UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

.

Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda.

Parte III: Cuando el mercado es perfecto y existe especulación

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Romero Bauset, José Vicente; Roselló Ferragud, María Dolores; Sánchez Sánchez, Almudena; Villanueva Micó, Rafael Jacinto (jccortes@imm.upv.es;jvromero@imm.upv.es; alsncsnc@posgrado.upv.es; drosello@imm.upv.es;rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este trabajo se estudia una variación del modelo dinámico clásico de oferta y demanda con inventario que considera en su formulación la posibilidad de que los demandantes sean especuladores. El modelo está basado en la formulación de una ecuación diferencial ordinaria que describe la trayectoria temporal del precio a partir de una función de oferta estándar y una función de demanda que considera la posible existencia de compradores que actúen con fines especulativos. En el trabajo se interpreta económicamente el modelo, se obtiene su solución y analiza su comportamiento a largo plazo. Posteriormente, se relaciona la solución del modelo con la que proporciona el modelo clásico sin especulación. El trabajo permite transitar de forma natural desde el modelo dinámico clásico de oferta y demanda con condición de equilibrio (es decir, asumiendo que el mercado es perfecto) a una versión más compleja del mismo que permite interpretar la existencia de especuladores, lo cual creemos resulta muy instructivo desde el punto de vista formativo.

2 Introducción

En una primera parte de este trabajo se han estudiado dos modelos dinámicos de oferta y demanda en mercados imperfectos, es decir, sin condición de equilibrio basados en una ecuación diferencial ordinaria (e.d.o.) lineal completa de primer orden a coeficientes constantes (véase [1] y [2]). En ambos casos se asumió que la variación instantánea del precio, dada a través de la primera derivada, era directamente proporcional al excedente de la demanda. En [1] se asumió funciones estándar para la demanda y la oferta, es decir, tanto para la oferta como para la demanda, la cantidad ofertada se suponía creciente con el precio, mientras que la cantidad demandada decrecía con el precio. En [2], se introdujo la posibilidad de un comportamiento especulador en la demanda a través de la consideración de que la cantidad demandada dependiera de la velocidad del precio a través de la primera derivada.

En el presente trabajo, y a diferencia de los modelos abordados en [1] y [2], asumiremos un mercado perfecto (por tanto con una condición de equilibrio, que implica no existencia de excedente) y asumiremos que los demandantes pueden actuar como especuladores. Para ello, permitiremos que la cantidad demandada pueda depender no solo de la velocidad del precio (a través de su primera derivada) sino también de la aceleración del precio (vía la segunda derivada del precio). Como consecuencia de nuestro estudio también veremos que se pueden presentar nuevos comportamientos de demandantes estándar (no especuladores) que no se habían contemplado en los modelos clásicos estudiados en las referencias [1] y [2], que añaden una visión más completa de los modelos de oferta y demanda para mercados de un bien.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Reconocer las limitaciones de los modelos dinámicos clásicos de oferta y demanda y comprender la necesidad de estudiar modelos alternativos que contemplen en su formulación las carencias que contienen los modelos clásicos como por ejemplo la introducción de agentes especuladores en el mercado.
- Establecer la relación entre ambos tipos de modelos (clásico vs con especulación) de forma que el tránsito de uno a otro quede motivado desde un punto de vista económico.
- Resolver modelos dinámicos continuos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden con coeficientes constantes y estudiar su comportamiento asintótico.

3.1 Un modelo dinámico de oferta y demanda con expectativas en la demanda: Planteamiento del modelo

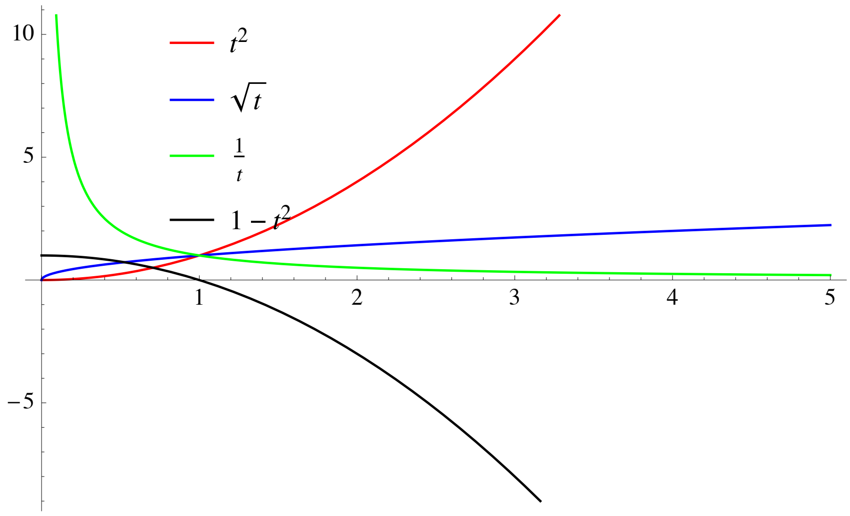
En su formulación básica, el modelo lineal de equilibrio de oferta y demanda estático está basado en la Ec.1, donde Q^D denota la cantidad demandada, Q^S denota la cantidad ofertada y P^e denota el precio de equilibrio. El valor de P^e se obtiene sin más que igualar la demanda y la oferta (vía la condición de equilibrio) y despejar el precio en la ecuación resultante.

$$\left.\begin{array}{lcll} Q^D & = & a - bP & , \quad a,b > 0, \\ Q^S & = & -c + dP & , \quad c,d > 0, \\ Q^D & = & Q^S & , \quad \text{(condición de equilibrio).} \end{array}\right\} \Rightarrow P^e = \frac{a+c}{b+d}.$$

Ecuación 1. Modelo estático lineal de equilibrio de oferta y demanda.

Este modelo es estático porque no considera en un formulación la dependencia de, las cantidades demandadas y ofertadas y del precio, respecto del tiempo o instante t. De forma natural, se puede establecer el correspondiente modelo dinámico sin más que explicitar la dependencia temporal de las funciones de demanda $Q^D = Q^D(t)$ y de oferta $Q^S = Q^S(t)$, así como del precio $P(t)$. La correspondiente condición de equilibrio se escribe entonces $Q^D(t) = Q^S(t)$, y se interpreta como que "*el mercado se vacía instante a instante*", queriendo indicar con ello que en todo instante temporal se alcanza el equilibrio, y tanto la oferta como la demanda quedan satisfechas. En ese modelo dinámico, las cantidades ofertadas y demandadas en el instante t dependen del precio observado en dicho instante t (obsérvese directamente en las ecuaciones resultantes que tanto la demanda como la oferta en el instante t dependen exclusivamente del precio en ese mismo instante y no de instantes anteriores). Sin embargo, frecuentemente los compradores (demandantes) y los vendedores (oferentes) basan su comportamiento no solo considerando el precio corriente, sino también la tendencia del precio predominante en el mercado. Este comportamiento puede explicarse porque la tendencia del precio les conducirá a ciertas expectativas con respecto al nivel de precios en el futuro, lo que puede influir en las decisiones actuales (en el instante t) sobre la oferta y la demanda. Para modelizar la información sobre la tendencia del precio $P(t)$ que influye en la determinación de la *expectativa* de los demandantes y oferentes se utilizan las dos primeras derivadas del precio, $P'(t)$ y $P''(t)$, ya que,

- El signo de $P'(t)$ indica la variación (velocidad o monotonía) del precio:
  - Si $P'(t) > 0$, el precio crece.
  - Si $P'(t) < 0$, el precio decrece.
- El signo de $P''(t)$ indica la rapidez de crecimiento/decrecimiento (aceleración o curvatura) del precio:
  - Si $P'(t) > 0$ y $P''(t) > 0$, el crecimiento es rápido. Como por ejemplo, $P(t) = t^2$ con $t > 0$ (véase en la Gráfica 1 la función de color rojo).
  - Si $P'(t) > 0$ y $P''(t) < 0$, el crecimiento es lento. Como por ejemplo, $P(t) = \sqrt{t}$ con $t > 0$ (véase en la Gráfica 1 la función de color azul).
  - Si $P'(t) < 0$ y $P''(t) > 0$, el decrecimiento es lento. Como por ejemplo, $P(t) = 1/t$ con $t > 0$ (véase en la Gráfica 1 la función de color verde).
  - Si $P'(t) < 0$ y $P''(t) < 0$, el decrecimiento es rápido. Como por ejemplo, $P(t) = 1 - t^2$ con $t > 0$ (véase en la Gráfica 1 la función de color negro).



Gráfica 1. Ilustración gráfica con los distintos tipos de monotonía y curvatura dependiendo del signo de la primera y segunda derivada.

La exposición anterior conduce a la consideración de funciones de oferta y demanda como las indicadas en la Ec.2 para modelizar la tendencia y las expectativas del precio, es decir, funciones de demanda y oferta que en el instante t no solo dependen del precio $P(t)$ observado en dicho instante, sino también de su velocidad ($P'(t)$) y su aceleración ($P''(t)$).

$$\left.\begin{array}{lcl} Q^D(t) & = & D(P(t),P'(t),P''(t)), \\ Q^S(t) & = & S(P(t),P'(t),P''(t)), \\ Q^D(t) & = & Q^S(t). \end{array}\right\}$$

Ecuación 2. Modelo dinámico general de equilibrio con tendencia y expectativas del precio incluidas en las funciones de demanda y oferta.

En lo que sigue, vamos a suponer que las funciones de demanda y oferta son lineales y que solo los compradores son especuladores, es decir, que la función de demanda depende de $P'(t)$ y $P''(t)$. En la Ec.3 se explicita el modelo. Para la función de oferta, al igual que en el modelo básico dado en la Ec.1, se asumirá una función lineal que solo depende del precio $P(t)$.

$$\left.\begin{array}{lcllll} Q^D(t) & = & a-bP(t)+mP'(t)+nP''(t) & , & a,b>0,\, m,n\in \mathbb{R}, \\ Q^S(t) & = & -c+dP(t) & , & c,d>0, \\ Q^D(t) & = & Q^S(t) & , & \text{(condición de equilibrio)}. \end{array}\right\}$$

Ecuación 3. Modelo dinámico lineal de equilibrio con expectativas en la demanda.

Los signos de los parámetros m y n determinan el tipo de comportamiento de los compradores. Supongamos para concretar esta interpretación que por las leyes del mercado, un comprador observa que el precio está creciendo ($P'(t)>0$) con rapidez ($P''(t)>0$), en ese contexto:

- Si $m>0$, a partir de la expresión de la función de demanda $Q^D(t)$ se observa que los compradores demandarán más. Esto es debido a que prefieren comprar ahora (en el instante t) que más adelante, ya que, observan que el precio está subiendo. Si además $n>0$, entonces esta demanda se incrementa ("*acelera*") porque los compradores observan que los precios suben con rapidez. Este es un comportamiento propio de los especuladores quienes compran ahora para después vender, ya que creen que el precio va a subir con rapidez.
- Si como antes $m>0$, pero $n<0$, entonces el término $mP'(t)>0$ indica de nuevo, a partir de la expresión de la función de demanda $Q^D(t)$, que los compradores demandarán más debido a que prefieren comprar ahora que más adelante, porque el precio está subiendo; sin embargo, este comportamiento se "*corrige*", mediante la disminución de esta demanda según la cantidad $nP''(t)<0$, ya que, creen que el crecimiento de precios será lento.

Obsérvese que, manteniendo el supuesto $P'(t)>0$, si $m<0$, con independencia del signo de n, el comportamiento deja de ser especulativo, porque, asumiendo como antes que el precio crece con rapidez ($P''(t)>0$), los compradores demandan menos, corrigiendo esta demanda a la baja si $n<0$ y, aumentando la demanda si $n>0$, porque prefieren disminuir un poco menos su demanda al observar que en el futuro los precios crecerán rápidamente, no siendo interpretado este comportamiento como especulativo pues $m<0$.

Para calcular la trayectoria temporal del precio sustituimos las funciones de demanda y oferta en la condición de equilibrio del modelo dado en la Ec.3. A continuación, ordenamos los términos de la expresión resultante de modo que siga el patrón de una e.d.o. lineal no homogénea o completa a coeficientes constantes de segundo orden. Asumiendo $n \neq 0$, esto nos conduce al modelo expresado en la Ec.4. En dicha ecuación se asume que el precio observado en el instante inicial ($t=0$) es P_0 y que en dicho instante la tendencia o velocidad a la cual varía el precio está dado por P_1, es decir, $P(0)=P_0$ y $P'(0)=P_1$.

$$\left.\begin{array}{rcl} P''(t)+\frac{m}{n}P'(t)-\frac{b+d}{n}P(t) & = & -\frac{a+c}{n}, \\ P(0) & = & P_0, \\ P'(0) & = & P_1. \end{array}\right\}$$

Ecuación 4. Ecuación diferencial para la dinámica del precio.

3.2 Determinación de la trayectoria temporal del precio

En este apartado se calculará cómo varía el precio en cada instante, en otras palabras, daremos una solución *P*(*t*) del problema de valor inicial dado en la Ec.4. Para ello utilizaremos los resultados teóricos expuestos en [3]. Según la teoría de las e.d.o.'s lineales completas (o no homogéneas) de segundo orden a coeficientes constantes, $P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=b$, la solución general de dicha ecuación, que denotaremos por $P^{gc}(t)$, se describe como suma de la solución general de la ecuación homogénea asociada $P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=0$ (esto es, aquella cuyo término independiente es nulo, $b=0$) y, que denotaremos por $P^{gh}(t)$ y, una solución particular de la ecuación completa, $P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=b$, y que denotaremos por $P^{pc}(t)$. Resumiendo: $P^{gc}(t)=P^{gh}(t)+P^{pc}(t)$.

La solución $P^{gh}(t)$ se calcula ensayando soluciones de la forma $P^{gh}(t)=e^{rt}$, lo cual conduce a que el parámetro r debe ser solución de la denominada ecuación característica, que es la ecuación algebraica, $r^2+a_1r+a_2=0$, asociada la e.d.o. homogénea. En la Ec.5 se resume la obtención de $P^{gh}(t)$. Se observa que esta solución tiene tres expresiones distintas dependiendo del carácter real (simple o doble) o complejo de las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica. Además, como se trata de una solución general de una e.d.o. lineal de orden dos, ésta depende de dos constantes libres, c_1 y c_2, que se determinan a partir de las dos condiciones iniciales $P(0)=P_0$ y $P'(0)=P_1$.

Por otro lado, una solución particular $P^{pc}(t)$ de la e.d.o. completa $P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=b$ se obtiene por ensayo de, primero funciones constantes, después, cuando éstas no son posibles, funciones lineales afines y, cuando éstas últimas no son posibles, cuadráticas puras, no siendo necesario el uso de funciones más complicadas porque se trata de determinar "una" solución particular y con estos tres tipos de funciones polinómicas se cubren todas las posibles casuísticas. En la Ec.6 se resumen las diferentes expresiones que se obtienen para $P^{pc}(t)$.

$$P''(t)+a_1P'(t)+a_2P(t)=0 \overset{P(t)=e^{rt}}{\Rightarrow} r^2+a_1r+a_2=0 \Rightarrow \begin{cases} r_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \\ r_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \end{cases}$$

$$P^{gh}(t)=\begin{cases} c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t} & \text{si} & r_1\neq r_2\in IR, & r_1=\dfrac{-a_1+\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2},\quad r_2=\dfrac{-a_1-\sqrt{(a_1)^2-4a_2}}{2}, \\ c_1e^{rt}+c_2te^{rt} & \text{si} & r_1=r_2=r\in IR, & r=\dfrac{-a_1}{2}, \\ e^{\alpha t}\left[c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t)\right] & \text{si} & r_1=\alpha+i\beta, r_2=\overline{r_1}=\alpha-i\beta & \alpha=\dfrac{-a_1}{2} \qquad \beta=\dfrac{\sqrt{4a_2-(a_1)^2}}{2}. \end{cases}$$

Ecuación 5. Resumen de la obtención de la solución general $P^{gh}(t)$ *de una e.d.o. lineal homogénea (o no completa) a coeficientes constantes de segundo orden.*

$$P^{pc}(t)=\begin{cases} \dfrac{b}{a_2}=P_e & \text{si} & a_2\neq 0, \\ \dfrac{b}{a_1}t & \text{si} & a_2=0, a_1\neq 0, \\ \dfrac{b}{2}t^2 & \text{si} & a_1=a_2=0. \end{cases}$$

Ecuación 6. Resumen de la obtención de una solución particular $P^{pc}(t)$ *de una e.d.o. lineal no homogénea (o completa) a coeficientes constantes de segundo.*

Para aplicar de forma directa los resultados generales mostrados en las Ecs.5-6, primero necesitamos identificar los datos del modelo de precios dado en la Ec.4 con los del patrón general. Esta identificación se explicita en la Ec.7.

$$a_1=\frac{m}{n},\quad a_2=-\frac{b+d}{n}\neq 0 \quad , \quad b=-\frac{a+c}{n}.$$

Ecuación 7. Identificación de los datos del modelo con los del patrón que proporciona la solución.

En primer lugar observemos que la solución particular está dada por la expresión que aparece en la Ec.8. ya que como por hipótesis $b>0$ y $d>0$ (véase Ec.3), entonces $a_2\neq 0$.

$$P^{pc}(t)=\frac{-\dfrac{a+c}{n}}{-\dfrac{b+d}{n}}=\frac{a+c}{b+d}.$$

Ecuación 8. Expresión de la solución particular del modelo.

Es interesante observar que esta solución coincide con la del modelo estático dada en la Ec.1.

Para el cálculo de $P^{gh}(t)$ distinguiremos tres casos en función de la naturaleza de las raíces de la ecuación característica, lo cual depende del signo del discriminante $\Delta=(a_1)^2-4a_2=\left(\frac{m}{n}\right)^2+4\left(\frac{b+d}{n}\right)$:

- Caso 1: Si $\Delta>0\equiv\left(\frac{m}{n}\right)^2>-4\left(\frac{b+d}{n}\right)$. Esto significa que las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica son reales y distintas y, por tanto, según la Ec.5 y la identificación dada en la Ec.7 se obtiene la primera expresión dada en la Ec.9.

- Caso 2: Si $\Delta=0\equiv\left(\frac{m}{n}\right)^2=-4\left(\frac{b+d}{n}\right)$. Esto significa que las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica son reales e iguales ($r_1=r_2=r$) y, por tanto, según la Ec.5 y la identificación dada en la Ec.7 se obtiene la segunda expresión dada en la Ec.9.

- Caso 3: Si $\Delta<0\equiv\left(\frac{m}{n}\right)^2<-4\left(\frac{b+d}{n}\right)$. Esto significa que las raíces r_1 y r_2 de la ecuación característica son complejas y conjugadas y, por tanto, según la Ec.5 y la identificación dada en la Ec.7 se obtiene la tercera expresión dada en la Ec.9.

$$P^{gh}(t)=\begin{cases} c_1e^{r_1t}+c_2e^{r_2t} & \text{donde } r_1=\frac{1}{2}\left(-\frac{m}{n}+\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2+4\left(\frac{b+d}{n}\right)}\right), r_2=\frac{1}{2}\left(-\frac{m}{n}-\sqrt{\left(\frac{m}{n}\right)^2+4\left(\frac{b+d}{n}\right)}\right) \quad \text{si } \Delta>0, \\ c_1e^{rt}+c_2te^{rt} & \text{donde } r_1=r_2=r=-\frac{m}{2n} \quad \text{si } \Delta=0, \\ e^{\alpha t}\left[c_1\cos(\beta t)+c_2\sin(\beta t)\right] & \text{donde } r_1=\alpha+i\beta, r_2=\overline{r_1}=\alpha-i\beta, \alpha=-\frac{m}{2n}, \beta=\frac{1}{2}\sqrt{-4\left(\frac{b+d}{n}\right)-\left(\frac{m}{n}\right)^2} \quad \text{si } \Delta<0. \end{cases}$$

Ecuación 9. Expresión de la solución general de la e.d.o. homogénea asociada al modelo.

A partir de las Ecs.8-9 y la relación $P^{gc}(t)=P^{gh}(t)+P^{pc}(t)$ se obtiene la solución general del modelo dado en la Ec.4, la cual dependerá de dos constantes libres c_1 y c_2 (véase Ec.9) que, como se ha señalado anteriormente, se determinan a partir de las condiciones iniciales $P(0)=P_0$ y $P'(0)=P_1$. Debido a que las expresiones teóricas son muy farragosas evitamos expresar la solución del modelo dado en la Ec.4 en términos de los datos.

A continuación, daremos a modo de ilustración algunos resultados de interés económico que pueden obtenerse a partir del estudio realizado hasta el momento.

- Si $n>0$ entonces $-4\left(\frac{b+d}{n}\right)<0$, ya que, $b>0$ y $d>0$ por hipótesis. En consecuencia estaremos ante el Caso 1: $\Delta>0\equiv\left(\frac{m}{n}\right)^2>-4\left(\frac{b+d}{n}\right)$, es decir, las raíces de la ecuación característica son reales y distintas. Además, la expresión bajo el signo de la raíz excede necesariamente a $(m/n)^2$ y entonces la raíz cuadrada será mayor que $|m/n|$ y, con independencia del signo del parámetro m, la raíz r_1 será positiva (salvo que la constante $c_1 = 0$). En este caso el valor del precio de equilibrio a largo plazo (también denominado equilibrio intertemporal) tenderá a infinito. Si $c_1 = 0$, como $r_2 < 0$ (con independencia del signo de m), $P^{gh}(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$, y por tanto la trayectoria temporal del precio tenderá al valor $(a+c)/(b+d)$ de la solución particular de la e.d.o. completa.

- Si $n < 0$, los tres casos presentados en la Ec.9 son factibles. Si además $m < 0$, en el Caso 1 el radicando es menor que $(m/n)^2$ y por tanto la raíz es menor que $|m/n| = m/n$. Por tanto $r_1 < 0$ como $r_2 < 0$. Como las exponenciales que definen la solución tienen exponente negativo ambas tienden a cero cuando $t \to \infty$ y la solución del modelo dado en la Ec.4 tiende a la solución particular de la e.d.o. completa dada en la Ec.8, a saber, $(a+c)/(b+d)$. Lo mismo sucede en el Caso 2 ya que claramente $r = -m/(2n) < 0$ y el término te^{rt} de la solución tiende a cero cuando $t \to \infty$ como puede comprobarse aplicando la regla de L'Hôpital (véase Ec.10). Finalmente, en el Caso 3 de nuevo se tiene que $\alpha = -m/(2n) < 0$ y por tanto, como el término $c_1 \cos(\beta t) + c_2 \sin(\beta t)$ está acotado y $e^{\alpha t} \to 0$ cuando $t \to \infty$, la solución también tiende a $(a+c)/(b+d)$. Resumiendo en cualquiera de los casos si $n < 0$ y $m < 0$, la estabilidad dinámica del equilibrio está asegurada. Esta situación permite conectar el comportamiento a largo plazo del modelo dinámico dado en la Ec.4 con el precio de equilibrio del modelo estático descrito en la Ec.1. De este modo, podemos interpretar que en cada instante arbitrario, pero fijo, el precio de equilibrio de un modelo de oferta y demanda de un bien en un mercado perfecto puede interpretarse como el precio intertemporal o a largo plazo de un modelo dinámico que alcanza su estabilidad en el "*presente*".

$$\text{Si } r<0: \ \lim_{t\to\infty} te^{rt} = \{\infty \times 0\} = \lim_{t\to\infty} \frac{t}{e^{-rt}} = \left\{\frac{\infty}{\infty}\right\} \overset{\text{L`Hôpital}}{=} \lim_{t\to\infty} \frac{(t)'}{\left(e^{-rt}\right)'} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{-r\,e^{-rt}} = -\frac{1}{r}\underbrace{\lim_{t\to\infty} e^{rt}}_{=0} = 0.$$

Ecuación 10. Comprobación del valor del límite en el Caso 2 usando la regla de L'Hôpital.

Obsérvese que a diferencia de lo que sucede con el comportamiento de la demanda en los modelos dinámicos estudiados en las referencias [1] y [2], basados en e.d.o.'s de primer orden, ahora en virtud del Caso 3 (véase Ec.9) se presentan nuevos comportamientos de los consumidores debido a la aparición de funciones trigonométricas (seno y coseno) en la trayectoria temporal del precio que producen oscilaciones cuando la expresión del precio se sustituye en la función de demanda.

4 Cierre

En este trabajo se ha estudiado un modelo dinámico de mercado perfecto (con condición de equilibrio) que permite introducir nuevos comportamientos de los consumidores, a saber, la especulación. Los resultados obtenidos se han conectado con los estudiados en otros modelos donde el mercado es también perfecto e incluso con los correspondientes a modelos de oferta y demanda sin condición de equilibrio. El estudio realizado permite ilustrar la potencia de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales en el estudio de modelos dinámicos en Economía para obtener resultados más complejos y conectarlos con su correspondiente interpretación económica. Este estudio puede completarse con otros modelos que pueden hallarse en las referencias [4] y [5].

5 Bibliografía

[1] Cortés, J.C., Romero J.V. y Roselló Mª.D.: "Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte I: Cuando el ajuste del precio depende únicamente del exceso de demanda y del inventario". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia (http://hdl.handle.net/10251/16535) .

[2] Cortés, J.C., Romero J.V. y Roselló Mª.D.: "Modelos dinámicos continuos de oferta y demanda. Parte II: Cuando el ajuste del precio depende del inventario y existe especulación". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE (http://hdl.handle.net/10251/17061).

[3] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D., Sánchez-Sánchez A. y Villanueva R.J.: "Modelos dinámicos continuos basados en ecuaciones diferenciales ordinarias lineales de segundo orden a coeficientes constantes". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE.

[4] Shone, R.: "Economic Dynamics", 2nd edition, Ed. Cambridge, 2002.

Este excelente texto presenta el estudio de diferentes modelos económicos que aparecen en Microeconomía y en Macroeconomía con el denominador común de ser todos ellos de tipo de dinámico. Combina la exposición de los modelos con la presentación de software para analizarlos.

[5] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en economía.