

Document downloaded from:

<http://hdl.handle.net/10251/50411>

This paper must be cited as:

Monleón Cremades, S.; Lazaro, C.; Casanova Colón, J.; Domingo Cabo, A. (2015). Pseudoesfuerzos y evaluación de tensiones en modelos hiperviga. *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño en Ingeniería*. 31(2):71-80. doi:10.1016/j.rimni.2014.01.001.



The final publication is available at

<http://dx.doi.org/10.1016/j.rimni.2014.01.001>

Copyright Elsevier

Pseudo-esfuerzos y evaluación de tensiones en modelos hiperviga

Salvador Monleón*, Carlos Lázaro*, José Casanova*, and Alberto Domingo**

**Departamento de Mecánica de Medios Continuos y Teoría de Estructuras, Universitat Politècnica de València, E.T.S. Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, Cno. de Vera s/n, 46022, Valencia, España, Tel.: +34 963 877 677, e-mail: carlafer@mes.upv.es*

***Departamento de Ingeniería de la Construcción y Proyectos de Ingeniería Civil*

23 de julio de 2014

Resumen

Este artículo trata de la formulación unificada de modelos lineales para la estática de piezas alargadas, y en concreto, de la clase de modelos que incluyen desplazamientos generalizados adicionales a los necesarios para definir movimientos de sólido rígido de las secciones transversales. Estos modelos, denominados *modelos hiperviga* por los autores, se caracterizan por el acoplamiento entre variables estáticas y cinemáticas en las ecuaciones de equilibrio. En el artículo se introducen los *pseudo-esfuerzos*, nuevas variables estáticas que representan la acción de los enlaces internos que controlan el cambio de forma de la sección transversal. Asimismo, se desarrolla el procedimiento sistemático para evaluar la distribución de tensiones sobre las secciones transversales consistente con el modelo hiperviga, que aproxima la distribución de tensiones correspondiente a la solución elástica tridimensional. La sistemática de la formulación unificada, y su potencia para la construcción de ecuaciones y para la valoración de la influencia de los distintos parámetros que intervienen en la respuesta, queda patente mediante su aplicación a dos problemas que requieren la introducción de grados de libertad adicionales a los de sólido rígido: la flexión alabeada y la torsión mixta. En ambos casos, partiendo únicamente de la cinemática de la sección transversal expresada en función de los desplazamientos

generalizados, mediante el procedimiento unificado propuesto, se obtienen las variables, parámetros y ecuaciones que determinan la respuesta, así como las expresiones de las tensiones en la sección consistentes con la formulación empleada.

This paper deals with the unified formulation of linear models in rod elastostatics, and specifically, with the class of models including generalized displacements that are additional to those defining rigid body motions of the cross-sections. The main feature of these models, named *hyperbeam models* by the authors, is the coupling between static and kinematic variables in the equilibrium equations. New static variables called *pseudo-forces* have been introduced to represent the action of the internal constraints which control the deformation of the cross-section. Using the pseudo-forces, a systematic procedure to evaluate the model-consistent stress distributions on cross-sections –which is an approximation of the 3D elastic solution– has been developed. The application of the unified formulation to a pair of problems requiring the introduction of non rigid-body-motional degrees of freedom –warped bending and mixed torsion– shows its ability to systematically build the equations, and to assess the influence of the intervening parameters. In both cases, the response-defining variables, parameters and equations, as well as the expressions of consistent stress distributions on the sections, are obtained by means of the proposed unified procedure, parting exclusively from the cross-sectional kinematics expressed in terms of the respective generalized displacements.

1. Introducción

El concepto *hiperviga* fue introducido por los autores [1] [2] para describir la *clase de modelos lineales* de piezas alargadas que incluyen desplazamientos generalizados adicionales a los necesarios para describir movimientos de sólido rígido (de pequeña magnitud) de las secciones transversales. Los modelos hiperviga se caracterizan por el acoplamiento entre variables estáticas y cinemáticas presente en las ecuaciones de equilibrio, aún en su formulación lineal. En otras palabras, no es posible expresar las ecuaciones de equilibrio de la estructura en función, únicamente, de los esfuerzos y las cargas exteriores, ya que los desplazamientos están en este caso presentes en las ecuaciones. La elección del término hiperviga se justifica precisamente por el hecho de que este acoplamiento es una forma de *hiperestatismo local* en las ecuaciones de equilibrio.

La *formulación unificada* de la teoría de vigas, desarrollada por el primer autor en [3] y [4], permite expresar de modo abstracto y compacto

las variables que intervienen en cualquier modelo de pieza alargada, independientemente de las restricciones cinemáticas que lo definan, y deducir sistemáticamente las correspondientes ecuaciones de campo mediante principios variacionales. Por ello constituye el marco idóneo para desarrollar los modelos hiperviga. En el anexo hemos incluido una sinopsis de los principales resultados de la formulación unificada para que el lector interesado pueda seguir el desarrollo del artículo sin necesidad de recurrir a las referencias citadas.

El objetivo de este artículo es concluir el desarrollo teórico del modelo hiperviga [2], analizando con mayor detalle la vertiente estática para obtener sistemáticamente las tensiones consistentes con la formulación empleada, así como mostrar, a través de dos ejemplos completos, cómo opera la teoría en su totalidad, es decir, desde la formulación del modelo hasta la predicción de la respuesta del sólido. La potencia de la formulación unificada para la construcción de las ecuaciones y para la valoración de la influencia de los diferentes parámetros en la respuesta de la pieza alargada queda patente en su aplicación a los dos problemas seleccionados: (a) el problema de flexión alabeada, y (b) el problema de torsión mixta. El primero representa una formulación de la teoría de vigas capaz de proporcionar una distribución coherente de tensiones tangenciales obtenida en el marco de la propia teoría, sin necesidad de partir de razonamientos basados en condiciones de equilibrio. Se basa en relajar las exigencias de la teoría de Timoshenko, prescindiendo de la planeidad de la sección, mediante un planteamiento similar al que Reddy utiliza en la teoría de placas [5]. El segundo es un problema clásico que ha sido tratado por diversos autores: Vlassov [6] y Kollbruner [7] son fuentes de referencia, Manterola lo trata para su aplicación en problemas de torsión de tableros de puente [8] y el primer autor lo hace en el marco de la formulación unificada [9].

Los resultados obtenidos para las expresiones de las tensiones incorporando la noción de hiperestatismo local y el concepto de pseudo-esfuerzo proporcionan una nueva interpretación de las soluciones clásicas que permite diferenciar la fracción de las tensiones debida a los esfuerzos y la debida a los pseudo-esfuerzos fruto del hiperestatismo local.

El trabajo se organiza del siguiente modo: en la sección 2 se revisa el concepto de hiperviga y su conexión directa con la idea de hiperestatismo local en el modelo unidimensional (1D); en la sección 3 se introduce la definición de pseudo-esfuerzo como término presente en la ecuación de equilibrio que reproduce la acción de las coacciones internas (en el sentido variacional [10]) asociadas a esta indeterminación local; en la sección 4, la introducción de los pseudo-esfuerzos motiva la descomposición de las tensiones totales

sobre los puntos de la sección en suma de tensiones primarias y tensiones complementarias; estas últimas, exclusivamente debidas al hiperestatismo local, constituyen una distribución autoequilibrada. Con el fin de mostrar cómo opera el modelo en todas sus vertientes, en las secciones 5 y 6 se desarrollan las aplicaciones indicadas incluyendo las expresiones de las variables asociadas a la formulación y las soluciones correspondientes a tres casos con diferentes condiciones de contorno. Por último se exponen las conclusiones del artículo. Con el fin de facilitar la lectura, en el anexo se incluye una recopilación de los principales resultados de la formulación unificada aplicada a la teoría de vigas, y en particular a los modelos hiperviga [3], [2].

2. Hiperestatismo local en los modelos hiperviga

El concepto de hiperviga fue introducido por los autores [1], [2] al estudiar la naturaleza de las ecuaciones de equilibrio del modelo 1D y concretamente al analizar las condiciones de desacoplamiento de las mismas. La hiperviga hace referencia a la *clase de modelos* lineales de piezas alargadas que incluyen desplazamientos generalizados adicionales a los necesarios para describir movimientos de sólido rígido (de pequeña magnitud) de las secciones transversales. Una lectura más profunda del problema proporciona un interesante y alternativo punto de vista. Para presentarlo volvamos a la forma genérica de las ecuaciones de equilibrio en un modelo hiperviga, [2, ec. 24b]:

$$\mathbf{f}' = \widehat{\mathbf{D}}_{00}\mathbf{u} + \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{Q} \quad (1)$$

en la que \mathbf{f} y \mathbf{u} son los vectores que agrupan esfuerzos y desplazamientos generalizados, respectivamente, \mathbf{Q} es el vector de fuerzas generalizadas (cargas exteriores distribuidas consistentes con los desplazamientos generalizados), \mathbf{H} es la matriz de equilibrio local [2, ec. 19a] y $\widehat{\mathbf{D}}_{00}$ es la matriz que determina el acoplamiento entre las variables estáticas y cinemáticas [2, ec. 19b]. Si la matriz de acoplamiento se anula (como sucede en el modelo de viga estándar, con tres grados de libertad en desplazamientos y tres en rotaciones), el equilibrio proporciona un sistema de n ecuaciones diferenciales en las n componentes de los esfuerzos generalizados que son directamente integrables:

$$\mathbf{f}' = \mathbf{H}\mathbf{f} - \mathbf{Q} \quad (2)$$

En este caso, la solución general para los esfuerzos no depende de las características mecánicas del modelo (determinadas por los operadores \mathbf{D}_{rs} definidos en [2, ec. 7]) sino tan solo de las condiciones de equilibrio interno

(a través del operador \mathbf{H}). Ambas propiedades (independencia de las características mecánicas y dependencia de las condiciones de equilibrio) se asocian tradicionalmente a los problemas isostáticos, aunque es necesario incidir en que este isostatismo tiene carácter local. Los esfuerzos tienen, entonces, la siguiente expresión:

$$\mathbf{f}(s) = \mathbf{G}(s) \mathbf{f}_0 - \mathbf{G}(s) \int_{t=0}^s \mathbf{G}^{-1}(t) \mathbf{Q}(t) dt \quad (3)$$

con

$$\mathbf{G}(s) = \exp\left(\int_{t=0}^s \mathbf{H}(t) dt\right) \quad (4)$$

En el caso en que \mathbf{H} sea de coeficientes constantes, la expresión se reduce a:

$$\mathbf{f}(s) = \exp(s \mathbf{H}) \mathbf{f}_0 - \int_{t=0}^s \exp((s-t)\mathbf{H}) \mathbf{Q}(t) dt \quad (5)$$

Ambas expresiones son independientes de la posible variación de sección transversal. Sólo si las condiciones globales de sustentación de la viga son hiperestáticas (hiperestatismo externo), intervienen las ecuaciones constitutivas generalizadas a través del operador \mathbf{D}_{11} [2, ec. 25], en la determinación de las constantes de integración (vector de esfuerzos en la sección inicial de la pieza, \mathbf{f}_0).

En el otro extremo tenemos el caso del equilibrio indeterminado o acoplado ($\widehat{\mathbf{D}}_{00} \neq \mathbf{0}$). Este razonamiento muestra que los modelos hiperviga son localmente hiperestáticos, mientras que el modelo de viga estándar (en lo sucesivo MVE) es localmente isostático.

3. Los pseudo-esfuerzos en el equilibrio local

Como acabamos de ver, en el MVE el equilibrio local es isostático en el sentido estricto (los esfuerzos son directamente integrables a partir de las ecuaciones de equilibrio). Sin embargo, en los modelos hiperviga la matriz de acoplamiento no se anula y la forma canónica de las ecuaciones del modelo 1D viene dada por (1). En ella se puede comprobar que el sumando $\widehat{\mathbf{D}}_{00}\mathbf{u}$ tiene carácter estático ya que sus dimensiones deben corresponder a las de un vector de fuerzas generalizadas. Introducimos la denominación de *pseudo-esfuerzos* para referirnos a las componentes del vector determinado por este término, que denotaremos $\widehat{\mathbf{f}}$. Los pseudo-esfuerzos tienen pues las siguientes definiciones alternativas, constitutiva y estática respectivamente:

$$\widehat{\mathbf{f}} = \widehat{\mathbf{D}}_{00}\mathbf{u} \quad (6a)$$

$$\widehat{\mathbf{f}} = \mathbf{f}' + \mathbf{Q} - \mathbf{H}\mathbf{f} \quad (6b)$$

Los pseudo-esfuerzos son consecuencia de la introducción en la hipótesis cinemática de grados de libertad que describen cambios de forma de la sección, adicionales a los que describen movimientos de sólido rígido. La ecuación (6a) determina una relación elástica entre los pseudo-esfuerzos y dichos grados de libertad adicionales, a través de la matriz de acoplamiento. Por tanto, se puede afirmar que los pseudo-esfuerzos recogen la acción de los enlaces internos [10] que controlan el cambio de forma de la sección transversal. En el modelo viga estándar, como los movimientos de la sección transversal son exclusivamente de sólido rígido, todas las componentes de los pseudo-esfuerzos se anulan, mientras que en los modelos hiperviga, debido al equilibrio vectorial local de la pieza, sólo lo hacen las componentes de $\widehat{\mathbf{f}}$ consistentes con las seis componentes del movimiento de sólido rígido de la sección transversal comunes con el MVE.

4. Evaluación de tensiones en modelos hiperviga

El vector de tensiones \mathbf{s}^* que predice el modelo 1D se deduce directamente de las matriz constitutiva \mathbf{C} del sólido y de las deformaciones \mathbf{e}^* que nos proporciona la formulación unificada, y puede expresarse en función de los desplazamientos generalizados y sus derivadas por medio de las matrices de deformación \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 (127):

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{C}\mathbf{e}^* = \mathbf{C}(\mathbf{B}_0\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{u}') \quad (7)$$

Si ahora introducimos las deformaciones generalizadas $\mathbf{e}(s)$ consistentes con la hipótesis cinemática (131),

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}^T\mathbf{u} + \mathbf{u}' \quad (8)$$

llegamos a una nueva fórmula que solo depende de las variables cinemáticas del modelo, \mathbf{u} y \mathbf{e} :

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{C}(\widehat{\mathbf{B}}_0\mathbf{u} + \mathbf{B}_1\mathbf{e}) \quad (9)$$

donde

$$\widehat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1\mathbf{H}^T \quad (10)$$

Teniendo en cuenta que la relación entre deformaciones generalizadas y esfuerzos es (135) $\mathbf{e} = \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{f}$, las tensiones se pueden expresar del siguiente modo:

$$\mathbf{s}^* = \begin{bmatrix} \mathbf{C} \widehat{\mathbf{B}}_0 & \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_{11} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} \quad \text{con } \mathbf{S}_{11} = \mathbf{D}_{11}^{-1} \quad (11)$$

A continuación vamos a demostrar que la matriz $\widehat{\mathbf{B}}_0$ se anula en el modelo de viga estándar. Para ello analizaremos la composición de las matrices de deformación correspondientes, determinadas en la sección 5 de la referencia [2]:

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_1 (\mathbf{h}_0 - \mathbf{h} \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_0) \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_1 \mathbf{h} \quad (12)$$

con

$$\mathbf{h}_0 = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \boldsymbol{\Lambda}_0 \end{bmatrix} \quad \widehat{\boldsymbol{\Omega}}_0 = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_0 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \boldsymbol{\Omega}_0 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\boldsymbol{\Lambda}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega}_0 = \begin{bmatrix} 0 & \chi & 0 \\ -\chi & 0 & \tau \\ 0 & -\tau & 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

En este caso particular (el modelo de viga estándar) la matriz de la hipótesis cinemática y la matriz de equilibrio tienen la composición siguiente

$$\mathbf{h} = \begin{bmatrix} \mathbf{1} & \boldsymbol{\Lambda} \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_0 & \mathbf{0} \\ \boldsymbol{\Lambda}_0^\top & \boldsymbol{\Omega}_0 \end{bmatrix} \quad (15)$$

con

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & 0 \\ y & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Operando y simplificando, se comprueba que en el MVE el operador $\widehat{\mathbf{B}}_0$ se cancela:

$$\widehat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1 \mathbf{H}^\top = \mathbf{E}_1 (\mathbf{h}_0 - \mathbf{h} (\widehat{\boldsymbol{\Omega}}_0 + \mathbf{H}^\top)) = \mathbf{0} \quad (17)$$

Este resultado permite confirmar que las tensiones en la viga estándar son función lineal de los esfuerzos característicos del modelo:

$$\mathbf{s}^* = \boldsymbol{\Psi}_1 \mathbf{f} \quad \text{con } \boldsymbol{\Psi}_1 = \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_{11} \quad (18)$$

En lo sucesivo, el operador $\widehat{\mathbf{B}}_0$ se denominará *matriz de deformaciones complementarias*.

Retornando a los modelos hiperviga, podemos afirmar que, con carácter general, una parte de las tensiones, que denominaremos tensiones primarias hereda la propiedad que caracteriza el MVE ($\mathbf{s}_1^* = \Psi_1 \mathbf{f}$), mientras que la parte complementaria resulta proporcional a los desplazamientos generalizados $\mathbf{u}(s)$:

$$\mathbf{s}_0^* = \mathbf{C} \widehat{\mathbf{B}}_0 \mathbf{u} \quad (19)$$

Esta parte de las tensiones es, a su vez, proporcional a los pseudo-esfuerzos $\widehat{\mathbf{f}}(s)$. Es decir que \mathbf{s}_0^* también admite una formulación estática del tipo:

$$\mathbf{s}_0^* = \widehat{\Psi}_0 \widehat{\mathbf{f}} \quad \text{con} \quad \widehat{\Psi}_0 = \mathbf{C} \widehat{\mathbf{B}}_0 \widehat{\mathbf{S}}_{00} \quad (20)$$

donde el operador $\widehat{\mathbf{S}}_{00}$ se obtiene invirtiendo la relación (6a), mediante el algoritmo siguiente:

1. Se ordena $\widehat{\mathbf{D}}_{00}$ agrupando en $\mathbf{u}(s)$ los desplazamientos del MVE por un lado y los desplazamientos adicionales, característicos del modelo general, por otro.
2. Se invierte el bloque de $\widehat{\mathbf{D}}_{00}$ correspondiente a estos últimos (los otros tres bloques de esta matriz son nulos debido a las propiedades del equilibrio del MVE y a su simetría intrínseca).
3. Se amplía la matriz resultante, de dimensión $(n-6) \times (n-6)$ en el caso general, hasta $n \times n$ mediante filas y columnas de ceros en las posiciones de los seis desplazamientos generalizados de la viga estándar.

Por último, vamos a demostrar que las tensiones \mathbf{s}_0^* inducidas por el hiper-estatismo local del modelo poseen una distribución autoequilibrada sobre la sección transversal de la pieza. Para ello partiremos de la definición estática de los esfuerzos generalizados (136):

$$\mathbf{f} = \int_A \mathbf{h}^T \mathbf{t}^* dA = \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{s}^* \mu dA \quad (21)$$

de acuerdo con los resultados de la teoría general. Introduciendo la descomposición del vector de tensiones resulta:

$$\mathbf{f} = \int_A \mathbf{B}_1^T (\mathbf{s}_0^* + \mathbf{s}_1^*) \mu dA \quad (22)$$

$$= \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{s}_0^* \mu dA + \left(\int_A \mathbf{B}_1^T \Psi_1 \mu dA \right) \mathbf{f} \quad (23)$$

Recurriendo ahora a la definición del operador Ψ_1 (18) y teniendo en cuenta que $\mathbf{D}_{11} = \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu dA$ (130), así como la definición de \mathbf{S}_{11} (11), el cofactor de los esfuerzos en el segundo miembro de la ecuación anterior resulta ser la unidad, por lo que el primer sumando del mismo ha de ser nulo. Esto demuestra el caracter autoequilibrado de \mathbf{s}_0^* :

$$\int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{s}_0^* \mu dA = \mathbf{0} \quad (24)$$

Como conclusión de esta sección resumimos a continuación cómo queda caracterizada la estática en los modelos hiperviga. Los esfuerzos generalizados $\mathbf{f}(s)$ son las variables estáticas propias del modelo 1D, y tienen la siguiente definición constitutiva [2, ec. 20] y estática [2, ec. 43]:

$$\mathbf{f} = \mathbf{D}_{11} \mathbf{e} = \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{s}^* \mu dA \quad (25)$$

con

$$\mathbf{D}_{11} = \int_A \mathbf{B}_1^T \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mu dA$$

Su equilibrio local, determinado por la ecuación (1)

$$\mathbf{f}' = \hat{\mathbf{f}} + \mathbf{H} \mathbf{f} - \mathbf{Q}$$

requiere la toma en consideración de unos pseudo-esfuerzos definidos por:

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{D}}_{00} \mathbf{u} = \int_A \hat{\mathbf{B}}_0^T \mathbf{s}^* \mu dA, \quad (26)$$

con

$$\hat{\mathbf{D}}_{00} = \int_A \hat{\mathbf{B}}_0^T \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_0 \mu dA \quad (27)$$

Estas fórmulas propuestas para la matriz de acoplamiento y para los pseudo-esfuerzos, basadas ambas en el operador $\hat{\mathbf{B}}_0$, son de sencilla deducción y permiten establecer un paralelismo formal directo con las definiciones de los esfuerzos del modelo. Finalmente las tensiones previstas por el modelo admiten la descomposición siguiente:

$$\mathbf{s}^* = \mathbf{s}_0^* + \mathbf{s}_1^* \quad (28)$$

donde

$$\mathbf{s}_0^* = \hat{\Psi}_0 \hat{\mathbf{f}} \quad \hat{\Psi}_0 = \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_0 \hat{\mathbf{S}}_{00} \quad (29a)$$

$$\mathbf{s}_1^* = \Psi_1 \mathbf{f} \quad \Psi_1 = \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_{11} \quad (29b)$$

proporcionan las tensiones complementarias, debidas exclusivamente al hiperestatismo local, de distribución autoequilibrada y proporcionales a los pseudo-esfuerzos, y las tensiones primarias, directamente inducidas por los esfuerzos generalizados e independientes de dicho hiperestatismo.

5. Aplicación a la flexión alabeada

El modelo que se construye en esta sección reproduce la respuesta de flexión de una viga en la que se postula que la sección transversal, además de moverse como sólido rígido, se deforma perdiendo la planeidad según un patrón preestablecido. Con ello se pretende que la hipótesis cinemática refleje razonablemente los efectos tanto de las tensiones normales como de las tangenciales. Puesto que el análisis se restringe al caso de flexión en un plano, los desplazamientos de los puntos materiales del sólido se expresan como $\mathbf{d}^*(x, y, z) = u^* \mathbf{i}_1 + w^* \mathbf{i}_3$. Este modelo incluye un grado de libertad (desplazamiento generalizado) adicional a los clásicos de la flexión (traslación y giro).

5.1. Hipótesis fundamental

La hipótesis fundamental $\mathbf{d}^*(x, z) = \mathbf{h}(z) \mathbf{u}(x)$ se formula del siguiente modo:

$$\begin{Bmatrix} u^* \\ w^* \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & z & f(z) \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w(x) \\ \theta_y(x) \\ \theta_f(x) \end{Bmatrix} \quad (30)$$

Las variables $w(x)$ y $\theta_y(x)$ son el desplazamiento y el giro de la normal a la sección transversal por el centroide, características del problema clásico de flexión. El desplazamiento generalizado $\theta_f(x)$ es la *intensidad de alabeo* de la sección y $f(z)$ es el patrón de alabeo o *alabeo unitario* de la misma. La caracterización de la función que describe el alabeo unitario forma parte del proceso de resolución del problema.

5.2. Definición estática de los esfuerzos consistentes

La definición estática (136) que proporciona la teoría unificada por medio de la matriz cinemática es

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \int_A \mathbf{h}^\top \mathbf{t}^* dA \\ &= \int_A \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ z & 0 \\ f(z) & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \tau_{xz}^* \end{Bmatrix} dA = \begin{Bmatrix} Q_z \\ M_y \\ M_f \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

que conduce a la definición convencional del esfuerzo cortante y el momento flector,

$$Q_z = \int_A \tau_{xz}^* dA \quad M_y = \int_A z \sigma_x^* dA \quad (31)$$

y un nuevo esfuerzo con dimensiones de momento, que denominaremos *momento de alabeo*:

$$M_f = \int_A f(z) \sigma_x^* dA \quad (32)$$

5.3. Matrices de deformación

En la viga recta se puede evaluar directamente las deformaciones del sólido, que son

$$\epsilon_x^* = \frac{\partial u^*}{\partial x} = z \theta'_y + f \theta'_f \quad (33a)$$

$$\gamma_{xz}^* = \frac{\partial u^*}{\partial z} + \frac{\partial w^*}{\partial x} = w' + \theta_y + \frac{df}{dz} \theta_f \quad (33b)$$

Factorizando en los desplazamientos generalizados y sus derivadas (127) se obtienen las matrices de deformación:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & df/dz \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & z & f \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (34)$$

5.4. Rigideces locales

El siguiente paso es la evaluación de las matrices de rigidez local (130) integrando las matrices de deformación:

$$\mathbf{D}_{rs} = \int_A \mathbf{B}_r^\top \mathbf{C} \mathbf{B}_s \mu dA \quad r \in \{0, 1\} \quad (35)$$

En el ejemplo considerado restringimos la matriz constitutiva de modo que relaciona únicamente el alargamiento unitario ϵ_x^* y la distorsión γ_{xz}^* con la tensión normal y la tangencial:

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \quad (36)$$

Las rigideces locales resultan

$$\mathbf{D}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & GA & -GS_f \\ 0 & -GS_f & GW_f \end{bmatrix} \quad (37a)$$

$$\mathbf{D}_{01} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ GA & 0 & 0 \\ -GS_f & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{D}_{01}^T \quad (37b)$$

$$\mathbf{D}_{11} = \begin{bmatrix} GA & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & -EI_{yf} \\ 0 & -EI_{yf} & EI_f \end{bmatrix} \quad (37c)$$

y quedan definidas a partir de los parámetros geométricos de la sección que caracterizan este modelo¹:

- Área de cortante de alabeo:

$$S_f = - \int_A \frac{df}{dz} dA \quad (38)$$

- Área de pseudo-cortante:

$$W_f = \int_A \left(\frac{df}{dz} \right)^2 dA \quad (39)$$

- Módulo de alabeo:

$$I_f = \int_A f^2 dA \quad (40)$$

- Producto de alabeo:

$$I_{yf} = - \int_A zf dA \quad (41)$$

¹La comparación de las ecuaciones constitutivas del modelo con las correspondientes al MVE explica la nomenclatura adoptada

5.5. Matrices de equilibrio local y de acoplamiento

En primer lugar evaluamos la inversa de \mathbf{D}_{11} :

$$\mathbf{D}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{1}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_y} & \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_{yf}} \\ 0 & \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_{yf}} & \frac{1}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_f} \end{bmatrix} \quad (42)$$

con

$$\kappa = \frac{I_{yf}}{I_f} \quad \bar{\kappa} = \frac{I_{yf}}{I_y} \quad (43)$$

La matriz de equilibrio local (132) es:

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{S_f}{A} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (44)$$

Y la matriz de acoplamiento (134)

$$\hat{\mathbf{D}}_{00} = \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho GW_f \end{bmatrix} \quad (45)$$

con

$$\rho = 1 - \frac{S_f^2}{AW_f} \quad (46)$$

5.6. Deformaciones generalizadas y esfuerzos

Las deformaciones generalizadas se obtienen mediante la matriz de equilibrio (131):

$$\begin{aligned} \mathbf{e} &= \mathbf{H}^T \mathbf{u} + \mathbf{u}' \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{S_f}{A} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w \\ \theta_y \\ \theta_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} w' \\ \theta'_y \\ \theta'_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \gamma \\ \chi_y \\ \chi_f \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (47)$$

y son

- La distorsión

$$\gamma = \theta_y + w' - \frac{S_f}{A} \theta_f \quad (48)$$

que puede descomponerse en la asociada al modelo de Timoshenko,

$$\gamma_z = \theta_y + w' \quad (49)$$

más la asociada al alabeo de la sección:

$$\gamma_f = -\frac{S_f}{A} \theta_f \quad (50)$$

- El cambio unitario de orientación

$$\chi_y = \theta'_y \quad (51)$$

- El cambio unitario de intensidad de alabeo

$$\chi_f = \theta'_f \quad (52)$$

Los esfuerzos tienen la siguiente definición constitutiva (135)

$$\mathbf{f} = \mathbf{D}_{11} \mathbf{e} \quad (53)$$

$$= \begin{bmatrix} GA & 0 & 0 \\ 0 & EI_y & -EI_{yf} \\ 0 & -EI_{yf} & EI_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma \\ \chi_y \\ \chi_f \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_z \\ M_y \\ M_f \end{Bmatrix}$$

que en componentes es:

$$Q_z = GA(\gamma_z + \gamma_f) = GA(\theta_y + w') - GS_f \theta_f \quad (54a)$$

$$M_y = EI_y \chi_y - EI_{yf} \chi_f = EI_y \theta'_y - EI_{yf} \theta'_f \quad (54b)$$

$$M_f = -EI_{yf} \chi_y + EI_f \chi_f = -EI_{yf} \theta'_y + EI_f \theta'_f \quad (54c)$$

La primera ecuación muestra que el mecanismo resistente del esfuerzo cortante tiene dos partes: el cortante de Timoshenko $GA(\theta_y + w')$, que depende de la distorsión asociada al modelo de Timoshenko (diferencia entre la orientación de la sección y la orientación de la tangente a la directriz deformada) y el cortante de alabeo $-GS_f \theta_f$ que depende de la intensidad de alabeo. La segunda y la tercera también exhiben el acoplamiento existente entre flexión estándar y alabeo.

La densidad de energía expresada en función de las deformaciones generalizadas (133) es

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2} (\mathbf{u}^\top \widehat{\mathbf{D}}_{00} \mathbf{u} + \mathbf{e}^\top \mathbf{D}_{11} \mathbf{e}) - \mathbf{u}^\top \mathbf{Q} \\ &= \frac{1}{2} \left(GA \gamma_z^2 + 2GA \gamma_z \gamma_f + \frac{GA}{1-\rho} \gamma_f^2 \right. \\ &\quad \left. + EI_y \chi_y^2 - 2EI_{yf} \chi_y \chi_f + EI_f \chi_f^2 \right) \\ &\quad - (w q_z + \theta_y m_y + \theta_f m_f) \quad (55) \end{aligned}$$

En el primer bloque se identifica la densidad de energía de deformación por cortante clásica (de Timoshenko), la debida a la distorsión por alabeo, y el término de acoplamiento entre ellas. El segundo bloque contiene la densidad de energía de deformación por flexión, la debida al cambio en la intensidad de alabeo y el término de acoplamiento correspondiente. El último bloque corresponde al potencial de las cargas exteriores, con $\mathbf{Q} = \{q_z \ m_y \ m_f\}^\top$, en el que interviene la carga en la dirección z por unidad de longitud, el momento exterior de eje y por unidad de longitud, y las fuerzas generalizadas asociadas al alabeo m_f , de interpretación física no tan evidente.

5.7. Ecuaciones del problema y solución general

Los términos que intervienen en el sistema de ecuaciones $\mathbf{E}' = \mathbf{W}\mathbf{E} - \mathbf{F}$ que gobierna el problema (138) son:

- el vector estado

$$\mathbf{E} = \{w \ \theta_y \ \theta_f \ Q_z \ M_y \ M_f\}^\top \quad (56)$$

- el operador \mathbf{W}

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}^\top & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \widehat{\mathbf{D}}_{00} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & \frac{S_f}{A} & \frac{1}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_y} & \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_{yf}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_{yf}} & \frac{1}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_f} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \rho GW_f & -\frac{S_f}{A} & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (57)$$

- y el término independiente que representa las acciones exteriores

$$\mathbf{F} = \{\mathbf{0} \ \mathbf{Q}\}^\top = \{0 \ 0 \ 0 \ q_z \ m_y \ m_f\}^\top, \quad (58)$$

Desarrollando las ecuaciones resulta

$$w' = -\theta_y + \frac{S_f}{A} \theta_f + \frac{1}{GA} Q_z \quad (59a)$$

$$\theta'_y = \frac{1}{(1 - \kappa\bar{\kappa})EI_y} M_y + \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(1 - \kappa\bar{\kappa})EI_{yf}} M_f \quad (59b)$$

$$\theta'_f = \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(1 - \kappa\bar{\kappa})EI_{yf}} M_y + \frac{1}{(1 - \kappa\bar{\kappa})EI_f} M_f \quad (59c)$$

$$Q'_z = -q_z \quad (59d)$$

$$M'_y = Q_z - m_y \quad (59e)$$

$$M'_f = \rho GW_f \theta_f - \frac{S_f}{A} Q_z - m_f \quad (59f)$$

En piezas de sección constante, los autovalores de \mathbf{W} se obtienen de la ecuación característica

$$|\mathbf{W} - K \mathbf{I}| = K^4 \left(K^2 - \mu \frac{GW_f}{EI_f} \right) = 0 \quad (60)$$

con

$$\mu = \frac{\rho}{1 - \kappa\bar{\kappa}} \quad (61)$$

Al autovalor $K = 0$ (de orden 4) le corresponden cuatro soluciones polinómicas, y los autovalores $K = \pm \sqrt{\mu \frac{GW_f}{EI_f}}$ llevan asociadas dos soluciones trascendentes. El operador fundamental es

$$\Phi(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 0 & -1 & -2x & \frac{6EI_y}{\rho GA} \left(\bar{\kappa} \frac{S_f}{W_f} - 1 \right) - 3x^2 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{\rho GW_f} \left(\bar{\kappa} - \frac{S_f}{A} \right) \\ 0 & 0 & 0 & -6EI_y \\ 0 & 0 & -2EI_y & -6EI_y x \\ 0 & 0 & 2EI_{yf} & 6EI_{yf} x \\ \frac{1}{K} \left(\frac{S_f}{A} - \bar{\kappa} \right) \exp(Kx) & & & \frac{1}{K} \left(\bar{\kappa} - \frac{S_f}{A} \right) \exp(-Kx) \\ \bar{\kappa} \exp(Kx) & & & \bar{\kappa} \exp(-Kx) \\ \exp(Kx) & & & \exp(-Kx) \\ 0 & & & 0 \\ 0 & & & 0 \\ (1 - \kappa\bar{\kappa})EI_f K \exp(Kx) & & & -(1 - \kappa\bar{\kappa})EI_f K \exp(-Kx) \end{bmatrix} \quad (62)$$

de modo que la solución del problema homogéneo se expresa como producto del sistema fundamental de soluciones por un vector de constantes de

5.8. Pseudo-esfuerzos

La definición constitutiva conduce al siguiente resultado

$$\hat{\mathbf{f}} = \hat{\mathbf{D}}_{00} \mathbf{u} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \rho GW_f \theta_f \end{Bmatrix} \quad (69)$$

Por otra parte, según su definición estática (6b)

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{f}} &= \mathbf{f}' + \mathbf{Q} - \mathbf{H}\mathbf{f} \\ &= \begin{Bmatrix} Q'_z \\ M'_y \\ M'_f \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} q_z \\ m_y \\ m_f \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_z \\ -\frac{S_f}{A} Q_z \end{Bmatrix} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ M'_f + m_f + \frac{S_f}{A} Q_z \end{Bmatrix} \end{aligned} \quad (70)$$

La primera y la segunda componente son nulas en virtud de las ecuaciones de equilibrio de esfuerzos cortantes y momentos flectores. Introducimos por tanto un único pseudo-esfuerzo, que denominamos *pseudo-cortante* y denotamos \hat{Q} , de modo que

$$\hat{Q} = \rho GW_f \theta_f \quad (\text{def. constitutiva}) \quad (71a)$$

$$\hat{Q} = M'_f + m_f + \frac{S_f}{A} Q_z \quad (\text{def. estática}) \quad (71b)$$

5.9. Aplicación a la viga recta

La solución del problema de una viga recta de sección constante sometida a una carga transversal puntual se expresa en función del operador fundamental normalizado del siguiente modo [9, secc. 4.2.3]:

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{G}(\xi) \mathbf{E}_0 \quad \text{si } \xi = x/L < \tau \quad (72a)$$

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{G}(\xi) \mathbf{E}_0 - F \mathbf{G}_4(\xi - \tau) \quad \text{si } \xi > \tau \quad (72b)$$

con $\mathbf{E}_0 = \mathbf{E}(0)$, siendo F la magnitud de la carga puntual perpendicular a la directriz que actúa en $\xi = \tau$, y \mathbf{G}_4 la cuarta columna del operador \mathbf{G} .

Resolvemos a continuación el problema para tres tipos de sustentación: viga biapoyada, ménsula y viga biempotrada.

5.9.1. Viga biapoyada

En este caso el desplazamiento w está coaccionado, y los momentos flectores y momentos de alabeo son nulos en las secciones extremas de la pieza. Entonces

$$\mathbf{E}_0 = \{0 \ \theta_{y0} \ \theta_{f0} \ Q_{z0} \ 0 \ 0\}^T \quad (73)$$

y en el extremo final $\xi = 1$

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} w(\xi) \\ M_y(\xi) \\ M_f(\xi) \end{Bmatrix}_{\xi=1} &= \begin{bmatrix} G_{12}(\xi) & G_{13}(\xi) & G_{14}(\xi) \\ G_{52}(\xi) & G_{53}(\xi) & G_{54}(\xi) \\ G_{62}(\xi) & G_{63}(\xi) & G_{64}(\xi) \end{bmatrix}_{\xi=1} \begin{Bmatrix} \theta_{y0} \\ \theta_{f0} \\ Q_{z0} \end{Bmatrix} \\ &\quad - P \begin{Bmatrix} G_{14}(\xi - \tau) \\ G_{54}(\xi - \tau) \\ G_{64}(\xi - \tau) \end{Bmatrix}_{\xi=1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (74) \end{aligned}$$

de modo que podemos despejar las incógnitas en el extremo inicial:

$$\begin{Bmatrix} \theta_{y0} \\ \theta_{f0} \\ Q_{z0} \end{Bmatrix} = P \begin{bmatrix} G_{12}(1) & G_{13}(1) & G_{14}(1) \\ G_{52}(1) & G_{53}(1) & G_{54}(1) \\ G_{62}(1) & G_{63}(1) & G_{64}(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} G_{14}(1 - \tau) \\ G_{54}(1 - \tau) \\ G_{64}(1 - \tau) \end{Bmatrix} \quad (75)$$

El pseudo-cortante se puede calcular directamente a partir de la intensidad de alabeo mediante la expresión (71a), y se representa, para $\tau = 1/3$ y sección rectangular ($\hat{\kappa} = 1/5$ y $\kappa = 21/5$), en la figura 1

5.9.2. Ménsula

Los desplazamientos son nulos en el origen y son incógnitas en el extremo final de la ménsula. Los esfuerzos siguen el patrón opuesto. Por ello

$$\mathbf{E}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ Q_{z0} \ M_{y0} \ M_{f0}\}^T \quad (76)$$

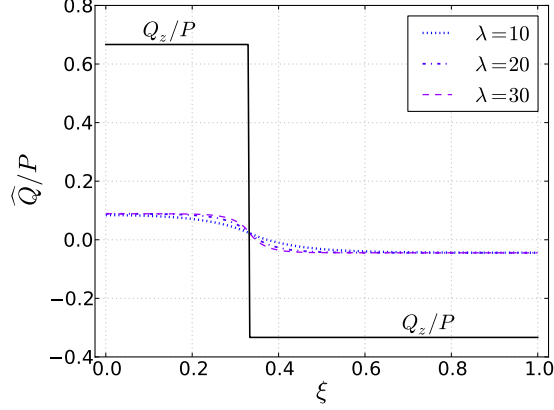


Figura 1: Pseudo-cortantes para $\hat{\kappa} = 0,2$, $\kappa = 4,2$ y distintos valores de la esbeltez λ . Pieza simplemente apoyada

y en el extremo final

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} Q_z(\xi) \\ M_y(\xi) \\ M_f(\xi) \end{Bmatrix}_{\xi=1} &= \begin{bmatrix} G_{44}(\xi) & G_{45}(\xi) & G_{46}(\xi) \\ G_{54}(\xi) & G_{55}(\xi) & G_{56}(\xi) \\ G_{64}(\xi) & G_{65}(\xi) & G_{66}(\xi) \end{bmatrix}_{\xi=1} \begin{Bmatrix} Q_{z0} \\ M_{y0} \\ M_{f0} \end{Bmatrix} \\
 &\quad - P \begin{Bmatrix} G_{44}(\xi - \tau) \\ G_{54}(\xi - \tau) \\ G_{64}(\xi - \tau) \end{Bmatrix}_{\xi=1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (77)
 \end{aligned}$$

ecuación que permite obtener las incógnitas en el extremo inicial:

$$\begin{Bmatrix} Q_{z0} \\ M_{y0} \\ M_{f0} \end{Bmatrix} = P \begin{bmatrix} G_{44}(1) & G_{45}(1) & G_{46}(1) \\ G_{54}(1) & G_{55}(1) & G_{56}(1) \\ G_{64}(1) & G_{65}(1) & G_{66}(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} G_{44}(1 - \tau) \\ G_{54}(1 - \tau) \\ G_{64}(1 - \tau) \end{Bmatrix} \quad (78)$$

De nuevo se representa en la figura 2 el pseudo-cortante para una viga de sección rectangular y una posición de la carga definida por $\tau = 1/3$.

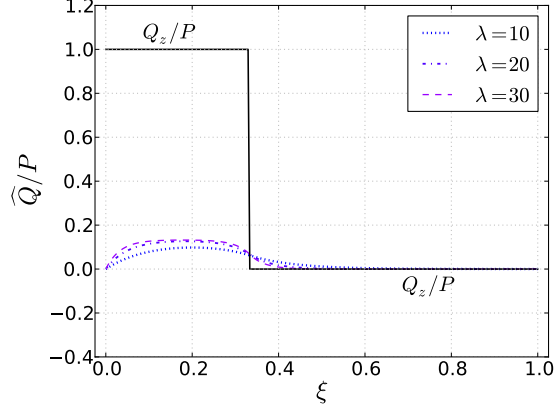


Figura 2: Pseudo-cortantes para $\hat{\kappa} = 0,2$, $\kappa = 4,2$ y distintos valores de la esbeltez λ . Ménsula

5.9.3. Viga biempotrada

En la viga biempotrada los tres desplazamientos generalizados están coaccionados y los esfuerzos son desconocidos en ambas secciones extremas. Por ello

$$\mathbf{E}_0 = \{0 \ 0 \ 0 \ Q_{z0} \ M_{y0} \ M_{f0}\}^T \quad (79)$$

y en el extremo final

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} w(\xi) \\ \theta_y(\xi) \\ \theta_f(\xi) \end{Bmatrix}_{\xi=1} \\ &= \begin{bmatrix} G_{14}(\xi) & G_{15}(\xi) & G_{16}(\xi) \\ G_{24}(\xi) & G_{25}(\xi) & G_{26}(\xi) \\ G_{34}(\xi) & G_{35}(\xi) & G_{36}(\xi) \end{bmatrix}_{\xi=1} \begin{Bmatrix} Q_{z0} \\ M_{y0} \\ M_{f0} \end{Bmatrix} \\ & \quad - P \begin{Bmatrix} G_{14}(\xi - \tau) \\ G_{24}(\xi - \tau) \\ G_{34}(\xi - \tau) \end{Bmatrix}_{\xi=1} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix}, \quad (80) \end{aligned}$$

y despejando se obtienen las incógnitas

$$\begin{Bmatrix} Q_{z0} \\ M_{y0} \\ M_{f0} \end{Bmatrix} = P \begin{bmatrix} G_{14}(1) & G_{15}(1) & G_{16}(1) \\ G_{24}(1) & G_{25}(1) & G_{26}(1) \\ G_{34}(1) & G_{35}(1) & G_{36}(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} G_{14}(1 - \tau) \\ G_{24}(1 - \tau) \\ G_{34}(1 - \tau) \end{Bmatrix} \quad (81)$$

El resultado para la posición de la carga y la sección consideradas en los ejemplos anteriores se observa en la figura 3.

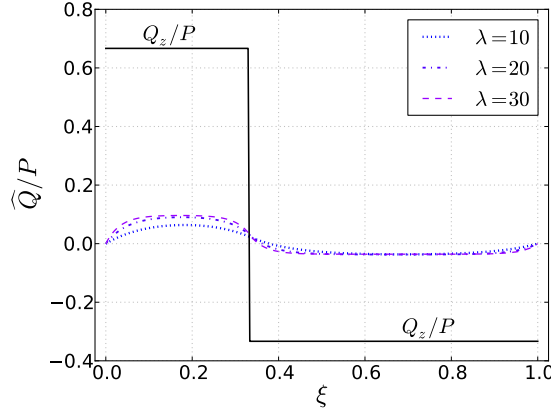


Figura 3: Pseudo-cortantes para $\hat{\kappa} = 0,2$, $\kappa = 4,2$ y distintos valores de la esbeltez λ . Pieza biempotrada

5.10. Retorno al sólido tridimensional

Por lo que se refiere a la cinemática, la propia hipótesis fundamental constituye la herramienta para estimar los movimientos espaciales de la viga, que se describen mediante las componentes u^* , v^* y w^* del vector desplazamiento $\mathbf{d}^*(x, y, z)$ de los puntos materiales del sólido mediante las ecuaciones (30). Sin embargo, tal y como se ha mostrado en la sección 4, la estática es más compleja y requiere la evaluación de expresiones específicas.

Procediendo de acuerdo con el esquema trazado, las tensiones primarias, proporcionales a los esfuerzos $\mathbf{f}(x)$, se deducen de la expresión (29b) $\mathbf{s}_1^* = \mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_{11} \mathbf{f}$ con la matriz de deformaciones \mathbf{B}_1 dada por (34) y $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{D}_{11}^{-1}$

ya calculada antes (42):

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \sigma_{x1}^* \\ \tau_{xz1}^* \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & z & f \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{1}{GA} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_y} & \frac{0}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_{yf}} \\ 0 & \frac{\kappa\bar{\kappa}}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_{yf}} & \frac{1}{(1-\kappa\bar{\kappa})EI_f} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} Q_z \\ M_y \\ M_f \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} \frac{1}{\kappa\bar{\kappa}} \left((z + \kappa f) \frac{M_y}{I_y} + (f + \bar{\kappa}z) \frac{M_f}{I_f} \right) \\ \frac{Q_z}{A} \end{Bmatrix} \quad (82)
\end{aligned}$$

Por otro lado, las tensiones complementarias varían con los pseudo-esfuerzos y se obtienen por medio de la ecuación (29a), $\mathbf{s}_0^* = \mathbf{C} \hat{\mathbf{B}}_0 \hat{\mathbf{S}}_{00} \hat{\mathbf{f}}$, como

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \sigma_{x0}^* \\ \tau_{xz0}^* \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{df}{dz} + \frac{S_f}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho GW_f \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \hat{Q} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} 0 \\ \left(\frac{df}{dz} + \frac{S_f}{A} \right) \frac{\hat{Q}}{\rho W_f} \end{Bmatrix} \quad (83)
\end{aligned}$$

donde la matriz de deformaciones complementarias (10) es

$$\begin{aligned}
& \hat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1 \mathbf{H}^\top \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{df}{dz} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & z & f \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 1 & -\frac{S_f}{A} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{df}{dz} + \frac{S_f}{A} \end{bmatrix} \quad (84)
\end{aligned}$$

y la matriz $\hat{\mathbf{S}}_{00}$, obtenida mediante el algoritmo descrito en la sección 4, resulta:

$$\hat{\mathbf{S}}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/\rho GW_f \end{bmatrix} \quad (85)$$

La tensión tangencial complementaria en la ecuación (83) es la fracción autoequilibrada de las tensión tangencial, que es precisamente la debida al

pseudo-cortante. Así pues, las tensiones totales admiten la siguiente formulación, en función de esfuerzos y pseudo-esfuerzos:

$$\sigma_x^* = \frac{1}{\kappa \bar{\kappa}} \left((z + \kappa f) \frac{M_y}{I_y} + (f + \bar{\kappa} z) \frac{M_f}{I_f} \right) \quad (86a)$$

$$\tau_{xz}^* = \frac{Q_z}{A} + \left(\frac{df}{dz} + \frac{S_f}{A} \right) \frac{\hat{Q}}{\rho W_f} \quad (86b)$$

5.11. Patrón de alabeo

La determinación del alabeo unitario requiere la imposición de nuevas condiciones de contorno estáticas a nivel, ahora, de los puntos de la sección transversal. En una viga con sección rectangular proponemos para el patrón de alabeo la siguiente definición:

$$f(\zeta) = a h \zeta^3 \quad \text{con } \zeta = z/h \quad (87)$$

donde a es una constante a determinar a partir de las condiciones de contorno exigibles a la distribución de tensiones tangenciales:

$$\tau_{xz}^* |_{\zeta=\pm 1/2} = 0 \quad (88)$$

Las constantes estáticas relevantes para la determinación de las tensiones tangenciales, expresadas en función de a y del área de la sección A resultan:

$$S_f = -\frac{a}{4} A \quad W_f = \frac{9}{80} a^2 A \quad \rho = \frac{4}{9} \quad (89)$$

que llevadas a (86b) proporcionan la siguiente expresión de éstas:

$$\tau_{xz}^* |_{\zeta=\pm 1/2} = \frac{1}{A} \left(Q_z + \frac{5}{a} (12 \zeta^2 - 1) \hat{Q} \right)_{\zeta=\pm 1/2} = 0 \quad (90)$$

Considerando ahora una pieza en ménsula con la carga en el extremo, como es habitual en las verificaciones relativas a tensiones tangenciales en vigas, y empleando la solución de la sección 5.9.2 (con $\tau = 1$) se obtiene el diagrama de pseudocortantes de la figura 4.

Se observa que, para $x/L > 0,1$ y esbelteces $\lambda \geq 15$ (correspondientes a una relación $h/L > 1/5$) se cumple $\hat{Q}/P \simeq 2/15$. Teniendo en cuenta este dato, junto con el valor del cortante $Q_z/P = 1$, y sustituyendo en (90) se obtiene el valor de la constante

$$a = -\frac{4}{3} \quad (91)$$

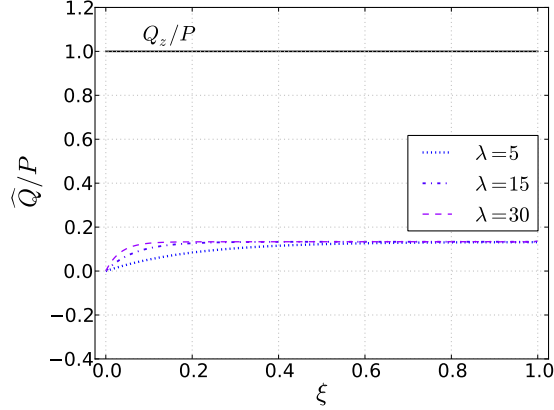


Figura 4: Pseudo-cortantes en una ménsula con carga en el extremo y distintos valores de la esbeltez λ

con lo que el patrón de alabeo resulta:

$$f(\zeta) = -\frac{4}{3} h \zeta^3 \quad (92)$$

y la distribución de tensiones tiene la expresión habitual en teoría de vigas

$$\tau_{xz}^* = \frac{3P}{2A} (1 - 4\zeta^2) \quad (93)$$

válida en este caso para $x/L > 0,1$

6. Aplicación a la torsión mixta

El segundo ejemplo escogido para ilustrar los conceptos y resultados anteriores, así como para mostrar como opera el marco teórico en su conjunto, es el problema de torsión mixta de la pieza de directriz recta y sección constante.

6.1. Hipótesis fundamental

El modelo se materializa mediante el segmento del eje de torsión de la pieza (lugar geométrico de los centros de esfuerzos cortantes de las secciones transversales, parametrizado en x con $0 \leq x \leq L$). Se adopta como hipótesis

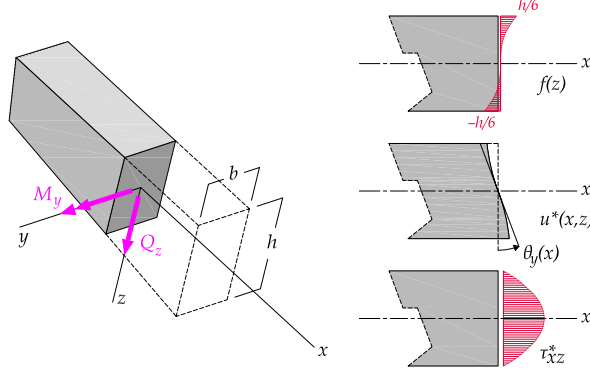


Figura 5: Patrón de alabeo, cinemática, y distribución de tensiones tangenciales asociada al problema de flexión alabeada

fundamental del problema la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{d}^*(x, y, z) &= u^* \mathbf{i}_1 + v^* \mathbf{i}_2 + w^* \mathbf{i}_3 \\ &= \mathbf{h}(y, z) \mathbf{u}(x) = \begin{bmatrix} 0 & \widehat{\omega}(y, z) \\ -z & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \varphi \end{Bmatrix} \quad (94) \end{aligned}$$

donde el vector de desplazamientos generalizados $\mathbf{u}(x)$ agrupa la rotación de eje longitudinal $\theta_x(x)$ de las secciones y la intensidad de alabeo $\varphi(x)$, y la función $\widehat{\omega}(y, z)$ es el alabeo unitario o patrón de alabeo de la sección transversal de la pieza. Esta hipótesis supone implícitamente que las deformaciones en el en el plano de la sección transversal son nulas.

6.2. Definición estática de los esfuerzos consistentes

De acuerdo con la definición estática que proporciona la teoría unificada (136), los esfuerzos quedan determinados por la expresión:

$$\begin{aligned} \mathbf{f} &= \int_A \mathbf{h}^\top \mathbf{t}^* dA \\ &= \int_A \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ \widehat{\omega}(y, z) & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sigma_x^* \\ \tau_{xy}^* \\ \tau_{xz}^* \end{Bmatrix} dA = \begin{Bmatrix} M_x \\ B_{\widehat{\omega}} \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

que conduce a las definiciones tradicionales de momento torsor y bimomento:

$$M_x = \int_A (-z \tau_{xy}^* + y \tau_{xz}^*) dA, \quad B_{\hat{\omega}} = \int_A \hat{\omega} \sigma_x^* dA$$

6.3. Matrices de deformación

Aplicando las definiciones generales (127b) (127c) o bien calculando directamente las deformaciones y ordenando la expresión de la forma determinada en (127a), resultan las siguientes matrices de deformación:

$$\mathbf{B}_0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_{,y} \\ 0 & \hat{\omega}_{,z} \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}_1 = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega} \\ -z & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \quad (95)$$

6.4. Rigideces locales

Evaluando las matrices que definen las rigideces locales \mathbf{D}_{rs} de acuerdo con la expresión (130) y usando la misma matriz constitutiva (36) empleada en el ejemplo de flexión, se obtiene el siguiente resultado:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \mathbf{D}_{00} & \mathbf{D}_{01} \\ \mathbf{D}_{10} & \mathbf{D}_{11} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & GW_C & -GW_C & 0 \\ 0 & -GW_C & GI_C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & EI_{\hat{\omega}} \end{bmatrix} \quad (96)$$

en el que intervienen los siguientes parámetros geométricos de la sección transversal, característicos del problema de torsión:

- Módulo de bicortante

$$W_C = \int_A \left(\left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \hat{\omega}}{\partial z} \right)^2 \right) dA \quad (97)$$

- Momento de inercia polar respecto del centro de esfuerzos cortantes C:

$$I_C = \int_A (y^2 + z^2) dA \quad (98)$$

- Módulo de alabeo

$$I_{\hat{\omega}} = \int_A \hat{\omega}^2 dA \quad (99)$$

En [9, págs. 86-88] se demuestra que el módulo de bicortante se puede expresar del siguiente modo:

$$W_C = \int_A \left(z \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial y} - y \frac{\partial \widehat{\omega}}{\partial z} \right) dA = I_C - J$$

siendo J el módulo de torsión de la sección transversal. En lo sucesivo, estas tres constantes estáticas se relacionarán mediante un parámetro adimensional $\widehat{\kappa}$ definido de la siguiente forma:

$$\widehat{\kappa} = \frac{W_C}{I_C} = 1 - \frac{J}{I_C}$$

6.5. Matrices de equilibrio local y acoplamiento

La matriz de equilibrio local (132) vale, en función de los resultados anteriores,

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\widehat{\kappa} & 0 \end{bmatrix} \quad (100)$$

y la matriz de acoplamiento (134),

$$\widehat{\mathbf{D}}_{00} = \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \widehat{\kappa} GJ \end{bmatrix} \quad (101)$$

6.6. Deformaciones generalizadas y esfuerzos

Las deformaciones generalizadas se determinan llevando la matriz de equilibrio \mathbf{H} a (131) y resultan:

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}^T \mathbf{u} + \mathbf{u}' = \begin{bmatrix} 0 & -\widehat{\kappa} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_x \\ \varphi \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \theta'_x \\ \varphi' \end{Bmatrix} \quad (102)$$

A continuación se obtiene el vector de esfuerzos recurriendo a su definición constitutiva (135):

$$\mathbf{f} = \mathbf{D}_{11} \mathbf{e} = \begin{bmatrix} GI_C & 0 \\ 0 & EI_{\widehat{\omega}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta'_x - \widehat{\kappa} \varphi \\ \varphi' \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} M_x \\ B_{\widehat{\omega}} \end{Bmatrix} \quad (103)$$

y finalmente, desarrollándolo en componentes, se establecen las definiciones constitutivas del momento torsor y el bimomento:

$$M_x = GJ \theta'_x + GW_C (\theta'_x - \varphi) \quad (104a)$$

$$B_{\widehat{\omega}} = EI_{\widehat{\omega}} \varphi' \quad (104b)$$

Por otra parte, sustituyendo en (133) y operando, se obtiene la densidad lagrangiana de energía de deformación en el problema de torsión mixta, en función de las rigideces locales y los desplazamientos generalizados:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} (GJ(\theta'_x)^2 + GW_C(\theta'_x - \varphi)^2 + EI_{\hat{\omega}}(\varphi')^2) - (m_x \theta_x + b_{\hat{\omega}} \varphi)$$

En esta expresión se distinguen las energías de deformación por torsión pura, corte y alabeo, en este orden, junto con el potencial de las cargas actuantes, representado por el último sumando, en el que intervienen m_x , par torsor exterior por unidad de longitud, y $b_{\hat{\omega}}$, densidad lineal de bimomento exterior.

6.7. Ecuaciones diferenciales del problema

La composición del operador \mathbf{W} que gobierna el sistema de ecuaciones (138) es:

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}^T & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \hat{\mathbf{D}}_{00} & \mathbf{H} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \hat{\kappa} & \frac{1}{GI_C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{EI_{\hat{\omega}}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{\kappa} GJ & -\hat{\kappa} & 0 \end{bmatrix} \quad (105)$$

Este sistema, desarrollado en componentes, se escribe como:

$$\theta'_x = \hat{\kappa} \varphi + \frac{M_x}{GI_C} \quad (106a)$$

$$\varphi' = \frac{B_{\hat{\omega}}}{EI_{\hat{\omega}}} \quad (106b)$$

$$M'_x = -m_x \quad (106c)$$

$$B'_{\hat{\omega}} = \hat{\kappa} GJ \varphi - \hat{\kappa} M_x - b_{\hat{\omega}} \quad (106d)$$

La ecuación característica es:

$$|\mathbf{W} - K\mathbf{I}| = K^2 \left(K^2 - EI_{\hat{\omega}} \frac{GJ}{EI_{\hat{\omega}}} \right) = 0$$

cuyas raíces son $K = 0$ (doble), y $K = \pm \frac{\lambda}{L}$, con la segunda pareja de valores expresada por medio de la *esbeltez de torsión* λ :

$$\lambda = L \sqrt{\hat{\kappa} \frac{GJ}{EI_{\hat{\omega}}}} \quad (107)$$

Por último, el operador fundamental $\mathbf{G}(x)$ del sistema de ecuaciones diferenciales, obtenido por el mismo procedimiento que en el ejemplo anterior, tiene la siguiente expresión ($\xi = x/L \in [0, 1]$)

$$\mathbf{G}(x) = \begin{bmatrix} 1 & \widehat{\kappa}L \frac{\sinh \lambda \xi}{\lambda} & \frac{L}{GJ} \frac{\lambda \xi - \widehat{\kappa} \sinh \lambda \xi}{\lambda} & \frac{\cosh \lambda \xi - 1}{GJ} \\ 0 & \cosh \lambda \xi & \frac{\cosh \lambda \xi - 1}{GJ} & \frac{\lambda \sinh \lambda \xi}{\widehat{\kappa}GJL} \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \widehat{\kappa}GJL \frac{\sinh \lambda \xi}{\lambda} & -\widehat{\kappa}L \frac{\sinh \lambda \xi}{\lambda} & \cosh \lambda \xi \end{bmatrix}, \quad (108)$$

y permite establecer las soluciones correspondientes a distintos problemas de contorno.

6.8. Pseudo-esfuerzos

La existencia de una matriz de acoplamiento no idénticamente nula confirma que el modelo propuesto constituye una hiperviga. En virtud de la definición constitutiva (6a), los pseudo-esfuerzos tienen el siguiente valor:

$$\widehat{\mathbf{f}} = \widehat{\mathbf{D}}_{00} \mathbf{u} = \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ \widehat{\kappa} GJ \varphi \end{array} \right\} \quad (109)$$

y, según su definición estática (6b), resultan:

$$\begin{aligned} \widehat{\mathbf{f}} &= \mathbf{f}' + \mathbf{Q} - \mathbf{H}\mathbf{f} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} M'_x \\ B'_{\widehat{\omega}} \end{array} \right\} + \left\{ \begin{array}{c} m_x \\ b_{\widehat{\omega}} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ -\widehat{\kappa} M_x \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ B'_{\widehat{\omega}} + b_{\widehat{\omega}} + \widehat{\kappa} M_x \end{array} \right\} \end{aligned} \quad (110)$$

La primera componente es nula por exigencia de la condición de equilibrio de momentos de eje longitudinal (106c). Por ello, la única componente activa del vector de pseudo-esfuerzos, que proponemos llamar *pseudo-torsor* tiene las siguientes definiciones:

$$\widehat{M} = \widehat{\kappa} GJ \varphi \quad (\text{definición constitutiva}) \quad (111a)$$

$$\widehat{M} = B'_{\widehat{\omega}} + b_{\widehat{\omega}} + \widehat{\kappa} M_x \quad (\text{definición estática}) \quad (111b)$$

La primera definición justifica plenamente la denominación escogida para la nueva variable. En la literatura [7], [8] se introduce habitualmente otra variable estática

$$M_{\widehat{\omega}} = -(B'_{\widehat{\omega}} + b_{\widehat{\omega}}) \quad (112)$$

que se denomina *bicortante*, o *momento torsor de alabeo*. La expresión del pseudo-torsor en función del torsor de alabeo es:

$$\widehat{M} = \widehat{\kappa} M_x - M_{\widehat{\omega}} \quad (113)$$

6.9. Viga recta sometida a torsor puntual

A título de ejemplo, adjuntamos la solución para una pieza recta de sección constante, sometida a un torsor puntual T en la sección $x = \tau L$. La solución general de este problema puede expresarse en la forma:

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{G}(\xi) \mathbf{E}_0 \quad \text{si } \xi = x/L < \tau \quad (114a)$$

$$\mathbf{E}(\xi) = \mathbf{G}(\xi) \mathbf{E}_0 - T \mathbf{G}_3(\xi - \tau) \quad \text{si } \xi > \tau \quad (114b)$$

siendo $\mathbf{G}_3(\xi)$ la tercera columna del operador fundamental $\mathbf{G}(\xi)$ definido anteriormente mientras que \mathbf{E}_0 corresponde al valor inicial del vector estado $\mathbf{E}(\xi) = \{\theta_x, \varphi, M_x, B_{\widehat{\omega}}\}^T$. Por su parte, el bicortante y el pseudo-torsor se determinarán a partir de las fórmulas

$$M_{\widehat{\omega}} = -B'_{\widehat{\omega}} \quad (115a)$$

$$\widehat{M} = \widehat{\kappa} M_x - M_{\widehat{\omega}} \quad (115b)$$

A partir de ella, vamos a evaluar diferentes problemas de contorno.

6.9.1. Viga simplemente apoyada

En la viga simplemente apoyada, la rotación de torsión está impedida y alabeo es libre en los extremos.

En este caso, $E_0 = \{0 \ \varphi_0 \ M_0 \ 0\}^T$, por lo que

$$\begin{aligned} & \left. \begin{array}{l} \theta_x(\xi) \\ B_{\widehat{\omega}}(\xi) \end{array} \right\}_{\xi=1} \\ &= \left[\begin{array}{cc} G_{12}(\xi) & G_{13}(\xi) \\ G_{42}(\xi) & G_{43}(\xi) \end{array} \right]_{\xi=1} \left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 \\ M_0 \end{array} \right\} - T \left\{ \begin{array}{l} G_{13}(\xi - \tau) \\ G_{43}(\xi - \tau) \end{array} \right\}_{\xi=1} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

Luego

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi_0 \\ M_0 \end{array} \right\} = T \left[\begin{array}{cc} G_{12}(1) & G_{13}(1) \\ G_{42}(1) & G_{43}(1) \end{array} \right]^{-1} \left\{ \begin{array}{l} G_{13}(1 - \tau) \\ G_{43}(1 - \tau) \end{array} \right\}$$

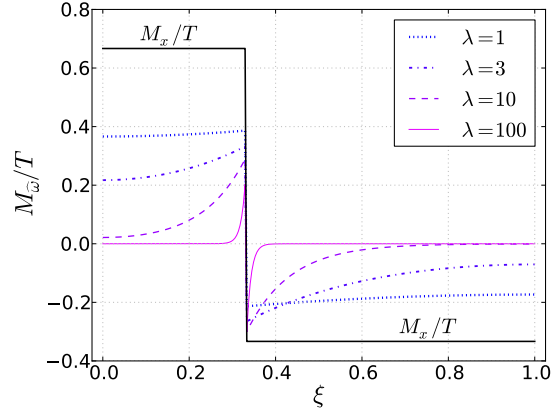


Figura 6: Momentos torsores de alabeo para $\hat{\kappa} = 0,6$ y distintos valores de la esbeltez λ . Pieza simplemente apoyada

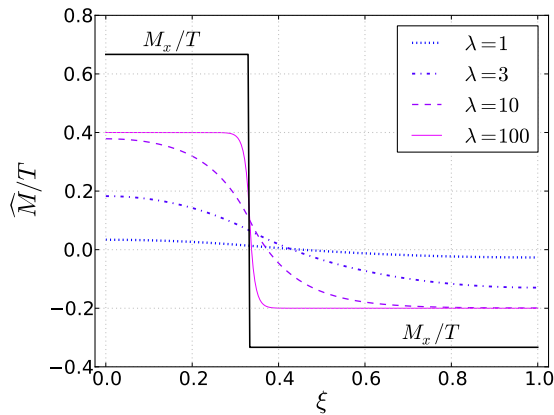


Figura 7: Pseudo-torsores para $\hat{\kappa} = 0,6$ y distintos valores de la esbeltez λ . Pieza simplemente apoyada

La figura 6 proporciona, para $\tau = 1/3$, la representación gráfica de los momentos torsores de alabeo (112) normalizados para distintos valores de la esbeltez de torsión.

En ella se aprecia como los torsores de alabeo se van disipando al crecer el parámetro λ , cediendo protagonismo a la torsión pura. Esta propiedad característica de la torsión mixta queda perfectamente descrita si partimos

de la última ecuación diferencial del problema homogéneo:

$$B'_{\hat{\omega}} = \hat{\kappa} GJ \varphi - \hat{\kappa} M_x \quad (116)$$

Utilizando ahora la primera ecuación diferencial del sistema y la relación existente entre las constantes estáticas del problema, se llega a:

$$M_x = GJ \theta'_x + M_{\hat{\omega}} \quad (117)$$

con

$$M_{\hat{\omega}} = -\frac{dB_{\hat{\omega}}}{dx} = -EI_{\hat{\omega}} \varphi'' = GW_C (\theta'_x - \varphi) \quad (118)$$

Por lo tanto, el resultado anterior confirma el reparto existente entre los dos mecanismos resistentes de la torsión, pura y alabeada, el cual está gobernado por la esbeltez torsional. Esto señala, de modo inequívoco, el papel central que este parámetro desempeña en el comportamiento estructural de la pieza.

De forma similar, la figura 7 muestra, para el mismo problema, la evolución de los pseudo-torsores (113). Se aprecia claramente como, al crecer la esbeltez torsional, estos esfuerzos van ajustándose a la distribución de momentos torsores M_x , debidamente ponderados por el factor $\hat{\kappa}$.

6.9.2. Viga en ménsula

En la viga en ménsula la rotación y el alabeo están coaccionados en el extremo inicial, mientras que el extremo final es libre. En este caso $\mathbf{E}_0 = \{0 \ 0 \ M_0 \ B_0\}^T$, por lo que:

$$\begin{aligned} & \left\{ \begin{array}{l} M_x(\xi) \\ B_{\hat{\omega}}(\xi) \end{array} \right\}_{\xi=1} \\ &= \begin{bmatrix} G_{33}(\xi) & G_{34}(\xi) \\ G_{43}(\xi) & G_{44}(\xi) \end{bmatrix}_{\xi=1} \left\{ \begin{array}{l} M_0 \\ B_0 \end{array} \right\} - T \left\{ \begin{array}{l} G_{33}(\xi - \tau) \\ G_{43}(\xi - \tau) \end{array} \right\}_{\xi=1} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 0 \end{array} \right\} \end{aligned}$$

obteniendo

$$\left\{ \begin{array}{l} M_0 \\ B_0 \end{array} \right\} = T \begin{bmatrix} G_{33}(1) & G_{34}(1) \\ G_{43}(1) & G_{44}(1) \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{array}{l} G_{33}(1 - \tau) \\ G_{43}(1 - \tau) \end{array} \right\}$$

Las figuras 8 y 9 muestran como evolucionan bicortantes y pseudo-torsores en este segundo caso, verificándose de nuevo las propiedades observadas para ambas.

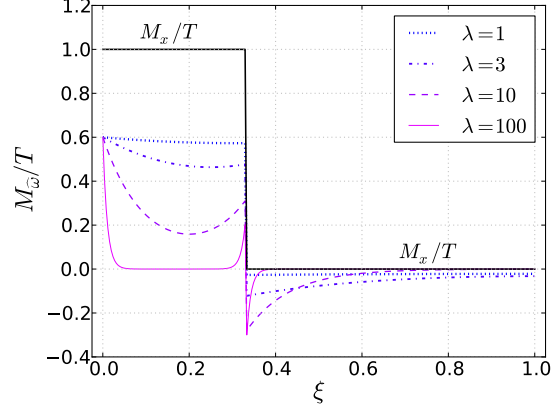


Figura 8: Momentos torsores de alabeo para $\hat{\kappa} = 0,6$ y distintos valores de la esbeltez λ . Pieza en ménsula

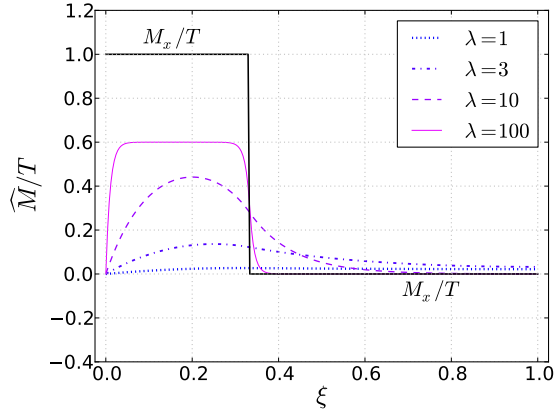


Figura 9: Pseudo-torsores para $\hat{\kappa} = 0,6$ y distintos valores de la esbeltez λ . Pieza en ménsula

6.9.3. Viga biempotrada

En este caso la rotación y el alabeo están coaccionados en ambos extremos, por lo tanto $E_0 = \{0 \ 0 \ M_0 \ B_0\}^T$ y:

$$\begin{aligned} & \begin{Bmatrix} \theta_x(\xi) \\ \varphi(\xi) \end{Bmatrix}_{\xi=1} \\ &= \begin{bmatrix} G_{13}(\xi) & G_{14}(\xi) \\ G_{23}(\xi) & G_{24}(\xi) \end{bmatrix}_{\xi=1} \begin{Bmatrix} M_0 \\ B_0 \end{Bmatrix} - T \begin{Bmatrix} G_{13}(\xi - \tau) \\ G_{23}(\xi - \tau) \end{Bmatrix}_{\xi=1} \\ &= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \end{aligned}$$

luego

$$\begin{Bmatrix} M_0 \\ B_0 \end{Bmatrix} = T \begin{bmatrix} G_{13}(1) & G_{14}(1) \\ G_{23}(1) & G_{24}(1) \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} G_{13}(1 - \tau) \\ G_{23}(1 - \tau) \end{Bmatrix}$$

De nuevo, las figuras 10 y 11 muestran la evolución de bicortantes y pseudotorsores, verificándose otra vez las propiedades anteriormente comentadas.

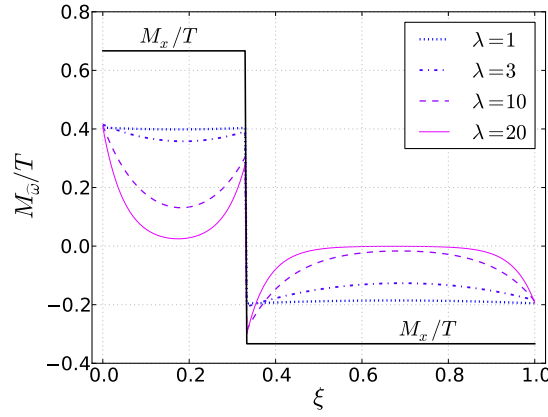


Figura 10: Momentos torsores de alabeo para $\hat{\kappa} = 0,6$ y distintos valores de la esbeltez λ . Pieza biempotrada

Aunque el algoritmo de cálculo de las constantes de integración tiene una estructura idéntica en todos los problemas de contorno, en hipervigas externamente hiperestáticas el valor de las variables estáticas en el contorno (esfuerzos de empotramiento M_0 y B_0) es función de la esbeltez λ . Sin embargo, en el caso analizado, la diferencia entre esfuerzos de empotramiento para distintos valores de λ es prácticamente imperceptible.

6.10. Retorno al sólido tridimensional

Del mismo modo que en ejemplo anterior, las tensiones primarias, proporcionales a los esfuerzos $\mathbf{f}(x)$, se deducen de la expresión (29b) $\mathbf{s}_1^* =$

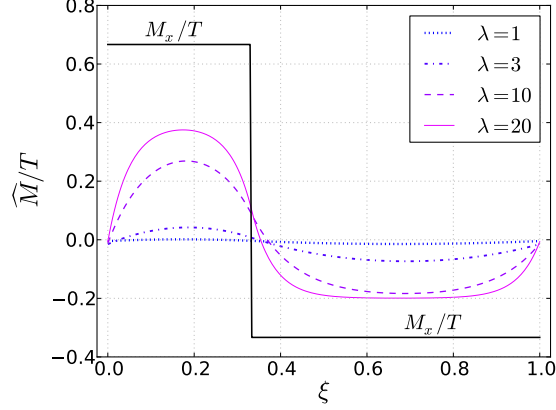


Figura 11: Pseudo-torsores para $\widehat{\kappa} = 0,6$ y distintos valores de la esbeltez λ . Pieza biempotrada

$\mathbf{C} \mathbf{B}_1 \mathbf{S}_{11} \mathbf{f}$ con la matriz de deformaciones \mathbf{B}_1 dada por (95) y $\mathbf{S}_{11} = \mathbf{D}_{11}^{-1}$:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} \sigma_{x1}^* \\ \tau_{xy1}^* \\ \tau_{xz1}^* \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \widehat{\omega} \\ -z & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (1 - \widehat{\kappa})/GJ & 0 \\ 0 & 1/EI_{\widehat{\omega}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} M_x \\ B_{\widehat{\omega}} \end{Bmatrix} \\
 &= \begin{Bmatrix} \widehat{\omega} B_{\widehat{\omega}}/I_{\widehat{\omega}} \\ -(1 - \widehat{\kappa}) z M_x/J \\ (1 - \widehat{\kappa}) y M_x/J \end{Bmatrix} \quad (119)
 \end{aligned}$$

Las tensiones complementarias se determinan a partir de la ecuación (29a), $\mathbf{s}_0^* = \mathbf{C} \widehat{\mathbf{B}}_0 \widehat{\mathbf{S}}_{00} \widehat{\mathbf{f}}$, como

$$\begin{aligned}
& \begin{Bmatrix} \sigma_{x0}^* \\ \tau_{xy0}^* \\ \tau_{xz0}^* \end{Bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} E & 0 & 0 \\ 0 & G & 0 \\ 0 & 0 & G \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_{,y} - \hat{\kappa} z \\ 0 & \hat{\omega}_{,z} + \hat{\kappa} y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1/\hat{\kappa} G J \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \widehat{M} \end{Bmatrix} \\
&= \begin{Bmatrix} 0 \\ (\hat{\omega}_{,y} - \hat{\kappa} z) \widehat{M}/\hat{\kappa} J \\ (\hat{\omega}_{,z} + \hat{\kappa} y) \widehat{M}/\hat{\kappa} J \end{Bmatrix} \quad (120)
\end{aligned}$$

donde la matriz de deformaciones complementarias $\widehat{\mathbf{B}}_0$ (10) es

$$\begin{aligned}
\widehat{\mathbf{B}}_0 = \mathbf{B}_0 - \mathbf{B}_1 \mathbf{H}^\top &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_{,y} \\ 0 & \hat{\omega}_{,z} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & \hat{\omega} \\ -z & 0 \\ y & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -\hat{\kappa} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_{,y} - \hat{\kappa} z \\ 0 & \hat{\omega}_{,z} - \hat{\kappa} y \end{bmatrix} \quad (121)
\end{aligned}$$

y la matriz $\widehat{\mathbf{S}}_{00}$, obtenida mediante el algoritmo descrito en la sección 4, resulta :

$$\widehat{\mathbf{S}}_{00} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \hat{\omega}_{,y} - \hat{\kappa} z \\ 0 & \hat{\omega}_{,z} + \hat{\kappa} y \end{bmatrix} \quad (122)$$

Así pues, las tensiones totales admiten la siguiente formulación, en función de esfuerzos y pseudo-esfuerzos:

$$\sigma_x^* = \hat{\omega} \frac{B_{\hat{\omega}}}{I_{\hat{\omega}}} \quad (123a)$$

$$\tau_{xy}^* = \frac{\hat{\omega}_{,y} - \hat{\kappa} z}{\hat{\kappa}} \frac{\widehat{M}}{J} - (1 - \hat{\kappa}) z \frac{M_x}{J} \quad (123b)$$

$$\tau_{xz}^* = \frac{\hat{\omega}_{,z} + \hat{\kappa} y}{\hat{\kappa}} \frac{\widehat{M}}{J} + (1 - \hat{\kappa}) y \frac{M_x}{J} \quad (123c)$$

o bien, expresando los pseudo-tensores en función de los bicortantes:

$$\sigma_x^* = \hat{\omega} \frac{B_{\hat{\omega}}}{I_{\hat{\omega}}} \quad (124a)$$

$$\tau_{xy}^* = (\hat{\omega}_{,y} - z) \frac{M_x - M_{\hat{\omega}}}{J} - \frac{1 - \hat{\kappa}}{\hat{\kappa}} \hat{\omega}_{,y} \frac{M_{\hat{\omega}}}{J} \quad (124b)$$

$$\tau_{xz}^* = (\hat{\omega}_{,z} + y) \frac{M_x - M_{\hat{\omega}}}{J} + \frac{1 - \hat{\kappa}}{\hat{\kappa}} \hat{\omega}_{,z} \frac{M_{\hat{\omega}}}{J} \quad (124c)$$

como aparece en [9].

La obtención del patrón de alabeo es un problema clásico de la Mecánica de Sólidos, cuya solución es independiente del desarrollo de las expresiones anteriores, y requiere tomar en consideración el equilibrio tensional en la sección.

7. Conclusiones

El presente trabajo supone los siguientes avances en la construcción y comprensión de la teoría general de modelos 1D:

1. El concepto de hiperestatismo local, que caracteriza los modelos hiperviga, hace referencia al acoplamiento entre esfuerzos y desplazamientos generalizados presente en las ecuaciones de equilibrio del problema, que impide la integración directa de los esfuerzos a partir de estas ecuaciones, aún en el caso de piezas externamente isostáticas.
2. Esta idea ha conducido a la introducción de unas nuevas variables estáticas denominadas *pseudo-esfuerzos* que posibilitan una nueva interpretación del acoplamiento presente en los modelos hiperviga: Los pseudo-esfuerzos representan la acción de los enlaces internos que controlan el cambio de forma de la sección transversal.
3. Se ha mostrado cómo, en el caso general, las tensiones que predice el modelo hiperviga se dividen en dos partes: las denominadas tensiones primarias, directamente proporcionales a los esfuerzos generalizados, y unas tensiones complementarias exclusivamente originadas por el hiperestatismo local y proporcionales a los pseudo-esfuerzos. Estas últimas poseen una distribución autoequilibrada sobre la sección transversal de la pieza.

4. El modelo de viga estándar es localmente isostático ya que el problema estático está desacoplado del cinemático. En él, los pseudo-esfuerzos y las tensiones complementarias son idénticamente nulos, resultando por lo tanto que estos descriptores son propios del modelo hiperviga.
5. Las distribuciones de tensiones obtenidas son resultados teóricos consistentes con la hipótesis cinemática escogida. Por tanto, deben considerarse meras aproximaciones a la solución que se obtendría mediante la elasticidad tridimensional, tanto más precisas cuanto más elaborada sea la hipótesis cinemática.
6. Las tensiones son función del patrón genérico de alabeo, que interviene como un dato en la formulación unificada. En general, éste se obtiene mediante condiciones de carácter estático, como se ha mostrado en el caso de la flexión alabeada.

Anexo. Resultados principales de la aplicación de la formulación unificada a la teoría de vigas.

La formulación unificada permite la deducción sistemática de las ecuaciones que gobiernan los problemas de vigas de directriz recta o curva (y también de los problemas de placas y láminas) partiendo únicamente de una hipótesis fundamental acerca de la cinemática que gobierna el modelo que se desea desarrollar. En este anexo incluimos las expresiones correspondientes a la viga de directriz curva contenida en un plano. Otros casos más generales pueden consultarse en [3], [4], [9] y [2].

En problemas lineales, la hipótesis cinemática permite expresar los desplazamientos de los puntos materiales del sólido como producto de una matriz \mathbf{h} cuyas componentes son funciones de las coordenadas y, z de la sección por un vector \mathbf{u} que agrupa los desplazamientos generalizados, que son sólo funciones de la posición s de la sección sobre la directriz [3, ec. 10]:

$$\mathbf{d}^*(s, y, z) = \mathbf{h}(y, z) \mathbf{u}(s) \quad (125)$$

Las componentes físicas de la deformación del sólido pueden agruparse en un vector

$$\mathbf{e}^* = \{\epsilon_s^* \ \epsilon_y^* \ \epsilon_z^* \ \tau_{sy}^* \ \tau_{sz}^* \ \tau_{yz}^*\}^T \quad (126)$$

Introduciendo las matrices de deformación \mathbf{B}_0 y \mathbf{B}_1 , este vector puede fac-

torizarse del siguiente modo [3, ecs. 13 y 14]:

$$\mathbf{e}^*(s, y, z) = \mathbf{B}_0(y, z) \mathbf{u}(s) + \mathbf{B}_1(y, z) \mathbf{u}'(s) \quad (127a)$$

$$\mathbf{B}_0 = \mathbf{E}_0 \mathbf{h} + \mathbf{E}_2 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial y} + \mathbf{E}_3 \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial z} \quad (127b)$$

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{E}_1 \mathbf{h} \quad (127c)$$

con

$$\mathbf{E}_0 = \frac{\chi}{\mu} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_1 = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (128a)$$

$$\mathbf{E}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{E}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (128b)$$

donde χ es la curvatura de la directriz y $\mu = 1 - \chi y$.

La densidad lineal de energía potencial en la viga se obtiene como suma de la densidad lineal de energía de deformación más el potencial de las densidades lineales de las cargas exteriores, y admite la siguiente factorización [3, ec. 21]:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(s, \mathbf{u}, \mathbf{u}') = & \\ & \frac{1}{2} (\mathbf{u}^\top \mathbf{D}_{00} \mathbf{u} + \mathbf{u}^\top \mathbf{D}_{01} \mathbf{u}' + \mathbf{u}'^\top \mathbf{D}_{10} \mathbf{u} + \mathbf{u}'^\top \mathbf{D}_{11} \mathbf{u}') \\ & - \mathbf{u}^\top \mathbf{Q}, \end{aligned} \quad (129)$$

donde el vector $\mathbf{Q}(x)$ contiene las densidades lineales de cargas consistentes con el modelo y las matrices que definen las rigideces locales \mathbf{D}_{rs} vienen dadas por:

$$\mathbf{D}_{rs} = \int_A \mathbf{B}_r^\top \mathbf{C} \mathbf{B}_s \mu dA. \quad r, s \in \{0, 1\} \quad (130)$$

Introduciendo el siguiente vector de deformaciones generalizadas, asociadas a la hipótesis escogida [2, ec. 18],

$$\mathbf{e} = \mathbf{H}^\top \mathbf{u} + \mathbf{u}' \quad (131)$$

en el que interviene la matriz \mathbf{H} , o matriz de equilibrio local

$$\mathbf{H} = \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \quad (132)$$

es posible factorizar la densidad lineal, que es el funcional de Lagrange del problema, como forma cuadrática de los desplazamientos y de las deformaciones generalizadas [2, ec. 17]

$$\mathcal{L}(s, \mathbf{u}, \mathbf{e}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^\top \widehat{\mathbf{D}}_{00} \mathbf{u} + \mathbf{e}^\top \mathbf{D}_{11} \mathbf{e}) - \mathbf{u}^\top \mathbf{Q} \quad (133)$$

La matriz de la forma cuadrática de los desplazamientos, o matriz de acoplamiento entre variables estáticas y cinemáticas, es

$$\widehat{\mathbf{D}}_{00} = \mathbf{D}_{00} - \mathbf{D}_{01} \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{D}_{10} \quad (134)$$

Los esfuerzos correspondientes al modelo adoptado admiten una definición constitutiva [2, ec. 20]

$$\mathbf{f} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathbf{e}} = \mathbf{D}_{11} \mathbf{e}, \quad (135)$$

que coincide naturalmente con la definición estática [3, ec. 31]

$$\mathbf{f} = \int_A \mathbf{B}_1^\top \mathbf{s}^* \mu dA = \int_A \mathbf{h}^\top \mathbf{t}^* dA \quad (136)$$

en la que $\mathbf{s}^* = \{\sigma_s^* \sigma_y^* \sigma_z^* \tau_{sy}^* \tau_{sz}^* \tau_{yz}^*\}$ es el vector que agrupa las seis componentes físicas de la tensión en el sólido (ordenadas de forma consistente con \mathbf{e}^*), y \mathbf{t}^* es el vector tensión que actúa sobre los puntos de la sección transversal. En el caso de la viga de directriz contenida en un plano, $\mathbf{t}^* = \{\sigma_s^* \tau_{sy}^* \tau_{sz}^*\}$.

A partir del funcional de Lagrange, se deduce el siguiente funcional de Hamilton [2, ecs. 21 y 22]

$$\mathcal{H}(s, \mathbf{u}, \mathbf{f}) = \frac{1}{2} (\mathbf{u}^\top \widehat{\mathbf{D}}_{00} \mathbf{u} + \mathbf{f}^\top \mathbf{D}_{11}^{-1} \mathbf{f}) + \mathbf{u}^\top \mathbf{Q} \quad (137)$$

Empleando las ecuaciones de Hamilton se obtiene el sistema de ecuaciones diferenciales que gobierna el la estática de la viga con la hipótesis cinemática escogida inicialmente [2, ecs. 23 a 25]:

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{u}' \\ \mathbf{f}' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mathbf{H}^\top & \mathbf{D}_{11}^{-1} \\ \widehat{\mathbf{D}}_{00} & \mathbf{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{f} \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{Q} \end{Bmatrix} \quad (138)$$

Así pues, la teoría unificada proporciona un procedimiento sistemático de obtención de las variables (esfuerzos y deformaciones generalizadas) asociadas al modelo escogido, así como de las ecuaciones que rigen el problema correspondiente a dicho modelo.

Referencias

- [1] Monleón S, Ibáñez F, Lázaro C, Domingo A (2008) The concept of hyper-beams in the analysis of slender members. En *Proceedings of the 6th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures: IASS-IACM 2008 - Spanning Nano to Mega*, 28-31 May 2008, Cornell University, Ithaca, New York, USA
- [2] Monleón S, Lázaro C (2011) El concepto de hiperviga como generalización de los modelos unidimensionales en la estática de piezas alargadas. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 27(4):294–303
- [3] Monleón S (1993) Tópicos del análisis unidimensional de estructuras. Parte 1. Vigas y arcos. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 9(2):161–179
- [4] Monleón S (1995) Tópicos del análisis unidimensional de estructuras. Parte 2. Placas y láminas. *Rev. Internac. Mét. Num. Cál. Dis. Ing.* 11(1):37–59
- [5] Reddy JN (1984), *Energy and Variational Methods in Applied Mechanics*. John Wiley & Sons
- [6] Vlassov BZ (1962) *Pièces Longues en Voiles Minces*. 2^a ed., Éditions Eyrolles, París, Francia
- [7] Kollbrunner CF, Basler K (1969) *Torsion in structures: an engineering approach*. Springer Verlag
- [8] Manterola J (1976) La sección abierta y cerrada bajo sollicitación excéntrica. En *Puentes II*. Monografía n^o 15 de la A.F.C.E.
- [9] Monleón S (2001) *Análisis de Vigas, Arcos, Placas y Láminas: una Presentación Unificada*. 2^a ed. Editorial de la Universidad Politécnica de Valencia
- [10] Lanczos C (1970) *The Variational Principles of Mechanics*. 4th ed., Univeristy of Toronto Press