

**TRABAJO FINAL DE CARRERA LICENCIATURA EN  
ADMINISTRACIÓN Y DIRECCIÓN DE EMPRESAS**

**Estudio y desarrollo del modelo  
estocástico Log-Normal para la  
predicción de activos subyacentes**

*Validación y aplicación en Python del activo  
subyacente Inditex (ITX.MC) con representación  
en página web: <http://cotizaccion.imm.upv.es>*

**Autor:**

D. Enrique Conca Casanova

**Directores:**

Dr. Juan Carlos Cortés López

Dr. Rafael Jacinto Villanueva Micó



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN Y  
DIRECCIÓN DE EMPRESAS. UPV



# Índice de contenido

Índice de figuras .....	1
Índice de gráficos .....	2
Índice de tablas.....	3
Resumen del trabajo final de carrera .....	5
Justificación de las asignaturas relacionadas.....	9
Objetivos del trabajo final de carrera .....	13
Antecedentes. Situación actual .....	15
Capítulo 1. Industria del Diseño Textil S.A (Inditex).....	19
1.1. Historia y evolución .....	20
1.2. Estructura del grupo .....	23
1.2.1. <i>Organigrama</i> .....	23
1.2.2. <i>Unidades de negocio</i> .....	25
1.2.3. <i>Modelo de negocio</i> .....	29
1.3. Inditex en bolsa .....	30
1.3.1. <i>Historia y evolución</i> .....	30
1.3.2. <i>Principales ratios</i> .....	33
Capítulo 2. Preliminares estocásticos .....	37
2.1. Movimiento Browniano o proceso de Wiener .....	38
2.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano .....	40
2.3. Simulación del Movimiento Browniano.....	41
2.4. El cálculo de $Itô$ .....	43
2.4.1. <i>La integral de <math>Itô</math></i> .....	44
2.4.2. <i>Propiedades de la integral de <math>Itô</math></i> .....	49
Capítulo 3. Modelo estocástico Log-Normal .....	51
3.1. Motivación de un modelo estocástico para un subyacente en ambiente de certidumbre ...	52
3.2. Motivación del modelo estocástico para un subyacente cotizado: El Modelo Log-Normal ..	54
3.3. Solución del Modelo Log-Normal .....	55
3.3.1. Solución del Modelo Log-Normal sin el Cálculo de $Itô$ .....	55

3.3.2. Solución del Modelo Log-Normal mediante el Cálculo de Itô .....	59
3.4. Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del Modelo Log-Normal .....	61
3.5. Calibración de los parámetros del Modelo Log-Normal .....	63
3.5.1. Estimación de los parámetros del modelo por Método de Máxima Verosimilitud....	63
3.5.2. Estimación de los parámetros del modelo por un método no paramétrico.....	70
3.6. Validación del modelo Log-Normal .....	72
3.6.1. Medidas de bondad de ajuste: Error cuadrático medio y error porcentual medio ....	72
3.6.2. Validación por intervalos de confianza.....	73
3.6.3. Gráficos comparativos.....	75
3.7. Predicción .....	76
Capítulo 4. APLICACIÓN DEL MODELO LOG-NORMAL AL SUBYACENTE INDITEX(ITX.MC): METODOLOGÍA .....	77
4.1. Lenguaje de programación Python .....	78
4.2. Estimación de los parámetros para el Modelo Log-Normal .....	79
4.2.1. Estimación de los parámetros del modelo por Método de Máxima Verosimilitud....	79
4.2.2. Estimación de los parámetros del modelo por un método no paramétrico.....	81
4.3. Validación del Modelo Log-Normal .....	83
4.3.1. Estimaciones puntuales por el modelo teórico Log-Normal: Cálculo de la media y varianza teórica .....	84
4.3.2. Validación por intervalos de confianza: Cálculo de los intervalos de confianza teóricos .....	85
4.3.3. Medidas de bondad de ajuste: Cálculo del error cuadrático medio (RMSE) y del error porcentual absoluto medio (MAPE) .....	88
4.4. Predicciones del subyacente Inditex (ITX.MC) .....	89
Capítulo 5. Página web: <a href="http://cotizacion.imm.upv.es">http://cotizacion.imm.upv.es</a> .....	93
5.1. Preparación del equipo .....	94
5.2. Programas en <i>Python</i> .....	94
5.2.1. Extracción del histórico de cotizaciones .....	95
5.2.2. Ejecución del Modelo Log-Normal .....	97
5.2.3. Generación de ficheros. ....	97
5.2.4. Actualización de la página web .....	105

5.3. Herramienta <i>Cron tab</i> .....	105
5.4. Diseño página web: <a href="http://cotizacion.imm.upv.es">http:// cotizacion.imm.upv.es</a> .....	106
5.5. Dominio cotizacion.imm.upv.es .....	108
5.6. Resumen del capítulo .....	110
Conclusiones.....	111
Bibliografía.....	115



## **Agradecimientos**

*En los tiempos que corren, en los que ser estudiante es más difícil que nunca por la incertidumbre del futuro, cualquier logro o motivación que le pueda surgir a un estudiante es motivo del más sentido agradecimiento hacia los suyos. Por ello, es una buena ocasión, para dar mi agradecimiento a mis padres, hermano, familiares, amigos y personas especiales que me han mostrado su apoyo y su comprensión en estos años.*

*No puedo olvidarme de todos los compañeros y profesores que he conocido durante toda la carrera, tanto de la UPV como de la UGENT, ya que todos y cada uno de ellos han sido importantes y me han ayudado a mejorar.*

*Durante el transcurso de este trabajo, la formación y enriquecimiento que he obtenido ha sido más que satisfactorio. Gracias a mis directores de TFC, Juan Carlos y Rafael, por toda la ayuda y confianza depositada en mí y por llegar a convertirse en referentes a seguir para mí.*

*Por todo ello, GRACIAS.*





# Índice de Figuras

Figura 1.1 : Presencia Inditex en el mundo .....	22
Figura 1.2 : Organigrama Inditex .....	23
Figura1.3 : Claves del éxito Inditex .....	29
Figura 3.1 : Capitalización a interés compuesto continuo .....	52
Figura 4.1: Función log-verosimilitud en Python .....	80
Figura 4.2 : Minimización función Log-verosimilitud .....	80
Figura 4.3: Resultados parámetros por Máxima verosimilitud .....	81
Figura 4.4: Cálculo sistema 2 ecuaciones con 2 incógnitas Modelo Log-Normal.....	82
Figura 4.5: Resultados estimación parámetros por método no paramétrico .....	82
Figura 4.6 : Cálculo media y varianza teórica. ....	84
Figura 4.7: Resultados media y varianza teórica. ....	85
Figura 4.8: Cálculo Intervalos de Confianza.....	86
Figura 4.9: Resultados Intervalos de Confianza.....	86
Figura 4.10: Cálculo error cuadrático medio y MAPE.....	88
Figura 4.11 : Cálculo predicciones.....	90
Figura 5.1: Programa de actualización de predicciones .....	94
Figura 5.2: Histórico cotizaciones .....	96
Figura 5.3: Código web <i>scrapping</i> . ....	96
Figura 5.4: Resultado web <i>scrapping</i> .....	97
Figura 5.5: Código tablas de predicciones y medidas de bondad de ajuste. ....	99
Figura 5.6: Código gráfico Medias, IC 95% y predicciones. ....	100
Figura 5.7: <i>Script</i> archivo histórico. ....	101
Figura 5.8: Código tabla comparativa Real/Predicción. ....	102
Figura 5.9 : <i>Script</i> carga histórico resultados Método 2 en el programa Método 1.....	103

Figura 5.10: Código tablas comparativas métodos y reales ; Comparativa medidas Bondad de Ajuste .....	104
Figura 5.11: Código gráfico comparativo resultados y reales.....	105
Figura 5.12: Página home de la web .....	106
Figura 5.13: Página Método 1 .....	107
Figura 5.14: Página Método 2 .....	107
Figura 5.15 : Página Comparativa.....	108
Figura 5.16 : Fichero configuración virtual host .....	109
Figura 5.17 : Diagrama de flujo proceso programa <i>Python</i> .....	110

## **Índice de Gráficos**

Gráfico 1.1 : Cotización histórica Inditex.....	32
Gráfico 2.1 : Simulación del Movimiento Browniano.....	42
Gráfico 4.1 : Análisis de los intervalos de confianza y medias teóricas.....	87
Gráfico 5.1 : Medias, Intervalos de Confianza 95% y predicciones a 5 días.....	100
Gráfico 5.2 : Predicciones con IC del 95% y cotizaciones reales últimos 10 días .....	104

# Índice de Tablas

Tabla 1.1: Principales Ratios Inditex.....	33
Tabla 2.1 : Justificación de la identidad (2.3.1) para la simulación del Movimiento Browniano. .....	42
Tabla 4.1: Tabla comparación métodos de Estimación .....	83
Tabla 4.2: Resultados medidas de bondad de ajuste .....	89
Tabla 4.3: Resultados Predicciones.....	91
Tabla 5.1: Predicciones e Intervalos de Confianza 95% .....	98
Tabla 5.2: Medidas de bondad de ajuste del modelo .....	98
Tabla 5.3: Comparativa predicciones y cotizaciones reales.....	101
Tabla 5.4 : Comparación predicciones ambos métodos y cotizaciones reales.....	103
Tabla 5.5: Comparación medidas de bondad de ajuste del modelo.....	103



# **RESUMEN DEL PROYECTO FINAL DE CARRERA**

La situación económica actual, con unos tipos de interés bajos y las políticas que aplican el Banco Central Europeo y la Reserva Federal, ha favorecido el crecimiento de las principales bolsas mundiales.

Con esta coyuntura, los inversores ven como los tipos de interés que ofrece la renta fija son insuficientes para sus pretensiones. En cambio, en la renta variable pueden conseguir las rentabilidades que están buscando. Como consecuencia, muchos inversores, tradicionalmente de renta fija, ven en la situación actual, la renta variable como una buena opción para la inversión.

Este incremento de la inversión en renta variable hace que se desarrollen y estudien modelos para predecir el valor de activos subyacentes y así poder ayudar al inversor en

la elección de los mejores valores. A fecha actual, existe una amplia y diversa variedad de esta clase de modelos, los cuales con el tiempo, se han ido perfeccionando y ampliando.

En el TFC que aquí se presenta, se estudia, aplica y valida el modelo estocástico Log-Normal al activo subyacente Inditex (ITX.MC). El resultado final que se espera de la modelización validada de este activo subyacente, será la obtención de sus predicciones a corto plazo.

Como se puntualizaba en párrafos anteriores, a fecha actual, son diversos los modelos de predicción de activos subyacentes conocidos y disponibles, presentando cada uno de ellos una serie de particularidades. El Modelo Log-Normal atiende a modelos estocásticos de un factor, quedando estos representados por una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô que contiene en su formulación la tendencia y la volatilidad del subyacente. La aleatoriedad se introduce en dicha ecuación mediante la derivada del Movimiento Browniano (o proceso estocástico de Wiener), llamado proceso de ruido blanco (*white noise process*).

Para poder proceder a aplicar este modelo, es necesario una previa estimación de sus parámetros. En este trabajo se aplicarán dos métodos, por un lado, el método de Máxima Verosimilitud y, por otra parte, un método no paramétrico.

Estimados los parámetros del modelo, se llevará a cabo la validación del mismo. En este apartado se detallarán y calcularán, las estimaciones puntuales de la función media y varianza, los Intervalos de Confianza del 95% y las medidas de bondad de ajuste. En este proyecto, como medidas de bondad de ajuste se han utilizado el error cuadrático medio (RMSE) y el error porcentual absoluto medio (MAPE).

Las estimaciones puntuales (función media) y por intervalos (Intervalos de Confianza del 95%), quedarán representadas gráficamente junto con los valores observados de la muestra. De esta manera, tanto visualmente a través de las gráficas, como numéricamente a través de los resultados obtenidos en las medidas de bondad de ajuste, la modelización realizada podrá quedar validada. Finalmente, validado el modelo, se realizarán las correspondientes predicciones (puntuales y por intervalos)

del activo subyacente en cuestión para los 5 días posteriores al último de los datos de la muestra seleccionada.

Con el objetivo de ofrecer un mayor valor añadido a este trabajo final de carrera, se generarán dos programas con los que aplicar el Modelo Log-Normal sobre cualquier activo subyacente, uno para cada método de estimación de parámetros utilizado. Estos programas conectan con la web <https://es.finance.yahoo.com>, extraen el histórico de cotizaciones del subyacente elegido, aplican el Modelo Log-Normal, cada programa con su estimación de parámetros, y generan ficheros de tablas y gráficos con los resultados obtenidos.

Además, se aplican y configuran estos programas sobre el subyacente Inditex (ITX.MC) representando diariamente los resultados obtenidos en una web realizada para este TFC (<http://cotizacion.imm.upv.es>). Con esta web se consigue ofrecer los resultados obtenidos con el Modelo Log-Normal actualizados diariamente a todo el público interesado. Todo este proceso se ha realizado con el lenguaje de programación *Python*.





# JUSTIFICACIÓN DE LAS ASIGNATURAS RELACIONADAS

Para la realización de este TFC se han utilizado conocimientos adquiridos en la mayoría de asignaturas cursadas en la Licenciatura de Administración y Dirección de Empresas. A continuación se exponen las asignaturas más destacadas para la realización de este TFC en cada capítulo.

## **Capítulo 1: INDITEX S.A. (Industria de Diseño Textil, Sociedad Anónima)**

En este capítulo se ha utilizado conocimientos adquiridos en distintas asignaturas cursadas en la carrera de las que destacamos:

- **“Introducción a los Sectores Empresariales”** (Primer curso): Esta asignatura proporciona una visión general de los diferentes sectores que componen el tejido empresarial, así como su importancia relativa tanto en los mercados

nacionales como internacionales. Igualmente se promueve el conocimiento del funcionamiento básico de los sectores. Ofrece de este modo una ayuda para poder obtener información sobre empresas y comprender su funcionamiento.

- **“Dirección Estratégica y Política de la Empresa”** (Quinto curso): Esta asignatura proporciona una visión general de las diferentes estrategias y acciones que pueden emprender las organizaciones para poder obtener una ventaja competitiva sobre el resto de organizaciones del mercado. De este modo podremos entender el funcionamiento de la empresa.
- **“Sistemas y mercados financieros”** (Quinto curso): Esta asignatura nos ayuda a tener conocimientos sobre la renta variable y el funcionamiento del sistema financiero.
- **“Contabilidad General y Analítica”** (Cuarto curso): A partir de los conocimientos adquiridos en esta asignatura somos capaces de realizar un análisis de la empresa a partir de los principales ratios financieros.
- **“Inglés I y II”** (Tercer y Cuarto curso): Gran parte de la información necesaria se encuentra en artículos en inglés por lo que ha sido necesario la aplicación de los conocimientos obtenidos en estas asignaturas.

## **Capítulo 2 y 3: Preliminares estocásticos y Modelo estocástico Log-Normal**

Para el desarrollo de este capítulo se destacan conocimientos adquiridos en las asignaturas:

- **“Métodos Estadísticos en Economía”** (Segundo curso): La estadística es una ciencia que analiza series de datos y trata de extraer conclusiones sobre el comportamiento de las variables. Por ello, esta asignatura nos proporciona múltiples herramientas que se utilizarán para la implementación y validación de modelo Log-Normal.
- **“Econometría”** (Cuarto curso): En esta asignatura aprendemos la rama de la economía que hace un uso extensivo de modelos matemáticos y estadísticos así como de la programación lineal y la teoría de juegos para analizar, interpretar y hacer predicciones sobre sistemas económicos, prediciendo

variables como el precio, las reacciones del mercado, el coste de producción, la tendencia de los negocios y las consecuencias de la política económica.

- **“Fundamentos Matemáticos para Administración y Dirección de Empresas”** (Primer curso): En esta asignatura se establecen las bases apropiadas del proceso de modelización en economía y en particular de las ecuaciones diferenciales sobre las que se basa, en su versión aleatoria, el modelo Log-normal.

#### **Capítulo 4: Aplicación de modelo Log-Normal al subyacente INDITEX (ITX.MC)**

Para este capítulo se recogen conocimientos obtenidos en distintas asignaturas en las que se han utilizado programas de cálculo en prácticas, ya que han sido de ayuda para poder aplicar el modelo con *Python*. Destacan programas utilizados como *Wolfram Mathematica* (Fundamentos Matemáticos); R (Métodos estadísticos para la economía)...

Como en otros capítulos, la mayoría de manuales estudiados para la utilización del lenguaje de programación *Python* se encuentran en inglés.

#### **Capítulo 5: Creación página web: <http://cotizaccion.imm.upv.es>**

Para el desarrollo de este capítulo se destacan conocimientos adquiridos en las asignaturas:

- **“Introducción a la informática”** (Segundo curso): Para la creación de la web <http://cotizaccion.imm.upv.es> se han aplicado conocimientos impartidos en la asignatura de, especialmente en código HTML y diseño de páginas web.
- **“Inglés I y II”** (Segundo y Tercer curso): la mayoría de los conocimientos aplicados que no se han desarrollado durante la carrera se han adquirido por medio de manuales en inglés por lo que estas asignaturas han sido de gran ayuda.



# **OBJETIVOS DEL PROYECTO FINAL DE CARRERA**

El objeto principal del presente trabajo es el estudio de técnicas cuantitativas para la predicción de valores de subyacentes a corto plazo, incluyendo su posterior aplicación a un caso práctico. El estudio teórico llevado a cabo en este trabajo se ha aplicado a la modelización y predicción del subyacente Inditex (ITX.MC), siendo el mismo uno de los valores con mayor capitalización bursátil del IBEX-35.

Este estudio se lleva a cabo a través del modelo estocástico de predicción de subyacentes Log-Normal, cuya resolución requiere del conocimiento y aplicación del Cálculo de Itô. Los resultados obtenidos a partir del modelo de predicción de subyacentes se mostrarán en una web creada para este trabajo final de carrera. En relación a todo ello, otros objetivos a plantearse con el desarrollo de esta memoria son:

- Estudiar y aplicar las herramientas estocásticas pertenecientes al Cálculo de Itô necesarias para el Modelo Log-Normal, así como las propiedades estadísticas de las mismas.
- Conocer el desarrollo del Modelo Log-Normal y su proceso estocástico solución, así como sus propiedades estadísticas.
- Modelizar a partir de una muestra de datos reales y en un horizonte temporal adecuado, el subyacente Inditex (ITX.MC).
- Validar la modelización realizada sobre el subyacente Inditex (ITX.MC).
- Estudiar y aplicar técnicas estadísticas: construcción de intervalos de confianza y medidas de bondad de ajuste.
- Obtener las predicciones probabilísticas del subyacente Inditex (ITX.MC).
- Evaluar los resultados del modelo aplicado comparando cada una de las predicciones resultantes con el correspondiente dato real del subyacente.
- Comparar los resultados obtenidos con el Modelo Log-Normal a partir de dos métodos de estimaciones de parámetros distintos.
- Generar un programa con el lenguaje de programación *Python* para realizar predicciones con el Modelo Log-Normal para cualquier subyacente.
- Crear una página web dinámica donde mostrar las predicciones de Inditex (ITX.MC) actualizadas diariamente.

## **ANTECEDENTES Y SITUACIÓN ACTUAL**

La mayoría de expertos en inversión coinciden en que la coyuntura actual presenta unas claras características de que nos encontramos en un buen momento para la inversión en Bolsa. Los costes financieros se encuentran en mínimos, esto se traduce en una influencia positiva para la inversión en Bolsa desde dos puntos de vista. En primer lugar, la inversión en renta fija ofrece unos tipos de interés extremadamente bajos con lo que aumenta la inversión en renta variable. Por otra parte, las empresas, y sobre todo las que cotizan, cuentan con un mayor acceso a los mercados y consiguen dinero, financiado a tipos mínimos históricos. Esto supone una gran mejora para los resultados financieros de las empresas, sobre todo para las más apalancadas, esto se

traslada a sus beneficios y como consecuencia mayores repartos de dividendos o aumento de la cotización de los valores.

Otro aspecto indicativo del buen momento para invertir en bolsa es el nuevo discurso que ofrece el Banco Central Europeo y en sus políticas, que están pasando a ser consideradas de “ultraexpansionismo”, estas políticas tienden a traducirse en crecimientos en las bolsas. Por otra parte, la Reserva Federal sigue muy preocupada en afianzar la recuperación americana y parece no querer retirar de forma anticipada los estímulos expansionistas aplicados. Por tanto, todos muestran una intención de compromiso con el crecimiento económico y manifiestan estar dispuestos a poner todos los mecanismos a su alcance para que la recuperación sea una realidad.

Desde un punto de vista técnico, destacan algunos valores representativos de los mercados como el S&P500<sup>1</sup> que se encuentra en máximos históricos y casi un 30% por encima de los máximos que marcó antes de la crisis en 2007. El Dax<sup>2</sup> también superó niveles históricos y el mercado español se encuentra en una clara tendencia alcista que apunta hacia los 12.000 puntos.

Por último no hay que olvidar la actual recuperación global. En Europa es donde se concentran las mayores dudas, y por tanto es aquí donde se encuentran las valoraciones más atractivas. Estados Unidos y Reino Unido están mostrando datos muy sólidos de crecimiento, mientras que China está aguantando creciendo todavía a tasas muy notables.

Vemos como se están dando unas condiciones que auguran un buen momento para la inversión en Bolsa, y con ello, la utilización de herramientas de ayuda en la toma de decisiones en la inversión, como los modelos matemáticos de predicción de valoración de activos subyacentes, pueden ser de gran ayuda.

La modelización de los activos subyacentes es en una tarea compleja dada la volatilidad asociada al comportamiento de los mismos. No obstante, la investigación

---

<sup>1</sup> El índice Standard & Poor's 500 (Standard & Poor's 500 Index) también conocido como S&P 500 es uno de los índices bursátiles más importantes de Estados Unidos. Al S&P 500 se le considera el índice más representativo de la situación real del mercado.

<sup>2</sup> El índice DAX o Xetra DAX (Deutscher Aktienindex) es el índice bursátil de referencia de la Frankfurter Wertpapierbörse (Bolsa de Frankfurt).



económica que se viene desarrollando desde tiempo atrás en esta área, trata de desarrollar modelos apropiados para los activos subyacentes, estando en continua mejora y perfeccionamiento.

El origen de las finanzas cuantitativas se ubica en Estados Unidos por los años setenta. Por aquel entonces, inversores comenzaron a hacer uso de fórmulas matemáticas para la determinación de precios de acciones y bonos. Los primeros modelos continuos de activos subyacentes fueron desarrollados a partir de ecuaciones diferenciales determinísticas, sin por entonces, contemplarse aleatoriedad alguna.

La hipótesis base de este tipo de modelos se sustenta en las propias leyes del mercado o en el objeto de las autoridades reguladoras de los mismos, puesto que las medidas que tienden a adoptar, en definitiva, persiguen que los activos subyacentes tengan un valor estable, dada su influencia en la dinámica de los mercados.

No obstante, haciendo referencia a lo que sucede en la práctica y en especial, en los últimos años, en los activos subyacentes se puede observar una gran volatilidad que, con estos primeros modelos de predicción no queda recogida. Esto se debe a la gran cantidad de factores influyentes en el valor final de un determinado subyacente. Sin embargo, estos factores influyentes, en muchos casos, pueden considerarse de naturaleza aleatoria y esta aleatoriedad es posible modelizarla. Todo ello lleva a la necesidad de reformular los modelos clásicos deterministas en los que la aleatoriedad no se tenía en cuenta, en nuevos modelos matemáticos en los que se contemplara. Por tanto, los modelos estocásticos de predicción de subyacente tienen su origen o vienen motivados por los determinísticos. La introducción de la aleatoriedad en estos modelos se ha realizado formalmente a partir del Movimiento Browniano, también conocido como proceso estocástico de Wiener. La inclusión de la misma da lugar a nuevas ecuaciones a resolver, ecuaciones diferenciales estocásticas pasan a representar los nuevos modelos.

En relación a ello, el cálculo estocástico clásico es una herramienta adecuada para la resolución de este tipo de ecuaciones. Esta evolución de los modelos de activos subyacentes, requirió del desarrollo de un cálculo estocástico especial. El precursor de

ello, en el ámbito matemático, fue Kiyoshi Itô<sup>3</sup> en 1951. No obstante, en 1969, Robert C. Merton fue quien introdujo y aplicó el cálculo estocástico en el campo de las finanzas<sup>4</sup>. A fecha de hoy, son diversos los modelos de predicción de tipos de interés disponibles en la literatura especializada. En este TFC se estudia y aplica el Modelo Log-Normal para la predicción de activos subyacentes.

---

<sup>3</sup> ITÔ, K (1951) "On stochastic differential equations." *Memoirs, American Mathematical Society*, nº 4 pp. 1–51.

ITÔ, K (1944) Stochastic Integral. *Proc. Imperial Acad. Tokyo* 20, pp. 519-524.

ITÔ, K (1961) Lectures on stochastic processes. Tata Institute, Bombay.

<sup>4</sup> MERTON, ROBERT C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, nº 4 pp. 141–183.

# 1 | **Industria del Diseño Textil S.A. (INDITEX)**

Industria de Diseño Textil, más conocida como Inditex, es una de las principales empresas internacionales del mercado de la moda del mundo, con ocho formatos comerciales: Zara, Pull&Bear, Massimo Dutti, Bershka, Stradivarius, Oysho, Zara Home y Uterqüe. Actualmente cuenta con más de 6.000 establecimientos en 86 países. El Grupo Inditex reúne a más de un centenar de sociedades vinculadas con las diferentes actividades que conforman el negocio del diseño, la fabricación y la distribución textil. La singularidad de su modelo de gestión, basado en la innovación y la flexibilidad, y los logros alcanzados, han convertido a Inditex en uno de los mayores grupos de distribución de moda.

Para hablar del grupo Inditex tenemos que destacar a su fundador, Amancio Ortega Gaona. Nacido en una familia de clase humilde en A Coruña. Fue en esta ciudad donde

inició su carrera profesional en el comercio textil, en sus inicios como repartidor en la camisería Gala, una de las tiendas más famosas de la capital gallega. Posteriormente le contrataron en la mercería La Maja, regentado por los Castro Quintás. Con la experiencia adquirida en estas empresas decidió poner en marcha su propio proyecto empresarial, creando, en 1963, la compañía Confecciones GOA, dedicada a la fabricación de prendas de vestir. Esta compañía ha crecido progresivamente hasta contar con varios centros de fabricación, que distribuyen su producto a distintos países.

## **1.1 Historia y Evolución**

La primera tienda, Zara, abrió en 1975 en La Coruña (España), lugar en el que inició su actividad el Grupo y en el que se ubican los servicios centrales de la compañía. Diez años más tarde, en 1985, se crearía Inditex, actual grupo de empresas. Desde entonces, Inditex ha seguido una increíble trayectoria que la ha consolidado como una de las principales empresas del sector, estando sus tiendas, ubicadas siempre en emplazamientos privilegiados, presentes en más de 400 ciudades en los cinco continentes.

La primera tienda fuera de las fronteras españolas del grupo se inauguró en diciembre de 1988 en Oporto, Portugal. De ahí, el grupo inició su actividad en Estados Unidos y Francia, con la apertura de establecimientos en Nueva York (1989) y París (1990).

Ese mismo año se creó la cadena de Pull&Bear y se adquirió el 65% de Massimo Dutti, compra que se completaría en 1995. La incorporación de estas dos nuevas cadenas al grupo sirvió para potenciar el despliegue de tiendas en el exterior: en México (1992), Grecia (1993), Bélgica y Suecia (1994), Malta (1995), Chipre (1996), Noruega e Israel (1997).

En 1998 empezó sus andaduras la cadena Bershka, dirigida al público femenino más joven, en un ejercicio en el que se produjeron aperturas en nuevos países: Reino Unido, Turquía, Argentina, Venezuela, Emiratos Árabes, Japón, Kuwait y Líbano.

En el año 1999 se adquirió Stradivarius, que se convirtió en la quinta cadena del Grupo. Ese mismo año se produjo la apertura de tiendas en nueve nuevos países: Holanda, Alemania, Polonia, Arabia Saudí, Bahréin, Canadá, Brasil, Chile y Uruguay. En el 2000 año se abrieron tiendas en otros cuatro países: Andorra, Austria, Dinamarca y Qatar.

2001 fue el año del lanzamiento de la cadena de lencería Oysho, coincidiendo con los inicios de la cotización de Inditex en el mercado bursátil, el día 23 de mayo. Asimismo, durante este año el grupo se introdujo en Irlanda, Islandia, Italia, Luxemburgo, República Checa, Puerto Rico y Jordania. En 2002 abrió tiendas en Finlandia, Suiza, El Salvador, República Dominicana y Singapur. En 2003 también se abrieron tiendas en Eslovenia, Eslovaquia, Rusia y Malasia.

El año 2004 marcó un hito de especial calado: el Grupo abrió su tienda número 2.000 en Hong Kong, lo que significó que Inditex tenía presencia en 56 países de Europa, América, Asia y África. En este año se abrieron, además, las primeras tiendas en Marruecos, Estonia, Letonia, Rumanía, Hungría, Lituania y Panamá. En 2005 se abrieron tiendas también en Mónaco, Indonesia, Tailandia, Filipinas y Costa Rica, y en 2006 en Serbia, China Continental y Túnez. En 2007, Zara inauguró en Florencia (Italia) su tienda número 1.000 y con la apertura de nuevas tiendas en Croacia, Colombia, Guatemala y Omán.

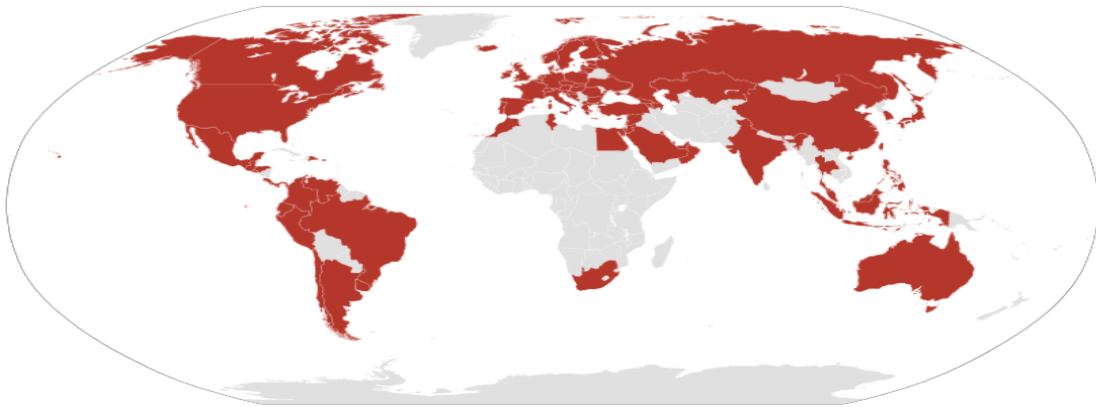
En 2008 se produjo el lanzamiento de Uterqüe, cadena especializada en la venta de accesorios y complementos de moda. Este año Inditex abrió también su tienda número 4.000 en Tokio y alcanzó presencia en 73 países tras la entrada en Corea, Ucrania, Montenegro, Honduras y Egipto. En 2009 Inditex abrió su primera tienda en Siria y cerró un acuerdo con el Grupo Tata para abrir tiendas en India a partir de 2010. Este mismo año Inditex abrió sus primeras tiendas en Bulgaria, India y Kazajstán, alcanzando presencia en 77 países. Asimismo, el Grupo alcanzó las 5.000 tiendas con la apertura de una tienda Zara ejemplo de ecoeficiencia en el corazón del centro histórico de la ciudad de Roma (Italia).

En 2011 se abrieron las primeras tiendas en Taiwán, Azerbaiyán, Australia, Sudáfrica y Perú, la presencia comercial del Grupo se amplió a los cinco continentes e Inditex

superó las 5.500 tiendas en 82 mercados. Es en este año en el que el grupo consigue superar en beneficios al histórico líder del sector H&M.

Más recientemente Inditex abrió sus primeras tiendas en Armenia, Bosnia-Herzegovina, Ecuador, Georgia y Antigua Republica Yugoslava de Macedonia y alcanzó los 6.000 establecimientos.

Para concluir la expansión del grupo podemos observar en la Figura 1.1 como la presencia de Inditex abarca los 5 continentes y la mayoría de países de todo el mundo.



**Figura 2.1: Presencia Inditex en el mundo.**

Fuente: <http://curiosidadesinditex.wordpress.com/author/curiosidadesinditex/>.

Ahora bien, no sólo es el alcance internacional del Grupo lo que lo convierte en un interesante caso de estudio. Debe recordarse en este punto, además, que el Grupo Inditex es una de las empresas más representativas de la bolsa española y la única empresa del sector de la confección que figura en el IBEX-35<sup>5</sup>. En posteriores capítulos analizaremos la historia y evolución de Inditex en Bolsa.

---

<sup>5</sup> Principal índice bursátil de referencia de la Bolsa española, formado por las treinta y cinco empresas con más liquidez que cotizan en el Sistema de Interconexión Bursátil Electrónico (SIBE) en las cuatro Bolsas Españolas.

## 1.2 Estructura del grupo Inditex

El modelo de organización de Inditex es uno de los referentes organizacionales y es estudiado en las principales escuelas de negocios del mundo. En este apartado vamos a analizar la organización del grupo.

### 1.2.1 Organigrama del grupo

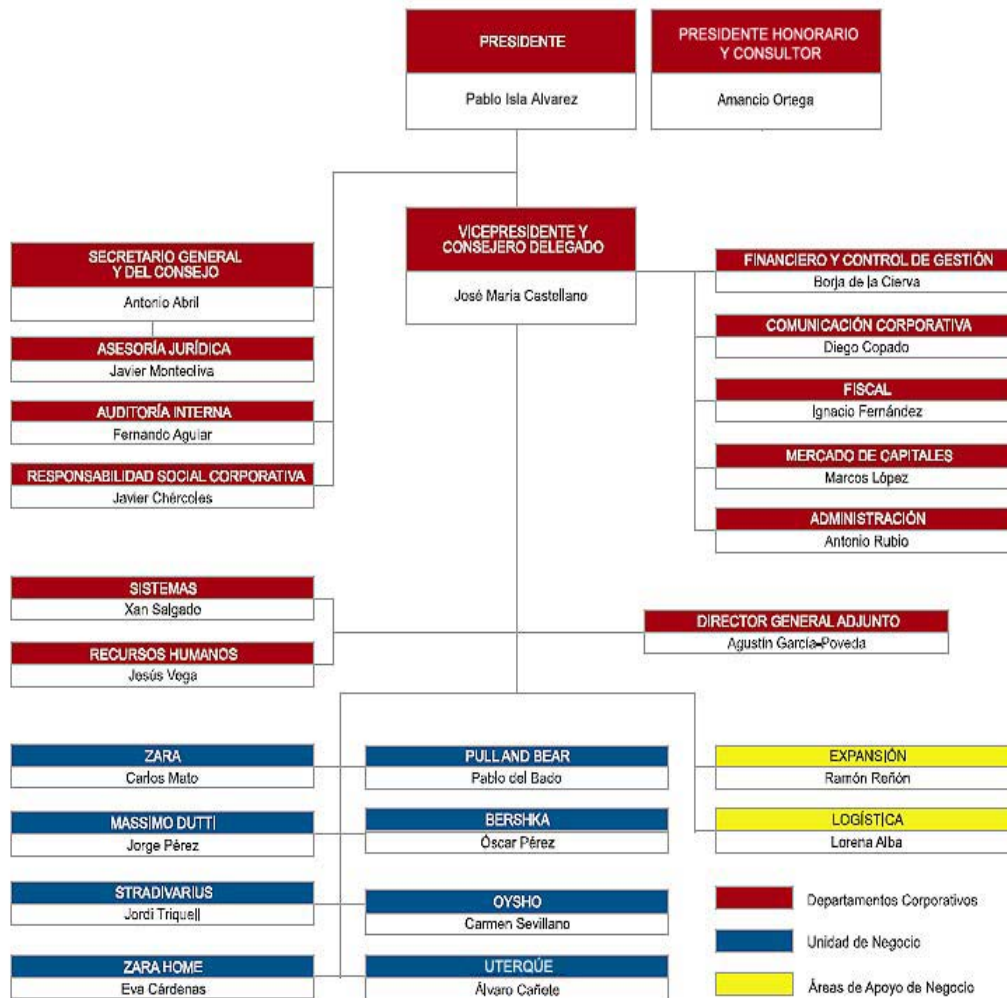


Figura 1.2: Organigrama Inditex.

Fuente: [http://www.inditex.com/documents/10279/16953/Grupo\\_INDITEX\\_informe\\_corporativo\\_06.pdf/ffe74cae-3ce2-41e8-b270-60abc5fb73ff](http://www.inditex.com/documents/10279/16953/Grupo_INDITEX_informe_corporativo_06.pdf/ffe74cae-3ce2-41e8-b270-60abc5fb73ff).

En el organigrama de Inditex, véase Figura 1.2, se observa como la estructura organizativa de la empresa se compone de varios departamentos corporativos centrales, ocho unidades de negocio y áreas de apoyo o funciones compartidas por todas las unidades de negocio.

Los departamentos corporativos asumen funciones de carácter estratégico con la intención de aprovechar determinadas economías de escala. Entre ellos destacan la dirección estratégica, la asesoría fiscal y jurídica, la política financiera, los recursos humanos o la comunicación empresarial como podemos observar en el organigrama.

Las cadenas del grupo o unidades de negocio tienen equipos directivos y sedes independientes de los de Inditex, actividades diferentes (especialización) y autonomía en su gestión. Por último, entre las áreas de apoyo o funciones compartidas por todas las unidades de negocio, destaca por la importancia en la política del grupo, el departamento de inmuebles, que se encarga de la localización y negociación de los locales más adecuados para la ubicación de los puntos de venta y, el departamento de logística, que se ocupa de la recepción, almacenaje y distribución a las tiendas de las prendas producidas.

Esta estructura organizativa ha conseguido desarrollar una cadena flexible y eficaz de diseño y fabricación. Es capaz de introducir en el mercado nuevos productos cada semana y el proceso que va desde el diseño de un nuevo producto hasta su venta oscila tan sólo entre veinte y treinta días. Además, las áreas de apoyo (departamento de inmuebles, logística, etcétera) evitan duplicidades de esfuerzos y el despilfarro de recursos.

Cabe concluir, que el grupo Inditex ha sabido entender el comportamiento de la demanda en su sector y aplicarlo a la toma de decisiones empresariales apoyándose en una estructura organizativa adecuada.



## **1.2.2 Unidades de negocio**

Analizando con más detalle la estructura del grupo pasamos a realizar una pequeña descripción de las distintas unidades de negocio que lo componen .

### **1.2.2.1 ZARA**

Su primera tienda se abrió en La Coruña y esta presente en 86 mercados con más de 1.900 tiendas ubicadas siempre en los emplazamientos más privilegiados de las principales ciudades del mundo.

Con un equipo de creación formado por más de 200 profesionales, el diseño se concibe en Zara como un proceso estrechamente ligado al público. Las demandas e inquietudes de los clientes se transmite desde las tiendas a los equipos de diseño.

Su estrategia se caracteriza por una continua renovación de productos: nuevos artículos llegan a las tiendas dos veces por semana. Zara cuida especialmente el diseño de sus tiendas, sus escaparates e interiorismo.

### **1.2.2.2 PULL&BEAR**

Fue creada por el grupo Inditex en 1991. Su concepto de moda está enfocado a un público urbano. Pull&Bear con sus establecimientos trata de ser algo más que un simple punto de venta. La oferta de ropa y complementos se completa con una decoración cuidada de la tienda que une mobiliario moderno con objetos reciclados antiguo. Pull&Bear cuenta con más de 800 tiendas en 59 mercados. Sus servicios centrales se encuentran en Narón (La Coruña). Es una de las marcas de referencia entre el público joven y sus productos marcan tendencia cada temporada anticipándose a sus competidores. La clave del éxito de esta unidad de negocio es moda joven a precio asequible.

### **1.2.2.3 MASSIMO DUTTI**

Se inauguró en el año 1985 y fue adquirida por Inditex en 1991. Hoy tiene más de 600 establecimientos en 60 mercados. Sus servicios centrales se encuentran en Tordera (Barcelona). Massimo Dutti ofrece un diseño de moda internacional de excelente calidad, para hombre, mujer y niño. Ropa moderna que cuida los detalles y donde la calidad es comparable con las primeras marcas del mercado internacional pero a un precio inferior. Sus principales clientes son personas de mediana edad que buscan productos de diseño, alta calidad a un precio razonable, y que les gusta vestir de forma moderna con toques clásicos. Sus tiendas están situadas siempre en las principales zonas comerciales de las ciudades. Estas son elegantes, prima la calidad de los materiales y su personal está siempre atento a satisfacer las necesidades de los clientes.

### **1.2.2.4 BERSHKA**

Inicia su actividad en abril de 1998 como un nuevo concepto tanto de tienda como de moda dirigida al público femenino más joven. Desde 2002 ofrece también moda masculina. Las tiendas Bershka son grandes, espaciosas, con estética de vanguardia y la voluntad de ser puntos de encuentro entre la moda, la música y el arte de la calle. Esta cadena cuenta con más de 880 tiendas en 62 mercados. Sus servicios centrales se encuentran en Tordera (Barcelona).

Esta marca es un referente entre el público joven que le gusta llevar la última tendencia de la moda, sus productos tienen un precio competitivo que le hace ser una de las cadenas favoritas entre el público femenino joven. Cada semana tiene productos nuevos que son tendencia a nivel mundial.

### **1.2.2.5 STRADIVARIUS**

Cadena adquirida por Inditex en 1999, acerca a un público femenino joven las últimas tendencias en diseño, tejidos y complementos. Sus tiendas, más de 700 en 52 mercados, son amplias y con un ambiente moderno y dinámico. Ofrecen un gran

abanico de posibilidades con un estilo informal e imaginativo. Sus servicios centrales se encuentran en Sallent (Barcelona).

Fue una de sus grandes competidores en los años noventa, y tuvo una gran aceptación en el mercado, por lo que el grupo Inditex no dudó en hacerse con esta empresa para potenciar sus ventajas, añadiendo los conocimientos de Inditex para hacerla competitiva y aprovechar las económicas de escala. Su incorporación y adaptación al grupo ha sido un todo un éxito, consiguiendo aumentar las ventas y reducir sus costes, es un ejemplo de como fusionar en un grupo una marca adquirida y pone de manifiesto la gran capacidad del equipo directivo de Inditex para aprovechar la fuerza del grupo y hacer más fuertes sus marcas.

#### **1.2.2.6 OYSHO**

Inicia su actividad en el año 2001 y sus servicios centrales se encuentran en Tordera (Barcelona). Este formato traslada al sector de la lencería y la ropa interior femenina la filosofía del grupo Inditex, ofreciendo las últimas tendencias de moda con calidad y a un buen precio. Cuenta con más de 500 tiendas en 35 mercados.

Oysho ha continuado su expansión comercial a través de tiendas físicas como mediante el comercio electrónico. Concretamente, la marca está presente a través del comercio electrónico en 12 países y está presente físicamente en 35 países. Además, la cadena de moda interior femenina del Grupo Inditex ha estrenado una tienda emblemática en Milán (Vía Torino).

#### **1.2.2.7 ZARA HOME**

Es la cadena especializada en artículos para la casa del Grupo Inditex. Zara Home pone especial énfasis en el textil: ropa de cama, de mesa y de baño, que se complementa con vajillas, cuberterías, cristalerías y objetos de decoración. Zara Home ofrece diseño, calidad y artículos novedosos a precios competitivos. Tiene más de 350 tiendas en 35 mercados. Sus servicios centrales se encuentran en Arteixo (La Coruña). En el año 2012 consigue un importante aumento de ventas, del 10%, hasta alcanzar los 350 millones de euros. En ese año, inaugura 47 nuevas tiendas, de modo que el

número total de establecimientos de la cadena se sitúa en 357 en todo el mundo. Durante 2013, Zara Home continuó su sólido crecimiento comercial con la inauguración de su primera tienda en Brasil, donde hasta ahora no tenía presencia. También opera a través del comercio electrónico en tres nuevos mercados: Polonia, donde ya contaba con dos establecimientos físicos, Finlandia y Estados Unidos. En estos dos últimos casos, la marca sólo está presente de forma virtual. Con estas nuevas aperturas, Zara Home tiene ya tienda online en 20 países.

#### **1.2.2.8 UTERQÜE**

Es el último formato comercial creado por el Grupo Inditex. La oferta comercial de Uterqüe está formada principalmente por complementos de moda -bolsos, calzado y marroquinería, bisutería y otros accesorios tales como pañuelos, gafas, paraguas o sombreros-, complementados con una cuidada selección de prendas en textil y piel. En la actualidad, Uterqüe cuenta con más de 90 tiendas en 18 mercados. La estética de las tiendas es elegante y el diseño de los espacios se ha concebido para hacerlas funcionales y con el máximo confort para los clientes.

Uterqüe experimenta un importante crecimiento de ventas, del 9%, al cierre del ejercicio 2012, hasta alcanzar los 74 millones de euros. En ese periodo, abre 3 nuevas tiendas, con lo que la cifra total de establecimientos de la cadena se coloca en 92 en 18 mercados de todo el mundo. En el terreno online, Uterqüe ha lanzado sus tiendas en Bélgica, Holanda y Austria, países estos dos últimos donde la cadena no tiene presencia física. Es una manera que utiliza para introducirse en nuevos mercados a un coste bajo y prepararse para la apertura de tiendas físicas.

Con este análisis hemos podido ver como el grupo Inditex intenta ofrecer productos que se adaptan a gran parte de la población con las distintas unidades de negocio, todas con una estrategia y política determinadas pero siempre con el sello Inditex.

### 1.2.3 Modelo de negocio

Las claves del éxito de Inditex radican en su excelente organización, como nos muestra la siguiente Figura 1.3.

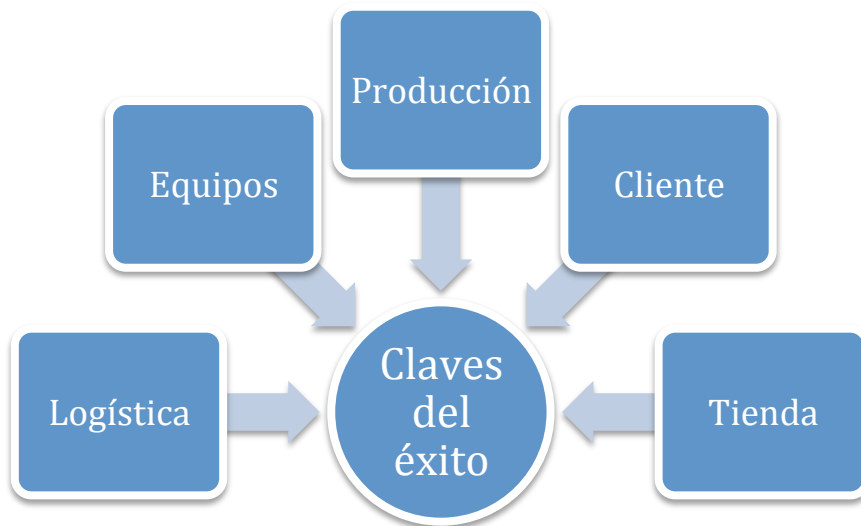


Figura1.3: Claves del éxito Inditex.

Fuente: [http://www.inditex.com/es/our\\_group/business\\_model](http://www.inditex.com/es/our_group/business_model); Elaboración propia.

Estas claves son:

- Cliente: es el factor más determinante del modelo de negocio de Inditex. La actividad en la compañía empieza a partir de las exigencias de los clientes a través de la tienda, el lugar donde arranca el proceso de diseño. Las preferencias del cliente no sólo atienden a una perspectiva de la moda, sino que se tienen en cuenta de forma global, considerando todos los aspectos que completan el proceso de compra, incluyendo la ubicación de las tiendas, situadas en las principales áreas comerciales de las ciudades, y la decoración, concebido para un encuentro perfecto entre la moda y los clientes potenciales.
- Tienda: es el entorno en el que se inicia y culmina el particular modelo de negocio de Inditex, y el cliente su principal activo. En su interior se unen los deseos de moda del cliente y las propuestas de los equipos de diseño de cada una de las cadenas. El personal de la tienda recoge las demandas del cliente que tienen que llegar a la mesa del diseñador, poniendo en marcha el proceso que, en el menor tiempo posible, regresará a la tienda en forma de un nuevo producto de moda. Las tiendas son la principal imagen de las cadenas.

- Diseño/Producción: una comunicación fluida y constante entre el personal de tienda, los equipos de diseño y los centros de fabricación es fundamental para reaccionar ante los cambios en las preferencias de los clientes con nuevos productos en las tiendas en el menor tiempo posible. Una parte importante de la actividad, incluida la fabricación en centros propios o de terceros, se desarrolla en áreas de proximidad que proporcionan una respuesta rápida en el mercado.
- Logística: todos los productos independientemente de su origen, se reparten a las tiendas desde los centros logísticos de cada una de las unidades de negocio del grupo, de forma que todas las tiendas del mundo reciben mercancía dos veces por semana, y cada envío incluye nuevos modelos. Con este sistema es posible hacer llegar el producto desde el centro logístico a las tiendas europeas en 24 horas y en 48 horas a las tiendas de América o Asia.
- Equipos: Inditex es una empresa multicultural y multirracial integrada por más de 100.000 profesionales de más de 150 naciones. Todos ellos, se rigen por los deseos de moda de los clientes. La formación continua juega un papel fundamental, especialmente la del personal de tienda. Esta formación se centra en conocimientos sobre la evolución de las tendencias de la moda y en la capacidad de poder transferir esa información a los clientes.

Destacar que el gran éxito de la compañía es debido a que cada uno de estos elementos del modelo de negocio (cliente, tienda, diseño/producción, logística y equipo) se encuentran interrelacionados entre sí, con el fin de satisfacer los deseos del cliente.

## **1.3 Inditex en Bolsa**

### **1.3.1 Historia y evolución**

Inditex empieza su aventura en el parqué a finales del 2000 y con la caída de las punto.com, era el inicio del fin de la irracionalidad de los mercados y fue entonces cuando apareció Inditex en el parqué, una empresa de crecimiento de la que se hablaban maravillas, sin deuda, con una altísima rentabilidad sobre recursos propios y con un modelo de negocio único. La salida a Bolsa no defraudó y el día del estreno bursátil se revalorizó más de un 20%, fue un estreno a la altura de la gran compañía

que iba a empezar a cotizar en nuestro mercado y que por aquel entonces, aunque se especulaba que se trataba de un gran negocio, nadie podía imaginar lo que llegaría a ser, la empresa con mayor capitalización bursátil del mercado español.

Los inicios del 2000 fueron complicados para las Bolsas, el estallido del mercado tecnológico demostró los altos niveles de valoración que los mercados habían alcanzado y hubieron tres años consecutivos de caídas. Durante ese periodo, Inditex consiguió convertirse en un valor defensivo y la empresa pese a la crisis, seguía creciendo a tasas cercanas al 30%, lo que hizo que la acción se revalorizase un 60% en ese periodo, pese a la mala evolución de los mercados.

En la historia bursátil de Inditex se recordará el año 2003 cómo el del primer traspies. Inditex no consiguió adecuar sus colecciones de temporada a los cambios climatológicos que se sufrieron, debido a un buen tiempo que duró mas de lo esperado, por este motivo, las ventas en tiendas se estancaron y su beneficio anual creció un modesto 1,8%. La acción se resintió y cada publicación trimestral de resultados pasó a convertirse en un día de extrema volatilidad. Aquel fue un año de recuperación para los mercados, pero Inditex cayó casi un 28% y sufrió un tremendo batacazo.

Durante el periodo anterior a la crisis, desde 2004 a 2007, el mercado bursátil español vivió un periodo de bonanza e Inditex no decepcionó a todos aquellos inversores que pusieron sus ojos en ésta empresa. Tras el susto de 2003, la empresa decidió comenzar una política conservadora de reparto de dividendos y pese recibir fuertes criticas, la empresa siguió creciendo a ritmos superiores al 25% y su acción llegó a triplicar el precio de 2003 alcanzando los niveles de los 50€.

Fue en Noviembre de 2007 cuando se empezó a ver síntomas de la crisis económica que se acercaba e Inditex en poco más de dos meses se desplomó en un 40%. La mayoría de empresas de análisis rebajaron la recomendación y valoraban Inditex alrededor de 20€, valorándola como una empresa minorista cualquiera. Los beneficios de Inditex pese a la crisis internacional repuntaron un 1% en 2008, año en que la economía mundial se quedó paralizada por la crisis *subprime* y la quiebra de Lehman Brothers. De aquel enorme susto salió la que quizá fue la mejor oportunidad de

inversión en Inditex.

En 2009 parecía que se iniciaba una recuperación económica internacional una vez que se consiguió rescatar al sistema financiero, pero fue en España donde a partir de 2010 se empezó a vivir la crisis económica más fuerte. Inditex supo afrontar la crisis económica en España de una manera muy solvente y supo aumentar su dependencia internacional durante estos años, así sus beneficios prácticamente se han duplicado en estos últimos cinco años y el precio de sus acciones se ha multiplicado por cinco, hasta llegar a convertirse en la empresa número uno de España por capitalización bursátil. En el año 2013 Inditex alcanzó su máxima cotización superando los 120€ por acción.

El 25 de julio de 2014 se realizó un *split*<sup>6</sup> de 1:5 en las acciones de Inditex pasando estas a tener una cotización de alrededor de 20€. Con esta operación, según algunos expertos, la empresa busca tener un efecto psicológico sobre los inversores, que ven como el valor sufre un estancamiento y no consigue superar su máximo.

En el Gráfico 1.1<sup>7</sup> podemos observar la evolución de la cotización de Inditex desde su estreno en la Bolsa hasta la actualidad.



**Gráfico 1.1: Cotización histórica Inditex.**

Fuente: <https://es.finance.yahoo.com/echarts?s=ITX.MC#symbol=ITX.MC;range=1d>.

Como conclusión final, vemos que cada cinco años más o menos, Inditex sufre una

---

<sup>6</sup> El split consiste en aumentar el número de acciones sin modificar el valor de la empresa.

<sup>7</sup> En el Gráfico 1.1 se muestra la evolución de la cotización adaptada al split realizado en julio de 2014.



bajada y es probable que haya unas rebajas de recomendación de algunas casas de análisis y que en algún momento en los próximos años se vuelva a poner en duda su modelo de negocio, seguro que ese será un excelente momento para invertir a largo plazo como lo fue en 2003 y en 2008.

### 1.3.2 Principales Ratios

Para estudiar con mayor detalle la evolución y la situación actual del grupo Inditex en Bolsa, a continuación se muestra la evolución de los principales ratios para de este modo conocer la situación actual de la empresa.

Ratios	2010	2011	2012	2013	2014
<i>BPA</i>	2,78	0,62	0,76	0,76	0,82
<i>Dividendo</i>	1,60	0,36	0,44	0,48	0,53
<i>PER</i>	20,15	20,41	27,84	31,44	28,27
<i>B. Neto (mil.)</i>	1.732,00	1.932,40	2.361,00	2.377,00	2.562,33
<i>Deuda (mil.)</i>	3.426,00	3.464,00	4.097,00	4.055,00	4.685,00
<i>EBIDTA (mil.)</i>	2.966,00	3.258,00	3.912,81	3.926,00	4.227,00

**Tabla 1.1: Principales Ratios Inditex.**

Fuente: El Economista; Elaboración propia.

A partir de la Tabla 1.1 podemos ver como el beneficio (B. Neto) de Inditex crece con el paso del tiempo, y podemos destacar que cada año en mayor porcentaje. Inditex está en un continuo crecimiento aunque destaca una pequeña desaceleración en el año 2013 en los beneficios debido principalmente a la depreciación de las divisas de muchos países emergentes en los que invierte el grupo que ha hecho que la empresa no haya podido seguir aumentando el beneficio neto como en años anteriores. El

EBIDTA<sup>8</sup> podemos observar como sigue creciendo siguiendo un crecimiento similar al del beneficio neto.

Desde el punto de vista de la deuda, la empresa esta muy poco endeudada para los resultados obtenidos. Esto es una de las principales bazas con las que cuenta el grupo de cara a los inversores. Esta deuda tan baja se consigue como consecuencia de la reinversión de los beneficios ya que Inditex reparte solo una pequeña parte del beneficio como vemos por el pequeño dividendo que reparte. Por otra parte, podemos ver como esta aumentando la deuda pero siempre de una forma controlada y no tiene el porqué preocupar ya que los beneficios también aumentan.

Analizando el dividiendo, vemos como Inditex tiene una política de aumentar el dividendo pero a pesar de ello, reparte un dividendo relativamente bajo para sus resultados

Respecto al BPA<sup>9</sup> podemos ver como con el paso del tiempo aumenta, esto tiene gran relación con lo visto anteriormente en el Beneficio Neto. Como el B.Netto aumenta es lógico que si no varían el número de acciones aumente este ratio.

El PER<sup>10</sup> es uno de los principales ratios que los analistas utilizan para valorar las empresas antes de realizar inversiones. La mayoría de analistas defiende el concepto de que un PER bajo (tomando como referencia, según los expertos, de 17) es un buen momento para invertir en un valor, en cambio, Inditex es una clara demostración del posible error de esta afirmación. Inditex podemos observar como siempre ha tenido un PER que puede considerarse elevado y con el paso de los años aumenta y no por ello deja de aumentar su valor ni desaparecen las altas expectativas de crecimiento que siempre ha tenido la empresa.

Para finalizar este análisis de Inditex es importante destacar que la empresa ha multiplicado su precio por 7,5 veces, lo que supone una rentabilidad anualizada de un 17% y de casi un 22% anual después de dividendos. Se demuestra así que su modelo

---

<sup>8</sup> EBITDA son las siglas en inglés de Earnings Before Interests, Taxes, Depreciations and Amortizations. Por tanto, se trata del resultado empresarial antes de: intereses, impuestos, depreciaciones y amortizaciones productivas.

<sup>9</sup> Beneficio neto dividido por el número de acciones de la empresa.

<sup>10</sup> Del inglés, *price-to-earnings ratio* o *P/E ratio*, es decir, la relación entre el precio o valor y los beneficios.

de negocio es único y que Inditex sigue abriendo tiendas e incrementando sus ventas.

Como recomendación podríamos decir que después del *split* realizado por el grupo las acciones de Inditex se encuentran en un momento de incertidumbre ya que se debe esperar a ver cómo responde el mercado ante esta maniobra de psicología realizada por el grupo. Con esta maniobra y los resultados que está obteniendo la empresa los principales analistas vaticinan un mayor crecimiento de la cotización pero siempre teniendo en cuenta que el valor tiene una resistencia muy fuerte que es difícil que consiga superar.



# 2 | PRELIMINARES ESTOCÁSTICOS

En este capítulo se presentan las herramientas estocásticas que se requerirán en el siguiente capítulo para calcular la solución del Modelo Log-Normal y sus principales propiedades estadísticas. En primer lugar introduciremos un tipo particular de proceso estocástico que jugará un rol muy importante en todo el desarrollo teórico del Modelo Log-Normal, el proceso de Wiener o también denominado Movimiento Browniano. Partiremos de su definición y enunciaremos únicamente las propiedades estadísticas que posee y que se requerirán posteriormente. A continuación, se explicará cómo se pueden obtener simulaciones del proceso de Wiener, lo cual se necesitará cuando se aplique el Modelo Log-Normal en la modelización de un activo subyacente para poder implementar un método tipo Monte Carlo para realizar predicciones. Como el Modelo Log-Normal se basa en una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô, su resolución pasa por el manejo de integrales estocásticas de tipo Itô y de sus propiedades estadísticas, el capítulo se cierra estudiando estos tópicos.

## 2.1 Movimiento Browniano o proceso de Wiener

Un proceso estocástico o función aleatoria describe la evolución temporal de una variable aleatoria. En esta memoria, haremos uso de uno de los procesos estocásticos más importantes en Estadística, y que se denomina el Movimiento Browniano. Este proceso toma valores continuos y depende de la variable tiempo, la cual también se considera continua. El Movimiento Browniano resulta adecuado para describir el comportamiento de variables económico-financieras, como es el caso de los activos subyacentes.

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico de tipo *gaussiano*<sup>11</sup>. Su introducción se realizó de forma intuitiva en 1827 por el botánico escocés Robert Brown quien lo utilizó para describir el movimiento aleatorio de las partículas de polen en el agua debido a la interacción molecular. A este fenómeno se le denominó “Movimiento Browniano”.

En el siglo XX, se descubrió la utilidad de dicho instrumento matemático en múltiples campos; en particular en el campo de las finanzas, en el que se utilizó dicho instrumento para la modelización del comportamiento de los precios bursátiles. Louis Bachelier (1900) hizo uso de las mismas en su tesis doctoral “La Teoría de la Especulación” para modelizar ciertos activos financieros<sup>12</sup>. No obstante, el trabajo de L. Bachelier no fue comprendido en su época y durante mucho tiempo permaneció ignorado. Con posterioridad, fue Norbert Wiener quien consiguió formalizar matemáticamente el concepto de Movimiento Browniano y de ahí que, en ocasiones, se le denomine también proceso de *Wiener*<sup>13</sup>. A lo largo de esta memoria, el Movimiento Browniano o proceso de Wiener se denotará por:  $\{B(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$

---

<sup>11</sup> Se recuerda que un proceso estocástico  $\{X(t; \omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$  se dice que es gaussiano si las distribuciones finito dimensionales de dicho proceso son gaussianas, en particular,  $X(t; \cdot)$  es una variable aleatoria gaussiana para cada  $t \in T$ .

<sup>12</sup> BACHELIER, L. (1900) “*Théorie de la spéculation*”. Annales Scientifiques de l’École Normale Supérieure, pp. 21–86.

<sup>13</sup> KLEBANER, C. (2011) “*Introduction to Stochastic Calculus With Applications to Finance*”. Imperial College Press.

o brevemente por  $\{B(t): t \geq 0\}$ , aunque en muchos textos se utiliza indistintamente la notación:  $\{W(t): t \geq 0\}$ .

Como ya se ha indicado, el objeto de esta memoria es el estudio y aplicación de un modelo estocástico de activos subyacentes denominado Modelo Log-Normal, cuya solución es un proceso estocástico denominado Movimiento Browniano Geométrico (MBG). El ingrediente que dota de aleatoriedad al Movimiento Browniano Geométrico es el Movimiento Browniano cuyas trayectorias muestrales son muy irregulares. A continuación damos la definición de este importante proceso estocástico, la cual se da no a través de una fórmula matemática, sino enunciando una serie de propiedades estadísticas que lo caracterizan.

El Movimiento Browniano,  $\{B(t): t \geq 0\}$  ó  $W \equiv \{W(t), t \in \mathbb{R}^+\}$  es un proceso estocástico que cumple:

- **MB.1.** Comienza en el origen con probabilidad 1:  $P[B(0) = 0] = 1$ .
- **MB.2.** Los incrementos del Browniano dados por,  $B(t) - B(s)$ , son variables aleatorias independientes:

$$B(t_1) - B(t_0); B(t_2) - B(t_1); \dots; B(t_{n+1}) - B(t_n),$$
$$\text{con } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1} \leq +\infty.$$

- **MB.3.** Tiene incrementos estacionarios:

$$B(t + \Delta t) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + \Delta t) - B(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \in [0, +\infty[,$$

donde el símbolo  $\stackrel{d}{=}$  denota que la igualdad anterior es en distribución.

- **MB.4.** Los incrementos del proceso son *gaussianos* de media 0 y varianza  $t - s$ :

$$B(t) - B(s) \sim N(0; \sqrt{t - s}), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t.$$

Considerando la propiedad MB.4., en el caso particular en que  $s = 0$ , se deduce que

$$B(t) \sim N(0; \sqrt{t}),$$

es decir, que fijado  $t$ , la variable aleatoria  $B(t)$  sigue una distribución normal o *gaussiana* de media 0 y desviación típica  $\sqrt{t}$ .

## 2.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano

A continuación, se especifican las principales propiedades estadísticas del proceso estocástico Movimiento Browniano  $\{B(t), t \geq 0\}$ . Para algunas de estas propiedades no daremos la demostración, la cual puede verse por ejemplo en el libro de Øksendal, Bernt K.<sup>14</sup>

**P.1. Función Media:** A partir de las condición MB.4, se deduce que la función media del Movimiento Browniano es idénticamente nula:

$$\mu_{s(t)} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

En la Gráfica 2.1 se ilustra esta propiedad.

**P.2. Función Covarianza:** Mide el grado de relación lineal entre las variables aleatorias,  $B(s)$  y  $B(t)$ , que se obtienen al fijar dos instantes  $s$  y  $t$ , respectivamente. En efecto, veamos que se cumple

$$\text{Cov}[B(t), B(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

En efecto, si tomamos  $0 \leq s \leq t$ , entonces utilizando la propiedad .1 y las propiedades básicas del operador esperanza se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[B(t), B(s)] &= E[B(t)B(s)] - E[B(t)]E[B(s)] \\ &= E[B(t)B(s) - (B(s))^2 + (B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s) + (B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s)] + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))] + E[(B(s))^2] \\ &= E[B(t) - B(s)] E[B(s) - B(0)] + E[(B(s))^2] \\ &= (E[B(t)] - E[B(s)])(E[B(s)] - E[B(0)]) + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(s))^2] \\ &= \text{Var}[B(s)] \\ &= s. \end{aligned}$$

Obsérvese que si en la relación anterior tomamos  $s = t$ , se obtiene la propiedad MB.4, es decir, que la varianza del Movimiento Browniano es  $t$ .

<sup>14</sup> ØKSENDAL, B.K. (2003) "Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications". Berlin: Springer.



**P.3.**  $B(t)$  es  $\frac{1}{2}$ -autosemejante: Esta es, únicamente, una propiedad geométrica que formalmente se denota de la siguiente manera.

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

**P.4.** Las trayectorias muestrales de  $B(t)$  son continuas, pero no son diferenciables en ningún punto. Se puede demostrar que  $B(t)$  tiene trayectorias que no son de variación acotada, lo que significa que no son derivables (las trayectorias del Movimiento Browniano tienen puntos angulosos, es decir, con pico para todo instante  $t$ ). Este comportamiento muestral se observa en la Gráfica 2.1.

## 2.3 Simulación del Movimiento Browniano

Como se verá posteriormente cuando se estudie y resuelva el Modelo Log-Normal para modelizar los activos subyacentes, la solución quedará expresada en términos del Movimiento Browniano. Para poder realizar predicciones de subyacentes será necesario poder realizar simulaciones del Movimiento Browniano. A continuación, se indica una forma de simular dicho proceso, aunque cabe señalar que el software especializado disponible tiene implementados otros algoritmos para realizar dicha simulación.

Una manera sencilla de simular el Movimiento Browniano es a través de variables aleatorias normales tipificadas, haciendo uso para ello de la identidad:

$$B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N(0; 1). \quad (2.3.1)$$

Para justificar esta identidad en distribución es suficiente con probar que ambos miembros de la identidad tienen la misma distribución. Más específicamente, es sencillo ver que dicha distribución es *gaussiana* y justificar que la media y varianza de ambos miembros coinciden. Esto se muestra en la Tabla 2.1.

	$B(t)$	$\sqrt{t}Z$
<i>Distribución</i>	Gaussiana [MB.4]	Gaussiana Transformación lineal de una variable Gaussiana
<i>Media</i>	0 [MB.4]	$E[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t} \cdot E[Z] = 0$
<i>Varianza</i>	$t$ [MB.4]	$Var[\sqrt{t}Z] = (\sqrt{t})^2 \cdot Var[Z] = t$

Tabla 2.1. Justificación de la identidad (2.3.1) para la simulación del Movimiento Browniano.

Fuente: Elaboración propia.

En el Gráfico 2.1 se muestra una simulación de Movimiento Browniano sobre la ventana temporal  $[0,1]$ . En esta gráfica se ilustra la propiedad MB.1 y la propiedad estadística P.4 introducidas anteriormente. No obstante, cabe puntualizar que, pese a que el Movimiento Browniano es el ingrediente que introduce la componente de aleatoriedad en el Modelo de Log-Normal, éste no se corresponde directamente con el Movimiento Browniano, sino con su diferencial. El diferencial de éste,  $\{dB(t), \forall t \geq 0\}$ , genera un nuevo proceso estocástico, también de tipo *gaussiano* y denominado Ruido Blanco.

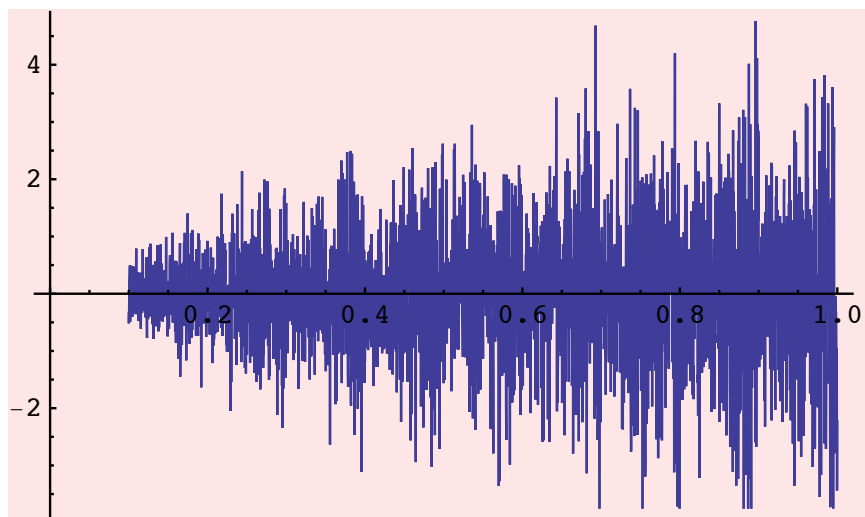


Gráfico 2.1. Simulación del Movimiento Browniano.

Fuente: Elaboración propia.

En base al Teorema Central del Límite, la diferencial del Movimiento Browniano se empleará para modelizar la aleatoriedad o “ruido” en el modelo. Son numerosos y diferentes los factores que en el mundo real pueden llegar a determinar el valor de un activo financiero. En condiciones generales, este teorema indica que, si  $S_n$  es la suma de  $n$  variables aleatorias independientes, la función de distribución de  $S_n$  se aproxima a una distribución normal (o *gaussiana*). En definitiva, modelizando el “ruido” con el Teorema Central del Límite, éste sigue una distribución *gaussiana* o normal, lo que otorga consistencia a la decisión de modelizar la aleatoriedad mediante un proceso *gaussiano*, como lo son el Movimiento Browniano y su diferencial, el Ruido Blanco.

## 2.4 El Cálculo de Itô

Kiyoshi Itô fue un matemático japonés que desarrolló una teoría para la diferenciación e integración de procesos estocásticos. Esta teoría se conoce como el Cálculo de Itô. El concepto básico de este cálculo es la Integral de Itô y el más importante de sus resultados, es el Lema de Itô. Cabe puntualizar que la Integral de Itô es el corazón del análisis estocástico, facilita la comprensión matemática de sucesos aleatorios y difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación.

La teoría y fórmula de K. Itô tiene numerosas aplicaciones de interés, no obstante, en este apartado se detalla la versión del cálculo de Itô que se adapta al objeto de la presente memoria. Se centra en el cálculo exacto de la solución de una ecuación diferencial estocástica definida de la siguiente forma:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t). \quad (2.4.1)$$

Dicha solución se obtiene, en algunos casos que dependen de la forma específica de los coeficientes  $f(t, X(t))$  y  $g(t, X(t))$ , utilizando el Lema de Itô. El Lema de Itô es una versión estocástica de la regla de la cadena para procesos estocásticos  $X(t)$ . Para el Modelo Log-Normal, que es el caso que ocupa el presente trabajo (véase el desarrollo del Capítulo 3), se verá como ello sí es factible. A continuación enunciamos el Lema de Itô:

**Lema de Itô** (versión integral)

Hipótesis: Sea  $X(t)$  un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial tipo Itô con condición inicial determinista  $x_0$ :

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \\ X(0) &= x_0, \end{aligned}$$

y sea  $F(t, x)$  una función  $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = F_1(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = F_2(t, x), \quad \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = F_{22}(t, x).$$

Tesis: Entonces para  $t > 0$  se cumple

$$\begin{aligned} F(t, x(t)) - F(s, x_0) &= \int_0^t \{F_1(r, x(r)) + f(r, x(r))F_2(r, x(r))\}dr \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2} (g(r, x(r)))^2 F_{22}(r, x(r))dr \\ &+ \int_0^t g(r, x(r))F_2(r, x(r))dB(r). \end{aligned}$$

### 2.4.1 La Integral de Itô

En esta sección introducimos el concepto de Integral de Itô de un proceso estocástico. La definición de la Integral de Itô difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación, definiendo lo que debería entenderse por integración de un proceso estocástico con respecto al Movimiento Browniano (u otro proceso estocástico). El objetivo de esta sección, por tanto, es dar una interpretación a la siguiente expresión:

$$\int_0^t X(s)dB(s), \quad (2.4.2)$$

donde  $X(s)$  es un proceso estocástico que cumple determinadas condiciones que a continuación se detallarán. Se dice que la expresión (2.4.2) es la Integral de Itô con respecto al Movimiento Browniano. La exposición seguirá las ideas dadas en el libro de

E. ALLEN<sup>15</sup>. Primero daremos la interpretación de dicha integral si  $X(s)$  y  $B(s)$  no fueran procesos estocásticos, sino funciones deterministas.

Supongamos que  $f(s)$  y  $g(s)$  son dos funciones deterministas suaves respecto de la variable tiempo  $s$  y consideremos la siguiente integral:

$$\int_0^t g(s)df(s). \quad (2.4.3)$$

Cuando  $f(s)$  tiende a una función diferenciable, se escribe  $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$ , o equivalentemente,  $df(s) = f'(s)ds$ . Sustituyendo esto en la integral (2.4.3), se llega a:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s)f'(s) ds,$$

quedando ésta definida como una integral estándar (de tipo Riemann). Si  $f(s)$  no fuese diferenciable, todavía se puede utilizar la teoría determinista para definir la integral anterior. En efecto, cuando  $f(s)$  no es demasiado irregular como función del argumento  $s$ , es decir, cuando  $f(s)$  es lo que se denomina una función de variación acotada, se puede probar que la integral está bien definida como el siguiente límite:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)).$$

Puesto que  $f(s)$  es de variación acotada,  $f(s_{i+1})$  está próximo a  $f(s_i)$ . A partir de esto es posible probar que el límite anterior existe siempre que  $g(s)$  no varíe demasiado. Por supuesto, si la función  $g(s)$  es extremadamente fluctuante en diferentes puntos en el tiempo, el límite puede ser divergente.

Se define la integral (2.4.2) de forma análoga mediante el siguiente límite:

$$\int_0^t X(s, \omega)dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(s_i, \omega)(B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad \omega \in \Omega. \quad (2.4.4)$$

Nótese que se toma el límite para cada  $\omega$  fijo en el espacio muestral  $\Omega$  de la variable aleatoria  $B(s)$ . El problema aquí es que el límite para cada  $\omega$  en general no existe

---

<sup>15</sup> ALLEN, E. (2007) "Modelling with Itô Stochastic Differential Equations". Springer (Series Mathematical Modelling: Theory and Applications).

(empieza en  $\pm\infty$ ) para muchos procesos estocásticos  $X(s)$ . Para cada  $\omega$ , la función  $s \rightarrow B(s, \omega)$  es extremadamente volátil. Como se indicaba con anterioridad (véase la propiedad estadística P.4), el Movimiento Browniano es un ejemplo de un proceso estocástico con trayectorias muestrales continuas, pero no diferenciables en ningún punto. Todavía peor, el Movimiento Browniano como función del tiempo no es de variación acotada para cada  $\omega$ , tal y como se requiere para  $f(s)$ . Para compensar la irregularidad de las trayectorias del Movimiento Browniano, se tienen que exigir dos condiciones, que detallaremos después, en el proceso integrador  $X(s)$ . Bajo estas condiciones el límite existirá a pesar de la irregularidad de las trayectorias del Movimiento Browniano. La primera condición es que se asume que  $X(s)$  es independiente de los incrementos del Movimiento Browniano. La segunda condición guarda relación con la variación del integrando (similar a la condición de que  $g(s)$  en (2.4.3) no debe variar demasiado).

A partir de la propiedad MB.2 del Movimiento Browniano se sabe que la variación de un incremento del mismo, está dada por:

$$E[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2] = s_{i+1} - s_i.$$

Si  $X(s_i)$  es independiente del incremento  $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ , se obtiene

$$\begin{aligned} E\left[\left(X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] &= E[(X(s_i)^2)] E\left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2\right] \\ &= E[(X(s_i)^2)](s_{i+1} - s_i). \end{aligned}$$

Considerando el segundo momento de la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)), \quad (2.4.5)$$

y asumiendo que  $X(s_i)$  es independiente de  $B(s_{i+1}) - B(s_i)$  para cada  $i = 1, \dots, n$ , puede verse por la independencia de los incrementos del Movimiento Browniano que:

$$E\left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i))\right)^2\right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[(X(s_i)^2)] (s_{i+1} - s_i).$$

La suma del miembro derecho es una aproximación de la integral  $\int_0^t E \left[ (X(s))^2 \right] ds$ .

Por tanto, si esta integral existe, se deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[ \left( \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E \left[ (X(s))^2 \right] ds,$$

lo cual conduce a la conclusión de que la varianza de la suma en (2.4.5) converge a  $\int_0^t E \left[ (X(s))^2 \right] ds$ . Asumiendo que esta integral existe, se demuestra:

$$E \left[ \left( \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i) (B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E \left[ (X(s))^2 \right] ds. \quad (2.4.6)$$

Cabe subrayar que la integral que aparece en el lado derecho de la relación (2.4.6), en algunos casos, puede no existir. Existirá siempre que sea finita, es decir, siempre que el proceso estocástico  $X(s)$  sea tal que su segundo momento puede ser integrado de 0 a  $t$ .

Por ejemplo, para el proceso  $X(s) = s^{-1}B(s)$ , por la condición MB.2 del Movimiento Browniano, se tiene

$$\int_0^t E[(X(s))^2] ds = \int_0^t s^{-1} ds = \ln(t) - \ln(0) = +\infty.$$

Por otro lado, si tomamos  $X(s) = B(s)$ , fácilmente se puede reconocer que  $X(s)$  satisface la condición de integrabilidad. Afortunadamente, esto también se cumple para una larga clase de procesos estocásticos.

Retomando la relación (2.4.6), y considerando que el término  $X(s_i)$ , que aparece en el miembro izquierdo, debe ser independiente de incrementos  $B(s_{i+1}) - B(s_i)$  para todos los valores de  $i = 1, \dots, n - 1$ . Esto motiva la introducción de la denominada adaptabilidad del proceso integrador:

**Definición 1.** Una variable aleatoria  $X$  es llamada  $\mathcal{F}_s$ -adaptada si  $X$  puede ser escrita como (límite de una sucesión de) funciones de  $B(\tau)$  para uno o más  $\tau \leq s$ , pero no como función de cualquier  $B(u)$  con  $u > s$ . Un proceso estocástico  $X(s)$  se dice que es adaptado si para cada tiempo  $s \in [0, t]$ , la variable aleatoria  $X(s)$  es  $\mathcal{F}_s$ -adaptada.

Puntualizamos algunos aspectos de la Definición 1. En primer lugar, cabe señalar algunos procesos que se derivan de composiciones simples del Movimiento Browniano tales como  $X(s) = f(s, B(s))$ , los cuales son adaptados; mientras que procesos tales como  $X(s) = B(s + 1)$ , no lo son.

La integral  $X(s) = \int_0^s B(\tau)d\tau$ , también define un proceso estocástico adaptado, puesto que la integral es el límite de sumas del Movimiento Browniano en diferentes tiempos menores que  $s$ . En definitiva, por la definición de la integral de Itô, se tiene

$$X(s) = \int_0^s B(\tau)d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} B(\tau_i)(\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Por tanto, focalizando sobre la Integral de Itô, obsérvese que siempre que el proceso integrando  $X(s)$  sea adaptado, la integral  $\int_0^t X(s)dB(s)$  tiene sentido como el límite puntual en (2.4.4). Además, este límite (2.4.4) puede probarse que converge en media cuadrática y por lo tanto, también para cada  $\omega \in \Omega$ . Se concluye la exposición con la definición rigurosa de la Integral de Itô.

**Definición 2.** *Un proceso estocástico  $X(s)$ , es integrable en el intervalo  $[0, t]$  en el sentido de Itô si*

1.  $X(s)$  es adaptado para  $s \in [0, t]$ , y
2.  $\int_0^t E \left[ (X(s))^2 \right] ds < \infty$ .

*La Integral de Itô se define como la variable aleatoria*

$$\int_0^t X(s, \omega)dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega)(B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad (2.4.7)$$

*donde el límite es considerado por cada  $\omega \in \Omega$ .*



### 2.4.2 Propiedades de la Integral de Itô

Introducido el concepto de Integral de Itô, a continuación enunciaremos las propiedades estadísticas de dicha integral de Itô, algunas de las cuales serán utilizadas en el próximo capítulo. Estas propiedades se citan distinguiendo si el integrando es una función determinista o un proceso estocástico  $X(t)$ .

Sea  $h(t)$  una función determinista tal que  $\int_0^t (h(s))^2 ds$ , entonces se cumplen las siguientes propiedades:

**I.1.** Media:  $E \left[ \int_0^t h(s) dB(s) \right] = 0$ .

**I.2.** Varianza:  $Var \left[ \int_0^t h(s) dB(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds$ .

**I.3.** Covarianza:  $Cov \left[ \int_0^t h_1(\tau) dB(\tau), \int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau$ , siendo  $t \wedge s = \min(t, s)$ .

En particular,

$$E \left[ \left( \int_0^t h_1(\tau) dB(\tau) \right) \left( \int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau.$$

**I.4.** Normalidad:  $\int_0^t h(s) dB(s) \sim N \left( 0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right)$ .

Si el integrando es un proceso estocástico  $X(t)$  que satisface las condiciones de la Definición 2 anterior, entonces se verifican las siguientes propiedades:

**I.5.** Media:  $E \left[ \int_0^t X(s) dB(s) \right] = 0$ .

**I.6.** Varianza:  $V \left[ \int_0^t X(s) dB(s) \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds$ .

Obsérvese que a partir de las propiedades I.5 e I.6 se deduce

$$E \left[ \left( \int_0^t X(s) dB(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds,$$

llamada isometría de Itô.



# 3 | MODELO ESTOCÁSTICO LOG-NORMAL

El objetivo de este capítulo es presentar el Modelo Log-Normal que constituye el fundamento matemático sobre el cual se realizarán las predicciones del activo subyacente Inditex (ITX.MC). Este modelo se basa en la siguiente ecuación diferencial estocástica tipo Itô

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.0.1)$$

donde:

- $S(t)$  es el valor del subyacente en el instante  $t$ .
- $s_0$  representa el valor del subyacente en el instante inicial  $t = 0$  y se supone conocido, por ello se denota en minúsculas.

- $\mu \in \mathbb{R}$  es un parámetro del modelo denominado *drift* o tendencia.
- $\sigma > 0$  es un parámetro del modelo denominado volatilidad local.
- $B(t)$  es un proceso estocástico de Wiener o Movimiento Browniano.

En lo que sigue de capítulo, en primer lugar motivaremos la consideración del modelo (3.0.1) a partir de los modelos clásicos (deterministas) de subyacentes y posteriormente, utilizando el Cálculo de Itô presentado en el Capítulo 2, obtendremos la solución del modelo Log-Normal y sus principales propiedades estadísticas tales como las funciones media y varianza. Posteriormente, se detallará cómo se pueden estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  utilizando técnicas estadísticas, de modo que dispongamos de resultados que nos permitan realizar estimaciones (predicciones) puntuales y por intervalos de confianza de un activo subyacente cuando se lleva el modelo a la práctica.

### 3.1 Motivación de un modelo estocástico para un subyacente en ambiente de certidumbre

En este apartado vamos a presentar un modelo determinístico clásico para representar la trayectoria temporal de una inversión en ambiente de certidumbre, es decir, sin riesgo. Este modelo constituye el punto de partida para motivar, en el siguiente apartado, un modelo estocástico para subyacentes cotizados que se denomina en la literatura financiera Modelo Log-Normal.

Sea  $S_0$  un principal que se invierte (capitaliza) a un interés  $\mu$  compuesto continuo durante un intervalo temporal  $[0, T]$  dividido en  $K$  periodos de longitud  $\Delta t > 0$  cada uno (véase, Figura 3.1).



Figura 3.1. Capitalización a interés compuesto continuo.

Fuente: Elaboración propia.

Denotemos por  $\hat{S}^{(j)}$ ,  $j = 0, 1 \dots K$ , el capital al cabo de  $j$  períodos (por convenio de notación, implícitamente se supone que  $\hat{S}^{(0)} = S_0$ , entonces sabemos que

$$\hat{S}^{(1)} = S_0 e^{\mu \Delta t}, \quad \hat{S}^{(2)} = S^{(1)} e^{\mu \Delta t}, \quad (3.1.1)$$

y en general,

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu \Delta t}, \quad j = 0, 1 \dots K, \quad (3.1.2)$$

y por tanto, razonando recursivamente se tiene

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} = \hat{S}^{(j-2)} e^{2\mu \Delta t} = \dots = S_0 e^{\mu j \Delta t}, \quad j = 0, 1 \dots K. \quad (3.1.3)$$

Obsérvese que cuando  $j = K$ , se cumple que:  $\hat{S}(T) = \hat{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K \Delta t} = S_0 e^{\mu T}$ , donde se ha utilizado que  $K \Delta t > T$  y se ha introducido la notación siguiente:  $\hat{S}(T)$  representa el capital al cabo de  $K$  períodos. Es decir, el efecto de  $K$  pasos de longitud  $\Delta t$  equivale a un paso de tamaño  $T = K \Delta t$ . En realidad, este modelo de capitalización resulta de resolver el problema de valor inicial (ecuación diferencial ordinaria junto a una condición inicial) siguiente:

$$\frac{\Delta t \hat{S}(t)}{\Delta t} = \mu \hat{S}(t), \quad \hat{S}(0) = S_0, \quad (3.1.4)$$

cuya solución es

$$\hat{S}(t) = S_0 e^{\mu t}, \quad (3.1.5)$$

la cual, para  $t = T$  captura la solución del problema anterior:  $\hat{S}(T) = S_0 e^{\mu T}$ . Es importante observar que el modelo (3.0.1), el modelo estocástico de partida, contiene al modelo clásico determinista de capitalización continua, pues basta hacer  $\sigma = 0$  en (3.0.1) para obtener a partir de la ecuación diferencial estocástica la ecuación diferencial ordinaria (3.1.4).

### 3.2 Motivación del modelo estocástico para un subyacente cotizado: El Modelo Log-Normal

El modelo presentado anteriormente es un modelo para un subyacente en ambiente de certidumbre en el cual no se contempla ninguna aleatoriedad. En la práctica, el valor de un activo subyacente depende un gran número de factores económicos, sociales, etc. que influyen en los mercados donde la acción cotiza. Estos factores pueden contener una elevada incertidumbre dada la complejidad de su determinación.

Considerando el grado de incertidumbre existente, es más conveniente y adecuado introducir aleatoriedad en el modelo determinista para un subyacente. El parámetro  $\mu$  pasa a ser una cantidad aleatoria en lugar de una cantidad determinística. Haciendo uso de las herramientas estocásticas presentadas en el Capítulo 2, la aleatoriedad en el modelo se introducirá vía el Movimiento Browniano  $B(t)$ , más concretamente, con su derivada o diferencial, el denominado proceso de Ruido Blanco  $dB(t)$ . Todo ello motiva la siguiente expresión estocástica del parámetro  $\mu$ :

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma B'(t), \quad \sigma > 0. \quad (3.2.1)$$

En la expresión (3.2.1) se sigue denotando al parámetro  $\mu$  como el rendimiento medio del subyacente, pero en este caso, se le ha añadido fluctuaciones aleatorias, siendo  $B'(t)$  el proceso estocástico Ruido Blanco y  $\sigma > 0$  su intensidad.

Introduciendo en el modelo la notación diferencial de la derivada

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt},$$

y considerando la aleatoriedad en el parámetro  $\mu$ , el modelo se reescribe de la siguiente forma:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma B'(t)) S(t) \Rightarrow dS(t) = (\mu + \sigma B'(t)) S(t) dt.$$

Agrupando los diferentes parámetros se obtiene:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)B'(t)dt, \quad (3.2.2)$$

donde se puede diferenciar claramente una parte determinista,  $\mu S(t)$ , y otra estocástica,  $\sigma S(t)B'(t)dt$ , en la cual se recoge el Ruido Blanco. Formalmente, dado que  $dB(t) = B'(t)dt$ , nuevamente el modelo se puede reescribir como en (3.0.1), conocido en literatura financiera, como el modelo de activos subyacentes Modelo Log-Normal.

### 3.3 Solución del Modelo Log-Normal

En este apartado vamos a resolver la ecuación diferencial estocástica (3.0.1). Para ello utilizaremos dos enfoques. El primero de ellos, evita el uso del Cálculo de Itô y resulta más artificial en su presentación por la forma en la que se introduce la aleatoriedad. Sin embargo, este enfoque no requiere conocer herramientas complejas como son la integración y diferenciación de procesos estocásticos. El segundo enfoque, más técnico, hace uso del Cálculo de Itô, y en particular del Lema de Itô presentado en el Capítulo 2 de esta memoria.

#### 3.3.1. Solución del Modelo Log-Normal sin el Cálculo de Itô

El valor de una acción está gobernado por multitud de factores y variables que deben considerarse inciertos y no deterministas, por ello (3.1.4) no es un buen modelo, si bien, como se ha motivado en el Apartado 3.2, el modelo que aspire a ser adecuado debe recoger en su formulación (y el modelo (3.0.1), así lo hace, como se verá después) la parte del valor de la evolución del precio de la acción que se comporta de forma determinista como cualquier otra inversión libre de riesgo, y la parte, incierta o aleatoria, que hace que el valor de ese activo financiero no sea predecible de forma determinista.

Partamos de la expresión (3.1.2) con  $j = 1$ , introduzcamos la aleatoriedad como sigue:

$$\tilde{S}^{(1)} = \tilde{S}^{(0)} e^{\mu\Delta t} e^{c Z_1}, \quad (3.3.1)$$

siendo  $c$  una constante libre y no nula (que más tarde fijaremos) y  $Z_1$  una variable aleatoria normal o gaussiana tipificada, i.e.,  $Z_1 \sim N(0 ; 1)$ , y en general, introduciendo la aleatoriedad en (3.1.2) del mismo modo se tiene

$$\tilde{S}^{(j)} = \tilde{S}^{(j-1)} e^{\mu\Delta t} e^{cZ_j}, \quad (3.3.2)$$

siendo  $Z_j \sim N(0; 1)$ . Si hacemos esto para cada,  $j = 1, 2 \dots K$  de modo que,  $Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_k$  sean variables aleatorias  $N(0; 1)$  e independientes, desde (3.3.2) con  $j = K$ , obtenemos por recursividad que

$$\tilde{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K \Delta t} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)}, \quad (3.3.3)$$

o equivalentemente,

$$\tilde{S}^{(T)} = S_0 e^{\mu T} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)}.$$

La aleatoriedad introducida así en (3.3.1) (o más generalmente en (3.3.2)), parece coherente porque garantiza que  $\tilde{S}^{(1)} > 0$  ( $\tilde{S}^{(j)} > 0$ ); pero no es totalmente satisfactoria, ya que, es de esperar que cuando no haya incertidumbre,  $\tilde{S}^{(1)}$  en (3.3.1) se comporte como en (3.1.3) con  $j = 1$  al menos en media. Sin embargo, se sabe<sup>16</sup>:

$$E[e^{cZ}] = e^{\frac{c^2}{2}}, \quad Z \sim N(0; 1), \quad (3.3.4)$$

y por tanto

$$E[\tilde{S}^{(1)}] = E[S_0 e^{\mu\Delta t} e^{cZ_1}] = S_0 e^{\mu\Delta t} E[e^{cZ_1}] = S_0 e^{\mu\Delta t} e^{\frac{c^2}{2}} \neq S_0 e^{\mu\Delta t} = \tilde{S}^{(1)}.$$

Para lograr el objetivo marcado, vamos a introducir la aleatoriedad como sigue

$$S^{(1)} = S_0 e^{\mu\Delta t} e^{cZ_1 - \frac{c^2}{2}}, \quad (3.3.5)$$

ya que, claramente de (3.3.5) se obtiene que

$$E[S^{(1)}] = S_0 e^{\mu\Delta t},$$

y en general en (3.1.2) introduciremos la aleatoriedad del mismo modo:

$$S^{(j)} = S^{(j-1)} e^{\mu\Delta t} e^{cZ_j - \frac{c^2}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (3.3.6)$$

---

<sup>16</sup> QUESADA, V., GARCÍA A. (1988) "Lecciones de Cálculo de Probabilidades". Ed. Díaz de Santos.



Razonando recursivamente como en (3.1.3) obtenemos

$$S(T) = S^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)} e^{-K \frac{c^2}{2}}. \quad (3.3.7)$$

Denotemos por

$$B_K = Z_1 + \dots + Z_K, \quad (3.3.8)$$

entonces dado que  $Z_j \sim N(0; 1)$ ,  $j = 1, 2 \dots K$ , son variables aleatorias independientes se tiene  $B_K \sim N(0; 1)$  y como  $K \Delta t = T$  y  $S^{(K)} = S(T)$ , (3.3.7) equivale a

$$S(T) = S_0 e^{\mu T} e^{c B_K - K \frac{c^2}{2}}, \quad (3.3.9)$$

donde  $S_0$  es el precio o subyacente de la acción en el instante inicial;  $e^{\mu T}$  es la componente determinista del valor de la acción (ligado al valor  $\mu$  del tipo de interés);  $B_K$  representa la introducción de la aleatoriedad en el modelo y  $e^{-K \frac{c^2}{2}}$  es un término (determinista) de corrección.

La modelización dada (3.3.9) tiene una gran ventaja frente a otro tipo de modelos como los basados en árboles binomiales<sup>17</sup>, y es que permite que el valor de la acción no sólo tome dos valores posibles, sino cualquier valor positivo. Sin embargo, sigue conteniendo un defecto importante respecto de nuestros intereses; si fijamos  $T$  y vamos considerando subintervalos más pequeños (particiones más finas del intervalo  $[0, T]$ ), es decir, hacemos  $K \rightarrow +\infty$  ó equivalentemente  $\Delta t \rightarrow +0$ , con  $T$  fijo, para la varianza del término que introduce la aleatoriedad en el modelo (3.3.9) se obtiene por (3.3.8) que

$$Var[cB_K] = c^2 Var[B_K] = c^2 K \rightarrow +\infty, \quad (3.3.10)$$

esto es, la varianza de este término que forma parte del modelo de la acción aumentará cuantas más discretizaciones tomemos del intervalo objeto de análisis, con independencia del valor  $T$  que define su extremo superior, el cual está fijo. Esto carece de sentido desde el punto de vista financiero, ya que fijado un intervalo durante el cual

---

<sup>17</sup> HULL, J.C. (2002). "Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones". Pearson Education. 4ª edición.

se observa una acción, la volatilidad de la misma es un valor fijo que no debería cambiar aunque en lugar de observar la acción intra-semana lo hiciéramos intra-día. Para resolver este inconveniente, recordemos que la constante  $c$  introducida en (3.3.6) es libre y por tanto está a nuestro servicio. Tomemos entonces  $c$  de modo que

$$c^2 K = \sigma^2 T, \quad (3.3.11)$$

siendo  $\sigma^2$  un parámetro fijo identificativo del modelo particular que manejemos (y que en la práctica se calculará a partir de los datos reales observados). De esta forma,

$$\text{Var}[cW_K] = \sigma^2 T < +\infty. \quad (3.3.12)$$

Obsérvese que esto nos indica algo coherente que se aprecia en la práctica: a mayor longitud  $T$  del intervalo  $[0, T]$ , tendremos mayor volatilidad, es decir, variabilidad de la acción.

Vamos ahora a relacionar  $B_K$  dada en (3.3.9) con el Movimiento Browniano. Para ello, obsérvese que por la propiedad P.3 del Capítulo 2 sabemos que:

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t} B_K. \quad (3.3.13)$$

Entonces despejando de (3.3.11) se tiene:

$$c = \sigma \sqrt{\frac{T}{K}} \xrightarrow{T=K\Delta t} c = \sigma \sqrt{\Delta t}, \quad (3.3.14)$$

y entonces por (3.3.13) se tiene

$$cB_K = \sigma \sqrt{\Delta t} B_K = \sigma B(T). \quad (3.3.15)$$

Finalmente, sustituyendo (3.3.11) y (3.3.15) en (3.3.9) llegamos a;

$$S(T) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\sigma B(T)}. \quad (3.2.16)$$

Por lo que desde una motivación basada en la introducción de la aleatoriedad en el modelo determinista, hemos obtenido la solución del Modelo Log-Normal.

### 3.3.2 Solución del Modelo Log-Normal mediante el Cálculo de Itô

En este apartado resolveremos la ecuación diferencial estocástica de tipo Itô (3.0.1) con condición inicial:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\}$$

aplicando el Lema de Itô introducido en el Apartado 2.4. Para ello, escribimos (3.0.1) en forma integral:

$$\int_0^t dS(r) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dB(r),$$

o equivalentemente:

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dB(r). \quad (3.3.17)$$

A continuación, aplicamos el Lema de Itô con la siguiente identificación:

$$X(t) = S(t), f(t, x(t)) = f(t, S(t)) = \mu S(t), g(t, x(t)) = g(t, S(t)) = \sigma S(t),$$

eligiendo

$$F(t, x) = \ln(x).$$

Para la aplicación del Lema de Itô se necesitan calcular las siguientes derivadas parciales:

$$\begin{aligned} F_1(t, x) &= \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0, & F_2(t, x) &= \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{x}, \\ F_{22}(t, x) &= \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}. \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\begin{aligned}\ln(S(t)) - \ln(s_0) &= \int_0^t \left( \mu S(r) \frac{1}{S(r)} + \frac{1}{2} (\sigma S(r))^2 \left( \frac{-1}{(S(r))^2} \right) \right) dr \\ &+ \int_0^t \sigma S(r) \frac{1}{S(r)} dB(r).\end{aligned}$$

Simplificando tenemos;

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) &= \int_0^t \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dB(r). \\ \ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (B(t) - B(0)).\end{aligned}$$

Observemos que por la definición del Movimiento Browniano,  $B(0) = 0$  con probabilidad 1, por tanto obtenemos:

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) &= \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t), \\ \frac{S(t)}{s_0} &= e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma B(t)},\end{aligned}$$

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2) t + \sigma B(t)}, \quad (3.3.18)$$

que representa el proceso estocástico solución, llamado Movimiento Browniano Geométrico del Modelo Log-Normal.

### 3.4 Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del Modelo Log-Normal

Desde el punto de vista práctico, la solución (3.3.18) hallada en el apartado anterior se utiliza para realizar predicciones probabilísticas, en un tiempo digamos  $t = T$ , de tipo puntual del subyacente a partir de la función media  $y$ , se completan mediante intervalos de confianza. Se hace por tanto necesario el cálculo de las funciones media y varianza de (3.3.18) en  $t = T$ .

#### Función media

Para el cálculo de la función media de (3.3.18), se requiere de la aplicación de la siguiente relación, denominada propiedad de  $\frac{1}{2}$ -autosemejanza del Movimiento Browniano estudiada en el Capítulo 2:

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad t \geq 0, \quad T \geq 0,$$

aplicada al caso particular  $t = 1$ , es decir,

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(1), \quad (3.4.1)$$

donde recordamos que por definición el Movimiento Browniano:

$$B(1) \sim N(0; 1).$$

Por otra parte, también se requiere de la siguiente propiedad:

$$E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad Z \sim N(0; 1), \quad (3.4.2)$$

que se deduce del cálculo de la siguiente integral:

$$E(e^{\lambda Z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Tomando el operador esperanza en (3.3.18) se tiene:

$$\begin{aligned} E[S(T)] &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma B(T)}] \\ &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma \sqrt{T} B(1)}] \quad (3.4.3) \\ &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\frac{(\sigma \sqrt{T})^2}{2}}, \end{aligned}$$

por tanto,

$$E[S(T)] = S_0 e^{\mu T}. \quad (3.4.4)$$

Obsérvese que en el segundo paso de (3.4.3) se ha aplicado la propiedad (3.4.1) y en el segundo paso se ha aplicado la relación (3.4.2) con  $\lambda = \sigma\sqrt{T}$ ,  $B(1) = Z \sim N(0; 1)$ .

La fórmula (3.4.4) nos indica que el modelo Log-Normal goza de la deseable propiedad de que el comportamiento medio del precio de la acción es el mismo que el valor en el caso determinista (véase (3.1.5) con  $t = T$ ).

### **Función varianza**

Para saber cómo evoluciona la volatilidad del precio de la acción según el Modelo Log-Normal observemos que, razonando como para el caso de la media, la varianza está dada por:

$$\begin{aligned} Var [S(T)] &= E \left[ (S(T))^2 \right] - (E[S(T)])^2 \\ &= E \left[ (S_0)^2 e^{2\sigma B(T) + 2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} \right] - (S_0)^2 e^{2\mu T} \\ &= (S_0)^2 e^{2\mu T} (E[e^{2\sigma B(T)}] e^{-\sigma^2 T}) - 1, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} Var [S(T)] &= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left( E \left[ e^{2\sigma\sqrt{T}B(1)} \right] e^{-\sigma^2 T} \right) - 1 \\ &= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left( e^{\frac{4\sigma^2 T}{2}} e^{-\sigma^2 T} \right) - 1 \quad (3.4.5) \\ &= (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1), \end{aligned}$$

la cual nos indica (como cabe esperar desde la experiencia bursátil) que la varianza crece a medida que lo hace el horizonte temporal  $T$ .

## 3.5 Calibración de los parámetros del Modelo Log-Normal

En este apartado explicaremos dos técnicas estadísticas diferentes para estimar los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del Modelo Log-Normal:

- Método de Máxima Verosimilitud.
- Método no paramétrico.

El motivo para utilizar dos técnicas diferentes para calibrar los parámetros está justificado porque queremos que dichas estimaciones no dependan del método utilizado, con lo cual si los dos métodos proporcionan valores iguales o similares podemos asegurar que se trata de estimaciones robustas.

### 3.5.1. Método de Máxima Verosimilitud

En este apartado vamos a realizar la estimación de los parámetros  $\mu$  y  $\sigma$  del Modelo Log-Normal, usando para ello una técnica estadística llamada, Método de Máxima Verosimilitud.

Para comprender mejor cómo se aplica el Método de Máxima Verosimilitud a el contexto que nos ocupa, para mayor claridad vamos en primer lugar a recordar una serie de conceptos y definiciones que se seguirán para aplicar este método de estimación.

El método de Máxima Verosimilitud esta basado en el concepto de función de verosimilitud, debido R.A. Fisher, y es uno de los conceptos más importantes en Inferencia Estadística.

Supondremos, para fijar ideas, que hemos obtenido una muestra  $\{x_K: 0 \leq K \leq N\}$  de una población descrita por una variable aleatoria continua con una función de densidad  $p(x; \vec{\theta})$  dependiente del vector de parámetros  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}$ . Los resultados son análogos si la población es discreta. Si consideramos muestras aleatorias simples, la probabilidad de que ocurra la muestra  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  para un vector dado del vector de parámetros  $\vec{\theta}$  viene descrita por la función de densidad de probabilidad conjunta (f.d.p) de la muestra y que denotamos por  $L$ .

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N p(x_i; \vec{\theta}). \quad (3.5.1)$$

El problema que nos planteamos ahora es, dada una muestra fija pretendemos estimar el valor del vector de parámetros  $\vec{\theta}$  que es desconocido.

Recordaremos que si  $(x_1, x_2 \dots x_N)$  es una muestra dada, se llama *función de verosimilitud* a la función de  $\vec{\theta}$  dada por:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N p(x_i; \theta).$$

Recalcamos que esta función se considera ahora como función solo de  $\vec{\theta}$  y no de la muestra, que ya es fija, al construirse esta función después de haber obtenido la muestra. En este sentido podríamos utilizar simplemente la notación  $L(\vec{\theta})$ , aunque lo más usual es mantener la muestra de la notación de  $L$ .

El Método de Máxima Verosimilitud está basado en una idea muy simple, y quizás por eso es tan importante, que consiste en considerar como mejor estimación del vector de parámetros  $\vec{\theta}$  el valor que haga máxima  $L$  para la muestra dada. Es decir, dada  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$  consideremos mejor estimación  $\vec{\theta}_1$  que  $\vec{\theta}_2$  si

$$L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}_1) > L(x_1, x_2, \dots, x_n; \vec{\theta}_2),$$

lo que significa que el valor de  $\vec{\theta}_1$  es más probable que el valor de  $\vec{\theta}_2$  dada la muestra  $((x_1, x_2, \dots, x_N))$ . En otras palabras, es este método de estimación la idea consiste en elegir la moda de la distribución a posteriori de  $\vec{\theta}$ .

Teniendo en cuenta que la función de verosimilitud es mayor o igual que cero para todo valor de  $\vec{\theta}$  y que la función logaritmo es monótona creciente resulta que:

$$\max[L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta})] = \max[\ln(L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}))].$$

Se utiliza en la práctica el  $\ln L$  en lugar de  $L$  por ser más fácil, en aras de calcular el máximo de la función de verosimilitud o equivalentemente de la función de log-verosimilitud, pues la derivación de una suma es más sencilla que la de un producto.



Si la muestra depende únicamente de un parámetro,  $\theta$  entonces  $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es un estimador de máxima verosimilitud de  $\theta$  para la distribución poblacional definida por  $p(x; \theta)$  si  $\hat{\theta}$  hace máximo el valor de la función de verosimilitud, o lo que es lo mismo, hace máximo:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta) = \sum_{i=1}^N \ln p(x_i, \theta).$$

En consecuencia, el calculo efectivo de  $\hat{\theta}$  se reduce al resolver la ecuación:

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0,$$

de forma que si  $\hat{\theta}$  es solución de esta ecuación  $\hat{\theta}$  sera máximo si la segunda derivada es negativa.

Si la distribución poblacional depende de  $N$  parámetros  $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N$  habrá que resolver el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)}{\partial \theta_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_N)}{\partial \theta_N} &= 0. \end{aligned}$$

Comprobando luego que si  $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_n)$  verifica este sistema, además hace el hessiano correspondiente definido negativo.

Vamos a adaptar la definición anterior a nuestro contexto, donde dada una muestra  $\{x_k : 0 \leq K \leq N\}$  de un proceso estocástico  $x(t)$  en los momentos  $\{t_k : 0 \leq K \leq N\}$  y suponiendo que el proceso  $x(t)$  depende de un vector de parámetros  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$ , deseamos determinar el vector  $\vec{\theta}$  tal que

$$\max L(\theta) = f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_n, x_n; \vec{\theta}),$$

siendo  $f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_n, x_n; \vec{\theta})$  la función de densidad conjunta de la muestra. En general, nosotros no podemos asumir que la muestra sea simple, es decir, que existe

independencia por lo que no será posible legitimar la factorización dada en (3.5.1). Sin embargo, para poder aplicar el Método de Máxima Verosimilitud, necesitamos tener una expresión de la función de densidad conjunta que sea preferiblemente algebraica.

Para ello, vamos en primer lugar a recordar que el modelo de subyacente que tenemos es de la forma ( véase 3.0.1))

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t); \vec{\theta}) dt + g(t, x(t); \vec{\theta}) dB(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

con

$$x(t) = S(t); \quad x_0 = s_0; \quad \vec{\theta} = (\mu, \sigma);$$

$$f(t, x(t); \vec{\theta}) = \mu S(t); \quad g(t, x(t); \vec{\theta}) = \sigma S(t).$$

Se puede demostrar<sup>18</sup> que la solución de una ecuación de Itô de la forma (3.5.2) es un proceso de Markov de primer orden. Esto permite, utilizando el Teorema de la Probabilidad Total, reescribir la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra en términos de la función de verosimilitud del siguiente modo:

$$\begin{aligned} p(t_0, x_0, t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}) &= p(t_0, x_0, \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_2, x_2 | t_1, x_1; t_0, x_0; \vec{\theta}) \dots \\ &\times \vdots \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}, \dots, t_2, x_2, t_1, x_1, t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &= p(t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_2, x_2 | t_1, x_1; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}; \vec{\theta}), \end{aligned}$$

donde  $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$  es la función de densidad de transición del proceso estocástico  $x(t)$  que empieza en  $(t_{k-1}, x_{k-1})$  y pasa a  $(t_k, x_k)$ . Como se ha señalado anteriormente, para mayor comodidad en el manejo computacional trabajaremos con la función del log-verosimilitud, es decir,

$$\ln \left( p(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}) \right) = \ln \left( p(t_0, x_0; \vec{\theta}) \right) + \sum_{K=1}^N \ln p(t_K, x_K | t_{K-1}, x_{K-1}; \vec{\theta}).$$

---

<sup>18</sup> Teorema 5.2.5. de Soong, T.T. (1973). "Random Differential Equations in Science and Engineering". Academic Press. New York.

Como los valores  $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta})$ ,  $1 \leq k \leq N$ , suelen estar entre 0 y 1, el logaritmo neperiano de dichos valores es negativo y el problema de maximización de la función de log-verosimilitud es equivalente a obtener el mínimo de su función opuesta, por ello consideraremos el siguiente programa de optimización:

$$\text{Min } D(\vec{\theta}) = -\ln(p(t_0, x_0, \vec{\theta})) - \sum_{k=1}^N \ln(p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}, \vec{\theta})). \quad (3.5.3)$$

Ahora vamos a explicitar el valor de  $p(t_k, x_k | t_{k-1}, x_{k-1}, \vec{\theta})$ . Para ello, partimos de la ecuación diferencial estocástica de Itô dada en (3.5.2) y le aplicaremos el esquema discreto de Euler-Maruyama para aproximar dicha ecuación en los instantes de la muestra que supondremos equiespaciados en el tiempo siendo  $\Delta t$  el paso temporal. Para ello, consideremos un subintervalo de tiempo genérico,  $[t_{k-1}, t_k]$  y vía la discretización de Euler-Maruyama obtenemos

$$\begin{aligned} x(t_k) - x(t_{k-1}) &= f(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \Delta t \\ &+ g(t_{k-1}, x(t_{k-1}); \vec{\theta}) \{B(t_k) - B(t_{k-1})\}. \end{aligned} \quad (3.5.4)$$

Por tanto, si denotamos por  $x_k$  la aproximación de la solución obtenida por el esquema anterior en el instante  $t_k$ , es decir,

$$x_k \sim x(t_k),$$

el esquema (3.5.4) se reescribe como

$$x(t_k) \approx x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \Delta t + g(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \{B(t_k) - B(t_{k-1})\}, k = 1, \dots, N. \quad (3.5.5)$$

Recordemos que por las propiedades del Movimiento Browniano se tiene que

$$B(t_k) - B(t_{k-1}) \sim N(0; \sqrt{\Delta t}), \quad k = 1, 2, \dots, N.$$

Por lo tanto de (3.5.5) se sigue que la aproximación, vía Euler-Maruyama de  $x(t_k)$  dado  $x(t_{k-1})$ , sigue la siguiente distribución normal

$$x_k | x_{k-1} \sim N(\mu_k, \sigma_k), \quad \begin{cases} \mu_k &= x_{k-1} + f(t_{k-1}, x_{k-1}; \theta) \Delta t, \\ \sigma_k &= g(t_{k-1}, x_{k-1}; \vec{\theta}) \Delta t. \end{cases} \quad (3.5.6)$$

Por lo tanto,

$$p(t_K, x_K | t_{K-1}, x_{K-1}, \vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_K} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_K - \mu_K}{\sigma_K}\right)^2}, \quad k = 1, 2, \dots, N, \quad (3.5.7)$$

siendo  $\mu_K$  y  $\sigma_K$  las expresiones dadas en (3.5.6). Esto nos permite escribir explícitamente la función de log-verosimilitud dada en (3.5.3) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} D(\vec{\theta}) &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) \\ &- \sum_{K=1}^N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_K} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_K - \mu_K}{\sigma_K}\right)^2}\right) \\ &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) \quad (3.5.8) \\ &- N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_K}\right) + \sum_{K=1}^N \frac{1}{2}\left(\frac{x_K - \mu_K}{\sigma_K}\right)^2 \\ &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) + \frac{N}{2} \ln(2\pi) \\ &+ \sum_{K=1}^N \ln(\sigma_K) + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \left(\frac{x_K - \mu_K}{\sigma_K}\right)^2. \end{aligned}$$

Observemos que en nuestro modelo de subyacente  $x_0 = s_0$  es determinista, por tanto:

$$p(t_0, x_0; \vec{\theta}) = p(0, s_0; \mu, \sigma) = 1, \quad (3.5.9)$$

además las funciones  $\mu_K$  y  $\sigma_K$  dadas en (3.5.6) toman la forma:

$$\mu_K = S_{K-1} + \mu S_{K-1} \Delta t; \quad \sigma_K = \sigma S_{K-1} \sqrt{\Delta t}. \quad (3.5.10)$$

Entonces sustituyendo (3.5.9) y (3.5.10) en (3.5.8) obtenemos

$$\begin{aligned} D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \sum_{K=1}^N \ln(\sigma S_{K-1} \sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} \sum_{K=1}^N \left(\frac{S_K - S_{K-1} - \mu S_{K-1} \Delta t}{\sigma S_{K-1} \sqrt{\Delta t}}\right)^2 \\ &= \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\ &+ \sum_{K=1}^N \ln(S_{K-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{K=1}^N \left(\frac{S_K}{S_{K-1}} - 1 - \mu \Delta t\right)^2. \end{aligned}$$

Por lo tanto el programa de minimización de la función de Log-Verosimilitud es:

$$\begin{aligned} \text{Min } D(\mu, \sigma) \\ (\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times ]0, +\infty[ \end{aligned} \quad \frac{N}{2} \ln(2\pi) + \frac{N}{2} \ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\ + \sum_{K=1}^N \ln(S_{K-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{K=1}^N \left( \frac{S_K}{S_{K-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2 .$$

Para calcular el mínimo de  $D(\mu, \sigma)$  en primer lugar calculamos los puntos críticos, que son aquellos en los que el gradiente es nulo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{K=1}^N \left( \frac{S_K}{S_{K-1}} - 1 - \mu \Delta t \right) = 0, \\ \frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 \Delta t} \sum_{K=1}^N \left( \frac{S_K}{S_{K-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2 = 0. \end{aligned} \quad (3.5.11)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (3.5.11) obtenemos como puntos críticos:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{k=1}^N \left( \frac{S_K}{S_{K-1}} - 1 \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{K=1}^N \left( \frac{S_K}{S_{K-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2. \quad (3.5.12)$$

Se puede comprobar que la matriz hessiana formada por las cuatro derivadas parciales segundas de la función  $D(\mu, \sigma)$ , es decir,

$$H(D(\mu, \sigma)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix},$$

evaluada en el punto crítico  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  dado en (3.5.12) tiene valores propios positivos, lo que muestra que  $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$  es un mínimo de la función opuesta de Log-Verosimilitud y por tanto son los estimadores máximos verosímiles del Modelo Log-Normal.

### 3.5.2 Método no paramétrico

En esta sección se complementa la estimación de parámetros del Modelo de Log-Normal realizada por el Método de Máxima Verosimilitud mediante un método no paramétrico<sup>19</sup>. Para describir con mayor generalidad este método de estimación, se parte de una ecuación diferencial estocástica tipo Itô general dada en (3.5.2), donde  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^n$  el vector de parámetros que se desea estimar. En el caso del Modelo Log-Normal,  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^2$ . A continuación se discretiza la ecuación (3.5.2) por algún método numérico, por ejemplo, mediante un esquema de Euler-Maruyama:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(t, x(t); \vec{\theta})\Delta t + g(t, x(t); \vec{\theta})\Delta B(t),$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(t, x(t); \vec{\theta})\Delta t + g(t, x(t); \vec{\theta})\Delta B(t). \quad (3.5.13)$$

Fijada una partición del intervalo de tiempo  $[0, T]$  donde se quiere aproximar la ecuación (3.5.13):

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} = T,$$

con paso fijo  $\Delta t = \frac{T}{N}$ , obsérvese que se está dividiendo el intervalo  $[0, T]$  en  $N$  subintervalos de la forma:

$$[t_i, t_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq N - 2,$$

siendo  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ , y denotando por  $x_i$  la aproximación de  $x(t)$  en el punto  $t_i$ , por ejemplo,  $x_i \cong x(t_i)$ ,  $0 \leq i \leq N - 1$ , según (3.5.13) se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i; \vec{\theta})\Delta t + g(t_i, x_i; \vec{\theta})\sqrt{\Delta t}Z_i, \quad Z_i \sim N(0; 1), \quad 0 \leq i \leq N - 1,$$

donde se ha utilizado que (véase propiedad MB.4 del Capítulo 2)

$$B(t_i + \Delta t) - B(t_i) \sim N(0; \sqrt{\Delta t}).$$

<sup>19</sup> STANTON, R (1997). "A non parametric model of term structure dynamic and the market price of interest rate risk". Journal of Finance.

Ahora utilizando que la solución de la ecuación diferencial estocástica (3.5.13) es un proceso de difusión<sup>20</sup>, se cumplen las siguientes relaciones:

$$E \left[ \frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - f(t_i, x_i; \vec{\theta}) \right] = \vartheta(\Delta t), \quad (3.5.14)$$

$$E \left[ \frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta t} \right] - (g(t_i, x_i; \vec{\theta}))^2 = \vartheta(\Delta t), \quad (3.5.15)$$

que, en su notación de la derecha, indican que el tamaño de los órdenes de los momentos de los términos que aparezcan en los miembros de la izquierda.

Para estimar el vector de parámetros a partir de una muestra  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$  se utilizan las relaciones (3.5.14)-(3.5.15) en su versión muestral:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, x_i; \vec{\theta}) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i), \quad (3.5.16)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} (g(t_i, x_i; \vec{\theta}))^2 = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2. \quad (3.5.17)$$

En el caso del Modelo Log-Normal se escribe a partir de la muestra  $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$  que en el Modelo Log-Normal son las cotizaciones  $\{s_0, s_1, \dots, s_{N-1}\}$ , resolviendo el sistema de ecuaciones (3.5.16) y (3.5.17), se estimaría el vector de parámetros  $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^2$ . Obsérvese que el contexto del Modelo Log-Normal,

$$\begin{aligned} f(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) &= \mu s_i, \\ g(t_i, x_i; \vec{\vartheta}) &= \sigma s_i, \end{aligned}$$

con la identificación  $x_i = s_i$ .

---

<sup>20</sup> ØKSENDAL, B.(1980) "Stochastic Diffencial Equations". Nueva York: Springer-Verlag, 2<sup>nd</sup> Edition.

### 3.6 Validación del Modelo Log-Normal

Con objeto de analizar el buen ajuste del modelo se pueden emplear diversas herramientas. No obstante, en esta memoria las medidas de bondad de ajuste que se emplearán para la validación del Modelo Log-Normal aplicado al subyacente Inditex (ITX.MC) serán:

- Error cuadrático medio (Root Mean Squared Error, RMSE).
- Error porcentual absoluto medio (Mean Absolute Percentage Error, MAPE)
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.
- Gráfico de observaciones y predicciones (puntuales y por intervalos).

En base a los resultados obtenidos según las medidas de bondad del ajuste anteriormente especificadas, se evalúa la adecuación y ajuste del modelo, para proceder así a realizar las predicciones del subyacente en cuestión.

#### 3.6.1 Medidas de bondad de ajuste

##### Error cuadrático medio (RMSE)

La medida de bondad de ajuste RMSE, mide la distancia euclídea por término medio entre los valores observados y los estimados. Cuanto menor sea el resultado del RMSE, entonces se podrá decir que el error en el modelo presentado será menor. Su valor está definido de la siguiente manera:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^K (S_i - \hat{S}_i)^2}{K}}$$

El cálculo del RMSE se realizará considerando las predicciones puntuales (función media) que se obtengan de aplicar el modelo teórico Log-Normal con ambos métodos de estimación de los parámetros explicados el Apartado 3.5. Calculados y contrastados los resultados del RMSE que muestre cada método, será posible tener una primera idea de cuál de ellos muestra un mejor ajuste.



### **Error porcentual absoluto medio (MAPE)**

La segunda de las medidas de precisión de pronóstico a emplear, el MAPE, se calcula como el promedio de las diferencias absolutas entre los valores pronosticados y los observados dividido por las observaciones correspondientes, quedando expresado como un porcentaje de los valores reales. Es decir, si se pronostican  $k$  periodos y los valores reales corresponden a  $k$  periodos, el MAPE se calcula como:

$$MAPE = \frac{100}{k} \sum_{i=1}^k \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}$$

Del mismo modo que con el RMSE, el MAPE será calculado considerando las predicciones puntuales dadas a partir de la aplicación del modelo teórico Log-Normal con cada uno de los métodos de estimación de los parámetros explicados. Además de realizar el correspondiente contraste de los resultados que esta medida presente con cada uno de los métodos, individualmente, se considerará un error global de diagnóstico tolerable, cuando el MAPE obtenido sea inferior al 10%.

### **3.6.2. Validación por intervalos de confianza**

La construcción y estudio de intervalos de confianza (IC) del 95% es otra de las herramientas a emplear de cara a validar la aplicación del modelo Modelo Log-Normal al activo subyacente Inditex (ITX.MC). En la construcción de los IC, hay dos elementos fundamentales a considerar. Por un lado, la amplitud del intervalo da la precisión de la estimación y por tanto, deberá ser la menor posible y, por otro lado, la probabilidad de que el intervalo contenga el verdadero valor del parámetro a estimar (Inditex (ITX.MC)), que se llama nivel de confianza e interesará que sea la mayor posible. En base a esto, es cierto que se puede ganar en precisión a costa de perder confianza en la estimación. En la presente memoria, como se ha indicado, los intervalos de confianza construidos atienden a un nivel de confianza del 95%.

Este apartado se centra en la estimación de la variable en cuestión (Inditex (ITX.MC)) a partir del intervalo que tiene por extremos los valores de dos funciones para una muestra, siendo esta una estimación de la variable por intervalos de confianza.

Para centrar ideas, supongamos que se selecciona una muestra aleatoria simple de una población descrita por la función  $f(x; \theta)$  dependiente del parámetro  $\theta$  que se pretende estimar. El problema se plantea como sigue: se fija un nivel de confianza, que se denota por  $1 - \alpha$ , en donde  $0 < \alpha < 1$ , y se trata de determinar dos funciones  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de forma que:

$$P[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)] = 1 - \alpha.$$

Al intervalo  $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  se le denomina *intervalo de confianza* del parámetro  $\theta$  al nivel de confianza del  $(1 - \alpha)100\%$ . Es importante observar que sería un error afirmar que la probabilidad indicada anteriormente, es la probabilidad de que  $\theta$  esté entre los números reales  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ , puesto que  $\theta$  no es una variable aleatoria sino un parámetro que tendrá un valor concreto. Las variables aleatorias son  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$  al variar la muestra, luego la probabilidad anterior debe considerarse como la probabilidad de que el intervalo aleatorio  $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)]$  contenga el verdadero valor de  $\theta$ .

Dicho en términos de frecuencias esto significa que de cada 100 muestras aleatorias que se tomen, cabe esperar que el  $(1 - \alpha)100\%$  de ellas contenga el verdadero valor de  $\theta$  entre  $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_n)$  y  $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_n)$ .

Suponiendo que  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  es una muestra aleatoria simple y que  $\bar{x}$  es la media muestral. La variable aleatoria  $\bar{x}$  media muestral se distribuye según una normal  $N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$ , suponiendo que la población es  $N[\mu, \sigma]$  con  $\sigma$  conocida. Esta propiedad permite asegurar que la variable tipificada  $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$  sigue una  $N[0; 1]$ , y por lo tanto, fijando un nivel de confianza  $1 - \alpha$ , obtener el valor  $\lambda_{\alpha/2}$  tal que

$$P\left[\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Operando, resulta:

$$\begin{aligned} 1 - \alpha &= P \left[ -\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \leq \lambda_{\alpha/2} \right], \\ &= P \left[ -\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], \\ &= P \left[ -\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right], \\ &= P \left[ \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right]. \end{aligned}$$

Con lo que las funciones buscadas son:

$$\begin{aligned} \theta_1 &= \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \\ \theta_2 &= \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional al nivel de confianza del  $(1 - \alpha)$  100% es:

$$\left[ \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \right].$$

Nótese que se puede ganar en precisión de dos formas, bien perdiendo confianza lo que, en general, no interesa, o bien aumentando el tamaño  $n$  de la muestra seleccionada.

### 3.6.3. Gráficos comparativos

Finalmente, calculada la función media (predicción puntual) y los intervalos de confianza (predicción por intervalos) para cada uno de los instantes de tiempo que comprenden el horizonte temporal observado y bajo cada uno de los métodos de estimación dados para la validación del modelo, se realizarán sus representaciones gráficas.

A través de estas, se realizará un estudio comparativo mediante el cual, visualmente, se podrá observar por un lado, el grado de ajuste existente entre las observaciones de la muestra (valor real de la cotización de Inditex (ITX.MC)) y las predicciones puntuales (medias) obtenidas en cada uno de los métodos. Por otro lado, este análisis cualitativo se reforzará cuantitativamente calculando las medidas de bondad de ajuste

anteriormente señaladas y una comparativa de los intervalos de confianza obtenidos en ambos casos.

### **3.7 Predicción**

Uno de los objetivos que se persigue con los modelos económicos es el poder realizar predicciones de la variable en cuestión. El modelo ajustado debe permitir predecir el valor medio (estimación puntual), y encontrar un intervalo que contenga el valor real con una determinada probabilidad (estimación por intervalos).

Obtener una estimación puntual será posible mediante el valor esperado de la variable estudiada  $Y$ , asociado a determinados valores de las variables explicativas del modelo ajustado. Para ello, se calcula la estimación de  $Y$  correspondiente a su valor medio condicionado  $E(Y|x_1, \dots, x_k)$ , como se expresa:

$$\hat{Y} = s_0 e^{(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad Z \sim N(0; 1).$$

Por otro lado, la predicción puntual debe completarse con la varianza de la estimación, conociéndose así el error de la predicción puntual y obteniendo con ambos valores, el intervalo de confianza. El intervalo de confianza a nivel  $\alpha$  para la estimación de  $Y$  se muestra a continuación:

$$E[S(t)] \pm 1,96 \cdot S$$

# 4

## APLICACIÓN DEL MODELO LOG-NORMAL AL SUBYACENTE INDITEX(ITX.MC): METODOLOGÍA

Para la aplicación y validación del modelo Log-Normal, el activo subyacente escogido es Inditex (ITX.MC). Esta elección está condicionada al tipo de modelo que se estudia en esta memoria (Modelo Log-Normal) y a los supuestos básicos del mismo. En este TFC la metodología aplicada se basa en el lenguaje de programación *Python* para la aplicación el Modelo Log-Normal.

En este capítulo se realiza la estimación de los parámetros por ambos métodos de estimación explicados en el Apartado 3.5. Posteriormente se validará el Modelo Log-Normal utilizando los resultados de las estimaciones obtenidas por el método de Máxima Verosimilitud. La metodología a seguir con las estimaciones por el método no paramétrico es exactamente la misma. La validación del modelo se realizará a partir de las estimaciones puntuales, media y varianza, de los Intervalos de Confianza (I.C.) del

95% y por medio de las medidas de bondad de ajuste del modelo explicadas en el Apartado 3.6.1, Error Cuadrático Medio y MAPE. Una vez validado el modelo se realizan las predicciones para el subyacente Inditex (ITX.MC)

## **4.1 Lenguaje de programación *PYTHON***

Para la aplicación y la validación del Modelo Log-Normal se ha utilizado el lenguaje de programación *Python*.

*Python* es un lenguaje de programación interpretado cuya filosofía hace hincapié en una sintaxis que favorezca un código legible. Se trata de un lenguaje de programación multiparadigma, ya que soporta orientación a objetos, programación imperativa y, en menor medida, programación funcional.

*Python* fue creado a finales de los ochenta por Guido van Rossum en el Centro para las Matemáticas y la Informática (CWI, Centrum Wiskunde & Informatica), en los Países Bajos, como un sucesor del lenguaje de programación ABC, capaz de manejar excepciones e interactuar con el sistema operativo Amoeba. El nombre del lenguaje proviene de la afición de su creador por los humoristas británicos Monty Python<sup>21</sup>

La elección de *Python* para realizar la aplicación y validación del modelo Log-Normal se debe a:

- Ofrece una sintaxis simple, clara y sencilla.
- Posee una gran cantidad de bibliotecas disponibles.
- Es un lenguaje de programación desarrollado por programadores y actualizado a las necesidades de los usuarios.
- Lenguaje de programación Multiplataforma (Linux - Windows - Mac).
- Fácil extensibilidad.
- Módulos de procesamiento HTML / XML y envío de correo.

---

<sup>21</sup> Los Monty Python fue un grupo británico de humoristas que sintetizó en clave de humor la idiosincrasia británica de los años 1960 y 1970.

Algunos casos de éxito en el uso de *Python* son Google, Yahoo, la NASA, Industrias Ligh & Magic, y todas las distribuciones Linux, en las que *Python* cada vez representa un tanto por ciento mayor de los programas disponibles.

En conclusión, es un lenguaje de programación, sencillo y que se adapta a las necesidades de este proyecto final de carrera. Posee bibliotecas potentes de cálculo, representación gráfica y facilidad para generar archivos que se pueden mostrar en páginas web.

## **4.2. Estimación de parámetros para el Modelo Log-Normal**

Tal y como se introdujo en el Capítulo 3 (véase Apartado 3.5), el Modelo de Log-Normal (véase (3.0.1)) requiere estimar dos parámetros  $\mu$  y  $\sigma$ . Para llevar a cabo dicha estimación, se utilizarán dos métodos de estimación distintos. En primer lugar se aplica el Método de Máxima Verosimilitud (véase Apartado 3.5.1) y posteriormente, se realiza la estimación de los parámetros a partir de un método no paramétrico (véase Apartado 3.5.2).

### **4.2.1. Estimación de parámetros por el Método de Máxima Verosimilitud**

La primera estimación de parámetros que se realizará será mediante el Método de Máxima Verosimilitud, a partir de la aplicación de la solución del Modelo Log-Normal (véase (3.3.18)). Este análisis se realiza por medio del código *Python* que aparece en la Figura 4.1 y Figura 4.2.

En la Figura 4.1 se muestra descrita la función de Log-verosimilitud objetivo a minimizar ya descrita en el Capítulo 3 (véase Apartado 3.5.1). Una vez definida la función en el programa, se utiliza la técnica de minimización de Nelder-Mead<sup>22</sup>.

El método Nelder-Mead es un método numérico para minimizar una función objetivo en un espacio multidimensional. El método utiliza el concepto de un simplex, que es un polítopo de  $N + 1$  vértices en  $N$  dimensiones. El método busca de modo aproximado una solución óptima global a un problema con  $N$  variables.

---

<sup>22</sup> J. A. NELDER AND R. MEAD (1965), "A simplex method for function minimization", Computer Journal 7, 308-313.

```
# Funcion de log-verosimilitud que habra que minimizar
def L( teta ):

    # Definimos la constante -1/2
    c0 = - 0.5
    # Definimos la constante 1 / sqrt(2 pi)
    c1 = 1 / numpy.sqrt( 2 * numpy.pi )
    # Ahora definimos la lista sigma ( )
    s = numpy.array( [ sigma( [ i, teta[ 1 ] ] ) for i in range( 1, n ) ] )
    # Ahora definimos la lista de la diferencia entre los shares y la media
    dif = numpy.array( [ share[ i ] - mu( [ i, teta[ 0 ] ] ) for i in range( 1, n ) ] )
    # Unimos las dos listas anteriores
    ter = c0 * numpy.power( dif / s, 2 )

    # Ahora creamos una lista que contiene el primer termino de la expresion
    L1 = c1 / s
    # Esta lista contiene el segundo termino de la expresion
    L2 = numpy.exp( ter )
    # Juntamos todo
    L3 = numpy.sum( - numpy.log( numpy.multiply( L1, L2 ) ) )
    L3 = - numpy.product( numpy.multiply( L1, L2 ) )
    # Devolvemos
    return L3
```

Figura 4.1: Función log-verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia.

En la Figura 4.2 se describe el código que ejecuta el proceso de minimización de la función de Log-verosimilitud. Entrando en detalle vemos como en *res* minimiza la función L, que es como se ha definido la función de Log-verosimilitud (véase Figura 4.1) con el método Nelder-Mead.

```
# Vamos a minimizar

# Valores iniciales
ini = numpy.random.rand(2)
# Minimizamos
res = minimize( L, ini, method = 'Nelder-Mead' )
# Mostramos resultados
```

Figura 4.2: Minimización función Log-verosimilitud.

Fuente: Elaboración propia.



Teniendo en cuenta el proceso descrito (véase Figuras 4.1 y 4.2), al ejecutar el programa, se obtiene el resultado de las estimaciones de parámetros que aparece en de la Figura 4.3.

```
Last login: Tue Sep 16 19:08:50 on ttys000
MacBook-Pro-de-ENRIQUE:~ enriqueconcacasanova$ /var/f
olders/3w/kkwfdtzs4l78swbm5v6kd4940000gn/T/Cleanup\ A
t\ Startup/MODEL01-432580144.132.py.command ; exit;
  status: 0
  nfev: 114
  success: True
  fun: -154.01567091996446
  x: array([ 0.00356931,  0.00927514])
  message: 'Optimization terminated successfully.'
  nit: 59
Logout
[Proceso completado]
```

Figura 4.3: Resultados parámetros por Máxima verosimilitud.

Fuente: elaboración propia.

La variable  $x$  del código de la Figura 4.3 se refiere a los resultados obtenidos para las estimaciones de los parámetros. El primer resultado hace referencia a la estimación de  $\mu$  (0.00356931) y el segundo a  $\sigma$  (0.00927514).

#### 4.2.2. Estimación de parámetros por un método no paramétrico

Como se anticipó en el Capítulo 3 (véase Apartado 3.5.2), se realizará la estimación de los parámetros necesarios para el Modelo Log-Normal mediante un método no paramétrico. El objeto de estimar los parámetros por dos métodos distintos, es confrontar los resultados y asegurarnos de la robustez del modelo. Este es un aspecto crítico del estudio porque una mala estimación de los parámetros arruinaría nuestro modelo.

Con *Python* es posible resolver el sistema de dos ecuaciones no lineales planteado a partir del método no paramétrico (véase (3.5.14)-(3.5.15)) que queda escrito e introducido en *Python* como se detalla en la Figura 4.4

```
#FALTA RESOLVER EL SISTEMA DE 2 EC CON 2 INCOGNITAS.

#Definimos la constante

const = 1 / incremento

#####sacamos el drift#####

#sacamos el denominador
a= numpy.array(share)
denom = numpy.sum(a)

#sacamos el numerador
h= numpy.array( [ share[ i + 1 ] - share[ i ] for i in range( 1, (n-1) )] )
num= numpy.sum(h)

#Juntamos todo
drift = num / denom

#### sacamos la volatilidad####

#denominador
b = numpy.array(share**2)
denominador = numpy.sum(b)

#numerador
j = numpy.array( [ (share[ i + 1 ] - share[ i ]) ** 2 for i in range ( 1, (n-1) )] )
numerador= numpy.sum(j)

## juntamos todo

volatility = numpy.sqrt( numerador / denominador )

estmu = drift
estsigma = volatility
```

Figura 4.4: Cálculo sistema de 2 ecuaciones con 2 incógnitas para Modelo Log-Normal.

Fuente: Elaboración propia.

El resultado de la aplicación del método no paramétrico al Modelo Log-Normal genera la estimación de los parámetros que aparece en la Figura 4.5.

```
Last login: Tue Sep 16 19:09:04 on ttys000
MacBook-Pro-de-ENRIQUE:~ enriqueconcacasanova$ /var/folders/3w/kkwfdtzs4l78swbm5v6kd4940000gn/T/Cleanup\ At\ Startup/MODEL02-432581095.438.py.command
; exit;
0.00359265098229 0.00971974830499
logout

[Proceso completado]
```

Figura 4.5: Resultados estimación parámetros por método no paramétrico.

Fuente: Elaboración propia.

El primer resultado obtenido se refiere a  $\mu$  (0,003592) y el segundo a  $\sigma$  (0,009719).

Realizando el oportuno contraste (véase Tabla 4.1), se observan como ambos métodos de estimación de parámetros, Máxima-verosimilitud y el método no paramétrico, realizan una estimación de parámetros para el Modelo Log-Normal muy similar. De esta manera se consigue reforzar la estimación de los parámetros a emplear en el modelo.

PARÁMETRO A ESTIMAR:	MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD	MÉTODO NO PARAMÉTRICO
$\mu$	0,00356931	0,003592650
$\sigma$	0,00927514	0,009719748

Tabla 4.1: Tabla comparación métodos de Estimación.

Fuente: Elaboración propia.

### 4.3. Validación del Modelo Log-Normal

Una vez estimados los parámetros requeridos para aplicar el Modelo Log-Normal, es necesario proceder a la validación del modelo. La validación se llevará a cabo a través de criterios estadísticos, y ello permitirá aceptar la solución del modelo para el caso concreto del subyacente aquí empleado, Inditex(ITX.MC). Estos criterios atienden por un lado, a medidas de bondad de ajuste y por otro lado, a la construcción de intervalos de confianza. El principal objeto de este estudio es, en base a los resultados obtenidos, poder validar las predicciones para Inditex (ITX.MC), indicando que son fiables y que no dependen de los métodos y datos empleados.

En el presente apartado, a través de la validación del modelo y de las medidas de bondad de ajuste, se procederá a calcular la función media (estimación puntual subyacente Inditex (ITX.MC) y a construir los correspondientes intervalos de confianza (estimación por intervalos del subyacente Inditex (ITX.MC)), representando gráficamente los resultados. Se realizará toda la validación del Modelo Log-Normal a partir de las estimaciones obtenidas con el método de Máxima Verosimilitud, en el caso de querer utilizar las estimaciones obtenidas a través del método no paramétrico se utilizaría la misma metodología.

### 4.3.1 Estimaciones puntuales por el modelo teórico Log-Normal: Cálculo de la media y varianza teórica

Se obtendrá una estimación puntual mediante el valor esperado (media) de la variable estudiada. A partir de la estimación de parámetros obtenida (véase Apartado 4.2) y de la solución del modelo de Log-Normal (véase (3.3.18)), cabe recordar las propiedades estadísticas de la misma: función media (3.4.4) y función varianza (3.4.5).

En este enfoque, siguiendo el modelo teórico Log-Normal, el primer paso a realizar es calcular la media y varianza teórica del subyacente Inditex (ITX.MC) para cada instante de tiempo fijo  $t$ . Aplicando la ecuación (3.4.4) y (3.4.5) con los parámetros estimados en el Apartado 4.2 (véase Tabla 4.1), el resultado obtenido atiende a la media teórica y varianza teórica para cada  $S(t)$  del período fijo estudiado. Cabe puntualizar que  $s_0$  en el Modelo Log-Normal se corresponde al valor del activo subyacente Inditex (ITX.MC) en el instante inicial del estudio y que, el incremento de  $t$  en el período a utilizar la unidad.

```
#definimos la media (t)

def media (t):
    auxiliar = numpy.exp(estmu * t)
    return share[0] * auxiliar

# definimos la varianza (t)

def varianza (t):
    au1 = share[0]**2
    b = 2 * estmu * t
    au2= numpy.exp(b)
    c = estsigma ** 2
    au3 = numpy.exp(c * t) - 1
    return au3 * au2 * au1
```

Figura 4.6: Cálculo media y varianza teórica.

Fuente: Elaboración propia.

El cálculo de la media y la varianza teórica se realiza a partir del *script* que aparece en la Figura 4.6. Destacar de este código que se ha definido  $\mu$  como *estmu* y  $\sigma$  como *estigma*. Ejecutando este *script* obtenemos la función media y la función varianza para cada una de las 30 cotizaciones del histórico. Estos resultados se muestran en la Figura 4.7.

```

ttys000
MacBook-Pro-de-ENRIQUE:~ enriquecon
cacasanova$ /var/folders/3w/kkwfdtz
s4l78swebm5v6kd4940000gn/T/Cleanup\
At\ Startup\MODEL01-432903391.050.p
y.command ; exit;
[[ 21.09 ]
 [ 21.13758499]
 [ 21.18527734]
 [ 21.2330773 ]
 [ 21.28098512]
 [ 21.32900102]
 [ 21.37712526]
 [ 21.42535809]
 [ 21.47369974]
 [ 21.52215046]
 [ 21.5707105 ]
 [ 21.61938011]
 [ 21.66815953]
 [ 21.71704901]
 [ 21.7660488 ]
 [ 21.81515914]
 [ 21.8643803 ]
 [ 21.91371251]
 [ 21.96315602]
 [ 22.0127111 ]
 [ 22.06237798]
 [ 22.11215693]
 [ 22.16204819]
 [ 22.21205202]
 [ 22.26216868]
 [ 22.31239841]
 [ 22.36274148]
 [ 22.41319813]
 [ 22.46376862]
 [ 22.51445322]]

Last login: Sat Sep 20 12:56:31 on ttys00
0
MacBook-Pro-de-ENRIQUE:~ enriqueconcacasa
nova$ /var/folders/3w/kkwfdtzs4l78swebm5v6
kd4940000gn/T/Cleanup\ At\ Startup\MODEL0
1-432903455.639.py.command ; exit;
[[ 0. ]
 [ 0.04589037]
 [ 0.09220065]
 [ 0.13893373]
 [ 0.18609251]
 [ 0.23367989]
 [ 0.28169882]
 [ 0.33015225]
 [ 0.37904314]
 [ 0.4283745 ]
 [ 0.47814932]
 [ 0.52837063]
 [ 0.57904148]
 [ 0.63016492]
 [ 0.68174405]
 [ 0.73378195]
 [ 0.78628174]
 [ 0.83924657]
 [ 0.89267959]
 [ 0.94658397]
 [ 1.00096292]
 [ 1.05581964]
 [ 1.11115736]
 [ 1.16697935]
 [ 1.22328887]
 [ 1.28008922]
 [ 1.33738371]
 [ 1.39517567]
 [ 1.45346846]
 [ 1.51226545]]
    
```

Figura 4.7: Resultados media y varianza teórica.

Fuente: Elaboración propia.

La columna de la izquierda hace referencia a los resultados de la función media y la de la derecha representa los resultados de la función varianza.

Calculada la función media y función varianza para cada una de las 30 cotizaciones que componen la muestra observada, todo queda preparado para la posterior construcción de los Intervalos de Confianza.

#### 4.3.2 Validación por intervalos de confianza: Cálculo de los intervalos de confianza teóricos

Obtenidas las estimaciones puntuales, se completará la validación del Modelo Log-Normal para el subyacente Inditex (ITX.MC) mediante la construcción de los Intervalos de Confianza (I.C.) al 95% (véase Apartado 3.6.2).

A partir del *script* de la Figura 4.8 generamos los I.C. del 95% para el subyacente Inditex (ITX.MC). Entrando en detalle en el *script*, la función *mediamenosdt* se refiere al I.C. del 95% inferior y la función *mediamasdt* al I.C. del 95% superior. Calculando la raíz cuadrada de la varianza teórica, se obtiene la correspondiente desviación típica siendo este el parámetro que realmente se requiere en la construcción de los intervalos. Para obtener el I.C. superior se suma a la estimación puntual calculada con

el modelo teórico Log-Normal (media teórica), 2 veces el valor de la desviación típica obtenida, mientras que para hallar el I.C. inferior, la operación a seguir es exactamente la misma pero, sustituyendo la suma por una resta.

```
#Creamos los intervalos de confianza

def mediamenosdt(t):
    aux= 2 * numpy.sqrt(varianza(t))
    return media(t) - aux

def mediamasdt (t):
    aux= 2 * numpy.sqrt(varianza(t))
    return media (t) + aux
```

Figura 4.8: Cálculo Intervalos de Confianza.

Fuente: Elaboración propia.

Con estas operaciones, ejecutando el *script* de la Figura 4.8 obtenemos los resultados de los Intervalos de Confianza del 95% que aparecen en la Figura 4.9.

```
-432904912.813.py.command ; exit Cleanup\ At\ Startup\MODEL01-432
t; 904900.395.py.command ; exit;
[[ 21.09 ] [ 21.09 ]
 [ 20.70916632] [ 21.56634669]
 [ 20.57802312] [ 21.79302208]
 [ 20.48765221] [ 21.97910853]
 [ 20.4182816 ] [ 22.14439399]
 [ 20.36227147] [ 22.29652476]
 [ 20.31571278] [ 22.43941345]
 [ 20.27628862] [ 22.57537926]
 [ 20.24249281] [ 22.70593006]
 [ 20.21328145] [ 22.83211105]
 [ 20.18789618] [ 22.95468168]
 [ 20.16576575] [ 23.07421414]
 [ 20.14644731] [ 23.19115213]
 [ 20.12958946] [ 23.30584781]
 [ 20.11490791] [ 23.41858621]
 [ 20.10216885] [ 23.5296018 ]
 [ 20.09117731] [ 23.6390902 ]
 [ 20.08176874] [ 23.74721662]
 [ 20.07380274] [ 23.85412205]
 [ 20.06715846] [ 23.95992794]
 [ 20.06173098] [ 24.0647398 ]
 [ 20.05742853] [ 24.16864997]
 [ 20.05417033] [ 24.2717398 ]
 [ 20.05188485] [ 24.3740814 ]
 [ 20.05050837] [ 24.47573903]
 [ 20.04998389] [ 24.57677026]
 [ 20.05026013] [ 24.6772269 ]
 [ 20.05129083] [ 24.77715577]
 [ 20.05303406] [ 24.87659936]
 [ 20.05545166] [ 24.97559634]
Traceback (most recent call las Traceback (most recent call last
```

Figura 4.9: Resultados Intervalos de Confianza.

Fuente: Elaboración propia.

La columna de la izquierda representa los resultados del I.C. inferior, nombrado en el *script mediamenosdt* y la columna de la derecha los resultados del I.C. superior, *mediamasdt*.

Calculada la estimación puntual (función media) y construidos los intervalos de confianza teóricos para cada  $S(t)$  del período observado a partir del modelo teórico Log-Normal, en el Gráfico 4.1 se muestra la representación de los mismos junto con los datos reales de la cotización del subyacente Inditex (ITX.MC). De este modo se realiza la correspondiente comparativa gráfica entre las observaciones de la muestra y las estimaciones puntuales obtenidas con el modelo teórico Log-Normal, lo cual permite completar la validación del mismo. El *script* para la realización del Gráfico 4.1 se explicara con detalle en el Apartado 5.2.3.1.

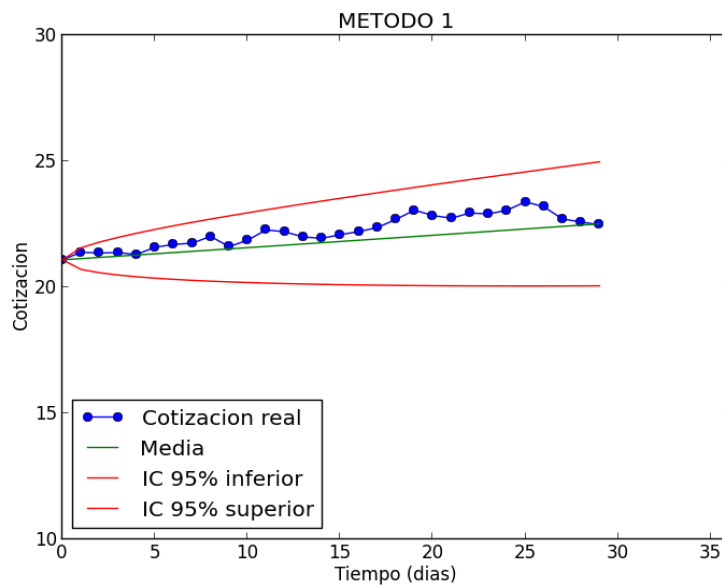


Gráfico 4.1. Análisis de los intervalos de confianza y medias teóricas.

Fuente: Elaboración propia.

A partir del Gráfico 4.1 se observa cómo los intervalos de confianza teóricos obtenidos a partir del modelo teórico Log-Normal recogen de manera aceptable las fluctuaciones producidas en la muestra observada y por tanto, cabe hablar que el Modelo Log-Normal recoge satisfactoriamente la dinámica del subyacente Inditex. Esta afirmación quedará corroborada con los resultados de las medidas de bondad de ajuste (RMSE y MAPE).

### 4.3.3 Medidas de bondad de ajuste: Cálculo del error cuadrático medio (RMSE) y del error porcentual absoluto medio (MAPE)

El error cuadrático medio (MSE), como ya se indicó (véase Apartado 3.6.1), mide la distancia al cuadrado por término medio entre los valores observados y los estimados. Cuanto menor sea el resultado de la raíz de éste (denotado por RMSE), entonces, se podrá decir que el error en el modelo, será menor. Por otro lado y de manera complementaria, se calcula el error porcentual absoluto medio (MAPE), el cual se considerará tolerable siempre que se muestre inferior a un 10% (véase Apartado 3.6.1).

Para obtener las medidas de bondad de ajuste del modelo se ha realizado el *script* de la Figura 4.10 para en ambos métodos de estimación de parámetros.

```
##### ECM y MAPE #####  
  
c = numpy.array( [ media(i) for i in range( 0, n ) ] )  
d = share  
errorab = c - d  
error = errorab / d  
error2 = errorab ** 2  
errorcuadratico = abs( sum(error2) ) / len(error2)  
errorcuadratico = "{0:.2f}".format(round(errorcuadratico,2))  
map = abs(sum(error)) / len(error) * 100  
mape = "{0:.2f}".format(round(mape,2))
```

Figura 4.10: Cálculo error cuadrático medio y MAPE.

Fuente: elaboración propia.

A continuación vamos a explicar con detalle el procedimiento que sigue el *script*. En primer lugar se define como *c* a la lista con las medias obtenidas en el apartado anterior (véase 4.3.1) y *d* a la lista con las treinta últimas cotizaciones del valor. Restando estas dos listas obtenemos la lista con el error absoluto que denominamos *errorab* en el *script*. El siguiente paso que realiza se realiza es dividir la lista de error absoluto entre la lista de las cotizaciones reales, llamando a la lista que se genera *error*. Por otra parte, se genera una lista que se denota por *error2* que contiene los errores absolutos al cuadrado. Con el procedimiento seguido ya se pueden generar el error cuadrático medio y el MAPE.



Para generar el MAPE se divide el sumatorio de la lista *error* entre la longitud de la lista y se multiplica por 100 para obtener el valor en porcentaje. Este valor se genera en valores absolutos.

Por otra parte, para generar el error cuadrático medio se realizará el cociente del sumatorio de la lista *error2* entre la longitud de la lista *error2*. Este valor también se genera en valor absoluto.

A partir del *script* expuesto se obtienen los resultados de la Tabla 4.2. En esta tabla aparecen las medidas de bondad de ajuste del modelo obtenidas para los dos métodos de estimación de parámetros expuestos en el Apartado 3.5.

Medidas Bondad de Ajuste	MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD	MÉTODO NO PARAMÉTRICO
<i>MAPE</i>	1,21%	1,24%
<i>Error Cuadrático Medio</i>	0,10	0,11

Tabla 4.2: Resultados medidas de bondad de ajuste.

Fuente: Elaboración propia.

Los errores cuadráticos medios calculados en ambos métodos son bajos y los MAPEs se obtienen con un valor inferior al 10%. Estos resultados evidencian un alto grado de aceptación del modelo.

#### 4.4. Predicciones del subyacente Inditex (ITX.MC)

Con la realización de modelos económicos, uno de los objetivos perseguidos es el poder hacer predicciones de los valores de una variable objetivo la cual, en esta memoria, es el subyacente Inditex (ITX.MC). El modelo ajustado debe permitir predecir el valor medio (estimación puntual) de dicha variable, y encontrar un intervalo que, con una probabilidad determinada, contenga el valor real de la misma (estimación por intervalos o intervalos de confianza).

Validado el modelo, en este apartado se realizan, como ya se anticipaba, las predicciones puntuales y por intervalos de confianza en los que el subyacente

fluctuará con una probabilidad de un 95%. Estas estimaciones atenderán al subyacente Inditex (ITX.MC) para los 5 próximos días.

#### 4.4.1. Predicciones del subyacente Inditex (ITX.MC) a partir del Modelo Log-Normal

Estas primeras predicciones, puntuales y por intervalos, se llevan a cabo mediante la aplicación del modelo teórico Log-Normal con el *script* de la Figura 4.11

```
#### Predicciones ####  
  
Pr1 = [{"0:.2f}".format(round(media(n),2))]  
Pr2 = [{"0:.2f}".format(round(media(n+1),2))]  
Pr3 = [{"0:.2f}".format(round(media(n+2),2))]  
Pr4 = [{"0:.2f}".format(round(media(n+3),2))]  
Pr5 = [{"0:.2f}".format(round(media(n+4),2))]  
  
ic1 = [{"0:.2f}".format(round(mediamenosdt(n),2)), "{0:.2f}".format(round(mediamasdt(n),2)) ]  
ic2 = [{"0:.2f}".format(round(mediamenosdt(n+1),2)), "{0:.2f}".format(round(mediamasdt(n),2)) ]  
ic3 = [{"0:.2f}".format(round(mediamenosdt(n+2),2)), "{0:.2f}".format(round(mediamasdt(n),2)) ]  
ic4 = [{"0:.2f}".format(round(mediamenosdt(n+3),2)), "{0:.2f}".format(round(mediamasdt(n),2)) ]  
ic5 = [{"0:.2f}".format(round(mediamenosdt(n+4),2)), "{0:.2f}".format(round(mediamasdt(n),2)) ]
```

Figura 4.11: Cálculo predicciones.

Fuente: Elaboración propia.

Con este código se extraen los resultados 31, 32, 33, 34 y 35 que generan las listas *media*, *mediamenosdt* y *mediamasdt*, es decir las predicciones que realiza el Modelo Log-Normal a 5 días.

Cabe puntualizar que para la elaboración de éstas se han vuelto a emplear los parámetros que ya se estimaron con el método de Máxima Verosimilitud (véase Tabla 4.1).

Estas predicciones también se podrían realizar para el subyacente Inditex (ITX.MC) a partir de las estimaciones a partir del método no paramétrico utilizando el mismo procedimiento seguido durante el presente capítulo.

Con todo el proceso expuesto, en la Tabla 4.3 quedan recogidas las predicciones del subyacente Inditex para los próximos 5 días en cuestión, junto con el valor real que obtuvo el subyacente.

<b>MÉTODO 1</b>	<b>14-09</b>	<b>15-09</b>	<b>16-09</b>	<b>17-09</b>	<b>18-09</b>
<i>I.C. 95%</i>	20,65	20,83	21,12	20,90	20,26
<b>PREDICCIÓN</b>	23,00	23,17	23,31	22,82	22,82
<b>REAL</b>	23,07	23,39	23,19	22,71	22,59
<i>I.C. 95%</i>	25,35	25,51	25,90	25,73	25,38

**Tabla 4.3: Resultados Predicciones.**

Fuente: Elaboración propia.

A partir de los resultados que se recogen en la Tabla 4.3, se observa como las predicciones por intervalos siempre han recogido el dato real del subyacente Inditex en todos y cada uno de los días de dicha semana, siendo ello un buen resultado.



# 5 | **Página web:** **<http://cotizacion.imm.upv.es>**

Con la intención de proporcionar un mayor valor añadido a este TFC se han creado unos programas para la aplicación diaria del Modelo Log-Normal sobre el subyacente Inditex (ITX.MC). De este modo se podrán obtener las predicciones actualizadas diariamente y realizar una comparación entre los dos métodos de estimación de parámetros expuestos en el Apartado 4.3. Además, con los resultados obtenidos se generan unos ficheros de tablas y gráficos en los que se muestran los resultados en una web creada *ad-hoc* para este TFC.

## 5.1 Preparación del equipo

Para servir la página web hemos preparado un PC donde se ha instalado el sistema operativo *Ubuntu server* (<http://www.ubuntu.com>) 14.04 LTS (*Long Time Support*). También se ha instalado el servidor web *Apache* (<http://httpd.apache.org>). Para realizar los cálculos necesarios para la aplicación del Modelo Log-Normal, se ha instalado el lenguaje de programación *Python* (<https://www.python.org>) y la librería de herramientas científicas *Scipy* (<http://www.scipy.org>)

Una vez desarrollada la web y los programas que calculan las predicciones diarias, se han alojado en el servidor y configurado para que todo funcione correctamente.

## 5.2 Programas en Python

Los programas que se han realizado constan de cuatro tareas que se representan por medio de la Figura 5.1 . Estos programas son iguales a excepción de la tarea “Ejecución del Modelo Log-Normal”, donde cambia el método de estimación de los parámetros, un programa realiza la estimación de los parámetros por el método de Máxima Verosimilitud (véase apartado 3.5.1) y el otro a través de un método no paramétrico (véase apartado 3.5.2 ).

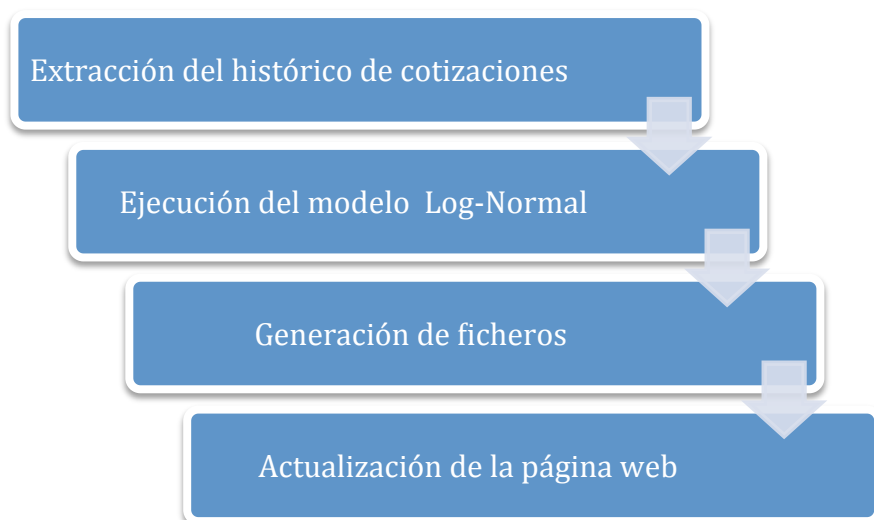


Figura 5.3: Programa de actualización de predicciones.

Fuente: Elaboración propia.

### 5.2.1 Extracción del histórico de cotizaciones

Para la obtención del histórico de las últimas treinta cotizaciones de nuestro subyacente, Inditex (ITX.MC), se utiliza la técnica de extracción de datos denominada *web scraping*.

El *Web scraping* es una técnica utilizada mediante programas de software para extraer información de sitios web. Usualmente, estos programas simulan la navegación de un humano en la *World Wide Web* ya sea utilizando el protocolo HTTP manualmente, o incrustando un navegador en una aplicación.

El *web scraping* está relacionado con la indexación de información en la web. Se realiza mediante robots de búsqueda y es utilizado por la mayoría de buscadores (Google, Yahoo, etc.). Sin embargo, el *web scraping* se enfoca más en la transformación de datos sin estructura en datos estructurados que pueden ser almacenados y analizados en una base de datos central, en una hoja de cálculo, etc.

En nuestro caso, obtenemos las últimas treinta cotizaciones del subyacente de la página web : <https://es.finance.yahoo.com>.

Es importante destacar que se ha generado un *script* con *Python* que realiza *web scraping* para extraer el histórico de cualquier valor bursátil cambiando solamente el código de identificación del subyacente. De este modo, podríamos aplicar y validar el modelo Log-Normal fácilmente sobre cualquier subyacente que deseemos.

A continuación mostraremos un ejemplo de realización de *web scrapping* sobre Inditex (ITX.MC).

En la Figura 5.2 se observa la tabla de cotizaciones históricas de Inditex (ITX.MC) que está en la web <https://es.finance.yahoo.com/q/hp?s=ITX.MC>. Estos datos son los que interesa extraer para poder aplicar y validar el Modelo Log-Normal.

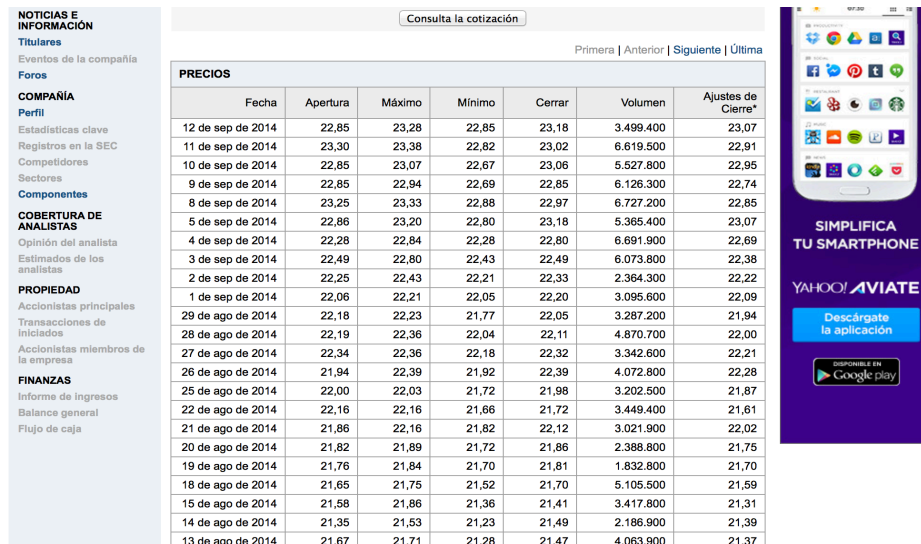


Figura 5.2: Histórico cotizaciones.

Fuente: <https://es.finance.yahoo.com/q/hp?s=ITX.MC>.

Para extraer este histórico se ha generado un código de web *scrapping* que se puede observar en la Figura 5.3.

```
#Utilizamos symbolslist para poder coger distintos valores

symbolslist = ['ITX.MC']
i=0
while i<len(symbolslist):
    url="http://finance.yahoo.com/q/hp?s="+ symbolslist[i] +"Historical+Prices"
    htmlfile = urllib.urlopen(url)
    htmltext = htmlfile.read()
    regex = '<td class="yfnc_tabledata1" align="right">(.*?)</td>'
    pattern = re.compile(regex)
    price = re.findall(pattern,htmltext)
    i+=1

#Estos serian los datos a aplicar y los preparamos

share1= price [5:180:6]
share3 = share1[::-1]
share2 = [ [ float( x ) for x in ln.split( ) ] for ln in share3 ]
share = numpy.array(share2)
```

Figura 5.3: Código web *scrapping*.

Fuente: Elaboración propia.

En el código destaca que se utiliza *symbolslist* para poder extraer cualquier otro valor que cotice en bolsa. En *url* se pondrá la web de la cual se quiere extraer los datos. Posteriormente el *script* abre la web y la lee. A continuación, con *regex* busca la información que necesita. Para finalizar, compila y guarda los datos de la cotización en una lista definida como *Price*.



Una vez se tienen los datos se colocan en orden inverso para tener los más antiguos primero y se convierte en tipo *float*. Con estos cambios los guarda en una lista denominada *share*.

A modo de ejemplo, se ejecuta el *script* de extracción de datos que se ha generado y en la Figura 5.4 se pueden observar las últimas treinta cotizaciones del valor Inditex (ITX.MC) de la página web: <https://es.finance.yahoo.com/q/hp?s=ITX.MC>.

```
Last login: Mon Sep 15 19:36:06 on ttys000
MacBook-Pro-de-ENRIQUE:~ enriqueconcacasanova$ /var/folders/3w/kkwfdtzs4l78swbm5v6kd494000
0gn/T/Cleanup\ At\ Startup/MODEL01-432495380.465.py.command ; exit;
['23.07', '22.91', '22.95', '22.74', '22.85', '23.07', '22.69', '22.38', '22.22', '22.09',
 '21.94', '22.00', '22.21', '22.28', '21.87', '21.61', '22.02', '21.75', '21.70', '21.59',
 '21.31', '21.39', '21.37', '21.39', '21.10', '20.79', '20.80', '21.02', '21.12', '21.15']
logout

[Proceso completado]
```

Figura 5.4: Resultado web *scrapping*.

Fuente: Elaboración propia.

Una vez extraído el histórico de cotizaciones es posible empezar a aplicar el Modelo Log-Normal para el subyacente Inditex (ITX.MC).

### 5.2.2 Ejecución del Modelo Log-Normal

Una vez el programa cuenta con el histórico actualizado y en formato adecuado, ejecuta los cálculos necesarios para la aplicación de Modelo Log-Normal. Estos cálculos se han explicado con detalle en Capítulo 4 de esta memoria. Una vez ejecutado el modelo, el programa obtiene las predicciones y los Intervalos de Confianza del 95% para los próximos 5 días. Además, calcula las medidas de bondad de ajuste del modelo, MAPE y el Error Cuadrático Medio.

### 5.2.3 Generación de ficheros

Cuando el programa ejecuta el Modelo Log-Normal, con los datos extraídos de la web <https://es.finance.yahoo.com>, genera los archivos necesarios para que puedan visualizarse los resultados obtenidos en forma de gráficos y tablas en la web <http://cotizacion.imm.upv.es>

Estos ficheros se escriben en código *javascript* (*js*<sup>23</sup>) para que puedan ser leídos y ejecutados por el navegador. En la web denominamos como Método 1 al programa con estimación de los parámetros a través del método de Maxima verosimilitud y Metodo 2 al programa con estimación por medio de un método no paramétrico.

### 5.2.3.1 Predicciones, Intervalos de Confianza 95% y medidas de bondad de ajuste para los próximos 5 días

El primer archivo que genera el programa contiene dos tablas. En la primera tabla (véase Tabla 5.1) aparecen los resultados generados por el procedimiento descrito en el Apartado 4.4 de esta memoria, es decir, las predicciones y los Intervalos de Confianza del 95% para hoy, mañana y los siguientes 3 días, con lo que se presentan las predicciones de 5 días del subyacente Inditex (ITX.MC). Debemos remarcar que esta tabla también se genera con los resultados para el método de estimación de parámetros no paramétrico.

INDITEX	HOY	MAÑANA	20-09-14	21-09-14	22-09-14
I.C. 95%	25.38	25.50	25.62	25.74	25.86
PREDICCIÓN	22.82	22.89	22.96	23.03	23.10
I.C. 95%	20.26	20.28	20.30	20.32	20.34

Tabla 5.1: Predicciones e Intervalos de Confianza 95%.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/metodo1.html>.

La segunda tabla que genera el programa es la Tabla 5.2, donde aparecen las medidas de bondad de ajuste del modelo. Como se ha comentado anteriormente, en este caso se han utilizado el MAPE y el Error Cuadrático Medio.

	MAPE	ERROR CUADRÁTICO MEDIO
MÉTODO 1	1.56%	0.18

Última Actualización: 01:01 18-09-2014

<sup>23</sup> Un archivo \*.js, es un archivo de texto plano que contiene *scripts* de Javascript, y que puede, por tanto, ser modificado con cualquier editor de textos. Es ejecutado generalmente por un navegador web.

Tabla 5.2: Medidas de bondad de ajuste del modelo .

Fuente: <http://cotizaccion.imm.upv.es/metodo1.html>.

Como se observa debajo de la Tabla 5.2 aparece la fecha y hora en la que se ha realizado la última actualización como medida de control de que la actualización se ha realizado correctamente. Esta herramienta aparecerá en todos los ficheros que genera el programa. Como la Tabla 5.1, la 5.2 también se genera con los resultados obtenidos con el método de estimación de los parámetros no paramétrico.

Para generar las Tablas 5.1 y 5.2 el programa utiliza el código que aparece en la Figura 5.5.

```
#####Tablas Predicciones y IC + Medidas Bondad Ajuste#####
f= open('datosactual.js' , 'w')
cadena = 'document.write'+chr(39)+'<center> <Table border cellspacing=0 cellpadding=4>'
cadena= cadena + '<tr align=center>'
cadena = cadena + '<th style="height: 30px;"> INDITEX </th> <th style="width: 80px;"> HOY </th>'
cadena = cadena + '<th style="width: 80px;"> MAÑANA </th> <th style="width: 80px;">+str(manana2)+</th>'
cadena = cadena + '<th style="width: 80px;">+str(manana3)+</th> <th style="width: 80px;">+str(manana4)+</th>'
cadena = cadena + '<tr align=center> <th style="height: 30px;">I.C. 95%</th><td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamasdt(n),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamasdt(n+1),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamasdt(n+2),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamasdt(n+3),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamasdt(n+4),2))) + '</td> <tr align=center>'
cadena = cadena + '<th style="height: 30px;">PREVICCIÓN</th>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#BDBBDB">'+ str("{0:.2f}",format(round(media(n),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#BDBBDB">'+ str("{0:.2f}",format(round(media(n+1),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#BDBBDB">'+ str("{0:.2f}",format(round(media(n+2),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#BDBBDB">'+ str("{0:.2f}",format(round(media(n+3),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#BDBBDB">'+ str("{0:.2f}",format(round(media(n+4),2))) + '</td> <tr align=center>'
cadena = cadena + '<th style="width: 80px;">I.C. 95%</th>'
cadena = cadena + '<td style="height: 30px;">'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamenosdt(n),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamenosdt(n+1),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamenosdt(n+2),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamenosdt(n+3),2))) + '</td>'
cadena = cadena + '<td>'+ str("{0:.2f}",format(round(mediamenosdt(n+4),2))) + '</td> </table> <br>'
cadena = cadena + '<Table border cellspacing=0 cellpadding=4>'
cadena = cadena + '<caption align=bottom> Última Actualización: '+ str(now.strftime(" %H:%M %d-%m-%Y "))+'</caption>'
cadena = cadena + '<tr align = center ><td style = "height: 30px;"> </td> <td style = " width: 80px;"> MAPE </td>'
cadena = cadena + '<td style = " width: 80px;"> ERROR CUADRÁTICO MEDIO </td> <tr align=center> <td style="width: 80px;">'
cadena = cadena + '<td style = "height: 30px;"> +str(mape) +'6#37' </td> <td> +str(errorcuadratico)+ </td> </table>'
cadena = cadena + '</center>'+chr(39)+''
f.write(cadena)
f.close()
```

Figura 5.5: Código tablas de predicciones y medidas de bondad de ajuste.

Fuente: Elaboración propia.

Con el objetivo de dar una mayor comprensión a los resultados obtenidos, el programa genera el Gráfico 5.1 con la media, los Intervalos de Confianza del 95% y las predicciones para los próximos 5 días. Este gráfico también se genera para el Método 2, es decir, el programa con estimación de los parámetros por un método no paramétrico

En el Gráfico 5.1 las líneas rojas representan el Intervalo de Confianza del 95%. La línea verde representa la media de la cotización que proporciona el modelo y los puntos amarillos representan las predicciones a 5 días. La línea de puntos azules representa la cotización real que ha tenido el valor en las 30 últimas sesiones.

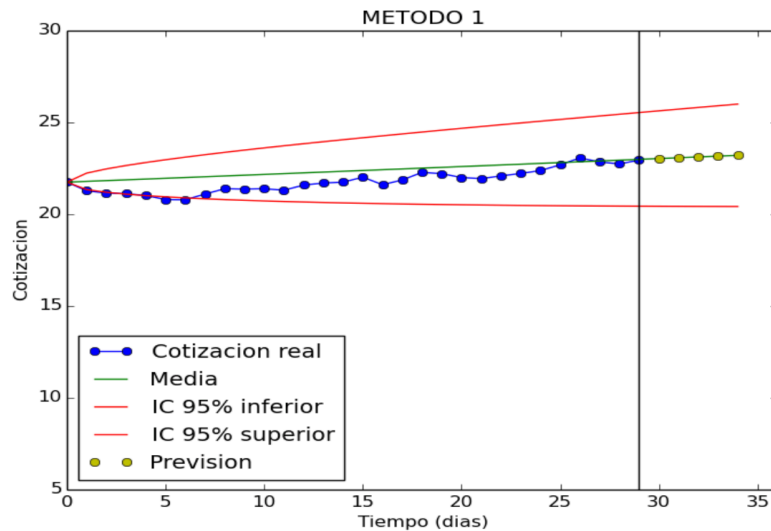


Gráfico 5.1: Medias, Intervalos de Confianza 95% y predicciones a 5 días.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/metodo1.html>.

El Gráfico 5.1 se genera a partir de la aplicación del código que aparece en la Figura 5.6. En este código, el primer paso que se realiza es la importación de las librerías necesarias para realizar gráficos, en este caso se importan las librerías *numpy*, *matplotlib* y *pylab*. El resto de los pasos que sigue se explican en los comentarios que aparecen dentro del código.

```
##### Grafico #####
matplotlib.use('Agg')
import matplotlib
import numpy as np
import pylab as pl

# Fijamos la representación de las listas
plot1 = pl.plot(x1, y1, '-bo', label= 'Cotizacion real')
plot2 = pl.plot(x2, y2, 'g', label= 'Media')
plot3 = pl.plot(x3, y3, 'r', label= 'IC 95% inferior')
plot4 = pl.plot(x4, y4, 'r', label= 'IC 95% superior')
plot5 = pl.plot(x5, y5, 'yo', label= 'Prevision')
pl.axvline( 29, color = 'k')
pl.title('METODO 1')

# nombramos los ejes

pl.xlabel('Tiempo (dias)')
pl.ylabel('Cotizacion')

# fijamos los ejes

pl.xlim(0.0, 36.0)
pl.ylim(5, 30.)

# creamos la leyenda

pl.legend(loc='lower left')

# guardamos en png

pl.savefig('grafico.png')
pl.close()
```

Figura 5.6: Código gráfico Medias, IC 95% y predicciones.

Fuente: Elaboración propia.

El gráfico que se genera se guarda en formato png para que pueda ser leído por los navegadores.

### 5.2.3.2 Comparación de predicciones y cotizaciones reales de cada método

El siguiente archivo que genera el programa es la Tabla 5.3. En esta tabla podemos comparar las últimas 5 predicciones que se realizaron con Modelo Log-Normal y las cotizaciones reales que tuvo el subyacente Inditex (ITX.MC). Con esta tabla se observa la aproximación de la predicciones realizadas.

MÉTODO 1	13-09-14	14-09-14	15-09-14	16-09-14	17-09-14
I.C. 95%	20.43	20.65	20.83	21.12	20.90
PREDICCIÓN	23.03	23.00	23.51	23.31	23.31
REAL	22.91	23.07	23.39	23.20	22.71
I.C. 95%	25.63	25.35	25.51	25.90	25.73

Última Actualización: 01:01 18-09-2014

Tabla 5.3: Comparativa predicciones y cotizaciones reales.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/metodo1.html>.

Para poder realizar esta tabla tenemos trabajar con datos generados anteriormente por lo que se genera un *script* que crea un fichero que guarda los resultados obtenidos por el modelo, predicciones e Intervalos de Confianza del 95%, en los 5 días anteriores. Este *script* se puede observar en la Figura 5.7.

```
#### datos historicos
# Cargamos los datos del fichero
hist = numpy.loadtxt( 'historico.txt' )
# Quitamos la primera fila
hist = numpy.delete( hist, 0, 0 )
# Anyadimos al final el nuevo
hist = numpy.append( hist, [[ media(n)[0], mediamenosdt(n)[0], mediamasdt(n)[0] ]], axis=0 )

# Guardamos
numpy.savetxt( "historico.txt", hist)
```

Figura 5.7: Script archivo histórico.

Fuente: Elaboración propia.

Este *script* carga el fichero con el histórico de los resultados obtenidos en los últimos 5 días, que se encuentra en una matriz 3x5. Una vez se ha cargado el fichero con el histórico de predicciones, el programa elimina la primera fila, es decir, los resultados más antiguos, y añade a la matriz la predicción de hoy y su IC del 95%. Elimina la cotización más antigua con el objetivo de que el fichero no crezca indefinidamente.

Una vez se tiene el histórico actualizado se vuelve a guardar para que pueda ser utilizado de nuevo el día siguiente.

Una vez se tiene el histórico de predicciones de los últimos 5 días sólo hay que generar una tabla en la que se colocan estos datos y se añaden las cotizaciones reales de los últimos 5 días extraídas de la web <http://yahoo.finace.com>. Este código que genera la Tabla 5.3 se puede observar en la Figura 5.8.

```
### CREAR HTML DE TABLAS PARA COMPARATIVA. REAL(SHARE) ; PREDICCION(MEDIA) ; IC (MEDIAMASDT; MEDIAMENOSDT)
f = open('compara.js', 'w')
cadena=document.write("<center><table border cellspacing=0 cellpadding=4>")
cadena = cadena + '<caption align=bottom> Última Actualización: ' + str(now.strftime("%H:%M %d-%m-%Y ")) + '</caption>'
cadena = cadena + '<tr align = center ><td style="height: 30px;"> M&Eacute;TODO 1 </td> <td style="width: 80px;">'+str(ayer5)+'</td>'
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str(ayer4)+'</td> <td style="width: 80px;">'+str(ayer3)+'</td>'
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str(ayer2)+'</td> <td style="width: 80px;">'+str(ayer)+'</td> <tr align=centers>'
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">I.C. 95%</td>'
cadena = cadena + '<td style="height: 30px;">'+str("{0:.2f}".format(round(pic4,2)))+'</td> <td>'+str("{0:.2f}".format(round(pic3,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pic2,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pic1,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pic,2)))+'</td><tr align=centers>'
cadena = cadena + '<td style="height: 30px;">PREDICCIÓN</td> <td bgcolor="#E6E6E6">'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia4,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#E6E6E6">'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia3,2)))+'</td> <td bgcolor="#E6E6E6">'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia1,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#E6E6E6">'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia,2)))+'</td> <td bgcolor="#E6E6E6">'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia,2)))+'<tr align=centers> <td style="height: 30px;">REAL</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#A4A4A4">'+str("{0:.2f}".format(round(share[25],2)))+'</td> <td bgcolor="#A4A4A4">'+str("{0:.2f}".format(round(share[26],2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#A4A4A4">'+str("{0:.2f}".format(round(share[27],2)))+'</td> <td bgcolor="#A4A4A4">'+str("{0:.2f}".format(round(share[28],2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td bgcolor="#A4A4A4">'+str("{0:.2f}".format(round(share[29],2)))+'</td> <tr align=centers> <td style="width: 80px;">I.C. 95%</td>'
cadena = cadena + '<td style="height: 30px;">'+str("{0:.2f}".format(round(pics4,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pics3,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pics2,2)))+'</td> <td>'+str("{0:.2f}".format(round(pics1,2)))+'</td>'
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pics,2)))+'</td></table>'
cadena = cadena + '</center>'+chr(39)+''

f.write( cadena )
f.close()
```

Figura 5.8: Código tabla comparativa Real/Predicción.

Fuente: Elaboración propia.

Como en el apartado anterior, estos ficheros también se realizarán para el programa que ejecuta el Modelo Log-Normal con el método de estimación de los parámetros no paramétrico denominado Método 2.

### 5.2.3.3 Tabla Comparativa entre métodos

Para realizar una comparativa de los resultados obtenidos con los dos métodos implementados en *Python*, el programa genera la Tabla 5.4 y la Tabla 5.5. En la primera se muestran las 5 últimas predicciones realizadas por ambos métodos de estimación de los parámetros comparadas con las cotizaciones reales que tuvo el subyacente Inditex (ITX.MC).

FECHA	13-09-14	14-09-14	15-09-14	16-09-14	17-09-14
MÉTODO 1	23.03	23.00	23.17	23.51	23.31
MÉTODO 2	23.48	23.06	23.12	23.52	23.44
REAL	22.91	23.07	23.39	23.20	22.71

Tabla 5.4 : Comparación predicciones ambos métodos y cotizaciones reales.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/comparativa.html>.

La otra tabla que genera este fichero (Tabla 5.5) muestra una comparativa entre las medidas de bondad de ajuste del modelo de ambos métodos.

	MAPE	ERROR CUADRÁTICO MEDIO
MÉTODO 1	1.56%	0.18
MÉTODO 2	1.84%	0.23

Última Actualización: Thu Sep 18 01:01:03 2014

Tabla 5.5: Comparación medidas de bondad de ajuste del modelo.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/comparativa.html>.

Para generar estas tablas se carga el histórico de resultados de un método en el código del otro método para de este modo tener todos los resultados que se van a mostrar en la tabla juntos. Este *script* se muestra en la Figura 5.9, en este caso se muestra solamente que se cargan las predicciones, pero también se cargan los IC del 95% y las medidas de bondad de ajuste del modelo para realizar las comparaciones.

```
#cargamos los datos del otro metodo para la tabla comparativa
histoc = numpy.loadtxt( 'historico1.txt' )
prmedia = histoc[29, 0]
prmedia1= histoc[28,0]
prmedia2= histoc[27,0]
prmedia3= histoc[26, 0]
prmedia4= histoc[25, 0]
```

Figura 5.9 : Script carga histórico resultados Método 2 en el programa Método 1.

Fuente: Elaboración propia.

Una vez se encuentran en un mismo programa los resultados obtenidos con ambos métodos se generan las tablas con el código que aparece en la Figura 5.10.

```

###Tabla compara los dos metodos + Medidas bonda de ajuste###
f= open('compara2.js', 'w')
cadena = document.write('+chr(39)+'<center><table border cellspacing=0 cellpadding=4>
cadena = cadena + '<table border cellspacing=0 cellpadding=4 style="font-size:12px"><tr align=center>
cadena = cadena + '<td style="height: 40px;"> FECHA </td> <td style="width: 80px;">'+str(ayer5)+'</td>
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str(ayer4)+'</td>
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str(ayer3)+'</td>
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str(ayer2)+'</td> <td style="width: 80px;">'+str(ayer)+'</td> <tr align=center>
cadena = cadena + '<th style="width: 80px;">M&Eacute;TOD&O 1</th> <th style="width: 80px;">'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia4,2)))+' </th>
cadena = cadena + '<td style="height: 40px;">'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia3,2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia2,2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia1,2)))+' </td> <td>'+str("{0:.2f}".format(round(pmedia,2)))+' </td>
cadena = cadena + '<tr align=center> <th style="width: 80px;">M&Eacute;TOD&O 2</th>
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str("{0:.2f}".format(round(prmedia4,2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str("{0:.2f}".format(round(prmedia3,2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str("{0:.2f}".format(round(prmedia2,2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(prmedia1,2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(prmedia,2)))+' </td> <tr align=center> <th> REAL </th>
cadena = cadena + '<td style="width: 80px;">'+str("{0:.2f}".format(round(share[25],2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(share[26],2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td style="height: 40px;">'+str("{0:.2f}".format(round(share[27],2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(share[28],2)))+' </td>
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(share[29],2)))+' </td> <tr align=center> </table> <br> '
cadena = cadena + '<table border cellspacing=0 cellpadding=4 style="font-size:12px">
cadena = cadena + '<caption align=bottom> &Uacute;ltime Actualizaci&oacute;n: '+str(hora)+'</caption> <tr align=center>
cadena = cadena + '<td style = "height: 40px;"> </td> <th style = " width: 120px;"> MAPE </th> '
cadena = cadena + '<th style="width: 120px;"> ERROR CUADR&#193;TICO MEDIO </th> <tr align=center>
cadena = cadena + '<td style = "height: 40px;">'+str(mape)+'&#37' </td> <td>'+str(errorcuadratico)+'</td>
cadena = cadena + '<tr align = center><th style="width: 80px;"> M&Eacute;TOD&O 2</th>
cadena = cadena + '<td style = "height: 40px;">'+str("{0:.2f}".format(round(mape1,2)))+'&#37' </td> '
cadena = cadena + '<td>'+str("{0:.2f}".format(round(errorcuadratico1,2)))+' </td> <tr align = center ></table> <br> '
cadena = cadena + '</center>'+chr(39)+'
f.write( cadena )
f.close()

```

Figura 5.10: Código tablas comparativas métodos y reales ; Comparativa medidas Bondad de Ajuste.

Fuente: Elaboración propia.

### 5.2.3.4 Gráficos comparativos predicciones/ reales

Por último, el programa genera gráficos, como el Gráfico 5.2, en los que se pueden observar las últimas 10 cotizaciones reales del subyacente Inditex (ITX.MC) y las últimas 10 predicciones realizadas por el Modelo Log-Normal. Estos gráficos se generan para ambos métodos de estimación de parámetros. Con estos gráficos se observa como el modelo realiza predicciones siempre cercanas a la cotización real del subyacente y por supuesto, dentro del Intervalo de Confianza del 95% generado por el Modelo Log-Normal.

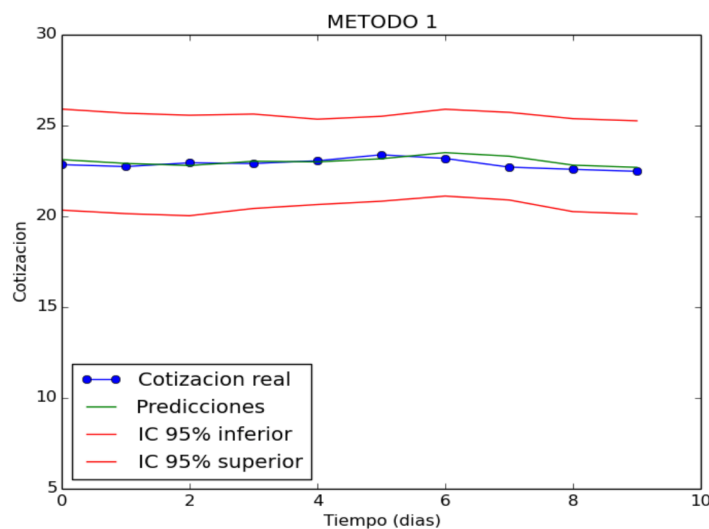


Gráfico 5.2: Predicciones con Intervalos de Confianza del 95% y cotizaciones reales últimos 10 días.

Fuente: <http://cotizaccion.imm.upv.es/comparativa.html>.



En el Gráfico 5.2 se aprecia como las últimas 10 predicciones realizadas por el modelo se representan con una línea verde. Los Intervalos de Confianza del 95% se representan con líneas rojas y por último la cotización real que tuvo el subyacente con una línea de puntos azules.

Para poder generar estos gráfico se utiliza el *script* de la Figura 5.11. Como los gráficos del apartado 5.2.3.1, se guardan en formato png. El código tiene comentarios para poder seguir el proceso que se realiza.

```
plotq = pl.plot(x1, y1, '-bo', label= 'Cotizacion real')
plotw = pl.plot(j1, g1, 'g', label= 'Predicciones')
plote= pl.plot(j2, g2, 'r', label= 'IC 95% inferior')
plotr = pl.plot(j3, g3, 'r', label= 'IC 95% superior')

pl.title('METODO 1')

# make axis labels
pl.xlabel('Tiempo (dias)')
pl.ylabel('Cotizacion')

# set axis limits
pl.xlim(0.0, 10.0)
pl.ylim(5, 30.)

#creamos la leyenda

pl.legend(loc='lower left')
# show the plot on the screen pl.show()
pl.savefig('grafico2.png')
```

Figura 5.11: Código gráfico comparativo resultados y reales.

Fuente: Elaboración propia.

#### 5.2.4 Actualización de la página web

Una vez el programa ha generado los archivos de tablas y gráficos necesarios, estos serán llamados la próxima vez que un usuario acceda a la página web, mostrando siempre información actualizada diariamente.

Con este programa se consigue tener un sitio web dinámico donde poder ofrecer predicciones de Inditex (ITX.MC) para los próximos 5 días actualizadas con sus Intervalos de Confianza del 95% y accesibles a todo el público interesado.

### 5.3 Herramienta *Cron tab*

En el sistema operativo Linux, cron es un administrador regular de procesos en segundo plano que ejecuta procesos o guiones a intervalos regulares (por ejemplo,

cada minuto, día, semana, etc.). Los procesos que deben ejecutarse y la hora en la que deben hacerlo se especifican en el fichero crontab. *Cron* se podría definir como el "equivalente" a Tareas Programadas de Windows.

Para nuestro programa configuramos el crontab para que ejecute de Lunes a Viernes a la 1 a.m. los programas de *Python* que leen los datos de Inditex, los procesan y generan los resultados. Hemos determinado que el programa cron se active a la 1 a.m. debido a que el histórico en la web <http://yahoo.finance.com> en algunas ocasiones no se actualiza hasta después de las 12 a.m. De este modo se soluciona ese problema y se evita trabajar con un histórico incorrecto.

## 5.4 Diseño página web: <http://cotizacion.imm.upv.es>

Para la realización de la web se ha elegido una plantilla de las que ofrece la web <http://www.htmltemplates.net> y modificada por medio del programa Kompozer, un editor de página web para OSX. La web se compone de 4 páginas, Home, una para cada método y una comparativa.

En la Figura 5.12 se observa una captura de pantalla de la página principal, Home. En esta página se muestra la finalidad e información básica sobre la página web.



Figura 5.12: Página home de la web.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/index.html>.

Las páginas Método 1 y Método 2 muestran los archivos de tablas y gráficos con los resultados del Modelo Log-Normal para ambos métodos de estimación, generados como se ha explicado en la sección 5.2.3.1 y la comparativa en la sección 5.2.3.2.

El Método1 se refiere a la estimación de parámetros por el método de Máxima Verosimilitud explicado en el apartado 3.5.1. Se puede ver una captura de pantalla de esta página en la Figura 5.13.

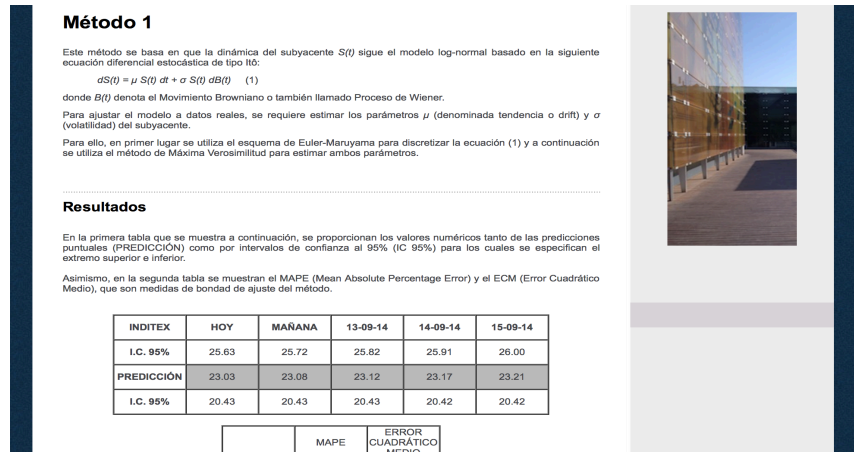


Figura 5.13: Página Método 1.

Fuente: <http://cotizaccion.imm.upv.es/metodo1.html>.

La página de Método 2 muestra los resultados obtenidos con la estimación de parámetros por medio de un método no paramétrico explicado en el apartado 3.5.2. Se puede ver una captura de pantalla en la página en la Figura 5.14.

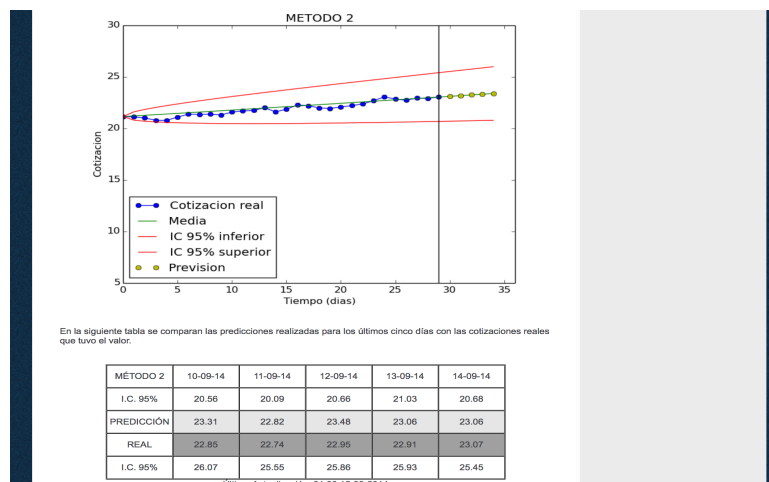


Figura 5.14: Página Método 2.

Fuente: <http://cotizaccion.imm.upv.es/metodo2.html>.

Por último la página Comparativa muestra los archivos generados en la sección 5.2.3.3 y 5.2.3.4 . Esta página busca comparar los resultados de ambos métodos y mostrar la validez del modelo para ambos métodos de estimación de los parámetros. Se puede ver una captura de pantalla de la página Comparativa en la Figura 5.15.

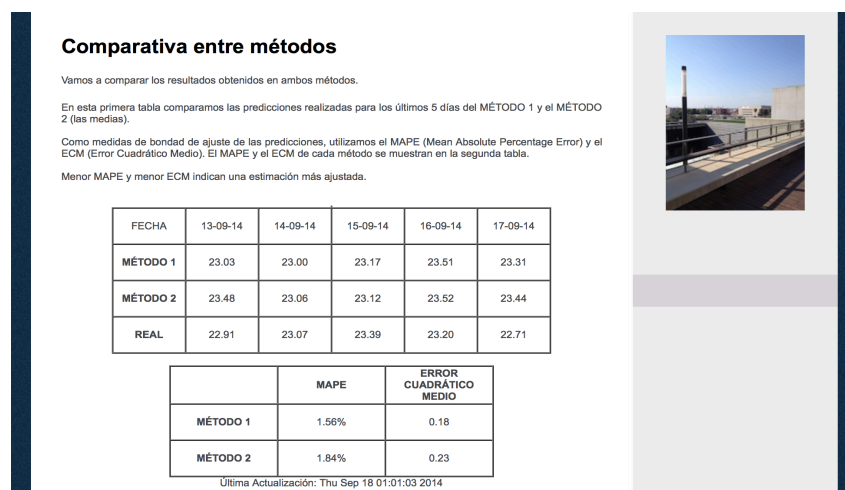


Figura 5.15 : Página Comparativa.

Fuente: <http://cotizaccion.imm.upv.es/comparativa.html>.

Así, hemos creado una web en la que mostrar los resultados del Modelo Log-normal obtenidos con ambos métodos de estimación de parámetros y poder demostrar la validez del modelo.

## 5.5 Dominio cotizaccion.imm.upv.es

Para asignarle el dominio cotizaccion.imm.upv.es a nuestra página web, se ha tenido que, por una parte, que acceder al programa de placas de la UPV y dar a nuestro equipo el “alias” cotizaccion.imm.

Por otra parte, configurar en Apache el correspondiente Virtual host para que cuando en el navegador se escriba la dirección <http://cotizaccion.imm.upv.es>, el servido web le redirija a nuestra página web. El fichero de configuración del virtual host es el que aparece a continuación.

```
<VirtualHost *:80>
  ServerAdmin webmaster@localhost
  ServerName cotizaccion.imm.upv.es

  DocumentRoot /var/www/html/Ki/
  <Directory />
    Options FollowSymLinks
    AllowOverride None
  </Directory>
  <Directory /var/www/html/Ki/>
    Options Indexes FollowSymLinks MultiViews
    AllowOverride All
    Order allow,deny
    allow from all
  </Directory>

  ScriptAlias /cgi-bin/ /usr/lib/cgi-bin/
  <Directory "/usr/lib/cgi-bin">
    AllowOverride None
    Options +ExecCGI -MultiViews +SymLinksIfOwnerMatch
    Order allow,deny
    Allow from all
  </Directory>

  ErrorLog ${APACHE_LOG_DIR}/error.log

  # Possible values include: debug, info, notice, warn, error, crit,
  # alert, emerg.
  LogLevel warn

  CustomLog ${APACHE_LOG_DIR}/access.log combined

  Alias /doc/ "/usr/share/doc/"
  <Directory "/usr/share/doc/">
    Options Indexes MultiViews FollowSymLinks
    AllowOverride None
    Order deny,allow
    Deny from all
    Allow from 127.0.0.0/255.0.0.0 ::1/128
  </Directory>
</VirtualHost>
```

Figura 5.16: Fichero configuración virtual host.

Fuente: Elaboración propia.

## 5.6 Resumen del capítulo

Para concretar los principales aspectos que se han señalado en este capítulo se realiza el diagrama de flujo que aparece en la Figura 5.17 que representa el proceso completo que realizan los programas.

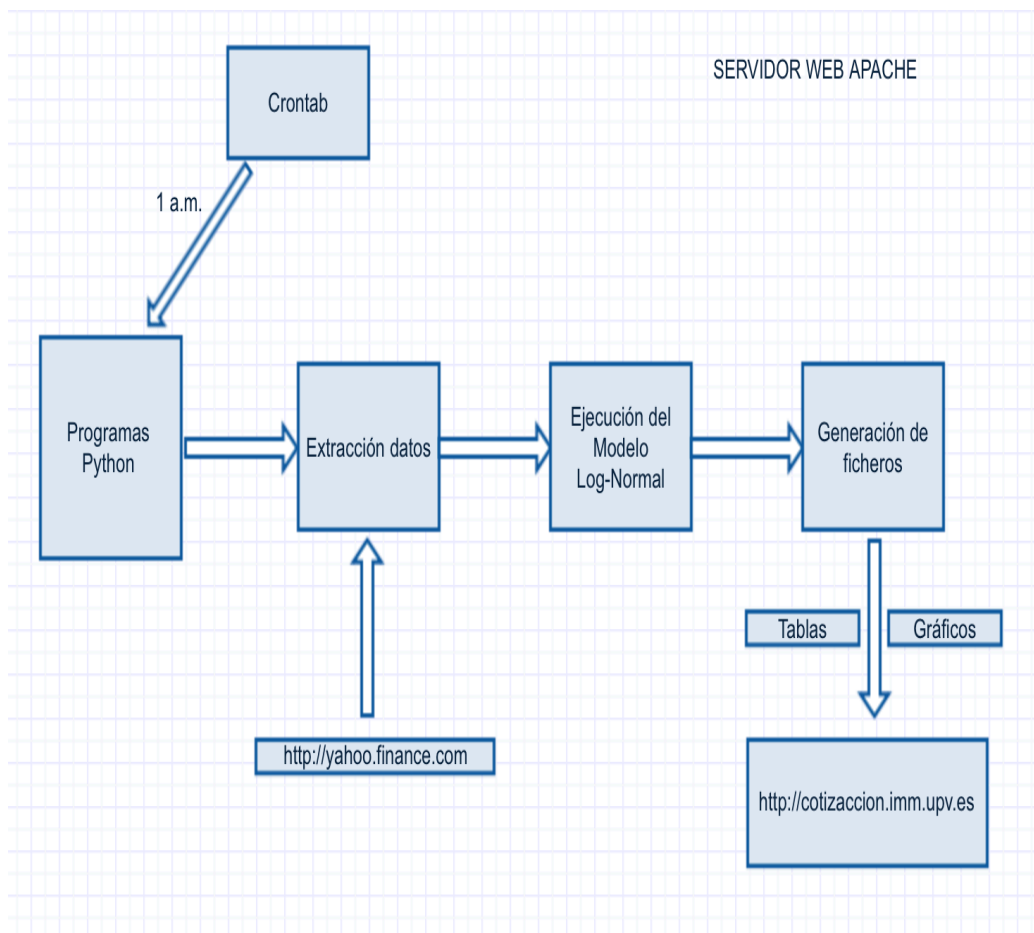


Figura 5.17 : Diagrama de flujo proceso programa *Python*.

Fuente: Elaboración propia.

# CONCLUSIONES FINALES

El principal objetivo de la presente memoria ha sido el estudio, desarrollo y aplicación del modelo estocástico Log-Normal para realizar predicciones de activos subyacentes.

Para la realización del presente Trabajo Final de Carrera se ha requerido de una ampliación de los conocimientos adquiridos durante la Licenciatura en Administración y Dirección de Empresas, guardando éstos relación con varias de las materias impartidas tales como, Sistemas y Mercados Financieros, Fundamentos Matemáticos para Administración y Dirección de empresa, Informática, etc.

En el Capítulo 1 hemos estudiado brevemente la historia y la evolución de uno de los grupos empresariales españoles más importantes del mundo. Hemos elegido este grupo empresarial debido a su enorme éxito y el interés que despierta conocer como ha conseguido un humilde gallego llegar a ser el tercer hombre más rico del mundo, según la revista *Forbes*.

En este estudio hemos conseguido entender su estructura y las claves de su enorme éxito. Con el estudio de uno de los modelos de negocio más exitosos del momento se ha conseguido abrir nuevas perspectivas en el funcionamiento de las empresas y puede ayudar a la creación de posibles nuevos modelos de negocio en el futuro.

Los Capítulos 2 y 3 de esta memoria abarcan el estudio, desarrollo y proceso de validación del modelo estocástico Log-Normal desde un punto de vista puramente teórico. Este estudio incluye una introducción al Cálculo Estocástico de Itô que es imprescindible para la resolución teórica del modelo y el cálculo de sus principales funciones estadísticas, las cuales son imprescindibles para la puesta en práctica del modelo sobre el activo subyacente Inditex (ITX.MC).

En el Capítulo 4 se pone en práctica el Modelo Log-Normal con objeto de modelizar el activo subyacente Inditex (ITX.MC) y realizar predicciones. Para la aplicación del Modelo Log-Normal hemos utilizado el lenguaje de programación *Python* con el que hemos realizado los cálculos necesarios.

Para la construcción del modelo se ha requerido estimar los parámetros del modelo Log-Normal. Esta tarea se ha realizado con diferentes métodos para mostrar la robustez de las estimaciones (se ha utilizado un método de Máxima Verosimilitud y un método no paramétrico adaptado a ecuaciones diferenciales estocásticas tipo Itô). A partir de dichas estimaciones se ha validado el modelo. Esta validación se ha hecho calculando estimaciones tanto puntuales como por Intervalos de Confianza del 95% para los datos históricos y utilizando medidas estadísticas de bondad de ajuste, las cuales han mostrado la buena calidad del modelo. En base a la validación del modelo, se han realizado predicciones puntuales y por intervalos de confianza para Inditex (ITX.MC). Los resultados obtenidos, que se han contrastado con las cotizaciones reales, han sido aceptables desde un punto de vista estadístico.

Con el objetivo de generar un mayor valor añadido sobre este TFC, en el Capítulo 5 hemos creado con el lenguaje de programación *Python* unos programas para aplicar, validar y realizar predicciones con el Modelo Log-Normal sobre cualquier subyacente que cotice en Bolsa. De este modo conseguimos ofrecer la posibilidad de realizar predicciones con el modelo aquí estudiado para cualquier subyacente deseado.



Además hemos aplicado estos programas sobre el subyacente Inditex y los hemos alojado y configurado en un servidor web para que cada día el programa realice las predicciones para los próximos 5 días y las muestre en la web página <http://cotizacion.imm.upv.es>

Con este TFC proporcionamos una interesante herramienta en la ayuda a la toma de decisiones en inversiones en Bolsa y ofrecer de forma gratuita predicciones del activo subyacente Inditex (ITX.MC) para los próximos 5 días.

En este sentido, en futuros estudios que se quisieran realizar y/o incluso para ampliar y perfeccionar el trabajo de la presente memoria, se podrían aplicar el Modelo Log-Normal por medio de simulaciones de Monte Carlo. También podría utilizarse un histórico de cotizaciones mayor e incluso realizar predicciones para intervalos temporales más largos. Sería interesante estudiar la viabilidad de otros modelos estocásticos más complejos disponibles en la literatura especializada con el objetivo de contrastar los resultados obtenidos con el Modelo Log-Normal. Ejemplos interesantes en este sentido son los basados en ecuaciones diferenciales estocásticas cuyo proceso conductor de la aleatoriedad es una mezcla de un proceso continuo como el movimiento Browniano, y un proceso discontinuo o de salto tipo *Poisson*<sup>24</sup>.

Estos modelos podrían ser programados en *Python* y mostrar sus resultados, al igual que el Modelo Log-Normal para el subyacente Inditex (ITX.M), en la web <http://cotizacion.imm.upv.es> para crear sobre la misma un mayor interés para inversores en Bolsa.

---

<sup>24</sup>BENTH, F.E.; KHOLODNYI, V.; LAURENCE, P. (2014). *Quantitative Energy Finance: Modeling, pricing and hedging in energy and commodity markets*. Springer Science+Business.



# BIBLIOGRAFÍA

## Libros:

ALLEN, E. (2007) *Modelling With Itô Stochastic Differential Equations*. Springer, Series Mathematical Modelling: Theory and Applications.

BAXTER, M.; REMIE, A. (2012) *Financial Calculus: An Introduction to Derivate Pricing*. Cambridge Univ. Press, 20<sup>th</sup> Edition.

BENTH, F.E.; KHOLODNYI, V.; LAURENCE, P. (Ed. 2014) *Quantitative Energy Finance: Modeling, Pricing and Hedging in Energy and Commodity Markets*. Springer, Science+Business. Media B.V.

GONZÁLEZ DUQUE, R. (2014) *Python para todos*.

INDITEX (2014) *Informe annual Grupo Inditex*.

HULL, J.C. (2002) *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Pearson Education, 4<sup>o</sup> Edición.

ITÔ, K. (1944) *Stochastic Integral*. Tokio. Proc. Imperial Acad.

ITÔ, K. (1961) *Lectures on Stochastic Processes*. Bombay. Tata Institute.

KLEBANER, F. C. (2011) *Introduction to Stochastic Calculus With Applications to Finance*. Imperial College Press.

LAMBERTON, D.; LAPEYRE, B. (1996) *Introduction to Stochastic Calculus to Finance*. Chapman & Hall/CRC.

YANAJARA, H. (2012) *Manual Sage para principiantes*.

ØKSEND AHL, B. (1980) *Stochastic Differential Equations*. Nueva York. Springer.

ØKSEND AHL, B. (1998) *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer.

### Artículos:

BACHELIER, L. (1900) Théorie de la spéculation. *Annales du Science de L'Ecole Normale Supérieure*, 17, pp. 21-86.

ITÔ, K. (1951) On stochastic differential equations. *Memoirs, American Mathematical Society*, fascículo 4, pp. 1-51.

MERTON, R.C. (1973) An inter temporal capital asset pricing model. *Econometrica*, fascículo 41 pp. 867-887.

MERTON, R.C. (1973) Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science (The RAND Corporation)*, volumen 4, fascículo 1 pp. 141-183.

NELDER, J.A and MEAD R. (1965) "A simplex method for function minimization", *Computer Journal* 7, pp 308-313.

### Webs:

<http://curiosidadesinditext.wordpress.com/author/curiosidadesinditext/>; (Última Fecha de Acceso: 20 de Agosto 2014)

<http://cotizacion.imm.upv.es> ; (Última Fecha de Acceso: 25 de Septiembre 2014)

<http://www.eleconomista.es> (Última Fecha de Acceso: 25 de Agosto 2014)

[http://www.inditex.com/es/our\\_group/business\\_model](http://www.inditex.com/es/our_group/business_model) (Última Fecha de Acceso: 23 de Agosto 2014)

[http://www.inditex.com/documents/10279/16953/Grupo\\_INDITEX\\_informe\\_corporativo\\_06.pdf/ffe74cae-3ce2-41e8-b270-60abc5fb73ff](http://www.inditex.com/documents/10279/16953/Grupo_INDITEX_informe_corporativo_06.pdf/ffe74cae-3ce2-41e8-b270-60abc5fb73ff). (Última Fecha de Acceso: 22 de Agosto 2014)

<https://www.python.org> (Última Fecha de Acceso: 14 de Septiembre 2014)

<http://www.scipy.org> (Última Fecha de Acceso: 14 de Septiembre 2014)

<http://www.ubuntu.com> (Última Fecha de Acceso: 20 de Julio 2014)

<http://www.yahoo.finance.com> (Última Fecha de Acceso: 27 de Septiembre 2014)



