Resum

La resolució d'equacions i sistemes d'equacions no lineals figura entre els problemes més importants, tant des d'un punt de vista teòric com a pràctic, de les matemàtiques aplicades, així com també de moltes branques de les ciències, l'enginyeria, la física, la informàtica, l'astronomia, les finances,.... Una ullada a la bibliografia i la llista de grans matemàtics que han treballat en aquest tema posa de manifest un alt nivell d'interès contemporani en el mateix. Encara que el ràpid desenvolupament de les computadores digitals va portar a l'aplicació efectiva de molts mètodes numèrics, en la realització pràctica, és necessari analitzar diferents problemes tals com l'eficiència computacional basat en el temps usat pel processador, el disseny de mètodes iteratius que posseïsquen una ràpida convergència a la solució desitjada, el control d'errors d'arrodoniment, la informació sobre les cotes d'error de la solució aproximada obtinguda, les condicions inicials que garantisquen una convergència segura, etc. Aquests problemes constitueixen el punt de partida d'aquest treball.

L'objectiu general d'aquesta memòria és dissenyar mètodes iteratius eficients per a resoldre una equació o un sistema d'equacions no lineals. L'esquema més conegut per a resoldre equacions no lineals és el mètode de Newton, la seua generalització a sistemes d'equacions va ser proposada per Ostrowski. En els últims anys, com a mostra l'àmplia bibliografia, ha augmentat de manera considerable la construcció de mètodes iteratius, tant d'un pas com multipas, amb la finalitat d'aconseguir una convergència d'ordre òptim així com una millor eficiència computacional. En general, en aquesta memòria hem utilitzat la tècnica de funcions pese per a dissenyar mètodes de resolució d'equacions i sistemes, tant lliures de derivades com apareixent aquestes en la seua expressió iterativa.

En el Capítol 2 introduïm els conceptes previs que sustenten el desenvolupament dels diferents temes. Entre ells, cal destacar els relacionats amb els mètodes iteratius de resolució de problemes no lineals, en una i diverses variables; el concepte de mètode òptim (basat en la conjectura de Kung i Traub); les tècniques de demostració emprades per a provar l'ordre de convergència local, així com també l'operador diferencies dividides [x,y;F], i els conceptes bàsics de la dinàmica complexa de funcions racionals que utilitzarem per a analitzar el comportament dinàmic de l'operador associat a qualsevol mètode iteratiu.

En els Capítols 3 i 4 hem desenvolupat mètodes iteratius òptims d'ordres 4 i 8, amb i sense derivades, per a la resolució d'equacions no lineals. En tots dos capítols comencem referint-nos a l'estat de l'art, per a mostrar a continuació els nous mètodes dissenyats, que inclouen famílies conegudes però també nous esquemes iteratius, posteriorment continuem amb l'anàlisi de la convergència d'aquestes classes de mètodes, establint alguns casos particulars, que són analitzats detalladament i finalitzem amb les proves numèriques relacionades amb els esquemes iteratius proposats. Específicament, en el Capítol 3, es presenten els resultats obtinguts en modificar el mètode clàssic de Gauss per a la determinació d'òrbites preliminars, de manera que incloga en el seu procés esquemes iteratius d'alt ordre de convergència. Per la seua banda, en el Capítol 4 es mostren les propietats dinàmiques d'alguns dels esquemes iteratius dissenyats d'ordre 8, així com les seues propietats d'estabilitat que són verificades sobre diferents funciones test.

En el Capítol 5, presentem mètodes iteratius òptims d'alt ordre, amb operador derivada, per a resoldre equacions no lineals. Després del disseny d'aquests mètodes i l'anàlisi de la seua convergència, es transforma aquesta classe d'esquemes iteratius en una altra lliure de derivades, mantenint la seua optimalitat. Finalment, es mostren els resultats d'algunes proves numèriques, que inclouen la determinació d'òrbites preliminars de satèl·lits.

El comportament dinàmic de l'operador associat a un mètode iteratiu en ser aplicat sobre la funció no lineal a resoldre ens proporciona important informació sobre l'estabilitat i fiabilitat d'aquest. L'anàlisi dinàmica d'un mètode iteratiu se centra en l'estudi del comportament asimptòtic dels punts fixos (arrels, o no, de l'equació) de l'operador, així com en les conques d'atracció associades als mateixos. En el cas de famílies paramètriques de mètodes iteratius, l'anàlisi dels punts crítics lliures ens permet seleccionar els membres més estables d'aquestes

famílies. L'anàlisi de la dinàmica complexa dels mètodes dissenyats per a equacions no lineals es duu a terme en el Capítol 6, on ens centrem en una de les famílies de mètodes òptims presentada en capítols anteriors. Així, una vegada establit el teorema de l'escalat, analitzem el comportament de l'operador racional associat al mètode actuant sobre polinomis quadràtics, calculant els seus punts fixos i crítics i analitzant la seua estabilitat. Vam mostrar els plànols de paràmetres dels diferents punts crítics lliures i estudiem alguns casos particulars mitjançant plànols dinàmics concrets en els quals signifiquem algunes conques d'atracció que no corresponen a les arrels.

A continuació, en el Capítol 7 s'estenen a sistemes les tècniques iteratives dissenyades en el cas escalar, si ben ara utilitzem funcions pese matricials. Així construïm mètodes de qualsevol ordre afegint successius passos amb la mateixa estructura. Finalment, s'utilitza l'operador diferencies dividides per a estendre al cas multivariable alguns esquemes iteratius que, a priori, no poden ser estesos de forma directa. Tots aquests mètodes formen part de l'estudi numèric que es presenta al final del capítol, en el qual es confirmen els resultats teòrics.

Aquesta memòria acaba amb un capítol dedicat a problemes oberts i a línies futures de treball. Alguns d'aquests problemes han sorgit com a conseqüència dels avanços obtinguts.