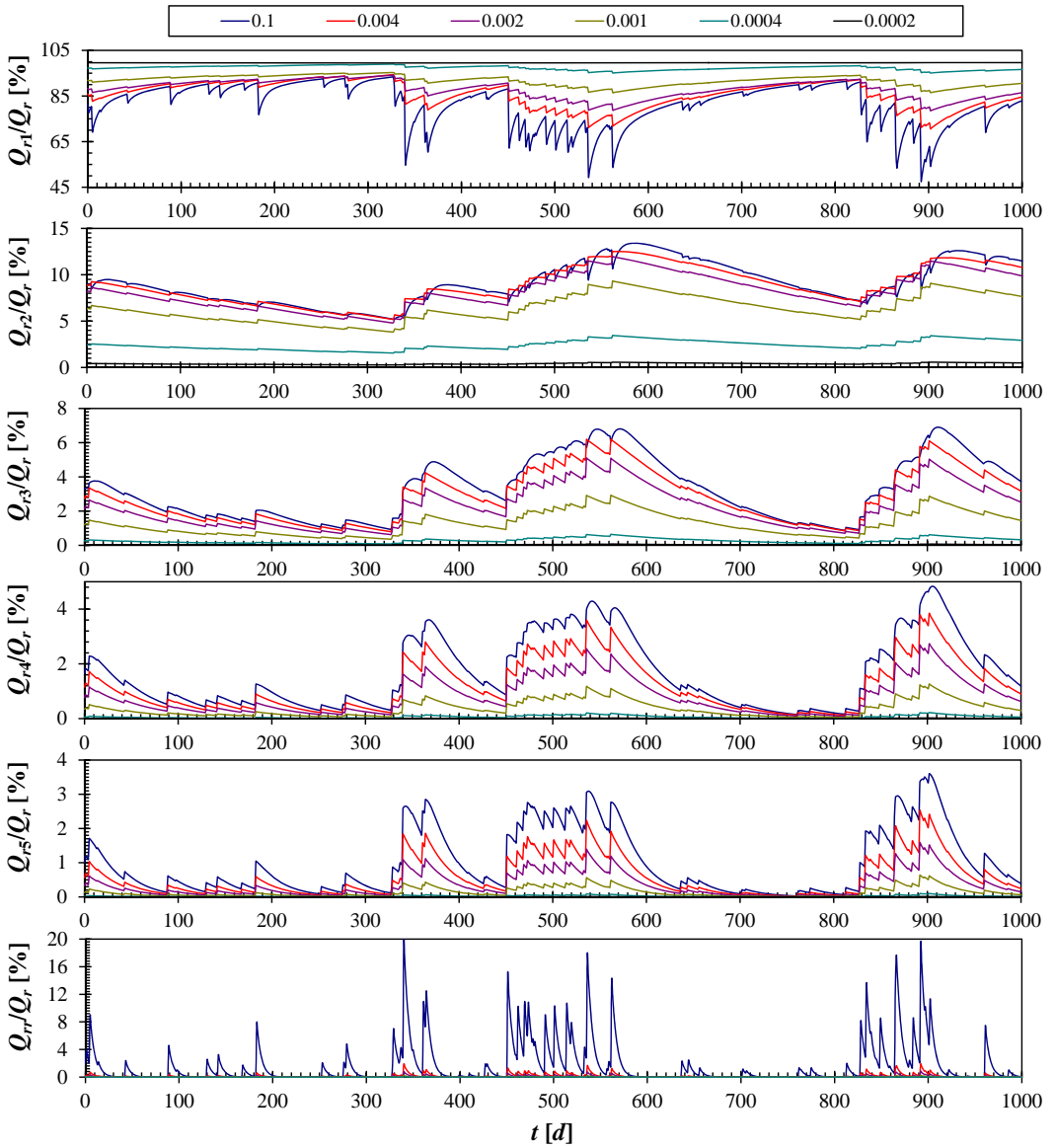
base en los resultados obtenidos en la resolución de los PRSL, apartado 3.6.1, para este caso de referencia se concluye que un análisis previo del comportamiento de los factores de reparto acumulados puede ayudar a reducir efectivamente un MPE. Para aclarar lo anterior, se han calculado: (i) los porcentajes de respuesta de los primeros cinco modos y el término residual en el caudal descargado total para acción exterior distribuida, que se presentan en la figura 3.12 y (ii) la componente de respuesta de los primeros cinco modos y el término residual en el caudal detraído total para acción exterior puntual, que se presentan en la figura 3.13. En ambos casos se observa que la tendencia de variación de los aportes modales está relacionada directamente con los factores de reparto acumulado asociado al modo correspondiente, presentados previamente en las gráficas de la figura 3.6.

Para la acción exterior uniformemente distribuida, en la figura 3.12 se observa que, con excepción de los resultados para  $\hat{K} = 0.1$  m/d, es decir, para conexión río-acuífero casi perfecta, el caudal descargado que corresponde al primer modo,  $Q_{r1}$ , aporta un porcentaje mayor al 60 % de la respuesta total del acuífero durante todo el horizonte de simulación. Como tendencia general se ha obtenido que, a medida que el grado de desconexión aumenta, el caudal asociado al primer modo de flujo se acerca cada vez más a la totalidad de la respuesta del acuífero. Igualmente, es importante notar que, para el caso de conexión casi perfecta, el término residual de la solución (3.25) representa el segundo mayor porcentaje de la descarga total del acuífero en los picos del hidrograma subterráneo simulado; en dichos intervalos, su efecto sobre la solución completa del modelo solamente es superado por la respuesta asociada con el primer modo de flujo. Ello indica que cuando se hace necesario representar detalladamente los picos del hidrograma subterráneo, es conveniente usar una mayor cantidad de modos en la solución para la descarga. Este tipo de consideraciones son de gran utilidad en la modelación hidrológica distribuida a resolución temporal diaria, en la cual dicho efecto puede ser importante para evaluar la oferta hídrica disponible para aprovechamiento. Para la modelación del uso conjunto en grandes sistemas de aprovechamiento, para los cuales la simulación del flujo en el acuífero suele hacerse a resolución mensual, el efecto previamente mencionado se agrega durante cada mes, con lo cual es apropiado usar pocos términos en la ecuación de estado del acuífero.

Como se concluyó anteriormente a partir de los índices de comportamiento de las series simuladas por MPE, lo anterior tiene como consecuencia que los picos del hidrograma se amplifican durante los episodios de recarga. Esta situación indeseable aumenta a medida que se usan menos términos, o depósitos virtuales, en la solución por MPE, puesto que el factor de reparto residual ( $1 - \sum_{i=1}^{m-1} b_i$ ) aumenta. Para seleccionar adecuadamente a priori un número de depósitos que asegure que el error de truncamiento es bajo, se recomienda recurrir a la inspección de los factores de reparto acumulados, según la figura 3.6. De ella se concluye que, para río perfectamente conectado, deben usarse por lo menos cinco modos, para conseguir un término residual que englobe menos del 5 % de la masa de recarga, lo

Índice	Conductividad de lecho [m/d]					
	0.1	0.004	0.002	0.001	0.0004	0.0002
<b>RMS</b> [%]	1.80	1.72	1.11	1.09	1.05	0.9
<b>E<sub>1</sub></b> [%]	97.98	98.99	99.97	99.97	99.97	99.97
<b>BIAS</b> [%]	-0.60	-0.59	-0.56	-0.55	-0.52	-0.48

**Tabla 3.5.** Estimaciones la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe original (**E<sub>1</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas de las detecciones simulados por un MPE formado por once depósitos virtuales (uno residual) para acción exterior puntual, con respecto a los calculados mediante los modelos en DF.



**Figura 3.12.** Porcentaje de participación en los caudales descargados por los cinco primeros modos, para las seis conductividades de río consideradas en los MPE y acción exterior distribuida.



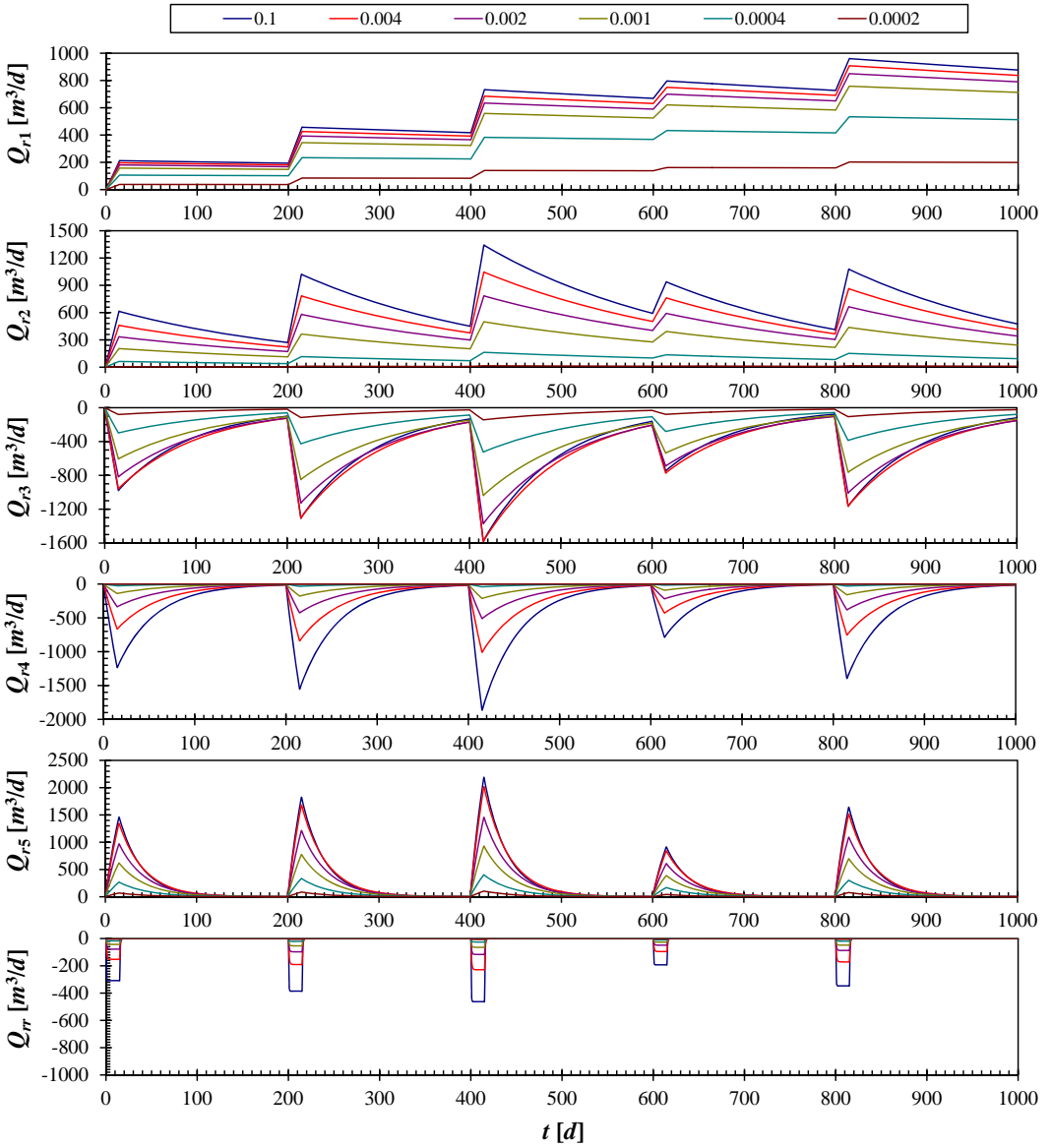


Figura 3.13. Primeros cinco componentes modales para el caudal detraído simulado usando un MPE, para seis diferentes conductividades de lecho de río.

cual evita tener que realizar iterativamente simulaciones de prueba modificando el número de modos considerados hasta lograr un error de truncamiento definido.

En el caso de la acción exterior puntual, el análisis de los factores de reparto como índice para el truncamiento del modelo debe hacerse más cuidadosamente puesto que el aporte modal al caudal detráido total es alternante en su signo, como se muestra en la figura 3.13. Esto quiere decir que hay modos con aportes positivos al estado del acuífero, mientras que otros realizan los aportes negativos, con lo cual el factor de reparto acumulado oscila alrededor de uno a medida que aumenta el índice  $i$  del modo, como se había señalado anteriormente. Al respecto, los gráficos en la figura 3.13 presentan el aporte,  $Q_{ri}$ , de cada modo al caudal detráido total,  $Q_r$ , donde se observa que los modos que aportan positivamente a  $Q_r$  cuando les corresponde factores de reparto positivos y viceversa. En dicha figura también se observan los tiempos necesarios para que el caudal detráido de cada modo alcance su límite de aporte al caudal total, es decir, el tiempo necesario para que  $Q_{ri}$  alcance un valor constante cuando se aplica un bombeo constante, o un valor nulo si no existen acciones exteriores aplicadas sobre el acuífero. Por ejemplo, para el primer modo, dicho tiempo supera los mil días de simulación establecidos, mientras que para el quinto modo se necesitan cerca de cien días para alcanzar un aporte constante a la detracción, para todas las conexiones río-acuífero consideradas. También cabe notar que para el modo undécimo, asumido como el componente de acumulación residual para mantener continuidad en el acuífero, el tiempo necesario para alcanzar el aporte contante es menor a los 15 días, que corresponde al período de aplicación de bombeo impuesto.

Igualmente, de la solución analítica por el MAV se deduce que el tiempo necesario para alcanzar el límite de aporte constante a la detracción para cada modo corresponde al inverso del autovalor correspondiente, lo cual supone un criterio útil para definir a priori un modo en el cual se aplica el truncamiento de la solución analítica para el cual la aproximación puede ser aceptable. Por ejemplo, para los MPE simulados con una resolución mensual donde la conexión río-acuífero es perfecta, usar cinco modos asegura alcanzar el límite de aporte en el quinto modo residual, y puesto que  $\lambda_5^{-1} \approx 25$  d, el tiempo necesario es menor a un mes para el acuífero de referencia analizado. Asimismo, aplicando este mismo criterio a las conductividades de río más bajas se obtienen tiempos un poco mayores, pero igualmente cercanos a 30 días. A pesar de que el tiempo hasta el límite de aporte de cada modo aumenta mientras la conductividad del lecho del río disminuye, el número de depósitos necesarios para efectuar una simulación adecuada es menor por efecto del coeficiente de reparto, puesto que éste tiende a cero más rápidamente para conexiones río-acuífero cada vez más imperfectas. Estas observaciones son consistentes con el análisis del error de truncamiento para el MPE presentado por Pulido-Velázquez *et al.* (2005), quienes afirman que con menos de cinco modos se representan adecuadamente las relaciones río-acuífero a resolución mensual.

Por otro lado, para modelos de flujo subterráneo simulados con resolución diaria deben incluirse muchos más modos si se considera como criterio de truncamiento la velocidad de decaimiento descrita hasta ahora. Por ejemplo, para lograr un tiempo de aporte límite de detracción menor a un día, deberían incluirse los primeros 25 modos para todos los casos de conductividad de lecho del río considerados. A pesar de esto, también puede usarse el criterio de reducción descrito en el apartado 3.6.1, que consiste en truncar la sumatoria de la solución para la relación río-acuífero por el MAV en un modo que manifieste  $ba_i \approx \pm 1$ , con lo cual se asegura que el aporte del término residual para preservar continuidad agregada de dicha solución es pequeño. Por último, cabe agregar que, tanto para acciones exteriores puntuales como para distribuidas, efectuar el truncamiento de la solución siguiendo los criterios comentados en esta sección evita tener que afrontar un largo procedimiento de

tanteo y error para la determinación del tamaño del modelo que represente adecuadamente las relaciones río-acuífero. Además, a pesar de que no es posible establecer un criterio de truncamiento a priori en el caso de las alturas piezométricas, los resultados presentados indican que preservar los modos cuyos factores de repartos acumulados se encuentren cercanos a uno, en general, arroja resultados satisfactorios, al menos en localizaciones alejadas de la conexión río-acuífero o de un pozo.



*“No se puede ser y no ser algo al mismo tiempo y bajo el mismo aspecto”.*  
*Aristóteles*

# 4

## Reducción modal numérica con el método de los autovalores

### 4.1. Introducción

La reducción modal de SLIT ha probado ser eficiente en casos en los cuales es posible asociar los modos de la matriz de estados a ciertos parámetros de base física (Varga, 1995). En el caso particular de la EDP de flujo subterráneo, dichos modos se relacionan con la dinámica de decaimiento exponencial del estado del acuífero, según el enfoque de modelación presentado en el MAV (Sahuquillo, 1983a). Discretizando las derivadas parciales espaciales de la EDP de flujo subterráneo se obtiene un sistema lineal de EDO para el cual se plantea un procedimiento de proyección en el subespacio generado por los autovectores de dicho sistema. Este procedimiento es análogo al presentado para las soluciones analíticas en el capítulo 3, con la diferencia de que las expresiones matemáticas se expresan matricialmente. Así, por un lado se obtienen ecuaciones de estado explícitas en función del tiempo para las variables del acuífero y, por otro lado, partiendo de la representación matricial por MAV, el modelo de flujo subterráneo se trunca en su espacio de estados para reproducir de forma aproximada la relación río-acuífero y otras variables de respuesta, ya sean alturas piezométricas, volúmenes almacenados y/o flujos.

En el contexto de la modelación numérica del flujo en el acuífero, los simuladores clásicos discretizan el tiempo para ejecutar la integración numérica de la ecuación (2.8) usando, por ejemplo, un esquema implícito del tipo Crank y Nicholson (1947). Con ello, para cada intervalo temporal de integración, se ensambla un sistema disperso de ecuaciones lineales que se resuelve eficientemente utilizando un método iterativo, por ejemplo, el de los gradientes conjugados (Hestenes y Stiefel, 1952). Por el contrario, la solución por el MAV discretiza únicamente el dominio espacial del acuífero y la integración temporal se realiza de forma analítica, obteniéndose un sistema dinámico lineal estacionario, siempre y cuando las condiciones de contorno y los parámetros del acuífero no sufran variaciones en el tiempo. Debe enfatizarse que, en el contexto del MAV, calificar un sistema hidrogeológico

como estacionario no quiere decir que éste se modela en régimen permanente, sino que sus parámetros de flujo y condiciones de contorno son invariantes en el tiempo.

Dado que la ecuación matricial-diferencial que se desea resolver es lineal, puede aplicarse el esquema del principio de superposición presentado en la figura 2.4, donde la componente transitoria de la solución original, según las ecuaciones (2.20) y (2.21), se expresa como el producto de: (i) una parte espacial que se deduce utilizando únicamente las características hidráulicas y las condiciones de contorno del acuífero, representadas convenientemente de forma discreta, y (ii) una parte temporal que se obtiene analíticamente resolviendo un sistema de EDO lineales de primer orden sujetas a condiciones iniciales establecidas. De forma análoga a la solución analítica presentada en la sección 3.3, la solución transitoria es un vector de ecuaciones de estados, donde cada una de sus componentes es una función de decaimiento exponencial explícita en función del tiempo. Sin embargo, las partes espaciales de las soluciones analíticas y numéricas por el MAV exhiben importantes diferencias matemáticas puesto que, en el caso numérico, las autofunciones asociadas al sistema vienen expresadas en forma de autovectores y los parámetros de recarga y descarga del acuífero se obtienen resolviendo un problema generalizado de autovalores.

De acuerdo con lo anterior, en este capítulo se discute acerca de la posibilidad de usar el MAV como una herramienta para la simulación y reducción eficiente de modelos numéricos de flujo subterráneo. Inicialmente, se presenta el desarrollo matemático de la solución por MAV para la ecuación matricial-diferencial de flujo subterráneo para una acción exterior actuando sobre el acuífero. Dicha solución se extiende para sistemas hidrogeológicos en los cuales actúan varias acciones exteriores usando los conceptos de matriz de acciones elementales e intensidades de las acciones externas (Andreu, 1984). Además, se discute acerca de la pertinencia de las técnicas existentes para el truncamiento directo de los estados del sistema hidrogeológico, según la propuesta de Sahuquillo y Andreu (1988).

Igualmente, se presentan algunas características numéricas particulares de la solución numérica de la EDP de flujo subterráneo por el MAV que permiten plantear una comprensión del modelo numérico. Para ilustrar esas características, se estudia un acuífero sintético, regular y homogéneo, interactuando con ríos que manifiestan diferentes grados de conexión. A la luz de dichos resultados se discuten las posibilidades de obtener modelos de flujo reducidos, aproximados y parsimoniosos que representen adecuadamente las características principales de las diferentes variables de estado del acuífero.

## 4.2. Solución numérica del flujo subterráneo por el método de los autovalores

El procedimiento de solución de la ecuación matricial-diferencial de flujo subterráneo con el MAV es análogo al presentado en el capítulo 3. Primero se sigue el esquema de superposición de la figura 2.4 para separar los problemas permanente y transitorio básicos y, posteriormente, se resuelve cada uno de dichos problemas. Para terminar, estas soluciones se superponen al final de cada intervalo de simulación y se evalúan diferentes parámetros de control del acuífero según las expresiones planteadas en el apartado 2.9.

### 4.2.1. El problema en régimen permanente

El tratamiento de la componente en régimen permanente de la solución ha sido comentado en el apartado 2.8.2 y consiste, básicamente, en solucionar un sistema disperso de ecuaciones algebraicas lineales usando métodos eficientes, obteniendo el vector  $\mathbf{u}$  de alturas piezométricas en cada uno de los nodos en los cuales se ha representado el do-

minio espacial del acuífero, de acuerdo con la ecuación (2.27). Esta solución en régimen permanente se obtiene únicamente al principio de la simulación, con lo cual, a partir de  $\mathbf{u}$ , se deducen convenientemente las partes permanentes de cada uno de los parámetros de control seleccionados al inicio del procedimiento de simulación.

#### 4.2.2. El problema en régimen transitorio

La solución del problema transitorio de flujo subterráneo mediante el MAV se formula matricialmente efectuando un cambio de base junto con un esquema de proyección de la ecuación matricial-diferencial de flujo, presentada en (2.28), sobre el subespacio generado por una matriz de autovectores asociados al problema de flujo. Esto es análogo al procedimiento presentado en la ecuación (2.4) que expresa el esquema general de reducción.

##### Solución general: acciones exteriores nulas

Se desea resolver la ecuación matricial-diferencial (2.28), para la cual se establece que las acciones exteriores aplicadas sobre el acuífero son nulas. Así, con  $\mathbf{q} = \mathbf{0}$ , se tiene que:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} = \mathbf{S} \frac{d\mathbf{w}}{dt} \quad (4.1)$$

sujeta a condiciones de contorno nulas y a la siguiente condición inicial:

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{h}(0) - \mathbf{u} = \mathbf{w}_0 \quad \forall i, j \in \Omega \text{ y } t = 0 \quad (4.2)$$

Al resolver (4.1) se encuentra  $\mathbf{w}_g(t) = \mathbf{w}_g \in \mathbb{R}^n$ , la forma general de la solución del problema transitorio. De forma análoga a lo presentado en el apartado 3.3, dicha solución se obtiene usando la separación de variables. En el caso discreto, ello equivale a efectuar un cambio de base para  $\mathbf{w}_g$ , con lo cual se propone que la forma general de la solución es:

$$\mathbf{w}_g = \mathbf{V}\Phi(t) \quad (4.3)$$

donde  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $\Phi(t) \in \mathbb{R}^m$  es un vector de funciones continuas. Si  $m = n$  se incluyen todos los modos del sistema en la solución, pero si  $m \ll n$  se asume que, a priori, se conocen los más dominantes o efectivos, con lo cual se plantea un modelo reducido. Ahora bien, sustituyendo la solución (4.3) en (4.1) y reordenando términos, se obtiene que:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}(\mathbf{S}\mathbf{V})^{-1} = \Phi^{-1}(t) \frac{d\Phi(t)}{dt} = -\Lambda$$

en la cual se distinguen tres componentes de la solución. Del lado izquierdo se tiene un sistema de ecuaciones lineales que depende de la discretización por DF para aproximar las derivadas parciales espaciales en la EDP de flujo subterráneo; mientras que en el término central se tienen  $m$  EDO lineales de primer orden que denotan la variación de los estados del acuífero en función de  $t$ . Por lo tanto, ambos componentes se pueden igualar a la matriz diagonal  $-\Lambda$  del término derecho, cuyos elementos actúan como constantes de separación en la solución para cada modo. De ahí que se obtienen las dos ecuaciones siguientes:

$$\mathbf{A}\mathbf{V} = -\Lambda\mathbf{S}\mathbf{V} \quad (4.4)$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + \Lambda\Phi(t) = \mathbf{0} \quad (4.5)$$

La ecuación (4.4), sujeta a condiciones de contorno nulas, es un PRSL, análogo al presentado en la ecuación (3.3), pero expresado de forma discreta e implica resolver un

problema general de autovalores para un par de matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  de orden  $n$ , siendo  $n$  el número de nodos en los cuales se ha discretizado el dominio espacial del acuífero. Al hacerlo se obtiene un conjunto  $m$ -dimensional de números reales y vectores  $n$ -dimensionales reales que cumplen con dicho sistema lineal. Estos números y vectores se denominan autovalores  $[\mathbf{T}^{-1}]$  y autovectores  $[\mathbf{L}^{-1}]$  del problema de flujo, respectivamente. Igualmente, las matrices  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  y  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  se denominan de autovalores y autovectores, respectivamente, y se definen unívocamente para cada problema de flujo dado que, para la aproximación por DF, las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  son simétricas y definidas positivas, por lo tanto sus autovalores son reales, positivos y únicos. Ello asegura que el sistema obtenido es siempre estable, dado que los polos o autovalores del sistema sin excitar son negativos, puesto que en el procedimiento de separación de variables éstos se han supuesto iguales a  $-\mathbf{\Lambda}$ . La matriz  $\mathbf{\Lambda}$  es diagonal y contiene a los autovalores en algún orden elegido a priori, mientras que en  $\mathbf{V}$  los autovectores se ordenan por columnas de acuerdo con el orden impuesto para  $\mathbf{\Lambda}$ .

Ahora bien, según el teorema espectral del álgebra lineal, la solución de un problema de autovalores es una aplicación lineal de un espacio vectorial  $m$ -dimensional. En ella se verifica que los autovectores forman una base ortonormal para dicho espacio y todos los autovectores se pueden expresar en función de sus autovalores asociados. De ello se sigue que el método de la separación de variables equivale a proyectar la solución original en un espacio vectorial cuya base está formada por las columnas de la matriz de autovectores. Además, cada componente de (4.5) es una EDO lineal de primer orden, cuya solución es:

$$\phi_i(t) = c_i e^{-\lambda_i t} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.6)$$

donde  $c_i$  es una constante que se determina a partir de la condición inicial y se escribe como  $\phi_i(t)|_{t=0} = \phi_i(0)$ , por lo que  $c_i = \phi_i(0)$ . Como consecuencia de lo anterior, (4.6) queda:

$$\phi_i(t) = \phi_i(0) e^{-\lambda_i t} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.7)$$

tratándose de funciones exponenciales decrecientes, cuyo parámetro de decaimiento es el autovalor asociado a cada modo dominante disponible. Así, la solución transitoria se formula, en función de una matriz exponencial  $\mathbf{E}(t) = \mathbf{E} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ , como sigue:

$$\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{E}\mathbf{\Phi}(0) \quad (4.8)$$

donde los elementos diagonales de  $\mathbf{E}$  son  $e_{i,i} = e^{-\lambda_i t}$  y las componentes fuera de su diagonal son nulas,  $e_{i,j} = 0 \forall i \neq j$ . De acuerdo con (4.8), una solución formal para (4.1) es:

$$\mathbf{w}_g(t) = \mathbf{V}\mathbf{\Phi}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{\Phi}(0) \quad (4.9)$$

que representa una solución discreta análoga a la presentada en (3.7), para la solución analítica. Asimismo,  $\mathbf{\Phi}(t) \in \mathbb{R}^m$   $[\mathbf{L}^2]$  es el vector de estados del sistema que contiene el cambio del estado de las alturas piezométricas del acuífero con respecto del tiempo.

### Solución particular: acciones exteriores dadas

Se desea resolver la ecuación matricial-diferencial (2.28) sujeta a condiciones de contorno e inicial nulas, siguiendo la forma de la solución presentada en (4.9) y considerando que la  $l$ -ésima acción exterior  $\mathbf{q}_l$  se encuentra actuando sobre el acuífero. El resultado a obtener es  $\mathbf{w}_l(t) = \mathbf{w}_l \in \mathbb{R}^n$ , la solución particular del problema transitorio para dicha acción exterior. Dado lo anterior, sustituyendo (4.9) en (2.28) se llega a:

$$\mathbf{A}\mathbf{V}\mathbf{\Phi}(t) + \mathbf{q}_l = \mathbf{S}\mathbf{V}\frac{d\mathbf{\Phi}(t)}{dt}$$



la cual, sustituyendo la equivalencia  $\mathbf{AV} = -\mathbf{\Lambda SV}$ , obtenida del planteamiento del problema generalizado de autovalores, de acuerdo con la ecuación (4.4), y premultiplicando el resultado obtenido por la matriz de autovectores transpuesta,  $\mathbf{V}^*$ , se convierte en:

$$-\mathbf{V}^* \mathbf{SV} \mathbf{\Lambda} \Phi(t) + \mathbf{V}^* \mathbf{q}_l = \mathbf{V}^* \mathbf{SV} \frac{d\Phi(t)}{dt} \quad (4.10)$$

que se simplifica utilizando el teorema espectral del álgebra lineal. Según éste, para problemas de autovalores generalizados, las matrices de autovectores  $\mathbf{V}$  y de almacenamientos  $\mathbf{S}$  son ortogonales. Además, si los autovectores se generan incluyendo un proceso de normalización se tiene una relación de ortonormalidad expresada como (Sahuquillo, 1983a):

$$\mathbf{V}^* \mathbf{SV} = \mathbf{I} \implies \mathbf{V}^* \mathbf{S} = \mathbf{V}^{-1} \quad (4.11)$$

Finalmente, al sustituir (4.11) en (4.10), se deduce un sistema de EDO lineales de primer orden, más compacto y fácil de solucionar que el sistema matricial-diferencial original:

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + \mathbf{\Lambda} \Phi(t) = \mathbf{V}^* \mathbf{q}_l$$

que expresado explícitamente para cada modo dominante considerado se escribe como:

$$\frac{d\phi_i(t)}{dt} + \lambda_i \phi_i(t) = k_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.12)$$

siendo  $k_i$  la  $i$ -ésima componente del producto matricial  $\mathbf{k} = \mathbf{V}^* \mathbf{q}_l$ , con  $\mathbf{k} \in \mathbb{R}^n$ . Así, la solución general para cada EDO expresada según la forma de la ecuación (4.12) es:

$$\phi_i(t) = \frac{k_i}{\lambda_i} + c_i e^{-\lambda_i t} \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.13)$$

donde la constante de integración  $c_i$  se halla utilizando la condición inicial correspondiente. Entonces, si la condición inicial se escribe como  $\phi_i(t)|_{t=0} = \phi_i(0)$ , al reemplazarla en la ecuación (4.13) se verifica que  $c_i = \phi_i(0) - k_i/\lambda_i$  y, por lo tanto, ésta se transforma en:

$$\phi_i(t) = e^{-\lambda_i t} \phi_i(0) + \frac{k_i}{\lambda_i} (1 - e^{-\lambda_i t}) \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.14)$$

que es análoga a la presentada en (3.13) para la solución analítica del problema de flujo. Con el propósito de simplificar la notación matemática, las  $m$  soluciones, cuyas expresiones generales vienen dadas en la forma presentada en la ecuación (4.14), se agrupan para obtener un sistema  $m$ -dimensional de funciones temporales que describe los estados del acuífero. Con ello se obtiene la siguiente expresión matricial compacta (Sahuquillo, 1983a):

$$\Phi(t) = \mathbf{E} \Phi(0) + \left( \frac{\mathbf{I} - \mathbf{E}}{\mathbf{\Lambda}} \right) \mathbf{V}^* \mathbf{q}_l \quad (4.15)$$

Si  $\Phi(0)$  se formula en función de las alturas piezométricas transitorias, usando la condición de ortonormalidad en (4.11), se llega a  $\Phi(0) = \mathbf{V}^{-1} \mathbf{w}_0 = \mathbf{V}^* \mathbf{S} \mathbf{w}_0$ , donde  $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$  es un vector que contiene las alturas piezométricas transitorias iniciales en todos los nodos del acuífero, las cuales cumplen con la ecuación (4.2). Así, el vector de estados se expresa en función de las alturas piezométricas iniciales transitorias como:

$$\Phi(t) = \mathbf{E} \mathbf{V}^* \mathbf{S} \mathbf{w}_0 + \left( \frac{\mathbf{I} - \mathbf{E}}{\mathbf{\Lambda}} \right) \mathbf{V}^* \mathbf{q}_l$$

Finalmente, combinando los resultados de las ecuaciones (4.9) y (4.15), la solución para las alturas piezométricas transitorias como respuesta a la  $l$ -ésima acción exterior es:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}\mathbf{V}^*\mathbf{S}\mathbf{w}_0 + \mathbf{V}\left(\frac{\mathbf{I} - \mathbf{E}}{\Lambda}\right)\mathbf{V}^*\mathbf{q}_l \quad (4.16)$$

que es en una ecuación de estado explícita en función del tiempo, análoga a la presentada en (3.14), que está compuesta por dos términos; uno correspondiente a la solución general, dado por la ecuación (4.9), y otro atribuido a la solución particular asociada con la  $l$ -ésima acción exterior actuando sobre el acuífero, que se escribe como  $\mathbf{w}_l = \mathbf{V}(\mathbf{I} - \mathbf{E})\Lambda^{-1}\mathbf{V}^*\mathbf{q}_l$ .

### Solución total transitoria: principio de superposición

Para considerar las  $n_a$  acciones exteriores actuando sobre el acuífero, se utiliza la propuesta de Andreu (1984), presentada en el apartado 2.8.3. Dado que se ha supuesto que es posible discretizar el horizonte de simulación en intervalos de tiempo  $\tau(t-1, t)$  de igual duración  $\Delta t$ , el vector de acciones exteriores se aproxima por un vector invariante  $\mathbf{q}(\tau)$ . Así, usando los conceptos de matriz de acciones elementales y vector de intensidades de las acciones exteriores, se obtiene la siguiente expresión para los niveles piezométricos transitorios considerando  $n_a$  acciones exteriores actuando simultáneamente:

$$\mathbf{w}(t) = \mathbf{V}\mathbf{E}|_{\Delta t}\mathbf{V}^*\mathbf{S}\mathbf{w}(t-1) + \mathbf{V}\left(\frac{\mathbf{I} - \mathbf{E}|_{\Delta t}}{\Lambda}\right)\mathbf{V}^*\Psi\mathbf{r}(\tau)$$

donde  $\mathbf{E}|_{\Delta t}$  quiere decir que la matriz exponencial se evalúa durante el intervalo  $\tau(t-1, t)$  que dura  $\Delta t$ ;  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n_a}$  es la matriz de acciones elementales invariantes en el tiempo de simulación y  $\mathbf{r}(\tau) \in \mathbb{R}^{n_a}$  es el vector de intensidades que adoptan las acciones exteriores en un paso de tiempo  $\tau(t-1, t)$ . Si esta expresión se multiplica por  $\mathbf{V}^{-1}$  se obtiene una ecuación compacta para el vector de estados, que permite simular eficientemente:

$$\Phi(t) = \mathbf{E}|_{\Delta t}\Phi(t-1) + \mathbf{X}|_{\Delta t}\mathbf{V}^*\Psi\mathbf{r}(\tau) \quad (4.17)$$

donde  $\mathbf{X}|_{\Delta t} = (\mathbf{I} - \mathbf{E}|_{\Delta t})\Lambda^{-1} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es una matriz diagonal cuyos elementos de la diagonal principal se evalúan como  $x_{i,i}|_{\Delta t} = (1 - e^{-\lambda_i\Delta t})/\lambda_i$  con  $i = 1, 2, \dots, m$ .

### 4.2.3. Volumen de intercambio acuífero-masa superficial de agua

La determinación del volumen de intercambio entre el acuífero y una masa de agua superficial adyacente se basa en la integración temporal de la ecuación (4.17). En consecuencia, para el  $i$ -ésimo modo, dicha integración se expresa de la siguiente forma:

$$\theta_i(\tau) = \int_{t-1}^t \phi_i(\gamma)d\gamma = \int_{t-1}^t \left[ \phi_i(\gamma-1)e^{-\lambda_i\Delta\gamma} + \left(\frac{1 - e^{-\lambda_i\Delta\gamma}}{\lambda_i}\right)\sigma_i(\tau) \right] d\gamma$$

donde  $\sigma_i(\tau)$  es cada una de los componentes resultantes de la multiplicación matricial  $\mathbf{V}^*\Psi\mathbf{r}(\tau)$ . Resolviendo la integral para la variable independiente  $\gamma$  resulta:

$$\theta_i(\tau) = \frac{1}{\lambda_i} \left[ \phi_i(t-1)(1 - e^{-\lambda_i\Delta t}) + \left(\Delta t + \frac{e^{-\lambda_i\Delta t} - 1}{\lambda_i}\right)\sigma_i(\tau) \right] \quad i = 1, 2, \dots, m$$

Finalmente, agrupando matricialmente las  $m$  ecuaciones resultantes para los modos dominantes, los vectores de estado integrados del acuífero para el intervalo  $\tau(t-1, t)$  son:

$$\Theta(\tau) = -\frac{\Phi(t) - \Phi(t-1)}{\Lambda} + \Delta t \left( \frac{\mathbf{X}|_{\Delta t}\mathbf{V}^*\Psi}{\mathbf{I} - \mathbf{E}|_{\Delta t}} \right) \mathbf{r}(\tau) \quad (4.18)$$

donde  $\Theta(\tau) \in \mathbb{R}^m$ ,  $[\text{L}^2 \text{T}]$ , es un vector que contiene los estados integrados del acuífero para el intervalo de simulación  $\tau$ . Esta expresión, junto con (2.40), se usa para cuantificar el volumen de agua intercambiado entre las masa superficial y el acuífero para un subconjunto  $\mathbb{I}$  que contiene  $f$  bloques activos, cada uno de ellos con una numeración topológica definida según la discusión del apartado 2.8.1. Así, sustituyendo  $\Theta$  por  $\Phi$  en (2.40) se llega a:

$$v_{\tau}^{\mathbb{I}}(\tau) = \left[ \sum_{z=1}^f cv_{k_z} \Delta x_{k_z} \Delta y_{k_z} \mathbf{V}_{k_z:k_z,1:m} \right] \Theta(\tau) + \sum_{z=1}^f cv_{k_z} \Delta x_{k_z} \Delta y_{k_z} (u_{k_z} - u_{k_z}^e) \Delta t \quad (4.19)$$

que es análoga a la ecuación (2.40), pero se encuentra integrada en el tiempo.

### 4.3. Truncamiento modal de un modelo de flujo subterráneo mediante el método de los autovalores

Si el tamaño del modelo de flujo permite efectuar el cálculo de todos los modos asociados al problema generalizado de autovalores presentado en la ecuación (4.4), una opción efectiva para reducir el tamaño del modelo es ejecutar un truncamiento de los modos superiores en la ecuación (4.17). Con ello se retienen los  $m$  primeros modos, correspondientes a los menores autovalores del espectro, los cuales suelen representar la mayor parte de la respuesta del sistema. Para efectos prácticos de reducción, Sahuquillo y Andreu (1988) han propuesto dos opciones de truncamiento: traumático y conservativo.

El truncamiento traumático restringe el número de términos adoptados en la ecuación de estados del acuífero para fines de simulación, sin llevar a cabo consideraciones adicionales acerca de alguna(s) variable(s) de respuesta del acuífero. Tal aproximación ha demostrado ser apropiada para disminuir el número de cálculos en el ordenador y acelerar la ejecución del modelo, pero supone la desventaja de que cierta fracción de la masa de agua que entra o sale del acuífero, por efecto de las acciones exteriores, no se contabiliza en la interacción río-acuífero. De esta forma, los resultados de las simulaciones agregadas para todo el acuífero no cumplen con la ecuación de continuidad, lo cual es del todo indeseable.

En cambio, el truncamiento conservativo propende por aplicar la ecuación de continuidad sobre el acuífero para asegurar una representación más detallada de sus interacciones con las masas de agua superficiales, conservando las ventajas de eficiencia computacional introducidas en el truncamiento traumático. La conceptualización del procedimiento es análoga a la presentada para soluciones analíticas, de acuerdo con los MPE, discutidos en el apartado 3.4. La idea del esquema conceptual de conservación es agrupar la masa residual, que no interviene en la parte efectiva del truncamiento, en un estado adicional que se incluye en la ecuación de estados reducida del modelo resuelto por el MAV. Entonces, la función básica de dicho estado residual es almacenar el agua necesaria para mantener la ecuación de continuidad en el sistema hidrogeológico. Para lograr lo anterior, se utilizan  $m$  modos más uno residual adicional, que agrega la acción conjunta de los  $n - m$  modos residuales despreciados, con lo que se tienen  $p = m + 1$  componentes en el vector de estados asociados con el mismo número de modos significativos en la ecuación de estado.

Primero, definiendo la matriz diagonal  $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , con dimensiones [L], que contiene el volumen correspondiente a cada uno de los  $n$  autovectores y cuyos elementos diagonales son:

$$f_{i,i} = \sum_{k=1}^n s_{k,k} v_{k,i} \quad (4.20)$$

donde  $s_{k,k}$  es el  $k$ -ésimo elemento diagonal de  $\mathbf{S}$  y  $v_{k,i}$  es el elemento de la matriz  $\mathbf{V}$  situado en la  $k$ -ésima fila y la  $i$ -ésima columna. Los elementos fuera de la diagonal de

$\mathbf{F}$  son nulos,  $f_{i,j} = 0 \quad \forall i \neq j$ . Ahora, premultiplicando el vector de estado del acuífero, ecuación (4.17), por la matriz de volumen acumulado bajo los autovectores,  $\mathbf{F}$ , se llega a la expresión para el volumen de agua acumulado por encima del nivel de referencia, que se escribe como:

$$v(t) = \mathbf{F} \mathbf{E}|_{\Delta t} \Phi(t-1) + \mathbf{F} \mathbf{X}|_{\Delta t} \mathbf{V}^* \Psi \mathbf{r}(\tau) \quad (4.21)$$

donde  $\mathbf{E}|_{\Delta t}$ ,  $\mathbf{X}|_{\Delta t}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\Psi \in \mathbb{R}^{n \times n_a}$ ,  $\mathbf{r}(\tau) \in \mathbb{R}^{n_a}$  y  $\Phi(t-1) \in \mathbb{R}^n$ , es decir, se consideran todos los modos en la solución por el MAV, en otras palabras, se hace  $m = n$  en las expresiones desde (4.1) hasta (4.19) en el apartado 4.2.2.

Asimismo, la expresión (4.21) es análoga a (3.20), obtenida para la solución analítica por el MPE, con lo cual resulta evidente que para el caso de solución numérica también vale la analogía de los depósitos virtuales que fue analizada en el apartado 3.4. Así, esta analogía establece que la respuesta global de un acuífero que se ha discretizado espacialmente en  $n$  nodos, se asimila a la descarga de  $n$  depósitos virtuales, los cuales reciben cierto porcentaje de las acciones exteriores actuando sobre el acuífero y tienen asociados coeficientes de descarga dados por los autovalores calculados en el problema general de autovalores planteado en la ecuación (4.4). Como en la solución analítica, estos depósitos no representan zonas físicas del acuífero, sino que se encuentran embebidos en el subespacio donde se ha proyectado la solución del flujo del acuífero (Pulido-Velázquez *et al.*, 2007b).

El procedimiento para realizar la simulación de la relación río-acuífero es equivalente al desarrollado para el MPE, descrito detalladamente en el apartado 3.4. Así, se define a  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n \times n_a}$ , como la matriz que contiene los coeficientes de reparto para todos los modos del sistema y las  $n_a$  acciones exteriores actuando sobre el acuífero, la cual se calcula como:

$$\mathbf{B} = \mathbf{F} \mathbf{V}^* \Psi \quad (4.22)$$

donde, para cumplir la ecuación de continuidad, la sumatoria de los elementos en cada una de sus columnas es la unidad. Ello constituye la propiedad básica del sistema que se aprovecha para realizar el truncamiento conservativo. Ahora bien, sustituyendo (4.22) en (4.21) y multiplicando el resultado obtenido por  $\mathbf{F}^{-1}$ , la ecuación de estado del sistema se escribe en función de la matriz de coeficientes de reparto, como sigue:

$$\Phi(t) = \mathbf{E}|_{\Delta t} \Phi(t-1) + \mathbf{X}|_{\Delta t} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}(\tau) \quad (4.23)$$

Ahora bien, al considerar el sumando derecho de la ecuación (4.23), que contiene los efectos de las acciones exteriores sobre el cambio del estado del acuífero, y nombrándolo como  $\mathbf{D}|_{\Delta t} = \mathbf{X}|_{\Delta t} \mathbf{F}^{-1} \mathbf{B} \mathbf{r}(\tau) \in \mathbb{R}^n$ , se obtiene una forma simplificada de dicho estado:

$$\Phi(t) = \mathbf{E}|_{\Delta t} \Phi(t-1) + \mathbf{D}|_{\Delta t}$$

donde, manteniendo en la solución por MAV sólo las componentes de las matrices de simulación para las cuales  $i \leq m$  y aplicando la conservación de masa para los vectores columna en la matriz de coeficientes de reparto, la matriz  $\mathbf{D}|_{\Delta t}$  truncada toma la forma:

$$\hat{\mathbf{D}}|_{\Delta t} = \left[ \begin{array}{cccc|c} x_1 f_1^{-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x_2 f_2^{-1} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_m f_m^{-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & x_p f_p^{-1} \end{array} \right] \left[ \begin{array}{ccc} b_{1,1} & \dots & b_{1,n_a} \\ b_{2,1} & \dots & b_{2,n_a} \\ b_{3,1} & \dots & b_{3,n_a} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & \dots & b_{m,n_a} \\ \hline b_{p,1}^c & \dots & b_{p,n_a}^c \end{array} \right] \left[ \begin{array}{c} r_1(\tau) \\ r_2(\tau) \\ r_3(\tau) \\ \vdots \\ r_{n_a}(\tau) \end{array} \right]$$

donde  $p = m + 1$ ,  $x_i$ ,  $f_i$ ,  $b_{i,j}$  y  $r_j$ , con  $i = 1, 2, \dots, m$  y  $j = 1, 2, \dots, n_a$ , son las componentes de las matrices asociadas  $\mathbf{X}|_{\Delta t}$ ,  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{B}$  y  $\mathbf{r}(\tau)$  y los componentes  $b_{i,j}^c$  representan

los coeficientes de reparto complementarios que se evalúan para mantener la continuidad agregada del sistema hidrogeológico. Dichos repartos complementarios se calculan como:

$$b_{p,j}^c = 1 - \sum_{j=1}^m b_{i,j} \quad (4.24)$$

Así, al preservar la continuidad en el acuífero, se obtiene el mismo resultado al estimar el volumen de intercambio acuífero-sistema superficial en un intervalo de tiempo  $\tau(t-1, t)$  por balance a partir de la variación en el volumen almacenado, según la ecuación (4.21), que por integración del caudal instantáneo, según la expresión (4.19), para un conjunto de bloques  $\mathbb{I}$  que contiene todos los bloques pertenecientes a la conexión río-acuífero.

Finalmente, la ecuación de estados del sistema para el caso de truncamiento conservativo se define como:

$$\hat{\Phi}(t) = \hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t} \hat{\Phi}(t-1) + \hat{\mathbf{X}}|_{\Delta t} \hat{\mathbf{F}}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{r}(\tau) \quad (4.25)$$

donde  $\hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}|_{\Delta t}$ ,  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ,  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{p \times n_a}$ ,  $\mathbf{r}(\tau) \in \mathbb{R}^{n_a}$ ,  $\hat{\Phi}(t) \in \mathbb{R}^p$  y  $\hat{\Phi}(t-1) \in \mathbb{R}^p$ .

Del procedimiento de truncamiento conservativo se notan dos características importantes: (i) se debe disponer de todos los modos del sistema, es decir, los  $n$  autovalores y autovectores  $n$ -dimensionales que cumplen con la ecuación (4.4), antes de efectuar la reducción del modelo y (ii) de la ecuación (4.25) se observa que el componente residual de continuidad en la solución truncada por el MAV sólo aplica para variables agregadas en todo el dominio del acuífero, en otras palabras para los volúmenes de agua almacenados en el dominio del acuífero,  $v(t)$ , y la relación río-acuífero a lo largo de toda la red de drenaje,  $Q_r(t)$ . Esta última característica tiene como consecuencia que, para el cálculo de variables distribuidas como alturas piezométricas o relaciones río-acuífero parciales, debe usarse el truncamiento traumático para  $m$  modos. Por consiguiente, para dichas variables todavía vale la ecuación (4.25) para el cálculo reducido de los estados del acuífero, pero las matrices de simulación vienen dadas como  $\hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t}$ ,  $\hat{\mathbf{X}}|_{\Delta t}$ ,  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ ,  $\mathbf{r}(\tau) \in \mathbb{R}^{n_a}$ ,  $\hat{\Phi}(t)$ ,  $\hat{\Phi}(t-1) \in \mathbb{R}^m$ , descartándose el estado residual de continuidad agregado.

## 4.4. Caso de referencia

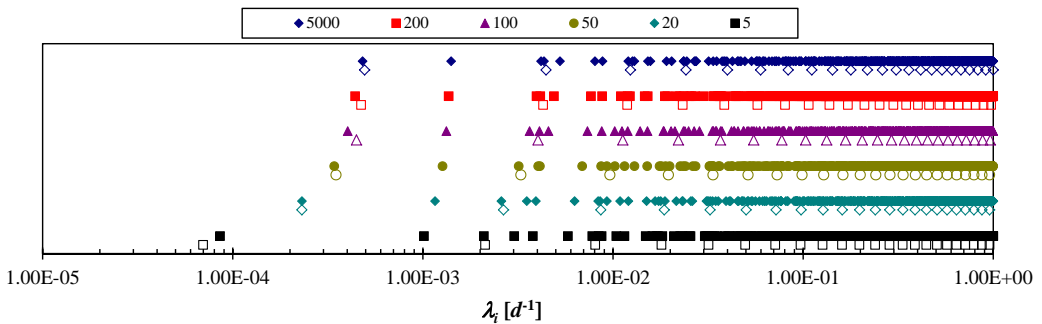
Nuevamente se considera el acuífero rectangular homogéneo de referencia estudiado en la sección 3.6, el cual se ha sometido a acciones exteriores distribuida y puntual y cuya configuración espacial se muestra en las figuras 3.2 y 3.3, respectivamente. La magnitud y variabilidad temporal de dichas acciones exteriores vienen dadas según se ha presentado previamente en las figuras 3.7 y 3.10 para recarga y bombeo concentrado, respectivamente. Igualmente, para el caso con recarga uniforme, las localizaciones donde se controla la variación temporal de las alturas piezométricas son aquellas definidas en el apartado 3.6.2.

En esta sección se presentan los resultados de un análisis numérico semejante al efectuado mediante las soluciones analíticas en el apartado 3.6, pero utilizando modelos reducidos por el MAV con truncamiento conservativo. Para la implementación computacional de estos modelos reducidos, se ha utilizado una discretización espacial idéntica a la diseñada para el modelo numérico por DF descrito en la sección 3.6. Entonces, el dominio espacial del acuífero se ha representado usando 3750 bloques activos cuadrados con tamaño uniforme de 100 m, mientras que 75 bloques adicionales corresponden a la conexión río-acuífero; ésta se ha modelado imponiendo una condición de contorno del tipo Cauchy en dichos bloques y asumiendo que su parametrización se expresa según la conductancia definida en la ecuación (3.41), a diferencia de lo presentado en el capítulo 3, donde los resultados

obtenidos se mostraron en función de la conductividad hidráulica de lecho de río equivalente. Para considerar diferentes escenarios en la parametrización de la relación río-acuífero, las conductancias en los bloques de contorno de río varían logarítmicamente entre 5000 y 5 m<sup>2</sup>/d.

#### 4.4.1. Estudio comparativo del problema de autovalores para las soluciones analíticas y numéricas

Se han calculado todos los autovalores del acuífero rectangular homogéneo de referencia utilizando una técnica de transformaciones matriciales del problema de autovalores asociado. En principio, el problema generalizado, simétrico y definido positivo de la ecuación (4.4) se convierte en uno estándar efectuando una descomposición de Cholesky. Posteriormente, sobre el problema estándar resultante se ejecuta una tridiagonalización (Householder, 1958), seguida por una factorización QL (Wilkinson, 1965, 1968). Para finalizar, los autovectores que corresponden a la solución de dicho problema estándar se someten a una transformación inversa para llevarlos al espacio columna generado por el sistema de ecuaciones lineales del problema de autovalores generalizado original. Las características principales de esta metodología, junto con consejos de implementación computacional, son descritos por Press *et al.* (1986, 1997). Una vez obtenidos los 3825 autovalores y autovectores que conforman los modos del modelo, se calculan los volúmenes bajo cada autovector, según la ecuación (4.20), y los factores de reparto asociados, mediante (4.22).

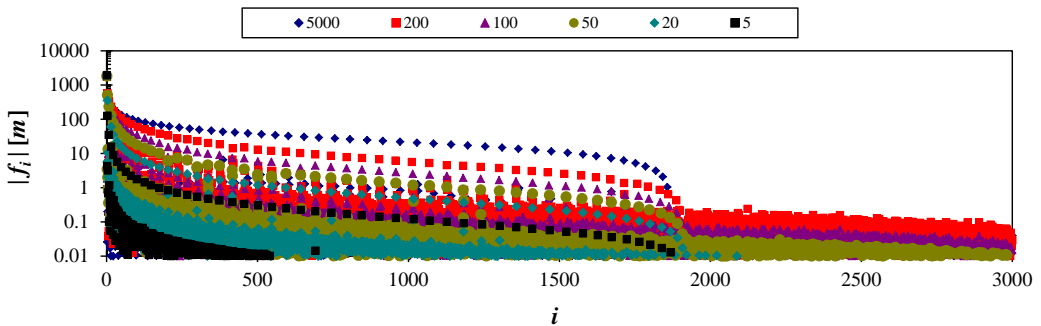


**Figura 4.1.** Autovalores para el acuífero de referencia según las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. Se ha superpuesto los autovalores calculados para los modelos numéricos por el MAV, de acuerdo con las viñetas rellenas, con los correspondientes a los PRSL asociados al MPE equivalente, a su vez representados mediante viñetas huecas.

En la figura 4.1 se presentan los autovalores obtenidos para cada conductancia de bloque considerada en los modelos numéricos, junto con los primeros 25 autovalores calculados para la solución analítica correspondiente; las viñetas rellenas representan a los autovalores calculados con la ecuación (4.4) mientras que, por su parte, las viñetas sin rellenar se asocian a los calculados usando la sucesión analítica proveniente del PRSL correspondiente, según la expresión (3.37). Se observa que, para la solución por el MAV se han obtenido excelentes aproximaciones de los primeros autovalores, los cuales contienen la mayor parte de la respuesta del acuífero en el espacio vectorial generado por los autovectores. También, cabe señalar la existencia de un comportamiento irregular en la evolución de la sucesión de los polos aproximados. Al respecto, para este caso rectangular, a priori, se esperarí que la solución numérica del problema de autovalores siguiera la tendencia dictada por

la solución analítica del PRSL, es decir, el primer autovalor aproximado corresponde al primer autovalor analítico, lo mismo para el segundo, etcétera. En cambio, de la figura 4.1 se concluye que: (i) la solución numérica muestra grupos de autovalores situados alrededor del polo analítico más cercano y (ii) hay autovalores de la solución numérica que no pertenecen a ninguno de estos grupos ni se encuentran cerca de algún polo de la solución analítica. Así se pone de manifiesto que en los modelos de flujo resueltos empleando el MAV existen modos principales significativos, no sucesivos en el orden creciente de los autovalores, que contienen gran parte de la respuesta del sistema hidrogeológico en el espacio columna generado por los autovectores, los estados asociados a dichos modos deben identificarse y conservarse al momento de efectuar el truncamiento del modelo.

En principio, la existencia de dichos modos principales es detectable usando algún indicador de importancia para cada autovector modal, por ejemplo su norma  $p$ . Otra opción, más afín al problema de flujo y con las ventajas de poseer significado físico y ser fácilmente implementable, es usar los volúmenes debajo de los autovectores,  $f_i$ , calculados según la ecuación (4.20). Para dicha identificación, se establece arbitrariamente un límite inferior de inclusión que puede ser, por ejemplo, considerar que los modos donde se cumpla que  $|f_i| < f_{lim}$  no son tenidos en cuenta para formar la base del subespacio de proyección del modelo, despreciando los estados del acuífero asociados a ellos. Este tipo de criterio, aunque eficiente, no tiene en cuenta el efecto que ejercen las acciones exteriores sobre la base de proyección, ignorando que tipo de excitación ocasiona mayor respuestas en los modos principales y cuales de éstos son los más excitables bajo dichas acciones impuestas.



**Figura 4.2.** Valores absolutos de los volúmenes por debajo de los autovectores en el acuífero de referencia, para las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río.

Ahora bien, en la figura 4.2 se presentan los  $|f_i|$  en escala logarítmica para el acuífero de referencia, de acuerdo con los seis valores de conductancia de bloque de conexión río-acuífero utilizados. En ella se observa que, independientemente de esa conductancia, los volúmenes bajo los autovectores presentan dos niveles diferenciados de aporte en la ecuación de estados del sistema. El primer nivel, o nivel efectivo, se asocia al aporte de los estados significativos en la solución total, es decir, aquellos cuyos modos que representan una fracción considerable de la respuesta del sistema en el espacio columna generado por los autovectores; por su parte el segundo nivel, o nivel residual, se asocia a los estados cuyos aportes a la variable de respuesta del acuífero son despreciables y, por lo tanto, son susceptibles de ser descartados al momento de reducir el modelo de flujo. Es evidente que al descartar los modos residuales, las tendencias de variación exhibidas por los  $|f_i|$  que permanecen son suaves y se aproximan mucho a las obtenidas para la solución analítica,

presentadas en la figura 3.5. Lo anterior se cumple en todas las soluciones de los problemas de autovalores generados para cada conductancia considerada.

Además, de la figura 4.2 resulta claro que, al aumentar el grado de conexión entre el río y el acuífero, se hace necesario utilizar una mayor cantidad de modos para un mismo error de aproximación en las variables de estado calculadas con el modelo reducido. Como caso extremo, estableciendo un valor límite de  $f_{lim} = 1$  m, para la conexión casi perfecta ( $C = 5000$  m<sup>2</sup>/d), según las viñetas azules, para obtener que  $|f_i| \approx f_{lim}$  deben considerarse casi 2000 modos; mientras que para una conexión muy imperfecta ( $C = 5$  m<sup>2</sup>/d), según las viñetas de color negro, el mismo volumen bajo el autovector se obtiene al considerar menos de 100 modos. Esto indica que, cuando el río y el acuífero están casi perfectamente conectados, el modelo reducido será de mayor tamaño que para conexiones más bajas.

Por otro lado, un indicador de base física que permite cuantificar la influencia de las acciones exteriores sobre el sistema hidrogeológico y detectar cuales modos son más susceptibles a dichas excitaciones es el coeficiente de reparto, que se calcula según se define en la expresión (4.22). Puesto que también se conoce que su acumulación tiene cota superior unitaria, es un valioso criterio para detectar los modos principales y para verificar, en un modelo reducido por el MAV, si la aproximación planteada es apropiada. Como para las soluciones analíticas y de acuerdo con la ecuación (3.42), se define el coeficiente de reparto acumulado para el  $m$ -ésimo modo en orden ascendente del modelo de flujo, así:

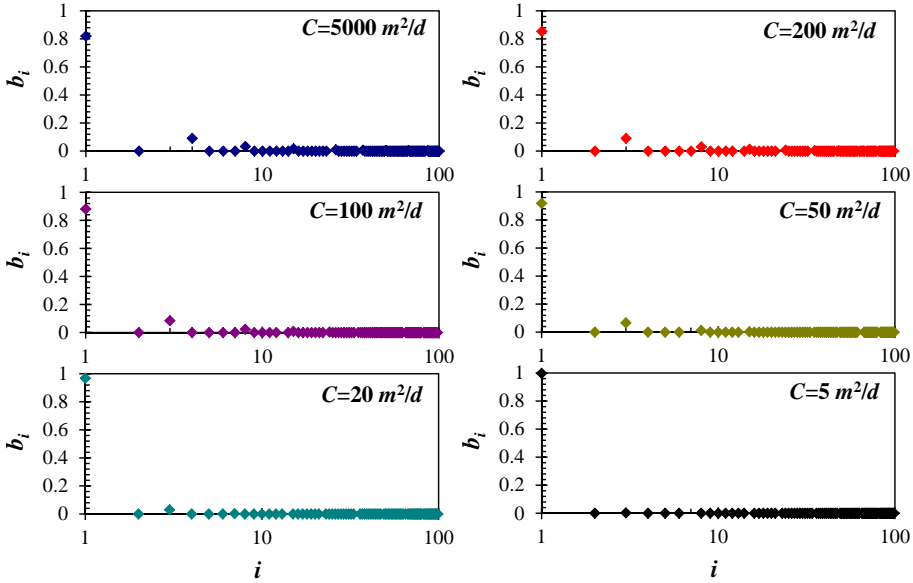
$$ba_i = \sum_{i=1}^m b_i \quad i = 1, 2, \dots, m \quad (4.26)$$

y, si se consideran todos los modos del sistema, entonces  $m = n$  y los estados en el espacio vectorial generado por los autovectores no han sido sometidos al truncamiento. Con esto, si el objetivo del análisis es lograr un modelo reducido modal mínimo, es decir, que incluya la menor cantidad posible de modos y logre representar adecuadamente la respuesta de las diferentes variables de estado del sistema, es necesario identificar, verificar y caracterizar dos tipos de propiedades de cada modo con respecto a la respuesta global del acuífero: (i) si el modo considerado es excitable de acuerdo con la acción exterior considerada y (ii) si los modos seleccionados capturan gran parte de la respuesta global del acuífero. Dado lo anterior, se propone que el coeficiente de reparto y su índice de acumulación son cantidades que cumplen el propósito de caracterización y cuantificación de las anteriores propiedades del sistema hidrogeológico invariante en el tiempo. A partir de estas consideraciones se desarrollan los aportes más importantes de esta investigación en lo referente al MAV. No obstante, previo a formalizar dichos aportes, es importante discutir acerca de su pertinencia en el análisis del acuífero con geometría sencilla que tiene soluciones analíticas conocidas.

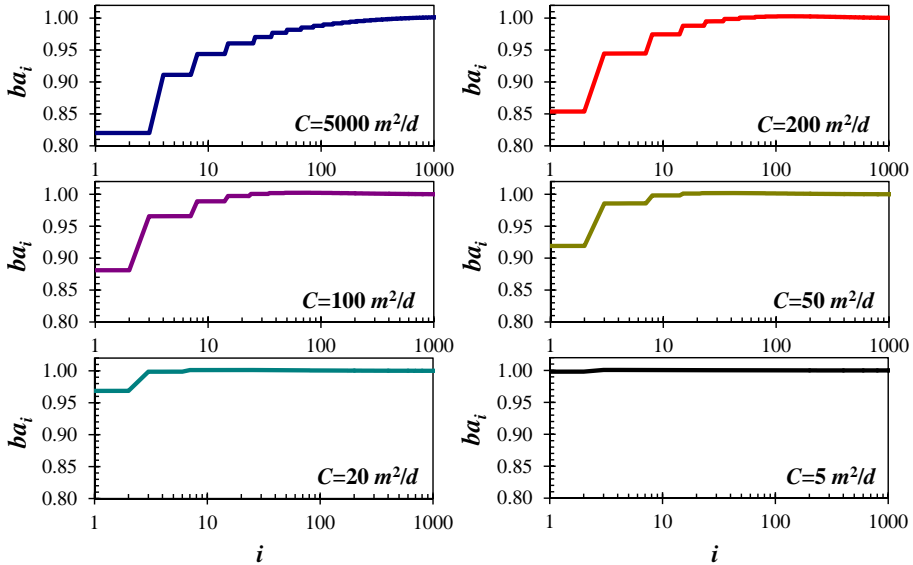
En las figuras 4.3 y 4.5 se presentan las evoluciones de  $b_i$  para el acuífero rectangular de referencia sometido a acciones exteriores distribuida uniformemente y concentrada en el centro del acuífero, respectivamente. Por su parte, las figuras 4.4 y 4.6 muestran las tendencias de aproximación de las respuestas modales con respecto al comportamiento agregado del sistema hidrogeológico, de acuerdo con el crecimiento de  $ba_i$ . Las gráficas se presentan en función de la conductancia de bloque de río asignada al modelo de flujo.

En el caso de acción exterior distribuida, de la figura 4.3 se observa que, aunque los  $b_i$  son siempre positivos, no manifiestan el decrecimiento monótono esperado que existe en la solución analítica, sino que tienden a mostrar crecimientos y decrecimientos abruptos, lo cual se origina por que, para muchos modos interiores, se han evaluado  $b_i$  cercanos a cero. Lo anterior se refleja, igualmente, en la tendencia de crecimiento de  $ba_i$ , mostrada la figura 4.4, en la cual se presentan mesetas de no crecimiento en muchos modos del sistema, de donde se deduce que el modo considerado no aporta significativamente a la respuesta del





**Figura 4.3.** Distribución de los coeficientes de reparto del acuífero de referencia sometido a acción exterior distribuida actuando uniformemente en todo su dominio espacial, para seis diferentes conductancias de bloque en la interacción río-acuífero.



**Figura 4.4.** Distribución de los coeficientes de reparto acumulado para el acuífero de referencia sometido a acción exterior distribuida actuando uniformemente en todo su dominio espacial, para seis diferentes conductancias de bloque en la interacción río-acuífero.

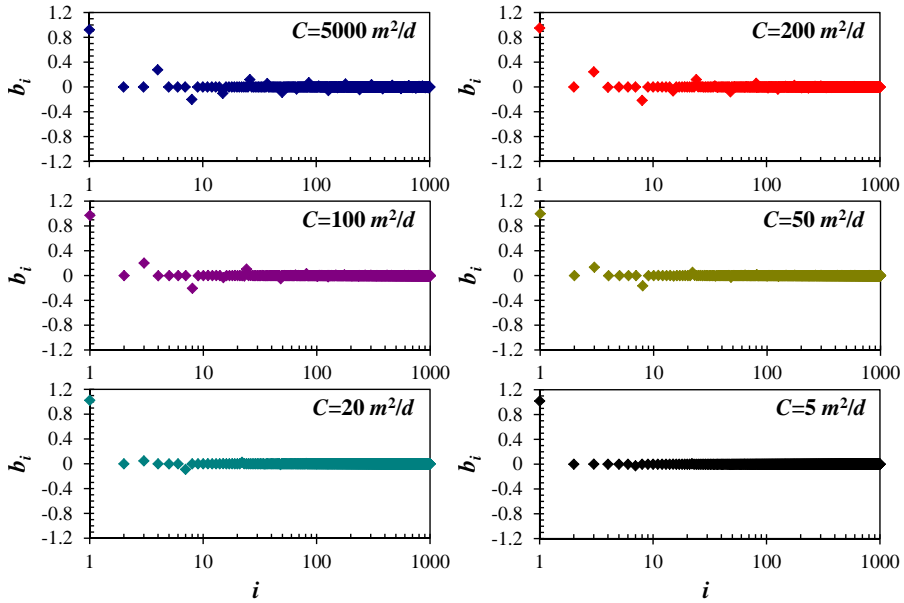


Figura 4.5. Distribución de los coeficientes de reparto del acuífero de referencia sometidos a acción exterior puntual concentrada actuando en su centro, para seis diferentes conductancias de bloque en la interacción río-acuífero.

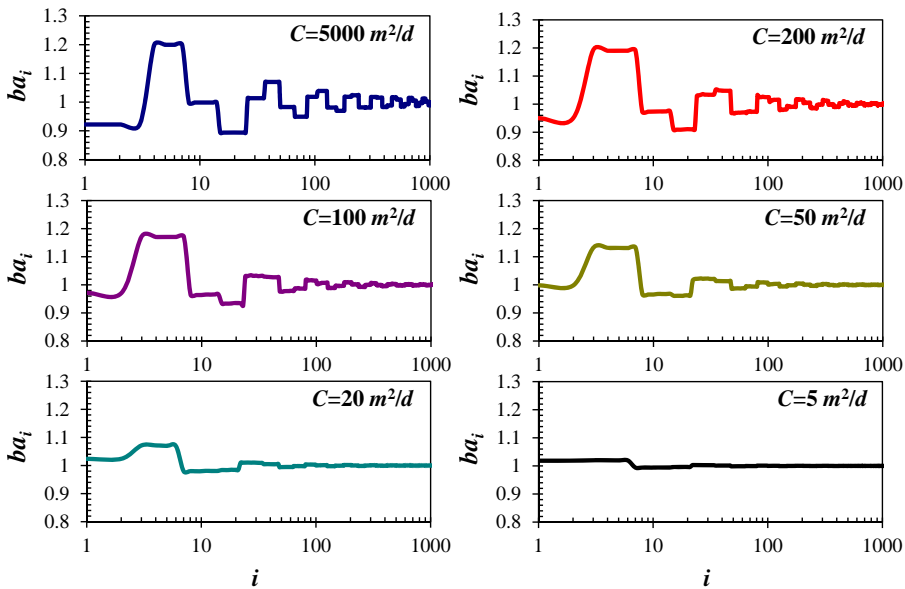


Figura 4.6. Distribución de los coeficientes de reparto acumulado para el acuífero de referencia sometido a acción exterior puntual concentrada actuando en su centro, para seis diferentes conductancias de bloque en la interacción río-acuífero.

acuífero. Este comportamiento es análogo al encontrado para la acción exterior puntual, mostrado en las figuras 4.5 y 4.6, donde se obtuvieron valores de  $b_i$  tanto positivos como negativos pero, para algunos modos interiores, éstos son cercanos a cero sin importar la conductancia de bloque de río considerada. También se ha encontrado que  $ba_i$  manifiesta mesetas de invariabilidad una vez se ha encontrado un modo efectivo, indicando nuevamente, que los modos cercanos a éste aportan poco a la solución global del sistema puesto que son los asociados a los autovectores de la componente en dirección  $y$  de la solución.

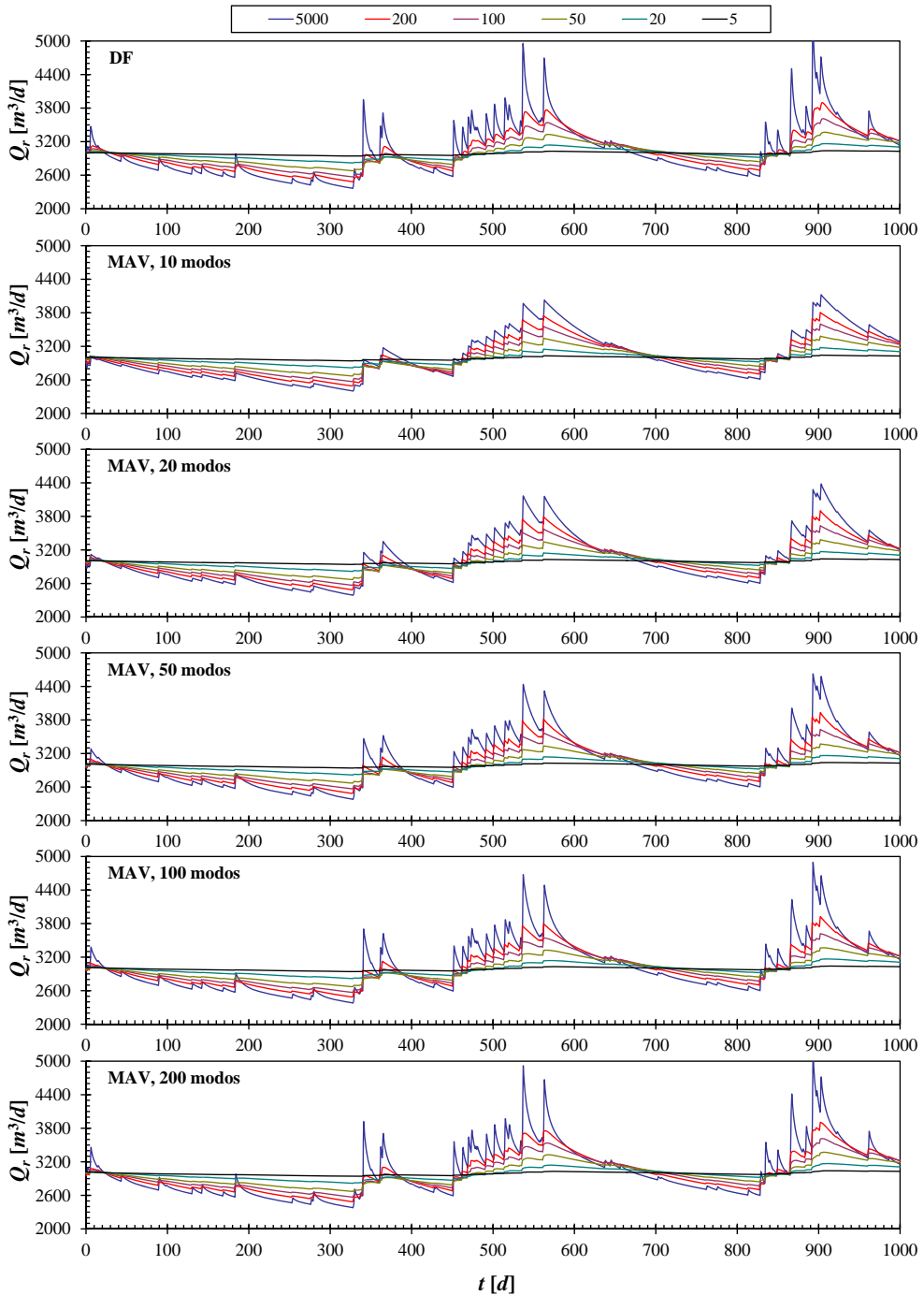
En este punto, cabe mencionar que tanto los volúmenes bajo las autofunciones como los coeficientes de reparto en dirección transversal a la de flujo, dada por el eje  $y$  en las figuras 3.2 y 3.3, son nulos puesto que las autofunciones en dicha dirección son impares, con lo cual, el resultado de su integración desde  $-W/2$  hasta  $W/2$  es cero (Sahuquillo y Cassiraga, 2010d). Esta es la razón por la cual, en este caso de acuífero con geometría rectangular, se ha detectado la presencia de tantos modos residuales en la solución numérica. Por el contrario, en un acuífero de geometría irregular o heterogéneo quizás haya una separación más difusa entre los modos que manifiestan coeficientes de reparto más altos y más bajos, es decir, pueden existir muchos modos que aportan efectivamente a los estados del acuífero.

De las anteriores características generales se deduce que: (i) a grandes rasgos, las tendencias de variación de  $b_i$  y  $ba_i$  son análogas a las encontradas para la solución analítica del PRSL correspondiente, pero se generan modos interiores que aportan poco a la solución y pueden asimilarse a los modos transversales nulos de la solución analítica; (ii) la tendencia de truncamiento es análoga a la encontrada para el caso analítico, es decir, se requiere una mayor cantidad de modos para modelos con conexión casi perfecta entre el río y el acuífero, cuando se fija un límite máximo para el complemento de  $ba_i$ , o lo que es lo mismo,  $ba_i$  tiene un valor fijo prescrito cercano a uno; (iii) el exceso de discretización espacial del modelo de flujo del acuífero de referencia ha ocasionado que, por causas numéricas, surjan modos poco dominantes o residuales, nulos en la solución analítica, pero que en el caso numérico aportan un componente muy pequeño al estado del acuífero; (iv) es posible plantear la reducción definitiva del modelo de flujo por el MAV eliminando sistemáticamente dichos modos residuales, así se construyen modelos formados por el mínimo número de estados dominantes que reproducen aceptablemente diferentes variables de respuesta del acuífero.

#### 4.4.2. Simulaciones para acción distribuida

Se ha simulado el flujo subterráneo en el acuífero rectangular de referencia, siendo éste sometido a la serie de recargas presentada en la figura 3.7. Al igual que para las soluciones analíticas, se presentan los resultados para el caudal descargado al río y las alturas piezométricas en los puntos de control  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_3$  y  $\mathbf{P}_4$ , previamente definidos y localizados en el acuífero como se describe en el apartado 3.6.2. Tanto para los modelos reducidos por el MAV como para los modelos de referencia resueltos por DF, las condiciones iniciales consisten en configuraciones de alturas piezométricas simuladas en régimen permanente tales que producen caudales iniciales de descarga de  $3000 \text{ m}^3/\text{d}$  para las seis conductancias consideradas. De acuerdo a lo anterior, dichos caudales iniciales son idénticos a los impuestos sobre los MPE análogos, que han sido discutidos en detalle en la sección 3.6.

Inicialmente, en la figura 4.7 se presentan los hidrogramas de descarga simulados mediante la implementación en DF del acuífero de referencia y los modelos reducidos equivalentes, resueltos por el MAV con truncamiento conservativo, que contienen entre 10 y 200 modos para diferentes conexiones río-acuífero. En todas las gráficas de dicha figura se presentan seis hidrogramas de descarga, cada uno de los cuales se ha simulado imponiendo un valor de conductancia de río y corresponde a un modelo reducido por el MAV de determinado tamaño o, en su defecto, a un modelo resuelto mediante DF. Así, el color de cada



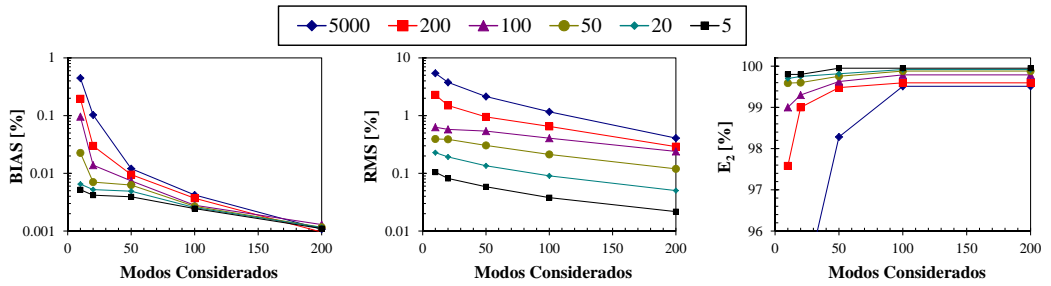
**Figura 4.7.** Hidrogramas de descarga para el acuífero de referencia sometido a una acción exterior distribuida simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MAV con truncamiento conservativo de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 5 y 5000  $\text{m}^2/\text{d}$ .

hidrograma representa la conductancia correspondiente, de acuerdo con la convención que se muestra en la parte superior de la figura. Con base en la inspección visual de los resultados obtenidos se deduce que, a medida que se incluyen mayor cantidad de modos en los modelos reducidos, se mejora el ajuste de los hidrogramas simulados, lo cual se hace más evidente en los picos asociados a los intervalos en los que se producen los episodios de recarga. Asimismo, a medida que disminuye la conexión entre el río y el acuífero, es necesario usar una menor cantidad de modos para alcanzar una representación adecuada de los hidrogramas de referencia, tanto en los periodos de agotamiento como en los de recarga.

También es notoria la influencia que tiene incluir más modos del sistema sobre la representación del caudal inicial de la simulación, especialmente para los casos más extremos de la relación entre el río y el acuífero. Por ejemplo, cuando la conexión entre éstos es casi perfecta, la cual viene dada por una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ , el caudal inicial de descarga está subvalorado por casi  $100 \text{ m}^3/\text{d}$  al ejecutar su repartición en los 10 primeros modos, cantidad que va disminuyendo paulatinamente en la medida de que se incluyen más modos en el modelo reducido. Por el contrario, para la conexión casi nula, que se asocia a una conductancia de  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ , al repartir el caudal inicial en los 10 primeros modos, éste resulta estar sobrevalorado por cerca de  $5 \text{ m}^3/\text{d}$ , aumentando a medida que se incluyen más modos en el modelo reducido hasta alcanzar un valor de  $25 \text{ m}^3/\text{d}$  para 200 modos.

En general, cuando existe alta interacción río-acuífero, la subvaloración sistemática de los caudales se atribuye al hecho de que es necesario usar una mayor cantidad de modos para lograr la adecuada representación de las condiciones iniciales puesto que los modos de aporte efectivo, es decir, aquellos que presentan un coeficiente de reparto considerable, se distribuyen sobre una fracción más amplia del espectro del sistema asociado al modelo de referencia; mientras que, en el caso de interacción imperfecta, la sobrevaloración de los caudales se genera por que existen modos residuales internos para los cuales el valor del coeficiente de reparto es pequeño, a pesar de que debería ser casi nulo, con lo cual el caudal inicial se amplifica artificialmente por causas numéricas. A pesar de lo anterior, a medida que el tiempo de simulación del modelo avanza, el efecto negativo generado por los coeficientes de reparto no nulos se va corrigiendo con el término residual de continuidad incluido en la simulación transitoria truncada por el MAV. Una opción viable para corregir este efecto negativo es desarrollar esquemas de construcción de modelos reducidos que utilicen solamente los modos dominantes que exhiben coeficientes de reparto por encima de un límite inferior preestablecido, como se señaló en el apartado 4.4.1. Otra opción es determinar un periodo de calentamiento para el modelo truncado, previo al horizonte de simulación, con el objetivo de excitar convenientemente todos los modos incluidos en él.

Ahora bien, el grado de representatividad de los modelos truncados conservativamente, con respecto a las soluciones completas por DF y el MAV, se ha cuantificado usando los índices de bondad de ajuste descritos en el apartado 3.6.2 (la raíz del error cuadrático medio relativo **RMS**, el coeficiente de sesgo relativo **BIAS** y el índice de eficiencia de Nash-Sutcliffe modificado **E<sub>2</sub>**). En este análisis, no se presentan las estimaciones de **E<sub>1</sub>** puesto que son completamente análogas a las obtenidas para **E<sub>2</sub>**, entonces las conclusiones deducidas de ambos indicadores son similares. Así, en la figura 4.8 se presenta la variación de los índices de comportamiento para los hidrogramas simulados mediante los modelos reducidos por el MAV, truncados conservativamente hasta un número de modos definido a priori entre 10 y 200, con respecto a una solución de referencia por el MAV sin truncamiento. En general, para los tres índices, se han obtenido tendencias de mejoría a medida que aumenta la cantidad de modos que conforman el modelo reducido.



**Figura 4.8.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MAV, considerando diferentes cantidades de modos, con respecto a las soluciones completas por el MAV para acción uniformemente distribuida. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloque de interacción río-acuífero. Índices **BIAS** a la izquierda, **RMS** en el centro y **E<sub>2</sub>** a la derecha.

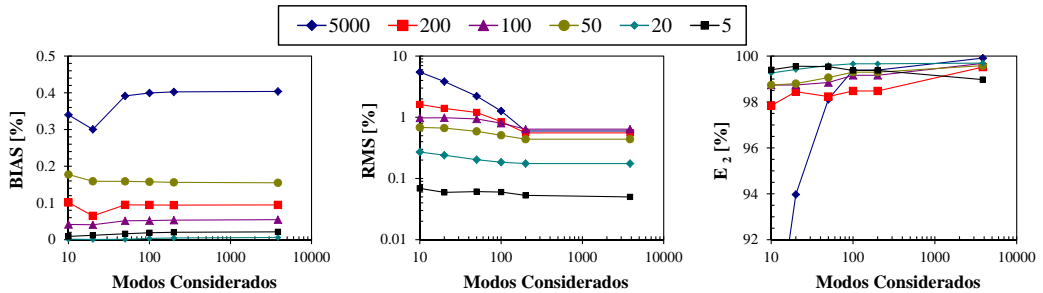
En el gráfico de la izquierda de la figura 4.8, se ve que los **BIAS** estimados para todos los modelos reducidos por el MAV con respecto a la solución no truncada tienden progresivamente a cero, confirmándose que la media de la serie simulada reproduce mejor la media de referencia a medida que se incluyen más modos en el truncamiento. Es importante resaltar que los valores de **BIAS** son pequeños incluso para los modelos más reducidos que incluyen únicamente 10 modos y para las conductancias más elevadas. Lo anterior se debe a que, cuando se impone la continuidad en el truncamiento del modelo, cierta cantidad de agua perteneciente a los modos de respuesta rápida, a los cuales les corresponden los mayores autovalores, queda almacenada en el término de la ecuación de estados correspondiente al modo de agregación de los residuos, que manifiesta una respuesta más lenta (o menos rápida, según el nivel de truncamiento) a las excitaciones impuestas.

Dado lo anterior, cuando se presenta un episodio de recarga, los picos de caudal simulados en el hidrograma de referencia son subestimados y el agua faltante, que debería contenerse en dicho pico, es contabilizada en el agotamiento consecuente. Esto se observa directamente de los hidrogramas de descarga para los modelos que consideran 10 modos, según las líneas delgadas de color rojo en los gráficos de la figura 4.8. La indeseable consecuencia directa de lo anterior es que las pendientes de las curvas de agotamiento de los hidrogramas subterráneos se modifican considerablemente, a pesar de que se representa adecuadamente el caudal medio. Por fortuna, esta situación se resuelve considerando más modos en la simulación por el MAV y deja de ser crítica a medida que la conductancia del río disminuye; lo cual se debe a que los modos de respuesta más rápida dejan de ser importantes para ríos poco conectados con el acuífero, puesto que muchos de los estados modales de respuesta rápida del sistema se asocian a coeficientes de reparto que tienden a cero.

Igualmente, para todos los casos de conexión río-acuífero considerados, se han obtenido estimaciones de **RMS** que decrecen a medida que se consideran más modos en el modelo reducido, tendiendo a un valor límite inferior nulo que se logra cuando se incorporan casi todos los modos disponibles del sistema hidrogeológico. Así, en el gráfico central de la figura 4.8 se observan las siguientes características importantes: (i) los valores máximos de **RMS** se obtuvieron para el caso de conexión casi perfecta entre el río y el acuífero, correspondiente a una conductancia de 5000 m<sup>2</sup>/d y representada mediante la línea azul, estimándose aproximadamente del 6 % para un modelo muy reducido que incluye 10 modos y disminuyendo hasta cerca del 1 % cuando se consideran 200 modos en el truncamiento;

(ii) a medida que disminuye la conexión río-acuífero, los valores máximos de **RMS** disminuyen hasta cerca del 0.1 % para una conexión río-acuífero casi nula, correspondiente un conductancia de  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ , representada mediante la línea negra, aproximándose hasta el 0.02 % para modelos formados por 200 modos; y (iii) las tendencias y tasas de decrecimiento de **RMS** son similares para todas las conductancias consideradas.

Con respecto a  $E_2$ , en la gráfica derecha de la figura 4.8 se observa que su comportamiento es análogamente inverso al obtenido para **RMS**; es decir, las eficiencias aumentan a medida que se incluyen más modos en el modelo reducido, cuando la relación río-acuífero se vuelve más imperfecta, es decir, para valores bajos de conductancia. Los menores  $E_2$ , por debajo del 90 %, se han estimado para los modelos reducidos que incluyen la menor cantidad de modos; esto debe a que, en general, los picos de los hidrogramas de descarga han sido subestimados mientras que los comienzos de las curvas de agotamiento han sido sobreestimados. Lo anterior se evidencia especialmente para elevadas conexiones río-acuífero, correspondientes a conductancias entre 5000 y  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ , líneas azul y roja en la figura 4.8, respectivamente. En contraste, para conexiones de medias a bajas, asociadas a conductancias menores a  $100 \text{ m}^2/\text{d}$ , se han obtenido eficiencias bastante aceptables, mayores al 95 % incluso para los modelos más reducidos que consideran menos de 10 modos.



**Figura 4.9.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MAV, considerando diferentes cantidades de modos, con respecto a soluciones numéricas por DF, para acción uniformemente distribuida. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloque de interacción río-acuífero. Índices **BIAS** a la izquierda, **RMS** en el centro y  $E_2$  a la derecha.

Por otra parte, en las gráficas de la figura 4.9 se presentan las variaciones obtenidas para los índices de bondad de ajuste **BIAS**, **RMS** y  $E_2$  estimados para los hidrogramas de caudal de descarga simulados por modelos truncados mediante el MAV, con respecto a la solución numérica completa por DF. Los resultados allí consignados se presentan según el número de modos considerados en el truncamiento y las conductancias en los bloques de río asignadas al modelo. Dichas gráficas exhiben tendencias similares a las previamente comentadas para la solución de referencia por el MAV sin truncamiento, con la diferencia de que existe un límite inferior no nulo para los indicadores **BIAS** y **RMS**, además de que  $E_2$  no alcanza el valor del 100 % en ninguno de los casos de relación río-acuífero considerados. Lo anterior se debe a que los esquemas conceptuales para solucionar el modelo de flujo de referencia que se están comparando son diferentes. Aún así, los índices de comportamiento obtenidos para las simulaciones mediante el MAV sin truncamiento son cercanas a las óptimas, obteniéndose **BIAS**  $< 0.5\% \approx 0\%$ , **RMS**  $< 1\% \approx 0\%$  y  $E_2 > 99.5\% \approx 100\%$ , para todas las conductancias de bloque de río consideradas.

Entonces, según los resultados del gráfico izquierdo en la figura 4.9, para los diferentes grados de conexión río-acuífero considerados, las estimaciones de **BIAS** se mantienen casi constantes, por debajo del 0.5 %, con lo cual los modelos reducidos conservan adecuadamente la media de los modelos de referencia. Es importante resaltar que, con respecto al hidrograma referencia simulado por DF, **BIAS** no disminuye a medida que decrece la conexión entre el río-acuífero, sino que exhibe tendencias erráticas. Por ejemplo, se han estimado **BIAS** mayores para el modelo con conductancia de 50 m<sup>2</sup>/d que las obtenidas para uno que usa 100 m<sup>2</sup>/d. Esto se atribuye a que, dado el poco rango de variación de dicho índice, algunas inestabilidades numéricas en el cálculo de los autovectores usados para obtener los coeficientes de reparto pueden ocasionar la acumulación de desviaciones respecto de los caudales medios de referencia. Cabe mencionar que la corrección del indeseable efecto anteriormente mencionado puede obtenerse eliminando los modos residuales que manifiestan menor influencia en el estado global del acuífero. Aún así, las estimaciones de **BIAS**, para todas las conductancias, son lo suficientemente bajas como para aceptar las tendencias medias de los hidrogramas simulados a través de los modelos reducidos.

En cambio, según se presenta en las gráficas central y derecha de la figura 4.9, los comportamientos de las estimaciones de **RMS** y **E<sub>2</sub>** de los hidrogramas de descarga simulados, con respecto al número de modos considerados en la reducción del modelo, son más consistentes con lo que se podría esperar con anterioridad. Así, para conductancias de bloque de río entre 50 y 5000 m<sup>2</sup>/d, **RMS** disminuye suavemente hasta un valor cercano al 1 %; además, para conexiones río-acuífero menores, asociadas a conductancias por debajo de 50 m<sup>2</sup>/d, las estimaciones de dicho índice manifiestan escaso decrecimiento, exhibiendo valores casi constantes cercanos a los límites inferiores correspondientes de 0.2 y 0.08 % para conductancias de 20 y 5 m<sup>2</sup>/d, respectivamente. Igualmente, se obtuvieron las más bajas eficiencias para modelos truncados formados por menos de 50 modos y para una conductancia de 5000 m<sup>2</sup>/d, según la línea azul en la gráfica derecha de la figura 4.9; mientras que para los demás casos de simulación, estas eficiencias están por encima del 97 %, con tendencias de crecimiento a medida que disminuye el rango modal truncado.

Asimismo, en la figura 4.10 se presentan las series de alturas piezométricas en los cuatro puntos de control predefinidos (**P<sub>1</sub>**, **P<sub>2</sub>**, **P<sub>3</sub>** y **P<sub>4</sub>**) simuladas mediante los modelos de flujo del acuífero de referencia, tanto en DF como utilizando el MAV sin truncamiento, para seis diferentes conductancias. En ellas se observa que los resultados son muy parecidos a los presentados en la figura 3.9, simulados mediante los MPE que usan once depósitos. En estas gráficas, las líneas gruesas de color oscuro corresponden a las alturas piezométricas obtenidas por el MAV, mientras que las líneas delgadas claras superpuestas sobre ellas representan las simuladas con los modelos implementados por DF. Se observa que, para todos los casos de conexión río-acuífero tenidos en cuenta, las piezometrías simuladas por el MAV representan adecuadamente las de referencia. En las series piezométricas de la gráfica inferior de la figura 4.10, simuladas para una conductancia de 5 m<sup>2</sup>/d, se obtuvieron pequeñas sobreestimaciones en los niveles piezométricos iniciales originadas, como se dijo antes, por incluir muchos modos residuales en el modelo resuelto por el MAV. Esta amplificación, que se manifiesta en todas las variables de respuesta del acuífero, ocurre como consecuencia de los siguientes factores: (i) inestabilidades numéricas generadas en la solución del problema de autovalores asociado a la resolución de la EDP de flujo subterráneo por el MAV, (ii) la aparición de coeficientes de repartos muy pequeños en modos donde su valor debería ser nulo y (iii) la acumulación de coeficientes de reparto muy pequeños en el término residual de continuidad de los modelos truncados por el MAV. De ahí que si existe gran cantidad de modos residuales, dicha acumulación se vuelve significativa, ocasionando que el aporte del término de continuidad sea cada vez más preponderante.



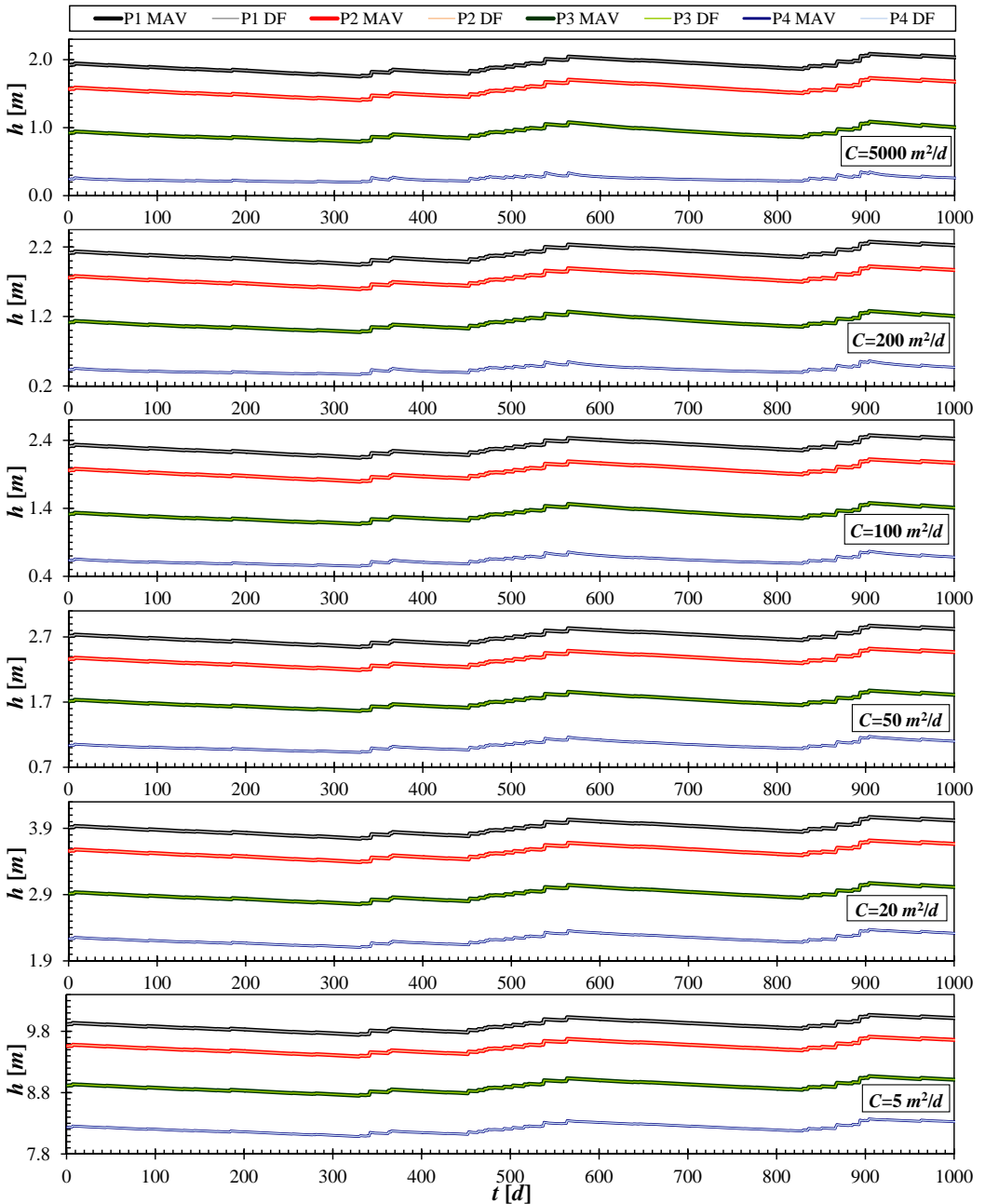
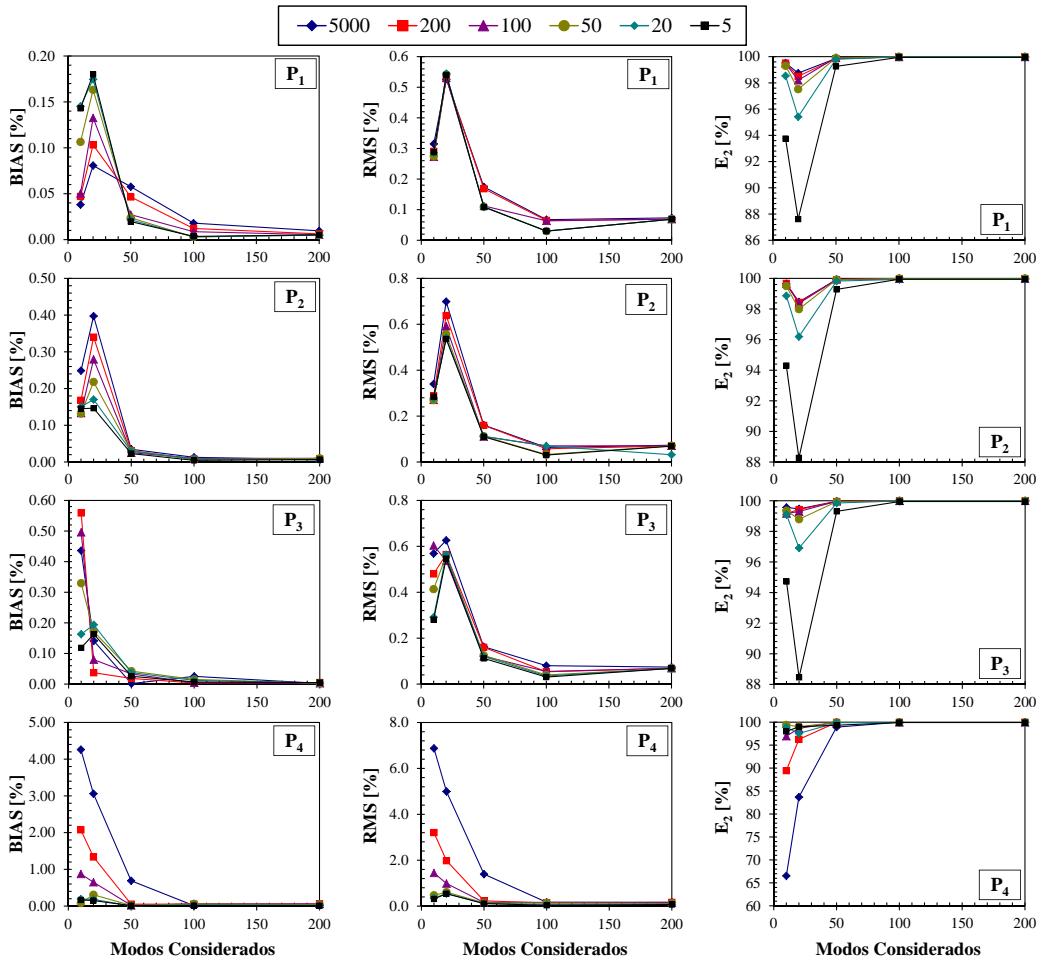


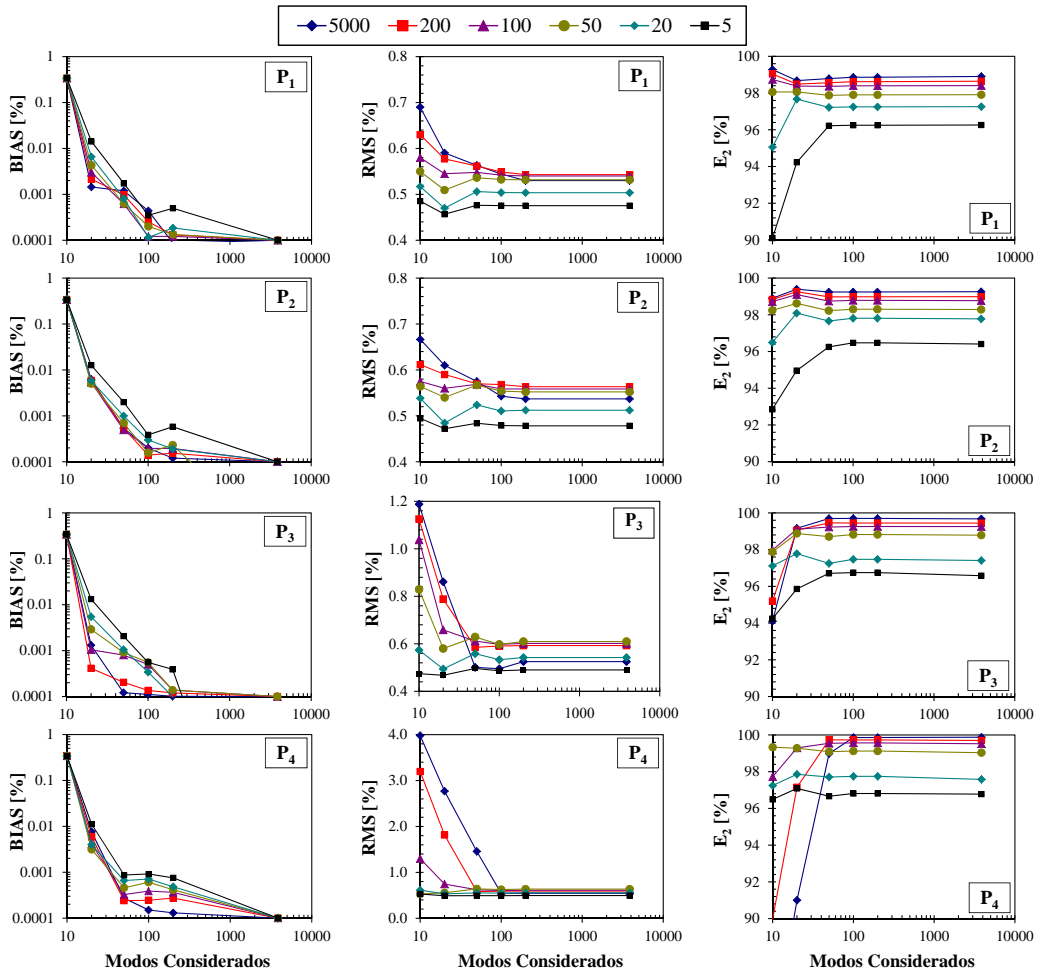
Figura 4.10. Alturas piezométricas para las cuatro localizaciones de control, calculadas con un modelo numérico por DF y un modelo discreto resueltos por el MAV sin truncamiento, para diferentes niveles de conexión río-acuífero en función de la conductancia de los bloques de río.



**Figura 4.11.** Índices de comportamiento para las series piezométricas en los puntos de control, simuladas con modelos reducidos por el MAV para diferentes niveles de truncamiento, con respecto a soluciones de referencia por el MAV que incluyen todos los modos del modelo de flujo.

El comportamiento de las alturas piezométricas simuladas mediante los modelos truncados, con respecto a las obtenidas empleando los modelos de referencia completos resueltos por DF y el MAV, se evalúa con los indicadores **BIAS**, **RMS** y  $E_2$ , como se presentó antes para los hidrogramas de descarga. Los resultados encontrados para dichos índices de ajuste se resumen en las figuras 4.11 y 4.12, en función del número de modos considerados para el truncamiento, la localización de los puntos de control en el dominio espacial del acuífero y las conductancias asignadas a los bloques en su conexión con el río.

Así, tomando como referencia al modelo simulado por el MAV sin truncamiento, en la figura 4.11 se observa que, para las alturas piezométricas en los puntos de control  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$ , todos los índices de comportamiento manifiestan una zona de inestabilidad cuando se consideran entre 1 y 50 modos, en la cual éstos fluctúan a medida que se incluyen más modos en el truncamiento. Una vez se ha superado dicha inestabilidad, las estimaciones decrecen monótonamente hacia los óptimos a medida que se consideran modelos reducidos



**Figura 4.12.** Índices de comportamiento para las alturas piezométricas en los puntos de control, simuladas con modelos reducidos por el MAV para diferentes niveles de truncamiento, con respecto a una solución numérica por DF.

de mayor tamaño. En cambio, para las series piezométricas en  $P_4$ , los dos primeros índices decrecen suavemente hacia los óptimos y el tercero crece a medida aumenta el número de modos considerado, además no existe la zona de transición previamente descrita. También cabe afirmar que el rango de variación para cada índice se modifica de acuerdo con el punto de control considerado. A propósito, en la figura 4.11 se observa que dicho rango de variación es mayor en los puntos de control ubicados en regiones cercanas a la conexión entre el río y el acuífero. Aparte de lo anterior, vale la pena mencionar los siguientes resultados: (i) el máximo **BIAS** estimado en  $P_1$  es de 0.16%, mientras que en  $P_4$  dicho valor se incrementa hasta el 4.2%; (ii) el máximo **RSM** se sitúa en  $P_1$  con un valor de 0.55%, aumentando hasta cerca de un 7% en  $P_4$ ; y (iii) la estimación mínima de  $E_2$  en  $P_1$  alcanza un valor del 87.5%, disminuyendo hasta el 65% en  $P_4$ .

En principio, como se observa en las gráficas de la columna izquierda de la figura 4.11, los **BIAS** estimados para las series piezométricas en todos los puntos de control exhiben

pocas fluctuaciones al aumentar el número de modos que componen el modelo reducido, independientemente del grado de conexión río-acuífero impuesto en el modelo de referencia. También se observa que los máximos **BIAS** han sido estimados en  $\mathbf{P}_4$ , para una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ , cuando el modelo reducido está formado por menos de 50 modos; a pesar de ello, al usar más de 100 modos en la modelación se garantiza la reproducción de la altura piezométrica media de referencia. Más aún, en  $\mathbf{P}_4$  los máximos coeficientes de sesgo, estimados para modelos formados por sólo 10 modos, decrecen mientras la conexión río-acuífero disminuye, lo cual es cualitativamente análogo al comportamiento encontrado en la simulación de los hidrogramas, según la gráfica izquierda de la figura 4.8. Ahora bien, las estimaciones de **RMS** para las alturas piezométricas simuladas, con respecto a las de referencia, se presentan en la columna central de la figura 4.11. Allí se observa que las tendencias de **RMS** con respecto al tamaño del modelo reducido son similares en los puntos de control  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  y  $\mathbf{P}_3$ , obteniéndose estimaciones que alcanzan el 0.6% al considerar sólo 20 modos y disminuyendo hasta un 0.04% cuando se incluyen más de 100 modos en el truncamiento. Para **RMS**, nuevamente el punto de control más crítico es  $\mathbf{P}_4$ , observándose estimaciones máximas entre el 2 y el 7%, para las mayores conductancias.

Igualmente, en los gráficos de la columna izquierda de la figura 4.11 se presentan las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  para las alturas piezométricas simuladas con los modelos reducidos con respecto a un modelo resuelto por el MAV sin truncamiento. Para todos los puntos de control y todas las conductancias consideradas, los resultados muestran un comportamiento análogo al exhibido por el **RMS**, obteniéndose las menores estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  para los modelos reducidos conformados por menos de 50 modos. En especial, para las series piezométricas simuladas en  $\mathbf{P}_4$ , se han estimado eficiencias que varían entre el 65 y el 95% para las conductancias más elevadas, al emplear modelos formados únicamente por 10 modos. Estos bajos valores de la eficiencia se generan por que, en esa localización, los picos de las alturas piezométricas están fuertemente correlacionados con los picos del hidrograma de descarga y, por lo tanto, son más sensibles a altas fluctuaciones en los caudales, en especial cuando la conexión entre el río y el acuífero es considerable. Entonces, resulta claro que se hace necesario conservar más modos de respuesta rápida en los modelos reducidos cuando uno de los propósitos de la simulación es reproducir detalladamente los niveles piezométricos del acuífero en zonas cercanas al río con el cual se conecta.

Con respecto al modelo de referencia para el acuífero rectangular simulado por DF, en la figura 4.12 se presentan los resultados de las estimaciones obtenidas para los tres índices de comportamiento. En ellas se observa que existen tendencias hacia los óptimos a medida que aumenta el tamaño de los modelos reducidos. Así, en la columna izquierda de dicha figura se presentan las estimaciones de **BIAS**, donde se observa que existen límites superior e inferior de acotamiento para la variabilidad de dicho índice para todos los puntos de control de alturas piezométricas establecidos. Dichos límites superior e inferior son 0.5 y 0.001%, respectivamente, para todas las conductancias consideradas. Resulta claro que, en todos los casos de conexión río-acuífero considerados, los mayores **BIAS** se presentan para los modelos reducidos que sólo incluyen 10 modos, mientras que su límite inferior se alcanza cuando la simulación se efectúa con el MAV sin truncamiento; por lo tanto, aunque los rangos de variación son pequeños, los mayores **BIAS** se obtienen a medida que la conductancia de río decrece, independientemente del tamaño del modelo reducido.

Ahora bien, en la columna central de la figura 4.12 se muestra la variación de **RMS** para las series piezométricas simuladas por MAV en los puntos de control, con respecto a las correspondientes obtenidas por modelo de referencia en DF, en función de los modos considerados en el truncamiento. Las tendencias allí presentadas son decrecientes y análogas a las discutidas anteriormente, tomando las alturas piezométricas simuladas

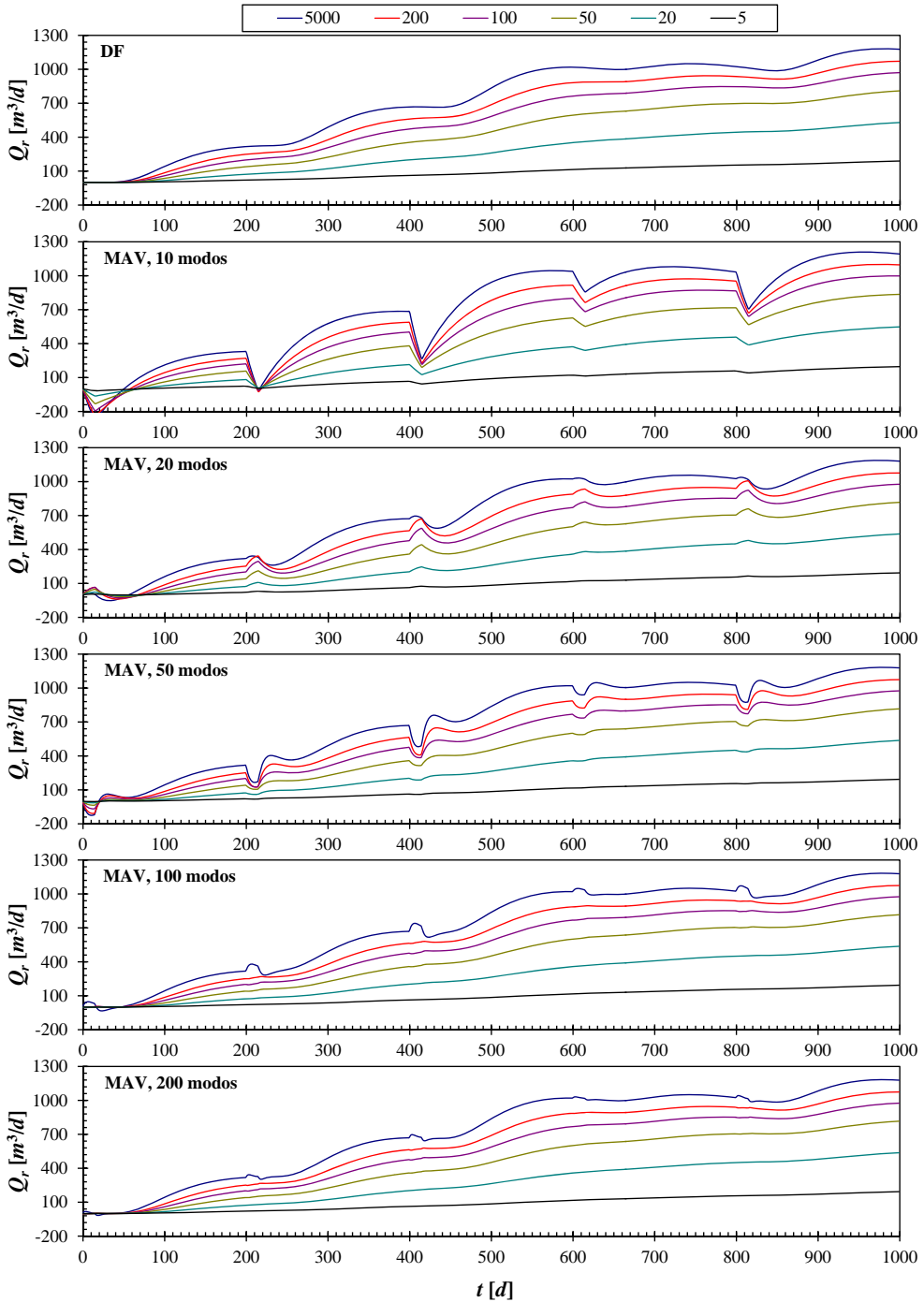
por el MAV sin truncamiento como referencia, según la figura 4.11. Este decrecimiento se estabiliza para todos los modelos reducidos evaluados cuando están formados por más de 100 modos. Por otro lado, los mayores **RMS** se han estimado al incluir pocos modos en los modelos de flujo y sus valores máximos aumentan a medida que se estudian las series piezométricas simuladas más cerca de río. Además, para las piezometrías simuladas en  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ , los **RMS** estimados son muy semejantes entre sí, presentando un estrecho rango de variación en función tanto del número de modos considerados como del grado de interacción entre el río y el acuífero, y oscilando alrededor del 0.55%. Por el contrario, los **RMS** para las series piezométricas simuladas en  $\mathbf{P}_3$  y  $\mathbf{P}_4$  disminuyen monótonamente desde sus correspondiente máximos hasta un límite inferior cercano al 0.6%; dichos máximos presentan valores de 1.2 y 4.6%, respectivamente, y se han obtenido para los modelos reducidos formados por los 10 primeros modos y una conductancia de 5000 m<sup>2</sup>/d.

Igualmente, en la columna derecha de la figura 4.12 se presentan las variaciones de  $\mathbf{E}_2$  para las alturas piezométricas simuladas por el MAV en los cuatro puntos de control, en función de los modos considerados en los modelos reducidos y el grado de conectividad río-acuífero, con respecto a las soluciones de referencia obtenidos por DF. Se ha encontrado que las menores estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  en los puntos de control  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$  y  $\mathbf{P}_3$  aparecen para bajas conexiones entre el río y el acuífero, cuando los modelos reducidos consideran menos de 100 modos. En particular, para modelos ultra reducidos compuestos por sólo 10 modos, dichas estimaciones varían entre el 90 y el 94%. También cabe notar que, para todos los casos de conductancia,  $\mathbf{E}_2$  tiende monótonamente al límite superior alcanzado cuando las simulaciones son ejecutadas empleando el MAV sin truncamiento, cuyas cotas superiores varían entre el 96 y el 99.7%. Además, para estos tres puntos de control, sin importar el tamaño del modelo reducido estudiado, las peores estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  se presentan para una conductancia de 5 m<sup>2</sup>/d, mientras que las mejores corresponden a 5000 m<sup>2</sup>/d.

Por último, las tendencias de  $\mathbf{E}_2$  con respecto a los modos considerados en el modelo reducido por el MAV son algo más particulares en el punto de control  $\mathbf{P}_4$ , donde se obtuvieron las eficiencias más bajas, por debajo del 90%, al asumir conductancias mayores a 100 m<sup>2</sup>/d y menos de 100 modos en el truncamiento. En dichos casos,  $\mathbf{E}_2$  aumenta rápidamente a medida que se incluyen más modos, hasta llegar al límite superior correspondiente. En cambio, para los demás valores de conductancia, las estimaciones manifiestan una tendencia de variación uniforme con respecto al número de modos usados en el modelo reducido, obteniéndose valores cercanos a 96, 98 y 99.5% para conductancias de 5, 20 y 50 m<sup>2</sup>/d, respectivamente. De lo anterior se concluye que, contrariamente a los resultados encontrados para el caudal de descarga subterráneo, la bondad del ajuste de las series piezométricas alejadas del río, simuladas mediante los modelos reducidos por el MAV para el acuífero de referencia, tanto en función de la eficiencia como del error cuadrático medio, crece a medida que se considera una mejor conexión río-acuífero, manifestando cotas límites cada vez más cercanas a los valores óptimos de 0% para **RMS** y 100% para  $\mathbf{E}_2$ , al considerar mayor cantidad de modos de respuesta rápida en el truncamiento.

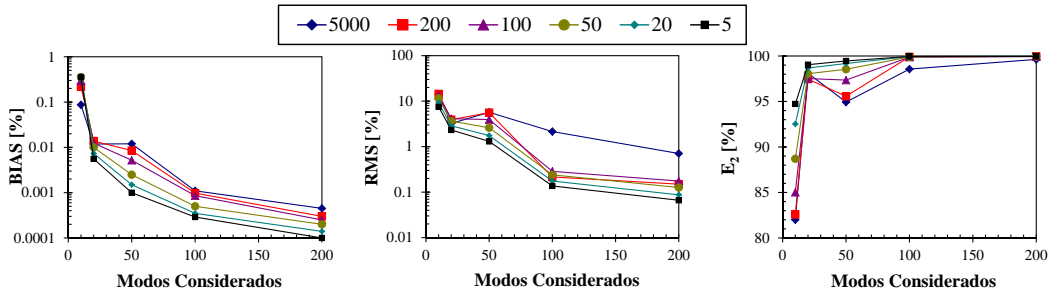
#### 4.4.3. Simulaciones para acción puntual

Se ha simulado el flujo en el acuífero rectangular de referencia sometido a un bombeo puntual de extracción localizado en su centro, cuya magnitud que varía de acuerdo con la gráfica presentada en la figura 3.11 y actúa durante 1000 días de simulación transitoria. De forma similar a las soluciones analíticas, discutidas en el apartado 3.6.3, aquí se presentan únicamente los resultados obtenidos para el caudal detraído. Al igual que en los análisis del capítulo 3, se estimaron los índices **BIAS**, **RMS** y  $\mathbf{E}_2$  para cuantificar la representatividad de los diferentes hidrogramas simulados mediante modelos reducidos con diferentes rangos



**Figura 4.13.** Hidrogramas de detracciones para el acuífero de referencia sometido a un bombeo concentrado, simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MAV con truncamiento conservativo de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 5 y 5000  $m^2/d$ .

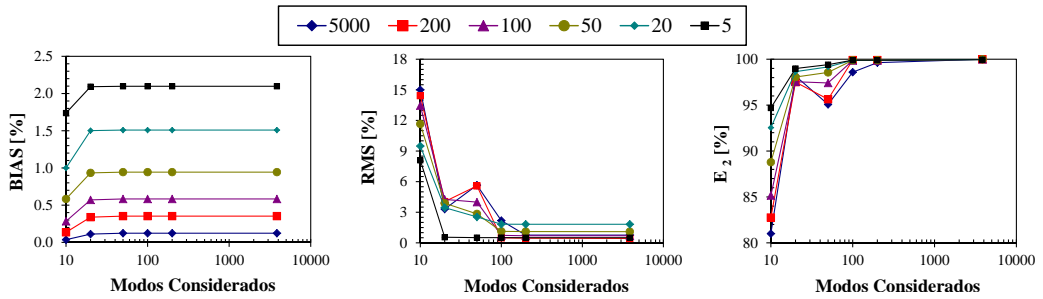
de truncamiento, con respecto a los modelos de referencia resueltos usando el MAV sin truncamiento y soluciones numéricas por DF. Primeramente, en la figura 4.13 se observa que, para conductancias menores a  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ , las detracciones simuladas mediante los modelos reducidos por el MAV, que incorporan 100 modos inferiores o menos, se ajustan bastante bien a las de referencia. Por el contrario, para una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ , los resultados satisfactorios se encuentran para modelos reducidos que incorporan 200 o más modos inferiores, especialmente en los intervalos donde se presenta la acción del bombeo. Lo anterior pone de manifiesto que, durante esos intervalos, los modos de respuesta rápida juegan un papel más preponderante en la dinámica del flujo subterráneo en el acuífero, especialmente cuando se presentan condiciones de alta interacción entre éste y el río.



**Figura 4.14.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MAV, con respecto a las soluciones que incluyen todos los modos y una acción puntual de extracción localizada en el centro del acuífero de referencia. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloque de interacción río-acuífero. Índices **BIAS** a la izquierda, **RMS** en el centro y **E<sub>2</sub>** a la derecha.

En la figura 4.14 se presentan las variaciones de los índices de bondad de ajuste para el modelo de referencia resuelto por el MAV sin truncamiento. Para los tres índices se observa que las estimaciones menos óptimas se obtienen para modelos que corresponden a conductancias mayores a  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ , es decir, aquellas que representan condiciones cercanas a la conexión río-acuífero perfecta. Asimismo, a medida que el modelo reducido considera mayor cantidad de modos, las estimaciones de los índices tienden monótonamente a los óptimos, con excepción de los modelo reducidos compuestos por 50 modos y conductancias mayores a  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ , en los cuales se observa un descenso considerable de su representatividad, especialmente para **E<sub>2</sub>**. El comportamiento anterior se atribuye a que, para dicha configuración del modelo reducido, el truncamiento se ha efectuado en una región del espectro donde el coeficiente de reparto acumulado no es lo suficientemente cercano a uno y, por lo tanto, el término residual de la solución por el MAV puede llegar a representar un elevado porcentaje en los estados del acuífero. Este efecto adverso se corrige truncando en algún modo cuyo coeficiente de reparto acumulado sea cercano a uno. Del mismo modo, cuando se comparan las simulaciones obtenidas por modelos reducidos que incluyen la misma cantidad de modos, aquellas que corresponden a una menor conectividad río-acuífero exhiben valores más óptimos para los tres índices de comportamiento evaluados.

Ahora bien, en la figura 4.15 se presentan las variaciones de los tres índices de comportamiento que se han estimado para los hidrogramas de detracción simulados mediante los modelos reducidos por el MAV, con respecto al modelo de referencia resuelto por DF. Se observa que, en general, las estimaciones mejoran paulatinamente hasta llegar a un tamaño en el cual la incorporación de un mayor número de modos no mejora sustancialmente la



**Figura 4.15.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MAV, con respecto a las soluciones numéricas por DF y una acción puntual de extracción localizada en el centro del acuífero de referencia. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloque de interacción río-acuífero. Índices **BIAS** a la izquierda, **RMS** en el centro y **E<sub>2</sub>** a la derecha.

reproducción del modelo de referencia. En este caso particular de aplicación, 200 modos son suficientes para obtener resultados aceptables sin importar el valor de conductancia asignado para la conexión río-acuífero. Ahora bien, los peores índices de comportamiento se han obtenido para conductancias elevadas, mayores de  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ , con **RMS** cercanos al 15 % y **E<sub>2</sub>** menores al 85 %, para modelos reducidos que incluyen los 50 modos inferiores o menos. Dicho comportamiento se origina debido a las diferencias entre los caudales detraídos simulados durante los períodos donde se impone el bombeo sobre el acuífero.

En particular, se han encontrado incrementos súbitos en las estimaciones de **RMS** y **E<sub>2</sub>** para los modelos reducidos formados por 50 modos, cuyas conductancias de río son mayores a  $100 \text{ m}^2/\text{d}$ . De forma análoga a los modelos de referencia resueltos por el MAV completo, la anterior situación se debe a que el truncamiento se ha llevado a cabo en una región del espectro donde el coeficiente de reparto acumulado no está cerca de uno y, por lo tanto, el término residual de la solución cobra mayor importancia en los estados del acuífero. En cambio, para las demás conductancias consideradas, las estimaciones de **RMS** y **E<sub>2</sub>** son bastante aceptables puesto que exhiben valores por debajo del 5 % y por encima del 97 %, respectivamente, para modelos reducidos que incluyen 50 o más modos inferiores. Asimismo, en la gráfica izquierda de la figura 4.15 se observa que el índice **BIAS** exhibe estimaciones por debajo del 2.5 % en todos los modelos reducidos planteados. Por lo tanto, se deduce que los caudales de detracción medios de referencia han sido adecuadamente representados en los modelos reducidos, lo cual era de esperarse debido al esquema de conservación de la masa impuesto en el procedimiento de truncamiento del modelo.

## 4.5. Conclusiones y discusión

En este capítulo se ha presentado el esquema conceptual para la simulación del flujo en acuíferos lineales invariantes en el tiempo mediante el MAV junto con el esquema clásico de reducción modal por truncamiento de los estados, discutido ampliamente por diferentes autores (Andreu, 1984; Sahuquillo y Andreu, 1988; Gambolati, 1993; Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2007a). En particular, Gambolati (1993) reporta que, según sus experimentos computacionales, la reducción modal por el MAV produce estados del sistema que no aportan significativamente a la solución completa del problema y afirma que modelos más reducidos se obtienen efectuando una reducción por el método de Lan-



zos, según la propuesta de Dunbar y Woodbury (1989). De acuerdo con los resultados de los experimentos computacionales presentados en esta tesis, se concluye que si se generan apropiadamente los subespacios de autovectores para reducción, la reducción modal por el MAV sí que puede usarse efectivamente para generar modelos muy reducidos que representan adecuadamente las variables de respuesta más preponderantes del acuífero, en especial, las relaciones río-acuífero cuando el modelo se debe integrar en la simulación de complejos sistemas de recursos hídricos. Para lograr lo anterior deben adoptarse criterios de base física para evaluar la inclusión de los modos dominantes en el modelo reducido.

Con base en los resultados presentados a lo largo de este capítulo se concluye que un criterio de base física que permite efectuar dicha selección modal es el coeficiente de reparto. Por lo tanto, se propone el uso de dos índices que, junto con esquemas automáticos de generación de modos, permiten efectuar la creación de los subespacios de proyección requeridos para fines de reducción: (i) el coeficiente de reparto para evaluar si el modo considerado representa una componente significativa en el espacio de los estados y (ii) el coeficiente de reparto acumulado modal con el propósito de verificar si la cantidad de modos generados, previo a la simulación numérica transitoria, es suficiente para representar adecuadamente los estados completos del modelo. Al respecto de este último criterio, su función principal es, entonces, verificar y asegurar que los estados modales seleccionados aproximan el estado completo del acuífero con un error de truncamiento pequeño.

Igualmente, los resultados de las simulaciones del acuífero rectangular de referencia por el MAV confirman que existen modos efectivos que aportan significativamente al estado del acuífero y corresponden a aquellos en los cuales su coeficiente de reparto es similar al obtenido para la solución analítica, comportamiento que se presenta tanto para acciones exteriores distribuidas como puntuales. De ello se deduce que puede efectuarse una compresión adicional de un modelo de flujo eliminando convenientemente los modos donde los coeficientes de reparto son menores que cierto límite inferior pequeño definido a priori, estableciendo un filtro para la definición de los modos dominantes del acuífero. En general, a medida que la conexión entre el río y el acuífero aumenta, también lo hace la amplitud del espectro del sistema dinámico asociado, con lo cual deben utilizarse mayor cantidad de modos en los modelos reducidos construidos a medida que los parámetros de conductancia del lecho del río crecen hacia el infinito por que la velocidad de aproximación a uno por parte de los coeficientes de reparto acumulados es más baja.

Al respecto, se ha presentado un análisis de sensibilidad para investigar acerca de la influencia ejercida por la inclusión de más modos en los modelos reducidos por el MAV sobre el aumento de la aproximación en las simulaciones, considerando la variación de las conductancias de bloque de río considerada en el modelo. Para esto se utilizaron índices clásicos de bondad de ajuste, **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, estimados con el objetivo de cuantificar el comportamiento tanto de los hidrogramas subterráneos, como de las series piezométricas simuladas en puntos seleccionados del acuífero, con respecto a los obtenidos por modelos de referencia implementados en DF. Los resultados confirman que la tendencia de inclusión de modos puede preverse antes de efectuar simulaciones transitoria, simplemente analizando la velocidad de convergencia a la unidad del coeficiente de reparto acumulado. Esto puede asumirse en la medida en que los mejores índices de comportamiento se obtienen, en general, para modelos reducidos formados por los modos cuyos coeficientes de reparto acumulados están cerca de la unidad. Igualmente, se confirma la gran influencia de los parámetros de conexión río-acuífero en la simulación del flujo en el acuífero mediante los modelos reducidos, especialmente en lo que se refiere a los hidrogramas subterráneos y las alturas piezométricas correspondientes a zonas cercanas al río, cuya simulación debe

considerar mayor cantidad de modos que para simular alturas piezométricas más alejadas si se desea obtener errores de aproximación semejantes.

# 5

## Estimación de parámetros hidrogeológicos usando hidrogramas de flujo base y modelos lineales reducidos

### 5.1. Introducción

La solución analítica unidimensional de la EDP de flujo subterráneo para acuífero rectangular, perfectamente conectado con un río completamente penetrante en él, sobre el cual actúa una recarga distribuida instantánea, se escribe como una sumatoria de funciones exponenciales decrecientes que dependen de su transmisividad ( $T$ ), su coeficiente de almacenamiento ( $S$ ) y ciertas características geométricas, según las soluciones analíticas propuestas por Boussinesq (1903a,b). Suponiendo que se cumple la hipótesis de Maillet y por lo tanto, sólo la primera componente de la sumatoria persiste para un tiempo dado después de la recarga, Rorabaugh (1960) propuso la estimación de la difusividad media del acuífero ( $T/S$ ) mediante un análisis de la curva de agotamiento del hidrograma con el fin de asegurar que no existan las componentes significativas de la escorrentía superficial y subsuperficial en el caudal que fluye por el río. En general, de acuerdo con los resultados reportados por diferentes investigadores, los parámetros estimados mediante el método de Rorabaugh son menores que aquellos que se obtienen usando mediciones directas sobre el acuífero (Estrela, 1993; Estrela y Sahuquillo, 1997; Halford y Mayer, 2000; Sahuquillo y Gómez-Hernández, 2003; Álvarez-Villa *et al.*, 2010).

De forma similar, en un acuífero lineal con parámetros y condiciones de contorno invariantes en el tiempo, el MAV proporciona una solución análoga a las de Boussinesq, con la diferencia de que el drenaje al río equivale a la descarga desde un número infinito de depósitos virtuales que comparten la recarga, cada uno con su coeficiente de drenaje

correspondiente, los cuales se calculan como los autovalores asociados al sistema hidrogeológico, según la discusión presentada en las secciones 3.4 y 4.3. En este capítulo se usa el marco conceptual del MAV con el objetivo de mostrar las causas por las cuales el método de Rorabaugh tiende a subestimar los parámetros de descarga del acuífero. Lo anterior se lleva a cabo realizando el análisis del flujo en un acuífero irregular que se encuentra conectado a una red de drenaje sinuosa de cauces permanentes, para la cual se consideran diferentes escenarios de conductancia e inclinación en el lecho del río.

## 5.2. Modelación de la interacción río-acuífero para el análisis de curvas de agotamiento en ríos ganadores

Bajo condiciones climatológicas secas los hidrogramas de caudal de un río manifiestan un decrecimiento gradual. Dichas fracciones del hidrograma también se conocen como curvas de agotamiento y corresponden a períodos hidrológicos que se caracterizan por que las entradas por precipitación a la cuenca son nulas o muy pequeñas, no se genera escorrentía superficial y la recarga del acuífero puede considerarse como despreciable o incluso nula. Como consecuencia de lo anterior, la dinámica de salida de agua subterránea está dada por las relaciones con otras masas de ese agua y la descarga gradual generada por la relación río-acuífero (Hall, 1968; Daniel, 1976; Smakhtin, 2001). Dadas estas condiciones, el flujo o caudal base se considera como aquel que escurre por la red de drenaje al final de un período de sequía y está compuesto exclusivamente por el aporte de las aguas subterráneas (Singh, 1968; Hall, 1968; WMO, 1974; Brutsaert y Nieber, 1977; Zecharias y Brutsaert, 1988; Tallaksen, 1995; Brutsaert y López, 1998; Smakhtin, 2001).

### 5.2.1. Soluciones analíticas para el drenaje de un acuífero a un río como respuesta a la recarga natural

La estimación del flujo base es una de las tareas más comunes que enfrenta un hidrólogo para la resolución de problemas relacionados con el manejo del recurso hídrico, predicción de caudales mínimos para fines de irrigación, calibración de modelos precipitación-escorrentía, diseño de plantas de generación de energía eléctrica y análisis de hidrogramas (Rorabaugh, 1964; Anderson y Burt, 1980; Bako y Owoade, 1988; Vogel y Kroll, 1992; Tallaksen, 1995; Griffiths y Claussen, 1997; Smakhtin, 2001; Sujono *et al.*, 2004). Las técnicas tradicionalmente usadas para su estimación se basan en la interpretación de los hidrogramas de caudal de un río, a los cuales se le aplican técnicas de separación de su parte superficial en los períodos húmedos y se considera que el caudal restante corresponde al flujo drenado por el acuífero con el que se conecta (Pettyjohn y Henning, 1979; Nathan y McMahon, 1990; Slotó y Crouse, 1996; Furey y Gupta, 2003; Eckhardt, 2005).

Otro enfoque para estudiar y caracterizar el flujo base se fundamenta en el análisis matemático de los hidrogramas superficiales durante su fase de agotamiento, con el objetivo de estimar los parámetros de una solución analítica unidimensional para la descarga de agua de un acuífero a un río con el cual se encuentra conectado que ha sido elegida a priori. Para este fin, diferentes soluciones han sido deducidas, a partir tanto de la ecuación lineal de flujo para acuífero confinado, como de la ecuación no lineal de Boussinesq para acuífero libre. Todas ellas se basan en los trabajos de Boussinesq (1877, 1903a,b, 1904), quien presenta diferentes soluciones imponiendo fuertes simplificaciones en la forma de la ecuación de flujo, la geometría del acuífero, sus condiciones inicial y de contorno, sus

parámetros hidráulicos y las acciones exteriores actuando. A la luz de dichas soluciones se deduce que el caudal aportado por un acuífero al río se puede modelar como el agua que sale desde unos depósitos lineales o no lineales, en función del volumen almacenado en ellos y cuya dinámica viene caracterizada por unos parámetros de descarga asociados (Brutsaert y Nieber, 1977; Sahuquillo, 1983b; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005).

Cuando la solución ha sido obtenida de la ecuación lineal para acuífero confinado o mediante una linealización de la ecuación de Boussinesq, la descarga del acuífero viene representada como una sumatoria de expresiones de decaimiento exponencial que varían únicamente con respecto al tiempo (Boussinesq, 1877, 1903a,b). Las diferencias entre las parametrizaciones de las soluciones analíticas existentes en la literatura para el caudal descargado por el acuífero al río dependen básicamente de las simplificaciones asumidas para su deducción matemática. Entre las soluciones obtenidas usando la forma lineal de la ecuación de flujo se destacan las propuestas por Rorabaugh (1964) y Sahuquillo (1983b), la primera por que ha sido utilizada ampliamente en estudios hidrológicos prácticos y la segunda por cubrir un amplio número de configuraciones geométricas, aplicables incluso en casos de gestión conjunta. Los esquemas de parametrización de ambas soluciones son análogos, sencillos y vienen dados, básicamente, por factores de decaimiento exponencial que representan la velocidad de disminución del caudal descargado desde el acuífero hacia el río. Aún así, la propuesta de Sahuquillo (1983a,b) es una forma general de solución para la descarga subterránea al río, que no depende de la forma matemática de las condiciones iniciales impuestas. En todo caso, ambas soluciones expresan los coeficientes de descarga como función únicamente de las características espaciales del acuífero.

Por otro lado, dado que resolver analíticamente la ecuación de Boussinesq es un problema matemático difícil, existen pocas soluciones analíticas en la literatura científica (Langbein, 1938; Coutagne, 1948; Denisov, 1961; Brutsaert y Nieber, 1977; Vogel y Kroll, 1992; Brutsaert, 1994). Muchas de dichas soluciones son aplicables sólo para situaciones ideales muy restrictivas, especialmente en lo referente a las condiciones inicial y de contorno. Expresiones matemáticas más parsimoniosas se han obtenido, para el caso de un acuífero horizontal, linealizando la ecuación de Boussinesq y asumiendo que la geometría inicial del nivel freático tiene la forma de una función matemática impuesta a priori (Polubarinova-Kochina, 1962; Bear, 1972; Brutsaert e Ibrahim, 1966; Brutsaert y Nieber, 1977; Parlange *et al.*, 2001). A pesar de que existen soluciones analíticas de la ecuación de Boussinesq para situaciones más complicadas, por ejemplo para acuíferos unidimensionales inclinados (Brutsaert, 1994; Mizumura, 2002; Huyck *et al.*, 2005), éstas no han sido ampliamente utilizadas para el análisis de las curvas de agotamiento del hidrograma debido a la dificultad de llevar a cabo un análisis práctico sencillo. A pesar de ello, su uso para modelar la descarga subsuperficial a nivel de ladera o celda en modelos hidrológicos precipitación-escurrentía se ha extendido durante los últimos años (Troch *et al.*, 2003; Matonse y Kroll, 2009).

En las diferentes aplicaciones prácticas encontradas en la literatura se observa que la mayoría de las soluciones analíticas son muy sencillas de aplicar en el análisis de las curvas de agotamiento. Desafortunadamente, suelen tener la desventaja de no ser válidas cuando se violan las hipótesis con las cuales han sido deducidas, las cuales, en general, se basan en flujo paralelo, perpendicular al río para condiciones geométricas sumamente sencillas. Asimismo, la aplicación de soluciones analíticas a casos reales de acuíferos con geometría irregular y flujo en medio poroso altamente heterogéneo usualmente viola la mayoría de sus hipótesis de desarrollo. Por consiguiente, se debe ser muy riguroso con la selección de los casos en los cuales una determinada solución analítica será aplicada, procurando que se conserven la mayor cantidad posible de hipótesis en su desarrollo matemático.

Por el contrario, las soluciones semianalíticas (Sahuquillo, 1983a; Troch *et al.*, 2003; Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2006) son aplicables en un mayor rango de casos reales sin que sea necesario plantear hipótesis demasiado restrictivas, conservando la ventaja de tener asociada una ecuación de estado explícita en función del tiempo para el caudal de descarga. La desventaja principal es que su uso puede llegar a ser más exigente computacionalmente dependiendo del modelo conceptual construido para el acuífero.

Ahora bien, existe gran cantidad de factores naturales y antrópicos que condicionan la dinámica de flujo en el acuífero y afectan la aplicabilidad de un modelo analítico para resolver casos reales. De ellos, los más relevantes son: (i) la variabilidad de la geología del acuífero, (ii) el nivel de conectividad hidráulica entre las masas de agua superficial y subterránea y (iii) las propiedades espacio-temporales de las acciones exteriores actuando. Diferentes investigadores han presentado análisis acerca de la influencia de dichos factores sobre la forma y algunos parámetros cuantitativos de las curvas de agotamiento (Singh, 1968; Singh y Stall, 1971), proponiendo modificaciones de las soluciones originales con el fin de reproducir las mediciones disponibles de una forma más fiable.

En general, el grado de conexión río-acuífero, representado por la penetración del río y los parámetros hidráulicos que componen su lecho semi-confinante, no es un factor explícitamente considerado por muchas de las soluciones analíticas existentes, dado que éstas han sido mayormente desarrolladas para conexiones perfectas usando condiciones de contorno de altura piezométrica prescrita (Polubarinova-Kochina, 1962; Rorabaugh, 1964; Brutsaert e Ibrahim, 1966; Brutsaert y Nieber, 1977). A pesar de ello, existen algunas soluciones analíticas que consideran explícitamente el efecto de incluir la conexión parcial en la solución analítica obtenida para la relación entre un río y un acuífero lineal; en éstas se demuestra matemáticamente, para casos ideales, que los valores de los parámetros de descarga del acuífero pueden variar drásticamente con respecto a los calculados para el caso de conexión perfecta (Sahuquillo, 1983b; Pulido-Velázquez *et al.*, 2005).

Los efectos ocasionados por la evapotranspiración sobre los cambios en las curvas de agotamiento usualmente han sido cuantificados agregando un término en la ecuación de continuidad global del acuífero, asimilando los contornos de éste como la frontera del volumen de control y deduciendo una ecuación en función del caudal de intercambio con el río (Federer, 1973; Daniel, 1976; Zecharias y Brutsaert, 1988; Witterberg y Sivapalan, 1999; Szilagy *et al.*, 2007). El almacenamiento de agua en la ribera del río se ha considerado, de forma análoga a la evapotranspiración, mediante otro término adicional para conservar el balance de masa en el acuífero (Werner, 1957; Cooper y Rorabaugh, 1963; Rorabaugh, 1964; Rorabaugh y Simmons, 1966; Daniel, 1976; Chen *et al.*, 2006). Tradicionalmente, la estimación de la recarga regional sobre el acuífero se ha efectuado usando las diferentes formas de soluciones analíticas propuestas junto con datos de hidrogramas de caudales superficiales y de niveles piezométricos (Meyboom, 1961; Rorabaugh, 1964; Rutledge y Daniel, 1994; Rutledge, 1997, 1998; Witterberg, 1999; Witterberg y Sivapalan, 1999).

La deducción de soluciones analíticas para la descarga al río en el caso de acuífero inclinado ha sido tradicionalmente llevada a cabo mediante procedimientos de linealización de la EDP de flujo subterráneo en régimen cuasiestacionario (Brutsaert e Ibrahim, 1966; Bear, 1972; Zecharias y Brutsaert, 1988; Brutsaert, 1994; Troch *et al.*, 2003; Rupp y Selker, 2006; Rocha *et al.*, 2007; Matonse y Kroll, 2009). Sahuquillo (1983a) propone el tratamiento de condiciones de contorno variables en el espacio e invariantes en el tiempo mediante la descomposición del problema lineal de flujo usando el principio de superposición; se asume que la solución total se obtiene como la suma de una solución en régimen permanente con recarga nula para las condiciones de contorno originales, más una solución transitoria con condiciones iniciales y condiciones de contorno nulas. Estas soluciones han

sido extendidas para permitir la cuantificación de variaciones temporales en la relación río-acuífero (Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2009) y para simular el flujo en acuíferos libres con base inclinada mediante una linealización de la ecuación de Boussinesq que se resuelve por el MAV (Pulido-Velázquez *et al.*, 2006).

### 5.2.2. Reducción empírica de soluciones analíticas para acuíferos lineales en el análisis de curvas de agotamiento

Volviendo a las soluciones analíticas para la descarga subterránea al río obtenidas a partir de la EDP lineal de flujo subterráneo, Maillet (1905) señala que, para el análisis de los períodos de sequía, usar únicamente el primer término de la sumatoria proporciona una aproximación adecuada del caudal descargado del acuífero al río, de donde se deduce que los parámetros que caracterizan dicha descarga pueden estimarse representando al hidrograma de caudales superficiales en escala semi-logarítmica durante los períodos de agotamiento. Así, la hipótesis de Maillet ha sido usada para resolver diferentes tipos de problemas hidrológicos e hidrogeológicos, destacándose su uso para: (i) la estimación de los parámetros regionales de flujo del acuífero (Rorabaugh, 1960; Shevenell, 1996; Szilagy *et al.*, 1998; Halford y Mayer, 2000; Baedke y Krothe, 2001; Mendoza *et al.*, 2003), (ii) la estimación del espesor efectivo medio del acuífero (Olin, 1995), (iii) la evaluación de entradas y/o salidas hacia/desde la masa de agua subterránea por recarga o evapotranspiración, respectivamente (Daniel, 1976; Rutledge, 1993; Eng y Brutsaert, 1999; Rutledge, 2008; Szilagy *et al.*, 2007) y (iv) el planteamiento de técnicas de separación del flujo base a partir de hidrogramas de caudal superficial (Rutledge y Daniel, 1994; Szilagy y Parlange, 1998; Chen *et al.*, 2006).

A pesar de su uso extendido para simplificar soluciones analíticas, la aplicabilidad práctica de la aproximación de Maillet ha sido ampliamente debatida por diferentes autores, especialmente en lo referente a la modelación en acuíferos cársticos o para cuantificar las relaciones río-acuífero cuando es posible asumir conexión perfecta.

Estrela y Sahuquillo (1997) estiman los parámetros de descarga y recarga del acuífero cárstico de Arteta (España). Dichos parámetros corresponden, respectivamente, a los autovalores y los coeficientes de reparto asociados a una solución de tres términos para la descarga al río obtenida por el MAV, la cual se calibra usando un hidrograma del manantial. Los resultados obtenidos en este trabajo muestran que los coeficientes de reparto son similares para los tres términos de la solución y, por consiguiente, no existe ningún modo dominante en la solución, con lo cual es inaplicable la hipótesis de Maillet. Este comportamiento del modelo para el caudal de descarga es atribuido a la heterogeneidad del medio cárstico y a la existencia de rutas preferenciales de flujo dentro del acuífero.

Igualmente, Birk y Hergarten (2010) usan una solución analítica para la descarga subterránea similar a la que se obtiene aplicando el MAV para un pulso de recarga en un acuífero rectangular con condiciones de contorno de nivel impuesto en ambos extremos. Mediante esta solución analizan diferentes componentes de respuesta rápida y lenta en los hidrogramas de descarga en acuíferos cársticos, obteniendo mejores resultados a medida que se incluyen más términos en la sumatoria de la solución. Con esto, los autores concluyen que analizar las diferentes partes de una curva de agotamiento para un acuífero cárstico usando un único término exponencial, de acuerdo con la hipótesis de Maillet, puede provocar el planteamiento de conclusiones erróneas acerca de la dinámica del flujo subterráneo.

Ahora bien, según estudios previos (Pulido-Velázquez *et al.*, 2005; Álvarez-Villa *et al.*, 2010), y de acuerdo con la solución para la descarga al río obtenida mediante el MAV,

usar un único término de la solución de la descarga para modelar la relación río-acuífero con conexión perfecta es inadecuado y ocasiona grandes errores en la simulación de los hidrogramas subterráneos. Esto se sustenta en el hecho de que, para este nivel de conexión, el primer coeficiente de reparto tiene un valor de 0.8105, es decir, sólo captura cerca del 81 % de la respuesta del acuífero, siendo necesario incluir mayor cantidad de depósitos para representar adecuadamente los caudales que alimentan al río, incluso en épocas de agotamiento. Este comportamiento se ilustra detalladamente más adelante en este capítulo.

Una solución analítica que ha llamado el interés para estimar los parámetros de descarga de un acuífero es la propuesta por Rorabaugh (1960, 1964), la cual resulta ser un caso especial de las soluciones presentadas por Coutagne (1948) y Denisov (1961). Su deducción se basa en resolver la ecuación de flujo subterráneo unidimensional para un acuífero lineal, homogéneo y perfectamente conectado con un río completamente penetrante, adoptándose dos hipótesis principales: (i) se asume un aumento instantáneo del nivel del acuífero (Rorabaugh, 1960, 1964) y (ii) se considera la entrada o salida gradual de agua como una acción externa distribuida a lo largo del acuífero (Rorabaugh, 1964; Daniel, 1976). Como resultado de lo anterior, las soluciones de Rorabaugh para la descarga del acuífero toman la forma de una sumatoria infinita de funciones de decaimiento exponencial. Rorabaugh (1960, 1964), aplicando la hipótesis de Maillet para considerar únicamente el primer término de sus soluciones para la descarga subterránea, propone un procedimiento para estimar la difusividad ( $T/S$ ) del acuífero mediante el análisis directo de los hidrogramas superficiales, el cual se conoce popularmente como Método de Rorabaugh (MRORA) o de desplazamiento de la curva de agotamiento (Rutledge, 1993).

Rorabaugh (1964) aplica su solución para estimar indirectamente el agua almacenada en la ribera de los ríos y su influencia en el balance de agua de una cuenca. Daniel (1976) usa las soluciones de Rorabaugh (1964) junto con el principio de superposición para estimar la evapotranspiración indirectamente en un acuífero localizado en el estado de Alabama en Estados Unidos. Rutledge (1993, 1998, 2000, 2005, 2006, 2008) presenta el marco conceptual del programa RORA, en el cual se implementa el MRORA para estimar la recarga regional en un acuífero usando las curvas de agotamiento de los hidrogramas de caudal superficial, como lo presentan Rorabaugh y Simmons (1966), y de las alturas piezométricas, según las soluciones presentadas por Rorabaugh (1960).

Muchos autores han estimado la recarga regional en diferentes sitios de estudio aplicando el MRORA en el análisis de hidrogramas de caudal superficial durante la curva de agotamiento (Chen y Lee, 2003; Ruhl y Shmagin, 1998; Lee *et al.*, 2006; Flynn y Tasker, 2004; Lorenz y Delin, 2007). Coes *et al.* (2007) usan el MRORA para estimar la recarga regional en diversas localizaciones en el estado de Carolina del Norte (EEUU), usando información de alturas piezométricas. Baedke y Krothe (2001) usan el MRORA para determinar la difusividad de un acuífero cárstico en el estado de Indiana (EEUU), analizando los hidrogramas de manantiales durante la curva de agotamiento. Shevenell (1996) usa el MRORA para estimar la transmisividad y el almacenamiento específico de un acuífero cárstico localizado en el estado de Tennessee (EEUU) usando hidrogramas de caudal superficial, de manantiales y registros de alturas piezométricas en pozos de observación.

Por otro lado, es oportuno comentar que, a pesar de que MRORA ha sido ampliamente usado en estudios hidrológicos y de ingeniería práctica debido a que tiene base física y es sencillo de usar, su aplicabilidad está limitada a casos reales en los cuales sus hipótesis de desarrollo se encuentren bien representadas. De esto se sigue que su aplicación no es recomendable cuando se presentan algunas de las siguientes características en el acuífero estudiado: (i) heterogeneidades e irregularidades geométricas en la configuración del modelo conceptual, (ii) variabilidad espacial en la aplicación de la recarga, (iii) inclinación



de sus condiciones de contorno, (*iv*) conexión imperfecta con el río, (*v*) existencia de una componente de flujo subterráneo paralela al río; entre otras (Rutledge, 2000, 2005).

Estudios previos muestran que los cálculos del índice de agotamiento y los parámetros hidráulicos de acuíferos regionales obtenidos por el MRORA subvaloran las estimaciones de estudios hidrogeológicos detallados. Esto suele atribuirse a que el flujo base es un proceso hidrológico sumamente complejo en el cual intervienen diferentes componentes físicos del acuífero y está muy influenciado por la heterogeneidad del medio geológico, especialmente en lo referente al grado de conexión río-acuífero (Halford y Mayer, 2000; Halford, 2008).

Otros estudios han debatido su aplicación para la estimación de parámetros de flujo en acuíferos cársticos. Por ejemplo, según Sahuquillo y Gómez-Hernández (2003) el uso del MRORA no es apropiado en este tipo de problemas debido a que el flujo del agua en el acuífero cárstico es principalmente radial, violando sus hipótesis de desarrollo. Al respecto, también es pertinente la discusión previa de esta sección acerca del uso de la hipótesis de Maillet en el análisis de acuíferos cársticos puesto que el MRORA se basa en ella para la reducción de la ecuación del caudal de descarga que se usa como modelo de estimación de parámetros. Asimismo, según Halford (2008), el MRORA es inaplicable en la mayoría de los casos prácticos debido a que la mayoría de sus hipótesis son violadas. Atendiendo a las críticas realizadas al MRORA, Rutledge (2005, 2006) aclara los límites de aplicabilidad del programa RORA y propone casos donde su uso puede ser ventajoso.

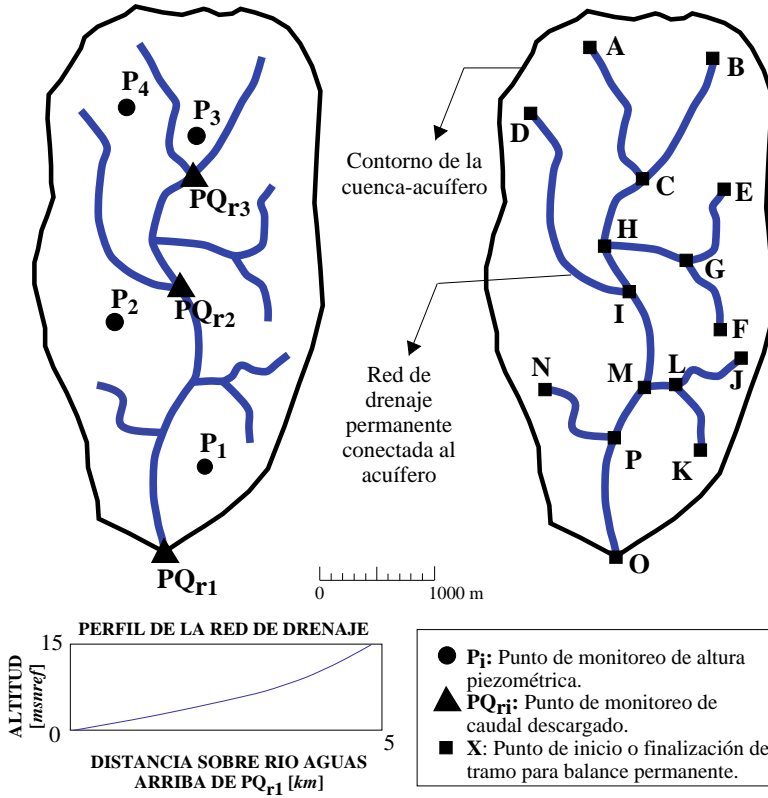
### 5.3. Características del acuífero sintético irregular

En el presente análisis se usa un acuífero sintético irregular conectado con una red de drenaje sinuosa, adaptado de la configuración geométrica presentada previamente por Halford y Mayer (2000), con el propósito de evaluar diferentes aspectos operativos y conceptuales del MRORA. Al respecto, en la figura 5.1 se presentan: (*i*) los contornos laterales de dicho acuífero, (*ii*) la configuración de la red de drenaje de cauces permanentes a la cual se conecta el acuífero, (*iii*) el perfil longitudinal de la elevación del fondo de los canales de la red de drenaje con respecto al nivel de referencia en la salida del acuífero, (*iv*) la escala horizontal de los mapas, (*v*) la ubicación de los puntos de control que definen las zonas para los cuales se evalúan los hidrogramas parciales de la interacción río-acuífero y (*vi*) la ubicación de los puntos de seguimiento de la variación temporal de las alturas piezométricas. Dicho acuífero tiene un área de  $9.4 \text{ km}^2$ , su transmisividad y coeficiente de almacenamiento son uniformes en el espacio, con valores de  $100 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $0.1$ , respectivamente. Sus condiciones de contorno son de flujo nulo en la base y en los bordes laterales y de flujo dependiente de un nivel externo para representar la conexión río-acuífero.

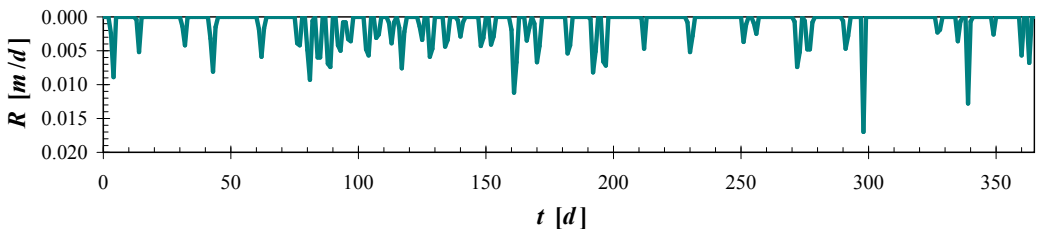
Cuando sea pertinente, se utiliza un valor medio de recarga de  $0.0007 \text{ m/d}$  para la solución del modelo de flujo subterráneo en régimen permanente; mientras que, para la simulación en régimen transitorio, se han utilizado recargas diarias variables en el tiempo, distribuidas uniformemente sobre el dominio del acuífero, cuyas intensidades han sido extraídas del trabajo de Halford y Mayer (2000) y se presentan en la figura 5.2. Dicha serie se repite durante tres años para permitir el calentamiento de los modelos numéricos implementados, pero sólo se considera el último año de simulación en los análisis.

Por otro lado, en la figura 5.1 se observa que el acuífero es atravesado por una red de drenaje irregular que presenta diversos afluentes laterales. Se conoce que la densidad de drenaje de su cuenca asociada es de  $1.34 \text{ km}^{-1}$  y, para dicha configuración topológica, se ha considerado que los cauces pueden ser tanto horizontales como inclinados, éstos últimos manifiestan una pendiente que varía de acuerdo con el perfil longitudinal que se presenta en la parte inferior de la figura 5.1. Asimismo, con el propósito de cuantificar los efectos del

cambio en los parámetros de conexión entre el río y el acuífero, representando diferentes escenarios, las simulaciones se efectúan asignando valores de 5000, 200 y 50  $m^2/d$  para la conductancia del lecho en los bloques de río.



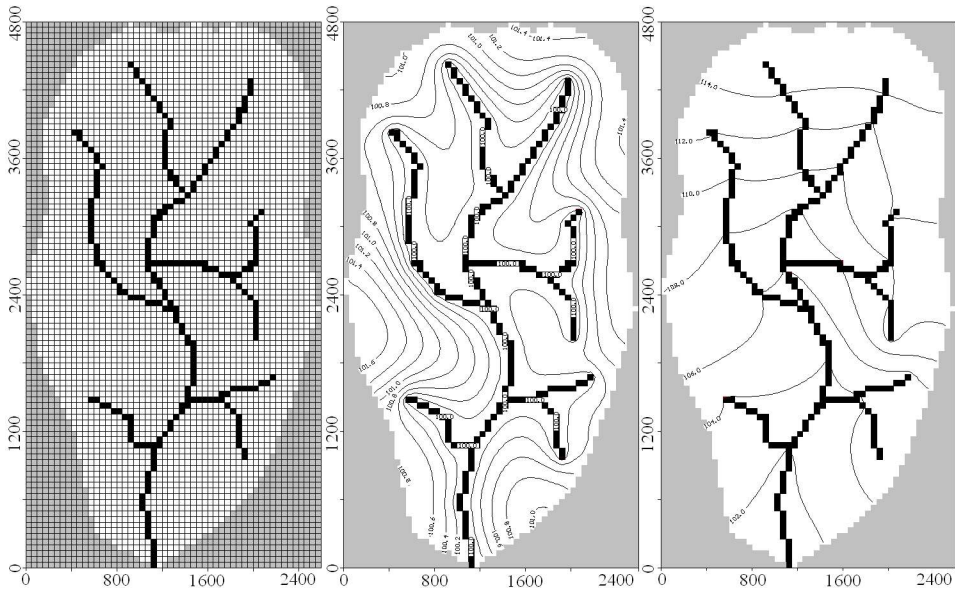
**Figura 5.1.** Configuración geométrica del acuífero irregular utilizado para el análisis de las curvas de agotamiento de los hidrogramas de descarga subterránea. A la derecha: puntos de control para alturas piezométricas y balances internos sobre la red de drenaje. A la izquierda: configuración de tramos para el análisis de las ganancias y pérdidas del río en régimen permanente. Abajo: Perfil longitudinal del río. Adaptada de Halford y Mayer (2000).



**Figura 5.2.** Serie diaria de intensidades de recarga actuando sobre el acuífero irregular durante los 365 días de simulación transitoria. Adaptada de Halford y Mayer (2000).

## 5.4. Método de Halford y Mayer para la estimación de la longitud del modelo unidimensional equivalente

El propósito de simular las alturas piezométricas en los acuíferos conectados con cauces horizontales e inclinados, bajo régimen permanente como respuesta a una recarga de 0.0007 m/d, fue reconstruir los resultados presentados por Halford y Mayer (2000) para las longitudes promedio del modelo unidimensional equivalente,  $L$  en la figura 3.2, como se presentan en las figuras 3 y 4 y la tabla 2 del trabajo original. A pesar de que allí no se discute acerca del tipo de conexión río-acuífero usado en su modelo, resultados similares a los suyos se encontraron utilizando una conexión perfecta entre el río y el acuífero, lo cual equivale a establecer una condición de contorno de nivel impuesto en los bloques de río.



**Figura 5.3.** Configuración geométrica del modelo del acuífero y simulaciones en régimen permanente del flujo en respuesta a una acción exterior distribuida impuesta sobre éste. Se presenta (de izquierda a derecha): (i) la discretización del modelo numérico del acuífero por DF, (ii) las alturas piezométricas simuladas en régimen permanente considerando lecho del río horizontal y (iii) las alturas piezométricas simuladas en régimen permanente considerando lecho del río inclinado.

Método de cálculo	$L$ [m]	$\alpha_1$ [ $d^{-1}$ ]	$K_{RI}$ [d]	$t_c$ [d]
Densidad de drenaje	373	0.0177	130	27
Trayectorias (horizontal)	456	0.0119	194	41
Trayectorias (Inclinado)	962	0.0027	863	181

**Tabla 5.1.** Valores estimados del índice de agotamiento,  $K_{RI}$ , primer exponente,  $\alpha_1$ , y tiempo crítico,  $t_c$ , para diferentes metodologías de cálculo de  $L$  y diferentes inclinaciones del lecho del río, considerando conexión perfecta entre el río y el acuífero.

Las discretización espacial del acuífero por DF usada para la modelación se presenta en la gráfica izquierda de la figura 5.3. Igualmente, las alturas piezométricas simuladas

bajo régimen permanente se presentan en la gráfica central de la figura 5.3 para el acuífero horizontal y en la gráfica de la derecha de la misma figura para el acuífero conectado con una red de drenaje inclinada. Las longitudes promedio de las líneas de corriente o trayectorias,  $L$ , se calcularon para cada conductancia de bloque de río considerada empleando el siguiente procedimiento: (i) se simuló las dinámicas del flujo en régimen permanente, obteniéndose las alturas piezométricas en cada bloque activo como respuesta a una recarga uniforme con la intensidad previamente comentada, (ii) se distribuyeron 100 partículas en todo el dominio del acuífero, (iii) se ejecutó el código MODPATH (Pollock, 1994) para simular la trayectoria correspondiente a cada partícula, (iv) se analizaron dichas trayectorias, midiéndose sus longitudes y (v) se promediaron dichas longitudes, obteniéndose un estimador del valor medio de  $L$ . Asimismo, de acuerdo con la propuesta de Daniel (1976), también se calculó  $L$  a partir del valor de la densidad de la red de drenaje conectada con el acuífero, empleando la ecuación (3.34). De esta forma, en la tabla 5.1 se presentan los resultados obtenidos para  $\alpha_1$ ,  $t_c$  y  $K_{RI}$  empleando (3.28), (3.32) y (3.33), donde se observa que al aplicar (3.34) se obtienen valores de  $L$  inferiores a los hallados simulando las trayectorias de flujo, mientras que al considerar la pendiente del lecho del río las  $L$  calculadas son mayores que las correspondientes al acuífero horizontal, lo cual se traduce en mayores  $K_{RI}$  y menores  $\alpha_1$  indicando que la respuesta de descarga del acuífero inclinado es más lenta, lo cual no es necesariamente cierto, como se discute en las siguientes secciones.

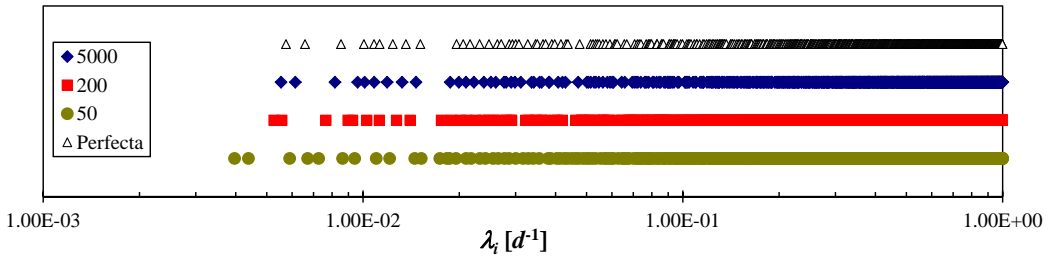
## 5.5. Análisis por el MAV

### 5.5.1. Resultados para los problema de autovalores

Para la resolución numérica del modelos de flujo por el MAV se ha utilizado la discretización espacial del acuífero presentada en la gráfica izquierda de la figura 5.3, la cual consiste de una malla de 96 filas por 52 columnas, con 3765 bloques activos. Además, el tamaño de bloque asignado es de 50 m, con lo cual se cubre un área de 12.5 km<sup>2</sup>. Con estas consideraciones, se resolvieron los problema generalizados de autovalores, ecuación (4.4), asociados a los modelos lineales planteados para las diferentes conexiones río-acuífero impuestas. En consecuencia, para cada valor impuesto de conductancia de río, la solución de dicho problema de autovalores consiste de un conjunto de 3765 modos que se han calculado empleando el algoritmo QL con desplazamientos implícitos (Wilkinson, 1965, 1968; Press *et al.*, 1986, 1997), el cual se ha descrito brevemente en el apartado 4.4.1.

Como se deduce de (4.21), para un acuífero lineal la descarga al río es equivalente a la respuesta de un conjunto de depósitos virtuales cuyas salidas de agua se expresan como una función de decrecimiento exponencial, con coeficientes de desagüe que corresponden a los autovalores del sistema. Esta analogía física plantea una relación inmediata entre los autovalores y el coeficiente de agotamiento de un acuífero. También debe aclararse que, al contrario de las hipótesis de Halford y Mayer (2000), en la simulación por el MAV el efecto de la inclinación del lecho del río se considera como una componente de flujo generada por la elevación del mismo incluida en la solución permanente, según el principio de superposición planteado en la sección 2.7. Así, es evidente que los autovalores son válidos para cualquier inclinación del río con el que se conecta el acuífero, debido a que éstos son inherentes a la solución transitoria con condiciones de contorno nulas.

En la figura 5.4 se presentan los cuatro conjuntos de 3765 autovalores calculados para cada una de la conductancias consideradas en el análisis, donde se observa que el rango modal del sistema ( $\lambda_{3765}/\lambda_1$ ) aumenta a medida que disminuye la conexión entre el río y el acuífero. Además, suponiendo que la hipótesis de Maillet, adoptada por el MRORA, sigue



**Figura 5.4.** Distribución ascendente de los autovalores para cuatro diferentes conductancias de bloques en la conexión río-acuífero, asociados al acuífero irregular analizado.

siendo válida para un acuífero multidimensional y aplicando la analogía física de los MPE, representada en el esquema gráfico de la figura 3.1, sólo el depósito virtual correspondiente al primer modo del sistema sigue descargando agua al río cuando ha transcurrido cierto tiempo desde el último episodio de recarga. Así, a partir de dichos autovalores se han calculado coeficientes de agotamiento para cada conductancia considerada junto con su tiempo crítico equivalente, consignándose éstos en la tabla 5.2. Allí se observa que, para río y acuífero perfectamente conectados, los  $\alpha_1$  estimados son menores a los obtenidos mediante la metodología de Halford y Mayer, presentados en la tabla 5.1.

$C [m^2/d]$	$\alpha_1 [d^{-1}]$	$K_{RI} [d]$	$t_c [d]$
<b>Perfecta</b>	0.0069	334	72
<b>5000</b>	0.0057	404	84
<b>200</b>	0.0053	434	91
<b>50</b>	0.0040	576	121

**Tabla 5.2.** Primeros autovalores,  $\alpha_1$ , índices de agotamiento  $K_{RI}$  y tiempos críticos asociados,  $t_c$ , obtenidos mediante el MAV para diferentes conductancia en los bloques de río.

En el caso de conexión perfecta, el MAV proporciona valores de  $\alpha_1$  que son casi la mitad de los calculados mediante la longitud de las trayectorias. Consecuentemente, el valor obtenido para  $K_{RI}$  es casi el doble que los correspondientes a dicha solución, pero en ningún caso dichos valores son comparables con los registrados para cuencas reales con densidad de drenaje similar, como presentan Halford y Mayer (2000) en la tabla 2, pág. 334 de su trabajo. Lo anterior se debe a que se ha asumido conectividad perfecta entre el río y el acuífero, sin tener en cuenta que en la realidad, dicha conectividad puede ser imperfecta y muy variable en el espacio. Más aún, la irregularidad geométrica de los contornos ocasiona que no sea posible asumir que la primera componente de la solución para la descarga sea la única que permanece al representar las curvas de agotamiento, especialmente cuando la conexión río-acuífero es perfecta.

Considerando que, en la mayoría de los casos reales, los ríos conectados con el acuífero manifiestan una capa de sedimentos poco permeables en su lecho, que actúa como frontera física en su interacción, no puede asumirse conexión perfecta entre río y acuífero. Así, se resolvió el problema de autovalores asumiendo que la relación río-acuífero se lleva a cabo bajo las condiciones anteriores, para lo cual se establecieron condiciones de contorno tipo Cauchy con conductancia uniforme en toda la longitud del río, con valores que oscilan entre 5000 y 50  $m^2/d$ . De todos los autovalores calculados, sólo se usa  $\alpha_1$  para calcular  $L$  mediante la ecuación (3.31) y estimar los correspondientes  $t_c$  y  $K_{RI}$ . Con esto, los resulta-

dos obtenidos se consignan en la tabla 5.2, donde se observa que, a medida que disminuye la conductancia de la conexión río-acuífero, los índices de agotamiento y tiempos críticos aumentan; esto se debe a que la respuesta del sistema a las acciones exteriores es más lenta, lo cual se refleja en la disminución de los autovalores más pequeños. También cabe mencionar que los primeros autovalores e índices de agotamiento respectivos, estimados para las interacciones parciales entre el río y el acuífero, son comparables a los presentados en el artículo de Halford y Mayer (2000), según la tabla 2 ubicada en la página 334, que fueron calculados mediante mediciones directas en cuencas localizadas en el este de los Estados Unidos que presentaban configuraciones topológicas similares a las del acuífero analizado. Esto implica la coherencia de los resultados obtenidos puesto que, como se discuten en el mismo trabajo, el planteamiento de dicho acuífero sintético buscó preservar la densidad de drenaje permanente de trece cuencas típicas de dicha zona.

### 5.5.2. Componente permanente de la solución por el MAV

Antes de efectuar las simulaciones del flujo transitorio en el acuífero empleando el MAV, se han resuelto los sistemas de ecuaciones lineales planteados en (2.27), con el propósito de obtener las alturas piezométricas permanentes para, posteriormente, calcular la correspondiente componente de los caudales de interacción río-acuífero que serán adicionados a la solución transitoria, de acuerdo con el principio de superposición descrito en la sección 2.7. No debe confundirse dicha componente de la solución por el MAV con la usada en la aplicación del método de Halford y Mayer (2000), no obstante ambas se obtienen en régimen permanente. Al respecto, debe recordarse que el problema en régimen permanente que se plantea en el esquema de solución de la EDP de flujo subterráneo por el MAV utiliza acciones exteriores nulas junto con las condiciones de contorno invariantes en el tiempo del problema original. La solución de dicho problema es trivial cuando se trata de un acuífero horizontal. Por el contrario, cuando existe conexión con un cauce inclinado, su solución genera una componente permanente en el flujo en el acuífero, la cual viene controlada principalmente por las condiciones de contorno asignadas, aún considerando que los niveles del calado en los canales de la red de drenaje se han asumido invariantes.

Ahora se desea poner de manifiesto la influencia de la componente permanente sobre los hidrogramas de descarga al río simulados por el MAV. Para ello, se ha realizado un análisis por tramos de río, estudiando en detalle la solución permanente para el acuífero conectado con una red de drenaje inclinada, considerando una conductancia de lecho de  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ , de acuerdo con la topología presentada en el esquema izquierdo de la figura 5.1. Para dicha configuración del modelo, los resultados obtenidos para la interacción

Tramo	$Qr [m^3/s]$	OH	Tramo	$Qr [m^3/s]$	OH	Tramo	$Qr [m^3/s]$	OH
AC	-0.00663	1,P	BC	-0.00154	1,P	DI	-0.00181	1,P
EG	-0.00483	1,P	FG	-0.01104	1,P	KL	-0.00236	1,P
JL	0.00449	1,G	NP	0.00101	1,G	CH	-0.00215	2,G
GH	-0.01487	2,G	LM	0.00269	2,G	HI	-0.01498	3,G
IM	-0.01064	3,G	MP	-0.00592	3,G	PO	0.00000	3,G

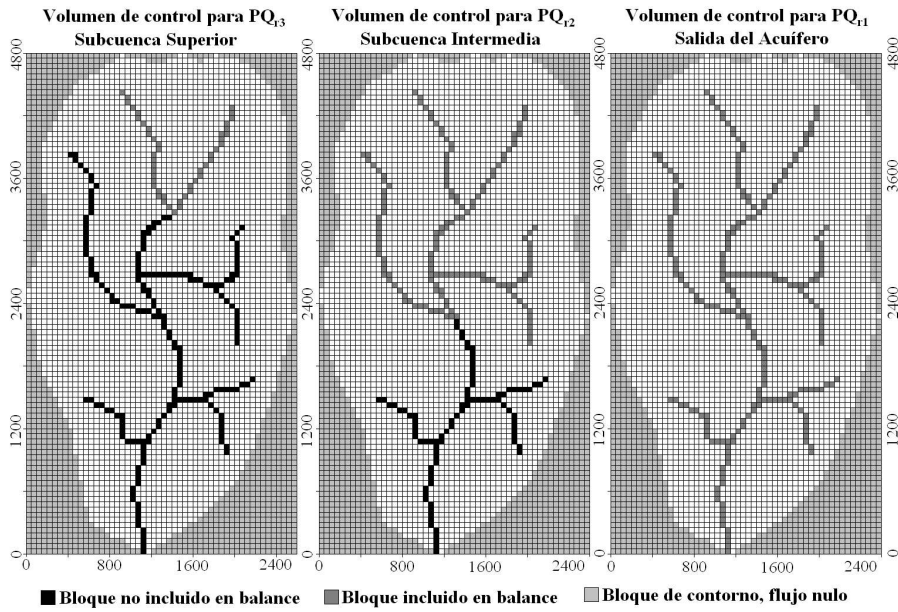
**Tabla 5.3.** Solución del problema permanente con condiciones de contorno del problema original y acciones externas nulas en el MAV, en términos del caudal acumulado al final de cada tramo de río, para acuífero parcialmente conectado con un río con conductancia de lecho de  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ . Notación: **OH**: orden de Horton de cada tramo, **P**: tramo de río perdedor para recarga y calado de río nulos y **G**: tramo de río ganador para recarga y calado de río nulos.

río-acuífero se presentan en la tabla 5.3, especificando el tramo de análisis y si en éste el río es ganador o perdedor para recarga cero. En general, se ha encontrado que los tramos correspondientes a las cabeceras del río, por ejemplo AC, EG, DI, son perdedores. Por el contrario, los tramos se van volviendo ganadores a medida que se ubican aguas abajo sobre la red de drenaje, hasta que el balance entre las pérdidas y las ganancias del río se anula en la salida del acuífero. Este mecanismo de ganancia-pérdida en régimen permanente es muy importante cuando el río conectado con el acuífero está inclinado y ocasiona, como se muestra más adelante, que las pendientes de los hidrogramas a la salida del acuífero sean diferentes a las obtenidas en los hidrogramas parciales de aguas arriba en la red de drenaje. Así, los parámetros de descarga del acuífero estimados usando las curvas de agotamiento de los hidrogramas del acuífero, obtenidos al aplicar el MRORA, son variables a lo largo de la red de drenaje; por consiguiente, el índice de agotamiento deja de ser un parámetro que caracteriza adecuadamente la descarga agregada del acuífero, lo cual contradice las hipótesis asumidas en el desarrollo del MRORA. Por último, debe aclararse que la dinámica simulada de aportación-descarga entre el río y el acuífero es similar para todos los valores de conductancias considerados.

### 5.5.3. Simulaciones en régimen transitorio por el MAV

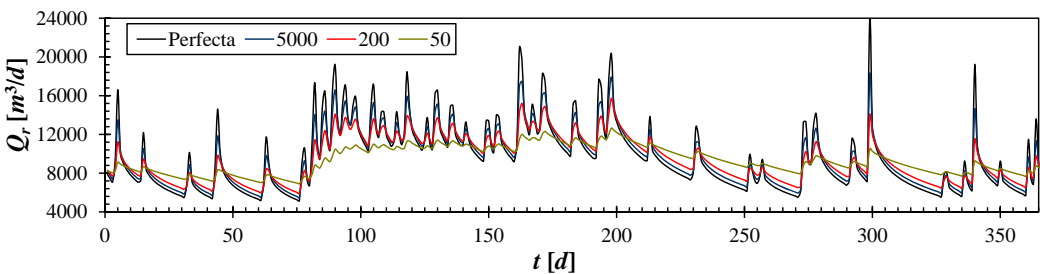
Para la ejecución de las simulaciones transitorias por el MAV se establecieron subcuencas subterráneas intermedias que sirven como volúmenes de control, con el propósito de efectuar balances de masa generados por el intercambio parcial entre el río y el acuífero. Dichos volúmenes de control se han establecido sobre la red de drenaje para conformar: (i) la subcuenca superior, que corresponde a la zona aguas arriba del punto de control para balance  $PQ_{r3}$ ; (ii) la subcuenca intermedia, para los tramos de río arriba del punto de control para balance  $PQ_{r2}$  y (iii) todo el acuífero, cuantificando los intercambios agregados a lo largo de todos los tramos del río, desde su inicio hasta el punto de control  $PQ_{r1}$ . La ubicación de dichos puntos de control se muestra en el esquema izquierdo de la figura 5.1. Los bloques considerados en los volúmenes de control antes definidos se muestran en la figura 5.5, esquemas izquierdo para subcuenca superior, central para subcuenca inferior y derecho para la salida del acuífero. En dichas subcuencas, se han simulado los hidrogramas de descarga como respuesta a la serie de recargas diarias de la figura 5.2, estableciéndose escenarios con el fin de obtener la variación del índice de agotamiento del acuífero en algunos sitios de su dominio espacial, con respecto a diferentes condiciones de conexión con el río.

Para el cálculo de los índices de agotamiento de los hidrogramas subterráneos se ha implementado el método de la cuerda ajustable propuesto por Toebes y Strang (1964) y recomendado por Rutledge (1997) para ser usado en la aplicación práctica del MRORA. Este procedimiento comienza simulando los hidrogramas de descarga para cada condición de conexión río-acuífero asumida aplicando el MAV. Para cada uno de estos hidrogramas se obtuvo la curva de agotamiento maestra estimando un  $K_{RI}$  promedio para las ocho curvas de agotamiento más largas encontradas durante un año de simulación, tanto para cauce horizontal como inclinado. Fuera de lo anterior, se han cuantificado la influencia de la pendiente del río sobre los hidrogramas simulados, de acuerdo con las premisas impuestas por el principio de superposición planteado para el MAV, resolviendo el problema en régimen permanente sujeto a las condiciones de contorno originales y acciones exteriores nulas. Además, se ha analizado la influencia de considerar una conexión río-acuífero imperfecta sobre la estimación del índice de agotamiento a partir de los hidrogramas simulados. Con base en los resultados obtenidos se discuten diferentes características del MRORA



**Figura 5.5.** Volúmenes de control definidos para el cálculo de los balances de intercambio a lo largo de la red de drenaje conectada con el acuífero. En el esquema de la izquierda se muestran los bloques correspondientes a la subcuenca superior, el esquema central muestra los bloques asociados a la subcuenca intermedia y el esquema de la derecha presenta los bloques seleccionados para efectuar el balance a la salida del acuífero. Los bloques grises señalan aquellos considerados en los balances, mientras que los de color negro señalan los que se han dejado por fuera.

que se comparan con el marco conceptual del MAV, particularmente en lo concerniente a la caracterización de los hidrogramas subterráneos durante las curvas de agotamiento.



**Figura 5.6.** Hidrograma de caudales subterráneos descargados a lo largo de toda la red de drenaje conectada con el acuífero, para diferentes condiciones de conexión entre el río y el acuífero. El hidrograma presentado corresponde tanto al río horizontal como al inclinado, puesto que las simulaciones obtenidas fueron idénticas.

En la figura 5.6 se presentan los hidrogramas de caudal intercambiado entre el acuífero y el río a lo largo de toda la red de drenaje, para las diferentes conductividades consideradas y un año de simulación a resolución diaria. En dicha figura se observa que los hidrogramas obtenidos para ambos casos de inclinación del río resultan ser idénticos, lo cual se debe a



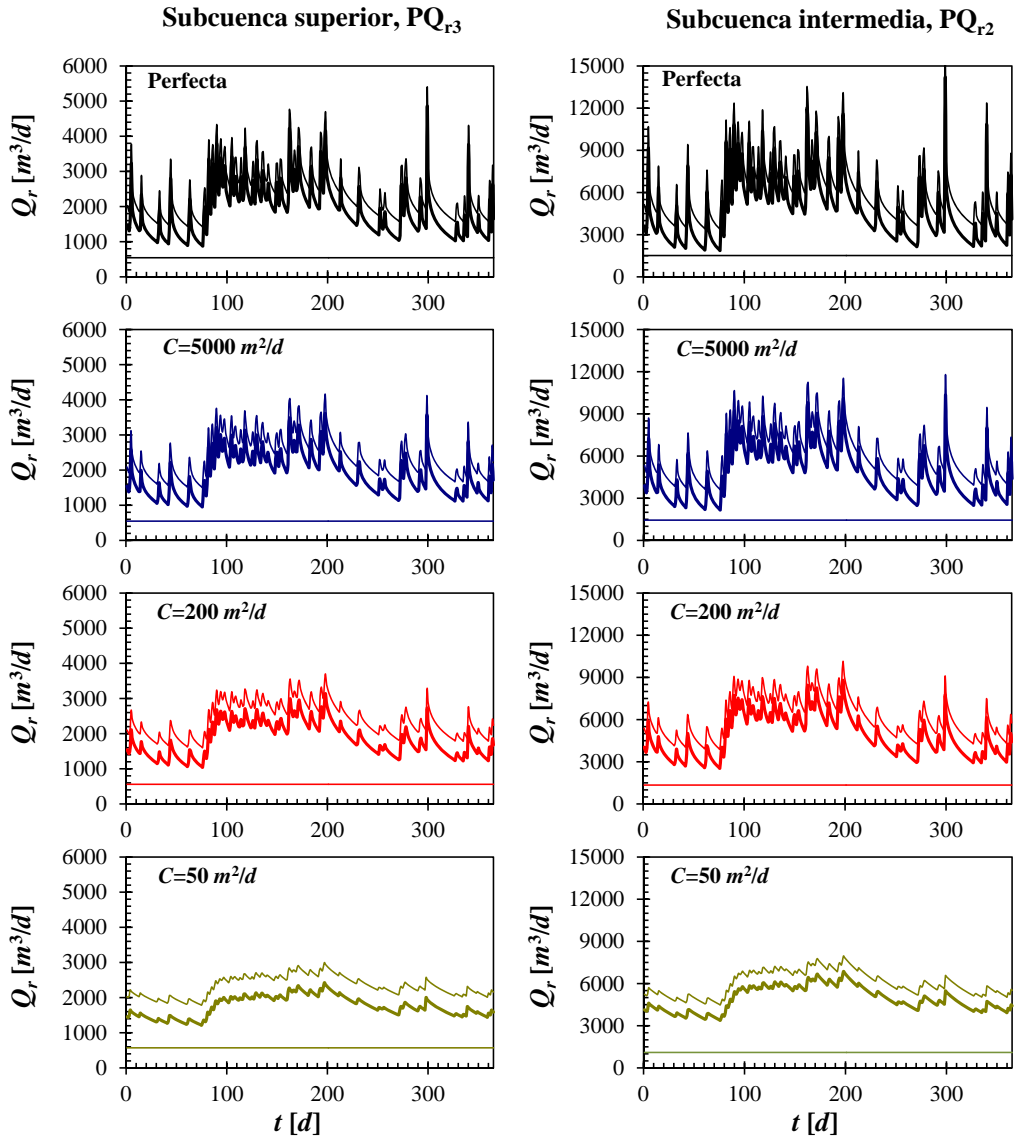
que, como se mostró en la sección anterior, cuando el río está inclinado las componentes permanentes de caudal aportado-descargado por el río se anulan a la salida del acuífero. Así, la respuesta de la relación con el río a la salida del acuífero, en otras palabras, la respuesta agregada de la descarga del sistema hidrogeológico, está controlada básicamente por las solución del problema transitorio con condiciones de contorno nulas, sin importar las acciones exteriores actuando, cuya solución viene dada por las ecuaciones (4.4) y (4.9).

Esta particularidad en el mecanismo matemático de interacción río-acuífero no ha sido reportada previamente debido, en parte, a que en la mayoría de los casos prácticos no se tiene la necesidad de acudir a la aplicación del principio de superposición de la forma planteada por el MAV. Asimismo, cabe comentar que dicho mecanismo resulta válido para un acuífero que cumpla con las hipótesis de linealidad, o cuyo modelo de flujo haya sido sometido a un esquema de linealización, y que cumpla la propiedad de invariabilidad temporal, sin importar la inclinación de su base o la del río al cual está conectado. Este efecto de enmascaramiento del efecto de la geometría del lecho del río sobre la dinámica del acuífero resulta ser una de las razones por las cuales se sigue aplicando el MRORA en problemas prácticos de hidrología. Además, suponer que el caudal que circula por la red de drenaje de una cuenca en períodos relativamente secos, asociados a la curva de agotamiento del hidrograma, es igual a la descarga del acuífero es una hipótesis que no se cumple en muchos casos reales; por ejemplo, cuando las fronteras del acuífero son abiertas y éste se encuentra conectado con otros acuíferos situados en el interior de las divisorias de aguas superficiales de cuencas adyacentes, cuando el almacenamiento de agua en las riberas de los canales de la red de drenaje es importante o en situaciones en las que la evapotranspiración modifica considerablemente el almacenamiento y la descarga del acuífero. En estos casos, los hidrogramas superficiales durante las curvas de agotamiento y el hidrograma subterráneo suelen ser diferentes, con lo cual se requiere efectuar una modelación hidrológica más detallada que incluya dichos procesos.

#### 5.5.4. Influencia de la componente permanente en la relación río-acuífero transitoria simulada por el MAV

En la figura 5.7 se presentan los hidrogramas de descarga simulados para el acuífero conectado con un río inclinado y diferentes conductancias, tanto para la subcuenca superior como para la intermedia, en las columna izquierda y derecha, respectivamente. En ella, las líneas gruesas representan los hidrogramas para el río inclinado, las líneas continuas representan el hidrograma para río horizontal, equivalente a la componente transitoria con condiciones de contorno nulas para el río inclinado, mientras que las líneas horizontales representan las componentes permanentes de caudal generado por las condiciones de contorno originales, de detracción en todos los casos. Del mismo modo, los diferentes colores indican la conductancia correspondiente a cada simulación. Entonces, a partir del esquema de superposición planteado para el MAV, junto con el hecho de que los hidrogramas simulados a la salida de la cuenca para los ríos horizontal e inclinado son idénticos, se han identificado ciertas características peculiares en las dinámicas de flujo simuladas.

Cuando el lecho del río es horizontal, toda la red de drenaje es ganadora puesto que la componente permanente de la solución por el MAV es trivial y nula, con lo cual no tiene ningún efecto sobre la solución total. Esto equivale a afirmar que la solución total viene dada exclusivamente por la correspondiente al problema transitorio con condiciones de contorno nulas y acciones exteriores originales. Por el contrario, para lecho del río inclinado, el efecto de aplicar el principio de superposición entre las soluciones permanentes y transitorias es que los caudales se ven disminuidos por efecto de la filtración permanente



**Figura 5.7.** Hidrogramas de descarga al río para las diferentes conductancias consideradas, para las subcuencas superior e intermedia. Las líneas gruesas representan los hidrogramas para el río inclinado. Las líneas regulares representan el hidrograma para río horizontal, equivalente a la componente transitoria con condiciones de contorno nulas para el río inclinado. Las líneas horizontales representan las componentes de recarga del río al acuífero en régimen permanente.

del río al acuífero que se genera en los tramos superiores de la red de drenaje. Entonces, aguas abajo en el cauce principal, que se refiere al tramo AO de la red de drenaje presentada en la figura 5.1, las filtraciones del río al acuífero van aumentando hasta que alcanzan un punto crítico donde empiezan a decrecer, hasta hacerse nulas en la salida. Lo anterior se observa en los hidrogramas de una misma fila en la figura 5.7, que corresponden a cada conductancia considerada. En todos los casos, se obtuvieron menores caudales permanentes de filtración del río al acuífero en la subcuenca superior que en la subcuenca intermedia. Además, el hecho de que los caudales en la salida son iguales, sin importar la inclinación del río, sugiere que aguas abajo del punto  $PQ_{r,2}$  sus ganancias permanentes aumentan hasta igualar las pérdidas en los tramos aguas arriba.

Tramo	$Qr [m^3/s]$	OH	Tramo	$Qr [m^3/s]$	OH	Tramo	$Qr [m^3/s]$	OH
AC	-0.00663	1,P	BC	-0.00154	1,P	DI	-0.00181	1,P
EG	-0.00483	1,P	FG	-0.01104	1,P	KL	-0.00236	1,P
JL	0.00449	1,G	NP	0.00101	1,G	CH	0.00047	2,G
GH	0.00096	2,G	LM	0.00056	2,G	HI	0.00201	3,G
IM	0.00615	3,G	MP	0.00203	3,G	PO	0.00491	3,G

**Tabla 5.4.** Solución del problema permanente con condiciones de contorno del problema original y acciones externas nulas en el MAV, en términos del caudal diferencial para cada tramo de río, para acuífero parcialmente conectado con un río con conductancia de lecho de  $200 m^2/d$ . Se usa la notación, **OH**: orden de Horton de cada tramo, **P**: tramo de río perdedor para recarga y calado de río nulos y **G**: tramo de río ganador para recarga y calado de río nulos.

El esquema de ganancia-pérdida permanente en los tramos de la red de drenaje se ilustra mejor visualizando sus caudales diferenciales, los cuales se consignan en la tabla 5.4 para la configuración del modelo que corresponde a los resultados de la tabla 5.3. Se observa que, con excepción de los tramos NP y JL, los canales con orden de Horton igual a uno son perdedores, mientras que los cauces con órdenes de Horton superiores son ganadores. Asimismo, el aumento de las ganancias del río se percibe con mayor claridad a medida que el balance de agua se realiza más cerca de la salida de la cuenca. Resultados similares se obtuvieron para todas las conductividades de bloque de río consideradas.

La parte espacial de la solución del problema transitorio con condiciones de contorno y acciones exteriores nulas del MAV, ecuaciones (4.4) y (4.9), proporciona los parámetros necesarios para caracterizar la descarga temporal de un acuífero en condiciones naturales. Esta afirmación se sustenta en que: (i) la componente transitoria de la solución es explícita y se representa como la sumatoria de funciones de decrecimiento exponencial y (ii) los autovalores obtenidos de solucionar (4.4) se asimilan a coeficientes de descarga y se calculan mediante procedimientos matemáticos que se basan en sistemas matriciales construidos particularmente para cada acuífero analizado. Así, usar los autovalores obtenidos de resolver el problema (4.4) tiene la ventaja de que no se requieren consideraciones empíricas previas ni imponer algún tipo de juicio subjetivo en el análisis del flujo en el acuífero. De los hidrogramas presentados en la figura 5.7 y de acuerdo con el esquema conceptual de resolución de modelos de flujo por el MAV para acuífero de geometría irregular, se puede concluir que no es necesario considerar la pendiente del río en la estimación de los parámetros de descarga del acuífero dado que el conjunto de autovalores asociados a un sistema hidrogeológico no varía a menos que lo hagan sus condiciones de contorno.

La anterior afirmación es válida siempre y cuando se cumplan las hipótesis de invariabilidad temporal en las condiciones de contorno y parámetros hidráulicos del acuífero. De lo anterior se deduce que las inconsistencias exhibidas en los resultados para los paráme-

tros de las curvas de agotamiento calculados por los diferentes métodos estudiados en esta sección se generan artificialmente por intentar representar la respuesta de un sistema multidimensional mediante una solución unidimensional. Así, cuando la inclinación relativa es importante, la caracterización de las curvas de agotamiento en acuíferos conectados con ríos perennes debe tratarse dividiendo los caudales en dos componentes; la primera transitoria, para evaluar los mecanismos de descarga cuando ha pasado un tiempo largo desde el último episodio de recarga sobre el acuífero, y la segunda permanente, para considerar la componente generada por la invariancia de las condiciones de contorno a lo largo del horizonte de simulación, las cuales vienen dadas principalmente por la topografía, las características geométricas del acuífero y la geomorfología de la red de drenaje permanente con la que éste se encuentra conectado.

## 5.6. Efectos producidos por la variación de las conductancias del lecho del río sobre el índice de agotamiento estimado del hidrograma

Considerando que la solución de Rorabaugh modela la descarga al río asumiendo conexión perfecta con el acuífero, se han realizado experimentos con el propósito de investigar la influencia de reducir el grado de interacción río-acuífero sobre la estimación de los parámetros de descarga empleando los hidrogramas subterráneos. Consecuentemente, todos los hidrogramas de descarga simulados mediante el MAV han sido sometidos al MRORA con el fin de cuantificar el efecto que tiene la variación de las conductancias del río sobre la estimación de los coeficientes de agotamiento; los cuales, para fines prácticos, se han calculado usando el método de la cuerda ajustable (Toebes y Strang, 1964).

Esta metodología consiste en aplicar los siguientes pasos: (*i*) definir un número mínimo de días en los cuales no se presentan recargas como referencia para seleccionar los intervalos del hidrograma que corresponden a curvas de agotamiento; (*ii*) seleccionar las curvas de agotamiento que corresponden a los intervalos contenidos entre el límite de días impuesto y el siguiente episodio de recarga, (*iii*) realizar un ajuste lineal entre los caudales simulados, representados en escala logarítmica, versus el tiempo; (*iv*) calcular la pendiente asociada a cada ajuste, para cada curva de agotamiento definida; y (*v*) promediar las pendientes calculadas de las curvas de agotamiento individuales seleccionadas. Al ejecutar el último paso, se obtiene la pendiente de la curva maestra de agotamiento del acuífero, es decir, una estimación de su coeficiente de agotamiento promedio, el cual se relaciona directamente con el inverso de  $\alpha_1$  en la solución de Rorabaugh, según las ecuaciones (3.31) y (3.33).

Para ilustrar las diferencias que se obtienen en la estimación de  $\alpha_1$  se ha aplicado el método de la cuerda ajustable sobre los hidrogramas simulados por el MAV, para los

Conexión río-acuífero	Cauce Horizontal				Cauce Inclinado			
	Nivel cte.	5000 [m <sup>2</sup> /d]	200 [m <sup>2</sup> /d]	50 [m <sup>2</sup> /d]	Nivel cte.	5000 [m <sup>2</sup> /d]	200 [m <sup>2</sup> /d]	50 [m <sup>2</sup> /d]
$\alpha_1$ [d <sup>-1</sup> ] super.	0.0183	0.0182	0.0168	0.0070	0.0292	0.0290	0.0262	0.0096
$\alpha_1$ [d <sup>-1</sup> ] inter.	0.0219	0.0218	0.0207	0.0088	0.0372	0.0368	0.0306	0.0102
$\alpha_1$ [d <sup>-1</sup> ] salida	0.0226	0.0224	0.0212	0.0091	0.0226	0.0224	0.0212	0.0092

**Tabla 5.5.** Primeros autovalores estimados de los hidrogramas simulados mediante el MAV usando el método de la cuerda ajustable, para las diferentes condiciones consideradas de conductancia e inclinación del río, de acuerdo con las zonas de balance predeterminadas.

diferentes valores de conductancia asumidos. Así, se han obtenido los autovalores que se consignan en la tabla 5.5, los cuales se desglosan por inclinación, subcuenca de análisis y grado de interacción entre río y acuífero, en función de dichas conductancias. Comparando dichos autovalores con los obtenidos resolviendo la ecuación (4.4), presentados en la tabla 5.2, se notan grandes diferencias. Por ejemplo, para conexión perfecta y cauce horizontal, aplicando el MRORA sobre el hidrograma simulado a la salida del acuífero se llega a que  $\alpha_1 = 0.0226 \text{ d}^{-1}$ , valor que es casi el triple del obtenido mediante (4.4), que es  $\alpha_1 = 0.0069 \text{ d}^{-1}$ . Esto implica que la respuesta estimada de la descarga del acuífero, representada por el autovalor calculado por el MRORA, es más rápida que la real, dada por el autovalor obtenido por el MAV. De esto se sigue que, para conexión perfecta, deberían utilizarse términos adicionales en la solución analítica para considerar la respuesta más lenta de la curva de agotamiento, la cual no ha sido capturada por el MRORA. Asimismo, a medida que la conectividad entre río y acuífero disminuye, las diferencias entre los resultados obtenidos por ambos métodos son menores, a pesar de que los resultados siguen estando bastante alejados. De nuevo, de la tabla 5.5 se observa que  $\alpha_1 = 0.0040 \text{ d}^{-1}$  es el primer autovalor calculado por el MAV para una conductancia de  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ , mientras que el correspondiente para el MRORA es de  $\alpha_1 = 0.0091 \text{ d}^{-1}$ , alcanzándose una relación de dos a uno entre ambos resultados, menor que la obtenida para conexión perfecta.

En general,  $\alpha_1$  disminuye a medida que la conductancia del río decrece por que el lecho confinante del río deja pasar agua hacia el canal con menos rapidez, entonces la velocidad con la que el hidrograma decae con respecto al tiempo es menor. Igualmente, la reacción del caudal descargado al río por el acuífero en los episodios de recarga es más lenta, como se observa comparando los caudales pico en los hidrogramas de las figuras 5.6 y 5.7, obtenidos para conductancias que varían entre  $5000$  y  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ .

Igualmente, utilizando el método de la cuerda ajustable se han obtenido diferentes  $\alpha_1$  para cada subcuenca, a pesar de que se han empleado parámetros de conexión río-acuífero uniformes en el espacio. Entonces, según los resultados obtenidos para el índice de agotamiento, podría concluirse erróneamente que, para cualquier subcuenca de análisis considerada, las dinámicas de interacción entre el río y el acuífero son diferentes, lo cual no es coherente con la estructura topológica del acuífero ni con la distribución uniforme de las propiedades hidráulicas asignadas para el acuífero y su interacción con la red de drenaje. Lo anterior es consecuencia de la poca robustez manifestada por el MRORA para estimar los parámetros del acuífero, incluso de forma agregada. Por el contrario, el MAV logra reproducir adecuadamente los hidrogramas subterráneos para todas las subcuencas de balance, y lo hace considerando un conjunto único de parámetros de descarga que son válidos para todo el acuífero, asegurando la robustez de las simulaciones efectuadas.

Ahora bien, al estudiar dos hidrogramas subterráneos, uno simulado para río horizontal y otro para río inclinado, obtenidos para una subcuenca intermedia e imponiendo un determinado valor de conductancia de lecho, se ha encontrado que la diferencia entre el  $\alpha_1$  calculado para el caso inclinado por el MRORA, con respecto al obtenido por el MAV, es mayor que cuando se comparan los resultados análogos en el caso horizontal. Esta observación es válida para las subcuencas superior e intermedia, para todos los valores de conductancia asumidos en este estudio y es consecuencia de la sustracción de la componente permanente de la descarga al aplicar el principio de superposición al obtener la solución total, puesto que las pendientes de las curvas de agotamiento son mayores cuando el acuífero está conectado con un río inclinado que cuando lo está con uno horizontal. Es más, dichas diferencias en las estimaciones de  $\alpha_1$  pueden aumentar o disminuir, de acuerdo al punto de la red de drenaje donde se obtiene el hidrograma, puesto que dependen de la variabilidad espacial de la componente estacionaria del caudal subterráneo permanente. De

los resultados presentados en la tabla 5.5 se observa que, aunque las diferencias entre los autovalores estimados por ambas técnicas disminuyen al considerar conexiones río-acuífero más imperfectas, éstas siguen siendo considerables en todos los casos analizados.

Por último, observando las estimaciones de  $\alpha_1$  presentadas en las tablas 5.1, 5.2 y 5.5, en función las conductancias impuestas en el análisis, se concluye que dichos autovalores difieren considerablemente de los correspondientes a conexión río-acuífero perfecta, que es la hipótesis en la cual se basa el MRORA. Por consiguiente, los índices de agotamiento del acuífero han sido sobreestimados en todos los casos considerados, ocasionando la subestimación de su difusividad. Aparte de lo anterior, la aplicación del MRORA sobre hidrogramas aforados en regiones donde los episodios de recarga son frecuentes y, por lo tanto, no se dispone de rachas suficientemente largas para construir una curva de agotamiento maestra representativa de la dinámica del acuífero en períodos secos, ocasiona nuevamente la sobreestimación de  $\alpha_1$ , esta vez debido a la escasez de información.

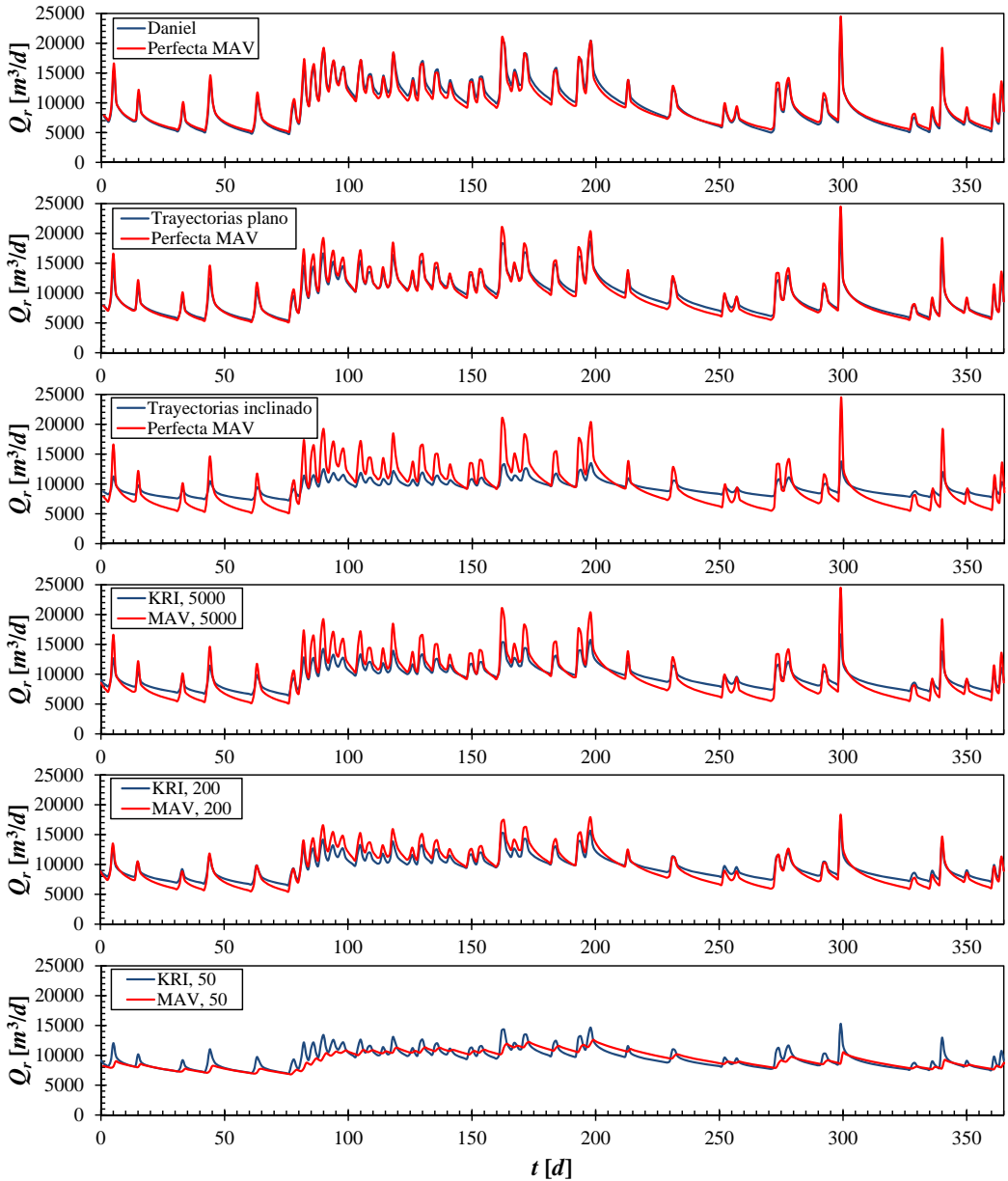
## 5.7. Resultados de las simulaciones mediante la solución de Rorabaugh y comparación cuantitativa con las simulaciones por el MAV

Se han realizado simulaciones de los hidrogramas de descarga al río usando la solución de Rorabaugh, ecuación (3.31), con el objetivo de realizar un análisis comparativo de los hidrogramas obtenidos con dicha solución y los simulados por el MAV. Para efectos prácticos de simulación mediante la solución de Rorabaugh, se ha utilizado el código de distribución libre PULSE (Rutledge, 1997), el cual asume que el parámetro que controla la modelación es la distancia entre la pared impermeable del acuífero y el río,  $L$  en la figura 3.2, que se interpreta como un ancho efectivo y se calcula a partir de las diferentes estimaciones de  $\alpha_1$  presentadas en esta sección, es decir: (i) usando la metodología de Daniel (1976), cuyos resultados se presentan en la tabla 5.1, (ii) usando el método de las trayectorias de Halford y Mayer (2000), cuyos resultados se presentan en la tabla 5.1, (iii) usando los índices de agotamiento estimados con la metodología de la cuerda ajustable, que se presentan en la tabla 5.5 para los hidrogramas a la salida del acuífero y diferentes conductancias. Los hidrogramas de descarga simulados con la solución de Rorabaugh para diferentes  $L$ , se compararon con los de referencia, simulados mediante el MAV, estimando los indicadores de la bondad de ajuste descritos en el apartado 3.6.2, **RMS**, **BIAS** y **E<sub>2</sub>**.

Método para calcular $L$	Red de drenaje	Conductancia [ $m^2/d$ ]	RMS [%]	BIAS [%]	E <sub>2</sub> [%]
Daniel	n.a	Perfecta	6.02	0.25	97.32
Trayectorias	Horizontal	Perfecta	7.90	0.25	93.17
Trayectorias	Inclinada	Perfecta	23.18	1.29	-193.93
$K_{RI}$	n.a	5000	16.38	0.15	33.02
$K_{RI}$	n.a	200	10.25	0.24	72.96
$K_{RI}$	n.a	50	9.08	1.80	71.10

**Tabla 5.6.** Índices de bondad de ajuste para los hidrogramas de descarga obtenidos por la solución de Rorabaugh usando diferentes metodologías de cálculo de  $L$ , con respecto a las correspondientes soluciones de referencia por el MAV.

Estos índices de bondad de ajuste, estimados para cada hidrograma simulado con la solución de Rorabaugh con respecto a su correspondiente hidrograma de referencia



**Figura 5.8.** Hidrogramas de descargas al río, para diferentes conexiones río-acuífero, calculados mediante: (i) El método de Daniel y el MAV con conexión perfecta y (ii) el método de las trayectorias para acuífero horizontal y el MAV con conexión perfecta, (iii) el método de las trayectorias para acuífero inclinado y el MAV con conexión perfecta, (iv) método de la curva ajustable para calcular  $K_{RI}$  y el MAV para conductancias que varían entre  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ .

por el MAV, se resumen en la tabla 5.6. Igualmente, en la figura 5.8 se presenta una comparación gráfica de los hidrogramas simulados por ambos métodos, para las diferentes parametrizaciones de conexión río-acuífero asumidas. Tanto en la tabla 5.6 como en la figura 5.8, se observa que las mejores simulaciones de los caudales de descarga mediante la ecuación de Rorabaugh se obtuvieron para valores de  $L$  estimados por el método de Daniel y mediante la medición de la longitud de la trayectoria para río horizontal. En ambos casos se encontraron eficiencias cercanas al 95 % y **RMS** de aproximadamente el 7 %. Para las demás metodologías de estimación de  $L$ , los hidrogramas simulados con la ecuación de Rorabaugh apenas alcanzan a capturar ciertas tendencias de la variabilidad temporal del caudal. Por ejemplo, como se observa en figura 5.8, las pendientes de las curvas de agotamiento obtenidas por dicha metodología son muy diferentes a las detectadas en los hidrogramas de referencia por el MAV, especialmente para casos parcialmente conectados con río inclinado. Más aún, los resultados presentados en la tabla 5.6 muestran que, como era de esperarse, los índices de comportamiento estimados para dichos casos no son satisfactorios puesto que se han encontrado eficiencias alejadas del óptimo, llegando a ser negativas para la metodología de las trayectorias y acuífero conectado con río inclinado. Además, la mayoría de los **RSM** estimados se encuentran por encima del 10 %.

## 5.8. Validación de los modelos resueltos por el MAV con respecto a soluciones de referencia por DF

Para verificar la validez de las simulaciones obtenidas mediante el MAV, se ha realizado un proceso de comparación cuantitativa de los resultados obtenidos, con respecto a los correspondientes a modelos numéricos análogos implementados en DF. Para lo anterior se ha procedido como sigue: (i) se implementaron los modelos de flujo utilizando exactamente la misma configuración geométrica de discretización espacial por DF, con parámetros hidráulicos y acciones exteriores idénticas a las impuestas durante la implementación en el MAV; (ii) se establecieron los mismos puntos de control para el cálculo de alturas piezométricas e hidrogramas de descarga; y (iii) se ha cuantificado la bondad de ajuste entre los hidrogramas y las alturas piezométricas simuladas con el MAV y las obtenidas mediante el modelo por DF estimando los **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>** respectivos. En relación a lo anterior, es pertinente aclarar que en este análisis se usan modelos de flujo subterráneo resueltos por el MAV sin truncamiento, dado que sus simulaciones presentan menores desviaciones con respecto a las obtenidas usando los modelos de referencia en DF.

Los resultados consignados en las tablas 5.7 y 5.8 muestran que, en general, los modelos de flujo resueltos por el MAV son consistentes con respecto a los implementados numéricamente por DF puesto que todos los índices de bondad de ajuste estimados, tanto para las series de caudales de descarga como para las de alturas piezométricas, exhiben valores muy satisfactorios. En general, los errores cuadráticos se encuentran por debajo del 1 %, las medias de las series de referencia se han representado adecuadamente y las eficiencias superan el 98.5 % en la mayoría de las simulaciones. En particular, para las alturas piezométricas se han encontrado algunas eficiencias cercanas al 100 %. Las mayores diferencias entre los resultados simulados y los de referencia se obtienen para conexión perfecta entre el río y el acuífero, especialmente si existe inclinación en la red de drenaje. Este hecho se acentúa a medida que la cuantificación del caudal de descarga se realiza en un volumen de control situado cada vez más aguas arriba de la salida del acuífero o cuando el punto de control para las alturas piezométricas se sitúa muy cerca del río.



		Cauce Horizontal				Cauce Inclinado			
		Nivel cte.	5000 [m <sup>2</sup> /d]	200 [m <sup>2</sup> /d]	50 [m <sup>2</sup> /d]	Nivel cte.	5000 [m <sup>2</sup> /d]	200 [m <sup>2</sup> /d]	50 [m <sup>2</sup> /d]
<b>RMS</b> [%]	<b>PQ<sub>r3</sub></b>	0.42	0.33	0.38	0.24	3.22	3.21	2.98	2.87
	<b>PQ<sub>r2</sub></b>	1.93	0.49	0.45	0.23	2.88	3.52	4.21	4.02
	<b>PQ<sub>r1</sub></b>	0.45	0.44	0.31	0.13	1.12	0.97	0.63	0.67
<b>BIAS</b> [%]	<b>PQ<sub>r3</sub></b>	0.23	0.24	0.23	0.23	1.29	1.38	1.18	0.95
	<b>PQ<sub>r2</sub></b>	0.13	0.22	0.21	0.22	1.52	0.90	2.96	2.94
	<b>PQ<sub>r1</sub></b>	0.19	0.20	0.22	0.21	0.03	0.01	0.07	0.08
<b>E<sub>2</sub></b> [%]	<b>PQ<sub>r3</sub></b>	99.99	99.99	99.97	99.97	99.36	98.91	98.76	97.94
	<b>PQ<sub>r2</sub></b>	95.76	99.72	99.96	99.98	99.44	99.49	97.74	95.76
	<b>PQ<sub>r1</sub></b>	99.86	99.98	99.98	99.98	99.99	99.99	99.94	99.86

**Tabla 5.7.** Índices de bondad de ajuste para los diferentes hidrogramas simulados mediante el MAV con respecto al modelo numérico de referencia por DF, para las diferentes cuencas de balance, usando diferentes parámetros de conectividad entre el río y el acuífero.

		Cauce Horizontal				Cauce Inclinado			
		Nivel cte.	5000 [m <sup>2</sup> /d]	200 [m <sup>2</sup> /d]	50 [m <sup>2</sup> /d]	Nivel cte.	5000 [m <sup>2</sup> /d]	200 [m <sup>2</sup> /d]	50 [m <sup>2</sup> /d]
<b>RMS</b> [%]	<b>P<sub>1</sub></b>	0.18	0.27	0.25	0.21	0.26	0.23	0.19	0.20
	<b>P<sub>2</sub></b>	0.08	0.08	0.07	0.07	0.47	0.34	0.34	0.32
	<b>P<sub>3</sub></b>	1.13	0.47	0.32	0.32	0.21	0.07	0.07	0.09
	<b>P<sub>4</sub></b>	0.24	0.21	0.16	0.16	0.50	0.43	0.30	0.22
<b>BIAS</b> [%]	<b>P<sub>1</sub></b>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.07	0.04	0.06	0.06
	<b>P<sub>2</sub></b>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.15	0.10	0.10	0.09
	<b>P<sub>3</sub></b>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.02
	<b>P<sub>4</sub></b>	0.00	0.00	0.00	0.00	0.09	0.08	0.08	0.10
<b>E<sub>2</sub></b> [%]	<b>P<sub>1</sub></b>	99.99	99.99	99.99	100.00	99.84	99.96	99.92	99.90
	<b>P<sub>2</sub></b>	100.00	100.00	100.00	100.00	99.00	99.24	99.99	100.00
	<b>P<sub>3</sub></b>	99.91	99.98	99.99	100.00	99.99	99.50	99.65	99.66
	<b>P<sub>4</sub></b>	99.99	99.98	99.99	99.99	99.50	99.99	99.99	99.88

**Tabla 5.8.** Índices de bondad de ajuste para las series piezométricas simuladas mediante el MAV con respecto a las obtenidas por el modelo numérico de referencia en DF, para los cuatro puntos de control considerados, utilizando diferentes parámetros de conectividad entre el río y el acuífero.

Por cierto, a medida que aumenta la inclinación del lecho del río, el uso de la forma lineal de la ecuación de flujo subterráneo bidimensional deja de ser estrictamente válido, puesto que se generan componentes de velocidad verticales importantes en el dominio tridimensional del acuífero. De esta forma, para lograr una representación bidimensional más adecuada del flujo subterráneo bajo dichas condiciones debe resolverse la ecuación de Boussinesq o, en su defecto, implementar un modelo completamente tridimensional.

A pesar de lo anterior, si se analizan los índices de comportamiento estimados, puede concluirse que la pendiente utilizada en el presente estudio no llega a modificar en gran medida el carácter bidimensional lineal del flujo en el acuífero irregular. Por consiguiente, los modelos implementados pueden considerarse lo suficientemente robustos como para soportar la discusión presentada a lo largo de esta sección. Asimismo, los resultados de la validación demuestran que los parámetros de descarga del acuífero obtenidos mediante el MAV son válidos para todo el dominio espacial del acuífero. Por lo tanto, el mismo conjunto de parámetros obtenidos al solucionar el problema de autovalores de la ecuación

(4.4), puede usarse para estimar las descargas parciales en tramos de la red de drenaje aguas arriba de la salida del acuífero, lo cual va en pro de la parsimonia de la modelación.

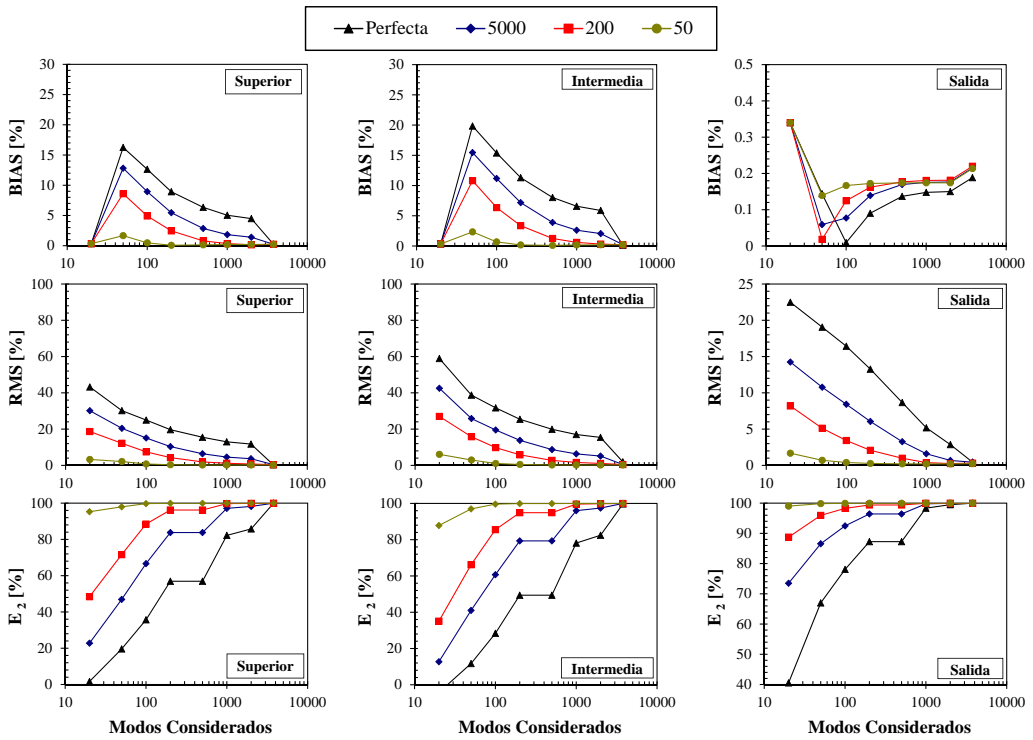
## 5.9. Consideraciones para la reducción del modelo

Una vez comprobada la validez de los modelos de flujo resueltos por el MAV sin truncamiento, se efectúa el análisis de sensibilidad de las simulaciones reducidas con respecto a la cantidad de modos considerados. Para ello se han implementado modelos de flujo reducidos que incluyen 50, 100, 200, 500, 1000 y 2000 modos, los cuales se resuelven mediante el MAV con truncamiento conservativo, es decir, se utiliza un modo adicional para mantener la ecuación de continuidad agregada en el acuífero. También se consideran diferentes escenarios en la parametrización de la interacción río-acuífero, para lo cual se estudian las siguientes situaciones: (i) conexión perfecta imponiendo una condición de contorno de nivel prescrito en los bloques de río, (ii) conexión parcial imponiendo una condición de contorno mixta, con las conductancias variando entre 50 y 5000 m<sup>2</sup>/d y (iii) cambios en la inclinación de la red de drenaje conectada con el acuífero. Los parámetros de control que se han evaluado en este análisis de sensibilidad son: (i) los caudales descargados a lo largo de toda la red de drenaje, (ii) los caudales de descarga para las subcuencas superior e intermedia en los puntos de balance  $PQ_{r3}$  y  $PQ_{r2}$  (figura 5.1), y (iii) las alturas piezométricas en los puntos de control  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  (figura 5.1). El comportamiento de las simulaciones efectuadas mediante los modelos reducidos, con respecto a las obtenidas por modelos de referencia en DF, se mide a través de los índices **RMS**, **BIAS** y  $E_2$ , cuyas estimaciones se presentan gráficamente en función del tamaño del modelo reducido.

Los índices de comportamiento estimados para los hidrogramas de descarga simulados para el río horizontal se presentan en la figura 5.9. Se observa que, para modelos reducidos formados por la misma cantidad de modos, las peores bondades de ajuste se estiman para aquellos a los cuales se les ha asignado conexión río-acuífero perfecta. A medida que la conductancia disminuye, el comportamiento de los hidrogramas simulados mediante los modelos reducidos por el MAV mejora. Con lo anterior, los mejores resultados, independientemente la subcuenca considerada, se estimaron para una conductancia de 50 m<sup>2</sup>/d.

En los gráficos de la fila central de la figura 5.9 se muestran las estimaciones de **RMS**. De ellas se deduce que existe un comportamiento decreciente de este índice, para los hidrogramas simulados en todas las subcuencas de análisis, a medida que se considera más modos en los modelos reducidos. Igualmente, se observa que los valores máximos de **RMS** cambian para cada subcuenca, siendo éstos mayores a medida que los hidrogramas parciales se calculan usando una mayor cantidad de bloques de río. Así, en todos los puntos de balance, las mayores estimaciones se obtienen para los modelos que incluyen únicamente 20 modos; además, mientras que para la subcuenca superior se ha estimado un **RMS** máximo del 40%, para la subcuenca intermedia se ha estimado del 60%. Estos máximos disminuyen a medida que se consideran relaciones río-acuífero más imperfectas. Por el contrario, el **RMS** máximo a la salida del acuífero se encuentra cerca del 24% para conexión río-acuífero perfecta, disminuyendo hasta casi el 2% para una conductancia de 50 m<sup>2</sup>/d. Asimismo, las estimaciones de **RMS** bajan hasta valores muy cercanos a cero para modelos no tan reducidos, formados por más de 1000 modos, confirmando el aumento de la bondad ajuste en las simulaciones a medida que el tamaño del modelo crece.

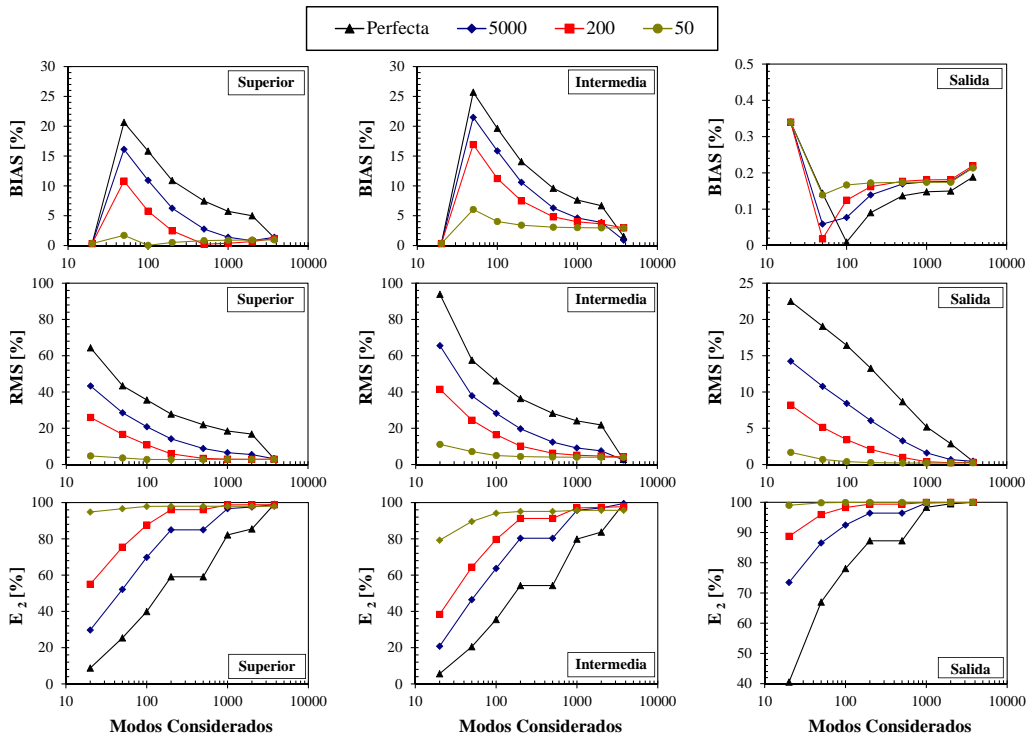
Por otro lado, los gráficos de la fila inferior en la figura 5.9 muestran la variación de  $E_2$ , para las diferentes subcuencas, con respecto al tamaño del modelo reducido, donde se observa que  $E_2$  aumenta a medida que se considera una mayor cantidad de modos. Particularmente, para las subcuencas superior e intermedia se ha hallado que las estimaciones



**Figura 5.9.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas de descarga simulados mediante modelos reducidos por el MAV con diferentes niveles de truncamiento, para las diferentes subcuencas de análisis y diferentes valores de conductancia de bloques de un río horizontal, con respecto a las soluciones numéricas por DF correspondientes.

para los modelos reducidos más pequeños, formados por menos de 50 modos, no alcanzan el 60 % para conductancias de bloque de río mayores a 200 m<sup>2</sup>/d, encontrándose inclusive valores negativos para conexión perfecta en la subcuenca intermedia. Igualmente, las bondades de ajuste para los hidrogramas parciales aumentan lentamente a medida que se consideran más modos, especialmente cuando la conexión río-acuífero es elevada, puesto que para obtener valores de  $E_2$  por encima del 80 % deben usarse modelos reducidos compuestos por más de 1000 modos. Ahora bien, a pesar de que las tendencias exhibidas por  $E_2$  para los hidrogramas en la salida del acuífero son similares a las descritas para las otras subcuencas, sus mínimos no son tan pequeños como los mencionados antes, puesto que las estimaciones correspondientes superan el 40 %, incluso para modelos muy reducidos y conexión perfecta; para las demás conductancias, dichas eficiencias superan al 70 %. Más aún, la bondad del ajuste aumenta más rápidamente al incluir más modos en los modelos reducidos usados para simular los hidrogramas a la salida del acuífero que en las demás subcuencas de balance; esto se concluye puesto que, para modelos compuestos por más de 200 modos,  $E_2$  ha superado el límite del 80 % para todas las conductancias.

Igualmente, en la figura 5.10 se muestran los índices de comportamiento para los hidrogramas de respuesta en el río inclinado correspondientes a los diferentes modelos reducidos planteados; en ella, los resultados se organizan gráficamente así: la fila superior para **BIAS**, la central para **RMS** y la inferior para  $E_2$ , mientras que cada columna indica a cual de



**Figura 5.10.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas de descarga simulados mediante modelos reducidos por el MAV con diferentes niveles de truncamiento, para las diferentes subcuencas de análisis y diferentes valores de conductancia de bloques de un río inclinado, con respecto a las soluciones numéricas por DF correspondientes.

las subcuencas de análisis pertenecen los resultados. Se observa que las tendencias de los índices de comportamiento con respecto de los modos considerados en el modelo reducido son completamente análogas a las obtenidas para río horizontal, presentándose algunas pequeñas diferencias que se describen a continuación: (i) los máximos **BIAS** para las subcuencas superior e intermedia aumentan alrededor de un 5% para las conductancias de bloque menores a 5000  $\text{m}^2/\text{d}$ ; (ii) los máximos **RMS** aumentan entre un 5 y un 20% cuando la conductancia de bloque de río aumenta, correspondiendo los menores porcentajes de aumento a los menores valores de dicho parámetro; (iii) las eficiencias mínimas de los hidrogramas simulados por el MAV, para las subcuencas superior e intermedia, aumentan por encima de cero, pero su velocidad de convergencia a los valores óptimos disminuye. Para finalizar, cabe resaltar que, a la salida del acuífero, los resultados presentados son idénticos a los obtenidos para río horizontal dado que la influencia de la pendiente del río en la dinámica de flujo del acuífero se anula como consecuencia de que se ha considerado un sistema hidrogeológico cerrado, como se ha discutido en el apartado 5.5.2.

En la figura 5.11 se presentan las estimaciones de los índices de comportamiento para las series de piezometría simuladas en los cuatro puntos de control considerados, asumiendo río horizontal y diferentes valores de conductancia de bloque de conexión entre éste y el acuífero. Al respecto del índice **BIAS**, cuyos resultados se presentan en las gráficas de la columna izquierda de la figura 5.11, en todos los puntos de control manifiesta un com-

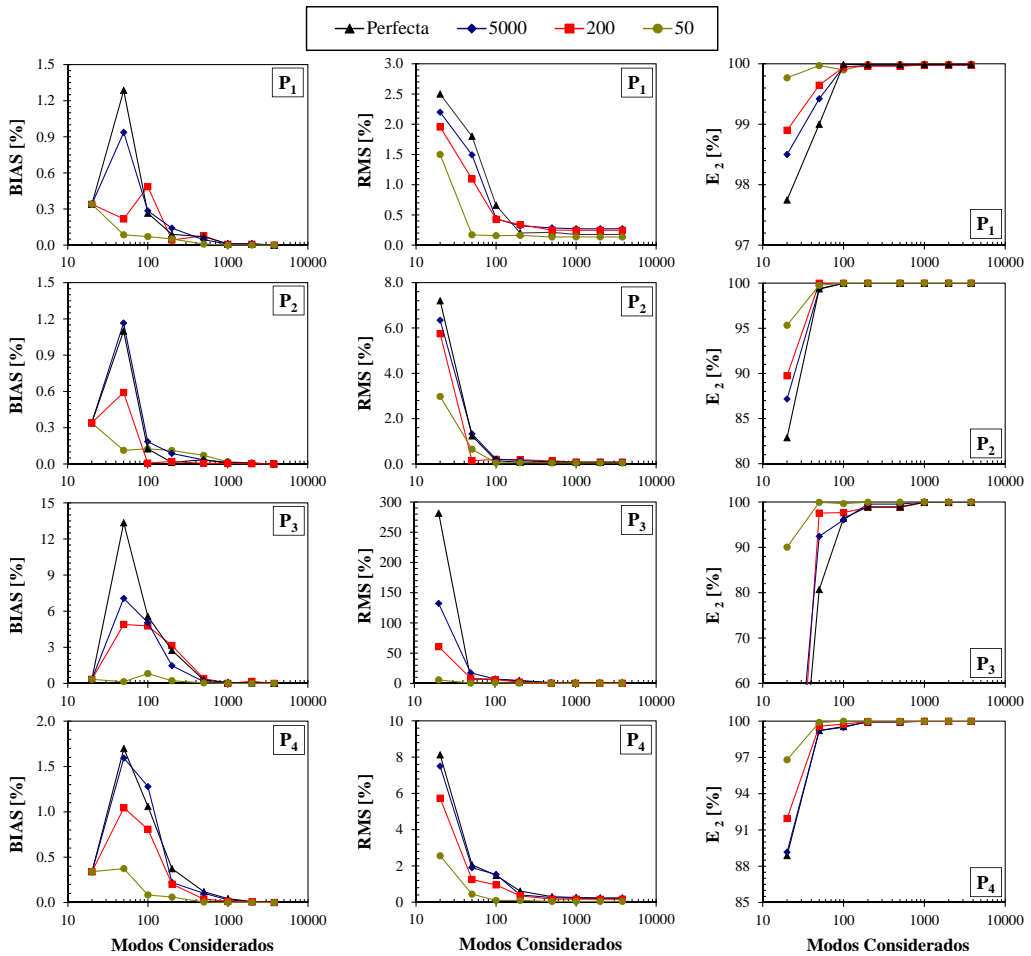


Figura 5.11. Índices de comportamiento para las alturas piezométricas en los puntos de control  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  simuladas con modelos reducidos por el MAV truncado, para diferentes valores de conductancia de bloque en un río horizontal, con respecto a una solución numérica por DF.

portamiento creciente en las estimaciones obtenidas para modelos reducidos que contienen entre 20 y 50 modos. Esta tendencia creciente se evidencia más claramente al contemplar las estimaciones obtenidas en  $P_1$  y  $P_2$ , cuando la conexión río-acuífero es elevada, o para los puntos  $P_3$  y  $P_4$  en todos los casos de conductancia. Asimismo, los máximos estimados en  $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_3$  se encuentran entre 1.2 y 2% para modelos reducidos formados por 50 modos, mientras que para  $P_3$  se ha encontrado máximos inusuales por encima del 3% para una conductancia de 200  $m^2/d$ , llegando hasta el 14% para la conexión perfecta. Para todas las series simuladas, **BIAS** disminuye monótonamente hasta cerca de cero después de alcanzar su máximo, que se presenta cuando el número de modos considerados en el truncamiento varían entre 50 y 100. Una vez se alcanza la fase de decrecimiento de **BIAS**, los modelos reducidos planteados aseguran la reproducción más fiel de las alturas piezométricas medias de las series de referencia a medida que su tamaño aumenta.

Por su parte, el índice **RMS**, cuyos resultados se consignan en las gráficas de la columna central de la figura 5.11, manifiesta un comportamiento decreciente sin importar el punto de control considerado. En general, las mayores estimaciones se han obtenido usando los modelos que consideran únicamente los primeros 20 modos en el truncamiento y conexión perfecta entre río y acuífero, disminuyendo progresivamente a medida que dicha conexión se hace más imperfecta. En general, se ha encontrado que los máximos **RMS** estimados dependen fuertemente de la localización del punto de control dentro del dominio espacial del acuífero, como se describe a continuación. En **P**<sub>1</sub> se encontraron máximos que oscilan entre 1.5 y 2.5 %, para los puntos **P**<sub>2</sub> y **P**<sub>4</sub> los máximos fluctúan entre 8 y 2 %, mientras que los máximos estimados más elevados se encontraron según la serie simulada en **P**<sub>3</sub>, cuyos valores varían entre 50 % para una conductancia de 50 m<sup>2</sup>/d y 280 % para conexión perfecta. A pesar de lo anterior, la velocidad de decrecimiento del **RMS** para las series de piezometría en **P**<sub>3</sub> es elevada, encontrándose que las estimaciones conseguidas disminuyen por debajo del 10 % para modelos truncados que contienen los primeros 200 modos.

Los índices de eficiencia para las piezometrías simuladas en los puntos de control, que se presentan en los gráficos de la columna derecha de la figura 5.11, muestran un comportamiento creciente a medida que se incluyen más modos en los modelos reducidos. Para modelos reducidos del mismo tamaño se han encontrado mejores estimaciones a medida que la conectividad entre el río y el acuífero disminuye, las cuales se presentan para la serie piezométrica simulada en **P**<sub>1</sub>, donde **E**<sub>2</sub> sobrepasa el 97 % para todos los casos de conductancia. Por el contrario, estimaciones un poco menos cercanas al óptimo se obtuvieron para las piezometrías en **P**<sub>2</sub> y **P**<sub>4</sub>, en las cuales las eficiencias apenas superan el 80 % al simularse usando modelos compuestos por 20 modos únicamente. Asimismo, se han obtenido estimaciones deficientes de **E**<sub>2</sub> para las alturas piezométricas simuladas en **P**<sub>3</sub>, por debajo del 20 %, para modelos reducidos planteados con menos de 100 modos y conductancias de bloque de río mayores a 100 m<sup>2</sup>/d. De acuerdo con todos los índices de comportamiento estimados y discutidos en este apartado, se pone de manifiesto que no ha logrado reproducirse adecuadamente las series piezométricas de referencia en el punto de control **P**<sub>3</sub> cuando las simulaciones se ejecutan mediante modelos reducidos cuyo truncamiento incluye menos de los primeros 500 modos, como consecuencia de que dicho punto se sitúa muy cerca de la confluencia de tres tramos de la red de drenaje permanente conectada con el acuífero, de acuerdo con el esquema izquierdo de la figura 5.1.

De lo anterior se concluye que, cuando se desea realizar el seguimiento temporal de la evolución piezométrica en bloques del modelo cercanos a los correspondientes al río, no es suficiente utilizar solamente los primeros modos del modelo reducido para lograr una reproducción adecuada de las alturas piezométricas, a pesar de que los índices de comportamiento mejoran en la medida en que la conductancia de bloque de río disminuye. Lo anterior confirma que los parámetros de conexión entre el río y el acuífero juegan un papel preponderante en el planteamiento de los modelos reducidos usados para fines de simulación eficiente de un sistema hidrogeológico integrado en sistemas de uso conjunto, no sólo en lo referente a la simulación de los hidrogramas de la interacción río-acuífero, sino también en la adecuada reproducción de las alturas piezométricas en sitios seleccionados.

Por otro lado, en la figura 5.12 se presentan las estimaciones de los índices de comportamiento para las series de alturas piezométricas simuladas en los cuatro puntos de control, para los modelos implementados con río inclinado. De las gráficas de la columna izquierda en dicha figura se observa que, para todas las series piezométricas simuladas, el comportamiento exhibido por las estimaciones de **BIAS** es decreciente, disminuyendo desde valores cercanos al 0.6 % hasta inclusive por debajo del 0.1 %. Igualmente, las estimaciones del **RMS** para las series piezométricas simuladas, presentadas en la columna

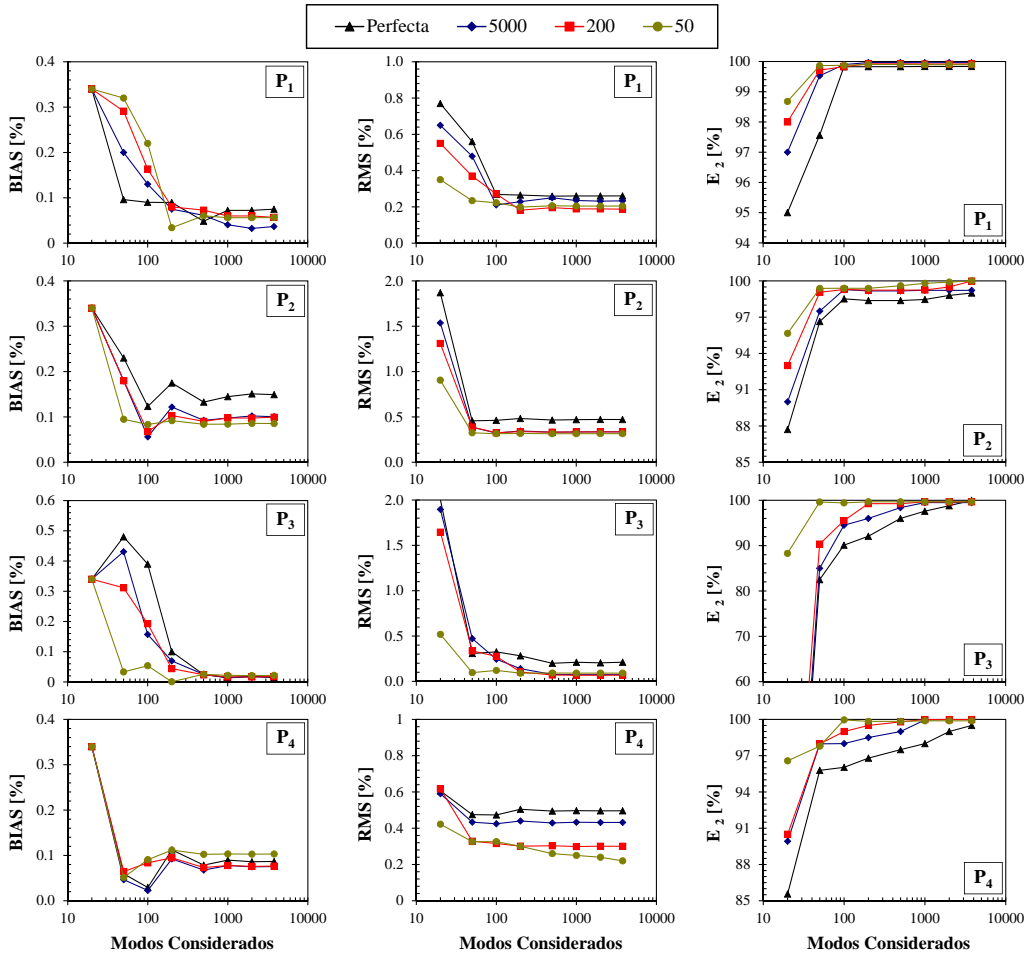
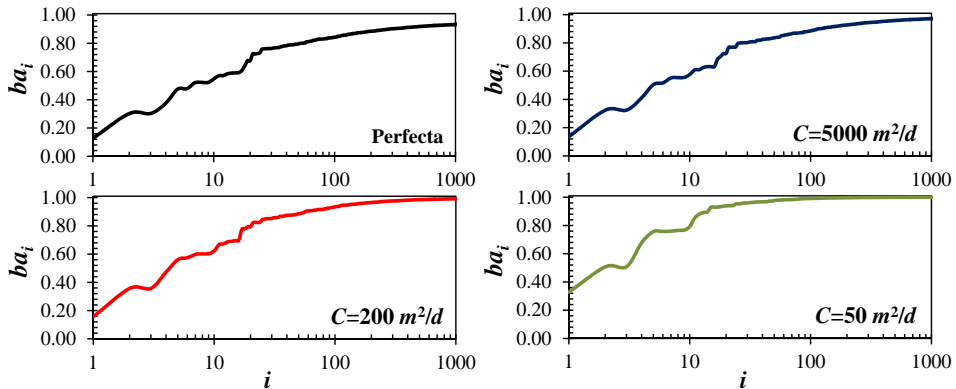


Figura 5.12. Índices de comportamiento para las alturas piezométricas en los puntos de control  $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_3$  y  $P_4$  simuladas con modelos reducidos por el MAV truncado, para diferentes valores de conductancia de bloque en un río inclinado, con respecto a una solución numérica por DF.

central de la figura 5.12, muestran un comportamiento decreciente con el tamaño del modelo reducido, en dos tramos reconocibles. El primero, para modelos que consideran entre 20 y 100 modos, en el cual la velocidad de disminución de **RMS** con respecto al número de modos es importante, mientras que el segundo, considerando mayor cantidad de modos, manifiesta un decrecimiento suave hacia un valor límite cercano a cero. Este comportamiento se mantiene en todos los puntos de control, a pesar de que existen diferencia en los máximos estimados para los modelos más pequeños, truncados hasta los primeros 20 modos. Los máximos más bajos, cercanos a 0.8%, se presentan en  $P_1$  y  $P_4$ , mientras que los más elevados se presentan para  $P_3$ , con valores superiores al 3%. En este punto de la discusión deben notarse las grandes diferencia encontradas en los **RMS** para río horizontal con respecto a los estimados para río inclinado, lo cual se debe a que su normalización se ha realizado con base a la altura piezométrica media de la serie de referencia, que para río horizontal es de 0.28 m, mientras que en el inclinado es de 11.08 m. Asimismo, el

comportamiento exhibido por  $\mathbf{E}_2$  es análogo al descrito antes para río horizontal, con la diferencia de que, para las series piezométricas en  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_3$  y  $\mathbf{P}_4$ , la rapidez de aproximación a eficiencias cercanas al 100 % es más lenta, especialmente para conexión perfecta.

En todos los gráficos presentados en la figura 5.12 se observa que los índices tienden a valores límites cuando el tamaño del modelo se aproxima al máximo de modos disponibles. Aún así, en algunos casos, dicho límite no corresponde exactamente a 0 % para **BIAS** y **RMS** o al 100 % para  $\mathbf{E}_2$ , como se esperaría a priori, lo cual se origina en el esquema de superposición propuesto para la reducción de los modelos. Para efectos prácticos de implementación informática de dicho esquema, las soluciones de los problemas en régimen permanente se obtienen numéricamente usando un método clásico de aproximación por gradientes conjugados preconditionados, mientras que las soluciones transitorias se obtiene a través del MAV. Así, desde la perspectiva puramente práctica, tanto la construcción conceptual como la implementación del MAV es diferente a la solución puramente numérica mediante las DF, generándose pequeñas desviaciones aritméticas por cuestiones de convergencia de los métodos numéricos, en ambos casos. A pesar de ello, se obtienen resultados muy aceptables, con **BIAS** y **RMS** menores del 0.5 % y  $\mathbf{E}_2$  por encima del 99.9 %, para los modelos reducidos compuestos por más de 1000 modos.



**Figura 5.13.** Distribución de los coeficientes de reparto acumulados para el acuífero propuesto por Halford y Mayer (2000), correspondientes a cuatro diferentes conductancias de bloque de río.

Finalmente, en la figura 5.13 se presenta la evolución de los coeficientes de reparto acumulados modales,  $ba_i$ , para el acuífero modelado según las conductancias de bloque de río asignadas a cada caso de análisis. En ella se observa que la irregularidad de la geometría y la gran cantidad de bloques de río existentes en el modelo ocasiona que la convergencia hacia uno por parte de  $ba_i$  sea más lenta que para el acuífero rectangular analizado en la sección anterior, lo cual se traduce inexorablemente en una mayor dificultad para lograr el planteamiento de modelos reducidos representativos del sistema original, por diferentes razones: (i) se aumenta el trabajo computacional necesario para la generación de los subespacios de autovectores requeridos en el proceso de reducción, (ii) los modelos reducidos que aseguren un comportamiento adecuado del sistema serán de mayor tamaño que aquellos planteados para geometrías más regulares con pocas celdas de río, (iii) si los parámetros de conexión entre el río y el acuífero son cercanos a la conexión perfecta, en casos de geometría irregular, los modelos reducidos deberán incluir gran parte del espectro del problema de autovalores asociado al modelo y (iv) modelos reducidos de menor tamaño se obtendrán para conexiones río-acuífero más imperfectas. Aún así, siguen existiendo



modos interiores para los cuales el coeficiente de reparto es casi nulo, que son susceptibles de ser excluidos con el propósito de obtener modelos de flujo de menor tamaño.

## 5.10. Conclusiones y discusión

Los métodos existentes para el análisis de curvas de agotamiento se basan en la aplicación de una solución analítica para la descarga del acuífero al río con el fin obtener unos pocos parámetros que representen el decaimiento del hidrograma en temporadas relativamente secas. Para lo anterior, todas las soluciones se pueden expresar mediante una sumatoria de funciones de decrecimiento exponencial en función del tiempo. En dichas sumatorias, cada uno de los términos tiene asociado un parámetro de decaimiento que representa una velocidad de descarga de agua al río. Basado en algunas de dichas soluciones, Maillet (1905) propone que, para el análisis de curvas de agotamiento, sólo el primer término de dichas sumatorias es suficiente para estimar los parámetros de descarga del acuífero. Al respecto, durante los últimos años ha crecido la controversia acerca de la aplicabilidad práctica de los métodos clásicos de análisis de curvas de agotamiento. En particular para acuíferos lineales, la aplicabilidad del MRORA ha sido ampliamente debatido por diversos autores, puesto que sus hipótesis de desarrollo son inaplicables en la mayoría de casos prácticos (Halford y Mayer, 2000). En este capítulo se ha comprobado la validez de esta afirmación mediante el análisis de la influencia de la irregularidad del acuífero y la red de drenaje con la que se conecta en la estimación de los parámetros de descarga al río. También se ha investigado que tanto debe reducirse la ecuación de estado del MAV para representar adecuadamente las curvas de agotamiento, especialmente estudiando un acuífero conectado con una red de drenaje sinuosa.

Dado lo anterior, se han usado tres métodos para estudiar los hidrogramas de descarga del acuífero al río durante las curvas de agotamiento: (i) el MRORA, (ii) el método las trayectorias en régimen permanentes de Halford y Mayer y (iii) el MAV. Estos métodos han sido aplicados para estimar los parámetros de descarga a escala global del acuífero (índice de agotamiento,  $K_{RI}$ , tiempo crítico asociado,  $t_c$ , y el primer exponente o autovalor,  $\alpha_1$ ) bajo diferentes condiciones de conexión con el río. Los resultados muestran que dichos parámetros son subestimados mediante los dos primeros métodos debido a que intentan dar solución analítica unidimensional a un problema multidimensional. Aún más, sus hipótesis conceptuales son demasiado rígidas, especialmente en lo concerniente a las características asumidas para interacción entre el río y el acuífero, por lo cual sólo se obtuvieron resultados menos imprecisos en los modelos para los que se asumió conexión perfecta.

Se ha mostrado que los autovalores obtenidos de resolver la ecuación (4.4) caracterizan efectivamente la descarga de un acuífero lineal con cualquier tipo de geometría. En especial, para acuíferos irregulares, se ha mostrado que los hidrogramas simulados empleando los parámetros de descarga estimados mediante MRORA y el método de Halford y Mayer no representan adecuadamente los de referencia, simulados mediante modelos implementados en DF. En cambio, las simulaciones por el MAV capturan adecuadamente el comportamiento de dichos hidrogramas, tanto para un río horizontal e inclinado bajo diferentes parámetros de conectividad con el acuífero que le drena, proporcionando parámetros de descarga robustos. Igualmente, se ha expuesto que usar únicamente la primera componente de la ecuación (3.31) no captura efectivamente el comportamiento de las descargas al río; problema que se acentúa a medida que aumentan la irregularidad geométrica del acuífero, la sinuosidad de la red de drenaje conectada con éste y la perfección en su conexión. Por consiguiente, se deduce que la hipótesis de Maillet es aplicable en acuíferos de geometría

casi regular, donde se presente flujo paralelo y conexión casi perfecta con el río, lo cual supone unas restricciones muy rígidas, raramente verificables en la naturaleza.

Asimismo, se ha puesto de manifiesto que los parámetros de descarga para acuíferos lineales, calculados mediante el MAV, no dependen de la pendiente del río con el que se encuentra conectado. Como caso especial, en la sección 5.5.4 se han presentado las estimaciones de dichos parámetros cuando el acuífero lineal irregular estudiado se conecta con una red de drenaje sinuosa e inclinada. Éstos confirman que, bajo el esquema de principio de superposición propuesto en el capítulo 2, la respuesta de la descarga del sistema está dominada por los autovalores obtenidos al resolver el problema de la ecuación (4.4), obtenida para condiciones de contorno nulas. Por el contrario, los demás métodos usados para caracterizar la descarga al río generan diferentes coeficientes de descarga según la porción de la red de drenaje adoptada como volumen de control, los cuales dependen de la inclinación de la red de drenaje, conduciendo a la estimación de valores irreales de  $K_{RI}$  y, por lo tanto, de la difusividad promedio del acuífero. Debe enfatizarse que la aplicación de dicho esquema conceptual de superposición no ha sido presentada previamente para el análisis de curvas de agotamiento en sistemas hidrogeológicos en condiciones naturales y sirve para concluir que el uso de métodos basados en el análisis de hidrogramas superficiales para estimar parámetros de descarga del acuífero puede enmascarar el efecto que tiene la geomorfología de la red de drenaje sobre los resultados obtenidos.

En un caso real donde la transmisividad del acuífero y la conexión de éste con el río son altamente variables en el espacio, la difusividad calculada mediante el uso del índice de agotamiento pueden ser bastante subestimada. El anterior problema se incrementa en zonas donde la recarga por lluvia es frecuente y, en general, no se disponen de hidrogramas donde se pueda extraer curvas de agotamiento lo suficientemente representativas para que los índices de agotamiento estimados caractericen con coherencia la dinámica de descarga del acuífero. Igualmente, se ha presentado una solución alternativa de la EDP de flujo subterráneo a través del MAV, con el propósito de dar una alternativa al estudio de las curvas de agotamiento en una cuenca conectada con un acuífero lineal. Los resultados presentados son una primera aproximación al análisis de los caudales descargados al río en épocas secas en una cuenca, con lo cual el MAV surge como una herramienta potencialmente efectiva para abordar problemas en los cuales sea importante considerar la heterogeneidad espacial en los parámetros del acuífero y su conexión con el río.

Por último, se ha presentado un análisis de sensibilidad con respecto al número de modos considerados en los modelos reducidos por el MAV para el acuífero irregular estudiado, variando la conductancia de los bloques de río. De éste se concluye principalmente que la irregularidad de la geometría del acuífero y la red de drenaje ocasiona que los modos efectivos se distribuyan sobre una fracción más amplia del espectro del modelo de flujo del acuífero. Como consecuencia de lo anterior se hace evidente que los modelos reducidos por el MAV que aproximan adecuadamente el sistema original deben ser de tamaño considerable, es decir, deben incluir varios cientos de los modos inferiores, incluso para conexión río-acuífero muy imperfecta, el cual es el caso menos crítico para propósitos de reducción.

*“La perfección se logra al fin,  
no cuando no hay nada que agregar,  
sino cuando ya no hay nada que obtener ”.*  
*Antoine de Saint-Exupery*

# 6

## Compresión selectiva, enmascaramiento y generación modal en la reducción por el método de los autovalores

### 6.1. Introducción

En este capítulo se presenta una extensión del MAV que reduce el tamaño de un modelo de flujo subterráneo a incorporarse en la simulación del uso conjunto del recurso hídrico; aumentando su eficiencia computacional. La metodología propuesta se basa en la definición de los siguientes conceptos: modos efectivos y residuales, límite de participación modal, máscara de estados efectivos y nivel de continuidad. Con base en lo anterior, se plantean algoritmos para la compresión selectiva, el enmascaramiento de los estados y la generación computacional eficiente de los modos efectivos del modelo. Éstos, usados apropiadamente, disminuyen sustancialmente el número de operaciones requeridas por el MAV con respecto a la reducción clásica por truncamiento conservativo. Por lo tanto, simular el flujo subterráneo mediante el MAV con compresión selectiva y enmascaramiento modal aumenta la velocidad de ejecución del modelo de uso conjunto en un sistema de recursos hídricos, especialmente cuando se emplean finas discretizaciones espaciales y existen muchas acciones exteriores actuando simultáneamente sobre los acuíferos del sistema.

Para poner en práctica el nuevo marco conceptual del MAV, se han desarrollado implementaciones eficientes para la generación de los modos efectivos a usarse en la reducción del modelo. Éstas se basan en algoritmos iterativos para la resolución de problemas generalizados de autovalores, a los cuales se les incorpora criterios de base física para realizar la selección modal y la construcción de la base del subespacio de autovectores. Dada su relevancia en esta investigación, se presenta una revisión de los métodos existentes para

calcular los modos de un problema generalizado, simétrico y definido positivo; haciendo énfasis en los requerimientos de implementación necesarios para asegurar su eficiencia.

También se describen las características generales de EVMPACK; librería de programas que implementa la simulación de modelos de flujo subterráneo mediante el MAV con compresión selectiva y enmascaramiento modal. Al respecto, se realiza una discusión detallada de los criterios que fueron tenidos en cuenta al implementar los algoritmos de generación modal. Por último, se muestran aplicaciones de la metodología propuesta para reducir los modelos de flujo de dos acuíferos sencillos. El primero corresponde al acuífero de referencia analizado en las secciones 3.6 y 4.4, mientras que el segundo es un acuífero rectangular heterogéneo sometido a un par de acciones exteriores sencillas y variables en el tiempo. Los resultados provenientes de los modelos reducidos por el MAV con compresión selectiva y enmascaramiento modal se comparan con los obtenidos usando modelos en DF, donde se discretizan las derivadas temporales mediante un esquema euleriano implícito.

## 6.2. Compresión selectiva y enmascaramiento de los modos efectivos en un modelo de flujo subterráneo resuelto mediante el MAV

En los resultados de los experimentos computacionales presentados en los capítulos 4 y 5 se ha mostrado que el truncamiento conservativo de los modos superiores del espectro del modelo de flujo es un procedimiento efectivo de reducción. Sin embargo, también se ha visto que existen muchos modos residuales contenidos dentro de la fracción del espectro no truncada cuyo aporte no es significativo en la evaluación de los estados del flujo en el acuífero. Esta característica ha sido reportado previamente por diferentes autores (Dunbar y Woodbury, 1989; Gambolati, 1993), quienes también afirmaron que la reducción modal por el MAV no parece ser una opción competitiva al ser comparada con otros algoritmos, por ejemplo el MLAN. Como veremos, la anterior conclusión resulta ser apresurada a la luz de los resultados de los experimentos ejecutados en esta tesis sobre la estructura de la solución del problema de autovalores asociado al modelo de flujo por el MAV.

De acuerdo con la discusión presentada en el apartado 4.4.1, en los modelos de flujo reducidos para acuíferos con geometría regular aparecen gran cantidad de modos residuales en la franja inferior del espectro del problema de autovalores a medida que la discretización espacial de dicho acuífero es más fina y la conexión río-acuífero tiende a ser perfecta. También se ha encontrado que dichos modos residuales se asocian a la presencia de coeficientes de reparto pequeños que dependen del tipo de acción exterior considerada. Entonces, utilizando convenientemente esta idea básica, se extiende el esquema de solución eficiente de la EDP de flujo subterráneo mediante la reducción modal por el MAV, presentada en el apartado 4.2, introduciendo los siguientes conceptos: modo efectivo, modo residual, límite de participación modal, máscara de estados efectivos y nivel de continuidad del modelo.

Para comenzar, un *modo efectivo* es aquel que aporta efectivamente a los cambios de estado del flujo en el acuífero como respuesta a una acción exterior aplicada sobre éste. Por el contrario, un *modo residual* se define como aquel cuyo aporte a los cambios del estado del flujo en el acuífero, en respuesta a la aplicación de una acción exterior sobre éste, es despreciable. De acuerdo con lo anterior, la efectividad de un modo no es una propiedad intrínseca de la solución del problema de autovalores, sino que también depende de las características de la acción exterior considerada. Es decir, un modo efectivo para determinada acción exterior, puede ser residual para otra. En consecuencia, la selección de los modos efectivos se lleva a cabo estableciendo un *límite de participación modal*,

$b_{lim}$  [adim.], definido como la cota inferior permisible del coeficiente de reparto que indica la efectividad de un modo dado con respecto a una acción exterior considerada. Así, una vez se ha determinado un valor apropiado para el límite de participación modal, la compresión selectiva del modelo de flujo subterráneo resuelto por el MAV se obtiene aplicando un filtro de base física que viene controlado por los siguiente criterios:

$$\begin{cases} \text{Si } b_{i,j} \geq b_{lim} \longrightarrow (\lambda_i, \mathbf{v}_i) \text{ es efectivo para AE } j \\ \text{Si } b_{i,j} < b_{lim} \longrightarrow (\lambda_i, \mathbf{v}_i) \text{ es residual para AE } j \end{cases} \quad (6.1)$$

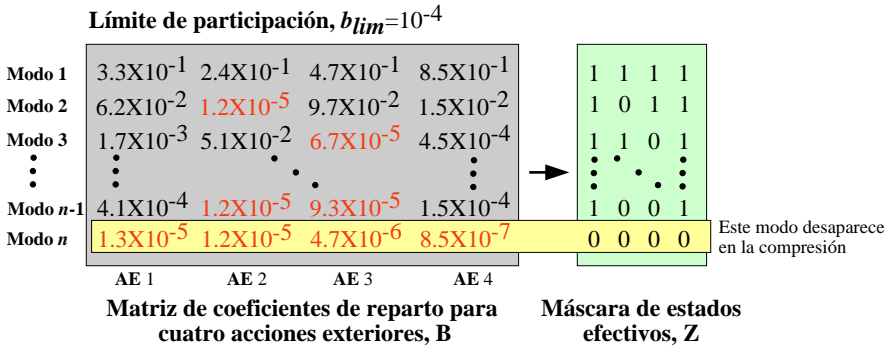
para  $i = 1, 2, \dots, n$  y  $j = 1, 2, \dots, n_a$ , donde  $\lambda_i$  y  $\mathbf{v}_i$  son, respectivamente, el autovalor y el autovector del  $i$ -ésimo modo,  $n$  es el número de nodos usados para la discretización espacial del acuífero,  $n_a$  es el número de acciones exteriores que actúan sobre éste,  $b_{lim}$  es un límite de participación modal definido previamente y AE quiere decir acción exterior. Una primera opción para realizar el filtrado de los modos podría ser mantener únicamente aquellos que cumplan simultáneamente con la ecuación (6.1) para todas las acciones exteriores actuando sobre el acuífero. En general, este criterio resulta ser muy restrictivo y, en muchas ocasiones, no mejora ostensiblemente la eficiencia de la evaluación de los estados del acuífero puesto que se incluye el efecto de muchos modos residuales no eliminados. En todo caso, si se detecta un modo  $i$  tal que  $b_{i,j} < b_{lim} \forall j$ , con  $j = 1, 2, \dots, n_a$ , éste no es efectivo para ninguna acción exterior, por lo cual no se tiene en cuenta en la simulación.

También puede ocurrir que un modo sea efectivo sólo para una de las muchas acciones exteriores consideradas. En este caso, no es eficiente evaluar los aportes de las demás acciones exteriores en los estados del acuífero si de antemano se conoce que éstos son despreciables. Entonces, otra opción más flexible que la antes comentada, sería mantener el subconjunto formado por los  $p$  modos efectivos para al menos una de las acciones exteriores actuando sobre el acuífero, superponiendo sobre éste una *máscara de estados efectivos*,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{p \times n_a}$ , definida como la matriz lógica que indica cuales son las acciones exteriores que excitan efectivamente a cada uno de los modos antes mencionados. Así pues, la construcción de dicha máscara permite considerar únicamente los modos efectivos en el cálculo de los estados del acuífero y, en consecuencia, su uso apropiado ahorra muchas operaciones, acelerando la ejecución del modelo reducido por el MAV. La localización de los elementos verdaderos en la máscara de estados efectivos ( $z_{i,j} = \text{verdadero}$ ) se define de acuerdo con los subíndices contenidos en un conjunto de enmascaramiento que se denota como  $\mathbb{P} \subset \{(i, j) : b_{i,j} \geq b_{lim}; 1 \leq i \leq n \wedge 1 \leq j \leq n_a\}$ . En otras palabras, la configuración de la máscara de estados efectivos depende de los criterios impuestos por la ecuación (6.1). Al respecto, un esquema del funcionamiento de la compresión selectiva y el enmascaramiento modal propuesto para el MAV se presenta en la figura 6.1.

En adelante, se asume que se ha utilizado el criterio (6.1) para construir una matriz  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times p}$  donde  $p \ll n$  y cada columna,  $\mathbf{v}_i$  para  $i = 1, 2, \dots, p$ , se asocia a un autovector efectivo para al menos una de las acciones exteriores. Se supone además que, durante el proceso de generación de los modos efectivos se ha ensamblado la matriz de enmascaramiento,  $\mathbf{Z}$ . Con lo anterior, la matemática de la simulación reducida mediante el MAV con compresión selectiva y enmascaramiento modal opera como se ha descrito en las secciones 4.2 y 4.3, con la diferencia de que  $p$  no corresponde al número de modos inferiores incluidos en el truncamiento sino que representa la cantidad de modos efectivos para al menos una acción exterior. Así, según (4.25), la ecuación de estado del acuífero se escribe como:

$$\hat{\Phi}(t) = \hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t} \hat{\Phi}(t-1) + \hat{\mathbf{X}}|_{\Delta t} \hat{\mathbf{F}}^{-1} \hat{\mathbf{B}} \mathbf{r}(\tau)$$

definiendo que: (i)  $\hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es la matriz diagonal de decaimiento exponencial efectiva; (ii)  $\hat{\mathbf{X}}|_{\Delta t} = (\hat{\mathbf{I}} - \hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t}) \hat{\mathbf{A}}^{-1} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es una matriz diagonal efectiva donde  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es la



**Figura 6.1.** Esquema del funcionamiento de la compresión selectiva y el enmascaramiento modal en el EVM-CSEM.

matriz de autovalores efectivos; (iii)  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  es la matriz de volúmenes acumulados bajo los autovectores efectivos; (iv)  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{p \times n_a}$  es la matriz de coeficientes de reparto efectivos; (v)  $\mathbf{r}(\tau) \in \mathbb{R}^{n_a \times 1}$  es el vector de intensidades de las acciones exteriores actuando sobre el acuífero en el intervalo  $\tau$ , de duración  $\Delta t$ ; (vi)  $\hat{\Phi}(t) \in \mathbb{R}^p$  es el vector de estados efectivos del acuífero. De forma análoga al truncamiento conservativo, el  $p$ -ésimo componente del vector de estados efectivos se impone para preservar la ecuación de continuidad agregada en el acuífero, por ende los elementos de la última fila de  $\hat{\mathbf{B}}$  son:

$$b_{p,j} = 1 - \sum_{i=1}^{p-1} c_j b_{i,j} \quad (6.2)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, p-1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_a$ ,  $b_{i,j}$  es el elemento ubicado en la  $i$ -ésima fila y la  $j$ -ésima columna de  $\hat{\mathbf{B}}$  y  $c_j = 1$  si y sólo si  $z_{i,j} = \text{verdadero}$ , de lo contrario  $c_j = 0$ . Cabe aclarar que al imponer la conservación de la masa de agua en el modelo, la última fila de la matriz  $\mathbf{Z}$  contiene únicamente elementos verdaderos. Por lo tanto, el  $p$ -ésimo modo es efectivo para todas las acciones exteriores. La máscara de estados efectivos se usa para disminuir tanto los requerimientos de almacenamiento virtual de la matriz  $\hat{\mathbf{B}}$ , como el costo computacional de las operaciones que la involucran. Lo primero se logra adoptando el uso de formatos dispersos para su representación computacional; lo segundo se obtiene implementando el producto matriz-vector disperso en la evaluación de los estados del acuífero. En la ecuación (4.25), el antes mencionado producto disperso se aplica sobre la operación  $\mathbf{g}(\tau) = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{r}(\tau)$  durante cada intervalo de simulación y se obtienen mediante:

$$g_i(\tau) = \sum_{j=1}^{n_a} c_j b_{i,j} r_j(\tau) \quad (6.3)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, p$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_a$ ,  $r_j(\tau)$  es la intensidad de la  $j$ -ésima acción exterior durante el intervalo  $\tau$ ,  $g_i(\tau)$  es la  $i$ -ésima componente del vector  $\mathbf{g}(\tau) \in \mathbb{R}^p$  que resulta de efectuar el producto  $\hat{\mathbf{B}} \mathbf{r}(\tau)$  y las demás variables se han definido previamente. Ahora bien, el nivel de continuidad de la  $j$ -ésima acción exterior actuando sobre el acuífero,  $ba_j$  [adim.], se define como el coeficiente de reparto acumulado para los modos efectivos considerados en la reducción sin incluir el usado para preservar la ecuación de continuidad, es decir:

$$ba_j = \sum_{i=1}^{p-1} c_j b_{i,j} \quad (6.4)$$

donde  $i = 1, 2, \dots, p - 1$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_a$ . Es pertinente aclarar que, como se ha asumido disponer de una implementación eficiente del producto matriz-vector disperso, las multiplicaciones por cero en las ecuaciones (6.4) y (6.3) no se efectúan explícitamente. En su lugar se superpone virtualmente la máscara de estados efectivos sobre la matriz  $\hat{\mathbf{B}}$ , operándose únicamente sobre los elementos que cumplen con la ecuación (6.1) y siguen el esquema de dispersión dado por los pares de índices  $(i, j)$  que pertenecen al subconjunto  $\mathbb{P}$ .

Según la analogía de los depósitos virtuales de los MPE, el nivel de continuidad representa el porcentaje del volumen total de agua que entra o sale del acuífero, durante un intervalo de simulación  $\tau$ , por efecto de cada acción exterior y es almacenado por los primeros  $p - 1$  modos efectivos del modelo reducido. Por consiguiente, si  $ba_j$  es cercano a uno, significa que los modos efectivos del modelo son suficientes para representar adecuadamente los efectos de la  $j$ -ésima acción exterior sobre la respuesta agregada del acuífero.

A partir de la anterior observación se propone un criterio de base física para detener el cálculo de modos efectivos, el cual consiste en ejecutar los siguientes tres pasos para cada modo: (i) calcular el nivel de continuidad respectivo empleando la ecuación (6.4) para cada acción exterior  $j$ , (ii) definir a priori un límite inferior de continuidad,  $ba_{lim} \approx 1$ , que debe cumplirse simultáneamente por todas las acciones exteriores y (iii) evaluar la desigualdad  $ba_j \geq ba_{lim} \forall j$ , con  $j = 1, 2, \dots, n_a$ . Así, de cumplirse el paso (iii), la generación de los modos efectivos ha terminado y puede ejecutarse la simulación del flujo subterráneo mediante el MAV. En el apartado 6.5.5 se describe detalladamente el uso apropiado del criterio de parada propuesto en los algoritmos de generación implementados.

---

#### Algoritmo 6.1: MAV con compresión selectiva y enmascaramiento modal (CSEM)

---

**Entrada:** Un modelo de flujo subterráneo cuyo dominio espacial está discretizado por DF.

**Salida :** Parámetros de control deseados para la planificación evaluados para cada instante  $t$  y/o agregados durante cada intervalo de simulación  $\tau$ ,  $\mathbf{c}(t)$  y  $\mathbf{c}(\tau)$ , respectivamente.

- 1 Ensamblar las matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\Psi$  del modelo, obtenidas a partir de la representación en DF de las derivadas espaciales de la EDP de flujo subterráneo para el MAV.
  - 2 Aplicar el principio de superposición para reducción sobre el modelo, encontrar la solución en régimen permanente  $\mathbf{u}$  y la condición inicial de la solución en régimen transitorio  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{h}_0 - \mathbf{u}$ .
  - 3 Generar los modos efectivos aplicando el criterio propuesto en la ecuación (6.1) para obtener las matrices  $\hat{\mathbf{V}}$ ,  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  comprimidas y la máscara de los estados efectivos,  $\mathbf{Z}$ .
  - 4 Decidir el valor de  $\Delta t$ , es decir, la longitud del intervalo de simulación a usar en el modelo.
  - 5 Calcular las matrices diagonales  $\hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t}$  y  $\hat{\mathbf{X}}|_{\Delta t}$ , almacenadas convenientemente en vectores.
  - 6 Definir los parámetros de control y calcular las matrices de autovectores reducidas efectivas  $\hat{\mathbf{V}}_r$  usando ecuaciones desde (2.35) hasta (2.44).
  - 7 Obtener el estado inicial  $\hat{\Phi}(0)$  expresado como  $\hat{\Phi}(0) = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{w}_0 = \mathbf{X}^*\mathbf{S}\mathbf{w}_0$ .
  - 8 Aplicar la máscara de estados efectivos  $\mathbf{Z}$  sobre  $\hat{\mathbf{B}}$  para almacenarla en formato disperso.
  - 9 **para**  $\tau = 1$  **hasta**  $T$  **hacer**
  - 10     Calcular  $\mathbf{g}(\tau) = \hat{\mathbf{B}} \mathbf{r}(\tau)$  usando ecuación (6.3);
  - 11     Calcular  $\hat{\Phi}(t) = \hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t} \hat{\Phi}(t - 1) + \hat{\mathbf{X}}|_{\Delta t} \hat{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{g}(\tau)$ ;
  - 12     Calcular  $\hat{\Theta}(\tau) = - \left[ \hat{\Phi}(t) - \hat{\Phi}(t - 1) \right] \hat{\mathbf{\Lambda}}^{-1} + \left( \mathbf{I} - \hat{\mathbf{E}}|_{\Delta t} \right)^{-1} \hat{\mathbf{X}}|_{\Delta t} \hat{\mathbf{F}}^{-1} \mathbf{g}(\tau) \Delta t$ ;
  - 13     Calcular  $\mathbf{c}(t)$  y/o  $\mathbf{c}(\tau)$  usando ecuaciones desde (2.35) hasta (2.44);
  - 14 **fin**
- 

Por último, se propone un nuevo esquema conceptual, más eficiente, para la simulación reducida del flujo subterráneo, el cual ha sido denominado MAV con compresión selectiva y enmascaramiento modal (MAV-CSEM). Sus características principales se resumen en el algoritmo 6.1, donde se observa que la secuencia de operaciones es similar a las presentadas en trabajos anteriores (Andreu, 1984; Andreu y Sahuquillo, 1987; Sahuquillo y Andreu, 1988; Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2007a), pero se incluyen

modificaciones relacionadas a los conceptos introducidos en este apartado, especialmente en la ejecución de los pasos 3, 8, 10, 11 y 12. En particular, para la ejecución del paso 3 se requiere disponer de una implementación eficiente de un generador iterativo secuencial de modos efectivos; tópico que se discute en profundidad en la sección 6.5. Cabe resaltar que la reducción por el MAV con truncamiento conservativo está contenida dentro de la reducción por el MAV-CSEM cuando se impone que el límite de participación modal es igual a cero, por lo tanto todas las entradas de la máscara de estados efectivos son unitarias para todas las acciones exteriores consideradas en la simulación.

## 6.3. Métodos para resolver el problema de autovalores

Para la aplicación práctica del MAV es crítico resolver el problema generalizado de autovalores simétrico, real y definido positivo presentado en la ecuación (4.4); también es de suma importancia, desde el punto de vista de la eficiencia, considerar que las matrices de trabajo son de carácter disperso, es decir, muchas de sus entradas son cero. Así pues, resulta imperativo identificar las técnicas más eficientes para solucionar dicho problema, las cuales tradicionalmente han sido clasificadas en cinco categorías (Golub y Van Loan, 1996; Bathe, 1996; Trefethen y Bau, 1997; Datta, 2010): (i) métodos de iteración en el polinomio característico, (ii) métodos basados en transformaciones, (iii) métodos de iteraciones en vectores, (iv) métodos de minimización del cociente de Rayleigh, (v) métodos de proyección. En la discusión que se presenta en los siguientes apartados se establece que  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , siendo  $n$  el número de bloques en los cuales se ha discretizado el acuífero.

### 6.3.1. Métodos de iteraciones en el polinomio característico

Los autovalores de un problema generalizado pueden calcularse operando sobre su polinomio característico, el cual existe si y sólo si  $\det(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{S}) = 0$ . Su resolución puede afrontarse mediante estrategias implícitas o explícitas. Los métodos de iteración explícita en el polinomio operan en dos pasos. El primero consiste en escribir el polinomio como  $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$ , evaluando sus coeficientes; en el segundo se calculan sus raíces. En general, si  $n$  es grande no se pueden evaluar fácilmente los coeficientes del polinomio pues la expansión del determinante asociado requeriría  $n!$  operaciones. En consecuencia, el método se vuelve poco práctico a medida que  $n$  aumenta. A pesar de que parecería ser el método natural de cálculo, tiene la desventaja de estar mal condicionado dado que errores pequeños en los coeficientes generan grandes errores en las raíces del polinomio, por lo cual ha sido poco utilizado en problemas de gran tamaño (Bathe, 1996).

Por otro lado, en una solución por iteración implícita del polinomio se evalúa  $p(\lambda)$  sin calcular explícitamente sus coeficientes (Bathe, 1971; Bathe y Wilson, 1973). El valor de  $p(\lambda)$  se obtiene realizando una descomposición LU, tal que  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ , siendo  $\mathbf{L}$ ,  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  matrices triangulares superior e inferior, respectivamente, obtenidas sin llevar a cabo permutaciones. En casos simétricos, la anterior factorización es equivalente a  $\mathbf{A} - \lambda\mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{D}\mathbf{L}^*$ , siendo  $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz diagonal. Por lo tanto, el polinomio característico se evalúa como el producto de los elementos diagonales de  $\mathbf{D}$ . Una vez se dispone de la evaluación del polinomio, las raíces se calculan usando técnicas numéricas clásicas iterativas como el método de la secante o el método de Newton-Raphson. El uso de los métodos de iteración en el polinomio está limitado a problemas de autovalores de tamaño relativamente pequeño o cuando se requieren unos pocos modos. Para completar el cálculo de los autovectores asociados puede usarse el método de la iteración inversa.



### 6.3.2. Métodos basados en transformaciones

Dado un problema generalizado de autovalores con  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  no singulares, los métodos basados en transformaciones usan las siguientes propiedades básicas de los autovectores:

$$\mathbf{V}^* \mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \quad \mathbf{V}^* \mathbf{S} \mathbf{V} = \mathbf{I} \quad (6.5)$$

donde  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz identidad y la matriz de transformación  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  se construye iterativamente. Dicha transformación de semejanza configura otro problema con los mismos autovalores del original y su esquema básico es reducir las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  a la forma diagonal usando operaciones de multiplicación matricial; procedimiento que se aplica iterativamente seleccionando de forma conveniente una matriz de multiplicación  $\mathbf{U}_k \in \mathbb{R}^{n \times n}$  en la  $k$ -ésima iteración. El método converge a medida que se van formando nuevas matrices semejantes  $\mathbf{A}_k$  y  $\mathbf{S}_k$ , las cuales tienen la propiedad de que mientras  $k \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{A}_k \rightarrow \mathbf{\Lambda}$  y  $\mathbf{S}_k \rightarrow \mathbf{I}$ . Si se llega a la última iteración  $l$ , la matriz de autovectores se representa como  $\mathbf{V}_l = \mathbf{U}_1 \mathbf{U}_2 \dots \mathbf{U}_l$ . Una opción práctica para transformar el problema de autovalores generalizado real simétrico y definido positivo a la forma estándar es aplicar la descomposición de Cholesky de la forma  $\mathbf{S} = \mathbf{L} \mathbf{L}^*$ , donde  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz triangular inferior. De lo anterior se obtiene un problema de autovalores estándar equivalente:

$$\mathbf{C} \mathbf{U} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{U} \quad (6.6)$$

donde  $\mathbf{C} = \mathbf{L}^{-1} \mathbf{A} \mathbf{L}^* \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\mathbf{U} = \mathbf{L}^* \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Aplicando transformaciones de semejanza, es posible reducir la matriz  $\mathbf{C}$  del problema estándar de (6.6) a una forma canónica donde es fácil el cálculo de sus autovectores y autovalores. La forma de transformación más simple es la diagonal con los autovalores, pero no está garantizada su construcción en todos los casos. La forma de Jordan es una matriz diagonal superior con los autovalores en la diagonal y unos o ceros en la superdiagonal; su construcción siempre es posible, pero los algoritmos existentes no son numéricamente estables (Golub y Wilkinson, 1976). La forma de Schur es la más práctica puesto que siempre es obtenible mediante transformaciones unitarias (Schur, 1909; Horn y Johnson, 1985; Golub y Van Loan, 1996; Tomás, 2009).

El método QR (Francis, 1961) obtiene secuencialmente la descomposición de Schur para una matriz no simétrica mediante iteraciones de dos pasos. Primero, se obtienen las matrices  $\mathbf{Q} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  unitaria y  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  triangular superior mediante una descomposición QR. Después, se sustituye la matriz  $\mathbf{C}$  de la ecuación (6.6) por el producto  $\mathbf{R} \mathbf{Q}$ . Dado que la convergencia original del método ha demostrado ser lenta, su implementación práctica usualmente incluye alguna(s) técnica(s) de aceleración para mejorar su eficiencia, entre las cuales se encuentran: la descomposición inicial a la forma canónica de Hessenberg, el desplazamiento implícito, la deflación o el balanceado de la matriz (Wilkinson, 1968; Watkins y Elsner, 1991; Watkins, 1993). Se denomina descomposición de Hessenberg a  $\mathbf{C} = \mathbf{U} \mathbf{H} \mathbf{U}^*$ , donde  $\mathbf{U}$  es una matriz que acumula las transformaciones unitarias y  $\mathbf{H}$  tiene la forma de Hessenberg superior, es decir, todos los elementos por debajo de la primera subdiagonal son nulos. Esta descomposición permite obtener una forma de Schur fácilmente calculable ejecutando un número finito de pasos dentro de un algoritmo estable (Press *et al.*, 1986; Golub y Van Loan, 1996; Trefethen y Bau, 1997; Datta, 2010).

También es posible utilizar la iteración QR para resolver el problema de autovalores en matrices simétricas; sin embargo, existen algoritmos específicos mucho más eficientes. Por ejemplo, el método de Jacobi (1846) es una técnica de diagonalización directa, la cual se basa en construir matrices ortogonales de proyección  $\mathbf{U}$  que transforman a  $\mathbf{C}$  en otra matriz cuya diagonal principal está formada por los autovalores. El algoritmo básico de la iteración de Jacobi se describe detalladamente en muchos libros clásicos de álgebra lineal numérica

(Wilkinson, 1965; Parlett, 1980; Golub y Van Loan, 1996; Trefethen y Bau, 1997; Datta, 2010), algunos de los cuales ofrecen códigos eficientes para su ejecución computacional (Wilkinson y Reinsch, 1971; Press *et al.*, 1986, 1997; Bathe, 1996). Del mismo modo, el método de bisección permite calcular los autovectores dentro de una región espectral y luego utilizar la iteración inversa para obtener sus autovalores respectivos; puede llegar a ser muy eficaz para intervalos pequeños o para el espectro completo si los autovalores de la matriz  $\mathbf{C}$  se encuentran bien separados entre sí (Kahan, 1966; Trefethen y Bau, 1997).

El método QL es el equivalente del método QR, pero ha sido particularmente desarrollado para ser aplicado sobre matrices simétricas. Su transformación inicial de aceleración consiste en reducir la matriz  $\mathbf{C}$  a la forma canónica tridiagonal aplicando el método de Householder (1958). Posteriormente, sobre dicha matriz tridiagonal se realiza iterativamente la factorización QL usando rotaciones de Jacobi del lado izquierdo con el propósito de eliminar los elementos de la superdiagonal. Al mismo tiempo, se emplean rotaciones de Givens (1959) en cada iteración con el fin de preservar la tridiagonalidad durante las transformaciones de semejanza (Wilkinson, 1965, 1968; Press *et al.*, 1986, 1997). Por último, el algoritmo es recursivo, separa la matriz tridiagonal en dos partes, resuelve el problema en cada parte y, finalmente, une las dos soluciones. Es considerado como el método más eficiente para obtener todos autovalores de una matriz simétrica densa (Cuppen, 1980; Gu y Eisenstat, 1995; Demmel, 1997; Arbenz y Kressner, 2010).

Los métodos por transformaciones, especialmente el algoritmo QR, han probado ser los más eficientes cuando se desean calcular todos los modos en matrices densas. Los paquetes EISPACK (Smith *et al.*, 1976) y LAPACK (Anderson *et al.*, 1999) proporcionan gran cantidad de implementaciones secuenciales y paralelas para los algoritmos tratados en este apartado. En especial, el uso de LAPACK ha sido extendido desde los años setenta pues ha probado ser robusto, eficiente y ha sido validado en diferentes aplicaciones prácticas (código, software y manuales están disponibles en la página web de Netlib, <http://www.netlib.org/lapack/>).

### 6.3.3. Métodos de iteración en vectores

Los métodos por transformaciones no son los más adecuados para calcular los modos de matrices dispersas, puesto que las transformaciones de semejanza destruyen progresivamente la estructura de la matriz inicial. Si solamente se desea calcular unos pocos autovalores, son más pertinentes los métodos basados en el producto matriz-vector; operación que se puede programar eficientemente almacenando únicamente los elementos no nulos de las matrices del problema generalizado de autovalores, con el consiguiente ahorro de memoria y operaciones aritméticas (Tomás, 2009). La propiedad básica que se usa en estos métodos es  $\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{S}\mathbf{v}$  y se opera iterativamente sobre ella con el fin de mejorar la aproximación del autovalor gradualmente.

El método de la potencia obtiene el autovalor de mayor módulo y su autovector asociado (von Mises y Pollaczek-Geiringer, 1929; Wilkinson, 1965). Su uso práctico es limitado debido, principalmente, a que su velocidad de convergencia es lineal, reduciendo el error de aproximación por un factor constante en cada iteración, lo cual es poco eficiente. Más aún, si los autovalores de mayor magnitud se encuentran poco separados, la convergencia de este método puede ser muy lenta (Householder, 1964; Trefethen y Bau, 1997).

Una forma de mejorar las propiedades de cálculo de las iteraciones vectoriales es aplicar un desplazamiento sobre la transformación inversa espectral, procedimiento conocido como iteración inversa. De forma análoga al método de la potencia, el método de la iteración inversa manifiesta convergencia lineal, pero tiene la ventaja de que se puede escoger el autovector a estimar si se conoce una aproximación  $\sigma$  de su autovalor asociado. Más aún, la velocidad de convergencia se puede controlar dado que ésta depende del valor escogido

para  $\sigma$ . Así, en el problema de autovalores generalizado, la iteración inversa consiste en resolver un sistema de ecuaciones lineales expresado como sigue (Pohlhausen, 1921):

$$(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{S}) \mathbf{v}_{k+1} = (\lambda_k - \sigma) \mathbf{S} \mathbf{v}_k \quad (6.7)$$

para la nueva aproximación del autovector  $\mathbf{v}_{k+1}$ , donde el vector inicial de iteración,  $\mathbf{v}_0 \in \mathbb{R}^n$ , es ortonormal a  $\mathbf{S}$ . En la práctica, la forma más eficiente de operar sobre (6.7) es evitar calcular explícitamente la inversa del factor  $(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{S})$  y resolver el sistema de ecuaciones lineales usando un método iterativo. Cuando se conoce un autovalor, el sistema de ecuaciones en (6.7) es casi singular y su número de condición es elevado, lo cual implica errores grandes al tratar de solucionar iterativamente dicho sistema. A pesar de ello, se ha demostrado que dicho error siempre apunta en la dirección correcta, es decir, así el error de aproximación obtenido sea grande, el autovector deseado siempre converge (Arbenz y Kressner, 2010). El problema principal de la iteración inversa es que no detecta pares de autovalores conjugados en matrices reales no simétricas (Golub y van der Vorst, 2000).

La convergencia de la iteración inversa se acelera usando la aproximación de un autovalor como desplazamiento en la iteración siguiente y evaluando el cociente de Rayleigh para obtener el autovalor  $\lambda$  a partir de su autovector asociado  $\mathbf{v}$  (Lord Rayleigh, 1937):

$$\lambda = \rho(\mathbf{v}) = \frac{\mathbf{v}^* \mathbf{A} \mathbf{v}}{\mathbf{v}^* \mathbf{S} \mathbf{v}} \quad (6.8)$$

donde  $\rho(\mathbf{v})$  es el cociente de Rayleigh generalizado y se establece que  $\sigma_k = \lambda_k$ . La convergencia de este algoritmo es muy rápida, si el desplazamiento se encuentra lo suficientemente cerca de un autovalor, cada iteración triplica el número de dígitos de precisión (Ostrowski, 1958-1959). La velocidad operativa de la iteración inversa mejora aún más cuando se trabaja con matrices dispersas y se realizan los productos matriz-vector de forma conveniente, aprovechando la configuración de las matrices. En el caso de solucionar la EDP de flujo subterráneo por DF,  $\mathbf{S}$  es diagonal sin elementos nulos y no existe el riesgo de sobre flujo en las operaciones numéricas. Además, puede usarse un preconditionador eficiente para acelerar la solución de los sistemas de ecuaciones lineales generados en la iteración inversa. Considerando los factores anteriores, la iteración del cociente de Rayleigh se expresa como:

$$(\mathbf{A} - \sigma_k \mathbf{S}) \mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{S} \mathbf{v}_k \quad (6.9)$$

$$\lambda_{k+1} = \frac{\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{S} \mathbf{v}_{k+1}} + \sigma_k \quad (6.10)$$

y, teóricamente, el sistema (6.9) se resuelve para el modo más cercano al desplazamiento. La iteración del cociente de Rayleigh puede converger a cualquier modo. Por lo tanto, si se está interesado en los  $m$  modos más pequeños, se pueden usar diversas técnicas para obtenerlos progresivamente en orden ascendente, asegurando la convergencia a un modo diferente cada vez. La primera opción es realizar la deflación de la matriz  $\mathbf{A}$ , lo cual tiene la desventaja de que los autovectores deben ser calculados con muy alta precisión para evitar la acumulación de errores de redondeo. Wilkinson (1965) y Parlett (1980) presentan revisiones acerca de los diferentes métodos para llevar a cabo la deflación matricial.

Otra opción es usar la deflación sobre el vector de iteración, lo cual consiste en empezar los cálculos para el  $l$ -ésimo modo usando un vector ortogonal a  $\mathbf{S}$  y de norma unitaria, que a su vez es ortogonal a los  $l - 1$  autovectores disponibles. Así, se elimina la posibilidad de que la convergencia se lleve a cabo en la dirección de algún autovector disponible.

Una técnica sencilla y eficiente para llevar a cabo la deflación vectorial es el Proceso de Gram-Schmidt (PGS), que consiste de tres pasos: ( $i$ ) realizar una proyección ortogonal

del  $l$ -ésimo autovector en el subespacio generado por los  $l - 1$  autovectores disponibles al comenzar la iteración  $l$ , (ii) la proyección obtenida se sustrae del vector original y (iii) el vector ortogonal obtenido puede normalizarse o no, de acuerdo con las necesidades de generación del subespacio. Existen dos versiones del PGS, la clásica y la modificada. De resultados obtenidos en aplicaciones prácticas, ha sido ampliamente discutido que el PGS clásico presenta problemas de estabilidad numérica, por lo cual es más usual el uso de la versión modificada. Igualmente, diversos autores manifiestan que, para calcular autovalores, la pérdida de ortogonalidad durante la ejecución del PGS puede afectar enormemente la confiabilidad en los resultados obtenidos (Braconnier *et al.*, 2000; Hernández *et al.*, 2007b). Al respecto, Giraud *et al.* (2005) han mostrado que el PGS modificado es menos sensible a la pérdida de ortogonalidad que el clásico, confirmando las observaciones experimentales de diferentes investigadores (Rice, 1966; Wilkinson, 1965; Ruhe, 1983; Björck y Paige, 1992; Trefethen y Bau, 1997; Giraud y Langou, 2002; Hernández *et al.*, 2007b).

A pesar de que el PGS modificado es numéricamente superior al clásico, proporciona poca ortogonalidad en muchos casos (Hernández *et al.*, 2007b). Una alternativa para resolver lo anterior es usar un algoritmo de reortogonalización para aplicar repetidamente el PGS sobre el vector a ortogonalizar hasta que se cumpla cierto criterio de convergencia. Este proceso opera iterativamente, obteniendo un nuevo vector, parecido al anterior pero con menor pérdida de ortogonalidad en cada aplicación del PGS (Rutishauser, 1967; Abdelmalek, 1971; Hoffmann, 1989). La desventaja de usar la reortogonalización es que aumentan los requerimientos del PGS, con lo cual es necesario usar algún criterio para verificar si es necesario su aplicación. Hernández *et al.* (2007b) presentan diferentes expresiones que permiten la automatización de los algoritmos de reortogonalización selectiva. El criterio de selectividad más usado es el propuesto por Rutishauser (1967), el cual viene dado en función de la relación entre las normas de los vectores en iteraciones sucesivas de la reortogonalización. De acuerdo con el criterio empírico de Parlett (1980), demostrado matemáticamente por Giraud y Langou (2004), para efectos prácticos es aceptable aplicar dos pasadas de ortogonalización (PGS) sobre bases ortogonales bien condicionadas.

#### 6.3.4. Métodos de minimización del cociente de Rayleigh

Los métodos de iteración en vectores aceleran su convergencia cuando se minimiza explícitamente el cociente de Rayleigh (Perdon *et al.*, 1986; Feng y Owen, 1996; Knyazev, 2001). Los métodos de minimización del cociente de Rayleigh son aplicables a matrices hermitianas o simétricas para problemas de autovalores estándar o generalizados y exhiben la conveniente propiedad de que su convergencia para los menores autovalores es muy rápida (Gambolati *et al.*, 1988a; Feng y Owen, 1996). Inicialmente, se define una dirección de búsqueda  $\mathbf{p}_k \in \mathbb{R}^n$  para cada autovector durante la  $k$ -ésima iteración tal que:

$$\mathbf{v}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \delta_k \mathbf{p}_k \quad (6.11)$$

donde el parámetro  $\delta_k$  se calcula para minimizar el cociente de Rayleigh durante la iteración actual. De acuerdo con lo anterior, minimizando  $\rho(\mathbf{v}_k + \delta_k \mathbf{p}_k)$  se llega a un problema generalizado de autovalores de orden  $2 \times 2$  que se expresa por componentes como:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_k^* \mathbf{A} \mathbf{v}_k & \mathbf{v}_k^* \mathbf{A} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_k^* \mathbf{A} \mathbf{v}_k & \mathbf{p}_k^* \mathbf{A} \mathbf{p}_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} \mathbf{v}_k^* \mathbf{S} \mathbf{v}_k & \mathbf{v}_k^* \mathbf{S} \mathbf{p}_k \\ \mathbf{p}_k^* \mathbf{S} \mathbf{v}_k & \mathbf{p}_k^* \mathbf{S} \mathbf{p}_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha \\ \beta \end{Bmatrix} \quad (6.12)$$

Existen diferentes opciones para escoger la dirección de caída en la  $k$ -ésima iteración de minimización. Una de ellas es usar el método del máximo descenso, el cual presenta la desventaja de que puede manifestar lentas velocidades de convergencia hacia los mínimos

(Arbenz *et al.*, 2005; Arbenz y Kressner, 2010). Otra alternativa es usar una estrategia de búsqueda basada en gradientes conjugados. Feng y Owen (1996) discuten ampliamente acerca de las diferentes alternativas existentes para calcular dicho gradiente.

Gambolati *et al.* (1988a) proponen el Método Acelerado de los Gradientes Conjugados con Deflación (MAGCD), procedimiento que ha probado ser muy competitivo para generar los modos inferiores de un problema de autovalores generalizado. Diferentes autores presentan estudios numéricos cuyos resultados indican que el MAGCD es más eficiente que los métodos de proyección para evaluar sólo unos pocos modos dominantes de la parte baja del espectro del problema de autovalores generalizado simétrico (Sartoretto *et al.*, 1989; Gambolati, 1993; Bergamaschi *et al.*, 1996; Bergamaschi y Putti, 2002; Gambolati y Putti, 2005). PDACG es una librería de programas escrita en lenguajes C y FORTRAN que implementa al MAGCD, cuya característica principal es que calcula el producto matriz-vector de forma paralela (disponible en: <http://www.dmsa.unipd.it/sartoret/Pdacg/pdacg.htm>).

Una alternativa al MAGCD, propuesta por Knyazev (2001), es el Método del Gradiente Conjugado Localmente Óptimo (MGCLOP). A pesar de que la filosofía de ambas metodologías es similar, MGCLOP minimiza simultáneamente los diferentes parámetros asociados con la linealización de cociente de Rayleigh para acelerar la convergencia de las iteraciones de minimización. En recientes aplicaciones, MAGCD y MGCLOP adaptan diferentes técnicas de preconditionamiento del problema de autovalores generalizado para mejorar la estabilidad numérica de las soluciones y acelerar su convergencia modal (Bergamaschi y Pini, 2000; Bergamaschi *et al.*, 2007; Knyazev *et al.*, 2007).

### 6.3.5. Métodos de proyección

Los métodos de proyección construyen un subespacio con ciertas características para aplicar el procedimiento de Rayleigh-Ritz. La construcción de la base del subespacio se basa en productos de las matrices del problema y en algún procedimiento para garantizar la ortogonalidad de los vectores generados. Así, el cálculo de los autovalores de la matriz proyectada se realiza efectuando transformaciones de semejanza (Tomás, 2009).

El método de la iteración del subespacio (Bauer, 1957) es una extensión de los métodos por iteración en vectores. El procedimiento consiste en aproximar los modos mediante un análisis Rayleigh-Ritz que proyecta el problema de autovalores en un subespacio de tamaño  $p$ , más pequeño que la dimensión  $n$  del original. Para ello deben ejecutarse cinco pasos principales (Rutishauser, 1969, 1970; Bathe, 1971; Golub y Van Loan, 1996): (i) construir una base ortonormal  $U = \text{span}\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \dots, \mathbf{u}_p\}$  y formar una matriz  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{p \times p}$  cuyas columnas son los vectores generados, (ii) calcular las proyecciones de las matrices del problema general de autovalores dadas como  $\mathbf{A}_u \equiv \mathbf{U}^* \mathbf{A} \mathbf{U}$  y  $\mathbf{S}_u = \mathbf{U}^* \mathbf{S} \mathbf{U}$ , formando un problema de autovalores reducido en el subespacio de proyección  $U$ , (iii) resolver el nuevo problema de autovalores reducido  $\mathbf{A}_u \mathbf{V}_u = \mathbf{\Lambda}_u \mathbf{S}_u \mathbf{V}_u$ , (iv) seleccionar los autovalores requeridos y, finalmente, (v) aproximar los autovectores del problema original evaluando  $\mathbf{V} = \mathbf{U} \mathbf{V}_u$ . Los autovalores y autovectores obtenidos mediante este procedimiento se conocen como valores y vectores de Ritz, respectivamente. Al final de cada iteración se usa el PGS para mantener la ortonormalidad de la base del subespacio generado, dando lugar a un costo computacional alto debido a que deben ortogonalizarse todos los vectores de iteración cada vez. Por ende, si se requieren muchos modos, el método es poco competitivo.

Stewart (1976) discute acerca de las propiedades de convergencia del método de la iteración en el subespacio. Él afirma que este método manifiesta una lenta convergencia y puede requerir la ejecución de un gran número de iteraciones para alcanzar aproximaciones aceptables de los autovectores, dependiendo de la cercanía entre el subespacio inicial y el espacio de convergencia (Bathe, 1996). A pesar de que la elección de la primera aproxi-

mación del subespacio es muy importante para mejorar el comportamiento del método, no existe un algoritmo general para su construcción. Aún así, Bathe (1971) ha propuesto un esquema empírico de inicialización basado en las propiedades de  $\mathbf{S}$ , afirmando que es importante que la primera aproximación del subespacio excite los modos deseados. Igualmente, una implementación del método de la iteración en el subespacio en FORTRAN77 para el caso simétrico es presentada por Bathe (1996). Stewart (1978) presenta la subrutina SRRIT, escrita en FORTRAN77, que implementa la resolución de problemas de autovalores usando la iteración en el subespacio con una extensión para matrices no simétricas.

Alternativamente, los métodos de proyección también se han planteado de forma que sea posible el uso de subespacios aproximados invariantes, los cuales se construyen para que se cumpla la condición de Petrov-Galerkin (Antoulas, 2005). Una opción para efectuar la proyección del problema de autovalores es construir un subespacio de Krylov (1931), para la matriz  $\mathbf{A}$  y un vector inicial arbitrario  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ , cuya estructura se define como:

$$\kappa_p(\mathbf{A}, \mathbf{x}_0) \equiv \text{span}\{\mathbf{A}\mathbf{x}_0, \mathbf{A}^2\mathbf{x}_0, \dots, \mathbf{A}^{p-1}\mathbf{x}_0\} \quad (6.13)$$

donde  $p$  es la dimensión máxima del subespacio. El método de Arnoldi (1951) construye un subespacio de Krylov para matrices generales no simétricas, manifestando las siguientes características principales: (i) se obtiene una matriz de factores  $\mathbf{H}$  de la forma canónica de Hessenberg, (ii) se utiliza el PGS para garantizar la ortogonalidad contra todos los vectores de la base de Krylov calculados en las iteraciones anteriores, (iii) la forma del subespacio permite aplicar el procedimiento de Rayleigh-Ritz aprovechando los cálculos realizados durante la ortogonalización y (iv) se obtiene una estimación del residuo sin necesidad de calcularlo explícitamente. El método de Lanczos (1950) puede considerarse como una extensión del método de Arnoldi para matrices hermitianas que produce una matriz de factores  $\mathbf{\Pi}$  con la forma canónica tridiagonal. En la práctica, este método ha mostrado una característica incómoda, cuando se trabaja en aritmética de precisión finita el proceso de tridiagonalización no es suficiente para garantizar la ortogonalidad entre todos los vectores de la base del subespacio de Krylov (Wilkinson, 1958; Paige, 1976, 1980; Kahan y Parlett, 1987; Cullum y Willoughby, 2002; Komzsik, 2003), lo cual tiene la consecuencia de que el método calcule autovalores repetidos o incluso espurios. Igualmente, Engeli *et al.* (1959) demostraron que la terminación finita de la iteración de Lanczos en  $n$  pasos no tiene significado práctico. Paige (1980) fue el primero en usar el método de Lanczos dentro de un esquema iterativo para obtener soluciones correctas para los autovalores.

Para solucionar el problema de la pérdida de ortogonalidad en la generación de los vectores Lanczos existen varias posibilidades. Una es aplicar la reortogonalización completa, selectiva o parcial (Parlett y Scott, 1979; Simon, 1984), usando algún criterio de parada para el PGS iterativo, como se presentó en el apartado 6.3.3. Alternativamente, se puede plantear algún proceso heurístico para eliminar los autovectores no válidos (Tomás, 2009).

En matrices simétricas, reales y definidas positivas puede usarse la transformación descrita en el apartado 6.3.2 para reducir el problema generalizado en un problema estándar, de la forma dada en la ecuación (6.6) y aplicar el método de Lanczos estándar para encontrar los autovalores del problema (Cullum y Willoughby, 2002). Sin embargo, cuando se desea encontrar los autovalores más pequeños del problema generalizado, es más conveniente plantear la iteración de Lanczos sobre la transformación espectral inversa, según el esquema matemático presentado por Ruhe (1984), método popularmente conocido como Lanczos racional (Antoulas, 2005). Por otra parte, el principal inconveniente de los métodos de Krylov es que sus requerimientos de almacenamiento y ejecución crecen a medida que avanza la ejecución de las iteraciones de Arnoldi o Lanczos, debido tanto al aumento del tamaño de la base del subespacio asociado, como a la ejecución de la reortogonalización sobre los vectores generadores.

Para evitar lo anterior se utilizan técnicas de reinicio, las cuales consisten en detener el método cuando se obtiene una base del subespacio de Krylov de tamaño razonable y, posteriormente, construir una nueva base aprovechando los vectores de la base anterior. El reinicio explícito es la técnica más sencilla y utiliza como vector inicial de la nueva base una combinación lineal de los vectores de Schur obtenidos a partir de la base anterior (Saad, 1984; Hernández *et al.*, 2007a,d; Nicely, 2008). Por su parte, el reinicio implícito (Sorensen, 1992) es más complicado, pero permite reutilizar varios vectores de Schur como inicio de la nueva base, mejorando ostensiblemente la convergencia.

Recientemente se ha propuesto el método de Krylov-Schur (Stewart, 2001) como una alternativa más sencilla que el reinicio implícito. La versión de este método para matrices hermitianas se conoce como método de Lanczos con reinicio grueso (Wu y Simon, 2000). De la misma forma que la iteración del subespacio puede verse como una extensión del método de la potencia, pueden plantearse métodos de Krylov a bloques, es decir, que trabajen con varios vectores simultáneamente. Estos métodos presentan ventajas a la hora de trabajar con autovalores múltiples y se basan en operaciones del tipo matriz por matriz. Sin embargo, su implementación resulta compleja y la velocidad de convergencia no suele mejorar con respecto al método con un solo vector (Komzsik, 2003; Tomás, 2009).

El método de Lanczos también puede usarse para calcular los autovalores de una matriz no simétrica, en su versión por dos lados. Cullum y Willoughby (1986) presentan un código para resolver este tipo de problemas que incluye una estrategia para la detección de autovalores espurios. De la misma forma, Parlett *et al.* (1985) proponen la técnica de búsqueda futura para mejorar la estabilidad del proceso de tridiagonalización por dos lados, mientras que Freund y Nachtigal (1996) proponen una versión mejorada de la búsqueda futura y presentan técnicas de cálculo de autovalores basadas en la minimización de residuales.

Existen muchas implementaciones que resuelven problemas de autovalores usando técnicas de Krylov. ARPACK (Lehoucq *et al.*, 1998) es una librería eficiente y robusta que permite la solución de problemas de autovalores generales usando el método de Arnoldi con reinicio implícito. Para matrices hermitianas, ARPACK usa el método de Lanczos con reortogonalización completa y reinicio implícito (disponible en <http://www.caam.rice.edu/software/ARPACK/>). TRLAN (Wu y Simon, 1999, 2000) es una librería que calcula los autovalores de una matriz simétrica usando el método de Lanczos con reinicio grueso, que ha sido implementada de forma paralela en FORTRAN90 (disponible en <http://crd.lbl.gov/ke-wu/trlan.html>). Hernández *et al.* (2011) presentan SLEPc (disponible en <http://www.grycap.upv.es/slep/>), una librería paralela escalable para solucionar problemas de autovalores mediante métodos de Krylov que abarca la mayoría de las situaciones prácticas que se pueden encontrar en la resolución de dichos problemas cuando las matrices son dispersas.

Un método alternativo a los presentados hasta ahora es el propuesto por Davidson (1975), que trabaja con un subespacio que no es de Krylov, añadiendo vectores para corregir las aproximaciones al autovector obtenidas con el subespacio anterior. El método de Jacobi-Davidson (Sleijpen y Van Der Vorst, 1996) utiliza una aproximación al nuevo vector pero añadiendo la restricción de ortogonalidad a la generación del subespacio de iteración. De forma similar, el método generalizado de Jacobi-Davidson (Sleijpen *et al.*, 1996; Fokkema *et al.*, 1998; Van Noorden y Rommes, 2007) usa una condición de Petrov-Galerkin para calcular los modos aproximados del problema generalizado de autovalores. Para reducir el coste de los métodos Jacobi-Davidson también se pueden aplicar técnicas de reinicio o variantes por bloques (Stathopoulos y Saad, 1998; Sadkane y Sidje, 1998; Stathopoulos y McCombs, 1999). La librería JADAMILU (Bollhöfer y Notay, 2007) presenta una implementación en FORTRAN77 del método de Jacobi-Davidson que incorpora un preconditionamiento de factorización incompleta (disponible en <http://homepages.ulb.ac.be/jadamilu/>).

## 6.4. EVMPACK, la librería para la simulación del flujo subterráneo mediante el MAV-CSEM

La modelación reducida del flujo en un acuífero irregular y heterogéneo mediante el MAV-CSEM se ha implementado en la librería EVMPACK, escrita en el lenguaje FORTRAN90. Para efectos prácticos, la aproximación de las derivadas espaciales de la EDP de flujo subterráneo se realiza mediante el esquema de DF de cinco puntos presentado en el apartado 2.8.1, como se muestra en la figura 2.5, mientras que la simulación del flujo se lleva a cabo usando las expresiones matemáticas presentadas en las secciones 2.8, 2.9, 4.2, 4.3 y 6.2.

EVMPACK ha sido implementada en módulos, cada uno de los cuales se ocupa de diferentes procedimientos computacionales dentro del esquema de simulación. Así, se dispone de módulos para: (i) ejecutar operaciones matemáticas básicas frecuentemente usadas en otros programas; (ii) leer los datos y escribir de los resultados de simulaciones, (iii) interpretar la geometría del acuífero, (iv) crear la topología de conexión entre los bloques activos y entre éstos con los bloques de condiciones de contorno, (v) ensamblar las matrices de la ecuación matricial-diferencial de flujo, (vi) generar los modos efectivos usados para reducir del modelo, (vii) simular el flujo en el acuífero mediante diferentes variantes del MAV y (viii) calcular los diferentes parámetros de control predefinidos. Dado lo anterior, para facilitar el desarrollo futuro de la librería, en todos sus módulos se implementa una interfaz explícita de usuario para cada una de las subrutinas y funciones contenidas.

Por último, cabe resaltar que EVMPACK no usa ningún tipo de implementación paralela para la ejecución de las simulaciones de flujo subterráneo o durante la generación de los modos efectivos del modelo; sin embargo, se aprovecha la distribución de memoria virtual inherente a las funciones intrínsecas de FORTRAN90, especialmente en las operaciones básicas de producto matriz-matriz, matriz-vector, construcción de matrices y almacenamiento disperso de las mismas. En todo caso, la eficiencia de las rutinas construidas para EVMPACK viene asegurada por los esquemas conceptuales de los métodos implementados y el uso conveniente de las estructuras matriciales en las operaciones de cálculo.

## 6.5. Generación eficiente de modos efectivos para simular el flujo subterráneo usando el MAV-CSEM

Disponer de implementaciones eficientes de métodos iterativos para la solución de problemas de autovalores es fundamental para asegurar la eficiencia operativa de los esquemas de reducción. Esto es particularmente crítico para el MAV puesto que el tamaño del problema de autovalores generalizado de la ecuación (4.4) viene dado por el número de nodos usados para representar el dominio del acuífero. Entonces, si la discretización espacial del modelo es muy fina, desde el punto de vista computacional, el cálculo de los modos efectivos es más demandante que la simulación transitoria del flujo propiamente dicha.

En la sección 6.3 se presentó una revisión bibliográfica acerca de los métodos existentes para la solución del problema de autovalores generalizado, simétrico y definido positivo. A partir de dicha revisión y considerando las características de la reducción modal por el MAV, se concluye que un aumento importante de la eficiencia en la generación de los modos efectivos de reducción se logra implementando algoritmos que hayan sido concebidos para calcular eficazmente fracciones pequeñas del espectro del problema de autovalores generalizado. También es deseable que estos algoritmos no se basen en transformaciones de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  puesto que los procedimientos existentes: (i) son aplicables únicamente cuando las matrices están almacenadas en formato denso, es decir, se debe almacenar todos



los elementos de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$ , incluyendo ceros, (*ii*) siempre generan todos los modos del sistema y (*iii*) deben ejecutar un número de operaciones que depende del número de nodos del modelo elevado al cubo. Por lo tanto, si la discretización espacial del modelo es muy fina, no es eficiente su aplicación en la generación de los modos efectivos en el MAV-CSEM.

En esta investigación el interés se ha centrado en los métodos de minimización del cociente de Rayleigh y el método racional de Lanczos. El uso eficiente de ambas técnicas pasa por la adaptación de sus esquemas iterativos en la generación de los modos efectivos, la construcción de la máscara de estados efectivos y la incorporación de criterios de parada basados en los niveles de continuidad de las acciones exteriores. Existen muchas razones para justificar la selección de dichos métodos por encima de otras opciones igualmente válidas, pero las más sobresalientes son: (*i*) su eficiencia para solucionar problemas de autovalores simétricos y definidos positivos, (*ii*) determinan fracciones seleccionadas del espectro en problemas de autovalores generalizados, (*iii*) es posible implementarlos conservando la estructura dispersa de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  y (*iv*) se basan en el producto matriz-vector.

También es necesario disponer de una implementación eficiente del método de la iteración QL con desplazamiento implícito para matrices tridiagonales, pues ésta se usa convenientemente para calcular los valores de Ritz durante la aplicación del método de Lanczos. Al respecto, la implementación presentada por Press *et al.* (1986, 1997), similar a la existente en la librería EISPACK (Smith *et al.*, 1976), es eficiente para solucionar este tipo de problemas por que trabaja sobre las componentes no nulas del problema y mantiene el carácter tridiagonal de la matriz a medida que se realizan las transformaciones.

Igualmente, es necesario preparar una implementación dispersa de la iteración inversa debido a que los métodos de minimización del cociente de Rayleigh requieren conocer el autovector asociado al autovalor de menor magnitud antes de comenzar a resolver secuencialmente el problema de autovalores generalizado para los modos superiores.

### 6.5.1. Resolución de los sistemas de ecuaciones lineales en la generación de los autovectores para el MAV

Un requisito de suma importancia para asegurar eficiencia en los generadores de modos efectivos es la construcción de rutinas rápidas para resolver los Sistemas de Ecuaciones Lineales Dispersos (SELD) que surgen en algunos pasos intermedios de los algoritmos implementados en EVMPACK. Aludiendo a su confiabilidad, diferentes investigadores han usado métodos directos basados en factorizaciones matriciales, con sustitución hacia atrás (o adelante), para encontrar las incógnitas de dichos SELD (Dunbar y Woodbury, 1989; Mackay y Law, 1992; Zhang, 2000). Lo anterior no es conveniente cuando se aplican repetidamente desplazamientos espectrales explícitos sobre las matrices del problema de autovalores, por ejemplo para resolver la iteración del cociente de Rayleigh. Esto se debe a que (Remson *et al.*, 1971): (*i*) es necesario ejecutar la factorización durante cada iteración puesto que la matriz de coeficientes se modifica en cada desplazamiento, (*ii*) si las matrices son grandes y deben generarse muchos modos para asegurar la reducción adecuada del modelo, el costo operativo y de almacenamiento de la resolución de los SELD es prohibitivo y (*iii*) pueden generarse errores por redondeo numérico.

Así, para asegurar la eficiencia y fiabilidad, los SELD que surgen en la generación de los modos se resuelven mediante métodos iterativos basados en los subespacios de Krylov (Engeli *et al.*, 1959; Saad, 2003; Flores, 2008). Contando con esto, EVMPACK implementa rutinas para los siguientes algoritmos: (*i*) la versión original del método de los gradientes conjugados para matrices simétricas y definidas positivas (Lanczos, 1952; Hestenes y Stiefel, 1952; Reid, 1971), (*ii*) el método del gradiente biconjugado (Fletcher, 1976) y

---

**Algoritmo 6.2:** Método del gradiente conjugado (Hestenes y Stiefel, 1952; Saad, 2003).

---

**Entrada:** Matrices  $\mathbf{A}_\sigma$  y  $\mathbf{M}$ , vector  $\mathbf{b}$  y tolerancia del residuo  $\epsilon$

**Salida :** Vector solución  $\mathbf{v}$

```

1  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v}_0$ ;  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_0$ ;  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{z}_0$ ;  $j = 0$ ;
2 repita // hasta convergencia
3    $j = j + 1$ ;
4    $\alpha_j = (\mathbf{r}_j^* \mathbf{z}_j) / (\mathbf{p}_j^* \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_j)$ ;
5    $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j$ ;
6    $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_j$ ;
7    $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{j+1}$ ; //Precondicionar, algoritmos 6.5, 6.6, 6.7
8    $\beta_j = (\mathbf{r}_{j+1}^* \mathbf{z}_{j+1}) / (\mathbf{r}_j^* \mathbf{z}_j)$ ;
9    $\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} + \beta_j \mathbf{p}_j$ ;
10 hasta que  $\|\mathbf{r}_j\| / \|\mathbf{b}\| < \epsilon$ ;
```

---



---

**Algoritmo 6.3:** Método del gradiente biconjugado (Fletcher, 1976; Saad, 2003).

---

**Entrada:** Matrices  $\mathbf{A}_\sigma$  y  $\mathbf{M}$ , vector independiente  $\mathbf{b}$  y tolerancia del residuo  $\epsilon$

**Salida :** Vector solución  $\mathbf{v}$

```

1  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{b} - \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v}_0$ ;
2 Elegir  $\mathbf{s}_0$  tal que  $\mathbf{s}_0 \mathbf{r}_0 \neq 0$ ;
3  $\mathbf{z}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_0$ ;  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{s}_0$ ;
4  $\mathbf{p}_0 = \mathbf{r}_0$ ;  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{s}_0$ ;  $j = 0$ ;
5 repita // hasta convergencia
6    $j = j + 1$ ;
7    $\alpha_j = (\mathbf{s}_j^* \mathbf{z}_j) / (\mathbf{q}_j^* \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_j)$ ;
8    $\mathbf{v}_{j+1} = \mathbf{v}_j + \alpha_j \mathbf{p}_j$ ;
9    $\mathbf{r}_{j+1} = \mathbf{r}_j - \alpha_j \mathbf{A}_\sigma \mathbf{p}_j$ ;  $\mathbf{s}_{j+1} = \mathbf{s}_j - \alpha_j \mathbf{A}_\sigma^* \mathbf{q}_j$ ;
10   $\mathbf{z}_{j+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{r}_{j+1}$ ;  $\mathbf{w}_{j+1} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{s}_{j+1}$ ; //Precondicionar, algoritmos 6.5, 6.6, 6.7
11   $\beta_j = (\mathbf{s}_{j+1}^* \mathbf{z}_{j+1}) / (\mathbf{s}_j^* \mathbf{z}_j)$ ;
12   $\mathbf{p}_{j+1} = \mathbf{z}_{j+1} + \beta_j \mathbf{p}_j$ ;  $\mathbf{q}_{j+1} = \mathbf{w}_{j+1} + \beta_j \mathbf{q}_j$ ;
13 hasta que  $\|\mathbf{r}_j\| / \|\mathbf{b}\| < \epsilon$ ;
```

---



---

**Algoritmo 6.4:** GMRES (Saad y Schultz, 1986; Saad, 2003).

---

**Entrada:** Matrices  $\mathbf{A}_\sigma$  y  $\mathbf{M}$ , vector independiente  $\mathbf{b}$  y vector de residuos  $\mathbf{e}$

**Salida :** Vector solución  $\mathbf{v}$

```

1  $\mathbf{r}_0 = \mathbf{M}^{-1} (\mathbf{b} - \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v}_0)$ ;
2  $\beta = \|\mathbf{r}_0\|_2$ ;  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_0 / \beta$ ;
3 Definir  $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{(m+1) \times (m)}$  y  $\mathbf{H} = 0$  para  $j = 1, 2, \dots, m$  hacer // Iteraciones de aproximación
4    $\mathbf{w} = \mathbf{M}^{-1} \mathbf{A}_\sigma \mathbf{x}_j$ ; //Precondicionar, algoritmos 6.5, 6.6, 6.7
5   para  $i = 1, 2, \dots, j$  hacer // Iteraciones de renovación
6      $h_{i,j} = \mathbf{x}_i^* \mathbf{w}$ ;
7      $\mathbf{w} = \mathbf{w} - h_{i,j} \mathbf{x}_i$ ;
8   fin
9    $h_{j+1,j} = \|\mathbf{w}\|_2$ ;
10  si  $h_{j+1,j} = 0$  entonces  $m = j$  e ir a línea 13; // Encontrar ceros en superdiagonal de  $\mathbf{H}$ 
11   $x_{j+1} = \mathbf{w} / h_{j+1,j}$ ;
12 fin
13 Calcular la factorización  $\mathbf{H} = \mathbf{QR}$ ;
14  $\mathbf{C} = \mathbf{Q}^* (\beta \mathbf{e})$ ;
15 Resolver sistema triangular  $\mathbf{Ry} = \mathbf{c}$ ;
16 Calcular aproximación  $\mathbf{v}_m = \mathbf{v}_0 + \mathbf{Vy}$ ;
17 si  $\|\mathbf{A}_\sigma \mathbf{v}_m - \mathbf{b}\| / \|\mathbf{b}\| < \epsilon$  entonces termina ejecución;
```

---

(iii) métodos por mínimo residual, MINRES (Paige y Saunders, 1975) y GMRES (Saad y Schultz, 1986). De estas opciones, la primera es la más eficiente para los SELD que resultan en la solución de la EDP del flujo subterráneo por DF, puesto que siempre se obtienen matrices de coeficientes simétricas y definidas positivas. Además, el número de operaciones asociadas a los productos vectoriales y matriz-vector es menor y asegura que la velocidad en la convergencia de la solución es adecuada. Aún así, los desplazamientos espectrales explícitos pueden causar que la matriz de coeficientes deje de ser definida positiva, por lo que el método del gradiente conjugado original no asegura la convergencia en la solución del SELD. En estos casos es más conveniente utilizar una variante para matrices no simétricas como los métodos de gradiente biconjugado, MINRES o GMRES.

En los algoritmos 6.2, 6.3 y 6.4 se presentan las versiones preconditionadas de los métodos de gradiente conjugado, gradiente biconjugado y GMRES, respectivamente. En todos ellos,  $\mathbf{M}$  representa una matriz de preconditionamiento que mejora el desempeño computacional y de almacenamiento de cada algoritmo en mayor o menor medida, de acuerdo con la técnica de preconditionamiento elegida. Igualmente, como criterio de parada para los métodos de resolución de SELD implementados en EVMPACK se establece que  $\|\mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} - \mathbf{b}\|/\|\mathbf{b}\| < \epsilon$ ; expresión que representa un error relativo del residuo,  $\mathbf{r} = \mathbf{A}_\sigma \mathbf{v} - \mathbf{b}$ , que debe cumplirse para asegurar la convergencia de la solución del SELD.

### Técnicas de preconditionamiento

Es bien conocido que el preconditionamiento es el ingrediente más crítico en la solución eficiente de un SELD (Trefethen y Bau, 1997; Benzi, 2002). Su construcción viene dada por una modificación implícita o explícita de un SELD que hace posible encontrar su solución de forma más sencilla por un método iterativo. Con esto, si el SELD modificado por preconditionamiento se resuelve, por ejemplo empleando un método por subespacios de Krylov, éste suele requerir de una menor cantidad de pasos para alcanzar la convergencia (Saad, 2003). Por consiguiente, un preconditionamiento eficiente debe cumplir las dos siguientes propiedades básicas: (i) el SELD preconditionado es fácil de resolver y (ii) el preconditionamiento se construye usando poco recurso computacional. Desafortunadamente, estos dos requerimientos compiten entre sí, con lo cual una implementación eficiente para la solución de SELD implica una solución de compromiso entre ambos.

Benzi (2002) ha presentado una extensa revisión de las técnicas de preconditionamiento desarrolladas durante el siglo XX, clasificándolas como basadas en: (i) factorizaciones incompletas, (ii) la aproximación de la inversa de una matriz y (iii) técnicas de multi nivel algebraicas. En el desarrollo conceptual e implementación de los generadores de modos efectivos para el MAV-CSEM, el interés se centra básicamente en la primera categoría, básicamente por haber sido usadas previamente en la modelación eficiente del flujo subterráneo por diferentes autores (McDonald y Harbaugh, 1988; Gambolati *et al.*, 1988b; Hill, 1990; Larabi y De Smedt, 1994; Hendricks-Franssen, 2000; Naff y Banta, 2008).

Meijerink y van der Vorst (1977) fueron los primeros en reconocer el uso potencial de la factorización incompleta como preconditionamiento para resolver un SELD. Una factorización incompleta es deseable por que, a diferencia de una factorización completa, que manifiesta el problema del relleno en las matrices de coeficientes ocasionando la pérdida de su carácter disperso, las matrices resultantes respetan el patrón de dispersión de la matriz original, hasta cierto punto. Así, lo que se busca es controlar que la cantidad de procesamiento del preconditionamiento no se incremente excesivamente (Flores, 2008). Ahora bien, una factorización incompleta plantea la siguiente forma general de descomposición:

$$\mathbf{A}_\sigma = \mathbf{LU} - \mathbf{R} \quad (6.14)$$

---

**Algoritmo 6.5:** Factorización ILU general. Tomado y adaptado de diferentes fuentes (Saad, 1994b; Golub y Van Loan, 1996; Saad, 2003).

---

**Entrada:** Matriz  $\mathbf{A}_\sigma$ , patrón de dispersión  $\mathcal{S}$

**Salida :** Matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  que cumplen con  $\mathcal{S}$

```

1 para  $i = 2, 3, \dots, n$  hacer // Recorrer filas
2   para  $k = 1, 2, \dots, i - 1 \wedge (i, j) \in \mathcal{S}$  hacer // Escalar elementos
3      $a_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k};$ 
4     para  $j = k + 1, k + 2, \dots, n$  y si  $(i, j) \in \mathcal{S}$  hacer // Realizar la descomposición
5        $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j};$ 
6     fin
7   fin
8 fin
```

---



---

**Algoritmo 6.6:** Factorización ILU con nivel de llenado  $K$ . Tomado y adaptado de diferentes fuentes (Saad, 1994b, 2003).

---

**Entrada:** Matriz  $\mathbf{A}_\sigma$ , nivel de llenado  $K$

**Salida :** Matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  que cumplen con el nivel de llenado

```

1 Definir  $n_{i,j}$  para  $i, j = 1, 2, \dots, n$  de acuerdo con la ecuación (6.15);
2 para  $i = 2, 3, \dots, n$  hacer // Recorrer filas
3   para  $k = 1, 2, \dots, i - 1 \wedge n_{i,k} \leq K$  hacer // Escalar elementos
4      $a_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k};$ 
5     para  $j = 1, 2, \dots, n$  hacer // Realizar la descomposición
6        $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,j};$ 
7        $n_{i,j} = \min\{n_{i,j}; n_{i,k} + n_{k,j} + 1\}$ 
8     fin
9   fin
10 fin
```

---



---

**Algoritmo 6.7:** Factorización ILU con descarte basado en magnitud. Tomado y adaptado de diferentes fuentes (Saad, 2003; Flores, 2008).

---

**Entrada:** Matriz  $\mathbf{A}_\sigma$ , límite inferior de magnitud  $\tau$

**Salida :** Matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  que cumplen con el límite inferior de magnitud

```

1 Sea  $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$ ;
2 para  $i = 2, 3, \dots, n$  hacer // Recorrer filas
3   Definir que  $\mathbf{w}_{1:1:n} = \mathbf{A}_{i:i,1:n}$ , siendo  $\mathbf{A}_{i:i,1:n}$  la  $i$ -ésima fila de  $\mathbf{A}_\sigma$ ;
4   para  $k = 1, 2, \dots, i - 1 \wedge w_{1,k} \neq 0$  hacer // Escalar elementos
5      $a_{i,k} = a_{i,k}/a_{k,k};$ 
6     Si  $|w_{1,k}| \leq \tau$  entonces  $w_{1,k} = 0$ ; // Aplicar la regla de eliminación
7     Si  $w_{1,k} \neq 0$  entonces  $\mathbf{w}_{1:1,1:n} = \mathbf{w}_{1:1,1:n} - w_{1,k} \mathbf{u}_{1:1,1:n};$  // Realizar descomposición
8   fin
9   para  $k = 1, 2, \dots, n$  y para  $w_{1,k} \neq 0$  hacer // Aplicar regla de eliminación
10    Si  $|w_{1,k}| \leq \tau$  entonces  $w_{1,k} = 0$ ;
11  fin
12   $l_{i,j} = w_{1,j}$  para  $j = 1, 2, \dots, i - 1$ ; // Llenar matrices de descomposición
13   $u_{i,j} = w_{1,j}$  para  $j = 1, 2, \dots, n$ ;
14   $\mathbf{w}_{1:1,1:n} = 0$ ;
15 fin
```

---

donde  $\mathbf{A}_\sigma = \mathbf{A} - \sigma \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz de coeficientes desplazada espectralmente,  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz triangular inferior,  $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz triangular superior y  $\mathbf{R} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz de errores de la factorización incompleta que satisface ciertas restricciones, como tener ceros en algunos de sus elementos. Así, definiendo un vector de índices  $\mathbf{n} = \{1, 2, \dots, n\} \in \mathbb{R}^n$ , se construye un conjunto  $\mathcal{S} \subseteq \mathbf{n} \times \mathbf{n}$  de posiciones en la matriz de coeficientes, permitiendo rellenar únicamente en las posiciones de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  que pertenecen a  $\mathcal{S}$ . Las factorizaciones incompletas se diferencian en las reglas impuestas para descartar los elementos de relleno, es decir, en el procedimiento para construir a  $\mathcal{S}$ .

De acuerdo con el algoritmo 6.5, un paso de cálculo en la construcción de una factorización LU incompleta general puede expresarse como  $a_{i,j} = a_{i,j} - a_{i,k} a_{k,k}^{-1} a_{k,j}$ , si  $(i, k) \in \mathcal{S} \wedge (i, j) \in \mathcal{S}$  para  $i, j > k$ . De ahí se deduce que la factorización LU puede fallar si uno de los elementos diagonales de la matriz de coeficientes se anula en la eliminación gaussiana. Concretamente, si el conjunto  $\mathcal{S}$  coincide con las posiciones no nulas de  $\mathbf{A}_\sigma$ , la factorización incompleta se denomina sin relleno. Este tipo de aproximaciones han demostrado ser efectivas para solucionar SELD que surgen en discretizaciones de bajo orden en EDP elípticas escalares, donde obtienen matrices diagonalmente dominantes (Benzi, 2002), como en el caso de la EDP de flujo subterráneo resuelta por DF.

Desafortunadamente, a medida que la discretización espacial de las DF usadas para resolver el flujo subterráneo se hace más fina o irregular, las aproximaciones sin relleno resultan ser muy burdas y debe adoptarse algún esquema de llenado (Hill, 1990; Naff y Banta, 2008). Gustafsson (1978) y Watts III (1981) proponen esquemas de llenado basados en el cálculo de un índice por elemento a medida que avanza la eliminación gaussiana incompleta. Así, el nivel inicial de llenado de un elemento de una matriz dispersa se define como (Saad, 2003):

$$n_{i,j} = \begin{cases} 0 & \text{si } a_{i,j} \neq 0 \vee i = j \\ \infty & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (6.15)$$

el cual se renueva repetidamente a medida que el elemento es modificado por una eliminación gaussiana. Siguiendo el procedimiento presentado en el algoritmo 6.6, el nivel de llenado en la posición  $(i, j)$  se actualiza como  $n_{i,j} = \min\{n_{i,j}; n_{i,k} + n_{k,j} + 1\}$ . La motivación de este nivel de llenado es que, para matrices diagonalmente dominantes, mientras mayor sea el nivel de llenado de un elemento, menor es su valor absoluto, con lo cual la matriz de errores exhibe elementos muy cercanos a cero y la factorización es más precisa. En términos operativos, el patrón de llenado se define como  $\mathcal{S} = \{(i, j) : n_{i,j} > K\}$  antes de comenzar el proceso de factorización LU, es decir, se elige una cota inferior  $K$  del índice de llenado. A pesar de que en la mayoría de las ocasiones aplicar el nivel de relleno mejora el preconditionamiento con respecto a las versiones sin llenado, la desventaja principal es que requiere almacenar muchos elementos de llenado pequeños en valor absoluto, los cuales suelen contribuir muy poco en la disminución del número de condición del SELD.

En algunos casos, un preconditionamiento más eficiente se obtiene ejecutando una factorización LU incompleta donde los elemento de llenado se aceptan o descartan en base a su magnitud, de la forma presentada en el algoritmo 6.7. Según éste, se define la tolerancia de descarte como un número entero positivo  $\tau$  que actúa como un límite inferior admisible para los valores absolutos de los elementos de llenado, es decir, se permite llenar los elementos de las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  si y sólo si  $|a_{i,j}| > \tau$ . La principal desventaja del criterio anterior es que resulta difícil escoger un valor para la tolerancia de descarte, por lo cual se hace necesario recurrir a un proceso de ensayo y error hasta encontrar un valor satisfactorio. Otra problema es que no puede conocerse de antemano la cantidad de almacenamiento necesaria para ejecutar satisfactoriamente la factorización (Saad, 2003).

Las factorizaciones incompletas seleccionan elementos de llenado utilizando cierto criterio definido a priori y éstos se descartan asignándoles un cero, lo cual puede ser perjudicial para la calidad del preconditionamiento. Por fortuna, existen estrategias que compensan esta asignación y reducen los efectos del descarte. Una de ellas es tomar los elementos que van siendo eliminados durante el cálculo de cada fila de las matrices  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  y sumarlos en la diagonal de  $\mathbf{U}$ . A este proceso se le denomina compensación diagonal y constituye un preconditionamiento modificado que también permite utilizar cualquier esquema de nivel de llenado en función de la estructura de la matriz de coeficientes (Dupont *et al.*, 1968; Gustafsson, 1978; Axelsson y Lindskog, 1986; Ashcraft y Grimmes, 1988; Saad, 1994b). Entonces, un esquema general de compensación diagonal funciona como sigue. En principio, sea  $\mathbf{A}_{i:i,1:n}$  la  $i$ -ésima fila de la matriz  $\mathbf{A}_\sigma$  y se establece que  $\mathbf{U}_{i:i,1:n} = \mathbf{A}_{i:i,1:n}$ . Así, las operaciones a ejecutar durante la  $k$ -ésima iteración se expresan por filas como  $\mathbf{U}_{i:i,1:n} = \mathbf{U}_{i:i,1:n} - l_{i,k}\mathbf{U}_{k:k,1:n}$ , y se aplican únicamente sobre aquellos elementos tales que  $a_{i,j} \neq 0$  para  $j = k + 1, \dots, n$ . Con lo anterior, se escribe la renovación del preconditionamiento como  $\mathbf{U}_{i:i,1:n} = \mathbf{U}_{i:i,1:n} - l_{i,k}\mathbf{U}_{i:i,1:n} + \mathbf{R}_{i:i,1:n}$  y, por consiguiente, se preservan los componentes no nulos de  $\mathbf{A}_\sigma$ . De ahí que las operaciones por fila se escriben como:

$$\mathbf{U}_{i:i,1:n} = \mathbf{A}_{i:i,1:n} - \sum_{k=1}^{i-1} \left( l_{i,k}\mathbf{U}_{k:k,1:n} - \mathbf{R}_{i:i,1:n}^{(k)} \right) = \mathbf{A}_{i:i,1:n} - \sum_{k=1}^{i-1} (l_{i,k}\mathbf{U}_{k:k,1:n}) - \mathbf{R}_{i:i,1:n}$$

donde cada elemento de la matriz de errores de la factorización incompleta se define como  $r_{i,j} = l_{i,k}u_{k,j}$  si  $(i,j) \in \mathcal{S}$  y  $r_{i,j} = 0$  cuando el elemento no pertenece al conjunto de relleno. También se procura que los componentes no considerados en la factorización se compensen en la diagonal de la forma  $u_{i,i} = u_{i,i} - \mathbf{R}_{i:i,1:n}\mathbf{c}$ , siendo  $\mathbf{c} \equiv [1 \ 1 \ \dots \ 1]^* \in \mathbb{R}^n$  y se cumpla que  $\mathbf{A}_\sigma\mathbf{c} = \mathbf{L}\mathbf{U}\mathbf{c}$ . Así, se mantiene la suma de las componentes en cada fila.

Saad (1994a,b) propone una estrategia de preconditionamiento dual por umbral que opera fijando una tolerancia de descarte y un número de elementos de relleno en cada fila de las matrices factores  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$ . A diferencia de las factorizaciones incompletas discutidas hasta ahora, este método dual decide el relleno de los elementos de  $\mathbf{L}$  y  $\mathbf{U}$  de forma dinámica aplicando una regla de eliminación sobre el elemento si su magnitud es menor que cierto umbral  $\tau$  y luego manteniendo los  $p$  elementos de relleno de mayor magnitud por fila. Por consiguiente, los parámetros  $\tau$  y  $p$  pueden modificarse convenientemente hasta alcanzar un preconditionamiento apropiado de acuerdo al problema a solucionar.

Existen otras técnicas de preconditionamiento más sencillas que las presentadas hasta ahora. Por ejemplo, el escalamiento diagonal es una técnica muy atractiva por su simplicidad puesto que consiste en escalar la matriz original para que tenga diagonal unitaria. Sin embargo, su desventaja principal es que, en general, supone realizar gran cantidad de iteraciones para encontrar una solución aceptable del SELD (Jenning y Malik, 1978; Larabi y De Smedt, 1994). También resulta claro que, para matrices simétricas y definidas positivas, el desarrollo de factorizaciones incompletas puede plantearse tanto en términos de la descomposición de Cholesky (Kershaw, 1978), como de la factorización LU para matrices generales (Meijerink y van der Vorst, 1977). En este sentido, para las implementaciones construidas para EVMPACK se ha escogido la factorización LU con el fin de prevenir el rompimiento de la descomposición de Cholesky causado por algún desplazamiento espectral que modifique el carácter definido positivo de la matriz de coeficientes del SELD.

De acuerdo a lo discutido en esta sección y con el propósito de flexibilizar la solución de los SELD, en la interfaz de EVMPACK se han implementado siete técnicas de preconditionamiento por factorización incompleta para matrices dispersas: (i) escalamiento diagonal, (ii) descomposición incompleta de Cholesky sin relleno, IC(0), (iii) descomposición LU incompleta sin relleno, ILU(0), (iv) descomposición LU incompleta con  $K$  nivel de relleno,

ILU( $K$ ), (v) descomposición LU incompleta con compensación diagonal, MILU(0), (vi) descomposición LU incompleta con descarte por umbral, ILU( $\tau$ ), y (vii) descomposición LU incompleta dual por umbral y relleno de elementos, ILU( $\tau, p$ ). Los programas se han escrito con base en los disponibles en la librería SPARSKIT (Saad, 1994a,b, 2003), a los cuales se les han realizado modificaciones en lo que respecta al manejo eficiente del espacio en memoria física.

### 6.5.2. Deflación y reortogonalización

El procedimiento de la deflación vectorial consiste, básicamente, en empezar la generación del siguiente modo usando un vector de norma unitaria, ortogonal tanto a la matriz  $\mathbf{S}$  como a los autovectores previamente disponibles. Su principal objetivo es disminuir la posibilidad de obtener modos repetidos en la ejecución de un algoritmo iterativo, cuando la multiplicidad aritmética de los autovalores deseados es uno. En la práctica, la deflación actúa cuando se ejecuta el PGS entre el vector elegido y una base ortogonal previamente existente. Alternativamente, un procedimiento relacionado con la deflación es la reortogonalización, la cual consiste, como se dijo anteriormente, en aplicar iterativamente el PGS entre un vector cualquiera y los vectores que forman la base de un subespacio ortogonal existente, hasta cumplir con algún(os) criterio(s) de ortogonalidad establecido(s), de la forma que se consigna en el algoritmo 6.8 para la versión modificada del PGS.

---

**Algoritmo 6.8:** Proceso modificado de Gram-Schmidt iterativo. Tomado y adaptado de diferentes fuentes (Bathe, 1996; Hernández *et al.*, 2007b; Tomás, 2009).

---

**Entrada:** Vector  $\mathbf{x}_j$  que va a ser ortogonalizado respecto de las columnas de  $\mathbf{V}_{j-1}$  y  $\mathbf{S}$   
**Salida :** Vector ortogonalizado  $\mathbf{v}_j$  y coeficientes  $\mathbf{r}_j$

---

```

1  $\mathbf{v}_j = \mathbf{x}_j$ ;  $\mathbf{r}_j = 0$ ;
2 repita // hasta convergencia
3   para  $i = 1, 2, \dots, j-1$  hacer // Proceso de Gram-Schmidt
4      $h_i = \mathbf{v}_i^* \mathbf{S} \mathbf{v}_j$ ;
5      $\mathbf{v}_j = \mathbf{v}_j - h_i \mathbf{v}_i$ ;
6   fin
7    $\mathbf{r}_j = \mathbf{r}_j + \mathbf{h}$ ;  $\mathbf{r}_{jj} = \mathbf{v}_j^* \mathbf{S} \mathbf{v}_j$ ;
8 hasta que  $\|\bar{\mathbf{v}}_j\|_2 + \omega \|\mathbf{V}_{j-1}^* \bar{\mathbf{v}}_j\| \leq \|\mathbf{v}_j\|_2 \vee \sum_{k=1}^{j-1} |\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_j| \leq L \|\mathbf{v}_j\|_2$ ;

```

---

Según la discusión del apartado 6.3.5, el principal aspecto a considerar en la implementación de generadores de modos (y/o bases para subespacios de Krylov) empleando la iteración de Lanczos, es la preservación de la ortogonalidad entre los vectores de Lanczos. En estos casos, es conveniente que los algoritmos de reortogonalización se configuren siguiendo las recomendaciones presentadas por Sorensen (1996) y Hernández *et al.* (2007a,b,c), quienes discuten extensamente acerca de los indicadores más apropiados para determinar si dos o más vectores son ortogonales entre sí. Estos indicadores pueden interpretarse como criterios para detener la ejecución de la reortogonalización. Teniendo en cuenta lo anterior, Daniel *et al.* (1976) analizaron el PGS iterativo y propusieron la siguiente desigualdad:

$$\|\bar{\mathbf{v}}_j\|_2 + \omega \|\mathbf{V}_{j-1}^* \bar{\mathbf{v}}_j\| \leq \|\mathbf{v}_j\|_2$$

la cual, estableciendo que  $\omega = 0$ , se transforma en el criterio clásico de Rutishauser (1967),  $\eta \|\bar{\mathbf{v}}_j\|_2 \leq \|\mathbf{v}_j\|_2$ , con  $\eta = 1/\theta = 1/\sqrt{2}$  (Reiche y Gragg, 1990);  $\bar{\mathbf{v}}_j$  es el vector antes de la reortogonalización,  $\mathbf{V}_{j-1}$  es la base ortogonal existente,  $\mathbf{v}_j$  es el vector ortogonalizado respecto a  $\mathbf{V}_{j-1}$  y  $\|\mathbf{v}_j\|_2$  es la norma 2 de un  $\mathbf{v}_j$ . Durante el proceso de generación de los

vectores de Lanczos también es recomendable asegurar que (Giraud y Langou, 2004):

$$\sum_{k=1}^{j-1} |\mathbf{v}_k^* \mathbf{v}_j| \leq L \|\mathbf{v}_j\|_2$$

donde  $L < 1$  es condición necesaria y suficiente para asegurar la robustez de la reortogonalización. En *EVMPACK* se han implementado los dos criterios de parada de la reortogonalización mencionados, asegurando que, para la generación de la base ortonormal del subespacio de Krylov, las pasadas de la reortogonalización sean dos, como mínimo.

### 6.5.3. Generador por minimización del cociente de Rayleigh mediante gradiente conjugado acelerado con deflación

El MAGCD calcula secuencialmente los modos de un problema generalizado de autovalores simétrico y definido positivo, comenzando por el correspondiente al autovalor de menor magnitud en el subespacio de búsqueda disponible. La idea fundamental es restringir el cálculo del siguiente modo a un subespacio pequeño, ortogonal a la matriz de almacenamientos  $\mathbf{S}$  y a todos los autovectores previamente existentes aplicando una deflación sobre el vector que indica la dirección de búsqueda conjugada del gradiente del cociente de Rayleigh. Además, la convergencia de la minimización se acelera a través del preconditionamiento del problema generalizado de autovalores, intentando reducir su número de condición.

#### Precondicionamiento para la minimización del cociente de Rayleigh

En principio, sea  $\kappa$  el número de condición del problema de autovalores. El objetivo del preconditionamiento es construir un problema de autovalores equivalente que cumple  $\kappa(\tilde{\mathbf{A}} - \lambda_1 \tilde{\mathbf{S}}) \ll \kappa(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{S})$ , en otras palabras, el problema transformado tiene un número de condición mucho menor que el original y las matrices  $\tilde{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  y  $\tilde{\mathbf{S}} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  son transformaciones de similaridad de  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$ , es decir, sus autovalores son idénticos. Ahora bien, asumiendo que existe una matriz  $\mathbf{M} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  no singular tal que  $\mathbf{M}\mathbf{v}_k = \mathbf{y}$ , entonces:

$$\rho(\mathbf{v}_k) = \frac{\mathbf{v}_k^* \mathbf{A} \mathbf{v}_k}{\mathbf{v}_k^* \mathbf{S} \mathbf{v}_k} = \frac{\mathbf{y}_k^* \mathbf{M}^* \mathbf{A} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_k^* \mathbf{M}^* \mathbf{S} \mathbf{M}^{-1} \mathbf{y}_k} = \frac{\mathbf{y}_k^* \tilde{\mathbf{A}} \mathbf{y}_k}{\mathbf{y}_k^* \tilde{\mathbf{S}} \mathbf{y}_k} = \tilde{\rho}(\mathbf{y})$$

de donde sigue que la relación entre el problema original y el preconditionado se expresa como  $\tilde{\mathbf{A}} - \lambda_1 \tilde{\mathbf{S}} = \mathbf{M}^{-*}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{S})\mathbf{M}^{-1}$ . Una transformación que cumple con dicha relación y reduce fuertemente el número de condición original es una factorización LU, que al ser aplicada sobre el problema de autovalores original lo transforma en (Evans y Shanehchi, 1982; Evans, 1983, 1984; Knyazev, 2001; Jang, 2001; Arbenz *et al.*, 2005):

$$(\mathbf{LU})^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{S})\mathbf{u}_j = (\mathbf{I} - \lambda_1 \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S})\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j - (\lambda_1/\lambda_j)\mathbf{u}_j$$

Dividiendo el mayor autovalor de  $\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{A} - \lambda_1 \mathbf{S})$  por su menor autovalor positivo, se llega a que  $\kappa_1 = (\lambda_2/\lambda_n)\kappa_0$ . Si  $\lambda_2 \ll \lambda_n$ , este número de condición se reduce significativamente y no depende de la configuración de la malla de discretización para la resolución de la EDP de flujo subterráneo. Así, para acelerar el cálculo de los modos efectivos, puede usarse cualquiera de los preconditionamientos por factorización incompleta presentados en el apartado 6.5.1. Según publicaciones recientes, el preconditionamiento por aproximación de la inversa de  $\mathbf{M}$  también es aplicable para la aceleración del MAGCD, siendo especialmente efectivo en implementaciones paralelas (Bergamaschi *et al.*, 2001, 2007, 2012).



### Iteración para la generación del modo inicial

Antes de comenzar la generación de los modos efectivos mediante el MAGCD debe disponerse del autovalor con menor magnitud y su autovector asociado,  $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$ , acá denominado modo inicial. Como se presenta en el algoritmo 6.9, el modo inicial se calcula en dos pasos; primero, se resuelve una iteración inversa (II) con desplazamiento nulo para encontrar una primera aproximación burda, posteriormente, este modo aproximado se refina ejecutando repetidamente la Iteración del Cociente de Rayleigh (ICR). Durante el primer paso se resuelve una vez el SELD dado por la ecuación (6.7) con  $\sigma_k = 0$ , mientras que en el segundo paso se resuelven conjuntamente las ecuaciones (6.9) y (6.10) hasta cumplir con cierto(s) criterio(s) de convergencia impuesto(s). Como se comentó en el apartado 6.3.3, el uso de la ICR es muy conveniente, en términos de eficiencia, puesto que asegura una velocidad de convergencia cúbica si y sólo si el desplazamiento inicial seleccionado se encuentra cercano a un autovalor. Sin embargo, la ICR tiene la desventaja de que debe construirse un SELD diferente durante cada iteración. En la práctica, lo anterior implica realizar  $n$  operaciones más que las requeridas por cada ejecución de una II, costo que se compensa ampliamente por el decrecimiento del número de iteraciones necesarias.

Aparte de lo anterior, se establecen simultáneamente dos criterios de convergencia para determinar si la ejecución de la ICR debe finalizar. El primero aprovecha que la norma del vector solución del SELD presentado en la ecuación (6.9) se vuelve muy grande cuando el desplazamiento actual  $\sigma_k$ , está muy cerca del primer autovalor,  $\lambda_1$ . Cabe recordar que dicho residual siempre apunta en la dirección correcta. En otras palabras, la solución para  $\mathbf{v}_1$  obtenida en el paso 7 del algoritmo 6.9 es un múltiplo escalar del autovector deseado (Arbenz y Kressner, 2010). Por lo tanto, se plantea el siguiente criterio de convergencia:

$$10 < \epsilon_1 \sqrt{\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_1} \quad (6.16)$$

donde  $\epsilon_1$  es un número pequeño que representa la tolerancia de convergencia elegida. El segundo criterio establece que la ICR termina cuando la diferencia relativa entre los desplazamientos calculados en iteraciones consecutivas es pequeña (Gambolati, 1993):

$$|\sigma_{k+1} - \sigma_k| \leq \epsilon_2 \sigma_{k+1} \quad (6.17)$$

donde  $\epsilon_2$  es una tolerancia que se escoge como  $10^{-2s}$ , siendo  $s$  el número de dígitos de precisión que se desea para los autovalores (Bathe, 1996). Inicializar los vectores de prueba de la ICR como se muestra en el algoritmo 6.9 asegura la convergencia del modo inicial en menos de cinco iteraciones con un error menor a  $10^{-10}$ , independientemente del tamaño de la matrices involucradas. Asimismo, el cálculo de cada vector de prueba no requiere el uso de mucha memoria, siempre y cuando las matrices de coeficientes construidas para resolver cada ICR se almacenen en formato disperso. Mas aún, la resolución de los SELD asociados con la ICR, de acuerdo con el paso 6 del algoritmo 6.9, puede afrontarse mediante el método del gradiente conjugado preconditionado puesto que, en este caso, los desplazamientos son cercanos a cero y la definición positiva de  $(\mathbf{A} - \sigma_k \mathbf{S})$  suele mantenerse.

### Iteración para la generación de los modos superiores

Disponiendo de la matriz de preconditionamiento,  $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ , para iniciar la generación de un modo se asume que se han calculado los  $h$  autovalores anteriores,  $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_h\}$ , junto con sus  $h$  autovectores asociados,  $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_h\}$ , ordenados por columnas en la matriz  $\mathbf{V}_h \in \mathbb{R}^{n \times h}$ . Entonces, el  $(h+1)$ -ésimo par autovalor-autovector se obtiene iterativamente minimizando el cociente de Rayleigh hasta cumplir algún criterio de convergencia

---

**Algoritmo 6.9:** Generación del modo inicial para el MAGCD mediante la ICR. Tomado y adaptado de diferentes fuentes (Bathe, 1996; Golub y Van Loan, 1996; Trefethen y Bau, 1997; Arbenz y Kressner, 2010; Datta, 2010).

---

**Entrada:** Matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$ , autovector inicial de prueba  $\mathbf{v}_1 \in \mathbb{R}^n$ , tolerancias  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$   
**Salida** : Modo inicial del problema generalizado  $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$

```

1  $k = 0; \sigma_k = 0;$ 
2  $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_1 / (\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_1)^{1/2};$  // Normalización del vector de prueba
3 Resolver  $\mathbf{A}\mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{S}\mathbf{v}_1$  para  $\mathbf{v}_1$ ; // II de direccionamiento vía algoritmo 6.2
4  $\sigma_k = (\mathbf{v}_1^* \mathbf{A}\mathbf{v}_1) / (\mathbf{v}_1^* \mathbf{S}\mathbf{v}_1);$  // Cálculo del primer desplazamiento
5 repita // ICR hasta convergencia, cuando  $k = m$ 
6    $(\mathbf{A} - \sigma_k \mathbf{S}) \mathbf{v}_1 = \mathbf{S}\mathbf{v}_1;$  // ICR, se resuelve vía algoritmos 6.2, 6.3 o 6.4
7    $\sigma_{k+1} = (\mathbf{v}_1^* \mathbf{A}\mathbf{v}_1) / (\mathbf{v}_1^* \mathbf{S}\mathbf{v}_1) + \sigma_k;$ 
8    $\mathbf{v}_1 = (\mathbf{v}_1) / (\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_1)^{1/2};$ 
9    $k = k + 1;$ 
10 hasta que  $\epsilon_1 \geq 10 / (\mathbf{v}_1^* \mathbf{v}_1)^{1/2} \vee \epsilon_2 \geq |\sigma_{k+1} - \sigma_k| / \sigma_{k+1};$ 
11  $\lambda_1 = \sigma_m;$ 

```

---



---

**Algoritmo 6.10:** Iteración del MAGCD para la generación de un modo. Tomado y adaptado de diferentes publicaciones (Gambolati *et al.*, 1988a; Gambolati, 1993; Bergamaschi *et al.*, 1996; Bergamaschi y Putti, 2002; Gambolati y Putti, 2005)

---

**Entrada:** Vector inicial de iteración  $\mathbf{v}_0$ , factorización incompleta de preconditionamiento  $\mathbf{M} = \mathbf{L}\mathbf{U}$ , matriz de autovectores previos  $\mathbf{V}_h$ , tolerancias de convergencia,  $\epsilon_2$ , y reinicio,  $\epsilon$   
**Salida** :  $(h+1)$ -ésimo autovalor y autovector,  $\lambda_{h+1}$  y  $\mathbf{v}_{h+1}$ , respectivamente

```

1  $k = 0; \beta_0 = 0;$ 
2  $r_{min} = r \leq 10^{-8};$ 
3  $\mathbf{V}_h^* \mathbf{S}\mathbf{v}_k = 0;$ 
4 repita // Iteraciones de minimización hasta convergencia
5    $\mathbf{g}_k = 2[\mathbf{A}\mathbf{v}_k - \rho(\mathbf{v}_k) \mathbf{S}\mathbf{v}_k] / [\mathbf{v}_k^* \mathbf{S}\mathbf{v}_k];$ 
6   si  $k > 0$  entonces  $\beta_k = [\mathbf{p}_{k-1}^* \mathbf{A} (\mathbf{L}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{g}_k] / [\mathbf{p}_{k-1}^* \mathbf{S}\mathbf{p}_{k-1}];$ 
7    $\tilde{\mathbf{p}}_k = (\mathbf{L}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1};$  // Precondicionar, algoritmos 6.5, 6.6, 6.7
8    $\mathbf{p}_k = \tilde{\mathbf{p}}_k - \sum_{l=1}^h (\tilde{\mathbf{p}}_k^* \mathbf{S}\mathbf{v}_l) \mathbf{v}_l;$ 
9    $a = \mathbf{p}_k^* \mathbf{A}\mathbf{v}_k; \quad b = \mathbf{p}_k^* \mathbf{A}\mathbf{p}_k; \quad c = \mathbf{p}_k^* \mathbf{S}\mathbf{v}_k;$ 
10   $d = \mathbf{p}_k^* \mathbf{S}\mathbf{p}_k; \quad m = \mathbf{v}_k^* \mathbf{S}\mathbf{v}_k; \quad n = \mathbf{v}_k^* \mathbf{A}\mathbf{v}_k;$ 
11   $\Delta = (nd - mb)^2 - 4(bc - ad)(ma - nc);$ 
12   $\delta_k = (nd - mb + \sqrt{\Delta}) / (2bc - 2ad);$  // Obtener polinomio del problema
13   $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \delta_k \mathbf{p}_k;$ 
14  S-normalizar  $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$  para obtener  $\mathbf{v}_{k+1}$ , tal que  $\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{S}\mathbf{v}_{k+1} = 1;$ 
15   $\rho(\mathbf{v}_{k+1}) = (\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{A}\mathbf{v}_{k+1}) / (\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{S}\mathbf{v}_{k+1});$ 
16   $r = |\rho(\mathbf{v}_{k+1}) - \rho(\mathbf{v}_k)| / \rho(\mathbf{v}_k);$ 
17  si  $r < r_{min}$  entonces // Reiniciar el vector de prueba
18     $r_{min} = r;$ 
19    si  $|1 - \mathbf{v}_{h,min}^* \mathbf{v}_h| < \epsilon$  entonces  $\mathbf{v}_{h+2} = \mathbf{v}_k;$ 
20  fin
21   $k = k + 1;$ 
22 hasta que  $r \leq \epsilon_2;$ 
23  $\mathbf{v}_{h+1} = \mathbf{v}_k; \quad \lambda_{h+1} = \rho(\mathbf{v}_k);$ 

```

---

apropiado. En principio, para el  $(h + 1)$ -ésimo modo se escoge un vector  $\mathbf{v}_0$ , ortogonal con respecto a la matriz de almacenamientos,  $\mathbf{S}$ , y la matriz de autovectores existentes,  $\mathbf{V}_h$ , con lo cual se cumple que  $\mathbf{V}_h^* \mathbf{S} \mathbf{v}_0 = 0$ . La dirección de búsqueda para la minimización del cociente de Rayleigh se obtiene calculando el factor de descenso expresado como:

$$\beta_k = - \frac{\mathbf{p}_{k-1}^* \mathbf{A} (\mathbf{L}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{g}_k}{\mathbf{p}_{k-1}^* \mathbf{S} \mathbf{p}_{k-1}} \quad (6.18)$$

donde  $\mathbf{g}_k$  es el gradiente del cociente de Rayleigh para la  $k$ -ésima iteración en la generación del  $(h + 1)$ -ésimo modo, el cual se evalúa mediante (Gambolati *et al.*, 1988a):

$$\mathbf{g}_k = \frac{2}{\mathbf{v}_k^* \mathbf{S} \mathbf{v}_k} [\mathbf{A} \mathbf{v}_k - \rho(\mathbf{v}_k) \mathbf{S} \mathbf{v}_k] \quad (6.19)$$

que ha sido deducido de la definición del cociente de Rayleigh,  $\rho(\mathbf{v}_k)$ , según la ecuación (6.8). Con esto, se formula la dirección de búsqueda de minimización no ortogonalizada:

$$\tilde{\mathbf{p}}_k = (\mathbf{L}\mathbf{U})^{-1} \mathbf{g}_k + \beta_k \mathbf{p}_{k-1} \quad (6.20)$$

que permite renovar  $\mathbf{p}_k$  en la iteración actual ortogonalizando  $\tilde{\mathbf{p}}_k$  con respecto a  $\mathbf{S}$  y  $\mathbf{V}_h$  mediante un PGS. A continuación se calcula la mayor raíz del polinomio característico del problema de autovalores,  $\delta_k$ , expresando la ecuación (6.12) de la forma  $a(\delta_k)^2 + b\delta_k + c = 0$ , donde  $a$ ,  $b$  y  $c$  se evalúan expandiendo la fórmula general del polinomio cuadrático y se elige la mayor raíz, que se sustituye en (6.11) para obtener una nueva aproximación del  $(k + 1)$ -ésimo autovector sin normalizar, de la forma  $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1} = \mathbf{v}_k + \delta_k \mathbf{p}_k$ . A continuación,  $\tilde{\mathbf{v}}_{k+1}$  se normaliza con respecto a la matriz  $\mathbf{S}$  para cumplir que  $\mathbf{v}_{k+1}^* \mathbf{S} \mathbf{v}_{k+1} = 1$ , obteniéndose la nueva aproximación del autovector deseado,  $\mathbf{v}_{k+1}$ . Por último, se revisa el criterio de convergencia seleccionado y, de no cumplirse, se repite la iteración de minimización.

Considerando los pasos anteriores, en el algoritmo 6.10 se plantea el esquema para una iteración de generación modal del MAGCD que ha sido implementado en *EVMPACK*. En éste se establece que las iteraciones de minimización para cada modo se ejecutan hasta alcanzar la convergencia del cociente de Rayleigh entre pasos consecutivos, de acuerdo con la ecuación (6.17). Con lo anterior se define que  $\mathbf{v}_{h+1} = \mathbf{v}_{k+1}$  y se inicia el procedimiento de minimización para el siguiente autovector, estableciendo  $h = h + 1$ . Asimismo, al lograr la convergencia del cociente de Rayleigh, se ha obtenido una aproximación del  $(h + 1)$ -ésimo autovalor, con lo cual también se define que  $\lambda_{h+1} = \rho(\mathbf{v}_{h+1})$ . Como criterio general, dado que se desean los autovalores más pequeños, la tolerancia de convergencia debe ser muy baja, del orden de  $\epsilon_2 < 10^{-8}$ , la cual puede aumentarse a medida que se van calculando los modos mas alejados de la parte inferior del espectro, siempre y cuando éstos no se encuentren agrupados (Gambolati, 1993). El coste computacional de cada iteración del MAGCD está dado por seis productos matriz-vector que se implementan eficientemente en formato disperso para aumentar la eficiencia en las operaciones matriciales.

Un inconveniente de la iteración del MAGCD, es que el conteo de operaciones y el recurso físico de almacenamiento aumentan paulatinamente a medida que avanza el proceso de creación de la base de autovectores debido a la ejecución de la ortogonalización y al crecimiento de la base de autovectores. Más aún, Bergamaschi *et al.* (1997) muestran que la convergencia de la iteración del MAGCD no es monótona y el residual entre iteraciones consecutivas muestra un mínimo local marcado, caracterizado por un autovector  $\mathbf{v}_{h,min}$ , especialmente cuando los modos que se están generando se encuentran lejos del extremo inferior del espectro. El anterior problema se resuelve de forma sencilla usando como vector inicial  $\mathbf{v}_0$  del modo  $(h + 1)$ -ésimo, un mínimo local  $\mathbf{v}_{h,min}$  obtenido en el modo

anterior, lo cual trae como consecuencia el ahorro de gran cantidad de iteraciones iniciales de minimización en cada paso (Bergamaschi *et al.*, 1997; Bergamaschi y Putti, 2002). A pesar de esto, si el mínimo local está cerca del  $(h + 1)$ -ésimo autovector,  $\mathbf{v}_{h,min}$ , no puede usarse como vector inicial dado que se convergería al autovector anterior, por lo cual, previo a la generación del modo, se comprueba que  $|1 - \mathbf{v}_{h,min}^* \mathbf{v}_h| < \varepsilon$ , siendo  $\varepsilon$  un número pequeño. Si dicha restricción no se cumple, la búsqueda del nuevo autovector se inicia con el vector que corresponde al mínimo local del residual en la iteración anterior.

#### 6.5.4. Generador racional de Lanczos con reinicio explícito

El método racional de Lanczos determina la base ortonormal de un subespacio de Krylov para un problema de autovalores generalizado donde los autovalores de menor magnitud son aproximados muy rápidamente y con gran precisión. El método garantiza la convergencia de todos los modos del problema en un número finito y acotado de iteraciones cuando los cálculos se efectúan en aritmética exacta. Desafortunadamente, falla cuando se implementa en aritmética de precisión finita puesto que los errores de redondeo en cálculos intermedios causan la pérdida del carácter ortogonal de la base del subespacio de Krylov, originando la aparición de autovalores repetidos o espurios. Muchos autores manifiestan que una implementación adecuada del algoritmo es muy efectiva cuando el objetivo es calcular algunos autovalores en la parte inferior del espectro de un problema generalizado, pero ésta puede adaptarse adecuadamente si también se desea conocer alguna fracción espectral interior (Paige, 1972, 1980; Ericsson y Ruhe, 1980; Scott, 1982).

#### Iteración de Lanczos estándar

Dada una matriz simétrica  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , la iteración estándar de Lanczos (1952) forma una matriz tridiagonal y un conjunto de vectores ortogonales. Sea  $\mathbf{U} = [\mathbf{u}_1 \ \mathbf{u}_2 \ \dots \ \mathbf{u}_n] \in \mathbb{R}^{n \times n}$  la matriz que contiene dichos vectores, para los cuales se cumple que  $\mathbf{U}^* \mathbf{U} = \mathbf{I}$  y:

$$\mathbf{C}\mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{\Pi} \quad (6.21)$$

donde  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz tridiagonal previamente mencionada. La ecuación (6.21) se expresa igualando cada columna en las operaciones vectoriales internas para obtener la recurrencia de tres términos entre los vectores de Lanczos para el  $j$ -ésimo paso:

$$\mathbf{C}\mathbf{u}_j = \beta_j \mathbf{u}_{j-1} + \alpha_j \mathbf{u}_j + \beta_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} \quad (6.22)$$

donde  $\alpha_j = \mathbf{u}_j^* \mathbf{C}\mathbf{u}_j$  son los elementos diagonales de  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{j \times j}$ . Definiendo que  $\mathbf{r}_j \in \mathbb{R}^n$  es el vector de residuos para el  $j$ -ésimo paso de la iteración de Lanczos, se escribe que:

$$\mathbf{r}_j = \beta_{j+1} \mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{C}\mathbf{u}_j - \beta_j \mathbf{u}_{j-1} + \alpha_j \mathbf{u}_j \quad (6.23)$$

en la cual  $\mathbf{u}_{j+1} = \mathbf{r}_j / \beta_{j+1}$  y  $\beta_{j+1} = (\mathbf{r}_j^* \mathbf{r}_j)^{1/2}$  es la normalización del vector generado. Por lo tanto, en cada paso, el proceso de Lanczos se escribe en términos matriciales como:

$$\mathbf{C}\mathbf{U}_j = \mathbf{U}_j \mathbf{\Pi} + \mathbf{r}_j \mathbf{e}_j^* \quad (6.24)$$

donde  $\mathbf{e}_j \in \mathbb{R}^n$  es un vector canónico con entradas nulas, excepto la  $j$ -ésima posición que es unitaria, y  $\mathbf{U}_j \in \mathbb{R}^{n \times j}$  es la matriz ortonormal de vectores de Lanczos. De lo anterior se deduce que, durante la  $j$ -ésima iteración,  $\mathbf{\Pi}$  toma la siguiente forma:

$$\mathbf{\Pi} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \beta_2 & & & & \\ \beta_2 & \alpha_2 & \beta_3 & & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & \beta_{j-1} & \alpha_{j-1} & \beta_j & \\ & & & \beta_j & \alpha_j & \end{bmatrix} \quad (6.25)$$

Finalmente, a raíz de que se ha supuesto que se trabaja en aritmética exacta, si se anula el vector residual ( $\mathbf{r}_j = \mathbf{0}$ ) es debido a que se ha encontrado un subespacio invariante de Krylov para la matriz  $\mathbf{C}$  y la iteración de Lanczos ha terminado.

### Iteración racional de Lanczos

La convergencia hacia los autovalores de menor magnitud mejora cuando se adopta una transformación basada en la inversión de  $\mathbf{A}$  en el método de Lanczos. Así, el problema generalizado de autovalores se expresa de la siguiente manera (Ericsson y Ruhe, 1980; Nour-Omid *et al.*, 1987; Jones y Patrick, 1989; Mackay y Law, 1992; Komzsisik, 2003):

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{V} &= \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{V} \\ \mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{V} &= \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{V} \\ \mathbf{L}\mathbf{L}^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^*\mathbf{V} &= \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{L}^*\mathbf{V} \\ \mathbf{C}\mathbf{Y} &= \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Y} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{Y} = \mathbf{L}^*\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz triangular inferior para la cual  $\mathbf{S} = \mathbf{L}\mathbf{L}^*$  y  $\mathbf{C} = \mathbf{L}^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{L} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Puede demostrarse que esta transformación mantiene la simetría del problema de autovalores (Ericsson y Ruhe, 1980), pero tiene la desventaja de que requiere construir la transformación de Cholesky de  $\mathbf{S}$ . Ahora, sustituyendo  $\mathbf{C}$  en la ecuación (6.21), se construye la siguiente expresión equivalente para la matriz tridiagonal:

$$\mathbf{U}^*\mathbf{L}^*\mathbf{A}^{-1}\mathbf{L}\mathbf{U} = \mathbf{\Pi} \quad (6.26)$$

la cual, al aplicar la transformación  $\mathbf{X} = \mathbf{L}^{-1}\mathbf{U}$  o  $\mathbf{U} = \mathbf{L}^*\mathbf{X}$ , con  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times j}$ , se convierte en (Jones y Patrick, 1989; Mackay y Law, 1992; Dunbar y Woodbury, 1989):

$$\mathbf{X}^*\mathbf{S}\mathbf{A}^{-1}\mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{\Pi} \quad (6.27)$$

$$\mathbf{X}^*\mathbf{S}\mathbf{X} = \mathbf{I} \quad (6.28)$$

donde se observa que trabajar directamente con la matriz  $\mathbf{X}$  impone el cumplimiento de la ortonormalidad entre los vectores de Lanczos,  $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^n$ , y la matriz de almacenamientos  $\mathbf{S}$ ; evitando tener que ejecutar una factorización matricial sobre esta última. Por otra parte, para el problema estándar inverso,  $\mathbf{C}\mathbf{Y} = \mathbf{\Lambda}^{-1}\mathbf{Y}$ , los autovectores se escriben como una combinación lineal de sus vectores de Lanczos, de la forma  $\mathbf{Y} = \mathbf{U}\mathbf{W}$ , donde  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{j \times j}$  es la matriz de autovectores de  $\mathbf{\Pi}$ , también conocidos como vectores de Ritz, los cuales se obtienen resolviendo el siguiente problema de autovalores estándar:

$$\mathbf{\Pi}\mathbf{W} = \mathbf{\Omega}\mathbf{W} \quad (6.29)$$

donde  $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{j \times j}$  es la matriz diagonal de autovalores de  $\mathbf{\Pi}$ , también llamados valores de Ritz. Se puede deducir que los autovectores del problema generalizado original se expresan de acuerdo a la siguiente expresión (Jones y Patrick, 1989; Mackay y Law, 1992):

$$\mathbf{V} = \mathbf{X}\mathbf{W} \quad (6.30)$$

La recurrencia de la iteración racional de Lanczos se deduce sustituyendo  $\mathbf{u}_j = \mathbf{L}^* \mathbf{x}_j$  y  $\mathbf{C} = \mathbf{L}^* \mathbf{A}^{-1} \mathbf{L}$  en la expresión (6.23). Después de simplificar algunos términos, se llega a:

$$\mathbf{x}_{j+1} = \frac{1}{\beta_{j+1}} (\mathbf{A}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{x}_j - \beta_j \mathbf{x}_{j-1} - \alpha_j \mathbf{x}_j) \quad (6.31)$$

donde se define que  $\alpha_j = \mathbf{x}_j^* \mathbf{S} \mathbf{A}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{x}_j$  y  $\beta_{j+1} = (\mathbf{x}_j^* \mathbf{S} \mathbf{x}_j)^{1/2}$  es la norma del vector residual. En la práctica, el procedimiento comienza calculando un vector  $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^n$  tal que  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_0 / \beta_1$ , donde  $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^n$  es un vector residual arbitrario seleccionado convenientemente con el propósito de mejorar la convergencia de los autovalores en las iteraciones del método.

### Iteración racional de Lanczos con transformación espectral

La eficiencia de la iteración racional de Lanczos se incrementa al ser sometida a una transformación espectral que hace posible calcular directamente los autovalores internos del problema original, representándolos como los autovalores inferiores de un problema transformado. Para este propósito se aplica el siguiente desplazamiento explícito sobre el problema de autovalores inverso (Ericsson y Ruhe, 1980; Nour-Omid *et al.*, 1987; Jones y Patrick, 1989, 1990; Grimes *et al.*, 1991; Mackay y Law, 1992; Olson, 2005):

$$\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{S} \mathbf{V} \Rightarrow (\mathbf{A} - \sigma \mathbf{S}) \mathbf{V} = (\mathbf{\Lambda} - \sigma \mathbf{I}) \mathbf{S} \mathbf{V} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \sigma \mathbf{S}) \mathbf{V} = \mathbf{\Omega}^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V}$$

que, finalmente, se expresa de forma compacta definiendo el siguiente cambio de variable:

$$\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \mathbf{V} \quad (6.32)$$

donde  $\mathbf{A}_\sigma = (\mathbf{A} - \sigma \mathbf{S}) \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz transformada y  $\mathbf{\Omega} = (\mathbf{\Lambda} - \sigma \mathbf{I})^{-1} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal de valores Ritz invertidos y desplazados. Asimismo, la recurrencia del  $j$ -ésimo paso de la iteración de Lanczos es idéntica a la presentada en (6.31), con la salvedad de que se reemplaza  $\mathbf{A}$  por  $\mathbf{A}_\sigma$ , por lo tanto, una vez resuelto el problema (6.32), se obtiene cada valor Ritz inverso desplazado  $\omega_j$ , a partir del cual se puede recuperar el correspondiente autovalor del problema original aplicando  $\lambda_j = 1/\omega_j + \sigma$ . Con esta transformación se genera el siguiente subespacio racional de Krylov:

$$\kappa_m(\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S}, \mathbf{v}_0) \equiv \text{span} \{ (\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S}) \mathbf{v}_0, (\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S})^2 \mathbf{v}_0, \dots, (\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S})^{m-1} \mathbf{v}_0 \} \quad (6.33)$$

### Pérdida de ortogonalidad y reortogonalización de los vectores de Lanczos

El mayor inconveniente de la iteración de Lanczos es que su implementación en aritmética de precisión finita ocasiona la pérdida de ortogonalidad entre los vectores debido a la acumulación de errores de redondeo al avanzar el proceso de generación del subespacio de Krylov (Paige, 1971; Parlett y Scott, 1979; Simon, 1984). Dicha acumulación aumenta progresivamente hasta que la generación de los vectores de Lanczos se rompe debido a que la recurrencia (6.31) es incapaz de calcular un subespacio invariante de mayor tamaño. La dificultad computacional radica en que  $\beta_{j+1} = 0$  si y sólo si las columnas de  $\mathbf{X}$  generan un espacio invariante de Krylov. En consecuencia, a medida que aumenta el tamaño de  $\mathbf{X}$ ,  $\beta_{j+1}$  se hace cada vez más pequeño y, al perder dígitos significativos en la evaluación de la ecuación (6.31),  $\beta_{j+1}$  se anula artificialmente por efectos aritméticos (Sorensen, 1996).

Lo anterior tiene dos consecuencias desfavorables (Komzsik, 2003): (i) los autovalores obtenidos no son confiables y (ii) al no completarse las iteraciones de generación, muchos autovalores interiores del espectro del problema no pueden calcularse. Como se ha dicho antes, existen varias opciones para solucionar el problema de la pérdida de ortogonalidad

entre vectores de Lanczos. La reortogonalización completa consiste en ortogonalizar el nuevo vector con respecto a todos los previamente existentes; su implementación es simple, pero tiene la desventaja de que aumenta sustancialmente el costo computacional de una iteración de Lanczos, por lo cual es deseable implementar estrategias menos estrictas.

Parlett y Scott (1979) demuestran que la construcción de una base semiortogonal para un subespacio de Krylov usado para resolver el problema de autovalores es suficiente para obtener resultados satisfactorios. Considerando lo anterior, Simon (1984) propone el algoritmo de Reortogonalización Parcial (ROP) para los vectores de Lanczos. Éste se ejecuta en dos etapas básicas: (i) se localizan los vectores de Lanczos previamente existentes que no cumplen con cierto criterio de ortogonalidad con respecto al nuevo vector a incluir en la base del subespacio y (ii) cuando se detecta un fallo en dicho criterio, se efectúa la reortogonalización entre el nuevo vector y el afectado, en lugar de hacerlo con respecto a todos los vectores que generan el subespacio existente. El procedimiento de ROP ahorra un gran número de operaciones, aumentando la eficacia en la solución de problemas de autovalores de gran tamaño. Simon también muestra la superioridad de ROP con respecto a otras opciones existentes como la reortogonalización selectiva (Parlett y Scott, 1979) o la reortogonalización periódica (Grcar, 1981). En muchos trabajos, la ROP ha sido uno de los métodos más usados para mantener la semiortogonalidad de las bases de Krylov en los métodos de Lanczos y Arnoldi (Van Der Veen y Vuik, 1995; Sorensen, 1996; Lehoucq *et al.*, 1998; Wu y Simon, 2000; Hernández *et al.*, 2007b,c; Nicely, 2008; Tomás, 2009). En el siguiente desarrollo matemático se usan los criterios de ROP, propuestos por Simon (1984) para un problema de autovalores estándar, sobre el problema generalizado que resulta de aplicar el MAV sobre la EDP de flujo subterráneo.

De esta forma, asumiendo que se desea calcular el  $j$ -ésimo vector de Lanczos no ortogonalizado,  $\tilde{\mathbf{x}}_{j+1}$ , la recurrencia racional desplazada de tres términos de Lanczos en aritmética finita, es decir, incluyendo los errores de redondeo, se expresa como (Mackay y Law, 1992):

$$\beta_{j+1}\tilde{\mathbf{x}}_{j+1} = \mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}_j - \alpha_j\mathbf{x}_j - \beta_j\mathbf{x}_{j-1} + \mathbf{f}_j \quad (6.34)$$

donde  $\mathbf{f}_j \in \mathbb{R}^n$  es un vector que contiene los errores por redondeo en la formación de  $\tilde{\mathbf{x}}_{j+1}$ . Multiplicando la ecuación (6.34) por  $\mathbf{x}_k^*\mathbf{S}$  y definiendo el término de S-ortogonalidad entre los vectores de Lanczos  $k$  y  $j$  como  $\eta_{(j,k)} = \eta_{(k,j)} = \mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{x}_j$ , se obtiene que:

$$\beta_{j+1}\mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}_j - \alpha_j\mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{x}_j - \beta_j\mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{x}_{j-1} + \mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{f}_j \quad (6.35)$$

$$\beta_{j+1}\eta_{(j+1,k)} = \mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}_j - \alpha_j\eta_{(j,k)} - \beta_j\eta_{(j-1,k)} + \mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{f}_j \quad (6.36)$$

y, de forma similar para el  $k$ -ésimo paso de una iteración racional de Lanczos, se tiene que:

$$\beta_{k+1}\mathbf{x}_{k+1}^*\mathbf{S}\mathbf{x}_j = \mathbf{x}_j^*\mathbf{S}\mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}_k - \alpha_k\mathbf{x}_j^*\mathbf{S}\mathbf{x}_j - \beta_k\mathbf{x}_{k-1}^*\mathbf{S}\mathbf{x}_{j-1} + \mathbf{x}_j^*\mathbf{S}\mathbf{f}_k \quad (6.37)$$

$$\beta_{k+1}\eta_{(k+1,j)} = \mathbf{x}_j^*\mathbf{S}\mathbf{A}_\sigma^{-1}\mathbf{S}\mathbf{x}_k - \alpha_k\eta_{(k,j)} - \beta_k\eta_{(k-1,j)} + \mathbf{x}_j^*\mathbf{S}\mathbf{f}_k \quad (6.38)$$

de (6.36) y (6.38), aprovechando la S-ortogonalidad, se llega a la expresión de trabajo:

$$\eta_{(j+1,k)} = \frac{1}{\beta_{j+1}} [\eta_{(j,k+1)}\beta_{k+1} + (\alpha_k - \alpha_j)\eta_{(j,k)} - \beta_k\eta_{(j,k-1)} + g_{(k,j)}] \quad (6.39)$$

siendo  $g_{(k,j)} = \mathbf{x}_k^*\mathbf{S}\mathbf{f}_j - \mathbf{x}_j^*\mathbf{S}\mathbf{f}_k$  y, estableciendo la S-ortonormalidad de los vectores de Lanczos, debe cumplirse que  $\eta_{(j+1,j+1)} = 1$ . Es evidente que la ecuación (6.39) no proporciona un valor de  $\eta_{(j+1,j)}$  para representar el error de la ortogonalidad entre los vectores  $\tilde{\mathbf{x}}_{j+1}$  y  $\mathbf{x}_j$ , por lo que se asume que dicho error está acotado por  $\epsilon\sqrt{n}$  y se inicializa como:

$$\eta_{(j+1,k)} = \max\left(\frac{\epsilon\sqrt{n}}{\beta_{j+1}}, \epsilon\sqrt{n}\right)$$

---

**Algoritmo 6.11:** ROP para una iteración racional de Lanczos. Adaptado de diferentes fuentes (Simon, 1984; Sorensen, 1996; Hernández *et al.*, 2007a,b,c; Tomás, 2009).

---

**Entrada:** Vectores Lanczos anteriores,  $\mathbf{X}_j$ , nuevo vector no ortogonalizado,  $\tilde{\mathbf{x}}_{j+1}$ , y error operativo por aritmética de precisión finita,  $\epsilon$

**Salida :** Nuevo vector de Lanczos parcialmente reortogonalizado  $\mathbf{x}_{j+1}$

```

1 Sean  $r_i$  y  $l_i$  índices para denotar el primer y el último vector del  $i$ -ésimo conjunto a
  reortogonalizar; sea  $j$  el índice del paso actual de la iteración de Lanczos.
2 para  $k = 1, 2, \dots, j$  hacer
3    $\eta_{(k,0)} \equiv 0$ ;  $\eta_{(k,k)} = 1$ ;  $\eta_{(k,k-1)} = \omega_k$ ; //Ortogonalidad en paso Lanczos
4    $\eta_{(j+1,k)} = (\beta_{j+1})^{-1}[\eta_{(j,k+1)}\beta_{k+1} + (\alpha_k - \alpha_j)\eta_{(j,k)} - \beta_k\eta_{(j,k-1)} + g_{(k,j)}]$ ;
5 fin
6 para  $k = 1, 2, \dots, j$  hacer
7   si  $|\eta_{(j+1,k)}| \geq \sqrt{\epsilon}$  entonces // Determinar no ortogonalidad y vecindades
8     Determinar  $r_i$  y  $l_i$  tal que  $|\eta_{(j+1,k)}| > \eta$ ;
9      $z = r_i, r_i + 1, \dots, k - 1, k, k + 1, \dots, l_i - 1, l_i$ ;
10    para  $z = r_i, r_i + 1, \dots, k - 1, k, k + 1, \dots, l_i - 1, l_i$  hacer
11      S-reortogonalizar  $\tilde{\mathbf{x}}_{j+1}$  contra  $\mathbf{x}_z$  usando algoritmo 6.8
12    fin
13     $r_i = r_{i+1}$  y  $l_i = l_{i+1}$ ; //Reiniciar contadores
14  fin
15 fin
```

---



---

**Algoritmo 6.12:** Método de la iteración QL con desplazamiento implícito para calcular los valores y vectores de Ritz de  $\mathbf{IIW} = \mathbf{\Omega W}$ . Adaptado de Press *et al.* (1997).

---

**Entrada:** Vectores  $\mathbf{d}$  y  $\mathbf{e}$  con los elementos diagonales y subdiagonales de  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{j \times j}$ , respectivamente. Matriz identidad almacenada en el arreglo  $\mathbf{W} \in \mathbb{R}^{j \times j}$

**Salida :** Vector  $\mathbf{d}$  y matriz  $\mathbf{W}$  que almacenan los valores y vectores de Ritz, respectivamente.

```

1 repita
2    $a = (\mathbf{d}_{n-1} - \mathbf{d}_n) / 2$ ;
3    $s = d_n - e_n^2 / (a + \text{signo}(a) \sqrt{a^2 + e_n^2})$ ; //Desplazamiento de Wilkinson
4   si  $a = 0$  entonces  $s = d_n - |e_n|$ ;
5    $x = d_1 - s$ ;  $y = e_2$ ; //Inicia un paso QL
6   para  $k = 1$  hasta  $m - 1$  hacer
7     si  $n > 2$  entonces
8        $[c, s] = \text{givens}(x, y)$ ; //Rotación de Givens
9     sino
10      Determinar  $[c, s]$  tal que  $\begin{bmatrix} c & -s \\ s & c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_1 & e_2 \\ e_2 & d_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$  es diagonal;
11    fin
12     $w = cx - sy$ ;  $a = d_k - d_{k+1}$ ;  $z = (2ce_{k+1} + ds) s$ ;
13     $d_k = d_k - z$ ;  $d_{k+1} = d_{k+1} + z$ ;
14     $e_{k+1} = acs + (c^2 - s^2) e_{k+1}$ ;
15     $x = e_{k+1}$ ;
16    si  $k > 1$  entonces  $e_k = w$ ;
17    si  $k < n - 1$  entonces  $y = -se_{k+2}$ ;  $e_{k+2} = ce_{k+2}$ ; // Termina un paso QL
18     $\mathbf{W}_{1:j,k:k+1} = \mathbf{W}_{1:n,k:k+1} \begin{bmatrix} c & s \\ -s & c \end{bmatrix}$ ; //Acumulación de transformaciones
19  fin
20  si  $|e_m| < \epsilon (|d_{n-1}| + |d_n|)$  entonces  $n = n - 1$ ; //Revisa convergencia
21 hasta que  $n = 1$ ;
```

---



donde  $\epsilon$  es un nivel de tolerancia de redondeo por precisión en aritmética de punto flotante, con valores de  $\epsilon = 2 \times 10^{-25}$  y  $\epsilon = 2 \times 10^{-56}$  para precisiones simple y doble, respectivamente. Así pues, los términos de la recurrencia para el error de ortogonalidad entre los vectores Lanczos vienen dados mediante la siguiente expresión (Simon, 1984):

$$\begin{cases} \eta_{(k,0)} \equiv 0, \eta_{(k,k)} = 1, \eta_{(k,k-1)} = \omega_k \\ \eta_{(j+1,k)} = \frac{1}{\beta_{j+1}} [\eta_{(j,k+1)}\beta_{k+1} + (\alpha_k - \alpha_j)\eta_{(j,k)} - \beta_k\eta_{(j,k-1)} + g_{(k,j)}] \end{cases} \quad (6.40)$$

con  $1 \leq k < j$ .  $\omega_k$  y  $g_{k,j}$  se evalúan en función de la precisión de la máquina como  $\omega_k = n\epsilon(\beta_2/\beta_{j+1})N(0, 0.6)$  y  $g_{(j,k)} = \epsilon(\beta_{k+1} - \beta_{j+1})N(0, 0.3)$ , donde  $N(0, 0.6)$  y  $N(0, 0.3)$  son números aleatorios normales con medias nulas y desviaciones estándar de 0.6 y 0.3.

Del mismo modo, es importante reortogonalizar  $\tilde{\mathbf{x}}_{j+1}$  con respecto al conjunto de vectores que se encuentran cercanos a aquel donde se detecta el fallo del criterio de ortogonalidad dado que la pérdida de ortogonalidad se propaga numéricamente por vecindades en el subespacio de Krylov (Simon, 1984). En la práctica, se supone que la pérdida de ortogonalidad ha crecido hasta un nivel no permitido con respecto al  $k$ -ésimo vector de Lanczos, entonces  $\eta_{(j,k)} > \sqrt{\epsilon}$  y debe ejecutarse la reortogonalización con respecto a los vectores de la vecindad de  $\mathbf{x}_k$ , es decir, con aquellos comprendidos entre  $\mathbf{x}_{k-l}$  y  $\mathbf{x}_{k+l}$ . Sin embargo, establecer de antemano un valor para  $l$  puede implicar la ejecución de reortogonalizaciones innecesarias, por lo que es más eficiente buscar en la vecindad de  $\mathbf{x}_k$  a los vectores que cumplan que  $|\eta_{(j+1,k-s)}| \leq \eta_0$  y  $|\eta_{(j+1,k+s)}| \leq \eta_0$ , siendo  $\eta_0 \leq 10^{-7}\sqrt{\epsilon}$ .

El procedimiento de reortogonalización de  $\tilde{\mathbf{x}}_{j+1}$  para obtener  $\mathbf{x}_{j+1}$  se ejecuta siguiendo los criterios comentados en el apartado 6.5.2. Al respecto, en el algoritmo 6.11 se presenta el esquema general de implementación de la ROP diseñada para la iteración racional de Lanczos en EVMPACK, la cual se basa en los criterios discutidos a lo largo de este apartado.

### Cálculo de los valores y vectores de Ritz del problema tridiagonal

Una vez se dispone de la matriz tridiagonal simétrica  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{j \times j}$ , se le aplica el método de la descomposición QL para calcular los valores y vectores de Ritz del problema (6.29). Dicho método consiste en ejecutar una secuencia de transformaciones ortogonales expresadas como  $\mathbf{\Pi}_k = \mathbf{W}_k \mathbf{L}_k$  y  $\mathbf{\Pi}_{k+1} = \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k$ , donde  $\mathbf{W}_k \in \mathbb{R}^{j \times j}$  es una matriz ortogonal,  $\mathbf{L}_k \in \mathbb{R}^{j \times j}$  es una matriz triangular inferior,  $\mathbf{\Pi}_k$  es la respectiva matriz tridiagonal transformada durante la  $k$ -ésima iteración y  $j$  es el tamaño del subespacio de Krylov generado por la iteración racional de Lanczos. Wilkinson (1965, 1968) demuestra que: (i) la convergencia del algoritmo QL se mejora notablemente introduciendo desplazamientos ( $\sigma_k$ ), ya sean explícitos o implícitos, sobre  $\mathbf{\Pi}$ , (ii) cuando los elementos de  $\mathbf{\Pi}$  difieren en un amplio orden de magnitud, el desplazamiento explícito hace que se pierda precisión en la estimación de los autovalores y (iii) el desplazamiento implícito mantiene la precisión en el cálculo de los autovalores, siempre que sea posible maximizar la tasa de convergencia durante las iteraciones. Según Wilkinson, para lograr lo anterior, la  $k$ -ésima iteración de la descomposición QL con desplazamiento implícito debe escribirse como:

$$\mathbf{\Pi}_k - \sigma_k \mathbf{I} = \mathbf{W}_k \mathbf{L}_k \Rightarrow \mathbf{\Pi}_{k+1} = \mathbf{L}_k \mathbf{W}_k + \sigma_k \mathbf{I} = \mathbf{W}_k^* \mathbf{\Pi}_k \mathbf{W}_k \quad (6.41)$$

la cual se ejecuta eficientemente en tres pasos (Wilkinson y Reinsch, 1971): (i) se escogen matrices de  $2 \times 2$ , (ii) se calculan sus autovalores para seleccionar el desplazamiento actual y (iii) una vez se ha determinado el valor de  $\sigma_k$  más apropiado, el desplazamiento implícito se realiza mediante una rotación de Jacobi para eliminar el último elemento de la superdiagonal. Esta rotación rompe la configuración tridiagonal, la cual se restaura usando una

secuencia de transformaciones de Givens (1959), acumulándose las siguientes operaciones:

$$\mathbf{W}_k^* = \bar{\mathbf{T}}_1^k \bar{\mathbf{T}}_2^k \cdots \bar{\mathbf{T}}_{n-2}^k \mathbf{T}_{n-1}^k \quad (6.42)$$

donde  $\bar{\mathbf{T}}$  representa a las rotación de Givens y  $\mathbf{T}_{n-1}$  es la rotación de plano de Jacobi. EVMPACK implementa la interfaz del programa tq1i de Press *et al.* (1997) para la diagonalización de matrices tridiagonales simétricas, el cual se basa en los pasos descritos en el algoritmo 6.12. En éste se observa que el almacenamiento virtual adoptado es mínimo por que sólo trabaja sobre los vectores que almacenan los componentes diagonales y sub-diagonales de  $\mathbf{\Pi}$ , las cuales se modifican secuencialmente hasta converger a la solución. Por último, cabe comentar que el número de operaciones del algoritmo es de  $3j^3$ , dado que se requiere calcular todos los vectores de Ritz del problema tridiagonal. Así, el requerimiento operativo en la implementación del algoritmo es bajo por que, en general,  $j$  es pequeño.

### Evaluación de la convergencia de los autovalores

La convergencia de los autovalores calculados mediante el método racional de Lanczos se evalúa mediante el siguiente criterio (Parlett, 1980; Mackay y Law, 1992; Bathe, 1996):

$$|\lambda_i - \hat{\lambda}_i| = \min \{ \omega_i^{-2} \beta_{j+1} |w_{j,i}|, \gamma_i^{-1} \omega_i^{-2} (\beta_{j+1} w_{j,i})^2 \} \quad (6.43)$$

donde  $\hat{\lambda}_i$ , con  $i = 1, 2, \dots, j$ , son los autovalores del problema  $\mathbf{AV} = \mathbf{ASV}$ ,  $\omega_i$  son los valores de Ritz de  $\mathbf{\Pi W} = \mathbf{\Omega W}$ ,  $|w_{j,i}|$  es la  $j$ -ésima componente del  $i$ -ésimo vector de Ritz en la matriz  $\mathbf{W}$  y  $\gamma_i = \min_{i \neq k} |\omega_i - \omega_k|$  para  $k = 1, 2, \dots, j$ . De la ecuación (6.43) se deduce que los autovalores cercanos al desplazamiento impuesto en la transformación espectral tendrán un mayor valor de  $\omega_i$ . Por lo tanto,  $\beta_{j+1}$  no necesita ser muy pequeño para tener una buena aproximación del autovalor  $\lambda_i$ . En este punto cabe comentar que los autovectores calculados por el método racional de Lanczos, mediante la ecuación (6.30), deben ser sometidos a refinamiento puesto que no son tan precisos como los autovalores (Bathe, 1996). Para ello se efectúa una iteración inversa generalizada expresada como sigue:

$$\mathbf{v}_{ir} = \omega_i^{-1} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{v}_i \quad (6.44)$$

donde  $\mathbf{v}_{ir} \in \mathbb{R}^n$  es el  $i$ -ésimo autovector refinado,  $\mathbf{v}_i$  es el correspondiente autovector sin refinar y las demás variables han sido definidas antes. De la recurrencia racional de Lanczos se sabe que  $\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{v}_i = \omega_i \mathbf{v}_i + \beta_{j+1} \mathbf{x}_{j+1} \mathbf{e}_j^* \mathbf{s}_i$ , donde  $\mathbf{s}_i$  es la  $i$ -ésima columna de  $\mathbf{S}$ . De ahí que la ecuación (6.44) puede escribirse como (Ericsson y Ruhe, 1980):

$$\mathbf{v}_{ir} = \mathbf{v}_i + (\omega_i^{-1} \beta_{j+1} w_{j,i}) \mathbf{x}_j \quad (6.45)$$

donde  $\beta_{j+1}$  y  $\mathbf{x}_{j+1}$  están disponibles en cada paso de la iteración de Lanczos. Debe notarse que el uso del refinamiento dado en (6.45) implica resolver el problema tridiagonal de autovalores  $\mathbf{\Pi W} = \mathbf{\Omega W}$  durante cada paso de la iteración racional de Lanczos.

### Reinicio explícito de la iteración racional de Lanczos

El reinicio es una técnica que limita la cantidad de espacio físico necesario para lograr la convergencia de  $m$  modos de un problema de autovalores cuando se usa el método de Lanczos, acotando el número de operaciones necesaria. Esto es muy útil, especialmente cuando sólo se necesitan unos pocos modos extremos. El proceso de reinicio explícito comienza asumiendo que se han calculado  $j-1$  autovectores que se encuentran almacenados en  $\mathbf{V}_{j-1} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_{j-1}]$ . A continuación, para calcular  $\mathbf{v}_j$  se fuerza a que las iteraciones

de reinicio sean ortogonales a  $\mathbf{V}_{j-1}$ . En consecuencia, los autovectores que han convergido se mantienen en el subespacio de búsqueda, mientras que el siguiente subespacio de Krylov se configura partiendo del último vector de Ritz que no ha convergido. Al final de cada reinicio, el próximo subespacio de búsqueda se configura de la siguiente manera:

$$\text{span} \{ \mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}, (\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S}) \mathbf{v}_{j-1}, \dots, (\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S})^{m-j} \mathbf{v}_{j-1} \} \quad (6.46)$$

El subespacio de búsqueda definido en (6.46) asegura que la deflación continúa en las iteraciones de reinicio a medida que avanza el proceso de generación del subespacio de proyección, purificando las direcciones de búsqueda correspondientes a los autovalores que han convergido. Al final de cada iteración de reinicio se bloquean los modos que convergen y se genera el nuevo vector de reinicio aplicando la purificación por deflación con respecto a los autovectores  $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_{j-1}$  sobre el primer vector de Lanczos que no ha convergido, denotado como  $\mathbf{x}_j$  (Lehoucq y Sorensen, 1996; Sorensen, 1996; Hernández *et al.*, 2007b,b,c; Nicely, 2008; Tomás, 2009). Dado que cada iteración de reinicio requiere de únicamente  $m - j$  pasos, el método va disminuyendo su carga computacional a medida que los modos del problema convergen. Asimismo, la evaluación de los modos que han convergido en cada iteración de reinicio se va haciendo cada vez menos costosa puesto que: (i) los primeros  $j - 1$  elementos de la subdiagonal de  $\mathbf{\Pi}$  fueron eliminados en las iteraciones anteriores, (ii) la diagonalización mediante el método de la iteración QL con reinicio implícito requiere únicamente la eliminación de  $m - j$  elementos subdiagonales, (iii) la evaluación y refinamiento de los autovectores mediante las ecuaciones (6.30) y (6.45) se realizan usando matrices cada vez más pequeñas y (iv) disminuyen los costos computacionales en el mantenimiento de la semiortogonalidad de la nueva base del subespacio de búsqueda. Sin embargo, el costo de la deflación de los nuevos vectores de Lanczos aumenta a medida que avanzan los reinicios puesto que cada vector  $\mathbf{x}_h$ , con  $h = j, j + 1, \dots, m$ , debe ser ortogonalizado con respecto a todos los autovectores que han convergido.

### Implementación computacional de la iteración de Lanczos racional con reinicio explícito, transformación espectral y reortogonalización parcial

La iteración racional de Lanczos con reinicio explícito y ROP ha sido implementada en EVMPACK, como se presenta en el algoritmo 6.13. En éste se han incluido los procedimientos de reinicio explícito, bloqueo, purga y purificación, propuestos recientemente por Nicely (2008) para el problema estándar, combinados con la transformación inversa con desplazamiento clásica, propuesta por Ericsson y Ruhe (1980), usando los criterios de implementación para mejorar la eficiencia de ejecución comentados por Nour-Omid *et al.* (1987) y ampliados por diferentes autores (Jones y Patrick, 1989, 1990; Grimes *et al.*, 1991; Mackay y Law, 1992; Jones y Patrick, 1993; Bathe, 1996; Tomás, 2009). Las bases de estos conceptos se han discutido detalladamente a lo largo de esta sección. Así pues, se tiene que un paso de la iteración racional de Lanczos para problemas de autovalores generalizados está dominada principalmente por las operaciones que se enumeran a continuación.

Primero, la multiplicación matriz-vector que se implementa eficientemente en formato disperso. EVMPACK aprovecha las funciones intrínsecas de FORTRAN90 para mejorar la eficiencia operativa. Las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  se almacenan en formato disperso por coordenadas (Press *et al.*, 1997; Saad, 1994b, 2003) para disminuir los requerimientos de almacenamiento y número de operaciones necesarias. Segundo, la solución de SLED, con el propósito de evitar la formación explícita de la matriz  $\mathbf{A}_\sigma^{-1}$  durante el paso 12, para lo cual se utilizan los métodos de Krylov presentados en el apartado 6.5.1, resolviendo  $\mathbf{A}_\sigma \tilde{\mathbf{r}}_j = \mathbf{S} \mathbf{r}_{j-1}$ . En este caso se recomienda usar alguna de las variantes para matrices no simétricas dado

**Algoritmo 6.13:** Iteración racional de Lanczos con transformación espectral y reinicio explícito para generar  $m$  modos cercanos al desplazamiento impuesto. Tomado y adaptado de diferentes fuentes (Ericsson y Ruhe, 1980; Nour-Omid *et al.*, 1987; Jones y Patrick, 1989, 1990; Grimes *et al.*, 1991; Mackay y Law, 1992; Bathe, 1996).

**Entrada:** Matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$ , vector residual inicial  $\mathbf{r}_k \in \mathbb{R}^n$ , desplazamiento  $\sigma$ , matrices de autovalores  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k}$  y autovalores  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{k \times k}$  previas,  $k$  y  $m$  son los tamaños de los subespacios de autovectores disponible y deseado, respectivamente

**Salida :** Matrices de autovectores  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y autovalores  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  renovadas, número final de modos convergidos  $k$

```

1   $q = 0$ ;
2  si  $k \neq 0$  entonces  $\mathbf{X}_k = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k]$ ; //Base de subespacio de búsqueda inicial
3  para  $l = 1, 2, \dots, k$  hacer  $\omega_l = (\lambda_l - \sigma)^{-1}$ ;
4  si  $k \neq 0$  entonces  $\mathbf{\Pi}_k = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ ; //Matriz tridiagonal inicial
5   $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^{k+2m}$ ;  $\mathbf{c} = 1.0$ ;  $\mathbf{c}_{k+1:k+2m} = 0.0$ ;
6  si  $k \neq 0$  entonces ortogonalizar  $\mathbf{r}_0$  respecto a  $\mathbf{V}_k$  con un PGS; //Purgar direcciones iniciales
7   $\mathbf{A}_\sigma = \mathbf{A} - \sigma \mathbf{I}$ ;
8   $\beta_{k+1} = (\mathbf{r}_k^* \mathbf{S} \mathbf{r}_k)^{1/2}$ ;
9   $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{r}_k / \beta_{k+1}$ ;
10 para  $l = 1, 2, \dots$  hacer // Reiniciar la iteración
11   para  $j = k + 1, k + 2, \dots, k + 2m$  hacer // Ejecutar iteración
12     Resolver  $\mathbf{A}_\sigma \tilde{\mathbf{r}}_j = \mathbf{S} \mathbf{r}_{j-1}$  para  $\tilde{\mathbf{r}}_j$  (algoritmos 6.3 y 6.4);
13      $\tilde{\mathbf{r}}_j = \tilde{\mathbf{r}}_j - \beta_j \mathbf{x}_{j-1}$ ;
14      $\alpha_j = \mathbf{x}_j^* \tilde{\mathbf{S}} \tilde{\mathbf{r}}_j$ ;
15      $\tilde{\mathbf{r}}_j = \tilde{\mathbf{r}}_j - \alpha_j \mathbf{x}_j$ ;
16     ROP sobre  $\tilde{\mathbf{r}}_j$  con respecto a  $\mathbf{X}_j$  para obtener  $\mathbf{r}_j$  (algoritmo 6.11);
17      $\beta_{j+1} = (\mathbf{r}_j^* \mathbf{S} \mathbf{r}_j)^{1/2}$ ;
18     Resolver  $\mathbf{\Pi}_j \mathbf{W} = \mathbf{\Omega}_j \mathbf{W}$  para  $(\omega_i, \mathbf{w}_i)$ ,  $i = 1, 2, \dots, j$  (algoritmo 6.12);
19     Obtener  $j$  autovectores de  $\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \mathbf{V}$  usando  $\mathbf{V} = \mathbf{X}_j \mathbf{W}$ ;
20     para  $i = 1, 2, \dots, j$  hacer // Revisar convergencia modal
21        $|\lambda_i - \hat{\lambda}_i| = \min \{ \omega_i^{-2} \beta_{j+1} |w_{j,i}|, \gamma_i^{-1} \omega_i^{-2} (\beta_{j+1} w_{j,i})^2 \}$ ;
22       si  $|\lambda_i - \hat{\lambda}_i| \leq 10^{-10}$  entonces // Aceptar convergencia
23         Converge  $i$ -ésimo modo ;
24         Refinamiento:  $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}_i + (\omega_i^{-1} \beta_{j+1} w_{j,i}) \mathbf{x}_j$ ;
25          $c_i = 1$ ;
26          $q = q + 1$ ;
27       fin
28     fin
29     si  $\beta_{j+1} = 0$  entonces salir del bucle para  $j$  ;
30      $\mathbf{x}_{j+1} = \mathbf{r}_j / \beta_{j+1}$ ;
31     Aumentar base de subespacio de búsqueda:  $\mathbf{X}_{j+1} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k \mathbf{x}_{k+1} \dots \mathbf{x}_{j+1}]$ ;
32     Aumentar matriz tridiagonal:  $\mathbf{\Pi}_{j+1}$  con  $\pi_{j+1,j} = \beta_{j+1}$ ;
33   fin
34   Ordenar descendentemente los modos  $(\omega_i, \mathbf{v}_i)$  de  $\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \mathbf{V}$ , tales que  $c_i = 1$  para
35    $i = 1, 2, \dots, m$ ; es decir, aquellos que han convergido;
36   Formar la matriz de autovectores convergidos  $\mathbf{V}_k$ ;
37   Seleccionar los primeros  $k$  modos de  $\mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{V} = \mathbf{\Omega} \mathbf{V}$  que han convergido;
38   Bloquear el subespacio convergido en el de búsqueda  $\mathbf{X}_{1:n,1:k} = [\mathbf{v}_1 \mathbf{v}_2 \dots \mathbf{v}_k]$ ;
39   Aplicar la sustitución  $\mathbf{\Pi}_{1:n,1:k} = \text{diag}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_k)$ ;
40   Purgar direcciones, ortogonalizar  $\mathbf{v}_{k+1}$  respecto a  $\mathbf{V}_k$  (algoritmo 6.8);
41   Nuevo vector inicial de Lanczos purgar  $\mathbf{x}_{k+1} = \mathbf{v}_{k+1}$ ;
42   si  $q = m$  entonces salir del bucle para  $l$ ;
43 fin
44  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k} \Rightarrow \mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times k+m}$ ,  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{k \times k} \Rightarrow \mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{k+m \times k+m}$ ;
45  $k = k + m$ ;
46  $\mathbf{\Lambda} = \mathbf{\Omega}^{-1} + \sigma \mathbf{I}$ ; //Transformación inversa de autovalores
47  $\mathbf{V}_k$  contiene los  $k$  primeros modos de  $\mathbf{A} \mathbf{V} = \mathbf{\Lambda} \mathbf{S} \mathbf{V}$ ;

```

que el desplazamiento espectral puede romper la definición positiva de la matriz de coeficientes resultante. Tercero, el procedimiento de ROP, el cual se efectúa ejecutando el algoritmo 6.11. Cuarto, la solución del problema de autovalores tridiagonal simétrico pequeño  $\mathbf{I}\mathbf{W} = \mathbf{\Omega}\mathbf{W}$  en cada paso de la iteración; procedimiento presentado detalladamente en el algoritmo 6.12. En éste se observa que el costo de esta resolución crece a medida que aumenta el tamaño de la iteración, con lo cual  $m$  debe establecerse lo suficientemente pequeño para que el número de operaciones no aumente demasiado. Quinto, el procedimiento de reinicio explícito; durante cada reinicio aumenta el costo de la purga direccional puesto que aumenta el número de autovectores que convergen.

Las implementaciones de las anteriores operaciones aprovechan el carácter disperso de las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$ , ahorran espacio de almacenamiento y disminuyen el número de operaciones. Además, hacen posible la generación eficiente de los modos sobre los cuales se aplican los criterios de selección y enmascaramiento modal propuestos en la sección 6.2, necesarios para ejecutar las simulaciones por el MAV-CSEM. Es más, el uso correcto de la transformación espectral permite obtener modos de problemas generalizados en cualquier fracción del espectro, sin que los requerimientos computacionales aumenten desorbitadamente.

### 6.5.5. Generadores de modos efectivos para modelos reducidos de flujo subterráneo mediante el MAV-CSEM

En los algoritmos 6.14 y 6.15 se muestran los dos generadores de modos efectivos implementados en EVMPACK. El primero opera mediante la iteración del MAGCD, mientras que el segundo utiliza la iteración racional de Lanczos con reinicio explícito. Éstos se ejecutan aplicando los siguientes cinco pasos: (i) detección y eliminación de los modos residuales, (ii) evaluación de la efectividad de los modos obtenidos aplicando el criterio de límite de participación modal, definido en la ecuación (6.1), para cada acción exterior, (iii) construcción de la máscara de estados efectivos con base en el límite de participación modal impuesto, (iv) evaluación de los niveles de continuidad para cada acción exterior aplicando la ecuación (6.4) y (v) evaluación del criterio de parada de la generación.

#### Generador de modos efectivos mediante la iteración del MAGCD

El generador de modos efectivos mediante la iteración del MAGCD se presenta en el algoritmo 6.14. Las entradas al algoritmo son las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  del problema generalizado de autovalores, la matriz  $\mathbf{\Psi}$  que contiene la distribución de las acciones elementales actuando sobre el acuífero, el límite de participación modal  $b_{lim}$ , la cota inferior de nivel de continuidad  $ba_{lim}$  y un vector  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  que almacena los vectores iniciales de las iteraciones. Al finalizar la ejecución se obtiene la matriz de autovalores efectivos  $\hat{\mathbf{\Lambda}}$ , la matriz de autovectores efectivos  $\hat{\mathbf{V}}$ , la matriz de volumen almacenado por cada autovector efectivo  $\hat{\mathbf{F}}$ , la matriz de coeficientes de repartos efectiva  $\hat{\mathbf{B}}$  y la máscara de estados efectivos  $\mathbf{Z}$ .

Como se comentó en el apartado 6.5.3, el modo  $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$  para iniciar la generación se calcula mediante la ICR, ejecutando el algoritmo 6.9. Una vez se dispone de dicho modo inicial, el generador calcula secuencialmente los modos superiores, ordenados ascendentemente de acuerdo con la magnitud del autovalor respectivo, aplicando la iteración del MAGCD que se ha descrito en el algoritmo 6.10. Durante cada iteración se obtiene el modo  $(\lambda_h, \mathbf{v}_h)$  para  $h = 1, 2, \dots$ , evaluándose el volumen almacenado debajo del autovector correspondiente  $f_{h,h}$  y el coeficiente de reparto modal para todas las acciones exteriores consideradas. Asimismo, aplicando la ecuación (6.1), se construye cada fila de la máscara de estados efectivos. Con esto se determina cuáles son las acciones exteriores para las cua-

**Algoritmo 6.14:** Generador MAGCD, minimización del cociente de Rayleigh.

---

**Entrada:** Matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\Psi$ ,  $b_{lim}$ ,  $ba_{lim}$ , vector inicial de iteración  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$   
**Salida :** Matrices  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{V}}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{Z}$  y vector  $\mathbf{x}$

- 1  $\mathbf{ba} = 0$ , con  $\mathbf{ba} \in \mathbb{R}^{n_a}$ ;  $l = 0$ ;  $m = 0$ ;
- 2  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ ;  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{1 \times 1}$ ,  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{1 \times n_a}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{1 \times n_a}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^1$ ;
- 3 Generar el modo inicial  $(\lambda_1, \mathbf{v}_1)$  (algoritmo 6.9) y  $m = 1$ ;
- 4  $f_{1,1} = \sum_{i=1}^n s_{i,i} v_{i,1}$ ;
- 5 **para**  $j = 1, 2, \dots, n_a$  **hacer** // Para cada acción exterior
  - 6  $b_{1,j} = f_{1,1}(\mathbf{v}_1^* \Psi_j)$ ;
  - 7  $ba_j = b_{1,j}$ ;
  - 8  $z_{1,j} = \text{verdadero}$ ;
- 9 **fin**
- 10 **para**  $h = 2, 3, \dots$  **hacer** // Iteraciones infinitas de generación
  - 11  $\mathbf{c}_{1:h} = 1.0$ ;  $\mathbf{c}_{h+1:n} = 0.0$ ;  $l = 0$ ;
  - 12 Deflación: ejecutar PGS a  $\mathbf{c}$  con respecto a  $\hat{\mathbf{V}}$  y  $\mathbf{v}_h = \mathbf{c}$  (algoritmo 6.8);
  - 13  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times h}$ ;  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{h \times h}$ ,  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{h \times h}$ ,  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{h \times n_a}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{h \times n_a}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^h$ ;
  - 14 Generar  $(\lambda_h, \mathbf{v}_h)$  (algoritmo 6.10) y  $m = m + 1$ ;
  - 15  $f_{h,h} = \sum_{i=1}^n s_{i,i} v_{i,h}$ ;
  - 16 **para**  $j = 1, 2, \dots, n_a$  **hacer** // Para cada acción exterior
    - 17  $b_{h,j} = f_{h,h}(\mathbf{v}_h^* \Psi_j)$ ;
    - 18  $z_{h,j} = \text{verdadero}$ ;
    - 19 **si**  $b_{h,j} < b_{lim}$  **entonces** // Enmascarar efectividad modal
      - 20  $z_{h,j} = \text{falso}$ ;
      - 21  $l = l + 1$ ;
    - 22 **fin**
  - 23 **fin**
  - 24 **si**  $l = n_a$  **entonces**  $x_h = \text{falso}$ ; //Indicar modo residual
  - 25  $l = 0$ ;
  - 26 **para**  $j = 1, 2, \dots, n_a$  **hacer** // Para cada acción exterior
    - 27 **si**  $z_{h,j} = \text{verdadero}$  **entonces** // Acumular coeficientes de reparto
      - 28  $ba_j = ba_j + b_{h,j}$ ;
      - 29  $b_e = |1.0 - ba_j|$ ;
      - 30 **si**  $b_e \leq 1.0 - ba_{lim}$  **entonces**  $l = l + 1$ ; //Verificar nivel de continuidad
    - 31 **fin**
  - 32 **fin**
  - 33 **si**  $l = n_a$  **entonces** salir del bucle para  $h$ ; //Finalizar generación
- 34 **fin**
- 35  $m = m + 1$ ;  $x_m = \text{verdadero}$ ;  $\mathbf{c}_{1:m} = 1.0$ ;  $\mathbf{c}_{m:n} = 0.0$ ;
- 36 Deflación: ejecutar PGS a  $\mathbf{c}$  con respecto a  $\hat{\mathbf{V}}$  y hacer  $\mathbf{v}_m = \mathbf{c}$  (algoritmo 6.8);
- 37  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ;  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ ;
- 38 Generar modo de continuidad  $(\lambda_m, \mathbf{v}_m)$  (algoritmo 6.10) y hacer  $l = m$ ;
- 39  $f_{m,m} = \sum_{i=1}^n s_{i,i} v_{i,m}$ ;
- 40 **para**  $h = 1, 2, \dots, m$  **hacer** // Para los modos generados
  - 41 **si**  $x_h = \text{falso}$  **entonces** // Seleccionar modos efectivos
    - 42 Eliminar  $\mathbf{v}_h$  de  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times l} \Rightarrow \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times l-1}$ ;
    - 43 Eliminar  $h$ -ésima fila y columna de  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{l \times l} \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{l-1 \times l-1}$ ;
    - 44 Eliminar  $h$ -ésima fila y columna de  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{l \times l} \Rightarrow \hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{l-1 \times l-1}$ ;
    - 45 **para**  $j = 1, 2, \dots, n_a$  **hacer**  $ba_j = ba_j - b_{h,j}$ ;
    - 46 Eliminar  $h$ -ésima fila de  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{l \times n_a} \Rightarrow \hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{l-1 \times n_a}$  y  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{l \times n_a} \Rightarrow \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{l-1 \times n_a}$ ;
    - 47  $l = l - 1$ ;
  - 48 **fin**
- 49 **fin**
- 50 **para**  $j = 1, 2, \dots, n_a$  **hacer** // Para cada acción exterior
  - 51 **si**  $ba_j < 0$  **entonces** // Calcular factores de reparto para continuidad
    - 52  $b_{l,j} = -1.0 + |ba_j|$ ;
  - 53 **sino**
  - 54  $b_{l,j} = 1.0 - ba_j$ ;
  - 55 **fin**
  - 56  $z_{l,j} = \text{verdadero}$ ;
- 57 **fin**

---

**Algoritmo 6.15:** Generador racional de Lanczos.

**Entrada:** Matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{\Psi}$ ,  $b_{lim}$ ,  $ba_{lim}$ , vector inicial de iteración  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ , número de modos que convergen por iteración con reinicio  $m$ , desplazamiento inicial  $\sigma_0$

**Salida :** Matrices  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{V}}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{Z}$  y vector  $\mathbf{x}$

```

1  ba = 0, con ba  $\in \mathbb{R}^{n_a}$ ;  $l = 0$ ;  $q = 0$ ;
2  para  $h = 1, 2, \dots$  hacer // Iteraciones infinitas de generación
3       $l = l + 1$ ;
4      si  $l = 1$  entonces  $\sigma_h = 0$ ; //Desplazamiento inicial nulo
5      Generar  $\Lambda$  y  $\mathbf{V}$  usando  $\sigma_h$  (algoritmo 6.13);
6       $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times lm}$ ;  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{lm \times lm}$ ;  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{lm \times lm}$ ;  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{lm \times n_a}$ ;  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{lm \times n_a}$ ;  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{lm}$ ;
7      para  $p = (l - 1)m + 1, \dots, lm$  hacer // Para los vectores generados
8           $f_{p,p} = \sum_{i=1}^n s_{i,i} v_{i,p}$ ;
9          para  $j = 1, 2, \dots, n_a$  hacer // Para cada acción exterior
10              $b_{p,j} = f_{p,p}(\mathbf{v}_p^* \mathbf{\Psi}_j)$ ;
11              $z_{p,j} = \text{verdadero}$ ;
12             si  $b_{p,j} < b_{lim}$  entonces // Enmascarar efectividad modal
13                  $z_{p,j} = \text{falso}$ ;
14                  $q = q + 1$ ;
15             fin
16         fin
17         si  $q = n_a$  entonces  $x_p = \text{falso}$ ; //Indicar modo residual
18          $q = 0$ ;
19         para  $j = 1, 2, \dots, n_a$  hacer // Para cada acción exterior
20             si  $z_{p,j} = \text{verdadero}$  entonces // Acumular de coeficientes de reparto
21                  $ba_j = ba_j + b_{p,j}$ ;
22                  $b_e = |1.0 - ba_j|$ ;
23                 si  $b_e \leq 1.0 - ba_{lim}$  entonces  $q = q + 1$ ; //Verificar nivel de continuidad
24             fin
25         fin
26         si  $q = n_a$  entonces // Verificar finalización de generación
27             | salir del bucle para  $h$ ;
28         sino// Verificar continuidad de generación
29             | Renovar  $\sigma_{h+1}$  con un valor cercano a  $\lambda_{lm}$ ;
30         fin
31     fin
32 fin
33 Hacer  $m = lm$ ;  $l = m$ ;  $x_m = \text{verdadero}$ ;
34 para  $h = 1, 2, \dots, m$  hacer // Para los modos generados
35     si  $x_h = \text{falso}$  entonces // Seleccionar modos efectivos
36         | Eliminar  $\mathbf{v}_h$  de  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times l} \Rightarrow \hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times l-1}$ ;
37         | Eliminar  $h$ -ésima fila y columna de  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{l \times l} \Rightarrow \hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{l-1 \times l-1}$ ;
38         | Eliminar  $h$ -ésima fila y columna de  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{l \times l} \Rightarrow \hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{l-1 \times l-1}$ ;
39         para  $j = 1, 2, \dots, n_a$  hacer  $ba_j = ba_j - b_{h,j}$ ;
40         | Eliminar  $h$ -ésima fila de  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{l \times n_a} \Rightarrow \hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{l-1 \times n_a}$  y  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{l \times n_a} \Rightarrow \mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{l-1 \times n_a}$ ;
41         |  $l = l - 1$ ;
42     fin
43 fin
44 para  $j = 1, 2, \dots, n_a$  hacer // Para cada acción exterior
45     si  $ba_j < 0$  entonces // Calcular factores de reparto para continuidad
46         |  $b_{l,j} = -1.0 + |ba_j|$ ;
47     sino
48         |  $b_{l,j} = 1.0 - ba_j$ ;
49     fin
50      $z_{l,j} = \text{verdadero}$ ;
51 fin

```

les el  $h$ -ésimo modo generado es efectivo o, en su defecto, residual. Además, si dicho modo no es efectivo para ninguna acción exterior, éste se elimina implícitamente señalándolo en el vector lógico de efectividad  $\mathbf{x}$ . Al respecto, cabe aclarar que los modos que no son excitados por ninguna acción exterior se eliminan al final de la generación por que los autovectores asociados deben conocerse en todo momento para direccionar apropiadamente los vectores conjugados de búsqueda en la iteración del MAGCD. Lo anterior se logra aplicando la deflación sobre los vectores residuales durante el proceso de minimización.

Una vez concluida cada iteración del MAGCD, se evalúan los niveles de continuidad de los modos generados, para cada una de las acciones exteriores, aplicando la ecuación (6.4). Si el nivel de continuidad para todas las acciones exteriores es mayor que el límite inferior impuesto, es decir, si se cumple que  $ba_j > ba_{lim}$  para  $j = 1, 2, \dots, n_a$ , se finaliza la ejecución del generador en dos pasos. Primero, se eliminan los modos que corresponden a la información consignada en el vector lógico de efectividad, es decir, aquellos que no son efectivos para ninguna acción exterior. Posteriormente, se genera el modo para mantener el balance de agua en el acuífero realizando una última ejecución de la iteración del MAGCD y se evalúan los coeficientes de reparto de continuidad mediante la ecuación (6.2).

### Generador de modos efectivos mediante la iteración racional de Lanczos

El generador de modos efectivos mediante la iteración racional de Lanczos con reinicio explícito se presenta en el algoritmo 6.15. Sus entradas son las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{S}$  del problema generalizado de autovalores, la matriz  $\Psi$  con la distribución de las acciones elementales actuando sobre el acuífero, el límite de participación modal  $b_{lim}$ , la cota inferior de nivel de continuidad  $ba_{lim}$ , un vector  $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$  que almacena los vectores iniciales de iteración, el número  $m$  de modos que deben converger en cada reinicio y el desplazamiento inicial  $\sigma_0$ . Al ejecutar el generador se obtienen la matriz de autovalores efectivos  $\hat{\mathbf{A}}$ , la matriz de autovectores efectivos  $\hat{\mathbf{V}}$ , la matriz de volumen almacenado por cada autovector efectivo  $\hat{\mathbf{F}}$ , la matriz de coeficientes de repartos efectiva  $\hat{\mathbf{B}}$  y la máscara de estados efectivos  $\mathbf{Z}$ .

El algoritmo 6.15 comienza calculando los primeros  $m$  modos más cercanos a un desplazamiento inicial nulo, es decir, aquellos que corresponden a los  $m$  autovalores de menor magnitud, efectuando la primera ejecución de la iteración racional de Lanczos con reinicio explícito, presentada en el algoritmo 6.13. Una vez se dispone de los primeros  $m$  autovectores, se calcula el volumen almacenado por debajo de cada uno de ellos y los coeficientes de reparto modales para todas las acciones exteriores impuestas sobre el acuífero. Simultáneamente, se construye cada fila de la máscara de estados efectivos aplicando la ecuación (6.1), determinándose los modos efectivos y residuales de forma análoga a lo discutido en el apartado 51 para la generación mediante la iteración del MAGCD.

Cuando se han obtenido las matrices  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{n \times m}$ ;  $\hat{\mathbf{A}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\hat{\mathbf{F}} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ ,  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$ ,  $\mathbf{Z} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$  y el vector de  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$  se procede a evaluar los niveles de continuidad de los modos disponibles para cada una de las acciones exteriores. Entonces, si el nivel de continuidad para todas estas acciones exteriores es mayor que el límite inferior impuesto, es decir, si se cumple que  $ba_j > ba_{lim}$  para  $j = 1, 2, \dots, n_a$ , se detiene la generación. De lo contrario, se aplica otra iteración racional de Lanczos con ROP seleccionando un nuevo valor del desplazamiento cercano al mayor autovalor disponible en  $\hat{\mathbf{A}}$  y un vector inicial ortonormal a los autovectores disponibles en la matriz  $\hat{\mathbf{V}}$ ; reinicio que se repite hasta cumplir el criterio de parada establecido. Ahora bien, cabe aclarar que el subespacio de Krylov usado en cada reinicio de la iteración racional de Lanczos es  $2m$ -dimensional. En otras palabras, para generar  $m$  modos se calculan  $2m$  vectores adicionales de Lanczos y se aumenta el tamaño de las diagonales de  $\mathbf{\Pi}$  en  $2m$  componentes, de donde se deduce que una restricción para seleccionar el valor de  $m$  es que  $2m < n$ . En la práctica, esta



restricción se cumple en la mayoría de los casos en los que el modelo a reducir es muy grande puesto que  $m \ll n$  y es prácticamente imposible generar todos los modos del sistema. Para finalizar, el modo asociado con el autovalor de mayor magnitud disponible al final de la generación se usa para preservar el balance de masa agregado en el acuífero. Por consiguiente, se evalúa el factor de reparto de continuidad aplicando la ecuación (6.2).

### Otras opciones de generación

Los esquemas de generación de modos efectivos propuestos en los algoritmos 6.14 y 6.15 son adaptables a otros métodos iterativos para la resolución del problema generalizado de autovalores. Por ejemplo, si se dispone de una implementación eficiente de la ICR, el algoritmo 6.14 puede usarse para la generación de modos efectivos aplicando los pasos que se enumeran a continuación: (i) transformar el problema generalizado de autovalores en uno estándar mediante la descomposición de Cholesky, (ii) efectuar la tridiagonalización de Householder (1964) para convertir el problema obtenido en  $i$  a la forma tridiagonal; (iii) usar el algoritmo 6.12 para obtener los autovalores del problema tridiagonal, (iv) usar la ICR estándar para calcular el autovector que le corresponde a cada autovalor, (v) calcular sucesivamente los autovectores del problema generalizado original aplicando la transformación inversa de Cholesky sobre los autovectores del problema estándar obtenidos en  $iv$  hasta cumplir con el límite inferior del nivel de continuidad asignado a la generación y (vi) eliminar los modos que no son excitados por ninguna acción exterior y obtener la máscara de estados efectivos usando la ecuación (6.1). Los pasos (i) a (iii) son de preprocesamiento, mientras que (iv) y (v) corresponden a la generación propiamente dicha y consisten en ejecutar el algoritmo 6.14 sobre el problema estándar, cambiando la iteración del MAGCD por una ICR. Por último, el paso  $vi$  es de postprocesamiento y convierte los autovectores del problema estándar en los correspondiente al problema generalizado.

Experimentos numéricos han demostrado que el anterior esquema de generación sólo es aplicable a modelos pequeños. Por otra parte, si se dispone de implementaciones eficientes de la iteración en el subespacio, el algoritmo 6.15 puede adaptarse de forma sencilla reemplazando la iteración de Lanczos de las líneas 4 y 5 por la iteración correspondiente, considerando además que durante los reinicios deben aplicarse una deflación vectorial.

### Algunas características prácticas de implementación

Cuando se reduce un modelo de flujo subterráneo de gran tamaño es imposible asignar a priori las dimensiones de los arreglos usados por generadores de modos efectivos. Por esta razón, en la interfaz de EVMPACK se ha incluido una rutina para incrementar el tamaño de las matrices  $\hat{\mathbf{V}}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}$ ,  $\hat{\mathbf{F}}$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$ ,  $\mathbf{Z}$  y el vector lógico  $\mathbf{x}$  (usado para indicar la efectividad de cada modo generado) durante cada paso, lo cual permite ahorrar mucha memoria virtual. Asimismo, es importante representar los vectores y arreglos de trabajo en formatos convenientes, de acuerdo con las características de las matrices que representan. Por ejemplo,  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{A}_\sigma$  se almacenan usando el formato disperso coordinado por columnas (Saad, 1994b, 2003). Igualmente, para representar  $\mathbf{S}$ ,  $\hat{\mathbf{A}}$  y  $\hat{\mathbf{F}}$  se utilizan tres vectores de trabajo donde se almacenan los elementos de sus diagonales. En cambio, las matrices que se almacenan en formato denso son  $\hat{\mathbf{V}}$ ,  $\Psi$ ,  $\hat{\mathbf{B}}$  y  $\mathbf{Z}$ , siendo éstas las que demandan la mayor parte de memoria durante la ejecución de los algoritmos de generación. Si el modelo es muy grande, puede que sea imposible guardar en RAM estas cuatro matrices, con lo cual debe procurarse el uso de almacenamiento secundario. Considerando lo anterior, la interfaz de operaciones sobre los datos implementada en EVMPACK proporciona rutinas para la lectura secuencial

de matrices densas desde el disco duro. Cabe aclarar que ésta no es la opción que optimiza la velocidad operativa, por lo cual se usa por defecto el almacenamiento en RAM.

## 6.6. Aplicación del MAV-CSEM al caso de referencia

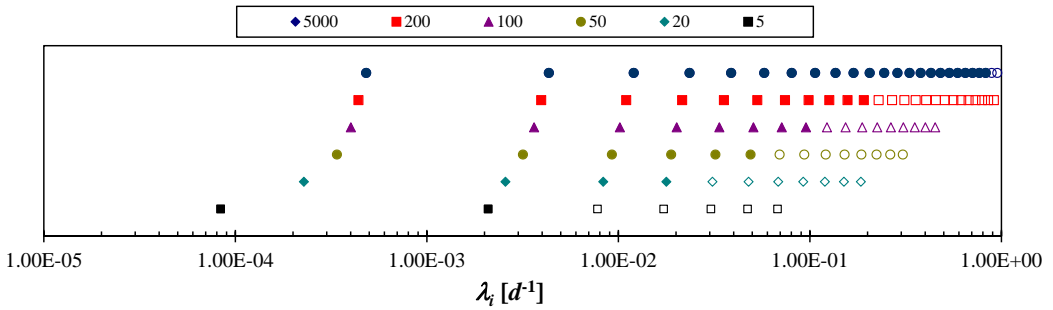
En esta sección se presenta la aplicación del MAV-SCEM para reducir los modelos de flujo subterráneo del acuífero rectangular de referencia sometido a acciones exteriores distribuida y puntual, de acuerdo a las configuraciones geométricas mostradas en las figuras 3.2 y 3.3. La variación temporal de estas dos acciones exteriores ha sido presentada en las figuras 3.7 y 3.10, para recarga uniformemente distribuida y bombeo puntual, respectivamente. También cabe resaltar que, tanto la implementación de los modelos numéricos de referencia, resueltos por DF, como la discretización espacial utilizada para la reducción, son idénticas a las descritas en las secciones 3.6 y 4.4. De nuevo, para considerar diferentes escenarios en la parametrización de la relación río-acuífero, las conductancias en los bloques de río varían en escala logarítmica entre 5000 y 5 m<sup>2</sup>/d. Además, las localizaciones donde se controla la variación temporal de las alturas piezométricas en los modelos sometidos a acción distribuida son aquellas definidas en el apartado 3.6.2.

### 6.6.1. Generación de los modos efectivos

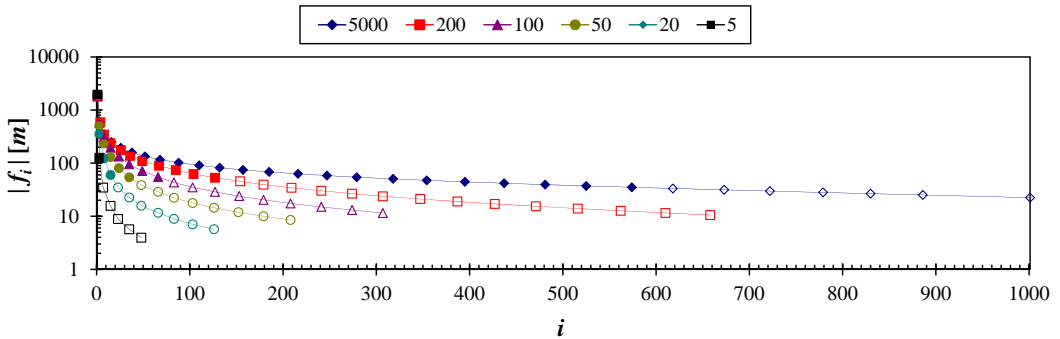
Los modos efectivos de los modelos de flujo subterráneo reducidos mediante el MAV-CSEM se han generado usando el MAGCD para la minimización del cociente de Rayleigh, como se ha descrito en el algoritmo 6.14, tanto para acción exterior distribuida como puntual. Para parametrizar la generación, se ha impuesto un límite de participación modal de  $b_{lim} = 10^{-10}$  y un límite inferior de nivel de continuidad de  $ba_{lim} = 99.5\%$ . También se ha asumido una tolerancia mínima de convergencia de  $\epsilon_2 = 10^{-12}$ , lo cual asegura seis cifras decimales de precisión en los autovalores calculados, y una tolerancia de reinicio de  $\epsilon = 10^{-8}$ . Al mismo tiempo, la convergencia de la minimización para la iteración del MAGCD se acelera utilizando un preconditionamiento por descomposición LU incompleta con estrategia dual por umbral y nivel de llenado,  $ILU(\tau, p)$ , con  $\tau = 10^{-5}$  y  $p = 3$ .

En las figuras 6.2 y 6.3 se consignan los autovalores y los valores absolutos de los volúmenes encerrados por los autovectores de los modos efectivos, respectivamente. En la parte superior de ambas figuras se muestran las conductancias impuestas al río, idénticas a las utilizadas en la sección 4.4; las viñetas rellenas representan los modos efectivos tanto para acción exterior distribuida como puntual, mientras que las viñetas huecas corresponden a los modos efectivos únicamente para la acción exterior puntual. Comparando las figuras 3.4 y 6.2 se deduce que los nuevos autovalores efectivos son idénticos a los calculados mediante las soluciones analíticas de los MPE respectivos. Igualmente, los valores absolutos de los volúmenes encerrados por los autovectores efectivos corresponden a los obtenidos para los autovectores dominantes de la solución por el MAV con truncamiento conservativo, que han sido presentados en la figura 4.2. Por otra parte, los coeficientes de reparto efectivos se presentan en las figuras 6.4 y 6.5 para acciones exteriores uniformemente distribuida y puntual, respectivamente. Al respecto, cabe resaltar que dichos coeficientes de reparto son idénticos a los calculados para las soluciones analíticas en los MPE correspondientes, aplicando apropiadamente las ecuaciones (3.38) y (3.40).

Asimismo, en la figura 6.6 se presentan los coeficientes de reparto efectivos acumulados obtenidos para el acuífero de referencia, en función de las diferentes conductancias de río consideradas. En el gráfico izquierdo se exhiben los resultados que corresponden a la acción exterior distribuida, mientras que en el derecho se muestran los resultados para acción ex-



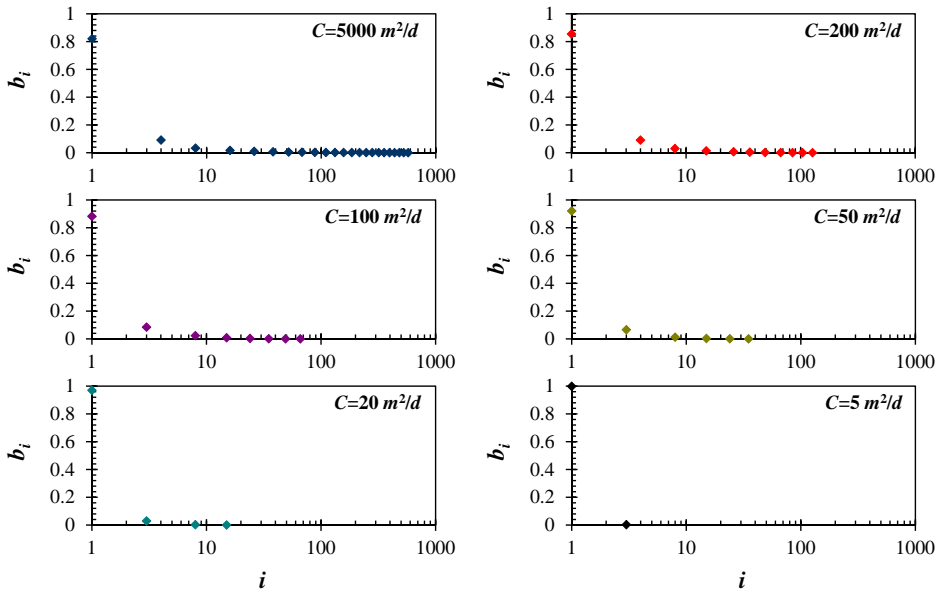
**Figura 6.2.** Autovalores efectivos para el acuífero de referencia, ordenados de acuerdo a las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. Las viñetas rellenas representan los modos efectivos tanto para acción exterior distribuida como puntual, mientras que las viñetas huecas corresponden a los modos efectivos únicamente para la acción exterior puntual.



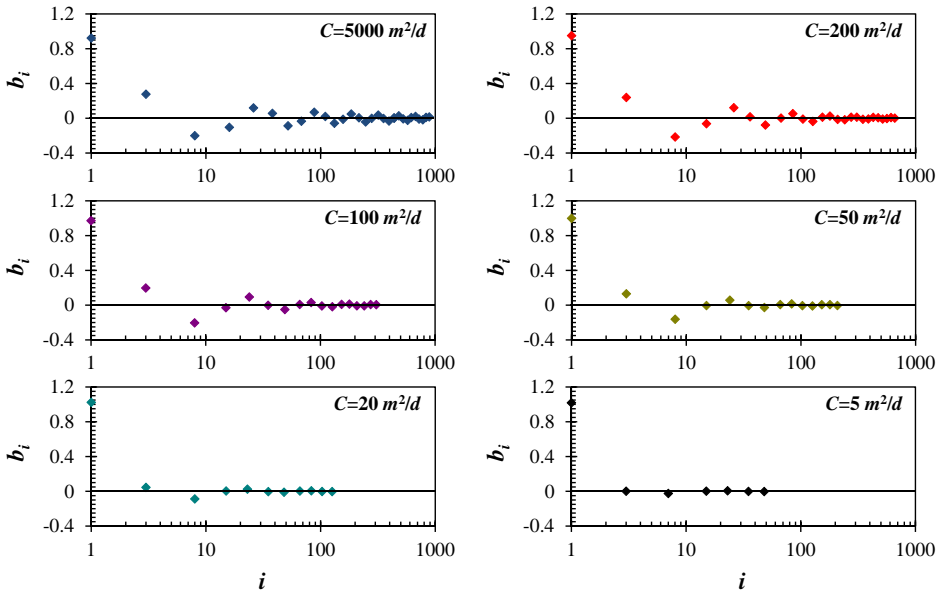
**Figura 6.3.** Valores absolutos de los volúmenes debajo de los autovectores efectivos para el acuífero de referencia según las seis conductancias asignadas a los bloques de río. Las viñetas rellenas representan los modos efectivos tanto para acción exterior distribuida como puntual. Las viñetas huecas corresponden a los modos efectivos únicamente para la acción exterior puntual.

terior puntual. Si dichos resultados se comparan con los obtenidos aplicando las soluciones analíticas de los MPE, presentados en la figura 3.6, se detecta un comportamiento análogo para ambas soluciones. De lo anterior se concluye que los modos efectivos del acuífero de referencia pueden interpretarse como aproximaciones numéricas a los modos asociados con las soluciones analíticas de los MPE correspondientes. Aún así, se observa que la localización de los modos efectivos para los modelos reducidos por el MAV-CSEM no es sucesiva, sino que se reparte sobre una fracción espectral cuyo ancho depende, básicamente, de la parametrización asumida para la conexión río-acuífero.

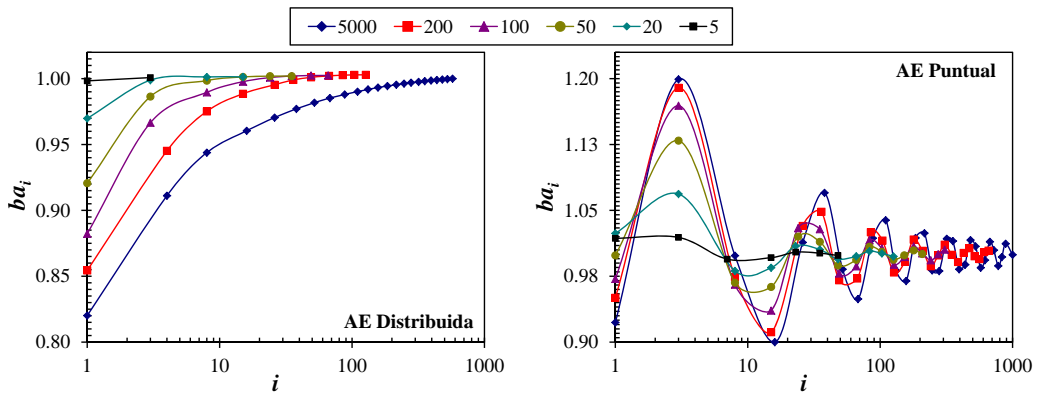
Los resultados comentados hasta ahora demuestran el potencial de reducción manifestado por el MAV-CSEM. Por ejemplo, al reducir el modelo donde se ha impuesto una conductancia de  $5 \text{ m}^2/\text{d}$  se obtienen únicamente 2 modos efectivos para acción distribuida y 6 para acción puntual; mientras que al considerar una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$  se llega a 23 modos efectivos para acción distribuida y 30 para acción puntual. En general, sin importar el grado de conexión río-acuífero considerado, es necesario generar menos modos efectivos para acción exterior distribuida que para acción puntual. Es más, la tendencia del proceso de reducción, con respecto a los parámetros de la relación río-acuífero, muestra



**Figura 6.4.** Coeficientes de reparto efectivos del acuífero rectangular de referencia cuando se encuentra sometido a una acción exterior distribuida actuando uniformemente en todo su dominio espacial, para las seis diferentes conductancias de bloque de río.



**Figura 6.5.** Coeficientes de reparto efectivos del acuífero rectangular de referencia cuando se encuentra sometido a acción exterior puntual actuando en su centro, para las seis diferentes conductancias de bloque de río.



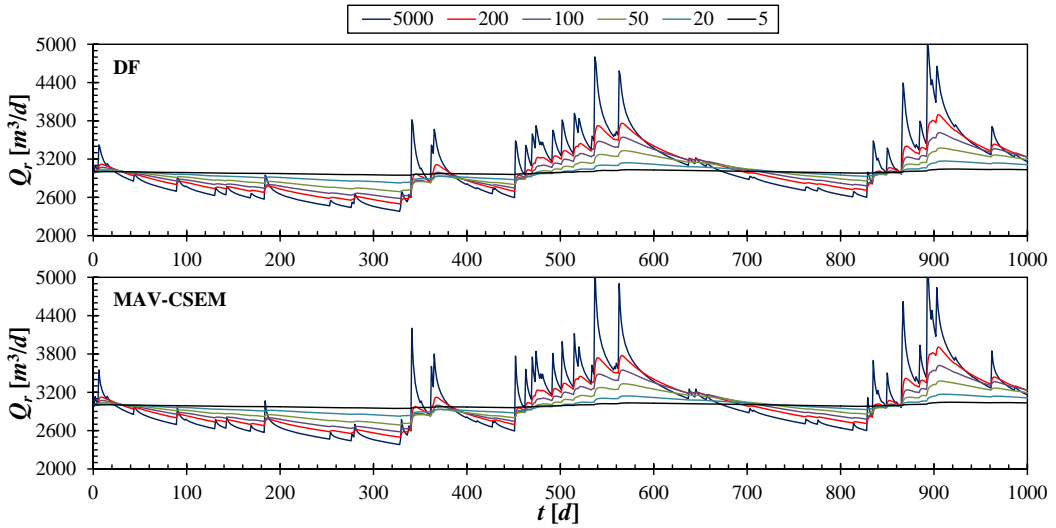
**Figura 6.6.** Coeficientes de reparto efectivos acumulados para el acuífero rectangular de referencia en función de las conductancias impuestas en los bloques de río. El gráfico de la izquierda presenta los resultados correspondientes a acción exterior uniformemente distribuida, mientras que en la derecha se muestran los resultados para acción exterior puntual.

que es necesario generar menos modos efectivos a medida que disminuye la conductancia impuesta al río. De las anteriores observaciones se deduce que, desde el punto de vista de la eficiencia computacional, los modelos de flujo más difíciles de reducir son aquellos que consideran conexión perfecta con el río y acción exterior puntual.

Por ejemplo, la generación de los modos efectivos para el modelo donde se impone una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$  implica el cálculo de más de 1000 modos, tanto efectivos como residuales, hasta superar el límite inferior de nivel de continuidad impuesto del 99.5%. Por el contrario, cuando se impone una conductancia de  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ , es necesario generar menos de 100 modos para cumplir el mismo límite inferior de nivel de continuidad. Por lo tanto, como los modos efectivos pueden ubicarse dentro de un fracción amplia del espectro del problema, aumentar el número de modos efectivos a generar ocasiona una importante reducción de la eficiencia en el generador por minimización del cociente de Rayleigh. Esto se debe a que, durante cada paso de la iteración del MGCAD, el vector conjugado de direccionamiento de minimización debe ser ortogonalizado con respecto a todos los autovectores generados hasta el momento, sean efectivos o no, lo cual supone un incremento gradual de los costos de almacenamiento y procesamiento para culminar exitosamente las iteraciones de minimización asociadas con los modos superiores.

### 6.6.2. Análisis de los resultados de las simulaciones para acciones exteriores uniformemente distribuida y puntual

En la figura 6.7 se presentan los hidrogramas de descarga subterránea simulados mediante los modelos de referencia resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-SCSEM (abajo) para acción exterior uniformemente distribuida, correspondientes a las seis conductancias asignadas en la relación río-acuífero que se muestran en la parte superior. En general, se observa que los hidrogramas de referencia se reproducen adecuadamente al emplear el MAV-CSEM para reducir los modelos de flujo subterráneo respectivos; también se hace evidente que los mayores errores se presentan en la reproducción de los picos de caudal descargado, especialmente para los mayores valores de conductancia.



**Figura 6.7.** Hidrogramas de descarga al río calculados mediante modelos numéricos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (abajo), para diferentes grados de conexión entre el río y el acuífero de referencia sometido a acción exterior uniformemente distribuida.

La anterior observación se ha corroborado estimando los índices de comportamiento para cada hidrograma simulado mediante el MAV-CSEM, con respecto a los obtenidos ejecutando los modelos de referencia en DF respectivos. Dichos resultados han sido consignados en la tabla 6.1, donde se observan algunas características que vale la pena comentar. Primeramente, se han estimado **RMS** que disminuyen desde 1.2% hasta 0.2% a medida que decrece la conductancia de río, lo cual es consistente con lo expuesto anteriormente para las soluciones analíticas de los MPE, en el apartado 3.6.2, y para el MAV por truncamiento conservativo, en el apartado 4.4.2. Además, para todas las condiciones de interacción río-acuífero impuestas, se obtuvieron **E<sub>2</sub>** mayores al 99.05% en los hidrogramas simulados. Así pues, la menor eficiencia estimada corresponde al hidrograma obtenido para una conductancia de 5000 m<sup>2</sup>/d, mientras las estimaciones más elevadas, de aproximadamente el 100%, se obtuvieron para los hidrogramas simulados para conductancias menores que 50 m<sup>2</sup>/d. Lo anterior implica una reproducción ajustada de los hidrogramas de descarga, especialmente durante las curvas de agotamiento. Finalmente, cabe resaltar

Índice [%]	Conductancia de río [m <sup>2</sup> /d]					
	5000	200	100	50	20	5
<b>RMS</b>	1.213	0.388	0.56	0.27	0.21	0.19
<b>E<sub>2</sub></b>	99.05	99.30	99.70	99.80	99.99	99.99
<b>BIAS</b>	0.47	0.23	0.04	0.02	0.01	0.01

**Tabla 6.1.** Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas de descarga simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM con respecto a los simulados por modelos numéricos resueltos por DF, para diferentes conductancias de río y acción exterior uniformemente distribuida actuando sobre el acuífero de referencia.

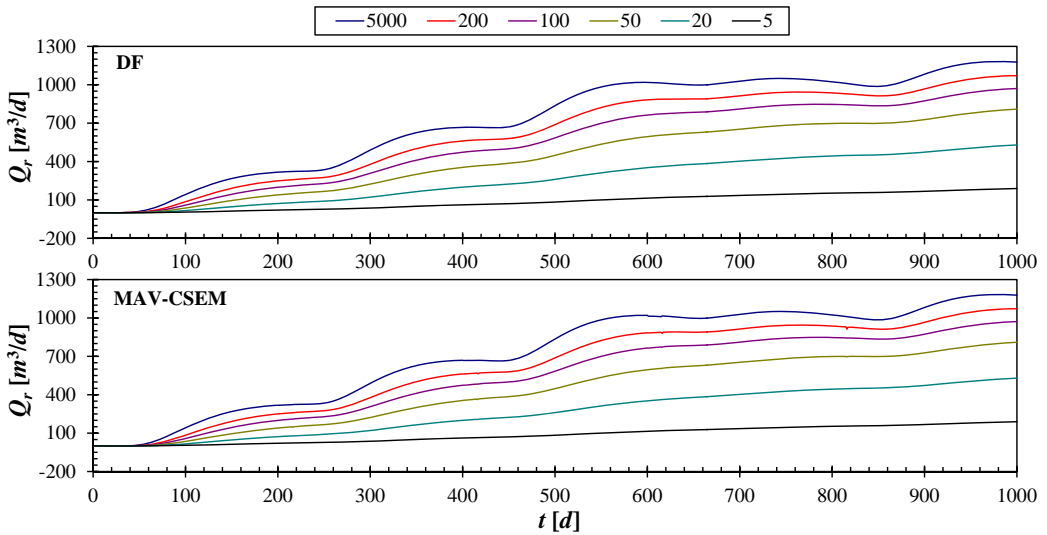
que los **BIAS** estimados son menores del 0.5 %, por lo tanto las simulaciones mediante el MAV-CSEM reproducen casi perfectamente la media de los hidrogramas de referencia, lo cual es consistente con el mecanismo de conservación de masa impuesto sobre el acuífero a través del último modo efectivo de continuidad contenido en los modelos reducidos.

$C$ [m <sup>2</sup> /d]	$P_1$		$P_2$		$P_3$		$P_4$	
	<b>RMS</b> [%]	$E_2$ [%]	<b>RMS</b> [%]	$E_2$ [%]	<b>RMS</b> [%]	$E_2$ [%]	<b>RMS</b> [%]	$E_2$ [%]
5000	0.295	99.58	0.412	99.45	0.761	99.10	2.240	98.44
200	0.210	99.72	0.355	99.82	0.647	99.91	1.892	99.62
100	0.123	99.88	0.262	99.93	0.539	99.96	1.364	99.88
50	0.102	99.99	0.176	99.99	0.341	99.99	0.775	99.99
20	0.040	100.00	0.088	100.00	0.153	100.00	0.345	100.00
5	0.020	100.00	0.045	100.00	0.071	100.00	0.075	100.00

**Tabla 6.2.** Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio relativo (**RMS**) y el coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe modificado ( $E_2$ ) para las series de alturas piezométricas calculadas en los puntos de control mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, comparadas con las simuladas mediante los modelos resueltos utilizando las DF, cuando el acuífero de referencia se ha sometido a una acción exterior uniformemente distribuida.

Igualmente, en la tabla 6.2 se presentan los índices de comportamientos estimados para las alturas piezométricas simuladas en los cuatro puntos de control considerados, empleando los modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a las obtenidas mediante los modelos de referencia resueltos por DF. En dicha tabla se presentan únicamente las estimaciones de **RMS** y  $E_2$  puesto que los **BIAS** estimados, para todos los casos de conexión río-acuífero considerados, superan el 99.99 %. Se observa que las estimaciones de **RMS** aumentan a medida que crece el grado de conexión entre el río y el acuífero, sin importar la localización del punto de control considerado. Por el contrario, **RMS** decrece a medida que el punto de observación considerado se encuentra más alejado de la conexión río-acuífero, patrón que se repite para las seis conductancias impuestas en los bloques de río. Así, los mayores **RMS** han sido calculados en el punto  $P_4$ , con estimaciones que no alcanzan a superar el 2.3 % ni siquiera cuando la conexión entre el río y el acuífero es casi perfecta. En cambio, los menores **RMS** se calcularon en el punto  $P_1$ , donde no se alcanza a superar el 0.3 % para ninguna de las conductancias de río consideradas. Ahora bien, las estimaciones del coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe exhiben características análogamente inversas a las anteriormente descritas para **RMS**. Es decir,  $E_2$  decrece a medida que aumenta la conexión río-acuífero o cuando el punto de control analizado se ubica más cerca de la conexión río-acuífero, pero en ningún caso  $E_2$  cae por debajo del 99 %. En resumen, a la luz de los resultados comentados hasta ahora, se concluye que las simulaciones mediante los modelos reducidos por el MAV-CSEM logran representar adecuadamente las series de alturas piezométricas de referencia calculadas por los modelos resueltos en DF. Nuevamente, dichas series piezométricas son consistentes con las obtenidas utilizando los MPE, presentadas en el apartado 3.6.2, y modelos reducidos por el MAV con truncamiento conservativo, las cuales han sido discutidas en el apartado 4.4.2.

Por otra parte, los hidrogramas de caudales detraídos al río por causa de un bombeo localizado en el centro del acuífero de referencia, para las diferentes conductancias impuestas, se presentan en la figura 6.8. En ella, el gráfico superior corresponde a los hidrogramas simulados mediante modelos numéricos resueltos por DF, mientras que en el gráfico inferior se presentan los simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM. En general, se observa que los hidrogramas simulados mediante las DF se reproducen adecuadamente



**Figura 6.8.** Hidrogramas de detracciones al río calculados mediante modelos numéricos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (abajo), para diferentes grados de conexión entre el río y el acuífero de referencia sometido a acción exterior puntual en el centro.

usando modelos reducidos por el MAV-CSEM, siendo muy similares a los presentados en la figura 3.11 que corresponden a las soluciones analíticas mediante los MPE. También debe notarse que la parametrización impuesta para la generación de modos efectivos evita la aparición de saltos abruptos en los hidrogramas, como aquellos que se mostraron previamente en la figura 4.13 para la reducción clásica por truncamiento conservativo.

Al respecto, el adecuado comportamiento de los modelos reducidos mediante el MAV-CSEM se corrobora al evaluar los índices de comportamiento de los hidrogramas simulados, con respecto a los obtenidos empleando modelos resueltos por DF. Las estimaciones de dichos índices se presentan en la tabla 6.3, donde se observa que el **RMS** disminuye a medida que lo hace la conductancia del río, mientras que el coeficiente de eficiencia aumenta a medida que dicha conductancia disminuye. Estos resultados son consistentes con los análisis presentados anteriormente para acción exterior uniformemente distribuida. Del mismo modo, las estimaciones del **BIAS** varían entre 0.57 % y 0.21 %, lo cual indica que los caudales medios de detracción han sido bien reproducidos por el modelo reducido. Por

Índice [%]	Conductancia de río [ $m^2/d$ ]					
	5000	200	100	50	20	5
<b>RMS</b>	1.249	1.017	0.965	0.840	0.609	0.491
<b>E<sub>2</sub></b>	98.50	99.70	99.96	99.98	99.99	99.99
<b>BIAS</b>	0.57	0.33	0.25	0.22	0.21	0.21

**Tabla 6.3.** Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas de descarga simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM con respecto a los simulados por modelos numéricos en DF, para varios niveles de conexión entre el río y el acuífero de referencia, sometido a acción exterior puntual actuando en su centro.



último, teniendo en cuenta los resultados presentados en esta sección, puede afirmarse que una adecuada parametrización de la generación de modos efectivos en el MAV-CSEM conduce al planteamiento de un modelo reducido robusto y eficiente, sin importar el tipo de acción exterior impuesta sobre el acuífero de referencia.

## 6.7. Simulación reducida del flujo en un acuífero heterogéneo rectangular mediante el MAV-CSEM

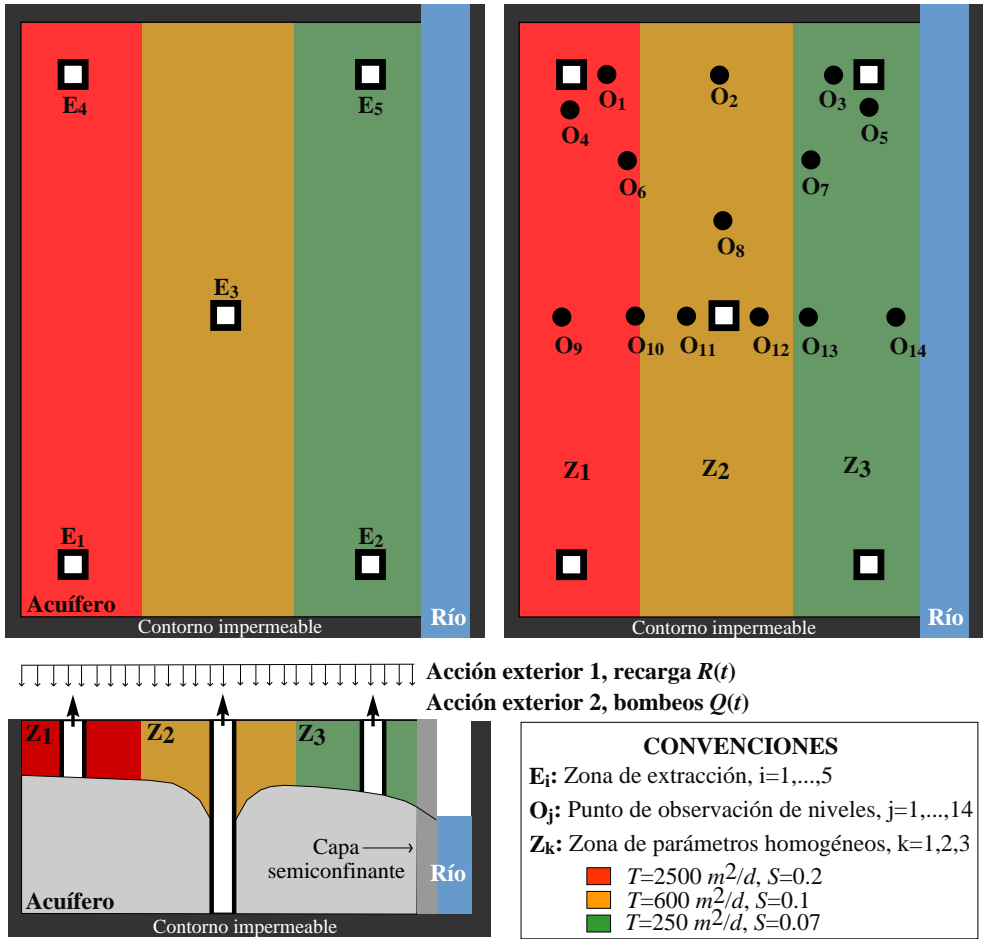
El MAV-CSEM ha sido aplicado para simular el flujo subterráneo en el acuífero rectangular heterogéneo de la figura 6.9, donde se muestra: (i) la distribución espacial de las propiedades hidráulicas del acuífero en el gráfico superior izquierdo, (ii) la configuración espacial de las acciones exteriores y el modelo conceptual para la conexión río-acuífero en el gráfico inferior izquierdo y (iii) la localización de los puntos de observación de las alturas piezométricas en el gráfico superior derecho. El acuífero tiene una longitud de 5000 m entre el río y la pared impermeable opuesta, con un ancho de 7500 m entre las paredes impermeables perpendiculares al río. Se ha asumido la existencia de tres zonas homogéneas de parámetros hidráulicos; éstas son paralelas al río, sus transmisividades varían entre  $2500 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $250 \text{ m}^2/\text{d}$  y sus coeficientes de almacenamiento varían entre 0.2 y 0.07. La conexión río-acuífero se modela usando una condición de contorno del tipo Cauchy, donde el grado de interacción se da en función de una conductancia de bloque. En la práctica, se ha impuesto que dicha conductancia varía, en escala logarítmica, entre 5000 y  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ . Además, se ha considerado que el nivel de referencia para la piezometría corresponde a la altura de calado nulo del río, la cual se ha asumido como invariante en el tiempo.

Se ha impuesto la aplicación simultánea de dos acciones exteriores sobre el acuífero. La primera consiste de una recarga uniformemente distribuida en todo su dominio espacial, cuyas intensidades han sido presentadas en la figura 3.7; la segunda consiste de extracciones puntuales localizadas en las zonas nombradas  $\mathbf{E}_i$  con  $i = 1, \dots, 5$ , en la figura 6.9. La magnitud de la extracción en cada bloque del modelo localizado en dichas zonas viene dada según el itinerario de bombeo de la figura 6.10, donde se observa que las extracciones impuestas sobre el acuífero se repiten cada doscientos días. También cabe mencionar que el horizonte de simulación impuesto para el modelo es de mil días y que la discretización espacial del acuífero en DF manifiesta las siguientes características: (i) se utilizan bloques cuadrados con 100 m de longitud en cada lado, (ii) todas las filas están formadas por 50 bloques de acuífero más uno para representar su conexión con el río, (iii) cada columna está formada por 75 bloques y (iv) el modelo se configura mediante una malla de  $50 \times 75$  nodos activos y 75 nodos de conexión río-acuífero, en total  $n=3825$  nodos activos.

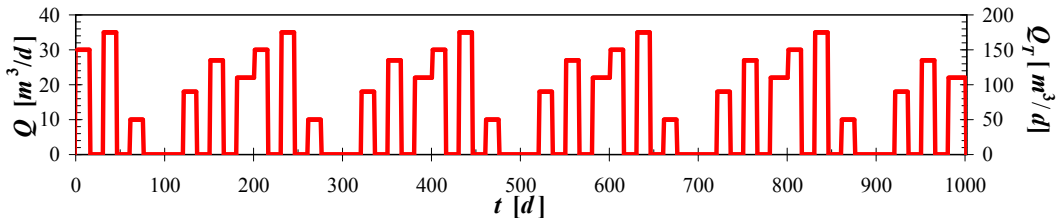
Es evidente que las características geométricas del acuífero rectangular de referencia y la propiedades de su discretización espacial en DF, descritas detalladamente en las secciones 3.6, 4.4 y 6.6, se han mantenido en este caso de aplicación. Es más, los únicos cambios realizados a los modelos de flujo de dicho acuífero tienen que ver con la heterogeneidad impuesta al medio poroso y la aplicación de más puntos de extracción. Esto se ha definido con el propósito de analizar la influencia de la heterogeneidad en la generación de los modos efectivos a usarse en las simulaciones reducida por el MAV-CSEM.

### 6.7.1. Generación selectiva de los modos efectivos

Los modos efectivos de los modelos de flujo subterráneo reducidos mediante el MAV-CSEM se han generado usando el MAGCD para la minimización del cociente de Rayleigh, de la forma que se ha descrito en el algoritmo 6.14. Para parametrizar dicha generación, se

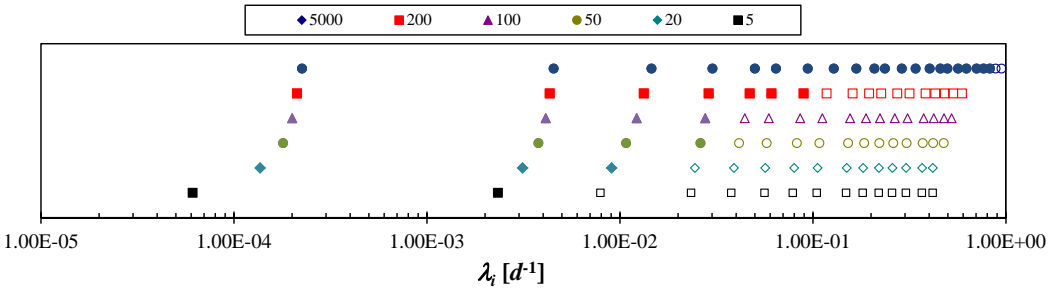


**Figura 6.9.** Configuración geométrica del acuífero rectangular heterogéneo. (i) Distribución espacial de las propiedades hidráulicas del acuífero en el gráfico superior izquierdo, (ii) Configuración espacial de las acciones exteriores y el modelo de conexión río-acuífero en el gráfico inferior izquierdo, (iii) Localización de los puntos de observación de las alturas piezométricas en el gráfico superior derecho y (iv) Convenciones de la figura en la parte inferior derecha.



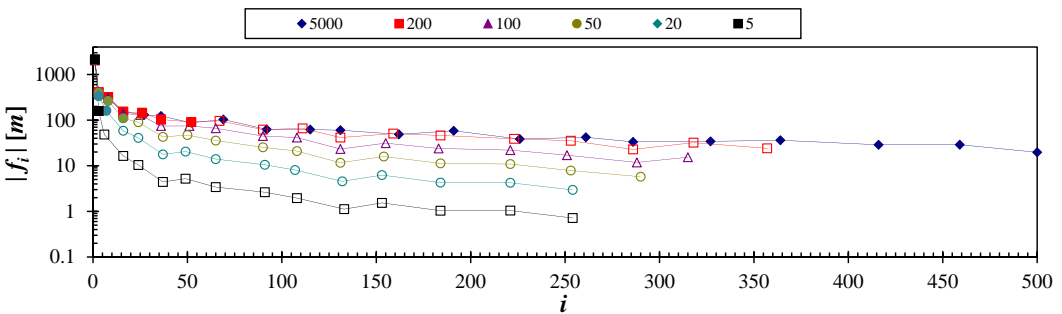
**Figura 6.10.** Itinerario de los bombeos impuestos sobre cada bloque perteneciente a las zonas de extracción  $E_i$ , con  $i = 1, \dots, 5$ , pertenecientes al acuífero rectangular heterogéneo. El eje de ordenadas izquierdo representa el volumen diario extraído por cada pozo; el eje de ordenadas izquierdo indica el volumen total que sale del acuífero.

ha impuesto un límite de participación modal de  $b_{lim} = 10^{-10}$  y un límite inferior de nivel de continuidad de  $ba_{lim} = 99.9\%$ . También se ha asumido un valor de  $\epsilon_2 = 10^{-12}$  para la tolerancia mínima de convergencia modal, con el objetivo de asegurar seis cifras decimales de precisión en los autovalores calculados, y una tolerancia de  $\epsilon = 10^{-8}$  en la evaluación del criterio de reinicio. Igualmente, para acelerar las iteraciones del MAGCD, se ha implementado un preconditionamiento por descomposición LU incompleta con estrategia dual por umbral y nivel de llenado,  $ILU(\tau, p)$ , con parámetros  $\tau = 10^{-5}$  y  $p = 3$ .



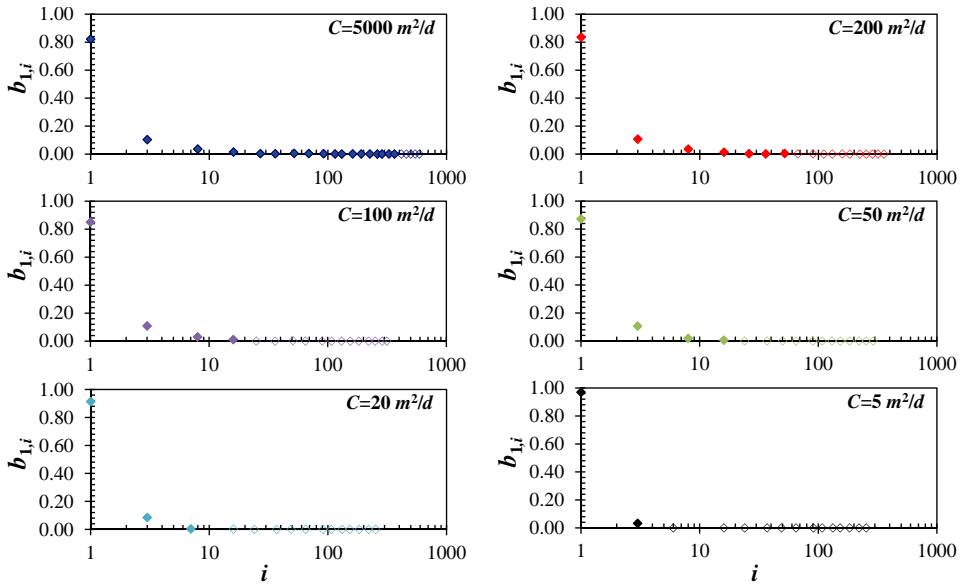
**Figura 6.11.** Autovalores efectivos para el acuífero rectangular heterogéneo según las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río. Las viñetas rellenas representan los modos efectivos tanto para acción exterior distribuida como puntual.

En la figura 6.11 se muestran los autovalores asociados a los modos efectivos. Para las seis conductancias impuestas, las viñetas rellenas se refieren a los autovalores efectivos para la acción exterior uniformemente distribuida, mientras que las viñetas huecas corresponden a los autovalores que también son efectivos para la acción exterior puntual. En el presente análisis se han encontrado autovalores inferiores a los calculados para el acuífero rectangular de referencia, deduciéndose una respuesta más lenta al efecto de las acciones exteriores impuestas por parte del acuífero heterogéneo analizado. Este resultado es coherente, dado que el acuífero heterogéneo está peor conectado puesto que su difusividad en la banda próxima al río es menor que  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ , que es la del acuífero de referencia.

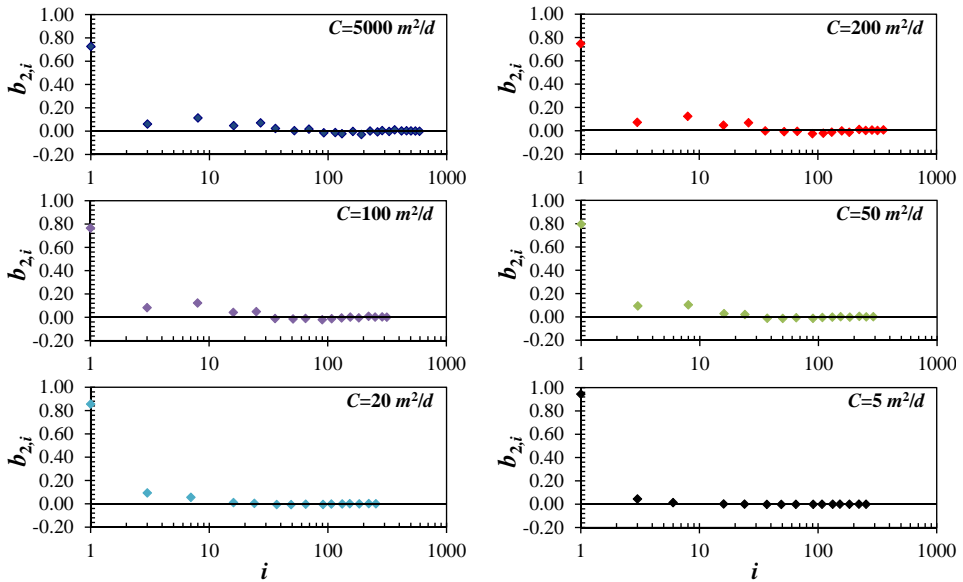


**Figura 6.12.** Valores absolutos de los volúmenes contenidos por los autovectores efectivos del acuífero rectangular heterogéneo según las conductancias asignadas a los bloques de río. Las viñetas rellenas representan los modos efectivos para acciones exteriores distribuida y puntual.

Por otra parte, en la figura 6.12 se presentan los valores absolutos de los volúmenes encerrados por los autovectores efectivos para las seis conductancias de río consideradas en el presente análisis. De nuevo, las viñetas rellenas han sido asignadas a los modos



**Figura 6.13.** Coeficientes de reparto efectivos del acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior distribuida, clasificados de acuerdo a 6 conductancias de río. Las viñetas rellenas corresponden a modos efectivos tanto para la acción exterior distribuida como puntual, mientras que las viñetas huecas se asocian a los modos efectivos únicamente para acción distribuida.



**Figura 6.14.** Coeficientes de reparto efectivos del acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior puntual, clasificados de acuerdo a 6 conductancias de río. Las viñetas rellenas corresponden a modos efectivos tanto para la acción exterior distribuida como puntual, mientras que las viñetas huecas se asocian a los modos efectivos únicamente para acción distribuida.

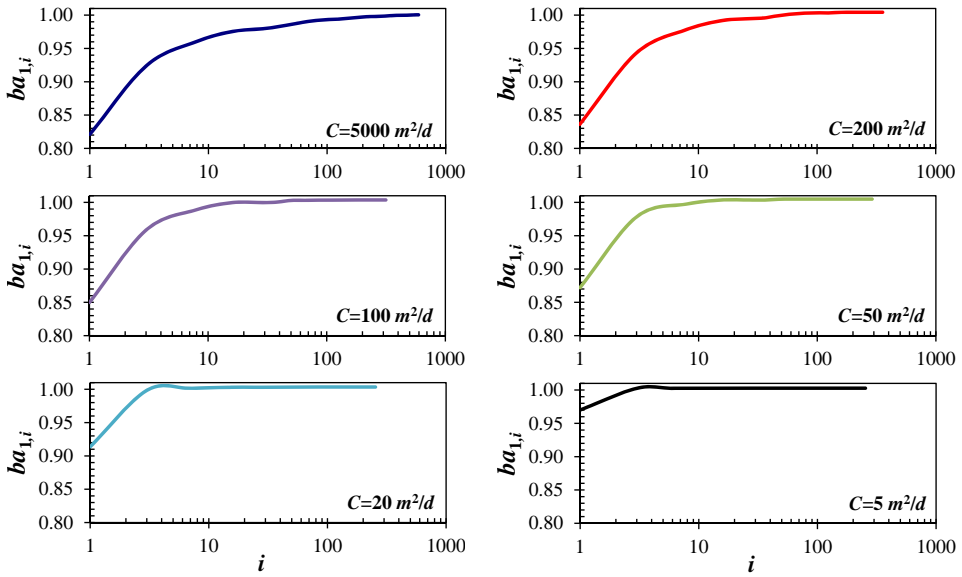


Figura 6.15. Distribución de los coeficiente de reparto acumulados para los modos efectivos del acuífero rectangular heterogéneo para acción exterior distribuida, en función de las seis conductancias de bloque de río.

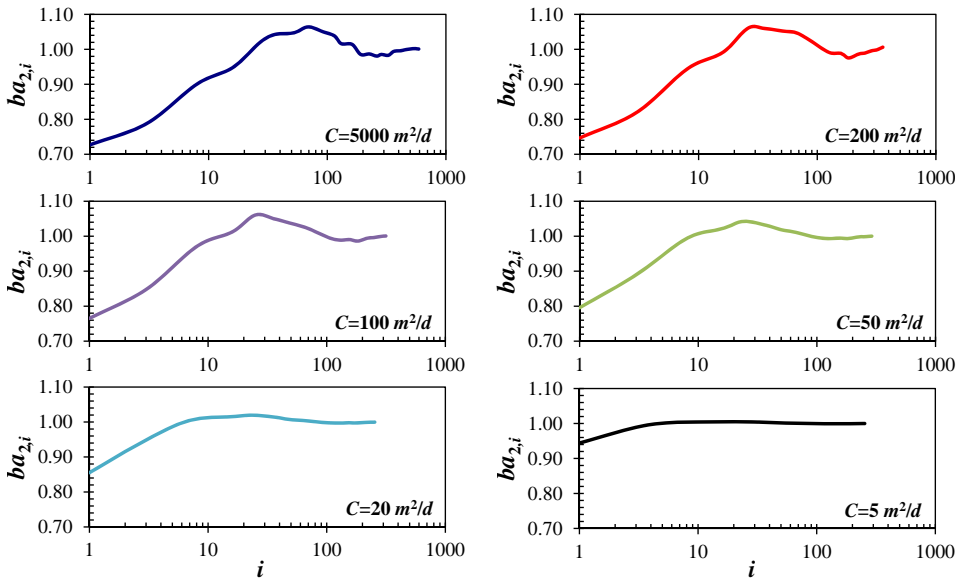


Figura 6.16. Distribución de los coeficiente de reparto acumulados para los modos efectivos del acuífero rectangular heterogéneo para acción exterior puntual, en función de las seis conductancias de bloque de río.

efectivos para acción exterior uniformemente distribuida, mientras que las viñetas huecas corresponden a los modos efectivos para la acción exterior puntual. De estos resultados se deduce que la heterogeneidad de los parámetros hidráulicos del acuífero ocasiona que la disminución de dichos volúmenes, con respecto al aumento del índice modal respectivo, no sea tan gradual como la exhibida en la figura 6.3 por parte de los modos efectivos del acuífero rectangular de referencia. A pesar de lo anterior, el rango de variación de ambos conjuntos de volúmenes es bastante parecido, con valores situándose entre los 3000 y 1 m.

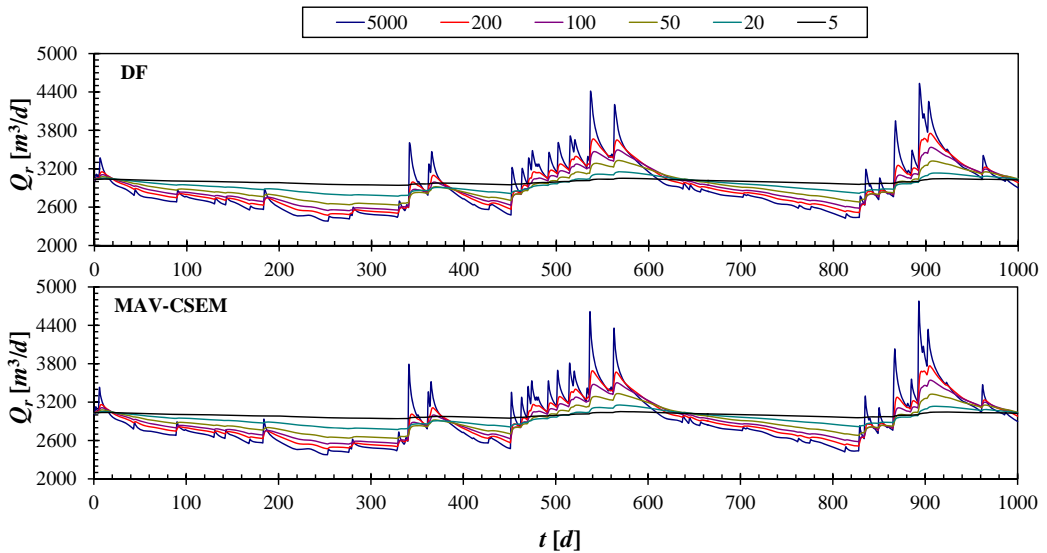
Los coeficientes de reparto de los modos efectivos para las dos acciones exteriores consideradas, correspondientes a cada una de las seis conductancias de río, se presentan en las figuras 6.13 y 6.14, para recarga uniformemente distribuida y bombeo puntual, respectivamente. Se ha encontrado que la distribución espectral de los modos efectivos y los factores de reparto asociados a la acción uniformemente distribuida de recarga es muy similar a la obtenida para el acuífero rectangular de referencia. Por el contrario, los coeficientes de reparto para los bombeos, a pesar de seguir siendo negativos, se parecen más a los que se esperaría para una acción distribuida que a los que se obtienen para acción puntual en el acuífero de referencia, de acuerdo a lo presentado previamente en la figura 6.5. Dicha suavización se debe a que los efectos de los diferentes bombeos han sido agrupados en una acción exterior, con lo cual las excitaciones puntuales han sido distribuidas sobre áreas de extracción de mayor tamaño dentro del acuífero.

Al respecto, una viñeta sin relleno en las figuras 6.13 y 6.14 quiere decir que el modo correspondiente es efectivo únicamente para la acción exterior puntual. Por el contrario, si la viñeta se encuentra rellena, su modo asociado es efectivo para ambas acciones exteriores. Para efectos prácticos de simulación, lo anterior significa que se ha impuesto una máscara de estados efectivos que actúa solamente para la acción exterior uniformemente distribuida que consiste, básicamente, en suprimir los modos con coeficientes de reparto por debajo al límite inferior impuesto de  $b_{lim} = 10^{-10}$ , dado que éstos modos no aportan efectivamente al estado del acuífero y los modos efectivos generados para la acción exterior puntual no han alcanzado el límite inferior de nivel de continuidad del  $ba_{lim} = 99.90\%$ , impuesto para la generación modal, cuando los modos efectivo para la acción exterior de recarga ya ha sobrepasado dicho límite. En otras palabras, durante la generación de los modos efectivos se ha encontrado que el nivel de continuidad converge más rápidamente a uno para la recarga uniformemente distribuida que para los bombeos, lo cual se traduce en que la generación está controlada por la distribución espacial impuesta para la acción exterior puntual. La anterior característica se observa claramente en las figuras 6.15 y 6.16, donde se presentan los coeficientes de reparto acumulados para la acciones exteriores uniformemente distribuida y puntual, en los gráficos izquierdo y derecho, respectivamente.

Para finalizar, es oportuno comentar que los requerimientos de generación, en términos del número de modos efectivos que deben generarse para alcanzar el límite inferior del nivel de continuidad impuesto, disminuyen a medida que merma el grado de conexión entre el río y el acuífero, aunque no tan drásticamente como sucede en el acuífero rectangular de referencia. Por ejemplo, para una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$  se deben generar en total 590 modos, de los cuales 25 son efectivos para ambas acciones exteriores. Para la misma conductancia en el acuífero de referencia se debían generar 1010 modos, de los cuales 30 son efectivos para ambas acciones exteriores. Ahora bien, para  $C=50 \text{ m}^2/\text{d}$  se han generado 289 modos, de los cuales 15 son efectivos para ambas acciones exteriores. Para la misma conductancia, en el acuífero de referencia se debían generar 210 modos, de los cuales solamente 13 son efectivos para ambas acciones exteriores.

### 6.7.2. Análisis de los resultados de las simulaciones

Para la simulación reducida del flujo subterráneo en el acuífero rectangular heterogéneo mediante el MAV-CSEM se definen los siguientes parámetros de control: (i) caudales de intercambio entre el acuífero y toda la longitud del río y (ii) niveles piezométricos en los catorce puntos de observación, cuyas localizaciones se han presentado en la figura 6.9. En la figura 6.17 se presentan los hidrogramas subterráneos simulados para toda la longitud del río, correspondientes a cada una de las conductancias de bloque de contorno impuestas.



**Figura 6.17.** Hidrogramas subterráneos para el acuífero rectangular heterogéneo calculados mediante modelos numéricos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (abajo), correspondientes a diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero.

Índice [%]	Conductancia de río [ $m^2/d$ ]					
	5000	200	100	50	20	5
<b>RMS</b>	0.557	0.222	0.131	0.070	0.029	0.004
<b>E<sub>2</sub></b>	99.86	99.95	99.98	99.99	99.99	99.99
<b>BIAS</b>	0.200	0.153	0.125	0.110	0.089	0.045

**Tabla 6.4.** Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas subterráneos simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a los simulados por modelos numéricos en DF, para el acuífero rectangular heterogéneo, clasificados de acuerdo con el grado de su conexión con el río.

En ella se observa que los hidrogramas subterráneos de referencia, obtenidos mediante la resolución de los modelos mediante DF, se han reproducido adecuadamente al efectuar la reducción modal vía el MAV-CSEM. Mediante la inspección visual se nota que las mayores diferencias se encuentran en los picos del hidrograma para una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/d$ ; por el contrario, las recesiones han sido muy bien representadas para todas las conductancias impuestas. La buena representatividad de los hidrogramas de referencia,

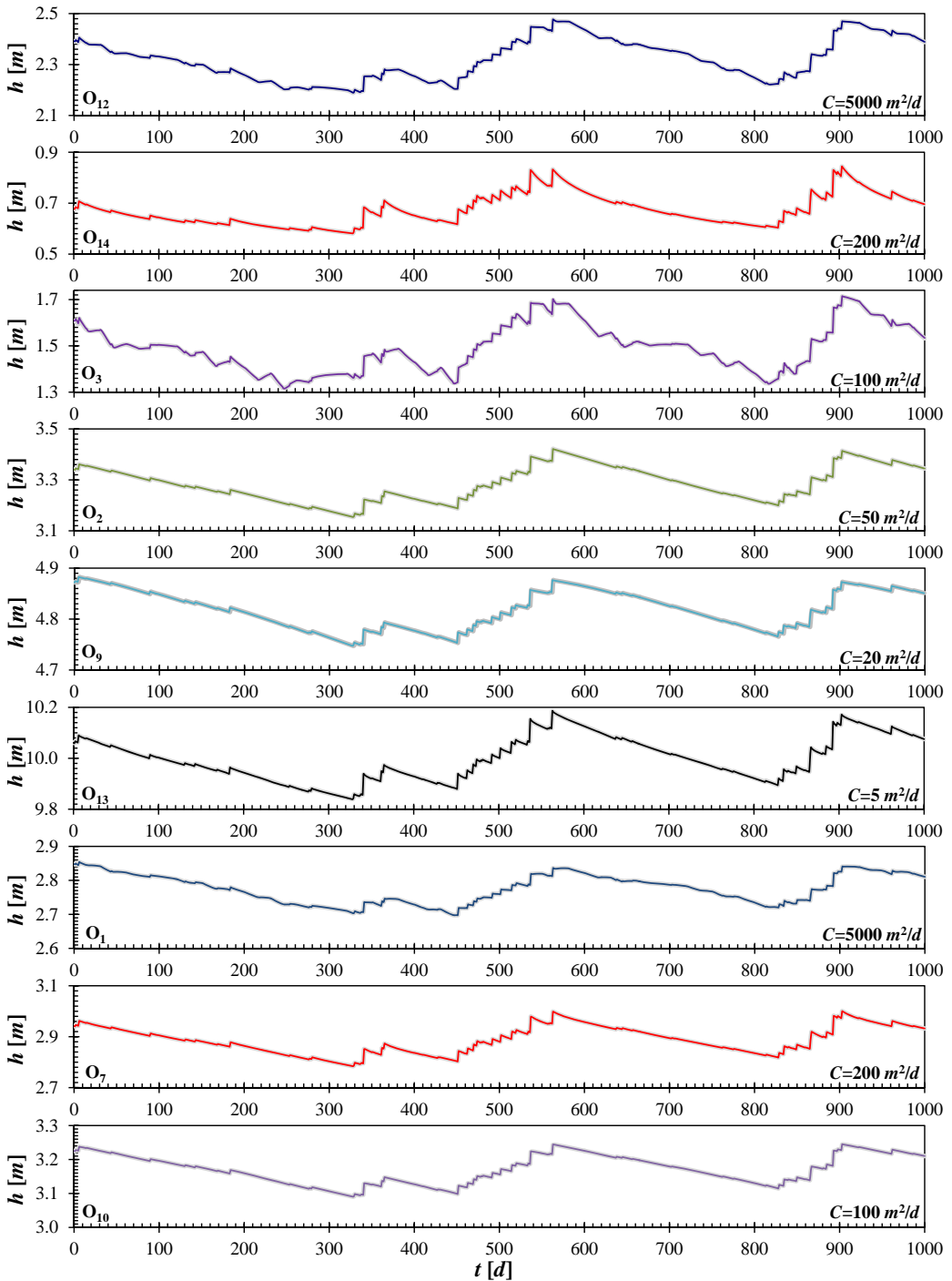
por parte de los simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, se verifica al estimar los índices de comportamiento correspondientes. Así, en la tabla 6.4 se presentan los **RMS**, **E<sub>2</sub>** y **BIAS** estimados para los hidrogramas antes mencionados, donde se observa que las estimaciones de **RMS** son menores al 1 %, las cuales disminuyen a medida que la conductancia impuesta sobre los bloques de río decrece. Asimismo, los mayores **RMS** se han estimado para los hidrogramas asociados a las mayores conductancias debido a las importantes diferencias entre los caudales pico simulados durante los episodios de recarga.

Cabe notar que se han obtenido excelentes estimaciones de la eficiencia de Nash-Sutcliffe para todos los hidrogramas simulados, las cuales se sitúan por encima de 99.85 % para todas las conductancias de río. De ahí se deduce que, a pesar de que existen diferencias en los caudales pico, especialmente para las mayores conductancias, éstas no son lo suficientemente grandes como para producir un decrecimiento considerable en las estimaciones de **E<sub>2</sub>**. Finalmente, las estimaciones de **BIAS** son menores del 0.2 %, indicando que, sin importar la conductancia considerada, los caudales subterráneos medios de referencia se representan adecuadamente en los hidrogramas simulados por los modelos reducidos.

A pesar de que los modelos de flujo del acuífero heterogéneo analizados en esta sección han incorporado la misma geometría e idénticas intensidades de recarga usadas para el acuífero de referencia, la respuesta de sus variables de estado a las acciones exteriores es más lenta, especialmente en lo concerniente a las relaciones río-acuífero. Esto se produce por que la banda de acuífero **Z<sub>3</sub>**, que exhibe la menor difusividad ( $T_3/S_3$ ), es adyacente al río. Es decir, **Z<sub>3</sub>** actúa como una barrera semipermeable, impidiendo que el caudal subterráneo responda rápidamente a las excitaciones generadas por la recarga o el bombeo en las bandas de acuífero **Z<sub>1</sub>** y **Z<sub>2</sub>**, las cuales manifiestan mayores difusividades y, por consiguiente, tienen una respuesta hidrológica más rápida. De lo anterior se deduce que los picos de los hidrogramas no son tan pronunciados y las recesiones no son tan empinadas como las obtenidos en las simulaciones para el acuífero de referencia, aún considerando que la existencia de zonas de extracción cerca de la zona de interacción río-acuífero puede llegar a aumentar dramáticamente las pendientes de las curvas de recesión.

Por otra parte, las alturas piezométricas simuladas en nueve de los catorce puntos de observación, presentados en la figura 6.9, se muestran en la figura 6.18. Éstas han sido obtenidas para diferentes valores de conductancia impuestos sobre los bloques de río. Los puntos analizados son **O<sub>1</sub>**, **O<sub>2</sub>**, **O<sub>3</sub>**, **O<sub>7</sub>**, **O<sub>9</sub>**, **O<sub>10</sub>**, **O<sub>12</sub>**, **O<sub>13</sub>** y **O<sub>14</sub>**, los cuales han sido escogidos por las siguientes razones: (i) **O<sub>1</sub>** y **O<sub>12</sub>** se encuentran situados cerca de las zonas de extracción **E<sub>4</sub>** y **E<sub>3</sub>**, por lo tanto los cambios en sus niveles piezométricos se encuentran fuertemente influenciados por los itinerarios de bombeo; (ii) **O<sub>3</sub>**, **O<sub>7</sub>** y **O<sub>14</sub>** se ubican cerca de la región de interacción río-acuífero; (iii) **O<sub>2</sub>** y **O<sub>9</sub>** están localizados en zonas del acuífero donde no se percibe notoriamente la influencia de las extracciones o de la relación entre río y acuífero; (iv) **O<sub>10</sub>** por estar localizado en las inmediaciones de la unión entre la zona de difusividad elevada, **Z<sub>1</sub>**, e intermedia, **Z<sub>2</sub>**; (v) **O<sub>13</sub>** por estar localizado en las inmediaciones de la unión entre la zona de difusividades intermedia y baja, **Z<sub>2</sub>** y **Z<sub>3</sub>**, respectivamente. Así, en todos los gráficos de la figura 6.18, las líneas de color representan las alturas piezométricas simuladas por modelos reducidos mediante el MAV-CSEM y la línea gruesa gris del fondo representa los niveles piezométricos de referencia, obtenidos resolviendo modelos en DF. Mediante una análisis visual sobre dicha figura, se deduce que las alturas piezométricas simuladas mediante los modelos reducidos por el MAV-CSEM reproducen adecuadamente las piezometrías de referencia. La anterior afirmación está apoyada en las estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado, consignadas en la tabla 6.5, y del coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe modificado, presentadas en la tabla 6.6. En el presente análisis no se han presentado las estimaciones del coeficiente





**Figura 6.18.** Alturas piezométricas para el acuífero rectangular heterogéneo calculadas mediante modelos numéricos resueltos por DF (línea gris gruesa) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (línea delgada coloreada), correspondientes a diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos a priori.

de sesgo relativo (**BIAS**) puesto que, en todos los modelos reducidos construidos para las diferentes conductancias de río, sus estimaciones fueron inferiores el 0.1 %. Por consiguiente, se concluye que los modelos reducidos reproducen adecuadamente los valores medios de las series piezométricas de referencia.

$C [m^2/d]$	$\mathbf{O}_9$	$\mathbf{O}_2$	$\mathbf{O}_{12}$	$\mathbf{O}_{13}$	$\mathbf{O}_3$	$\mathbf{O}_{14}$	$\mathbf{O}_1$	$\mathbf{O}_7$	$\mathbf{O}_{10}$
5000	1.32	1.45	2.81	2.15	3.04	2.50	2.75	2.05	1.35
200	1.14	1.24	2.25	1.28	2.53	1.98	2.18	1.24	1.16
100	0.86	0.93	1.83	0.98	2.11	1.54	1.79	0.93	0.89
50	0.37	0.42	1.20	0.51	1.50	1.17	1.13	0.54	0.40
20	0.21	0.23	0.85	0.61	1.18	0.63	0.79	0.60	0.31
5	0.12	0.15	0.72	0.33	0.84	0.43	0.61	0.25	0.17

**Tabla 6.5.** Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**) para las alturas piezométricas en el acuífero rectangular heterogéneo calculadas mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a las simuladas por los modelos numéricos resueltos por DF de referencia. Los resultados se han clasificado de acuerdo con el grado de conexión entre el río y el acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos a priori.

$C [m^2/d]$	$\mathbf{O}_9$	$\mathbf{O}_2$	$\mathbf{O}_{12}$	$\mathbf{O}_{13}$	$\mathbf{O}_3$	$\mathbf{O}_{14}$	$\mathbf{O}_1$	$\mathbf{O}_7$	$\mathbf{O}_{10}$
5000	98.70	98.62	97.95	98.00	97.50	98.40	98.11	98.03	98.73
200	99.15	98.94	98.50	98.70	98.10	99.07	98.63	98.77	99.19
100	99.22	99.10	98.70	99.18	98.50	99.14	99.15	99.19	99.25
50	99.63	99.50	99.10	99.44	99.04	99.51	99.32	99.54	99.70
20	99.84	99.80	99.37	99.90	99.22	99.75	99.54	99.90	99.92
5	99.95	99.95	99.58	99.93	99.34	99.83	99.77	99.97	99.97

**Tabla 6.6.** Estimaciones del coeficiente de eficiencia de Nash-Suttcliffe modificado ( $\mathbf{E}_2$ ) para las alturas piezométricas en el acuífero rectangular heterogéneo calculadas mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a las simuladas por los modelos numéricos resueltos por DF de referencia. Los resultados se han clasificado de acuerdo con el grado de conexión entre el río y el acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos a priori.

En las tablas 6.5 y 6.6 se observa que los mayores **RMS**, junto con las menores  $\mathbf{E}_2$ , se estiman para la altura piezométrica asociada al punto de observación  $\mathbf{O}_3$ , lo cual se debe a dos factores principales. Primero,  $\mathbf{O}_3$  se encuentra localizado cerca de la zona de extracción  $\mathbf{E}_5$  y, segundo,  $\mathbf{O}_3$  también se encuentra cerca de la región de interacción entre el río y el acuífero. Como se ha discutido previamente, la representación adecuada de las alturas piezométricas en regiones cercanas a los pozos, o al río, es más difícil de lograr mediante las simulaciones por el MAV-CSEM puesto que, en general, se necesita disponer de más modos efectivos que para otras localizaciones en el acuífero. Igualmente, se han obtenido obtenidos índices de comportamiento menos óptimos en  $\mathbf{O}_1$  y  $\mathbf{O}_{12}$ , con **RMS** cercanos al 2.5 % y  $\mathbf{E}_2$  por debajo del 98 % para  $C=5000 \text{ m}^2/d$ , puesto que las variaciones en sus alturas piezométricas dependen fuertemente del itinerario de bombeo impuesto en las zonas  $\mathbf{E}_3$  y  $\mathbf{E}_4$ . Para los puntos de observación mencionados hasta este momento, las estimaciones de los índices de comportamiento mejoran a medida que disminuye la conductancia impuesta sobre los bloques de río. Por ejemplo, **RMS** disminuye hasta ser menor que el 0.9 % y  $\mathbf{E}_2$  crece hasta cerca del 99.30 % para una conductancia de  $5 \text{ m}^2/d$ . De estos resultados se deduce que las estimaciones de los índices de comportamiento en estos puntos son bastante aceptables, lo cual muestra que el algoritmo propuesto para

la generación de los modos efectivos asegura una buena representatividad de las alturas piezométricas, inclusive aquellas localizadas en las zonas más críticas del acuífero.

Por el contrario, para los niveles piezométricos simulados en los puntos más alejados de las regiones críticas del acuífero se han estimado índices de comportamiento muy cercanos a los valores óptimos, incluso cuando se consideran conexiones río-acuífero casi perfectas. Por ejemplo, en los puntos  $\mathbf{O}_2$ ,  $\mathbf{O}_9$  y  $\mathbf{O}_{10}$  se han encontrado **RMS** menores al 1.5% y  $\mathbf{E}_2$  que superan el 98.5%. De nuevo, las estimaciones de dichos índices de comportamiento mejoran a medida que la conexión río-acuífero se vuelve más imperfecta. Así, para una conductancia de 5 m<sup>2</sup>/d, el **RMS** se ubica por debajo del 0.2% y la  $\mathbf{E}_2$  supera el 99.90%.

Por último, el hecho de que la velocidad de respuesta del acuífero sea relativamente baja tiene dos consecuencias favorables para efectos de reducción y simulación. La primera es disminuir los requerimientos computacionales necesarios para la generación modal y la construcción de la máscara de estados efectivos, incluso imponiendo un límite inferior de nivel de continuidad muy exigente del 99.9%. La segunda es que, dado que los picos de caudales subterráneos y niveles piezométricos no son muy pronunciados, las diferencias entre las simulaciones mediante los modelos reducidos por MAV-CSEM, con respecto a la de referencia obtenidas mediante modelos resueltos por DF, no tienen una importancia significativa en la estimación de los índices de comportamiento. Lo anterior, unido a los valores asumidos para los parámetros de generación de los modos efectivos, se traduce en que las estimaciones de **RMS** y  $\mathbf{E}_2$  sean cercanas a los valores óptimos, sin importar el grado de conexión río-acuífero asumido en el modelo.

## 6.8. Conclusiones y discusión

Se ha propuesto un marco conceptual para la reducción modal de modelos de flujo subterráneo, el cual ha sido denominado Método de los Autovalores con Compresión Selectiva y Enmascaramiento Modal (MAV-CSEM). Su aplicación práctica se basa en la definición de los conceptos de: (i) modo efectivo, (ii) modo residual, (iii) límite de participación modal, (iv) máscara de estados efectivos y (v) nivel de continuidad. La introducción de estos parámetros en el marco conceptual del MAV permite realizar la simulación del flujo subterráneo de la forma más reducida posible puesto que elimina los modos residuales que suelen encontrarse al aplicar la reducción clásico por truncamiento conservativo.

Debe hacerse hincapié en que el MAV-CSEM consta de un marco conceptual donde se unifican las dos componentes de la solución de la EDP de flujo subterráneo. Primero, se ha propuesto un novedoso esquema reducido enmascarado para aumentar la eficiencia de la evaluación de la ecuación de estados del acuífero. Asimismo, se han construido algoritmos para la generación eficiente de los modos efectivos del modelo de flujo subterráneo. Sobre este último aspecto, se ha propuesto la incorporación de los conceptos de límite de participación modal y nivel de continuidad para seleccionar los modos efectivos, construir la máscara de estados efectivos y como criterio de parada en los algoritmos de generación. La principal novedad de dichos generadores radica en que se han desarrollado criterios de base física para extraer las características asociadas con la solución del problema generalizado de autovectores que se plantea al reducir el modelo de flujo mediante MAV.

Dado que la premisa fundamental en la generación de los modos efectivos es mantener o incrementar la eficiencia computacional, sin sacrificar demasiada precisión en las simulaciones, es conveniente utilizar algoritmos secuenciales que revisen simultáneamente los límites de participación modales y los niveles de continuidad de los modos efectivos, para todas las acciones exteriores consideradas; esto con el propósito de determinar secuencialmente si: (i) un modo es efectivo y su autovector asociado puede incluirse en la matriz  $\hat{\mathbf{V}}$ ,

aplicando la ecuación (6.1) de filtrado, y (ii) se detiene la generación cuando la evaluación del criterio dado en (6.4) ha sobrepasado el nivel de continuidad impuesto a priori.

Aparte de lo anterior, debe mencionarse que los generadores de modos efectivos propuestos se han configurado e implementado teniendo en cuenta las principales características del problema generalizado de autovalores que se debe resolver en el MAV. Así, se ha tenido en cuenta el carácter disperso de las matrices de transmisividades y almacenamientos, su simetría, definición positiva y propiedades de inversión. A partir de estas características se han seleccionado los algoritmos más adecuados para efectuar las operaciones matemáticas de resolución de SELD, ortogonalización de vectores, deflación vectorial, diagonalización y factorización matriciales, preconditionamiento, entre otras. Lo anterior se define con el propósito de que las implementaciones computacionales construidas para asegurar que la generación de los modos efectivos sean muy eficientes. En consecuencia, teniendo en cuenta las características de las operaciones matemáticas antes mencionadas, se ha seleccionado el algoritmo de minimización del cociente de Rayleigh, de la forma dada por la iteración del MAGCD, y el método racional de Lanczos con reinicio explícito para la solución iterativa de los problemas de autovectores generalizados involucrados en la generación modal. La evaluación de los algoritmos de generación propuestos, en casos de aplicación sencillos, ha arrojado resultados satisfactorios, probando que los criterios propuestos para caracterizar la generación son robustos y, en efecto, ayudan a incrementar la eficiencia no sólo del cálculo de los modos efectivos, sino también de las simulaciones.

También se han presentado aplicaciones del MAV-CSEM en acuíferos de geometría rectangular, homogéneos o con heterogeneidad moderada, sometidos a acciones exteriores sencillas. La parametrización asumida para la generación de modos efectivos en los casos de aplicación ha sido bastante exigente para asegurar una adecuada representación del flujo en el acuífero. Los parámetros de control definidos en las simulaciones mediante modelos reducidos por MAV-CSEM han sido comparados con los simulaciones efectuadas por modelos resueltos en DF. De los resultados obtenidos en la generación de los modos efectivos cabe mencionar que, a medida que se incluye una mayor cantidad de modos efectivos, la aproximación de las variables de estado por el modelo reducido es más precisa, pero la construcción de la base del subespacio de autovectores efectivos,  $\hat{\mathbf{V}}$ , es más demandante en almacenamiento y procesamiento informático. A pesar de lo anterior, los resultados obtenidos para las relaciones río-acuífero y los niveles piezométricos son bastante aceptables en términos de las estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado ( $\mathbf{E}_2$ ) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**). Más aún, el comportamiento de dichos índices estimados para soluciones por el MAV-CSEM, en lo que se refiere a la parametrización de la conexión entre el río y el acuífero, es consistente con las estimaciones obtenidas para los modelos reducidos por el MAV con truncamiento conservativo, discutidas ampliamente en la sección 4.4.

En síntesis, el marco conceptual propuesto para el MAV-CSEM constituye un ambiente generalizado de simulación reducida modal robusto, eficiente, flexible y confiable que permite abordar la modelación reducida del flujo subterráneo en acuíferos lineales finamente discretizados en el espacio, que abarcan grandes extensiones de terreno y se encuentran integrados en sistemas de uso conjunto. Las ventajas en eficiencia del MAV-CSEM son más notables cuando el dominio espacial del acuífero lineal ha sido discretizado en decenas o cientos de miles de bloques, donde la simulación transitoria del flujo se realiza sobre largos periodos de tiempo, del orden de décadas, a resolución diaria o mensual. Lo anterior se muestra detalladamente en el capítulo 8. Allí se analizan las características del flujo en un acuífero heterogéneo irregular conectado con una red de drenaje sinuosa, el cual ha sido sometido a la acción simultánea de muchas acciones exteriores.

“Mi ambición es decir en diez oraciones  
lo que otros dicen en un libro entero”.  
*Friedrich Nietzsche*

# 7

## Reducción de modelos de flujo subterráneo mediante la transformación de Lanczos

### 7.1. Introducción

A pesar de que el MAV-CSEM es muy eficiente para efectuar la simulación reducida del flujo en un acuífero, su principal desventaja es que los algoritmos existentes para calcular los modos efectivos y generar la máscara de estados correspondiente, pueden llegar a ser muy demandantes computacionalmente cuando se analizan acuíferos irregulares, heterogéneos, de respuesta rápida y de gran tamaño. Cuando la discretización espacial de un acuífero es muy fina y se requiere analizar diferentes configuraciones geométricas o valores de parámetros del flujo en el acuífero dentro de un modelo de uso conjunto, la aplicación del MAV-CSEM requeriría el cálculo de los modos para los diferentes valores de dichos parámetros, lo cual implica efectuar muchas operaciones y, en consecuencia, su ejecución deja de ser eficiente. Una mejor opción es usar el MLAN para construir, de forma más sencilla, un subespacio de Krylov de reducción del modelo de flujo. En este capítulo se recogen las propuestas de diferentes investigadores (Dunbar y Woodbury, 1989; Gambolati, 1993; Zhang, 2000; Zhang *et al.*, 2000; Woodbury y Zhang, 2001) para construir un marco eficiente de reducción de modelos de flujo subterráneo a incorporarse en la gestión conjunta del recurso hídrico. También se proponen criterios para detener la iteración de Lanczos que se usa en la construcción del subespacio de Krylov y se extiende el planteamiento del procedimiento matemático de reducción para tener en cuenta muchas acciones exteriores actuando simultáneamente sobre el acuífero.

Finalmente, se presentan dos aplicaciones sencillas del MLAN. En primera instancia, la reducción del modelo de flujo subterráneo para el acuífero rectangular de referencia, mostrando la influencia que tiene el número de vectores de Lanczos que forman el subespacio de Krylov de reducción sobre la representatividad de los resultados simulados. Pos-

teriormente, se muestra la aplicación del MLAN sobre el acuífero rectangular heterogéneo sometido a acciones exteriores sencillas, presentado en la sección 6.7. En ambos casos, los resultados de las simulaciones obtenidas por MLAN se comparan con los obtenidos mediante modelos de referencia resueltos mediante las DF tradicionales.

## 7.2. Procedimiento de reducción de un modelo de flujo subterráneo mediante el MLAN

El procedimiento de reducción de modelos de flujo subterráneo mediante el MLAN sigue el principio de superposición planteado en la sección 2.7, de acuerdo con el esquema de la figura 2.4. Según éste, deben resolverse dos problemas, uno permanente con condiciones de contorno originales, que considera acciones exteriores nulas, y otro transitorio con condiciones de contorno nulas, donde las condiciones iniciales vienen dadas como  $w(x, y, 0) = h(x, y, 0) - u(x, y) \quad \forall x, y \in \Omega$  y  $t = 0$ , para cada acción exterior considerada. Éstas soluciones se superponen en cada intervalo de simulación y los diferentes parámetros de control del acuífero se evalúan según las expresiones planteadas en el apartado 2.9.

### 7.2.1. El problema en regimen permanente

El tratamiento de la componente en régimen permanente de un modelo reducido ha sido comentado en el apartado 2.8.2 y consiste, básicamente, en resolver un SLED usando métodos eficientes. De lo anterior, se obtiene el vector  $\mathbf{u}$  de alturas piezométricas en cada uno de los nodos en los cuales se ha representado el dominio espacial del acuífero, de acuerdo con la ecuación (2.27). Posteriormente, con base en la solución para  $\mathbf{u}$ , se deducen convenientemente las partes permanentes de los parámetros de control seleccionados.

### 7.2.2. El problema en regimen transitorio

La solución del problema transitorio mediante el MLAN se efectúa aplicando los siguientes pasos: (i) se construye la base de un subespacio ortonormal de Krylov, cuya forma canónica viene dada en la ecuación (6.33), ejecutando la iteración racional de Lanczos y (ii) se aplica el esquema de proyección de la ecuación matricial-diferencial de flujo subterráneo, presentada en (2.28), sobre el subespacio de Krylov generado por los vectores de Lanczos, de forma análoga a la descrita en las expresiones (2.4) y (2.5).

### Solución para el problema con acciones exteriores nulas

En el apartado 4.2.2 se demostró que la solución numérica de la EDP de flujo subterráneo en un acuífero lineal con parámetros y condiciones de contorno invariantes en el tiempo, sometido a acciones exteriores nulas, se obtiene resolviendo: (i) un problema generalizado de autovalores que depende de la discretización por DF de las derivadas parciales y que es función del espacio y (ii) un conjunto EDO lineales de primer orden que dependen del tiempo. Según las expresiones (4.4) y (4.5), dichos problemas se escriben como:

$$\mathbf{AV} = -\mathbf{ASV}$$

$$\frac{d\Phi(t)}{dt} + \mathbf{\Lambda}\Phi(t) = \mathbf{0}$$

donde  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es una matriz cuadrada de transmisividades simétrica y definida positiva,  $\mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  es la matriz diagonal de almacenamientos,  $\mathbf{\Lambda} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz diagonal de autovalores,  $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz ortonormal de autovectores y  $\mathbf{\Phi}(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de estados del acuífero,  $n$  es el número de nodos en los cuales se ha discretizado el dominio espacial del acuífero,  $m$  es el número de modos considerados y las alturas piezométricas del problema transitorio se calculan como  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{V}\mathbf{\Phi}(t)$ . Para el desarrollo matemático que se presenta a continuación, se ha asumido que el esquema de reducción cuenta con  $m$  vectores de Lanczos y una matriz tridiagonal simétrica  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  que aproxima cierta fracción inferior del espectro del modelo de flujo subterráneo. Asimismo, se considera el procedimiento para transformar un problema generalizado de autovalores, ecuación (4.4), a una forma equivalente expresada en función de los vectores de Lanczos, como ha sido discutido ampliamente en el apartado 6.5.4. Debe recordarse que, en el caso particular de la EDP de flujo subterráneo, dicha transformación se ejecuta en función de la matriz de transmisividades inversa desplazada y se expresa de la siguiente manera:

$$(\mathbf{A} - \sigma\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}\mathbf{V} = \mathbf{\Omega}\mathbf{V}$$

donde  $\sigma$  es un desplazamiento espectral y  $\mathbf{\Omega} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz diagonal de autovalores desplazados, en la cual cada componente se escribe como  $\omega_i = (\lambda_i - \sigma)^{-1}$  para  $i = 1, \dots, m$ . Ahora bien, como se ha presentado en el apartado 6.5.4, siguiendo las ecuaciones (6.27) y (6.28), al ejecutar  $m$  pasos de la iteración racional de Lanczos, es posible expresar un problema generalizado de autovalores mediante la siguiente forma alternativa:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^*\mathbf{S}(\mathbf{A} - \sigma\mathbf{S})^{-1}\mathbf{S}\mathbf{X} &= \mathbf{\Pi} \\ \mathbf{X}^*\mathbf{S}\mathbf{X} &= \mathbf{I} \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de vectores de Lanczos y  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{m \times m}$  es la matriz tridiagonal de coeficientes, ambas generadas mediante la ejecución de  $m$  pasos de la iteración racional de Lanczos. En particular, los autovalores de  $\mathbf{\Pi}$  son buenas aproximaciones de los autovalores cercanos al desplazamiento  $\sigma$  y corresponden al problema generalizado que se plantea en la solución de la EDP de flujo subterráneo por el MAV, es decir, de la ecuación (4.4). La anterior característica hace posible que las ecuaciones (6.27) y (6.28) puedan utilizarse como una forma alternativa para reducir un modelo lineal de flujo subterráneo, siempre y cuando éste manifieste parámetros y condiciones de contorno invariantes en el tiempo.

### Solución para el problema con acciones exteriores dadas

Ahora se desea resolver la ecuación (2.28) sujeta a condiciones de contorno nulas y a condiciones iniciales dadas según la expresión (4.2), utilizando las relaciones de reducción (6.27) y (6.28), impuestas por la iteración racional de Lanczos. Igualmente, con el propósito de considerar simultáneamente el efecto producido por muchas acciones exteriores sobre el acuífero, se incluyen los términos que representan sus distribuciones e intensidades, de acuerdo a la definición (2.29). Por lo tanto, la EDP de flujo subterráneo para el problema transitorio, discretizada espacialmente mediante las DF según la ecuación (2.30), es:

$$\mathbf{A}\mathbf{w} + \mathbf{\Psi}\mathbf{r} = \mathbf{S}\frac{d\mathbf{w}}{dt}$$

donde todos los términos han sido definidos apropiadamente en el apartado 2.8.3. Esta ecuación debe modificarse ejecutando un desplazamiento sobre la matriz de transmisividades con el fin de asegurar la adecuada aplicación de la transformación espectral del MLAN

racional (Zhang, 2000; Woodbury y Zhang, 2001). Para conseguir lo anterior, se suma y se resta el término  $\sigma \mathbf{S} \mathbf{w}$  de su lado izquierdo, obteniéndose que:

$$(\mathbf{A} - \sigma \mathbf{S}) \mathbf{w} - \mathbf{S} \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{\Psi} \mathbf{r} + \sigma \mathbf{S} \mathbf{w} = \mathbf{0}$$

la cual, en términos de la matriz de transmisividades inversa y desplazada, que se define como  $\mathbf{A}_\sigma = \mathbf{A} - \sigma \mathbf{S} \in \mathbb{R}^{n \times n}$  con dimensiones de  $[\text{L}^2/\text{T}]$ , toma la siguiente forma:

$$\mathbf{w} - \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \frac{d\mathbf{w}}{dt} + \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{\Psi} \mathbf{r} + \sigma \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (7.1)$$

A continuación, siguiendo el esquema de reducción por el MLAN racional, se establece que la solución para las alturas piezométricas transitorias viene dada como  $\mathbf{w}(t) = \mathbf{X} \Phi_{\text{L}}(t)$ , donde  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  es la matriz de vectores de Lanczos  $[\text{L}^{-1}]$  y  $\Phi_{\text{L}}(t) \in \mathbb{R}^m$  es el vector de estados de Lanczos del modelo reducido  $[\text{L}^2]$ . Así, reemplazando dicho esquema de solución en la ecuación (7.1) y premultiplicando todos sus términos por  $\mathbf{X}^* \mathbf{S}$ , se obtiene que:

$$\begin{aligned} \mathbf{X} \Phi_{\text{L}}(t) - \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{X} \frac{d\Phi_{\text{L}}(t)}{dt} + \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{\Psi} \mathbf{r} + \sigma \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{X} \Phi_{\text{L}}(t) &= \mathbf{0} \\ \mathbf{X}^* \mathbf{S} \mathbf{X} \Phi_{\text{L}}(t) - \mathbf{X}^* \mathbf{S} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{X} \frac{d\Phi_{\text{L}}(t)}{dt} + \mathbf{X}^* \mathbf{S} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{\Psi} \mathbf{r} + \sigma \mathbf{X}^* \mathbf{S} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{S} \mathbf{X} \Phi_{\text{L}}(t) &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

la cual se simplifica sustituyendo las definiciones (6.27) y (6.28), inherentes a la generación de los vectores en la iteración de Lanczos, que aproximan los modos del problema en la solución para acciones exteriores nulas. Así pues, efectuando algunas operaciones, se obtiene el siguiente sistema reducido de EDO de primer orden para los estados de Lanczos:

$$\mathbf{\Pi} \frac{d\Phi_{\text{L}}(t)}{dt} - \mathbf{G} \mathbf{r} = (\sigma \mathbf{\Pi} - \mathbf{I}) \Phi_{\text{L}}(t) \quad (7.2)$$

donde  $\mathbf{G} = \mathbf{X}^* \mathbf{S} \mathbf{A}_\sigma^{-1} \mathbf{\Psi} \in \mathbb{R}^{m \times n_a}$  y  $n_a$  es el número de acciones exteriores actuando sobre el acuífero. Para asegurar la eficiencia de la reducción, la matriz  $\mathbf{G} [\text{T}/\text{L}]$  debe calcularse antes de comenzar la simulación, para lo cual se resuelven  $n_a$  SELD de la forma  $\mathbf{A}_\sigma \mathbf{c}_i = \psi_i$ , donde  $\psi_i \in \mathbb{R}^n$  es el vector de distribución de la  $i$ -ésima acción exterior,  $\mathbf{c}_i \in \mathbb{R}^n$  es un vector auxiliar de cálculo e  $i = 1, 2, \dots, n_a$ . Por lo tanto, se escribe  $\mathbf{G} = \mathbf{X}^* \mathbf{S} \mathbf{C}$ , siendo  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n \times n_a}$  una matriz auxiliar cuyas columnas están formadas por los vectores  $\mathbf{c}_i [\text{T}/\text{L}^2]$ .

A diferencia del esquema de reducción por el MAV-CSEM, el MLAN no permite obtener una solución analítica directa para los estados del acuífero. Esto se debe a que la matriz  $\mathbf{\Pi} [\text{T}]$  es tridiagonal, de manera que no puede separarse explícitamente la influencia de cada vector de Lanczos sobre el vector total de estados del acuífero. La consecuencia de lo anterior es que la integración temporal de (7.2) debe efectuarse numéricamente. Entonces, aplicando un esquema Euleriano implícito hacia adelante, la derivada temporal de los estados de Lanczos para el intervalo  $(t, t+1)$  se aproxima como sigue:

$$\frac{d\Phi_{\text{L}}(t)}{dt} = \frac{\Phi_{\text{L}}^{t+1} - \Phi_{\text{L}}^t}{\Delta t} \quad (7.3)$$

donde  $\Phi_{\text{L}}^{t+1}, \Phi_{\text{L}}^t \in \mathbb{R}^m$  son los vectores de estado de Lanczos evaluados en los instantes  $t+1$  y  $t$ , respectivamente, que acotan un intervalo temporal  $\tau$  de duración  $\Delta t$ . Sustituyendo (7.3) en (7.2) y ordenando términos, se deduce la siguiente expresión de simulación:

$$\left( \frac{\mathbf{\Pi}}{\Delta t} + \mathbf{I} + \sigma \mathbf{\Pi} \right) \Phi_{\text{L}}^{t+1} = \frac{\mathbf{\Pi}}{\Delta t} \Phi_{\text{L}}^t + \mathbf{G} \mathbf{r} \quad (7.4)$$



que consiste de un SELD tridiagonal, simétrico y definido positivo, cuya resolución proporciona los estados de Lanczos del acuífero al final de cada subintervalo de simulación. Al respecto, se recomienda resolver los SELD que involucran la matriz  $\mathbf{A}_\sigma$  mediante métodos preconditionados por gradiente biconjugado, MINRES o GMRES. Lo anterior se define con el propósito de poder afrontar la posible pérdida de la definición positiva en dichos SELD, causada al efectuar el respectivo desplazamiento espectral sobre  $\mathbf{A}$ .

Cabe mencionar que en el anterior desarrollo matemático se ha asumido disponer de una base (semi)ortogonal para un subespacio de Krylov que se haya generado ejecutando  $m \ll n$  pasos de la iteración racional de Lanczos que se muestra en el algoritmo 7.1. Ahora bien, los criterios para detener la generación del subespacio de proyección del modelo fueron propuestos por Dunbar y Woodbury (1989). Éstos se basan en la introducción del concepto del *factor de participación*  $[L^{-1}]$ , definido como la fracción de las acciones exteriores que es asumida por cada vector de Lanczos que compone el subespacio de proyección. Así, cuando las acciones exteriores pueden descomponerse según la ecuación (2.29), el factor de participación del  $i$ -ésimo vector de Lanczos asociado con la  $j$ -ésima acción exterior es:

$$p_{i,j} = \mathbf{x}_i^* \psi_j \quad (7.5)$$

con  $i = 1, 2, \dots, n$ ,  $j = 1, 2, \dots, n_a$  y  $\psi_j \in \mathbb{R}^n$  es el vector de acciones elementales invariantes en el tiempo de simulación para la  $j$ -ésima acción exterior. En términos de volumen de agua asumido por cada vector de Lanczos, el factor de participación queda:

$$p_{i,j} = f_i \mathbf{x}_i^* \psi_j \quad (7.6)$$

donde  $f_i [L]$  es el volumen encerrado por el  $i$ -ésimo vector de Lanczos y se calcula como:

$$f_i = \sum_{k=1}^n s_{k,k} x_{k,i} \quad (7.7)$$

en la cual  $s_{k,k}$  es el  $k$ -ésimo elemento diagonal de la matriz  $\mathbf{S}$  y  $x_{k,i}$  es el elemento de la matriz de vectores de Lanczos,  $\mathbf{X}$ , situado en la  $k$ -ésima fila y la  $i$ -ésima columna.

Debido a la dificultad de establecer una cota inferior apropiada para el factor de participación, es más conveniente usar los *factores de participación volumétrica acumulados* como criterios para detener al generador racional de Lanczos. Así, aplicando la ecuación de continuidad sobre las acciones exteriores actuando sobre el acuífero, los factores de participación volumétrica acumulados tienen una cota superior unitaria y se definen análogamente a los coeficientes de reparto del MAV según la ecuación (4.26), con lo cual:

$$pa_{i,j} = \sum_{i=1}^m p_{i,j} \quad i = 1, 2, \dots, m; j = 1, 2, \dots, n_a$$

donde  $pa_{i,j}$  es el factor de participación acumulada del  $i$ -ésimo vector de Lanczos que corresponde a la  $j$ -ésima acción exterior considerada. Entonces, el criterio de parada asumido para la generación de la base del subespacio de Krylov establece que ésta se detiene cuando todos los factores de participación acumulados asociados al  $i$ -ésimo vector de Lanczos,  $\mathbf{x}_i$ , son mayores que cierto porcentaje de cumplimiento de la ecuación de continuidad,  $\xi$ , para el volumen que entra al acuífero proveniente de la acción exterior respectiva, expresado como una diferencia con respecto a la cota superior unitaria que se denomina  $\epsilon = \pm 1 \pm \xi$ .

Para terminar, el procedimiento de simulación reducida mediante el MLAN racional con desplazamiento espectral se resume en el algoritmo 7.2. De éste se deduce que la eficiencia de la reducción viene condicionada por disponer de implementaciones eficientes

---

**Algoritmo 7.1:** Generador racional de Lanczos para el MLAN. Tomado y adaptado de diferentes fuentes (Ericsson y Ruhe, 1980; Nour-Omid *et al.*, 1987; Bathe, 1996; Zhang, 2000; Zhang *et al.*, 2000; Woodbury y Zhang, 2001).

---

**Entrada:** Matrices  $\mathbf{A}$ ,  $\mathbf{S}$ , vector residual inicial  $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^n$ , desplazamiento  $\sigma$ , tamaño máximo del subespacio de Krylov  $m$ .

**Salida :** Matrices de vectores de Lanczos  $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y tridiagonal  $\mathbf{\Pi} \in \mathbb{R}^{m \times m}$ .

```

1  $\mathbf{A}_\sigma = \mathbf{A} - \sigma \mathbf{S}$ ;
2  $\beta_1 = (\mathbf{r}_0^* \mathbf{S} \mathbf{r}_0)^{1/2}$ ;
3  $\mathbf{x}_1 = \mathbf{r}_0 / \beta_1$ ;
4 para  $i = 1, 2, \dots$  hacer // Ejecutar iteración
5   Resolver  $\mathbf{A}_\sigma \tilde{\mathbf{r}}_i = \mathbf{S} \mathbf{r}_{i-1}$  para  $\tilde{\mathbf{r}}_i$ ;
6    $\tilde{\mathbf{r}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i - \beta_i \mathbf{x}_{i-1}$ ;
7    $\alpha_i = \mathbf{x}_i^* \mathbf{S} \tilde{\mathbf{r}}_i$ ;
8    $\tilde{\mathbf{r}}_i = \tilde{\mathbf{r}}_i - \alpha_i \mathbf{x}_i$ ;
9   ROP sobre  $\tilde{\mathbf{r}}_i$  con respecto a  $\mathbf{X}_i$  para obtener  $\mathbf{r}_i$  (algoritmo 6.11);
10   $\beta_{i+1} = (\mathbf{r}_i^* \mathbf{S} \mathbf{r}_i)^{1/2}$ ;
11  si  $\beta_{i+1} = 0 \vee i = m$  entonces salir del bucle para  $i$ ;
12   $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{r}_i / \beta_{i+1}$ ;
13   $f_{i+1} = \sum_{k=1}^{n_a} s_{k,k} x_{k,i+1}$ ;
14  para  $j = 1, 2, \dots, n_a$  hacer // Factores de participación
15  |    $p_{i+1,j} = f_{i+1} \mathbf{x}_{1+}^* \psi_j$ ;
16  |    $pa_{i+1,j} = pa_{i,j} + p_{i+1,j}$ ;
17  |   si  $pa_{i+1,j} < |\epsilon|$  entonces  $h = h + 1$ ;
18  fin
19  si  $h = n_a$  entonces termina la generación;
20 fin

```

---



---

**Algoritmo 7.2:** MLAN racional con desplazamiento espectral

---

**Entrada:** Un modelo de flujo subterráneo con dominio espacial discretizado por DF.

**Salida :** Parámetros de control deseados para la planificación evaluados para cada instante  $t$  y/o agregados durante cada intervalo de simulación,  $\mathbf{c}(t)$  y  $\mathbf{c}(\tau)$ , respectivamente.

```

1 Ensamblar las matrices de simulación que corresponden a la parte espacial de la solución por el MLAN:  $\mathbf{A}_\sigma$ ,  $\mathbf{S}$ ,  $\mathbf{\Psi}$  y vectores de corrección por no linealidades de las condiciones de contorno.
2 Aplicar el principio de superposición para reducción, encontrar la solución permanente  $\mathbf{u}$  y la condición inicial para la solución transitoria  $\mathbf{w}_0 = \mathbf{h}_0 - \mathbf{u}$ .
3 Generar la matriz de vectores de Lanczos,  $\mathbf{X}$ , y la matriz tridiagonal reducida,  $\mathbf{\Pi}$ , mediante la aplicación de  $p$  pasos de la iteración racional de Lanczos, de acuerdo con el algoritmo 7.1.
4 Calcular implícitamente la matriz  $\mathbf{G}$  ejecutando las siguientes operaciones: (i) resolver  $n_a$  SELD de la forma  $\mathbf{A}_\sigma \mathbf{c}_i = \psi_i$  para  $i = 1, 2, \dots, n_a$  y (ii)  $\mathbf{G} = \mathbf{X}^* \mathbf{S} \mathbf{C}$ .
5 Definir los parámetros de control,  $\mathbf{c}(t)$  o  $\mathbf{c}(\tau)$ , y calcular las matrices de vectores de Lanczos reducidas  $\mathbf{X}_\tau$  usando ecuaciones desde (2.35) hasta (2.44).
6 Obtener el estado de Lanczos inicial,  $\Phi_{\mathbf{L}}(0)$ , a partir de  $\mathbf{w}_0$ ,  $\Phi_{\mathbf{L}}(0) = \mathbf{X}^{-1} \mathbf{w}_0 = \mathbf{X}^* \mathbf{S} \mathbf{w}_0$ .
7 para  $\tau = 1$  hasta  $T$  hacer
8 |   Dividir el intervalo  $\tau = (t, t + 1) = (t_0, t_f)$  en  $n_s$  subintervalos iguales, con  $n_s$  par, de manera que  $t_i = t_0 + ih$ , donde  $h = (t_f - t_0) / n_s = \Delta t / n_s$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n_s$ ;
9 |   Resolver  $n_s$  SLED tridiagonales dados por (7.4) para encontrar los estados de Lanczos  $\Phi_{\mathbf{L}}^{t_0}, \Phi_{\mathbf{L}}^{t_1}, \dots, \Phi_{\mathbf{L}}^{t_f}$  al final de cada subintervalo;
10 |   Aplicar la regla de Simpson 1/3 para cada subintervalo  $(t_{j-1}, t_{j+1})$ , con  $j = 1, 3, 5, \dots, n_s - 1$ ;
11 |   Calcular el estado de Lanczos del acuífero al final del intervalo  $\tau$ ,  $\Phi_{\mathbf{L}}(t + 1)$ ;
12 |   Obtener el estado de Lanczos integrado del acuífero para el intervalo  $\tau$ ,  $\Theta_{\mathbf{L}}(\tau)$ , aplicando (7.8);
13 |   Calcular  $\mathbf{c}(t)$  y/o  $\mathbf{c}(\tau)$  usando ecuaciones desde (2.35) hasta (2.44);
14 fin

```

---

para ejecutar el generador racional de Lanczos, presentado en el algoritmo 7.1, y para resolver los SELD de la ecuación (7.4), los cuales calculan los estados de Lanczos al final de cada intervalo de simulación. Los detalles de implementación acerca de dichos tópicos han sido discutido ampliamente en los apartados 6.5.1 y 6.5.4. Por otra parte, la condición inicial del problema transitorio se deduce de la relación de ortonormalidad impuesta para los vectores de Lanczos en la ecuación (6.28). Por lo tanto,  $\Phi_{\mathbf{L}}(0) = \mathbf{X}^{-1}\mathbf{w}_0 = \mathbf{X}^*\mathbf{S}\mathbf{w}_0$ , donde  $\mathbf{w}_0 \in \mathbb{R}^n$  es un vector que contiene las alturas piezométricas transitorias iniciales en todos los nodos del acuífero, las cuales cumplen con la ecuación (4.2). Además, debe recordarse que los parámetros de control, definidos antes de ejecutar la simulación transitoria, se obtienen aplicando las ecuaciones desde (2.34) hasta (2.45), donde se reemplaza la matriz genérica de reducción,  $\mathbf{V}$ , por la matriz de vectores de Lanczos,  $\mathbf{X}$ .

### 7.2.3. Volumen de intercambio acuífero-masa superficial de agua

De forma análoga al procedimiento presentado en el apartado 4.2.3, los volúmenes acumulados de intercambio río-acuífero se obtienen aplicando la ecuación (4.18), reemplazando los estados integrados del acuífero por los estados integrados de Lanczos,  $\Theta_{\mathbf{L}}(\tau) \in \mathbb{R}^m$ . Dado que, para la simulación reducida mediante el MLAN, no es posible obtener una ecuación de estado explícita en función del tiempo, la integración temporal de los estados de Lanczos debe realizarse numéricamente. Para ello, se usa la regla de Simpson 1/3, planteándose el siguiente procedimiento: (i) se divide el intervalo  $\tau = (t, t+1) = (t_0, t_f)$  en  $n_s$  subintervalos iguales, con  $n_s$  par, de manera que  $t_i = t_0 + ih$ , donde  $h = (t_f - t_0)/n_s$  para  $i = 0, 1, 2, \dots, n_s$ ; (ii) se resuelven los  $n_s$  SELD tridiagonales dados por la ecuación (7.4) para encontrar los  $n_s$  estados de Lanczos  $\Phi_{\mathbf{L}}^{t_0}, \Phi_{\mathbf{L}}^{t_1}, \dots, \Phi_{\mathbf{L}}^{t_f}$ ; (iii) se aplica la regla de Simpson en cada subintervalo  $(t_{j-1}, t_{j+1})$ , con  $j = 1, 3, 5, \dots, n_s - 1$ ; (iv) se suman los resultados para encontrar la integral definida deseada. Lo anterior se resume mediante la siguiente ecuación (Press *et al.*, 1986, 1997; Rao, 2007; Grasselli y Pelinovsky, 2008):

$$\Theta_{\mathbf{L}}(\tau) = \int_{t=t_0}^{t+1=t_f} \Phi_{\mathbf{L}}(t) dt \approx \frac{h}{3} \left[ \Phi_{\mathbf{L}}^{t_0} + 2 \sum_{j=1}^{n/2-1} \Phi_{\mathbf{L}}^{t_{2j}} + 4 \sum_{j=1}^{n/2} \Phi_{\mathbf{L}}^{t_{2j-1}} + \Phi_{\mathbf{L}}^{t_f} \right] \quad (7.8)$$

La ecuación (7.8), junto con (2.40), se usa para cuantificar el volumen de agua intercambiado entre la masa superficial y el acuífero para un subconjunto  $\mathbb{I}$  que contiene  $l$  bloques activos, cada uno de ellos con una numeración topológica definida según la discusión del apartado 2.8.1. Así, sustituyendo  $\Theta_{\mathbf{L}}$  por  $\Phi_{\mathbf{L}}$  en (2.40) se llega a:

$$v_{\tau}^{\mathbb{I}}(\tau) = \left[ \sum_{z=1}^l cv_{k_z} \Delta x_{k_z} \Delta y_{k_z} \mathbf{X}_{k_z:k_z,1:m} \right] \Theta_{\mathbf{L}}(\tau) + \sum_{z=1}^l cv_{k_z} \Delta x_{k_z} \Delta y_{k_z} (u_{k_z} - u_{k_z}^e) \Delta t \quad (7.9)$$

que es análoga a la ecuación (2.40), pero se encuentra integrada en el tiempo.

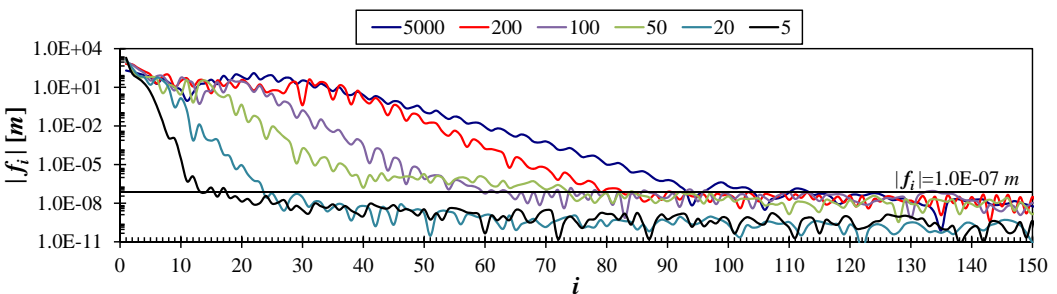
## 7.3. Aplicación del MLAN al caso de referencia

A continuación se presenta la aplicación del MLAN para reducir los modelos de flujo subterráneo del acuífero rectangular de referencia sometido a acciones exteriores distribuida y puntual, de acuerdo a las configuraciones geométricas mostradas en las figuras 3.2 y 3.3. La magnitud y variabilidad temporal de ambas acciones exteriores han sido presentadas previamente en las figuras 3.7 y 3.10 para acciones distribuida y puntual, respectivamente. La implementación de los modelos numéricos de referencia, resueltos por

DF, y la discretización espacial utilizada para la reducción es idéntica a la descrita en las secciones 3.6 y 4.4. Asimismo, para considerar diferentes escenarios en la parametrización de la relación río-acuífero, las conductancias en los bloques de contorno de río varían en escala logarítmica entre 5000 y 5 m<sup>2</sup>/d y las localizaciones donde se controla la variación temporal de las alturas piezométricas en los modelos sometidos a acción distribuida son aquellas que han sido previamente definidas en el apartado 3.6.2. Por último, los resultados de las simulaciones del flujo subterráneo se analizan mediante un análisis de sensibilidad que considera el aumento del tamaño del subespacio de Krylov utilizado para la reducción, con respecto a la variación del grado de conexión entre el río y el acuífero.

### 7.3.1. Características de los subespacios de Krylov generados

Antes que nada, es pertinente discutir acerca de las principales características exhibidas por los subespacios de Krylov construidos para la reducción de los modelos. Los vectores residuales iniciales de generación ( $\mathbf{r}_0$ ) se han obtenido implementando modelos de flujo en régimen permanente que se resuelven para las alturas piezométricas mediante DF. Así, sobre cada uno de dichos modelos se impone una recarga uniformemente distribuida de  $8 \times 10^{-5}$  m/d, la cual produce un caudal de descarga al río de 3000 m<sup>3</sup>/d, para cada una de las seis conductancias consideradas. Seguidamente, los vectores con las alturas piezométricas simuladas, ordenadas de acuerdo con la numeración topológica de los bloques en los cuales se ha discretizado el acuífero, se normalizan para obtener el vector residual inicial deseado. Luego se ejecuta el generador racional de Lanczos propuesto en el algoritmo 7.1, hasta asegurar que  $pa_{i,1} > \xi = 0.9999$  para las dos acciones exteriores consideradas. En este punto cabe resaltar que, para acción distribuida, los primeros vectores residuales sin normalizar corresponden a las condiciones iniciales impuestas sobre las simulaciones transitorias. En este caso de aplicación, el criterio de parada de la generación también ha incorporado un número mínimo de vectores generadores de la base del subespacio de Krylov; esto con el propósito de hacer posible la ejecución del análisis de sensibilidad de los índices del comportamiento de los diferentes parámetros de control, con respecto al número de vectores de Lanczos considerados en el modelo reducido. Se ha establecido que dicho tamaño mínimo es de 500 vectores.



**Figura 7.1.** Valores absolutos de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos para diferentes grados de conexión entre el acuífero y un río adyacente. La línea horizontal señala el valor límite donde se cumple que  $|f_i| \leq 10^{-7}$  m.

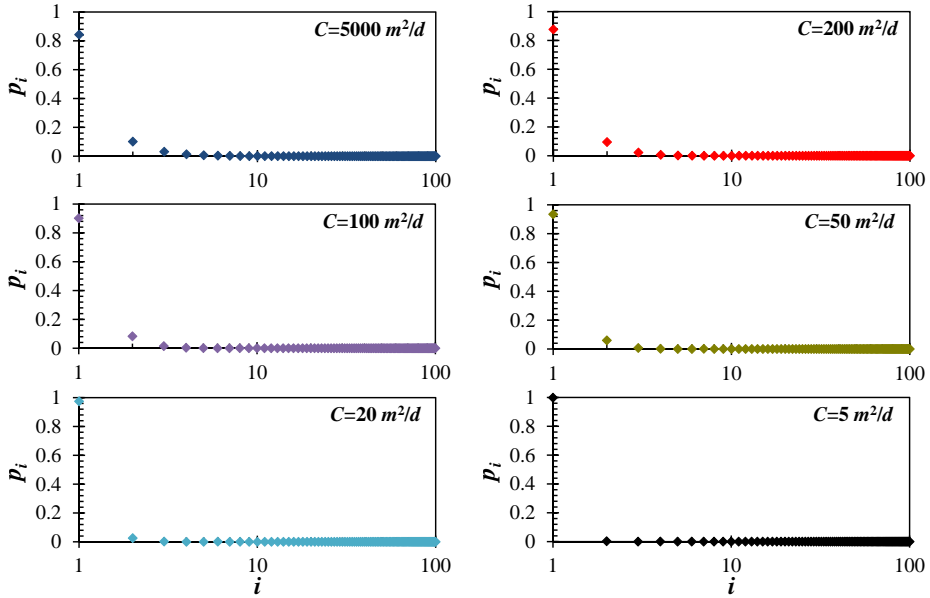
En la figura 7.1 se presentan los valores absolutos de los volúmenes encerrados por los primeros 150 vectores de Lanczos, para diferentes grados de conexión entre el río y el acuífero, en función de la conductancia del río. En ella se observa que el gradiente de

disminución de dicho volumen aumenta a medida que disminuye la conductancia impuesta sobre el río. Por ejemplo, el número de vectores necesarios para lograr que  $|f_i| < 10^{-7}$  m disminuye desde cerca de 120, cuando se impone una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ , hasta 19, que se obtienen para una conductancia de  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ . Igualmente, la magnitud del volumen encerrado por el primer vector de Lanczos generado,  $|f_1|$ , crece a medida que disminuye dicha conductancia. Particularmente, para una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$  se ha obtenido que  $|f_1| = 200$  m, mientras que para  $5 \text{ m}^2/\text{d}$  ha resultado que  $|f_1| = 1950$  m.

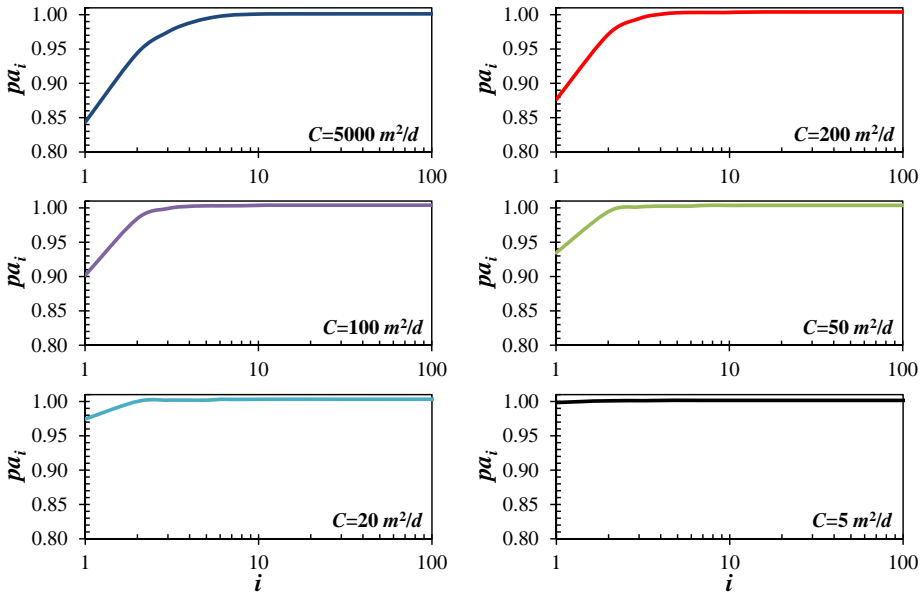
Dado que la generación de los vectores de Lanczos depende del vector residual inicial ( $\mathbf{r}_0$ ) escogido antes de iniciar la generación del subespacio de Krylov, se deduce que las magnitudes de los volúmenes encerrados por el primer vector de Lanczos dependen de la configuración de las alturas piezométricas normalizadas en régimen estacionario impuestas para  $\mathbf{r}_0$ . Lo anterior se origina puesto que las alturas piezométricas estacionarias aumentan si disminuye la conductancia del río, cuando los parámetros hidráulicos del acuífero de referencia permanecen invariantes y se impone la misma recarga. También merece la pena comentar que los volúmenes presentados en la figura 7.1 no son únicos, sino que dependen de la selección del vector residual inicial antes indicado. Por esta razón, el aspecto de las gráficas presentadas en dicha figura varía cuando se modifican las parametrizaciones de generación impuestas sobre la iteración racional de Lanczos. Más aún, se ha encontrado que los volúmenes encerrados por los primeros vectores de Lanczos son muy parecidos a los asociados a los primeros modos efectivos generados por el MAV-CSEM. Aún así, durante el proceso de generación de los vectores de Lanczos,  $|f|$  disminuye más rápidamente a medida que aumenta el número de vectores a incluirse en la base del subespacio de reducción. En consecuencia, si se selecciona adecuadamente el vector residual inicial de generación, el tamaño del subespacio de Krylov de reducción puede llegar a ser mucho menor que el tamaño del subespacio de autovectores efectivos.

En la figura 7.2 se presentan las gráficas de los primeros cien factores de participación volumétricos de los vectores de Lanczos, en función de las conductancias impuestas sobre el río conectado con el acuífero de referencia, para acción exterior uniformemente distribuida. En dichas gráficas se observa que los primeros factores de participación son mayores que 0.8 y aumentan hasta cerca de 1.0 a medida que disminuye la conductancia. Por el contrario, en lo que respecta a los vectores de Lanczos de orden superior se han encontrado las siguientes particularidades: (i) los factores de participación volumétrica de los segundos vectores de Lanczos disminuyen rápidamente, situándose por debajo de 0.1, cota superior para una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ ; (ii) los factores de participación tienden a cero a medida que aumenta el índice  $i$  de iteraciones de generación; y (iii) la rapidez de disminución del factor de participación se incrementa cuando la conexión río-acuífero tiende a ser más imperfecta. Por otra parte, de un análisis visual entre los gráficos contenidos en las figuras 4.3 y 7.2, se deduce que las variaciones de los factores de participación del MLAN son análogas a las exhibidas por los coeficientes de reparto del MAV, con la diferencia de que las tendencias hacia cero de los factores de participación es más veloz y gradual.

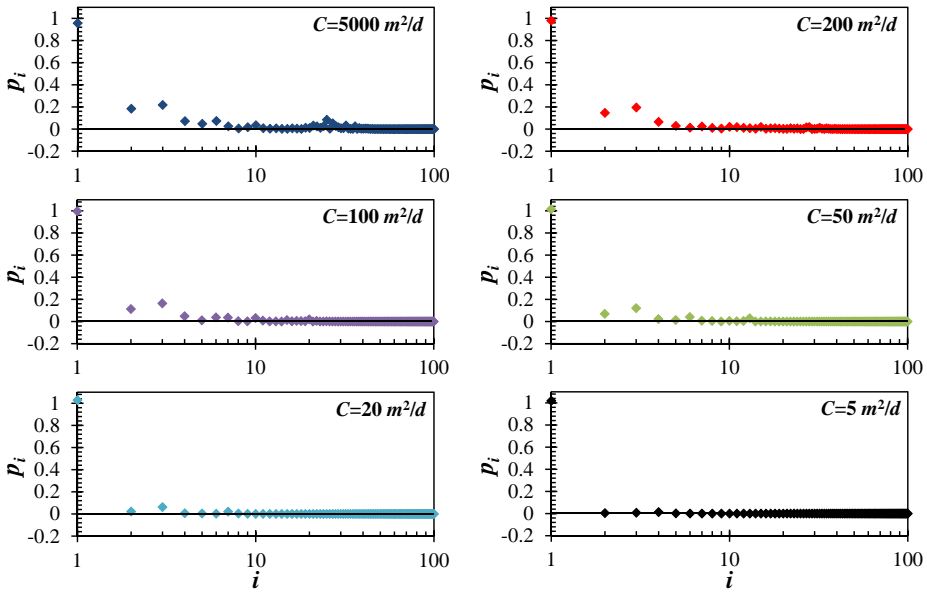
Las gráficas de la variación de los factores de participación volumétricos acumulados de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia del río conectado al acuífero de referencia y considerando acción exterior uniformemente distribuida, se presentan en la figura 7.3. Se observa que el límite superior unitario se alcanza más rápidamente para las conductancias de río más bajas. Por ejemplo, para una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$  deben generarse 10 vectores de Lanczos para que dicho factor de participación se encuentre cercano a uno; en cambio, para  $5 \text{ m}^2/\text{d}$  sólo se necesita generar un par de vectores. Si se desecha la restricción del tamaño mínimo del subespacio de reducción durante su proceso de generación, se obtiene que, a medida que se tratan modelos con conexión río-acuífero



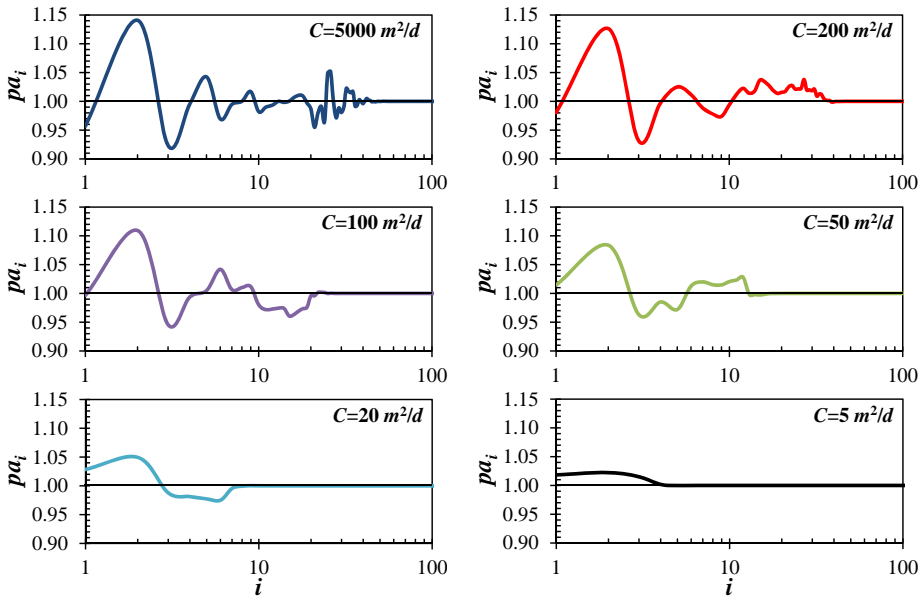
**Figura 7.2.** Distribución de los primeros cien factores de participación volumétricos de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado al acuífero de referencia, para acción exterior uniformemente distribuida.



**Figura 7.3.** Distribución de los primeros cien factores de participación volumétricos acumulados de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado al acuífero de referencia, para acción exterior uniformemente distribuida.



**Figura 7.4.** Distribución de los primeros cien factores de participación volumétricos de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado al acuífero de referencia, para acción exterior puntual actuando en su centro.



**Figura 7.5.** Distribución de los primeros cien factores de participación volumétricos acumulados de los vectores de Lanczos, en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado al acuífero de referencia, para acción exterior puntual actuando en su centro.

casi perfecta, los requerimientos computacionales aumentan por que se requiere realizar más iteraciones para cumplir con el criterio de parada impuesto. Este resultado es análogo al encontrado para la generación de los modos efectivos en el MAV-CSEM.

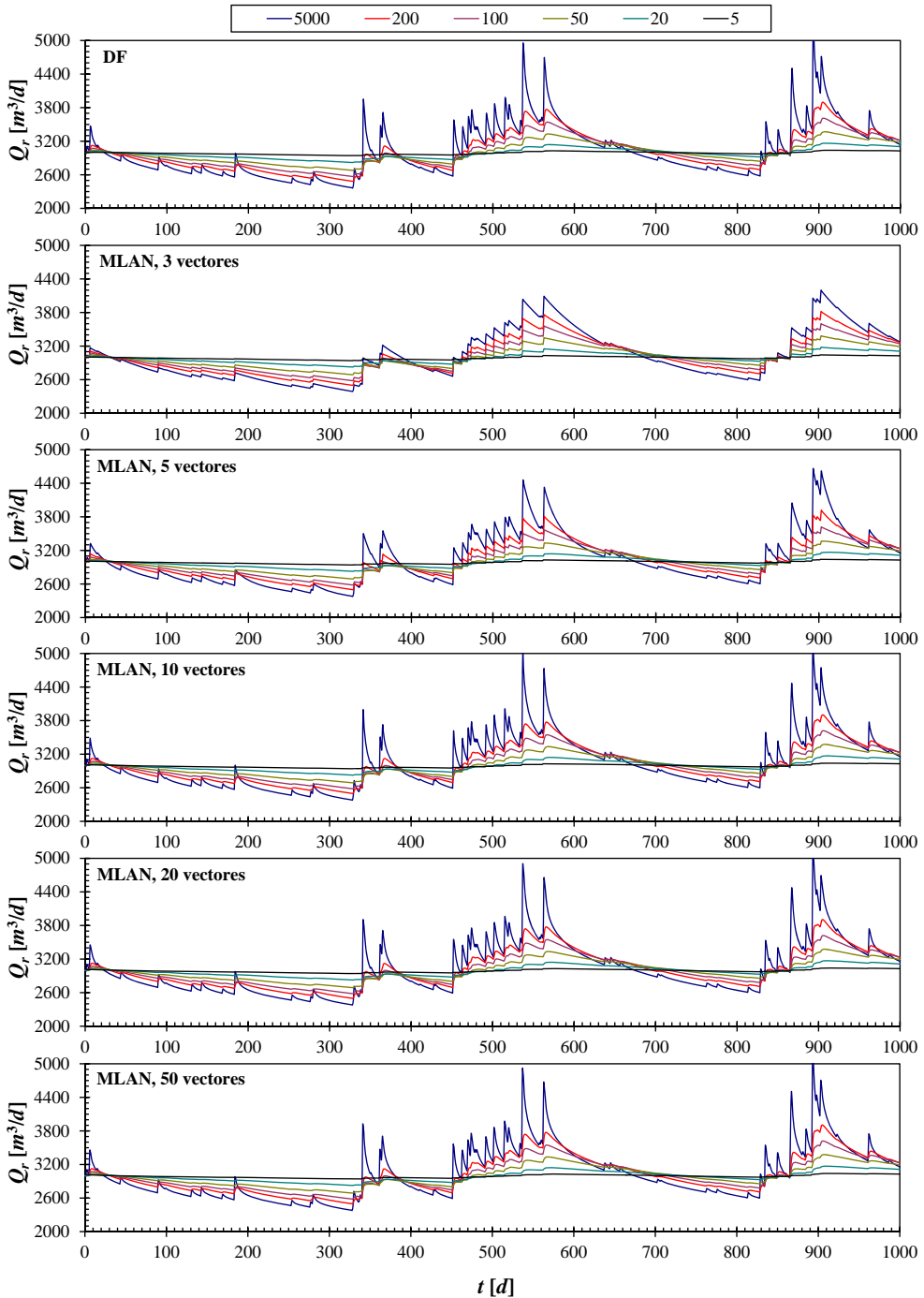
Igualmente, en la figura 7.4 se muestra la variación de los factores de participación volumétricos de los primeros cien vectores de Lanczos para acción exterior puntual actuando en el centro del acuífero rectangular de referencia, en función de la conductancia impuesta sobre el río con el cual se encuentra conectado. Los gráficos de dicha figura revelan que los factores de participación no varían gradualmente, sino que manifiestan aumentos y decrementos a medida que crece el orden del vector de Lanczos generado. Estas fluctuaciones continúan a medida que  $i$  aumenta, hasta que  $p_i$  se estabiliza en valores cercanos a cero. Las características asociadas al problema de reducción exhibidas por la base del subespacio de Krylov se observan más claramente en las gráficas de variación de los factores de participación volumétricos acumulados de los vectores de Lanczos, los cuales se presentan en la figura 7.5 en función de la conductancia impuesta sobre el río conectado con el acuífero de referencia. De los resultados presentados en dicha figura se deduce que el número de vectores de Lanczos que deben generarse para estabilizar los factores de participación en valores cercanos a cero o, equivalentemente, para que los factores de participación acumulados sean cercanos a uno, aumenta a medida que la conexión río-acuífero es cercana a la perfecta. Así, para una conductancia de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ , deben generarse al menos 55 vectores de Lanczos para obtenerse que  $pa_i \approx 1$ ; mientras que, al considerar el modelo de flujo donde se impone  $C = 50 \text{ m}^2/\text{d}$ , el número de vectores necesarios para alcanzar el límite anteriormente mencionado es de 15, cantidad que disminuye hasta 4 para  $C = 5 \text{ m}^2/\text{d}$ .

Finalmente, es importante notar que el tamaño de los subespacios de Krylov generados para reducir los modelo de flujo del acuífero de referencia sometido a acción exterior puntual es mayor que los modelos correspondientes para acción distribuida. Esta característica es análoga a la encontrada en la aplicación del MAV-CSEM. Aún así, la generación de los vectores de Lanczos, para los diferentes modelos de referencia considerados en función de la conductancia del río, es menos demandante computacionalmente que la generación de los autovectores efectivos por varias razones: (i) los factores de participación de los vectores de Lanczos varían más gradualmente que los coeficiente de reparto de los autovectores, (ii) los factores de participación de los vectores de Lanczos (acumulados) convergen más rápidamente a cero (uno) que los coeficientes de reparto de los autovectores efectivos, (iii) la iteración de Lanczos no genera vectores residuales, como los exhibidos durante la generación de los autovectores efectivos, (iv) no es necesario realizar la construcción de un máscara de estados efectivos, con lo cual se ahorra tiempo de procesamiento y recurso físico de almacenamiento y (v) el número de operaciones inherentes a la generación del subespacio de reducción es mucho menor. La realización de numerosos experimentos numéricos ha demostrado que las anteriores características son válidas si y sólo si el vector inicial residual de la iteración de Lanczos es apropiado, de lo contrario, el cálculo de la base del subespacio de Krylov podría requerir la ejecución de muchas iteraciones, ocasionando pérdida de la eficiencia en la reducción o incluso que no pueda cumplirse el criterio de parada. Esto se traduce en la pérdida de detalle en la representación de las acciones exteriores en el modelo reducido, lo cual es indeseable puesto que deja de preservarse la ecuación de continuidad durante la simulación transitoria.

### 7.3.2. Simulaciones para acción exterior distribuida

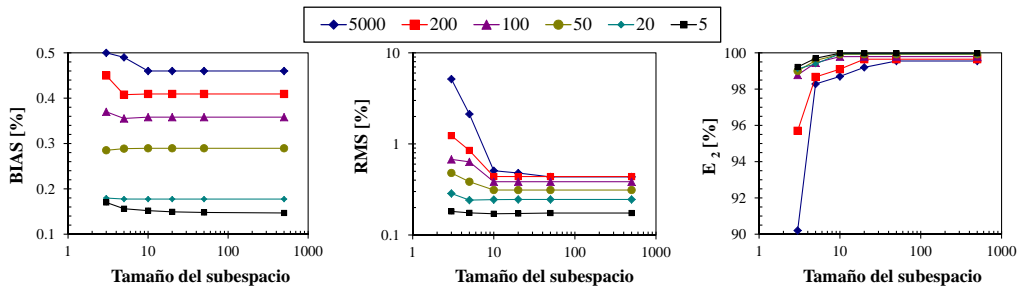
En la figura 7.6 se presentan los hidrogramas de descarga subterránea al río, simulados mediante modelos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MLAN para acción exterior uniformemente distribuida, correspondientes a las seis conductancias asignadas





**Figura 7.6.** Hidrogramas de descarga para el acuífero de referencia sometido a una acción exterior distribuida simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MALN de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 5000 y 5  $\text{m}^2/\text{d}$ .

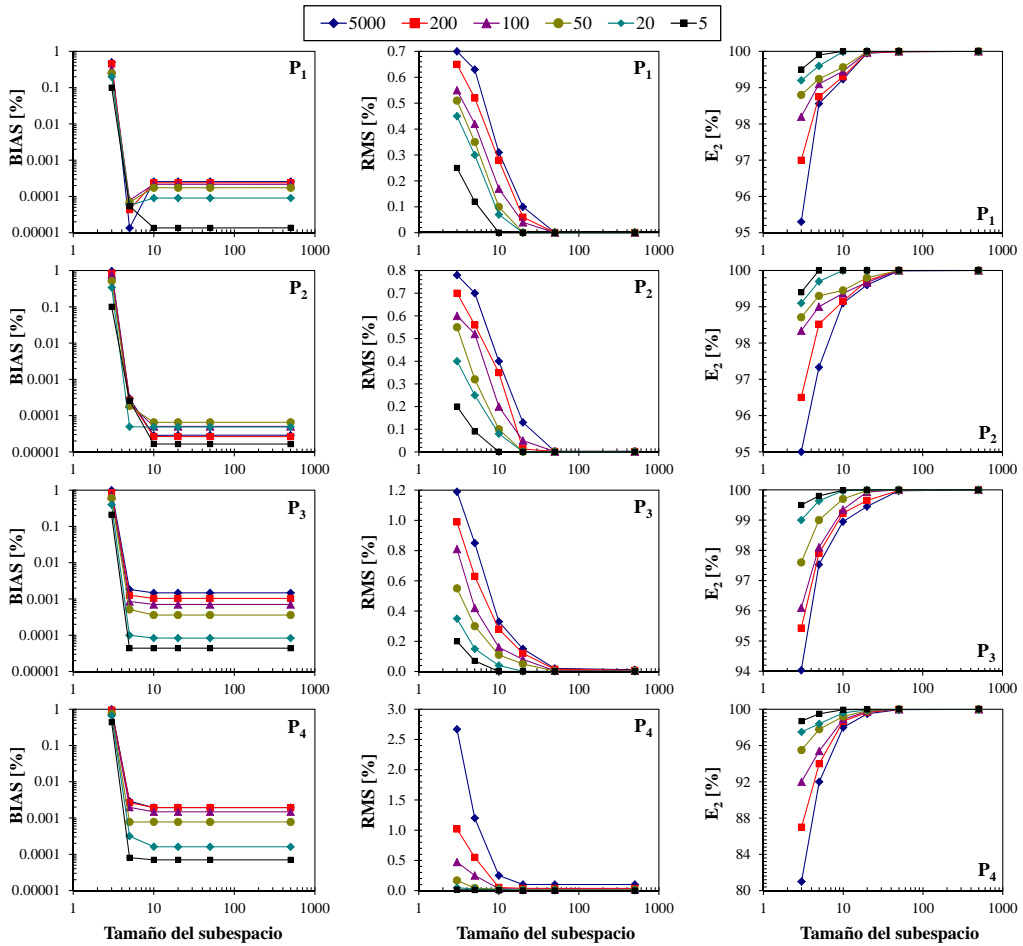
en la relación río-acuífero de referencia. Se han considerado diferentes tamaños para el subespacio de Krylov usado en la simulación reducida de los hidrogramas mediante el MLAN, los cuales se presentan en la parte superior izquierda de cada gráfica. En general, los hidrogramas de referencia, simulados mediante DF, se reproducen adecuadamente por los modelos reducidos mediante el MLAN. A pesar de lo anterior, los mayores errores se presentan en la reproducción de los picos de caudal descargado, especialmente para las conductancias más altas y modelos excesivamente reducidos. Aún así, dichas diferencias disminuyen al aumentar ligeramente el tamaño del modelo; se observa claramente que la mayoría de los picos de los hidrogramas, para todas las conductancias de río, se reproducen adecuadamente usando únicamente diez o menos vectores de Lanczos. Por su parte, las curvas de agotamiento se reproducen adecuadamente para todas las conductancias de río impuestas.



**Figura 7.7.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados mediante modelos reducidos por el MLAN, considerando diferentes tamaños en los subespacios de Krylov de reducción, con respecto a las soluciones completas por DF para acción uniformemente distribuida. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloques de interacción río-acuífero.

Las anteriores observaciones se sustentan cuantitativamente estimando los índices de comportamiento **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, para todos los hidrogramas simulados mediante modelos reducidos, con respecto a las simulaciones de referencia obtenidas mediante modelos resueltos por DF. Estos resultados se muestran en la figura 7.7, en función de la conductancia de río impuesta en cada modelo. En el gráfico izquierdo se muestran las estimaciones para **BIAS**, las cuales resultaron ser muy bajas para todos los hidrogramas simulados. Se han obtenido **BIAS** cercanos al 0.5% para una conductancia de 5000 m<sup>2</sup>/d, los cuales disminuyen hasta cerca del 0.1% para las conductividades más bajas. Para una conductancia dada, los mayores **BIAS** se alcanzan cuando los subespacios de Krylov de reducción están compuestos por menos de 10 vectores, tamaño a partir del cual las estimaciones se estabilizan en valores que decrecen a medida que disminuye el grado de conexión río-acuífero. Así, las estimaciones de **BIAS** confirman que el MLAN reproduce adecuadamente el caudal medio del hidrograma de referencia, con la particularidad de que el único criterio impuesto sobre la ecuación de continuidad ha sido asegurar que la generación de vectores de Lanczos continúe hasta que sus factores de participación acumulados se encuentran cercanos a cero.

En la gráfica central de la figura 7.7 se presentan las estimaciones de los **RMS** para los hidrogramas de descarga simulados. En dicha gráfica se observa que: (i) **RMS** disminuye a medida que se incluyen más vectores en la base del subespacio de reducción, (ii) las mayores estimaciones, cercanas al 10%, se obtuvieron para una conductancia de



**Figura 7.8.** Índices de comportamiento para las alturas piezométricas en los puntos de control, simuladas con modelos reducidos por el MLAN para diferentes niveles de truncamiento, con respecto a una solución numérica por DF. Se muestran los resultados de **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, en las columnas izquierda, central y derecha, respectivamente.

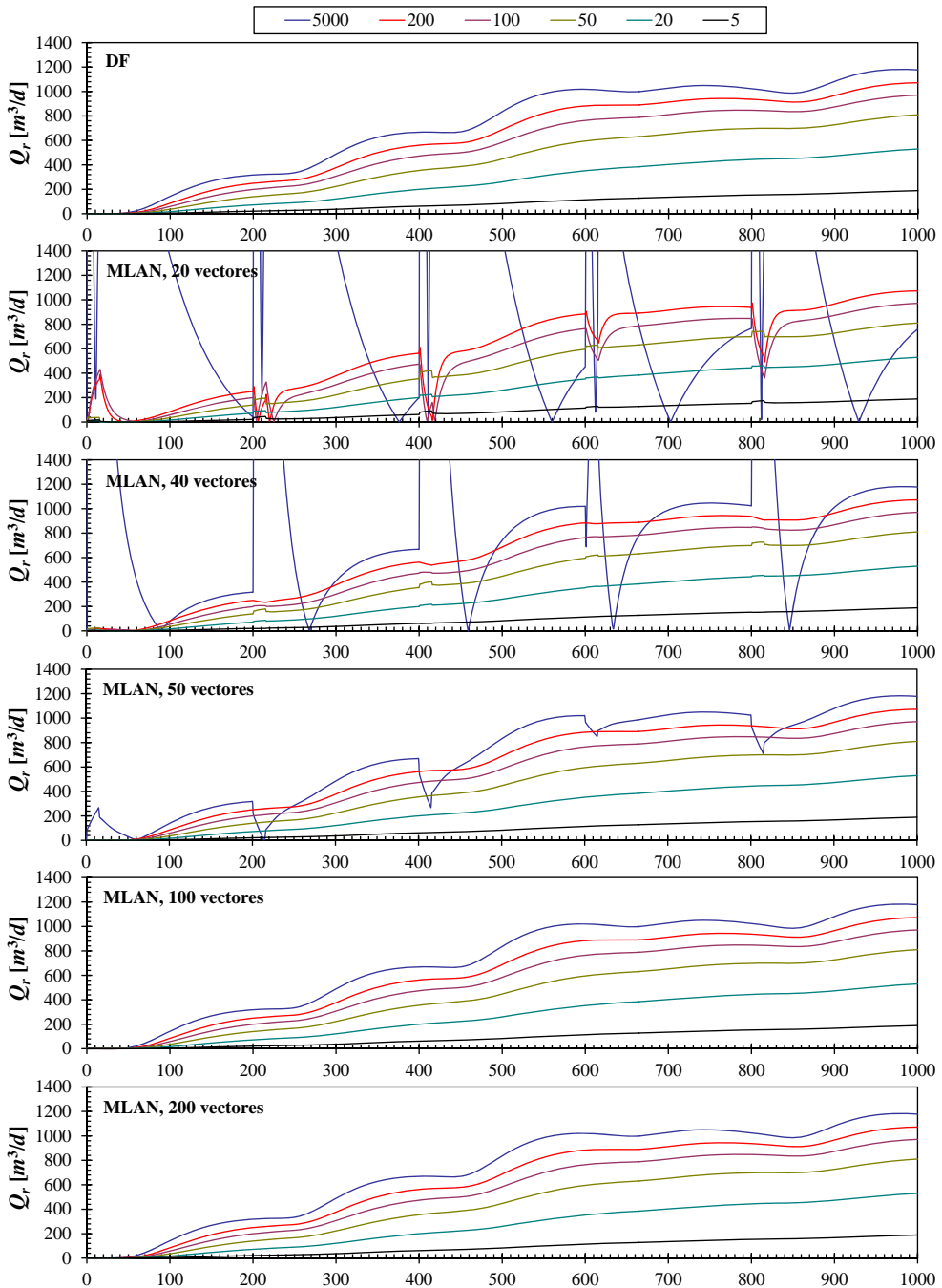
5000 m<sup>2</sup>/d cuando los subespacios de reducción está formado por menos de 10 vectores de Lanczos, (iii) las menores estimaciones, por debajo del 0.2%, corresponden a las conexiones río-acuífero más imperfectas, cuando el modelo reducido se expresa mediante más de 50 estados o vectores de Lanczos y (iv) para todas las conductancias consideradas por debajo de 200 m<sup>2</sup>/d, las estimaciones máximas de **RMS** se asocian a subespacios de Krylov formados por 5 vectores o menos, exhibiendo valores entre el 0.2 y el 1.2%. Análogamente a las estimaciones de **BIAS**, **RMS** alcanza mínimos estables al considerar más de 10 vectores de Lanczos; mínimos que decrecen a medida que la conductancia disminuye. Las estimaciones de **E<sub>2</sub>** correspondientes a los hidrogramas de descarga obtenidos considerando diferentes tamaños de los subespacios de Krylov, en función de las conductancias de río, se consignan en la gráfica derecha de la figura 7.7. Las **E<sub>2</sub>** obtenidas se ubican por encima del 98% para todo los hidrogramas analizados, con excepción de los simulados empleando subespacios de reducción formados por 5 vectores de Lanczos o menos, para

conductancia mayores a  $100 \text{ m}^2/\text{d}$ . A diferencia de las estimaciones de **BIAS** y **RMS**,  $\mathbf{E}_2$  manifiesta una tendencia más lenta de aproximación hacia el valor óptimo del 100%, en especial para los hidrogramas simulados usando conductancias por encima de  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ . También cabe resaltar el buen desempeño exhibido por el hidrograma simulado mediante un modelo reducido con 3 vectores de Lanczos en el subespacio de Krylov para  $C = 5000 \text{ m}^2/\text{d}$ , para el cual se ha estimado que  $\mathbf{E}_2 = 90\%$ . Este resultado ilustra la gran velocidad de convergencia la generación del subespacio de reducción por parte del MLAN.

Por otro lado, en la figura 7.8 se presentan las estimaciones de los índices de comportamiento para las alturas piezométricas simuladas mediante los modelos truncados, con respecto a las obtenidas empleando los modelos de referencia completos resueltos por DF. En este caso se evalúan los indicadores **BIAS**, **RMS** y  $\mathbf{E}_2$ , como se presentó antes para los hidrogramas de descarga. En dicha figura se observa que las estimaciones más óptimas de los índices de comportamiento se obtienen en  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$ , los puntos de control más alejados de la conexión entre el río y el acuífero. Por el contrario, dichas estimaciones van empeorando a medida que se simulan las series piezométricas en localizaciones más cercanas al río, es decir, en los puntos de control  $\mathbf{P}_3$  y  $\mathbf{P}_4$ . Igualmente, al considerar un punto de control en particular, las estimaciones de **BIAS**, **RMS** y  $\mathbf{E}_2$  mejoran a medida que aumenta la imperfección de la conexión río-acuífero. Cabe notar que las estimaciones de **BIAS** son casi nulas cuando los modelos reducidos usan más de 10 vectores de Lanczos en sus subespacios de Krylov, sin importar la localización ni tampoco el grado de conexión río-acuífero impuesto sobre el modelo de referencia, indicando que las tendencias medias de las series piezométricas se representan adecuadamente.

De la misma forma, las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  muestran una rápida tendencia de aproximación al 100% cuando los modelos se reducen usando un subespacio de Krylov formado por 20 o más vectores de Lanczos, sin importar ni la localización del punto de control ni la conductancia impuesta para parametrizar el flujo de la condición de contorno en el río. Es más, el índice **RMS** manifiesta un comportamiento similar a  $\mathbf{E}_2$ , disminuyendo rápidamente cuando se consideran los mismos tamaños de subespacio de reducción previamente mencionados. Los anteriores resultados muestran que la reducción de modelos de flujo subterráneos mediante el MLAN representan adecuadamente el funcionamiento local de la respuesta piezométrica sin necesidad de que los subespacios considerados sean exageradamente grandes, especialmente cuando se enfrentan situaciones en las cuales la conexión río-acuífero es prácticamente perfecta.

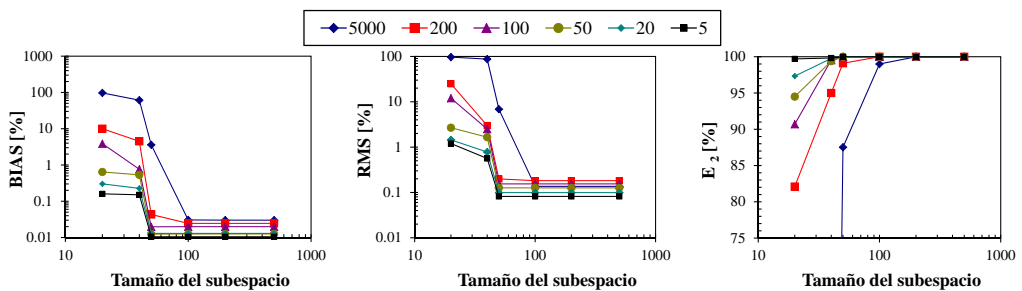
Por último, las gráficas de variación de los diferentes índices de comportamiento construidas para las simulaciones reducidas mediante el MLAN, contenidas en la figura 7.7, son similares a las presentadas para el MAV con truncamiento conservativo, como se observa en las figuras 4.9 y 4.12. Cabe recordar que el procedimiento de reducción de ambas técnicas es similar y se basa en el truncamiento de los estados por encima de cierto umbral. Al respecto, los tamaños de los modelos reducidos por el MLAN necesarios para alcanzar la reproducción adecuada de los parámetros de control de las simulaciones, son inferiores a los requeridos por el MAV con truncamiento conservativo. Lo anterior, unido al hecho de que la demanda de operaciones necesarias para generar la base del espacio de autovalores de reducción es más elevada, muestra que el MLAN puede ser más atractivo para generar el subespacio de reducción que el MAV. Sin embargo, cuando se precisa realizar simulaciones de decenas de años a resoluciones temporales diarias o mensuales y para alternativas múltiples de uso conjunto, el MAV es más eficiente puesto que calcula explícita y directamente los estados del acuífero, evitando resolverlos numéricamente.



**Figura 7.9.** Hidrogramas de detracciones para el acuífero de referencia sometido a una acción puntual actuando en su centro, simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MLAN de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 5000 y 5  $\text{m}^2/\text{d}$ .

### 7.3.3. Simulaciones para acción exterior puntual

En la figura 7.9 se presentan los hidrogramas de detracciones, simulados mediante el MLAN, para el acuífero rectangular de referencia sometido a una acción exterior puntual de bombeo localizada en su centro. En ésta se observa que, para dicha acción exterior, ha sido necesario incluir muchos más vectores de Lanczos en la base del subespacio de Krylov que los requeridos para la acción exterior distribuida. Por ejemplo, el uso de 20 vectores de Lanczos no es suficiente para representar adecuadamente las relaciones río-acuífero, ni siquiera cuando se consideran conexiones muy cercanas a la imperfecta; en particular, para una conductancia de 5000 m<sup>2</sup>/d, el desempeño del MLAN ha sido bastante pobre. Las simulaciones comienzan a presentar un aspecto aceptable a medida de que se considera un mayor número de vectores de Lanczos. En especial, cuando el tamaño del subespacio es mayor de 40 vectores se obtienen resultados bastante aceptables, con excepción del hidrograma simulado considerando una conexión río-acuífero cercana a la perfecta.



**Figura 7.10.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas simulados con modelos reducidos por el MLAN, considerando diferentes tamaños en los subespacios de Krylov de reducción, con respecto a las soluciones completas por DF para acción puntual en el centro del acuífero. Los resultados se presentan en función de las conductancias en los bloques de interacción río-acuífero.

Las estimaciones de los índices de comportamiento para los hidrogramas de caudales detraídos simulados mediante modelos reducidos por el MLAN, con respecto a simulaciones obtenidas mediante modelos resueltos usando DF, se presentan en la figura 7.10. Los resultados obtenidos confirman algunas de las características mencionadas previamente. En la gráfica de la izquierda de la figura antes mencionada se muestra la variación de **BIAS** con respecto a los tamaños de los subespacios de reducción. Las máximas estimaciones se obtuvieron para conexiones río-acuífero casi perfectas, con valores que superan el 10 % para modelos reducidos utilizando menos de 40 vectores de Lanczos. Así pues, los resultados para los modelos más pequeños resultan ser bastante deficientes, estimándose **BIAS** cercanos al 100 %. Por el contrario, se observa una clara tendencia de decrecimiento en las estimaciones cuando se pasa de modelos formados por 40 vectores de Lanczos a modelos formados por 50 vectores de Lanczos, lo cual indica que los vectores ubicados entre dichos índices de generación son críticos en el procedimiento de reducción. En varios de los modelos se detectan decrecimientos de más de dos órdenes de magnitud; por ejemplo, para una conductancia de 200 m<sup>2</sup>/d, **BIAS** disminuye desde cerca del 10 % hasta el 0.01 %.

Ahora bien, las estimaciones de **RMS** y **E<sub>2</sub>** manifiestan comportamientos similares a los descritos anteriormente. Los mayores **RMS**, cercanos al 100 %, junto con lo menores **E<sub>2</sub>**, por debajo del 10 %, se calcularon para los hidrogramas de detracciones simulados empleando modelos reducidos mediante subespacios formados por menos de 50 vectores

de Lanczos, imponiendo una conductancia de río de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ . A su vez, las estimaciones máximas de **RMS** y **E<sub>2</sub>** decrecen a medida que se consideran conexiones más imperfectas, aproximándose hasta valores cercanos al 1% y 99%, respectivamente, cuando se impone una conductancia de río de  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ . Por último, cabe resaltar que las estimaciones más óptimas de todos los índices de comportamiento se han obtenido cuando los tamaños de los subespacio de reducción superan los 50 vectores de Lanczos; tamaño que está asociado con la convergencia a cero (uno) por parte de los factores de participación (acumulados). Por lo tanto, esta observación verifica la coherencia del criterio de parada impuesto sobre la iteración racional de Lanczos del algoritmo 7.1.

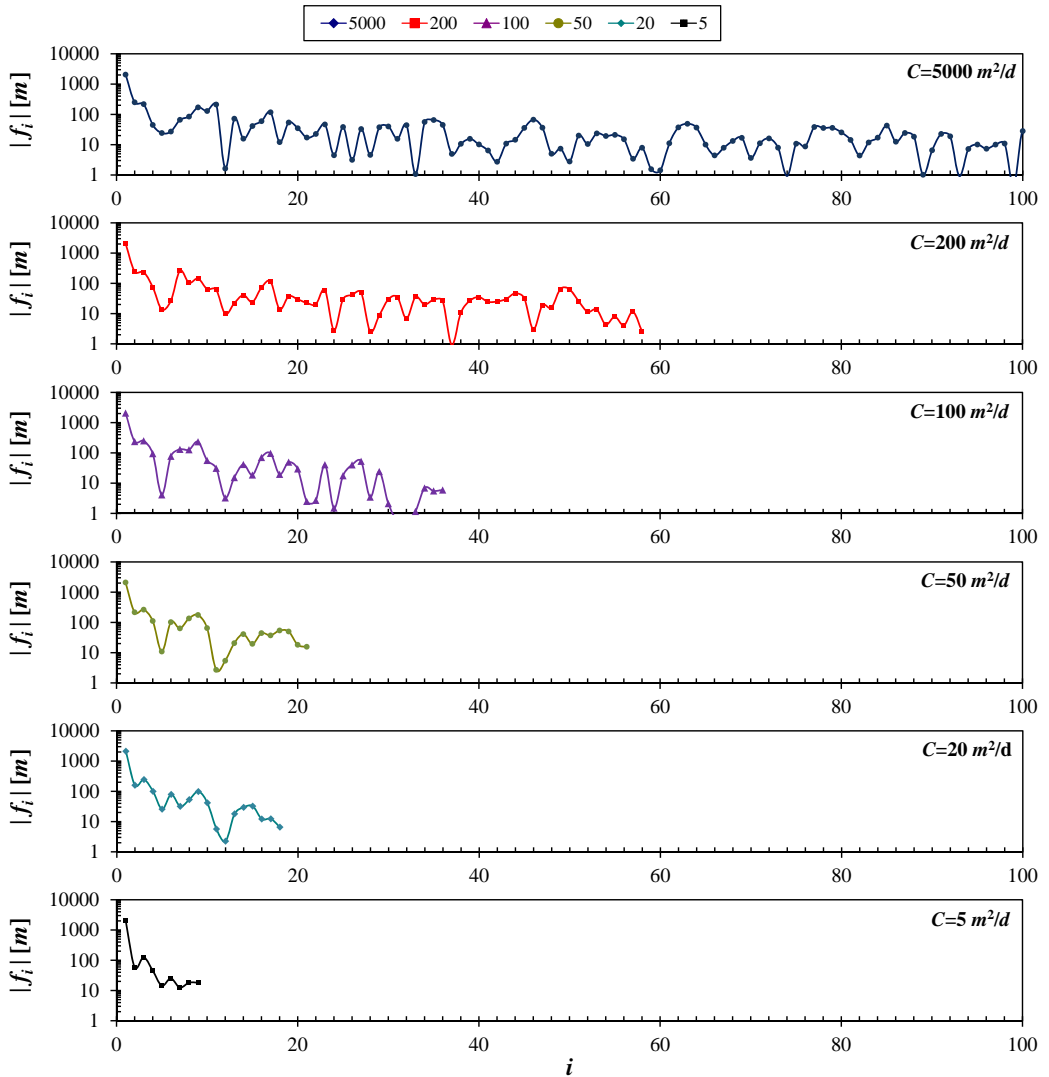
## 7.4. Simulación reducida de un acuífero heterogéneo de geometría regular sometido a acciones exteriores sencillas mediante el MLAN

El MLAN ha sido aplicado para simular el flujo subterráneo en el acuífero rectangular heterogéneo presentado en la figura 6.9, el cual se somete a dos acciones exteriores que se presentan en la misma figura en el esquema superior derecho. El objetivo de esta aplicación es comparar los resultados de las simulaciones efectuadas mediante los modelos reducidos por el MLAN y el MAV-CSEM, especialmente en los siguientes aspectos: (i) la eficiencia exhibida por los procedimientos de generación de los subespacios de reducción, (ii) el efecto generado por la variación de las condiciones en la conexión río acuífero y (iii) la representatividad de las alturas piezométricas cercana a las zonas de explotación. Cabe recordar que la conexión río-acuífero se modela usando una condición de contorno del tipo Cauchy, cuyas conductancias en los bloques de río varían en escala logarítmica entre  $5000$  y  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ . Además, se considera que el nivel de referencia para la piezometría corresponde a la altura de calado nulo del río, la cual se ha asumido como invariante en el tiempo, y los parámetros hidráulicos del acuífero son idénticos a los descritos en la sección 6.7.

### 7.4.1. Generación del subespacio de Krylov de reducción

Los resultados de la generación del subespacio de Krylov de reducción se discuten a la luz de los volúmenes encerrados por los vectores del Lanczos generados y sus correspondientes factores de participación. Antes de comenzar con dicha discusión debe aclararse que los vectores iniciales de Lanczos se han obtenidos aplicando el siguiente procedimiento: (i) se ha asumido una recarga permanente uniformemente distribuida de  $8.09 \times 10^{-5} \text{ m/d}$  actuando sobre todo el dominio del acuífero, (ii) se ha impuesto una intensidad permanente de extracción de  $25 \text{ m}^3/\text{d}$  actuando sobre cada uno de los bloques de extracción, (iii) se han implementado modelos en régimen permanente considerando las anteriormente mencionadas acciones exteriores y variando las conductancias de los bloques de río entre  $5000$  y  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ , (iv) se han simulado seis conjuntos de alturas piezométricas como solución a los modelos en régimen permanente anteriormente plantados y (v) los vectores de altura piezométrica fueron normalizados y utilizados como el vector residual inicial en las iteraciones de generación de Lanczos. Una vez obtenidos los residuales iniciales, se ejecuta el algoritmo 7.1 para generar los seis subespacios de Krylov de reducción asociados a las conductancias impuestas sobre el río conectado al acuífero, adoptando como criterio de parada que  $pa_{i,j} > \xi = 0.995$  para las dos acciones exteriores consideradas.

Para comenzar, en la figura 7.11 se presentan los valores absolutos de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos generados, de acuerdo con la conductancia impues-



**Figura 7.11.** Valores absolutos de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos del acuífero rectangular heterogéneo según las conductancias asignadas a los bloques de río.

ta al modelo reducido respectivo. A partir de estos resultados se deduce que los tamaños de los subespacios de reducción disminuyen a medida que decrece el grado de conexión río-acuífero. Así pues, para una conductancia de  $5000 m^2/d$ , han tenido que generarse 361 vectores de Lanczos antes de cumplir con el criterio de convergencia establecido, mientras que para una conductancia de  $5 m^2/d$  fue necesario generar únicamente 11 vectores. Lo anterior muestra la importante influencia ejercida por la parametrización de las relaciones río-acuífero sobre los requerimientos computacionales necesarios para ejecutar el generador racional de Lanczos. Ahora bien, a pesar de que los vectores residuales iniciales escogidos para la generación del subespacio de reducción son diferentes, la normalización y la aplicación del primer paso de la iteración de Lanczos ocasiona que los vectores de Lanczos

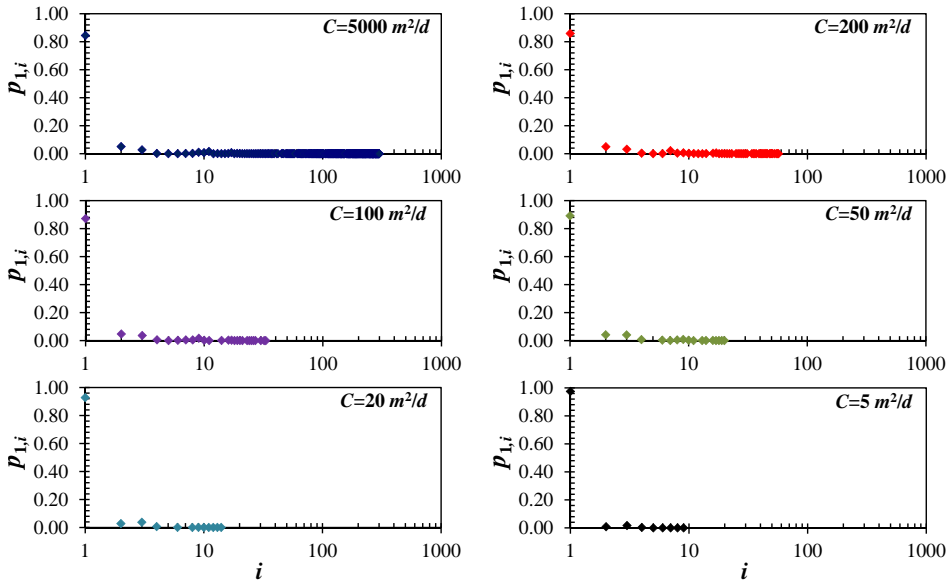


iniciales manifiesten valores de  $|f_0|$  similares, cercanos a 2070 m. Esta característica se debe a que la parametrización de los modelos en régimen permanente varía únicamente en la conexión río-acuífero. Por lo tanto, a pesar de que la magnitud de las alturas piezométricas simuladas son diferentes, su configuración espacial es muy similar, es decir, los gradientes piezométricos simulados por todos los modelos en régimen permanente son parecidos. A diferencia de los volúmenes encerrados por los autovectores efectivos, presentados en la figura 6.12, la variación de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos no es suave ni gradual, pero sigue una tendencia decreciente a medida que aumentan las iteraciones de generación. Aún así, los resultados presentados en la figura 7.11 no demuestran aceleraciones de dicha tendencia cuando se estudian conexiones río-acuífero casi perfectas.

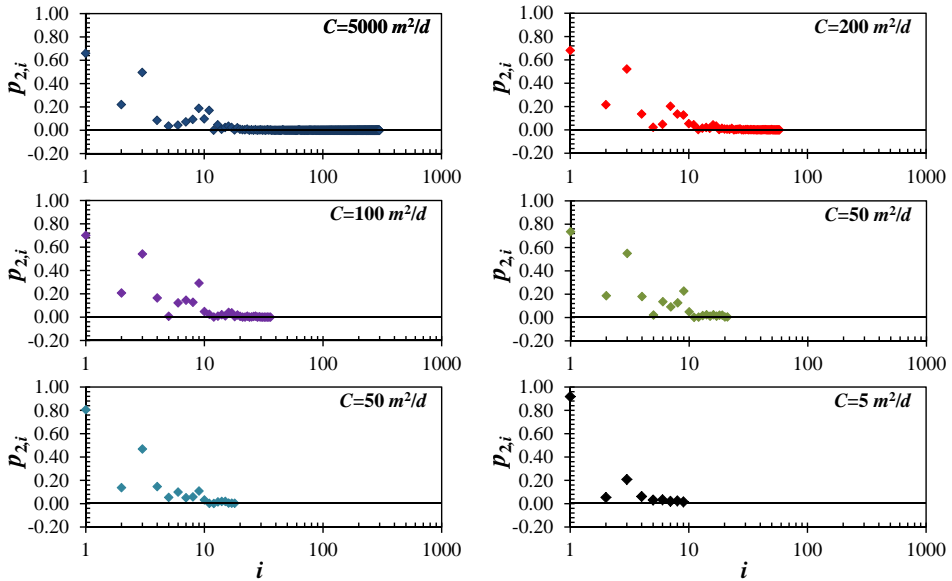
A su vez, los factores de participación asociados a los vectores de Lanczos se presentan en las figuras 7.12 y 7.13, para la recarga uniformemente distribuida y los bombeos puntuales, respectivamente, clasificados de acuerdo a las seis conductancias impuestas sobre el río. En ellos se observa que los factores de participación para la recarga distribuida manifiestan un decrecimiento suave y gradual a medida que avanza el proceso de generación de la base del subespacio racional de Krylov, necesitándose muy pocas iteraciones para alcanzar valores cercanos a cero. Por el contrario, los factores de participación asociados con los bombeos puntuales exhiben marcadas fluctuaciones hasta generar el décimo vector de Lanczos, a partir del cual dicha variación es menos abrupta, pero continúa hasta que la generación se detiene, una vez se ha cumplido con el criterio de parada establecido.

También es conveniente resaltar que, de acuerdo con la configuración de excitaciones asumida en la modelación, la acción exterior puntual controla la generación del subespacio de reducción. Esta afirmación se sustenta en el comportamiento exhibido por los factores de participación acumulados correspondientes a las acciones distribuida y puntual, que se muestran en las figuras 7.14 y 7.15, respectivamente. En general, se ha obtenido que dichos factores de participación acumulados de los bombeos tienden más lentamente hacia uno que las correspondientes a la recarga uniformemente distribuida y, por lo tanto, esta última cumple con el criterio de parada de generación antes que la primera.

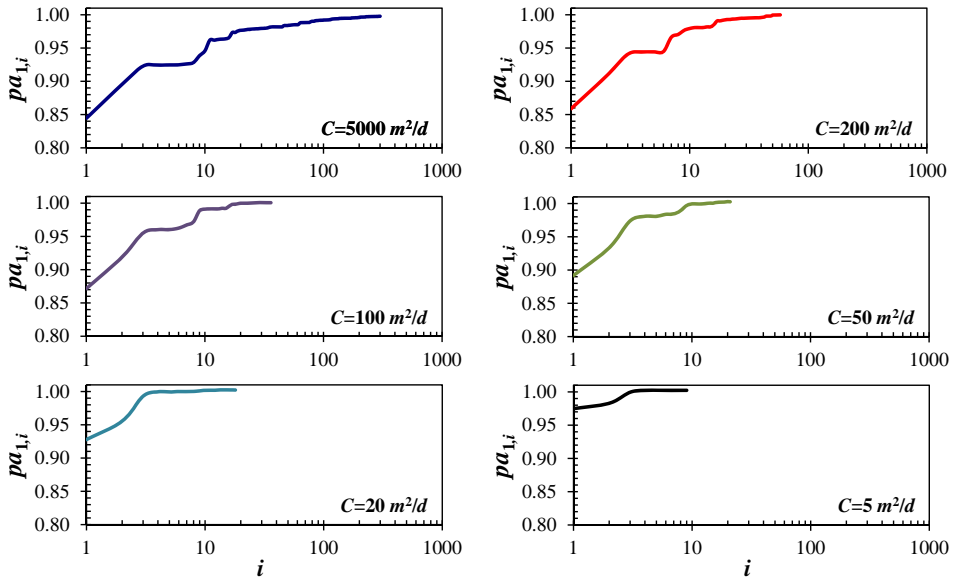
En lo que atañe a la recarga uniformemente distribuida se destacan algunos resultados importantes. Los primeros factores de participación varían entre 0.862, para una conductancia del río de  $5000 \text{ m}^2/\text{d}$ , y 0.974 cuando dicha conductancia decrece hasta  $5 \text{ m}^2/\text{d}$ . Si estos factores se comparan con los coeficientes de reparto iniciales de 0.824 y 0.969, respectivamente, se concluye que el efecto que tiene el primer vector de Lanczos sobre el balance de masa global del acuífero es más importante que el efecto del primer modo efectivo en la reducción mediante el MAV-CSEM, especialmente cuando se consideran conexiones perfectas entre el río y el acuífero. De igual manera, los factores de participación acumulados crecen de forma monótona, aunque no gradualmente, hacia uno, especialmente para las conductancias de río más elevadas. Ahora bien, con respecto a la acción exterior de bombeos puntuales es importante resaltar que los factores de participación iniciales varían entre 0.681, para conexiones río-acuífero casi perfectas, aumentando hasta 0.923 cuando dicha conexión es cercana a la imperfecta y avanzando no monótonamente hacia uno. Al respecto, en el apartado 6.7.1 se ha presentado una discusión acerca del comportamiento de los coeficientes de reparto acumulados efectivos para acción exterior puntual, de acuerdo con la figura 6.16. Allí se discute, básicamente, acerca de la variación gradual de dichos coeficientes a medida que se incluyen los autovectores de los modos efectivos de orden superior en la base del subespacio de reducción. Dichos resultados contrastan con el comportamiento errático de los factores de participación de los vectores de Lanczos, a pesar de que su velocidad de convergencia al límite superior unitario es mayor que la exhibida por los coeficientes de reparto de los modos efectivos en el MAV-CSEM.



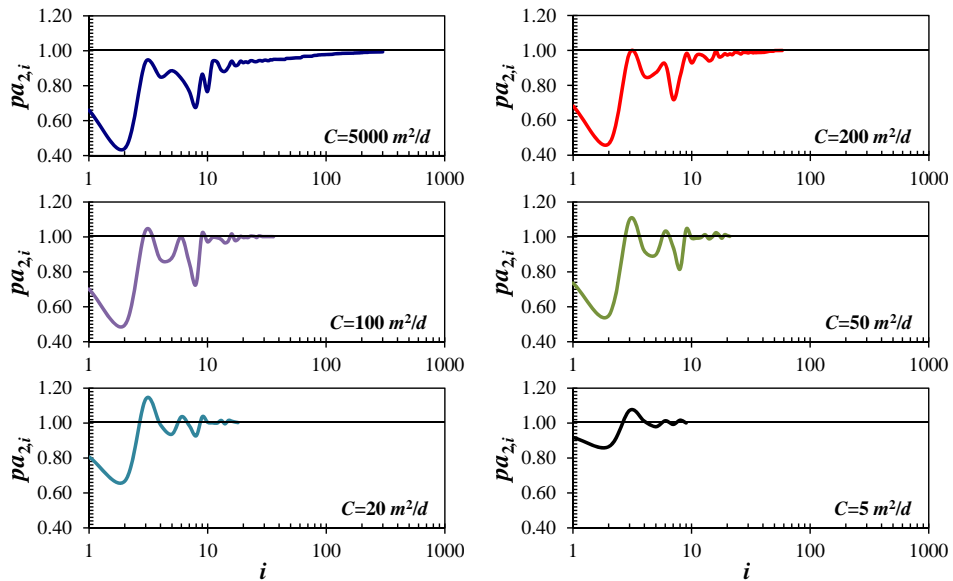
**Figura 7.12.** Factores de participación de los vectores de Lanczos para el acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior distribuida, clasificados de acuerdo a seis diferentes conductancias impuestas sobre el río.



**Figura 7.13.** Factores de participación de los vectores de Lanczos para el acuífero rectangular heterogéneo para las extracciones puntuales, clasificados de acuerdo a seis diferentes conductancias impuestas sobre el río.



**Figura 7.14.** Factores de participación volumétrica acumulados de los vectores de Lanczos para el acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior distribuida, clasificados de acuerdo a seis diferentes conductancias impuestas sobre el río.

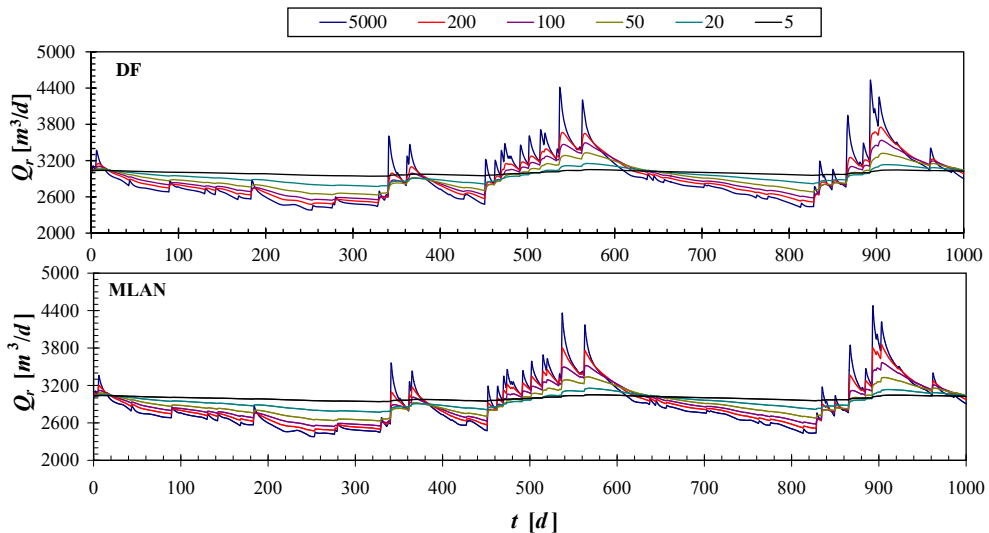


**Figura 7.15.** Factores de participación volumétrica acumulados de los vectores de Lanczos para el acuífero rectangular heterogéneo para la acción exterior puntual, clasificados de acuerdo a seis diferentes conductancias impuestas sobre el río.

Por último, debe notarse que la velocidad de aproximación a uno por parte de los factores de participación acumulados de los vectores de Lanczos, tanto para la recarga uniformemente distribuida como para los bombeos puntuales, aumenta a medida que la conexión río-acuífero se torna más imperfecta. Esta observación es consistente con los resultados obtenidos por el MAV-CSEM, con la diferencia de que en el MLAN se necesita generar menos vectores de Lanczos que modos en el MAV-CSEM, sean efectivos o no, para alcanzar el criterio de parada en los generadores respectivos, lo cual se traduce en un ahorro importante de operaciones computacionales. Además, cabe recordar que la generación de modos efectivos en el MAV-CSEM implica calcular todos los modos, incluyendo tanto efectivos como residuales, hasta cumplir con el criterio de parada impuesto, con el fin de mantener la ortogonalidad y permitir las deflaciones vectoriales en la generación. En la práctica, lo anterior implica tener que cubrir amplios sectores del espectro en la generación modal y es especialmente crítico para conexiones río-acuífero cercanas a la perfecta. Por el contrario, la iteración de Lanczos interpola implícitamente la fracción espectral que aporta directamente a los estados del acuífero, permitiendo, en la mayoría de los casos, una rápida generación de la base del subespacio de reducción del modelo de flujo subterráneo.

#### 7.4.2. Análisis de los resultados de las simulaciones

La calidad de las simulaciones reducidas ejecutadas se analizan a la luz de los resultados obtenidos para los parámetros de control establecidos en el apartado 6.7.2. Para comenzar, en la figura 7.16 se presentan los hidrogramas de caudales subterráneos simulados mediante modelos resueltos en DF (arriba) y modelos reducidos por el MLAN (abajo).



**Figura 7.16.** Hidrogramas subterráneos para el acuífero rectangular heterogéneo calculados mediante modelos numéricos resueltos por DF (arriba) y modelos reducidos por el MAV-CSEM (abajo), correspondiente a diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero.

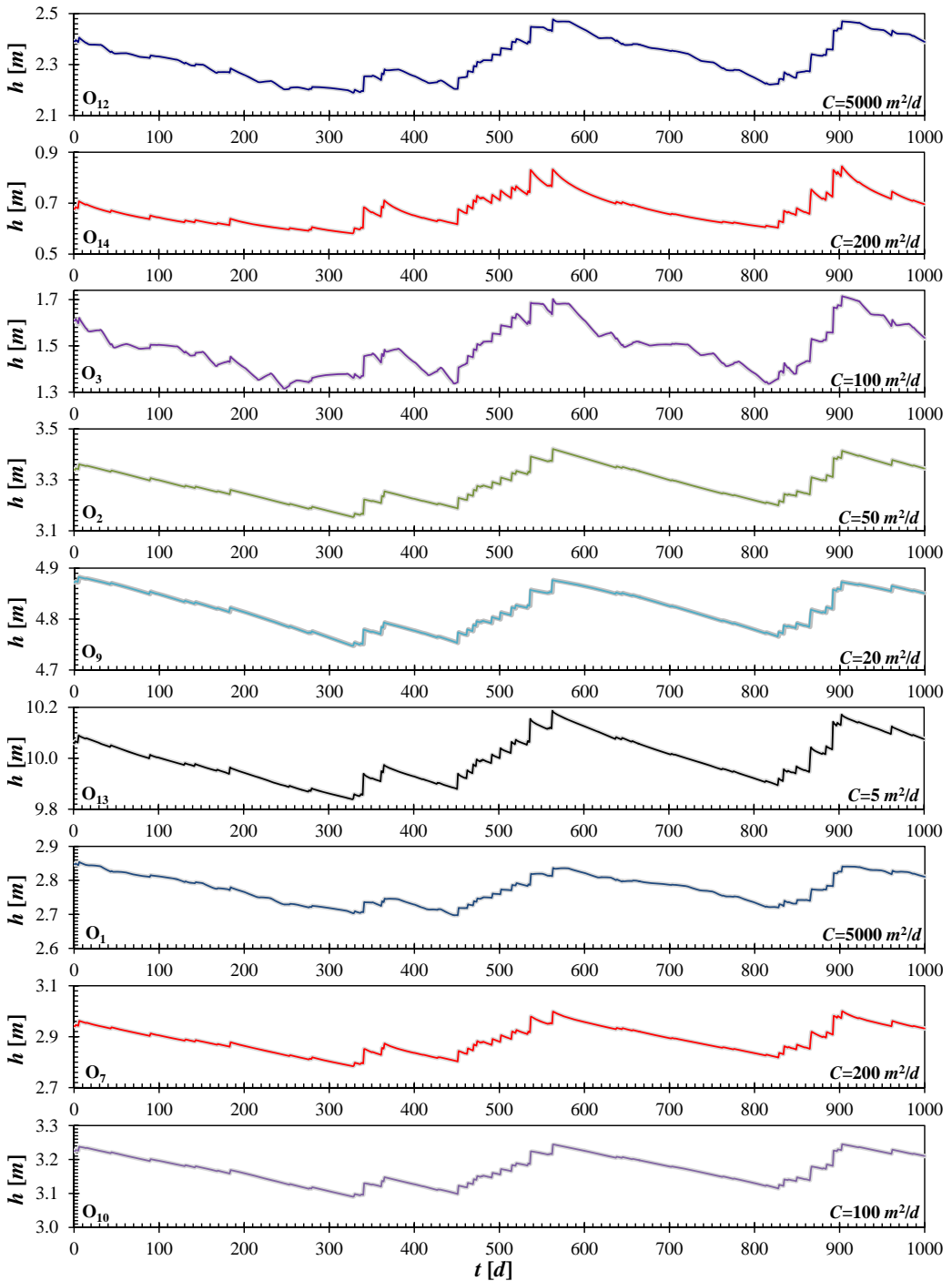
Se observa que dichos hidrogramas son similares a los simulados aplicando el MAV-CSEM, a pesar de que para el MLAN no se ha establecido ningún criterio para imponer la conservación del balance de masa en el dominio del acuífero, fuera del criterio de parada establecido para la generación de los vectores de Lanczos. Las diferencias más considerables

Índice [%]	Conductancia de río [ $m^2/d$ ]					
	5000	200	100	50	20	5
<b>RMS</b>	1.566	1.095	0.505	0.233	0.071	0.015
<b>E<sub>2</sub></b>	98.84	99.03	99.68	99.87	99.96	99.98
<b>BIAS</b>	0.260	0.203	0.100	0.050	0.020	0.010

**Tabla 7.1.** Estimaciones de la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), coeficiente de Nash-Sutcliffe modificado (**E<sub>2</sub>**) y coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas subterráneos simulados mediante modelos reducidos por el MLAN, con respecto a los simulados por modelos numéricos en DF, para el acuífero rectangular heterogéneo, clasificados de acuerdo con el grado de su conexión con el río.

entre las simulaciones reducidas y las de referencia se presentan para conductancias de río mayores a  $100 \text{ m}^2/d$  y suceden durante los picos generados por la acción de la recarga sobre el acuífero. Al respecto, para cuantificar dichas diferencias, se han estimado la raíz del error cuadrático medio normalizado (**RMS**), la eficiencia de Nash-Sutcliffe modificada (**E<sub>2</sub>**) y el coeficiente de sesgo relativo (**BIAS**) para los hidrogramas subterráneos simulados mediante el MLAN, con respecto a los obtenidos usando las DF, cuyos resultados se consignan en la tabla 7.1. En ella se observa que todos los índices de comportamiento estimados son bastante satisfactorios, mejorando a medida que disminuye el grado de conexión río-acuífero considerado en el modelo respectivo. A pesar de lo anterior, las estimaciones de los índices de comportamiento de los hidrogramas simulados por el MLAN son menos óptimas que las obtenidas mediante el MAV-CSEM, discutidas anteriormente en el apartado 6.7.2 y consignadas en la tabla 6.4. Así, la mejor representación de los hidrogramas subterráneos por parte de la simulación reducida mediante el MAV-CSEM se atribuye al efecto de la corrección que se aplica sobre los estados del acuífero con el fin de mantener la ecuación de continuidad cuando el parámetro de control considerado es la relación río-acuífero a lo largo de toda la red de drenaje conectada con el acuífero.

A su vez, en la figura 7.17 se presentan las alturas piezométricas simuladas mediante el MLAN en los siguientes nueve puntos de observación: **O<sub>1</sub>**, **O<sub>2</sub>**, **O<sub>3</sub>**, **O<sub>7</sub>**, **O<sub>9</sub>**, **O<sub>10</sub>**, **O<sub>12</sub>**, **O<sub>13</sub>** y **O<sub>14</sub>**. En cada gráfica de dicha figura, la conductancia que corresponde a cada simulación se ubica en la esquina inferior derecha y el punto de observación respectivo se referencia en la esquina inferior izquierda. Las líneas delgadas coloreadas representan las alturas piezométricas simuladas por modelos reducidos mediante el MLAN, mientras que las líneas gruesas de color gris del fondo representan las piezometrías de referencia, obtenidas resolviendo los respectivos modelos en DF. Un análisis visual de los resultados obtenidos permite afirmar que, al igual que para los hidrogramas, las alturas piezométricas simuladas por el MLAN representan adecuadamente las de referencia. Así pues, al comparar las piezometrías simuladas por el MLAN con las obtenidas al aplicar el MAV-CSEM, presentadas en la figura 6.18, se deduce que su comportamiento en ambos casos es prácticamente idéntico. Por lo tanto, las diferencias entre las simulaciones previamente mencionadas, para modelos que incorporan los mismos parámetros hidráulicos y de conexión río-acuífero, han sido caracterizadas aplicando un análisis cuantitativo comparativo. Así, en las tablas 7.2 y 7.3 se presentan las estimaciones de **RMS** y **E<sub>2</sub>**, respectivamente, en función de la conductancia impuesta sobre los bloques de río. Cabe mencionar que no se han presentado las estimaciones de los índices de sesgo relativo (**BIAS**) puesto que los resultados obtenidos en todos los modelos implementados fueron inferiores al 0.01 %. De lo anterior puede concluirse que las tendencias medias de las piezometrías de referencia han sido bien representadas en las simulaciones reducidas efectuadas por el MLAN.



**Figura 7.17.** Alturas piezométricas para el acuífero rectangular heterogéneo calculadas mediante modelos numéricos resueltos por DF (línea gris gruesa) y modelos reducidos por el MLAN (línea delgada coloreada), correspondientes a diferentes niveles de conexión entre el río y el acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos a priori.

$C [m^2/d]$	$O_9$	$O_2$	$O_{12}$	$O_{13}$	$O_3$	$O_{14}$	$O_1$	$O_7$	$O_{10}$
5000	0.99	0.98	2.48	1.75	2.67	1.88	2.00	1.77	0.99
200	0.88	0.77	1.27	1.05	1.63	1.49	1.55	0.99	0.73
100	0.58	0.61	1.25	0.77	1.47	1.24	0.96	0.62	0.46
50	0.26	0.33	0.90	0.66	1.12	1.17	0.71	0.54	0.35
20	0.15	0.18	0.73	0.52	1.00	0.49	0.57	0.42	0.22
5	0.11	0.12	0.66	0.24	0.73	0.31	0.49	0.17	0.13

**Tabla 7.2.** RMS estimados para las alturas piezométricas en el acuífero rectangular heterogéneo, calculadas mediante modelos reducidos por el MLAN con respecto a las simuladas por los modelos numéricos resueltos por DF de referencia. Los resultados se han clasificado de acuerdo con el grado de conexión río-acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos.

$C [m^2/d]$	$O_9$	$O_2$	$O_{12}$	$O_{13}$	$O_3$	$O_{14}$	$O_1$	$O_7$	$O_{10}$
5000	99.23	99.17	98.50	98.75	98.63	98.94	98.82	99.03	99.10
200	99.51	99.30	99.04	99.21	99.01	99.42	99.20	99.13	99.39
100	99.64	99.51	99.20	99.57	99.20	99.51	99.49	99.50	99.65
50	99.86	99.79	99.64	99.73	99.35	99.72	99.59	99.83	99.90
20	99.95	99.92	99.77	99.99	99.42	99.85	99.62	99.97	99.98
5	100.00	100.00	99.88	99.99	99.51	99.95	99.86	99.99	99.99

**Tabla 7.3.**  $E_2$  estimados para las alturas piezométricas en el acuífero rectangular heterogéneo, calculadas mediante modelos reducidos por el MLAN con respecto a las simuladas por los modelos numéricos resueltos por DF de referencia. Los resultados se han clasificado de acuerdo con el grado de conexión río-acuífero, para nueve de los catorce puntos de observación definidos.

De las tablas anteriormente mencionadas se extraen dos resultados importantes. En primer lugar, los comportamientos de las estimaciones de **RMS** y  $E_2$ , para las alturas piezométricas simuladas mediante el MLAN, son análogos a las encontradas por el MAV-CSEM, las cuales han sido discutidas en el apartado 6.7.2. Es decir, las estimaciones poco óptimas de los índices de comportamiento corresponden a las piezometrías simuladas en las localizaciones cercanas a la conexión río-acuífero y/o en sectores aledaños a las zonas de extracción. En segundo lugar, en todos los casos de conductancia de río considerados para la modelación, los índices de comportamiento para las simulaciones reducidas por el MLAN se encuentran más cercanos a los valores óptimos que los estimados al aplicar el MAV-CSEM. Más aún, la mejoría del comportamiento por parte de las simulaciones reducidas por el MLAN son más evidentes en puntos cercanos a zonas críticas de reducción.

Así, para las piezometrías simuladas en los puntos  $O_1$ ,  $O_3$  y  $O_{12}$ , se han obtenido estimaciones de **RMS** que varían entre cerca del 2.6 % y el 0.5 %, las cuales contrastan con las estimaciones que corresponden al MAV-CSEM, que varían entre cerca del 3.1 % y el 0.75 %. Por su parte, los  $E_2$  estimados varían entre cerca del 98.50 % y el 99.80 %, las cuales son mayores a las obtenidas para las simulaciones por el MAV-CSEM, que varían entre cerca del 97.50 % y el 99.40 %. Es notable el hecho de que las estimaciones de **RMS** y  $E_2$  en dichos puntos mejoran ostensiblemente para conexiones río-acuífero casi perfectas.

Cabe resaltar la influencia que tienen la localización del punto de análisis piezométrico sobre el aumento o disminución en las estimaciones de los índices de comportamiento. En particular, tanto la relación río-acuífero como el itinerario de bombeo influyen la variación de las alturas piezométricas en  $O_3$ , produciendo los peores índices de comportamiento, sin importar la conductancia de río impuesta en el modelo. Las estimaciones de **RMS** y  $E_2$  en esta localización son susceptibles de mejorarse, siempre y cuando se

imponga un criterio de parada más estricto en la generación del subespacio de reducción y/o sea posible encontrar un primer vector residual más adecuado que el usado en este estudio.

Para terminar, cabe resaltar que los índices de comportamiento estimados para las alturas piezométricas simuladas por el MLAN en los demás puntos de observación ( $\mathbf{O}_2$ ,  $\mathbf{O}_7$ ,  $\mathbf{O}_9$ ,  $\mathbf{O}_{10}$ ,  $\mathbf{O}_{13}$  y  $\mathbf{O}_{14}$ ) exhiben mejorías con respecto a las estimaciones para las simulaciones por el MAV-CSEM, aunque no tan significativas como las encontradas en las localizaciones más críticas. En general, se han encontrado **RMS** inferiores al 1.90 % para conductancias superiores a 100 m<sup>2</sup>/d, estimaciones que disminuyen hasta cerca del 0.1 % para conexión río-acuífero casi imperfecta. Análogamente, las eficiencias de Nash superan el 99.00 % para las conductancias de río más altas, aumentando cuando se consideran conexiones río-acuífero más imperfectas, hasta superar el 99.99 % en la mayoría de las piezometrías analizadas. Aún así, el hecho de que el punto  $\mathbf{O}_7$  se encuentre ubicado cerca de la conexión río-acuífero ocasiona que los índices de comportamiento para las piezometrías simuladas no sean tan óptimos como los calculados en otros de los puntos menos críticos analizados, especialmente en los casos donde la conductancia impuesta en los bloques de río del modelo supera los 200 m<sup>2</sup>/d. Los resultados demuestran que las alturas piezométricas mejor reproducidas por las simulaciones reducidas aplicando el MLAN corresponden a los puntos  $\mathbf{O}_9$ ,  $\mathbf{O}_2$  y  $\mathbf{O}_{10}$ , con **RMS** por debajo del 1 % y  $\mathbf{E}_2$  que superan el 99.00 %, llegando a alcanzar el 100.00 % para conexiones imperfectas.

## 7.5. Conclusiones y discusión

En este capítulo se ha presentado una adaptación del esquema de reducción de modelos numéricos de flujo subterráneo en subespacios ortonormales de Krylov, orientada especialmente para ser usada en la simulación y optimización de sistemas de uso conjunto de recursos hídricos. Teniendo en cuenta las características de la EDP de flujo subterráneo, el procedimiento de reducción se ha basado en la aplicación de la iteración racional de Lanczos con ROP, la cual se ha configurado siguiendo los criterios presentados en numerosas investigaciones anteriores (Dunbar y Woodbury, 1989; Gambolati, 1993; Zhang, 2000; Zhang *et al.*, 2000; Woodbury y Zhang, 2001), como se ha descrito en el algoritmo 7.1.

Con el propósito de asegurar la aplicación confiable de dicho algoritmo, se ha propuesto un criterio de parada de base física que actúa durante el procedimiento de generación de la base del subespacio de reducción, mediante la aplicación del concepto de factor de participación propuesto por Dunbar y Woodbury (1989). Así, se ha efectuado una modificación sencilla de la expresión matemática de dicho factor, la cual se ha basado en imponer el cumplimiento de la ecuación de continuidad sobre el volumen de agua que entra o sale del acuífero proveniente de las acciones exteriores. Para ello se ha definido el factor de participación volumétrico acumulado, análogo al coeficiente de reparto del MAV, cuya sumatoria se aproxima a uno cuando el número de vectores de Lanczos generados tiende a la cantidad de nodos en los cuales se ha discretizado el dominio espacial del acuífero. Así, imponiendo un error muy pequeño sobre el cumplimiento del balance de masa contenido por las acciones exteriores o, equivalentemente, imponiendo que los factores de participación acumulados sean cercanos a uno, para todas las acciones exteriores consideradas, se logra que el modelo reducido capture gran parte de la excitación a la cual se encuentra sometido el acuífero. Las aplicaciones sencillas desarrolladas a lo largo de este capítulo han demostrado que dicho criterio es efectivo, apropiado y conveniente, especialmente cuando se desea que la generación de los vectores de Lanczos sea lo más eficiente posible, evitando la generación de bases de subespacios de tamaño mayor al estrictamente necesario.



También se ha presentado el esquema matemático de reducción a través de la aplicación de la proyección desplazada del modelo de flujo sobre un subespacio de Krylov racional, de acuerdo con la discusión presentada por diferentes autores (Zhang, 2000; Zhang *et al.*, 2000; Woodbury y Zhang, 2001). La propuesta más importante presentada respecto de la simulación transitoria del flujo subterráneo se refiere al cálculo de los parámetros de control de interés en los modelos de uso conjunto, la cual ha sido tratada minuciosamente en el apartado 2.9. Con ello, el incremento de la eficiencia en la modelación reducida por el MLAN surge de los siguientes factores: (i) la conveniencia en la generación de la base del subespacio racional de Krylov para la reducción mediante la iteración racional de Lanczos; (ii) la inclusión de los indicadores relacionados con la matriz de acciones elementales invariantes, los factores de participación volumétrica acumulados y el criterio de parada en la generación, haciendo posible omitir las iteraciones de generación innecesarias y (iii) el cálculo de las matrices de proyección reducidas que permiten obtener eficazmente los parámetros de control del acuífero. Asimismo, es pertinente aclarar que los conceptos antes mencionados han venido siendo utilizados desde hace varias décadas en la reducción de modelos de flujo por el MAV (Andreu, 1984; Sahuquillo y Andreu, 1988; Pulido-Velázquez, 2005; Pulido-Velázquez *et al.*, 2007a). La novedad que ha sido introducida en el presente estudio tiene que ver con su inclusión en el esquema de reducción por el MLAN.

Ahora bien, el MLAN ha sido aplicado para la reducción de los modelos de flujo subterráneo de dos acuíferos sintéticos rectangulares con diferentes características. El primero es el acuífero homogéneo de referencia, sometido por separado a acciones exteriores distribuida y puntual, el cual ha sido tratado en las secciones 3.6, 4.4 y 6.6. El segundo corresponde al acuífero heterogéneo sometido simultáneamente a recarga uniforme y a bombeos puntuales en diferentes zonas, como se ha descrito en la sección 6.7.

Inicialmente, se ha presentado un análisis de sensibilidad para caracterizar la influencia de incluir más vectores en la base del subespacio de Krylov de reducción sobre los parámetros de control definidos para la simulación reducida para el acuífero de referencia. Los resultados demuestran que el criterio de parada propuesto para el generador racional de Lanczos es pertinente, por que los índices de comportamiento estimados, con respecto a las simulaciones de referencia obtenidas mediante modelación por DF, tienden a los valores óptimos justo cuando los factores de participación acumulados van teniendo a uno. Posteriormente, con respecto al acuífero rectangular heterogéneo, se han presentado los resultados de la generación de la base del subespacio de Krylov de reducción y los parámetros de control simulados mediante los modelos reducidos. En general, tanto las relaciones río-acuífero como las alturas piezométricas obtenidas son bastante aceptables en términos de las estimaciones de **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**; en particular, la simulación de las alturas piezométricas en las zonas aledañas a las extracciones y/o la relación río-acuífero es prometedora, debido a su eficiencia, calidad y la simpleza conceptual de su cálculo.

Finalmente, debe comentarse que, a pesar de los excelentes resultados obtenidos con el MLAN, existen dos desventajas en su aplicación práctica. La primera es la selección del vector residual de generación de los vectores de Lanczos, la cual puede llegar a ser muy complicada, especialmente en acuíferos con contornos irregulares que manifiestan propiedades hidráulicas sumamente heterogéneas. La segunda es que no es posible obtener una solución analítica explícita de los estados del acuífero en función del tiempo. De ahí se deduce que la simulación de los parámetros de control del acuífero mediante el MAV-CSEM es mucho más eficiente, especialmente cuando se desea calcular el volumen de agua intercambiado entre río y acuífero. La segunda desventaja se hace más crítica cuando es necesario considerar horizontes de simulación del orden de decenas de décadas y el sistema de uso conjunto está poco regulado, por lo cual la simulación del flujo subterráneo debe

plantearse a escala diaria para capturar adecuadamente la variabilidad espacial de los procesos hidrológicos e hidrogeológicos, en especial, las relaciones río-acuífero. Un ejemplo de lo anterior se muestra detalladamente en el capítulo 8, donde se aplica el MLAN para reducir modelos de flujo en acuíferos heterogéneos irregulares, conectados con una red de drenaje sinuosa y sometidos a muchas acciones exteriores.

*“Creo que en la discusión de los problemas naturales deberíamos comenzar, no con las escrituras, sino con los experimentos”.*  
**Galileo Galilei**

# 8

## Modelación reducida del flujo subterráneo en un acuífero heterogéneo bidimensional

### 8.1. Introducción

En este capítulo se ilustran las capacidades de reducción de las metodologías planteadas en los capítulos 6 y 7. Para ello, se ha construido un acuífero bidimensional sintético altamente heterogéneo, que se encuentra sometido a muchas acciones exteriores actuando simultáneamente y cuyo dominio espacial ha sido finamente discretizado. Con el propósito de estudiar la influencia de la geometría sobre la eficiencia de la reducción, se ha considerado que dicho acuífero exhibe contornos irregulares y está conectado con una red de drenaje de cauces perennes, sinuosos e inclinados. Sus transmisividades han sido obtenidas empleando parte de la información de la base de datos del Walker Lake (Isaaks y Srivastava, 1989; Gómez-Hernández, 1992) y se imponen diferentes valores por zonas homogéneas para el coeficiente de almacenamiento.

La configuración planteada para el acuífero de prueba significa un reto importante para los criterios de selección modal propuestos en esta tesis, tanto por la heterogeneidad de su medio poroso como por las características de sus contornos y las acciones exteriores impuestas sobre él. Básicamente, el análisis efectuado ha consistido en una comparación cuantitativa de las simulaciones ejecutadas para diferentes parámetros de control, mediante modelos de flujo reducidos aplicando el MAV-CSEM y el MLAN. Dicha comparación se ha efectuado con respecto a modelos resueltos en DF, cuya integración temporal numérica se ha realizado mediante un esquema euleriano implícito. En consecuencia, el procedimiento usado para efectuar las simulaciones reducidas ha sido el siguiente: (i) se han planteado modelos de flujo subterráneo para diferentes valores de la conductancia del río, (ii) se han construido los subespacios de reducción para diferentes límites de participación modal, en el caso del MAV-CSEM, y factores de participación acumulados, para el MLAN, (iii) se

han realizado las simulaciones de referencia mediante las DF y (*iv*) se han efectuado simulaciones reducidas para las diferentes configuraciones de conexión río-acuífero planteadas, correspondientes a diferentes tamaños de subespacios de reducción.

Usando dichos resultados, se presenta un análisis de sensibilidad para diferentes índices de comportamiento, (**RMS**, **BIAS** y  $E_2$ , para la solución transitoria con condiciones de contorno nulas), evaluados en función de los diferentes parámetros de control simulados y del planteamiento para reducción de cada metodología, con respecto a los cambios de las características de la conexión río-acuífero. Así, en el caso del MAV-CSEM, se estudia el efecto que tiene la variación de la conductancia del río, con respecto a los valores límite del nivel de continuidad y el grado de participación modal que deben asignarse para lograr una reducción eficiente. Análogamente, en el caso del MLAN, se analiza el efecto que tiene la variación de dicha conductancia sobre la cantidad de vectores de Lanczos a usar en la generación del subespacio racional de Krylov para alcanzar una reducción satisfactoria.

## 8.2. Campo de transmisividad

Los valores de transmisividad asignados a las celdas del acuífero simulado en este capítulo, corresponden a una parte de la base de datos de Walker Lake (Isaaks y Srivastava, 1989; Gómez-Hernández, 1992). Esta base está distribuida sobre un dominio rectangular de 260 x 300 nodos y se considerará que las celdas son cuadradas con lado igual a 100 m. Ésta es una base de datos de génesis natural, por lo que se puede afirmar que sus valores tienen un patrón de continuidad espacial susceptible de ser encontrado en condiciones naturales (Cassiraga, 1999). En la figura 8.1 se representa gráficamente el subdominio espacial de la base de datos original de Walker Lake utilizado como campo de transmisividad en este ejercicio. Dicho dominio está compuesto por 30800 bloques, formando una malla rectangular con 140 x 220 nodos.

## 8.3. Modelos conceptuales de los acuíferos de prueba

En esta sección se describen los modelos conceptuales de los acuíferos sintéticos bi-dimensionales de prueba para la reducción de modelos de flujo por el MAV-CSEM y el MLAN. Para comenzar, se discute acerca de las condiciones de contorno asumidas, especialmente en lo concerniente a la conexión río-acuífero. Posteriormente, se describen los parámetros hidráulicos de los medios porosos asumidos para las simulaciones. Finalmente, se presentan las distribuciones espaciales y las magnitudes de las acciones exteriores actuando sobre los acuíferos anteriormente mencionados.

### 8.3.1. Geometría de las condiciones de contorno, la conexión río-acuífero y discretización espacial

Se considera un acuífero de forma irregular contenido dentro del subdominio espacial extraído de la base de datos de Walker Lake que se ha descrito en el apartado 8.2 y se ha presentado en la figura 8.1. Con el propósito de resolver numéricamente la EDP de flujo subterráneo, se ha construido una malla de bloques en DF que permite discretizar las derivadas parciales espaciales involucradas sobre la región antes mencionada. Las características más importantes de dicha malla se enuncian a continuación. Primero, los contornos de flujo nulo son irregulares y siguen la línea de color negro que se muestra en los gráficos de la figura 8.2. Segundo, se usa la misma discretización espacial impuesta

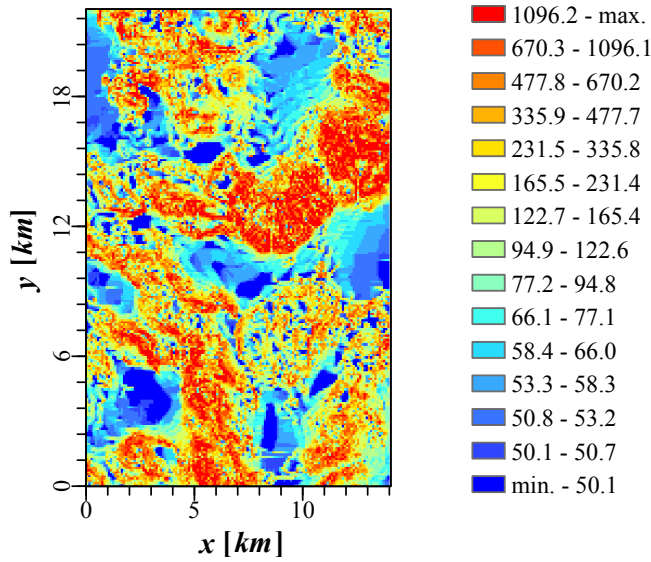


Figura 8.1. Subdominio de la base de datos de Walker Lake utilizado en este capítulo.

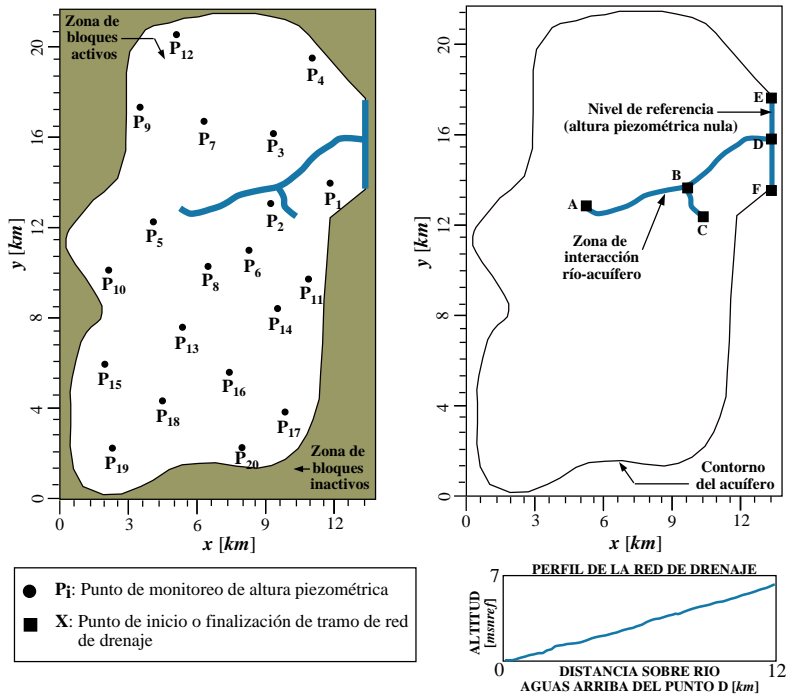


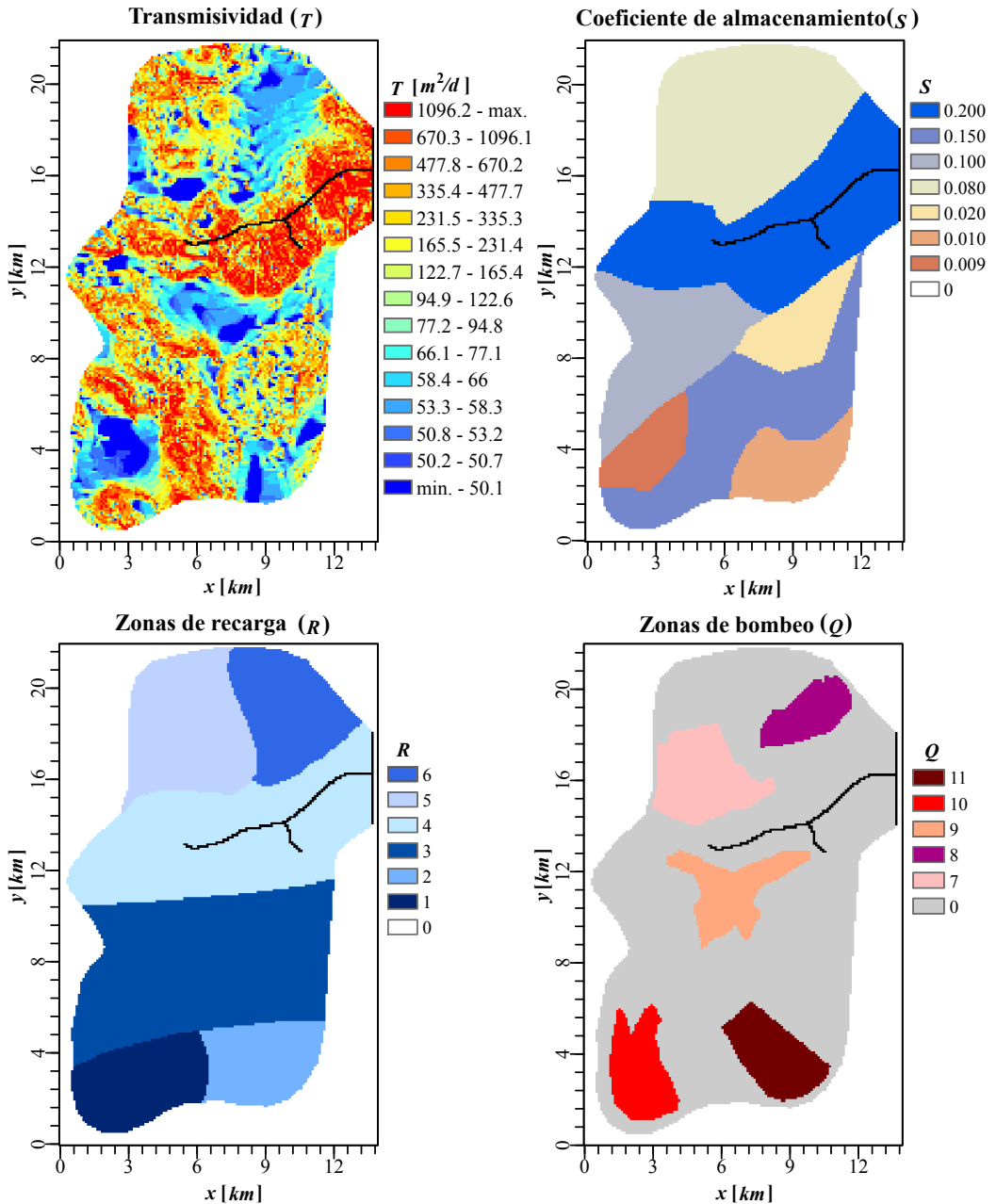
Figura 8.2. Geometría y condiciones de contorno para los modelos conceptuales de los acuíferos de prueba. Izquierda: localización de los bloques activos, la geometría del contorno del acuífero y los puntos para seguimiento de la piezometría. Derecha: forma de la conexión río-acuífero y las zonas donde se calculan los intercambios de caudal entre el río y el acuífero. Debajo de ésta, se presenta la variación de las altitudes del lecho del río a lo largo de la red de drenaje.

para el campo de transmisividad, es decir, se consideran 30800 bloques regulares de 100 m x 100 m que forman una malla cuadrada de 140 x 220 nodos en total. Tercero, los modelos de prueba contienen 21850 bloques activos, localizados dentro de la región de color blanco mostrada en el gráfico izquierdo de la figura 8.2; en consecuencia, el área de la región activa de flujo en el acuífero es de unos 218.5 km<sup>2</sup>. Cuarto, fuera de los contornos del acuífero se establecen 8150 bloques inactivos ubicados dentro de la zona de color ocre que se ve en la gráfica izquierda de la figura 8.2. Por último, se imponen 178 bloques de conexión río-acuífero dispuestos según la línea de color azul en el gráfico izquierdo de la figura 8.2.

En base a la discretización espacial anterior, se establecen las siguientes condiciones de contorno en los modelos de prueba: (i) todos los bloques de los bordes del acuífero, con excepción de los incluidos en el segmento comprendido entre los puntos **E** y **F** que se muestra en la gráfica derecha en la figura 8.2, se asumen impermeables, es decir, se modelan como condiciones de contorno de tipo Neumann con flujo impuesto nulo, (ii) los bloques que corresponden a la conexión río-acuífero se modelan como condiciones de contorno de tipo Cauchy, siendo la conductancia del río el parámetro central en los análisis de sensibilidad. Así pues, en los modelos implementados se ha asumido que el río es completamente penetrante en el acuífero, pero están separados entre sí por una capa semipermeable y se mantienen siempre conectados a lo largo del horizonte de simulación, por lo cual no se violan las hipótesis de linealidad impuestas sobre los métodos de reducción. Al respecto, se han considerado seis conductancias de río que varían logarítmicamente entre 1000 y 20 m<sup>2</sup>/d, imponiéndose un valor uniforme sobre los bloques pertenecientes a la red de drenaje de cauces permanentes, los cuales se representan mediante los segmentos de recta **AB**, **BC**, **BD** y **EF** en el gráfico derecho de la figura 8.2. También se ha establecido que los cauces de río conectados hidráulicamente con el acuífero son inclinados. Por lo tanto, las elevaciones del fondo de los cauces de la red de drenaje aumentan a medida que se avanza aguas arriba del nivel de referencia, según el gráfico presentada en la parte inferior derecha de la figura 8.2. En éste se observa que la distancia se mide desde el punto **D**, el cual se localiza a la salida del acuífero, como se presenta en el perfil longitudinal de la figura antes mencionada. Cabe aclarar que el nivel de referencia se establece a lo largo del segmento **EF**; por consiguiente, se ha asumido que los bloques allí localizados tienen altura piezométrica nula, lo cual implica que las alturas piezométricas simuladas son relativas al nivel impuesto sobre dicho segmento.

### 8.3.2. Parámetros hidráulicos

El campo de transmisividades que será usado en las simulaciones se presenta en el gráfico izquierdo superior de la figura 8.3. Los colores más cercanos al rojo se asocian a las zonas del acuífero con transmisividades más elevadas, los bloques de color negro son aquellos donde se establece la existencia de las relaciones río-acuífero y el color blanco denota la zona de bloques inactivos. Al respecto, sobre el campo original de transmisividades se ha superpuesto una máscara que representa los contornos de no flujo definidos en los modelos conceptuales del acuífero. En dicho campo también se observa que las zonas con mayores transmisividades se localizan cerca de la conexión río-acuífero, con lo cual la respuesta del acuífero a excitaciones en dicha zonas se verá reflejada rápidamente en los hidrogramas subterráneos; característica que constituye un reto significativo para los algoritmos de reducción planteados y para la eficiencia de las implementaciones computacionales construidas puesto que, a priori, se espera que los modelos de flujo reducidos requieran cumplir con una porción considerable de su espectro. El anterior problema se discute más profundamente a lo largo de las secciones posteriores.



**Figura 8.3.** Parámetros hidráulicos y acciones exteriores impuestas en los acuíferos de prueba. El gráfico superior izquierdo presenta el campo de transmisividades y el superior derecho muestra el coeficiente de almacenamiento, el gráfico inferior izquierdo contiene las zonas de recarga y el gráfico inferior derecho presenta las zonas de extracciones.

Por otra parte, la distribución espacial del coeficiente de almacenamiento en los acuíferos de prueba se presenta en la gráfica superior derecha de la figura 8.3. En ésta se observa la existencia de siete zonas, a cada una de las cuales le corresponde un valor uniforme de dicho parámetro. En general, los mayores coeficientes de almacenamiento se localizan en las regiones más transmisivas del acuífero.

### 8.3.3. Acciones exteriores

En los modelos de prueba se han impuesto once acciones exteriores (AE) actuando simultáneamente sobre el acuífero. De éstas, seis corresponden a recarga uniformemente distribuida sobre diferentes regiones homogéneas, mientras que las cinco restantes se asocian a bombeos actuando en zonas de explotación. En ambos casos, las intensidades varían en el tiempo a lo largo de 5113 días, los cuales equivalen a 14 años. La distribución espacial de las zonas homogéneas de recarga se presenta en la gráfica inferior izquierda de la figura 8.3, donde se ha empleado una escala de azules cuya intensidad aumenta a medida que el valor medio de la serie de recargas impuestas se incrementa. De esta forma, se deduce que la zona 1 cuenta con la mayor entrada de agua; por el contrario, la región 4, que es adyacente a la conexión río-acuífero, registra las menores recargas.

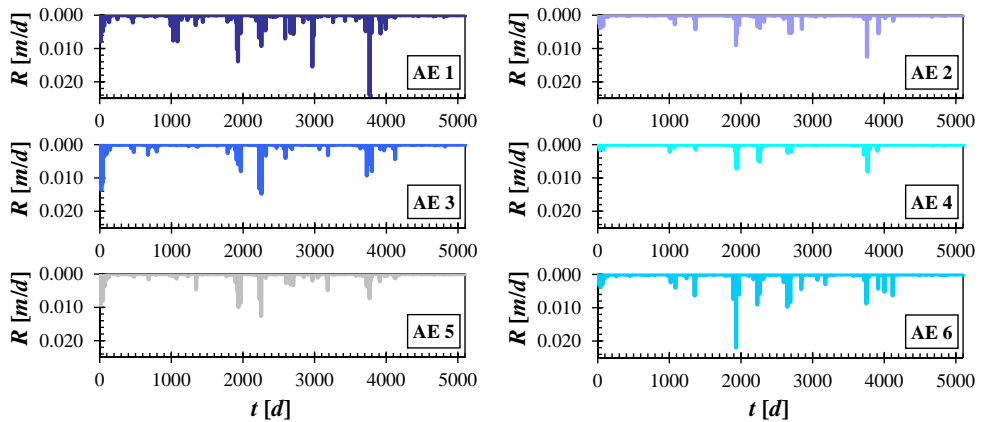


Figura 8.4. Intensidades aplicadas en las zonas homogéneas de recarga.

Igualmente, las intensidades de las recargas usadas para cada zona se presentan en la figura 8.4, donde cada serie se representa mediante el color asociado a la zona que le corresponde, de acuerdo con las convenciones definidas en la figura 8.3. Así, en las gráficas de dicha figura se observan algunas características importantes, las cuales se mencionan a continuación. Primero, los eventos de recarga más intensos se presentan en las zonas 1 y 6, superando los 0.025 m/d. Segundo, la zona 1 presenta los episodios de recarga más intensos, siendo éstos bastante frecuentes. Tercero, la zona 3 manifiesta las menores intensidades de recarga, tanto en frecuencia como en duración, pero su área de influencia es la más grande, con lo cual, durante muchos intervalos, su volumen acumulado de recarga supera los correspondientes a las otras zonas. Cuarto, las intensidades de recarga media de las series varían entre  $1.65 \times 10^{-5}$  m/d y  $5.21 \times 10^{-5}$  m/d, las cuales vienen asociadas con las zonas 1 y 4, respectivamente. Quinto y último, las intensidades máximas de recarga de las series varían entre 0.027 m/d, que corresponde a la zona 1, y 0.008 m/d para la zona 4; las cuales, en volumen, equivalen a unos  $0.52 \text{ hm}^3$  y  $0.48 \text{ hm}^3$ , respectivamente.



Por otra parte, la distribución espacial de las cinco regiones homogéneas de extracción por bombeos se presenta en la gráfica inferior derecha de la figura 8.3. En ésta, el color gris indica las zonas del acuífero donde no existen extracciones, mientras que en las demás regiones se ha empleado una escala de rojos cuya intensidad aumenta a medida que la media de la serie de extracciones se incrementa. Así, a mayor intensidad del color rojo, mayor es la intensidad del bombeo aplicado en un bloque que pertenece a la zona correspondiente. Lo anterior se observa más claramente en la figura 8.5, donde se presentan las cinco series de intensidades de bombeo impuesto a cada bloque de las zonas homogéneas.

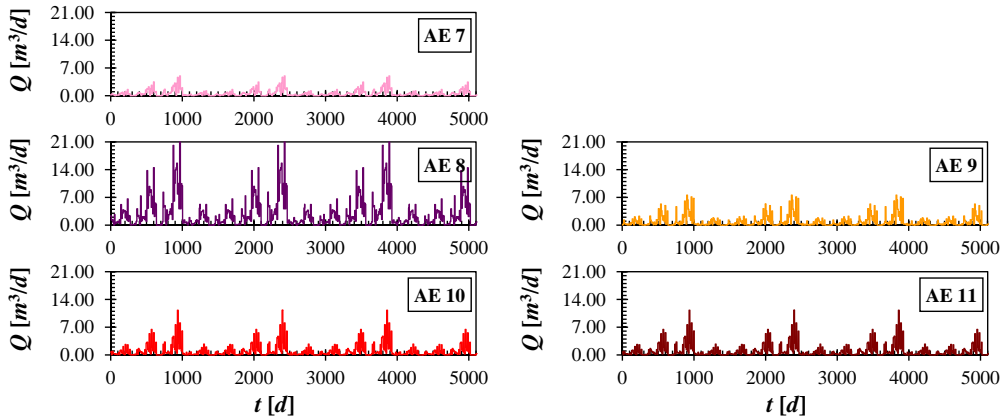
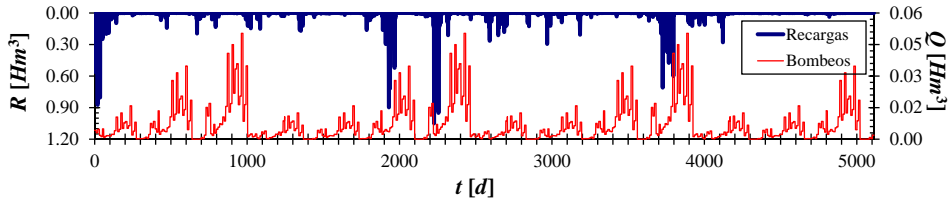


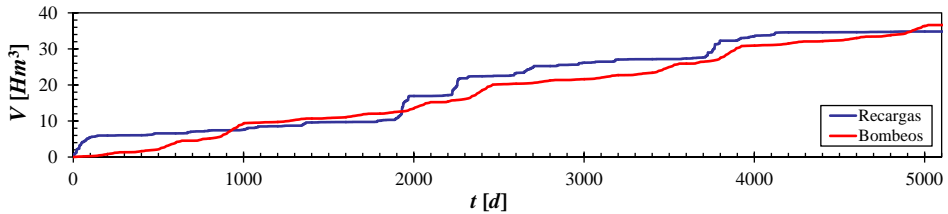
Figura 8.5. Bombeos aplicados por bloque en las zonas de extracción.

De las gráficas en dicha figura se han detectado algunas características notables, las cuales se enumeran a continuación. Primero, en todas las zonas, las intensidades de bombeo tienen un período de 4 años, en otras palabras, se aplica la misma intensidad cada 1461 días. Segundo, los bombeos más intensivos se presentan en la zona 8, donde superan los  $20 \text{ m}^3/\text{d}$ . Tercero, la zona 7 manifiesta las menores intensidades de bombeo, las cuales no superan los  $7 \text{ m}^3/\text{d}$ . Cuarto, los bombeos promedio de las series varían entre  $0.62 \text{ m}^3/\text{d}$  y  $2.93 \text{ m}^3/\text{d}$ , las cuales vienen asociadas con las zonas 7 y 8, respectivamente. Por último, las intensidades máximas de bombeo de las series varían entre  $4.9 \text{ m}^3/\text{d}$ , que corresponde a la zona 7, y  $20.9 \text{ m}^3/\text{d}$  para la zona 8, que en volúmenes equivalen a unos  $7.43 \times 10^{-3} \text{ hm}^3$  y  $1.56 \times 10^{-2} \text{ hm}^3$ , respectivamente.

En las figuras 8.6 y 8.7 cada gráfico representa las intensidades de cada AE que actúa sobre el acuífero. Así, los volúmenes agregados de las AE actuando sobre el acuífero se presentan en la figura 8.6. En ella, el eje de ordenadas izquierdo se usa para representar las recargas, mientras que en el eje derecho se representan los bombeos. Las barras azules denotan el volumen de recarga agregado por intervalo, por su parte, la línea roja denota el volumen de bombeo agregado por intervalo. Por los rangos de ambas series, parecería que el volumen de agua que entra por recarga al acuífero es mucho mayor que el extraído por explotación. En este punto cabe aclarar que se ha impuesto extracción continua, mientras que los episodios de recarga son puntuales y, en muchos casos, éstos vienen separados por más de dos meses. Lo cierto es que la tendencia de los volúmenes acumulados agregados de recarga y extracción son bastante parecidos; es más, al final del horizonte de simulación, dichos volúmenes son prácticamente iguales y rondan los  $32 \text{ hm}^3$ . La anterior característica se observa en la figura 8.7, donde los volúmenes acumulados de recarga y bombeo agregados se representan mediante las líneas azul y roja, respectivamente.



**Figura 8.6.** Volúmenes totales de agua recargada y extraída integrados sobre el dominio espacial del acuífero.



**Figura 8.7.** Volúmenes acumulados totales de agua recargada y extraída integrados sobre el dominio espacial del acuífero.

### 8.3.4. Condiciones iniciales

Las condiciones iniciales para las simulaciones se obtuvieron de solucionar modelos de flujo en régimen permanente, imponiendo las seis diferentes conductancias en los bloques que representan la relación río-acuífero en la red de drenaje de cauces permanentes del acuífero de prueba. En todos los modelos implementados, se ha impuesto una recarga uniformemente distribuida sobre el acuífero con una intensidad de  $1.679 \times 10^{-6}$  m/d, la cual produce una configuración de alturas piezométricas para cada bloque activo tal que el caudal inicial de descarga al río es de  $3500 \text{ m}^3/\text{d}$ . También debe aclararse que en los modelos implementados se ha incorporado el cambio de elevaciones en el lecho de los cauces que forman la red de drenaje, por lo cual las alturas piezométricas iniciales hacen honor a dicha configuración geométrica. Las condiciones iniciales simuladas han sido usadas tanto para resolver los modelos de referencia, implementados y resueltos mediante las DF, como los modelos reducidos por el MAV-CSEM y el MLAN.

### 8.3.5. Parámetros de control

Tanto para las simulaciones efectuadas por modelos resueltos en DF, como en las realizadas mediante modelos reducidos, se han establecido los siguientes parámetros de control: (i) alturas piezométricas en los veinte puntos de control que se muestran en el gráfico superior izquierdo de la figura 8.2, (ii) los caudales de intercambio entre el río y el acuífero a lo largo de toda la red de drenaje de cauces permanentes y (iii) los caudales parciales de intercambio en los diferentes cauces que conforman dicha red de drenaje.

En el primer caso, los puntos de control se denotan como  $\mathbf{P}_i$ , con  $i = 1, \dots, 20$ . En el último caso, se consideran cuatro segmentos, denominados **AB**, **BC**, **BD** y **EF**, como ha sido presentado en el gráfico superior derecho de la figura 8.2. En su orden respectivo, y con el propósito de dar claridad al lector, dichos segmentos se denominan de la siguiente manera: (i) el segmento **EF** es el tramo 1 y le corresponde el caudal de intercambio

río-acuífero  $Q_1(t)$ , (ii) el segmento **BD** es el tramo 2 y le corresponde el caudal de intercambio río-acuífero  $Q_2(t)$ , (iii) el segmento **BC** es el tramo 3 y le corresponde el caudal de intercambio río-acuífero  $Q_3(t)$  y (iv) el segmento **AB** es el tramo 4 y le corresponde el caudal de intercambio río-acuífero  $Q_4(t)$ . En el documento se presentan únicamente los resultados de las alturas piezométricas en seis de los veinte puntos de control:  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_5$ ,  $\mathbf{P}_{11}$ ,  $\mathbf{P}_{16}$  y  $\mathbf{P}_{19}$ . Éstos se han elegido por estar ubicados en zonas críticas de reducción, es decir, cerca de la región de conexión entre el río y el acuífero, en zonas de bombeo intenso o en zonas de bombeo localizadas cerca al río. La ubicación de dichos puntos en el acuífero se presenta en el gráfico superior izquierdo de la figura 8.2.

En los casos de acuífero rectangular homogéneo o heterogéneo de los capítulos 4, 6 y 7 no se ha considerado la componente permanente  $\mathbf{u}$  de la solución numérica de la EDP de flujo subterráneo puesto que ésta es cero, entonces los parámetros de control simulados para el problema transitorio con condiciones de contorno nulas  $\mathbf{w}(t)$  son idénticos a los obtenidos para la solución total  $\mathbf{h}(t)$  (ver figura 2.4). Sin embargo, en este caso particular de aplicación, el acuífero heterogéneo está conectado con una red de drenaje inclinada. Por consiguiente, el análisis de los índices de comportamiento **BIAS**, **RMS** y  $\mathbf{E}_2$  se lleva a cabo sobre la componente transitoria con condiciones de contorno nulas de los parámetros de control definidos; esto con el fin de evitar el sesgo en las estimaciones ocasionado por incluir la antes mencionada componente permanente de la solución, la cual, según los desarrollos matemáticos presentados hasta ahora, no ha sido incluida en los procedimientos de reducción planteados. Dicha consideración es consistente con el análisis presentado en el apartado 3.6.2 acerca de los índices de comportamiento **RMS** y **BIAS**.

A efectos prácticos de estimación de los índices de comportamiento se ha utilizado el siguiente procedimiento: (i) se realiza la simulación de referencia ejecutando el modelo en DF, (ii) se ejecutan las simulaciones reducidas análogas mediante el MAV-CSEM y el MLAN (iii) se calculan los parámetros de control de la solución total y se elaboran gráficos comparativos, (iv) se calcula la parte permanente de los parámetros de control definidos y ésta se sustrae tanto de las simulaciones de referencia como de las simulaciones reducidas, con ello se obtienen las componentes transitorias para las condiciones de contorno nulas, (v) se calcula los índices de comportamiento usando dichas componentes transitorias.

## 8.4. Aplicación del MAV-CSEM a la reducción de modelos de flujo subterráneo

En los siguientes apartados se presentan los resultados más importantes obtenidos de aplicar el MAV-CSEM en la reducción de los modelos de flujo subterráneo para el acuífero heterogéneo generado usando la base de datos de Walker Lake. También se presenta el análisis de sensibilidad de los índices de comportamiento **BIAS**, **RMS** y  $\mathbf{E}_2$  estimados para los parámetros de control descritos en el apartado 8.3.5, con respecto a la variación del límite de participación modal y la conductancia impuesta sobre el río.

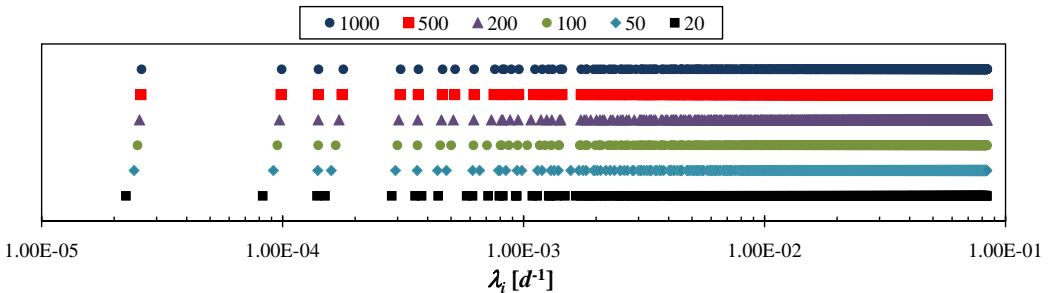
### 8.4.1. Solución de los problemas de autovalores, generación de modos efectivos y enmascaramiento de modelos reducidos

El primer paso para reducir los modelos de flujo subterráneo, planteados para el acuífero heterogéneo empleando el MAV-CSEM, es resolver los problemas generalizados de autovalores asociados a las partes espaciales de las soluciones por el MAV. Una vez se dispone de dichas soluciones, se seleccionan los modos efectivos siguiendo el marco conceptual de

parametrización para la reducción propuesto para el MAV-CSEM, el cual ha sido descrito detalladamente en la sección 6.2. En los seis casos de conductancias de río asumidas, se ha utilizado el generador racional de Lanczos que ha sido explicado a profundidad en el apartado 6.5.5, de acuerdo con el algoritmo 6.15. El generador anteriormente mencionado ha sido aplicado utilizando la iteración racional de Lanczos. Ésta funciona siguiendo los pasos del algoritmo 6.13, donde se ha adoptado una versión que incluye la ROP, que implementa criterios robustos para revisar el grado de ortogonalidad en el PGS (Rutishauser, 1967; Giraud y Langou, 2004) y usa el reinicio explícito por deflación cada 500 modos generados antes de cumplirse los criterios de parada impuestos a priori. Al respecto, como criterio para detener la generación modal se ha establecido que el nivel de continuidad, para las 11 acciones exteriores, supere simultáneamente un límite de  $ba_{lim} = 99.5\%$ .

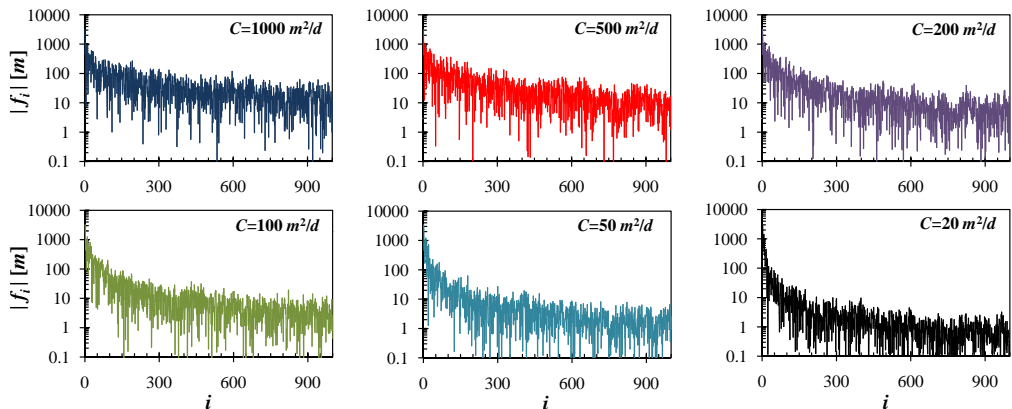
Asimismo, se ha asegurado que la generación debe obtener, como mínimo, los 1500 modos asociados a los autovalores de menor magnitud en los espectros de los modelos. En este caso particular de acuífero heterogéneo, el nivel de continuidad requerido para detener la generación ha sido sobrepasado antes de generar los 1500 modos antes mencionados, para todas las conductancias de río y las acciones exteriores consideradas. Como consecuencia de lo anterior, una vez se han culminado las generaciones modales se dispone de seis conjuntos de 1500 modos, a partir de los cuales se efectúa el análisis de sensibilidad de los índices de comportamiento (**BIAS**, **RMS** y  $E_2$ ) con respecto a la variación del límite de participación. Cabe resaltar que, aplicando el criterio de nivel de continuidad para detener la generación, el tamaño de los modelos ha sido reducido de 21850 modos a menos de 1500; tamaño que es susceptible de reducirse aún más al aplicar convenientemente los criterios de enmascaramiento y selección de los modos efectivos.

El procedimiento de generación de los modos efectivos propuesto en el algoritmo 6.15 es diferente al que se acaba de describir, el cual se considera más apropiado para efectos de realizar el análisis de sensibilidad de los índices de comportamiento de los parámetros de control escogidos y evita la ejecución de cálculos redundantes. A pesar de lo anterior, si el objetivo de la reducción es obtener un modelo reducido único y eficiente, es más conveniente ejecutar la selección de modos efectivos y su enmascaramiento al mismo tiempo que avanza el proceso de generación. En este caso particular, el generador MAGCD, descrito con detalle en los algoritmos 6.10 y 6.14, es prácticamente inaplicable debido al gran tamaño de los modelos a reducir. La experiencia práctica ha demostrado que el uso de dicho generador es recomendable únicamente para reducir modelos de flujo subterráneo de tamaño pequeño o intermedio, es decir, cuando la discretización del dominio espacial esta entre 3000 y 5000 bloques o nodos activos.



**Figura 8.8.** Primeros 1000 autovalores para el acuífero rectangular heterogéneo, correspondientes a las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río.

Primeramente, en la figura 8.8 se presentan seis conjuntos compuestos por los 1000 autovalores de menor magnitud clasificados de acuerdo a su respectiva conductancia. Si se comparan estos resultados con los obtenidos para acuíferos rectangulares, que han sido analizados en los capítulos 3, 4 y 6, se pueden plantear los siguientes comentarios. Primero, existe una disminución considerable en la magnitud de los autovalores, lo cual se traduce en que la velocidad de respuesta agregada de la dinámica de flujo del acuífero heterogéneo es menor. Esto se debe a que el tamaño del dominio espacial considerado casi triplica al impuesto para dichos acuíferos rectangulares y, por consiguiente, la influencia de las características geométricas es preponderante sobre la respuesta hidrogeológica subterránea. Segundo, el notable aumento en la heterogeneidad de las propiedades hidráulicas del acuífero modifica la distribución espectral de los modos del modelo. También es claro el efecto que tienen la conductancia del río sobre el aumento o disminución de la amplitud espectral del modelo; podría compararse su efecto al de un tapón que dificulta, en mayor o menor medida, el desagüe del acuífero. Tercero, se ha detectado que los autovalores de menor magnitud para el acuífero heterogéneo disminuyen cuando decrece la conductancia del río, en igual o mayor medida que lo encontrado para acuíferos rectangulares, especialmente para los menores valores de dicha conductancia. Por consiguiente, la parametrización de la conexión río-acuífero juega un papel crucial sobre el cambio de la dinámica de flujo subterráneo. Respecto de lo anterior, se observa que los autovalores pasan de aproximadamente  $4.5 \times 10^{-4}$ , para acuífero rectangular, a  $2.5 \times 10^{-5}$ , para acuífero heterogéneo, siendo éste último unas 18 veces más pequeño que el primero. Es más, dado que el río solo discurre por una parte relativamente reducida del acuífero heterogéneo, se deduce que el factor que más influye en el descenso de los autovalores es, precisamente, la conductancia de su lecho. Cuarto, para todos los casos de conexión río-acuífero analizados, se ha observado que la amplitud espectral de la franja generada, definida como  $\lambda_{1500}/\lambda_1$ , se encuentra cercana a 4500; relación que casi duplica a la encontrada para acuífero rectangular y conexión río-acuífero casi perfecta que se ha presentado anteriormente en el apartado 4.4.1, la cual había sido calculada para todo el ancho espectral del modelo.



**Figura 8.9.** Valores absolutos de los volúmenes encerrados por los autovectores asociados a los 1000 autovalores de menor magnitud para el acuífero irregular heterogéneo, correspondientes a las seis diferentes conductancias asignadas a los bloques de río.

En la figura 8.9 se presentan los valores absolutos de los volúmenes encerrados por los autovectores asociados a los 1000 autovalores de menor magnitud, ordenados según la

conductancia del río. De estos resultados se deduce que la heterogeneidad de los parámetros hidráulicos del acuífero ocasiona que la disminución de los volúmenes, con respecto al aumento del índice modal respectivo, no es gradual como la exhibida por los modos efectivos de un acuífero rectangular. Por el contrario, dicha variación es oscilante, pero manifiesta una evidente tendencia decreciente a medida que se consideran menores conductancias. Sin embargo, los rangos de variación de ambos conjuntos de volúmenes son muy parecidos, con valores situándose entre 900 y 10 m para conexión río-acuífero casi perfecta y variando entre 1100 y 1 m para conexión río-acuífero casi imperfecta.

Los primeros 100 coeficientes de reparto modales, para cada AE considerada y ordenados de acuerdo con la conductancia de río correspondiente, se presentan en las figuras 8.10, 8.11, 8.12 y 8.13. En las dos primeras figuras se han consignado los resultados correspondientes a las seis acciones de recarga, organizadas siguiendo la convención propuesta en las figuras 8.3 y 8.4; mientras que en las dos últimas se presentan los resultados asociados a las cinco acciones de extracción, dispuestas de acuerdo a la convención definida en las figuras 8.3 y 8.5. De los resultados obtenidos se deduce que la irregularidad espacial en la aplicación de las AE ocasiona que, para algunas de éstas, se manifieste una importante y errática variabilidad espectral de los coeficientes de reparto, sin importar el tipo de excitación considerada. Con excepción de la AE 4, los coeficientes de reparto calculados manifiestan valores que fluctúan alrededor de cero, lo cual implica que la convergencia al límite superior unitario de los coeficientes de repartos acumulados es más lenta. Así, se hace más difícil alcanzar rápidamente el criterio de parada impuesto para la generación modal, lo cual implica que dichos procedimientos, sin importar el grado de conexión río-acuífero considerado, han sido muy demandante computacionalmente.

De los resultados concernientes a los coeficientes de reparto para las AE de recarga se puede resaltar lo siguiente: (i) todos las AE, con excepción de la AE 4, manifiestan un modo dominante, es decir, existe un modo cuyo coeficiente de reparto es mayor que todos los demás; (ii) el primer modo es dominante para las AE 1, 2 y 3, mientras que el segundo modo es dominante para las AE 5 y 6; (iii) la mayor amplitud espectral de variabilidad de los coeficiente de reparto se manifiesta en la AE 2, para la cual dichos coeficientes fluctúan considerablemente hasta aproximarse al centésimo modo, (iv) la menor amplitud espectral de variabilidad de los coeficientes de reparto se hace presente en la AE 1, para la cual dichos coeficiente exhiben valores muy cercanos a cero antes de sobrepasar el décimo modo; (v) la AE 4 manifiesta una variación espectral muy uniforme, lo cual se debe a que ésta abarca gran parte del dominio espacial del acuífero e incluye toda la zona de conexión entre éste y la red de drenaje; (vi) los coeficientes de reparto de las EA 5 y 6 manifiestan tendencias espectrales similares, lo cual puede deberse a que se encuentran aplicadas en regiones con características geométricas parecidas, donde la variabilidad espacial de las propiedades hidráulicas del acuífero no son tan pronunciadas.

Asimismo, de los resultados que corresponden a los coeficientes de reparto para las AE de extracción se puede destacar lo siguiente: (i) al igual que la mayoría de las AE de recarga, todas las AE de extracción manifiestan un modo dominante; (ii) el primer modo es dominante para las AE 9, 10 y 11, mientras que el segundo modo es dominante para las AE 7 y 8; (iii) la mayor amplitud espectral de variabilidad de los coeficiente de reparto se manifiesta en la AE 11, para la cual los coeficientes de reparto oscilan de forma bastante apreciable justo hasta antes de sobrepasar al octogésimo modo; (iv) las variabilidades espectrales de los coeficientes de reparto para todas las AE, con excepción de los asociados con la AE 11, son similares y sus fluctuaciones de mayor magnitud se ubican entre los modos primero y trigésimo; y (v) los coeficientes de reparto de las AE

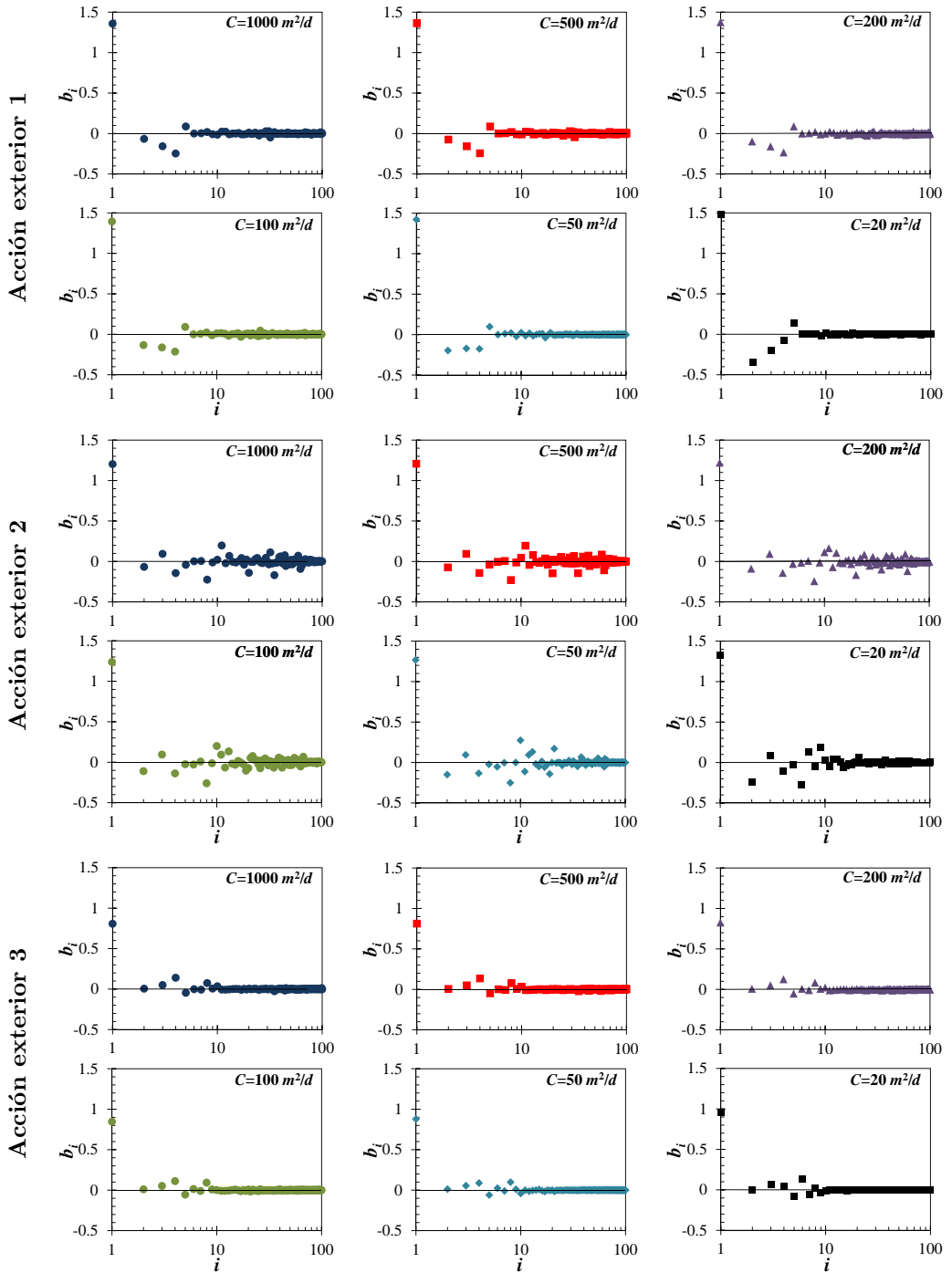
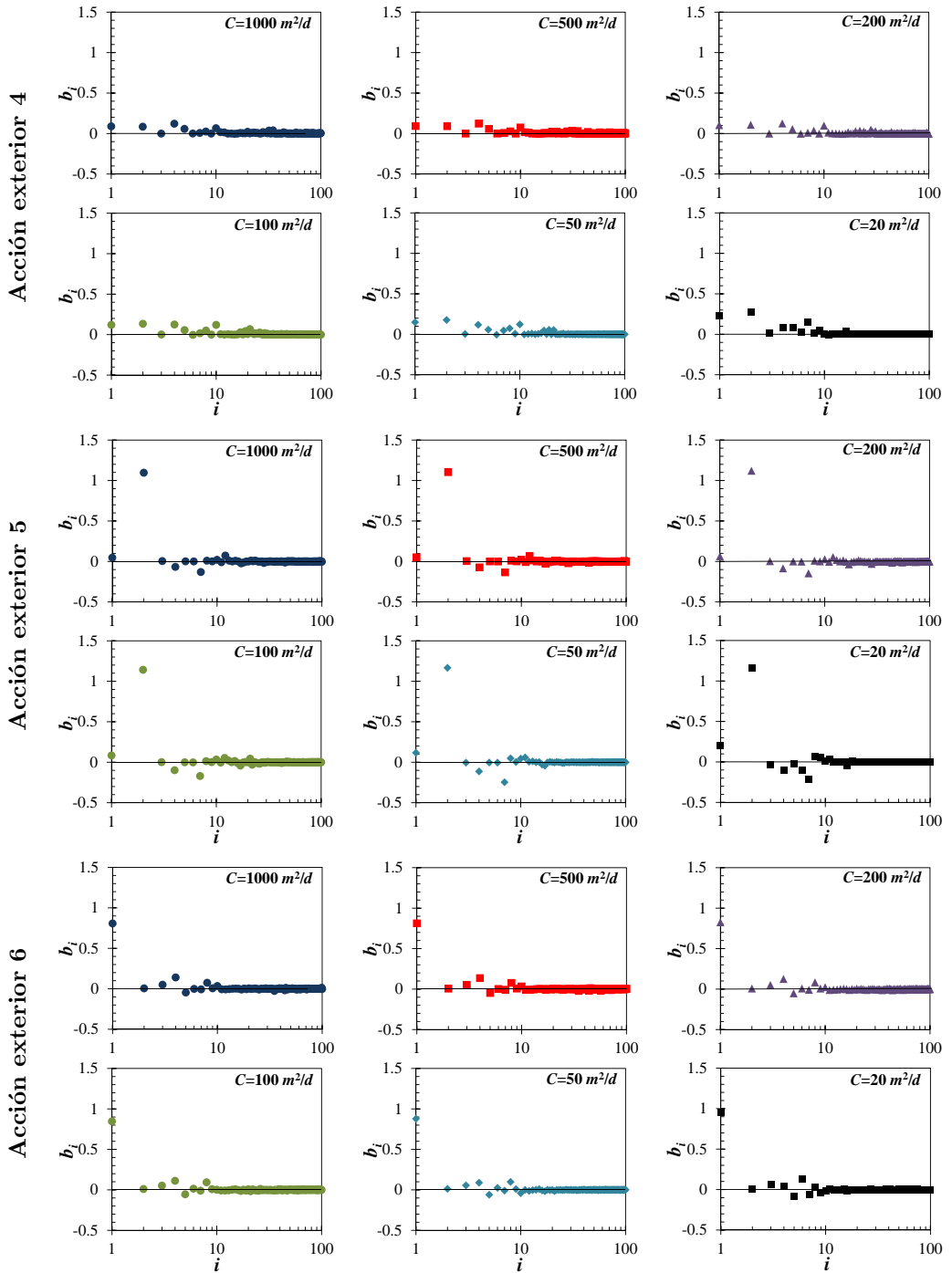


Figura 8.10. Coeficientes de reparto para los primero cien modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 1 a la 3, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.11.** Coeficientes de reparto para los primeros cien modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 4 a la 6, para cada conductancia impuesta sobre el río.



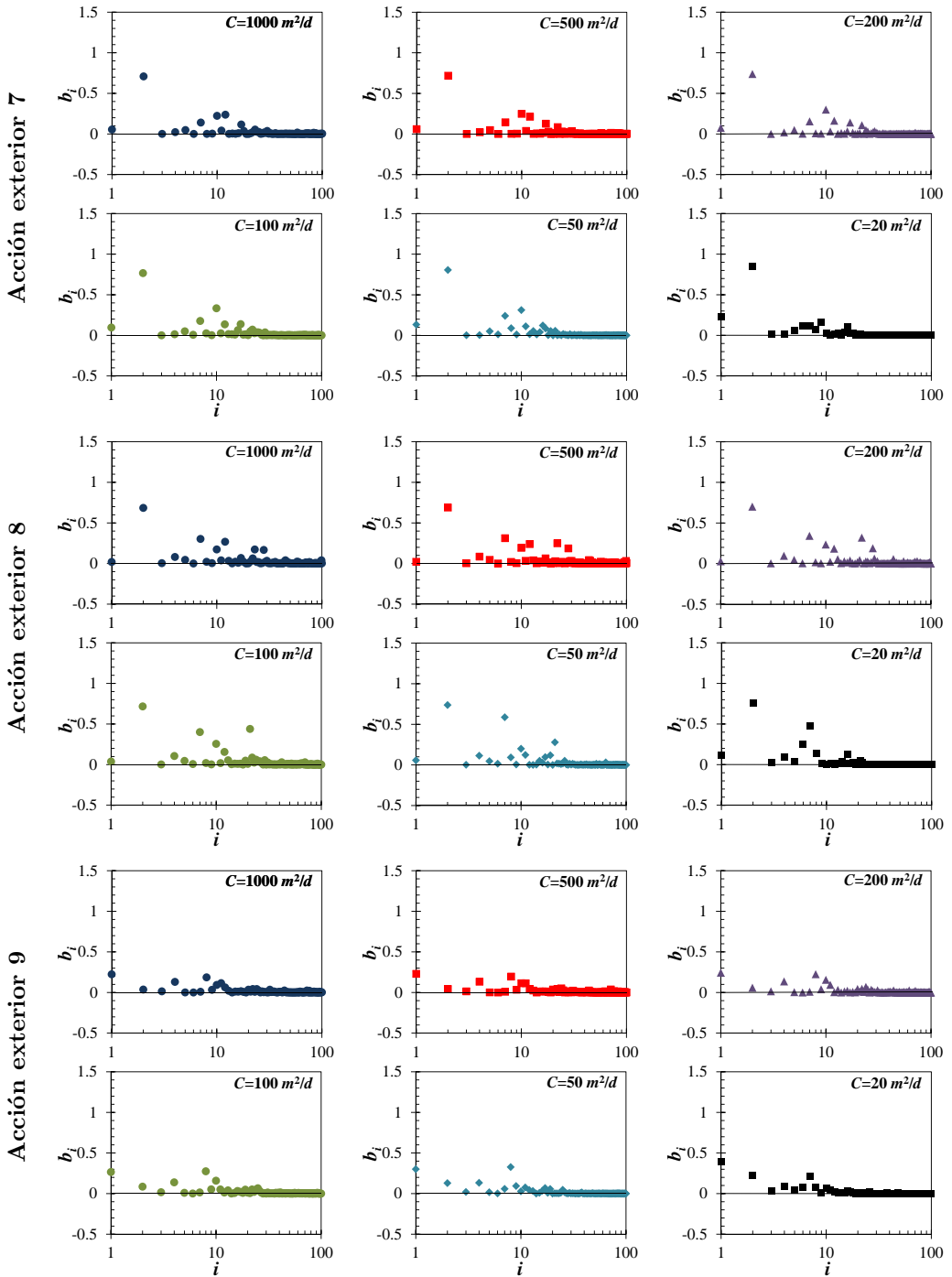
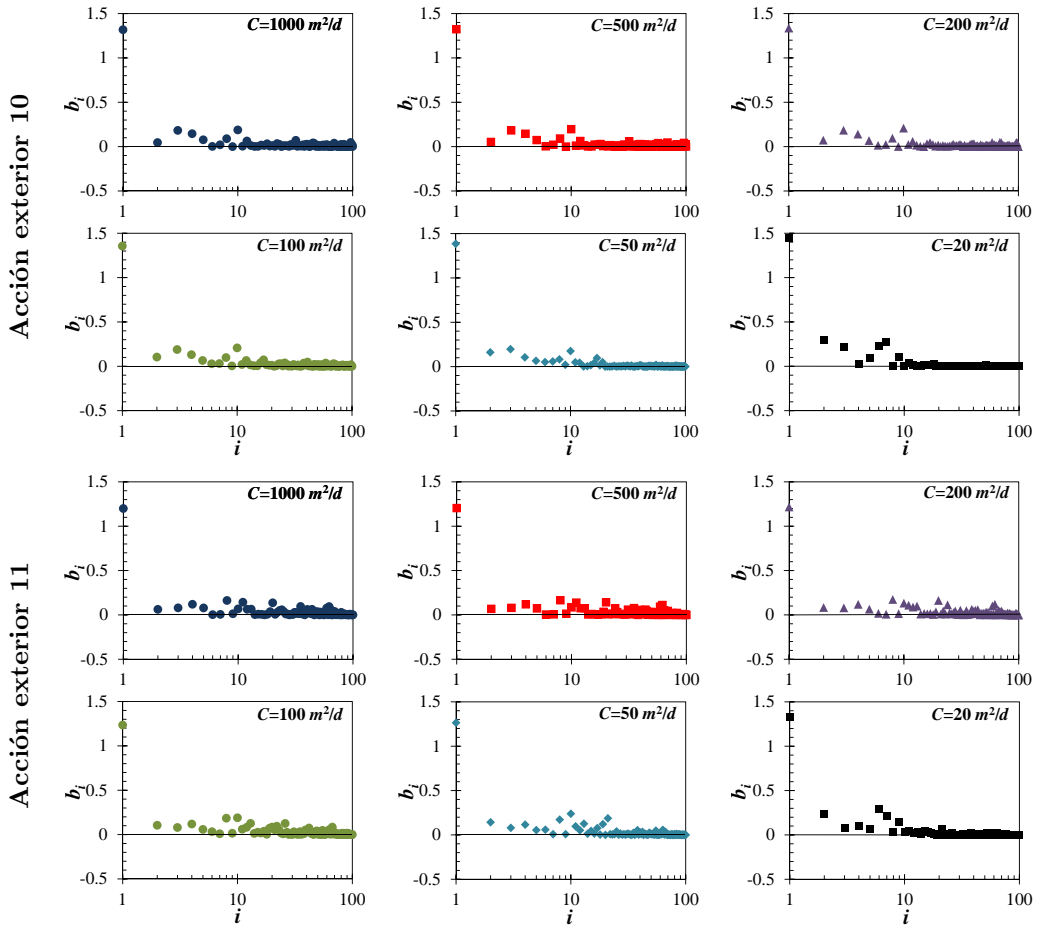


Figura 8.12. Coeficientes de reparto para los primero cien modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 7 a la 9, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.13.** Coeficientes de reparto para los primero cien modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 10 y 11, para cada conductancia impuesta sobre el río.

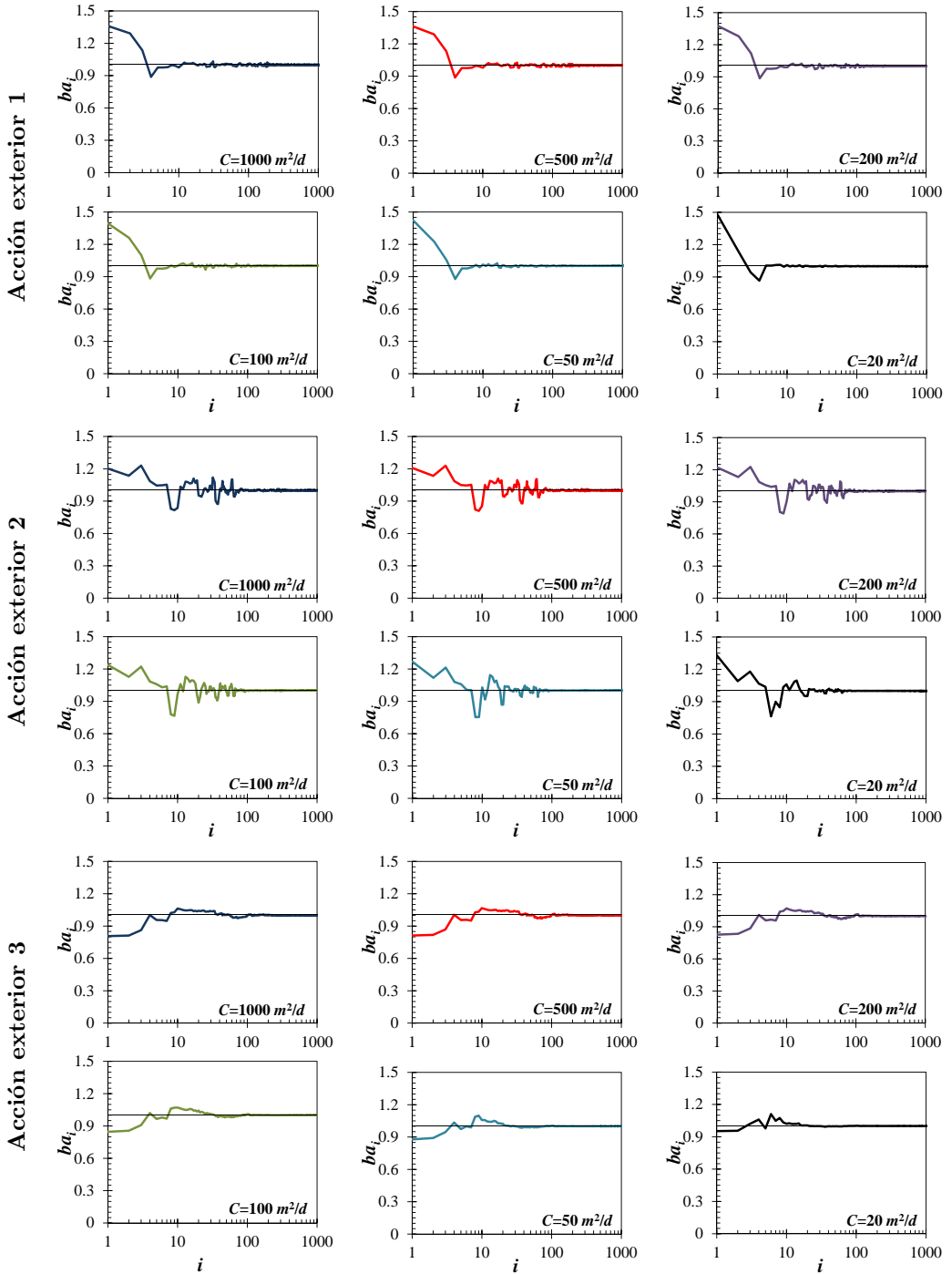
7 y 8 exhiben una variabilidad espectral muy parecida; semejanza que se sustenta por la misma razón expuesta en (vi) del párrafo anterior para las AE 5 y 6.

En este punto es importante describir los cambios en la distribución espectral de los coeficientes de reparto a medida que se modifica la parametrización de las relaciones río-acuífero. En general, sin distinguir el tipo de AE considerada, se han encontrado los siguientes resultados. Primero, al disminuir la conductancia del río, los coeficientes de reparto asociados a los modos dominantes aumentan, en mayor o menor grado, de acuerdo con las características de la distribución espacial de las acciones elementales de cada AE. Igualmente, la amplitud de la región espectral donde se presenta la mayor variabilidad de los coeficientes de reparto decrece a medida que la conexión río-acuífero tiende a ser imperfecta, es decir, cuando la conductancia del río disminuye. Ambos resultados sugieren que los modelos de flujo subterráneo planteados se reducen más fácilmente cuando la relación río-acuífero considerada es cercana a la imperfecta; conclusión análoga a la planteada para los modelos de flujo en los acuíferos rectangulares de referencia en los apartados 4.4.1 y

6.7.1. En resumen, la parametrización de las relaciones entre río y acuífero juega un papel muy importante en el aumento de los requerimientos computacionales para la reducción de un modelo de flujo subterráneo, tanto para medios homogéneos como heterogéneos.

Por otra parte, los primeros 1000 coeficientes de reparto acumulados modales, con respecto a cada AE considerada y ordenados de acuerdo con la conductancia de río correspondiente, se presentan en las figuras 8.14, 8.15, 8.16 y 8.17. En las dos primeras figuras se han consignado los resultados para las seis AE de recarga, ordenadas siguiendo la convención propuesta en las figuras 8.3 y 8.4, mientras que en las dos últimas se presentan los resultados asociados a las cinco AE de extracción, ordenadas de acuerdo con la convención adoptada en las figuras 8.3 y 8.5. Se observan tendencias oscilantes de convergencia a uno por parte de los coeficientes de reparto acumulados para algunas AE, sin importar si la excitación considerada es de recarga o extracción. De esta forma, para la mayoría de las AE impuestas (1, 3, 4, 5, 8, 9 y 11), ha sido necesario generar más de quinientos modos antes de que los coeficientes de reparto acumulados superen el nivel de continuidad impuesto. Más aún, cuando se consideran conexiones río-acuífero cercanas a la perfecta, los requerimientos de cómputo y almacenamiento virtual de la generación aumentan porque, como se ha presentado en las figuras 8.11, 8.12, 8.13, 8.15, 8.16 y 8.17, las AE 4, 9 y 11 requieren el cálculo de más de 1000 modos. Así pues, la influencia de esas tres AE es crítica durante el proceso de reducción por el MAV-CSEM puesto que el criterio de parada de la generación modal no discrimina el tipo de AE analizada. Dicho de otro modo, los coeficientes de reparto acumulados para todas las AE deben superar simultáneamente el nivel de continuidad impuesto. A pesar de lo anterior, en ninguno de los modelos planteados ha sido necesario generar más de 1500 modos para cumplir con dicho criterio. Esta observación es importante puesto que pone de manifiesto que, en general, la cantidad de modos a incluirse en los modelos reducidos por el MAV-CSEM será, a lo sumo, del 8% de los modos totales disponibles, lo cual implica una importante reducción de tamaño.

De los resultados concernientes a los coeficientes de reparto acumulados para las AE de recarga se puede resaltar lo siguiente: (i) el efecto de la presencia de un modo dominante se detecta en todas las AE, con excepción de AE 4, por que sus coeficientes de repartos acumulados alcanzan valores muy cercanos a uno antes de sobrepasar el décimo modo; (ii) la presencia de un modo dominante también ocasiona que la amplitud espectral requerida para alcanzar el nivel de continuidad impuesto no sea demasiado grande, lo cual se traduce en menos requerimientos computacionales y de almacenamiento virtual durante la generación modal; (iii) la AE 4 exhibe la menor velocidad de convergencia a uno por parte de los coeficientes de reparto acumulados y, de acuerdo con el criterio de parada impuesto sobre el generador, es una de las AE que controlan el proceso de generación; (iv) la convergencia a uno por parte de los coeficientes de reparto acumulados para la AE 4 es monótonamente creciente, lo cual se debe a que ésta abarca gran parte del dominio espacial del acuífero e incluye toda la zona de conexión entre el río y el acuífero; (v) a pesar de que los coeficientes de reparto de la AE 2 manifiestan marcadas fluctuaciones alrededor de uno, éstos sobrepasan rápidamente el nivel de continuidad impuesto, con lo cual no se generan requerimientos informáticos adicionales durante la generación; (vi) conclusiones análogas a la anterior se pueden aplicar para las AE 1 y 3, a pesar de que dichas fluctuaciones no son tan marcadas; y (vii) los coeficientes de reparto acumulados para las AE 5 y 6 manifiestan una gran amplitud en sus oscilaciones, llegando a superar notablemente su límite superior unitario y convergiendo nuevamente hacia uno a medida que aumenta el índice modal, lo cual implica que muchos de los coeficientes de reparto de mayor magnitud son negativos.



**Figura 8.14.** Coeficientes de reparto acumulados para los primero mil modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 1 a la 3, para cada conductancia impuesta sobre el río.

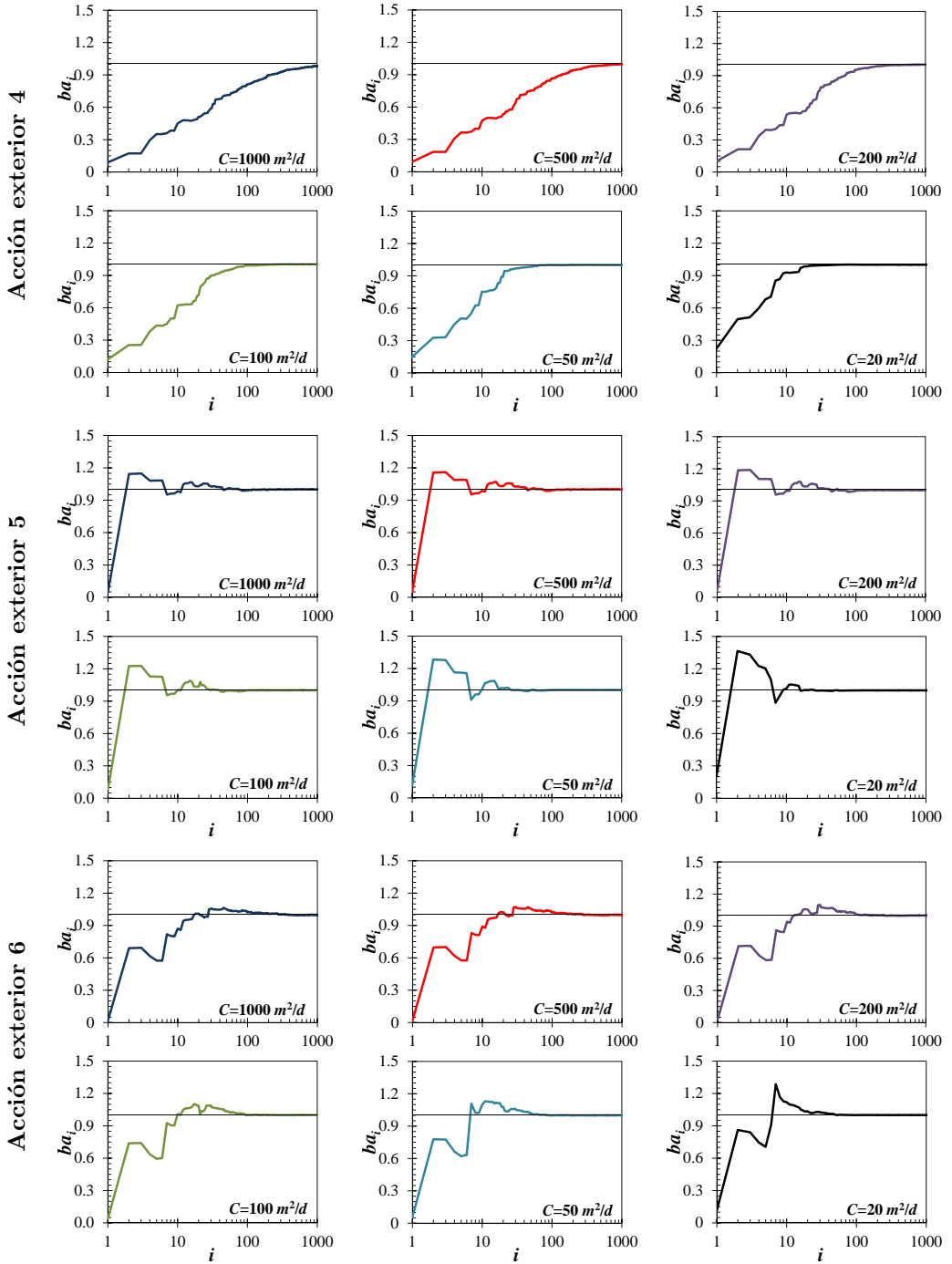
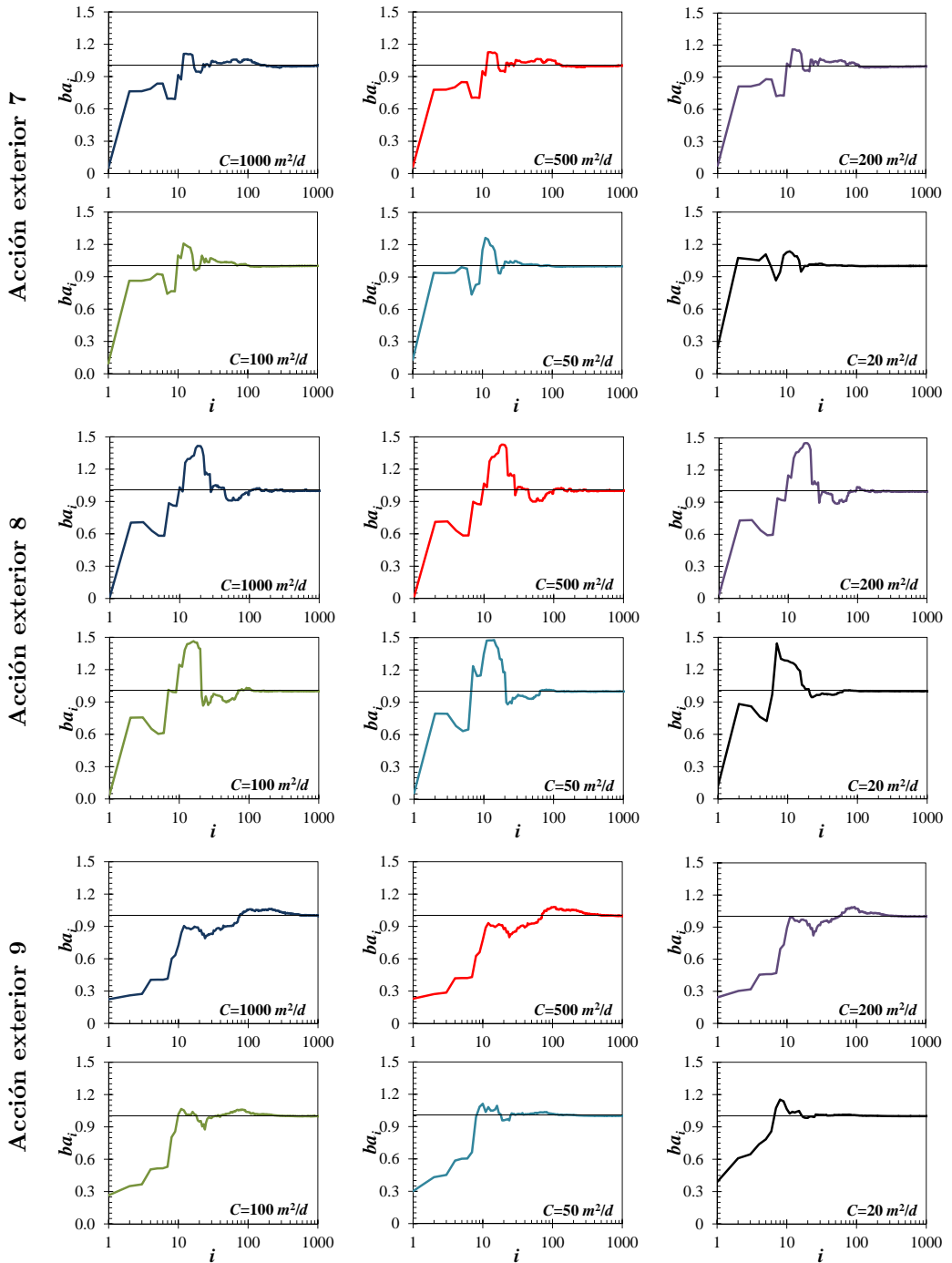
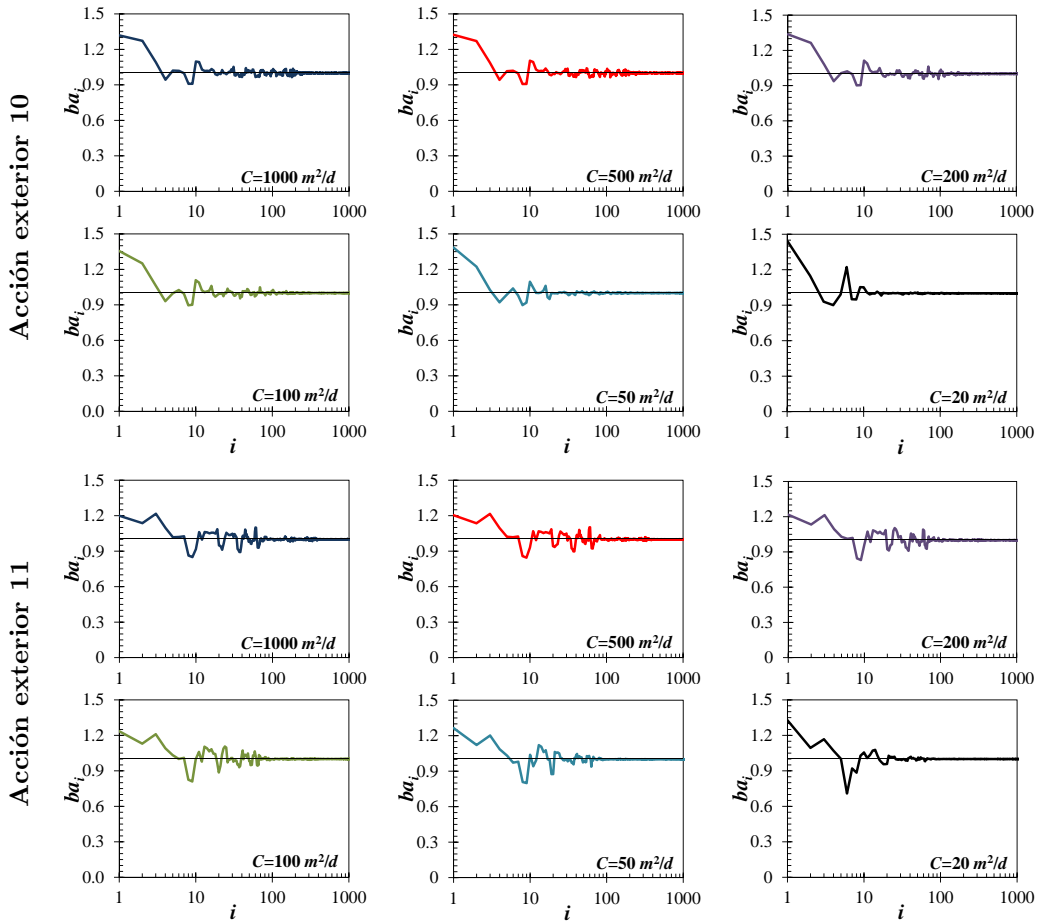


Figura 8.15. Coeficientes de reparto acumulados para los primero mil modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 4 a la 6, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.16.** Coeficientes de reparto acumulados para los primero mil modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 7 a la 9, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.17.** Coeficientes de reparto acumulados para los primero mil modos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 1 y 11, para cada conductancia impuesta sobre el río.

Igualmente, acerca de las características exhibidas por los coeficientes de reparto acumulados para las AE de extracción, se pueden destacar las siguientes observaciones: (i) a diferencia de lo encontrado para las AE de recarga, la importancia de los modos dominantes no es tan marcada para las de extracción; (ii) de la anterior observación también se deduce que las amplitudes espectrales necesarias para alcanzar el nivel de continuidad impuesto, por parte de las AE de extracción, son relativamente grandes o, al menos, superan a las requeridas por las AE de recarga; (iii) los coeficientes de reparto acumulados asociados a la AE 9 exhiben las menores velocidades de convergencia al límite superior unitario y, de acuerdo con el criterio de parada impuesto sobre la generación modal, es una de las AE que controlan la carga computacional y de almacenamiento del proceso de generación; (iv) el anterior resultado es análogo al encontrado para la AE 4; (v) la lenta rapidez de convergencia a uno por parte de los coeficientes de reparto acumulados para la AE 9, se explica por que ésta actúa en una región ubicada muy cerca de la zona de conexión río-acuífero y por su significativa irregularidad geométrica; (vi) las tendencias

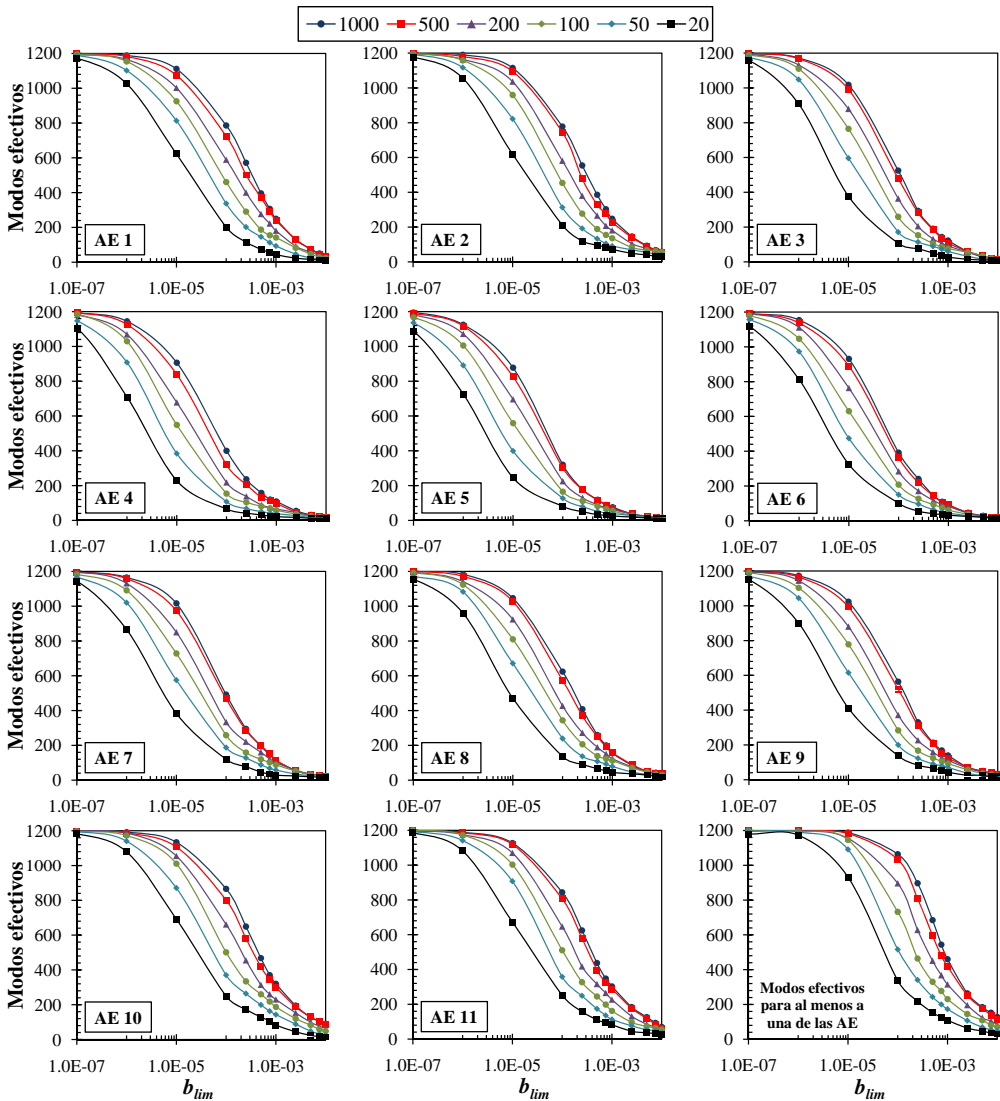
de variación espectral de los coeficientes de reparto acumulados asociados con la AE 10 son parecidas a las encontrados para las AE 1, puesto que ambas AE se ubican sobre las mismas porciones del acuífero y las formas de sus regiones de influencia son bastante similares; (*vii*) resultados análogos al anterior han sido encontrado para las AE 2 y 11.

De los resultados presentados hasta ahora, se deduce que las AE que dominan el proceso de generación modal son la 4 y la 9, por que requieren la generación de gran cantidad de modos antes de lograr que los coeficientes de reparto acumulados sobrepasen el nivel de continuidad impuesto sobre el modelo. Asimismo, en correspondencia con los resultados presentados en las figuras 8.14, 8.15, 8.16 y 8.17, se ha corroborado que los modelos de flujo subterráneo analizados en esta sección se reducen más fácilmente cuando la conexión río-acuífero es cercana a la imperfecta; constituyendo resultados análogos a los encontrados para los modelos de flujo en acuíferos rectangulares, los cuales han sido discutidos ampliamente en los apartados 4.4.1 y 6.7.1. Por otro lado, modificar la parametrización de la relación río-acuífero tiene repercusiones significativas sobre la variabilidad espectral del coeficiente de reparto acumulado. Así, sin importar la AE considerada, las amplitudes de las regiones espectrales donde se presentan las mayores fluctuaciones, crecimientos o decrecimientos de los coeficientes de reparto acumulados, disminuyen a medida que decrece la conductancia del río. Además, a medida que el grado de conexión río-acuífero es menor, los coeficientes de reparto asociados a los modos dominantes aumentan y, por consiguiente, sus oscilaciones manifiestan mayores magnitudes.

Una vez se han obtenido los modos asociados a los autovalores de menor magnitud que cumplen con el límite inferior de nivel de continuidad impuesto para todas las AE y conductancias de río consideradas, se realiza la compresión selectiva del modelo resuelto por el MAV, al mismo tiempo que se construye la máscara de estados efectivos. Para lograr lo anterior, se han variado los límites de participación, denotados como  $b_{lim}$ , entre  $10^{-10}$  y  $10^{-2}$ , planteándose diferentes compresiones selectivas sobre el modelo reducido por truncamiento, formado por los 1500 modos generados y antes mencionados. Como resultado de dicho procedimiento, se obtiene la cantidad de modos efectivos que operan directamente en las simulaciones reducidas, de acuerdo a la parametrización de la reducción impuesta por el límite de participación ( $b_{lim}$ ). En la figura 8.18 se presentan gráficas que ilustran la variación del número de modos efectivos incluidos en el modelo reducido, según el tipo de AE considerada, ordenados de acuerdo con la conductancia del río. En cada uno de dichos gráficos, la abscisa representa el  $b_{lim}$  en escala logarítmica y la ordenada indica el número de modos efectivos encontrados de acuerdo con dicho límite. En ellos se observa que, para todas las AE y conductancias de río consideradas, la convergencia al nivel de continuidad impuesto se obtiene al considerar menos de 1200 modos; cantidad que ha sido usada como límite superior en el análisis de sensibilidad presentado.

De los resultados obtenidos se deduce que, a medida que aumenta la magnitud de  $b_{lim}$ , se incluyen menos modos efectivos en el modelo reducido y se aumenta la eficiencia, pero se pierde representatividad en los parámetros de control simulados. Por consiguiente, puede decirse que estas gráficas representan la reducción de operaciones de simulación aportadas por el marco conceptual del MAV-CSEM. Ahora bien, el gráfico inferior derecho de la figura 8.18 contiene la cantidad de modos para los cuales existe efectividad en al menos una de las AE impuestas sobre el acuífero, según el  $b_{lim}$  impuesto durante la reducción. En este punto vale la pena recordar que, cuando sucede la situación antes comentada, el autovector correspondiente al modo efectivo detectado debe guardarse en memoria durante todo el proceso de generación. Entonces, cuando  $b_{lim}$  es pequeño, los tamaños de las matrices de autovectores reducidas efectivas de simulación son grandes, causando que la evaluación de los estados del acuífero y el cálculo de los parámetros de control demanden el uso de mucha





**Figura 8.18.** Cantidad de modos efectivos para diferentes parametrizaciones de la compresión selectiva y el enmascaramiento modal obtenidos al aplicar el MAV-CSEM sobre los modelos de flujo subterráneo del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los resultados se presentan en función de la acción exterior correspondiente, para las seis conductancias impuestas sobre el río.

memoria virtual. De esto puede deducirse que dicho gráfico contabiliza indirectamente la cantidad de recurso de almacenamiento a emplear durante las simulaciones reducidas.

En general, se nota que el valor del límite de participación que separa a los modelos reducidos con truncamiento conservativo de los modelos reducidos con compresión selectiva y enmascaramiento modal está cercano a  $10^{-7}$ . En otras palabras, asumir que  $b_{lim} \leq 10^{-7}$  implica afirmar que todos los componentes de la matriz booleana de enmascaramiento son verdaderos y no se ha eliminado ningún modo residual. Lo anterior es válido para todos los modelos reducidos planteados, con excepción de aquellos en los cuales las conexiones río-

acuífero se han parametrizado mediante conductancias menores que  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ , cuando se estudian los efectos de las AE 4, 5 y 6. Para todas las AE analizadas, la compresión selectiva incluye una mayor cantidad de modos efectivos en los modelos reducidos a medida que se incrementa el grado de conexión río-acuífero, lo cual se origina por que aumenta la amplitud espectral del modelo donde ocurren las oscilaciones más significativas de sus coeficientes de reparto (acumulados). Lo anterior permite concluir que la reducción por compresión selectiva es menos efectiva cuando se imponen conductancias de río elevadas. Por otro lado, la heterogeneidad de los parámetros hidráulicos del acuífero ocasiona que la compresión selectiva obtenida para conductancias mayores que  $500 \text{ m}^2/\text{d}$  sea prácticamente igual, como lo muestran las líneas de color azul y rojo en todas las gráficas de la figura 8.18. En consecuencia, es razonable considerar que si se cumple que  $C > 500 \text{ m}^2/\text{d}$ , la conexión río-acuífero considerada es cercana a la perfecta.

Asimismo, se observa que el rango de variación del límite de participación modal donde se detectan las mayores compresiones selectivas se sitúa entre  $10^{-5}$  y  $10^{-3}$ . Por lo tanto, sin importar el tipo de AE o el valor de la conductancia de río considerado, cuando  $b_{lim} > 10^{-3}$ , el número de modos efectivos resultante es inferior a doscientos y tiende a cero a medida que dicho límite disminuye. Este límite de efectividad demarca la región de parametrización de la selección donde no se esperan resultados satisfactorios en la simulación de las variables de estado del acuífero. Por el contrario, en la región de parametrización donde  $b_{lim} < 10^{-5}$ , se espera obtener simulaciones satisfactorias de los diferentes parámetros de control deseados, porque los modelos reducidos que pueden plantearse están compuestos por gran cantidad de modos efectivos, pero se han suprimido los modos menos importantes en la representatividad de los estados del acuífero. En otras palabras, se espera que el planteamiento de una solución de compromiso para el proceso de compresión selectiva, se ponga de manifiesto al establecer que  $10^{-5} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ .

También se ha detectado que las AE de recarga (AE 1 a 6) son más sensibles a la compresión selectiva que las AE de extracción (AE 7 a 11). Esta afirmación se sustenta en los siguiente hechos: (i) para las AE de recarga se han detectado entre 1100 y 350 modos efectivos para  $b_{lim} = 10^{-5}$ , mientras que para las AE de extracción se han detectado 1150 y 450 modos efectivos para el mismo límite de participación modal, (ii) para las AE de recarga se han detectado ente 220 y 20 modos efectivos para  $b_{lim} = 10^{-3}$ , mientras que para las AE de extracción se han detectado 250 y 50 modos efectivos para el mismo límite de participación modal y (iii) las velocidades de reducción de las cantidades de modos efectivos son, en general, menores para las AE de extracción, en especial para las AE 10 y 11. De lo anterior se deduce que la densidad de modos efectivos contenidos dentro de la matriz de enmascaramiento es mayor para las columnas correspondientes a las AE de extracción y, en consecuencia, los requerimientos más importantes de operaciones aritméticas durante las simulaciones del flujo subterráneo vienen dados por dichas AE.

Para terminar y en base a los resultados consignados en la gráfica inferior derecha de la figura 8.18, se concluye que la mayor parte del almacenamiento virtual requerido por los modelos reducidos viene dado por el tamaño de la matriz de autovectores efectivos. Por ejemplo, asumiendo que  $b_{lim} = 5 \times 10^{-4}$  y  $C=1000 \text{ m}^2/\text{d}$  se tiene que dicha matriz de autovectores efectivos se define como  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{21850 \times 883}$ , lo cual implica que la matriz de coeficientes de reparto de los modos efectivos se define como  $\hat{\mathbf{B}} \in \mathbb{R}^{883 \times 11}$ ; tamaño mucho menor que el antes mencionado. A partir de estas dimensiones, es posible calcular los requerimientos de memoria y los ciclos de procesamiento requeridos en la simulación del modelo de flujo subterráneo reducido mediante, el MAV-CSEM, utilizando expresiones que han sido propuestas por diferentes autores (Andreu, 1984; Pulido-Velázquez, 2005).

### 8.4.2. Análisis de las simulaciones reducidas por el MAV-CSEM

A continuación se presenta el análisis de las simulaciones efectuadas mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, para los parámetros de control establecidos en el apartado 8.3.5: relaciones río-acuífero a lo largo de toda la red de drenaje conectada con el acuífero, relaciones río-acuífero parciales en los cauces que componen la red de drenaje antes mencionada y alturas piezométricas en algunas zonas críticas del acuífero.

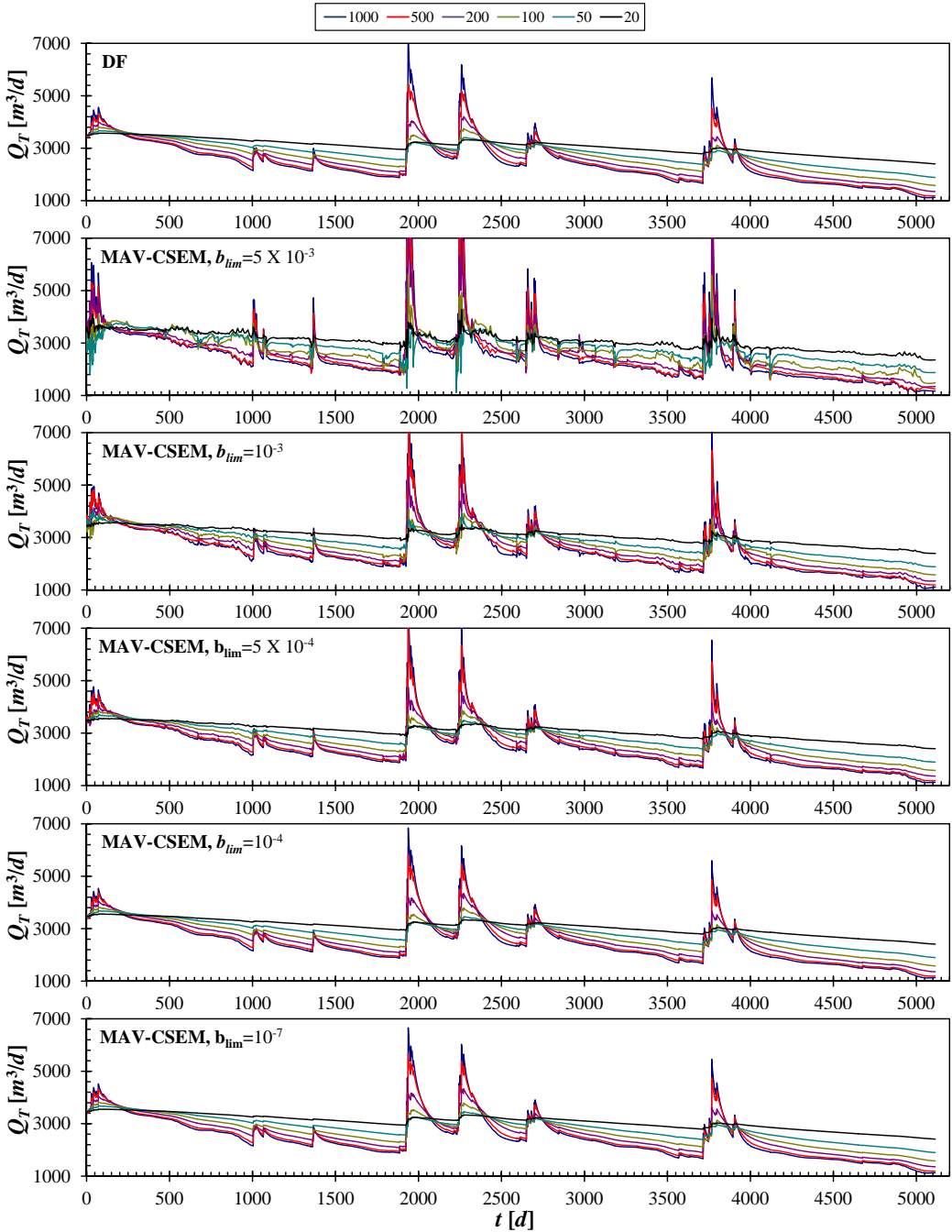
#### Relaciones río-acuífero a lo largo de toda la red de drenaje

En la figura 8.19 se presentan los hidrogramas de caudales subterráneos a lo largo de la red de drenaje conectada con el acuífero. Los hidrogramas de referencia, simulados empleando modelos resueltos por DF, se muestran en el gráfico superior; mientras que los hidrogramas simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM se presentan de abajo hacia arriba a medida que aumenta el  $b_{lim}$  escogido para la compresión selectiva.

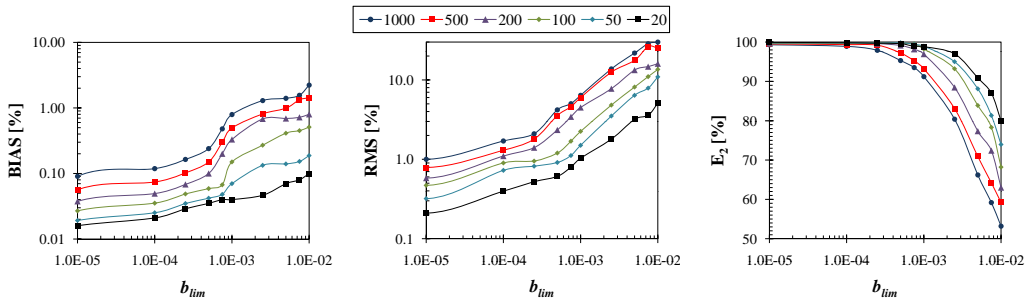
De los hidrogramas simulados cabe destacar que sus fluctuaciones disminuyen a medida que decrece la magnitud del  $b_{lim}$  escogido para la compresión selectiva, con lo que el enmascaramiento tiende a ser nulo. De acuerdo con los resultados presentados en la figura 8.18, esto implica que el número de modos efectivos aumenta para todas las AE impuestas. Asimismo, las simulaciones efectuadas considerando que  $b_{lim} = 5 \times 10^{-4}$  son bastante aceptables, aún considerando que el número de modos efectivos utilizados en el modelo comprimido y enmascarado son menores de 600, como se muestra en la figura 8.18. En otras palabras, el modelo truncado conservativamente que incorpora los 1500 asociados a los menores autovalores se ve reducido a menos de la mitad y dicha reducción es más eficiente a medida que disminuye el grado de conexión entre el río y el acuífero.

La cuantificación del efecto que tiene la compresión selectiva y el enmascaramiento modal sobre las relaciones río-acuífero simuladas a lo largo de toda la red de drenaje, se expresa en función de los índices de comportamiento **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, cuyas estimaciones se consignan en la figura 8.20, de acuerdo con las conductancias impuestas sobre los bloques de río en los modelos respectivos. Dichos índices de comportamiento se calcularon para hidrogramas simulados por el MAV-CSEM, con respecto a los obtenidos utilizando un modelo resuelto por DF, y los resultados más sobresalientes se exponen a continuación. Para comenzar, en la gráfica izquierda de la figura 8.20 se observa que las estimaciones de **BIAS** son inferiores al 2%, lo cual quiere decir que las medias de los hidrogramas simulados por MAV-CSEM son muy cercanas a las medias de los hidrogramas de referencia. Esto se atribuye al modo de conservación incluido en el marco conceptual del MAV-CSEM, el cual se usa para preservar la ecuación de continuidad asumiendo al dominio espacial del acuífero como volumen de control. Así, los **BIAS** presentados son muy similares a los que podrían obtenerse por el MAV con truncamiento conservativo, con la ventaja de que la eficiencia es mayor tanto en reducción como en simulación, por que se ha disminuido considerablemente el número de operaciones de cálculo requeridas.

Ahora bien, las estimaciones de **RMS** crecen a medida que el tamaño del modelo reducido por el MAV-CSEM disminuye o, equivalentemente, a medida que el límite de participación impuesto a la compresión selectiva aumenta. Dichas estimaciones se presentan en la gráfica central de la figura 8.20. Allí se observa que, cuando la conexión entre el río y el acuífero es casi perfecta, **RMS** disminuye desde aproximadamente el 20% cuando  $b_{lim} = 10^{-2}$ , hasta menos del 1% si  $b_{lim} < 10^{-5}$ . Estimaciones análogas a las anteriores, realizadas asumiendo que la conexión río-acuífero impuesta tiende a ser imperfecta, exhiben menores magnitudes dado que no superan al 5% para conductancias de río menores que  $50 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $b_{lim} = 10^{-2}$ , llegando a ser inferiores al 1% asumiendo que  $b_{lim} < 10^{-4}$ .



**Figura 8.19.** Hidrogramas de caudales intercambiados entre el acuífero y la red de drenaje simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MAV-SCSEM para diferentes límites de participación modal. En la parte superior se pueden ver los valores de las conductancias utilizados.



**Figura 8.20.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas a lo largo de toda la red de drenaje conectada con el acuífero heterogéneo, simulados con modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF.

Igualmente, en el gráfico derecho de la figura 8.20 se presentan las estimaciones de  $E_2$  para los hidrogramas simulados por el MAV-CSEM. Allí se observa que, sin importar la conductancia de río impuesta sobre las condiciones de contorno,  $E_2$  crece monótonamente hasta alcanzar valores cercanos al 100 % cuando  $b_{lim} \geq 5 \times 10^{-4}$ . Las peores eficiencias, cercanas al 50 %, se han estimado para las mayores conductancias de río cuando el modelo reducido por el MAV-CSEM ha sido comprimido asumiendo que  $b_{lim} = 10^{-2}$ , lo cual implica haber usado menos de 200 modos efectivos para todas las AE. Al respecto, las eficiencias mínimas aumentan a medida que disminuye el grado de conexión río-acuífero, hasta alcanzar estimaciones próximas al 80 % para una conductancia de 20 m<sup>2</sup>/d.

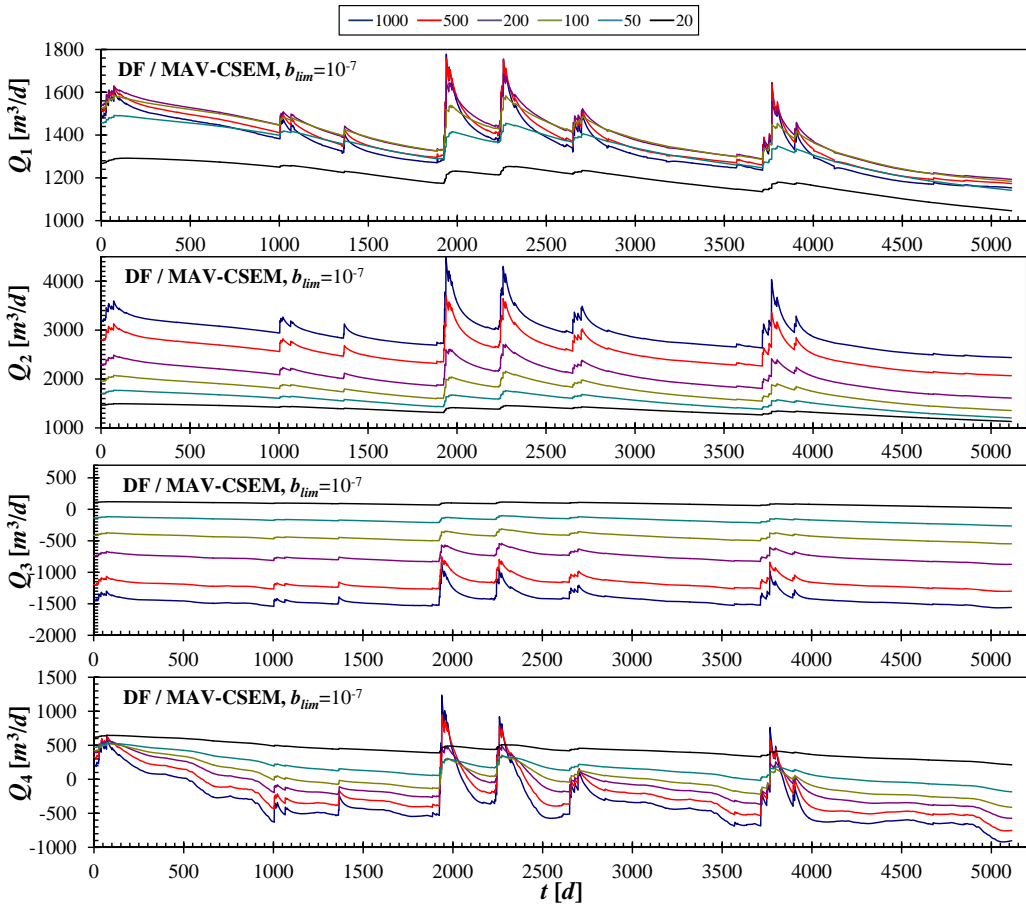
Cabe resaltar que, tanto para **RMS** como para  $E_2$ , se notan cambios de tendencia en la aproximación de sus estimaciones hacia los valores óptimos, los cuales se ponen de manifiesto cuando  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ ; intervalo contenido dentro del dominio de mayor variación en la compresión selectiva de los modelos reducidos por el MAV-CSEM,  $10^{-5} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ , que había sido establecido en el apartado 8.4.1. Esta característica indica que dentro de dicho intervalo existe un  $b_{lim}$  asociado a modelos reducidos por el MAV-CSEM que representa adecuadamente los caudales subterráneos a lo largo de toda la red de drenaje, pero que requiere bajo costo computacional y de almacenamiento.

Con respecto a lo descrito previamente, las estimaciones de **RMS** de mayor magnitud, las cuales se relacionan con pobres estimaciones de  $E_2$  y han sido obtenidas empleando modelos reducidos por el MAV-CSEM que incluyen pocos modos efectivos se deben, principalmente, a la sobre o subestimación de los caudales máximos y mínimos en los hidrogramas simulados. La anterior afirmación se sustenta en las siguientes observaciones. Primero, el modo impuesto para preservar la ecuación de continuidad se vuelve más importante a medida que aumenta el límite de participación modal impuesto para la compresión selectiva; segundo, en algunos casos, dicho modo puede llegar a tener más preponderancia sobre los estados del acuífero que algunos de los modos efectivos incluidos en el modelo. Las anteriores observaciones se hacen evidentes cuando se analiza el segundo hidrograma situado de arriba hacia abajo en la figura 8.19, obtenido para  $b_{lim} = 5 \times 10^{-3}$ . Allí se detectan fluctuaciones locales de gran magnitud en los intervalos temporales cercanos a los eventos de recarga, a pesar de que la tendencia general del hidrograma simulado es parecida a la manifestada por el hidrograma de referencia en el gráfico superior de la figura antes mencionada. Al respecto, también cabe notar que los efectos de dichas fluctuaciones locales se hacen más notorias sobre las estimaciones de **RMS** que sobre las de  $E_2$ , puesto que, en cierta forma, el coeficiente de eficiencia de Nash modificado también tiene en

cuenta la preservación de las tendencias medias y mínimas de los hidrogramas, las cuales son menos susceptibles a los efectos negativos descritos anteriormente.

### Relaciones río-acuífero parciales en los cauces

Los hidrogramas de caudales subterráneos intercambiados entre el acuífero y cada uno de los tramos que componen la red de drenaje de cauces permanentes, clasificados de acuerdo con la conductancia de río correspondiente, se presentan en la figura 8.21. Adoptando la nomenclatura de cauces que ha sido definida en la figura 8.2, dichos hidrogramas han sido ordenados de abajo hacia arriba, empezando por el tramo 1, segmento **EF** hasta terminar en el tramo 4, segmento **AB**. Los hidrogramas expuestos son aquellos para los cuales se obtuvieron las mejores estimaciones de los índices de comportamiento. En otras palabras, son los que manifestaron menores diferencias entre las simulaciones ejecutadas empleando modelos resueltos por DF y las realizadas mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM, para los cuales se ha establecido un límite de participación de  $10^{-7}$ .



**Figura 8.21.** Hidrogramas de caudales intercambiados entre el acuífero y los diferentes tramos de la red de drenaje, simulados mediante modelos resueltos en DF y modelos reducidos por el MAV-CSEM. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río varían entre 1000 y  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ .

Las simulaciones muestran que disminuciones importantes en los caudales de intercambio entre el río y el tramo 1 sólo se hace evidente para conductancias menores que  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ , lo cual se traduce en que las medias de los hidrogramas simulados en dicho tramo, para conductancias mayores al valor previamente mencionado, no difieren demasiado entre sí. A pesar de lo anterior, se ha detectado que las magnitudes de los caudales máximos decrecen cuando disminuye el grado de conexión entre río y acuífero. Por ejemplo, el caudal máximo global de las simulaciones ocurre durante el día 2000 y su aparición se corresponde con el evento de recarga que produce el volumen máximo de entradas al acuífero. Durante ese día, el caudal de intercambio en el tramo 1, para una conductancia de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$ , pasa de  $1320 \text{ m}^3/\text{d}$  hasta  $1785 \text{ m}^3/\text{d}$ , obteniéndose un aumento  $465 \text{ m}^3/\text{d}$ . Para el mismo día e imponiendo una conductancia de  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ , dicho incremento fue de  $97 \text{ m}^3/\text{d}$ ; cantidad que representa un 20% del caudal máximo simulado para conexión río-acuífero casi perfecta. Como se observa en el hidrograma superior de la figura 8.21, lo anterior no sólo se manifiesta en los caudales subterráneos máximos globales del tramo 1, sino también en los máximos locales que se producen a lo largo de todo el horizonte de simulación.

Por el contrario, la tendencia media de los hidrogramas de intercambio en los demás tramos disminuye considerablemente a medida que sus conexiones con el acuífero se tornan más imperfectas. Entonces, las magnitudes de dichas variaciones dependen, básicamente, de la localización del tramo considerado y de su longitud. De ahí que los decrecimientos en los caudales de intercambio se hacen más evidentes en el tramo 2, donde se alcanzan caudales mínimo y máximo de  $4670$  y  $2440 \text{ m}^3/\text{d}$ , respectivamente, para una conductancia de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$ , los cuales disminuyen hasta alcanzar valores de  $1500$  y  $1122 \text{ m}^3/\text{s}$ , respectivamente, cuando se impone una conductancia de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$  en los bloques de río.

De los hidrogramas parciales simulados también se deduce que los tramos 1 y 2 permanecen ganadores a lo largo de todo el horizonte de simulación, para las seis conductividades de río consideradas. De ahí que los efectos producidos en dichos tramos a causa de las extracciones cercanas en las zonas de bombeo 1 y 3, correspondientes a las AE 6 y 9 (ver figuras 8.3.3 y 8.5), no han modificado en gran medida la dinámica natural de sus caudales de intercambio con el acuífero. En cambio, la condición de los tramos 3 y 4 ha oscilado entre ganadora y perdedora de acuerdo con las siguientes condiciones: (i) el tramo 3 es perdedor, durante todo el intervalo de simulación, para conductancias de río que superan los  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ , (ii) el tramo 3 es ganador, durante todo el horizonte de simulación, para conexiones río-acuífero cercanas a la imperfecta, (iii) el tramo 4 se convierte en perdedor, para todas las conductancias de río por encima de  $100 \text{ m}^2/\text{d}$ , cuando se han sobrepasado los mil días de simulación, (iv) el tramo 4 se transforma de perdedor a ganador cuando se presentan eventos de recarga importantes, pero recupera rápidamente su condición perdedora una vez cesan dichas recargas y (v) el tramo 4 es ganador durante todo el horizonte de simulación cuando las conductancias impuestas el río son menores que  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ .

En especial, la influencia de las extracciones en las zonas de bombeo 1 y 3 es notoria debido a la aparición de ciertas características en las simulaciones de los hidrogramas de intercambio entre el tramo 4 y el acuífero. Para comenzar, se ha detectado un aumento de las pendientes de descarga de dichos hidrogramas, con respecto a las esperadas en condiciones naturales. La frecuencia con la cual aparecen esos aumentos de pendiente se relaciona con la presencia de las magnitudes máximas de extracción, las cuales suceden cerca de los días 1000, 2500 y 4000 de simulación. Estas particularidades se deben a que el tramo 4 es perdedor en las soluciones de los problemas en régimen permanente sujetos a las condiciones de contorno del modelo original, de acuerdo con el esquema de principio de superposición adoptado en el procedimiento general de la reducción presentado en la figura 2.4. Más aún, sin importar la conductancia impuesta, los caudales permanentes de

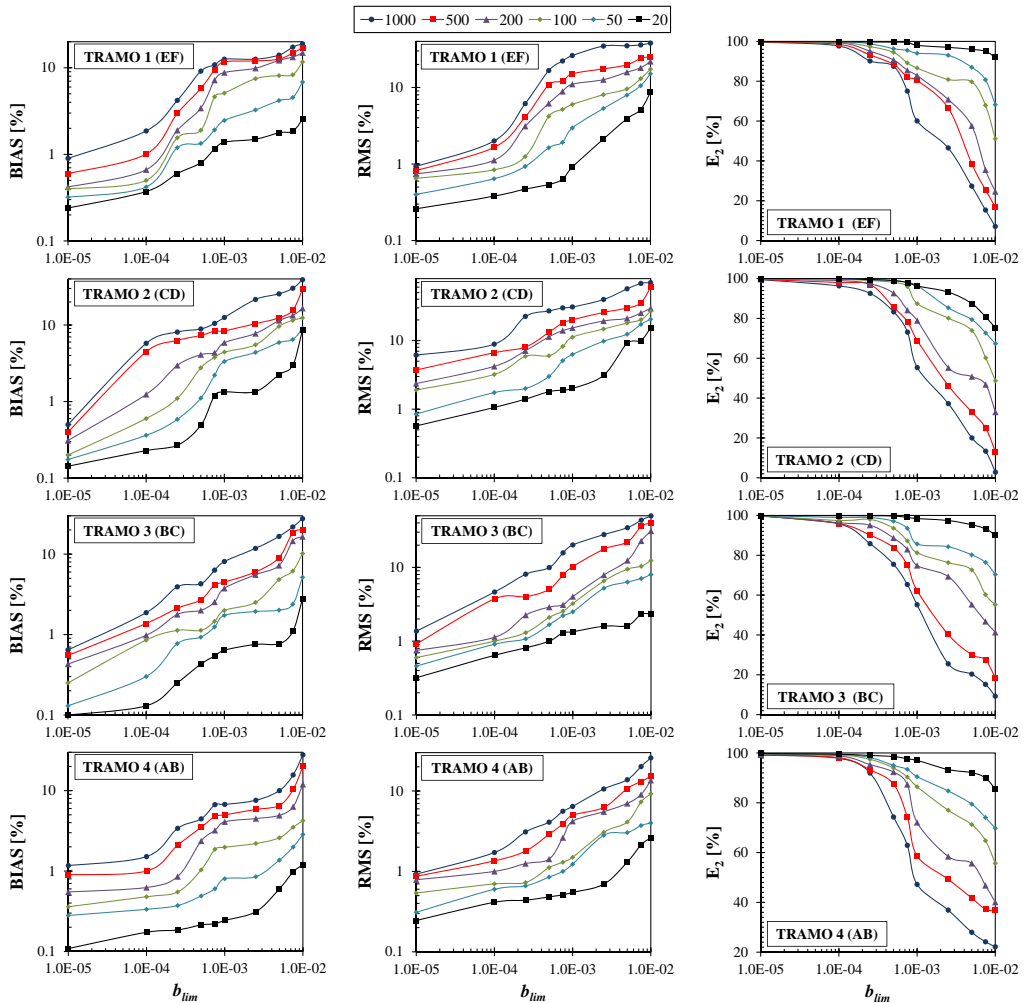
detracción al tramo 4 no superan los 2000 m<sup>3</sup>/d, lo cual, unido a su gran longitud, lo hacen susceptible de manifestar las características de transformación de ganador a perdedor previamente comentadas. A pesar de que dichas características no han sido tan evidentes en los demás tramos de la red de drenaje, la influencia de las extracciones también existe.

No obstante el tramo 3 es el más perdedor en las soluciones permanentes para todas las conductancias de río consideradas, sus caudales de detracción al río manifiestan magnitudes de aproximadamente 4000 m<sup>3</sup>/d y la influencia de las extracciones sobre dichos caudales es menor que la observada en el tramo 4, por lo cual la afectación de la dinámica natural del hidrograma es poco evidente. Dado lo anterior, el tramo 3 se transforma en ganador durante muy pocos intervalos de simulación y únicamente cuando se asume conexión río-acuífero altamente imperfecta. Por último, vale la pena agregar dos comentarios. Primero, de acuerdo con las soluciones permanentes para los tramos 1 y 2, éstos resultan ser ganadores a lo largo de todo el horizonte de simulación. Segundo, la dinámica de la ganancia-pérdida exhibida por los tramos en la solución en régimen permanente es análoga a la presentada en el apartado 5.5.2 para el acuífero estudiado por Halford y Mayer (2000). Así pues, los cauces de menor orden de Horton son perdedores, mientras que los de mayor orden son ganadores. Esta situación se manifiesta típicamente en los cauces naturales de bajo orden porque su pendiente es, en general, mucho mayor que el máximo gradiente piezométrico en los acuíferos con los que se encuentran conectados.

Hasta ahora únicamente se han descrito las características relacionadas con la dinámica de ganancia-pérdida en la simulación de los caudales parciales subterráneos en los tramos de la red de drenaje. A continuación, se discute la influencia que tiene la parametrización de la reducción según el MAV-CSEM, sobre los índices de comportamiento estimados para dichos caudales. En la figura 8.22 se consignan los gráficos de **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>** estimados para los hidrogramas parciales que han resultado de resolver el problema transitorio con condiciones de contorno nulas, simulados en los diferentes tramos de la red de drenaje empleando modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a las simulaciones obtenidas usando modelos resueltos en DF. Las gráficas incluidas en la figura antes mencionada han sido ordenadas, de arriba hacia abajo, empezando por el tramo 1, segmento **EF** hasta terminar en el tramo 4, segmento **AB**. Al mismo tiempo, las columnas izquierda, central y derecha muestran las estimaciones de **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, respectivamente.

Al utilizar modelos excesivamente reducidos, los índices de comportamiento para los hidrogramas de intercambio parciales en todos los tramos analizados aumentan ligeramente con respecto a las estimaciones obtenidas para toda la red de drenaje, las cuales han sido presentadas en la figura 8.20. Esto se debe a que, como se ha dicho antes, en los cálculos de los parámetros de control distribuidos (alturas piezométricas puntuales y promedio, volúmenes almacenados en pequeñas regiones y/o caudales subterráneos locales) no es posible plantear un modo de conservación que preserve la ecuación de continuidad localmente. En particular, en los tramos 2 y 3 se han alcanzado las mayores estimaciones de **BIAS**, las cuales sobrepasan el 30% para conexiones río-acuífero cercanas a la perfecta, cuando se impone que  $b_{lim} > 5 \times 10^{-3}$ . De la misma forma, al considerar conexiones río-acuífero muy imperfectas, los mayores **BIAS** se han estimado para el tramo 2, con estimaciones cercanas al 8%. También se ha observado que **BIAS** disminuye hasta situarse por debajo del 1% en la mayoría de las simulaciones realizadas aplicando la parametrización de reducción menos restrictiva, es decir, asumiendo que  $b_{lim} < 7.5 \times 10^{-3}$  y, por lo tanto, se incluyen más modos efectivos en los modelos reducidos. En estos casos, los **BIAS** más elevados se han obtenido en los tramos 1 y 4, donde se ha superado el 0.5% al considerar conductancias que superan los 200 m<sup>2</sup>/d. De la misma manera, las tasas de decrecimiento de **BIAS**, con respecto a la disminución del límite de participación modal,





**Figura 8.22.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas en cada tramo de la red de drenaje conectada con el acuífero heterogéneo, simulados con modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF.

han sido más rápidas en el tramo 1 y, por el contrario, más lentas en el tramo 4. Dichos gradientes, en todos los tramos, han aumentado cuando  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ ; resultado análogo al obtenido para los caudales subterráneos a lo largo de toda la red de drenaje.

Análogamente a **BIAS**, las estimaciones de los **RMS** para los hidrogramas parciales de relación río-acuífero han superado a las obtenidas para los hidrogramas simulados a lo largo de toda la red de drenaje. Para este caso, las mayores estimaciones se han encontrado para el tramo 2, las cuales superan al 40 % al imponer que  $b_{lim} > 10^{-3}$  y las conductancias son mayores o iguales que  $500 \text{ m}^2/\text{d}$ . En dicho tramo también se han estimado elevados **RMS**, mayores del 10 %, para conductancias menores que  $100 \text{ m}^2/\text{d}$  y su tendencia de decaimiento, con respecto a la disminución del límite de participación, ha sido más lenta que en los demás tramos, para los cuales **RMS** exhiben gradientes más fuertes. A pesar de que en los tramos 1, 3 y 4 se han observado algunos **RMS** mayores al 40 % cuando la

conexión río-acuífero es alta, la gran mayoría de las estimaciones se encuentran entre el 20 y el 5 % cuando los límites de participación modal se encuentran entre  $10^{-4}$  y  $10^{-3}$ . Éstas disminuyen monótonamente hasta aproximarse, casi siempre, hasta cerca del 1 % al haber establecido las parametrizaciones de compresión selectiva menos exigentes, es decir, cuando se han utilizado los límites de participación más pequeños, por debajo de  $10^{-4}$ , que permiten incluir más modos efectivos en los modelos reducidos por el MAV-CSEM. Aún así, las mayores estimaciones de **RMS** para las tres regiones antes mencionadas han sido obtenidas en el tramo 3, cuando la conexión río-acuífero es cercana a la perfecta.

Al construir modelos reducidos formados por mayores cantidades de modos efectivos, los mejores resultados han sido encontrados en los tramos 1 y 4. En dichos tramos, **RMS** decrece así: (i) desde el 6 %, para  $b_{lim} = 2.5 \times 10^{-4}$ , aproximándose hacia el 1 %, al establecer que  $b_{lim} = 10^{-5}$  y cuando la conductancia del río es de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$ ; (ii) del 0.4 %, para  $b_{lim} = 10^{-4}$ , hasta ser cercano al 0.1 %, asumiendo que  $b_{lim} = 10^{-5}$  y una conductancia de río de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ ; (iii) las estimaciones para las demás conductancias de río varían dentro de los intervalos anteriormente establecidos. De la misma manera, en el tramo 2 las tendencias de decrecimiento son similares a las descritas para los tramos 1, 3 y 4, pero las estimaciones de **RMS** son ligeramente más elevadas, variando del 9 % para  $b_{lim} = 10^{-4}$  hasta el 6 % para  $b_{lim} = 10^{-5}$ , cuando la conductancia es de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$ ; y desde el 1 % para  $b_{lim} = 10^{-4}$  hasta el 0.5 %, al establecer que  $b_{lim} = 10^{-5}$ , para una conductancia de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ . Análogamente a **BIAS**, aunque menos notorio a simple vista, las estimaciones de **RMS**, para los hidrogramas en los diferentes tramos estudiados exhiben la mayor velocidad de decrecimiento cuando  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ , mostrando un comportamiento parecido al expresado por los caudales simulados a lo largo de toda la red de drenaje. Los experimentos numéricos han demostrado que las simulaciones más confiables se encuentran asociadas a **RMS** < 5 %, de donde se deduce que muchos de los modelos reducidos planteados en este análisis de sensibilidad no representan adecuadamente el comportamiento de los hidrogramas de referencia, especialmente al asumir límites de participación muy elevados.

Ahora bien, si se comparan los gráficos contenidos en la columna derecha de las figuras 8.20 y 8.22, se nota una disminución considerable de las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  para los hidrogramas de cada tramo, con respecto a las obtenidas considerando los hidrogramas a lo largo de toda la red de drenaje. Tales diferencias se fundamentan en lo que sigue. Primero, en los tramos 1, 2 y 3 las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  disminuyen hasta ser menores del 20 % cuando se impone que  $b_{lim} > 5 \times 10^{-3}$  y se utilizan conductancias de río mayores que  $500 \text{ m}^2/\text{d}$ , es decir, los modelos reducidos incluyen muy poco modos efectivos. En estos casos, las mínimas estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  aumentan a medida que disminuye la conductancia de río considerada. Por ejemplo, en los tramos 1, 2 y 3,  $\mathbf{E}_2$  crece desde aproximadamente el 6 % para una conductancia de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$ , hasta cerca del 80 % usando una conductancia de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ . Segundo, las eficiencias mínimas de mayor magnitud se presentan para los hidrogramas simulados en el tramo 4, donde se ha encontrado que  $20 \% \leq \mathbf{E}_2 \leq 40 \%$  al considerar conductancias entre  $1000$  y  $200 \text{ m}^2/\text{d}$  y  $50 \% \leq \mathbf{E}_2 \leq 85 \%$  cuando dichas conductancias impuestas al río sobrepasan los  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ .

Igualmente, las mayores velocidades de crecimiento en las estimaciones de la eficiencia han sido detectadas en las simulaciones de los tramos 1 y 2, donde  $\mathbf{E}_2$  ha superado al 70 % para todas las conductancias de río consideradas, al imponer que  $b_{lim} = 7.5 \times 10^{-4}$ . Por el contrario, las tendencias de aumento en las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$ , con respecto a la disminución del límite de participación modal, son mucho más lentas en los tramos 3 y 4. Al respecto, se destacan las siguientes observaciones. Primero, en el tramo 4 se estiman eficiencias superiores al 70 %, para todas las conductancias consideradas, cuando  $b_{lim} < 5 \times 10^{-4}$  y, segundo, en el tramo 3 las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  sobrepasan al 75 %, para

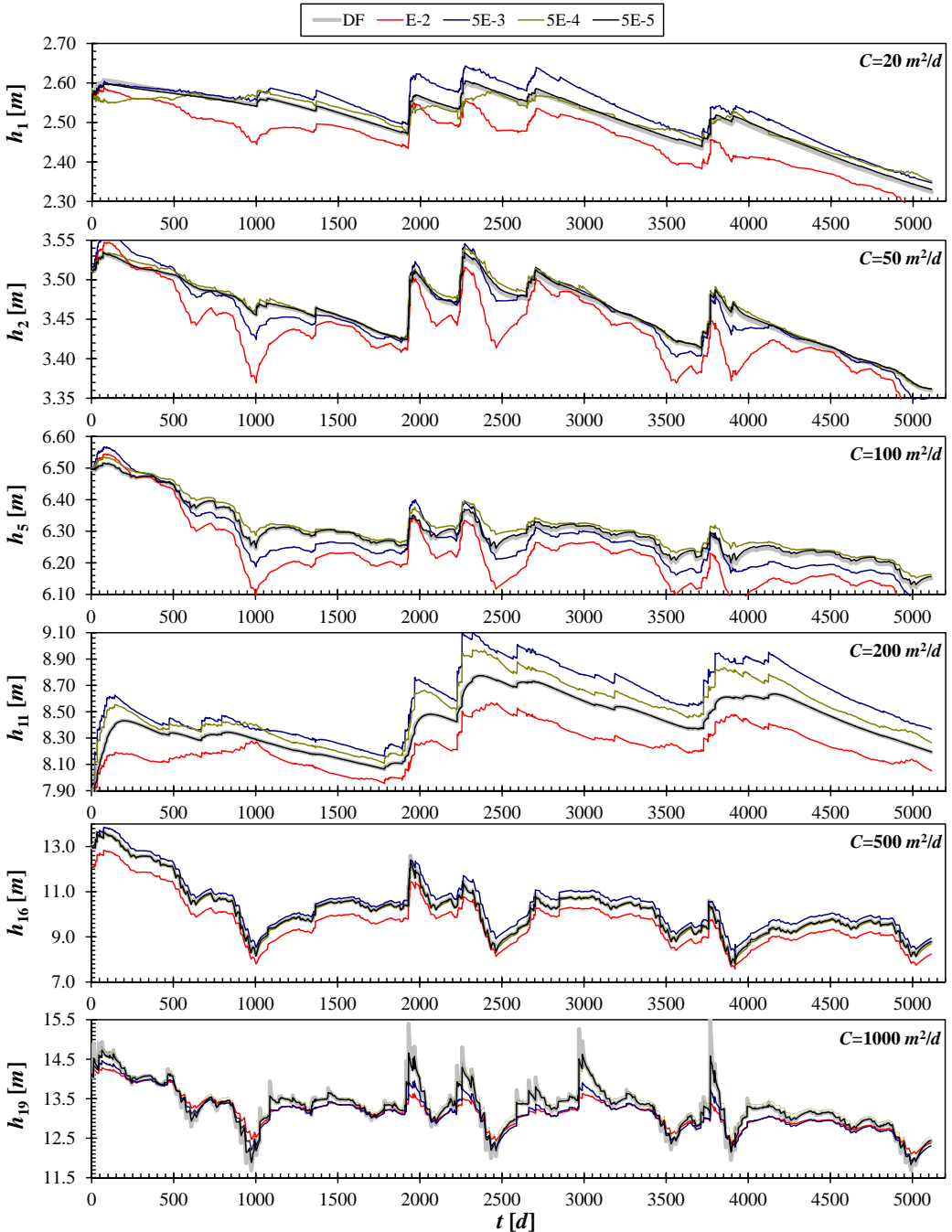
todas las conductancias consideradas e imponiendo que  $b_{lim} < 2.5 \times 10^{-4}$ , es decir, su rapidez de disminución es más lenta que las exhibidas para los tramos 1 y 2. Una vez se sobrepasan los anteriores límites de participación, la convergencia de  $\mathbf{E}_2$  hacia la eficiencia perfecta es monótonamente creciente y, en general, se logra cuando  $b_{lim} < 10^{-4}$ . De forma análogamente inversa a las estimaciones de **BIAS** y **RMS**, la velocidad de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  es mayor en el intervalo  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ , para todos los tramos analizados. Dichos resultados manifiestan comportamientos similares a los encontrados en las estimaciones efectuadas sobre los hidrogramas simulados a lo largo de toda la red de drenaje.

Las gráficas de la figura 8.22 muestran que todos los índices se optimizan a medida que la conexión río-acuífero tiende a ser imperfecta. Es decir, al imponer bajas conductancias en los bloques de río, los requerimientos computacionales y de almacenamiento virtual, necesarios para representar adecuadamente los caudales parciales de intercambio, disminuyen. Es más, si se combinan los resultados para los tres índices considerados, se concluye que una parametrización para la compresión selectiva y el enmascaramiento que logra mantener la representatividad de los modelos de referencia en los reducidos, al menos en lo referente a los caudales parciales de intercambio, se logra imponiendo un valor cercano a  $2.5 \times 10^{-4}$  para el límite de participación. De acuerdo con los resultados comentados hasta ahora, el rango de mayor variabilidad de los tres índices de comportamiento está incluido dentro del intervalo  $10^{-5} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ , el cual corresponde al rango de parametrización de la compresión selectiva y el enmascaramiento del MAV-CSEM donde varía con mayor velocidad el número de modos efectivos incluidos en los modelos reducidos, de acuerdo a los resultados presentados en la figura 8.19. Para terminar, es importante comentar que la lenta convergencia hacia los valores óptimos exhibida por los índices de comportamiento estimados para los hidrogramas de intercambio acuífero-tramos 2, 3 y 4, más notoriamente para las eficiencias de Nash en los dos últimos tramos, confirman la gran influencia que ejerce la localización de las zonas de extracción 7, 8 y 9 sobre la representatividad de los caudales de intercambio en dichos tramos, especialmente cuando éstos se simulan empleando modelos reducidos por el MAV-CSEM.

### Alturas piezométricas en localizaciones seleccionadas en el acuífero

Las series de altura piezométrica en seis diferentes localizaciones del acuífero, simuladas mediante modelos reducidos por el MAV-CESM y clasificadas de acuerdo con las conductancias de río y los límites de participación modal correspondientes, se presentan en la figura 8.23. Los gráficos siguen las convenciones y nomenclatura definidas en la figura 8.2 para las localizaciones y se han ordenado de la siguiente manera comenzando por arriba: (i) las alturas piezométricas simuladas en la localización  $\mathbf{P}_1$ , para una conductancia de río de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ , (ii) las alturas piezométricas simuladas en la localización  $\mathbf{P}_2$ , para una conductancia de río de  $50 \text{ m}^2/\text{d}$ , (iii) las alturas piezométricas simuladas en  $\mathbf{P}_5$ , para una conductancia de río de  $100 \text{ m}^2/\text{d}$ , (iv) las alturas piezométricas simuladas en  $\mathbf{P}_{11}$ , para una conductancia de río de  $2000 \text{ m}^2/\text{d}$ , (v) las alturas piezométricas simuladas en  $\mathbf{P}_{16}$ , para una conductancia de río de  $500 \text{ m}^2/\text{d}$ , y (vi) las alturas piezométricas simuladas en la localización  $\mathbf{P}_{19}$ , imponiendo una conductancia de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$  sobre el río. Además, las convenciones adoptadas se ubican en la parte superior de la figura 8.23. Allí, las líneas gruesas de color gris representan las piezometrías de referencia, simuladas a través de modelos resueltos en DF. Por su parte, las líneas delgadas de diferentes colores representan las alturas piezométricas simuladas utilizando los modelos reducidos por el MAV-CESM.

En las alturas piezométricas presentadas en la figura 8.23, se observa la gran influencia que ejerce la parametrización de la compresión selectiva y el enmascaramiento modal sobre la representatividad de las simulaciones mediante los modelos reducidos, con respecto a



**Figura 8.23.** Alturas piezométricas en seis localizaciones del acuífero heterogéneo simuladas mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MAV-CSEM de diferentes tamaños, de acuerdo con los  $b_{lim}$  impuestos como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, los cuales se han variado entre  $10^{-5}$  y  $5 \times 10^{-5}$ , para diferentes valores de conductancia del río.

las alturas piezométricas de referencia. Así, al establecer que  $b_{lim} = 10^{-2}$ , se han obtenido alturas piezométricas muy diferentes a las de referencia, las cuales exhiben tendencias medias erróneas y no representan adecuadamente los periodos de recarga ni los de descarga del acuífero. Si se disminuye dicho límite de participación hasta  $5 \times 10^{-3}$ , las tendencias piezométricas medias mejoran, pero sus picos y descargas no alcanzan una representatividad adecuada. Ahora bien, cuando el límite de participación modal disminuye un orden de magnitud más, tomando un valor de  $5 \times 10^{-4}$ , se detectan dos consecuencias principales: (i) las alturas piezométricas simuladas en  $\mathbf{P}_{16}$  y  $\mathbf{P}_{19}$ , que corresponden a las localizaciones más alejadas de la zona de conexión río-acuífero, representan adecuadamente las tendencias medias de referencia, y (ii) las alturas piezométricas simuladas en  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{11}$ , que corresponden a las localizaciones cercanas a la red de drenaje conectada con el acuífero, siguen manifestando desviaciones tanto en las tendencias medias, como en la representación de los picos. Finalmente, simulaciones aceptables de las alturas piezométricas en todas las localizaciones consideradas, con excepción de las correspondientes a  $\mathbf{P}_{19}$ , se logran al establecer que  $b_{lim} = 5 \times 10^{-5}$ . Con respecto a las alturas piezométricas simuladas en  $\mathbf{P}_{19}$ , vale la pena resaltar que no ha sido posible ajustar los máximos piezométricos, a pesar de que las tendencias medias han sido representadas adecuadamente, aún empleando modelos reducidos que implementan parametrizaciones rígidas para la compresión selectiva. Aún así, las alturas piezométricas de respuesta un poco menos rápida están muy bien reproducidas aún para conductancias altas. Es el precio a pagar por las reducciones de tamaño al aplicar el MAV-CSEM, que no es muy alto en este caso particular.

Es claro que las alturas piezométricas presentadas en la figura 8.23 se refieren exclusivamente a una de las conductancias impuestas sobre el río, para determinada localización. Entonces, con el objetivo de formar una visión clara de la influencia que tiene la parametrización de la compresión selectiva sobre las simulaciones de las piezometrías, incluyendo la influencia de variar el grado de conexión río-acuífero, se han estimado los índices de comportamiento para sus correspondientes componentes transitorias con condiciones de contorno nulas,  $\mathbf{w}(t)$ ; resultados que se presentan en la figura 8.24. Allí, cada fila representa una de las localizaciones donde se controlan las variaciones de las alturas piezométricas, como se ha descrito anteriormente para la figura 8.23, y las columnas izquierda, central y derecha contienen las estimaciones de los índices **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, respectivamente.

Las estimaciones de **BIAS** para las piezometrías simuladas en las localizaciones más cercanas a la red de drenaje ( $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{11}$ ) manifiestan un rango de variación similar, exhibiendo valores entre el 0.3 y el 30%. En dichas simulaciones, los máximos **BIAS**, cercanos al 30%, se han conseguido para una conductancia de 1000 m<sup>2</sup>/d, estimaciones que disminuyen hasta cerca del 5% cuando se impone una conductancia de 20 m<sup>2</sup>/d. Por el contrario, los **BIAS** máximos, estimados para las piezometrías simuladas en las localizaciones  $\mathbf{P}_{16}$  y  $\mathbf{P}_{19}$ , se aproximan al 10% para conexiones río-acuífero casi perfectas, disminuyendo hasta cerca del 1% al considerar conexiones río-acuífero imperfectas.

Las tendencias de decrecimiento exhibidas por las estimaciones de **BIAS** cambian, según la localización analizada, de la siguiente manera: (i) en  $\mathbf{P}_1$  la velocidad de disminución de **BIAS** dentro del intervalo  $10^{-3} \leq b_{lim} \leq 10^{-2}$  es bastante menor que en  $10^{-5} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ , encontrándose el mayor gradiente de decrecimiento cuando  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ ; (ii) en  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{19}$  se han obtenido tendencias de decrecimiento graduales y no ha sido posible detectar claramente un intervalo de límite de participación donde la disminución de **BIAS** sea más rápida; (iii) **BIAS** muestra una paulatina disminución en el intervalo  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-2}$  en  $\mathbf{P}_{11}$ , por el contrario su gradiente de decrecimiento aumenta súbitamente cuando se impone que  $b_{lim} < 10^{-4}$ ; (iv) las tendencias de disminución de **BIAS** en  $\mathbf{P}_{16}$  son similares a la presentada para  $\mathbf{P}_1$ , con la diferencia

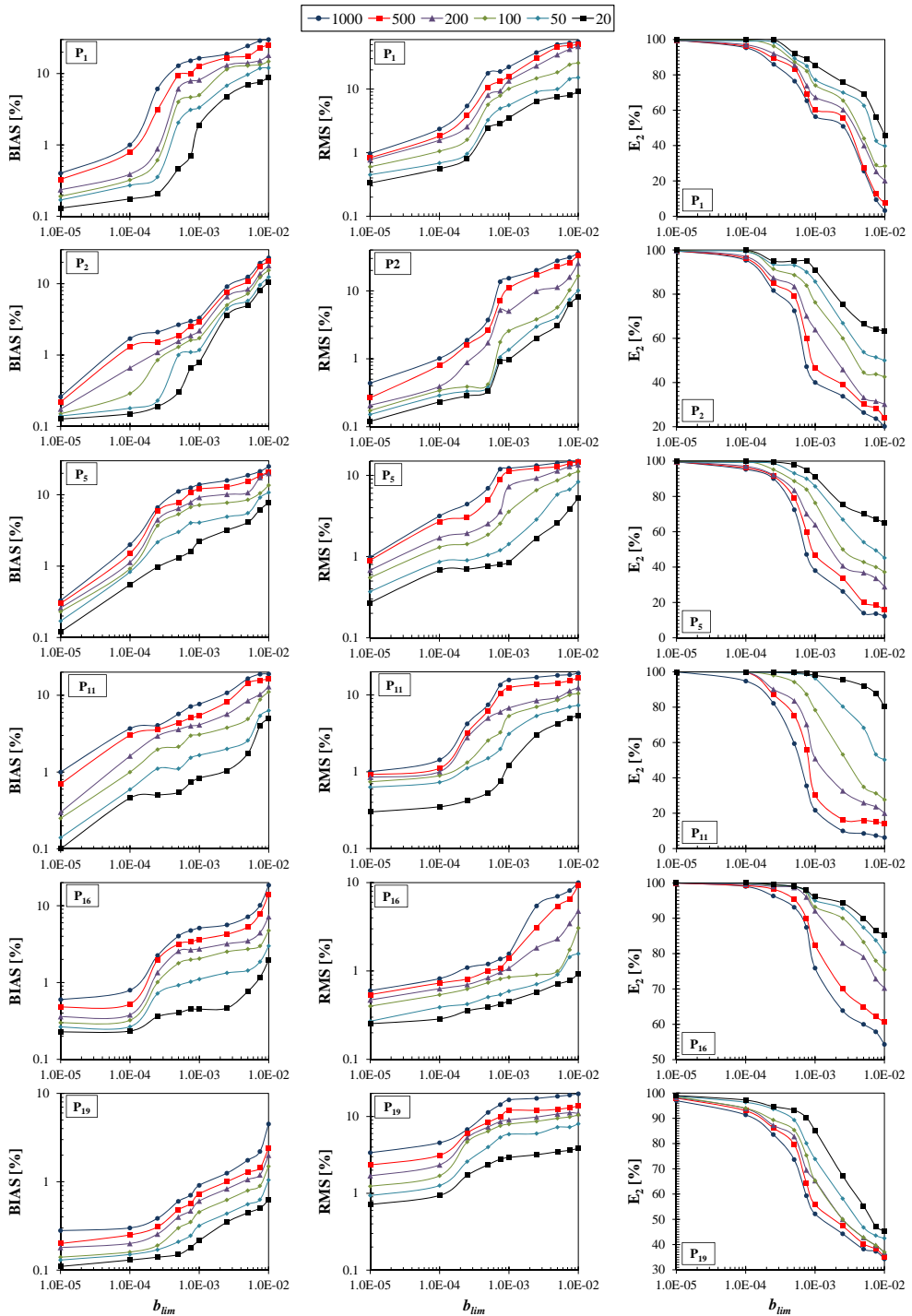


Figura 8.24. Índices de comportamiento estimados para las alturas piezométricas en el acuífero heterogéneo, usando modelos reducidos por el MAV-CSEM, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF.

que los máximos estimados son inferiores; (*v*) los **BIAS** en la localización  $\mathbf{P}_{19}$  manifiestan los menores gradientes de decrecimiento y tienden hacia un valor límite a medida que el límite de participación tiende a cero. A pesar de las diferentes tendencias de disminución encontradas para **BIAS**, en todos los puntos analizados las mínimas estimaciones han sido inferiores al 1 % cuando  $b_{lim} < 10^{-5}$ , lo cual permite inferir una adecuada reproducción de las tendencias medias de las piezometrías de referencia por parte de los modelos reducidos por el MAV-CSEM que adoptan dicha parametrización en su compresión selectiva.

Por otro lado, los máximos **RMS** estimados para las piezometrías simuladas, superiores al 35 % para conductancias mayores que 200 m<sup>2</sup>/d, se ubican en la localización  $\mathbf{P}_1$ . De forma similar, en los puntos de control  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_{11}$  y  $\mathbf{P}_{19}$  se han detectado **RMS** máximos mayores al 10 %. El primero se localiza cerca de los tramos 2, 3 y 4 de la red de drenaje, mientras que  $\mathbf{P}_{11}$  y  $\mathbf{P}_{19}$  se localizan lejos de allí, en las regiones occidental y sur oriental del acuífero, respectivamente, donde no existen relaciones río-acuífero. En general, los máximos **RMS** estimados para las piezometrías simuladas en las tres localizaciones antes comentadas, no superan el 30 % para conexiones río-acuífero casi perfectas, disminuyendo hasta cerca del 5 % cuando se considera conexión río-acuífero imperfecta. De lo anterior se deduce que, al contrario que **BIAS**, las estimaciones máximas de **RMS** para las alturas piezométricas simuladas no sólo corresponden a localizaciones situadas más cerca de la red de drenaje conectada con el acuífero. Así, los máximos **RMS** de menor magnitud han sido estimados para las alturas piezométricas simuladas en los puntos de control  $\mathbf{P}_5$ ,  $\mathbf{P}_{16}$  y  $\mathbf{P}_{19}$ , los cuales son inferiores al 15 % para conexiones río-acuífero casi perfectas y decrecen hasta cerca del 1 % cuando se impone conexiones río-acuífero muy imperfectas.

Las tendencias de decrecimiento exhibidas por las estimaciones de **RMS**, con respecto a la variación del límite de participación, se describen a continuación. Primero, los **RMS** asociados a las localizaciones  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_{11}$  y  $\mathbf{P}_{19}$  exhiben tendencias similares de decrecimiento. En esos puntos se ha observado que, dentro de los intervalos  $10^{-5} \leq b_{lim} \leq 10^{-4}$  y  $10^{-3} \leq b_{lim} \leq 10^{-2}$ , el gradiente de disminución de las estimaciones es mucho menor que la exhibida en el intervalo  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ . Segundo, la velocidad de decrecimiento de **RMS** en las localizaciones  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{16}$  es inferior a las encontradas en  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_{11}$  y  $\mathbf{P}_{19}$ . Tercero, los mayores gradientes de decrecimiento de **RMS** están asociadas al punto de control  $\mathbf{P}_2$  a lo largo del intervalo  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ . Vale la pena resaltar que, en todos los puntos de control considerados con excepción de  $\mathbf{P}_{19}$ , las estimaciones mínimas de **RMS** varían entre 1 y 0.1 % cuando se asume que  $b_{lim} < 10^{-5}$ . Lo anterior indica que las diferencias entre las alturas piezométricas de referencia y las simuladas mediante los modelos reducidos por el MAV-CSEM que adoptan parametrizaciones rígidas para la compresión selectiva y, por lo tanto, están formados por muchos modos efectivos, son bastante aceptables inclusive en la reproducción de los máximos piezométricos. Por el contrario, como se observa en la gráfica inferior de la figura 8.23, en  $\mathbf{P}_{19}$  no ha sido posible simular adecuadamente las máximas y mínimas alturas piezométricas de referencia, inclusive usando modelos reducidos por el MAV con truncamiento conservativo formados por los 1500 modos generados inicialmente. En consecuencia, se han obtenido estimaciones de **RMS** relativamente altas, aún imponiendo límites de participación pequeños.

En todos los puntos de control analizados, las mínimas eficiencias estimadas para las alturas piezométricas simuladas se dan cuando la conexión río-acuífero considerada es casi perfecta y el límite de participación impuesto es grande. De acuerdo con lo anterior, los mínimos  $\mathbf{E}_2$  de menor magnitud se estimaron en  $\mathbf{P}_1$ , siendo éstos cercanos al 10 % para conductancias mayores a 500 m<sup>2</sup>/d. En dicho punto, las eficiencias mínimas de mayor magnitud se han obtenido al considerar conexión río-acuífero muy imperfecta, con estimaciones de aproximadamente el 40 % asumiendo una conductancia de 20 m<sup>2</sup>/d. Eficiencias

no tan pobres como las antes mencionadas, se observan en  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{11}$ , donde se han alcanzado mínimos cercanos al 20 % para una conductancia de 1000 m<sup>2</sup>/d, las cuales han aumentado por encima del 55 % al emplear una conductancia de 20 m<sup>2</sup>/d. En cambio, en el punto de control  $\mathbf{P}_{16}$  se han estimado las mínimas  $\mathbf{E}_2$  de mayor magnitud. Éstas se aproximan al 60 %, para una conductancia de 1000 m<sup>2</sup>/d, alcanzando valores cercanos al 80 % cuando se consideran conductancias menores que 100 m<sup>2</sup>/d.

De forma inversamente análoga a las estimaciones de **BIAS**, las tendencias de crecimiento exhibidas por  $\mathbf{E}_2$  cambian de acuerdo con la localización analizada, como se describe a continuación. Primero, la rapidez de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  en  $\mathbf{P}_1$ , a lo largo del intervalo  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-2}$ , es relativamente uniforme, a pesar de que cambia localmente cuando  $b_{lim} \approx 10^{-4}$ . Segundo, a pesar de que las tendencias de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  en los puntos de control  $\mathbf{P}_2$  y  $\mathbf{P}_5$  son similares en forma, el gradiente calculado en  $\mathbf{P}_5$  es mayor que en  $\mathbf{P}_2$  puesto que sus estimaciones crecen más rápidamente a lo largo del intervalo  $10^{-5} \leq b_{lim} \leq 10^{-2}$ . En los dos puntos antes comentados, las velocidades de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  son menores a lo largo del intervalo  $10^{-3} \leq b_{lim} \leq 10^{-2}$ , que las obtenidas cuando  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ . Tercero, a diferencia de lo comentado hasta ahora, las características de crecimiento de la eficiencia en los puntos  $\mathbf{P}_{11}$  y  $\mathbf{P}_{16}$  pueden llegar a cambiar drásticamente según la conductancia impuesta para parametrizar la conexión río-acuífero. En ambas localizaciones, sobre el intervalo  $10^{-3} \leq b_{lim} \leq 10^{-2}$ , las velocidades de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  son relativamente bajas cuando se consideran conductancias que sobrepasan los 200 m<sup>2</sup>/d; gradiente que aumenta considerablemente al imponer conductancias menores que 200 m<sup>2</sup>/d. Por el contrario, sobre el intervalo  $10^{-4} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$ , el crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  es rápido y presenta velocidades similares para las seis conductancias consideradas. Cuarto, para los cinco puntos analizados hasta ahora, las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$ , en el intervalo  $10^{-5} \leq b_{lim} \leq 10^{-4}$ , aumentan rápida y monótonamente hacia el valor óptimo del 100 %. Por último, respecto de las eficiencias estimadas en  $\mathbf{P}_{19}$ , se destaca que: (a) los mínimos encontrados son relativamente pequeños y muy similares para todas las conductancias de río analizadas; (b) los gradientes de crecimiento son elevados, sin importar la conductancia de río considerada; (c) la variabilidad de dichos gradientes con respecto a los límites de participación considerados son similares; (d) no ha sido posible alcanzar la eficiencia del 100 % en ninguno de los modelos reducidos planteados por el MAV-CSEM.

De los resultados obtenidos para los diferentes índices de comportamiento, con respecto a las alturas piezométricas simuladas, se pueden plantear las siguientes conclusiones. Primero, las magnitudes de todos los índices de comportamiento estimados mejoran a medida que decrece la conductancia impuesta al río; resultado análogo al encontrado para los demás parámetros de control estudiados en este capítulo. Segundo, la simulación adecuada de las alturas piezométricas transitorias, utilizando modelos reducidos por el MAV-CSEM, demanda el uso de recursos computacionales más o menos similares a los que han sido requeridos para los caudales parciales de intercambio transitorios en los diferentes tramos de la red de drenaje. En ambos casos, los modelos excesivamente comprimidos no representan adecuadamente las características propias de dichos parámetros de control. Tercero, los índices de comportamiento estimados para las alturas piezométricas simuladas en los puntos de control  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  han sido los más desfavorables, tanto en magnitud como en gradiente de aumento o disminución. En consecuencia, dichos puntos de control le imponen mayores requerimientos de eficiencia a los modelos reducidos por el MAV-CSEM, condición que se atribuye a su localización dentro del acuífero, puesto que se encuentra cercano a los tramos de la red de drenaje y a la zona 9 de bombeo. Cuarto, a diferencia de los resultados obtenidos para los modelos reducidos de acuíferos regulares homogéneos o poco heterogéneos, las localizaciones cercanas a las relaciones río-acuífe-



ro no necesariamente demandan mayores tamaños en los modelos reducidos planteados por el MAV-CSEM para simular adecuadamente las alturas piezométricas respectivas. Así pues, dichos requerimientos también están controlados por la ubicación relativa del punto de análisis con respecto a las zonas de extracción y por la magnitud local de los parámetros hidráulicos del acuífero, los cuales pueden llegar a amplificar la velocidad de respuesta piezométrica local.

Por último, en base a las estimaciones para los tres índices estudiados, se concluye que no ha sido posible plantear simulaciones reducidas correctas de los extremos piezométricos en la localización  $\mathbf{P}_{19}$  mediante los modelos reducidos por el MAV-CSEM; resultado que pone de manifiesto que el nivel de continuidad impuesto para detener la generación de los modos efectivos podría haber sido más estricto. Desafortunadamente, el aumentar dicho nivel de continuidad hubiera implicado mayores requerimientos computacionales durante los procesos de generación modal y compresión selectiva. Dicho de otra manera, si se hubiese deseado representar más adecuadamente la variabilidad temporal de las alturas piezométricas en  $\mathbf{P}_{19}$ , se habría tenido que construir modelos reducidos por el MAV-CSEM de tamaños superiores a los tratados a lo largo de esta sección. A pesar de esto, sacrificar la representatividad de las piezometrías máximas en unas pocas localizaciones en el acuífero, es un precio relativamente pequeño a pagar por aumentar dramáticamente la eficiencia tanto de las simulaciones como de la generación modal.

## 8.5. Aplicación del MLAN a la reducción de los modelos de flujo subterráneo

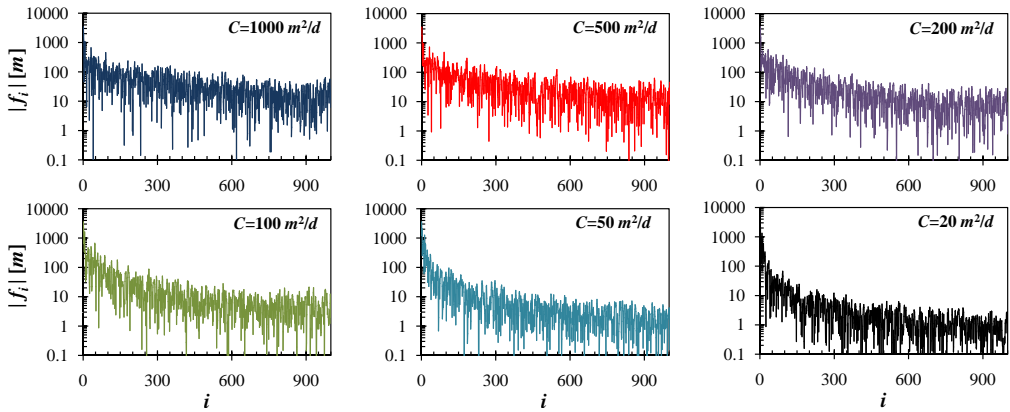
En los próximos apartados se discuten los resultados más importantes obtenidos de aplicar el MLAN en la reducción de los modelos de flujo subterráneo para el acuífero heterogéneo generado usando la base de datos de Walker Lake. Igualmente, se presenta el análisis de sensibilidad de los índices de comportamiento **BIAS**, **RMS** y  $\mathbf{E}_2$  estimados para los parámetros de control descritos en el apartado 8.3.5, con respecto a la variación del tamaño del subespacio de Krylov de reducción y la conductancia impuesta sobre el río.

### 8.5.1. Generación de los subespacios racionales de Krylov

La generación de los subespacios de Krylov de reducción se ha efectuado empleando la iteración racional de Lanczos que ha sido presentada en el algoritmo 7.1. Para obtener los vectores residuales iniciales de generación,  $\mathbf{r}_0$  en dicho algoritmo, se han implementado modelos en régimen permanente con las siguientes características: (i) se consideran los mismos parámetros hidráulicos del acuífero heterogéneo original e idéntica geometría para los contornos impermeables, (ii) se asumen sus mismas características en la relación río-acuífero, es decir, idéntica configuración de la red de drenaje, utilizando las seis conductancias propuestas en el apartado 8.3.1 y (iii) se consideran las mismas distribuciones espaciales de las AE, pero se emplean intensidades que corresponden a las medias de las series de extracciones y recargas mostradas en las figuras 8.4 y 8.5, respectivamente. Así se dispone de seis vectores de alturas piezométricas ordenadas topológicamente que han sido normalizados para utilizarse como residuales en el momento de iniciar la generación de los vectores de Lanczos. Los modelos en régimen permanente se han resuelto en DF para las alturas piezométricas en todos los bloques activos.

Una vez se han escogido los residuales iniciales, se procede a ejecutar la iteración racional de Lanczos, implementada de la siguiente manera: (i) teniendo en cuenta las recomendaciones presentadas por diferentes autores (Zhang, 2000; Zhang *et al.*, 2000; Woodbury

y Zhang, 2001), se ha impuesto un desplazamiento espectral de  $\sigma_0 = -2$  con el fin de precondicionar las iteraciones, (ii) dado que el precondicionamiento tiene la ventaja de volver a la matriz de transmisividades desplazada,  $\mathbf{A}_\sigma$ , más dominante en su diagonal y tampoco rompe su definición positiva, los SELD involucrados en la iteración racional de Lanczos se han resuelto usando el método del gradiente conjugado precondicionado con descomposición incompleta  $ILU(\tau, p)$ , con umbral  $\tau = 10^{-4}$  y nivel de relleno  $p = 3$ ; (iii) se ha adoptado una versión de la iteración de Lanczos que incluye la ROP, implementada siguiendo criterios robustos para revisar el grado de ortogonalidad en el PGS (Rutishauser, 1967; Giraud y Langou, 2004). Además, se han utilizado dos criterios para terminar la generación del subespacio de Krylov. Primero, dicha generación no se detiene hasta cumplirse que  $pa_{i,j} \geq \xi = 99.9\%$ , para  $j = 1, 2, \dots, 11$ . Segundo, se deben generar, como mínimo, 3000 vectores de Lanczos. El segundo criterio ha sido impuesto para hacer posible la ejecución del análisis de sensibilidad de los índices de comportamiento de los diferentes parámetros de control, con respecto al número de vectores de Lanczos incluidos en los modelos reducidos, evitando ejecutar operaciones redundantes.



**Figura 8.25.** Valores absolutos de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos del acuífero rectangular heterogéneo según las conductancias asignadas a los bloques de río.

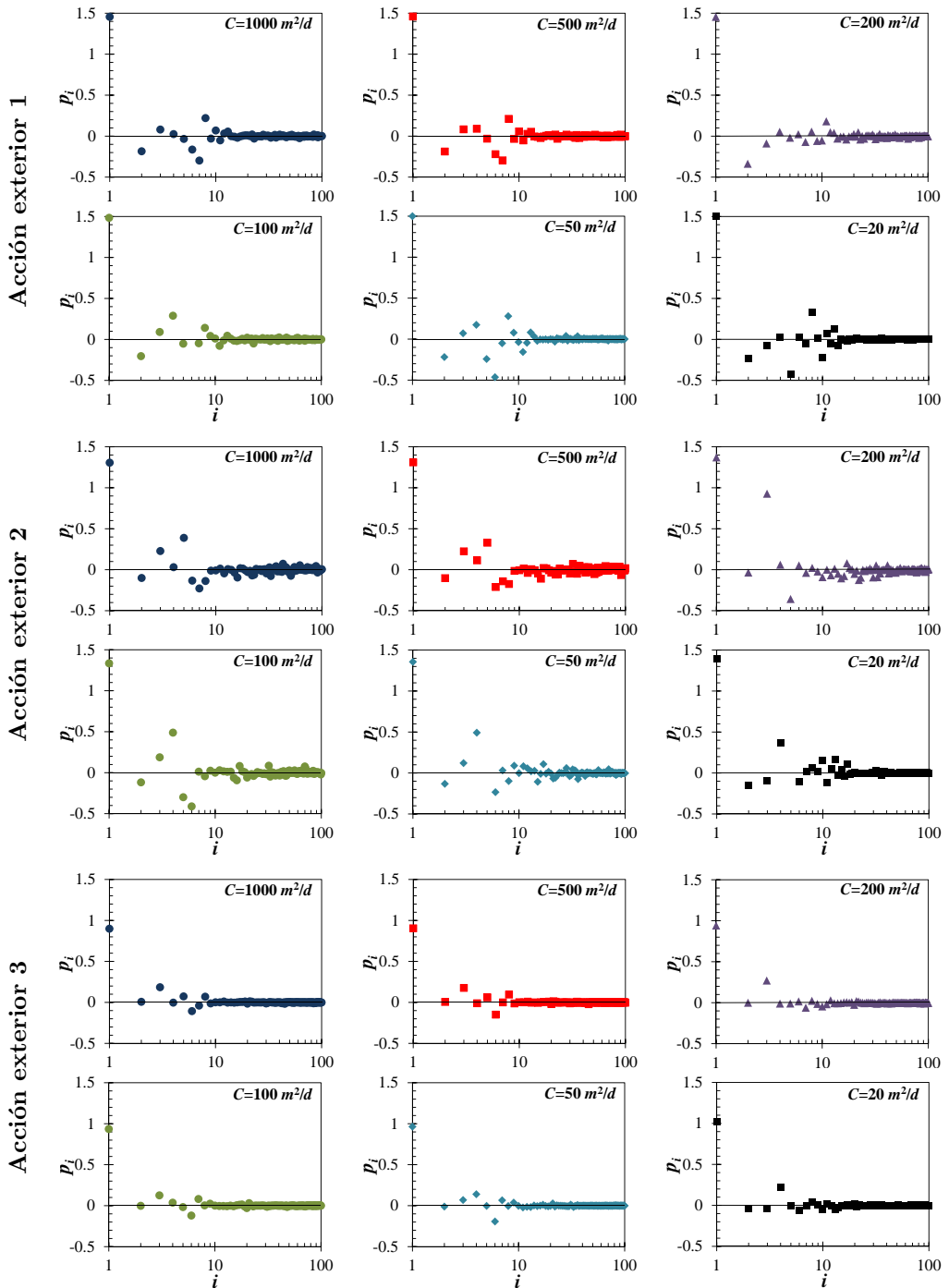
La figura 8.25 contiene 6 gráficos que representan las variaciones de los valores absolutos de los volúmenes encerrados por los primeros 1000 vectores de Lanczos, ordenados de acuerdo con su respectiva conductancia de río. Estos resultados se han contrastado con los presentados en la figura 8.9, los cuales corresponden a los valores absolutos de los volúmenes encerrados por los autovectores asociados a los primeros 1000 autovalores de menor magnitud, resultado de la aplicación del MAV-CSEM. Del análisis comparativo de los gráficos relacionados con la misma conductancia incluidos en ambas figuras, puede concluirse que, aunque las tendencias exhibidas por éstos son muy similares, dicha disminución no es tan gradual como la exhibida por los respectivos autovectores. Asimismo, si se comparan los resultados presentados en la figura 8.25 con los obtenidos para acuíferos rectangulares, de acuerdo con las figuras 7.1 y 7.4.1, se concluye que a pesar de que los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos para acuífero heterogéneo disminuyen a medida que aumenta el número de iteraciones ejecutadas, no lo hacen tan rápidamente como los calculados para un acuífero rectangular. Este resultado es completamente análogo al encontrado durante la aplicación del MAV-CSEM.

Aún así, existen algunas diferencias entre los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos y los contenidos por los autovectores, las cuales no son detectables mediante un simple análisis visual. Primero, a diferencia de lo encontrado en la aplicación del MAV-CSEM, el rango de variación de los volúmenes encerrados por los vectores de Lanczos es mucho menor para el acuífero irregular heterogéneo analizado, puesto que  $f_i$  cambia en 6 órdenes de magnitud, que el obtenido para acuíferos rectangulares, donde  $f_i$  cambia en 14 órdenes de magnitud de acuerdo con las figuras 7.1 y 7.11. Aparte de lo anterior, la velocidad de disminución de la magnitud del valor absoluto de los vectores de Lanczos es un poco mayor que la obtenida para los autovectores, especialmente cuando se consideran conexiones río-acuífero casi imperfectas. A pesar de ello, los volúmenes encerrados por los primeros 10 vectores de Lanczos y los encontrados para los autovectores asociados a los 10 autovalores de menor magnitud, manifiestan órdenes de magnitud semejantes.

Por su parte, los primeros 100 factores de participación de Lanczos, para cada AE considerada y ordenados de acuerdo con su conductancia correspondiente, se presentan en las figuras 8.26, 8.27, 8.28 y 8.29. En las primeras dos figura se han consignado los resultados correspondientes a las seis acciones de recarga, ordenadas siguiendo la convención propuesta en las figuras 8.3 y 8.4, mientras que en las dos últimas se presentan los resultados asociados a las cinco acciones de extracción, organizadas de acuerdo a la convención definida en las figuras 8.3 y 8.5. Así pues, de forma similar a los coeficientes de reparto respectivos obtenidos al aplicar el MAV-CSEM, en las gráficas contenidas en las figuras 8.26, 8.27, 8.28 y 8.29 se detecta gran variabilidad por parte de los factores de participación para todas las AE, con excepción de las AE 4 y 9. Especialmente durante las primeras 100 iteraciones de generación, dichos factores de participación exhiben marcadas fluctuaciones alrededor de cero, cuyo origen se atribuye a la irregularidad geométrica de las áreas donde se aplican las AE sobre el acuífero.

A partir de los resultados concernientes a los factores de participación para las AE de recarga, se puede deducir lo siguiente: (i) todos las AE, con excepción de la AE 4, manifiestan un vector de Lanczos dominante, es decir, existe un vector de Lanczos cuyo factor de participación es mayor que todos los demás; (ii) el primer vector de Lanczos es dominante para las AE 1, 2 y 3, mientras que el segundo vector de Lanczos es dominante para las AE 5 y 6; (iii) la mayor variabilidad de los factores de participación se manifiesta en la AE 2, los cuales fluctúan considerablemente incluso después de haber generado más de cien vectores de Lanczos; (iv) la menor variabilidad de los factores de participación se hace presente en la AE 5, cuyos valores se aproximan a cero, incluso antes de haber generado el décimo vector de Lanczos; (v) la AE 4 manifiesta una variación muy uniforme de los factores de participación por que abarca gran parte del dominio espacial del acuífero e incluye toda la zona de conexión entre el río y el acuífero; (vi) los factores de participación de las AE 5 y 6 han manifestado variabilidades muy similares, las cuales se originan por que éstas se aplican sobre regiones con características geométricas similares, donde la variabilidad espacial de las propiedades hidráulicas del acuífero no son tan pronunciadas.

En base a los factores de participación calculados para las AE de extracción, se pueden resaltar las siguientes características: (i) al igual que la mayoría de las AE de recarga, todas las AE de extracción manifiestan un vector de Lanczos dominante; (ii) el primer vector de Lanczos es dominante para las AE 10 y 11, mientras que el segundo vector es el dominante para las AE 7 y 8; (iii) la AE 9 no presenta un claro vector de Lanczos dominante; (iv) los factores de participación correspondientes las AE 8 y 11 manifiestan las mayores variabilidades puesto que, a diferencia del resto de AE, oscilan de forma bastante apreciable casi hasta el sexagésimo vector de Lanczos; (v) las variabilidades de los factores de participación para las AE 7 y 8 son similares y sus fluctuaciones más significativas



**Figura 8.26.** Factores de participación para los primeros 100 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 1 a 3, para cada conductancia impuesta sobre el río.

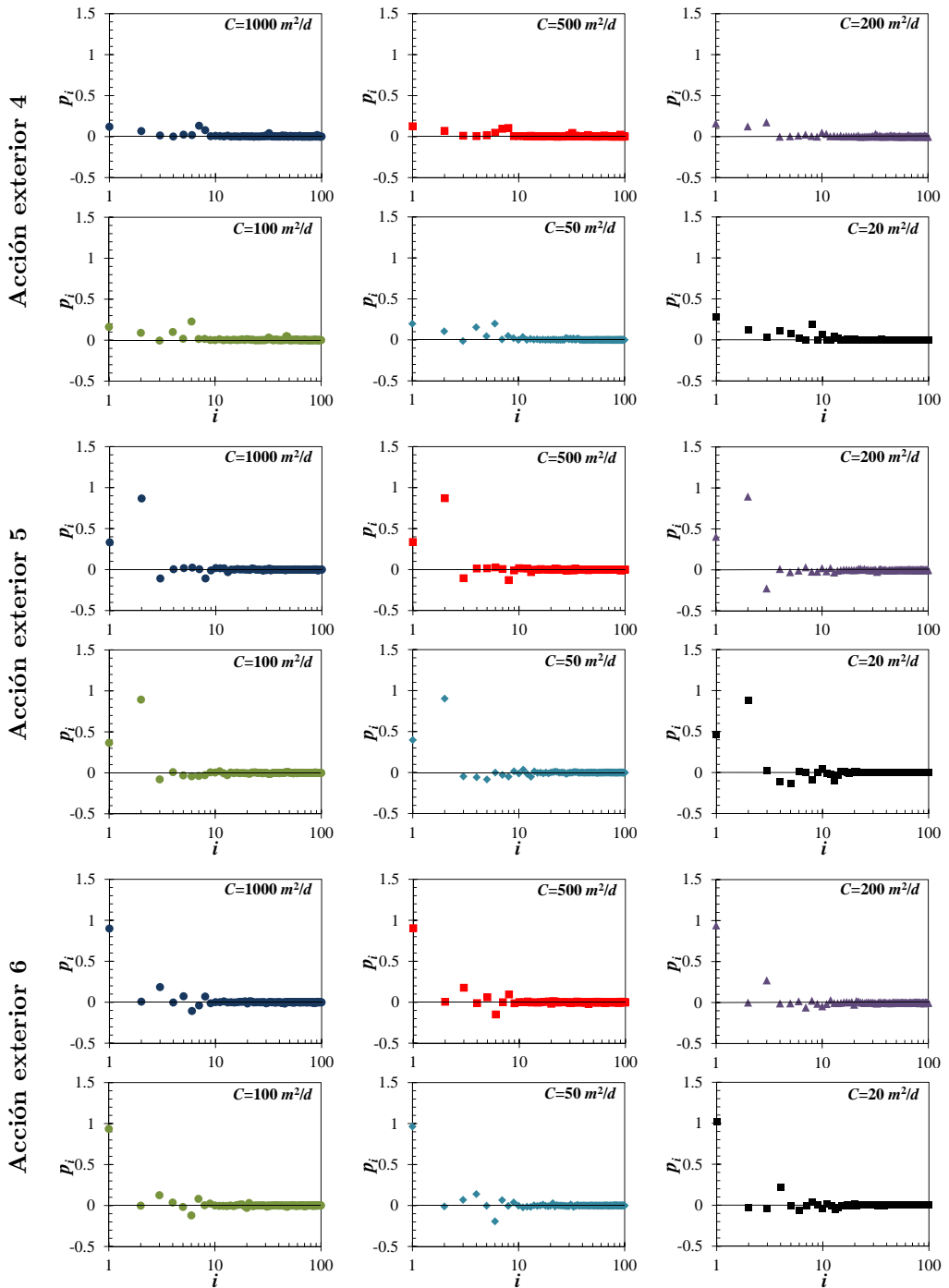
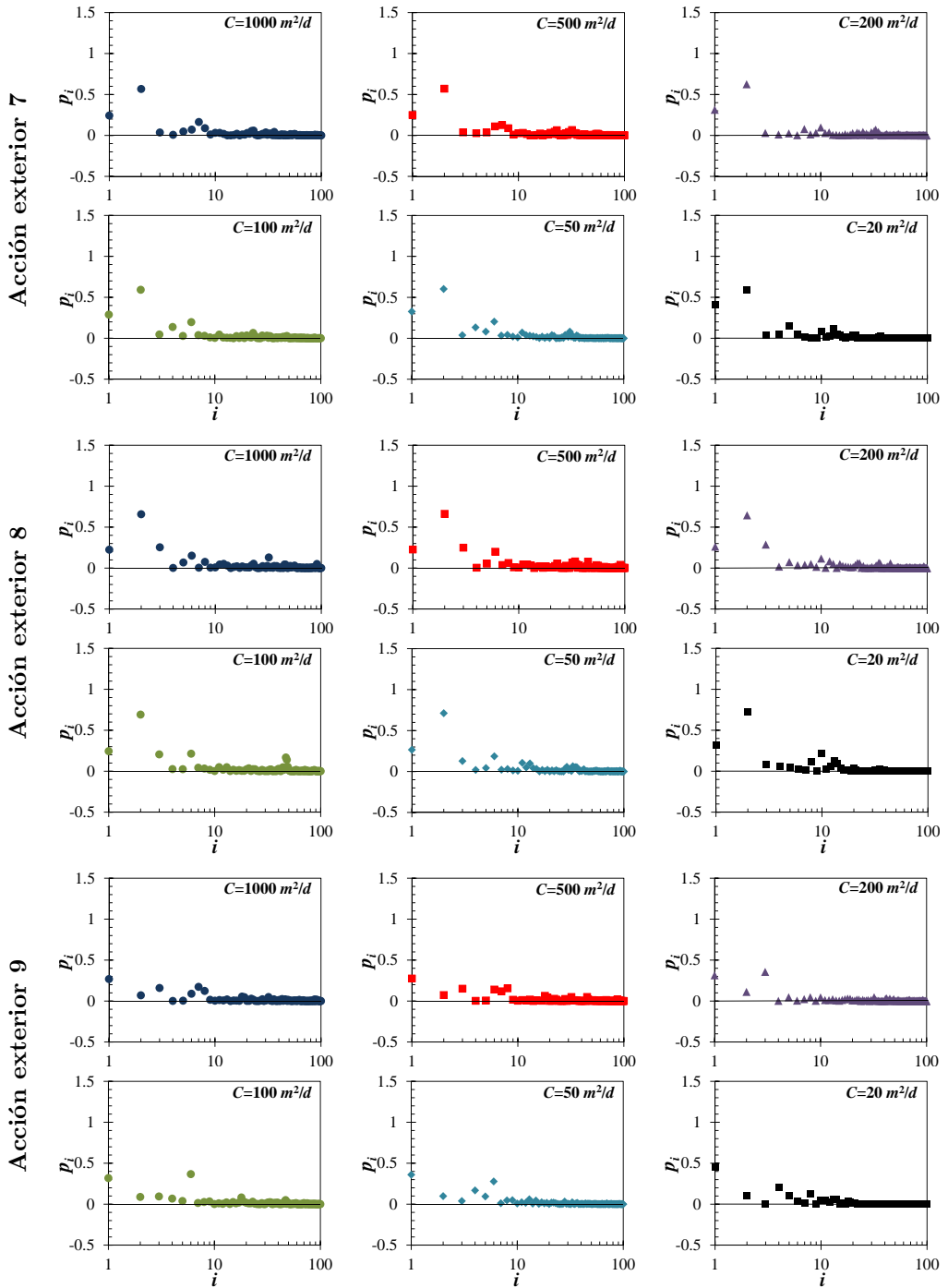
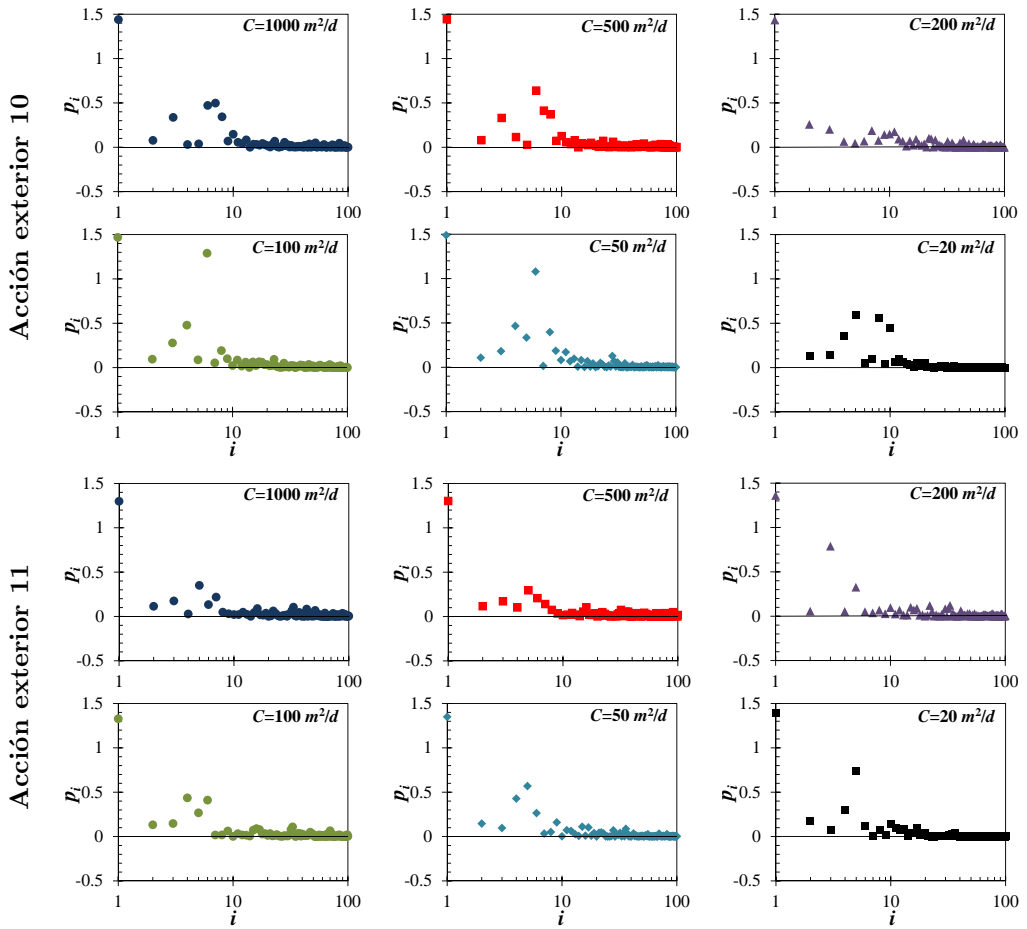


Figura 8.27. Factores de participación para los primero 100 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de recarga 4 a 6, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.28.** Factores de participación para los primero 100 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 7 a 9, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.29.** Factores de participación para los primeros 100 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. Los cuadros contienen las gráficas correspondientes a las AE de bombeo 10 y 11, para cada conductancia impuesta sobre el río.

suceden entre los vectores de Lanczos primero y sexagésimo, semejanza que se sustenta por la misma razón que ha sido expuesta en el numeral (*vi*) del párrafo anterior para las AE 5 y 6; (*vi*) las variabilidades de los factores de participación para las AE 10 y 11 son similares y sus fluctuaciones de mayor magnitud se localizan entre el primer y trigésimo vectores de Lanczos, pero dicha variabilidad es ligeramente mayor en la AE 11.

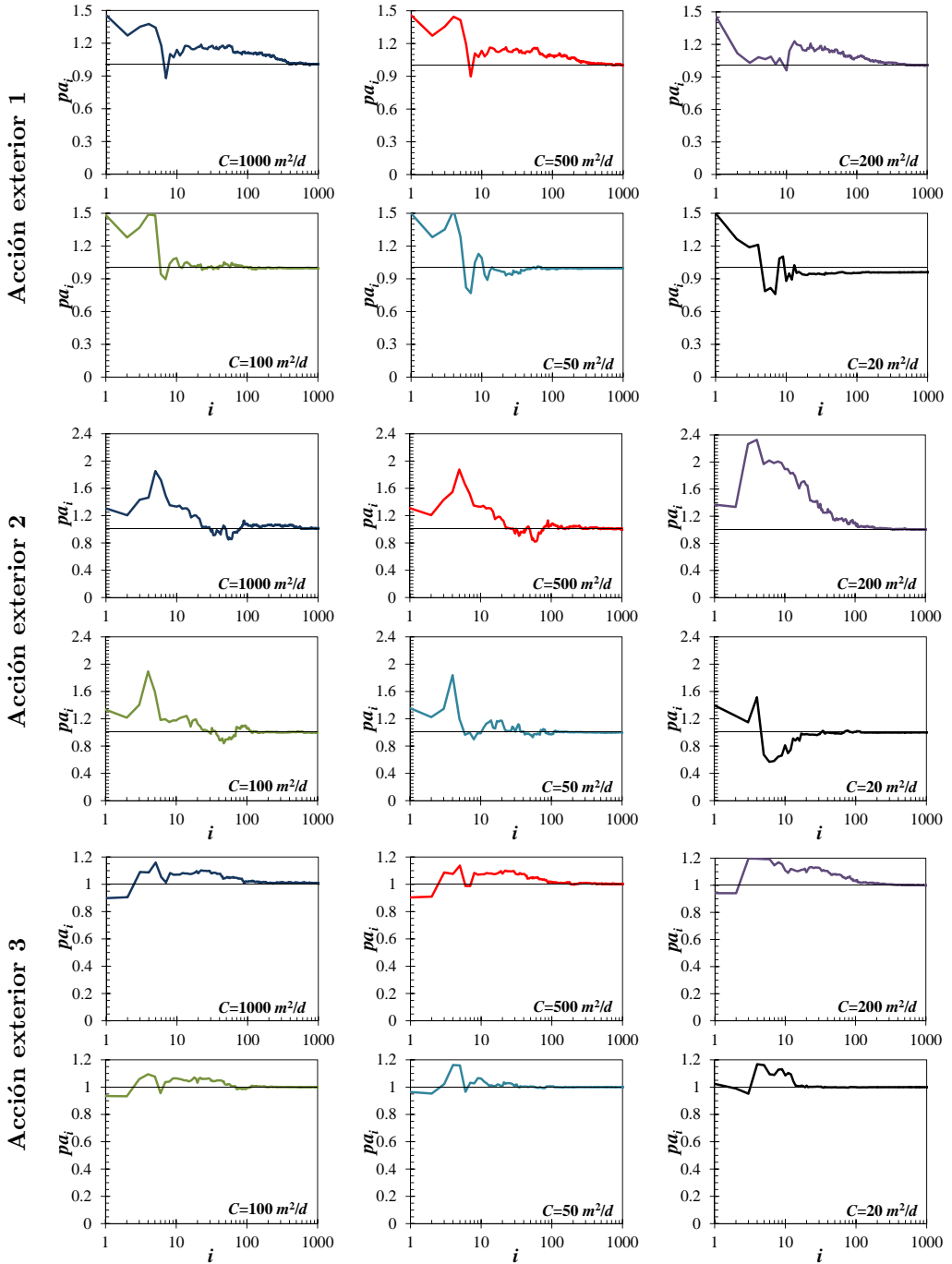
También es pertinente describir las tendencias de variabilidad en los factores de participación cuando se modifican las conductancias impuestas en el río, como se presenta a continuación. Primero, al disminuir la conductancia del río, los factores de participación asociados a los vectores de Lanczos dominantes aumentan, en mayor o menor grado, de acuerdo con la distribución espacial de las acciones elementales de cada AE. Segundo, la cantidad de iteraciones de Lanczos donde se presenta la mayor variabilidad de los factores de participación disminuye a medida que la conexión río-acuífero tiende a ser imperfecta. Muchos de los resultados presentados hasta ahora para los factores de participación, son similares a los encontrados para los coeficientes de reparto durante la aplicación del

MAV-CSEM. Por ejemplo, ya sea aplicando el MAV-CSEM o el MLAN, los modelos de flujo subterráneo se reducen con mayor facilidad cuando la relación río-acuífero considerada es cercana a la imperfecta. La anterior afirmación revela que las características de las relaciones entre el río y el acuífero, junto con la heterogeneidad de sus parámetros hidráulicos y la geometría de sus contornos, juegan un papel sumamente importante en el aumento de los requerimientos computacionales para la reducción de un modelo de flujo subterráneo, especialmente durante la generación de los subespacios de reducción.

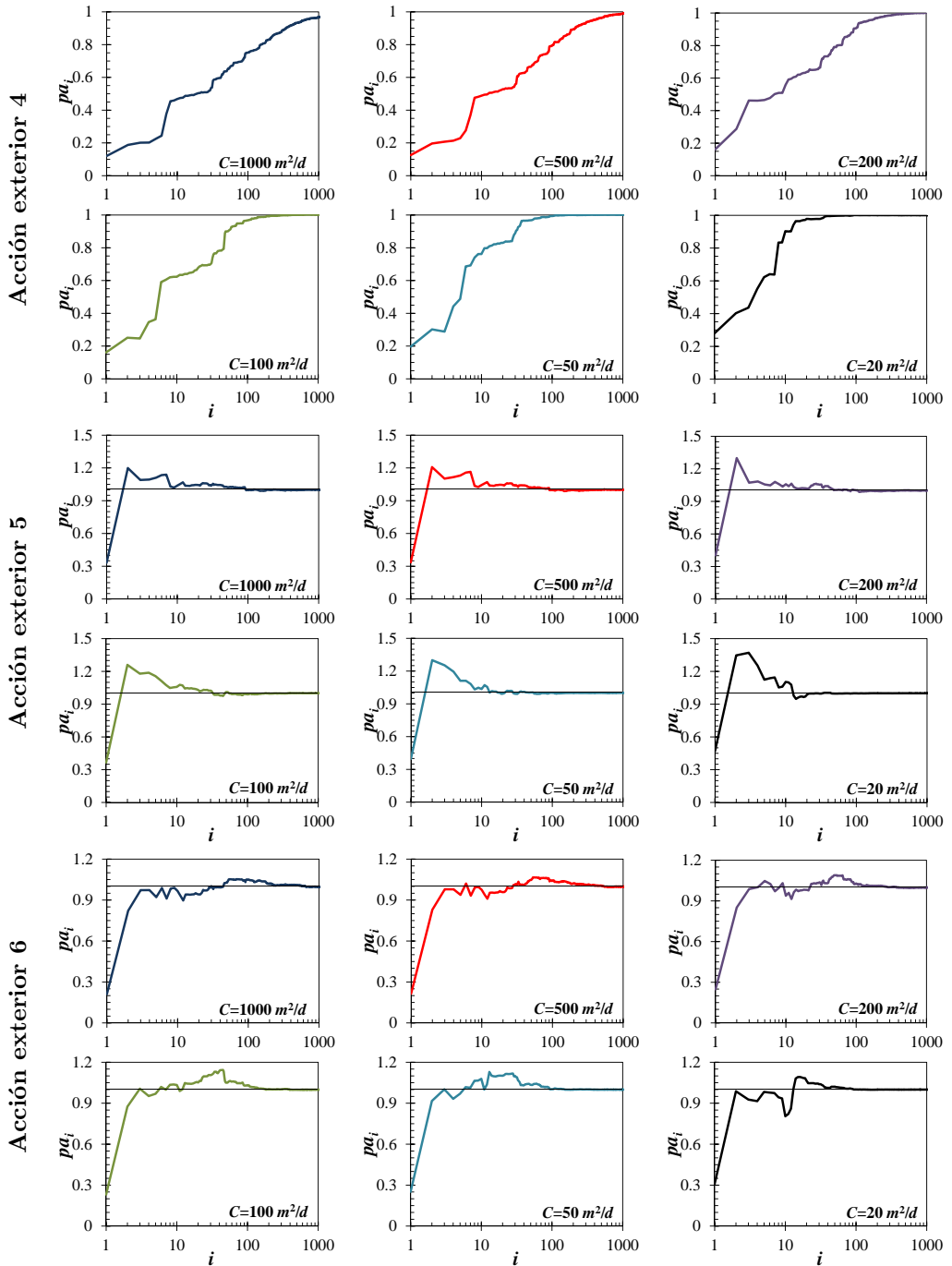
Ahora bien, los primeros 1000 factores de participación acumulados, calculados con respecto a cada AE considerada y ordenados según la conductancia de río respectiva, se presentan en las figuras 8.30, 8.31, 8.32 y 8.33. En las figuras 8.30 y 8.31 se han consignado los resultados para las seis AE de recarga, organizadas siguiendo la convención propuesta en las figuras 8.3 y 8.4, mientras que en las figuras 8.32 y 8.33 se presentan los resultados asociados a las cinco AE de extracción, expuestas siguiendo la convención de las figuras 8.3 y 8.5. En las figuras antes mencionadas, se observa que para gran parte de las AE (1, 2, 3, 4, 5, 8, 9 y 11) ha sido necesario generar más de 500 vectores de Lanczos antes de que los factores de participación acumulados logren superar el límite inferior impuesto a la generación. Igualmente, se detectan tendencias oscilantes de convergencia hacia 1 por parte de los coeficientes de reparto acumulados para algunas AE, sin importar si la excitación considerada es de recarga o extracción. Análogamente a los resultados encontrados en la aplicación del MAV-CSEM, cuando se consideran conexiones río-acuífero cercanas a la perfecta, los requerimientos de cómputo y almacenamiento virtual de la generación del subespacio de Krylov aumentan, especialmente durante el procedimiento de ROP de los vectores de Lanczos, puesto que las AE 4, 9 y 11 requieren tener a disposición más de 1000 de dichos vectores. A causa de lo anterior y, dado que el criterio para detener la generación de vectores de Lanczos se aplica simultáneamente para todas las AE impuestas, la influencia de las AE previamente mencionadas es crítica.

Los principales resultados obtenidos para los factores de participación acumulados, asociados a las AE de recarga, son los siguientes: (i) análogamente a lo encontrado para el MAV-CSEM, el efecto de la presencia de un vector de Lanczos dominante se detecta en todas las AE, con excepción de la AE 4, puesto que sus coeficientes de repartos acumulados alcanzan valores muy cercanos a 1 antes de sobrepasar la décima iteración de Lanczos; (ii) la presencia del vector dominante ocasiona que disminuya la cantidad de iteraciones de Lanczos requeridas para alcanzar el límite inferior impuesto al factor de participación, lo cual se traduce en menos requerimientos computacionales y de almacenamiento durante la generación del subespacio de reducción; (iii) las fluctuaciones más marcadas en los factores de participación se han detectado para las AE 1 y 2 y, a diferencia de los coeficiente de reparto respectivos, éstas requieren la ejecución de muchas iteraciones de Lanczos para superar el límite inferior impuesto sobre los factores de participación; (iv) lo anterior implica que, para las AE 1 y 2, muchos de los factores de participación de mayor magnitud son negativos; (v) las menores oscilaciones de los factores de participación acumulados se obtuvieron para la AE 3; (vi) la AE 4 exhibe la menor velocidad de convergencia a uno por parte de los factores de participación acumulados y, de acuerdo con el criterio de parada impuesto sobre el generador, es una de las AE que controla el proceso de generación; (vii) análogamente a lo encontrado para el MAV-CSEM, la convergencia a uno por parte de los factores de participación acumulados para la AE 4 crece monótonamente, lo cual se atribuye a que ésta abarca gran parte del dominio espacial del acuífero e incluye a la red de drenaje conectada con el acuífero; (viii) los factores de participación acumulados para las AE 5 y 6 manifiestan tendencias de crecimiento no monótonas, pequeñas amplitudes

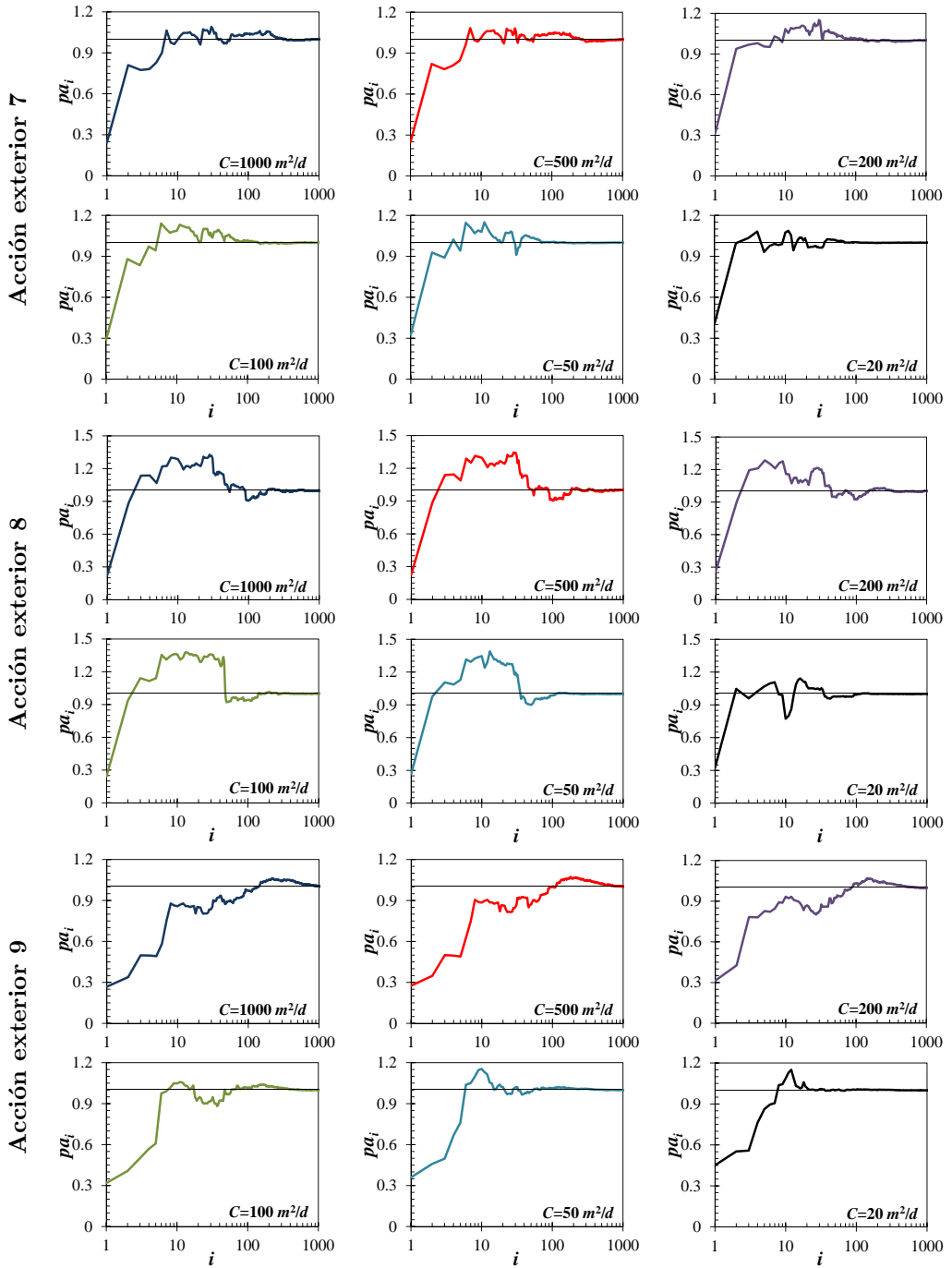




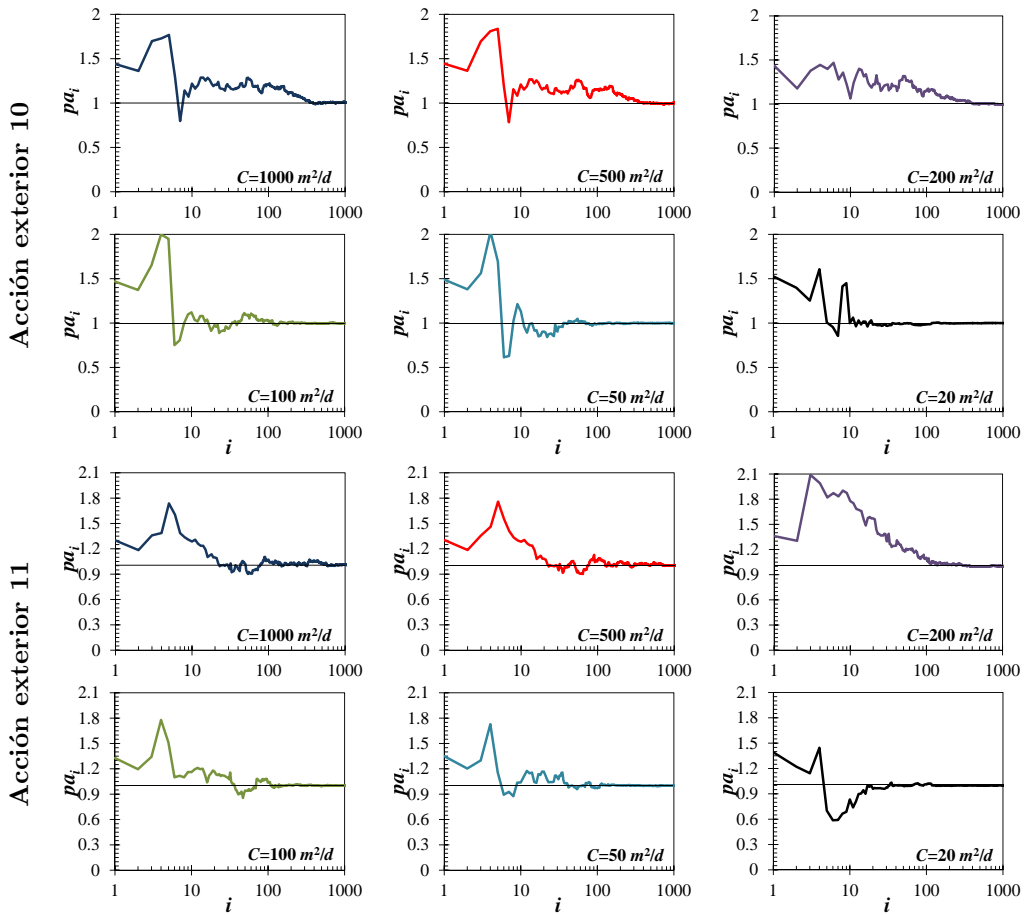
**Figura 8.30.** Factores de participación acumulados para los primero 1000 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. En cada cuadro se consignan los gráficos que corresponden a las AE de recarga 1 a 3, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.31.** Factores de participación acumulados para los primero 1000 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. En cada cuadro se consignan los gráficos que corresponden a las AE de recarga 4 a 6, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.32.** Factores de participación acumulados para los primero 1000 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. En cada cuadro se consignan los gráficos que corresponden a las AE de extracción 7 a 9, para cada conductancia impuesta sobre el río.



**Figura 8.33.** Factores de participación acumulados para los primeros 1000 vectores de Lanczos del acuífero heterogéneo irregular analizado. En cada cuadro se consignan los gráficos que corresponden a las AE de recarga 10 y 11, para cada conductancia impuesta sobre el río.

en sus oscilaciones y requieren efectuar pocas iteraciones para sobrepasar los criterios de parada establecidos para la generación del subespacio.

Igualmente, acerca de las características exhibidas por los factores de participación acumulados para las AE de extracción, se puede destacar lo siguiente: (i) los vectores dominantes de las AE 10 y 11 tienen efectos similares a los previamente comentados para las AE de recarga, es decir, ocasionan que la amplitud espectral requerida para alcanzar el límite inferior impuesto para el factor de participación no sea excesivamente grande; (ii) en las demás AE de extracción, la importancia de los vectores de Lanczos dominantes no es tan marcada como en las AE de recarga, por lo cual aumentan las iteraciones de Lanczos necesarias para superar el límite inferior establecido para el factor de participación; (iii) análogamente a lo encontrado para los coeficientes de reparto en el MAV-CSEM, las tendencias de variación de los factores de participación acumulados asociados con la AE 10 son parecidos a los encontrados para la AE 1, puesto que ambas AE se ubican en las mismas porciones del acuífero y la forma de sus regiones de influencia son parecidas; (iv) resultados análogos al anterior han sido encontrado para las AE 2 y 11; (v) los factores

de participación acumulados asociados a la AE 9 exhiben las menores velocidades de convergencia al límite superior unitario y, de acuerdo con el criterio de parada impuesto sobre la generación del subespacio de Krylov, es una de las AE que controlan la carga computacional y de almacenamiento del proceso de generación; (vi) la exigua rapidez de convergencia hacia el límite inferior impuesto por parte de los factores de participación acumulados para la AE 9, se atribuye principalmente a que ésta actúa cerca de la zona de conexión río-acuífero y a su significativa irregularidad geométrica.

Modificar la parametrización de las relaciones río-acuífero tiene importantes consecuencias sobre el comportamiento de los factores de participación. Para comenzar, la cantidad de vectores de Lanczos necesarios para disminuir considerablemente la variabilidad de los factores de participación disminuye mientras decrece la conductancia impuesta sobre el río. Además, a medida que el grado de conexión río-acuífero es menor, los factores de participación asociados a los vectores de Lanczos dominantes aumentan y, por consiguiente, las amplitudes de oscilación de los factores de participación acumulados son menores. En consecuencia, los modelos de flujo subterráneo que han sido analizados en este capítulo se reducen más fácilmente mediante el MLAN, cuando la conexión entre río y acuífero es cercana a la imperfecta; resultado análogo a los presentados a lo largo de este documento.

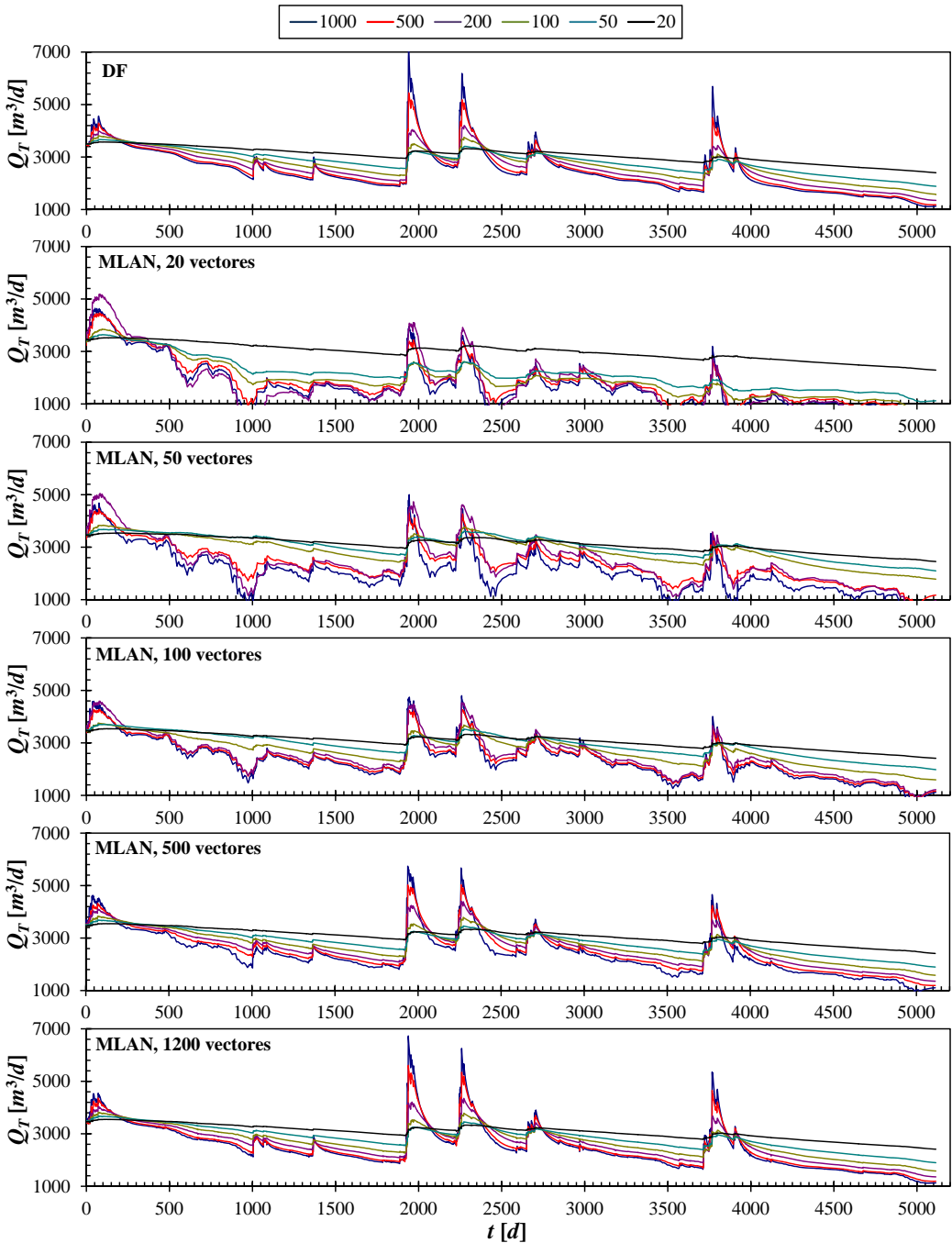
Para terminar es importante resaltar que muchas de las observaciones realizadas para los factores de participación (acumulados) del MLAN son similares a las obtenidas para los coeficientes de reparto (acumulados) en el MAV-CSEM, especialmente en lo concerniente a las AE que dominan los criterios de parada de la generación del subespacio de reducción (AE 4 y 9), a las AE aplicadas sobre las mismas regiones del acuífero (AE 1 y 10, AE 2 y 11, respectivamente) y a las características y ubicación de los modos o vectores dominantes detectados para algunas AE. Estas observaciones se atribuyen a que el objetivo del MLAN es interpolar implícitamente algunos modos del espectro del modelo a reducir, por consiguiente ambos métodos comparten ciertas particularidades espectrales, especialmente las relacionadas con los modos más dominantes. Asimismo, con respecto a la generación de los subespacios de Krylov en el MLAN, se destaca la influencia favorable de los vectores residuales utilizados en la iteración racional de Lanczos. Aunque, teóricamente, es posible usar cualquier vector residual para iniciar el cálculo de los demás vectores de Lanczos, los experimentos prácticos han mostrado que, para superar los límites inferiores de factores de participación acumulados impuestos, es preferible que dichos residuales incorporen características de la dinámica de flujo del acuífero.

### 8.5.2. Análisis de las simulaciones reducidas por el MLAN

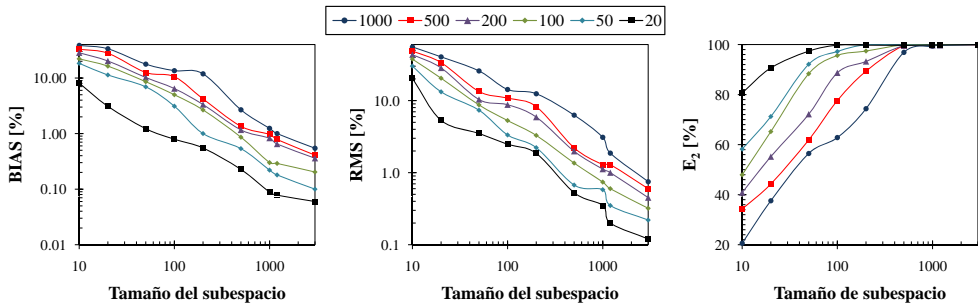
Los parámetros de control establecidos en el apartado 8.3.5 han sido simulados mediante modelos reducidos por el MLAN. En los siguientes apartados se presentan y discuten los resultados obtenidos para las relaciones río-acuífero a lo largo de la red de drenaje conectada con el acuífero, las relaciones río-acuífero parciales en los cauces que componen dicha red de drenaje y las alturas piezométricas en las regiones críticas del acuífero.

#### Relaciones río-acuífero a lo largo de toda la red de drenaje

En la figura 8.34 se presenta los hidrogramas de caudales subterráneos a lo largo de toda la red de drenaje de cauces permanentes conectados con el acuífero, obtenidos mediante modelos resueltos por el MLAN, considerando subespacios de reducción generados por entre 20 y 1200 vectores de Lanczos. En dicha figura, los hidrogramas de referencia, simulados usando modelos resueltos por DF, se presentan en el gráfico superior y los hi-



**Figura 8.34.** Hidrogramas de caudales intercambiados entre el acuífero y la red de drenaje conectada con éste, simulados mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MLAN para diferentes límites de participación modal. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 1000 y 20  $m^2/d$ .



**Figura 8.35.** Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas a lo largo de toda la red de drenaje conectada con el acuífero heterogéneo, simulados con modelos reducidos por el MLAN, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF.

drogramas simulados mediante modelos reducidos por el MLAN se presentan de abajo hacia arriba a medida que aumenta el tamaño del subespacio de reducción.

De los hidrogramas simulados mediante modelos reducidos por el MLAN cabe destacar lo siguiente: *(i)* en dichos hidrogramas se manifiestan notorias fluctuaciones locales con respecto a los de referencia, inclusive para modelos reducidos formados por 500 vectores de Lanczos, para conductancias de río superiores a  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ ; *(ii)* los hidrogramas más aceptables se obtienen al incluir más de 1200 modos en el modelo reducido por el MLAN; *(iii)* los modelos excesivamente reducidos, formados por menos de 200 vectores de Lanczos, no representan adecuadamente la tendencia media de los hidrogramas, ni tampoco sus caudales mínimos y máximos; *(iv)* la cantidad de vectores de Lanczos necesarios para simular adecuadamente los hidrogramas a lo largo de toda la red de drenaje, disminuye a medida que la conexión río-acuífero tiende a la imperfección; *(v)* los modelos reducidos planteados por el MLAN, necesarios para obtener simulaciones satisfactorias de los caudales a lo largo de toda la red de drenaje, son de mayor tamaño que los construidos usando el MAV-CSEM; *(vi)* las fluctuaciones locales de los hidrogramas simulados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM son menos evidentes que las obtenidas en los modelos análogos respectivos planteados por el MLAN; y *(vii)* para el MLAN, dichas fluctuaciones disminuyen a medida que decrece la conductancia del río.

En la figura 8.35 se presentan las gráficas de los índices de comportamiento **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, estimados para los hidrogramas simulados a lo largo de toda la red de drenaje, en función del número de vectores de Lanczos que ha generado el subespacio de reducción y ordenados según las conductancias de río respectivas. En general, la magnitud de las estimaciones de los índices antes mencionados decrecen a medida que disminuye la conductancia impuesta sobre los bloques de río de los modelos. En particular, los resultados más preponderantes concernientes con cada índice analizado se exponen a continuación.

En la gráfica izquierda de la figura 8.20 se observa que las estimaciones de **BIAS** para los modelos más reducidos, formados únicamente por 10 vectores de Lanczos, se aproximan al 20% cuando la conductancia considerada es de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ . Dichas estimaciones aumentan hasta cerca del 30% para conductancias de río mayores a  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ , pero disminuyen a medida que aumenta el número de vectores de Lanczos usados para generar el subespacio de reducción. Así, cuando se consideran 3000 vectores, **BIAS** tiende al 1% para conductancias superiores a  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ ; índices que disminuyen mientras decrece la conductancia, logrando valores cercanos al 0.1% para una conductancia de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ .

Contrariamente a los resultados obtenidos aplicando el MAV-CSEM, se han encontrado desviaciones considerables de las tendencias medias de los caudales simulados mediante los modelos reducidos mediante el MLAN, con respecto a las de referencia, especialmente cuando la conexión entre el río y el acuífero está cercana a la perfecta. Esta característica se atribuye a la imposibilidad de plantear un vector que preserve la ecuación de continuidad agregada sobre el dominio del acuífero dentro del marco conceptual del MLAN. Es decir, de los resultados obtenidos para los caudales de intercambio entre el acuífero y toda la red de drenaje conectada con éste, se concluye que el MAV-CSEM proporciona caudales medios más ajustados al estimado para el hidrograma de referencia, y lo logra requiriendo mucha menos carga computacional para ejecutar la simulación transitoria.

Análogamente a **BIAS**, las estimaciones de **RMS** decrecen a medida que el modelo reducido por el MLAN incorpora mayores cantidades de vectores de Lanczos dentro de los subespacios de Krylov de reducción. Dichas estimaciones se presentan en la gráfica central de la figura 8.35, donde se observa que la tendencia de decrecimiento de **RMS** es bastante uniforme. Por ejemplo, cuando la conexión entre el río y el acuífero es cercana a la perfecta, **RMS** decrece desde valores cercanos al 40 % cuando se consideran únicamente 10 vectores de Lanczos en el subespacio de reducción, hasta menos del 1 % para subespacios generados por más de 3000 vectores. Estimaciones análogas a las anteriores, realizadas considerando conexión río-acuífero muy imperfecta, han manifestado menores magnitudes; alcanzando valores inferiores al 1 %, para conductancias de río menores que 50 m<sup>2</sup>/d, al utilizar subespacios de Krylov formados por 500 vectores de Lanczos, y siendo inferiores al 0.5 % cuando dicho tamaño supera los 1000 vectores.

Asimismo, en el gráfico derecho de la figura 8.35 se presentan las estimaciones obtenidas para **E<sub>2</sub>**. En dicha figura se observa que, sin importar la conductancia de río impuesta sobre las condiciones de contorno, **E<sub>2</sub>** crece monótonicamente hasta alcanzar valores cercanos al 100 % cuando se usan subespacios de reducción formados por más de 500 vectores de Lanczos. En cambio, las menores estimaciones de **E<sub>2</sub>**, las cuales varían entre el 20 y el 40 %, se han obtenido para las mayores conductancias de río, cuando los modelos de flujo han sido reducidos usando subespacios generados por menos de 20 vectores de Lanczos. Estas eficiencias mínimas aumentan a medida que disminuye la conductancia del río, hasta alcanzar estimaciones próximas al 80 % para una conductancia de 20 m<sup>2</sup>/d.

En base a las diferentes características de variación exhibidas por los índices de comportamiento estimados, se deduce que las estimaciones de **RMS** y **BIAS** de mayor magnitud se relacionan con pobres estimaciones de **E<sub>2</sub>**, obtenidas cuando se usan subespacios de Krylov formados por menos de 100 vectores de Lanczos. Estas pobres estimaciones se atribuyen a la sobre o sub estimación de los caudales máximos y mínimos en los hidrogramas simulados, a la subestimación de sus tendencias medias y a la presencia de fluctuaciones locales en los caudales instantáneos simulados. Las anteriores afirmaciones se sustentan en las siguientes observaciones. Primero, el no imponer un criterio cuantitativo para preservar la ecuación de continuidad agregada para todo el dominio espacial del acuífero ocasiona desviaciones en las tendencias medias y los caudales subterráneos máximos de los hidrogramas simulados a lo largo de toda la red de drenaje, cuando los modelos reducidos han sido obtenidos empleando subespacios de Krylov pequeños. La principal implicación de lo anterior dentro de un modelo de uso conjunto es que los modelos reducidos de los acuíferos no permitirían cuantificar la totalidad del agua disponible para su explotación, por consiguiente la confiabilidad del sistema de aprovechamiento puede verse reducida por efectos artificiales generados durante la reducción inadecuada del modelo de flujo subterráneo. Este hecho es prácticamente imposible que se presente en la aplicación del MAV-CSEM dada la existencia del modo de conservación. Segundo, es importante resaltar que el efecto



de las fluctuaciones locales exhibidas por los caudales simulados mediante los modelos reducidos vía MLAN, tienen influencia tanto en las estimaciones de **RMS**, como en las de **E<sub>2</sub>**, puesto que éstas modifican las tendencias medias y sus velocidades de decaimiento en los períodos de poca recarga. Dichas fluctuaciones se atribuyen a inestabilidades numéricas generadas al evaluar numéricamente los estados de Lanczos y a pequeñas desviaciones en la ortonormalidad de los subespacio de Krylov, ocasionadas por asumir la validez de la ROP en lugar de asegurar la ortogonalidad absoluta.

Por su parte, los vectores residuales iniciales de generación escogidos tienen la ventaja de representar, hasta cierto punto, la dinámica del flujo del acuífero. A causa de lo anterior, la mayor parte de las características de los hidrogramas simulados para los caudales a lo largo de la red de drenaje han sido representadas adecuadamente generando subespacios formados por 1000 vectores de Lanczos. Es evidente que dicho tamaño es bastante reducido en comparación con los 21850 bloques en los cuales se ha discretizado el dominio del acuífero. Para terminar, cabe mencionar que en experimentos realizados usando vectores residuales iniciales de diferentes características, muchas de las simulaciones ejecutadas no reprodujeron satisfactoriamente dichos caudales. Lo anterior demuestra la importancia de escoger correctamente los residuales de generación en la iteración de Lanczos.

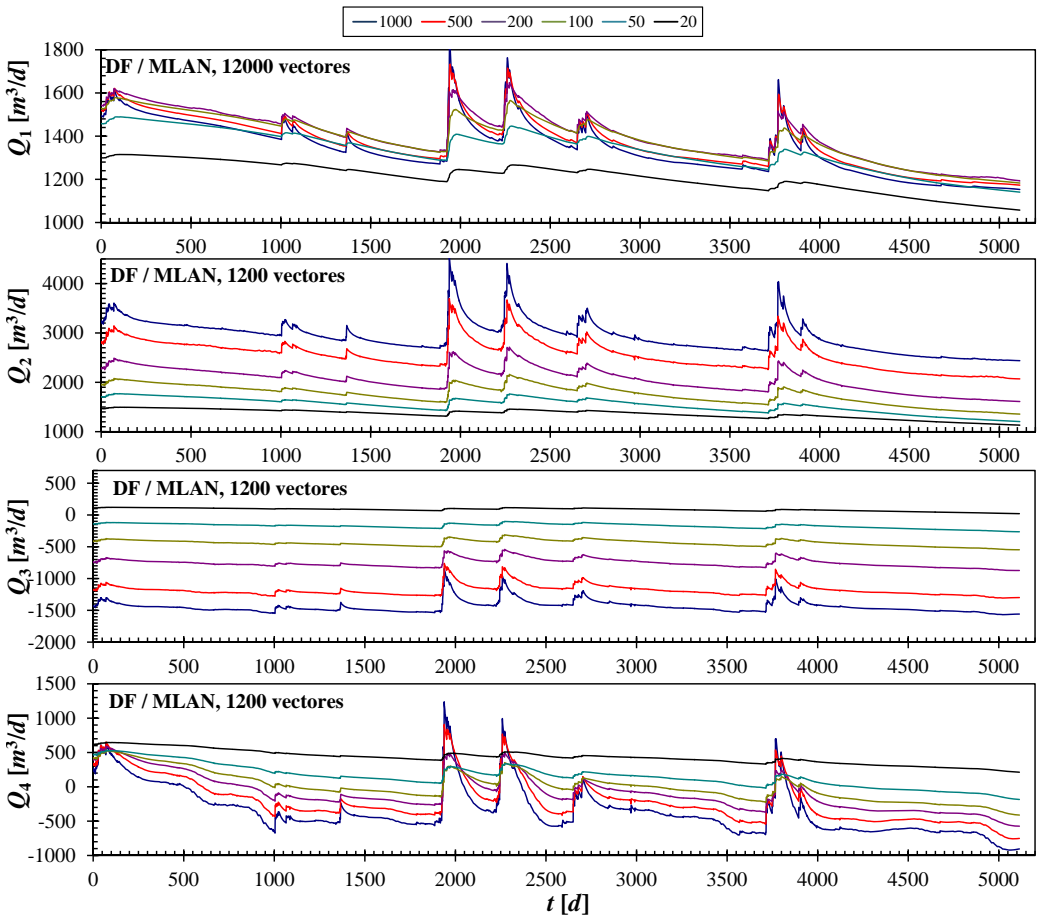
### Relaciones río-acuífero parciales en los cauces

Los hidrogramas de caudales subterráneo intercambiados entre el acuífero y cada uno de los tramos que componen la red de drenaje de cauces permanentes, clasificados de acuerdo con la conductancia de río correspondiente, se presentan en la figura 8.36. De nuevo, adoptando la nomenclatura de cauces que ha sido definida en la figura 8.2, dichos hidrogramas han sido ordenados de abajo hacia arriba, empezando por el tramo 1, segmento **EF** hasta terminar en el tramo 4, segmento **AB**. Los hidrogramas expuestos en la figura 8.36 son aquellos para los cuales se obtuvieron las estimaciones más óptimas de los índices de comportamiento. En otras palabras, éstos son los que manifestaron menores diferencias entre las simulaciones ejecutadas empleando modelos resueltos por DF y las realizadas utilizando modelos reducidos por el MLAN, para los cuales se han utilizado subespacios de Krylov formados por 1200 vectores de Lanczos. Las características de las dinámicas del flujo en el acuífero que explican el comportamiento de los hidrogramas presentados en la figura 8.36 han sido descritas detalladamente en el apartado 8.4.2.

En la figura 8.37 se presentan los gráficos de **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>** estimados para los hidrogramas parciales que han resultado de resolver el problema transitorio con condiciones de contorno nulas, simulados en los diferentes tramos de la red de drenaje empleando modelos reducidos por el MLAN, con respecto a las simulaciones obtenidas usando modelos resueltos en DF. Las gráficas que conforman la figura antes mencionada han sido ordenados de arriba hacia abajo, empezando por el tramo 1, segmento **EF** hasta terminar en el tramo 4, segmento **AB**. Al mismo tiempo, las columnas izquierda, central y derecha muestran las estimaciones de **BIAS**, **RMS** y **E<sub>2</sub>**, respectivamente.

Los resultados muestran que, cuando se utilizan modelos excesivamente pequeños, reducidos incluyendo menos de 50 vectores de Lanczos en los subespacios de Krylov, los índices de comportamiento **BIAS** y **RMS** para los hidrogramas de intercambio parciales en todos los tramos analizados son deficientes; manifestando incluso valores peores que los obtenidos para toda la red de drenaje que han sido presentados en la figura 8.35.

Al respecto, las mayores estimaciones de **BIAS** han sido encontradas para los tramos 2 y 4, las cuales se aproximan al 30% cuando las conexiones río-acuífero son cercanas a la perfecta y el tamaño de los subespacios de reducción no sobrepasa los veinte vectores. Asimismo, cuando se consideran conductancias de río entre 20 y 50 m<sup>2</sup>/d y el tamaño de



**Figura 8.36.** Hidrogramas de caudales intercambiados entre el acuífero y los diferentes tramos de la red de drenaje, simulados mediante modelos resueltos en DF y modelos reducidos por el MLAN. Las conductancias del río se han variado entre 1000 y 20  $\text{m}^2/\text{d}$ .

los subespacios de reducción se encuentra entre 10 y 50 vectores de Lanczos, los **BIAS** estimados son relativamente parecidos entre sí, dado que éstos varían entre el 7 y 3%. En cambio, cuando se permite la generación de subespacios de Krylov de mayor tamaño, **BIAS** disminuye hasta situarse por debajo de 0.4% en la mayoría de las simulaciones realizadas. Las mejores estimaciones de **BIAS** son bastante uniformes puesto que, en todos los tramos considerados y para todas las conductancias impuestas, dicho índice se ubica entre 0.8 y 0.1%. Aún así, sus tasas de decrecimiento con respecto al aumento del tamaño del subespacio de reducción, son más grandes en los tramos 1, 2 y 4 y, por el contrario, más pequeñas en el tramo 3; decrecimiento que es más notorio cuando el tamaño de los subespacios de reducción varía entre 200 y 1000 vectores de Lanczos.

Por otra parte, las estimaciones de **RMS** para los hidrogramas subterráneos en todos los tramos analizados manifiestan tendencias de variación parecidas a las obtenidas para los hidrogramas a lo largo de toda la red de drenaje. Las mayores estimaciones se encontraron para los tramos 2 y 3, las cuales superan al 30% cuando los subespacios de reducción vienen formados por menos de 20 vectores de Lanczos y conductancias que superan los 500  $\text{m}^2/\text{d}$ . En el tramo 1, bajo las condiciones de reducción anteriormente mencionadas, se

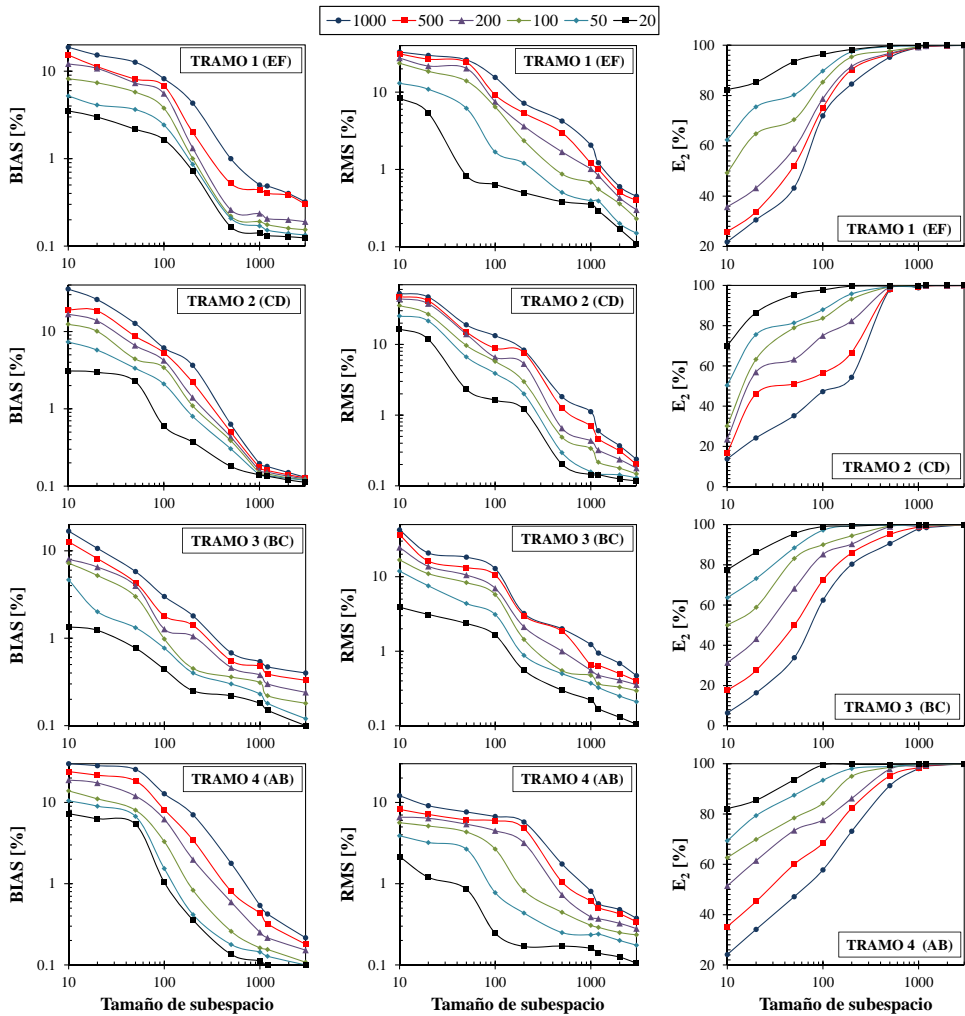


Figura 8.37. Índices de comportamiento estimados para los hidrogramas en los tramos de la red de drenaje conectada con el acuífero heterogéneo, simulados con modelos reducidos por el MLAN, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF.

estiman elevados **RMS** que sobrepasan el 20% para conductancias de río mayores a 100  $\text{m}^2/\text{d}$ . Por el contrario, en el tramo 4 las estimaciones son menores que las encontradas en los tramos anteriores, notándose que los máximos **RMS** estimados varían entre el 2% y el 10% para conductancias de 5  $\text{m}^2/\text{d}$  y 1000  $\text{m}^2/\text{d}$ , respectivamente.

Las velocidades de decrecimiento de **RMS**, con respecto al aumento del tamaño del subespacio de reducción, se incrementan cuando se consideran más de 100 vectores de Lanczos en todos los tramos analizados, especialmente para conductancias de río mayores a 100  $\text{m}^2/\text{d}$ . De acuerdo con lo anterior, las estimaciones de **RMS** varían entre aproximadamente el 20 y el 2% al incluir 100 vectores; variación que se reduce hasta cerca de entre el 5 y el 0.2% cuando se utilizan 1000 vectores, para conductancias de 1000  $\text{m}^2/\text{d}$  y 20  $\text{m}^2/\text{d}$ , respectivamente. Al analizar los resultados obtenidos empleando modelos redu-

cidos usando más de 500 vectores de Lanczos en los subespacios de Krylov, se encontraron resultados similares para los 4 tramos estudiados, según los cuales **RMS** decrece así: (i) desde aproximadamente el 3 %, incluyendo quinientos vectores en el subespacio de Krylov, hasta cerca del 0.5 %, al incorporar 1200 vectores, cuando la conductancia del río es de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$ ; (ii) del 0.3 %, al considerar 500 vectores en el subespacio de Krylov, hasta el 0.1 %, al emplear mil doscientos vectores para una conductancia de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ ; (iii) las estimaciones asociadas con las demás conductancias impuestas al río varían en mayor o menor medida dentro de los intervalos anteriormente establecidos.

Por otra parte, los **RMS** estimados en los tramos 2 y 3, para modelos reducidos usando subespacios de Krylov generados por 200 vectores, varían entre aproximadamente el 9 y el 0.7 % y sobrepasan ligeramente a las estimaciones correspondientes a los mismos tamaños de subespacios de Krylov en los 2 tramos restantes. De igual forma, la velocidad de decrecimiento de los **RMS** en los tramos 2 y 3, con respecto al crecimiento del tamaño de los subespacios de reducción por encima de 200 vectores de Lanczos, superan moderadamente los gradientes de disminución análogos en los tramos restantes, especialmente al considerar conexiones río-acuífero cercanas a la perfecta. Los comentarios previos ponen de manifiesto que la variabilidad espacial de los parámetros del acuífero y las condiciones de contorno cercanas a dichos tramos inciden en la representatividad de sus caudales subterráneos. Además, debe recordarse que las dinámicas de ganancia-pérdida en ambos tramos están muy influenciadas por las zonas de bombeos, AE 7, 8 y 9. Particularmente, el tramo 3 es especialmente sensible a dichos bombeos puesto que está formado por menos bloques y es exclusivamente perdedor a lo largo de todo el horizonte de simulación.

Análogamente a lo presentado hasta ahora para el MLAN, se nota que las estimaciones mínimas de  $\mathbf{E}_2$  para los hidrogramas de algunos tramos han disminuido ligeramente, con respecto a las obtenidas para los hidrogramas a lo largo de toda la red de drenaje. Así pues, dichos mínimos han decrecido en los tramos 2 y 3 hasta ser inferiores al 20 %, cuando se imponen conductancias de río mayores que  $500 \text{ m}^2/\text{d}$  y el subespacio de Krylov de reducción ha sido generado por 10 vectores de Lanczos. En cambio, las mayores magnitudes para las eficiencias mínimas han sido encontradas en los hidrogramas simulados en los tramos 1 y 4, donde se ha obtenido que  $21 \% \leq \mathbf{E}_2 \leq 60 \%$  para conductancias que varían entre  $1000$  y  $200 \text{ m}^2/\text{d}$ . De la misma forma, las mínimas estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  crecen a medida que la conexión entre dichos tramos y el acuífero es más imperfecta; características que también se ponen de manifiesto en los dos restantes tramos estudiados. Más concretamente, en los tramos 2 y 3,  $\mathbf{E}_2$  aumenta desde valores cercanos al 7 % para una conductancia de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$ , hasta cerca del 80 %, para una conductancia de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ . Por su parte, en los tramos 1 y 3,  $\mathbf{E}_2$  aumenta desde aproximadamente el 22 % para una conductancia de  $1000 \text{ m}^2/\text{d}$ , hasta sobrepasar sutilmente al 85 %, para una conductancia de  $20 \text{ m}^2/\text{d}$ .

Al mismo tiempo, las mayores velocidades de crecimiento en las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  con respecto al aumento del tamaño del subespacio de reducción han sido encontradas para los hidrogramas simulados en el tramo 1. Allí, para tamaños del subespacio menores a 200 vectores de Lanczos,  $\mathbf{E}_2$  ha sobrepasado al 80 % para todas las conductancias de río consideradas. Sin embargo, las velocidades de crecimiento en las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  en los 3 tramos restantes, con respecto al aumento del subespacio de reducción, son considerablemente más lentas que en el tramo previamente mencionado. Respecto de lo anterior se destacan las siguientes observaciones: (i) en los tramos 1 y 2 las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  superan al 90 % para todas las conductancias consideradas, cuando el tamaño del subespacio de reducción ha sido generado por más de 300 vectores de Lanczos; (ii) en el tramo 3 se estiman eficiencias superiores al 80 %, para todas las conductancias consideradas, cuando el tamaño del subespacio de reducción supera los 200 vectores; (iii) las estimaciones de

$E_2$  en el tramo 4 sobrepasan al 60% para conductancias mayores a  $100 \text{ m}^2/\text{d}$ , cuando el subespacio de reducción ha sido generado por más de 200 vectores; (iv) en el tramo antes mencionado, las eficiencias estimadas sobrepasan al 90%, para conductancias menores a  $100 \text{ m}^2/\text{d}$ , empleando un subespacio de reducción del tamaño antes mencionado; (v) la rapidez de aumento en la eficiencia en el tramo 4 es menor a la exhibidas en los 3 tramos restantes. En todos los casos estudiados, cuando los subespacios de reducción incorporan más de 500 vectores de Lanczos, la convergencia hacia una eficiencia perfecta es monótonamente creciente, logrando estimaciones de  $E_2$  que sobrepasan al 99% cuando dicho subespacio es conformado por más de 1000 vectores.

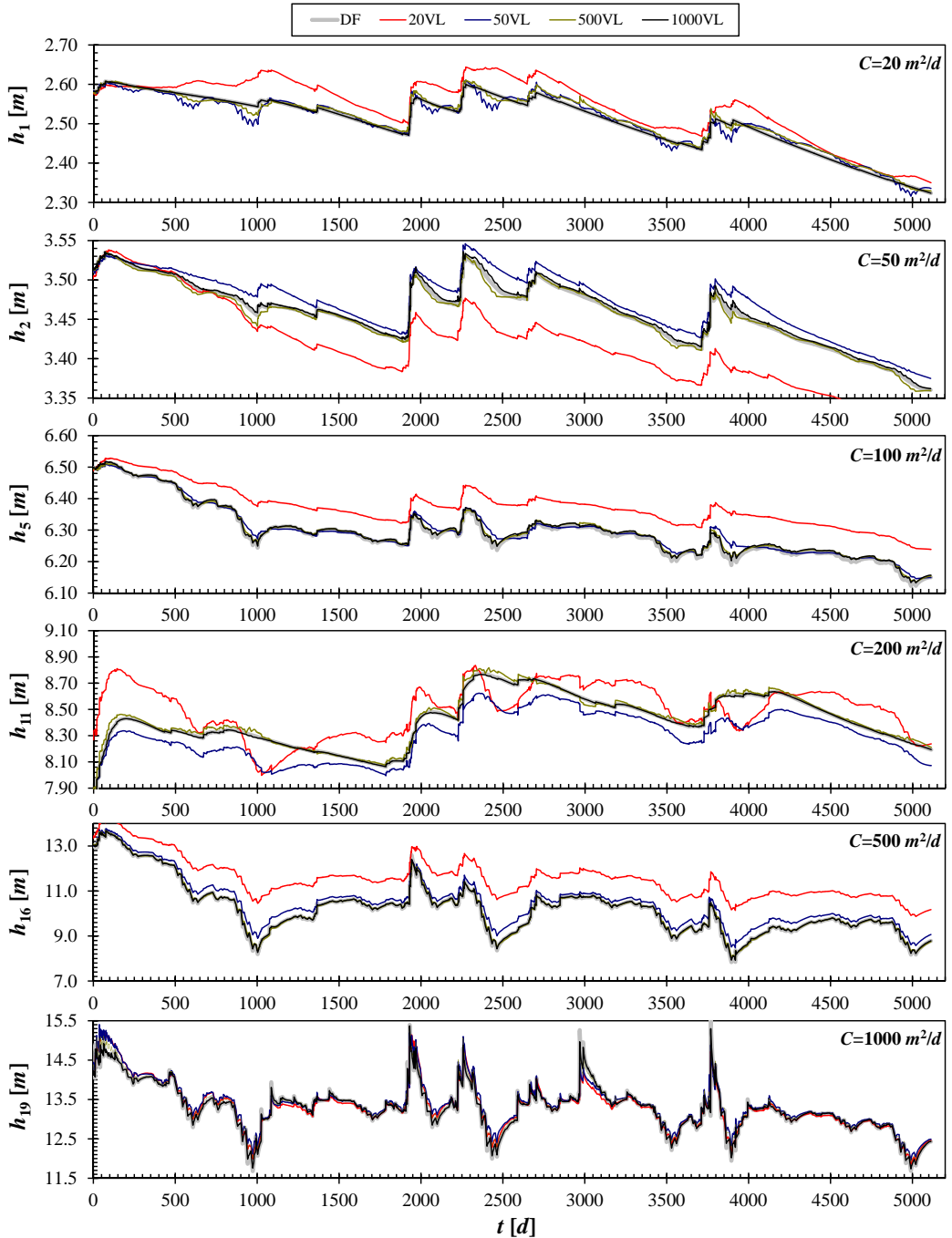
De forma similar a las estimaciones obtenidas para los caudales subterráneos en toda la red de drenaje, las gráficas de la figura 8.37 muestran que los 3 índices de comportamiento, estimados para los hidrogramas subterráneos por tramos, son más óptimos a medida que la conexión río-acuífero tiende a ser imperfecta. De dichos resultados se deducen dos consecuencias principales. Primero, los requerimientos computacionales y de almacenamiento para representar adecuadamente los caudales parciales de intercambio disminuyen a medida que la conexión río-acuífero tiende a ser imperfecta. Segundo, los modelos de flujo subterráneo para el acuífero heterogéneo analizado deben reducirse utilizando subespacios de Krylov generados por más de 500 vectores de Lanczos, si se desea representar aceptablemente los hidrogramas subterráneos parciales de referencia.

Para terminar, debe comentarse que la lenta convergencia hacia los valores óptimos exhibida por los índices de comportamiento estimados para los hidrogramas de intercambio acuífero-tramos 3 y 4, confirman la gran influencia que ejerce la localización de las zonas de extracción, AE 7, 8 y 9 sobre la representatividad de los caudales de intercambio en dichos tramos. Esta observación es semejante a la que ha sido encontrada al aplicar el MAV-CSEM, con la diferencia de que los caudales de intercambio entre el tramo 2 y el acuífero han sido simulados más adecuadamente mediante el MLAN.

### Alturas piezométricas en localizaciones seleccionadas en el acuífero

En la figura 8.38 se muestran las alturas piezométricas en seis diferentes localizaciones del acuífero, simuladas mediante modelos reducidos por el MLAN y clasificadas de acuerdo a las conductancias de río y los tamaños de los subespacios de Krylov correspondientes. Las convenciones utilizadas se localizan en la parte superior de la figura antes mencionada. Las líneas gruesas de color gris representan las piezometrías de referencia, simuladas usando modelos resueltos en DF y las líneas delgadas de colores representan las alturas piezométricas simuladas por los modelos reducidos por el MLAN. Los gráficos han adoptado las convenciones definidas en la figura 8.2 para las localizaciones de seguimiento piezométrico y han sido ordenados de forma idéntica a la figura 8.23, presentando resultados que corresponden a tamaños de subespacios de reducción que varían entre 20 y 1000 vectores de Lanczos, para la conductancia respectiva que se consigna en cada gráfico.

Como se ha presentado en la figura 8.38, el tamaño del subespacio generado para la reducción ejerce gran influencia sobre la representatividad de las alturas piezométricas. Al emplear modelos reducidos mediante subespacios compuestos por menos de 50 vectores de Lanczos, se han simulado alturas piezométricas que difieren notablemente de las de referencia en todo los puntos considerados, con excepción de  $P_{19}$ . Para dicha configuración de reducción, no ha sido posible lograr una representación adecuada de los periodos de recarga y descarga del acuífero. Ahora bien, al aumentar el tamaño de los subespacios de reducción hasta 500 vectores, la tendencia media de las piezometrías se representan más adecuadamente, pero los picos y los decaimientos en las localizaciones más cercanas a la conexión río-acuífero ( $P_1$ ,  $P_2$ ,  $P_5$  y  $P_{11}$ ), siguen mostrando diferencias notorias con



**Figura 8.38.** Alturas piezométricas en seis localizaciones del acuífero heterogéneo simuladas mediante: (i) modelos numéricos en DF y (ii) modelos reducidos por el MLAN de diferentes tamaños. Como se muestra en la leyenda ubicada en la parte superior, las conductancias de río se han variado entre 1000 y 20  $\text{m}^2/\text{d}$ .

respecto a los de referencia. Por el contrario, las simulaciones de alturas piezométricas son bastante adecuadas en  $\mathbf{P}_{16}$  y  $\mathbf{P}_{19}$ , para el tamaño antes mencionado. En cambio, para subespacios de reducción compuestos por 1000 vectores de Lanczos, se nota la reproducción correcta de casi todas las características piezométricas en todos los puntos de control. Solamente en la localización  $\mathbf{P}_2$  se han detectado algunas diferencias entre las piezometrías simulada y de referencia, las cuales se tratan, básicamente, de pequeñas fluctuaciones en los decaimientos instantáneos durante algunos intervalos de simulación.

Es evidente que las alturas piezométricas presentadas en la figura 8.38 se refieren exclusivamente a una de las conductancias impuestas sobre el río, para determinada localización. Por consiguiente, con el objetivo de formar una perspectiva clara del efecto que tiene el tamaño del subespacio de Krylov generado sobre las simulaciones reducidas de las piezometrías, incluyendo la influencia de variar el grado de conexión río-acuífero, se han estimado los índices de comportamiento respectivos. Dichas estimaciones se han llevado a cabo empleando las alturas piezométricas que resultan de resolver el problema transitorio sujeto a condiciones de contorno nulas; resultados que se presentan en la figura 8.39. La organización de las gráficas contenidas en dicha figura se ha efectuado de la siguiente manera. Cada fila representa una localización donde se controlan los cambios de las alturas piezométricas, como se ha descrito antes para la figura 8.38 y, al mismo tiempo, las columnas izquierda, central y derecha muestran las estimaciones de **BIAS**, **RMS** y  $\mathbf{E}_2$ , respectivamente. Cabe notar que, de forma similar a las simulaciones para acuíferos rectangulares, el MLAN ha reproducido adecuadamente las alturas piezométricas utilizando modelos de menor tamaño que el MAV-CSEM; conclusión que puede comprenderse con mayor claridad al analizar los índices de comportamiento anteriormente mencionados.

Las estimaciones de **BIAS** para las piezometrías simuladas en todos los puntos de control, con excepción de  $\mathbf{P}_{19}$ , manifiestan rangos de variación muy parecidos, exhibiendo valores entre el 0.1 % y el 20 %. En muchos casos, dichos rangos son más pequeños que los obtenidos para las simulaciones piezométricas por el MAV-CSEM. A partir de las simulaciones reducidas aplicando el MLAN, con excepción de los resultados obtenidos para el punto de control  $\mathbf{P}_{19}$ , se han conseguido máximos **BIAS**, cercanos al 20 %, para una conductancia de 1000 m<sup>2</sup>/d; estimaciones que se aproximan hasta cerca del 5 % cuando se considera una conductancia de 20 m<sup>2</sup>/d. Por el contrario, los máximos **BIAS** estimados para las piezometrías simuladas en la localización  $\mathbf{P}_{19}$  se aproximan al 3 % para conexiones río-acuífero casi perfectas, disminuyendo hasta cerca del 0.2 % para conexiones imperfectas.

Análogamente a los **BIAS** estimados para las simulaciones por el MAV-CSEM, las tendencias de decrecimiento exhibidas en la figura 8.39 cambian según la localización analizada y el tamaño del subespacio de reducción considerado, de la siguiente manera: (i) el gradiente de disminución de **BIAS** en  $\mathbf{P}_1$ , para modelos reducidos mediante subespacios que contienen menos de 100 vectores de Lanczos, es mayor que cuando éstos están formados por entre 100 y 1000 vectores; (ii) las tendencias de decrecimiento de **BIAS** en las localizaciones  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{16}$  son similares a las descritas antes para  $\mathbf{P}_1$ , con la diferencia de que sus velocidades de decaimiento son mayores para tamaños de subespacios entre 10 y 100 vectores; (iii) tanto en  $\mathbf{P}_1$  como en  $\mathbf{P}_2$ , existe un notable incremento de la velocidad de decrecimiento de **BIAS** cuando el tamaño del subespacio de reducción supera los 1000 vectores de Lanczos, alcanzando valores que se aproximan al 0.1 %, para todas las conductancias consideradas; (iv) las tendencias de decrecimiento de **BIAS** en las localizaciones  $\mathbf{P}_{11}$  y  $\mathbf{P}_{19}$  son más graduales que las anteriormente comentadas; (v) en los puntos antes mencionados, el decrecimiento de las estimaciones es monótono y, en general, más lento que el encontrado en  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_2$ ,  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{16}$ , cuando el tamaño de los subespacios de reducción es menor a 100 vectores; (vi) los **BIAS** en la localización  $\mathbf{P}_{19}$  manifiestan los menores gra-

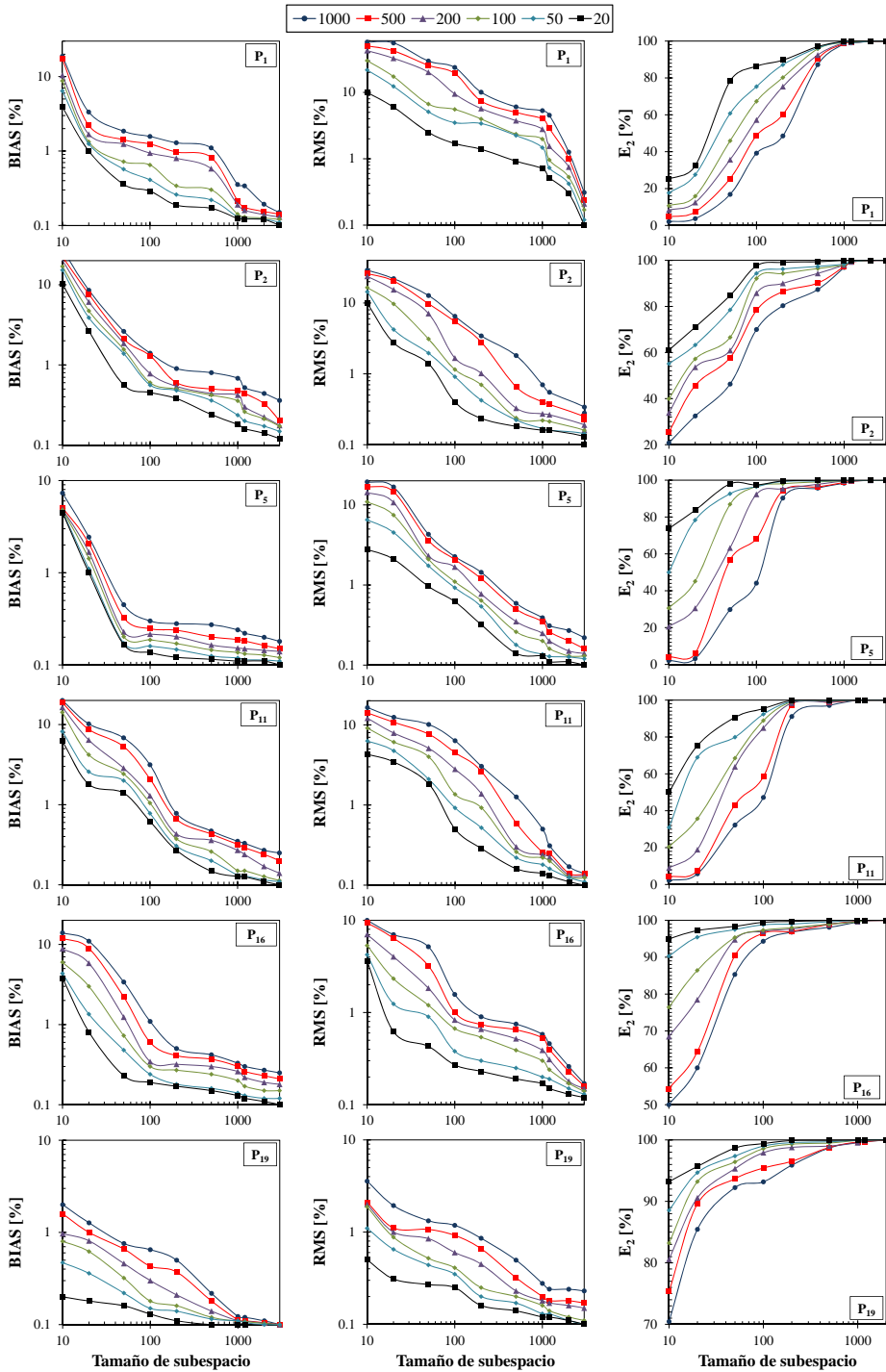


Figura 8.39. Índices de comportamiento estimados para las alturas piezométricas en el acuífero heterogéneo, usando modelos reducidos por el MLAN, con respecto a soluciones numéricas de modelos en DF.



dientes de decrecimiento. A pesar de las diferentes tendencias de disminución encontradas para las estimaciones de **BIAS** en las piezometrías simuladas, las mínimas estimaciones han sido menores al 0.3 % en todos los puntos analizados, cuando los subespacios de Krylov generados incluyen más de 1000 vectores de Lanczos. En resumen, con base en el conjunto de estimaciones de **BIAS** exhibidas en la figura 8.39 se deduce que el MLAN representa correctamente las tendencias medias piezométricas de referencia, incluso para modelos reducidos mediante subespacios de Krylov relativamente pequeños.

Por otra parte, los máximos **RMS** estimados para las piezometrías simuladas mediante modelos resueltos por el MLAN, superiores al 20 % para todas las conductancias impuestas al río, se encuentran en la localización  $P_1$ . En los demás puntos de control, a pesar de que algunos de los máximos superan el 15 %, esto sucede únicamente para conductancias mayores a 200 m<sup>2</sup>/d. En cambio, para conductancias menores a dicho valor, generalmente los máximos **RMS** estimados son inferiores al 10 %. Es importante notar que dichos máximos suceden al considerar tamaños de subespacios menores a 50 vectores y sus magnitudes son mayores para conexión río-acuífero casi perfecta en las localizaciones cercanas al río ( $P_1$ ,  $P_2$  y  $P_5$ ). En general, los máximos **RMS** estimados para las piezometrías simuladas en las 3 localizaciones antes comentadas, no superan el 20 % para conexiones río-acuífero casi perfectas, aproximándose al 5 % cuando se considera conexión río-acuífero imperfecta. De lo anterior se deduce que, de forma similar a **BIAS**, las estimaciones máximas de **RMS** para las alturas piezométricas simuladas corresponden a localizaciones situadas más cerca de la red de drenaje conectada con el acuífero. Los máximos **RMS** de menor magnitud han sido estimados para las piezometrías simuladas en  $P_{19}$ , los cuales son cercanos al 3 % para conexiones río-acuífero casi perfectas y decrecen hasta cerca del 0.5 % cuando se han impuesto conexiones río-acuífero muy imperfectas.

Las características de decrecimiento exhibidas por las estimaciones de **RMS**, con respecto a la variación del tamaño del subespacio de Krylov usado para la reducción, se describen a continuación. Para comenzar, se nota que las tendencias de variación de los **RMS** asociados a  $P_1$  y  $P_{19}$  son distintas a las encontradas en las demás localizaciones. Así, las velocidades de decrecimiento de los **RMS** para  $P_1$  son muy pequeñas cuando se consideran subespacios de reducción que contienen menos de 100 vectores de Lanczos; rapidez que aumenta a medida que la cantidad de vectores incluidos en dichos subespacios es mayor. Fuera de la aceleración del decrecimiento de **RMS** antes comentada, también se ha observado un cambio abrupto de los **RMS** estimados en  $P_1$  cuando los modelos se reducen empleando más de 1000 vectores de Lanczos. Al respecto, las mayores velocidades de decrecimiento de **RMS** están asociadas a dicho punto de control para subespacios generados usando más de 1000 vectores de Lanczos. De igual manera, la tasa de disminución de las estimaciones de **RMS** en  $P_{19}$  es baja y relativamente uniforme para todos los tamaños de subespacio de reducción considerados. Además, los gradientes de decrecimiento de **RMS** en las localizaciones  $P_2$ ,  $P_{11}$  y  $P_{16}$  son inferiores a los encontrados en  $P_5$ .

Cabe destacar que, en todos los puntos de control considerados con excepción de  $P_{19}$ , las estimaciones mínimas de **RMS** han variado entre 1 y 0.1 % cuando los subespacios de reducción incorporan más de 200 vectores de Lanczos. Lo anterior indica que las diferencias entre las alturas piezométricas de referencia y las simuladas mediante los modelos reducidos por el MLAN disminuyen rápidamente, incluso cuando se analizan las localizaciones más cercanas al río. Es más, como se observa en la gráfica inferior de la figura 8.23, en  $P_{19}$  las diferencias encontradas son menores que en los demás puntos estudiados, incluso al considerar subespacios de Krylov formados por menos de 100 vectores de Lanczos. Este resultado demuestra la capacidad del MLAN para representar correctamente las alturas piezométricas del acuífero, dado que los mismos resultados, obtenidos para

MAV-CSEM, mostraron que éste era incapaz de lograr estimaciones adecuadas con los tamaños planteados, es decir, utilizando menos de 1200 modos efectivos.

En todos los puntos de control analizados, las mínimas eficiencias estimadas para las alturas piezométricas simuladas se dan cuando las conexiones río-acuífero consideradas son casi perfectas y los subespacios de Krylov están formados por menos de 50 vectores de Lanczos. Por ejemplo, los mínimos  $\mathbf{E}_2$  de menor magnitud se estimaron en las localizaciones  $\mathbf{P}_1$ ,  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{11}$ , con valores cercanos al 1 % para conductancias mayores a 500 m<sup>2</sup>/d. Asimismo, pobres eficiencias mínimas se obtuvieron en  $\mathbf{P}_1$ , con estimaciones próximas al 25 % para una conductancia de 20 m<sup>2</sup>/d. Bajas eficiencias también han sido detectadas en  $\mathbf{P}_2$ , pero no tan deficientes como las antes mencionadas. Allí se han alcanzado  $\mathbf{E}_2$  mínimos cercanos al 20 % para una conductancia de 1000 m<sup>2</sup>/d, las cuales aumentan hasta aproximadamente el 60 %, al imponerse una conductancia de 20 m<sup>2</sup>/d. Finalmente, en los puntos de control  $\mathbf{P}_{16}$  y  $\mathbf{P}_{19}$  se han obtenido las eficiencias mínimas de mayor magnitud, cercanas respectivamente al 60 y 70 %, para una conductancia de 1000 m<sup>2</sup>/d. Estas estimaciones superan al 90 % cuando se imponen conductancias inferiores a 100 m<sup>2</sup>/d.

Nuevamente, las tendencias de variación exhibidas por  $\mathbf{E}_2$  cambian de acuerdo con la localización analizada, como se describe a continuación. Primero, los gradientes de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  en las localizaciones  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  son los más lentos, por que se ha requerido que el tamaño de los subespacios de reducción superen los 500 vectores de Lanczos para que las eficiencias sobrepasen el 80 %. Más aún, en  $\mathbf{P}_2$  el aumento de  $\mathbf{E}_2$  es relativamente lento, incluso habiendo sobrepasado el tamaño antes mencionado. En este caso, se requiere generar 500 vectores de Lanczos adicionales a los ya disponibles, para aproximarse a la eficiencia óptima. Segundo, no obstante las tendencias de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  en los puntos de control  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{11}$  son similares, el gradiente correspondiente calculado en  $\mathbf{P}_{11}$  es mayor que el encontrado en  $\mathbf{P}_5$  para las conductancias que representan conexión río-acuífero imperfecta, por que sus estimaciones crecen más rápidamente cuando el subespacio de Krylov está formado por menos de 100 vectores de Lanczos. En los dos puntos antes comentados, las velocidades de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  son similares cuando se consideran conductancias mayores a 100 m<sup>2</sup>/d. Tercero, los gradientes de crecimiento de la eficiencia en los puntos  $\mathbf{P}_5$  y  $\mathbf{P}_{11}$  cambian drásticamente según la conductancia considerada. Dicho gradiente es mucho mayor cuando la conductancia sobrepasa los 200 m<sup>2</sup>/d, especialmente si los subespacios de reducción se encuentran generados por entre 20 y 200 vectores de Lanczos. Cuarto, para los cuatro puntos de control analizados hasta ahora y considerando tamaños de subespacio de reducción mayores a 1000 vectores de Lanczos, las estimaciones de  $\mathbf{E}_2$  aumentan rápida y monótonamente hacia el valor óptimo del 100 %. Por último, respecto de las eficiencias estimadas en  $\mathbf{P}_{16}$  y  $\mathbf{P}_{19}$ , se destaca que: (a) las mínimas eficiencias son relativamente grandes, superando el 50 y el 70 %, respectivamente, (b) las tendencias de crecimiento de  $\mathbf{E}_2$  en  $\mathbf{P}_{19}$  son muy parecidas para todas las conductancias consideradas, (c) los gradientes de crecimiento en  $\mathbf{P}_{16}$  aumentan a medida que la conductancia considerada disminuye y (d) a diferencia de los resultados encontrados al aplicar el MAV-CSEM, las simulaciones de las alturas piezométricas en  $\mathbf{P}_{19}$  alcanzan la eficiencia óptima del 100 % en todos los modelos reducidos empleando el MLAN.

De las estimaciones realizadas para los diferente índices de comportamiento, con respecto a las alturas piezométricas, se puede concluir lo siguiente. Primero, las magnitudes de todos los índices de comportamiento mejoran a medida que decrece la conductancia impuesta al río. Este resultado es análogo al encontrado, a lo largo de este capítulo, para los demás parámetros de control simulados por los modelos reducidos del MAV-CSEM y el MLAN. Segundo, los índices de comportamiento estimados para las alturas piezométricas simuladas en los puntos de control  $\mathbf{P}_1$  y  $\mathbf{P}_2$  han sido los más desfavorables, tanto

en magnitud, como en gradiente de (de)crecimiento. Por consiguiente, dichos puntos le imponen mayores requerimientos de eficiencia a los modelos reducidos por el MLAN, condición que se atribuye a la localización crítica de ambos puntos, cercanos tanto a tramos de la red de drenaje como a zonas de bombeo. Tercero, la simulación adecuada de las alturas piezométricas mediante modelos reducidos por el MLAN demanda el uso de menores recursos computacionales a los que han sido requeridos para los caudales parciales de intercambio en los diferentes tramos de la red de drenaje. Cuarto, análogamente a los resultados obtenidos para los modelos reducidos de acuíferos regulares homogéneos o heterogéneos, para simular adecuadamente las alturas piezométricas en localizaciones cercanas a las relaciones río-acuífero, se han demandado mayores tamaños en los modelos reducidos por el MLAN. Dichos requerimientos también están controlados por la ubicación relativa del punto de análisis con respecto a las zonas de extracción y por la magnitud local de los parámetros hidráulicos, los cuales pueden llegar a amplificar la velocidad de respuesta piezométrica. Por último, a diferencia de las simulaciones obtenidas por el MAV-CSEM, las piezometrías en la localización  $\mathbf{P}_{19}$  han sido representadas correctamente mediante los modelos reducidos por el MLAN. El anterior resultado sugiere que el MLAN simula parámetros de control poco agregados sobre el dominio del acuífero más adecuadamente que el MAV-CSEM. Entre dichos parámetros se destacan las alturas piezométricas puntuales o los caudales de interacción río-acuífero en una pequeña porción de la red de drenaje en zonas críticas localizadas cerca de pozos o del río. Aún así, este tipo de problemas merecen ser tratados más detalladamente en trabajos posteriores, estudiando casos de flujo subterráneo mucho más adversos a los presentados en esta investigación.

## 8.6. Conclusiones y discusión

Las técnicas de reducción modal, mediante el MAV-CSEM, y por subespacios de Krylov, empleando el MLAN, han sido aplicadas sobre un acuífero altamente heterogéneo, con contornos irregulares, conectado con una red de drenaje sinuosa y sometido a once AE. La configuración geométrica de dicho acuífero y la variabilidad espacial de sus parámetros hidráulicos han representado un importante reto para la eficiencia operativa de ambas técnicas. Como ha sido discutido a lo largo de este capítulo, de acuerdo con las propuestas realizadas en las secciones 6.5 y 7.2, los criterios para detener la generación de los subespacios de reducción dependen de las AE impuestas, mediante la evaluación de los coeficientes de reparto y los factores de participación acumulados de los autovectores y vectores de Lanczos, respectivamente. Así pues, en la configuración propuesta se ha detectado que las AE 4 y 9 influyen en alargar el procedimiento de generación de dichos subespacios de reducción puesto que la variación espectral de sus coeficientes de reparto o factores de participación acumulados es muy lenta. En todos los modelos planteados, las AE antes mencionadas no cumplieron con los criterios de parada de la generación del subespacio de reducción cuando las demás lo habían hecho, por lo cual se considera que éstas controlan dicho procedimiento. Lo anterior tiene como consecuencia el aumento de los requerimientos computacionales y de almacenamiento de la reducción.

En el caso del MAV-CSEM, al haber utilizado un generador de modos efectivos basado en el método racional de Lanczos con ROP y reinicio explícito, los requerimientos de reducción han sido mucho mayores que los necesarios en el MLAN por varias razones. Primero, para llevar a cabo más eficientemente el análisis de sensibilidad de los diferentes parámetros de control deseados, se han generado directamente los primeros 1500 modos para lo cual, en principio, se impuso un límite de participación modal muy pequeño. Segundo, para efectos de deflación vectorial, se deben almacenar todos los autovectores durante

la generación, demandando gran cantidad de recurso físico de memoria. Tercero, a pesar de imponer ROP durante la iteración racional de Lanczos, dicha operación es bastante demandante en términos de procesamiento puesto que en cada reortogonalización efectuada se aplica un PGS iterativo que demanda muchas operaciones aritméticas. Cuarto, el reinicio explícito requiere ir guardando todos los vectores de Lanczos generados para poder aplicar la deflación sobre el subespacio de Krylov parcial, lo cual genera una carga de almacenamiento muy considerable, adicional a las antes comentadas.

Ahora bien, en el caso del MLAN, los recursos computacionales usados para generar los subespacios de Krylov no han sido tan grandes como los necesarios para generar los modos efectivos. Al respecto, tanto las operaciones de cálculo como la cantidad de recurso de almacenamiento son mucho menores en el MLAN que en el MAV-CSEM, por las siguientes razones. Primero, la iteración racional de Lanczos utilizada en MLAN no incluye rutinas de reinicio, con lo cual se ahorran las operaciones relacionadas. Segundo, también se evitan las operaciones de reconstrucción del subespacio de autovectores, es decir, los pasos requeridos para transformar el subespacio generado por los vectores de Ritz en un subespacio de autovectores. Tercero, el número de operaciones de ROP es mucho menor, a pesar de que este procedimiento consume la mayor cantidad de recursos computacionales y de almacenamiento en la iteración de Lanczos del MLAN a causa de la aplicación repetida del PGS. Cuarto, la convergencia hacia uno de los factores de participación acumulados es un poco más rápida que la exhibida por los coeficientes de reparto acumulados.

En la práctica, los anteriores requerimientos se traducen en gastos de memoria RAM de ordenador y de tiempo de procesamiento durante la generación. Concretamente, al generar un subespacio de reducción formado por 1500 vectores para el acuífero heterogéneo estudiado en este capítulo, se obtuvieron los resultados que se describen a continuación. Para el MAV-CSEM se requiere de aproximadamente 480 MB de almacenamiento virtual, empleando un tiempo de generación un poco mayor a 4 horas usando un procesador Intel®Core i7 de 2.6 MHz. Por su parte, el MLAN demanda usar aproximadamente 300 MB de memoria, gastando un tiempo de cálculo muy cercano a dos horas y media, utilizando el mismo procesador. Este experimento sencillo fue ejecutado aparte de los análisis de sensibilidad que han sido presentados a lo largo de este estudio.

Es importante resaltar que la carga computacional de generación del subespacio de reducción demandada por ambas metodologías para el acuífero analizado es considerable. Esto se deduce en base a la discretización espacial impuesta para la resolución de la EDP de flujo subterráneo, la cual está formada por 21850 bloques activos. De ello se sigue que cada vector incluido en los subespacios de reducción está formado por un número de componentes igual al anteriormente mencionado y, para ambas metodologías, la matriz generadora del subespacio de reducción tiene la forma  $\hat{\mathbf{V}} \in \mathbb{R}^{21850 \times m}$ , donde  $m = 1500$  para el MAV-CSEM y  $m = 3000$  para el MLAN. Dado que dichos subespacios son ortonormales, es importante almacenar estos componente en precisión doble, lo cual incrementa ostensiblemente el recurso de memoria a utilizar. De forma análoga a lo presentado en capítulos anteriores para acuíferos rectangulares, los requerimientos de reducción disminuyen a medida que se consideran conexiones imperfectas entre el río y el acuífero. Esto se debe a que la amplitud espectral de variabilidad, tanto para los coeficientes de reparto como para los factores de participación, disminuyen a medida que se imponen menores conductancias sobre el río. A pesar de lo anterior, aún para conexiones río-acuífero casi imperfectas, los criterios de parada establecidos para la generación de los subespacios de reducción han demandado considerar más de 500 vectores para todas las AE.

También cabe resaltar el importante efecto que tiene la heterogeneidad del acuífero y la irregularidad de sus contornos sobre los requerimientos de eficiencia impuestos sobre

la generación de los subespacios de reducción. Particularmente, en el acuífero analizado se han superpuesto dos condiciones desfavorables, en términos de disminuir la eficiencia de dicha generación. En primera instancia, se ha aplicado un campo de transmisividades altamente heterogéneo; además, la zona más transmisiva del acuífero se conecta con una red de drenajes de cauces sinuosos perennes. Al unir las anteriores características se deduce que la velocidad de respuesta de las relaciones río-acuífero, con respecto a las AE actuando sobre el acuífero, aumenta con respecto a si dicha red de drenaje estuviera situada en otra zona. Sin embargo, dado que el área cubierta por el acuífero es amplia, dicha velocidad de respuesta disminuye para las AE situadas más lejos de la conexión río-acuífero. Como consecuencia de los tres factores antes mencionados, al plantear la analogía de los MPE sobre un modelo resuelto por el MAV, se deduce que los autovalores de menor magnitud son pequeños, pero las amplitudes espectrales con mayores variabilidades en los coeficientes de reparto son muy grandes en algunos casos, dado que varias de las AE impuestas sobre el acuífero abarcan grandes extensiones del dominio espacial del acuífero. En particular, la variabilidad espectral de los coeficientes de reparto para las AE 4 y 9 son semejantes a las obtenidas para recarga uniformemente distribuida aplicada sobre un acuífero rectangular; similitud razonable dadas las grandes extensiones de acuífero excitadas por dichas AE.

Se ha realizado un análisis de sensibilidad acerca de la influencia de la parametrización de reducción del modelo sobre la representatividad de los parámetros de control deseados, en función del grado de conexión río-acuífero. Para el MAV-CSEM, el parámetro considerado fue el límite de participación modal, mientras que para el MLAN se modificaron los tamaños de los subespacios de Krylov de reducción. A partir de las simulaciones obtenidas mediante modelos reducidos, se estimaron índices de comportamiento con respecto a simulaciones obtenidas empleando modelos resueltos por DF, para lo cual se ha utilizado la solución del problema transitorio sujeto a condición de contorno nulas con el fin de evitar los sesgos artificiales en las estimaciones ocasionados por la cuantificación de la solución del problema en régimen permanente, que no se incluye en el procedimiento de reducción, el cual produce normalizaciones de gran magnitud que pueden ocultar disparidades entre las simulaciones reducidas y las de referencia. En general, todos los parámetros se representan más adecuadamente cuando el subespacio de reducción ha sido generado por 1000 autovectores para el MAV-CSEM o vectores de Lanczos para el MLAN, obteniéndose estimaciones de **BIAS** inferiores al 0.4 %, **RMS** cercanos al 0.5 % y **E<sub>2</sub>** de casi el 100 %. En particular, en modelos reducidos planteados por el MAV-CSEM se ha observado que en el intervalo  $10^{-5} \leq b_{lim} \leq 10^{-3}$  la disminución del número de modos efectivos y, al mismo tiempo, la variabilidad de los índices de participación estimados, es más evidente. De las simulaciones obtenidas y los índices de comportamiento estimados, se concluye que imponiendo  $b_{lim} \approx 2.5 \times 10^{-4}$  es suficiente para lograr una solución de compromiso entre el tamaño del modelo reducido y la representatividad casi perfecta de los parámetros de control deseados, con excepción de las alturas piezométricas en algunas localizaciones críticas del acuífero (**P<sub>1</sub>**, **P<sub>2</sub>** y **P<sub>19</sub>**). Con respecto a los modelos reducidos aplicando el MLAN, generar un subespacio de Krylov de reducción formado por 800 vectores de Lanczos es suficiente para mantener la representatividad de los parámetros de control deseados, con excepción de los caudales subterráneos a lo largo de toda la red de drenaje.

Los caudales subterráneos a lo largo de la red de drenaje conectada con el acuífero han sido mejor representados mediante modelos reducidos por el MAV-CSEM que por el MLAN. Es decir, los subespacios de reducción necesitan muchos menos autovectores efectivos que vectores de Lanczos para lograr índices de comportamiento cercano a los óptimos. Esta característica se atribuye a la imposición del modo efectivo de conservación, el cual preserva la ecuación de continuidad tomando el dominio del acuífero como volumen

de control. Al respecto, debe recordarse que los criterios de parada para la generación de dichos subespacios de reducción propenden por obtener una cantidad de autovectores o vectores de Lanczos tales que se preserve el volumen de agua que entra al acuífero en cada intervalo de simulación, con lo cual su propósito también es preservar, hasta cierto punto, la ecuación de continuidad. Alternativamente, los parámetros de control distribuidos en el acuífero, como alturas piezométricas, volúmenes almacenados en subdominios del acuífero, caudales subterráneos parciales, entre otros, han sido mejor representados mediante el MLAN utilizando tamaños relativamente pequeños para los subespacios de Krylov generados mediante la iteración racional de Lanczos. Tanto para el MAV-CSEM como para el MLAN, los modelos reducidos de menor tamaño que representan adecuadamente la dinámica de flujo del acuífero son mucho más pequeños que los modelos originales, lo cual se traduce en que las eficiencias de simulación han aumentado considerablemente.

A pesar de ello, si se consideran subespacios de autovectores o vectores de Lanczos del mismo tamaño, el MAV-CSEM es más eficiente en la ejecución de la simulación del flujo subterráneo por que tiene asociada una ecuación de estado explícita y, por lo tanto, no requiere de iteraciones internas en cada intervalo de simulación. Más aún, los estados acumulados del acuífero también son explícitos, por lo cual no es necesario realizar la integración numérica a lo largo de dicho intervalo para obtener los volúmenes totales detraídos o aportados al río. Por ejemplo, considerando el acuífero heterogéneo estudiado en este capítulo, se ha asumido un límite de participación de  $10^{-4}$  para un modelo reducido por el MAV-CSEM, lo cual implica incluir cerca de 800 autovectores en la matriz correspondiente, y un subespacio de Krylov formado por la misma cantidad de vectores de Lanczos, para el mismo modelo reducido por el MLAN. Además, imponiendo una conductancia de  $500 \text{ m}^2/\text{d}$  sobre los bloques de río, durante las simulaciones se ha obtenido que: (i) el MAV-CSEM requiere de aproximadamente 220 MB de almacenamiento virtual, empleando un tiempo de casi dos minutos, usando un procesador Intel®Core i7 de 2.6 MHz; (ii) el MLAN requiere usar aproximadamente 300 MB de memoria, gastando un tiempo próximo a cinco minutos, utilizando el mismo procesador; (iii) el modelo resuelto por DF requiere cerca de dos horas para obtener los parámetros de control deseados. En contraste, el MAV con truncamiento conservativo que incluye la misma cantidad de autovectores, siendo todos éstos efectivos para todas las AE, requiere de aproximadamente 250 MB de almacenamiento virtual y emplea un poco menos de tres minutos para simular.

Cabe destacar que, tanto el MAV-CSEM como el MLAN, obtienen simulaciones aceptables de los parámetros de control definidos en el apartado 8.3.5, incluso para la configuración desfavorable, en términos de eficiencia, planteada para el acuífero analizado a lo largo de este capítulo. Así, se ha mostrado que es posible incluir modelos de acuífero heterogéneos, finamente discretizados en el espacio, en los modelos de simulación del uso conjunto sin afectar considerablemente la eficiencia de su simulación o la optimización de su operación. Si bien ambas metodologías han demostrado ser eficientes para reducir modelos de flujo subterráneo de gran tamaño, planteados en acuíferos altamente heterogéneos que manifiestan contornos con geometría irregular, los resultados discutidos a lo largo de este capítulo muestran que escoger uno de dichos métodos, por encima del otro, depende del parámetro de control que se desea representar más adecuadamente. Para finalizar, debe recordarse que en modelos de simulación conjunta hay que simular a la vez los sistemas superficial y el subterráneo. Las aplicaciones prácticas han demostrado que el poder simular explícitamente el o los acuíferos supone una ventaja crucial a favor del MAV-CSEM. El tener que calcular en cada intervalo la relación río-acuífero puede demandar más medios computacionales para el MLAN dentro de la simulación u optimización de un sistema de recursos hídricos. Lo anterior se torna crítico especialmente si se quieren incluir

otros parámetros de control como volúmenes en ciertas zonas del acuífero, niveles medios en ciertas zonas u otras cuando existen muchos acuíferos dentro del sistema. Asimismo, podría ser más interesante usar el MAV-CSEM cuando interesa resolver no linealidades, como la desconexión río-acuífero, el secado de manantiales, entre otras. Este es un tema que no ha sido abordado en esta investigación y debe ser estudiado en trabajos posteriores.





“Sírrete de lo aparente, como indicio de lo no aparente”.  
*Solón*

“Los grandes conocimientos engendran las grandes dudas”.  
*Aristóteles*

# 9

## Conclusiones y futuras líneas de investigación

### 9.1. Conclusiones

Uno de los campos más fértiles actualmente en la investigación hidrológica es el desarrollo de técnicas numéricas para la ejecución eficiente de modelos distribuidos. En este trabajo, se ha llevado a cabo una exhaustiva revisión de la literatura científica, de la cual se ha concluido que las tendencias más aceptadas hoy en día para incluir a los acuíferos como elementos pertenecientes a un sistema de recursos hídricos se basan en lograr una modelación adecuada de la dinámica del flujo subterráneo mediante la aplicación de alguna técnica de reducción de un modelo numérico complejo a una forma más simple. La característica principal del modelo reducido obtenido es que su ejecución es más eficiente que la del modelo numérico original y representa, lo más adecuadamente posible, los diferentes parámetros del acuífero. Todas las técnicas de reducción construyen un subespacio ortogonal que proyecta al modelo original sobre su espacio de estados, la diferencia entre ellas radica en las hipótesis adoptadas para la generación de dicho subespacio de proyección. Así pues, en esta investigación se ha puesto énfasis en las técnicas basadas en la estructura matemática del modelo, dicho de otra forma, se han estudiado técnicas de reducción en las cuales los subespacios ortogonales de proyección dependen exclusivamente de la configuración de las condiciones de contorno y los parámetros de flujo establecidos en el modelo original: la reducción modal y la reducción en los subespacios de Krylov.

De las familias de técnicas de reducción basadas en la estructura del modelo antes mencionadas, se ha estudiado con mayor profundidad el MAV y el MLAN por diferentes razones: *(i)* ambos métodos han sido aplicados previamente con éxito en problemas relacionados con la hidrogeología, *(ii)* no es necesario considerar o incluir datos medidos de la variable a representar dentro del procedimiento de reducción, *(iii)* sus esquemas conceptuales son fácilmente adaptables a la EDP de flujo subterráneo y *(iv)* permiten la consideración de todo tipo de acciones exteriores actuando sobre el acuífero a modelar. A

lo largo de toda la investigación se ha trabajado asumiendo la hipótesis de linealidad en el modelo, lo cual tiene la gran ventaja de permitir el uso del principio de superposición para simplificar la resolución del modelo de flujo subterráneo. Al respecto, se ha adoptado un esquema de superposición que plantea dos componentes de la solución total, una en régimen permanente y otra en régimen transitorio. Esta operación se configura para lograr que dicha solución transitoria esté sujeta a condiciones de contorno nulas e invariantes, lo cual hace posible expresar el problema transitorio en términos de un SLIT, por consiguiente la aplicación tanto del MAV como del MLAN se afronta de forma directa. Asimismo, evita tener que manipular artificialmente las condiciones de contorno y permite la evaluación directa de los parámetros de control requeridos por el modelo de uso conjunto.

El MAV ha probado ser muy adecuado para simular el flujo subterráneo en acuíferos pertenecientes a un modelo de uso conjunto. Su marco teórico permite reducir modelos lineales analítica y numéricamente de forma eficiente aplicando el principio de superposición, para separar los componentes en régimen permanente y transitorio del modelo de flujo subterráneo, donde el procedimiento de reducción actúa sobre la solución transitoria. Analíticamente, la solución del problema transitorio se divide en dos factores. El primero se escribe como sucesiones que dependen de las coordenadas espaciales, mientras que el segundo consiste en funciones de estado sencillas dependientes del tiempo. Las sucesiones de la componente espacial se obtienen resolviendo un problema regular de Sturm-Liouville, cuya solución conduce a los autovalores y autofunciones del acuífero. La solución total por superposición de la EDP de flujo subterráneo se escribe en la forma de series de Fourier que dependen de los autovalores, las autofunciones y del tiempo. Para reducir las soluciones analíticas es posible plantear sus respectivos MPE. Numéricamente, el MAV resuelve la EDP de flujo subterráneo discretizada en el espacio usando funciones de estado sencillas dependientes del tiempo y de las componentes modales ortogonales del acuífero: sus autovalores y autovectores, también conocidos como modos. La solución completa del modelo puede reducirse aplicando tanto el truncamiento traumático como el conservativo. Algunas soluciones clásicas de modelos de flujo subterráneo en acuíferos rectangulares y homogéneos mediante el MAV, han sido usadas como referencia para evaluar el desempeño de las estrategias de reducción propuestas.

La reducción de soluciones analíticas de la EDP de flujo subterráneo para estimar los parámetros de flujo de un acuífero es un procedimiento muy frecuentemente usado en el análisis de las curvas de agotamiento de ríos permanentes. Tradicionalmente, se han empleado modelos reducidos construidos en base a soluciones unidimensionales para el caudal descargado al río con el fin de evaluar el índice de agotamiento, a partir del cual se estima la difusividad del acuífero. Este es el caso del MRORA, cuya base conceptual consiste en una solución deducible mediante el MAV, sobre la que se aplica la hipótesis de Maillet para considerar únicamente la primera componente de decaimiento exponencial en dicha solución. Sin embargo, durante los últimos años ha crecido la controversia acerca de la aplicabilidad del MRORA en los análisis de curvas de agotamiento puesto que, como ha sido ampliamente debatido por diversos autores, sus hipótesis de desarrollo no proceden en la mayoría de casos prácticos reales. Así pues, en base a los estudios llevados a cabo en un acuífero de contorno irregular, homogéneo e isótropo, para diferentes grados de conexión con un río sinuoso e inclinado, se ha concluido que la aplicación del MAV para describir la dinámica de descarga de dicho acuífero proporciona resultados más robustos que el MRORA. Esta afirmación se justifica en el sentido de dejar atrás tanto las asunciones subjetivas, como las limitaciones metodológicas impuestas por el MRORA, especialmente por que en el capítulo 5 ha quedado demostrado que muchos de los modos que conforman la solución analítica por el MAV actúan sobre la respuesta del hidrograma durante las

curvas de agotamiento, en particular cuando se asume conexión perfecta entre el río y el acuífero. Tener en cuenta la anterior característica se traduce en una mejor representación del comportamiento dinámico del flujo subterráneo por que hace posible afrontar problemas más complejos donde el acuífero manifiesta geometría irregular, diferentes tipos de conexión con un río horizontal o inclinado, recto o sinuoso.

El estudio de las soluciones analíticas y numéricas para acuíferos sencillos por el MAV, ha permitido identificar algunas características físicas en la solución matemática que permiten acotar a priori el tamaño del modelo reducido, asegurando que, hasta cierto punto, se representen adecuadamente las diferentes variables de estado del acuífero. En base a las soluciones mediante los MPE ha quedado claro que el mínimo tamaño requerido para el modelo reducido se relaciona directamente con los coeficientes de reparto acumulados para cada una de las acciones exteriores sobre el acuífero. Por consiguiente, si sus respectivos coeficientes de reparto acumulados se encuentran cercanos a uno, puede decirse que la cantidad de modos disponibles es suficiente, el tamaño del modelo reducido ha sido acotado y el efecto del modo para preservar la ecuación de continuidad no es demasiado importante. Analizando las soluciones numéricas se ha mostrado que existen algunos modos que no participan activamente en la modificación de los estados del acuífero y éstos se relacionan con coeficientes de reparto casi nulos. De acuerdo a las anteriores observaciones, las cuales no han sido presentadas hasta ahora en la literatura científica, se propone el uso de dos índices que, junto con esquemas automáticos de generación de modos, permiten efectuar la creación de los subespacios de proyección requeridos para fines de reducción en el MAV. Primero, el coeficiente de reparto para evaluar si el modo considerado representa una componente significativa en el espacio de los estados del modelo. Segundo, el coeficiente de reparto acumulado modal con el propósito de verificar, previo a la simulación numérica transitoria, si la cantidad de modos generados es suficiente para representar adecuadamente los estados del modelo. Estos índices tienen la ventaja de incorporar las características físicas de las acciones exteriores en el proceso de reducción, dando robustez y flexibilidad tanto al modelo reducido, como a las simulaciones obtenidas por éste.

Se ha propuesto un nuevo marco conceptual para la reducción modal de modelos lineales de flujo subterráneo, denominado MAV-CSEM, el cual puede disminuir dramáticamente el tamaño de dicho modelo, aumentando la eficiencia de su ejecución y disminuyendo la memoria virtual requerida. La aplicación práctica del MAV-CSEM se logra en base a los siguientes conceptos novedosos: (i) modos efectivos, (ii) modos residuales, (iii) límite de participación modal, (iv) máscara de estados efectivos y (v) nivel de continuidad. Los modos efectivos corresponden a aquellos cuyos coeficientes de reparto, para una acción exterior dada, superan el límite de participación modal impuesto a priori. Por su parte, los modos residuales son el complemento de los modos efectivos y se detectan cuando sus coeficientes de reparto son inferiores al límite de participación impuesto. Asimismo, la máscara de estados efectivos es una matriz lógica que indica cuales son las acciones exteriores que excitan efectivamente cada uno de los modos disponibles. A partir de las anteriores definiciones, se ha propuesto un novedoso esquema de simulación reducida enmascarada que puede llegar a incrementar notablemente la eficiencia al evaluar la ecuación de estados del acuífero, lo cual se logra dándole prioridad a los estados efectivos por encima de los residuales. Por último, el nivel de continuidad se define como el límite inferior de los coeficientes de reparto acumulados para todas las acciones exteriores impuestas. De ahí que el uso adecuado de dicho concepto hace posible establecer criterios físicos para detener la generación de los modos efectivos y permite plantear un tamaño mínimo para el modelo reducido, tal que la mayoría de las variables de estado del acuífero simulado se presentan adecuadamente. Al respecto, aplicando el marco conceptual del MAV-CSEM

en acuíferos rectangulares homogéneos conectados imperfectamente con un río, se han obtenido simulaciones muy aceptables para diferentes variables de estado del acuífero a bajos costos computacionales, similares a los requeridos por las soluciones analíticas de los MPE. Mediante un análisis de los resultados obtenidos en los experimentos numéricos efectuados en esta investigación se ha encontrado que asumir un nivel de continuidad cercano a uno es suficiente para representar las alturas piezométricas con pequeños errores. En efecto, para los caudales es imperativo lograr la preservación de la ecuación de continuidad, aunque lo anterior no es rigurosamente necesario para simular adecuadamente las alturas piezométricas. Aún así, en aplicaciones reales no es importante aproximar hasta el máximo las piezometrías puesto que los pequeños errores no suelen tener importancia económica alguna en la operación de los sistemas de uso conjunto.

A este respecto, después de una exhaustiva revisión bibliográfica se ha concluido que la generación de los modos efectivos debe realizarse mediante el uso de métodos iterativos para la solución de problemas generalizados de autovectores, combinados con los criterios de base física definidos anteriormente. De dicha revisión se ha concluido que el uso de métodos clásicos basados en transformaciones es inadecuado cuando las matrices del modelo de flujo son muy grandes, puesto que su carácter disperso se destruye a medida que avanzan dichas transformaciones, lo cual ocasiona una notable pérdida de eficiencia en la generación. Además, estos métodos tienen el inconveniente de encontrar todos los modos del problema, lo cual es inaplicable cuando éste posee grandes dimensiones. Así, para mantener la eficiencia computacional en la generación, se ha planteado que dichos generadores revisen simultáneamente el cumplimiento del límite de participación modal y el nivel de continuidad de los modos efectivos, para todas las acciones exteriores consideradas. Esto con el propósito de determinar secuencialmente si un modo es efectivo, con lo cual su autovector asociado puede incluirse en la matriz de autovectores, y se detiene la generación cuando la evaluación del criterio de parada es satisfactoria. Las ventajas de incluir criterios físicos en la resolución de un problema generalizado de autovectores son: (i) se evita ejecutar operaciones innecesarias, (ii) se preserva adecuadamente la ecuación de continuidad para el volumen que entra al acuífero proveniente de las acciones exteriores y (iii) al usar algoritmos iterativos basados en el producto matriz-vector disperso, se conserva la estructura dispersa de las matrices del modelo de flujo, ahorrando recurso computacional y de almacenamiento. Considerando las características antes mencionadas, se han implementado generadores basados en el algoritmo de minimización del cociente de Rayleigh y el método racional de Lanczos con reinicio explícito para la solución iterativa de los problemas de autovectores generalizados involucrados en la generación modal.

También se ha presentado una adaptación del MLAN para simular eficientemente el flujo subterráneo, especialmente las relaciones río-acuífero, en modelos de sistemas de uso conjunto. El esquema de reducción se basa en una transformación inversa con desplazamiento de la iteración de Lanczos clásica, lo cual hace posible interpolar implícitamente de forma más adecuada el espectro inferior del modelo de flujo. También se ha propuesto un criterio de parada de base física durante la generación del subespacio de Krylov, el cual se basa en la acumulación de los factores de participación. Para lo anterior se ha propuesto una modificación de la expresión para dichos factores, la cual se basa en imponer el cumplimiento de la ecuación de continuidad sobre el volumen de agua que entra o sale del acuífero proveniente de las acciones exteriores. Con ello, se ha establecido el cálculo de un factor de participación volumétrico acumulado que, análogamente a los coeficientes de reparto acumulado del MAV, se aproximan a uno cuando el número de vectores de Lanczos generados tiende a la cantidad de nodos en los cuales se ha discretizado el dominio espacial del acuífero.

Para hacer posible el cálculo de los volúmenes integrados de intercambio entre el río y el acuífero, se ha propuesto un esquema de integración numérica de los estados de Lanczos. Igualmente, se han adaptado apropiadamente los conceptos de parámetros de control en el marco conceptual del MLAN con el fin de acelerar los cálculos de las variables de estado requeridas por los modelos de uso conjunto, especialmente las relaciones río-acuífero. La aplicación del MLAN en acuíferos rectangulares homogéneos ha demostrado que las simulaciones tanto de las relaciones río-acuífero, como de las alturas piezométricas, han sido bastante aceptables, con un reducido costo computacional.

Las principal limitación de los métodos de reducción propuestos es que su aplicación es válida únicamente para acuíferos lineales, dentro de los cuales se encuentran los acuíferos confinados bidimensionales o acuíferos tridimensionales que incorporan únicamente condiciones de contorno lineales, cuya distribución espacial es invariante en el espacio, pero que sus intensidades varían discretamente por intervalos temporales de simulación transitoria. Así, el MAV-CSEM y el MLAN han sido aplicados para reducir dos acuíferos lineales altamente discretizados, complejos y heterogéneos. El primero es un acuífero rectangular, conectado con un río recto, que manifiesta tres bandas con propiedades hidráulicas uniformes, sometido a una recarga uniformemente distribuida y a bombeo de igual magnitud en cinco localizaciones diferentes a lo largo de mil días de simulación. El segundo es un acuífero altamente heterogéneo y anisótropo, de contornos irregulares, conectado con un río sinuoso e inclinado. Éste se encuentra sometido a once acciones exteriores aplicadas durante cinco mil cien días de simulación. De estas acciones exteriores, cinco corresponden a bombeo uniforme por regiones y las seis restantes se refieren a recargas distribuidas uniformemente por zonas. En ambos acuíferos, la aplicación de cada técnica de reducción se ha llevado a cabo realizando un análisis de sensibilidad. Éste tuvo como objetivo investigar la influencia que tiene modificar simultáneamente: (i) la parametrización de las relaciones río-acuífero, expresada en función de la conductancia del río, y (ii) los parámetros de reducción, sobre la mejor o peor representación de algunos parámetros de control seleccionados, como pueden ser las alturas piezométricas, los volúmenes almacenados y las relaciones río-acuífero parciales en tramos de la red de drenaje. En particular, los parámetros de reducción antes mencionados corresponden al límite de participación modal para MAV-CSEM y tamaño del subespacio de Krylov de reducción para el MLAN.

Los resultados de los análisis de sensibilidad en ambos acuíferos demuestran la gran influencia que tiene la parametrización de la conexión río-acuífero en el aumento o disminución de los requerimientos de reducción, tanto empleando el MAV-CSEM como el MLAN. A lo largo de toda esta investigación ha quedado claro que los tamaños de los subespacios de reducción, requeridos para representar más adecuadamente todas las variables de estado del flujo del acuífero, aumentan a medida que la conexión entre el río y el acuífero tiende a ser perfecta. Asimismo, se ha demostrado que el MAV-CSEM demanda mayores recursos computacionales que el MLAN en relación a la construcción del subespacio de reducción respectivo. Dicha generación, aplicada en los acuíferos estudiados, ha mostrado que el tiempo requerido por el MAV-CSEM para cumplir las condiciones de parada impuestas por un nivel de continuidad dado, es casi cuatro veces superior al empleado por el MLAN. Por el contrario, la ejecución del modelo de flujo es más rápida empleando el MAV-CSEM puesto que su marco conceptual permite deducir una ecuación de estado explícita en función del tiempo, mientras que aplicando el MLAN los estados del acuífero deben aproximarse e integrarse numéricamente. Por último, la aplicación de ambas técnicas ha demostrado que el MLAN calcula más adecuadamente las variables distribuidas en el acuífero, por ejemplo alturas piezométricas, volúmenes almacenados y flujos internos, siempre que la parametrización de la iteración de Lanczos se realiza apropiadamente. En

cambio, el MAV-CSEM obtiene más eficiente y adecuadamente las relaciones río-acuífero agregadas a lo largo de toda la red de drenaje. De lo anterior, se deduce que la selección de uno u otro método de reducción depende del tipo de problema que se está enfrentando y de los parámetros de control requeridos por los modelos de sistemas de uso conjunto.

## 9.2. Futuras líneas de investigación

A pesar de que las técnicas de reducción propuestas en este trabajo son efectivas para simular eficientemente el flujo subterráneo en acuíferos que pertenecen a un modelo de uso conjunto, existen muchas otras alternativas de investigación que han sido poco exploradas hasta la fecha. Algunas de ellas son:

- La línea de trabajo inmediata y prioritaria que surge del desarrollo de esta tesis es la aplicación de las metodologías de reducción propuestas en acuíferos reales pertenecientes a modelos de uso conjunto. En este orden de ideas, dicha aplicación debería comenzar por el planteamiento de los modelos conceptuales de dichos acuíferos, tales que se represente detalladamente la variabilidad espacial de las propiedades hidráulicas, las características de conexión río-acuífero y la distribución espacial de las acciones exteriores. También sería importante llevar a cabo la implementación de los códigos generados en este trabajo dentro de sistemas de soporte de la decisión, para evaluar su desempeño dentro de modelos de sistemas de uso conjunto.
- En esta investigación no se ha considerado el efecto de la variabilidad de los parámetros de conexión río-acuífero sobre la eficiencia del procedimiento de reducción. Sería pertinente efectuar un estudio acerca de las consecuencias de imponer conductancias de río muy heterogéneas, con respecto a la eficiencia de la generación de los modos efectivos en el MAV-CSEM o sobre el tamaño requerido por los subespacios de Krylov en el MLAN.
- En base al marco conceptual para la reducción propuesto en este trabajo, sería muy conveniente explorar la implementación en paralelo de los generadores de modos efectivos en el marco del MAV-CSEM o la iteración racional de Lanczos en el caso del MLAN. Herramientas informáticas de este tipo harían posible reducir modelos donde el dominio espacial del acuífero ha sido muy finamente discretizado en el espacio o su representación se ha llevado a cabo en tres dimensiones. Igualmente, sería posible abordar medios más heterogéneos sin que el gasto computacional sea una limitación. Así, la modelación de los sistemas de uso conjunto podría considerar detalladamente la variabilidad espacial tanto de los parámetros hidráulicos del acuífero, como de las acciones exteriores impuestas. Igualmente, sería plausible afrontar problemas donde se viole la hipótesis de invariabilidad temporal de los parámetros hidráulicos del acuífero, tales como la simulación estocástica, para evaluar la incertidumbre de algunas variables de estado importantes en el sistema de uso conjunto o la modelación inversa del flujo subterráneo.
- Otra posibilidad de trabajo futuro sería considerar la modelación estocástica de campos de parámetros del acuífero y determinar su efecto sobre los distintos modos efectivos y residuales dentro del marco conceptual del MAV-CSEM. Esta idea vendría enmarcada dentro de los siguientes objetivos: (i) evaluar cuales son los modos efectivos más persistentes dentro de los modelos planteados, (ii) determinar su ubicación a lo largo del espectro de dichos modelos, (iii) cuantificar el efecto de la incertidumbre de los parámetros hidrodinámicos sobre la variabilidad espectral de

dichos modos y (*iv*) cuantificar la incertidumbre de diferentes parámetros de control de interés en la modelación del uso conjunto.

- Tanto para el cálculo de modos efectivos por el generador de Lanczos para el MAV-CSEM, como para la generación del subespacio de Krylov para el MLAN, cabe realizar un estudio acerca de la conveniencia de utilizar el reinicio implícito puesto que, teóricamente, éste mejora ostensiblemente el condicionamiento de los subespacios de reducción generados y permite un incremento considerable de la eficiencia.
- También se vislumbra trabajo futuro en lo que respecta a la implementación de las DF para discretizar un acuífero tridimensional, donde incluso se puede imponer el uso del tensor completo de conductividades hidráulicas para hacer más general el planteamiento del modelo de flujo. Combinando lo anterior con técnicas para resolver las no linealidades ocasionadas por la variabilidad temporal de las condiciones de contorno, es posible plantear modelos robustos, en los que no tenga que imponerse la linealización de la EDP de flujo en medio poroso. Esto es especialmente importante cuando se debe incluir un acuífero libre dentro del modelo de uso conjunto.
- El desarrollo de marcos conceptuales para la reducción de modelos de flujo subterráneo en medio fracturado. En estos casos, la discretización del dominio espacial y de las fracturas del acuífero no quedan suficientemente bien representadas mediante las DF. A causa de lo anterior, uno de los campos más prometedores para la investigación es la implementación de códigos tridimensionales en EF, donde la resolución numérica del modelo de flujo subterráneo se ejecute empleando alguna de las técnicas de reducción propuestas en esta investigación. Este tipo de discretización también permite dar más detalle en la representación de las regiones donde existe interacción entre el río y el acuífero, con lo cual el modelo de uso conjunto podría ser más flexible para representar espacialmente las características de las diferentes acciones exteriores y de las condiciones de contorno.
- En regiones donde la regulación del sistema de uso conjunto es mínima o inexistente, la variabilidad espacial de procesos hidrológicos debe representarse con mayor fidelidad. En estos casos los modelos clásicos de uso conjunto deben ser reemplazados por modelos hidrológicos distribuidos, en los cuales la componente superficial y la subterránea debe simularse de forma acoplada, siguiendo las ecuaciones de estado correspondientes. Este tipo de aproximaciones distribuidas ha sido poco explorado hasta la fecha, especialmente por los altos requerimientos computacionales que demanda la ejecución de un modelo tridimensional de flujo subterráneo. Así, los métodos de reducción propuestos pueden explorarse como herramientas para aumentar la eficiencia en la simulación subterránea en los modelos distribuidos de gestión conjunta.
- Durante los últimos años se han desarrollado otras técnicas de reducción más avanzadas desde el punto de vista matemático, puesto que aseguran el cumplimiento simultáneo de la detectabilidad y la observabilidad del modelo original en el reducido. En este orden de ideas, otro de los campos donde se vislumbra gran posibilidad de trabajo futuro es la exploración de dichas técnicas para ser usadas en la simulación de acuíferos en modelos de uso conjunto. Dentro de las técnicas más prometedoras se encuentran las siguientes: (*i*) la reducción por truncamiento balanceado, (*ii*) la reducción semi-empírica basada en la descomposición ortogonal apropiada y (*iii*) la reducción en subespacios ortogonales de Krylov generados por diferentes tipos de iteraciones o combinados con el truncamiento balanceado. En los tres casos sería muy

importante disponer de algoritmos implementados en paralelo, para asegurar la eficiencia computacional y el uso adecuado de los recursos de procesamiento aportados por los ordenadores modernos.



# Referencias bibliográficas

- Abdelmalek N.N. (1971) Round off error analysis for Gram-Schmidt method and solution of linear least squares problems. *BIT Numerical Mathematic*, 11, 345-368.
- Anderson M.G., T.P. Burt (1980) Interpretation of recession flows. *Journal Of Hydrology*, 46, 89-101. doi:10.1016/0022-1694(80)90037-2.
- Anderson, E., Z. Bai, C. Bischof, S. Blackford, J. Demmel, J. Dongarra, J. Du Croz, A. Greenbaum, S. Hammarling, A. McKenney, D. Sorensen (1999) *LAPACK Users' Guide, Third Edition*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, EEUU.
- Andreu J., J. Capilla, E. Sanchís (1996) AQUATOOL, a generalized decision support system for water resources planning and management. *Journal of Hydrology*, 177, 269-291. doi:10.1016/0022-1694(95)02963-X.
- Andreu J., J. Labadie, A.M. Burns (1982) Optimal stream-aquifer management. *Water and Energy: Technical and Policy Issues*, 578-586. American Society of Civil Engineers.
- Andreu J. (1983) Modelos agregados y distribuidos. Modelos Glover-Jenkins. En: *Utilización Conjunta de Aguas Superficiales y Subterráneas*, B2. Servicio Geológico de Obras Públicas y Universitat Politècnica de València (Eds.). Publicaciones de Servicio Geológico de Obras Públicas de España.
- Andreu J. (1984) *Aplicación del Método de los Autovalores al Análisis de Sistemas de Uso Conjunto de Recursos Superficiales y Subterráneos*. Disertación Doctoral. Universitat Politècnica de València.
- Andreu J., A. Sahuquillo (1987) Efficient aquifer simulation in complex systems. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 113(1), 110-129. doi:10.1061/(ASCE)0733-9496(1987)113:1(110).
- Antoulas A. (2005) *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, SIAM. Philadelphia, EEUU.
- Álvarez-Villa O.D. (2007) *Cuantificación de la Incertidumbre en la Estimación de Campos Hidrológicos. Aplicación al Balance Hídrico de Largo Plazo*. Tesis de Maestría. Universidad Nacional de Colombia.
- Álvarez-Villa O.D. (2009) *Desarrollo de una librería computacional para la estimación espacial utilizando conceptos geográficos y programación orientada a objetos espaciales*. Trabajo Final de Máster. Universitat Politècnica de València.
- Álvarez-Villa O.D., C. Restrepo-Tamayo, A. Sahuquillo, E. Cassiraga (2010) Estimating groundwater parameters from hydrograph base flow records. *IAHR International Groundwater Symposium*, Valencia.

- Arbenz P., D. Kressner (2010) *Solving Large Scale Eigenvalues Problems*. ETH Zurich Publications. (Disponible en <http://people.inf.ethz.ch/arbenz/ewp/>, abril de 2013).
- Arbenz P., U.L. Hetmaniuk, R.B. Lehoucq, R.S. Tuminaro (2005) A comparison of eigensolver for large 3D modal analysis using AMG-preconditioned iterative methods. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 64(2), 204-236. doi:10.1002/nme.1365.
- Arnoldi W.E. (1951) The principle of minimized iterations in the solution of the matrix eigenvalue problem. *Quarterly of Applied Mathematics*, 9, 17-29.
- Arrowsmith D.K. (1998) *Dynamical Systems: Differential Equations, Maps and Chaotic Behaviour*. Chapman And Hall. Boca Ratón, EEUU.
- Ashcreft C.C., R.G. Grimmes (1988) On vectorizing incomplete factorizations and SSOR preconditioners. *SIAM Journal in Scientific and Statistical Computing*, 9(1), 122-151. doi:10.1137/0909009.
- Axelsson O., G. Lindskog (1986) On the eigenvalue distribution of a class of preconditioning methods. *Numerische Mathematik*, 48(5), 479-498. doi:10.1007/BF01389447.
- Baedke S.J., N.C. Krothe (2001) Derivation of effective hydraulic parameters of a karst aquifer from discharge hydrograph analysis. *Water Resources Research*, 37(1), 13-19. doi: 10.1029/2000WR900247.
- Bako M.D., A. Owoade (1988) Field application of a numerical method for the derivation of baseflow recession constant. *Hydrological Processes*, 2(4), 331-336. doi:10.1002/hyp.3360020404.
- Bathe K.J. (1971) *Solution Methods of Large Generalized Eigenvalues Problems in Structural Engineering*. Report UC SESM 71-20. Civil Engineering Department, University of Californis, Berkeley.
- Bathe K.J. (1996) *Finite Element Procedures*. Prentice Hall. New Jersey, EEUU.
- Bathe K.J., Wilson E.L. (1973) Eigensolution of large structural systems with small bandwidth. *ASCE Journal of Engineering Mechanichs Division*, 99(3), 1471-1485.
- Bauer F.L. (1957) Das verfahren der treppeniteration und verwandte verfahren zur lösung algebraischer eigenwertprobleme. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Physik (ZAMP)*, 8(3), 214-235. doi:10.1007/BF01600502.
- Bear J. (1972) *Dynamics of Fluids in Porous Media*. Dover Publications Inc. New York, EEUU.
- Belaineh G., R.C. Peralta, T.C. Hughes (1999) Simulation/Optimization modeling for water resources management. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 125(3), 154-161. doi:10.1061/(ASCE)0733-9496(1999)125:3(162).
- Benzi M. (2002) Preconditioning techniques for large linear systems: a survey. *Journal of Computational Physics*, 182(2), 418-477. doi:10.1006/jcph.2002.7176.
- Bergamaschi L., G. Pini (2002) Approximate inverse preconditioning in parallel solution of sparce eigenproblems. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 7(3), 99-116. doi:10.1002/(SICI)1099-1506(200004/05)7:3;99::AID-NLA188;3.0.CO;2-5.

- Bergamaschi L., M. Putti (2002) Numerical comparison of iterative eigensolvers for large sparse symmetric positive definite matrices. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 191(45), 5233-5247. doi:10.1016/S0045-7825(02)00457-7.
- Bergamaschi L., G. Gambolati, G. Pini, M. Putti (1996) Gradient eigenanalysis on nested finite element. *Advances in Engineering Software*, 27(1-2), 155-165. doi:10.1016/0965-9978(96)00014-2.
- Bergamaschi L., G. Gambolati, G. Pini (1997) Asymptotic convergence of conjugate gradient method for the partial symmetric eigenproblem. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 4(2), 69-84. doi:10.1002/(SICI)1099-1506(199703/04)4:2;69.
- Bergamaschi L., G. Pini, F. Sartoretto (2001) Parallel preconditioning of a sparse eigensolver. *Parallel Computing*, 27(7), 963-976. doi:10.1016/S0167-8191(01)00077-1.
- Bergamaschi L., G. Gambolati, G. Pini (2007) A numerical study of inverse preconditioning for the parallel iterative solution to 3D finite element flow equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 210(1-2), 64-70. doi:10.1016/j.cam.2006.10.056.
- Bergamaschi L., A. Martínez, G. Pini (2012) Parallel Rayleigh quotient optimization with FSAI-based preconditioning. *Journal of Applied Mathematics*, 2012, Article ID 872901. doi:10.1155/2012/872901.
- Berkooz G., P. Holmes, J.L. Lumley (1996) *Coherent Structures, Dynamical Systems and Symmetry*. Cambridge Monographs on Mechanics. Cambridge University Press. Cambridge, Reino Unido.
- Bhattacharjya R.K., B. Datta (2009) ANN-GA-based model for multiple objective management of coastal aquifers. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 135(5), 314-322. doi:10.1061/(ASCE)0733-9496(2009)135:5(314).
- Birk S., S. Hergarten (2010) Early recession behaviour of spring hydrographs. *Journal of Hydrology*, 387(1-2), 24-32. doi:10.1016/j.jhydrol.2010.03.026.
- Björck A., C.C. Paige (1992) Loss and recapture of orthogonality in the modified Gram-Schmidt algorithm. *SIAM Journal of Matrix Analysis and Applications*, 13(1), 176-190. doi:10.1137/0613015.
- Blanco L. (2001) *AQUIVAL: Modelo de Simulación de Acuíferos Mediante el Método de los Autovalores*. Proyecto Final de Carrera. E.T.S.I. Caminos, Canales y Puertos. Universidad Politécnica de Valencia.
- Böllhofer M., Y. Notay (2007) JADAMILU: a software code for computing selected eigenvalues of large sparse symmetric matrices. *Computer Physics Communications*, 177(12), 951-964. doi:10.1016/j.cpc.2007.08.004.
- Boussinesq J. (1877) Essais sur la théorie des courants, du mouvement non permanent des eaux souterraines. *Acad. Sci. Inst. Fr.*, 23, 252-260.
- Boussinesq J. (1903) Sur le débit, en temps de sécheresse, d'une source alimentée par une nappe de infiltration. *C. R. Acad. Sci.*, 136, 1511-1517.
- Boussinesq J. (1903) Sur un mode simple d'écoulement des nappes de infiltration à lit horizontal, avec rebord vertical tout autour, lorsqu'une partie de ce rebord est enlevée depuis la surface jusqu'au fond. *C. R. Acad. Sci.*, 137, 5-11.

- Boussinesq J. (1904) Recherches théoriques sur l'écoulement des nappes d'eau infiltrées dans le sol et sur le débit des sources. *J. Math. Pures Appl.*, 10, 5-78.
- Braconnier T., P. Langlois, J.C. Rioual (2000) The influence of orthogonality on the Arnoldi method. *Linear Algebra and its Applications*, 309(1-3), 307-323. doi:10.1016/S0024-3795(99)00100-7.
- Brin M., G. Stuck (2002) *Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press. Cambridge, Reino Unido.
- Bruggeman G.A. (1999) *Analytical Solution of Geohydrological Problems*. Elsevier. Maarsdijk, The Netherlands.
- Brutsaert W. (1994) Unit response of groundwater flow from a hillslope. *Water Resources Research*, 30(10), 2759-2763. doi:10.1029/94WR01396.
- Brutsaert W., H.A. Ibrahim (1966) On the first and second linearization of Boussinesq equation. *Geophysical Journal*, 11, 549-554. doi:10.1111/j.1365-246X.1966.tb03166.x.
- Brutsaert W., J.P. López (1998). Basin-scale geohydrologic drought flow features of riparian aquifers in the southern Great Plains. *Water Resources Research*, 34(2), 233-240. doi:10.1029/97WR03068.
- Brutsaert W., J.L. Nieber (1977) Regionalized drought flow hydrographs from a mature glaciated plateau. *Water Resources Research*, 13(3), 637-643. doi:10.1029/WR023i005p00805.
- Buras N. (1963) Conjunctive operation of dams and aquifers. *ASCE Journal of Hydraulic Division*, 89, 111-131.
- Buras N., J. Bear (1964) Optimal utilization of a coastal aquifer. *Proceedings of the 6th Congress of Agricultural Engineering*, Laussan, Paper n. 4.1.
- Cassiraga, E.F. (1999) *Incorporación de Información Blanda para la Cuantificación de la Incertidumbre: Aplicación a la Hidrogeología*. Disertación Doctoral. Universitat Politècnica de València.
- Capilla J., J. Andreu (1996) AQUIVAL: a GUI for groundwater modeling incorporated into the simulation of complex water resources systems. En: *Hydraulic Engineering Software*, 71-80. Blain W.R. (Eds). Computational Mechanics Publications. doi:10.2495/HY960081.
- Chen W.P., C.H. Lee (2003) Estimating ground-water recharge from streamflow records. *Environmental Geology*, 44(3), 257-265. doi:10.1007/s00254-002-0753-2.
- Chen X., D.Y. Chen, X.H. Chen (2006) Simulation of base flow accounting for the effect of bank storage and its implications on base flow separation. *Journal Of Hydrology*, 327(3-4), 539-549. doi:10.1016/j.jhydrol.2005.11.057.
- Chiew F., T. McMahon (1994) Application of the daily rainfall-runoff model MODHYDROLOG to 28 australian catchments. *Journal of Hydrology*, 332(1-4), 226-240. doi:10.1016/0022-1694(94)90200-3.
- Chidambara M.R., E. Davison (1967) Further remarks on simplifying linear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 12(2), 213-214. doi:10.1109/TAC.1967.1098557.

- Chow V.T., D.R. Maidment, L.W. Mays (1976) *Hidrología Aplicada*, McGraw-Hill. Buenos Aires, Argentina.
- Chu H.J., L.C. Chang (2009) Optimal control algorithm and neural network for dynamic groundwater management. *Hydrological Processes*, 23(19), 2765-2773. doi:10.1002/hyp.7374.
- Chun R.Y.D, L.R. Mitchell, K.W. Mido (1964) Groundwater management for the nations. Future optimum conjunctive operations of groundwater basins. *ASCE Journal of the Hydraulics Division*, 90, 79-95.
- Coes A.L., T.B. Spruill, M.J. Thomasson (2007) Multiple-method estimation of recharge rates at diverse locations in the North Carolina Coastal Plain, USA. *Hydrogeology Journal*, 15(4), 773-788. doi:10.1007/s10040-006-0123-3.
- Cooper H.H., M.I. Rorabaugh (1963) *Groundwater Movement and Bank Storage Due to Flood Stages in Surface Streams*. U.S. Geological Survey Water-Supply Paper 1536-J.
- Coppola Jr. E., F. Szidarovszky, M. Poulton, E. Charles (2003) Artificial neural network approach for predicting transient water levels in a multilayered groundwater system under variable state, pumping, and climate conditions. *ASCE Journal of Hydrologic Engineering*, 8(6), 348-360. doi:10.1061/(ASCE)1084-0699(2003)8:6(348).
- Coutagne A. (1948) *Meteorologie et Hydrologie. Etude Generale des Variations de debit en Fonction des Facteurs qui les Conditionnent*. 2me Parties. Les Variations de debit en periode non influencee par les precipitations. La Houille Blanche, Septembre-Octobre, 416-436.
- Crank J., P. Nicholson (1947) A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heat-conduction type. *Advances in Computational Mathematics*, 6(1), 207-226. doi:10.1007/BF02127704.
- Cullum J.K., R.A. Willoughby (1986) A practical procedure for computing eigenvalues of large sparse nonsymmetric matrices. En: *Large Scale Eigenvalue Problems, Proceedings of the IBM Europe Institute Workshop on Large Scale Eigenvalue Problems*. Cullum J.K., R.A. Willoughby (Eds.). *North-Holland Mathematics Studies*, 127, 193-240, North-Holland, 1986.
- Cullum J.K., R.A. Willoughby (2002) *Lanczos Algorithms for Large Symmetric Eigenvalue Computations, Volume I: Theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, EEUU.
- Cuppen J.J.M. (1980) A divide and conquer method for the symmetric tridiagonal eigenproblem. *Numerische Mathematik*, 36(9), 177-196. doi:10.1007/BF01396757.
- Custodio E., M.R. Llamas (1983). *Hidrología subterránea* (segunda edición). Ediciones Omega, S.A. Barcelona, España.
- Daniel J.F. (1976) Estimating ground-water evapotranspiration from stream flow records. *Water Resources Research*, 12(3), 360-364. doi:10.1029/WR012i003p00360.
- Daniel J.W., W.B. Gragg, L. Kaufman, G.W. Stewart (1976) Reorthogonalization and stable algorithms for updating the Gram-Schmidt QR factorization. *Mathematics of Computation*, 30(136), 772-796. doi:10.2307/2005398. (disponible en: <http://faculty.smu.edu/yzhou/Reading/dgks.pdf>, abril de 2013)

- Datta B.N. (2010) *Numerical Linear Algebra and Applications*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, EEUU.
- Davidson E.R. (1975) The iterative calculation of a few of the lowest eigenvalues and corresponding eigenvectors of large symmetric matrices. *Journal of Computational Physics*, 17(1), 87-94. doi:10.1016/0021-9991(75)90065-0.
- Davison E.J. (1966) A method for simplifying linear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 11(1), 93-101. doi:10.1109/TAC.1966.1098264.
- Demmel J.W. (1997) *Applied Numerical Linear Algebra*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, EEUU.
- Denisov V.M. (1961) A Method of computing recession curves. *Meteorol. Gidrol.*, 3, 18-24.
- Deutsch C.V., A.G. Journal (1998) *GSLib: Geostatistical Software and User's Guide*. Second Edition. Oxford University Press. Applied Geostatistics Series. New York, EEUU.
- DHI, Danish Institute of Hydrology (2003) *MIKE-BASIN: A Versatile Decision Support Tool for Integrated Water Resource Management and Planning*. DHI Water and Environment. Hørsholm, Dinamarca.
- Doodge J. (1973). *Linear Theory of Hydrologic Systems*. Technical Bulletin 1468. United States Department of Agriculture. Washington DC, EEUU.
- Dunbar W.S., A.D. Woodbury (1989) Application of the Lanczos algorithm to the solution of the groundwater flow equation. *Water Resources Research*, 25(3), 551-558. doi:10.1029/WR025i003p00551.
- Dupont T., R.P. Kendall, H.H. Rachford Jr. (1968) An approximate factorization procedure for solving self-adjoint elliptic difference equation. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 5(3), 559-573. doi:10.1137/0705045.
- Eckhardt K. (2005) How to construct recursive digital filters for baseflow separation. *Hydrological Processes*, 19(2), 507-515. doi:10.1002/hyp.5675.
- Eng K., W. Brutsaert (1999) Generality of drought flow characteristics within the Arkansas River Basin. *Journal of Geophysical Research*, 104(D16): 19435-19441. doi:10.1029/1999JD900087.
- Engeli M., T. Ginsburg, H. Rutishauser, E. Stiefel (1959) *Refined Iterative Methods for Computation of the Solution and the Eigenvalues of Self-Adjoint Boundary Value Problems*. Mitteilungen aus dem Institut für angewandte Mathematik der ETH Zürich, Nr. 8., 107, S. Basel/Stuttgart. Birkhäuser Verlag. Preis brosch. DM 17.
- Ericsson T., A. Ruhe (1980) The spectral transformation Lanczos method for the numerical solution of large sparse generalized eigenvalue problems. *Mathematics of Computations*, 35, 1251-1268. doi:10.2307/2006390.
- Estrela, T. (1993) *Estimación de Parámetros de Recarga y Descarga en un Modelo de Flujo Subterráneo en un Manantial Cárstico*. Monografía del Centro de Estudios y Experimentación de Obras Públicas de España (CEDEX). Madrid, España.
- Estrela, T., A. Sahuquillo (1997) Modeling the response of karstic spring at Arteta aquifer in Spain. *Ground Water*, 35(1), 18-24. doi:10.1111/j.1745-6584.1997.tb00055.x.

- Evans D.J. (1983) Preconditioned iterative methods for the generalized eigenvalue problem, En: *Matrix Pencils, Lectures Notes in Mathematics*, 973, 189-194. Springer (Eds.), Berlin(1983). doi:10.1007/BFb0062102.
- Evans D.J (1984) On preconditioned iterative methods for solving  $(\mathbf{A} - \lambda\mathbf{B})\mathbf{x} = \mathbf{0}$ . *Computing*, 32(2), 139-152. doi:10.1007/BF02253688.
- Evans D.J., J. Shanehchi (1982) Preconditioned iterative methods for the large sparse symmetric eigenvalue problem, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 31(3), 252-264. doi:10.1016/0045-7825(82)90007-X.
- Farrell A.D. (1997) *An assesment of the Role of Transient Flow on the Dispersion of Non-reactive Solutes in Porous Media: A Numerical Study*. Disertación Doctoral. The University of Manitoba.
- Federer C.A. (1973) Forest transpiration greatly speeds streamflow recession. *Water Resource Research*, 9(6), 1599-1604. doi:10.1029/WR009i006p01599.
- Feng Y.T., R.J. Owen (1986) Conjugate gradient methods for solving the smallest eigenpair of large symmetric eigenvalues problems. *International Journal for Numerical Methods in Engeeniring*, 39, 2209-229. doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19960715)39:13;2209::AID-NME951;3.0.CO;2-R.
- Fernández C., F.J. Vázquez, J.M. Vega (2003) *Ecuaciones Diferenciales y en Diferencias: Sistemas Dinámicos*. International Thompson. Madrid, España.
- Fletcher R. (1976) Conjugate gradient methods for indefinite systems. En: *Numerical Analyses Dundee 1975: Lecture Notes in Mathematics*, 506, 73-89. Watson A. (Eds.). Springer-Verlag. Berlin, Alemania.
- Flores O. (2008) *Estudio de Librerías Paralelas de Libre Distribución y Algoritmos Paralelos Iterativos Multipaso para la Resolución de Sistemas de Ecuaciones Lineales Dispersos. Aplicación a la Ecuación de Difusividad Neutrónica*. Disertación Doctoral. Universitat Politècnica de València.
- Flynn, R.H., G.D. Tasker (2004) *Generalized Estimates From Streamflow Data of Annual and Seasonal Ground-Water-Recharge Rates for Drainage Basins in New Hampshire*. U.S. Geological Survey Scientific Investigation Report 2004-5019. 61 p.
- Fokkema D.R., G.L.G. Sleijpen, H.A. van der Vorst (1998) Jacobi-Davidson style QR and QZ algorithms for the reduction of matrix pencils. *SIAM Journal of Scientific Computing*, 20(1), 94-125. doi:10.1137/S1064827596300073.
- Fossard A. (1970) On a method for simplifying linear dynamic systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 15(2), 261-262. doi:10.1109/TAC.1970.1099420.
- Fowler F. (1981) *Case Study U.S.A. Santa Clara Valley District*. NATO Advanced Study Institute. Operation of complex Water Resources Systems. Erice, Italia.
- Francis J.G.F (1961) The QR transformation: an unitary analogue to the LR transformation, Parts I and II. *The Computer Journal*, 4(3), 265-271. doi:10.1093/comjnl/4.3.265.
- Fredericks J.W., J.W. Labadie, J.M. Altenhofen (1998) Decision support system for conjunctive stream-aquifer management. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 124(2), 69-78. doi:10.1061/(ASCE)0733-9496(1998)124:2(69).

- Freund R.W., N.M. Nachtigal (1996) QMRPACK: a package of QMR algorithms. *ACM Transactions on Mathematical Software*, 22(1), 46-77. doi:10.1145/225545.225551.
- Furey P.R., V.K. Gupta (2003) Tests of two physically based filters for base flow separation. *Water Resources Research*, 39(10), 1297. doi:10.1029/2002WR001621.
- Gambolati G. (1993) On time integration of groundwater flow equation by spectral methods. *Water Resources Research*, 29(4), 1257-1267. doi:10.1029/92WR02331.
- Gambolati G., G. Pini, F. Sartoretto (1988a) An improved iterative optimization technique for the leftmost eigenpairs of large symmetric matrices. *Journal of Computational Physics*, 74(1), 41-60. doi:10.1016/0021-9991(88)90067-8.
- Gambolati G., G. Pini, G. Zilli (1988b) Numerical comparison of preconditioning for large sparse finite element problems. *Numerical Methods for Partial Differential Equations*, 4(2), 139-157. doi:10.1002/num.1690040204.
- Gambolati G., M. Putti (2005) A comparison of Lanczos and optimization methods in the partial solution of sparse symmetric eigenproblems. *International Journal of Numerical Methods in Engineering*, 37(4), 605-621. doi:10.1002/nme.1620370405.
- Giraud L., J. Langou (2002) When Gram-Schmidt generates a well-conditioned set of vectors. *IMA Journal of Numerical Analysis*, 22(4), 521-528. doi:10.1093/imanum/22.4.521.
- Giraud L., J. Langou (2004) A robust criterion for modified Gram-Schmidt algorithm with selective reorthogonalization. *SIAM Journal of Scientific Computation*, 25(2), 417-441. doi:10.1137/S106482750340783X.
- Giraud L., J. Langou, M. Rozložník, J. van der Eshof (2005) Rounding error analysis of the classical Gram-Schmidt orthogonalization process. *Numerische Mathematik*, 101(1), 87-100. doi: 10.1007/s00211-005-0615-4.
- Givens J.W. (1959) Computation of plane unitary rotations transforming a general matrix to triangular form. *Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics*, 6, 26-50.
- Glover R.E., G.G. Balmer (1945) River depletion resulting from pumping a well near a river. *American Geo-physical Union Transactions*, 35(3), 468-470. doi:10.1029/TR035i003p00468.
- Golub G.H., H.A. van der Vorst (2000) Eigenvalue computation in the twentieth century. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 123(1-2), 35-65. doi:10.1016/S0377-0427(00)00413-1.
- Golub G.H., C.F. Van Loan (1996) *Matrix Computations*. The Johns Hopkins University Press. Baltimore, EEUU.
- Golub G.H., J.H. Wilkinson (1976) Ill-conditioned eigensystems and the computation of Jordan canonical forms. *SIAM Review*, 18(4), 578-619. doi:10.1137/1018113.
- Gómez-Hernández J.J. (1991) *A Stochastic Approach to the Simulation of Block Conductivity Fields Conditioned Upon Data measured at a Small Scale*. Disertación Doctoral. Universidad de Stanford.



- Gómez-Hernández J.J. (1992) *Descripción de la Base de Datos de Walker*. Publicación Técnica 13/92. ENRESA.
- Gómez-Hernández J.J., A. Journel (1993) Joint sequential simulation of multigaussian fields. En: *Geostatistics Tróia 92*, 85-94. V. I. A. Soares (Eds.). Kluwer Academic Publishers. Dordrecht, Holanda.
- Gorelick, S.M. (1983) A review of distributed parameter groundwater management modeling methods. *Water Resources Research*, 19(2), 79-95. doi:10.1029/WR019i002p00305.
- Grcar J. (1981) *Analysis of the Lanczos Algorithm and of the Approximation Problem in Richardson's Method*. Disertación Doctoral. Universidad de Illinois en Urbana-Champaign.
- Grasselli M., Pelinovsky D. (2008) *Numerical Mathematics*. Primera Edición. Jones and Bartlett Learning. Boston, EEUU.
- Griffiths G.A., B. Claussen (1997) Streamflow recession in basins with multiple water storages. *Journal Of Hydrology*, 190(1-2), 60-74. doi:10.1016/S0022-1694(96)03060-0.
- Grimes R.G., Lewis J.G., Simon H.D. (1991) A shifted block Lanczos algorithm for solving sparse symmetric generalized eigenproblems. *Technical Report RNR-91-012*. NASA AMES Research Center. (disponible en: [http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19970009922\\_1997010308.pdf](http://ntrs.nasa.gov/archive/nasa/casi.ntrs.nasa.gov/19970009922_1997010308.pdf), abril de 2013).
- Grimme E.J. (1997) *Krylov Projection Methods for Model Reduction*. Disertación Doctoral. ECE Department, University of Illinois.
- Gu M., S.C. Eisenstat (1995) A divide-and-conquer algorithm for symmetric tridiagonal problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 16(1), 172-191. doi:10.1137/S0895479892241287.
- Gupta H.V., S. Sorooshian, P.O. Yapo (1999) Status of automatic calibration for hydrologic models: comparison with multilevel expert calibration. *Journal of Hydrologic Engineering*, 4(2), 135-143. doi:10.1061/(ASCE)1084-0699(1999)4:2(135).
- Gustafsson I. (1978) A class of first order factorization methods. *BIT Numerical Mathematics*, 18(2), 142-156. doi: 10.1007/BF01931691.
- Haimes Y.Y. (1977) *Heirarchical Analysis of Water Resources Systems: Modeling and Optimization of Large-Scale Systems*. McGraw-Hill International Book Company. New York, EEUU.
- Halford K.J. (2008) Discussion On: Update on the use of RORA program for recharge estimation by A.T. Rutledge. *Ground Water*, 46(1), 10-11. doi:10.1111/j.1745-6584.2007.00392.1.x.
- Halford K.J., G.C. Mayer (2000). Problems associated with estimating ground water discharge and recharge from stream-discharge records. *Ground Water*, 38(3), 331-342. doi: 10.1111/j.1745-6584.2000.tb00218.x.
- Hall, F.R. (1968) Base-Flow recessions: a review. *Water Resources Research*, 4(5), 973-983. doi:10.1029/WR004i005p00973.

- Hall W.A., J.A. Dracup (1970) *Water Resources Systems Engineering*. Mc Graw-Hill. Nueva York, EEUU.
- Hantush M.S. (1965) Wells near streams with semipervious beds. *Journal of Geophysical Research*, 70(12), 2829-2838. doi:10.1029/JZ070i012p02829.
- Hebb D.O. (1949) *The Organization of Behaviour*. Wiley. New York, EEUU.
- Hendricks-Franssen H.J. (2000) *Inverse Stochastic Modelling of Groundwater Flow and Mass Transport*. Disertación Doctoral. Universitat Politècnica de València.
- Heres P.J. (2005) *Robust And Efficient Krylov Subspace Methods for Model Order Reduction*. Disertación Doctoral. Technische Universiteit Eindhoven.
- Hernández V., J.E. Román, A. Tomás (2007a) *Evaluation of Several Variants of Explicitly Restored Lanczos Eigensolvers an their Parallel Implementations*. Scalable Library for Eigenvalue Problem Calculation Technical Report. Universitat Politècnica de València.
- Hernández V., J.E. Román, A. Tomás, V. Vidal (2007b) *Orthogonalization Routines in SLEPc*. Scalable Library for Eigenvalue Problem Calculation Technical Report. Universitat Politècnica de València.
- Hernández V., J.E. Román, A. Tomás, V. Vidal (2007c) *Lanczos Methods in SLEPc*. Scalable Library for Eigenvalue Problem Calculation Technical Report. Universitat Politècnica de València.
- Hernández V., J.E. Román, A. Tomás, V. Vidal (2007d) *Arnoldi Methods in SLEPc*. Scalable Library for Eigenvalue Problem Calculation Technical Report. Universitat Politècnica de València.
- Hernández V., V. Vidal, J.E. Román, A. Tomás, C. Campos, E. Romero (2011) *SLEPc User´s Manual*. Scalable Library for Eigenvalue Problem Calculation Technical Report. Universitat Politècnica de València.
- Hestenes M., E. Stiefel (1952) Methods of conjugate gradients for solving linear systems. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, Section B, 49(5), 129-137 (disponible en: <http://www.stat.uchicago.edu/lekheng/courses/302/classics/hestenes-stiefel.pdf>, abril de 2013).
- Hill M. (1990) *Preconditioned Conjugate-Gradient 2 (PCG2), A Computer Program for Solving Ground-Water Flow Equations*. USGS Water-Resources Investigation Report 90-4048. Denver, CO. (disponible en: [http://water.usgs.gov/nrp/gwsoftware/modflow2000/PCG-usgs-wrir\\_90-4048-second-printing.pdf](http://water.usgs.gov/nrp/gwsoftware/modflow2000/PCG-usgs-wrir_90-4048-second-printing.pdf), abril de 2013).
- Hoffmann W. (1989) Iterative algorithms for Gram-Schmidt orthogonalization. *Computing*, 41(4), 335-348. doi:10.1007/BF02241222.
- Horn R.A., C.R. Johnson (1985) *Matrix Analysis*. Cambridge University Press. Cambridge, Reino Unido.
- Householder A.S. (1958) Unitary triangularization of a nonsymmetric matrix. *Journal of the ACM*, 5(4), 339-342. doi:10.1145/320941.320947.

- Householder A.S. (1964) *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. Dover. New York, EEUU.
- Hunt B. (1999) Unsteady stream depletion from groundwater pumping. *Ground Water*, 37(1), 98-102. doi:10.1111/j.1745-6584.1999.tb00962.x.
- Huyck A.A.O, V.R.N. Pauwels, N.E.C. Verhoest (2005) A base flow separation algorithm based on the linearized Boussinesq equation for complex hillslopes. *Water Resources Research*, 41(8), W08415. doi:10.1029/2004WR003789.
- Illangasekare T, H. Morel-Seytoux (1982) Stream-aquifer influence coefficients as tools for simulation and management. *Water Resources Research*, 18(1), 168-176. doi:10.1029/WR018i001p00168.
- Isaaks E.H., R.M. Srivastava (1989). *Applied Geostatistics*. Oxford University Press. Applied Geostatistics Series. New York, EEUU.
- Jacobi C.G.J. (1846) Über ein leichtes Verfahren, die in der Theorie der Säcularstörungen vorkommenden Gleichungen numerisch aufzulösen. *Crelle Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 30, 51-94 (disponible en: <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k902231/f110.image>, abril de 2013).
- Jang H.J (2001) Preconditioned conjugate gradient method for large generalized eigenproblems. *Trends in Mathematics*, 4(2), 103-109. (disponible en: [http://www.mathnet.or.kr/mathnet/thesis\\_file/Control.pdf](http://www.mathnet.or.kr/mathnet/thesis_file/Control.pdf), abril de 2013).
- Jenkins C.T. (1968a) Techniques for computing rate and volume of stream depletion by wells. *Ground Water*, 6(2), 37-46. doi:10.1111/j.1745-6584.1968.tb01641.x.
- Jenkins C.T. (1968b) Electric analog and digital computer model analysis of stream depletion by wells. *Ground Water*, 6(6), 27-34. doi:10.1111/j.1745-6584.1969.tb01293.x.
- Jenning A., G.M. Malik (1978) The solution of sparse linear equations by the conjugate gradient method. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 12(1), 141-158. doi:10.1002/nme.1620120114.
- Jones M.T., M.L. Patrick (1989) *The Use of Lanczos Method to Solve the Large Generalized Symmetric Definite Eigenvalue Problem*. ICASE Technical Report 89-69. NASA Langley Research Center. Hampton, Virginia, EEUU.
- Jones M.T., M.L. Patrick (1990) LANZ: *Software for Solving the large Sparse Symmetric Generalized Eigenproblem*. ICASE Technical Report 64-90. NASA Langley Research Center. Hampton, Virginia, EEUU.
- Jones M.T., M.L. Patrick (1993) The Lanczos algorithm for the generalized symmetric eigenproblem on shared-memory architectures. *Applied Numerical Mathematics*, 12(5), 377-389. doi:10.1016/0168-9274(93)90099-D.
- Kahan W. (1966) *Accurate Eigenvalues of Symetric Tri-diagonal Matrix*. Informe técnico CS-TR-66-41. Stanford University. Stanford, EEUU.
- Kahan W., B.N. Parlett (1987) How far should you go with the Lanczos process?. *Research Report*, University of California at Berkeley.

- Kendy E., J.D. Bredehoeft (2006) Transient effects of groundwater pumping and surface-water-irrigation returns on stream flow. *Water Resources Research*, 42, W08415, doi:10.1029/2005WR004792.
- Kershaw D.S. (1978) The incomplete Cholesky-conjugate gradient method for the iterative solution of systems of linear equations. *Journal Of Computational Physics*, 26(1), 43-65. doi:10.1016/0021-9991(78)90098-0.
- Kim H.M., R.R. Craig Jr. (1990) Computational enhancement of an unsymmetric block Lanczos algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 30(5), 10831089. doi:10.1002/nme.1620300509.
- Kim H.M., R.R. Craig Jr. (1988) Structural dynamics analysis using an unsymmetric block Lanczos algorithm. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 26(10), 2305-2318. doi:10.1002/nme.1620261012.
- Komzsik L. (2003) *The Lanczos Method: Evolution and Application*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, EEUU.
- Knyazev, A.V. (2001) Toward the optimal preconditioned eigensolver: locally optimal block preconditioned conjugate gradient method. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 23(2), 517-541. doi:10.1137/S1064827500366124.
- Knyazev A.V., M. E. Argentati, I. Lashuk, E. E. Ovtchinnikov (2007) Block Locally Optimal Preconditioned Eigenvalue Solvers (BLOPEX) in Hypre and PETSc. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 29(5), 2224-2239. doi:10.1137/060661624.
- Krausse P., D.P. Boyle, F. Bäse (2005) Comparison of different efficiency criteria for hydrological model assessment. *Advances in Geosciences*, 5, 89-97. doi:10.5194/adgeo-5-89-2005.
- Krylov, A.N. (1931) O cislennom resenii uravnenija, kotorym v techniceskikh voprasah opredelajutsja castoty malyh kolebanii material'nyh system. *Izvestiya Akademii Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskikh i Estestvennykh Nauk*, 4, 491-539.
- Lamb R., K. Beven (1997) Using interactive recession curve analysis to specify a general catchment storage model. *Hydrology And Earth System Sciences*, 1(1), 101-113. doi:10.5194/hess-1-101-1997.
- Lanczos C. (1950) An iteration method for the solution of eigenvalue problem of linear differential and integral operators. *Journal Of The National Bureau Of Standards*, 45, 255-282. doi:/10.6028/jres.045.026 (disponible en: <http://nvlpubs.nist.gov/nistpubs/jres/045/4/V45.N04.A01.pdf>, abril de 2013).
- Lanczos C. (1952) Solution of systems of linear equations by minimized iterations. *Journal of Research of the National Bureau of Standards*, 49(1), 33-53. doi:10.1.1.130.3118 (disponible en: <http://nistdigitalarchives.contentdm.oclc.org/cdm/ref/collection/p13011coll6/id/91746>, abril de 2013).
- Langbein W.B. (1938) Some channel storage studies and their application to the determination of infiltration. *Transactions of the American Geophysical Union*, 19, 435-445. doi:10.1029/TR019i001p00435.

- Larabi A., F. De Smedt (1994) Solving three-dimensional hexahedral finite element groundwater models by preconditioned conjugate gradient methods. *Water Resources Research*, 30(2), 509-521. doi:10.1029/93WR02748.
- Lee C.H., W.P. Chen, R.H. Lee (2006) Estimation of groundwater recharge using water balance coupled with base-flow-record estimation and stable-base-flow analysis. *Environmental Geology*, 51(1), 73-82. doi:10.1007/s00254-006-0561-1.
- Legates D.R., G.J. McCabe (1999) Evaluating the use of “goodness-of-fit” measures in hydrologic and hydroclimatic model validation. *Water Resources Research*, 35(1), 233-241. doi:10.1029/1998WR900018.
- Lehoucq R.B., D.C. Sorensen (1996) Deflation techniques for an implicitly restarted Arnoldi iteration. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 17(4), 789-821. doi:10.1137/S0895479895281484.
- Lehoucq R.B., D.C. Sorensen, C. Yang (1998) *ARPACK User's Guide, Solution of Large-Scale Eigenvalue Problems by Implicitly Restarted Arnoldi Methods*. Society for industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, EEUU.
- Li H., A.D. Woodbury, P. Aitchison (1999) Application of the unsymmetric Lanczos method to radionuclide decay-chain transport in porous media. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 44(3), 355-372. doi:10.1002/(SICI)1097-0207(19990130)44:3<355::AID-NME507>3.0.CO;2-6.
- Lorenz D.L., G.N. Delin (2007) A regression model to estimate regional groundwater recharge. *Ground Water*, 45(2), 196-208. doi:10.1111/j.1745-6584.2006.00273.x.
- Lorenz E.N. (1956) *Empirical Orthogonal Functions and Statistical Weather Predictions*. Scientific Report 1, Statistical Forecasting Project, MIT. Cambridge, EEUU.
- Loucks D.P. (2002) IRAS, interactive aquifer-river simulation for policy impact prediction. En: *Regional Water systems Management; Water conservation; Water Supply and system Integration*, E. Cabrera et al. (Eds.) Balkema Publisher, The Netherlands.
- Mackay D.R., K.H. Law (1992) *An Implementation of a Generalized Lanczos Procedure for Structural Dynamic Analysis on Distributed Memory Computers*. Numerical Analysis Project, Computer Science Department, Stanford University. Stanford, EEUU. (disponible en: <ftp://db.stanford.edu/pub/ctr/reports/na/m/92/09/NA-M-92-09.pdf>, abril de 2013).
- Maddock III T. (1972) Algebraic technological function from a simulation model. *Water Resources Research*, 8(1), 129-134. doi:10.1029/WR008i001p00129.
- Marshall S.A. (1966) An approximate method for reducing the order of a linear system. *International Journal of Control*, 10, 642-648.
- Matía F., A. Jiménez (2003). *Teoría de Sistemas*. Sección de Publicaciones de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros Industriales de la Universidad Politécnica de Madrid. Madrid, España.
- Maier H.R., G.C. Dandy (2000) Neural networks for the prediction and forecasting of water resources variables: a review of modelling issues and applications. *Environmental Modelling and Software*, 15(1), 101-124. doi:10.1016/S1364-8152(99)00007-9.

- Maier H.R., A. Jain, G.C. Dandy, K.P. Sudheerc (2010) Methods used for the development of neural networks for the prediction of water resource variables in river systems: current status and future directions. *Environmental Modelling and Software*, 25(8), 891-909. doi:10.1016/j.envsoft.2010.02.003.
- Maillet E. (1905) *Essai D'hydraulique Souterraine et Fluviale*. Libraire Sci., A. Herman. Paris, Francia.
- Martins de Carvalho J.L. (1993) *Dynamical systems and Automatic Control*. Prentice Hall. New York, EEUU.
- Matonse A.H., Kroll, C. (2009) Simulating low streamflows with hillslope storage models. *Water Resources Research*, 45, W01407. doi:10.1029/2007WR006529.
- McCuen R.H, Z. Knight, A.G. Cutter (2006) Evaluation of the Nash-sutcliffe efficiency index. *Journal of Hydrologic Engineering*, 11(6), 597-602. doi:10.1061/(ASCE)1084-0699(2006)11:6(597).
- McCulloch W.S., W. Pitt (1990) A logical calculus of ideas immanent in neurons activity. *Bulletin of Mathematical Biology*, 5(4), 115-133. doi:10.1007/bf02478259 (disponible en: <http://www.cs.cmu.edu/afs/cs/user/bhiksha/WWW/courses/deeplearning/10805-f13/pdfs/McCulloch.and.Pitts.pdf>, abril de 2013). Reprint of McCulloch W.S., W. Pitt (1943), *Bulletin Of Mathematical Biophysics*, 65, 115-133.
- McDonald M.G., A.W. Harbaugh (1988). *A Modular Three-Dimensional Finite-Diference Ground-Water Flow Model*. U.S. Geological Survey Techniques for Water Resources Investigations. Book 6, chapter A1.
- McPhee J., W.G. Yeh (2008) Groundwater management using model reduction via orthogonal functions. *Journal of Water Resources Planning and Management*, 134(2), 161-170. doi:10.1061/(ASCE)0733-9496(2008)134:2(161).
- Meijerink J.A., A.H. van der Vorst (1977) An iterative solution method for linear systems of which the coefficient matrix is a symmetric M-matrix. *Mathematics of Computation*, 31(137), 148-162. doi:10.2307/2005786. (disponible en: [http://neumann.math.tufts.edu/~scott/math250\\_S12/MeijerinkvanderVorst\\_1977.pdf](http://neumann.math.tufts.edu/~scott/math250_S12/MeijerinkvanderVorst_1977.pdf), abril de 2013)
- Mendoza G.F., T.S. Steenhuis, M.T. Walter, J.Y Parlange (2003) Estimating basin-wide hydraulics parameters of semi-arid mountainous watershed by recession-flow analysis. *Journal Of Hydrology*, 279(1-4), 57-69. doi:10.1016/S0022-1694(03)00174-4.
- Meyboom, P. (1961) Estimating ground-water recharge from stream hydrographs. *Journal of Geophysical Research*, 66(4), 1203-1214. doi:10.1029/JZ066i004p01203.
- Morel-Seytoux H.J., G.J. Daly (1975) A discrete kernel generator for stream-aquifer studies. *Water Resources Research*, 11(2), 253-260. doi:10.1029/WR011i002p00253.
- Mizumura K. (2002) Drought flow from a hillslope. *Journal of Hydrologic Engineering*, 7(2), 109-115. doi:10.1061/(ASCE)1084-0699(2002)7:2(109).
- Moriasi D.N., J.G. Arnold, M.W. Van Liew, R.L. Bingner, R.D. Harmel, T.L. Veith (2007) Model evaluation guidelines for systematic quantification of accuracy in watershed simulations. *Transactions of the ASABE*, 50(3), 885-900. (disponible en: <http://ddr.nal.usda.gov/bitstream/10113/9298/1/IND44003774.pdf>, abril de 2013).

- Naff R.L., E.R. Banta (2008) *The US Geological Survey Modular Ground-Water Model-PCGN: A Preconditioned Conjugate Gradient Solver with Improved Nonlinear Control*. USGS Open File Report 2008-1331. Reston, VA. (disponible en: <http://pubs.usgs.gov/of/2008/1331/pdf/OF08-1331-508.pdf>, abril de 2013).
- Nash, J.E., J.V. Sutcliffe (1970) River flow forecasting through conceptual models part I - A discussion of principles. *Journal of Hydrology*, 10(3), 282–290. doi:10.1016/0022-1694(70)90255-6.
- Nathan R.J., T.A. McMahon (1990) Evaluation of automated techniques for base flow and recession analyses. *Water Resources Research*, 26(7), 1465-1473. doi:10.1029/WR026i007p01465.
- Nicely, D.A. (2008) *Restarting the Lanczos Algorithm for Large Eigenvalue Problems and Linear Equations*. Disertación Doctoral, Baylor University.
- Nikolos I.K., M. Stergiadi, M. Papadopoulou, G.P. Karatzas (2008) Artificial neural networks as an alternative approach to groundwater numerical modelling and environmental design. *Hydrological Processes*, 22, 3337–3348. doi:10.1002/hyp.6916
- Nour-Omid B., R.W. Clough (1984) Dynamic analysis of structures using Lanczos coordinates. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 12(4), 565–577. doi:10.1002/eqe.4290120410.
- Nour-Omid B., B.N. Parlett, T. Ericsson, P.S. Jensen (1987) How to implement the spectral transformation. *Mathematics of Computation*, 48(178), 663-178. doi:10.1090/S0025-5718-1987-0878698-5.
- Olin M. (1995) Estimation of base level for an aquifer from recession rates of groundwater levels. *Hydrogeology Journal*, 3(2), 40-51. doi:10.1007/s100400050062.
- Olson A.K.H. (2005) *Model Order Reduction with Rational Krylov Methods*. Disertación Doctoral. KTH Numerisk analys och datalogi. Estocolmo, Suecia.
- Ostrowski A.M. (1958-1959) On the convergence of the Rayleigh quotient iteration for the computation of characteristic roots and vectors I-VI. Archive for Rational Mechanics and Analysis, I 1, 233-241; II 2, 423-428; III 3, 325-340; IV 3, 341-347; V 3, 372-481; VI 4, 153-165.
- Paige C.C. (1971) *The Computation of Eigenvalues and Eigenvectors of Very Large Sparse Matrices*. Disertación Doctoral, University of London.
- Paige C.C. (1972) Computational variants of Lanczos method for the eigenproblem. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 10, 373-381. doi:10.1093/imamat/10.3.373.
- Paige C.C. (1976) Error analysis of Lanczos algorithm for tridiagonalizing a symmetric matrix. *IMA Journal of Applied Mathematics*, 18, 341-349. doi:10.1093/imamat/18.3.341
- Paige C.C. (1980) Accuracy and Effectiveness of the Lanczos Algorithm for the Symmetric Eigenproblem. *Linear Algebra and Its Applications*, 34, 235-258. doi:10.1016/0024-3795(80)90167-6.
- Paige C.C. y Saunders M.A. (1975) Solution of sparse indefinite systems of linear equations. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 12, 617-629. doi:10.1137/0712047.

- Parlange J.Y., F. Stagnitti, A. Heilig, J. Szilagyi, M.B. Parlange, T.S. Steenhuis, W.L. Hogarth, D. A. Barry, L. Li (2001) Sudden drawdown and drainage of a horizontal aquifer. *Water Resources Research*, 37 (8), 2097-2101. doi:10.1029/2000WR000189.
- Parlett B.N. (1980) *The Symetric Eigenvalue Problem*. Prentice Hall. Englewood Cliffs, EEUU.
- Parlett B.N, D.S. Scott (1979) The Lanczos algorithm with selective reorthogonalization. *Mathematics of Computation*, 33(145), 217-238. (disponible en: <http://www.ams.org/journals/mcom/1979-33-145/home.html>, abril de 2013).
- Parlett B.N., D.R. Taylor, Z.A. Liu (1985) A look ahead lanczos algorithm for unsymmetric matrices. *Mathematics of Computation*, 44(169), 105-124. (disponible en: <http://www.ams.org/journals/mcom/1985-44-169/home.html>, abril de 2013)
- Perdon A.M., G. Gambolati (1986) Extreme eigenvalues of large sparse matrices by Rayleigh quotient and modified conjugate gradients. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 56(3), 251-264. doi:10.1016/0045-7825(86)90041-1.
- Pettyjohn W.A., R. Henning (1979) *Preliminary Estimate of Ground-Water Recharge Rates, Related Streamflow And Water Quality In Ohio*. Ohio State University Water Resources Centre Project Completion Report No 552, 323pp.
- Pohlhausen E. (1921) Berechnung der eigenschwingungen statisch-bestimmter Fachwerke. *ZAMM Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 1, 28-42.
- Pollock D.W. (1994) *User's Guide for MODPATH/MODPATH-PLOT, Version 3: A Particle Tracking Post Processing Package For MODFLOW*. U.S. Geological Survey Finite-Differences Ground-Water Flow Model. USGS Open-file Report 94-464.
- Polubaribova-Kochina P.YA. (1962) *Theory Of Groundwater Movement*. Princeton University Press. Princenton, EEUU.
- Press W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P Flannery (1986) *Numerical Recipes in FORTRAN 77: The Art of Scientific Computing*. Cambridge University Press. Cambridge, Reino Unido.
- Press W.H., S.A. Teukolsky, W.T. Vetterling, B.P Flannery (1986) *Numerical Recipes in FORTRAN 90: The Art of Parallel Scientific Computing*. Cambridge University Press. Cambridge, Reino Unido.
- Pulido-Velázquez, D. (2005) *Solución de no Linealidades en la Aplicación del Método de Autovalores para la Simulación de Sistemas de Uso Conjunto. Extensión a Acuíferos no Confinados*. Disertación Doctoral, Universitat Politècnica de València.
- Pulido-Velázquez D., A. Sahuquillo, J. Andreu (2006) A two-step explicit solution of the Boussinesq equation for efficient simulation of unconfined aquifers in conjunctive-use models. *Water Resources Research*, 42, W05423. doi:10.1029/2005WR004473.
- Pulido-Velázquez D., A. Sahuquillo, J. Andreu, M. Pulido-Velázquez (2007a) A general methodology to simulate groundwater flow of unconfined aquifers with a reduced computational cost. *Journal of Hydrology*, 338, 42– 56. doi:10.1016/j.jhydrol.2007.02.009.



- Pulido-Velázquez D., A. Sahuquillo, J. Andreu, M. Pulido-Velázquez (2007b) An efficient conceptual model to simulate water body-aquifer interaction in conjunctive use management models. *Water Resources Research*, 43, W07407, doi:10.1029/2006WR005064.
- Pulido-Velázquez D., D. Alfeld, J. Andreu, A. Sahuquillo (2008) Reducing the computational cost of unconfined groundwater flow in conjunctive-use models at basin scale assuming lineal behaviour: the case of Adra-Campo de Dalías. *Journal of Hydrology*, 353, 159-174. doi:10.1016/j.jhydrol.2008.02006.
- Pulido-Velázquez D., A. Sahuquillo, J. Andreu (2009) Treatment on non-linear boundary conditions in groundwater modelin with eigenvalue methods. *Journal of Hydrology*, 368, p. 194-204. doi:10.1016/j.jhydrol.2009.02.002.
- Pulido-Velázquez M. (2003) *Optimización Económica de la gestión del Uso Conjunto de Aguas superficiales y Subterráneas en un Sistema de Recursos Hídricos. Contribución al Análisis Económico Propuesto en la Directiva Marco Europea del Agua*. Disertación Doctoral. Departamento de Ingeniería Hidráulica y Medio Ambiente. Universitat Politècnica de València.
- Pulido-Velázquez M., A. Sahuquillo-Herraiz, J.C. Ochoa-Rivera, D. Pulido-Velázquez (2005) Modeling of stream-aquifer interaction: the embedded multireservoir model. *Journal of Hydrology*, 313, 166-181. doi:10.1016/j.jhydrol.2005.02.026.
- Ramos F., J. Ferrer, A. Sahuquillo (1983) Determinación de los autovalores y autofunciones de acuíferos relacionados con ríos. *Memorias de la IV Asamblea Nacional de Geodesia y Geofísica*. Madrid, España.
- Rao S. (2007) *Numerical Methods for Scientists and Engineers*. Tercera Edición. Prentice-Hall of India Learning Private. New Delhi, India.
- Rayleigh J.S. (1937) *The Theory of Sound*, Segunda Edición. MacMillan Editores. New York, EEUU.
- Reiche L., W.B. Gragg (1990) FORTRAN subroutines for updating the QR decomposition. *ACM Transaction on Mathematical Software*, 16(4), 369-377. doi:10.1145/98267.98291.
- Reid J.K. (1971) On the method of conjugate gradients for the solution of large sparce systems of linear equations. En: *Large Sparce Sets of Linear Equations*, 231-253. J.K. Reid (Eds.). Academic Press. New York, EEUU.
- Remson I., G.W. Hornberger, F.J. Molz (1971) *Numerical Methods in Subsurface Hydrology*. John Wiley and Sons Inc. New York, EEUU.
- Remy N., A. Boucher, J. Wu. (2009) *Applied Geostatistics with SGeMS*. Cambridge University Press. New York, EEUU.
- Rice J.R (1966) Experiments on Gram-Schmidt orthogonalization. *Mathematics of Computations*, 20(94), 325-328. doi:10.1090/S0025-5718-1966-0192673-4.
- Rivera A., A. Sahuquillo, J. Andreu, A. Mukherji (2002) Opportunities of conjunctive use of groundwater and surface water. En: *Groundwater Intensive Use*, 371-383. A. Sahuquillo *et al.* (Eds.). A.A. Balkema Publishers. Londres, Reino Unido. doi: 10.1201/9781439833629.ch31.

- Rocha D., J. Feyen, A. Dessargues (2007) Comparative analysis between analytical approximations and numerical solutions describing recession flow in unconfined hillslope aquifers. *Hydrogeology Journal*, 15(6), 1077-1091. doi:10.1007/s10040-007-0170-4.
- Rogers L.L., F.U. Dowla (1994) Optimization of groundwater remediation using artificial neural networks with parallel solute transport modelling. *Water Resources Research*, 30(2), 457-418. doi:10.1029/93WR01494.
- Rommers J. (2008) Modal approximation and computation of dominant poles. *En: Model Order Reduction: Theory, Research Aspects and Applications*, Schilders W.H.A. et al. (Eds.). Springer-Verlag. Berlin, Alemania.
- Rorabaugh, M.I. (1960) Use of water levels in estimating aquifer constants in a finite aquifer. *International Association of Scientific Hydrology Commission of Subterranean Waters Publication*, 52. 314-323.
- Rorabaugh, M.I. (1964). Estimating changes in bank storage and groundwater contribution to stream flow. *International Association of Scientific Hydrology Publication*, 63, 432-441.
- Rorabaugh M.I., W.D. Simmons. (1966). *Exploration Of Methods Relating Ground Water To Surface Water, Columbia River Basin, Second Phase*. USGS open-file Report.
- Ruhe A. (1983) Numerical aspects of Gram-Schmidt orthogonalization of vectors. *Linear Algebra and its Applications*, 52-53, 591-601. doi:10.1016/0024-3795(83)80037-8.
- Ruhe A. (1984) Rational Krylov sequences for eigenvalue computations. *Linear Algebra and Its Applications*, 58, 391-405. doi:10.1016/0024-3795(84)90221-0.
- Ruhl J.F., B. Shmagin (2002) *Estimates of Recharge to Unconfined Aquifers and Leakage to Confined Aquifers in the Seven-County Metropolitan Area of Mineapolis-St. Paul, Minnesota*. U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 02-4092, 32p.
- Rumelhart D., G. Hinton, R. Williams (1986) Learning representations by back propagation errors. *Nature*, 323(9), 533-536. doi:10.1038/323533a0.
- Rupp D.E., J.S. Selker (2006) On the use of the Boussinesq equation for interpreting recession hydrographs from sloping aquifers. *Water Resources Research*, 42(12), W12421. doi:10.1029/2006WR005080.
- Rutishauser H. (1967) Description of algol 60. *Handbook for Automatic Computation*, Vol 1a. Springer-Verlag. Berlin, Alemania.
- Rutishauser H. (1969) Computational aspects of F.L. Bauer's simultaneous iteration method. *Numerische Mathematik*, 13 , 4-13. doi:10.1007/BF02165269.
- Rutishauser H. (1970) Simultaneous iteration method for symmetric matrices. *Numerische Mathematik*, 16(3), 205-223. doi:10.1007/BF02219773.
- Rutledge A.T. (1993). *Computer Programs For Describing Recession Of Ground-Water Discharge For Estimating Mean Ground-Water Recharge And Discharge From Stream-flow Records*. USGS WRI 93-4121.
- Rutledge A.T (1997) *Model-Estimated Ground-Water Recharge and Hydrograph of Ground-Water discharge to a Stream*. U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 97-4253, 29 p.

- Rutledge A.T. (1998) *Computer Programs For Describing The Recession Of Ground-Water Discharge And For Estimating Mean Ground-Water Recharge And Discharge From Streamflow Data-Update*: U.S. Geological Survey Water-Resources Investigations Report 98-4148, 43 p.
- Rutledge A.T. (2000) *Considerations For Use Of The RORA Program To Estimate Ground-Water Recharge From Streamflow Records*: U.S. Geological Survey Open-File Report 00-156, 44 p.
- Rutledge A.T. (2005) The appropriate use of the Rorabaugh model to estimate ground water recharge. *Ground Water*, 43(3), 292-293. doi:10.1111/j.1745-6584.2005.0022.x.
- Rutledge A.T. (2006) Basic concepts for the linear model of groundwater level Recession. *Ground Water*, 44(3), 483-487. doi:10.1111/j.1745-6584.2005.00157.x.
- Rutledge A.T. (2008) Update on the use of RORA program for recharge estimation. *Ground Water*, 46(1), 374-382. doi:10.1111/j.1745-6584.2007.00392.1.x.
- Rutledge A.T., C.C. Daniel III (1994). Testing an automated method to estimate ground-water recharge from streamflow records. *Ground Water*, 32(2), 180-189. doi:10.1111/j.1745-6584.1994.tb00632.x.
- Saad Y. (1984) Chebyshev acceleration techniques for solving nonsymmetric eigenvalue problems. *Mathematics of Computation*, 42(166), 567-588. (disponible en: <http://www.ams.org/journals/mcom/1984-42-166/home.html>, abril de 2013).
- Saad Y. (1994a) ILUT: A dual threshold incomplete LU factorization. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 1(4), 387-402. doi:10.1002/nla.1680010405.
- Saad Y. (1994b) SPARSKIT: *A Basic Toolkit for Sparce Matrix Computations*. Technical Report, Computer Science Department, University of Minnesota, Minneapolis, EEUU.
- Saad Y. (2003) *Iterative Methods For Sparce Linear Systems*. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, EEUU.
- Saad Y., M.H. Schultz (1986) GMRES: A generalized minimal residual algorithm for solving nonsymmetric linear systems. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 7(3), 856-869. doi:10.1137/0907058.
- Sadkane M., R.B. Sidje (1998) Variable block Davidson method with deflation for solving large sparse eigenproblems, presented at the *Workshop on Numerical Methods for Large Scale Systems of Equations*, Australian National University, Canberra, Australia.
- Sahuquillo A. (1983a) An eigenvalue numerical thecnique for solving unsteady linear groundwater model continuously in time. *Water Resources Research*, 19(1), 97-93. doi:10.1029/WR019i001p00087.
- Sahuquillo, A. (1983b) Modelos pluricelulares englobados. En: *Utilización Conjunta de Aguas superficiales y Subterráneas*, B4. Servicio Geoleológico de Obras Públicas y Universidad Politécnica de Valencia (Eds.). Publicaciones de Servicio Geoleológico de Obras Públicas de España.
- Sahuquillo A. (1983c) Panorámica mundial y tipología del uso conjunto. En: *Utilización Conjunta de Aguas superficiales y Subterráneas*, A1. Servicio Geoleológico de Obras Públicas y Universidad Politécnica de Valencia (Eds.). Publicaciones de Servicio Geoleológico de Obras Públicas de España.

- Sahuquillo, A. (1983d) El método de los autovalores. En: *Utilización Conjunta de Aguas superficiales y Subterráneas*, B4. Servicio Geológico de Obras Públicas y Universidad Politécnica de Valencia (Eds.). Publicaciones de Servicio Geológico de Obras Públicas de España.
- Sahuquillo A., F. Octavio (1984) Estudio de las posibilidades de regulación en el manantial de Arteta (Navarra). *Memorias del III Simposio de Hidrogeología*. Madrid, España.
- Sahuquillo A. (1985) Groundwater in water resources planning: conjunctive use. *Water International*, 10, 57-63. doi:10.1080/02508068508686308.
- Sahuquillo A., J. Andreu (1988) The eigenvalues approach for solving linear groundwater flow problems. En: *Groundwater Flow and Quality Modelling*, 151-164. E. Custodio *et al.* (Eds.). D. Reidel Publishing Company.
- Sahuquillo A. (1989a) Economic aspects of the conjunctive use of groundwater and surface water. *Symposium and Workshop on Ground Water Economics*. Elsevier Science Pub. B.V. Barcelona, España.
- Sahuquillo A. (1989b) L'usage conjoint des eaux de surface et des eaux souterraines dans la gestion des ressources hydrauliques. *Hydrogeologie*, 2, 101-110.
- Sahuquillo, A. (1992). Simulación de los acuíferos en los modelos de gestión. En: *Conceptos y Métodos para la Planificación Hidrológica*, 137-170. Andreu J. (Eds.). Universidad Politécnica de Valencia. Valencia, España.
- Sahuquillo A. (2000). La utilización conjunta de aguas superficiales y subterráneas en las sequías. *Revista de la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales*, 94(2), 183-196.
- Sahuquillo A. (2007) Conjunctive use of surface water and groundwater. En: *Groundwater*, 3, 206-224. Silveira L., E. Usunoff (Eds.). UNESCO Encyclopedia of Life Support Systems (EOLSS), Eolss Publishers Co. Ltd. Oxford, Reino Unido.
- Sahuquillo A., J.J. Gómez-Hernández. (2003) Comment on "Derivation of effective hydraulic parameters of a karst aquifer from discharge hydrograph analysis" by S.J. Baedke and N.C. Krothe. *Water Resources Research*, 39, 1152. doi:10.1029/2002WR001472.
- Sahuquillo A., E. Cassiragga (2010a). Introducción. En: *Modelos de Uso Conjunto de Aguas Superficiales y Subterráneas*, 1-52. A. Sahuquillo *et al.* (Eds.). Publicación Del Instituto Geológico y Minero de España (IGME). Madrid, España.
- Sahuquillo A., E. Cassiragga (2010b). Relaciones río-acuífero. En: *Modelos de Uso Conjunto de Aguas Superficiales y Subterráneas*, 53-88. A. Sahuquillo *et al.* (Eds.). Publicación Del Instituto Geológico y Minero de España (IGME). Madrid, España.
- Sahuquillo A., E. Cassiragga (2010c). Modelos lineales. En: *Modelos de Uso Conjunto de Aguas Superficiales y Subterráneas*, 151-196. A. Sahuquillo *et al.* (Eds.). Publicación Del Instituto Geológico y Minero de España (IGME). Madrid, España.
- Sahuquillo A., E. Cassiragga (2010d). El método de los autovalores. En: *Modelos de Uso Conjunto de Aguas Superficiales y Subterráneas*, 227-297. A. Sahuquillo *et al.* (Eds.). Publicación Del Instituto Geológico y Minero de España (IGME). Madrid, España.

- Sartoretto F., G. Pini, G. Gambolati (1989) Accelerated simultaneous iterations for large finite element eigenproblems. *Journal Of Computational Physics*, 81(1), 53-69. doi:10.1016/0021-9991(89)900064-8.
- Schur I. (1909) Über die charakteristischen wurzeln einer linearen substitution mit einer anwendung auf die theorie der integralgleichungen. *Mathematische Annalen*, 66, 488-510. doi:10.1007/BF01450045.
- Scott D.S. (1982) The advantages of inverted operators in Rayleigh-Ritz operations. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 3(1), 68-75. doi:10.1137/0903006.
- Shevenell L. (1996) Analysis of well hydrographs in karst aquifer: estimates of specific yields and continuum transmissivities. *Journal Of Hydrology*, 174(3-4), 331-335. doi:10.1016/0022-1694(95)02761-0.
- Siade A.J., M. Putti, W.G. Yeh (2010) Snapshot selection for groundwater model reduction using proper orthogonal decomposition. *Water Resources Research*, 46(8), W08539. doi:10.1029/2009WR008792.
- Simon H.D. (1984) The Lanczos algorithm with partial reorthogonalization. *Mathematics of Computations*, 42(165), 115-142. doi:10.1090/S0025-5718-1984-0725988-X. (disponible en: <http://www.ams.org/journals/mcom/1984-42-165/home.html>, abril de 2013).
- Singh J., H.V. Knapp, M. Demissie (2004) Hydrologic Modeling of the Iroquois River Watershed Using HSPF and SWAT. ISWS CR 2004-08. Campaign Ill., Illinois state Water Survey (disponible en: <http://www.isws.illinois.edu/pubdoc/CR/ISWSCR2004-08.pdf>, abril de 2013).
- Singh K.P. (1968) Some factors affecting baseflow. *Water Resources Research*, 4(5), 985-999. doi:10.1029/WR004i005p00985.
- Singh, K.P., J.B. Stall (1971) Derivation of base flow recession curves and parameters. *Water Resources Research*, 7(2), 292-303. doi:10.1029/WR007i002p00292.
- Sirovich L. (1987) Turbulence and the dynamics of coherent structures. I - Coherent structures. II - Symmetries and transformations. III - Dynamics and scaling, *Quarterly of Applied Mathematics*, 45, 561-571, 573-590.
- Sleijpen G.L.G., H.A. van der Vorst (1996) A Jacobi-Davidson iteration method for linear eigenvalue problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 17(2), 401-425. doi:10.1137/S0895479894270427.
- Sleijpen G.L.G., J.G.L. Booten, D.R. Fokkema, H.A. van der Vorst (1996) Jacobi-Davidson type methods for generalized eigenproblems and polynomial eigenproblems. *BIT Numerical Mathematics*, 36(3), 595-633. doi: 10.1007/BF01731936.
- Sloto R.A., M.Y. Crouse (1996) *HYSEP: A Computer Program for Streamflow Hydrograph Separation and Analysis*. US Geological Survey, Water Resources Investigations Report 96-4040 (disponible en: <http://water.usgs.gov/software/HYSEP/code/doc/hysep.pdf>, abril de 2013).
- Smakhtin V.Y., K. Sami, D.A. Hughes (1998) Evaluating the performance of deterministic daily rainfall-runoff model in low-flow a context. *Hydrological Processes*, 12(5), 797-811. doi:10.1002/(SICI)1099-1085(19980430)12:5<797::AID-HYP632>3.0.CO;2-S.

- Smakhtin V.U. (2001) Low flow hydrology: a review. *Journal of Hydrology*, 240(3-4), 147-186. doi:10.1016/S0022-1694(00)00340-1.
- Smith B., J. Boyle, J. Dongarra, B. Garbow, Y. Ikebe, V. Klema, C. Moler (1976) *Matrix Eigensystem Routines, EISPACK Guide*. Lecture Notes in Computer Science, Volume 6, Springer Verlag, Berlin, Alemania.
- Spalding C.P., R. Khaleel (1991) An evaluation of analytical solutions to estimate draw-downs and stream depletions by wells. *Water Resources Research*, 27(4), 597-609. doi:10.1029/91WR00001.
- Sophocleus M.A., A. Koussis, J.L. Martin, S. Perkins (1995) Evaluation of simplified stream-aquifer depletions models for water rights administration. *Ground Water*, 33(4), 579-588. doi:10.1111/j.1745-6584.1995.tb00313.x.
- Sorensen D.C. (1992) Implicit application of polynomial filters in a  $k$ -step Arnoldi method. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 13(1), 217-240. doi:10.1137/0613025.
- Sorensen D.C. (1996) *Implicitly Restarted Lanczos-Arnoldi Methods for Large Scale Eigenvalue Calculation*. National Science Foundation ASC-9408795 Technical Report. Rice University, Houston TX. (disponible en: [http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/pdf/arpack\\_ref.pdf](http://people.sc.fsu.edu/~jburkardt/pdf/arpack_ref.pdf), abril de 2013).
- Stathopoulos A., J.R. McCombs (1999) A parallel, block, Jacobi-Davidson implementation for solving large eigenproblems on coarse grain environments. En *Proceedings of the International Conference on Parallel and Distributed Processing Techniques and Applications*, vol. VI, 2920-26. CSREA Press. (disponible en: <http://www.cs.wm.edu/andreas/publications/paralJD.pdf>, abril de 2013).
- Stathopoulos A., Y. Saad (1999) Restarting techniques for the Jacobi-Davidson symmetric eigenvalue methods. *Electronic Transactions on Numerical Analysis*, 7, 163-181. doi:10.1.1.40.6734.
- Stewart G.W. (1976) Simultaneous iteration for computing invariant subspaces of non-Hermitian matrices. *Numerische Mathematik*, 25(2), 123-136. doi:10.1007/BF01462265.
- Stewart G.W. (1978) *SRIT: A FORTRAN Subroutine to Calculate the dominant Invariant Subspace of a Nonsymmetric Matrix*. Technical Report TR-154. Department of Computer Science, University of Maryland.
- Stewart G.W. (2001) A Krylov-Schur algorithm for large eigenproblems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 23(3), 601-614. doi:10.1137/S0895479800371529.
- Sujono J., S. Shiomi, H. Kazuaki (2004) A comparison of techniques for hydrograph recession analysis. *Hydrological Processes*, 18(3), 403-413. doi:10.1002/hyp.1247.
- Szilagy J., M.B. Parlange (1998) Base flow separation based on the analytical solution of the Boussinesq equation. *Journal of Hydrology*, 204(1-4), 251-260. doi:10.1016/S0022-1694(97)00132-7.
- Szilagy J., M.B. Parlange, J.D. Albertson (1998) Recession flow analysis for aquifer parameter determination. *Water Resources Research*, 34(7), 1851-1857. doi:10.1029/98WR01009.

- Szilagy J., Z. Gribovski, P. Kalicz (2007) Estimation of catchment-scale evapotranspiration from baseflow recession data: numerical model and practical application results. *Journal Of Hydrology*, 336(1-2), 206-217. doi:10.1016/j.jhydrol.2007.01.004.
- Tallaksen L.M. (1995) A review of baseflow recession analysis. *Journal of Hydrology*, 165(1-4), 349-370. doi:10.1016/0022-1694(94)02540-R.
- Theis C.V. (1941) The effect of a well on the flow nearby stream. *American Geophysical Union Transactions*, 22(3), 734-738. doi:10.1029/TR022i003p00734.
- Trefethen L.N. y D. Bau (1997) *Numerical Linear Algebra*. SIAM Publication. Philadelphia, EEUU.
- Toebes C., C.C.Strang (1964) On recession curves, 1. Recession's equations. *Journal of Hydrology*, New Zealand, 3(2), 2-15.
- Tomás A.E. (2009) *Implementación Paralela de Métodos de Krylov con Reinicio para Problemas de Valores Propios y Singulares*. Disertación Doctoral. Universitat Politècnica de València.
- Troch P.A., C. Paniconi, E.E. van Loon (2003) Hillslope-storage Boussinesq model for subsurface flow and variable source areas along complex hillslopes: 1. Formulation and characteristic response. *Water Resources Research*, 39(11), 1316. doi:10.1029/2002WR001728.
- USACE, US Army Corps of Engineers (1989) HEC-5, *Simulation of Flood Control and Conservation Systems*. US Army Corps of Engineers, Hydrologic Engineering Center. Davis, EEUU.
- Van der Veen H.I., K. Vuik (1995) Bi-Lanczos with partial reorthogonalization. *Computers and Structures*, 56(4), 605-613. doi:10.1016/0045-7949(94)00565-K.
- Van Noorden T., J. Roomes (2007) Computing a partial generalized real Schur form using the Jacobi-Davidson method. *Numerical Linear Algebra with Applications*, 14(3), 197-215. doi:10.1002/nla.523.
- Varga A. (1995) Enhanced modal approach for model reduction. *Mathematical Modelling of Systems*, 1(2), 91-105. doi: 10.1080/13873959508837010.
- Vermeulen P.T.M., A.W. Heemink., C.M.B Te Stroet (2004a) Reduced models for linear groundwater flow using empirical orthogonal functions. *Advances in Water Resources*, 27(1), 57-69. doi:10.1016/j.advwatres.2003.09.008.
- Vermeulen P.T.M., A.W. Heemink., C.M.B Te Stroet (2004b) Low dimensional modeling of numerical groundwater flows. *Hydrological Processes*, 18(8), 1487-1504. doi:10.1002/hyp.1424.
- Vermeulen P.T.M., A.W. Heemink, J.R. Valstar (2005) Inverse modeling of groundwater flow using model reduction. *Water Resources Research*, 41(6), W09417. doi:10.1029/2004WR003698.
- Vermeulen P.T.M., C.M.B Te Stroet, A.W. Heemink (2006) Model inversion of transient nonlinear groundwater flow model using model reduction. *Water Resources Research*, 42(9), W06003. doi:10.1029/2005WR004536.

- Vogel R.M., C.N. Kroll. (1992) Regional geohydrologic-geomorphic relationships for estimating low flow statistics. *Water Resources Research*, 28(9), 2451-2458. doi:10.1029/92WR01007.
- von Mises R., H. Pollaczek-Geiringer (1929) Praktische verfahren der gleichung-sauflösung. *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik*, 9(2), 152-164. doi:10.1002/zamm.19290090206.
- Watkins D.S., L. Elsner (1991) Chasing algorithms for eigenvalue problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 12(2), 374-384. doi:10.1137/0612027.
- Watkins D.S. (1993) Some perspectives on the eigenvalue problem. *SIAM Review*, 35(3), 430-471. doi:10.1137/1035090.
- Watts III J.W. (1981) A conjugate gradient truncated direct method for the iterative solution of the reservoir simulation pressure equation. *Journal of the Society of Petroleum Engineers*, 21(3), 345-353. doi: 10.2118/8252-PA.
- Werner P.W. (1957) Some problems in non-artesian groundwater flow. *Transaction of the American Geophysical Union*, 38(4), 511-518. doi:10.1029/TR038i004p00511.
- Wilkinson J.H. (1958) The calculation of eigenvectors of codiagonal matrices. *The Computer Journal*, 1(2), 90-96. doi:10.1093/comjnl/1.2.90.
- Wilkinson J.H. (1965) *The Algebraic Eigenvalue Problem*. Clarendon Press. Oxford, Reino unido.
- Wilkinson J.H. (1968) Global convergence of tridiagonal QR algorithm with origin shifts. *Linnear Algebra and Its Applications*, 1(3), 409-420. doi:10.1016/0024-3795(68)90017-7.
- Wilkinson J.H., Reinsch C. (1971) *Handbook For Automatic Computation*. Srpinger-Verlag. Berlin, Alemania.
- Winter T.C., W.H. Judson, O.L. Franke, W.M. Alley (1998) *Groundwater and Surface Water: A Single Resource*. Circular 1139, U.S. Geological Survey. Denver, EEUU.
- Wittenberg H. (1999) Baseflow recession and recharge as nonlinear storage processes. *Hydrological Processes*, 13(5), 715-726. doi:10.1002/(SICI)1099-1085(19990415)13:5<715::AID-HYP775>3.0.CO;2-N.
- Wittenberg H., M. Sivapalan (1999) Watershed groundwater balance estimation using streamflow recession analysis and baseflow separation. *Journal Of Hydrology*, 219(1-2), 20-33. doi:10.1016/S0022-1694(99)00040-2.
- World Meteorological Organization (1974) *International Glossary of Hydrology*. World Meteorological Organization Publication. Ginebra, Suiza.
- Woodbury A., W.S. Dumbur, B. Nour-Omid (1990) Application of Arnoldi algorithm to the solution of the advection-dispersion equation. *Water Resources Research*, 26(10), 2579-2590. doi:10.1029/WR026i010p02579.
- Woodbury A., K. Zhang (2001) Lanczos method for the solution of groundwater flow in discretely fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 24(6), 621-630. doi:10.1016/S0309-1708(00)00047-6.



- Wu K., H. Simon (1999) Wu K., H. Simon (1999) *TRLAN user guide*. Lawrence Berkeley National Laboratory tech report number LBNL-42953.
- Wu K., H. Simon (2000) Thick-restart Lanczos method for large symmetric eigenvalue problems. *SIAM Journal on Matrix Analysis and Applications*, 22(2), 602-616. doi:10.1137/S0895479898334605.
- Zecharias B., W. Brutsaert (1988) The influence of basin morphology on groundwater outflow. *Water Resources Research*, 24(10), 1645-1650. doi:10.1029/WR024i010p01645.
- Zettl A. (2005) *Sturm-Liouville Theory*. AMS Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 121. Providence, EEUU.
- Zhang K. (2000) *The Modal Reduction Method for Simulation of Groundwater Flow and Multi-Species Contaminant Transport in Fractures Porous Media*. Disertación Doctoral. The University of Manitoba.
- Zhang K., A.D. Woodbury (2000) The Arnoldi reduction technique for efficient direct solution of radionuclide decay chain transport in dual porosity media. *Journal of Contaminant Hydrology*, 44(3-4), 387-416. doi:10.1016/S0169-7722(00)00101-7.
- Zhang K., A.D. Woodbury, W.S. Dunbar (2000) Application of the Lanczos algorithm to the simulation of groundwater flow in dual-porosity media. *Advances in Water Resources*, 23(6), 579-589, doi:10.1016/S0309-1708(99)00043-3.
- Zhang K., A.D. Woodbury (2002) A Krylov finite element approach for multi-species contaminant transport in discretely fractured porous media. *Advances in Water Resources*, 25(7), 705-721. doi:10.1016/S0309-1708(02)00084-2.