

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



Trabajo Fin de Máster

---

**Modelado no Lineal de Pantógrafo.  
Simulación Dinámica Pantógrafo-Catenaria**

---

*Presentada por:* D. Santiago Gregori Verdú

*Dirigida por:* Dr. D. Fco. Javier Fuenmayor Fernández  
Dr. D. Manuel Tur Valiente

Valencia, Julio, 2014



TRABAJO FIN DE MÁSTER

---

**Modelado no Lineal de Pantógrafo.  
Simulación Dinámica Pantógrafo-Catenaria**

---

para la obtención del título de  
Máster en Ingeniería Mecánica y de Materiales

presentado por

**D. Santiago Gregori Verdú**

en el

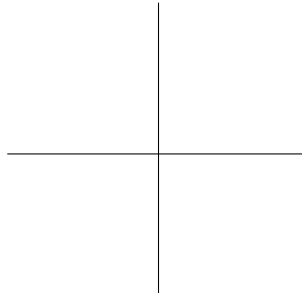
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales  
de la Universitat Politècnica de València

Dirigida por

**Dr. D. Fco. Javier Fuenmayor Fernández  
Dr. D. Manuel Tur Valiente**

Valencia, Julio, 2014

---







# Abstract

In this thesis, a rigid-bodies pantograph dynamic model is developed. After obtaining the motion equation system, it is linearized around a given position in order to validate the use of lumped masses models. A flexible-bodies model is also elaborated with the aid of the commercial software ANSYS®. In this model, the influence of the rod's flexibility in the dynamic behavior of the mechanism is taken into account.

These three models, the rigid-bodies, the linearized and the flexible-bodies model, are compared by means of temporal response and frequency response.

The interaction between pantograph and catenary is studied after the analysis of the pantograph model. The finite element method is used with absolute nodal coordinates to model the overhead collecting system. Then, a temporal integration algorithm is presented, which is able to deal with any model non-linearities.

Finally, some simulation results using the rigid-bodies model of pantograph are shown. The simulations evidence the effect of different non-linearities of the pantograph model in the contact force with the contact wire. Specifically,



the presence of friction in the vertical movement of the pan head and the effect of an unidirectional damper are discussed.



# Resumen

En este trabajo se desarrolla un modelo dinámico de pantógrafo de barras rígidas. Tras obtener las ecuaciones del movimiento del sistema, estas se linealizan en torno a una posición dada con el fin de poder validar el uso de modelos lineales de masas concentradas. También se elabora un modelo de barras flexibles con el software comercial ANSYS® para poder analizar la influencia de la flexibilidad de las barras en la dinámica del mecanismo.

Estos tres modelos, el no lineal de barras rígidas, el linealizado, y el de barras flexibles, son comparados a nivel de respuesta temporal y de respuesta en frecuencia.

Una vez analizado el modelo de pantógrafo, se pasa a la interacción entre este y la catenaria. Para modelar el sistema de cableado aéreo se utiliza el método de los elementos finitos en coordenadas nodales absolutas. A continuación, tras introducir el algoritmo de integración temporal que admite cualquier no linealidad, se muestran distintos resultados de simulaciones utilizando el modelo de pantógrafo no lineal de barras rígidas.

Con ellas se pone de manifiesto la influencia en la fuerza de contacto entre pantógrafo y catenaria de diferentes no linealidades del modelo de pantogra-



fo, aparte de la propia geometría del mismo. En concreto, la presencia de rozamiento en el movimiento vertical de la mesilla y el efecto de que el amortiguador sea unidireccional son discutidos.





# Resum

En aquest treball es desenvolupa un model dinàmic de pantògraf de barres rígides. Una vegada obtingudes les equacions del moviment del sistema, aquestes es linealitzen al voltant d'una posició qualsevol amb la finalitat de poder validar l'ús de models lineals de masses concentrades. També s'elabora un model de barres flexibles amb el software comercial ANSYS® per a poder analitzar la influència de la flexibilitat de les barres en la dinàmica del mecanisme.

Aquests tres models, el no lineal de barres rígides, el linealitzat, i el de barres flexibles, son comparats a nivell de resposta temporal i de resposta en freqüència.

Una vegada analitzat el model de pantògraf, es passa a la interacció entre aquest i la catenaria. Per a modelar el sistema de cablejat aeri s'utilitza el mètode dels elements finits amb coordenades nodals absolutes. A continuació, després d'introduir l'algoritme d'integració temporal que admet qualsevol no linealitat, es mostren diferents resultats de simulacions en les que s'ha emprat el model de pantògraf no lineal de barres rígides.

Amb aquestes simulacions es posa de manifest la influència en la força de contacte entre pantògraf i catenaria de diferents no linealitats del model de



pantògraf, abanda de la propia geometria del mecanisme. Concretament, es discuteix la presència de fregament en el moviment vertical del col·lector i l'efecte de que l'amortidor siga unidireccional.



# Agradecimientos

En primer lugar me gustaría agradecer a los directores de este trabajo D. Fco. Javier Fuenmayor Fernández y D. Manuel Tur Valiente, toda la dedicación y esfuerzo que han puesto en este proyecto, la disponibilidad mostrada en todo momento y su continua amabilidad.

Como no, a la gente de la sala de becarios del DIMM y por extensión al resto de los miembros del departamento, que hacen que el día a día sea mucho más llevadero. A Luca, Eva, Hossein, Enrique, Carlos, Ángel, Javier, a Camila por todas esas comidas juntos, a Onofre por esos consejos de Matlab de valor incalculable y a José Manuel por tener que aguantarme también en las clases del Máster. Muchas gracias a todos. Y por supuesto a ese informático todoterreno, que te alegra el día con su buen humor. Gracias Fede.

A esas chicas de secretaría y administración, que siempre te resuelven los problemas y te atienden con una enorme sonrisa. Por favor, seguid así que aún me queda mucho papeleo por hacer.

Ya por último, dedicar también unas palabras de agradecimiento a mis familiares, padres y tíos, así como a amigos, ya que aunque no estén directamente



relacionados con el trabajo, siempre ofrecen su apoyo en todo momento y te hacen olvidar los quebraderos de cabeza de la rutina diaria.

A todos vosotros, muchas gracias.

# Índice general

<b>Abstract</b>	<b>I</b>
<b>Resumen</b>	<b>III</b>
<b>Resum</b>	<b>V</b>
<b>Agradecimientos</b>	<b>VII</b>
<b>Contents</b>	<b>X</b>
<b>1 INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1 Objetivos del trabajo . . . . .	2
1.2 Motivación del trabajo . . . . .	3
1.3 Descripción general del pantógrafo y la catenaria . . . . .	4
1.4 Revisión bibliográfica . . . . .	8
<b>2 MODELOS DE PANTÓGRAFO</b>	<b>11</b>
2.1 Modelo de cuerpo rígido . . . . .	18
2.1.1 Modelo dinámico no lineal . . . . .	19
2.1.2 Modelo dinámico linealizado . . . . .	30
2.1.3 Frecuencias naturales y modos de vibración . . . . .	32
2.2 Modelo de barras deformables . . . . .	35
2.3 Comparación de resultados entre los distintos modelos . . . . .	38
2.3.1 Balance energético . . . . .	39



2.3.2	Respuesta temporal . . . . .	42
2.3.3	Respuesta en frecuencia . . . . .	49
<b>3</b>	<b>INTERACCIÓN PANTÓGRAFO-CATENARIA</b>	<b>61</b>
3.1	Modelo de la catenaria . . . . .	62
3.1.1	Elemento cable . . . . .	63
3.1.2	Elemento barra . . . . .	65
3.1.3	Problema estático y de configuración inicial . . . . .	66
3.2	Modelo de interacción . . . . .	68
3.3	Integración numérica no lineal . . . . .	70
3.3.1	Subida en rampa del pantógrafo . . . . .	72
3.3.2	Algoritmo de integración numérica . . . . .	74
3.3.3	Obtención de los vectores de fuerzas y sus derivadas . . . . .	79
3.4	Presentación de resultados de la interacción . . . . .	86
3.4.1	Efecto del rozamiento en la mesilla . . . . .	86
3.4.2	Efecto del amortiguador . . . . .	88
<b>4</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>93</b>
	<b>Bibliografía</b>	<b>95</b>
	<b>Anexos</b>	
<b>A</b>	<b>OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO</b>	<b>101</b>
<b>B</b>	<b>OBTENCIÓN DEL MODELO LINEALIZADO</b>	<b>119</b>
B.1	Matriz de masa . . . . .	119
B.2	Matriz de amortiguamiento . . . . .	125
B.3	Matriz de rigidez . . . . .	127



## Capítulo 1

# INTRODUCCIÓN

Conforme va aumentando la velocidad de los trenes comerciales, en un escenario mundial de elevados costes de la energía, la posibilidad de su captación eficiente por medio del pantógrafo adquiere una gran relevancia.

La línea aérea de contacto o catenaria ha sido el sistema seleccionado para las instalaciones de alta velocidad, debido a su capacidad de adaptarse a las elevadas exigencias de servicio y a los grandes voltajes requeridos. En contacto con la catenaria, un colector o pantógrafo unido a la parte superior del vehículo ferroviario se alimenta de flujo energético y pone en funcionamiento a los motores eléctricos de tracción.

Para el correcto funcionamiento de la línea, es condición imprescindible que la transmisión de corriente eléctrica se realice de manera ininterrumpida, y que a la misma vez, la fuerza de contacto entre el pantógrafo y la catenaria sea



lo menor posible, con el fin de que el desgaste de las partes en contacto sea reducido y uniforme.

No obstante, el cumplimiento simultáneo de estas restricciones es bastante complicado. Para que el desgaste sea mínimo sobre las partes interactuantes es necesario que la fuerza de contacto también sea mínima, pero las acciones dinámicas del pantógrafo pueden provocar que la deformación y oscilación en la catenaria sea de tal magnitud que se produzcan despegues, siendo por tanto discontinuo el contacto entre ambas partes.

Estas pérdidas de contacto provocan que el suministro de energía eléctrica sea interrumpido, limitando las velocidades máximas de operación. Además, estos despegues generan arcos eléctricos, que deterioran gravemente los elementos en contacto, impactos o enganches que pueden producir daños de coste muy elevado. Es decir, las necesidades de elevar la velocidad de circulación y las prestaciones de servicio se verán influenciadas por estos comportamientos, siendo indispensable disponer de medios que permitan simular y predecir el funcionamiento del sistema, así como garantizar el correcto guiado y un contacto permanente, de modo que el proceso de alimentación eléctrica se produzca de forma continua.

Normas europeas para la validación de los procedimientos de simulación [1] y proyectos europeos como EUROPAC, ponen de manifiesto la importancia actual de la problemática de la interacción entre pantógrafo y catenaria.

## 1.1 Objetivos del trabajo

El objetivo principal de el presente trabajo es la obtención de un modelo dinámico no lineal de barras rígidas del pantógrafo DSA-380, así como su





incorporación en el software PACDIN, desarrollado por el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Politécnica de Valencia, para estudiar la interacción de dicho modelo con la catenaria. Para alcanzar este objetivo principal, se plantean una serie de objetivos parciales:

- Obtención y validación de las ecuaciones del movimiento del modelo de pantógrafo de barras rígidas.
- Linealización de dicho modelo y comparación con el modelo no lineal.
- Elaboración de un modelo de barras flexibles en el software comercial ANSYS® y análisis de la influencia de la flexibilidad de las barras en el movimiento así como en las frecuencias naturales y modos de vibración del sistema.
- Programación de una rutina de integración temporal que admita modelos de pantógrafos no lineales, que incluya la posibilidad de la interacción simultánea de varios pantógrafos con la catenaria y que sea capaz de incorporar también modelos de masas concentradas.
- Análisis de la influencia de distintas no linealidades incorporadas en el modelo de pantógrafo, en la interacción con la catenaria.

## 1.2 Motivación del trabajo

La elaboración de este Trabajo Fin de Máster viene motivada por diferentes razones, siendo las más relevantes las que se detallan a continuación:

- Ampliación, refuerzo y aplicación de múltiples conocimientos en el campo de la ingeniería mecánica (método de los elementos finitos, vibraciones y propagación de ondas, dinámica de cuerpo rígido y elástico...).



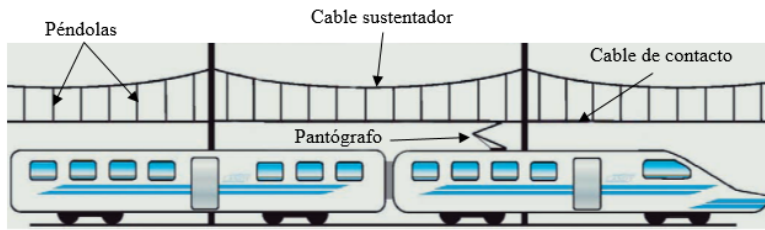
- Participación en un proyecto de investigación con clara aplicación en el sector ferroviario.
- Implementación de una herramienta de simulación mediante el código de programación MATLAB®.
- Adquisición de los conocimientos básicos para iniciar una Tesis Doctoral sobre el tema.
- Obtención del título de Máster en Ingeniería Mecánica y de Materiales.

### 1.3 Descripción general del pantógrafo y la catenaria

La catenaria o también denominada Línea Aérea de Contacto (LAC), es el sistema de cableado que permite alimentar con energía eléctrica a las locomotoras y a las unidades de tren equipadas con motores eléctricos.

Para trenes de alta velocidad, el tipo de catenaria utilizado es la aérea flexible sometida a un voltaje de 20kV. Esta consiste en dos cables principales, de los cuales el superior tiene aproximadamente la forma de la curva conocida como catenaria y se llama sustentador o portador. Mediante una serie de elementos colgantes (péndolas) sostiene otro cable, el llamado hilo de contacto, de modo que este permanezca dentro de un plano paralelo al que forman las vías. A veces hay un tercer cable intermedio para mejorar el trazado del de contacto, al que se suele llamar 'falso sustentador'. En la Figura 1.1 se pueden ver todos estos elementos de forma esquemática.

Además del cableado, el sistema catenaria también está compuesto por diversos elementos rígidos estructurales, como son los postes, las ménsulas y los brazos de registro, que tienen como finalidad sostener la LAC a una altura determinada, y producir un trazado en forma de zigzag (escalonamiento) del



**Figura 1.1:** Esquema simplificado de la interacción pantógrafo-catenaria.

cable de contacto para que el desgaste sea uniforme a lo largo de la longitud de los frotadores del pantógrafo. Todo el sistema de cables que forma la catenaria ferroviaria se encuentra tensionado mediante un mecanismo de compensación mecánica, a base de poleas y masas, de modo que se puede controlar la flecha, producida por su propio peso o por dilataciones térmicas, de los cables de contacto y sustentador. En la Figura 1.2 se puede observar una imagen de una catenaria tipo AVE.

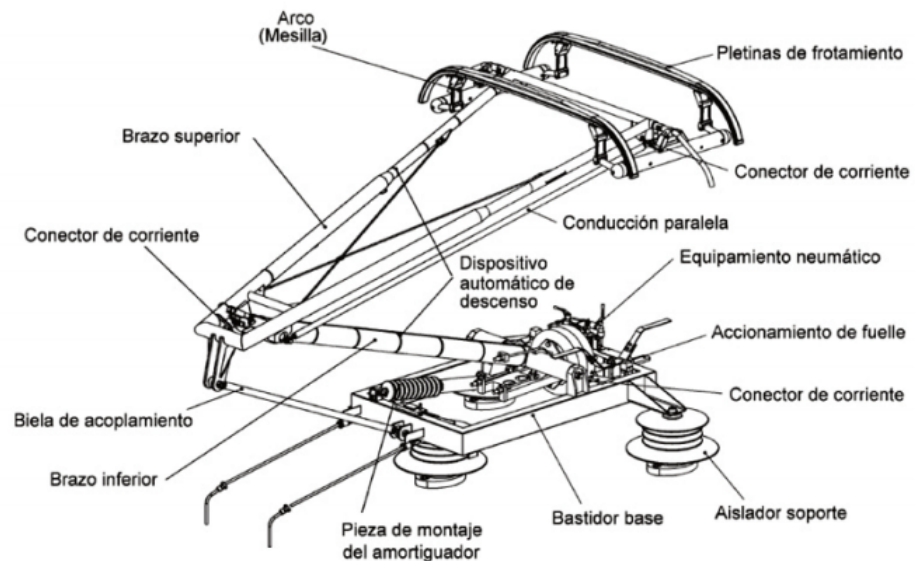


**Figura 1.2:** Imagen de una catenaria tipo AVE.

El mecanismo situado en la parte superior de la unidad tractora y que sirve para transmitir la energía eléctrica desde la LAC hasta el interior del vehículo

ferroviario se llama pantógrafo (Véase Figura 1.1). Este nombre es debido a la similitud existente entre este mecanismo en forma de rombo con el propio pantógrafo de dibujo.

Actualmente, para los trenes de alta velocidad se utilizan los llamados semi-pantógrafos, a los que se les ha eliminado una de las dos mitades del diseño del mecanismo original. En la Figura 1.3 se muestra un esquema de un pantógrafo en el que se ilustran todos los elementos principales que lo forman.

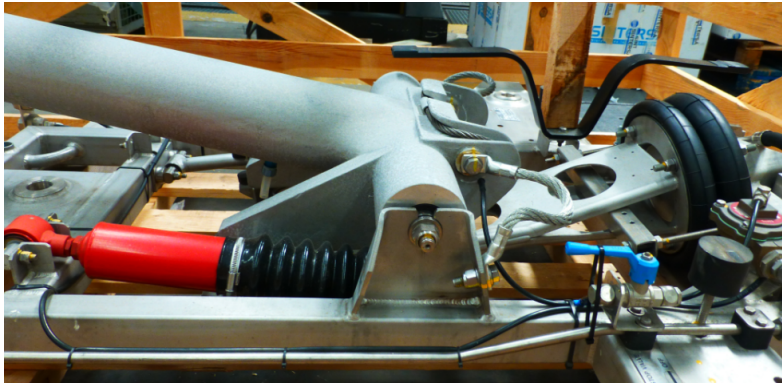


**Figura 1.3:** Esquema de un pantógrafo para trenes de alta velocidad.

Se pueden distinguir tres subsistemas principales en el pantógrafo. El primero es el mecanismo de accionamiento, que puede ser de tipo mecánico pero generalmente es neumático como el que se puede apreciar en la Figura 1.4. Su objetivo es levantar el mecanismo para que la parte superior esté en contacto con el cable de la catenaria y por tanto exista suministro energético. Usualmente, se dispone de un circuito de aire comprimido que termina en una balona. Esta al hincharse mueve un soporte metálico que a su vez tira de los



extremos un cable unido a él. Este cable está enrollado alrededor de la articulación del brazo inferior con un perfil de leva determinado. Por lo tanto, al tirar de dichos cables se ejerce un par sobre el brazo inferior del pantógrafo que hace que todo el mecanismo se levante.



**Figura 1.4:** *Detalle del sistema neumático de accionamiento y del amortiguador.*

El segundo es el cuerpo de barras principal, formado por barras articuladas en sus extremos, la mayor parte de ellas metálicas, que se pliegan en forma de tijera. Una de sus finalidades es mantener a la mesilla en posición horizontal en todo momento. El último bloque a destacar es el colector o mesilla, que es la parte superior del pantógrafo donde se produce la interacción con el cable de contacto de la catenaria. En la mesilla se sitúan las pletinas de frotamiento que suelen ser de grafito para el caso que se transmita corriente alterna.

Además de las barras, también aparecen resortes entre la mesilla y el cuerpo de barras del mecanismo, y elementos de suspensión, tales como un amortiguador, generalmente situado entre el bastidor base y la articulación del brazo inferior.



## 1.4 Revisión bibliográfica

El estudio de la interacción dinámica pantógrafo-catenaria es un tema tratado ampliamente en la bibliografía durante las dos últimas décadas, lo cual reafirma que se trata de un problema de elevado interés actual.

A la hora de abordar el modelado de los diferentes elementos que intervienen en la interacción, como primera aproximación, para el pantógrafo se utiliza un modelo lineal de masas concentradas como en [2], o en [3]. Con este tipo de modelos básicos el movimiento del pantógrafo queda restringido en la dirección vertical. Otros modelos más complejos como los presentados en [4] y [5] se basan en una formulación multicuerpo en los que se considera la presencia de los diferentes componentes rígidos que forman el pantógrafo y se tiene en cuenta las distintas no linealidades que presentan tanto la cinemática, el amortiguador, u otros componentes [6].

Con el fin de incluir la flexibilidad de las barras que componen el mecanismo del pantógrafo, se suele optar por modelos multicuerpo flexibles, normalmente híbridos (se considera flexibilidad en tan solo algún cuerpo), como los presentados en [7] y [8]. También se pueden encontrar algunos modelos de elementos finitos para tener en cuenta esta flexibilidad en ciertas partes del mecanismo, como el caso de los colectores en [9].

Para la línea aérea de contacto, la modelización llevada a cabo por la casi totalidad de los autores se basa en el métodos de los elementos finitos (MEF). Se consideran modelos de catenaria tanto bidimensionales como tridimensionales, en los que se tiene en cuenta con mayor o menor grado de precisión la presencia de los principales elementos que constituyen el cableado aéreo.



En [10] y en [11] se aborda el problema del modelado de la catenaria utilizando una formulación en coordenadas nodales absolutas, lo cual conduce a una matriz de masa del sistema constante. En cambio, en [12] se propone un modelo de catenaria basado en elementos barra tipo Euler-Bernouilli.

El tratamiento de las péndolas es algo peculiar ya que cambian frecuentemente de estar traccionadas a estar comprimidas, y viceversa, ante el paso del pantógrafo por debajo de ellas. Esta unilateralidad es tratada en la literatura desde distintos enfoques. En [13] se ajusta la curva experimental de rigidez a una spline cúbica y se mantiene esta fuerza no lineal aunque la péndola entre a compresión. Hay otros enfoques que consideran una rigidez constante para el caso de estar traccionada y un valor nulo de esta en el supuesto de entrar a compresión.

Otro tema importante a resaltar es el tratamiento del modelo de interacción entre pantógrafo-catenaria. Este ha de ser capaz de detectar pérdidas de contacto, y de acoplar entre sí los modelos de catenaria y de pantógrafo. El método más usado en la bibliografía es el de penalización (o *penalty*) debido a su simple implementación y buenos resultados como se muestra en [14] y en [2]. Otros modelos de contacto también utilizados son el empleo de uniones deslizantes [11], el establecimiento de ecuaciones de restricción o la implementación de modelos de tipo Hertziano como el propuesto en [4].

En [15] se presenta una amplia comparación de la interacción entre distintos modelos de pantógrafo y de catenaria, así como en [16], donde se plantea un estado del arte del año 1997, de la compleja dinámica de la catenaria y el pantógrafo, de su simulación y tratamiento numérico, y de la adquisición y validación de datos experimentales.





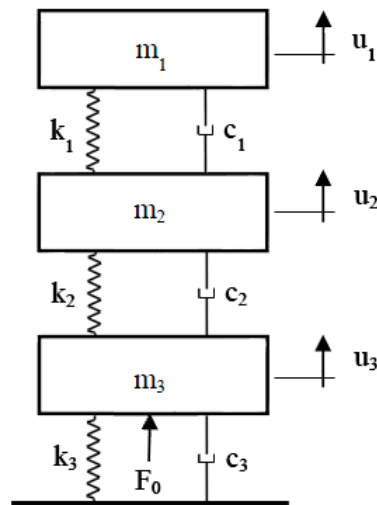


## Capítulo 2

# MODELOS DE PANTÓGRAFO

En el presente trabajo, dentro de los múltiples diseños existentes en el mercado, se va a tratar tan solo con el modelo de pantógrafo DSA-380 del fabricante Stemmann-Technik.

Como ya se ha comentado en la revisión bibliográfica, son distintos los modelos matemáticos de pantógrafo que presentan los diferentes autores. No obstante, el modelo más simple y no por ello menos utilizado, es un modelo lineal de masas concentradas. En este modelo básico (Figura 2.1) tan solo se tiene en cuenta el movimiento en dirección vertical del mecanismo. En el caso de que se quiera representar otros grados de libertad, como la presencia de dos puntos de contacto o el giro de los colectores, en [17] se proponen estos modelos de masas ampliados.



**Figura 2.1:** Modelo de pantógrafo de masas concentradas de 3 gdl.

En el este trabajo se va a desarrollar un modelo dinámico de pantógrafo de barras rígidas, que va a ser programado en MATLAB® con el fin de simular su comportamiento dinámico. En general, cuando se trata de abordar el modelado de un sistema mecánico es necesario estudiar la posibilidad de introducir ciertas hipótesis simplificadoras que reduzcan la complejidad de obtención del modelo matemático sin que los resultados que se obtengan del mismo se alejen significativamente de la realidad.

En este caso se han considerado tres hipótesis que simplifican la formulación:

1. **Movimiento en el plano:** Se restringe el movimiento del pantógrafo en el plano, con lo cual, cualquier punto del mismo queda definido completamente con sus dos coordenadas cartesianas de posición  $x$ ,  $y$ . Esta hipótesis es perfectamente asumible debido tanto a la simetría en la geometría del mecanismo (plano XY) como a la dirección de las cargas a las que suele estar sometido (verticales). En la bibliografía se observa



que los modos asociados a movimientos fuera de dicho plano [7], tienen frecuencias naturales bastante superiores al rango de 0 a 20 Hz, que es el contemplado en la norma de validación de la simulación [1].

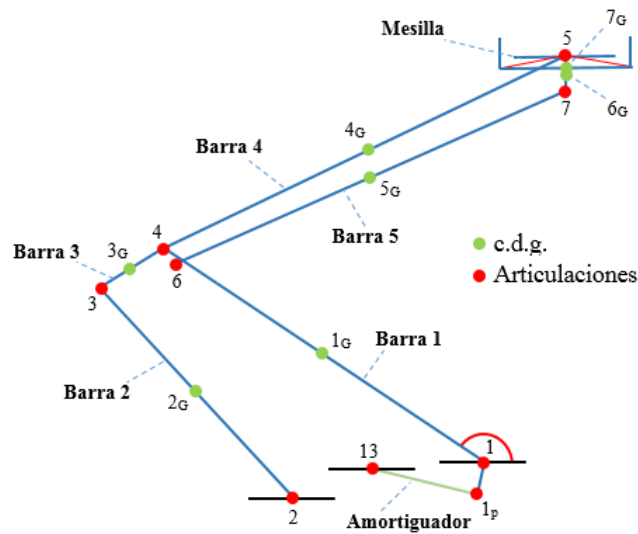
2. **Sólidos rígidos:** Se asume un modelo de barras rígidas, en el que dos puntos cualquiera del mismo sólido mantienen constante su distancia entre si.
3. **Uniones ideales:** El mecanismo se considera un sistema ideal, es decir, que no existe fricción ni holguras en los pares de rotación entre barras.

Con todas estas hipótesis, el mecanismo queda tal y como muestra la Figura 2.2. En ella se muestra el mecanismo simplificado en un esquema de barras. Se puede observar que consta de siete barras de diferente longitud y masa, unidas entre si mediante pares cinemáticos de rotación. Los puntos 1, 2 y 13 son puntos fijos, es decir, es en estos puntos donde el pantógrafo se une al bastidor situado en la parte superior del vehículo ferroviario. Además, el punto 2 se ha escogido como el origen del sistema de coordenadas cartesiano. Cabe destacar que el punto 4 representa una unión rígida entre las barras 3 y 4 ya que estas en realidad constituyen una única barra del pantógrafo real. Así mismo, los puntos 6 y  $1_p$  pertenecen a la barra 1.

Aparte de los sólidos rígidos, en el mecanismo también aparecen otros elementos. En la articulación entre la barra 1 y la barra fija, hay un resorte torsional con el que se trata de representar la rigidez que ofrece al giro el sistema de accionamiento encargado de levantar el pantógrafo. Entre los puntos 13 y  $1_p$  se encuentra ubicado un amortiguador que se puede observar también en la Figura 1.4.

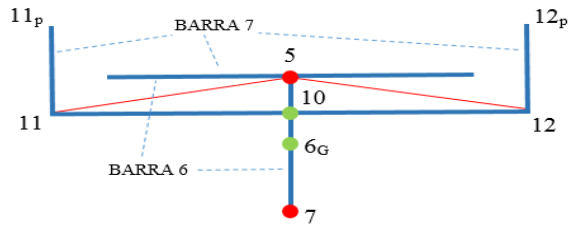
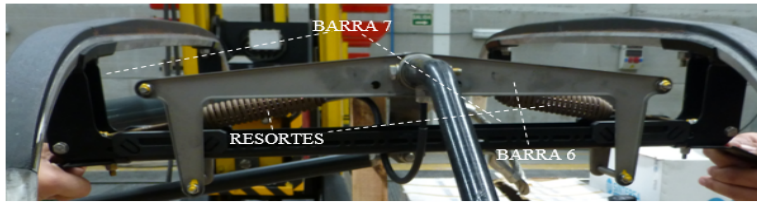
Por otro lado, en la Figura 2.3 se puede observar con mayor detalle la mesilla del pantógrafo. Se presenta una imagen real de la misma en la parte superior de la figura y el esquema de barras en la parte inferior. La mesilla queda

formada por las barras 6 y 7 del modelo, y está unida al cuerpo del pantógrafo mediante dos resortes lineales que unen el punto 5 con el 11 y el 12 respectivamente, representados con una línea de color rojo en la figura. Es importante diferenciar el punto 10, que es el punto central de la barra 7, del punto  $7_G$ , centro de gravedad de la misma barra, ya que aunque en la imagen son coincidentes no tendrían por qué estar en la misma posición. Los puntos  $11_p$  y  $12_p$  corresponden a los frotadores de la mesilla en los que se produce el contacto con la catenaria, aunque por simplicidad, en el presente trabajo se va a considerar el punto 10 como único punto de contacto.



**Figura 2.2:** Descripción de barras, articulaciones y c.d.g.

Uno de los aspectos más importantes a la hora de abordar la modelización de un mecanismo es la elección de las coordenadas que se van a utilizar. En este caso se ha elegido un conjunto de coordenadas independientes, con lo cual la dimensión del problema es la mínima. Esto es posible en primer lugar debido a la simplicidad del mecanismo, y en segundo lugar a que se puede garantizar, debido al rango de movimiento que tendrá el sistema, que no aparecerá nin-



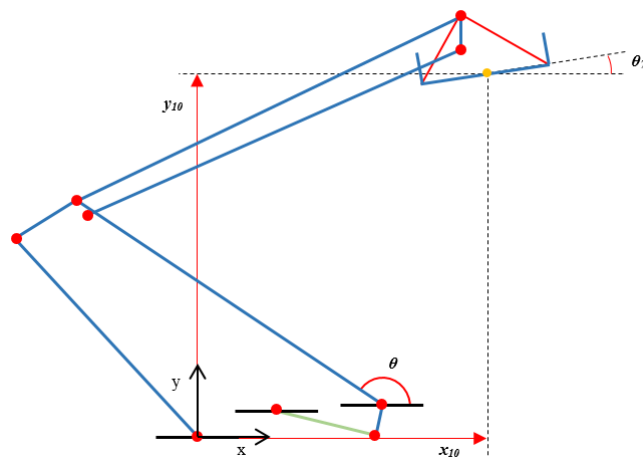
**Figura 2.3:** Detalle de la mesilla del pantógrafo.

guna posición singular en la que no se pueda obtener solución. Este conjunto de coordenadas independientes se puede ver representado en el modelo en la Figura 2.4 siendo:

$$\mathbf{q} = \{\theta, x_{10}, y_{10}, \theta_7\}^T \quad (2.1)$$

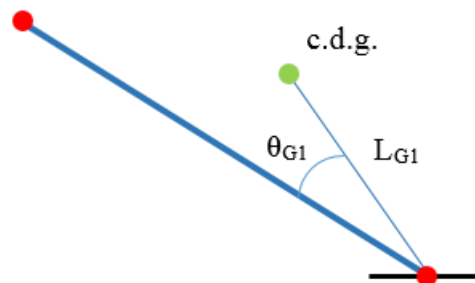
Con lo cual, el modelo resultante presenta cuatro grados de libertad. La variable  $\theta$  representa el ángulo girado por la barra 1 con respecto a la horizontal. Las coordenadas  $x_{10}$  e  $y_{10}$  definen la posición en el plano del punto 10, mientras que el ángulo  $\theta_7$  corresponde al giro de la barra 7, también respecto a la horizontal.

Se ha tenido en cuenta la posibilidad de que el centro de gravedad (c.d.g) de las barras no esté situado en el centro geométrico de las mismas, ya que estas en realidad tienen una sección que no es constante a lo largo de su longitud. Para ello los c.d.g de cada barra están referenciados a la misma por medio



**Figura 2.4:** *Coordenadas independientes del modelo.*

una longitud y un ángulo respecto del extremo inferior de cada una de ellas, a excepción de la barra 7, en la que el punto tomado como referencia para esos parámetros es el punto central de la misma, es decir el punto 10. Esta excepción para la barra 7 es debida a que las coordenadas del punto 10 son variables independientes del problema, y por tanto, se ha considerado más oportuno por sencillez referenciar el c.d.g de la barra respecto a este punto. En el caso de la barra 1 pueden observarse esos parámetros en la Figura 2.5.

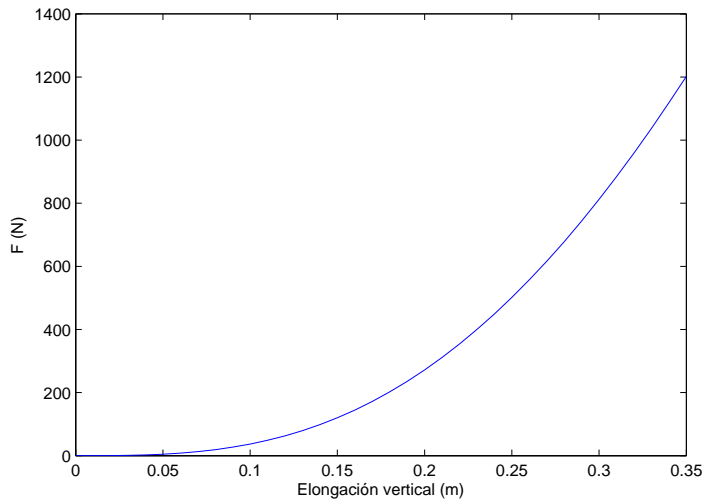


**Figura 2.5:** *Posicionamiento del c.d.g. de las barras.*



Este modelo, a pesar de las diferentes simplificaciones realizadas, presenta distintas no linealidades. Una de ellas es la propia geometría, ya que para determinar la posición de cualquier punto en función de las coordenadas independientes se utilizan relaciones no lineales al tratarse de lazos cerrados de barras.

Otra fuente de no linealidad en el sistema son los resortes que unen la mesilla con el cuerpo del pantógrafo. En concreto, estos resortes presentan una rigidez en dirección vertical que varía en función de la diferencia de la cota  $y$  de los puntos 5 y 10. En la Figura 2.6 se observa la relación entre la fuerza vertical aplicada al punto central de la mesilla con la variación de su cota  $y$ , o lo que es lo mismo, la elongación vertical de los muelles. Esta gráfica en concreto se ha obtenido manteniendo el punto 5 fijo.



**Figura 2.6:** Fuerza en dirección vertical de los resortes.

Más posibles fuentes de no linealidad son el propio amortiguador, ya que la fuerza que este ejerce puede no ser lineal con la velocidad o también puede actuar tan sólo en una dirección del movimiento y no en la otra; el sistema de



accionamiento, cuya rigidez se modela constante mediante un resorte a torsión, cuando en realidad no lo es; así como la presencia de rozamientos entre ciertas partes del mecanismo.

Antes de empezar con la formulación del modelo matemático, es conveniente definir la nomenclatura que se va a utilizar a lo largo del documento para describir los diferentes parámetros del modelo. La longitud de las barras se denominará  $L_i$ , la masa  $m_i$  y la inercia  $I_i$ , donde el subíndice  $i$  hace referencia al número de la barra en cuestión. En cuanto al posicionamiento del centro de gravedad, la longitud respecto de su punto de referencia será  $L_{Gi}$  y el ángulo respecto a la barra se llamará  $\theta_{Gi}$ . La rigidez del resorte torsional vendrá representada por  $k_r$  y la de los resortes lineales por  $k_l$ . El coeficiente de amortiguamiento del amortiguador será  $c$ .  $L_{1p}$  representará la longitud del brazo de palanca que une el extremo del amortiguador con el punto 1 y  $\theta_{1p}$  el ángulo entre la barra 1 y dicha palanca. La distancia entre el punto 1 y el punto 6 se llamará  $r$ , mientras que el ángulo entre la barra 1 y el segmento que une estos puntos será  $\theta_r$ .

## 2.1 Modelo de cuerpo rígido

En el presente apartado se presenta un modelo dinámico del pantógrafo con la hipótesis de sólido rígido. En principio se aborda el sistema con todas las no linealidades geométricas que presenta, para posteriormente linealizar dicho modelo respecto de una posición dada. Con ello se pretende verificar si la utilización de un modelo lineal de parámetros concentrados para la simulación del movimiento del pantógrafo es lo suficientemente precisa o realista, ya que con su empleo, además de simplificar notablemente el modelo en sí, el coste computacional para el cálculo de su respuesta se ve claramente reducido.





### 2.1.1 Modelo dinámico no lineal

Como se ha comentado anteriormente, las coordenadas elegidas para modelizar el mecanismo son el conjunto de coordenadas generalizadas independientes descrito en (2.1). Para determinar la posición de las otras barras, se utilizan una serie de coordenadas dependientes que definen los ángulos, respecto de la horizontal, de las barras 2 a 6 respectivamente.

$$\mathbf{q}_d = \{\theta_2, \theta_3, \theta_4, \theta_5, \theta_6\}^T \quad (2.2)$$

Estas coordenadas están ligadas tan solo con la variable independiente  $\theta$  por medio de unas relaciones geométricas que se obtienen a partir de las ecuaciones que definen los dos lazos cerrados de barras que aparecen en el mecanismo. En concreto, el lazo inferior está formado por las barras fija-1-2-3 y el lazo superior por las barras 1-4-5-6. Estas relaciones no lineales se plantean de forma general como:

$$\mathbf{r}_d(\theta) = \mathbf{0} \quad (2.3)$$

Si estas ecuaciones se derivan una y dos veces respecto de  $\theta$ , y se resuelven los sistemas de ecuaciones lineales que resultan, se obtienen las derivadas primeras y segundas de las coordenadas dependientes con respecto de la coordenada independiente  $\theta$ . Esto es:



$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{r}_d}{d\theta} = \mathbf{0} &\xrightarrow{\text{sol}} \frac{d\mathbf{q}_d}{d\theta} \\ \frac{d^2\mathbf{r}_d}{d\theta^2} = \mathbf{0} &\xrightarrow{\text{sol}} \frac{d^2\mathbf{q}_d}{d\theta^2}\end{aligned}\quad (2.4)$$

Con estas derivadas anteriores ya se puede plantear las ecuaciones de velocidad y aceleración, quedando con ellas el problema cinemático completamente resuelto.

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{q}}_d &= \frac{d\mathbf{q}_d}{d\theta} \dot{\theta} \\ \ddot{\mathbf{q}}_d &= \frac{d^2\mathbf{q}_d}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{d\mathbf{q}_d}{d\theta} \ddot{\theta}\end{aligned}\quad (2.5)$$

Una vez resuelta la cinemática del mecanismo ya se está en condiciones de empezar a plantear el problema dinámico. En este caso se ha optado para la modelización dinámica aplicar directamente las ecuaciones de Lagrange. Se han descartado otros procedimientos como por ejemplo una formulación multicuerpo ya que este trabajo se centra en un único mecanismo y un enfoque multicuerpo resulta más apropiado en tareas más generales y para códigos en los que se pretenda modificar *a posteriori* el mecanismo a estudiar, por su mayor facilidad para quitar y añadir elementos. Además, con el enfoque utilizado se consigue una mayor eficacia en la integración numérica cuando se resuelva el problema de interacción entre el pantógrafo y la catenaria ya que en el sistema de ecuaciones final a integrar no aparece ninguna ecuación algebraica.



En el sistema actúan fuerzas que provienen de un potencial (las elásticas y las gravitatorias) y fuerzas no conservativas (las disipativas y las externas directamente aplicadas). Las ecuaciones de Lagrange se pueden escribir de la forma:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\mathbf{q}}} - \frac{\partial L}{\partial \mathbf{q}} = \mathbf{Q} \quad (2.6)$$

donde la lagrangiana es  $L = T - V$ , en la que  $T$  es la energía cinética del mecanismo y  $V$  es la energía potencial, y  $\mathbf{Q}$  es el vector de fuerzas generalizadas.

En primer lugar se va a obtener la expresión de la energía cinética del sistema en función de las coordenadas generalizadas, como el sumatorio de las energías cinéticas de cada uno de los sólidos que conforman el modelo. Como no hay dependencia explícita del tiempo en la definición de las coordenadas generalizadas, ya que el sistema de coordenadas es fijo y las restricciones holónomas, la expresión de la energía cinética es cuadrática en las  $\dot{\mathbf{q}}$ :

$$T = \frac{1}{2} \left[ \sum_{i=1}^n m_i v_{Gi}^2 + \sum_{i=1}^n I_i w_i^2 \right] = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}(\mathbf{q}) \dot{\mathbf{q}} \quad (2.7)$$

en donde  $n$  es el número de barras,  $v_{Gi}$  son las velocidades de los centros de gravedad y  $w_i$  las velocidades angulares de cada barra. A la matriz  $\mathbf{J}$  se la denomina matriz de inercia generalizada del sistema. Se trata de una matriz simétrica que depende exclusivamente de las coordenadas independientes del mecanismo, y además como la energía cinética por definición ha de ser positiva, esta matriz es definida positiva.

Por otro lado, y como ya se ha comentado en apartados previos, en el mecanismo objeto de estudio aparecen varios resortes y es necesario modelar las



fuerzas gravitatorias que contribuyen a la energía potencial del sistema. Esta energía puede expresarse del siguiente modo:

$$V = \frac{1}{2} \left( k_r (\theta - \theta_{r0})^2 + k_l \left( (l_1 - l_{10})^2 + (l_2 - l_{20})^2 \right) \right) + \sum_{i=1}^n g m_i y_{Gi} \quad (2.8)$$

donde  $\theta_{r0}$  es el ángulo en el cual el resorte angular no ejerce ningún par,  $l_{10}$  y  $l_{20}$  son las longitudes en las que los resortes lineales, que unen la mesilla con el cuerpo del pantógrafo, no ejercen ninguna fuerza;  $l_1$  y  $l_2$  son las longitudes de dichos resortes, e  $y_{Gi}$  son las cotas verticales de los centros de gravedad de las distintas barras del mecanismo. Cabe mencionar que tanto  $l_1$ ,  $l_2$  como  $y_i$  son funciones no lineales de  $\mathbf{q}$ .

Ya por último, falta por obtener el vector de fuerzas generalizadas en el que se incluirán tanto las acciones directamente aplicadas al mecanismo (en este caso se aplicará una fuerza vertical sobre el punto 10 que simula el contacto con la catenaria y un par en la barra 1 para tener en cuenta la contribución del sistema de accionamiento) así como la fuerza disipativa que ejerce el amortiguador. En concreto, aplicando el principio de los trabajos virtuales puede obtenerse la siguiente relación:

$$\delta W = \sum Q_j \delta q_j = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} = 0 \quad (2.9)$$

en la que  $\mathbf{Q}$  es el vector de fuerzas generalizadas, que puede depender tanto de las coordenadas generalizadas como del tiempo. En el Anexo A se explica con todo detalle la particularización de estas ecuaciones generales al mecanismo del pantógrafo objeto de estudio.



Una vez obtenida la energía cinética, la energía potencial y el vector de fuerzas generalizadas, se está en condición de aplicar la ecuación de Lagrange (2.6) para así obtener la ecuación del movimiento del mecanismo. Dicha ecuación se trata de una ecuación diferencial ordinaria de segundo orden no lineal, y en su forma más general puede escribirse como:

$$\mathbf{J}(\mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} = f(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) \quad (2.10)$$

En otras palabras, esta ecuación representa un equilibrio dinámico en el que se igualan las fuerzas de inercia (término de la izquierda) con todas las demás fuerzas que aparecen durante el movimiento del sistema, como es el caso de las fuerzas gravitatorias, las elásticas, las disipativas, las centrífugas o de coriolis y las directamente aplicadas sobre el mecanismo.

Para resolver la ecuación diferencial anterior se necesitan dos condiciones iniciales, en concreto la posición y la velocidad  $\mathbf{q}_0$  y  $\dot{\mathbf{q}}_0$  del mecanismo en el instante inicial serán conocidas. Se va a suponer que el mecanismo parte del reposo, por lo tanto  $\dot{\mathbf{q}}_0 = \mathbf{0}$ . En cambio, para obtener la posición de equilibrio estático inicial se tiene que resolver el problema:

$$f(\mathbf{0}, \mathbf{q}_0, 0) = \mathbf{0} \quad (2.11)$$

Se trata de un sistema de ecuaciones algebraicas no lineales, por lo cual debe ser resuelto por un método iterativo como por ejemplo el de *Newton-Raphson*. A continuación se explica con detalle la obtención del equilibrio inicial ya que en este mecanismo presenta varias peculiaridades.

Controlando la presión suministrada a la balona de accionamiento se puede conseguir una determinada fuerza estática de contacto con el cable de la catenaria. Así pues, si  $F_0$  es la fuerza vertical aplicada al punto 10 que simula esta fuerza de contacto y  $h_0$  es la altura de los frotadores a la que se quiere que el mecanismo esté en equilibrio, estos dos parámetros van a suponer dos condiciones impuestas para resolver (2.11).

Debido a la morfología del mecanismo, esta ecuación se resolverá en dos pasos, ya que las variables que definen la posición de la mesilla están totalmente desacopladas de la variable  $\theta$  con la que queda definida la posición del punto 5. En primer lugar, se plantea el equilibrio estático de la mesilla aislada del resto del mecanismo para posteriormente resolver el equilibrio del cuerpo del pantógrafo.

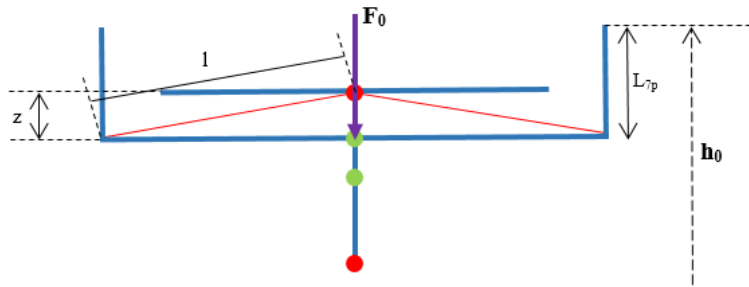


Figura 2.7: Equilibrio de la mesilla.

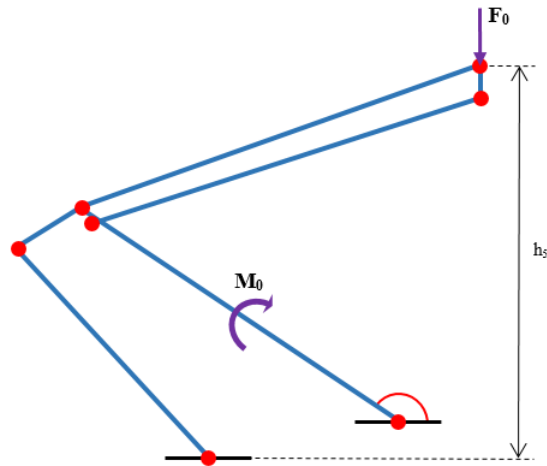
Como se observa en la Figura 2.7, a partir de una fuerza de contacto dada, se obtiene el descenso  $z$  de la mesilla. Para ello se resuelve iterativamente con el algoritmo de *Newton-Raphson* la siguiente ecuación que representa el equilibrio estático de este subsistema:

$$2 k_l (l - l_0) \frac{z}{l} - g m_7 - F_0 = 0 \quad (2.12)$$



donde  $l_0$  es la longitud en la que los resortes no ejercen fuerza y  $l = \sqrt{z^2 + (\frac{L_7}{2})^2}$  es la longitud de dichos resortes.

Una vez conocido el descenso de la barra 7 debido a  $F_0$  y a la gravedad, junto con la altura  $h_0$  a la que queremos que el pantógrafo se encuentre en equilibrio, ya se puede conocer la altura  $h_5$  a la que se encontrará el punto 5 en tal equilibrio, ya que  $h_5 = h_0 - L_{7p} + z$ .



**Figura 2.8:** *Equilibrio del cuerpo del pantógrafo.*

El segundo paso es obtener el valor del ángulo  $\theta$  para que el punto 5 se encuentre a la altura  $h_5$ . Este valor se obtiene de la resolución, también de forma iterativa, de la siguiente ecuación:

$$y_1 + L_1 \sin(\theta) + L_4 \sin(\theta_4) - h_5 = 0 \quad (2.13)$$



Conocida ya esta posición inicial del pantógrafo  $\mathbf{q}_0$ , se puede calcular por medio de (2.3) el valor inicial de las variables dependientes  $\mathbf{q}_{d0}$  para tener así perfectamente caracterizado la posición inicial del mecanismo.

No obstante, esta posición no es la de equilibrio. Hay que dar un paso más planteando el equilibrio estático del cuerpo del pantógrafo para determinar el par  $M_0$  que debe aportar la balona a la barra 1. Esto se puede ver claramente en la Figura 2.8.

Por lo tanto la obtención de este momento  $M_0$  pasa por resolver la ecuación que define el equilibrio estático del sistema mostrado en la Figura 2.8, particularizada en la posición ya calculada  $\mathbf{q}_0$ . Dicha ecuación a resolver es:

$$M_0 = \frac{dV}{d\theta} + (m_7 + F_0) \left( L_1 \cos(\theta) + L_4 \frac{d\theta_4}{d\theta} \cos(\theta_4) \right) \quad (2.14)$$

en la cual  $V$  es la energía potencial del cuerpo del pantógrafo mostrado en la Figura 2.8 y la  $\frac{d\theta_4}{d\theta}$  se definió en (2.4).

Por lo tanto, el problema de valores iniciales queda totalmente definido con la ecuación diferencial del movimiento del sistema y el conocimiento de la posición y velocidad iniciales. Para resolver este problema se puede utilizar diferentes integradores como por ejemplo *Runge-Kutta* o *Newmark*. Los detalles del algoritmo de integración utilizado para obtener la respuesta temporal de la interacción pantógrafo-catenaria se detallan en el apartado 3.3.2.

### Restricción del giro de la mesilla

En un principio, no es de esperar que la mesilla gire ante una carga vertical aplicada sobre el punto 10 del mecanismo. No obstante, en algunos análisis







$\theta_7$  y sus derivadas sean nulas en todo instante, o imponer que el movimiento horizontal del punto 10 sea el mismo que el del punto 5 en esta dirección, es decir  $x_{10} = x_5$ , así como sus derivadas temporales.

Con estas restricciones adicionales se está rigidizando el sistema pero a la vez se hace posible obtener la función de respuesta en frecuencia (FRF) de receptancias para cualquier amplitud de carga harmónica.

### Adición de rozamiento en el modelo

Hasta este punto se ha considerado que no hay fricción entre los elementos que forman el pantógrafo, pero observando el mecanismo real es posible que el rozamiento en la mesilla sea influyente en la dinámica del sistema cuando esta se mueve en vertical. Para poder contemplar este efecto se va a añadir una fricción entre la barra 7 y la barra 6 del modelo.

La función que define el rozamiento seco de Coulomb es:

$$F_r = \begin{cases} f_r & \text{si } v_r > 0 \\ -f_r & \text{si } v_r < 0 \end{cases} \quad (2.15)$$

donde  $v_r$  es la velocidad relativa entre los dos cuerpos que rozan entre si. Como se puede ver, se trata de una función discontinua y por tanto no derivable, y esto resulta en un inconveniente para la resolución temporal con algoritmos implícitos. Por tanto se ha decidido suavizar esta función y aproximarla por medio de:

$$F_r = \frac{2}{\pi} \arctan \left( \frac{v_r}{k_t} \right) \quad (2.16)$$



en la que  $k_t$  es un parámetro de ajuste que a medida que tiende a cero esta función se aproxima más a la exacta. Hacer notar que con la ecuación (2.16) se tiene en cuenta una fricción unitaria que tiene que ser multiplicada por el valor de la fuerza que se quiera incluir. En la Figura 2.10 se observa la fuerza de rozamiento exacta y la ecuación derivable con la que se aproxima.

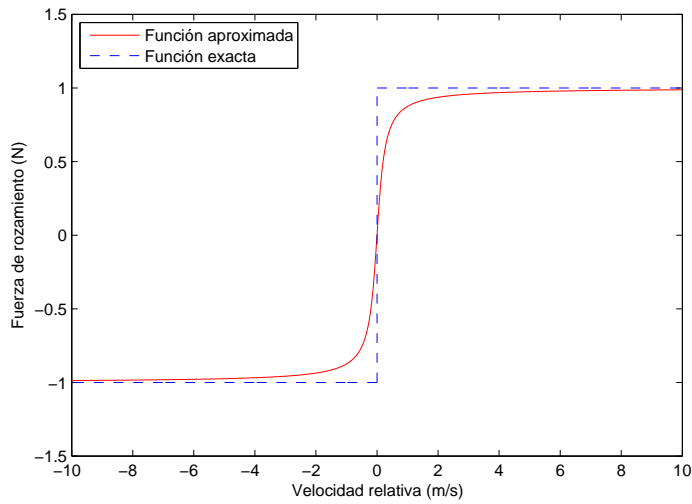


Figura 2.10: Aproximación del rozamiento para  $k_t = 0.2$ .

Concretando para el mecanismo en cuestión, la velocidad relativa considerada es la velocidad vertical de la mesilla respecto de la velocidad vertical del punto 5, es decir:

$$v_r = \dot{y}_{i0} - \dot{y}_5 \quad \text{con} \quad \dot{y}_5 = (L_1 \cos(\theta) + L_4 J \cos(\theta_4)) \dot{\theta} \quad (2.17)$$

donde  $J$  es la derivada de  $\theta_4$  con respecto de  $\theta$  definida en (A.4).



### 2.1.2 Modelo dinámico linealizado

A partir del modelo descrito en la sección anterior, se va a realizar una linealización del mismo con la finalidad de obtener un modelo mucho más simple de tratar computacionalmente. Al disponer de un modelo lineal, se pueden obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración del mecanismo como se detalla en el apartado 2.1.3.

#### Obtención de la ecuación linealizada del movimiento

El problema que se aborda en este apartado es la linealización de la ecuación (2.10). Al resolver dicha ecuación linealizada se podrá corroborar si el modelo linealizado es capaz de representar de forma correcta el comportamiento dinámico del sistema real.

Para linealizar el modelo se parte de una posición de referencia conocida  $\mathbf{q}_0$ , a partir de la cual se linealiza aplicando la hipótesis de pequeños desplazamientos. Por lo tanto, se tiene que:

$$\mathbf{q} = \mathbf{q}_0 + \Delta\mathbf{q} \quad (2.18)$$

y ahora las nuevas variables del problema pasan a ser esos pequeños movimientos  $\Delta\mathbf{q}$  en torno a una posición cualquiera de referencia.

En general, la linealización de una función  $f(x)$  cualquiera en torno a un valor  $x_0$  se puede llevar a cabo mediante su desarrollo en serie de Taylor despreciando términos de orden cuadrático y superiores tal y como se muestra en la ecuación (2.19).



$$f(x) = f(x_0) + \Delta x \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=x_0} + \frac{\Delta x^2}{2!} \left. \frac{d^2f(x)}{dx^2} \right|_{x=x_0} + \dots \quad (2.19)$$

En el caso que nos ocupa hay básicamente dos opciones para llevar a cabo el proceso de linealización. Una es la de linealizar las expresiones de la energía cinética, la energía potencial y las del vector de fuerzas generalizadas, para después aplicar la ecuación de Lagrange a estas expresiones ya lineales y obtener así el modelo dinámico lineal. En este caso habría que tener especial atención con la energía potencial gravitatoria ya que para su linealización se tienen que considerar hasta términos de segundo orden en su desarrollo en serie de Taylor, ya que al aplicar Lagrange y ser derivados, estos pasan a ser términos lineales.

La segunda opción es utilizar la expresión no lineal de la ecuación del movimiento obtenida anteriormente y linealizarla directamente. Cada una de estas dos estrategias tiene sus ventajas y sus inconvenientes a la hora de llevar a cabo el desarrollo analítico, y por razones de simplicidad se ha optado por la primera opción para el caso de la energía cinética y de las fuerzas disipativas, para con ello, obtener las matrices de masa y de amortiguamiento respectivamente. La segunda de las vías mencionadas va a ser utilizada con la energía potencial para así obtener la matriz de rigidez del sistema.

Con todo ello y con el fin de obtener las frecuencias naturales y los modos de vibración del sistema, es necesario disponer de la ecuación lineal homogénea del movimiento, tratándose de un movimiento libre del mismo, y cuya forma corresponde a la siguiente expresión:

$$[M] \ddot{\Delta \mathbf{q}} + [C] \dot{\Delta \mathbf{q}} + [K] \Delta \mathbf{q} = \{0\} \quad (2.20)$$



La obtención de las matrices  $[M]$ ,  $[C]$  y  $[K]$  está perfectamente detallada en el Anexo B.

### 2.1.3 Frecuencias naturales y modos de vibración

Una vez obtenido el modelo lineal (2.20), calcular las frecuencias naturales del sistema y los modos de vibración, se reduce a resolver un problema de autovalores y autovectores con alguna modificación para el caso en el que se incluya el amortiguamiento.

#### Sistema sin amortiguamiento

Si no se tiene en cuenta la disipación producida por el amortiguador, la matriz de amortiguamiento  $[C]$  es nula y por tanto la ecuación (2.20) se puede reescribir de la siguiente forma:

$$[M] \Delta \ddot{\mathbf{q}} + [K] \Delta \mathbf{q} = \{0\} \quad (2.21)$$

La solución a esta ecuación homogénea puede considerarse de la forma:

$$\Delta \mathbf{q}(t) = \overline{\Delta \mathbf{q}} e^{\lambda t} \quad (2.22)$$

donde  $\overline{\Delta \mathbf{q}}$  representa un vector de amplitudes. Sustituyendo esta solución en (2.21), se obtiene el siguiente problema de valores y vectores propios:



$$([K] + \lambda^2[M]) \overline{\Delta \mathbf{q}} = \{0\} \quad (2.23)$$

Para que este sistema de ecuaciones lineales tenga solución distinta a la trivial, es necesario que la matriz de coeficientes sea singular, es decir, que su determinante sea nulo. Como el sistema tiene 4 g.d.l., el polinomio característico es de grado 8. Y además, como las matrices de masa y rigidez son definidas o semidefinidas positivas, simétricas y de coeficientes reales, las raíces de dicho polinomio se expresan como:

$$\lambda_r = \pm i \bar{\omega}_r \quad r = 1, \dots, 4 \quad (2.24)$$

donde las  $\bar{\omega}_r$  se corresponden con las frecuencias naturales del sistema no amortiguado.

Resolviendo el sistema de ecuaciones lineales descrito en la ecuación (2.23), pero ya habiendo sustituido los valores de las frecuencias naturales obtenidas, se calculan los modos de vibración del sistema. La solución de este sistema ya no es la trivial, y como la matriz de coeficientes es singular, tampoco será única. Así pues, se ha de adoptar una condición adicional de escalado del vector  $\overline{\Delta \mathbf{q}_r}$ , como por ejemplo una componente unitaria o módulo la unidad.

### Sistema amortiguado

En este caso sí se tiene en cuenta el sistema completo tal y como se define en (2.20). Considerando que la solución tiene la misma forma a la mostrada en la ecuación (2.22) y sustituyéndola en la ecuación diferencial del movimiento, resulta:



$$([K] + \lambda[C] + \lambda^2[M]) \overline{\Delta \mathbf{q}} = \{0\} \quad (2.25)$$

Este planteamiento directo del problema lleva a un problema de valores y vectores propios con tres matrices. Para solucionar este inconveniente se puede realizar un planteamiento alternativo basado en la definición de un nuevo vector  $\mathbf{Y}$ , en el que se incluyen desplazamientos y velocidades.

$$\mathbf{Y} = \left\{ \begin{array}{c} \Delta \mathbf{q} \\ \dot{\Delta \mathbf{q}} \end{array} \right\} \quad (2.26)$$

Con este vector de incógnitas, se puede replantear la ecuación diferencial del movimiento haciendo que las matrices del problema sean cuadradas y simétricas, pero del doble de tamaño. La ecuación ahora queda del siguiente modo:

$$\begin{bmatrix} C & M \\ M & 0 \end{bmatrix} \dot{\mathbf{Y}} + \begin{bmatrix} K & 0 \\ 0 & -M \end{bmatrix} \mathbf{Y} = \{0\} \quad \longrightarrow \quad [A] \dot{\mathbf{Y}} + [B] \mathbf{Y} = \{0\} \quad (2.27)$$

Con esta nueva formulación se vuelve a tener un problema estándar de valores y vectores propios, aunque el tamaño de las matrices es el doble del original. Este se resuelve igual que para el caso sin amortiguamiento explicado anteriormente. La solución a este sistema corresponde a un conjunto de valores propios  $\lambda_r$  y vectores propios  $\{\sigma\}_r$  ambos por parejas conjugadas. Estos valores propios obtenidos se pueden expresar como:

$$\lambda_r = \omega_r \left( -\zeta_r + i\sqrt{1 - \zeta_r^2} \right) \quad (2.28)$$





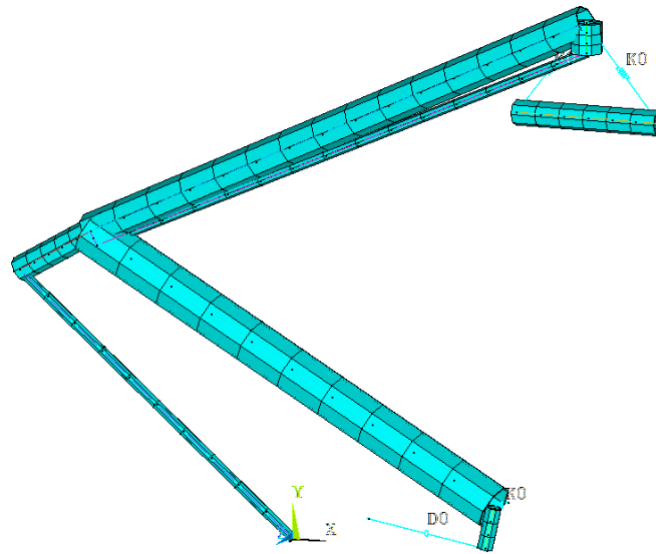
de la cual, se obtienen las frecuencias naturales  $\omega_r$  del sistema y los amortiguamientos relativos  $\zeta_r$  asociados a cada modo.

## 2.2 Modelo de barras deformables

En esta sección se va a elaborar un modelo de barras flexibles con el propósito de verificar si la inclusión de la flexibilidad de las mismas es un factor importante en el comportamiento dinámico del pantógrafo. El modelos de masas concentradas que presenta el fabricante del pantógrafo DSA-380 incluye tres masas, mientras que con el modelo de barras rígidas que se propone en este trabajo solo queda justificado el uso de dos, representando cada una de ellas el movimiento del cuerpo del pantógrafo y el movimiento vertical de la mesilla respectivamente.

Una hipótesis es la de suponer que la flexibilidad de las barras 4 y 5, al estar sometidas a un esfuerzo flector durante la interacción con la catenaria, podría tener cierta relevancia, y esto es lo que justificaría el uso de una tercera masa en los modelos de parámetros concentrados.

Con el propósito de esclarecer esta cuestión se ha elaborado un modelo con el software comercial ANSYS® en el que es posible considerar la flexibilidad de todas las barras. Como en el caso del de barras rígidas, se trata de un modelo bidimensional, es decir el movimiento del mecanismo es coplanario, y las uniones entre barras son ideales, sin fricción alguna. En este caso, las ecuaciones del movimiento que genera ANSYS® internamente, son obtenidas mediante la semidiscretización espacial del método de los elementos finitos. En la Figura 2.11 puede observarse una imagen del modelo de elementos finitos y distinguir el número de elementos utilizados para cada barra.



**Figura 2.11:** Modelo en ANSYS® del pantógrafo.

Para el mallado de las barras se ha utilizado elementos de tipo *Beam* a los cuales se les ha asociado una determinada sección circular tubular para cada barra. En la Tabla 2.1 se detallan los radios internos y externos de cada una de ellas. El criterio para el dimensionado de dichas secciones ha sido el de mantener la masa de la barra con respecto las del modelo de sólidos rígidos para que así puedan ser comparables. Si se asume que las barras son de acero con una densidad de  $\rho = 7850 \text{ Kg/m}^3$  y se fija un radio externo para que las dimensiones de la barra sean parecidas a las reales, tan solo hay que resolver la ecuación (2.29) para obtener el radio interno.

$$\rho = \frac{\pi m}{L(r_{ext} - r_{int})^2} \quad (2.29)$$



Barra	$r_{\text{int}}(\text{m})$	$r_{\text{ext}}(\text{m})$
1	0.069313	0.075
2	0.01104	0.015
3	0.035035	0.04
4	0.0524	0.055
5	0.011262	0.015
6	0.02251	0.05
7	0.031	0.04
8	0.024	0.025
9	0.018	0.025

**Tabla 2.1:** *Definición de las secciones de las barras.*

A diferencia del modelo con barras rígidas en el que solo aparecían siete barras, en este caso hay un total de nueve. Las barras 8 y 9 corresponden a las uniones entre los puntos 4 y 6 con los puntos 1 y  $1_p$  respectivamente. A ambas barras, por pertenecer en realidad a la barra 1, no se les ha asignado ninguna masa. Para simular los pares de rotación entre las diferentes barras, simplemente se acoplan los movimientos horizontal y vertical de los nodos coincidentes de ambas barras que forman la articulación.

En este caso de modelo con elasticidad también se están teniendo en cuenta las no linealidades del sistema, pero tal y como se ha hecho para el caso del modelo de barras rígidas, ANSYS® ofrece la posibilidad de poder obtener el comportamiento del mecanismo en el dominio de la frecuencia, haciendo una linealización del modelo. De este modo se puede comparar con los resultados obtenidos del modelo desarrollado en MATLAB®.

A tal efecto, ANSYS® dispone de una serie de análisis en los que internamente linealiza las ecuaciones en torno a la posición en la que el usuario lo define. Como posición de referencia para los análisis, se ha adoptado la de equilibrio ante una fuerza constante de -120 N sobre el punto 10. ANSYS® requiere primero de un análisis transitorio en pequeños desplazamientos, partiendo de



una posición cercana a la deseada, con el que calcula los efectos de *prestress* que aparecen en todos los elementos en esa posición. Estas precargas son necesarias tenerlas en cuenta para los posteriores análisis modal y armónico a partir de los cuales se determinarán las frecuencias naturales, los modos de vibración y la función de respuesta en frecuencia del modelo respectivamente.

En concreto, cuando se realiza un análisis modal con ANSYS®, se obtienen las frecuencias naturales y los modos de vibración dentro del rango de frecuencias que el usuario le especifique. Además, es posible visualizar y animar dichos modos observando a qué movimiento corresponde cada uno de ellos. Por otro lado, llevando a cabo un análisis armónico, lo que ANSYS® realiza es transformar a armónicas todas las fuerzas que se tengan aplicadas sobre el sistema y realiza un barrido en frecuencia de las mismas.

Esto resulta un inconveniente ya que también las fuerzas gravitatorias y los esfuerzos de *prestress* incluidos pasan a ser armónicos. Para eliminar su efecto en la respuesta en frecuencia de estas fuerzas, se realizan dos análisis con amplitudes de carga en la mesilla distintas y se restan ambas funciones de respuesta en frecuencia en el dominio complejo. Con ello, en la FRF ya no aparece reflejada la aportación de las fuerzas gravitatorias ni del *prestress* de las barras y los resortes, sino que resulta la respuesta en frecuencia ante una carga armónica en el grado de libertad deseado con una amplitud igual a la diferencia de las amplitudes de las fuerzas aplicadas en ambos análisis.

### 2.3 Comparación de resultados entre los distintos modelos

En esta sección se exponen todos los resultados obtenidos a partir de los modelos de barras rígidas y de barras deformables, tanto los no lineales como los linealizados. No obstante, en primer lugar se va a realizar un balance energético



co en la simulación temporal del movimiento del pantógrafo con tal de validar el modelo desarrollado.

### 2.3.1 Balance energético

Si se tiene en cuenta la energía que posee el sistema en el instante inicial y se realiza un balance energético incluyendo los términos tanto de disipación como de aportación de energía al sistema hasta un instante dado, el resultado debe ser nulo para cualquier instante para no incumplir el principio de conservación de la energía. Dicho de otro modo, la diferencia de energía cinética y potencial entre un instante  $t$  y el instante inicial ha de verse compensada por el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas que actúan sobre el sistema hasta dicho instante. Esto es:

$$[T + V]_0^t = [W_{nc}]_0^t \quad (2.30)$$

Para este caso en concreto se va a suponer que actúa una única fuerza externa y constante sobre la mesilla. Además, se tiene también la disipación producida por el amortiguador. Así pues, la ecuación (2.30) se puede reescribir como:

$$[T + V]_t - [T + V]_0 - [W_{amort}]_0^t - [W_{Fext}]_0^t = 0 \quad (2.31)$$

Queda por tanto obtener cada uno de estos cuatro términos de los que se compone este balance de energías. En primer lugar, indicar que la suma de energía cinética y potencial en el instante inicial es un valor constante. Los valores de la energía cinética y potencial del sistema para cualquier instante, y por tanto también el inicial, se pueden obtener de las expresiones (A.7) y (A.10) res-



pectivamente, conociendo los valores de las variables independientes en dicho instante de cálculo.

El trabajo generado por el amortiguador desde el instante inicial hasta un instante  $t$  cualquiera, basándose en la potencia y particularizando para el mecanismo del pantógrafo, resulta:

$$[W_{amort}]_0^t = \int_0^t \vec{F}_a (v_{13} - v_{1p}) dt \quad (2.32)$$

El punto 13 del mecanismo es un punto fijo por lo que su velocidad es siempre nula. Sustituyendo el valor de la fuerza que ejerce el amortiguador definido en (A.16), la expresión anterior pasa a ser:

$$[W_{amort}]_0^t = - \int_0^t c v_{1p}^2 dt \quad (2.33)$$

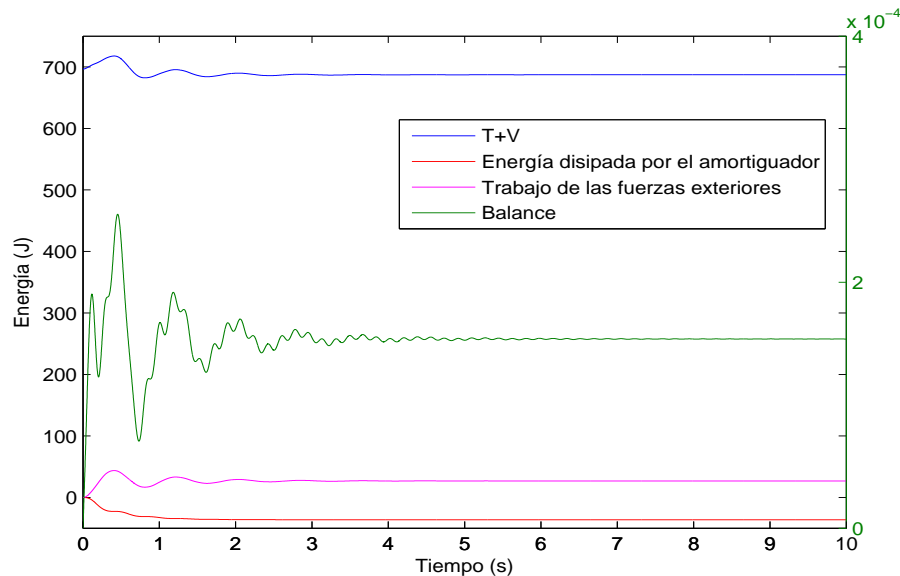
Siguiendo con este enfoque por potencias, el trabajo que ejerce la fuerza externa directamente aplicada sobre el mecanismo no es otro que:

$$[W_{Fext}]_0^t = \int_0^t F y_{i0} dt \quad (2.34)$$

donde  $F$  es el valor de la fuerza aplicada sobre el punto 10 en dirección vertical. Así pues, lo único que queda para poder realizar el balance energético es definir un procedimiento para resolver las integrales (2.33) y (2.34) para así obtener los trabajos de las fuerzas no conservativas. En concreto, aquí se ha optado por calcular dichas integrales mediante la regla del trapecio en la que se discretiza el integrando interpolando linealmente los valores del instante  $t$  y del  $t + \Delta t$ .



En la Figura 2.12 se puede observar el resultado obtenido al realizar la simulación del movimiento del pantógrafo durante 10 s con el integrador explícito de *Runge-Kutta* de cuarto orden, así como el valor de cada uno de los términos que intervienen en el balance.



**Figura 2.12:** Balance de energía durante el movimiento del mecanismo.

En la gráfica se puede observar como el valor neto del balance (eje vertical derecho) es prácticamente nulo en todo momento. Notar que la escala es del orden de  $10^{-4}$  para la curva del balance. El pequeño error puede ser debido por un lado al propio integrador, y por otro lado a que no se utilizan las mismas hipótesis entre instantes de cálculo al integrar la ecuación del movimiento y al realizar las integrales para obtener el trabajo de las fuerzas no conservativas con la regla del trapecio. Esto se corrobora al realizar el mismo análisis pero simulando el movimiento con otro integrador que utiliza diferentes hipótesis entre instantes de cálculo (por ejemplo *Newmark*). La forma de la curva del balance neto cambia aunque su valor sigue siendo prácticamente nulo. Por úl-



timo, tan solo mencionar que todas las curvas tienden hacia un valor constante cuando el mecanismo alcanza la posición de equilibrio en la que se detiene su movimiento.

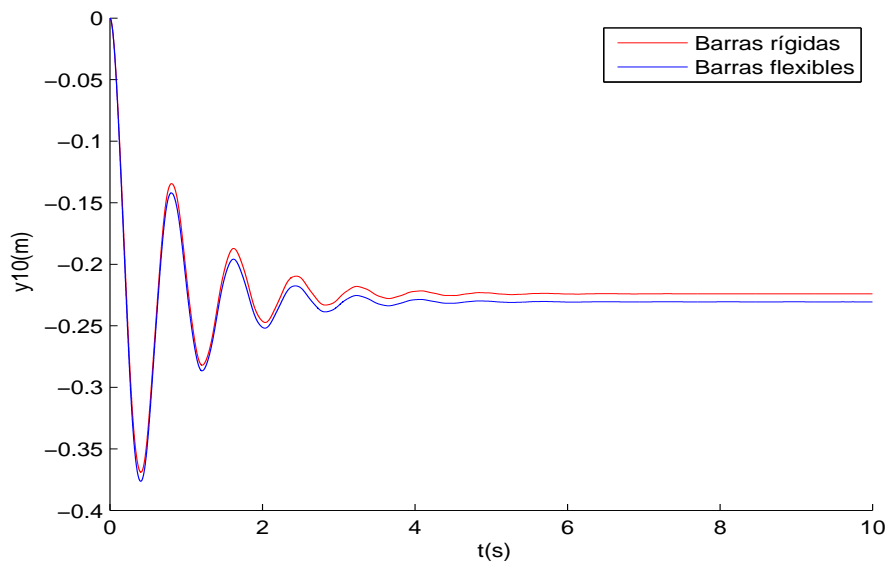
Con la realización de este balance energético queda por tanto verificado el modelo al no observarse pérdidas ni ganancias de energía en el sistema durante la simulación temporal.

### 2.3.2 Respuesta temporal

Aplicando, por ejemplo, el algoritmo de integración temporal de *Runge-Kutta*, se puede resolver la ecuación general del movimiento del pantógrafo y obtener la respuesta del mismo a lo largo del tiempo. Para realizar este análisis, se parte de una posición inicial cualquiera siempre y cuando sea la misma para los distintos ensayos con el fin de que sean comparables. En concreto, se le va a aplicar una fuerza de valor constante de -120 N en dirección vertical al punto 10 del mecanismo que intenta simular una fuerza de contacto constante con el cable de la catenaria. La magnitud que se va a entender por respuesta del sistema es el descenso de la mesilla, ya que esta magnitud está directamente relacionada en la interacción entre el pantógrafo y la catenaria. La fuerza gravitatoria ha sido tenida en cuenta en todos los análisis que se muestran a continuación.

Utilizando un paso de integración temporal de  $10^{-3}s$  se puede observar en la Figura 2.13 la respuesta del sistema proporcionada por el modelo de barras rígidas no lineal y la obtenida con el modelo de barras flexibles. En concreto se muestra la variación de la coordenada vertical del punto de aplicación de la carga con respecto a la posición inicial, es decir,  $\Delta y_{10}$ .

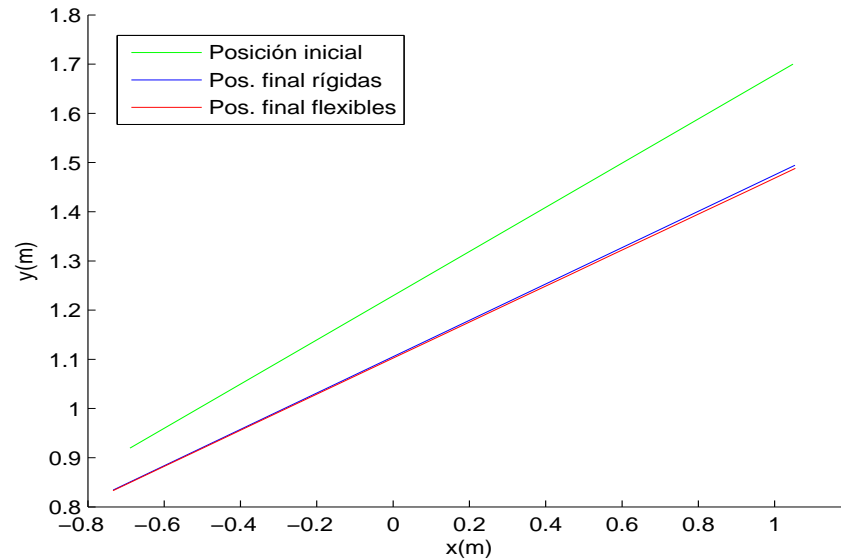




**Figura 2.13:** *Movimiento vertical de la mesilla ante  $F=-120N$ .*

En esta misma figura, se puede apreciar que la forma de la onda en el transitorio es sumamente parecida para ambos modelos, aunque sí se distingue que la curva que representa el movimiento del modelo de barras flexibles está un poco desplazada hacia abajo. Cuando se alcanza la posición de equilibrio estático (a partir de unos 5 s) se observa que la posición del punto 10 se encuentra 7 mm más abajo en el modelo de barras flexibles que en el de barras rígidas.

La explicación a estas diferencias es que la carga aplicada sobre el punto 10 del modelo genera un flector en la barra 4 que hace que las barras del mecanismo se deformen. Para poder ver este efecto con más claridad, en la Figura 2.14 se representa la barra 4 en la posición inicial del análisis, y cuando el sistema alcanza la posición de equilibrio en el instante  $t = 5s$  tanto para el caso de barras rígidas como para el de barras flexibles. Se puede apreciar que el extremo de la barra deformada ha flectado los 7 mm que antes se mencionaban.



**Figura 2.14:** Posición de equilibrio de la barra 4.

A continuación se va a realizar la misma simulación, pero en este caso la carga aplicada al punto 10 va a ser una fuerza constante de  $-120$  N más una fuerza armónica de  $30$  N de amplitud a una frecuencia de  $2$  Hz, también en dirección vertical. Estas respuestas se observan en la Figura 2.15.

Como en el caso anterior, se puede observar que ambos modelos responden del mismo modo ante esta carga senoidal. El régimen permanente, al igual que en el análisis anterior, se alcanza aproximadamente a los  $5$  s, siendo en este caso la respuesta prácticamente senoidal a partir de este instante, oscilando sobre la posición de equilibrio con la carga de  $-120$  N. También se observa esa pequeña diferencia debida a la deformación de las barras y más en concreto a la flexión de la barra 4.

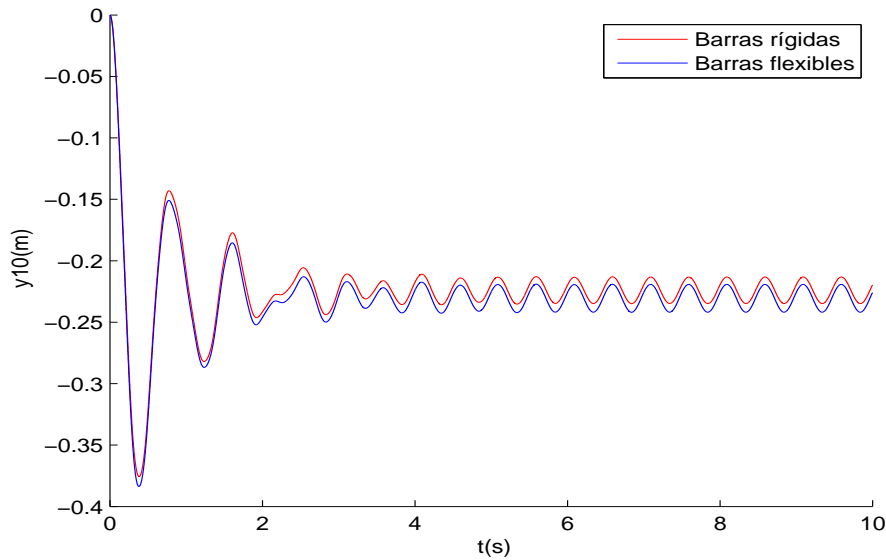


Figura 2.15: Movimiento vertical de la mesilla ante  $F = -120 - 30\sin(4\pi t)$ .

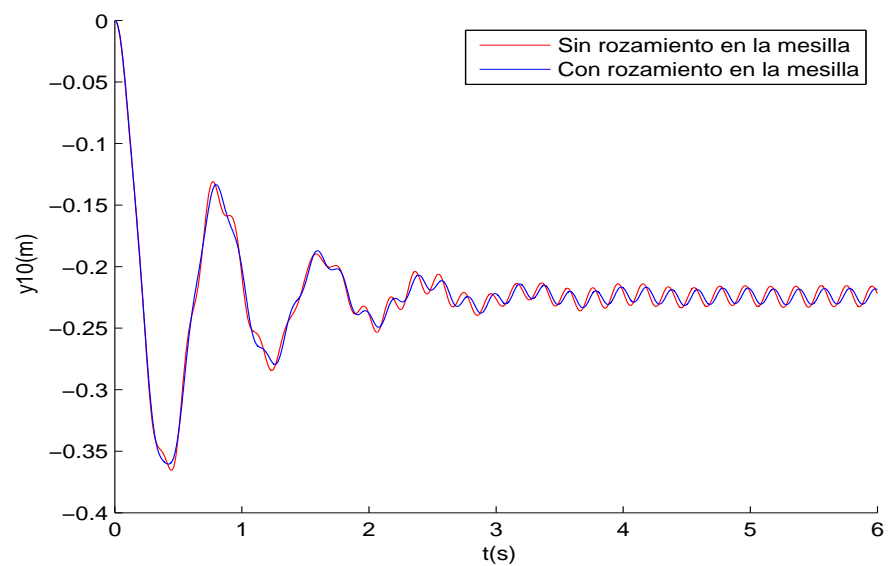
Con estos dos análisis queda perfectamente verificado que ambos modelos presentan una respuesta temporal muy semejante, en la que se distingue claramente un cambio en la posición de equilibrio del mecanismo pero no hay aparentemente una influencia significativa en la respuesta dinámica del mismo.

Otro tema que se puede analizar es la influencia del rozamiento en el movimiento vertical de la mesilla. En primer lugar se va a ajustar el parámetro  $k_t$  de la expresión (2.16) para que su influencia en los resultados sea mínima. Con este parámetro se ajusta la pendiente que tiene la curva de fuerza de rozamiento en el punto de velocidad relativa nula (Figura 2.10). Cuanto menor es  $k_t$ , mayor es la pendiente y por tanto más se ajusta a la forma real que presenta el rozamiento.

En concreto, se va a aplicar al mecanismo una carga en dirección vertical al punto 10 igual a  $F = -120 - 30 \sin(2\pi 5) N$ . Realizando una simulación del movimiento con esta carga y sin ningún rozamiento se observa que el máximo valor absoluto de la velocidad relativa en dirección vertical entre la mesilla y el punto 5 es de  $0.7554 m/s$ .

El criterio que se ha elegido es que para una velocidad relativa del 1% de la máx  $|v_{rel}|$  se corresponda al menos una fuerza de rozamiento del 95% de la total. Con ello, se llega a un valor de  $k_t = 5 \cdot 10^{-4} m/s$ .

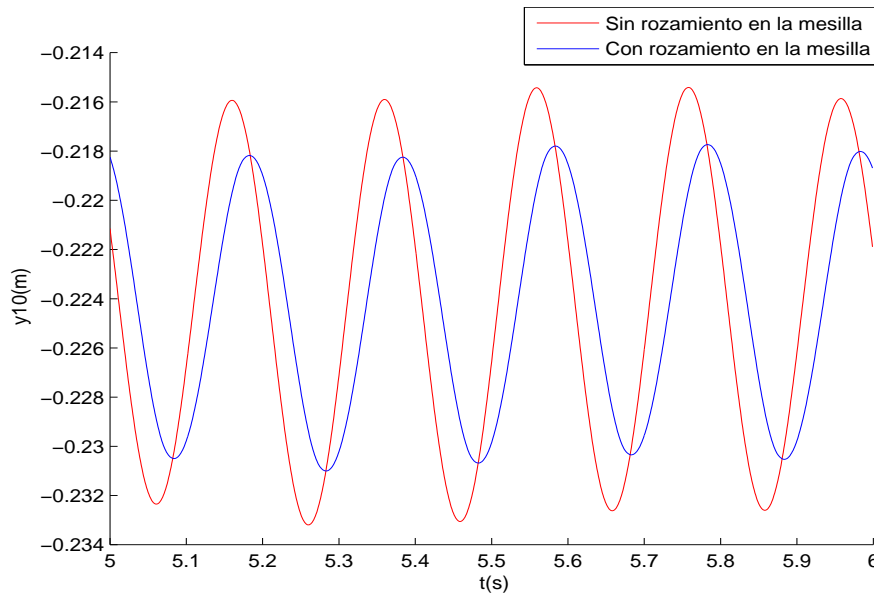
Con este parámetro de ajuste de la curva de la fuerza de rozamiento en función de la velocidad relativa y un valor de  $f_{roz} = \pm 10 N$  se ha realizado una simulación aplicando al mecanismo la excitación indicada anteriormente. Este valor de fuerza de rozamiento es muy elevado pero se intenta con él que se magnifiquen los efectos sobre la respuesta temporal.



**Figura 2.16:** *Movimiento vertical de la mesilla con y sin rozamiento.*



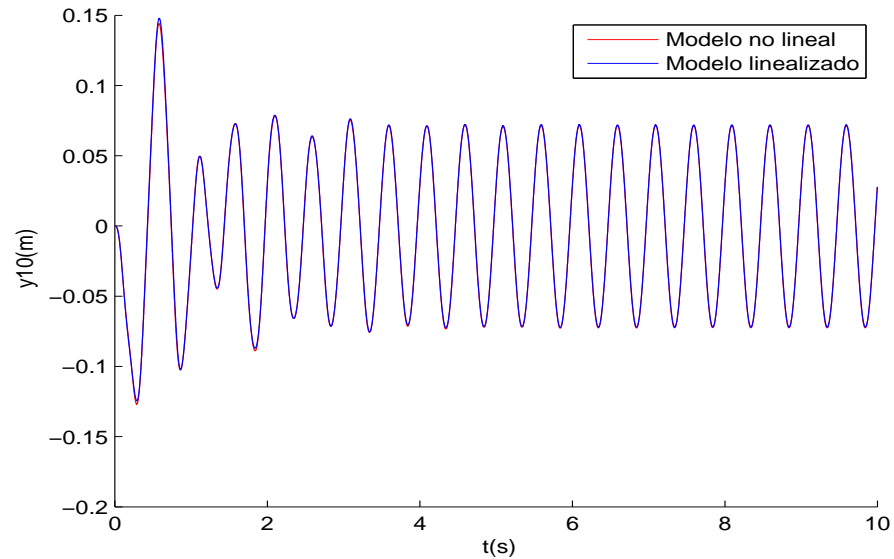
En la Figura 2.16 se aprecia que con la presencia de rozamiento sí hay ciertas variaciones en la curva de la respuesta respecto a la misma sin el rozamiento. Si se analiza con más detalle, en la parte del transitorio aparece suavizada la respuesta en frecuencias elevadas con respecto a la respuesta sin fricción, y en el régimen permanente, ampliado en la Figura 2.17, se aprecia por un lado un desfase entre ambas curvas y por otro, una reducción en la amplitud de la respuesta cuando hay rozamiento.



**Figura 2.17:** *Movimiento vertical de la mesilla con y sin rozamiento. Detalle del régimen permanente.*

Seguidamente, se va a comparar la respuesta temporal del modelo no lineal de barras rígidas con el linealizado. La posición respecto a la cual se ha particularizado la linealización del modelo es la posición de equilibrio que alcanza el mecanismo al aplicarle una carga vertical de -120 N en el punto 10. En la Figura 2.18 se observa la variación en el desplazamiento vertical de la mesilla con respecto a la posición de equilibrio de esta, bajo una carga de

$F = -120 - 200\sin(4\pi t) N$ . En este caso la amplitud elegida de la parte alternante de la excitación es de 200 N para intentar magnificar el efecto de las no linealidades, pero como se puede observar, ni con esa elevada amplitud se detectan diferencias en la respuesta.



**Figura 2.18:** Desplazamiento vertical de la mesilla respecto de la posición de equilibrio.

Por tanto, se puede concluir que para el caso de la respuesta temporal del mecanismo objeto de estudio, ni la flexibilidad de las barras, ni las no linealidades debidas al propio mecanismo, influyen de forma destacable. En cambio, si que puede llegar a ser importante la presencia de rozamiento en el movimiento vertical de la mesilla.



### 2.3.3 Respuesta en frecuencia

En este apartado se van a obtener y a comparar las frecuencias naturales y los modos de vibración del sistema linealizado a partir del modelo implementado en MATLAB® con las obtenidas a partir de un análisis modal en ANSYS®, en el que el software internamente linealiza el modelo. En concreto, en dicho análisis se le especifica a ANSYS® que calcule las que encuentre en el rango de 0 a 30 Hz. En la Tabla 2.2 se detallan los valores obtenidos.

Num.	f(Hz) Flex.	f(Hz) Ríg.	Descripción
1	0.77339	0.6551	Giro mesilla
2	1.2448	1.2439	Mov. mecanismo panto.
3	5.6362	5.6231	Mov. vertical mesilla
4	7.777	7.8705	Mov. horizontal mesilla
5	21.7733	—	Flexión barra 5
6	25.2445	—	Flex. barra 5 y mov. mec.

**Tabla 2.2:** Comparación de las naturales entre el modelo de barras rígidas y el modelo de barras flexibles.

Por otro lado, para tener un mayor conocimiento de a qué movimiento corresponde cada modo de vibración, se representan al final de este apartado en la Tabla 2.3 para el modelo de barras flexibles, y en la Tabla 2.4 para el de barras rígidas, las dos posiciones extremas que definen el movimiento de cada modo.

Con el modelo de barras rígidas tan solo aparecen cuatro frecuencias naturales y sus respectivos modos, ya que el mecanismo tiene esos mismos grados de libertad. Como se observa en las Tablas 2.3 y 2.4, la primera frecuencia natural está asociada al modo de giro de la mesilla. La segunda corresponde al movimiento de cuerpo rígido de pliegue del mecanismo del pantógrafo. La tercera y la cuarta están relacionadas con los movimientos vertical y horizontal de la



mesilla respectivamente. Estos cuatro modos de cuerpo rígido son iguales para ambos modelos.

En el modelo en el que se incluye la flexibilidad de las barras, además de estas cuatro, aparecen otras dos frecuencias naturales en el rango de frecuencias indicado, ligadas principalmente a la flexión de la barra 5 (modo 5 de la Tabla 2.2) aunque también en el modo 6 se observa flexión en la barra 4 y movimiento del cuerpo del pantógrafo.

Queda evidente que tanto el giro de la mesilla como su movimiento horizontal no van a tener ninguna influencia en la respuesta del sistema que aquí se está analizando ( $\Delta y_{10}$ ). También es obvio, que tanto el segundo modo así como el tercero juegan un papel muy importante en dicha respuesta en frecuencia. Lo que ya no es tan evidente, es la influencia de los modos 5 y 6 en el movimiento vertical de la mesilla.

Con el fin de esclarecer esto último y además poder comparar en el dominio de la frecuencia los distintos modelos desarrollados, se van a obtener las funciones de respuesta en frecuencia (FRF) de cada uno de ellos. Todas las FRF que se representan a continuación relacionan el cociente entre la amplitud de la respuesta  $\Delta y_{10}$  y la amplitud de la fuerza excitadora  $\Delta F$ , con la frecuencia  $\omega$ .

El método de obtención de estas FRF varía sustancialmente en función de cuál sea el modelo a partir del cual se obtiene dicha respuesta. En el caso de los modelos no lineales, aunque no es en sí una función de respuesta en frecuencia, en el presente trabajo se le va a denominar así.

Tanto para el modelo de barras flexibles como para el de sólidos rígidos, la obtención de esta especie de FRF se basa en la realización de sucesivos análisis temporales, aplicando una fuerza excitadora armónica de diferente frecuencia y misma amplitud en cada uno de ellos. Así pues, una vez obtenida la respuesta





temporal, se busca en el régimen permanente de la misma el valor máximo y el mínimo para así calcular  $\Delta y_{10}$  y por tanto la FRF.

Para el caso de las FRF de los modelos lineales, por un lado se tiene el de sólidos flexibles desarrollado en ANSYS®, cuya FRF se obtiene como se explicó al final del apartado 2.2 del presente capítulo. Por otro lado, se tiene el modelo linealizado de sólidos rígidos. En este caso son dos las estrategias que se pueden seguir para calcular la FRF, llegando ambas obviamente al mismo resultado: La obtención directa o la obtención por superposición modal.

Partiendo de la ecuación del movimiento linealizada (2.20) y aplicando unas fuerzas excitadoras armónicas del tipo  $\mathbf{F}(t) = \overline{\mathbf{F}}e^{i\omega t}$  se tiene también una respuesta armónica de la forma  $\mathbf{q}(t) = \overline{\mathbf{q}}e^{i\omega t}$ . El caso de la obtención directa de la FRF se basa simplemente en obtener la matriz  $\mathbf{H}(\omega)$  que relaciona amplitudes de respuesta con amplitudes de excitación. Derivando una y dos veces la expresión de la respuesta y sustituyendo estas derivadas en la ecuación del movimiento, en la que posteriormente se elimina de ambos lados el término exponencial, queda:

$$\left[-\omega^2[M] + i\omega c[C] + [K]\right] \overline{\mathbf{q}} = \overline{\mathbf{F}} \quad (2.35)$$

por lo tanto la matriz de receptancias buscada es:

$$\mathbf{H}(\omega) = \left[-\omega^2[M] + i\omega c[C] + [K]\right]^{-1} \quad (2.36)$$

El elemento  $H_{jk}(\omega) = q_j/F_k$  representa la respuesta en frecuencia del grado de libertad  $j$  cuando solamente se excita el grado de libertad  $k$ . En este caso en el que hay amortiguamiento, estos coeficientes de la matriz de FRF son números



complejos, y de ellos se puede extraer tanto el módulo o amplitud  $|H_{jk}|$  de la FRF como el desfase  $\arg(H_{jk})$  existente entre excitación y respuesta. En los siguientes análisis se va a excitar y a observar la amplitud de respuesta en frecuencia en el mismo grado de libertad, y en concreto se representa la  $|H_{33}|$ .

Otra alternativa para llegar a obtener la matriz  $\mathbf{H}(\omega)$  es por medio de la superposición modal. Este procedimiento es muy útil en el caso de sistemas con muchos grados de libertad, ya que muchas veces la respuesta del mismo está dominada por unos pocos modos, por lo tanto tan solo teniendo en cuenta esos modos se comete muy poco error y se ahorra mucho en coste de cálculo.

En concreto, siguiendo el procedimiento descrito en el apartado 2.1.3 para sistemas con amortiguamiento y partiendo de la ecuación (2.27), se obtienen los modos  $\{\sigma_r\}$  del sistema por parejas conjugadas. Así mismo, es posible escalar estos modos para que por ejemplo la matriz  $[A]$  sea la identidad. Si se consideran los vectores propios:

$$\Theta_r = \frac{\{\sigma_r\}}{(\{\sigma_r\}^T [A] \{\sigma_r\})^{1/2}} \quad (2.37)$$

De esta forma al realizar la transformación, se obtiene:

$$\begin{aligned} [\Theta]^T [A] [\Theta] &= [I] \\ [\Theta]^T [B] [\Theta] &= [-\lambda_r] \end{aligned} \quad (2.38)$$

o lo que es lo mismo, el conjunto de ecuaciones diferenciales:



$$\begin{aligned} \dot{q}_r - \lambda_r q_r &= Q_r(t) = \{\Theta\}_r^T \{F(t)\} \\ \dot{q}_r - \lambda_r^* q_r &= Q_r(t) = \{\Theta^*\}_r^T \{F(t)\} \end{aligned} \quad (2.39)$$

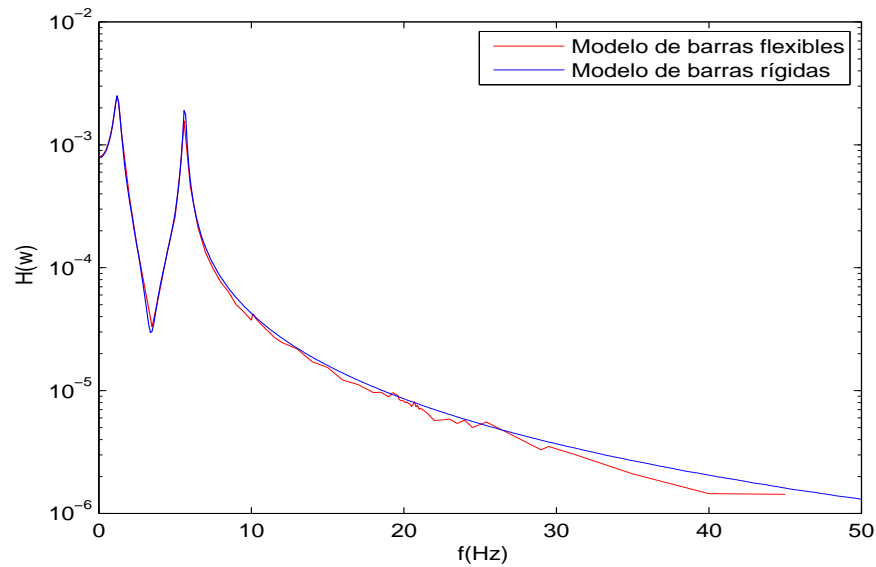
con  $r = 1, \dots, N$  y  $\{U(t)\} = [\Theta]\{q(t)\}$  en la que  $[\Theta]$  es la matriz de modos ordenados por columnas. Suponiendo ahora la solución harmónica, derivando, sustituyendo en (2.39) y por último volviendo a las coordenadas iniciales, la FRF queda:

$$\begin{aligned} H_{jk}(\omega) &= \sum_{r=1}^N \left( \frac{\{\Theta_j\}_r \{\Theta_k\}_r}{i\omega - \lambda_r} + \frac{\{\Theta_j^*\}_r \{\Theta_k^*\}_r}{i\omega - \lambda_r^*} \right) \\ &= \sum_{r=1}^N \left( \frac{{}_r A_{jk}}{i\omega - \lambda_r} + \frac{{}_r A_{jk}^*}{i\omega - \lambda_r^*} \right) \end{aligned} \quad (2.40)$$

La matriz  $\mathbf{H}(\omega)$  formada por los coeficientes descritos en la ecuación anterior es exactamente la misma que la expresada (2.36).

Una vez ya obtenidas las frecuencias naturales que presenta el mecanismo, y descritos los procedimientos seguidos para obtener las funciones de respuesta en frecuencia de cada uno de los modelos, ya se está en disposición de empezar a presentar estas FRF para compararlas entre sí. En primer lugar se realiza la comparación entre la respuesta en frecuencia de los modelos no lineales de barras rígidas y de barras flexibles.

Como puede verse en la Figura 2.19, la respuesta en frecuencia para el movimiento vertical de la mesilla no varía aparentemente por el hecho de incluir la flexibilidad de las barras. El hecho de que la curva roja de dicha figura tenga



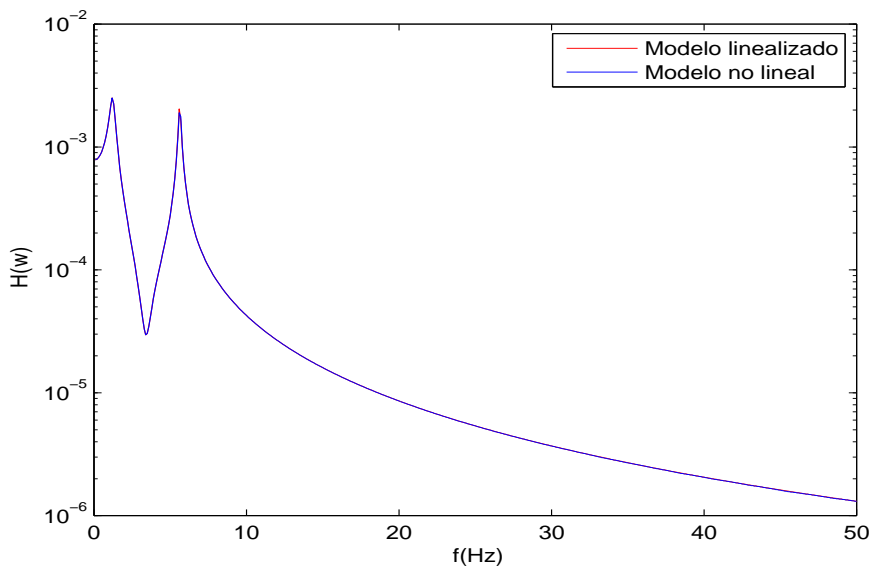
**Figura 2.19:** FRF de los modelos no lineales de barras rígidas y barras flexibles.

un trazo tan irregular para valores bajos de  $H(\omega)$ , es debido a que, como ya se comentó al inicio de este apartado, en el proceso de obtención de la misma se pueden producir pequeños errores al buscar los máximos y los mínimos de la respuesta temporal, sobre todo en el caso de que esta sea muy pequeña. Además, ANSYS® tan solo permite guardar la información de un número determinado de pasos, con lo que no es posible obtener la solución temporal en tantos instantes como se requeriría para detectar correctamente esos mínimos y máximos en régimen permanente.

Por otro lado, viendo esta misma figura, también se puede descartar, en principio, la influencia de la flexión de las barras en la respuesta ante excitación harmónica de la mesilla, ya que tan solo se distinguen los dos picos de resonancia en las frecuencias debidas a los modos 1 y 2 de la Tabla 2.2 para el rango de frecuencias estudiado. Este hecho por tanto, no justifica la utilización



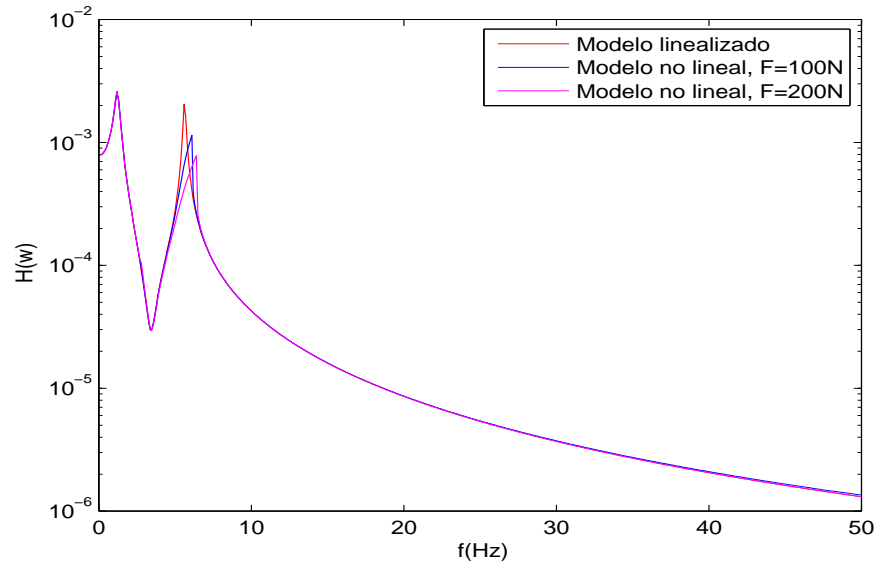
de modelos con tres masas concentradas para este tipo de pantógrafo, como facilita el fabricante Stemmann-Technik GMBH. No obstante, es posible que al no disponer de datos reales de masa, inercia, y rigidez de las barras y resortes, no aparezca en los resultados la influencia de esta flexión tal y como se esperaba en un principio.



**Figura 2.20:** FRF de los modelos linealizado y no lineal. Amplitud de excitación 10N.

Otro tema a analizar es la influencia de las no linealidades del mecanismo en la respuesta en frecuencia. Si la amplitud de la carga aplicada al sistema no lineal es baja, por ejemplo 10 N, no se ve ninguna diferencia respecto al comportamiento en frecuencia del sistema linealizado. Para que las no linealidades queden patentes se ha a aplicar una fuerza de excitación de amplitud mayor. Sin embargo, para este nivel de fuerza alternante, como se comentó en la parte final de la sección 2.1, la mesilla empieza a girar descontroladamente en el rango de frecuencias cercanas a la segunda frecuencia natural y por eso

se procede a restringir dicho giro como también se comentó en esa sección del trabajo.



**Figura 2.21:** FRF de los modelos de barras rígidas, linealizado y no lineal. Amplitud de excitación 100N y 200N.

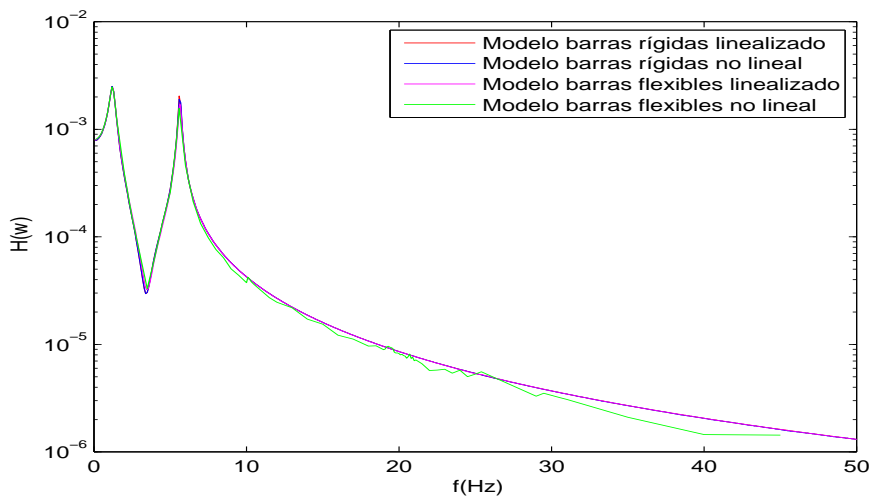
En la Figura 2.21 sí se pueden apreciar algunas diferencias en la respuesta en frecuencia del sistema en el entorno de la frecuencia natural asociada al modo que representa al movimiento vertical de la mesilla. Estas diferencias están producidas básicamente por dos efectos. Por un lado, al haber restringido el giro de la misma, el sistema se está rigidizando, y por tanto parece lógico que el valor de la frecuencia natural se vea incrementado. Por otro lado, la forma asimétrica del pico de resonancia, en el que la parte derecha cae con mayor pendiente, es típico de sistemas no lineales y se hace patente en este caso en el que el rango de desplazamientos de la mesilla es mayor al tener una excitación de amplitud más elevada (100 y 200 N). En concreto, la no linealidad que más afecta es la de la rigidez vertical de los resortes que unen la



mesilla con el cuerpo del pantógrafo, ya que como se observa en la Figura 2.6, el comportamiento de esta parte del sistema se aleja del lineal.

Mencionar aquí que para el modelo linealizado no se observan diferencias las FRF ante distintas amplitudes de carga, como sí ocurre para el caso no lineal. Esto es así ya que la FRF es totalmente independiente de la amplitud de carga excitadora como queda reflejado en la ecuación (2.36).

Para concluir con este apartado, se presenta la Figura 2.22, en que pueden observarse las FRF de los cuatro modelos presentados en el presente trabajo. Para el caso de los no lineales se ha utilizado una amplitud de 10 N de la fuerza harmónica de excitación para evitar el giro de la mesilla y así evitar el tener que restringirlo y rigidizar el sistema. De esta figura se pueden extraer las siguientes conclusiones:



**Figura 2.22:** FRF de los modelos de barras rígidas y flexibles, linealizados y no lineales.



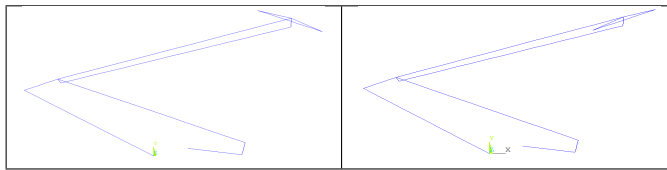
- La flexibilidad de las barras no influye sustancialmente en el comportamiento dinámico vertical de la mesilla, al menos para los valores numéricos concretos de todos los parámetros utilizados en este modelo.
- Las no linealidades no influyen significativamente para amplitudes de excitación bajas.

Esta última conclusión precisa ser matizada, ya que como se ha visto en la Figura 2.21, al aumentar la amplitud de la carga de excitación se producen dos efectos acoplados, el giro libre de la mesilla y una rigidez vertical no constante de los resorte. Por lo tanto, no se puede especificar con exactitud el verdadero efecto de las no linealidades para amplitudes de excitación elevadas. Para ello se requeriría de ensayos experimentales.

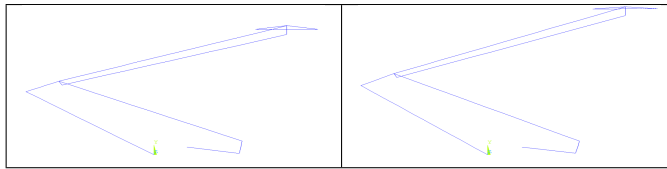




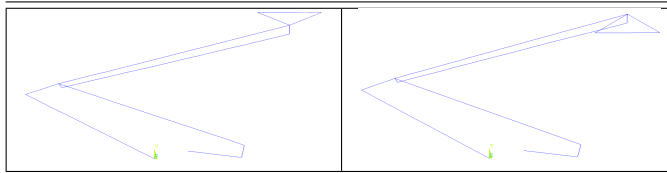
### MODOS DEL MODELO FLEXIBLE



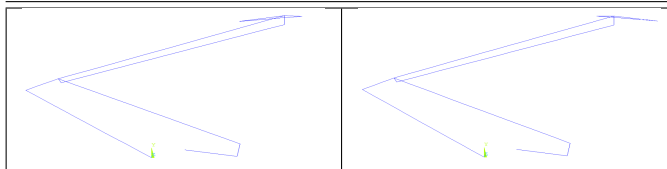
Modo 1: Giro de la mesilla.



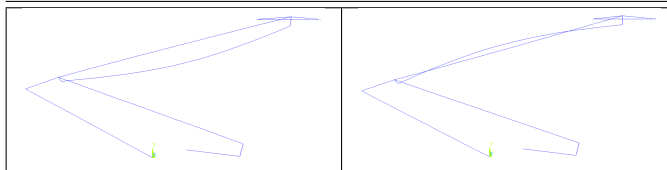
Modo 2: Movimiento del cuerpo del mecanismo.



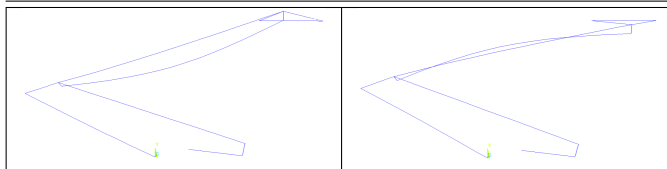
Modo 3: Movimiento vertical de la mesilla.



Modo 4: Movimiento horizontal de la mesilla.

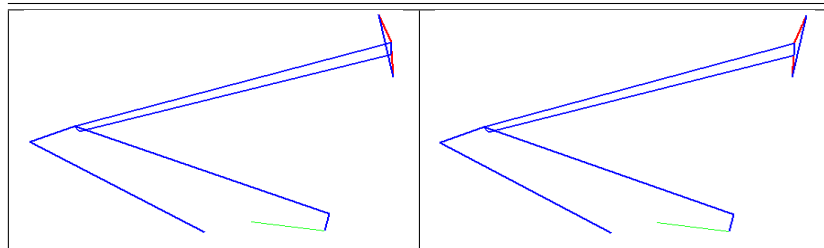


Modo 5: Flexión de la barra 5.

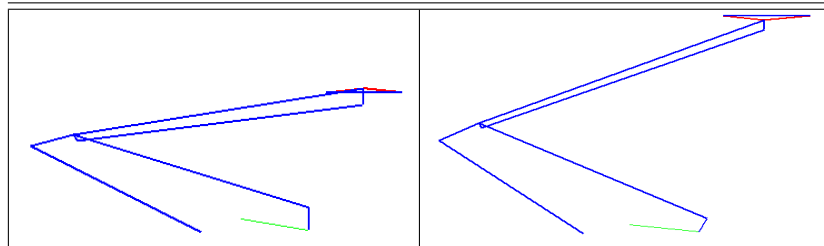


Modo 6: Flexión de la barra 4.

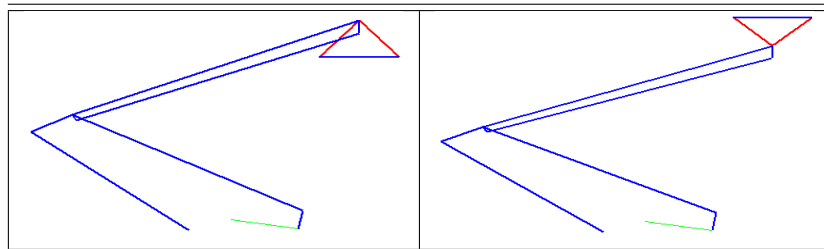
**Tabla 2.3:** *Modos de vibración del modelo de barras flexibles.*

**MODOS DEL MODELO RÍGIDO**

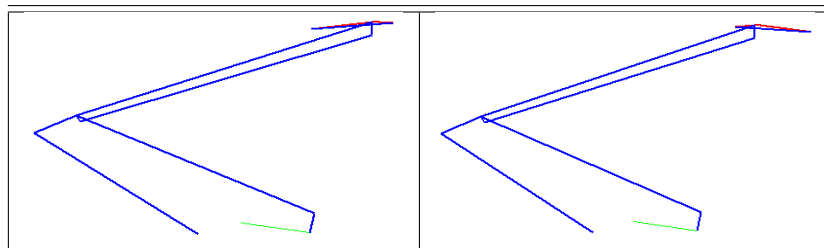
Modo 1: Giro de la mesilla.



Modo 2: Movimiento del cuerpo del mecanismo.



Modo 3: Movimiento vertical de la mesilla.



Modo 4: Movimiento horizontal de la mesilla.

**Tabla 2.4:** *Modos de vibración del modelo de barras rígidas.*



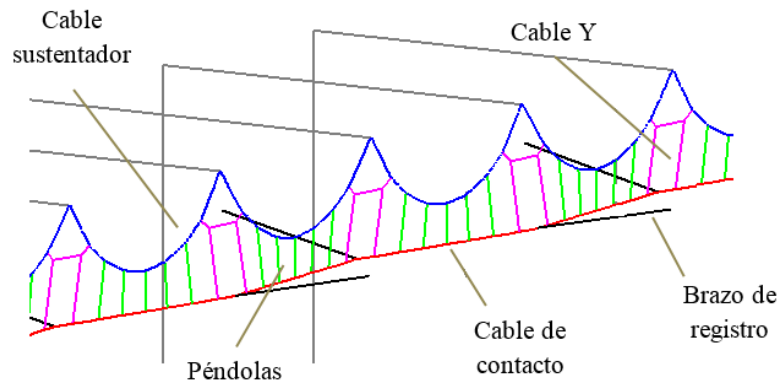
## Capítulo 3

# INTERACCIÓN DINÁMICA PANTÓGRAFO- CATENARIA

En este capítulo se va a presentar tanto el modelo de la catenaria como el modelo utilizado para simular la interacción entre este sistema y el pantógrafo. A continuación se expone la metodología empleada para realizar la integración temporal de las ecuaciones y por tanto simular en el tiempo dicha interacción. Finalmente se detallan diferentes resultados de simulaciones en las que se introducen diversas no linealidades adicionales al modelo de pantógrafo que afectan en menor o mayor medida al comportamiento dinámico del conjunto.

### 3.1 Modelo de la catenaria

Según se expuso en la sección 1.3, el modelo del sistema catenaria se trata de un modelo tridimensional, aunque el trazado de la vía sea rectilíneo, y consta de los elementos que se muestran en la Figura 3.1.



**Figura 3.1:** Elementos constructivos de la catenaria AVE.

La metodología para modelizar el comportamiento dinámico de este sistema consiste en realizar una discretización espacial por el método de los elementos finitos para así obtener la ecuación del movimiento. Se van a usar coordenadas absolutas de posición de los nodos ya que esta formulación proporciona una matriz de masa del sistema constante.

Para incorporar amortiguamiento en la catenaria, se ha introducido la aproximación de *Rayleigh* en la que la matriz de amortiguamiento se define como:

$$\mathbf{C} = \alpha\mathbf{M} + \beta\mathbf{K} \quad (3.1)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son valores constantes.



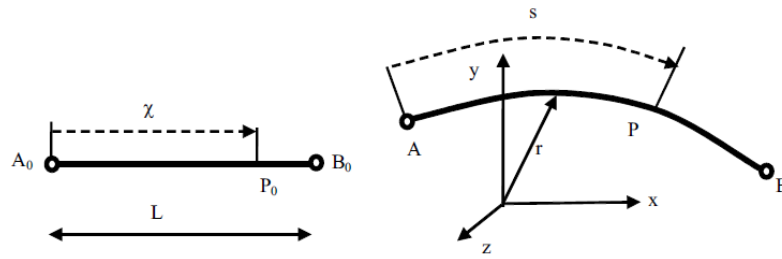
Los elementos de soporte de la estructura aérea como son los postes y las ménsulas se asume que tienen una rigidez muy elevada y por tanto se sustituyen por una restricción del desplazamiento del extremo del brazo de registro y de los puntos a los que aguanta al cable sustentador. El resto de elementos que forman la catenaria ferroviaria se modelan mediante elementos tipo cable y elementos tipo barra, aunque adicionalmente se pueden incorporar otros elementos para tener en cuenta más componentes como el sistema de compensación de masa, o evitar el salto de tracción en cables, [18].

Con el elemento tipo cable se va a modelar tanto el cable sustentador como el de contacto, donde debido a la elevada tensión mecánica los fenómenos de propagación de ondas de flexión pueden ser importantes. Este tipo de elemento admite deformación longitudinal y de flexión. El elemento tipo barra, en cambio, solo admite deformaciones longitudinales, y es el utilizado para modelar las péndolas, los brazos de registro y los cables en Y.

### 3.1.1 Elemento cable

Cuando se abordan problemas de flexión, la deformación del elemento depende de las primeras derivadas de las coordenadas absolutas. Por tanto es necesario utilizar funciones de interpolación de continuidad  $C^1$  entre elementos.

En este tipo de elemento, los grados de libertad del problema, es decir, las variables nodales, son la posición absoluta y sus derivadas. Con ello se consigue abordar correctamente el problema de grandes desplazamiento que presenta encontrar la configuración estática de la línea aérea de contacto. Por tanto, cada elemento queda definido por 6 grados de libertad en cada nodo, es decir, un total de 12 grados de libertad por elemento.



**Figura 3.2:** Elemento tipo cable.

Como se observa en la Figura 3.2, el elemento de nodos  $i$  y  $j$  no deformado se define mediante la coordenada  $\chi$ , que varía entre cero y la longitud del elemento. El vector de los grados de libertad es:

$$\mathbf{q} = \left[ x_i \quad y_i \quad z_i \quad \frac{dx_i}{d\chi} \quad \frac{dy_i}{d\chi} \quad \frac{dz_i}{d\chi} \quad x_j \quad y_j \quad z_j \quad \frac{dx_j}{d\chi} \quad \frac{dy_j}{d\chi} \quad \frac{dz_j}{d\chi} \right]^T \quad (3.2)$$

Si  $\mathbf{r}$  es el vector de posición de un punto  $P$  cualquiera del elemento deformado y  $\mathbf{S}$  la matriz de funciones de forma del elemento, la interpolación del mismo queda definida por:

$$\mathbf{r} = \begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \mathbf{S}\mathbf{q} \quad (3.3)$$

En cuanto a la obtención de las fuerzas elásticas y la matriz de rigidez de este elemento, se ha de calcular la energía de deformación asociada a las deformaciones longitudinales y de flexión [18]. Cabe mencionar que mientras la matriz de rigidez asociada a las deformaciones de flexión es constante, la asociada a las deformaciones longitudinales sí depende de las coordenadas nodales. La matriz de masa y el vector de fuerzas gravitatorias son constantes ya que



tan solo dependen de parámetros como la densidad, la longitud y la sección transversal del elemento que se matienen invariantes en cada elemento.

### 3.1.2 Elemento barra

En este elemento no se considera la rigidez a flexión, por lo tanto, las coordenadas nodales de este corresponden únicamente a la posición de los correspondientes nodos, habiendo un total de 6 grados de libertad por elemento.

$$\mathbf{q} = [x_i \ y_i \ z_i \ x_j \ y_j \ z_j]^T \quad (3.4)$$

La deformación en este caso es tan solo longitudinal y se realiza una interpolación lineal en el elemento, de forma que el vector de posición de un punto cualquiera  $P$  es igual al mostrado en (3.3) con la diferencia de que en este caso las funciones de forma son lineales. Al igual que en el caso del elemento cable, tanto la matriz de masa como el vector de fuerzas gravitatorias son constantes [18].

Para definir si este elemento está a compresión se pueden seguir dos criterios distintos. En primer lugar se puede comparar la longitud deformada del elemento con la longitud del mismo en el estado de equilibrio del sistema catenaria. Si esta longitud deformada es menor que la inicial se considera que el elemento está comprimido. El segundo criterio que se puede seguir es comparar las fuerzas internas del elemento con las que aparecen en este en el equilibrio inicial. Por tanto, el elemento inicialmente estará traccionado en el equilibrio, y si aparece una fuerza interna mayor y de sentido contrario a la inicial se considera que el elemento entra a compresión.



### 3.1.3 Problema estático y de configuración inicial

En el caso del problema estático de la catenaria, las fuerzas de inercia y las disipativas son nulas, por tanto el planteamiento del problema se reduce al equilibrio entre las fuerzas elásticas y las gravitatorias de los diferentes elementos que componen la malla de elementos finitos del problema. En estas ecuaciones, se consideran las fuerzas gravitatorias como fuerzas externas.

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}) = \mathbf{F}_{elast} - \mathbf{F}_{ext} = \mathbf{0} \quad (3.5)$$

En este equilibrio se deben considerar convenientemente las condiciones de apoyo de la catenaria, restringiendo para ello el movimiento de ciertos nodos con la imposición de un valor constante de su posición. Para resolver el sistema (3.5) se utiliza el método iterativo de *Newton-Raphson*. Este método requiere la obtención de las derivadas del vector de fuerzas elásticas con respecto a las coordenadas (matriz tangente). La derivada de las fuerzas externas aplicadas es nula, ya que las fuerzas gravitacionales son constantes al no depender de las coordenadas nodales.

Dada una aproximación  $\mathbf{q}_i$  del vector de grados de libertad del problema en la iteración  $i$ , si se considera el desarrollo en serie del vector de fuerzas totales, se tiene:

$$\mathbf{F}(\mathbf{q}_i) = \mathbf{F}(\mathbf{q}_{i+1}) + \left. \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \right|_{i+1} \Delta \mathbf{q}_{i+1} + \dots \quad (3.6)$$

Para cada tipo de elemento se define la matriz tangente  $\mathbf{K}_T$  como la derivada de las fuerzas elásticas con respecto a las coordenadas nodales:





$$\mathbf{K}_T = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.7)$$

Teniendo en cuenta únicamente el desarrollo hasta el término lineal y sustituyendo en (3.5), se tiene:

$$\mathbf{K}_{T_i} \Delta \mathbf{q}_i = -\mathbf{F}(\mathbf{q}_i) \quad (3.8)$$

lo cual representa un sistema lineal de ecuaciones del que se obtiene el incremento del vector de grados de libertad del problema que permite definir una mejor solución. La iteración finaliza cuando se cumple la ecuación de equilibrio del sistema según una cierta tolerancia.

En problemas estructurales convencionales, la configuración de equilibrio estático es conocida a priori. Sin embargo, esto no ocurre en el caso de la catenaria, ya que la configuración de equilibrio depende de las longitudes de los elementos y de las tensiones de montaje. Las primeras, en concreto la longitud de las péndolas, se diseñan para posibilitar una correcta interacción pantógrafo-catenaria, teniendo en cuenta las cargas que soporta inicialmente la catenaria (fuerzas gravitatorias y tensión impuesta en cables).

En [19] se desarrollan dos metodologías para la obtención de la configuración inicial de la catenaria. En primer lugar se plantea el problema incorporando a las ecuaciones de equilibrio elástico un conjunto de restricciones que permiten imponer por una parte la tensión conocida en cables, y por otra definir la posición que en el equilibrio estático tendrán ciertos nodos del sistema (coordenadas), de modo que se permita considerar la altura a la que se desea que permanezca el cable conductor en la posición de equilibrio, imponiendo el valor de las coordenadas asociadas a los nodos de unión con las péndolas.



La segunda alternativa consiste en considerar el problema de cálculo de longitudes como un problema de optimización. En este caso, se plantea el problema de minimizar el error en la posición vertical del cable conductor con respecto a la posición deseada. Se consideran como restricciones las ecuaciones que definen el comportamiento elástico del sistema, restricciones en tensión de cables o en posición de nodos. De esta forma, se consigue definir el problema de una forma más general.

### 3.2 Modelo de interacción

La problemática asociada al contacto unilateral entre dos sólidos elásticos es revisada en [18], donde se describe la técnica numérica adoptada para resolver el problema de interacción dinámica entre pantógrafo y catenaria que se expone a continuación.

El método optado en este trabajo es el de *penalty*, con el cual se obtiene la fuerza de contacto entre el pantógrafo y la catenaria. Para ello, en primer lugar se ha de evaluar la distancia de interpenetración  $dz$  entre ambos sistemas.

$$dz = (q_{cc} - q_H) \quad (3.9)$$

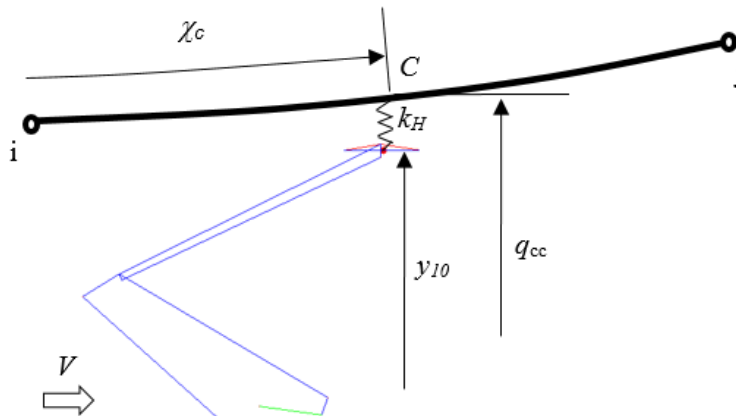
donde  $q_{cc}$  es la altura del punto de contacto de la catenaria y  $q_H$  la altura del punto de contacto en el pantógrafo. Si  $dz$  es positivo, significa que no hay interacción y por tanto la fuerza de contacto es nula. En cambio, un valor negativo de esta variable, implica que el pantógrafo se encuentra por encima del cable de contacto (interpenetración), lo cual no es posible. Es en ese caso es cuando se aplica el método de *penalty*, que consiste en introducir un resorte artificial de rigidez muy elevada  $k_H$  (se recomienda un valor de rigidez de 50000



N/m) entre los dos sistemas para obtener la fuerza repulsiva que aparece entre ellos y que hace ascender al cable de contacto a la vez que se opone a la elevación del pantógrafo.

$$F_c = \begin{cases} -k_H dz & \text{si } dz < 0 \\ 0 & \text{si } dz > 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

En un instante cualquiera  $t$ , la interacción pantógrafo-catenaria tendrá lugar en un elemento finito del cable de contacto definido por sus nodos  $i$  y  $j$ , (ver Figura 3.3). Para modelar el contacto, se define un elemento que relaciona los grados de libertad asociados a la catenaria con el que define la posición vertical de la mesila, en este caso  $q_H = y_{10}$ .



**Figura 3.3:** Interacción pantógrafo-catenaria.

Suponiendo velocidad constante del vehículo, la posición del pantógrafo y en consecuencia la del punto de contacto a lo largo de la catenaria viene definida por:



$$x_c = x_{c0} + V t \quad (3.11)$$

Para definir el punto de contacto dentro del elemento finito, es necesario obtener la correspondiente coordenada local  $\chi_c$ . Considerando la interpolación del elemento cable, se plantea la ecuación:

$$x_c = S_1(\chi_c)q_{i,1} + S_2(\chi_c)q_{i,4} + S_3(\chi_c)q_{j,1} + S_4(\chi_c)q_{j,4} \quad (3.12)$$

Esta expresión corresponde a una ecuación cúbica y su resolución permite evaluar el valor de  $\chi_c$ . La dinámica asociada a la interacción pantógrafo-catenaria no produce variaciones sustanciales de la posición horizontal de la catenaria. Por este motivo, se supone que el valor de  $\chi_c$  calculado no se modifica con la dinámica del sistema.

La posición vertical del punto de contacto en la catenaria es:

$$q_{cc} = S_1(\chi_c)q_{i,3} + S_2(\chi_c)q_{i,6} + S_3(\chi_c)q_{j,3} + S_4(\chi_c)q_{j,6} \quad (3.13)$$

con la cual ya queda todo perfectamente definido para poder obtener la fuerza de contacto en cualquier instante durante la integración temporal.

### 3.3 Integración numérica no lineal

Como se ha comentado anteriormente la catenaria ha sido modelada con el método de los elementos finitos en coordenadas absolutas y el modelo del pan-



tógrafo se ha llevado a cabo mediante el uso de coordenadas independientes. El modelo de catenaria presenta una matriz de masa constante por el hecho de la elección de las coordenadas nodales absolutas, pero en cambio la matriz de rigidez sí depende de las coordenadas de los nodos, es decir, hay no linealidad en las fuerzas elásticas. Para el caso del pantógrafo las no linealidades están presentes en todos los términos de la ecuación del movimiento.

Debido a estas no linealidades presentes en ambos modelos, es necesario desarrollar un algoritmo de integración temporal capaz de tratar con ellas. La ecuación general en la que se han ensamblado ambos modelos es:

$$\mathbf{M}(t, \mathbf{q}) \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}}) \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{K}(t, \mathbf{q}) \mathbf{q} = \mathbf{F}(t)_{\text{ext}} \quad (3.14)$$

en la que las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez, dependen de las variables que definen la posición del sistema y a su vez por tanto del tiempo. Se ve también una dependencia de la primera derivada temporal de estas variables en el término de disipación. Si se agrupan los términos en vectores de fuerzas se tiene:

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \ddot{\mathbf{q}})_{\text{iner}} + \mathbf{F}(t, \mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})_{\text{dis}} + \mathbf{F}(t, \mathbf{q})_{\text{int}} = \mathbf{F}(t)_{\text{ext}} \quad (3.15)$$

La forma en la que se lleva a cabo la integración es general en el sentido de que la rutina elaborada en el programa PACDIN, admite la presencia de varios pantógrafos interaccionando simultáneamente con la catenaria, además de que cada uno de ellos puede ser tanto un modelo de parámetros concentrados como un modelo de barras rígidas. En el caso en el que tan solo haya un pantógrafo, se puede elegir que la integración empiece estando el pantógrafo y la catenaria en contacto y en equilibrio estático inicial o hacer que el pantógrafo



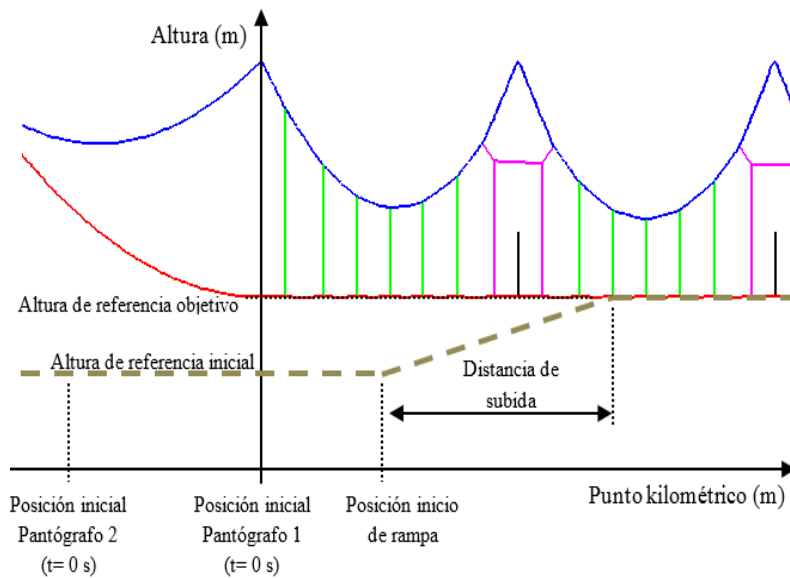
suba en rampa hasta que se produzca dicho contacto. En el caso de múltiples pantógrafos, esta elección tan solo se puede realizar para el primero de ellos, ya que los siguientes tendrán que subirse en rampa obligatoriamente para evitar que haya choques con la estructura de cables y barras de la catenaria si el pantógrafo ya estuviese levantado desde el inicio.

Una vez hecha esta aclaración, se va a explicar con detalle la subida en rampa tanto del pantógrafo de masas concentradas como del modelo de barras rígidas de pantógrafo, para pasar posteriormente a detallar los algoritmos de integración temporal y la obtención de todos los elementos necesarios que requiere dicha integración.

### 3.3.1 Subida en rampa del pantógrafo

El usuario del software PACDIN ha de definir ciertos parámetros para caracterizar la subida en rampa del pantógrafo. En primer lugar, se ha de indicar la posición que ocuparán los distintos pantógrafos en el instante inicial de la simulación. También se ha de indicar tanto el punto kilométrico en el que se inicia la rampa como la distancia de subida de la misma. Para terminar de describir la subida, se necesita introducir una altura de referencia inicial y una altura de referencia objetivo. Todos estos parámetros se ven ilustrados en la Figura 3.4.

Cuando un pantógrafo se encuentra situado en la posición de rampa, se calcula un factor con el que se pondera la fuerza externa que actúa sobre el mismo. Este factor varía desde 0 (cuando aún no ha llegado al inicio de rampa) hasta 1 (cuando ya la ha sobrepasado) y se obtiene a partir de una interpolación lineal entre la altura de referencia inicial y la objetivo. Con ello, se pasa de no actuar ninguna fuerza externa sobre el pantógrafo, a mediante un incremento lineal



**Figura 3.4:** *Subida en rampa del pantógrafo.*

de la misma, llegar al valor final indicado por el usuario y que se mantiene constante a partir del momento en que se alcanza.

Para el caso del modelo de masas concentradas, el factor mencionado anteriormente, además de ponderar la fuerza externa aplicada sobre la masa inferior, se utiliza también para ponderar la altura de referencia del modelo, ya que esta altura es necesaria para calcular la fuerza elástica que ejerce el resorte inferior del modelo.

En el caso del modelo de barras rígidas, únicamente se pondera con dicho factor el momento externo aplicado a la barra 1 del mecanismo, ya que en este modelo la altura de referencia no tiene ningún significado físico. En cambio, para este modelo, sí es necesario especificar una altura del vagón, que corresponde a la coordenada  $y$  del punto 2 del modelo, la cual se mantiene constante a lo



largo de todo el movimiento. En cualquier caso, los valores de fuerza externa final aplicada sobre el modelo se encuentran en un fichero específico para cada pantógrafo.

Si se elige la opción de subida en rampa, en el instante inicial se colocan los pantógrafos de modo que estén en equilibrio estático a la altura de referencia inicial. Para el caso del modelo de masas concentradas esto es situar todas las masas en esta altura sin ninguna fuerza externa aplicada, y para el caso del modelo de barras rígidas se trata de calcular el par necesario a aplicar a la barra 1 para que la altura de la mesilla  $y_{10}$  en el equilibrio sea la especificada (Véase ecuación (2.11)). Estos problemas de equilibrio inicial, bien sea con contacto o con rampa, se resuelven mediante el método iterativo de *Newton-Raphson* ya que se trata de problemas con ecuaciones no lineales.

### 3.3.2 Algoritmo de integración numérica

Conocida la configuración del sistema en un instante  $t$  (y en algunos casos de instantes anteriores), los métodos de integración numérica paso a paso permiten calcularla en el instante  $t + \Delta t$ . En dinámica estructural, el valor de  $\Delta t$  suele mantenerse constante a lo largo de la integración para simplificar el algoritmo. Estos métodos se basan en hacer cumplir las ecuaciones de comportamiento dinámico del sistema en tiempos discretos y en una serie de hipótesis relativas a la evolución del sistema entre dichos instantes de tiempo. La precisión en la integración numérica es mayor a medida que el incremento de tiempo se reduce, a costa de un incremento en el coste computacional.

El problema de interacción dinámica pantógrafo-catenaria tiene una característica adicional que puede influir en la selección del método: la existencia de unilateralidades en péndolas y en contacto se producirá entre instantes de tiempo de cálculo, con lo que estos fenómenos se resolverán de forma más





precisa a medida que  $\Delta t$  sea menor y se capture con mayor precisión esta característica. Otro de los fenómenos presentes en este problema es la propagación de ondas y perturbaciones generadas por la carga móvil del pantógrafo en su interacción con el sistema discretizado por elementos finitos. La presencia de estas perturbaciones hace que pueda ser deseable la introducción de cierta disipación numérica en el algoritmo de integración.

Una de las posibles clasificaciones de los algoritmos de integración numérica los separa en métodos explícitos y en métodos implícitos. Básicamente, las diferencias entre ambos tipos de métodos están relacionadas con la estabilidad y el paso temporal de cálculo. En el caso de los algoritmos explícitos, la posición del sistema es explícitamente una función de magnitudes de pasos de integración anteriores, y son condicionalmente estables, lo que significa que existe un tamaño de paso crítico  $\Delta t_{cr}$  de forma que si se utiliza un  $\Delta t > \Delta t_{cr}$  el método se hace inestable, por lo que exige el empleo de incrementos de tiempo pequeños (en ocasiones más por razones de estabilidad que de precisión). En cambio, en los algoritmos implícitos la posición del sistema también depende de magnitudes del propio instante de cálculo. Los métodos implícitos normalmente utilizados son incondicionalmente estables, debiéndose seleccionar el paso de integración únicamente por motivos de precisión.

En general en los métodos explícitos será necesario utilizar un  $\Delta t$  más pequeño que en los implícitos. Es decir, para calcular la evolución del sistema durante un mismo tiempo total, será necesario realizar más pasos mediante un algoritmo explícito. No obstante, el problema a resolver en cada paso de la integración es más simple que en el caso de los implícitos, por lo que el tiempo de cálculo de cada paso de integración es menor. De esta forma, en muchas ocasiones no es posible predecir qué tipo de algoritmo es más conveniente.

En base a estas consideraciones, en [18] se plantea la resolución de un problema sencillo pero con similitudes al problema de interacción pantógrafo-catenaria



y con solución analítica conocida, y se analiza mediante un método explícito (Runge-Kutta de cuarto orden) y otros implícitos (Newmark y HHT) con el fin de extraer información cualitativa acerca de la familia de métodos más apropiada para resolver este problema. De este estudio se concluye que los métodos de Newmark y HHT son los más eficaces para resolver el problema planteado.

Así pues, el algoritmo elegido para realizar la integración de la ecuación (3.15) es el método implícito de HHT propuesto por Hilbert, Hughes y Taylor, que realmente se trata de una generalización del método de Newmark. Estos métodos han sido ampliamente estudiados y son comúnmente utilizados en resolución de problemas de dinámica estructural.

Este algoritmo de integración se basa en poner tanto velocidades como aceleraciones del instante actual de cálculo en función de la posición en este mismo instante y de la posición y sus derivadas temporales conocidas del instante anterior. Con ello, y sustituyendo en la ecuación general del movimiento, se obtiene un sistema de ecuaciones algebraicas no lineal cuyas incógnitas son la posición en el instante de cálculo actual. Este sistema de ecuaciones puede ser resuelto mediante el algoritmo iterativo de *Newton-Raphson*.

El algoritmo de integración parte de las siguientes hipótesis:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}^{t+\Delta t} &= \mathbf{q}^t + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^t + \frac{\Delta t^2}{2} \left( (1 - 2\beta)\ddot{\mathbf{q}}^t + 2\beta\ddot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} \right) \\ \dot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}^t + \Delta t \left( (1 - \gamma)\ddot{\mathbf{q}}^t + \gamma\ddot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} \right)\end{aligned}\quad (3.16)$$

Si se agrupa todo lo conocido (las variables y sus derivadas en el instante  $t$ ) se plantea la siguiente predicción:



$$\begin{aligned}
 \mathbf{q}_p^{t+\Delta t} &= \mathbf{q}^t + \Delta t \dot{\mathbf{q}}^t + \frac{\Delta t^2}{2}(1 - 2\beta) \ddot{\mathbf{q}}^t \\
 \dot{\mathbf{q}}_p^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}^t + \Delta t(1 - \gamma) \ddot{\mathbf{q}}^t \\
 \ddot{\mathbf{q}}_p^{t+\Delta t} &= \mathbf{0}
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

Si estas predicciones se sustituyen en las hipótesis iniciales, se obtienen las velocidades y aceleraciones del instante actual en función de todo lo conocido del instante anterior y de la posición del instante de cálculo actual que pasa a ser la única incógnita del problema.

$$\begin{aligned}
 \dot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} &= \dot{\mathbf{q}}_p^{t+\Delta t} + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} (\mathbf{q}^{t+\Delta t} - \mathbf{q}_p^{t+\Delta t}) \\
 \ddot{\mathbf{q}}^{t+\Delta t} &= \frac{1}{\Delta t^2 \beta} (\mathbf{q}^{t+\Delta t} - \mathbf{q}_p^{t+\Delta t})
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

Ahora se evalúa la ecuación de equilibrio dinámico con las expresiones anteriores en un instante intermedio en función de los coeficientes  $\alpha_m$  y  $\alpha_f$ .

$$\mathbf{F}_{\text{iner}}^{t+(1-\alpha_m)\Delta t} + \mathbf{F}_{\text{dis}}^{t+(1-\alpha_f)\Delta t} + \mathbf{F}_{\text{int}}^{t+(1-\alpha_f)\Delta t} = \mathbf{F}_{\text{ext}}^{t+(1-\alpha_f)\Delta t} \tag{3.19}$$

con:



$$\begin{aligned}
 \mathbf{F}_{iner}^{t+(1-\alpha_m)\Delta t} &= (1 - \alpha_m)\mathbf{F}_{iner}^{t+\Delta t} + \alpha_m\mathbf{F}_{iner}^t \\
 \mathbf{F}_{dis}^{t+(1-\alpha_f)\Delta t} &= (1 - \alpha_f)\mathbf{F}_{dis}^{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{F}_{dis}^t \\
 \mathbf{F}_{int}^{t+(1-\alpha_f)\Delta t} &= (1 - \alpha_f)\mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{F}_{int}^t \\
 \mathbf{F}_{ext}^{t+(1-\alpha_f)\Delta t} &= (1 - \alpha_f)\mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} + \alpha_f\mathbf{F}_{ext}^t
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

Sustituyendo todo en (3.15) se llega al siguiente sistema de ecuaciones no lineal, cuyas incógnitas son las posiciones del instante actual.

$$\mathbf{R}(t, \mathbf{q}^{t+\Delta t}) = -\mathbf{R}^t \tag{3.21}$$

donde a  $\mathbf{R}^t = \alpha_f\mathbf{F}_{ext}^t - \alpha_f\mathbf{F}_{int}^t - \alpha_f\mathbf{F}_{dis}^t - \alpha_m\mathbf{F}_{iner}^t$  se le denomina residuo del instante anterior y es totalmente conocido, mientras que en  $\mathbf{R}^{t+\Delta t} = (1 + \alpha_f)\mathbf{F}_{ext}^{t+\Delta t} - (1 + \alpha_f)\mathbf{F}_{int}^{t+\Delta t} - (1 + \alpha_f)\mathbf{F}_{dis}^{t+\Delta t} - (1 + \alpha_m)\mathbf{F}_{iner}^{t+\Delta t}$  aparece la incógnita que se quiere obtener.

Para aplicar ahora el procedimiento de *Newton-Raphson* es necesario hallar las matrices tangentes de todos los vectores de fuerza que forman parte de la ecuación de equilibrio. Con ello, el sistema a resolver en cada iteración queda:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^{t+\Delta t}} \Delta \mathbf{q} = \mathbf{R}_{IT} \tag{3.22}$$

en el que  $\mathbf{R}_{IT} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} - \mathbf{R}^t$  y  $\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{q}^{t+\Delta t}} = (1 + \alpha_f)\mathbf{K}_{int} + (1 + \alpha_f)\mathbf{K}_{dis} + (1 + \alpha_m)\mathbf{K}_{iner}$  y cada una de estas matrices tangentes  $\mathbf{K}$  son las derivadas



de los vectores de fuerzas respecto de las incógnitas  $\mathbf{q}^{t+\Delta t}$ , en los que hay que tener en cuenta que según 3.18:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \dot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \\ \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} &= \frac{1}{\Delta t^2 \beta}\end{aligned}\quad (3.23)$$

La obtención de cada uno de los vectores de fuerzas y sus derivadas está detallada en el siguiente apartado del presente capítulo.

Las iteraciones se repiten hasta que la norma energética,  $norm(\Delta \mathbf{q}^T \mathbf{R}_{IT})$ , sea menor que una cierta tolerancia predeterminada.

Por último, comentar que para que el algoritmo de integración sea incondicionalmente estable y con una precisión de segundo orden, los parámetros que definen el procedimiento se tienen que elegir de tal modo que:

$$\gamma = \frac{1}{2} + \eta \quad \beta = \frac{(1 + \eta)^2}{4} \quad \alpha_f = \eta \quad \alpha_m = 0 \quad (3.24)$$

### 3.3.3 Obtención de los vectores de fuerzas y sus derivadas

A continuación se detalla la obtención de las matrices tangentes y los vectores de fuerza utilizados en (3.22) para resolver la posición en cada paso de la integración temporal. En concreto, se va a tratar por separado la parte proveniente de la catenaria de la parte de dichos vectores que procede del modelo



del pantógrafo. Esto tiene mayor interés cuando se trata de modelos de pantógrafo de barras, aunque también es recomendable mantener esta estructura de integración no lineal para los modelos de parámetros concentrados ya que así se pueden introducir elementos de fricción, o amortiguadores unidireccionales que sí tienen un comportamiento no lineal y que con un algoritmo de integración lineal no se podrían tener en cuenta fácilmente.

Una vez han sido obtenidos estos vectores y matrices de cada subsistema, bastaría después con expandirlos hasta el tamaño total del problema y sumarlos para tener todos los elementos necesarios requeridos en el proceso de integración.

### Parte de la catenaria

En cuanto a la matriz de masa de la catenaria, debido al uso de coordenadas nodales absolutas, se trata de una matriz constante. Esta matriz proviene del ensablado de las distintas matrices de masa de todos los elementos que forman el modelo. En el vector de fuerzas de inercia, la única dependencia con las coordenadas de posición proviene de las hipótesis 3.18 realizadas en el algoritmo de integración, por tanto el vector y la matriz tangente de inercia son:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{iner}^c &= \mathbf{M}_{cat}\ddot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{K}_{iner}^c &= \frac{1}{\Delta t^2\beta}\mathbf{M}_{cat}\ddot{\mathbf{q}}\end{aligned}\quad (3.25)$$

El vector de fuerzas disipativas que proviene de la catenaria y su matriz tangente, de forma análoga resultan:



$$\begin{aligned}\mathbf{F}_{dis}^c &= \mathbf{C}_{cat}\dot{\mathbf{q}} \\ \mathbf{K}_{dis}^c &= \frac{\gamma}{\Delta t\beta}\mathbf{C}_{cat}\dot{\mathbf{q}}\end{aligned}\quad (3.26)$$

donde la matriz de amortiguamiento de la catenaria se ha definido en (3.1).

Los términos de fuerza internos en este caso tan solo contemplan las fuerzas elásticas de los elementos barra y cable que componen el modelo de elementos finitos de la catenaria. Con esta formulación, se ha visto que las fuerzas gravitatorias son constantes y se tratan como fuerzas externas. Las derivadas de estas fuerzas elásticas constituyen la matriz tangente o de rigidez de la catenaria [18].

Cabe destacar en este punto, que cuando una péndola entra a compresión, su contribución tanto en el vector de fuerzas elásticas, así como en la matriz de rigidez de la catenaria, se elimina restando su valor al calculado previamente. Esto también afectará a la matriz de amortiguamiento por haber considerado un modelo de amortiguamiento proporcional.

También en este término de fuerzas internas se incluyen las fuerzas del elemento de interacción así como sus derivadas en la matriz de rigidez. Esto aporta términos tanto en la parte de los grados de libertad de la catenaria así como en los del pantógrafo.



### Parte del pantógrafo

En cuanto a las fuerzas que provienen del pantógrafo, en primer lugar se va a explicar la obtención del vector de fuerzas de inercia así como la matriz tangente del mismo. En concreto la expresión que define dicho vector es:

$$\mathbf{F}_{iner}^p = \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} \quad (3.27)$$

donde la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  está definida en (A.28) y es función de las coordenadas independientes del modelo. Por tanto, para obtener la matriz tangente del vector de fuerzas de inercia, al derivar se tiene:

$$\mathbf{K}_{iner}^p = \frac{\partial \mathbf{F}_{iner}^p}{\partial \mathbf{q}} = \frac{\partial \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q})}{\partial \mathbf{q}} \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{\Lambda}(\mathbf{q}) \frac{\partial \ddot{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{q}} \quad (3.28)$$

El valor de la derivada de la aceleración con respecto de las coordenadas de posición fué definido en (3.23). Así pues, el único término que falta por evaluar es la derivada de la matriz  $\mathbf{\Lambda}$  con respecto a  $\mathbf{q}$ . Esta derivada multiplicada por el vector de aceleraciones, da lugar a una matriz en la que los únicos elementos no nulos son  $\frac{dA}{d\theta}$ ,  $\frac{dE}{d\theta_7}$  y  $\frac{d\Phi}{d\theta_7}$ . Las expresiones de  $A$ ,  $E$  y  $\Phi$  así como estas derivadas están explícitas en el Anexo A.

En el vector de fuerzas disipativas, se incluyen tanto el momento que ejerce el amortiguador, como los términos de coriolis o centrífugos que son cuadráticos con la velocidad. Estos vectores son:





$$\mathbf{F}_{dis}^p = \mathbf{F}_{amort}^p + \mathbf{F}_{cor}^p = \begin{pmatrix} M_a \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{q}} \quad (3.29)$$

En cuanto a las matrices tangentes a estos vectores anteriores, se necesitan las derivadas de los mismos con respecto de  $\mathbf{q}$ . En el caso concreto de las fuerzas que provienen del amortiguador, la matriz tangente tan solo tendrá un elemento no nulo, que corresponde al de la primera fila y la primera columna, y su valor es  $\frac{dM_a}{d\theta}$ . El cálculo de esta derivada está detallado en el Anexo A. También se han de obtener las expresiones de las segundas derivadas  $\frac{d^2 A}{d\theta^2}$ ,  $\frac{d^2 E}{d\theta_7^2}$  y  $\frac{d^2 \Phi}{d\theta_7^2}$ , necesarias para formar la matriz tangente del vector de fuerzas centrífugas o de coriolis.

Por ejemplo, el primer término del vector de fuerzas de coriolis y su respectiva derivada son:

$$\mathbf{F}_{cor}^p(1) = \frac{1}{2} \frac{dA}{d\theta} \dot{\theta}^2 \rightarrow \frac{d\mathbf{F}_{cor}^p(1)}{d\theta} = \frac{1}{2} \frac{d^2 A}{d\theta^2} \dot{\theta}^2 + \frac{dA}{d\theta} \dot{\theta} \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \quad (3.30)$$

Si se añade rozamiento al mecanismo, también hay que obtener su vector de fuerzas generalizadas así como sus derivadas. Denominando  $f_{roz}$  al resultado de evaluar con la  $v_r$  apropiada a la expresión (2.16) y multiplicar por el valor de fuerza de rozamiento que se quiera incluir, se tiene:

$$\mathbf{F}_{roz}^p = \begin{pmatrix} -f_{roz} (L_1 \cos(\theta) + L_4 J \cos(\theta_4)) \\ 0 \\ f_{roz} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (3.31)$$



en la que se ha aplicado el principio de los trabajos virtuales para trasladar el efecto de la fuerza de rozamiento sobre el punto 5 a la coordenada generalizada  $\theta$ . Este vector de fuerzas así como su matriz tangente, son igualmente tratados por el algoritmo de integración que las fuerzas internas o disipativas y así se pueden incluir en (3.21) y en (3.22).

En cuanto a su matriz tangente, se tiene que derivar este vector de fuerzas respecto de las coordenadas generalizadas. En concreto tan solo hay cuatro elementos no nulos en dicha matriz. En primer lugar se definen unas derivadas previas necesarias para obtener estos cuatro elementos:

$$\begin{aligned}\frac{\partial v_r}{\partial y_{10}} &= \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \\ \frac{\partial v_r}{\partial \theta} &= \left( L_1 \sin(\theta) - L_4 \left( dJ \cos(\theta_4) - J^2 \sin(\theta_4) \right) \right) \dot{\theta} - \\ &\quad - \left( L_1 \cos(\theta) + L_4 J \cos(\theta_4) \right) \frac{\gamma}{\Delta t \beta} \\ \frac{\partial f_{roz}}{\partial y_{10}} &= \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\partial v_r}{\partial y_{10}}}{k_t + \frac{v_r^2}{k_t}} \\ \frac{\partial f_{roz}}{\partial \theta} &= \frac{2}{\pi} \frac{\frac{\partial v_r}{\partial \theta}}{k_t + \frac{v_r^2}{k_t}}\end{aligned}\tag{3.32}$$

Así pues, los cuatro elementos no nulos de la matriz tangente del vector de fuerzas de rozamiento resultan:



$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \mathbf{F}_{roz}^p(1)}{\partial \theta} &= -\frac{\partial f_{roz}}{\partial \theta} (L_1 \cos(\theta) + L_4 J \cos(\theta_4)) - \\
 &\quad - f_{roz} \left( -L_1 \sin(\theta) + L_4 \left( dJ \cos(\theta_4) - J^2 \sin(\theta_4) \right) \right) \\
 \frac{\partial \mathbf{F}_{roz}^p(1)}{\partial y_{10}} &= -\frac{\partial f_{roz}}{\partial y_{10}} (L_1 \cos(\theta) + L_4 J \cos(\theta_4)) \\
 \frac{\partial \mathbf{F}_{roz}^p(3)}{\partial \theta} &= \frac{\partial f_{roz}}{\partial \theta} \\
 \frac{\partial \mathbf{F}_{roz}^p(3)}{\partial y_{10}} &= \frac{\partial f_{roz}}{\partial y_{10}}
 \end{aligned} \tag{3.33}$$

los cuales corresponden a las posiciones (1,1), (1,3), (3,1) y (3,3) de la matriz  $\mathbf{K}_{roz}^p$ , respectivamente.

Para finalizar este desarrollo, restaría obtener el vector de fuerzas internas del pantógrafo. En este grupo de fuerzas se incluye la aportación de las fuerzas gravitatorias y de las fuerzas elásticas producidas por los resortes. Así pues:

$$\mathbf{F}_{int}^p = \mathbf{F}_{grav}^p + \mathbf{F}_{elast}^p = \mathbf{G} + \mathbf{K} \frac{\partial l}{\partial \mathbf{q}} \tag{3.34}$$

donde todos los vectores y matrices presentes en esta expresión están obtenidos paso a paso en el Anexo A. Del mismo modo, para obtener las matrices tangentes, es necesario derivar estos vectores. En concreto, estas derivadas que forman la matriz de rigidez del mecanismo se muestran en (B.19).



### 3.4 Presentación de resultados de la interacción

En esta sección se presentan los resultados obtenidos a partir de distintas simulaciones de la interacción dinámica pantógrafo-catenaria. Con ello se pretende evaluar la influencia de ciertos parámetros y no linealidades del pantógrafo en la fuerza de contacto con el sistema de cableado aéreo.

Las gráficas que se presentan a continuación muestran la fuerza de contacto entre el modelo de pantógrafo de barras y el de catenaria tipo AVE para los vanos 5 y 6, lo cual corresponde al intervalo temporal de 3.84 s a 4.608 s. Con ello se pretende que los efectos transitorios del inicio de la simulación queden disipados y no enmascaren la respuesta. Todas las simulaciones se han realizado con una velocidad del tren de 300 km/h y empezando el análisis en estático, es decir, el pantógrafo se encuentra contactando inicialmente con la catenaria y todo el sistema está en equilibrio estático. El paso de integración utilizado es de una milésima de segundo  $\Delta t = 10^{-3} s$ .

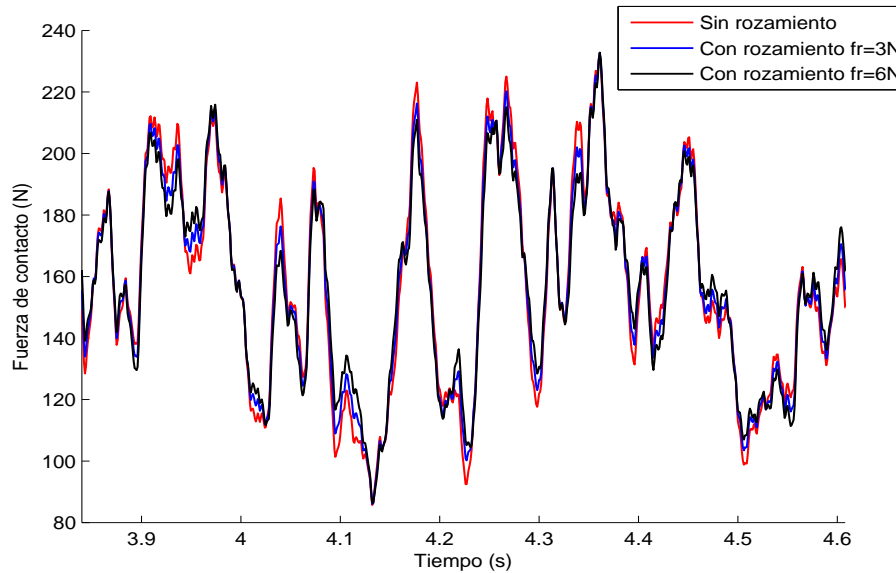
#### 3.4.1 Efecto del rozamiento en la mesilla

Tal y como se contempla en 2.1.1, se puede incluir rozamiento en el movimiento vertical de la mesilla con respecto del resto del cuerpo del pantógrafo. Este rozamiento se ha visto que influye en el movimiento de la misma cuando se ha simulado el pantógrafo solo, (Figura 2.16). Así pues, es de esperar que esta influencia también se vea reflejada en la interacción con la catenaria.

En la Figura 3.5 se muestran los resultados obtenidos de la fuerza de contacto cuando no hay rozamiento en el pantógrafo, cuando este es de  $\pm 3 N$ , o finalmente cuando su valor es de  $\pm 6 N$ . Se ha utilizado un valor del parámetro



$k_t = 10^{-4} m/s$  para que la función arcotangente, con la que se aproxima la fuerza de rozamiento, no incluya ningún error significativo adicional.



**Figura 3.5:** Fuerza de contacto. Efecto del rozamiento en la mesilla.

Se puede observar que al aumentar el valor del rozamiento en la mesilla del pantógrafo, los valores máximos de la mayoría de los picos de fuerza disminuyen mientras los mínimos aumentan, es decir, se acota el rango de valores de la fuerza de contacto.

En la Tabla 3.1 se presentan ciertos valores estadísticos calculados a partir los datos mostrados en la Figura 3.5. Se observa claramente que aunque los valores medio, mínimo y máximo de la fuerza se mantienen muy similares, la desviación típica decrece notablemente cuando se aumenta el valor del rozamiento. Por consiguiente, el máximo estadístico disminuye a la vez que aumenta el respectivo mínimo ya que estos se calculan sumándole o restándole al valor medio el triple de la desviación típica respectivamente.



	$f_r = 0$ N	$f_r = \pm 3$ N	$f_r = \pm 6$ N
Valor medio	156.648	156.6819	156.7182
Desviación	33.8488	31.972	30.6991
Máximo estadístico	258.19	252.5975	248.8155
Máximo real	231.9766	232.7138	232.8389
Mínimo estadístico	55.1016	60.7662	64.6209
Mínimo real	85.6973	86.0519	86.3763

**Tabla 3.1:** Estadísticas de la fuerza de contacto para diferentes valores de rozamiento en la mesilla. (Valores en N.)

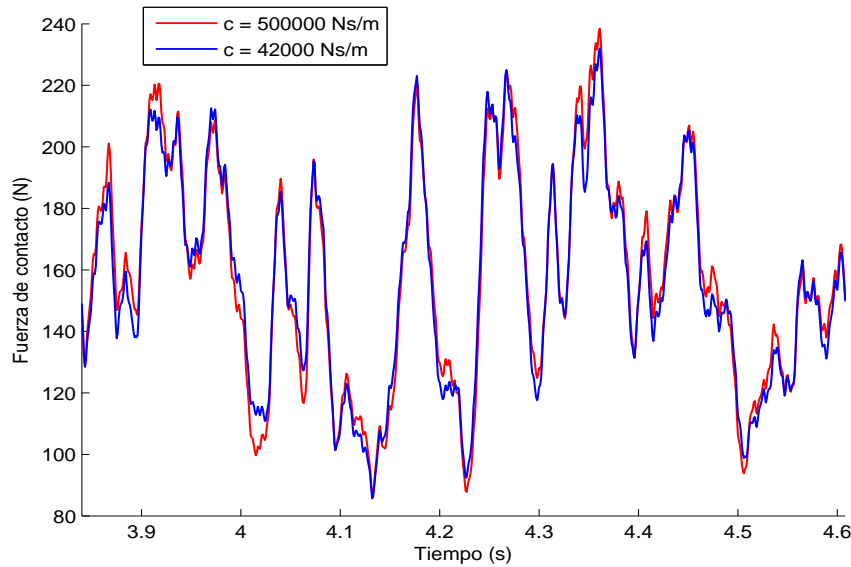
### 3.4.2 Efecto del amortiguador

El amortiguador es un elemento del pantógrafo que también puede influir en la fuerza de contacto entre este y el cable de contacto. En primer lugar se va a analizar el efecto en dicha fuerza que tiene el variar el valor de la constante del amortiguador.

En la Figura 3.6 se muestran los resultados para un valor de dicha constante de amortiguamiento del pantógrafo de  $c = 42000$  Ns/m y para otro superior de  $c = 500000$  Ns/m. En principio, de la figura se deduce que los efectos no son muy relevantes aunque sí se distingue que para mayor valor del amortiguamiento, la fuerza de contacto presenta más oscilación, es decir, máximos más elevados y mínimos locales menores.

De la Tabla 3.2 se concluye que las mayores diferencias se encuentran en el máximo real de la fuerza. Todos los demás parámetros son bastantes similares aunque se puede intuir una tendencia al alza en ellos cuando el valor del amortiguamiento es mayor.

Si se realiza la transformada de Fourier y se obtiene el contenido en frecuencia de estas señales hasta los 20 Hz se puede representar la Figura 3.7. En ella



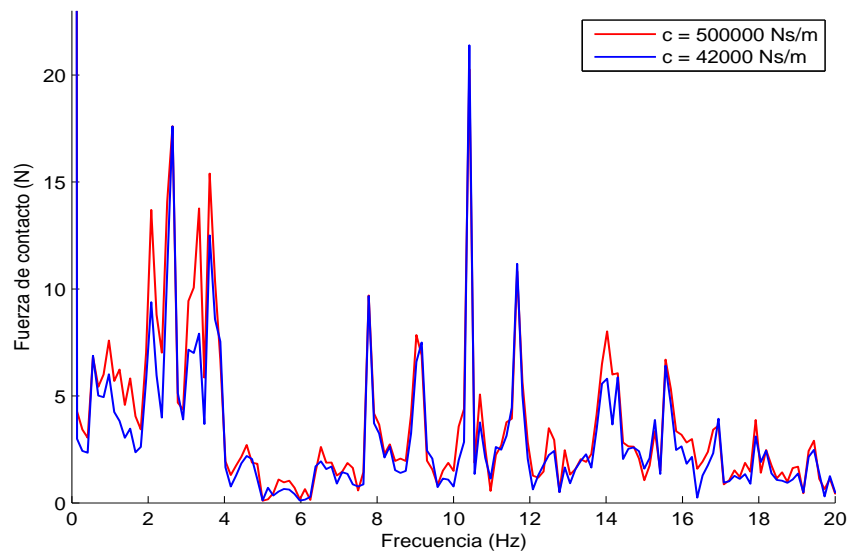
**Figura 3.6:** Efecto del valor del amortiguamiento en la fuerza de contacto.

	$c = 42000 \text{ Ns/m}$	$c = 500000 \text{ Ns/m}$
Valor medio	156.648	157.775
Desviación	33.8488	34.9722
Máximo estadístico	258.19	262.6916
Máximo real	231.9766	238.4419
Mínimo estadístico	55.1016	52.8583
Mínimo real	85.6973	86.4863

**Tabla 3.2:** Estadísticas de la fuerza de contacto para diferentes valores de amortiguamiento en el pantógrafo. (Valores en N.)

puede verse que en general las amplitudes son mayores para un amortiguamiento más elevado, siendo esta diferencia especialmente notable en el rango de las bajas frecuencias.

Otro aspecto que se puede analizar del amortiguador es cómo influye el que este actúe en tan solo una dirección del movimiento o en ambas. En el caso,



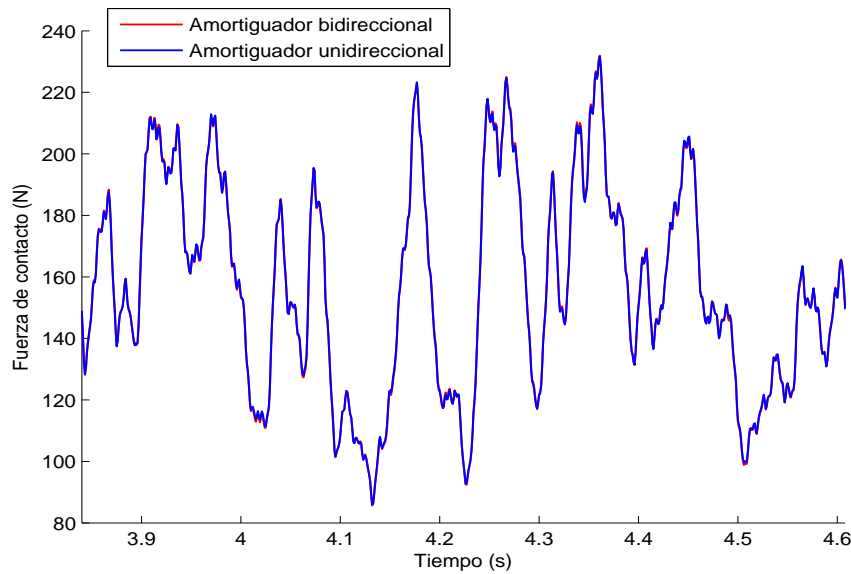
**Figura 3.7:** Contenido en frecuencia de la fuerza de contacto. Efecto del valor del amortiguamiento.

tal y como se expone en [6], de que el amortiguador sea unidireccional, tan solo actúa durante el movimiento descendiente del cuerpo del pantógrafo.

Con un valor de  $c = 42000 \text{ Ns/m}$ , como se puede apreciar en la Figura 3.8, no hay ninguna variación en la fuerza de contacto entre el pantógrafo y la catenaria. Con este valor de amortiguamiento, es totalmente indiferente para la dinámica de la interacción que el amortiguador actúe en una o en ambas direcciones.

En cambio, para un valor de amortiguamiento bastante más elevado, en concreto con  $c = 500000 \text{ Ns/m}$ , la fuerza de contacto sí se ve notablemente influenciada por el hecho de que el amortiguador del pantógrafo sea unidireccional o bidireccional. Esto se puede apreciar claramente en la Figura 3.9.

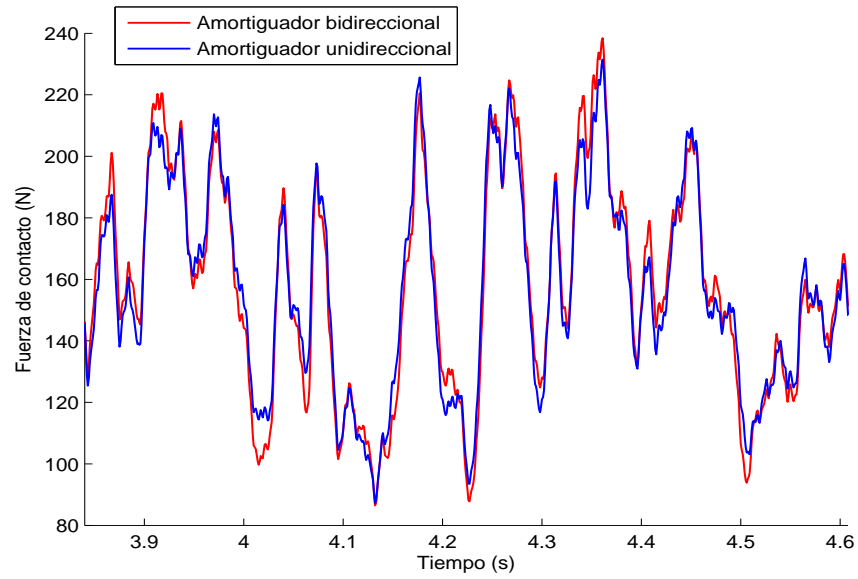




**Figura 3.8:** Fuerza de contacto. Pantógrafo con amortiguamiento unidireccional y bidireccional de valor  $c = 42000 \text{Ns/m}$ .

El hecho de que actúe tan solo en la dirección descendente del movimiento del cuerpo del pantógrafo, resulta en unos valores de fuerza de contacto con la catenaria más acotados, lo cual es totalmente deseable en la interacción.

A modo de resumen de estos dos últimos ensayos se presenta la Tabla 3.3. Con estos datos se reafirma a nivel numérico, que para un valor de amortiguamiento pequeño la fuerza de contacto no varía, mientras que cuando el amortiguamiento aumenta, la dispersión de los valores de esta fuerza disminuye de forma apreciable.



**Figura 3.9:** Fuerza de contacto. Pantógrafo con amortiguamiento unidireccional y bidireccional de valor  $c = 500000 \text{Ns/m}$ .

	$c = 42000 \text{ Ns/m}$		$c = 500000 \text{ Ns/m}$	
	Bidireccional	Unidireccional	Bidireccional	Unidireccional
Valor medio	156.648	156.6232	157.775	157.351
Desviación	33.8488	33.7053	34.9722	32.9404
Máximo est.	258.19	257.7392	262.6916	256.1722
Máximo real	231.9766	231.6421	238.4419	231.4817
Mínimo est.	55.1016	55.5072	52.8583	58.5297
Mínimo real	85.6973	85.8321	86.4863	87.2551

**Tabla 3.3:** Estadísticas de la fuerza de contacto para amortiguador bidireccional y unidireccional. (Valores en N.)



## Capítulo 4

# CONCLUSIONES

En este trabajo se ha desarrollado un modelo de cuerpos rígidos del pantógrafo DSA-380. Este modelo ha sido linealizado para observar las diferencias con el modelo no lineal. También se ha elaborado un modelo del barras flexibles del mismo pantógrafo con el fin de observar la influencia de la flexibilidad de las barras en la dinámica del mecanismo.

Se ha analizado la interacción del modelo no lineal de barras rígidas con la catenaria, incluyendo distintas no linealidades adicionales al pantógrafo. A partir de todo este trabajo realizado y reflejado en el presente documento, se van a resumir las principales conclusiones extraídas:

- La utilización de modelos de pantógrafo lineales de masas concentradas queda justificada ante la poca variación que se observa en la respuesta temporal del modelo de barras rígidas y el mismo modelo linealizado. Tampoco se aprecia ninguna variación significativa en la respuesta de estos modelos en el dominio de la frecuencia.



- La inclusión de la flexibilidad de las barras tiene un efecto más importante en la respuesta temporal del mecanismo. No obstante, en el rango de frecuencias de 0 a 20 Hz su influencia es irrisoria. No se ha podido justificar el uso de tres masas en el modelo lineal que presenta el fabricante del pantógrafo DSA-380, ya que tan solo aparecen dos modos influyentes en el movimiento vertical de la mesilla en dicho rango de frecuencias.
- En cuanto a la interacción pantógrafo-catenaria, se observa que la incorporación de rozamiento al modelo tiene un efecto bastante considerable en la fuerza de contacto entre ambos sistemas. Dicho rozamiento acota el rango de valores de esta fuerza.
- El que el amortiguador actúe en tan solo un sentido, y no sea bidireccional, contribuye a disminuir la desviación de los valores de la fuerza de contacto, lo cual es deseable en la interacción entre el pantógrafo y la catenaria. Este efecto se evidencia para valores altos de la constante de amortiguamiento.

Siguiendo con la línea de investigación de este proyecto, el principal desarrollo que se propone es el de ajustar y verificar los parámetros del modelo de pantógrafo en base a ensayos experimentales.

Una vez los parámetros se correspondan con los del mecanismo real, uno de los principales objetivos futuros es reducir el coste computacional de la integración numérica, utilizando modelos simplificados y técnicas de reducción de modelos. Con ello se pretende realizar ensayos HIL (Hardware In the Loop) simulando a tiempo real la interacción pantógrafo-catenaria.

# Bibliografía

- [1] UNE-EN:50317. Aplicaciones ferroviarias – Sistemas de captación de corriente – Validación de la simulación de la interacción dinámica entre el pantógrafo y las líneas aéreas de contacto 2002.
- [2] Massat J, Laine J, Bobillot A. Pantograph-catenary dynamic simulation. *Vehicle System Dynamics* 2006; **44**:551–559.
- [3] Cho Y, Lee K, Park Y, Kang B, Kim K. Influence of contact wire pre-sag on the dynamics of pantograph/railway catenary. *International Journal of Mechanical Sciences* 2010; **52**:1470–1490.
- [4] Rauter FG, Pombo J, Ambrósio J, Chalansonnet J, Bobillot A, Pereira MS. Contact model for the Pantograph-Catenary interaction. *Journal of System Design and Dynamics* 2007; **1**:447–457.
- [5] Cabaço Antunes P. Development of multibody pantograph and finite element catenary models for application to High-speed railway operations. Master's Thesis, Técnico Lisboa Octubre 2012.
- [6] Labergri F. Modélisation du comportement dynamique du système pantographe-caténaire. PhD Thesis, Ecole Doctorale de Mécanique de Lyon, Ecole Centrale de Lyon 2000.



- [7] Ambrosio J, Rauter F, Pombo J, Pereira M. A flexible multibody pantograph model for the analysis of the catenary–pantograph contact. *Computational Mechanics, Computational Methods in Applied Sciences*, vol. 23. Springer Netherlands, 2011; 1–27.
- [8] Collina A, Carnevale ALCM. Effect of collector deformable modes in pantograph-catenary dynamic interaction. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 2009; **223**(1):1–14.
- [9] Zhou N, Zhang W, Li R. Dynamic performance of a pantograph-catenary system with the consideration of the appearance characteristics of contact surfaces. *Journal of Zhejiang University* 2011; .
- [10] Lee JH, Park TW. Development of a three-dimensional catenary model using cable elements based on absolute nodal coordinate formulation. *Journal of Mechanical Science and Technology* 2012; **26**(12):3933–3941.
- [11] Seo J, Sugiyama H, Shabana AA. Three-dimensional large deformation analysis of the multibody pantograph/catenary systems. *Nonlinear Dynamics* 2005; **42**:199–215.
- [12] Zhang W, Liu Y, Mei G. Evaluation of the coupled dynamical response of a pantograph–catenary system: contact force and stresses. *Vehicle System Dynamics* 2006; **44**(8):645–658.
- [13] Collina A, Bruni S. Numerical simulation of pantograph-overhead equipment interaction. *Vehicle System Dynamics* 2002; **38**(4):261–291.
- [14] Massat J. Modélisation du comportement dynamique du couple pantographe-caténaire. PhD Thesis, Laboratoire de Tribologie et Dynamique des Systèmes, Ecole Centrale de Lyon 2007.
- [15] Hedayati Kia S, Bartolini F, Mpanda-Mabwe A. Pantograph-catenary interaction model comparison. *Nonlinear Dynamics* 2004; :1584–1589.



- [16] Poetsch G, Evans J, Meisinger R, Kortacem W, Baldauf W, Veitl A, Wallaschek J. Pantograph / catenary dynamics and control. *Vehicle System Dynamics* 1997; **28**(2-3):159–195.
- [17] Gómez Monterde J. Mejora del Modelo de Interacción Dinámica Pantógrafo-Catenaria. Master's Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Ingeniería mecánica y de Materiales Julio 2013.
- [18] Mora Martínez H. Modelado de la interacción dinámica pantógrafo-catenaria. Master's Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Ingeniería mecánica y de Materiales Septiembre 2011.
- [19] Vidal V. Modelado mediante elementos finitos de configuración inicial de catenarias de ferrocarril. Master's Thesis, Universidad Politécnica de Valencia, Departamento de Ingeniería mecánica y de Materiales Septiembre 2011.





# Anexos





## Anexo A

# OBTENCIÓN DE LA ECUACIÓN DEL MOVIMIENTO

El propósito de este anexo es obtener de forma detallada la ecuación diferencial que define el movimiento del mecanismo del pantógrafo. El orden que se sigue es el mismo que cuando se han planteado estas expresiones de forma general en la sección 2.1, pero en este caso sí se describen exhaustivamente todos los términos y los pasos seguidos para su obtención.

En primer lugar, se obtienen las ecuaciones del lazo inferior formado por las barras fija, 1, 2 y 3, y las del lazo superior formado por las barras 1, 4, 5 y 6. Estas expresiones son las que constituyen las relaciones entre las variables dependientes y las independientes del problema, definidas en la ecuación (2.3).



$$\begin{aligned}x_1 + L_1 \cos \theta - L_2 \cos \theta_2 - L_3 \cos \theta_3 &= 0 \\y_1 + L_1 \sin \theta - L_2 \sin \theta_2 - L_3 \sin \theta_3 &= 0 \\x_4 + L_4 \cos \theta_4 - x_6 - L_5 \cos \theta_5 - L_6 \cos \theta_6 &= 0 \\y_4 + L_4 \sin \theta_4 - y_6 - L_5 \sin \theta_5 - L_6 \sin \theta_6 &= 0\end{aligned}\tag{A.1}$$

En ellas,  $\theta_4 = \theta_3 + \theta_{34} - \pi$ ,  $x_6 = x_1 + L_1 \cos(\theta_r + \theta)$  e  $y_6 = y_1 + L_1 \sin(\theta_r + \theta)$ . El ángulo  $\theta_{34}$  representa el ángulo constante entre la barra 3 y 4, y  $\theta_r$  es el ángulo entre la barra 1 y el punto 6, que también es fijo.

Este sistema de ecuaciones no lineal se puede resolver fácilmente de forma explícita ya que las dos primeras ecuaciones están desacopladas de las dos segundas. Con ello se obtienen las expresiones que relacionan a todos los ángulos de las barras con la coordenada independiente  $\theta$ .

Si se considera que  $A = x_1 + L_1 \cos \theta$ ,  $B = y_1 + L_1 \sin \theta$ ,  $C = \frac{A^2 + B^2 + L_2^2 - L_3^2}{2L_2}$  y  $D = \frac{A^2 + B^2 + L_3^2 - L_2^2}{2L_3}$ , la resolución del lazo inferior corresponde a:

$$\begin{aligned}\theta_2 &= 2 \arctan \left( \frac{B + \sqrt{A^2 + B^2 - C^2}}{C + A} \right) \\ \theta_3 &= 2\pi + 2 \arctan \left( \frac{B - \sqrt{A^2 + B^2 - D^2}}{D + A} \right)\end{aligned}\tag{A.2}$$

Con estos resultados ya se puede calcular el ángulo  $\theta_4$  y resolver la tercera y cuarta ecuación del sistema (A.1), del mismo modo que se ha hecho con las dos primeras.



Nombrando ahora las variables  $E = x_4 + L_4 \cos \theta_4 - x_6$ ,  $F = y_4 + L_4 \sin \theta_4 - y_6$ ,  $G = \frac{E^2 + F^2 + L_6^2 - L_5^2}{2L_6}$  y  $H = \frac{E^2 + F^2 + L_5^2 - L_6^2}{2L_5}$ , la solución al lazo superior queda de la forma:

$$\begin{aligned}\theta_5 &= 2 \arctan \left( \frac{F - \sqrt{E^2 + F^2 - H^2}}{H + E} \right) \\ \theta_6 &= 2 \arctan \left( \frac{F + \sqrt{E^2 + F^2 - G^2}}{G + E} \right)\end{aligned}\tag{A.3}$$

con lo que el problema de posición queda perfectamente definido. Cabe mencionar, que con estas expresiones anteriores, los ángulos obtenidos varían desde 0 a  $\pi$  radianes.

Para el problema de velocidades, será necesario conocer las relaciones existentes entre las velocidades angulares de las distintas barras y la velocidad angular de la barra 1, ya que esta es una velocidad generalizada. Estas velocidades angulares tan solo dependen de  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ . Derivando respecto de  $\theta$  las dos primeras ecuaciones de (A.1) se llega al siguiente sistema de ecuaciones cuyas incógnitas son las derivadas de las coordenadas dependientes con respecto de  $\theta$ , tal y como se plantea en (2.4):

$$\begin{bmatrix} L_2 \sin \theta_2 & L_3 \cos \theta_3 \\ -L_2 \cos \theta_2 & -L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d\theta_2}{d\theta} \\ \frac{d\theta_3}{d\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 \sin \theta \\ -L_1 \cos \theta \end{Bmatrix}\tag{A.4}$$

Resolviendo este sistema se obtiene  $K = \frac{d\theta_2}{d\theta}$  y  $J = \frac{d\theta_3}{d\theta} = \frac{d\theta_4}{d\theta}$ . Repitiendo el mismo procedimiento para las ecuaciones del lazo superior y resolviendo el sistema de ecuaciones que resulta, se obtiene  $R = \frac{d\theta_5}{d\theta}$  y  $S = \frac{d\theta_6}{d\theta}$ , con lo que el problema de velocidades también queda resuelto.



Por último, para acabar de tener explícitamente toda la cinemática, falta conocer las expresiones de las derivadas segundas de las variables dependientes respecto de  $\theta$ . Para ello, hay que derivar respecto de esta variable las ecuaciones (A.4), resultando el siguiente sistema de ecuaciones, también mencionado en (2.4):

$$\begin{bmatrix} L_2 \sin \theta_2 & L_3 \cos \theta_3 \\ -L_2 \cos \theta_2 & -L_3 \cos \theta_3 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{d^2 \theta_2}{d\theta^2} \\ \frac{d^2 \theta_3}{d\theta^2} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} L_1 \cos \theta - L_2 K^2 \cos \theta_2 - L_3 J^2 \cos \theta_3 \\ L_1 \sin \theta - L_2 K^2 \sin \theta_2 - L_3 J^2 \sin \theta_3 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.5})$$

cuya solución es  $dK = \frac{d^2 \theta_2}{d\theta^2}$  y  $dJ = \frac{d^2 \theta_3}{d\theta^2} = \frac{d^2 \theta_A}{d\theta^2}$ . Seguidamente se puede hacer lo mismo para las dos ecuaciones del lazo superior, resolver el sistema resultante y obtener  $dR = \frac{d^2 \theta_5}{d\theta^2}$  y  $dS = \frac{d^2 \theta_6}{d\theta^2}$ .

Así pues, con todo lo expuesto hasta este punto ya se pueden expresar las variables dependientes  $\mathbf{q}_a$  y sus primeras y segundas derivadas temporales con respecto a  $\mathbf{q}$  y  $\dot{\mathbf{q}}$  tal y como se muestra en la ecuación (2.5). Es decir, la cinemática del sistema está completamente resuelta de forma explícita.

El siguiente paso es obtener la ecuación del movimiento, para lo cual será necesario en primer lugar, desarrollar la expresión de la energía cinética en función de las coordenadas y velocidades generalizadas. Para ello es necesario tener las expresiones de las velocidades de los centros de gravedad de cada barra que compone el mecanismo, tal y como se puede observar en (2.7). Estas velocidades ya elevadas al cuadrado, ya que así se van a utilizar, son:



$$\begin{aligned}
 v_{G1}^2 &= L_{G1}^2 \dot{\theta}^2 \\
 v_{G2}^2 &= L_{G2}^2 \dot{\theta}_2^2 \\
 v_{G3}^2 &= L_2^2 \dot{\theta}_2^2 + L_{G3}^2 \dot{\theta}_3^2 + 2L_2 L_{G3} \dot{\theta}_2 \dot{\theta}_3 \cos(\theta_2 - \theta_3 + \theta_{3G}) \\
 v_{G4}^2 &= L_1^2 \dot{\theta}^2 + L_{G4}^2 \dot{\theta}_4^2 + 2L_1 L_{G4} \dot{\theta} \dot{\theta}_4 \cos(\theta - \theta_4 + \theta_{4G}) \\
 v_{G5}^2 &= r^2 \dot{\theta}^2 + L_{G5}^2 \dot{\theta}_5^2 + 2r L_{G5} \dot{\theta} \dot{\theta}_5 \cos(\theta + \theta_r - \theta_5 + \theta_{5G}) \\
 v_{G6}^2 &= r^2 \dot{\theta}^2 + L_5^2 \dot{\theta}_5^2 + 2r L_5 \dot{\theta} \dot{\theta}_5 \cos(\theta + \theta_r - \theta_5) + L_{G6}^2 \dot{\theta}_6^2 + \\
 &\quad + 2L_{G6} \dot{\theta}_6 \left[ r \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_r - \theta_6 + \theta_{6G}) + L_5 \dot{\theta}_5 \cos(\theta_5 - \theta_6 + \theta_{6G}) \right] \\
 v_{G7}^2 &= x_{i0}^2 + y_{i0}^2 + L_{G7}^2 \dot{\theta}_7^2 + \\
 &\quad + 2L_{G7} \dot{\theta}_7 \left[ y_{i0} \cos(\theta_7 - \theta_{7G}) - x_{i0} \sin(\theta_7 - \theta_{7G}) \right]
 \end{aligned} \tag{A.6}$$

Si se ponen en función de las coordenadas generalizadas y se sustituyen en la energía cinética, el resultado es tal y como sigue:

$$\begin{aligned}
 T &= \frac{1}{2} \left[ m_1 L_{G1}^2 + m_2 L_{G2}^2 K^2 + \right. \\
 &\quad + m_3 \left( L_2^2 K^2 + L_{G3}^2 J^2 + 2L_2 L_{G3} K J \cos(\theta_2 - \theta_3 + \theta_{3G}) \right) + \\
 &\quad + m_4 \left( L_1^2 + L_{G4}^2 J^2 + 2L_1 L_{G4} J \cos(\theta - \theta_4 + \theta_{4G}) \right) + \\
 &\quad + m_5 \left( r^2 + L_{G5}^2 R^2 + 2r L_{G5} R \cos(\theta + \theta_r - \theta_5 + \theta_{5G}) \right) + \\
 &\quad + m_6 \left( r^2 + L_5^2 R^2 + 2r L_5 R \cos(\theta + \theta_r - \theta_5) + L_{G6}^2 S^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2L_{G6} S \left[ r \cos(\theta + \theta_r - \theta_6 + \theta_{6G}) + L_5 R \cos(\theta_5 - \theta_6 + \theta_{6G}) \right] \right) + \\
 &\quad + I_1 + I_2 K^2 + (I_3 + I_4) J^2 + I_5 R^2 + I_6 S^2 \left. \right] \dot{\theta}^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{2} m_7 \left[ x_{i0}^2 + y_{i0}^2 + L_{G7}^2 \dot{\theta}_7^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2L_{G7} \dot{\theta}_7 \left( y_{i0} \cos(\theta_7 - \theta_{7G}) - x_{i0} \sin(\theta_7 - \theta_{7G}) \right) \right] + \frac{1}{2} I_7 \dot{\theta}_7^2
 \end{aligned} \tag{A.7}$$



Reordenando términos y agrupando esta expresión, la energía cinética se puede expresar como:

$$T = A\dot{\theta}^2 + Bx_{i0}^2 + Xy_{i0}^2 + \Delta\dot{\theta}_7^2 + E\dot{\theta}_7x_{i0} + \Phi\dot{\theta}_7y_{i0} = \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{J}\dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.8})$$

donde  $A, B, X, \Delta, E$  y  $\Phi$  son variables que dependen de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ . Por lo tanto, según la ecuación (2.7), la matriz  $\mathbf{J}$  de inercia generalizada del sistema, queda:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & B & 0 & E \\ 0 & 0 & X & \Phi \\ 0 & E & \Phi & \Delta \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Una vez ya obtenida la energía cinética, el siguiente paso es calcular la energía potencial, donde se tienen en cuenta las fuerzas que provienen del potencial gravitatorio y las fuerzas elásticas de los resortes. Desarrollando la ecuación (2.8), se llega a:

$$\begin{aligned} V = & \frac{1}{2}k_r(\theta - \theta_{r0})^2 + \frac{1}{2}k_l(l_1 - l_{10})^2 + \frac{1}{2}k_l(l_2 - l_{20})^2 + \\ & + g[m_1(y_1 + L_{G1}\sin(\theta - \theta_G)) + m_2(L_{G2}\sin(\theta_2 - \theta_{2G})) + \\ & + m_3(L_2\sin\theta_2 + L_{G3}\sin(\theta_3 - \theta_{3G})) + \\ & + m_4(y_1 + L_1\sin\theta + L_{G4}\sin(\theta_4 - \theta_{4G})) + \\ & + m_5(y_1 + r\sin(\theta + \theta_r) + L_{G5}\sin(\theta_5 - \theta_{5G})) + \\ & + m_6(y_1 + r\sin(\theta + \theta_r) + L_5\sin\theta_5 + L_{G6}\sin(\theta_6 - \theta_{6G})) + \\ & + m_7(y_{10} + L_{G7}\sin(\theta_7 - \theta_{7G}))] \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$





Queda por tanto definir las longitudes de los resortes lineales, que unen la mesilla al cuerpo del mecanismo, en función de las coordenadas generalizadas. Estas expresiones son:

$$\begin{aligned}
 l_1 &= \sqrt{\left(x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 - x_{10} + \frac{L_7}{2} \cos \theta_7\right)^2 +} \\
 &\quad + \sqrt{\left(y_1 + L_1 \sin \theta + L_4 \sin \theta_4 - y_{10} + \frac{L_7}{2} \sin \theta_7\right)^2} \\
 l_2 &= \sqrt{\left(x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 - x_{10} - \frac{L_7}{2} \cos \theta_7\right)^2 +} \\
 &\quad + \sqrt{\left(y_1 + L_1 \sin \theta + L_4 \sin \theta_4 - y_{10} - \frac{L_7}{2} \sin \theta_7\right)^2}
 \end{aligned} \tag{A.11}$$

Llegados a este punto ya se conocen las energías cinética y potencial, por tanto para poder aplicar la ecuación de Lagrange tan solo queda obtener el vector de fuerzas generalizadas en el cual aparecen tanto el momento que produce el amortiguador  $M_a$  sobre la barra 1 como las acciones externas directamente aplicadas al mecanismo, que en este caso concreto son una fuerza  $F$  sobre la mesilla, y un par  $M$  sobre la barra 1. Aplicando el principio de los trabajos virtuales descrito en (2.9) se tiene:

$$-F \delta y_{10} + (M_a + M) \delta \theta = \mathbf{Q}^T \delta \mathbf{q} \tag{A.12}$$

Para obtener el momento que crea el amortiguador hay que observar la Figura A.1. Este momento resulta del producto vectorial entre el vector de fuerza del amortiguador y el vector de distancia entre el punto de acción de la fuerza con el punto 1, es decir  $\vec{M}_a = \vec{F}_a \wedge \vec{r}$ . Para calcular  $\vec{F}_a$  es necesario obtener la velocidad del punto  $1_p$  y proyectarla según la dirección de dicha fuerza, que a su vez es variable. Este vector velocidad del punto  $1_p$  es:

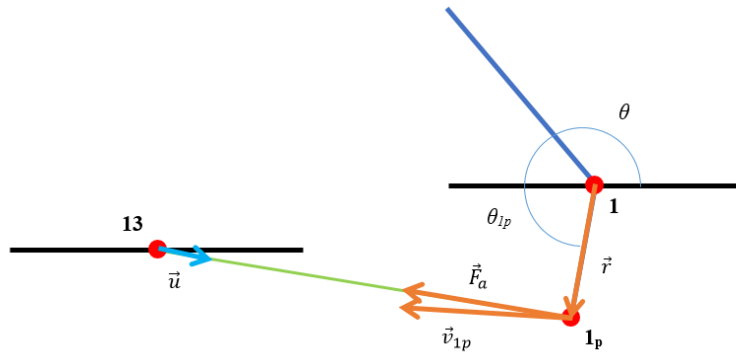


Figura A.1: Fuerza ejercida por el amortiguador.

$$\vec{v}_{1p} = \begin{Bmatrix} -L_{1p} \dot{\theta} \sin(\theta + \theta_{1p}) \\ L_{1p} \dot{\theta} \cos(\theta + \theta_{1p}) \end{Bmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Si ahora se define un vector unitario  $\vec{u}$  en la dirección de actuación del amortiguador, resulta:

$$\vec{u} = \begin{Bmatrix} x_{1p} - x_{13} \\ y_{1p} - y_{13} \end{Bmatrix} \frac{1}{l_a} \quad (\text{A.14})$$

donde las coordenadas del punto fijo 13 son conocidas, las coordenadas del punto  $1_p$  son  $x_{1p} = x_1 + L_{1p} \cos(\theta + \theta_{1p})$  e  $y_{1p} = y_1 + L_{1p} \sin(\theta + \theta_{1p})$  y la longitud  $l_a = \sqrt{(x_{1p} - x_{13})^2 + (y_{1p} - y_{13})^2}$  es la del amortiguador en cualquier instante.

Por lo tanto, realizando el producto escalar entre estos vectores se obtiene la velocidad del punto  $1_p$  proyectada en la dirección de actuación del amortiguador.



$$v_a = v_{1p}' \cdot \vec{u} \quad (\text{A.15})$$

Así pues, el módulo de la fuerza que ejerce el amortiguador no es más que:

$$f_a = -c v_a \quad (\text{A.16})$$

y el vector fuerza se obtiene multiplicando este módulo por el vector unitario definido anteriormente, tal que:

$$\vec{F}_a = f_a \vec{u} \quad (\text{A.17})$$

Por otro lado, el vector  $\vec{r}$  que une los puntos  $1_p$  y 1 es:

$$\vec{r} = \begin{Bmatrix} x_{1p} - x_1 \\ y_{1p} - y_1 \end{Bmatrix} \quad (\text{A.18})$$

Y finalmente, el momento que ejerce el amortiguador resulta del producto vectorial entre estos dos últimos vectores, siendo  $M_a$  la tercera componente de dicho resultado. Así pues, el vector de fuerzas generalizadas ya queda completamente definido.

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} M + M_a \\ 0 \\ F \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.19})$$



Antes de pasar a la aplicación de la ecuación de Lagrange, se va a obtener la derivada del momento que ejerce el amortiguador con respecto a la coordenada  $\theta$ , ya que se necesita a la hora de calcular la matriz tangente del vector de fuerzas disipativas para la integración temporal, tal y como queda descrito en el apartado 3.3.3. La derivada de la longitud del amortiguador es:

$$\frac{dl_a}{d\theta} = \frac{-(x_{1p} - x_{13})L_{1p} \sin(\theta + \theta_{1p}) + (y_{1p} - y_{13})L_{1p} \cos(\theta + \theta_{1p})}{l_a} \quad (\text{A.20})$$

Seguidamente, se puede obtener la variación del vector unitario  $\vec{u}$  con el ángulo  $\theta$  como:

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \left\{ \begin{array}{l} -L_{1p} \sin(\theta + \theta_{1p})l_a - (x_{1p} - x_{13})\frac{dl_a}{d\theta} \\ L_{1p} \cos(\theta + \theta_{1p})l_a - (y_{1p} - y_{13})\frac{dl_a}{d\theta} \end{array} \right\} \frac{1}{l_a^2} \quad (\text{A.21})$$

Por otro lado, la derivada de la velocidad  $v_{1p}^{\vec{v}}$  resulta:

$$\frac{dv_{1p}^{\vec{v}}}{d\theta} = \left\{ \begin{array}{l} -L_{1p} \cos(\theta + \theta_{1p})\dot{\theta} + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} x_{1p} \\ -L_{1p} \sin(\theta + \theta_{1p})\dot{\theta} + \frac{\gamma}{\Delta t \beta} y_{1p} \end{array} \right\} \quad (\text{A.22})$$

En este caso hay que considerar que según las hipótesis del algoritmo de integración empleado, las velocidades dependen de las coordenadas de posición como se muestra en (3.18). La derivada del módulo de esta velocidad proyectada en la dirección de actuación del amortiguador es:

$$\frac{dv_a}{d\theta} = \left( \frac{dv_{1p}^{\vec{v}}}{d\theta} \right)^T \vec{u} + v_{1p}^{\vec{v}T} \left( \frac{d\vec{u}}{d\theta} \right) \quad (\text{A.23})$$



y la derivada del módulo de la fuerza que ejerce el amortiguador no es más que el resultado de multiplicar la expresión anterior por el valor de la constante de amortiguamiento cambiada de signo. Con lo cual, proyectando el módulo de esta fuerza con el vector unitario de la dirección de actuación de la misma se tiene:

$$\frac{d\vec{F}_a}{d\theta} = \frac{df_a}{d\theta} \vec{u} + f_a \frac{d\vec{u}}{d\theta} \quad (\text{A.24})$$

Para calcular la derivada del momento que ejerce el amortiguador, tan solo falta obtener la derivada del vector de posición  $\vec{r}$ , siendo esta:

$$\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \left\{ \begin{array}{l} -L_{1p} \sin(\theta + \theta_{1p}) \\ L_{1p} \cos(\theta + \theta_{1p}) \end{array} \right\} \quad (\text{A.25})$$

Con lo que la derivada buscada del momento  $M_a$  queda finalmente:

$$\frac{d\vec{M}_a}{d\theta} = \frac{d\vec{F}_a}{d\theta} \wedge \vec{r} + \vec{F}_a \wedge \frac{d\vec{r}}{d\theta} \quad (\text{A.26})$$

A partir de este momento ya se conocen todos los elementos para poder aplicar la ecuación de Lagrange y obtener la ecuación diferencial del movimiento. A continuación se van a ir desarrollando cada una de las derivadas que requiere la aplicación de esta ecuación. En primer lugar, se obtienen las derivadas de la energía cinética con respecto a  $\dot{\mathbf{q}}$ . Esto es:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} = 2A\dot{\theta}$$



$$\begin{aligned}\frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{10}} &= 2B\dot{x}_{10} + E\dot{\theta}_7 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_{10}} &= 2X\dot{y}_{10} + \Phi\dot{\theta}_7 \\ \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_7} &= 2\Delta\dot{\theta}_7 + E\dot{x}_{10} + \Phi\dot{y}_{10}\end{aligned}\quad (\text{A.27})$$

O de forma matricial, la expresión anterior se puede agrupar como:

$$\frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2B & 0 & E \\ 0 & 0 & 2X & \Phi \\ 0 & E & \Phi & 2\Delta \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \mathbf{\Lambda} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.28})$$

en la cual  $\mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\mathbf{J}) + \mathbf{J}$ .

Derivando esta expresión anterior con respecto del tiempo se tiene:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) &= 2A\ddot{\theta} + 2\frac{dA}{dt}\dot{\theta}^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{x}_{10}} \right) &= 2B\ddot{x}_{10} + E\ddot{\theta}_7 + 2\frac{dB}{dx_{10}}x_{10}^2 + \frac{dE}{d\theta_7}\dot{\theta}_7^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{y}_{10}} \right) &= 2X\ddot{y}_{10} + \Phi\ddot{\theta}_7 + 2\frac{dX}{dy_{10}}y_{10}^2 + \frac{d\Phi}{d\theta_7}\dot{\theta}_7^2 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}_7} \right) &= 2\Delta\ddot{\theta}_7 + E\ddot{x}_{10} + \Phi\ddot{y}_{10} + 2\frac{d\Delta}{d\theta_7}\dot{\theta}_7^2 + \frac{dE}{dx_{10}}x_{10}^2 + \\ &\quad + \frac{d\Phi}{dy_{10}}y_{10}^2\end{aligned}\quad (\text{A.29})$$



las cuales también se pueden agrupar y expresar de forma matricial como sigue:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{\mathbf{q}}} = \begin{bmatrix} 2A & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2B & 0 & E \\ 0 & 0 & 2X & \Phi \\ 0 & E & \Phi & 2\Delta \end{bmatrix} \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \begin{bmatrix} 2 \frac{dA}{d\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 \frac{dB}{dx_{10}} & 0 & \frac{dE}{d\theta_7} \\ 0 & 0 & 2 \frac{dX}{dy_{10}} & \frac{d\Phi}{d\theta_7} \\ 0 & \frac{dE}{dx_{10}} & \frac{d\Phi}{dy_{10}} & 2 \frac{d\Delta}{d\theta_7} \end{bmatrix} \dot{\mathbf{q}} = \Lambda \ddot{\mathbf{q}} + \dot{\mathbf{q}}^T \Gamma \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.30})$$

Los elementos que componen la matriz  $\Gamma$  son:

$$\begin{aligned} \frac{dA}{d\theta} = & m_2 L_{G2}^2 K dK + m_3 (L_2^2 K dK + L_{G3}^2 J dJ + \\ & + L_2 L_{G3} ((J dK + K dJ) \cos(\theta_2 - \theta_3 + \theta_{3G}) - KJ \sin(\theta_2 - \theta_3 + \theta_{3G})(K - J))) + \\ & + m_4 (L_{G4}^2 J dJ + L_1 L_{G4} (dJ \cos(\theta - \theta_4 + \theta_{4G}) - J \sin(\theta - \theta_4 + \theta_{4G})(1 - J))) + \\ & + m_5 (L_{G5}^2 R dR + r L_{G5} (dR \cos(\theta + \theta_r - \theta_5 + \theta_{5G}) - R \sin(\theta + \theta_r - \theta_5 + \theta_{5G})(1 - R))) + \\ & + m_6 [L_5^2 R dR + r L_5 (dR \cos(\theta + \theta_r - \theta_5) - R \sin(\theta + \theta_r - \theta_5)(1 - R)) + \\ & + L_{G6}^2 S dS + L_{G6} (dS [r \cos(\theta + \theta_r - \theta_6 + \theta_{6G}) + L_5 R \cos(\theta_5 - \theta_6 + \theta_{6G})] + \\ & + S [-r \sin(\theta + \theta_r - \theta_6 + \theta_{6G})(1 - S) + L_5 (dR \cos(\theta_5 - \theta_6 + \theta_{6G}) - \\ & - R \sin(\theta_5 - \theta_6 + \theta_{6G})(R - S))]) + \\ & + I_2 K dK + (I_3 + I_4) J dJ + I_5 R dR + I_6 S dS \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\frac{dB}{dx_{10}} = 0 & \quad \frac{dE}{dx_{10}} = 0 & \quad \frac{dE}{d\theta_7} = -m_7 L_{G7} \cos(\theta_7 - \theta_{7G}) & \quad \frac{dX}{dy_{10}} = 0 \\ \frac{d\Phi}{dy_{10}} = 0 & \quad \frac{d\Phi}{d\theta_7} = -m_7 L_{G7} \sin(\theta_7 - \theta_{7G}) & \quad \frac{d\Delta}{d\theta_7} = 0\end{aligned}$$

Respecto a la energía cinética, resta obtener sus derivadas con respecto a las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ . Esta expresión ya en forma matricial y en función de los parámetros obtenidos anteriormente queda:

$$\frac{\partial T}{\partial \mathbf{q}} = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{q}} \quad (\text{A.31})$$

Lo único que falta por calcular de la ecuación de Lagrange es el término de las derivadas de la energía potencial con respecto de las coordenadas generalizadas  $\mathbf{q}$ . En primer lugar se detallan las derivadas las funciones  $l_1$  y  $l_2$  descritas en la ecuación (A.11), ya que serán necesarias posteriormente.

Las derivadas de  $l_1(\mathbf{q})$  con respecto de  $\mathbf{q}$  que componen el vector  $\frac{dl_1}{d\mathbf{q}}$  son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l_1}{\partial \theta} = & \frac{(-L_1 \sin \theta - L_4 J \sin \theta_4) \left( x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 + \frac{L_7}{2} \cos \theta_7 - x_{10} \right)}{l_1} + \\ & + \frac{(L_1 \cos \theta + L_4 J \cos \theta_4) \left( y_1 + L_1 \sin \theta + L_4 \sin \theta_4 + \frac{L_7}{2} \sin \theta_7 - y_{10} \right)}{l_1} = \frac{Num1}{l_1}\end{aligned}$$





$$\begin{aligned}\frac{\partial l_1}{\partial x_{10}} &= -\frac{x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 + \frac{L_7}{2} \cos \theta_7 - x_{10}}{l_1} \\ \frac{\partial l_1}{\partial y_{10}} &= -\frac{y_1 + L_1 \sin \theta + L_4 \sin \theta_4 + \frac{L_7}{2} \sin \theta_7 - y_{10}}{l_1} \\ \frac{\partial l_1}{\partial \theta_7} &= \frac{(x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 + \frac{L_7}{2} \cos \theta_7 - x_{10}) \left(-\frac{L_7}{2} \sin \theta_7\right)}{l_1} + \\ &+ \frac{(y_1 + L_1 \sin \theta + L_4 \sin \theta_4 + \frac{L_7}{2} \sin \theta_7 - y_{10}) \frac{L_7}{2} \cos \theta_7}{l_1} = \frac{Num2}{l_1}\end{aligned}\quad (A.32)$$

De forma análoga, las derivadas de  $l_2(\mathbf{q})$  con respecto de  $\mathbf{q}$ , que corresponden a cada una de las componentes del vector  $\frac{dl_2}{d\mathbf{q}}$  resultan:

$$\begin{aligned}\frac{\partial l_2}{\partial \theta} &= \frac{(-L_1 \sin \theta - L_4 J \sin \theta_4) \left(x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 - \frac{L_7}{2} \cos \theta_7 - x_{10}\right)}{l_2} + \\ &+ \frac{(L_1 \cos \theta + L_4 J \cos \theta_4) \left(y_1 + L_1 \sin \theta + L_4 \sin \theta_4 - \frac{L_7}{2} \sin \theta_7 - y_{10}\right)}{l_2} = \frac{Num3}{l_2} \\ \frac{\partial l_2}{\partial x_{10}} &= -\frac{x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 - \frac{L_7}{2} \cos \theta_7 - x_{10}}{l_2} \\ \frac{\partial l_2}{\partial y_{10}} &= -\frac{y_1 + L_1 \sin \theta + L_4 \sin \theta_4 - \frac{L_7}{2} \sin \theta_7 - y_{10}}{l_2} \\ \frac{\partial l_2}{\partial \theta_7} &= \frac{(x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 - \frac{L_7}{2} \cos \theta_7 - x_{10}) \frac{L_7}{2} \sin \theta_7}{l_2} + \\ &+ \frac{(y_1 + L_1 \sin \theta + L_4 \sin \theta_4 - \frac{L_7}{2} \sin \theta_7 - y_{10}) \left(-\frac{L_7}{2} \cos \theta_7\right)}{l_2} = \frac{Num4}{l_2}\end{aligned}\quad (A.33)$$



Y ahora ya se dispone de todos los cálculos previos necesarios para obtener las derivadas de la energía potencial con respecto a  $\mathbf{q}$  tal y como sigue:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}} &= \begin{bmatrix} k_r(\theta - \theta_{r0}) & k_l(l_1 - l_{10}) & k_l(l_2 - l_{20}) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial l_1}{\partial \theta} & \frac{\partial l_1}{\partial x_{10}} & \frac{\partial l_1}{\partial y_{10}} & \frac{\partial l_1}{\partial \theta_7} \\ \frac{\partial l_2}{\partial \theta} & \frac{\partial l_2}{\partial x_{10}} & \frac{\partial l_2}{\partial y_{10}} & \frac{\partial l_2}{\partial \theta_7} \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} G_\theta \\ G_{x_{10}} \\ G_{y_{10}} \\ G_{\theta_7} \end{bmatrix} = \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} + \mathbf{G} \end{aligned} \quad (\text{A.34})$$

En esta expresión, las componentes del vector  $\mathbf{G}$ , provenientes de derivar con respecto a  $\mathbf{q}$  los términos de la energía potencial asociados a la gravedad, son las que se detallan a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial V}{\partial \theta} &= g [m_1 L_{G1} \cos(\theta - \theta_G) + m_2 L_{G2} K \cos(\theta_2 - \theta_{2G}) + \\ &+ m_3 (L_2 K \cos \theta_2 + L_{G3} J \cos(\theta_3 - \theta_{3G})) + \\ &+ m_4 (L_1 \cos \theta + L_{G4} J \cos(\theta_4 - \theta_{4G})) + \\ &+ m_5 (r \cos(\theta + \theta_r) + L_{G5} R \cos(\theta_5 - \theta_{5G})) + \\ &+ m_6 (r \cos(\theta + \theta_r) + L_5 R \cos \theta_5 + L_{G6} S \cos(\theta_6 - \theta_{6G}))] \end{aligned} \quad (\text{A.35})$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_{10}} = 0$$



$$\frac{\partial V}{\partial y_{10}} = gm_7$$

$$\frac{\partial V}{\partial \theta_7} = gm_7 L_{G7} \cos(\theta_7 - \theta_{7G})$$

Por lo tanto, ahora ya se dispone de todos los términos que aparecen en la ecuación de Lagrange, y simplemente adicionándolos se puede montar el sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden que describe el movimiento del mecanismo del pantógrafo (ecuación 2.10). En esta ecuación se puede ver reflejado el balance de fuerzas que actúan sobre el mecanismo durante su movimiento. En concreto, la ecuación expresa que las fuerzas inerciales se ven compensadas por las fuerzas centrífugas o de coriolis, las fuerzas gravitatorias, las elásticas, las disipativas, y las externas directamente aplicadas. Estas dos últimas agrupadas en el vector de fuerzas generalizadas.

$$\Lambda \ddot{\mathbf{q}} = \mathbf{Q} - \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{\Gamma} \dot{\mathbf{q}} - \mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}} - \mathbf{G} \quad (\text{A.36})$$

En el caso en que se quiera restringir el giro  $\theta_7$  de la mesilla, las ecuaciones a introducir en el sistema anterior son, mediante una primera alternativa:

$$\begin{aligned} \theta_7 &= 0 \\ \dot{\theta}_7 &= 0 \\ \ddot{\theta}_7 &= 0 \end{aligned} \quad (\text{A.37})$$



con las que simplemente se anula tanto el propio giro como sus derivadas temporales. La otra alternativa propuesta es la de igualar el movimiento horizontal del punto central de la mesilla (punto 10) con el del extremo de la barra 4 (punto 5). Con esto se consigue que no se cree ningún par sobre la mesilla que la pueda hacer girar. En este caso las ecuaciones que se habrían de resolver junto con la ecuación general del movimiento son:

$$\begin{aligned}x_{10} &= x_1 + L_1 \cos \theta + L_4 \cos \theta_4 \\x_{10} &= -L_1 \sin \theta - JL_4 \sin \theta_4 \\x_{10} &= L_1 \cos \theta - L_4 \left( J^2 \cos \theta_4 + dJ \sin \theta_4 \right)\end{aligned}\tag{A.38}$$



## Anexo B

# OBTENCIÓN DEL MODELO LINEALIZADO

En este anexo se va a describir detalladamente la obtención de las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez del modelo linealizado de pantógrafo, provenientes del modelo no lineal.

### B.1 Matriz de masa

En la obtención de la matriz de masa del modelo linealizado, las funciones no lineales que aparecen son básicamente armónicas y algún producto entre variables. Como se parte de la hipótesis de pequeños desplazamientos, y las nuevas variables son pequeñas variaciones respecto de una posición, (ver apartado 2.1.2) cualquier producto entre estas nuevas variables o sus derivadas temporales es despreciable.



Si se realiza el desarrollo en serie de Taylor de las funciones armónicas, se obtiene:

$$\begin{aligned}\sin(\Delta\theta + \theta_0) &\approx \sin\theta_0 + \Delta\theta \cos\theta_0 - \frac{\Delta\theta^2}{2} \sin\theta_0 \dots \\ \cos(\Delta\theta + \theta_0) &\approx \cos\theta_0 - \Delta\theta \sin\theta_0 - \frac{\Delta\theta^2}{2} \cos\theta_0 \dots\end{aligned}\tag{B.1}$$

De este desarrollo en serie se toman los dos primeros términos por ser aquellos lineales. Una vez ya linealizadas estas funciones trigonométricas se puede plantear de manera análoga al anexo A las ecuaciones de lazo, para relacionar en este caso con expresiones lineales, todas las variables dependientes con el ángulo  $\Delta\theta$ . Estas variables dependientes ahora son  $\{\Delta\theta_2, \Delta\theta_3, \Delta\theta_4, \Delta\theta_5, \Delta\theta_6\}$  que definen los incrementos de los diferentes giros de las barras 2 a 6 respectivamente.

Las ecuaciones linealizadas que definen el lazo inferior son:

$$\begin{aligned}x_1 + L_1(\cos\theta_0 - \Delta\theta \sin\theta_0) &= L_2(\cos\theta_{20} - \Delta\theta_2 \sin\theta_{20}) + L_3(\cos\theta_{30} - \Delta\theta_3 \sin\theta_{30}) \\ y_1 + L_1(\sin\theta_0 + \Delta\theta \cos\theta_0) &= L_2(\sin\theta_{20} + \Delta\theta_2 \cos\theta_{20}) + L_3(\sin\theta_{30} + \Delta\theta_3 \cos\theta_{30})\end{aligned}\tag{B.2}$$

las cuales corresponden a las dos primeras ecuaciones descritas en (A.1). Si se agrupan todos los términos constantes del sistema anterior y se reordena, queda:



$$\begin{aligned} a\Delta\theta_2 + b\Delta\theta_3 &= c\Delta\theta + d \\ e\Delta\theta_2 + f\Delta\theta_3 &= g\Delta\theta + h \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

cuya solución es:

$$\begin{aligned} \Delta\theta_2 &= k\Delta\theta + l \\ \Delta\theta_3 &= i\Delta\theta + j \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

$$\text{donde } i = \frac{g - \frac{ec}{a}}{f - \frac{be}{a}}, \quad j = \frac{h - \frac{ed}{a}}{f - \frac{be}{a}}, \quad k = \frac{c - bi}{a} \quad \text{y} \quad j = \frac{d - bj}{a}.$$

Ahora bien, como  $\Delta\theta_4 = \Delta\theta_3$ , ya que entre las barras 3 y 4 no hay articulación, las ecuaciones linealizadas que definen el lazo superior quedan como:

$$\begin{aligned} x_4 + L_4(\cos\theta_{40} - \Delta\theta_4 \sin\theta_{40}) &= x_6 + L_5(\cos\theta_{50} - \Delta\theta_5 \sin\theta_{50}) + L_6(\cos\theta_{60} - \Delta\theta_6 \sin\theta_{60}) \\ y_4 + L_4(\sin\theta_{40} + \Delta\theta_4 \cos\theta_{40}) &= y_6 + L_5(\sin\theta_{50} + \Delta\theta_5 \cos\theta_{50}) + L_6(\sin\theta_{60} + \Delta\theta_6 \cos\theta_{60}) \end{aligned} \quad (\text{B.5})$$

Este sistema de ecuaciones también se puede reordenar, y agrupando todos los términos constantes queda del siguiente modo:



$$\begin{aligned}m\Delta\theta_5 + n\Delta\theta_6 &= o\Delta\theta_4 + p \\ q\Delta\theta_5 + r\Delta\theta_6 &= s\Delta\theta_4 + t\end{aligned}\tag{B.6}$$

cuya solución adopta la forma:

$$\begin{aligned}\Delta\theta_5 &= w\Delta\theta_4 + x = w i\Delta\theta + w j + x \\ \Delta\theta_6 &= u\Delta\theta_4 + v = u i\Delta\theta + u j + v\end{aligned}\tag{B.7}$$

$$\text{donde } u = \frac{s - \frac{qo}{m}}{r - \frac{qn}{m}}, \quad v = \frac{t - \frac{qp}{m}}{r - \frac{qn}{m}}, \quad w = \frac{o - nu}{m} \quad \text{y} \quad x = \frac{p - nv}{m}.$$

Una vez conocida la reacción lineal entre las distintas variables dependientes del problema y la coordenada generalizada  $\Delta\theta$ , es decir, se ha linealizado la ecuación (2.3), es inmediato obtener las derivadas temporales y las derivadas con respecto a  $\Delta\theta$  de estas coordenadas dependientes. Así pues se resuelve por completo el problema cinemático de forma linealizada.

A continuación, también es posible obtener las velocidades de los centros de gravedad de cada barra en función de las coordenadas independientes del sistema linealizado y de sus respectivas derivadas temporales. Tras el proceso de linealización llevado a cabo, las ecuaciones (A.6) resultan:





$$\begin{aligned}
 v_{G1}^2 &= L_{G1}^2 \dot{\Delta\theta}^2 \\
 v_{G2}^2 &= L_{G2}^2 k^2 \dot{\Delta\theta}^2 \\
 v_{G3}^2 &= \left[ L_2^2 k^2 + L_{G3}^2 i^2 + 2L_2 L_{G3} k i \cos(\theta_{20} - \theta_{30} + \theta_{3G}) \right] \dot{\Delta\theta}^2 \\
 v_{G4}^2 &= \left[ L_1^2 k^2 + L_{G4}^2 i^2 + 2L_1 L_{G4} i \cos(\theta_0 - \theta_{40} + \theta_{4G}) \right] \dot{\Delta\theta}^2 \\
 v_{G5}^2 &= \left[ r^2 + L_{G5}^2 (w i)^2 + 2r L_{G5} w i \cos(\theta_0 + \theta_r - \theta_{50} + \theta_{5G}) \right] \dot{\Delta\theta}^2 \\
 v_{G6}^2 &= \left[ r^2 + L_5^2 (w i)^2 + 2r L_5 w i \cos(\theta_0 + \theta_r - \theta_{50}) + L_{G6}^2 (u i)^2 + \right. \\
 &\quad \left. + 2L_{G6} u i [r \cos(\theta_0 + \theta_r - \theta_6 + \theta_{6G}) + \right. \\
 &\quad \left. + L_5 w i \cos(\theta_{50} - \theta_{60} + \theta_{6G})] \right] \dot{\Delta\theta}^2 \\
 v_{G7}^2 &= \Delta \dot{x}_{10}^2 + \Delta \dot{y}_{10}^2 + L_{G7}^2 \dot{\Delta\theta}_7^2 + \\
 &\quad + 2L_{G7} \Delta \dot{\theta}_7 \left[ \Delta \dot{y}_{10} \cos(\theta_{70} - \theta_{7G}) - \Delta \dot{x}_{10} \sin(\theta_{70} - \theta_{7G}) \right]
 \end{aligned} \tag{B.8}$$

Las seis primeras velocidades se pueden poner de manera más compacta como sigue:

$$\mathbf{v}_{Gi}^2 = \mathbf{v}_i \dot{\Delta\theta}^2 \quad i = 1 \dots 6 \tag{B.9}$$

donde el vector  $\mathbf{v}_i$  es un vector cuyas componentes son constantes. Si se denota a  $\mathbf{m}_i$  al vector columna que contiene las masas de las seis primeras barras, se puede obtener la expresión de la energía cinética linealizada del sistema tal y como se expone a continuación:



$$\begin{aligned} T = & \frac{1}{2} \left[ \mathbf{m}_i^T \mathbf{v}_i + I_1 + I_2 k^2 + (I_3 + I_4) i^2 + I_5 (w i)^2 + I_6 (u i)^2 \right] \dot{\Delta \theta}^2 + \\ & + \frac{1}{2} m_7 \left[ \Delta \dot{x}_{10}^2 + \Delta \dot{y}_{10}^2 + L_{G7}^2 \Delta \dot{\theta}_7^2 + \right. \\ & + 2L_{G7} \Delta \dot{\theta}_7 \left[ \Delta \dot{y}_{10} \cos(\theta_{70} - \theta_{7G}) - \Delta \dot{x}_{10} \sin(\theta_{70} - \theta_{7G}) \right] \left. \right] + \\ & + \frac{1}{2} I_7 \Delta \dot{\theta}_7^2 \end{aligned} \quad (\text{B.10})$$

Al igual que se hizo con la energía cinética no lineal, esta también se puede agrupar y reescribir como:

$$T = A_l \dot{\Delta \theta}^2 + B_l \Delta \dot{x}_{10}^2 + X_l \Delta \dot{y}_{10}^2 + \Delta_l \Delta \dot{\theta}_7^2 + E_l \Delta \dot{\theta}_7 \Delta \dot{x}_{10} + \Phi_l \Delta \dot{\theta}_7 \Delta \dot{y}_{10} \quad (\text{B.11})$$

Ahora tan solo queda aplicar el primer término de la ecuación de Lagrange para obtener la matriz de masa del sistema linealizado. Esto es:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta \mathbf{q}}} \right) \quad (\text{B.12})$$

que particularizado para cada una de las coordenadas independientes:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta \theta}} \right) = 2A_l \ddot{\Delta \theta}$$



$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta x}_{10}} \right) &= 2B_l \Delta \ddot{x}_{10} + E_l \Delta \ddot{\theta}_7 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta y}_{10}} \right) &= 2X_l \Delta \ddot{y}_{10} + \Phi_l \Delta \ddot{\theta}_7 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{\Delta \theta}_7} \right) &= 2\Delta_l \Delta \ddot{\theta}_7 + \Phi_l \Delta \ddot{y}_{10} + E_l \Delta \ddot{x}_{10} \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

Por lo tanto, finalmente la matriz de masa del sistema linealizado es una matriz constante y simétrica, definido positiva, cuya expresión en función de la masa e inercia de las barras y de otros parámetros geométricos queda:

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} 2A_l & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2B_l & 0 & E_l \\ 0 & 0 & 2X_l & \Phi_l \\ 0 & E_l & \Phi_l & 2\Delta_l \end{bmatrix} \quad (\text{B.14})$$

## B.2 Matriz de amortiguamiento

La obtención de la matriz de amortiguamiento del sistema linealizado es sin duda mucho más inmediata que la de masa y la de rigidez, debido a que el amortiguador tan solo está acoplado con un grado de libertad directamente, en concreto, con el giro de la barra 1.



El proceso de obtención del par que ejerce el amortiguador sobre la barra 1 está expuesto con detalle en el anexo A. Para linealizar dicha función, como se trabaja bajo la hipótesis de pequeños desplazamientos, tan sólo se tiene en cuenta el término constante del desarrollo en serie de Taylor de las funciones trigonométricas que aparecen, ya que al estar multiplicado por  $\dot{\Delta\theta}$  como se observa en (A.15) ya constituyen en sí un término lineal, y por lo tanto, si se considerasen más términos del desarrollo en serie, al aparecer este producto con  $\dot{\Delta\theta}$ , pasarían a ser términos de orden superior.

Así pues, como ya se comentó en apartados previos, el amortiguador está situado entre un punto fijo de coordenadas  $(x_{13}, y_{13})$  y un punto móvil de la propia barra 1 cuya velocidad tiene las componentes que se definen en la ecuación (A.13). Estas se pueden linealizar en este caso tan sólo evaluándolas para  $\mathbf{q} = \theta_0$  y  $\dot{\mathbf{q}} = \dot{\Delta\theta}$ , resultando:

$$\begin{aligned}x_{1p}\dot{} &= -L_{1p} \sin(\theta_0 + \theta_{1p})\dot{\Delta\theta} \\y_{1p}\dot{} &= L_{1p} \cos(\theta_0 + \theta_{1p})\dot{\Delta\theta}\end{aligned}\tag{B.15}$$

Partiendo de esta velocidad ya lineal, se puede seguir el mismo procedimiento que el descrito en el apartado correspondiente del Anexo A. Es decir, se proyecta esa velocidad en la dirección de actuación del amortiguador y se obtiene  $v_a$ . Por tanto, la fuerza que ejerce el amortiguador queda definida por  $F_a = -c v_a$ , donde  $c$  es la constante de amortiguamiento del amortiguador. No obstante, la fuerza generalizada está definida en el grado de libertad  $\theta$  por tanto se ha de transformar esta fuerza en un par. Esto se consigue con el producto vectorial entre el vector fuerza  $\vec{F}_a$  y el vector  $\vec{r}$  que va del punto 1 al punto  $1_p$ . (Véase Figura A.1). Finalmente, este momento calculado  $M_a$  será la única componente de la matriz de amortiguamiento del sistema linealizado, quedando esta como sigue:



$$C = \begin{bmatrix} M_a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.16})$$

Remarcar que el valor del momento linealizado que ejerce el amortiguadoro es igual al calculado para el modelo no lineal, simplemente particularizado en la posición  $\mathbf{q}_0$  alrededor de la cual se está linealizando el sistema.

### B.3 Matriz de rigidez

La obtención de la matriz de rigidez del sistema linealizado presenta mayores complejidades por el hecho de que aparecen funciones no lineales diferentes a las trigonométricas, como es el caso de raíces cuadradas o cocientes entre variables, y por tanto el planteamiento se aborda desde otro enfoque. Además, también aparecen fuerzas gravitatorias que nos obligarían a tener en cuenta el segundo término del desarrollo en serie de Taylor para que al derivar, la expresión quede lineal. Sin embargo, como en la parte final del anexo A ya se calculó la primera derivada de la energía potencial respecto de las coordenadas independientes ecuación (A.34), la estrategia a seguir en este caso será el linealizar dicha función. En concreto, realizando su desarrollo en serie de Taylor y despreciando términos de orden superior al lineal, se tiene:

$$f(\mathbf{q}) = \frac{\partial V(q)}{\partial \mathbf{q}} \approx \left. \frac{\partial V(q)}{\partial \mathbf{q}} \right|_{\mathbf{q}_0} + \left. \frac{\partial^2 V(q)}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}_0} \cdot \Delta \mathbf{q} \quad (\text{B.17})$$



Como se puede ver en la ecuación anterior, es necesario calcular las derivadas segundas de la energía potencial con respecto a las variables independientes del problema. Esta labor es bastante larga, por lo que se va a detallar con la mayor claridad posible los pasos seguidos hasta la obtención final de dichas expresiones.

También, como bien es conocido, la matriz de rigidez de un sistema es aquella que relaciona las fuerzas con los desplazamientos, por lo que a partir de la expresión (B.17) se deduce que la matriz de rigidez del sistema linealizado presenta la siguiente forma:

$$K = \left. \frac{\partial^2 V(q)}{\partial \mathbf{q}^2} \right|_{\mathbf{q}_0} = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial x_{10}} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial y_{10}} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta \partial \theta_7} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial x_{10} \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_{10}^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_{10} \partial y_{10}} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_{10} \partial \theta_7} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial y_{10} \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_{10} \partial x_{10}} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_{10}^2} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_{10} \partial \theta_7} \\ \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_7 \partial \theta} & \frac{\partial^2 V}{\partial x_{10} \partial \theta_7} & \frac{\partial^2 V}{\partial y_{10} \partial \theta_7} & \frac{\partial^2 V}{\partial \theta_7^2} \end{bmatrix}_{\mathbf{q}_0} \quad (\text{B.18})$$

Como las derivadas cruzadas son iguales, es obvio que esta matriz será simétrica y además de coeficientes constantes por estar evaluados todos ellos en la posición  $\mathbf{q}_0$  respecto a la cual se linealiza el movimiento.

A partir de este punto se procede a la obtención de todas las derivadas requeridas para poder evaluar dicha matriz. Las expresiones de todas las derivadas primeras y segundas de las variables dependientes con respecto a  $\theta$  ya se obtuvieron detalladamente en el anexo A.



Partiendo de las derivadas primeras de  $l_1$  y  $l_2$  (ecuaciones A.32 y A.33), evaluadas en  $\mathbf{q}_0$ , se va a calcular todas las derivadas segundas de estas longitudes de los resortes ya que son necesarias para el cálculo de las derivadas segundas de la energía potencial.

Las derivadas segundas de  $l_1$  respecto de  $\mathbf{q}$  y particularizadas en la posición  $\mathbf{q}_0$ , son:

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial \theta^2} = \frac{\frac{\partial Num_1}{\partial \theta} l_1 - Num_1 \frac{\partial l_1}{\partial \theta}}{l_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial \theta \partial x_{10}} = \frac{(L_1 \sin \theta_0 + L_4 J \sin \theta_{40}) l_1 + \left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \frac{\partial l_1}{\partial x_{10}}}{l_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial \theta \partial y_{10}} = \frac{(-L_1 \cos \theta_0 - L_4 J \cos \theta_{40}) l_1 + \left( y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100} \right) \frac{\partial l_1}{\partial y_{10}}}{l_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial \theta \partial \theta_7} = \frac{\frac{\partial Num_1}{\partial \theta_7} l_1 - Num_1 \frac{\partial l_1}{\partial \theta_7}}{l_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial x_{10}^2} = \frac{l_1 + \left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \frac{\partial l_1}{\partial x_{10}}}{l_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial x_{10} \partial y_{10}} = \frac{\left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \frac{\partial l_1}{\partial y_{10}}}{l_1^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial x_{10} \partial \theta_7} = \frac{\frac{L_7}{2} l_1 \sin \theta_{70} + \left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \frac{\partial l_1}{\partial \theta_7}}{l_1^2}$$



$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_{10}^2} = \frac{l_1 + \left( y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100} \right) \frac{\partial l_1}{\partial y_{10}}}{l_1^2}$$
$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial y_{10} \partial \theta_7} = \frac{-\frac{L_7}{2} l_1 \cos \theta_{70} + \left( y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100} \right) \frac{\partial l_1}{\partial \theta_7}}{l_1^2}$$
$$\frac{\partial^2 l_1}{\partial \theta_7^2} = \frac{\frac{\partial Num_2}{\partial \theta_7} l_1 - Num_2 \frac{\partial l_1}{\partial \theta_7}}{l_1^2}$$

donde  $Num_1$  y  $Num_2$  son los numeradores de las derivadas primeras de  $l_1$  con respecto de  $\theta$  y  $\theta_7$  respectivamente. Sus derivadas que aparecen en la expresión anterior tienen la forma:

$$\begin{aligned} \frac{\partial Num_1}{\partial \theta} &= L_1^2 + L_4^2 J^2 - \cos(\theta_0 - \theta_{40}) + \\ &+ \left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \left( -L_1 \cos \theta_0 - L_4 (dJ \sin \theta_{40} + J^2 \cos \theta_{40}) \right) + \\ &+ \left( y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100} \right) \left( -L_1 \sin \theta_0 + L_4 (dJ \cos \theta_{40} - J^2 \sin \theta_{40}) \right) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial Num_1}{\partial \theta_7} = \left( (L_1 \sin \theta_0 + L_4 J \sin \theta_{40}) \sin \theta_{70} + (L_1 \cos \theta_0 + L_4 J \cos \theta_{40}) \cos \theta_{70} \right) \frac{L_7}{2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial Num_2}{\partial \theta_7} &= \left( \frac{L_7}{2} \right)^2 - \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} \left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) - \\ &- \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} \left( y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} + \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100} \right) \end{aligned}$$

Del mismo modo se pueden calcular las derivadas segundas de  $l_2$  respecto de  $\mathbf{q}$  y particularizarlas en la posición  $\mathbf{q}_0$ :





$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial \theta^2} = \frac{\frac{\partial Num_3}{\partial \theta} l_2 - Num_3 \frac{\partial l_2}{\partial \theta}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial \theta \partial x_{10}} = \frac{(L_1 \sin \theta_0 + L_4 J \sin \theta_{40}) l_2 + \left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \frac{\partial l_2}{\partial x_{10}}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial \theta \partial y_{10}} = \frac{(-L_1 \cos \theta_0 - L_4 J \cos \theta_{40}) l_2 + \left( y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100} \right) \frac{\partial l_2}{\partial y_{10}}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial \theta \partial \theta_7} = \frac{\frac{\partial Num_3}{\partial \theta_7} l_2 - Num_3 \frac{\partial l_2}{\partial \theta_7}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial x_{10}^2} = \frac{l_2 + \left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \frac{\partial l_2}{\partial x_{10}}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial x_{10} \partial y_{10}} = \frac{\left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \frac{\partial l_2}{\partial y_{10}}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial x_{10} \partial \theta_7} = \frac{-\frac{L_7}{2} l_2 \sin \theta_{70} + \left( x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100} \right) \frac{\partial l_2}{\partial \theta_7}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial y_{10}^2} = \frac{l_2 + \left( y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100} \right) \frac{\partial l_2}{\partial y_{10}}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial y_{10} \partial \theta_7} = \frac{\frac{L_7}{2} l_2 \cos \theta_{70} + \left( y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100} \right) \frac{\partial l_2}{\partial \theta_7}}{l_2^2}$$

$$\frac{\partial^2 l_2}{\partial \theta_7^2} = \frac{\frac{\partial Num_4}{\partial \theta_7} l_2 - Num_4 \frac{\partial l_2}{\partial \theta_7}}{l_2^2}$$



Ahora  $Num_3$  y  $Num_4$  son los numeradores de las derivadas primeras de  $l_2$  con respecto de  $\theta$  y  $\theta_7$  respectivamente y sus derivadas son:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Num_3}{\partial \theta} = & L_1^2 + L_4^2 J^2 - \cos(\theta_0 - \theta_{40}) + \\ & + \left(x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100}\right) \left(-L_1 \cos \theta_0 - L_4 (dJ \sin \theta_{40} + J^2 \cos \theta_{40})\right) + \\ & + \left(y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100}\right) \left(-L_1 \sin \theta_0 + L_4 (dJ \cos \theta_{40} - J^2 \sin \theta_{40})\right)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Num_3}{\partial \theta_7} = \left((-L_1 \sin \theta_0 - L_4 J \sin \theta_{40}) \sin \theta_{70} - (L_1 \cos \theta_0 + L_4 J \cos \theta_{40}) \cos \theta_{70}\right) \frac{L_7}{2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial Num_4}{\partial \theta_7} = & \left(\frac{L_7}{2}\right)^2 + \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} \left(x_1 + L_1 \cos \theta_0 + L_4 \cos \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \cos \theta_{70} - x_{100}\right) + \\ & + \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} \left(y_1 + L_1 \sin \theta_0 + L_4 \sin \theta_{40} - \frac{L_7}{2} \sin \theta_{70} - y_{100}\right)\end{aligned}$$

Con todas estas derivadas calculadas, a partir de la ecuación (A.34) y utilizando una notación tensorial, las derivadas segundas de la energía potencial  $V$  con respecto a  $\mathbf{q}$  son:

$$\frac{\partial V}{\partial \mathbf{q}_j \partial \mathbf{q}_i} = \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{q}_j} \frac{\partial \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}_i} + \mathbf{K} \frac{\partial^2 \mathbf{l}}{\partial \mathbf{q}_j \partial \mathbf{q}_i} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}_j} \quad (\text{B.19})$$

donde las matrices



$$\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} k_r & k_l \frac{\partial l_1}{\partial \theta} & k_l \frac{\partial l_2}{\partial \theta} \\ 0 & k_l \frac{\partial l_1}{\partial x_{10}} & k_l \frac{\partial l_2}{\partial x_{10}} \\ 0 & k_l \frac{\partial l_1}{\partial y_{10}} & k_l \frac{\partial l_2}{\partial y_{10}} \\ 0 & k_l \frac{\partial l_1}{\partial \theta_7} & k_l \frac{\partial l_2}{\partial \theta_7} \end{bmatrix} \quad (\text{B.20})$$

$$\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \frac{d\mathbf{G}_\theta}{d\theta} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{d\mathbf{G}_{\theta_7}}{d\theta_7} \end{bmatrix} \quad (\text{B.21})$$

y los términos de esta última matriz son:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{G}_\theta}{d\theta} = & g[-m_1 L_{G1} \sin(\theta_0 - \theta_G) + \\ & + m_2 L_{G2} (dK \cos(\theta_{20} - \theta_{2G}) - K^2 \sin(\theta_{20} - \theta_{2G})) + \\ & + m_3 (L_2 (dK \cos(\theta_{20} - \theta_{2G}) - K^2 \sin(\theta_{20} - \theta_{2G})) + \\ & + L_{G3} (dJ \cos(\theta_{30} - \theta_{3G}) - J^2 \sin(\theta_{30} - \theta_{3G}))) + \\ & + m_4 (-L_1 \sin \theta_0 + L_{G4} (dJ \cos(\theta_{40} - \theta_{4G}) - J^2 \sin(\theta_{40} - \theta_{4G}))) + \\ & + m_5 (-r \sin(\theta_0 + \theta_r) + L_{G5} (dR \cos(\theta_{50} - \theta_{5G}) - R^2 \sin(\theta_{50} - \theta_{5G}))) + \\ & + m_6 (-r \sin(\theta_0 + \theta_r) + L_5 (dR \cos \theta_{50} - R^2 \sin \theta_{50}) + \\ & + L_{G6} (dJ \cos(\theta_{60} - \theta_{6G}) - S^2 \sin(\theta_{60} - \theta_{6G}))) \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$



$$\frac{d\mathbf{G}_{\theta_7}}{d\theta_7} = -g m_7 L_{G7} \sin(\theta_{70} - \theta_{7G})$$

Con lo cual ya se conocen todos los elementos necesarios para formar la matriz de rigidez (B.18) del sistema linealizado en dicha posición, tal y como se pretendía.