

# Capítulo 1

## Introducción

### 1.1. El proceso de rectificado

El proceso de rectificado consiste en la eliminación del material superficial de una pieza por un método abrasivo. Esta abrasión se produce por medio de una muela, a la que se adhiere en su superficie una arenilla abrasiva, que gira a gran velocidad sobre la pieza. Los granos abrasivos actúan como elementos de corte individuales, quitando pequeñas limaduras de la pieza. Estos elementos abrasivos suelen consistir en granos de diamante, óxido de aluminio o carburo de silicio, que permanecen sujetos a la muela con algún aglutinante resinoso o vítreo [1].

Los procesos de rectificado industrial se usan fundamentalmente cuando se precisan tolerancias muy pequeñas en el acabado de las piezas y/o un buen pulido superficial de las mismas. Estos procesos de rectificado están ampliamente extendidos en la industria, como por ejemplo la del automóvil o la aviación, y cualquier pequeña mejora en los mismos puede resultar en un ahorro económico bastante significativo.

Durante el proceso de rectificado, la mayor parte de la energía se convierte en calor, el cual se acumula en la zona de contacto entre la pieza y la muela. Las altas temperaturas alcanzadas pueden aumentar, por un lado, la tolerancia del acabado y reducir, por otro, la calidad de la pieza, debido a las tensiones residuales generadas en la misma. El daño térmico de la pieza ocurre cuando las temperaturas generadas en el rectificado superan la temperatura de cambio de fase en la estructura metálica de la pieza [2], [3], [4]. Para reducir estos efectos adversos, se suele inyectar un líquido refrigerante sobre la zona de contacto entre la pieza y la muela. De este modo, se disminuye la generación de energía por fricción y al mismo tiempo se refrigera la zona por convección. Además, el líquido refrigerante ayuda a quitar de la zona de contacto el material extraído de la pieza. La gran desventaja de estos líquidos refrigerantes es que son altamente contaminantes, por lo que la optimización en su uso tiene un gran valor medioambiental. En la figura 1.1 se pueden observar los diferentes componentes

de un dispositivo real de rectificado plano.

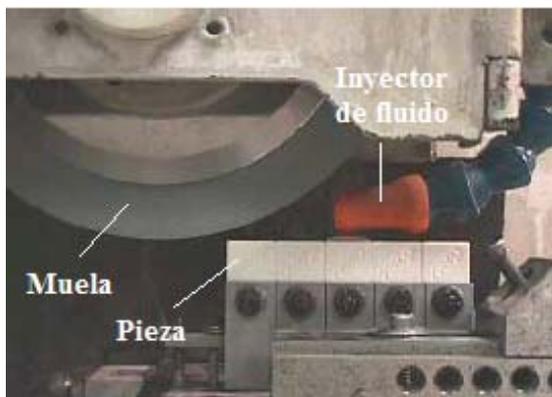


Figura 1.1: Dispositivo de rectificado

Aunque se han llevado a cabo estudios del campo de temperaturas por métodos computacionales directos [5], [6], es de un gran interés abordar el problema del dañado térmico con métodos analíticos [7] por dos motivos. En primer lugar, se pueden obtener expresiones explícitas de la dependencia de la solución con respecto a los parámetros del rectificado; y en segundo lugar, la rapidez de la presentación de resultados permite monitorizar de una manera práctica el proceso de fabricación industrial.

Resumiendo, podemos afirmar que tiene un gran interés industrial y medioambiental el estudio de modelos matemáticos analíticos de la generación y conducción del calor en el proceso de rectificado, tanto en el caso con refrigerante como en el seco. De este modo, por un lado, se podrán minimizar los efectos térmicos adversos sobre la pieza y el consumo de refrigerante; y por otro lado, la implementación práctica de estos modelos en la fabricación industrial.

## 1.2. Estructura y contenido

La presente memoria para optar al grado de doctor se encuadra en la línea de investigación de modelos matemáticos térmicos del grupo de modelización interdisciplinar Intertech [8], [9]. En concreto, este trabajo presenta unos modelos matemáticos para la transmisión de calor en el rectificado industrial plano [10], [11], haciendo un extenso uso de ciertas funciones especiales de la Física-Matemática, como las funciones hipergeométricas, las funciones de Hermite o las funciones de Bessel [12].

Comenzaremos con un capítulo dedicado a deducir desde primeros principios la ecuación del calor con convección y su equivalencia con la ecuación del calor clásica bajo una traslación de coordenadas [13]. Se verá también cómo se

aplica esta ecuación del calor convección a la modelización de la transmisión de calor en el rectificado plano. Se presentará en el siguiente capítulo el modelo de Jaeger [14], [15] del rectificado plano. Este modelo toma como fuente una banda lineal infinita móvil que se desliza por la superficie de la pieza rectificada. Las propiedades de las funciones de Bessel serán fundamentales para dar una expresión analítica compacta del campo de temperaturas que se obtiene en la pieza [16], [17]. En el capítulo siguiente se presentará el modelo SV (Samara-Valencia) [18], [19], del rectificado plano. Este modelo consiste en resolver la ecuación del calor con convección con unas condiciones de contorno variables en el tiempo y en el espacio. Esta flexibilidad en las condiciones de contorno hará que el modelo SV sea más general que el de Jaeger y que se pueda modelizar el rectificado con aplicación de fluido refrigerante y muelas que produzcan en la pieza una fricción intermitente. Además, permite obtener el campo de temperaturas no sólo en el estado estacionario, sino también en el transitorio.

En el siguiente capítulo se comparan los modelos SV y de Jaeger en el estado estacionario para en el caso del rectificado seco y fricción continua. La solución del modelo SV constará de dos sumandos,  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$ . En primer lugar, se deducirá la equivalencia analítica de  $T^{(0)}$  con la solución de Jaeger para un sólido infinito. A partir de esta equivalencia particularizada en la superficie de la pieza, se ofrecerá la resolución de una integral impropia que no se encuentra en las tablas de integrales usuales [20]. Se comprobará numéricamente que el campo de temperaturas dado por ambas soluciones son compatibles dentro del error numérico. En segundo lugar, se obtendrá una expresión para  $T^{(1)}$ , deduciéndose que la temperatura en la superficie para  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$  son equivalentes. Para ello, se obtendrá una representación de la delta de Dirac que no se encuentra en las tablas de fórmulas matemáticas más usuales [21]. A partir de la unicidad de la solución del problema que resuelven ambos modelos [22], se deducirá el cálculo de una integral impropia que no aparece tampoco en las tablas de integrales habituales [20]. A continuación, se presentará un método sencillo y rápido para el cálculo de la temperatura máxima, que se halla en la superficie de la pieza, con algunos resultados numéricos. Por último, se ofrecerá el campo de temperaturas calculado numéricamente para el rectificado de una pieza de aleación de titanio VT20 [23], [24], según ambos modelos. Comprobaremos efectivamente que el modelo SV y el modelo de Jaeger son equivalentes. Los programas en MATLAB utilizados en esta última sección se presentarán al final a modo de apéndice.

En el último capítulo se ofrecerán dos tipos de resultados a partir del modelo SV: el estado transitorio en el rectificado seco y la solución para el caso más simple del rectificado con refrigerante. Este último caso supondrá un coeficiente constante de transmisión de calor del refrigerante sobre la superficie de la pieza. De las soluciones obtenidas se concluirá que el rectificado con refrigerante es una corrección al rectificado seco, proporcional al coeficiente de transmisión de calor. A continuación, se mostrará un método para obtener el máximo de la temperatura en el rectificado con refrigerante estudiado; y así mismo, el tiempo que dura el estado transitorio, tanto en seco como con refrigerante. Por último, se presentarán unas gráficas de la evolución de la temperatura en la superficie de la pieza, para el caso seco y con refrigerante; así como el campo de temper-

aturas en el rectificado con refrigerante con distintos valores del coeficiente de transmisión de calor. Para la obtención de todas estas gráficas se utilizarán los mismos parámetros de rectificado que en el capítulo anterior y unos programas elaborados en MATLAB que se detallarán al final a modo de apéndice.

## Capítulo 5

# Comparación de los modelos de Jaeger y SV

En este capítulo vamos a comparar el estado estacionario de los modelos de Jaeger y SV para el caso de rectificado seco y fricción continua. La solución del modelo SV constará de dos sumandos,  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$ . En primer lugar, se deducirá la equivalencia analítica de  $T^{(0)}$  con la solución de Jaeger para un sólido infinito (3.30). A partir de esta equivalencia particularizada en la superficie de la pieza, se ofrecerá la resolución de una integral impropia que no se encuentra en las tablas de integrales usuales [20]. Se comprobará numéricamente que el campo de temperaturas dado por ambas soluciones son compatibles dentro del error numérico. En segundo lugar, se deducirá una expresión para  $T^{(1)}$ , deduciéndose que la temperatura en la superficie para  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$  son equivalentes. Para ello, se obtendrá una representación de la delta de Dirac que no se encuentra en las tablas de fórmulas matemáticas más usuales [21]. A partir de la unicidad de la solución del problema que resuelven ambos modelos, se deducirá el cálculo de una integral impropia que no aparece tampoco en las tablas de integrales habituales. A continuación, se presentará un método sencillo y rápido para el cálculo de la temperatura máxima, que se encuentra en la superficie de la pieza, con algunos resultados numéricos. Recordemos que, tal y como se comentó en la introducción, el conocimiento de la temperatura máxima es de vital importancia para evitar el dañado térmico de la pieza. Por último, se ofrecerá el campo de temperaturas calculado numéricamente para el rectificado de una pieza de aleación de titanio VT20, según ambos modelos. Comprobaremos que, efectivamente, el modelo SV y el modelo de Jaeger son equivalentes.

### 5.1. Comparación para el caso clásico estacionario

Llamamos caso clásico de rectificado cuando no tenemos refrigerante actuando sobre el proceso de rectificado y la muela siempre está en contacto con la pieza, es decir no tenemos rectificado pulsado. En este apartado vamos a com-

probar que la solución que ofrece el modelo SV en el caso clásico alcanza la temperatura máxima en el estado estacionario. La solución dada en (4.46) para el campo de temperaturas según el modelo SV, la podemos desglosar en dos sumandos,

$$T(t, x, y) := T^{(0)}(t, x, y) + T^{(1)}(t, x, y), \quad (5.1)$$

donde,

$$T^{(0)}(t, x, y) := - \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(t-s, x')}{4\pi k_0} \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \right\} \frac{ds}{s}, \quad (5.2)$$

$$T^{(1)}(t, x, y) := \frac{1}{4\pi} \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left( \frac{y}{2ks} - \frac{b(t-s, x')}{k_0} \right) \times T(t-s, x', 0) \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \right\} \frac{ds}{s}. \quad (5.3)$$

### 5.1.1. Caso clásico estacionario

Cuando no tenemos refrigerante actuando sobre la pieza al ir rectificándose, podemos considerar que la pieza está aislada del medio ambiente. Esto quiere decir que según la *ley del enfriamiento de Newton*, (véase sección 2.4.2), el flujo de calor de la pieza al medio es nulo, es decir, el coeficiente de transmisión de calor  $h$  vale cero. Recordando (2.26), tenemos que,

$$h = b(t, x) = 0. \quad (5.4)$$

Cuando la fricción es continua, podemos considerar que el contacto entre pieza y muela se da en todo momento sobre la zona  $x \in (0, \delta)$ , por tanto,

$$d(t-s, x) = -q H(x) H(\delta - x), \quad (5.5)$$

donde  $q$  es el flujo de calor que entra en la pieza (unidades en el SI,  $J/m^2 s$ ) y  $H(x)$  es la función escalón o de Heaviside. Sustituyendo (5.4) y (5.5) en (5.2) y (5.3), tenemos que,

$$T^{(0)}(t, x, y) = \frac{q}{4\pi k_0} \times \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \left\{ \int_0^\delta \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \right\} \frac{ds}{s}, \quad (5.6)$$

$$T^{(1)}(t, x, y) = \frac{y}{8\pi k} \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \frac{1}{s^2} \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} T(t-s, x', 0) \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \right\} ds. \quad (5.7)$$

A partir de las expresiones dadas en (5.6) y (5.7), podemos definir el campo de temperaturas para  $t \rightarrow \infty$ ,

$$T(x, y) := T^{(0)}(x, y) + T^{(1)}(x, y), \quad (5.8)$$

donde,

$$T^{(0)}(x, y) := \lim_{t \rightarrow \infty} T^{(0)}(t, x, y), \quad (5.9)$$

$$T^{(1)}(x, y) := \lim_{t \rightarrow \infty} T^{(1)}(t, x, y). \quad (5.10)$$

### 5.1.2. Temperatura máxima en el estado estacionario

Comprobemos ahora que la temperatura máxima se alcanza cuando  $t \rightarrow \infty$ . Efectivamente, reescribamos (5.6) y (5.7) de la siguiente manera,

$$T^{(0)}(t, x, y) = \frac{q}{4\pi k_0} \int_0^t F(x, s) \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \frac{ds}{s}, \quad (5.11)$$

$$T^{(1)}(t, x, y) = \frac{y}{8\pi k} \int_0^t G(t, x, s) \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \frac{ds}{s^2}, \quad (5.12)$$

donde hemos definido,

$$F(x, s) := \int_0^\delta \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx', \quad (5.13)$$

$$G(t, x, s) := \int_{-\infty}^\infty T(t - s, x', 0) \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx'. \quad (5.14)$$

Como la integral de una función positiva es una cantidad positiva, la función  $F(x, s) > 0$ ,  $\forall x, s$ . Por tanto, el integrando dado en (5.11) es positivo, por lo que el máximo de  $T^{(0)}$  ha de encontrarse en  $t \rightarrow \infty$ ,

$$0 < T^{(0)}(t, x, y) < T^{(0)}(x, y) \quad t \in (0, \infty). \quad (5.15)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta que la temperatura en superficie es una función positiva (recordemos que la temperatura está medida en  $K$ ), tenemos de nuevo que, como la integral de una función positiva es positiva,  $G(t, x, s) > 0$ . Por tanto, el integrando dado en (5.12) es positivo, por lo que el máximo de  $T^{(1)}$  ha de encontrarse también en  $t \rightarrow \infty$ ,

$$0 \leq T^{(1)}(t, x, y) < T^{(1)}(x, y) \quad t \in (0, \infty), \quad (5.16)$$

donde la primera desigualdad es debida a que  $y \geq 0$ .

De (5.15) y (5.16), obtenemos finalmente que la temperatura máxima se alcanza en la pieza en  $t \rightarrow \infty$ ,

$$0 < T(t, x, y) < T(x, y) \quad t \in (0, \infty). \quad (5.17)$$

Para comprobar que el estado estacionario está en  $t \rightarrow \infty$ , recordemos que, según vimos en (2.10), el estado estacionario se alcanza cuando,

$$\frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (5.18)$$

Como, según (5.17),  $T(t, x, y)$  alcanza un máximo en  $t \rightarrow \infty$ , se verifica (5.18), cuando  $t \rightarrow \infty$ . Esto quiere decir que el estado estacionario se alcanza en  $t \rightarrow \infty$ .

## 5.2. Equivalencia de $T^{(0)}(x, y)$ con la solución de Jaeger en un sólido infinito

Según (5.9), podemos reescribir (5.6) para el estado estacionario,  $t \rightarrow \infty$ , de la siguiente forma,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q}{4\pi k_0} \times \int_0^\infty \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \left\{ \int_0^\delta \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \right\} \frac{ds}{s}. \quad (5.19)$$

Intercambiando el orden de integración, podemos reescribir de nuevo (5.19) de una forma más compacta,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q}{4\pi k_0} \int_0^\delta \left\{ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2 + (x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) \frac{ds}{s} \right\} dx'. \quad (5.20)$$

Desarrollemos ahora el argumento de la función exponencial del integrando en (5.20), resulta,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q}{4\pi k_0} \int_0^\delta \exp\left(-\frac{v_d(x - x')}{2k}\right) \times \left\{ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2 + (x - x')^2}{4ks} - \frac{v_d^2}{4k} s\right) \frac{ds}{s} \right\} dx'. \quad (5.21)$$

Haciendo el cambio,  $\sigma = \frac{v_d^2}{4k} s$ , y llamando,

$$z := \frac{|v_d|}{2k} \sqrt{y^2 + (x - x')^2}, \quad (5.22)$$

tenemos que (5.21) se convierte en,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q}{4\pi k_0} \times \int_0^\delta \exp\left(-\frac{v_d(x - x')}{2k}\right) \left\{ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{z^2}{4\sigma} - \sigma\right) \frac{d\sigma}{\sigma} \right\} dx'. \quad (5.23)$$

Teniendo en cuenta la representación integral de  $K_\nu(z)$ , [12],

$$K_\nu(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{z}{2}\right)^\nu \int_0^\infty \exp\left(-\sigma - \frac{z^2}{4\sigma}\right) \sigma^{-(\nu+1)} d\sigma. \quad (5.24)$$

Podemos expresar (5.23) como,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q}{2\pi k \rho c} \int_0^\delta \exp\left(-\frac{v_d(x-x')}{2k}\right) K_0(z) dx'. \quad (5.25)$$

Recordando el valor de  $z$  dado en (5.22), y haciendo el cambio  $u = -\frac{v_d(x-x')}{2k}$ , resulta finalmente,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q}{\pi \rho c v_d} \int_{-v_d x/2k}^{-v_d(x-\delta)/2k} e^u K_0\left(\sqrt{\left(\frac{v_d y}{2k}\right)^2 + u^2}\right) du. \quad (5.26)$$

### 5.2.1. Cambio de coordenadas

El sistema de coordenadas que utiliza Jaeger para deducir su solución no es el mismo que el que utiliza el modelo SV. Para compatibilizar ambas soluciones, tenemos que realizar un cambio de coordenadas según el esquema de la figura 5.1. Si queremos pasar de la coordenada  $x$  en el sistema de coordenadas SV a

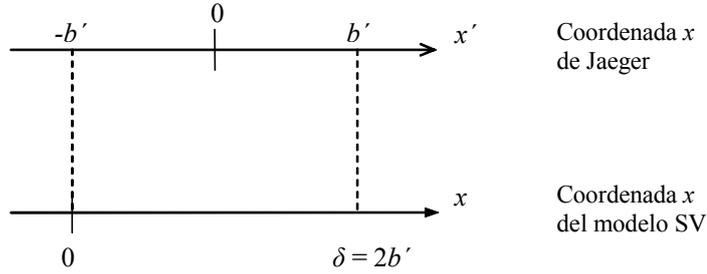


Figura 5.1: Cambio de coordenadas en  $x$  del sistema de Jaeger al modelo SV.

la coordenada  $x'$  en el sistema de coordenadas de Jaeger, tenemos que realizar el siguiente cambio,

$$x = x' + b'. \quad (5.27)$$

Por tanto, teniendo en cuenta (5.27) y sabiendo que  $\delta = 2b'$ , tenemos que,

$$x - \delta = x' - b'. \quad (5.28)$$

Además, las coordenadas  $y$  y  $z$  se intercambian de un sistema a otro según la figura 5.2.

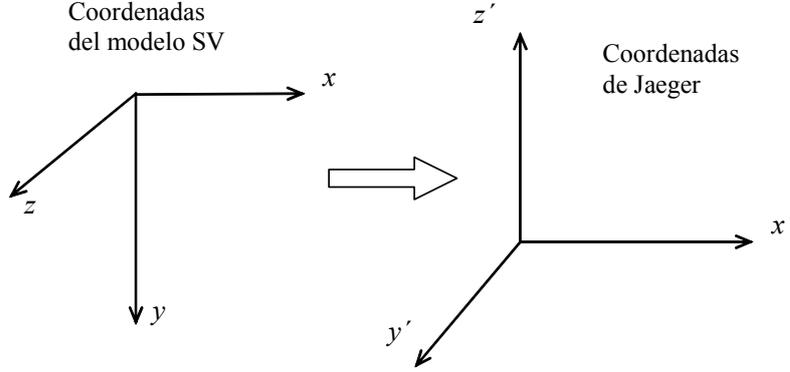


Figura 5.2: Cambio de coordenadas tridimensional entre los sistemas del modelo SV y Jaeger.

$$y = -z'. \quad (5.29)$$

Por otro lado, en el sistema de Jaeger, lo que consideramos que se mueve es la fuente a una velocidad  $v_f$ , mientras que en el modelo SV lo que se mueve es la pieza a una velocidad  $v_d$ . Según (2.15), ambas velocidades tienen la misma magnitud, pero signo opuesto, es decir,

$$v_d = -v_f. \quad (5.30)$$

Sustituyendo (5.27)-(5.29) en (5.26) y teniendo en cuenta (5.30), resulta,

$$T^{(0)}(x', z') = \frac{-q}{\pi \rho c v_f} \int_{v_f(x'+b')/2k}^{v_f(x'-b')/2k} e^u K_0 \left( \sqrt{\left(\frac{v_f z'}{2k}\right)^2 + u^2} \right) du. \quad (5.31)$$

Finalmente, utilizando las variables adimensionales,

$$X = \frac{v_f x'}{2k}, \quad Z = \frac{v_f z'}{2k}, \quad B = \frac{v_f b'}{2k}.$$

y cambiando el orden de los límites de integración en (5.31), obtenemos la expresión clásica de Jaeger obtenida en (3.30),

$$T^{(0)}(X, Z) = \frac{q}{\pi \rho c v_f} \int_{X-B}^{X+B} e^u K_0 \left( \sqrt{Z^2 + u^2} \right) du. \quad (5.32)$$

### 5.3. Temperatura $T^{(0)}$ en la superficie

En esta sección vamos a deducir dos expresiones equivalentes según el modelo SV y el de Jaeger para la distribución de temperaturas en la superficie de

la pieza rectificada en el caso clásico estacionario. Para ello, en primer lugar, deduciremos una expresión equivalente para  $T^{(0)}$  según el modelo SV. Obtendremos el resultado de una integral impropia que no se encuentra en las tablas de integrales más habituales.

### 5.3.1. Expresión equivalente para $T^{(0)}(x, y)$

Según (5.19), tenemos que la temperatura en el estado estacionario para rectificado seco continuo viene dada por la expresión,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q}{4\pi k_0} \times \int_0^\infty \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \frac{1}{s} \left\{ \int_0^\delta \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \right\} ds. \quad (5.33)$$

Evaluemos la integral sobre la variable  $x'$  en (5.33),

$$I_{x'} = \int_0^\delta \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx'. \quad (5.34)$$

que se puede expresar en términos de la función error como,

$$I_{x'} = \sqrt{\pi ks} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{\delta - x - v_d s}{2\sqrt{ks}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x + v_d s}{2\sqrt{ks}}\right) \right\}. \quad (5.35)$$

Sustituyendo este resultado en (5.33), obtenemos la siguiente expresión para  $T^{(0)}(x, y)$ ,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q\sqrt{k}}{4\sqrt{\pi}k_0} \times \int_0^\infty \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) s^{-1/2} \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{\delta - x - v_d s}{2\sqrt{ks}}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x + v_d s}{2\sqrt{ks}}\right) \right\} ds. \quad (5.36)$$

Haciendo ahora el cambio,  $s = \frac{\sigma^2}{4k}$ , llegamos a que (5.36) se convierte en,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{q}{4\sqrt{\pi}k_0} \times \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2}{\sigma^2}\right) \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - \delta}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k}\right) \right\} d\sigma. \quad (5.37)$$

### 5.3.2. Modelo SV

Según (5.37) tenemos que el campo de temperaturas  $T^{(0)}$  en superficie es,

$$T^{(0)}(x, 0) = \frac{q}{4\sqrt{\pi}k_0} \int_0^\infty \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - \delta}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k}\right) \right\} d\sigma. \quad (5.38)$$

Podemos observar las siguientes propiedades en la expresión dada en (5.38). En primer lugar, se satisface que,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T^{(0)}(x, 0) = 0, \quad (5.39)$$

debido a que  $\operatorname{erf}(\pm\infty) = \pm 1$ . Observemos también que debido a que  $\delta > 0$ , tenemos que,  $\forall x, \sigma$ ,

$$\frac{x}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k} > \frac{x - \delta}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k}.$$

Como la función error es una función creciente, tenemos que,

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k}\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{x - \delta}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k}\right) > 0. \quad (5.40)$$

Como la integral de una función positiva es una cantidad positiva, y dado que  $q > 0$ , (pues es el flujo de calor que entra en la pieza debido a la fricción con la muela), podemos concluir de (5.38) y (5.40) que,

$$T^{(0)}(x, 0) > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (5.41)$$

### 5.3.3. Modelo de Jaeger

Debido a la equivalencia de  $T^{(0)}$  con la solución de Jaeger para un sólido infinito (sección 5.2), y teniendo en cuenta la expresión dada en (3.34) para la temperatura en superficie del modelo de Jaeger, resulta,

$$T^{(0)}(x', 0) = \frac{qk}{\pi k_0 v_f} \left\{ \operatorname{Jg}\left(\frac{v_f}{2k}(x' + b')\right) - \operatorname{Jg}\left(\frac{v_f}{2k}(x' - b')\right) \right\}. \quad (5.42)$$

Considerando ahora el cambio de coordenadas del sistema de referencia de Jaeger al del modelo SV, (5.27) y (5.28),

$$\frac{v_f}{2k}(x' + b') = -\frac{v_d}{2k}x, \quad (5.43)$$

$$\frac{v_f}{2k}(x' - b') = -\frac{v_d}{2k}(x - \delta), \quad (5.44)$$

y sustituyendo (5.43) y (5.44) en (5.42), resulta que  $T^{(0)}$  en la superficie de la pieza rectificadora es,

$$T^{(0)}(x, 0) = \frac{qk}{\pi k_0 v_d} \left\{ \operatorname{Jg}\left(\frac{v_d}{2k}(\delta - x)\right) - \operatorname{Jg}\left(-\frac{v_d}{2k}x\right) \right\}. \quad (5.45)$$

### 5.3.4. Integral impropia

La expresión integral (5.38) dada para  $T^{(0)}(x, 0)$ , no está tabulada en las tablas de integrales habituales [20], sin embargo, comparando (5.38) con el resultado obtenido para  $T^{(0)}(x, 0)$  en (5.45), podemos dar un resultado para dicha integral. Efectivamente, tomando  $a = x$  y  $b = v_d/4k$  en (5.38), llegamos a,

$$T^{(0)}(a, 0) = \frac{q}{4\sqrt{\pi}k_0} \int_0^\infty \left\{ \operatorname{erf}\left(\frac{a}{\tau} + b\tau\right) - \operatorname{erf}\left(\frac{a - \delta}{\tau} + b\tau\right) \right\} d\tau. \quad (5.46)$$

Haciendo el mismo cambio en (5.45), obtenemos,

$$T^{(0)}(a, 0) = \frac{q}{4b\pi k_0} \{ \text{Jg}[2b(\delta - a)] - \text{Jg}(-2ba) \}. \quad (5.47)$$

Igualando ahora las expresiones dadas en (5.46) y (5.47), y despejando, concluimos que,

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \left\{ \text{erf}\left(\frac{a}{\tau} + b\tau\right) - \text{erf}\left(\frac{a-\delta}{\tau} + b\tau\right) \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{b\sqrt{\pi}} \{ \text{Jg}[2b(\delta - a)] - \text{Jg}(-2ba) \}, \end{aligned} \quad (5.48)$$

donde la función  $\text{Jg}(x)$  fue definida en (3.33).

#### 5.4. Solución para $T^{(1)}(x, y)$

En esta sección vamos a deducir una expresión para  $T^{(1)}$  en el caso clásico, es decir, rectificado seco y fricción continua. Según (5.7), la expresión para  $T^{(1)}$  en el estado clásico estacionario se puede expresar como,

$$\begin{aligned} T^{(1)}(x, y) &= \frac{y}{8\pi k} \int_{-\infty}^\infty T(x', 0) \exp\left(\frac{v_d(x' - x)}{2k}\right) \times \\ & \left\{ \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2 + (x' - x)^2}{4ks} - \frac{v_d^2}{4k} s\right) \frac{ds}{s^2} \right\} dx'. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Para evaluar la integral dada en (5.49) sobre la variable  $s$ ,

$$I_s := \int_0^\infty \exp\left(-\frac{y^2 + (x' - x)^2}{4ks} - \frac{v_d^2}{4k} s\right) \frac{ds}{s^2}, \quad (5.50)$$

podemos hacer uso de la representación integral de las funciones de Bessel de tercera especie (5.24), tomando,

$$z := \frac{|v_d|}{2k} \sqrt{y^2 + (x - x')^2}, \quad (5.51)$$

llegando a,

$$I_s = \frac{v_d^2}{k} \frac{K_1(z)}{z}. \quad (5.52)$$

Sustituyendo (5.52) y (5.51), en (5.49), resulta,

$$\begin{aligned} T^{(1)}(x, y) &= \frac{y v_d^2}{8\pi k^2} \int_{-\infty}^\infty T(x', 0) \exp\left(\frac{v_d(x' - x)}{2k}\right) \times \\ & \frac{K_1\left(\frac{|v_d|}{2k} \sqrt{y^2 + (x - x')^2}\right)}{\frac{|v_d|}{2k} \sqrt{y^2 + (x - x')^2}} dx'. \end{aligned} \quad (5.53)$$

Haciendo en (5.53) el cambio  $X' = v_d x' / 2k$  y tomando las variables adimensionales,

$$X = \frac{|v_d|x}{2k}, \quad Y = \frac{|v_d|y}{2k}. \quad (5.54)$$

tenemos finalmente que,

$$T^{(1)}(X, Y) = \frac{Y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(X', 0) e^{X'-X} \frac{K_1\left(\sqrt{Y^2 + (X - X')^2}\right)}{\sqrt{Y^2 + (X - X')^2}} dX'. \quad (5.55)$$

## 5.5. Temperatura $T^{(1)}$ en la superficie

Según la expresión dada en (5.55) para la temperatura  $T^{(1)}$ , tenemos que su expresión para  $Y \rightarrow 0^+$  (recordemos que  $Y \geq 0$ ) es,

$$T^{(1)}(X, 0) = \lim_{Y \rightarrow 0^+} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(X', 0) e^{X'-X} N(X', Y) dX', \quad (5.56)$$

donde hemos definido la función núcleo de  $T^{(1)}$  como,

$$N(X', Y) := Y \frac{K_1\left(\sqrt{Y^2 + (X - X')^2}\right)}{\sqrt{Y^2 + (X - X')^2}}. \quad (5.57)$$

### 5.5.1. Función núcleo en la superficie

Vamos a ver que la función núcleo se comporta como una delta de Dirac cuando  $Y \rightarrow 0^+$ . Efectivamente, en  $X' \neq X$  tenemos que,

$$\lim_{Y \rightarrow 0^+} N(X', Y) = 0. \quad (5.58)$$

Sin embargo, en  $X' = X$ , sabiendo que  $K_1(0^+) = \infty$ , tenemos que,

$$\lim_{Y \rightarrow 0^+} N(X, Y) = \lim_{Y \rightarrow 0^+} K_1(|Y|) = \infty. \quad (5.59)$$

Aunque la función núcleo tenga un valor infinito en  $X' = X$  cuando  $Y \rightarrow 0^+$ , su integral es finita. Efectivamente, definamos la siguiente integral,

$$I_N := \lim_{Y \rightarrow 0^+} \int_{-\infty}^{\infty} N(X', Y) dX'. \quad (5.60)$$

Haciendo el cambio  $\chi = X' - X$  y teniendo en cuenta la paridad del integrando que resulta, llegamos a,

$$I_N = \lim_{Y \rightarrow 0^+} 2Y \int_0^{\infty} \frac{K_1\left(\sqrt{Y^2 + \chi^2}\right)}{\sqrt{Y^2 + \chi^2}} d\chi. \quad (5.61)$$

Realizando ahora los cambios:  $u = \sqrt{Y^2 + \chi^2}$  y  $u = Y \cosh z$ , resulta,

$$I_N = \lim_{Y \rightarrow 0^+} 2Y \int_0^\infty K_1(Y \cosh z) dz. \quad (5.62)$$

Según la representación de  $K_n$  dada en la bibliografía [12], tenemos que,

$$K_1(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(x/2)^{2k+1}}{k! (k+1)!} \times \left[ 2 \log \left( \frac{x}{2} \right) - \psi(k+1) - \psi(k+n+1) \right],$$

por tanto,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x K_1(\lambda x) = \frac{1}{\lambda}. \quad (5.63)$$

Aplicando (5.63) a (5.62), obtenemos,

$$I_N = 2 \int_0^\infty \frac{dz}{\cosh z} = \pi. \quad (5.64)$$

Por tanto, de acuerdo a (5.58), (5.59) y (5.64), tenemos que la función núcleo en la superficie se comporta como un delta de Dirac, es decir,

$$\lim_{y \rightarrow 0^\pm} \frac{y}{\pi} \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + u^2}\right)}{\sqrt{y^2 + u^2}} = \pm \delta_D(u). \quad (5.65)$$

### 5.5.2. Resultado para $T^{(1)}$ en la superficie

Sabiendo que la función núcleo se comporta en la superficie como una delta de Dirac, podemos sustituir (5.65) en (5.56), obteniendo,

$$T^{(1)}(X, 0) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} T(X', 0) e^{X'-X} \delta_D(X - X') dX' = \frac{T(X, 0)}{2},$$

es decir,

$$T(X, 0) = 2T^{(1)}(X, 0). \quad (5.66)$$

Como, por definición, la temperatura es la suma  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$ , (5.8),

$$T(X, 0) = T^{(0)}(X, 0) + T^{(1)}(X, 0), \quad (5.67)$$

sustituyendo (5.66) en (5.67), llegamos a que  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$  son equivalentes en la superficie,

$$T^{(1)}(X, 0) = T^{(0)}(X, 0). \quad (5.68)$$

Ahora bien, de acuerdo a (5.68) y (5.67), queda que la temperatura en superficie es,

$$T(X, 0) = 2T^{(0)}(X, 0). \quad (5.69)$$

Debido a que el resultado obtenido para  $T^{(0)}$  en (5.32), es equivalente al resultado obtenido en el modelo de Jaeger para un sólido infinito (3.30), podemos deducir, a partir de (3.35) y (5.69), que la temperatura en superficie de la pieza rectificadora coincide en los modelos de Jaeger y SV,

$$T_{\text{Jaeger}}(x, 0) = T_{\text{SV}}(x, 0). \quad (5.70)$$

## 5.6. Campo de temperaturas en el modelo SV

A partir de (5.26) y teniendo en cuenta que  $k_0 = k\rho c$ , podemos obtener el campo de temperaturas en variables adimensionales (5.54) para  $T^{(0)}$ ,

$$T^{(0)}(X, Y) = \frac{qk}{\pi k_0 v_d} \int_{X-\Delta}^X e^{-u} K_0\left(\sqrt{Y^2 + u^2}\right) du, \quad (5.71)$$

siendo  $\Delta := v_d \delta / 2k$ . Para obtener una expresión del campo de temperaturas  $T^{(1)}$ , podemos sustituir (5.69) en (5.55), y hacer el cambio  $u = X - X'$ , con lo que obtenemos,

$$T^{(1)}(X, Y) = \frac{Y}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} T(X - u, 0) e^{-u} \frac{K_1\left(\sqrt{Y^2 + u^2}\right)}{\sqrt{Y^2 + u^2}} du, \quad (5.72)$$

donde, según (5.69), la temperatura en superficie dada en (5.45) en variables adimensionales es,

$$T(X, 0) = 2T^{(0)}(X, 0) \quad (5.73)$$

$$= \frac{2qk}{\pi k_0 v_d} \{\text{Jg}(\Delta - X) - \text{Jg}(-X)\}. \quad (5.74)$$

Por tanto, el campo de temperaturas en el modelo SV resulta finalmente,

$$T_{\text{SV}}(X, Y) = T^{(0)}(X, Y) + T^{(1)}(X, Y). \quad (5.75)$$

Observemos que, de acuerdo a (5.39) y (5.69), también se cumple,

$$\lim_{X \rightarrow \pm\infty} T(X, 0) = 0, \quad (5.76)$$

donde, según (5.70), la condición (5.76) es idéntica para los modelos de Jaeger y SV.

## 5.7. Equivalencia del modelo de Jaeger y SV

### 5.7.1. Condiciones de contorno

Según el modelo SV, la condición de contorno en la superficie viene dada por (4.7). Sabiendo que en el caso clásico estacionario, el término de la fricción

viene dado por (5.5) y el de convección es nulo (5.4), tenemos que la condición de contorno se expresa como,

$$k_0 \partial_y T(x, 0) = -q H(x) H(\delta - x). \quad (5.77)$$

Teniendo en cuenta el cambio de coordenadas entre el modelo SV y el de Jaeger dado en (5.27)-(5.29), obtenemos,

$$k_0 \partial_{z'} T(x', 0) = q H(x' + b) H(b - x'). \quad (5.78)$$

Podemos observar que la condición de contorno obtenida para el modelo SV en (5.78) es equivalente a la obtenida en el modelo de Jaeger dada en (3.39).

### 5.7.2. Equivalencia entre $T^{(0)}$ y $T^{(1)}$

Hasta ahora hemos visto cómo el modelo de Jaeger describe el proceso del rectificado plano considerando un sólido seminfinito. Para ello, Jaeger resuelve la ecuación del calor para una fuente móvil en el estado estacionario con la condición de contorno dada en (3.39). Por otro lado, hemos desarrollado una expresión, dada en (5.75), para el campo de temperaturas según el modelo SV en el caso clásico estacionario. Esta expresión resuelve la ecuación del calor con convección según la condición de contorno dada en (5.77). Dado que la ecuación del calor con convección es equivalente a la ecuación del calor para una fuente móvil (véase sección 2.3), y que las condiciones de contorno de ambos problemas son idénticas, (3.39) y (5.78), las soluciones dadas por ambos modelos resuelven el mismo problema estacionario,

$$\nabla^2 T(x, y) = 0, \quad (5.79)$$

$$k_0 T_y(x, 0) = -q H(x) H(\delta - x), \quad (5.80)$$

con la misma condición dada en (5.76),

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T(x, 0) = 0. \quad (5.81)$$

Como el problema planteado en (5.79)-(5.81), tiene solución única [13], concluimos que,

$$T_{SV}(x, y) = T_{Jaeger}(x, y). \quad (5.82)$$

Teniendo en cuenta la expresión dada en el modelo de Jaeger (3.35), y la equivalencia que se mostró en la sección 5.2, resulta que,

$$T_{Jaeger}(x, y) = 2T^{(0)}(x, y). \quad (5.83)$$

Por otro lado, teniendo en cuenta la expresión para el modelo SV (5.75) y la del modelo de Jaeger (5.83), si ambos modelos aportan la misma solución (5.82), ha de cumplirse que,

$$T^{(1)}(x, y) = T^{(0)}(x, y). \quad (5.84)$$

### 5.7.3. Integral impropia

Recordando el producto de convolución para la transformada de Fourier, podemos observar que el campo de temperaturas debido a la parte antisimétrica dado en (5.72), se puede expresar de la siguiente manera,

$$\hat{T}^{(1)}(\omega, y) = \hat{T}(\omega, 0) \hat{n}(\omega, y), \quad (5.85)$$

donde hemos utilizado la siguiente notación para la transformada de Fourier,

$$\mathcal{F}[f(x)](\omega) := \hat{f}(\omega),$$

y donde hemos definido la función  $\hat{n}$  como la transformada de Fourier de la función núcleo  $n$ ,

$$\hat{n}(\omega, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n(u, y) e^{i\omega u} du,$$

habiendo definido la función núcleo  $n$  como,

$$n(u, y) := ye^{-u} \frac{K_1\left(\sqrt{y^2 + u^2}\right)}{\sqrt{y^2 + u^2}}. \quad (5.86)$$

Teniendo en cuenta (5.69), podemos expresar (5.85) como,

$$\hat{T}^{(1)}(\omega, y) = 2\hat{T}^{(0)}(\omega, 0) \hat{n}(\omega, y). \quad (5.87)$$

Por otro lado, la expresión dada en (5.71) para  $T^{(0)}$  se puede expresar como,

$$T^{(0)}(x, y) = \frac{qk}{\pi k_0 v_d} \int_{-\infty}^{\infty} H(x-u) H(u-x+\Delta) m(u, y) du, \quad (5.88)$$

donde  $H(x)$  es la función escalón o de Heaviside y donde hemos definido,

$$m(u, y) := e^{-u} K_0\left(\sqrt{y^2 + u^2}\right). \quad (5.89)$$

Sabiendo que  $\Delta > 0$ , podemos derivar con respecto a  $x$  en (5.88), obteniendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(0)}}{\partial x} &= \frac{qk}{\pi k_0 v_d} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta_D(u-x+\Delta) - \delta_D(u-x)] m(u, y) du \\ &= \frac{qk}{\pi k_0 v_d} [m(x-\Delta, y) - m(x, y)], \end{aligned} \quad (5.90)$$

donde  $\delta_D(x)$  es la función delta de Dirac. Recordando ahora la propiedad para la transformada de Fourier de la derivada de una función, resulta que,

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial T^{(0)}}{\partial x}\right)(\omega, y) = -i\omega \hat{T}^{(0)}(\omega, y). \quad (5.91)$$

Tomando la transformada de Fourier en ambos miembros de (5.90), y teniendo en cuenta (5.91), llegamos a,

$$-i\omega\hat{T}^{(0)}(\omega, y) = \frac{qk}{\pi k_0 v_d} \mathcal{F}[m(x - \Delta, y) - m(x, y)](\omega). \quad (5.92)$$

Teniendo en cuenta las propiedades de la transformada de Fourier, llegamos a,

$$\begin{aligned} \hat{T}^{(0)}(\omega, y) &= \frac{qk}{\pi k_0 v_d} \frac{1 - e^{i\Delta\omega}}{i\omega} \hat{m}(\omega, y) \\ &= h(\omega) \hat{m}(\omega, y), \end{aligned} \quad (5.93)$$

donde hemos abreviado la notación definiendo la función,

$$h(\omega) := \frac{qk}{\pi k_0 v_d} \frac{1 - e^{i\Delta\omega}}{i\omega}.$$

Tomando la transformada de Fourier en (5.84), tenemos,

$$\hat{T}^{(1)}(\omega, y) = \hat{T}^{(0)}(\omega, y). \quad (5.94)$$

Sustituyendo (5.87) y (5.93), en (5.94), obtenemos,

$$2\hat{T}^{(0)}(\omega, 0) \hat{n}(\omega, y) = h(\omega) \hat{m}(\omega, y). \quad (5.95)$$

Volviendo a tener en cuenta (5.93), para  $y = 0$ , tenemos que,

$$\hat{T}^{(0)}(\omega, 0) = h(\omega) \hat{m}(\omega, 0). \quad (5.96)$$

Sustituyendo (5.96) en (5.95), llegamos a,

$$2\hat{m}(\omega, 0) \hat{n}(\omega, y) = \hat{m}(\omega, y). \quad (5.97)$$

Aplicando de nuevo el producto de convolución para la transformada de Fourier en (5.97), tenemos que,

$$m(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} m(x - u, 0) n(u, y) du. \quad (5.98)$$

Teniendo en cuenta las definiciones dadas en (5.89) y (5.86), y simplificando, resulta finalmente,

$$K_0(\sqrt{x^2 + y^2}) = \frac{|y|}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} K_0(|x - u|) \frac{K_1(\sqrt{y^2 + u^2})}{\sqrt{y^2 + u^2}} du. \quad (5.99)$$

Aplicando la representación de la delta de Dirac que se obtuvo en (5.65), se puede comprobar que (5.99) se satisface cuando  $y \rightarrow 0^+$ . Aunque la integral impropia ofrecida en (5.99) no se encuentra en las tablas de integrales más habituales [20], se puede comprobar que se satisface numéricamente. En las figuras 5.3 y ?? se

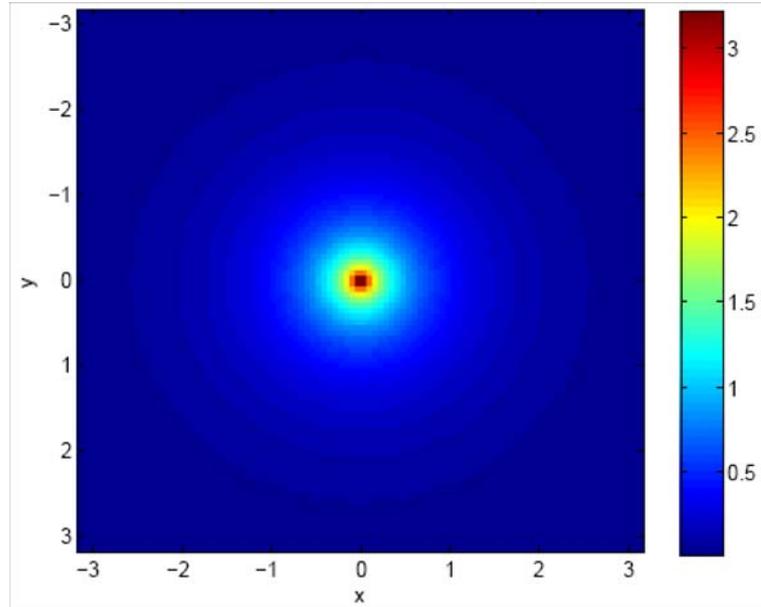


Figura 5.3: Resultado numérico para ambos miembros de la ecuación (5.99).

han representado las gráficas de las funciones de ambos miembros de la ecuación (5.99). El dominio de representación se ha escogido  $(x, y) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ , pues es donde la función  $K_0(\sqrt{x^2 + y^2})$  tiene un valor significativo.

La diferencia entre la evaluación de ambos miembros de (5.99) en la figura 5.3 es compatible con el error cometido en el cálculo numérico,

$$ECM_{\text{rel}} = 5,62 \cdot 10^{-6} \ll 1,$$

donde  $ECM_{\text{rel}}$  indica el error cuadrático medio relativo entre ambos cálculos de la gráfica de la figura 5.3. En el Apéndice A, sección A.2.8, se detallan los programas efectuados en MATLAB para la elaboración de las gráficas presentadas en las figuras de esta sección.

## 5.8. Temperatura máxima

Según (5.79), el campo de temperaturas  $T(x, y)$  es una función armónica. Sabemos por el principio del máximo para funciones armónicas [22], que éste se ha de encontrar en la frontera de la región considerada, es decir,  $y = 0$ , en nuestro caso. Teniendo en cuenta la equivalencia de los modelos de Jaeger y SV (5.82)-(5.83), tenemos que hallar, por tanto, el máximo en  $x$  de la función

$T^{(0)}(x, 0)$ . Para ello, derivemos la expresión (5.38) con respecto a  $x$ , obteniendo,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T^{(0)}(x, 0)}{\partial x} &= \frac{q}{2\pi k_0} \int_0^\infty \left\{ \exp \left[ - \left( \frac{x}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k} \right)^2 \right] \right. \\ &\quad \left. - \exp \left[ - \left( \frac{x - \delta}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k} \right)^2 \right] \right\} \frac{d\sigma}{\sigma}, \end{aligned} \quad (5.100)$$

donde hemos aplicado la regla de Leibniz y la derivada de la función error. Para operar en (5.100), por simplicidad consideraremos la función,

$$R(\chi) := \int_0^\infty \exp \left[ - \left( \frac{\chi}{\sigma} + \frac{v_d \sigma}{4k} \right)^2 \right] \frac{d\sigma}{\sigma}. \quad (5.101)$$

Desarrollando el exponente del integrando en (5.101), obtenemos,

$$R(\chi) = \exp \left( - \frac{v_d \chi}{2k} \right) \int_0^\infty \exp \left( - \frac{\chi^2}{\sigma^2} - \frac{v_d^2 \sigma^2}{16k^2} \right) \frac{d\sigma}{\sigma}.$$

Realizando el cambio de variable,  $t = \frac{v_d^2 \sigma^2}{16k^2}$ ,  $dt = \frac{v_d^2 \sigma}{8k^2} d\sigma$ , donde se cumple  $\frac{d\sigma}{\sigma} = \frac{dt}{2t}$ , llegamos a,

$$R(\chi) = \exp \left( - \frac{v_d \chi}{2k} \right) \frac{1}{2} \int_0^\infty \exp \left( - \frac{z^2}{4t} - t \right) \frac{dt}{t},$$

donde hemos de tomar,

$$z = \left| \frac{v_d \chi}{2k} \right|.$$

De acuerdo con la representación integral de  $K_0$ , (5.24), podemos expresar la función  $R$  de la siguiente forma,

$$R(\chi) = \exp \left( - \frac{v_d \chi}{2k} \right) K_0 \left( \left| \frac{v_d \chi}{2k} \right| \right).$$

Por tanto, la derivada parcial dada en (5.100), queda,

$$\frac{\partial T^{(0)}(x, 0)}{\partial x} = \frac{q}{2\pi k_0} [R(x) - R(x - \delta)]. \quad (5.102)$$

Teniendo en cuenta que las funciones de Bessel  $K_\nu(x)$  se hacen infinito cuando  $x \rightarrow 0$ , [12], tenemos que,

$$\frac{\partial T^{(0)}(0, 0)}{\partial x} = \infty, \quad (5.103)$$

$$\frac{\partial T^{(0)}(\delta, 0)}{\partial x} = -\infty. \quad (5.104)$$

Para determinar los intervalos de crecimiento y decrecimiento de  $T^{(0)}(x, 0)$  hemos de calcular el signo de la expresión dada en (5.102). Para ello, consideremos por simplicidad la función,

$$r(x) := e^{-x} K_0(|x|) = \begin{cases} e^{-x} K_0(-x) & x < 0 \\ e^{-x} K_0(x) & x > 0 \end{cases} \quad (5.105)$$

donde se cumple que,

$$R(x) = r\left(\frac{v_d}{2k}x\right), \quad R'(x) = \frac{v_d}{2k}r'\left(\frac{v_d}{2k}x\right). \quad (5.106)$$

Teniendo en cuenta que  $K'_0(x) = -K_1(x)$ , [12], podemos derivar la expresión para  $r$  dada en (5.105), obteniendo,

$$r'(x) = \begin{cases} -e^{-x} [K_0(-x) - K_1(-x)] & x < 0 \\ -e^{-x} [K_0(x) + K_1(x)] & x > 0 \end{cases} \quad (5.107)$$

Podemos reescribir (5.107) de la siguiente manera,

$$r'(x) = -e^{-x} [K_0(|x|) + \text{sign}(x) K_1(|x|)].$$

Como según [16],  $K_1(x) > K_0(x) > 0, \forall x > 0$ , resulta que,

$$r'(x) > 0, \quad x < 0, \quad (5.108)$$

$$r'(x) < 0, \quad x > 0. \quad (5.109)$$

### 5.8.1. Caso $v_d > 0$

Debido a que  $k$  es una magnitud física positiva,  $k > 0$ , tenemos que, de acuerdo a (5.106) y (5.108)-(5.109),

$$R'(x) > 0, \quad x < 0, \quad (5.110)$$

$$R'(x) < 0, \quad x > 0. \quad (5.111)$$

Es decir, la función  $R$  es creciente en  $x < 0$  y decreciente en  $x > 0$ . Observemos que como  $\delta > 0$ , siempre se satisface que,  $x - \delta < x$ .

Para valores negativos,  $x - \delta < x < 0$ , como la función  $R$  es creciente,  $R(x - \delta) < R(x)$ , y por tanto, según (5.102), tenemos,

$$\left. \frac{\partial T^{(0)}(x, 0)}{\partial x} \right|_{v_d > 0} > 0, \quad x \leq 0, \quad (5.112)$$

donde hemos tenido en cuenta (5.103).

Para valores positivos,  $0 < x - \delta < x$ , como la función  $R$  es decreciente,  $R(x - \delta) > R(x)$ , y por tanto, según (5.102), tenemos,

$$\left. \frac{\partial T^{(0)}(x, 0)}{\partial x} \right|_{v_d > 0} < 0, \quad x \geq \delta. \quad (5.113)$$

donde hemos tenido en cuenta (5.104).

Según (5.112) y (5.113),  $T^{(0)}(x, 0)$  no presenta ningún extremo en  $x \notin (0, \delta)$ . Aplicando el teorema de Bolzano a la función  $\partial_x T^{(0)}(x, 0)$ , teniendo en cuenta

de nuevo (5.112) y (5.113), concluimos que  $T^{(0)}(x, 0)$  presenta al menos un extremo en  $c \in (0, \delta)$ ,

$$\left. \frac{\partial T^{(0)}(c, 0)}{\partial x} \right|_{v_d > 0} = 0. \quad (5.114)$$

Podemos observar que el extremo en  $x = c$  es único debido a que la función  $\partial_x T^{(0)}(x, 0)$  es decreciente en  $x \in (0, \delta)$ . Efectivamente, derivando en (5.102), obtenemos,

$$\frac{\partial^2 T^{(0)}(x, 0)}{\partial x^2} = \frac{q}{2\pi k_0} [R'(x) - R'(x - \delta)]. \quad (5.115)$$

Ahora bien, para  $0 < x < \delta$ , tenemos, según (5.110)-(5.111), que,

$$R'(x) < 0, \quad x > 0, \quad (5.116)$$

$$R'(x - \delta) > 0, \quad x < \delta. \quad (5.117)$$

Por tanto, recordando que  $q > 0$ , pues es el flujo entrante de calor en la pieza, y que  $k_0$  es una magnitud física positiva,  $k_0 > 0$ , según (5.115) y (5.116)-(5.117) resulta que,

$$\frac{\partial^2 T^{(0)}(x, 0)}{\partial x^2} < 0, \quad x \in (0, \delta). \quad (5.118)$$

Como según (5.103)-(5.104), la función  $\partial_x T^{(0)}(x, 0)$  cambia de signo en el intervalo  $[0, \delta]$ , y según (5.118)  $\partial_x T^{(0)}(x, 0)$  es una función decreciente en  $x \in (0, \delta)$ , concluimos que,

$$\exists! c / \partial_x T^{(0)}(c, 0) = 0. \quad (5.119)$$

Teniendo ahora en cuenta (5.41), (5.39) y (5.119), concluimos que la temperatura máxima de  $T^{(0)}$  en la superficie se halla en  $x = c$ .

$$T_{\text{máx}}^{(0)}(x, 0) = T^{(0)}(c, 0), \quad x \in \mathbb{R}.$$

### 5.8.2. Caso $v_d < 0$

Aplicando que la función error es impar, a la expresión de  $T^{(0)}(x, 0)$  dada en (5.38), tenemos que,

$$T^{(0)}(\delta - x, 0) \Big|_{v_d} = \frac{q}{4\sqrt{\pi}k_0} \int_0^\infty \left\{ -\operatorname{erf}\left(\frac{x - \delta}{\sigma} + \frac{-v_d\sigma}{4k}\right) + \operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sigma} + \frac{-v_d\sigma}{4k}\right) \right\} d\sigma.$$

Es decir,

$$T^{(0)}(\delta - x, 0) \Big|_{v_d} = T^{(0)}(x, 0) \Big|_{-v_d}. \quad (5.120)$$

Por tanto, calculando el máximo  $c \in (0, \delta)$  para  $v_d > 0$  según (5.114), podemos obtener el máximo  $c' = \delta - c$ , con  $c' \in (0, \delta)$ , para el caso  $v_d < 0$ .

En la sección 5.1.2 ya comprobamos que la temperatura máxima se alcanza en el estado estacionario. Una vez localizado éste máximo en la superficie  $x_{\text{máx}}$ , la temperatura máxima la podremos hallar según la ecuación (5.69),

$$T_{\text{máx}} = 2T^{(0)}(x_{\text{máx}}, 0).$$

En el Apéndice A, sección A.2.6, se detalla un código en MATLAB para hallar este máximo numéricamente.

### 5.8.3. Resultados numéricos

Hemos tomado como parámetros de rectificado  $\delta = 2,663 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ ,  $v_d = 0,53 \text{ m/s}$  y  $q = 5,89 \cdot 10^7 \text{ W/m}^2$ , siendo las propiedades térmicas de la pieza las de una aleación de titanio VT20 [23],  $k_0 = 13 \text{ W/(mK)}$  y  $k = 4,23 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$ , y una temperatura inicial  $T_0 = 300 \text{ K}$  (temperatura ambiente). Hace más de cuarenta años que empezaron a introducirse en la industria de la aviación rusa las aleaciones de titanio para la construcción de motores. Las ventajas de estas aleaciones en términos de resistencia a la corrosión son bien conocidas para las principales compañías del sector [24].

En la figura 5.4 se puede observar la distribución de la temperatura en la superficie de la pieza. Aunque aparentemente la gráfica no parezca derivable en  $x = 0, \delta$ , en las figura 5.5 se ofrece el comportamiento de la temperatura en el entorno de  $x = 0, \delta$ . Para el cálculo del valor de la temperatura máxima en la superficie, se ha hecho uso de la expresión para  $T^{(0)}(x, 0)$  dada en (5.45), debido a su rapidez computacional.

$$T_{\text{máx}} = 1042,23 \text{ K}. \quad (5.121)$$

$$\begin{aligned} x_{\text{máx}} &= 0,0072 \delta, & v_d &= 0,53 \text{ m/s}. \\ x_{\text{máx}} &= 0,9928 \delta, & v_d &= -0,53 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Estos valores están de acuerdo con el campo de temperaturas obtenido en las figuras 5.7 y 5.8. En el Apéndice A, secciones A.1 y A.2, se detallan los programas elaborados en MATLAB que se han realizado para representar gráficamente los resultados que se presentan en las figuras de esta sección.

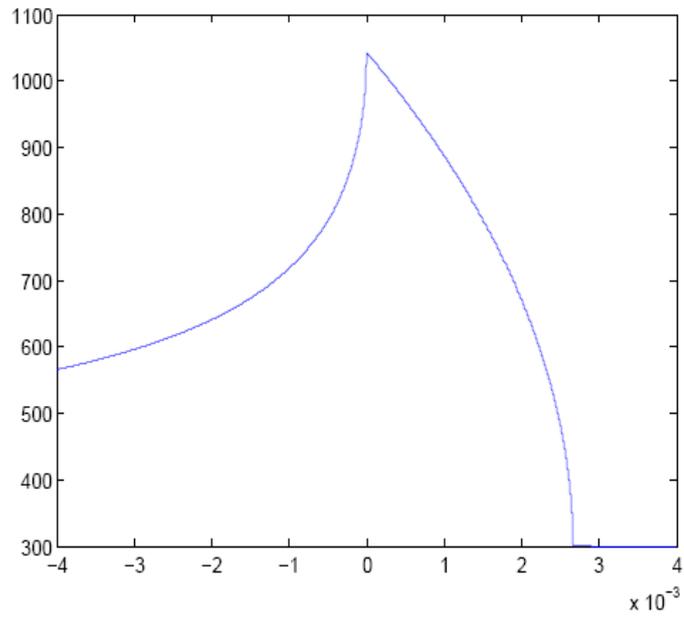


Figura 5.4: Temperatura en la superficie de la pieza  $2T^{(0)}(x,0)$  para  $x \in (-3\delta/2, 3\delta/2)$ .

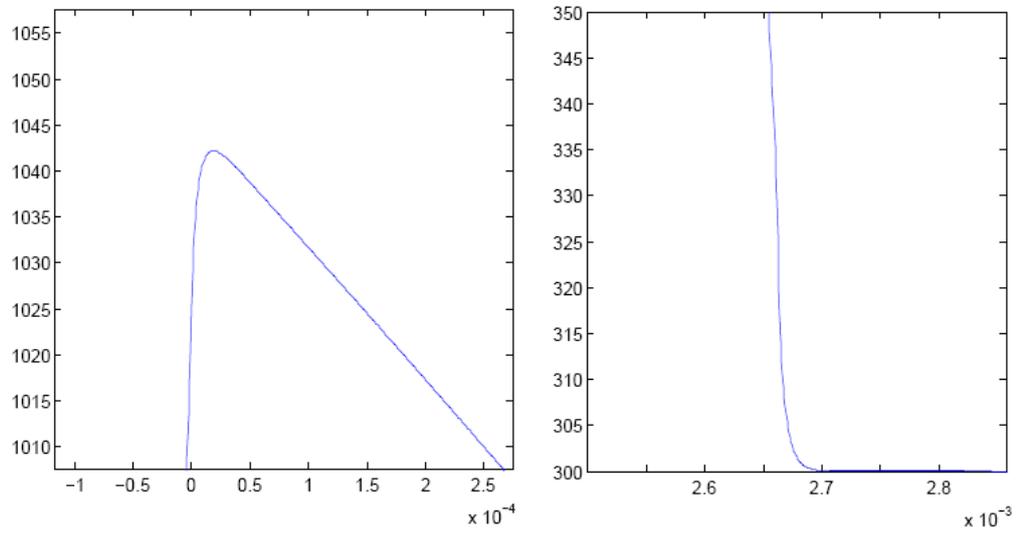


Figura 5.5: Temperatura en superficie en los entornos de  $x = 0, \delta$ .

## 5.9. Comparación numérica de los modelos de Jaeger y SV

A continuación vamos a presentar el campo de temperaturas dentro de la pieza calculado por las expresiones dadas por los modelos de Jaeger y SV respectivamente. En las figuras de esta sección se han usado los mismos parámetros de rectificado que en la sección 5.8.3. En la figura 5.6, se ha representado el resultado para  $T^{(1)}(x, y)$  de acuerdo a la expresión (5.55).

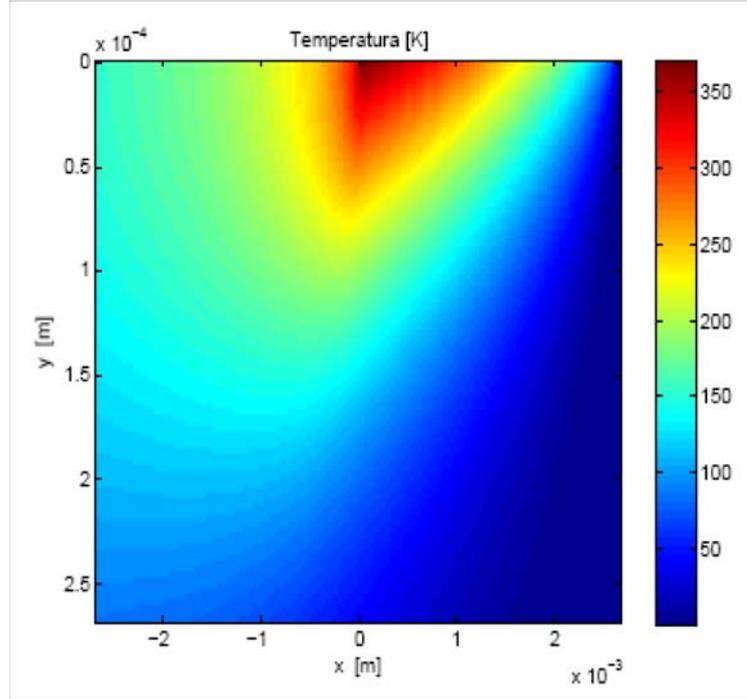


Figura 5.6: Resultado obtenido para  $T^{(1)}(x, y)$  en  $(x, y) \in [-\delta, \delta] \times [0, \delta/10]$ .

En la figura 5.8 se ha obtenido el campo de temperaturas completo  $\tilde{T} = T_0 + T^{(0)} + T^{(1)}$  según el modelo SV y en la figura 5.7 se ha obtenido el campo de temperaturas según el modelo de Jaeger,  $\hat{T} = T_0 + 2T^{(0)}$ . Para la temperatura inicial se ha tomado una temperatura ambiente de  $T_0 = 300K$ .

Para comparar los resultados obtenidos por los modelos de Jaeger y Samara-Valencia, (figuras 5.7 y 5.8), podemos calcular el error cuadrático medio relativo entre ambas gráficas, obteniéndose,

$$ECM_{\text{rel}} = 3,34 \cdot 10^{-7} \ll 1.$$

En el Apéndice A, secciones A.1 y A.2, se detallan los programas elaborados en

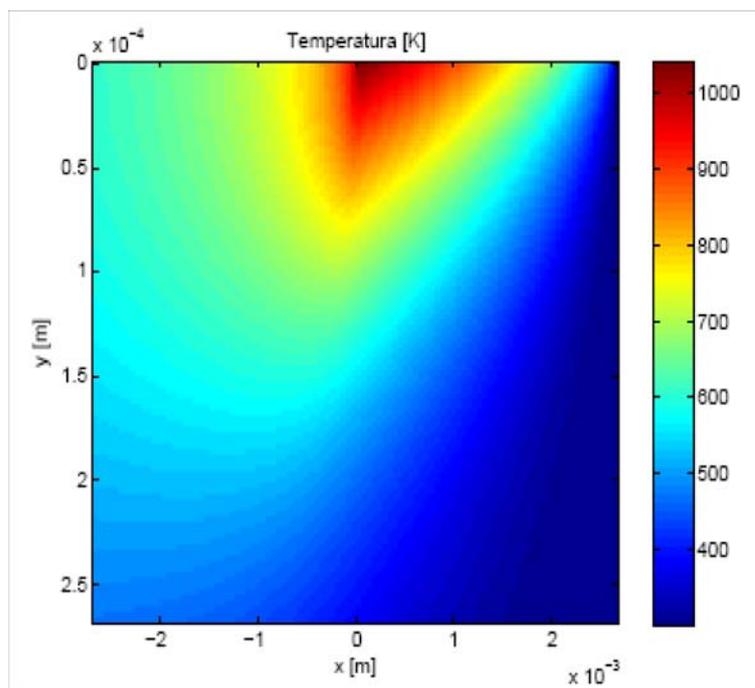


Figura 5.7: Resultado obtenido para  $\hat{T}(x, y)$  según el modelo de Jaeger en  $(x, y) \in [-\delta, \delta] \times [0, \delta/10]$ .

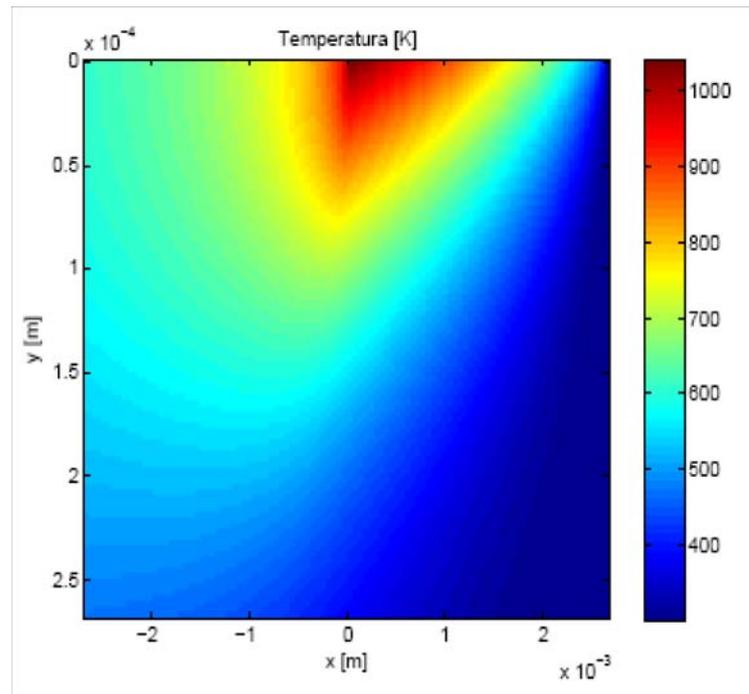


Figura 5.8: Resultado obtenido para  $\tilde{T}(x, y)$  según el modelo SV en  $(x, y) \in [-\delta, \delta] \times [0, \delta/10]$ .

MATLAB que se han realizado para representar gráficamente los resultados que se presentan en las figuras de esta sección.



## Capítulo 6

# Rectificado con refrigerante

En este capítulo vamos a obtener una expresión explícita del campo de temperaturas resolviendo la ecuación integral del modelo SV para el caso más sencillo del rectificado con refrigerante. Este caso supone tomar un coeficiente de transmisión de calor constante del refrigerante sobre toda la pieza. La ecuación integral se resolverá iterativamente, partiendo de una aproximación inicial que sólo considera el término de fricción,  $T^{(0)}$ , y llegando a una solución exacta. Para ello, primero se abordará el problema en la superficie de la pieza, y luego en profundidad, utilizando frecuentemente muchas de las propiedades de ciertas funciones especiales, como las funciones hipergeométricas confluentes o las funciones de Hermite. A partir de la solución obtenida se ofrecerá un procedimiento para hallar el máximo de la temperatura en el estado estacionario y el tiempo que dura el transitorio. Por último, se presentarán unas gráficas de la evolución de la temperatura en superficie y del campo de temperatura para distintos coeficientes de transmisión de calor del refrigerante.

### 6.1. Expresión para $T^{(0)}(t, x, y)$

La expresión que teníamos para la evolución temporal del campo de temperaturas  $T^{(0)}$  era, según (5.2), la siguiente,

$$T^{(0)}(t, x, y) := \frac{q}{4\pi k_0} \times \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \left\{ \int_0^\delta \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \right\} \frac{ds}{s}. \quad (6.1)$$

De acuerdo a (5.35), la integral sobre la variable  $x'$  en (6.1) es,

$$\begin{aligned} I_{x'} &= \int_0^\delta \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \\ &= \sqrt{\pi ks} \operatorname{ERF}(x, s), \end{aligned} \quad (6.2)$$

donde hemos definido la función,

$$\text{ERF}(x, s) := \text{erf}\left(\frac{x + v_d s}{2\sqrt{ks}}\right) - \text{erf}\left(\frac{v_d s + x - \delta}{2\sqrt{ks}}\right). \quad (6.3)$$

Sustituyendo (6.2) en (5.33), obtenemos la siguiente expresión para  $T^{(0)}(t, x, y)$ ,

$$T^{(0)}(t, x, y) = \frac{q\sqrt{k}}{4\sqrt{\pi}k_0} \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \text{ERF}(x, s) \frac{ds}{s^{1/2}}. \quad (6.4)$$

## 6.2. Expresión para $T^{(1)}(t, x, y)$

En esta sección vamos a analizar el campo de temperaturas en la pieza rectificada cuando aplicamos líquido refrigerante sobre su superficie. Consideraremos que el coeficiente de transmisión de calor entre la pieza y el medio ambiente es constante en todo momento y en todo punto de la superficie de la pieza, es decir, según (5.4),

$$b(t, x) = \alpha. \quad (6.5)$$

Por tanto, de acuerdo a la definición dada para el campo de temperaturas  $T^{(1)}$  (5.3), tenemos que,

$$\begin{aligned} T^{(1)}(t, x, y) &= \frac{1}{4\pi} \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{y}{2ks} - \frac{\alpha}{k_0}\right) \right. \\ &\quad \left. \times T(t-s, x', 0) \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right) dx' \right\} \frac{ds}{s}. \end{aligned} \quad (6.6)$$

### 6.2.1. Definiciones previas

Para facilitar el manejo de las expresiones que vamos a utilizar en este caso del rectificado con refrigerante, ofrecemos las siguientes definiciones,

$$T^{(1)}(t, x, y) = \mathfrak{I}_y^* [T(t, x, 0)], \quad (6.7)$$

donde hemos definido los siguientes funcionales,

$$\mathfrak{I}_y^* [T(t, x, 0)] := \mathfrak{I}_y [T(t, x, 0)] + \Delta \mathfrak{I}_y [T(t, x, 0)], \quad (6.8)$$

$$\mathfrak{I}_y [T(t, x, 0)] := \frac{y}{8\pi k} \int_0^t \frac{ds}{s^2} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \mathfrak{N}_s [T(t, x, 0)], \quad (6.9)$$

$$\Delta \mathfrak{I}_y [T(t, x, 0)] := \frac{-\alpha}{4\pi k_0} \int_0^t \frac{ds}{s} \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \mathfrak{N}_s [T(t, x, 0)], \quad (6.10)$$

siendo el funcional  $\mathfrak{N}_s$ ,

$$\mathfrak{N}_s [T(t, x, 0)] := \int_{-\infty}^{\infty} dx' T(t-s, x', 0) \exp\left(-\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks}\right). \quad (6.11)$$

Debido a la linealidad de las integrales, los funcionales  $\mathfrak{N}_y, \Delta\mathfrak{N}_y$   $\mathfrak{N}_s$  son lineales. Por otro lado, definimos la temperatura de orden  $p$  como,

$$\Theta_p(t, x) := \frac{q}{4\pi k_0} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^p} \int_0^\delta d\xi \exp\left(-\frac{(\xi - x' - v_d\sigma)^2}{4k\sigma}\right). \quad (6.12)$$

Sustituyendo (6.2) en (6.12), nos queda,

$$\Theta_p(t, x) = \frac{q\sqrt{k}}{4\sqrt{\pi}k_0} \int_0^t \frac{d\sigma}{\sigma^{p-1/2}} \text{ERF}(x, \sigma). \quad (6.13)$$

De acuerdo a (6.4), observemos que se cumple,

$$\Theta_1(t, x) = T^{(0)}(t, x, 0). \quad (6.14)$$

### 6.2.2. Funcional $\mathfrak{N}_s$

Vamos a ver cómo actúa el funcional  $\mathfrak{N}_s$  sobre la temperatura de orden  $p$ ,  $\Theta_p$ . Para ello, sustituimos la definición dada en (6.12) para  $\Theta_p$  en el funcional  $\mathfrak{N}_s$  (6.11), y reordenamos las integrales, obteniendo,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_s[\Theta_p(t, x)] &= \frac{q}{4\pi k_0} \int_0^{t-s} \frac{d\sigma}{\sigma^p} \int_0^\delta d\xi \int_{-\infty}^\infty dx' \\ &\times \exp\left[-\left(\frac{(x' - x - v_d s)^2}{4ks} + \frac{(\xi - x' - v_d \sigma)^2}{4k\sigma}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.15)$$

Desarrollando el exponente del integrando dado en (6.15), llegamos a,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_s[\Theta_p(t, x)] &= \frac{q}{4\pi k_0} \exp\left(-\frac{(x + v_d s)^2}{4ks}\right) \int_0^{t-s} \frac{d\sigma}{\sigma^p} \exp\left(-\frac{v_d^2 \sigma}{4k}\right) \\ &\times \int_0^\delta d\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4k\sigma} + \frac{v_d \xi}{2k}\right) \\ &\times \int_{-\infty}^\infty dx' \exp\left[-\frac{x'^2}{4k} \left(\frac{s + \sigma}{s\sigma}\right) + \frac{x'}{2k} \left(\frac{x\sigma + \xi s}{s\sigma}\right)\right]. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Llamando  $I_{x'}$  a la última integral dada en (6.16), llegamos a,

$$I_{x'} = 2\sqrt{\frac{\pi k s \sigma}{s + \sigma}} \exp\left(\frac{x^2 \sigma}{4ks(s + \sigma)}\right) \exp\left(\frac{\xi^2 s}{4k\sigma(s + \sigma)} + \frac{x\xi}{2k(s + \sigma)}\right). \quad (6.17)$$

Sustituyendo (6.17) en (6.16), queda,

$$\begin{aligned} \mathfrak{N}_s[\Theta_p(t, x)] &= \frac{q\sqrt{ks}}{2\sqrt{\pi}k_0} \exp\left(-\frac{(x + v_d s)^2}{4ks}\right) \\ &\times \int_0^{t-s} \frac{d\sigma}{\sigma^{p-1/2}\sqrt{s + \sigma}} \exp\left(-\frac{v_d^2 \sigma}{4k}\right) \exp\left(\frac{x^2 \sigma}{4ks(s + \sigma)}\right) \\ &\times \int_0^\delta d\xi \exp\left(-\frac{\xi^2}{4k(s + \sigma)} + \frac{\xi}{2k} \left(v_d + \frac{x}{s + \sigma}\right)\right). \end{aligned} \quad (6.18)$$

Llamando  $I_\xi$  a la última integral dada en (6.18), obtenemos,

$$I_\xi = \sqrt{\pi k (s + \sigma)} \exp \left( \frac{v_d^2 (s + \sigma)}{4k} + \frac{x^2}{4k (s + \sigma)} + \frac{v_d^2 x}{2k} \right) \text{ERF} (x, s + \sigma). \quad (6.19)$$

Sustituyendo el resultado para  $I_\xi$  dado en (6.19) en (6.18), y simplificando, finalmente llegamos al siguiente resultado,

$$\aleph_s [\Theta_p (t, x)] = \frac{qk\sqrt{s}}{2k_0} \int_0^t d\mu \frac{H(\mu - s)}{(\mu - s)^{p-1/2}} \text{ERF} (x, \mu). \quad (6.20)$$

### 6.2.3. Funcional $\beth_y^*$

Veamos ahora cómo actúa el funcional  $\beth_y^*$  sobre la temperatura de orden  $p$ ,  $\Theta_p$ . Sabemos, por la definición dada en (6.8), que,

$$\beth_y^* [\Theta_p (t, x)] = \beth_y [\Theta_p (t, x)] + \Delta \beth_y [\Theta_p (t, x)]. \quad (6.21)$$

Sustituyendo la expresión obtenida en (6.20) en la definición dada para  $\beth_y$  (6.9), y cambiando el orden de integración, resulta,

$$\begin{aligned} \beth_y [\Theta_p (t, x)] &= \frac{qy}{16\pi k_0} \int_0^t d\mu \text{ERF} (x, \mu) \\ &\times \int_0^t ds \frac{H(\mu - s)}{(\mu - s)^{p-1/2} s^{3/2}} \exp \left( \frac{-y^2}{4ks} \right). \end{aligned} \quad (6.22)$$

Observemos que, dado que  $\mu \in [0, t]$ , la integral dada en (6.22) sobre la variable  $s$ , se puede expresar de la siguiente manera,

$$\Upsilon_p (y, \mu) := \int_0^\mu \frac{ds}{(\mu - s)^{p-1/2} s^{3/2}} \exp \left( \frac{-y^2}{4ks} \right) \quad (6.23)$$

Por tanto,

$$\beth_y [\Theta_p (t, x)] = \frac{qy}{16\pi k_0} \int_0^t d\mu \text{ERF} (x, \mu) \Upsilon_p (y, \mu). \quad (6.24)$$

Análogamente,

$$\Delta \beth_y [\Theta_p (t, x)] = \frac{-qk\alpha}{8\pi k_0^2} \int_0^t d\mu \text{ERF} (x, \mu) \Delta \Upsilon_p (y, \mu), \quad (6.25)$$

donde,

$$\Delta \Upsilon_p (y, \mu) := \int_0^\mu \frac{ds}{(\mu - s)^{p-1/2} s^{1/2}} \exp \left( \frac{-y^2}{4ks} \right). \quad (6.26)$$

Las integrales dadas en (6.23) y (6.26) se pueden calcular con ayuda de la función hipergeométrica confluyente de segunda especie. Efectivamente, considerando la integral,

$$I_{p,q} := \int_0^\mu \frac{ds}{(\mu - s)^{p-1/2} s^q} e^{-A/s}, \quad (6.27)$$

y haciendo los cambios,  $s = \mu/t$  y  $z = t - 1$ , tenemos,

$$I_{p,q} = \mu^{3/2-p-q} e^{-A/\mu} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{At}{\mu}\right) z^{1/2-p} (1+z)^{p+q-5/2} dt. \quad (6.28)$$

Teniendo en cuenta la representación integral de la función hipergeométrica confluyente de segunda especie [12],

$$\Psi(\alpha, \gamma; t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty e^{-tz} z^{\alpha-1} (1+z)^{\gamma-\alpha-1} dz, \quad \text{Re } \alpha > 0, \text{Re } t > 0.$$

podemos expresar (6.28) en los siguientes términos,

$$I_{p,q} = \mu^{3/2-p-q} \exp\left(-\frac{A}{\mu}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-p\right) \Psi\left(\frac{3}{2}-p, q, \frac{A}{\mu}\right). \quad (6.29)$$

Tomando  $A = y^2/4k$  y  $q = 3/2$ , tenemos,

$$\Upsilon_p(y, \mu) = \mu^{-p} \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-p\right) \Psi\left(\frac{3}{2}-p, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right), \quad (6.30)$$

y con  $q = 1/2$ ,

$$\Delta\Upsilon_p(y, \mu) := \mu^{1-p} \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right) \Gamma\left(\frac{3}{2}-p\right) \Psi\left(\frac{3}{2}-p, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right). \quad (6.31)$$

Por tanto, sustituyendo (6.30) y (6.31), en las expresiones dadas en (6.24) y (6.25) para los funcionales  $\beth_y$  y  $\Delta\beth_y$ , resulta,

$$\begin{aligned} \beth_y[\Theta_p(t, x)] &= \frac{qy}{16\pi k_0} \Gamma\left(\frac{3}{2}-p\right) \\ &\times \int_0^t d\mu \frac{\text{ERF}(x, \mu)}{\mu^p} \Psi\left(\frac{3}{2}-p, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right). \end{aligned} \quad (6.32)$$

$$\begin{aligned} \Delta\beth_y[\Theta_p(t, x)] &= -\frac{qk\alpha}{8\pi k_0^2} \Gamma\left(\frac{3}{2}-p\right) \\ &\times \int_0^t d\mu \frac{\text{ERF}(x, \mu)}{\mu^{p-1}} \Psi\left(\frac{3}{2}-p, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right). \end{aligned} \quad (6.33)$$

Finalmente, según (6.21), podemos obtener la siguiente expresión para  $\beth_y^*$  actuando sobre  $\Theta_p$ ,

$$\begin{aligned} \beth_y^*[\Theta_p(t, x)] &= \frac{q}{8\pi k_0} \Gamma\left(\frac{3}{2}-p\right) \int_0^t d\mu \frac{\text{ERF}(x, \mu)}{\mu^{p-1}} \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right) \\ &\times \left\{ \frac{y}{2\mu} \Psi\left(\frac{3}{2}-p, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) - \frac{k\alpha}{k_0} \Psi\left(\frac{3}{2}-p, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.34)$$

### 6.2.4. Cálculo en la superficie

Cuando nos hallamos en la superficie,  $y = 0$ , el cálculo del funcional  $\mathfrak{I}_0^*$  sobre la temperatura de orden  $p$ ,  $\Theta_p$ , se simplifica. Efectivamente, según (6.24), tenemos que,

$$\mathfrak{I}_0 [\Theta_p (t, x)] = \frac{q}{16\pi k_0} \int_0^t d\mu \operatorname{ERF} (x, \mu) \lim_{y \rightarrow 0} y \Upsilon_p (y, \mu). \quad (6.35)$$

Ahora bien, podemos calcular el siguiente límite,

$$\lim_{y \rightarrow 0} y \Upsilon_p (y, \mu) = \lim_{y \rightarrow 0} y \int_0^\mu \frac{ds}{(\mu - s)^{p-1/2} s^{3/2}} \exp \left( \frac{-y^2}{4ks} \right), \quad (6.36)$$

haciendo el cambio,  $u^2 = y^2/4ks$ , resultando,

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow 0} y \Upsilon_p (y, \mu) &= 4\sqrt{k} \lim_{y \rightarrow 0} \int_{y/2\sqrt{k}\mu}^\infty \frac{du}{\left(\mu - \frac{y^2}{4ku^2}\right)^{p-1/2}} e^{-u^2} \\ &= \frac{4\sqrt{k}}{\mu^{p-1/2}} \int_0^\infty e^{-u^2} du = \frac{2\sqrt{\pi k}}{\mu^{p-1/2}}. \end{aligned} \quad (6.37)$$

Por tanto, sustituyendo (6.36) en (6.35),

$$\mathfrak{I}_0 [\Theta_p (t, x)] = \frac{q\sqrt{k}}{8\sqrt{\pi}k_0} \int_0^t d\mu \frac{\operatorname{ERF} (x, \mu)}{\mu^{p-1/2}}, \quad (6.38)$$

y teniendo en cuenta la expresión dada para  $\Theta_p$  en (6.13),

$$\mathfrak{I}_0 [\Theta_p (t, x)] = \frac{1}{2} \Theta_p (t, x). \quad (6.39)$$

Por otro lado, según (6.25), tenemos que,

$$\Delta \mathfrak{I}_0 [\Theta_p (t, x)] = \frac{-qk\alpha}{8\pi k_0^2} \int_0^t d\mu \operatorname{ERF} (x, \mu) \Delta \Upsilon_p (0, \mu), \quad (6.40)$$

donde,

$$\Delta \Upsilon_p (0, \mu) = \int_0^\mu \frac{ds}{(\mu - s)^{p-1/2} s^{1/2}}. \quad (6.41)$$

Haciendo el cambio de variable,  $s = \mu t$ ,

$$\Delta \Upsilon_p (0, \mu) = \frac{1}{\mu^{p-1}} \int_0^1 t^{-1/2} (1 - t)^{1/2-p} dt. \quad (6.42)$$

Utilizando las propiedades de la función Beta [12], podemos expresar (6.42), como,

$$\Delta \Upsilon_p (0, \mu) = \frac{\sqrt{\pi} \Gamma \left( \frac{3}{2} - p \right)}{\mu^{p-1} \Gamma (2 - p)}. \quad (6.43)$$

Sustituyendo este resultado (6.43) en (6.40), llegamos a,

$$\Delta \beth_0 [\Theta_p(t, x)] = \frac{-qk\alpha}{8\sqrt{\pi}k_0^2} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - p)}{\Gamma(2 - p)} \int_0^t d\mu \frac{\text{ERF}(x, \mu)}{\mu^{p-1}}. \quad (6.44)$$

Teniendo en cuenta la expresión de  $\Theta_p$  obtenida en (6.13),

$$\Delta \beth_0 [\Theta_p(t, x)] = -\tilde{\alpha} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - p)}{\Gamma(2 - p)} \Theta_{p-1/2}(t, x), \quad (6.45)$$

donde,

$$\tilde{\alpha} := \frac{\sqrt{k}\alpha}{2k_0}. \quad (6.46)$$

### 6.3. Aproximaciones sucesivas en la superficie

Según (6.6), para hallar  $T^{(1)}$  hemos de conocer el campo de temperaturas en la superficie,  $T(t, x, 0)$ . A orden cero de aproximación, podemos considerar que el campo de temperaturas en la superficie vendrá dado sólo por el término que conlleva la fricción, es decir, según (5.2),  $T^{(0)}$ . Denotemos este orden cero de aproximación como,

$$T_0(t, x, 0) = T^{(0)}(t, x, 0). \quad (6.47)$$

Para obtener el primer orden de aproximación, basta sustituir el orden cero de aproximación (6.47), en la expresión dada en (6.7) para  $T^{(1)}$ ,

$$T_1^{(1)}(t, x, 0) = \beth_0^* [T^{(0)}(t, x, 0)]. \quad (6.48)$$

Por tanto, el campo de temperaturas a primer orden será,

$$T_1(t, x, 0) = T^{(0)}(t, x, 0) + T_1^{(1)}(t, x, 0).$$

Es decir, según (6.48),

$$T_1(t, x, 0) = T^{(0)}(t, x, 0) + \beth_0^* [T_0(t, x, 0)].$$

En general, la aproximación de orden  $n \in \mathbb{N}$  será,

$$T_n(t, x, 0) := T^{(0)}(t, x, 0) + \beth_0^* [T_{n-1}(t, x, 0)]. \quad (6.49)$$

Como en esta sección vamos a trabajar en el mismo punto  $(t, x, 0)$  de la superficie, simplificamos la notación de tal manera que la ecuación (6.49), teniendo en cuenta (6.14) y (6.8), resulta,

$$T_n = \Theta_1 + \beth_0 [T_{n-1}] + \Delta \beth_0 [T_{n-1}], \quad (6.50)$$

siendo la iteración inicial, según (6.47) y (6.14),

$$T_0 = \Theta_1, \quad (6.51)$$

y las relaciones recurrentes, dadas en (6.39) y (6.45),

$$\beth_0 [\Theta_p] = \frac{1}{2} \Theta_p, \quad (6.52)$$

$$\Delta \beth_0 [\Theta_p] = \Delta_p \Theta_{p-1/2}, \quad (6.53)$$

donde hemos definido,

$$\Delta_p := -\tilde{\alpha} \frac{\Gamma(\frac{3}{2} - p)}{\Gamma(2 - p)}. \quad (6.54)$$

### 6.3.1. Primeros órdenes de aproximación

A partir de la ecuación iterativa dada en (6.50) y de la relación recurrente (6.35), se puede calcular fácilmente los primeros órdenes de aproximación de la temperatura en superficie. Efectivamente, teniendo en cuenta (6.35), la ecuación iterativa (6.50) a primer orden, resulta,

$$T_1 = \frac{3}{2} \Theta_1 + \Delta T_1, \quad (6.55)$$

donde hemos definido,

$$\Delta T_1 := \Delta \beth_0 [\Theta_1]. \quad (6.56)$$

A segundo orden, teniendo en cuenta la linealidad de los funcionales  $\beth_0$  y  $\Delta \beth_0$ , la relación recurrente (6.35) y la definición dada en (6.56), obtenemos,

$$T_2 = \frac{7}{4} \Theta_1 + \frac{3}{2} \Delta T_1 + \Delta T_2, \quad (6.57)$$

donde, recordando la definición  $\beth_y^*$  (6.8), hemos definido,

$$\Delta T_2 := \beth_0^* [\Delta T_1].$$

Repitiendo los mismos pasos a tercer orden, llegamos a,

$$T_3 = \frac{15}{8} \Theta_1 + \frac{7}{4} \Delta T_1 + \frac{3}{2} \Delta T_2 + \Delta T_3, \quad (6.58)$$

donde hemos definido,

$$\Delta T_3 := \beth_0^* [\Delta T_2].$$

Por inducción, podemos demostrar que el orden  $n$ -ésimo es,

$$T_n = \frac{2^{n+1} - 1}{2^n} \Theta_1 + \sum_{k=1}^n \frac{2^{n+1-k} - 1}{2^{n-k}} \Delta T_k, \quad (6.59)$$

donde,

$$\Delta T_1 := \Delta \beth_0 [\Theta_1], \quad (6.60)$$

$$\Delta T_k := \beth_0^* [\Delta T_{k-1}] \quad k = 2, 3, \dots \quad (6.61)$$

Afortunadamente, basándonos en (6.59), podemos calcular fácilmente el orden de aproximación infinito. Efectivamente,

$$T = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n = 2 \left\{ \Theta_1 + \sum_{k=0}^{\infty} \Delta T_k \right\}, \quad (6.62)$$

donde hemos redefinido,

$$\Delta T_0 := \Delta \beth_0 [\Theta_1], \quad (6.63)$$

$$\Delta T_k := \beth_0^* [\Delta T_{k-1}] \quad k = 1, 2, 3, \dots \quad (6.64)$$

### 6.3.2. Lema $\tau$

Para obtener una expresión del orden de aproximación infinito de la temperatura en superficie,  $T(t, x, 0)$ , como combinación lineal de funciones  $\Theta_p$ , vamos a demostrar el siguiente lema. Para ello, consideremos el siguiente problema,

$$\tau_n := \beth_0^* [\tau_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.65)$$

donde el término inicial es,

$$\tau_0 = \Theta_p. \quad (6.66)$$

A primer orden, aplicando la linealidad de los funcionales y la relación recurrente (6.52), tenemos,

$$\tau_1 = \frac{1}{2} \Theta_p + \Delta \tau_1, \quad (6.67)$$

donde hemos definido,

$$\Delta \tau_1 := \Delta \beth_0 [\Theta_p]. \quad (6.68)$$

A segundo orden, aplicando la linealidad de los funcionales  $\beth_0$  y  $\Delta \beth_0$  y de nuevo (6.52), llegamos a,

$$\tau_2 = \frac{1}{4} \Theta_p + \frac{1}{2} \Delta \tau_1 + \Delta \tau_2, \quad (6.69)$$

donde nuevamente definimos,

$$\Delta \tau_2 := \beth_0^* [\Delta \tau_1].$$

Análogamente, a tercer orden,

$$\tau_3 = \frac{1}{8} \Theta_p + \frac{1}{4} \Delta \tau_1 + \frac{1}{2} \Delta \tau_2 + \Delta \tau_3, \quad (6.70)$$

con,

$$\Delta \tau_3 := \beth_0^* [\Delta \tau_2].$$

A la vista de los resultados que vamos obteniendo en (6.67), (6.69) y (6.70), podemos demostrar por inducción que a orden enésimo tendremos,

$$\tau_n = \frac{1}{2^n} \Theta_p + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n-k}} \Delta\tau_k, \quad (6.71)$$

donde,

$$\Delta\tau_{k+1} := \mathfrak{I}_0^* [\Delta\tau_k], \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.72)$$

Observemos ahora que, sumando todos los términos de la sucesión dados en (6.71), resulta,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = 2\Theta_p + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n-k}} \Delta\tau_k. \quad (6.73)$$

El doble sumatorio que tenemos en (6.73) se puede operar haciendo uso de la función de Heaviside discreta,  $H_m$ ,

$$H_m := \begin{cases} 1 & m \geq 0 \\ 0 & m < 0 \end{cases}$$

Efectivamente, cambiando el orden de los sumatorios y haciendo uso de la suma de una serie geométrica, llegamos a,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{n-k}} \Delta\tau_k &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{H_{n-k}}{2^{n-k}} \Delta\tau_k \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\tau_k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{H_{n-k}}{2^{n-k}} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\tau_k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^{n-k}} = 2 \sum_{k=1}^{\infty} \Delta\tau_k. \end{aligned}$$

Por tanto, desplazando el índice en el sumatorio,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \tau_n = 2 \left\{ \Theta_p + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta\tau_n \right\}, \quad (6.74)$$

donde,

$$\Delta\tau_0 = \Delta\mathfrak{I}_0 [\Theta_p], \quad (6.75)$$

$$\Delta\tau_n = \mathfrak{I}_0^* [\Delta\tau_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.76)$$

Es decir, el problema se autorreproduce, cambiando únicamente el término inicial en la relación de recurrencia. Por tanto, podemos enunciar el siguiente lema,

**Lema 1** Si tenemos la sucesión definida por la relación de recurrencia,  $\tau_n = \mathfrak{I}_0^* [\tau_{n-1}]$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ) donde el término inicial es,  $\tau_0 = \Theta_p$ , entonces la serie de la sucesión viene dada por  $\sum \tau_n = 2 \{ \Theta_p + \sum \Delta\tau_n \}$  donde la sucesión  $\Delta\tau_n$  queda definida recursivamente como  $\Delta\tau_n = \mathfrak{I}_0^* [\Delta\tau_{n-1}]$ , ( $n = 1, 2, \dots$ ), y cuyo término inicial es  $\Delta\tau_0 = \Delta\mathfrak{I}_0 [\Theta_p]$ .

### 6.3.3. Aproximaciones de orden superior

A la luz del lema 1, podemos describir el resultado obtenido en (6.62) para la aproximación de orden infinito  $T$  de la siguiente manera,

$$T = 2 \left\{ \Theta_1 + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(1)} \right\}, \quad (6.77)$$

donde la iteración inicial, según (6.40) y (6.63), y la relación de recurrencia, según (6.64), son,

$$\begin{aligned} \Delta T_0^{(1)} &:= \Delta \beth_0 [\Theta_1] = \Delta_1 \Theta_{1/2}, \\ \Delta T_n^{(1)} &:= \beth_0^* [\Delta T_{n-1}^{(1)}], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

Podemos, por tanto, aplicar el lema 1 a (6.77), obteniendo,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(1)} = 2\Delta_1 \left\{ \Theta_{1/2} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(2)} \right\},$$

siendo,

$$\begin{aligned} \Delta T_0^{(2)} &:= \Delta \beth_0 [\Theta_{1/2}] = \Delta_{1/2} \Theta_0, \\ \Delta T_n^{(2)} &:= \beth_0^* [\Delta T_{n-1}^{(2)}], \quad n = 1, 2, 3, \dots \end{aligned}$$

En general, podemos observar que se cumple la siguiente relación de recurrencia,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(k)} = 2\Delta_{\frac{3-k}{2}} \left\{ \Theta_{1-\frac{k}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(k+1)} \right\}, \quad (6.78)$$

donde,

$$\Delta T_0^{(k+1)} := \Delta \beth_0 \left[ \Theta_{1-\frac{k}{2}} \right] = \Delta_{1-\frac{k}{2}} \Theta_{\frac{1-k}{2}}, \quad (6.79)$$

$$\Delta T_n^{(k+1)} := \beth_0^* \left[ \Delta T_{n-1}^{(k+1)} \right], \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (6.80)$$

Una vez más podemos demostrar (6.78) por inducción. Efectivamente, aplicando lema 1, al sumatorio en la iteración  $k+1$ , tenemos,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(k+1)} &= 2\Delta_{1-\frac{k}{2}} \left\{ \Theta_{\frac{1-k}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tau_n \right\} \\ &= 2\Delta_{\frac{3-(k+1)}{2}} \left\{ \Theta_{1-\frac{k+1}{2}} + \sum_{n=0}^{\infty} \Delta \tau_n \right\}, \end{aligned}$$

con las relaciones de recurrencia,

$$\Delta \tau_0 = \Delta \beth_0 \left[ \Theta_{\frac{1-k}{2}} \right] = \Delta T_0^{(k+2)},$$

$$\Delta\tau_n = \beth_0^* [\Delta\tau_{n-1}], \quad n = 1, 2, \dots$$

como queríamos demostrar.

Veamos ahora el desarrollo en serie que se obtiene al aplicar iterativamente (6.78) sobre (6.77),

$$\begin{aligned} T &= 2\Theta_1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(1)} \\ &= 2\Theta_1 + 2^2 \Delta_1 \Theta_{1/2} + 2^2 \Delta_1 \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(2)} \\ &= 2\Theta_1 + 2^2 \Delta_1 \Theta_{1/2} + 2^3 \Delta_1 \Delta_{1/2} \Theta_0 + 2^3 \Delta_1 \Delta_{1/2} \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(3)}. \end{aligned}$$

En general, obtenemos el siguiente desarrollo parcial hasta orden  $k$ ,

$$T = \sum_{n=0}^k c_n \Theta_{1-n/2} + c_k \sum_{n=0}^{\infty} \Delta T_n^{(k+1)}, \quad (6.81)$$

donde,

$$c_k := 2^{k+1} \prod_{l=0}^{k-1} \Delta_{1-l/2}. \quad (6.82)$$

Observemos que, a partir de (6.82), se cumple la relación,

$$2c_k \Delta_{1-k/2} = 2^{k+2} \Delta_{1-k/2} \prod_{l=0}^{k-1} \Delta_{1-l/2} = c_{k+1}. \quad (6.83)$$

Una vez más, podemos demostrar (6.81) por inducción. Efectivamente, si (6.81) y (6.82) se satisfacen para un cierto orden  $k$ , también se satisfacen para  $k+1$ . Basta aplicar el lema 1, al desarrollo parcial dado en (6.81), y tener en cuenta la relación dada en (6.83),

$$\begin{aligned} T &= \sum_{n=0}^k c_n \Theta_{1-n/2} + 2c_k \Delta_{1-k/2} \left\{ \Theta_{\frac{1-k}{2}} + \sum_{n=0}^k \Delta T_n^{(k+2)} \right\} \\ &= \sum_{n=0}^{k+1} c_n \Theta_{1-n/2} + c_{k+1} \sum_{n=0}^k \Delta T_n^{(k+2)}. \end{aligned}$$

Recordando ahora la definición dada en (6.54) para  $\Delta_p$ , los coeficientes  $c_k$  se pueden expresar de la siguiente manera,

$$c_k = 2^{k+1} (-\tilde{\alpha})^k \prod_{l=0}^{k-1} \frac{\Gamma(\frac{1+l}{2})}{\Gamma(1+\frac{l}{2})}. \quad (6.84)$$

Observemos que el productorio dado en (6.84) se simplifica enormemente, de tal manera que,

$$c_k = 2\sqrt{\pi} \frac{(-2\tilde{\alpha})^k}{\Gamma\left(\frac{1+k}{2}\right)}. \quad (6.85)$$

Observemos que, utilizando la fórmula de Stirling, podemos probar que,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} c_k = 0. \quad (6.86)$$

Como  $T$  es la temperatura de la pieza en superficie, es obvio que debe ser una función acotada. Por otro lado, las funciones  $\Theta_p$  y  $c_k$  son también funciones acotadas, por tanto, según (6.81), la serie  $\sum \Delta T_n^{(k)}$  a cualquier orden  $k$  está acotada. De este modo, teniendo en cuenta (6.86), podemos tomar límites en (6.81) cuando  $k \rightarrow \infty$ , obteniendo,

$$T(t, x, 0) = 2\sqrt{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\tilde{\alpha})^n}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} \Theta_{1-n/2}(t, x). \quad (6.87)$$

#### 6.4. Expresión para $T(t, x, 0)$

Afortunadamente la serie obtenida en (6.87) para la temperatura en superficie en el caso del rectificado con refrigerante se puede sumar. Para ello, efectuaremos la derivada temporal de la temperatura en superficie y posteriormente recuperaremos la temperatura en superficie por integración directa. Para realizar la derivada con respecto al tiempo de la temperatura  $\Theta_p$  podemos aplicar la regla de Leibniz a la expresión dada en (6.13), obteniendo,

$$\frac{\partial \Theta_p(x, t)}{\partial t} = \frac{q\sqrt{k}}{4\sqrt{\pi}k_0} \text{ERF}(x, t) t^{1/2-p}. \quad (6.88)$$

Aplicando (6.88), podemos calcular la derivada temporal de la temperatura en superficie, derivando con respecto al tiempo la expresión dada en (6.87),

$$\frac{\partial T(t, x, 0)}{\partial t} = \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \text{ERF}(x, t) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\tilde{\alpha})^n}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} t^{(n-1)/2}. \quad (6.89)$$

El resultado obtenido en (6.89), lo podemos reexpresar de la siguiente manera,

$$\frac{\partial T(t, x, 0)}{\partial t} = \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \text{ERF}(x, t) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - 2\tilde{\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{[4(-\tilde{\alpha})^2 t]^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} \right\}. \quad (6.90)$$

Para hallar el sumatorio que aparece en (6.90), consideremos ahora la función,

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}, \quad (6.91)$$

de donde directamente se obtiene,

$$f(0) = 1. \quad (6.92)$$

Efectuado ahora la derivada de  $f(x)$ , a partir de la expresión dada en (6.91),

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n/2-1}}{n\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} = \frac{1}{\sqrt{\pi x}} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}. \quad (6.93)$$

Comparando (6.91) con (6.93), obtenemos la siguiente EDO lineal de primer orden para  $f(x)$ ,

$$f'(x) - f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi x}}. \quad (6.94)$$

Podemos resolver la ecuación diferencial planteada en (6.94), obteniendo,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{(n-1)/2}}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} = e^x [1 + \operatorname{erf}(\sqrt{x})]. \quad (6.95)$$

Tomando  $x = 4(-\tilde{\alpha})^2 t$ , podemos aplicar el resultado dado en (6.95), en la expresión (6.90) para la derivada temporal de la temperatura en superficie,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t, x, 0)}{\partial t} &= \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \operatorname{ERF}(x, t) \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} - 2\tilde{\alpha} \exp(4\tilde{\alpha}t) \operatorname{erfc}(2\tilde{\alpha}\sqrt{t}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.96)$$

Integrando en (6.96), tenemos una expresión compacta para la temperatura en la superficie,

$$\begin{aligned} T(t, x, 0) &= \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \int_0^t d\mu \operatorname{ERF}(x, \mu) \\ &\times \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} - 2\tilde{\alpha} \exp(4\tilde{\alpha}\mu) \operatorname{erfc}(2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}) \right\}. \end{aligned} \quad (6.97)$$

Recordando (6.4), podemos reexpresar (6.97) como,

$$\begin{aligned} T(t, x, 0) &= 2T^{(0)}(t, x, 0) \\ &- \frac{q\tilde{\alpha}\sqrt{k}}{k_0} \int_0^t \operatorname{ERF}(x, \mu) \exp(4\tilde{\alpha}\mu) \operatorname{erfc}(2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}) d\mu. \end{aligned} \quad (6.98)$$

## 6.5. Expresión para $T(t, x, y)$

Recordando que hemos desglosado la temperatura  $T$  en dos sumandos,  $T^{(0)}$  y  $T^{(1)}$ , (5.1), y la expresión que tenemos en (6.7) para  $T^{(1)}$ , tenemos que,

$$T(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + \mathfrak{I}_y^* [T(t, x, 0)]. \quad (6.99)$$

Sustituyendo el resultado obtenido en (6.87) para la temperatura en superficie, y dada la linealidad del funcional  $\mathfrak{I}_y^*$ , podemos expresar la temperatura en profundidad de la siguiente manera,

$$T(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\tilde{\alpha})^n}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} \mathfrak{I}_y^*[\Theta_{1-n/2}(t, x)]. \quad (6.100)$$

### 6.5.1. Expresión para $T(t, x, y)$ para el rectificado seco

Cuando nos encontramos en el caso del rectificado seco, las expresiones obtenidas anteriormente se simplifican notablemente. Para comprobarlo, observemos que en el caso del rectificado seco, según (6.5) y (5.4), el parámetro  $\alpha = \tilde{\alpha} = 0$ , (6.46). Por tanto, de acuerdo a (6.10), el funcional  $\Delta\mathfrak{I}_y$  es nulo, es decir,  $\mathfrak{I}_y^* = \mathfrak{I}_y$ , según (6.8). De este modo, el único término que sobrevive en la serie dada para el rectificado con refrigerante (6.100), es el  $n = 0$ , resultando,

$$T_{\text{seco}}(t, x, y) = T^{(0)}(t, x, y) + 2\mathfrak{I}_y[\Theta_1(t, x)]. \quad (6.101)$$

Para calcular  $\mathfrak{I}_y[\Theta_1]$  podemos recordar la expresión general dada en (6.24), según la cual,

$$\mathfrak{I}_y[\Theta_1(t, x)] = \frac{qy}{16\pi k_0} \int_0^t d\mu \text{ERF}(x, \mu) \Upsilon_1(y, \mu), \quad (6.102)$$

donde, según la definición de la integral  $\Upsilon_p$  (6.23),

$$\Upsilon_1(y, \mu) = \int_0^\mu \frac{ds}{\sqrt{\mu-s} s^{3/2}} \exp\left(-\frac{A}{s}\right), \quad (6.103)$$

siendo,

$$A := \frac{y^2}{4k}. \quad (6.104)$$

Para efectuar la integral dada en (6.103), podemos realizar los siguientes cambios:  $u = A/s$ ,  $w = \alpha u - A$ ,  $z^2 = w/\alpha$ , llegando a,

$$\Upsilon_1(y, \mu) = \frac{2\sqrt{\pi k}}{y\sqrt{\mu}} \exp\left(-\frac{y^2}{4k\mu}\right). \quad (6.105)$$

Por tanto, sustituyendo (6.105) en (6.102), tenemos que,

$$\mathfrak{I}_y[T^{(0)}(t, x, 0)] = \frac{q\sqrt{k}}{8\sqrt{\pi k_0}} \int_0^t d\mu \frac{\text{ERF}(x, \mu)}{\mu^{1/2}} \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right).$$

Según la expresión obtenida para  $T^{(0)}$  en (6.4), queda finalmente,

$$\mathfrak{I}_y[T^{(0)}(t, x, 0)] = \frac{1}{2}T^{(0)}(t, x, y). \quad (6.106)$$

Sustituyendo en (6.101), el resultado obtenido en (6.106), obtenemos el campo de temperaturas en profundidad en el caso del rectificado seco,

$$T_{\text{seco}}(t, x, y) = 2T^{(0)}(t, x, y). \quad (6.107)$$

Según (5.11), podemos reexpresar (6.107) como,

$$T_{\text{seco}}(t, x, y) = \frac{q\sqrt{k}}{2\sqrt{\pi}k_0} \int_0^t \exp\left(\frac{-y^2}{4ks}\right) \text{ERF}(x, s) \frac{ds}{s^{1/2}}. \quad (6.108)$$

Obsérvese que el resultado que se ha alcanzado en (6.107), generaliza el resultado que se obtuvo para el estado estacionario, (5.83).

### 6.5.2. Expresión para $T(t, x, y)$ en el rectificado con refrigerante

Si queremos obtener una expresión para el campo de temperaturas en el rectificado con refrigerante, de acuerdo a (6.99) y (6.100) tenemos que calcular,

$$\mathfrak{J}_y^*[T(t, x, 0)] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2\tilde{\alpha})^n}{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)} \mathfrak{J}_y^*[\Theta_{1-n/2}(t, x)]. \quad (6.109)$$

Los términos  $\mathfrak{J}_y^*[\Theta_{1-n/2}]$  que aparecen en (6.109) se pueden llevar a cabo según la fórmula dada en (6.34). Efectivamente,

$$\begin{aligned} \mathfrak{J}_y^*[\Theta_{1-n/2}(t, x)] &= \frac{q\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}{8\pi k_0} \int_0^t d\mu \mu^{n/2} \text{ERF}(x, \mu) \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right) \\ &\times \left\{ \frac{y}{2\mu} \Psi\left(\frac{1+n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) - \frac{k\alpha}{k_0} \Psi\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.110)$$

Intercambiando el orden de la integral con la serie, podemos entonces reescribir  $\mathfrak{J}_y^*[T(t, x, 0)]$  como,

$$\mathfrak{J}_y^*[T(t, x, 0)] = \frac{q}{4\sqrt{\pi}k_0} \int_0^t d\mu \text{ERF}(x, \mu) \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right) \Xi(\mu, y), \quad (6.111)$$

donde hemos definido la función  $\Xi(\mu, y)$  como,

$$\begin{aligned} \Xi(\mu, y) &: = \sum_{n=0}^{\infty} (-2\tilde{\alpha})^n \mu^{n/2} \left\{ \frac{y}{2\mu} \Psi\left(\frac{1+n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{k\alpha}{k_0} \Psi\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.112)$$

Teniendo en cuenta la siguiente propiedad de la función hipergeométrica confluente de segunda especie [12],

$$\Psi(\alpha, \gamma; t) = t^{1-\gamma} \Psi(1 + \alpha - \gamma, 2 - \gamma; t),$$

tenemos que,

$$\Psi\left(\frac{1+n}{2}, \frac{3}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) = \frac{2\sqrt{k\mu}}{y} \Psi\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right), \quad (6.113)$$

por tanto, sustituyendo (6.113) en (6.112), y recordando la definición dada para  $\tilde{\alpha}$ , (6.46),

$$\begin{aligned} \Xi(\mu, y) = \sqrt{k} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} (-2\tilde{\alpha})^n \mu^{(n-1)/2} \Psi\left(\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) \right. \\ \left. + \sum_{n=0}^{\infty} (-2\tilde{\alpha})^{n+1} \mu^{n/2} \Psi\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.114)$$

Desplazando los índices de los sumatorios en (6.114) y teniendo en cuenta que  $\Psi(0, \gamma; t) = 1$ , podemos reexpresar la función  $\Xi(\mu, y)$  de una forma más compacta,

$$\Xi(\mu, y) = \sqrt{\frac{k}{\mu}} + 2\sqrt{k} \sum_{n=0}^{\infty} (-2\tilde{\alpha})^{n+1} \mu^{n/2} \Psi\left(\frac{1+n}{2}, \frac{1}{2}, \frac{y^2}{4k\mu}\right). \quad (6.115)$$

Según la siguiente expresión para las funciones de Hermite [12],

$$H_\nu(z) = 2^\nu \Psi\left(-\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; z^2\right),$$

podemos expresar la función hipergeométrica confluyente de segunda especie en términos de las funciones de Hermite,

$$\Xi(\mu, y) = \sqrt{\frac{k}{\mu}} \left\{ 1 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} (-4\tilde{\alpha}\sqrt{\mu})^{n+1} H_{-(n+1)}\left(\frac{y}{2\sqrt{k\mu}}\right) \right\}. \quad (6.116)$$

Haciendo ahora uso de la siguiente representación integral de las funciones de Hermite [12],

$$H_\nu(z) = \frac{1}{\Gamma(-\nu)} \int_0^\infty dt \exp(-t^2 - 2tz) t^{-\nu-1}, \quad \text{Re } \nu < 0.$$

la ecuación (6.116) y resolviendo la integral que aparece, llegamos a,

$$\begin{aligned} \Xi(\mu, y) = \sqrt{\frac{k}{\mu}} - 4\tilde{\alpha}\sqrt{\pi k} \exp\left(\frac{y^2}{4k\mu} + 4\tilde{\alpha}^2\mu + \frac{2y\tilde{\alpha}}{\sqrt{k}}\right) \\ \times \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{k\mu}} + 2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}\right). \end{aligned} \quad (6.117)$$

Sustituyendo (6.117) en (6.111),

$$\begin{aligned} \mathfrak{I}_y^* [T(t, x, 0)] &= \frac{q\sqrt{k}}{4\sqrt{\pi}k_0} \int_0^t d\mu \frac{\text{ERF}(x, \mu)}{\sqrt{\mu}} \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right) \\ &\quad - \frac{q\tilde{\alpha}\sqrt{k}}{k_0} \int_0^t d\mu \text{ERF}(x, \mu) \exp\left(4\tilde{\alpha}^2\mu + \frac{2y\tilde{\alpha}}{\sqrt{k}}\right) \\ &\quad \times \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{k\mu}} + 2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}\right). \end{aligned} \quad (6.118)$$

Observemos que, según (6.108), el primer sumando de (6.118) coincide con  $T^{(0)}(t, x, y)$ , por lo que, sustituyendo (6.118) en (6.99), podemos expresar la temperatura en profundidad para el caso del rectificado con refrigerante, teniendo en cuenta (6.107), como,

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= T_{\text{seco}}(t, x, y) - \frac{q\tilde{\alpha}\sqrt{k}}{k_0} \int_0^t d\mu \text{ERF}(x, \mu) \\ &\quad \times \exp\left(4\tilde{\alpha}^2\mu + \frac{2y\tilde{\alpha}}{\sqrt{k}}\right) \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{k\mu}} + 2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}\right). \end{aligned} \quad (6.119)$$

Observemos que, efectivamente, para recuperar el caso del rectificado seco, basta tomar  $\alpha = \tilde{\alpha} = 0$ , de acuerdo a (6.5) y (6.46), en la expresión (6.119). Por tanto, a partir de (6.119), resulta cualitativamente claro que la aplicación del refrigerante en la superficie conlleva una disminución de la temperatura con respecto al rectificado seco. Obsérvese también que cuando  $y = 0$  en (6.119), se recupera el resultado obtenido en superficie, (6.98). Por otro lado, podemos expresar (6.119) en función de una única integral, de acuerdo a la siguiente expresión,

$$\begin{aligned} T(t, x, y) &= \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \int_0^t d\mu \text{ERF}(x, \mu) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{\alpha} \exp\left(4\tilde{\alpha}^2\mu + \frac{2y\tilde{\alpha}}{\sqrt{k}}\right) \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{k\mu}} + 2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.120)$$

## 6.6. Temperatura máxima en el estado estacionario

### 6.6.1. El estado estacionario

Para comprobar que el estado estacionario se alcanza cuando  $t \rightarrow \infty$ , podemos efectuar, en primer lugar, la derivada con respecto al tiempo de la solución dada en (6.120),

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(t, x, y)}{\partial t} &= \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \text{ERF}(x, t) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \exp\left(\frac{-y^2}{4kt}\right) \right. \\ &\quad \left. - 2\tilde{\alpha} \exp\left(4\tilde{\alpha}^2 t + \frac{2y\tilde{\alpha}}{\sqrt{k}}\right) \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{kt}} + 2\tilde{\alpha}\sqrt{t}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.121)$$

El límite cuando  $t \rightarrow \infty$  de la expresión dada en (6.121), se puede llevar a cabo recordando la definición dada para la función ERF (6.3). Teniendo en cuenta que  $\text{erf}(\pm\infty) = \pm 1$ , llegamos a,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \text{ERF}(x, t) = \lim_{t \rightarrow \infty} \text{erf}\left(\frac{x + v_d t}{2\sqrt{kt}}\right) - \text{erf}\left(\frac{v_d t + x - \delta}{2\sqrt{kt}}\right) = 0. \quad (6.122)$$

Por otro lado, aplicando el desarrollo asintótico de la función complementaria del error [16], tenemos que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \exp\left(4\tilde{\alpha}t + \frac{2y\tilde{\alpha}}{\sqrt{k}}\right) \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{kt}} + 2\tilde{\alpha}\sqrt{t}\right) = 0. \quad (6.123)$$

Según (6.122) y (6.123), concluimos que,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\partial T(t, x, y)}{\partial t} = 0. \quad (6.124)$$

Es decir, de acuerdo a la definición que se dio de estado estacionario en (2.10), éste se alcanza cuando  $t \rightarrow \infty$ .

### 6.6.2. Temperatura en superficie en el estado estacionario

En primer lugar, podemos observar que el máximo de temperatura en un cierto punto  $(x, y)$  se alcanza en el estado estacionario,  $t \rightarrow \infty$ . Esto es debido a que, según (6.135), el integrando de (6.120) es positivo  $\forall y \geq 0$ , y en consecuencia,

$$T(t, x, y) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} T(t, x, y).$$

En segundo lugar, también podemos darnos cuenta de que el máximo de la temperatura en el estado estacionario se halla en la superficie. Esto es debido a que en el estado estacionario estamos resolviendo la ecuación de Laplace (2.11). Según (6.124), basta sustituir  $t \rightarrow \infty$ , en la solución general dada en (6.120)), para obtener la solución de la ecuación de Laplace, obteniendo,

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} T(t, x, y) = & \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \int_0^\infty d\mu \text{ERF}(x, \mu) \left\{ \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} \exp\left(\frac{-y^2}{4k\mu}\right) \right. \\ & \left. - 2\tilde{\alpha} \exp\left(4\tilde{\alpha}^2\mu + \frac{2y\tilde{\alpha}}{\sqrt{k}}\right) \text{erfc}\left(\frac{y}{2\sqrt{k\mu}} + 2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}\right) \right\}. \end{aligned} \quad (6.125)$$

Como (6.125) es una función armónica, por el principio del máximo [22], sabemos que el máximo de dicha función se alcanza en la frontera, es decir, sobre la superficie de la pieza rectificada. Definiendo la función de la temperatura en la superficie para el estado estacionario como,

$$T_{\text{sup}}(x) := \lim_{t \rightarrow \infty} T(t, x, 0),$$

podemos saber el máximo de la temperatura en la pieza en el caso del rectificado con refrigerante, hallando el máximo de la función  $T_{\text{sup}}(x)$ . De acuerdo a (6.125), expresemos esta función como,

$$T_{\text{sup}}(x) = \frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \int_0^\infty d\mu \text{ERF}(x, \mu) \rho(\mu), \quad (6.126)$$

donde hemos definido,

$$\rho(\mu) := \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} - 2\tilde{\alpha} \exp(4\tilde{\alpha}^2\mu) \text{erfc}(2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}). \quad (6.127)$$

Por otro lado, según (6.107) y de acuerdo a la notación introducida en (5.9),

$$2T^{(0)}(x, 0) = \lim_{t \rightarrow \infty} T_{\text{seco}}(t, x, 0). \quad (6.128)$$

### 6.6.3. Propiedades de la función $\rho$

La función  $\rho(\mu)$  es positiva, pues, integrando por partes en la definición de la función complementaria del error, tenemos,

$$e^{x^2} \text{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{x} - e^{x^2} \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \right\}.$$

Por tanto, la siguiente función es positiva  $\forall x$ ,

$$\hat{\rho}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}x} - e^{x^2} \text{erfc}(x) = \frac{e^{x^2}}{\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt > 0. \quad (6.129)$$

Ahora bien, como  $\tilde{\alpha} > 0$ , concluimos que,

$$\rho(\mu) = 2\tilde{\alpha} \hat{\rho}(2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}) > 0. \quad (6.130)$$

Por otro lado, podemos ver que la función  $\rho(\mu)$  es decreciente, pues integrando dos veces por partes en la definición de la función complementaria del error, tenemos que,

$$e^{x^2} \text{erfc}(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \frac{1}{x} - \frac{1}{2x^3} + \frac{3e^{x^2}}{2} \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt \right\}. \quad (6.131)$$

Por tanto, la siguiente función es negativa  $\forall x$ ,

$$\tilde{\rho}(x) := \frac{1}{\sqrt{\pi}x} - \frac{1}{2\sqrt{\pi}x^3} - e^{x^2} \text{erfc}(x) = -\frac{3e^{x^2}}{2\sqrt{\pi}} \int_x^\infty \frac{e^{-t^2}}{t^2} dt < 0. \quad (6.132)$$

Ahora bien, sabiendo que podemos expresar,

$$\rho'(\mu) = 4\tilde{\alpha}^2 \tilde{\rho}(2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}),$$

concluimos que,

$$\rho'(\mu) < 0. \quad (6.133)$$

Por último, a partir de (6.127) y (6.131), podemos dar la siguiente expresión asintótica para  $\rho$ ,

$$\rho(\mu) \underset{\mu \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\mu^{-3/2}}{8\tilde{\alpha}^2\sqrt{\pi}}. \quad (6.134)$$

#### 6.6.4. Propiedades de $T_{\text{sup}}$

Podemos comprobar que  $T_{\text{sup}}$  es una función positiva. Para verlo, en primer lugar comprobemos que la función ERF es una función positiva, observando que, según (6.126),

$$\mu > 0.$$

Como también  $\delta > 0$ , se cumple que,

$$\frac{x + v_d\mu}{2\sqrt{k\mu}} > \frac{v_d\mu + x - \delta}{2\sqrt{k\mu}},$$

y como la función error es una función creciente, tenemos que,  $\forall x \in \mathbb{R}$ ,

$$\text{ERF}(x, \mu) = \text{erf}\left(\frac{x + v_d\mu}{2\sqrt{k\mu}}\right) - \text{erf}\left(\frac{v_d\mu + x - \delta}{2\sqrt{k\mu}}\right) > 0. \quad (6.135)$$

Fijémonos también que la función ERF sólo se anula en  $x \rightarrow \pm\infty$ , pues  $\text{erf}(\pm\infty) = \pm 1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{ERF}(x, \mu) = 0. \quad (6.136)$$

Integrando sobre (6.135) y teniendo en cuenta (6.130), llegamos a que la función  $T_{\text{sup}}$  es una función positiva,

$$T_{\text{sup}}(x) > 0, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (6.137)$$

que, según (6.136), se anula en  $x \rightarrow \pm\infty$ ,

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} T_{\text{sup}}(x) = 0. \quad (6.138)$$

Por otro lado, al igual que el caso del rectificado seco, la temperatura superficial estacionaria para el rectificado con refrigerante satisface una cierta propiedad de simetría (5.120). Para verlo, podemos partir de la definición dada para la función ERF, (6.3),

$$\text{ERF}(x, \mu)|_{-v_d} = \text{ERF}(\delta - x, \mu)|_{v_d}.$$

Por tanto, según (6.126),

$$T_{\text{sup}}(x)|_{-v_d} = T_{\text{sup}}(\delta - x)|_{v_d}. \quad (6.139)$$

### 6.6.5. Integral $\mathcal{I}(x)$

A continuación vamos a presentar un resultado que nos será útil para efectuar la acotación del punto máximo de la temperatura. Para ello, definamos,

$$\mathcal{I}(x) := \int_0^\infty d\mu \mathcal{E}(x, \mu) \mu^{-1/2}, \quad (6.140)$$

y recordando la definición de  $\mathcal{E}(x, \mu)$  dada en (6.147), tenemos que,

$$\mathcal{I}(x) = \exp\left(\frac{-xv_d}{2k}\right) \int_0^\infty d\mu \exp\left(-\frac{x^2}{4k\mu} - \frac{v_d^2}{4k}\mu\right) \mu^{-1/2}.$$

Realizando el cambio  $\xi = \frac{v_d^2}{4k}\mu$ , llegamos a,

$$\mathcal{I}(x) = \exp\left(\frac{-xv_d}{2k}\right) \frac{2\sqrt{k}}{|v_d|} \int_0^\infty d\xi \exp\left(-\frac{x^2 v_d^2}{16k^2 \xi} - \xi\right) \xi^{-1/2}. \quad (6.141)$$

A partir de la representación integral de la función  $K_\nu$  dada en (5.24), podemos expresar  $\mathcal{I}(x)$  en términos de las funciones de Bessel,

$$\mathcal{I}(x) = 2 \exp\left(\frac{-xv_d}{2k}\right) \left|\frac{x}{v_d}\right|^{1/2} K_{-1/2}\left(\left|\frac{xv_d}{2k}\right|\right), \quad (6.142)$$

y haciendo uso del resultado dado en [12], para  $K_{-1/2}$ ,

$$\mathcal{I}(x) = \frac{2\sqrt{\pi k}}{|v_d|} \exp\left(-\frac{xv_d + |xv_d|}{2k}\right). \quad (6.143)$$

En particular,

$$\mathcal{I}(x) = \frac{2\sqrt{\pi k}}{|v_d|}, \quad x \leq 0. \quad (6.144)$$

### 6.6.6. Expresiones para las derivadas

A partir de la expresión dada en (6.126) para la temperatura superficial estacionaria en el caso con refrigerante, tenemos que su derivada con respecto a la variable espacial  $x$ , tiene la forma,

$$\frac{\partial T_{\text{sup}}(x)}{\partial x} = \frac{q}{2\sqrt{\pi}k_0} \int_0^\infty d\mu \frac{\text{EXP}(x, \mu)}{\sqrt{\mu}} \rho(\mu), \quad (6.145)$$

donde hemos definido,

$$\text{EXP}(x, \mu) := \mathcal{E}(x, \mu) - \mathcal{E}(x - \delta, \mu), \quad (6.146)$$

$$\mathcal{E}(x, \mu) := \exp\left(-\frac{(x + v_d\mu)^2}{4k\mu}\right) > 0. \quad (6.147)$$

Observemos que, según (6.146) y (6.147),

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \text{EXP}(x, \mu) = 0,$$

y, por tanto, según (6.126),

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\partial T_{\text{sup}}(x)}{\partial x} = 0. \quad (6.148)$$

Por otro lado, derivando con respecto a  $x$  en (6.128) y (6.108),

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial T^{(0)}(x, 0)}{\partial x} &= \frac{\partial T_{\text{seco}}(\infty, x, 0)}{\partial x} \\ &= \frac{q}{2\pi k_0} \int_0^\infty d\mu \frac{\text{EXP}(x, \mu)}{\mu}. \end{aligned} \quad (6.149)$$

### 6.6.7. Acotación superior para $\partial_x T_{\text{sup}}$

Observando (6.145), podemos darnos cuenta de que el signo de la función EXP determina el signo de  $\partial_x T_{\text{sup}}$  pues, según (6.130),  $\rho(\mu) > 0$ . Expresemos la función EXP como,

$$\text{EXP}(x, \mu) = \exp\left(-\frac{(x + v_d \mu)^2}{4k\mu}\right) \left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\delta^2 - 2\delta(x + v_d \mu)}{4k\mu}\right) \right\}.$$

Por tanto,

$$\begin{aligned} \text{sign}[\text{EXP}(x, \mu)] &= \text{sign}\left\{ 1 - \exp\left(-\frac{\delta^2 - 2\delta(x + v_d \mu)}{4k\mu}\right) \right\} \\ &= \text{sign}[\delta - 2(x + v_d \mu)]. \end{aligned} \quad (6.150)$$

Según (6.150), concluimos que,

$$\text{EXP}(x, \mu)|_{v_d > 0} < 0, \quad x > \frac{\delta}{2}. \quad (6.151)$$

Integrando sobre (6.151), teniendo en cuenta (6.130), resulta finalmente,

$$\left. \frac{\partial T_{\text{sup}}(x)}{\partial x} \right|_{v_d > 0} < 0, \quad x > \frac{\delta}{2}. \quad (6.152)$$

### 6.6.8. Valor para $\partial_x T_{\text{sup}}(0)$

Sabiendo que la función complementaria del error está acotada entre 0 y 1, para valores positivos de la variable, tenemos que,

$$0 < e^{4\tilde{\alpha}^2 \mu} \text{erfc}(2\tilde{\alpha}\sqrt{\mu}) < e^{4\tilde{\alpha}^2 \mu}, \quad \mu > 0,$$

por tanto,

$$\frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} - 2\tilde{\alpha} < \rho(\mu) < \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}}, \quad \mu > 0.$$

Como la función  $\mathcal{E}(x, \mu)$  es una función positiva (6.147), tenemos que  $\forall \mu \geq 0$ ,

$$\frac{\mathcal{E}(x, \mu)}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} - 2\tilde{\alpha} \right) < \frac{\mathcal{E}(x, \mu)}{\sqrt{\mu}} \rho(\mu) < \frac{\mathcal{E}(x, \mu)}{\sqrt{\pi\mu}}, \quad (6.153)$$

$$-\frac{\mathcal{E}(x - \delta, \mu)}{\sqrt{\pi\mu}} < -\frac{\mathcal{E}(x - \delta, \mu)}{\sqrt{\mu}} \rho(\mu) < -\frac{\mathcal{E}(x - \delta, \mu)}{\sqrt{\mu}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi\mu}} - 2\tilde{\alpha} \right). \quad (6.154)$$

Sumando las inecuaciones (6.153) y (6.154), aplicando la definición de la función EXP (6.146), e integrando,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty d\mu \left( \frac{\text{EXP}(x, \mu)}{\sqrt{\pi\mu}} - 2\tilde{\alpha} \frac{\mathcal{E}(x, \mu)}{\sqrt{\mu}} \right) &< \int_0^\infty d\mu \frac{\text{EXP}(x, \mu)}{\sqrt{\mu}} \rho(\mu) \\ &< \int_0^\infty d\mu \left( \frac{\text{EXP}(x, \mu)}{\sqrt{\pi\mu}} + 2\tilde{\alpha} \frac{\mathcal{E}(x - \delta, \mu)}{\sqrt{\mu}} \right). \end{aligned} \quad (6.155)$$

Multiplicando (6.155) por  $\frac{q}{2\sqrt{\pi k_0}}$  y teniendo en cuenta, (6.145) y (6.149) y la definición dada en (6.140), llegamos a,

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial T^{(0)}(x, 0)}{\partial x} - \frac{q\tilde{\alpha}}{\sqrt{\pi k_0}} \mathcal{I}(x) &< \frac{\partial T_{\text{sup}}(x)}{\partial x} \\ &< 2 \frac{\partial T^{(0)}(x, 0)}{\partial x} + \frac{q\tilde{\alpha}}{\sqrt{\pi k_0}} \mathcal{I}(x - \delta). \end{aligned}$$

En  $x = 0$ , teniendo en cuenta el resultado obtenido en (6.144), llegamos a,

$$2 \frac{\partial T^{(0)}(0, 0)}{\partial x} - \frac{2q\sqrt{k}}{|v_d| k_0} < \frac{\partial T_{\text{sup}}(0)}{\partial x} < 2 \frac{\partial T^{(0)}(0, 0)}{\partial x} + \frac{2q\sqrt{k}}{|v_d| k_0}. \quad (6.156)$$

Recordando que, en el caso del rectificado seco, la derivada se hace infinita  $x = 0$ , (5.103), a partir de la acotación dada en (6.156), tenemos que en el caso del rectificado con refrigerante ocurre lo mismo,

$$\frac{\partial T_{\text{sup}}(0)}{\partial x} = \infty. \quad (6.157)$$

### 6.6.9. Acotación inferior para $\partial_x T_{\text{sup}}$

Consideremos la función,

$$\mathcal{G}(x, \mu) := \frac{\mathcal{E}(x, \mu)}{\sqrt{\mu}} > 0, \quad \mu > 0. \quad (6.158)$$

para hallar su máximo, con respecto a  $\mu$ , resolvamos la ecuación,

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, \mu)}{\partial \mu} = \frac{\mathcal{E}(x, \mu)}{4k\mu^{5/2}} (x^2 - 2k\mu - \mu^2 v_d^2) = 0, \quad (6.159)$$

donde despejando,

$$\mu = \frac{-k \pm \sqrt{k^2 + x^2 v_d^2}}{v_d^2}.$$

Como, según (6.158),  $\mathcal{G}(x, \mu) > 0$ , y se cumple,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0^+} \mathcal{G}(x, \mu) = 0, \quad x < 0.$$

$$\lim_{\mu \rightarrow \infty} \mathcal{G}(x, \mu) = 0, \quad v_d > 0.$$

tenemos que el máximo absoluto de la función  $\mathcal{G}(x, \mu)$  se localiza en,

$$\mu_{\text{máx}}(x) = \frac{-k + \sqrt{k^2 + x^2 v_d^2}}{v_d^2}.$$

Definiendo ahora,

$$\mathcal{G}_{\text{máx}}(x) := \mathcal{G}[x, \mu_{\text{máx}}(x)]. \quad (6.160)$$

Obviamente se cumple que,

$$\mathcal{G}_{\text{máx}}(x) \geq \mathcal{G}(x, \mu) \quad \mu > 0. \quad (6.161)$$

Podemos ver que,

$$\mathcal{G}_{\text{máx}}(x) = \frac{|v_d|}{\sqrt{-k + \sqrt{k^2 + x^2 v_d^2}}} \exp\left(-\frac{xv_d + \sqrt{k^2 + x^2 v_d^2}}{2k}\right).$$

Por simple derivación, se puede comprobar que la función  $\mathcal{G}_{\text{máx}}(x)$  es decreciente, cuando  $xv_d < 0$ ,

$$\frac{\partial \mathcal{G}_{\text{máx}}(x)}{\partial x} > 0, \quad xv_d < 0.$$

Eso quiere decir que,

$$\mathcal{G}_{\text{máx}}(x) > \mathcal{G}_{\text{máx}}(x - \delta), \quad xv_d < 0. \quad (6.162)$$

### Punto de corte

Veamos cuál es el valor  $\bar{\mu} > 0$  que satisface,

$$\mathcal{G}(x, \bar{\mu}) = \mathcal{G}(x - \delta, \bar{\mu}).$$

Operando, llegamos a que el punto de corte es único y se halla en,

$$\bar{\mu} = \frac{\delta/2 - x}{v_d}.$$

Podemos observar que el punto de corte  $\bar{\mu}$  es único. En el caso de  $v_d > 0$  y  $x < 0$ , tenemos que  $\bar{\mu} > 0$ . Además, a la vista de (6.159), podemos apreciar que,

$$\frac{\partial \mathcal{G}(x, \bar{\mu})}{\partial \mu} \neq \frac{\partial \mathcal{G}(x - \delta, \bar{\mu})}{\partial \mu}. \quad (6.163)$$

Sabiendo que,  $xv_d < 0$ , y teniendo en cuenta la desigualdad triangular, se puede ver fácilmente que,

$$\mu_{\text{máx}}(x) < \left| \frac{x}{v_d} \right|.$$

Por tanto, en el caso de  $v_d > 0$  y  $x < 0$ , tenemos que,

$$0 < \mu_{\text{máx}}(x) < \bar{\mu}. \quad (6.164)$$

Teniendo en cuenta la definición (6.160), y las desigualdades (6.161) y (6.162),

$$\mathcal{G}[x, \mu_{\text{máx}}(x)] := \mathcal{G}_{\text{máx}}(x) > \mathcal{G}_{\text{máx}}(x - \delta) \geq \mathcal{G}[x - \delta, \mu_{\text{máx}}(x)]. \quad (6.165)$$

Teniendo en cuenta (6.163), (6.164), (6.165), y que el punto de corte  $\bar{\mu}$  es único, concluimos que,

$$\mathcal{G}(x, \mu) > \mathcal{G}(x - \delta, \mu), \quad \mu < \bar{\mu}. \quad (6.166)$$

$$\mathcal{G}(x, \mu) < \mathcal{G}(x - \delta, \mu), \quad \mu > \bar{\mu}. \quad (6.167)$$

Como, según (6.158) y (6.144), se cumple que,

$$\int_0^\infty \mathcal{G}(x, \mu) d\mu = \int_0^\infty \mathcal{G}(x - \delta, \mu) d\mu = \frac{2\sqrt{\pi k}}{|v_d|}, \quad x < 0.$$

y teniendo en cuenta (6.166), (6.167), y que la función  $\rho$  es decreciente (6.133), podemos darnos cuenta de que se satisface la siguiente desigualdad,

$$\int_0^\infty \frac{\mathcal{E}(x, \mu)}{\sqrt{\mu}} \rho(\mu) > \int_0^\infty \frac{\mathcal{E}(x - \delta, \mu)}{\sqrt{\mu}} \rho(\mu), \quad v_d > 0, x < 0.$$

Por tanto, según (6.145), concluimos que,

$$\left. \frac{\partial T_{\text{sup}}(x)}{\partial x} \right|_{v_d > 0} > 0, \quad x < 0. \quad (6.168)$$

### 6.6.10. Localización de la temperatura máxima

Teniendo en cuenta (6.168) y (6.152) observamos que el máximo de la temperatura no se puede encontrar en  $x \notin (0, \delta)$ . Dado que  $\partial_x T_{\text{sup}}$  es una función continua para  $x > 0$ , podemos aplicar el teorema de Bolzano a la función  $\partial_x T_{\text{sup}}$  para concluir que,

$$\exists c / \partial_x T_{\text{sup}}(c)|_{v_d > 0} = 0, \quad c \in \left(0, \frac{\delta}{2}\right). \quad (6.169)$$

Aplicando la propiedad (6.139), tenemos que,

$$\exists c / \partial_x T_{\text{sup}}(c)|_{v_d < 0} = 0, \quad c \in \left( \frac{\delta}{2}, \delta \right). \quad (6.170)$$

Si comprobamos que  $c$  es único, teniendo en cuenta (6.137) y (6.138), podemos concluir que,

$$T_{\text{sup}}(c) = \text{máx} \{T_{\text{sup}}(x), x \in \mathbb{R}\}.$$

Físicamente es bastante lógico que el máximo de la temperatura se encuentre precisamente en la zona de fricción entre la pieza y la muela  $(0, \delta)$ , por tanto es ahí donde buscaremos el máximo, en coherencia con (6.168) y (6.152).

### 6.6.11. Resultados numéricos

A continuación se presentan en las figuras 6.1 y 6.2 las gráficas de las funciones  $\partial_x T_{\text{sup}}(x)$  y  $T_{\text{sup}}(x)$  respectivamente, utilizando los mismos parámetros del rectificador que en la sección 5.8.3 y un valor de  $\alpha = 27,29 \cdot 10^4 \text{ J/m}^2 \text{ s K}$ . Podemos observar que la figura 6.1 está en coherencia con (6.168), y con los valores hallados en  $x = 0, \pm\infty$  de la función  $\partial_x T_{\text{sup}}(x)$ , (6.148) y (6.157). En la figura 6.2 observamos que el máximo es único, y se halla en el punto  $c$  indicado en la figura 6.1.

En el Apéndice A se detalla el código de un programa en MATLAB para hallar la localización del máximo de la temperatura y su valor. A continuación se presentan un par de resultados para la temperatura máxima. Utilizando como refrigerante aire a presión [18],

$$\alpha_1 = 5,207 \cdot 10^4 \text{ J/m}^2 \text{ s K}, \quad (6.171)$$

tenemos,

$$\begin{aligned} x_{\text{máx}} &= 0,009209 \delta, \\ T_{\text{máx}} &= 778,9257 \text{ K}. \end{aligned} \quad (6.172)$$

Utilizando un líquido refrigerante industrial típico [18], con un coeficiente de transmisión de calor,

$$\alpha_2 = 27,29 \cdot 10^4 \text{ J/m}^2 \text{ s K}, \quad (6.173)$$

tenemos,

$$\begin{aligned} x_{\text{máx}} &= 0,013674 \delta, \\ T_{\text{máx}} &= 477,5875 \text{ K}. \end{aligned} \quad (6.174)$$

Comparando (6.172) y (6.174) con los resultados obtenidos para el rectificador seco (5.121), podemos darnos cuenta de que la aplicación del refrigerante apenas cambia la localización del máximo de la temperatura, pero sí su valor notablemente.

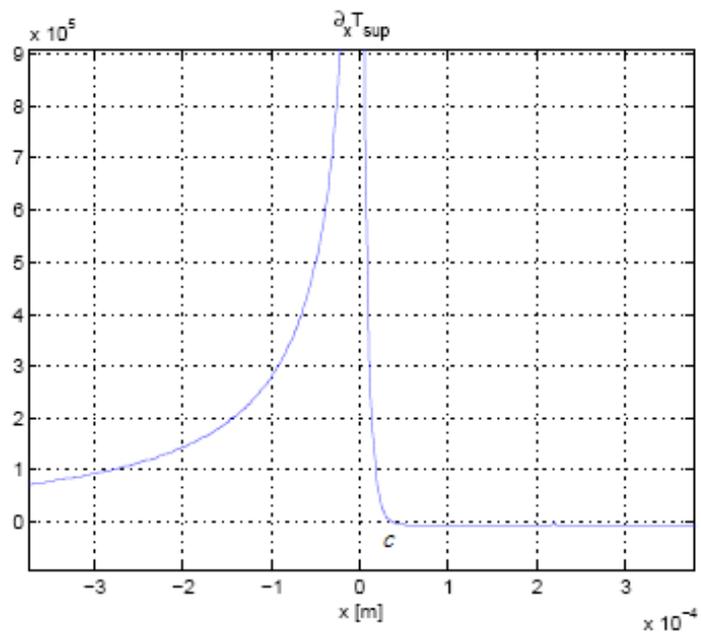


Figura 6.1: Representación gráfica de  $\partial_x T_{\text{sup}}(x)$ . En el punto  $x = c$  se señala la raíz donde se encuentra el máximo de la temperatura.

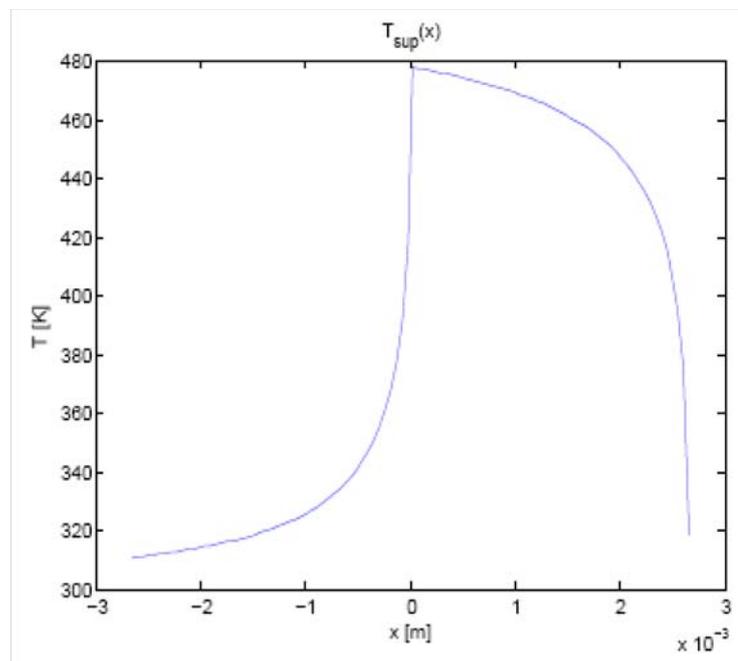


Figura 6.2: Representación gráfica de  $T_{\text{sup}}(x)$  en el intervalo  $x \in (-\delta, \delta)$ .

## 6.7. Tiempo del transitorio

Según vimos en la sección 6.6.1, el estado estacionario se alcanza en  $t \rightarrow \infty$ . Para estimar cómo de rápido se alcanza el estado estacionario, podemos resolver la siguiente ecuación para un  $\tilde{t} \in (0, \infty)$ ,

$$\frac{\partial T(\tilde{t}, x, y)}{\partial t} = \epsilon \approx 0. \quad (6.175)$$

Ahora bien, la expresión dada en (6.175) depende del punto  $(x, y)$  que se tome como referencia. Desde el punto de vista industrial, el punto más importante se encuentra en donde se alcanza el máximo de la temperatura, que según vimos en la sección 6.6.2, se alcanza en la superficie,  $(x_{\text{máx}}, 0)$ . Por tanto, podemos definir el tiempo de relajación del estado transitorio  $t^* \in (0, \infty)$ , como,

$$\frac{\partial T(t^*, x_{\text{máx}}, 0)}{\partial t} = \epsilon \approx 0. \quad (6.176)$$

### 6.7.1. Desarrollos asintóticos

En el caso del rectificado seco, sustituyendo  $y = 0$  en (6.121), la ecuación que hay que resolver es,

$$\frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \text{ERF}(x_{\text{máx}}, t^*) \rho(t^*) = \epsilon. \quad (6.177)$$

Para el rectificado seco, basta tomar  $\alpha = \tilde{\alpha} = 0$ , de acuerdo a (6.5) y (6.46), en la expresión (6.177), teniendo en cuenta (6.127),

$$\frac{q\sqrt{k}}{2k_0} \frac{\text{ERF}(x_{\text{máx}}, t^*)}{\sqrt{\pi t^*}} = \epsilon. \quad (6.178)$$

A primer orden podemos comprobar que la función ERF se comporta de la siguiente manera en  $t \rightarrow \infty$ ,

$$\text{ERF}(x, t) \underset{t \rightarrow \infty}{\sim} \frac{\delta}{\sqrt{\pi k t}} \exp\left(-\frac{v_d^2 t}{4k}\right), \quad (6.179)$$

por tanto, la ecuación (6.178), se convierte en,

$$\frac{q\delta}{2\pi k_0 t^*} \exp\left(-\frac{v_d^2 t^*}{4k}\right) \approx \epsilon, \quad (6.180)$$

cuya solución es,

$$t_{\text{seco}}^* \approx \frac{4k}{v_d^2} W\left(\frac{q\delta v_d^2}{8\pi k k_0 \epsilon}\right), \quad (6.181)$$

donde  $W$  denota la función de Lambert [27]. Sustituyendo ahora los desarrollos asintóticos (6.134) y (6.179) tenemos que la ecuación (6.177) se convierte en,

$$\frac{q\delta k_0}{4\pi k \alpha^2 (t^*)^2} \exp\left(-\frac{v_d^2 t^*}{4k}\right) \approx \epsilon, \quad (6.182)$$

cuya solución es,

$$t_{\text{refrigerante}}^* \approx \frac{8k}{v_d^2} W \left( \frac{v_d^2}{16k^{3/2}\alpha} \sqrt{\frac{q\delta k_0}{\pi\epsilon}} \right). \quad (6.183)$$

En el Apéndice A se detallan los programas en MATLAB que se han elaborado para calcular los tiempos de relajación, tanto en el rectificado seco, como en el que aplicamos refrigerante.

### 6.7.2. Resultados numéricos

Tomando los mismos parámetros de rectificado que en la sección 5.8.3, un parámetro  $\epsilon = 10^{-6}$ , y los coeficientes de transmisión de calor dados en (6.171) y (6.173), obtenemos, tanto para la resolución de la ecuación exacta, (6.177) y (6.178), como de las aproximaciones obtenidas, (6.183) y (6.181), los siguientes resultados,

$$\begin{aligned} t_{\text{seco}}^* &= 8,3013 \cdot 10^{-3} \text{ s}, & t_{\text{seco}}^* &\approx 1,6727 \cdot 10^{-3} \text{ s}. \\ t_{\alpha_1}^* &= 8,1856 \cdot 10^{-3} \text{ s}, & t_{\alpha_1}^* &\approx 1,7561 \cdot 10^{-3} \text{ s}. \\ t_{\alpha_2}^* &= 7,9351 \cdot 10^{-3} \text{ s}, & t_{\alpha_2}^* &\approx 1,5700 \cdot 10^{-3} \text{ s}. \end{aligned}$$

Podemos observar que el estado transitorio es muy corto y apenas varía con la aplicación del refrigerante. Además, las aproximaciones obtenidas nos ofrecen el orden de magnitud correcto en los tiempos de relajación.

En las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se muestra la evolución de la temperatura en la superficie, tanto en el rectificado seco, como en el que aplicamos refrigerante. En ambas figuras, los tiempos que se han tomado están espaciados exponencialmente, pues el proceso es muy rápido durante el estado transitorio. Se puede también observar que, tanto en el rectificado seco como en el que aplicamos refrigerante, la gráfica de la temperatura del estado estacionario y la obtenida en el tiempo de relajación es casi idéntica. La única discrepancia está en la parte izquierda, pues la fuente, al estar moviéndose hacia la derecha ( $v_d > 0$ ), en el estado estacionario ha recorrido todos los puntos de la superficie  $x < 0$  calentándolos, mientras que en el transitorio no ocurre lo mismo. Obsérvese que, comparando la figura 6.3 con las figuras 6.4 y 6.5, la aplicación de refrigerante en toda la superficie de la pieza hace disminuir la temperatura en la misma. Comparando las figuras 6.4 y 6.5, esta disminución es tanto mayor cuanto mayor es el coeficiente de transmisión de calor. Más aún, el gradiente de la temperatura para  $x < 0$ , es más pronunciado cuanto mayor es  $\alpha$ , debido a que un coeficiente mayor implica una mayor evacuación del calor que se acumula en la superficie de la pieza, fuera de la zona de contacto.

Por último, se presentan comparativamente en las figuras 6.6 , 6.7 y 6.8 el campo de temperaturas en el estado estacionario y de relajación respectivamente. En el caso del rectificado con refrigerante, se han tomado como valores del coeficiente de transmisión de calor los dados en (6.171) y (6.173). Se puede

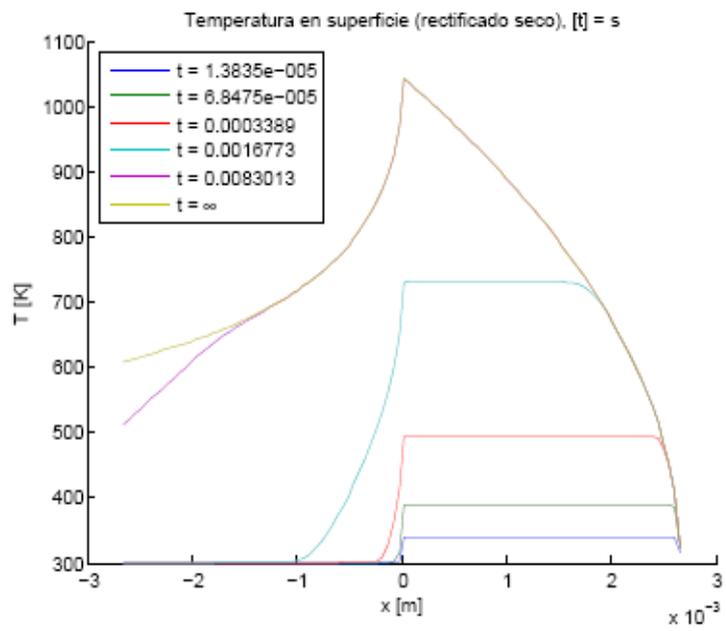


Figura 6.3: Evolución temporal de la temperatura en superficie en el rectificado seco,  $x \in (-\delta, \delta)$ .

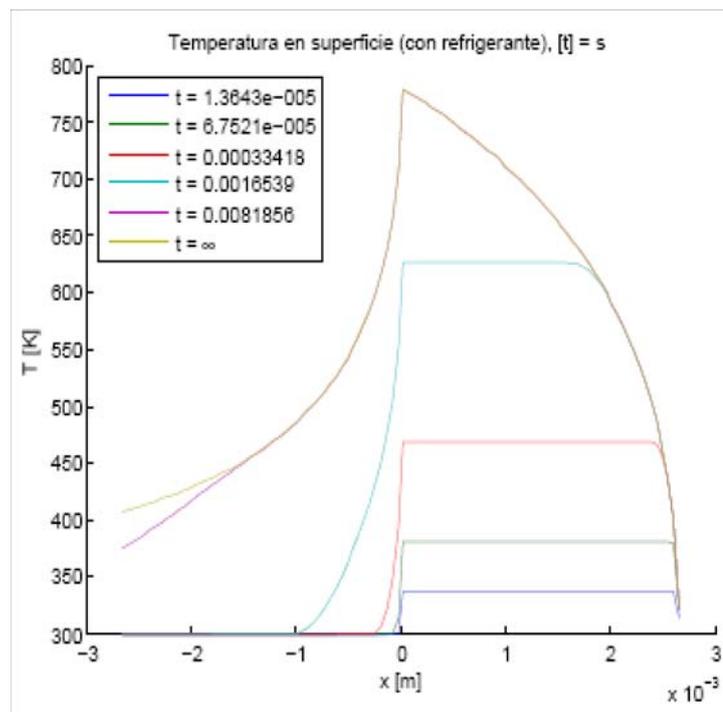


Figura 6.4: Evolución temporal de la temperatura en superficie en el caso del rectificado húmedo,  $x \in (-\delta, \delta)$ . Se ha utilizado como coeficiente de transmisión de calor,  $\alpha_1 = 5,207 \cdot 10^4 J/m^2 s K$ .

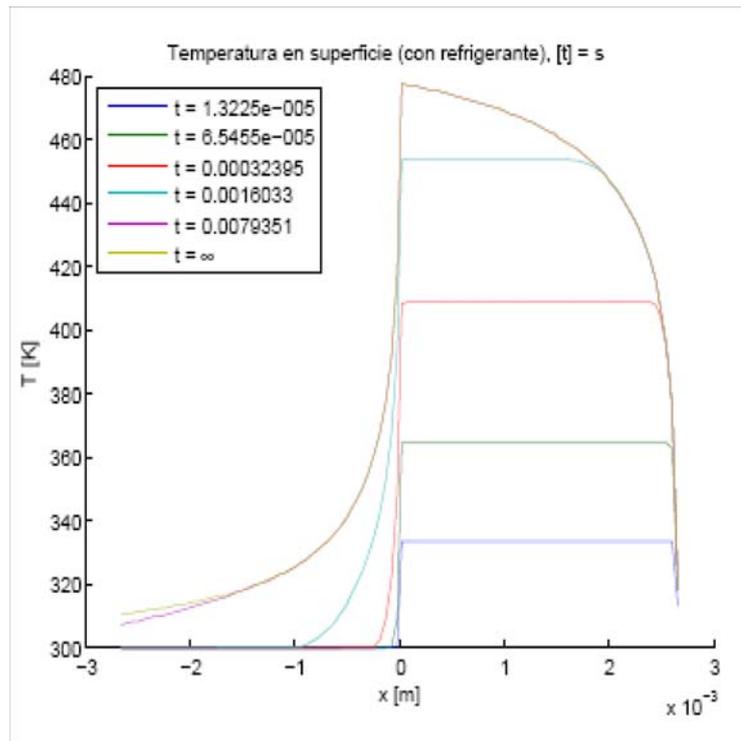


Figura 6.5: Evolución temporal de la temperatura en superficie en el caso del rectificado húmedo,  $x \in (-\delta, \delta)$ . Se ha utilizado como coeficiente de transmisión de calor,  $\alpha_2 = 27,29 \cdot 10^4 \text{ J/m}^2 \text{ s K}$ .

observar de nuevo que, entre el estado de relajación y el estacionario, el campo de temperaturas apenas evoluciona, excepto quizás para la parte izquierda, como ya se comentó anteriormente. Esta diferencia es menos acusada en el rectificado con refrigerante, pues la aplicación constante de refrigerante en la superficie atenúa la temperatura de la pieza en la parte que ya ha sido rectificada. Por otro lado, también se puede observar que cuanto mayor es el coeficiente de transmisión de calor del refrigerante, más se concentra la temperatura cerca de la fuente y menor es la temperatura que experimenta la pieza.

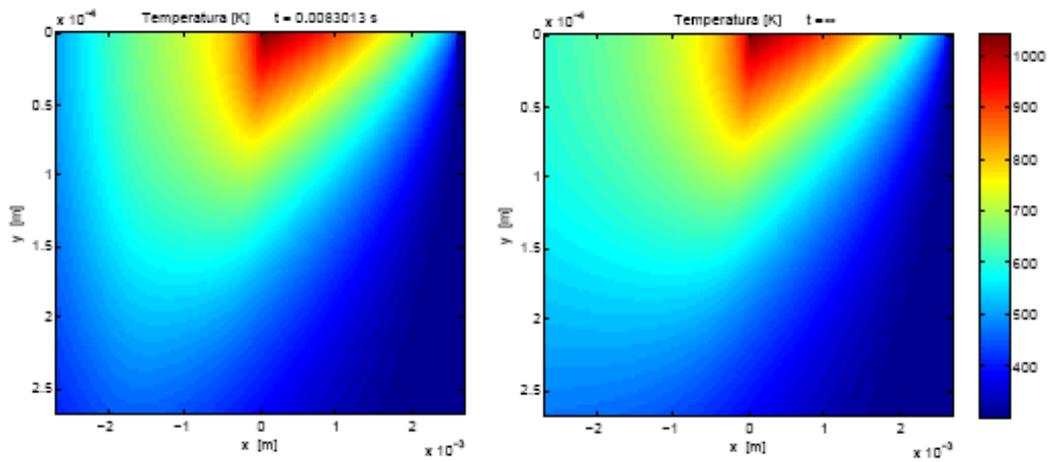


Figura 6.6: Comparación del campo de temperaturas para el tiempo de relajación y el estado estacionario en el rectificado seco. En ambas gráficas,  $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (0, \delta/10)$ .

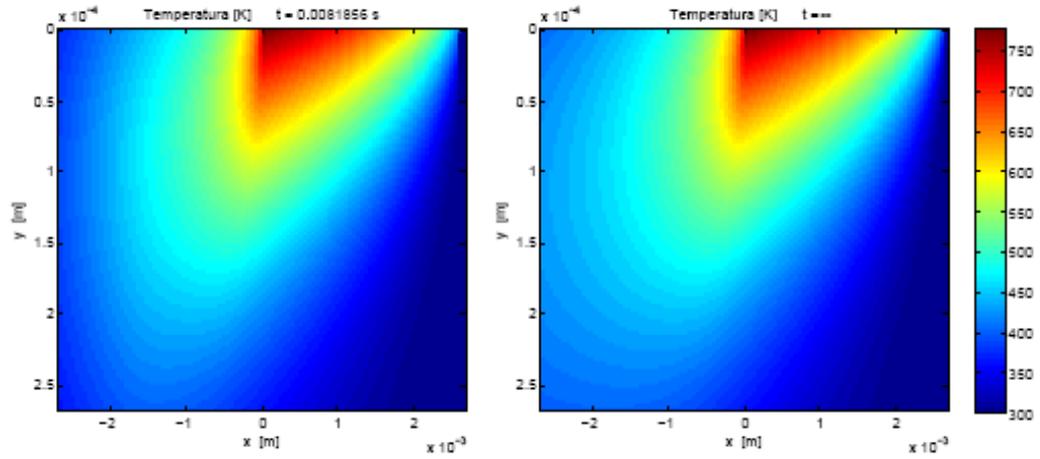


Figura 6.7: Comparación del campo de temperaturas para el tiempo de relajación y el estado estacionario tomando  $\alpha_1 = 5,207 \cdot 10^4 J/m^2 s K$ . En ambas gráficas,  $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (0, \delta/10)$ .

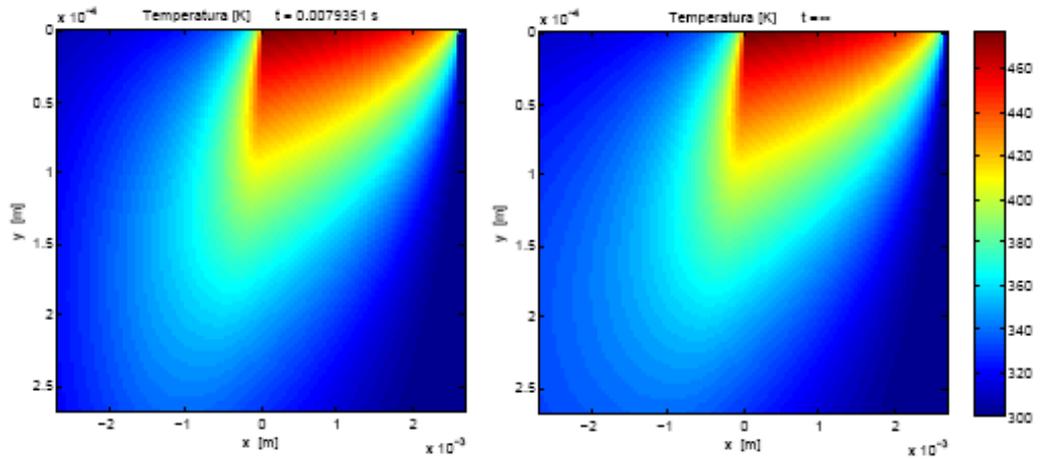


Figura 6.8: Comparación del campo de temperaturas para el tiempo de relajación y el estado estacionario tomando  $\alpha_2 = 27,29 \cdot 10^4 J/m^2 s K$ . En ambas gráficas,  $(x, y) \in (-\delta, \delta) \times (0, \delta/10)$ .

## Capítulo 7

# Conclusiones

La presente memoria presenta dos modelos matemáticos de transmisión de calor en el rectificado plano industrial: el modelo de Jaeger y el modelo de Samara-Valencia (modelo SV). El modelo de Jaeger ofrece una solución explícita para el campo de temperaturas de la pieza en el estado estacionario, cuando no se aplica refrigerante sobre la superficie de la misma (rectificado seco), y la muela realiza una fricción continua. El modelo SV ofrece una solución implícita (en forma de ecuación integral) para el campo de temperaturas dependiente del tiempo, permitiendo la aplicación de refrigerante y una fricción no constante entre la pieza y la muela.

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo ordenadas según su grado de importancia como contribuciones originales al trabajo de doctorado:

1. Suponiendo un coeficiente constante de transmisión de calor del refrigerante sobre toda la superficie de la pieza en el modelo SV, se ha deducido una expresión explícita para el campo de temperaturas dependiente del tiempo.
2. Aplicando el modelo SV al rectificado seco, se ha deducido una expresión explícita para el campo de temperaturas en el estado transitorio.
3. Relajando las condiciones del modelo SV al caso estacionario, seco y con fricción constante, se ha demostrado matemáticamente y comprobado numéricamente, que ofrece la misma solución que el modelo clásico de Jaeger. Este resultado corrobora la afirmación de Jaeger de duplicar el campo de temperaturas para pasar de la solución en una pieza infinita a una pieza semi-infinita.
4. Aplicando el modelo SV, se ha demostrado matemáticamente que, en el caso del rectificado seco y con refrigerante, el máximo de la temperatura que experimenta la pieza se alcanza en el estado estacionario sobre la superficie de la pieza, precisamente en la zona de contacto entre la muela y la pieza. Se ha elaborado un código MATLAB para hallar este máximo de manera rápida y sencilla.

5. Para establecer la equivalencia entre ambos modelos, se ha precisado deducir una representación de la delta de Dirac que nos se halla en la bibliografía común.
6. Una vez demostrada la equivalencia entre ambos modelos, se han podido ofrecer dos integrales que tampoco aparecen en la bibliografía usual.
7. Se ha elaborado un programa en MATLAB para hallar el tiempo que dura el estado transitorio (tiempo de relajación), en el rectificado seco.
8. Se han elaborado unos programas en MATLAB para hallar el máximo de la temperatura y el tiempo de relajación en el rectificado con refrigerante.
9. Se han elaborado unos programas en MATLAB para representar la evolución del campo de temperaturas, tanto en superficie como en el interior de la pieza.
10. Todas estas conclusiones han sido presentadas en los siguientes artículos de investigación:
  - J. L. González-Santander, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba, J. M. Isidro, “Analysis of the temperature field in grinding: avoiding thermal damage”. (Enviado a “Mathematical Models and Methods in Applied Sciences”.)
  - J. L. G. Santander, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. M. Isidro, “Theoretical Analysis of the transient temperature field in wet and in dry grinding”. (Enviado a “International Journal of Heat and Mass Transfer”.)

# Bibliografía

- [1] S. Malkin, *Grinding technology: theory and application of machining with abrasives*, Ellis Horwood Ltd. and John Wiley and Sons (1989); C. Guo and S. Malkin, “Analysis of energy partition in grinding”, *Journal of Engineering for Industry* **117** (1995) 55; S. Malkin and R. Anderson, “Thermal aspects of grinding, part I: energy partition”, *Journal of Engineering for Industry* **06** (1974) 177.
- [2] A. S. Lavine, “Thermal aspects of grinding: the effects of heat generation at the shear planes”, *Annals of CIRP* **40** (1991) 343-345; “An exact solution for surface temperature in down grinding”, *International Journal of Heat and Mass Transfer* **43** (2000) 4447-4456.
- [3] M. D. Demetriou and A.S. Lavine, 2000, “Thermal Aspects of Grinding: The Case of Upgrinding”, *Journal of Manufactured Science Engineering* **122**, (2000) 605-611.
- [4] A.S. Lavine and T. C. Jen, “Coupled Heat Transfer to Workpiece, Wheel, and Fluid in Grinding, and the Occurrence of Workpiece Burn”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **34** (1991) 983-992; “Thermal Aspects of Grinding: Heat Transfer to Workpiece, Wheel, and Fluid”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **113** (1991) 296-303.
- [5] M. Mahdi and Liangchi Zhang, “The finite element thermal analysis of grinding processes by ADINA”, *Computers & Structures*, **56**, Issues 2-3 (1995) 313-320. *Nonlinear Finite Element Analysis and ADINA Proceedings of the 10th ADINA Conference*.
- [6] A. G. Mamalis, D. E. Manolacos, A. Markopoulos, J. Kunádrk and K. Gyáni, “Thermal Modelling of Surface Grinding using implicit Finite Element Techniques”, *International Journal of Advanced Manufacturing Technology*, **21** (2003) 929-934.
- [7] K. T. Andrews, M. Shillor and S. Wright, “A model for heat transfer in grinding”, *Nonlinear Analysis* 35 (1999) 233-246.
- [8] J. Pérez, F. R. Villatoro, J. L. G. Santander, M. A. Borovsky, Yu. L. Ratis, E. A. Izzheurov, and P. Fernández de Córdoba, “Heat transfer between

- a gas and an ultralow thermal conductivity porous structure”, *Journal of Applied Mathematics and Computation*, **204**, Issue 2 (2008) 687-693.
- [9] T. V. Bandos , Á. Montero, E. Fernández, J. L. González, J. M. Isidro, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. F. Urchueguía, “Analytical studies of the vertical dependences in the solution to the finite line-source model for borehole heat exchangers”, *Geothermics*, (Preprint).
- [10] J. L. González-Santander, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. M. Isidro, “Analysis of the temperature field in grinding: avoiding thermal damage”, *Journal of Engineering Mathematics*, (preprint).
- [11] J. L. G. Santander, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. M. Isidro, “Theoretical Analysis of the transient temperature field in wet and in dry grinding”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, (preprint).
- [12] N. N. Lebedev, *Special Functions and their applications*, Dover Publications, New York, 1972.
- [13] A. N. Tikhonov, A. A. Samarskii, *Equations of mathematical physics*, Dover Publications, New York, 1990.
- [14] J. C. Jaeger, “Moving Sources of Heat and the Temperature at Sliding Contacts”, *Proceedings of Royal Society of New South Wales*, **76** (1942) 204-224.
- [15] H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of Heat in Solids*, Clarendon Press, Oxford, 1988.
- [16] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Dover Publications Paperback, 1972.
- [17] J. Luke, “Some notes on integrals involving Bessel functions”, *Journal of Mathematical Physics*, **29** (1950), 27-30.
- [18] D. L. Skuratov, Yu. L. Ratis, I. A. Selezneva, J. Pérez, P. Fernández de Córdoba and J. F. Urchueguía, “Mathematical modelling and analytical solution for workpiece temperature in grinding”, *Applied Mathematical Modelling* **31** (2007) 1039-1047.
- [19] J. Pérez, S. Hoyas , D. L. Skuratov, Yu. L. Ratis, I. A. Selezneva, P. Fernández de Córdoba and J. F. Urchueguía, “Heat transfer analysis of intermittent grinding processes”, *International Journal of Heat and Mass Transfer*, **51**, Issues 15-16 (2008) 4132-4138.
- [20] I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of integrals, series and products. Corrected and enlarged edition*, Academic Press Inc., New York, 1980.
- [21] Y. T. Li and R. Wong, “Integral and Series Representations of the Dirac Delta Function”, *Communications on pure and applied analysis*, **7**, n. 2 (2008) 229-247.

- [22] John B. Conway, *Functions of one complex variable*, Springer-Verlag, New York, 1978.
- [23] S. G. Glasunov, V. N. Moiseev, *Constructional Titanium Alloys, Metallurgy*, Moscow, 1974.
- [24] V. I. Murav'ev, A. V. Yakimov and A. V. Chernysev, "Effect of deformation, welding, and electrocontact heating on the properties of titanium alloy VT20 in pressed and welded structures", *Metal Science and Heat Treatment*. **45** (2003) 419–422.
- [25] C. T. O'Sullivan "Comment on "Newton's law of cooling—A critical assessment,"" *American Journal of Physics*, **58** (1990) 956–960.
- [26] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, vol. 1-2, Wiley Classics Library, 1989.
- [27] R. M. Corless, D. J. Jeffrey, and D. E. Knuth, "A Sequence of Series for the Lambert Function", in *Proceedings of the 1997 International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation*, Maui, Hawaii. New York: ACM Press, pp. 197-204, 1997.