

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

Departamento de Estadística e Investigación Operativa
Aplicadas y Calidad



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA

**CONTROL MULTIVARIANTE ESTADÍSTICO
DE VARIABLES DISCRETAS TIPO POISSON**

Tesis doctoral

Realizada por: Sandra Lorena García Bustos

Dirigida por: Francisco Aparisi García

Valencia, Julio 2014

D. Francisco Aparisi García, profesor titular del Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad de la Universidad Politécnica de Valencia CERTIFICA que la presente memoria de investigación:

“CONTROL MULTIVARIANTE ESTADÍSTICO DE VARIABLES
DISCRETAS TIPO POISSON”

ha sido realizada bajo su dirección por Sandra Lorena García Bustos, y constituye su tesis para optar al grado de Doctor.

Y para que así conste, en cumplimiento con la normativa vigente, autoriza su presentación ante el Departamento de Estadística e Investigación Operativa Aplicadas y Calidad de la Universidad Politécnica de Valencia para que pueda ser tramitada su lectura y defensa pública.

En Valencia, julio 2014.

Fdo: Francisco Aparisi García

A Dios y a mi familia

Agradecimientos

Quiero agradecer a Dios quien me ha dado las fuerzas necesarias para llevar a cabo esta tesis. También agradecer al SENESCYT que me ha brindado la oportunidad de estudiar en esta prestigiosa universidad, a mis compañeros de la Espol, a mis amigos y familiares quienes me han dado apoyo siempre durante mi estancia en Valencia.

Agradezco también a los directivos y profesores del Doctorado y especialmente a mi director de tesis Francisco Aparisi, quien me dio la oportunidad de trabajar con él y supo orientarme en la realización de esta tesis.

Un agradecimiento muy especial a mi esposo y mi hija que supieron darme su apoyo y cariño incondicional.

Índice general

Índice de tablas	XII
Índice de Figuras	XIV
Lista de acrónimos	XV
1. Introducción	1
1.1 Antecedentes	2
1.2 Motivación	3
1.3 Objetivos Planteados	5
1.4 Alcance del estudio	6
1.5 Estructura del documento	7
2. Antecedentes y metodología	9
2.1 Introducción	10
2.2 Gráficos de control	10
2.2.1 Generalidades	10
2.2.2 Construcción de los gráficos de control	13
2.2.3 Gráficos de control con memoria	20
2.2.4 Gráficos de control Multivariantes para Variables Poisson correlacionadas	22
2.2.4.1 Distribución Bivariada propuesta por Holgate	23
2.2.4.2 Gráfico de Control Multivariante MP	24
2.2.4.3 Gráficos de Control Bivariantes MX y DF	25
2.3 Cadenas de Markov y su aplicación en los gráficos de control	26
2.4 Algoritmos genéticos (GA)	29
2.5 Simulación de Montecarlo	34

3 Control Estadístico Multivariante para Variables Poisson Correlacionadas	38
3.1 Introducción	39
3.2 Modelos de ARL para los Esquemas Múltiple y Multivariados considerados	42
3.2.1 Monitoreo multivariado empleando la suma de las variables de Poisson.	
Gráfico MP.	43
3.2.2 Control multivariado empleando el máximo de las variables de Poisson.	
Gráfico MX.	43
3.2.3 Control multivariado empleando la diferencia de las variables de Poisson.	
Gráfico DF.	45
3.2.4 Múltiples gráficos de control univariantes	46
3.3 Optimización, software y ejemplo de aplicación	47
3.4 Comparación General de Rendimiento	56
3.5 Conclusiones	69
4. Combinación Lineal Óptima de las Variables Poisson para el Control Estadístico Multivariante	71
4.1 Introducción	72
4.2 Control de varias variables Poisson: Enfoques multivariante y múltiple.	75
4.2.1 El Esquema Múltiple: Múltiples gráficos de control univariados Poisson.	76
4.2.2 Esquema Multivariado	76
4.3 Optimización del gráfico de control LCP	81
4.4 Software y ejemplo de aplicación	83
4.5 Análisis de Sensibilidad	91
4.6 Comparación de los resultados	97
4.7 Conclusiones	105

5. Diseño y Optimización del gráfico de control EWMA para la combinación lineal de variables Poisson correlacionadas	106
5.1 Introducción	107
5.2 Generalidades del gráfico EWMA LCP Chart	109
5.3 Medidas de Rendimiento y Diseño del gráfico	110
5.4 Optimización del gráfico de control EWMA LCP	114
5.5 Software y ejemplo de aplicación	115
5.6 Análisis de Sensibilidad	120
5.7. Comparación de Rendimientos	126
5.8 Conclusiones	136
6. Conclusiones generales y futuras líneas de investigación	137
6.1 Conclusiones generales	138
6.2 Futuras líneas de investigación	142
Bibliografía	143
Apéndice	149

Índice de tablas

2.1. Parámetros y Estimadores	14
3.1. Ejemplo de muestra de un proceso. X_1 es el número de líneas horizontales, y X_2 es el número de efectos barre	50
3.2. Estimaciones de los parámetros del proceso.	51
3.3. Límites de Control para cada esquema de control	53
3.4. Escenarios para $p = 2$	58
3.5. Límites de control obtenidos, $p = 2$	58
3.6. Comparación para dos variables Poisson correlacionadas	61
3.7. Escenarios para $p = 3$	63
3.8. Límites de control, $p = 3$.	63
3.9. Escenarios para $p = 4$	63
3.10. Límites de control para $p = 4$	64
3.11. Comparación para tres variables Poisson correlacionadas	66
3.12. Comparación para cuatro variables Poisson correlacionadas	68
3.13. Distribución de frecuencias relativas: Escenarios $p = 3$	69
3.14. Distribución de frecuencias relativas: Escenarios $p = 4$	69
4.1. Muestra del proceso. X_1 es el número de ampollas, y X_2 es el número de cambios de color	84
4.2. Valores de las medias para el ejemplo de aplicación	85
4.3. Límites de control para cada esquema de control	85
4.4. Los valores del gráfico LCP . X_1 es el número de ampollas, y X_2 es el número de cambios de color	87
4.5. ARLs fuera de control para los gráficos optimizados LCP para incrementos $A = (0.5, 1, 1)$ y $B = (0.5, 2, 2)$. ARL bajo control deseado= 500.	92
4.6. ARLs fuera de control para los gráficos optimizados LCP para incrementos $A = (0.5, 1, 1)$ y $B = (0.5, 2, 2)$. ARL bajo control deseado= 500.	94

4.7. Comparación de ARLs para gráficos de control LCP optimizados para A = (1.5, 0.5, 2) y B = (1.5, 2, 0.5). Valores de ARL para B entre paréntesis. ARL bajo control deseado = 400.	95
4.8. Casos analizados para $p = 2$	98
4.9. Analizar los casos para $p = 3$	98
4.10. Comparación de rendimiento, dos variables, $p = 2$	101
4.11. Comparación de rendimiento, tres variables, $p = 3$	103
5.1. Muestreo del proceso. X_1 es el número de escamas, y X_2 es el número de rayaduras	116
5.2. Valores de la media bajo control de las variables no observables Y_i y con el cambio relevante de +1 desviación estándar en la media Y_1	117
5.3. Límites de Control para cada esquema de control	118
5.4. Valores de EWMA LCP. X_1 es el número de escamas, y X_2 es el número de rayaduras	119
5.5. Valores de ARL de los gráficos optimizados para los cambios (a) and (b). Los valores en paréntesis corresponden al gráfico optimizado para (b)	122
5.6. Valores de ARL de los gráficos optimizados para los cambios (b) and (c). Los valores en paréntesis corresponden al gráfico optimizado para (c)	124
5.7. Valores de ARL de los gráficos optimizados para los cambios (d) and (e). Los valores en paréntesis corresponden al gráfico optimizado para (e)	125
5.8. Escenarios considerados con $p = 2$	127
5.9. Escenarios considerados con $p = 3$	128
5.10. Comparación de rendimiento, dos variables observables variables ($p = 2$)	130
5.11. Parámetros Óptimos, dos variables observables ($p = 2$)	131
5.12. Comparación de rendimiento, tres variables observables variables ($p = 3$)	133
5.13. Parámetros Óptimos, tres variables observables ($p = 3$)	136

Índice de Figuras

3.1. El programa de computadora resolviendo el ejemplo de aplicación	52
3.2. Software mostrando la comparación de rendimiento	55
3.3. Gráfico Comparativo: Cambios para variable Y_1	56
4.1. El programa de ordenador resolviendo el ejemplo de aplicación	86
4.2. Gráfico LCP del ejemplo	88
4.3. Comparación de los gráficos para el ejemplo de aplicación.	90
5.1. El programa resolviendo el ejemplo de aplicación	118
5.2. Gráfico EWMA LCP del ejemplo	120
5.3. Gráfico de contorno de las diferencias porcentuales absolutas entre los ARLs de los gráficos optimizados para los cambios (a) y (b)	123
5.4. Gráfico de contorno de las diferencias porcentuales absolutas entre los ARLs de los gráficos optimizados para los cambios (b) y (c)	124
5.5. Gráfico de contorno de las diferencias porcentuales absolutas entre los ARLs de los gráficos optimizados para los cambios (d) y (e)	126

Lista de acrónimos

SPC	Control Estadístico de Procesos
MP	Gráfico Multivariado de sumas de variables Poisson
MX	Gráfico Multivariado del Máximo de Variables Poisson
DF	Gráfico de las Diferencias de Variables Poisson
EWMA	Gráfico de Promedios Móviles Exponencialmente Ponderados
LCP	Gráfico Multivariado de la Combinación Lineal de Variables Poisson
EWMA LCP	Gráfico EWMA para la combinación Lineal de Variables Poisson
CUSUM	Gráfico de Sumas de Acumuladas
MCUSUM	Gráfico Multivariado de Sumas de Acumuladas
MEWMA	Gráfico Multivariado de Promedios Móviles Exponencialmente Ponderados
LCL	Límite Inferior de Control
UCL	Límite Superior de Control
CL	Línea Central
ARL	Promedio de Longitud de Rachas
GA	Algoritmos Genéticos
IA	Inteligencia Artificial
VDT ²	Gráfico T ² con Dimensión Variable
RL	Longitud de Rachas
MC	Monte Carlo
MPEWMA	Gráfico EWMA Multivariante Poisson
EM	Esperanza Maximización

Resumen

El control estadístico de procesos (SPC) que involucra varias variables Poisson correlacionadas se puede hacer mediante un esquema múltiple, es decir, un gráfico para controlar cada variable, o se puede utilizar un esquema multivariante basado en el seguimiento de todas las variables con un único gráfico de control.

Los gráficos que se estudiaron antes de la realización de esta tesis tienen una limitación: los valores de sus límites de control sólo pueden ser enteros, debido a la naturaleza de los estadísticos en que se basan sus gráficos (suma de variables Poisson (gráfico MP), Máximo de Variables Poisson (gráfico MX) o Diferencia de variables Poisson (gráfico DF)). Esto ha conllevado a que sea muy difícil alcanzar la probabilidad de falsa alarma requerida, generando gráficos de control con un elevado número de falsas alarmas, o que no sean de gran alcance para detectar los cambios en el proceso.

El objetivo de esta tesis es proponer gráficos multivariantes que presenten buenos rendimientos y que puedan lograr la probabilidad de falsa alarma requerida. Dos gráficos de control son propuestos: el primero, la combinación lineal de las variables Poisson correlacionadas, gráfico LCP; y el segundo, una versión EWMA (medias móviles con pesos exponenciales) del gráfico LCP. Los límites de control de ambos gráficos no necesariamente son valores enteros, siendo posible alcanzar la probabilidad de falsa alarma deseada.

Para la optimización de los parámetros de los gráficos se utilizaron Algoritmos Genéticos, a fin de minimizar el número de muestras promedio para detectar un cambio específico y cumplir con la probabilidad de falsa alarma requerida. Además, se empleó cadenas de Markov para el cálculo de las medidas de rendimiento del gráfico EWMA LCP.

Se desarrollaron programas informáticos que optimizan los parámetros de los gráficos estudiados en esta tesis; además se realizó una evaluación de los rendimientos, donde se

obtuvo que el gráfico LCP presenta mejores resultados en la mayoría de los casos que los gráficos MP, MX, DF y el esquema múltiple (un gráfico por variable). Adicional a esto, el gráfico EWMA LCP tiene un mejor rendimiento que el gráfico LCP, siendo más eficiente en detectar cambios pequeños.

Resum

El control estadístic de processos (SPC) que involucra diverses variables Poisson correlacionades es pot fer per mitjà d'un esquema multiple, és a dir, un gràfic per a controlar cada variable, o es pot utilitzar un esquema multivariant basat en el seguiment de totes les variables amb un únic gràfic de control.

Els gràfics que es van estudiar abans de la realització d'esta tesi tenen una limitació: els valors dels seus límits de control només poden ser sencers a causa de la naturalesa dels estadístics en que es basen els seus gràfics (suma de variables Poisson (gràfic MP), Máximo de Variables Poisson (gràfic MX) o Diferència de variables Poisson (gràfic DF)). Año ha comportat a que siga molt difícil alcançar la probabilitat de falsa alarma requerida, generant gràfics de control amb un nombre de falses alarmes alt, o que no siguen de gran abast per a detectar els canvis en el procés.

L'objectiu d'esta tesi és proposar gràfics multivariants que presenten bons rendiments i que pugen aconseguir la probabilitat de falsa alarma requerida. Dos gràfics de control són proposats: el primer, la combinació lineal de les variables Poisson correlacionades, gràfic LCP; i el segon, una versió EWMA (mitges mòbils amb pesos exponencials) del gràfic LCP. Els límits de control d'ambdós gràfics no necessàriament són valors sencers, sent possible aconseguir la probabilitat de falsa alarma desijada.

Per l'optimització dels paràmetres dels gràfics es van utilitzar Algoritmes Genètics, a fi de minimitzar el nombre de mostres mitjana per a detectar un canvi específic i complir amb la probabilitat de falsa alarma requerida. A més, es va emprar cadenes de Markov per al càlcul de les mesures de rendiment del gràfic EWMA LCP.

Es van desenvolupar programes informàtics que optimitzen els paràmetres dels gràfics estudiats en esta tesi; a més es va realitzar una avaluació dels rendiments, on es va obtenir que el gràfic LCP presenta millors resultats en la majoria dels casos que els gràfics MP,

MX, DF i l'esquema múltiple (un gràfic per variable). Addicional a açò, el gràfic EWMA LCP té un millor rendiment que el gràfic LCP, sent més eficient a detectar canvis xicotets

Abstract

Statistical process control (SPC) involving multiple Poisson correlated variables can be done with a multiple scheme. In other words using a chart to control each variable or, alternatively, a multivariate scheme based on the monitoring of all variables using a single control chart.

The charts studied before writing this thesis have a limitation. Previously, the values of their control limits have to be integers, due to the nature of their statistical (the sum of Poisson variables (MP chart), Maximum Poisson variables (MX chart) or Difference Poisson variables (DF chart)). This made it very difficult to achieve the required probability of false alarm because control charts were produced with a high number of false alarms, or that were not powerful enough to detect changes in the process.

The aim of this thesis is to propose multivariate charts that show good performances and that can achieve the required probability of false alarm. Two control charts are proposed: first, the linear combination of the correlated Poisson variables, LCP chart, and, second, and EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) version of the LCP chart. The control limits of both graphs are not necessarily integers, making it possible to achieve the desired probability of false alarm.

To optimize the parameters of the charts, Genetic Algorithms are used to minimize the average number of samples in order to detect a specific change and to get the required probability of false alarm. Furthermore, Markov chains are used to calculate performance measures for the LCP EWMA chart.

Software was developed to optimize the parameters of the charts studied in this thesis. Also, an evaluation of performance was carried out in which the LCP chart shows the better results than the MP, MX, DF charts and the multiple scheme (one chart per

variable). Additionally, the EWMA LCP chart outperformed the LCP chart because it is more efficient in detecting small changes.

CAPÍTULO 1

INTRODUCCIÓN

1.1 ANTECEDENTES

Los sistemas de producción han evolucionado desde los inicios de la Revolución Industrial, y es al comienzo del siglo XX con ayuda del avance tecnológico que surgió la línea de ensamblaje y con ello la fabricación a bajo coste. Las grandes demandas de productos hacían que la inspección total de la calidad de ellos no fuese posible porque no se podían entregar la producción a tiempo a los compradores.

Motivado por esto, en 1924, el matemático estadounidense, Walter A. Shewhart introdujo el control estadístico de calidad, creando la base de los gráficos de control, a fin de diferenciar la variación normal del proceso y la variación especial del proceso, y así detectar causas que podrían afectar a la calidad del producto y corregirlas a tiempo para que no llegase a ser notada por el cliente final.

Los gráficos de control tienen como objetivo detectar rápidamente fluctuaciones anormales en el proceso, constituyendo una de las 7 herramientas de la calidad y un importante campo de investigación en la actualidad. Se han creado gráficos de control a fin de monitorear la variabilidad de variables continuas y variables discretas dentro de un proceso.

En muchos procesos se precisa controlar características no cuantificables numéricamente, que dan la calificación al producto de aceptable o no aceptable para el uso. Los gráficos de control que se usan para monitorear este tipo de variables se denominan gráficos de control por atributos. Entre estos gráficos tenemos: el gráfico **p** (porcentaje de unidades defectuosas en la producción), el gráfico **np** (número de unidades defectuosas en la producción), el gráfico **u** (proporción de defectos por unidad producida) y el gráfico **c** (el número de defectos de todas las unidades producidas).

En este trabajo nos centraremos en el control de calidad por atributos multivariante, específicamente para variables aleatorias discretas Poisson (\mathbf{c} y \mathbf{u}). Estas variables fueron introducidas en 1837 por Simón Denis Poisson a través de la descripción de variables aleatorias que se referían a la frecuencia de ocurrencias discretas en intervalos de tiempo de longitud o en alguna unidad de medida en particular.

Debido a la naturaleza de los procesos por lo general, cuando se desea controlar muchas variables Poisson, se debe considerar que existe cierta correlación entre ellas, es por esto que en esta tesis se estudian gráficos de control de variables Poisson correlacionadas.

El modelo de correlación que se considera en esta tesis es el propuesto por Holgate en 1964. Este modelo está basado en que cada variable Poisson observada X_i se puede expresar como la suma de dos variables independientes Poisson: Y_0 que representa un factor común y Y_i que representa un factor único para cada variable X_i . Con más detalle, este modelo será estudiado posteriormente.

Otros autores han considerado la estructura de correlación propuesta por Holgate: Chiu y Kuo (2008) propusieron graficar la estadística $D = \sum_{i=1}^p X_i$, es decir la suma de los valores observados de las variables. En 2009, Ho y Costa desarrollaron gráficos basados en la diferencia, $DF = X_1 - X_2$, y en el valor máximo de dos variables de Poisson, $MX = \max(X_1, X_2)$.

1.2 MOTIVACIÓN

Los gráficos de control deben ser diseñados a fin de obtener una pequeña probabilidad de falsa alarma, y de detectar rápidamente un cambio de los parámetros del proceso. El ARL (Average Run Length), el número promedio de muestras que se toman hasta que se presenta una señal, es una medida de rendimiento muy usada en gráficos de control. Los

diseños óptimos de gráficos de control son aquellos que tienen un valor grande de ARL cuando el proceso está bajo control y el ARL mínimo posible cuando el proceso está fuera de control y así pueden detectar rápidamente el cambio.

Los gráficos de control para variables discretas Poisson presentan un problema, debido a que los límites de control son valores enteros. Esto hace prácticamente imposible que el ARL bajo control deseado sea alcanzado con los parámetros del gráfico, por lo tanto se tiene que aumentar la probabilidad de falsas alarmas o reducir su eficiencia en detectar cambios en el proceso.

Esto motivó a diseñar dos gráficos optimizados: el primero denominado gráfico LCP, que usa las puntuaciones de Poisson, a través de una combinación lineal y tiene límites de control con valores reales, alcanzando así el ARL bajo control deseado y detectando rápidamente el cambio en el proceso. Lo que constituye una ventaja frente a los otros gráficos de control para variables Poisson.

El segundo gráfico es una versión EWMA de las combinaciones lineales de Poisson (gráfico EWMA LCP). Se conoce que una propiedad de los gráficos EWMA es la detección temprana de pequeños cambios en el proceso, pues considera toda la información muestral. Es así como el gráfico EWMA LCP, además de ser capaz de alcanzar el valor de ARL bajo control deseado, detectará más rápidamente cambios pequeños que el gráfico LCP, debido a que este último considera de manera individual los valores del estadístico basado en la combinación lineal y no la información evolutiva del estadístico, como lo hace el gráfico EWMA LCP.

1.3 OBJETIVOS PLANTEADOS

Luego de descritos los antecedentes y la motivación, se propone el siguiente objetivo general:

Diseñar un gráfico de control optimizado basado en la combinación lineal de variables Poisson correlacionadas bajo la estructura propuesta por Holgate, de manera que sea posible lograr un ARL bajo control deseado y que se minimice el ARL fuera de control para un cambio dado en los parámetros del proceso.

De este objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos:

1) Analizar y comparar el desempeño de los gráficos de control para variables Poisson correlacionadas bajo la estructura propuesta por Holgate, basados en la suma (MP), la diferencia (DF) y el máximo de variables Poisson (MX), además de múltiples gráficos univariantes Poisson.

2) Optimizar el gráfico de la combinación lineal de Variables Poisson, a fin de que se obtenga un ARL bajo control deseado y se minimice el ARL fuera de control, lo que constituye una ventaja frente a los gráficos analizados en el objetivo 1).

3) Optimizar el gráfico EWMA de la combinación lineal de Variables Poisson correlacionadas, que supere el rendimiento del gráfico propuesto en 2).

4) Desarrollar un programa optimizador de fácil uso bajo entorno Windows©, que realice una comparación de los gráficos propuestos en los objetivos 1) y 2), de manera que el usuario pueda decidir cuál es el gráfico de control que más le conviene para monitorear un proceso en particular.

5) *Diseñar un programa que optimice los parámetros del gráfico EWMA LCP, de acuerdo a las necesidades del usuario.*

1.4 ALCANCE DE ESTUDIO

Los gráficos de control analizados en esta tesis sólo abarcan variables Poisson correlacionadas bajo la estructura de Holgate, otras estructuras de correlación no son consideradas.

Los únicos parámetros que definen a los gráficos MP, MX, DF, o múltiples gráficos univariados Poisson, son los límites de control. Estos parámetros son obtenidos mediante una búsqueda exhaustiva de manera que con ese límite de control, el ARL bajo control obtenido con el gráfico sea el más cercano posible pero nunca menor al ARL bajo control deseado que es fijado por el usuario final. Debido a la naturaleza de los estadísticos usados en estos gráficos, estos límites de control tomarán valores enteros, de ahí la dificultad de alcanzar exactamente el valor de ARL bajo control deseado.

Como solución a lo expuesto en el párrafo anterior se diseñaron gráficos de control (LCP y EWMA LCP) que están basados en la combinación lineal de variables Poisson, para lo cual se utilizó Algoritmos Genéticos a fin de optimizar los parámetros de los gráficos propuestos en esta tesis (coeficientes de la combinación lineal, límites de control y sólo para el caso del gráfico EWMA LCP, además de lo anterior, la constante de suavizamiento r) y minimizar el ARL fuera de control para un cambio en los parámetros del proceso, restringido a un ARL bajo control deseado que es fijado por el usuario final. El vector de cambios para el cual se minimiza el ARL está medido en unidades de desviación estándar con respecto a las medias de las variables Poisson involucradas en el proceso.

1.5 ESTRUCTURA DEL DOCUMENTO

Esta tesis está organizada de la siguiente manera:

El **capítulo uno** presenta la introducción, motivación y alcance del tema de investigación.

El **capítulo dos** presenta la revisión bibliográfica necesaria para la elaboración de esta tesis.

El **capítulo tres** está basado en el artículo, "Optimum Multiple and Multivariate Poisson Statistical Control Charts", desarrollado por Aparisi, F., García-Bustos, S. and Epprecht, E. K., y publicado en la revista *JCR Quality and Reliability Engineering International*, durante la elaboración de esta tesis. En este capítulo se realiza un estudio comparativo de los rendimientos obtenidos con los gráficos de control multivariantes: MP (basado en la suma de variables Poisson y propuesto por Chiu y Kuo), DF y MX (basados en la diferencia y el máximo de variables Poisson y propuestos por Ho y Costa); y también el esquema múltiple (un gráfico para cada variable Poisson correlacionada). Se planteó el desarrollo para p variables de los estadísticos y distribuciones para los gráficos descritos y se implementó un programa amigable bajo entorno Windows a fin de que el usuario pueda decidir qué gráfico le resulta mejor para un proceso en particular.

El **capítulo cuatro** está basado en el artículo, "Optimal Linear Combination of Poisson Variables for Multivariate Statistical Process Control", desarrollado por Epprecht, E. K., Aparisi, F., García-Bustos, S., y publicado en la revista *JCR Computers & Operations Research*, durante la elaboración de esta tesis. En este capítulo se propone un nuevo gráfico de control basado en la combinación lineal de variables Poisson correlacionadas, los parámetros de este gráfico son optimizados mediante algoritmos genéticos a fin de minimizar el ARL fuera de control para un vector de cambios dado y restringido a un ARL bajo control deseado. Este gráfico es comparado con los gráficos analizados en el primer artículo y se desarrolla un software que facilita este análisis.

En el **capítulo cinco** se diseña un gráfico de control optimizado basado en el estadístico EWMA de la combinación lineal de variables Poisson. Además se realiza una comparación de los gráficos EWMA LCP y LCP, a través del análisis de los valores de ARL. Para el cálculo de los ARLs se usan cadenas de Markov y Algoritmos Genéticos para la optimización. Un software de fácil uso es desarrollado para optimizar los parámetros del gráfico EWMA LCP.

Del trabajo realizado en el capítulo cinco, se ha elaborado un artículo denominado “Optimal EWMA of Linear Combination of Poisson Variables for Multivariate Statistical Process Control”, cuyos autores son García-Bustos, S., Aparisi, F., Epprecht, E. K.; el cual se encuentra en revisión en la revista *JCR International Journal of Production Research*.

Finalmente, el **capítulo seis** presenta las conclusiones de esta tesis.

CAPÍTULO 2

ANTECEDENTES Y METODOLOGÍA

2.1 Introducción

En este capítulo se presenta el estado del arte de la presente tesis doctoral; lo que abarca las generalidades de los gráficos de control, comenzado por los gráficos expuestos por Shewhart, considerado por muchos como el verdadero padre del control estadístico de calidad. En cuanto al control estadístico multivariante, se estudiarán los gráficos de control relacionados a las variables Poisson, por considerarse el tema central de la tesis. También se revisarán definiciones generales de procesos estocásticos, específicamente la Teoría Markoviana.

Se abordan también las generalidades de Algoritmos Genéticos y su aplicación en la optimización de gráficos de control. Finalmente se estudia la metodología de la simulación de Montecarlo para la comprobación de los resultados en la optimización de gráficos de control.

2.2 Gráficos de control

2.2.1 Generalidades

Mientras trabajaba en la empresa Bell Telephone en el año 1924, el Dr. Walter Shewhart preparó las bases del Control Estadístico de Procesos, creando así los gráficos de control. Introdujo la idea de que era necesario la reducción de variabilidad en el proceso para asegurar la calidad, además indicó que hay dos fuentes de variabilidad: la originada por causas aleatorias o la originada por causas especiales. También recalcó que era necesario llevar al proceso al estado bajo control para asegurar la calidad, donde sólo la variabilidad del proceso se debe a causas aleatorias.

El gráfico de control propuesto por Shewhart, constituye una herramienta para identificar las causas aleatorias y las causas especiales de variabilidad. Mediante el gráfico de control, se monitorea una característica de calidad ya sea cuantitativa o cualitativa a través de un estadístico muestral y unos límites de control. Si el valor del estadístico muestral cae dentro de esos límites de control, se considera que el proceso está bajo control, en caso contrario, el proceso podría estar fuera de control y debería estudiarse si la situación se atribuye a una causa especial o aleatoria. Si la causa es especial, debe llevarse nuevamente al proceso al estado bajo control.

Shewhart también indicó que el control de procesos consta de dos fases:

- La fase de desarrollo, en la cual se determinan los parámetros del proceso, los límites de control, se establece el estimador y se eliminan causas asignables o especiales.
- La fase de madurez, en la cual se identifica el número promedio de muestras antes de obtener falsas alarmas; y el número de muestras necesarias para detectar pequeños cambios en el proceso.

Los primeros gráficos de control propuestos por Shewhart, para monitorear variables cuantitativas utilizaban como estadísticos: el promedio \bar{X} y la variación (R (Rango) o S (Desviación estándar)). Pasado un tiempo se desarrollaron gráficos para controlar variables cualitativas, como los gráficos **c**, **u**, **p** y **np** para monitorizar el número de defectos por lote, la proporción de defectos por lote, la proporción de unidades no conformes por lotes y el número de unidades defectuosas por lote, respectivamente (Aclaración: un defecto es la carencia de las cualidades propias de algo y un artículo defectuoso es aquel que tiene uno o más defectos). Estos gráficos detectan eficientemente grandes cambios en el proceso.

A fin de detectar pequeños cambios en el proceso, dos nuevos gráficos univariados surgieron, los cuales consideran toda la información muestral y no sólo el último valor

como lo hacen los gráficos Shewhart: En 1954, E. S. Page diseñó un gráfico de control (CUSUM), basado en las sumas acumuladas de las desviaciones de los valores muestrales respecto de un valor objetivo. Un segundo gráfico fue introducido por S. W. Roberts en 1959, basado en los promedios móviles exponencialmente ponderados (EWMA). Más detalles sobre estos gráficos se darán en la sección 2.2.3.

La necesidad de controlar más de una característica de calidad, considerando además su estructura de correlación, propició el desarrollo de estadísticos multivariantes en el control de calidad. En 1947, Hotelling presentó un procedimiento para controlar el vector de medias de una población normal multivariada, mediante el estadístico T^2 de Hotelling que mide la distancia entre el vector de medias esperado (parámetros del proceso) y el vector de medias observado (medias aritméticas de la muestra) tomando en cuenta su matriz de varianzas y covarianzas. Si esa distancia resulta mayor que un límite de control especificado, el proceso podría estar fuera de control.

Otros trabajos importantes relacionados al control multivariante son: En 1988, Crosier presentó una versión multivariada del gráfico de control de sumas acumuladas, llamada MCUSUM. Otra aportación destacada fue la que realizó Lowry (1992) diseñando un gráfico de control multivariante basado en el estadístico EWMA, denominado MEWMA. Estos dos gráficos también consideran la estructura de la matriz de varianzas y covarianzas.

El control de calidad multivariante de variables discretas es el tema principal de la tesis, específicamente variables tipo Poisson. Generalmente las variables involucradas en un proceso presentan cierta relación entre ellas, a esta relación si es lineal se la conoce como correlación. Holgate en 1964, fue el primer autor que propuso una función de probabilidades bivariada para las variables Poisson, definiendo a cada variable Poisson observada como la suma de dos variables Poisson independientes: una variable única (para cada variable observada) y una variable común. Esta variable común constituía la covarianza de las dos variables observadas.

En 1973, Patel empleó el teorema de límite central para aproximar la distribución binomial multivariada con una distribución normal multivariante, con el fin de desarrollar un esquema para monitorear variables discretas, de una manera similar como lo hace el estadístico T^2 . Otra aportación fue realizada por Lu et al. en 1998, proponiendo un gráfico np multivariante.

Algunas aportaciones al control de calidad multivariante por atributos han considerado la estructura de correlación propuesta por Holgate. Chiu y Kuo (2008) propusieron graficar el estadístico $D = \sum_{i=1}^p X_i$, es decir la suma de los valores observados de las variables. Por otro lado, Ho y Costa (2009) analizaron gráficos basados en la diferencia, $DF = X_1 - X_2$, y en el valor máximo de dos variables de Poisson, $MX = \max. (X_1, X_2)$.

Otro trabajo que considera el modelo de correlación propuesto por Holgate es el propuesto por Laungrungong et al. (2011). Ellos desarrollaron un gráfico de control multivariante EWMA de las variables de Poisson (el gráfico de control MPEWMA).

La estructura de correlación que se aborda en el desarrollo de esta tesis es la propuesta por Holgate, la misma que será tratada más adelante.

2.2.2 Construcción de los gráficos de control

Una de las 7 herramientas del Control Estadístico de Procesos (SPC), son los gráficos de control, muy útil para garantizar la calidad del producto final, a través de la reducción de variabilidad. Los gráficos de control sirven para seguir la evolución de varias características del proceso, que se desean mantener bajo control, lo que garantizará que el producto final cumpla con los estándares de calidad. La característica a controlar puede ser continua o discreta. A fin de establecer los límites de control y obtener medidas de

rendimiento del gráfico, es necesario determinar la distribución de probabilidad que tenga dicha variable.

Generalmente, si la variable a monitorear es continua, se desea que tenga función de distribución de probabilidad normal $X \sim N(\mu, \sigma)$, debido a que la función de probabilidad de muchos estadísticos está basada en este supuesto. Si esto no se cumple, se puede usar el Teorema del Límite Central o alguna transformación matemática para aproximar la normalidad.

Cuando la característica de calidad no se mide, por lo general nos interesa controlar el número de defectos o unidades defectuosas por lote. En estos casos la distribución del estadístico que se usa es la Poisson, o la Binomial. También se puede usar el teorema de límite central para hacer aproximaciones. En la Tabla 2.1, se presentan los parámetros más comunes a controlar y sus estimadores muestrales:

Parámetro	Estimador
μ (media)	$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$
(Rango)	$R = \text{Máx}(X_i) - \text{Mín}(X_i)$
σ^2 (varianza)	$S^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2$
σ (desviación estándar)	$S = \sqrt{S^2}$
Unidades no conformes en el lote	$D \text{ (unidades no conformes en la muestra)}$
p (proporción de unidades no conformes por lote)	$\hat{p} = \frac{D}{n}$
Cantidad de defectos en el lote	$c \text{ (cantidad de defectos en la muestra)}$
Proporción de defectos en el lote	$u = \frac{x}{n}, \text{ siendo } x \text{ en el número de defectos totales en la muestra}$

Tabla 2.1: Parámetros y estimadores

Los gráficos que controlan los primeros cuatro parámetros, utilizan estadísticos muestrales, cuya muestra se supone deben pertenecer a una población normalmente distribuida. En el caso del estadístico muestral \bar{X} , el teorema de límite central resolvería el problema.

Se sabe que si la muestra proviene de una población normal, $(n-1)S^2 / \sigma^2$ tiene una distribución χ^2 (ji cuadrado) con (n-1) grados de libertad. Además el estimador S^2 es insesgado, pero S no es un estimador insesgado para σ , por tanto hay que introducir un factor de corrección para estimar σ a través de S, teniendo así otro estimador:

$$\hat{\sigma} = \bar{s} / c_4$$

Donde, $c_4 = [2 / (n-1)]^{1/2} [\Gamma(n/2) / \Gamma((n-1)/2)]$; $\Gamma(1/2) = \pi^{1/2}$; y $\Gamma(m) = (m-1)!$, para m entero positivo.

La variable aleatoria Rango, definida por $R = \text{Máx}(X_i) - \text{Mín}(X_i)$, cuando la muestra proviene de una población normal tiene la siguiente función de densidad:

$$f_{R_n(r)} = n * (n - 1) * \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_t^{t+r} f_x(x) * dx \right)^{n-2} * f_x(t) * f_x(t + r) * dt$$

Donde: X es la variable Poblacional, $f_x(x)$ es la función de densidad de una Población Normal, r es el valor del rango y t es una variable auxiliar que sirve para la integración, Carot (1998). Además, $E(R) = d_2 \sigma$ y $\sigma_R = d_3 \sigma$.

Los valores de d_2 y d_3 están en función del tamaño de la muestra.

Otro estimador para la desviación estándar se hace a través del rango muestral, mediante la definición del rango relativo $W = R/\sigma$. W es otra variable aleatoria cuyo valor esperado se denota como d_2 , por lo que otro estimador sería: $\hat{\sigma} = \bar{R} / d_2$.

En el caso de control de calidad por atributos (últimas 4 filas de la Tabla 2.1), otras distribuciones deben considerarse para los estimadores. La proporción de unidades disconformes en una muestra, $\hat{p} = \frac{D}{n}$, está en función de una variable aleatoria con distribución binomial, D (unidades no conformes en la muestra). Por tanto; $E(\hat{p}) = E(D)/n = p$, y $\text{Var}(\hat{p}) = \text{Var}(D)/n^2 = np(1-p)/n^2 = p(1-p)/n$, puesto que $E(D) = np$, y $\text{Var}(D) = np(1-p)$.

La cantidad de defectos por unidad de observación c ; tiene una función de distribución de probabilidad Poisson, donde $E(X) = \text{Var}(X) = c$. Además $\hat{c} = \bar{c}$. En cuanto a la proporción de defectos en la muestra, $u = X/n$ siendo $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$, $E(u) = E(X/n) = E(X)/n = \lambda/n$; y $\text{Var}(u) = \text{Var}(X/n) = \text{Var}(X)/n^2 = \lambda/n^2$.

Tanto la distribución de \hat{p} como la de u , se puede aproximar a una distribución normal por el teorema de límite central, mientras p no sea cercano a 0 o a 1 y n sea lo suficientemente grande. Por tanto se tendría que $u \sim N(p, p/n)$, donde $p = \lambda/n$ (proporción de defectos en la muestra), mientras que $\hat{p} \sim N(p, p(1-p)/n)$ (siendo p en este caso la proporción de unidades defectuosas en el lote).

Para establecer los límites de control de los gráficos, el criterio más usado es el de 3 sigma, que indica que los límites se hayan a 3 desviaciones estándar arriba y abajo del valor esperado del estimador.

A continuación, se presentan los límites de control para los gráficos más usuales:

Para los gráficos de control para la media, se pueden usar como estimador de la desviación estándar: el Rango muestral ($n \leq 10$) o la desviación estándar muestral corregida ($n > 10$):

$$\text{Para } \bar{X}: \begin{cases} UCL = \bar{\bar{X}} + A_2 \bar{R} \\ CL = \bar{\bar{X}} \\ LCL = \bar{\bar{X}} - A_2 \bar{R} \end{cases}$$

o

$$\text{Para } \bar{X}: \begin{cases} UCL = \bar{\bar{X}} + A_3\bar{S} \\ CL = \bar{\bar{X}} \\ LCL = \bar{\bar{X}} - A_3\bar{S} \end{cases}$$

Mientras que los gráficos de control para el Rango y la desviación estándar, están dados por:

$$\text{Para } R: \begin{cases} UCL = D_4\bar{R} \\ CL = \bar{R} \\ LCL = D_3\bar{R} \end{cases}$$

$$\text{Para } S: \begin{cases} UCL = B_4\bar{S} \\ CL = \bar{S} \\ LCL = B_3\bar{R} \end{cases}$$

Donde UCL y LCL representan los límites de control superior e inferior, respectivamente y CL es la línea central del gráfico.

Los coeficientes A_2 , A_3 , D_3 , D_4 , B_3 y B_4 se deducen bajo el supuesto de normalidad y están en función de n . Existen tablas especialmente elaboradas para el diseño de gráficos de control con sus valores.

En cuanto a gráficos de control para \hat{p} , la proporción de unidades defectuosas en la muestra se tiene:

$$\text{Para } \hat{p}: \begin{cases} UCL = \bar{p} + 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \\ CL = \bar{p} \\ LCL = \bar{p} - 3\sqrt{\frac{\bar{p}(1-\bar{p})}{n}} \end{cases}$$

Los límites de control para el gráfico $n\hat{p}$ (número de unidades defectuosas en la muestra) son:

$$\text{Para } n\hat{p}: \begin{cases} UCL = n\bar{p} + 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \\ CL = \bar{p} \\ LCL = n\bar{p} - 3\sqrt{n\bar{p}(1-\bar{p})} \end{cases}$$

Esta tesis se enfoca en los gráficos de control que siguen la evolución de variables tipo Poisson. Los gráficos de control univariados básicos para este tipo de variables son los siguientes:

$$\text{Para } c: \begin{cases} UCL = \bar{c} + 3\sqrt{\bar{c}} \\ CL = \bar{c} \\ LCL = \bar{c} - 3\sqrt{\bar{c}} \end{cases} \quad \text{Para } u: \begin{cases} UCL = \bar{u} + 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} \\ CL = \bar{u} \\ LCL = \bar{u} - 3\sqrt{\frac{\bar{u}}{n}} \end{cases}$$

Donde c representa el número de defectos por unidad de muestreo y u la proporción de defectos en la muestra.

Si el estimador usado en el gráfico resulta fuera de los límites de control, es una señal de que el proceso podría estar fuera de control. Existe la posibilidad de que se generen falsas alarmas, es decir, que el proceso esté bajo control y haya una señal en el gráfico (error tipo I), o que el proceso esté fuera de control y no sea detectado por el gráfico (error tipo II). Es posible medir estos errores a través de probabilidades, denominándose $\alpha = P(\text{Error Tipo I})$ y $\beta = P(\text{Error Tipo II})$.

Por otra parte, una medida de rendimiento para gráficos de control muy utilizada es el ARL (Average Run Length), número promedio de muestras que se monitorea hasta que el gráfico presenta una señal. Si las muestras son independientes, el ARL es la media de una

variable aleatoria geométrica (número de muestras hasta que haya una señal) con parámetro q (es la probabilidad que haya una señal). El ARL se definiría como $1/q$.

Se desea un valor de ARL grande cuando el proceso está bajo control, el cual se denota como ARL_0 y puede ser calculado de la siguiente forma: $1/\alpha$, siendo α , la probabilidad del error tipo I. Adicionalmente, se quisiera tener un valor pequeño de ARL cuando el proceso está fuera de control (ARL_1), la fórmula para calcularlo es: $1/(1-\beta)$, siendo β , la probabilidad del error tipo II.

El investigador puede fijar el valor de α , al diseñar un gráfico de control, mientras que el valor de β no lo puede fijar directamente, pues está asociado al tamaño de la muestra n . Por tanto para controlar estos dos tipos de errores, se deben dar valores idóneos a α y n .

Los valores de α y β deben ser los más pequeños posibles, pero estos nunca podrán ser exactamente 0. Generalmente el valor que se fija para α es 0.0027, esto es un ARL bajo control de 370, es decir se necesita tomar en promedio 370 muestras para detectar una falsa alarma cuando el proceso está bajo control.

De lo anterior se deduce, que el diseño óptimo de gráficos de control implica lograr grandes valores de ARL bajo control (fijados por el investigador, a través del valor de α) y mínimos valores de ARL, cuando el proceso está fuera de control y así detectar rápidamente el cambio.

Otros métodos para calcular el ARL son:

- Simulaciones por el método de Montecarlo: Calcula el ARL mediante la simulación de las variables aleatorias que se desean monitorear en el proceso.
- Cadenas de Markov: Calcula el ARL a través de matrices, definiendo previamente los estados del proceso.
- Ecuaciones integrales: Utilizan la cuadratura gaussiana para resolver una ecuación

integral que se deriva del proceso.

Estas metodologías han sido usadas por varios autores: En 1959, Roberts usó por primera vez el método de Montecarlo (MC) para el cálculo del ARL. Brook y Evans (1972), fueron los primeros en utilizar cadenas de Markov para el cálculo del ARL, metodología que puede usarse para variables continuas y discretas. Mientras que en 1987, Crowder planteó un sistema de ecuación integral para calcular el ARL.

2.2.3 Gráficos de control con memoria

Una limitación que tienen los gráficos de Shewhart, es que sólo analizan la última observación, no considerando la información anterior a esta, de manera que, pequeños cambios en el proceso no son detectados rápidamente. Para mejorar esta deficiencia de los gráficos Shewhart, nuevos gráficos de control fueron diseñados, con estadísticos que consideraban información de las muestras anteriores. Estos gráficos se estudian a continuación:

Gráficos de control CUSUM y EWMA

El gráfico de control de suma acumulativa (CUSUM), fue desarrollado por Page en 1954 para controlar la media de un proceso. Utiliza un estadístico de control que considera la información histórica de m medias muestrales y cuya fórmula está dada por:

$$C_m = \sum_{j=1}^m (\bar{x}_j - \hat{\mu}_0)$$

Donde \bar{x}_j el promedio de la i -ésima muestra y $\hat{\mu}_0$ el estimador de la media de la variable en un estado bajo control

Si el proceso está centrado en μ_0 , el estadístico C_m debería tender a 0 a medida que m aumenta, y los incrementos positivos o negativos del estadístico, indicaría un cambio en el proceso.

Inicialmente, el principal problema de este gráfico era la ausencia de límites de control. Posteriormente, como solución, se presentó la CUSUM tabular, la cual usa dos sumas acumuladas definidas de la siguiente manera:

$$C_i^+ = \text{máx}[0, x_i - (\mu_0 + K) + C_{i-1}^+]$$

$$C_i^- = \text{máx}[0, (\mu_0 - K) - x_i + C_{i-1}^-]$$

Siendo los valores iniciales de $C^+ = C^- = 0$.

El valor de referencia K , está definido como la mitad de la magnitud del cambio:

$$K = \frac{|\mu_1 - \mu_0|}{2} = \frac{\delta\sigma}{2} = k\sigma$$

Donde μ_1 es el valor fuera de control de la media del proceso. Los límites de control están dados por $H = h\sigma$, generalmente el valor de $h = 5$.

Barnard en 1959 propuso una forma alternativa para analizar el gráfico CUSUM, el V-Mask. Sin embargo debido a la complejidad para su interpretación, algunos autores como Montgomery, no recomiendan el uso de este esquema.

El gráfico de control EWMA (medias móviles ponderadas exponencialmente), fue introducido por Roberts en 1959. El estadístico de este gráfico está definido como:

$$Z_i = \lambda \bar{x}_i + (1 - \lambda)Z_{i-1}$$

Donde: $0 < \lambda \leq 1$

Además $z_0 = \mu_0$ y $E(Z_i) = \mu_0$ cuando el proceso está bajo control.

Si se asume normalidad, Z_i se distribuirá normalmente con media y varianza:

$$E(Z_i) = [1 - (1 - \lambda)^i] \mu_0 + [(1 - \lambda)^i] \mu_0$$

$$\sigma_{Z_i}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left[\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right] [1 - (1 - \lambda)^{2i}]$$

Si i es muy grande, la varianza se puede aproximar como: $\sigma_{Z_i}^2 = \frac{\sigma^2}{n} \left[\frac{\lambda}{2 - \lambda} \right]$

El gráfico se podría definir con los siguientes límites de control:

$$\left\{ \begin{array}{l} UCL = \mu_0 + L\sigma_{Z_i} \\ CL = \mu_0 \\ LCL = \mu_0 - L\sigma_{Z_i} \end{array} \right\}$$

Donde L es el ancho de los límites de control.

2.2.4 Gráficos de control Multivariantes para Variables Poisson correlacionadas

Si se requiere controlar diversas variables de calidad en un proceso, utilizar diversos gráficos univariados no sería adecuado, pues la probabilidad de cometer el error tipo I se

incrementaría a $1-(1-\alpha)^n$, si se supone que las n variables a controlar son independientes. Y si existe correlación entre ellas, el enfoque de múltiples gráficos no considera esa estructura de correlación. Como solución a esto, varios investigadores desarrollaron gráficos de control multivariantes, tal como se mencionó en la sección 2.2.1. En esta sección se estudiarán los Gráficos de Control Multivariantes relacionados con variables Poisson correlacionadas, pues son el tema central de esta tesis.

2.2.4.1 Distribución Bivariada propuesta por Holgate

Holgate, en el año de 1964, fue el primero en trabajar en la distribución bivariada de Poisson correlacionadas, para ello definió las variables Poisson observadas X_i , como la suma de dos variables Poisson no observadas independientes. La primera variable, representada por Y_0 , es el componente común, y la segunda variable Y_i , es el componente único; es decir cada variable observable se expresaría como: $X_i = Y_0 + Y_i$, $i = 1, 2$.

Donde λ_i denota la media de cada variable de Poisson Y_i . por lo tanto,

$$E(X_i) = \lambda_0 + \lambda_i \quad \text{Cov}(X_i, X_j) = \lambda_0 \quad \rho(X_i, X_j) = \frac{\lambda_0}{\sqrt{(\lambda_0 + \lambda_i)(\lambda_0 + \lambda_j)}}$$

Y la función de probabilidad bivariada definida por Holgate:

$$P(X_1 = a, X_2 = b) = \sum_{Y_0=0}^{\min(a,b)} \frac{e^{-(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2)} \lambda_0^{Y_0} \lambda_1^{a-Y_0} \lambda_2^{b-Y_0}}{Y_0! (a - Y_0)! (b - Y_0)!}$$

Varios autores han utilizado el modelo de Holgate para derivar gráficos de control multivariantes.

2.2.4.2 Gráfico de Control Multivariante MP

Considerando la generalización p-variada del modelo de Holgate, en el año 2008, Chiu y Kuo diseñaron un gráfico de control multivariante basado en la suma de los variables Poisson monitoreadas, que utilizaba el estadístico $D = \sum_{i=1}^p X_i$. La función de probabilidades de este estadístico se define como:

$$P(D = d) = \exp \left\{ - \left[\sum_{j=0}^p (\lambda_j) \right] \right\} \sum_{i=0}^{trunc\left(\frac{d}{p}\right)} \frac{(\sum_{j=1}^p (\lambda_j))^{d-pi} * \lambda_0^i}{(d - pi)! i!}$$

$$d = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

donde:

$X_i = Y_i + Y_0$, es el número de defectos del tipo i en la muestra.

$\lambda_i = E(Y_i)$. $Y_i, i = 0, 1, \dots, p$ son variables Poisson independientes.

Para este gráfico se necesita sólo un límite de control superior UCL, pues es de interés detectar cambios que incrementen el número de defectos promedio en el lote.

2.2.4.3 Gráficos de Control Bivariantes MX y DF

Ho y Costa, en el 2009, propusieron dos gráficos de control bivariantes, basados en el modelo de Holgate: El gráfico MX que usa como estadístico el máximo de dos variables Poisson y el gráfico DF, que utiliza la diferencia de las variables monitoreadas Poisson.

A continuación la función de probabilidades de dichos gráficos:

$$\begin{aligned}
 P(MX = y) &= P(X_1 = y, X_2 = y) + \sum_{j=0}^{y-1} P(X_1 = j, X_2 = y) + P(X_1 = y, X_2 = j) \\
 &= \frac{\exp(-(\lambda_0 + \lambda_1 + \lambda_2))}{y!} \\
 &\quad * \left\{ \sum_{j=0}^{y-1} \left(\frac{\lambda_1^j \lambda_2^y + \lambda_1^y \lambda_2^j}{j!} \right) \sum_{i=0}^j \binom{j}{i} \binom{y}{i} i! \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1 \lambda_2} \right)^i + \frac{(\lambda_1 \lambda_2)^y}{y!} \sum_{i=0}^y \binom{y}{i}^2 i! \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1 \lambda_2} \right)^i \right\}
 \end{aligned}$$

$$y = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

$$P(DF = y) = \sum_{j=y}^{\infty} P(X_1 = j, X_2 = j - y) = \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)) * \sum_{j=y}^{\infty} \frac{\lambda_1^j * \lambda_2^{j-y}}{(j)! * (j-y)!}$$

$$y = -\infty, \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Para el gráfico MX, se requiere sólo el límite de control superior UCL; mientras que para el gráfico DF, al poder tomar valores negativos, necesitaríamos un límite de control superior UCL y uno inferior LCL.

En el siguiente capítulo, los gráficos multivariados estudiados en esta sección son analizados más a fondo. A continuación, estudiaremos lo relacionado a Cadenas de Markov y su utilidad para el cálculo del ARL.

2.3 Cadenas de Markov y su aplicación a los gráficos de control

Antes de ver lo que es una cadena de Markov, se definirá lo que es un proceso estocástico.

Un proceso estocástico es una sucesión de variables aleatorias $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_t$, que evolucionan generalmente en función del índice t , $t \in T$, $T \subseteq \mathbb{R}$. Cada una de estas variables tiene su propia función de probabilidad. Las cadenas de Markov, introducidas por Andréi Markov en 1907, son un proceso estocástico discreto, donde la probabilidad de ocurrencia de cada una de ellas, está determinada solamente por el comportamiento de la variable inmediata anterior, esto significa:

$$P\{X_{t+1}=j / X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_t = i_t\} = P\{X_{t+1} = j / X_t = i_t\} = p_{i,j}(t)$$

Al dominio de la sucesión de variables $X_1, X_2, \dots, X_i, \dots, X_t$, se denomina espacio de estados, $\{E_i\}$ ($i=1, \dots, m$), esto es, que el valor que toma X_t constituye el estado del proceso en el tiempo t . Además, $p_{i,j}(t)$ es la probabilidad de que el proceso, estando en el tiempo t , pase del estado i al estado j , en el siguiente instante. Si esta probabilidad no depende del tiempo t , $p_{i,j}(t) = p_{i,j}$, se dice que las probabilidades de transición son estacionarias. En adelante se considerará que estas probabilidades son estacionarias.

La Matriz de transición de un paso, \mathbf{P} , es aquella que está formada por las probabilidades $p_{i,j}$ de ir de un estado a otro en un solo paso y tiene las siguientes propiedades:

1. $p_{i,j} \geq 0$; para todo i,j ; y
2. $\sum_{\forall j} p_{i,j} = 1$; para todo i .

Se define a la probabilidad de transición de n pasos: $p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$

Es importante notar que las probabilidades de transición de n pasos, satisfacen la ecuación de Chapman Kolmogorov, es decir, que para un k , $0 < k < n$, se cumple:

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{r \in E} p_{ir}^k p_{rj}^{(n-k)}$$

Esto quiere decir que para conocer la matriz de transición de n pasos, debe calcularse la matriz $\mathbf{P}^{(n)}$ mediante \mathbf{P}^n , es decir, multiplicando n veces la matriz \mathbf{P} .

Los estados en una cadena de Markov pueden ser clasificados en: accesibles, comunicantes, recurrentes, sin retorno.

Se dice que un estado E_j es accesible desde E_i , si $p_{ij}^{(n)} > 0$, para algún valor de n . Si E_j es accesible desde E_i y E_i es accesible desde E_j , se dice que esos estados se comunican.

Un estado E_i es recurrente, si una vez que el proceso lo alcanza, regresará a él. Un caso especial de estado recurrente es el estado absorbente, aquel que una vez el proceso lo alcanzó, salir de él es imposible. Finalmente, se dice que un estado es sin retorno, cuando no se comunica con ningún estado, ni siquiera consigo mismo.

Ahora, considérese una cadena de Markov con al menos un estado absorbente, de manera que la matriz de transición se puede particionar de la siguiente forma:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q} & \mathbf{R} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{pmatrix}$$

Donde \mathbf{Q} y \mathbf{R} son submatrices de \mathbf{P} : \mathbf{Q} corresponde a la partición de las probabilidades de ir de un estado no absorbente (transitorio) a otro estado no absorbente en un paso, \mathbf{R} es la partición correspondiente a las probabilidades de ir desde los estados no absorbentes a los absorbentes en un paso, $\mathbf{0}$ es la matriz nula e \mathbf{I} la matriz identidad. Bajo estas condiciones, se puede calcular el vector de número de pasos promedio hasta que el proceso se absorbe, es decir, cae en uno de los estados absorbentes, mediante la expresión: $\mathbf{T} = (\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$, donde $\mathbf{1}$ es un vector de unos. El *i*ésimo elemento del vector \mathbf{T} , tendrá como valor, el número de pasos promedio hasta que el proceso se absorbió, si se empezó en el estado i .

Este procedimiento último, es el que se usa para el cálculo del ARL (Brooks y Evans, 1972), mediante la identificación de los estados no absorbentes del proceso, y considerando como estado absorbente, aquel cuando el proceso está fuera de control, esto es, el valor del estadístico cae fuera de las bandas de control.

Además, debe considerarse un vector \mathbf{b} de probabilidades iniciales para los estados de la cadena de Markov. El valor del ARL se establece:

$$\text{ARL} = \mathbf{b}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q})^{-1} \mathbf{1}$$

Esta metodología ha sido utilizada por diversos autores. Borrór et al. (1998) emplearon cadenas de Markov para el diseño de un gráfico de control EWMA para variables Poisson. Aparisi (2001) aplica cadenas de Markov cuando realiza una modificación al gráfico de control T^2 de Hotelling, donde el intervalo de tiempo entre muestreo es variable dependiendo de los valores que tome el estadístico.

En esta tesis se utilizaron cadenas de Markov para calcular los ARLs en el capítulo 5.

2.4 Algoritmos genéticos (GA)

Debido a que existen optimizaciones muy complicadas, es necesario el uso de métodos heurísticos para la obtención de los parámetros de un gráfico de control optimizado. Los algoritmos genéticos constituyen una técnica de optimización heurística (reglas empíricas para resolver un problema). A continuación, se revisa su base teórica.

Cuando hablamos de algoritmos genéticos tenemos que remontarnos a los estudios de Charles Darwin y a su teoría de la evolución, cuando en su libro “El origen de las especies” de mitad del siglo XIX, en el cual propone que las especies tienen su origen a través de la selección natural y que las razas más fuertes son las que sobreviven respecto a otras más débiles y evolucionan sobre estas últimas.

Ahora bien, centrándonos en lo dicho anteriormente, investigadores en el área de programación, en la mitad del siglo XX, adoptaron este tipo de comportamiento y lo estudiaron, para utilizarlo como reglas empíricas-rationales para construir nuevos algoritmos.

A esta nueva forma de programación se la denominó “Computación evolutiva”. Por lo que pretende este nuevo sistema de programación emular las teorías Darwinistas para que en una sociedad, la población pueda evolucionar hasta la resolución de un problema, utilizando para tal fin operadores inspirados en la evolución y la variación genética natural.

Visto lo anterior, cuando hablamos de GA, tenemos que hablar de John Henry Holland, que en 1970 desarrolló y creó los algoritmos genéticos para la implementación en las IA o inteligencias artificiales, siendo una de las líneas más prometedoras en esta investigación, cuando era profesor de Filosofía, ingeniería Eléctrica y de ciencias de la computación en la universidad de Michigan y que a partir de entonces se le conocerá como el padre del algoritmo genético.

Un GA es un proceso estructurado cuyo resultado es realizar una búsqueda basada en probabilidades. Esta búsqueda siempre tendrá como mejor elemento al ser más fuerte de la población.

Los GA son de probada eficacia, sobre todo si lo que se pretende calcular son funciones de derivación muy compleja, aunque es posible de utilizar en cualquier función.

Se debe tener las siguientes consideraciones para su utilización:

- Si la función a optimizar tiene muchos máximos/mínimos locales se requerirán más iteraciones del algoritmo para "asegurar" el máximo/mínimo global.
- Si la función a optimizar contiene varios puntos muy cercanos al óptimo, solamente podemos "asegurar" que encontraremos uno de ellos (no necesariamente el óptimo).

Los elementos básicos de los algoritmos genéticos son:

- *Individuo*, una posible solución al problema planteado;
- *Población*, es un conjunto de individuos/ posibles soluciones;
- *Gen*, es una representación de un parámetro específico del individuo;
- *Cromosoma*, es la agrupación de genes de un individuo. La forma más utilizada para representar a los genes del individuo, es a través de la codificación binaria. Aparisi evaluó el rendimiento del algoritmo genético utilizando la codificación binaria y resultó superior en comparación con otros métodos de codificación existentes.

- *Fenotipo*, conjunto de parámetros representando un cromosoma en particular, el cual da información sobre su capacidad de adaptación al medio.
- *Iniciación*: Se crea a individuos aleatoriamente y en este caso, conjuntos de cromosomas, los cuales en sí nos pueden dar solución al problema.
- *Evaluación*: Se aplicará a cada uno de los cromosomas del grupo de individuos, una función de aptitud para certificar cuan buena es la solución que aporta el individuo.
- *Selección de los padres*: Se evalúan las características de los individuos a través de la función de aptitud; y aquellos con mejores resultados tendrán mayor probabilidad de ser seleccionados. Las formas de selección más comunes son: Por ruleta, por rango, por torneo.
- *Operador de cruce*: Es el principal operador a nivel genético, en sí lo que representa es la reproducción de los individuos, utiliza dos cromosomas a la vez para que después se generen dos descendientes donde se combinan las características de ambos cromosomas padres. Los operadores más utilizados son: Un punto, dos puntos, uniforme y aritmético.
- *Operador de mutación*: Como su nombre indica, es la modificación al azar del cromosoma de los individuos, lo que permite que se pueda reconsiderar nuevas opciones en el grupo de individuos en la búsqueda de espacios que no están cubiertas en la población actualmente estudiada. Se realiza a través de una probabilidad de mutación previamente establecida. Estas probabilidades suelen ser bajas para evitar hacer del GA una búsqueda aleatoria: 0.01, 0.03, 0.05, 0.10, 0.15.
- *Reemplazo*: Una vez aplicados y realizados los cambios sobre los operadores genéticos, se selecciona a los mejores individuos del grupo para generar al grupo de

individuos de la generación siguiente.

El GA siempre se tendrá que detener cuando la solución alcanzada sea óptima, pero realmente esto siempre se desconoce, por lo que se pueden utilizar dos criterios: Aplicar al GA a un número máximo de iteraciones o detenerlos cuando no haya ningún tipo de cambio en el grupo de individuos.

También, se debe tener en cuenta que un GA puede presentar variaciones, siempre dependiendo de cómo aplicar las opciones genéticas de los individuos y como estos pasos llevan a formar la nueva población.

En los capítulos 4 y 5, para el desarrollo del programa que optimiza los parámetros de los dos nuevos gráficos que se proponen en la tesis, se utilizaron algoritmos genéticos. Los cromosomas fueron codificados en sistema binario. También se utilizó como métodos de selección: la ruleta y el torneo. Los tipos de cruzamiento utilizados: 1 punto, 2 puntos y uniforme con la posibilidad de seleccionar la probabilidad de cruzamiento (0.60, 0.70, 0.80, 0.90, 0.95, 0.99).

La selección por ruleta consiste en crear una ruleta con los cromosomas de cada generación, aquellos cromosomas con mayor puntuación tendrán mayor probabilidad de ser seleccionados. Mientras que la selección por torneo se seleccionan al azar un determinado número de individuos y se reproduce el más apto.

En cuanto al tipo de cruce que se utilizó en el diseño del optimizador: En el cruzamiento de 1 punto, se cortan a los dos cromosomas en 1 punto específico. El nuevo individuo tendrá como cromosoma la primera parte de uno de los progenitores y la segunda parte del otro progenitor.

Mientras que en el cruce de 2 puntos, a los dos cromosomas se los corta en 2 puntos. Un progenitor aporta dos partes (inicial y final) del cromosoma al descendiente, mientras el segundo progenitor aporta solo una parte (media).

En el cruzamiento uniforme, los padres aportan de forma aleatoria cada uno de los genes a su descendiente.

Además, como función de aptitud se utiliza la que recomendaron Aparisi y García-Díaz (2007). Ellos aplicaron el concepto de diseño óptimo sobre un punto. Este diseño consiste en especificar el ARL_0 deseado y un vector de cambios \mathbf{d}^* que se desea detectar. Entonces se obtiene la combinación de parámetros del gráfico que provee el mínimo $ARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*)$ (ARL fuera de control), restringido al valor ARL_0 deseado.

Las funciones de aptitud que usaron fueron:

- 1) $\max - w_1 |ARL_0 - ARL(\mathbf{d} = 0)| - w_2 ARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*)$ si $(ARL_0 - ARL(\mathbf{d} = 0)) \leq 0$,
- 2) $\max - 2w_1 |ARL_0 - ARL(\mathbf{d} = 0)| - w_2 ARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*)$ si $(ARL_0 - ARL(\mathbf{d} = 0)) > 0$,

Donde: ARL_0 representa el ARL deseado, $ARL(\mathbf{d} = 0)$ representa el ARL bajo control que se obtiene con los parámetros del gráfico evaluados, $ARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*)$ es el valor de ARL para detectar el cambio \mathbf{d}^* , en el cual se desea optimizar el gráfico, y w_1 , w_2 representan las ponderaciones de cada objetivo a optimizar en cada ecuación. Los valores recomendados por Aparisi y García-Díaz son: $w_1=1$ y $w_2=5$, y son los usados para el diseño del programa.

Otros autores que utilizaron algoritmos genéticos para el diseño óptimo de gráficos de control son: Celano y Fichera (1999), He, et al., (2002), Aparisi, et al., (2001, 2007, 2010, 2011), Lee y Khoo (2006), Champ y Aparisi (2008), entre otros.

2.5 Simulación de Montecarlo

El método de Montecarlo consiste en resolver problemas mediante simulación de variables aleatorias, dando soluciones aproximadas a situaciones complejas y costosas, difíciles de evaluar. El nombre de este método se debe al Casino de Montecarlo, al ser la ruleta un generador de números aleatorios. El método de Montecarlo tiene un error de estimación que decrece en función de $\frac{1}{\sqrt{N}}$, siendo N el número de evaluaciones.

Existen algunos métodos para simular variables aleatorias: Método de la transformada inversa, Método de aceptación-rechazo, Método de composición, Método de convolución.

En esta tesis, se usó el método de Montecarlo para validar las fórmulas obtenidas para calcular los ARLs de los nuevos gráficos propuestos y comprobar el gráfico óptimo propuesto por el Algoritmo Genético.

Como el tema de la tesis está basado en variables Poisson correlacionadas, se revisará a continuación la metodología usada para generar variables Poisson correlacionadas.

Se utilizó el método de la transformada inversa, el cual se basa en que la función de distribución de una variable aleatoria continua es otra variable aleatoria uniforme $U(0,1)$. Este método sigue el siguiente procedimiento para generar números aleatorios con función de probabilidades acumuladas $F(x)$:

- 1) Generar números aleatorios u con distribución $U(0,1)$.
- 2) Obtener un valor para la variable aleatoria X de esta manera: $x=F^{-1}(u)$.

Este método de transformada inversa ha sido adaptado a la generación de variables aleatorias discretas (Barceló (1996), Gentle, J. (2005), entre otros) de la siguiente manera:

Suponga una variable aleatoria discreta X con dominio $m_1 < m_2 < m_3 \dots$, probabilidades $p_1, p_2, p_3 \dots$ y con función de probabilidades acumulada $P(x) = \sum_{m_i \leq x} p_i$.

Para usar el método de la transformada inversa con variable aleatorias discretas, se debe generar primeramente una variable aleatoria u con distribución $U(0,1)$. Posteriormente se generará un valor de la variable aleatoria X , de la siguiente manera que $x = \min\{t/u \leq P(t)\}$. Por tanto, esta metodología se la puede usar para generar variables Poisson.

Para generar p variables aleatorias Poisson correlacionadas (X_i) con la estructura propuesta por Holgate ($X_i = Y_0 + Y_i \quad i=1,2,\dots,p$), primero se deben generar las Poisson independientes Y_0 e Y_i y se generará la variable X_i , sumando Y_0 con su correspondiente Y_i .

Considerando que una variable Poisson Y tiene la siguiente función de Probabilidades:

$$f(y) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^y}{y!} \quad y = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

El algoritmo para generar variables aleatorias Poisson independientes mediante el método de la transformada inversa es:

- 1) Generar un número aleatorio u con distribución $U(0,1)$.
- 2) Hacer $i = 0$, $F=P = e^{(-\lambda)}$
- 3) Hacer $P = \frac{\lambda}{i+1} P$, $F = F + P$, $i = i + 1$
Mientras ($u < F$)
- 4) Generar $Y=i$

De acuerdo a lo anterior visto, el procedimiento que se usó para calcular los ARLs mediante simulación de Montecarlo se detalla mediante el siguiente algoritmo:

- 1) Fijar las medias bajo control $\lambda_{0,i}$, los límites de control del gráfico y el vector de cambios $\mathbf{d}^* = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_p)$.

$$\text{donde } d_i = (\lambda_{1,i} - \lambda_{0,i}) / (\lambda_{0,i})^{1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p,$$

O lo que es lo mismo, $\lambda_{1,i} = \lambda_{0,i} + d_i * (\lambda_{0,i})^{1/2}$ y $\lambda_{1,i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, p$) son los valores de las medias de las variables Y_i , cuando hay un cambio en el proceso.

- 2) Fijar un número de iteraciones bastante grande.
- 3) Inicializar dos variables contador: $iter = 0$ y $j = 0$. Además inicializar un vector *racha*.
- 4) Generar p variables aleatorias Poisson correlacionadas X_i con medias $(\lambda_{1,0} + \lambda_{1,i})$, mediante el procedimiento explicado anteriormente. Nótese que se trabaja con las medias fuera de control. En caso que se quiera obtener el ARL bajo control se fija como vector de cambios, el vector cero.
- 5) Con las variables X_i generadas, calcular el valor del estadístico del gráfico de control que se desea analizar, denótese como $G(X_1, X_2, \dots, X_p)$.
- 6) Si $G(X_1, X_2, \dots, X_p)$ está dentro de los límites de control, hacer $j = j+1$, e ir al paso 4). Si por el contrario está fuera de los límites de control, hacer: $iter = iter+1$; $racha[iter]=j+1$; $j=0$; e ir al paso 4).
- 7) El algoritmo se termina cuando se cumple que $iter$ es igual al número de iteraciones. Finalmente, se calcula el promedio del vector *racha*, el cual será el valor del ARL.

Elección del número de simulaciones

El número de iteraciones se escogió, tomando en cuenta que el objetivo de la simulación es estimar el valor del ARL con la mayor precisión posible. Tal como se mencionó antes el

ARL, es el valor esperado de una variable aleatoria geométrica RL (número de muestras hasta que el gráfico de control presenta una señal) con parámetro q . El valor esperado, varianza y desviación estándar se presentan a continuación:

$$E(RL) = 1/q = ARL$$

$$VAR(RL) = (1-q)/q^2$$

$$\sigma_{RL} = \frac{\sqrt{1-q}}{q} = \frac{1}{q} \sqrt{1-q} = ARL \sqrt{1-q}$$

Como, q , el valor de la probabilidad de que un gráfico de control presente una señal, se lo fija pequeño; la desviación típica de la longitud de rachas se lo puede aproximar como: $\sigma_{RL} \cong ARL$.

Considerando que el valor de ARL calculado en la simulación es un estimador (ARL^*) y es una media, usando el teorema del límite central, la desviación estándar del ARL sería:

$$\sigma_{ARL^*} = \frac{ARL}{\sqrt{N}}$$

Si se desea que la diferencia porcentual entre ARL^* y ARL sea menor que un valor 1%, con una probabilidad superior al 95%, el valor mínimo de iteraciones, N, debería ser 38416. En esta tesis, se trabajó con un número mayor de iteraciones.

$$P(|ARL' - ARL| < 0.01 * ARL) \geq 0.95$$

CAPÍTULO 3

CONTROL ESTADÍSTICO MULTIVARIANTE PARA VARIABLES POISSON CORRELACIONADAS

El contenido de este capítulo está basado en el artículo:

Aparisi, F., García-Bustos, S. and Epprecht, E. K. (2013). Optimum Multiple and Multivariate Poisson Statistical Control Charts. *Quality and Reliability Engineering International*. DOI: 10.1002/qre.1490.

3.1. Introducción

Cuando se monitorea el número de defectos o ratio de defectos en un proceso, los conteos a menudo se suponen que siguen una distribución Poisson. En estos casos, los gráficos de control \bar{c} o \bar{u} se utilizan a menudo, (Montgomery (2012)). Por otra parte, en algunos procesos se requiere controlar simultáneamente varias variables correlacionadas Poisson. Estos pueden corresponder, por ejemplo, a diferentes tipos de defectos, o pueden ser conteos de un mismo tipo de defecto o la aparición en diferentes ubicaciones. En estos casos, los dos enfoques principales están basados en: 1 - Usar un gráfico de control para cada variable de Poisson (Sistema Múltiple). 2-Emplear un gráfico de control multivariante para todas las variables.

El enfoque multivariante se basa en el cálculo de un estadístico único para todas las p variables que se controlan. Por ejemplo, si las variables fueran continuas y normalmente distribuidas el control de proceso estadístico multivariante puede estar basado en el estadístico T^2 de Hotelling, (Hotelling(1947), Lowry et al. (1992) y Karlis (2005 y 2009)). Sin embargo, hay poca investigación sobre el control estadístico multivariante de procesos cuando las variables son discretas. Holgate (1964) fue el primer autor que presentó un trabajo sobre la distribución Poisson bivariante. Él propuso un modelo en el cual cada una de las variables resulta de la suma de un componente común (distribuido como una Poisson), y un componente individual (también sigue distribución Poisson). Este modelo puede ser fácilmente justificado en aplicaciones reales. Por ejemplo, cuando se miden dos tipos de defectos en una superficie pintada, los dos números de defectos pueden estar correlacionados a través de un factor común, por ejemplo, la presión de aire de pintura. La influencia de este factor común en el número de defectos de las variables observadas, X_i , está representado por la variable Y_0 , de modo que $X_i = Y_0 + Y_i$, $i = 1, 2$, siendo Y_i el factor único para cada una de las variables observadas .

Patel (1973) empleó la aproximación normal multivariante a la distribución binomial multivariada con el fin de desarrollar un esquema multivariante para monitorear variables discretas, en una manera similar como el estadístico T^2 monitorea el vector de medias. Lu et al. (1998) también propusieron y analizaron un gráfico np multivariante. Skinner et al. (2003) propusieron emplear la desviación residual de un modelo lineal generalizado como estadísticos de control en el caso de varias variables independientes de Poisson.

Retomando el caso que interesa, de diversas variables de Poisson correlacionadas, Chiu y Kuo (2008) propusieron graficar la estadística $D = \sum_{i=1}^p X_i$, es decir la suma de los valores observados de las variables. Consideraron que la correlación entre las variables proviene de un factor común, como en el modelo de Holgate, con la diferencia que se extendieron a más de sólo dos variables. Por otro lado, Ho y Costa (2009) analizaron gráficos basados en la diferencia, $DF = X_1 - X_2$, y en el valor máximo de dos variables de Poisson, $MX = \max(X_1, X_2)$. También asumieron el modelo de Holgate.

Laungrungong et al. (2011), desarrollaron un gráfico de control multivariante EWMA de las variables de Poisson (el gráfico de control MPEWMA) asumiendo el modelo de Holgate. El gráfico MPEWMA se comparó frente al gráfico de control tradicional MEWMA (Lowry et al.) aplicado a las variables de Poisson. Ellos muestran que el uso del gráfico MEWMA sólo produce resultados razonables cuando la media de las variables de Poisson tiene un valor de más de 5, debido a que usa la aproximación normal. Si no se alcanza esta restricción el gráfico MEWMA tiende a producir más falsas alarmas.

Normalmente, el gráfico de control diseñado para la supervisión de variables Poisson tiene sólo un límite de control superior, ya que el usuario sólo está interesado en la detección de un aumento en la tasa de defectos del proceso. Este es el enfoque que se utilizará en este trabajo. Sin embargo, en el caso de la diferencia de dos variables de Poisson también es necesario un límite inferior de control, porque se espera que los resultados puedan ser negativos (véase más adelante).

El usuario real en la industria, quien necesita el desarrollo de un SPC eficaz basado en varias variables Poisson, podría necesitar ayuda para decidir qué procedimiento de control es el más eficaz para su proceso. En algunos casos, un enfoque multivariante podría tener el mejor rendimiento (la detección más rápida de los cambios en el proceso). Sin embargo, en otras aplicaciones reales, un conjunto bien diseñado de gráficos univariados Poisson puede ser la mejor opción. En este capítulo se ofrece una herramienta de optimización, un software libre bajo Windows© que encuentra los límites de control para la mayoría de los esquemas de control (por múltiples variables) basados en la distribución de Poisson, y realiza una comparación de los resultados con el fin de ayudar al usuario final con la selección del gráfico de control más adecuado para su proceso.

Este capítulo está organizado de la siguiente manera: La sección 3.2 presenta la base teórica del Esquema Múltiple (varios gráficos de control univariantes optimizados) y de los gráficos de control multivariantes que serán estudiados (gráfico MP, basado en la suma de las variables, gráfico MX, en el máximo de las variables y el gráfico DF, en la diferencia de dos variables). La sección 3.3 describe el programa de ordenador que se ha desarrollado con el objetivo de ayudar al usuario final a seleccionar el mejor plan para su proceso. Este software permite la obtención de los límites de control para los gráficos mencionados, cuando se supervisan $p = 2, 3$ o 4 variables de Poisson, con el fin de obtener el ARL bajo control deseado, o un ARL que es el más cercano posible al mismo. Además, el software lleva a cabo una comparación completa del rendimiento entre los diferentes gráficos de control. El uso de este software y una comparación general de rendimiento se presenta en la Sección 3.4. Finalmente, la Sección 3.5 sintetiza las conclusiones de este capítulo.

3.2. Modelos de ARL para los esquemas Múltiple y Multivariados considerados

EL ARL (Average Run Length) es probablemente la medida de rendimiento más utilizada en los gráficos de control. Consiste en el número esperado de muestras tomadas en el proceso hasta que se produzca una señal de fuera de control. Un control eficaz de proceso estadístico necesita un gran ARL cuando el proceso está en un estado bajo control (con el fin de evitar falsas alarmas frecuentes), y un pequeño ARL cuando el proceso está fuera de control, con el fin de detectar y eliminar rápidamente la causa especial(s) que está(n) presente.

En esta sección se desarrollan las expresiones para el cálculo de los ARL de los múltiples gráficos Poisson y de los métodos multivariantes considerados (MP, MX y gráficos DF). Se supone que las variables siguen la estructura de correlación propuesta por Holgate (1964). Por lo tanto, cada variable de Poisson observada X_i es la suma de una variable de Poisson Y_0 común y una variable de Poisson individual Y_i : $X_i = Y_0 + Y_i$, for $i = 1, 2, \dots, p$.

Debido a que los parámetros λ_i , medias de las variables Y_i , $i = 0, 1, 2, \dots, p$, suelen ser desconocidos, es necesario estimarlos. Holgate(1964) introdujo el método de los momentos y el de máxima verosimilitud para estimar estos parámetros. Karlis (2003) también propuso un algoritmo EM (Esperanza Maximización) para estimar las medias de las variables de Poisson. Como estos autores comentan, el problema principal es estimar la covarianza λ_0 , las otras medias se estiman por diferencia, $E(Y_i) = E(X_i) - E(Y_0)$.

Además, salvo en el caso del gráfico DF, se considera que todos los gráficos tienen sólo límite de control superior, ya que la finalidad es detectar aumentos en la tasa de defectos (o en cualquier variable de distribución de Poisson, cuyo aumento corresponde a un deterioro de la calidad).

3.2.1. Monitoreo multivariado empleando la suma de las variables de Poisson. Gráfico MP.

Generalizando modelo de Holgate (1964) para p variables, Chiu y Kuo (2008) definieron el estadístico $D = \sum_{i=1}^p X_i$, la suma de los valores observados de las variables y cuya función de probabilidad se mencionó en la sección 2.2.4.2:

Para este gráfico de control, el ARL es obtenido por:

$$ARL = \frac{1}{1 - P(D < UCL)} \quad (3.1)$$

Donde UCL es el límite superior de control y se asumirá a lo largo de este capítulo que, si el estadístico cae exactamente en el límite de control, entonces existe una señal de que el proceso pudiera estar fuera de control.

3.2.2. Control multivariado empleando el máximo de las variables de Poisson. Gráfico MX

La función de probabilidad para el Máximo de dos variables correlacionadas Poisson (Ho and Costa (2009)) es considerada en la sección 2.2.4.3:

Se ha ampliado la función de probabilidades del Máximo de dos variables, a fin de obtener la función de probabilidades para cualquier número de variables p . La ecuación general se convierte en:

$$P(MX = y) = P(X_1 = y, X_2 = y, \dots, X_p = y) +$$

$$\begin{aligned}
& + \sum_{j_1=0}^{y-1} \sum_{j_2=0}^y \dots \dots \dots \sum_{j_{p-1}=0}^y P(X_1 = y, X_2 = j_1, \dots, X_p = j_{p-1}) + P(X_1 = j_{p-1}, X_2 = y, \dots, X_p = j_{p-2}) + \dots \\
& \quad + P(X_1 = j_1, X_2 = j_2, \dots, X_p = y)
\end{aligned}$$

$$P(MX = y) = \frac{\exp(-(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p))}{y!} * \left\{ \sum_{j_1=0}^{y-1} \sum_{j_2=0}^y \dots \dots \sum_{j_{p-1}=0}^y [(P_A * P_B)] + P_C \right\} \quad (3.2)$$

Donde:

$$P_A = \left(\frac{\lambda_1^y \lambda_2^{j_1} \dots \lambda_p^{j_{p-1}} + \lambda_1^{j_{p-1}} \lambda_2^y \dots \lambda_p^{j_{p-2}} + \dots + \lambda_1^{j_1} \lambda_2^{j_2} \dots \lambda_p^y}{j_1! j_2! \dots j_{p-1}!} \right)$$

$$P_B = \sum_{i=0}^{\min(j_1, j_2, \dots, j_{p-1})} \binom{j_1}{i} \binom{j_2}{i} \dots \binom{j_{p-1}}{i} \binom{y}{i} i! \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} \right)^i$$

$$P_C = \frac{(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p)^y}{(y!)^{p-1}} \sum_{j=0}^y \binom{y}{j}^p j! \left(\frac{\lambda_0}{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p} \right)^j$$

$$y = 0, 1, 2, \dots, \infty$$

Por lo tanto, el ARL se calcula como:

$$ARL = \frac{1}{1 - P(MX < UCL)} \quad (3.3)$$

Donde UCL es el límite de control superior para el gráfico MX.

3.2.3. Control multivariado empleando la diferencia de las variables de Poisson. Gráfico DF.

Sea $DF = X_1 - X_2$, es decir, la diferencia en los valores de dos variables de Poisson (dos tipos de defectos en una muestra). Su función de probabilidad fue desarrollada por Ho y Costa (2009) y es considerada en la sección 2.2.4.3:

Su función de probabilidad no depende de λ_0 , la media del factor común Y_0 . Como se mencionó anteriormente, el gráfico DF requiere dos límites de control, uno superior y uno inferior. Por lo tanto, la expresión para el ARL es:

$$ARL = \frac{1}{1 - P(LCL < DF < UCL)} \quad (3.4)$$

Donde:

$$P(LCL < DF < UCL) = \sum_{i=LCL+1}^{UCL-1} \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2)) * \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\lambda_1^j * \lambda_2^{j-i}}{(j)! * (j-i)!} \quad (3.5)$$

3.2.4. Múltiples gráficos de control univariantes

El enfoque múltiple consiste en controlar el proceso con un conjunto de gráficos de control univariados. Por lo tanto, cada variable Poisson X_i se controla mediante el uso de un gráfico de control. Como se ha comentado antes, se supone que los gráficos tienen sólo el límite de control superior, como normalmente el usuario está interesado en la detección de cambios que aumentan el número de unidades defectuosas. Por tanto, si se desea controlar p variables Poisson, hay que determinar p límites de control superior: $UCL_1, UCL_2, \dots, UCL_p$. El estadístico que se van a representar en cada gráfico es el valor observado de la variable X_i . Una gráfica muestra una señal cuando el valor observado es mayor que o igual que el límite de control, es decir, $X_i \geq UCL_i$. Por lo tanto, el control estadístico de proceso basado en este conjunto de p gráficos de control muestra una señal de fuera de control cuando uno o más gráficos de control presentan una señal.

Por tanto, el ARL en este caso se calcula como:

$$ARL = \frac{1}{1 - P(X_1 < UCL_1, X_2 < UCL_2, \dots, X_p < UCL_p)} \quad (3.6)$$

Y la función de distribución acumulada es:

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, \dots, X_p \leq x_p) \\ = \sum_{d_1=0}^{x_1} \sum_{d_2=0}^{x_2} \dots \sum_{d_p=0}^{x_p} P(X_1 = d_1, X_2 = d_2, X_3 = d_3, \dots, X_p = d_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, \dots, X_p \leq x_p) \\ = \sum_{d_1=0}^{x_1} \sum_{d_2=0}^{x_2} \dots \sum_{d_p=0}^{x_p} P(Y_0 + Y_1 = d_1, Y_0 + Y_2 = d_2, Y_0 + Y_3 = d_3, \dots, Y_0 + Y_p = d_p) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, \dots, X_p \leq x_p) \\
&= \sum_{d_1=0}^{x_1} \sum_{d_2=0}^{x_2} \dots \sum_{d_p=0}^{x_p} \sum_{i=0}^{\min(d_1, \dots, d_p)} P(Y_0 = i, Y_1 = d_1 - i, Y_2 = d_2 - i, Y_3 = d_3 - i, \dots, Y_p = d_p - i) \\
&= d_p - i
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& P(X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, X_3 \leq x_3, \dots, X_p \leq x_p) \\
&= \sum_{d_1=0}^{x_1} \sum_{d_2=0}^{x_2} \dots \sum_{d_p=0}^{x_p} \sum_{i=0}^{\min(d_1, \dots, d_p)} \exp(-(\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_p)) \\
&\quad * \frac{\lambda_0^i * \lambda_1^{d_1-i} * \lambda_2^{d_2-i} * \dots * \lambda_p^{d_p-i}}{(d_1 - i)! * (d_2 - i)! * \dots * (d_p - i)! * i!}
\end{aligned}$$

(3.7)

3.3. Optimización, software y ejemplo de aplicación

Como se ha comentado en la introducción, el objetivo de este capítulo es ayudar al profesional de la industria quien tiene la necesidad de controlar algunas variables de Poisson. Con este fin, se ha desarrollado un programa de ordenador que encuentra los mejores límites de control para diferentes esquemas posibles de control, a saber, el gráfico MP, el gráfico MX, el gráfico DF (en el caso de sólo dos variables de Poisson) y un conjunto de gráficos univariantes Poisson, considerando $p = 2, 3$ y 4 variables. Además, realiza una comparación de los resultados mediante curvas ARL y otros gráficos. Este software se ejecuta bajo Windows© y está libremente disponible (ver Figura 3.1).

La Figura 3.1 muestra la pestaña "Optimization" de este software. En la sección "Model Parameters" de esta pestaña, el usuario tiene que especificar los parámetros de entrada para la optimización. La información requerida se distribuye como sigue: en la sección "Control Chart" en la parte superior izquierda, el usuario puede elegir el gráfico de control para ser optimizado, es decir, encontrar el mejor límite de control(s). Se selecciona el número de

variables de Poisson que se controlan en la sección "Number of Variables" ($p = 2, 3$ ó 4). En el centro, el texto "ARL in-control (ARL_0)" muestra donde el usuario tiene que introducir el ARL bajo control deseado para el gráfico.

En la sección " In-control Means ", en la parte inferior, el usuario tiene que introducir las medias λ_i cuando el proceso está bajo control, $E(Y_i) = \lambda_i$, y en la sección "Shift Parameters" él o ella tiene que digitar los cambios de las medias en unidades de desviación estándar, $d_i = (\lambda_{1,i} - \lambda_{0,i}) / (\lambda_{0,i})^{1/2}$, cuando el proceso está fuera de control. Para obtener los límites de control el usuario sólo tiene que hacer click en el botón "START".

El software además hace una comparación completa del rendimiento. Esta capacidad ha sido utilizada para la obtención de los resultados que se muestran en la Sección 3.4. Esta comparación se realiza en la pestaña "Comparison", ver Figura 3.2. Los resultados de la comparación son presentados en gráficos, para una mejor visualización. Los límites de control obtenidos en la pestaña de "Optimization" se toman, de manera predeterminada, como entradas para la pestaña "Comparison". En esta ficha se obtienen dos gráficos. Para trazar el gráfico con el título " Best Control Chart: Two free shifts " el usuario tiene que elegir dos variables Y_i . Los ejes de este gráfico son los cambios en unidades de desviación estándar de las medias de estas dos variables seleccionadas. Además, el usuario tiene que especificar valores fijos para los cambios de las medias del resto de variables.

Por ejemplo, la Figura 3.2 muestra el siguiente caso: con dos variables monitoreadas ($p = 2$), la media de la variable Y_0 ha sido seleccionada para graficar sus cambios en el eje horizontal, y la media de la variable Y_1 para el eje vertical. El cambio para la media de la variable Y_2 se ha fijado en una unidad de desviación estándar. Después de hacer click en "PLOT", el gráfico muestra que carta tiene el mejor rendimiento en cada punto del área de posibles cambios.

El segundo gráfico que se muestra en la Figura 3.2 (titulada " Best Control Chart: One free shift ") obtiene las curvas ARL de algunos gráficos de control que se comparan en función

del cambio en la media de una de las variables Y_i (ARL en el eje vertical, contra el cambio en el eje horizontal), para valores fijos de las medias de las variables Y_i restantes (estos valores fijos pueden estar bajo control o valores fuera de control). El usuario debe especificar para qué variable Y_i , los cambios en la media en unidades de desviación estarán en el eje horizontal, y los cambios fijos para las variables restantes. En el caso mostrado en la Figura 3.2, las curvas muestran cómo el ARL varía en función del cambio en la media de Y_0 , cuando la media de Y_1 no se desplaza y la media de Y_2 se incrementa en una unidad de desviación estándar.

Sigue un ejemplo de aplicación de este programa informático. Según Hossain et al. (2011), hay dos tipos de defectos que pueden ocurrir en la producción de telas: líneas horizontales y efectos Barre, que a veces son producidos por un hilo desigual. Es necesario monitorear la producción de tejidos para controlar estos 2 tipos de defectos. Para la estimación de las medias del proceso se realiza un muestreo, tomando 100 muestras de 10 metros cada una. Los resultados de las muestras se observan en la Tabla 3.1: X_1 es el número de líneas horizontales, y X_2 es el número de efectos Barre.

X_1	X_2	Frecuencia
0	0	2
0	1	4
0	2	1
0	3	2
1	0	9
1	1	8
1	2	6
2	0	9
2	1	15
2	2	4
2	3	7
3	0	3
3	1	5
3	2	2
3	4	2
4	0	2
4	1	5
4	2	2
4	3	3
4	4	1
5	0	2
5	1	2
5	3	1
6	1	1
6	3	1
8	2	1
$\bar{X}_1 = 2.26$	$\bar{X}_2 = 1.26$	$\Sigma = 100$

Tabla 3.1. Ejemplo de muestra de un proceso. X_1 es el número de líneas horizontales, y X_2 es el número de efectos barre

La prueba de bondad de ajuste χ^2 muestra claramente que las variables siguen una distribución de Poisson. La correlación observada entre estas variables es $\rho_{X_1 X_2} = 0.16$. Se desea obtener los límites de control para todos los gráficos que se muestran en la sección 3.2 con el fin de obtener un ARL bajo control de al menos 370, $ARL_0 = 370$.

Utilizando el método de los momentos, de esta información muestral es fácil estimar los valores de medias de las variables Y_i Poisson no observadas, sabiendo que $E(X_i) = \lambda_0 + \lambda_i$ y $Cov(X_i, X_j) = \lambda_0$. Es necesario saber cuál es el mejor gráfico de control para detectar un cambio de una unidad sigma en las medias λ_0 , λ_1 y λ_2 . Los valores de las medias de Y_i cuando están fuera de control utilizan las siguientes relaciones:

$$\lambda_{1,i} = \lambda_{0,i} + d_i * (\lambda_{0,i})^{1/2}; \quad d_i = (\lambda_{1,i} - \lambda_{0,i}) / (\lambda_{0,i})^{1/2} \quad i = 0, 1, 2 \quad (3.8)$$

Donde: $\lambda_{0,i}$: Medias bajo control

$\lambda_{1,i}$: Medias fuera de control.

d_i : cambio en unidades de desviación estándar para la media $\lambda_{0,i}$

La expresión para el cambio en la media, d_i , fue sugerida por Li y Tsung (2011).

La Tabla 3.2 muestra los valores numéricos obtenidos:

Bajo Control			Fuera de Control		
$\lambda_{0,0}$	$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$
0.28	1.98	0.98	0.81	3.39	1.97

Tabla 3.2. Estimaciones de los parámetros del proceso

Debido a este cambio en las medias, la correlación se incrementa de 0.16 a 0.24. La Tabla 3.3 muestra los ARLs bajo control y fuera de control para todos los gráficos estudiados. La Figura 3.1 muestra los resultados obtenidos por el software cuando resuelve este ejemplo de aplicación.

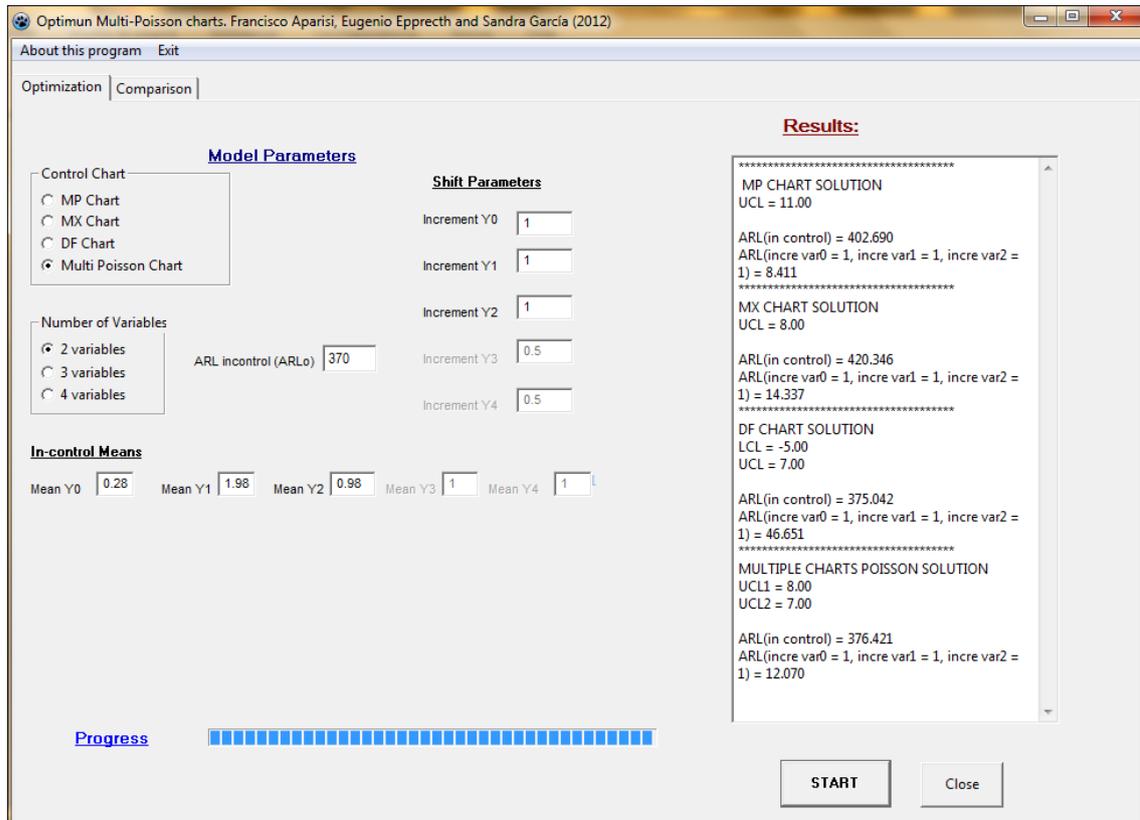


Figura 3.1: El programa de computadora resolviendo el ejemplo de aplicación.

	Tipo de Gráfico					
	Gráfico MP	Gráfico MX	Gráfico DF		Esquema Múltiple	
Límites de control	UCL = 11	UCL = 8	LCL = -5	UCL = 7	UCL ₁ = 8	UCL ₂ = 7
ARL (d = 0)	402.69	420.35	375.04		376.42	
ARL (d = d*)	8.41	14.34	46.65		12.07	

Tabla 3.3. Límites de Control para cada esquema de control

Aunque el valor $ARL_0 = 370$ ha sido especificado, muchas veces no es factible lograr precisamente ese valor, porque la variable Poisson es discreta. Por esa razón, se está mostrando en esta sección un ejemplo donde los ARLs bajo control obtenidos para los gráficos, $ARL (d = 0)$, están cerca de ARL_0 . El objetivo es, tanto como sea posible, no favorecer a cualquier esquema en la comparación. En esta comparación, el gráfico MP es la mejor opción para detectar estos cambios, ya que tiene el ARL fuera de control más bajo y, por otra parte, no tiene el ARL bajo control más pequeño.

Como se ha comentado en el apartado anterior, el programa de ordenador desarrollado hace una comparación completa de los gráficos optimizados en la pestaña "Optimization". Se examinará ahora los resultados de la comparación para este ejemplo concreto.

La mayor parte del área de "Best Control Chart: Two free shifts" de la Figura 3.2, corresponde al gráfico MP, lo que demuestra que este gráfico de control es el que produce el ARL más bajo para la mayoría de las combinaciones de cambios en las medias de las variables Y_0 e Y_1 cuando la media de la variable Y_2 sufre un cambio de una unidad de desviación estándar. La pestaña "Optimization" se puede emplear para comprobar estos resultados y para obtener los valores de ARL. Por ejemplo, cuando la media Y_0 se incrementa en 1.2 unidades de desviación estándar y la media de Y_1 aumenta en 1 unidad de desviación estándar, el mejor gráfico es el MP, con un ARL de 7.32, que es 43%, 84% y

32% más bajo que los ARLs de los gráficos MX, DF y el esquema múltiple, respectivamente. En el caso de que la media de Y_0 no cambia y la media de Y_1 cambia en 0.1 unidades de desviación estándar, la mejor opción es el gráfico DF. En este caso el gráfico DF cuenta con un ARL fuera de control de 78.82, el cual es 56%, 2% y un 8% más pequeño que los ARLs de los gráficos de MX, MP y Esquema múltiple respectivamente. Si la media de Y_1 se incrementa en 1.6 unidades de desviación estándar y la media de Y_0 permanece constante, la mejor opción es el Esquema múltiple, con un ARL de 10.56. Por lo tanto este gráfico mostrado por el programa de ordenador es muy útil para el profesional, que, conociendo los cambios más comunes en el proceso, se puede identificar rápidamente qué esquema de control es el más adecuado.

El segundo gráfico presentado en la Figura 3.2, "Best Control Chart: One free shift", muestra los ARLs para los diferentes cambios de Y_0 cuando la media de Y_1 no tiene cambios, y la media de Y_2 se ha desplazado una unidad de desviación estándar. Es importante tener en cuenta que el usuario puede cambiar fácilmente estos parámetros. El gráfico muestra claramente que, en este caso, para los cambios en λ_0 mayores o iguales a 0.2 unidades de desviación estándar, el mejor gráfico de control es el MP. Por ejemplo, cuando la media de Y_0 aumenta en 0.6 unidades de desviación estándar, el ARL del gráfico MP es 35.74. Este valor se puede obtener fácilmente a partir de la pestaña "Optimization".

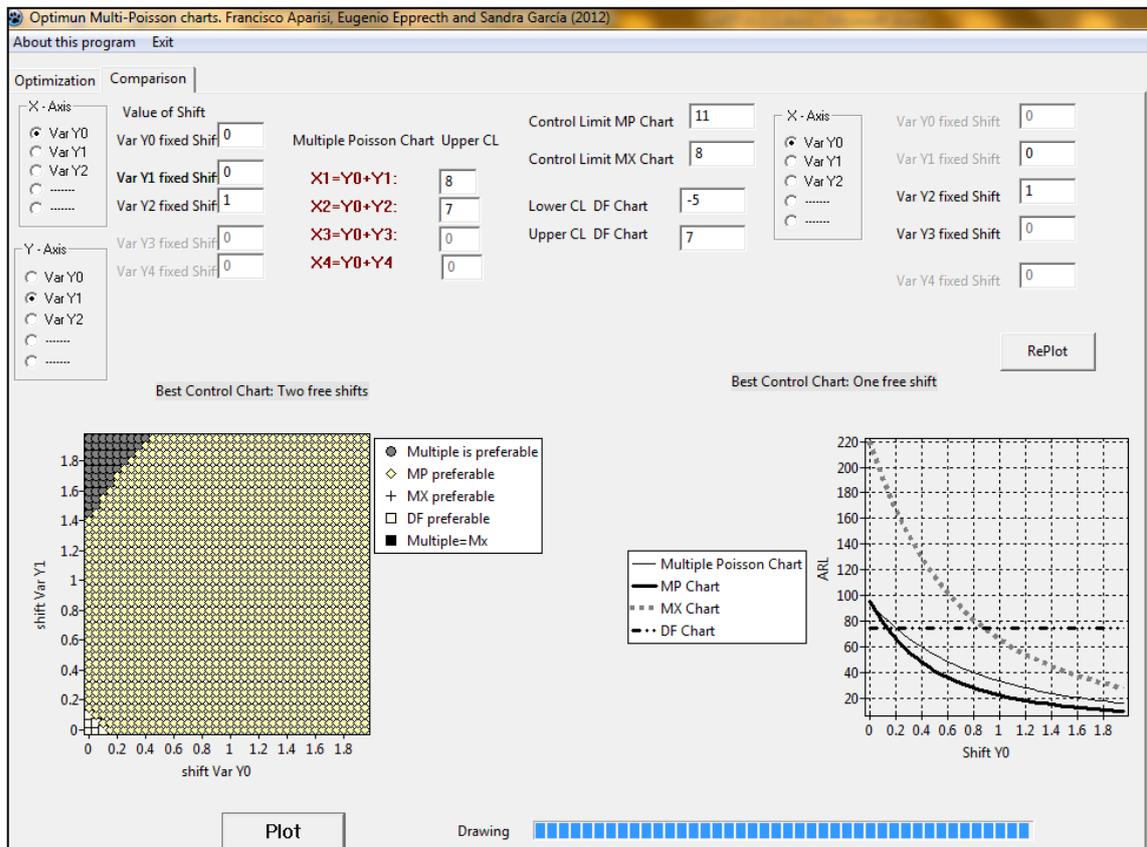


Figura 3.2: Software mostrando la comparación de rendimiento.

La Figura 3.3 muestra el análisis de otro caso, donde la media de Y_2 se desplaza una unidad de desviación estándar y la media de Y_0 no cambia. El gráfico "Best Control Chart: One free shift" ahora muestra que cuando hay un cambio pequeño (menos de 0.1 unidades de desviación estándar) en la media de Y_1 , el mejor gráfico es el DF. Por ejemplo, cuando la media de Y_1 se incrementa en 0.05 unidades de desviación estándar el ARL es 76.8. Por otro lado, el gráfico MP es el mejor para cambios más grandes que 0.1 y menores que 1.4 unidades de desviación estándar en la media de Y_1 . Por ejemplo, cuando el desplazamiento es igual a 0.8 unidades de desviación estándar el ARL es 27.74. Para cambios de más de 1.4 unidades de desviación estándar, el Esquema Múltiple es el mejor enfoque.

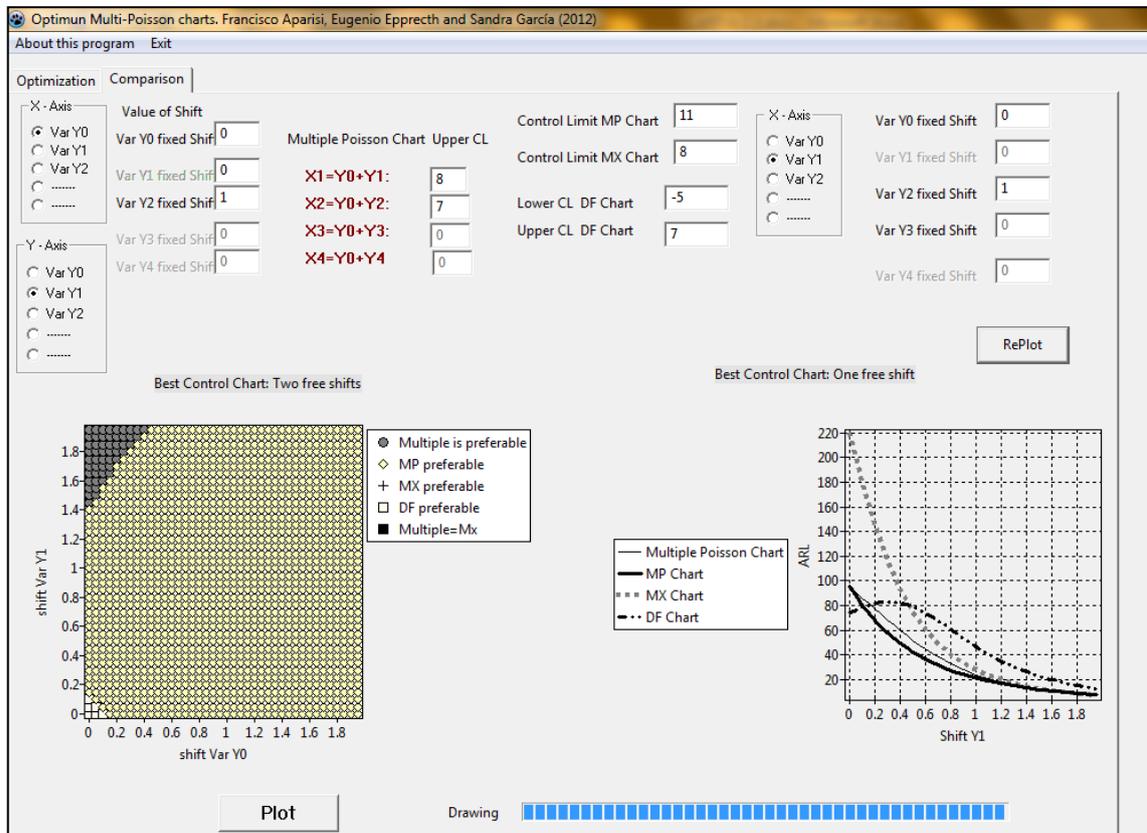


Figura 3.3: Gráfico Comparativo: Cambios para variable Y_1

3.4. Comparación General de Rendimiento

Para hacer una comparación justa de los ARLs fuera de control de los diferentes esquemas de control sus ARLs bajo control deben ser iguales. Sin embargo, como se comentó antes, ya que las variables de Poisson sólo pueden tomar valores enteros, por lo general no es posible forzar a todos los diferentes gráficos de Poisson bajo comparación tener el mismo ARL bajo control. Por esa razón, en esta sección se exigirá que todos los gráficos en

comparación tengan un ARL similar bajo control, igual o superior a 370, en lugar de requerir que sea exactamente $ARL_0 = 370$, ya que esto sería imposible.

Como se verá, el principal resultado de esta comparación es que pocas reglas generales se pueden obtener sobre qué gráfico muestra el mejor rendimiento. Por esa razón el desarrollo del software que se muestra en este capítulo es una solución necesaria a esta falta de reglas generales. Con esta herramienta el usuario final en la industria puede obtener las medidas de desempeño (ARL) de varios gráficos basados en la distribución de Poisson, comparar estos rendimientos, y tomar una decisión final sobre qué gráfico usar. El operario puede utilizar el programa para optimizar los gráficos para un proceso particular que se desea monitorear y para cambios particulares que son relevantes detectar lo más rápidamente posible, y así encontrar fácilmente el mejor esquema de control para este caso.

Las comparaciones se hacen para $p = 2, 3$ y 4 variables para los cambios en las medias medidos en unidades de desviación estándar $d_i = (\lambda_{1,i} - \lambda_{0,i}) / (\lambda_{0,i})^{1/2}$, donde $\lambda_{1,i}$ es la media $E(Y_i)$ cuando el proceso está fuera de control y $\lambda_{0,i}$ es la media $E(Y_i)$ cuando está bajo control. Los límites de control superior se han calculado utilizando el software para los gráficos MP, MX y Esquema Múltiple, y los límites de control superior e inferior se han obtenido para el gráfico de control DF.

Las comparaciones se han hecho para cuatro escenarios diferentes (véanse las Tablas 3.4, 3.5, 3.9 y 3.10). Estos escenarios corresponden a diferentes correlaciones entre las variables observadas X_i . Con este enfoque es más fácil estudiar el rendimiento de ARL cuando hay un cambio en el factor común Y_0 , o en uno de los factores individuales Y_i . Se estudió el cambio en la correlación como una función de los cambios en las medias. Se insiste una vez más, que los escenarios han sido seleccionados con el fin de obtener ARLs bajo control similares en todos los gráficos de comparación. Para el caso $p = 2$ variables se consideran todos los gráficos de control. Sin embargo, para $p = 3$ y 4 , el gráfico basado en la diferencia, DF, no se considera, debido al hecho de que la diferencia sólo puede definirse entre dos variables.

La Tabla 3.4 muestra los valores de las medias cuando el proceso está bajo control para los cuatro escenarios, cuando $p = 2$, con correlaciones 0.15, 0.33, 0.50 y 0.75. La Tabla 3.5 muestra los límites de control obtenidos después de ejecutar el software.

	$\lambda_{0.0}$	$\lambda_{1.0}$	$\lambda_{2.0}$	ρ
Escenario A	0.25	1	2	0.15
Escenario B	0.5	1	1	0.33
Escenario C	1.45	1.45	1.45	0.50
Escenario D	3.94	1.32	1.32	0.75

Tabla 3.4. Escenarios para $p = 2$

	Gráfico MP	Gráfico MX	Gráfico DF		Esquema Múltiple	
	UCL	UCL	LCL	UCL	UCL ₁	UCL ₂
Escenario A	11	8	-7	6	7	8
Escenario B	11	7	-6	5	7	7
Escenario C	17	10	-7	6	10	10
Escenario D	26	14	-6	6	14	14

Tabla 3.5. Límites de control obtenidos, $p = 2$

La Tabla 3.6 muestra los valores de ARLs y las nuevas correlaciones como una función de cambios en las medias de Y_0 , Y_1 y Y_2 . Los cambios en las medias son considerados como cambios en los valores, d_i , de 0 a 1.5. Cuando $d_i = 0$, para $i = 0, 1$ y 2 , el proceso está bajo control. Los ARLs más bajos para cada cambio están en negrita.

La inspección de la Tabla 3.6 revela que cuando los límites de control para el Esquema Múltiple son iguales para todas los gráficos univariados, entonces el gráfico MX tendrá el mismo límite de control superior que los gráficos univariantes. Además, ambos esquemas (Múltiples y MX) tendrán los mismos valores de ARL para todos los cambios. Por ejemplo, en la Tabla 3.5, en el escenario B, el límite de control para cada gráfico Poisson univariado es 7, que es también el valor límite de control para el gráfico MX. La misma regla se aplica para los escenarios C y D. Esto tiene sentido, ya que el valor de al menos una de las variables excederá a UCL (generando una alarma en el Esquema múltiple) si y sólo si el máximo de los valores de las variables excede a UCL. Estos son eventos equivalentes.

El análisis de los escenarios B y C muestra que cuando hay un cambio en la media Y_1 , y el resto de las medias no tienen cambio, el mejor gráfico de control es la diferencia entre X_1 y X_2 , el gráfico de control DF. Por ejemplo, en el escenario B, cuando la media de Y_1 aumenta 1 unidad de desviación estándar, permaneciendo constantes el resto de medias, el ARL para ese cambio es 37.77 para el gráfico DF, 43% más bajo que el gráfico MX y el Esquema múltiple, y 73 % menos que el ARL del gráfico MP . El lector debe prestar atención a que los límites de control del gráfico DF no son simétricos a 0 en estos escenarios.

Sin embargo, en el escenario D la optimización del gráfico de control DF devuelve límites de control simétricos respecto a 0. Además, en este escenario el mismo cambio en unidades de desviación estándar con respecto a la media de Y_1 o a la media de Y_2 , produce el mismo efecto en el valor de ARL. Por ejemplo, cuando sólo la media de Y_1 o Y_2 cambia 1 unidad de desviación estándar, el ARL es el mismo en ambos casos, 59.76, 59 % más pequeño que el gráfico MX y el Esquema múltiple, mientras que el gráfico MP tiene un ARL 5.3 veces más grande. Por lo tanto, si sólo cambia la media de Y_1 o Y_2 se espera que el gráfico DF sea el mejor para detectar ese tipo de cambio. Además, se debe considerar que los cambios en Y_0 no afectan al rendimiento del gráfico DF.

Es posible comprobar que cuando el cambio en la media incrementa la correlación, el mejor gráfico en la mayoría de los casos es el MP, la suma de variables Poisson. Por ejemplo, el escenario A, un cambio que incrementa la correlación de 0.15 a 0.22 es cuando aumentan las medias Y_0 e Y_1 en 0.5 unidades de desviación estándar, mientras que la media Y_2 se mantiene constante. En este caso el gráfico MP es el mejor, con un ARL de 75.35, mientras que el gráfico MX produce un ARL de 188.85 (2.5 veces más), el gráfico DF muestra un ARL de 425.65 (5.6 veces más) y el Esquema Múltiple tiene un ARL de 115.82 (1.5 veces más).

En la mayoría de los casos en los que la correlación permanece constante o disminuye, los mejores esquemas de control son el Múltiple o el gráfico MX. Por ejemplo, considere el escenario B, en el que la correlación se mantiene en 0.33 y cuando las medias de Y_0 e Y_1 aumentan en 0.5 unidades de desviación estándar y la media de Y_2 se incrementa en una unidad de desviación estándar. En este escenario los gráficos de control que detectan más rápido los cambios son el gráfico MX y el Esquema múltiple, con $ARL = 28.26$, 73% más pequeño que el gráfico DF, y 3% más pequeño que el gráfico MP.

Cambio en las Medias			Escenario A (ARL(d = d*))					Escenario B (ARL(d = d*))					Escenario C (ARL(d = d*))					Escenario D (ARL(d = d*))				
d ₀	d ₁	d ₂	ρ	MP	MX	DF	Esquema Múltiple	ρ	MP	MX	DF	Esquema Múltiple	ρ	MP	MX	DF	Esquema Múltiple	ρ	MP	MX	DF	Esquema Múltiple
0.00	0.00	0.00	0.15	446.89	431.99	449.65	387.44	0.33	572.23	549.81	545.82	549.81	0.50	663.66	607.13	706.85	607.13	0.75	682.14	511.96	613.04	511.96
0.00	0.25	0.00	0.14	296.30	410.92	476.32	314.45	0.31	388.42	325.02	232.71	325.02	0.48	485.64	395.46	311.93	395.46	0.73	556.74	385.38	351.81	385.38
0.25	0.00	0.00	0.21	233.31	309.93	449.65	271.99	0.40	248.26	297.78	545.82	297.78	0.55	284.89	301.52	706.85	301.52	0.77	287.44	234.65	613.04	234.65
0.00	0.50	0.00	0.13	201.83	366.46	425.62	224.99	0.29	269.28	185.60	113.41	185.60	0.45	359.59	246.21	151.41	246.21	0.71	456.42	280.54	185.54	280.54
0.00	0.25	0.25	0.13	173.43	180.48	221.06	159.26	0.29	269.28	231.40	249.89	231.40	0.45	359.62	294.54	338.58	294.54	0.71	456.43	311.20	285.04	311.20
0.00	0.00	0.50	0.13	149.68	90.50	94.49	88.44	0.29	269.28	185.60	327.80	185.60	0.45	359.59	246.21	406.04	246.21	0.71	456.42	280.54	185.54	280.54
0.25	0.50	0.00	0.18	117.82	259.94	425.62	159.21	0.35	131.81	116.53	113.41	116.53	0.50	167.69	138.16	151.41	138.16	0.73	201.80	139.39	185.54	139.39
0.00	0.75	0.00	0.12	140.98	298.34	315.61	147.91	0.27	190.48	108.69	62.38	108.69	0.44	269.37	153.13	81.74	153.13	0.69	375.87	201.29	101.71	201.29
0.25	0.00	0.75	0.17	60.16	40.95	51.84	40.27	0.34	98.37	72.96	196.00	72.96	0.48	130.57	91.50	235.16	91.50	0.72	170.10	104.73	101.71	104.73
0.50	0.00	0.00	0.26	137.35	227.17	449.65	195.42	0.46	127.97	174.95	545.82	174.95	0.59	141.02	163.90	706.85	163.90	0.79	137.20	119.15	613.04	119.15
0.50	0.50	0.00	0.22	75.35	188.85	425.62	115.82	0.41	74.18	77.00	113.41	77.00	0.54	88.67	82.90	151.41	82.90	0.75	100.33	75.66	185.54	75.66
0.50	0.00	0.50	0.23	59.92	58.24	94.49	56.07	0.41	74.18	77.00	327.80	77.00	0.54	88.67	82.90	406.04	82.90	0.75	100.33	75.66	185.54	75.66
0.50	0.50	1.00	0.18	19.27	21.24	41.94	19.98	0.33	28.99	28.26	104.99	28.26	0.47	38.71	33.70	138.19	33.70	0.69	55.97	39.04	76.15	39.04
0.00	1.00	0.00	0.11	100.80	221.55	208.47	94.55	0.26	137.35	66.72	37.77	66.72	0.42	204.04	97.41	48.31	97.41	0.68	310.88	144.35	59.76	144.35
0.00	0.00	1.00	0.12	60.62	29.72	31.14	29.51	0.26	137.35	66.72	115.49	66.72	0.42	204.04	97.41	134.83	97.41	0.68	310.88	144.35	59.76	144.35
1.00	0.00	0.00	0.34	59.94	129.21	449.65	107.54	0.55	46.92	72.74	545.82	72.74	0.65	46.71	59.92	706.85	59.92	0.82	41.70	39.27	613.04	39.27
1.00	1.00	0.00	0.27	23.96	70.02	208.47	34.67	0.45	20.91	20.12	37.77	20.12	0.57	23.14	20.23	48.31	20.23	0.76	25.73	18.92	59.76	18.92
1.00	0.00	1.00	0.28	17.30	16.18	31.14	15.87	0.45	20.91	20.12	115.49	20.12	0.57	23.14	20.23	134.85	20.23	0.76	25.73	18.92	59.76	18.92
1.00	1.00	1.00	0.22	8.83	14.85	53.87	12.49	0.38	10.73	12.29	59.28	12.29	0.50	12.67	12.92	81.93	12.92	0.71	16.62	13.36	67.10	13.36
1.00	1.50	0.50	0.22	10.03	23.97	95.97	14.43	0.38	10.73	10.43	23.20	10.43	0.50	12.67	11.07	29.52	11.07	0.71	16.61	11.99	34.37	11.99
1.50	1.50	1.50	0.24	3.75	6.09	29.56	5.19	0.38	4.40	5.03	33.32	5.03	0.50	4.79	4.97	45.45	4.97	0.69	5.98	5.08	37.26	5.08

Tabla 3.6: Comparación para dos variables Poisson correlacionadas

Las conclusiones para los escenarios de 3 y 4 variables son muy similares a las obtenidas para los escenarios de 2 variables. Las Tablas 3.7 y 3.9 muestran los casos analizados para 3 y 4 variables, mientras que las Tablas 3.8 y 3.10 presentan los límites de control respectivos. Los valores de ARLs se muestran en las Tablas 3.11 y 3.12.

Se hace evidente de la inspección de las Tablas 3.11 y 3.12, que de manera similar a los escenarios de dos variables, en la mayoría de los casos en los que los cambios producen un aumento de las correlaciones, el gráfico MP es la mejor opción, mientras que, si las correlaciones se mantienen constantes o disminuyen, las mejores opciones son el gráfico MX y el Esquema Múltiple. Con el fin de confirmar la relación entre la forma en que las correlaciones se comportan en función del cambio en las medias y el esquema de control más eficiente, un análisis de contingencia se ha llevado a cabo empleando la información de las Tablas 3.11 y 3.12. Las Tablas 3.13 y 3.14 muestran la distribución de frecuencias del mejor gráfico de control de acuerdo con el efecto del cambio en las correlaciones, para los escenarios de 3 y 4 variables, respectivamente. El valor p obtenido en la prueba de chi-cuadrado de independencia fue 0.00, lo que da evidencia significativa de que el mejor gráfico de control para el seguimiento del proceso depende claramente del efecto del cambio en las correlaciones.

La Tabla 3.13 muestra que con 3 variables, en aproximadamente 30% de los casos considerados el gráfico MP produjo el más pequeño ARL fuera de control. Por otro lado, el gráfico MX o el Esquema múltiple eran la mejor opción en aproximadamente el 70% de los casos, del cual en el 67% de las veces una o más correlaciones no aumentaron. Cuando el gráfico MP fue la mejor opción, en el 84% de las veces todas las correlaciones aumentan.

Con $p = 4$ variables, la Tabla 3.14 muestra que en alrededor del 39% de los casos considerados el gráfico MP es la mejor opción, y en alrededor del 61% la mejor opción es el MX o el Esquema Múltiple. Además, en la mayoría de los casos en que el gráfico MP es la mejor opción, todas las correlaciones aumentan con el cambio (79%), y en el 97% de los casos en los que el gráfico MX o Esquema múltiple son las mejores opciones, uno o más correlaciones no aumentan con el cambio.

	$\lambda_{0.0}$	$\lambda_{1.0}$	$\lambda_{2.0}$	$\lambda_{3.0}$	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{23}
Escenario A	0.5	1	1	1	0.33	0.33	0.33
Escenario B	0.7	1.4	0.5	1	0.44	0.37	0.49
Escenario C	0.7	0.7	0.7	0.7	0.50	0.50	0.50
Escenario D	2	0.5	1	0.7	0.73	0.77	0.70

Tabla 3.7. Escenarios para $p = 3$

	MP	MX	Esquema Múltiple		
	UCL	UCL	UCL ₁	UCL ₂	UCL ₃
Escenario A	15	7	7	7	7
Escenario B	17	8	10	6	8
Escenario C	16	7	7	7	7
Escenario D	25	10	9	11	10

Tabla 3.8. Límites de control, $p = 3$

	$\lambda_{0.0}$	$\lambda_{1.0}$	$\lambda_{2.0}$	$\lambda_{3.0}$	$\lambda_{4.0}$	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{14}	ρ_{23}	ρ_{24}	ρ_{34}	ρ promedio
Escenario A	1	2.5	3	2	3	0.27	0.31	0.27	0.29	0.25	0.29	0.28
Escenario B	2	3	2	2	4	0.45	0.45	0.37	0.50	0.41	0.41	0.43
Escenario C	0.7	0.7	0.7	0.7	0.7	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	0.50
Escenario D	2.12	0.8	0.6	0.6	0.6	0.75	0.75	0.75	0.78	0.78	0.78	0.77

Tabla 3.9. Escenarios para $p = 4$

	MP	MX	Esquema Múltiple			
	UCL	UCL	UCL ₁	UCL ₂	UCL ₃	UCL ₄
Escenario A	33	12	12	12	12	12
Escenario B	43	15	15	15	15	15
Escenario C	20	7	7	7	7	7
Escenario D	33	10	10	10	10	10

Tabla 3.10. Límites de control para $p = 4$

Cambio en las Medias				Escenario A (ARL(d =d*))						Escenario B (ARL(d =d*))						Escenario C (ARL(d =d*))						Escenario D (ARL(d =d*))					
d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	MP	MX	Esquema Múltiple	ρ ₁₂	ρ ₁₃	ρ ₂₃	MP	MX	Esquema Múltiple	ρ ₁₂	ρ ₁₃	ρ ₂₃	MP	MX	Esquema Múltiple	ρ ₁₂	ρ ₁₃	ρ ₂₃	MP	MX	Esquema Múltiple	ρ ₁₂	ρ ₁₃	ρ ₂₃
0.00	0.00	0.00	0.00	407.50	372.21	372.21	0.33	0.33	0.33	561.73	534.65	530.42	0.44	0.37	0.49	596.32	578.17	578.17	0.50	0.50	0.50	582.80	631.16	624.38	0.73	0.77	0.70
0.00	0.25	0.00	0.00	323.00	254.50	254.50	0.31	0.31	0.33	436.80	272.02	499.23	0.41	0.35	0.49	496.97	407.66	407.66	0.47	0.47	0.50	526.09	576.36	446.89	0.71	0.74	0.70
0.00	0.00	0.25	0.00	323.00	254.50	254.50	0.31	0.33	0.31	482.91	520.56	300.81	0.41	0.37	0.46	496.97	407.66	407.66	0.47	0.50	0.47	504.42	414.74	548.95	0.70	0.77	0.68
0.00	0.00	0.00	0.25	323.00	254.50	254.50	0.33	0.31	0.31	454.02	416.75	416.85	0.44	0.35	0.46	496.97	407.66	407.66	0.50	0.47	0.47	516.47	522.37	521.03	0.73	0.74	0.68
0.25	0.00	0.00	0.00	169.21	204.06	204.06	0.40	0.40	0.40	223.90	291.09	248.51	0.50	0.43	0.55	229.84	273.42	273.42	0.56	0.56	0.56	234.65	281.33	268.35	0.76	0.80	0.74
0.00	0.25	0.25	0.00	257.54	193.81	193.81	0.29	0.31	0.31	376.95	268.59	290.77	0.39	0.35	0.46	415.37	315.83	315.83	0.44	0.47	0.47	455.72	391.63	408.31	0.68	0.74	0.68
0.25	0.25	0.00	0.00	139.26	147.28	147.28	0.38	0.38	0.40	180.96	162.94	236.98	0.47	0.41	0.55	197.20	204.16	204.16	0.53	0.53	0.56	214.71	258.41	201.84	0.74	0.77	0.74
0.25	0.00	0.25	0.25	115.17	115.59	115.59	0.38	0.38	0.35	164.96	225.52	137.00	0.48	0.41	0.49	169.56	163.56	163.56	0.53	0.53	0.50	186.55	176.70	210.75	0.73	0.77	0.69
0.00	0.50	0.00	0.00	257.54	160.75	160.75	0.29	0.29	0.33	341.83	145.67	439.20	0.39	0.33	0.49	415.39	266.58	266.58	0.44	0.44	0.50	475.29	504.64	317.14	0.68	0.72	0.70
0.00	0.00	0.50	0.50	166.67	103.25	103.25	0.29	0.29	0.25	276.72	280.04	141.54	0.39	0.33	0.38	292.97	174.86	174.86	0.44	0.44	0.38	345.32	221.33	329.40	0.68	0.72	0.61
0.50	0.00	0.00	0.00	86.05	121.57	121.57	0.46	0.46	0.46	108.98	170.57	132.16	0.55	0.48	0.60	109.52	146.08	146.08	0.62	0.62	0.62	110.86	141.21	131.68	0.79	0.82	0.76
0.50	0.50	0.00	0.00	61.77	65.32	65.32	0.41	0.41	0.46	75.72	63.66	117.84	0.50	0.44	0.60	84.31	84.67	84.67	0.55	0.55	0.62	94.95	117.37	80.38	0.75	0.78	0.76
0.50	0.00	0.50	0.50	45.08	45.23	45.23	0.41	0.41	0.36	65.53	98.79	50.44	0.50	0.44	0.49	65.40	60.49	60.49	0.55	0.55	0.50	74.45	64.63	83.45	0.74	0.77	0.67
0.50	0.50	0.50	0.50	33.43	34.89	34.89	0.36	0.36	0.36	46.72	50.86	48.44	0.45	0.39	0.49	51.19	47.53	47.53	0.50	0.50	0.50	64.15	60.14	60.99	0.70	0.73	0.67
0.75	0.00	0.00	0.00	49.95	77.43	77.43	0.51	0.51	0.51	60.79	106.07	77.18	0.59	0.53	0.64	60.16	85.65	85.65	0.65	0.65	0.65	59.09	77.98	71.69	0.80	0.84	0.78
0.00	0.75	0.00	0.00	206.57	99.89	99.89	0.27	0.27	0.33	269.44	83.59	353.34	0.37	0.31	0.49	348.29	170.42	170.42	0.42	0.42	0.50	429.72	423.73	225.96	0.66	0.70	0.70
0.00	0.00	0.75	0.75	110.41	58.45	58.45	0.27	0.27	0.22	198.13	180.87	82.75	0.37	0.31	0.34	209.36	101.54	101.54	0.42	0.42	0.35	268.20	139.27	224.47	0.65	0.69	0.57

0.75	0.75	0.00	0.00	32.48	32.88	32.88	0.43	0.43	0.51	37.83	30.04	63.43	0.52	0.46	0.64	42.80	40.77	40.77	0.57	0.57	0.65	48.18	58.69	37.82	0.75	0.78	0.78
0.75	0.00	0.00	0.75	32.48	32.88	32.88	0.51	0.43	0.43	40.60	51.23	44.85	0.59	0.46	0.56	42.80	40.77	40.77	0.65	0.57	0.57	46.43	48.69	47.07	0.80	0.77	0.73
0.00	1.00	0.00	0.00	166.67	63.41	63.41	0.26	0.26	0.33	213.53	51.08	260.02	0.35	0.30	0.49	292.97	110.24	110.24	0.40	0.40	0.50	388.71	343.04	162.95	0.64	0.68	0.70
0.00	0.00	1.00	1.00	74.84	35.34	35.34	0.26	0.26	0.20	143.73	115.29	51.58	0.35	0.29	0.31	151.57	62.30	62.30	0.40	0.40	0.31	209.59	91.19	152.07	0.63	0.67	0.53
1.00	0.00	0.00	0.00	31.84	52.08	52.08	0.55	0.55	0.55	37.28	69.50	48.63	0.63	0.56	0.68	36.60	54.04	54.04	0.69	0.69	0.69	34.69	46.59	42.51	0.82	0.85	0.80
1.00	1.00	0.00	0.00	19.26	18.53	18.53	0.45	0.45	0.55	21.45	16.36	36.60	0.53	0.48	0.68	24.59	22.27	22.27	0.59	0.59	0.69	27.27	32.12	20.34	0.76	0.78	0.80
1.00	0.00	0.00	1.00	19.26	18.53	18.53	0.55	0.45	0.45	23.28	27.73	24.73	0.63	0.48	0.57	24.59	22.27	22.27	0.69	0.59	0.59	26.11	26.04	25.29	0.82	0.78	0.73
1.00	1.00	1.00	0.00	12.25	11.79	11.79	0.38	0.45	0.45	15.84	15.46	14.78	0.46	0.48	0.58	16.95	14.70	14.70	0.50	0.59	0.59	19.66	16.57	16.94	0.68	0.78	0.72
1.00	1.00	1.00	1.00	8.18	8.88	8.88	0.38	0.38	0.38	10.68	12.17	11.96	0.46	0.40	0.49	12.02	11.28	11.28	0.50	0.50	0.50	15.19	13.80	14.14	0.68	0.71	0.66
1.00	0.00	2.00	0.00	12.25	7.16	7.16	0.40	0.55	0.40	19.39	28.55	7.29	0.48	0.56	0.52	16.95	9.37	9.37	0.52	0.69	0.52	17.93	8.51	14.12	0.68	0.85	0.66
1.00	2.00	1.00	0.50	6.80	5.82	5.82	0.33	0.36	0.41	8.34	5.72	10.10	0.40	0.38	0.53	10.23	7.64	7.64	0.44	0.48	0.54	13.94	12.11	9.61	0.64	0.69	0.69
1.50	1.50	1.50	1.50	3.47	3.80	3.80	0.38	0.38	0.38	4.26	4.86	4.89	0.46	0.41	0.49	4.79	4.59	4.59	0.50	0.50	0.50	5.78	5.28	5.42	0.67	0.70	0.65

Tabla 3.11: Comparación para tres variables Poisson correlacionadas

Cambio en las Medias					Escenario A (ARL(d=d*))				Escenario B (ARL(d=d*))				Escenario C (ARL(d=d*))				Escenario D (ARL(d=d*))			
d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	d ₄	MP	MX	Esquema Múltiple	ρ promedio	MP	MX	Esquema Múltiple	ρ promedio	MP	MX	Esquema Múltiple	ρ promedio	MP	MX	Esquema Múltiple	ρ promedio
0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	490.69	463.54	463.54	0.28	693.68	608.39	608.39	0.43	391.95	445.60	445.60	0.50	483.11	543.92	543.92	0.77
0.00	0.25	0.00	0.00	0.00	403.28	386.43	386.43	0.27	582.94	516.60	516.60	0.42	344.72	338.45	338.45	0.48	442.82	413.80	413.80	0.75
0.00	0.00	0.25	0.00	0.00	395.82	297.73	297.73	0.27	601.62	598.23	598.23	0.42	344.72	338.45	338.45	0.48	448.05	469.51	469.51	0.75
0.00	0.00	0.00	0.25	0.00	411.51	439.03	439.03	0.27	601.62	598.23	598.23	0.42	344.72	338.45	338.45	0.48	448.05	469.51	469.51	0.75
0.00	0.00	0.00	0.00	0.25	395.82	298.75	298.75	0.27	567.59	313.42	313.42	0.42	344.72	338.45	338.45	0.48	448.05	469.51	469.51	0.75
0.00	0.00	0.00	0.25	0.25	333.10	288.50	288.50	0.26	493.45	310.80	310.80	0.41	303.98	273.55	273.55	0.47	415.16	414.26	414.26	0.74
0.00	0.00	0.25	0.25	0.25	270.79	214.17	214.17	0.26	429.73	308.24	308.24	0.40	268.70	230.01	230.01	0.45	384.48	371.59	371.59	0.73
0.00	0.25	0.25	0.25	0.25	225.00	196.42	196.42	0.25	363.72	283.32	283.32	0.40	238.00	198.77	198.77	0.44	351.82	308.44	308.44	0.71
0.25	0.00	0.00	0.00	0.00	211.61	277.54	277.54	0.33	288.14	346.45	346.45	0.47	156.30	213.79	213.79	0.56	196.40	237.92	237.92	0.79
0.00	0.25	0.25	0.00	0.00	326.58	264.18	264.18	0.26	506.63	509.37	509.37	0.41	303.98	273.55	273.55	0.47	410.27	370.05	370.05	0.74
0.25	0.25	0.00	0.00	0.00	178.42	233.81	233.81	0.32	247.15	295.12	295.12	0.46	140.04	169.96	169.96	0.55	182.16	189.34	189.34	0.78
0.25	0.00	0.25	0.25	0.25	126.19	137.57	137.57	0.30	188.88	187.67	187.67	0.44	113.17	121.52	121.52	0.52	161.15	170.11	170.11	0.76
0.00	0.50	0.00	0.00	0.00	332.46	287.79	287.79	0.26	491.13	397.18	397.18	0.41	304.06	236.14	236.14	0.47	405.59	300.16	300.16	0.74
0.00	0.00	0.50	0.50	0.00	229.43	166.11	166.11	0.25	396.80	548.11	548.11	0.39	238.11	161.94	161.94	0.44	356.31	300.78	300.78	0.72
0.00	0.00	0.50	0.50	0.50	154.64	105.95	105.95	0.24	271.77	163.68	163.68	0.38	187.85	123.93	123.93	0.41	305.83	248.80	248.80	0.69
0.50	0.00	0.00	0.00	0.00	107.10	173.94	173.94	0.37	138.78	207.21	207.21	0.50	76.97	115.99	115.99	0.62	93.59	118.32	118.32	0.81
0.50	0.50	0.00	0.00	0.00	79.45	116.28	116.28	0.35	105.84	140.94	140.94	0.49	63.69	74.50	74.50	0.58	82.00	78.09	78.09	0.79
0.50	0.00	0.50	0.50	0.50	44.21	50.84	50.84	0.32	66.61	70.49	70.49	0.45	44.56	44.66	44.66	0.53	66.09	65.06	65.06	0.75
0.50	0.50	0.50	0.50	0.50	33.94	44.84	44.84	0.31	52.02	61.44	61.44	0.44	37.60	37.59	37.59	0.50	57.82	52.25	52.25	0.73
0.75	0.00	0.00	0.00	0.00	60.82	113.60	113.60	0.40	74.65	129.25	129.25	0.53	43.53	68.99	68.99	0.65	50.32	65.14	65.14	0.83
0.00	0.75	0.00	0.00	0.00	275.18	194.21	194.21	0.26	414.84	279.09	279.09	0.41	268.79	157.96	157.96	0.46	371.15	213.41	213.41	0.73
0.00	0.00	0.75	0.00	0.00	260.86	104.45	104.45	0.26	455.03	536.60	536.60	0.40	268.79	157.96	157.96	0.46	384.63	302.49	302.49	0.73
0.00	0.00	0.75	0.75	0.75	91.31	56.62	56.62	0.22	175.23	92.04	92.04	0.36	133.10	71.06	71.06	0.38	244.02	167.36	167.36	0.66
0.75	0.75	0.00	0.00	0.00	40.97	59.35	59.35	0.38	52.06	69.27	69.27	0.51	33.97	37.20	37.20	0.61	42.22	37.21	37.21	0.80
0.75	0.00	0.00	0.75	0.75	28.35	34.95	34.95	0.36	37.30	32.14	32.14	0.49	26.88	26.12	26.12	0.57	37.03	35.34	35.34	0.78
0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	228.58	125.97	125.97	0.25	351.57	185.30	185.30	0.40	237.98	104.96	104.96	0.45	339.77	151.11	151.11	0.72

0.00	1.00	1.00	0.00	0.00	105.75	46.91	46.91	0.23	207.97	171.45	171.45	0.37	148.93	60.74	60.74	0.40	251.05	113.41	113.41	0.68
0.00	0.00	1.00	0.00	1.00	99.27	34.57	34.57	0.24	188.72	56.00	56.00	0.37	148.93	60.74	60.74	0.40	262.83	151.34	151.34	0.68
0.00	0.00	1.00	1.00	1.00	55.88	32.62	32.62	0.21	115.34	54.78	54.78	0.34	95.32	43.29	43.29	0.35	195.83	114.46	114.46	0.64
1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	37.67	76.99	76.99	0.43	43.94	83.98	83.98	0.56	27.14	44.04	44.04	0.69	29.75	38.94	38.94	0.85
1.00	1.00	0.00	0.00	0.00	23.60	32.10	32.10	0.40	28.64	36.02	36.02	0.53	20.28	20.76	20.76	0.64	24.17	20.05	20.05	0.81
1.00	0.00	0.00	1.00	1.00	15.42	18.20	18.20	0.38	19.44	16.49	16.49	0.50	15.48	14.15	14.15	0.59	20.71	18.70	18.70	0.78
1.00	1.00	1.00	0.00	0.00	14.77	15.57	15.57	0.38	20.64	32.69	32.69	0.50	15.48	14.15	14.15	0.59	20.14	16.14	16.14	0.78
1.00	1.00	1.00	1.00	0.00	10.40	14.19	14.19	0.35	15.17	30.03	30.03	0.47	12.02	11.01	11.01	0.54	16.87	13.77	13.77	0.74
1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	7.05	10.02	10.02	0.32	10.14	13.25	13.25	0.44	9.46	9.17	9.17	0.50	14.23	12.18	12.18	0.71
1.00	0.00	1.50	0.00	0.00	17.82	11.09	11.09	0.39	26.12	48.51	48.51	0.52	17.67	13.56	13.56	0.62	22.68	18.35	18.35	0.80
1.00	1.50	1.00	0.50	0.50	8.36	10.33	10.33	0.34	11.95	15.40	15.40	0.46	10.65	9.43	9.43	0.52	15.28	11.35	11.35	0.73
1.50	1.50	1.50	1.50	1.50	2.77	3.81	3.81	0.33	3.62	4.74	4.74	0.45	3.98	3.86	3.86	0.50	5.53	4.75	4.75	0.70

Tabla 3.12: Comparación para cuatro variables Poisson correlacionadas

Mejor Método	Todas las correlaciones se incrementan	Alguna no se incrementa	Total %
MP	25.89%	4.46%	30.36%
MX o Múltiple	23.21%	46.43%	69.64%
Total %	49.11%	50.89%	100.00%

Tabla 3.13. Distribución de frecuencias relativas: Escenarios $p = 3$

Mejor Método	Todas las correlaciones se incrementan	Alguna no se incrementa	Total %
MP	30.41%	8.11%	38.51%
MX o Múltiple	2.03%	59.46%	61.49%
Total %	32.43%	67.57%	100.00%

Tabla 3.14. Distribución de frecuencias relativas: Escenarios $p = 4$

3.5. Conclusiones

En este trabajo, una comparación del rendimiento se ha llevado a cabo entre cuatro esquemas de control multivariante estadístico de procesos para las variables de Poisson: El Esquema Múltiple (varios gráficos de control univariante optimizados), El Gráfico MP, basado en la suma de las variables, El gráfico MX, que usa el Máximo de las variables, y el gráfico DF, basado en la diferencia de dos variables. La comparación se ha hecho para $p = 2, 3$ y 4 variables de Poisson correlacionadas, de acuerdo con el modelo propuesto por Holgate (1964).

La comparación muestra que no hay un gráfico cuyo rendimiento sea uniformemente mejor para todos los casos. Este resultado ha motivado el desarrollo de un software amigable bajo Windows © que encuentra las mejores límites de control para todos los gráficos de control analizados y hace una comparación completa de los resultados entre ellos, apoyando de esta manera al usuario en la industria en la toma de una decisión sobre el esquema a adoptar para controlar su proceso específico.

Aunque ningún gráfico muestra siempre el mejor rendimiento, algunas conclusiones generales pueden extraerse de los resultados de la comparación de rendimiento. Si una o todas las correlaciones entre las variables observadas aumentan, entonces el mejor gráfico (el que da el ARL más bajo fuera de control) es el gráfico MP. Si las correlaciones se mantienen constantes o disminuyen, los mejores gráficos de control son el MX o el de múltiples gráficos univariados.

Además, si los múltiples gráficos univariados tienen todos los mismos límites de control, entonces el gráfico MX tendrá el mismo límite de control, y así los ARLs de ambos esquemas serán iguales para cualquier cambio de proceso. Otro resultado interesante es que el gráfico DF, cuya distribución no depende de la variable común Y_0 , no puede detectar los cambios en esta variable. Sin embargo, el gráfico DF es la mejor opción en la mayoría de los casos en que cambia la media de sólo una de las variables.

No obstante, el mejor esquema en cada caso concreto sólo puede determinarse con seguridad a través de la evaluación detallada del rendimiento de los esquemas de control competentes; por esta razón, el software desarrollado sigue siendo una herramienta valiosa para encontrar el mejor esquema en cada caso en particular y para el establecimiento de los límites de control que se utilizarán con él.

CAPÍTULO 4

COMBINACION LINEAL ÓPTIMA DE LAS VARIABLES POISSON PARA EL CONTROL ESTADISTICO MULTIVARIANTE

El contenido de este capítulo está basado en el artículo:

Epprecht, E. K., Aparisi, F., García-Bustos, S., (2013). Optimal linear combination of Poisson variables for statistical process control. *Computers & Operations Research*, 40 (3021-3032).

4.1. Introducción

El diseño de un gráfico de control para monitorear una única variable Poisson es una tarea fácil, los límites de control se establecen generalmente a 3-desviaciones estándar por encima y por debajo de la media de la variable bajo control; alternativamente, los límites de probabilidad se pueden determinar mediante la inversión de la distribución acumulada, a fin de lograr una probabilidad de falsas alarmas aceptable (aunque se desea que coincida exactamente con una probabilidad de falsa alarma especificada, no es en general posible, debido a que la variable de Poisson es discreta, que hace que su distribución acumulativa sea discontinua). Para más detalles, véase, por ejemplo, Montgomery (2012). Tal como se mencionó anteriormente, cuando se necesitan monitorear algunas características de calidad simultáneamente, el usuario tiene dos opciones: (i) un esquema de control basado en un gráfico para cada una de las variables (esquema múltiple); y (ii) un esquema de control basado en un gráfico de control (esquema multivariante). Existe una amplia bibliografía sobre el control estadístico de procesos multivariantes y múltiple para las variables continuas; véase, por ejemplo, Bersimis et al. (2006). Sin embargo, muy poca investigación se ha hecho cuando las variables a monitorear son discretas, y en el caso específico de este trabajo, cuando siguen la distribución de Poisson.

La estructura de correlación propuesta por Holgate (1964) es la que se considera en este capítulo. Esta estructura de correlación también es considerada por otros autores como Kuo & Chiu (2008), Ho & Costa (2009) y Laungrungong (2011).

Otras estructuras de correlación son posibles, como la que propone Karlis y Meligkotsidou, (2005). En esta estructura, la correlación surge de un factor propio para cada variable observable Poisson X_i , más un factor común para cada combinación de esta variable con las demás variables Poisson observables. Así pues cada variable

observable de Poisson X_i estaría expresada como: $X_i = Y_i + \sum_{j \neq i}^p Y_{ij}$, para $i= 1 \dots p$.

y $Y_{ij} = Y_{ji}$,

Las variables Y_i y Y_{ij} son variables aleatorias Poisson independientes con medias λ_i y λ_{ij} , respectivamente.

$$E(X_i) = \lambda_i + \sum_{j \neq i}^p \lambda_{ij}; \quad Cov(X_i, X_j) = \lambda_{ij}; \quad \rho(X_i, X_j) = \frac{Cov(X_i, X_j)}{\sqrt{(Var(X_i))(Var(X_j))}}$$

Así pues para el caso de tres variables Poisson observadas, la estructura de relación estaría definida por:

$$X_1 = Y_1 + Y_{12} + Y_{13} \quad X_2 = Y_2 + Y_{12} + Y_{23} \quad X_3 = Y_3 + Y_{13} + Y_{23}$$

$$E(X_1) = \lambda_1 + \lambda_{12} + \lambda_{13}; \quad E(X_2) = \lambda_2 + \lambda_{12} + \lambda_{23}; \quad E(X_3) = \lambda_3 + \lambda_{13} + \lambda_{23};$$

$$Cov(X_1, X_2) = \lambda_{12} \quad Cov(X_1, X_3) = \lambda_{13} \quad Cov(X_2, X_3) = \lambda_{23}$$

Con respecto al esquema múltiple, el diseño de un conjunto de gráficos univariantes de control Poisson no es una tarea fácil. Aparisi et al. (2013) desarrollaron un procedimiento para diseñar este conjunto de gráficos, teniendo en cuenta que el conjunto tiene que lograr un ARL bajo control requerido. Ellos proporcionaron un software fácil de usar para realizar los cálculos de ARL y optimizar los parámetros de los gráficos. La dificultad es que, puesto que las medias bajo control de las variables son valores fijos, entonces el único parámetro en cada gráfico que uno tiene la libertad de cambiar (como variable de decisión) es el límite superior de control. Dado que la variable Poisson puede tomar sólo valores enteros, su distribución acumulada es discontinua, lo que impide que (excepto por un golpe de suerte) el ajuste de los límites de este conjunto de gráficos para una probabilidad de falsa alarma especificada coincida con el ARL bajo control requerido. A veces un valor cercano se puede obtener, pero la mayoría de las veces hay una gran distancia entre el valor deseado y el ARL más cercano disponible. Por esa razón, en muchos casos, hay que elegir un esquema donde el número de falsas alarmas es alto, o que no es de gran alcance para detectar los cambios en el proceso, debido a que el ARL bajo control es demasiado grande. Un

problema similar ocurre con todas los gráficos antes citados sobre la base de la distribución de Poisson.

Una de las aplicaciones en las que a menudo existe la necesidad de monitorear diversas variables discretas (y a menudo de Poisson) es la vigilancia de la salud. Hay una vasta bibliografía sobre este campo, donde se puede aplicar el nuevo gráfico de control desarrollado en este trabajo. Una buena revisión de la utilización de gráficos de control en el cuidado de la salud y la vigilancia de la salud pública es Woodall (2006). Otros documentos de interés, donde el lector interesado puede encontrar más información y referencias están Joner et al. (2008) y Jiang et al. (2011).

En este capítulo se propone un nuevo gráfico de control multivariante, el gráfico de la Combinación Lineal de conteos Poisson (LCP), que puede ser optimizado para obtener el ARL bajo control requerido, resolviendo uno de los problemas de los gráficos de control multivariante para las variables de Poisson. Con el fin de promover el uso del gráfico LCP, un software de fácil uso (disponible por solicitud) se ha desarrollado. Este software encuentra los parámetros óptimos del gráfico de la combinación lineal de las variables de Poisson con el fin de minimizar el ARL fuera de control. Además, este programa de ordenador también optimiza los gráficos de control multivariantes MP y MX y el esquema Múltiple, y hace una comparación completa de los resultados entre todos los gráficos. De esta manera, el usuario final puede determinar cuál es el esquema de control más eficiente para sus necesidades particulares.

Usando el programa, se ha optimizado el gráfico LCP y los otros tres esquemas de control que se acaba de mencionar para un gran número de casos, con el fin de analizar y comparar sus rendimientos. El gráfico LCP ha demostrado, en la gran mayoría de veces, ser el más poderoso en detectar cambios en el proceso.

El resto del capítulo se organiza de la siguiente manera: La sección 4.2 presenta la base teórica del (optimizado) esquema múltiple (varios gráficos de control univariado) y de los sistemas multivariantes enfocados aquí (suma, máximo y combinación lineal de las variables). La Sección 4.3 da una definición formal del problema de optimización. La sección 4.4 describe un programa informático que ha sido desarrollado con el objetivo

de ayudar al usuario final con la selección del mejor esquema de control para su proceso. Este software permite la obtención de los límites de control para los gráficos mencionadas en el apartado 4.2, cuando $p = 2, 3$ o 4 variables de Poisson son monitoreadas, con el fin de obtener el ARL bajo control deseado, o el más cercano posible. Además, el software lleva a cabo una comparación completa del rendimiento entre los diferentes gráficos de control. Un análisis de sensibilidad aparece en la Sección 4.5. Una comparación general de rendimiento se muestra en la Sección 4.6. Finalmente, la sección 4.7 resume las conclusiones de este trabajo.

4.2. Control de varias variables Poisson: Enfoques multivariante y múltiple.

En esta sección se estudia el nuevo gráfico de control basado en la Combinación Lineal y se mencionan brevemente todos los gráficos de control de Poisson que fueron considerados en el capítulo 3, debido a que sus rendimientos son comparados con el nuevo gráfico que se propone en este capítulo. Nuevamente, la medida de rendimiento que se utilizará es el Average Run Length (ARL), que es el más utilizado para hacer este tipo de comparaciones. Una señal será una falsa alarma si el proceso está bajo control, es decir, que no sufre cambios en sus parámetros. Por lo tanto generalmente se requiere un gran ARL bajo control. Por otro lado, los cambios en los parámetros del proceso (fuera de control) deben ser detectados rápidamente, por lo tanto, se desean pequeños ARL fuera de control. En el tipo de gráficos analizados en este capítulo, donde los estadísticos (puntos) que se graficarán son independientes debido a que son calculados con información muestral distinta cada vez, el número de muestras hasta que se presenta una señal sigue una distribución geométrica, y el ARL es el recíproco de la probabilidad de una señal (q), formalmente, $ARL = 1 / q$.

4.2.1 El Esquema Múltiple: Múltiples gráficos de control univariados Poisson.

El esquema múltiple consiste en el seguimiento de cada variable de Poisson en un gráfico de control. En el capítulo 3, se desarrolló un programa informático que optimiza este conjunto de gráficos de control univariantes para minimizar el ARL para un cambio determinado. También se analizó el rendimiento de este sistema para un gran número de casos. Al igual que en el capítulo 3, se supone que cada uno de estos gráficos de Poisson tiene sólo el límite de control superior, como normalmente el usuario sólo está interesado en la detección de cambios que aumentan el número de defectos. Por lo tanto, si las p variables Poisson son monitoreadas, p límites de control superior deben determinarse. Se lleva a cabo la búsqueda de sus valores óptimos teniendo en cuenta que un valor específico, ARL_0 , es necesario para el ARL bajo control del conjunto de p gráficos de control. Sin embargo, normalmente no es factible alcanzar el valor requerido de ARL_0 dado que las variables de Poisson pueden tomar sólo valores enteros. Por lo tanto, se buscan los límites de control siguiendo el objetivo de lograr el valor más cercano posible de ARL bajo control requerido ARL_0 , pero siempre mayores a ARL_0 si el valor exacto no puede ser alcanzado. .

El estadístico que se trazará en cada grafico es el valor observado de la variable, X_i . Un gráfico muestra una señal cuando el valor observado es mayor o igual que el límite de control, es decir, $X_i \geq UCL_i$. Por lo tanto, este conjunto de p gráficos de control muestra una señal de fuera de control cuando uno o más gráficos de control presentan una señal.

4.2.2 Esquema Multivariado

Tal como se indicó anteriormente, el enfoque multivariado consiste en emplear un único estadístico para todas las p variables que se va a controlar. Por ejemplo, en el caso de variables Poisson, Chiu y Kuo (2008) formularon el estadístico $D = \sum_{i=1}^p X_i$, es decir,

la suma de los valores observados con distribuciones Poisson, conocido como el gráfico MP. Ho y Costa (2009) propusieron graficar la diferencia, $DF = X_1 - X_2$, y el máximo de dos ($p = 2$) variables Poisson, $MX = \max(X_1, X_2)$.

En este capítulo se propone un nuevo gráfico, basado en la Combinación Lineal optimizada de las variables Poisson (gráfico LCP). Tenga en cuenta que la suma de las variables en el MP y la diferencia de las variables en el DF (que sólo puede utilizarse en las dos variables) son un caso particular de la combinación lineal. Por lo tanto, se espera que el gráfico LCP supere a estos dos gráficos. Un aspecto importante del gráfico LCP es que se necesita un límite de control inferior cuando algunos de los coeficientes de la combinación óptima lineal son negativos, porque los valores negativos se pueden producir aún cuando el proceso está bajo control. Para tener en cuenta esta posibilidad, la formulación del problema de optimización considerará el gráfico como de dos colas, dejando que el algoritmo de búsqueda encuentre los mejores valores para los coeficientes y límites de control.

Dado que $LCP = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_pX_p$ denota la combinación lineal de p Variables Aleatorias Poisson correlacionadas, donde $a_i \in [-1, 1]$ y $X_i = Y_0 + Y_i$. Esta combinación lineal puede ser expresada como una función de las variables no observables Y_0 y $\{Y_i\}$, $i = 1, 2, \dots, p$, de la siguiente manera:

$$LCP = \sum_{i=1}^p a_i \cdot X_i = \sum_{i=1}^p a_i \cdot (Y_0 + Y_i) = \sum_{i=1}^p a_i \cdot Y_0 + \sum_{i=1}^p a_i \cdot Y_i = b \cdot Y_0 + \sum_{i=1}^p a_i \cdot Y_i \quad (4.1)$$

Donde $b = \sum_{i=1}^p a_i$.

Para presentar el desarrollo de la expresión de la función de probabilidad de la combinación lineal, es conveniente para los propósitos de exposición comenzar con el caso más simple de $p = 3$ y generalizar después.

$$P(LCP = s) = P(b * Y_0 + \sum_{i=1}^3 a_i * Y_i = s) = \sum_{i_0=0}^{trunc(s/b)} P(Y_0 = i_0, \sum_{i=1}^3 a_i * Y_i = s - b * i_0)$$

Donde $trunc(c)$ denota la parte entera de c .

Note que el mínimo valor posible para i_0 es 0 y el valor máximo que i_0 puede tomar es $trunc(s/b)$, el cual es obtenido asumiendo que $\sum_{i=1}^3 a_i * Y_i = 0$.

$$P(LCP = s) = \sum_{i_0=0}^{trunc(s/b)} \sum_{i_1=0}^{trunc((s-b*i_0)/a_1)} P(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \sum_{i=2}^3 a_i * Y_i = s - b * i_0 - a_1 * i_1)$$

El máximo valor de i_1 corresponde a $\sum_{i=2}^3 a_i * Y_i = 0$, dado que Y_0 ha tomado el valor i_0 .

De manera similar, el máximo valor que i_2 puede tomar puede ser obtenido haciendo que $Y_0 = i_0$ y $Y_1 = i_1$.

$$P(LCP = s) = \sum_{i_0=0}^{trunc(s/b)} \sum_{i_1=0}^{trunc((s-b*i_0)/a_1)} \sum_{i_2=0}^{trunc((s-b*i_0-a_1*i_1)/a_2)} P(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, Y_2 = i_2, Y_3 = (s - b * i_0 - a_1 * i_1 - a_2 * i_2) / a_3)$$

Dado que $Y_0, Y_1, Y_2,$ y Y_3 son independientes, su distribución conjunta es el producto de las distribuciones marginales:

$$P(LCP = s) = \sum_{i_0=0}^{trunc(s/b)} \sum_{i_1=0}^{trunc((s-b*i_0)/a_1)} \sum_{i_2=0}^{trunc((s-b*i_0-a_1*i_1)/a_2)} \exp\left\{-\sum_{i=0}^3 \lambda_i\right\} * \frac{\lambda_0^{i_0} * \lambda_1^{i_1} * \lambda_2^{i_2} * \lambda_3^{(s-b*i_0-a_1*i_1-a_2*i_2)/a_3}}{i_0! * i_1! * i_2! * ((s-b*i_0-a_1*i_1-a_2*i_2)/a_3)!}$$

(4.2)

Por lo tanto, la función de probabilidad $P(LCP = s)$ está dada por

$$P(LCP = s) = P(b * Y_0 + \sum_{i=1}^p a_i * Y_i = s) = \sum_{i_0=0}^{trunc(s/b)} P(Y_0 = i_0, \sum_{i=1}^p a_i * Y_i = s - b * i_0)$$

(4.3)

$$P(LCP = s) = \sum_{i_0=0}^{trunc(s/b)} \sum_{i_1=0}^{trunc((s-b*i_0)/a_1)} P(Y_0 = i_0, Y_1 = i_1, \sum_{i=2}^p a_i * Y_i = s - b * i_0 - a_1 * i_1)$$

(4.4)

Hay que señalar que los valores máximos de cada suma con índice i_k de las ecuaciones (4.2), (4.3) y (4.4) se obtienen suponiendo que las variables Poisson independientes Y_j , con $j = k+1, k+2, \dots, p$ toman el valor de 0.

Y ahora, generalizamos para el caso de $p > 3$ variables, desarrollando la ecuación (4.4):

$$P(LCP = s) = \sum_{i_0=0}^{trunc(s/b)} \sum_{i_1=0}^{trunc((s-b*i_0)/a_1)} \sum_{i_2=0}^{trunc((s-b*i_0-a_1*i_1)/a_2)} \dots$$

$$\dots \sum_{i_{p-1}=0}^{trunc((s-b*i_0-\sum_{j=1}^{p-2} a_j * i_j)/a_{p-1})} P[Y_0 = i_0, \dots, Y_{p-1} = i_{p-1}, Y_p = (s - b * i_0 - \sum_{j=1}^{p-1} a_j * i_j) / a_p]$$

(4.5)

$$P(LCP = s) = \sum_{i_0=0}^{trunc(s/b)} \sum_{i_1=0}^{trunc((s-b*i_0)/a_1)} \sum_{i_2=0}^{trunc((s-b*i_0-a_1*i_1)/a_2)} \dots$$

$$\dots \sum_{i_{p-1}=0}^{\text{trunc}((s-b*i_0-\sum_{j=1}^{p-2} a_j*i_j)/a_{p-1})} \exp\left\{-\sum_{i=0}^p \lambda_i\right\} * \frac{\lambda_0^{i_0} * \lambda_1^{i_1} * \dots * \lambda_{p-1}^{i_{p-1}} * \lambda_p^{(s-b*i_0-\sum_{j=1}^{p-1} a_j*i_j)/a_p}}{i_0! * i_1! * \dots * i_{p-1}! * ((s-b*i_0-\sum_{j=1}^{p-1} a_j*i_j)/a_p)!}$$

(4.6)

Tenga en cuenta que dado un conjunto de coeficientes $\{a_i\}$, LCP sólo puede tomar valores discretos, es decir, los que cumplen la siguiente ecuación:

$$s = \sum_{i=1}^p a_i * Y_0 + \sum_{i=1}^p a_i * Y_i$$

$$y_i = 0, 1, 2, \dots, \infty ; i = 0, 1, 2, \dots, p$$

La expresión del ARL es

$$ARL = \frac{1}{1 - P(LCL < LCP < UCL)} \quad (4.7)$$

Donde la probabilidad de que el estadístico LCP se encuentre entre los límites de control es la siguiente:

$$P(LCL < LCP < UCL) == \sum_{\substack{\min s < UCL \\ \min s > LCL}} \sum_{i_0=0}^{\text{trunc}(\frac{s}{b})} \sum_{i_1=0}^{\text{trunc}(\frac{s-b*i_0}{a_1})} \sum_{i_2=0}^{\text{trunc}(\frac{s-b*i_0-a_1*i_1}{a_2})} \dots$$

$$\sum_{i_{p-1}=0}^{\text{trunc}((s-b*i_0-\sum_{i=1}^{p-2} a_i*(i_i))/a_{p-1})} \exp\left\{-\left[\sum_{i=0}^p (\lambda_i)\right]\right\} \frac{\lambda_0^{i_0} * \lambda_1^{i_1} * \dots * \lambda_{p-1}^{i_{p-1}} * \lambda_p^{s-b*i_0-\sum_{i=1}^{p-1} a_i*(i_i)}/a_p}{i_0! * i_1! * \dots * i_{p-1}! * (s-b*i_0-\sum_{i=1}^{p-1} a_i*(i_i))/a_p!}$$

(4.8)

Tenga en cuenta que la función $(s - b * i_0 - \sum_{i=1}^{p-1} a_i * (i_i)) / a_p$ sólo puede tomar valores enteros. Por lo tanto, cualquiera que sea la combinación de los valores de i_0, \dots, i_{p-1} que devuelva un valor que no sea entero debe ser descartado en los cálculos de ARL.

4.3. Optimización del gráfico de control LCP

Es una práctica común en el diseño de un gráfico de control establecer un valor, ARL_0 , para el ARL bajo control, como una restricción, y minimizar el ARL fuera de control para un cambio en los parámetros de proceso que se considera relevante. En el caso de el gráfico de control LCP el problema de optimización consiste en encontrar los valores de los límites de control y de los coeficientes a_i de la combinación

$$\text{lineal: } a_i \in [-1, 1], i = 1, 2, \dots, p \text{ y } LCP = \sum_{i=1}^p a_i * X_i .$$

La definición formal de este problema de optimización es:

ENTRADA

ARL bajo control: ARL_0

Medias bajo control: $\lambda_{0,i}$ $i = 0, 1, 2, \dots, p$

Cambio para el cual se minimiza el ARL: $\mathbf{d}^* = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_p)$

$$d_i = (\lambda_{1,i} - \lambda_{0,i}) / (\lambda_{0,i})^{1/2} \quad i = 0, 1, 2, \dots, p$$

Donde: $\lambda_{0,i}$: medias bajo control

$\lambda_{1,i}$: medias fuera de control.

d_i : cambio en unidades de desviación estándar para la media $\lambda_{0,i}$

FUNCION OBJETIVO : Minimizar: ARL ($\mathbf{d} = \mathbf{d}^*$)

RESTRICCION: ARL ($\mathbf{d} = \mathbf{0}$) = ARL₀

SALIDA: Límites inferior y superior de control para el gráfico LCP: LCL y UCL .

Los parámetros a_i , $a_i \in [-1, 1]$, $i = 1, 2, \dots, p$ para la combinación lineal LCP

$$= \sum_{i=1}^p a_i * X_i .$$

Este es un problema de optimización bastante complejo que ha sido resuelto utilizando Algoritmos Genéticos (GA). El GA empleado en este trabajo ha sido calibrado para maximizar su rendimiento empleando la técnica de diseño de experimentos. GA han demostrado ser una herramienta eficaz para optimizar los gráficos de control de calidad. Por ejemplo, algunas referencias son: Chen (2007), Kaya (2009) y Aparisi et al. (2009).

4.4. Software y ejemplo de aplicación

Para facilitar el uso del gráfico de control LCP, se ha desarrollado un programa de fácil uso bajo Windows© para optimizar sus parámetros y hacer una comparación completa de los rendimientos con los otros gráficos de control basados en la distribución de Poisson ya mencionados anteriormente. Un ejemplo del uso de este programa informático se presenta a continuación:

De acuerdo con Sánchez et al. (2002), hay dos tipos de defectos que pueden ocurrir en la producción de vasijas de cerámicas: ampollas y decoloraciones. Estos defectos se producen a veces por los contaminantes de las materias primas, como óxidos de manganeso, óxidos de hierro y óxidos de titanio. Es necesario supervisar la producción para controlar estos dos tipos de defectos. Con el fin de estimar sus medias, se tomaron 100 muestras de 10 jarrones de cerámica cada una, cuando se pensaba que el proceso estaba bajo control. Los resultados se muestran en la Tabla 4.1, donde X_1 es el número de ampollas y X_2 es el número de cambios de color.

X_1	X_2	Frecuencia
0	0	4
0	1	5
0	2	10
0	3	4
0	4	4
0	5	2
0	6	1
1	0	5
1	1	12
1	2	6
1	3	7
1	4	6
1	6	1
2	0	6
2	1	3
2	3	8
2	4	2
2	5	1
3	0	1
3	2	1
3	3	1
3	4	4
3	5	2
3	6	1
4	1	1
4	3	1
5	4	1
$\bar{X}_1=1.2$	$\bar{X}_2=2.29$	$\Sigma = 100$

Tabla 4.1. Muestra del proceso. X_1 es el número de ampollas, y X_2 es el número de cambios de color

La correlación observada entre estas variables es $r = 0.15$. Se desea obtener los límites de control para todos los gráficos que se muestran en la Sección 4.2 con el fin de obtener un $ARL_0 = 370$ bajo control o el más cercano posible.

Es posible estimar las medias de las variables Y_i de Poisson que no se observan, conociendo que $E(Y_i) = E(X_i) - Cov(X_1, X_2)$. Un cambio de una desviación estándar en la media λ_1 es relevante y debe ser detectado rápidamente; así que queremos encontrar los valores de los parámetros de los gráficos que minimice el ARL para ese cambio. Las

siguientes relaciones se utilizan para determinar los valores de las medias de Y_i cuando el proceso está fuera de control:

$$\lambda_{1,i} = \lambda_{0,i} + d_i * (\lambda_{0,i})^{1/2}; \quad d_i = (\lambda_{1,i} - \lambda_{0,i}) / (\lambda_{0,i})^{1/2} \quad i = 0, 1, 2$$

Donde: $\lambda_{0,i}$: medias bajo control

$\lambda_{1,i}$: medias fuera de control.

d_i : cambio en unidades de desviación estándar para la media $\lambda_{0,i}$

La Tabla 4.2 muestra los resultados:

Bajo control			Fuera de control		
$\lambda_{0,0}$	$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$
0.27	0.93	2.01	0.27	1.89	2.01

Tabla 4.2. Valores de las medias para el ejemplo de aplicación

La Tabla 4.3 muestra los ARLs bajo control y fuera de control para todos los gráficos estudiados. La Figura 4.1 muestra la salida de software.

	Tipo de gráfico					
	Gráfico MP	Gráfico MX	Gráfico LCP		Esquema Múltiple	
Límites de control	UCL = 11	UCL = 8	LCL = -0,97	UCL = 3.12	UCL ₁ = 7	UCL ₂ = 8
ARL (d = 0)	440.58	401.31	369.72		370.24	
ARL (d = d *)	105.49	236.65	36.74		108.08	

Tabla 4.3. Límites de control para cada esquema de control

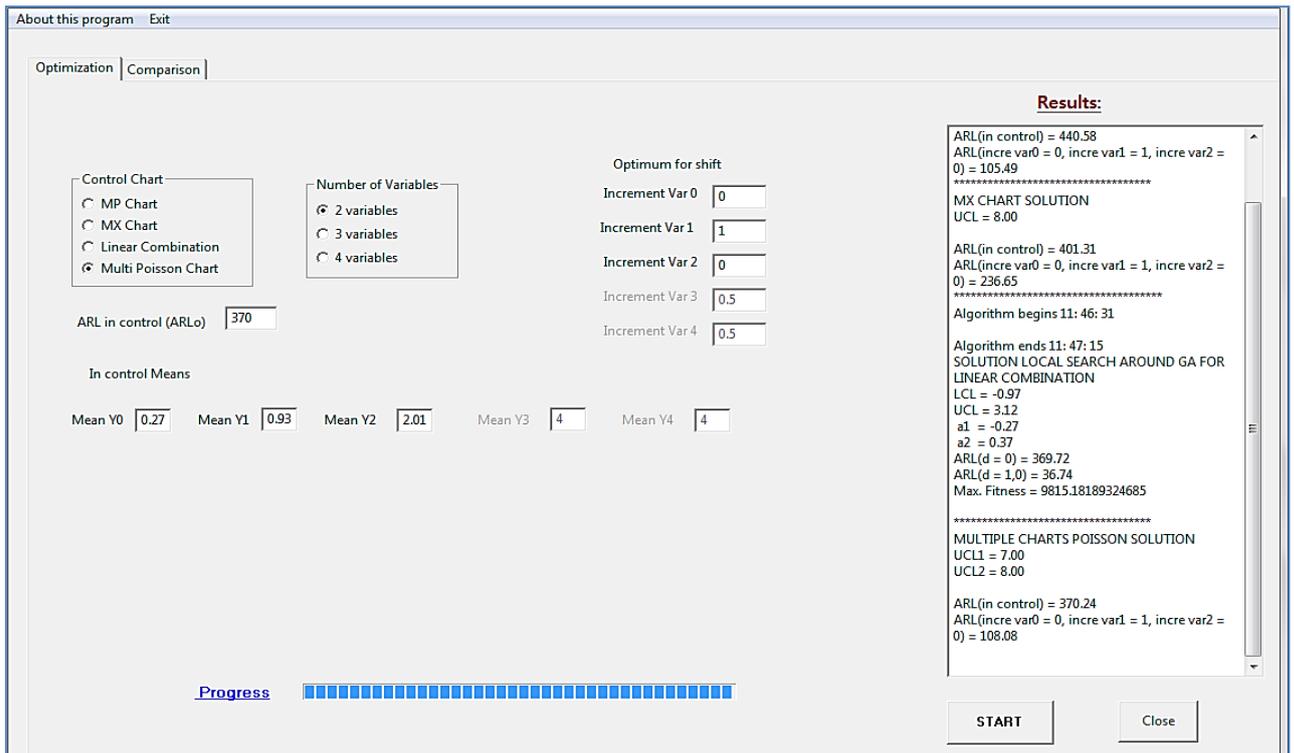


Figura 4.1. El programa de ordenador resolviendo el ejemplo de aplicación.

Como muestra la Tabla 4.3, el hecho de que los valores de los límites de control del gráfico LCP no sean números enteros, sino números reales, permite obtener un ARL bajo control, $ARL(d = 0) = 369.72$, muy cercano al valor requerido $ARL_0 = 370$. Esta es una de las ventajas del gráfico de control LCP. El resto de los gráficos analizados, en contraste, no pueden en general cumplir con este requisito. En este ejemplo, los ARL bajo control de los gráficos MP, MX y esquema múltiples de Poisson son de 440.58, 401.31 y 370.24, respectivamente. El último valor de 370.24, pasa a ser bastante cerca del valor deseado de 370, pero esto sucede por casualidad, sólo de vez en cuando, y no puede ser tomado como algo general. Para afirmar esto último, se diseñó un experimento en que se obtenían los valores de $ARL(d = 0)$ para el esquema múltiple con $p = 2$ para 300 casos cuando los valores de ARL_0 son 370, 500 y 1000 (100 casos para cada valor de ARL_0).

Para el experimento, se consideró que el $ARL(d = 0)$ se aproxima al valor de ARL_0 , si su diferencia máxima es hasta de 10 unidades, es decir $\max(ARL(d = 0) - ARL_0) = 10$. Los resultados mostraron que sólo en el 9% de los casos el valor de $ARL(d = 0)$ estuvo

bastante cerca del valor de ARL_0 deseado, produciéndose exactamente el mismo porcentaje de aproximaciones para cada valor de ARL_0 (aproximadamente 3% para cada valor).

Retomando el ejemplo, la comparación se centra ahora en los ARLs fuera de control. Aunque esta comparación no es estrictamente justa, porque los ARL bajo control no son los mismos para todos los gráficos, parece claro que el gráfico de control LCP muestra el mejor rendimiento. Empleando los parámetros $a_1 = -0.27$, $a_2 = 0.37$, $LCL = -0.97$ y $UCL = 3.12$, el ARL fuera de control es 36.74, mientras que los ARLs fuera de control para los gráficos MP, MX y Esquema Múltiple son 105.49, 236.65 y 108.08, respectivamente. Toda esta información es parte de la salida del programa (ver Figura 4.1). Los resultados se resumen en la Tabla 4.3.

Ahora sigue un ejemplo de uso del gráfico LCP. La Tabla 4.4 muestra algunas de las muestras de 10 jarrones de cerámica y el número de defectos observados en cada una de las muestras. Como antes, X_1 es el número de burbujas, y X_2 es el número de cambios de color. El estadístico que se grafica es $LCP = -0.27X_1 + 0.37X_2$. La Figura 4.2 muestra el gráfico LCP con los valores de la Tabla 4.4. La última muestra ($LCP = 3.16$) graficada por encima del límite de control superior ($UCL = 3.12$), indica que se debería considerar que el proceso está fuera de control.

Muestra	X_1	X_2	LCP
1	1	4	1.21
2	1	0	-0.27
3	0	4	1,48
4	1	1	0.1
5	0	2	0,74
6	0	1	0,37
7	4	3	0.03
8	1	1	0.1
9	0	2	0,74
10	2	10	3.16

Tabla 4.4. Los valores del gráfico LCP. X_1 es el número de ampollas, y X_2 es el número de cambios de color

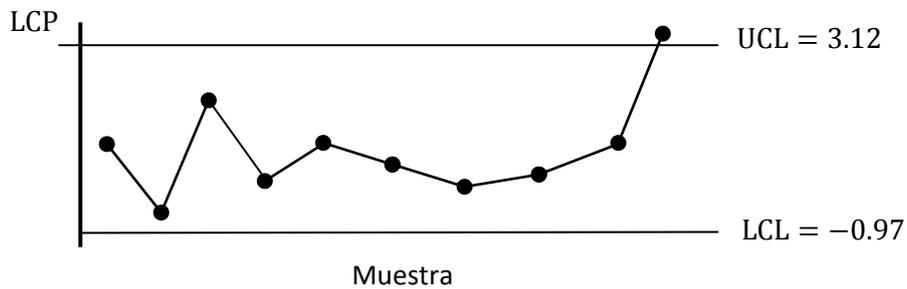


Figura 4.2. Gráfico LCP del ejemplo

Una de las características importantes del software desarrollado es que puede llevar a cabo una comparación completa de desempeño entre los gráficos MP, MX, LCP y el esquema múltiple. Esta comparación se realiza después de la optimización de los gráficos en la pestaña “Optimization”. A continuación, la pestaña “Comparison” es seleccionada por el usuario para comenzar el análisis de los resultados (ver Figura 4.3). El gráfico más a la izquierda en esta pestaña, “Best Control Chart: Two free shifts”, muestra qué gráfico de control es el mejor para un par determinado de cambios en dos de las variables $Y_i, i = 0, 1, \dots, p$. El usuario tiene que seleccionar dos de las variables (Y_i, Y_j) para el eje horizontal y vertical. En el caso mostrado en la Figura 4.3 los cambios en Y_1 están en el eje horizontal y los cambios en Y_2 están en el eje vertical.

Este gráfico muestra que cuando, por ejemplo, los cambios en las medias de Y_1 y Y_2 son de 1.0 y 0.2 unidades de desviación estándar respectivamente, y la media de Y_0 no cambia (el usuario ha establecido este cambio a 0), el mejor esquema es el gráfico LCP. La figura sólo indica qué gráfico es el mejor (ARL más bajo) para ese cambio. Los valores de ARL exactos para este caso se pueden obtener fácilmente en la pestaña de “Optimization” para los gráficos MX, MP y múltiples gráficos de Poisson. El ARL para el gráfico LCP para un cambio determinado se muestra en el área derecha de la ventana de la interfaz de software “ARL calculations for LCP chart”. En el

ejemplo, el gráfico LCP muestra un ARL de 45.57, que es 47%, 70% y 38% más pequeño que los ARL de los Esquemas múltiple, gráfico MX y gráfico MP, respectivamente. Otro ejemplo que se da, cuando la media de Y_0 no sufre ningún cambio, y las de Y_1 e Y_2 tienen un cambio de 0.4 unidades de desviación estándar cada uno, entonces el gráfico muestra que la mejor opción es el Esquema Múltiple. En este caso, el esquema múltiple tiene un ARL fuera de control de 98.53; 9.7%, 8% y 42% menor que los ARLs de los gráficos MX, MP y LCP respectivamente.

El segundo gráfico en la ventana de la interfaz (Figura 4.3), “Best Control Chart: One free shift”, muestra las curvas de ARL (ARL en el eje vertical, desplazamientos en la media en el eje horizontal) para cambios en Y_1 , cuando las medias de Y_0 e Y_2 no se someten a cambios (el usuario había fijado estos cambios a 0). El gráfico muestra claramente que el mejor gráfico de control es el LCP (curva inferior). En general, el usuario especifica los valores para los cambios en todas las variables, pero una deja libre y el programa grafica las curvas de ARL como una función de los cambios en esta última. Ver las entradas arriba del gráfico, en la Figura 4.3. Aunque en este ejemplo, se ha introducido el valor de 0 para los cambios en los medias de Y_0 y Y_2 , el usuario podría haber elegido cualquier otro valor fijo para ellos.

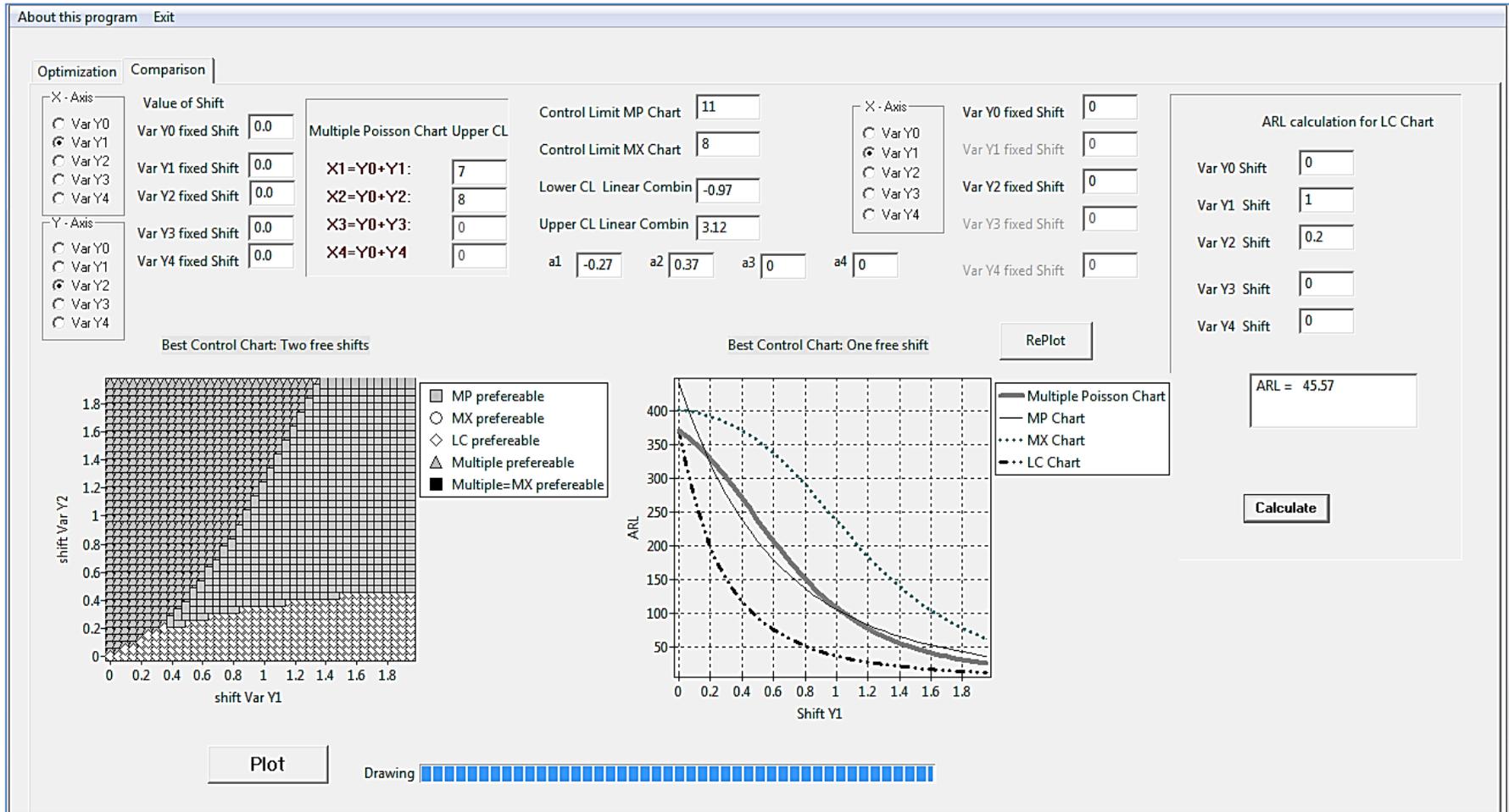


Figura 4.3. Comparación de los gráficos para el ejemplo de aplicación.

4.5. Análisis de Sensibilidad

Una técnica común para el diseño óptimo de un gráfico de control es especificar un cambio en los parámetros del proceso para el cual se debe minimizar el ARL, sujeto a una restricción del ARL bajo control. Este es el procedimiento empleado en este trabajo e implementado en el software desarrollado. Una elección adecuada de cambio para la optimización es a menudo el cambio más pequeño que ya es relevante detectar, debido a que es lo suficientemente grande para tener un impacto en la calidad del producto. Los ARLs para cambios más grandes serán, por supuesto, menores que el ARL para el cambio seleccionado, pues el gráfico será más sensible a los cambios más grandes. Esto no significa, que el gráfico es óptimo para estos cambios más grandes. Otros gráficos (y otros diseños del mismo tipo de gráfico) pueden funcionar mejor para los cambios más grandes. No hay gráfico que sea uniformemente mejor para todos los cambios. La pregunta que surge es, entonces, ¿cuál es el rendimiento del gráfico para estos cambios más grandes?

Por lo tanto, resulta interesante estudiar la robustez de la optimización con respecto al cambio seleccionado fuera de control. El objetivo es saber si el gráfico de control LCP muestra un buen rendimiento, para otros cambios diferentes al optimizado. Este estudio no es trivial. Por ejemplo, cuando $p > 2$ es difícil ver la variación del rendimiento para diferentes cambios, debido a la explosión combinatoria del número de posibles casos, ya que los cambios pueden ocurrir en cualquier subconjunto de las variables Y_i , incluyendo el caso de todas ellas. Por ejemplo, sólo con $p = 3$, se debe estudiar la sensibilidad para diferentes valores de Y_0, Y_1, Y_2 e Y_3 . Por lo tanto, para una mejor comprensión, el análisis de sensibilidad que se presenta aquí es para el caso $p = 2$, aunque las conclusiones similares se encuentran para grandes valores de p .

En primer lugar, un resultado que se ha encontrado es que dos gráficos optimizados para los vectores de desplazamiento de tal manera que (en cada vector de desplazamiento) los cambios en las medias de dos variables son iguales, tienen el mismo rendimiento, no importa la magnitud de estos cambios. Un ejemplo ilustrará esto. Suponga que se requiere un ARL bajo control de 500, y las medias bajo control son $\lambda_{0,0} = 0.5, \lambda_{0,1} = 1$,

$\lambda_{0,2} = 3$. El siguiente paso es seleccionar un conjunto de cambios en que se incrementan las medias para la optimización. Se debe optimizar para dos vectores diferentes de cambios: $A = (0.5, 1, 1)$ y $B = (0.5, 2, 2)$, donde el elemento i -ésimo es el cambio en que se incrementa la media de Y_i . Después de optimizar para ambos vectores de desplazamiento, los gráficos de control LCP tendrán los mismos ARLs para cualquier otro vector de cambio. La conclusión es la misma para cualquier par (Y_i, Y_j) , $Y_i = Y_j$ que se selecciona para la optimización. Los ARLs para diferentes incrementos en las variables Y_1 e Y_2 se muestran en la Tabla 4.5, y se recuerda que estos ARLs son los mismos para los gráficos LCP optimizados en los casos A y B.

		Cambios en la media Y_2					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
Cambios en la media Y_1	0.5	41.31	21.39	12.27	7.68	5.18	3.73
	1	28.68	15.55	9.33	6.09	4.26	3.17
	1.5	20.73	11.72	7.31	4.94	3.58	2.74
	2	15.52	9.10	5.88	4.11	3.06	2.41
	2.5	11.95	7.26	4.85	3.49	2.67	2.15
	3	9.43	5.93	4.08	3.02	2.37	1.95

Tabla 4.5. ARLs fuera de control para los gráficos optimizados LCP para incrementos $A = (0.5, 1, 1)$ y $B = (0.5, 2, 2)$. ARL bajo control deseado= 500.

Los mismos ARLs son obtenidos debido a que ambas optimizaciones representan esquemas equivalentes. El gráfico LCP optimizado para el vector de cambio A, tiene los siguientes parámetros: $a_1 = 0.68$, $a_2 = 0.71$, $UCL = 9.72$ and $LCL = -0.01$ y el gráfico LCP optimizado para el vector de cambio B tiene: $a_1 = 0.64$, $a_2 = 0.69$, $UCL = 9.28$ y $LCL = -0.01$. Aunque los parámetros no son los mismos, ellos son equivalentes, proporcionales, produciendo los mismos ARLs para cualquier cambio. De hecho, si los cambios en las variables mantienen una proporción constante, es razonable que los coeficientes de la combinación lineal también mantengan una proporción. Así que las dos combinaciones lineales son las mismas, excepto por una cuestión de escala. Y la

restricción del ARL bajo control deseado obliga a los UCLs de los dos gráficos a ser equivalentes (es decir, el mismo pero por una cuestión de escala). Por lo tanto, para cualquier cambio dado, ambos esquemas tendrán el mismo rendimiento. Como conclusión práctica para el usuario final, si todos los vectores de cambio a introducir en la optimización mantienen una proporción constante entre sus elementos, a pesar de la magnitud de los cambios (la norma del vector de cambio): el resultado será el mismo. A veces esto puede simplificar la decisión del usuario. Además, vale la pena comentar que los ARLs para grandes cambios son muy pequeños, lo que es un resultado muy deseable.

Otra cuestión que se plantea a partir de la inspección de la Tabla 4.5, es por qué los ARLs para cambios simétricos no son iguales. Por ejemplo $ARL(0.5, 1) = 21.39$, diferente del $ARL(1, 0.5) = 28.68$. Intuitivamente, se podría esperar que sean iguales, ya que los cambios en Y_1 e Y_2 son los mismos, sólo intercambiados. Sin embargo, sus ARLs son diferentes (la Tabla 4.5 no es simétrica). Esto ocurre porque los coeficientes de la combinación lineal óptima, a_1 y a_2 , no son iguales. La razón por la que no son iguales es que no hay manera de obtener una $ARL(d=0) = 500$ con $a_1 = a_2$. Esto es fácil de comprobar, ya que el software optimiza también la suma de las variables, el gráfico MP; la suma es la combinación lineal, con $a_1 = a_2 = 1$. Por lo tanto, si este gráfico basado en sumas es optimizado para los conjuntos A y B, el ARL más cercano que se obtiene es de 1212.4, muy lejos de 500. Por esa razón, la optimización del gráfico LCP devuelve valores de a_1 y a_2 que no son iguales, produciendo la asimetría encontrada en la Tabla 4.5.

Para continuar con el análisis de sensibilidad, examinemos otro par de vectores de cambio para la optimización. En este caso, el ARL bajo control deseado = 400, punto A = (0.5, 1, 1) y B = (0.5, 1, 1.5). El objetivo es ver lo que sucede cuando los vectores de cambios seleccionados para la optimización no son muy diferentes. La Tabla 4.6 muestra los ARL de ambos diseños óptimos.

		Cambios en la media de Y_2					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
Cambios en la media de Y_1	0.5	34.27 (41.53)	19.88 (18.39)	12.3 (9.66)	8.1 (5.8)	5.65 (3.86)	4.15 (2.80)
	1	21.74 (34.62)	13.42 (15.73)	8.78 (8.47)	6.06 (5.19)	4.41 (3.52)	3.36 (2.60)
	1.5	14.59 (29.20)	9.49 (13.62)	6.52 (7.49)	4.7 (4.69)	3.55 (3.24)	2.8 (2.43)
	2	10.29 (24.82)	7.00 (11.89)	5.02 (6.69)	3.76 (4.27)	2.94 (3.00)	2.39 (2.28)
	2.5	7.59 (21.2)	5.36 (10.45)	3.99 (6.02)	3.10 (3.91)	2.50 (2.79)	2.08 (2.15)
	3	5.81 (18.14)	4.25 (9.22)	3.27 (5.44)	2.62 (3.60)	2.17 (2.61)	1.85 (2.01)

Tabla 4.6. Comparación de ARLs para los gráficos de control LCP optimizados para $A = (0.5, 1, 1)$ y $B = (0.5, 1, 1.5)$. Valores de ARL para B entre paréntesis. ARL bajo control deseado= 400.

El análisis de la Tabla 4.6 muestra que ambos gráficos tienen buenos rendimientos y con ARLs muy similares cuando ambas variables Y_1 e Y_2 tienen grandes cambios. Este resultado es importante porque, a pesar de que las optimizaciones se han llevado a cabo para cambios moderados, los gráficos tienen un buen rendimiento para grandes cambios, lo que siempre es muy costoso para la empresa y deben ser detectados rápidamente. Por ejemplo, $ARL_A(2.5, 2.5) = 2.50$ y $ARL_B(2.5, 2.5) = 2.79$ (donde ARL_A y ARL_B denotan los ARLs de los gráficos optimizados para vectores de cambios A y B respectivamente). Otro caso es el $ARL_A(3, 2.5) = 2.17$ y $ARL_B(3, 2.5) = 2.61$. Sin embargo, existen diferencias en el rendimiento para los demás casos. Cuando el cambio en Y_1 es pequeño, $Y_1 = 0.5$, y el cambio en Y_2 es moderado o grande, el mejor gráfico es siempre el caso optimizado para B. Por ejemplo, $ARL_A(0.5, 2) = 8.1$ y $ARL_B(0.5, 2) = 5.8$. Sin embargo, cuando el valor de incremento de Y_1 aumenta, las diferencias se hacen más pequeñas. Por ejemplo, $ARL_A(1, 2) = 6.06$ y $ARL_B(1, 2) = 5.19$. Por otro

lado, los ARLs para pequeños cambios en Y_2 son siempre más pequeños para el gráfico optimizado en el vector de cambios A. Por ejemplo, $ARL_A(0.5, 0.5) = 34.27$ y $ARL_B(0.5, 0.5) = 41.53$, o $ARL_A(2, 0.5) = 10.29$ y $ARL_B(2, 0.5) = 24.82$. Por lo tanto, como un resultado esperado, el gráfico optimizado para grandes incrementos en la media de Y_2 funciona mejor cuando el cambio en la media de Y_1 es pequeño y el cambio en la media de Y_2 es grande y el gráfico de control optimizado para un incremento pequeño en Y_2 funciona mejor para los pequeños cambios en esta variable.

		Cambios en la media de Y_2					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
Cambios en la media de Y_1	0.5	10.03 (9.98)	6.97 (8.92)	5.11 (8.01)	3.91 (7.22)	3.11 (6.55)	2.56 (5.96)
	1	9.04 (6.96)	6.35 (6.31)	4.70 (5.74)	3.63 (5.23)	2.92 (4.80)	2.42 (4.41)
	1.5	8.21 (5.10)	5.82 (4.68)	4.34 (4.31)	3.39 (3.97)	2.74 (3.68)	2.29 (3.412)
	2	7.50 (3.91)	5.36 (3.62)	4.04 (3.37)	3.17 (3.14)	2.59 (2.94)	2.18 (2.76)
	2.5	6.88 (3.11)	4.96 (2.91)	3.76 (2.73)	2.98 (2.57)	2.45 (2.43)	2.08 (2.30)
	3	6.33 (2.56)	4.61 (2.42)	3.53 (2.29)	2.82 (2.17)	2.33 (2.07)	1.99 (1.97)

Tabla 4.7. Comparación de ARLs para gráficos de control LCP optimizados para $A = (1.5, 0.5, 2)$ y $B = (1.5, 2, 0.5)$. Valores de ARL para B entre paréntesis. ARL bajo control deseado = 400.

Otra combinación interesante de los vectores de desplazamiento para considerar es cuando los cambios son simétricos, y en cada cambio, el incremento en Y_1 es muy diferente al incremento en Y_2 . Por ejemplo, ARL bajo control deseado = 400, $A = (1.5, 0.5, 2)$ y $B = (1.5, 2, 0.5)$. La Tabla 4.7 muestra la comparación de los ARLs. Se ve

fácilmente que si los gráficos son optimizados para dos puntos que son simétricos con respecto a la línea $Y_1 = Y_2$, entonces para los cambios en esa línea (ver la diagonal principal de la Tabla 4.7), los ARL son prácticamente iguales. Por ejemplo, $ARL_A(1, 1) = 10.03$ y $ARL_B(1, 1) = 9.98$ o $ARL_A(2.5, 2.5) = 2.45$ y $ARL_B(2.5, 2.5) = 2.43$. Por lo tanto, para cambios con un valor muy similar para Y_1 e Y_2 el rendimiento de ambos gráficos es equivalente. Además, para cambios (vamos a llamarlos C y D) que son simétricos con respecto a la línea $Y_1 = Y_2$, el ARL del gráfico A para el cambio C es prácticamente igual al ARL del gráfico B para el cambio D y el ARL del gráfico A para D es prácticamente igual al ARL del gráfico B para el cambio C. Tome cualquier par de celdas simétricas de la Tabla 4.7 y note que el primer ARL en uno de ellos es prácticamente igual al segundo ARL (al de dentro del paréntesis) en el otro. Como se puede esperar, el rendimiento de ambos gráficos es muy diferente en el área alrededor del punto seleccionado para la optimización. El gráfico LCP optimizado para el punto A muestra un mejor desempeño en el área en torno a ese punto, y el mismo comportamiento se produce para el gráfico optimizado para el punto B. Por ejemplo, $ARL_A(0.5, 3) = 2.56$ y $ARL_B(0.5, 3) = 5.96$, donde $ARL_A(2.5, 1) = 4.96$ y $ARL_B(2.5, 1) = 2.95$. Por supuesto, estas grandes diferencias se deben al hecho de que estamos comparando un gráfico optimizado para una región y un gráfico optimizado para otra región completamente diferente. Sin embargo, ambos gráficos tienen el mismo rendimiento en la línea $Y_1 = Y_2$. También, y esto es importante, ambos gráficos de control optimizados funcionan bien para los grandes cambios.

Como resumen de esta sección, como se esperaba, la elección del cambio para el cual se optimiza el gráfico es importante. Sin embargo, si estamos esperando un cambio con valores similares para todas las medias, no importa qué punto se ha seleccionado para la optimización. También es importante señalar que al comparar dos vectores de cambios muy diferentes empleados para la optimización, si son simétricas con respecto a $Y_i = Y_j$, los valores de ARL serán los mismos en la línea $Y_i = Y_j$.

4.6. Comparación de los resultados

Como se ha comentado antes, hay un problema cuando se optimiza los gráficos MP, MX y varios gráficos de Poisson, debido a la naturaleza discreta de las variables de Poisson. Por esa razón, en la gran mayoría de las veces, el ARL bajo control difiere notablemente del ARL_0 . Este problema no se produce con el gráfico de control LCP. Esta cuestión complica mucho el objetivo de hacer una comparación justa del desempeño entre los gráficos, porque cuando hay una gran diferencia en los $ARL(d = 0)$ de dos gráficos, el que tiene el más grande está en desventaja con respecto a su rendimiento cuando el proceso está fuera de control. Dado que, para la optimización, se especifica un valor mínimo para el ARL bajo control, y el gráfico LCP es capaz de coincidir con ella (esta es una de sus ventajas, como ya se ha señalado), mientras que los otros gráficos en general no pueden, esto podría favorecer al gráfico LCP en la comparación. Se ha tratado de evitar este problema mostrando en esta Sección sólo los casos en que las diferencias en los ARL bajo control de los gráficos optimizados no sean grandes.

Las comparaciones se hacen para $p = 2$ y 3 variables para cambios en las medias medidas en unidades de desviación estándar $d_i = (\lambda_{1,i} - \lambda_{0,i}) / (\lambda_{0,i})^{1/2}$; donde $\lambda_{1,i}$ es la media $E(Y_i)$ cuando el proceso está fuera de control y $\lambda_{0,i}$ es la media $E(Y_i)$ cuando está bajo control. Las conclusiones para $p = 4$ variables son muy similares. Todos los resultados que se muestran en las siguientes tablas se han obtenido empleando el software presentado en la Sección 4.4.

Cuatro escenarios diferentes han sido considerados para $p = 2$ y 3: A, B, C, y D. Estos escenarios se describen en las Tablas 4.8 y 4.9. Corresponden a diferentes correlaciones entre las variables no observadas, Y_i . Por ejemplo, la Tabla 4.8 muestra los valores de las medias cuando el proceso está bajo control para los cuatro escenarios, cuando $p = 2$, con correlaciones 0.15, 0.33, 0.50 y 0.75. Los escenarios que se muestran en las Tablas 4.8 y 4.9 son los mismos considerados en el capítulo 3.

	$\lambda_{0,0}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{2,0}$	ρ
Escenario A	0.25	1	2	0.15
Escenario B	0.5	1	1	0.33
Escenario C	1.45	1.45	1.45	0.50
Escenario D	3.94	1.32	1.32	0.75

Tabla 4.8. Casos analizados para $p = 2$

	$\lambda_{0,0}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{2,0}$	$\lambda_{3,0}$	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{23}
Escenario A	0.5	1	1	1	0.33	0.33	0.33
Escenario B	0.7	1.4	0.5	1	0.44	0.37	0.49
Escenario C	0.7	0.7	0.7	0.7	0.50	0.50	0.50
Escenario D	2	0.5	1	0.7	0.73	0.77	0.70

Tabla4.9. Analizar los casos para $p = 3$

Se ha considerado cambios en medias, d_i , de 0 a 2. Si $d_i = 0$, para $i = 0, 1$ y 2 , entonces el proceso está bajo control. Las Tablas 4.10-A y 4.10-B muestran los valores de ARL y las nuevas correlaciones como una función de los cambios en las medias para las variables Y_0, Y_1 e Y_2 ($p = 2$). Los ARLs bajo control están en la primera línea de las tablas (ARL para $d_i = 0, i = 0, 1, 2$). Estas tablas tienen dos columnas para el gráfico de control LCP. La primera muestra los ARLs del gráfico de control LCP que alcanzan el valor de ARL bajo control deseado para ese escenario. La segunda muestra los ARLs de un gráfico LCP optimizado que alcanza el ARL bajo control más largo obtenido por sus competidores, es decir, el gráfico de control LCP tiene la misma desventaja que su competidor.

Los valores de ARL en negrita representan el mejor (más bajo) ARL para ese cambio y caso. Como se encontró en el capítulo anterior, el gráfico MX y el esquema múltiple tienen los mismos ARLs para los escenarios B, C, y D, como reflejan las Tablas 4.10-A y 4.10-B. La primera impresión después de considerar estos resultados es que el gráfico de control LCP, en la gran mayoría de los casos, presenta el mejor rendimiento. Hay 104 comparaciones en las Tablas 4.10-A y 4.10-B y en sólo 15 de ellas el gráfico LCP no es la mejor opción. Incluso en tales casos, las diferencias entre el gráfico LCP y el mejor gráfico son muy pequeñas. Por ejemplo: En el Escenario A, en los cambios $d_0 = 2$, $d_1 = 2$ y $d_2 = 2$: el mejor gráfico de control es el MP, con un $ARL = 2.49$, mientras que el gráfico LCP tiene un $ARL = 2.55$, prácticamente el mismo valor. Otro ejemplo: el único caso donde el gráfico LCP no es la mejor opción es en el Escenario B: $d_0 = 0$, $d_1 = 0.25$ y $d_2 = 0.25$, donde el gráfico MX y el esquema múltiple tienen un $ARL = 231.40$, mientras que el gráfico LCP tiene un $ARL = 249.24$, siendo esta diferencia la más grande que se encuentra en la tabla.

Las mayores diferencias entre los ARL del gráfico LCP y el resto de los competidores se encuentran normalmente cuando hay un cambio en sólo una de las variables y para el Escenario A. Un ejemplo es $d_0 = 0$, $d_1 = 0.75$, y $d_2 = 0$, el gráfico LCP tiene un $ARL = 44.92$ y el mejor competidor es el gráfico de MP con $ARL = 140.98$, más de tres veces más grande. Otro ejemplo: $d_0 = 0.25$, $d_1 = 0$, y $d_2 = 0$: el gráfico LCP tiene un ARL de 180.19 y el mejor competidor es nuevamente el gráfico MP, con $ARL = 233.31$. Por supuesto que cuando los cambios son grandes, y están presentes en todas las variables, las diferencias de rendimiento entre los gráficos son más pequeñas, por ejemplo, en el escenario C, $d_0 = 1.5$, $d_1 = 1.5$, and $d_2 = 1.5$, donde el gráfico LCP tiene un $ARL = 4.60$ y el gráfico MX y el esquema múltiple tienen un $ARL = 4.97$. En términos generales, el mejor desempeño del gráfico LCP es para pequeños desplazamientos, para los que la mayoría de los gráficos funcionan mal. Así, el gráfico LCP se vuelve más relevante para dar protección contra este tipo de cambios.

Las Tablas 4.11-A y 4.11-B muestran la comparación de los resultados para tres variables ($p = 3$) y para los cuatro escenarios analizados. No se ha incluido en estas tablas la columna que muestra los ARLs de los gráficos de control LCP optimizados para el más largo ARL bajo control del gráfico competidor porque en esos casos, las diferencias en los valores de ARL bajo control ($ARL(\mathbf{d} = 0)$) son pequeñas. Recordemos que se seleccionaron los casos para la comparación del rendimiento a fin de producir pequeñas diferencias en el ARL bajo control. Estas diferencias son más pequeñas para $p = 3$ que para $p = 2$. En esta comparación, el gráfico de control MX y el esquema múltiple tienen los mismos valores de ARL para los escenarios A, C y D.

Hay 140 comparaciones de ARLs en las Tablas 4.11-A y 4.11-B y sólo en 27 de ellos el gráfico LCP no es la mejor opción, que a su vez demuestra el muy buen desempeño del gráfico LCP. Las conclusiones son muy similares al caso $p = 2$. Estas mismas conclusiones se alcanzan a partir de algunos ejemplos de las Tabla 4.11-A y 4.11-B. Como antes, cuando el gráfico de control LCP no es la mejor opción, la diferencia entre este gráfico y el mejor competidor es normalmente pequeña. Por ejemplo, la mayor diferencia se encuentra en el escenario D, con $d_0 = 0.25$, $d_1 = 0.25$, $d_2 = 0.25$ y $d_3 = 0.25$, donde el gráfico de control LCP tiene un $ARL = 177.83$ y el Esquema múltiple tiene una ARL de 168.29. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el rendimiento es bastante similar, por ejemplo, en el escenario C: $d_0 = 1$, $d_1 = 1$, $d_2 = 1$ and $d_3 = 1$, los ARL son de 11.66 y 11.28 para los gráficos LCP y MX, respectivamente. De nuevo el gráfico LCP tiene un buen rendimiento para la detección de pequeños cambios, especialmente si pocas variables han cambiado. En algunos casos la reducción es notable. Por ejemplo, si examinamos el cambio $d_0 = 0$, $d_1 = 0$, $d_2 = 0.5$, y $d_3 = 0.5$ para los cuatro escenarios se obtiene que: en el Escenario A, el ARL del gráfico LCP es de 76.55: su mejor competidor tiene un ARL de 103.25. En el escenario B, los valores son de 76.23 frente a 141.54. En el escenario C: 75.52 frente a 174.86. En el escenario D: 83.02 frente a 221.33.

Por lo tanto, la conclusión de esta sección es que el gráfico de control LCP supera a todos sus competidores en la gran mayoría de los casos. Cuando los cambios son

pequeños las ganancias en el rendimiento son los más significativos, donde en algunos casos, el ARL es cerca de un tercio de su mejor competidor.

Cambio en medias				Escenario A (ARL($d = d^*$))					Escenario B (ARL($d = d^*$))					
d_0	d_1	d_2	ρ	Gráf. MP	Gráf. MX	Gráf LCP (ARL0=370)	Gráf LCP (ARL0=447)	Multiple	ρ	Gráf. MP	Gráf. MX	Gráf LCP (ARL0=545)	Gráf LCP (ARL0=573)	Multiple
0	0	0	0.15	446.89	431.99	370	447	387.44	0.33	572.23	549.81	545	573	549.81
0	0.25	0	0.14	296.3	410.92	158.39	187.94	314.45	0.31	388.42	325.02	213.89	216.54	325.02
0	0	0.25	0.14	251.94	184.4	156.25	186.90	175.89	0.31	388.42	325.02	213.89	216.54	325.02
0.25	0	0	0.21	233.31	309.93	180.19	233.31	271.99	0.4	248.26	297.78	246.25	248.48	297.78
0	0.5	0	0.13	201.83	366.46	79.71	93.78	224.99	0.29	269.28	185.6	102.22	114.34	185.6
0	0.25	0.25	0.13	173.43	180.5	143.51	173.45	159.26	0.29	269.28	231.4	249.24	261.95	231.4
0	0	0.5	0.13	149.68	90.5	76.76	90.83	88.44	0.29	269.28	185.6	102.27	114.31	185.6
0.25	0.5	0	0.18	117.82	259.94	70.08	72.40	159.21	0.35	131.81	116.53	94.42	97.67	116.53
0	0.75	0	0.12	140.98	298.35	44.92	52.56	147.91	0.27	190.48	108.69	56.08	62.95	108.69
0.25	0	0.75	0.17	60.16	40.95	38.9	42.09	40.27	0.34	98.37	72.96	52.36	62.58	72.96
0.25	0.5	0.75	0.15	35.58	40.01	31.36	35.58	36.65	0.29	57.29	53.62	53.39	57.26	53.62
0.5	0	0	0.26	137.4	227.17	116.47	137.38	195.42	0.46	128	174.95	127.32	128.06	174.95
0.5	0.5	0	0.22	75.35	188.85	46.21	52.73	115.82	0.41	74.18	77	65.79	66.37	77
0.5	0	0.5	0.23	59.92	58.24	49.09	55.25	56.07	0.41	74.18	77	65.79	66.37	77
0.5	0.5	1	0.18	19.27	21.24	16.86	19.27	19.98	0.33	28.99	28.26	26.28	28.94	28.26
0	1	0	0.11	100.8	221.55	28.14	33.65	94.55	0.26	137.35	66.72	34.02	37.72	66.72
0	0	1	0.12	60.62	29.72	25.72	29.87	29.51	0.26	137.35	66.72	34.01	37.83	66.72
1	0	0	0.34	59.94	129.21	54.32	59.95	107.54	0.55	46.92	72.74	46.8	46.93	72.74
1	1	0	0.27	23.96	70.03	13.92	15	34.67	0.45	20.91	20.12	17.92	20.26	20.12
1	0	1	0.28	17.3	16.18	13.97	15.4	15.87	0.45	20.91	20.12	17.92	20.26	20.12
1	1	1	0.22	8.83	14.85	8.97	8.84	12.49	0.38	10.73	12.29	10.64	10.76	12.29
1	1.5	0.5	0.22	10.03	23.97	8.38	10.01	14.43	0.38	10.73	10.43	9.5	10.69	10.43
1.5	1.5	1.5	0.24	3.75	6.09	3.86	3.75	5.19	0.38	4.4	5.03	4.37	4.41	5.03
0	2	0	0.09	32.3	48.95	7.62	8.21	20.09	0.22	44.14	15.16	8.62	9.45	15.16
2	0	0	0.46	19.32	50.49	17.98	19.33	40.46	0.66	12.82	20.7	12.81	12.82	20.7
2	0	2	0.338	4.14	3.74	3.42	4.14	3.71	0.51	4.81	4.29	4.14	4.79	4.29
2	2	2	0.25	2.20	3.3	2.26	2.20	2.88	0.39	2.49	2.8	2.55	2.5	2.8

Tabla 4.10-A. Comparación de rendimiento, dos variables, $\rho = 2$. Escenarios A y B.

Cambio en medias			Escenario C (ARL(d = d*))						Escenario D (ARL(d = d*))					
d ₀	d ₁	d ₂	ρ	Gráf. MP	Gráf. MX	Gráf. LCP (ARL0=600)	Gráf. LCP (ARL0=664)	Multiple	ρ	Gráf. MP	Gráf. MX	Gráf. LCP (ARL0=500)	Gráf. LCP (ARL0=683)	Multiple
0	0	0	0.5	663.66	607.13	600.00	664	607.13	0.75	682.14	511.96	500.00	683	511.96
0	0.25	0	0.48	485.64	395.46	268.38	268.86	395.46	0.73	556.74	385.38	214.73	283.43	385.38
0	0	0.25	0.48	485.62	395.44	247.37	273.76	395.44	0.73	556.73	385.37	214.73	283.43	385.37
0.25	0	0	0.55	284.89	301.52	264.15	284.9	301.52	0.77	287.44	234.65	217.71	287.9	234.65
0	0.5	0	0.45	359.59	246.21	120.27	168.98	246.21	0.71	456.42	280.54	109.16	138.5	280.54
0	0.25	0.25	0.45	359.62	294.5	289.45	315.92	294.54	0.71	456.45	311.2	244.38	328.52	311.2
0	0	0.5	0.45	359.59	246.21	117.74	128.57	246.21	0.71	456.42	280.54	109.16	139	280.54
0.25	0.5	0	0.5	167.69	138.16	111.22	117.95	138.16	0.73	201.8	139.39	87.03	135.52	139.39
0	0.75	0	0.44	269.37	153.13	65.28	75.3	153.13	0.69	375.87	201.29	62.30	82.44	201.29
0.25	0	0.75	0.48	130.57	91.5	60.03	61.35	91.5	0.72	170.1	104.73	68.37	83.96	104.73
0.25	0.5	0.75	0.44	81.41	68.69	66.35	76.63	68.69	0.69	122.27	82.65	72.34	86.45	82.65
0.5	0	0	0.59	141.02	163.9	132.7	141.04	163.9	0.79	137.2	119.15	107.15	137.39	119.15
0.5	0.5	0	0.54	88.67	82.9	65.62	79.87	82.9	0.75	100.33	75.66	60.47	85.23	75.66
0.5	0	0.5	0.54	88.67	82.9	66.50	79.87	82.9	0.75	100.33	75.66	67.61	74.51	75.66
0.5	0.5	1	0.47	38.71	33.7	34.18	35.80	33.7	0.69	55.97	39.04	34.15	39.57	39.04
0	1	0	0.42	204.04	97.4	49.07	61.57	97.4	0.68	310.91	144.35	40.17	46.57	144.35
0	0	1	0.42	204.04	97.4	48.72	61.57	97.4	0.68	310.88	144.35	40.12	48.10	144.35
1	0	0	0.65	46.71	59.92	44.83	46.72	59.92	0.82	41.7	39.27	34.15	41.74	39.27
1	1	0	0.57	23.14	20.23	20.07	20.37	20.23	0.76	25.73	18.92	19.32	22.30	18.92
1	0	1	0.57	23.14	20.23	20.07	20.37	20.23	0.76	25.73	18.92	17.12	18.17	18.92
1	1	1	0.5	12.67	12.92	11.99	12.68	12.92	0.71	16.62	13.36	14.03	16.67	13.36
1	1.5	0.5	0.5	12.67	11.07	11.17	11.41	11.07	0.71	16.61	11.99	10.06	14.42	11.99
1.5	1.5	1.5	0.5	4.79	4.97	4.60	4.80	4.97	0.69	5.98	5.08	5.3	6	5.08
0	2	0	0.37	74.64	22.25	9.30	15.76	22.25	0.62	151.49	43.07	10.59	15.24	43.07
2	0	0	0.73	10.81	14.44	10.59	10.82	14.44	0.86	8.44	8.54	7.41	8.45	8.54
2	0	2	0.6	4.65	3.88	4.10	4.10	3.88	0.77	4.74	3.58	3.85	4.73	3.58
2	2	2	0.5	2.56	2.66	2.48	2.56	2.66	0.69	3	2.68	2.76	3.01	2.68

Tabla 4.10-B. Comparación de rendimiento, dos variables, $p = 2$. Escenarios C y D.

Cambio en medias				Escenario A (ARL(d = d*))							Escenario B (ARL(d = d*))						
d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	Gráf. MP	Gráf. MX	Multiple	Gráf. LCP	ρ ₁₂	ρ ₁₃	ρ ₂₃	Gráf. MP	Gráf. MX	Multiple	Gráf. LCP	ρ ₁₂	ρ ₁₃	ρ ₂₃
0	0	0	0	407.5	372.2	372.21	370.00	0.33	0.33	0.3	561.7	534.7	530.42	530.00	0.44	0.4	0.49
0	0.25	0	0	323	254.5	254.5	161.54	0.31	0.31	0.3	436.8	272	499.23	244.30	0.41	0.4	0.49
0	0	0.25	0	323	254.5	254.5	163.04	0.31	0.33	0.3	482.9	520.6	300.81	210.04	0.41	0.4	0.46
0	0	0	0.25	323	254.5	254.5	162.59	0.33	0.31	0.3	454	416.8	416.85	205.56	0.44	0.4	0.46
0.25	0	0	0	169.2	204.1	204.06	157.12	0.4	0.4	0.4	223.9	291.1	248.51	210.37	0.5	0.4	0.55
0	0.25	0.25	0	257.5	193.8	193.81	129.72	0.29	0.31	0.3	377	268.6	290.77	168.15	0.39	0.4	0.46
0.25	0.25	0	0	139.3	147.3	147.28	109.15	0.38	0.38	0.4	181	162.9	236.98	150.36	0.47	0.4	0.55
0.25	0	0.25	0.25	115.2	115.6	115.59	93.43	0.38	0.38	0.4	165	225.5	137	133.88	0.48	0.4	0.49
0.25	0.25	0.25	0.25	95.7	95.37	95.37	88.49	0.35	0.35	0.4	134.4	140.7	133.67	127.20	0.45	0.4	0.49
0	0.5	0	0	257.5	160.8	160.75	76.58	0.29	0.29	0.3	341.8	145.7	439.2	108.47	0.39	0.3	0.49
0	0	0.5	0.5	166.7	103.3	103.25	76.55	0.29	0.29	0.3	276.7	280	141.54	76.23	0.39	0.3	0.38
0.5	0	0	0	86.05	121.6	121.57	81.21	0.46	0.46	0.5	109	170.6	132.16	102.20	0.55	0.5	0.6
0.5	0.5	0	0	61.77	65.32	65.32	44.95	0.41	0.41	0.5	75.72	63.66	117.84	58.12	0.5	0.4	0.6
0.5	0	0.5	0.5	45.08	45.23	45.23	33.66	0.41	0.41	0.4	65.53	98.79	50.44	47.56	0.5	0.4	0.49
0.5	0.5	0.5	0.5	33.43	34.89	34.89	31.32	0.36	0.36	0.4	46.72	50.86	48.44	44.04	0.45	0.4	0.49
0.75	0	0	0	49.95	77.43	77.43	47.20	0.51	0.51	0.5	60.79	106.1	77.18	58.23	0.59	0.5	0.64
0	0.75	0	0	206.6	99.89	99.89	49.22	0.27	0.27	0.3	269.4	83.59	353.34	77.77	0.37	0.3	0.49
0	0	0.75	0.75	110.4	58.45	58.45	30.12	0.27	0.27	0.2	198.1	180.9	82.75	51.78	0.37	0.3	0.34
0.75	0.75	0	0	32.48	32.88	32.88	22.43	0.43	0.43	0.5	37.83	30.04	63.43	27.54	0.52	0.5	0.64
0.75	0	0	0.75	32.48	32.88	32.88	22.87	0.51	0.43	0.4	40.6	51.23	44.85	26.54	0.59	0.5	0.56
0.75	0.75	0.75	0.75	15.1	16.18	16.18	14.18	0.37	0.37	0.4	20.35	22.94	22.16	19.56	0.45	0.4	0.49
0	1	0	0	166.7	63.41	63.41	30.44	0.26	0.26	0.3	213.5	51.08	260.02	50.05	0.35	0.3	0.49
0	0	1	0	166.7	63.41	63.41	30.36	0.26	0.33	0.3	311.3	384.9	72.67	40.02	0.35	0.37	0.39
0	0	1	1	74.84	35.34	35.34	16.73	0.26	0.26	0.2	143.7	115.3	51.58	24.63	0.35	0.3	0.31
1	0	0	0	31.84	52.08	52.08	30.63	0.55	0.55	0.6	37.28	69.5	48.63	34.92	0.63	0.6	0.68
1	1	0	0	19.26	18.53	18.53	14.26	0.45	0.45	0.6	21.45	16.36	36.6	15.02	0.53	0.5	0.68
1	0	0	1	19.26	18.53	18.53	13.15	0.55	0.45	0.5	23.28	27.73	24.73	14.64	0.63	0.5	0.57
1	1	1	0	12.25	11.79	11.79	8.73	0.38	0.45	0.5	15.84	15.46	14.78	13.14	0.46	0.5	0.58
1	1	1	1	8.18	8.88	8.88	7.75	0.38	0.38	0.4	10.68	12.17	11.96	10.69	0.46	0.4	0.49
1	0	2	0	12.25	7.16	7.16	5.55	0.4	0.55	0.4	19.39	28.55	7.29	10.95	0.48	0.6	0.52
1	2	1	0.5	6.8	5.82	5.82	5.34	0.33	0.36	0.4	8.34	5.72	10.1	6.55	0.4	0.4	0.53
1.5	1.5	1.5	1.5	3.47	3.8	3.8	3.34	0.38	0.38	0.4	4.26	4.86	4.89	4.16	0.46	0.4	0.49
2	0	0	0	9.23	15.72	15.72	9.04	0.66	0.66	0.7	9.72	18.97	12.73	9.44	0.72	0.67	0.76
2	2	0	0	4.91	4.16	4.16	3.67	0.51	0.51	0.7	4.9	3.57	7.16	3.62	0.57	0.52	0.76
2	0	2	2	2.99	2.77	2.77	2.60	0.51	0.51	0.4	3.8	4.58	2.95	2.98	0.59	0.53	0.49
2	2	2	2	2.05	2.22	2.22	2.05	0.39	0.39	0.4	2.38	2.66	2.71	2.34	0.46	0.41	0.49

Tabla 4.11-A. Comparación de rendimiento, tres variables, $p = 3$. Escenarios A y B.

Cambio en medias				Escenario C (ARL(d = d*))						Escenario D (ARL(d = d*))							
d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	Gráf. MP	Gráf. MX	Multiple	Gráf. LCP	ρ ₁₂	ρ ₁₃	ρ ₂₃	Gráf. MP	Gráf. MX	Multiple	Gráf. LCP	ρ ₁₂	ρ ₁₃	ρ ₂₃
0	0	0	0	596.32	578.17	578.17	570.00	0.5	0.5	0.5	582.8	631.16	624.38	620.00	0.7	0.77	0.7
0	0.25	0	0	496.97	407.66	407.66	222.63	0.5	0.47	0.5	526.09	576.36	446.89	250.78	0.7	0.74	0.7
0	0	0.25	0	496.97	407.66	407.66	215.06	0.5	0.5	0.5	504.42	414.74	548.95	243.00	0.7	0.77	0.7
0	0	0	0.25	496.97	407.66	407.66	227.73	0.5	0.47	0.5	516.47	522.37	521.03	287.51	0.7	0.74	0.7
0.25	0	0	0	229.84	273.42	273.42	222.03	0.6	0.56	0.6	234.65	281.33	268.35	247.43	0.8	0.8	0.7
0	0.25	0.25	0	415.37	315.83	315.83	170.97	0.4	0.47	0.5	455.72	391.63	408.31	186.48	0.7	0.74	0.7
0.25	0.25	0	0	197.2	204.16	204.16	165.56	0.5	0.53	0.6	214.71	258.41	201.84	178.57	0.7	0.77	0.7
0.25	0	0.25	0.25	169.56	163.56	163.56	140.95	0.5	0.53	0.5	186.55	176.7	210.75	166.02	0.7	0.77	0.7
0.25	0.25	0.25	0.25	146.17	136.91	136.91	140.08	0.5	0.5	0.5	170.96	168.29	168.29	177.83	0.71	0.75	0.69
0	0.5	0	0	415.39	266.58	266.58	111.24	0.4	0.44	0.5	475.29	504.64	317.14	116.83	0.7	0.72	0.7
0	0	0.5	0.5	292.97	174.86	174.86	75.52	0.4	0.44	0.4	345.32	221.33	329.4	83.02	0.7	0.72	0.6
0.5	0	0	0	109.52	146.08	146.08	106.59	0.6	0.62	0.6	110.9	141.21	131.68	116.24	0.8	0.82	0.8
0.5	0.5	0	0	84.31	84.67	84.67	71.55	0.6	0.55	0.6	94.95	117.37	80.38	88.92	0.8	0.78	0.8
0.5	0	0.5	0.5	65.4	60.49	60.49	52.47	0.6	0.55	0.5	74.45	64.63	83.45	61.34	0.7	0.77	0.7
0.5	0.5	0.5	0.5	51.19	47.53	47.53	49.25	0.5	0.5	0.5	64.15	60.14	60.99	66.78	0.7	0.73	0.7
0.75	0	0	0	60.16	85.65	85.65	58.79	0.7	0.65	0.7	59.09	77.98	71.69	61.52	0.8	0.84	0.8
0	0.75	0	0	348.29	170.42	170.42	63.89	0.4	0.42	0.5	429.72	423.73	225.96	73.27	0.7	0.7	0.7
0	0	0.75	0.75	209.36	101.54	101.54	34.76	0.4	0.42	0.4	268.2	139.27	224.47	53.07	0.7	0.69	0.6
0.75	0.75	0	0	42.8	40.77	40.77	30.85	0.6	0.57	0.7	48.18	58.69	37.82	35.18	0.8	0.78	0.8
0.75	0	0	0.75	42.8	40.77	40.77	31.87	0.7	0.57	0.6	46.43	48.69	47.07	36.70	0.8	0.77	0.7
0.75	0.75	0.75	0.75	22.77	21.2	21.2	21.98	0.5	0.5	0.5	29.01	26.58	27.14	28.54	0.69	0.72	0.67
0	1	0	0	292.97	110.24	110.24	39.19	0.4	0.4	0.5	388.71	343.04	162.95	46.50	0.6	0.68	0.7
0	0	1	0	292.97	110.24	110.24	39.03	0.4	0.5	0.4	329.9	118.14	255.74	37.71	0.63	0.77	0.61
0	0	1	1	151.57	62.3	62.3	25.64	0.4	0.4	0.3	209.59	91.19	152.07	35.72	0.6	0.67	0.5
1	0	0	0	36.6	54.04	54.04	35.93	0.7	0.69	0.7	34.69	46.59	42.51	36.63	0.8	0.85	0.8
1	1	0	0	24.59	22.27	22.27	17.33	0.6	0.59	0.7	27.27	32.12	20.34	27.74	0.8	0.78	0.8
1	0	0	1	24.59	22.27	22.27	17.25	0.7	0.59	0.6	26.11	26.04	25.29	21.86	0.8	0.78	0.7
1	1	1	0	16.95	14.7	14.7	11.80	0.5	0.59	0.6	19.66	16.57	16.94	18.36	0.7	0.78	0.7
1	1	1	1	12.02	11.28	11.28	11.66	0.5	0.5	0.5	15.19	13.8	14.14	15.39	0.7	0.71	0.7
1	0	2	0	16.95	9.37	9.37	8.48	0.5	0.69	0.5	17.93	8.51	14.12	6.52	0.7	0.85	0.7
1	2	1	0.5	10.23	7.64	7.64	7.54	0.4	0.48	0.5	13.94	12.11	9.61	10.02	0.6	0.69	0.7
1.5	1.5	1.5	1.5	4.79	4.59	4.59	5.03	0.5	0.5	0.5	5.78	5.28	5.42	5.79	0.7	0.7	0.7
2	0	0	0	9.39	14.09	14.09	9.29	0.77	0.77	0.77	7.8	10.39	9.45	8.27	0.87	0.89	0.85
2	2	0	0	5.71	4.64	4.64	4.7	0.62	0.62	0.77	5.78	5.91	4.11	4.95	0.77	0.79	0.85
2	0	2	2	3.74	3.17	3.17	2.97	0.62	0.62	0.5	3.78	3.03	3.66	3.44	0.75	0.78	0.64
2	2	2	2	2.64	2.57	2.57	2.60	0.5	0.5	0.5	3.01	2.8	2.87	3.18	0.66	0.69	0.64

Tabla 4.11-B. Comparación de rendimiento, tres variables, $p = 3$. Escenarios C y D

4.7. Conclusiones

En este capítulo se ha presentado un nuevo gráfico de control diseñado para el monitoreo de variables correlacionadas Poisson: el Gráfico de control de la Combinación Lineal de las variables de Poisson (LCP). El estadístico que se graficará es una combinación lineal de las puntuaciones de Poisson. Los valores de los coeficientes de esta combinación lineal y de los límites de control del gráfico que alcanzan un ARL requerido bajo control (ARL_0) y minimizan el ARL fuera de control son obtenidos mediante el empleo de un software de uso fácil bajo Windows© desarrollado en esta tesis. Una ventaja principal de este gráfico es que hace que sea posible que coincida con cualquier valor de ARL_0 especificado por el usuario, ya que los posibles valores de los límites de control son números reales y no enteros, contrariamente a lo que ocurre con el resto de los gráficos de control de Poisson.

El software desarrollado, también optimiza los parámetros de los gráficos MP, MX y varios gráficos Poisson univariantes. Además, lleva a cabo una comparación completa de los rendimientos entre ellos. Por lo tanto, es posible estudiar cuidadosamente cuál es el mejor gráfico de control en diferentes escenarios. Se piensa que este software hace mucho más fácil el uso de este nuevo gráfico, o los anteriores, en aplicaciones reales.

En la gran mayoría de los casos analizados en este trabajo el gráfico LCP supera a los otros esquemas de control considerados. En algunos casos, el gráfico LCP da valores de ARL que son aproximadamente un tercio que el de su mejor competidor. En los pocos casos en los que el gráfico LCP no tiene el mejor rendimiento, las diferencias son más bien pequeñas.

CAPÍTULO 5

DISEÑO Y OPTIMIZACIÓN DEL GRÁFICO DE CONTROL EWMA PARA LA COMBINACIÓN LINEAL DE VARIABLES POISSON CORRELACIONADAS

5.1. Introducción

En este capítulo se propone un nuevo gráfico de control para monitorear variables Poisson correlacionadas, el gráfico EWMA LCP. Este gráfico constituye una mejora al gráfico estudiado en el capítulo anterior, basado en la combinación lineal de variables Poisson correlacionadas. Una vez más, la estructura de correlación propuesta por Holgate (1964) es la que se asume para el diseño de este gráfico.

Los gráficos EWMA (introducidos por Roberts, 1959), tienen la característica de detectar rápidamente cambios pequeños y moderados en el proceso, lo que motivó a desarrollar una versión EWMA del gráfico LCP, que al ser un gráfico tipo Shewhart, era efectivo en detectar grandes cambios en el proceso.

Un gráfico EWMA apropiadamente diseñado puede reducir eficientemente el tiempo medio para detectar un cambio en la media de una variable de calidad (véase Lucas y Saccucci, (1990) o Montgomery, (2009)). Mientras que para grandes cambios, los gráficos Shewhart superan a sus contrapartes EWMA, pero estos últimos no son lentos tampoco. Así, en resumen, los gráficos EWMA son una opción muy interesante para el control de procesos.

Además este gráfico EWMA supera una de las dificultades que se tiene en el diseño de los gráficos de control para variables de conteo, puesto que al tratarse de variables que toman valores enteros y al tener una distribución acumulada discontinua, ajustar los límites de control de este conjunto de gráficos con el fin de que coincida con un ARL bajo control que se especifica, resulta una tarea complicada. A veces un valor cercano se puede conseguir, pero muy a menudo hay una gran distancia entre el valor deseado y el ARL bajo control más cercano disponible, lo que resultaba en un esquema con una tasa superior de falsas alarmas y con poco poder para detectar cambios en el proceso.

El gráfico EWMA al estar basado en el gráfico LCP, ya no presentará el problema expuesto en el párrafo anterior, pues resulta más flexible que los otros en lograr un ARL bajo control bastante cerca del valor especificado por el usuario. Además, el gráfico

LCP ya supera este inconveniente y muestra un mejor comportamiento que el esquema múltiple y los gráficos MP y MX en la mayoría de los casos.

Se ha desarrollado un programa de fácil uso bajo entorno Windows ©, que encuentra el diseño óptimo del gráfico, esto es, los coeficientes de la combinación lineal, así como la constante de suavizado del EWMA y los límites de control, para reducir el ARL fuera de control restringido a un valor de ARL bajo control deseado. Para los cálculos de ARL se utilizan cadenas de Markov y la optimización es realizada mediante Algoritmos Genéticos. Como se verá, y como era de esperar, el gráfico EWMA LCP optimizado supera al gráfico LCP para prácticamente cualquier cambio del proceso (en muy pocas excepciones, en el caso de grandes cambios, las diferencias de rendimiento son muy pequeñas).

El resto de este capítulo se organiza de la siguiente manera: la sección 5.2 presenta la construcción del gráfico EWMA LCP. La sección 5.3 discute las medidas de rendimiento que se utilizan en este estudio y se describe el modelo matemático para su cálculo. La Sección 5.4 ofrece una definición formal del problema de optimización del diseño. La sección 5.5 presenta un programa informático que ha sido desarrollado con el objetivo de ayudar al usuario final a obtener los mejores parámetros del gráfico EWMA LCP. El programa devuelve los parámetros óptimos del gráfico (coeficientes de combinación lineal, suavizado límites constantes y control), para los casos en que $p = 2, 3$ o 4 variables Poisson. Los valores de los parámetros son óptimos en el sentido de que minimizan el ARL fuera de control para un cambio especificado por el usuario, mientras que alcanza el valor ARL bajo control deseado. Un análisis de sensibilidad aparece en la Sección 5.6. El rendimiento del gráfico se compara con el del gráfico LCP en la Sección 5.7. Finalmente, la Sección 5.8 resume las conclusiones.

5.2. Generalidades del gráfico EWMA LCP Chart

En el capítulo anterior, se propuso el gráfico LCP a fin de controlar un vector de variables Poisson correlacionadas $\{X_i\}$, $i = 1, \dots, p$. El estadístico del gráfico está definido como sigue:

$$LCP = a_1X_1 + a_2X_2 + \dots + a_pX_p \quad (5.1)$$

Donde los coeficientes están definidos en el intervalo $a_i \in [-1, 1]$ y $X_i = Y_0 + Y_i$.

Se propone la versión EWMA del gráfico LCP, cuyo estadístico es:

$$EWMALCP_t = r * LCP_t + (1 - r) * (EWMALCP_{t-1}) \quad \text{para } t = 1, 2, \dots \quad (5.2)$$

Donde LCP_t es el estadístico calculado como en (5.1) con los valores de la t -ésima muestra, r es la constante de suavizado, $0 < r \leq 1$ (con $r = 1$, el EWMA LCP resulta el LCP chart), y el $EWMALCP_0$, necesario para calcular $EWMALCP_1$, es la media bajo control de LCP :

$$EWMALCP_0 = a_1\mu_1 + a_2\mu_2 + \dots + a_p\mu_p \quad (5.3)$$

Donde $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_p$ son las medias de las variables observables X_1, X_2, \dots, X_p .

Los límites de control del gráfico se denotan, UCL y LCL, los cuales no necesariamente son simétricos con respecto al valor esperado de LCP, (5.3).

La desviación estándar del estadístico EWMA LCP es $\sqrt{r/(2-r)}$ veces la desviación estándar del estadístico LCP. A pesar que es común expresar la distancia de los límites de control como múltiplos de la desviación estándar del estadístico EWMA, el problema de optimización que más adelante será tratado, definirá los valores finales de

UCL y LCL directamente como variables de decisión y no en término de la desviación estándar del estadístico EWMA, como es común hacerlo.

5.3. Medidas de Rendimiento y Diseño del gráfico

El ARL (Average Run Length), definida como el número esperado de muestras hasta que haya una señal, es la medida de rendimiento más utilizada en control estadístico de procesos. Un buen gráfico de control es aquel que tiene un valor grande de ARL cuando el proceso está bajo control y un valor pequeño de ARL cuando el proceso está fuera de control. El ARL fuera de control, es una función del valor del cambio en los parámetros del proceso. Para hacer un diseño óptimo de gráfico de control, el usuario debe especificar un valor aceptable de ARL bajo control y bajo esa restricción, minimizar el ARL fuera de control para un vector de cambios que el usuario final fija.

El número de muestras independientes hasta que se presente una señal de fuera de control, sigue una distribución geométrica con parámetro q , que es la probabilidad de que haya una señal en cualquier muestra, y el ARL sería el valor esperado de esa variable geométrica por lo que estaría definida como:

$$ARL = 1 / q \quad (5.4)$$

Como para el cálculo del estadístico del gráfico EWMA se necesita información del valor anterior, los estadísticos muestrales no son independientes y la ecuación (5.4) no es válida para el cálculo del ARL del gráfico EWMA LCP. En este caso, existen otros métodos para calcular el ARL, como ecuaciones integrales, cadenas de Markov o simulación. En este trabajo se utilizó un modelo de cadena de Markov, que se detalla a continuación. El modelo es muy similar al usado por Lucas y Saccucci (1990) o por Borrór et al. (1998), entre otros.

Para el cálculo del ARL, vamos a dividir el intervalo entre LCL y UCL en m subintervalos, y denotar los límites superior e inferior del i -ésimo sub intervalo por U_i y L_i , respectivamente, $i = 1, \dots, m$. Además, M_i denota el punto medio del i -ésimo subintervalo. Entonces, la anchura de cada subintervalo es:

$$h = \frac{UCL-LCL}{m} \quad (5.5)$$

y

$$U_i = LCL + ih$$

$$L_i = LCL + (i-1)h \quad (5.6)$$

$$M_i = LCL + (2i-1)h/2$$

Considere una cadena de Markov con m estados transitorios, donde el estado i ($i = 1, \dots, m$) corresponde al evento de que el estadístico $EWMALCP$ está dentro del i -ésimo subintervalo, y un estado absorbente, correspondiente al evento de que el estadístico $EWMALCP$ sea inferior a LCL o por encima de UCL (señal).

La matriz $m \times m$, Q , la matriz de transición entre estados transitorios, tiene como elementos las probabilidades q_{ij} de que el estadístico $EWMALCP_t$ caiga dentro del subintervalo j -ésimo, dado que $EWMALCP_{t-1}$ está dentro del subintervalo i -ésimo entre LCL y UCL. Para simplificar, supongamos que cuando el estadístico $EWMALCP_{t-1}$ se encuentra dentro del subintervalo i -ésimo, coincide con su punto medio. Esta aproximación ha sido considerada por muchos autores (incluyendo Lucas y Saccucci (1990) y Borrór et al. (1998)), y ha demostrado ser precisa si se usa un número grande de sub-intervalos, de manera que la discretización del intervalo entre LCL y UCL es lo suficientemente fina. En este caso, q_{ij} , sería:

$$q_{ij} = P(L_j < EWMALCP_t \leq U_j | EWMALCP_{t-1} = M_i) \quad (5.7)$$

La ecuación (5.7) se puede reescribir, usando la relación entre $EWMALCP_t$ y $EWMALCP_{t-1}$, de la siguiente manera:

$$q_{ij} = P(L_j < rLCP_t + (1-r)M_i \leq U_j)$$

o

$$q_{ij} = P\left(\frac{L_j - (1-r)M_i}{r} < LCP \leq \frac{U_j - (1-r)M_i}{r}\right) \quad (5.8)$$

La función de probabilidades de la combinación lineal, fue presentada en el capítulo anterior. Usando esta función, la probabilidad $p_{(\overline{AB})}$ que $A < LCP \leq B$, para cualquier par de número dados tal que $A < B$, está dada por

$$p_{(\overline{AB})} = \sum_{\min s \leq B}^{\min s > A} \sum_{i_0=0}^{\text{trunc}(\frac{s}{b})} \sum_{i_1=0}^{\text{trunc}(\frac{s-b*i_0}{a_1})} \sum_{i_2=0}^{\text{trunc}(\frac{s-b*i_0-a_1*i_1}{a_2})} \sum_{i_{p-1}=0}^{\text{trunc}((s-b*i_0-\sum_{i=1}^{p-2} a_i*(i_i))/a_{p-1})} D_i \quad (5.9)$$

Donde

$$D_i = \exp\left\{-\left[\sum_{i=0}^p (\lambda_i)\right]\right\} \frac{\lambda_0^{i_0} * \lambda_1^{i_1} * \dots * \lambda_{p-1}^{i_{p-1}} * \lambda_p^{s-b*i_0-\sum_{i=1}^{p-1} a_i*(i_i)/a_p}}{i_0! * i_1! * \dots * i_{p-1}! * (s-b*i_0-\sum_{i=1}^{p-1} a_i*(i_i)/a_p)!} \quad (5.10)$$

Sea la matriz \mathbf{Q} que se denota alternativamente por \mathbf{Q}_0 y \mathbf{Q}_1 para distinguir entre los casos en que el proceso está bajo control y fuera de control, respectivamente. Luego, por las propiedades elementales de las cadenas de Markov:

$$ARL(\mathbf{d} = \mathbf{0}) = \mathbf{v}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1}\mathbf{u} \quad (5.11)$$

Donde $ARL(\mathbf{d} = \mathbf{0})$ representa el valor ARL bajo control (mientras que ARL_0 es el valor deseado, especificado por el usuario), \mathbf{u} es un vector de unos de dimensión $m \times 1$, \mathbf{I} es la matriz identidad $m \times m$ y \mathbf{v} es el vector de probabilidad de estados iniciales de dimensión $m \times 1$, que tiene todos los elementos iguales a cero, excepto el correspondiente al sub-intervalo que contiene el valor $EWMALCP_0$ dado por (5.3), que es igual a uno. El índice de este elemento es el menor entero i que es mayor o igual que $(EWMALCP_0 - LCL)/h$.

El valor $ARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*)$ (ARL fuera de control para un vector de cambio dado \mathbf{d}^*) en zero state (si el proceso está fuera de control cuando la monitorización del proceso se inicia o se reanuda); está dado por:

$$ZSARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*) = \mathbf{v}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1)^{-1}\mathbf{u} \quad (5.12)$$

y el $ARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*)$ steady-state (si el proceso está bajo control cuando la monitorización se inicia o se reanuda y se produce un cambio en la media en un momento posterior); está dado por:

$$SSARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*) = \mathbf{w}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_1)^{-1}\mathbf{u} \quad (5.13)$$

Donde \mathbf{w} , es el vector de estados iniciales que se usa para el cálculo del ARL en el steady state:

$$\mathbf{w}' = \frac{\mathbf{v}'(\mathbf{I} - \mathbf{Q}_0)^{-1}}{ARL_0} \quad (5.14)$$

5.4. Optimización del gráfico de control EWMA LCP

Como se ha dicho anteriormente, el gráfico de control *EWMA LCP* ha sido diseñado de manera que los parámetros del gráfico permitan reducir al mínimo el *ARL* fuera de control para un cambio en los parámetros del proceso que debe ser detectado tan pronto como sea posible, sujeto a la restricción de que la *ARL* bajo control debe ser igual o mayor que un valor especificado ARL_0 . En el caso del gráfico EWMA LCP, las variables de decisión son los límites de control de *UCL* y *LCL*, la constante de suavizado r y los coeficientes a_i de la combinación lineal. El problema puede enunciarse como:

DATOS DE ENTRADA:

ARL bajo control deseado: ARL_0

Medias bajo control de las variables Y : $\lambda_{0,i}$ $i = 0, 1, 2, \dots, p$

Vector de cambios para el cual se minimiza el *ARL*, expresado en unidades de desviación estándar:

$$\mathbf{d}^* = (d_0, d_1, d_2, \dots, d_p)$$

$$\text{donde } d_i = (\lambda_{1,i} - \lambda_{0,i}) / (\lambda_{0,i})^{1/2}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, p$$

y $\lambda_{1,i}$ ($i = 0, 1, 2, \dots, p$) son los valores de las medias de las variables Y , cuando hay un cambio en el proceso.

OBJETIVO: Minimizar: $SSARL(\mathbf{d} = \mathbf{d}^*)$

RESTRICCIÓN: $ARL(\mathbf{d} = \mathbf{0}) = ARL_0$

VARIABLES DE DECISION:

Límites de control superior e inferior para el gráfico EWMA LCP: LCL y UCL .

Constante de suavizado r

Coefficientes de la combinación lineal a_i , $a_i \in [-1, 1]$, $i = 1, 2, \dots, p$

El programa minimiza el ARL fuera de control en steady state, pero también calcula el del zero state. La diferencia entre los dos valores es muy pequeña y se escogió minimizar para el ARL en el steady state porque incluso en el caso de que el proceso esté fuera de control en el inicio del seguimiento, después de la primera señal en el gráfico, con medidas correctivas, el proceso es llevado al estado bajo control. A partir de este momento, cada próxima vez que el proceso va fuera de control será algún tiempo después del comienzo o después de una reinicialización de la vigilancia.

Para la optimización se utilizó Algoritmos Genéticos (GA). Con el fin de maximizar su rendimiento, los parámetros del GA fueron calibrados por medio de un diseño de experimentos. Los algoritmos genéticos han demostrado ser una herramienta eficaz para optimizar los gráficos de control de calidad. Véase, por ejemplo, Chen (2007), Kaya (2009) y Aparisi et al. (2009).

5.5. Software y ejemplo de aplicación

Se ha desarrollado un programa de optimización bajo entorno Windows®, a fin de facilitar al usuario final el diseño del gráfico EWMA LCP para controlar un proceso de interés. El uso de este programa se explica a continuación por medio de un ejemplo.

Siegmann et al. (2004) describieron un proceso de producción de cables de metal fino, en el que se pueden producir dos tipos de defectos (escamas y arañazos), la incidencia de los cuales debe ser objeto de control estadístico. Para este propósito, inicialmente, se recogieron cien muestras de diez metros de alambres delgados de metal cada una (el proceso se supone bajo control) y se estimaron las medias bajo control en los recuentos de cada tipo de defectos. Los recuentos observados se muestran en la Tabla 5.1.

X_1	X_2	Frecuencia
0	0	4
0	1	5
0	2	10
0	3	4
0	4	4
0	5	2
0	6	1
1	0	5
1	1	12
1	2	6
1	3	7
1	4	6
1	6	1
2	0	6
2	1	3
2	3	8
2	4	2
2	5	1
3	0	1
3	2	1
3	3	1
3	4	4
3	5	2
3	6	1
4	1	1
4	3	1
5	4	1
$\bar{X}_1=1.2$	$\bar{X}_2=2.29$	$\Sigma = 100$

Tabla 5.1. Muestreo del proceso. X_1 es el número de escamas, y X_2 es el número de rayaduras

El coeficiente de correlación muestral entre X_1 y X_2 es 0.15. Se desea obtener un ARL bajo control de 370 (o el más cercano posible).

Las medias de las variables no observables pueden ser estimadas mediante la ecuación $E(Y_i) = E(X_i) - Cov(X_1, X_2)$. Se desea minimizar el ARL parar un cambio de +1 desviación estándar en la media de Y_1 , λ_1 . Las medias fuera de control de las Y_i 's, $\lambda_{1,i}$, $i = 0, 1, 2$, se obtienen de la siguiente manera:

$$\lambda_{1,i} = \lambda_{0,i} + d_i * (\lambda_{0,i})^{1/2}; \quad i = 0, 1, 2$$

La Tabla 5.2 muestra los valores de las medias de las variables Y_i 's, tanto cuando el proceso está bajo control como cuando está fuera de control:

Bajo control			Fuera de control		
$\lambda_{0,0}$	$\lambda_{0,1}$	$\lambda_{0,2}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{1,1}$	$\lambda_{1,2}$
0.27	0.93	2.01	0.27	1.89	2.01

Tabla 5.2. Valores de la media bajo control de las variables no observables Y_i y con el cambio relevante de +1 desviación estándar en la media Y_1

Los resultados de la optimización luego de ejecutar el programa son mostrados en la Figura 5.1. La Tabla 5.3 muestra los ARLs fuera de control y bajo control para los gráficos EWMA LCP y LCP, reflejando una mejora con la incorporación del procedimiento EWMA del 44.31% en el ARL fuera de control. Como se mencionó anteriormente, el optimizador minimiza el ARL fuera de control en steady state, el cual por lo general es cercano al del zero state como se puede apreciar en la subventana "Results" de la Figura 5.1.

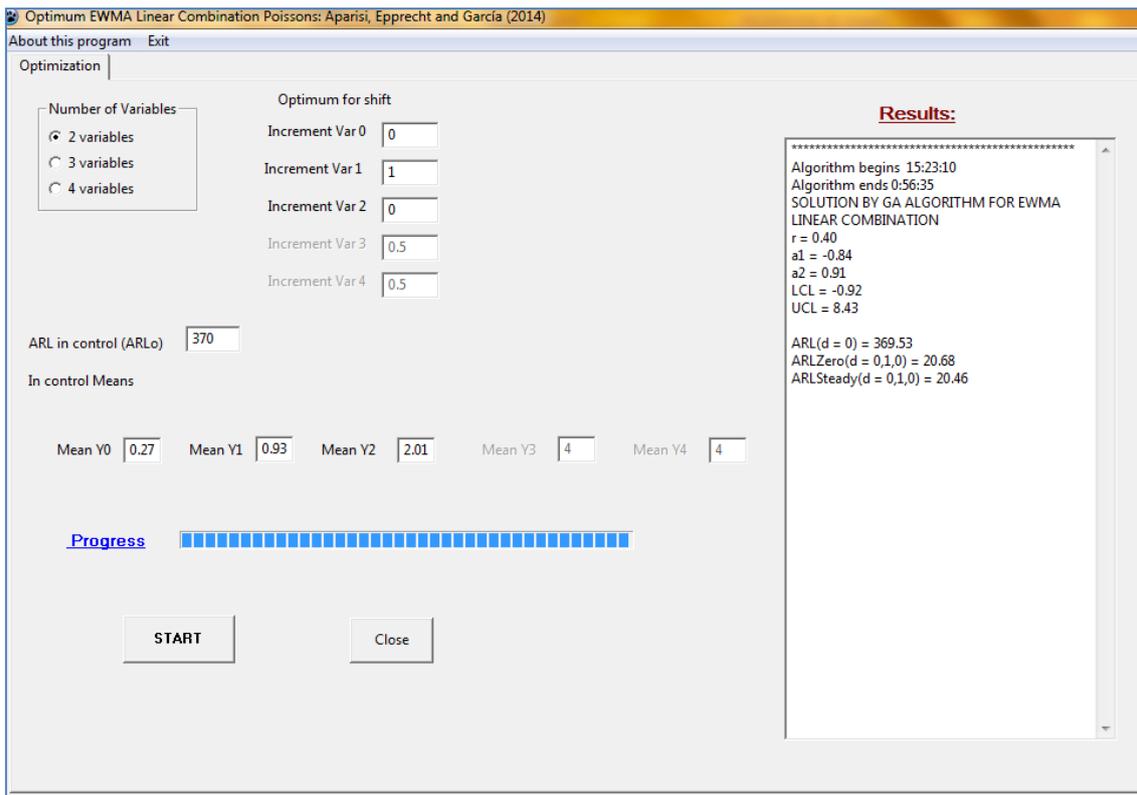


Figura 5.1. El programa resolviendo el ejemplo de aplicación

	Tipo de Gráfico			
	Gráfico LCP		Gráfico EWMA LCP	
Límites de control	LCL = -0.97	UCL = 3.12	LCL = -0.92	UCL = 8.43
ARL (d = 0)	369.72		369.53	
ARL (d = d*)	36.74		20.46	

Tabla 5.3. Límites de Control para cada esquema de control

A continuación, se explicará el uso del gráfico EWMA LCP mediante un ejemplo. La Tabla 5.4 presenta para las primeras diez muestras de 10 metros de hilos de metal: el número de defectos de cada tipo observado (X_1 : número de escamas, X_2 : número de rayaduras) y los valores del estadístico $EWMALCP$ calculado con los coeficientes y constante de suavizado de la solución dada por el programa en la Figura 5.1. La Figura 5.2 muestra el gráfico EWMA LCP con los valores de la Tabla 5.4. El último valor del estadístico ($EWMALCP = -1.20$) cae debajo del límite de control inferior (LCL = -0.92), indicando que se podría considerar que el proceso está fuera de control.

Muestra	X_1	X_2	$EWMALCP$
1	1	4	1.76
2	1	0	0.72
3	0	4	1.89
4	1	1	1.16
5	0	2	1.42
6	0	1	1.22
7	4	3	0.48
8	1	1	0.32
9	1	4	1.31
10	7	1	-1.20

Tabla 5.4. Valores de $EWMALCP$. X_1 es el número de escamas, y X_2 es el número de rayaduras

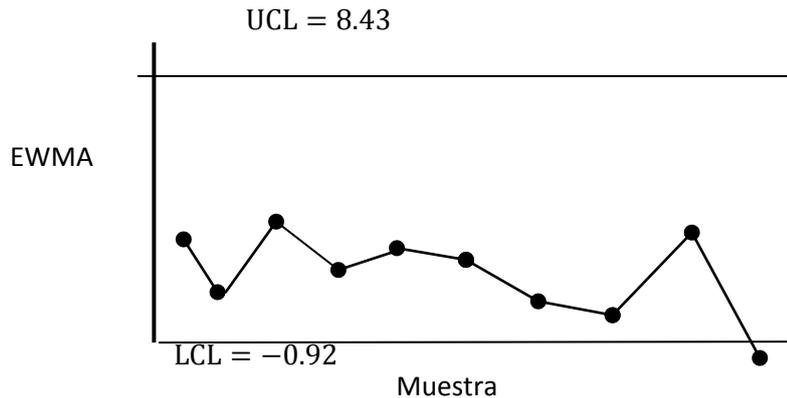


Figura 5.2. Gráfico EWMA LCP del ejemplo

Uno de los coeficientes de la combinación lineal graficada en la Figura 5.2 es negativo, haciendo que el último punto se ubicara por debajo del LCL. Esto no quiere decir que haya una disminución en la tasa de no conformidades, cuando hay coeficientes negativos en la combinación lineal; incluso cambios positivos en algunos de los λ_i 's pueden conducir a valores de LCP (y de EWMA LCP) que estén por debajo de la media o incluso negativo. También, como ya se ha observado en el capítulo anterior, las combinaciones lineales con coeficientes proporcionales son todos equivalentes. En particular, las combinaciones simétricas tienen un rendimiento equivalente. Por ejemplo, la combinación lineal del ejemplo es equivalente a la de LCP ($0.84 X_1 - 0.91 X_2$), lo que resultaría en un gráfico simétrico al de la Figura 5.2 con respecto a la línea $EWMA LCP = 0$.

5.6. Análisis de Sensibilidad

Aunque el gráfico está optimizado para un vector de cambio dado, no se puede predecir los cambios reales que el proceso va a experimentar. Así que una pregunta relevante es: "¿Cómo este gráfico optimizado se convierte en la solución para cambios distintos de aquel para el cual se optimiza?" Con el fin de responder a esta pregunta se tiene que comparar las funciones de ARL de gráficos optimizados para diferentes cambios. Por ejemplo, el gráfico A se ha optimizado para un cambio \mathbf{d}_A^* y el gráfico B es optimizado para el cambio \mathbf{d}_B^* , si comparamos los valores de ARLs de ambos gráficos para cambios

distintos al optimizado, ¿Cuan diferentes serían?

Un análisis exhaustivo de este tipo es obviamente imposible, por lo que se limitará a estudiar unos pocos casos, tratando de cubrir distintas situaciones con respecto a la relación entre los cambios \mathbf{d}_A^* y \mathbf{d}_B^* , y también con respecto a la relación entre las variables observadas.

Debido a que es difícil visualizar en más de dos variables, se considerará un análisis de las diferencias de funciones de ARL para $p = 2$, pues esto ya involucraría tres variables no observables independientes. Se optimizarán gráficos para vectores de cambio que tienen un elemento constante, y diferentes dos de sus elementos. Para cada caso (par de gráficos optimizados para diferentes cambios), se comparará sus valores de ARL para una serie de cambios en el plano definido por los dos elementos de cambio que no son fijos, y se calcularán diferencias porcentuales absolutas que se representarán en gráficos de contorno. La diferencia porcentual absoluta entre los ARLs de los gráficos A y B en cada punto se calcula como:

$$\frac{|ARL(A) - ARL(B)|}{\max(ARL(A), ARL(B))} * 100$$

Consideremos el caso donde, $\lambda_{0,0} = 0.25$, $\lambda_{0,1}=1$, $\lambda_{0,2}=2$, lo que resulta en una correlación de 0.15 entre las variables observables, y optimizar el gráfico ($ARL_0 = 370$), para los siguientes vectores de cambio:

(a) $\mathbf{d}^* = (0.5, 1, 1)$

(b) $\mathbf{d}^* = (0.5, 0.5, 3)$

(c) $\mathbf{d}^* = (0.5, 3.0, 0.5)$

Se hará una comparación del rendimiento de los gráficos optimizados para diferentes incrementos en λ_1 y λ_2 , manteniendo el cambio en λ_0 constante e igual a 0.5.

La Tabla 5.5 compara los ARL de los gráficos EWMA LCP optimizados para los

cambios (a) y (b). La similitud de los resultados es evidente a partir de esta tabla y del gráfico de contorno de las diferencias absolutas porcentuales de los ARL (Figura 5.3): la mayor diferencia es menor que 6%. La similitud de la curva se debe a que sus parámetros optimizados son bastante similares. Esto demuestra una buena robustez del gráfico EWMA LCP, dada que la dirección de los cambios de (a) y (b) no es muy cercana la una de la otra.

		Cambio en la media de Y_2					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
Cambio en la media de Y_1	0.5	21.89 (21.44)	11.43 (11.49)	6.92 (7.06)	4.89 (4.62)	3.47 (3.58)	2.73 (2.82)
	1	13.73 (13.12)	7.96 (7.84)	5.23 (5.24)	3.78 (3.82)	2.92 (2.97)	2.38 (2.43)
	1.5	9.28 (8.76)	5.89 (5.72)	4.14 (4.09)	3.14 (3.14)	2.53 (2.55)	2.12 (2.14)
	2	6.68 (6.27)	4.57 (4.41)	3.49 (3.34)	2.69 (2.67)	2.23 (2.23)	1.91 (1.92)
	2.5	5.07 (4.76)	3.69 (3.55)	2.87 (2.81)	2.35 (2.32)	2.00 (1.99)	1.75 (1.75)
	3	4.02 (3.78)	3.08 (2.96)	2.48 (2.42)	2.09 (2.06)	1.82 (1.80)	1.62 (1.62)

Tabla 5.5. Valores de ARL de los gráficos optimizados para los cambios (a) and (b). Los valores en paréntesis corresponden al gráfico optimizado para (a)

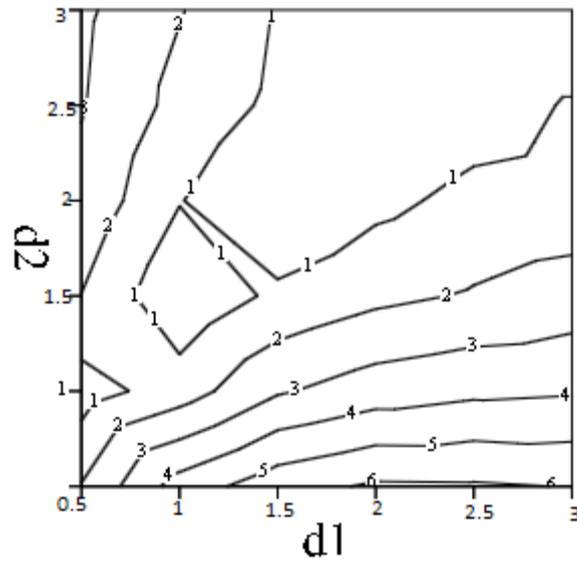


Figura 5.3. Gráfico de contorno de las diferencias porcentuales absolutas entre los ARLs de los gráficos optimizados para los cambios (a) y (b)

La comparación los ARL de los gráficos EWMA LCP optimizados para los cambios (b) y (c) se muestran en la Tabla 5.6. Tenga en cuenta que estos cambios son simétricos con respecto a los elementos d_1 y d_2 . Estas direcciones de desplazamiento están bastante distanciadas la una de la otra y la mayor diferencia absoluta porcentual entre los valores de ARLs (ver Figura 5.4) es de alrededor de 35%. Es interesante observar que la curva de nivel presenta cierta simetría con respecto a la línea $d_1 = d_2$. Esta simetría no es completa porque a pesar que los cambios d_1 y d_2 son simétricos, los valores de las medias de $\lambda_{0,1}$ y $\lambda_{0,2}$, no son los mismos.

		Cambios en la media de Y_2					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
Cambios en la media de Y_1	0.5	21.89 (18.18)	11.43 (12.43)	6.92 (8.94)	4.69 (6.7)	3.47 (5.21)	2.73 (4.16)
	1	13.73 (9.28)	7.96 (7.07)	5.23 (5.58)	3.78 (4.54)	2.92 (3.78)	2.38 (3.20)
	1.5	9.28 (5.80)	5.89 (4.75)	4.14 (3.98)	3.14 (3.41)	2.53 (2.96)	2.12 (2.60)
	2	6.68 (4.13)	4.57 (3.54)	3.4 (3.09)	2.69 (2.74)	2.23 (2.45)	1.91 (2.22)
	2.5	5.07 (3.19)	3.69 (2.83)	2.87 (2.54)	2.35 (2.31)	2.00 (2.11)	1.75 (1.94)
	3	4.02 (2.62)	3.08 (2.37)	2.48 (2.17)	2.09 (2.00)	1.82 (1.86)	1.62 (1.74)

Tabla 5.6. Valores de ARL de los gráficos optimizados para los cambios (b) and (c). Los valores en paréntesis corresponden al gráfico optimizado para (c)

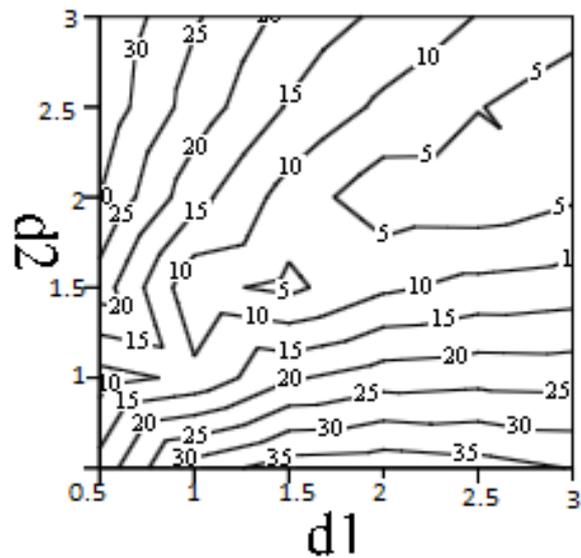


Figura 5.4. Gráfico de contorno de las diferencias porcentuales absolutas entre los ARLs de los gráficos optimizados para los cambios (b) y (c)

Consideremos el caso $\lambda_{0,0} = \lambda_{0,1} = \lambda_{0,2} = 1.45$, lo que implica una correlación de 0.5 entre las variables observables, y optimizar el gráfico ($ARL_0 = 500$) para los siguientes cambios:

(d) $\mathbf{d}^* = (0.5, 3.0, 0.5)$

(e) $\mathbf{d}^* = (3.0, 0.5, 0.5)$

En este análisis el cambio que se mantendrá constante es d_2 , variando d_0 y d_1 . Los resultados se muestran en la Tabla 5.7 y la Figura 5.5:

		Cambios en la media de Y_1					
		0.5	1	1.5	2	2.5	3
Cambios en la media de Y_0	0.5	30.63 (42.91)	19.08 (30.81)	12.66 (22.3)	8.87 (16.19)	6.52 (11.78)	5 (8.64)
	1	12.58 (17.75)	9 (13.76)	6.73 (10.79)	5.24 (8.54)	4.21 (6.79)	3.48 (5.44)
	1.5	6.82 (9.23)	5.35 (7.56)	4.33 (6.26)	3.6 (5.24)	3.06 (4.41)	2.65 (3.74)
	2	4.41 (5.63)	3.68 (4.8)	3.14 (4.14)	2.73 (3.6)	2.41 (3.16)	2.16 (2.78)
	2.5	3.2 (3.85)	2.79 (3.39)	2.46 (3.01)	2.21 (2.7)	2 (2.43)	1.84 (2.21)
	3	2.51 (2.87)	2.25 (2.59)	2.04 (2.36)	1.87 (2.16)	1.73 (1.99)	1.62 (1.84)

Tabla 5.7 Valores de ARL de los gráficos optimizados para los cambios (d) and (e). Los valores en paréntesis corresponden al gráfico optimizado para (e)

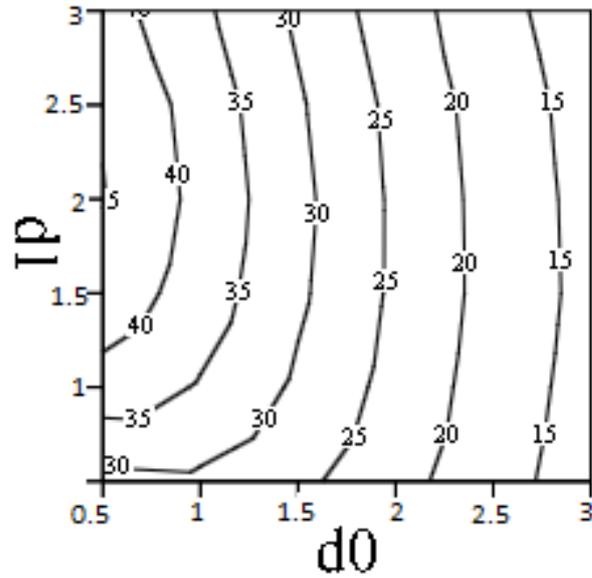


Figura 5.5. Gráfico de contorno de las diferencias porcentuales absolutas entre los ARLs de los gráficos optimizados para los cambios (d) y (e)

Es muy notable en la Figura 5.5 que el rendimiento del gráfico es mucho más sensible en d_0 , que en d_1 . Es entendible puesto que como d_0 representa el cambio en λ_0 , que es la media de Y_0 , variable que tiene mayor peso (suma de los pesos de las variables no observables) que las demás Y_i s. Así pues para pequeños cambios en λ_0 , el gráfico optimizado para el cambio más pequeño, tiene ARLs mucho más pequeños que el gráfico optimizado para el cambio más grande (véase la Tabla 5.7). Para cambios más grandes en λ_0 , ambos gráficos tienen un buen rendimiento y las diferencias porcentuales de rendimiento decrecen.

5.7. Comparación de Rendimientos

En esta sección se compara los rendimientos del gráfico EWMA LCP con los del gráfico LCP.

El programa presentado en la Sección 5.5 se utilizó para optimizar los parámetros de los gráficos EWMA LCP, mientras que los diseños de los gráficos LCP se optimizaron utilizando el programa presentado en el capítulo anterior.

Se consideraron varios casos, con 2 y 3 variables observables. Los casos se agruparon en 6 escenarios, 4 de ellos con 2 variables ($p=2$) y 2 de ellos con 3 variables ($p=3$). Cada escenario corresponde a un vector de medias bajo control $[\lambda_{0,0} \ \lambda_{0,1} \ \lambda_{0,2}]$ (lo que resulta en diferentes niveles de correlación entre las variables observables) y a un determinado valor de ARL_0 . Las Tablas 5.8 y 5.9 presentan los escenarios para $p=2$ y $p=3$, respectivamente. Estos escenarios han sido considerados también en los capítulos 3 y 4. Para cada escenario, los gráficos LCP y EWMA LCP fueron optimizados para varios vectores de cambio. Los ARLs fuera de control para el gráfico LCP y ARLs fuera de control en steady state para el Gráfico EWMA LCP se muestran en las Tablas 5.10 y 5.12. Las Tablas 5.11 y 5.13 muestran los parámetros óptimos de los gráficos que alcanzan esos ARLs.

Se desarrolló un diseño de experimentos considerando como factor el número de evaluaciones con tres niveles: 7000, 10000, y 15000. Las diferencias no fueron significativas, así que se adoptó 7000 evaluaciones para las optimizaciones.

	$\lambda_{0,0}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{2,0}$	ρ	ARL_0
Escenario A	0.25	1	2	0.15	370
Escenario B	0.5	1	1	0.33	545
Escenario C	1.45	1.45	1.45	0.50	600
Escenario D	3.94	1.32	1.32	0.75	500

Tabla 5.8 – Escenarios considerados con $p = 2$

	$\lambda_{0,0}$	$\lambda_{1,0}$	$\lambda_{2,0}$	$\lambda_{3,0}$	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{23}	ARL_0
Escenario E	0.5	1	1	1	0.33	0.33	0.33	370
Escenario F	0.7	0.7	0.7	0.7	0.50	0.50	0.50	570

Tabla 5.9 – Escenarios considerados con $p = 3$

La Tabla 5.10 muestra los vectores de cambio considerados y los valores de ARL para los gráficos optimizados en el caso con dos variables ($p = 2$). También muestra el comportamiento de las correlaciones en función de los cambios. La primera línea de la tabla corresponde al caso del proceso bajo control, esto es cuando el vector de cambios es $[0 \ 0 \ 0]$, por lo que los valores de ARL en esta línea son los ARL bajo control. Los mejores valores de ARL están en negrita, es decir el ARL más bajo para ese cambio entre los dos gráficos analizados. Los resultados muestran claramente la superioridad del gráfico EWMA LCP. La mejora en el ARL puede superar el 50% en muchos casos. Por ejemplo: en el escenario A, donde se desea detectar un aumento de 0.25 desviaciones estándar en las medias de las variables Y_1 y Y_2 , y la media de la variable Y_0 permanece sin cambios, la reducción en el ARL fuera de control con respecto al gráfico LCP es de 71.49%.

Para grandes cambios (por ejemplo, de más de 2 desviaciones estándar en las medias de dos variables), los dos gráficos muestran casi los mismos resultados. Esto es razonable ya que grandes cambios se detectan rápidamente por cualquier gráfico.

Las Tablas 5.11 (a) y 5.11 (b) muestran los valores de los parámetros óptimos para cada caso. Se puede observar que los valores de r tienden a ser más pequeños cuando un cambio a ser detectado es pequeño, esto es usual en los gráficos EWMA.

De manera similar a la Tabla 5.10, la Tabla 5.12 muestra los valores de los cambios, los valores de ARL de los gráficos óptimos y las nuevas correlaciones entre las variables observables, ahora para los casos con tres variables ($p = 3$). Los valores de ARL en negrita representan los mejores (el más bajo) ARLs para ese cambio y caso. El gráfico EWMA LCP superó el gráfico LCP en todos los casos, sin excepción. La mejora en el

ARL sigue siendo significativa, que van desde 18% a 77%, según el caso. La Tabla 5.13 muestra los parámetros de los gráficos óptimos que logran los *ARLs* de la Tabla 5.12.

Cambio en medias			Escenario A (ARL(d = d*))			Escenario B (ARL(d = d*))			Escenario C (ARL(d = d*))			Escenario D (ARL(d = d*))		
d ₀	d ₁	d ₂	ρ	Gráfico LCP	Gráfico EWMA LCP Steady (% Mejora)	P	Gráfico LCP	Gráfico EWMA LCP Steady (% Mejora)	ρ	Gráfico LCP	Gráfico EWMA LCP Steady (% Mejora)	ρ	Gráfico LCP	Gráfico EWMA LCP Steady (% Mejora)
0	0	0	0.15	370.00	370.00	0.33	545.00	545.00	0.50	600.00	600.00	0.75	500.00	500.00
0	0.25	0	0.14	161.02	90.3 [43.92]	0.31	213.90	119.58 [44.09]	0.48	268.19	103.63 [61]	0.73	214.68	98.33 [54.2]
0	0	0.25	0.14	156.10	59.33 [61.99]	0.31	213.89	103.69 [51.52]	0.48	247.97	150.93 [39]	0.73	214.73	104.51 [51.33]
0.25	0	0	0.21	180.19	113.62 [36.95]	0.40	246.25	132.66 [46.13]	0.55	264.15	95.82 [64]	0.77	217.69	93.13 [57.22]
0	0.5	0	0.13	79.71	43.13 [45.89]	0.29	102.28	41.52 [59.41]	0.45	119.68	61.14 [49]	0.71	109.11	58.78 [46.13]
0	0.25	0.25	0.13	143.50	40.92 [71.49]	0.29	249.24	79.48 [68.11]	0.45	290.78	89.67 [69]	0.71	256.47	194.32 [24.23]
0	0	0.5	0.13	76.78	30.42 [60.38]	0.29	113.42	40.28 [64.48]	0.45	138.05	70.75 [49]	0.71	112.39	69.2 [38.43]
0.25	0.25	0.25	0.18	91.15	32.46 [64.39]	0.35	130.20	45.24 [65.25]	0.50	154.16	35.93 [77]	0.73	154.08	73.17 [52.51]
0.25	0.5	0	0.18	70.99	20.31 [71.38]	0.35	94.44	32.33 [65.77]	0.50	114.93	28.24 [75]	0.73	87.17	52.63 [39.63]
0	0.75	0	0.12	45.24	23.83 [47.32]	0.27	56.09	25.53 [54.49]	0.44	65.34	37.99 [42]	0.69	62.30	52.64 [15.5]
0.25	0	0.75	0.17	38.90	12.92 [66.8]	0.34	52.36	36.67 [29.97]	0.48	74.53	29.9 [60]	0.72	70.49	31.12 [55.85]
0.25	0.5	0.75	0.15	31.36	13.72 [56.26]	0.29	53.39	17.92 [66.43]	0.44	72.29	19.09 [74]	0.69	87.26	22.06 [74.72]
0.5	0	0	0.26	116.47	55.98 [51.94]	0.46	127.32	83.57 [34.36]	0.59	132.70	54.53 [59]	0.79	107.14	27.75 [74.1]
0.5	0.5	0	0.22	46.21	31.23 [32.42]	0.41	65.79	23.13 [64.84]	0.54	65.88	20.54 [69]	0.75	67.61	29.52 [56.34]
0.5	0	0.5	0.23	49.09	16.89 [65.6]	0.41	65.83	19.07 [71.04]	0.54	65.88	42.62 [35]	0.75	68.89	19.52 [71.66]
0.5	0.5	0.5	0.2	32.35	12.08 [62.67]	0.36	44.79	20.41 [54.43]	0.50	53.58	23.11 [57]	0.72	58.93	19.7 [66.57]
0.5	0.5	1	0.18	16.86	12 [28.83]	0.33	26.29	9.64 [63.35]	0.47	30.23	10.22 [66]	0.69	42.11	12.66 [69.94]
0	1	0	0.11	28.16	14.76 [47.59]	0.26	34.02	27 [20.63]	0.42	49.11	19.91 [59]	0.68	38.79	20.01 [48.43]
0	0	1	0.12	25.72	13.33 [48.19]	0.26	34.01	29.44 [13.45]	0.42	49.08	15.11 [69]	0.68	58.31	23.93 [58.96]
1	0	0	0.34	54.32	27.42 [49.53]	0.55	46.80	27.32 [41.63]	0.65	44.83	13.21 [71]	0.82	34.15	10.55 [69.11]
1	1	0	0.27	13.92	10.67 [23.35]	0.45	17.92	7.25 [59.57]	0.57	20.07	11.03 [45]	0.76	19.32	8.36 [56.72]
1	0	1	0.28	13.97	14.55 [-4.15]	0.45	17.92	7.98 [55.47]	0.57	20.07	7.77 [61]	0.76	17.12	7.45 [56.49]
1	1	1	0.22	8.98	4.46 [50.32]	0.38	10.64	6.11 [42.58]	0.50	11.99	5.47 [54]	0.71	14.03	8.88 [36.71]
1	1.5	0.5	0.22	8.38	6.44 [23.2]	0.38	9.50	4.59 [51.69]	0.50	11.17	7.47 [33]	0.71	10.06	7.95 [20.97]
1.5	1.5	1.5	0.24	3.86	2.66 [30.98]	0.38	4.37	2.96 [32.2]	0.50	4.60	2.99 [35]	0.69	5.30	3.22 [39.19]
0	2	0	0.09	7.62	4.5 [40.94]	0.22	8.62	6.45 [25.17]	0.37	12.54	5.79 [54]	0.62	16.97	6.79 [59.97]
2	0	0	0.46	17.98	8.77 [51.21]	0.66	12.81	8.2 [35.96]	0.73	10.59	5.1 [52]	0.86	7.41	4.06 [45.2]
2	0	2	0.338	3.42	2.96 [13.6]	0.51	4.14	3.72 [10.27]	0.60	4.10	3.21 [22]	0.77	3.85	2.72 [29.32]
2	2	2	0.25	2.26	1.95 [13.67]	0.39	5.20	2.45 [52.9]	0.50	2.48	2.32 [6]	0.69	2.76	2.23 [19.28]
3	3	3	0.00	1.31	1.28 [2.14]	0.40	2.42	1.38 [42.85]	0.50	1.33	1.35 [-1]	0.67	1.39	1.34 [3.38]
4	4	4	0.27	1.08	1.07 [1.39]	0.40	1.58	1.27 [19.56]	0.50	1.07	1.16 [-8]	0.67	1.09	1.2 [-10.18]
5	5	5	0.27	1.02	1.05 [-3.04]	0.40	1.29	1.04 [19.69]	0.50	1.01	1.03 [-2]	0.66	1.02	1.02 [0.49]
6	6	6	0.27	1.00	1 [-0.3]	0.40	1.13	1.01 [10.88]	0.50	1.12	1 [10]	0.66	1.00	1 [-0.2]
7	7	7	0.28	1.00	1 [0]	0.41	1.06	1 [5.47]	0.50	1.00	1.01 [0]	0.66	1.00	1 [0]
8	8	8	0.28	1.12	1 [10.71]	0.41	1.03	1 [2.62]	0.50	1.00	1 [0]	0.65	1.00	1 [0]
9	9	9	0.28	1.00	1 [0]	0.41	1.01	1 [0.99]	0.50	1.00	1 [0]	0.65	1.00	1 [0]

Tabla 5.10. Comparación de rendimiento, dos variables observables variables ($p = 2$)

Cambio en medias			Escenario A (ARL(d = d*))						Escenario B (ARL(d = d*))					
d ₀	d ₁	d ₂	r	a1	a2	LCL	UCL	ARL0	r	a1	a2	LCL	UCL	ARL0
0	0	0												
0	0.25	0	0.12	-0.93	0.80	-0.27	10.44	369.97	0.16	0.99	0.07	-0.98	2.70	543.17
0	0	0.25	0.08	-0.15	0.70	-0.21	1.91	370.05	0.04	0.46	0.97	-1.15	2.64	548.93
0.25	0	0	0.09	0.90	0.50	-0.45	2.99	377.09	0.17	0.91	0.57	-1.06	3.61	546.18
0	0.5	0	0.16	-0.84	0.82	-0.26	3.75	369.99	0.04	-0.68	0.85	-0.09	2.95	544.70
0	0.25	0.25	0.04	0.97	0.65	-2.10	3.15	370.18	0.10	0.84	0.93	-0.41	3.79	544.98
0	0	0.5	0.22	-0.09	0.89	-1.25	3.25	371.25	0.05	0.34	0.99	-0.30	2.55	545.12
0.25	0.25	0.25	0.11	0.62	0.15	-0.92	1.60	370.10	0.19	0.27	0.54	-0.68	2.05	550.87
0.25	0.5	0	0.11	0.49	0.01	-0.08	0.99	373.18	0.09	0.82	0.76	-1.65	3.31	544.91
0	0.75	0	0.16	-0.96	0.93	-0.31	3.42	369.88	0.21	0.61	0.05	-0.88	1.82	547.94
0.25	0	0.75	0.09	0.37	0.89	-1.64	3.26	370.01	0.66	0.13	0.89	-0.51	4.50	545.24
0.25	0.5	0.75	0.4	0.85	0.93	-1.98	5.99	369.75	0.19	0.83	0.37	-1.05	3.05	551.92
0.5	0	0	0.13	0.97	0.58	-2.27	3.58	372.86	0.49	0.83	0.64	-1.33	5.16	545.11
0.5	0.5	0	0.31	0.90	0.90	-2.16	5.50	370.25	0.25	0.90	0.60	-0.56	4.09	546.21
0.5	0	0.5	0.16	0.13	0.90	-0.33	3.32	370.01	0.20	-0.05	0.97	-1.16	2.60	541.80
0.5	0.5	0.5	0.24	0.69	0.68	-0.45	3.88	370.01	0.29	0.80	0.07	-0.76	2.68	544.20
0.5	0.5	1	0.72	0.26	0.64	-0.05	4.40	370.00	0.31	0.57	0.85	-1.10	4.16	543.92
0	1	0	0.15	-0.50	0.44	-0.21	12.90	370.28	0.21	0.47	0.32	-0.47	2.04	545.62
0	0	1	0.4	0.18	0.91	-2.24	4.50	370.61	0.39	0.56	-0.27	-0.36	5.46	545.62
1	0	0	0.26	0.73	0.84	-2.76	4.64	370.13	0.49	0.60	0.99	-0.61	5.62	544.90
1	1	0	0.38	0.99	1.00	-0.54	6.51	370.02	0.15	0.87	0.63	-1.29	3.53	544.95
1	0	1	0.4	0.38	0.98	-1.57	5.19	370.08	0.17	0.78	0.73	-1.30	3.66	545.51
1	1	1	0.31	0.68	0.44	-0.02	3.26	370.00	0.48	0.87	0.37	-0.85	4.41	545.21
1	1.5	0.5	0.65	0.87	0.92	-2.08	7.33	372.79	0.34	0.84	0.22	-1.21	3.34	544.82
1.5	1.5	1.5	0.38	0.68	0.64	-0.65	4.28	370.06	0.32	0.91	0.85	-1.09	5.19	545.01
0	2	0	0.37	0.91	-0.06	-0.53	2.57	370.30	0.22	0.88	0.30	-0.23	3.16	544.96
2	0	0	0.18	0.81	0.77	-1.74	4.14	370.04	0.57	0.85	0.58	-2.13	5.41	545.14
2	0	2	0.74	0.51	0.79	-0.47	6.00	370.05	0.94	0.43	0.77	-0.24	6.11	545.03
2	2	2	0.72	0.79	0.95	-1.20	7.62	369.99	0.17	0.46	0.93	-1.36	3.41	545.02
3	3	3	0.57	0.99	0.97	-1.88	7.48	370.04	0.92	0.42	0.67	-0.88	5.45	545.05
4	4	4	0.89	0.74	0.60	-2.17	6.29	370.00	0.22	0.59	0.72	-0.71	3.42	545.00
5	5	5	0.33	0.66	0.93	-0.10	5.20	369.99	0.83	0.32	0.74	-0.18	5.05	545.02
6	6	6	0.88	0.86	0.71	-0.17	7.33	370.00	0.77	0.54	0.83	-1.26	6.11	545.02
7	7	7	0.83	0.97	0.92	-1.00	8.66	370.00	0.54	0.96	0.86	-1.54	6.67	544.99
8	8	8	0.84	0.77	0.57	-0.94	6.04	369.99	0.88	-0.05	0.97	-0.62	5.24	544.96
9	9	9	0.83	0.58	0.81	-0.51	6.72	370.00	0.89	0.92	0.60	-0.14	7.42	545.04

Tabla 5.11(a) – Parámetros Óptimos, dos variables observables ($\rho = 2$) – Escenarios A y B

Cambio en medias			Escenario C (ARL(d = d*))							Escenario D (ARL(d = d*))						
d ₀	d ₁	d ₂	r	a1	a2	LCL	UCL	ARL0	ARLZero(d)	r	a1	a2	LCL	UCL	ARL0	ARLZero(d)
0	0	0														
0	0.25	0	0.04	0.95	0.09	-1.09	3.59	588.66	105.49	0.08	-0.76	0.85	-0.19	13.05	500.02	100.69
0	0	0.25	0.16	0.68	-0.48	-0.22	6.55	599.87	152.91	0.11	0.62	-0.56	-0.28	12.21	500.60	106.67
0.25	0	0	0.08	0.79	0.51	-0.78	4.83	600.00	97.34	0.13	0.91	0.81	-1.92	11.80	571.97	94.44
0	0.5	0	0.21	-0.62	0.84	-0.55	3.77	600.06	62.03	0.24	-0.48	0.62	-0.20	16.26	515.88	59.46
0	0.25	0.25	0.05	0.59	0.47	-2.37	3.70	611.70	91.43	0.20	0.86	0.17	-2.66	7.64	499.74	195.87
0	0	0.5	0.41	-0.30	0.85	-1.00	3.74	603.11	71.11	0.09	0.01	0.98	-1.05	6.50	506.06	70.37
0.25	0.25	0.25	0.07	0.65	0.95	-2.56	5.84	631.55	36.56	0.35	0.87	0.88	-9.19	14.58	500.25	73.66
0.25	0.5	0	-0.09	0.88	0.33	-3.27	4.61	608.42	28.58	0.33	0.91	0.17	-5.44	9.00	532.43	53.02
0	0.75	0	0.27	-0.37	0.56	-0.34	14.96	601.61	38.59	0.37	0.87	-0.17	-3.03	6.25	500.22	52.99
0.25	0	0.75	0.18	0.61	0.71	-2.83	5.68	601.48	30.34	0.11	0.81	0.90	-3.54	11.39	499.99	31.69
0.25	0.5	0.75	0.17	0.90	0.56	-3.04	6.22	599.96	19.35	0.16	0.36	0.82	-2.90	8.35	500.16	22.44
0.5	0	0	0.27	0.96	0.94	-5.08	9.04	609.27	55.04	0.05	0.09	0.38	-2.28	2.87	517.15	27.80
0.5	0.5	0	0.04	0.42	0.48	-0.43	3.06	599.74	20.43	0.34	0.51	0.46	-3.76	8.02	501.57	29.82
0.5	0	0.5	0.65	0.26	0.99	-0.28	8.36	600.93	42.70	0.09	0.78	0.70	-7.64	9.60	501.02	19.87
0.5	0.5	0.5	0.42	0.36	0.98	-1.17	7.42	600.86	23.26	0.31	0.75	0.95	-5.49	13.74	500.59	19.92
0.5	0.5	1	0.26	0.29	0.46	-0.77	3.54	599.78	10.34	0.26	0.61	0.89	-1.55	11.65	500.14	12.82
0	1	0	0.20	-0.64	0.90	-0.46	26.59	599.51	20.15	0.24	-0.63	0.85	-0.11	10.40	500.49	20.38
0	0	1	0.04	-0.18	0.87	-1.57	2.46	597.99	14.95	0.44	0.76	-0.57	-0.68	41.65	499.87	24.11
1	0	0	0.11	0.38	0.39	-0.79	3.01	614.55	13.36	0.17	0.74	0.86	-4.38	11.41	494.64	10.68
1	1	0	0.64	0.59	0.35	-1.80	6.09	602.00	11.05	0.53	0.93	0.22	-3.64	10.97	499.33	8.43
1	0	1	0.41	0.42	0.91	-2.08	7.26	600.16	7.85	0.11	0.69	0.72	-4.71	9.39	500.03	7.47
1	1	1	0.38	0.71	0.89	-1.15	8.43	600.01	5.53	0.69	0.83	0.27	-3.89	11.56	501.08	8.92
1	1.5	0.5	0.81	0.79	0.24	-2.12	7.67	600.41	7.45	0.64	0.90	0.92	-3.99	18.37	500.56	7.97
1.5	1.5	1.5	0.37	0.70	0.72	-1.56	7.41	600.01	3.02	0.31	0.44	0.73	-2.31	9.47	500.01	3.26
0	2	0	0.28	0.90	-0.13	-0.89	4.09	607.61	5.87	0.28	-0.56	0.78	-0.12	5.60	500.36	6.92
2	0	0	0.24	0.96	1.00	-0.46	9.03	600.04	5.18	0.36	0.82	0.78	-1.87	13.43	499.57	4.10
2	0	2	0.75	0.68	0.96	-0.22	11.43	600.02	3.20	0.77	0.15	0.90	-0.92	11.68	500.03	2.75
2	2	2	0.93	0.91	0.84	-0.83	13.62	600.00	2.34	0.65	0.81	0.85	-7.04	16.87	499.99	2.22
3	3	3	0.55	0.61	0.78	-2.31	8.39	600.17	1.34	0.76	0.77	0.62	-3.35	15.10	500.40	1.34
4	4	4	0.36	0.43	0.60	-2.10	5.34	600.31	1.14	0.34	0.89	0.19	-1.44	9.03	500.02	1.18
5	5	5	0.72	0.88	0.21	-2.13	7.69	600.03	1.03	0.97	0.87	0.50	-6.08	16.89	500.00	1.02
6	6	6	0.86	0.95	0.76	-0.45	12.81	600.00	1.00	0.94	0.55	0.97	-3.33	18.39	500.01	1.00
7	7	7	0.68	-0.12	0.98	-1.42	6.48	600.16	1.01	0.86	0.73	0.51	-0.06	14.29	500.01	1.00
8	8	8	0.61	0.64	0.59	-2.42	7.75	600.09	1.00	0.59	0.77	0.53	-2.17	12.75	500.02	1.00
9	9	9	0.45	0.36	0.62	-1.69	5.50	600.16	1.00	0.47	0.77	0.85	-3.05	14.69	499.98	1.00

Tabla 5.11(b) – Parámetros Óptimos, dos variables observables ($p = 2$) – Escenarios C y D

Cambio en medias				Escenario E (ARL($d = d^*$))					Escenario F (ARL($d = d^*$))				
d_0	d_1	d_2	d_3	Gráfico LCP	Gráfico EWMA LCP	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{23}	Gráfico LCP	Gráfico EWMA LCP	ρ_{12}	ρ_{13}	ρ_{23}
0	0	0	0	370.00	370.00	0.33	0.33	0.33	570.00	570.00	0.50	0.50	0.50
0	0.25	0	0	161.54	90.89 (44%)	0.31	0.31	0.33	222.63	129.22 (42%)	0.47	0.47	0.50
0	0	0.25	0	163.04	124.21 (24%)	0.31	0.33	0.31	215.06	96.71 (55%)	0.47	0.50	0.47
0	0	0	0.25	162.59	118.03 (27%)	0.33	0.31	0.31	227.73	126.71 (44%)	0.50	0.47	0.47
0.25	0	0	0	157.12	75.73 (52%)	0.40	0.40	0.40	222.03	106.28 (52%)	0.56	0.56	0.56
0	0.25	0.25	0	129.72	96.89 (25%)	0.29	0.31	0.31	170.97	74.56 (56%)	0.44	0.47	0.47
0.25	0.25	0	0	109.15	38.85 (64%)	0.38	0.38	0.40	165.56	90.07 (46%)	0.53	0.53	0.56
0.25	0	0.25	0.25	93.43	35.56 (62%)	0.38	0.38	0.35	140.95	47.90 (66%)	0.53	0.53	0.50
0.25	0.25	0.25	0.25	88.49	32.18 (64%)	0.35	0.35	0.35	140.08	32.74 (77%)	0.50	0.50	0.50
0	0.5	0	0	76.58	53.68 (30%)	0.29	0.29	0.33	111.24	61.71 (45%)	0.44	0.44	0.50
0	0	0.5	0.5	76.55	31.31 (59%)	0.29	0.29	0.25	75.52	61.57 (18%)	0.44	0.44	0.38
0.5	0	0	0	81.21	58.70 (28%)	0.46	0.46	0.46	106.59	35.19 (67%)	0.62	0.62	0.62
0.5	0.5	0	0	44.95	17.94 (60%)	0.41	0.41	0.46	71.55	22.38 (69%)	0.55	0.55	0.62
0.5	0	0.5	0.5	33.66	17.17 (49%)	0.41	0.41	0.36	52.47	17.67 (66%)	0.55	0.55	0.50
0.5	0.5	0.5	0.5	31.32	10.45 (67%)	0.36	0.36	0.36	49.25	18.03 (63%)	0.50	0.50	0.50
0.75	0	0	0	47.20	25.00 (47%)	0.51	0.51	0.51	58.79	25.78 (56%)	0.65	0.65	0.65
0	0.75	0	0	49.22	26.07 (47%)	0.27	0.27	0.33	63.89	36.11 (43%)	0.42	0.42	0.50
0	0	0.75	0.75	30.12	26.38 (12%)	0.27	0.27	0.22	34.76	29.44 (15%)	0.42	0.42	0.35
0.75	0.75	0	0	22.43	17.45 (22%)	0.43	0.43	0.51	30.85	13.80 (55%)	0.57	0.57	0.65
0.75	0	0	0.75	22.87	15.56 (32%)	0.51	0.43	0.43	31.87	14.75 (54%)	0.65	0.57	0.57
0.75	0.75	0.75	0.75	14.18	9.47 (33%)	0.37	0.37	0.37	21.98	13.85 (37%)	0.50	0.50	0.50
0	1	0	0	30.44	15.41 (49%)	0.26	0.26	0.33	39.19	30.27 (23%)	0.40	0.40	0.50
0	0	1	0	30.36	17.73 (42%)	0.26	0.33	0.26	39.03	17.66 (55%)	0.40	0.50	0.40
0	0	1	1	16.73	10.16 (39%)	0.26	0.26	0.20	25.64	18.32 (29%)	0.40	0.40	0.31
1	0	0	0	30.63	18.44 (40%)	0.55	0.55	0.55	35.93	14.67 (59%)	0.69	0.69	0.69
1	1	0	0	14.26	7.83 (45%)	0.45	0.45	0.55	17.33	10.43 (40%)	0.59	0.59	0.69
1	0	0	1	13.15	9.39 (29%)	0.55	0.45	0.45	17.25	7.16 (58%)	0.69	0.59	0.59
1	1	1	0	8.73	5.36 (39%)	0.38	0.45	0.45	11.80	6.03 (49%)	0.50	0.59	0.59
1	1	1	1	7.75	5.32 (31%)	0.38	0.38	0.38	11.66	5.37 (54%)	0.50	0.50	0.50
1	0	2	0	5.55	5.14 (7%)	0.40	0.55	0.40	8.48	6.02 (29%)	0.52	0.69	0.52
1	2	1	0.5	5.34	3.52 (34%)	0.33	0.36	0.41	7.54	5.60 (26%)	0.44	0.48	0.54
1.5	1.5	1.5	1.5	3.34	3.07 (8%)	0.38	0.38	0.38	5.03	3.05 (39%)	0.50	0.50	0.50
2	0	0	0	9.04	5.84 (35%)	0.66	0.66	0.66	9.29	5.07 (45%)	0.77	0.77	0.77
2	2	0	0	3.67	3.39 (8%)	0.51	0.51	0.66	4.70	3.28 (30%)	0.62	0.62	0.77
2	0	2	2	2.60	2.16 (17%)	0.51	0.51	0.39	2.97	2.29 (23%)	0.62	0.62	0.50
2	2	2	2	2.05	1.83 (11%)	0.39	0.39	0.39	2.60	2.17 (17%)	0.50	0.50	0.50
3	3	3	3	1.23	1.21 (1%)	0.40	0.40	0.40	1.40	1.47 (-5%)	0.50	0.50	0.50
4	4	4	4	1.05	1.06 (-1%)	0.40	0.40	0.40	1.11	1.11 (0%)	0.50	0.50	0.50
5	5	5	5	1.01	1.02 (-1%)	0.40	0.40	0.40	1.02	1.02 (0%)	0.50	0.50	0.50
6	6	6	6	1.00	1.00 (0%)	0.40	0.40	0.40	1.01	1.01 (0%)	0.50	0.50	0.50

7	7	7	7	1.01	1.00 (0%)	0.41	0.41	0.41	1.00	1.00 (0%)	0.50	0.50	0.50
8	8	8	8	1.01	1.00 (0%)	0.41	0.41	0.41	1.00	1.00 (0%)	0.50	0.50	0.50
9	9	9	9	1.00	1.00 (0%)	0.41	0.41	0.41	1.00	1.00 (0%)	0.50	0.50	0.50

Tabla 5.12: Comparación de rendimiento, tres variables observables variables ($\rho = 3$)

Cambio en medias				Escenario E						Escenario F					
d ₀	d ₁	d ₂	d ₃	r	a1	a2	a3	LCL	UCL	r	a1	a2	a3	LCL	UCL
0	0	0	0												
0	0.25	0	0	0.16	-0.85	0.63	0.60	-0.38	7.79	0.19	-0.86	0.74	0.48	-0.48	16.75
0	0	0.25	0	0.24	0.95	-0.55	0.11	-0.28	18.32	0.08	0.63	-0.97	0.62	-0.20	7.21
0	0	0	0.25	0.32	0.79	0.42	-0.70	-0.61	13.57	0.16	0.71	0.33	-0.70	-0.27	23.02
0.25	0	0	0	0.08	0.45	0.90	0.60	-0.16	3.85	0.16	0.80	0.45	0.71	-1.47	4.47
0	0.25	0.25	0	0.19	0.31	0.89	0.26	-0.56	3.53	0.04	0.85	0.91	-0.22	-0.34	2.72
0.25	0.25	0	0	0.07	0.82	0.41	0.33	-0.05	3.02	0.35	0.92	0.45	0.19	-0.26	4.67
0.25	0	0.25	0.25	0.05	0.97	0.70	0.56	-2.90	4.09	0.1	0.61	0.89	0.26	-1.19	3.60
0.25	0.25	0.25	0.25	0.2	0.68	0.86	0.61	-2.22	5.16	0.06	0.59	0.94	0.33	-0.70	3.44
0	0.5	0	0	0.25	0.91	-0.03	0.33	-1.76	3.30	0.21	0.98	-0.02	0.02	-1.13	2.64
0	0	0.5	0.5	0.12	0.44	1.00	0.91	-0.21	5.02	0.28	-0.12	0.23	0.87	-1.20	2.87
0.5	0	0	0	0.32	0.95	-0.26	0.89	-1.41	4.71	0.12	0.58	0.48	0.83	-0.07	4.01
0.5	0.5	0	0	0.16	0.63	0.51	0.10	-0.24	2.86	0.18	0.96	0.63	0.45	-0.23	4.82
0.5	0	0.5	0.5	0.44	0.03	0.57	0.99	-1.62	5.18	0.33	-0.32	0.97	0.91	-1.90	4.76
0.5	0.5	0.5	0.5	0.17	0.57	0.80	0.82	-1.50	5.04	0.34	0.65	0.98	0.91	-0.61	7.39
0.75	0	0	0	0.35	0.74	0.94	0.91	-1.36	7.39	0.32	0.82	0.92	0.71	-2.92	6.96
0	0.75	0	0	0.24	-0.68	0.82	0.36	-0.37	3.75	0.33	-0.70	0.96	0.22	-0.64	24.25
0	0	0.75	0.75	0.66	-0.32	0.75	0.81	-1.08	5.26	0.34	-0.24	0.23	0.91	-0.36	2.95
0.75	0.75	0	0	0.65	0.95	0.65	-0.38	-1.19	5.26	0.34	0.85	0.07	0.62	-1.25	4.57
0.75	0	0	0.75	0.09	-0.31	0.57	0.31	-0.05	1.30	0.35	0.61	0.31	0.81	-1.08	5.12
0.75	0.75	0.75	0.75	0.67	0.92	0.69	0.99	-0.73	9.83	0.67	0.79	0.89	0.66	-1.49	9.34
0	1	0	0	0.22	-0.81	0.85	0.47	-0.44	4.76	0.05	0.69	0.80	-0.39	-1.40	2.06
0	0	1	0	0.34	0.73	-0.84	0.73	-0.78	6.51	0.14	0.84	-0.97	0.76	-0.11	9.92
0	0	1	1	0.32	-0.17	0.90	0.90	-1.92	4.79	0.16	0.34	0.99	1.00	-3.10	5.34
1	0	0	0	0.49	0.97	0.81	0.70	-1.62	8.08	0.28	0.77	0.91	0.91	-0.91	7.01
1	1	0	0	0.35	0.59	0.46	0.34	-0.35	3.98	0.43	0.91	0.71	0.68	-2.65	7.37
1	0	0	1	0.65	0.36	0.20	0.70	-1.75	4.80	0.33	-0.13	-0.03	0.78	-0.18	2.14
1	1	1	0	0.26	0.88	0.52	0.56	-0.97	5.09	0.25	0.99	0.89	0.55	-0.90	6.34
1	1	1	1	0.64	0.77	0.40	0.56	-1.80	6.42	0.35	0.91	0.50	0.73	-2.24	6.31
1	0	2	0	0.6	-0.03	0.97	0.82	-0.53	6.60	0.67	0.21	0.85	0.26	-0.52	5.42
1	2	1	0.5	0.35	0.95	0.53	0.73	-0.80	6.33	0.64	0.90	0.56	0.62	-0.25	8.12
1.5	1.5	1.5	1.5	0.88	0.46	0.51	0.38	-0.14	5.96	0.43	0.93	0.73	1.00	-1.55	8.52
2	0	0	0	0.23	0.35	0.61	0.04	-0.95	2.58	0.19	0.59	0.83	0.88	-1.15	5.50
2	2	0	0	0.67	0.83	0.40	0.83	-0.36	7.84	0.59	0.95	-0.11	0.79	-1.59	6.32
2	0	2	2	0.46	0.47	0.71	0.88	-1.08	6.56	0.39	0.09	0.97	0.91	-1.12	6.17
2	2	2	2	0.54	0.46	0.82	0.92	-1.73	7.52	0.64	0.86	0.83	0.88	-2.33	9.99
3	3	3	3	0.95	0.93	0.91	0.97	-1.59	12.84	0.51	-0.04	0.81	0.58	-1.28	4.84
4	4	4	4	0.67	0.40	0.76	0.66	-0.20	6.91	0.93	0.19	0.64	0.61	-1.87	7.15
5	5	5	5	0.72	0.62	0.11	0.75	-0.57	5.98	0.92	0.80	0.71	0.71	-1.26	10.77
6	6	6	6	0.9	0.89	0.74	0.85	-0.57	11.08	0.61	0.83	-0.03	0.77	-0.19	6.14

7	7	7	7	0.76	0.48	0.49	0.93	-1.99	7.77	0.41	0.83	0.81	0.99	-0.15	8.25
8	8	8	8	0.85	0.88	0.82	0.03	-0.59	7.78	0.58	-0.30	0.98	0.24	-0.99	3.98
9	9	9	9	0.98	0.46	0.67	0.66	-0.06	8.44	0.75	0.32	0.46	0.83	-1.32	6.93

Tabla 5.13: Parámetros Óptimos, tres variables observables ($\rho = 3$)

5.8. Conclusiones

En este capítulo se ha desarrollado una versión EWMA del gráfico de la Combinación Lineal de Poisson (LCP) a fin de mejorar su rendimiento. Como medida de desempeño se ha usado el ARL mediante la aplicación de una cadena de Markov. Se ha desarrollado un software de fácil uso bajo Windows© a fin de diseñar óptimamente el gráfico EWMA LCP para alcanzar el mejor rendimiento para un tipo de cambio dado. Para la optimización se usó Algoritmos Genéticos (GA).

El análisis de rendimiento demuestra que el gráfico EWMA LCP supera al gráfico LCP. La versión EWMA del gráfico LCP presenta ARLs más bajos prácticamente para cualquier cambio. En pocos casos para grandes cambios, a pesar que el EWMA LCP presenta mayores ARLs que el gráfico LCP, las diferencias son pequeñas. Por lo tanto, si el usuario necesita protección contra cambios de diferentes magnitudes, una buena estrategia es el empleo del gráfico EWMA LCP, optimizado para el cambio más pequeño que ya es relevante para detectar.

El capítulo incluye un análisis de sensibilidad. Las conclusiones de este análisis muestran que la solución óptima es robusta con respecto a los cambios en los componentes individuales. Es decir, la elección del cambio para optimizar el gráfico no es crítica si, cuando el proceso sale de control, el componente del cambio en la media de Y_0 , la variable común, no difiere mucho del valor considerado en la optimización, independientemente de los valores reales de los cambios en las medias de las otras variables. Por otra parte, puede haber algún deterioro en el rendimiento en el caso de cambios en λ_0 muy diferentes al que se usó en la optimización. En cualquier caso, el gráfico EWMA LCP todavía sigue siendo una opción mucho mejor que la del gráfico LCP.

CAPÍTULO 6

CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE INVESTIGACIÓN

6.1 Conclusiones generales

Con respecto a los objetivos planteados en el capítulo uno:

Se desarrollaron dos gráficos de control basados en la combinación lineal de variables Poisson correlacionadas: los gráficos LCP y EWMA LCP. Estos gráficos superan la limitación de otros gráficos como el MP, MX, DF o el esquema múltiple, los cuales no lograban el ARL bajo control deseado porque sus estadísticos y límites de control toman valores enteros.

Se analizaron los gráficos MP, MX, DF y el esquema múltiple, para lo cual se tuvo que desarrollar la distribución de probabilidades para p variables del gráfico MX y diseñar un programa que dado los parámetros del proceso, obtenga los límites de control de estos gráficos, restringido a que el valor de ARL bajo control alcanzado por ellos era el valor mayor más cercano o igual al ARL_0 deseado. No hubo gráfico que fuese mejor para todos los casos; los rendimientos de MP, MX y Esquema Múltiple dependen del comportamiento de las correlaciones de las variables observadas ante el cambio del vector de medias de las variables independientes Y_i .

Se diseñó el gráfico LCP, cuyo estadístico es la combinación lineal de variables Poisson. Se hizo una comparación de su desempeño con el de los gráficos MP, MX y el Esquema Múltiple, resultando que el gráfico LCP es mejor en la mayoría de los casos que sus competidores, con la ventaja adicional que alcanza el ARL bajo control deseado.

Para comparar los desempeños se diseñó un programa bajo Lazarus para ejecutarlo en un entorno Windows® que optimice los parámetros del gráfico LCP con el objetivo de minimizar el valor de ARL para un cambio en el proceso dado, restringido a un valor de ARL bajo control deseado. Además este programa busca los límites de control de los otros gráficos (MP, MX y esquema múltiple) y calcula los valores de ARL para un cambio dado,

y presenta opciones gráficas para visualizar la comparación de los desempeños de los gráficos.

Se diseñó el gráfico EWMA LCP mediante la optimización de sus parámetros usando algoritmos genéticos para minimizar el ARL fuera de control, restringido a un ARL bajo control. Se evaluó su rendimiento a través de los valores de ARL fuera de control, y se utilizó cadenas de Markov para el cálculo de estos valores. Al compararlo con el gráfico LCP, la versión EWMA fue mejor, especialmente en la detección de cambios pequeños.

Para fomentar el uso de este gráfico, se desarrolló un programa amigable bajo entorno Windows®, que determine los mejores parámetros del gráfico según las necesidades del usuario final.

En relación al análisis de los gráficos MP, MX, DF y Esquema Múltiple:

Se construyeron tablas con diversos escenarios para $p=2, 3$ y 4 , para comparar los rendimientos de estos gráficos mediante los valores de ARL fuera de control. Cabe mencionar que el gráfico DF sólo pudo considerarse para $p=2$.

Los rendimientos de los gráficos MP, MX y Esquema Múltiple, para un cambio específico están en función de cómo éste afecta al comportamiento de las correlaciones de las variables observadas. Para deducir esto, se realizó un análisis de contingencia, del cual se concluyó:

- Si una o todas las correlaciones entre las variables observadas aumentan, entonces el mejor gráfico (el que da el ARL más bajo fuera de control) es el MP.
- Si las correlaciones se mantienen constantes o disminuyen, los mejores gráficos de control son el MX o el de múltiples gráficos univariados.

Otro resultado relevante es: si los límites de control para cada uno de los gráficos del Esquema múltiple son iguales, entonces el gráfico MX tendrá el mismo límite de control.

El gráfico DF no se ve afectado por los cambios en la media de Y_0 (Factor común). Sin embargo, resultó ser el mejor en la mayoría de los casos en que cambia la media de sólo una de las otras variables Y_i .

En vista que no se concluyó que un gráfico es mejor para todos los posibles cambios en los parámetros del proceso, se desarrolló un programa gratuito bajo Windows® que además de calcular parámetros de estos gráficos, permite comparar los rendimientos, para que el usuario tome la mejor decisión para un proceso en particular.

En relación al diseño del gráfico de control LCP:

Se desarrolló un software que utiliza algoritmos genéticos para hallar los mejores parámetros del gráfico LCP, para $p = 2, 3$ y 4 variables Poisson correlacionadas, de manera que se minimice el valor de ARL fuera de control para un cambio dado, restringido a un valor de ARL_0 deseado. Además, este programa incorpora opciones gráficas para realizar comparaciones de los rendimientos del nuevo gráfico con respecto a MP, MX y el Esquema Múltiple.

Al analizar los rendimientos de los gráficos: LCP, MP, MX y el esquema múltiple, mediante varios escenarios para $p = 2, 3$ y 4 variables, se observó que el gráfico LCP presentó mejores resultados en la mayoría de los casos, especialmente cuando los cambios eran pequeños, donde en algunos casos, el ARL es cerca de un tercio de su mejor competidor. En otros casos su rendimiento no fue el mejor, pero las diferencias eran pequeñas.

Se desarrolló también un análisis de sensibilidad del gráfico LCP, a fin de estudiar el rendimiento del gráfico de control LCP para otros cambios diferentes al optimizado. Para una mejor comprensión, el análisis se realizó para $p=2$ variables correlacionadas. Se

optimizó el gráfico para dos vectores de cambio A y B y luego se calcularon los valores de ARLs para vectores de cambios distintos al optimizado. Para ello, se fijó el valor de d_0 , el cambio en la media de Y_0 , y se hizo variar los valores de d_1 y d_2 (cambios de las medias Y_1 y Y_2), y se realizó el análisis en dos dimensiones.

Algunos hallazgos importantes en el análisis de sensibilidad son: Si se espera un cambio con valores similares para todas las medias, no importa qué punto se ha seleccionado para la optimización, el rendimiento será el mismo. También es importante señalar, que si se optimiza para dos vectores de cambios muy diferentes pero simétricos con respecto a $Z_1 = Z_2$, los valores de ARL serán similares en la línea $Z_1 = Z_2$ (Z_1 y Z_2 son los ejes para los valores de d_1 y d_2).

En relación al diseño del gráfico de control EWMA LCP:

El rendimiento del gráfico EWMA LCP superó al gráfico LCP. La versión EWMA del gráfico LCP presenta ARLs más bajos prácticamente para cualquier cambio. En pocos casos, cuando ocurren grandes cambios en el proceso, a pesar que el LCP presenta menores valores de ARL, las diferencias son pequeñas.

Se realizó un análisis de sensibilidad y como conclusiones de este análisis se tiene que el gráfico EWMA LCP es bastante robusto. La elección del cambio para optimizar el gráfico es crítica sólo si cuando el proceso sale de control, el componente del cambio en la media de Y_0 , la variable común, difiere mucho del valor considerado en la optimización, independientemente de los valores reales de los cambios en las medias de las otras variables. Esto es entendible debido a que d_0 representa el cambio en λ_0 , que es la media de Y_0 , variable que tiene mayor peso que las otras Y_i s.

Se desarrolló un software de fácil uso bajo Windows®, a fin de diseñar óptimamente el gráfico EWMA LCP para alcanzar el mejor rendimiento para un tipo de cambio dado. Para

la optimización se usó Algoritmos Genéticos (GA) y para el cálculo de las medidas de rendimientos se emplearon cadenas de Markov.

6.1 Futuras Líneas de Investigación

El artículo relacionado al Gráfico EWMA LCP, ha sido enviado a una revista JCR *International Journal of Production Research* para considerar su publicación.

Se está trabajando en el diseño de un gráfico de dimensión variable para variables Poisson correlacionadas, similar al gráfico VDT² desarrollado por Aparisi y otros autores (2012), cuyo estudio fue publicado en el artículo: "T² Control Charts with Variable Dimension" publicado, *Journal of Quality Technology*, vol. 44, no. 4, pp. 375-393.

Queda pendiente el análisis de otras estructuras de correlación. Podría considerarse la estructura propuesta por Karlis et al. (2005) y adaptar los gráficos estudiados en esta tesis para controlar a estas variables, como punto inicial de investigación.

Bibliografía

Aparisi, F., and De Luna, M. A. (2009). Synthetic - control charts optimized for in-control and out-of-control regions. *Computers & Operations Research*, 36(12), 3204-3214.

Aparisi, F., De Luna, M., Epprecht, E. (2010). Optimization of a set of or principal components control charts using genetic algorithms. *International Journal of Production Research*, 48(18), 5345-5361.

Aparisi F., De Luna, M., Epprecht. E. (2011). Optimization of a Set of Xbar or Principal Components Control Charts Using Genetic Algorithms. *International Journal of Production Research*. Version 1.

Aparisi, F., García-Bustos, S. and Epprecht, E. K. (2013). Optimum Multiple and Multivariate Poisson Statistical Control Charts. *Quality and Reliability Engineering International*. DOI: 10.1002/qre.1490.

Aparisi, F. and García-Díaz, J. C. (2001). Aumento de la potencia del gráfico de control multivariante T^2 de Hotelling utilizando señales adicionales de falta de control. *Revista Estadística Española*. Vol. 43, Núm. 148, págs. 171 a 188

Aparisi, F. and García-Díaz, J. C. (2007). Design and Optimization of EWMA Control Charts for In-control, Indifferent, and Out-of-control Regions. *Computers & Operations Research (Revista JCR)*. Vol: 34(7) pp: 2096-2108.

Banks, J., Carson II J., Nelson, B. (2010). *Discret-Event System Simulation*. 5th Edition. Prentice-Hall

Barceló, J. (1996). *Simulación de Sistemas Discretos*. Primera Edición. Isdefe, Madrid.

Barnard, G.A. (1959). Control charts and stochastic processes. *Journal of the Royal Statistical Society B (Methodological)* (21): 239–71.

Bauer, R.J. (1994) *Genetic Algorithms and investment strategies* Wiley Finance Edition

- Bersimis, S., Psarakis, S. & Panaretos, J. (2006). Multivariate statistical process control charts: an overview. *Quality and Reliability Engineering International*, 23(5), 517 - 543.
- Borror, C. M., Champ, C. W. and Rigdon, S. E. (1998). Poisson EWMA control charts. *Journal of Quality Technology*, 30(4), 352-361.
- Brook D. & Evans D.A. (1972). An approach to the probability distribution of cusum run length. *Biometrika* 59, 3, p. 539.
- Carot, V. (1998). Control estadístico de la calidad. Ed. Univ. Politéc. Valencia, 708 pages
- Celano, G., Fichera, S. (1999) Multiobjective economic design of an X control chart. *Computers and Industrial Engineering*, Volume 37 Issue 1-2.
- Champ, C. W. & Aparisi, F. (2008). Double Sampling Hotelling's T^2 Charts. *Quality and Reliability Engineering International*, 24, 153-166.
- Chen, Y. K. (2007) 'Economic design of variable sampling interval T2 control charts-A hybrid Markov Chain approach with genetic algorithms', *Expert Systems with Applications*. Vol. 33, pp. 683-689.
- Crosier, R. B. (1986). A New Two-Sided Cumulative Sum Quality Control Scheme. *Technometrics* 28, 3, 187-194.
- Crosier, R. B. (1988). Multivariate generalizations of cumulative sum quality-control schemes. *Technometrics* 30, 291-303.
- Crowder S.V. (1987). A simple method for studying run length distributions of exponentially weighted moving average charts. *Technometrics*, 29, 401-407.
- Chiu, J., and Kuo, T. (2008). Attribute Control Chart for Multivariate Poisson Distribution. *Communications in Statistics-Theory and Methods*. 37: 146-158.
- Dourodyan, M. H. and Amiri, A. (2013). Monitoring multivariate-attribute processes based on transformation techniques. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 69:2161-2172.

Domínguez-Dorado, M.(2004). Todo Programación. Nº 12. Editorial Iberprensa (Madrid).

Duncan, A. J. (1992). Quality Control and Industrial Statistics. 5th ed., Irwin, Homewood, IL.

Epprecht, E. K., Aparisi, F., García-Bustos, S. (2013). Optimal linear combination of Poisson variables for statistical process control. *Computers & Operations Research*, 40 (3021-3032).

García-Bustos, S., Aparisi, F., Epprecht, E. K.(2014). Optimal EWMA of Linear Combination of Poisson Variables for Multivariate Statistical Process Control. *International Journal of Production Research (en revisión)*.

Gentle, J. (2005). Random Number Generation and Montecarlo Methods. Second Edition. Springer, USA.

Harris, T. J., and Ross, W. M. (1991). Statistical Process Control for Correlated Observations. *The Canadian Journal of Chemical Engineering*, 69,48–57.

He, D. (2002). Development of Multivariate Double Sampling X-bar Control Charts. Presented at the INFORMS 2002 Annual Meeting, San Jose, CA,

Ho, L. L., Costa, A.F.B. (2009). Control charts for individual observations of a bivariate Poisson process. *International Journal of Advanced Manufacturing Technology* 43:744-755.

Holgate, P. (1964). Estimation for the bivariate Poisson distribution. *Biometrika* 51: 241-245.

Hossain, A., Moin, C., Mahabubuzzaman, A. Determining the most frequent defects for circular weft knitting fabric machines: A case study (2011). *Journal of Innovation & Development Strategy (JIDS)*. 5(2):10-17

Hotelling, H. (1947). Multivariate Quality Control. In C. Eisenhart, M. W. Hastay, and W. A. Wallis, eds. *Techniques of Statistical Analysis*. New York: McGraw-Hill

Ishikawa, K., (1974). *Guide to Quality Control*. (UNIPUB, New York).

Jiang, W., Han, S. W., Tsui, K, Woodall, W. H. (2011). Spatiotemporal surveillance methods in the presence of spatial correlation. *Statistics in Medicine*, 30(5), 569-583. DOI: 10.1002/sim.3877

Joner, M. D., Woodall, W. H., Reynolds, M. R. and Fricker, R. D. (2008). A One-sided MEWMA Chart for Health Surveillance. *Quality and Reliability Engineering International*, 24(5), 503-508. DOI: 10.1002/qre.910

Karlis, D. (2003). An EM algorithm for multivariate Poisson distribution and related models. *Journal of Applied Statistics*, 30(1): 63-77.

Karlis, D. and Meligkotsidou, L. (2005). Multivariate Poisson regression with covariance structure. *Statistics and Computing* 15, 255-265.

Karlis, D. and Ntzoufras, I. (2009). Bivariate Poisson and Diagonal Inflated Bivariate Poisson Regression Models in R. *Journal of Statistical Software*, 14(10), 1-26.

Kaya, I. (2009). A genetic algorithm approach to determine the sample size for control charts with variables and attributes. *Expert Systems with Applications*, Vol. 36, pp. 8719-8734.

Laungrungrong, B., Borrer, C. M., and Montgomery, D. C. (2011). EWMA Control Charts for Multivariate Poisson-distributed data. *International Journal of Quality Engineering and Technology*. 2(3), 185-211.

Lee, M. H. and Khoo, B. C. (2006). Optimal Statistical Designs of a Multivariate CUSUM Chart based on ARL and MRL. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 13(5), 479-497.

Li, Y. and Tsung, F. (2011), Multiple Attribute Control Charts with False Discovery Rate Control. *Qual. Reliab. Engng. Int.*. doi: 10.1002/qre.1276.

Lowry, C. A., Woodall W. H., Champ C. W. and Rigdon S. E. (1992). A multivariate exponentially weighted moving average control chart. *Technometrics* 34, 46-53.

Lowry, C.A. & Montgomery, D.C. (1995). A review of multivariate control charts. *IIE Transactions*, 27(1), 800-810.

Lu, X.S., Xie, M., Goh, T.N., & Lai, C.D. (1998). Control chart for multivariate attribute processes. *International Journal of Production Research*. 36(12), 3477-3489.

Lucas, J. M. and Saccucci, M. S. (1990). Exponentially weighted moving average control schemes: properties and enhancements. *Technometrics*, 32(1), 1-12.

MacGregor, J. F. & Kourti, T. (1995). Statistical Process Control of Multivariate Processes. *Control Engineering Practice*, 3(3), 403-414.

Marín Diazaraque J. M., (2012). Cadenas de Markov. Departamento de Estadística, Universidad Carlos III de Madrid. Sitio web: <http://halweb.uc3m.es/esp/Personal/personas/jmmarin/esp/PEst/tema4pe.pdf>. (Visitada 17/04/2014).

M.H. Kalos and P.A. Whitlock en "Monte Carlo Methods. Vol I . Basics". John Wiley& Sons. New York, 1986.

Montgomery, D. C. (2012). *Introduction to Statistical Quality Control*, 7th Edition. Wiley, New York.

Page, E.S. (1954). Continuous Inspection Schemes. *Biometrika*, Vol. 41, No. 1.

Patel, H. I. (1973). Quality control methods for multivariate binomial and Poisson distributions. *Technometrics* 15, 103-112.

Roberts S.W. (1959). Control chart tests based on geometric moving average. *Technometrics*, 1, 239-250

Sánchez, S., Bosch, F., Gimeno, J.V., Yusá, D.J., Doménech, A. (2002). Study and dating of medieval ceramic tiles by analysis of enamels with atomic absorption spectroscopy, X-ray fluorescence and electron probe microanalysis. *Spectrochimica Acta Part B* 57: 689–700.

Siegmann, P., Sanchez-Brea, L. M., Martinez-Anton, J. C., Bernabeu, E. (2004). Comparison between optical techniques and confocal microscopy for defect detection on thin wires. *Applied Surface Science*, 238, 375-379.

Shannon, R., Johannes, J. D. (1976). Systems simulation: the art and science. *IEEE Transactions on Systems, Man and Cybernetics* 6(10). pp. 723-724.

Shewhart, W. A., (1931). *Economic Control of Quality of Manufactured Product*. New York: D. Van Nostrand Co., Inc.

Skinner, K. R., Montgomery, D. C., and Runger G. C. (2003). Process monitoring for multiple count data using generalized linear model-based control charts. *International Journal of Production Research* 41:1167-1180.

.Woodall, W. H. (2006). The Use of Control Chart in Health-Care and Public-Health Surveillance. *Journal of Quality Technology*, 38(2), 89-104.

Apéndice 1

Estos programas fueron desarrollados en la presente tesis doctoral con la colaboración de:

PhD. Francisco Aparisi García (faparisi@eio.upv.es).

PhD. Eugenio Kahn Epprecht (eke@puc-rio.br)

PhD. (c) Sandra Lorena García Bustos (slgarcia@espol.edu.ec)

Manual de Usuario

Título: Optimum Multi Poisson Charts

Instalación del Software:

Este software ha sido creado como una versión para ser ejecutada desde cualquier dispositivo de almacenamiento interno o externo. No requiere instalación en el sistema.

Para ejecutar dicho software abriremos la capeta que contiene el ejecutable y haremos doble click con el mouse.

Requerimientos técnicos de la maquina:

Tipo de procesador: Pentium 4 HT o superior

Memoria mínima: 500 Mb

Espacio mínimo de instalación: 4 Mb

Sistemas operativos: Windows® XP, NT®, Vista®. (No funciona bajo ninguna distribución en entorno Linux)

Resolución mínima del monitor: 800x600

Está desarrollado en el software libre Lazarus 1.0.2 (Free Pascal) con licencia GPL/LGPL.

El software reconoce automáticamente la configuración de la hora del Sistema.

Introducción:

El software “Optimum Multi Poisson Charts” se compone de un entorno gráfico, a fin de que al usuario le resulte de fácil comprensión y muy sencillo de gestionar.

En este manual se explica paso a paso, como ejecutar dicho programa.

Lo que pretende este software es facilitar la optimización de los parámetros de estos gráficos de control (MP, MX, Combinación Lineal y Esquema Múltiple), a fin de minimizar el número de muestras necesarias para detectar un cambio en las medias de las variables Poisson en un proceso, restringido a un valor de ARL_0 deseado por el usuario, además hace una comparación de los rendimientos de los gráficos.

1.-Descripción de la Pestaña “Optimization”.

Aquí describiremos paso a paso como el usuario introduce los datos en cada sección de la ventana de “Optimization”:

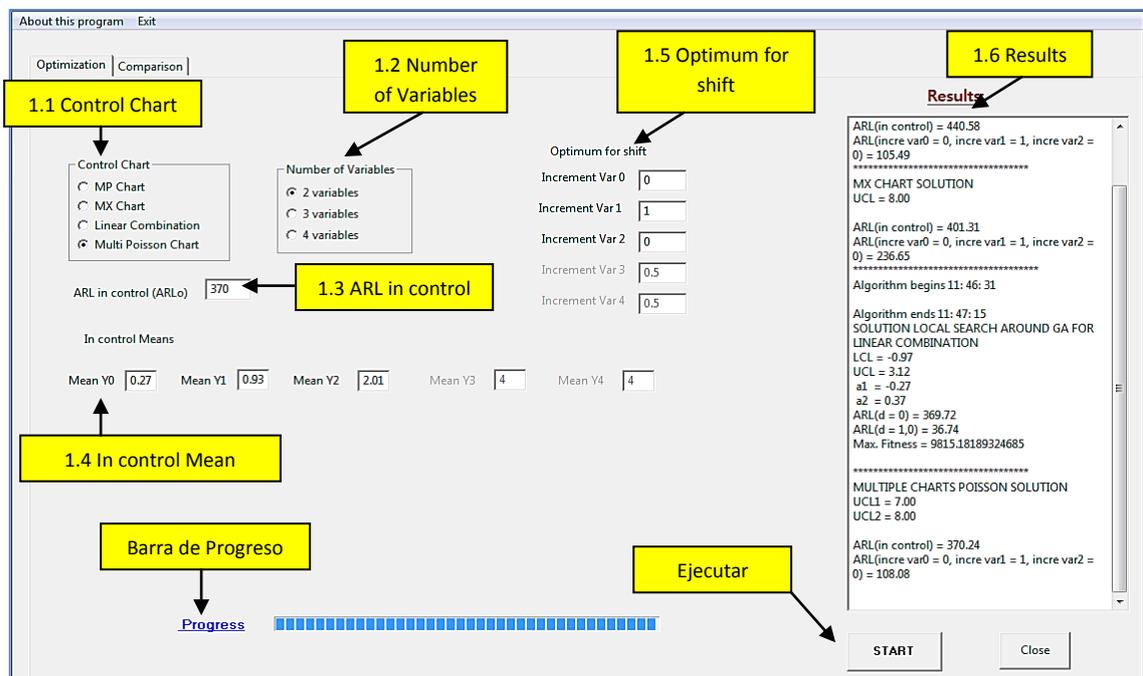
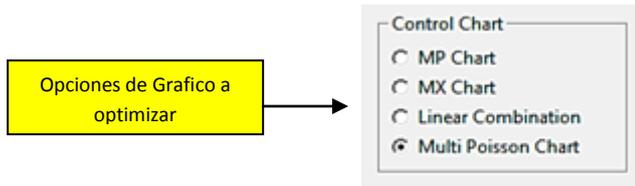


Figura A1.1: Explicación de la Pestaña “Optimization”

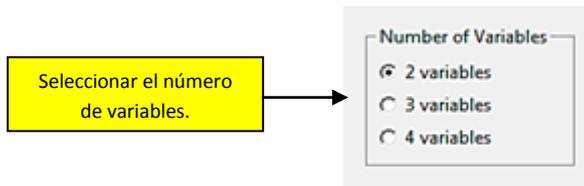
1.1 Control Chart:

En Control Chart, seleccionaremos el tipo de gráfico a optimizar, con el cursor del mouse sobre la opción deseada.



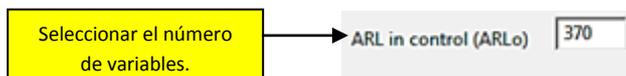
1.2 Number of variables:

En "Number of variables", especificaremos con el puntero del mouse el número de variables a monitorear (X_i s).



1.3 ARL in control (ARL_0):

El usuario especificara el valor del número de muestras promedio deseado, hasta que se dé una señal cuando el proceso se encuentre bajo control.



1.4 In control Mean:

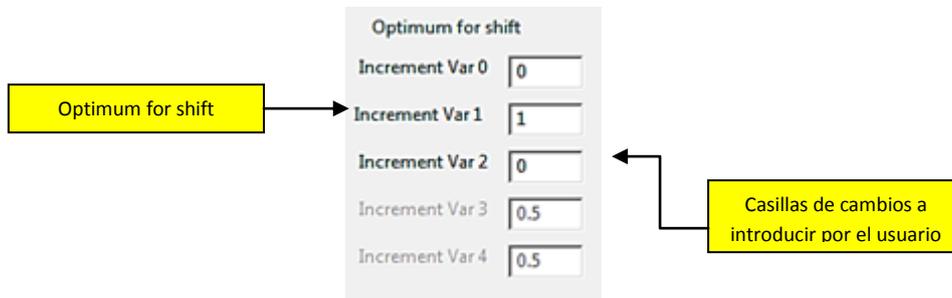
En "In control Mean" el usuario introduce las medias bajo control de las variables independientes " Y_i ", las cuales pueden ser obtenidas de la siguiente expresión

$\widehat{E}(Y_i) = \bar{X}_i - Cov(\widehat{X}_i, X_j)$; donde \bar{X}_i es la media muestral de la variable Poisson X_i y $Cov(\widehat{X}_i, X_j)$ es el estimador de la covarianza entre X_i y X_j .



1.5 Optimum for Shift:

En “Optimum for Shift”, el usuario del programa introduce los cambios en unidades de desviación estándar que desea detectar, en las casillas correspondientes.



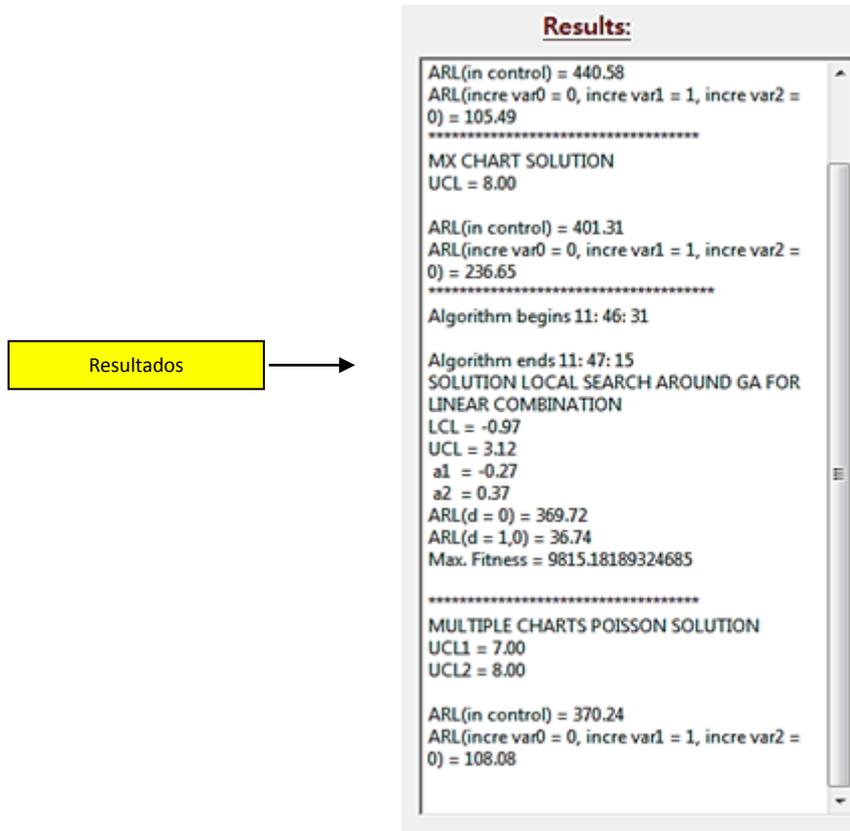
Hace click en la tecla ejecutar.



1.6 Ventana de resultados:

En la ventana de resultados se presentan los parámetros de los gráficos optimizados: MP, MX, LCP y Esquema Múltiple. Además, se muestran los valores

de ARL bajo control alcanzados y los ARLs fuera de control para un vector de cambio fijado por el usuario.



2.- Descripción de la Pestaña “Comparison”:

En esta parte del manual describiremos como utilizar la pestaña “Comparison”:

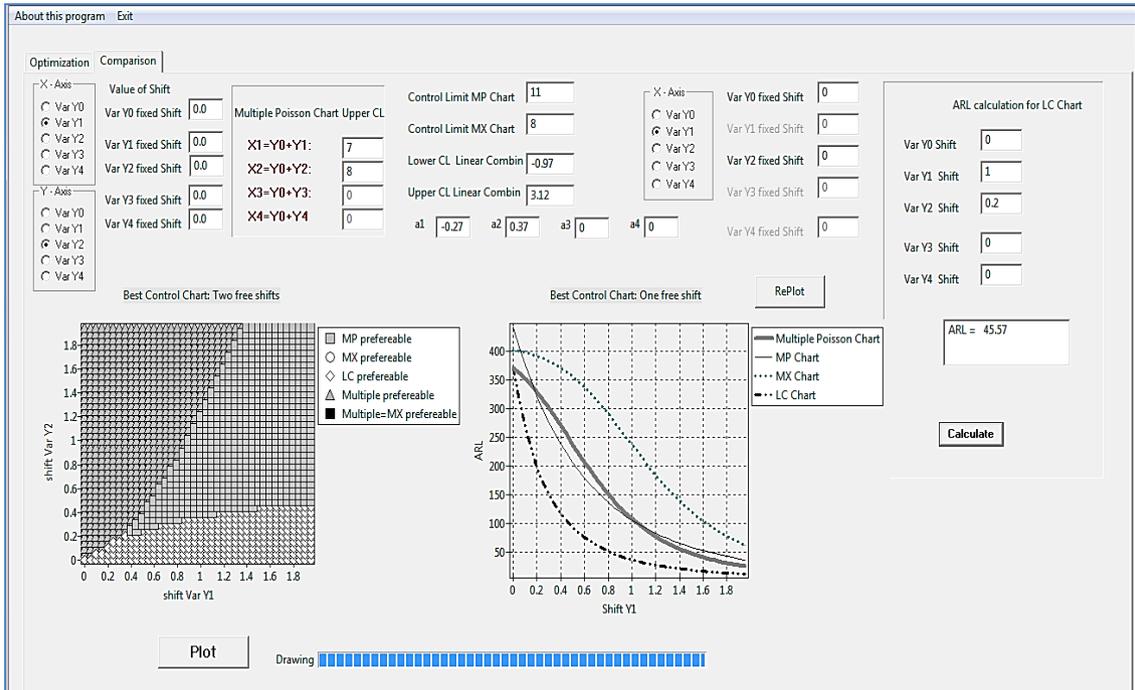


Figura A1.2: Pestaña “Comparison”

El software además hace una comparación completa del rendimiento. Los resultados de la comparación son presentados en gráficos, para una mejor visualización (Figura A1.3).

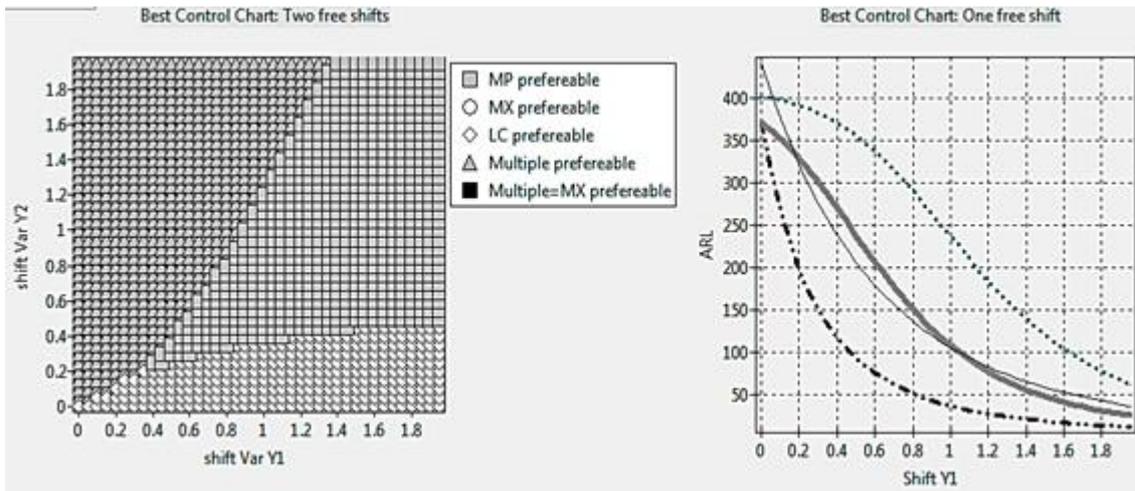
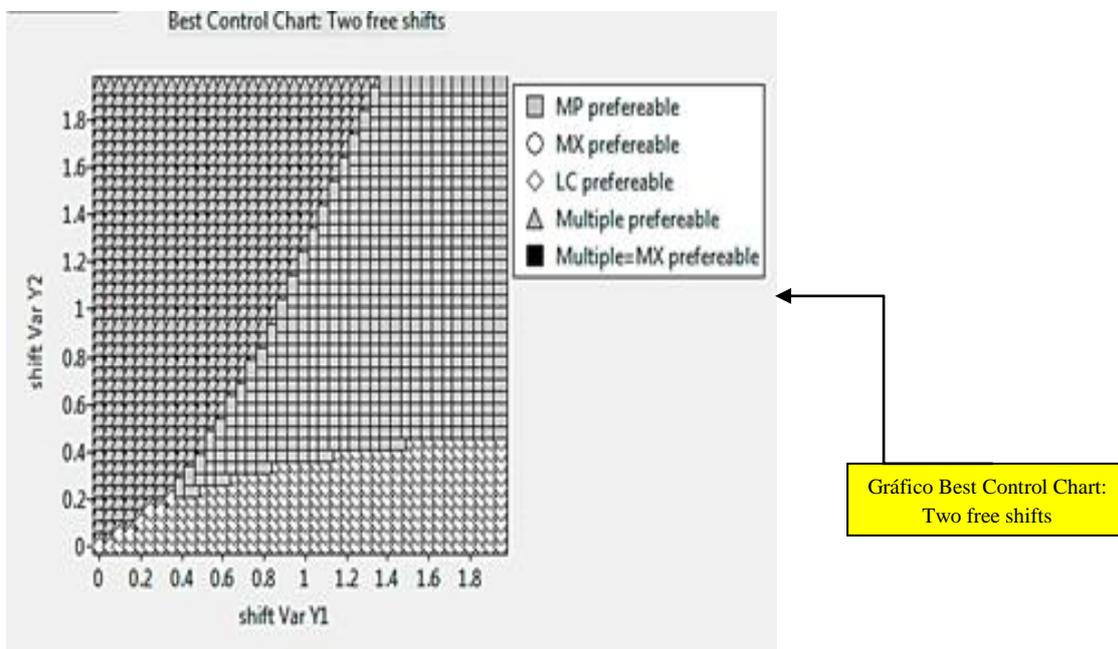
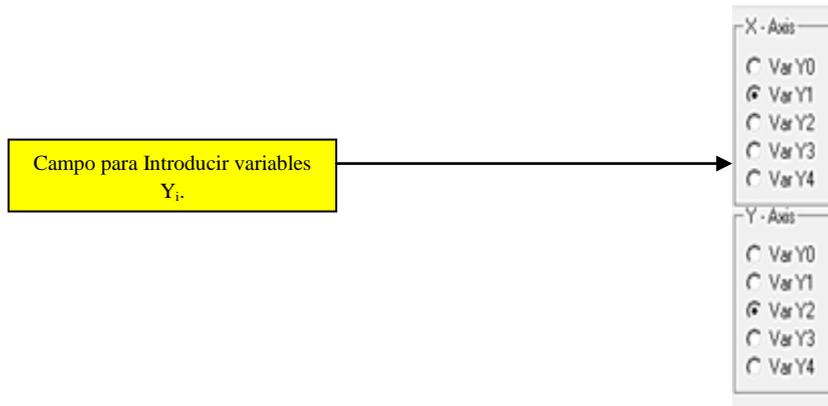


Figura A1.3: Gráficos de la pestaña “Comparison”

Los límites de control obtenidos en la pestaña de "Optimization" se toman, de manera predeterminada, como entradas para la pestaña "Comparison". En esta pestaña se obtienen dos gráficos.

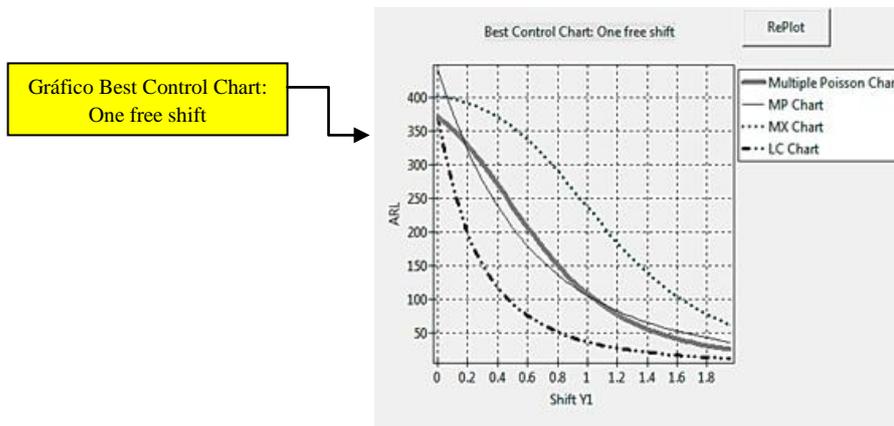
Para trazar el gráfico con el título " Best Control Chart: Two free shifts " el usuario tiene que elegir dos variables Y_i .



Los ejes de este gráfico son los cambios en unidades de desviación estándar de las medias de estas dos variables seleccionadas. Además, el usuario tiene que especificar valores fijos para los cambios de las medias del resto de variables.

Por ejemplo, la Figura A1.3 muestra el siguiente caso: con dos variables monitoreadas ($p = 2$), la media de la variable Y_1 ha sido seleccionada para graficar sus cambios en el eje horizontal, y la media de la variable Y_2 para el eje vertical. La media de la variable Y_0 se mantiene constante. Después de hacer click en "PLOT", el gráfico muestra que carta tiene el mejor rendimiento en cada punto del área de posibles cambios

El segundo gráfico que se muestra en la Figura A1.3 (titulada " Best Control Chart: One free shift ") obtiene las curvas ARL de los gráficos de control que se comparan en función del cambio en la media de una de las variables Y_i (ARL en el eje vertical, contra el cambio en el eje horizontal), para valores fijos de las medias de las variables Y_i restantes (estos valores fijos pueden estar en control o fuera de control). El usuario debe especificar para qué variable Y_i , los cambios en la media en unidades de desviación estarán en el eje horizontal, y los cambios fijos para las variables restantes. En el caso mostrado en esa figura, las curvas muestran cómo el ARL varía en función del cambio en la media de Y_1 , cuando la media de Y_0 y Y_2 no cambian.



En el área derecha de la ventana de la interfaz de software, “ARL calculations for LCP chart”, se puede calcular los valores de ARL para el gráfico LCP para un cambio diferente al optimizado.

ARL calculation for LCP Chart

ARL calculation for LC Chart

Var Y0 Shift

Var Y1 Shift

Var Y2 Shift

Var Y3 Shift

Var Y4 Shift

ARL = 45.57

Calculate

Manual de Usuario

Título: Optimum EWMA LSP

Instalación del Software:

Este software ha sido creado como una versión para ser ejecutada desde cualquier dispositivo de almacenamiento interno o externo. No requiere instalación en el sistema.

Para ejecutar dicho software abriremos la capeta que contiene dicho ejecutable y haremos doble click con el mouse.

Requerimientos técnicos de la maquina:

Tipo de procesador: Pentium 4 HT o superior

Memoria mínima: 500 Mb

Espacio mínimo de instalación: 4 Mb

Sistemas operativos: Windows® XP, NT®, Vista®. (No funciona bajo ninguna distribución en entorno Linux)

Resolución mínima del monitor: 800x600

Está desarrollado en el software libre Lazarus 1.0.2 (Free Pascal) con licencia GPL/LGPL.

El software reconoce automáticamente la configuración de la hora del Sistema.

Introducción:

Como podemos apreciar el software se compone de un entorno gráfico que para el usuario le resulta de fácil comprensión y muy sencillo de gestionar.

En este manual explica paso por pasos, como ejecutar dicho programa.

Lo que pretende este software es facilitar la optimización de los parámetros del gráfico EWMA LCP a fin de minimizar el número de muestras necesarias para detectar un cambio en las medias de las variables Poisson en un proceso fuera de control, restringido a un valor de ARL_0 deseado por el usuario, además hace una comparación de los rendimientos de los gráficos.

1.-Descripción de la Pestaña de “Optimization”

Aquí describiremos paso a paso como el usuario introduce los datos en cada sección de la ventana de “Optimization”:

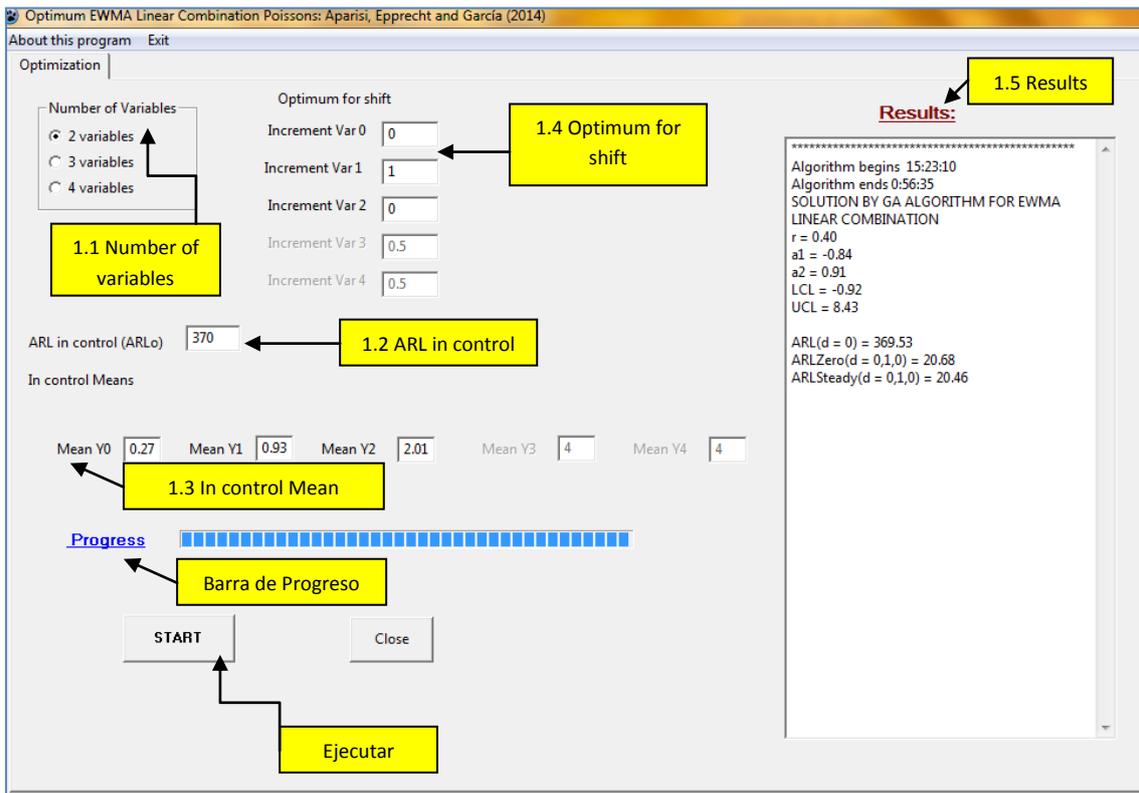
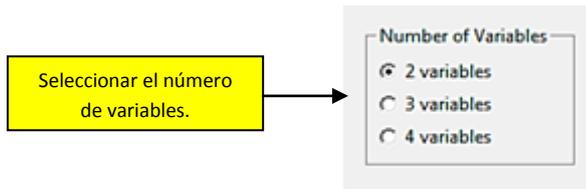


Figura A1.1: Explicación de la Pestaña de “Optimization”

1.1 Number of variables:

En Number of variables, especificaremos con el puntero del mouse el número de variables a monitorear (X_i s).



1.2 ARL in control (ARL_0):

El usuario especificará el valor del número promedio de muestras, hasta que se dé una señal cuando el proceso se encuentre bajo control.



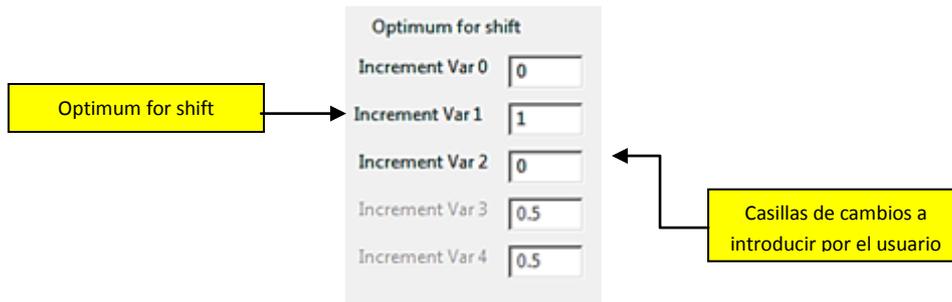
1.3 In control Mean:

En “In control Mean” el usuario introduce las medias bajo control de las variables independientes " Y_i " las cuales pueden ser obtenidas de la siguiente expresión $\overline{E}(Y_i) = \overline{X}_i - Cov(\overline{X}_i, X_j)$; donde \overline{X}_i es la media muestral de la variable Poisson X_i y $Cov(\overline{X}_i, X_j)$ es el estimador de la covarianza entre X_i y X_j .



1.4 Optimum for Shift:

En Optimun for Shift, el usuario del programa introduce los cambios que desea detectar en las casillas correspondientes.



Hace click en la tecla ejecutar.



1.5 Ventana de resultados:

En la ventana de resultados se presentan los parámetros optimizados del gráfico EWMA LCP: r (constante de suavizado), α_i (coeficientes de la combinación lineal), LCL y UCL (límites de control inferior y superior). Además, se muestran los valores de ARL bajo control y ARL fuera de control para un vector de cambio establecido por el usuario.

Resultados

```
Results:
-----
Algorithm begins 15:23:10
Algorithm ends 0:56:35
SOLUTION BY GA ALGORITHM FOR EWMA
LINEAR COMBINATION
r = 0.40
a1 = -0.84
a2 = 0.91
LCL = -0.92
UCL = 8.43

ARL(d = 0) = 369.53
ARLZero(d = 0,1,0) = 20.68
ARLSteady(d = 0,1,0) = 20.46
```