UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMATICA APLICADA

SOLUCIONES EXPLICITAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES MATRICIALES CON COEFICIENTES VARIABLES

RAFAEL COMPANY ROSSI

TESIS DOCTORAL

D.LUCAS JODAR SANCHEZ, Catedrático de Universidad y D.ENRIQUE NAVARRO TORRES, Profesor Titular de Universidad, del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia

CERTIFICAN:

Que la presente memoria, "SOLUCIONES EXPLICITAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES MATRICIALES CON COEFICIENTES VARIABLES", ha sido realizada bajo su co-dirección en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia por D. Rafael Company Rossi, y constituye su Tesis para optar al Grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, presentamos ante el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia la referida Tesis Doctoral, firmando el presente certificado en Valencia, a veinte de Abril de 1993.

Fdo.: Lucas Jódar Sánchez

Fdo.: Enrique Navarro Torres

INDICE

INTRODUCCION Y MOTIVACION 4

I. PRELIMINARES

1.1 La función matricial Gamma y otras propiedades del cálculo funcional matricial 11

1.2 Ecuaciones algebraicas matriciales 14

1.3 Conjunto fundamental de soluciones 20

1.4 Un método de Frobenius para la resolución de ecuaciones diferenciales matriciales con coeficientes analíticos 24

II. UN METODO DE FROBENIUS PARA LA RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL MATRICIAL DE BESSEL

2.1 Introducción 33

2.2 El caso en que A es invertible y F(t)=0 35

2.3 El caso en que A es singular y F(t)=0 43

2.4 El problema no homogéneo 57

III. FUNCIONES MATRICIALES DE BESSEL

3.1 Introducción 61

3.2 Resultados previos del cálculo funcional matricial 64

3.3 Funciones matriciales de Bessel de primera especie 69

3.4 Propiedades de las funciones matriciales de Bessel 78

3.5 Funciones matriciales de Bessel de segunda especie..86

IV. POLINOMIOS MATRICIALES ORTOGONALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

4.1 Introducción..93

4.2 Soluciones en serie..96

4.3 Propiedades del cálculo funcional matricial.......100

4.4 Polinomios matriciales de Gegenbauer: Definición y expresiones explícitas...............107

4.5 Ortogonalidad y acotación de los polinomios matriciales de Gegenbauer........................116

REFERENCIAS..126

INTRODUCCION Y MOTIVACION

La resolución de sistemas de ecuaciones diferenciales de orden superior suele apoyarse en la consideración de un sistema ampliado de primer orden. Este enfoque clásico presenta dos inconvenientes. El primero de ellos es el aumento del volumen computacional debido al correspondiente aumento de la dimensión del problema transformado. El segundo inconveniente es la pérdida de explicitez de las soluciones obtenidas en términos de los datos.

En la línea de trabajo de nuestro grupo de investigación nos proponemos aquí, progresar en el empeño de obtener soluciones de sistemas de ecuaciones de orden superior, con la calidad de respuesta del caso escalar. Recuérdese que el método de Frobenius es un método directo que trata en el caso escalar las ecuaciones de segundo orden sin considerar el problema equivalente ampliado de primer orden.

Nos proponemos obtener soluciones explícitas de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden con coeficientes analíticos sin aumentar la dimensión del problema.

Como consecuencia de este estudio surgirán funciones especiales matriciales de Bessel y polinomios ortogonales matriciales de tipo Gegenbauer que gozan de propiedades análogas a los correspondientes del caso escalar y que esperamos constituyan el punto de partida para la obtención de métodos analítico-numéricos de resolución de otros tipos de problemas como la integración numérico-matricial o la resolución de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales, tal como se ha conseguido en [21], [27] y [28] para el caso de sistemas de ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes constantes.

En el capítulo I, además de recordar algunos hechos fundamentales que se utilizarán en capítulos posteriores, presentaremos resultados de tipo Frobenius matricial para ecuaciones de la forma

$$t^2X''(t)+tA(t)X'(t)+B(t)X(t) = 0 \ , \quad 0<t<\infty$$

Los capítulos II y III están dedicados a sistemas de tipo Bessel matricial

$$t^2X''(t) + tX'(t) + (t^2I-A^2)X(t) = 0 \ , \quad 0<t<\infty,$$

donde A es una matriz cuadrada (posiblemente singular), que permitirán introducir las funciones de Bessel matriciales y propiedades.

En el capítulo IV estudiaremos la ecuación de tipo

Legendre matricial

$$(1-t^2)X''(t)+BtX'(t)+CX(t) = 0 \ , \quad -1<t<1,$$

donde B y C son matrices cuadradas reales. Particular interés tiene la introducción de los polinomios ortogonales matriciales de Gegenbauer y sus propiedades, que esperamos sea el punto de partida de una incipiente teoría de polinomios ortogonales matriciales.

La memoria concluye con la necesaria lista de referencias. La clasificación temática de este trabajo de acuerdo con la 1991 AMS Subject Classification es la siguiente: 33C10, 34A30, 47A60, 15A24.

CAPITULO I

PRELIMINARES

Comenzaremos este primer capítulo presentando diversos resultados del cálculo funcional matricial así como la resolución de ciertas ecuaciones algebraicas matriciales de utilidad para los capítulos posteriores.

Trataremos también del concepto de conjunto fundamental de soluciones de ecuaciones diferenciales matriciales de segundo orden de la forma:
$Y''(t) + P(t)Y'(t) + Q(t)Y(t) = 0$, donde $P(t)$ y $Q(t)$ son funciones contínuas con valores en $\mathbb{C}^{nxn}$.

Finalmente, pese a que el objetivo de esta tesis se centra en el estudio de dos ecuaciones diferenciales particulares, hemos creído conveniente comentar, a modo de introducción, algunos resultados generales sobre ecuaciones diferenciales matriciales con coeficientes analíticos de segundo orden:

$$t^2X''(t)+tA(t)X'(t)+B(t)X(t) = 0 \ , \ t>0 \tag{1.1}$$

donde $A(t)$ y $B(t)$ son funciones analíticas matriciales.

En todo lo relativo a demostrar la convergencia absoluta de soluciones matriciales en serie utilizaremos el concepto de norma-2 o norma espectral de una matriz.

Si B es una matriz de $\mathbb{C}^{mxn}$ y B^H es la transpuesta conjugada de B, la norma espectral de B viene definida por:

$$\|B\| = \max \left\{ \sqrt{|z|} \;\; ; \;\; z \in \sigma(B^H B) \right\} ,$$

donde para una matriz $C \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $\sigma(C)$ es el espectro o conjunto de todos los valores propios de C.

1.1. LA FUNCION MATRICIAL GAMMA Y OTRAS PROPIEDADES DEL CALCULO FUNCIONAL MATRICIAL

A.- LA FUNCION GAMMA MATRICIAL

La inversa de la función Gamma, $\Gamma^{-1}(z) = 1/\Gamma(z)$, es una función entera de la variable compleja z y, por lo tanto, para toda matriz $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$, el cálculo funcional de Riesz-Dunford muestra que $\Gamma^{-1}(C)$ es una matriz bien definida, (véase capítulo 7 de [7]).

Por [12,p.253], dada una matriz $C\in\mathbb{C}^{m\times m}$, se sigue que

$$C(C+I)\dots(C+kI)\Gamma^{-1}(C+(k+1)I) = \Gamma^{-1}(C) \tag{1.2}$$

Por otra parte, $\Gamma^{-1}(C)$ es una matriz invertible si, y sólo si,

$$C + kI \text{ es invertible para todo entero } k\geq 0 \tag{1.3}$$

Asumiendo la condición (1.3), $\Gamma(C)$ está bien definida y es precisamente la matriz inversa de $\Gamma^{-1}(C)$. Por las propiedades del cálculo funcional $\Gamma^{-1}(C)$ conmuta con $\Gamma(C)$ y por [7,p.557], ambas son polinomios en C. En particular, si C es una matriz cuyos valores propios tienen la parte real estrictamente positiva, tenemos que

$$(1.4) \qquad \Gamma(C) = \int_0^{\infty} \exp(-t)\, \exp((C-I)\ln t)\, dt$$

B.- LA FUNCION FACTORIAL MATRICIAL

Si consideramos la función factorial $(z)_n$ definida por $(z)_n = z(z+1)....(z+n-1)$, $n\geq 1$, $(z)_0=1$; entonces por aplicación del cálculo funcional matricial a esta función, se infiere para toda matriz C de $\mathbb{C}^{m\times m}$ que

$$(1.5) \qquad (C)_n = C(C+I)....(C + (n-1)I) \ , \quad n\geq 1, \qquad (C)_0 = I$$

Bajo la condición (1.3), de (1.2) y (1.5) se obtiene

$$(1.6) \qquad (C)_n = \Gamma(C+nI)\Gamma^{-1}(C), \ n\geq 1$$

Aplicando el cálculo funcional matricial a la propiedad [37,p.23]:

$$(1.7) \qquad (2z)_{2n} = 2^{2n}(z)_n(z + 1/2)_n \ , \qquad z \in \mathbb{C}, \quad n\geq 1$$

se sigue para una matriz $C \in \mathbb{C}^{m\times m}$ que

$$(1.8) \qquad (2C)_{2n} = 2^{2n}(C)_n(C + \tfrac{1}{2}I)_n \ , \qquad n\geq 1$$

C.- UNA PROPIEDAD CONMUTATIVA

Si $f(z)$ y $g(z)$ son funciones holomorfas de la variable compleja z que están definidas en un abierto Ω del plano complejo y si D es una matriz de $\mathbb{R}^{m\times m}$ tal que $\sigma(D)\subset\Omega$, entonces, por el cálculo funcional matricial, se demuestra la siguiente propiedad conmutativa , [7,p.558]:

$$f(D)g(D) = g(D)f(D) \tag{1.9}$$

1.2. ECUACIONES ALGEBRAICAS MATRICIALES

A.- TIPO SYLVESTER

Al construir soluciones en serie de ecuaciones diferenciales matriciales del tipo (1.1) se obtienen relaciones algebraicas entre los coeficientes matriciales que obedecen a ecuaciones de tipo Sylvester de la forma

$$ZP^2 + QZP + RZ = S \tag{1.10}$$

donde la incógnita Z y S son matrices de $\mathbb{C}^{nxp}$, R y Q son de $\mathbb{C}^{nxn}$ y $P \in \mathbb{C}^{pxp}$.

El siguiente teorema aporta la solución única de este tipo de ecuaciones algebraicas asumiendo cierta condición.

TEOREMA 1.1 *Sean* $P \in \mathbb{C}^{pxp}$, $S \in \mathbb{C}^{nxp}$, *y* R, Q *matrices de* $\mathbb{C}^{nxn}$, *tales que verifican la condición espectral*

$$\sigma(P) \cap \sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -R & -Q \end{bmatrix} \right) = \emptyset \tag{1.11}$$

Si $p(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j$ *es un polinomio anulador de* H,

$$H = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -R & -Q \end{bmatrix},$$

entonces la ecuación (1.10) *tiene solución única.*

Si $M = (M_{ij})$ *es una matriz invertible de* $\mathbb{C}^{2nx2n}$, *con* $M_{ij} \in \mathbb{C}^{nxn_j}$, $1 \le i \le 2$, $1 \le j \le k$, *y* $W = (W_{si}) = M^{-1}$, *con* $W_{si} \in \mathbb{C}^{n_s xn}$, $1 \le i \le 2$, $1 \le s \le k$, $Z_s \in \mathbb{C}^{n_s xn_s}$, *de forma que*

$$H = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1k} \\ M_{21} & \dots & M_{2k} \end{bmatrix} \mathrm{diag}(Z_1, \dots, Z_k) \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ \vdots & \vdots \\ W_{k1} & W_{k2} \end{bmatrix}$$

(1.12)

entonces la única solución Z *de* (1.10) *viene dada por la expresión*

$$(1.12) \qquad Z = \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{j} \sum_{s=1}^{k} a_j M_{1s} Z_s^{h-1} W_{s2} S P^{j-h} \right) \left(\sum_{j=0}^{m} a_j P^j \right)^{-1}$$

Demostración. Nótese que Z es solución de la ecuación (1.10) si, y sólo si, $Y = \begin{bmatrix} Z \\ ZP \end{bmatrix}$ es solución de la ecuación de Sylvester

$$(1.14) \qquad HY - YP = - \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix}$$

Debido a (1.11), la ecuación (1.14) tiene solución única ,[4],[41]; y por el corolario 2 de [4], si Y es dicha solución, resulta que

$$V = \left[\begin{array}{c|c} H & \begin{matrix}0\\S\end{matrix} \\ \hline 0 & P \end{array}\right] = W \begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} W^{-1}; \tag{1.15}$$

$$W = \begin{bmatrix} I & Y \\ 0 & I \end{bmatrix}, \quad W^{-1} = \begin{bmatrix} I & -Y \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

De (1.15) se deduce que

$$p(V) = W\, p\left(\begin{bmatrix} H & 0 \\ 0 & P \end{bmatrix} \right) W^{-1} =$$

$$= W \begin{bmatrix} p(H) & 0 \\ 0 & p(P) \end{bmatrix} W^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & Yp(P) \\ 0 & p(P) \end{bmatrix} \tag{1.16}$$

y teniendo en cuenta el cálculo polinomial, existe una matriz $N \in \mathbb{C}^{2nxp}$, tal que

$$p(V) = p\left(\left[\begin{array}{c|c} H & \begin{matrix}0\\S\end{matrix} \\ \hline 0 & P \end{array}\right] \right) = \begin{bmatrix} p(H) & N \\ 0 & p(P) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & N \\ 0 & p(P) \end{bmatrix} \tag{1.17}$$

De las ecuaciones (1.16) y (1.17) se deduce que la matriz $N = Y\,p(P)$ y, por el teorema de la aplicación espectral [7,p.569] y la condición (1.11), la matriz $p(P)$ es invertible. Entonces tenemos que $Y = N\left[p(P)\right]^{-1}$. Por otra parte, las potencias V^j, $0 \le j \le m$, tienen sus bloques $V^j_{1,2}$ y $V^j_{2,2}$ definidos por

$$V^0_{1,2} = 0 \,, \qquad V^0_{2,2} = I \,,$$

$$V_{1,2}^{j} = HV_{1,2}^{j-1} + \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix} V_{2,2}^{j-1} , \qquad V_{2,2}^{j} = P^{j} , \qquad 1 \le j \le m$$

Multiplicando la matriz $V_{1,2}^{j}$ por el coeficiente a_j para $0 \le j \le m$, y por adición se obtiene que el bloque (1,2) de la matriz p(V) viene dado por

$$N = \sum_{j=1}^{m} \sum_{h=1}^{j} a_j H^{h-1} \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix} P^{j-h} \tag{1.18}$$

y por (1.18), (1.12) y las relaciones $Z=[I,0]$, $Y=N\left[p(P)\right]^{-1}$, queda demostrado el teorema.

B.- CO-SOLUCIONES

DEFINICION 1.1 Dadas las matrices A_0 y A_1 de $\mathbb{C}^{nxn}$, decimos que el par de matrices (X,T) es una (n,q) co-solución de la ecuación

$$Z^2 + A_1 Z + A_0 = 0 , \tag{1.19}$$

si $X \in \mathbb{C}^{nxq}$, $T \in \mathbb{C}^{qxq}$, $X \neq 0$ y

$$XT^2 + A_1 XT + A_0 X = 0 \tag{1.20}$$

Si cada (X_j,T_j) es una (n,m_j) co-solución de (1.19) para $1\le j\le k$, diremos que el conjunto $\{(X_j,T_j);\ 1\le j\le k\}$ es un conjunto completo de k co-soluciones de (1.19) si la matriz $W = (W_{ij})$, con entradas $W_{ij} = X_jT_j^{i-1}$, para $1\le i\le 2$, $1\le j\le k$, es una matriz invertible de $\mathbb{C}^{2n\times 2n}$.

El siguiente teorema proporciona un conjunto completo de k co-soluciones para una ecuación matricial del tipo (1.19), y su demostración puede encontrarse en [19].

TEOREMA 1.2 *Consideremos la matriz* $C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}$ *y sea* $M = (M_{ij})$ *una matriz invertible de* $\mathbb{C}^{2n\times 2n}$, *con sus entradas* M_{ij} *pertenecientes a* $\mathbb{C}^{n\times m_j}$, $1\le j\le k$, $m_1+\ldots+m_k = 2n$, *de modo que*

$$M\,\mathrm{diag}(J_1,\ldots,J_k) = CM$$

donde $J_j \in \mathbb{C}^{m_j\times m_j}$. *Entonces el conjunto* $\{(M_{1s},J_s);\ 1\le s\le k\}$ *es un conjunto completo de* k *co-soluciones de* (1.19).

NOTA 1.1 Obsérvese que si (X,T) es una (n,p) co-solución de la ecuación (1.19), entonces

$$\begin{bmatrix} X \\ XT \end{bmatrix} T = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X \\ XT \end{bmatrix}$$

De esta forma, si v es un vector propio de T asociado al valor propio λ, se verifica que

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ XT \end{bmatrix} v = \begin{bmatrix} X \\ XT \end{bmatrix} Tv = \lambda \begin{bmatrix} X \\ XT \end{bmatrix} v$$

y en caso de que el rango de X sea $p \le n$, se deduce que

$$\begin{bmatrix} X \\ XT \end{bmatrix} v \neq 0, \qquad \lambda \in \sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} \right), y$$

(1.21) $$\sigma(T) \subset \sigma\left(\begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix} \right)$$

Por consiguiente, si la matriz $C = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -A_0 & -A_1 \end{bmatrix}$, satisface la condición espectral

(1.22) Si $z, w \in \sigma(C)$ y $z \neq w$, entonces $z-w$ no es un entero

entonces, para todo entero positivo $k \ge 1$, de (1.21) y (1.22) se sigue que

(1.23) $$\sigma(kI + T) \cap \sigma(C) = \emptyset$$

1.3. CONJUNTO FUNDAMENTAL DE SOLUCIONES

La próxima definición generaliza el concepto de par fundamental de soluciones, introducido en [17], para ecuaciones diferenciales matriciales de segundo orden del tipo

$$(1.24) \qquad Y''(t) + P(t)Y'(t) + Q(t)Y(t) = 0, \qquad t \in J$$

DEFINICION 1.2 Dadas las funciones P(t) y Q(t), contínuas en un intervalo J y con valores en $\mathbb{C}^{n\times n}$, consideremos un conjunto de funciones $\{Y_i(t);\ 1 \le i \le k\}$ dos veces contínuamente diferenciables en J donde cada $Y_i(t)$ toma valores en $\mathbb{C}^{n\times n_i}$ y satisface la ecuación diferencial (1.24).

Decimos que $\{Y_i(t);\ 1 \le i \le k\}$ es un conjunto fundamental de k soluciones de la ecuación (1.24), si para toda solución Y(t) de la misma, definida en J a valores en $\mathbb{C}^{n\times n}$, existen matrices $Q_i \in \mathbb{C}^{n_i \times n}$ únicamente determinadas por Y(t), tales que $n_1+\ldots+n_k = n$, y

$$(1.25) \qquad Y(t) = Y_1(t)Q_1 + Y_2(t)Q_2 + \ldots + Y_k(t)Q_k\ , \qquad t \in J$$

El siguiente resultado , que puede considerarse como un análogo a la fórmula de Liouville para el caso escalar, proporciona una útil caracterización de los conjuntos fundamentales de k soluciones de la ecuación (1.24).

LEMA 1.1 Sean $Y_i(t)$; $1\le i\le k$, soluciones de la ecuación (1.24) con valores en $\mathbb{C}^{nxn_i}$ y definidas en J, tales que la suma $n_1+\ldots+n_k = n$, y consideremos la matriz $W(t) \in \mathbb{C}^{2nx2n}$ definida por bloques de la forma

$$(1.26) \qquad W(t) = \begin{bmatrix} Y_1(t) & Y_2(t) & \ldots & Y_k(t) \\ Y_1'(t) & Y_2'(t) & \ldots & Y_k'(t) \end{bmatrix}$$

Entonces, el conjunto $\{Y_i(t);\ 1\le i\le k\}$ es un conjunto fundamental de k soluciones de (1.24) en J, si existe un punto $t_1\in J$ para el que $W(t_1)$ es una matriz invertible. En este caso $W(t)$ es invertible para todo $t\in J$.

Demostración Como $Y_i(t)$, con $1\le i\le k$, son soluciones de (1.24) valuadas en $\mathbb{C}^{nxn_i}$, es obvio que $W(t)$, definida por (1.26), satisface la ecuación

$$(1.27) \qquad W'(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ -Q(t) & -P(t) \end{bmatrix} W(t) , \qquad t\in J$$

Entonces si $G(t,s)$ es la matriz de transición de estados de (1.27) tal que $G(t,t) = I$, [24,p.598], se deduce que $W(t) = G(t,t_1)W(t_1)$, para todo $t\in J$. De este modo queda demostrado el resultado, pues las matrices Q_i, $1\le i\le k$, que deben verificar (1.25), vienen determinadas por la ecuación

$$\begin{bmatrix} Q_1 \\ Q_2 \\ \vdots \\ Q_k \end{bmatrix} = (W(t_1))^{-1} \begin{bmatrix} C_0 \\ C_1 \end{bmatrix}$$

donde $C_o = Y(t_1) \in \mathbb{C}^{nxn}$, $C_1 = Y'(t_1) \in \mathbb{C}^{nxn}$, son las condiciones iniciales del problema.

El siguiente resultado es un lema que utilizaremos en la próxima sección. Si Z es una matriz de $\mathbb{C}^{qxq}$, y $t>0$, denotamos por t^Z a la matriz $\exp(Z \ln t)$.

LEMA 1.2 Sea $J = (0,a)$ y consideremos la ecuación (1.1). Asumimos que para $1 \le i \le k$, las funciones matriciales $Y_i(t) = U_i(t)t^{Z_i}$ son soluciones de (1.1), donde $U_i(t)$ son funciones dos veces contínuamente diferenciables en $[0,a)$, y tales que $U_i(0) = C_i \in \mathbb{C}^{nxn_i}$, $Z_i \in \mathbb{C}^{n_i x n_i}$ y la matriz N definida por

$$N = \begin{bmatrix} C_1 & C_2 & \cdots & C_k \\ C_1 Z_1 & C_2 Z_2 & \cdots & C_k Z_k \end{bmatrix} \tag{1.28}$$

es una matriz invertible de $\mathbb{C}^{2nx2n}$.

Entonces $\{Y_i(t);\ 1 \le i \le k\}$ es un conjunto fundamental de k soluciones de (1.1) en el intervalo abierto $(0,a)$.

Demostración Obsérvese que la función matricial $W(t)$ definida en (1.26) correspondiente a las soluciones $Y_i(t) = U_i(t)t^{Z_i}$, toma la forma

$$W(t) = \mathrm{diag}(I, t^{-1}I)\ T(t)\ \mathrm{diag}(t^{Z_1}, \ldots, t^{Z_k}), \qquad t\in(0,a)$$

(1.29)

donde

$$T(t)=\left[\begin{array}{c|c|c|c} U_1(t) & U_2(t) & \ldots & U_k(t) \\ \hline tU_1'(t)+U_1(t)Z_1 & tU_2'(t)+U_2(t)Z_2 & \ldots & tU_k'(t)+U_k(t)Z_k \end{array}\right]$$

(1.30)

Nótese que $T(t)$ es una función contínua definida en $[0,a)$ y con valores en $\mathbb{C}^{2n\times 2n}$ y que $T(0)$ es la matriz invertible N definida por (1.28). En virtud del lema de perturbación [35,p.32], existe un intervalo $[0,b]$ con $b<a$ tal que $T(t)$ es invertible para todo $t \in [0,b]$. De la invertibilidad de $T(b)$ y de la expresión (1.29), se deduce que $W(b)$ es invertible. Finalmente, utilizando el lema 1.1, se concluye el resultado.

1.4. UN METODO DE FROBENIUS PARA LA RESOLUCION DE ECUACIONES DIFERENCIALES MATRICIALES CON COEFICIENTES ANALITICOS

Sean A(t) y B(t) funciones matriciales analíticas en $|t|<a$ cuyos desarrollos en serie de potencias de t escribimos a continuación:

$$A(t) = \sum_{j\geq 0} A_j t^j \ , \qquad B(t) = \sum_{j\geq 0} B_j t^j \ , \qquad |t|<a$$

con A_j, $B_j \in \mathbb{C}^{nxn}$. Ensayamos soluciones de la ecuación (1.1) de la forma

$$(1.31) \qquad X(t)=\left(\sum_{j\geq 0} C_j t^j \right) t^Z, \quad 0<t<a, \quad C_j \in \mathbb{C}^{nxp}, \ Z\in\mathbb{C}^{pxp}, \ p\leq n$$

Al efectuar derivadas formales en (1.31) se obtiene

$$(1.32) \qquad \begin{aligned} X'(t) &= \sum_{j\geq 0} C_j (jI+Z) t^{Z+(j-1)I}, \\ X''(t) &= \sum_{j\geq 0} C_j (jI+Z)(jI+Z-I) t^{Z+(j-2)I} \end{aligned}$$

Asumiendo la convergencia de las series (1.31) y (1.32), y sustituyéndolas en (1.1), se sigue que

$$\left\{\sum_{j\geq 0}\left[C_j(jI+Z)(jI+Z-I)+\sum_{q=0}^{j}A_{j-q}C_q(qI+Z)+\sum_{q=0}^{j}B_{j-q}C_q\right]t^j\right\}t^Z=0$$

(1.33)

AL igualar a la matriz nula los coeficientes de cada potencia t^j que aparecen en (1.33) se obtienen las siguientes ecuaciones algebraicas

$$C_oZ^2+(A_0-I)C_0Z+B_0C_0=0 \tag{1.34}$$

y

$$C_j(jI+Z)^2+(A_0-I)C_j(jI+Z)+B_0C_j=D_j\ , \qquad j\geq 1 \tag{1.35}$$

donde

$$D_j=-\sum_{q=0}^{j-1}A_{j-q}C_q(qI+Z)-\sum_{q=0}^{j-1}B_{j-q}C_q\ , \qquad j\geq 1 \tag{1.36}$$

Nótese que la ecuación (1.34) da a entender que si $C_0\neq 0$, el par (C_0,Z) es una (n,p) co-solución de la ecuación algebraica matricial

$$X^2+(A_0-I)X+B_0=0 \tag{1.37}$$

En adelante asumiremos que la matriz C,

$$C=\begin{bmatrix}0 & I\\ -B_0 & I-A_0\end{bmatrix} \tag{1.38}$$

satisface la condición espectral (1.22). Entonces tomando $S=D_j$, la única solución para C_j en (1.35) viene dada por el teorema 1.1. Nótese que la ecuación (1.35) es de la forma (1.10) con

$$P=Z+jI, \qquad Q=A_0-I, \qquad R=B_0,$$

(1.39)

$$S=D_j=-\sum_{q=0}^{j-1} A_{j-q}C_q(qI+Z) -\sum_{q=0}^{j-1} B_{j-q}C_q\ , \qquad j\geq 1$$

Si $p(z)=\sum_{v=o}^{m} a_v z^v$ es un polinomio anulador de la matriz C definida en (1.38), entonces bajo la hipótesis (1.22), tomando una matriz $M=(M_{ij})$ invertible de $\mathbb{C}^{2nx2n}$, cuyos bloques $M_{ij}\in\mathbb{C}^{nxn_j}$, $1\leq i\leq 2$, $1\leq j\leq k$;, y su inversa $M^{-1}=W=(W_{si})$, con entradas $W_{si}\in\mathbb{C}^{n_s xn}$, $1\leq i\leq 2$, $1\leq s\leq k$; y eligiendo $Z_s\in\mathbb{C}^{n_s xn_s}$ de modo que

$$\begin{bmatrix} 0 & I \\ -B_0 & I-A_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & \dots & M_{1k} \\ M_{21} & \dots & M_{2k} \end{bmatrix} \operatorname{diag}(Z_1, \ \dots, \ Z_k) \begin{bmatrix} W_{11} & W_{12} \\ \vdots & \vdots \\ W_{k1} & W_{k2} \end{bmatrix}$$

(1.40)

por el teorema 1.1, la única solución C_j de (1.35) viene dada por

$$C_j=\left(\sum_{v=1}^{m} \sum_{h=1}^{v} \sum_{s=1}^{k} a_v M_{1s} Z_s^{h-1} W_{s2} D_j (Z+jI)^{v-h} \right)\left(\sum_{v=0}^{m} a_v (Z+jI)^v \right)^{-1}$$

(1.41) $j\geq 1$

Nótese también, que en virtud del teorema 1.2, el conjunto $\{(M_{1s},Z_s);\ 1\le s\le k\}$, donde M_{1s} y Z_s vienen dados por (1.40), es un conjunto completo de k co-soluciones de la ecuación (1.37). De este modo podemos elegir cada una de las matrices Z_s como Z y los coeficientes $C_0(s)=M_{1s}$ como el primer coeficiente en la solución ensayada de (1.1) definida por (1.31). De esta forma obtenemos k soluciones en serie de la ecuación (1.1), que denominamos X(t,s), $1\le s\le k$, y vienen dadas por

$$X(t,s) = U(t,s)t^{Z_s} = \left(\sum_{j\ge 0} C_j(s)t^j\right)t^{Z_s}, \quad 0<t<a, \quad 1\le s\le k$$

(1.42)

donde los coeficientes de cada serie se definen por

$$C_j(s) =$$

(1.43)

$$= \left(\sum_{v=1}^{m}\sum_{h=1}^{v}\sum_{w=1}^{k} a_v M_{1w} Z_w^{h-1} W_{w2} D_j(s)(Z_s+jI)^{v-h}\right)\left(\sum_{v=0}^{m} a_v (Z_s+jI)^v\right)^{-1}$$

(1.44) $$D_j(s)=-\sum_{q=0}^{j-1} A_{j-q}C_q(s)(qI+Z_s) -\sum_{q=0}^{j-1} B_{j-q}C_q(s)\ , \quad j\ge 1$$

A continuación nos ocupamos de una cuestión que quedaba pendiente: la demostración de la convergencia de la solución en serie (1.31).

Ya que A(t) y B(t) son funciones analíticas, podemos afirmar, en virtud de las desigualdades de Cauchy, que existe una constante L tal que

$$\|A_j\|\rho^j \le L, \qquad \|B_j\|\rho^j \le L, \qquad 0<\rho<a, \qquad j\ge 0 \tag{1.45}$$

Tomando normas en (1.35) y (1.36), se sigue que

$$\begin{aligned} \|D_j\| &\ge \|C_j(jI+Z)^2\| - \Big(\|A_0-I\|\ \|jI+Z\| + \|B_0\|\Big)\|C_j\| \ge \\ &\ge \Big\{ j^2 - \Big(\|Z\|\ \|Z+2jI\| + \|A_0-I\|\ \|jI+Z\| + \|B_0\|\Big) \Big\} \|C_j\| \end{aligned} \tag{1.46}$$

$$\|D_j\| \le \sum_{q=0}^{j-1} \Big(\|A_{j-q}\|\ \|qI+Z\| + \|B_{j-q}\| \Big) \|C_q\| \tag{1.47}$$

y de (1.45)-(1.47) se deduce que

$$\begin{aligned} &\Big\{ j^2 - \Big(\|Z\|\ \|Z+2jI\| + \|A_0-I\|\ \|jI+Z\| + \|B_0\|\Big) \Big\} \|C_j\| \le \\ &\le L \sum_{q=0}^{j-1} \Big(\|qI+Z\| + 1 \Big) \rho^{q-j}\ \|C_q\| \end{aligned} \tag{1.48}$$

A continuación consideramos el primer entero positivo j_0 que verifica

$$(1.49)\qquad j_0^2 - \left(\|Z\|\ \|Z+2j_0I\| + \|A_0-I\|\ \|j_0I+Z\| + \|B_0\|\right) > 0$$

e introducimos la sucesión de escalares positivos γ_j tales que

$$\gamma_j = \|C_j\| , \qquad j = 0,1, \ldots ,j_o-1$$

y para $j\geq j_0$, los números γ_j vienen definidos por las ecuaciones

$$\left\{j^2 - \left(\|Z\|\ \|Z+2jI\| + \|A_0-I\|\ \|jI+Z\| + \|B_0\|\right)\right\} \gamma_j =$$

$$(1.50)\qquad = L \sum_{q=0}^{j-1} \left(\|qI+Z\| + 1 \right)\rho^{q-j}\ \gamma_q$$

Entonces para $j\geq 0$ se tiene que

$$(1.51)\qquad \gamma_j \geq \|C_j\|$$

De la definición de la sucesión $\{\gamma_j\}$ se deduce que

$$\frac{\gamma_{j+1}|t|^{j+1}}{\gamma_j|t|^j} =$$

$$=|t|\frac{L\sum_{q=0}^{j-1}(\|qI+Z\|+1)\rho^{q-j-1}\gamma_q + L(\|jI+Z\|+1)\rho^{-1}\gamma_j}{\left\{(j+1)^2-(\|Z\| \ \|Z+2(j+1)I\| + \|A_0-I\| \ \|(j+1)I+Z\| + \|B_0\|)\right\}\gamma_j}$$

$$=\frac{|t|\left\{j^2-(\|Z\|\|Z+2jI\| + \|A_0-I\|\|jI+Z\| + \|B_0\|) + L(\|jI+Z\|+1)\right\}\gamma_j}{\rho\left\{(j+1)^2-(\|Z\| \ \|Z+2(j+1)I\| + \|A_0-I\| \ \|(j+1)I+Z\| + \|B_0\|)\right\}\gamma_j}$$

(1.52)

De (1.51) y (1.52) resulta que

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\gamma_{j+1}|t|^{j+1}}{\gamma_j|t|^j} = \frac{|t|}{\rho}$$

y la serie $\sum_{j\geq 0}\|C_j t^j\|$ converge para $|t|<\rho<a$.

Por los comentarios precedentes y los lemas 1.1 y 1.2 ha quedado demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 1.3 *Sean* $A(t)=\sum_{j\geq 0}A_j t^j$ *y* $B(t)=\sum_{j\geq 0}B_j t^j$ *dos funciones analíticas en* $|t|<a$ *y con valores en* $\mathbb{C}^{n\times n}$, *consideremos la matriz* C *definida por* (1.38) *y asumamos la condición espectral* (1.22).

Si $p(z)=\sum_{v=0}^{m}a_v z^v$ *es un polinomio anulador de* C *y* $(M_{ij})=M$, $W=(W_{ij})$ *y* Z_s *son matrices que verifican* (1.40), *entonces las series de potencias generalizadas* X(t,s) *dadas por* (1.42), donde $C_o(s)=M_{1s}$ *y* $C_j(s)$ *vienen determinados por*

(1.43) *y* (1.44), *para* $j\geq 1$, $1\leq s\leq k$, *definen un conjunto fundamental de* k *soluciones de la ecuación diferencial matricial* (1.1) *en el dominio* $0<t<a$.

En particular, la solución general de (1.1) *para* $X(t)\in\mathbb{C}^n$ *en* $0<t<a$, *se puede expresar como*

$$X(t) = \sum_{s=1}^{k} X(t,s)Q_s = \sum_{s=1}^{k} U(t,s)t^{Z_s}Q_s\ , \qquad Q_s\in\mathbb{C}^{n_s\times n} \tag{1.53}$$

NOTA 1.1 El estudio de la ecuación diferencial de orden superior con coeficientes analíticos matriciales

$$t^n\, X^{(n)}(t) + t\, A_{n-1}(t)\, X^{(n-1)}(t) + \dots + A_0(t)\, X(t) = 0$$

con el mismo tratamiento que el dado en esta sección para la ecuación (1.1) y sin aumentar la dimensión del problema, puede encontrarse en [34].

CAPITULO II

UN METODO DE FROBENIUS PARA LA RESOLUCION DE LA ECUACION DIFERENCIAL MATRICIAL DE BESSEL

2.1 INTRODUCCION

En el capítulo I hemos comentado algunos resultados sobre ecuaciones diferenciales matriciales de segundo orden de la forma $t^2X''(t) + tA(t)X'(t) + B(t)X(t) = 0$, donde $A(t)$ y $B(t)$ son funciones matriciales analíticas. Una de estas ecuaciones es la del tipo Bessel de gran aplicación en problemas de Química , Física y Mecánica, (véase [25],[36]):

$$(2.1) \qquad t^2X''(t) + tX'(t) + (t^2I - A^2)X(t) = 0, \qquad 0<t<\infty$$

donde A es una matriz cuadrada de $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Obsérvese que la ecuación (2.1) es un sistema de ecuaciones escalares de Bessel acopladas que no puede desacoplarse si la matriz A es no diagonalizable. Las técnicas usuales para estudiar problemas relacionados con (2.1) se basan, como ya indicamos en la introducción, en considerar un sistema equivalente de primer orden, [3],[12], pero este método tiene el inconveniente computacional del aumento de la dimensión del problema y además, no aporta una solución explícita, tal como sucede en el caso escalar cuando usamos el método de Frobenius.

El presente capítulo está organizado del siguiente modo. En la sección 2, ensayamos soluciones formales en serie de (2.1) de la forma:

$$(2.2) \qquad X(t) = \left(\sum_{k\geq 0} C_k \, t^k \right) t^Z, \qquad C_k \in \mathbb{C}^{nxn},\ Z \in \mathbb{C}^{nxn}$$

y resolvemos la ecuación matricial algebraica que verifican los coeficientes C_k, que es del tipo Sylvester:

$$(2.3) \qquad A_1 + B_1 Y - YD_1 = 0, \qquad A_1, B_1, D_1 \in \mathbb{C}^{nxn}$$

El caso en que la matriz A es invertible también se estudia en la sección 2. En la sección 3, estudiamos el caso en que A es singular y finalmente, en la sección 4, obtenemos, bajo hipótesis adecuadas,una expresión para la solución general del problema no homogéneo

$$(2.4) \qquad t^2X''(t) + tX'(t) + (t^2I - A^2)X(t) = F(t), \qquad 0<t<\infty$$

donde F(t) es una función contínua con valores en $\mathbb{C}^n$.

Es de señalar finalmente que un extracto de este capítulo se puede consultar en las referencias [23] y [33].

2.2 EL CASO EN QUE A ES INVERTIBLE Y F(t)=0

Vamos a ensayar soluciones en serie de la forma indicada en (2.2) para la ecuación (2.1), donde C_k y Z son matrices de $\mathbb{C}^{nxn}$ a determinar. Efectuando las derivadas formales obtenemos

$$X'(t) = \sum_{k\geq 0} C_k (kI+Z)\ t^{Z+(k-1)I}$$

(2.5)

$$X''(t) = \sum_{k\geq 0} C_k (kI+Z)(kI+Z-I)\ t^{Z+(k-2)I}$$

Asumiendo por el momento la convergencia de las series (2.2) y (2.5), y sustituyéndolas en la ecuación (2.1), ésta queda del siguiente modo:

$$\left(\sum_{k\geq 0} \left[C_k(kI+Z)(kI+Z-I)+C_k(kI+Z)-A^2C_k \right] t^k + \sum_{k\geq 2} C_{k-2} t^k \right) t^Z=0$$

(2.6)

Al igualar a cero los coeficientes de cada potencia t^k, se observa que las matrices C_k deben satisfacer las ecuaciones

(2.7) $$C_0Z^2 - A^2C_0 = 0$$

(2.8) $$C_1(Z+I)^2 - A^2C_1 = 0$$

(2.9) $$C_k(kI+Z)^2 - A^2C_k = -C_{k-2}, \quad k\geq 2$$

Nótese que las ecuaciones para los coeficientes C_k son del tipo indicado en (2.3). EL siguiente teorema proporciona la resolución de estas ecuaciones.

TEOREMA 2.1. *Sean las matrices* B_1 *y* D_1 *de* $\mathbb{C}^{nxn}$ *que satisfacen la condición espectral*

(2.10) $$\sigma(B_1) \cap \sigma(D_1) = \emptyset$$

y sea $p(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *un polinomio anulador de* B_1*. Entonces la única solución* X *de la ecuación* (2.3) *viene dada por*

(2.11) $$X = \left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{j} a_j B_1^{h-1} A_1 D_1^{j-h} \right) \left(\sum_{j=o}^{n} a_j D_1^j \right)^{-1}$$

Demostración. Podemos identificar (2.3) con la ecuación (1.14) tomando

(2.12) $$A_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ S \end{bmatrix}, \qquad B_1=H, \qquad D_1=P$$

De esta forma, la hipótesis (2.10) coincide con la condición (1.11) y la única solución de (2.3) viene dada por

(2.13) $$X = N\left[p(D_1)\right]^{-1}$$

donde N es, según (1.18),

(2.14) $$N = \sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{j} a_j B_1^{h-1} A_1 D_1^{j-h}$$

De este modo queda demostrado el teorema.

Una vez resuelta la ecuación (2.3) mediante el teorema 2.1, estamos en condiciones de determinar los coeficientes C_k de la serie (2.2) que satisfacen las relaciones (2.7),(2.8) y (2.9).

Dada la matriz invertible A, y sean Z y C_0 matrices invertibles de $\mathbb{C}^{nxn}$ tales que

(2.15) $$Z = C_0^{-1} A C_0$$

entonces

(2.16) $$\sigma(A) = \sigma(Z) , \quad Z^2 = C_0^{-1} A^2 C_0 , \quad C_0 Z^2 - A^2 C_0 = 0$$

y la ecuación (2.7) queda satisfecha.

En orden a determinar el resto de coeficientes, asumiremos la siguiente condición:

CONDICION 2.1 *Para todo valor propio* $z \in \sigma(A)$, $2z$ *no es un entero, y si* z, w *pertenecen a* $\sigma(A)$, *y* $z \neq w$, *entonces* $z \pm w$ *no es un entero.*

Entonces, por el teorema 2.1, la única solución de la ecuación (2.8) para C_1, es la matriz nula $C_1 = 0$. De (2.9), se sigue que $C_{2m+1} = 0$ para $m \geq 0$. Para obtener los coeficientes C_{2m}, tomamos un polinomio anulador de la matriz A^2,

$$p(z) = \sum_{j=0}^{n} a_j \, z^j \ , \qquad p(A^2) = 0 \tag{2.17}$$

Bajo las hipótesis de la condición 2.1, tenemos que

$$\sigma\left((kI + Z)^2\right) \cap \sigma\left(A^2\right) = \emptyset \ , \qquad k \geq 1$$

y por el teorema 2.1, la única solución C_{2m} de la ecuación

$$A^2 C_{2m} - C_{2m}(2mI + Z)^2 = C_{2m-2} \ , \qquad m \geq 1 \tag{2.18}$$

viene dada por la expresión

$$C_{2m} = -\left(\sum_{j=1}^{n} \sum_{h=1}^{j} a_j A^{2h-2} C_{2m-2} (2mI+Z)^{2(j-h)}\right)\left(\sum_{j=o}^{n} a_j (2mI+Z)^{2j}\right)^{-1}$$
(2.19)

Calculados los coeficientes de la serie (2.2), en el siguiente párrafo nos ocupamos de probar la convergencia de la misma. Puesto que la solución en serie hallada X(t) para la ecuación (2.1) depende de las matrices invertibles Z y C_0, escribimos dicha solución como sigue

$$(2.20) \qquad X(t,Z,C_0) = U(t,Z,C_0)\ t^Z = \left(\sum_{m\geq 0} C_{2m}\ t^{2m}\right) t^Z , \qquad t>0$$

Tomando normas en (2.18), tenemos para grandes valores de m, que

$$\|C_{2m-2}\| = \|C_{2m}(2mI+Z)^2 - A^2C_{2m}\| \geq$$

$$\geq \|C_{2m}(2mI+Z)^2\| - \|A^2C_{2m}\| \geq$$

$$\|C_{2m}\|\left(4m^2 - 4m\|Z\| - \|Z^2\| - \|A^2\|\right)$$

Y el cociente

$$\frac{\|C_{2m}\|\ |t|^{2m}}{\|C_{2m-2}\|\ |t|^{2m-2}} \leq \frac{|t|^2}{4m^2 - 4m\|Z\| - \|Z^2\| - \|A^2\|}$$

por lo que la serie (2.20) es absolutamente convergente para t>0.

Con el fin de encontrar un conjunto fundamental de soluciones, vamos a construir una segunda solución de (2.1) de la forma

$$X(t,-Z,C_0) = U(t,-Z,C_0)\ t^{-Z} = \left(\sum_{k\geq 0} C_k^*\ t^k\right) t^{-Z} \tag{2.21}$$

donde C_0 es una matriz que satisface (2.15). De forma análoga a la construcción de $X(t,Z,C_0)$, es fácil mostrar que las matrices C_k^* , que aparecen en (2.21), con $k\geq 0$ y $C_0 = C_0^*$, deben verificar las ecuaciones

$$C_0^* Z^2 - A^2 C_0^* = 0$$

$$C_1^*(I-Z)^2 - A^2 C_1^* = 0 \tag{2.22}$$

$$C_k^*(kI-Z)^2 - A^2 C_k^* = -C_{k-2}^*, \quad k\geq 2$$

Por la condición 2.1 y el teorema 2.1, a partir de (2.22) se deduce que $C_1^* = C_{2m+1}^* = 0$, y

$$C_{2m}^* = -\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{j} a_j A^{2h-2} C_{2m-2}^* (2mI-Z)^{2(j-h)}\right)\left(\sum_{j=o}^{n} a_j (2mI-Z)^{2j}\right)^{-1}$$

(2.23)

La convergencia de la serie (2.21) se demuestra de modo análogo a la de la serie (2.20).

Nos centramos ahora en demostrar que el par de soluciones halladas $\left\{X(t,Z,C_0),\ X(t,-Z,C_0)\right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.1) bajo las hipótesis dadas en la condición 2.1. De acuerdo con el lema 1.1 para el caso k=2, demostraremos que existe $t_1>0$ de modo que el operador Wronsky, W(t), es invertible en $t=t_1$. Teniendo en cuenta (2.20) y (2.21), W(t)=

$$=\begin{bmatrix} U(t,Z,C_0)t^Z & U(t,-Z,C_0)t^{-Z} \\ U'(t,Z,C_0)t^Z+U(t,Z,C_0)Zt^{Z-I} & U'(t,-Z,C_0)t^{-Z}-U(t,-Z,C_0)Zt^{-Z-I} \end{bmatrix}$$

Esta expresión puede escribirse

$$W(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I/t \end{bmatrix} T(t) \begin{bmatrix} t^Z & 0 \\ 0 & t^{-Z} \end{bmatrix} \tag{2.24}$$

donde

$$T(t)=\begin{bmatrix} U(t,Z,C_0) & U(t,-Z,C_0) \\ U'(t,Z,C_0)t+U(t,Z,C_0)Z & U'(t,-Z,C_0)t-U(t,-Z,C_0)Z \end{bmatrix}$$

(2.25)

De (2.24), se sigue que W(t) es invertible para t>0 si, y sólo si, T(t) es invertible. Por otra parte, T(t) es una función matricial analítica definida para todo $t \in \mathbb{R}$ y tal que

$$(2.26) \qquad T(0) = \begin{bmatrix} C_0 & C_0 \\ C_0 Z & -C_0 Z \end{bmatrix}$$

Nótese que, la matriz $T(0)$ es invertible por serlo las matrices C_0 y Z. Ahora, debido a la continuidad de $T(t)$ en $t=0$, y por el lema de perturbación ,[35,p.32], existe un número positivo t_1 tal que $T(t)$ es invertible en $[0,t_1]$. Esto prueba la invertibilidad de $W(t_1)$ y así, queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 2.2 *Sea* A *una matriz invertible de* $\mathbb{C}^{nxn}$ *que satisface la condición* 2.1, *y dadas unas matrices* C_0 *y* Z *que cumplan* (2.15), *entonces el par de soluciones matriciales de* (2.1), $X(t,Z,C_0)$ y $X(t,-Z,C_0)$, *dadas por las ecuaciones* (2.20) *y* (2.21) *respectivamente, es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación* (2.1) *para* $t>0$.

2.3 EL CASO EN QUE A ES SINGULAR Y F(t) = 0

Comenzaremos esta sección considerando la ecuación (2.1) para el caso en que A sea una matriz nilpotente de índice $p>2$, es decir, $A^{p-1} \neq 0$ y $A^p = 0$. Nuestro interés se centra en obtener un par fundamental de soluciones de (2.1) para $t>0$. La primera solución

$$X_1(t) = X(t,Z,C_0) = U(t,Z,C_0)\, t^Z \tag{2.27}$$

se construye como en el caso escalar tomando una matriz invertible C_0 de $\mathbb{C}^{n\times n}$ y

$$Z = C_0^{-1} A\, C_0 \,, \qquad \sigma(A) = \sigma(Z) = \{0\}$$

De modo análogo al caso en que A es invertible se obtiene que $C_{2m+1} = 0$, $m\geq 0$. Tomando el polinomio anulador de A, $p(z)=z^q$, tal que $q = E\left[\frac{p+1}{2}\right]$, la parte entera de $\frac{p+1}{2}$, se sigue que los coeficientes C_{2m} de $X_1(t)$ vienen dados, en virtud del teorema 2.1, por

$$C_{2m} = -\sum_{h=1}^{q} A^{2h-2} C_{2m-2} (2mI+Z)^{-2h} \tag{2.28}$$

Para obtener un par fundamental de soluciones de (2.1), buscamos una segunda solución $X_2(t)$ de la forma

$$X_2(t) = X_1(t)\ln(t) + \Psi(t)$$

(2.29)
$$\Psi(t) = \left(\sum_{k\geq 0} B_k\, t^k \right) t^Z \, , \qquad B_k \in \mathbb{C}^{nxn}, \quad Z \in \mathbb{C}^{nxn}$$

donde $Z = C_o^{-1}AC_0$, siendo C_0 la matriz invertible elegida para la construcción de la primera solución $X_1(t)$ y B_k con $k\geq 0$, coeficientes matriciales que debemos determinar. Al exigir que $X_2(t)$ sea solución de (2.1), tenemos que $\Psi(t)$ ha de verificar

$$t^2\Psi''(t) + t\Psi'(t) + (t^2I - A^2)\Psi(t) + 2tX_1'(t) = 0 \tag{2.30}$$

La ecuación (2.30) implica que los coeficientes B_k deben satisfacer las ecuaciones

$$B_0Z^2 + 2C_0Z - A^2B_0 = 0 \tag{2.31}$$

$$B_1(Z+I)^2 - A^2B_1 = 0 \tag{2.32}$$

$$B_k(kI+Z)^2 + 2C_k(kI+Z) - A^2B_k = -B_{k-2}, \quad k\geq 2 \tag{2.33}$$

Teniendo en cuenta que $\sigma(A^2) \cap \sigma((Z+I)) = \emptyset$ y el teorema 2.1, se sigue que $B_1=0$, y por el mismo teorema y la ecuación (2.33), los coeficientes $B_{2k+1}=0$ para $k\geq 1$. Los coeficientes B_{2m} vienen determinados por la expresión

(2.34) $$B_{2m} = -\sum_{h=1}^{q} A^{2h-2}\left(B_{2m-2}+2C_{2m}(2mI+Z)\right)(2mI+Z)^{-2h}, \quad m\geq 1$$

si asumimos por el momento que la ecuación (2.31) tiene solución. En lo que sigue, vamos a probar que, en efecto, la ecuación (2.31) es compatible bajo cierta condición.

Si tomamos la matriz C_0 de modo que $Z = C_0^{-1}AC_0$ sea la forma reducida de Jordan de A, tenemos que, por ser A nilpotente,

(2.35) $$Z=\mathrm{diag}(Z_1,\dots,Z_l), \quad Z_i\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i}, \quad 1\leq i\leq l, \quad n_1+\dots+n_l=n$$

(2.36) $$Z_i = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Nótese que efectuando el cambio $X = C_0^{-1}B_0$, la ecuación (2.31) toma la forma

(2.37) $$Z^2X - XZ^2 = 2Z$$

Ahora vamos a construir soluciones X de (2.37) de la forma

(2.38) $$X=\mathrm{diag}(X_1,\ldots,X_l),\quad X_i\in\mathbb{C}^{n_i\times n_i},\quad 1\le i\le l$$

De este modo, la ecuación (2.37) se traduce en l ecuaciones

(2.39) $$Z_i^2X_i - X_iZ_i^2 = 2Z_i\ ,\quad 1\le i\le l$$

Escribimos la matriz X_i de la forma

$$X_i=\left(x_i(r,s)\right)_{1\le r,s\le n_i}$$

Es fácil observar que para r>s las componentes $x_i(r,s)$ de las posibles soluciones de (2.39) se anulan. Si r=s las componentes $x_i(s,s)$ deben verificar el sistema algebraico

(2.40) $$\begin{aligned} x_i(3,3) - x_i(1,1) &= 0\\ x_i(4,4) - x_i(2,2) &= 0\\ &\vdots\\ x_i(n_i,n_i) - x_i(n_i-2,n_i-2) &= 0 \end{aligned}$$

Esto significa que la diagonal principal de X_i posee dos parámetros libres $x_i(1,1)$ y $x_i(2,2)$ y el resto de componentes de la diagonal principal viene dado por (2.40).

Si consideramos s=r+1, entonces la consistencia de

(2.39) requiere que sea compatible el sistema algebraico:

$$
(2.41)\qquad
\begin{aligned}
x_i(3,2) &= 2\\
x_i(4,3) - x_i(2,1) &= 2\\
x_i(5,4) - x_i(3,2) &= 2\\
&\vdots\\
x_i(n_i,n_i-1) - x_i(n_i-2,n_i-3) &= 2\\
- x_i(n_i-1,n_i-2) &= 2
\end{aligned}
$$

Es fácil demostrar que el sistema (2.41) es compatible si, y sólo si, n_i es impar y que en este caso la solución única de (2.41) viene dada por

$$
(2.42)\qquad
\begin{bmatrix}
x_i(2,1)\\
x_i(3,2)\\
x_i(4,3)\\
x_i(5,4)\\
\vdots\\
x_i(n_i-2,n_i-3)\\
x_i(n_i-1,n_i-2)\\
x_i(n_i,n_i-1)
\end{bmatrix}
=
\begin{bmatrix}
-n_i+1\\
2\\
-n_i+3\\
4\\
\vdots\\
n_i-3\\
-2\\
n_i-1
\end{bmatrix}
$$

Por último, si s>r+1, la consistencia de la ecuación matricial (2.39) implica que

$$x_i(3,h) - x_i(1,h-2) \;;\quad x_i(4,h+1) - x_i(2,h-1) = 0 \;;\ldots$$

(2.43)

$$\ldots\ x_i(n_i-h+3,n_i) - x_i(n_i-h+1,n_i-2) = 0\ , \qquad 3\le h\le n_i$$

El sistema homogéneo (2.43) tiene dos parámetros libres $x_i(1,h-2)$ y $x_i(2,h-1)$ correspondientes a cada diagonal superior con $3\le h\le n_i$.

Por otra parte, es fácil comprobar que si Z_i es un bloque nilpotente de Jordan de tamaño impar n_i definido por (2.36) y $X_i\in \mathbb{C}^{n_i x n_i}$, entonces la matriz $Z_iX_i - X_iZ_i$ es triangular superior y los elementos de su diagonal principal tienen los valores

$$(2.44)\qquad \left(Z_iX_i - X_iZ_i\right)_{s,s} =$$

$$= \begin{cases} x_i(2,1) = -n_i+1, \text{ si } s=1 \\ -x_i(n_i,n_i-1) = -n_i+1, \text{ si } s=n_i \\ x_i(s+1,s) - x_i(s,s-1) = \begin{cases} -n_i+1, \text{ si } s \text{ es impar, } 1<s<n_i \\ n_i+1, \text{ si es par, } 1<s<n_i \end{cases} \end{cases}$$

Los comentarios anteriores referentes a la ecuación (2.31), demuestran el siguiente teorema:

TEOREMA 2.3 *Sea* Z *una matriz diagonal por bloques del tipo* (2.35), *cuyos bloques* Z_i *de dimensiones* $n_i x n_i$ *son todos nilpotentes y* n_i *es un entero impar para todo* i, *con* $1\le i\le l$. *Entonces la ecuación* (2.37) *es compatible y un* *conjunto de soluciones* X *viene dado por* (2.41)-(2.43). *Por otra parte, para cada una de estas soluciones* X, *el espectro de* ZX-XZ *es*

$$\sigma(ZX - XZ) = \{-n_1+1,\ n_1+1,\ -n_2+1,\ n_2+1,\ \quad ,-n_l+1,\ n_l+1\}$$

(2.45)

A continuación demostraremos la convergencia de la serie formal $X_2(t)$ definida por (2.29) para el caso en que B_0 sea solución de (2.31). Obsérvese que, dada la matriz nilpotente $A\neq 0$, su forma canónica de Jordan $Z = C_0^{-1}AC_0$ verifica que $\|Z\| = \|Z^2\| = 1$. Definimos por Q_{2m} y K_{2m} las matrices

$$Q_{2m} = C_0^{-1}C_{2m}\ , \qquad K_{2m} = C_0^{-1}B_{2m}\ , \qquad m\geq 1$$

Para valores pares de k, la ecuación (2.33) se puede escribir de la forma

$$(2.46)\qquad K_{2m}(2mI+Z)^2 - Z^2K_{2m} + 2Q_{2m}(2mI+Z) = -K_{2m-2},\quad m\geq 1$$

Tomando normas en (2.46), se sigue que

$$\|K_{2m-2}\| \geq \|K_{2m}\|(4m^2-4m-2) - 2\|Q_{2m}\|(2m+1)\ , \quad m\geq 1$$

por lo que

$$4(m-2)^2\|K_{2m}\| \le \|K_{2m-2}\| + 2\|Q_{2m}\|(2m+1) , \quad m\ge 3$$

Escribamos las anteriores desigualdades para "m"=3,4,5,..,m-1,m:

$$(2.47) \qquad \begin{array}{rcl} 4(1)^2\|K_6\| & \le & \|K_4\| + 2.7\|Q_6\| \\ 4(2)^2\|K_8\| & \le & \|K_6\| + 2.9\|Q_8\| \\ 4(3)^2\|K_{10}\| & \le & \|K_8\| + 2.11\|Q_{10}\| \\ \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots \\ 4(m-3)^2\|K_{2m-2}\| & \le & \|K_{2m-4}\| + 2(2m-1)\|Q_{2m-2}\| \\ 4(m-2)^2\|K_{2m}\| & \le & \|K_{2m-2}\| + 2(2m+1)\|Q_{2m}\| \end{array}$$

Si multiplicamos la primera desigualdad de (2.47) por 1^2, la segunda por 4.1^2, la tercera por $4^2.1^2.2^2$, la cuarta por $4^3.1^2.2^2.3^2$, .., y la última por $4^{m-3}((m-3)!)^2$, y sumamos las desigualdades resultantes, obtenemos

$$(2.48) \qquad 2^{2(m-2)}((m-2)!)^2\|K_{2m}\| \le$$

$$\le \|K_4\| + 2\Big(7\|Q_6\| + 9.4\|Q_8\| + 11.4^2.2^2\|Q_{10}\| + \ldots. \\ + \ldots. + (2m+1).4^{m-3}((m-3)!)^2\|Q_{2m}\|\Big)$$

Por otra parte, por la ecuación (2.18), tenemos

$$(2.49) \qquad Q_{2m}(2mI + Z)^2 - Z^2Q_{2m} = - Q_{2m-2} , \quad m\ge 1$$

entonces, tomando normas y teniendo en cuenta que $\|Z^2\| = 1$, se sigue que

$$\|Q_{2m-2}\| \geq 4(m-2)^2 \|Q_{2m}\| \qquad m\geq 3$$

y de aquí,

$$\|Q_{2m}\| \leq \frac{1}{2^{2(m-2)}((m-2)!)^2} \|Q_4\| \ , \qquad m\geq 3 \tag{2.50}$$

De las desigualdades (2.48) y (2.50) se tiene que

$$2^{2(m-2)}((m-2)!)^2 \|K_{2m}\| \leq \tag{2.51}$$

$$\leq \|K_4\| + 2\|Q_4\| \left(\frac{7}{4.1^2} + \frac{9.4}{4^2(2!)^2} + \frac{11.4^2.2^2}{4^3(3!)^2} +\ldots \right.$$

$$\left. \ldots + (2m+1) \frac{4^{m-3}((m-3)!)^2}{4^{m-2}((m-2)!)^2} \right)$$

$$2^{2(m-2)}((m-2)!)^2 \|K_{2m}\| \leq \tag{2.52}$$

$$\leq \|K_4\| + \frac{1}{2}\|Q_4\| \left(7 + \frac{9}{2^2} + \frac{11}{3^2} +\ldots+ \frac{2m+1}{(m-2)^2} \right)$$

y teniendo en cuenta que

$$\frac{2m+1}{(m-2)^2} < \frac{1}{m-5} \quad , \qquad m>5$$

se sigue que

$$2^{2(m-2)}((m-2)!)^2\|K_{2m}\| \leq$$

$$\leq \|K_4\| + \|Q_4\|\Big(6 + 1 + 1/2 + 1/3 +\ldots+ 1/(m-5)\Big)$$

Si llamamos $H_n = 1 + 1/2 + \ldots + 1/n$, entonces de la anterior desigualdad tenemos la siguiente cota para $\|K_{2m}\|$

$$\|K_{2m}\| \leq \frac{\|K_4\| + \|Q_4\|(6 + H_{m-5})}{2^{2(m-2)}((m-2)!)^2} \quad , \qquad m\geq 3 \tag{2.53}$$

Denominando β_{2m} al segundo miembro de (2.53), y por la convergencia de la serie $\sum_{m\geq 3}\beta_{2m}t^{2m}$, se concluye la prueba de la convergencia absoluta de la serie matricial

$$\sum_{m\geq 1} K_{2m}t^{2m} \quad , \qquad t>0$$

Como $B_{2m} = C_0K_{2m}$, queda demostrada la convergencia absoluta de la solución en serie $X_2(t)$ definida por (2.29).

A continuación demostraremos que dada una solución B_0 de (2.31) del tipo mostrado por el teorema 2.3, entonces el par de soluciones $X_1(t)$, $X_2(t)$, definidas por (2.27) y (2.29), respectivamente, es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.1) para $t>0$.

Llamamos $V(t,Z,C_0)$ a la función analítica matricial para $-\infty<t<\infty$ definida por

$$X_2(t) = X_1(t)\ \ln(t) + V(t,Z,C_0)t^Z =$$

(2.54)

$$= U(t,Z,C_0)t^Z\ln(t) + V(t,Z,C_0)t^Z$$

El operador Wronsky asociado al par $\{X_1(t),X_2(t)\}$, se puede escribir como

$$W(t) = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I/t \end{bmatrix} H(t) \begin{bmatrix} t^Z & 0 \\ 0 & t^Z \end{bmatrix}$$

(2.55)

$$H(t) = J(t) \begin{bmatrix} I & I\ln(t) \\ 0 & I \end{bmatrix}, \qquad t>0$$

donde

(2.56) $$J(t) =$$

$$\begin{bmatrix} U(t,Z,C_0) & V(t,Z,C_0) \\ U'(t,Z,C_0)t+U(t,Z,C_0)Z & U(t,Z,C_0)+V'(t,Z,C_0)t+V(t,Z,C_0)Z \end{bmatrix}$$

Nótese que de (2.55) y (2.56), se deduce que $W(t)$ es invertible para $t>0$ si, y sólo si, $J(t)$ es invertible. Por otra parte, ya que $J(t)$ es analítica para toda la recta real y debido al lema de perturbación, la invertibilidad de

$J(t)$ en un intervalo $[0,t_1]$ se asegura si $J(0)$ es invertible. Obsérvese que de la definición de $J(t)$ tenemos

$$J(0) = \begin{bmatrix} U(0,Z,C_0) & V(0,Z,C_0) \\ U(0,Z,C_0)Z & U(0,Z,C_0)+V(0,Z,C_0)Z \end{bmatrix} =$$

(2.57)
$$= \begin{bmatrix} C_0 & B_0 \\ C_0Z & C_0 + B_0Z \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} I & 0 \\ C_0ZC_0^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_0 & 0 \\ 0 & C_0+B_0Z-C_0ZC_0^{-1}B_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & C_0^{-1}B_0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

De (2.57), y ya que C_0 es invertible, se deduce que $J(0)$ es invertible si, y sólo si, la matriz $C_0+B_0Z-C_0ZC_0^{-1}B_0$ es invertible. Nótese que esta matriz se puede escribir

$$C_0 + B_0Z - C_0ZC_0^{-1}B_0 = C_0\left(I - C_0^{-1}B_0Z - ZC_0^{-1}B_0\right) =$$

(2.58)
$$= C_0\left(I + XZ - ZX\right) \;, \quad X = C_0^{-1}B_0$$

En virtud del teorema 2.3, tomando X como una solución de (2.38) dada por tal teorema, el espectro de ZX-XZ no contiene el entero 1, por lo que I+XZ-ZX es invertible, y de (2.58) se sigue que $C_0+B_0Z-C_0ZC_0^{-1}B_0$ es también invertible. De este modo queda demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 2.4 *Consideremos la ecuación* (2.1) *donde* A *es una matriz nilpotente de índice* $p>2$, *tal que todos los bloques de Jordan de* A *tienen dimensión impar. Entonces tomando una matriz invertible* C_0 *tal que* $Z=C_0^{-1}AC_0$ *es la forma canónica de Jordan de* A, *y eligiendo* $B_0=C_0X$, *donde* X *es una solución de* (2.38) *construida según el teorema* 2.3, *el par de funciones matriciales* $\{X_1(t),X_2(t)\}$ *dada por* (2.28) *y* (2.29) *respectivamente, define un conjunto fundamental de soluciones de* (2.1) para $0<t<\infty$.

Terminaremos esta sección considerando el caso en que A es una matriz singular de $\mathbb{C}^{nxn}$ que posee las siguientes propiedades espectrales:

CONDICION 2.2 *Los bloques nilpotentes de Jordan de* A *son de dimensión impar, y si* z,w *son dos valores propios distintos y no nulos de* A, *entonces* $z+w$ *y* $z-w$ *no son enteros.*

Por el 7.2.1 de [1,p.122], dada una matriz singular A, existe una matriz invertible $P \in \mathbb{C}^{nxn}$ tal que

$$(2.59) \qquad A = P^{-1}\begin{bmatrix} R & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P \qquad \begin{array}{l} R \in \mathbb{C}^{rxr} \text{invertible} \\ N \in \mathbb{C}^{(n-r)x(n-r)} \text{nilpotente} \end{array}$$

Ahora consideremos la transformación

$$(2.60) \qquad PX = Y$$

Bajo (2.60), la ecuación (2.1) se separa en dos:

$$(2.61) \qquad t^2Y_R''(t) + tY_R'(t) + (t^2I - R^2)Y_R(t) = 0, \; Y_R \in \mathbb{C}^{r\times r}$$

$$(2.62) \qquad t^2Y_N''(t) + tY_N'(t) + (t^2I-N^2)Y_N(t) = 0, \; Y_N \in \mathbb{C}^{n-r\times n-r}$$

Asumiendo la condición 2.2 y por los teoremas 2.2 y 2.4, las ecuaciones (2.61) y (2.62) tienen los conjuntos fundamentales de soluciones respectivos $\{Y_{R1}(t), Y_{R2}(t)\}$ y $\{Y_{N1}(t), Y_{N2}(t)\}$, ambos para $t>0$.

Entonces el par de soluciones

$$(2.63) \qquad Y_i(t) = \operatorname{diag}\left(Y_{Ri}(t), Y_{Ni}(t)\right), \; Y_i(t) \in \mathbb{C}^{n\times n}, \; i=1,2.$$

forma un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$(2.64) \qquad t^2PX''(t)+tPX'(t)+(t^2I-\operatorname{diag}(R^2,N^2)PX(t) = 0, \; t>0$$

y $X_i(t) = P^{-1}Y_i(t)$, $i=1,2$, es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.1). Por consiguiente, ha sido demostrado el siguiente resultado.

COROLARIO 2.1 *Sea A un matriz de* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *que satisface la condición espectral* 2.2. *Entonces la ecuación* (2.1) *admite un par fundamental de soluciones para* $t>0$.

2.4 EL PROBLEMA NO HOMOGENEO

En esta sección, utilizaremos el concepto de conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.1), para obtener una expresión de la solución general de la ecuación vectorial no homogénea (2.4) para t>0. Nótese que en el intervalo $0<t<\infty$, la ecuación (2.4), se puede escribir de la forma

$$X''(t) + t^{-1}X'(t) + \left(I - \frac{A^2}{t^2} \right)X(t) = \frac{F(t)}{t^2} \tag{2.65}$$

Tomemos un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (2.1), $\{X_1(t),X_2(t)\}$, bajo la condición 2.2. Ahora busquemos un vector solución particular de (2.65) asumiendo que F(t) es una función contínua para t>0. Para ello, consideremos funciones vectoriales $C_1(t)$ y $C_2(t)$ con valores en $\mathbb{C}^n$, para las que

$$W(t)\begin{bmatrix} C_1'(t) \\ C_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ t^{-2}F(t) \end{bmatrix} \; ; \; W(t) = \begin{bmatrix} X_1(t) & X_2(t) \\ X_1'(t) & X_2'(t) \end{bmatrix} \tag{2.66}$$

Entonces la función vectorial

$$Z(t) = X_1(t)C_1(t) + X_2(t)C_2(t) \tag{2.67}$$

satisface

$$Z'(t) = X_1'(t)C_1(t) + X_2'(t)C_2(t)$$

$$Z''(t) = X_1''(t)C_1(t) + X_2''(t)C_2(t) + \frac{F(t)}{t^2}$$

$$Z''(t) + t^{-1}Z'(t) + \left(I - \frac{A^2}{t^2} \right)Z(t) =$$

$$= \left[X_1''(t) + t^{-1}X_1'(t) + \left(I - \frac{A^2}{t^2} \right)X_1(t)\right]C_1(t) +$$

$$+ \left[X_2''(t) + t^{-1}X_2'(t) + \left(I - \frac{A^2}{t^2} \right)X_2(t)\right]C_2(t) + \frac{F(t)}{t^2} =$$

$$= \frac{F(t)}{t^2}$$

Por lo tanto, $Z(t)$ definida en (2.67), es una solución vectorial particular de (2.65) con valores en $\mathbb{C}^n$. Obsérvese que $W(t)$ es invertible para $t>0$ ya que $\{X_1(t),X_2(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (2.1). Escribimos a continuación la inversa de $W(t)$ como una matriz por bloques de la forma

$$(2.68) \qquad \Big(W(t)\Big)^{-1} = \begin{bmatrix} V_{11}(t) & V_{12}(t) \\ V_{21}(t) & V_{22}(t) \end{bmatrix} \ , \ V_{ij}(t) \in \mathbb{C}^{nxn}, \ 1\le i,j\le 2$$

y resolviendo el sistema algebraico (2.66) para $C_i'(t)$, $i=1,2$, se obtiene

$$(2.69) \qquad C_1'(t) = V_{12}(t)\,\frac{F(t)}{t^2}\,, \quad C_2'(t) = V_{22}(t)\,\frac{F(t)}{t^2}$$

Entonces,dado $t_1>0$, un par de funciones $C_1(t)$, $C_2(t)$ que satisfacen (2.66) es el siguiente

$$(2.70) \qquad C_1(t)=\int_{t_1}^{t} V_{12}(s)\,\frac{F(s)}{s^2}\,ds\,, \quad C_2(t)=\int_{t_1}^{t} V_{22}(s)\,\frac{F(s)}{s^2}\,ds$$

De este modo, una solución particular $Z(t)$ de (2.65) para $t>0$, viene definida por (2.67) donde $C_i(t)$, para $i=1,2$, están dadas en (2.70). Debido a la linealidad de la ecuación (2.65) y a los comentarios precedentes, ha sido demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 2.5 *Consideremos el problema* (2.4) *donde* $F(t)$ *es una función vectorial continua para* $t>0$ *y* A *satisface la condición espectral* 2.2. *Sea* $\{X_1(t),X_2(t)\}$ *un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación homogénea* (2.1), *entonces la solución general de* (2.4) *viene dada por*

$$(2.71) \qquad X(t) = X_1(t)C + X_2(t)D + Z(t)\,, \qquad 0<t<\infty$$

donde C *y* D *son vectores arbitrarios de* $\mathbb{C}^n$, *y* $Z(t)$ *es la solución particular de* (2.4) *definida por* (2.67) *y* (2.70).

CAPITULO III

FUNCIONES MATRICIALES DE BESSEL

3.1 INTRODUCCION

En el capítulo anterior propusimos un método de Frobenius para la resolución de la ecuación matricial diferencial de Bessel

$$(3.1) \qquad t^2X''(t) + tX'(t) + (t^2I-A^2)X(t) = 0, \quad 0<t<\infty$$

donde A es una matriz cuadrada, elemento de $\mathbb{C}^{nxn}$. Obtuvimos soluciones en serie de la forma

$$(3.2) \qquad X(t) = \left(\sum_{k\geq 0} C_k t^k \right) t^Z$$

siendo C_k y Z matrices de $\mathbb{C}^{nxn}$.

Son varios los motivos por los que hemos estimado seguir profundizando en la ecuación (3.1).

Por una parte, para determinar los coeficientes C_k era necesario resolver ecuaciones algebraicas matriciales de tipo Lyapunov, A_1+ B_1y - yD_1=0. La solución exacta de tales ecuaciones no es materia fácil pues requiere información espectral exacta lo que motiva el uso de métodos iterativos; véase [13],[14],[15],[30] y [32].

Por otro lado, el conjunto fundamental de soluciones $\{X(t,Z,C_0),\ X(t,-Z,C_0)\}$ presentado en el teorema 2.2 y definido por las ecuaciones (2.20),(2.21) del capítulo anterior se obtuvo bajo la condición 2.1:

$$\text{si } z\in\sigma(A), \text{ entonces } 2z \text{ no es entero;}$$
$$\text{y si } z,w \in \sigma(A), \text{ con } z\neq w, \text{ entonces } z\pm w \text{ no es entero.}$$

Esta condición es más restrictiva que la sencilla condición, ν no entero, requerida para que el par $\{J_{\nu}(t), J_{-\nu}(t)\}$ sea un conjunto fundamental de soluciones en el caso escalar. Además, ha quedado pendiente el supuesto en que A posea valores propios enteros distintos de cero.

Finalmente, teníamos la convicción de que es posible trasladar al caso matricial ciertas propiedades de las funciones de Bessel, especialmente, la condición de ortogonalidad.

Todo ello nos ha motivado a proponer un diferente tipo de soluciones en serie:

$$(3.3) \qquad X(t) = t^{A}\left(\sum_{k\geq 0} C_k t^k\right), \quad C_k\in\mathbb{C}^{nxn}, \quad t^{A}=\exp(A \ln t)$$

A partir de aquí, dos son los objetivos de este capítulo. Por una parte, encontrar un conjunto fundamental de soluciones explícitas de la ecuación (3.1).

El segundo fin de este capítulo es establecer las bases de una teoría de funciones matriciales de Bessel.

El capítulo está organizado del siguiente modo.

En la sección 2, presentamos algunos resultados del cálculo funcional matricial, que junto al concepto de función Gamma matricial dado en el capítulo I, serán de utilidad para las secciones posteriores.

En la sección 3, definimos las funciones matriciales de Bessel de primera especie que permiten obtener una expresión explícita de la solución general de (3.1), cuando todos los valores propios de A son no enteros.

En la sección 4, estudiamos una serie de propiedades de las funciones matriciales de Bessel, principalmente aquellas referentes a la ortogonalidad.

Por último, en la sección 5, con la introducción de las funciones de las funciones matriciales de Bessel de segunda especie, proporcionamos la solución explícita de (3.1), sin ningún tipo de restricción para la matriz A.

3.2 RESULTADOS PREVIOS DEL CALCULO FUNCIONAL MATRICIAL

Presentamos a continuación algunos conceptos y propiedades del cálculo funcional matricial, que utilizaremos en las próximas secciones.

A.- Sea H un bloque de Jordan de dimensión p :

$$(3.4) \qquad H=\begin{bmatrix} \nu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nu & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \nu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p\times p}$$

y sea f(z) una función analítica definida en un entorno de ν, entonces, de [8;p.99], se demuestra que:

$$(3.5) \qquad f(H)=\begin{bmatrix} f(\nu) & \frac{f'(\nu)}{1!} & \cdots & \frac{f^{(p-1)}(\nu)}{(p-1)!} \\ 0 & f(\nu) & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{f'(\nu)}{1!} \\ 0 & 0 & \cdots & f(\nu) \end{bmatrix}$$

B.- La función de Bessel de primera especie de orden ν, viene definida por:

$$(3.6) \qquad J_\nu(t) = (t/2)^\nu \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} \, \Gamma^{-1}(\nu+m+1) \, (t/2)^{2m}, \quad 0<t<\infty$$

De [26,p.103], $J_\nu(t)$ es una función entera del parámetro ν. Entonces, si H es un bloque de Jordan de la forma (3.2), t>0, podemos escribir $J_H(t)$ como indica (3.5):

$$J_H(t) = \begin{bmatrix} J_\nu(t) & \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(t) & \cdots & \frac{1}{(p-1)!} \frac{\partial^{p-1}}{\partial\nu^{p-1}} J_\nu(t) \\ 0 & J_\nu(t) & \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(t) & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \frac{\partial}{\partial\nu} J_\nu(t) \\ 0 & 0 & \cdots & J_\nu(t) \end{bmatrix} \tag{3.7}$$

o bien, de un modo más reducido:

$$(3.8) \qquad J_H(t) = \left[\frac{1}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial\nu^{j-i}} J_\nu(t) \right]_{i\leq j}$$

A partir del teorema 1 de [8,p.113] y (3.6), tenemos

$$(3.9) \qquad J_H(t) = (t/2)^H \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} \, \Gamma^{-1}(H+(m+1)I) \, (t/2)^{2m}$$

Nótese que, si H es un bloque de Jordan definido por (3.4), entonces -H no es un bloque de Jordan y no es aplicable la fórmula (3.5). El siguiente lema nos permite el cálculo de $J_{-H}(t)$.

LEMA 3.1 Sea H un bloque de Jordan definido por (3.4), con $p\geq 1$, y sea $J_{\nu}(t)$ la función de Bessel de primera especie de orden ν. Entonces, $J_{-H}(t)$ es la matriz triangular superior:

$$J_{-H}(t) = (t/2)^{-H} \sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}((m+1)I-H)\ (t/2)^{2m}$$

(3.10)

$$= \left[\frac{1}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial \nu^{j-i}} J_{-\nu}(t) \right]_{i\leq j}$$

Demostración: Nótese que -H y su forma de Jordan Q están relacionadas por la ecuacion:

(3.11) $$-H=PQP^{-1}, \quad P=\left((-1)^i \delta_{ij} \right)$$

siendo Q:

(3.12) $$Q=\begin{bmatrix} -\nu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -\nu & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots -\nu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -\nu \end{bmatrix}$$

y de (3.8),

$$J_Q(t)=\left(\frac{1}{(j-i)!}\frac{\partial^{j-i}}{\partial(-\nu)^{j-i}}J_{-\nu}(t)\right)_{i\le j}=\left(\frac{(-1)^{j-i}}{(j-i)!}\frac{\partial^{j-i}}{\partial\nu^{j-i}}J_{-\nu}(t)\right)_{i\le j}$$

Entonces, $J_{-H}(t)=P^{-1}J_Q(t)P$, y el elemento (i-j) de la matriz $P^{-1}J_Q(t)$con $i\le j$ es:

$$\left(P^{-1}J_Q(t)\right)_{ij}=\sum_{k=i}^{j-i}(-1)^i\delta_{ik}\frac{(-1)^{j-k}}{(j-k)!}\frac{\partial^{j-k}}{\partial\nu^{j-k}}J_{-\nu}(t)=$$

(3.13)

$$(-1)^i\frac{(-1)^{j-i}}{(j-i)!}\left(\frac{\partial^{j-i}}{\partial\nu^{j-i}}J_{-\nu}(t)\right)=\frac{(-1)^j}{(j-i)!}\frac{\partial^{j-i}}{\partial\nu^{j-i}}J_{-\nu}(t)$$

De (3.11) y (3.13) se obtiene:

$$\left(P^{-1}J_Q(t)P\right)_{ij}=\left(\left(P^{-1}J_Q(t)\right)P\right)_{ij}=$$

(3.14)

$$=\sum_{k=i}^{j-i}\frac{(-1)^k}{(k-i)!}\left(\frac{\partial^{k-i}}{\partial\nu^{k-i}}J_{-\nu}(t)\right)(-1)^j\delta_{kj}=\frac{1}{(j-i)!}\frac{\partial^{j-i}}{\partial\nu^{j-i}}J_{-\nu}(t)$$

De este modo, queda demostrado el lema.

C.- El siguiente lema trata de la invertibilidad de una matriz compuesta por cuatro bloques cuadrados que conmutan entre sí, y su demostración puede encontrarse en [11,problema 6].

LEMA 3.2 Sean A,B,C,D matrices conmutativas de $\mathbb{C}^{nxn}$ y sea

$$T = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Entonces, $T \in \mathbb{C}^{2nx2n}$ es invertible, si, y sólo si, AD-BC es invertible.

3.3 FUNCIONES MATRICIALES DE BESSEL DE PRIMERA ESPECIE

Comenzamos esta sección por la obtención de soluciones en serie de la ecuación (3.1), para el caso en que:

(3.16) *todos los valores propios de A son no enteros*

Ensayamos soluciones de (3.1), de la forma:

$$X(t) = t^{A} \sum_{k\geq 0} C_k t^k, \qquad C_k \in \mathbb{C}^{n\times n}, \qquad t^{A} = \exp(A \ln t), \qquad t>0 \tag{3.17}$$

Efectuando las derivadas formales de X(t) definida por (3.17), obtenemos:

$$X'(t) = \sum_{k\geq 0} (kI+A)\ t^{(k-1)I+A}\ C_k$$

(3.18)

$$X''(t) = \sum_{k\geq 0} (kI+A)((k-1)I+A)\ t^{(k-2)I+A}\ C_k$$

Asumimos por el momento la convergencia de la serie (3.17) y sustituyendo (3.17) y (3.18) en (3.1), obtenemos:

$$t^{A}\left\{ \sum_{k\geq 0} [(kI+A)((k-1)I+A)+(kI-A^{2})]\ t^{k}C_k + \sum_{k\geq 2} t^{k}C_{k-2} \right\} = 0 \tag{3.19}$$

lo que prueba la convergencia de la serie (3.17), para t>0, donde C_0 es una matriz cualquiera de $\mathbb{C}^{nxn}$. Si elegimos $C_0=2^{-A}\Gamma^{-1}(A+I)$, por (1.2) y (3.22), tenemos que:

$$(A+mI)^{-1}(A+(m-1)I)^{-1}\ldots(A+I)^{-1}\Gamma^{-1}(A+I)=\Gamma^{-1}(A+(m+1)I)$$

(3.25)

y

$$X(t,A)=(t/2)^{A}\sum_{m\geq 0}\frac{(-1)^{m}}{m!}\,\Gamma^{-1}(A+(m+1)I)\;(t/2)^{2m},\quad t>0 \tag{3.26}$$

es una solución de (3.1).

Ensayemos ahora otra solución de (3.1) de la forma:

$$Y(t) = t^{-A}\sum_{k\geq 0}B_k t^k,\qquad B_k\in \mathbb{C}^{nxn},\qquad t^{-A}= \exp(-A\ \ln t),\qquad t>0 \tag{3.27}$$

donde debemos determinar las matrices B_k. Operando del mismo modo que en la construcción de X(t,A), obtenemos que las matrices B_k tienen que cumplir:

$$(-2A+I)B_1=0,\qquad k(kI-2A)B_k + B_{k-2}= 0,\qquad k\geq 2 \tag{3.28}$$

Tomamos $B_{2k+1}=0$, para $k\geq 0$. Para k=2m, tenemos:

$$4m(mI-A)B_{2m} - B_{2m-2}= 0,\quad m\geq 1 \tag{3.29}$$

La condición (3.16) asegura la invertibilidad de $(mI-A)$, con $m\geq 1$, y de (3.29) se sigue que:

$$B_{2m} = \frac{(-1)^m}{2^{2m} m!} (mI-A)^{-1}((m-1)I-A)^{-1} \dots (I-A)^{-1} B_0 \tag{3.30}$$

donde B_0 es una matriz arbitraria de $\mathbb{C}^{n\times n}$. La convergencia de la serie (3.27) se demuestra de la misma manera que la de la serie (3.17). Elegimos $B_0=2^A\Gamma^{-1}(I-A)$ y de (1.2) y (3.30) tenemos que:

$$(mI-A)^{-1}((m-1)I-A)^{-1} \dots (I-A)^{-1}\Gamma^{-1}(I-A)=\Gamma^{-1}((m+1)I-A)$$

y la solución $Y(t)$ se puede escribir de la forma:

$$Y(t)=X(t,-A)=(t/2)^{-A}\sum_{m\geq 0} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}((m+1)I-A)\ (t/2)^{2m},\quad t>0 \tag{3.31}$$

Nótese que si la matriz A es el bloque de Jordan H definido en (3.4) donde ν no es un entero, entonces, las funciones $X(t,H)$ y $X(t,-H)$ definidas por (3.26) y (3.31), respectivamente, coinciden con $J_H(t)$ y $J_{-H}(t)$, dadas por (3.9) y (3.10). Entonces $J_H(t)$ y $J_{-H}(t)$ son soluciones de la ecuación matricial:

$$t^2X''(t) + tX'(t) + (t^2I-H^2)X(t) = 0, \quad 0<t<\infty \tag{3.32}$$

Para probar que $\{J_H(t), J_{-H}(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.32), cuando ν no es un entero, por los lemas 1.1 y 3.2 es suficiente probar que

(3.33) $\quad J_H(t)\ J'_{-H}(t) - J_{-H}(t)\ J'_H(t)$ es invertible para $t>0$

Nótese que, de (3.7),(3.8) y (3.10), la matriz $J_H(t)\ J'_{-H}(t) - J_{-H}(t)\ J'_H(t)$ es triangular superior y los elementos de su diagonal son

(3.34) $$J_\nu(t)\ J'_{-\nu}(t) - J_{-\nu}(t)\ J'_\nu(t), \quad t>0$$

Ya que en el caso escalar, si ν no es un entero, el par $\{J_\nu(t), J_{-\nu}(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación de Bessel de orden ν, [43,p.43], la expresión (3.34) no es nula porque coincide con el wronskiano de $\{J_\nu(t), J_{-\nu}(t)\}$.

De esta forma, ha sido demostrado el siguiente resultado:

TEOREMA 3.1 *Sean ν un número complejo no entero y H un bloque de Jordan definido por (3.4). Entonces el par $\{J_H(t), J_{-H}(t)\}$ definido por (3.8) y (3.10) es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.32) para $t>0$.*

Consideremos ahora el caso general en que A es una matriz que satisface la condición espectral (3.16). Sea la matriz $H = \operatorname{diag}(H_1,\dots,H_k)$ la forma canónica de A, donde H_i es un bloque de Jordan correspondiente al valor propio ν_i de A:

$$(3.35) \qquad H_i = \begin{bmatrix} \nu_i & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \nu_i & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 \dots & \nu_i & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \nu_i \end{bmatrix} \in \mathbb{C}^{p_i \times p_i}, \text{ si } p_i>1$$

y $H_i = \left(\nu_i\right)$ si H_i es un bloque de Jordan de orden 1x1, con $p_1+\dots+p_k=n$. Por la hipótesis (3.16), cada valor propio ν_i no es entero, con $1\le i\le k$. Sea $\left\{J_{H_i}(t), J_{-H_i}(t)\right\}$ el conjunto fundamental de soluciones de la ecuación

$$(3.36) \qquad t^2X''(t) + tX'(t) + (t^2I-H_i^2)X(t) = 0, \quad 0<t<\infty, \; p_i\ge 1$$

dado por el teorema 3.1, y sea el par de funciones matriciales con valores en $\mathbb{C}^{n\times n}$

$$(3.37) \qquad J(t,H)=\left[\operatorname*{diag}_{1\le i\le k}\left(J_{H_i}(t)\right)\right] \qquad J(t,-H)=\left[\operatorname*{diag}_{1\le i\le k}\left(J_{-H_i}(t)\right)\right]$$

Obsérvese que por el teorema 3.1, las funciones $\{J(t,H),J(t,-H)\}$ definen un par de soluciones de la ecuación

$$t^2X''(t) + tX'(t) + (t^2I-\mathrm{diag}(H_1^2,\ldots,H_k^2))X(t) = 0, \quad 0<t<\infty$$

(3.38)

Ahora probaremos que $\{J(t,H),J(t,-H)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.38) para $t>0$. Nótese que $J(t,H)$ y $J(t,-H)$ conmutan ya que J_{H_i} y J_{-H_i} conmutan para $1\le i\le k$. Por otra parte, debido al lema 3.2, la función

$$V(t)=J(t,H)J'(t,-H)-J(t,-H)J'(t,H), \quad t>0 \tag{3.39}$$

es invertible por ser $\left\{J_{H_i}(t),J_{-H_i}(t)\right\}$ un conjunto fundamental de soluciones de (3.36) y

$$V(t) = \left[\mathop{\mathrm{diag}}_{1\le i\le k}\left(J_{H_i}(t)J'_{-H_i}(t)- J_{-H_i}(t)J'_{H_i}(t)\right)\right] \tag{3.40}$$

Sea P una matriz invertible de $\mathbb{C}^{n\mathrm{x}n}$ tal que

$$H = \mathrm{diag}(H_1,\ldots,H_k) = PAP^{-1} \tag{3.41}$$

entonces, el par

$$X_1(t)=P^{-1}X(t,H)P, \quad X_2(t)=P^{-1}X(t,-H)P \tag{3.42}$$

define un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.1) para $t>0$. Teniendo en cuenta que para toda función analítica $f(z)$ en un abierto que contiene el $\sigma(A)$, se cumple por [8,p.99] que $f(H) = Pf(A)P^{-1}$,de (3.42),(3.9) y (3.10) se obtiene que:

$$X_1(t) = P^{-1}\left[\operatorname*{diag}_{1\le i\le k}\left(J_{H_i}(t)\right)\right] P =$$

$$= P^{-1} \operatorname*{diag}_{1\le i\le k}\left[(t/2)^{H_i} \sum_{m\ge 0} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(H_i+(m+1)I)\ (t/2)^{2m}\right] P =$$

$$= (t/2)^{A} \sum_{m\ge 0} \frac{(-1)^m}{m!} \Gamma^{-1}(A+(m+1)I)\ (t/2)^{2m} = X(t,A)$$

y $X_2(t)=X(t,-A)$, donde $X(t,A)$ y $X(t,-A)$ vienen dadas en (3.26) y (3.31), respectivamente. Así pues, queda demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 3.2 *Sea* A *una matriz de* $\mathbb{C}^{n\times n}$ *que satisface* (3.16) *y sean las funciones matriciales* $X(t,A)$*y* $X(t,-A)$ *definidas por* (3.26) *y* (3.31) *respectivamente. Entonces la solución general de la ecuación* (3.1) *en* $t>0$ *viene dada por*

$$X(t) = X(t,A)C + X(t,-A)D, \qquad C,D \in \mathbb{C}^n \tag{3.43}$$

Este teorema sugiere la siguiente definición:

DEFINICION 3.1 *Si* $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *es una matriz que satisface* (3.16), *definimos la función matricial de Bessel de primera especie de orden* A *como la serie matricial dada en* (3.26).

Nos ocupamos a continuación de las propiedades de ortogonalidad de las funciones matriciales de Bessel de primera especie. Comenzaremos con la demostración del siguiente lema.

LEMA 3.3 Sea H el bloque de Jordan definido por (3.4), donde ν es un número real que satisface

$$\nu \geq -\frac{1}{2} \tag{3.44}$$

Consideremos la sucesión $0<t_{\nu_1}<t_{\nu_2}<\dots<t_{\nu_m}<\dots$, de las raíces positivas de la función de Bessel de primera especie de orden ν, J_ν. Entonces se cumple la siguiente relación de ortogonalidad

$$\int_0^1 r\, J_H(rt_{\nu_n})\, J_H(rt_{\nu_m})\, dr = \frac{1}{2}\, \delta_{nm}\, J^2_{H+I}(t_{\nu_n}) \tag{3.45}$$

donde $J^2_{H+I}(t)$ es la imagen, por el cálculo funcional matricial, de la función escalar $J^2_\nu(t)$ de parámetro ν para un $t>0$ fijo, cuando actúa sobre la matriz $H+I$; y $\delta_{nn}=1$, $\delta_{nm}=0$, si $n\neq m$.

Demostración El elemento (i,j) del producto de matrices $J_H(rt_{\nu_n})\, J_H(rt_{\nu_m})$, para $i\leq j$, viene dado por

$$\left[J_H(rt_{\nu_n})\ J_H(rt_{\nu_m}) \right]_{ij} =$$

(3.46)

$$= \sum_{k=0}^{j-i} \frac{1}{k!} \left(\frac{\partial^k}{\partial \nu^k} J_\nu(rt_{\nu_n}) \right) \frac{1}{(j-i-k)!} \left(\frac{\partial^{j-i-k}}{\partial \nu^{j-i-k}} J_\nu(rt_{\nu_m}) \right)$$

Por la fórmula de Leibnitz para la derivada de un producto, la expresión (3.46), coincide con

$$\text{(3.47)} \qquad \frac{1}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial \nu^{j-i}} \left(J_\nu(rt_{\nu_n})\ J_\nu(rt_{\nu_m}) \right), \qquad i \le j$$

Si integramos la función matricial $rJ_H(rt_{\nu_n})\ J_H(rt_{\nu_m})$ en $(0,1)$ y tenemos en cuenta las propiedades de las funciones escalares de Bessel de primera especie de orden $\nu \ge -1/2$, [26,p.129], se obtiene que para $i \le j$

$$\text{(3.48)} \qquad \left(\int_0^1 rJ_H(rt_{\nu_n})\ J_H(rt_{\nu_m})\ dr \right)_{ij} =$$

$$\frac{1}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial \nu^{j-i}} \left(\int_0^1 r\ J_\nu(rt_{\nu_n})\ J_\nu(rt_{\nu_m})\ dr \right) =$$

$$\frac{1}{(j-i)!} \frac{\partial^{j-i}}{\partial \nu^{j-i}} \left(\frac{1}{2}\ \delta_{nm}\ J^2_{\nu+1}(t_{\nu_n}) \right)$$

Como por (3.7), las matrices $J_H(rt_{\nu_n})$ y $J_H(rt_{\nu_m})$ son triangulares superiores, de (3.48) resulta que

$$\int_0^1 r\ J_H(rt_{\nu_n})\ J_H(rt_{\nu_m})\ dr = 0\ ,\quad \text{si } m\neq n, \tag{3.49}$$

y

$$\left(\int_0^1 rJ_H^2(rt_{\nu_n})\ dr\right)_{ij} = \left(\frac{1}{(j-i)!}\ \frac{\partial^{j-i}}{\partial\nu^{j-i}}\left(\frac{1}{2}\ J_{\nu+1}^2(t_{\nu_n})\right)\right)_{ij} =$$

$$= \left(\frac{1}{2}\ J_{H+I}^2(t_{\nu_n})\right)_{ij} \tag{3.50}$$

Ahora consideremos una matriz A de $\mathbb{C}^{nxn}$, que tiene la forma canónica de Jordan $H_A=\text{diag}(H_1,\ldots,H_q)$. Sea P una matriz invertible tal que

$$A = P^{-1}H_AP \tag{3.51}$$

Sea $X_A(t)$ la función matricial de Bessel de primera especie dada en la definición 3.1. Como ya hemos comentado, de las propiedades del cálculo funcional matricial, si f(z) es una función analítica en un abierto que contiene todos los valores propios de A, de (3.51) y [8,p.99], se sigue que

$$f(A) = P^{-1}f(H_A)P = P^{-1}\ \text{diag}(f(H_1),\ldots,f(H_q))\ P \tag{3.52}$$

Por esta razón, dado un número positivo fijado t, y la función de variable compleja definida por (3.6), de (3.52) se deduce que

$$(3.53) \qquad X_A(t) = P^{-1}X_{H_A}(t)P = P^{-1}\,\mathrm{diag}(J_{H_1}(t),\ldots,J_{H_q}(t))\,P,$$

donde $X_A(t)$ viene dada por la definición 3.2 y $J_{H_i}(t)$ por (3.7), al sustituir H por H_i, para $1\le i\le q$. El siguiente teorema contiene las propiedades de ortogonalidad de las funciones matriciales de Bessel que hemos introducido.

TEOREMA 3.3 *Sea* A *una matriz que cumple la condición*

$$\textit{Todo valor propio de } A,\ \nu_i,\ \textit{es un número real y } \nu_i \ge -\frac{1}{2} \qquad (3.54)$$

Sea $H=\mathrm{diag}(H_1,\ldots,H_q)$ *la forma canónica de* A *de modo que para* $1\le i\le q$, H_i *es un bloque de Jordan de tamaño* p_i *asociada al valor propio* ν_i, *con* $p_1+\ldots+p_q=n$. *Consideremos la sucesión* $\{t_{\nu_i m}\}$ *de ceros positivos de* $J_{\nu_i}(t)$, *para* $1\le i\le q$ *y* $m\ge1$. *Si* $X_A(t)$ *es la función matricial de Bessel introducida en la definición* 3.2, *entonces se verifica*

(i) $X_A(t_{\nu_i m})$ *es singular para* $1\le i\le q$, $m\ge1$.

(ii) $$\int_0^1 r\, X_A(rt_{\nu_i m})\, X_A(rt_{\nu_i s})\, dr$$

es singular para $1\le i\le q$, *y* $m\neq s$.

(iii) $$\int_0^1 r\, X_A^2(rt_{\nu_i m})\, dr \text{ es invertible para } 1\le i\le q,\ m\ge 1$$

Demostración Sea P la matriz invertible de $\mathbb{C}^{nxn}$ que satisface $A=P^{-1}HP$. De este modo tenemos que: $X_A(t)=P^{-1}\mathrm{diag}\left(X_{H_1}(t),\ldots,X_{H_q}(t)\right)P$ es singular en los puntos en que alguno de los bloques $X_{H_i}(t)$ es singular. Por otra parte por (3.7), la matriz $X_{H_i}(t)=J_{H_i}(t)$ es triangular superior y los elementos de su diagonal son $J_{\nu_i}(t)$, lo que prueba el apartado (i).

Para demostrar (ii), obsérvese que si $A=P^{-1}HP$, entonces podemos escribir

$$\int_0^1 r\, X_A(rt_{\nu_i m})\, X_A(rt_{\nu_i s})\, dr =$$

(3.55)

$$=P^{-1}\int_0^1 r\, X_H(rt_{\nu_i m})\, X_H(rt_{\nu_i s})\, dr\, P =$$

$$= P^{-1}\, \mathrm{diag}_{1\le k\le q}\left(\int_0^1 r\, J_{H_k}(rt_{\nu_i m})\, J_{H_k}(rt_{\nu_i s})\, dr\right)P = P^{-1}\, \mathrm{diag}_{1\le k\le q}(T_k)P$$

y por el lema 3.3, la matriz $T=\mathrm{diag}_{1\le k\le q}(T_k)$ que aparece en

(3.55), es singular pues su i-ésimo bloque T_i es la matriz nula de $\mathbb{C}^{p_i \times p_i}$.

(iii) De la ecuación (5.11) de [43,p.135], tenemos que,

$$\int_0^1 r\, J_\nu^2(r\alpha)\, dr = \frac{1}{2}\{(1-\frac{\nu^2}{\alpha^2})J_\nu^2(\alpha) + J_\nu'^2(\alpha)\} \tag{3.56}$$

Por la igualdad $A=P^{-1}HP$, podemos escribir

$$\begin{aligned} \int_0^1 r\, X_A^2(rt_{\nu_i m})\, dr &= P^{-1}\left(\int_0^1 r\, X_H^2(rt_{\nu_i m})\, dr\right)P = \\ &= P^{-1} \operatorname*{diag}_{1\le k\le q}\left(\int_0^1 r\, J_{H_k}^2(rt_{\nu_i m})\, dr\right)P \end{aligned} \tag{3.57}$$

y por (3.56),(3.57),(3.8),se deduce que

$$\int_0^1 rX_A^2(rt_{\nu_i m})dr = P^{-1} \operatorname*{diag}_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le h\le j\le p_k}}\left(\frac{1}{(j-h)!}\,\frac{\partial^{j-h}}{\partial\nu_k^{j-h}}\int_0^1 rJ_{\nu_k}^2(rt_{\nu_i m})dr\right)P$$

(3.58)

$$P^{-1} \operatorname*{diag}_{\substack{1\le k\le q\\ 1\le h\le j\le p_k}}\left(\frac{1}{(j-h)!}\,\frac{\partial^{j-h}}{\partial\nu_k^{j-h}}\left(\frac{1}{2}\left\{\left(1-\frac{\nu_k^2}{t_{\nu_i m}^2}\right)J_{\nu_k}^2(t_{\nu_i m})+J_{\nu_k}'^2(t_{\nu_i m})\right\}\right)\right)P$$

$$=P^{-1} \operatorname*{diag}_{1\le k\le q}\left(\frac{1}{2}\left\{\left(I_{p_k}-\frac{H_k^2}{t_{\nu_i m}^2}\right)J_{H_k}^2(t_{\nu_i m})+J_{H_k}'^2(t_{\nu_i m})\right\}\right)P=$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\left(I - \frac{A^2}{t^2_{\nu_i m}}\right)X_A^2(t_{\nu_i m}) + X_A'^{\,2}(t_{\nu_i m})\right\}$$

Para concluir la demostración de (iii), nótese que el segundo miembro de (3.58) es una matriz invertible porque los bloques de su diagonal son matrices triangulares superiores cuyos elementos de la diagonal se obtienen haciendo j=h, y tienen los valores

$$\int_0^1 r J^2_{\nu_k}(r t_{\nu_i m})dr > 0, \qquad 1 \le i,k \le q, \quad m \ge 1$$

3.5 FUNCIONES MATRICIALES DE BESSEL DE SEGUNDA ESPECIE

Sea H_ν el bloque de Jordan de orden $p \geq 1$,

$$(3.59) \qquad H_\nu = \begin{bmatrix} \nu & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \nu & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots \nu & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \nu \end{bmatrix}, \quad \nu \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$$

donde $\mathbb{Z}$ es el conjunto de los enteros. Definimos la función matricial de Bessel de segunda especie de orden H_ν por:

$$(3.60) \qquad Y_{H_\nu}(t) = J_{H_\nu}(t)\operatorname{cotg}(\pi H_\nu) - J_{-H_\nu}(t)\operatorname{cosec}(\pi H_\nu), \quad 0<t<\infty$$

De (3.5), $\operatorname{cotg}(\pi H_\nu)$ y $\operatorname{cosec}(\pi H_\nu)$ son las matrices triangulares superiores

$$(3.61) \qquad \begin{aligned} \operatorname{cotg}(\pi H_\nu) &= \left[\frac{1}{(j-k)!} \frac{\partial^{j-k}}{\partial \nu^{j-k}} \operatorname{cotg}(\nu\pi) \right]_{k\leq j} \\ \operatorname{cosec}(\pi H_\nu) &= \left[\frac{1}{(j-k)!} \frac{\partial^{j-k}}{\partial \nu^{j-k}} \operatorname{cosec}(\nu\pi) \right]_{k\leq j} \end{aligned}$$

De (3.60), (3.61) y la fórmula de Leibniz para la derivada del producto de funciones escalares, podemos escribir:

$$Y_{H_\nu}(t)=\left[\frac{1}{(j-k)!}\;\frac{\partial^{j-k}}{\partial\nu^{j-k}}\left(J_\nu(t)\operatorname{cotg}(\nu\pi)\;-\;J_{-\nu}(t)\operatorname{cosec}(\nu\pi)\right)\right]_{k\le j}$$

(3.62)

Teniendo en cuenta que

$$(3.63)\qquad Y_\nu(t)\;=\;J_\nu(t)\operatorname{cotg}(\nu\pi)\;-\;J_{-\nu}(t)\operatorname{cosec}(\nu\pi)$$

es la función escalar de Bessel de segunda especie, concluimos de (3.62) que

$$(3.64)\qquad Y_{H_\nu}(t)\;=\;\left[\frac{1}{(j-k)!}\;\frac{\partial^{j-k}}{\partial\nu^{j-k}}\,Y_\nu(t)\right]_{k\le j}$$

Si n es un entero, de [26,p.105], el límite $\lim\limits_{\nu\to n} Y_\nu(t)$ y el de sus derivadas $\lim\limits_{\nu\to n}\dfrac{\partial^{j-k}}{\partial\nu^{j-k}}\,Y_\nu(t)$ existen para $k\le j\le p$. Entonces si H_n es el bloque de Jordan asociado a un valor propio entero,

$$(3.65)\qquad H_n=\begin{bmatrix} n & 1 & 0 & \cdots & 0\\ 0 & n & 1 & \cdots & 0\\ \vdots & & \ddots & \ddots & \vdots\\ 0 & 0 & 0 & \cdots n & 1\\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n\end{bmatrix}\in\mathbb{C}^{p\times p}$$

definimos la función matricial de Bessel de segunda especie de orden H_n por

$$(3.66)\qquad Y_{H_n}(t)=\lim_{\nu\to n} Y_{H_\nu}(t)\;=\;\left[\frac{1}{(j-k)!}\;\lim_{\nu\to n}\frac{\partial^{j-k}}{\partial\nu^{j-k}}\;Y_\nu(t)\right]_{k\le j}$$

Nótese que debido al teorema 3.1, la función matricial $Y_{H_\nu}(t)$ definida por (3.60) es una solución de la ecuación

$$t^2X''(t) + tX'(t) + (t^2I-H_\nu^2)X(t) = 0, \quad 0<t<\infty \tag{3.67}$$

es decir,

$$t^2Y''_{H_\nu}(t) + tY'_{H_\nu}(t) + (t^2I-H_\nu^2)Y_{H_\nu}(t) = 0, \quad 0<t<\infty \tag{3.68}$$

Tomando límites en (3.68) cuando $\nu \longrightarrow n$ para un $t>0$ fijado, obtenemos

$$t^2Y''_{H_n}(t) + tY'_{H_n}(t) + (t^2I-H_n^2)Y_{H_n}(t) = 0, \quad 0<t<\infty \tag{3.69}$$

Como la función matricial de Bessel de primera especie de orden H_n, designada por $J_{H_n}(t)$, cumple

$$t^2J''_{H_n}(t) + tJ'_{H_n}(t) + (t^2I-H_n^2)J_{H_n}(t) = 0, \quad 0<t<\infty$$

tenemos que el par $\left\{ J_{H_\nu}(t),\ Y_{H_\nu}(t) \right\}$ satisface (3.67) para todo número complejo ν.

Las funciones matriciales $J_{H_\nu}(t)$, $J'_{H_\nu}(t)$, $Y_{H_\nu}(t)$ y

$Y'_{H_\nu}(t)$ conmutan dos a dos debido a las propiedades del cálculo funcional matricial [7,p.558].

Dado $\nu \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$, de (3.60) tenemos que

$$Y'_{H_\nu}(t) = J'_{H_\nu}(t)\mathrm{cotg}(\pi H_\nu) - J'_{-H_\nu}(t)\mathrm{cosec}(\pi H_\nu), \quad 0<t<\infty$$

y por la propiedad de conmutatividad del cálculo funcional sobre H_ν, se obtiene

$$J_{H_\nu}(t)\, Y'_{H_\nu}(t) - Y_{H_\nu}(t)\, J'_{H_\nu}(t) =$$

$$J_{H_\nu}(t)\, J'_{H_\nu}(t)\, \mathrm{cotg}(\pi H_\nu) - J_{H_\nu}(t)\quad J'_{-H_\nu}(t)\, \mathrm{cosec}(\pi H_\nu) -$$

$$- J_{H_\nu}(t)\, \mathrm{cotg}(\pi H_\nu)\, J'_{H_\nu}(t) + J_{-H_\nu}(t)\, \mathrm{cosec}(\pi H_\nu)\, J'_{H_\nu}(t) =$$

(3.70)

$$= \left\{ J_{H_\nu}(t) \quad J'_{-H_\nu}(t) - J_{-H_\nu}(t)\, J'_{H_\nu}(t) \right\} \mathrm{cosec}(\pi H_\nu)$$

Nótese que si $\nu \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$, por el teorema de mapeo espectral, [7,p.569], la matriz $\mathrm{cosec}(\pi H_\nu)$ es invertible. Por otra parte, como $\left\{ J_{H_\nu}(t),\ J_{-H_\nu}(t) \right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.67) para $t>0$, terminamos concluyendo la matriz que aparece en la última expresión de (3.70) es invertible para $t>0$. Así pues, por el lema 3.2, si $\nu \in \mathbb{C}-\mathbb{Z}$, el par $\left\{ J_{H_\nu}(t),\ Y_{H_\nu}(t) \right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (3.67).

Sea $t>0$, entonces por (3.8) y (3.66), los elementos de la diagonal de la matriz triangular superior

$$J_{H_n}(t)\, Y'_{H_n}(t) - Y_{H_n}(t)\, J'_{H_n}(t)$$

son de la forma

$$J_n(t)\, Y'_n(t) - Y_n(t)\, J'_n(t) \tag{3.71}$$

no nulos para $t>0$, ya que $\{J_n(t), Y_n(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación escalar de Bessel de orden n, y (3.71) es el wronskiano de $\{J_n(t), Y_n(t)\}$. Entonces, queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 3.4 *Sean ν un número complejo, y $\mathcal{H}_\nu$ el bloque de Jordan dado en (3.59), y sea $\left\{ J_{H_\nu}(t),\ Y_{H_\nu}(t) \right\}$ el par de funciones matriciales definidas por (3.8), (3.60) y (3.66). Entonces, $\left\{ J_{H_\nu}(t),\ Y_{H_\nu}(t) \right\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.67) para $t>0$.*

Consideremos la descomposición (3.41) donde $H=\mathrm{diag}(H_1,\ldots,H_k)$ es la forma canónica de Jordan de A, y llamemos

$$Y(t,H) = \operatorname*{diag}_{1\le i\le k}\left(Y_{H_i}(t) \right)$$

entonces, por el teorema 3.4, el par $\{X(t,H), Y(t,H)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.38) para una matriz dada A cualquiera de $\mathbb{C}^{nxn}$. Si P es una matriz invertible de $\mathbb{C}^{nxn}$ que satisface (3.41), entonces $X(t,A)$ e $Y(t,A) = P^{-1}Y(t,H)P$ definen un conjunto fundamental de soluciones de la ecuación (3.1) para $t>0$. Podemos, pues, enunciar el siguiente resultado.

COROLARIO 3.1 *Sea* A *una matriz de* $\mathbb{C}^{nxn}$, *y sean* H *su forma canónica de Jordan y* P *una matriz invertible que satisface* (3.41). *Si* $X(t,A)$ *definido por* (3.26) *y* $Y(t,A) = P^{-1}Y(t,H)P$

entonces la solución general de (3.1) *viene dada por*

$$X(t) = X(t,A)\ C + P^{-1}Y(t,H)P\ D,$$

$$0<t<\infty, \qquad C.D \in \mathbb{C}^{n}$$

CAPITULO IV

POLINOMIOS MATRICIALES ORTOGONALES Y SISTEMAS DE ECUACIONES DIFERENCIALES DE SEGUNDO ORDEN

4.1 INTRODUCCION

En este capítulo trataremos de sistemas de ecuaciones diferenciales de segundo orden del tipo

$$(4.1) \qquad (1-t^2)X''(t) + tDX'(t) + CX(t) = 0 \ , \ |t|<1$$

donde D y C son matrices de $\mathbb{R}^{mxm}$. Es obvio que si las matrices D y C no son simultáneamente diagonalizables, entonces el sistema (4.1) no puede desacoplarse en un conjunto de ecuaciones escalares independientes.

El sistema (4.1) puede transformarse en el sistema equivalente de primer orden [12]:

$$(4.2) \qquad (1-t^2)Z'(t)=\begin{bmatrix} 0 & (1-t^2)I \\ -C & -tD \end{bmatrix}Z(t), \qquad Z(t)=\begin{bmatrix} X(t) \\ X'(t) \end{bmatrix}$$

pero este método tiene los inconvenientes ya comentados del aumento del coste computacional y de no proporcionar una solución explícita al problema debido a la relación $X(t) = [I,0]Z(t)$.

En el desarrollo del capítulo nos marcamos un doble objetivo. En primer lugar estamos interesados en construir soluciones analíticas explícitas de (4.1) sin aumentar la dimensión del problema. Posteriormente proponemos las bases de una teoría de polinomios matriciales ortogonales relacionados con el sistema diferencial (4.1), de forma análoga a la teoría clásica de las conocidas familias de polinomios ortogonales escalares tales como los polinomios de Legendre o de Gegenbauer, [2],[37].

A lo largo de este capítulo, entenderemos como polinomio matricial de grado n toda expresión de la forma

$$L(x) = A_n x^n + A_{n-1} x^{n-1} + \dots + A_1 x + A_0$$

donde x es una variable real y A_j son matrices de $\mathbb{R}^{m\times m}$ para $0\le j\le n$, con $A_n\ne 0$. Al conjunto de todos los polinomios matriciales de grado $n\ge 0$ lo denominaremos $\mathcal{P}_n(x)$.

Como referencias digamos que los polinomios matriciales ortogonales en el círculo unidad han sido estudiados en [5],[9] y [40] con un concepto distinto de ortogonalidad y los polinomios ortogonales en un álgebra no conmutativa en [6]. Más recientemente una clase de polinomios matriciales ortogonales en la recta real ha sido propuesta en [29].

El presente capítulo se organiza del siguiente modo.

En la sección 2 obtenemos una expresión del vector solución general de (4.1) en relación a un par adecuado de soluciones matriciales en serie.

En la sección 3 se dan ciertas propiedades del cálculo funcional matricial que se usarán en secciones posteriores.

En la sección 4 introducimos los polinomios matriciales de Gegenbauer y mostramos su relación con el sistema (4.1). Utilizando una función generatriz matricial apropiada, obtenemos la expresión explícita de dichos polinomios matriciales.

Finalmente, en la sección 5 probamos algunas propiedades de ortogonalidad relativas a los polinomios matriciales de Gegenbauer y demostramos la acotación de los mismos en función de los datos.

4.2 SOLUCIONES EN SERIE

Comenzamos ensayando soluciones en serie de (4.1) de la forma

$$X(t) = \sum_{k\geq 0} A_k t^k , \qquad A_k \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{4.3}$$

donde A_k son matrices por determinar. Las derivadas formales de (4.3)

$$X'(t) = \sum_{k\geq 1} kA_k t^{k-1} , \qquad X''(t) = \sum_{k\geq 2} k(k-1)A_k t^{k-2} ,$$

se sustituyen en (4.1) y se obtiene que

$$\sum_{k\geq 2} k(k-1)A_k t^{k-2} - \sum_{k\geq 2} k(k-1)A_k t^k + D\sum_{k\geq 1} kA_k t^k + C\sum_{k\geq 0} A_k t^k = 0$$

(4.4)

Al igualar a la matriz nula los coeficientes de cada potencia t^k que aparecen en (4.4) se deduce que las matrices A_k deben verificar

$$2A_2 + CA_0 = 0 , \qquad 3.2\ A_3 + (C+D)A_1 = 0 \tag{4.5}$$

$$(k+2)(k+1)A_{k+2} + \left(kD + C - k(k-1)I\right)A_k = 0 , \quad k\geq 2 \tag{4.6}$$

De (4.5) y (4.6) se sigue que A_0 y A_1 son matrices arbitrarias y

$$(4.7)\qquad \begin{aligned} A_{2p} &= \frac{1}{(2p)!}\left(\prod_{i=p}^{1} B_{2i}\right)A_0 \,, \\ A_{2p+1} &= \frac{1}{(2p+1)!}\left(\prod_{i=p}^{1} B_{2i+1}\right)A_1 \end{aligned} \qquad p\geq 1$$

donde

$$(4.8)\qquad B_k = (k-2)(k-3)I - (k-2)D - C \,, \qquad k\geq 2$$

Tomando $A_0=I$, $A_1=0$, se obtiene la solución formal

$$(4.9)\qquad X_1(t) = I + \sum_{p\geq 1} A_{2p}t^{2p}, \qquad A_{2p} = \frac{1}{(2p)!}\left(\prod_{i=p}^{1} B_{2i}\right), \qquad p\geq 1$$

y para $A_0=0$, $A_1=I$, se obtiene esta otra

$$X_2(t)= tI + \sum_{p\geq 1} A_{2p+1}t^{2p+1}, \quad A_{2p+1}= \frac{1}{(2p+1)!}\left(\prod_{i=p}^{1} B_{2i+1}\right), \qquad p\geq 1$$

(4.10)

A continuación probamos la convergencia de las soluciones en serie formales anteriores y demostramos que el par $\{X_1(t),X_2(t)\}$ define un conjunto fundamental de soluciones de (4.1).

Al efectuar normas en la expresión (4.6) se obtiene

$$(k+2)(k+1)\|A_{k+2}\| \le \left(k(k-1) + k\|D\| + \|C\|\right)\|A_k\| \,, \qquad k\ge 2$$

y para $|t|<1$, tenemos que

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\|A_{k+2}\|\,|t|^{k+2}}{\|A_k\|\,|t|^k} \le \lim_{k\to\infty} \frac{k(k-1) + k\|D\| + \|C\|}{(k+2)(k+1)} |t|^2 < 1$$

De esta forma las soluciones en serie $X_1(t)$ y $X_2(t)$ definidas en (4.9) y (4.10) respectivamente, son convergentes en $|t|<1$ y además satisfacen

$$W(0) = \begin{bmatrix} X_1(0) & X_2(0) \\ X_1'(0) & X_2'(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix}$$

Por el lema 1.1, el par $\{X_1(t),X_2(t)\}$ es un conjunto fundamental de soluciones de (4.1). En particular, el conjunto de todas las soluciones con valores en $\mathbb{R}^m$ de (4.1) se puede escribir como

$$(4.11) \qquad X(t) = X_1(t)c_1 + X_2(t)c_2 \,, \qquad c_i\in\mathbb{R}^m, \quad i=1,2.$$

El siguiente resultado ha sido demostrado por los comentarios anteriores.

TEOREMA 4.1 *Sean* C *y* D *matrices de* $\mathbb{R}^{m\times m}$ *y* B_k *matrices definidas por* (4.8). *Si* $\{X_1(t),X_2(t)\}$ *es el par* *definida en (4.9) y (4.10), entonces la solución general en* $\mathbb{R}^m$ *de (4.1) viene dada por (4.11), donde* c_i *son vectores arbitrarios de* $\mathbb{R}^m$ *para* $i=1,2$.

NOTA 4.1 Obsérvese que si las matrices C y D cumplen la condición:

Existe un entero $n_0 \geq 2$ para el que $n_0(n_0-1)I = C + n_0 D$

entonces, de (4.4) se deduce que $A_{n_0+2}=0$ y de este modo, una solución en $\mathbb{R}^{m\times m}$ de (4.1) es el polinomio matricial de grado n_0, $X(t) = A_0 + tA_1 + \ldots + t^{n_0}A_{n_0}$, donde A_0 y A_1 son matrices, una arbitraria y la otra nula según n_0 sea par o impar respectivamente, y el resto de coeficientes viene dado por (4.6).

4.3 PROPIEDADES DEL CALCULO FUNCIONAL MATRICIAL

En las secciones siguientes de este capítulo haremos uso de ciertos resultados del cálculo funcional matricial. En particular, emplearemos la función factorial matricial y las funciones Gamma Γ y su inversa Γ^{-1}, que ya fueron presentadas en el capítulo I. En esta sección detallamos otros resultados tales como la descomposición de Schur de una matriz e introducimos el concepto de función Beta de Euler matricial $B(A,yI)$.

A.- Si $A\in\mathbb{C}^{mxm}$, entonces por [10,p.192], existe una matriz unitaria $Q\in\mathbb{C}^{mxm}$ tal que $Q^H AQ = D+N$, donde Q^H es la transpuesta conjugada de Q, $D = \text{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$ con $\lambda_i\in\sigma(A)$, y $N\in\mathbb{C}^{mxm}$ es una matriz triangular estrictamente superior y por tanto nilpotente.

Esta representación se denomina descomposición de Schur de la matriz A y Q puede ser elegida de modo que los valores propios de A aparezcan en un determinado orden a lo largo de la diagonal de D. En virtud de la descomposición de Schur se demuestra el siguiente lema [10,p.396].

LEMA 4.1 Dada una matriz $A\in\mathbb{R}^{mxm}$ que admite la descomposición de Schur $Q^H AQ = D+N$, y sea $a = \max\{\text{Re } z;\ z\in\sigma(A)\}$, entonces para todo número real t, se cumple que

$$(4.12) \qquad \|\exp(At)\| \le e^{at} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\|N\|^k}{k!} |t|^k$$

donde $\| \quad \|$ representa la norma espectral definida en el capítulo I.

B.- Si x e y son números complejos con parte real positiva, Re x >0, Re y >0, entonces la función Beta de Euler B(x,y) definida por

$$(4.13) \qquad B(x,y) = \int_0^1 u^{x-1}(1-u)^{y-1}\, du ,$$

es una función holomorfa en el semi-plano Re x >0, para un número complejo dado y, con Re y >0, véase [42,p.416]. Recordemos la fórmula, [26,p.14],

$$(4.14) \qquad B(x,y) = \frac{\Gamma(x)\,\Gamma(y)}{\Gamma(x+y)} , \qquad \operatorname{Re} x > 0, \quad \operatorname{Re} y > 0$$

Obsérvese que si definimos $h(x) = x+y$, entonces $\Gamma(x+y)$ se puede escribir como la composición de funciones escalares, $f(x) = \Gamma(x+y) = (\Gamma o h)(x)$, donde y es un número complejo fijo con Re y >0.

Sea A una matriz de $\mathbb{C}^{m\times m}$ tal que:

$$(4.15) \qquad \text{Re } z > 0 \text{ para todo valor propio } z \text{ de } A$$

Si escribimos $v(x) = \Gamma(x)\Gamma(y)$, y $r(x) = \frac{v(x)}{f(x)}$, de las propiedades del cálculo funcional matricial se deduce que

$$(4.16) \qquad \begin{aligned} r(A) &= v(A)\left(f(A)\right)^{-1} = \Gamma(A)\ \Gamma(y)\ I\ \Gamma^{-1}(A+yI) = \\ &= \Gamma(A)\ \Gamma(yI)\ \Gamma^{-1}(A+yI) \end{aligned}$$

Por (4.14) y (4.16), si A es una matriz que satisface (4.15), estamos en disposición de definir la función Beta de Euler matricial $B(A,yI)$ por la expresión

$$(4.17) \qquad B(A,yI) = \Gamma(A)\ \Gamma(yI)\ \Gamma^{-1}(A+yI)$$

De la propiedad de simetría de la función Beta escalar, $B(x,y)=B(y,x)$, [42,p.416] y de los comentarios anteriores, se sigue que $B(A,yI)=B(yI,A)$.

Es bien conocido que, [42,p.417], la función $B(x,y)$ puede escribirse de la forma

$$B(x,y) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2x-1}\theta\ \cos^{2y-1}\theta\ d\theta\ , \qquad \text{Re } x > 0, \quad \text{Re } y > 0 \qquad (4.18)$$

Si A es una matriz de $\mathbb{R}^{m\times m}$ que cumple la condición espectral (4.15), en virtud del cálculo funcional matricial se deduce, a partir de (4.17) y (4.18), que $B(A,yI)$ admite la representación

$$(4.19) \qquad B(A,yI) = 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{2A-I}\theta \cos^{2y-1}\theta \, d\theta \,, \qquad \operatorname{Re} y > 0$$

Para mayor claridad en la presentación de resultados posteriores, vamos a incluir a continuación el siguiente lema.

LEMA 4.2 Sean k un entero $k \geq 0$, y b un número real $b > -1$. Si denominamos por $I(k,b)$ a la integral

$$(4.20) \qquad I(k,b) = \int_0^{\pi/2} |\ln \operatorname{sen}\theta|^k \operatorname{sen}^b\theta \, d\theta \,,$$

entonces se demuestra que

$$(4.21) \qquad I(k,b) \leq \frac{\pi}{2} \frac{k!}{(1+b)^{k+1}} \,, \qquad \text{si } -1 < b < 0$$

$$(4.22) \qquad I(k,b) \leq \frac{\pi}{2} k! \,, \qquad \text{si } b \geq 0$$

Demostración. Por la conocida desigualdad de Jordan

$$(4.23) \qquad \operatorname{sen}\theta \geq 2\theta/\pi \,, \qquad 0 < \theta \leq \pi/2$$

se deduce que

$$(4.24) \qquad \ln^k(\mathrm{sen}^{-1}\theta) \le \ln^k\left(\frac{\pi}{2\theta}\right), \qquad 0<\theta\le\pi/2$$

y

$$(4.25) \qquad \mathrm{sen}^b\theta \le (2\theta/\pi)^b, \qquad 0<\theta\le\pi/2, \quad -1<b<0$$

Ya que $|\ln \mathrm{sen}\theta|^k = \ln^k(\mathrm{sen}^{-1}\theta)$, de (4.20), (4.24) y (4.25) se sigue que

$$(4.26) \qquad I(k,b) \le \int_0^{\pi/2} \ln^k\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) (2\theta/\pi)^b \, d\theta , \qquad -1<b<0$$

Al efectuar el cambio de variable $t=\ln\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)$ en la integral del segundo miembro de (4.26) se obtiene

$$(4.27) \qquad I(k,b) \le \frac{\pi}{2} \int_0^{\infty} t^k \, e^{-(b+1)t} \, dt , \qquad -1<b<0$$

Y por último se realiza la sustitución $u=(b+1)t$, con la que se obtiene

$$(4.28) \qquad \begin{aligned} I(k,b) &\le \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+b)^{k+1}} \int_0^{\infty} u^k \, e^{-u} \, du = \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{1}{(1+b)^{k+1}} \Gamma(k+1) \qquad -1<b<0 \end{aligned}$$

De esta manera queda demostrada la desigualdad (4.21). Para obtener (4.22) utilizamos (4.24) y la cota $\mathrm{sen}\theta \le 1$, y al efectuar el citado cambio de variable $t=\ln\left(\frac{\pi}{2\theta}\right)$, se deduce que

(4.29) $$I(k,b) \le \int_0^{\pi/2} \ln^k\left(\frac{\pi}{2\theta}\right) d\theta =$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\infty} t^k\, e^{-t}\, dt = \frac{\pi}{2}\,\Gamma(k+1) = \frac{\pi}{2}\, k!\ , \qquad b\ge 0$$

Y así queda demostrado el lema.

El siguiente teorema proporciona una cota superior de la norma de $B(A,yI)$ para matrices A que satisfacen la condición espectral (4.15) y números complejos "y" tales que $\mathrm{Re}\ y \ge 1/2$. Posteriormente utilizaremos este resultado para demostrar la acotación de ciertos polinomios matriciales.

TEOREMA 4.2 *Sea* A *una matriz de* $\mathbb{R}^{m\times m}$ *que satisface la condición* (4.15) *y llamemos* $a=\max\{\mathrm{Re}\ z;\ z\in\sigma(A)\}$. *Si* y *es un número complejo con* $\mathrm{Re}\ y \ge 1/2$ *y consideramos la descomposición de Schur de la matriz* $2A-I$,

(4.30) $$Q^H(2A-I)Q = \Lambda + N\ ,$$

donde Λ *es diagonal y* N *es nilpotente, entonces se demuestra que*

$$\|B(A,yI)\| \le B(a,\tfrac{1}{2}) + \frac{\pi}{2a}\sum_{k=1}^{m-1}\left(\frac{\|N\|}{2a}\right)^k = \gamma_1(a)\ , \qquad 0<a<\tfrac{1}{2}$$

(4.31)

y

$$\|B(A,yI)\| \le B(a,\tfrac{1}{2}) + \pi\sum_{k=1}^{m-1}\|N\|^k = \gamma_2(a) \le \pi\sum_{k=0}^{m-1}\|N\|^k , \qquad a\ge\tfrac{1}{2}$$

(4.32)

Demostración. Por (4.12), si t es un número real, tenemos que

$$\|\exp((2A-I)t)\| \le e^{(2a-1)t}\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\|N\|^k}{k!}|t|^k \tag{4.33}$$

Sea $0<\theta\le\pi/2$, entonces $\mathrm{sen}^{2A-I}\theta = \exp\Big((2A-I)\ \ln(\mathrm{sen}\theta)\Big)$ y por (4.33) se obtiene que

$$\|\mathrm{sen}^{2A-I}\theta\| \le \mathrm{sen}^b\theta\sum_{k=0}^{m-1}\frac{\|N\|^k}{k!}|\ln\ \mathrm{sen}\theta|^k , \qquad b=2a-1 \tag{4.34}$$

Como $\displaystyle\int_0^{\pi/2}\mathrm{sen}^b\theta\ d\theta = \frac{1}{2}\ B(a,\tfrac{1}{2})$, de (4.34) se sigue

$$\int_0^{\pi/2}\|\mathrm{sen}^{2A-I}\theta\|\ d\theta \le \tag{4.35}$$

$$\le \left\{B(a,\tfrac{1}{2}) + \sum_{k=0}^{m-1}\frac{\|N\|^k}{k!}\int_0^{\pi/2}|\ln\ \mathrm{sen}\theta|^k\ \mathrm{sen}^b\theta\ d\theta\right\}$$

Ahora tomando normas en (4.19) y utilizando el lema 4.2 y el dato de que Re $y \geq 1/2$, y $0<\theta\leq\pi/2$, por lo que $|\cos^{2y-1}\theta| \leq 1$, queda demostrado el teorema.

C.- Terminamos esta sección recordando un resultado referente al orden de los términos en una serie. Si $T(n,k)$ es una matriz de $\mathbb{R}^{m\times m}$ para $k\geq o$, $n\geq o$, entonces se demuestra de forma análoga a la demostración del lema 11 de [37,p.57] que

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} T(k,n) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0}^{[n/2]} T(k,n-2k) , \tag{4.36}$$

donde $[n/2]$ representa la parte entera de $n/2$.

4.4 POLINOMIOS MATRICIALES DE GEGENBAUER: DEFINICION Y EXPRESIONES EXPLICITAS

Sea D una matriz de $\mathbb{R}^{m\times m}$, tal que

$$(4.37) \qquad \sigma(D) \cap (\mathbb{N} \cup \{-1,0\}) = \emptyset$$

Introducimos la función generatriz matricial $F(x,t) = \left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{1}{2}(I+D)} = \exp\left(\frac{1}{2}(I+D) \log(1-2xt+t^2)\right)$. Si r_1 y r_2 son las raíces de la ecuación de segundo grado $1-2xt+t^2=0$, y si r es el mínimo del conjunto $\{|r_1|,|r_2|\}$, entonces la función matricial F(x,t), considerada como función de t, es analítica en el disco $|t|<r$, para todo número real x tal que $|x|<1$. Apoyándonos en la teoría de variable compleja y en el cálculo funcional matricial [7], podemos escribir

$$(4.38) \qquad F(x,t) = \left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{1}{2}(I+D)} = \sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n \ , \qquad |t|<r$$

Para hacer ver que F(x,t) es derivable término a término con respecto a la variable x, nótese que F(x,t), definida para valores complejos de x dentro del disco $|x|<1$, se puede considerar como

$$(4.39) \quad F(x,t)=\exp\left(\frac{1}{2}(I+D) \log(1-2xt+t^2)\right)=\sum_{n\geq 0} P_n(x)t^n, \ |t|<r$$

donde log representa el argumento principal del logaritmo que coincide con la función real logarítmica ln para valores positivos del argumento, [42,p.72]. Si $c>0$ y $|t|$ es suficientemente pequeño, la serie (4.39) es absolutamente convergente en $|x|<c$. Entonces, aplicando el teorema de Weierstrass [42,p.116], podemos escribir

$$\frac{\partial}{\partial x} F(x,t)=\sum_{n\geq 0} P'_n(x)t^n=\frac{1}{2}(I+D)(-2t)\left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{1}{2}(D-I)} \tag{4.40}$$

Nótese que tomando $t=0$ en (4.38) tenemos que

$$F(x,0) = I = P_0(x) \tag{4.41}$$

Al derivar término a término con respecto a la variable t, se obtiene

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x,t) = \sum_{n\geq 1} nP_n(x)t^{n-1} = \frac{1}{2}(I+D)(2t-2x)\left(1-2xt+t^2\right)^{\frac{1}{2}(D-I)} \tag{4.42}$$

De (4.40) y (4.42) se deduce que

$$\frac{\partial}{\partial t} F(x,t) = (x-t)\frac{\partial}{\partial x} F(x,t) \tag{4.43}$$

$$-(x-t)(I+D)F(x,t) = (1-2xt+t^2)\frac{\partial}{\partial t} F(x,t) \tag{4.44}$$

$$-t(I+D)F(x,t) = (1-2xt+t^2)\frac{\partial}{\partial x}F(x,t) \tag{4.45}$$

A partir de (4.40), (4.42) y (4.43) se obtiene que

$$t\sum_{n\geq 1} nP_n(x)t^{n-1} = x\sum_{n\geq 0} P'_n(x)t^n - \sum_{n\geq 0} P'_n(x)t^{n+1} \tag{4.46}$$

Al identificar los coeficientes de t^n en ambos miembros de (4.46) se deduce que $xP'_0(x)=0$ de acuerdo con (4.41) y

$$nP_n(x) = xP'_n(x) - P'_{n-1}(x)\,, \qquad n\geq 1 \tag{4.47}$$

De (4.44) se obtiene

$$\sum_{n\geq 0}[(n-1)I-D]P_n(x)t^{n+1} - x\sum_{n\geq 0}[(2n-1)I-D]P_n(x)t^n + \sum_{n\geq 1} nP_n(x)t^{n-1} = 0 \tag{4.48}$$

Al igualar a cero los coeficientes del primer miembro de la ecuación (4.48) se observa que $x(I+D)P_0(x)+P_1(x)=0$, o de otro modo, $P_1(x)=-(I+D)x$, y para $n\geq 1$ se obtiene la relación de recurrencia con tres términos matriciales:

$$(n+1)P_{n+1}(x) - x[(2n-1)I-D]P_n(x) + [(n-2)I-D]P_{n-1}(x) = 0$$

(4.49) $n \geq 1$

De la ecuación (4.45) se sigue que

$$\sum_{n\geq 0} P'_n(x)t^n - 2x\sum_{n\geq 0} P'_n(x)t^{n+1} + \sum_{n\geq 0} P'_n(x)t^{n+2} + (I+D)\sum_{n\geq 0} P_n(x)t^{n+1} = 0$$

(4.50)

(4.51) $$P'_{n+1}(x) - 2xP'_n(x) + P'_{n-1}(x) + (I+D)P_n(x) = 0$$

Utilizando (4.47) para eliminar $P'_{n-1}(x)$ de (4.51) se llega a la ecuación

(4.52) $$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = [(n-1)I-D]P_n(x)$$

y finalmente, sustituyendo n por n-1 en (4.52), hallamos que

(4.53) $$P'_n(x) - xP'_{n-1}(x) = [(n-2)I-D]P_{n-1}(x), \quad n\geq 1$$

De la ecuación resultante al multiplicar (4.47) por x y de (4.53) se obtiene por adición que

(4.54) $$(1-x^2)P'_n(x) = [(n-2)I-D]P_{n-1}(x) - nxP_n(x), \qquad n\geq 1$$

Al derivar respecto a x la ecuación (4.54) se tiene

que

$$(1-x^2)P''_n(x) - 2xP'_n(x) = [(n-2)I-D]P'_{n-1}(x) - nxP'_n(x) - nP_n(x)$$

(4.55) $n\geq 1$

y sustituyendo en (4.55) la expresión de $P'_{n-1}(x)$ dada por (4.47) se encuentra que

$$(1-x^2)P''_n(x) + xDP'_n(x) + n[(n-1)I-D]P_n(x) = 0$$

Por lo tanto, la función matricial $P_n(x)$ para $n\geq 0$, es una solución de la ecuación

$$(1-x^2)Y''(x) + xDY'(x) + n[(n-1)I-D]Y(x) = 0$$

Vamos a concluir esta sección con la demostración de que la función matricial $P_n(x)$ es un polinomio de grado n bajo la condición (4.37) y con la obtención de una expresión explícita del mismo.

Nótese que F(x,t) definida por (4.38) se puede escribir de la forma

$$F(x,t) = \left((1-xt)^2-t^2(x^2-1)\right)^{\frac{1}{2}(I+D)} =$$

$$= \left\{(1-xt)^2\left[1 - \frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]\right\}^{\frac{1}{2}(I+D)}$$

y teniendo en cuenta la propiedad conmutativa (1.9),

$$(4.57) \qquad F(x,t) = (1-xt)^{(I+D)}\left[1 - \frac{t^2(x^2-1)}{(1-xt)^2}\right]^{\frac{1}{2}(I+D)}$$

Al efectuar el desarrollo de Taylor en t=0 del último factor del segundo miembro de (4.57), y utilizar nuevamente (1.9), se obtiene

$$(4.58) \qquad F(x,t) = \sum_{k\geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}(I+D)\right)_k (x^2-1)^k t^{2k} (1-xt)^{(I+D)-2kI}}{k!},$$

donde $\left(-\frac{1}{2}(I+D)\right)_k$ es la función factorial matricial definida en (1.5). La matriz $(-(I+D))_k$ es invertible para $k\geq 0$ debido a la hipótesis (4.37). Ahora, consideramos el desarrollo de Taylor de $(1-xt)^{(I+D)-2kI}$ en (4.58) y de este modo

$$(4.59) \qquad F(x,t)$$

$$\sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \frac{\left(-\frac{1}{2}(I+D)\right)_k (-(I+D))_{n+2k} x^n (x^2-1)^k t^{n+2k}}{k!\ n!} \left[(-(I+D))_{2k}\right]^{-1}$$

Utilizando las propiedades (1.8) y (4.36) podemos escribir la expresión anterior de la forma

$$F(x,t) = \sum_{n\geq 0}\sum_{k\geq 0} \frac{(-(I+D))_{n+2k} x^n (x^2-1)^k t^{n+2k}}{2^{2k}\ k!\ n!} \left[\left(-\frac{1}{2}\ D\right)_k\right]^{-1} =$$

(4.60

$$= \sum_{n\geq 0} \left\{ \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-(I+D))_n\ x^{n-2k} (x^2-1)^k}{2^{2k}\ k!\ (n-2k)!} \left[\left(-\frac{1}{2}\ D\right)_k\right]^{-1} \right\} t^n ,$$

y al identificar (4.60) con la definición (4.38), concluimos que

$$P_n(x) = (-I-D)_n \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{x^{n-2k} (x^2-1)^k}{2^{2k}\ k!\ (n-2k)!} \left[\left(-\frac{1}{2}\ D\right)_k\right]^{-1} \tag{4.61}$$

y de esta forma queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 4.3 *Sean* D *una matriz de* $\mathbb{R}^{m\times m}$ *que verifica la condición* (4.37) *y* F(x,t) *la función generatriz definida por* (4.38). *Entonces* $P_n(x)$ *es un polinomio matricial de grado* n, *para* n≥0, *cuyo coeficiente principal es invertible.*

El polinomio matricial $P_n(x)$ *puede expresarse explícitamente en términos de* D *por medio de* (4.61) *y satisface la ecuación diferencial* (4.56).

Llamaremos polinomio matricial n-*ésimo de Gegenbauer a* $P_n(x)$.

NOTA 4.1 Los polinomios introducidos por el teorema anterior coinciden para el caso escalar, (m=1), con los polinomios de Gegenbauer , [37,p.279].

4.5 ORTOGONALIDAD Y ACOTACION DE LOS POLINOMIOS MATRICIALES DE GEGENBAUER

La acotación de la sucesión de los polinomios matriciales de Gegenbauer $\left\{P_n(x)\right\}_{n\geq 0}$ es de importancia relevante a la hora de obtener desarrollos en serie convergentes de funciones en términos de tales polinomios matriciales. Para este propósito asumiremos la condición espectral:

(4.62) para todo valor propio $z\in\sigma(D)$, $\operatorname{Re} z < -1$

Teniendo en cuenta que de (1.7), se sigue que

$$(2k)! = 2^{2k}\left(\frac{1}{2}\right)_k k!\ ,$$

y la propiedad de la función Γ escalar

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}+k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)_k \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

tenemos que

$$\left(-\frac{1}{2}(I+D)\right)_k = \Gamma\left(-\frac{1}{2}D + (k-\frac{1}{2})I\right)\ \Gamma^{-1}\left(-\frac{1}{2}(I+D)\right)\ , \qquad k\geq 0,$$

y de esta forma podemos expresar (4.61) como sigue

(4.63) $$P_n(x) =$$

$$= \frac{(-I-D)_n \, \Gamma\left(-\frac{1}{2}D\right)}{\Gamma(1/2)} \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{\Gamma(k+1/2)\ (x^2-1)^k}{(2k)!\ (n-2k)!} \Gamma^{-1}\left(kI-\frac{1}{2}D\right) x^{n-2k}$$

De (4.17), (4.62) y (4.63) se deduce que

$$P_n(x) = \frac{(-I-D)_n \, \Gamma\left(-\frac{1}{2}D\right) \, \Gamma^{-1}\left(-\frac{1}{2}(I+D)\right)}{\Gamma(1/2)} \, .$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{\Gamma(k+1/2)\ (x^2-1)^k}{(2k)!\ (n-2k)!} \Gamma\left(-\frac{1}{2}(I+D)\right) \Gamma^{-1}\left(kI-\frac{1}{2}D\right) x^{n-2k} =$$

$$= (-I-D)_n \left[B\left(-\frac{1}{2}(I+D), \frac{1}{2}I\right)\right]^{-1} .$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{B\left(-\frac{1}{2}(I+D), (k+\frac{1}{2})I\right)}{(2k)!\ (n-2k)!} x^{n-2k} \ (x^2-1)^k =$$

$$= (-I-D)_n \left[B\left(-\frac{1}{2}(I+D), \frac{1}{2}I\right)\right]^{-1} .$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{x^{n-2k}(x^2-1)^k}{(2k)!\ (n-2k)!} \, 2\int_0^{\pi/2} \operatorname{sen}^{-D-2I}\theta \, \cos^{2k}\theta \, d\theta$$

(4.64)

Ya que $\int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{-D-2I}\theta \cos^k\theta \, d\theta = 0$, para enteros positivos impares k, podemos escribir

$$P_n(x) = (-I-D)_n\left[B\left(-\frac{1}{2}(I+D),\frac{1}{2}I\right)\right]^{-1}.$$

$$\cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{x^{n-k}\ (x^2-1)^{k/2}}{k!\ (n-k)!} \int_0^{\pi} \operatorname{sen}^{-D-2I}\theta \cos^k\theta \, d\theta =$$

$$= \frac{(-I-D)_n\left[B\left(-\frac{1}{2}(I+D),\frac{1}{2}I\right)\right]^{-1}}{n!} \int_0^{\pi}\left[x+(x^2-1)^{1/2}\cos\theta\right]^n \operatorname{sen}^{-D-2I}\theta \, d\theta$$

(4.65)

Tomando normas en (4.65) y utilizando que $|x+(x^2-1)^{1/2}\cos\theta| \le 1$ para $-1<x<1$, se sigue

$$\|P_n(x)\| \le \frac{\|(-I-D)_n\|\ \left\|B^{-1}\left(-\frac{1}{2}(I+D),\frac{1}{2}I\right)\right\|}{n!} \int_0^{\pi} \|\operatorname{sen}^{-D-2I}\theta\| \, d\theta$$

$$\le 2\ \frac{\|(-I-D)_n\|\ \left\|B^{-1}\left(-\frac{1}{2}(I+D),\frac{1}{2}I\right)\right\|}{n!} \int_0^{\pi/2} \|\operatorname{sen}^{-D-2I}\theta\| \, d\theta$$

(4.66)

Obsérvese que si $A=-\frac{1}{2}(I+D)$, entonces $-D-2I=2A-I$, y por el teorema 4.2, tenemos que

(4.67) $$\|P_n(x)\| \le \gamma_i(a)\ \left\|B^{-1}\left(-\frac{1}{2}(I+D),\frac{1}{2}I\right)\right\|\ \frac{\|(-I-D)_n\|}{n!},\quad i=1,2.$$

donde

(4.68) $$a = \max\left\{ -\frac{1}{2}(1 + \mathrm{Re}\ z)\ ;\ z\in\sigma(D) \right\}$$

y $\gamma_1(a)$, $\gamma_2(a)$, vienen definidos por el segundo miembro de (4.31) y (4.32), respectivamente, y N es la matriz nilpotente que aparece en la descomposición de Schur de $-(D+2I)$,

(4.69) $$-Q^H(D+2I)Q = \Lambda + N$$

A continuación, vamos a introducir algunas definiciones relacionadas con el concepto de ortogonalidad de modo análogo a las dadas para el caso escalar en [2,p.6].

DEFINICION 4.1 *Dadas una sucesión de matrices de* $\mathbb{R}^{mxm}$ $\left\{\Omega_n\right\}_{n\ge 0}$, *y* $\mathcal{L} : \mathcal{P}_m(x) \longrightarrow \mathbb{R}^{mxm}$, *definida por*

$$\mathcal{L}\ [x^n I] = \Omega_n\ , \qquad n=0,1,2,\ldots$$

(4.70)

$$\mathcal{L}[A_1Q_1(x) + A_2Q_2(x)] = A_1\mathcal{L}[Q_1(x)] + A_2\mathcal{L}[Q_2(x)]\ ,$$

donde $A_i\in\mathbb{R}^{mxm}$ *y* $Q_i(x)\in\mathcal{P}_m(x)$ *para* $i=1,2.$

Entonces decimos que $\mathcal{L}$ *es el funcional momento matricial definido por la sucesión de momentos matriciales* $\left\{\Omega_n\right\}_{n\geq 0}$. *A* Ω_n *le llamamos momento matricial de orden* n.

DEFINICION 4.2 *Sea* $P_n(x)$ *un polinomio matricial con* $n\geq 0$. *Decimos que* $\left\{P_n(x)\right\}_{n\geq 0}$ *es una sucesión de polinomios ortogonales matriciales con respecto al funcional momento matricial* $\mathcal{L}$ *si, para todos* n, s, *enteros no negativos, se cumple que*

(i) $P_n(x)$ *es un polinomio matricial de grado* n *con coeficiente principal invertible.*

(ii) $\mathcal{L}[P_n(x)P_s(x)] = 0$, *para* $n\neq s$.

(iii) $\mathcal{L}[P_n^2(x)]$ *es invertible para* $n\geq 0$.

EJEMPLO 4.1 Sea D una matriz de $\mathbb{R}^{m\times m}$ que verifica la condición (4.37); definimos la función peso matricial W(x), de la forma

$$(4.72) \qquad W(x) = \left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}(D+2I)}, \qquad -1<x<1$$

Nótese que W(x) es integrable en (-1,1) ya que

$$\int_{-1}^{1} W(x)\, dx = \int_{-1}^{1}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}(D+2I)} dx = B\left(\frac{1}{2}I, -\frac{1}{2}D\right) = B\left(-\frac{1}{2}D, \frac{1}{2}I\right)$$

Asumiendo la condición (4.37), definimos el funcional momento matricial $\mathscr{L}$ mediante

$$(4.73)\qquad \mathscr{L}[x^{2n+1}I] = \int_{-1}^{1} x^{2n+1}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}(D+2I)} dx = 0 ,$$

$$\mathscr{L}[x^{2n}I] = \int_{-1}^{1} x^{2n}\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}(D+2I)} dx = \int_{0}^{1} t^{n-\frac{1}{2}}\left(1-t\right)^{-\frac{1}{2}(D+2I)} dt =$$

(4.74)

$$= B\left((n+\tfrac{1}{2})I, -\tfrac{1}{2}D\right) = B\left(-\tfrac{1}{2}D, (n+\tfrac{1}{2})I\right)$$

A continuación demostraremos que, bajo la condición (4.37), la sucesión de polinomios matriciales de Gegenbauer $\left\{P_n(x)\right\}_{n\geq 0}$ es ortogonal con respecto al funcional momento matricial $\mathscr{L}$ definido por (4.73) y (4.74).

Por el teorema 4.3 tenemos que los polinomios $P_n(x)$ verifican

$$(4.75)\qquad (1-x^2)P''_n(x) + xDP'_n(x) + n[(n-1)I-D]P_n(x) = 0$$

Consideremos el cambio

$$(4.76)\qquad P_n(x) = U_n(x)T(x) , \qquad T(x) = (1-x^2)^{(D+2I)/4}$$

Al efectuar las derivadas de T(x) se deduce que

$$T'(x) = -\frac{x}{2}(D+2I)(1-x^2)^{-1}T(x)$$

(4.77)

$$T''(x) = \frac{1}{2}(D+2I)(Dx^2/2 - I)(1-x^2)^{-2}T(x)$$

Ahora sustituimos (4.76) en la ecuación (4.75) y utilizamos (4.77) para llegar a que

(4.78) $$\left[(1-x^2)U_n''(x) - 2xU_n'(x) + U_n(x)K_n(x)\right]T(x) = 0$$

donde

(4.78) $$K_n(x) = -\frac{1}{2}(D+2I)(1-x^2)^{-1} + n[(n-1)I-D]$$

Postmultiplicando la ecuación (4.78) por $T^{-1}(x)$ y simplificando la expresión resultante se obtiene

(4.80) $$\left[(1-x^2)U_n'(x)\right]' + U_n(x)K_n(x) = 0$$

Postmultiplicando (4.80) por $U_m(x)$ y restando la ecuación resultante de $\left\{\left[(1-x^2)U_m'(x)\right]' + U_m(x)K_m(x)\right\}U_n(x)=0$, se llega a que

$$(1-x^2)\left[U_m'(x)U_n(x) - U_n'(x)U_m(x)\right]' =$$

(4.81)

$$= -(m-n)[(m+n-1)I-D]U_n(x)U_m(x)$$

Al efectuar la integral de (4.81) en (-1,1) resulta

que

$$0 = (m-n)[(m+n-1)I-D]\int_{-1}^{1} U_n(x)U_m(x)\, dx$$

y teniendo en cuenta la transformación (4.76), la definición (4.72) y la condición espectral (4.37) se concluye que

$$(4.82) \qquad \int_{-1}^{1} P_n(x)W(x)P_m(x)\, dx = 0\ , \qquad m\neq n.$$

Nótese que por (1.9), $W(x)=\left(1-x^2\right)^{-\frac{1}{2}(D+2I)}$ conmuta con $P_m(x)$ para $m\geq 0$ y entonces debido a (4.73) y (4.74) podemos escribir (4.82) de la forma

$$(4.83) \qquad \mathscr{L}[P_n(x)P_m(x)] = 0\ , \qquad m\neq n.$$

Por último obtendremos la expresión de $\mathscr{L}[P_n^2(x)]$ y comprobaremos que es invertible para $n\geq 0$.

Sustituyendo n por n-1 en la relación de recurrencia (4.49) tenemos que

$$nP_n(x) - x[(2n-3)I-D]P_{n-1}(x) + [(n-3)I-D]P_{n-2}(x) = 0, \qquad n\geq 2$$
(4.84)

Al efectuar la diferencia entre el producto de

$[(2n-1)I-D]P_n(x)$ por (4.84) y el producto de $[(2n-3)I-D]P_{n-1}(x)$ por (4.49), se obtiene que

$$
\begin{aligned}
& n[(2n-1)I-D]P_n^2(x) + [(n-3)I-D][(2n-1)I-D]P_n(x)P_{n-2}(x) + \\
(4.85) \qquad & -(n+1)[(2n-3)I-D]P_{n+1}(x)P_{n-1}(x) + \\
& - [(n-2)I-D][(2n-3)I-D]P_{n-1}^2(x) = 0 , \qquad n\geq 2
\end{aligned}
$$

Si multiplicamos (4.85) por W(x) e integramos en (-1,1), teniendo en cuenta (1.9) y la relación de ortogonalidad (4.84), resulta que

$$
n[(2n-1)I-D]\int_{-1}^{1} P_n^2(x)W(x)\,dx =
$$

$$
= [(n-2)I-D][(2n-3)I-D]\int_{-1}^{1} P_{n-1}^2(x)W(x)\,dx ,
$$

y de este modo, para $n\geq 2$, se verifica que

$$
\mathscr{L}[P_n^2(x)] = \frac{[(n-2)I-D][(2n-3)I-D][(2n-1)I-D]^{-1}}{n}\,\mathscr{L}[P_{n-1}^2(x)]
$$

o bien, $\mathscr{L}[P_n^2(x)] =$

$$
= (I-D)\frac{(-D)(-D+I)\dots(-D+(n-2)I)}{n!}\,[(2n-1)I-D]^{-1}\mathscr{L}[P_1^2(x)]
$$

(4.86) $\qquad n\geq 2$

De la definición de $\mathscr{L}$ dada por (4.73) y (4.74) y teniendo en cuenta que $P_0(x)=I$ y $P_1(x)=-(I+D)x$, se tiene

que

$$\mathcal{L}[P_1^2(x)] = (I+D)^2\mathcal{L}[x^2 I] = (I+D)^2 B(-D/2, 3I/2) =$$

(4.87)

$$= \frac{\sqrt{\pi}\ (-I-D)_1\ \Gamma(-D/2)\ \Gamma^{-1}(-(I+D)/2)\ (-D/2 + I/2)^{-1}}{1!},$$

$$\mathcal{L}[P_0^2(x)] = \mathcal{L}[I] = B(-D/2, I/2) =$$

(4.88)

$$= \frac{\sqrt{\pi}\ (-I-D)_0\ \Gamma(-D/2)\ \Gamma^{-1}(-(I+D)/2)\ (-D/2 - I/2)^{-1}}{0!}.$$

Nótese que podemos afirmar por (4.86), (4.87) y (4.88) que $\mathcal{L}[P_n^2(x)]$ es invertible para $n \geq 0$. Por los comentarios precedentes queda demostrado el siguiente teorema.

TEOREMA 4.4 *Sea D una matriz de* $\mathbb{R}^{m\times m}$ *que verifica la condición* (4.37). *Entonces la sucesión de polinomios matriciales de Gegenbauer* $\left\{P_n(x)\right\}_{n\geq 0}$ *definidos en* (4.61) *es una sucesión ortogonal con respecto al funcional momento matricial* $\mathcal{L}$ *dado en el ejemplo* 4.1 *por las expresiones* (4.73) *y* (4.74).

La expresión explícita de $\mathcal{L}[P_n^2(x)]$ *es la siguiente:*

$$\mathcal{L}[P_n^2(x)] = \frac{\sqrt{\pi}\ (-I-D)_n\ \Gamma\left(-\frac{D}{2}\right)\ \Gamma^{-1}\left(-\frac{I+D}{2}\right)\ \left(-\frac{D}{2} + (n-\frac{1}{2})I\right)^{-1}}{n!}$$

(4.89) $n \geq 0$.

REFERENCIAS

[1]. S.L. CAMPBELL and C.D. MEYER Jr., Generalized Inverses of Linear Transformations, Pitman Pub.Co., London, 1979.

[2]. T.S. CHIHARA, An Introduction to Orthogonal Polynomials, Gordon and Breach, New York, 1978.

[3]. E.A. CODDINGTON and N. LEVINGSON, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York, 1955.

[4]. C. DAVIS and P. ROSENTHAL, Solving Linear Operator, Equations, Can. J. Math. XXVI, 6(1974), 1384-1389.

[5]. Ph. DELSARTE, Y. GENIN and Y. KAMP, Orthogonal Polynomial Matrices in the Unit Circle, IEEE Trans. Circuits and Systems, 25(1978),145-160.

[6]. A. DRAUX and O. JOKUNG-NGUENA, Orthogonal Polynomials in a Non-Commutative Algebra. Non-Normal Case. IMACS Annals on Computing and Appl. Maths. 9(1991),237-242.

[7]. N. DUNFORD and J. SCHWARTZ, Linear Operators, part I, Interscience, New York, 1957.

[8]. F.R. GANTMACHER, The Theory of Matrices, Vol I, Chelsea, Bronx, New York, 1959.

[9]. J.S. GERONIMO, Matrix Orthogonal Polynomials in the Unit Circle, J. Maths. Ohys. 22(7),(1981),1359-1365.

[10]. G.H. GOLUB and C.F. VAN LOAN, Matrix Computations, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, M.A.,1983.

[11]. P.R. HALMOS, A Hilbert Space Problem Book, Van Nostrand, Princeton, New Jersey, 1967.

[12]. E. HILLE, Lectures on Ordinary Differential Equations, Addison-Wesley, New York, 1969.

[13]. W.D. HOSKINS, D.S. MEEK and D.J. WALTON, A Rapidly Convergent Method for the Solution of the Matrix Equation XA+AY=F, J. Computational and Appl. Maths. 3 No.3(1977), 211-215.

[14]. W.D. HOSKINS and D.J. WALTON, Methods for Solving the Matrix Equation TB+CT=-A and its Generalizations, Linear Algebra Appls., 23(1979), 217-225.

[15]. A. JAMESON, Solution of the Equation AX+XB=C by Inversion of an MxM or NxN Matrix, SIAM J. Appl. Maths.

[16]. L.JÓDAR, Boundary Value Problems and Cauchy Problems for the Second Order Euler Operator Differential Equations, Linear Algebra Appl., 91(1987), 1-12.

[17]. L. JÓDAR, Explicit Solutions for Second Order Operator Differential Equations with Two Boundary Value Conditions, Linear Alg. Appl. 103(1988), 35-53.

[18]. L. JÓDAR, Explicit Solutions of Two-Point Boundary Value Problems, Maths. Z., 199(1988), 555-564.

[19]. L. JÓDAR and E. NAVARRO, Rectangular Co-Solutions of Polynomial Matrix Equations and Applications, Appl. Maths. Lett., 4 No.2 (1991), 13-16.

[20]. L. JÓDAR, M. LEGUA and A.G. LAW, A Matrix Method of Frobenius, and Application to a Generalized Bessel Equation, Congresus Numerantium, 86(1992), 7-17.

[21]. L. JÓDAR, Computing Accurate Solutions for Coupled Systems of Second Order Partial Differential Equations II, Int. J. Computer Maths. 46(1992), 63-75.

[22]. L. JÓDAR and M. LEGUA, Solving Second Order Matrix Differential Equations with Regular Singular Points Avoiding the Increase of the Problem Dimension, Appl. Maths Computation 53(1993),191-206.

[23]. L. JÓDAR, R. COMPANY and E. NAVARRO, Solving explicitily the Bessel-type Matrix Differential Equation Without Increasing Problem Dimension, Cong. Numerantium, Vol 92(1993), en imprenta.

[24]. T. KAILATH, Linear Systems, Prentice-Hall, Inc. Englewood,Cliffs, New Jersey, 1980.

[25]. H.B. KELLER and A.W. WOLFE, On the Nonunique Equilibrium States and Buckling Mechanism of Spherical Shells, J. Soc. Ind. Appl. Maths. 13(1965),674-705.

[26]. N.N. LEBEDEV, Special Functions and Their Applications, Dover, New York, 1972.

[27]. M. LEGUA, Ecuaciones Matriciales Diferenciales en Diferencias y en Derivadas Parciales, Tesis Doctoral, Depart. Mat. Aplic., Univ. Polit. Valencia, 1991.

[28]. M. LEGUA, L. JÓDAR and A.G. LAW, Existence of Numerical Solutions for Singular Partial Differential Systems, and Iterative Methods in Linear Algebra, R. Beauwens and P. de Groen Eds., North-Holland (1992), 395-400.

[29]. F. MARCELLAN and G. SANSIGRE, On a Class of Matrix Orthogonal Polynomials on the Real Line, Linear Algebra Appl., 181(1993), 97-110.

[30]. D.F. MILLER, The Iterative Solution of the Matrix Equation XA+BX+C=0, Linear Algebra Appl. 105(1988), 131-137.

[31]. P.M. MORSE and H. FESBACH, Methods of Theorical Physics, McGraw-Hill, Tokyo, 1953.

[32]. P.CHR. MÜLLER, Solution of the Matrix Equations AX+XB=-Q and $S^TX+XS=-Q^*$, SIAM J. Appl. Maths., 18 No.3 (1970), 682-687.

[33]. E. NAVARRO, R. COMPANY and L. JÓDAR, Bessel Matrix Differential Equations: Explicit Solutions of Initial and Two-Point Boundary Value Problems, Applicationes Mathematicae, (1993), en imprenta.

[34]. E. NAVARRO, L. JÓDAR and R. COMPANY, Solving Higher Order Fuchs Type Differential Systems Avoiding the Increase of the Problem Dimension, Int. J. of Maths. and Math. Sci., (1993), en imprenta.

[35]. J.M. ORTEGA, Numerical Analysis, A Second Course, Academic Press, New York, 1971.

[36]. S.V. PARTER, M.L. STEIN and P.R. STEIN, On the Multiplicity of Solutions of a Differential Equation Arising in Chemical Reactor Theory, Tech. Rep. 194, Depart. of Computer Sci.,Univ. of Wiscosin, Madison, 1973.

[37]. E.D. RAINVILLE, Special Functions, The Macmillan Co., New York, 1960.

[38]. S.K. RAO and M.K. MITRA, Generalized Inverses of Matrices and its Applications, John Wiley, New York, 1971.

[39]. K. REKTORYS, The Method of Discretization in Time and Partial Differential Equations, D. Reidel Pub. Co., 1982.

[40]. L. RODMAN, Orthogonal Matrix Polynomials, in Orthogonal Polynomials:Theory and Practice (P. NMevai Ed.), Kluwer Academic Publ., (1990),345-362.

[41]. M. ROSEMBLUM, On the Operator Equation BX-XA=Q, Duke Math.J.,23(1956), 263-269.

[42]. S. SAKS and A. ZYGMUND, Analytic Functions, Elsevier, Amsterdam, 1971.

[43]. G.N. WATSON, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1944.

[44]. E. WEINMÜLLER, A Difference Method for a Singular Boundary Value Problem of Second Order, Math. and Computation, 42 No.166 (1984), 441-464.