



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA



## Tesis Doctoral



# GPC mediante Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Análisis de  
Componentes Principales  
(PCA) y Criterios de Selección

Javier Sanchis Saez

Director: Dr. Miguel A. Martínez Iranzo



departamento de ingeniería de sistemas y automática



UNIVERSIDAD  
POLITECNICA  
DE VALENCIA

Tesis Doctoral

---

# GPC mediante Descomposición en Valores Singulares (SVD)

Análisis de  
Componentes Principales  
(PCA) y Criterios de Selección

Javier Sanchis Saez

Director: Dr. Miguel A. Martínez Iranzo



departamento de ingeniería de sistemas y automática



# TESIS DOCTORAL

## **GPC mediante Descomposición en Valores Singulares (SVD). Análisis de Componentes Principales (PCA) y Criterios de Selección.**

Por: D. Javier SANCHIS SAEZ

Director: Dr. D. Miguel A. MARTÍNEZ IRANZO.

Catedrático de Universidad del Área de Ingeniería de Sistemas y Automática.

### TRIBUNAL CALIFICADOR

Presidente: Dr. D. Pedro ALBERTOS PÉREZ  
Catedrático de Universidad  
Área de Ingeniería de Sistemas y Automática.

Vocales: Dr. D. Sebastián DORMIDO BENCOMO  
Catedrático de Universidad  
Área de Ingeniería de Sistemas y Automática.

Dr. D. Cesar DE PRADA MORAGA  
Catedrático de Universidad  
Área de Ingeniería de Sistemas y Automática.

Dr. D. Alberto FERRER RIQUELME  
Catedrático de Universidad  
Área de Estadística e Investigación Operativa.

Secretario: Dr. D. Xavier BLASCO FERRAGUD  
Profesor Titular de Escuela Universitaria  
Área de Ingeniería de Sistemas y Automática.

VV. Suplentes: Dr. D. Manuel BERENGUEL SORIA  
Profesor Titular de Universidad  
Área de Ingeniería de Sistemas y Automática.

Dr. D. Carlos BORDONS ALBA  
Profesor Titular de Universidad  
Área de Ingeniería de Sistemas y Automática.

*Valencia, 16 de Septiembre de 2002.*



*Para Alicia ...  
y Pablo.*



## AGRADECIMIENTOS

---

En primer lugar, agradecer a mi director Miguel, sus consejos y todas las horas que me ha dedicado (en estos tiempos que corren). A mis compañeros del grupo de investigación de Control Predictivo: JuanMa, Cesar, Jose Vte. (mi gurú de  $\LaTeX$ ) y en especial a Xavi y a Juanse por estos años de trabajo y amistad. A mis amigos de “la planta baja”: David, Fernando, Carlos y Jorge por tantas horas de música, y a “los Quinaos” por las que van a venir. También quiero dedicar este trabajo a mis padres y a mi hermano Jose Luis.





# Resumen

El control predictivo basado en modelos o *Model Predictive Control (MPC)*, no hace referencia a un diseño concreto de un controlador sino más bien a un conjunto de ideas o características para el desarrollo de estrategias de control que, aplicadas en un mayor o menor grado, dan lugar a diferentes tipos de controladores con estructuras similares, siendo una de las técnicas de control que más se ha desarrollado en los ámbitos académico e industrial en las últimas décadas debido sobre todo a su simplicidad y eficiencia.

Sin embargo, no es fácil relacionar los parámetros de ajuste del controlador y las prestaciones del bucle cerrado. En este sentido, es importante *diseñar algoritmos de control predictivo que garanticen la estabilidad nominal del bucle cerrado, con tiempos de cálculo pequeños y con un significado claro de sus parámetros sobre las prestaciones del sistema o sobre el esfuerzo de control.*

La aportación fundamental de esta tesis está relacionada con la definición de un nuevo tipo de controlador predictivo, el PC-GPC, versión modificada de un GPC estándar. En este controlador se ha sustituido el factor de ponderación de la acción de control por un nuevo parámetro denominado *número de componentes principales (NPC)*. La relación entre el nuevo parámetro (NPC) y algunos indicadores numéricos, como la norma del vector de acciones de control o el número de condición de la matriz dinámica  $G$ , hacen que su elección esté basada en criterios menos subjetivos que la ponderación de las acciones de control. Además, se ha analizado este tipo de controlador tanto en el ámbito de procesos SISO como MIMO, así como sus características de robustez y estabilidad. Por otro lado, se ha deducido un método de cálculo de un controlador PC-GPC para garantizar la estabilidad nominal de bucle cerrado, cuando el modelo conocido es exacto.



# Resum

El control predictiu basat en models o *Model predictive Control (MPC)* no es no més del disseny concret d'un controlador sinó més be fa referència a un conjunt d'idees o característiques per al desenvolupament d'estratègies de control les quals aplicades dins un major o menor grau, oferixen diferents tipus de controladors amb estructures paregudes. De fet, el MPC es una de les tècniques de disseny que més a avançat en la indústria i en l'acadèmia per la seva simplicitat i eficiència. Aleshores, no es fàcil relacionar els paràmetres d'ajust del controlador i les prestacions del bucle tancat. Per això, es important dissenyar algoritmes de control predictiu que garantien l'estabilitat del bucle tancat, amb temps de càlcul petits i amb un clar significat dels seus paràmetres i la seva relació amb les prestacions del sistema.

La principal aportació d'esta tesi, es la definició d'un nou controlador predictiu anomenat Principal Component Generalized Predictive Control (PC-GPC). Sota la base del conegut GPC, el nou controlador es una modificació d'este. En el PC-GPC s'ha substituït el factor de ponderació del senyal de control per un nou paràmetre anomenat *Nombre de components principals*. La relació del nou paràmetre amb alguns indicadors de tipus numèric, com poden ser l'esforç de control o el condicionament del controlador, fa que la seva elecció no està condicionada a criteris de prova i error. En la tesi s'analitza la relació del nou paràmetre amb el factor de ponderació del control concluint que els dos produïxen el mateix efecte. En segon lloc, s'ha deduït el càlcul d'este controlador per a garantir l'estabilitat nominal del bucle tancat, amb avantatges respecte a altres mètodes ja que no s'ha de fer inversió de cap matriu.



# Abstract

One of the advanced control methodologies which has made a significant impact on industrial control engineering is Model Predictive Control (MPC). This technique is a design philosophy – not just a specific controller design.

Despite its advantages, MPC is deficient because it does not offer a clear numeric relation between design parameters and control performance. In that respect, it would be very useful to develop simple predictive control algorithms which guarantee closed-loop stability and offer clear meanings of parameters.

This thesis presents a modification to the Generalized Predictive Control algorithm which guarantees closed-loop stability. The new controller *Principal Component GPC (PC-GPC)* is designed using a terminal equality constraint with a move suppression factor  $\lambda = 0$ . The available degrees of freedom are presented to the designer as a new parameter – called number of principal components (NPC). These components can be left, or removed, from the solution to obtain different performances.

Several methods to select the new parameter NPC are presented. These can be based on percentage of minimized index and control effort applied to the process, among others. This methods offer an alternative to the empirical selection of the weighting control factor  $\lambda$ .



# Índice General

Justificación y objetivos	xi
<b>1 Control predictivo basado en modelos</b>	<b>1</b>
1.1 La metodología del control predictivo . . . . .	1
1.1.1 Predictor . . . . .	5
1.1.2 Función de coste . . . . .	7
1.1.3 Optimizador . . . . .	10
1.2 Evolución del MPC . . . . .	11
1.3 El control predictivo y la industria . . . . .	16
<b>2 El controlador GPC y la SVD</b>	<b>19</b>
2.1 Controlador Predictivo Generalizado (GPC) . . . . .	20
2.2 Formulación como un problema LS . . . . .	24
2.2.1 ¿Por qué aparece el problema del mal condicionamiento en control predictivo? . . . . .	26
2.3 La descomposición en valores singulares . . . . .	28
2.4 Cálculo del controlador GPC vía SVD . . . . .	30
2.5 Análisis de Componentes Principales . . . . .	33
2.5.1 Las componentes principales y el controlador GPC . . . . .	34
2.5.2 Relación entre los Componentes Principales y el factor de ponderación de la acción de control . . . . .	39
2.6 Resumen . . . . .	47



---

<b>3</b>	<b>El controlador PC-GPC</b>	<b>49</b>
3.1	El parámetro NPC . . . . .	49
3.1.1	Ejemplo: Control de un proceso de 5° orden . . . . .	53
3.2	Extensión al caso multivariable . . . . .	62
3.2.1	Ejemplo: Control de un proceso MIMO . . . . .	63
3.3	Criterios de selección . . . . .	69
3.3.1	Porcentaje de índice minimizado (PIM) . . . . .	69
3.3.2	Porcentaje de índice residual (PIR) . . . . .	70
3.3.3	Cota superior para la 2-norma del vector de acciones de control . . . . .	70
3.3.4	Cota superior para el primer cambio de la acción de control . . . . .	72
3.3.5	Criterios estadísticos . . . . .	72
3.3.6	Validación cruzada . . . . .	74
3.3.7	Criterio multiobjetivo . . . . .	75
3.4	Ejemplo SISO . . . . .	76
3.5	Ejemplo MIMO . . . . .	84
3.6	Resumen . . . . .	94
<b>4</b>	<b>PC-GPC con restricciones</b>	<b>103</b>
4.1	Formulación con restricciones . . . . .	105
4.2	Ejemplos . . . . .	107
4.2.1	Ejemplo SISO: Control de un doble integrador . . . . .	107
4.2.2	Ejemplo MIMO: Control de un fraccionador de petróleo . . . . .	108
4.3	Resumen . . . . .	114
<b>5</b>	<b>Análisis de robustez del PC-GPC</b>	<b>117</b>
5.1	Incertidumbre y robustez . . . . .	118
5.2	Funciones de sensibilidad . . . . .	119
5.3	Teorema de la pequeña ganancia (SGT) . . . . .	121
5.4	Modelado de las incertidumbres . . . . .	122

---

5.4.1	Incertidumbres aditivas . . . . .	123
5.4.2	Incertidumbres multiplicativas . . . . .	125
5.5	S y T como medidas de robustez . . . . .	127
5.6	GPC, controlador de dos grados de libertad . . . . .	129
5.6.1	Análisis de robustez del GPC . . . . .	132
5.7	Análisis de robustez del PC-GPC . . . . .	138
5.7.1	Extensión al caso multivariable . . . . .	141
5.8	Resumen . . . . .	144
<b>6</b>	<b>Diseño de GPC estable con componentes principales</b>	<b>147</b>
6.1	CRHPC . . . . .	149
6.2	Cálculo del CRHPC con SVD . . . . .	158
6.2.1	Obtención de la solución particular . . . . .	159
6.2.2	Obtención de la solución homogénea . . . . .	160
6.3	PC-GPC estable . . . . .	161
6.4	$GPC^\infty$ . . . . .	165
6.4.1	$GPC^\infty$ con componentes principales . . . . .	173
6.5	PC-GPC estable como LS . . . . .	173
6.6	Ejemplos . . . . .	174
6.7	Resumen . . . . .	198
<b>7</b>	<b>Conclusiones y trabajos futuros</b>	<b>203</b>
7.1	Conclusiones . . . . .	203
7.2	Trabajos futuros . . . . .	205
<b>A</b>	<b>GPC-MIMO</b>	<b>207</b>
A.1	Modelo de predicción MIMO . . . . .	207
A.1.1	Interpretación matricial del modelo de predicción . . . . .	214
A.2	Obtención del controlador . . . . .	219
A.2.1	Estructuración de la acción de control: horizonte de control	223

---

A.2.2	Horizontes de control diferentes para cada entrada . . . . .	225
A.2.3	Horizontes de predicción diferentes para cada salida . . . . .	225
A.2.4	Horizonte de predicción distinto para cada salida y horizonte de control distinto para cada entrada . . . . .	227
A.3	Formulación polinomial del controlador . . . . .	228
A.3.1	Función de transferencia de bucle cerrado . . . . .	231
<b>B</b>	<b>Sistemas de ecuaciones mal condicionados</b>	<b>235</b>
<b>C</b>	<b>Pseudoinversas y sistemas de ecuaciones</b>	<b>239</b>
C.1	Solución de mínima norma que minimiza $\ \mathbf{x}\ _2$ . . . . .	239
C.2	Solución de mínima norma que minimiza $\ A\mathbf{x} - \mathbf{b}\ _2$ . . . . .	242
C.3	Pseudoinversa o inversa generalizada . . . . .	244
C.4	Algunas propiedades de los valores singulares . . . . .	245

# Índice de Figuras

1.1	Metodología general del MPC . . . . .	4
1.2	Estructura general de un modelo. . . . .	5
2.1	Evolución del número de condición para un proceso multivariable $2 \times 2$ . . . . .	32
2.2	Interpretación geométrica de la descomposición SVD de la matriz $G$ . . . . .	37
3.1	Si el modelo es igual al proceso, el control es adecuado. . . . .	54
3.2	Si proceso y modelo no coinciden, el bucle cerrado es inestable. . . . .	55
3.3	El bucle cerrado es inestable, incluso utilizando un polinomio $T(z^{-1}) = (1 - 0.9z^{-1})^2$ . . . . .	55
3.4	Con el controlador PC-GPC, el bucle cerrado es estable, para la misma discrepancia entre proceso y modelo. . . . .	57
3.5	Representación gráfica de las columnas 3, 5, 7 y 8 de la tabla 3.1. . . . .	58
3.6	Comparación de las respuestas usando 2,3,4 y 5 componentes . . . . .	59
3.7	Comparación entre el uso del factor $\beta$ y la selección de componentes principales . . . . .	60
3.8	El factor $\beta$ puede influir sólo sobre las últimas componentes . . . . .	62
3.9	Control de la columna de destilación propuesta por Wood and Berry con análisis de componentes principales. . . . .	65
3.10	Acciones de control para 4, 5 y 8 componentes. . . . .	66
3.11	Para $N_u = 2$ , el problema se plantea como una minimización sobre una circunferencia . . . . .	71
3.12	Selección para el 95% de índice minimizado. . . . .	77

3.13	La selección se realiza cuando no se aprecia disminución en PR. . .	79
3.14	Se seleccionan aquellas componentes que producen $\ \Delta u\ _2 \leq 0.25$ . . .	80
3.15	Se seleccionan aquellas componentes que producen $ \Delta u_1  \leq 0.0048$ . . . . .	81
3.16	Se eliminan todos los componentes por debajo del valor singular medio. . . . .	82
3.17	La intersección de las dos curvas determina el número de compo- nentes. . . . .	83
3.18	Se utiliza una variación del 15% en los parámetros del modelo. . .	85
3.19	Salida en bucle cerrado cuando se usan más componentes y el modelo es distinto al proceso . . . . .	86
3.20	El mínimo del índice multiobjetivo para $w_1 = 1$ , $w_2 = 1$ y $w_3 = 1$ , resulta al elegir 5 componentes. . . . .	87
3.21	El mínimo del índice multiobjetivo para $w_1 = 2$ , $w_2 = 1$ y $w_3 = 0.5$ , resulta al elegir 6 componentes. . . . .	88
3.22	Se selecciona el mayor número de componentes que produce un $PIM \leq 98\%$ . . . . .	90
3.23	Control con el PC-GPC que produce un $PIM \leq 98\%$ . . . . .	91
3.24	Porcentaje de residuo. La selección se realiza cuando no se aprecia disminución en PR. . . . .	92
3.25	Control con el PC-GPC que incluye 50 componentes . . . . .	93
3.26	Norma euclídea de los incrementos futuros de las acc. de control. . .	94
3.27	Control con el PC-GPC que produce $\ \Delta u\ _2 \leq 10$ . . . . .	95
3.28	Selección de componentes que generan la primera acción de control menor que $5 \times \Delta u_{ss}$ . . . . .	96
3.29	Valores singulares. Se incluyen los componentes asociados a valores singulares por encima de su valor medio. . . . .	96
3.30	Control con el PC-GPC para el criterio del valor singular medio. . .	97
3.31	Valores singulares para las dos matrices.El análisis paralelo produce la inclusión de muy pocas componentes. . . . .	98
3.32	Control con el PC-GPC diseñado con 5 componentes. . . . .	99

3.33	Índice multicriterio para $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ . A partir de la componente 60 no se observa mejoría el índice multiobjetivo. . . .	100
3.34	Control con el PC-GPC diseñado con el criterio multiobjetivo. . . .	101
4.1	Ventaja del uso de restricciones en el CPBM. . . . .	104
4.2	El GPC y el PC-GPC ofrecen unas prestaciones similares cuando no existen restricciones. . . . .	109
4.3	GPC con QP y PC-GPC con QP cuando existen restricciones. . . .	110
4.4	Control sin restricciones con el GPC multivariable y $\lambda = 1$ . . . . .	112
4.5	Control sin restricciones con el PC-GPC multivariable y 18 componentes. . . . .	113
4.6	Control con restricciones con el GPC multivariable ( $\lambda = 1$ ). . . . .	115
4.7	Control con restricciones con el PC-GPC multivariable (18 comp.).	116
5.1	Especificaciones para el controlador respecto a estabilidad y prestaciones. . . . .	119
5.2	Diagramas de bloques para con controladores de uno y dos grados de libertad. . . . .	120
5.3	Diagrama para el SGT. . . . .	121
5.4	Estructura de interconexión $M\Delta$ . . . . .	122
5.5	Incertidumbre aditiva. . . . .	124
5.6	Incertidumbre multiplicativa. . . . .	125
5.7	Incertidumbre multiplicativa a la salida. . . . .	126
5.8	Incertidumbre multiplicativa inversa a la salida. . . . .	128
5.9	Representación en diagrama de bloques del GPC lineal. . . . .	130
5.10	El GPC como controlador de dos grados de libertad. . . . .	131
5.11	Influencia del horizonte de predicción $N_2$ en la estabilidad robusta. .	133
5.12	Influencia del horizonte de control $N_u$ en la estabilidad robusta. . .	134
5.13	Influencia del factor de ponderación de la acción de control en la estabilidad robusta. . . . .	136
5.14	Influencia del parámetro $t_f$ del polinomio de filtrado $T$ en la estabilidad robusta. . . . .	137

5.15	Influencia del orden $n$ del polinomio de filtrado $T$ en la estabilidad robusta. . . . .	139
5.16	Influencia de las componentes principales en la estabilidad robusta. . . . .	140
5.17	La condición suficiente del SGT se cumple para 2 componentes. . . . .	142
5.18	Respuesta en bucle cerrado para distintas componentes principales. . . . .	144
5.19	Funciones de sensibilidad para el proceso $2 \times 2$ según se eliminan componentes principales. . . . .	145
6.1	Restricción terminal. . . . .	149
6.2	Respuestas para un GPC y un CRHPC diseñados con los mismos parámetros. . . . .	176
6.3	Respuesta del proceso ante un escalón unitario. . . . .	177
6.4	Control con un CRHPC. . . . .	178
6.5	Control con un CRHPC para el proceso con retardo. . . . .	180
6.6	Control con un PC-GPC estable diseñado de 0 a 9 componentes. . . . .	181
6.7	Control con el PC-GPC diseñado con 4 componentes. . . . .	182
6.8	2-norma del vector de acciones de control en función de las componentes. . . . .	183
6.9	Salida en bucle cerrado para 2 componentes. . . . .	184
6.10	Índice de coste para 2 componentes. . . . .	184
6.11	Comparación: PC-GPC estable con 2 componentes y un CRHPC con $\lambda = 10$ . . . . .	185
6.12	PIM para el proceso multivariable $3 \times 3$ . . . . .	187
6.13	Salida en bucle cerrado para 70 componentes. . . . .	187
6.14	Acciones de control para 70 componentes. . . . .	188
6.15	Índice de coste para 70 componentes. . . . .	188
6.16	Salida en bucle cerrado para 70 componentes y factores $\alpha$ iguales. . . . .	189
6.17	Acciones de control para 70 componentes y factores $\alpha$ iguales. . . . .	190
6.18	Magnitud del vector de acciones generado para las primeras 70 componentes. . . . .	190
6.19	Salida en bucle cerrado para 45 componentes. . . . .	191

---

6.20	Acciones de control para 45 componentes. . . . .	191
6.21	Índice de coste para 45 componentes. . . . .	192
6.22	La magnitud del vector de incrementos de control no supera el límite establecido. . . . .	192
6.23	Control con el $\text{GPC}^\infty$ . . . . .	194
6.24	Control con el $\text{PC-GPC}^\infty$ para distintos componentes. . . . .	195
6.25	Control con el $\text{PC-GPC}^\infty$ utilizando un método de mínimos cuadrados ponderado. . . . .	197
6.26	Comparación del control con CRHPC y con un $\text{PC-GPC}$ estable. . .	199
A.1	Diagrama de bloques para el controlador GPC multivariable. . . . .	232
B.1	Ejemplo de un sistema de dos ecuaciones. . . . .	236
C.1	Representación de la ecuación en el plano $x_1x_2$ . . . . .	240





# Justificación y objetivos

El control predictivo basado en modelos (CPBM) o *Model Predictive Control (MPC)*, no hace referencia a un diseño concreto de un controlador sino más bien a un conjunto de ideas o características para el desarrollo de estrategias de control que, aplicadas en un mayor o menor grado, dan lugar a diferentes tipos de controladores con estructuras similares.

El MPC, posee una serie de atributos que le hacen ser un candidato muy interesante a la hora de seleccionar una metodología de diseño para el control de procesos:

- *Simplicidad*: las ideas básicas del MPC son bastante intuitivas y fáciles de entender, sin necesidad de tener un profundo conocimiento de la teoría de control moderna.
- *Flexibilidad*: casi todos los componentes de un diseño basado en el MPC (los horizontes, el modelo, la función de coste, el optimizador) pueden ser fijados por el usuario dependiendo cada vez del tipo de problema a tratar.
- *Practicable*: a menudo la utilidad de un controlador a la hora de resolver problemas de control, viene dada por la posibilidad de imponer restricciones a las variables. El MPC es una de las pocas metodologías de control que maneja estas cuestiones de una forma natural.
- *Aplicable*: Está demostrado que existen numerosas aplicaciones reales donde el MPC se utiliza, incrementando los márgenes de operación del proceso.

Todo lo anterior ha contribuido a que el MPC sea una de las técnicas de control que más se ha desarrollado en los ámbitos académico e industrial en las últimas

décadas. Este creciente interés puede concretarse aún más, teniendo en cuenta que:

- Puede ser aplicado a una gran variedad de procesos, desde plantas con una dinámica muy sencilla hasta otras más complejas, incluyendo sistemas con retardo, inestables, de fase no-mínima, etc.
- En los casos más simples la ley de control resultante es un sencillo controlador lineal, fácil de implementar.
- Es especialmente útil cuando las referencias futuras son conocidas, como es el caso de aplicaciones de robótica y procesos por lotes.
- La extensión al caso multivariable es bastante sencilla y directa.
- Es muy fácil incorporar en el diseño el tratamiento de restricciones, por ejemplo, en la amplitud permitida para las variables controladas o manipuladas.
- Se pueden conseguir diseños que garanticen la estabilidad nominal del bucle cerrado tan sólo añadiendo nuevas restricciones.

De todos los algoritmos de control predictivo descritos en la literatura cabría destacar dos de ellos: el DMC o *Dynamic Matrix Control* y el GPC o *Generalized Predictive Control*. De hecho, las ideas que subyacen en ambos algoritmos de control son esencialmente las mismas. El primero, desarrollado en el ámbito industrial, está orientado a procesos multivariables e implementado, dentro de la jerarquía de control, por encima del control básico. El segundo, desarrollado en el ámbito académico, fue inicialmente diseñado para procesos monovariabes sin restricciones, aunque con el tiempo se han ido incorporando restricciones, y aplicación a procesos multivariables.

En esta tesis se han realizado todos los desarrollos en base al controlador GPC debido, sobre todo, a que:

- En el GPC se pueden plantear una gama bastante amplia de problemas de control (procesos inestables, de fase no mínima, etc) con un número razonable de parámetros de diseño.
- El modelo en forma de función de transferencia utilizado en el GPC permite realizar un análisis del sistema en bucle cerrado al estilo clásico (estabilidad, robustez, etc).

- La extensión al caso multivariable del GPC es sencilla.
- La incorporación de restricciones en el diseño no presenta ninguna dificultad adicional y se realiza del mismo modo que en otros algoritmos, como el DMC.
- El modelo de perturbaciones que incluye el GPC es más rico que la perturbación de tipo determinista incluida en el DMC.

Posibles direcciones futuras en el uso de este controlador apuntan a:

- La posibilidad de que los controladores de bajo nivel de tipo PID sean reemplazados por controladores predictivos sencillos como el GPC, puesto que este controlador es mucho más potente que un controlador PID, incluso para bucles simples sin restricciones (Maciejowski, 2002).
- La aplicación del control predictivo multivariable en áreas como la robótica donde los tiempos de muestreo son muy pequeños o el control de aviones o naves espaciales donde no tiene sentido un bucle simple sobre cada actuador.

Sin embargo, no es fácil relacionar los parámetros de ajuste del controlador y las prestaciones del bucle cerrado. En este sentido, es importante *diseñar algoritmos de control predictivo que garanticen la estabilidad nominal del bucle cerrado, con tiempos de cálculo pequeños y con un significado claro de sus parámetros sobre las prestaciones del sistema o sobre el esfuerzo de control.*

En la tabla 1 se muestra cuál es la secuencia de implantación de un controlador predictivo en el sistema de control de una industria. Como se puede observar, los puntos 4 y 5 hacen referencia a un procedimiento de prueba y error para fijar los parámetros de diseño. Según (Alonso *et al.*, 2000), (Yamuna and Unbehauen, 1996) el parámetro que más se suele modificar en esta etapa es el llamado factor de ponderación de la acción de control o *move suppression factor*. Este factor de ponderación tiene una influencia notable sobre las prestaciones de bucle cerrado. Puesto que la elección de dicho parámetro responde generalmente, a criterios subjetivos basados en la experiencia del diseñador, *esta tesis se centra en ofrecer una alternativa al uso de este parámetro*, tratando de mejorar el procedimiento de sintonía de un controlador predictivo sencillo como es el GPC.

1. A partir de los objetivos de control, definir el tamaño del problema y determinar las variables relevantes (tanto controladas, como manipuladas y perturbaciones medibles)
2. Realizar ensayos en la planta, variando sistemáticamente todas las entradas (variables manipuladas y perturbaciones medibles) para comprobar cómo responden las variables controladas
3. Identificar un modelo dinámico de la planta a partir de estos datos utilizando un paquete de identificación.
4. Configurar el controlador predictivo e introducir unos parámetros iniciales.
5. Comprobar fuera de línea, realizando simulaciones del bucle cerrado, cuáles son las prestaciones del controlador diseñado y modificar los parámetros de diseño hasta alcanzar las prestaciones deseadas.
6. Instalar el controlador en la máquina destino y comprobar las predicciones del modelo en bucle abierto
7. Refinar el ajuste de los parámetros si fuera necesario.

Tabla 1: Diseño y sintonizado del controlador predictivo (Qin and Lee, 2001).

En esta tesis se presenta una variación del controlador GPC<sup>1</sup>, el PC-GPC o *Principal Component GPC*, partiendo de un factor de ponderación nulo. Este controlador incluye un nuevo parámetro de diseño: NPC o *número de componentes principales*. El parámetro NPC puede tomar valores enteros entre 1 y el horizonte de control  $N_u$  y su efecto es el mismo que el del factor de ponderación de la acción de control.

Sin embargo, al contrario que éste último, la elección del parámetro NPC está sujeta a una serie de criterios de tipo numérico. Los métodos de selección presentados están relacionados con algunas características del diseño como son, entre otras, el esfuerzo de control o la minimización del error de predicción conseguido.

La tesis también pone de manifiesto la relación que une el nuevo parámetro

---

<sup>1</sup>Los métodos propuestos también podrían ser aplicados por ejemplo a un algoritmo DMC.

NPC con el factor de ponderación de la acción de control. Esto hace que, partiendo del controlador PC-GPC, se pueda derivar cuál sería el factor de ponderación para un GPC estándar de tal forma que ambos alcanzasen unas prestaciones similares de bucle cerrado.

La estructura de la tesis es la siguiente:

En el **capítulo 1**, se presenta la metodología del MPC y su estado del arte, haciendo un análisis de las líneas de investigación actuales y de la situación del MPC en la industria.

En el **capítulo 2**, se repasan los conceptos del Controlador Predictivo Generalizado (GPC). Se plantea su diseño desde el punto de vista de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales, de tal forma que se pueda analizar mejor el problema del mal condicionamiento, y se presenta la herramienta matemática que se va a utilizar para diseñar el nuevo controlador. Esta herramienta, la descomposición en valores singulares (SVD), nos va a permitir aliviar el problema planteado. Además, utilizando dicha descomposición en el diseño del controlador se puede obviar el factor de ponderación de la acción de control, trabajando por tanto, con un índice que sólo incluye los errores de predicción. Como consecuencia de ello surge un nuevo parámetro (NPC), estudiándose su relación con el factor de ponderación de la acción de control.

En el **capítulo 3**, se presenta el nuevo controlador basado en la inclusión de las componentes principales, el PC-GPC (*Principal Component Generalized Predictive Control*). Una vez expuestas las propiedades de controlador, el capítulo se centra en ofrecer criterios de distinta naturaleza para la elección de las componentes principales que se incluirán en el diseño. Estos criterios están basados, entre otros, en la capacidad de reducción del error de predicción o en el esfuerzo de control empleado. Tras unos ejemplos, tanto para el caso monovariado como para el multivariado, se aborda el **capítulo 4** donde se trata el tema de las restricciones desde un punto de vista clásico, y se analiza cómo se puede transformar las restricciones al plano de las componentes principales. El resultado es que la rutina de optimización tiene muchas menos variables que optimizar si se utiliza el PC-GPC.

En el **capítulo 5** se analiza cómo influye el nuevo parámetro sobre la estabilidad robusta del bucle cerrado. El capítulo comienza realizando un análisis de robustez del controlador GPC, comprobando la influencia de cada uno de sus parámetros de diseño en este aspecto y termina realizando este mismo análisis para el PC-GPC.

Por último en el **capítulo 6**, debido a la importancia que tiene diseñar controladores que garanticen la estabilidad nominal en bucle cerrado, se estudian los diseños CRHPC y  $\text{GPC}^\infty$ , ambos propuestos en el marco del control predictivo generalizado estable. En este capítulo se propone una variante de estos controladores que desemboca en un GPC con componentes principales que garantiza la estabilidad de bucle cerrado, lo que da lugar a poder utilizar de nuevo los criterios expuestos en el capítulo anterior.

Finalmente, el último capítulo presenta las conclusiones y perspectivas futuras del trabajo.

Al final del documento se incluyen una serie de apéndices. El **apéndice A** contiene el desarrollo teórico del GPC multivariable extendido para diferentes horizontes tanto de predicción y control, por ser dicho controlador el que se ha utilizado para implementar todos los ejemplos MIMO que aparecen en la tesis. En el **apéndice B** se presentan algunos aspectos del álgebra matricial y mal condicionamiento de sistemas de ecuaciones, y el **apéndice C** contiene algunas propiedades interesantes de los valores singulares y su relación con la pseudoinversa o inversa generalizada.

# Capítulo 1

## Control predictivo basado en modelos

### 1.1 La metodología del control predictivo

El control predictivo basado en modelos o *Model Predictive Control (MPC)*, más que un controlador concreto es una metodología para el cálculo de las acciones de control. Se trata además de una técnica comprensible, que en cierto modo, trata de reproducir el comportamiento de un operador experto en el control de un determinado proceso. Los pasos que seguiría un operador experto para conseguir controlar un proceso serían:

1. El operador conoce bien el proceso y por tanto, sería capaz de predecir, con mayor o menor exactitud, cuál será la evolución dinámica de las variables de un proceso si le aplica unas acciones de control determinadas.
2. El mismo operador puede además, decidir si esa evolución es adecuada en comparación a los objetivos que se ha marcado. Es capaz, por tanto, de valorar las distintas combinaciones de las acciones de control en función del grado de cumplimiento de unas especificaciones.
3. Con todo esto, podría decidir cuál es la mejor combinación de acciones de control dentro de un conjunto de posibilidades. El resultado final es que este operador es capaz de obtener cuál debe ser la acción de control que hay que aplicar basándose en los conocimientos que tiene del proceso y en la información pasada y actual de su estado.



4. Para conseguir una mayor calidad en el control, este mismo operador repetiría todos los cálculos cada vez que disponga de información actualizada, bien sean nuevas medidas del estado del proceso, bien conocimientos actualizados acerca del comportamiento del proceso (información nueva del modelo).

Este ejemplo nos da a entender que los primeros controles realizados manualmente por operadores que conocían bien el proceso se podían haber englobado en el área del control predictivo basado en modelos. En definitiva se trata de una metodología muy intuitiva para abordar el control de un proceso y esto ha influido en su difusión a nivel industrial. Para concretar, se entiende que pertenecen a la familia de los controladores MPC aquellos que comparten las siguientes características:

- Se hace uso explícito de un modelo del proceso en el cálculo de predicciones de la evolución dinámica del proceso.
- La ley de control (conjunto de acciones de control en un horizonte de tiempo) se obtiene de la minimización de una cierta función de coste en la que intervienen las predicciones. La función de coste es la encargada de fijar el comportamiento que se pretende conseguir (especificaciones).
- Se aplica el concepto de horizonte móvil (*receding horizon*): en cada periodo de muestreo se resuelve un problema de optimización diferente, puesto que se incorpora nueva información de la evolución dinámica del proceso.

De las ideas anteriores, se puede deducir la diversidad de estrategias que pueden surgir en base a estas características. Como consecuencia, aparecerán diferentes controladores:

- Según el tipo de modelo del proceso utilizado.
- Según el tipo de función de coste utilizada.
- Según el método de optimización aplicado.

Para clarificar un poco más el concepto del MPC, se va a describir la metodología común que comparten todos los controladores que hacen uso de las ideas descritas anteriormente (figura 1.1):

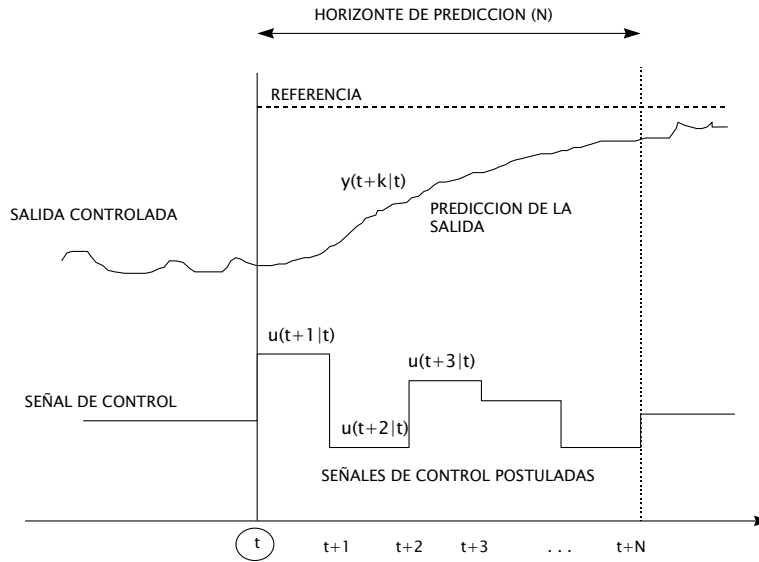
1. Haciendo uso del modelo del proceso, para cada instante  $t$ , se predicen las  $N$  futuras salidas del proceso  $y(t+k|t)$ <sup>1</sup> siendo  $k = 1, 2, 3, \dots, N$ . El número de predicciones  $N$ , recibe el nombre de "horizonte de predicción". Las salidas se predicen utilizando las salidas y entradas pasadas (información disponible hasta el instante  $t$ ) y las hipotéticas entradas de control futuras, postuladas en ese mismo instante  $t$ .
2. Las futuras acciones de control se calculan de manera que minimicen una determinada función de coste, entre cuyos objetivos se encuentra el mantener lo más cerca posible la salida del proceso  $y(t+k|t)$ , de una trayectoria de referencia  $w(t+k)$  que describe cómo se desea guiar dicha salida desde su valor actual  $y(t)$  hasta sus puntos de consigna futuros. La función de coste adopta así generalmente la forma de una función cuadrática de los errores entre la salida predicha y la trayectoria de referencia. También en la mayoría de los casos se suele incluir algún término referente al esfuerzo de control. Además, si la función de coste que se define es cuadrática, el modelo utilizado es lineal y no existen restricciones para ninguna señal implicada, entonces es posible encontrar una solución analítica para el problema de la optimización. En caso contrario, es necesario utilizar, en general, un método numérico de optimización.
3. Una vez calculada la secuencia de futuras acciones de control que en ese instante hacen óptima la función de coste, se hace uso del concepto denominado "receding horizon". Solamente se aplica como entrada al proceso  $u(t)$  la primera de ellas, despreciando el resto, puesto que en el siguiente instante  $t+1$ , la salida  $y(t+1)$  ya es conocida, y utilizando esa nueva información se repiten los pasos 1 y 2, obteniendo de esta forma la señal de control  $u(t+1)$  a aplicar en ese instante (la cual no es igual a la que se había postulado en el instante anterior  $u(t+1|t)$ ).

El análisis de esta metodología de control muestra que, sea cual sea la implementación que se realice, cualquier control predictivo basado en modelos se puede entender como un problema de optimización en cada periodo de muestreo que consta de tres elementos fundamentales:

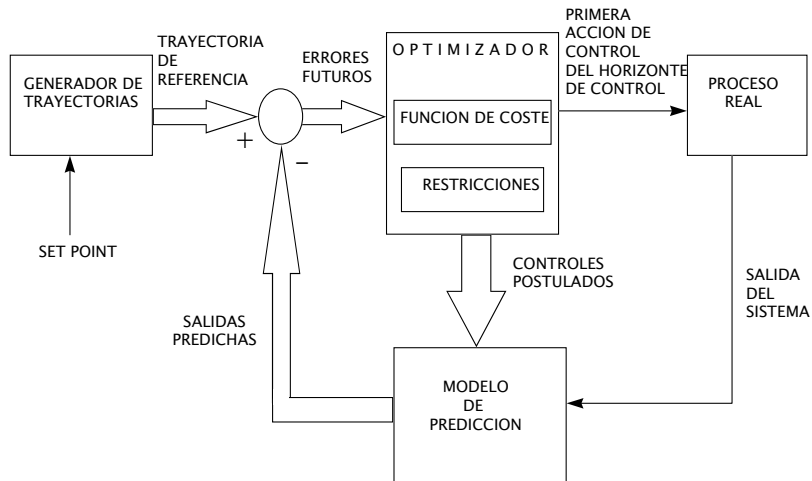
- Un **predictor** basado en el modelo del proceso, encargado de calcular las predicciones de la evolución dinámica del mismo a partir de las medidas

---

<sup>1</sup>Es usual encontrar en el ámbito del MPC, la sintaxis  $y(t+k|t)$  para indicar la predicción de la salida para el instante  $t+k$  postulada en el instante  $t$



(a) La predicción de la salida del proceso es la base del control predictivo.



(b) Concepto de horizonte móvil.

Figura 1.1: Metodología general del MPC

de las variables del proceso hasta el instante actual 't' y unas acciones de control futuras a lo largo del horizonte de predicción.

- Una **función de coste** que asigna un valor a cada predicción y por tanto, a cada ley de control postulada. Este valor trata de mostrar el grado de cumplimiento de las especificaciones estáticas y dinámicas compatibles con las posibles restricciones de funcionamiento.
- Un **optimizador** que debe encontrar el vector de acciones de control que ofrece el mejor valor de la función de coste. Generalmente en este proceso de búsqueda el optimizador realiza postulados de la ley de control e iterativamente trata de acercarse a la ley de control óptima.

Combinando distintas variaciones de estos tres elementos fundamentales se pueden obtener un gran número de controladores que formarían parte de la familia de los controladores predictivos. Para poder plantear cualquier tipo de mejora se debe analizar cada uno de estos tres elementos fundamentales.

### 1.1.1 Predictor

Este elemento del control predictivo es el que se encarga de calcular las predicciones de la evolución dinámica de las variables que se quieren controlar y debe utilizar para ello un modelo. En general este modelo consta de dos componentes (figura 1.2):

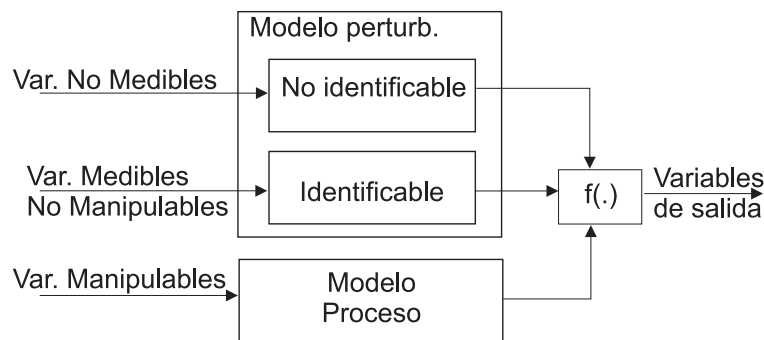


Figura 1.2: Estructura general de un modelo.

- **Modelo del proceso** que relaciona todas las variables de entrada que se pueden manipular con las variables de salida que se quieren controlar.

- **Modelo de perturbaciones** que se puede dividir en dos partes. Una que incluye la relación entre variables de entrada medibles, pero no manipulables, con las salidas (modelo de perturbaciones identificable) y otra parte que trata de describir la parte de la salida medida que no es explicada por el resto de modelos (modelo de perturbaciones no identificable).

Estos modelos se combinan a través de una función  $f(\cdot)$  para producir un modelo de las variables de salida. Para modelar cada uno de estos componentes existen varias posibilidades:

- Respuesta ante un impulso.
- Respuesta ante un escalón.
- Función de transferencia.
- Representación en espacio de estados.
- Modelos de Volterra.
- Modelos mediante redes neuronales.
- Modelos fuzzy.

Las diferencias entre los distintos tipos de modelos son conocidas y son objeto de campos de estudio en los que se describe cómo se obtienen, qué tipo de procesos pueden modelar, cuáles son sus limitaciones y cómo se utilizan para realizar predicciones de la evolución dinámica de las variables de un proceso.

En (Phillips and Parr, 1995) se puede encontrar una descripción del modelado mediante respuesta impulsional, función de transferencia y representación en espacio de estados y su utilización en control predictivo está ampliamente descrita en (Camacho and Bordóns, 1995).

Un ejemplo de utilización de modelos de Volterra en control predictivo se puede encontrar en (Maner *et al.*, 1996). Las redes neuronales son, en algunos casos, una alternativa para el modelado de sistemas no lineales (Chen *et al.*, 1990), ejemplos de utilización en control predictivo se encuentran en (Nahas *et al.*, 1992), (Zamarreño, 1996) y (Liu *et al.*, 1998). En cuanto a los modelos con técnicas fuzzy, es posible encontrar ejemplos en (Espinosa and Vandewalle, 1999b) y (Espinosa and Vandewalle, 1999a).

Evidentemente, la calidad de la predicción debería ser el factor que marque el tipo de técnica de modelado que se debe utilizar, al menos a nivel teórico. Es natural pensar que, a mayor calidad en las predicciones, más posibilidad se tiene de conseguir un control adecuado. En las aplicaciones prácticas aparecen otros factores como los económicos que pueden determinar, más allá de las cuestiones teóricas, el tipo de modelo seleccionado.

Cualquiera de las técnicas de modelado mencionadas, puede ser utilizada para predecir el efecto que producen las variables manipuladas sobre las variables controladas. Esto es así, puesto que cualquiera de las acciones de control que se postule en el algoritmo de localización del óptimo, puede aplicarse posteriormente al proceso. Por tanto la calidad de la predicción sólo depende de la calidad del modelo. No parece tan evidente utilizar estos modelos para predecir el efecto de las variables no manipulables (medibles o no).

Cuando se tienen variables de entrada no manipulables no se puede saber con certeza qué valores van a tomar en el futuro y por tanto en el horizonte de predicción (intervalo de tiempo en el que se quiere realizar la predicción). El modelo puede ser muy exacto, pero el desconocimiento del valor futuro de estas variables podría producir predicciones de muy baja calidad. En estos casos se debe, al menos, conocer alguna de sus propiedades estadísticas que nos permita realizar una estimación. Si estas variables son medibles se pueden utilizar las medidas para realizar una estimación de mayor calidad (por ejemplo, evaluar la tendencia y extrapolar). La calidad de la predicción, en estos casos, depende tanto de la calidad del modelo como de la calidad de las estimaciones de las variables no manipulables.

Para tratar de compensar la dinámica no modelada se añaden al modelo elementos artificiales en su estructura para tratar de incrementar la calidad del control. Por ejemplo en el caso del GPC se utilizan modelos CARIMA con polinomios de filtrado  $T(z^{-1})$  para mejorar la robustez.

### 1.1.2 Función de coste

Un índice de funcionamiento responde, en general a una expresión del tipo:

$$I = \int_0^{\infty} f(r(t), y(t), t) dt \quad (1.1)$$

El objetivo de esta función es plasmar en una formulación matemática una medida cuantitativa del funcionamiento de un sistema. En la teoría de control

aparecen distintos indicadores que tratan de describir la evolución dinámica de un proceso, y se pueden englobar en dos grandes grupos:

- a) Parámetros descriptivos de la evolución temporal de la variable controlada: error en régimen permanente, valor final, tiempo de establecimiento, sobreoscilación, frecuencia de las oscilaciones, tiempo de subida, etc.
- b) Medidas de la desviación de la variable controlada respecto de la referencia (tabla 1.1). Generalmente se han utilizado integrales de una función del error, siendo los más extendidos en su uso (Marlin, 1995): IAE (integral del valor absoluto del error), ICE (integral del error al cuadrado), ITAE (integral del producto del tiempo por el valor absoluto del error), ITEC (integral del producto del tiempo por el error al cuadrado), etc.

Índice	Expresión
IAE	$\int_0^{\infty}  r(t) - y(t)  dt$
ISE	$\int_0^{\infty} (r(t) - y(t))^2 dt$
ITAE	$\int_0^{\infty} t r(t) - y(t)  dt$
ITEC	$\int_0^{\infty} t(r(t) - y(t))^2 dt$

Tabla 1.1: Principales índices de funcionamiento.

Entre estas dos opciones, parece claro que es más apropiado para evaluar cómo funciona un sistema, utilizar parámetros del primer grupo, ya que las medidas de tipo integral no reflejan directamente cómo funciona el sistema. Sólo con el valor del índice un operador es incapaz de saber con cierto grado de exactitud como está funcionando el sistema. A esto se une que es más usual especificar el funcionamiento de un proceso en términos del tipo tiempo de establecimiento y sobreoscilación menores que unos valores determinados. Sin embargo, con los indicadores de tipo integral se puede incorporar en la evaluación del funcionamiento otro tipo de elementos como por ejemplo, el valor de la acción de control o ponderaciones de las distintas variables y, adicionalmente, se pueden usar para incluir en el índice la evaluación de costes económicos.

En general, no existe una formulación universal que sea válida para todos los problemas de control ya que cada tipo de indicadores tiene sus ventajas e inconvenientes. El índice de funcionamiento más adecuado para un problema concreto depende de los objetivos que se impongan y de las herramientas disponibles.

Una alternativa que trata de combinar los dos tipos de indicadores es la de establecer unas trayectorias de referencia en un índice de tipo integral. En lugar de utilizar una referencia de tipo escalón  $r(t)$ , se filtra mediante una función de transferencia ( $P(s)$ ) que fije la dinámica deseada de bucle cerrado: tiempo de establecimiento, sobreoscilación y régimen permanente, y se utiliza esta nueva respuesta  $w(t)$  como referencia en un índice de funcionamiento de tipo integral.

$$w(s) = P(s)r(s) \rightarrow w(t) \quad (1.2)$$

$$I = \int_0^{\infty} f(w(t), y(t), u(t), t) dt \quad (1.3)$$

La traducción al entorno del control predictivo es directa, ya que operando con señales discretas el índice de coste debe, de alguna forma, imponer el funcionamiento deseado para el proceso introduciendo además nuevas características y parámetros para posibilitar su aplicación al control en línea ya que se debe conseguir que el volumen de los cálculos a realizar sea razonable. Se puede generalizar, por tanto, como función de coste la expresión siguiente:

$$J(u) = \sum_{k=N_1}^{N_2} f(w(t+k), y(t+k|t), u(t+k), \delta(k), \lambda(k), N_u, t) \quad (1.4)$$

donde cada uno de los parámetros tiene un significado:

**Horizonte de predicción** ( $N_1, \dots, N_2$ ): intervalo de tiempo en el que se realiza la predicción, debe ser finito para que sea posible su aplicación al control en línea. Un horizonte de predicción infinito o demasiado grande hace que los cálculos de las predicciones no se puedan realizar en línea, salvo que exista una formulación analítica.

**Horizonte de control** ( $N_u$ ) : intervalo del horizonte de predicción en el que se permiten variaciones de la variable manipulada. Este parámetro se utiliza para simplificar el problema de optimización, si se reduce el número de variaciones se reduce el número de variables en el problema. Cuando se limita el horizonte de control cabe la posibilidad de realizar distintas estructuraciones de las acciones de control a lo largo del horizonte de predicción.



**Factores de ponderación** para los errores de predicción ( $\delta(k)$ ) y para las acciones de control ( $\lambda(k)$ ). Estos factores se utilizan para conseguir distintos efectos en el comportamiento de bucle cerrado. Por ejemplo, mayor influencia del esfuerzo de control respecto a los errores de predicción o menor influencia en el índice de las predicciones más alejadas, o mayor ponderación de unas determinadas variables en detrimento de otras, etc.

**Restricciones:** puede aparecer además, un conjunto de restricciones adicionales sobre variables de entrada, salida e internas. Estas restricciones pueden ser debidas tanto a limitaciones físicas del proceso como a especificaciones de funcionamiento.

En la mayoría de los casos, la función  $f$  es cuadrática debido principalmente a que la minimización de dicho índice sujeto a restricciones lineales es matemáticamente tratable (problema de programación cuadrática QP). Existen otras aproximaciones manejando índices de coste modulares (Genceli H. and M. Nikolaou, 1993), (Salcedo and Martínez, 2000) o con norma infinita (Rao and Rawlings, 1998) que no resultan tan sencillos de manejar y que, en presencia de restricciones lineales, terminan resolviendo problemas de programación lineal.

### 1.1.3 Optimizador

Finalmente el control predictivo basado en modelos no es más (ni menos) que un problema de optimización. El objetivo de este elemento está claro, debe conseguir la combinación de acciones de control que optimice la función de coste. La solución ideal es la que resultaría de la optimización analítica fuera de línea, esto implica disponer de una expresión matemática que calcula el óptimo en función de las medidas hasta el instante 't'. Esto se puede conseguir cuando el modelo es lineal y la función de coste cuadrática sin restricciones. En estos casos, el problema de optimización se resuelve fuera de línea y el análisis del sistema resultante se puede realizar utilizando las herramientas clásicas de la teoría de control. Fuera de este contexto, es decir, con problemas no lineales (bien sea por los modelos utilizados, bien por la aparición de restricciones, etc.), el control predictivo se convierte en un problema de optimización en cada periodo de muestreo con el consiguiente incremento de complejidad (resultando en un controlador no lineal y en un bucle cerrado también no lineal). El método de optimización cobra más protagonismo cuando se pretende aplicar el control predictivo en línea. Por muy bueno que sea el modelo o muy acertada la función

de coste, el cuello de botella es la técnica de optimización. Una selección o ajuste inadecuado de esta técnica puede provocar en algunos casos, una pérdida notable de las prestaciones del control puesto que no se localiza correctamente el óptimo.

## 1.2 Evolución del MPC

Como ha ocurrido en otros casos, la idea del MPC ya se vislumbró en los años 60 antes de que el MPC se convirtiera en una de las estrategias de control avanzado más utilizada en el control de procesos. Los conceptos teóricos iniciales que pueden asociarse al control predictivo se basan en los trabajos realizados en control óptimo (tabla 1.2). Utilizando un modelo discreto lineal en espacio de estados se calcula la ley de control minimizando una función cuadrática de los estados y las acciones de control (regulador LQR). Al fijar un índice infinito se podía obtener un controlador consistente en una realimentación del estado (Mosca, 1995), (Lemos and Mosca, 1985). Debido a las capacidades limitadas de los ordenadores y al rápido muestreo de los procesos para los que el LQR fue desarrollado (por ejemplo en la industria aeroespacial), el esfuerzo se desvió hacia la obtención de controladores que evitasen realizar la optimización en línea.

Como consecuencia, esta técnica tuvo relativamente poco impacto en la industria de procesos debido a que no contemplaba las no linealidades de los procesos, sus restricciones de funcionamiento, incertidumbres en el modelo y sólo se disponía de un índice cuadrático para medir las prestaciones. Únicamente podía aplicarse en áreas donde se podían conseguir modelos muy exactos y su obtención estaba justificada económicamente (por ejemplo, la industria aeroespacial).

Al contrario que otras veces, el MPC fue desarrollado primero en la industria, bajo varios acrónimos y recetas propias, tratando de resolver los inconvenientes planteados por el LQR antes mencionados, y mucho antes de disponer de un minucioso entendimiento de las propiedades teóricas de lo que hoy se entiende como control predictivo. El interés de los investigadores por el MPC creció a mitad de los años 80, a raíz de unas jornadas organizadas por la empresa petroquímica *Shell* (Prett and Morari, 1987). La industria contribuyó decisivamente en el desarrollo de un control *óptimo* aplicable, apareciendo los primeros controles predictivos basados en modelos. Se trataba de algoritmos de control en los que se podía utilizar modelos más sencillos, las restricciones de

Algoritmo	Modelo	Índice	Horiz. predicción	Restricciones
LQG (1960)	L, SS	min ISE, I,O	$\infty$	-
IDCOM (1976)	L, FIR	min ISE, O	N	I,O
DMC (1979)	L, FIR	min ISE, I,O,M	N	I,O
QDMC (1983)	L, FIR	min ISE, I,O,M	N	I,O
GPC (1987)	L, FT	min ISE, O,M	N	-
IDCOM-M (1988)	L, FIR	min ISE O min ISE I	N	I,O
SMOC (1988)	L, SS	min ISE, I,O,M	N	I,O
Rawlings and Muske (1993)	L, SS	min ISE, I,O	$\infty$	I,O

Leyenda: (L) Lineal, (SS) Espacio de estados, (FIR) Respuesta impulsional, (FT) Función de transferencia, (ISE) Integral Square Error, (I) entrada, (O) Salida, (M) Cambios en la entrada.

Tabla 1.2: Breve historia del MPC.

funcionamiento se podían tener en cuenta en la formulación y la optimización se realizaba cada periodo de muestreo puesto que se utilizaban horizontes de predicción finitos. Las primeras implementaciones a nivel industrial (IDCOM y DMC), se desarrollaron en paralelo. De estos algoritmos cabría destacar:

- **IDCOM** o *Identification Command* (Richalet *et al.*, 1978). Es el nombre del software desarrollado a partir del algoritmo conocido como *Model Algorithmic Control* (MAC) (Rouhani and Mehra, 1982), también referenciado como *Model Predictive Heuristic Control* (MPHC). Sus características más importantes son:
  - Modelo lineal por respuesta impulsional.
  - Función de coste con un índice cuadrático y horizonte de predicción finito.
  - No hace uso del concepto de horizonte de control.
  - Especificaciones mediante trayectoria de referencia generadas mediante un sistema de primer orden.
  - Se incluye un modelo de perturbaciones:

$$n(t+k|t) = \alpha n(t+k-1|t) + (1-\alpha)[y(t) - y(t-1|t)], \quad 0 \leq \alpha < 1$$

- Restricciones en la entrada y la salida incluidas en la formulación.
- Optimización mediante un algoritmo iterativo.
- **DMC** o *Dynamic Matrix Control* (Cutler and Ramaker, 1980). Sus principales características son:
  - Modelo lineal por respuesta a un escalón.
  - Función de coste con un índice cuadrático de los errores futuros y puede incluir términos referentes a las acciones de control.
  - Horizonte de predicción finito.
  - Utiliza un horizonte de control.
  - Especificaciones se fija tratando de seguir un referencia de tipo escalón.
  - Se incluye un modelo de perturbaciones:

$$n(t + k|t) = y(t) - y(t|t - 1)$$

- La acción de control óptima se obtiene como la solución de un problema de mínimos cuadrados.

A partir de estas dos metodologías se han ido desarrollando con el tiempo, distintas alternativas, tanto a nivel industrial como a nivel teórico, entre las que caben destacar:

- **QDMC** (Garcia and Morshedi, 1986). Basado en el DMC incluye explícitamente las restricciones en las entradas y salidas del proceso. Utiliza programación cuadrática (QP) para la minimización del índice.
- **IDCOM-M** (Grosdidier *et al.*, 1988). También referenciado como HIECON (*Hierarchical constraint control*). Esta basado en el IDCOM, presentando cambios en la función objetivo y en la priorización de las restricciones. Utiliza dos funciones objetivo, primero se optimiza la que evalúa los errores de predicción y, si quedan grados de libertad, se optimiza respecto a las acciones de control. Para simplificar el cálculo sólo se permite un cambio en la variable manipulada.
- **GPC** o *Generalized Predictive Control* (Clarke *et al.*, 1987a) (Clarke *et al.*, 1987b):

- Utiliza modelos basados en funciones de transferencia incluyendo modelo de perturbaciones (modelo CARIMA).
- El índice es cuadrático e incluye un término de errores de predicción y otro de acciones de control.
- Utiliza los conceptos de horizonte de predicción y control.
- La optimización es analítica, por tanto se puede calcular un regulador lineal fuera de línea. Permite implementar un control adaptativo.

Este algoritmo resume muchas de las características de los controladores predictivos para procesos lineales (Clarke and Mohtadi, 1989), (Albertos and Ortega, 1989), (Ordys and Clarke, 1993). También se ha utilizado con restricciones (Chow and Clarke, 1994), (Kuznetsov and Clarke, 1994), (Tsang and Clarke, 1988), (Camacho, 1993) y se ha planteado el control predictivo adaptativo (Clarke, 1991). Algunas de sus aplicaciones industriales se pueden encontrar en (Clarke, 1988), (Chow *et al.*, 1994), (Linkens and Mahfouf, 1994), (Rossiter *et al.*, 1991).

El entendimiento de las propiedades del MPC a raíz de investigaciones cruciales realizadas en el ámbito académico (Rawlings and Muske, 1993) han permitido que hoy en día exista un marco conceptual y práctico común tanto a investigadores como a ingenieros de control. Son muchas las publicaciones que reflejan el estado del arte a nivel tecnológico y teórico del control predictivo en su tiempo de publicación (Garcia *et al.*, 1989), (Keyser, 1991), (Muske and Rawlings, 1993), (Richalet, 1993), (Clarke, 1994), (Froisy, 1994), (Qin and Badgwell, 1997), (Nikolaou, 1998), (Morari and Lee, 1999). La visión que ofrecen respecto al futuro del MPC en la industria y en la investigación pasa por combinar esta estrategia de control con otras áreas de la ingeniería de control o incluso con otras áreas de conocimiento:

- Control no lineal (Garcia *et al.*, 1989).
- Control inteligente (fuzzy, neural) (Nikolaou, 1998).
- Nuevos esquemas de identificación, tanto de procesos como de límites para la incertidumbre (Bemporad and Morari, 1999).
- Mejoras en los métodos de estimación del estado. Alternativas al filtro de Kalman (Qin and Badgwell, 1997).

- Monitorización de procesos y diagnóstico de fallos para comprobar el funcionamiento óptimo del controlador predictivo (Control estadístico de procesos o SPC) (Froisy, 1994).
- Mejora de las interfaces de usuario y diálogo con el operador (Froisy, 1994).
- Integración de niveles en la jerarquía de control (Morari and Lee, 1999).

Actualmente existen líneas de investigación en control predictivo bien definidas donde cabría destacar entre otras:

- Control predictivo estable: Desde el uso de horizontes infinitos de predicción (Muske and Rawlings, 1993), (Zheng and Morari, 1995) hasta la utilización de horizontes casi-infinitos (Chen and Allgöwer, 1998), la formulación del control predictivo en espacio de estados se impone a la de entrada-salida.
- Control predictivo no lineal: En este área se utilizan tanto modelos en espacio de estados como modelos en entrada-salida (Mayne, 1997), (Rawlings *et al.*, 1994). Sin embargo, la mayoría de modelos utilizados siguen expresando dinámicas lineales sujetas a una no linealidad de tipo estático (Genceli H. and M. Nikolaou, 1995).
- Control predictivo robusto: En (Bemporad and Morari, 1999), se resumen distintas aproximaciones aparecidas en la literatura del control predictivo con características diferentes a la hora de representar la incertidumbre y la forma de calcular el controlador robusto. Por ejemplo en (Kouvaritakis *et al.*, 1997) la incertidumbre se representa como una elipse centrada en el vector de parámetros estimados para una función de transferencia. En (Badgwell, 1997), la incertidumbre en el modelo se parametriza por una lista de posibles plantas y se añaden al problema original restricciones para asegurar la estabilidad robusta. Otra aproximación es la denominada *min-max MPC*, donde (Lee and Yu, 1997), presentan una formulación basada en la minimización del peor caso de un índice cuadrático para sistemas con parámetros variables en el tiempo pero acotados. Del mismo modo, (Megías *et al.*, 2001) presenta un *min-max GPC<sup>∞</sup>* donde la incertidumbre se representa de forma politópica.
- Control predictivo adaptativo: Siendo el GPC el algoritmo orientado al control predictivo adaptativo por excelencia (Kinnaert, 1989), y a pesar

del amplio mercado que tendría un algoritmo MPC autoajustable, pocas son las aplicaciones reales que incluyen adaptación en línea. El control adaptativo indirecto tiende a ser sustituido por un nuevo paradigma que contempla la integración de la identificación y el control predictivo. En esta aproximación, y debido a los problemas que presenta la identificación en bucle cerrado, se insiste en mantener una excitación persistente en las señales para poder identificar (Genceli H. and M. Nikolaou, 1996).

- Utilización de técnicas de optimización alternativas para hacer frente a problemas que se plantean con modelos no lineales, restricciones de funcionamiento y nuevos índices (problemas no convexos y/o discontinuidades a resolver en tiempo real). Por ejemplo, (Pérez de Madrid, 1995) utiliza la programación dinámica como técnica de optimización, y en (Martínez *et al.*, 1996), (Onnen *et al.*, 1997) o (Martínez *et al.*, 1998) se aplican los algoritmos genéticos o simulated annealing como técnicas de optimización.

### 1.3 El control predictivo y la industria

Una comparación de (Qin and Badgwell, 1997) y (Qin and Lee, 2001) puede ofrecernos una visión general del panorama actual del control predictivo en la industria y cuáles han sido los últimos avances en éste campo, tras interrogar a las principales compañías sobre sus productos. En general en la última década ha habido un número de empresas que han comercializado paquetes de control predictivo, pero en los últimos 4 años parece haberse consolidado el mapa de empresas que ofrecen productos de este tipo tras absorciones y compras de patentes de unas por parte de otras. Por ejemplo, *Setpoint Inc.* (quien comercializaba el paquete SMC-IDCOM) y *Treiber Controls* (con su Optimum Predictive Control (OPC)) han sido absorbidas por *Aspen Technology* (DMC-plus). *Profimatics* (quien vendía el paquete Predictive Control Technology (PCT)) actualmente pertenece a *Honeywell* (RMPCT). En la tabla 1.3 se enumeran las compañías más importantes que en la actualidad ofrecen productos de control predictivo.

Del análisis de los datos ofrecidos por estas compañías, cabe destacar lo siguiente:

- El número total de aplicaciones de MPC instaladas está entorno a 4600 (en 1995 se aproximaba a 2200).

Compañía	Producto
Adersa	Predictive Functional Control (PFC)
Adersa	Hierarchical Constraint Control (HIECON)
Aspentech	DMCplus
MDC Tec.	Shell Multivariable Optimiser Control (SMOC)
Honeywell	Robust MPC Technology (RMPCT)
Predictive Control Ltd.	Connoisseur

Tabla 1.3: Aplicaciones más importantes que implementan el MPC lineal y sus fabricantes.

- La mayoría de estas aplicaciones (un 67%) pertenecen a la industria petroquímica y de refino.
- Industrias puramente químicas y papeleras muestran un interés creciente por estas aplicaciones, aunque también aparecen otras como alimentarias, del automóvil, aeroespaciales y de semiconductores.
- *Aspentech* aparece con el mayor número de aplicaciones instaladas (1850) y con el mayor tamaño de proceso bajo control (630 variables controladas  $\times$  283 variables manipuladas).

De la lectura detallada de estos informes se deduce que todas las casas comerciales tienen su algoritmo de control representativo, el cuál es modificado continuamente. En la actualidad los algoritmos de control predictivo lineal que están implantados, presentan las siguientes características:

- Los modelos utilizados son de tipo respuesta impulsional o escalón (FIR), función de transferencia o espacio de estados.
- Todos los productos industriales asumen una perturbación constante a la salida a la hora de realimentar la información, aunque algunos de ellos utilizan filtros de Kalman (SMOC).
- Todos los algoritmos penalizan el excesivo esfuerzo de control de diferentes formas: factor de ponderación, trayectoria de referencia, umbral para valores singulares, etc.
- La mayoría de los estos productos aplican restricciones duras en la fase de optimización estática y restricciones blandas en la salida para la optimización dinámica.



- En todos los casos se utilizan horizontes de predicción y de control finitos.

Pudiendo además destacar, cuáles han sido los cambios más recientes en la tecnología de control predictivo lineal que actualmente está disponible:

- Los modelos en espacio de estados y funciones de transferencia están comenzando a utilizarse desplazando a los modelos basados en respuesta en impulso o escalón (estos modelos están restringidos a procesos estables y requieren un número elevado de parámetros).
- Aparecen alternativas a la identificación basada en pruebas con el proceso. Junto al simple mínimos cuadrados, métodos basados en subespacios y algoritmos de mínimos cuadrados recursivos están implementados actualmente en las aplicaciones.
- En la actualidad algunos productos que utilizan modelos en espacio de estados disponen de esquemas de realimentación basados en filtros de Kalman.
- Puesto que la mayoría de los controladores predictivos deben ser sintonizados para alcanzar un bucle cerrado nominalmente estable, una práctica reciente consiste en utilizar horizontes de predicción elevados para alcanzar amplios márgenes de estabilidad basados en los resultados de (Muske and Rawlings, 1993).
- Algunas aplicaciones implementan estrategias de control adaptativo y multi-modelos.

## Capítulo 2

# El controlador GPC y la descomposición en valores singulares (SVD)

Las ideas que subyacen en el controlador DMC y el controlador predictivo generalizado (GPC) son esencialmente las mismas (Prada *et al.*, 1994). El primero, desarrollado en el ámbito industrial y el segundo, básicamente, en el ámbito académico. Tradicionalmente el controlador DMC fue concebido para trabajar con procesos de naturaleza multivariable con restricciones (procesos típicos en las industrias químicas y petroquímicas) y su formulación, completamente determinista, no incluía explícitamente ningún modelo de perturbaciones (Morari and Lee, 1997). Por el contrario, aspectos de tipo *estocástico* juegan un papel importante en el controlador GPC, pensado especialmente para procesos SISO en un contexto de control adaptativo (Bemporad and Morari, 1999), (Yoon and Clarke, 1994a), (Clarke, 1991). La extensión al caso multivariable del GPC es conceptualmente sencilla, pero su elaboración es bastante costosa, donde aparecen numerosos detalles a tener en cuenta (Garcia *et al.*, 1989). Los conceptos aquí explicados pueden ser aplicados tanto al controlador DMC como al controlador GPC, sin embargo, la exposición se ha realizado en base a éste último debido sobre todo a:

- Con el GPC se pueden plantear una gama bastante amplia de problemas de control (procesos inestables, de fase no mínima, etc) con un número razonable de parámetros de diseño.
- El modelo en forma de función de transferencia utilizado en el GPC

permite realizar un análisis del sistema en bucle cerrado al estilo clásico (estabilidad, robustez, etc).

En este capítulo, tras un breve repaso a los conceptos del controlador predictivo generalizado, se expondrá la herramienta clave en el desarrollo de esta tesis como es la descomposición en valores singulares o descomposición SVD (*Singular Value Decomposition*). A continuación, se plantea el problema del mal condicionamiento numérico en el control predictivo y cómo esta herramienta puede ayudar a aliviar este problema a través de las denominadas *componentes principales*. La relación existente entre los valores singulares y el factor de ponderación de la acción de control en el índice de coste, permite comparar un GPC estándar con el controlador diseñado en base a la alternativa presentada.

## 2.1 Controlador Predictivo Generalizado (GPC)

La formulación del GPC con índice de coste cuadrático ha sido ampliamente desarrollada en (Clarke *et al.*, 1987a), (Clarke *et al.*, 1987b) y (Camacho, 1993).

En dicha formulación se utiliza el modelo estocástico CARIMA:

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})z^{-1}}{A(z^{-1})}u(k) + \frac{T(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})}\xi(k) \quad (2.1)$$

Donde:

- $y(k)$  es la salida del sistema.
- $u(k)$  es la acción de control.
- $\xi(k)$  representa la perturbación (ruido blanco).
- $\Delta = (1 - z^{-1})$
- $T(z^{-1}) = t_0 + t_1z^{-1} + \dots + t_{nt}z^{-nt}$  es un polinomio de filtrado de perturbaciones.
- $B(z^{-1})z^{-1} = b_1z^{-1} + \dots + b_{nb}z^{-nb}$  es el numerador de la función de transferencia discreta del proceso.
- $A(z^{-1}) = 1 + a_1z^{-1} + \dots + a_{na}z^{-na}$  es el denominador de la función de transferencia discreta del proceso.

Considerando el modelo anterior y las ecuaciones polinómicas siguientes:

$$T(z^{-1}) = E_i(z^{-1})\Delta A + z^{-i}F_i(z^{-1}) \quad (2.2)$$

$$E_i(z^{-1})B(z^{-1}) = G_i(z^{-1})T(z^{-1}) + z^{-i}\Gamma_i(z^{-1}) \quad (2.3)$$

se plantea el siguiente modelo de predicción:

$$y(k+i|k) = G_i(z^{-1})\Delta u(k+i-1) + f(k+i|k) \quad (2.4)$$

$$f(k+i|k) = \frac{F_i(z^{-1})}{T(z^{-1})}y(k) + \frac{\Gamma_i(z^{-1})}{T(z^{-1})}\Delta u(k-1) \quad (2.5)$$

el cual permite, situados en el instante  $k$ , predecir el valor de la salida en el instante  $k+i$ .

Cabe destacar además, el claro significado que poseen las dos partes de la expresión (2.4):

$f(k+i|k)$  : Es la predicción de la respuesta libre del sistema. Dicha predicción se calcula, exclusivamente, utilizando información conocida hasta el instante  $k$ , puesto que  $\Gamma_i$  y  $F_i$  son polinomios con un número finito de términos en potencias de  $z^{-1}$  (FIR).

$G_i(z^{-1})\Delta u(k+i-1)$  : Es la predicción de la respuesta forzada del sistema, basada en un número finito de acciones de control propuestas para instantes futuros.

Aplicando la expresión (2.4) para los instantes  $1 \dots N$ , se puede obtener una forma matricial para la predicción de esos instantes:

$$\begin{bmatrix} y(k+1|k) \\ y(k+2|k) \\ \vdots \\ y(k+N|k) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k+1) \\ \vdots \\ \Delta u(k+N-1) \end{bmatrix} + \mathbf{f}$$

$$\mathbf{y} = G\Delta\mathbf{u} + \mathbf{f} \quad (2.6)$$

donde

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_0 \end{bmatrix} \quad (2.7)$$

$$\mathbf{f} = \Gamma \begin{bmatrix} \Delta u^f(k-1) \\ \Delta u^f(k-2) \\ \vdots \\ \Delta u^f(k-n_\Gamma) \end{bmatrix} + F \begin{bmatrix} y^f(k) \\ y^f(k-1) \\ \vdots \\ y^f(k-n_F) \end{bmatrix} \quad (2.8)$$

$$\Delta u^f(k) = \frac{\Delta u(k)}{T(z^{-1})} \quad (2.9)$$

$$\Delta y^f(k) = \frac{y(k)}{T(z^{-1})} \quad (2.10)$$

siendo  $\Gamma$  y  $F$  las matrices que contienen en cada fila los coeficientes de los polinomios  $\Gamma_i$  y  $F_i$  de grado  $n_\Gamma$  y  $n_F$  respectivamente y  $g_i$  los coeficientes<sup>1</sup> de los polinomios  $G_i$ .

Para el cálculo del controlador GPC, se plantea la minimización de un índice cuadrático que incluye las predicciones de la salida a lo largo de un número finito de instantes:

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i [y(k+i|k) - w(k+i)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda_j [\Delta u(k+j-1|k)]^2 \quad (2.11)$$

donde:

- $N_1, N_2$ : son los valores mínimo y máximo que establecen el *horizonte de predicción* o número  $N$  de predicciones a realizar,  $N = N_2 - N_1 + 1$ .
- $N_u$ : Se denomina *horizonte de control* y representa el máximo número de incrementos de la variable manipulada a calcular (grados de libertad) teniendo en cuenta que  $\Delta u(k + N_u + 1) = \Delta u(k + N) = 0$ .

<sup>1</sup>Los coeficientes de los polinomios  $G_i$  resultan ser los coeficientes de la respuesta del proceso ante un escalón unitario.

- $\sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i [y(k+i|k) - w(k+i)]^2$ : representa una medida del error entre la salida y la referencia ( $w$ ) en el horizonte de predicción, ponderado por los factores  $\alpha_i$ .
- $\sum_{j=1}^{N_u} \lambda_j [\Delta u(k+j-1)]^2$ : representa una medida del esfuerzo de control en el horizonte de control, ponderado por los factores  $\lambda_j$ .

Es posible expresar el índice (2.11) en forma cuadrática como:

$$J(\Delta \mathbf{u}) = (\mathbf{y} - \mathbf{w})^T \alpha (\mathbf{y} - \mathbf{w}) + \Delta \mathbf{u}^T \lambda \Delta \mathbf{u} \quad (2.12)$$

donde  $\alpha_{N \times N}$  y  $\lambda_{N_u \times N_u}$  son matrices diagonales y

$$\mathbf{w} = [w(k+1), \dots, w(k+N)]^T \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y} = [y(k+1|k), \dots, y(k+N|k)]^T \quad (2.14)$$

$$\Delta \mathbf{u} = [\Delta u(k), \dots, \Delta u(k+N_u-1)]^T \quad (2.15)$$

$$(2.16)$$

Sustituyendo (2.6) en (2.12) y minimizando éste, se obtiene la expresión del controlador GPC SISO sin restricciones:

$$\Delta \mathbf{u} = (G^T \alpha G + \lambda)^{-1} G^T \alpha (\mathbf{w} - \underbrace{\Gamma \Delta \mathbf{u}^f - F \mathbf{y}^f}_{\mathbf{f}}) \quad (2.17)$$

donde:

- $G_{N \times N_u}, \Gamma_{N \times n_\Gamma}, F_{N \times n_F}$ : Matrices procedentes del modelo de predicción (2.6).
- $\Delta \mathbf{u}_{n_\Gamma \times 1}^f$ : Vector de los incrementos de acciones de control pasadas, filtradas por el polinomio  $T$ .
- $\mathbf{y}_{n_F \times 1}^f$ : Vector de salidas pasadas, filtradas por el polinomio  $T$ .

Llamando  $\mathbf{e}$  al error obtenido al restar la referencia  $\mathbf{w}$  menos la predicción de la respuesta libre del sistema  $\mathbf{f}$

$$\mathbf{e} = \mathbf{w} - \mathbf{f} = \mathbf{w} - (\Gamma \Delta \mathbf{u}^f + F \mathbf{y}^f) \quad (2.18)$$

se puede reescribir la ley de control (2.17) como:

$$\Delta \mathbf{u} = (G^T \alpha G + \lambda)^{-1} G^T \alpha \mathbf{e} \quad (2.19)$$

## 2.2 Formulación como un problema de mínimos cuadrados

La mejor forma de calcular la solución al problema de control predictivo es plantear éste como un problema de *mínimos cuadrados*. Puesto que los elementos de las matrices de ponderación  $\alpha$  y  $\lambda$  cumplen:

$$\alpha_i \geq 0, \quad \lambda_j \geq 0$$

es posible encontrar matrices  $Q$  y  $\Lambda$  que sean sus raíces cuadradas, es decir:

$$\alpha = Q^T Q, \quad \lambda = \Lambda^T \Lambda \quad (2.20)$$

Como en la mayoría de los casos estas matrices son diagonales, obtener sus raíces cuadradas es trivial (tan sólo tomando la raíz cuadrada de cada elemento de la diagonal).

Considerando el vector

$$\begin{bmatrix} Q\{G\Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}\} \\ \Lambda \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Se puede comprobar que la magnitud al cuadrado de este vector, (su norma euclídea al cuadrado), es equivalente al índice de coste (2.12):

$$\begin{aligned} J(\Delta \mathbf{u}) &= \alpha \|\mathbf{y} - \mathbf{w}\|_2^2 + \lambda \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \alpha \|G\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}\|_2^2 + \lambda \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \alpha \|G\Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}\|_2^2 + \lambda \|\Delta \mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \|QG\Delta \mathbf{u} - Q\mathbf{e}\|_2^2 + \|\Lambda \Delta \mathbf{u}\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} Q\{G\Delta \mathbf{u} - \mathbf{e}\} \\ \Lambda \Delta \mathbf{u} \end{bmatrix} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.22)$$

Reescribiendo (2.22) como

$$\begin{aligned} \left\| \begin{bmatrix} Q\{G\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e}\} \\ \Lambda\Delta\mathbf{u} \end{bmatrix} \right\|_2^2 &= \left\| \begin{bmatrix} QG \\ \Lambda \end{bmatrix} \Delta\mathbf{u} - \begin{bmatrix} Q\mathbf{e} \\ 0 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \widehat{G}\Delta\mathbf{u} - \widehat{\mathbf{e}} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (2.23)$$

se puede concluir que el valor óptimo (2.19) resultado de la minimización del índice de coste (2.12), es la solución, en el sentido de mínimos cuadrados, del sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$\widehat{G}\Delta\mathbf{u} = \widehat{\mathbf{e}} \quad (2.24)$$

donde  $\widehat{G} \in \mathbb{R}^{N+N_u \times N_u}$  y  $\widehat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{N+N_u \times 1}$ .

Se define el *sistema de ecuaciones normales* asociado al sistema (2.24) como:

$$\widehat{G}^T \widehat{G} \Delta\mathbf{u} = \widehat{G}^T \widehat{\mathbf{e}} \quad (2.25)$$

donde  $\widehat{G}^T \widehat{G} \in \mathbb{R}^{N_u \times N_u}$  y  $\widehat{G}^T \widehat{\mathbf{e}} \in \mathbb{R}^{N_u \times 1}$

El sistema de ecuaciones normales (2.25), posee siempre una solución<sup>2</sup>:

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u} &= (\widehat{G}^T \widehat{G})^{-1} \widehat{G}^T \widehat{\mathbf{e}} \\ &= (G^T \alpha G + \lambda)^{-1} G^T \alpha \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.26)$$

La expresión (2.26) coincide con la solución del sistema (2.24) en caso de que éste fuera compatible pero, generalmente, éste no lo es. Es decir, no existen grados de libertad suficientes para obtener una solución exacta. En ese caso, (2.26) es la solución en el sentido de mínimos cuadrados del sistema (2.24). Incluso en el caso de no incluir ponderación de la acción de control ( $\lambda = 0$ ), existen más ecuaciones que incógnitas y la acción de control calculada como

$$\Delta\mathbf{u} = (G^T \alpha G)^{-1} G^T \alpha \mathbf{e} \quad (2.27)$$

es la solución de mínimos cuadrados del sistema

<sup>2</sup>Siempre y cuando  $rank(\widehat{G}) = N_u$



$$QG\Delta\mathbf{u} = Q\mathbf{e} \quad (2.28)$$

El sistema<sup>3</sup> anterior refleja mejor el objetivo del controlador predictivo: conseguir que la predicción de la salida alcance la referencia. Entonces, ¿cuál es el verdadero motivo por el que se incluye un factor de ponderación en la acción de control? La respuesta hay que buscarla en el mal condicionamiento de la matriz  $G$ , y cómo este problema se magnifica al calcular  $(G^T\alpha G)^{-1}$ .

### 2.2.1 ¿Por qué aparece el problema del mal condicionamiento en control predictivo?

En las industrias de proceso continuo (y en particular en las aplicaciones de tipo químico o petroquímico) aparecen frecuentemente procesos mal condicionados. El problema en los procesos mal condicionados se manifiesta cuando dos (o más) variables manipuladas poseen el mismo efecto en las variables controladas. Un control preciso para este tipo de procesos, cuando las interacciones son extremas, requiere una inversión del modelo del proceso. Sin embargo, debido a este mal condicionamiento, esta inversión puede ser muy sensible a incertidumbres en la entrada y a errores de modelado (Chang and Yu, 1992).

En control predictivo el mal condicionamiento aparece especialmente en el control de procesos multivariables, donde la solución óptima expresada en la ecuación (2.27), no debe ser obtenida formando el producto  $(G^T\alpha G)$ , ni calcular su inversa. Por ello hay que prestar especial atención a los algoritmos numéricos que se utilizan para calcular dicha solución cuando la matriz  $G$  está mal condicionada (ver apéndice B).

En el caso multivariable y para un proceso con  $n$  variables controladas y  $m$  variables manipuladas, supóngase que dos variables controladas se comportan exactamente igual. Entonces las filas correspondientes de la matriz dinámica  $G_{nN \times mN_u}$  serían iguales, por lo que su rango disminuiría en  $N$  (el número de filas iguales), y poseería un rango menor que el esperado por sus dimensiones.

Puesto que (Meyer, 2000):

$$\text{rank}(G) = \text{rank}(G^T G) = \text{rank}(G^T \alpha G) \quad (2.29)$$

<sup>3</sup>Para respetar la ponderación utilizada en el índice de mínimos cuadrados, la matriz  $Q$  no se elimina de ambos lados, dado que de hacerlo, se obtendría una solución diferente.

si este rango fuera suficientemente pequeño, podría ser menor que  $m \cdot N_u$ , y la matriz  $(G^T \alpha G)_{mN_u \times mN_u}$  sería singular.

En la práctica, las variables no se comportan idénticamente igual unas que otras, pero a veces, sí que pueden mostrar un comportamiento muy parecido. Esto llevaría a tener filas de  $G$  que se podrían calificar como *cercanas a ser dependientes* unas de otras.

Por consiguiente la matriz  $G$ , y de igual forma  $G^T \alpha G$ , estarían muy cerca de ser singulares. Incluso sin estos casos extremos, es habitual seleccionar  $N \gg N_u$ , por lo que las últimas filas de  $G$  están a menudo muy cerca de ser dependientes unas de otras.

La mayoría de controladores predictivos utilizan índices de tipo cuadrático y calculan las acciones de control que minimizan la suma de los residuos al cuadrado del sistema de ecuaciones planteado en (2.28). El problema es que los residuos solamente son indicadores fiables de la precisión alcanzada por dicha solución si la matriz  $G$  está bien condicionada, puesto que el mal condicionamiento de la matriz  $G$  en un controlador predictivo se traslada al condicionamiento de la matriz  $G^T \alpha G$ . De ahí la importancia de plantear un problema de mínimos cuadrados bien condicionado.

En las aplicaciones industriales de control predictivo, este problema se ha tratado de solucionar de diferentes formas (Qin and Badgwell, 1997):

- En el controlador DMC de *AspenTech*, el factor de ponderación de las acciones de control se ajusta para mejorar el condicionamiento de la matriz que va a ser invertida.
- En SMC-IDCOM, de *Setpoint Inc.*, el usuario define un *ranking* para las variables controladas por orden de prioridad. Cuando se detecta un número de condición elevado, el controlador elimina las variables de más baja prioridad hasta obtener un subproceso a controlar bien condicionado.
- En RMPCT de *Honeywell* se utiliza el método denominado SVT (Singular Value Thresholding) en el que se realiza una descomposición en valores singulares del proceso. Los valores singulares por debajo de un umbral establecido son descartados y se reconstruye un modelo mejor condicionado con los valores singulares restantes, que es usado para el control.

## 2.3 La descomposición en valores singulares

La descomposición en valores singulares (SVD) es una técnica de descomposición matricial muy efectiva, y puede ser usada, para resolver distintos tipos de problemas (conjuntos de ecuaciones lineales, problemas de mínimos cuadrados, etc).

La descomposición en valores singulares se define como:

Dada una matriz  $A$  no cuadrada de dimensiones  $n \times m$  y de rango  $r$ , existen matrices ortogonales y unitarias  $U_{n \times n}$  y  $V_{m \times m}$ , y una matriz diagonal positiva  $S_{r \times r}$ , tales que

$$A = U\Sigma V^T \quad (2.30)$$

donde,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S = \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \sigma_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \sigma_r \end{bmatrix}$$

$$U^T U = I \quad (2.31)$$

$$V^T V = I \quad (2.32)$$

En términos de álgebra matricial, las matrices  $U$  y  $V$  representan un simple cambio de coordenadas y poseen una estrecha relación con los vectores propios y autovalores de  $AA^T$  y  $A^T A$  respectivamente (ver apéndice C).

La matriz  $A$  tiene  $\min(m, n)$  valores singulares denotados por  $\sigma_i$ ,  $r$  de los cuales son únicos y distintos de cero. Normalmente, los algoritmos que calculan la descomposición en valores singulares de una matriz ofrecen éstos en orden decreciente según su magnitud:

$$\bar{\sigma} \equiv \sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \cdots \geq \sigma_r \equiv \underline{\sigma} \quad (2.33)$$

La estructura de la matriz  $\Sigma$  permite reescribir la matriz  $A$  como

$$A = \sigma_1 \mathbf{u}_1 \mathbf{v}_1^T + \sigma_2 \mathbf{u}_2 \mathbf{v}_2^T + \cdots + \sigma_r \mathbf{u}_r \mathbf{v}_r^T \quad (2.34)$$

donde  $\mathbf{u}_i$  y  $\mathbf{v}_i$  son las  $i$ -ésimas columnas de las matrices  $U$  y  $V$  respectivamente. La ecuación anterior ilustra la estrecha relación entre un valor singular  $\sigma_i$  y las correspondientes columnas de las matrices  $U$  y  $V$ .

Con los valores singulares también se puede calcular el *número de condición de una matriz* ( $\kappa(A)$ ), que se define como el ratio entre el valor singular más grande y el más pequeño:

$$\kappa(A) = \frac{\bar{\sigma}}{\underline{\sigma}} \quad (2.35)$$

y es un indicador del mal condicionamiento de una matriz (ver apéndice B).

La descomposición SVD descrita anteriormente tiene excelentes propiedades numéricas permitiendo la determinación fiable del rango de una matriz y el cálculo de pseudoinversas.

La pseudoinversa  $A^+$  de una matriz  $A$ , se define como:

$$A^+ = V \Sigma^+ U^T \quad (2.36)$$

donde

$$\Sigma^+ = \begin{bmatrix} S^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad S^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \frac{1}{\sigma_r} \end{bmatrix}$$

La descomposición en valores singulares es una herramienta matemática utilizada ampliamente en la teoría de control multivariable. Por ejemplo:

- La descomposición SVD se aplica sobre la respuesta en frecuencia de un sistema para obtener información acerca de su ganancia y las direcciones principales de la planta (Skogestad and Postlethwaite, 1996).
- En la teoría de control robusto la descomposición SVD se utiliza para obtener márgenes de robustez de sistemas multivariables frente a errores de modelado (Maciejowski, 1989).

- Es útil en técnicas de reducción del orden de modelos lineales (*Balanced realization*). Comúnmente modelos lineales en espacio de estados obtenidos a partir de modelos no lineales incluyen un gran número de estados, la mayoría de los cuales no influyen demasiado en las funciones de transferencia de interés. Utilizando la descomposición SVD se pueden identificar qué estados pueden ser eliminados sin introducir grandes errores en el modelo resultante (Zhou and Doyle, 1998).
- Puede ser usada directamente como un desacoplador (*Steady State Decoupler*) para controlar el proceso como un conjunto de bucles simples e independientes, para determinar la mejor posición de los sensores o para decidir cuáles son las mejores variables manipuladas para controlar el proceso (Deshpande, 1989).

## 2.4 Cálculo del controlador GPC vía SVD

Partiendo de la ley de control para el GPC sin restricciones 2.17, y suponiendo que no existe ponderación de la acción de control ( $\lambda = 0$ ) es posible reescribir la expresión anterior como:

$$\Delta \mathbf{u} = (G^T \alpha G)^{-1} G^T \alpha (\mathbf{w} - \mathbf{f}) \quad (2.37)$$

Llamando  $Q$  a la matriz resultante de aplicar la raíz cuadrada a la matriz diagonal  $\alpha$  (2.20), se tiene

$$\Delta \mathbf{u} = (G^T Q^T Q G)^{-1} G^T Q^T Q (\mathbf{w} - \mathbf{f}) \quad (2.38)$$

Empleando la descomposición SVD de la matriz  $QG = U\Sigma V^T$  y sustituyendo en (2.38)

$$\Delta \mathbf{u} = \left( (U\Sigma V^T)^T U\Sigma V^T \right)^{-1} (U\Sigma V^T)^T Q (\mathbf{w} - \mathbf{f}) \quad (2.39)$$

Llamando  $\mathbf{e}$  al vector  $(\mathbf{w} - \mathbf{f})$ , y aprovechando la ortonormalidad de las matrices  $U$  y  $V$ , tras operar se llega a<sup>4</sup>:

<sup>4</sup>En el caso de tener una ponderación constante de los errores de predicción,  $\alpha_1 = \dots = \alpha_N$ , la matriz  $Q$  podría omitirse de la expresión (2.40).

$$\Delta \mathbf{u} = V \Sigma^+ U^T Q \mathbf{e} = (QG)^+ Q \mathbf{e} \quad (2.40)$$

siendo la matriz  $(QG)^+$  la matriz pseudoinversa de  $QG$ . De la expresión (2.40), se deduce la utilidad de la pseudoinversa para solucionar problemas de mínimos cuadrados (ver apéndice C) cuando el control predictivo se plantea como un sistema de ecuaciones de la forma (2.28).

Si la matriz  $QG$  es de rango completo por columnas, entonces las soluciones (2.37) y (2.40) son equivalentes. Sin embargo, cuando la matriz  $QG$  está próxima a perder el rango (su número de condición es elevado), el problema está mal condicionado. Esto quiere decir que pequeños cambios en la matriz  $QG$  pueden provocar grandes cambios en los elementos de la solución  $\Delta \mathbf{u}$ . En este caso, la solución calculada, puede ser significativamente diferente de la solución *verdadera*, debido principalmente a este mal condicionamiento.

Así, los controladores calculados con la expresión (2.37), suelen dar como resultado acciones de control elevadas y consecuentemente inaceptables. La verdadera razón de este fenómeno está en observar como en la mayoría de los casos conforme aumentan los horizontes  $N$  y  $N_u$ , empeora el condicionamiento de la matriz  $QG$  (Golub and van Loan, 1996), (Wilkinson *et al.*, 1994). A modo de ejemplo, en la figura 2.1, se representa el número de condición de esta matriz para distintos horizontes, tanto de predicción como de control para un proceso multivariable.

Como se enunció en el apartado anterior, algunos controladores comerciales implementan diferentes estrategias para manejar problemas mal condicionados. En el GPC, se incluye en el índice de coste un término de ponderación de la acción de control. El factor de ponderación  $\lambda$ , aparte de mejorar el condicionamiento de la matriz a invertir, produce una reducción en el tamaño de las acciones de control y por tanto un control más suave. Sin embargo, en la mayoría de los casos, este factor ha de ser elegido empíricamente por el operador con la ayuda de algunas reglas extraídas, generalmente, de una experiencia previa. Algunos autores determinan estrategias o guías para la elección de este factor basadas en procedimientos de prueba y error o en simulaciones (Maurath *et al.*, 1988).

En la literatura se encuentran algunos intentos de selección automática de dicho parámetro de ponderación. Por ejemplo:

- En (Shridhar and Cooper, 1997), (Shridhar and Cooper, 1998) se obtiene

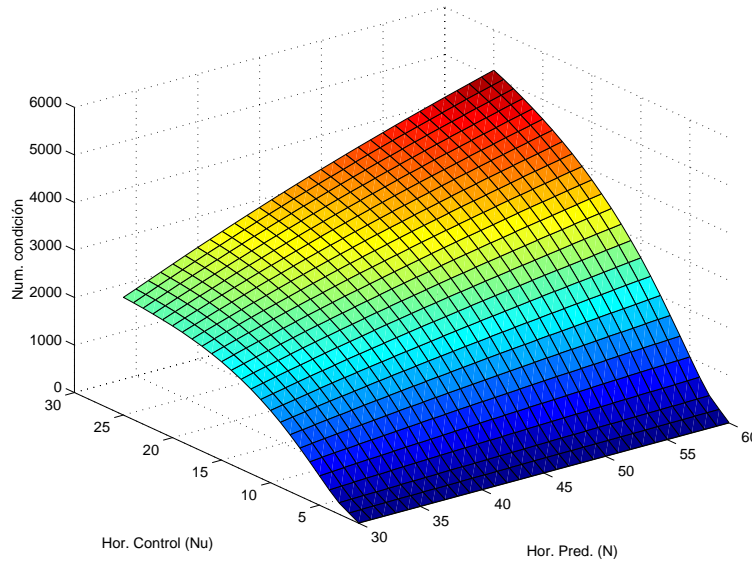


Figura 2.1: Evolución del número de condición para un proceso multivariable  $2 \times 2$

una expresión analítica para  $\lambda$ , tanto para procesos SISO como MIMO, en el contexto de un controlador DMC sin restricciones y únicamente para modelos de primer orden con retardo.

- En (Wilkinson *et al.*, 1990),(Wilkinson *et al.*, 1994) y para un GPC multivariable, se recalcula automáticamente el factor de ponderación  $\lambda$  de tal forma que el número de condición de la matriz dinámica que se utiliza para calcular el controlador predictivo nunca exceda un valor preestablecido. En este caso se asume un factor de ponderación constante para todas las entradas y la subjetividad se traslada a la elección del límite para el número de condición.
- Otra aproximación, esta vez en cuanto a estabilidad robusta se refiere es la aportación de (Vuthandam *et al.*, 1995), donde para un QDMC con restricción terminal se desarrollan condiciones suficientes para la estabilidad robusta del sistema que pueden ser usadas directamente en el cálculo de valores mínimos para los horizontes de predicción y control y para los factores de ponderación (resultando en una ponderación no constante del horizonte de control).

Otra forma de manejar problemas mal condicionados puede ser a través del llamado *Análisis de Componentes Principales (PCA)* que, como en el uso de un factor de ponderación  $\lambda$ , produce soluciones subóptimas pero con cambios más

pequeños en las acciones de control. El *análisis de los componentes principales*, haciendo uso de la *descomposición en valores singulares*, está estrechamente relacionado con el factor  $\lambda$  y puede presentarse como una alternativa para la elección un tanto aleatoria de dicho factor.

## 2.5 Análisis de Componentes Principales

En ingeniería, una gran cantidad de problemas que manejan enormes cantidades de datos numéricos son representados en forma de matrices y su solución pasa por realizar cálculos con estas matrices. Debido a que estos datos contienen una gran cantidad de información redundante pueden aparecer problemas de mal condicionamiento numérico o colinearidad. Entonces sería mejor poder separar esta redundancia de los datos, bien seleccionando las variables clave o aplicando métodos para reducir la dimensionalidad de éstos.

El *análisis de componentes principales* o *Principal Component Analysis (PCA)* ha sido ampliamente utilizado con este objetivo y generalmente es el método más extendido para extraer información común de grandes cantidades de datos.

El análisis de componentes principales hace uso de la descomposición SVD, y geoméricamente puede describirse como una proyección de los datos originales sobre un hiperplano distinto, el de las componentes principales. Esta transformación pone en evidencia las relaciones entre las distintas variables que componen la matriz. Cada componente principal explica un porcentaje de la variación de los datos, siendo la primera de ellas la más importante, luego la segunda y así sucesivamente.

Si dichas variables están correladas o son redundantes, existirán filas o columnas dependientes unas de otras de tal forma que el número de valores singulares distintos de cero será igual al rango de la matriz. Así los datos originales pueden ser representados por un número reducido  $r$  de componentes principales y por lo tanto, es posible utilizar tan solo ese número de componentes para representar la información. De esta forma la técnica PCA reduce la dimensionalidad de la matriz de datos original y con tan solo un conjunto reducido de componentes se puede expresar la mayoría de la variabilidad de los datos.

El análisis de componentes principales ha encontrado aplicación en numerosas disciplinas (análisis estadístico, compresión de datos, etc.). En control de procesos, la técnica PCA se ha utilizado ampliamente para la detección y aislamiento de perturbaciones (Ku *et al.*, 1995), monitorización basada en control



estadístico (SPC) (Nomikos and MacGregor, 1995), (MacGregor and Kourti, 1995), (Thomas *et al.*, 1996), detección y diagnóstico de fallos (Lewin, 1995), (Haiqing *et al.*, 2000) y modelado y control de procesos multivariados (Shah *et al.*, 1998), ya que permite fácilmente la extensión de los principios de la monitorización estadística de procesos a procesos multivariados.

### 2.5.1 Las componentes principales y el controlador GPC

En este apartado se va a tratar de reflejar, en un contexto distinto en el que habitualmente se ha utilizado el término *análisis de componentes principales*, cómo se puede reconducir esta técnica hacia la filosofía del control predictivo. La matriz dinámica del proceso (matriz que contiene las respuestas en escalón de las funciones de transferencia), que tan importante papel juega en el controlador DMC y GPC, es candidata a ser transformada y analizada en el plano de las componentes principales.

El problema de minimizar el índice<sup>5</sup>

$$J(\Delta \mathbf{u}) = (\mathbf{y} - \mathbf{w})^T \alpha (\mathbf{y} - \mathbf{w}) \quad (2.41)$$

para el cálculo del controlador como se había anticipado, puede ser reescrito como:

$$J(\Delta \mathbf{u}) = (G\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^T Q^T Q (G\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) \quad (2.42)$$

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \| QG\Delta \mathbf{u} - Q(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \|_2^2 \quad (2.43)$$

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \| QG\Delta \mathbf{u} - Q\mathbf{e} \|_2^2 \quad (2.44)$$

siendo  $\| \cdot \|_2$  la norma euclídea.

Puesto que las transformaciones ortonormales no modifican la norma euclídea, esto es, si la matriz  $U$  es ortogonal y unitaria,

$$\| Ux \|_2 = \| x \|_2$$

se puede transformar el problema de optimización, gracias a la descomposición SVD de la matriz  $QG$  y escribir de nuevo el índice (2.41) como:

<sup>5</sup>Se asume que no existe ponderación de la acción de control.

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \| U \Sigma V^T \Delta \mathbf{u} - Q \mathbf{e} \|_2^2 \quad (2.45)$$

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \| \Sigma V^T \Delta \mathbf{u} - U^T Q \mathbf{e} \|_2^2$$

$$J(\mathbf{p}) = \| \Sigma \mathbf{p} - \mathbf{g} \|_2^2 \quad (2.46)$$

donde:

$$\mathbf{p} = V^T \Delta \mathbf{u} \quad (2.47)$$

$$\mathbf{g} = U^T Q \mathbf{e} \quad (2.48)$$

La solución a este problema de mínimos cuadrados es trivial:

$$\mathbf{p} = \Sigma^+ \mathbf{g} \quad (2.49)$$

$$p_i = \frac{g_i}{\sigma_i}, \quad i = 1 \dots N_u \quad (2.50)$$

A los elementos  $p_i$  del vector  $\mathbf{p}$  se les conoce como *componentes principales de la solución que minimiza el índice cuadrático* y como indica (2.50), dichas componentes pueden ser fácilmente calculadas.

La descomposición SVD permite interpretar el cambio de variable realizado en (2.47). Por ejemplo para unos horizontes de predicción y control igual a 2, supóngase que se aplican todas las combinaciones posibles de acciones de control futuras tales que  $\|\Delta \mathbf{u}\|_2 \leq 1$ , para obtener todas las respuestas forzadas posibles  $\mathbf{y}_f = QG\Delta \mathbf{u}$ .

La representación de estas respuestas ofrece una indicación directa de la sensibilidad del proceso que se quiere controlar a todas las posibles combinaciones de entradas (figura 2.2). Gráficamente, la circunferencia de radio unidad, se transforma en una elipse. Los vectores de la matriz  $U$ , definen las orientaciones de los ejes de dicha elipse, mientras que los valores singulares definen la magnitud de cada uno de estos ejes. Los vectores  $\mathbf{v}_i$  de la matriz  $V$ , se transforman en los vectores  $\mathbf{u}_i$  con ganancia  $\sigma_i$  puesto que  $QG\mathbf{v}_i = \mathbf{u}_i\sigma_i$  (figura 2.2(a)). De este modo los vectores columna de la matriz  $U$  forman una base para el espacio de las posibles respuestas forzadas  $\mathbf{y}_f$  que se pueden alcanzar por medio de  $\mathbf{y}_f = QG\Delta \mathbf{u}$ .

Por el contrario, (figura 2.2(b)), las columnas de la matriz  $V$ , son vectores de  $N_u \times 1$  elementos que permiten transformar acciones de control definidas en el plano de las componentes, en acciones de control definidas en el plano de los

actuadores. El primer vector columna de  $V$  ( $\mathbf{v}_1$ ), indica la combinación de las acciones de control futuras que más influencia tiene sobre el proceso. Del mismo modo la última columna de la matriz  $V$  ( $\mathbf{v}_{N_u}$ ) representa la combinación de acciones de control futuras que menos influyen sobre el proceso. Gráficamente esto se puede ver como una elipse en el plano de las acciones de control con unos ejes definidos por los vectores  $\mathbf{v}_i$  y la inversa de los valores singulares.

En términos de operaciones matriciales, el vector  $\mathbf{g}$  (2.48), representa la transformación del vector  $\mathbf{e}$  ponderado por la matriz diagonal  $Q$ , al plano de las componentes principales  $\mathbf{p}$ . Es decir, cada columna de  $U$  es un vector de  $N \times 1$  que transforma la respuesta forzada deseada ( $Q\mathbf{e}$ ), al plano de las componentes principales del controlador. En general la matriz  $G$  tendrá más filas que columnas ( $N > N_u$ ), y los vectores  $\mathbf{u}_{N_u+1} \dots \mathbf{u}_N$  indican las "direcciones" de las respuestas forzadas que no se pueden alcanzar para cualquier combinación de acciones de control futuras.

Sustituyendo la descomposición SVD de  $QG$  en la ecuación matricial de los errores de predicción que componen el índice de coste (2.41)

$$\begin{aligned} Q(\mathbf{y} - \mathbf{w}) &= QG\Delta\mathbf{u} + Q(\mathbf{f} - \mathbf{w}) \\ &= U\Sigma V^T \Delta\mathbf{u} - Q(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \end{aligned} \quad (2.51)$$

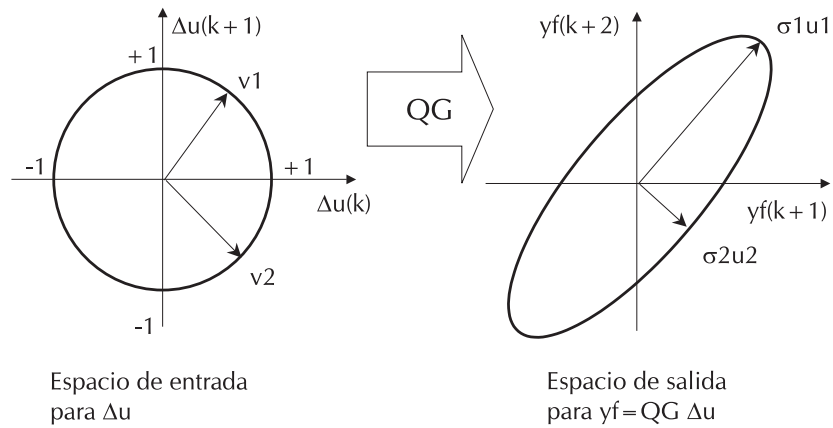
y premultiplicando ambos lados por  $U^T$

$$U^T Q(\mathbf{y} - \mathbf{w}) = \Sigma V^T \Delta\mathbf{u} - U^T Q(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \quad (2.52)$$

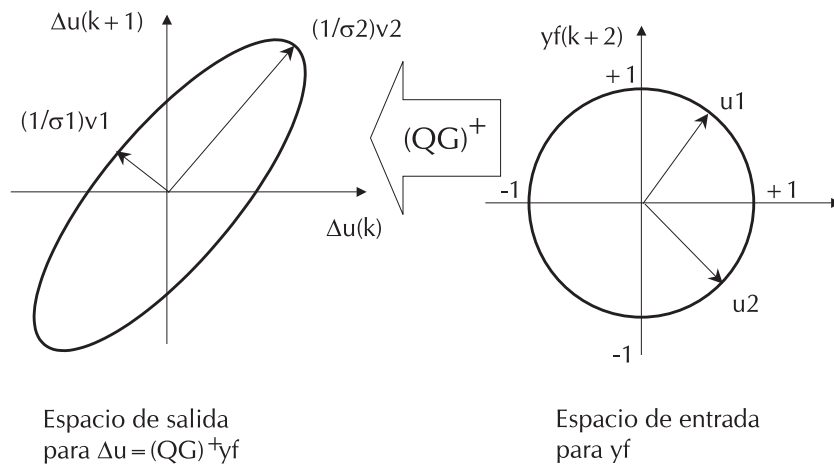
$$\mathbf{r} = \Sigma \mathbf{p} - \mathbf{g} \quad (2.53)$$

de esta forma los términos  $\mathbf{r} = U^T Q(\mathbf{y} - \mathbf{w})$  y  $\mathbf{g} = U^T Q(\mathbf{w} - \mathbf{f})$  representarían, respectivamente, la transformación del error de predicción y la respuesta forzada deseada del sistema en el plano de las componentes principales. A su vez, el término  $\mathbf{p} = V^T \Delta\mathbf{u}$  representaría la transformación de las acciones de control en dicho plano. Es decir, con las matrices  $U$  y  $V$  es posible rotar las coordenadas del problema de mínimos cuadrados sin pérdida de información de ningún tipo, de tal forma que el problema es más fácil de resolver en el sistema de coordenadas destino.

Puesto que la matriz  $\Sigma$  es diagonal, el error de predicción en la  $i$ -ésima coordenada (correspondiente a la  $i$ -ésima componente principal) depende exclusi-



(a) Todas las posibles acciones de control dentro de la circunferencia se transforman en respuestas forzadas dentro de la elipse.



(b) Todas las respuestas forzadas deseadas dentro de la circunferencia se transforman en acciones de control dentro de la elipse.

Figura 2.2: Interpretación geométrica de la descomposición SVD de la matriz  $G$ .

vamente de la  $i$ -ésima componente principal. Expandiendo término a término la ecuación (2.53), se obtiene

$$r_i = \begin{cases} \sigma_i p_i - g_i, & i = 1 \dots N_u \\ -g_i, & i = (N_u + 1) \dots N \end{cases} \quad (2.54)$$

Como se observa, las componentes principales solo aparecen en la ecuación (2.54) para los  $N_u$  primeros términos, mientras que los  $N - N_u$  términos restantes, no serían minimizables.

La solución final deseada, es decir, el conjunto de acciones de control, puede deducirse de las expresiones anteriores, obteniéndose de nuevo la expresión (2.40):

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= V \mathbf{p} \\ &= V \Sigma^+ U^T Q \mathbf{e} = (QG)^+ Q \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.55)$$

Suponiendo que la matriz  $QG$  es de rango completo, es decir  $\text{rank}(QG) = N_u$ , se tienen  $N_u$  valores singulares positivos y distintos de 0:

$$QG = U \begin{bmatrix} S \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} V^T \quad (2.56)$$

Estableciendo la partición del vector  $\mathbf{g} = U^T Q \mathbf{e}$  como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1^T \\ U_2^T \end{bmatrix} Q \mathbf{e} \quad (2.57)$$

donde  $\mathbf{g}_1 \in \mathbb{R}^{N_u}$ ,  $\mathbf{g}_2 \in \mathbb{R}^{N-N_u}$ ,  $U_1 \in \mathbb{R}^{N \times N_u}$  y  $U_2 \in \mathbb{R}^{N \times (N-N_u)}$ , se puede desarrollar el índice de coste (2.46) como

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}) &= \| S \mathbf{p} - \mathbf{g}_1 \|_2^2 + \| \mathbf{g}_2 \|_2^2 \\ &= (\sigma_1 p_1 - g_1^1)^2 + \dots + (\sigma_{N_u} p_{N_u} - g_1^{N_u})^2 + C \end{aligned} \quad (2.58)$$

Como se puede observar, la constante  $C = \|\mathbf{g}_2\|_2^2$  no influye en el problema de minimización. Reformulado el problema de control en términos de las componentes principales se puede deducir, observando esta expansión del índice, cómo cada componente principal  $p_i$ , contribuye a mejorar la solución. Es decir si el componente  $i$ -ésimo es excluido de la solución ( $p_i = 0$ ), el residuo se incrementa en  $(g_1^i)^2$ . Por el contrario, si el componente  $p_i$  se incluye en la solución, entonces ésta es mejor puesto que el residuo se decrementa justamente  $(g_1^i)^2$ .

Además, ya que  $\Delta\mathbf{u} = V\mathbf{p}$  y puesto que la matriz  $V$  es ortonormal, los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\Delta\mathbf{u}$  tienen la misma norma euclídea. Entonces cada componente  $p_i$  utilizada para construir la solución del problema de mínimos cuadrados incrementa la norma del vector  $\mathbf{p}$  en una cantidad correspondiente a  $p_i^2$ , implicando esto, que la norma de los cambios en la acción de control también se verá incrementada en esa misma cantidad.

### 2.5.2 Relación entre los Componentes Principales y el factor de ponderación de la acción de control

En este apartado se va a examinar la influencia del factor de ponderación  $\lambda$  de la acción de control que se incorpora al índice cuadrático y cómo afecta a las acciones de control óptimas y a la reducción del valor del índice. El efecto de dicha ponderación puede ser expresado en términos de las componentes principales del controlador. Estas expresiones serán útiles para comparar el controlador predictivo diseñado en base a las componentes principales y el GPC clásico.

El índice a minimizar expresado en forma matricial, ponderando la acción de control es:

$$J(\Delta\mathbf{u}) = (\mathbf{y} - \mathbf{w})^T \alpha (\mathbf{y} - \mathbf{w}) + \Delta\mathbf{u}^T \lambda \Delta\mathbf{u} \quad (2.59)$$

sustituyendo la expresión de la predicción (2.6) en el índice (2.59), se obtiene

$$J(\Delta\mathbf{u}) = (G\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e})^T Q^T Q (G\Delta\mathbf{u} - \mathbf{e}) + \Delta\mathbf{u}^T \Lambda^T \Lambda \Delta\mathbf{u} \quad (2.60)$$

Índice que se puede reescribir como

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \| QG\Delta \mathbf{u} - Q\mathbf{e} \|_2^2 + \| \Lambda \Delta \mathbf{u} \|_2^2 \quad (2.61)$$

Usando la descomposición SVD de la matriz  $QG$  en este índice

$$J(\mathbf{p}) = \| \Sigma \mathbf{p} - \mathbf{g} \|_2^2 + \| \Lambda V \mathbf{p} \|_2^2 \quad (2.62)$$

donde,

$$QG = U\Sigma V^T \quad (2.63)$$

$$\mathbf{p} = V^T \Delta \mathbf{u} \quad (2.64)$$

$$\mathbf{g} = U^T Q\mathbf{e} \quad (2.65)$$

se obtiene la solución analítica a este problema de minimización

$$\begin{aligned} \frac{\partial J}{\partial \mathbf{p}} &= \Sigma^T (\Sigma \mathbf{p} - \mathbf{g}) + (\Lambda V)^T \Lambda V \mathbf{p} \\ &= (\Sigma^T \Sigma + V^T \Lambda^T \Lambda V) \mathbf{p} - \Sigma^T \mathbf{g} = 0 \end{aligned} \quad (2.66)$$

$$\mathbf{p} = (\Sigma^T \Sigma + V^T \lambda V)^{-1} \Sigma^T \mathbf{g} \quad (2.67)$$

y transformando dicha solución mediante la matriz  $V$  al plano de las acciones de control se obtiene

$$\Delta \mathbf{u} = V \mathbf{p} = V \Sigma_\lambda \mathbf{g} = V \Sigma_\lambda U^T Q\mathbf{e} \quad (2.68)$$

donde,

$$\Sigma_\lambda = (\Sigma^T \Sigma + V^T \lambda V)^{-1} \Sigma^T \quad (2.69)$$

En el caso más general (factores de ponderación  $\lambda_j$  diferentes para cada incremento de la acción de control en el horizonte de control), la matriz  $\Sigma_\lambda$  no es diagonal y su cálculo pasa necesariamente por la inversión de una matriz.

Si se desarrolla la expresión anterior para el caso más habitual, donde los factores de ponderación son constantes en todo el horizonte de control ( $\lambda = \beta I$ ), se tiene que, al ser  $V$  ortonormal,

$$V^T \beta IV = \beta V^T IV = \beta I \quad (2.70)$$

y la matriz (2.69) se expresa como:

$$\Sigma_\lambda = (\Sigma^T \Sigma + \beta I)^{-1} \Sigma^T \quad (2.71)$$

resultando una matriz diagonal, fácilmente invertible.

El resultado anterior también se puede alcanzar partiendo de la ley de control del GPC cuando existe ponderación constante en todo el horizonte de control:

$$\Delta \mathbf{u} = (G^T Q^T Q G + \beta I)^{-1} G^T Q^T Q \mathbf{e} \quad (2.72)$$

sustituyendo la descomposición SVD de  $QG$  en el controlador

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{u} &= \left( (U \Sigma V^T)^T (U \Sigma V^T) + \beta I \right)^{-1} (U \Sigma V^T)^T Q \mathbf{e} \\ &= V \Sigma_\lambda U^T Q \mathbf{e} \end{aligned} \quad (2.73)$$

donde  $\Sigma_\lambda$  es la misma matriz diagonal de la expresión (2.71), cuyos elementos son de la forma:

$$(\Sigma_\lambda)_{ii} = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \beta} \quad (2.74)$$

Para este caso de ponderación uniforme, las componentes principales tienen la forma

$$p_i = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \beta} g_i, \quad i = 1 \dots N_u \quad (2.75)$$

El efecto de la ponderación en el índice de coste (2.60) se puede comprobar sustituyendo el vector óptimo de acciones de control (2.72) en dicho índice. El mínimo coste obtenido es

$$J_{min} = \mathbf{e}^T Q^T \left[ I - G \left( (QG)^T QG + \beta I \right)^{-1} G^T \right] Q \mathbf{e} \quad (2.76)$$



Sustituyendo la descomposición SVD de QG y simplificando se llega a

$$J_{min} = \mathbf{e}^T Q^T U [I - \Sigma(\Sigma^T \Sigma + \beta I)^{-1} \Sigma^T] U^T Q \mathbf{e} \quad (2.77)$$

siendo  $\mathbf{g} = U^T Q \mathbf{e}$  la transformación de la respuesta forzada deseada en el plano de las componentes se puede reescribir (2.77) como

$$J_{min} = \mathbf{g}^T [I - \Sigma(\Sigma^T \Sigma + \beta I)^{-1} \Sigma^T] \mathbf{g} \quad (2.78)$$

Y puesto que la matriz  $\Sigma$  es diagonal, la contribución de la componente principal  $p_i$  en el coste mínimo será

$$J_{min} = \sum_{i=1}^N (g_i^2 - g_i \sigma_i (\sigma_i^2 + \beta)^{-1} \sigma_i g_i) \quad (2.79)$$

Multiplicando el término  $g_i^2$  por  $(\sigma_i^2 + \beta)/(\sigma_i^2 + \beta)$ , el coste mínimo puede expresarse como

$$J_{min} = \sum_{i=1}^{N_u} \frac{\beta}{\sigma_i^2 + \beta} g_i^2 + \sum_{i=N_u+1}^N g_i^2 \quad (2.80)$$

La ecuación anterior demuestra que el factor de ponderación afecta sólo a los primeros  $N_u$  elementos del vector  $\mathbf{g}$ , y sólo tiene un efecto significativo en aquellas componentes principales cuyo valor singular  $\sigma_i$  es pequeño respecto del factor de ponderación  $\beta$ . Si no existiera ponderación de la acción de control el coste mínimo únicamente contendría las contribuciones de los  $N - (N_u + 1)$  elementos de  $\mathbf{g}$ , ya que la suma de los  $N_u$  primeros términos del índice es cero cuando  $\beta = 0$ .

Si  $\beta$  es distinto de cero, la contribución de  $g_i$  al coste mínimo depende del valor relativo de  $\sigma_i$  frente a  $\beta$ . Si el valor singular  $\sigma_i$  es muy grande respecto a  $\beta$ , el término  $\beta/(\sigma_i^2 + \beta)$  será muy pequeño y por tanto la contribución de  $g_i^2$  al mínimo coste también será muy pequeña. Esto quiere decir que el controlador cancelará el término  $g_i$ , ya que su presencia en el índice es ínfima. Sin embargo, si el valor singular  $\sigma_i$  es muy pequeño relativo al factor  $\beta$ , el término  $\beta/(\sigma_i^2 + \beta)$

es aproximadamente 1, lo que significa que  $g_i$  contribuye por completo al coste mínimo y por tanto no es cancelado por el controlador.

El verdadero beneficio del factor de ponderación se observa examinando cómo éste afecta a la norma de las acciones de control. Esta norma ( $\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} = \mathbf{p}^T \mathbf{p}$ ), puede escribirse en función de las componentes principales (2.75) como

$$\Delta \mathbf{u}^T \Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^{N_u} \frac{\sigma_i^2 g_i^2}{(\sigma_i^2 + \beta)^2} \quad (2.81)$$

Si el factor de ponderación  $\beta$  es cero, la contribución de la  $i$ -ésima componente principal a la norma del vector óptimo de acciones de control es igual a  $(g_i^2/\sigma_i^2)$ . Por tanto, cuando el valor singular  $\sigma_i^2$  es muy pequeño y  $g_i^2$  no es cero, la componente principal  $p_i$  contribuye mucho al esfuerzo de control. A peor condicionamiento de la matriz  $QG$ , los últimos valores singulares son más pequeños. Ello explica la elevada contribución al esfuerzo de control de las componentes principales asociadas a estos valores singulares.

Cualquier valor de  $\beta$  distinto de cero reducirá la contribución de la componente  $p_i$  al esfuerzo de control. Cuando un valor singular es grande respecto al valor de  $\beta$ , la contribución de la componente principal  $p_i$  al esfuerzo de control es aproximadamente igual a su contribución cuando no existe factor de ponderación ( $g_i/\sigma_i$ ).

De esta forma se puede concluir que un factor de ponderación constante en la función de coste, afectará a todas las componentes principales del controlador, pero no lo hará de la misma forma (cada componente se verá afectada en función del tamaño de su valor singular asociado relativo al tamaño de  $\beta$ ).

Se puede realizar una penalización de las acciones de control más sofisticada, usando una matriz de ponderación un poco más complicada. Esta política de ponderación sólo penaliza las componentes principales mal condicionadas del controlador. Los valores singulares de la matriz  $\Sigma$  son divididos en dos grupos, el conjunto de valores singulares llamados *bien condicionados* ( $\Sigma_B$ ) y el conjunto de los *mal condicionados* ( $\Sigma_M$ ), de tal forma que  $\Sigma = \Sigma_B + \Sigma_M$ . Dichos conjuntos se definen como:

$$\begin{aligned}\Sigma_B &= \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_\rho, 0, \dots, 0) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \\ \Sigma_M &= \begin{bmatrix} \text{diag}(0, \dots, 0, \sigma_{\rho+1}, \sigma_{\rho+2}, \dots, \sigma_{N_u}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (2.82)$$

donde  $\Sigma_B$  contiene los primeros  $\rho$  valores singulares de  $\Sigma$  que satisfacen  $\sigma_\rho > \varepsilon$ , siendo  $\varepsilon$  un valor umbral seleccionado, y  $\Sigma_M$  contiene el resto de valores singulares.

La matriz de ponderación  $\lambda$  para el índice de coste se define como

$$\lambda = \beta V(I - \Sigma_B^+ \Sigma_B) V^T \quad (2.83)$$

El parámetro  $\beta$  es un escalar, como en el caso de factor de ponderación constante, y la matriz  $V$  es la matriz proveniente de la descomposición SVD de  $QG$ . La matriz  $\Sigma_B^+$  es la pseudoinversa de  $\Sigma_B$ , la cual se obtiene invirtiendo los elementos de  $\Sigma_B$  distintos de cero.

Sustituyendo la matriz  $\lambda$  definida en (2.83) en la expresión (2.69) para calcular el vector óptimo de acciones de control dado en (2.68) se obtiene

$$\begin{aligned}\Sigma_\lambda &= (\Sigma^T \Sigma + \beta V^T V (I - \Sigma_B^+ \Sigma_B) V^T V)^{-1} \Sigma^T \\ &= (\Sigma^T \Sigma + \beta (I - \Sigma_B^+ \Sigma_B))^{-1} \Sigma^T\end{aligned}\quad (2.84)$$

La diferencia  $(I - \Sigma_B^+ \Sigma_B)$  es una matriz diagonal, cuyos  $\rho$  primeros elementos son cero y los elementos  $\rho + 1$  hasta  $N_u$  son la unidad. Por lo tanto, las nuevas componentes principales tienen la forma

$$p_i = \begin{cases} \frac{g_i}{\sigma_i}, & i = 1 \dots \rho \\ \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \beta} g_i, & i = \rho + 1 \dots N_u \end{cases} \quad (2.85)$$

donde se observa que las primeras  $\rho$  componentes no se ven afectadas por el factor de ponderación. La ventaja consiste en que las primeras componentes

(aquellas que más influyen en el índice), son incluidas en la solución óptima completamente y no de forma parcial.

Otra alternativa sería, ponderar independientemente cada una de las componentes principales. En ese caso el índice a minimizar sería

$$J(\mathbf{p}) = \|\Sigma\mathbf{p} - \mathbf{g}\|_2^2 + \lambda_p \|\mathbf{p}\|_2^2 \quad (2.86)$$

donde  $\lambda_p$  es una matriz diagonal con un factor de ponderación diferente para cada componente.

La solución a este problema es

$$\mathbf{p} = \Sigma_{\lambda_p} \mathbf{g} \quad (2.87)$$

donde

$$\Sigma_{\lambda_p} = (\Sigma^T \Sigma + \lambda_p)^{-1} \Sigma^T \quad (2.88)$$

es una matriz diagonal cuyos elementos son de la forma

$$(\Sigma_{\lambda_p})_{ii} = \frac{\sigma_i}{\sigma_i^2 + \lambda_{p_i}} \quad (2.89)$$

Desarrollando el índice (2.86), se puede apreciar cómo con esta opción es posible pesar individualmente la contribución de cada componente en la solución:

$$\begin{aligned} J(\mathbf{p}) &= \|\Sigma\mathbf{p} - \mathbf{g}\|_2^2 + \lambda_p \|\mathbf{p}\|_2^2 \\ &= (\sigma_1 p_1 - g_1)^2 + \dots + (\sigma_{N_u} p_{N_u} - g_{N_u})^2 + \lambda_{p_1} p_1^2 + \dots + \lambda_{p_{N_u}} p_{N_u}^2 + C \\ &= (\sigma_1^2 + \lambda_{p_1}) p_1^2 - 2\sigma_1 p_1 g_1 + g_1^2 + \dots \\ &\quad \dots + (\sigma_{N_u}^2 + \lambda_{p_{N_u}}) p_{N_u}^2 - 2\sigma_{N_u} p_{N_u} g_{N_u} + g_{N_u}^2 + C \end{aligned} \quad (2.90)$$

Esta formulación más general abarca dos casos extremos ya que

$$\begin{aligned}\lambda_{p_i} = \infty &\rightarrow p_i = 0 \\ \lambda_{p_i} = 0 &\rightarrow p_i = \frac{g_i}{\sigma_i}\end{aligned}$$

Esta ponderación individual de los componentes principales tiene su equivalencia en el plano de las acciones de control ya que el índice en función de  $\Delta \mathbf{u}$  se expresa como

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \| QG\Delta \mathbf{u} - Q\mathbf{e} \|_2^2 + \lambda_p \| V^T \Delta \mathbf{u} \|_2^2 \quad (2.91)$$

donde, con la transformación  $\Delta \mathbf{u} = V\mathbf{p}$ , el último término es

$$\begin{aligned}\lambda_p \| V^T \Delta \mathbf{u} \|_2^2 &= (V^T \Delta \mathbf{u})^T \lambda_p (V^T \Delta \mathbf{u}) \\ &= \Delta \mathbf{u}^T (V \lambda_p V^T) \Delta \mathbf{u} \\ &= \Delta \mathbf{u}^T \lambda_{\Delta u_p} \Delta \mathbf{u}\end{aligned} \quad (2.92)$$

siendo la matriz de ponderación  $\lambda_{\Delta u_p}$  una matriz no diagonal que implica asociar en cada instante  $i$  del horizonte de control, pesos diferentes a cada  $\Delta u(k+i)$ .

Resumiendo, y teniendo en cuenta la transformación ortogonal entre los planos de las acciones de control y el de las componentes principales ( $\Delta \mathbf{u} = V\mathbf{p}$ ) es posible indicar lo siguiente:

- Ponderar en el plano de las acciones de control con una matriz diagonal de elementos constantes equivale a ponderar las componentes también de forma constante.

$$\lambda \| \Delta \mathbf{u} \|_2^2 \rightarrow \lambda \| V\mathbf{p} \|_2^2$$

- Ponderar en el plano de las acciones de control con una matriz diagonal de elementos diferentes equivale a ponderar con una matriz no diagonal en el plano de las componentes.

$$\lambda \| \Delta \mathbf{u} \|_2^2 \rightarrow \lambda \| V\mathbf{p} \|_2^2 = \mathbf{p}^T (V \lambda V^T) \mathbf{p}$$

- Ponderar de forma individual cada componente (matriz diagonal de elementos no constantes) equivale a ponderar en el plano de las acciones de control con una matriz no diagonal.

$$\| R_p p \|_2^2 \rightarrow \| R_p V \Delta \mathbf{u} \|_2^2$$

## 2.6 Resumen

En este capítulo se ha presentado el problema de control predictivo generalizado como la solución de mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones lineales incompatible, cuando se elimina como parámetro de diseño el factor de ponderación de las acciones de control.

Toda resolución de un sistema de ecuaciones presenta problemas numéricos si la matriz de coeficientes está mal condicionada. El problema del mal condicionamiento es típico en control predictivo y para solucionarlo, distintas aplicaciones de tipo industrial proponen métodos entre los que se encuentran el uso del factor de ponderación  $\lambda$  (DMC) o el *Singular Value Thresholding* (RMPTC).

En este capítulo se utiliza la *descomposición en valores singulares* (SVD) como herramienta matemática para calcular el controlador GPC sin factor de ponderación  $\lambda$ , dando lugar a las llamadas *componentes principales*. Con las matrices  $U$  y  $V$  es posible rotar las coordenadas del problema original de mínimos cuadrados sin pérdida de información de ningún tipo, de tal forma que éste es más fácil de resolver en el sistema de coordenadas destino.

De esta forma cada componentes principal asociada a un valor singular, representa uno de los grados de libertad disponibles para solucionar el problema. Las componentes aparecen ordenadas de mayor a menor importancia y del análisis de éstas se deduce que, si se incluyen en la solución las componentes menos influyentes, es necesario un gran esfuerzo de control para reducir cuanto apenas el valor del índice de coste. De este hecho se postula, como parámetro de diseño, el número de componentes a incluir en la solución para construir el controlador.

El capítulo finaliza poniendo de manifiesto cuál es la relación entre las componentes principales y el factor de ponderación  $\lambda$  que aparece en un GPC estándar. Se concluye que un factor de ponderación constante en la función de coste, afectará a todas las componentes principales del controlador, pero no lo hará de la misma forma (cada componente se verá afectada en función del tamaño de su valor singular asociado, relativo al tamaño de  $\lambda$ ), con lo que el efecto de eliminar componentes principales será equivalente al de la utilización de dicho factor de ponderación.



# Capítulo 3

## El controlador PC-GPC

En problemas mal condicionados, las componentes que corresponden a los valores singulares más pequeños contribuyen muy poco a mejorar la calidad de la solución puesto que reducen muy poco el índice de coste (los elementos  $g_i^i$  son pequeños), pero por el contrario contribuyen enormemente a aumentar la magnitud del vector  $\mathbf{p}$  ( $p_i^2$  es grande) y consecuentemente, la magnitud del vector de acciones de control.

Bajo estas condiciones, y para afrontar el problema del mal condicionamiento, sería más conveniente obtener una solución excluyendo las componentes que corresponden a los valores singulares más pequeños, obteniendo así una solución aproximada. El controlador calculado de esta forma, denominado PC-GPC (*Principal Component Generalized Predictive Control*), es más robusto frente a errores de modelado comparado con el controlador calculado para todas las componentes.

### 3.1 El número de componentes (NPC) como parámetro de diseño

Planteando la solución en el plano de las componentes principales se puede calcular la ley de control del controlador predictivo suponiendo que se incluyen tan sólo las primeras NPC componentes

$$\Delta \mathbf{u} = V \Sigma^+ \mathbf{g} \quad (3.1)$$



donde,

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{NPC}, 0_{NPC+1}, \dots, 0_{N_u}) \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

y las componentes principales adoptan la forma

$$p_i = \begin{cases} \frac{g_i}{\sigma_i}, & i = 1 \dots NPC \\ 0, & i = NPC + 1 \dots N_u \end{cases} \quad (3.3)$$

Tanto el uso del factor de ponderación constante de la acción de control  $\beta$ , como la eliminación de componentes principales producen el mismo efecto en la solución del problema de mínimos cuadrados.

El factor  $\beta$ , se encarga de ponderar todos y cada uno de las  $N_u$  componentes según la ecuación (2.74). Estos factores están limitados entre la inversa del valor singular y 0. Si  $\beta$  es mucho mayor que  $\sigma_i^2$ , la componente será eliminada de la solución. Por el contrario, si  $\sigma_i^2$  domina a  $\beta$ , entonces esa componente contribuirá íntegramente a la solución.

Entre estos dos casos límite, existe un rango de valores de  $\beta$  que reducen progresivamente la aportación de cada componente a la solución. Así, al incluir el factor  $\beta$ , se permite un cambio gradual en la ponderación de los componentes principales. Sin embargo, si dos componentes tienen valores singulares parecidos, no es posible eliminar de la solución el componente más pequeño sin afectar al valor singular adyacente.

En el controlador PC-GPC, se eliminan íntegramente componentes principales de la solución, por lo que es posible actuar sobre un único componente sin afectar a otro. Además, el análisis de los elementos de los vectores de los componentes ( $\mathbf{p}$ ) y de los residuos ( $\mathbf{g}$ ), puede ofrecer gran cantidad de información respecto a qué componentes contribuyen significativamente a mejorar el control y cuáles sólo incrementan el tamaño de las acciones de control sin mejorar la calidad de la solución (incrementando la sensibilidad a errores de modelado).

Esta información ofrece la posibilidad de desarrollar diferentes controladores, más robustos a errores de modelado o menos, seleccionando el valor del parámetro NPC en el cálculo del vector óptimo de acciones de control (Sanchis *et al.*, 2001).

Una vez obtenida la descomposición SVD de la matriz  $QG$ , el problema de minimización se reduce a la expresión (2.46). Para diseñar el controlador, se puede suponer que la planta se mantiene estable en torno al punto de funcionamiento. Esto implica que la predicción de la respuesta libre  $\mathbf{f}$  será nula por lo que

$$\mathbf{g} = U^T Q(\mathbf{w} - \mathbf{f}) = U^T Q(\mathbf{w} - 0)$$

Con el propósito de obtener un controlador que se comporte de forma óptima para cambios en la trayectoria de referencia (por ejemplo, un escalón unitario), el término  $\mathbf{g}$  sería ahora:

$$\mathbf{w} = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \quad (3.4)$$

$$\mathbf{g} = U^T Q\mathbf{w} \quad (3.5)$$

En esta situación y calculados los vectores  $\mathbf{p}$  y  $\mathbf{g}_1$ <sup>1</sup> para el caso más desfavorable, es decir, para el primer instante, se podrían calcular fácilmente diferentes indicadores relativos a:

- La reducción que cada componente produciría en el índice de coste por el hecho de ser incluida en la solución.
- El esfuerzo de control necesario para reducir el índice de coste justamente en esa cantidad.
- La mejora en el condicionamiento de la matriz a invertir y por tanto en el comportamiento del controlador.

Con este fin, se puede elaborar una tabla de la que extraer información sobre cada uno de los componentes principales con los que construir el controlador. Cada una de las columnas contendría lo siguiente.

1. El valor singular asociado  $\sigma_i$ .

---

<sup>1</sup>El vector  $\mathbf{g}_1$  contiene los primeros  $N_u$  elementos del vector  $\mathbf{g}$  según la partición expresada en (2.57)

2. La reducción que cada componente  $p_i$  produciría en el índice de coste, si ésta fuera incluida en la solución ( $p_i \neq 0$ ), expresada en porcentaje respecto al total de reducción posible correspondiente a no incluir ninguna componente:

$$Red(i) = \frac{(g_1^i)^2}{\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1} \times 100$$

3. El valor del índice de coste, asumiendo que la componente  $p_i$  y todas las anteriores (aquellas con valores singulares mayores) han sido incluidas en la solución, expresado en porcentaje respecto al total de reducción posible:

$$TRed(i) = \left(1 - \frac{\sum_{j=1}^i (g_1^j)^2}{\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1}\right) \times 100$$

4. La contribución de cada componente  $p_i$  a la norma del vector de acciones de control expresado en porcentaje respecto al total del esfuerzo de control generado si se incluyesen todas las componentes:

$$Norm(i) = \frac{p_i^2}{\mathbf{p}^T \mathbf{p}}$$

5. La magnitud del vector de las futuras acciones de control propuestas, incluyendo la aportación de la componente  $p_i$  y todas las anteriores:

$$TNorm(i) = \sum_{j=1}^i p_j^2$$

6. La primera acción de control ( $\Delta u_1$ ) que se aplicaría al proceso si se incluyeran la componente  $p_i$  en la solución y todas las anteriores:

$$\Delta u(1)_i = \sum_{j=1}^i v_{1j} p_j$$

donde  $v_{ij}$  son los elementos de la matriz  $V$ .

7. Porcentaje de mejora del número de condición respecto al número de condición inicial, si se incluyeran la componente  $p_i$  y todas las anteriores:

$$MCond(i) = \left(1 - \frac{\sigma_1/\sigma_i}{\kappa(QG)}\right) \times 100$$

o también, simplemente, el número de condición de la matriz con la que se construye el controlador, respecto del número de condición inicial:

$$Cond(i) = \left( \frac{\sigma_1/\sigma_i}{\kappa(QG)} \right) \times 100$$

Analizando la tabla anterior se pueden extraer conclusiones respecto a qué componentes deberían ser incluidas en el controlador y qué otras componentes deberían ser descartadas en función de distintos criterios (condicionamiento del controlador, esfuerzo de control, etc.)

### 3.1.1 Ejemplo: Control de un proceso de 5º orden

Para ilustrar la aplicación de la descomposición SVD al diseño del controlador GPC, considerese el siguiente proceso SISO:

$$G(s) = \frac{1}{(5s + 1)^5} \quad (3.6)$$

El controlador GPC se calcula utilizando un periodo de muestreo de 2 segundos y los siguientes parámetros de diseño:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_j \\ \hline 1 & 50 & 10 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (3.7)$$

La matriz dinámica del proceso  $G$  está, en este caso, mal condicionada como así lo indica su número de condición:

$$\kappa(QG) = 5.2776 \times 10^5$$

Intentando resolver el problema de control utilizando la expresión clásica para el controlador GPC (ecuación 2.17), se obtienen los resultados de la figura 3.1. En ella se puede observar cómo las acciones de control son extremadamente elevadas para conseguir llevar la salida del proceso a la referencia, resultando inadecuadas o irreales. El mal condicionamiento numérico del controlador produce una gran sensibilidad frente a errores de modelado. Esto se puede comprobar cambiando ligeramente el proceso por :

$$G(s) = \frac{1}{(4.99s + 1)^5} \quad (3.8)$$

y comprobando qué ocurre al utilizar el GPC diseñado (figura 3.2). Al cambiar el proceso, la matriz dinámica  $G$  que se está usando no es “realmente” la que muestra el verdadero comportamiento de la planta, de tal forma que el controlador calcula soluciones que cree óptimas, pero que difieren significativamente de las que verdaderamente necesita el proceso. Así, el controlador es sensible a pequeños cambios en esta matriz y es incapaz de llevar la salida del proceso a la referencia. Ni siquiera una opción válida en otros casos, como es incluir el polinomio de filtrado  $T(z^{-1})$ , soluciona este problema (figura 3.3). Con el controlador PC-GPC, diseñado en base a las componentes principales, un cambio idéntico en el proceso que en el caso anterior, no afecta a la estabilidad de bucle cerrado.

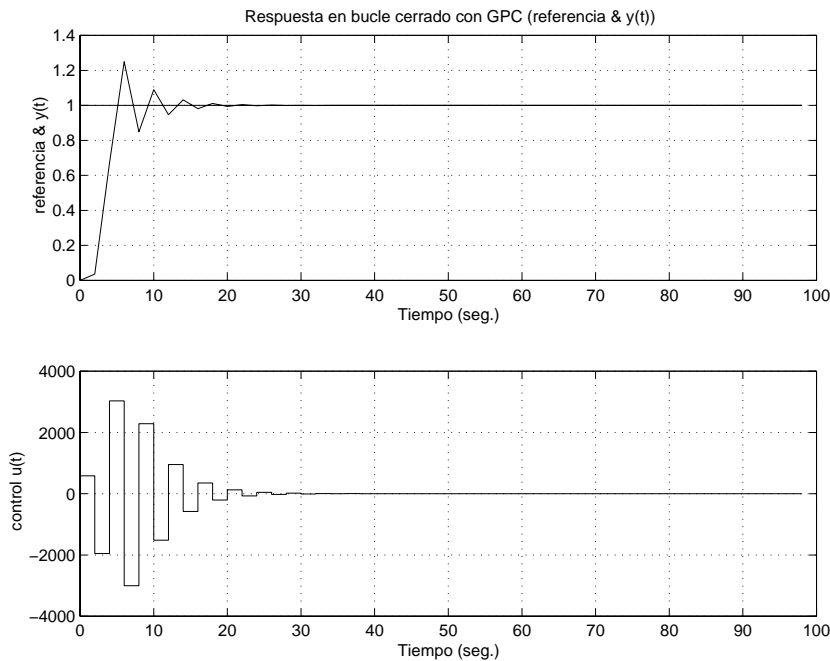


Figura 3.1: Si el modelo es igual al proceso, el control es adecuado.

La tabla 3.1, muestra las componentes principales para esta proceso junto a los indicadores numéricos mencionados anteriormente. En la figura 3.5, se representan algunas columnas de dicha tabla. Realizando un análisis de esta información se pueden extraer algunas conclusiones interesantes.

Por ejemplo, en la columna *Red* (figura 3.5(a)), se muestra cómo cada componente, contribuye a reducir el índice de coste. En la tabla se puede observar claramente que, las últimas tres componentes contribuyen aproximadamente un 1% en reducir la función objetivo, mientras que su contribución en la mag-

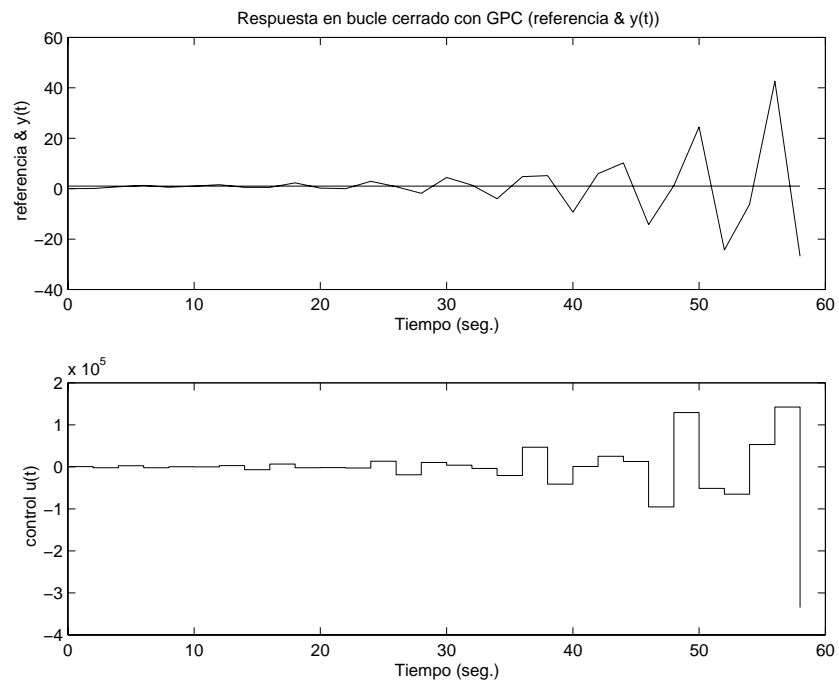


Figura 3.2: Si proceso y modelo no coinciden, el bucle cerrado es inestable.

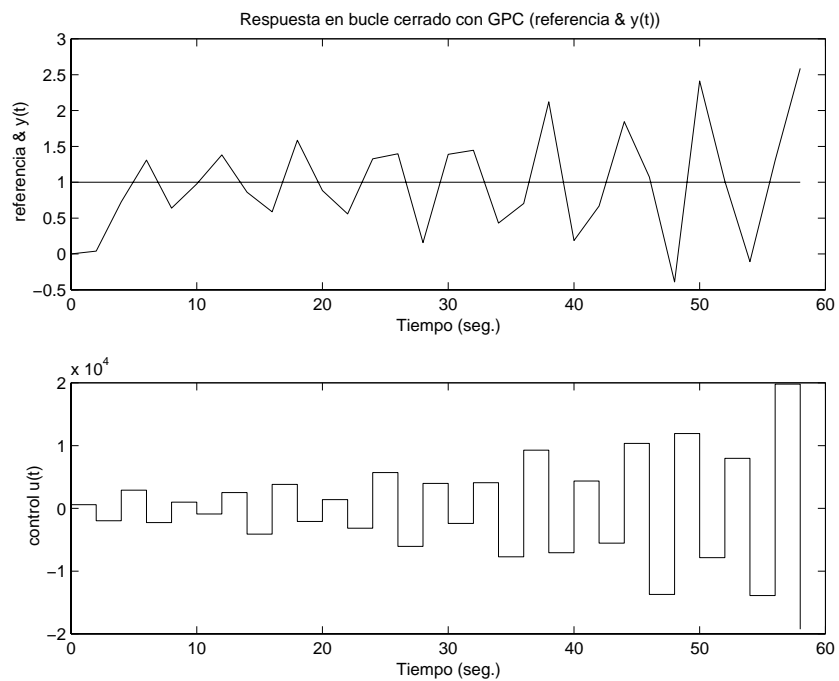


Figura 3.3: El bucle cerrado es inestable, incluso utilizando un polinomio  $T(z^{-1}) = (1 - 0.9z^{-1})^2$ .

Comp.	$\sigma$	Red(%)	T Red(%)	Norm(%)	T Norm	$\Delta u(1)$	MC <sub>ond</sub> (%)
1	17.3416	76.8283	23.1717	0.0000	0.1248	0.1190	99.9998
2	1.8428	9.4671	13.7046	0.0000	1.4869	0.6822	99.9982
3	0.3355	4.9582	8.7465	0.0000	23.0146	3.0348	99.9902
4	0.0664	3.1649	5.5816	0.0003	374.2595	11.4308	99.9505
5	0.0143	2.0973	3.4843	0.0046	5381.0064	35.6868	99.7703
6	0.0035	1.3929	2.0914	0.0528	62544.2636	90.7975	99.0477
7	0.0009	98.8316	1.1684	0.4710	572844.1479	188.8397	96.5049
8	0.0003	0.9231	0.5624	3.3469	4198999.8863	326.6456	88.5003
9	0.0001	0.6059	0.1841	19.2374	25041385.6095	477.4534	65.1111
10	0.0000	0.1841	0.0000	76.8869	108342865.0316	584.1555	0.0000

Tabla 3.1: Componentes principales para el proceso de 5° orden.

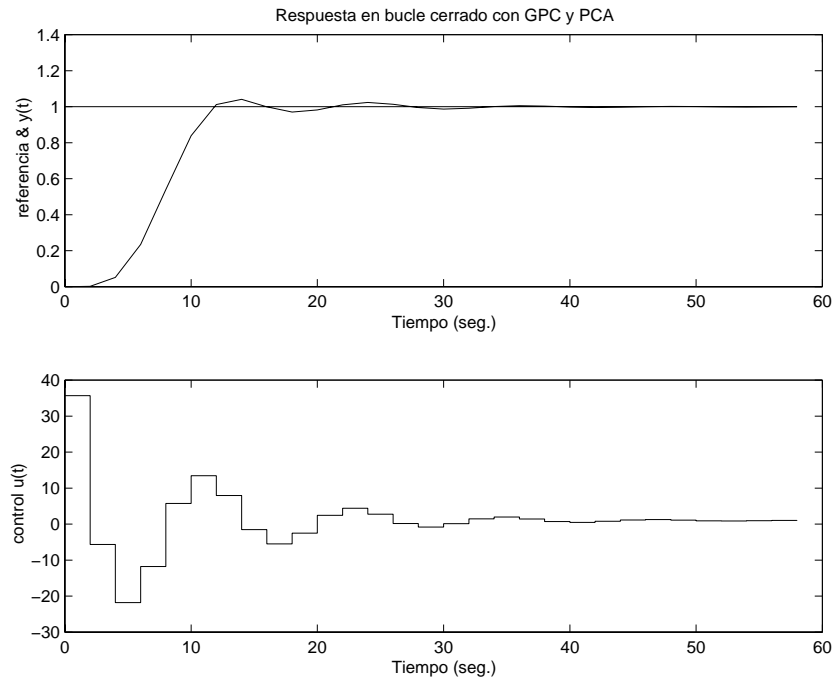


Figura 3.4: Con el controlador PC-GPC, el bucle cerrado es estable, para la misma discrepancia entre proceso y modelo.

nititud del vector de las acciones de control es notable. También se observa como, en este caso, cada componente reduce el índice de coste un valor menor que todas aquellas con valores singulares mayores.

En la columna  $\Delta u(1)$ , (figura 3.5(c)) en la que se muestra la primera acción de control, se puede observar como, los controladores diseñados con cinco componentes o más (quinta fila) generan acciones de control iniciales superando más de 35 veces a la acción de control necesaria en estado estacionario para alcanzar la referencia. Estos controladores resultan un tanto "irreales" puesto que hay que tener en cuenta que los procesos pueden estar sujetos a perturbaciones, no linealidades, errores de modelado, etc.

Respecto a la columna  $MCond$  (figura 3.5(d)), la tabla muestra claramente que si se eliminan componentes principales de la solución, el condicionamiento de la matriz que se utiliza para el cálculo del controlador mejora notablemente respecto al número de condición original.

En la figura 3.6, se muestran las respuestas de bucle cerrado frente a un escalón unitario para el proceso (3.6), con los controladores diseñados incluyendo 2, 3, 4 y 5 componentes.



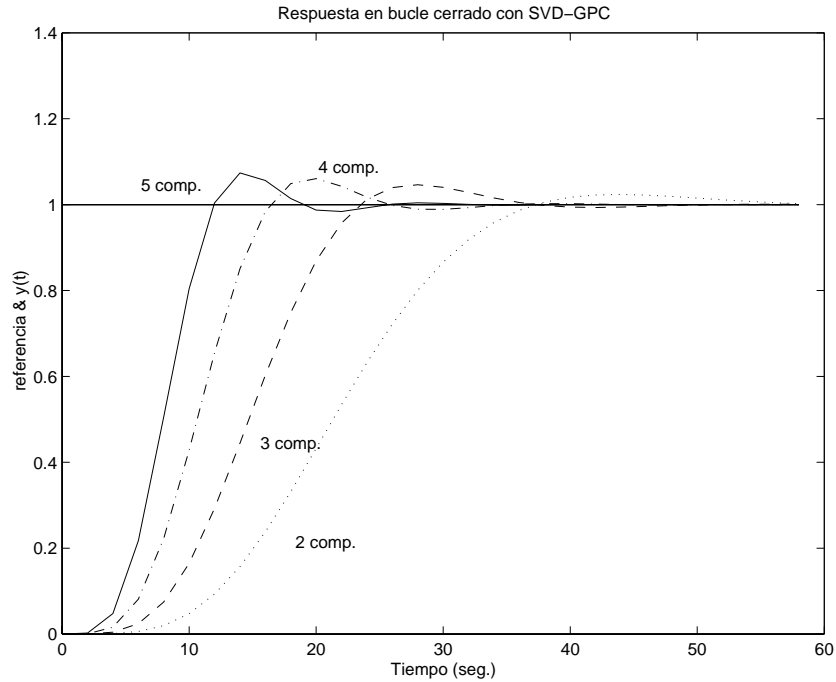


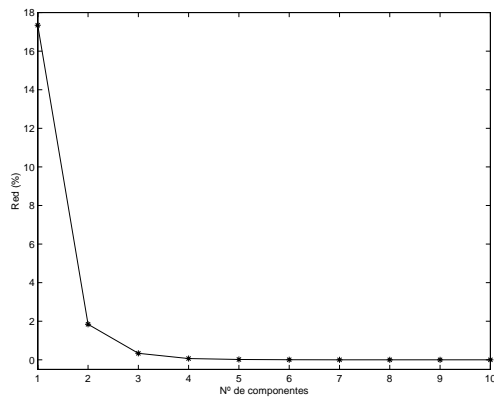
Figura 3.6: Comparación de las respuestas usando 2,3,4 y 5 componentes

También es posible obtener este comportamiento utilizando otros parámetros de diseño diferentes. Sin embargo, con la información extraída del análisis de componentes principales es posible diseñar hasta  $N_u$  controladores diferentes para un sistema SISO, simplemente añadiendo cada vez un nuevo componente a la solución. Decidiendo qué componentes se eliminan de la solución y qué componentes se mantienen, es posible obtener diferentes prestaciones en el controlador.

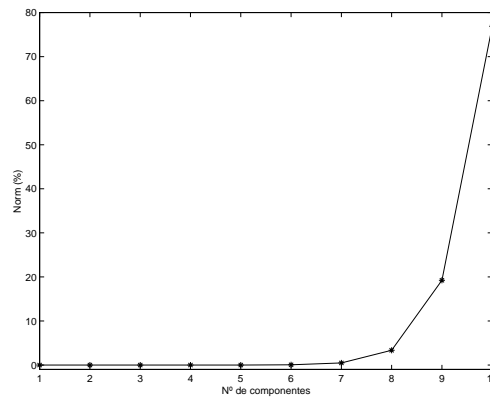
Como ya se mencionó, el factor de ponderación de la acción de control, conseguía reducir la magnitud de las acciones de control. A partir del análisis de los componentes principales también se podría deducir cuál sería el efecto que produce elegir un factor de ponderación  $\beta$  equivalente en cuanto a reducción del índice y magnitud de las acciones de control se refiere. De la expresión (2.74), se dedujo que un componente será completamente eliminado de la solución si

$$\sigma_i \ll \beta$$

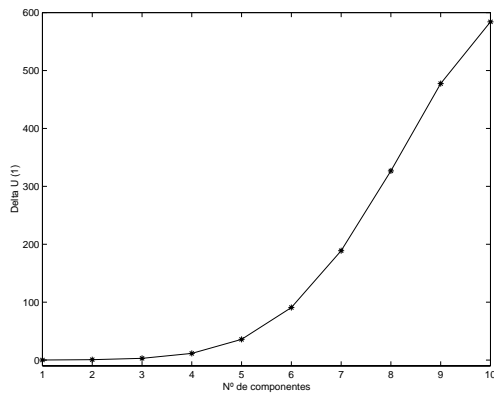
Por ejemplo seleccionando un factor de ponderación  $\beta = 0.001$ , se puede deducir de la tabla 3.2 que los componentes 1 a 3 no se verían apenas afectados, los componentes 4 y 5 se reducirían aproximadamente un 20% y un 80% res-



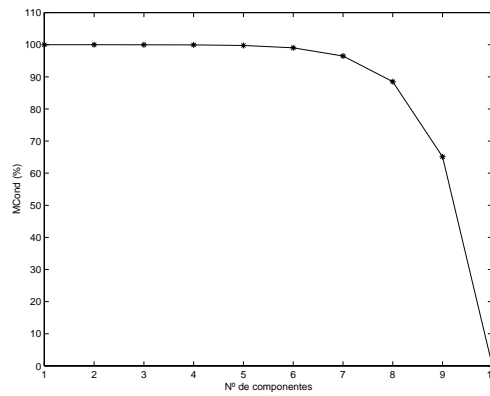
(a) Influencia de cada componente en la reducción del índice cuadrático.



(b) Influencia de cada componente en la magnitud del vector de acc. de control.



(c) Primer cambio en la acción de control propuesto al ir incluyendo componentes.



(d) Mejora en el condicionamiento del controlador al ir incluyendo componentes.

Figura 3.5: Representación gráfica de las columnas 3, 5, 7 y 8 de la tabla 3.1.

pectivamente, y el resto de componentes serían prácticamente eliminadas de la solución. Modificando este factor con el valor  $\beta = 0.01$  (tabla 3.3), el componente 3 se vería ligeramente afectado, los componentes 4 y 5 se reducirían en un 70% y en un 98% respectivamente y el resto serían prácticamente eliminados de la solución.

De lo anterior se puede deducir que el hecho de elegir un factor de ponderación constante  $\beta$  u otro, sería equivalente a eliminar ciertas componentes de la solución. En la figura 3.7, se muestran la salida del bucle cerrado para el proceso de quinto orden (3.6), utilizando 4 y 5 componentes, y por otro lado utilizando los factores de ponderación  $\beta$  anteriores. Las prestaciones no son exactamente las mismas debido a que al utilizar el factor de ponderación se está influyendo sobre todas las componentes a la vez.

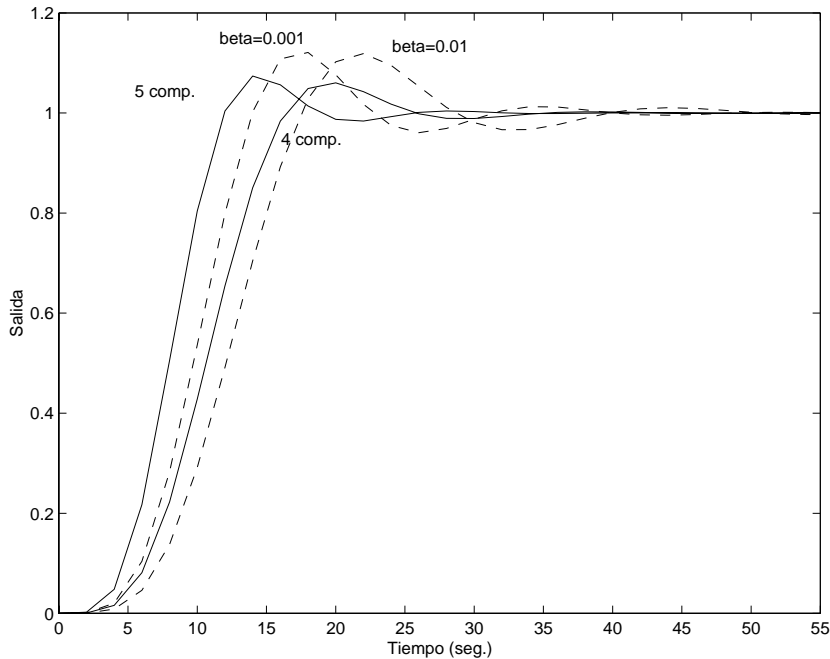


Figura 3.7: Comparación entre el uso del factor  $\beta$  y la selección de componentes principales

El factor de ponderación  $\beta$  afecta a todas y cada una de las componentes. Si se desea dejar intactas las primeras componentes y ponderar solamente aquellas que producen el mal condicionamiento del controlador se puede usar la ponderación expresada en (2.83) y calcular las componentes como indica (2.85). Seleccionando  $\rho = 3$  y un factor  $\beta = 0.5$  las componentes se muestran en la tabla 3.4. En la figura 3.8 se compara la respuesta en bucle cerrado

Comp.	$\sigma$	$\frac{g}{\sigma}$	$g\frac{\sigma}{\sigma^2+\beta}$	Reducción(%)
1	17.3	0.4	0.4	0.0
2	1.8	-1.2	-1.2	0.0
3	0.3	4.6	4.6	0.9
4	0.1	-18.7	-15.3	18.5
5	0.0	70.8	12.0	83.0
6	0.0	-239.1	-2.8	98.8
7	0.0	714.4	0.6	99.9
8	0.0	-1904.2	-0.2	100.0
9	0.0	4565.3	0.0	100.0
10	0.0	-9127.0	0.0	100.0

Tabla 3.2: Componentes principales con y sin factor de ponderación ( $\beta = 0.001$ ).

Comp.	$\sigma$	$\frac{g}{\sigma}$	$g\frac{\sigma}{\sigma^2+\beta}$	Reducción(%)
1	17.3	0.4	0.4	0.0
2	1.8	-1.2	-1.2	0.3
3	0.3	4.6	4.3	8.2
4	0.1	-18.7	-5.7	69.4
5	0.0	70.8	1.4	98.0
6	0.0	-239.1	-0.3	99.9
7	0.0	714.4	0.1	100.0
8	0.0	-1904.2	0.0	100.0
9	0.0	4565.3	0.0	100.0
10	0.0	-9127.0	0.0	100.0

Tabla 3.3: Componentes principales con y sin factor de ponderación ( $\beta = 0.01$ ).

cuando se utiliza un GPC estándar con una ponderación constante  $\beta = 0.5$  y cuando se incluyen 3 componentes y una ponderación de  $\beta = 0.5$  para las 7 restantes.

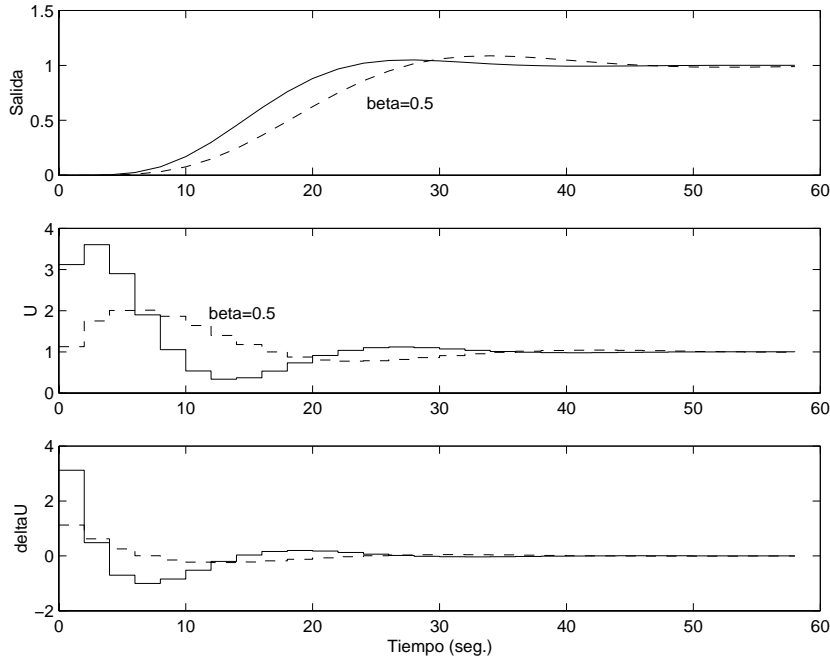


Figura 3.8: El factor  $\beta$  puede influir sólo sobre las últimas componentes

## 3.2 Extensión al caso multivariable

La extensión del controlador predictivo generalizado a procesos multivariables de  $n$  salidas por  $m$  entradas (ver apéndice A) resulta más complicada que en el controlador DMC (Shah *et al.*, 1987), (Mohtadi *et al.*, 1987), (Gu and Liu, 1991), (Kouvaritakis and Rossiter, 1993). La naturaleza de la construcción de las matrices del controlador GPC MIMO, donde las matrices formadas por bloques (cada bloque toma la forma de su correspondiente GPC SISO), resulta un problema de optimización cuya solución, expresada en forma cuadrática, es la misma que para el caso monovariable. Por tanto la descomposición en valores singulares se aplicará sobre la matriz  $G$  resultante, de dimensiones elevadas y con problemas más importantes de condicionamiento numérico.

En el caso multivariable, la tabla de análisis de los componentes principales se puede construir de diferentes formas. Asumiendo el mismo horizonte de

predicción para todas las variables controladas se puede:

- suponer que se produce, de forma independiente, un cambio en la referencia para cada una de las  $n$  variables controladas. Así, para el vector  $\mathbf{g}$  y obtener un controlador con un comportamiento óptimo frente a cambios en la referencia se pueden utilizar vectores  $\mathbf{w}$  de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= [ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 ]^T \\ \mathbf{w}_2 &= [ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 ]^T \\ &\vdots \\ &\vdots \\ \mathbf{w}_n &= [ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1 ]^T \end{aligned} \quad (3.9)$$

donde  $\mathbf{w}_i$  representa un cambio deseado en la variable controlada  $y_i$ .

Para cada uno de estos vectores se calculan las magnitudes propuestas en el apartado 3.1 y se construye una tabla global mostrando éstas.

- suponer que se va a aplicar al proceso una combinación de referencias conocida. El análisis de componentes principales se realiza para dicha combinación. El vector de referencias  $\mathbf{w}$  utilizado para construir la tabla será de la forma:

$$\mathbf{w} = [ w_1^1 \ w_2^1 \ \dots \ w_N^1 \ \dots \ w_1^n \ w_2^n \ \dots \ w_N^n ]^T \quad (3.10)$$

donde  $w_i^j$  es la referencia que se desea para la variable controlada  $j$  en el instante futuro  $i$ .

### 3.2.1 Ejemplo: Control de un proceso MIMO

A través de este ejemplo se mostrará cómo se puede extender el análisis de componentes principales a procesos multivariables.

Como proceso a controlar, se usará la matriz de transferencia propuesta por Wood and Berry (1973) para una columna de destilación metanol - agua (Luyben, 1990):

$$\begin{bmatrix} X_D(s) \\ X_B(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{12.8e^{-s}}{16.7s+1} & \frac{-18.9e^{-3s}}{21s+1} \\ \frac{6.6e^{-7s}}{10.9s+1} & \frac{-19.4e^{-3s}}{14.4s+1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_F(s) \\ V_B(s) \end{bmatrix} \quad (3.11)$$

donde todos los tiempos están expresados en minutos. Se diseña un GPC multivariable para un periodo de muestreo de 2.5 minutos y los siguientes parámetros:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_i \\ \hline 1 & 25 & 10 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (3.12)$$

En este caso la matriz dinámica del controlador  $G_{mpc}$  presenta un número de condición aproximadamente igual a 2000. El problema pues, está moderadamente mal condicionado. En este ejemplo se mostrará cómo, el análisis de las componentes principales sigue siendo igual de útil en problemas que no presenten un mal condicionamiento elevado, ya que en estos casos la eliminación de componentes tiene el mismo efecto en las prestaciones del controlador que la inclusión de un factor de ponderación de la acción de control en el índice de coste.

Si se asumen cambios en la referencia independientes para cada una de las dos variables controladas (3.9):

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_1 &= [1_1 \ 1_2 \ \cdots \ 1_{25} \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \\ \mathbf{w}_2 &= [0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 1_1 \ 1_2 \ \cdots \ 1_{25}]^T \end{aligned}$$

se obtienen la tablas 3.5 y 3.6, las cuales contienen respectivamente, las magnitudes para el análisis cuando se produce un cambio en la referencia para la salida 1 y cuando se produce un cambio en la referencia para la salida 2.

38.4770

Analizando los elementos de las tablas, se puede concluir que los componentes correspondientes a los valores singulares más pequeños (de las filas 9 a la 20) no influyen demasiado en la minimización del índice.

En las figuras (3.9) y (3.10), se muestra el comportamiento en bucle cerrado cuando se producen cambios en la referencia para controladores diseñados con

4, 5 y 8 componentes. Se observa como las respuestas pertenecientes al controlador diseñado con 4 componentes presentan un grado de interacción y tiempo de respuesta mayores. Desde el punto de vista de la selección de componentes principales, la fila de la tabla que pertenece a la quinta componente nos indica que ésta todavía contribuye significativamente a reducir el índice. La no inclusión de esta componente en la solución, explica las peores prestaciones que ofrece el controlador.

Para el controlador diseñado con 8 componentes, se observa que la rapidez de la respuesta mejora y el grado de interacción es menor. Sin embargo, el uso de más componentes, a expensas de producir acciones de control mayores, no contribuyen significativamente a mejorar el control.

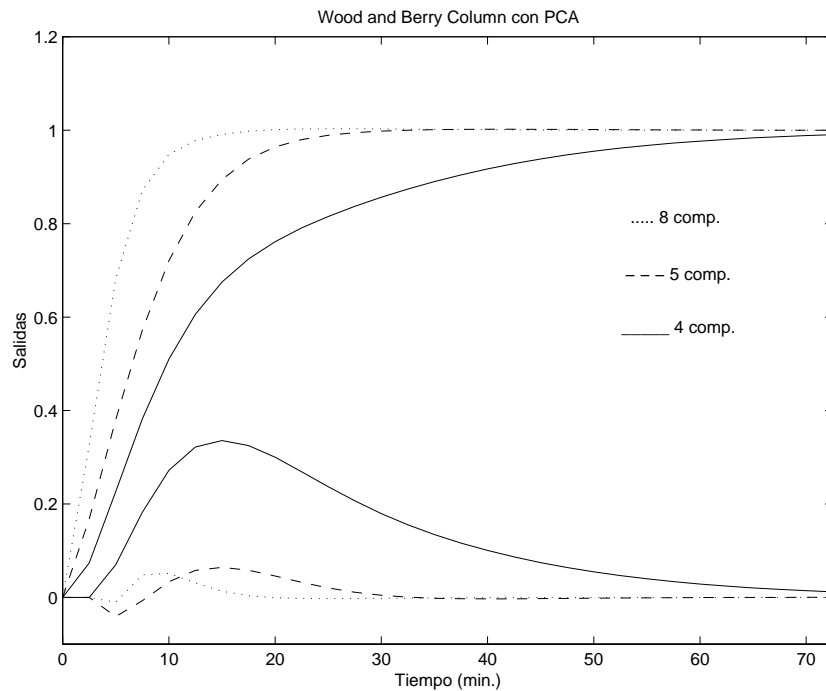


Figura 3.9: Control de la columna de destilación propuesta por Wood and Berry con análisis de componentes principales.



Comp.	$\sigma$	$\frac{g}{\sigma}$	$\frac{\sigma g}{\sigma^2 + \beta}$	$p_i$ según 2.85
1	17.3416	0.35	0.4	0.35
2	1.8428	-1.17	-1.0	-1.17
3	0.3355	4.64	0.93	4.64
4	0.0664	-18.74	-0.16	-0.16
5	0.0143	70.76	0.03	0.03
6	0.0035	-239.09	-0.01	-0.01
7	0.0009	714.35	0.00	0.00
8	0.0003	-1904.25	-0.00	-0.00
9	0.0001	4565.35	0.00	0.00
10	0.0000	-9126.96	-0.00	-0.00

Tabla 3.4: Componentes principales para una ponderación parcial de las componentes.

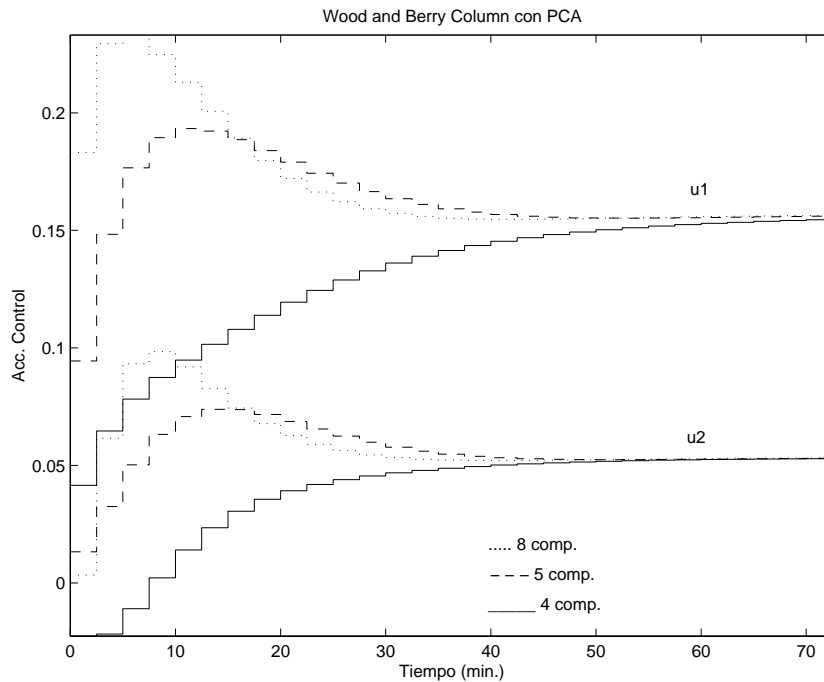


Figura 3.10: Acciones de control para 4, 5 y 8 componentes.

Comp.	$\sigma$	Red(%)	T Red(%)	Norm(%)	T Norm	$\Delta u_1(1)$	$\Delta u_2(1)$	M Cond(%)
1	309.0009	37.8809	62.1191	0.0111	0.0001	0.0017	-0.0032	99.9211
2	53.2692	39.6725	22.4266	0.3929	0.0036	0.0241	-0.0131	99.5422
3	46.8142	8.0801	14.3465	0.1035	0.0045	0.0260	-0.0006	99.4790
4	14.8260	2.9172	11.4293	0.3727	0.0078	0.0415	-0.0227	98.3550
5	8.8745	6.2750	5.1543	2.2377	0.0278	0.0944	0.0132	97.2518
6	6.4077	0.7120	4.4423	0.4870	0.0321	0.1066	-0.0108	96.1938
7	3.6626	1.9970	2.4453	4.1810	0.0693	0.1833	0.0053	93.3412
8	3.4481	0.0011	2.4442	0.0028	0.0693	0.1831	0.0034	92.9268
9	2.3382	0.8574	1.5868	4.4044	0.1085	0.2468	0.0060	89.5697
10	2.1790	0.0358	1.5551	0.1876	0.1102	0.2533	0.0192	88.8076
11	1.7172	0.3985	1.1525	3.8342	0.1443	0.2979	0.0135	85.7975
12	1.6069	0.0121	1.0504	1.1109	0.1542	0.3215	0.0375	84.8230
13	1.3888	0.0331	1.0173	0.4807	0.1585	0.3220	0.0287	82.4393
14	1.2824	0.3338	0.6835	5.7012	0.2092	0.3891	0.0498	80.9822
15	1.2503	0.0069	0.6766	0.1249	0.2104	0.3885	0.0467	80.4939
16	1.1872	0.0040	0.6726	0.0791	0.2111	0.3901	0.0481	79.4571
17	0.9493	0.2767	0.3959	8.6221	0.2878	0.4515	0.0429	74.3084
18	0.6520	0.1944	0.2015	12.8429	0.4021	0.5011	0.0278	62.5945
19	0.4177	0.1296	0.0719	20.8716	0.5879	0.5390	0.0114	41.6089
20	0.2439	0.0719	0.0000	33.9516	0.8901	0.5616	0.0002	0.0000

Tabla 3.5: Componentes principales para el proceso  $2 \times 2$  cuando se produce un cambio deseado para la variable controlada 1

Comp.	$\sigma$	Red(%)	TRed(%)	Norm(%)	TNorm	$\Delta u_1(1)$	$\Delta u_2(1)$	MCond(%)
1	309.0009	38.4770	61.5230	0.0169	0.0001	0.0017	-0.0032	99.9211
2	53.2692	7.1883	54.3348	0.1059	0.0007	-0.0076	0.0009	99.5422
3	46.8142	43.8662	10.4685	0.8370	0.0055	-0.0119	-0.0276	99.4790
4	14.8260	1.7525	8.7160	0.3334	0.0074	-0.0001	-0.0443	98.3550
5	8.8745	4.5202	4.1958	2.3999	0.0212	-0.0442	-0.0742	97.2518
6	6.4077	1.4028	2.7930	1.4287	0.0294	-0.0275	-0.1072	96.1938
7	3.6626	0.2619	2.5311	0.8162	0.0341	-0.0547	-0.1129	93.3412
8	3.4481	1.2373	1.2938	4.3516	0.0591	-0.0606	-0.1723	92.9268
9	2.3382	0.0013	1.2926	0.0097	0.0591	-0.0630	-0.1724	89.5697
10	2.1790	0.6183	0.6743	5.4451	0.0904	-0.0911	-0.2292	88.8076
11	1.7172	0.0212	0.6530	0.3010	0.0921	-0.0811	-0.2304	85.7975
12	1.6069	0.1975	0.4555	3.1980	0.1104	-0.1133	-0.2631	84.8230
13	1.3888	0.0940	0.3615	2.0383	0.1221	-0.1124	-0.2777	82.4393
14	1.2824	0.0000	0.3615	0.0012	0.1222	-0.1132	-0.2780	80.9822
15	1.2503	0.0358	0.3257	0.9579	0.1276	-0.1144	-0.2848	80.4939
16	1.1872	0.0055	0.3202	0.1628	0.1286	-0.1162	-0.2865	79.4571
17	0.9493	0.0632	0.2570	2.9320	0.1454	-0.0875	-0.2889	74.3084
18	0.6520	0.1059	0.1511	10.4144	0.2052	-0.0516	-0.2998	62.5945
19	0.4177	0.0906	0.0605	21.7151	0.3298	-0.0206	-0.3133	41.6089
20	0.2439	0.0605	0.0000	42.5351	0.5739	-0.0002	-0.3233	0.0000

Tabla 3.6: Componentes principales para el proceso  $2 \times 2$  cuando se produce un cambio deseado para la variable controlada 2

### 3.3 Métodos para la selección de las componentes principales

Con los ejemplos presentados se ha tratado de mostrar el potencial del controlador GPC calculado en base a sus componentes principales. Hasta el momento, los criterios seguidos para la selección del controlador han sido un tanto *subjetivos*. En este apartado se va a tratar de automatizar la selección de componentes principales, exponiendo una serie de criterios de selección basados en algún indicador de tipo numérico.

Una de las principales dificultades al usar el análisis de las componentes principales es la selección de las componentes de una forma "óptima". En áreas relacionadas con el procesado de señal y en aplicaciones tales como control estadístico de procesos, identificación y análisis de fallos, detección de perturbaciones, etc, se han desarrollado métodos para la selección de componentes principales (Valle *et al.*, 1999), (Qin and Dunia, 2000).

En un contexto evidentemente distinto, estos métodos están basados en la determinación de cuáles son las componentes significativas que contienen gran parte de la información que interesa y cuáles son aquellas componentes que corresponden a ruido. Bajo el punto de vista del control de procesos, calcular controladores en cuyo diseño se tenga en cuenta la limitación del esfuerzo de control o la capacidad de reducción del error es algo verdaderamente importante. En los criterios que a continuación se van a exponer quedan reflejados estos dos aspectos de una forma clara y evidente.

#### 3.3.1 Porcentaje de índice minimizado (PIM)

El PIM es una medida del porcentaje de minimización que se alcanza incluyendo en la ley de control las  $q$  primeras componentes principales. Se define como:

$$PIM(q) = 100 \cdot \left( \frac{\sum_{j=1}^q (g_1^j)^2}{\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1} \right) \% \quad (3.13)$$

Para un nivel de PIM especificado, por ejemplo el 90%, 95% o 99%, siempre existirá un número de componentes que producen un porcentaje mayor o igual que el valor elegido. El criterio consiste en seleccionar el menor número de componentes que producen un nivel de porcentaje mayor o igual que el espe-

cificado. Mientras, por un lado, es deseable acercarse a la solución óptima lo más posible también es cierto que es idóneo mantener sólo algunas componentes para aumentar la robustez del controlador, mejorando el condicionamiento del controlador. Así que el porcentaje de minimización a alcanzar responde al clásico balance entre robustez y prestaciones del controlador.

### 3.3.2 Porcentaje de índice residual (PIR)

Complementario al anterior, el PIR expresa el porcentaje del índice que todavía queda por minimizar si en la solución se incluyen  $q$  componentes. Se define como:

$$PIR(q) = 100 \cdot \left( 1 - \frac{\sum_{j=1}^q (g_1^j)^2}{\mathbf{g}_1^T \mathbf{g}_1} \right) \% \quad (3.14)$$

Con este criterio se puede fijar un porcentaje y seleccionar el menor número de componentes que alcanzan un valor menor o igual que el porcentaje especificado. Gráficamente, es posible dibujar el PIR en función del número de componentes (monótono decreciente) e identificar en el gráfico el “codo” en el que éste se estabiliza. Esto indicaría que por más componentes que se añadan a la solución no se consigue mejorar ésta.

La implementación de éste método es relativamente fácil, pero en algunos casos es difícil encontrar la zona donde se produce esa variación más lenta si la curva decrece muy suavemente.

### 3.3.3 Cota superior para la 2-norma del vector de acciones de control

En este caso se trata de solucionar el siguiente problema

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \| QG\Delta \mathbf{u} - Q\mathbf{e} \|_2$$

sujeto a (figura 3.11)

$$\| \Delta \mathbf{u} \|_2 \leq \delta$$

El número  $\delta$  constituye ahora un parámetro de diseño del controlador y tiene una relación muy directa con las restricciones en el vector de acciones de control. De nuevo, se puede realizar la selección de componentes fuera de línea y

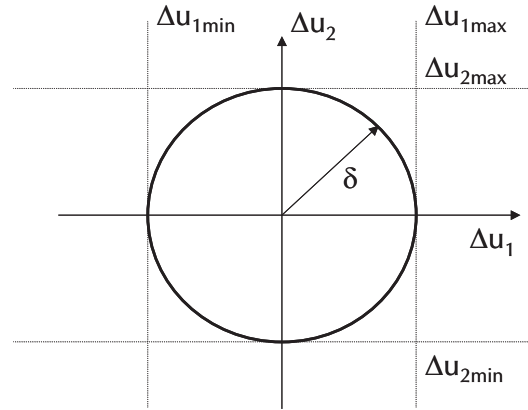


Figura 3.11: Para  $N_u = 2$ , el problema se plantea como una minimización sobre una circunferencia

suponer que el vector con la respuesta forzada deseada  $\mathbf{e}$ , es igual al vector de referencias futuras  $\mathbf{w}$ .

El algoritmo para seleccionar las componentes es el siguiente:

1. Calcular la descomposición SVD de la matriz  $QG = U\Sigma V^T$ , siendo  $V = [v_1, \dots, v_n]$
2. Calcular el vector  $\mathbf{g} = U^T Q \mathbf{e}$  y seleccionar el subvector  $\mathbf{g}_1$  de  $\mathbf{g}$  que contiene los  $N_u$  primeros elementos.
3. El problema tiene solución si:

$$\left( \frac{g_1^1}{\sigma_1} \right)^2 \leq \delta^2$$

4. Siendo  $N_u$  el número de valores singulares distintos de cero ( $\sigma_i \neq 0$ ) buscar:

$$\max q \in [1 \dots N_u] \text{ tal que } \sum_{i=1}^q \left( \frac{g_1^i}{\sigma_i} \right)^2 \leq \delta^2$$

5. La solución final es

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^q \left( \frac{g_1^i}{\sigma_i} \right) v_i$$

### 3.3.4 Cota superior para el primer cambio de la acción de control

El método es similar al anterior pero está basado en imponer una cota superior a la primera acción de control, puesto que es la entrada que realmente se aplicará al proceso. El problema queda entonces definido como:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} \| QG\Delta \mathbf{u} - Q\mathbf{e} \|_2$$

sujeto a

$$| \Delta \mathbf{u}(1) | \leq \delta$$

El algoritmo para seleccionar las componentes es el siguiente:

1. Calcular la descomposición SVD de la matriz  $QG = U\Sigma V^T$ , siendo  $V = [v_1, \dots, v_n]$
2. Calcular el vector  $\mathbf{g} = U^T Q\mathbf{e}$  y seleccionar el subvector  $\mathbf{g}_1$  de  $\mathbf{g}$  que contiene los  $N_u$  primeros elementos.
3. El problema tiene solución si:

$$\left| \left( \frac{g_1^1}{\sigma_1} \right) v_{11} \right| \leq \delta$$

4. Siendo  $N_u$  el número de valores singulares distintos de cero ( $\sigma_i \neq 0$ ) buscar:

$$\max q \in [1 \dots N_u] \text{ tal que } \sum_{i=1}^q \left( \frac{g_1^i}{\sigma_i} \right) v_{1i} \leq \delta$$

5. La solución final es

$$\Delta \mathbf{u} = \sum_{i=1}^q \left( \frac{g_1^i}{\sigma_i} \right) v_i$$

### 3.3.5 Criterios estadísticos

Puesto que el problema de control predictivo puede presentarse como un problema de mínimos cuadrados, pueden asociarse ciertos aspectos que tradicionalmente pertenecen al análisis estadístico (Ogunnaike, 1986). La varianza de las acciones de control puede ser usada para decidir qué componentes deben

ser incluidas en el controlador y cuáles no. La varianza y el esfuerzo de control de una componente principal, están muy relacionadas por lo que, realmente, seleccionar componentes en base a una minimización de la varianza sería equivalente a una minimización del esfuerzo de control.

La varianza de las acciones de control cuantifica de algún modo, cuál es la variación esperada de dichas acciones debido al ruido de medida. Por tanto una varianza alta indica que las acciones de control son sensibles a ruido en el vector  $\mathbf{e}$  y podrían fluctuar ampliamente con pequeños cambios en este vector.

En problemas de mínimos cuadrados, la varianza es una propiedad estadística de los parámetros estimados. Asumiendo que el vector de regresión está perturbado por un ruido blanco  $\epsilon$  tal que  $|\epsilon^T \epsilon| = \sigma^2$ , la varianza de cada uno de los parámetros a estimar se corresponde con el elemento de la diagonal de la matriz de covarianzas:

$$Cov = |(G^T G)^{-1}| \sigma^2 \quad (3.15)$$

En términos de las componentes principales la expresión (3.15) se reduce a

$$Cov = (\Sigma^T \Sigma)^{-1} \sigma^2 \quad (3.16)$$

Es decir la varianza de la  $i$ -ésima componente es simplemente  $\sigma_{p_i} = \sigma^2 / s_i^2$ , inversamente proporcional al cuadrado del valor singular<sup>2</sup>. Por tanto, la primera componente posee la menor varianza y la última componente la mayor. Si la matriz  $G$  está mal condicionada, los valores singulares más pequeños y próximos a cero elevan la varianza de las componentes correspondientes y esto hace que las acciones de control sean muy sensibles a ruidos de medida.

La varianza de las componentes principales, está relacionada con la magnitud de las acciones de control, puesto que ambas son inversamente proporcionales al cuadrado de los valores singulares. La única diferencia consiste en que si el valor singular  $s_i$  es pequeño la aportación de la componente  $p_i$  a la norma del vector de acciones de control también será pequeña si  $g_1^i$  es pequeño. Sin embargo, la varianza de esa componente continuará siendo elevada puesto que ésta es una propiedad del controlador, independiente del vector  $\mathbf{e}$ .

Los dos criterios que se exponen a continuación son clásicos en el análisis estadístico de datos con componentes principales.

---

<sup>2</sup>Notar que en este apartado se denota el valor singular con  $s_i$  y no como  $\sigma_i$ .



### Valor singular medio

Este criterio consiste en aceptar todos los valores singulares mayores que el valor singular medio y descartar todos aquellos que están por debajo. La regla heurística consiste en descartar todos los componentes principales cuya contribución en la solución es menor que la media de una variable.

### Análisis paralelo

En el análisis paralelo se aplica la descomposición SVD a dos matrices: una, sobre la matriz original  $QG$  y otra sobre una matriz del mismo tamaño pero con datos totalmente independientes unos de otros y no correlados. A partir de estas dos matrices se dibujan sobre los mismos ejes los valores singulares de ambas matrices. Todas aquellas componentes por encima de la intersección entre ambas gráficas son incorporadas en la solución y las componentes por debajo son consideradas ruido. En este caso el método no resulta tan ambiguo en la selección de las componentes como el basado en el índice PIR, pero puede producir soluciones muy conservadoras.

### 3.3.6 Validación cruzada

Este método explota la relación del diseño PC-GPC en cuanto al número de componentes del controlador y su robustez. La habilidad del controlador para encontrar soluciones aproximadas al problema de mínimos cuadrados cuando existen discrepancias entre modelo y proceso (es decir cuando la matriz dinámica  $G$  es distinta) disminuye según se aumenta el número de componentes debido, como se explicó, al mal condicionamiento numérico de la matriz dinámica  $G$ .

En este método se propone el análisis del residuo relativo que produce el controlador en el índice de mínimos cuadrados cuando la matriz dinámica  $G$  es distinta de la que el controlador internamente utiliza.

Partiendo de un controlador diseñado en base a unos parámetros y un modelo, se calcula para un vector  $\mathbf{e}$  dado, cuáles serían los distintos vectores de acciones de control  $\Delta\mathbf{u}_q$  que resultarían de seleccionar  $q$  componentes principales.

Se define  $RR$  como

$$RR(q) = 100 \cdot \left( \frac{\| Q\tilde{G}\Delta\mathbf{u}_q - Q\mathbf{e} \|_2^2}{\| Q\mathbf{e} \|_2^2} \right) \% \quad (3.17)$$

donde:

- $\tilde{G}$  es la matriz con los coeficientes de la respuesta en escalón del modelo, pero perturbados (equivalente al proceso real).
- $\Delta\mathbf{u}_q$  es el vector de  $N_u$  acciones de control calculado con  $q$  componentes y a partir del modelo  $G$  para una respuesta forzada  $\mathbf{e}$ .
- $\mathbf{e}$  es la respuesta forzada deseada. Asumiendo que la planta se mantiene estable en torno al punto de funcionamiento, y con el propósito de obtener un controlador que se comporte de forma óptima para cambios en la referencia (por ejemplo, un escalón unitario) este término sería un vector  $[1 \ 1 \ 1 \ \dots \ 1]$ .

A continuación se representa  $RR$  en función del número de componentes y se determina cuándo este residuo relativo se incrementa por el hecho de incluir más componentes en el controlador.

### 3.3.7 Criterio multiobjetivo

El criterio para la inclusión de componentes principales en el controlador responde en este caso a una solución de compromiso que engloba varios de los criterios anteriores. Básicamente el controlador resultante debería:

- Reducir al máximo posible el índice de coste (el porcentaje de índice residual ( $PIR$ ) debería ser pequeño).
- Generar acciones de control "reales" compatibles con los accionadores disponibles (la magnitud de las acciones de control ( $TNorm$ ) debería ser pequeña).
- Estar bien condicionado numéricamente para ser poco sensible a errores de modelado (el número de condición ( $Cond$ ) de la matriz que se usa para el control debería ser pequeño).

Por ello se plantea un problema de optimización multiobjetivo, especificando un peso para cada uno de los tres factores anteriores y formando un único índice que es la suma ponderada de éstos:

$$f(i) = w_1 \cdot PIR(i) + w_2 \cdot TNorm(i) + w_3 \cdot Cond(i) \quad (3.18)$$

de tal forma que se selecciona aquel número de componentes que menor valor de  $f(i)$  ofrezca. Tal y como se comentó, según aumenta el número de componentes el factor  $PIR$  decrece, mientras que  $Cond$  y la norma del vector de acciones de control se incrementan. La selección correcta de componentes será aquella para la que  $f(i)$  sea mínimo o el cambio en  $f(i)$  según aumenta el número de componentes sea insignificante.

### 3.4 Ejemplo SISO

La relación entre el ángulo del rotor y la velocidad de un helicóptero en unas condiciones particulares de vuelo viene dada por la siguiente función de transferencia (Maciejowski, 2002):

$$G(s) = \frac{9.8(s^2 - 0.5s + 6.3)}{(s + 0.6565)(s^2 - 0.2366s + 0.1493)} \quad (3.19)$$

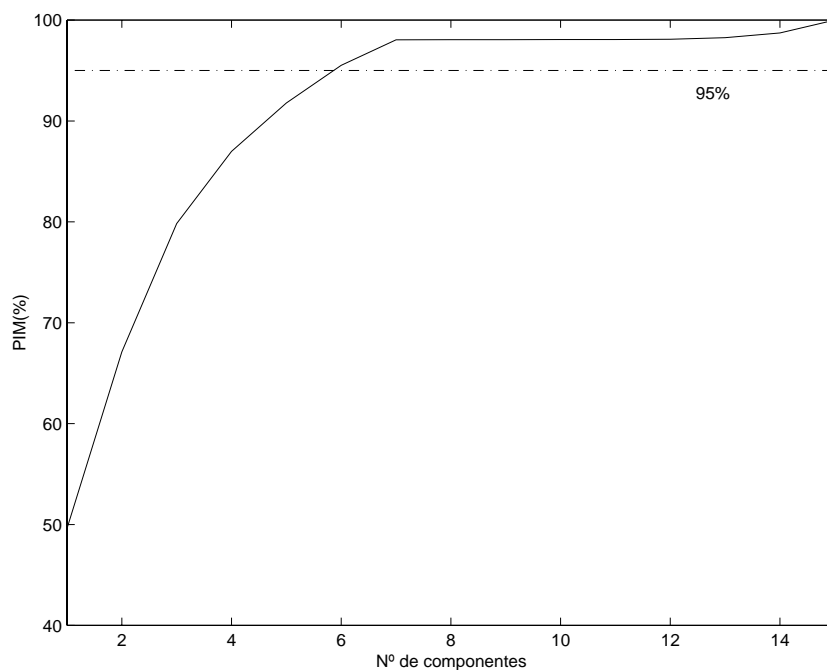
El sistema tiene dos ceros en  $+0.25 \pm 2.5j$  y dos polos en  $+0.118 \pm 0.37j$ . Es por lo tanto un proceso inestable y de fase no mínima. Para un periodo de muestreo de 0.6 segundos, la función de transferencia discreta es la siguiente:

$$G(z^{-1}) = \frac{6.472z^{-1} - 2.476z^{-2} + 7.794z^{-3}}{1 - 2.769z^{-1} + 2.565z^{-2} - 0.7773z^{-3}} \quad (3.20)$$

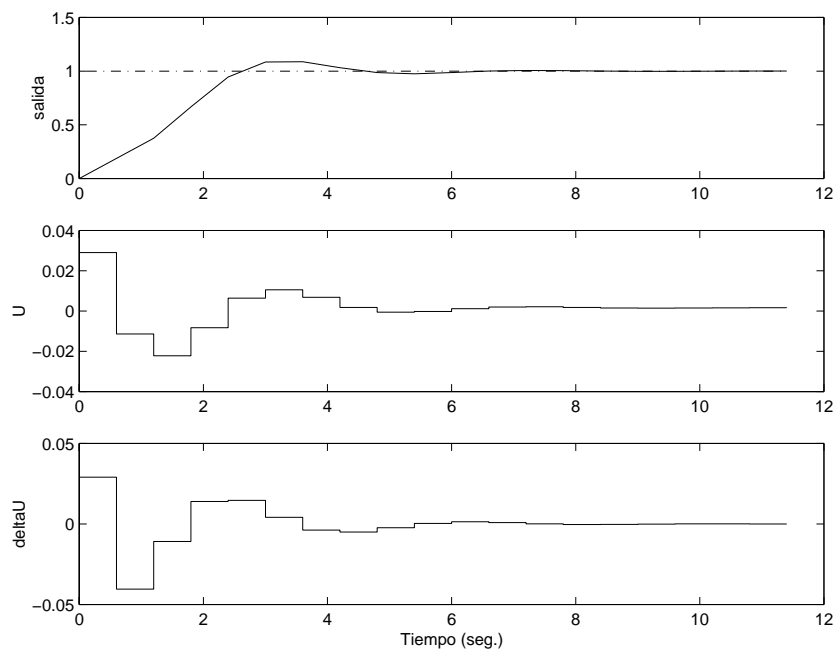
A continuación, y para los siguientes parámetros de diseño se calculan diferentes PC-GPC's eligiendo, según el método, las distintas componentes:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_j \\ \hline 1 & 15 & 15 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (3.21)$$

1. **Porcentaje de índice minimizado:** (Figura 3.12) La selección se realiza eligiendo aquellas componentes que consiguen un 95% de minimización del índice. En la figura se puede apreciar que esto se consigue utilizando 5 componentes de las 15 disponibles.



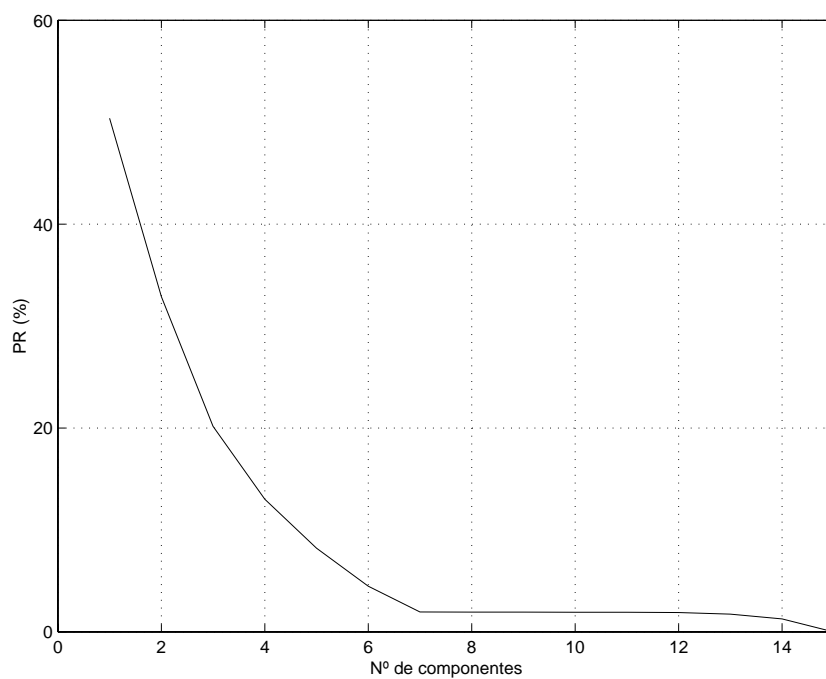
(a) Porcentaje de índice minimizado



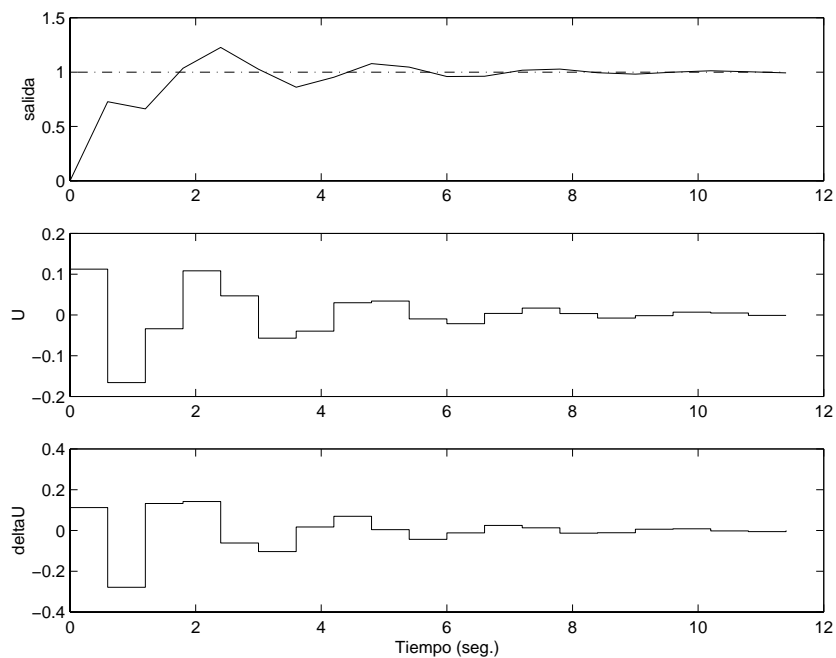
(b) Salida en bucle cerrado con 5 componentes.

Figura 3.12: Selección para el 95% de índice minimizado.

2. **Porcentaje de residuo:** (Figura 3.13) La figura muestra claramente que a partir de la 7ª componente la calidad de la solución no mejora por el hecho de incluir nuevas componentes en la solución (el residuo no disminuye). Por lo tanto parece lógico utilizar tan solo 7 componentes.
3. **Cota superior de la 2-norma del vector de acciones de control:** (Figura 3.14) El parámetro de corte  $\delta$  se puede elegir en función de la ganancia del proceso y de las restricciones en los incrementos de la acción de control. Para una norma euclídea menor que 0.25, la figura indica que hay que seleccionar tan solo 6 componentes. Notar cómo en ningún instante los incrementos de la acción de control superan este valor.
4. **Cota superior del primer cambio en la acción de control:** (Figura 3.15) Cuando se produce un cambio en la referencia en forma de escalón, la figura muestra cuál es el valor de la primera acción de control que produce el controlador según se añaden componentes a éste. La elección del parámetro de corte  $\delta$ , puede realizarse en base al cambio necesario en la acción de control (en estado estacionario) para llevar el proceso a la referencia. En este caso la ganancia del proceso es 630 y el valor de  $\Delta u_{ss}$  necesario es 0.0016. Para obtener una acción de control suave se puede seleccionar como cota un número no muy elevado de veces el valor  $\Delta u_{ss}$ . El corte se eligió en  $\delta = 3 \times \Delta u_{ss} = 0.0048$ , seleccionando 3 de las 15 componentes disponibles.
5. **Valor singular medio:** (Figura 3.16) La representación de los valores singulares proporciona una idea de la importancia que cada uno de ellos tiene en la minimización del índice. Según el criterio del valor medio se seleccionan aquellas componentes correspondientes a los valores singulares que se encuentran por encima de su valor medio. En este caso, tan solo los dos primeros valores singulares cumplen este requisito.
6. **Análisis paralelo:** (Figura 3.17) Para este caso y tras el autoescalado de la matriz dinámica QG, se comparan los valores singulares de ésta con los de otra matriz cuyos valores se han generado aleatoriamente con media nula y varianza unidad. Según este criterio las componentes que quedan a la derecha de la intersección de ambas curvas no son representativas. En la figura se aprecia que tan sólo 3 componentes formarían parte de la solución.
7. **Validación cruzada:** Aplicando, por ejemplo un 15% de variación a los parámetros del modelo continuo se obtiene:

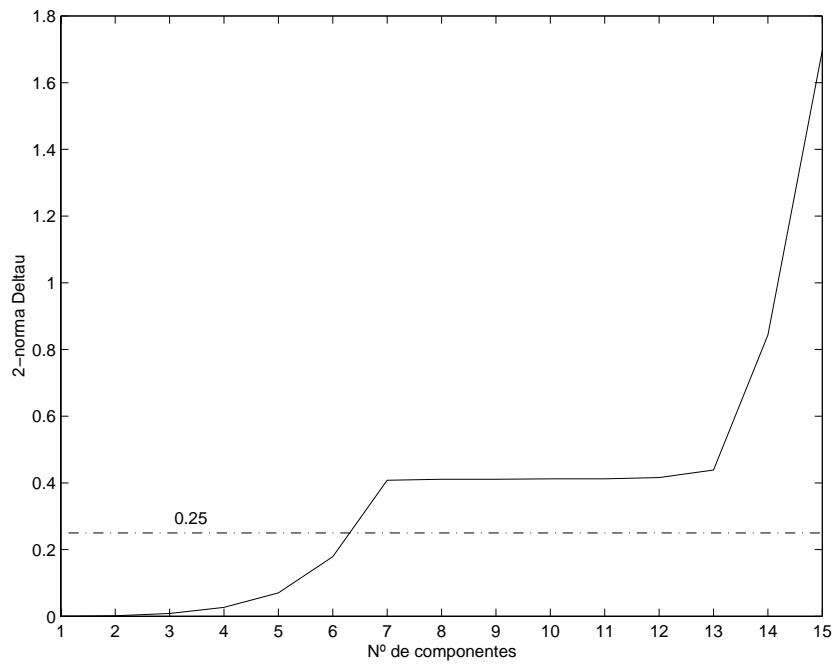


(a) Porcentaje de residuo

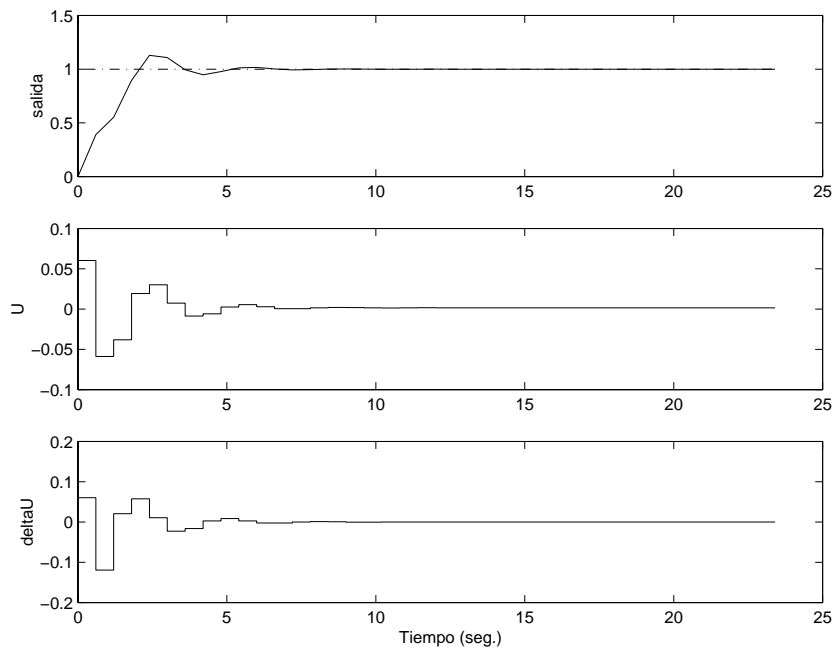


(b) Salida en bucle cerrado con 7 componentes.

Figura 3.13: La selección se realiza cuando no se aprecia disminución en PR.

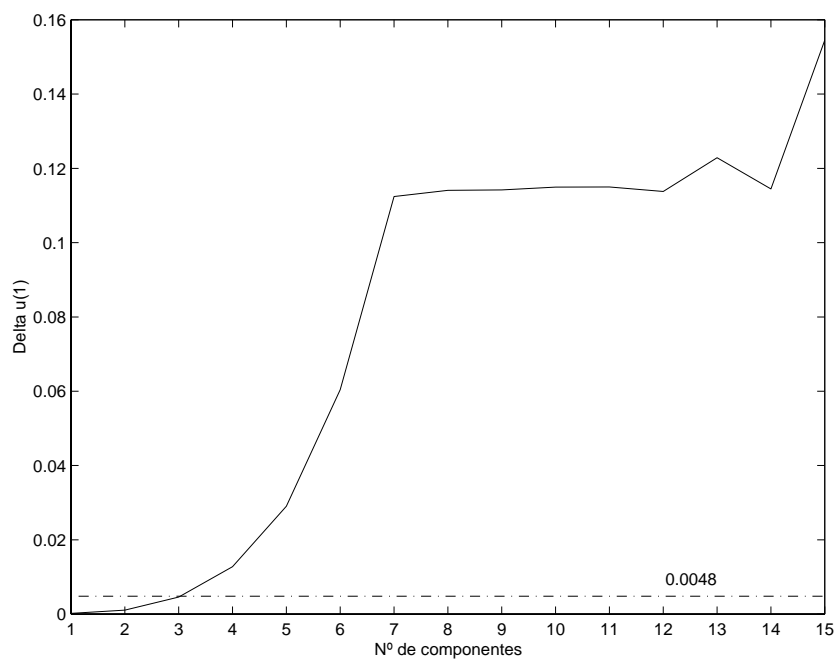


(a) Norma euclídea de los incrementos futuros de las acciones de control.

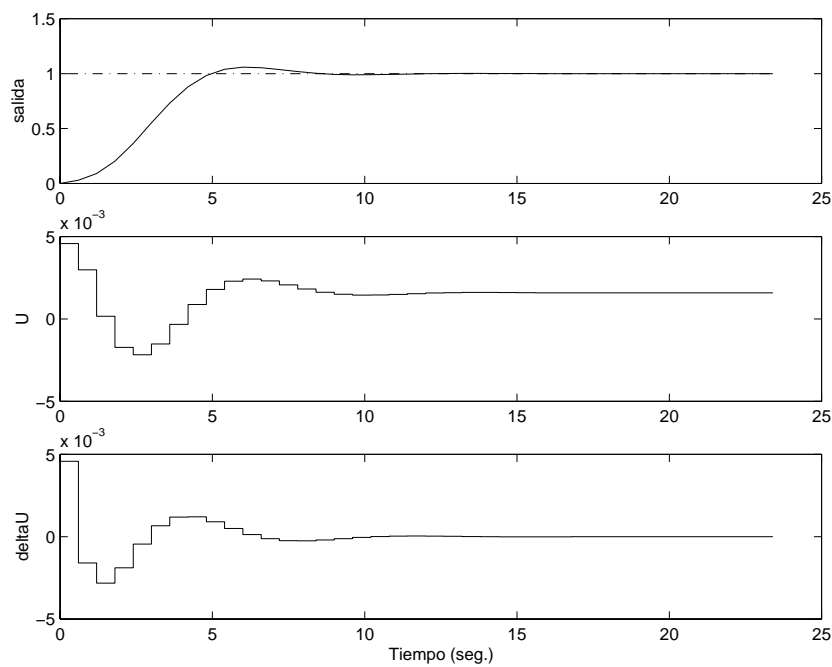


(b) Salida en bucle cerrado con 6 componentes.

Figura 3.14: Se seleccionan aquellas componentes que producen  $\|\Delta u\|_2 \leq 0.25$ .



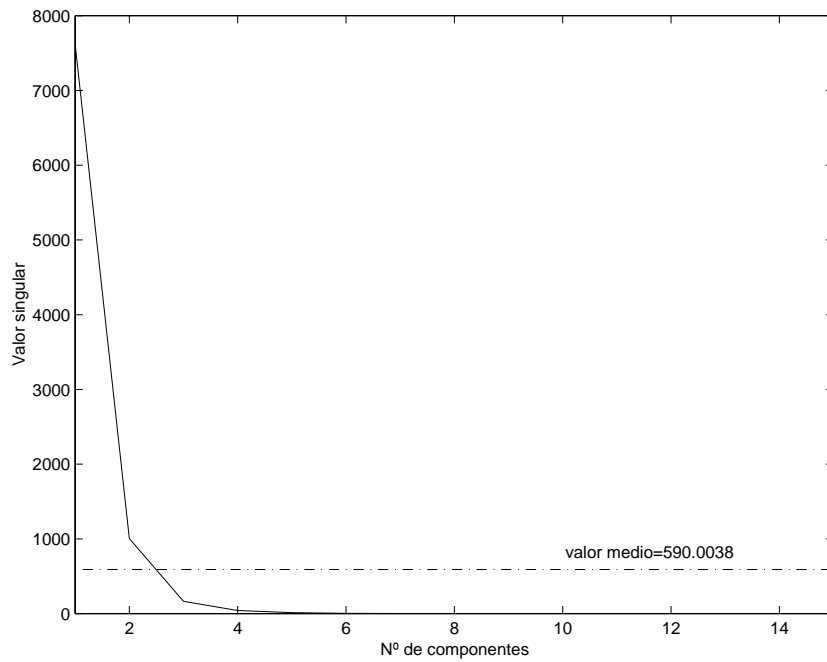
(a) Valor del primer incremento de acciones de control.



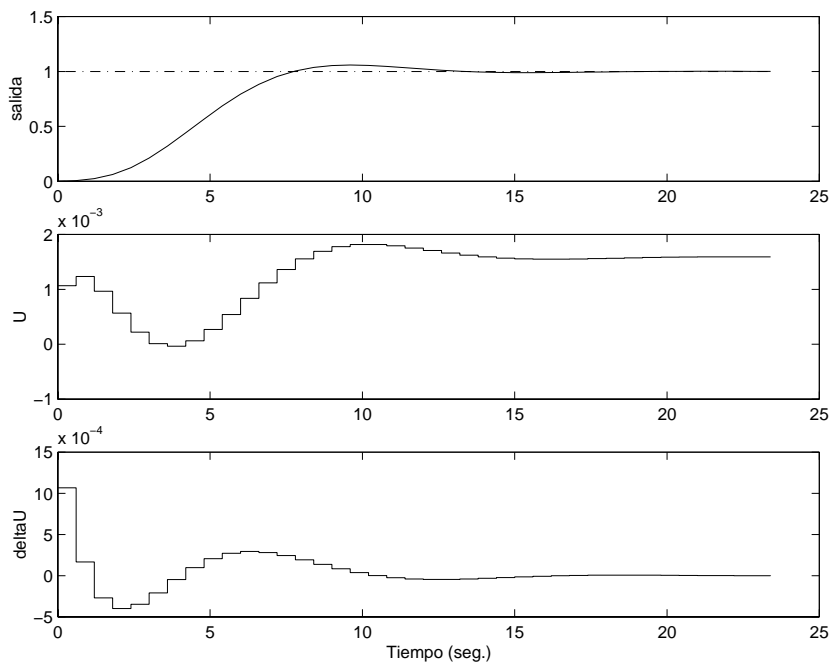
(b) Salida en bucle cerrado con 3 componentes.

Figura 3.15: Se seleccionan aquellas componentes que producen  $|\Delta u_1| \leq 0.0048$



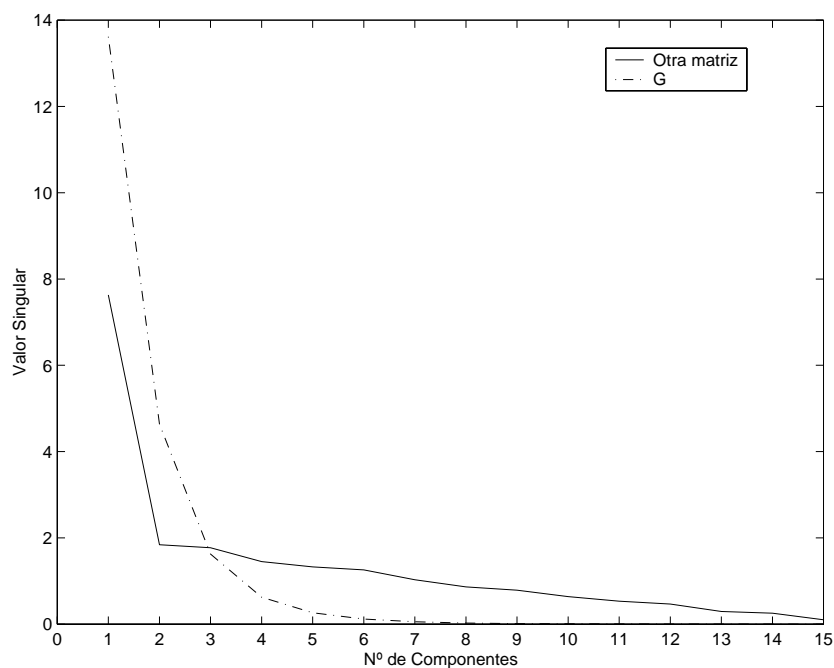


(a) Representación de los valores singulares

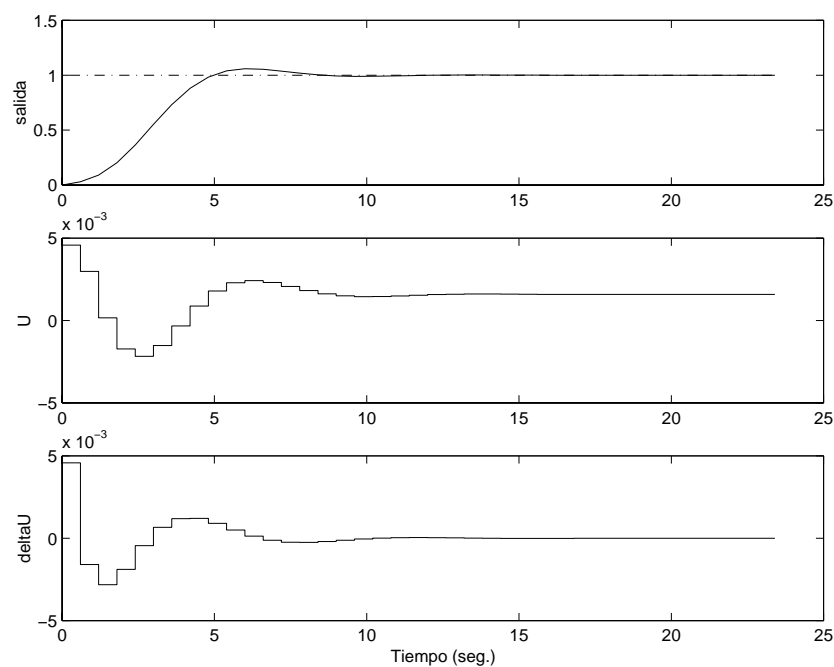


(b) Salida en bucle cerrado con 2 componentes.

Figura 3.16: Se eliminan todos los componentes por debajo del valor singular medio.



(a) Análisis paralelo



(b) Salida en bucle cerrado con 3 componentes.

Figura 3.17: La intersección de las dos curvas determina el número de componentes.

$$\tilde{G}(s) = \frac{11.27(s^2 - 0.575s + 7.245)}{(s + 0.6995)(s^2 - 0.2166s + 0.1853)}$$

Para este nuevo proceso se construye una nueva matriz dinámica  $\tilde{G}$  con los coeficientes de su respuesta en escalón. Calculando el índice  $RR(q)$  para cada componente  $q$ . En la figura 3.18, se representa  $RR(q)$  y se observa como, a partir de la 3ª o 4ª componente, el error relativo va siendo cada vez mayor. Sin embargo, representando  $RR(q)$  pero con la matriz  $G$  del modelo, se observa cómo el error relativo disminuye según se incorporan componentes principales. Esto indica que si se desea que el controlador calcule soluciones poco sensibles a errores de modelado que aproximadamente supongan una variación como la aplicada, no se puede incorporar más de 3 o 4 componentes. La simulación del bucle cerrado incorporando las discrepancias entre modelo y proceso muestra cómo el controlador con 3 componentes es capaz de llevar al proceso a la referencia a pesar de dichas discrepancias. Sin embargo, en la figura 3.19, se puede apreciar cómo el sistema en bucle cerrado es inestable si el modelo es distinto al proceso y se utiliza un elevado número de componentes en el controlador.

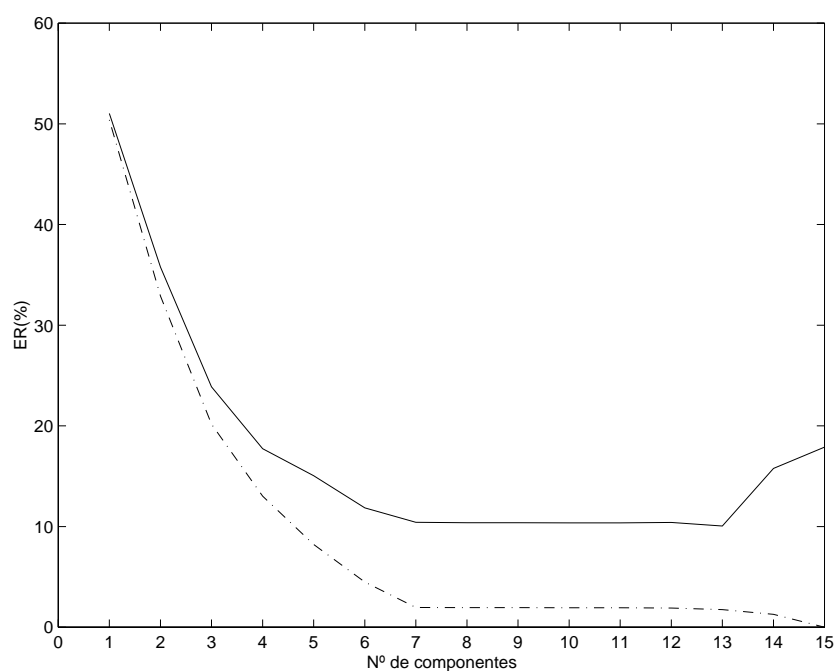
#### 8. Criterio multiobjetivo:

En este caso se plantea el índice multiobjetivo con unos pesos correspondientes a  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 1$  y  $w_3 = 1$ , de tal forma que se otorga la misma importancia a los tres factores (Figura 3.20).

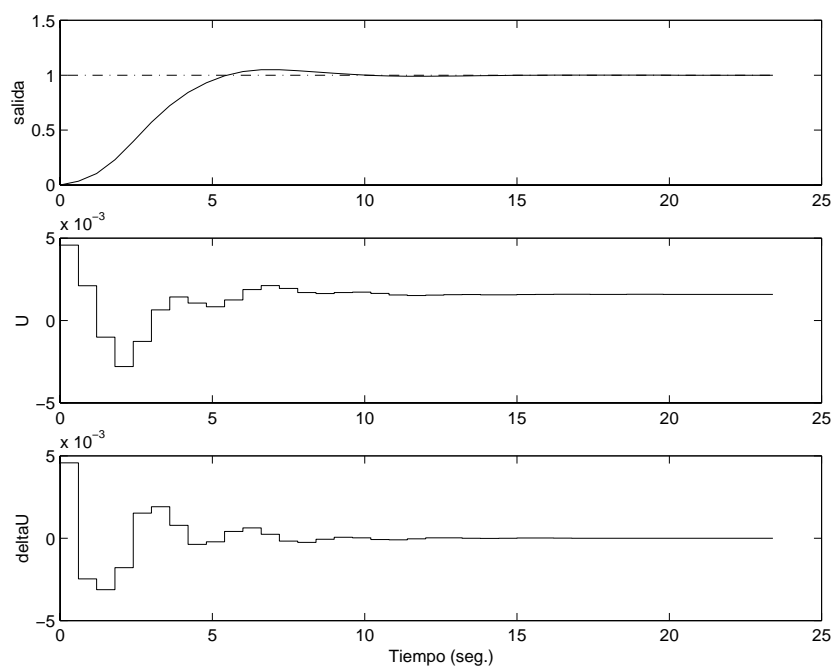
Si se opta por destacar la importancia de la minimización del índice, dejando como factor menos importante la mejora en el condicionamiento del controlador ( $w_3 = 1$ ), se observa en la figura 3.21, como se aumenta el número de componentes, pero no en exceso pues la influencia de la magnitud de la acción de control sigue siendo importante.

## 3.5 Ejemplo MIMO

La matriz de transferencia siguiente, propuesta por Alatiqi en (Luyben, 1990), muestra el modelo  $4 \times 4$  de una columna de destilación con extracción lateral para separar una mezcla en tres productos. Las variables controladas son: las purezas de los tres componentes en sus puntos de extracción ( $X_{D1}$ ,  $X_{S2}$ ,  $X_{B3}$ )



(a) Validación cruzada



(b) Salida en bucle cerrado con 3 componentes.

Figura 3.18: Se utiliza una variación del 15% en los parámetros del modelo.

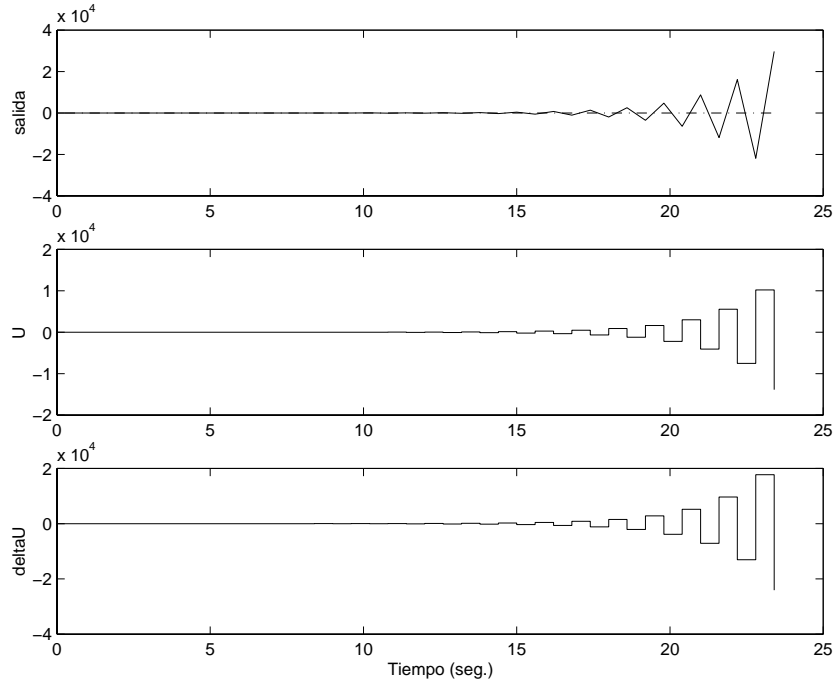


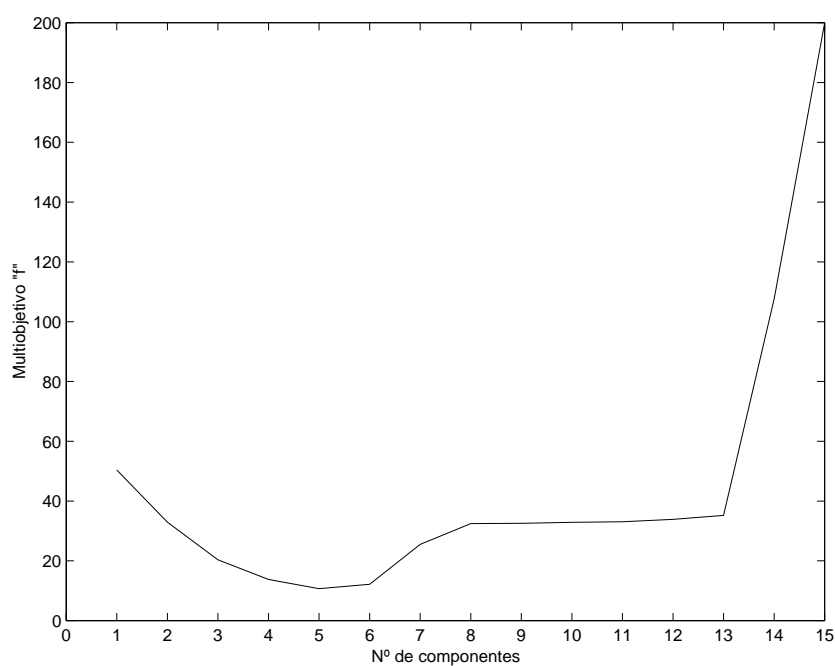
Figura 3.19: Salida en bucle cerrado cuando se usan más componentes y el modelo es distinto al proceso

y una diferencia de temperaturas  $\Delta T$ . Las variables manipuladas son: el reflujo  $R$ , calor aplicado al reboiler del fondo ( $Q_R$ ), calor aplicado al reboiler lateral ( $Q_S$ ) y caudal de alimentación ( $L$ ). Las constantes de tiempo están expresadas en minutos.

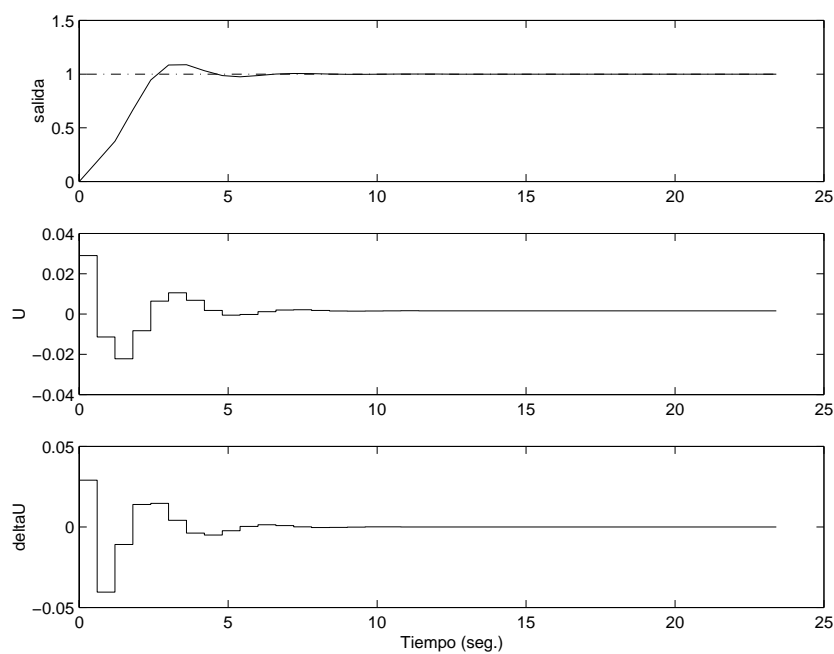
$$\begin{bmatrix} X_{D1}(s) \\ X_{S2}(s) \\ X_{B3}(s) \\ \Delta T \end{bmatrix} = G(s) \begin{bmatrix} R(s) \\ Q_R(s) \\ Q_S(s) \\ L(s) \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

donde  $G(s)$  es igual a

$$\begin{bmatrix} \frac{4.09e^{-1.3s}}{(33s+1)(8.3s+1)} & \frac{-6.36e^{-1.2s}}{(31.6s+1)(20s+1)} & \frac{-0.25e^{-1.4s}}{(21s+1)} & \frac{-0.49e^{-6s}}{(22s+1)^2} \\ \frac{4.17e^{-5s}}{(45s+1)} & \frac{-6.93e^{-1.02s}}{(44.6s+1)} & \frac{-0.05e^{-6s}}{(34.5s+1)^2} & \frac{1.53e^{-3.8s}}{(48s+1)} \\ \frac{1.73e^{-18s}}{(13s+1)^2} & \frac{5.11e^{-12s}}{(13.3s+1)^2} & \frac{4.61e^{-1s}}{(18.05s+1)} & \frac{-5.49e^{-1.5s}}{(15s+1)} \\ \frac{-11.2e^{-2.6s}}{(43s+1)(6.5s+1)} & \frac{14(10s+1)e^{-0.02s}}{(45s+1)(17s^2+3s+1)} & \frac{0.1e^{-0.05s}}{(31.6s+1)(5s+1)} & \frac{4.49e^{-0.6s}}{(48s+1)(6.3s+1)} \end{bmatrix}$$

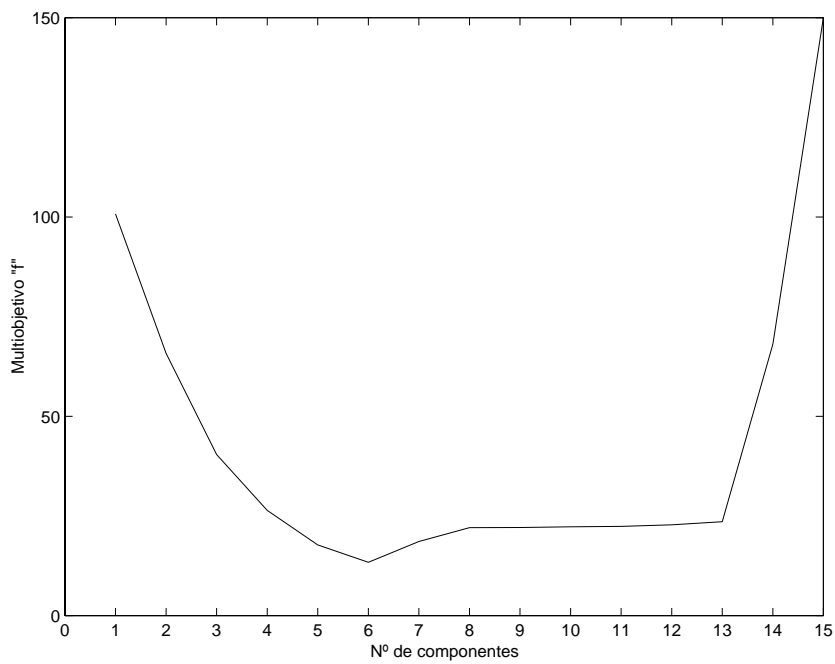


(a) Criterio multiobjetivo

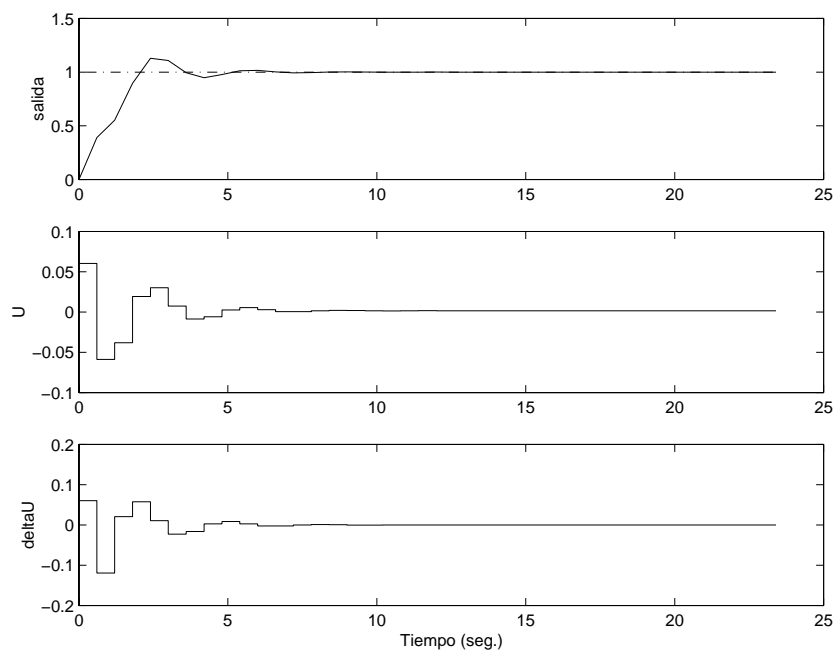


(b) Salida en bucle cerrado con 5 componentes.

Figura 3.20: El mínimo del índice multiobjetivo para  $w_1 = 1$ ,  $w_2 = 1$  y  $w_3 = 1$ , resulta al elegir 5 componentes.



(a) Criterio multiobjetivo



(b) Salida en bucle cerrado con 6 componentes.

Figura 3.21: El mínimo del índice multiobjetivo para  $w_1 = 2$ ,  $w_2 = 1$  y  $w_3 = 0.5$ , resulta al elegir 6 componentes.

El controlador multivariable se calcula para un periodo de muestreo  $T_s = 1$  minuto y los siguientes parámetros de diseño:

	$N_1$	$N_2$	$\alpha_i$	$T(z^{-1})$		$N_u$	$\lambda_j$
$y_1(X_{D1})$	1	150	1	1	$u_1(R)$	50	0
$y_2(X_{S2})$	1	250	2	1	$u_2(Q_R)$	80	0
$y_3(X_{B3})$	1	100	1	1	$u_3(Q_S)$	50	0
$y_4(\Delta T)$	1	250	1	1	$u_4(L)$	80	0

Al igual que en el ejemplo anterior, los distintos controladores se calculan en base al número de componentes, resultado de aplicar los distintos criterios de selección. En el caso multivariable, el estudio de las componentes se puede realizar suponiendo un cambio en la referencia de forma independiente en cada una de las salidas, como se realizó en el ejemplo del apartado 3.5, o bien tratando en conjunto la combinación de referencias deseadas en cada momento y trabajar con las componentes que resultan de dicha combinación. El ejemplo que se muestra a continuación ha sido realizado con esta última opción.

1. **Porcentaje de índice minimizado:** (Figuras 3.22 y 3.23) En la figura tan solo se muestran las 100 primeras componentes de un total de 260 (suma de todos los horizontes de control). La selección se realiza eligiendo aquellas componentes que consiguen un 98% de minimización del índice. En la figura se puede apreciar que esto se consigue utilizando 82 componentes de las 260 disponibles.
2. **Porcentaje de residuo:** (Figuras 3.24 y 3.25) La figura muestra 150 de las 260 componentes. Se observa que, a partir de aproximadamente 50 componentes, la calidad de la solución no mejora. Por lo tanto parece lógico utilizar tan solo 50 componentes.
3. **Cota superior de la 2-norma del vector de acciones de control:** (Figuras 3.26 y 3.27) La idea de buscar aquellas componentes que produzcan una magnitud del vector de incrementos de acciones de control menor que una cierta cantidad puede relacionarse con las restricciones asociadas a dicha señal. El tratamiento en el caso multivariable puede hacerse calculando la norma euclídea del vector completo (conteniendo las distintas entradas) o por el contrario calculando las normas de los subvectores correspondientes a cada una de las entradas por separado.



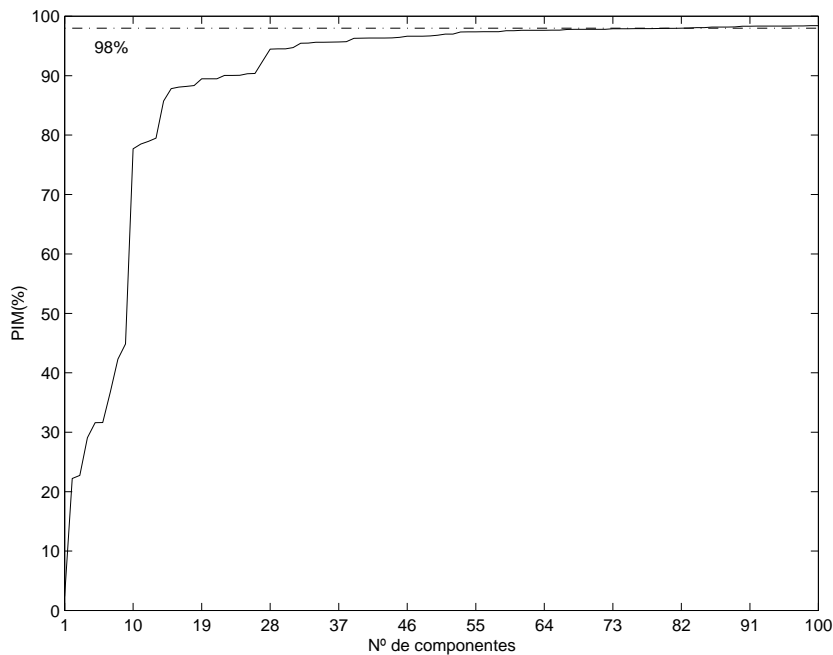


Figura 3.22: Se selecciona el mayor número de componentes que produce un PIM  $\leq 98\%$

En este último caso se elegiría el número de componentes que cumple la condición para cada uno de los subvectores.

El ejemplo muestra la selección de 175 componentes de las 260 disponibles cumpliendo  $\|\Delta u\|_2 \leq 10$  usando la norma de todas las entradas.

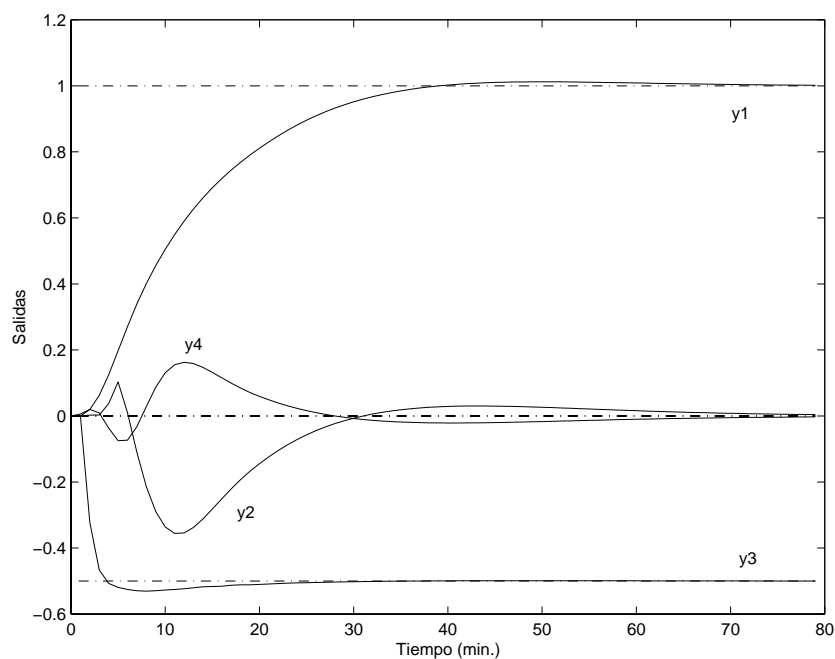
#### 4. Cota superior del primer cambio de la acción de control: (Figura 3.28)

En este caso también se han usado los valores en régimen permanente que llevan el proceso a la referencia, para seleccionar el valor de corte:

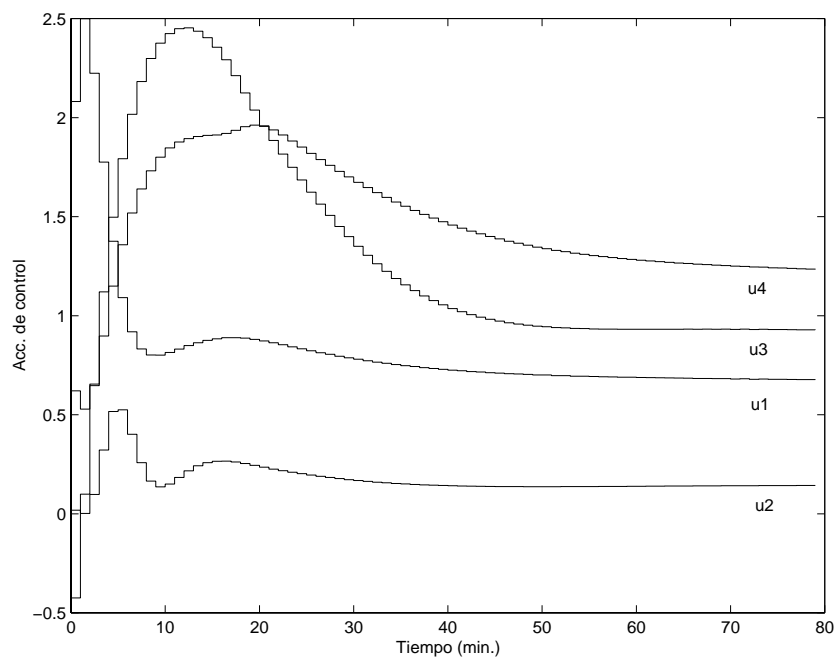
$$\Delta u_{ss} \times 5 = \begin{bmatrix} 3.35 \\ 0.73 \\ 4.59 \\ 6.08 \end{bmatrix}$$

El valor de corte se elige de tal forma que todas las entradas cumplan el requisito:

$$\delta = \max(\Delta u_{ss} \times 5) = 6.08$$



(a) Salida en bucle cerrado con 82 componentes.



(b) Acciones de control con 82 componentes.

Figura 3.23: Control con el PC-GPC que produce un PIM  $\leq 98\%$

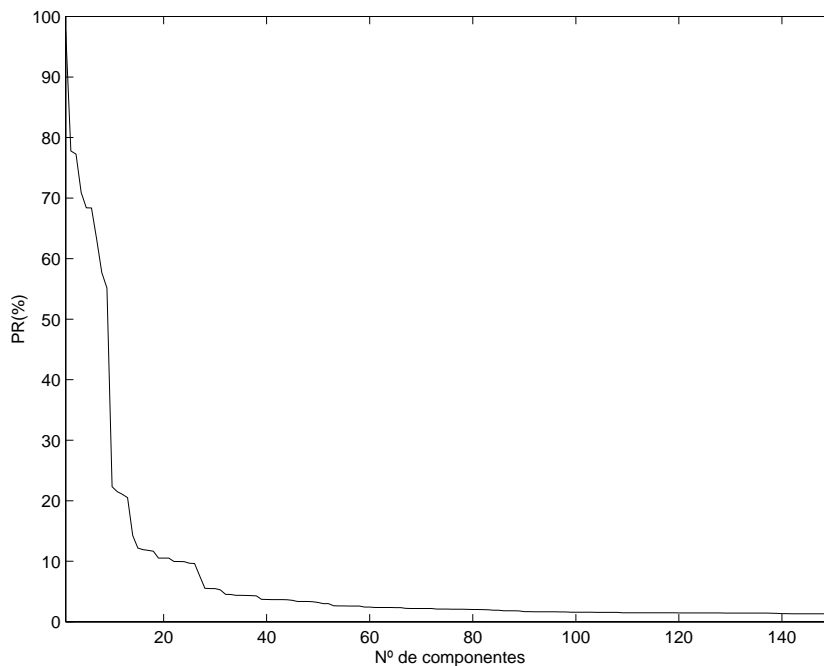
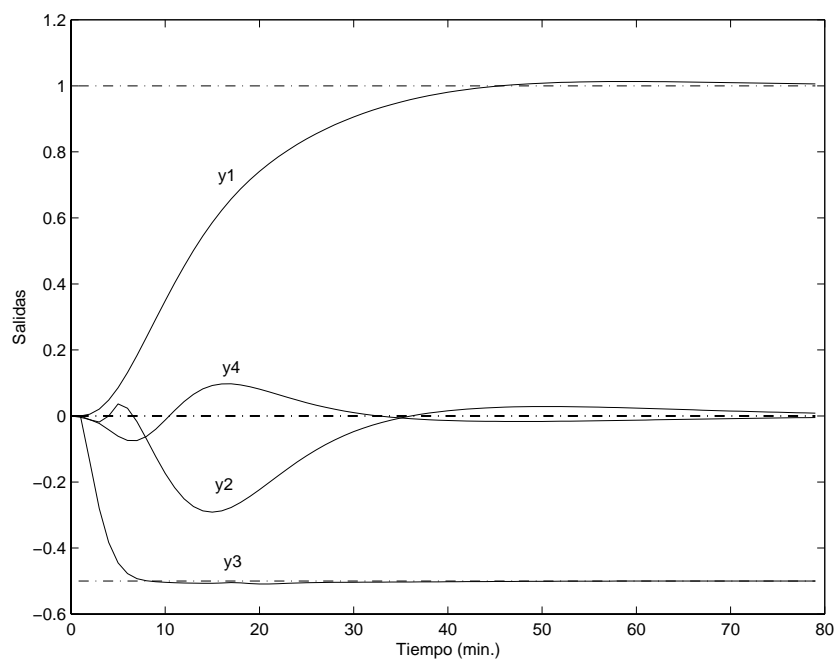


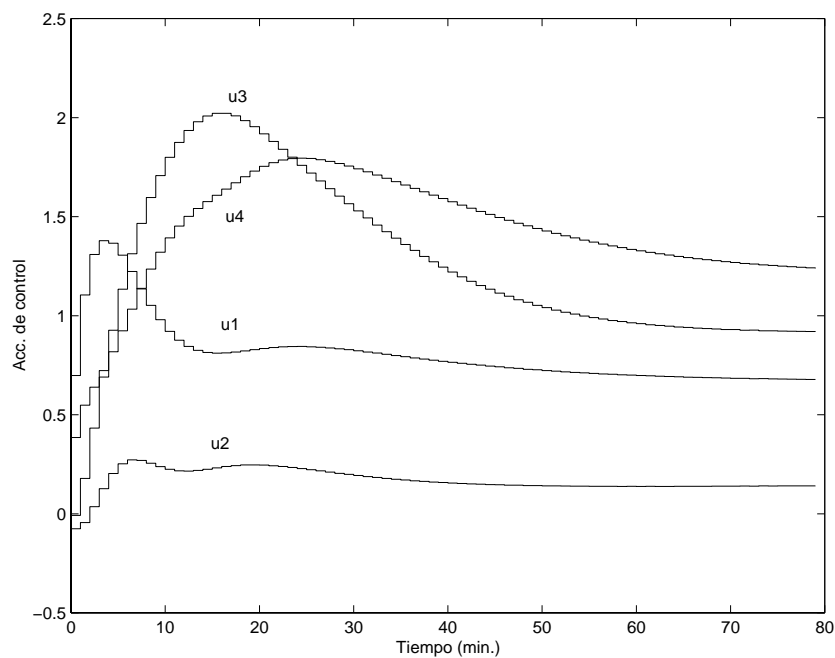
Figura 3.24: Porcentaje de residuo. La selección se realiza cuando no se aprecia disminución en PR.

En la figura están representadas las primeras acciones de control para las cuatro variables manipuladas según se incorporan nuevas componentes a la solución. Se aprecia entonces cómo con 180 componentes se cumple que todos los incrementos de todas las variables manipuladas permanecen por debajo del valor de corte seleccionado (6.08).

5. **Valor singular medio:** (Figuras 3.29 y 3.30) La representación de los valores singulares nos proporciona una idea de la importancia que cada uno de ellos tiene en la minimización del índice. Según el criterio del valor medio se seleccionan aquellas componentes correspondientes a los valores singulares que se encuentran por encima de su valor medio. En este caso tan solo los 16 primeros valores singulares cumplen este requisito. Como se puede observar el hecho de incluir tan pocas componentes en el controlador produce unas acciones de control muy suaves.
6. **Análisis paralelo:** (Figuras 3.31 y 3.32) Tras escalar la matriz dinámica  $G$  con media nula y varianza unidad, la comparación de sus valores singulares con los de otra matriz de valores aleatorios y totalmente independientes produce tan solo la selección de 5 componentes. Esto se traduce



(a) Salida en bucle cerrado con 50 componentes.



(b) Acciones de control con 50 componentes.

Figura 3.25: Control con el PC-GPC que incluye 50 componentes

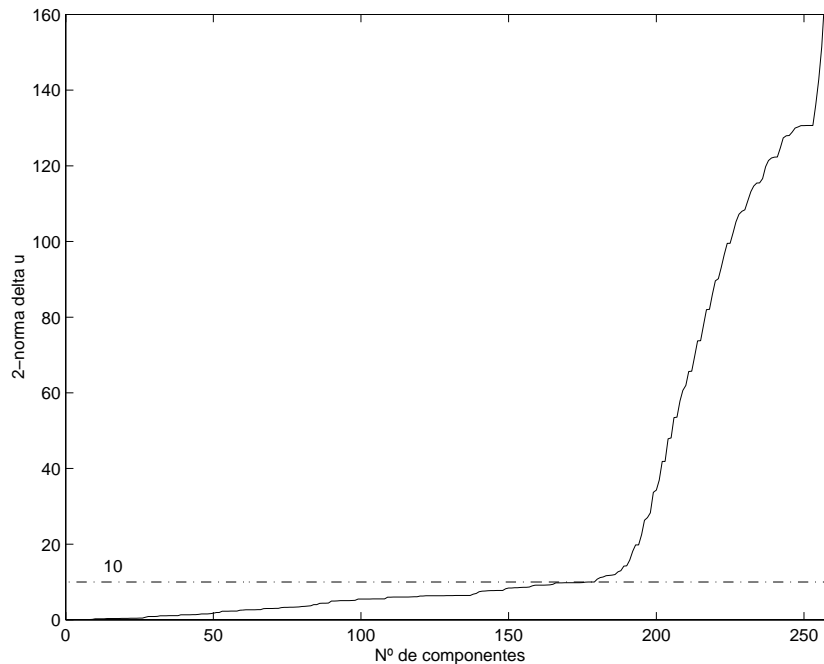


Figura 3.26: Norma euclídea de los incrementos futuros de las acc. de control.

en un controlador muy conservador.

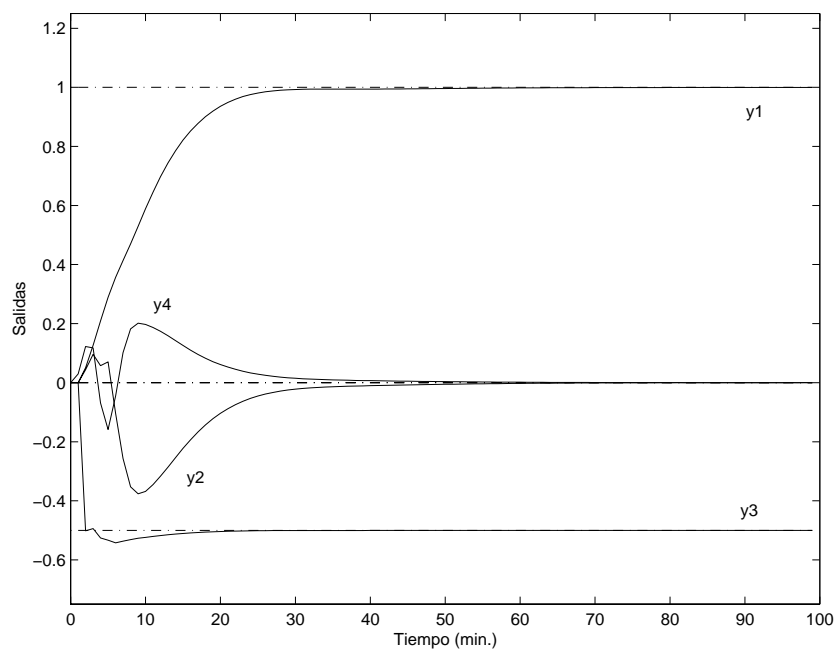
#### 7. Criterio multiobjetivo: (Figuras 3.33 y 3.34)

En las figuras se puede observar cómo, para el caso en el que los tres criterios gozan de la misma importancia en el índice, a partir de la componente 60 no existe una clara disminución en el índice. Por lo tanto sería lógico elegir aproximadamente 60 componentes para obtener una solución de compromiso en cuanto a minimización, acción de control y condicionamiento se refiere.

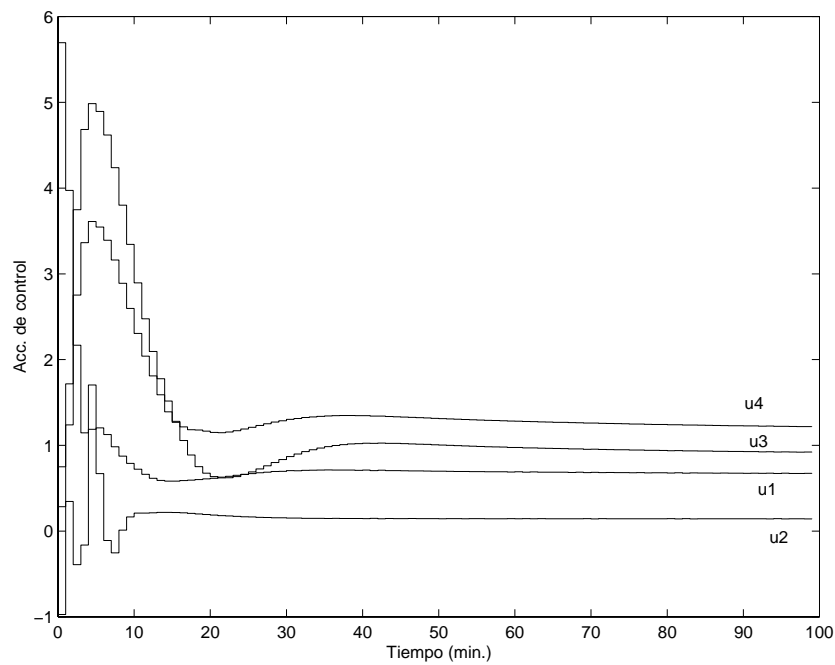
## 3.6 Resumen

En este capítulo se formaliza la propuesta del controlador GPC sin factor de ponderación de la acción de control calculado a través de la SVD: el controlador PC-GPC o *Principal Component Generalized Predictive Control*. El controlador PC-GPC, presenta un nuevo parámetro de diseño: el número de componentes principales que se incluyen en la ley de control o *NPC*.

Los diferentes criterios de selección del parámetro NPC propuestos, son de tipo



(a) Salida en bucle cerrado con 175 componentes.



(b) Acciones de control con 175 componentes.

Figura 3.27: Control con el PC-GPC que produce  $\|\Delta u\|_2 \leq 10$ .

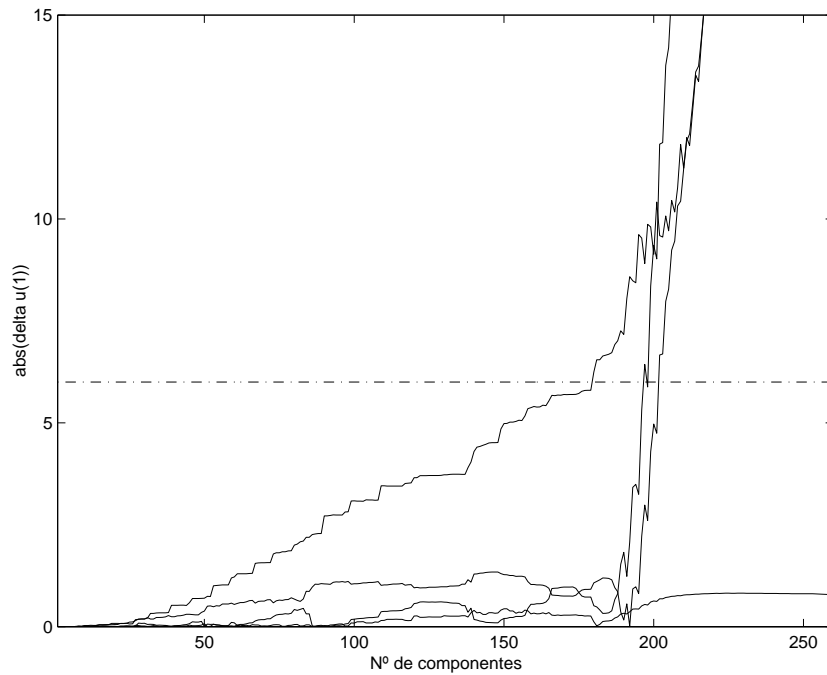


Figura 3.28: Selección de componentes que generan la primera acción de control menor que  $5 \times \Delta u_{ss}$

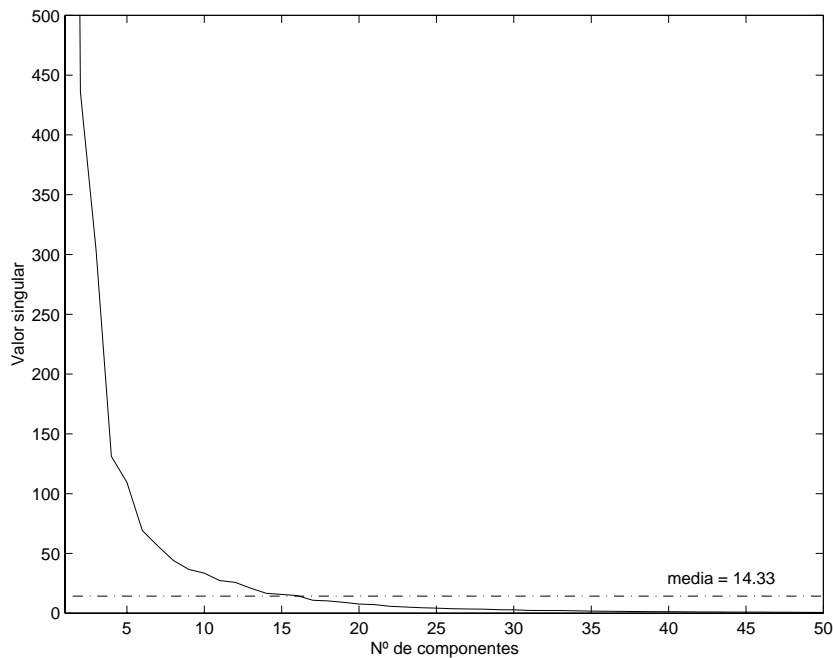
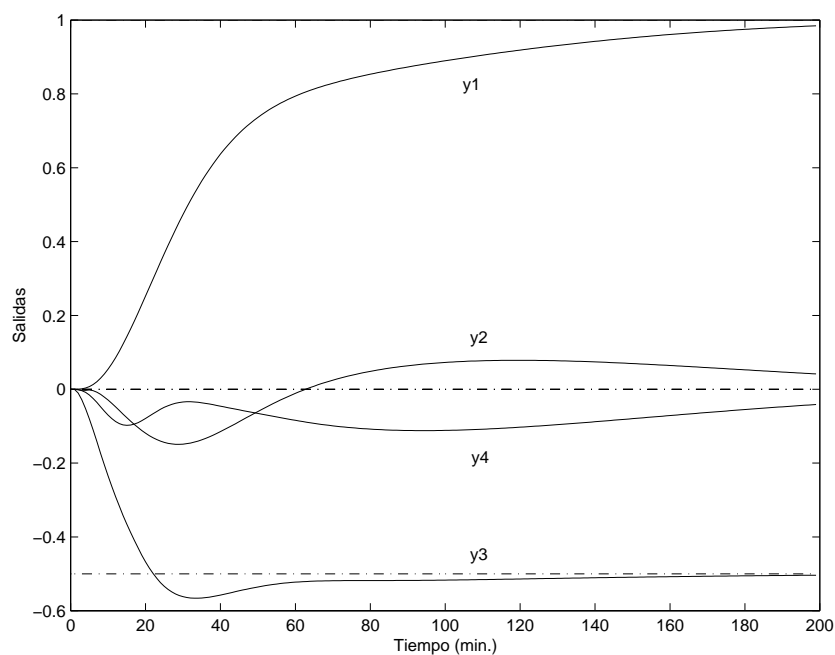
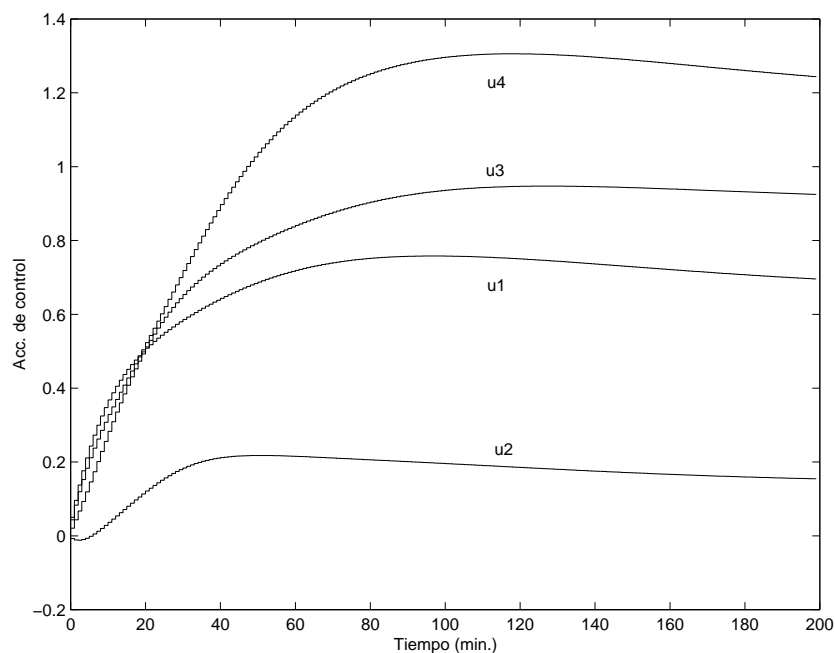


Figura 3.29: Valores singulares. Se incluyen los componentes asociados a valores singulares por encima de su valor medio.



(a) Salida en bucle cerrado con 16 componentes.



(b) Acciones de control con 16 componentes.

Figura 3.30: Control con el PC-GPC para el criterio del valor singular medio.



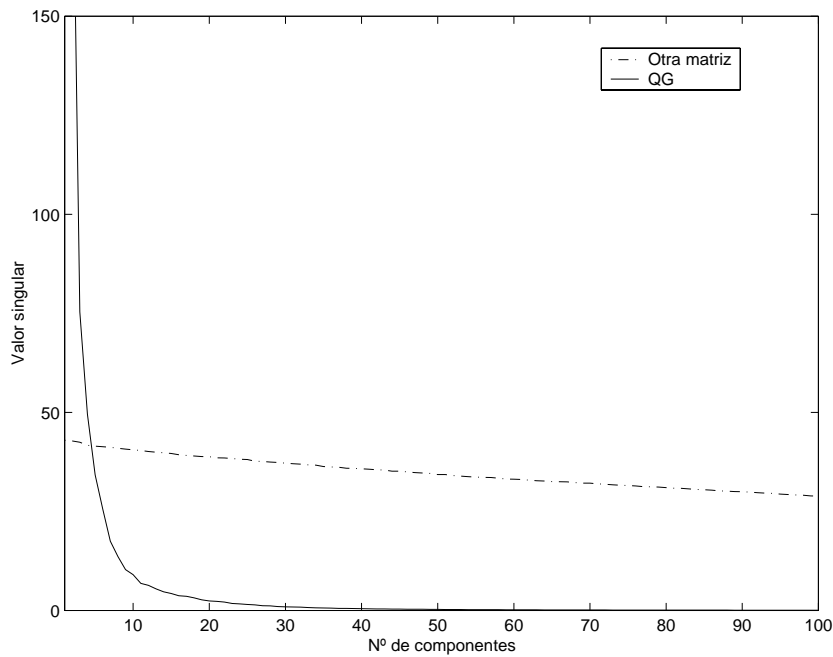
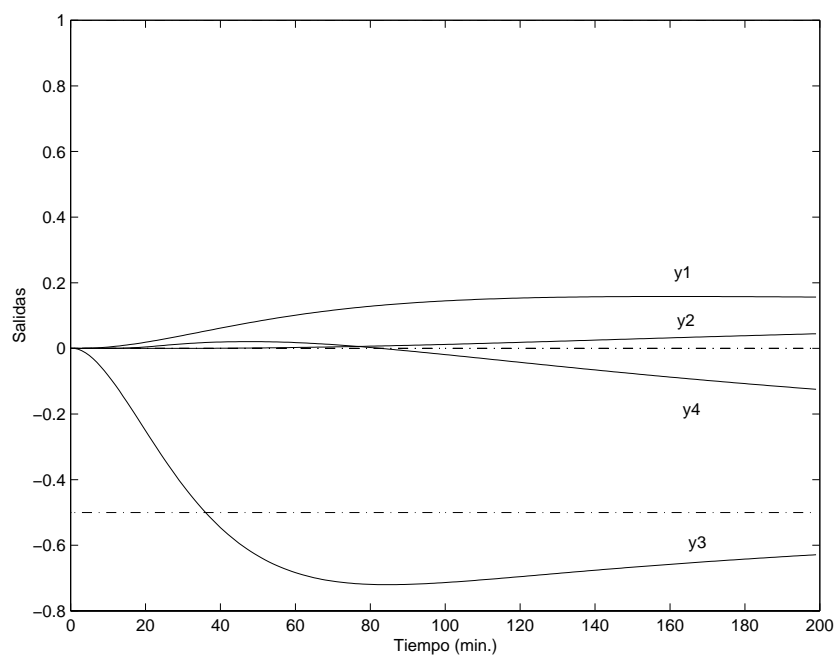


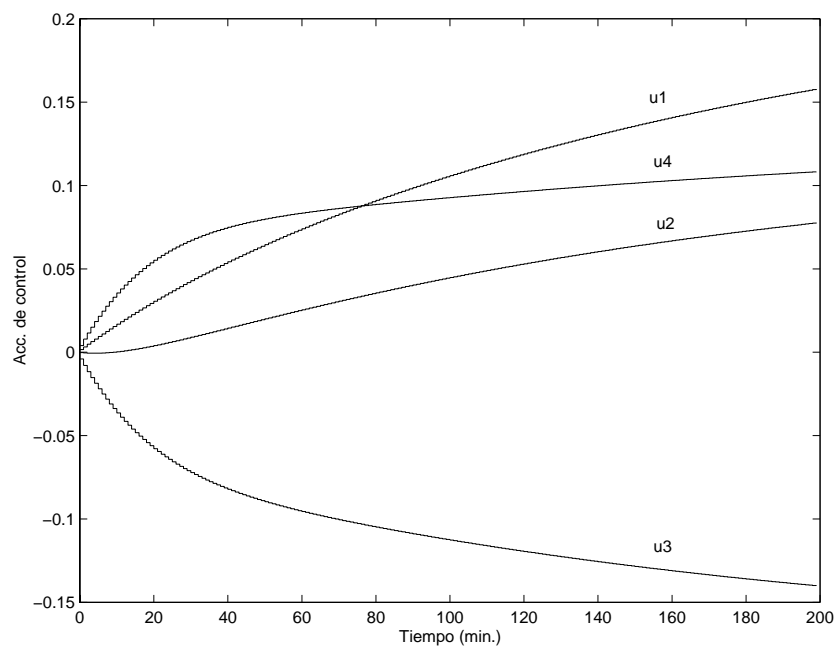
Figura 3.31: Valores singulares para las dos matrices. El análisis paralelo produce la inclusión de muy pocas componentes.

numérico y están basados en el valor que alcanza el índice de coste, el esfuerzo de control, o el condicionamiento del controlador entre otros. Así, dichos criterios de selección de componentes principales representan una alternativa a la elección por prueba y error del parámetro  $\lambda$  en el GPC estándar.

En el capítulo también se extienden los resultados al caso multivariable, puesto que las expresiones matriciales de partida son las mismas que para el caso monovariable.



(a) Salida en bucle cerrado con 5 componentes.



(b) Acciones de control con 5 componentes.

Figura 3.32: Control con el PC-GPC diseñado con 5 componentes.

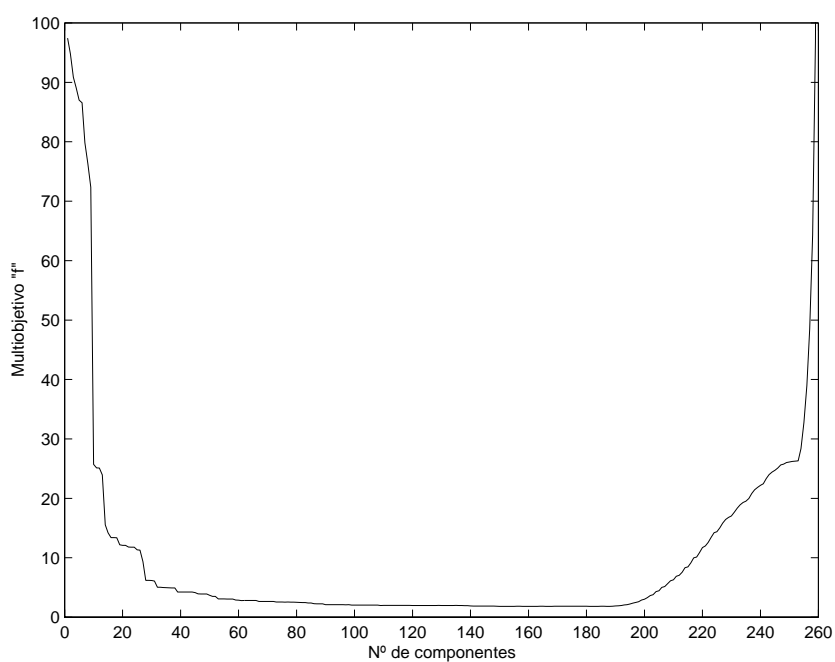
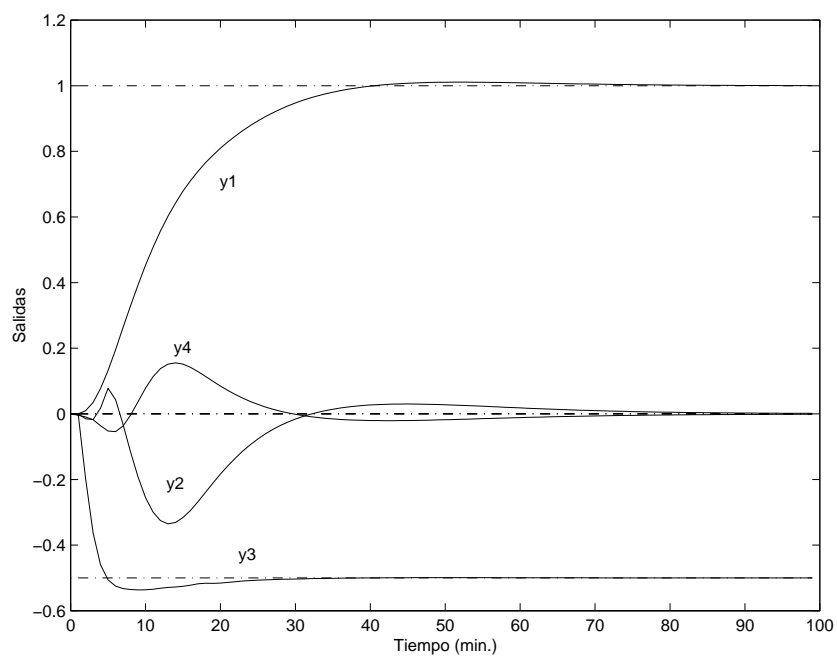
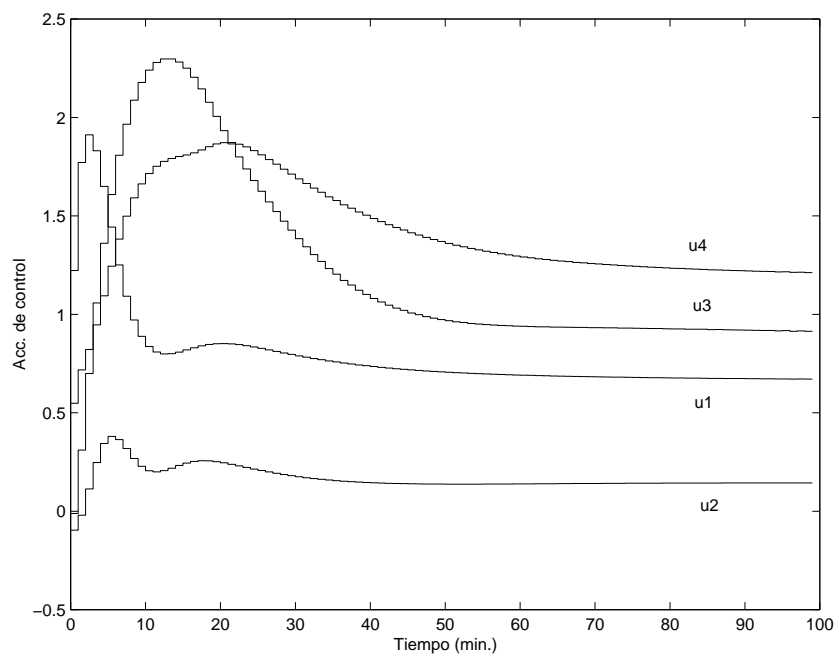


Figura 3.33: Índice multicriterio para  $w_1 = w_2 = w_3 = 1$ . A partir de la componente 60 no se observa mejoría el índice multiobjetivo.



(a) Salida en bucle cerrado con 60 componentes.



(b) Acciones de control con 60 componentes.

Figura 3.34: Control con el PC-GPC diseñado con el criterio multiobjetivo.



# Capítulo 4

## PC-GPC con restricciones

Si hay algo que ha hecho del control predictivo una de las técnicas más utilizadas actualmente en la industria ha sido su capacidad para manejar restricciones ya que tradicionalmente las especificaciones para un sistema de control no reflejaban esta situación. En la práctica, la mayoría de los procesos están sujetos a restricciones: los actuadores poseen un rango de acción limitado y presentan no linealidades como saturaciones, zonas-muertas, etc. Otras variables del proceso pueden estar también limitadas por diferentes motivos (de seguridad, económicos, medio ambientales, de calidad, etc.). Ello implica la necesidad de tener en cuenta en el diseño todos estos aspectos si no se quiere obtener una degradación en las prestaciones de la dinámica del bucle cerrado, causando incluso problemas de estabilidad ya que no basta con recortar a sus límites permitidos una variable manipulada que se ha salido de rango (Chow and Clarke, 1994), o utilizar un anti-reset windup (Goodwin *et al.*, 2001).

En el MPC, debido a su carácter predictivo y su formulación en el dominio del tiempo, es fácil incorporar todas estas cuestiones para tratar de forma natural las restricciones. El objetivo de control puede convertirse entonces en intentar que la salida del proceso permanezca lo más cerca posible de la referencia mientras que unas ciertas variables auxiliares permanecen dentro de unos rangos permitidos (figura 4.1). De alguna forma, esto permitirá que las prestaciones obtenidas por el controlador sean óptimas en el punto de funcionamiento, consiguiendo así una operación segura de la planta cuando estas variables auxiliares rozan los límites establecidos.

Las restricciones pueden clasificarse en dos grandes grupos (Scokaert, 1994):

- *restricciones blandas (soft constraints)*: son aquellas que pueden ser vio-

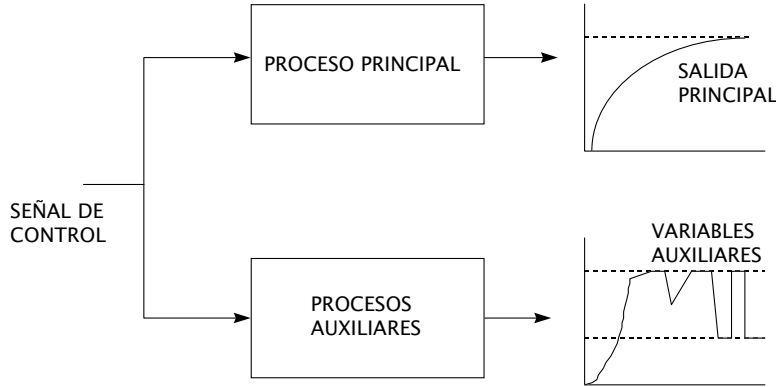


Figura 4.1: Ventaja del uso de restricciones en el CPBM.

ladas, aunque este hecho sea penalizado. Se obtiene así una acción de control que es un compromiso entre los objetivos de control y la no violación de las restricciones.

- *restricciones duras (hard constraints)*: son aquellas que fuerzan la acción de control de forma tal que las satisfaga a cualquier coste.

El tratamiento de las restricciones que se va a realizar en este apartado es el de restricciones duras y éstas suelen imponerse a las entradas o a las salidas del proceso y expresan los límites máximos y mínimos permitidos para estas señales:

$$\begin{aligned}
 \Delta u_{min} &\leq u(k) - u(k-1) \leq \Delta u_{max} \\
 u_{min} &\leq u(k) \leq u_{max} \\
 y_{min} &\leq y(k) \leq y_{max}
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

aunque también se puede imponer restricciones sobre la sobreoscilación de la salida y su incremento, comportamiento de fase no mínima, o incluso sobre los estados del proceso.

Cuando se resuelve un problema de control predictivo con restricciones, no es posible encontrar una solución analítica, por lo que han de ser usados, gene-

ralmente métodos de programación cuadrática QP (si el coste es cuadrático y las restricciones lineales), resultando en una ley de control no lineal. El precio que hay que pagar por ello es una mayor carga computacional, siendo éste un problema cada vez menor debido a la gran potencia de cálculo que proporcionan actualmente los procesadores.

## 4.1 Formulación con restricciones

La forma usual de comenzar a resolver el problema del control predictivo con restricciones <sup>1</sup> consiste en expresar éstas en función de los incrementos de las acciones de control. Para ello se realiza un tratamiento de las restricciones expresadas en 4.2 para llegar a una expresión matricial del tipo (Camacho and Bordóns, 1995)

$$C\Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{h} \quad (4.2)$$

$$C = \begin{bmatrix} I_{N_u \times N_u} \\ -I_{N_u \times N_u} \\ D_{N_u \times N_u} \\ -D_{N_u \times N_u} \\ G \\ -G \end{bmatrix}; \quad \mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{l}\Delta u_{max} \\ -\mathbf{l}\Delta u_{min} \\ \mathbf{l}u_{max} - \mathbf{l}u(k-1) \\ -\mathbf{l}u_{min} - \mathbf{l}u(k-1) \\ \mathbf{t}y_{max} - \mathbf{f} \\ -\mathbf{t}y_{min} + \mathbf{f} \end{bmatrix} \quad (4.3)$$

donde,

- $D$  es una matriz triangular inferior con sus elementos igual a 1;
- $\mathbf{l}$  es un vector columna de  $N_u \times 1$  con todos sus elementos igual a 1
- $\mathbf{t}$  es un vector columna de  $N \times 1$  con todos sus elementos igual a 1

El problema de control predictivo se expresa entonces como

<sup>1</sup>En este apartado tan solo se van a considerar restricciones en la salida  $\mathbf{y}$ , la señal de control  $\mathbf{u}$  y su incremento  $\Delta\mathbf{u}$ .



$$\min_{\Delta \mathbf{u}} J = (G\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^T \alpha (G\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) + \Delta \mathbf{u}^T \lambda \Delta \mathbf{u} \quad (4.4)$$

sujeto a:  $C\Delta \mathbf{u} \leq \mathbf{h}$

A diferencia del caso sin restricciones, no es posible obtener una expresión analítica para las acciones de control. Ahora, hay que resolver un problema de optimización cada periodo de muestreo. Esto exige que el método de optimización sea lo suficientemente rápido para permitir una implementación en línea del controlador.

La mayoría de técnicas específicas orientadas a la optimización de índices cuadráticos, necesitan expresar el índice 4.4 en una forma estándar

$$J = \frac{1}{2} \Delta \mathbf{u}^T \Theta \Delta \mathbf{u} + \mathbf{c}^T \Delta \mathbf{u} \quad (4.5)$$

Desarrollando el índice 4.4, reordenando términos y eliminando aquellos que no dependen de  $\Delta \mathbf{u}$  se obtiene

$$J = \Delta \mathbf{u}^T \{G^T \alpha G + \lambda\} \Delta \mathbf{u} + 2(\mathbf{f} - \mathbf{w})^T \alpha G \Delta \mathbf{u} \quad (4.6)$$

Y finalmente dividiendo por 2 se obtiene la equivalencia entre los índices 4.4 y 4.5

$$\Theta = (G^T \alpha G + \lambda) \quad (4.7)$$

$$\mathbf{c} = G^T \alpha (\mathbf{f} - \mathbf{w}) \quad (4.8)$$

Para el caso del controlador PC-GPC, también se puede expresar el problema de la misma forma

$$J = \frac{1}{2} \mathbf{p}^T \Theta \mathbf{p} + \mathbf{c}^T \mathbf{p} \quad (4.9)$$

donde la equivalencia para la matriz  $Q$  y el vector  $\mathbf{c}$  vendrá dada por

$$\Theta = \Sigma^T \Sigma \quad (4.10)$$

$$\mathbf{c} = -\Sigma^T \mathbf{g}_1 \quad (4.11)$$

siendo

$$\Sigma = \text{diag}(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_{NPC}, 0_{NPC+1}, \dots, 0_{N_u}) \quad (4.12)$$

y  $NPC$  es el número de componentes seleccionado.

Para adaptar las restricciones al plano de las componentes tan sólo hace falta aplicar la transformación definida por la matriz  $V$  para obtener dichas restricciones definidas en el plano de las componentes

$$C\Delta\mathbf{u} \leq \mathbf{h} \quad \rightarrow \quad CV\mathbf{p} \leq \mathbf{h} \quad (4.13)$$

La ventaja en el caso del PC-GPC, respecto al GPC estándar es que a menor número de componentes seleccionado, menor número de variables a optimizar por la rutina de programación cuadrática, lo que redundará en un menor coste computacional a la hora de obtener el óptimo. Esto reduce por tanto el tiempo de ejecución, permitiendo una mejor aplicación en línea del controlador con restricciones.

## 4.2 Ejemplos

Para comprobar que efectivamente se obtiene una reducción en la complejidad del problema a resolver, se realizará la comparación de un GPC estándar con un factor  $\lambda$  determinado y un PC-GPC con un número  $NPC$  de componentes. El diseño de estos controladores se realiza sin restricciones y sus respectivos parámetros,  $\lambda$  y  $NPC$ , se eligen de tal forma que, ambos controladores alcancen unas prestaciones de bucle cerrado similares. A continuación se incorporarán las restricciones al problema de control y se medirá el número de operaciones en coma flotante que realiza cada controlador para calcular las acciones de control haciendo uso de una rutina de programación cuadrática.

### 4.2.1 Ejemplo SISO: Control de un doble integrador

El sistema propuesto en (Chow and Clarke, 1994), es un doble integrador

$$G(s) = \frac{1}{s^2} \quad (4.14)$$

muestreado a 0.1 segundos, con las restricciones siguientes

$$\begin{array}{c|c|c}
 & \textit{Min.} & \textit{Max.} \\
 \hline
 \Delta u(k) & -0.5 & 0.5 \\
 u(k) & -1.4 & 1.4 \\
 y(k) & -1.1 & 1.1
 \end{array} \quad (4.15)$$

y con los siguientes parámetros de diseño para ambos controladores

$$\begin{array}{c|c|c|c|c}
 N_1 & N_2 & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i \\
 \hline
 1 & 10 & 5 & 1 & 1
 \end{array} \quad (4.16)$$

Para el caso sin restricciones se simula un GPC con un factor de ponderación constante  $\lambda = 0.005$  y un PC-GPC con 2 componentes. En la figura 4.2 puede apreciarse como, en ausencia de restricciones, los dos controladores, obtenidos de forma analítica, alcanzan unas prestaciones parecidas.

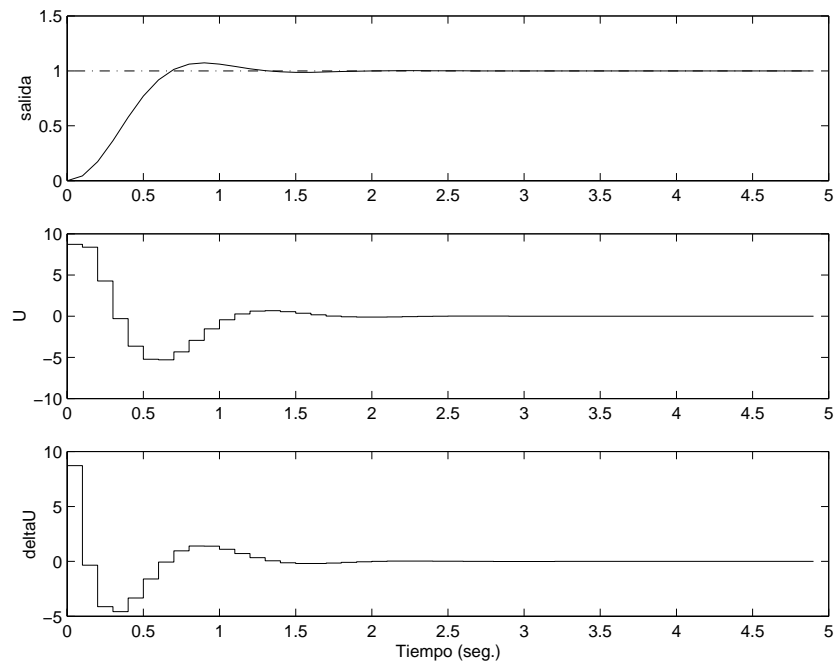
Si se incorporan las restricciones 4.15, y haciendo uso en cada caso de una rutina de programación cuadrática, se puede apreciar en la figura 4.3 como, en ambos casos, éstas se cumplen y se alcanzan también prestaciones parecidas para la variable controlada. Sin embargo, si se mide el número de operaciones en coma flotante<sup>2</sup> que utiliza cada controlador para calcular la acción de control, el PC-GPC obtiene una notable reducción (52.7%) en el número de operaciones:

flops GPC	flops PC-GPC	% Reducción
12039	5687	52.76

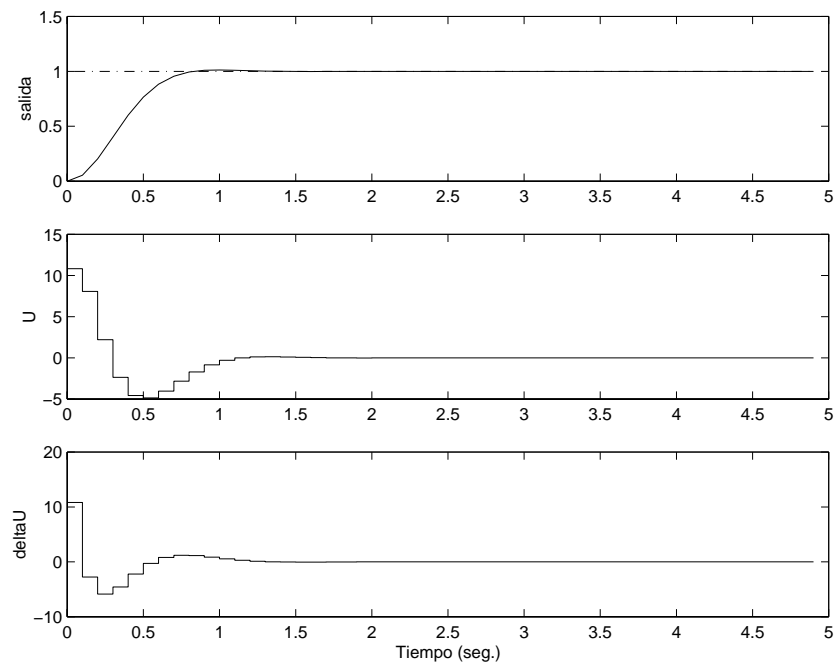
### 4.2.2 Ejemplo MIMO: Control de un fraccionador de petróleo

Se trata de un proceso de fraccionamiento por destilación de crudo, cuya característica más destacada son los diferentes retardos para las salidas. El modelo elegido aparece como *benchmark* en algunas publicaciones (Prett and Morari, 1987), (Aoyama *et al.*, 1997) y es conocido como *Shell Process Control Problem*, ampliamente usado para probar diferentes estrategias de control.

<sup>2</sup>Esta medida se realizó utilizando el comando `flops` de MATLAB, obteniendo la media aritmética para todos los instantes de simulación

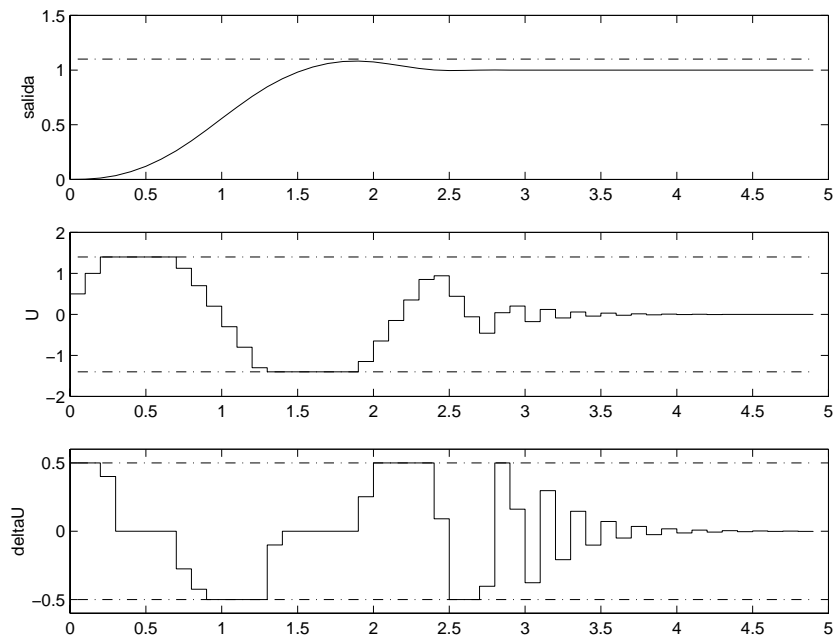


(a) Salida en bucle cerrado y acción de control con  $\lambda = 0.005$ .

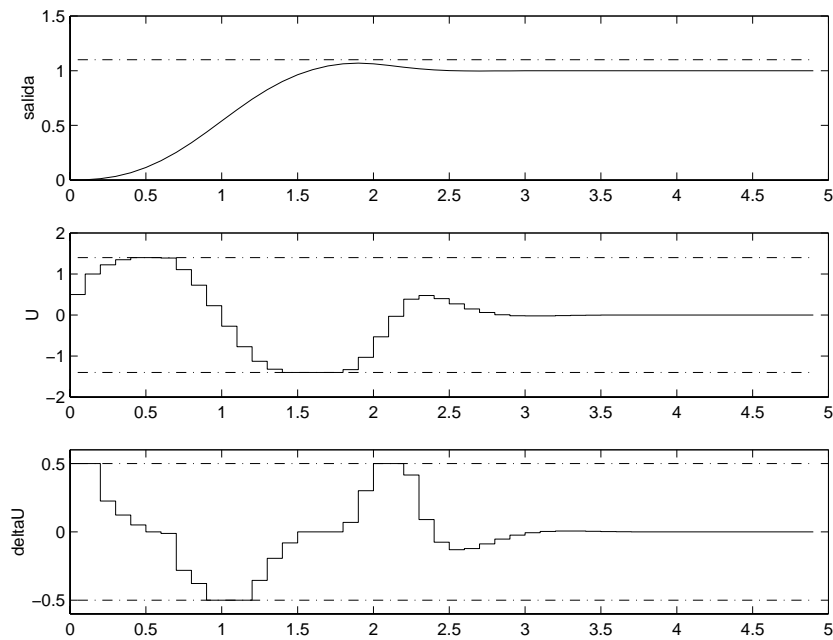


(b) Salida en bucle cerrado y acción de control con 2 componentes.

Figura 4.2: El GPC y el PC-GPC ofrecen unas prestaciones similares cuando no existen restricciones.



(a) Salida en bucle cerrado y acción de control con  $\lambda = 0.005$ .



(b) Salida en bucle cerrado y acción de control con 2 componentes.

Figura 4.3: GPC con QP y PC-GPC con QP cuando existen restricciones.

El proceso tiene tres variables controladas: la composición de los productos de la parte superior y lateral de la columna ( $y_1$  e  $y_2$ ), y la temperatura de la parte inferior ( $y_3$ ). Las variables de control en este caso son las extracciones de destilado superior y lateral ( $u_1$  y  $u_2$ ), y el reflujo de fondo ( $u_3$ ).

La dinámica del proceso puede ser descrita por la matriz de transferencia siguiente:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4.05e^{-27s}}{1+50s} & \frac{1.77e^{-28s}}{1+60s} & \frac{2.88e^{-27s}}{1+50s} \\ \frac{5.39e^{-18s}}{1+50s} & \frac{5.72e^{-14s}}{1+60s} & \frac{6.90e^{-15s}}{1+40s} \\ \frac{4.38e^{-20s}}{1+33s} & \frac{4.42e^{-22s}}{1+44s} & \frac{7.20}{1+19s} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}$$

donde todos los tiempos están expresados en minutos. Se diseña un GPC multi-variable para un periodo de muestreo de 4 minutos y los siguientes parámetros:

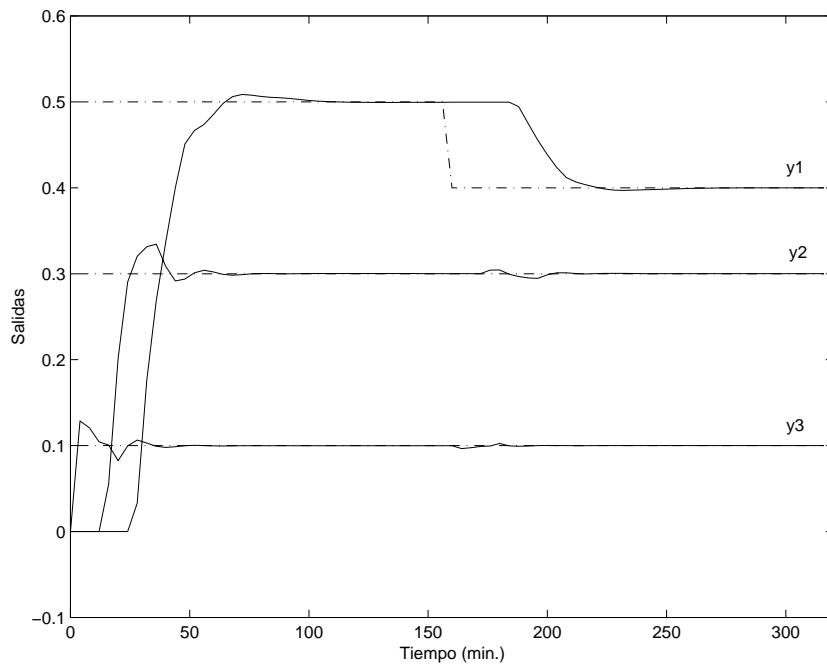
	$N_1$	$N_2$	$\alpha_i$	$T(z^{-1})$		$N_u$	$\lambda_j$
$y_1$	1	30	1	1	$u_1$	15	1
$y_2$	1	30	5	1	$u_2$	15	1
$y_3$	1	30	10	1	$u_3$	15	1

Las figuras 4.4 y 4.5 muestran respectivamente el control sin restricciones para un GPC estándar con  $\lambda = 1$  y un PC-GPC con 18 componentes. Se observa que, para ambos casos, las prestaciones son similares y cómo las perturbaciones producidas en la composición lateral y en la temperatura inferior debidas al cambio en la referencia de la composición superior, son bastante pequeñas. Esto indica una baja interacción en bucle cerrado entre las referencias y las salidas del proceso, a pesar de no ser así en bucle abierto donde existe un gran acoplamiento de las entradas con las salidas.

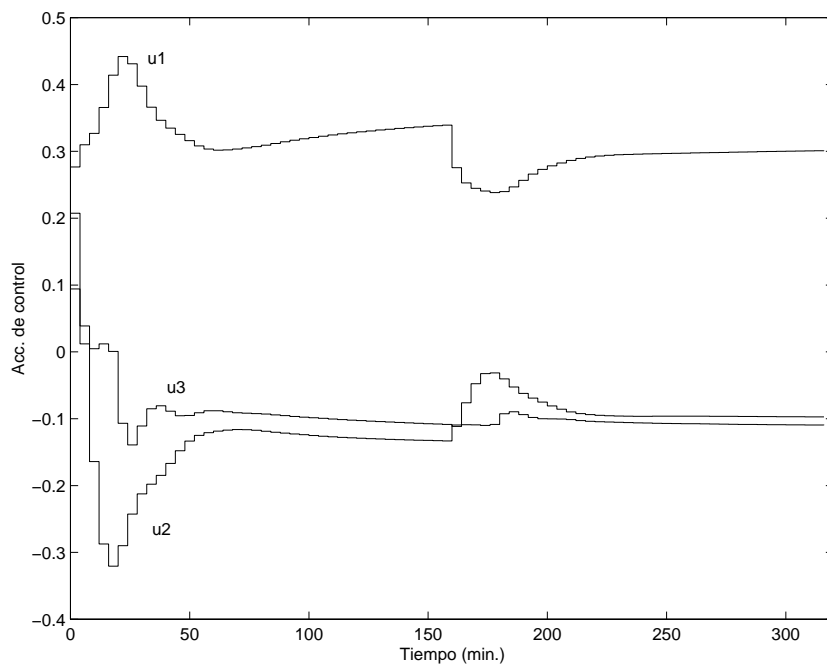
Incorporando las siguientes restricciones para las tres variables manipuladas ( $u_1$ ,  $u_2$  y  $u_3$ ):

$$\begin{array}{c|c|c} & Min. & Max. \\ \hline \Delta u(k) & -0.05 & 0.05 \\ u(k) & -0.5 & 0.5 \end{array} \quad (4.17)$$

se llega a la misma conclusión que en el apartado anterior, obteniendo una reducción media superior al 90% en el número de operaciones que se realizan

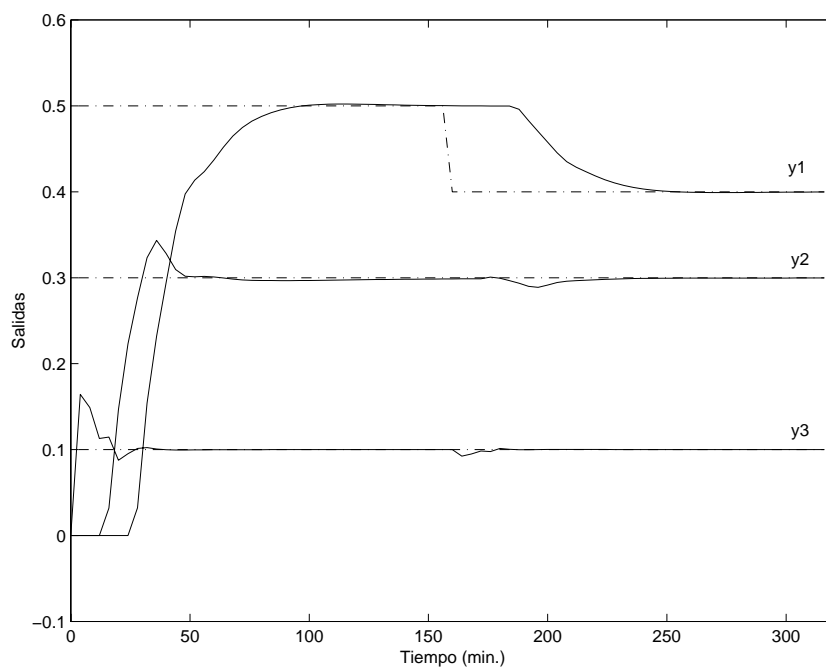


(a) Salida en bucle cerrado.

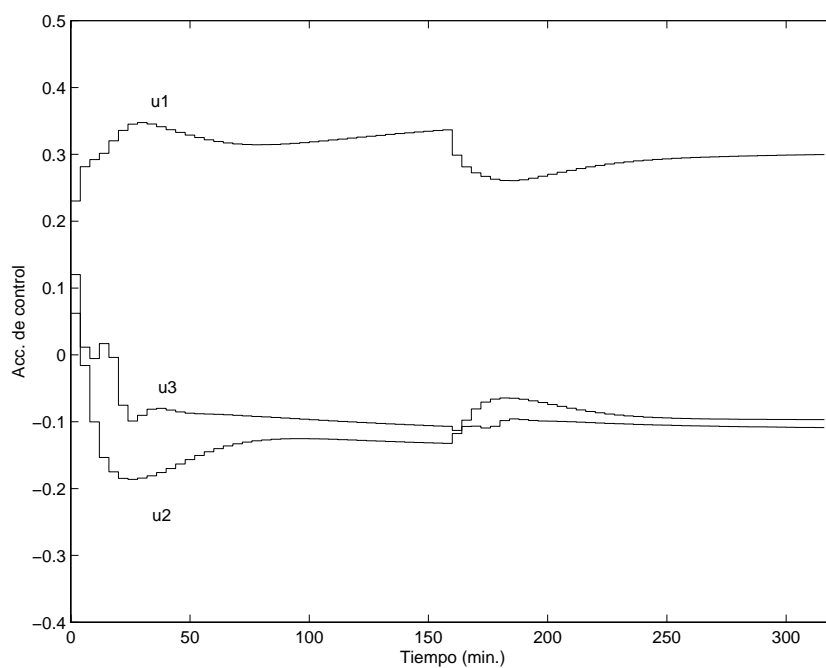


(b) Acción de control y su incremento.

Figura 4.4: Control sin restricciones con el GPC multivariable y  $\lambda = 1$ .



(a) Salida en bucle cerrado.



(b) Acción de control y su incremento.

Figura 4.5: Control sin restricciones con el PC-GPC multivariable y 18 componentes.



para calcular la acción de control cuando se usa el PC-GPC con restricciones frente al GPC con factor de ponderación:

flops GPC	flops PC-GPC	% Reducción
813240	78488	90.34

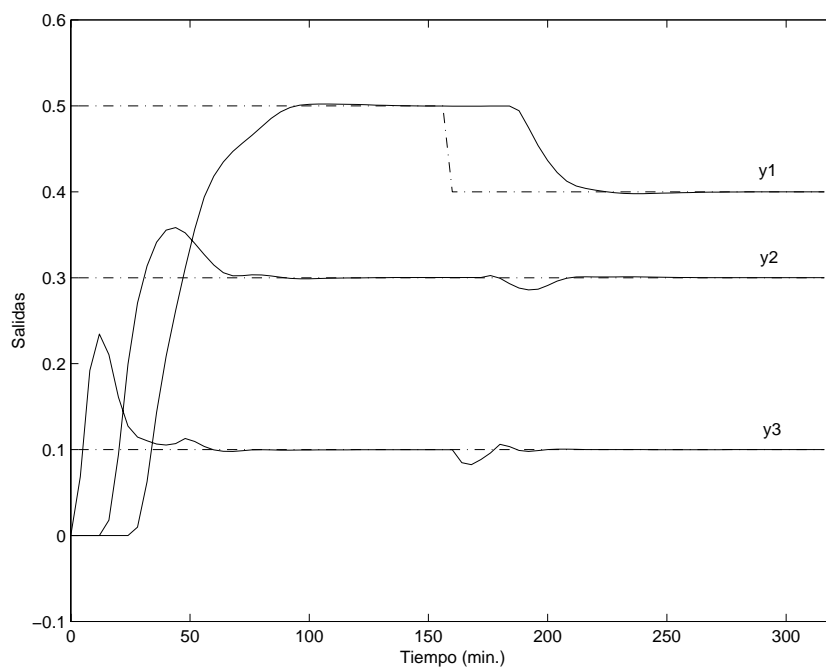
Las figuras 4.6 y 4.7 muestran el control con restricciones del proceso multivariable. Se puede concluir que ambos controladores alcanzan prestaciones parecidas, si bien el PC-GPC tarda menos tiempo en calcular la acción de control debido a la reducción de complejidad del problema resuelto por programación cuadrática en cada instante.

### 4.3 Resumen

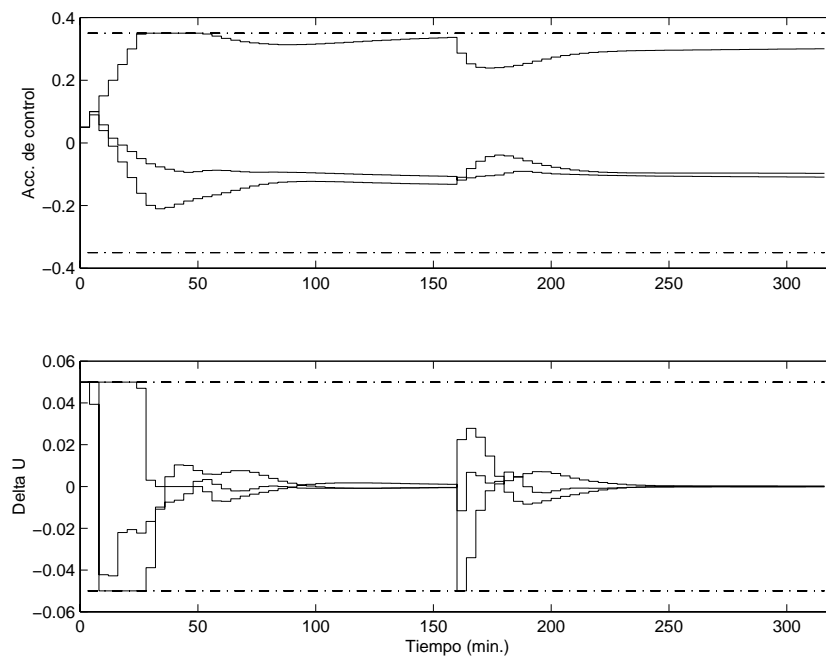
En este capítulo se presenta la formulación con restricciones del controlador PC-GPC y qué ventajas presenta respecto a un GPC estándar con restricciones. En el capítulo, las restricciones impuestas a la salida, la señal de control y el cambio en la señal de control se tratan como restricciones duras que hay que cumplir a cualquier coste asumiendo siempre la factibilidad del problema.

Mientras que en un GPC se modifica el factor de ponderación  $\lambda$  hasta alcanzar unas prestaciones de bucle cerrado deseadas, en el controlador PC-GPC, tan solo hay que seleccionar un número de componentes basado en el uso de alguno de los criterios propuestos en el capítulo anterior.

De esta forma, la rutina de programación cuadrática (QP) que resuelve en línea el problema de minimización, debe optimizar  $N_u$  variables en el caso de un GPC y tan solo  $N_{PC}$  variables en el caso de un PC-GPC. Puesto que la velocidad de cálculo de la solución tiene una relación directa con la dimensión del problema, se concluye que el tiempo de cálculo para el PC-GPC, alcanzando las mismas prestaciones que un GPC, es siempre menor.

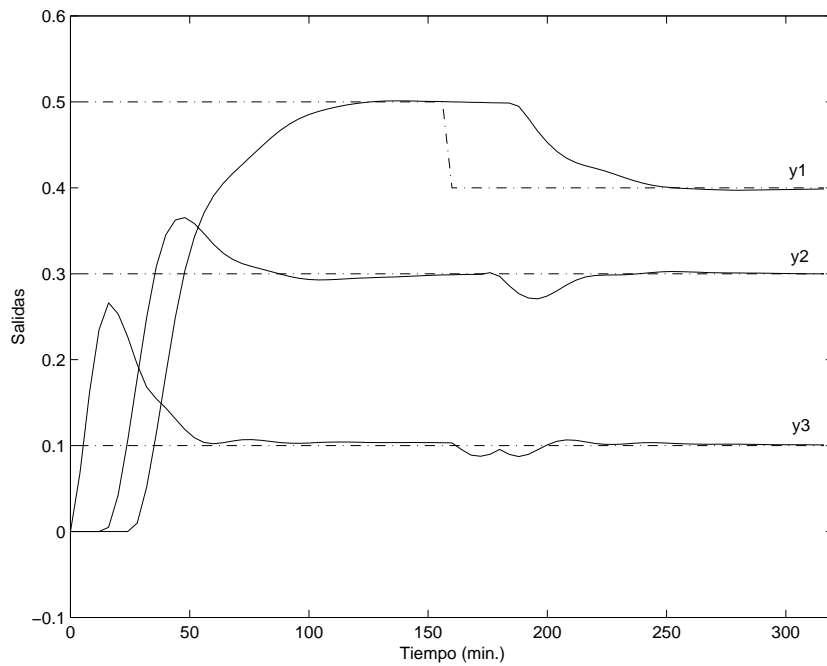


(a) Salida en bucle cerrado.

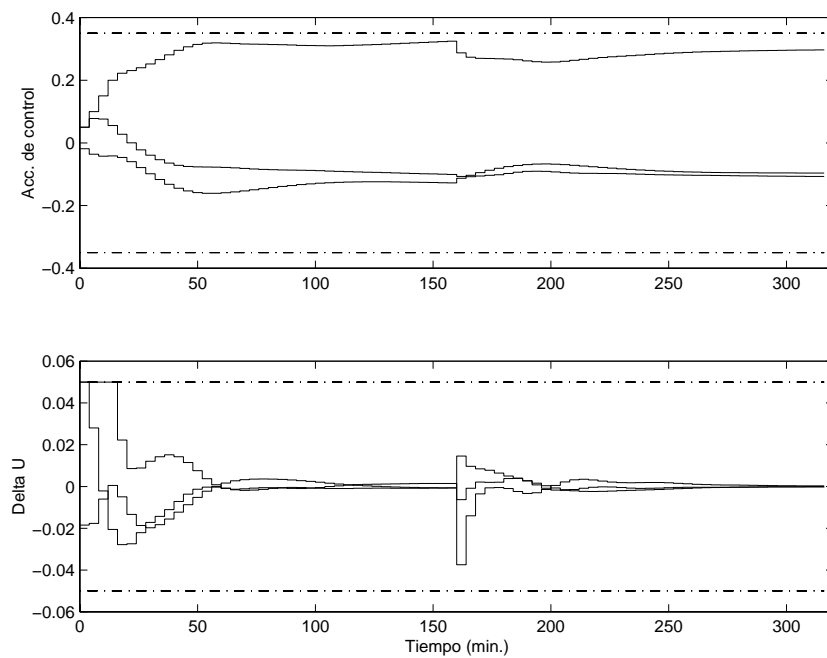


(b) Acción de control y su incremento.

Figura 4.6: Control con restricciones con el GPC multivariable ( $\lambda = 1$ ).



(a) Salida en bucle cerrado.



(b) Acción de control y su incremento.

Figura 4.7: Control con restricciones con el PC-GPC multivariable (18 comp.).

# Capítulo 5

## Análisis de robustez del PC-GPC

Las prestaciones y robustez de un controlador predictivo basado en modelos depende de la capacidad del modelo utilizado para reflejar el comportamiento dinámico del proceso. En una situación real, ningún modelo puede exactamente imitar al proceso físico real, y por tanto pueden aparecer problemas relacionados con la estabilidad y prestaciones del sistema debido a las diferencias entre el proceso y el modelo. Para aplicaciones de control de procesos donde los modelos utilizados suelen ser simplificaciones de la realidad, existen herramientas que permiten analizar la estabilidad del sistema frente a la presencia de estas diferencias. El teorema de la pequeña ganancia (*Small Gain Theorem (SGT)*) basado en el criterio de estabilidad de Nyquist ofrece una condición suficiente para la estabilidad de bucle cerrado. La aplicación de este teorema requiere del conocimiento de los llamados *límites de incertidumbre*. Adoptando los criterios actuales, la fijación de estos límites suele ser conservativa, y puede afectar a las prestaciones del bucle cerrado, degradando la dinámica de éste. La cuantificación de estos límites de incertidumbre es todavía hoy un área de investigación totalmente abierta que permitirá mejoras sustanciales en el diseño de controladores robustos.

En este capítulo se realizará un análisis de robustez para el GPC clásico y para el PC-GPC. Utilizando como medidas de robustez las funciones de sensibilidad, se observará cuál es el efecto que produce la eliminación de componentes principales sobre la estabilidad robusta del sistema.

## 5.1 Incertidumbre y robustez

Un sistema de control es robusto si es insensible a las diferencias entre el proceso a controlar y el modelo a partir del cual ha sido diseñado (Skogestad and Postlethwaite, 1996).

Esto pone de manifiesto la importancia del modelo a la hora de diseñar un controlador robusto. En la misma medida resulta primordial conocer los posibles errores de modelado debido a:

1. Trabajo fuera del punto de funcionamiento en el cual se obtuvo el modelo.
2. Dinámica no considerada, por simplificaciones en el modelo (a partir de un modelo no lineal). Generalmente suele ser dinámica de alta frecuencia.
3. Errores o tolerancias en los parámetros del modelo. Debidos al método de identificación y a errores de medida en la instrumentación utilizada.

Estas fuentes de error provocarán la aparición de incertidumbres en el modelo que pueden a su vez ser clasificadas en:

- Estructuradas. Se conoce la estructura del modelo pero existe incertidumbre en algunos parámetros. La incertidumbre estructurada puede ser obtenida considerando un rango de tolerancia para cada parámetro sobre el cual se ha establecido una incertidumbre. El modelado de esta incertidumbre suele ser muy laborioso cuando el número de parámetros a considerar crece.
- No estructuradas. Debidas a la omisión de dinámica, retardos sin contemplar, polos rápidos, etc.

A la hora de diseñar el controlador teniendo en cuenta el modelo nominal, es posible esperar que el sistema cumpla las siguientes características:

- Estabilidad nominal (NS): Que el sistema sea estable en bucle cerrado.
- Comportamiento nominal (NP): Que el sistema en bucle cerrado cumpla un comportamiento u objetivos dados.

Si además, existe un modelo de incertidumbres, es posible exigir otro tipo de características al sistema (figura 5.1):

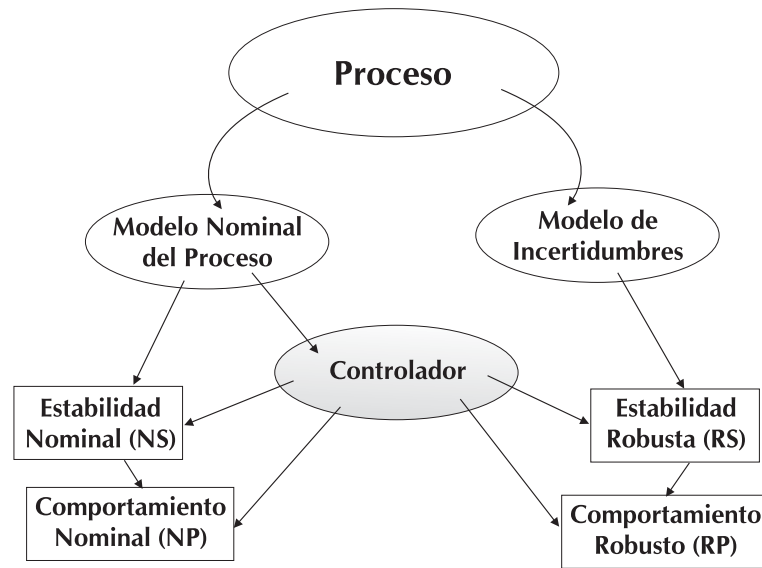


Figura 5.1: Especificaciones para el controlador respecto a estabilidad y prestaciones.

- Estabilidad robusta (RS): Que el sistema sea estable en bucle cerrado, ante un conjunto de plantas obtenidas como consecuencia de la incertidumbre en el modelo nominal.
- Comportamiento robusto (RP): Que el sistema en bucle cerrado cumpla un comportamiento u objetivos dados, ante un conjunto de plantas obtenidas como consecuencia de la incertidumbre en el modelo nominal.

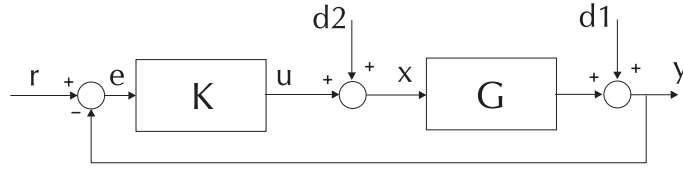
## 5.2 Funciones de sensibilidad

La figura 5.2 muestra los lazos de control característicos para controladores de uno y dos grados de libertad respectivamente. Tanto para el caso SISO como para el MIMO se define la función de transferencia de lazo abierto  $L$  como:

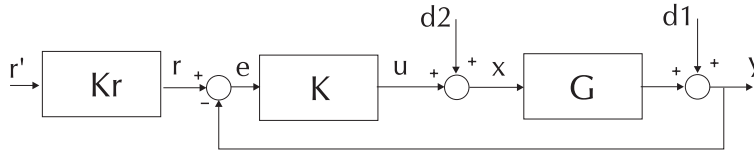
$$L = GK \quad (5.1)$$

y las funciones de sensibilidad  $S$  y de sensibilidad complementaria  $T$  como:

$$S = (I + L)^{-1}; \quad T = I - S = L(I + L)^{-1} \quad (5.2)$$



(a) Estructura de control con un grado de libertad.



(b) Estructura de control con dos grados de libertad.

Figura 5.2: Diagramas de bloques para con controladores de uno y dos grados de libertad.

En la figura 5.2,  $T$  es la función de transferencia que relaciona  $r$  con  $y$  y  $S$  es la función de transferencia que relaciona  $d_1$  con  $y$ . Notar que estas funciones están evaluadas a la *salida* del proceso y por esta razón suelen llamarse funciones de sensibilidad a la salida ( $S_O$ ,  $T_O$ ), para distinguirlas de las funciones de sensibilidad evaluadas a la entrada del proceso. Definiendo  $L_I$  como la función de transferencia de lazo abierto si se rompe el bucle en la entrada  $u$ :

$$L_I = KG \quad (5.3)$$

Construyendo la funciones de sensibilidad  $S_I$  y de sensibilidad complementaria a la entrada  $T_I$  como:

$$S_I = (I + L_I)^{-1}; \quad T_I = I - S_I = L_I(I + L_I)^{-1} \quad (5.4)$$

Entonces para los diagramas de la figura 5.2,  $-T_I$  es la función de transferencia que relaciona  $d_2$  con  $u$ , y  $S_I$  es la función de transferencia que relaciona  $d_2$  con  $x$ .

Para el caso de sistemas SISO, no existe diferencia entre las funciones de sensibilidad evaluadas a la entrada o a la salida, y por tanto se cumple que  $T_I = T_O = T$  y  $S_I = S_O = S$ . Para el caso multivariable esto no es así, puesto que la multiplicación de matrices no es conmutativa.

### 5.3 Teorema de la pequeña ganancia (SGT)

Este teorema establece una condición *suficiente* que determina la estabilidad robusta de un sistema (Lunze, 1989). Utilizando el diagrama de bloques de la figura 5.3, el teorema dice lo siguiente:

Asumiendo que  $G_1$  y  $G_2$  son estables, si  $\|G_1 G_2\|_\infty < 1$ , entonces el sistema en bucle cerrado es estable. Además, como  $\|G_1 G_2\|_\infty \leq \|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty$ , entonces si  $\|G_1\|_\infty \|G_2\|_\infty < 1$ , el sistema en bucle cerrado es estable.

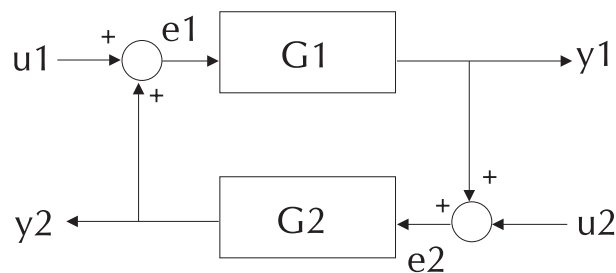


Figura 5.3: Diagrama para el SGT.

El teorema indica que si la magnitud de la función de transferencia de lazo abierto  $G_1 G_2$  es menor que 1 para todas las frecuencias y si el sistema es estable en bucle abierto, entonces el sistema en bucle cerrado debe ser también estable. La segunda parte del teorema, divide la función de transferencia del bucle abierto en dos partes,  $G_1$  y  $G_2$ . El teorema se puede interpretar en términos del criterio de Nyquist. Para un sistema SISO, si la magnitud de la función de transferencia de lazo abierto  $|L(e^{-j\omega T_s})| < 1$  para todas las frecuencias  $\omega \in [0, \pi/T_s]$ , entonces  $L(z^{-1})$  no puede dar ninguna vuelta alrededor de -1. Para un sistema MIMO, si el máximo valor singular de la función de transferencia de lazo abierto  $\bar{\sigma}(L(e^{-j\omega T_s})) < 1$  para todas las frecuencias  $\omega \in [0, \pi/T_s]$ , entonces  $\det(I - L(z^{-1}))$  no puede dar ninguna vuelta alrededor del origen <sup>1</sup>.

Enunciado de la forma anterior, el teorema de la pequeña ganancia parece poco útil, debido al poco interés que suscita diseñar sistemas realimentados con una magnitud de la función  $L(z^{-1})$  menor que la unidad. Si se desea obtener dinámicas de bucle cerrado mejores que las que se obtendrían sin la realimentación se deben diseñar controladores con ganancias elevadas. Sin embargo, realizando varias operaciones de álgebra de bloques y escalado, es posible transformar un problema de control en una forma donde el teorema sí

<sup>1</sup>Notar que el teorema tan solo impone restricciones en la magnitud de  $L(z^{-1})$  y no en su fase.



es relevante. La idea consiste en extraer sólo la parte variable de la dinámica del sistema ( $\Delta$ ) y construir un bucle *artificial* (figura 5.4) para demostrar que la magnitud de la función de transferencia de lazo abierto *vista* por esta parte variable es menor que 1. Esta idea es la base de los tests de robustez basados en las típicas incertidumbres aditivas y multiplicativas.

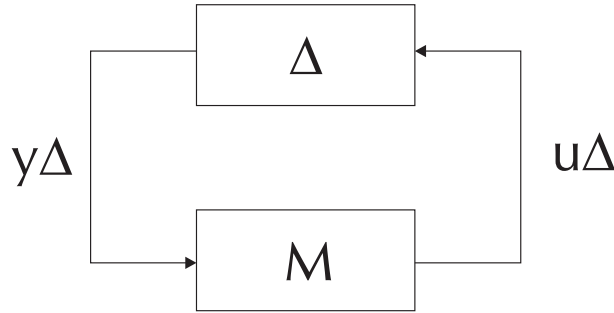


Figura 5.4: Estructura de interconexión  $M\Delta$ .

El teorema de la pequeña señal aplicado ahora al diagrama de bloques representado en la figura 5.4 queda:

$$\|M\Delta\|_{\infty} < 1 \quad (5.5)$$

## 5.4 Modelado de las incertidumbres

La forma más común de representar la incertidumbre es utilizar las incertidumbres denominadas *no estructuradas*. Esto es, asumiendo que existe un modelo nominal por ejemplo la función de transferencia  $G_0(z^{-1})$ , el proceso está incluido en un conjunto dado por:

$$\Pi : G(z^{-1}) = G_0(z^{-1}) + \Delta(z^{-1}) \quad (5.6)$$

o bien por

$$\Pi : G(z^{-1}) = G_0(z^{-1})[I + \Delta(z^{-1})] \quad (5.7)$$

donde la incertidumbre  $\Delta(z^{-1})$  es, en cada caso, una función de transferencia estable y está acotada en norma. Generalmente,  $G_0(z^{-1})$  se normaliza de alguna forma para conseguir que  $\|\Delta(z^{-1})\| < 1$ .

Por supuesto, uno no sabe cuánto vale  $\Delta(z^{-1})$  exactamente. Se pueden realizar diferentes asunciones respecto a la naturaleza de  $\Delta$ : no lineal, lineal variable en el tiempo, lineal invariable en el tiempo, etc. También se pueden usar diferentes normas, de las cuales la más utilizada<sup>2</sup> suele ser la norma  $H_\infty$ :

$$\|\Delta(z^{-1})\|_\infty = \sup_w \left( \Delta(e^{-jwT_s}) \right), \quad \forall w \in [0, \pi/T_s] \quad (5.8)$$

Es muy común y práctico representar  $\Delta(z^{-1})$ , para el caso (5.6), factorizado de la siguiente forma:

$$\Delta(z^{-1}) = w_a(z^{-1})\Delta_a(z^{-1}), \quad \|\Delta_a(e^{-jwT_s})\| \leq 1, \quad \forall w \in [0, \pi/T_s] \quad (5.9)$$

donde

$$\|w_a(z^{-1})\| \geq \max_{G \in \Pi} \|G(z^{-1}) - G_0(z^{-1})\| \quad (5.10)$$

o bien para el caso (5.7)

$$\Delta(z^{-1}) = w_m(z^{-1})\Delta_m(z^{-1}), \quad \|\Delta_m(e^{-jwT_s})\| \leq 1, \quad \forall w \in [0, \pi/T_s] \quad (5.11)$$

donde

$$\|w_m(z^{-1})\| \geq \max_{G \in \Pi} \frac{\|G(z^{-1}) - G_0(z^{-1})\|}{\|G_0(z^{-1})\|} \quad (5.12)$$

De esta forma,  $\Delta_a(z^{-1})$  y  $\Delta_m(z^{-1})$  representan cualquier función de transferencia estable con módulo menor que la unidad para cualquier frecuencia.

### 5.4.1 Incertidumbres aditivas

La incertidumbre aditiva se puede representar como una función de transferencia variable  $\Delta$ , colocada en paralelo con el proceso nominal  $G$  (figura 5.5). El proceso real se asume entonces que es  $G + \Delta$ , donde  $G$  es el modelo nominal

<sup>2</sup>La norma  $H_\infty$  da una idea del peor caso en términos de *ganancia o magnitud*.

y  $\Delta$  representa todas las desviaciones posibles de esta respuesta nominal. Generalmente  $\Delta$  se asume estable y suele imponerse únicamente un límite en su magnitud, permitiendo que su fase varíe entre 0 y  $2\pi$  radianes. Esta aproximación es útil para modelar incertidumbre a altas frecuencias. Por ejemplo, un sistema mecánico puede mostrar cierta sensibilidad para algunas frecuencias altas, a menudo por encima del ancho de banda que se alcanza con la realimentación. Para demostrar que el sistema en bucle cerrado es robusto frente a dichos modos de vibración (independientemente de cuál sea la frecuencia y fase de estos modos), se puede fijar un límite en la magnitud de  $\Delta(e^{-j\omega T_s})$  e intentar demostrar que el sistema permanece estable para cualquier  $\|\Delta(e^{-j\omega T_s})\|$  por debajo de ese límite.

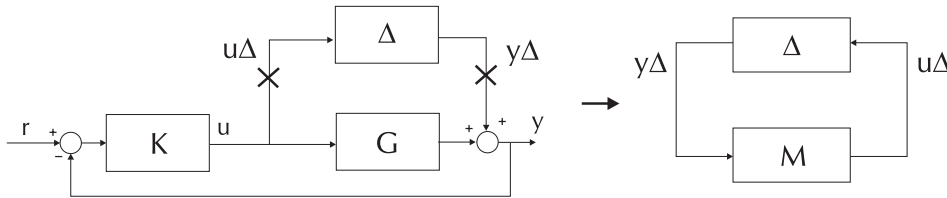


Figura 5.5: Incertidumbre aditiva.

El diagrama de bloques de la figura 5.5, muestra una forma de usar la incertidumbre aditiva en el análisis de robustez. Con un regulador  $K$ , el modelo nominal se sustituye por el proceso  $G + \Delta$ , estableciendo cuál es la función de transferencia que relaciona la salida del bloque de perturbación  $y_\Delta$  con la entrada a este bloque  $u_\Delta$ . Se divide el bucle cerrado en dos subsistemas permitiendo la aplicación del teorema de la pequeña ganancia. De esta forma el sistema de control nominal es visto por el bloque de incertidumbre  $\Delta$ , como la función de transferencia  $-K(I + KG)^{-1}$ . Si se asume que  $-K(I + KG)^{-1}$  y  $\Delta$  son estables, el teorema de la pequeña ganancia establece que el sistema perturbado debe ser estable si

$$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\|K(I + KG)^{-1}\|_\infty} \quad (5.13)$$

o lo que es lo mismo, el sistema en bucle cerrado permanecerá estable si

$$\|\Delta\|_\infty < \frac{1}{\|M\|_\infty} \quad (5.14)$$

siendo  $M = K(I + KG)^{-1} = KS$ .

La expresión

$$\frac{1}{\|K(z^{-1})S(z^{-1})\|}, \quad \forall \omega \in [0, \pi/T_s], \quad z^{-1} = e^{-j\omega T_s} \quad (5.15)$$

ofrece entonces un límite superior en la incertidumbre aditiva permitida por un sistema de control.

### 5.4.2 Incertidumbres multiplicativas

Una incertidumbre multiplicativa es una función de transferencia variable de la forma  $(I + \Delta)$  colocada en serie con el modelo nominal del proceso normalmente a la entrada (figura 5.6) o a la salida de éste (figura 5.7). Por ejemplo, si el bloque  $(I + \Delta)$  es colocado a la entrada del modelo, se asume entonces que el proceso real viene dado por  $G(I + \Delta) = G + G\Delta$ , donde  $G$  representa el comportamiento nominal del proceso y  $\Delta$  representa todas las variaciones posibles respecto a dicho comportamiento nominal. Al igual que en la incertidumbre aditiva,  $\Delta$  es estable y se impone un límite a su magnitud, permitiendo que su fase varíe entre 0 y  $2\pi$  radianes.

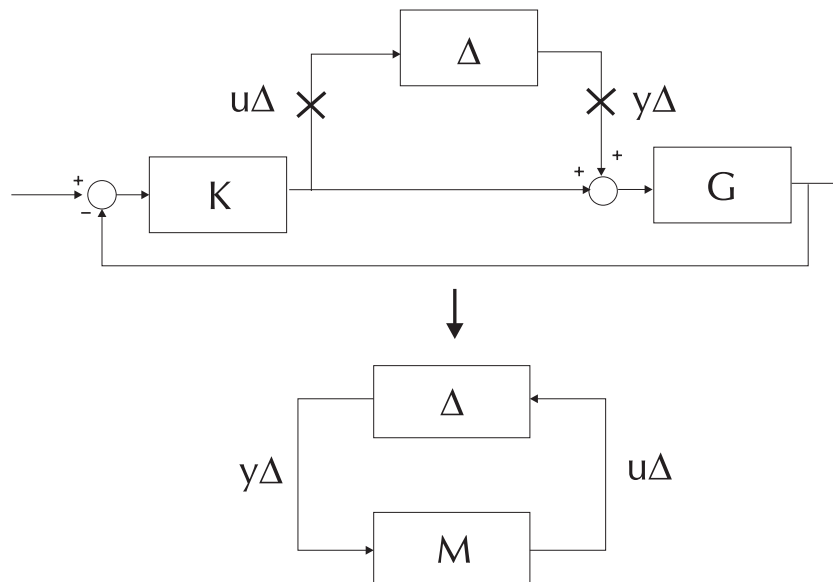


Figura 5.6: Incertidumbre multiplicativa.

Para el caso de la figura 5.6, y realizando la misma operación que en caso de la incertidumbre aditiva, se calcula cómo es visto el comportamiento nominal por

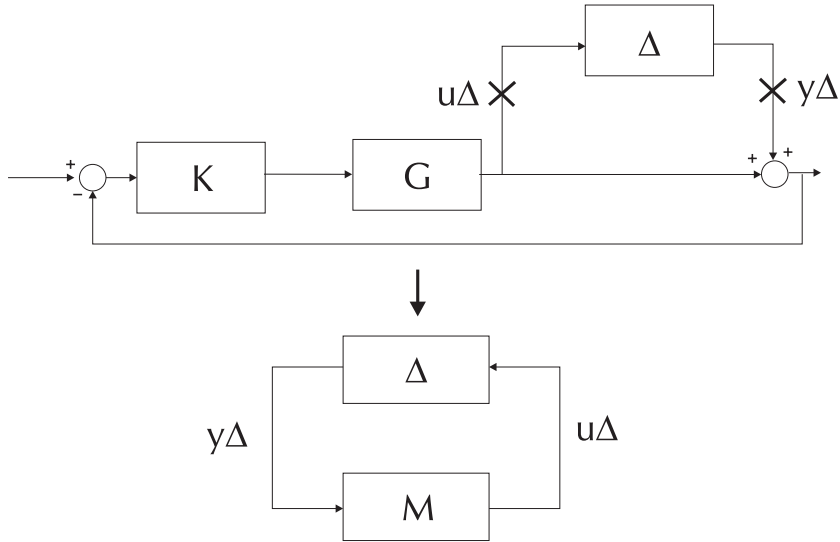


Figura 5.7: Incertidumbre multiplicativa a la salida.

la incertidumbre y se obtiene  $-KG(I + KG)^{-1}$ . Si se asume que  $-KG(I + KG)^{-1}$  y  $\Delta$  son estables, el teorema de la pequeña ganancia indica que el sistema perturbado también será estable siempre que

$$\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\|KG(I + KG)^{-1}\|_{\infty}} \quad (5.16)$$

o lo que es lo mismo

$$\|\Delta\|_{\infty} < \frac{1}{\|M\|_{\infty}} \quad (5.17)$$

donde  $M = KG(I + KG)^{-1}$ .

Imponiendo un límite a la magnitud de  $\Delta$  en un bloque del tipo  $(I + \Delta)$  se puede representar un nivel deseado de cambio relativo en el modelo nominal. Por ejemplo, estableciendo  $\|\Delta\|_{\infty} < 0.1$ , esto indica que al menos un cambio de un 10% en la magnitud del proceso nominal debería ser tolerado junto con una cierta cantidad de desfase. Esta aproximación es útil para representar variaciones del proceso a frecuencias bajas.

Resumiendo, las incertidumbres aditivas son útiles para representar incertidumbres a altas frecuencias y las multiplicativas para bajas frecuencias. Ninguna de estas dos aproximaciones se considera completamente satisfactoria

para modelar todas las posibles variaciones del proceso nominal que se pueden encontrar en la práctica, pero son lo suficientemente simples como para permitir un rápido test de robustez.

## 5.5 Las funciones de sensibilidad como medidas de robustez

Las incertidumbre multiplicativa puede ser usada para calcular unos márgenes de robustez tanto para sistemas SISO como MIMO, reemplazando a los tests clásicos de márgenes de ganancia y fase (Maciejowski, 1989).

Para comprobar cómo la función de sensibilidad complementaria puede ofrecer un margen de robustez del sistema se puede examinar la figura 5.6. Cuando una incertidumbre multiplicativa es insertada, por ejemplo a la entrada del proceso, y el bloque de incertidumbre  $\Delta$  es *aislado* del resto del sistema, el comportamiento del bucle visto por  $\Delta$  viene dado justamente por  $-T = -KG(I + KG)^{-1}$ . El teorema de la pequeña ganancia indica que si  $T$  y  $\Delta$  son estables, entonces si

$$\|\Delta(z^{-1})\|_{\infty} < \frac{1}{\|T(z^{-1})\|_{\infty}} \quad (5.18)$$

el sistema perturbado también será estable. Por tanto, calculando

$$\frac{1}{\|T(z^{-1})\|}, \quad \forall w \in [0, \pi/T_s], \quad z^{-1} = e^{-jwT_s} \quad (5.19)$$

se obtiene un límite para el tamaño de la perturbación  $(I + \Delta)$  permitida.

Para el caso de la función de sensibilidad  $S$ , se puede examinar la figura 5.8, donde se representa una incertidumbre multiplicativa *inversa*. En lugar de añadir un bloque del tipo  $(I + \Delta)$ , se añade uno del tipo  $(I - \Delta)^{-1}$  a la entrada o a la salida del proceso nominal. Cuando se reestructura este diagrama de bloques para obtener la estructura  $M\Delta$  requerida (figura 5.4), el comportamiento del bucle visto desde la perturbación  $\Delta$  viene dado por  $S = (I + GK)^{-1}$ . De nuevo utilizando el teorema de la pequeña ganancia, si  $\Delta$  y  $S$  son estables, entonces si

$$\|\Delta(z^{-1})\|_{\infty} < \frac{1}{\|S(z^{-1})\|_{\infty}} \quad (5.20)$$

el sistema perturbado también será estable. Por tanto, calculando

$$\frac{1}{\|S(z^{-1})\|}, \quad \forall w \in [0, \pi/T_s], \quad z^{-1} = e^{-jwT_s} \quad (5.21)$$

se puede obtener un límite para la magnitud de una perturbación del tipo  $(I - \Delta)^{-1}$  permitida.

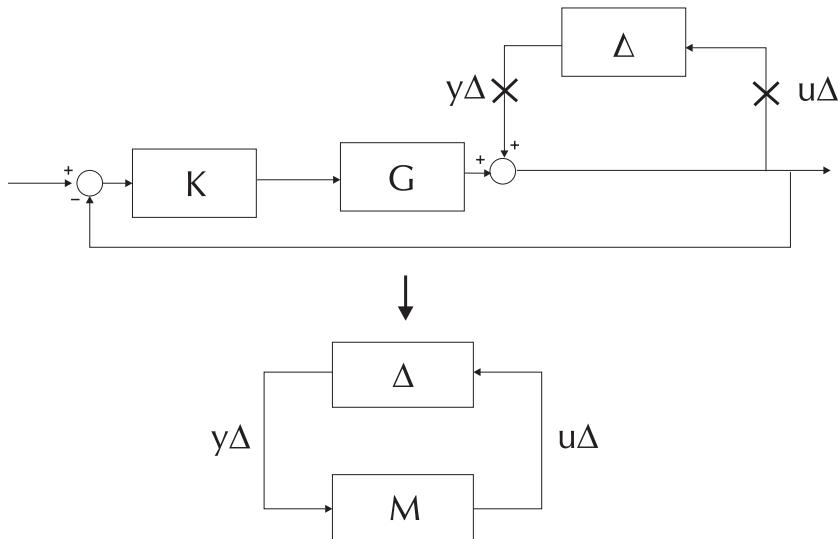


Figura 5.8: Incertidumbre multiplicativa inversa a la salida.

Notar que estos tests basados en las funciones  $S$  y  $T$  son sólo condiciones suficientes y no necesarias para la estabilidad robusta del sistema y ofrecen unos márgenes de robustez muy conservativos, por lo que los márgenes reales serían mucho mayores. Sin embargo, a la hora de realizar un análisis de robustez partiendo de un diseño dado, es posible utilizar los márgenes dados por  $S$  y  $T$  para comprobar la resistencia de un diseño a los errores de modelado, algo que por otra parte, debe ser importante para aquellos diseños basados en modelos, como es el caso del controlador predictivo.

## 5.6 El GPC como controlador de dos grados de libertad

Cuando se utiliza la interpretación polinomial para expresar el controlador GPC monovariante como un regulador lineal con varios grados de libertad se está en disposición de analizar la estabilidad del sistema en bucle cerrado utilizando el criterio SGT. Debido a la estrategia denominada *receding horizon* u horizonte móvil, tan solo se considera el primer elemento del vector de acciones de control futuras. Es decir de la matriz  $((G^T \alpha G + \lambda)^{-1} G^T \alpha)_{N \times N}$  tan solo se utiliza la primera fila. Llamando  $\mathbf{h}_{1 \times N}$  a esta fila, es posible reescribir la ley de control como:

$$\Delta u(k) = \mathbf{h}w - \mathbf{h}\Gamma \Delta \mathbf{u}^f - \mathbf{h}F\mathbf{y}^f \quad (5.22)$$

Aplicando una interpretación en transformada  $z$  a cada sumando de la expresión (5.22) se obtiene

$$\mathbf{h}w = \left( \sum_{i=1}^N h_i z^i \right) w(k) = H(z)w(z) \quad (5.23)$$

$$\mathbf{h}\Gamma \Delta \mathbf{u}^f = \left( \sum_{i=1}^{n_\Gamma} \mathbf{h}\gamma_i z^{-i} \right) \Delta u^f(k) = \frac{R(z^{-1})z^{-1}}{T(z^{-1})} \Delta u(z) \quad (5.24)$$

$$\mathbf{h}F\mathbf{y}^f = \left( \sum_{i=1}^{n_F} \mathbf{h}f_i z^{-(i-1)} \right) y^f(k) = \frac{S(z^{-1})}{T(z^{-1})} y(z) \quad (5.25)$$

donde

- $n_\Gamma$  y  $n_F$  corresponden al número de columnas de las matrices  $\Gamma$  y  $F$  respectivamente.
- $h_i$  son los elementos del vector  $\mathbf{h}$ .
- $\gamma_i$  y  $f_i$  son las columnas  $i$ -ésimas de las matrices  $\Gamma$  y  $F$  respectivamente.
- El producto del vector fila  $\mathbf{h}$  por estas columnas son los escalares  $\mathbf{h}\gamma_i$  y  $\mathbf{h}f_i$ , resultando cada uno de ellos en los coeficientes  $r_i$  y  $s_i$  de los polinomios



$R(z^{-1})$  y  $S(z^{-1})$  respectivamente:

$$\begin{aligned} R(z^{-1}) &= r_0 + \dots + r_{(n_R-1)}z^{-(n_R-1)} \\ S(z^{-1}) &= s_0 + \dots + s_{(n_S-1)}z^{-(n_S-1)} \end{aligned}$$

Reescribiendo la expresión 5.22 con esta interpretación

$$\Delta u(z) = H(z)w(z) - \frac{R(z^{-1})z^{-1}}{T(z^{-1})}\Delta u(z) - \frac{S(z^{-1})}{T(z^{-1})}y(z) \quad (5.26)$$

y despejando la acción de control  $u(z)$  se llega a

$$u(z) = \frac{T(z^{-1})}{(T(z^{-1}) + R(z^{-1})z^{-1})\Delta} \left( H(z)w(z) - \frac{S(z^{-1})}{T(z^{-1})}y(z) \right) \quad (5.27)$$

La ecuación descrita en (5.27) es la ley de control lineal del GPC. En la figura 5.9 se puede ver su representación en diagrama de bloques. En este diagrama, el bloque  $H$  es un polinomio en  $z$ ,  $H(z)$ , si se suponen conocidas las referencias futuras (como podría ser el caso de una trayectoria de referencia para un brazo robot). En caso contrario, si se desconoce cuál es el valor de la referencia durante el horizonte de predicción, el valor de la referencia  $w(k)$  en ese instante se supone constante para todo el horizonte de predicción (es decir, se asume una referencia constante para los instantes futuros). De este modo, el bloque  $H$  no es más que un escalar resultado de sumar todos los elementos del vector  $\mathbf{h}$ .

$$H = \sum_{i=1}^N h_i$$

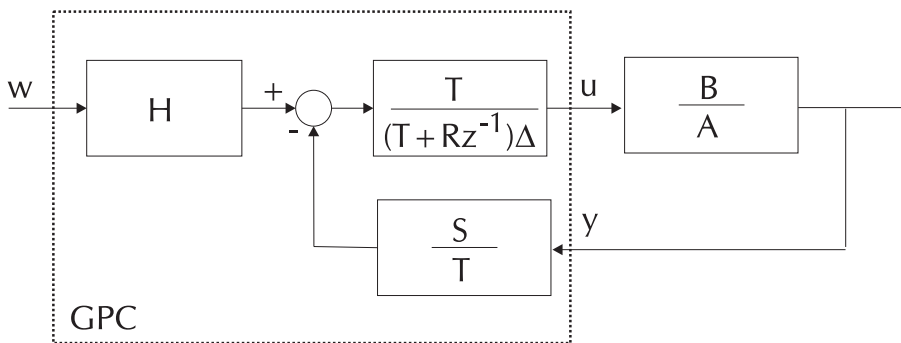


Figura 5.9: Representación en diagrama de bloques del GPC lineal.

Con el fin de analizar la características de robustez del GPC, se reorganiza el diagrama de bloques de la figura 5.9 para conseguir una estructura de dos

grados de libertad (figura 5.10). Comparando esta figura con el diagrama de bloques 5.2(b), se puede definir

- Controlador de lazo:

$$K = \frac{S(z^{-1})}{\Delta[T(z^{-1}) + R(z^{-1})z^{-1}]}$$

- Controlador para el prefiltrado de la referencia:

$$Kr = H \frac{T(z^{-1})}{S(z^{-1})}$$

- Función de transferencia de lazo:

$$L = \frac{B(z^{-1})S(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})[T(z^{-1}) + R(z^{-1})z^{-1}]}$$

- Función de sensibilidad:

$$S_O = (I + L)^{-1} = \frac{\Delta A(z^{-1})[T(z^{-1}) + R(z^{-1})z^{-1}]}{\Delta A(z^{-1})[T(z^{-1}) + R(z^{-1})z^{-1}] + B(z^{-1})S(z^{-1})}$$

- Función de sensibilidad complementaria:

$$T_O = L(I + L)^{-1} = \frac{B(z^{-1})S(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})[T(z^{-1}) + R(z^{-1})z^{-1}] + B(z^{-1})S(z^{-1})}$$

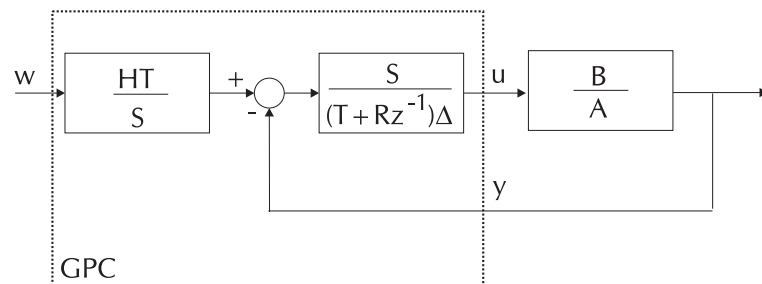


Figura 5.10: El GPC como controlador de dos grados de libertad.

### 5.6.1 Análisis de robustez del GPC

Puesto que las funciones de sensibilidad pueden constituir un test para comprobar la estabilidad robusta del sistema y ofrecer unos márgenes de robustez, es posible representar los diagramas de bode de dichas funciones (o bien sus inversas) para estudiar la influencia de los diferentes parámetros sobre la estabilidad robusta del sistema (Banerjee and Shah, 1995).

Retomando el proceso de 5º orden de la expresión (3.6), se diseña un GPC para un periodo de muestreo de 2 segundos con los siguientes parámetros:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_j \\ \hline 1 & 50 & 2 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (5.28)$$

Manteniendo el resto de parámetros constantes, se modifica uno de ellos y se comprueba el efecto que ésto produce sobre los márgenes de robustez.

#### Influencia del horizonte de predicción $N_2$ :

Rango de estudio  $N_2=[15, 20, 30, 50]$ .

La figura 5.11(a) muestra la inversa de la función de sensibilidad complementaria, mientras que en la figura 5.11(b) se representa la evolución de la salida y la acción de control para los diferentes valores de  $N_2$ . En ellas se observa cómo, un aumento del horizonte de predicción  $N_2$  produce un margen de robustez mayor, aunque las prestaciones del bucle cerrado se degradan.

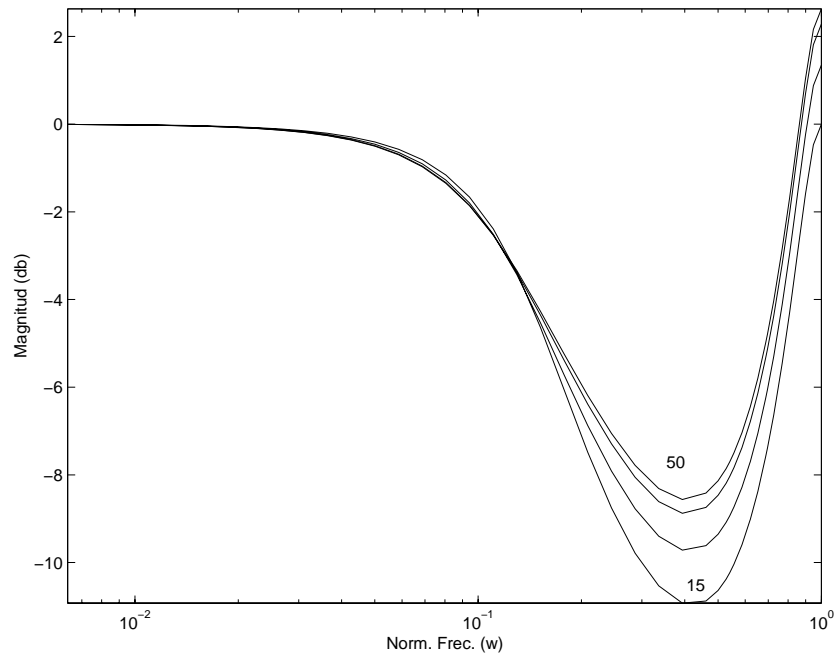
#### Influencia del horizonte de control $N_u$ :

Rango de estudio  $N_u=[2, 3, 4, 5]$ .

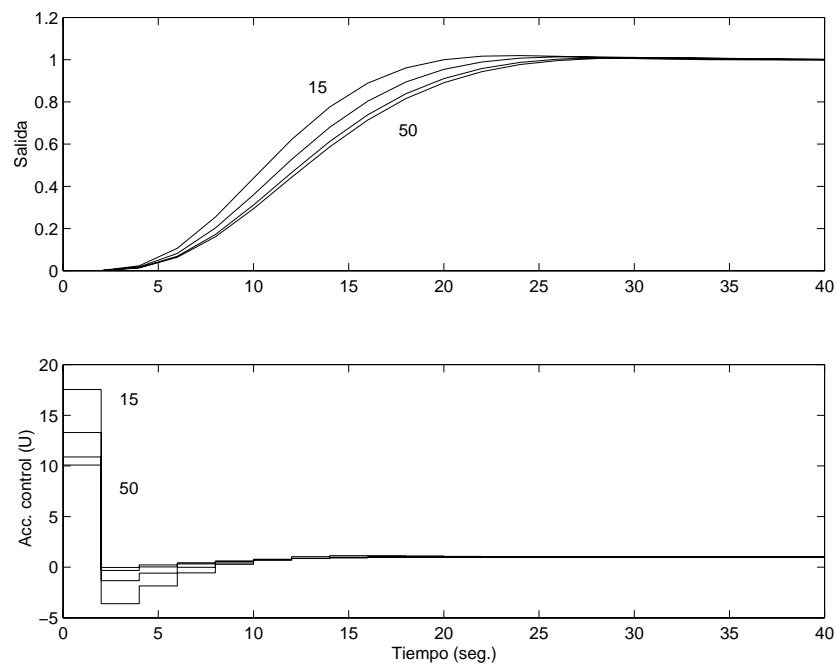
La figura 5.12(a) muestra la inversa de la función de sensibilidad complementaria, mientras que en la figura 5.12(b) se representa la evolución de la salida y la acción de control para los diferentes valores de  $N_u$ . Como conclusión, destacar que un aumento del horizonte de control  $N_u$  redundan en un menor grado de robustez, aunque a nivel temporal las acciones de control son mayores y por lo tanto la respuesta del sistema es más rápida.

#### Influencia del factor de ponderación $\lambda$ :

Rango de estudio  $\lambda=[0.1, 1, 10, 50]$ .

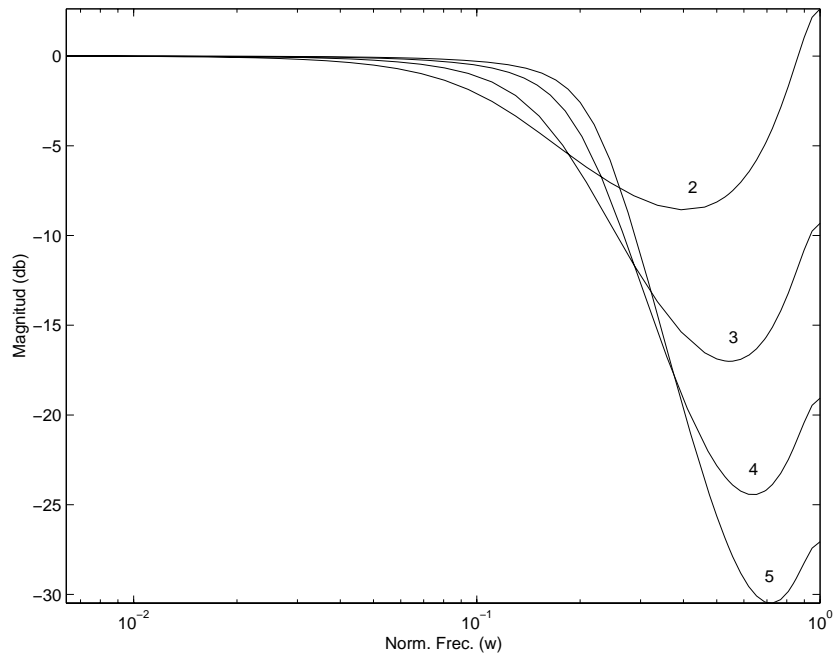


(a) Inversa de la función de sensibilidad complementaria.

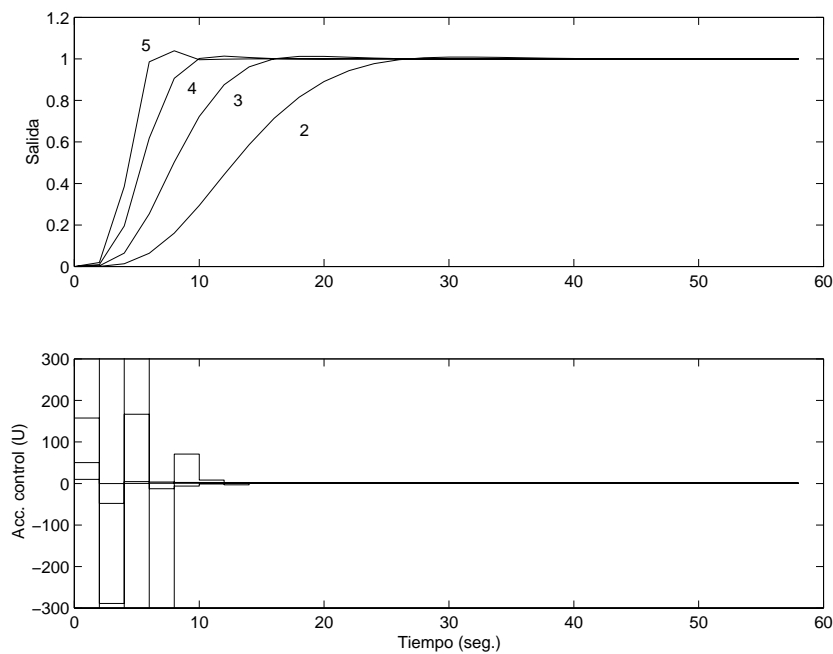


(b) Respuesta en bucle cerrado y acción de control.

Figura 5.11: Influencia del horizonte de predicción  $N_2$  en la estabilidad robusta.



(a) Inversa de la función de sensibilidad complementaria.



(b) Respuesta en bucle cerrado y acción de control.

Figura 5.12: Influencia del horizonte de control  $N_u$  en la estabilidad robusta.

La figura 5.13(a) muestra la inversa de la función de sensibilidad complementaria, mientras que en la figura 5.13(b) se representa la evolución de la salida y la acción de control para los diferentes valores de  $\lambda$ . En las figuras se observa que un aumento en la ponderación de los incrementos de la acción de control, produce un aumento en el margen de estabilidad robusta, lo que conduce a unas peores prestaciones del controlador.

### Influencia del polinomio de filtrado $T(z^{-1})$ :

El polinomio de filtrado  $T$  es el parámetro que, más y mejor permite influir sobre la estabilidad robusta del sistema, puesto que presenta la particularidad de no influir sobre la respuesta de bucle cerrado a menos que el modelo y el proceso difieran. Incluso se proponen métodos para la elección óptima de dicho polinomio (Yoon and Clarke, 1994b), (Megías *et al.*, 1999).

Si se considera un polinomio genérico con la siguiente estructura:

$$T(z^{-1}) = (1 - t_f z^{-1})^n$$

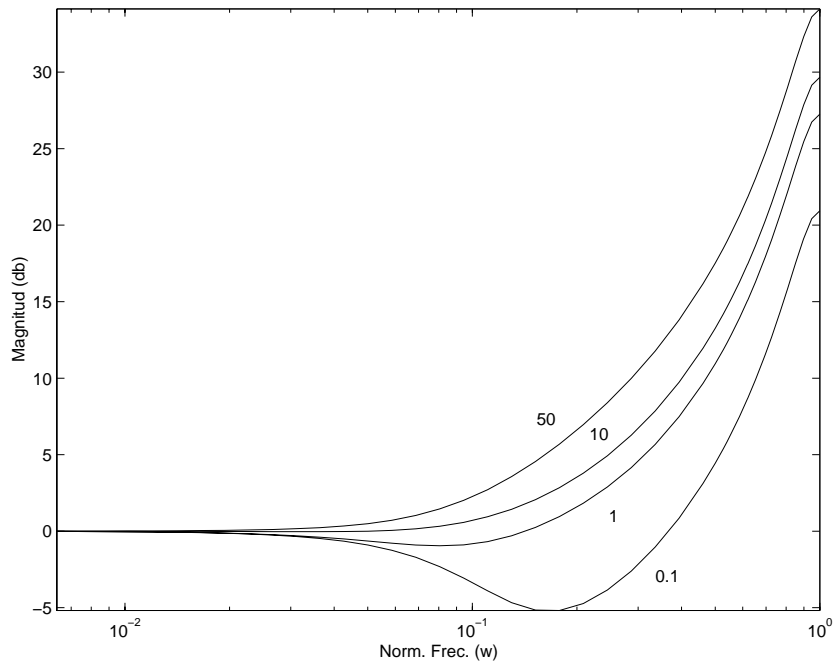
es posible realizar un estudio variando la frecuencia de corte del filtro (función de  $t_f$ ) y el orden del mismo  $n$ .

#### a) Frecuencia de corte $t_f$

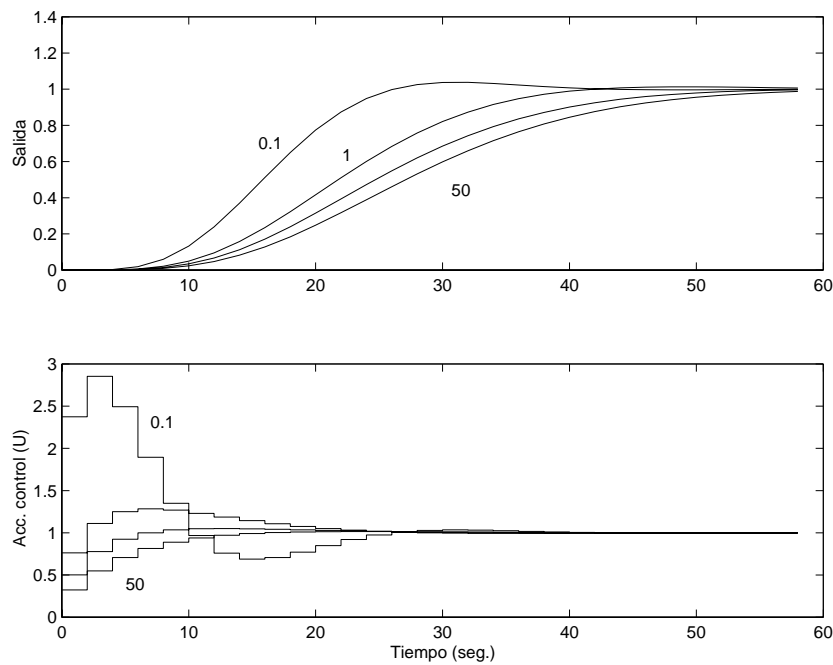
Rango de estudio  $t_f = [0.4, 0.6, 0.8, 0.9]$ . La figura 5.14(a) muestra la inversa de la función de sensibilidad complementaria, mientras que en la figura 5.14(b) se representa la evolución de la salida y la acción de control para los diferentes valores de  $t_f$ , para un orden del polinomio  $n = 2$ . En esta última figura, se introduce una perturbación a la salida del proceso en forma de escalón. Hay que destacar el diferente modo que tiene el controlador de hacer frente a dicha perturbación cuando cambia el polinomio de filtrado, ya que aunque el controlador es más robusto según se aumenta la el parámetro  $t_f$ , el comportamiento frente a esta perturbación empeora. En esta figura también se observa cómo la respuesta de bucle cerrado es la misma con distintos polinomios  $T$  cuando el proceso es el modelo nominal.

#### b) Orden $n$

Rango de estudio  $n = [1, 2, 3]$ . Para los diferentes ordenes del polinomio  $T$  se utiliza la misma frecuencia de corte  $t_f = 0.8$ . La figura 5.15(a) muestra la inversa de la función de sensibilidad complementaria, mientras que

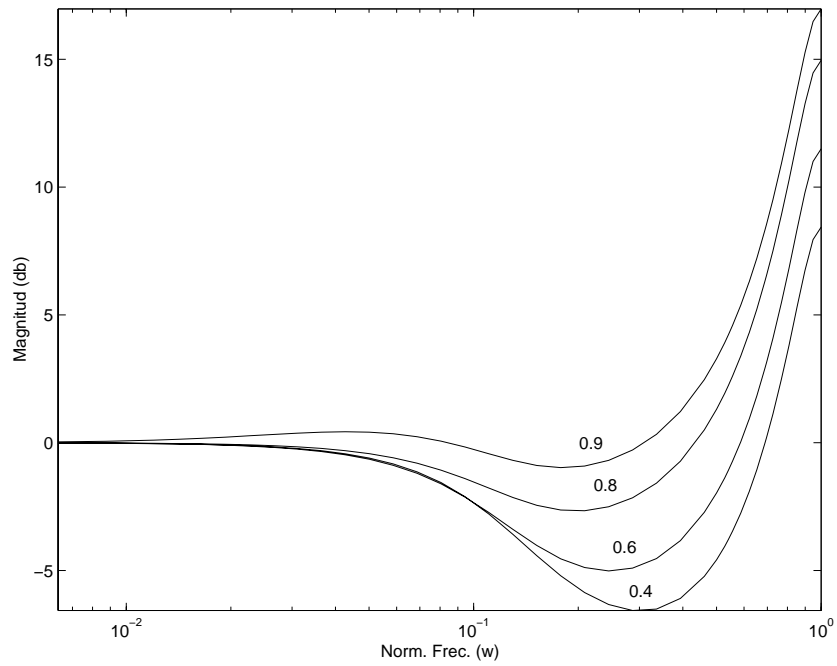


(a) Inversa de la función de sensibilidad complementaria.

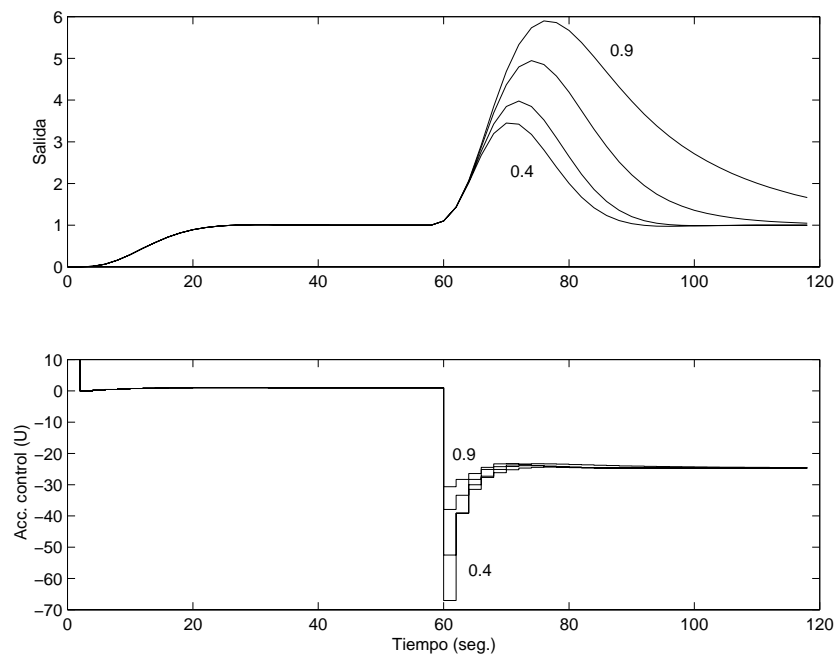


(b) Respuesta en bucle cerrado y acción de control.

Figura 5.13: Influencia del factor de ponderación de la acción de control en la estabilidad robusta.



(a) Inversa de la función de sensibilidad complementaria.



(b) Respuesta en bucle cerrado y acción de control.

Figura 5.14: Influencia del parámetro  $t_f$  del polinomio de filtrado  $T$  en la estabilidad robusta.



en la figura 5.15(b) se representa la evolución de la salida y la acción de control para los diferentes valores de  $n$ . En general, se puede destacar que, un aumento del parámetro  $n$ , produce un mayor grado de robustez y una peor dinámica de bucle cerrado, aunque es posible encontrar contraejemplos en los que esto no es así (Yoon and Clarke, 1993a).

### Resumen

La siguiente tabla resume el efecto, en cuanto a robustez y respuesta temporal, que produce aumentar cada uno de los parámetros:

Aumento parámetro	Robustez	Respuesta
$N_2$	↑	lenta
$N_u$	↓	rápida
$\lambda$	↑	lenta
$t_f$	↑	no modifica
$n$	↑	no modifica

## 5.7 Análisis de robustez del PC-GPC

El mismo tipo de análisis se puede realizar calculando las funciones de sensibilidad para los diferentes controladores que se obtienen eliminando componentes principales.

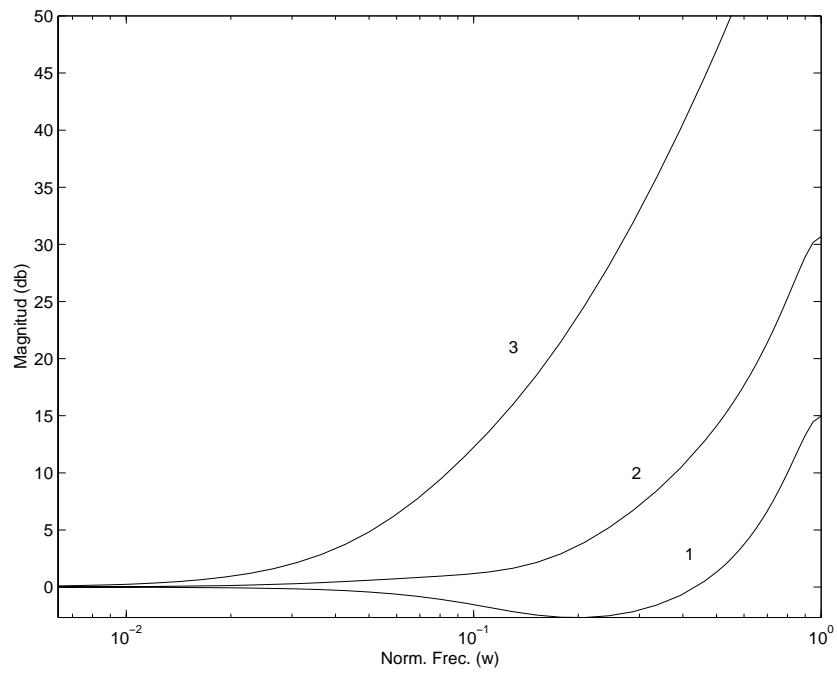
Para el ejemplo de la sección anterior, y los siguientes parámetros de diseño

$$\frac{N_1}{1} \mid \frac{N_2}{50} \mid \frac{N_u}{4} \mid \frac{T(z^{-1})}{1} \mid \frac{\alpha_i}{1} \mid \frac{\lambda_j}{0} \quad (5.29)$$

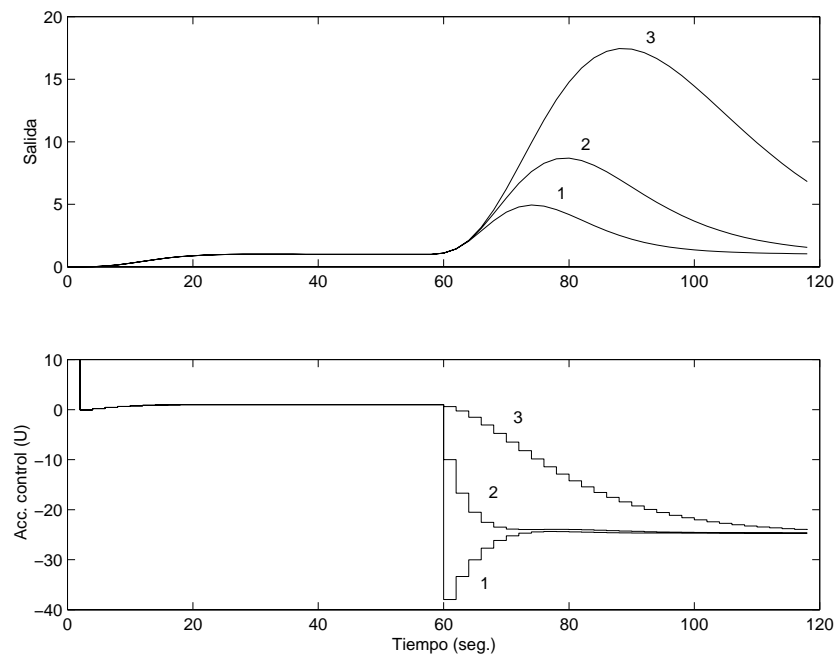
se puede comprobar cómo aumenta el límite de incertidumbre permitida, puesto que según se eliminan componentes de la solución (figura 5.16(a)), la magnitud de la inversa de la función de sensibilidad complementaria aumenta. Como era de esperar las prestaciones en el dominio temporal se degradan (figura 5.16(b))

A modo de ejemplo se puede comprobar qué ocurre si el proceso no coincide con el modelo. Simulando el bucle cerrado con el proceso

$$G^*(s) = \frac{1}{(4.99s + 1)^5}$$

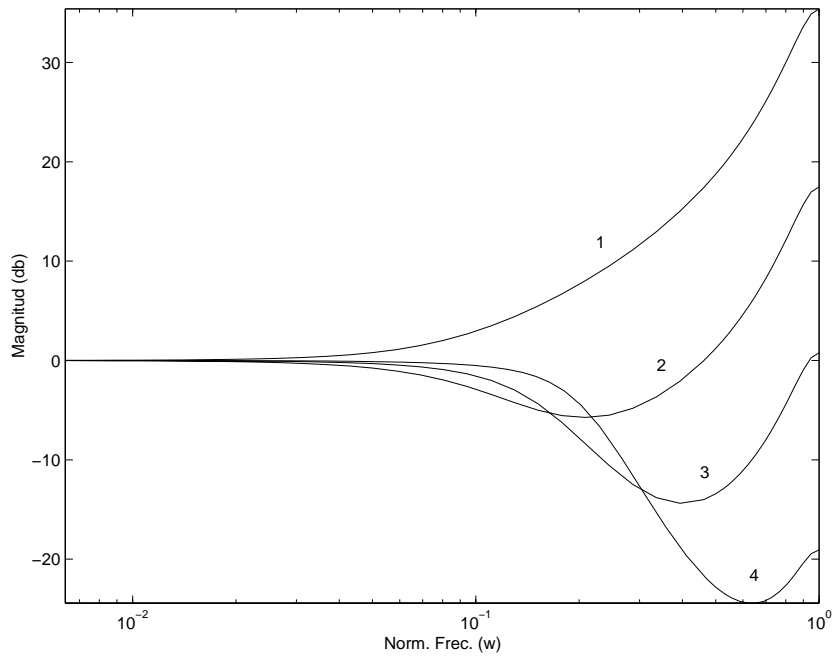


(a) Inversa de la función de sensibilidad complementaria.

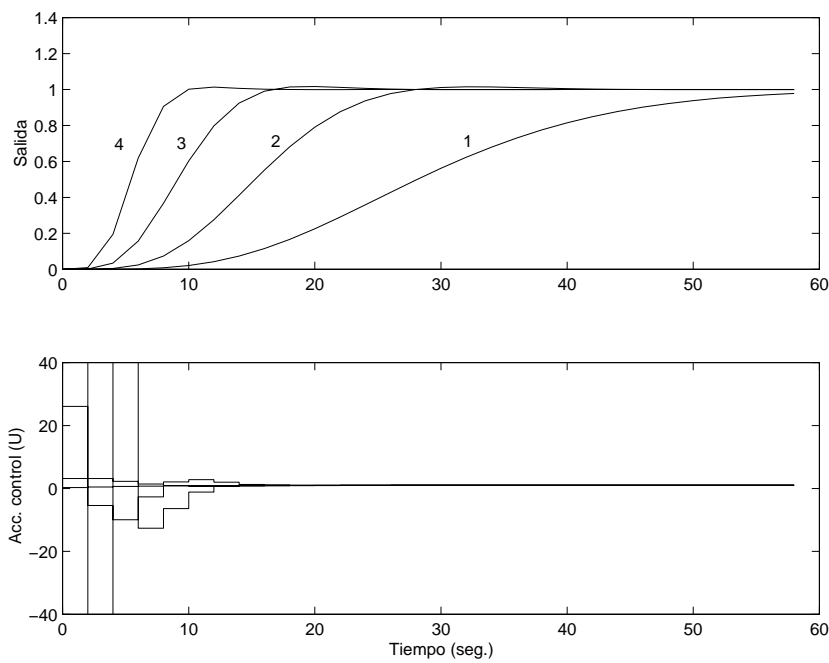


(b) Respuesta en bucle cerrado y acción de control.

Figura 5.15: Influencia del orden  $n$  del polinomio de filtrado  $T$  en la estabilidad robusta.



(a) Inversa de la función de sensibilidad complementaria.



(b) Respuesta en bucle cerrado y acción de control.

Figura 5.16: Influencia de las componentes principales en la estabilidad robusta.

en lugar de con el modelo nominal, se puede encontrar una explicación de porqué el bucle cerrado es estable cuando se diseña un PC-GPC con el modelo nominal distinto al proceso, eliminando componentes principales. En la figura 5.17(a) se observa que la magnitud de la incertidumbre multiplicativa *real* que define la diferencia establecida entre modelo y proceso y calculada como

$$W_i = \left| \frac{G^*(s) - G_0(s)}{G_0(s)} \right| \quad (5.30)$$

es inferior al margen de robustez definido por la función de sensibilidad complementaria cuando en el controlador se utilizan 2 componentes. En la figura 5.17(b) se observa la respuesta de bucle cerrado para dicho controlador cuando se simula con el proceso real.

### 5.7.1 Extensión al caso multivariable

La *ganancia* de un sistema multivariable depende de la *dirección* de la señal de entrada. Para una frecuencia dada  $w$ , se define la *ganancia* de un sistema multivariable como la mayor amplificación posible que se produciría para cualquier posible dirección de la señal de entrada (Skogestad and Postlethwaite, 1996). Esta ganancia corresponde al mayor valor singular de la respuesta en frecuencia del sistema multivariable evaluada justamente para esa frecuencia  $w$ . Aprovechando el hecho de que el valor singular máximo es una norma inducida para matrices

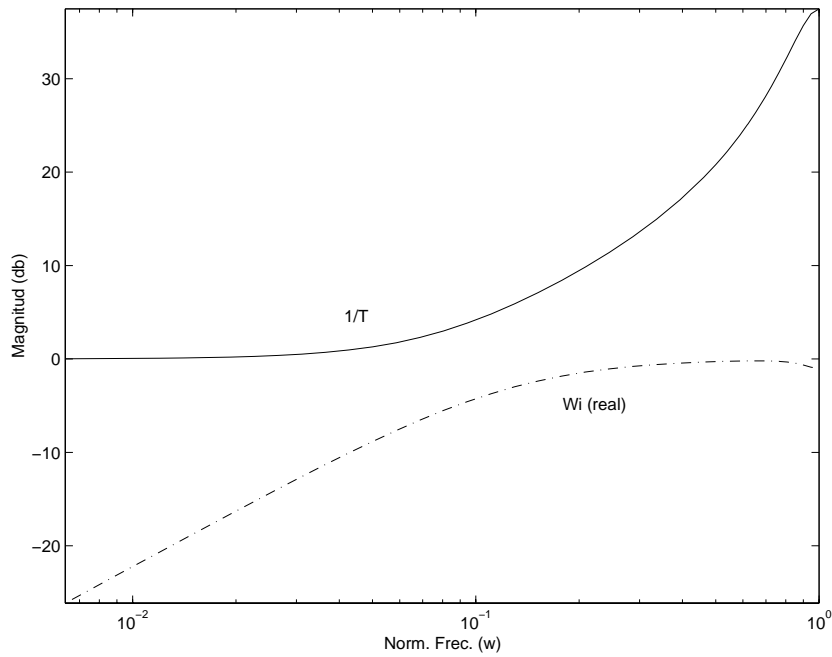
$$\|G(e^{jwT_s})\| = \bar{\sigma}(G(e^{jwT_s})) \quad (5.31)$$

donde  $\bar{\sigma}$  denota el valor singular máximo, se puede generalizar el teorema de la pequeña ganancia para sistemas MIMO como

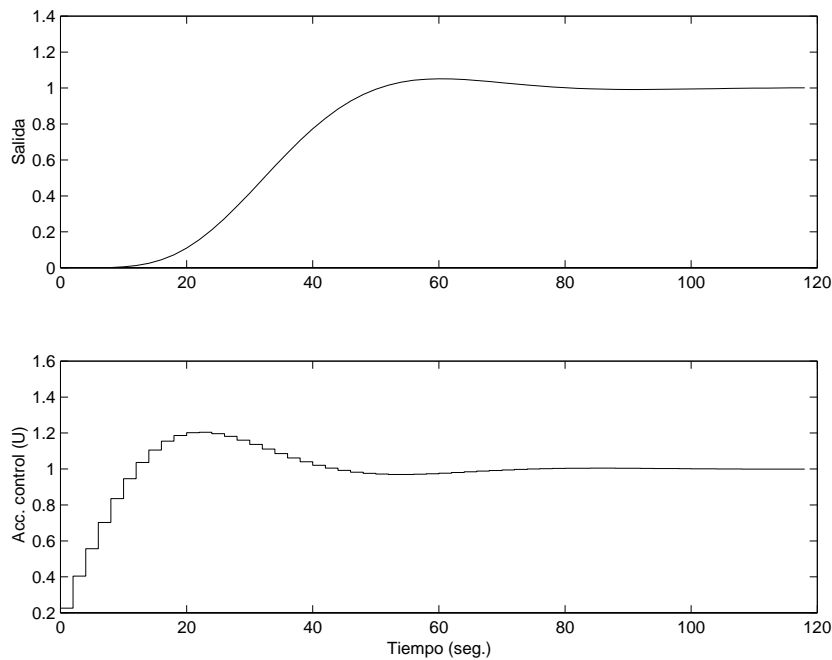
$$\bar{\sigma}(M(e^{-jwT_s}))\bar{\sigma}(\Delta(e^{-jwT_s})) < 1 \quad \forall w \in [0, \pi/T_s], z^{-1} = e^{-jwT_s} \quad (5.32)$$

donde  $\Delta(z^{-1})$  es una matriz de transferencia, en cuyo caso la magnitud de su respuesta en frecuencia está acotada por unos límites impuestos al valor singular máximo  $\bar{\sigma}(\Delta(e^{-jwT_s}))$ .

Por tanto, el estudio de los valores singulares de las funciones de sensibilidad  $S$  y de sensibilidad complementaria  $T$ , pueden determinar los márgenes de



(a) Inversa de la función de sensibilidad complementaria y límite de la incertidumbre



(b) Respuesta en bucle cerrado y acción de control.

Figura 5.17: La condición suficiente del SGT se cumple para 2 componentes.

robustez del sistema. Hay que recordar que estos tests basados en los valores singulares son solamente condición suficiente para la robustez del sistema, ofreciendo unos márgenes muy conservativos (Aström *et al.*, 1996). Para obtener unos resultados más aproximados a estos márgenes reales se utiliza el  $\mu$ -análisis o valor singular estructurado, donde el bloque  $\Delta$  no es una matriz de transferencia cualquiera, sino que se define con una estructura *fija*, utilizando información referente a la forma en la que el comportamiento del proceso real puede variar (Skogestad and Postlethwaite, 1996).

Notar que la representación de los valores singulares no indica por sí misma si el sistema en bucle cerrado es estable. Esto debe ser comprobado de forma independiente (calculando los polos de bucle cerrado, como en el anexo A). Si el sistema es estable, entonces estos diagramas sí que pueden ser utilizados para indicar si la estabilidad es *frágil* o *robusta*, frente a ciertas perturbaciones.

Para un proceso SISO, no existe diferencia entre colocar la incertidumbre multiplicativa ( $I + \Delta$ ) a la entrada o a la salida del proceso, mientras que para un sistema MIMO esta diferencia sí que existe debido a que la multiplicación de matrices no es conmutativa<sup>3</sup>  $G(I + \Delta) \neq (I + \Delta)G$ . Por ello en el caso multivariable se pueden construir las funciones de sensibilidad desde el punto de vista de la entrada o de la salida.

Los límites para la estabilidad robusta definidos por las funciones de sensibilidad S y T, se resumen entonces en:

- Incertidumbre multiplicativa a la entrada:

$$\bar{\sigma}(\Delta_I(e^{-jwT_s})) < \frac{1}{\bar{\sigma}(T_I(e^{-jwT_s}))}, \quad \forall w \in [0, \pi/T_s], \quad z^{-1} = e^{-jwT_s} \quad (5.33)$$

- Incertidumbre multiplicativa a la salida:

$$\bar{\sigma}(\Delta_O(e^{-jwT_s})) < \frac{1}{\bar{\sigma}(T_O(e^{-jwT_s}))}, \quad \forall w \in [0, \pi/T_s], \quad z^{-1} = e^{-jwT_s} \quad (5.34)$$

- Incertidumbre multiplicativa inversa a la entrada:

$$\bar{\sigma}(\Delta_{II}(e^{-jwT_s})) < \frac{1}{\bar{\sigma}(S_I(e^{-jwT_s}))}, \quad \forall w \in [0, \pi/T_s], \quad z^{-1} = e^{-jwT_s} \quad (5.35)$$

---

<sup>3</sup>Una visión práctica de esta diferencia en sistemas multivariables es que los márgenes de robustez pueden variar sensiblemente desde el punto de vista de los sensores o de los actuadores

- Incertidumbre multiplicativa inversa a la salida:

$$\bar{\sigma}(\Delta_{IO}(e^{-jwT_s})) < \frac{1}{\bar{\sigma}(S_O(e^{-jwT_s}))}, \quad \forall w \in [0, \pi/T_s], \quad z^{-1} = e^{-jwT_s} \quad (5.36)$$

donde  $S_I$  y  $S_O$  son las funciones de sensibilidad y  $T_I$  y  $T_O$  son las funciones de sensibilidad complementaria del sistema MIMO definidas en (5.2) y (5.4).

A modo de ejemplo, se utiliza el proceso multivariable definido en (3.11). En la figura 5.19, se representan las funciones de sensibilidad calculadas a la salida del proceso. En ellas se observa, cómo el margen de robustez se hace mayor según se eliminan componentes del controlador multivariable. El comportamiento en bucle cerrado es el esperado, donde se observa que la calidad del control disminuye conforme se varía un parámetro del controlador que influye sobre la estabilidad robusta (figura 5.18).

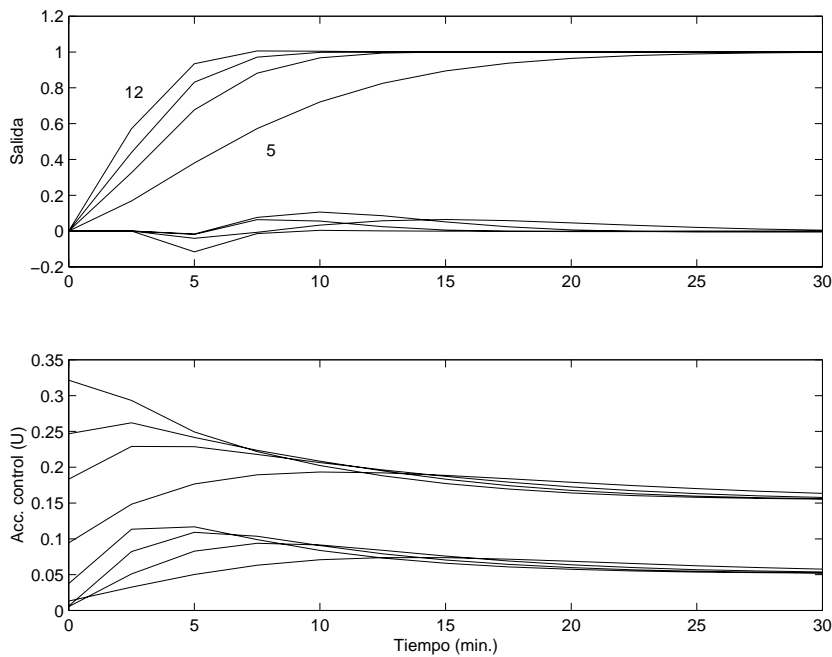
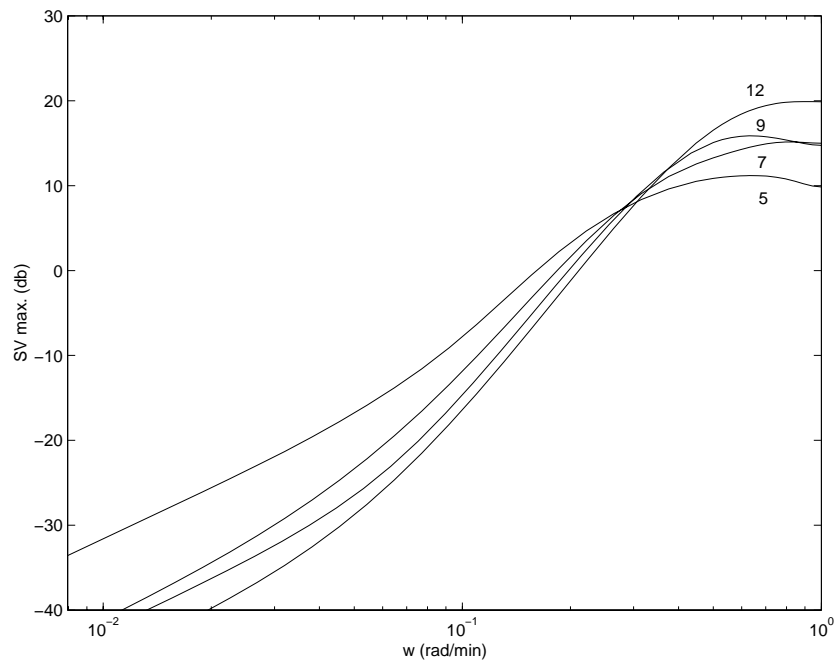


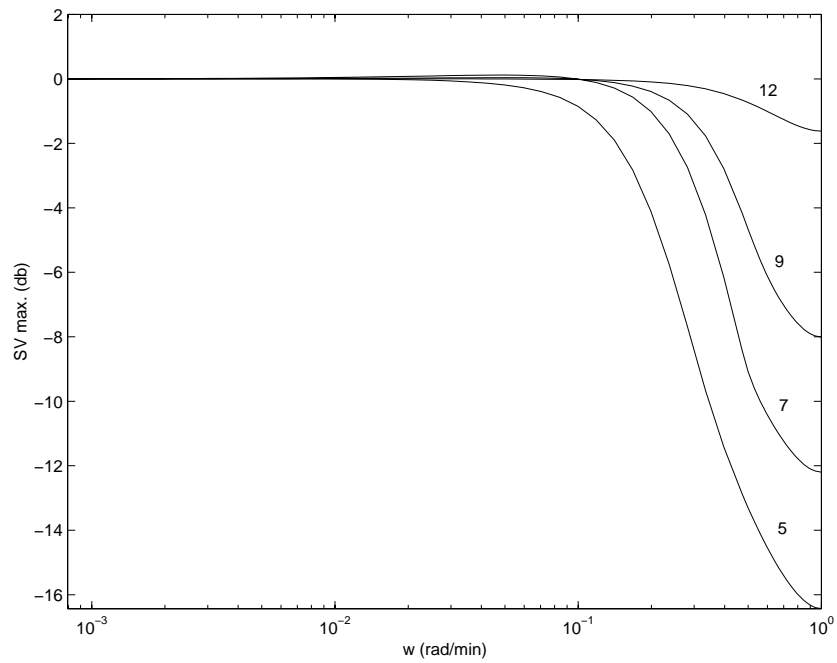
Figura 5.18: Respuesta en bucle cerrado para distintas componentes principales.

## 5.8 Resumen

En este capítulo se presenta un análisis de robustez para el GPC clásico y para el PC-GPC, utilizando como medidas de robustez las funciones de sensibilidad y de sensibilidad complementaria.



(a) Función de sensibilidad



(b) Función de sensibilidad complementaria

Figura 5.19: Funciones de sensibilidad para el proceso  $2 \times 2$  según se eliminan componentes principales.



El estudio está basado en la interpretación polinomial que se puede realizar del controlador GPC, resultando en un controlador lineal de dos grados de libertad.

Para el GPC clásico se estudia cómo influyen los diferentes parámetros del controlador en la estabilidad robusta del sistema, extrayendo conclusiones respecto a la influencia que los horizontes de predicción y control, factores de ponderación, etc, tienen sobre los márgenes de robustez del sistema.

En cuanto al PC-GPC y el nuevo parámetro NPC, se concluye que el efecto que produce la eliminación de componentes principales sobre la estabilidad robusta del sistema es el mismo que el que produce en un GPC el uso del factor de ponderación  $\lambda$ : a menor número de componentes (mayor ponderación) aumenta el margen de robustez.

# Capítulo 6

## Diseño de GPC estable con componentes principales

La estabilidad nominal de un bucle cerrado es relativamente fácil de alcanzar sin más que seleccionar los parámetros de diseño de un GPC y, asumiendo que el modelo es correcto, comprobar que con estos parámetros el bucle cerrado es estable. De hecho esta es la forma de trabajo de la mayoría de aplicaciones de control predictivo en la industria.

Pero en un contexto de control adaptativo donde un diseño del controlador "on-line" es necesario, la estabilidad del bucle cerrado es un reto que cualquier diseño se debería plantear. A pesar de la popularidad del controlador GPC no existe, hasta el momento, una teoría clara para garantizar la estabilidad del bucle cerrado en función de sus parámetros de diseño.

De hecho la estabilidad asintótica está garantizada sólo para algunos casos especiales (por ejemplo cuando ambos horizontes, el de predicción y el de control, son infinitos, o cuando  $N_u = 1$ , el horizonte de predicción es infinito y el proceso es estable). En general, es fácil encontrar ejemplos para los cuales un GPC no puede controlar el proceso (basta con colocar una pareja polo-cero cercanos fuera del círculo unidad).

En el controlador PC-GPC, se sustituye el parámetro de diseño  $\lambda$  por el número de componentes principales. El hecho de incluir más o menos componentes en este controlador, tampoco asegura la estabilidad del bucle cerrado. En este capítulo se estudian cuáles son, hasta el momento, las alternativas propuestas en el ámbito del GPC para obtener un diseño nominal estable y cómo se pueden traducir algunas de ellas al controlador PC-GPC.

Como solución al problema de la estabilidad, diferentes autores han propuesto algunas variantes del GPC que garantizan la estabilidad del bucle cerrado:

- *Stabilizing input-output receding horizon control* (SIORHC) (Mosca and Zhang, 1992), (Mosca, 1995)
- *Constrained receding-horizon predictive control* (CRHPC) (Clarke and Scattolini, 1991)
- *Infinite horizon generalized predictive control* ( $\text{GPC}^\infty$ ) (Sokaert and Clarke, 1993a), (Sokaert, 1997)
- *Stable generalized predictive control* (SGPC) (Kouvaritakis *et al.*, 1992), (Kouvaritakis and Rossiter, 1993)
- *Generalized predictive control with end-point state weighting* (GPCW) (Demircioglu and Clarke, 1992), (Demircioglu and Clarke, 1993)
- *Receding-horizon predictive control with exponential weighting* (Yoon and Clarke, 1993b)

Tanto el algoritmo de control CRHPC como SIORHC imponen restricciones sobre la salida, haciendo que ésta sea igual a la referencia en un horizonte más allá del horizonte de predicción. Esto fuerza a que el índice de coste sea monótono decreciente (Sokaert and Clarke, 1994). En la variante SGPC, se diseña un bucle cerrado estable antes de aplicar la estrategia de control predictivo. Estos tres diseños son, de hecho, equivalentes aunque tienen diferentes propiedades numéricas debido a su diferente implementación (Rossiter and Kouvaritakis, 1994).

El resto de aproximaciones también fuerzan a que el índice de coste decrezca monótonamente utilizando técnicas definidas para espacio de estados, incluyendo en el índice de coste una ponderación del vector de estados al final del horizonte de predicción (GPCW) o empleando ponderación exponencial en los errores y acciones de control (Yoon and Clarke, 1993b). Este incremento secuencial de la ponderación según el instante de predicción conduce a una mejora de las prestaciones del controlador.

En este capítulo la atención se centra sobre los controladores CRHPC y  $\text{GPC}^\infty$ , dado que su filosofía de diseño es muy parecida. Puesto que el planteamiento de ambos controladores es similar, es posible abordar los dos problemas desde la alternativa de las componentes principales.

## 6.1 Constrained Receding-Horizon Predictive Control (CRHPC)

(Clarke and Scattolini, 1991), desarrollaron una variación del GPC estándar denominada *Constrained Receding-Horizon Predictive Control (CRHPC)*, la cual permite asegurar la estabilidad del bucle de control bajo ciertas condiciones. La idea básicamente consiste en calcular una secuencia de acciones de control futuras para forzar a que la salida predicha sea exactamente igual a la referencia durante un horizonte "m" suficientemente largo tras el horizonte de predicción (figura 6.1). En realidad, algunos grados de libertad del controlador se utilizan para forzar esta igualdad mientras que el resto se utilizan para minimizar el índice de coste a lo largo del horizonte de predicción.

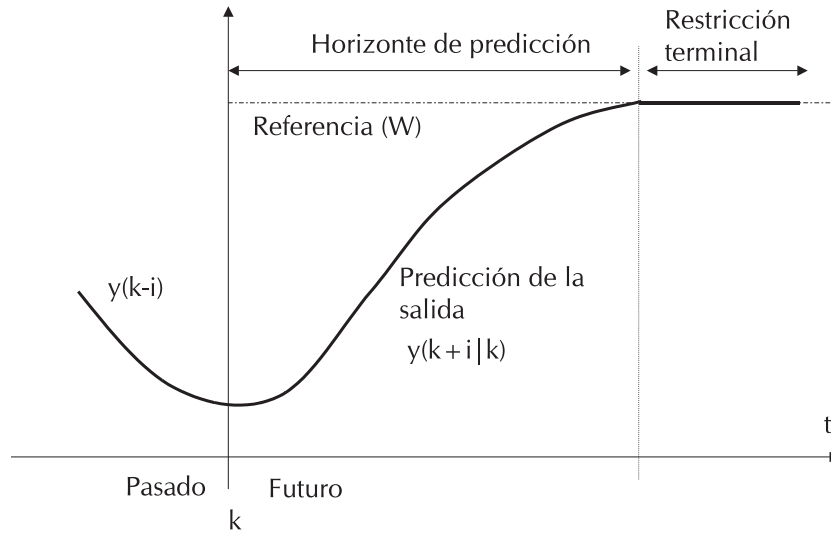


Figura 6.1: Restricción terminal.

Partiendo del modelo CARIMA descrito por:

$$y(k) = \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})}u(k-1) + \frac{T(z^{-1})}{\Delta A(z^{-1})}\xi(k) \quad (6.1)$$

El problema de control predictivo se plantea del mismo modo que en el GPC estándar, utilizando el mismo índice cuadrático

$$J(k) = \sum_{i=N_1}^{N_2} \alpha_i [y(k+i|k) - w(k+i|k)]^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda_j [\Delta u(k+j-1|k)]^2 \quad (6.2)$$

pero en este caso el problema de minimización está sujeto a nuevas restricciones planteadas del siguiente modo ( $N_1 = 1, N_2 = N$ )<sup>1</sup>

$$y(k + N + i) = w(k + N), \quad i \in [1 \dots m] \quad (6.3)$$

$$\Delta u(k + N_u + j) = 0, \quad j \geq 0 \quad (6.4)$$

Utilizando el modelo de predicción que se usa en el GPC

$$y(k + i|k) = G_i(z^{-1})\Delta u(k + i - 1) + f(k + i|k) \quad (6.5)$$

$$f(k + i|k) = \frac{F_i(z^{-1})}{T(z^{-1})}y(k) + \frac{\Gamma_i(z^{-1})}{T(z^{-1})}\Delta u(k - 1) \quad (6.6)$$

y con los polinomios  $G_i$ ,  $\Gamma_i$  y  $F_i$  calculados recursivamente para  $i = 1 \dots N$ , se predice la salida para todo el horizonte de predicción,

$$\begin{bmatrix} y(k + 1|k) \\ y(k + 2|k) \\ \vdots \\ y(k + N|k) \end{bmatrix} = G \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k + 1) \\ \vdots \\ \Delta u(k + N_u - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(k + 1|k) \\ f(k + 2|k) \\ \vdots \\ f(k + N|k) \end{bmatrix}$$

o bien

$$\mathbf{y}_{N \times 1} = G_{N \times N_u} \Delta \mathbf{u}_{N_u \times 1} + \mathbf{f}_{N \times 1} \quad (6.7)$$

donde

$$G = \begin{bmatrix} g_0 & 0 & \dots & 0 \\ g_1 & g_0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ g_{N-1} & g_{N-2} & \dots & g_{N-N_u} \end{bmatrix}$$

Y se extiende la predicción  $m$  instantes más allá de este horizonte,

$$\begin{bmatrix} y(k + N + 1|k) \\ y(k + N + 2|k) \\ \vdots \\ y(k + N + m|k) \end{bmatrix} = \tilde{G} \begin{bmatrix} \Delta u(k) \\ \Delta u(k + 1) \\ \vdots \\ \Delta u(k + N_u - 1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} f(k + N + 1|k) \\ f(k + N + 2|k) \\ \vdots \\ f(k + N + m|k) \end{bmatrix}$$

<sup>1</sup>En adelante, se asume un horizonte de predicción igual a  $N$ .

o bien

$$\tilde{\mathbf{y}}_{m \times 1} = \tilde{G}_{m \times N_u} \Delta \mathbf{u}_{N_u \times 1} + \tilde{\mathbf{f}}_{m \times 1} \quad (6.8)$$

donde

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} g_N & g_{N-1} & \cdots & g_{N+1-N_u} \\ g_{N+1} & g_N & \cdots & g_{N+2-N_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{N+m-1} & g_{N+m-2} & \cdots & g_{N+m+1-N_u} \end{bmatrix}$$

De esta forma, el problema de control predictivo se reduce a

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} J(\Delta \mathbf{u}) = (G\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w})^T \alpha (G\Delta \mathbf{u} + \mathbf{f} - \mathbf{w}) + \Delta \mathbf{u}^T \lambda \Delta \mathbf{u} \quad (6.9)$$

$$\text{sujeto a: } \tilde{G}\Delta \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{f}} = \tilde{\mathbf{w}} \quad (6.10)$$

donde  $\tilde{\mathbf{w}} = [ w(k+N|k) \quad w(k+N|k) \quad \dots \quad w(k+N|k) ]$ .

Una solución analítica a este problema de minimización puede ser calculada utilizando multiplicadores de Lagrange, produciendo el siguiente resultado

$$\Delta \mathbf{u} = \bar{G}[I - \tilde{G}^T M \tilde{G} \bar{G}] G^T \alpha (\mathbf{w} - \mathbf{f}) + \bar{G} \tilde{G}^T M (\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}) \quad (6.11)$$

donde

$$M_{m \times m} = (\tilde{G} \bar{G} \tilde{G}^T)^{-1} \quad (6.12)$$

$$\bar{G}_{N_u \times N_u} = (G^T \alpha G + \lambda)^{-1} \quad (6.13)$$

Como se observa, el resultado es bastante más complejo y con una carga computacional mayor, comparado con la solución de un GPC estándar. Hay que tener cuidado con la inversión de las matrices  $(G^T \alpha G + \lambda)$  y  $(\tilde{G} \bar{G} \tilde{G}^T)$  puesto que se pueden dar casos de mal condicionamiento. Este algoritmo, bajo ciertas propiedades, es capaz de estabilizar cualquier tipo de proceso (inestable, fase no mínima, etc). Dichas propiedades se basan en la idea de que, si existe una solución y el horizonte de predicción es suficientemente largo como para cubrir el régimen transitorio de la salida, la función de coste decrece monótonamente

(siempre que no existan perturbaciones y el modelo sea igual al proceso) y puede ser interpretada como una función de Lyapunov para garantizar estabilidad.

En concreto, se puede demostrar que el bucle cerrado es asintóticamente estable si (Scockaert and Clarke, 1993a), (Yoon and Clarke, 1995):

1.  $\alpha \geq 0, \lambda \geq 0,$
2.  $m = n_a,$
3.  $N_u \geq m,$
4.  $N \geq N_u + \max(n_b, n_a) - n_a$

donde<sup>2</sup>  $n_a = \deg(A(z^{-1})\Delta)$  y  $n_b = \deg(B(z^{-1}))$ .

Para probar la estabilidad se asume, que las perturbaciones son nulas y que el modelo es perfecto, es decir, que no existen diferencias entre el proceso y el modelo. La prueba se basa en demostrar que la función de coste asociada es monótona decreciente con el tiempo. Por simplicidad, se asumen unos factores de ponderación  $\alpha$  y  $\lambda$  constantes y un polinomio  $T(z^{-1}) = 1$ , aunque los resultados se pueden extender al caso general.

Considerando que la predicción  $y(k+N+m+1|k)$  puede ser calculada mediante

$$\begin{aligned} y(k+N+m+1|k) &= \frac{B(z^{-1})}{A(z^{-1})\Delta} \Delta u(k+N+m) \\ &= \frac{b_0 + \dots + b_{n_b} z^{-n_b}}{1 + a_1 z^{-1} + \dots + a_{n_a} z^{-n_a}} \Delta u(k+N+m) \end{aligned} \quad (6.14)$$

Dicha predicción se puede expresar como

$$\begin{aligned} y(k+N+m+1|k) &= -a_1 y(k+N+m|k) - a_2 y(k+N+m-1|k) - \dots \\ &\quad - a_{n_a} y(k+N+m-n_a+1|k) + \\ &\quad + b_0 \Delta u(k+N+m) + \dots + b_{n_b} \Delta u(k+N+m-n_b) \end{aligned} \quad (6.15)$$

---

<sup>2</sup>Asumiendo que  $A(z^{-1})\Delta$  y  $B(z^{-1})$  no poseen factores comunes.

Aplicando la acción calculada con la expresión (6.11), se cumplirá la restricción (6.3), por lo tanto y debido a la elección de  $m = n_a$

$$\begin{aligned} y(k + N + m|k) &= y(k + N + m - 1|k) = \dots \\ &= y(k + N + m - n_a + 1) = w(k + N|k) \end{aligned} \quad (6.16)$$

Además, puesto que

$$\begin{aligned} N &\geq N_u + \max(n_b, n_a) - n_a \geq N_u + n_b - n_a \rightarrow \\ \rightarrow N_u &\leq N + n_a - n_b = N + m - n_b \end{aligned} \quad (6.17)$$

se cumple, por (6.4), lo siguiente

$$\Delta u(k + N + m) = \Delta u(k + N + m - 1) = \dots = \Delta u(k + N + m - n_b) = 0 \quad (6.18)$$

Utilizando (6.16) y (6.18), y restando  $w(k + N|k)$  a ambos lados de (6.15)

$$\begin{aligned} y(k + N + m + 1|k) - w(k + N|k) &= (-a_1 - a_2 - \dots - a_{n_a})w(k + N|k) - \\ &- w(k + N|k) \\ &= -(1 + a_1 + \dots + a_{n_a})w(k + N|k) \\ &= 0 \end{aligned} \quad (6.19)$$

Concluyendo finalmente que

$$y(k + N + m + i|k) = w(k + N|k), \quad \forall i \quad (6.20)$$

Es decir, acorde con la selección propuesta para  $N_u$ ,  $N$  y  $m$ , se puede deducir que:

- El vector de acciones de control calculado en el instante  $k$ , no solo satisface la restricción terminal para los instantes  $k + N + 1 \dots k + N + m$  sino para cualquier instante posterior.
- El mínimo número de restricciones que hay que incluir para garantizar la estabilidad está determinado por  $n_a$ , siendo conveniente utilizar este valor para obtener unas matrices de menor tamaño y no realizar cálculos innecesarios.



Además, se observará una propiedad muy simple del modelo de predicción pero muy útil: si el vector de incrementos de acciones de control en el instante  $k + 1$  es la secuencia desplazada del vector de incrementos de control postulada en el instante  $k$ , entonces las predicciones de la salida realizadas en  $k + 1$  son las mismas que las predicciones realizadas en  $k$ . Es decir que

$$y(k + j|k + 1) = y(k + j|k) \quad (6.21)$$

Este resultado se utilizará para calcular un límite superior en el cambio del índice de coste de  $k$  a  $k + 1$ . Demostrando que este límite superior es negativo, entonces el índice de coste decrece monótonamente con el tiempo, condición necesaria para la estabilidad del bucle cerrado.

Con  $e(k) = y(k) - w(k)$ , el índice de coste (6.2) se puede escribir para el instante  $k$  como

$$J(k) = \sum_{i=1}^N \alpha e(k + i|k)^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u(k + j - 1|k)^2 \quad (6.22)$$

De la misma forma, el coste en el instante siguiente  $k + 1$  será

$$J(k + 1) = \sum_{i=1}^N \alpha e(k + i + 1|k + 1)^2 + \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u(k + j|k + 1)^2 \quad (6.23)$$

Además, si no existen perturbaciones, en base a (6.7), se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} y(k + i|k) &= f(k + i|k) + g_{i-1} \Delta u(k|k) + g_{i-2} \Delta u(k + 1|k) + \\ &+ \dots + g_0 \Delta u(k + i - 1|k), \quad \forall i \end{aligned} \quad (6.24)$$

donde  $f(k + i|k)$  es la predicción de la respuesta libre del sistema y  $g_i$  es el  $i$ -ésimo coeficiente de la respuesta en escalón del sistema.

En el instante  $k + 1$ , se cumple que

$$\begin{aligned} y(k + i|k + 1) &= f(k + i|k + 1) + g_{i-2} \Delta u(k + 1|k + 1) + \\ &+ g_{i-3} \Delta u(k + 2|k + 1) + \dots + g_0 \Delta u(k + i - 1|k + 1), \quad \forall i \end{aligned} \quad (6.25)$$

y puesto que la predicción de la respuesta libre del sistema en el instante  $k+1$ , es la realizada en el instante  $k$ , más la respuesta forzada que se produce por haber aplicado la acción de control  $\Delta u(k)$ , es decir

$$f(k+i|k+1) = f(k+i|k) + g_{i-1}\Delta u(k|k), \quad \forall i \quad (6.26)$$

Es posible ahora, reescribir la expresión (6.25) como

$$\begin{aligned} y(k+i|k+1) &= f(k+i|k) + g_{i-1}\Delta u(k|k) + g_{i-2}\Delta u(k+1|k+1) \\ &+ g_{i-3}\Delta u(k+2|k+1) + \dots + g_0\Delta u(k+i-1|k+1), \quad \forall i \end{aligned} \quad (6.27)$$

Dado el vector de acciones de control óptimo calculado para el instante  $k$

$$\Delta \mathbf{u} = [ \Delta u(k|k) \quad \Delta u(k+1|k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k) ]^T \quad (6.28)$$

suponiendo que en el instante  $k+1$ , se aplica la siguiente versión desplazada del vector  $\Delta \mathbf{u}$  anterior

$$\Delta \mathbf{u}^* = [ \Delta u(k+1|k) \quad \Delta u(k+2|k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k) \quad 0 ]^T \quad (6.29)$$

Entonces, las predicciones de la salida en el instante  $k+1$  utilizando la expresión (6.27), si se aplica  $\Delta u(k+1)^*$  serán

$$\begin{aligned} y^*(k+i|k+1) &= f(k+i|k) + g_{i-1}\Delta u(k|k) + g_{i-2}\Delta u(k+1|k) + \\ &+ g_{i-3}\Delta u(k+2|k) + \dots + g_0\Delta u(k+i-1|k), \quad \forall i \end{aligned} \quad (6.30)$$

Y comparando las expresiones (6.24) y (6.30), el hecho de aplicar un vector de acciones de control de la forma (6.29), implica que

$$y^*(k+i|k+1) = y(k+i|k) \rightarrow e^*(k+i|k+1) = e(k+i|k), \quad \forall i \quad (6.31)$$

Por lo tanto, el coste en el instante  $k + 1$  será

$$\begin{aligned} J^*(k+1) &= \sum_{i=1}^N \alpha e^*(k+i+1|k+1)^2 + \sum_{i=j}^{N_u} \lambda \Delta u^*(k+j|k+1)^2 \\ &= \sum_{i=2}^{N+1} \alpha e(k+i|k)^2 + \sum_{j=2}^{N_u+1} \lambda \Delta u(k+j-1|k)^2 \end{aligned} \quad (6.32)$$

y la diferencia de costes entre los instantes  $k$  y  $k + 1$  se podrá expresar así

$$\begin{aligned} J^*(k+1) - J(k) &= \sum_{i=2}^{N+1} \alpha e(k+i|k)^2 + \sum_{j=2}^{N_u+1} \lambda \Delta u(k+j-1|k)^2 - \\ &\quad - \sum_{i=1}^N \alpha e(k+i|k)^2 - \sum_{j=1}^{N_u} \lambda \Delta u(k+j-1|k)^2 \\ &= \alpha e(k+N+1|k)^2 - \alpha e(k+1|k)^2 - \lambda \Delta u(k|k)^2 \end{aligned} \quad (6.33)$$

Puesto que en  $k$  se aplicó la secuencia óptima  $\Delta \mathbf{u}$  calculada en (6.11), las restricciones (6.3) se cumplen. Utilizando la propiedad (6.20), es posible escribir estas restricciones como

$$e(k+N+i|k) = 0, \quad \forall i \geq 1 \quad (6.34)$$

$$\Delta u(k+N_u+j|k) = \Delta u^*(k+N_u+j|k+1) = 0, \quad \forall j > 0 \quad (6.35)$$

Por lo que, la expresión (6.33) queda

$$J^*(k+1) - J(k) = -\alpha e(k+1|k)^2 - \lambda \Delta u(k|k)^2 \leq 0 \quad (6.36)$$

lo que implica, al ser esta diferencia siempre negativa, que  $J^*(k+1) \leq J(k)$ .

Al ser  $\Delta \mathbf{u}^*$  una versión desplazada de  $\Delta \mathbf{u}$ , se deduce que dicho vector de acciones de control cumple con la restricción terminal según (6.20). Pero  $\Delta \mathbf{u}^*$ , no es la solución al problema de optimización en el instante  $k + 1$ . El vector óptimo de acciones de control en ese instante sí que minimiza el índice de coste  $J(k+1)$ , y por lo tanto se puede concluir que

$$J(k+1) \leq J^*(k+1) \quad (6.37)$$

y de esta forma seguro que se cumple

$$J(k+1) - J(k) \leq -\alpha e(k+1|k)^2 - \lambda \Delta u(k|k)^2 \leq 0 \quad (6.38)$$

Como el índice de coste es, por definición, no negativo, la secuencia  $J(k)$  decrece monótonamente y converge a cero cuando el sistema alcanza la referencia.

Y puesto que  $\alpha \geq 0$ ,  $\lambda > 0$  y no existen diferencias entre modelo y proceso ( $e(k+1|k) = e(k+1)$ ), ello implica que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k+1) = 0 \quad (6.39)$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u(k) = 0 \quad (6.40)$$

Para el caso especial en el que no existe ponderación de la acción de control ( $\lambda = 0$ ), suponiendo que el sistema ha alcanzado el régimen permanente, se puede concluir que

$$J(k+1) = J^*(k+1) = J(k) \quad (6.41)$$

Puesto que:

- el vector  $\Delta \mathbf{u}^*$  se obtiene desplazando el vector  $\Delta \mathbf{u}$
- los valores para el índice de coste que producen ambos vectores de incrementos de control son iguales
- la solución óptima es única en cada instante

se deduce que todos los incrementos de la acción de control postulados en régimen permanente deben ser cero

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u(k) = 0 \quad (6.42)$$

garantizando que la secuencia de valores  $J(k)$  converge a cero, y que tanto  $\Delta u(k) \rightarrow 0$ , como  $e(k) \rightarrow 0$  cuando  $t \rightarrow \infty$ .

## 6.2 Cálculo del controlador CRHPC mediante la SVD

Otro método para obtener la solución analítica consiste en plantear el problema de minimización con restricciones como la solución de dos sistemas de ecuaciones lineales:

1. Por un lado se debe cumplir la restricción terminal

$$\tilde{\mathbf{w}}_{m \times 1} = \tilde{G}_{m \times N_u} \Delta \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{f}}_{m \times 1} \quad (6.43)$$

o lo que es lo mismo, se debe resolver el sistema compatible indeterminado ( $m \leq N_u$ ) de ecuaciones

$$\tilde{G}_{m \times N_u} \Delta \mathbf{u} = (\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}})_{m \times 1} \quad (6.44)$$

2. Por otro, se debe resolver el sistema de ecuaciones incompatible ( $N > N_u$ ) que conduce a la minimización del índice de coste:

$$G_{N \times N_u} \Delta \mathbf{u} = (\mathbf{w} - \mathbf{f})_{N \times 1} \quad (6.45)$$

Este sistema de ecuaciones se resolverá calculando una solución de mínimos cuadrados pero restringida por la restricción terminal (6.43).

Para resolver el sistema de ecuaciones indeterminado (6.43), se pueden generar todas sus posibles soluciones expresando la solución general  $\Delta \mathbf{u}$  de este sistema como

$$\{\Delta \mathbf{u} \in \mathbb{R}^{N_u} \mid \tilde{G} \Delta \mathbf{u} = (\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}})\} = \{\Delta \mathbf{u}_p + \mathbf{z} \mid \mathbf{z} \in \mathcal{N}(\tilde{G})\} \quad (6.46)$$

donde:

- $\Delta \mathbf{u}_p$  es una solución particular del sistema de ecuaciones.
- $\mathbf{z}$  es la solución general del sistema homogéneo de ecuaciones asociado

$$\mathcal{N}(\tilde{G}) = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^{N_u} \mid \tilde{G} \mathbf{z} = 0\} \quad (6.47)$$

siendo  $\mathcal{N}(\tilde{G})$  el espacio nulo de la matriz  $\tilde{G}$ .

De esta forma, si  $(\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}) = \tilde{G}\Delta\mathbf{u}_p$  y  $\mathbf{z} \in \mathcal{N}(\tilde{G})$ , entonces

$$(\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}) = \tilde{G}(\Delta\mathbf{u}_p + \mathbf{z}) \quad (6.48)$$

por lo que  $\mathbf{z}$  representa, de algún modo, los grados de libertad en la solución del sistema (6.43) y caracteriza las diferentes soluciones que producen el mismo resultado.

### 6.2.1 Obtención de la solución particular

Una solución particular  $\Delta\mathbf{u}_p$  del sistema (6.43), muy apropiada para control, puede ser la denominada *solución de mínima norma*, o solución del sistema de ecuaciones que minimiza  $\|\Delta\mathbf{u}\|_2^2$ :

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_p &= \arg \min_{\Delta\mathbf{u}} \Delta\mathbf{u}^T \Delta\mathbf{u} \\ &\text{sujeto a: } \tilde{G}\Delta\mathbf{u} = (\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}) \end{aligned} \quad (6.49)$$

La solución de este problema es (ver apéndice C):

$$\begin{aligned} \Delta\mathbf{u}_p &= \tilde{G}^T(\tilde{G}\tilde{G}^T)^{-1}(\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}) \\ &= \tilde{G}^+(\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}) \end{aligned} \quad (6.50)$$

donde  $\tilde{G}^+$  es la pseudoinversa de  $\tilde{G}$ , también denominada inversa derecha de  $\tilde{G}$ .

Para calcular  $\tilde{G}_{N_u \times m}^+$ , se utiliza la descomposición SVD de la matriz  $\tilde{G}$

$$\tilde{G}^+ = V\Sigma^+U^T \quad (6.51)$$

Además, haciendo uso de dicha descomposición es posible calcular el espacio nulo  $\mathcal{N}(\tilde{G})$ . Al tener más columnas que filas, la matriz  $\tilde{G}$  tan sólo posee  $m$  valores singulares distintos de cero. Los vectores  $[\mathbf{v}_{m+1}, \dots, \mathbf{v}_{N_u}]$  de la matriz  $V_{N_u \times N_u}$  asociados a los valores singulares nulos forman una base para  $\mathcal{N}(\tilde{G})$ .

Es decir, es posible expresar cualquier vector de acciones de control  $\Delta\mathbf{u}$  que cumpla  $\tilde{G}\Delta\mathbf{u} = 0$ , como una combinación lineal de estos vectores, puesto que

$$\tilde{G}\mathbf{v}_i = \sigma_i\mathbf{u}_i = 0, \quad \forall i \in [m+1 \dots N_u] \quad (6.52)$$

Por lo tanto, definiendo la matriz  $H$  como

$$H = [ \mathbf{v}_{\mathbf{m}+1} \ \dots \ \mathbf{v}_{\mathbf{N}_u} ] \quad (6.53)$$

donde  $\mathbf{v}_i$  es el  $i$ -ésimo vector de la matriz  $V$  proveniente de la descomposición SVD de la matriz  $\tilde{G}$ , es posible expresar el espacio nulo definido en (6.47) como

$$\begin{aligned} \mathbf{z} &= \mathbf{v}_{\mathbf{m}+1} \Delta u_{f_1} + \mathbf{v}_{\mathbf{m}+2} \Delta u_{f_2} + \dots + \mathbf{v}_{\mathbf{N}_u} \Delta u_{f_{N_u-m}} \\ &= H_{N_u \times N_u-m} \Delta \mathbf{u}_f \end{aligned} \quad (6.54)$$

y el vector  $\Delta \mathbf{u}_f$  de  $(N_u - m) \times 1$  representa el conjunto de variables libres o grados de libertad en la solución del sistema (6.43), que pueden ser usadas para satisfacer otras especificaciones, como por ejemplo, minimizar el índice de coste.

### 6.2.2 Obtención de la solución homogénea

Una vez calculada la solución particular  $\Delta \mathbf{u}_p$  y la matriz  $H$ , se puede obtener el vector  $\Delta \mathbf{u}_f$ , sustituyendo la solución general  $(\Delta \mathbf{u}_p + H \Delta \mathbf{u}_f)$  en el índice

$$\begin{aligned} J(\Delta \mathbf{u}_f) &= \left( G(\Delta \mathbf{u}_p + H \Delta \mathbf{u}_f) + \mathbf{f} - \mathbf{w} \right)^T \alpha \left( G(\Delta \mathbf{u}_p + H \Delta \mathbf{u}_f) + \mathbf{f} - \mathbf{w} \right) + \\ &+ (\Delta \mathbf{u}_p + H \Delta \mathbf{u}_f)^T \lambda (\Delta \mathbf{u}_p + H \Delta \mathbf{u}_f) \end{aligned} \quad (6.55)$$

Minimizando para el conjunto de variables *libres*  $\Delta \mathbf{u}_f$

$$\begin{aligned} \nabla J(\Delta \mathbf{u}_f) &= 0 \\ &= 2(GH)^T \alpha [GH \Delta \mathbf{u}_f - (\mathbf{w} - \mathbf{f} - G \Delta \mathbf{u}_p)] + 2\lambda H^T (\Delta \mathbf{u}_p + H \Delta \mathbf{u}_f) \end{aligned} \quad (6.56)$$

se llega a

$$\Delta \mathbf{u}_f = (H^T (G^T \alpha G + \lambda) H)^{-1} [(GH)^T \alpha (\mathbf{w} - \mathbf{f}) - H^T (G^T \alpha G + \lambda) \Delta \mathbf{u}_p] \quad (6.57)$$

y la ley de control final puede expresarse como

$$\begin{aligned}
\Delta \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{u}_p + H \Delta \mathbf{u}_f \\
&= \Delta \mathbf{u}_p + H(H^T(G^T \alpha G + \lambda)H)^{-1} [(GH)^T \alpha (\mathbf{w} - \mathbf{f}) - H^T(G^T \alpha G + \lambda) \Delta \mathbf{u}_p] \\
&= MG^T \alpha (\mathbf{w} - \mathbf{f}) + [I - M(G^T \alpha G + \lambda)] \tilde{G}^+ (\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}})
\end{aligned} \tag{6.58}$$

donde

$$M = H(H^T(G^T \alpha G + \lambda)H)^{-1} H^T \tag{6.59}$$

Este resultado, también más complejo que la solución analítica del GPC original, tan solo requiere la inversión de la matriz  $(H^T(G^T \alpha G + \lambda)H)$ .

### 6.3 PC-GPC estable

La restricción de tipo igualdad (6.3) impuesta en el algoritmo CRHPC puede ser utilizada en el diseño del controlador predictivo basado en componentes principales. Una vez obtenida la solución particular (6.50) expresada en forma de *mínima norma*, el resto de variables libres representan los grados de libertad disponibles para minimizar el índice de coste. Transformando el problema al plano de las componentes principales, se tienen estos mismos grados de libertad, pero esta vez ordenados de mayor a menor influencia en la minimización. Utilizando los criterios expuestos en el apartado 3.3, se puede diseñar un controlador que garantiza la estabilidad nominal del bucle cerrado eliminando aquellas componentes principales que tienen un efecto despreciable en las prestaciones del controlador. De nuevo, en este tipo de diseño se prescinde del factor de ponderación  $\lambda$  y se consigue el mismo efecto abordando el problema desde una perspectiva más sencilla.

Partiendo del índice de coste (6.55) eliminando el factor de ponderación de las acciones de control, y siendo  $\alpha = Q^T Q$ , es posible reescribir dicho índice como

$$\begin{aligned}
J(\Delta \mathbf{u}_f) &= \|QG(\Delta \mathbf{u}_p + H\Delta \mathbf{u}_f) - Q(\mathbf{w} - \mathbf{f})\|_2^2 \\
&= \|QGH\Delta \mathbf{u}_f - Q(\mathbf{w} - \mathbf{f} - G\Delta \mathbf{u}_p)\|_2^2 \\
&= \|QGH\Delta \mathbf{u}_f - Q\tilde{\mathbf{e}}\|_2^2
\end{aligned} \tag{6.60}$$

siendo  $\tilde{\mathbf{e}} = (\mathbf{w} - \mathbf{f} - G\Delta \mathbf{u}_p)$ .



Este problema de mínimos cuadrados se puede solucionar ahora aplicando la descomposición SVD a la matriz  $(QGH)_{N \times (N_u - m)}$

$$QGH = U\Sigma V^T = U \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} V^T \quad (6.61)$$

Sustituyendo dicha descomposición en el índice (6.60) se obtiene

$$\begin{aligned} J(\Delta \mathbf{u}_f) &= \left\| U \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} V^T \Delta \mathbf{u}_f - Q\tilde{\mathbf{e}} \right\|_2^2 \\ &= \left\| \begin{bmatrix} S \\ 0 \end{bmatrix} V^T \Delta \mathbf{u}_f - \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} \right\|_2^2 \end{aligned} \quad (6.62)$$

donde se ha establecido una partición para el vector  $U^T Q\tilde{\mathbf{e}}$  según

$$\begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 \\ \mathbf{g}_2 \end{bmatrix} = U^T Q\tilde{\mathbf{e}} \quad (6.63)$$

y  $\mathbf{g}_1 \in \mathbb{R}^{N_u - m}$  y  $\mathbf{g}_2 \in \mathbb{R}^{N - N_u + m}$ .

Llamando  $\mathbf{p} = V^T \Delta \mathbf{u}_f$ , se obtienen las nuevas componentes principales que resultan de minimizar el índice

$$J(\mathbf{p}) = \| S\mathbf{p} - \mathbf{g}_1 \|_2^2 + \| \mathbf{g}_2 \|_2^2 \quad (6.64)$$

La solución a este problema es trivial

$$\mathbf{p} = S^{-1} \mathbf{g}_1 \quad (6.65)$$

La solución original para  $\Delta \mathbf{u}_f$  se recupera como

$$\Delta \mathbf{u}_f = V\mathbf{p} \quad (6.66)$$

y la solución final se construye utilizando (6.46) y (6.66)

$$\Delta \mathbf{u} = \Delta \mathbf{u}_p + HV\mathbf{p} \quad (6.67)$$

Para calcular esta solución hay que realizar dos descomposiciones SVD de dos matrices distintas. La primera se realiza de la matriz  $\tilde{G}$ , la cual procede de la restricción, y la segunda de la matriz  $QGH$  proveniente del índice de coste. Una ventaja importante de este algoritmo es que para conseguir diferentes dinámicas de bucle cerrado tan sólo hay que eliminar componentes para construir la solución final. Sin embargo, en el algoritmo CRHPC calculado como (6.11) o como (6.58), para conseguir este mismo efecto, habría que variar el parámetro  $\lambda$  y por tanto rehacer todos los cálculos matriciales.

El bucle cerrado bajo el PC-GPC estable es asintóticamente estable si (Sanchis *et al.*, 2002):

1.  $\alpha \geq 0$ ,
2.  $m = n_a$ ,
3.  $N_u \geq m$ ,
4.  $N \geq N_u + \max(n_b, n_a) - n_a$

donde<sup>3</sup>  $n_a = \deg(A(z^{-1})\Delta)$  y  $n_b = \deg(B(z^{-1}))$ .

Asumiendo que:

- No existen diferencias entre proceso y modelo.
- Se aplica un factor de ponderación  $\alpha$  constante.
- En el instante  $k$  se aplica el vector de incrementos de la acción de control  $\Delta \mathbf{u}$  calculado según (6.67):

$$\Delta \mathbf{u} = [ \Delta u(k|k) \quad \Delta u(k+1|k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k) ]^T \quad (6.68)$$

- En el instante  $k+1$  se aplica esta misma secuencia, pero desplazada, tal que

$$\Delta \mathbf{u}^* = [ \Delta u(k+1|k) \quad \Delta u(k+2|k) \quad \dots \quad \Delta u(k+N_u-1|k) \quad 0 ]^T \quad (6.69)$$

---

<sup>3</sup>Asumiendo que  $A(z^{-1})\Delta$  y  $B(z^{-1})$  no poseen factores comunes.

Un desarrollo similar al del controlador CRHPC, conduce a la siguiente expresión

$$\begin{aligned} J^*(k+1) - J(k) &= \sum_{i=2}^{N+1} \alpha e(k+i|k)^2 - \sum_{i=1}^N \alpha e(k+i|k)^2 \\ &= \alpha e(k+N+1|k)^2 - \alpha e(k+1|k)^2 \end{aligned} \quad (6.70)$$

Puesto que la solución  $\Delta \mathbf{u}$  cumple con la restricción de tipo igualdad, y se ha escogido estratégicamente el valor de  $m$  como  $n_a$ , entonces

$$e(k+N+i|k) = 0, \quad \forall i \geq 1 \quad (6.71)$$

$$\Delta u(k+N_u+j|k) = \Delta u^*(k+N_u+j|k+1) = 0, \quad \forall j > 0 \quad (6.72)$$

y por lo tanto la diferencia (6.70) pasará a ser

$$J^*(k+1) - J(k) = -\alpha e(k+1|k)^2 \leq 0 \quad (6.73)$$

Del mismo modo, al ser  $\Delta \mathbf{u}^*$  una versión desplazada de  $\Delta \mathbf{u}$ , también cumple con la restricción pero no produce un valor mínimo para el índice de coste, por tanto

$$J(k+1) \leq J^*(k+1) \leq J(k), \quad \forall k \quad (6.74)$$

Es decir

$$J(k+1) - J(k) \leq -\alpha e(k+1|k)^2, \quad \forall k \quad (6.75)$$

Como por definición, el índice de coste es no negativo, éste decrece monótonamente y no será cero hasta que el sistema no alcance la referencia. Por lo tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k+1|k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k+1) = 0 \quad (6.76)$$

Para demostrar que, también, la secuencia de incrementos de las acciones de control tiende a cero, se puede asumir que el proceso se encuentra en régimen permanente. En ese caso

$$J(k+1) = J^*(k+1) = J(k), \quad \forall k \quad (6.77)$$

y puesto que el vector de acciones de control óptimo es único para cada instante, entonces

$$\Delta \mathbf{u}_{(k+1)} = \Delta \mathbf{u}_{(k+1)}^* = \Delta \mathbf{u}_{(k)}, \quad \forall k \quad (6.78)$$

Tal y como se ha construido  $\Delta \mathbf{u}^*$ , la única forma de que se cumpla (6.78) es que  $\Delta u(k) = 0, \quad \forall k$ . Por lo tanto

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \Delta u(k) = 0 \quad (6.79)$$

Una vez demostrado que el índice de coste converge a 0, al aplicar únicamente la solución particular  $\Delta \mathbf{u}_p$ , es evidente que, si se utiliza algún grado de libertad adicional para minimizar, siempre se obtendrá un valor ( $J_i$ ) para el índice menor que el obtenido para la solución de mínima norma ( $J_p$ ). Es decir:

$$J_i(k) \leq J_p(k), \quad \forall k \quad (6.80)$$

donde  $i$  indica el número de grados de libertad (componentes) que se utilizan para minimizar.

Debido a ésto, para cada instante  $k$ , el valor del índice de coste cuando se utiliza alguna componente principal, está acotado superiormente por el valor del índice cuando no se incluye ninguna componente en el controlador y sólo se utiliza la solución particular  $\Delta \mathbf{u}_p$ .

## 6.4 Infinite horizon generalized predictive control ( $\text{GPC}^\infty$ )

Asumiendo de nuevo que no existen perturbaciones y que el modelo es perfecto, el hecho de utilizar horizontes de predicción infinitos permite aprovechar ciertos

conceptos asociados a la teoría de la optimización clásica, como es el conocido *principio de optimalidad de Bellman*. Si en un instante  $k$ , se determina cuál es la trayectoria óptima para la salida sobre el horizonte de predicción infinito, en el instante  $k + 1$ , no se introduce información nueva en el problema por lo que la trayectoria óptima calculada en ese instante coincidirá con la ya calculada en el instante anterior. Esto no es así en el caso de horizontes finitos puesto que en cada instante se resuelve un problema de optimización distinto y se obtienen diferentes trayectorias óptimas en base a la nueva información recibida. En el caso de horizontes infinitos el índice de coste  $J(k)$  decrece conforme el instante  $k$  aumenta, lo que permite que dicho índice pueda interpretarse como una función de Lyapunov y por tanto deducir la estabilidad del bucle cerrado.

La función de coste utilizada para el diseño del controlador GPC $^\infty$  es la siguiente

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{\infty} [y(k+i|k) - w(k+i|k)]^2 + \beta [\Delta u(k+i-1|k)]^2 \quad (6.81)$$

Ya que este índice es la suma de un número infinito de términos, no es obvio cómo se puede minimizar. En (Sokaert, 1997), y siguiendo las ideas expuestas en (Muske and Rawlings, 1993), se factoriza el sistema en dos, separando la parte inestable de la estable, según

$$A(z^{-1}) = \bar{A}(z^{-1})\tilde{A}(z^{-1}) \quad (6.82)$$

donde  $\bar{A}(z^{-1})$  es un polinomio con todas sus raíces dentro del círculo unidad y  $\tilde{A}(z^{-1})$  es un polinomio con todas sus raíces fuera o en el círculo unidad.

$$\bar{A}(z^{-1}) = 1 + \bar{a}_1 z^{-1} + \bar{a}_2 z^{-2} + \dots + \bar{a}_{\bar{n}\bar{a}} z^{-\bar{n}\bar{a}} \quad (6.83)$$

$$\tilde{A}(z^{-1}) = 1 + \tilde{a}_1 z^{-1} + \tilde{a}_2 z^{-2} + \dots + \tilde{a}_{\tilde{n}\tilde{a}} z^{-\tilde{n}\tilde{a}} \quad (6.84)$$

Se define además la señal  $\tilde{y}$  como

$$\begin{aligned} \tilde{y}(k) &= \frac{B(z^{-1})}{\tilde{A}(z^{-1})} u(k-1) + \frac{T(z^{-1})}{\Delta \tilde{A}(z^{-1})} \xi(k) \\ &= \bar{A}(z^{-1}) y(k) \end{aligned} \quad (6.85)$$

Informalmente se podría describir la señal  $\tilde{y}$ , como la salida de la parte inestable del proceso.

Imponiendo la restricción

$$\tilde{y}(k + N + j|k) = \tilde{w}(k + N + j), \quad \forall j = 0, 1, \dots, \tilde{n}a \quad (6.86)$$

donde

$$w(k + N + j|k) = w(k), \quad \forall j \geq 0 \quad (6.87)$$

$$\tilde{w}(k + N + j) = \bar{A}(1)w(k + N + j|k) \quad (6.88)$$

se define el horizonte de control  $N_u$ , y de predicción  $N$  como

$$N_u \geq \tilde{n}a + 1 \quad (6.89)$$

$$N = \max(N_u + nb, \tilde{n}a, nt) \quad (6.90)$$

donde  $nb$  y  $nt$  son los órdenes de los polinomios  $B(z^{-1})$  y  $T(z^{-1})$  respectivamente, se puede abordar la minimización del índice infinito como un problema clásico de minimización de un índice cuadrático.

Para ello, se expresa en forma matricial el conjunto de ecuaciones de predicción de la señal  $\tilde{y}$  como

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{G}\Delta\mathbf{u} + \tilde{\mathbf{f}} \quad (6.91)$$

donde

$$\tilde{\mathbf{y}} = \left[ \tilde{y}(k + N|k) \quad \tilde{y}(k + N + 1|k) \quad \dots \quad \tilde{y}(k + N + \tilde{n}a|k) \right] \quad (6.92)$$

$$\tilde{\mathbf{f}} = \left[ \tilde{f}(k + N|k) \quad \tilde{f}(k + N + 1|k) \quad \dots \quad \tilde{f}(k + N + \tilde{n}a|k) \right] \quad (6.93)$$

$$\tilde{G} = \begin{bmatrix} \tilde{g}_N & \tilde{g}_{N-1} & \dots & \tilde{g}_{N-N_u+1} \\ \tilde{g}_{N+1} & \tilde{g}_N & \dots & \tilde{g}_{N-N_u} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \tilde{g}_{N+\tilde{n}a} & \tilde{g}_{N+\tilde{n}a-1} & \dots & \tilde{g}_{N+\tilde{n}a-N_u} \end{bmatrix} \quad (6.94)$$

siendo  $\tilde{\mathbf{f}}$  y  $\tilde{g}_i$ , la predicción de la respuesta libre y los coeficientes de la respuesta en escalón para el sistema definido por la ecuación (6.85) respectivamente.

Es posible, con este conjunto de  $\tilde{n}a$  predicciones, expresar la restricción (6.86) en forma matricial como

$$\tilde{\mathbf{y}} = \tilde{\mathbf{w}} \quad (6.95)$$

donde  $\tilde{\mathbf{w}} = \bar{A}(1) [ w(k+N|k) \ w(k+N+1|k) \ \dots \ w(k+N+\bar{n}a|k) ]$ .

Sustituyendo (6.91) en la forma matricial anterior, se obtiene

$$\tilde{G}\Delta\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}} \quad (6.96)$$

La restricción (6.86), asegura que las acciones de control futuras consiguen anular todos los modos inestables del proceso una vez transcurridos  $k+N+\bar{n}a$  instantes de tiempo. Además, según se ha definido el horizonte de predicción  $N$  en (6.90), la restricción no solo se cumplirá para  $j = 0, 1, \dots, \bar{n}a$  sino para todo  $j$ :

$$\tilde{y}(k+N+j|k) = \bar{A}(1)w(k+N+j|k), \quad \forall j \quad (6.97)$$

Por tanto, según (6.85)

$$\bar{A}(z^{-1})y(k+N+j|k) = \bar{A}(1)w(k+N+j|k), \quad \forall j \quad (6.98)$$

Restando el término  $\bar{A}(z^{-1})w(k+N+j|k)$  de ambos lados, y expresando  $y(k+j|k) - w(k+j|k)$  como  $e(k+j|k)$

$$\bar{A}(z^{-1})e(k+N+j|k) = \bar{A}(1)w(k+N+j|k) - \bar{A}(z^{-1})w(k+N+j|k) \quad (6.99)$$

Y como  $N \geq \bar{n}a$ , y  $w(k+N+j|k) = w(k)$ ,  $\forall N+j \geq 0$ , la parte derecha de esta ecuación se hace cero

$$\bar{A}(z^{-1})e(k+N+j|k) = 0 \quad (6.100)$$

Es decir, si la restricción terminal impuesta se cumple, tras  $k+N$  instantes de tiempo la parte de los modos inestables en el error de predicción se anula. Así, los errores de predicción evolucionan libremente acorde con los modos estables

del proceso tendiendo exponencialmente a 0, y esto indica que la suma infinita de los errores de predicción es en realidad, finita y se puede calcular.

Reescribiendo el índice de coste (6.81) como

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \sum_{i=1}^{N-1} e(k+i|k)^2 + \beta \Delta u(k+i-1|k)^2 + \sum_{j=0}^{\infty} e(k+N+j|k)^2 \quad (6.101)$$

Se puede expresar este índice en forma cuadrática

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{e}^T Q \mathbf{e} + \Delta \mathbf{u}^T \lambda \Delta \mathbf{u} + \sum_{j=0}^{\infty} e(k+N+j|k)^2 \quad (6.102)$$

donde

$$\lambda = \beta I_{N-1 \times N-1} \quad (6.103)$$

$$Q = \begin{bmatrix} I_{N-1 \times N-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & 0_{1 \times 1} \end{bmatrix} \quad (6.104)$$

Para evaluar el resultado del sumatorio infinito final, se puede recurrir a una realización en espacio de estados. Definiendo

$$\mathbf{x}_k = [ e(k+N-\bar{n}a+1|k) \quad e(k+N-\bar{n}a+2|k) \quad \dots \quad e(k+N|k) ] \quad (6.105)$$

$$\phi = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{\bar{n}a-1 \times 1} & I_{\bar{n}a-1 \times \bar{n}a-1} \\ -\bar{a}_{\bar{n}a} & -\bar{a}_{\bar{n}a-1} \quad \dots \quad -\bar{a}_1 \end{bmatrix}_{\bar{n}a \times \bar{n}a} \quad (6.106)$$

$$C = [ 0 \quad 0 \quad \dots \quad 0 \quad 1 ]_{1 \times \bar{n}a} \quad (6.107)$$

entonces

$$\mathbf{x}_{k+j} = \phi \mathbf{x}_{k+j-1} \quad (6.108)$$

$$\mathbf{x}_{k+j} = \phi^j \mathbf{x}_k \quad (6.109)$$

$$e(k+N+j|k) = C \mathbf{x}_{k+j} = C \phi^j \mathbf{x}_k \quad (6.110)$$

Por lo que es posible escribir el sumatorio infinito como

$$\sum_{j=0}^{\infty} e(k+N+j|k)^2 = \sum_{j=0}^{\infty} \mathbf{x}_k^T \phi^{jT} C^T C \phi^j \mathbf{x}_k$$



$$= \mathbf{x}_k^T \underbrace{\left( \sum_{j=0}^{\infty} \phi^j C^T C \phi^j \right)}_{\bar{Q}} \mathbf{x}_k \quad (6.111)$$

donde  $\bar{Q}$  satisface la ecuación de Lyapunov discreta

$$\bar{Q} = C^T C + \phi^T \bar{Q} \phi \quad (6.112)$$

y por lo tanto

$$\sum_{j=0}^{\infty} e(k + N + j|k)^2 = \mathbf{x}_k^T \bar{Q} \mathbf{x}_k = \mathbf{e}^T Q^* \mathbf{e} \quad (6.113)$$

donde

$$Q^* = \begin{bmatrix} 0_{N-\bar{n}a \times N-\bar{n}a} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \bar{Q}_{\bar{n}a \times \bar{n}a} \end{bmatrix} \quad (6.114)$$

Finalmente, se sustituye en (6.101)

$$J(\Delta \mathbf{u}) = \mathbf{e}^T \Lambda \mathbf{e} + \Delta \mathbf{u}^T \lambda \Delta \mathbf{u} \quad (6.115)$$

con  $\Lambda = Q + Q^*$ .

Como conclusión a todo lo anterior, el problema planteado en el GPC $^{\infty}$  se puede transformar en el siguiente problema de optimización de un índice cuadrático:

$$\min_{\Delta \mathbf{u}} J = \mathbf{e}^T \Lambda \mathbf{e} + \Delta \mathbf{u}^T \lambda \Delta \mathbf{u} \quad (6.116)$$

$$\text{sujeto a: } \tilde{G} \Delta \mathbf{u} = \tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}} \quad (6.117)$$

cuya solución podría expresarse del mismo modo que (6.11).

El problema de optimización anterior es similar al planteado en el controlador CRHPC. La estabilidad del bucle cerrado utilizando este controlador está asegurada debido al uso de un horizonte infinito<sup>4</sup>. Una demostración basada en

<sup>4</sup>En el caso de no existir restricciones, el GPC $^{\infty}$  es en realidad un controlador lineal cuadrático (LQR) como se demuestra en (Bitmead *et al.*, 1990).

el comportamiento monótono decreciente de la función de coste puede encontrarse en (Scockaert and Clarke, 1993a), (Scockaert and Clarke, 1993b), donde se plantea que el bucle cerrado bajo un control GPC<sup>∞</sup> es asintóticamente estable si:

1.  $N_u \geq \widetilde{na} + 1$
2.  $N = \max(N_u + nb, \overline{na}, nt)$
3.  $\lambda = \beta I, \quad \beta \geq 0$

asumiendo que no existen perturbaciones, que el modelo es perfecto y que el factor de ponderación para el vector de acciones de control es constante.

Procediendo de la misma forma que en el caso del controlador CRHPC, dado el vector de acciones de control óptimo calculado para el instante  $k$

$$\Delta \mathbf{u} = [ \Delta u(k|k) \quad \Delta u(k+1|k) \quad \cdots \quad \Delta u(k+N_u-1|k) ]^T \quad (6.118)$$

El valor del índice infinito  $J(k)$  para el instante  $k$ , será

$$J(k) = \sum_{i=1}^{N-1} e(k+i|k)^2 + \lambda \Delta u(k+i-1|k)^2 + \sum_{j=0}^{\infty} e(k+N+j|k)^2 \quad (6.119)$$

Si se aplica en el instante  $k+1$  el mismo vector de acciones de control  $\Delta \mathbf{u}$  pero desplazado en el tiempo

$$\Delta \mathbf{u}^* = [ \Delta u(k+1|k) \quad \Delta u(k+2|k) \quad \cdots \quad \Delta u(k+N_u-1|k) \quad 0 ]^T \quad (6.120)$$

entonces las predicciones de la salida en el instante  $k+1$  serán

$$y^*(k+i|k+1) = y(k+i|k), \quad \forall i \quad (6.121)$$

y el índice de coste  $J^*(k+1)$  para este instante será

$$\begin{aligned}
J^*(k+1) &= \sum_{i=1}^{N-1} e^*(k+i|k+1)^2 + \lambda \Delta u^*(k+i-1|k+1)^2 + \\
&+ \sum_{j=0}^{\infty} e^*(k+N+j|k+1)^2 \\
&= \sum_{i=2}^N e(k+i|k)^2 + \beta \Delta u(k+i-1|k)^2 + \sum_{j=1}^{\infty} e(k+N+j|k)^2
\end{aligned} \tag{6.122}$$

La diferencia de costes entre los instantes  $k$  y  $k+1$  vendrá dada por

$$J^*(k+1) - J(k) = -e(k+1|k)^2 - \beta \Delta u(k|k)^2 \tag{6.123}$$

Como el coste óptimo en el instante  $k+1$  no puede ser mayor que  $J^*(k+1)$ , puesto que  $\Delta \mathbf{u}^*$  cumple con la restricción terminal, pero no minimiza el índice para ese instante, entonces

$$J(k+1) - J(k) \leq -e(k+1|k)^2 - \beta \Delta u(k|k)^2 \leq 0 \tag{6.124}$$

por tanto el índice infinito es monótono decreciente y, como por definición, es no negativo, se puede concluir que converge y de esta forma

$$\lim_{k \rightarrow \infty} e(k+1|k) = \lim_{k \rightarrow \infty} e(k+1) = 0 \tag{6.125}$$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \beta \Delta u(k|k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \beta \Delta u(k) = 0 \tag{6.126}$$

lo que claramente implica estabilidad si  $\beta > 0$ . Para el caso de un factor de ponderación  $\beta = 0$ , se puede utilizar el mismo argumento que en el caso del controlador CRHPC para deducir la estabilidad del bucle cerrado.

En caso de utilizar el horizonte de control mínimo permitido ( $N_u = \tilde{n}a + 1$ ), entonces el cálculo de la acción de control no requiere optimización alguna (no quedan grados de libertad para mejorar la respuesta de la variable controlada ni para cumplir ningún tipo de restricción adicional). En esa situación, la respuesta de bucle cerrado evoluciona según los modos estables del proceso en bucle abierto, obteniendo así un control denominado *mean-level*. Además, con

esta elección para el parámetro  $N_u$ , el coste obtenido es una cota superior para cualquier otro controlador  $\text{GPC}^\infty$  que utilice un horizonte de control mayor. Esto es debido a que dicho controlador minimizará la misma función de coste con más grados de libertad.

### 6.4.1 Minimización en el $\text{GPC}^\infty$ con componentes principales: PC-GPC $^\infty$

El problema a resolver, una vez transformado el índice de coste infinito en otro finito sujeto a una restricción terminal, es similar al planteado en el diseño del controlador CRHPC. Por lo tanto, la solución al problema de minimización (6.116) se puede expresar como la solución general al sistema de ecuaciones que impone la restricción terminal (6.117) e interpretar las variables libres restantes como componentes que se pueden ir eliminando en base a algún criterio

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{u} &= \Delta \mathbf{u}_p + H V \mathbf{p} \\ &= \tilde{G}^+(\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}) - H V \mathbf{p}\end{aligned}\tag{6.127}$$

La estabilidad está garantizada y el resultado es bastante intuitivo debido a que el hecho de no incluir ninguna componente en la minimización implica utilizar tan solo  $\tilde{n}a + 1$  grados de libertad para cumplir la restricción terminal. El índice de coste obtenido con este controlador es una cota superior para cualquier otro diseño que incluya más grados de libertad (componentes) que traten de minimizar el índice.

## 6.5 El controlador PC-GPC estable como un problema de mínimos cuadrados

Tanto para el controlador CRHPC como el  $\text{GPC}^\infty$ , garantizan la estabilidad nominal del bucle cerrado minimizando un índice cuadrático sujeto a una restricción de tipo igualdad.

Una forma interesante de obtener una solución aproximada a este tipo de problemas puede obtenerse solucionando el problema de mínimos cuadrados siguiente

$$\left\| \left[ \begin{array}{c} QG \\ \mu \tilde{G} \end{array} \right] \Delta \mathbf{u}_\mu - \left[ \begin{array}{c} Q(\mathbf{w} - \mathbf{f}) \\ \mu(\tilde{\mathbf{w}} - \tilde{\mathbf{f}}) \end{array} \right] \right\|_2^2 \quad (6.128)$$

para valores elevados de  $\mu$ .

En (Golub and van Loan, 1996) se demuestra que  $\Delta \mathbf{u}_\mu \rightarrow \Delta \mathbf{u}$  solución del problema expresado en (6.116), según  $\mu \rightarrow \infty$ , y se ofrece una expresión para medir la diferencia entre las dos soluciones para un  $\mu$  dado.

La obtención de las componentes principales para este caso, utiliza la descomposición en valores singulares de la matriz

$$\begin{bmatrix} QG \\ \mu \tilde{G} \end{bmatrix} = U \Sigma V^T \quad (6.129)$$

Puesto que la descomposición SVD es sensible al escalado, y en este problema de mínimos cuadrados las ecuaciones correspondientes a la restricción terminal están ponderadas por el parámetro  $\mu$ , las direcciones principales correspondientes a los valores singulares mas grandes representarán dicha restricción. Por tanto, en este método será obligatorio:

- en el caso del CRHPC, incluir las  $m$  primeras componentes
- en el caso del GPC $^\infty$ , incluir las  $\tilde{n}a + 1$  primeras componentes

O, de forma equivalente, será obligatorio incluir tantas componentes principales en el controlador como grados de libertad sean necesarios para cumplir la restricción de tipo igualdad.

El análisis de componentes principales permite obtener los grados de libertad del controlador ordenados de mayor a menor importancia, comenzando con aquellos que se utilizan para la restricción terminal y, a continuación, los que se utilizan para minimizar el índice de coste.

El controlador obtenido de esta forma, se calcula de una forma sencilla, evitando realizar todos los cálculos matriciales de la expresión (6.11).

## 6.6 Ejemplos

En este apartado se van a comparar los distintos controladores estudiados, junto con la nueva alternativa presentada basada en componentes principales.

**Ejemplo 1:**

En este ejemplo se va a considerar el efecto que tiene la restricción de tipo igualdad en la estabilización del sistema. El modelo discreto que describe el comportamiento del proceso viene dado por (Yoon and Clarke, 1995):

$$G(z^{-1}) = \frac{1 - 1.55z^{-1}}{(1 - 0.9z^{-1})(1 - 1.5z^{-2})} z^{-1} \quad (6.130)$$

Si se diseña un GPC estándar con los siguientes parámetros:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_j \\ \hline 1 & 10 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (6.131)$$

el controlador no puede mantener la estabilidad del bucle cerrado como se observa en la figura 6.2(a), debido a que el polo inestable del proceso y el cero están bastante cerca uno del otro.

Sin embargo, un controlador de tipo CRHPC diseñado en base a los siguientes parámetros ( $n_a = 3, n_b = 1$ ):

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & m & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_i \\ \hline 1 & 4 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1 \end{array} \quad (6.132)$$

es capaz de estabilizar el sistema (figura 6.2(b)).

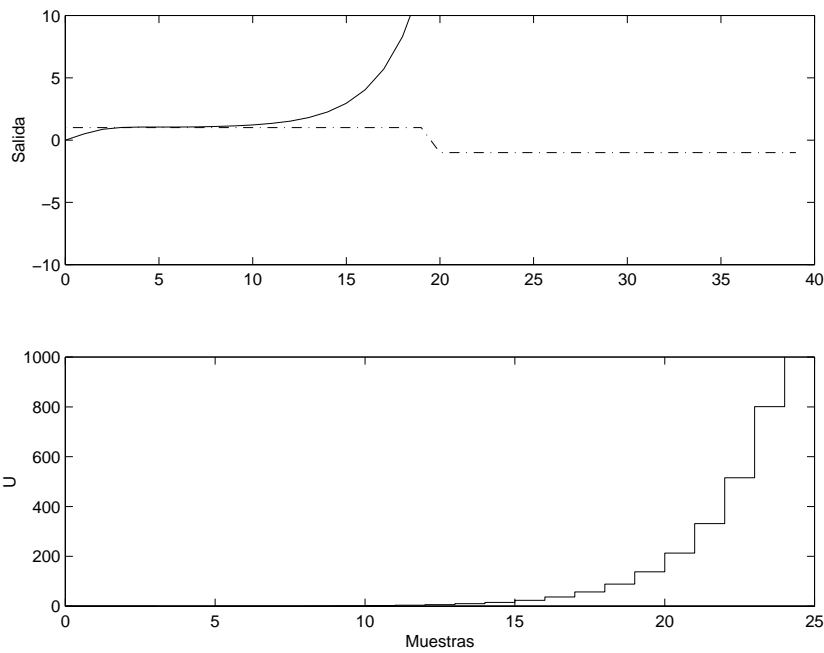
**Ejemplo 2:**

Se pretende controlar el proceso discreto de segundo orden, de fase no-mínima y subamortiguado propuesto en (Clarke and Scattolini, 1991), cuya respuesta ante un escalón unitario está representada en la figura 6.3:

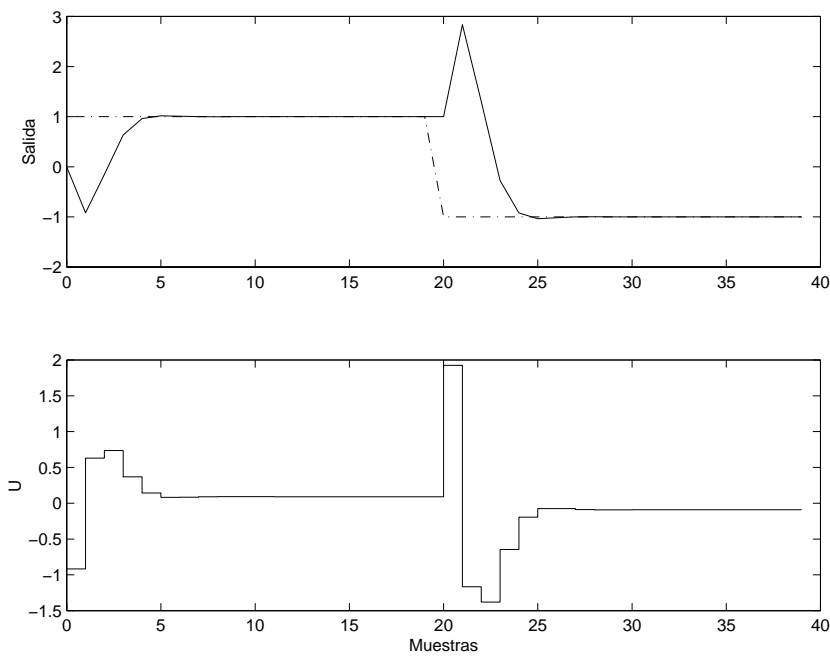
$$G(z^{-1}) = \frac{-1 + 2z^{-1}}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} z^{-1} \quad (6.133)$$

Según las propiedades expuestas, se eligen los parámetros de diseño de un controlador CRHPC en base al orden del sistema ( $n_a = 3, n_b = 1$ ):

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & m & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_j \\ \hline 1 & 4 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1e^{-6} \end{array} \quad (6.134)$$



(a) Salida en bucle cerrado y acción de control con GPC estándar.



(b) Salida en bucle cerrado y acción de control con CRHPC.

Figura 6.2: Respuestas para un GPC y un CRHPC diseñados con los mismos parámetros.

Para estos parámetros de diseño, el controlador CRHPC mantiene estable el bucle cerrado (figura 6.4(a)). En la figura 6.4(b) se observa cómo el índice de coste decrece monótonamente, propiedad ésta impuesta por la restricción terminal.

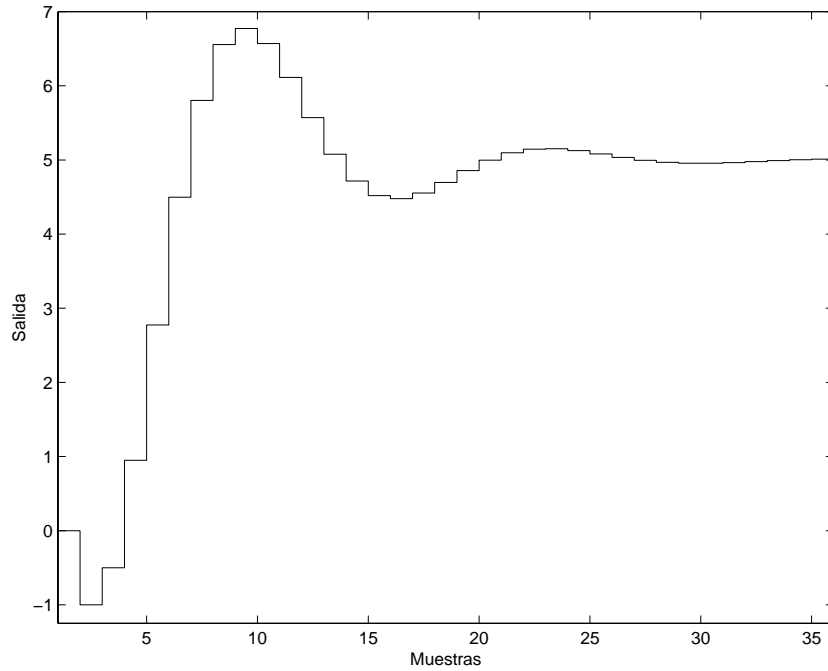


Figura 6.3: Respuesta del proceso ante un escalón unitario.

### Ejemplo 3:

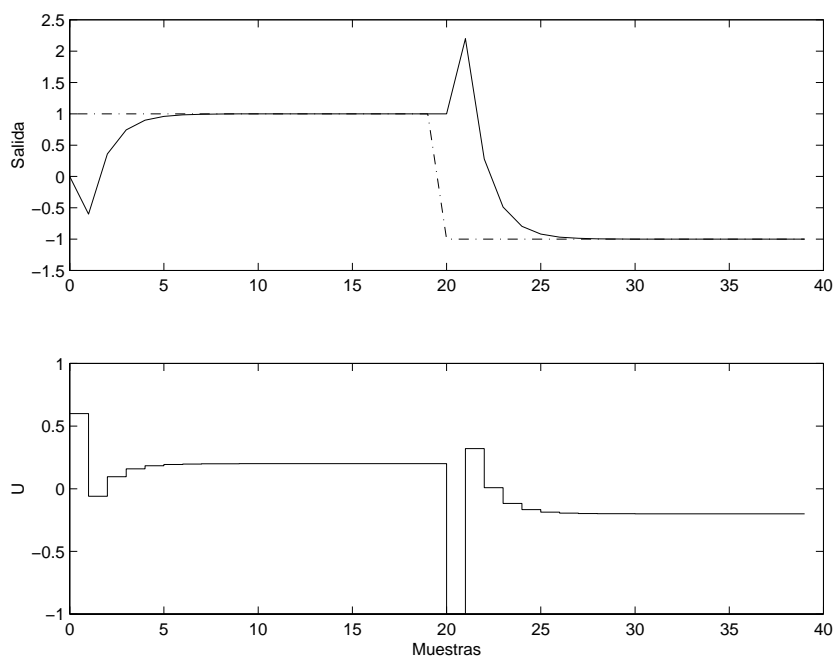
En este caso se propone el control del proceso de fase no mínima, y subamortiguado del ejemplo anterior pero con retardo.

$$G(z^{-1}) = \frac{(-z^{-4} + 2z^{-5})}{1 - 1.5z^{-1} + 0.7z^{-2}} z^{-1} \quad (6.135)$$

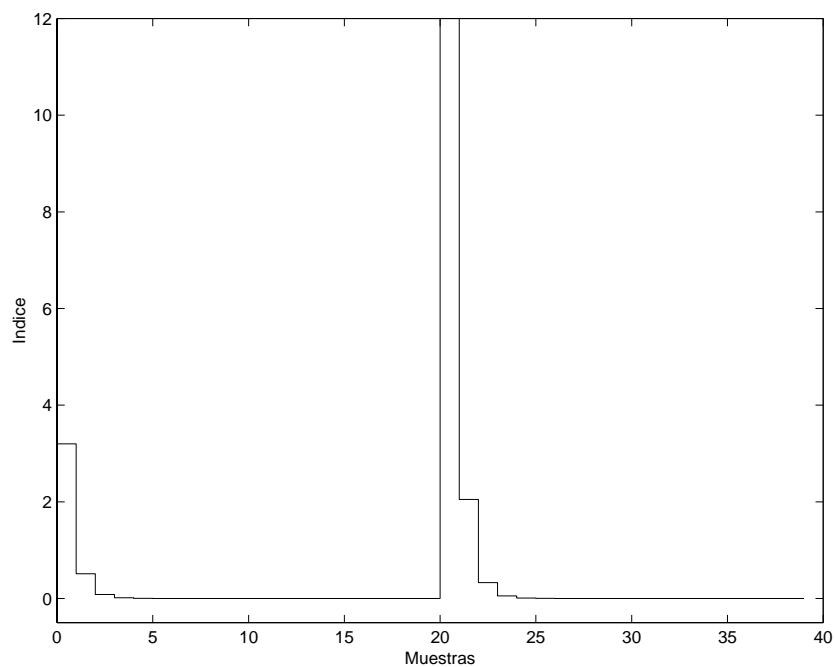
Ahora los órdenes de los polinomios  $B(z^{-1})$  y  $A(z^{-1})\Delta$  han cambiado, ya que  $n_b = 5$  y  $n_a = 3$ . Ello implica que para un controlador CRHPC los parámetros de diseño son los siguientes:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & m & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_j \\ \hline 1 & 4 + 5 - 3 = 6 & 3 & 4 & 1 & 1 & 1e^{-6} \end{array} \quad (6.136)$$





(a) Salida en bucle cerrado y acción de control con CRHPC.



(b) El índice decrece monótonamente.

Figura 6.4: Control con un CRHPC.

En la figuras 6.5(a) y 6.5(b), se puede ver la salida del proceso en bucle cerrado y el índice de coste respectivamente con un controlador CRHPC calculado con estos parámetros. Se puede apreciar cómo la salida es la misma que la de la figura 6.4(a) pero retrasada cuatro instantes de tiempo.

El cálculo del controlador utilizando la alternativa propuesta en (6.58) produce exactamente los mismos resultados que los de la figura 6.5.

Para comprobar el funcionamiento del controlador PC-GPC estable propuesto en (6.67), es conveniente aumentar el valor de  $N_u$  a fin de obtener un número mayor de componentes o grados de libertad. Por ello se definen los siguientes parámetros:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & m & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_j \\ \hline 1 & 14 & 3 & 12 & 1 & 1 & 0 \end{array} \quad (6.137)$$

Con estos parámetros se dispone de  $N_u - m = 9$  componentes principales o grados de libertad para minimizar el índice de coste. En la figura 6.6 se muestra, respectivamente, la salida en bucle cerrado y el valor del índice de coste. En ellas se puede comprobar cómo el índice utilizando únicamente la solución particular  $\Delta \mathbf{u}_p$ , es una cota superior para el resto de índices según se incluyen componentes en el controlador.

Una ventaja del controlador PC-GPC estable es que se pueden seleccionar componentes, calculados a partir de la matriz  $QGH$ , en base a los criterios expuestos en el apartado 3.3. Por ejemplo, utilizando el criterio del PIM<sup>5</sup> al 95%, se obtiene como resultado la inclusión de 4 componentes en la solución (figura 6.7).

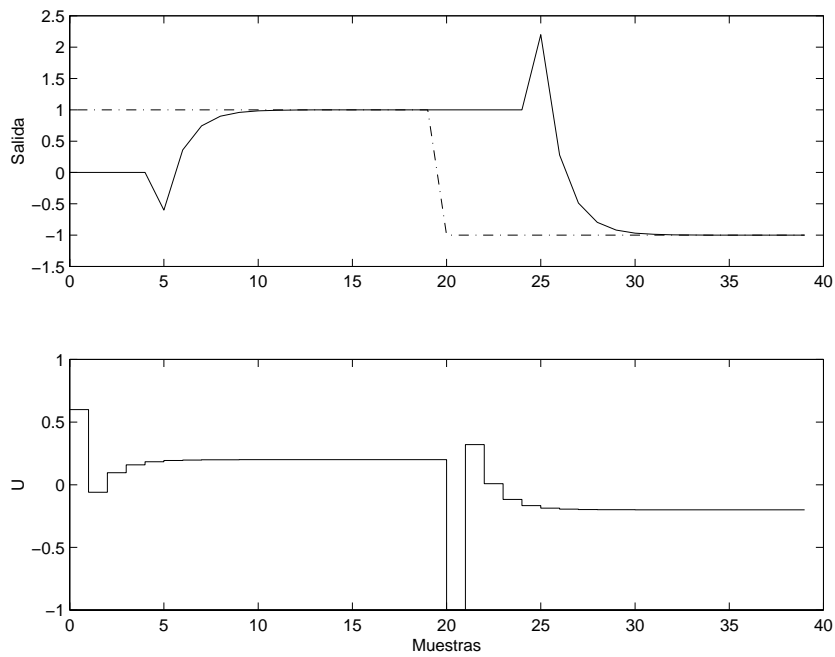
Seleccionando componentes con el criterio de la magnitud del vector de incrementos de acciones de control<sup>6</sup> tal que

$$\| \Delta \mathbf{u} \|_2 \leq 0.25$$

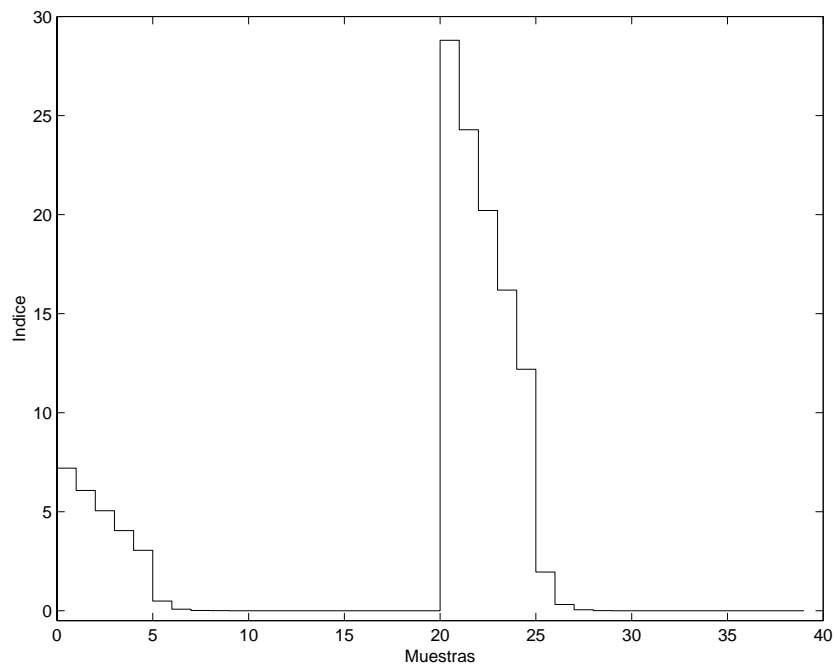
Se puede asegurar esta condición teniendo en cuenta cómo se ha planteado la solución al problema de minimización con restricción terminal. Puesto que  $\Delta \mathbf{u}_p \perp \mathcal{N}(\tilde{G})$  y que  $H$  es una matriz ortonormal y no modifica la magnitud de un vector,

<sup>5</sup>El Porcentaje de índice minimizado (PIM) expresa lo cerca que se está de anular el valor del índice cuadrático, según se expuso en el apartado 3.3

<sup>6</sup>Eliminando componentes también es posible indicar fijar un tamaño máximo para las acciones de control utilizando este criterio expuesto en el apartado 3.3

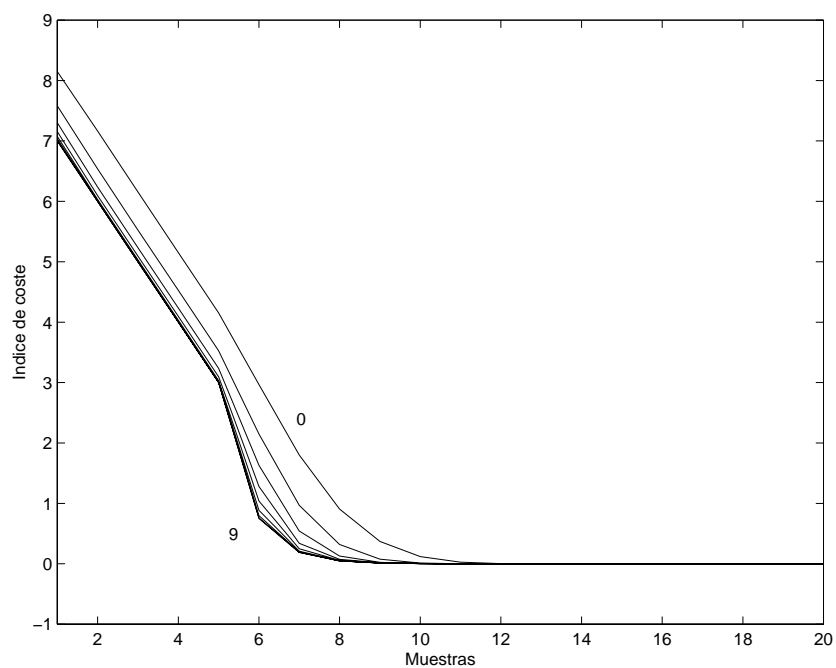


(a) Salida en bucle cerrado y acción de control con CRHPC.

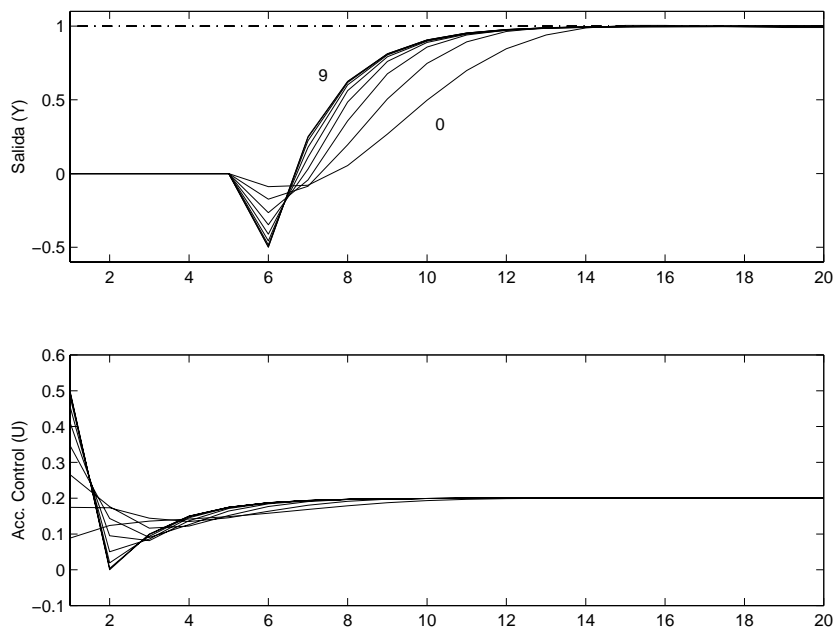


(b) El índice decrece monótonamente.

Figura 6.5: Control con un CRHPC para el proceso con retardo.

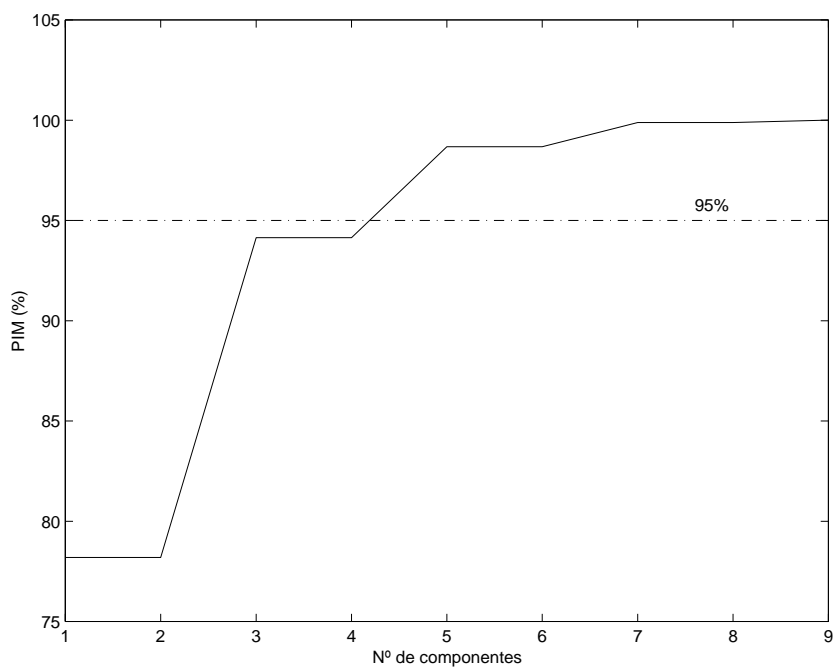
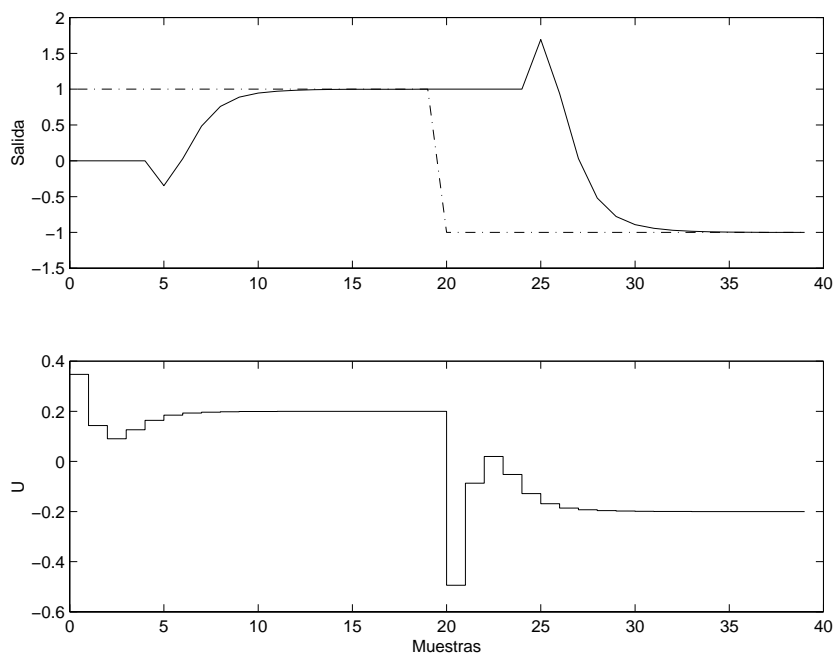


(a) Índice de coste para distintas componentes



(b) Salida en bucle cerrado y acción de control para distintas componentes.

Figura 6.6: Control con un PC-GPC estable diseñado de 0 a 9 componentes.

(a) Criterio del  $PIM \leq 95\%$ .

(b) Salida en bucle cerrado y acción de control.

Figura 6.7: Control con el PC-GPC diseñado con 4 componentes.

$$\| \Delta \mathbf{u} \|_2^2 = \| \Delta \mathbf{u}_p + H \Delta \mathbf{u}_f \|_2^2 = \| \Delta \mathbf{u}_p \|_2^2 + \| \Delta \mathbf{u}_f \|_2^2 \quad (6.138)$$

$$\| \Delta \mathbf{u}_f \|_2^2 = 0.25^2 - \| \Delta \mathbf{u}_p \|_2^2 \quad (6.139)$$

Según lo anterior, de la figura 6.8 se llega a la conclusión de que hay que seleccionar 2 componentes para cumplir el criterio. En las figuras 6.9 y 6.10 se puede observar, respectivamente, la salida en bucle cerrado resultado de la simulación junto al índice de coste que, como se aprecia, decrece monótonamente.

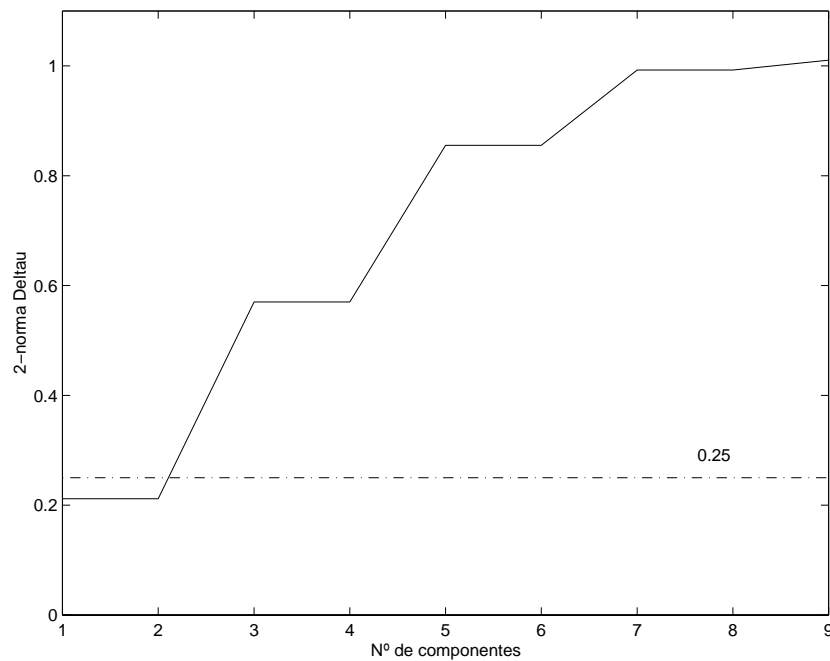


Figura 6.8: 2-norma del vector de acciones de control en función de las componentes.

Un controlador CRHPC con los mismos parámetros de diseño incluyendo un factor de ponderación constante  $\lambda = 10$  es capaz de alcanzar las mismas prestaciones que un controlador PC-GPC estable (figura 6.11). Pero conseguir esta magnitud máxima para el vector de incrementos de acciones de control modificando  $\lambda$  pasa, necesariamente, por un procedimiento de prueba y error.

#### Ejemplo 4:

La extensión al caso multivariable del controlador PC-GPC estable es sencilla. Los parámetros de diseño se seleccionan estudiando las funciones de la matriz

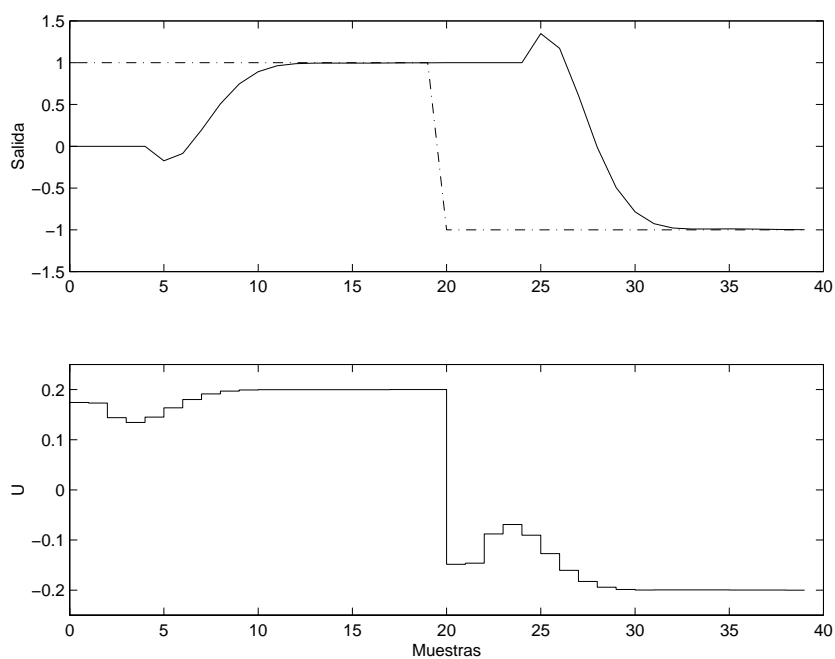


Figura 6.9: Salida en bucle cerrado para 2 componentes.

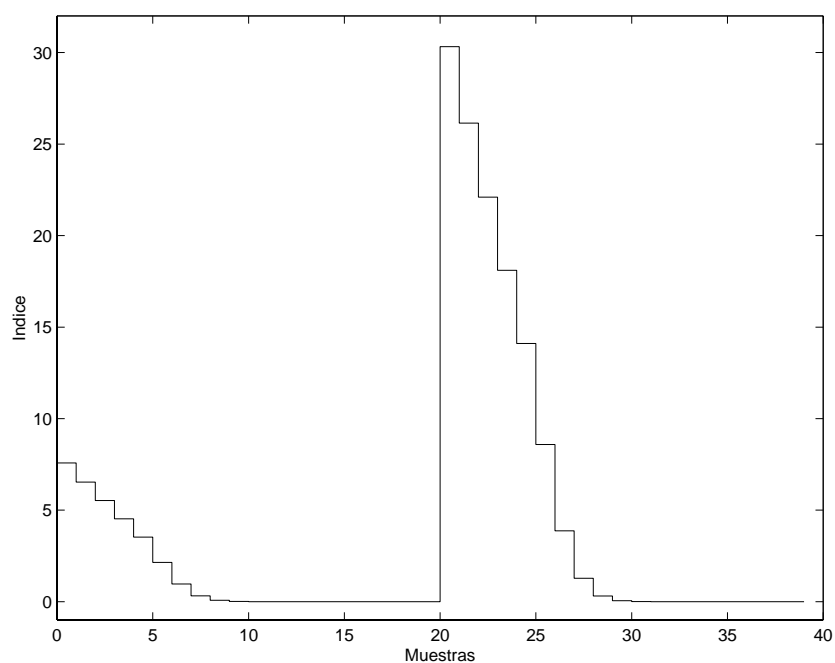


Figura 6.10: Índice de coste para 2 componentes.

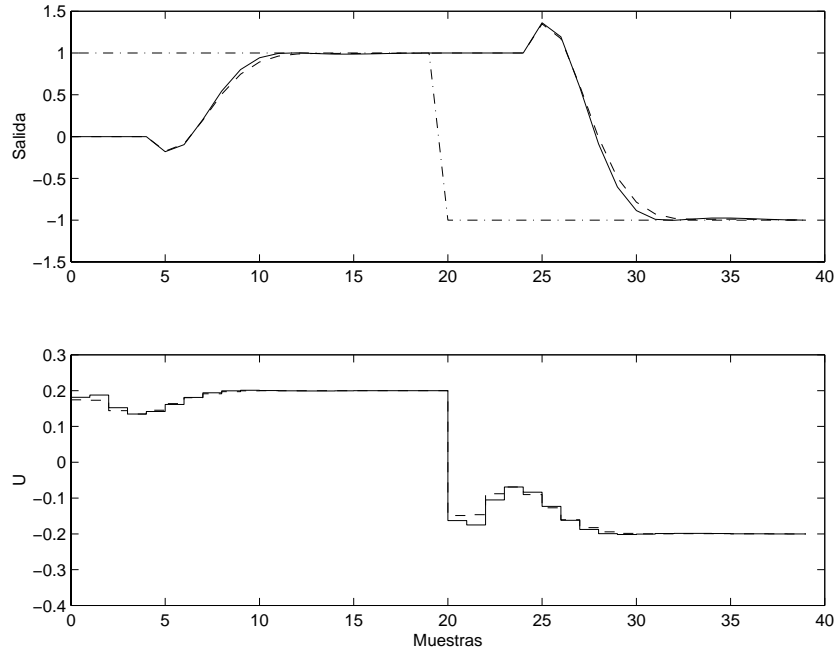


Figura 6.11: Comparación: PC-GPC estable con 2 componentes y un CRHPC con  $\lambda = 10$ .

de transferencia del proceso. Para cada una de ellas se calcula el valor de  $m$  necesario para garantizar la estabilidad. Puesto que estos valores son límites inferiores, los valores máximos garantizan que quedan cubiertos todos los casos. Es decir, para un proceso multivariable de  $n$  salidas y  $q$  entradas:

$$m_i = \max(n_{a_{ij}}), \quad \forall j \in 1 \dots q \quad (6.140)$$

$$N_{u_j} \geq \max(n_{a_{ij}}), \quad \forall i \in 1 \dots n \quad (6.141)$$

$$N_i \geq \max(N_{u_j} + \max(n_{b_{ij}}, n_{a_{ij}}) - n_{a_{ij}}), \quad \forall j \in 1 \dots q \quad (6.142)$$

Para este ejemplo se propone utilizar el modelo propuesto por Ogunnaik en (Luyben, 1990). Se trata de un modelo  $3 \times 3$  de una columna de destilación:

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \\ Y_3(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{0.66e^{-2.6s}}{(6.7s+1)} & \frac{-0.61e^{-3.5s}}{(8.64s+1)} & \frac{-0.0049e^{-s}}{(9.06s+1)} \\ \frac{1.11e^{-7.3s}}{(3.25s+1)} & \frac{-2.36e^{-3s}}{(5s+1)} & \frac{-0.012e^{-1.2s}}{(7.09s+1)} \\ \frac{-34.68e^{-10.1s}}{(8.15s+1)} & \frac{46.2e^{-9.9s}}{(10.9s+1)} & \frac{-0.87(11.61s+1)e^{-s}}{(3.89s+1)(18.8s+1)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \\ U_3(s) \end{bmatrix}$$



Para un periodo de muestreo de 2.5 minutos el modelo discreto del proceso es

$$\begin{bmatrix} \frac{0.2055z^{-2}}{1 - 0.6886z^{-1}} & \frac{-0.1533z^{-2}}{1 - 0.7487z^{-1}} & \frac{-0.001182z^{-1}}{1 - 0.7589z^{-1}} \\ \frac{0.5957z^{-3}}{1 - 0.4634z^{-1}} & \frac{-0.9286z^{-2}}{1 - 0.6065z^{-1}} & \frac{-0.003566z^{-1}}{1 - 0.7029z^{-1}} \\ \frac{-9.161z^{-4}}{1 - 0.7358z^{-1}} & \frac{9.469z^{-4}}{1 - 0.795z^{-1}} & \frac{0.3364z^{-1} + 0.2599z^{-2}}{1 - 1.401z^{-1} + 0.4604z^{-2}} \end{bmatrix}$$

Examinando esta matriz de transferencia se puede concluir según (6.140) que los valores mínimos del parámetro  $m_i$  para cada salida son de 2, 2 y 3 respectivamente. Por lo tanto en base a (6.141) los valores mínimos para  $N_{u_j}$  serán 2, 2, y 3 respectivamente.

A continuación se muestran unos parámetros de diseño para el controlador multivariable que cumplen con los límites impuestos anteriores. El valor de  $N_{u_j}$  se ha seleccionado de tal forma que el PC-GPC estable tenga un número de componentes no muy reducido:

	$N_1$	$N_2$	$m$	$\alpha_i$	$T(z^{-1})$		$N_u$	$\lambda_j$
$y_1$	1	25 + 0	2	1	1	$u_1$	25	0
$y_2$	1	25 + 0	2	1	1	$u_2$	25	0
$y_3$	1	50 + 1	3	10	1	$u_3$	50	0

Con estos parámetros de diseño el controlador PC-GPC dispone de NPC componentes según:

$$NPC = \sum_{j=1}^q N_{u_j} - \sum_{i=1}^n m_i = 100 - 7 = 93 \quad (6.143)$$

La ventaja del controlador PC-GPC estable es que se pueden seleccionar qué componentes de las 93 se incluyen en el controlador en base a algún criterio. Por ejemplo, utilizando el criterio del PIM al 95% (figura 6.12) se pueden incorporar 70 componentes en la solución, obteniendo unos resultados de control muy razonables (figuras 6.13 y 6.14) y un índice de coste que decrece monótonamente como era de esperar (figura 6.15).

Debido a la desaparición del factor  $\lambda$  para ponderar la acción de control en el índice, es posible usar el factor de ponderación de los errores de predicción  $\alpha$  para derivar el esfuerzo de control sobre una variable de salida u otra.

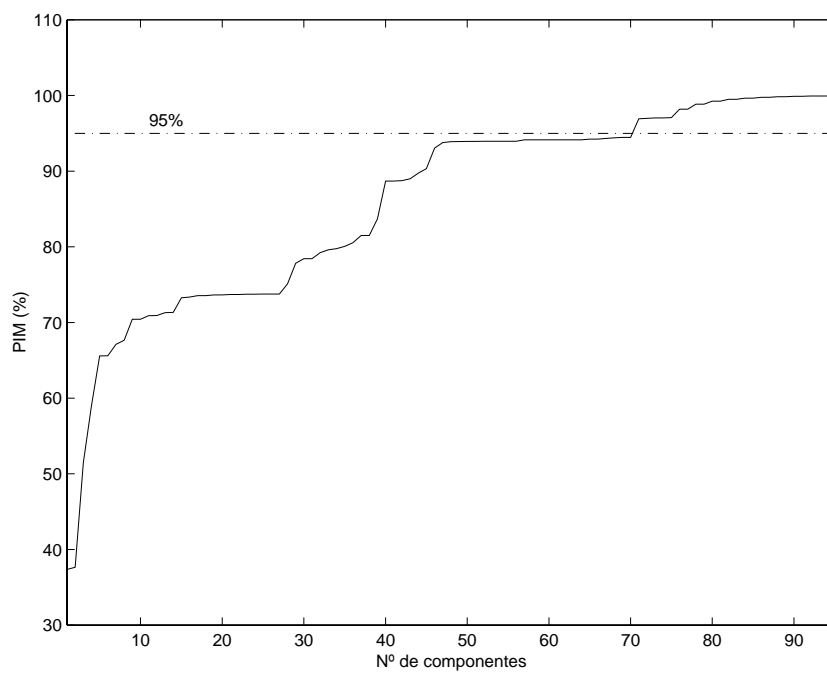
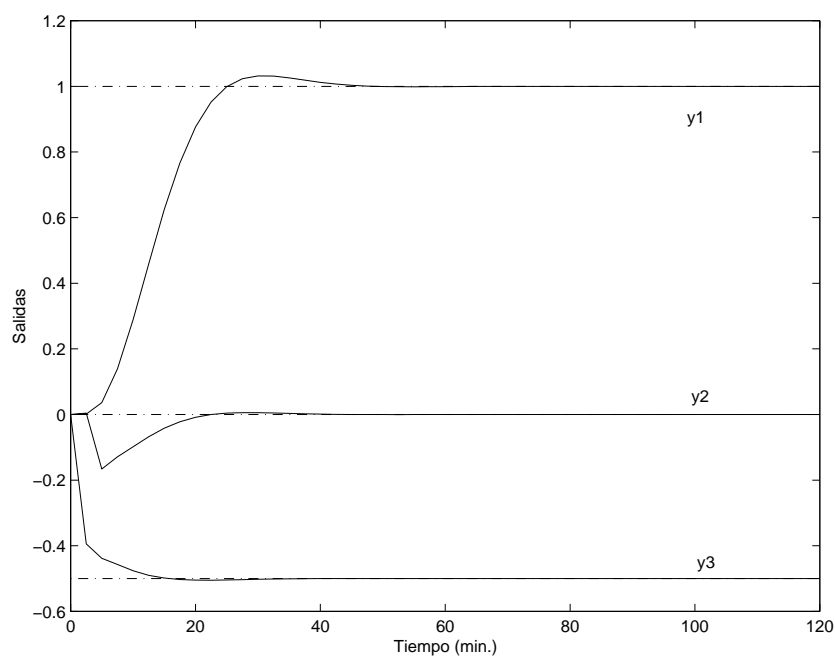
Figura 6.12: PIM para el proceso multivariable  $3 \times 3$ .

Figura 6.13: Salida en bucle cerrado para 70 componentes.

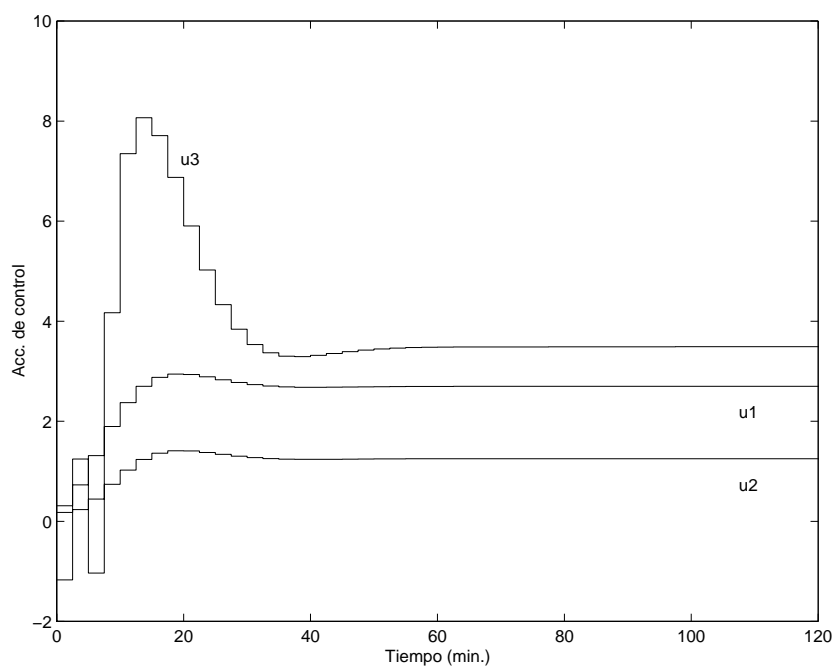


Figura 6.14: Acciones de control para 70 componentes.

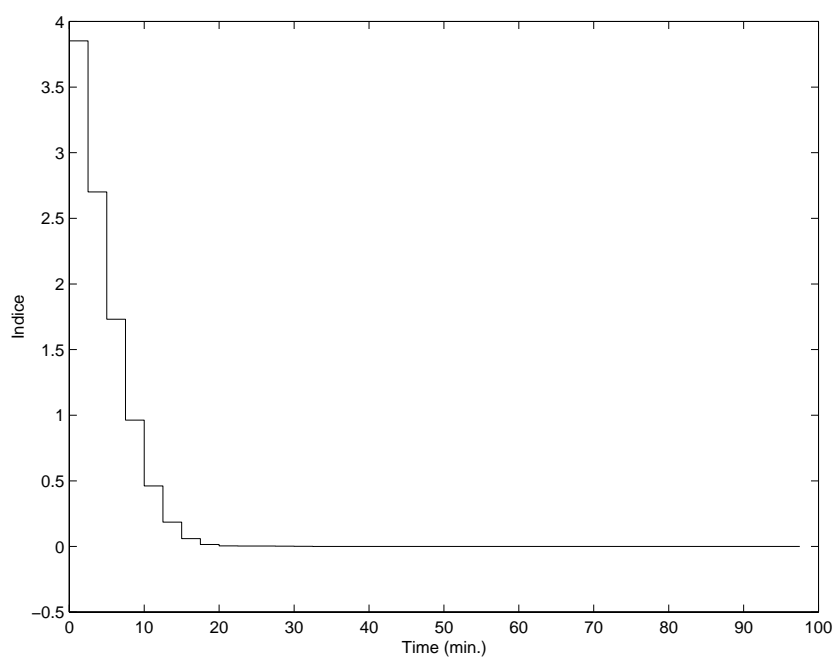


Figura 6.15: Índice de coste para 70 componentes.

Igualando a 1 todos los factores  $\alpha$  se puede otorgar la misma importancia en el índice a los errores de la salida  $y_3$ , que a los errores de las otras salidas. Comparando las figuras 6.13 y 6.16 se puede comprobar como el control de la salida  $y_3$  es ahora menos ajustado pues se ha indicado al controlador que los errores en esta variable son menos importantes.

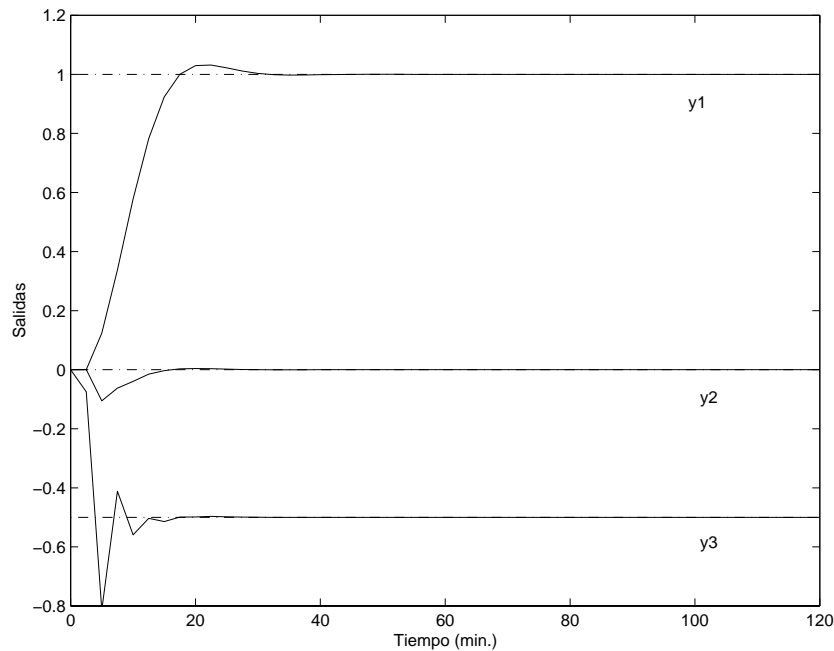


Figura 6.16: Salida en bucle cerrado para 70 componentes y factores  $\alpha$  iguales.

Otro criterio de selección muy ligado con las restricciones en los cambios de las acciones de control consiste en elegir un número de componentes tal, que la norma del vector de incrementos de acciones de control no supere un cierto valor. Por ejemplo, en la figura 6.18, se observa que eligiendo 45 componentes o menos, la magnitud de este vector nunca superará la cantidad de 3.

En las figuras 6.19, 6.20 y 6.21 se puede observar respectivamente, la salida en bucle cerrado, las acciones de control así como la propiedad decreciente del índice. En la figura 6.22 se puede comprobar cómo la magnitud del vector de incrementos de acciones de control que se genera cada instante, nunca supera el valor límite establecido.

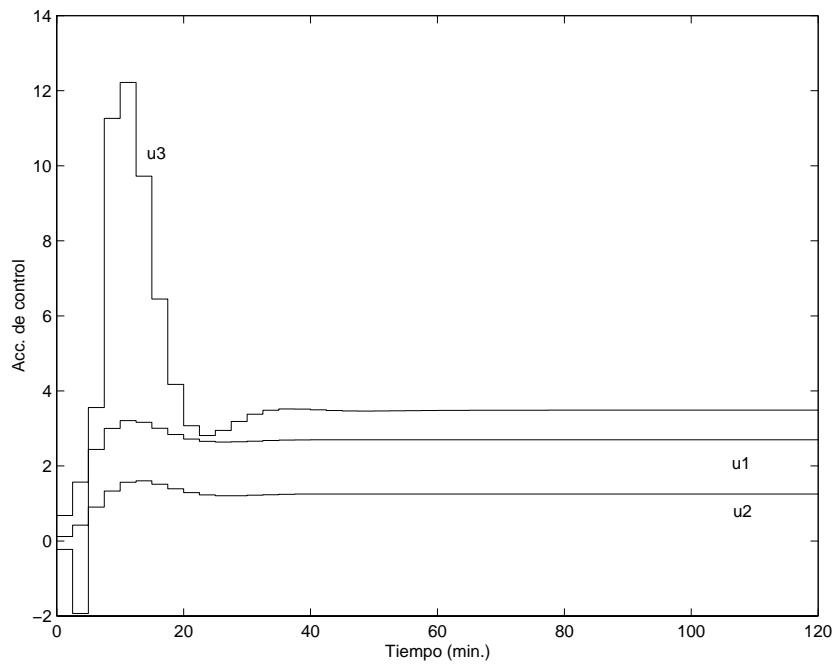


Figura 6.17: Acciones de control para 70 componentes y factores  $\alpha$  iguales.

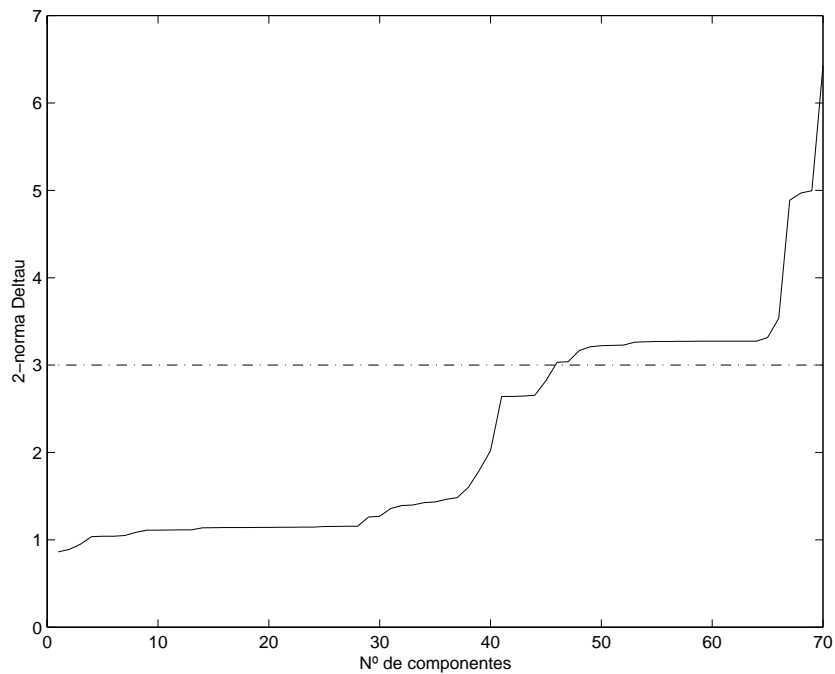


Figura 6.18: Magnitud del vector de acciones generado para las primeras 70 componentes.

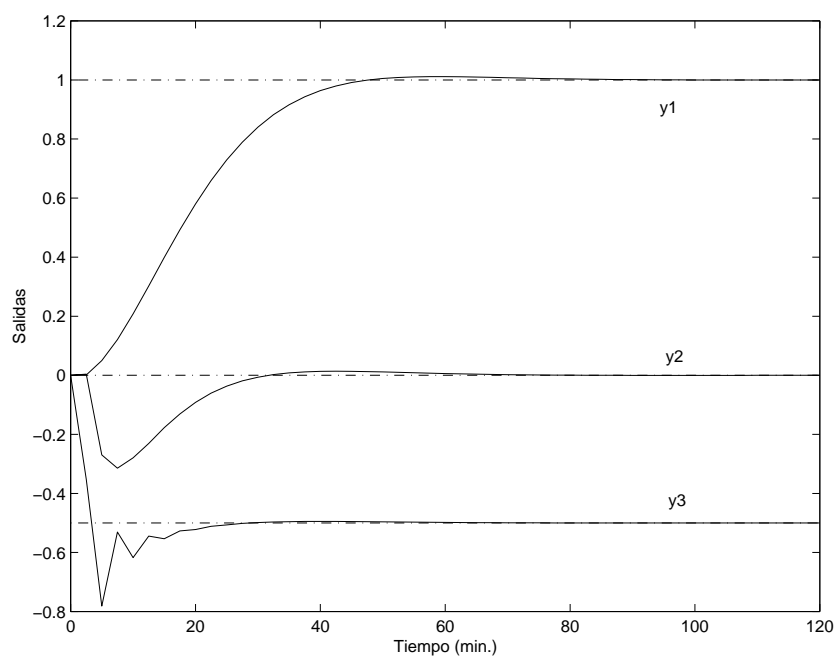


Figura 6.19: Salida en bucle cerrado para 45 componentes.

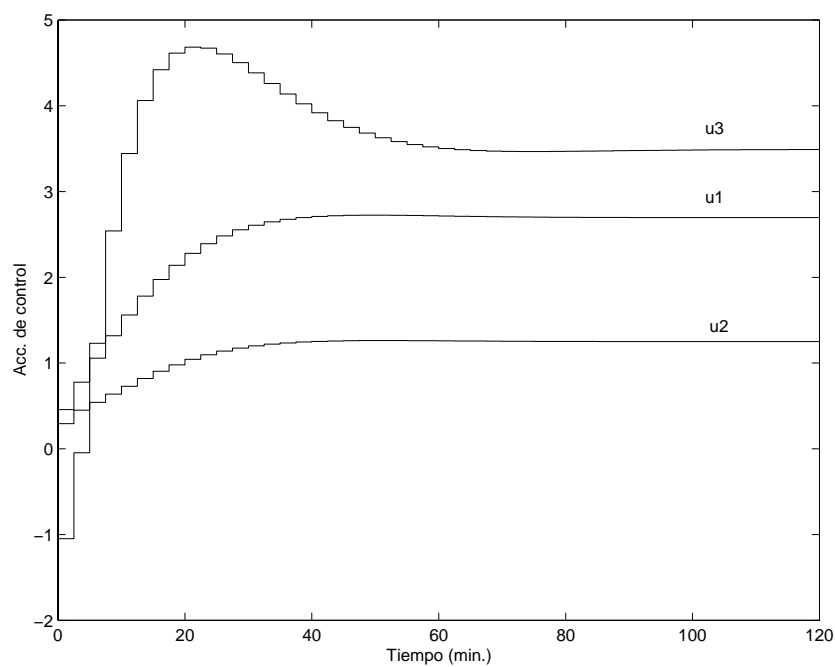


Figura 6.20: Acciones de control para 45 componentes.

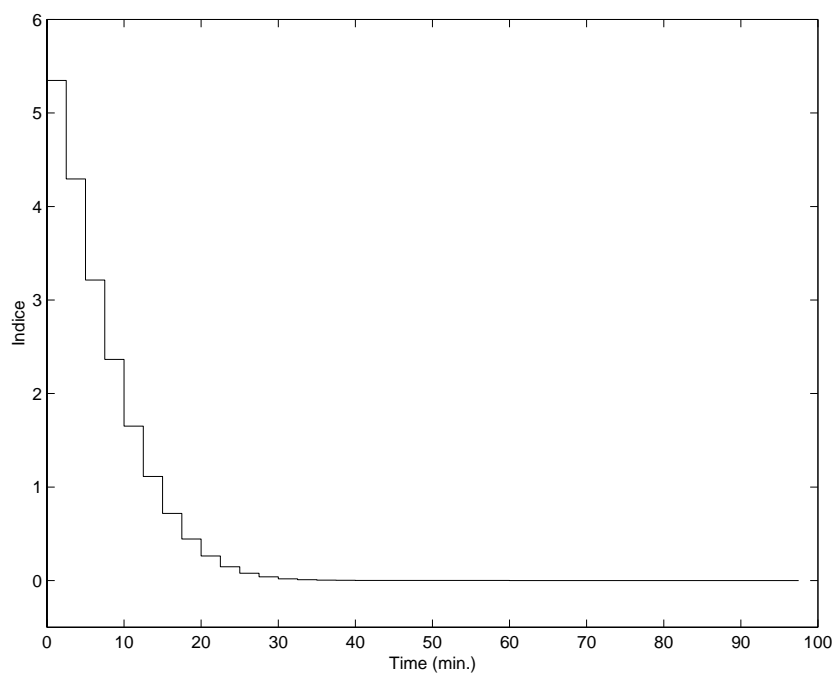


Figura 6.21: Índice de coste para 45 componentes.

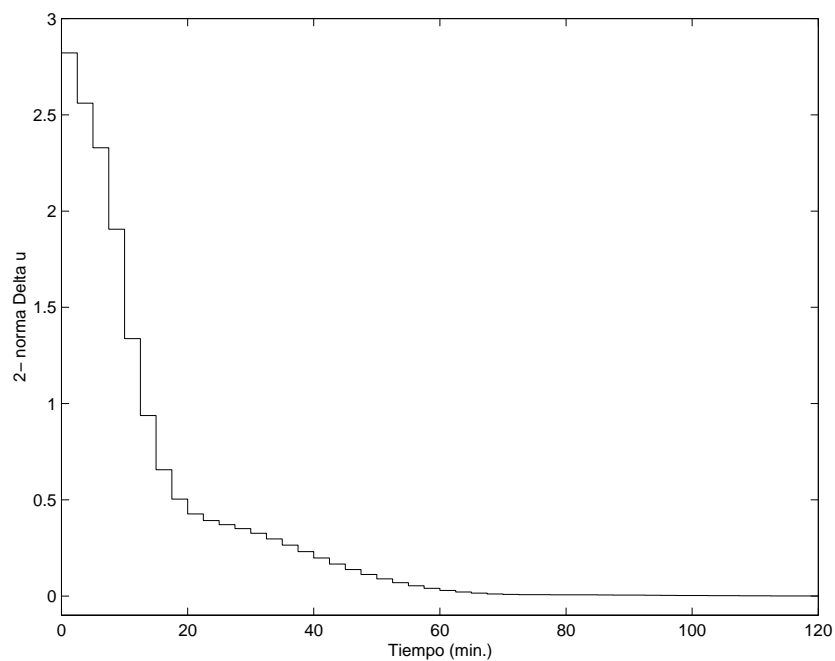


Figura 6.22: La magnitud del vector de incrementos de control no supera el límite establecido.

**Ejemplo 5:**

En este ejemplo se va a ilustrar el funcionamiento del controlador  $\text{GPC}^\infty$  y la versión modificada de éste en base a las componentes principales.

En (Aström and Hägglund, 1995), se presenta una batería de procesos SISO y estables, representativos de las dinámicas típicas en los procesos industriales. Entre estos procesos se encuentra la siguiente función de transferencia:

$$G(s) = \frac{1}{(1+s)(1+\xi s)(1+\xi^2 s)(1+\xi^3 s)} \quad (6.144)$$

Utilizando  $\xi = 0.5$  y un periodo de muestreo de 0.2 segundos, el modelo discreto del proceso es:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.0024 + 0.0151z^{-2} + 0.0083z^{-2} + 0.0003z^{-3}}{1 - 2.14z^{-1} + 1.609z^{-2} - 0.4925z^{-3} + 0.04979z^{-4}} z^{-1}$$

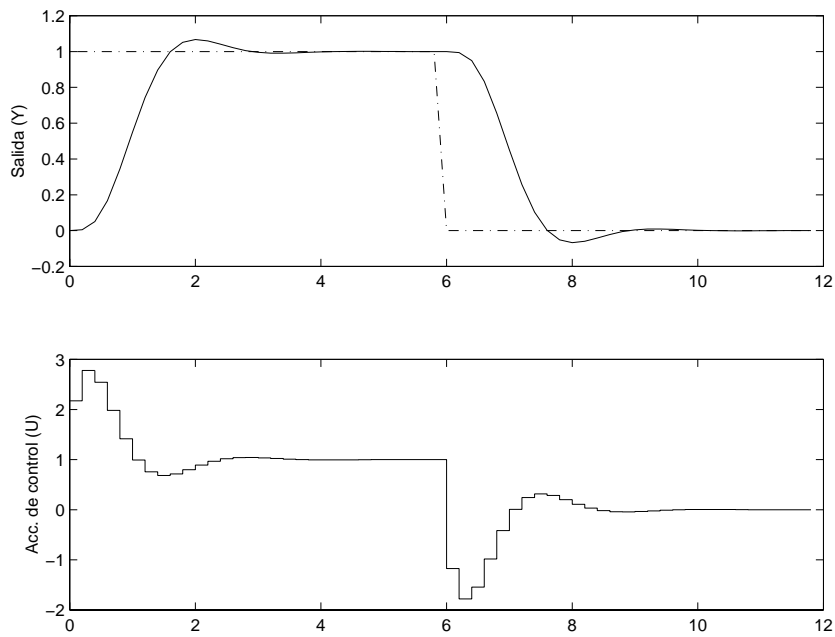
Para este proceso se cumple que  $\widetilde{na} = 0$ ,  $\overline{na} = 4$  y  $nb = 3$ . Por tanto, seleccionando

$$\begin{aligned} N_u &= 6 \geq \widetilde{na} + 1 \\ N &= \max(N_u + nb - 1, \overline{na}, nt) = 8 \\ \lambda &= \beta I, \quad \beta = 0.1 \\ T(z^{-1}) &= 1 \end{aligned}$$

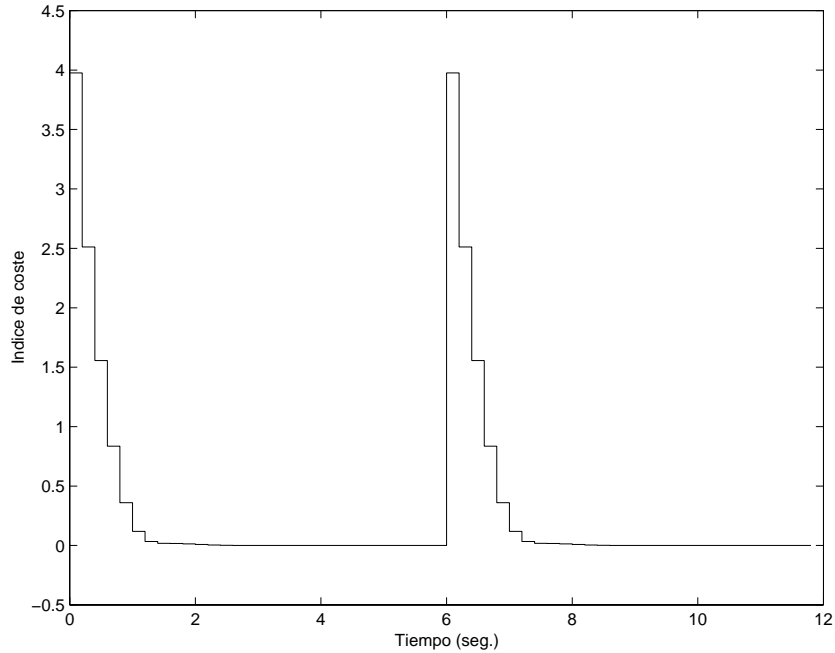
se puede comprobar el funcionamiento del  $\text{GPC}^\infty$ . En la figura 6.23, se muestra la salida en bucle cerrado, la acción de control y la evolución del índice de coste. Notar como éste último tiene un comportamiento monótono decreciente según lo esperado.

El mismo proceso puede ser controlado con el  $\text{PC-GPC}^\infty$ . Puesto que  $N_u = 6$  y  $\widetilde{na} + 1 = 1$ , existen cinco grados de libertad disponibles, o componentes. En la figura 6.24 se representa la respuesta en bucle cerrado, la acción de control y la evolución del índice de coste para distintas componentes principales. Se puede observar como, al igual que ocurría en el controlador  $\text{PC-GPC}$  estable, la solución de mínima norma es una cota superior de los índices resultantes al controlar el proceso con distintas componentes.



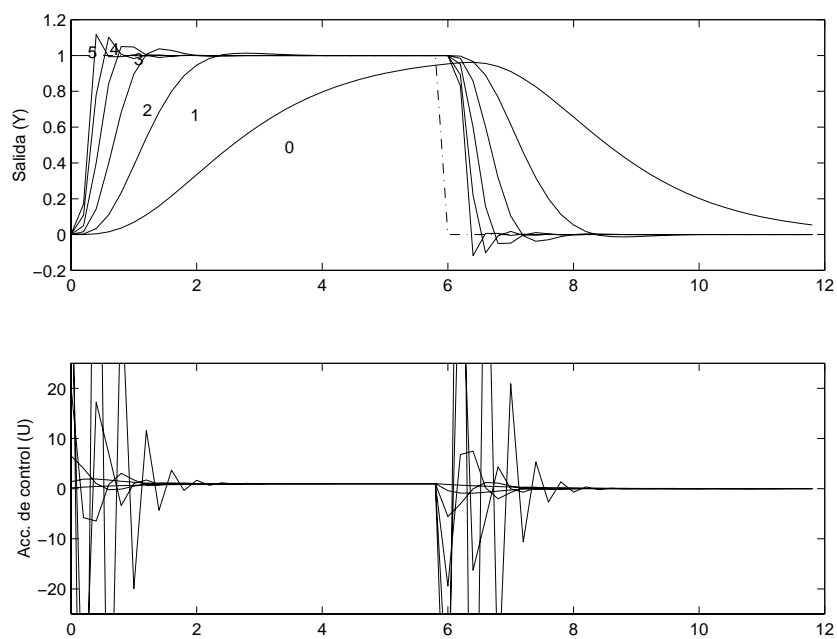


(a) Salida en bucle cerrado y acción de control.

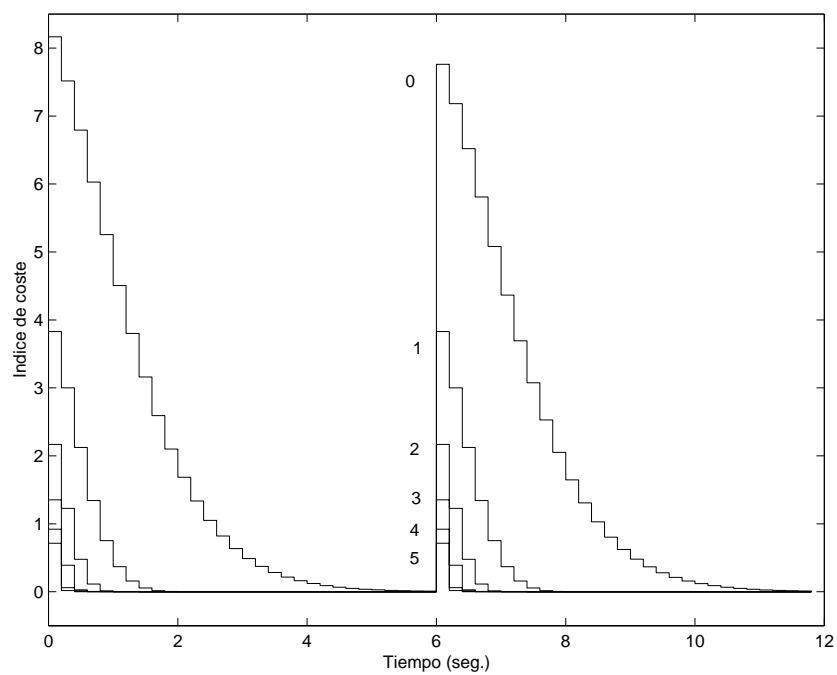


(b) Índice de coste

Figura 6.23: Control con el  $GPC^\infty$ .



(a) Salida en bucle cerrado y acción de control.



(b) Índice de coste

Figura 6.24: Control con el PC-GPC $^{\infty}$  para distintos componentes.

**Ejemplo 6:**

Para comprobar la alternativa propuesta en el cálculo de un controlador PC-GPC estable según (6.128), se plantea el control de orientación de un satélite cuya función de transferencia es (Franklin *et al.*, 1991)

$$G(s) = \frac{\theta(s)}{T(s)} = \frac{0.036(s + 25)}{s^2(s + 0.02 \pm j)} \quad (6.145)$$

donde

- $\theta(s)$  es el ángulo de orientación del satélite
- $T(s)$  es el par aplicado por el accionador para cambiar su orientación.

Para un periodo de muestreo de 1 segundo el modelo discreto es:

$$G(z^{-1}) = \frac{0.04164 + 0.3871z^{-1} + 0.3527z^{-2} + 0.02959z^{-3}}{1 - 3.059z^{-1} + 4.079z^{-2} - 2.981z^{-3} + 0.9608z^{-4}} z^{-1}$$

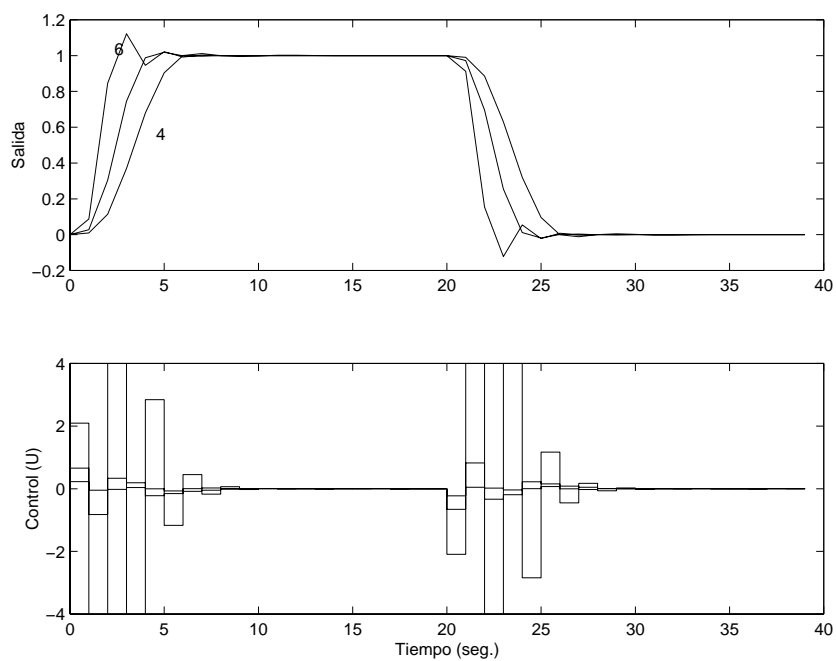
Para un controlador con horizonte infinito, se definen los parámetros siguientes:

$$\begin{aligned} N_u &= 6 \geq \widetilde{na} + 1 \\ N &= \max(N_u + nb - 1, \overline{na}, nt) = 8 \\ \lambda &= \beta I, \quad \beta = 0 \\ T(z^{-1}) &= 1 \end{aligned}$$

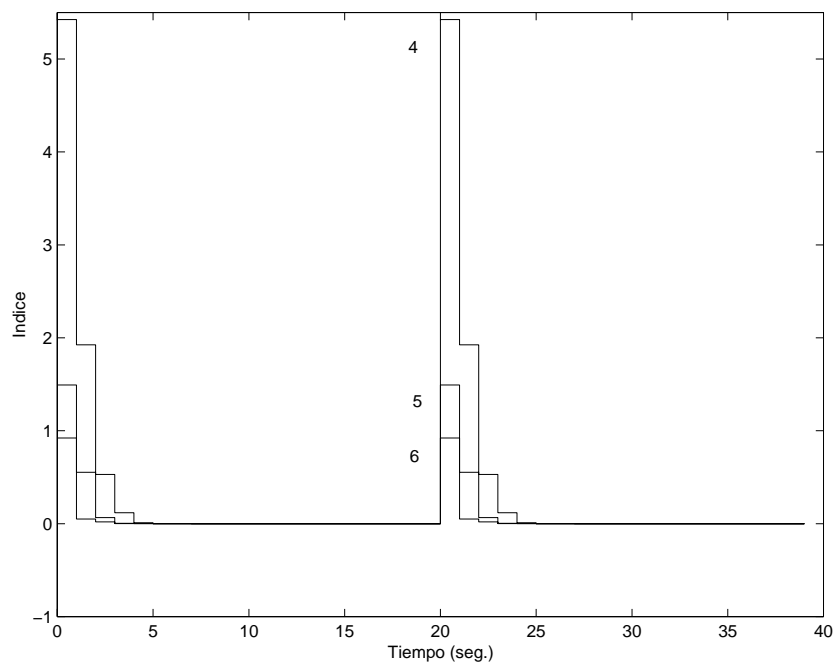
El resultado de calcular un PC-GPC<sup>∞</sup> como un problema de mínimos cuadrados puede observarse en la figura 6.25(a). El número mínimo de componentes a utilizar en este caso sería de 3 ( $\widetilde{na} + 1 = 2 + 1$ ), por ello se han utilizado 4, 5 y 6 componentes con un valor de  $\mu = 1000$ . En este caso el índice de coste también decrece monótonamente (figura 6.25(b)).

**Ejemplo 7:**

Se propone este ejemplo para ilustrar cómo pueden aparecer problemas numéricos asociados a la implementación de un algoritmo GPC estable basado en la expresión (6.11). La implementación de esta expresión requiere explícitamente



(a) Salida en bucle cerrado y acción de control.



(b) Índice de coste

Figura 6.25: Control con el PC-GPC $^{\infty}$  utilizando un método de mínimos cuadrados ponderado.

la inversión de matrices por lo que pueden aparecer problemas de mal condicionamiento.

Partiendo del siguiente proceso inestable:

$$G(z^{-1}) = \frac{(1 - 0.3z^{-1} - 0.4z^{-2})}{(1 - 1.5z^{-1})(1 - 2z^{-1})(1 - 2.5z^{-1})} z^{-1} \quad (6.146)$$

Un controlador CRHPC diseñado en base a los siguientes parámetros:

$$\begin{array}{c|c|c|c|c|c|c} N_1 & N_2 & m & N_u & T(z^{-1}) & \alpha_i & \lambda_j \\ \hline 1 & 11 & 4 & 6 & 1 & 1 & 10 \end{array} \quad (6.147)$$

produce la respuesta del sistema de la figura 6.26(a). Como se observa, la expresión (6.11), tiene problemas numéricos asociados al mal condicionamiento de las matrices que debe invertir. En este caso:

$$\kappa(G^T \alpha G + \lambda) = 7.7533 \times 10^8 \quad (6.148)$$

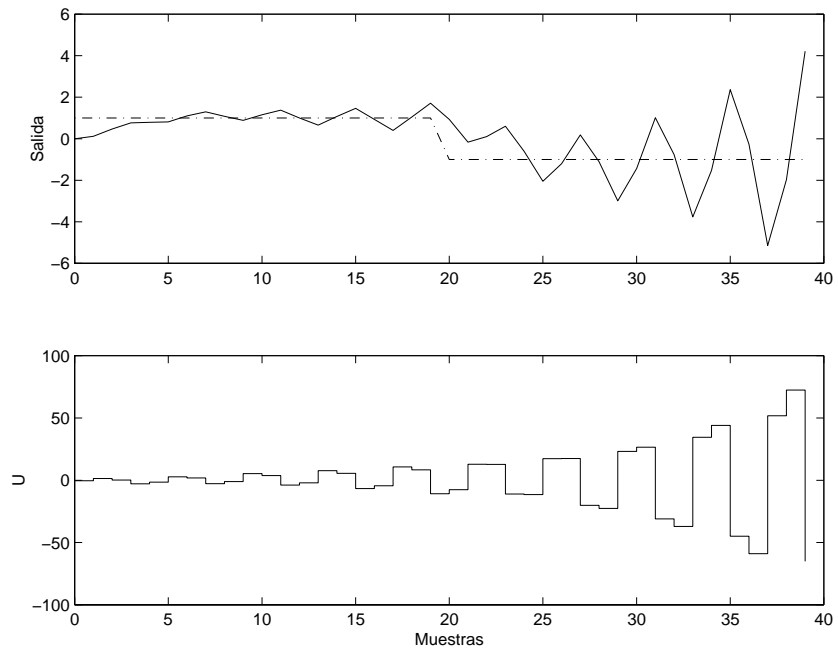
$$\kappa(\tilde{G} \tilde{G}^T) = 1.3011 \times 10^{10} \quad (6.149)$$

El número de condición elevado de estas matrices es un síntoma del mal condicionamiento del problema, por lo tanto no es recomendable implementar el algoritmo como indica (6.11).

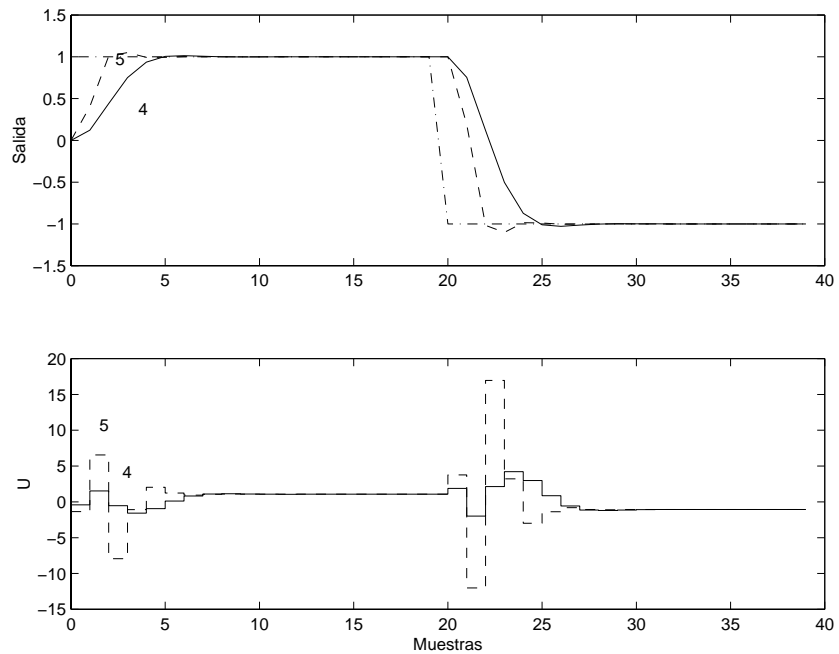
Sin embargo, utilizando un PC-GPC estable, se evita realizar explícitamente la inversión de matrices y esto hace que el controlador sea más adecuado para su implementación. Para los mismos parámetros, la figura 6.26(b), muestra la respuesta del sistema en bucle cerrado para un PC-GPC diseñado con 4 y 5 componentes y en ella se observa que el bucle cerrado es estable.

## 6.7 Resumen

En el controlador PC-GPC, se sustituye el parámetro de diseño  $\lambda$  por el número de componentes principales (NPC). El hecho de incluir más o menos componentes en este controlador, no asegura la estabilidad del bucle cerrado. En este capítulo se resuelve el problema de la estabilidad nominal del bucle cerrado, proponiendo unos valores de los parámetros de diseño para los cuales se puede garantizar que el bucle cerrado va a ser estable.



(a) Salida en bucle cerrado y acción de control para un CRHPC.



(b) Salida en bucle cerrado y acción de control para un PC-GPC.

Figura 6.26: Comparación del control con CRHPC y con un PC-GPC estable.

El capítulo comienza describiendo cuáles son, hasta el momento, las alternativas propuestas en el ámbito del GPC para obtener un diseño nominal estable. En concreto, el desarrollo se focaliza en dos estrategias de control: el CRHPC o *Constraint Receding Horizon Predictive Control*, basado en la imposición de una restricción terminal tras el horizonte de predicción y el  $GPC^\infty$  basado en un horizonte de predicción infinito. De su estudio se deduce que ambas estrategias pueden representarse como un problema de mínimos cuadrados sujeto a una restricción de tipo igualdad.

En el capítulo se desarrolla una alternativa al uso de multiplicadores de Lagrange para resolver este tipo de problemas que desembocará más tarde en un controlador basado en componentes principales pero estable: el PC-GPC estable.

La elección de los parámetros de diseño para garantizar la estabilidad produce una restricción de tipo igualdad que forma un sistema de ecuaciones compatible indeterminado, donde sus infinitas soluciones, se pueden calcular a través de una expresión que representa la solución general de dicho sistema de ecuaciones.

Esta solución general estará formada por:

- Una solución particular.
- Una solución general del sistema homogéneo de ecuaciones asociado.

La solución particular se calcula como la *solución de mínima norma* o mínimo esfuerzo de control necesario para cumplir con la restricción igualdad y por lo tanto para que el sistema en bucle cerrado sea estable.

El resto de la solución representa los grados de libertad todavía disponibles para minimizar el índice de coste. Utilizando la descomposición en valores singulares, de nuevo se obtiene un número de componentes principales, los cuales representan dichos grados de libertad, pero ordenados de mayor a menor importancia. Por tanto, es posible utilizar los criterios de selección de componentes expuestos en la tesis para decidir qué componentes utilizar.

En el capítulo se demuestra que, para ciertos valores de los horizontes de predicción y control, el controlador garantiza la estabilidad nominal del bucle cerrado. Además, el valor del índice de coste que produce el PC-GPC diseñado sin ninguna componente, es decir, tan solo calculado en base a la solución particular, es una cota superior para cualquier valor del índice si incluimos distintas componentes en el controlador.

---

Finalmente, con el objetivo de simplificar todavía más el cálculo del controlador PC-GPC estable, se presenta éste como la solución de un sencillo problema de mínimos cuadrados. La ventaja respecto al resto de alternativas es que en este controlador no existe una inversión explícita de matrices con lo que se evitan problemas de mal condicionamiento numérico.

El capítulo finaliza con ejemplos ilustrativos del nuevo controlador así como con una extensión para el caso multivariable en el caso de formular el problema con restricción terminal.





# Capítulo 7

## Conclusiones y trabajos futuros

### 7.1 Conclusiones

La aportación fundamental de esta tesis está relacionada con la definición de un nuevo tipo de controlador predictivo, el PC-GPC, versión modificada de un GPC estándar. En este controlador se ha sustituido el factor de ponderación de la acción de control por un nuevo parámetro denominado *número de componentes principales (NPC)*. La relación entre el nuevo parámetro (NPC) y algunos indicadores numéricos, como la norma del vector de acciones de control o el número de condición de la matriz dinámica  $G$ , hacen que su elección esté basada en criterios menos subjetivos que la ponderación de las acciones de control. Además, se ha analizado este tipo de controlador tanto en el ámbito de procesos SISO como MIMO, así como sus características de robustez y estabilidad.

Se pueden destacar, como conclusiones más importantes al trabajo realizado en esta tesis, las siguientes:

- Tras la presentación y estudio del estado del arte del control predictivo, se concluye que gran parte del tiempo dedicado a la implantación de un controlador se utiliza en el ajuste de sus parámetros por prueba y error, en particular, del parámetro  $\lambda$ .
- Se ha presentado el problema de control predictivo sin restricciones como un problema de resolución de un sistema de ecuaciones y se concluye que un inconveniente importante cuando se aborda su resolución es el mal condicionamiento numérico.

- Se ha introducido una herramienta matemática (la descomposición SVD), y ha sido utilizada en el cálculo de un GPC como alternativa al factor de ponderación de la acción de control  $\lambda$ .
- Se ha creado un nuevo parámetro denominado *número de componentes principales (NPC)*, obteniendo así un controlador GPC modificado, el PC-GPC o *Principal Component Generalized Predictive Controller*.
- Se han propuesto diferentes criterios de selección de este nuevo parámetro, basados en indicadores numéricos, como por ejemplo el esfuerzo de control, la cantidad de error de predicción minimizado o el condicionamiento del controlador, entre otros. Se concluye además, que el uso de estos criterios de selección puede ser una alternativa a la elección del factor  $\lambda$  por prueba y error.
- Se ha puesto de manifiesto la relación existente entre el número de componentes principales (NPC) y el factor de ponderación de la acción de control concluyendo que ambos consiguen el mismo efecto tanto a nivel de condicionamiento del controlador, prestaciones del bucle cerrado y robustez. Para comprobar esto último, se ha realizado un análisis de estabilidad robusta en función de los parámetros de diseño tanto para el GPC como para el PC-GPC, basado en las clásicas funciones de sensibilidad.
- Se ha demostrado que, si se incorporan restricciones en el controlador PC-GPC, se pueden reducir los tiempos de cálculo de la acción de control comparados con los de un GPC con restricciones, puesto que la rutina de programación cuadrática tiene que optimizar menos variables.
- Ya que es importante el diseño de controladores que garanticen la estabilidad nominal del sistema en bucle cerrado, se han estudiado las soluciones propuestas por otros autores para conseguir ésto mismo en el ámbito del GPC, y se ha propuesto una alternativa de resolución basada en la descomposición SVD, denominada PC-GPC estable.
- En el PC-GPC estable, se concluye que las componentes principales representan los grados de libertad disponibles para minimizar el índice de coste, ordenados de mayor a menor importancia una vez se conoce seguro que el diseño va a ser estable. Se concluye, además, que el valor del índice de coste que produce un PC-GPC estable con NPC=0, representa una

*cota superior* para el valor de cualquier índice producido por cualquier otro controlador con  $NPC \neq 0$ .

- Debido a que en el PC-GPC estable se evita la inversión explícita de matrices, se ha demostrado que este controlador resulta más adecuado para su implementación que otros controladores como el CRHPC o el  $GPC^\infty$ .
- Por último, destacar que las técnicas aquí propuestas y el diseño del controlador PC-GPC pueden aplicarse de forma natural a procesos multivariables, y que no sólo se circunscribe al ámbito del GPC sino que puede ser aplicado a otros algoritmos de control predictivo como por ejemplo el DMC.

## 7.2 Trabajos futuros

La continuación del trabajo presentado en esta tesis pasa por el desarrollo de una serie de ideas que pueden resumirse en:

- Búsqueda de nuevos criterios de selección de componentes basados, por ejemplo, en especificaciones de tipo temporal, aprovechando que el índice cuadrático tan sólo contiene los errores de predicción.
- Incorporación de restricciones al algoritmo de control. Estudio a distintos niveles de este aspecto en cuanto a:
  - creación de algoritmos explícitos para el tratamiento de las restricciones, evitando la programación cuadrática, no sólo seleccionando un número entero de componentes principales, sino ponderando algunas de ellas.
  - influencia de las restricciones en el algoritmo PC-GPC estable.
- Estudio de diferentes técnicas de control adaptativo para conseguir un esquema de adaptación de las componentes principales en línea para obtener soluciones menos conservativas.
- Incorporación de mecanismos de robustez en el propio diseño del PC-GPC, es decir obtener un controlador incluyendo en el diseño especificaciones de robustez. Para ello haría falta estudiar la relación existente

entre el número de componentes y alguna forma de representación de la incertidumbre (estructurada, no estructurada).

- Aplicación a procesos reales (control de clima y fertirrigación en invernaderos, control de combustión en motores diesel turboalimentados) para comprobar la efectividad del PC-GPC.

# Apéndice A

## Diseño de Controladores Predictivos Generalizados (GPC) para Sistemas MIMO

### A.1 El modelo de predicción para procesos MIMO

La *Matriz de Transferencia* puede considerarse como una de las formas más comunes de representar procesos MIMO. En una gran mayoría de procesos industriales, cada una de las funciones de transferencia que forman la matriz, pueden ser obtenidas a partir de pruebas basadas en identificación experimental o análisis en frecuencia. Por ejemplo, una columna cualquiera de la matriz de transferencia puede ser obtenida aplicando un escalón a la correspondiente entrada y observando cada una de las salidas (su constante de tiempo, ganancia, retardo, etc). Si esto se hace para todas las entradas, se obtiene la matriz de transferencia completa. (Camacho and Bordóns, 1995)

Un modelo CARIMA para un proceso con  $n$  salidas y  $m$  entradas puede ser expresado como:

$$A(z^{-1})y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \frac{1}{\Delta}C(z^{-1})\xi(t) \quad (\text{A.1})$$

donde:

- $y(t)$  es el vector  $n \times 1$  de salidas en el instante  $t$ .<sup>1</sup>
- $u(t)$  es el vector  $m \times 1$  de entradas en el instante  $t$ .
- $\xi(t)$  es el vector  $n \times 1$  de perturbaciones en el instante  $t$ . Las secuencias incluidas en este vector cumplen con las hipótesis de ser un *ruido blanco*:

$$\mathcal{E}\{\xi(t)\} = 0, \quad \mathcal{E}\{\xi(t)\xi(t)^T\} = \sigma_0$$

- $A(z^{-1})$  y  $C(z^{-1})$  son matrices polinomiales de dimensión  $n \times n$ .
- $B(z^{-1})$  es una matriz polinomial de dimensión  $n \times m$ .
- $\Delta$  es el polinomio  $1 - z^{-1}$

Para clarificar el tratamiento que a partir de ahora se va a dar a las matrices polinomiales, se expondrán dos formas de trabajar con este tipo de matrices:

- Sea  $P(z^{-1})$  una matriz polinomial. Una forma de manipular esta matriz consiste en tratarla como un polinomio en  $z^{-1}$ , donde los coeficientes  $P_i$  de los polinomios son matrices:

$$P(z^{-1}) = P_0 + P_1 z^{-1} + P_2 z^{-2} + \dots + P_{n_p} z^{-n_p}$$

- Otra forma es tratar a  $P(z^{-1})$  como una matriz donde cada elemento, es un polinomio mismo en  $z^{-1}$ :

$$P(z^{-1}) = \begin{bmatrix} P_{11}(z^{-1}) & P_{12}(z^{-1}) & \cdots & P_{1m}(z^{-1}) \\ P_{21}(z^{-1}) & P_{22}(z^{-1}) & \cdots & P_{2m}(z^{-1}) \\ & & \ddots & \\ P_{n1}(z^{-1}) & P_{n2}(z^{-1}) & \cdots & P_{nm}(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

El grado de una matriz polinomial  $P(z^{-1})$ ,  $\deg(P)$ , queda definido por el máximo de los grados de los polinomios que la componen:

$$\deg(P) = \max_{ij} \deg(P_{ij}) = n_p$$

De aquí en adelante, se adoptará esta última aproximación en lo que a matrices polinomiales se refiere.

<sup>1</sup>En este apéndice, se considera  $t \in \mathcal{N}$ .

Así, para obtener el modelo CARIMA enunciado en (A.1), se partirá de la matriz de transferencia del sistema  $MT(z^{-1})$  formada por  $n \times m$  funciones de transferencia. Será necesario encontrar dos matrices polinomiales  $A(z^{-1})$  y  $B(z^{-1})$ , tales que se cumpla:

$$MT(z^{-1}) = A(z^{-1})^{-1}B(z^{-1})$$

La forma anterior de expresar una matriz de transferencia es comúnmente conocida como *descomposición por la izquierda*. Existen diferentes métodos para obtener a partir de una matriz de transferencia una descomposición por la izquierda o por la derecha (Camacho and Bordóns, 1995), (Skogestad and Postlethwaite, 1996). Aunque de manera sencilla, se puede obtener formando una matriz diagonal  $A(z^{-1})$  tal, que los polinomios de su diagonal principal sean el mínimo común múltiplo de los denominadores de la correspondiente fila de  $MT(z^{-1})$ . Haciendo esto, la matriz  $B(z^{-1})$ , es entonces igual a:

$$B(z^{-1}) = A(z^{-1})MT(z^{-1})$$

En cuanto a la matriz polinomial  $C(z^{-1})$ , al igual que en el caso SISO, es muy difícil de obtener, pues está formada por una serie de polinomios  $C_{ij}(z^{-1})$  difíciles de estimar, y se prefiere sustituirlos por una serie de polinomios  $T_i(z^{-1})$  elegidos en el proceso de diseño del controlador. Normalmente, esta matriz se elige en forma diagonal.

Así, el modelo multivariable queda:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} A_1(z^{-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & A_2(z^{-1}) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & A_n(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \\ \vdots \\ y_n(t) \end{bmatrix} = \\ & = \begin{bmatrix} B_{11}(z^{-1}) & B_{12}(z^{-1}) & \cdots & B_{1m}(z^{-1}) \\ B_{21}(z^{-1}) & B_{22}(z^{-1}) & \cdots & B_{2m}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ B_{n1}(z^{-1}) & B_{n2}(z^{-1}) & \cdots & B_{nm}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(t) \\ u_2(t) \\ \vdots \\ u_m(t) \end{bmatrix} + \\ & + \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} T_1(z^{-1}) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & T_2(z^{-1}) & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & T_n(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1(t) \\ \xi_2(t) \\ \vdots \\ \xi_n(t) \end{bmatrix} \end{aligned}$$



Por ejemplo, para un sistema con tres entradas ( $m = 3$ ) y tres salidas ( $n = 3$ ), su *matriz de transferencia* vendrá dada por:

$$MT(z^{-1}) = \begin{bmatrix} \frac{Bb_{11}(z^{-1})}{Aa_{11}(z^{-1})} & \frac{Bb_{12}(z^{-1})}{Aa_{12}(z^{-1})} & \frac{Bb_{13}(z^{-1})}{Aa_{13}(z^{-1})} \\ \frac{Bb_{21}(z^{-1})}{Aa_{21}(z^{-1})} & \frac{Bb_{22}(z^{-1})}{Aa_{22}(z^{-1})} & \frac{Bb_{23}(z^{-1})}{Aa_{23}(z^{-1})} \\ \frac{Bb_{31}(z^{-1})}{Aa_{31}(z^{-1})} & \frac{Bb_{32}(z^{-1})}{Aa_{32}(z^{-1})} & \frac{Bb_{33}(z^{-1})}{Aa_{33}(z^{-1})} \end{bmatrix}$$

y su *descomposición por la izquierda*  $A(z^{-1})^{-1}B(z^{-1})$  vendrá dada por:

$$A(z^{-1}) = \begin{bmatrix} Aa_{11}Aa_{12}Aa_{13} & 0 & 0 \\ 0 & Aa_{21}Aa_{22}Aa_{23} & 0 \\ 0 & 0 & Aa_{31}Aa_{32}Aa_{33} \end{bmatrix}$$

$$B(z^{-1}) = \begin{bmatrix} Aa_{12}Aa_{13}Bb_{11} & Aa_{11}Aa_{13}Bb_{12} & Aa_{11}Aa_{12}Bb_{13} \\ Aa_{22}Aa_{23}Bb_{21} & Aa_{21}Aa_{23}Bb_{22} & Aa_{21}Aa_{22}Bb_{23} \\ Aa_{32}Aa_{33}Bb_{31} & Aa_{31}Aa_{33}Bb_{32} & Aa_{31}Aa_{32}Bb_{33} \end{bmatrix}$$

La matriz polinomial  $C(z^{-1})$ , estaría formada por tres polinomios::

$$C(z^{-1}) = \begin{bmatrix} T_1(z^{-1}) & 0 & 0 \\ 0 & T_2(z^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & T_3(z^{-1}) \end{bmatrix}$$

Formulado de este modo el modelo CARIMA MIMO, se puede escribir la ecuación que modela cada una de las salidas del proceso como:

$$A_i(z^{-1})y_i(t) = \sum_{j=1}^m B_{ij}(z^{-1})u_j(t-1) + \frac{T_i(z^{-1})}{\Delta}\xi_i(t) \quad (\text{A.2})$$

para  $i = 1 \dots n$ , y siendo:

- $A_i(z^{-1})$  el polinomio de la diagonal de la matriz polinomial  $A(z^{-1})$  que hace referencia a la salida  $i$ .
- $B_{ij}(z^{-1})$  el polinomio de la fila  $i$  y la columna  $j$  de la matriz polinomial  $B(z^{-1})$ , que relaciona la salida  $i$  con la entrada  $j$ .

- $\Delta$  el polinomio  $1 - z^{-1}$ .

En nuestro ejemplo  $3 \times 3$ :

$$\begin{aligned} A_1(z^{-1})y_1(t) &= B_{11}(z^{-1})u_1(t-1) + B_{12}(z^{-1})u_2(t-1) + B_{13}(z^{-1})u_3(t-1) + \frac{T_1(z^{-1})}{\Delta}\xi_1(t) \\ A_2(z^{-1})y_2(t) &= B_{21}(z^{-1})u_1(t-1) + B_{22}(z^{-1})u_2(t-1) + B_{23}(z^{-1})u_3(t-1) + \frac{T_2(z^{-1})}{\Delta}\xi_2(t) \\ A_3(z^{-1})y_3(t) &= B_{31}(z^{-1})u_1(t-1) + B_{32}(z^{-1})u_2(t-1) + B_{33}(z^{-1})u_3(t-1) + \frac{T_3(z^{-1})}{\Delta}\xi_3(t) \end{aligned}$$

Para hacer el tratamiento más sencillo, se supondrá a partir de ahora, que todos los  $T_i(z^{-1})$  son el mismo  $T(z^{-1})$ . Con esta hipótesis, para cada una de las ecuaciones (A.2), se puede plantear una primera predicción de la salida para el instante  $t + k$ :

$$A_i(z^{-1})y_i(t+k) = \sum_{j=1}^m B_{ij}(z^{-1})u_j(t+k-1) + \frac{T_i(z^{-1})}{\Delta}\xi_i(t+k) \quad (\text{A.3})$$

Como en el caso SISO (Clarke *et al.*, 1987a) (Clarke *et al.*, 1987b) (Clarke and Mohtadi, 1989), se plantea una descomposición del modelo del ruido, y se hallan recursivamente para cada instante de predicción  $k$ , los polinomios  $E_{(i)k}(z^{-1})$  y  $F_{(i)k}(z^{-1})$  de la forma siguiente:

$$\frac{T}{\Delta A_i} = E_{(i)k} + \frac{F_{(i)k}}{\Delta A_i} z^{-k} \left\{ \begin{array}{l} E_{(i)1} = t_0 \\ F_{(i)1} = z[T - t_0 \Delta A_i] \\ E_{(i)k+1} = E_{(i)k} + f_0^{(i)k} z^{-k} \\ F_{(i)k+1} = z(F_{(i)k} - \Delta A_i f_0^{(i)k}) \end{array} \right. \quad (\text{A.4})$$

donde:

- $i$  hace referencia al número de bucle o salida
- $k$  hace referencia al instante de predicción
- $f_0^{ik}$  es el término independiente del polinomio  $F_{(i)k}(z^{-1})$ .
- $E_{(i)k}(z^{-1})$  es un polinomio FIR de grado  $k - 1$ .

- $F_{(i)k}(z^{-1})$  es un polinomio FIR de grado  $\max[\deg(T) - 1, \deg(A_i)]$ .

De la descomposición (A.4) se obtiene que:

$$E_{(i)k}(z^{-1})\Delta A_i(z^{-1}) = T(z^{-1}) - F_{(i)k}(z^{-1})z^{-k} \quad (\text{A.5})$$

Multiplicando (A.3) por  $E_{(i)k}(z^{-1})\Delta$  a ambos lados:

$$\begin{aligned} E_{(i)k}(z^{-1})\Delta A_i(z^{-1})y_i(t+k) &= \sum_{j=1}^m E_{(i)k}(z^{-1})B_{ij}(z^{-1})\Delta u_j(t+k-1) + \\ &+ E_{(i)k}(z^{-1})T(z^{-1})\xi_i(t+k) \end{aligned}$$

Utilizando (A.5) en (A.6):

$$\begin{aligned} T(z^{-1}) - F_{(i)k}(z^{-1})z^{-k}y_i(t+k) &= \sum_{j=1}^m E_{(i)k}(z^{-1})B_{ij}(z^{-1})\Delta u_j(t+k-1) + \\ &+ E_{(i)k}(z^{-1})T(z^{-1})\xi_i(t+k) \end{aligned}$$

Operando,

$$\begin{aligned} y_i(t+k) &= \sum_{j=1}^m E_{(i)k}(z^{-1})B_{ij}(z^{-1})\frac{\Delta u_j(t+k-1)}{T(z^{-1})} + F_{(i)k}(z^{-1})\frac{y_i(t)}{T(z^{-1})} \\ &+ E_{(i)k}(z^{-1})\xi_i(t+k) \end{aligned}$$

Hay que hacer notar que el término  $E_{(i)k}(z^{-1})\xi_i(t+k)$  de la expresión (A.6), representa la parte impredecible de la salida del proceso  $y_i$ , ( los polinomios FIR  $E_{(i)k}(z^{-1})$  son de orden  $k-1$ , y  $\xi_i(t+k)$  es un ruido blanco ( $\mathcal{E}[\xi_i(t)] = 0$ ).

De esta forma aplicando la *Esperanza matemática* ( $\mathcal{E}$ ) a la expresión (A.6), se puede afirmar que la mejor predicción para la salida  $i$  en  $t+k$ , partiendo del instante  $t$ , viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}[y_i(t+k)] &= \mathcal{E} \left[ \sum_{j=1}^m E_{(i)k}(z^{-1})B_{ij}(z^{-1})\frac{\Delta u_j(t+k-1)}{T(z^{-1})} + F_{(i)k}(z^{-1})\frac{y_i(t)}{T(z^{-1})} \right. \\ &+ \left. E_{(i)k}(z^{-1})\xi_i(t+k) \right] \\ &= \sum_{j=1}^m E_{(i)k}(z^{-1})B_{ij}(z^{-1})\frac{\Delta u_j(t+k-1)}{T(z^{-1})} + F_{(i)k}(z^{-1})\frac{y_i(t)}{T(z^{-1})} \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Expresión <sup>2</sup> que, al igual que en el caso SISO, depende de valores de las señales de entrada que son conocidos hasta el instante  $t$  y otros que, por ser posteriores a ese instante, son desconocidos. Se plantea así una nueva descomposición con el fin de separar cuáles de estos valores son anteriores y posteriores al instante  $t$ . Para cada instante de predicción  $k$  se calculan recursivamente los polinomios  $G_{(ij)k}(z^{-1})$  y  $\Gamma_{(ij)k}(z^{-1})$  de la siguiente forma:

$$\frac{E_{(i)k} B_{ij}}{T} = G_{(ij)k} + \frac{\Gamma_{(ij)k}}{T} z^{-k} \left\{ \begin{array}{l} G_{(ij)1} = b_0^{ij} \\ \Gamma_{(ij)1} = z[t_0 B_{ij} - b_0^{ij} T] \\ g_{(ij)k} = \frac{1}{t_0} (f_0^{ik} b_0^{ij} + \gamma_0^{(ij)k}) \\ G_{(ij)k+1} = G_{(ij)k} + g_{(ij)k} z^{-k} \\ \Gamma_{(ij)k+1} = z(\Gamma_{(ij)k} - f_0^{ik} - g_{(ij)k} T) \end{array} \right. \quad (\text{A.7})$$

donde:

- $i$  hace referencia al bucle  $i$  o salida  $i$  del proceso.
- $j$  hace referencia a la entrada  $j$  del proceso.
- $b_0^{ij}$  es el término independiente del polinomio  $B_{ij}(z^{-1})$ , y
- $\gamma_0^{(ij)k}$  es el término independiente del polinomio  $\Gamma_{(ij)k}(z^{-1})$ .
- $G_{(ij)k}(z^{-1})$  es un polinomio FIR de grado  $k - 1$ .
- $\Gamma_{(ij)k}(z^{-1})$  es un polinomio FIR de grado  $\max[\deg(B_{ij}) - 1, \deg(T) - 1]$ .

Definiendo,  $\Delta u_j^f(t)$  y  $y_i^f(t)$  como:

$\Delta u_j^f(t)$  : valores de  $\Delta u_j(t)$  filtrados por el polinomio  $T(z^{-1})$ :

$$\Delta u_j^f(t) = \frac{\Delta u_j(t)}{T}$$

---

<sup>2</sup>En Control Predictivo, se suele expresar como  $y(t+k|t)$ , el valor esperado que tendrá la señal  $y$  en  $t+k$ , siendo  $t$  el instante actual.

$y_i^f(t)$  : valores de  $y_i(t)$  filtrados por el polinomio  $T(z^{-1})$ :

$$y_i^f(t) = \frac{y_i(t)}{T}$$

se puede reescribir la ecuación (A.6) como:

$$y_i(t+k|t) = \underbrace{\sum_{j=1}^m G_{(ij)k} \Delta u_j(t+k-1)}_{\text{Futuro}} + \underbrace{\sum_{j=1}^m \Gamma_{(ij)k} \Delta u_j^f(t-1) + F_{(i)k} y_i^f(t)}_{\text{Pasado}} \quad (\text{A.8})$$

la cual permite, situados en el instante  $t$ , predecir el valor de la  $i$ -ésima salida del sistema en el instante  $t+k$ .

La expresión (A.8) está compuesta por información proveniente de instantes anteriores (los dos últimos sumandos) donde los datos de las secuencias son conocidos y por información de instantes posteriores (primer sumando) donde los valores de la entradas son desconocidos pero pueden ser propuestos.

### A.1.1 Interpretación matricial del modelo de predicción

Partiendo del modelo de predicción para la salida  $i$ :

$$y_i(t+k|t) = \sum_{j=1}^m G_{(ij)k} \Delta u_j(t+k-1) + \sum_{j=1}^m \Gamma_{(ij)k} \Delta u_j^f(t-1) + F_{(i)k} y_i^f(t) \quad (\text{A.9})$$

Se forman ahora vectores fila de polinomios para sustituir a los sumatorios:

$$y_i(t+k|t) = \begin{bmatrix} G_{(i1)k}(z^{-1}) & G_{(i2)k}(z^{-1}) & \dots & G_{(im)k}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(t+k-1) \\ \Delta u_2(t+k-1) \\ \vdots \\ \Delta u_m(t+k-1) \end{bmatrix} + \\ + \begin{bmatrix} \Gamma_{(i1)k}(z^{-1}) & \Gamma_{(i2)k}(z^{-1}) & \dots & \Gamma_{(im)k}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^f(t-1) \\ \Delta u_2^f(t-1) \\ \vdots \\ \Delta u_m^f(t-1) \end{bmatrix} +$$

$$+ \begin{bmatrix} F_{(i)1}(z^{-1}) \\ F_{(i)2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{(i)N}(z^{-1}) \end{bmatrix} y_i^f(t)$$

Desarrollando el modelo (A.8) para  $N$  predicciones:

$$\begin{aligned} y_i(t+1|t) &= \sum_{j=1}^m G_{(ij)1}(z^{-1}) \Delta u_j(t) + \sum_{j=1}^m \Gamma_{(ij)1}(z^{-1}) \Delta u_j^f(t-1) \\ &+ F_{(i)1}(z^{-1}) y_i^f(t) \\ &\vdots \\ y_i(t+N|t) &= \sum_{j=1}^m G_{(ij)N}(z^{-1}) \Delta u_j(t+N-1) + \sum_{j=1}^m \Gamma_{(ij)N}(z^{-1}) \Delta u_j^f(t-1) \\ &+ F_{(i)N}(z^{-1}) y_i^f(t) \end{aligned}$$

y de nuevo sustituyendo los sumatorios por filas de polinomios:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} y_i(t+1|t) \\ y_i(t+2|t) \\ \vdots \\ y_i(t+N|t) \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{(i1)1}(z^{-1}) & G_{(i2)1}(z^{-1}) & \dots & G_{(im)1}(z^{-1}) \\ G_{(i1)2}(z^{-1}) & G_{(i2)2}(z^{-1}) & \dots & G_{(im)2}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{(i1)N}(z^{-1}) & G_{(i2)N}(z^{-1}) & \dots & G_{(im)N}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1(t+k-1) \\ \Delta u_2(t+k-1) \\ \vdots \\ \Delta u_m(t+k-1) \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \Gamma_{(i1)1}(z^{-1}) & \Gamma_{(i2)1}(z^{-1}) & \dots & \Gamma_{(im)1}(z^{-1}) \\ \Gamma_{(i1)2}(z^{-1}) & \Gamma_{(i2)2}(z^{-1}) & \dots & \Gamma_{(im)2}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{(i1)N}(z^{-1}) & \Gamma_{(i2)N}(z^{-1}) & \dots & \Gamma_{(im)N}(z^{-1}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u_1^f(t-1) \\ \Delta u_2^f(t-1) \\ \vdots \\ \Delta u_m^f(t-1) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_{(i)1}(z^{-1}) \\ F_{(i)2}(z^{-1}) \\ \vdots \\ F_{(i)N}(z^{-1}) \end{bmatrix} y_i^f(t) \end{aligned}$$

Hasta ahora las matrices polinomiales operan sobre secuencias. Avanzando un paso más hacia una estructura donde únicamente se contemplen matrices numéricas que operan sobre vectores de datos de las secuencias, se pueden formar matrices con los coeficientes de los polinomios.

Para la salida  $i$ , se forman las matrices al igual que en el caso SISO:

$$Y_i = [ G_{i1} \quad G_{i2} \quad \dots \quad G_{im} ] \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} + [ \Gamma_{i1} \quad \Gamma_{i2} \quad \dots \quad \Gamma_{im} ] \begin{bmatrix} U_1^f \\ U_2^f \\ \vdots \\ U_m^f \end{bmatrix} + F_i Y_i^f$$

donde

$$\begin{aligned}
 Y_i &= [y_i(t+1) \ y_i(t+2) \ \dots \ y_i(t+N)]^T \\
 Y_i^f &= [y_i^f(t) \ y_i^f(t-1) \ \dots \ y_i^f(t-\deg F)]^T \\
 U_j &= [\Delta u_j(t) \ \Delta u_j(t+1) \ \dots \ \Delta u_j(t+N-1)]^T \\
 U_j^f &= [\Delta u_j^f(t-1) \ \Delta u_j^f(t-2) \ \dots \ \Delta u_j^f(t-\deg \Gamma + 1)]^T
 \end{aligned}$$

Hay que destacar que cada una de las submatrices  $G_{ij}$ ,  $\Gamma_{ij}$  y  $F_i$ , son las correspondientes a las matrices calculadas para el GPC SIS0 con el modelo  $\frac{B_{ij}(z^{-1})}{A_i(z^{-1})}$ , haciendo notar lo siguiente:

- los coeficientes de los polinomios  $G_{(ij)k}$  se colocan en orden inverso.
- las filas de las matrices de coeficientes  $G_{ij}$ , se rellenan con ceros por la derecha hasta  $N - \deg(G_{(ij)k}(z^{-1})) - 1$
- las filas de las matrices de coeficientes  $\Gamma_{ij}$ , se rellenan con ceros por la derecha hasta completar  $\deg \Gamma$  coeficientes.
- las filas de las matrices de coeficientes  $F_i$ , se rellenan con ceros por la derecha hasta completar  $\deg F$  coeficientes.

siendo  $\deg \Gamma$  y  $\deg F$ :

$$\begin{aligned}
 \deg F &= \max[\deg(F_{(i)k}(z^{-1}))], \quad \forall i \in 1 \dots n, \quad \forall k \in 1 \dots N \\
 \deg \Gamma &= \max[\deg(\Gamma_{(ij)k}(z^{-1}))], \quad \forall i \in 1 \dots n, \quad \forall j \in 1 \dots m, \quad \forall k \in 1 \dots N
 \end{aligned}$$

Realizando esto mismo para todas y cada una de las salidas, se obtiene una expresión matricial global para el modelo de predicción:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} Y_1 \\ Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_m \end{bmatrix} + \\
 &+ \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1m} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \dots & \Gamma_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^f \\ U_2^f \\ \vdots \\ U_m^f \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^f \\ Y_2^f \\ \vdots \\ Y_n^f \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

que se reescribe de una forma simplificada como:

$$Y = G_{pred} U + \Gamma_{pred} U^f + F_{pred} Y^f$$

donde

$$\begin{aligned} Y &= [ Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n ]^T \\ Y^f &= [ Y_1^f \ Y_2^f \ \dots \ Y_n^f ]^T \\ U &= [ U_1 \ U_2 \ \dots \ U_m ]^T \\ U^f &= [ U_1^f \ U_2^f \ \dots \ U_m^f ]^T \\ G_{pred} &= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nm} \end{bmatrix}_{n \cdot N \times m \cdot N} \\ \Gamma_{pred} &= \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1m} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \dots & \Gamma_{nm} \end{bmatrix}_{n \cdot N \times m \cdot (\deg \Gamma + 1)} \\ F_{pred} &= \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix}_{n \cdot N \times n \cdot (\deg F + 1)} \end{aligned}$$

Y las submatrices  $G_{ij}$  y  $\Gamma_{ij}$  coinciden con las del caso SISO con el modelo  $\frac{B_{ij}(z^{-1})}{A_i(z^{-1})}$ :

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} g_0^{(ij)1} & 0 & \dots & 0 \\ g_1^{(ij)2} & g_0^{(ij)2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}^{(ij)N} & g_{N-2}^{11N} & \dots & g_0^{(ij)N} \end{bmatrix}_{N \times N}$$



$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_0^{(ij)1} & \gamma_1^{(ij)1} & \cdots & \gamma_{\deg\Gamma}^{(ij)1} \\ \gamma_0^{(ij)2} & \gamma_1^{(ij)2} & \cdots & \gamma_{\deg\Gamma}^{(ij)2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_0^{(ij)N} & \gamma_1^{(ij)N} & \cdots & \gamma_{\deg\Gamma}^{(ij)N} \end{bmatrix}_{N \times (\deg\Gamma+1)}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} f_0^{i1} & f_1^{i1} & \cdots & f_{\deg F}^{i1} \\ f_0^{i2} & f_1^{i2} & \cdots & f_{\deg F}^{i2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_0^{iN} & f_1^{iN} & \cdots & f_{\deg F}^{iN} \end{bmatrix}_{N \times (\deg F+1)}$$

Analizando las matrices que forman el modelo de predicción, se deduce que:

- Matriz  $G_{pred}$ : tiene dimensiones  $n \cdot N \times m \cdot N$ . Cada una de sus filas son los coeficientes de los polinomios  $G_{(ij)k}(z^{-1})$ , pero colocados en orden inverso (de mayor a menor potencia en  $z^{-1}$ ). Su forma general sería la siguiente:

$$\begin{bmatrix} g_0^{(11)1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_0^{(1m)1} & 0 & \cdots & 0 \\ g_1^{(11)2} & g_0^{(11)2} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_1^{(1m)2} & g_0^{(1m)2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}^{(11)N} & g_{N-2}^{(11)N} & \cdots & g_0^{(11)N} & \cdots & \cdots & g_{N-1}^{(1m)N} & g_{N-2}^{(1m)N} & \cdots & g_0^{(1m)N} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline g_0^{(n1)1} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_0^{(nm)1} & 0 & \cdots & 0 \\ g_1^{(n1)2} & g_0^{(n1)2} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_1^{(nm)2} & g_0^{(nm)2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N-1}^{(n1)N} & g_{N-2}^{(n1)N} & \cdots & g_0^{(n1)N} & \cdots & \cdots & g_{N-1}^{(nm)N} & g_{N-2}^{(nm)N} & \cdots & g_0^{(nm)N} \end{bmatrix}$$

siendo  $g_q^{(ij)k}$  el coeficiente  $q$ -ésimo del polinomio  $G_{(ij)k}(z^{-1})$  calculado para la salida  $i$ , la entrada  $j$  y el instante de predicción  $t+k$ .

- Matriz  $\Gamma_{pred}$ : tiene dimensiones  $n \cdot N \times m \cdot (\deg\Gamma + 1)$ . Está formada por los coeficientes de los polinomios  $\Gamma_{(ij)k}(z^{-1})$  calculados recursivamente para la salida  $i$ , la entrada  $j$  y el instante de predicción  $t+k$ .

$$\left[ \begin{array}{cccc|cc|cccc} \gamma_0^{(11)1} & \gamma_1^{(11)1} & \cdots & \gamma_{\text{deg}F}^{(11)1} & \cdots & \cdots & \gamma_0^{(1m)1} & \gamma_1^{(1m)1} & \cdots & \gamma_{\text{deg}F}^{(1m)1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_0^{(11)N} & \gamma_1^{(11)N} & \cdots & \gamma_{\text{deg}F}^{(11)N} & \cdots & \cdots & \gamma_0^{(1m)N} & \gamma_1^{(1m)N} & \cdots & \gamma_{\text{deg}F}^{(1m)N} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline \gamma_0^{(n1)1} & \gamma_1^{(n1)1} & \cdots & \gamma_{\text{deg}F}^{(n1)1} & \cdots & \cdots & \gamma_0^{(nm)1} & \gamma_1^{(nm)1} & \cdots & \gamma_{\text{deg}F}^{(nm)1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_0^{(n1)N} & \gamma_1^{(n1)N} & \cdots & \gamma_{\text{deg}F}^{(n1)N} & \cdots & \cdots & \gamma_0^{(nm)N} & \gamma_1^{(nm)N} & \cdots & \gamma_{\text{deg}F}^{(nm)N} \end{array} \right]$$

- Matriz  $F_{pred}$ : De dimensiones  $n \cdot N \times n \cdot (\text{deg}F + 1)$ , es una matriz diagonal a bloques siempre que la matriz polinomial  $C(z^{-1})$ , que incluye los filtros para modelar el ruido de cada una de las salidas, también sea diagonal. Por ejemplo:

$$\left[ \begin{array}{ccc|ccc|cc|ccc} f_0^{11} & \cdots & f_{\text{deg}F}^{11} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_0^{1N} & \cdots & f_{\text{deg}F}^{1N} & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline 0 & \cdots & 0 & f_0^{21} & \cdots & f_{\text{deg}F}^{21} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & f_0^{2N} & \cdots & f_{\text{deg}F}^{2N} & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & f_0^{n1} & \cdots & f_{\text{deg}F}^{n1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & f_0^{nN} & \cdots & f_{\text{deg}F}^{nN} \end{array} \right]$$

## A.2 El índice de coste multicriterio. Obtención del Controlador.

El índice de coste multicriterio, suele ser una expresión cuadrática donde, de alguna manera, deben contribuir todas las salidas y todas las entradas del proceso. Básicamente consiste en redefinir la función de coste para sistemas

SISO de forma tal, que se tengan en cuenta todas las variables de salida y de entrada. Considerando además, que el modelo incorpora una señal de ruido blanco  $\xi(t+k)$  para cada una de las  $n$  salidas, el índice de coste queda, una vez se ha aplicado la Esperanza Matemática ( $\mathcal{E}$ ) como:

$$J(N_1, N_2, \delta_{ik}, \lambda_{jk}) = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=N_1}^{N_2} \delta_{ik} [y_i(t+k|t) - w_i(t+k)]^2 \right] + \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{k=1}^{N_2-N_1+1} \lambda_{jk} [\Delta u_j(t+k-1)]^2 \right]$$

La minimización de este índice en este sentido dos ventajas principales:

- Cuando los órdenes de magnitud de las diferentes variables que intervienen en el índice de coste son muy dispares, los valores numéricos de los errores serán muy diferentes. Por tanto, el esfuerzo de control se desplazaría sólomente a aquellas variables con un peso importante dentro del índice, lo cual podría tener como consecuencia que el controlador se *olvidara* de controlar algunas salidas. Utilizando la secuencia de ponderación  $\delta_{ik}$  se puede conseguir un buen escalado de los errores, solucionando este tipo de situaciones.
- También gracias a la secuencia de ponderación  $\delta_{ik}$  se puede hacer que el controlador no intente llevar la  $i$ -ésima salida hacia su referencia. Esto se consigue sin más que hacer  $\delta_{ik} = 0 \forall k$ , y es de especial utilidad cuando el número de variables controladas es mayor que el número de variables de control, de tal forma que es imposible controlar todas las salidas. Es más, también en estos casos el Control Predictivo tiene la ventaja de la incorporación de restricciones, que pueden servir para mantener esas salidas no-controlables dentro de unos límites y asegurar así el buen funcionamiento del sistema.

Planteado el índice de esta forma, se observa que las predicciones que influyen en éste son únicamente las que abarca el *horizonte de predicción* ( $N = N_2 - N_1 + 1$ ). Del modelo de predicción desarrollado (A.8), se extraerá este conjunto de predicciones. Para ello seleccionando las filas de cada submatriz  $G_{ij}$ ,  $\Gamma_{ij}$  y  $F_i$  desde la fila  $N_1$  hasta la  $N_2$ , se construyen de nuevo unas matrices globales  $G_{mpc}$ ,  $\Gamma_{mpc}$  y  $F_{mpc}$ :

$$Y = G_{mpc} U + \Gamma_{mpc} U^f + F_{mpc} Y^f \quad (\text{A.10})$$

$$Y = [ Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n ]^T$$

$$Y_i = [ y_i(t + N_1) \ Y_i(t + N_1 + 2) \ \dots \ Y_i(t + N_2) ]^T$$

$$G_{mpc} = \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & \dots & G_{1m} \\ G_{21} & G_{22} & \dots & G_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ G_{n1} & G_{n2} & \dots & G_{nm} \end{bmatrix}_{n \cdot N \times m \cdot N}$$

$$\Gamma_{mpc} = \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \dots & \Gamma_{1m} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \dots & \Gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \dots & \Gamma_{nm} \end{bmatrix}_{n \cdot N \times m \cdot (\text{degr}+1)}$$

$$F_{mpc} = \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix}_{n \cdot N \times n \cdot (\text{degr}+1)}$$

donde:

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} g_{N_1-1}^{(ij)N_1} & \dots & 0 & 0 \\ g_{N_1}^{(ij)N_1+1} & \dots & g_0^{(ij)N_1+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_2-1}^{(ij)N_2} & g_{N_2-2}^{(ij)N_2} & \dots & g_0^{(ij)N_2} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_0^{(ij)N_1} & \gamma_1^{(ij)N_1} & \dots & \gamma_{\text{degr}}^{(ij)N_1} \\ \gamma_0^{(ij)N_1+1} & \gamma_1^{(ij)N_1+1} & \dots & \gamma_{\text{degr}}^{(ij)N_1+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_0^{(ij)N_2} & \gamma_1^{(ij)N_2} & \dots & \gamma_{\text{degr}}^{(ij)N_2} \end{bmatrix}_{N \times (\text{degr}+1)}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} f_0^{iN_1} & f_1^{iN_1} & \cdots & f_{\deg_F}^{iN_1} \\ f_0^{iN_1+1} & f_1^{iN_1+1} & \cdots & f_{\deg_F}^{iN_1+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_0^{iN_2} & f_1^{iN_2} & \cdots & f_{\deg_F}^{iN_2} \end{bmatrix}_{N \times (\deg_F + 1)}$$

Se puede plantear el índice en forma matricial según:

$$J = (Y - W)^T \alpha_{mpc} (Y - W) + U^T \lambda_{mpc} U \quad (\text{A.11})$$

con  $\alpha_{mpc}$  y  $\lambda_{mpc}$  matrices diagonales de dimensiones  $(n \cdot N \times n \cdot N)$  y  $(m \cdot N \times m \cdot N)$  respectivamente:

$$\begin{aligned} \alpha_{mpc} &= \text{diag}( \alpha_1 \ \alpha_2 \ \dots \ \alpha_n ) \\ \lambda_{mpc} &= \text{diag}( \lambda_1 \ \lambda_2 \ \dots \ \lambda_m ) \\ \alpha_i &= \text{diag}( \alpha_{i1} \ \alpha_{i2} \ \dots \ \alpha_{iN} ) \\ \lambda_j &= \text{diag}( \lambda_{j1} \ \lambda_{j2} \ \dots \ \lambda_{jN} ) \end{aligned}$$

Y donde además:

$$\begin{aligned} Y &= [ Y_1 \ Y_2 \ \dots \ Y_n ]^T \\ U &= [ U_1 \ U_2 \ \dots \ U_m ]^T \\ W &= [ W_1 \ W_2 \ \dots \ W_n ]^T \\ Y_i &= [ y_i(t + N_1|t) \ y_i(t + 2|t) \ \dots \ y_i(t + N_2|t) ]^T \\ U_j &= [ \Delta u_j(t) \ \Delta u_j(t + 1) \ \dots \ \Delta u_j(t + N - 1) ]^T \\ W_i &= [ w_i(t + N_1) \ w_i(t + 2) \ \dots \ w_i(t + N_2) ]^T \end{aligned}$$

La expresión del controlador se obtiene de minimizar el índice. Sustituyendo el modelo de predicción (A.10) en el índice (A.11), se calcula la derivada matricial y se iguala a cero,

$$\frac{\partial J}{\partial U} = 0$$

obteniendo una expresión similar al caso SISO:

$$U = (G_{mpc}^T \alpha_{mpc} G_{mpc} + \lambda_{mpc})^{-1} G_{mpc}^T \alpha_{mpc} (W - \Gamma_{mpc} U^f - F_{mpc} Y^f) \quad (\text{A.12})$$

Expresión que calcula los  $N$  futuros cambios de cada una de las  $m$  acciones de control, que hacen mínimo el índice de coste descrito en (A.11).

### A.2.1 Estructuración de la acción de control: horizonte de control

El cálculo de las acciones de control planteadas como minimización del índice (A.11) implica la inversión de una matriz de orden  $(m \cdot N \times m \cdot N)$ . Orden éste dependiente del horizonte de predicción.

Si se asume una cierta estructuración de las acciones de control, como por ejemplo:

$$\Delta u_j(t+k) = 0, \quad \forall k \in N_u \cdots N$$

es decir que los cambios de las acciones de control serán nulos a partir de un cierto instante dentro del horizonte de predicción, se está imponiendo una restricción de tipo igualdad en nuestro índice, el cual se puede reformular como:

$$\begin{aligned} J(N_1, N_2, N_u, \delta_{ik}, \lambda_{ik}) = & \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=N_1}^{N_2} \delta_{ik} [y_i(t+k|t) - w_i(t+k)]^2 \right] + \\ & + \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{k=1}^{N_u} \lambda_{jk} [\Delta u_j(t+k-1)]^2 \right] \end{aligned}$$

donde el intervalo  $[1 \dots N_u]$  es conocido como *Horizonte de Control*

Esto supone que el vector de futuras acciones de control  $U_j$  pasa, de ser

$$U_j = [ \Delta u_j(t) \quad \Delta u_j(t+1) \quad \dots \quad \Delta u_j(t+N-1) ]^T$$

a ser

$$U_j = \left[ \Delta u_j(t) \quad \Delta u_j(t+1) \quad \dots \quad \Delta u_j(t+N_u-1) \quad 0 \quad \dots \quad 0 \right]^T$$

Al sustituir el modelo de predicción en el índice, se puede observar cómo las  $N - N_u$  últimas columnas de cada submatriz  $G_{ij}$  no influyen en la minimización de éste, por lo que se puede trabajar con una matriz  $G_{mpc}$  de menor tamaño eliminando dichas columnas. Del mismo modo no influyen las  $N - N_u$  últimas columnas de las submatrices de ponderación  $\lambda_j$  por lo que también se pueden eliminar.

Así, para el cálculo de las acciones de control se invertirá una matriz de tamaño menor,  $(m \cdot N_u \times m \cdot N_u)$ , quedando ahora una matriz  $G_{mpc}$  de tamaño  $(n \cdot N \times m \cdot (N - N_u))$ :

$$\left[ \begin{array}{cccc|cccc} g_{N_1-1}^{(11)N_1} & g_{N_1-2}^{(11)N_1} & \dots & 0 & \dots & \dots & g_{N_1-1}^{(1m)N_1} & g_{N_1-2}^{(1m)N_1} & \dots & 0 \\ g_{N_1}^{(11)N_1+1} & g_{N_1-1}^{(11)N_1+1} & \dots & 0 & \dots & \dots & g_{N_1}^{(1m)N_1+1} & g_{N_1-1}^{(1m)N_1+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_2-1}^{(11)N_2} & g_{N_2-2}^{(11)N_2} & \dots & g_{N_2-N_u}^{(11)N_2} & \dots & \dots & g_{N_2-1}^{(1m)N_2} & g_{N_2-2}^{(1m)N_2} & \dots & g_{N_2-N_u}^{(1m)N_2} \\ \hline \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \hline g_{N_1-1}^{(n1)N_1} & g_{N_1-2}^{(n1)N_1} & \dots & 0 & \dots & \dots & g_{N_1-1}^{(nm)N_1} & g_{N_1-2}^{(nm)N_1} & \dots & 0 \\ g_{N_1}^{(n1)N_1+1} & g_{N_1-1}^{(n1)N_1+1} & \dots & 0 & \dots & \dots & g_{N_1}^{(nm)N_1+1} & g_{N_1-1}^{(nm)N_1+1} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_2-1}^{(n1)N_2} & g_{N_2-2}^{(n1)N_2} & \dots & g_{N_2-N_u}^{(n1)N_2} & \dots & \dots & g_{N_2-1}^{(nm)N_2} & g_{N_2-2}^{(nm)N_2} & \dots & g_{N_2-N_u}^{(nm)N_2} \end{array} \right]$$

Y la nueva matriz  $\lambda_{mpc}$  de dimensiones  $(m \cdot N_u \times m \cdot N_u)$  quedaría:

$$\begin{aligned} \lambda_{mpc} &= \text{diag}(\lambda_1 \quad \lambda_2 \quad \dots \quad \lambda_m) \\ \lambda_j &= \text{diag}(\lambda_{j1} \quad \lambda_{j2} \quad \dots \quad \lambda_{jN_u}) \end{aligned}$$

Ahora, la expresión

$$U = (G_{mpc}^T \alpha_{mpc} G_{mpc} + \lambda_{mpc})^{-1} G_{mpc}^T \alpha_{mpc} (W - \Gamma_{mpc} U^f - F_{mpc} Y^f) \quad (\text{A.13})$$

calcula los  $N_u$  futuros cambios de cada acción de control que minimizan el índice de coste.

### A.2.2 Horizontes de control diferentes para cada entrada

En la sección anterior el horizonte de control  $N_u$  era único para todas las entradas. Si se desea trabajar con diferentes horizontes de control  $N_{uj}$  para cada entrada del proceso se debe reformular el índice:

$$J(N_1, N_2, N_{uj}\delta_{ik}, \lambda_{jk}) = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=N_1}^{N_2} \delta_{ik} [y_i(t+k|t) - w_i(t+k)]^2 \right] + \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{k=1}^{N_{uj}} \lambda_{jk} [\Delta u_j(t+k-1)]^2 \right]$$

Y, de igual forma que en el caso anterior, esto se traduce en la formación de nuevas matrices  $G_{mpc}$  y  $\lambda_{mpc}$  eliminando las  $N - N_{uj}$  últimas columnas de las submatrices  $G_{ij}$  y  $\lambda_j$ .

$$\begin{bmatrix} \begin{array}{cccc|cccc} g_{N_1-1}^{(11)N_1} & g_{N_1-2}^{(11)N_1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_{N_1-1}^{(1m)N_1} & g_{N_1-2}^{(1m)N_1} & \cdots & 0 \\ g_{N_1}^{(11)N_1+1} & g_{N_1-1}^{(11)N_1+1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_{N_1}^{(1m)N_1+1} & g_{N_1-1}^{(1m)N_1+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_2-1}^{(11)N_2} & g_{N_2-2}^{(11)N_2} & \cdots & g_{N_2-N_{u1}}^{(11)N_2} & \cdots & \cdots & g_{N_2-1}^{(1m)N_2} & g_{N_2-2}^{(1m)N_2} & \cdots & g_{N_2-N_{um}}^{(1m)N_2} \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc} \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{array} \\ \hline \begin{array}{cccc|cccc} g_{N_1-1}^{(n1)N_1} & g_{N_1-2}^{(n1)N_1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_{N_1-1}^{(nm)N_1} & g_{N_1-2}^{(nm)N_1} & \cdots & 0 \\ g_{N_1}^{(n1)N_1+1} & g_{N_1-1}^{(n1)N_1+1} & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & g_{N_1}^{(nm)N_1+1} & g_{N_1-1}^{(nm)N_1+1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_2-1}^{(n1)N_2} & g_{N_2-2}^{(n1)N_2} & \cdots & g_{N_2-N_{u1}}^{(n1)N_2} & \cdots & \cdots & g_{N_2-1}^{(nm)N_2} & g_{N_2-2}^{(nm)N_2} & \cdots & g_{N_2-N_{um}}^{(nm)N_2} \end{array} \end{bmatrix}$$

La nueva matriz  $G_{mpc}$  tiene dimensiones  $(n \cdot N \times \sum_{j=1}^m (N - N_{uj}))$

### A.2.3 Horizontes de predicción diferentes para cada salida

Si se diseña un índice donde se contempla un horizonte de predicción diferente para cada salida, se tendrá:



$$J(N_{1i}, N_{2i}, N_u, \delta_{ik}, \lambda_{jk}) = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=N_1}^{N_2} \delta_{ik} [y_i(t+k|t) - w_i(t+k)]^2 \right] + \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{k=1}^{N_u} \lambda_{jk} [\Delta u_j(t+k-1)]^2 \right]$$

Esto supone modificar las matrices  $G_{mpc}$ ,  $\Gamma_{mpc}$  y  $F_{mpc}$ , cuyo número de filas depende expresamente del horizonte de predicción. Así se debe modificar la formación de las submatrices  $G_{ij}$ ,  $\Gamma_{ij}$  y  $F_i$ , de tal forma que contengan cada una un número de filas ( $N_{2i} - N_{1i} + 1$ ) igual al horizonte de predicción de la salida  $i$  a la que se refieren.

Quedando de esta forma:

$$G_{ij} = \begin{bmatrix} g_{N_{1i}-1}^{(ij)N_{1i}} & \cdots & 0 & 0 \\ g_{N_{1i}}^{(ij)N_{1i}+1} & \cdots & g_0^{(ij)N_{1i}+1} & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ g_{N_{2i}-1}^{(ij)N_{2i}} & g_{N_{2i}-2}^{(ij)N_{2i}} & \cdots & g_0^{(ij)N_{2i}} \end{bmatrix}_{N \times N}$$

$$\Gamma_{ij} = \begin{bmatrix} \gamma_0^{(ij)N_{1i}} & \gamma_1^{(ij)N_{1i}} & \cdots & \gamma_{\text{degr}}^{(ij)N_{1i}} \\ \gamma_0^{(ij)N_{1i}+1} & \gamma_1^{(ij)N_{1i}+1} & \cdots & \gamma_{\text{degr}}^{(ij)N_{1i}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_0^{(ij)N_{2i}} & \gamma_1^{(ij)N_{2i}} & \cdots & \gamma_{\text{degr}}^{(ij)N_{2i}} \end{bmatrix}_{N \times (\text{degr}+1)}$$

$$F_i = \begin{bmatrix} f_0^{iN_{1i}} & f_1^{iN_{1i}} & \cdots & f_{\text{degr}^F}^{iN_{1i}} \\ f_0^{iN_{1i}+1} & f_1^{iN_{1i}+1} & \cdots & f_{\text{degr}^F}^{iN_{1i}+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ f_0^{iN_{2i}} & f_1^{iN_{2i}} & \cdots & f_{\text{degr}^F}^{iN_{2i}} \end{bmatrix}_{N \times (\text{degr}^F+1)}$$

El caso especial de la matriz global  $G_{mpc}$  requiere de nuevo de un ajuste rellenando con columnas de ceros para respetar las dimensiones del cálculo matricial del controlador. Se define:

$$N_u^* = \max_i (N_{2i} - N_{1i} + 1 - N_u)$$

De esta forma, a cada matriz  $G_{ij}$  se le añaden  $N_u^* - N_{2i} - N_{1i} + 1$  columnas de ceros. Se pasa así a tener una matriz  $G_{mpc}$  de dimensiones

$$\left( \sum_{i=0}^n N_{2i} - N_{1i} + 1 \right) \times m \cdot N_u^*$$

### A.2.4 Horizonte de predicción distinto para cada salida y horizonte de control distinto para cada entrada

Cuando se define el índice como:

$$J(N_{1i}, N_{2i}, N_{uj}, \delta_{ik}, \lambda_{jk}) = \sum_{i=1}^n \left[ \sum_{k=N_1}^{N_2} \delta_{ik} [y_i(t+k|t) - w_i(t+k)]^2 \right] + \sum_{j=1}^m \left[ \sum_{k=1}^{N_{uj}} \lambda_{jk} [\Delta u_j(t+k-1)]^2 \right]$$

se obtiene la máxima flexibilidad en los parámetros de diseño del controlador, puesto que se puede asignar distintos horizontes de predicción y control a cada salida y entrada del proceso. Esto es interesante cuando las diferentes salidas presentan dinámicas muy distintas unas de otras incluso con retardos muy dispares.

El mecanismo sigue siendo el mismo: seleccionar de los elementos que aparecen en las submatrices calculadas que relacionan cada entrada con cada salida (matrices del GPC SISO), aquellos elementos que influyen en el índice. Se forman a partir de éstas matrices más globales insertando ceros para mantener correcta la dimensión de la expresión matricial.

Cuando varían a la vez el horizonte de control y el de predicción, nuestra atención se centrará en la construcción de la matriz  $G_{mpc}$  a partir de las submatrices  $G_{ij}$  pues es la que tiene ambas dimensiones dependientes de ambos horizontes.

Para el caso de las submatrices  $\Gamma_{ij}$  y  $F_i$  se procede como en el apartado A.3 por tener sólo dependiente su número de filas del horizonte de predicción.

Se define entonces:

$$N_u^* = \max_{ij} (N_{2i} - N_{1i} + 1 - N_{uj})$$

y con esta cota superior se puede añadir en cada submatriz  $G_{ij}$  el número de  $(N_u^* - N_{2i} - N_{1i} + 1 - N_{uj})$  columnas de ceros a la derecha.

### A.3 Formulación polinomial del controlador

Para la interpretación polinomial del controlador, y por simplicidad, se va a trabajar suponiendo que todas las salidas poseen el mismo polinomio de filtrado  $T_i(z^{-1})$ , el mismo horizonte de predicción  $N$ , y todas las entradas poseen el mismo horizonte de control  $N_u$ .

Puesto que se utilizará la técnica del *Horizonte Móvil*, y sólo generará en cada instante una sola acción de control para cada una de las entradas, no hace falta realizar completamente las operaciones de la expresión (A.12). Dicha expresión ofrece el vector óptimo de acciones de control para todos los instantes del horizonte de predicción. Por tanto, si existen  $m$  entradas al proceso, solamente se usarán  $m$  filas de (A.12). Serán necesarias pues  $m$  filas, resultantes de escoger *una* de cada  $N_u$  de la matriz

$$(G_{mpc}^T \alpha_{mpc} G_{mpc} + \lambda_{mpc})^{-1} G_{mpc}^T \alpha_{mpc}$$

cuya dimension es  $(m \cdot N_u \times n \cdot N)$ . Llamando  $H_{mpc}$  a la matriz de dimensiones  $(m \times (n \cdot N))$  resultante de realizar esta selección de filas, se pueden calcular las  $m$  acciones de control como:

$$\Delta u(k)_{m \times 1} = H_{mpc}(W - \Gamma_{mpc} U^f - F_{mpc} Y^f) \quad (\text{A.14})$$

En el caso MIMO, la interpretación en transformada  $Z$  se complica comparado con el caso SISO, puesto que aparecerán matrices polinomiales y no polinomios.

Definiendo  $H_{ji}$  como el subvector  $(1 \times N)$  de cada una de las filas de  $H_{mpc}$ , que contiene los elementos que relacionan la entrada  $j$  con la salida  $i$ :

$$H_{mpc} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \cdots & H_{mn} \end{bmatrix}_{m \times N \cdot n}$$

Entonces, el producto  $H_{mpc}W$  de la expresión (A.14) puede verse como:

$$H_{mpc}W = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \cdots & H_{mn} \end{bmatrix}_{m \times n \cdot N} \begin{bmatrix} W_1 \\ W_2 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix}_{n \cdot N \times 1} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^n H_{1i}W_i \\ \sum_{i=1}^n H_{2i}W_i \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^n H_{mi}W_i \end{bmatrix}$$

y donde cada elemento  $H_{ji}W_i$  tiene la interpretación:

$$H_{ji}W_i \simeq \left( \sum_{k=1}^N h_k^{ji} z^k \right) W_i(z) = H_{ij}(z)W_i(z)$$

es decir, los coeficientes de cada uno de los subvectores  $H_{ji}$  forman un polinomio FIR en potencias de  $z$  que actúa sobre cada una de las secuencias de referencias  $w_i(t)$ :

$$W_i(z) = \mathcal{Z}[w_i(t)]$$

De esta manera se puede construir la matriz polinomial  $H(z)$ , formada por los distintos polinomios  $H_{ji}(z)$ , para resolver el producto  $H_{mpc}W$ :

$$H_{mpc}W \simeq \begin{bmatrix} H_{11}(z) & H_{12}(z) & \cdots & H_{1n}(z) \\ H_{21}(z) & H_{22}(z) & \cdots & H_{2n}(z) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{m1}(z) & H_{m2}(z) & \cdots & H_{mn}(z) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} W_1(z) \\ W_2(z) \\ \vdots \\ W_n(z) \end{bmatrix}$$

El segundo producto de (A.14), se puede expresar como:

$$H_{mpc}\Gamma_{mpc}U^f = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \cdots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \cdots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \cdots & H_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} & \cdots & \Gamma_{1m} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} & \cdots & \Gamma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \Gamma_{n1} & \Gamma_{n2} & \cdots & \Gamma_{nm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^f \\ U_2^f \\ \vdots \\ U_m^f \end{bmatrix}$$

$$H_{mpc}\Gamma_{mpc}U^f = \begin{bmatrix} R_{11} & R_{12} & \cdots & R_{1m} \\ R_{21} & R_{22} & \cdots & R_{2m} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{m1} & R_{m2} & \cdots & R_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1^f \\ U_2^f \\ \vdots \\ U_m^f \end{bmatrix}$$

donde

$$R_{pq} = \sum_{i=1}^n H_{pi}\Gamma_{iq} \text{ es un vector de dimension } 1 \times \deg\Gamma + 1$$

$$H_{pi} \text{ es un vector de dimension } 1 \times N$$

$$\Gamma_{iq} \text{ es una matriz de dimension } N \times \deg\Gamma + 1$$

Se puede igualmente dar una interpretación en transformada Z y considerar cada subproducto  $R_{pq}U_q^f$  como:

$$R_{pq}U_q^f \simeq \left( \sum_{k=0}^{\text{degr}} r_k^{pq} z^{-k} \right) U_q^f(z) = R_{pq}(z^{-1})U_q^f(z)$$

$$R_{pq}(z^{-1})z^{-1}U_q^f(z) = \frac{R_{pq}(z^{-1})z^{-1}}{T(z^{-1})}\Delta U_q(z)$$

donde cada uno de los subvectores  $R_{pq}$  de dimensión  $(1 \times \text{degr}\Gamma + 1)$  son los coeficientes de un polinomio FIR en potencias de  $z^{-1}$  que actúa sobre cada una de las secuencias de acciones de control  $\Delta u_q(t)$

$$R_{pq} = [r_0^{pq} + r_1^{pq}z^{-1} + \dots + r_{\text{degr}\Gamma}^{pq}z^{-\text{degr}\Gamma}]$$

$$\Delta U_q(z) = \mathcal{Z}[\Delta u_q(t)]$$

De esta forma se puede obtener la matriz polinomial  $R(z^{-1})$ , formada por los distintos polinomios  $R_{pq}(z^{-1})$ , y obtener el producto  $H_{mpc}\Gamma_{mpc}U^f$ :

$$H_{mpc}\Gamma_{mpc}U^f \simeq \begin{bmatrix} R_{11}(z^{-1}) & R_{12}(z^{-1}) & \dots & R_{1n}(z^{-1}) \\ R_{21}(z^{-1}) & R_{22}(z^{-1}) & \dots & R_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ R_{m1}(z^{-1}) & R_{m2}(z^{-1}) & \dots & R_{mn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \frac{z^{-1}}{T(z^{-1})} \begin{bmatrix} \Delta U_1(z) \\ \Delta U_2(z) \\ \vdots \\ \Delta U_n(z) \end{bmatrix}$$

Procediendo del mismo modo con el tercer sumando de (A.14):

$$H_{mpc}F_{mpc}Y^f = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} & \dots & H_{1n} \\ H_{21} & H_{22} & \dots & H_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ H_{m1} & H_{m2} & \dots & H_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & F_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & F_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^f \\ Y_2^f \\ \vdots \\ Y_n^f \end{bmatrix}$$

$$H_{mpc}F_{mpc}U^f = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & \dots & S_{1n} \\ S_{21} & S_{22} & \dots & S_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{n1} & S_{n2} & \dots & S_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_1^f \\ Y_2^f \\ \vdots \\ Y_n^f \end{bmatrix}$$

donde

$$S_{pq} = H_{pq}F_p \text{ es un vector de dimension } 1 \times \text{degr}F + 1$$

$$H_{pi} \text{ es un vector de dimension } 1 \times N$$

$$F_p \text{ es una matriz de dimension } N \times \text{degr}F + 1$$

Se puede igualmente dar una interpretación en transformada  $Z$  y considerar cada subproducto  $S_{pq}Y_q^f$  como:

$$S_{pq}Y_q^f \simeq \left( \sum_{k=0}^{\deg F} s_k^{pq} z^{-k} \right) Y_q^f(z) = S_{pq}(z^{-1})Y_q^f(z)$$

$$S_{pq}(z^{-1})Y_q^f(z) = \frac{S_{pq}(z^{-1})}{T(z^{-1})}Y_q(z)$$

donde cada uno de los subvectores  $S_{pq}$  son los coeficientes de un polinomio FIR en potencias de  $z^{-1}$  que actúa sobre cada una de las secuencias salida  $y_q(t)$

$$S_{pq}(z^{-1}) = [s_0^{pq} + s_1^{pq}z^{-1} + \dots + s_{\deg F}^{pq}z^{-\deg F}]$$

$$Y_q(z) = \mathcal{Z}[y_q(t)]$$

De esta forma se puede obtener la matriz polinomial  $S(z^{-1})$ , formada por los distintos polinomios  $S_{pq}(z^{-1})$  para obtener el producto  $H_{mpc}F_{mpc}Y^f$ :

$$H_{mpc}F_{mpc}Y^f \simeq \begin{bmatrix} S_{11}(z^{-1}) & S_{12}(z^{-1}) & \dots & S_{1n}(z^{-1}) \\ S_{21}(z^{-1}) & S_{22}(z^{-1}) & \dots & S_{2n}(z^{-1}) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ S_{m1}(z^{-1}) & S_{m2}(z^{-1}) & \dots & S_{mn}(z^{-1}) \end{bmatrix} \frac{1}{T(z^{-1})} \begin{bmatrix} Y_1(z) \\ Y_2(z) \\ \vdots \\ Y_n(z) \end{bmatrix}$$

Con esta interpretación polinomial se puede reescribir la ley de control (A.14) como:

$$\Delta U(z)_{m \times 1} = H(z)W(z) - \frac{1}{T(z^{-1})}R(z^{-1})z^{-1}\Delta U(z) - \frac{1}{T(z^{-1})}S(z^{-1})Y(z) \quad (\text{A.15})$$

### **A.3.1 Función de transferencia de bucle cerrado**

A partir de la expresión A.15, se puede definir:

$$\hat{R}(z^{-1}) = \frac{z^{-1}}{T(z^{-1})}R(z^{-1})$$

$$\hat{S}(z^{-1}) = \frac{1}{T(z^{-1})}S(z^{-1})$$

Reescribiendo dicha expresión:

$$\begin{aligned}\Delta U(z) &= H(z)W(z) - \hat{R}(z^{-1})\Delta U(z) - \hat{S}(z^{-1})Y(z) \\ \left[ I + \hat{R}(z^{-1}) \right] \Delta U(z) &= H(z)W(z) - \hat{S}(z^{-1})Y(z)\end{aligned}$$

y definiendo

$$L(z^{-1}) = [I + \hat{R}(z^{-1})]^{-1}$$

se tiene que

$$\Delta U(z) = L(z^{-1})H(z)W(z) - L(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})Y(z) \quad (\text{A.16})$$

Esto permite expresar el controlador GPC MIMO como un controlador de dos grados de libertad similar al caso monovariable (figura A.1).

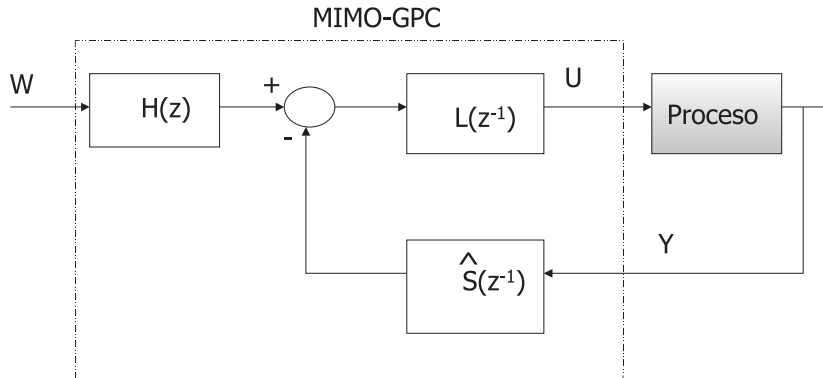


Figura A.1: Diagrama de bloques para el controlador GPC multivariable.

A partir del modelo CARIMA MIMO,

$$A(z^{-1})Y(t) = B(z^{-1})u(t-1) + \frac{1}{\Delta}C(z^{-1})\xi(t) \quad (\text{A.17})$$

se puede reescribir como

$$\Delta A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})z^{-1}\Delta U(z) + C(z^{-1})\xi(t) \quad (\text{A.18})$$

y sustituyendo (A.16) en (A.18)

$$\Delta A(z^{-1})Y(z) = B(z^{-1})z^{-1}[L(z^{-1})H(z)W(z) - L(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})Y(z)] + C(z^{-1})\xi(t) \quad (\text{A.19})$$

$$\Delta A(z^{-1})Y(z) = z^{-1}B(z^{-1})L(z^{-1})H(z)W(z) - z^{-1}B(z^{-1})L(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})Y(z) + C(z^{-1})\xi(t) \quad (\text{A.20})$$

$$[\Delta A(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})L(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})]Y(z) = z^{-1}B(z^{-1})L(z^{-1})H(z)W(z) + C(z^{-1})\xi(t) \quad (\text{A.21})$$

La dinámica de bucle cerrado queda entonces descrita por :

$$G_{BC}(z^{-1}) = [\Delta A(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})L(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})]^{-1} \cdot z^{-1}B(z^{-1})L(z^{-1})H(z)$$

y los polos de bucle cerrado vendrán dados por las soluciones de:

$$\det(\Delta A(z^{-1}) + z^{-1}B(z^{-1})L(z^{-1})\hat{S}(z^{-1})) = 0$$





# Apéndice B

## Sistemas de ecuaciones mal condicionados

Se dice que el sistema de ecuaciones  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  está mal condicionado si  $A$  está mal condicionada, es decir, que pequeñas perturbaciones en el sistema pueden producir grandes cambios en la solución exacta de éste. En ingeniería, el principal problema es que los coeficientes del sistema contienen incertidumbres debido a errores de modelado, errores de medida, incluso los errores de redondeo utilizados por la aritmética del computador pueden ser vistos como pequeñas perturbaciones en los coeficientes originales del sistema. Para un sistema mal condicionado una pequeña incertidumbre en cualquiera de los coeficientes puede significar una enorme incertidumbre en la solución del sistema. Por ello, y aunque se pudiese conseguir calcular la solución exacta del sistema, esta gran incertidumbre podría hacer inservible dicha solución.

Una circunstancia que suele llevar aparejada la mala condición es que la matriz sea *casi singular* y su determinante sea casi cero. Por ejemplo, que un sistema de dos ecuaciones corresponda a dos líneas rectas casi paralelas (figura B.1) (o que un sistema de tres ecuaciones corresponda a tres planos casi paralelos). Esta situación es fácil de representar ya que, geoméricamente, dos ecuaciones con dos incógnitas representan dos rectas cuyo punto de intersección es la solución al sistema de ecuaciones. Si una de las dos rectas se modifica ligeramente entonces, el punto de intersección (la solución del sistema de ecuaciones  $2 \times 2$ ) se ve enormemente alterada.

Puesto que es importante estimar el grado de incertidumbre en la solución de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , se puede tratar de estudiar a priori el mal condicionamiento de un

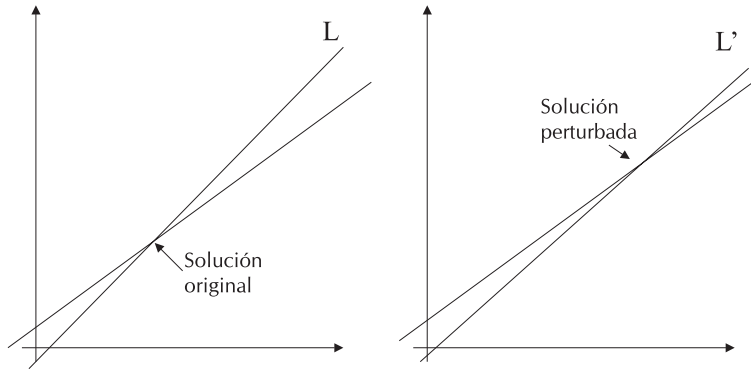


Figura B.1: Ejemplo de un sistema de dos ecuaciones.

sistema.

Utilizando las series de Neumann para calcular  $(A+B)^{-1}$ , cuando los elementos de  $B$  son pequeños respecto a los de  $A$ , se concluye que (Meyer, 2000)

$$(A+B)^{-1} \approx A^{-1} - A^{-1}BA^{-1} \quad (\text{B.1})$$

Es decir, si  $A$  está perturbada por una matriz  $B$  (posiblemente por errores debidos a medidas inexactas o errores de redondeo), entonces el cambio esperado en el cálculo de  $A^{-1}$  es  $A^{-1}BA^{-1}$ . Por tanto, el efecto de una pequeña perturbación  $B$ , es amplificado por  $A^{-1}$  (si  $A^{-1}$  contiene elementos muy grandes, errores pequeños en  $A$  pueden producir errores grandes en su inversa).

Para medir la magnitud de los elementos de  $A$  se puede utilizar la norma euclídea para vectores y su norma inducida para matrices. El número

$$\kappa = \|A^{-1}\|_2 \cdot \|A\|_2 \quad (\text{B.2})$$

es llamado *número de condición* de  $A$  y es un factor que indica cuánto es aumentado un cambio relativo en  $A$  al calcular su inversa. En otras palabras, si  $\kappa$  está próximo a 1 ( $A$  está bien condicionada) entonces una pequeña perturbación en  $A$  no puede producir grandes errores en su inversa, por el contrario si  $\kappa$  es elevado ( $A$  está mal condicionada), entonces un pequeño cambio relativo (o error) en  $A$  puede producir un gran error en su inversa.

Si los coeficientes del sistema no singular  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  se perturban ligeramente produciendo el nuevo sistema  $(A+B)\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{b}$ , entonces  $\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$  y  $\tilde{\mathbf{x}} = (A+B)^{-1}\mathbf{b}$  por lo que utilizando la aproximación de la expresión (B.1) se

tiene que

$$\begin{aligned}\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}} &= A^{-1}\mathbf{b} - (A + B)^{-1}\mathbf{b} \\ &\approx A^{-1}\mathbf{b} - (A^{-1} - A^{-1}BA^{-1})\mathbf{b} = A^{-1}B\mathbf{x}\end{aligned}\quad (\text{B.3})$$

y por tanto

$$\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2 \lesssim \|A^{-1}\|_2 \|B\|_2 \|\mathbf{x}\|_2 \quad (\text{B.4})$$

Definiendo el error relativo en la solución como:

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \quad (\text{B.5})$$

se puede deducir a partir de (B.4)

$$\frac{\|\mathbf{x} - \tilde{\mathbf{x}}\|_2}{\|\mathbf{x}\|_2} \lesssim \|A^{-1}\|_2 \|B\|_2 = \|A^{-1}\|_2 \|A\|_2 \frac{\|B\|_2}{\|A\|_2} = \kappa \cdot \frac{\|B\|_2}{\|A\|_2}$$

Por lo tanto, la parte derecha de esta ecuación es una estimación del error relativo que se producirá en la solución. En (Meyer, 2000) también se demuestra que si  $\mathbf{b}$  está sujeto a perturbaciones el cambio relativo en la solución también es directamente proporcional a  $\kappa$ . Por lo tanto si existen incertidumbres en ambos lados de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ , la credibilidad de la solución está ligada al número de condición de la matriz  $A$ .

Una consecuencia de la mala condición de un sistema es que algunos valores erróneos pueden parecer soluciones aceptables al sustituirlos en las ecuaciones, por lo tanto, los métodos numéricos para obtener una solución aproximada son proclives a tener más errores. Esto se debe a que cuando el sistema está mal condicionado encontrar la solución que minimiza los residuos no garantiza que esta solución se aproxime a la solución exacta (este criterio sólo es válido cuando el sistema de ecuaciones está bien condicionado).

En general, no es tan importante conocer el valor exacto del número de condición  $\kappa$ , sino su orden de magnitud ya que cuando  $\kappa$  es pequeño un pequeño cambio en la matriz de coeficientes  $A$  no puede producir un gran cambio en la solución  $\mathbf{x}$ . Sin embargo, grandes valores de  $\kappa$  pueden producir grandes desviaciones de la solución  $\mathbf{x}$ .



# Apéndice C

## Pseudoinversas y sistemas de ecuaciones

El concepto de *pseudoinversa de una matriz* es una generalización de la noción de inversa. Es útil para encontrar una solución a un conjunto de ecuaciones algebraicas en las que el número de incógnitas es distinto al número de ecuaciones lineales independientes.

A continuación se desarrollará el concepto de pseudoinversa que permite determinar soluciones de mínima norma.

### C.1 Solución de mínima norma que minimiza $\|\mathbf{x}\|_2$

Considérese una ecuación algebraica lineal como

$$x_1 + 5x_2 = 1 \tag{C.1}$$

Ya que tiene dos variables independientes y una sola ecuación, no existe solución única. En lugar de esto, existe un número infinito de soluciones. De forma gráfica, cualquier punto en la línea  $x_1 + 5x_2 = 1$ , como se muestra en la figura C.1, es una posible solución. Sin embargo, si se decide escoger el punto que está más cerca del origen, la solución se convierte en única.

Sea el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{C.2}$$

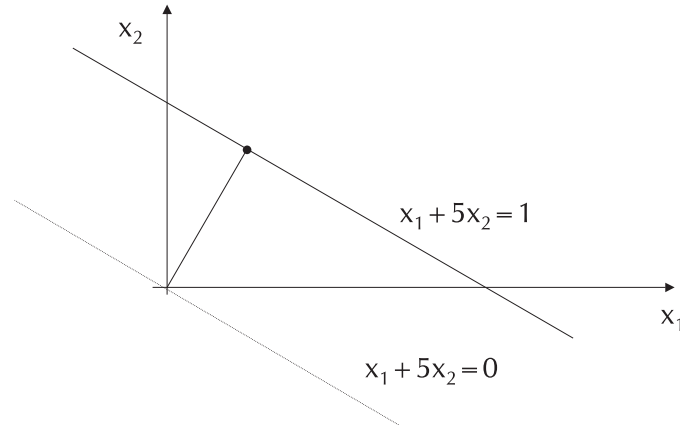


Figura C.1: Representación de la ecuación en el plano  $x_1x_2$ .

donde  $A$  es una matriz  $n \times m$ ,  $\mathbf{x}$  es un vector  $m \times 1$  y  $\mathbf{b}$  es un vector  $m \times 1$ . Suponiendo que  $m > n$  (es decir, el número de incógnitas es mayor que el número de ecuaciones), el sistema tiene un número infinito de soluciones. Para encontrar la solución única  $\mathbf{x}$  que minimiza la norma  $\|\mathbf{x}\|_2$ , se buscará la solución que está más cerca del origen.

Llamando  $\mathbf{x}^\circ$  al vector que cumple

$$A\mathbf{x}^\circ = \mathbf{b} \quad (\text{C.3})$$

$$\|\mathbf{x}^\circ\|_2 \leq \|\mathbf{x}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \text{ que satisface } A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{C.4})$$

se define la solución que minimiza  $\|\mathbf{x}\|_2$  como

$$\mathbf{x}^\circ = A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{b} \quad (\text{C.5})$$

La solución (C.5), es ortogonal al espacio nulo,  $\mathcal{N}(A)$ , de la matriz  $A$  y geoméricamente, se puede interpretar como la proyección de  $\mathbf{0}$  sobre el conjunto de vectores que son solución del sistema de ecuaciones  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .

Para probar que, efectivamente,  $\mathbf{x}^\circ$  minimiza  $\|\mathbf{x}\|$ , esta norma se puede escribir como

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}\|_2^2 &= \|\mathbf{x} + \mathbf{x}^\circ - \mathbf{x}^\circ\|_2^2 \\ &= \|\mathbf{x}^\circ\|_2^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ\|_2^2 + 2\mathbf{x}^{\circ T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ) \end{aligned} \quad (\text{C.6})$$

El último término se puede hacer cero ya que

$$\mathbf{x}^{\circ T}(\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\circ}) = [A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{b}]^T[\mathbf{x} - A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{b}] \quad (\text{C.7})$$

$$= [(AA^T)^{-1}\mathbf{b}]^T A[\mathbf{x} - A^T(AA^T)^{-1}\mathbf{b}] \quad (\text{C.8})$$

$$= [(AA^T)^{-1}\mathbf{b}]^T [A\mathbf{x} - (AA^T)(AA^T)^{-1}\mathbf{b}] \quad (\text{C.9})$$

$$= [(AA^T)^{-1}\mathbf{b}]^T (\mathbf{b} - \mathbf{b}) \quad (\text{C.10})$$

$$= 0 \quad (\text{C.11})$$

luego

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 = \|\mathbf{x}^{\circ}\|_2^2 + \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\circ}\|_2^2 \quad (\text{C.12})$$

que puede reescribirse como

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 - \|\mathbf{x}^{\circ}\|_2^2 = \|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\circ}\|_2^2 \quad (\text{C.13})$$

y puesto que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}^{\circ}\|_2^2 \geq 0$ , se obtiene

$$\|\mathbf{x}\|_2^2 \geq \|\mathbf{x}^{\circ}\|_2^2 \quad (\text{C.14})$$

y por lo tanto, el vector  $\mathbf{x}^{\circ}$  es la solución que produce la mínima norma  $\|\mathbf{x}\|_2$ .

A la matriz  $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$  se le da el nombre de *pseudoinversa derecha* o *inversa derecha mínima* de  $A$ . La matriz  $A^+$  es de dimensiones  $m \times n$  ya que

$$A^+ = A_{m \times n}^T (AA^T)_{n \times n}^{-1} \quad (\text{C.15})$$

Si premultiplicamos por  $A$ , observamos que  $A^+$  es realmente una *inversa derecha* de  $A$

$$AA^+ = A[A^T(AA^T)^{-1}] = AA^T(AA^T)^{-1} = I_{n \times n} \quad (\text{C.16})$$



**Obtención de  $\mathbf{x}^o$  vía multiplicadores de Lagrange**

Para solucionar el problema de minimización siguiente

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^o &= \arg \min_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^T \mathbf{x} \\ \text{sujeto a : } &A\mathbf{x} = \mathbf{b} \end{aligned} \quad (\text{C.17})$$

se puede introducir el multiplicador de Lagrange  $\lambda$

$$\min_{\mathbf{x}, \lambda} L = \mathbf{x}^T \mathbf{x} + \lambda^T (A\mathbf{x} - \mathbf{b}) \quad (\text{C.18})$$

de tal forma que

$$\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}} = 2\mathbf{x}^T + \lambda^T A = 0, \quad (\text{C.19})$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = (A\mathbf{x} - \mathbf{b})^T = 0 \quad (\text{C.20})$$

De (C.19)

$$\mathbf{x} = -A^T \lambda / 2 \quad (\text{C.21})$$

y sustituyendo en (C.20)

$$\lambda = -2(AA^T)^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{C.22})$$

se deduce que

$$\mathbf{x} = A^T (AA^T)^{-1} \mathbf{b} \quad (\text{C.23})$$

**C.2 Solución de mínima norma que minimiza**

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$$

Considerando el sistema de ecuaciones lineales siguiente:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{C.24})$$

donde  $A$  es una matriz  $n \times m$ ,  $\mathbf{x}$  es un vector  $m \times 1$  y  $\mathbf{b}$  es un vector  $m \times 1$ . Se supone que  $n > m$ . Es decir, existen menos incógnitas que número de ecuaciones, por lo tanto el sistema puede o no, tener solución.

Si no existe solución, se puede desear encontrar una solución única que minimice la norma  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$ .

Llamando  $\mathbf{x}^\circ$  al vector que cumple

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2 \geq \|A\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}\|_2, \quad \forall \mathbf{x} \quad (\text{C.25})$$

se define la solución que minimiza  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$  como

$$\mathbf{x}^\circ = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b} \quad (\text{C.26})$$

En realidad,  $\mathbf{x}^\circ$  no es una solución en el sentido clásico, ya que no satisface el sistema de ecuaciones original  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ . Sin embargo, se puede interpretar como una solución aproximada en el sentido de mínimos cuadrados.

Desarrollando  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2$  como

$$\begin{aligned} \|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 &= \|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ) + A\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}\|_2^2 \\ &= \|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)\|_2^2 + \|A\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}\|_2^2 + 2[A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)]^T (A\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}) \end{aligned} \quad (\text{C.27})$$

Se puede demostrar que el último término es cero:

$$[A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)]^T (A\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}) = (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)^T A^T [A(A^T A)^{-1} A^T - I_n] \mathbf{b} \quad (\text{C.28})$$

$$= (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)^T [(A^T A)(A^T A)^{-1} A^T - A^T] \mathbf{b} \quad (\text{C.29})$$

$$= (\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)^T (A^T - A^T) \mathbf{b} \quad (\text{C.30})$$

$$= 0 \quad (\text{C.31})$$

Por lo tanto

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^\circ)\|_2^2 + \|A\mathbf{x}^\circ - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (\text{C.32})$$

Puesto que  $\|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)\|_2^2 \geq 0$ , se obtiene

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 - \|A\mathbf{x}^o - \mathbf{b}\|_2^2 = \|A(\mathbf{x} - \mathbf{x}^o)\|_2^2 \geq 0 \quad (\text{C.33})$$

o bien

$$\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2^2 \geq \|A\mathbf{x}^o - \mathbf{b}\|_2^2 \quad (\text{C.34})$$

De esta forma  $\mathbf{x}^o = (A^T A)^{-1} A^T \mathbf{b}$  es la solución que minimiza  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|_2$ .

A la matriz  $A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$  se le da el nombre de *pseudoinversa izquierda* o *inversa izquierda mínima* de  $A$ . La matriz  $A^+$  es de dimensiones  $m \times n$  ya que

$$A^+ = (A^T A)^{-1}_{m \times m} A^T_{m \times n} \quad (\text{C.35})$$

Si postmultiplicamos por  $A$ , observamos que  $A^+$  es realmente una *inversa izquierda* de  $A$

$$A^+ A = [(A^T A)^{-1} A^T] A = (A^T A)^{-1} (A^T A) = I_{m \times m} \quad (\text{C.36})$$

### C.3 Pseudoinversa o inversa generalizada

La solución de mínimos cuadrados de un sistema  $n \times m$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (\text{C.37})$$

se puede expresar en términos de la pseudoinversa de la matriz  $A$

$$\mathbf{x} = A^+ \mathbf{b} \quad (\text{C.38})$$

La pseudoinversa se puede calcular a partir de la descomposición SVD de  $A = U\Sigma V^T$

$$A^+ = V_r \Sigma_r^{-1} U_r^T = \sum_{i=1}^r \frac{1}{\sigma_i(A)} \mathbf{v}_i \mathbf{u}_i^T$$

donde  $r$  es el número de valores singulares de  $A$  distintos de cero.

Notar que  $A^+$  existe para cualquier matriz  $A$ , incluso para una matriz cuadrada singular o una matriz no cuadrada. La matriz pseudoinversa también satisface

$$AA^+A = A \text{ y } A^+AA^+ = A^+$$

Siendo  $r$  el rango de  $A$  si:

1.  $r = n = m$ , es decir  $A$  es no singular. Entonces  $A^+ = A^{-1}$ , es la inversa de la matriz.
2.  $r = m \leq n$ , es decir  $A$  es de rango completo por columnas. Entonces se desea minimizar  $\|A\mathbf{x} = \mathbf{b}\|_2$  y la solución de mínimos cuadrados viene dada por:

$$A^+ = (A^T A)^{-1} A^T$$

En este caso  $A^+A = I$ , luego  $A^+$  es la pseudoinversa izquierda de  $A$ .

3.  $r = n \leq m$ , es decir  $A$  es de rango completo por filas. En este caso se tienen infinitas soluciones y se desea minimizar  $\|\mathbf{x}\|_2$ . La solución es:

$$A^+ = A^T (AA^T)^{-1}$$

En este caso  $AA^+ = I$ , luego  $A^+$  es la pseudoinversa derecha de  $A$ .

4.  $r < k = \min(n, m)$ , entonces se tiene el caso más general, donde ambas matrices  $(A^T A)$  y  $(AA^T)$  son singulares y se utiliza la descomposición SVD para obtener la pseudoinversa. Se dice entonces que  $A$  no tiene inversa ni izquierda ni derecha.

## C.4 Algunas propiedades de los valores singulares

Siendo  $A = U\Sigma V^T$ , la descomposición SVD de la matriz  $A$ , las matrices unitarias  $U$  y  $V$  forman una base ortonormal para el espacio de columnas y de filas de dicha matriz respectivamente. Los vectores columna  $\mathbf{v}_i$  de  $V$ , son llamados *vectores singulares derechos* y los vectores columna  $\mathbf{u}_i$  son llamados *vectores singulares izquierdos*.

Los valores singulares son las raíces cuadradas positivas de los  $k = \min(n, m)$  mayores valores propios de  $AA^T$  o  $A^T A$ . De tal modo que:

$$\sigma_i(A) = \sqrt{\lambda_i(A^T A)} = \sqrt{\lambda_i(AA^T)} \quad (\text{C.39})$$

Además, las columnas de las matrices  $U$  y  $V$  son los vectores propios de  $AA^T$  y  $A^T A$ , respectivamente:

$$AA^T = (U\Sigma V^T)(U\Sigma V^T)^T = (U\Sigma V^T)(V\Sigma^T U^T) = U\Sigma\Sigma^T U^T \quad (\text{C.40})$$

como  $U$  es unitaria,  $U^T = U^{-1}$  por tanto

$$(AA^T)U = U\Sigma\Sigma^T \quad (\text{C.41})$$

y entonces  $U$  es la matriz de vectores propios de  $AA^T$  y  $\sigma_i^2$  son sus autovalores. De forma similar se puede concluir lo mismo para  $V$  respecto de  $A^T A$ .

# Bibliografía

- Albertos, P. and R. Ortega (1989). On generalized predictive control: Two alternative formulations. *Automatica* **25**(5), 753–755.
- Alonso, F.J., J. Acedo and R. González (2000). Control básico, avanzado y multivariable. Apuntes del curso organizado por ISA Sección española, REPSOL-YPF y Petronor.
- Aoyama, A., G. Bell and S. P. Walsh (1997). Implementation issues in quadratic model predictive control. In: *American Control Conference (ACC'97)*. pp. 3375–3379.
- Aström, K.J. and T. Hägglund (1995). *PID Controllers. Theory, Design, and Tuning*. Chap. 5, p. 202. Instrument Society of America.
- Aström, K.J., R. L. Dailey, Davison, Franklin and Lewis et al (1996). *Modern Control Systems*. IEEE-EAB Self-Study Course.
- Badgwell, T.A. (1997). Robust model predictive control of stable linear systems. *Int. Journal of Control* **68**(4), 797–818.
- Banerjee, P. and S. L. Shah (1995). The role of signal processing methods in the robust design of predictive control. *Automatica* **31**(5), 681–695.
- Bemporad, A. and M. Morari (1999). Robust model predictive control: A survey. In: *Robustness in Identification and Control* (A. Garulli, A. Tesi and A. Vicino, Eds.). pp. 207–226. Springer-Verlag.
- Bitmead, R.R., M. Gevers and V. Wertz (1990). *Adaptive Optimal Control: The Thinking Man's GPC*. Prentice Hall.
- Camacho, E.F. (1993). Constrained generalized predictive control. *IEEE Transactions on Automatic Control* **38**(2), 327–332.

- Camacho, E.F. and C. Bordóns (1995). *Model Predictive Control in the Process Industry*. Advances in Industrial Control Series. Springer.
- Chang, J.W. and C. C. Yu (1992). Failure conditions for inverse-based multivariable controllers: Internal model control structure. *Chem. Eng. Sci.* **47**, 2047–2056.
- Chen, H. and F. Allgöwer (1998). A quasi-infinite horizon nonlinear model predictive control scheme with guaranteed stability. *Automatica* **14**(10), 1205–1217.
- Chen, S., S.A. Billings and P.M. Grant (1990). Non-linear system identification using neural networks. *Int. J. Control* **51**(6), 1191–1214.
- Chow, C.M., A. Kuznetsov and D.W. Clarke (1994). Application of generalized predictive control to the benchmark paper machine. Technical Report OUEL 2017/94. Department of Engineering Science. University of Oxford.
- Chow, C.M. and David W. Clarke (1994). Actuator nonlinearities in predictive control. In: *Advances in Model-Based Predictive Control* (D. W. Clarke Editor, Ed.). pp. 245–259. Oxford University Press.
- Clarke, D.W. (1988). Application of generalized predictive control to industrial processes. *IEEE Control Systems Magazine* **138**, 49–55.
- Clarke, D.W. (1991). Adaptive generalized predictive controller. Technical Report OUEL 1879/91. Department of Engineering Science. University of Oxford.
- Clarke, D.W. (1994). Advances in model-based predictive control. In: *Advances in Model-Based Predictive Control* (D. W. Clarke, Ed.). pp. 3–21. Oxford University Press.
- Clarke, D.W. and C. Mohtadi (1989). Properties of generalized predictive control. *Automatica* **25**(6), 859–875.
- Clarke, D.W. and R. Scattolini (1991). Constrained receding-horizon predictive control. *IEEE Proceedings-D* **138**(4), 347–354.
- Clarke, D.W., C. Mohtadi and P.S. Tuffs (1987a). Generalized predictive control. Part I. *Automatica* **23**(2), 137–148.

- Clarke, D.W., C. Mohtadi and P.S. Tuffs (1987*b*). Generalized predictive control. Part II. extensions and interpretations. *Automatica* **23**(2), 149–160.
- Cutler, C.R. and D.L. Ramaker (1980). Dynamic matrix control - a computer control algorithm. In: *Proceedings of the Joint Automatic Control Conference (JACC)*. San Francisco, CA, USA.
- Demircioglu, H. and D.W. Clarke (1992). GPC with guaranteed stability properties. *IEEE Proceedings-D* **139**(4), 371–379.
- Demircioglu, H. and D.W. Clarke (1993). Generalised predictive control with end-point state weighting. *IEEE Proceedings-D* **140**(4), 275–282.
- Deshpande, P.B. (1989). *Multivariable Process Control*. Instrument Society of America.
- Espinosa, J. and J. Vandewalle (1999*a*). Constrained predictive control using fuzzy models. In: *Proc. 8th. International Fuzzy Systems Association World Congress (IFSA-99)*. Taipei, Taiwan. pp. 649–654.
- Espinosa, J. and J. Vandewalle (1999*b*). The use of convex programming on fuzzy model based predictive control. In: *Proc. IEEE International Symposium on Intelligent Control Intelligent Systems and Semiotics (ISIC-ISAS-1999)*. Cambridge. UK.. pp. 411–416.
- Franklin, G. F., J. D. Powell and A. Emami-Naeini (1991). *Control de Sistemas Dinámicos con Retroalimentación*. Chap. 7, pp. 446–471. Addison-Wesley Iberoamericana.
- Froisy, J.B. (1994). Model predictive control: past, present and future. *ISA Transactions. Elsevier Science* **33**, 235–243.
- Garcia, C.E. and A.M. Morshedi (1986). Quadratic programming solution of dynamic matrix control (QDMC). *Chemical Eng. Comm.* **46**, 73–87.
- Garcia, C.E., D.M. Prett and M. Morari (1989). Model predictive control: Theory and practice - a survey. *Automatica* **25**(3), 355–348.
- Genceli H. and M. Nikolaou (1993). Robust stability analysis of constrained l1-norm model predictive control. *AIChE Journal* **39**(12), 1954–1965.
- Genceli H. and M. Nikolaou (1995). Design of robust constrained model-predictive controllers with volterra series. *AIChE Journal* **41**(9), 2098–2107.



- Genceli H. and M. Nikolaou (1996). New approach to constrained predictive control with simultaneous model identification. *AIChE Journal* **42**, 2857–2869.
- Golub, G.H. and Ch.F. van Loan (1996). *Matrix Computations*. Johns Hopkins University Press.
- Goodwin, G.C., S.F. Graebe and M.E. Salgado (2001). *Control System Design*. Prentice Hall.
- Grosdidier, P., B. Froisy and M. Hammann (1988). The IDCOM–M controller. In: *IFAC Workshop in Model based process control*. Atlanta, Georgia, USA.
- Gu, X.Y. and M.M. Liu (1991). Multivariable generalized predictive adaptive control. In: *10th. American Control Conf. (ACC)*. Boston, Madison (USA).
- Haiqing, W., S. Zhihuan and L. Ping (2000). A novel approach to multivariate statistical process monitoring and diagnosis. In: *3rd. Asian Control Conference*. Shanghai. pp. 2602–2606.
- Keyser, R.M.C. De (1991). Basic principles of model based predictive control. *1st. European Control Conference* **1**(1), 1753–1758.
- Kinnaert, M. (1989). Adaptive generalised predictive controller for MIMO systems. *Int. Journal of Control* **50**(1), 161–172.
- Kouvaritakis, B. and J.A. Rossiter (1993). Multivariable stable generalised predictive control. *IEE Proceedings-D* **140**(5), 364–372.
- Kouvaritakis, B., J.A. Rossiter and A. O. T. Chang (1992). Stable generalised predictive control: an algorithm with guaranteed stability. *IEE Proceedings-D* **139**(4), 349–362.
- Kouvaritakis, B., J.A. Rossiter and G.J. Ju (1997). Robust stable generalised predictive control. *Int. Journal of Control* **67**(3), 411–434.
- Ku, W., R.H. Storer and C. Georgakis (1995). Disturbance detection and isolation by dynamic principal component analysis. *Chemometrics and Int. Lab. Systems* **30**, 179–196.

- Kuznetsov, Alexander G. and David W. Clarke (1994). Application of constrained GPC for improving performance of controlled plants. In: *Advances in Model-Based Predictive Control* (D. W. Clarke, Ed.). pp. 318–329. Oxford University Press.
- Lee, J.H. and Z. Yu (1997). Worst-case formulations of model predictive control for systems with bounded parameters. *Automatica* **33**(5), 763–781.
- Lemos, J.M. and E. Mosca (1985). A multipredictor based LQ self-tuning controller. In: *IFAC Symp. on identification and system parameter estimation*. York, UK.
- Lewin, D.R. (1995). Predictive maintenance using PCA. *Control Eng. Practice* **3**(3), 415–421.
- Linkens, D.A. and M. Mahfouf (1994). Generalized predictive control (GPC) in clinical anaesthesia. In: *Advances in Model-Based Predictive Control* (D. W. Clarke, Ed.). pp. 402–414. Oxford University Press.
- Liu, G.P., V. Kadiramanathan and S.A. Billings (1998). Predictive control for non-linear systems using neural networks. *Int. J. Control* **71**(6), 1119–1132.
- Lunze, J. (1989). *Robust Multivariable Feedback Control*. Prentice Hall.
- Luyben, W.L. (1990). *Process Modelling, Simulation and Control for Chemical Engineers*. Chemical Eng. Series. Mc Graw-Hill.
- MacGregor, J. F. and T. Kourti (1995). Statistical process control of multivariate processes. *Control Eng. Practice* **3**(3), 403–414.
- Maciejowski, J.M. (1989). *Multivariable Feedback Design*. Addison-Wesley.
- Maciejowski, J.M. (2002). *Predictive Control with Constraints*. Prentice Hall.
- Maner, B.R., F.J. Doyle, B.A. Ogunnaike and R.K. Pearson (1996). Nonlinear model predictive control of a simulated multivariable polymerization reactor using second-order volterra models. *Automatica* **32**(9), 1285–1301.
- Marlin, T.E. (1995). *Process Control. Designing Processes and Control Systems for Dynamic Performance*. Mc Graw-Hill.

- Martínez, M., J.S. Senent and F.X. Blasco (1996). A comparative study of classical vs genetic algorithm optimization applied in GPC controller. *IFAC World congress*.
- Martínez, M., J.S. Senent and F.X. Blasco (1998). Generalized predictive control using genetic algorithms (GAGPC). *Engineering applications of artificial intelligence* **11**(3), 355–368.
- Maurath, P.R., D.A. Mellichamp and D.E. Seborg (1988). Predictive controller design for single-input/single-output (SISO) systems. *Ind. Eng. Chem. Res.* **27**, 956–963.
- Mayne, D.Q. (1997). Nonlinear model predictive control: An assessment. In: *5th International Conference on Chemical Process Control. AIChE Symposium Series*. pp. 217–231.
- Megías, D., J. Serrano and A. G. Kuznetsov (1999). A systematic method to enhance the robustness of stabilising receding-horizon predictive controllers. In: *European Control Conference (ECC)*. Karlsruhe (Germany).
- Megías, D., J. Serrano and C. de Prada (2001). Min-max constrained infinite horizon model predictive control: standard vs. feedback formulation. In: *European Control Conf. (ECC-01)*. Porto (Lisbon). pp. 3765–3770.
- Meyer, Carl D. (2000). *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra*. Siam.
- Mohtadi, C., S.L. Shah and D.W. Clarke (1987). Generalized predictive control of multivariable systems. In: *5th. Yale Workshop in Adaptive Systems Theory*. (USA). pp. 54–59.
- Morari, M. and J. H. Lee (1997). Model predictive control: past, present and future. In: *PSE'97-ESCAPE-7 symposium*. Trondheim, Norway.
- Morari, M. and J.H. Lee (1999). Model predictive control: Past, present and future. *Computers and Chemical Engineering* **23**, 667–682.
- Mosca, E. (1995). *Optimal, predictive, and adaptive control*. Information and System Sciences Series. Prentice-Hall.
- Mosca, E. and J. Zhang (1992). Stable redesign of predictive control. *Automatica* **28**(6), 1229–1233.

- Muske, K.R. and J.B. Rawlings (1993). Model predictive control with linear models. *AIChE Journal* **39**(2), 262–287.
- Nahas, E.P., M.A. Henson and D.E. Seborg (1992). Nonlinear internal model control strategy for neural network models. *Comp. Chem. Eng.* **16**(12), 1039–1057.
- Nikolaou, M. (1998). Model predictive controllers: A critical synthesis of theory and industrial needs. In: *Advances in Chemical Engineering Series*. Academic Press.
- Nomikos, P. and J.F. MacGregor (1995). Multivariate SPC charts for monitoring batch processes. *Technometrics* **37**(1), 41–59.
- Ogunnaike, B.A. (1986). Dynamic matrix control: A nonstochastic, industrial process control technique with parallels in applied statistics. *Ind. Eng. Chem. Fundam.* **25**(4), 712–718.
- Onnen, C., R. Babuska, U. Kaymak, J.M Sousa, H.B. Verbruggen and R. Isermann (1997). Genetic algorithms for optimization in predictive control. *Control Engineering Practice* **5**(10), 1363–1372.
- Ordys, A.W. and David W. Clarke (1993). A state-space description for GPC controllers. *Int. J. Systems Sci.* **24**, 1727–1744.
- Pérez de Madrid, A. (1995). Aplicación de técnicas de programación dinámica a control predictivo basado en modelos. PhD thesis. Universidad Nacional de Educación a Distancia. Facultad de Ciencias. Madrid.
- Phillips, C.L. and J.M. Parr (1995). *Signals, systems and transforms*. Prentice Hall.
- Prada, C., J. Serrano, P. Vega and M.A. Piera (1994). A comparative study of DMC and GPC controllers. In: *Advances in Model Based Predictive Control* (D. W. Clarke, Ed.). pp. 38–52. Oxford University Press.
- Prett, D.M. and M. Morari (1987). The Shell Process Control Workshop. Process Control Research: Industrial and Academic Perspectives. *Butterworths. Boston, (USA)* pp. 355–360.
- Qin, J. and J. H. Lee (2001). Overview of industrial model predictive control. Lecture Notes Taiwan MPC Workshop.

- Qin, S.J. and R. Dunia (2000). Determining the number of principal components for best reconstruction. *Journal of Process Control* **10**, 245–250.
- Qin, S.J. and T. A. Badgwell (1997). An overview of industrial model predictive control technology. In: *5th Int. Conf. on Chemical Process Control*. (J. C. Kantor, C. E. Garcia and B. Carnahan, Eds.). Vol. 93. pp. 232–256. AIChE Symposium Series 316.
- Rao, C.V. and J.B. Rawlings (1998). Optimization strategies for linear model predictive control. In: *5th IFAC Symposium on Dynamics and Control of Process Systems (DYCOPS-5)* (C. Georgakis, Ed.). pp. 41–46.
- Rawlings, J.B. and K.R. Muske (1993). Stability of constrained receding horizon control. *IEEE Trans. on Automatic Control* **38**(10), 1512–1516.
- Rawlings, J.B., E.S. Meadows and K.R. Muske (1994). Nonlinear model predictive control: A tutorial and survey. In: *Proc. Int. Symp. Adv. Control of Chemical Processes (ADCHEM)*. Kyoto (Japan).
- Richalet, J. (1993). Industrial applications of model based predictive control. *Automatica* **29**(5), 1251–1274.
- Richalet, J., A. Rault, J.L. Testud and J. Papon (1978). Model predictive heuristic control: Applications to industrial processes. *Automatica* **14**, 413–428.
- Rossiter, J.A. and B. Kouvaritakis (1994). Numerical robustness and efficiency of generalised predictive control algorithms with guaranteed stability. *IEE Proc.- Control Theory Applications* **141**(3), 154–162.
- Rossiter, J.A., B. Kouvaritakis and R.M. Dunnett (1991). Application of generalized predictive control to a boiler turbine unit for electricity generation. *IEE Proceedings-D* **138**, 59–67.
- Rouhani, R. and R.K. Mehra (1982). Model algorithmic control: Basic properties. *Automatica* **18**, 401–414.
- Salcedo, J.V. and M. Martínez (2000). Control predictivo generalizado con índice de coste modular. In: *Seminario Anual de Automática, Electrónica Industrial e Instrumentación (SAAEI'00)*. Terrassa (Spain).

- Sanchis, J., C. Ramos, M. Martínez and F.X. Blasco (2001). Principal component weighting (PCW) for constrained GPC design. In: *9 th. IEEE Mediterranean Conference on Control and Automation MED'01.*. Dubrovnik. Croatia.
- Sanchis, J., M. Martínez, C. Ramos and J.V. Salcedo (2002). Principal component GPC with terminal equality constraint. In: *15th. IFAC World Congress.* Barcelona. Spain.
- Scokaert, P.O.M. (1994). Constrained predictive control. PhD thesis. Department of Engineering Science. University of Oxford. Oxford, UK.
- Scokaert, P.O.M. (1997). Infinite horizon generalized predictive control. *Int. Journal of Control* **66**(1), 161–175.
- Scokaert, P.O.M. and David W. Clarke (1993*a*). Stability questions in predictive control. Technical Report OUEL 1970/93. Department of Engineering Science. University of Oxford.
- Scokaert, P.O.M. and David W. Clarke (1993*b*). Stability questions in predictive control. part II: Incorporation of hard inequality constraints. Technical Report OUEL 1980/93. Department of Engineering Science. University of Oxford.
- Scokaert, P.O.M. and David W. Clarke (1994). Stabilising properties of constrained predictive control. *IEE Proc. Control Theory Appl.* **141**, 295–304.
- Shah, S., R. Miller, H. Takada, K. Morinaga and T. Satou (1998). Modelling and control of a tubular reactor: a PCA-based approach. In: *IFAC DY-COPS.* Corfu, Greece.
- Shah, S.L., C. Mohtadi and D.W. Clarke (1987). Multivariable adaptive control without a prior knowledge of the delay matrix. *Systems and Control Letters* **9**, 295–306.
- Shridhar, R. and D.J. Cooper (1997). A tuning strategy for unconstrained SISO model predictive control. *Ind. Eng. Chem. Res.* **36**, 729–746.
- Shridhar, R. and D.J. Cooper (1998). A tuning strategy for unconstrained multivariable model predictive control. *Ind. Eng. Chem. Res.* **37**, 4003–4016.

- Skogestad, S. and I. Postlethwaite (1996). *Multivariable feedback control. Analysis and Design*. John Wiley and Sons.
- Thomas, C., T. Wada and D. E. Seborg (1996). Principal component analysis applied to process monitoring of an industrial distillation column. In: *13th. IFAC World Congress*. San Francisco (USA).
- Tsang, T.T.C. and David W. Clarke (1988). Generalized predictive control with input constraints. *IEE Proceedings*. **135**, 451–460.
- Valle, S., W. Li and S. J. Qin (1999). Selection of the number of principal components: The variance of the reconstruction error criterion with a comparison to other methods. *Ind. Eng. Chem. Res.* **38**, 4389–4401.
- Vuthandam, P., H. Genceli and M. Nikolaou (1995). Performance bounds for robust quadratic dynamic matrix control with end condition. *AIChE Journal* **41**(9), 2083–2097.
- Wilkinson, D. J., A. J. Morris and M. T. Tham (1990). Multivariable constrained generalised predictive control (a comparison with QDMC). In: *Proc. of the American Control Conference (ACC)*. San Diego, (USA). pp. 1620–1625.
- Wilkinson, D. J., A. J. Morris and M. T. Tham (1994). Multivariable constrained predictive control (with application to high performance distillation). *Int. Journal of Control* **59**, 841–862.
- Yamuna, K. and H. Unbehauen (1996). Tuning and auto-tuning in predictive control. In: *13 th. IFAC World Congress*. San Francisco (USA). pp. 109–114.
- Yoon, T.W. and David W. Clarke (1993a). Prefiltering in receding-horizon predictive control. Technical Report OUEL 1995/93. Department of Engineering Science. University of Oxford.
- Yoon, T.W. and David W. Clarke (1993b). Receding-horizon predictive control with exponential weighting. *Int. J. Systems Sci.* **24**(9), 1745—1757.
- Yoon, T.W. and David W. Clarke (1994a). Adaptive predictive control of the benchmark plant. *Automatica* **30**(4), 621—627.

- Yoon, T.W. and David W. Clarke (1994*b*). Towards robust adaptive predictive control. In: *Advances in Model-Based Predictive Control* (D. W. Clarke Editor, Ed.). pp. 402–414. Oxford University Press.
- Yoon, T.W. and D.W. Clarke (1995). A reformulation of receding-horizon predictive control. *Int J System Science* **26**(7), 1383–1400.
- Zamarreño, J. M. (1996). Identificación y control predictivo basado en modelos mediante red neuronal en espacio de estados. PhD thesis. Universidad de Valladolid. Valladolid.
- Zheng, A. and M. Morari (1995). Stability of model predictive control with mixed constraints. *IEEE Trans. on Automatic Control* **40**(10), 1818–1823.
- Zhou, K. and J. C. Doyle (1998). *Essentials of Robust Control*. Prentice Hall.