UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA

El modelo de Domar sobre el crecimiento económico un país

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Sánchez Sánchez, Almudena; Villanueva Micó, Rafael jacinto (jccortes@imm.upv.es ; alsncsnc@posgrado.upv.es ; rjvillan@imm.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este trabajo se presenta un modelo macroeconómico denominado en la literatura el modelo de crecimiento de Domar, que trata de explicar cómo debe de variar con el tiempo la inversión para mantener en el equilibrio la ratio de los ingresos y la capacidad productiva. Desde el punto de vista matemático, el estudio está basado en la aplicación de técnicas elementales sobre las ecuaciones diferenciales ordinarias. El trabajo también pretende mostrar el importante rol que desempeñan las matemáticas en la comprensión de modelos de naturaleza económica.

2 Introducción

La presentación de modelos matemáticos constituye un ingrediente fundamental en la formación universitaria. En los estudios con intensificación en economía, empresa y finanzas resulta de especial interés el desarrollo de los modelos dinámicos continuos sobre crecimiento basados en ecuaciones diferenciales ordinarias (e.d.o.'s). Uno de los modelos más importantes sobre el crecimiento de magnitudes económicas es el modelo de Domar [1]. En dicho modelo se estudia la dinámica que debe seguir la inversión empresarial en cada instante temporal para que se de el pleno uso de la capacidad productiva.

En este trabajo vamos a presentar el modelo económico de crecimiento de un país de Domar, introduciendo sus variables y las ecuaciones que permiten su formulación. También discutiremos las implicaciones económicas que se derivan del modelo.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Interpretar económicamente los parámetros y variables del modelo de crecimiento de Domar.
- Obtener la solución del modelo de crecimiento de Domar usando técnicas sobre ecuaciones diferenciales ordinarias.
- Discutir las principales conclusiones que se obtienen a partir del modelo de crecimiento de Domar.

3.1 El modelo de crecimiento de Domar: Planteamiento del modelo

Como se ha señalado anteriormente, el modelo de Domar tiene por objetivo la búsqueda de una trayectoria temporal, -es decir, de un función que depende de la variable tiempo,- que satisfaga una determinada condición de equilibrio para garantizar el crecimiento de la economía.

Para describir, desde un punto matemático, el modelo vamos a introducir las siguientes variables económicas:

- $I(t)$, denota la tasa del flujo de inversión en el año t.
- $Y(t)$, denota la tasa del flujo de ingreso en el año t.

Los cambios en $I(t)$ afectan:

- A la demanda agregada.
- A la capacidad productiva.

Vamos a modelizar estos cambios.

Cambio respecto de la demanda agregada: Para su descripción es necesario introducir dos parámetros relacionados, el segundo de los cuales está definido en términos del primero, pero cuya conveniencia se verá en el desarrollo de la exposición. Los parámetros son:

- s, denota la propensión marginal al ahorro. Se asume constante.
- $k = \frac{1}{s}$, representa un multiplicador o constante de proporcionalidad.

El modelo de Domar asume la relación dada en la Ec.1 entre las tasas de variación instantánea (derivadas) de $I(t)$ e $Y(t)$, que indica cómo el flujo de inversión afecta al flujo de ingreso, y por tanto a la demanda agregada, siendo $k = 1/s$, la constante multiplicadora entre ambos flujos. Obsérvese que si la tasa marginal a ahorrar aumenta, es decir, si s aumenta, entonces el flujo de ingresos (o equivalentemente la demanda agregada) tienden a disminuir.

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI(t)}{dt} = k\frac{dI(t)}{dt}.$$

Ecuación 1. Relación entre el flujo de ingresos y flujo de inversión.

Cambio respecto de la capacidad productiva: Para su descripción es necesario introducir los siguientes parámetros:

- $\tau(t)$, capacidad o flujo de producción en el año t.
- $K(t)$, capital en el año t.
- $\rho = \frac{\tau(t)}{K(t)}$, es la relación, que se asume constante, entre la capacidad productiva y el capital en cada año en t. Obsérvese que si esta relación se reescribe como: $\tau(t) = \rho K(t)$, nos indica que un aumento del capital implica un aumento de la capacidad productiva.

En la Ec.2 se muestra la relación entre las variaciones instantáneas de la capacidad productiva $\tau(t)$ y la inversión $I(t)$. Para ello se utiliza la definición de inversión como la variación instantánea del capital, $I(t) = \frac{dK(t)}{dt}$.

$$\tau(t) = \rho K(t) \Rightarrow \frac{d\tau(t)}{dt} = \rho \frac{dK(t)}{dt} \overset{I(t)=\frac{dK(t)}{dt}}{\Rightarrow} \frac{d\tau(t)}{dt} = \rho I(t).$$

Ecuación 2. Relación entre la variaciones instantáneas de la producción y de la inversión.

<u>Objetivo del modelo de Domar</u>: Garantizar una condición de equilibrio para que la capacidad productiva esté plenamente utilizada. Esto se traduce en que la tasa de flujo de los ingresos o, equivalentemente de la demanda agregada, coincida en todo instante temporal (medido en años) con la capacidad o flujo de la producción anual: $\tau(t) = Y(t)$. Si se parte del equilibrio, esta condición equivale a la condición dada en la Ec.3, es decir, que la variaciones instantáneas de ambas magnitudes coincidan en todo instante temporal.

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \frac{dY(t)}{dt}.$$

Ecuación 3. Condición de equilibrio del modelo de Domar.

4 El modelo de crecimiento de Domar: Solución del modelo e interpretación económica del equilibrio

Desde las Ecs.1-2, e imponiendo la condición dada en la Ec.3, se obtiene la e.d.o. para la inversión $I(t)$ dada en la Ec.4.

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{dY(t)}{dt} & = & \frac{1}{s}\frac{dI(t)}{dt} \\ \frac{d\tau(t)}{dt} & = & \rho I(t) \end{array}\right\} \overset{\frac{dY(t)}{dt}=\frac{d\tau(t)}{dt}}{\Rightarrow} \frac{1}{s}\frac{dI(t)}{dt} = \rho I(t) \Rightarrow \frac{dI(t)}{dt} = \rho s I(t).$$

Ecuación 4. Ecuación diferencial ordinaria para la inversión.

Fijada una inversión inicial, $I(0) = I_0$, es inmediato obtener la trayectoria temporal de la inversión utilizando los resultados vistos en la referencia [2] (aplíquese la Ec. 5 con la siguiente identificación: $x(t) = I(t);\ x_0 = I_0;\ a = \rho s;\ b = 0$). El resultado se muestra en la Ec.5

$$\left.\begin{array}{rcl} \frac{dI(t)}{dt} & = & \rho s I(t) \\ I(0) & = & I_0 \end{array}\right\} \Rightarrow I(t) = I_0 e^{\rho s t}.$$

Ecuación 5. Cálculo de la inversión.

La interpretación económica de esta solución es la siguiente: Para mantener un equilibrio entre la capacidad productiva o flujo de la producción $\tau(t)$ y la tasa del flujo de ingreso $Y(t)$ en el año t, el flujo de inversión debe crecer exponencialmente con tasa de crecimiento ρs.

Una vez la trayectoria temporal de la inversión ha sido calculada, tal y como se muestra en las Ecs. 6 y 7, es sencillo obtener mediante el método de separación de variables (véase [2]), las trayectorias temporales correspondientes a $\tau(t)$ y a $Y(t)$, respectivamente.

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \rho I(t) = \rho I_0 e^{\rho st} \overset{\tau=\tau(t)}{\Rightarrow} d\tau = \rho I_0 e^{\rho st} dt \overset{\tau(0)=\tau_0}{\Rightarrow} \int_{\tau_0}^{\tau} du = I_0 \int_0^t \rho e^{\rho su}\, du \overset{\tau=\tau(t)}{\Rightarrow} \tau(t) - \tau_0 = \frac{I_0}{s}\left(e^{\rho st} - 1\right)$$

$$\tau(t) = \tau_0 + \frac{I_0}{s}\left(e^{\rho st} - 1\right).$$

Ecuación 6. Cálculo de la capacidad productiva o flujo de la producción.

$$\frac{dY(t)}{dt} = \frac{1}{s}\frac{dI(t)}{dt} = \frac{1}{s}\frac{d}{dt}\left(I_0 e^{\rho st}\right) = \rho I_0 e^{\rho st} \overset{Y=Y(t)}{\Rightarrow} dY(t) = \rho I_0 e^{\rho st} dt$$

$$\overset{Y(0)=Y_0}{\Rightarrow} \int_{Y_0}^{Y} du = I_0 \int_0^t \rho e^{\rho su}\, du \overset{Y=Y(t)}{\Rightarrow} Y(t) - Y_0 = \frac{I_0}{s}\left(e^{\rho st} - 1\right)$$

$$Y(t) = Y_0 + \frac{I_0}{s}\left(e^{\rho st} - 1\right).$$

Ecuación 7. Cálculo del flujo de ingreso.

Sin embargo, obsérvese que es posible que en práctica la tasa real del crecimiento de la inversión, digamos r, sea diferente de la tasa crecimiento ρs hallada anteriormente. Desde luego la tasa requerida de inversión será mayor cuanto mayor sea el crecimiento ρ (relación entre la capacidad productiva y el capital en cada año en t) y/o cuanto mayor sea s (la propensión marginal al ahorro). Vamos a analizar qué sucede cuando:

- r, la tasa real del crecimiento de la inversión, y
- ρs, la tasa de crecimiento estipulada de la inversión,

no son iguales. Para ello vamos a introducir el denominado "coeficiente de utilización" u definido como el límite del cociente entre $Y(t)$ y $\tau(t)$ (véase la Ec. 8). Para su determinación expresamos $Y(t)$ y $\tau(t)$ en términos de r repitiendo los cálculos realizados en las Ecs. 6 y 7, pero poniendo $I(t) = I_0 e^{rt}$ en lugar de $I(t) = I_0 e^{\rho st}$. El valor del coeficiente de utilización es el dado en la Ec.8, donde también indicamos cuándo el coeficiente de utilización es mayor, menor ó igual a la unidad en términos de los parámetros r, ρ y s. Obsérvese que:

- Si $r < \rho s$, es decir, $u < 1$, hay un cierto instante temporal, digamos $\hat{t}$, de modo que $\forall t \geq \hat{t}$ se cumple que $Y(t) < \tau(t)$. Esto significa un exceso de capacidad o flujo de producción en los años $t \geq \hat{t}$.
- Si $r > \rho s$, es decir, $u > 1$, hay un cierto instante temporal, digamos $\hat{t}$, de modo que $\forall t \geq \hat{t}$ se cumple que $Y(t) > \tau(t)$. Esto significa una insuficiencia de capacidad o flujo de producción en los años $t \geq \hat{t}$.
- Únicamente cuando la propensión marginal al ahorro, s, y la ratio ρ entre la capacidad productiva y el capital son tales que $r = \rho s$, hay una plena utilización de la capacidad productiva.

$$u := \lim_{t\to+\infty}\frac{Y(t)}{\tau(t)} = \lim_{t\to+\infty}\frac{Y_0+\frac{I_0}{s}\left(e^{rt}-1\right)}{\tau_0+\frac{\rho I_0}{r}\left(e^{rt}-1\right)} = \frac{r}{\rho s} \Rightarrow \begin{cases} u<1 & \equiv & r<\rho s, & , & \text{exceso de capacidad,} \\ u=1 & \equiv & r=\rho s, & , & \text{plena utilización,} \\ u>1 & \equiv & r>\rho s & , & \text{insuficiencia de capacidad.} \end{cases}$$

Ecuación 8. Coeficiente de utilización.

La relación dada en la Ec.8 es una relación límite a largo plazo, pero es sencillo ver asumiendo que $I(t)=I_0 e^{rt}$, que dicha relación se mantiene cierta cuando se analiza la variación instantánea de $Y(t)$ y $\tau(t)$ (véase Ec.9). Esta relación nos proporciona las magnitudes relativas del efecto de la creación de la demanda ($Y(t)$) y el efecto de la capacidad de producción ($\tau(t)$) en cualquier instante t, bajo la tasa de crecimiento real r.

$$\frac{\frac{dY(t)}{dt}}{\frac{d\tau(t)}{dt}} = \frac{\frac{1}{s}\frac{dI(t)}{dt}}{\rho I(t)} = \frac{\frac{r}{s}I_0 e^{rt}}{\rho I_0 e^{rt}} = \frac{r}{\rho s}.$$

Ecuación 9. Análisis de la ratio: variación instantánea de $Y(t)$ y $\tau(t)$.

Desde la Ec.9 Se desprende que:

- Si $r<\rho s$, el ritmo de crecimiento de la demanda será menor que el de la capacidad ($\frac{dY(t)}{dt}<\frac{d\tau(t)}{dt}$) y por tanto existirá una deficiencia en la demanda agregada y, por consiguiente, un exceso de capacidad.
- Si $r>\rho s$, el ritmo de crecimiento de la demanda será mayor que el de la capacidad ($\frac{dY(t)}{dt}>\frac{d\tau(t)}{dt}$) y por tanto existirá una exceso en la demanda agregada y, por consiguiente, una deficiencia en la capacidad.

Se llega con ello a una paradoja, pues si el ritmo del crecimiento de la inversión real supera a tasa de crecimiento estipulada de la inversión ($r>\rho s$), se llegará a que hay una insuficiencia en lugar de un excedente en la capacidad. Y, análogamente, si el ritmo del crecimiento de la inversión real es inferior a tasa de crecimiento estipulada de la inversión ($r<\rho s$), se concluye que habrá un excedente en la capacidad, en lugar, de una insuficiencia [3].

Como conclusión final del análisis del modelo de Domar se obtiene que dados los parámetros ρ y s, el único camino para evitar insuficiencia y exceso de capacidad productiva es guiar siempre el flujo de inversión a lo largo de la trayectoria de equilibrio: $r=\rho s$, siendo r, la tasa real del crecimiento de la inversión [3].

5 Cierre

La búsqueda de puentes formativos que conecten diferentes áreas de conocimiento en la formación universitaria entendemos que es un compromiso docente que debemos asumir en el marco de la docencia universitaria actual. En este trabajo, se ha tratado de materializar esta idea conectando las áreas de Matemáticas y Economía, a través del estudio de un modelo dinámico de crecimiento de un país, el modelo de Domar. Para su estudio se ha requerido combinar las técnicas de resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias elementales junto a la interpretación económica de los diferentes parámetros que aparecen en la formulación del modelo.

6 Bibliografía

[1] Domar, E.D.: "Capital expansion, rate of growth and employment", Econometrica, abril, 1946, pp: 137-147.

Trabajo original donde el professor Evsey D. Domar expuso su modelo.

[2] Cortés, J.C., Romero J.V., Roselló Mª.D., Sánchez-Sánchez, A., y Villanueva, R.J.: "Modelos continuos de crecimiento: del modelo exponencial al modelo logístico". Objeto de Aprendizaje de la Universidad Politécnica de Valencia. Artículos docentes ADE. URL: http://hdl.handle.net/10251/38747

[3] Chiang, A.: "Métodos Fundamentales de Economía Matemática", Ed. McGraw-Hill, 1993.

Este libro expone los temas clásicos de álgebra lineal, cálculo infinitesimal y programación matemática con una fuerte vocación de mostrar ejemplos de interés para la economía. En algunos de los capítulos, el autor dedica extensas explicaciones de los conceptos matemáticos que se estudian para motivar la utilidad de los mismos en economía.