



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



FACULTAD DE ADMINISTRACIÓN Y
DIRECCIÓN DE EMPRESAS. UPV

Cálculo estocástico en finanzas: Aplicación del Modelo Browniano Geométrico para la predicción del activo subyacente FCC.MC en el IBEX-35

Aplicación del modelo con Python y
representación en página web:

<http://cotizacion.imm.upv.es/Dani>

Autor:

D. Daniel Pérez Fernández

Directores:

Dr. Juan Carlos Cortés López

Dr. Rafael Jacinto Villanueva Micó

Índice de contenido

Índice de Figuras	1
Índice de Tablas	3
Índice de Gráficos	5
CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN.....	7
1.1. Resumen del trabajo de fin de grado	8
1.2. Objetivos del trabajo de fin de grado	9
1.3. Justificación de asignaturas relacionadas	11
CAPÍTULO 2. ANTECEDENTES Y SITUACIÓN ACTUAL. FCC, S.A.....	15
2.1. Antecedentes y situación actual	15
2.2. FCC, S.A	17
2.2.1. Historia de FCC.....	18
2.2.2. Estructura del grupo	23
2.2.3. FCC en bolsa: Evolución.....	26
2.2.4. Principales ratios económico-financieros	29
CAPÍTULO 3. CÁLCULO ESTOCÁSTICO DE ITO	33
3.1. Movimiento Browniano	33
3.2. Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano.....	35
3.3. Simulación del Movimiento Browniano	36
3.4. El cálculo de Itô	38
3.4.1. La integral de Itô	39
3.4.2. Propiedades de la integral de Itô	44
CAPÍTULO 4. EL MODELO BROWNIANO GEOMÉTRICO	47
4.1. Motivación del modelo para subyacentes en condiciones de certidumbre	48
4.2. Motivación del modelo para un subyacente cotizado: El Modelo Browniano Geométrico.	49
4.3. Solución del Modelo Browniano Geométrico	51
4.3.1. Solución del Modelo Browniano Geométrico sin aplicar el Cálculo de Itô	51

4.3.2. Solución del Modelo Browniano Geométrico aplicando el Cálculo de Itô	55
4.4. Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del Modelo Browniano Geométrico	56
4.5. Calibración de los parámetros del Modelo Browniano Geométrico	58
4.5.1. Método de Máxima Verosimilitud	59
4.5.2. Método no paramétrico	65
4.6. Validación del modelo Browniano Geométrico	67
4.6.1. Medidas de bondad de ajuste: Error Cuadrático Medio y MAPE	68
4.6.2. Intervalos de confianza	69
4.6.3. Gráficos comparativos	71
4.7. Predicción	72
CAPÍTULO 5. APLICACIÓN DEL MODELO BROWNIANO GEOMÉTRICO AL SUBYACENTE FCC (FCC.MC). METODOLOGÍA	73
5.1. Lenguaje de programación Python	73
5.2. Estimación de los parámetros del Modelo Browniano Geométrico	74
5.2.1. Estimación de parámetros por el Método de Máxima Verosimilitud	75
5.2.2. Estimación de parámetros por un método no paramétrico	76
5.3. Validación del Modelo Browniano Geométrico	77
5.3.1. Estimaciones puntuales: Cálculo de la media y varianza teórica	78
5.3.2. Validación por intervalos de confianza: Cálculo de los intervalos de confianza teóricos	79
5.3.3. Medidas de bondad de ajuste: Cálculo del error cuadrático medio (MSE) y del error porcentual absoluto medio (MAPE)	82
5.4. Predicciones para el subyacente FCC (FCC.MC)	83
CAPÍTULO 6. PÁGINA WEB: http://cotizaccion.imm.upv.es/Dani	85
6.1. Equipo necesario	85
6.2. Programación con <i>Python</i>	85
6.2.1. Obtención del histórico de cotizaciones	86
6.2.2. Ejecución del Modelo Browniano Geométrico sobre el histórico	87
6.2.3. Generación de ficheros.	88
6.2.4. Actualización de la página web	93

6.3. Cron (<i>Linux</i>)	93
6.4. Página web: http://cotizacion.imm.upv.es/Dani	93
6.5. Diagrama de proceso de los programas.....	94
CAPÍTULO 7. CONCLUSIONES Y PROPUESTAS DE MEJORA	97
BIBLIOGRAFÍA.....	101

Índice de Figuras

Figura 2.1: Presencia de FCC en el mundo	18
Figura 2.2: Principales hechos históricos en FCC hasta el año 2003.....	19
Figura 2.3: Consejo de Administración de FCC	25
Figura 2.4: Comisión Ejecutiva de FCC	26
Figura 4.1: Capitalización a interés compuesto continuo.....	48
Figura 5.1 Función Log-Verosimilitud en Python	75
Figura 5.2 Resultados del programa: Parámetros por Máxima Verosimilitud.....	76
Figura 5.3 Resultados del programa: Parámetros por método no paramétrico	77
Figura 5.4 Resultados de las funciones media y varianza.....	79
Figura 5.5 Resultados Intervalos de Confianza 95%	80
Figura 6.1 Tareas principales de los programas	86
Figura 6.2 Histórico de cotizaciones de FCC.....	87
Figura 6.3 Proceso completo de los programas.....	95

Índice de Tablas

Tabla 2.1 Principales Ratios Económico-Financieros de FCC	30
Tabla 3.1 Justificación de la identidad (3.3.1) para la simulación del Movimiento Browniano .	37
Tabla 5.1 Tabla comparativa de parámetros según modelo de estimación	77
Tabla 5.2 Resultados de las medidas de bondad de ajuste	83
Tabla 5.3 Resultados comparativos de predicciones y valores reales	84
Tabla 6.1 Predicciones e Intervalos de Confianza 95% en página web	89
Tabla 6.2 Medidas de bondad del ajuste en página web	89
Tabla 6.3 Comparativa predicciones y cotizaciones reales	91
Tabla 6.4 Comparativa predicciones según método y cotizaciones reales.....	91
Tabla 6.5 Comparativa medidas de bondad de ajuste	92

Índice de Gráficos

Gráfico 2.1 Evolución de FCC.MC en bolsa. Período enero 2010 hasta junio 2015	27
Gráfico 2.2 Evolución del IBEX-35. Período enero 2010 hasta junio 2015	28
Gráfico 3.1 Simulación del Movimiento Browniano	38
Gráfico 5.1 Intervalos de confianza, medias teóricas, reales y previsión.....	81
Gráfico 6.1 Intervalos de confianza, medias, cotización histórica y predicción en web.....	90
Gráfico 6.2 Predicción, Intervalos de Confianza y cotizaciones reales últimos 10 días	92

1. Introducción

La coyuntura económica, con bajos tipos de interés, y una política por parte del Banco Central Europeo que aplica un gran plan de compra de deuda para devolver la estabilidad a la zona euro, está favoreciendo que suban las principales bolsas del mundo.

Estando la demanda asegurada, la rentabilidad de la renta fija va a seguir cayendo y no se descarta que el *bund* alemán se sitúe en torno al cero o que el bono español a diez años alcance el 1%. Ante esta situación, la renta fija no satisface las expectativas de los inversores, su rendimiento no es suficiente. Este hecho acerca a muchos inversores a la renta variable como vía para encauzar sus inversiones y obtener unas plusvalías satisfactorias en detrimento de la renta fija.

Ante la demanda de renta variable como mecanismo de inversión, aumenta también la demanda de otros mecanismos: los de predicción de valores bursátiles. De forma que el inversor se vea dotado de herramientas que le guíen en la toma de decisiones.

Desde que existe el ser humano, éste se ha preocupado de forma entusiasta por conocer y explicar lo que le rodea; y para ello ha puesto especial empeño en cuantificar todo cuanto ha podido. De esta manera surgió como disciplina, hace aproximadamente unos 4 000 años, la matemática. Desde entonces ha hecho evidente su descontada capacidad para modelizar el mundo que nos rodea y, de este modo, realizar predicciones en cualquier ámbito de estudio, las finanzas no son menos.

A día de hoy, existen numerosos modelos para predecir, entre otras muchas cosas, el valor de activos subyacentes. Todos estos modelos matemáticos se han ido haciendo cada vez más efectivos con correcciones, ampliaciones, etc.

1.1 Resumen del trabajo de fin de grado

En el presente TFG estudiamos un modelo estocástico, el Modelo Browniano Geométrico, y lo aplicamos para el activo subyacente FCC (FCC.MC). Con esto, nuestro objetivo es obtener predicciones del valor bursátil del activo a corto plazo.

El Modelo Browniano Geométrico o Log-Normal atiende a modelos estocásticos de un factor, quedando éstos representados por una ecuación diferencial estocástica de tipo Itô que contiene en su formulación la tendencia y la volatilidad local del subyacente. La aleatoriedad se introduce en dicha ecuación mediante la derivada del Movimiento Browniano (o proceso estocástico de Wiener), llamado proceso de ruido blanco (*white noise process*).

Para la aplicación del modelo, es necesario estimar previamente los parámetros que aparecen en el mismo. Con este objetivo, se van a aplicar dos métodos: el método de Máxima Verosimilitud y un método no paramétrico.

Una vez se obtienen los parámetros por medio de la estimación, se valida el modelo. Es aquí donde se calculan las estimaciones de media y varianza, los intervalos de confianza y las medidas de bondad del ajuste. Las medidas de bondad de ajuste utilizadas en el presente trabajo han sido el error porcentual absoluto medio (MAPE) y el error cuadrático medio (RMSE).

Además, se representarán gráficamente la función media y los intervalos de confianza del 95% junto a los valores reales observados. Así pues, validaremos la modelización numéricamente y también de forma visual. Por último, se llevarán a cabo las predicciones del activo subyacente en cuestión para los 5 días siguientes al último dato del histórico registrado.

Por otro lado, se han empleado dos programas informáticos (uno por cada método de estimación de parámetros) utilizando el lenguaje de programación Python en los que aplicaremos el Modelo Browniano

Geométrico sobre el activo subyacente escogido, en este caso FCC (FCC.MC); aunque los programas serán aplicables a cualquier otro activo subyacente. Dichos programas conectan con la página web <https://es.finance.yahoo.com>, de la cual se puede extraer el histórico de cotizaciones del subyacente, y aplican el modelo y generan ficheros con los resultados obtenidos en tablas y gráficos.

Por último, una vez aplicados estos programas sobre el activo subyacente FCC (FCC.MC), los resultados obtenidos con los programas serán mostrados en una página web editada para el presente TFG, <http://cotizacion.imm.upv.es/Dani> que se actualizará diariamente. Esta web está emplazada en un dominio propiedad del Instituto de Matemática Multidisciplinar de la UPV y se encargará de mostrar de forma pública, los resultados obtenidos con el Modelo Browniano Geométrico. De esta manera se logra que cualquier persona interesada pueda conocer el modelo y su aplicación y comprobar su efectividad.

1.2 Objetivos del trabajo de fin de grado

El objetivo principal de este TFG es el estudio en mayor profundidad y la utilización de métodos cuantitativos para la predicción de valores bursátiles de activos subyacentes a corto plazo, para después aplicarlos a una situación real en concreto.

En el caso del presente trabajo, estas técnicas han sido aplicadas a la modelización y predicción del valor del activo subyacente FCC (FCC.MC), perteneciente al IBEX-35.

Todo este estudio se realiza a través del modelo estocástico Log-Normal para la predicción de subyacentes. Para su resolución es necesario conocer y aplicar el Cálculo Estocástico de Itô. Como se ha señalado anteriormente, los resultados obtenidos a partir del modelo serán mostrados en una página web creada para este TFG. Además y en relación a todo ello, otros objetivos planteados en el desarrollo de esta memoria son:

- Estudiar técnicas estocásticas adecuadas, basadas en el Cálculo de Itô, que permitan analizar el Movimiento Browniano Geométrico, desde un punto de vista probabilístico, para estudiar la dinámica temporal de un activo subyacente.
- Determinar el proceso estocástico solución del Movimiento Browniano Geométrico utilizando el cálculo estocástico de Itô.
- Determinar las principales propiedades estadísticas del Movimiento Browniano Geométrico utilizando el cálculo estocástico de Itô y las propiedades estocásticas del Movimiento Browniano.
- Llevar a cabo la modelización, a partir de un histórico de datos (de cotización en este caso), de la evolución del subyacente FCC (FCC.MC).
- Validar el modelo mediante las medidas de bondad de ajuste RMSE y MAPE y construir intervalos de confianza.
- Predecir los valores que tomará el subyacente FCC (FCC.MC) a corto plazo.
- Aprender la eficacia del modelo comparando las predicciones que éste realice a partir de la calibración de los parámetros del modelo con base a datos históricos reales.
- Obtener predicciones a partir de dos métodos distintos de estimación de parámetros y compararlas para asegurar la robustez de las estimaciones.
- Generar y utilizar un programa basado en el lenguaje de programación Python para poder aplicar el Modelo Browniano Geométrico y así obtener predicciones.
- Editar una página web donde se introduzca el estudio realizado en este trabajo y se muestren los resultados del mismo actualizados diariamente (en tiempo real) de forma dinámica.

1.3 Justificación de asignaturas relacionadas

Para la elaboración del presente TFG han sido empleados los conocimientos y aptitudes adquiridos en muchas de las asignaturas cursadas en el Grado de Administración y Dirección de Empresas. A continuación, se detallan las asignaturas más destacadas para la realización de este TFG en cada capítulo del mismo.

Capítulo 2: Situación actual. FCC.

Para este capítulo han sido necesarios conocimientos adquiridos en varias de las asignaturas cursadas a lo largo de la carrera:

- **“Introducción a la Administración de Empresas”** (Primer curso): Esta asignatura proporciona un conocimiento de la administración de empresas y una visión general de los mercados y los sectores a todos los niveles (local, nacional e internacional).
- **“Estrategia y Dirección de la Organización”** (Segundo curso): Esta asignatura provee de un conocimiento general de las numerosas estrategias que se pueden tomar en el ámbito de la empresa, de cómo analizar el entorno y desarrollar y aplicar programas para modificar el impacto de éste en la empresa.
- **“Análisis y Consolidación Contable”** (Tercer curso): En esta asignatura se estudian métodos de análisis para las cuentas anuales de la empresa haciendo uso de ratios económico-financieros de tal manera que se pueda extraer información y conclusiones sobre la misma.
- **“Dirección Financiera”** (Cuarto curso): En esta asignatura se estudian las diversas vías de financiación y capitalización por parte de las empresas (préstamos, empréstitos, ampliaciones de capital, etc.) y cómo valorar los activos financieros que se derivan de estas operaciones.
- **“Banca y Bolsa”** (Cuarto curso): En esta asignatura se estudian en mayor detalle los mercados financieros y las principales operaciones bursátiles.

Capítulos 3, 4 y 5: Cálculo estocástico de Itô, Modelo Browniano Geométrico y aplicación del mismo

Aunque hemos tenido que llevar a cabo un profundo estudio más allá de lo que se ha visto en la titulación, las asignaturas de las se han extraído conocimientos necesarios para el desarrollo de estos capítulos son:

- **“Modelos Matemáticos para ADE”** (Primer curso): Esta asignatura proporciona una base matemática imprescindible para poder analizar todos aquellos aspectos de la economía y de la empresa que requieran un enfoque cuantitativo. Esta asignatura aporta una introducción a la modelización matemática aplicada a la economía y una de las principales herramientas que se estudian, en lo que respecta a este TFG, son a las ecuaciones diferenciales en las que se fundamenta el Modelo Browniano Geométrico.
- **“Métodos Estadísticos en Economía”** (Segundo curso): Mediante la estadística es posible analizar datos y extraer conclusiones sobre el comportamiento de las variables implicadas en determinados procesos. La asignatura aporta un conocimiento clave para entender el funcionamiento del Modelo Browniano Geométrico, así como su aplicación.
- **“Econometría”** (Tercer curso): En esta asignatura se aprenden a utilizar potentes técnicas estadísticas en el análisis económico con objeto de poder modelizar, analizar, interpretar y realizar predicciones sobre sistemas de variables económicas tales como el precio, la demanda, los costes de producción, etc.
- **“Contabilidad de Empresas Financieras”** (Cuarto curso): Esta asignatura abarca el estudio del gobierno corporativo en las empresas y resulta realmente útil para entender las diferentes funciones de órganos como el consejo de administración, la junta de accionistas, la ejecutiva, etc.

Capítulo 5: Aplicación del Modelo Browniano Geométrico al subyacente FCC (FCC.MC)

Para este capítulo resultan muy útiles los conocimientos adquiridos en las prácticas de laboratorio de diferentes asignaturas (MADE, Métodos Estadísticos, Econometría, etc.) en las que se han utilizado programas como *Wolfram Mathematica* o el *software* libre *R*; este conocimiento ha resultado muy importante para poder hacer uso del lenguaje de programación *Python* en este trabajo.

Capítulo 6: Página web: <http://cotizaccion.imm.upv.es/Dani>

Para el desarrollo de este capítulo hemos tenido que adquirir conocimientos que no se desarrollan propiamente en el Plan de Estudios de la titulación, como es el diseño de páginas webs.

2. Antecedentes y situación actual. FCC, S.A.

El Capítulo 2 aborda la perspectiva general de la economía y la inversión en el contexto actual de la compañía FCC, de la cual se va a realizar la predicción de su cotización en bolsa en el presente TFG.

2.1 Antecedentes y situación actual

El consenso de la mayoría de analistas es que la economía española crecerá entre un 1.5% y un 2% a lo largo del año 2015, respaldada por el BCE que con su compra de deuda ha provocado que el bono español a 10 años se sitúe en torno al 1.9%. Los expertos destacan también que el Ibex podría subir hasta un 15%. En 2014 las familias aumentaron sus inversiones como demuestra que el volumen en efectivo se redujera en un 8.4% hasta los 76 821 millones de euros. Este dinero se destinó a depósitos, que aumentaron un 10%, pero sobre todo a los fondos de inversión, que crecieron en un 26% hasta los 225 192 millones de euros. Las acciones no cotizadas subieron en un considerable 21.5%. Nos encontramos, por tanto, ante un panorama de disminución de la aversión al riesgo por parte de los pequeños inversores, de una bajada considerable de los tipos de interés y de un buen momento para las empresas españolas, que aumentarán sus beneficios, y por lo tanto, el reparto de dividendos.

Los valores representativos de los mercados que más destacan desde un punto de vista técnico son el S&P500¹ que se encuentra un 35% por encima de los máximos que alcanzó antes del estallido de la crisis en 2007. El Dax² a su vez también ha superado niveles históricos y la bolsa española se encuentra en una tendencia claramente alcista que se mantiene constante desde principio de año.

¹ El índice Standard & Poor's 500, también conocido como S&P 500, es uno de los índices bursátiles más importantes de Estados Unidos y se le considera el índice más representativo de la situación real del mercado.

² El índice DAX (Deutscher Aktienindex) es el índice bursátil de referencia de la Frankfurter Wertpapierbörse (Bolsa de Frankfurt).

Además se debe tener en cuenta la actual recuperación económica a nivel global. Europa es la zona que presenta mayores dudas y que ofrece por tanto rendimientos más atractivos. Reino Unido y Estados Unidos ofrecen datos estables de recuperación y China resiste con un crecimiento considerable.

De tal modo, es posible observar cómo se están reuniendo una serie de condiciones que pronostican un momento inmejorable para la inversión en activos subyacentes, para lo que es imprescindible el uso de herramientas que sirvan de ayuda para la toma de decisiones de este tipo. Los modelos matemáticos de predicción del valor de activos subyacentes pueden resultar muy efectivos.

Modelizar la evolución del valor de los activos subyacentes no es una tarea fácil dada la gran volatilidad asociada a los mismos. Sin embargo, la evolución que ha experimentado el campo de la economía y la investigación de éste desde hace años, hace que el desarrollo de modelos matemáticos aplicados a los activos financieros se encuentre en un estado de mejora y perfeccionamiento continuo.

Las finanzas cuantitativas tienen origen en Estados Unidos alrededor de los años setenta, cuando algunos inversores vieron en las fórmulas matemáticas una buena herramienta para determinar el precio de acciones y bonos; sin embargo, dichas fórmulas no contemplaban la aleatoriedad, sino que eran determinísticas. Teniendo en cuenta la gran cantidad de factores que influyen en el valor de los subyacentes, estas fórmulas resultaban insuficientes para predecir el valor de dichos activos. Era necesario modelizar la aleatoriedad y tenerla en cuenta en los nuevos modelos.

La aleatoriedad se introduce formalmente en estos modelos a partir de un proceso estocástico denominado proceso estocástico Wiener o Movimiento Browniano. Por lo que son las nuevas ecuaciones diferenciales estocásticas las que pasan a representar los nuevos modelos para la predicción de activos subyacentes.

Concretamente en 1969, el ganador del Premio Nobel de Economía Robert C. Merton introdujo y aplicó el cálculo estocástico en el estudio de las finanzas³.

Previamente, el matemático japonés Kiyoshi Itô⁴ fue el encargado de desarrollar el cálculo estocástico requerido en los nuevos modelos de activos subyacentes. Hoy en día existen numerosos modelos de predicción tanto de tipos de interés como del valor de activos financieros. En el presente TFG se estudia y aplica el Modelo Browniano Geométrico para la predicción de activos subyacentes.

2.2 Fomento de Construcciones y Contratas, S.A. (FCC)

Fomento de Construcciones y Contratas, S.A. (FCC) es una de las mayores empresas de servicios ciudadanos e infraestructura, tanto por rentabilidad como por volumen de cifra de negocios. Tiene su sede en Barcelona, España, y cotiza en el IBEX-35.

Actualmente, el 44% de su facturación procede de mercados internacionales y está presente en más de 50 países por todo el mundo. Desde los 90 fue el primer grupo español de construcción hasta que en 2003, con la fusión de ACS y Dragados, pasó al segundo puesto, cediendo el primero al Grupo ACS. En la Figura 2.1 se muestra sobre un planisferio terrestre la presencia internacional de la compañía.

FCC tiene tres grandes líneas de negocio que responden a un modelo equilibrado de negocio:

- **Infraestructuras:** desarrolla una labor importante dentro del sector de la construcción y de la actividad industrial.

³ MERTON, ROBERT C. (1973). "Theory of Rational Option Pricing". *Bell Journal of Economics and Management Science*, nº 4, pp. 141–183.

⁴ ITÔ, K. (1951). "On stochastic differential equations" en *Memoirs American Mathematical Society*, vol. 4, p. 1–51.

ITÔ, K. (1944). "Stochastic Integral" en *Proc. Imperial Acad. Tokyo* 20, p. 519-524.

ITÔ, K. (1961). *Lectures on stochastic processes*. Tata Institute, Bombay.

- **Servicios Ciudadanos:** esta unidad engloba servicios como la recogida y tratamiento de residuos urbanos e industriales, limpieza de calles, mantenimiento de jardines y parques, etc.
- **Gestión del Agua:** esta línea se encuentra en un proceso de crecimiento sostenido; su actividad está ligada a la de servicios ciudadanos y se centra en el suministro y gestión integral del agua.

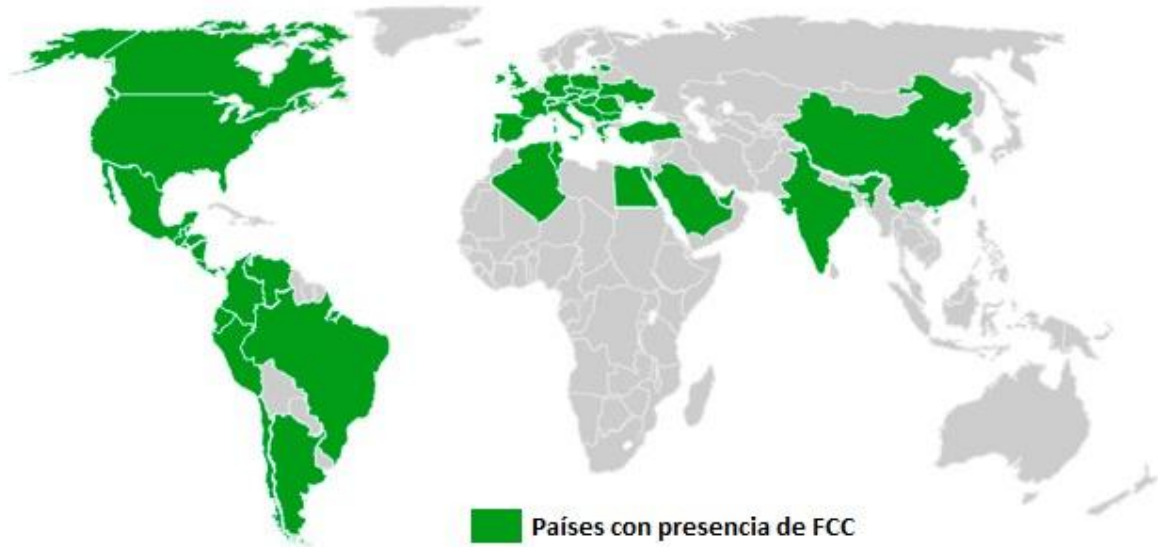


Figura 2.1: Presencia de FCC en el mundo.

Fuente: <https://fcc.trabajo.infojobs.net/fcc-en-el-mundo> y elaboración propia.

2.2.1 Historia de FCC

Fomento de Construcciones y Contratas, S.A. nace en marzo de 1992, fruto de la fusión de dos empresas: Fomento de Obras y Construcciones (Focsa), fundada en Barcelona en el año 1900, y Construcciones y Contratas (originalmente Construcciones y Reparaciones), fundada en Madrid en 1944.

En la Figura 2.2 se ha representado en una línea del tiempo los principales acontecimientos históricos en referencia a la compañía FCC.

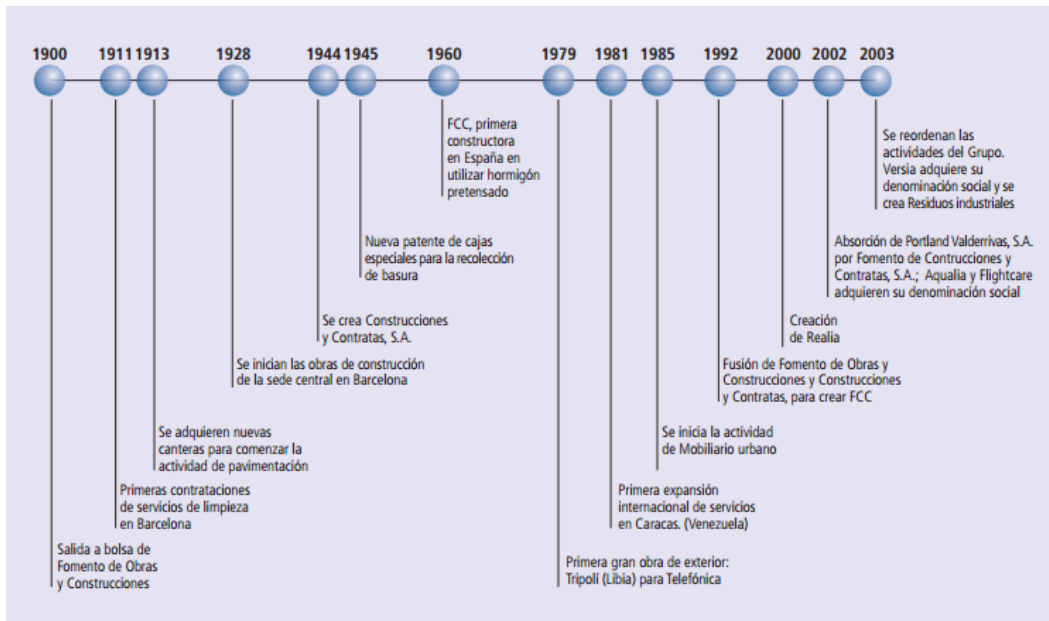


Figura 2.2: Principales hechos históricos en FCC hasta el año 2003.

Fuente: <http://www.fcc.es> y elaboración propia.

En julio de 1900 se crea Fomento de Obras y Construcciones (Focsa) con un capital fundacional de 5 millones de pesetas; unos meses después, en diciembre de ese mismo año, comienza a cotizar en bolsa. En esos primeros años llevan a cabo las primeras obras, trabajos tan relevantes como el asfaltado de El Paseo de Gracia, urbanización de la Gran Vía Diagonal y Casanova, adoquinado de El Paseo del Triunfo, etc. Todas ellas en Barcelona.

En 1911 se produce la contratación de los servicios de limpieza y conservación del alcantarillado de Barcelona. Esta adjudicación marcará un hito en la historia de la compañía, ya que se trata de la primera incursión en el sector de los servicios, de modo que Focsa inicia la diversificación de sus actividades. Dos años más tarde, en 1913, consigue el primer contrato de servicios en Madrid, al recibir la adjudicación de saneamiento del subsuelo.

A finales de los años 20, Barcelona se prepara para la Exposición Universal que tendría lugar en 1929. En este contexto es importante la contribución de Focsa en dicho evento. Destaca la urbanización del recinto

de la Exposición Universal, de la plaza de España, de una parte de la Rambla de Cataluña, que se transforma en bulevar, y de la calle Balmes.

En 1940, tras la guerra civil, Focsa adquiere una importante labor de reconstrucción de infraestructuras como carreteras y puentes, así como en la construcción de factorías que restauren el tejido industrial. En 1944 se funda en Madrid Construcciones y Reparaciones, nombrada anteriormente, y que, tras fusionarse con Focsa, dará lugar a la actual FCC.

En la década de los 50, FCC destaca por la construcción de las factorías SEAT y Pirelli (Barcelona), así como la de la base aérea de Torrejón de Ardoz (Madrid). Además, con la privatización del servicio de limpieza y riegos de Valencia, FCC adquiere este negocio. De tal modo que se suma a los servicios que ya presta en Madrid, Barcelona y Zaragoza. En esta misma década, en 1952, Ernesto Koplowitz compra Construcciones y Reparaciones y la cambia de nombre, pasando a convertirse en Construcciones y Contratas (Conycon) y se convierte en el ejecutivo de la misma.

Sin embargo, una década después, en 1962, Ernesto Koplowitz fallece tras caer de un caballo. Es cuando el entonces presidente de El Corte Inglés y muy amigo de la familia, Ramón Areces, se responsabiliza de la formación de sus dos hijas, Esther y Alicia, para que se hagan cargo del futuro de la compañía. Es a finales de los 60, cuando se construyen los centros comerciales de El Corte Inglés en Barcelona, Bilbao, Gijón, Girona, Las Palmas, Madrid, Málaga, Sevilla y Zaragoza.

En los años 70, concretamente al final de la década, se produce la contratación de la primera gran obra en el exterior, que corresponde a la canalización de 640 km para cable coaxial de la red telefónica de Trípoli, Libia.

Posteriormente, en los 80 se inicia la expansión internacional en el área de servicios con la contratación de diversas actividades en Caracas (Venezuela). Además, en 1988 se produce la adjudicación del primer

contrato importante en gestión integral del agua, en Vigo. Un año más tarde, Sevilla se prepara para albergar la Exposición Universal de 1992, donde FCC lleva a cabo destacadas obras. Por estas fechas, se finaliza la construcción de la Torre Picasso, el mayor edificio de oficinas de España, siendo FCC el propietario del 80% del mismo.

En 1990 se inicia la construcción de las Torres Puerta de Europa, dos torres inclinadas de singular diseño situadas a ambos lados del Paseo de la Castellana. Es en esta década cuando las hermanas Koplowitz se introducen en la empresa como máximas responsables. Es en 1992 cuando Construcciones y Contratas, S.A. se fusiona con Fomento de Obras y Construcciones, S.A. dando lugar a Fomento de Construcciones y Contratas, S.A. (FCC). La empresa resultante de la fusión es la primera de su sector en tamaño y rentabilidad. Así, el 10 de marzo de 1992 FCC entra en la lista de empresas que componen el IBEX-35. En 1998, Alicia decide vender el 28% del capital por 821 millones de euros, dejando a su hermana Esther como máxima accionista de la compañía. Ese mismo año, Esther Koplowitz firma una alianza con Vivendi, líder mundial en servicios urbanos, cuyo objetivo es el desarrollo de FCC, especialmente en el campo del medioambiente. En 1999, FCC suscribe el primer contrato de gestión ambiental con financiación privada que se firma en el Reino Unido. Además, en general, la década de los 90 viene marcada para FCC por la construcción y desarrollo de numerosos aeropuertos a lo largo y ancho de la geografía española.

En el año 2000 se lleva a cabo la creación de Realía, empresa con la que gestiona sus negocios inmobiliarios. Del año 2000 en adelante, FCC lleva a cabo numerosas operaciones de expansión internacional y de absorción de otros negocios. Ejemplos claros de ello son la absorción de la cementera Portland Valderrivas o la creación de Aqualia. En España y de forma más concreta en Valencia, destaca por diversas obras de construcción como el Museo de las Ciencias, el Museo Oceanográfico o La Ciudad de la Justicia.

En 2004, FCC puso en marcha un plan de crecimiento que contempla inversiones por valor de 3 000 millones de euros hasta 2008. Como prueba de ello es posible observar la oferta pública sobre el 100% del capital de Cementos Leona o la compra de la compañía austríaca de servicios urbanos y medioambientales ASA al grupo francés de electricidad EDF por 224 millones de euros. De este modo se confirma el despliegue de FCC hacia la Europa del Este.

Con el estallido de la crisis, toda la economía se ve gravemente afectada, en especial el sector de la construcción, muy viciado debido a la gran burbuja inmobiliaria que llevaba tiempo dándose en el país. FCC pasa en esos momentos a tener serios problemas financieros, sobretodo en relación a su nivel de endeudamiento. Por este motivo decide refinanciar su deuda y desinvertir en numerosos activos no estratégicos para reducir los niveles de deuda. Estos activos son aquellos en los que la participación de FCC es minoritaria y no tiene el control de la gestión, así como los negocios en los que FCC no dispone de liderazgo de mercado.

En 2014, atendiendo a las necesidades de capital de la entidad, FCC lleva a cabo una ampliación de capital por 1 000 millones de euros a modo de rescate. La ampliación de capital resulta ser un éxito, queda totalmente suscrita. Las consecuencias de este hecho son que Esther Koplowitz vea deslucida su participación y quede relegada a la posición de segunda accionista por detrás de Carlos Slim, que al suscribir 500 millones de euros en acciones de FCC, pasa a ser el máximo accionista del grupo. Estos hechos se detallan al final del Apartado 2.2.3, que habla de la evolución de FCC en bolsa.

2.2.2 Estructura del grupo

Líneas de Negocio o Actividades

FCC es un grupo empresarial de servicios ciudadanos a nivel global que destaca tanto por su diversificación como por su expansión internacional. Para llevar esto a cabo, FCC divide su actividad en tres grandes líneas de negocio a las que aplica distintas estrategias. A continuación, se exponen las principales líneas de negocio del grupo FCC.

➤ **Infraestructuras**

En la línea de infraestructuras, FCC abarca todos los ámbitos de la construcción y los sectores afines; además, tiene una experiencia de más de 110 años en el desarrollo, la gestión y la construcción de infraestructuras. Las actividades del área de infraestructuras son las siguientes:

- **Construcción:** este sector aporta al Grupo FCC más de la mitad de su facturación. Para este sector destacan los proyectos de obras marítimas, carreteras, puentes, infraestructuras ferroviarias, túneles, viviendas, urbanizaciones, obras aeroportuarias, obras hidráulicas y rehabilitación de edificios.
- **Industrial:** esta área de actividad apuesta por el I+D como motor de cambio hacia un mercado altamente tecnológico y su trabajo se centra en plantas industriales, instalaciones térmicas, gaseoductos y oleoductos, instalaciones electro-mecánicas y ferroviarias, ingeniería de software, redes de distribución, eficiencia energética, etc.
- **Cemento:** Cementos Portland Valderrivas es la empresa encargada de esta área dentro del Grupo FCC. Su actividad se centra sobre todo en la innovación en los procesos y en la investigación de nuevos y mejores productos y materiales para la construcción.
- **Concesiones:** esta filial de FCC se encarga de gestionar la colaboración Público Privada (CPP) que permita a las

administraciones públicas el desarrollo de infraestructuras sostenibles y a las empresas privadas la posibilidad de generar negocio.

- **Inmobiliaria:** a través de Realia, el Grupo FCC desarrolla una actividad inmobiliaria centrada en la explotación de edificios de oficinas y centros comerciales que el grupo tiene en propiedad.

➤ **Servicios Ciudadanos**

FCC presta servicios a más de 50 millones de habitantes por todo el mundo. Su actividad en el área de Servicios Ciudadanos se divide en dos importantes parcelas de negocio que se presentan a continuación:

- **Servicios Medioambientales:** esta actividad se centra sobre todo en la gestión de residuos sólidos urbanos y tiene presencia en 5 000 municipios en 13 países del mundo. Las principales acciones que llevan a cabo son la recogida de residuos y limpieza, el tratamiento de residuos urbanos, la creación y conservación de zonas verdes (mantenimiento y restauración de parques y jardines históricos) y el mantenimiento del alcantarillado.
- **Residuos Industriales:** FCC se ha especializado en la gestión integral de estos residuos sean del tipo que sean, peligrosos, no peligrosos, reciclables, banales, suelo y pasivos medioambientales. Además también lleva a cabo tareas de descontaminación de suelos.

➤ **Gestión del Agua**

FCC delega su actividad en lo referente a la gestión del agua en la empresa Aqualia, que se encarga de dar respuesta a las necesidades de empresas privadas y organismos públicos en cada fase del ciclo integral del agua para todos los usos: consumo humano, industrial y agrícola. Esto incluye la captación, potabilización y tratamiento del agua recogida del medio natural, así como la distribución y recogida de las aguas usadas para su

posterior depuración y devolución, en condiciones óptimas, al medio natural donde se ha obtenido.

Las principales actividades que realiza FCC respecto a la gestión del agua son: control de calidad del agua, mantenimiento y explotación de estructuras de riego, diseño y construcción de infraestructuras hidráulicas, instalaciones acuático-deportivas y servicios públicos del agua en general.

Gobierno corporativo

El Consejo de Administración es el órgano encargado de mediar entre los accionistas y los directivos de la empresa para supervisar, examinar y controlar las actividades propias de la gestión. En la Figura 2.3 se detallan los miembros del Consejo de Administración de FCC.

Esther Alcocer Koplowitz

- Presidenta
- En representación de Dominum Desga, S.A
- Consejera dominical designada a propuesta de la sociedad Dominum Dirección y Gestión, S.A.
- Fecha primer nombramiento: 27-09-2000
- Fecha último nombramiento: 01-06-2011
- nº acciones: 4.132

Samede Inversiones 2010, S.L.U

- Representante: Esther Koplowitz Romero de Juseu
- Vicepresidenta primera
- Consejera dominical designada a propuesta de la sociedad Dominum Dirección y Gestión, S.A.
- Fecha primer nombramiento: 13-04-2015
- Fecha último nombramiento: 13-04-2015
- nº acciones: 58.494.143 (indirectas)

EAC Inversiones Corporativas, S.L.

- Representante: Alicia Alcocer Koplowitz
- Consejera dominical designada a propuesta de la sociedad Dominum Dirección y Gestión, S.A.
- Fecha primer nombramiento: 30-03-1999
- Fecha último nombramiento: 23-06-2014
- nº acciones: 32

Inmobiliaria AEG, S.A. de CV

- Representante: Carlos Slim Helú
- Consejero dominical designado a propuesta de Inmobiliaria Carso, S.A. de C.V.
- Fecha primer nombramiento: 13-01-2015
- Fecha último nombramiento: 13-01-2015
- nº de acciones: 1

Gerardo Kuri Kaufmann

- Consejero dominical designado a propuesta de Inmobiliaria Carso, S.A. de C.V.
- Fecha primer nombramiento: 13-01-2015
- Fecha último nombramiento: 13-01-2015
- nº de acciones: 1

Henri Proglio

- Consejero independiente
- Fecha primer nombramiento: 27-02-2015
- Fecha último nombramiento: 27-02-2015
- nº acciones: 4.600

Álvaro Vázquez de Lapuerta

- Consejero independiente
- Fecha primer nombramiento: 27-02-2015
- Fecha último nombramiento: 27-02-2015

Juan Béjar Ochoa

- Consejero delegado y vicepresidente segundo
- Consejero ejecutivo
- Fecha primer nombramiento: 31-01-2013
- Fecha último nombramiento: 23-05-2013
- nº acciones: 35.688

Dominum Dirección y Gestión, S.A.

- Representante: Carmen Alcocer Koplowitz
- Consejera dominical
- Fecha primer nombramiento: 26-10-2004
- Fecha último nombramiento: 27-05-2010
- nº acciones: 58.454.939

Inmuebles Inseo, S.A. de CV

- Representante: Juan Rodríguez Torres
- Consejero dominical designado a propuesta de Inmobiliaria Carso, S.A. de C.V.
- Fecha primer nombramiento: 13-01-2015
- Fecha último nombramiento: 13-01-2015
- nº de acciones: 1

Alejandro Aboumrád González

- Consejero dominical designado a propuesta de Inmobiliaria Carso, S.A. de C.V.
- Fecha primer nombramiento: 13-01-2015
- Fecha último nombramiento: 13-01-2015
- nº de acciones: 1

Manuel Gil Madrigal

- Consejero independiente
- Fecha primer nombramiento: 27-02-2015
- Fecha último nombramiento: 27-02-2015

Francisco Vicent Chuliá

- Secretario (no Consejero)

Felipe Bernabé García Pérez

- Vicesecretario (no Consejero)

Figura 2.3: Consejo de Administración de FCC.

Fuente: <http://www.fcc.es> y elaboración propia.

Por otro lado, la Comisión Ejecutiva se encarga de gestionar las directrices de la empresa y ejecutar las decisiones directivas para poner en marcha las líneas de actuación del Grupo. En la Figura 2.4 se muestra la composición de esta comisión.

Presidente

- Juan Béjar Ochoa

Vocales

- Dominum Desga, S.A. representada por Esther Alcocer Koplowitz
- EAC Inversiones Corporativas, S.L. representada por Alicia Alcocer Koplowitz
- Alejandro Aboumrád González
- Gerardo Kuri Kaufmann

Secretario (no Vocal):

- Francisco Vicent Chuliá

Vicesecretario (no Vocal):

- Felipe B. García Pérez

Figura 2.4: Comisión Ejecutiva de FCC.

Fuente: <http://www.fcc.es/> y elaboración propia.

2.2.3 FCC en bolsa: Evolución

Fomento de Obras y Construcciones comenzó a cotizar en bolsa hace más de un siglo, en diciembre de 1900. En 1992 es cuando se produce la fusión entre esta compañía y Construcciones y Contratas, dando lugar a FCC. En marzo de ese mismo año FCC entra en el IBEX-35. No obstante, nos remontaremos al año 2004 para el repaso de su evolución en bolsa.

En el año 2004, en pleno éxito de FCC, la empresa pone en marcha un plan de crecimiento que contempla inversiones por valor de 3 000 millones de euros; dicho plan se extiende hasta 2008. Así comienza el crecimiento prolongado y acusado de FCC en la bolsa española, ha alcanzado su momento álgido, adquiriendo numerosos contratos, es aquí donde se empieza a producir su despegue en bolsa, que se extenderá hasta 2007, donde alcanza su máximo valor histórico y el precio de la acción se sitúa por encima de los 60.5€/acción, como podemos ver en el Gráfico 2.1.



Gráfico 2.1: Evolución de FCC.MC en bolsa. Período enero 2000 hasta junio 2015.

Fuente: <https://es.finance.yahoo.com/echarts?s=FCC.MC#symbol=FCC.MC;range=1d>

Con el estallido de la crisis, la caída de FCC en el parqué se hace inminente. El sector de la construcción, inmerso en una gran burbuja inmobiliaria, es el más afectado. FCC pasa en esos momentos a tener serios problemas financieros, sobretodo en relación a su nivel de endeudamiento. FCC no es la única en caer, todo el IBEX-35 sufre el azote de la crisis y se enfrenta a la mayor pérdida de valor en su historia.

Si bien, entre los meses de febrero y mayo de 2009, la acción de FCC sufre un repunte junto al IBEX-35, debido especialmente a las continuas inyecciones de capital y las líneas de liquidez que abrieron los bancos centrales, acompañadas de bajadas de los tipos de interés. Este efecto es observable tanto en el Gráfico 2.1, que hace referencia a FCC, como en el Gráfico 2.2 que muestra la evolución del IBEX-35.

En el año 2012, entre febrero y mayo, la bolsa española descendía significativamente, afectada por el anuncio de expropiación de la filial de Repsol, YPF por parte del gobierno argentino que preside Cristina Fernández de Kirchner; así como por la venta por parte de ACS del 3.69% de Iberdrola. A todo esto se unió el aumento de la morosidad de la banca española y el anuncio, por parte del Banco de España, de medidas adicionales de saneamiento de la banca española.



Gráfico 2.2: Evolución del IBEX-35. Período enero 2000 hasta junio 2015.

Fuente: <https://es.finance.yahoo.com/echarts?s=%5EIBEX#symbol=%5EIBEX;range=1d>

Toda esta situación fue especialmente grave para las constructoras españolas que experimentaron una caída media del 39% como consecuencia de la deuda soberana, las dificultades crediticias y su elevado nivel de endeudamiento. En esta ocasión, FCC vio reducida su cotización prácticamente a la mitad (-48.9%), según los analistas las refinanciaciones pendientes y la dependencia del negocio en España fueron los puntos clave para esta caída. A finales de año, la cotización de FCC sufre otra sacudida (-5.69%) al anunciar la suspensión del dividendo debido a las pérdidas que arrastraba.

A mediados de 2013, la cotización de FCC entabla un crecimiento sostenido desde los 6 €/acción debido, en gran parte, a que la compañía logra el mayor contrato de la historia de la construcción española: la construcción de tres líneas del metro de Riad (Arabia Saudí) por un valor de 6 070 millones de euros. El presupuesto global estimado del proyecto asciende a los 16 300 millones de euros. Por otro lado, atendiendo a las necesidades de capital de la entidad, FCC lleva a cabo en 2014, junto a las desinversiones en activos no estratégicos, una ampliación de capital por importe de 1 000 millones de euros que queda suscrita en su totalidad. Con esta operación, se junta a Bill Gates (actual accionista del grupo con una participación del 5.7%) otra personalidad muy relevante en el mundo de las grandes inversiones, Carlos Slim. El mexicano ha suscrito acciones por 500 millones de euros y ha comprado los derechos de suscripción

preferente de Esther Koplowitz por 150 millones de euros; de este modo entra como primer accionista de FCC con un 25.63% de participación sobre el nuevo capital social. Esther Koplowitz queda relegada al ver su participación reducida hasta el 22.43%.

Cabe destacar como hecho relevante más reciente que en la semana posterior a las elecciones municipales del 24 de mayo de 2015, las acciones de constructoras y eléctricas españolas sufrieron una significativa caída. Lo que ha llevado, por ejemplo, a que las acciones coticen por primera vez por debajo del precio al que Carlos Slim las adquirió en la ampliación de capital del pasado año; esto supone unas minusvalías en su participación equivalentes a 67 millones de euros.

No obstante, el Gráfico 2.2 muestra una estabilización notable del valor de la acción. Además, FCC empieza una etapa de recuperación, renovación y crecimiento que auguran un buen futuro y, actualmente, un bueno momento para entrar a la inversión de este valor a largo plazo.

2.2.4 Principales ratios económico-financieros

Para analizar de forma más adecuada la evolución y la situación actual de la compañía, es importante fijarse en los ratios económico-financieros y la evolución que han sufrido a lo largo de los últimos años. Para ello se ha confeccionado una tabla a partir de los indicadores económicos y financieros que se han considerado de mayor relevancia a la hora de analizar la situación económico-financiera de FCC. Los ejercicios de los que se disponen datos son los comprendidos en el período 2010-2014. Además, la última columna ofrece la diferencia porcentual entre los datos de 2014 con respecto a los de 2013 para poder apreciar de forma más intuitiva los últimos cambios ocurridos en las cuentas anuales de la empresa.

Ratios	2010	2011	2012	2013	2014	% 13-14
INCEN (miles)	12 114 168	11 754 765	11 152 000	6 749 981	6 334 066	-6.16%
EBIDTA (millones)	1 366	1 256	820	717	804	12.13%
B. Neto (mil.)	313 583	2 914	-1 028 000	-1 530 316	-733 413	52.07%
ROA	4.76%	2.88%	4.09%	-9.79%	-5.23%	46.57%
ROE	12.24%	0.12%	-43.19%	-62.94%	-14.80%	76.48%
BPA	2.40	0.02	-7.87	-12.02	-2.81	76.59%
Dividendo/acc	1.37	1.35	0.51	0.00	0.00	-

Tabla 2.1: Principales Ratios Económico-Financieros de FCC.

Fuente: Infomercados, Investing, El Economista y Elaboración propia.

Comenzando por arriba, lo primero destacable de la Tabla 2.1 es la progresiva disminución de la cifra de negocios (INCEN), con una disminución especialmente acusada entre 2012 y 2013 (-39.47%). La evolución del INCEN es coherente con la del EBITDA⁵, que también sufre una disminución progresiva pero no tan acusada. No obstante, sí que contrasta con esto la evolución del beneficio neto, que de 2012 en adelante pasa a ser negativa. La compañía por su parte afirma que estos resultados son fruto del deterioro contable en fondos de comercio, de actividades interrumpidas y de las provisiones extraordinarias por reestructuración de los negocios y saneamientos contables (cifras que no se incluyen en el

⁵ El EBITDA es un indicador financiero representado por un acrónimo que en inglés significa *Earnings Before Interests, Taxes, Depreciation and Amortization* (beneficio antes de intereses, impuestos, depreciaciones y amortizaciones). La importancia de este indicador se debe a que facilita la comparación entre los resultados de diferentes empresas atendiendo a los resultados de explotación y sin tener en cuenta los gastos financieros y la política de amortización de cada empresa.

cálculo del EBITDA pero sí en el del beneficio neto y generan una diferencia entre ambos indicadores).

Con la disminución de la cifra de negocios y la aparición de beneficios negativos, se produce también una inversión en la rentabilidad económica (ROA) que pasa a ser negativa, ya que es el cociente entre beneficio y activo; el valor del ROA en el año 2014 fue de -5.23%; un dato mejor que el del año anterior pero que todavía sitúa a la compañía en pérdidas y que traducido significa que, por cada euro que la empresa tiene invertido en activo, pierde 5 céntimos anuales. Con la rentabilidad financiera (ROE) ocurre exactamente lo mismo, al tratarse de un ratio que mide la relación entre el beneficio neto y los fondos propios, al ser el beneficio neto negativo el ratio también lo será; y en este caso se sitúa en -14.8% para el 2014, lo que significa que por cada euro invertido en la compañía, el inversor pierde de media casi 15 céntimos al año. A pesar de las malas noticias en la evolución de estos últimos años, entre el 2013 y el 2014 se nota una mejoría significativa en estas medidas de rentabilidad que vaticina un crecimiento posterior.

El BPA, que se trata del beneficio neto dividido por el número de acciones de la empresa, manifiesta un empeoramiento (con valores negativos a partir de 2012 debido a las pérdidas) hasta 2013 (-12.02); si bien, en 2014 alcanza un valor de -2.81 por dos razones diferentes. La primera es el aumento de capital que pone más acciones en circulación y reduce este cociente. La segunda es la disminución de las pérdidas, que aunque mantiene el ratio en un valor negativo hace que el módulo del cociente sea más pequeño.

Respecto a los dividendos, la empresa dejó de ofrecerlos en 2013 y así continúa hasta hoy. Su prioridad actual es realizar un saneamiento completo y recuperar los beneficios, cosa que se espera ya para el ejercicio actual.

Después de analizar la compañía FCC, parece ser que se encuentra en uno de sus peores momentos antes de volver a recuperar la senda del

crecimiento. Por esta razón, el momento actual es posiblemente uno de los mejores para invertir en este valor.

3. Cálculo estocástico de Itô

El siguiente capítulo tiene como objeto presentar las herramientas estocásticas necesarias para calcular la solución del Modelo Browniano Geométrico y las propiedades estadísticas principales del mismo. Antes que nada, se introducirá un tipo particular de proceso estocástico que tendrá un papel importante a lo largo de todo el desarrollo teórico del Modelo Browniano Geométrico, el propiamente conocido como Movimiento Browniano o proceso de Wiener. Partiendo de su definición enunciaremos aquellas propiedades del proceso que se requerirán con posterioridad. En segundo lugar, se explicará cómo obtener simulaciones del proceso de Wiener. Puesto que el Modelo Browniano Geométrico se fundamenta en una ecuación diferencial estocástica de Itô, su resolución requiere conocer las integrales estocásticas de Itô, así como sus propiedades estadísticas. Este capítulo concluye con el estudio de dichas integrales.

3.1 Movimiento Browniano

Una función aleatoria o proceso estocástico describe la evolución temporal de una variable aleatoria. En el presente trabajo, utilizaremos un importante proceso estocástico denominado Movimiento Browniano o proceso de Wiener. Este proceso toma valores continuos y es dependiente de la variable tiempo, la cual es considerada también continua. El Movimiento Browniano es muy apropiado para describir el comportamiento de variables económico-financieras, como es el caso de los activos financieros.

El Movimiento Browniano es un proceso estocástico de tipo *gaussiano*⁶. El descubrimiento de este movimiento aleatorio se llevó a cabo de forma intuitiva en 1827 por el biólogo y botánico escocés Robert Brown quien lo

⁶ Se recuerda que un proceso estocástico $\{X(t; \omega): t \in T, \omega \in \Omega\}$ se dice que es gaussiano si las distribuciones finito dimensionales de dicho proceso son gaussianas, en particular, $X(t; \cdot)$ es una variable aleatoria gaussiana para cada $t \in T$.

utilizó para describir el movimiento aleatorio de las partículas de polen en el agua debido a la interacción de dichas partículas con las moléculas del fluido. A este fenómeno se le denominó Movimiento Browniano.

A principios del siglo XX, fue descubierta la utilidad de este instrumento matemático en diversos campos; en particular en finanzas, donde se utilizó para modelizar el comportamiento de los precios bursátiles. Louis Bachelier (1900) utilizó estas herramientas en su tesis doctoral “La Teoría de la Especulación” para modelizar determinados activos financieros⁷. Sin embargo, el trabajo de Bachelier no fue entendido en su época y permaneció inadvertido en los años posteriores. Fue Norbert Wiener quien años después consiguió formalizar matemáticamente el concepto de Movimiento Browniano y es por ello que, a menudo, se le denomine también proceso de *Wiener*⁸.

A lo largo de esta memoria, denotaremos al Movimiento Browniano o proceso de Wiener por: $\{B(t; \omega): t \geq 0, \omega \in \Omega\}$ o concisamente por $\{B(t): t \geq 0\}$, si bien en numerosos textos se utiliza indistintamente la notación: $\{W(t): t \geq 0\}$.

Tal y como ya se ha indicado, el objetivo de este trabajo es el análisis y aplicación de un modelo estocástico denominado Modelo Log-Normal o Browniano Geométrico aplicado a activos financieros, cuya solución es un proceso estocástico denominado Movimiento Browniano Geométrico (MBG). La componente que dota de aleatoriedad a dicho proceso es el Movimiento Browniano, cuyas trayectorias muestrales son significativamente irregulares. A continuación se define este proceso estocástico, enunciando una serie de propiedades estadísticas a través de las cuales queda caracterizado.

El Movimiento Browniano, $\{B(t): t \geq 0\}$ ó $W \equiv \{W(t), t \in \mathbb{R}^+\}$ es un proceso estocástico que cumple:

⁷ BACHELIER, L. (1900). “Théorie de la spéculation”. en *Annales Scientifiques de l'École Normale Supérieure*, vol. 3, p. 21–86.

⁸ KLEBANER, C. (2011). *Introduction to Stochastic Calculus With Applications to Finance*. Imperial College Press.

- **MB.1.** Comienza en el origen con probabilidad 1: $P[B(0) = 0] = 1$.
- **MB.2.** Los incrementos del Browniano dados por, $B(t) - B(s)$, son variables aleatorias independientes:

$$B(t_1) - B(t_0); B(t_2) - B(t_1); \dots; B(t_{n+1}) - B(t_n),$$

$$\text{con } 0 \leq t_1 \leq t_2 \leq \dots \leq t_{n+1} \leq +\infty.$$

- **MB.3.** Tiene incrementos estacionarios:

$$B(t + \Delta t) - B(t) \stackrel{d}{=} B(s + \Delta t) - B(s), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t \in [0, +\infty[,$$

donde el símbolo $\stackrel{d}{=}$ denota que la igualdad anterior es en distribución.

- **MB.4.** Los incrementos del proceso son *gaussianos* de media 0 y varianza $t - s$:

$$B(t) - B(s) \sim N(0; \sqrt{t - s}), \quad \forall s, t: 0 \leq s \leq t.$$

Considerando la propiedad MB.4., en el caso particular en que $s = 0$, se deduce que

$$B(t) \sim N(0; \sqrt{t}),$$

es decir, que fijado t , la variable aleatoria $B(t)$ sigue una distribución normal o *gaussiana* de media 0 y desviación típica \sqrt{t} .

3.2 Propiedades estadísticas del Movimiento Browniano

A continuación, se enumeran las principales propiedades estadísticas del Movimiento Browniano $\{B(t), t \geq 0\}$. Para algunas de estas propiedades no se presenta la demostración, la cual puede chequearse en el libro de Øksendal⁹.

P.1. Función Media: A partir de la condición MB.4, se deduce que la función media del Movimiento Browniano es idénticamente nula:

$$\mu_{B(t)} = 0, \quad \forall t \geq 0.$$

En la Gráfica 3.1 se ilustra esta propiedad.

⁹ ØKSENDAL, B.K. (2003). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Berlin: Springer.

P.2. Función Covarianza: Mide el grado de relación lineal entre las variables aleatorias, $B(s)$ y $B(t)$, que se obtienen al fijar dos instantes s y t , respectivamente. En efecto, veamos que se cumple

$$\text{Cov}[B(t), B(s)] = \min(s, t), \quad \forall s, t \geq 0.$$

Si tomamos $0 \leq s \leq t$, entonces utilizando las propiedades MB.4, P.1 y las propiedades básicas del operador esperanza se tiene:

$$\begin{aligned} \text{Cov}[B(t), B(s)] &= E[B(t)B(s)] - E[B(t)]E[B(s)] \\ &= E[B(t)B(s) - (B(s))^2 + (B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s) + (B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))B(s)] + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(t) - B(s))(B(s) - B(0))] + E[(B(s))^2] \\ &= E[B(t) - B(s)]E[B(s) - B(0)] + E[(B(s))^2] \\ &= (E[B(t)] - E[B(s)])(E[B(s)] - E[B(0)]) + E[(B(s))^2] \\ &= E[(B(s))^2] \\ &= \text{Var}[B(s)] \\ &= s. \end{aligned}$$

Obsérvese que si en la relación anterior tomamos $s = t$, se obtiene la propiedad MB.4, es decir, que la varianza del Movimiento Browniano es t .

P.3. $B(t)$ es $\frac{1}{2}$ -autosemejante: Esta es, únicamente, una propiedad geométrica que formalmente se denota de la siguiente manera.

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad \forall t \geq 0, \quad \forall T \geq 0.$$

P.4. Las trayectorias muestrales de $B(t)$ son continuas, pero no son diferenciables en ningún punto. Se puede demostrar que $B(t)$ tiene trayectorias que no son de variación acotada, esto es, que no son derivables (las trayectorias del Movimiento Browniano tienen puntos angulosos, es decir, con pico, para todo instante t). Este comportamiento muestral se observa en el Gráfico 3.1.

3.3 Simulación del Movimiento Browniano

En el siguiente capítulo, cuando se estudie y resuelva el Modelo Browniano Geométrico para la modelización de activos subyacentes, la solución quedará expresada en términos del Movimiento Browniano. Para que sea posible realizar predicciones, será necesaria la realización de

simulaciones del Movimiento Browniano. A continuación, se indica un método para simular tal proceso.

Una manera sencilla de simular el Movimiento Browniano es a través de variables aleatorias normales tipificadas, haciendo uso para ello de la identidad:

$$B(t) \stackrel{d}{=} \sqrt{t}Z, \quad Z \sim N(0; 1). \quad (3.3.1)$$

Para justificar esta identidad en distribución es suficiente con probar que ambos miembros de la identidad tienen la misma distribución. Más específicamente, es sencillo ver que dicha distribución es *gaussiana* y justificar que la media y varianza de ambos miembros coinciden. Esto se muestra en la Tabla 3.1.

	$B(t)$	$\sqrt{t}Z$
<i>Distribución</i>	<i>Gaussiana</i> [MB.4]	<i>Gaussiana</i> Transformación lineal de una variable Gaussiana
<i>Media</i>	0 [MB.4]	$E[\sqrt{t}Z] = \sqrt{t} \cdot E[Z] = 0$
<i>Varianza</i>	t [MB.4]	$Var[\sqrt{t}Z] = (\sqrt{t})^2 \cdot Var[Z] = t$

Tabla 3.1. Justificación de la identidad (3.3.1) para la simulación del Movimiento Browniano.

Fuente: Elaboración propia.

En el Gráfico 3.1 se muestra una simulación de Movimiento Browniano sobre la ventana temporal $[0,1]$. En esta gráfica se ilustra la propiedad MB.1 y la propiedad estadística P.4 introducidas anteriormente. No obstante, cabe puntualizar que, pese a que el Movimiento Browniano es el ingrediente que introduce la componente de aleatoriedad en el Modelo Log-Normal, éste no se corresponde directamente con el Movimiento Browniano, sino con su diferencial. El diferencial de éste, $\{dB(t), \forall t \geq 0\}$, genera un nuevo proceso estocástico, también de tipo *gaussiano* y denominado Ruido Blanco.

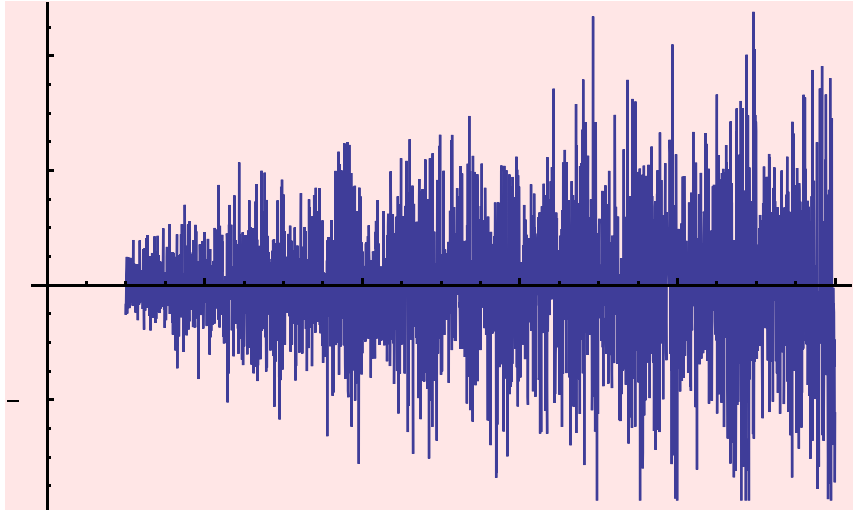


Gráfico 3.1. Simulación del Movimiento Browniano.

Fuente: Elaboración propia.

Con base en el Teorema Central del Límite, la diferencial del Movimiento Browniano se utilizará para modelizar la aleatoriedad o “ruido” en el modelo. Son muchos y diferentes los factores externos que pueden llegar a determinar el valor de un activo financiero. En condiciones generales, este teorema indica que, si S_n es la suma de n variables aleatorias independientes, la función de distribución de S_n se aproxima a una distribución normal (o *gaussiana*). Finalmente, modelizando el “ruido” con el Teorema Central del Límite, éste sigue una distribución *gaussiana* o normal, lo que confiere consistencia a la decisión de modelizar la aleatoriedad mediante un proceso *gaussiano*, como lo son el Movimiento Browniano y su diferencial, el Ruido Blanco.

3.4 EL CÁLCULO DE ITÔ

Kiyoshi Itô fue un matemático japonés que desarrolló una teoría para la diferenciación e integración de procesos estocásticos. Esta teoría se conoce como el Cálculo de Itô. El concepto básico de este cálculo es la Integral de Itô y el resultado más importante es el Lema de Itô. Cabe señalar que la Integral de Itô es el núcleo del análisis estocástico, facilita la comprensión matemática de sucesos aleatorios y difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación.

La teoría de Itô tiene muchas aplicaciones de interés, sin embargo, en este apartado se detalla la versión del cálculo de Itô que se adapta al objetivo de este TFG. Se centra en el cálculo exacto de la solución de una ecuación diferencial estocástica definida de la siguiente forma:

$$dX(t) = f(t, X(t))dt + g(t, X(t))dB(t). \quad (3.4.1)$$

Dicha solución se obtiene, en algunos casos que dependen de la forma específica de los coeficientes $f(t, X(t))$ y $g(t, X(t))$, utilizando el Lema de Itô. El Lema de Itô es una versión estocástica de la regla de la cadena para procesos estocásticos $X(t)$. Para el Modelo Browniano Geométrico, que es el caso que ocupa esta memoria (véase el Capítulo 4), se verá cómo ello sí es posible. A continuación enunciamos el Lema de Itô:

Lema de Itô (versión integral)

Hipótesis: Sea $X(t)$ un proceso estocástico que satisface la siguiente ecuación diferencial tipo Itô con condición inicial determinista x_0 :

$$\begin{aligned} dX(t) &= f(t, x(t))dt + g(t, x(t))dB(t), \quad t \geq 0, \\ X(0) &= x_0, \end{aligned}$$

y sea $F(t, x)$ una función $F: [0, T] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que las siguientes derivadas parciales existen y son continuas:

$$\frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = F_1(t, x), \quad \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = F_2(t, x), \quad \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = F_{22}(t, x).$$

Tesis: Entonces para $t > 0$ se cumple

$$\begin{aligned} F(t, x(t)) - F(s, x_0) &= \int_0^t \{F_1(r, x(r)) + f(r, x(r))F_2(r, x(r))\}dr \\ &+ \int_0^t \frac{1}{2} (g(r, x(r)))^2 F_{22}(r, x(r))dr \\ &+ \int_0^t g(r, x(r))F_2(r, x(r))dB(r). \end{aligned}$$

3.4.1 La integral de Itô

En este apartado introducimos el concepto de Integral de Itô de un proceso estocástico. La definición de la Integral de Itô difiere de la teoría matemática clásica de integración y diferenciación, definiendo lo que

debería entenderse por integración de un proceso estocástico con respecto al Movimiento Browniano (u otro proceso estocástico). El objetivo de este apartado, por tanto, es dar una interpretación a la siguiente expresión:

$$\int_0^t X(s)dB(s), \quad (3.4.2)$$

donde $X(s)$ es un proceso estocástico que cumple determinadas condiciones que a continuación se detallarán. Se dice que la expresión (3.4.2) es la Integral de Itô con respecto al Movimiento Browniano. La explicación seguirá las ideas proporcionadas en el libro de E. Allen¹⁰. Primero daremos la interpretación de dicha integral si $X(s)$ y $B(s)$ no fueran procesos estocásticos, sino funciones deterministas.

Supongamos que $f(s)$ y $g(s)$ son dos funciones deterministas suaves respecto de la variable tiempo s y consideremos la siguiente integral:

$$\int_0^t g(s)df(s). \quad (3.4.3)$$

Cuando $f(s)$ tiende a una función diferenciable, se escribe $\frac{df(s)}{ds} = f'(s)$, o equivalentemente, $df(s) = f'(s)ds$. Sustituyendo esto en la integral (3.4.3), se llega a:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \int_0^t g(s) \square '(s) ds,$$

quedando ésta definida como una integral estándar (de tipo Riemann). Si $f(s)$ no fuese diferenciable, todavía se puede utilizar la teoría determinista para definir la integral anterior. En efecto, cuando $f(s)$ no es demasiado irregular como función del argumento s , es decir, cuando $f(s)$ es lo que se denomina una función de variación acotada, se puede probar que la integral está bien definida como el siguiente límite:

$$\int_0^t g(s)df(s) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} g(s_i)(f(s_{i+1}) - f(s_i)).$$

¹⁰ ALLEN, E. (2007). *Modelling with Itô Stochastic Differential Equations*. Springer (Series Mathematical Modelling: Theory and Applications).

Puesto que $f(s)$ es de variación acotada, $f(s_{i+1})$ está próximo a $f(s_i)$. A partir de esto es posible probar que el límite anterior existe siempre que $g(s)$ no varíe demasiado. Por supuesto, si la función $g(s)$ es extremadamente fluctuante en diferentes puntos en el tiempo, el límite puede ser divergente.

Se define la integral (3.4.2) de forma análoga mediante el siguiente límite:

$$\int_0^t X(s, \omega) dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} X(s_i, \omega) (B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad \omega \in \Omega. \quad (3.4.4)$$

Nótese que se toma el límite para cada ω fijo en el espacio muestral Ω de la variable aleatoria $B(s)$. El problema aquí es que el límite para cada ω en general no existe (empieza en $\pm\infty$) para muchos procesos estocásticos $X(s)$. Para cada ω , la función $s \rightarrow B(s, \omega)$ es extremadamente volátil. Como se indicaba con anterioridad (véase la propiedad estadística P.4), el Movimiento Browniano es un ejemplo de un proceso estocástico con trayectorias muestrales continuas, pero no diferenciables en ningún punto. Todavía peor, el Movimiento Browniano como función del tiempo no es de variación acotada para cada ω , tal y como se requiere para $f(s)$. Para compensar la irregularidad de las trayectorias del Movimiento Browniano, se tienen que exigir dos condiciones que detallaremos después en el proceso integrador $X(s)$. Bajo estas condiciones, el límite existirá a pesar de la irregularidad de las trayectorias del Movimiento Browniano. La primera condición es que se asume que $X(s)$ es independiente de los incrementos del Movimiento Browniano. La segunda condición guarda relación con la variación del integrando (similar a la condición de que $g(s)$ en (3.4.3) no debe variar demasiado).

A partir de la propiedad MB.2 del Movimiento Browniano se sabe que la variación de un incremento del mismo, está dada por:

$$E[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2] = s_{i+1} - s_i.$$

Si $X(s_i)$ es independiente del incremento $B(s_{i+1}) - B(s_i)$, se obtiene

$$\begin{aligned} E \left[\left(X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] &= E[(X(s_i)^2)] E \left[(B(s_{i+1}) - B(s_i))^2 \right] \\ &= E[(X(s_i)^2)](s_{i+1} - s_i). \end{aligned}$$

Considerando el segundo momento de la variable aleatoria

$$\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)), \quad (3.4.5)$$

y asumiendo que $X(s_i)$ es independiente de $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ para cada $i = 1, \dots, n$, puede verse por la independencia de los incrementos del Movimiento Browniano que:

$$E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \sum_{i=1}^{n-1} E[(X(s_i)^2)](s_{i+1} - s_i).$$

La suma del miembro derecho es una aproximación de la integral $\int_0^t E[(X(s))^2] ds$. Por tanto, si esta integral existe, se deduce:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E \left[\left(\sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds,$$

lo cual conduce a la conclusión de que la varianza de la suma en (3.4.5) converge a $\int_0^t E[(X(s))^2] ds$. Asumiendo que esta integral existe, se demuestra:

$$E \left[\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i)(B(s_{i+1}) - B(s_i)) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds. \quad (3.4.6)$$

Cabe destacar que la integral que aparece en el lado derecho de la relación (3.4.6), en algunos casos, puede no existir. Existirá siempre que sea finita, es decir, siempre que el proceso estocástico $X(s)$ sea tal que su segundo momento puede ser integrado de 0 a t .

Por ejemplo, para el proceso $X(s) = s^{-1}B(s)$, por la condición MB.2 del Movimiento Browniano, se tiene

$$\int_0^t E[(X(s))^2] ds = \int_0^t s^{-1} ds = \ln(t) - \ln(0) = +\infty.$$

Por otro lado, si tomamos $X(s) = B(s)$, se puede reconocer fácilmente que $X(s)$ satisface la condición de integrabilidad. Por suerte, esto también se cumple para una larga clase de procesos estocásticos.

Retomando la relación (3.4.6) y considerando que el término $X(s_i)$, que aparece en el miembro izquierdo, debe ser independiente de incrementos $B(s_{i+1}) - B(s_i)$ para todos los valores de $i = 0, 1, \dots, n - 1$, a continuación, se formaliza esta idea intuitiva mediante el importante concepto de adaptabilidad del proceso integrador:

Definición 1. Una variable aleatoria X es llamada \mathcal{F}_s -adaptada si X puede ser escrita como (límite de una sucesión de) funciones de $B(\tau)$ para uno o más $\tau \leq s$, pero no como función de cualquier $B(u)$ con $u > s$. Un proceso estocástico $X(s)$ se dice que es adaptado si para cada tiempo $s \in [0, t]$, la variable aleatoria $X(s)$ es \mathcal{F}_s -adaptada.

Señalemos algunos aspectos de la Definición 1. En primer lugar, cabe remarcar algunos procesos que se derivan de composiciones simples del Movimiento Browniano tales como $X(s) = f(s, B(s))$, los cuales son adaptados; mientras que procesos tales como $X(s) = B(s + 1)$, no lo son.

La integral $X(s) = \int_0^s B(\tau) d\tau$, también define un proceso estocástico adaptado, puesto que la integral es el límite de sumas del Movimiento Browniano en diferentes tiempos menores que s . En definitiva, por la definición de la integral de Itô, se tiene

$$X(s) = \int_0^s B(\tau) d\tau = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} B(\tau_i) (\tau_{i+1} - \tau_i).$$

Por tanto, focalizando sobre la Integral de Itô, obsérvese que siempre que el proceso integrando $X(s)$ sea adaptado, la integral $\int_0^t X(s) dB(s)$ tiene sentido como el límite puntual en (3.4.4). Además, este límite (3.4.4) puede probarse que converge en media cuadrática y por lo tanto, también para cada $\omega \in \Omega$. Se concluye la exposición con la definición rigurosa de la Integral de Itô.

Definición 2. Un proceso estocástico $X(s)$, es integrable en el intervalo $[0, t]$ en el sentido de Itô si

1. $X(s)$ es adaptado para $s \in [0, t]$, y
2. $\int_0^t E \left[(X(s))^2 \right] ds < \infty$.

La Integral de Itô se define como la variable aleatoria

$$\int_0^t X(s, \omega) dB(s, \omega) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{n-1} X(s_i, \omega) (B(s_{i+1}, \omega) - B(s_i, \omega)), \quad (3.4.7)$$

donde el límite es considerado por cada $\omega \in \Omega$.

3.4.2 Propiedades de la Integral de Itô

Introducido el concepto de Integral de Itô, a continuación enunciaremos las propiedades estadísticas de dicha integral, algunas de las cuales serán utilizadas en el próximo capítulo. Estas propiedades se citan distinguiendo si el integrando es una función determinista o un proceso estocástico $X(t)$.

Sea $h(t)$ una función determinista tal que $\int_0^t (h(s))^2 ds$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

I.1. Media:

$$E \left[\int_0^t h(s) dB(s) \right] = 0.$$

I.2. Varianza:

$$\text{Var} \left[\int_0^t h(s) dB(s) \right] = \int_0^t (h(s))^2 ds.$$

I.3. Covarianza:

$$\text{Cov} \left[\int_0^t h_1(\tau) dB(\tau), \int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau,$$

siendo $t \wedge s = \min(t, s)$. En particular,

$$E \left[\left(\int_0^t h_1(\tau) dB(\tau) \right) \left(\int_0^s h_2(\tau) dB(\tau) \right) \right] = \int_0^{t \wedge s} h_1(\tau) h_2(\tau) d\tau.$$

I.4. Normalidad:

$$\int_0^t h(s) dB(s) \sim N \left(0; \int_0^t (h(s))^2 ds \right).$$

Si el integrando es un proceso estocástico $X(t)$ que satisface las condiciones de la Definición 2 anterior, entonces se verifican las siguientes propiedades:

I.5. Media:

$$E \left[\int_0^t X(s) dB(s) \right] = 0.$$

I.6. Varianza:

$$V \left[\int_0^t X(s) dB(s) \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds.$$

Obsérvese que a partir de las propiedades I.5 e I.6 se deduce

$$E \left[\left(\int_0^t X(s) dB(s) \right)^2 \right] = \int_0^t E[(X(s))^2] ds,$$

llamada isometría de Itô.

4. El Modelo Browniano Geométrico

El objetivo de este capítulo es presentar la distribución Log-Normal o Modelo Browniano Geométrico que constituye el fundamento matemático sobre el cual se realizarán las predicciones del activo subyacente FCC (FCC.MC). Este modelo se basa en la siguiente ecuación diferencial estocástica tipo Itô

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\} \quad (4.0.1)$$

donde:

- $S(t)$ es el valor del subyacente en el instante t .
- s_0 representa el valor del subyacente en el instante inicial $t = 0$ y se supone conocido, por ello se denota en minúsculas.
- $\mu \in \mathbb{R}$ es un parámetro del modelo denominado *drift* o tendencia.
- $\sigma > 0$ es un parámetro del modelo denominado volatilidad local.
- $B(t)$ es un proceso estocástico de Wiener o Movimiento Browniano.

A continuación, motivaremos la consideración del Modelo Browniano Geométrico (4.0.1) a partir de modelos deterministas sobre activos financieros. Después, haciendo uso del cálculo de Itô visto en el capítulo anterior, hallaremos la solución del modelo, así como sus principales propiedades estadísticas (como la media y la varianza). Más tarde, se mostrará cómo obtener la estimación de los parámetros μ y σ para el modelo, haciendo uso de técnicas estadísticas. Por último, se explicará cómo disponer de los resultados del modelo para realizar las predicciones que se persiguen en este trabajo.

4.1 Motivación del modelo para subyacentes en condiciones de certidumbre

A continuación, se presenta un modelo determinista clásico para representar la trayectoria temporal de una inversión en condiciones de certidumbre, es decir, sin riesgo. Este modelo constituye el punto de partida para motivar, en el siguiente apartado, un modelo estocástico para subyacentes cotizados denominado Modelo Browniano Geométrico.

Sea S_0 un principal que se invierte a un interés μ compuesto continuo durante un intervalo temporal $[0, T]$ dividido en K periodos de longitud $\Delta t > 0$ cada uno (véase, Figura 4.1).



Figura 4.1. Capitalización a interés compuesto continuo.

Fuente: Elaboración propia.

Denotemos por $\hat{S}^{(j)}$, $j = 0, 1, \dots, K$, el capital al cabo de j periodos (por convenio de notación, implícitamente se supone que $\hat{S}^{(0)} = S_0$, entonces sabemos que

$$\hat{S}^{(1)} = S_0 e^{\mu \Delta t} \quad , \quad \hat{S}^{(2)} = S^{(1)} e^{\mu \Delta t} \quad , \quad (3.1.1)$$

y en general,

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, K, \quad (3.1.2)$$

y por tanto, razonando recursivamente se tiene

$$\hat{S}^{(j)} = \hat{S}^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} = \hat{S}^{(j-2)} e^{2\mu \Delta t} = \dots = S_0 e^{\mu j \Delta t} \quad , \quad j = 0, 1, \dots, K. \quad (3.1.3)$$

Obsérvese que cuando $j = K$, se cumple que: $\hat{S}(T) = \hat{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K \Delta t} = S_0 e^{\mu T}$, donde se ha utilizado que $K \Delta t = T$ y se ha introducido la notación siguiente: $\hat{S}(T)$ representa el capital al cabo de K periodos. Es decir, el

efecto de K pasos de longitud Δt equivale a un paso de tamaño $T = K\Delta t$. En realidad, este modelo de capitalización resulta de resolver el problema de valor inicial (ecuación diferencial ordinaria junto a una condición inicial) siguiente:

$$\frac{d\hat{S}(t)}{dt} = \mu\hat{S}(t) , \quad \hat{S}(0) = S_0 , \quad (4.1.4)$$

cuya solución es

$$\hat{S}(t) = S_0 e^{\mu t} , \quad (4.1.5)$$

la cual, para $t = T$ captura la solución del problema anterior: $\hat{S}(T) = S_0 e^{\mu T}$. Es importante observar que el modelo (4.0.1), el modelo estocástico de partida, contiene al modelo clásico determinista de capitalización continua, pues basta hacer $\sigma = 0$ en (4.0.1) para obtener a partir de la ecuación diferencial estocástica la ecuación diferencial ordinaria (4.1.4).

4.2 Motivación del modelo para un subyacente cotizado: El Modelo Browniano Geométrico

El modelo recién presentado es un modelo para un subyacente en condiciones de certidumbre en el cual no se contempla aleatoriedad alguna. En la práctica, el valor de un activo subyacente depende de numerosos factores económicos, políticos, etc. que influyen en los mercados donde cotiza la acción. Estos factores pueden contener una elevada incertidumbre dada la complejidad de su determinación.

Considerando el grado de incertidumbre dado en el mercado financiero, es más apropiado introducir la aleatoriedad en el modelo determinista a la hora de modelizar cualquier activo subyacente. El parámetro μ pasa a ser una cantidad aleatoria en lugar de una cantidad determinada. Haciendo uso de las herramientas estocásticas presentadas en el Capítulo 3, la aleatoriedad en el modelo se introducirá mediante el Movimiento Browniano $B(t)$, más concretamente, con su derivada o diferencial, el

denominado proceso de Ruido Blanco $dB(t)$. Todo ello motiva la siguiente expresión estocástica del parámetro μ :

$$\mu \rightarrow \mu + \sigma B'(t) , \quad \sigma > 0 . \quad (4.2.1)$$

En la expresión (4.2.1) se sigue denotando al parámetro μ como el rendimiento medio del subyacente, pero en este caso, se le han añadido fluctuaciones aleatorias, siendo $B'(t)$ el proceso estocástico Ruido Blanco y $\sigma > 0$ su intensidad.

Introduciendo en el modelo la notación diferencial de la derivada

$$S'(t) = \frac{dS(t)}{dt} ,$$

y considerando la aleatoriedad en el parámetro μ , el modelo se reescribe de la siguiente forma:

$$\frac{dS(t)}{dt} = (\mu + \sigma B'(t)) S(t) \Rightarrow dS(t) = (\mu + \sigma B'(t)) S(t) dt .$$

Agrupando los diferentes parámetros se obtiene:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)B'(t)dt, \quad (4.2.2)$$

donde se puede diferenciar claramente una parte determinista, $\mu S(t)$, y otra estocástica, $\sigma S(t)B'(t)dt$, en la cual se recoge el Ruido Blanco. Formalmente, dado que $dB(t) = B'(t)dt$, nuevamente el modelo se puede reescribir como en (4.0.1), el Modelo Browniano Geométrico.

4.3 Solución del Modelo Browniano Geométrico

A continuación se resolverá la ecuación diferencial estocástica (4.0.1). Para ello utilizaremos dos enfoques. El primero de ellos, prescinde del uso del Cálculo de Itô y resulta más artificial en su presentación por la forma en la que se introduce la aleatoriedad. Sin embargo, este enfoque no requiere conocer herramientas complejas como son la integración y la diferenciación de procesos estocásticos. El segundo enfoque, más avanzado, hace uso del Cálculo de Itô, y en particular del Lema de Itô presentado en el Capítulo 3 de este trabajo.

4.3.1 Solución del Modelo Browniano Geométrico sin aplicar el Cálculo de Itô

El valor de una acción está regido por multitud de factores y variables que deben considerarse inciertos e indeterminados, por ello (4.1.4) no resulta un modelo adecuado. A pesar de ello, como se ha determinado en el Apartado 4.2, el modelo que pueda resultar el adecuado debe contener en su formulación (y el modelo (4.0.1), así lo hace, como se verá más adelante) la parte del valor de la evolución del precio de la acción que se comporta de forma determinista como cualquier otra inversión libre de riesgo, y la parte, indeterminada o aleatoria, que imposibilita que el valor de ese subyacente sea predecible de forma determinista.

Partamos de la expresión (4.1.2) con $j = 1$, introduzcamos la aleatoriedad como sigue:

$$\tilde{S}^{(1)} = \tilde{S}^{(0)} e^{\mu\Delta t} e^{cZ_1}, \quad (4.3.1)$$

siendo c una constante distinta de cero y libre (fijada posteriormente) y Z_1 una variable aleatoria normal o gaussiana tipificada, i.e., $Z_1 \sim N(0; 1)$, y en general, introduciendo la aleatoriedad en (4.1.2) se tiene del mismo modo

$$\tilde{S}^{(j)} = \tilde{S}^{(j-1)} e^{\mu\Delta t} e^{cZ_j}, \quad (4.3.2)$$

siendo $Z_j \sim N(0; 1)$. Haciendo esto para cada $j = 1, 2, \dots, K$ de modo que, $Z_1, \dots, Z_j, \dots, Z_K$ sean variables independientes y aleatorias $N(0; 1)$, partiendo de (4.3.2) con $j = K$ se obtiene por recursividad que

$$\tilde{S}^{(K)} = S_0 e^{\mu K \Delta t} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)}, \quad (4.3.3)$$

o equivalentemente,

$$\tilde{S}(T) = S_0 e^{\mu T} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)}.$$

La aleatoriedad introducida de este modo en (4.3.1) (o de un modo más general en (4.3.2)), parece coherente porque garantiza que $\tilde{S}^{(1)} > 0$ ($\tilde{S}^{(j)} > 0$); pero no es totalmente satisfactoria, ya que, es de esperar que cuando no haya incertidumbre, $\tilde{S}^{(1)}$ en (4.3.1) se comporte como en (3.1.3) con $j = 1$ al menos en media. Sin embargo, se sabe¹¹:

$$E[e^{cZ}] = e^{\frac{c^2}{2}}, \quad Z \sim N(0; 1), \quad (4.3.4)$$

y por tanto

$$E[\tilde{S}^{(1)}] = E[S_0 e^{\mu \Delta t} e^{cZ_1}] = S_0 e^{\mu \Delta t} E[e^{cZ_1}] = S_0 e^{\mu \Delta t} e^{\frac{c^2}{2}} \neq S_0 e^{\mu \Delta t} = \tilde{S}^{(1)}.$$

Para lograr el objetivo marcado, vamos a introducir la aleatoriedad como sigue

$$S^{(1)} = S_0 e^{\mu \Delta t} e^{cZ_1 - \frac{c^2}{2}}, \quad (4.3.5)$$

ya que, claramente de (4.3.5) se obtiene que

$$E[S^{(1)}] = S_0 e^{\mu \Delta t},$$

y en general en (4.1.2) introduciremos la aleatoriedad del mismo modo:

$$S^{(j)} = S^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} e^{cZ_j - \frac{c^2}{2}}, \quad j = 1, 2, \dots, K. \quad (4.3.6)$$

Razonando recursivamente como en (4.1.3) obtenemos

¹¹ QUESADA, V. y GARCÍA A. (1988). *Lecciones de Cálculo de Probabilidades*. Ed. Díaz de Santos.

$$S(T) = S^{(j-1)} e^{\mu \Delta t} e^{c(Z_1 + \dots + Z_K)} e^{-K \frac{c^2}{2}}. \quad (4.3.7)$$

Denotemos por

$$B_K = Z_1 + \dots + Z_K, \quad (4.3.8)$$

entonces dado que $Z_j \sim N(0; 1)$, $j = 1, 2, \dots, K$, son variables aleatorias independientes se tiene $B_K \sim N(0; 1)$ y como $K \Delta t = T$ y $S^{(K)} = S(T)$, (4.3.7) equivale a

$$S(T) = S_0 e^{\mu T} e^{c B_K - K \frac{c^2}{2}}, \quad (4.3.9)$$

donde S_0 es el precio o subyacente de la acción en el instante inicial; $e^{\mu T}$ es la componente determinista del valor de la acción (ligado al valor μ del tipo de interés); B_K representa la introducción de la aleatoriedad en el modelo y $e^{-K \frac{c^2}{2}}$ es un término (determinista) de corrección.

La modelización dada (4.3.9) tiene una gran ventaja frente a otro tipo de modelos como los basados en árboles binomiales¹², y es que permite que el valor de la acción no sólo tome dos valores posibles, sino cualquier valor positivo. No obstante, sigue conteniendo un defecto importante respecto de nuestros intereses; si fijamos T y vamos considerando subintervalos más pequeños (particiones más finas del intervalo $[0, T]$), es decir, hacemos $K \rightarrow +\infty$ ó equivalentemente $\Delta t \rightarrow 0$, con T fijo, para la varianza del término que introduce la aleatoriedad en el modelo (4.3.9) se obtiene por (4.3.8) que

$$Var[cB_K] = c^2 Var[B_K] = c^2 K \rightarrow +\infty, \quad (4.3.10)$$

esto es, la varianza de este término que forma parte del modelo de la acción aumentará cuantas más discretizaciones tomemos del intervalo objeto de análisis, con independencia del valor T que define su extremo superior, el cual está fijo. Esto carece de sentido desde el punto de vista financiero, ya que fijado un intervalo durante el cual se observa una

¹² HULL, J.C. (2002). "Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones". Pearson Education. 4ª edición.

acción, la volatilidad de la misma es un valor fijo que no debería cambiar aunque en lugar de observar la acción intra-semana lo hiciéramos intra-día. Para resolver este inconveniente, recordemos que la constante c introducida en (4.3.6) es libre y por tanto está a nuestro servicio. Tomemos entonces c de modo que

$$c^2 K = \sigma^2 T, \quad (4.3.11)$$

siendo σ^2 un parámetro fijo identificativo del modelo particular que manejemos y que en la práctica se calculará a partir de los datos reales observados. De esta forma,

$$\text{Var}[cW_K] = \sigma^2 T < +\infty. \quad (4.3.12)$$

Obsérvese que esto indica algo coherente que se aprecia en la práctica: a mayor longitud T del intervalo $[0, T]$, tendremos mayor volatilidad, es decir, variabilidad de la acción.

Vamos ahora a relacionar B_K dada en (4.3.9) con el Movimiento Browniano. Para ello, obsérvese que por la propiedad P.3 del Capítulo 3 sabemos que:

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{\Delta t} B_K. \quad (4.3.13)$$

Entonces despejando de (4.3.11) se tiene:

$$c = \sigma \sqrt{\frac{T}{K}} \xrightarrow{T=K\Delta t} c = \sigma \sqrt{\Delta t}, \quad (4.3.14)$$

y entonces por (4.3.13) se tiene

$$cB_K = \sigma \sqrt{\Delta t} B_K = \sigma B(T). \quad (4.3.15)$$

Finalmente, sustituyendo (4.3.11) y (4.3.15) en (4.3.9) llegamos a:

$$S(T) = s_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\sigma B(T)}. \quad (4.2.16)$$

Por lo que desde una motivación basada en la introducción de la aleatoriedad en el modelo determinista, hemos obtenido la solución del Modelo Browniano Geométrico.

4.3.2 Solución del Modelo Browniano Geométrico aplicando el Cálculo de Itô

En este apartado resolveremos la ecuación diferencial estocástica de tipo Itô (4.0.1) con condición inicial:

$$\left. \begin{aligned} dS(t) &= \mu S(t)dt + \sigma S(t)dB(t), \\ S(0) &= s_0, \end{aligned} \right\}$$

aplicando el Lema de Itô introducido en el Apartado 3.4. Para ello, escribimos (4.0.1) en forma integral:

$$\int_0^t dS(r) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dB(r),$$

o equivalentemente:

$$S(t) - S(0) = \int_0^t \mu S(r)dr + \int_0^t \sigma S(r)dB(r). \quad (4.3.17)$$

A continuación, aplicamos el Lema de Itô con la siguiente identificación:

$$X(t) = S(t),$$

$$f(t, x(t)) = f(t, S(t)) = \mu S(t),$$

$$g(t, x(t)) = g(t, S(t)) = \sigma S(t),$$

escogiendo

$$F(t, x) = \ln(x).$$

Para la aplicación del Lema de Itô se necesitan calcular las siguientes derivadas parciales:

$$F_1(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial t} = 0, \quad F_2(t, x) = \frac{\partial F(t, x)}{\partial x} = \frac{1}{x},$$

$$F_{22}(t, x) = \frac{\partial^2 F(t, x)}{\partial x^2} = -\frac{1}{x^2}.$$

Por tanto,

$$\ln(S(t)) - \ln(s_0) = \int_0^t \left(\mu S(r) \frac{1}{S(r)} + \frac{1}{2} (\sigma S(r))^2 \left(\frac{-1}{(S(r))^2} \right) \right) dr$$

$$+ \int_0^t \sigma S(r) \frac{1}{S(r)} dB(r).$$

Simplificando tenemos:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \int_0^t \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) dr + \int_0^t \sigma dB(r).$$

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma (B(t) - B(0)).$$

Observemos que por la definición del Movimiento Browniano, $B(0) = 0$ con probabilidad 1, por tanto obtenemos:

$$\ln\left(\frac{S(t)}{s_0}\right) = \left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma B(t),$$

$$\frac{S(t)}{s_0} = e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B(t)},$$

$$S(t) = s_0 e^{(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2)t + \sigma B(t)}, \quad (4.3.18)$$

que representa el proceso estocástico solución, llamado Movimiento Browniano Geométrico del Modelo Log-Normal.

4.4 Propiedades estadísticas del proceso estocástico solución del Modelo Browniano Geométrico

Desde el punto de vista práctico, la solución (4.3.18) hallada en el apartado anterior se utiliza para realizar predicciones probabilísticas, en un tiempo digamos $t = T$, de tipo puntual del subyacente a partir de la

función media y, se completan mediante intervalos de confianza. Se hace por tanto necesario el cálculo de las funciones media y varianza de (4.3.18) en $t = T$.

Función media

Para el cálculo de la función media de (4.3.18), se requiere de la aplicación de la siguiente relación, denominada propiedad de $\frac{1}{2}$ -autosemejanza del Movimiento Browniano estudiada en el Capítulo 3:

$$B(T \cdot t) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(t), \quad t \geq 0, \quad T \geq 0,$$

aplicada al caso particular $t = 1$, es decir,

$$B(T) \stackrel{d}{=} \sqrt{T} \cdot B(1), \quad (4.4.1)$$

donde recordamos que por definición el Movimiento Browniano:

$$B(1) \sim N(0; 1).$$

Por otra parte, también se requiere de la siguiente propiedad:

$$E[e^{\lambda Z}] = e^{\frac{\lambda^2}{2}}, \quad Z \sim N(0; 1), \quad (4.4.2)$$

que se deduce del cálculo de la siguiente integral:

$$E(e^{\lambda Z}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\lambda z} e^{-\frac{z^2}{2}} dz.$$

Tomando el operador esperanza en (4.3.18) se tiene:

$$\begin{aligned} E[S(T)] &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma B(T)}] \\ &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} E[e^{\sigma \sqrt{T} B(1)}] \\ &= S_0 e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)T} e^{\frac{(\sigma \sqrt{T})^2}{2}}, \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

por tanto,

$$E[S(T)] = S_0 e^{\mu T}. \quad (4.4.4)$$

Obsérvese que en el segundo paso de (4.4.3) se ha aplicado la propiedad (4.4.1) y en el segundo paso se ha aplicado la relación (4.4.2) con $\lambda = \sigma \sqrt{T}$, $B(1) = Z \sim N(0; 1)$.

La fórmula (4.4.4) indica que el Modelo Browniano Geométrico posee la propiedad de que el comportamiento del precio medio de la acción es el mismo que el valor en el caso determinista (véase (4.1.5) con $t = T$).

Función varianza

Para saber cómo evoluciona la volatilidad del precio de la acción según el Modelo Browniano Geométrico observemos que, razonando como para el caso de la media, la varianza está dada por:

$$\begin{aligned} \text{Var} [S(T)] &= E \left[(S(T))^2 \right] - (E[S(T)])^2 \\ &= E \left[(S_0)^2 e^{2\sigma B(T) + 2 \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2} \right) T} \right] - (S_0)^2 e^{2\mu T} \\ &= (S_0)^2 e^{2\mu T} (E[e^{2\sigma B(T)}] e^{-\sigma^2 T}) - 1, \end{aligned}$$

es decir,

$$\begin{aligned} \text{Var} [S(T)] &= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left(E \left[e^{2\sigma \sqrt{T} B(1)} \right] e^{-\sigma^2 T} \right) - 1 \\ &= (S_0)^2 e^{2\mu T} \left(e^{\frac{4\sigma^2 T}{2}} e^{-\sigma^2 T} \right) - 1 \quad (4.4.5) \\ &= (S_0)^2 e^{2\mu T} (e^{\sigma^2 T} - 1), \end{aligned}$$

la cual indica (como cabe esperar desde la experiencia bursátil) que la varianza crece a medida que lo hace el horizonte temporal T .

4.5 Calibración de los parámetros del Modelo Browniano Geométrico

En este apartado expondremos dos técnicas estadísticas diferentes para estimar los parámetros μ y σ del Modelo Browniano Geométrico:

- Método de Máxima Verosimilitud.
- Método no paramétrico.

El hecho que motiva el hacer uso de dos técnicas distintas para la calibración de los parámetros es que las estimaciones no dependan del método en cuestión, de tal modo que si ambos métodos proporcionan valores iguales o similares sea posible asegurar que se trata de estimaciones robustas.

4.5.1 Método de Máxima Verosimilitud

A continuación se realizará la estimación de los parámetros μ y σ del Modelo Browniano Geométrico usando para ello una técnica estadística llamada Método de Máxima Verosimilitud.

Para entender mejor cómo se aplica el Método de Máxima Verosimilitud al problema aquí presentado, es conveniente recordar antes una serie de conceptos y definiciones que se seguirán en la aplicación de este método de estimación.

El método de Máxima Verosimilitud se fundamenta en el concepto de función de verosimilitud, que se debe a R.A. Fisher, y es uno de los conceptos más importantes en Inferencia Estadística.

Supongamos que hemos obtenido una muestra $\{x_i; 0 \leq i \leq N\}$ de una población descrita por una variable aleatoria continua con una función de densidad $p(x; \vec{\theta})$ dependiente del vector de parámetros $\vec{\theta} \in \mathbb{R}$. Los resultados son análogos si la población es discreta. Si consideramos muestras aleatorias simples, la probabilidad de que se dé la muestra (x_1, x_2, \dots, x_N) para un vector dado del vector de parámetros $\vec{\theta}$ viene descrita por la función de densidad de probabilidad conjunta (f.d.p) de la muestra, y que denotamos por L .

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N p(x_i; \vec{\theta}). \quad (4.5.1)$$

El problema que se plantea ahora es, dada una muestra fija pretendemos estimar el valor del vector de parámetros $\vec{\theta}$ que es desconocido.

Recordaremos que si (x_1, x_2, \dots, x_N) es una muestra dada, se llama *función de verosimilitud* a la función de $\vec{\theta}$ dada por:

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}) = \prod_{i=1}^N p(x_i; \theta).$$

Cabe resaltar que esta función se considera ahora como función solo de $\vec{\theta}$ y no de la muestra, que ya es fija, al construirse esta función después de

haber obtenido la muestra. En este sentido podríamos utilizar simplemente la notación $L(\vec{\theta})$, aunque lo más usual es mantener la muestra de la notación de L .

El Método de Máxima Verosimilitud está basado en una idea muy simple, y quizás por eso es tan importante, que consiste en considerar como mejor estimación del vector de parámetros $\vec{\theta}$ el valor que haga máxima L para la muestra dada. Es decir, dada (x_1, x_2, \dots, x_N) consideraremos mejor estimación $\vec{\theta}_1$ que $\vec{\theta}_2$ si

$$L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}_1) > L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta}_2),$$

lo que significa que el valor de $\vec{\theta}_1$ es más probable que el valor de $\vec{\theta}_2$ dada la muestra (x_1, x_2, \dots, x_N) . En otras palabras, es este método de estimación la idea consiste en elegir la moda de la distribución a posteriori de $\vec{\theta}$.

Teniendo en cuenta que la función de verosimilitud es mayor o igual que cero para todo valor de $\vec{\theta}$ y que la función logaritmo es monótona creciente resulta que:

$$\max[L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta})] = \max\left[\ln\left(L(x_1, x_2, \dots, x_N; \vec{\theta})\right)\right].$$

En la práctica se utiliza el $\ln L$ en lugar de L por ser más fácil, en favor de calcular el máximo de la función de verosimilitud o equivalentemente de la función de log-verosimilitud, pues la derivación de una suma es más simple que la de un producto.

Si la muestra depende únicamente de un parámetro, θ entonces $\hat{\theta} = \hat{\theta}(x_1, x_2, \dots, x_N)$ es un estimador de máxima verosimilitud de θ para la distribución poblacional definida por $p(x; \theta)$ si $\hat{\theta}$ hace máximo el valor de la función de verosimilitud, o lo que es lo mismo, hace máximo:

$$\ln L(x_1, x_2, \dots, x_N; \theta) = \sum_{i=1}^N \ln p(x_i, \theta).$$

En consecuencia, el cálculo efectivo de $\hat{\theta}$ se reduce al resolver la ecuación:

$$\frac{d \ln L}{d\theta} = 0,$$

de forma que si $\hat{\theta}$ es solución de esta ecuación $\hat{\theta}$ será máximo si la segunda derivada es negativa.

Si la distribución poblacional depende de M parámetros $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M$ habrá que resolver el sistema

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)}{\partial \theta_1} &= 0, \\ &\vdots \\ \frac{\partial \ln L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_M)}{\partial \theta_M} &= 0. \end{aligned}$$

Comprobando luego que si $\hat{\theta} = (\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_M)$ verifica este sistema, además hace el *hessiano* correspondiente definido negativo.

Vamos a adaptar la definición anterior a nuestro contexto, donde dada una muestra $\{x_i : 0 \leq i \leq N\}$ de un proceso estocástico $x(t)$ en los momentos $\{t_i : 0 \leq i \leq N\}$ y suponiendo que el proceso $x(t)$ depende de un vector de parámetros $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^M$, deseamos determinar el vector $\vec{\theta}$ tal que

$$\max L(\theta) = f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}),$$

siendo $f(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})$ la función de densidad conjunta de la muestra. En general, no es posible asumir que la muestra sea simple, es decir, que existe independencia; por lo que no será posible legitimar la factorización dada en (4.5.1). No obstante, para poder aplicar el Método de Máxima Verosimilitud, necesitamos tener una expresión de la función de densidad conjunta que sea preferiblemente algebraica.

Para ello, vamos en primer lugar a recordar que el modelo de subyacente que tenemos es de la forma (véase 4.0.1))

$$\begin{aligned} dx(t) &= f(t, x(t); \vec{\theta}) dt + g(t, x(t); \vec{\theta}) dB(t), \\ x(0) &= x_0, \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

con

$$x(t) = S(t); \quad x_0 = s_0; \quad \vec{\theta} = (\mu, \sigma);$$

$$f(t, x(t); \vec{\theta}) = \mu S(t); \quad g(t, x(t); \vec{\theta}) = \sigma S(t).$$

Se puede demostrar¹³ que la solución de una ecuación de Itô de la forma (4.5.2) es un proceso de Markov de primer orden. Esto permite, haciendo uso del Teorema de la Probabilidad Total, reescribir la función de densidad de probabilidad conjunta de la muestra en términos de la función de verosimilitud del siguiente modo:

$$\begin{aligned} p(t_0, x_0, t_1, x_1, t_2, x_2, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta}) &= p(t_0, x_0, \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_2, x_2 | t_1, x_1; t_0, x_0; \vec{\theta}) \dots \\ &\times \vdots \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}, \dots, t_2, x_2, t_1, x_1, t_0, x_0; \vec{\theta}) \\ &= p(t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_1, x_1 | t_0, x_0; \vec{\theta}) p(t_2, x_2 | t_1, x_1; \vec{\theta}) \\ &\times p(t_N, x_N | t_{N-1}, x_{N-1}; \vec{\theta}), \end{aligned}$$

donde $p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta})$ es la función de densidad de transición del proceso estocástico $x(t)$ que empieza en (t_{i-1}, x_{i-1}) y pasa a (t_i, x_i) . Como se ha señalado anteriormente, para mayor sencillez en el manejo computacional trabajaremos con la función del log-verosimilitud, es decir,

$$\begin{aligned} \ln(p(t_0, x_0, t_1, x_1, \dots, t_N, x_N; \vec{\theta})) &= \\ \ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) &+ \sum_{i=1}^N \ln p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}) \end{aligned}$$

Como los valores $p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta})$, $1 \leq i \leq N$, suelen estar entre 0 y 1, el logaritmo neperiano de dichos valores es negativo y el problema de maximización de la función de log-verosimilitud es equivalente a obtener el mínimo de su función opuesta, por ello consideraremos el siguiente programa de optimización:

$$\text{Min } D(\vec{\theta}) = -\ln(p(t_0, x_0, \vec{\theta})) - \sum_{i=1}^N \ln(p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}, \vec{\theta})). \quad (4.5.3)$$

¹³ Teorema 5.2.5. de Soong, T.T. (1973). "Random Differential Equations in Science and Engineering". Academic Press. New York.

Ahora vamos a explicitar el valor de $p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}, \vec{\theta})$. Para ello, partimos de la ecuación diferencial estocástica de Itô dada en (4.5.2) y le aplicaremos el esquema discreto de Euler-Maruyama para aproximar dicha ecuación en los instantes de la muestra que supondremos equiespaciados en el tiempo siendo Δt el paso temporal. Para ello, consideremos un subintervalo de tiempo genérico, $[t_{i-1}, t_i]$ y mediante la discretización de Euler-Maruyama obtenemos

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= f(t_{i-1}, x(t_{i-1}); \vec{\theta}) \Delta t \\ &+ g(t_{i-1}, x(t_{i-1}); \vec{\theta}) \{B(t_i) - B(t_{i-1})\}. \end{aligned} \quad (4.5.4)$$

Por tanto, si denotamos por x_i la aproximación de la solución obtenida por el esquema anterior en el instante t_i , es decir,

$$x_i \sim x(t_i),$$

el esquema (4.5.4) se reescribe como

$$\begin{aligned} x(t_i) &= x_{i-1} + f(t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}) \Delta t \\ &+ g(t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}) \{B(t_i) - B(t_{i-1})\}, \quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

Recordemos que por las propiedades del Movimiento Browniano se tiene que

$$B(t_i) - B(t_{i-1}) \sim N(0; \sqrt{\Delta t}), \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Por lo tanto de (4.5.5) se sigue que la aproximación vía Euler-Maruyama de $x(t_i)$ dado $x(t_{i-1})$, sigue la siguiente distribución normal

$$x_i | x_{i-1} \sim N(\mu_i; \sigma_i), \quad \begin{cases} \mu_i &= x_{i-1} + f(t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}) \Delta t, \\ \sigma_i &= g(t_{i-1}, x_{i-1}; \vec{\theta}) \Delta t. \end{cases} \quad (4.5.6)$$

Por lo tanto,

$$p(t_i, x_i | t_{i-1}, x_{i-1}, \vec{\theta}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i}\right)^2}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.5.7)$$

siendo μ_i y σ_i las expresiones dadas en (4.5.6). Esto permite escribir explícitamente la función de log- verosimilitud dada en (4.5.3) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned}
 D(\vec{\theta}) &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) \\
 &- \sum_{i=1}^N \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2}\right) \\
 &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) \\
 &- N\ln\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_i}\right) + \sum_{i=1}^N \frac{1}{2}\left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2 \\
 &= -\ln(p(t_0, x_0; \vec{\theta})) + \frac{N}{2}\ln(2\pi) \\
 &+ \sum_{i=1}^N \ln(\sigma_i) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i-\mu_i}{\sigma_i}\right)^2.
 \end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Observemos que en nuestro modelo de subyacente, $x_0 = s_0$ es determinista, por tanto:

$$p(t_0, x_0; \vec{\theta}) = p(0, s_0; \mu, \sigma) = 1, \tag{4.5.9}$$

Además, las funciones μ_i y σ_i dadas en (4.5.6) toman la forma:

$$\mu_i = S_{i-1} + \mu S_{i-1} \Delta t; \quad \sigma_i = \sigma S_{i-1} \sqrt{\Delta t}. \tag{4.5.10}$$

Entonces sustituyendo (4.5.9) y (4.5.10) en (4.5.8) obtenemos

$$\begin{aligned}
 D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \sum_{i=1}^N \ln(\sigma S_{i-1} \sqrt{\Delta t}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i - S_{i-1} - \mu S_{i-1} \Delta t}{\sigma S_{i-1} \sqrt{\Delta t}}\right)^2 \\
 &= \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \frac{N}{2}\ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\
 &+ \sum_{i=1}^N \ln(S_{i-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t\right)^2.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto el programa de minimización de la función de Log-Verosimilitud es:

$$\begin{aligned}
 \underset{(\mu, \sigma) \in \mathbb{R} \times]0, +\infty[}{\text{Min}} D(\mu, \sigma) &= \frac{N}{2}\ln(2\pi) + \frac{N}{2}\ln(\Delta t) + N \ln(\sigma) \\
 &+ \sum_{i=1}^N \ln(S_{i-1}) + \frac{1}{2\sigma^2 \Delta t} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t\right)^2.
 \end{aligned}$$

Para calcular el mínimo de $D(\mu, \sigma)$, en primer lugar calculamos los puntos críticos, que son aquellos en los que el gradiente es nulo:

$$\begin{aligned}\frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \mu} &= -\frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t \right) = 0, \\ \frac{\partial D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma} &= \frac{N}{\sigma} - \frac{1}{\sigma^3 \Delta t} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2 = 0.\end{aligned}\quad (4.5.11)$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones (4.5.11) obtenemos como puntos críticos:

$$\hat{\mu} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 \right), \quad \hat{\sigma} = \frac{1}{N \Delta t} \sum_{i=1}^N \left(\frac{S_i}{S_{i-1}} - 1 - \mu \Delta t \right)^2. \quad (4.5.12)$$

Se puede comprobar que la matriz *hessiana* formada por las cuatro derivadas parciales segundas de la función $D(\mu, \sigma)$, es decir,

$$H(D(\mu, \sigma)) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu^2} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \mu \partial \sigma} \\ \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma \partial \mu} & \frac{\partial^2 D(\mu, \sigma)}{\partial \sigma^2} \end{bmatrix},$$

Evaluada en el punto crítico $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ dado en (4.5.12) posee valores propios positivos, lo que muestra que $(\hat{\mu}, \hat{\sigma})$ es un mínimo de la función opuesta de Log-Verosimilitud y por tanto son los estimadores máximos verosímiles del Modelo Browniano Geométrico.

4.5.2 Método no paramétrico

En este apartado se complementa la estimación de parámetros del modelo realizada por el Método de Máxima Verosimilitud mediante un método no paramétrico¹⁴. Para describir con mayor generalidad este método de estimación, se parte de una ecuación diferencial estocástica tipo Itô general dada en (4.5.2), donde $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^M$ el vector de parámetros que se desea estimar. En el caso del Modelo Browniano Geométrico, $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^2$. A

¹⁴ STANTON, R (1997). "A non parametric model of term structure dynamic and the market price of interest rate risk" en *Journal of Finance*, vol. 52, issue 5, p. 1973-2002.

continuación se discretiza la ecuación (4.5.2) por algún método numérico, por ejemplo, mediante un esquema de Euler-Maruyama:

$$x(t + \Delta t) - x(t) = f(t, x(t); \vec{\theta})\Delta t + g(t, x(t); \vec{\theta})\Delta B(t),$$

$$x(t + \Delta t) = x(t) + f(t, x(t); \vec{\theta})\Delta t + g(t, x(t); \vec{\theta})\Delta B(t). \quad (4.5.13)$$

Fijada una partición del intervalo de tiempo $[0, T]$ donde se quiere aproximar la ecuación (4.5.13):

$$0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{N-1} = T,$$

con paso fijo $\Delta t = \frac{T}{N}$, obsérvese que se está dividiendo el intervalo $[0, T]$ en N subintervalos de la forma:

$$[t_i, t_{i+1}], \quad 0 \leq i \leq N - 2,$$

siendo $\Delta t = t_{i+1} - t_i$, y denotando por x_i la aproximación de $x(t)$ en el punto t_i , por ejemplo, $x_i \cong x(t_i), 0 \leq i \leq N - 1$, según (4.5.13) se obtiene:

$$x_{i+1} = x_i + f(t_i, x_i; \vec{\theta})\Delta t + g(t_i, x_i; \vec{\theta})\sqrt{\Delta t}Z_i,$$

$$Z_i \sim N(0; 1), 0 \leq i \leq N - 1,$$

donde se ha utilizado que (véase propiedad MB.4 del Capítulo 3)

$$B(t_i + \Delta t) - B(t_i) \sim N(0; \sqrt{\Delta t}).$$

Ahora empleando que la solución de la ecuación diferencial estocástica (4.5.13) es un proceso de difusión¹⁵, se cumplen las siguientes relaciones:

$$E \left[\frac{x_{i+1} - x_i}{\Delta t} - f(t_i, x_i; \vec{\theta}) \right] = \vartheta(\Delta t), \quad (4.5.14)$$

$$E \left[\frac{(x_{i+1} - x_i)^2}{\Delta t} \right] - \left(g(t_i, x_i; \vec{\theta}) \right)^2 = \vartheta(\Delta t), \quad (4.5.15)$$

¹⁵ ØKSENDAL, B.(1980). “Stochastic Differential Equations”. Nueva York: Springer-Verlag, 2nd Edition.

que, en su notación de la derecha, indican el tamaño de los órdenes de los momentos de los términos que aparezcan en los miembros de la izquierda.

Para estimar el vector de parámetros a partir de una muestra $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ se utilizan las relaciones (4.5.14)-(4.5.15) en su versión muestral:

$$\sum_{i=0}^{N-1} f(t_i, x_i; \vec{\theta}) = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i), \quad (4.5.16)$$

$$\sum_{i=0}^{N-1} \left(g(t_i, x_i; \vec{\theta}) \right)^2 = \frac{1}{\Delta t} \sum_{i=0}^{N-1} (x_{i+1} - x_i)^2. \quad (4.5.17)$$

En el caso del Modelo Browniano Geométrico, la muestra $\{x_0, x_1, \dots, x_{N-1}\}$ pasa a ser el histórico de cotizaciones $\{s_0, s_1, \dots, s_{N-1}\}$, resolviendo el sistema de ecuaciones (4.5.16) y (4.5.17), se estimaría el vector de parámetros $\vec{\theta} \in \mathbb{R}^2$. Obsérvese que el contexto del Modelo Browniano Geométrico,

$$\begin{aligned} f(t_i, x_i; \vec{\theta}) &= \mu s_i, \\ g(t_i, x_i; \vec{\theta}) &= \sigma s_i, \end{aligned}$$

con la identificación $x_i = s_i$.

4.6 Validación del Modelo Browniano Geométrico

Con el objetivo de valorar el buen ajuste del modelo se pueden emplear numerosas herramientas. No obstante, en el presente trabajo, las medidas de bondad de ajuste que se emplearán para la validación del Modelo Browniano Geométrico aplicado al subyacente FCC (FCC.MC) serán:

- Error cuadrático medio (Root Mean Squared Error, RMSE).
- Error porcentual absoluto medio (Mean Absolute Percentage Error, MAPE)
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.

- Gráfico de observaciones y predicciones (puntuales y por intervalos).

En base a los resultados obtenidos según las medidas de bondad del ajuste anteriormente especificadas, se evalúa la adecuación y ajuste del modelo, para proceder así a realizar las predicciones del subyacente en cuestión.

4.6.1 Medidas de bondad de ajuste

Error cuadrático medio (RMSE)

La medida de bondad de ajuste RMSE, mide la distancia euclídea por término medio entre los valores observados y los estimados. Cuanto menor sea el resultado del RMSE, entonces se podrá decir que el error en el modelo presentado será menor. Su valor está definido de la siguiente manera:

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (S_i - \hat{S}_i)^2}{N}}.$$

El cálculo del RMSE se realizará considerando las predicciones puntuales (función media) que se obtengan de aplicar el modelo teórico Log-Normal con ambos métodos de estimación de los parámetros explicados el Apartado 4.5. Calculados y contrastados los resultados del RMSE que muestre cada método, será posible tener una primera idea de cuál de ellos muestra un mejor ajuste.

Error porcentual absoluto medio (MAPE)

La segunda de las medidas de precisión de pronóstico a emplear, el MAPE, se calcula como el promedio de las diferencias absolutas entre los valores pronosticados y los observados, todo ello dividido por las observaciones correspondientes, quedando expresado como un porcentaje de los valores reales. Es decir, si se pronostican N periodos y los valores reales corresponden a N periodos, el MAPE se calcula como:

$$MAPE = \frac{100}{N} \sum_{i=1}^N \frac{|S_i - \hat{S}_i|}{S_i}$$

Del mismo modo que con el RMSE, el MAPE será calculado considerando las predicciones puntuales dadas a partir de la aplicación del modelo teórico Log-Normal con cada uno de los métodos de estimación de los parámetros explicados. Además de realizar el correspondiente contraste de los resultados que esta medida presente con cada uno de los métodos, individualmente, se considerará un error global de diagnóstico tolerable, cuando el MAPE obtenido sea inferior al 5%.

4.6.2. Intervalos de confianza

La construcción y análisis de intervalos de confianza (IC) del 95% es otra de las herramientas a utilizar a la hora de validar la aplicación del Modelo Browniano Geométrico al activo subyacente FCC (FCC.MC). En la construcción de los IC, hay dos elementos fundamentales a considerar. Por un lado, la amplitud del intervalo da la precisión de la estimación y, por tanto, deberá ser la menor posible y, por otro lado, la probabilidad de que el intervalo contenga el verdadero valor del parámetro a estimar (FCC.MC), que se llama nivel de confianza e interesará que sea la mayor posible. Con base en esto, es cierto que se puede ganar precisión a expensas de perder confianza en la estimación. En el presente trabajo, como se ha indicado, los intervalos de confianza construidos atienden a un nivel de confianza del 95%.

Este apartado se centra en la estimación de la variable (FCC.MC) a partir del intervalo que tiene por extremos los valores de dos funciones para una muestra, siendo ésta una estimación de la variable por intervalos de confianza.

Para centrar ideas, supongamos que se selecciona una muestra aleatoria simple de una población descrita por la función $f(x; \theta)$ dependiente del parámetro θ que se pretende estimar. El problema se plantea como sigue: se fija un nivel de confianza, que se denota por $1 - \alpha$, en donde $0 < \alpha <$

1, y se trata de determinar dos funciones $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$ de forma que:

$$P[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N) \leq \theta \leq \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)] = 1 - \alpha .$$

Al intervalo $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)]$ se le denomina *intervalo de confianza* del parámetro θ al nivel de confianza del $(1 - \alpha)100\%$. Es importante observar que sería un error afirmar que la probabilidad indicada anteriormente, es la probabilidad de que θ esté entre los números reales $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$, puesto que θ no es una variable aleatoria sino un parámetro que tendrá un valor concreto. Las variables aleatorias son $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$ al variar la muestra, luego la probabilidad anterior debe considerarse como la probabilidad de que el intervalo aleatorio $[\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N), \theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)]$ contenga el verdadero valor de θ .

Dicho en términos de frecuencias, esto significa que de cada 100 muestras aleatorias que se tomen, cabe esperar que el $(1 - \alpha)100\%$ de ellas contenga el verdadero valor de θ entre $\theta_1(x_1, x_2, \dots, x_N)$ y $\theta_2(x_1, x_2, \dots, x_N)$.

Suponiendo que (x_1, x_2, \dots, x_N) es una muestra aleatoria simple y que \bar{x} es la media muestral. La variable aleatoria \bar{x} media muestral se distribuye según una normal $N\left(\mu; \frac{\sigma}{\sqrt{N}}\right)$, suponiendo que la población es $N(\mu; \sigma)$ con σ conocida. Esta propiedad permite asegurar que la variable tipificada $\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}$ sigue una $N(0; 1)$, y por lo tanto, fijando un nivel de confianza $1 - \alpha$, obtener el valor $\lambda_{\alpha/2}$ tal que

$$P\left[\left|\frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}}\right| \leq \lambda_{\alpha/2}\right] = 1 - \alpha.$$

Operando, resulta:

$$\begin{aligned}
 1 - \alpha &= P \left[-\lambda_{\alpha/2} \leq \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma/\sqrt{N}} \leq \lambda_{\alpha/2} \right], \\
 &= P \left[-\lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \bar{x} - \mu \leq \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right], \\
 &= P \left[-\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq -\mu \leq -\bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right], \\
 &= P \left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \leq \mu \leq \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right].
 \end{aligned}$$

Con lo que las funciones buscadas son:

$$\begin{aligned}
 \theta_1 &= \bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \\
 \theta_2 &= \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}.
 \end{aligned}$$

El intervalo de confianza para la media poblacional al nivel de confianza del $(1 - \alpha)$ 100% es:

$$\left[\bar{x} - \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}}, \bar{x} + \lambda_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{N}} \right].$$

Nótese que se puede ganar en precisión de dos formas: bien perdiendo confianza, lo que en general no interesa, o bien aumentando el tamaño n de la muestra seleccionada.

4.6.3 Gráficos comparativos

Por último, calculada la función media (predicción puntual) y los intervalos de confianza (predicción por intervalos) para cada uno de los instantes de tiempo que comprenden el horizonte temporal observado y bajo cada uno de los métodos de estimación dados para la validación del modelo, se realizarán sus representaciones gráficas.

A través de estas representaciones gráficas se llevará a cabo un estudio comparativo mediante el cual se podrá observar, visualmente, el grado de ajuste entre las observaciones de la muestra y las predicciones puntuales efectuadas por el modelo para cada uno de los métodos. Además, este análisis se verá reforzado con el cálculo y comparación de las medidas de bondad del ajuste para cada uno de los dos métodos utilizados.

4.7 Predicción

El principal objetivo perseguido con los modelos económico-financieros es la posibilidad de efectuar predicciones de una determinada variable. El modelo ajustado debe poder predecir el valor medio (estimación puntual), y establecer un intervalo que contenga el valor real con una determinada probabilidad (estimación por intervalos).

Obtener las estimaciones puntuales es posible mediante el valor esperado de la variable estudiada Y , asociado a determinados valores de las variables explicativas del modelo ajustado. Para ello, se calcula la estimación de Y correspondiente a su valor medio condicionado $E(Y|x_1, \dots, x_k)$, como se expresa:

$$\hat{Y} = s_0 e^{(\hat{\mu} - \frac{1}{2}\hat{\sigma}^2)t + \sigma\sqrt{t}Z}, \quad Z \sim N(0; 1).$$

Además, es necesario completar la predicción puntual con la varianza de la estimación; de tal modo se conoce el error de la predicción y se obtiene el intervalo de confianza. El intervalo de confianza a nivel α para la estimación de Y se muestra a continuación:

$$E[S(t)] \pm 1,96 \cdot S,$$

siendo S la desviación típica muestral.

5. Aplicación del Modelo Browniano Geométrico al subyacente FCC (FCC.MC). Metodología

El activo escogido para la validación y aplicación del Modelo Browniano Geométrico es FCC (FCC.MC). En esta memoria, la metodología que se ha aplicado se ha implementado de forma práctica mediante el lenguaje de programación *Python*, clave a la hora desarrollar el programa que aplicará este modelo.

En este capítulo se lleva a cabo la estimación de los parámetros por ambos métodos expuestos en el Apartado 4.5. A continuación, se validará el Modelo Browniano Geométrico haciendo uso de los resultados de las estimaciones calculadas por el método de Máxima Verosimilitud. En el caso del método no paramétrico, la metodología a seguir sería la misma. El modelo se validará a partir de estimaciones puntuales de media y varianza y de los Intervalos de Confianza del 95%, así como mediante medidas de bondad de ajuste explicadas en el capítulo anterior, éstas son el Error Cuadrático Medio y el Error Porcentual Medio (MAPE). Por último, procederemos a realizar predicciones para el subyacente mencionado antes.

5.1 Lenguaje de programación Python

El lenguaje de programación utilizado para realizar el programa que lleva a cabo la aplicación y validación del Modelo Browniano Geométrico es *Python*.

Python es un lenguaje de programación interpretado cuya filosofía hace hincapié en una sintaxis que favorezca un código legible. Se trata de un lenguaje de programación multiparadigma, ya que soporta orientación a objetos, programación imperativa y, en menor medida, programación funcional.

Python fue creado a finales de los años 80 por el científico de la computación Guido van Rossum en el Centro para las Matemáticas y la Informática (CWI, Centrum Wiskunde & Informatica), en los Países Bajos, como un sucesor del lenguaje de programación ABC. El nombre del lenguaje proviene de la afición de su creador por los humoristas británicos Monty Python¹⁶

La elección de *Python* para realizar la aplicación y validación del modelo se debe a:

- Posee una licencia de código abierto.
- Su sintaxis es simple y clara.
- Existe una gran cantidad de bibliotecas disponibles.
- Es un lenguaje actualizado y adaptado a las exigencias del usuario.
- Fácilmente extensible.
- Lenguaje de programación Multiplataforma (Windows, Mac, Linux).
- Permite enviar información en formato HTML.

Algunos casos de éxito en el uso de *Python* son Google, Yahoo, la NASA, Industrias Ligh & Magic, y todas las distribuciones Linux, en las que *Python* cada vez representa un mayor porcentaje de los programas disponibles.

En resumidas palabras, es un lenguaje de programación sencillo que se adapta a las necesidades de este trabajo final de grado. Posee potentes bibliotecas de cálculo, representación gráfica y una gran facilidad para generar archivos (de texto, imagen, etc.).

5.2 Estimación de los parámetros del Modelo Browniano Geométrico

En el Capítulo 4 ya se mostró cómo el Modelo Browniano Geométrico (véase (4.0.1)) requiere estimar dos parámetros μ y σ . Para poder estimar

¹⁶ Los Monty Python fue un grupo cómico que representó en clave de humor la personalidad de la población británica de los años 60.

estos parámetros, se van a utilizar dos métodos distintos de estimación de parámetros en este trabajo. Primero se aplicará el Método de Máxima Verosimilitud (véase Apartado 4.5.1) y a continuación, se llevará a cabo la estimación mediante un método no paramétrico (véase Apartado 4.5.2).

5.2.1 Estimación de parámetros por el Método de Máxima Verosimilitud

El primer método en utilizar será el Método de Máxima Verosimilitud, en base a la aplicación de la solución del Modelo Browniano Geométrico (véase (4.3.18)). Como ya hemos dicho antes, los programas con los que se aplicarán los métodos están escritos en código *Python* como podemos ver en la Figura 5.1.

```
#####
# Funcion log-verosimilitud a minimizar
def L( teta ):

    # Definimos constante -1/2
    c0 = - 0.5
    # Definimos constante 1 / sqrt(2 pi)
    c1 = 1 / numpy.sqrt( 2 * numpy.pi )
    # Definimos la lista sigma ()
    s = numpy.array( [ sigma( [ i, teta[ 1 ] ] ) for i in range( 1, n ) ] )
    # Definimos la lista de la diferencia entre shares y media
    dif = numpy.array( [ share[ i ] - mu( [ i, teta[ 0 ] ] ) for i in range( 1, n ) ] )
    # Unimos listas anteriores
    ter = c0 * numpy.power( dif / s, 2 )

    # se crea una lista que contiene el primer termino de la expresion
    L1 = c1 / s
    # lista que contiene el segundo termino de la expresion
    L2 = numpy.exp( ter )
    # se junta
    #L3 = numpy.sum( - numpy.log( numpy.multiply( L1, L2 ) ) )
    L3 = - numpy.product( numpy.multiply( L1, L2 ) )
    # Devuelve
    return L3
```

Figura 5.1: Función Log-Verosimilitud en Python.

Fuente: Elaboración propia.

La Figura 5.1 muestra un extracto del programa en el cual se define la función de Log-Verosimilitud, que es el objetivo a minimizar y que se encuentra descrita en el Capítulo 4 (véase Apartado 4.5.1). Tras definir la

función, se procede a aplicar la técnica numérica de minimización Nelder-Mead¹⁷.

Nelder-Mead es un método numérico para la optimización de funciones en un espacio multidimensional. El método utiliza el concepto de un Simplex, que es un polítopo de $N + 1$ vértices en N dimensiones. De manera que esta técnica busca, de modo aproximado, una solución óptima (mínimo o máximo) global a un problema con N variables.

Tras la aplicación de esta técnica al ejecutar el programa, es posible obtener los valores de los parámetros estimados utilizando la función *print*, tal y como aparece en de la Figura 5.2.

```
C:\Python27\python.exe "C:/Users/TFG Daniel P Fdez/Documents/Modelos 1 y 2 FCC OK/MODELO1 FCC.py"
-0.00700969485549
0.0152853154198
<built-in function array>

Process finished with exit code 0
```

Figura 5.2: Resultados del programa: Parámetros por Máxima Verosimilitud.

Fuente: elaboración propia.

Los dos valores de la Figura 5.2 son los resultados obtenidos para las estimaciones de los dos parámetros. El primer resultado que aparece en pantalla corresponde a la estimación de μ (-0.00700969) y el que vemos justo debajo a σ (0.01528531).

5.2.2 Estimación de parámetros por un método no paramétrico

Tal y como se menciona en el Capítulo 4 (véase Apartado 4.5.2), la estimación de los parámetros requeridos para el modelo también se llevará a cabo a través de un método no paramétrico. El principal objetivo de realizar la estimación de ambos parámetros por dos métodos diferentes es poder comparar los resultados obtenidos y asegurar que el modelo es robusto. Este aspecto es muy importante, ya que una estimación de los parámetros incorrecta, haría nuestro modelo inservible.

¹⁷ NELDER, J. A. y MEAD, R. (1965). "A simplex method for function minimization" en *Computer Journal*, vol. 7, p. 308-313.

A partir del método no paramétrico, se plantea un sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas. Este sistema se puede resolver con el uso de *Python*.

Con la aplicación del método no paramétrico, se genera una estimación de los parámetros tal y como aparece en la Figura 5.3.

```
C:\Python27\python.exe "C:/Users/TFG Daniel P Fdez/Documents/Modelos 1 y 2 FCC OK/MODELO2 FCC.py"
-0.00706357214934
0.016234650769

Process finished with exit code 0
```

Figura 5.3: Resultados del programa: Parámetros por método no paramétrico.

Fuente: Elaboración propia.

El primer resultado obtenido hace referencia a μ (-0.00706357) y el segundo a σ (0.01623465).

En la Tabla 5.1, es posible contrastar ambos métodos. En este caso, el método de Máxima Verosimilitud y el no paramétrico, ofrecen un resultado realmente parecido en la estimación de ambos parámetros para el Modelo Browniano Geométrico. Esto supone, por tanto, una prueba a favor de la robustez del modelo.

PARÁMETRO A ESTIMAR:	MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD	MÉTODO NO PARAMÉTRICO
μ	-0.00700969	-0.00706357
σ	0.01528531	0.01623465

Tabla 5.1: Tabla comparativa de parámetros según método de estimación.

Fuente: Elaboración propia.

5.3 Validación del Modelo Browniano Geométrico

La validación del modelo es el paso posterior a la estimación de los parámetros requeridos. La validación se realiza a través de criterios estadísticos, de tal modo se aceptará la solución del modelo para el caso del activo financiero estudiado en este trabajo, FCC (FCC.MC). Dichos

critérios atienden, por una parte, a la construcción de intervalos de confianza y, por otra, a medidas de bondad de ajuste. Así, el objetivo principal de este trabajo es validar las predicciones para FCC (FCC.MC), asegurando su fiabilidad y la no dependencia de los métodos y datos utilizados.

Además, en este apartado se procede a calcular la función media (estimación puntual del subyacente) y a la construcción de los intervalos de confianza, todo ello a través de la validación del modelo y de las medidas de bondad de ajuste, para, por último, representar gráficamente los resultados obtenidos.

5.3.1 Estimaciones puntuales: Cálculo de la media y varianza teórica

Haciendo uso del valor esperado de la variable analizada, se conseguirá una estimación puntual. Esto se basa en lo ya estudiado en los Apartados 4.3 y 4.4.

De esta manera, de acuerdo al modelo teórico Log-Normal, lo que hay que hacer en primer lugar es calcular la media y la varianza teórica del activo FCC (FCC.MC) para cada instante de tiempo fijo t . Aplicando las ecuaciones (4.4.4) y (4.4.5) con los parámetros μ y σ estimados en el apartado anterior, el resultado obtenido atiende a la media y varianza teóricas para cada $S(t)$ del período fijo estudiado. Cabe subrayar que s_0 en el Modelo Browniano Geométrico se corresponde con el valor del subyacente FCC (FCC.MC) en el instante inicial del estudio, así como que el incremento de t en el período que se va a utilizar aquí es la unidad.

En la Figura 5.4 se muestran, en dos columnas, la función media (izquierda) y la función varianza (derecha) para cada una de las 30 cotizaciones de la muestra.

```
C:\Python27\python.exe "C:/Users/TFG Daniel P Fdez/
```

```
[ 11.2226984] [ 0.03410552]
[ 11.13607068] [ 0.06717117]
[ 11.05011164] [ 0.09922071]
[ 10.96481611] [ 0.13027744]
[ 10.88017898] [ 0.1603642]
[ 10.79619516] [ 0.18950333]
[ 10.71285961] [ 0.21771674]
[ 10.63016732] [ 0.24502588]
[ 10.54811334] [ 0.27145176]
[ 10.46669272] [ 0.29701498]
[ 10.38590059] [ 0.32173568]
[ 10.30573209] [ 0.34563363]
[ 10.22618241] [ 0.36872815]
[ 10.14724678] [ 0.3910382]
[ 10.06892044] [ 0.41258232]
[ 9.9911987] [ 0.43337868]
[ 9.9140769] [ 0.45344508]
[ 9.8375504] [ 0.47279893]
[ 9.7616146] [ 0.49145731]
[ 9.68626495] [ 0.50943692]
[ 9.61149692] [ 0.52675411]
[ 9.53730602] [ 0.54342491]
[ 9.4636878] [ 0.559465]
[ 9.39063784] [ 0.57488974]
[ 9.31815175] [ 0.58971416]
[ 9.24622518] [ 0.60395299]
[ 9.1748538] [ 0.61762062]
[ 9.10403334] [ 0.63073117]
[ 9.03375955] [ 0.64329845]
```

Figura 5.4: Resultados de las funciones media y varianza.

Fuente: Elaboración propia.

Una vez se tienen las funciones media y varianza para cada uno de los 30 valores del histórico, ya es se puede pasar a construir los Intervalos de Confianza.

5.3.2 Validación por intervalos de confianza: Cálculo de los intervalos de confianza teóricos

La validación del Modelo Browniano Geométrico para el activo FCC (FCC.MC) se completará con la construcción de los intervalos de confianza del 95% (véase Apartado 4.6.2), una vez que se tengan las estimaciones puntuales.

En este caso el programa se encargará de calcular, en primer lugar, la desviación típica, aplicando la raíz cuadrada a la varianza. Los intervalos de confianza se calculan como la estimación puntual (media) más-menos dos veces el valor de la desviación típica obtenida para el valor correspondiente. De esta manera, al sumar este último miembro a la media se obtiene el límite superior del intervalo, y al restárselo se obtiene el límite inferior.

Ejecutando estas operaciones con el programa, obtenemos los dos límites (superior e inferior) del intervalo de confianza al 95%, tal y como se muestra en la Figura 5.5.

```
[ [ 10.85334793], [ 11.59205095] ]
[ [ 10.61772764], [ 11.65441784] ]
[ [ 10.42013181], [ 11.6800976] ]
[ [ 10.24294475], [ 11.68669558] ]
[ [ 10.07927831], [ 11.68108972] ]
[ [ 9.92556611], [ 11.66683619] ]
[ [ 9.77966883], [ 11.64606426] ]
[ [ 9.64017842], [ 11.62017195] ]
[ [ 9.50610664], [ 11.59013759] ]
[ [ 9.37672611], [ 11.55667869] ]
[ [ 9.2514816], [ 11.5203407] ]
[ [ 9.12993677], [ 11.48155028] ]
[ [ 9.0117405], [ 11.44064891] ]
[ [ 8.89660461], [ 11.3979152] ]
[ [ 8.78428867], [ 11.35358014] ]
[ [ 8.67458912], [ 11.30783784] ]
[ [ 8.56733158], [ 11.26085338] ]
[ [ 8.46236494], [ 11.21276858] ]
[ [ 8.3595571], [ 11.16370638] ]
[ [ 8.25879152], [ 11.11377419] ]
[ [ 8.15996464], [ 11.06306651] ]
[ [ 8.0629838], [ 11.01166704] ]
[ [ 7.96776558], [ 10.95965027] ]
[ [ 7.87423445], [ 10.9070829] ]
[ [ 7.78232169], [ 10.85402488] ]
[ [ 7.69196446], [ 10.80053034] ]
[ [ 7.60310507], [ 10.74664833] ]
[ [ 7.51569033], [ 10.69242348] ]
[ [ 7.42967104], [ 10.63789649] ]

Process finished with exit code 0
```

Figura 5.5: Resultados Intervalos de Confianza 95%.

Fuente: Elaboración propia.

Una vez que obtenida función media y construidos los intervalos de confianza teóricos para cada $S(t)$ del período observado a partir del modelo teórico Log-Normal, es posible hacer una representación gráfica como la del Gráfico 5.1.

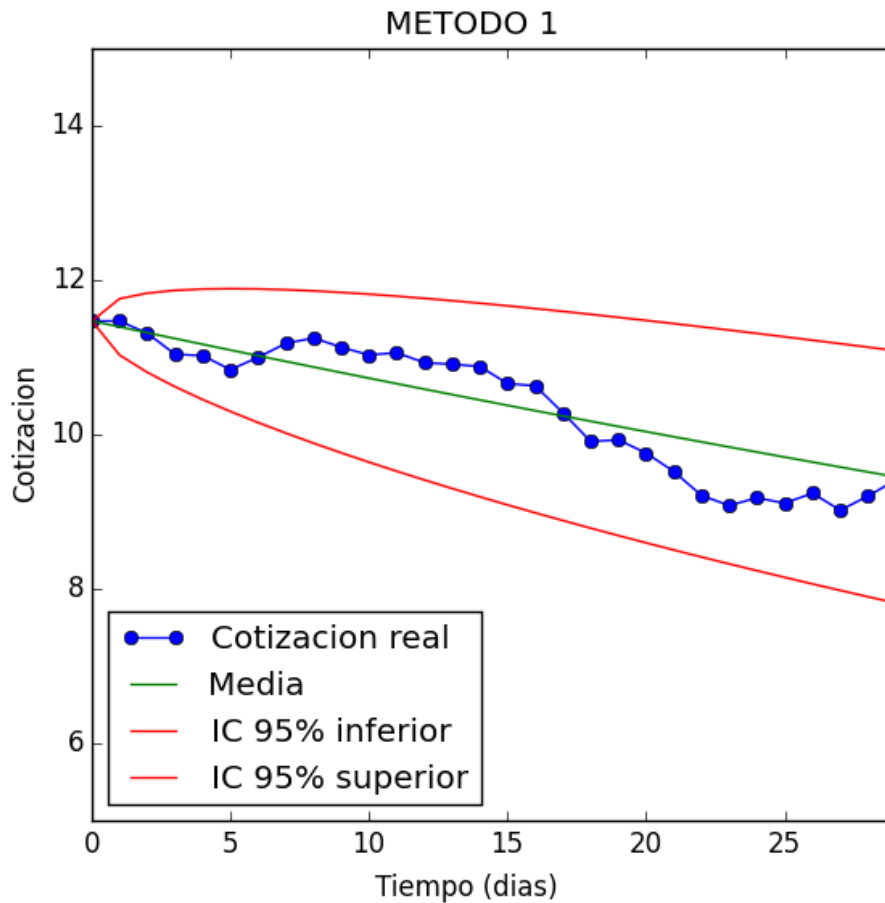


Gráfico 5.1. Intervalos de confianza, medias teóricas, reales y previsión.

Fuente: Elaboración propia.

Esta representación es muy efectiva para, de forma visual, valorar la efectividad del modelo: comparar la cotización real de la media obtenida por el modelo (predicciones), comprobar que la cotización real se ha situado dentro del intervalo de confianza para cada una de las estimaciones puntuales, etc. En resumen, de este modo es posible completar la validación del Modelo Browniano Geométrico para el subyacente FCC (FCC.MC).

De hecho, en este caso, se puede observar cómo, efectivamente, los intervalos superior e inferior recogen las fluctuaciones en el valor real de la acción y que éste no dista demasiado de la media puntual obtenida para cada instante (predicciones del modelo). Además, estos datos positivos quedarán reforzados en el siguiente apartado con el cálculo del Error Cuadrático Medio (MSE) y del Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE).

5.3.3 Medidas de bondad de ajuste: Cálculo del error cuadrático medio (RMSE) y del error porcentual absoluto medio (MAPE)

Como ya se señaló en el Apartado 4.6.1, el Error Cuadrático Medio (RMSE) mide los cuadrados de las distancias entre los valores observados y los estimados. Cuanto menor sea el resultado de éste o de su raíz cuadrada (denotada por RMSE), menor es el error del modelo. Además, de manera complementaria, se calcula el Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE), que será tolerable siempre y cuando sea inferior al 5% como ya se vio en el Apartado 4.6.1.

Mediante un *script* en el programa, es posible que éste realice todos los pasos requeridos para el cálculo de las medidas de bondad del ajuste.

En primer lugar se calcula la diferencia entre la lista que contiene las medias estimadas y la lista que contiene el histórico de cotización de los últimos 30 días; se obtiene así una lista de diferencias que es el error absoluto.

A continuación, por un lado se divide la lista del error absoluto entre la lista de cotizaciones reales, obteniendo una lista de errores relativos; y por otro lado se genera una lista fruto de elevar al cuadrado la lista de errores absolutos. Con estos dos cálculos ya es posible calcular el RMSE y el MAPE.

Para calcular el MAPE, se realiza el sumatorio de la lista de errores relativos, se divide entre la longitud de la lista y se multiplica por 100 para obtener el valor en forma de porcentaje.

Para calcular el MSE, se realiza el sumatorio de los valores de la lista de errores absolutos al cuadrado y se divide éste entre la longitud de esta lista. Si se desea obtener el RMSE, se aplica la raíz cuadrada al valor obtenido. En este caso, se ha obtenido el MSE.

En la Tabla 5.2 se muestran los resultados obtenidos para MAPE y para Error Cuadrático Medio con cada uno de los métodos utilizados en la estimación de los parámetros del modelo y que se han expuesto en el Apartado 4.5.

Medidas de Bondad de Ajuste	MÉTODO DE MÁXIMA VEROSIMILITUD	MÉTODO NO PARAMÉTRICO
<i>MAPE</i>	2.43%	2.56%
<i>Error Cuadrático Medio</i>	0.18	0.135

Tabla 5.2: Resultados de las medidas de bondad de ajuste.

Fuente: Elaboración propia.

El MAPE está por debajo del 5% en ambos casos, sea cual sea el método para calcularlos y el Error Cuadrático Medio ofrece también valores bajos. Los resultados muestran un nivel de aceptación del modelo muy bueno.

5.4. Predicciones para el subyacente FCC (FCC.MC)

Uno de los objetivos perseguidos con la aplicación de modelos matemáticos, es predecir el valor de una variable objetivo. El objetivo de este TFG es la predicción de la acción de FCC (FCC.MC), para los 5 días siguientes al último dato registrado. Una vez ajustado, el modelo permite predecir las estimaciones puntuales (valor medio) de la variable y determinar un intervalo de confianza que contenga el valor real de la misma con una probabilidad determinada (95% en el caso de nuestros intervalos de confianza).

Incluyendo el correspondiente *script* en el programa realizado con *Python*, es posible obtener las predicciones que se persiguen. Estos resultados quedan constituidos por tres listas: la función media (estimaciones

puntuales), el límite superior del intervalo de confianza y el límite inferior de éste. Estas listas tienen una longitud de 5 elementos, correspondientes a los 5 días para los que se ha decidido que el Modelo Browniano Geométrico efectúe predicciones.

Es importante destacar que para la estimación de estas predicciones se han tenido en cuenta los parámetros estimados con anterioridad con el método de Máxima Verosimilitud (véase Tabla 5.1).

Así mismo, haciendo uso de los parámetros estimados mediante el método no paramétrico y siguiendo el mismo procedimiento, también es posible obtener una buena predicción para el activo FCC (FCC.MC).

Una vez visto ejecutado el programa y realizado todo el proceso, éste ofrece las predicciones de la cotización de FCC en los próximos 5 días, que se muestran en la Tabla 5.3. Bajo la fila de predicciones es posible observar el valor real del subyacente para cada uno de los 5 días.

MÉTODO 1	04-06	05-06	06-06	07-06	08-06
<i>I.C. 95%</i>	10.76	10.71	10.66	10.61	10.56
<i>PREDICCIÓN</i>	8.99	8.99	8.99	8.99	8.99
<i>REAL</i>	9.08	9.18	9.11	9.24	9.02
<i>I.C. 95%</i>	7.67	7.59	7.51	7.43	7.36

Tabla 5.3: Resultados comparativos de predicciones y valores reales.

Fuente: Elaboración propia.

Como podemos observar en la Tabla 5.3, las predicciones efectuadas por el modelo siempre han estado acotadas por los límites superior e inferior del intervalo de confianza, lo que supone un resultado realmente bueno.

6. Programas y página web:

<http://cotizacion.imm.upv.es/Dani>

El objetivo de este capítulo es presentar el funcionamiento de los programas utilizados para la aplicación del Modelo Browniano Geométrico, así como la edición de la página web del departamento de matemática multidisciplinar para que recoja la representación de los resultados de este proyecto (predicción del activo subyacente FCC (FCC.MC)), junto a otros trabajos basados también en la aplicación de modelos matemáticos para la predicción de otros activos subyacentes. Se trata pues de tener acceso público a las predicciones, actualizadas diariamente de forma dinámica, y expuestas a través de tablas y gráficos. Un modo muy visual y orientativo de acceder a esta información.

6.1 Equipo necesario

Para poder poner en funcionamiento la página web, se ha accedido a un PC preparado con el sistema operativo *Ubuntu server 14.04 LTS (Long Time Support)*. Además, tiene instalado el servidor web *Apache*. Para la realización de los cálculos requeridos en la aplicación del Modelo Browniano Geométrico, el PC cuenta también con el lenguaje de programación *Python* así como la biblioteca de herramientas y algoritmos matemáticos para *Python: Scipy*.

Una vez desarrollados los programas y editada la página web, se han alojado en un servidor y han sido configurados para su correcto funcionamiento.

6.2 Programación con Python

Los programas realizados con *Python* realizan cuatro tareas principales que se muestran en la Figura 6.1. Ambos programas utilizados son iguales excepto porque en la tarea “Ejecución del Browniano Geométrico” el método para estimar los parámetros no es el mismo. Como vimos en

capítulos anteriores, un programa estima los parámetros mediante el método de Máxima Verosimilitud (véase Apartado 4.5.1) y el otro mediante un método no paramétrico (véase Apartado 4.5.2).

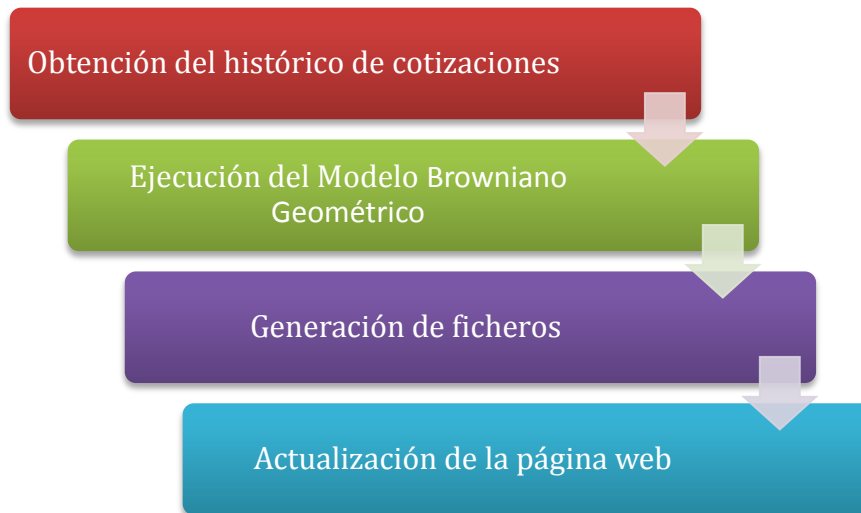


Figura 6.1: Tareas principales de los programas.

Fuente: Elaboración propia.

6.2.1 Obtención del histórico de cotizaciones

Para extraer la serie histórica de últimas cotizaciones de la acción FCC (FCC.MC), es necesario utilizar una técnica como el *web scraping*.

Scraping es un término que literalmente significa “rascado”. Sin embargo, en este contexto significa limpieza o filtro de datos.

El *Web scraping* es un método informático utilizado para obtener información directamente de sitios web, de tal manera que pueda ser almacenada, analizada y utilizada con cualquier otro fin (hoja de cálculo, programa...). Se lleva a cabo a través de robots de búsqueda y lo utilizan la mayoría de buscadores (Google, Ask, etc.). No obstante, esta técnica se centra en transformar datos que no poseen estructura en datos correctamente estructurados.

En el caso que ocupa esta memoria, el *web scraping* se utiliza en el dominio web: <https://es.finance.yahoo.com/q?s=FCC.MC> para obtener las últimas 30 cotizaciones, datos sobre los que se aplicará el modelo.

El uso de esta técnica es posible gracias a un *script* introducido en el programa y que ejecuta la tarea de obtención de datos. Lo mejor de este programa es que es posible aplicar el Modelo Browniano Geométrico y obtener la predicción para cualquier otro subyacente solo con cambiar la URL de la que el web *scraping* obtiene los datos del histórico.

En la Figura 6.2 es posible observar un ejemplo de histórico de cotizaciones de FCC (FCC.MC).

Análisis técnicos básico		Consulta la cotización						
NOTICIAS E INFORMACIÓN		Primera Anterior Siguiente Última						
Titulares		PRECIOS						
Eventos de la compañía		Fecha	Apertura	Máximo	Mínimo	Cerrar	Volumen	Ajustes de Cierre*
Foros								
COMPañÍA		9 de jun de 2015	9,02	9,23	8,97	9,20	1.895.000	9,20
Perfil		8 de jun de 2015	9,26	9,31	8,98	9,02	1.656.300	9,02
Estadísticas clave		5 de jun de 2015	9,10	9,28	9,04	9,24	1.650.400	9,24
Registros en la SEC		4 de jun de 2015	9,18	9,24	9,05	9,11	2.060.200	9,11
Competidores		3 de jun de 2015	9,08	9,24	8,94	9,18	6.047.200	9,18
Sectores		2 de jun de 2015	9,28	9,31	9,05	9,08	2.586.600	9,08
Componentes		1 de jun de 2015	9,59	9,62	9,20	9,21	1.868.300	9,21
COBERTURA DE ANALISTAS		29 de may de 2015	9,77	9,85	9,30	9,52	3.395.500	9,52
Opinión del analista		28 de may de 2015	9,92	9,93	9,65	9,76	2.866.300	9,76
Estimados de los analistas		27 de may de 2015	9,70	9,97	9,70	9,93	2.195.600	9,93
PROPIEDAD		26 de may de 2015	10,25	10,25	9,80	9,91	2.650.600	9,91
Accionistas principales		25 de may de 2015	10,60	10,69	10,25	10,28	1.089.200	10,28
Transacciones de iniciados		22 de may de 2015	10,70	10,78	10,61	10,63	864.400	10,63
Accionistas miembros de la empresa		21 de may de 2015	10,84	10,88	10,63	10,66	1.755.300	10,66
FINANZAS		20 de may de 2015	10,90	10,95	10,77	10,88	774.800	10,88
Informe de ingresos		19 de may de 2015	10,98	11,03	10,87	10,91	910.100	10,91
Balance general		18 de may de 2015	11,06	11,11	10,86	10,93	714.900	10,93
Flujo de caja		15 de may de 2015	11,26	11,26	11,00	11,06	1.239.200	11,06
		14 de may de 2015	11,08	11,12	10,87	11,03	3.022.600	11,03
		13 de may de 2015	11,30	11,39	11,07	11,13	1.151.800	11,13
		11 de may de 2015	10,98	11,21	10,98	11,18	3.591.700	11,18
		8 de may de 2015	10,87	11,03	10,82	11,00	2.551.000	11,00
		7 de may de 2015	11,02	11,02	10,73	10,84	945.900	10,84
		6 de may de 2015	11,03	11,13	10,84	11,02	1.044.200	11,02
		5 de may de 2015	11,30	11,35	11,04	11,04	1.319.000	11,04
		4 de may de 2015	11,51	11,51	11,29	11,31	728.000	11,31
		1 de may de 2015	11,47	11,47	11,47	11,47	0	11,47

Figura 6.2: Histórico de cotizaciones de FCC.

Fuente: <https://es.finance.yahoo.com/q/hp?s=FCC.MC>.

Así, extraídos los datos del histórico, ya se puede aplicar el Modelo Browniano Geométrico sobre los mismos.

6.2.2 Ejecución del Modelo Browniano Geométrico sobre el histórico

Para la ejecución del Modelo Browniano Geométrico, es requisito indispensable contar con el histórico de cotizaciones, una vez conseguido

éste, es posible poner en marcha el programa para aplicar el modelo. Al ejecutar el programa y, por tanto, aplicar el modelo, se obtienen los resultados en forma de predicciones e intervalos de confianza para los 5 días siguientes, así como el Error Cuadrático Medio y el MAPE.

6.2.3 Generación de ficheros

Una vez ejecutado el programa, éste genera ficheros que contienen la información que se mostrará en la página web, esta información consta de tablas y gráficos.

Esta información se genera en código *javascript* (*js*¹⁸), de tal manera que puedan ser leídos e interpretados por el navegador. En la página web se incluyen dos métodos que identifican diferentes técnicas para la estimación de los parámetros del modelo: Método 1, en el que los parámetros son obtenidos mediante el método de Máxima Verosimilitud, y Método 2, en el que los parámetros se obtienen a través de un método no paramétrico. Para cada uno de los archivos siempre se generan dos versiones: la del Método 1 y la del Método 2. En esta memoria se incluyen las tablas y gráficos del Método 1, siendo equivalentes para el Método 2.

Predicción, Intervalos de Confianza 95% y medidas de bondad de ajuste para los próximos 5 días

Uno de los archivos que genera el programa, y el primero que se puede observar en la página web, es el que contiene dos tablas. En la primera (Tabla 6.1) aparecen los Intervalos de Confianza del 95% y la predicción del activo subyacente para los próximos 5 días desde hoy. En la segunda tabla (Tabla 6.2) aparecen las medidas de bondad del ajuste: MAPE y Error Cuadrático Medio. A continuación se pueden observar las citadas tablas:

¹⁸ Un archivo *.js, es un archivo de texto plano que contiene *scripts* de Javascript, y que puede, por tanto, ser modificado con cualquier editor de textos. Es ejecutado generalmente por un navegador web.

FCC	HOY	MAÑANA	14-06-15	15-06-15	16-06-15
I.C. 95%	10.78	10.72	10.67	10.61	10.56
PREDICCIÓN	9.13	9.07	9.00	8.93	8.86
I.C. 95%	7.49	7.41	7.33	7.25	7.17

Tabla 6.1: Predicciones e Intervalos de Confianza 95% en página web.

Fuente: <http://cotizaccion.imm.upv.es/Dani/metodo1>

	MAPE	ERROR CUADRÁTICO MEDIO
MÉTODO 1	0.37%	0.11

Última Actualización: 11:00 12-06-2015

Tabla 6.2: Medidas de bondad del ajuste en página web.

Fuente: <http://cotizaccion.imm.upv.es/Dani/metodo1>

Además, es posible observar en la Figura 6.3, el momento en el que se ha producido la última actualización, de modo que se pueda llevar un control oportuno sobre el funcionamiento de los programas y la web.

Por otro lado, para hacer más visuales y fácilmente comprensibles los resultados del programa y poder apreciar la tendencia del subyacente, éste genera un gráfico en formato png¹⁹ que incluye media (línea verde), intervalos de confianza (líneas rojas), predicciones del modelo a 5 días (línea de puntos amarillos) y cotización real del subyacente (línea de puntos azules). Ver Gráfico 6.1.

¹⁹ Png es un formato gráfico que se muestra correctamente en navegadores y cuyo uso está libre de derechos. Además, permite una alta comprensión y una reproducción de imágenes con hasta 16,7 millones de colores.

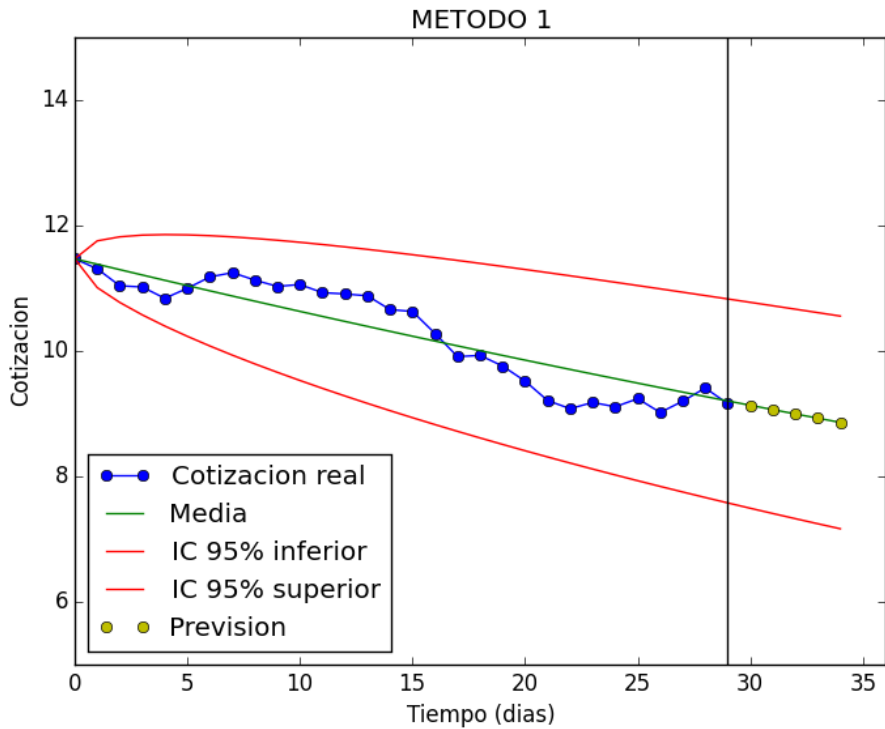


Gráfico 6.1: Intervalos de Confianza, medias, cotización histórica y predicción en web.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/Dani/metodo1>

Para generar este tipo de gráficos, es necesario importar las librerías oportunas: *numpy*, *pylab* y *matplotlib*.

Comparación entre la predicción del modelo y las cotizaciones reales a posteriori

A continuación, el programa genera el archivo cuya información queda recogida en la Tabla 6.3 y donde es posible observar la comparación entre los 5 últimos datos reales del histórico de cotización de FCC (FCC.MC) y la predicción efectuada por el programa, así como los límites superior e inferior del Intervalo de Confianza al 95%.

MÉTODO 1	07-06-15	08-06-15	09-06-15	10-06-15	11-06-15
I.C. 95%	7.49	7.49	7.49	7.49	7.49
PREDICCIÓN	9.13	9.13	9.13	9.13	9.13
REAL	9.24	9.02	9.20	9.41	9.16
I.C. 95%	10.78	10.78	10.78	10.78	10.78

Ultima Actualización: 11:00 12-06-2015

Tabla 6.3: Comparativa predicciones y cotizaciones reales.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/Dani/metodo1>

La realización de esta tabla requiere de un *script* que recopile en un fichero los resultados obtenidos por el modelo a lo largo de los últimos 5 días y le añada una fila con los últimos 5 datos del histórico.

Comparativa de los dos métodos: según estimación de parámetros

Para poder comparar los dos métodos en lo que se refiere a la predicción del valor del subyacente, el programa genera dos tablas. La primera de ellas contiene la predicción efectuada por el Método 1, la efectuada por el Método 2 y la cotización real del activo. La segunda tabla contiene El MAPE y el Error Cuadrático Medio, calculado según cada uno de los dos métodos. Esto es observable en las Tablas 6.4 y 6.5.

FECHA	07-06-15	08-06-15	09-06-15	10-06-15	11-06-15
MÉTODO 1	9.13	9.13	9.13	9.13	9.13
MÉTODO 2	9.20	9.20	9.29	9.29	9.29
REAL	9.24	9.02	9.20	9.41	9.16

Tabla 6.4: Comparativa predicciones según método y cotizaciones reales.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/Dani/comparativa>

	MAPE	ERROR CUADRÁTICO MEDIO
MÉTODO 1	0.37%	0.11
MÉTODO 2	0.84%	0.14

Ultima Actualización: Fri Jun 12 11:00:49 2015

Tabla 6.5: Comparativa medidas de bondad de ajuste.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/Dani/comparativa>

Gráficos comparativos predicciones/ reales

Para finalizar, el programa genera el Gráfico 6.2. En este gráfico es posible observar las últimas 10 predicciones del programa (línea verde), los intervalos de confianza (líneas rojas) y la cotización real del subyacente en los últimos 10 días (línea de puntos azules). De este modo podemos observar la distancia entre la predicción y los datos reales, así como la inclusión del valor real entre los dos intervalos de confianza, a posteriori y valorar el correcto funcionamiento del modelo.

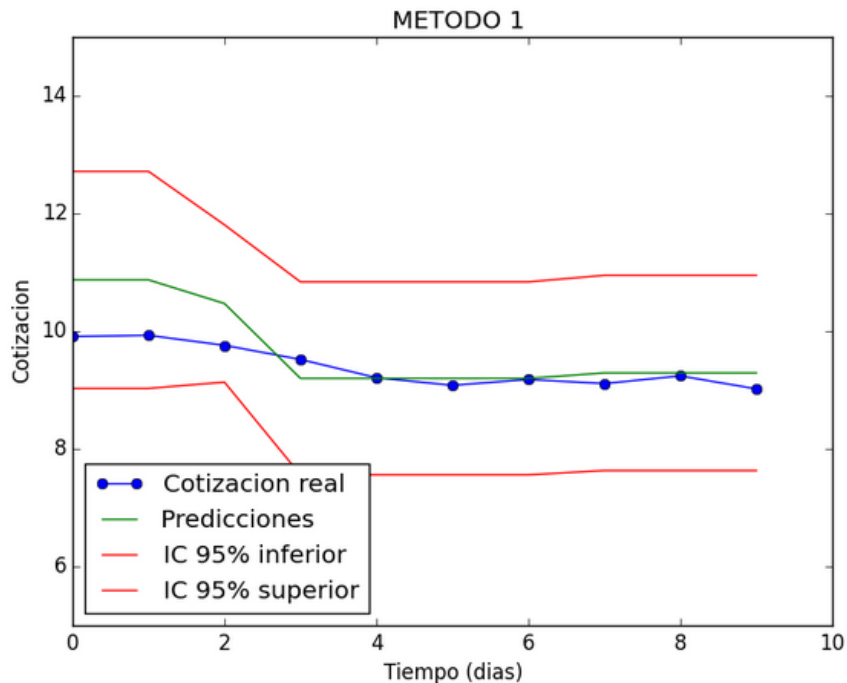


Gráfico 6.2: Predicción, Intervalos de Confianza y cotizaciones reales últimos 10 días.

Fuente: <http://cotizacion.imm.upv.es/Dani/comparativa>

6.2.4 Actualización de la página web

Cada vez que un usuario entre en la página web, ésta hará una llamada al programa para que éste envíe los datos necesarios a la web. De tal modo, la información se encuentra actualizada en todo momento. Se trata pues de una página web dinámica.

6.3 Cron (Linux)

El PC en el que se alojan los programas cuenta con el sistema operativo Linux. En este sistema operativo, Cron es un administrador de procesos en segundo plano y lo hace a intervalos de tiempo regulares. Mediante un fichero crontab es posible fijar la fecha y hora en la que deben ejecutarse los procesos para poner en marcha el programa.

En el caso que ocupa este trabajo, se ha configurado el archivo crontab para que se ejecute diariamente de lunes a viernes a la 1 a.m. En ese momento los programas obtienen el histórico de FCC, lo procesan y ofrecen los resultados fruto de la aplicación del modelo. El motivo para ejecutar el programa a la 1 a.m. es que la web de donde se obtiene la información no se actualiza hasta después de las 12 a.m.

6.4 Página web: <http://cotizaccion.imm.upv.es/Dani>

La página web donde se exponen los resultados del presente trabajo está incluida en otra, dependiente del Instituto de Matemática Multidisciplinar (IMM), bajo el título “Predicciones Bursátiles” (<http://cotizaccion.imm.upv.es>); donde se recogen distintos trabajos de alumnos en el ámbito de la modelización matemática aplicada a las finanzas, y más en concreto a la predicción de activos subyacentes.

Para la edición de la página web se escogió una plantilla de la web <http://www.htmltemplates.net> y se modificó gracias al programa *Kompozer*, un editor de páginas web para OSX.

La web en la que se recogen los resultados de este trabajo final de grado se compone de 4 páginas:

- Home: Recoge la información básica acerca del proyecto.
- Método 1: se muestran los resultados obtenidos mediante el método de estimación de parámetros de Máxima Verosimilitud.
- Método 2: se muestran los resultados obtenidos mediante el método de estimación de parámetros no paramétrico.
- Comparativa: recoge la comparación entre los resultados obtenidos mediante el Método 1 y los recogidos con el Método 2.

Los resultados que se ofrecen en cada una de las páginas han sido detallados anteriormente a lo largo de este mismo capítulo.

De este modo, se tiene una página web que recoge los resultados de la aplicación del Modelo Browniano Geométrico para la predicción de un activo subyacente calculados a partir de dos técnicas diferentes de estimación de parámetros, así como una comparación de ambos métodos que ponga de manifiesto la validez del modelo.

6.5 Diagrama de procesos de los programas

Este apartado presenta, a modo de resumen final del capítulo y de esquema general de la aplicación real de este trabajo, el conjunto de procesos que siguen los programas, así como sus *inputs* y *outputs*. La manera más clara y sencilla de representarlo es un diagrama de flujo como el de la Figura 6.3. mostrada a continuación.

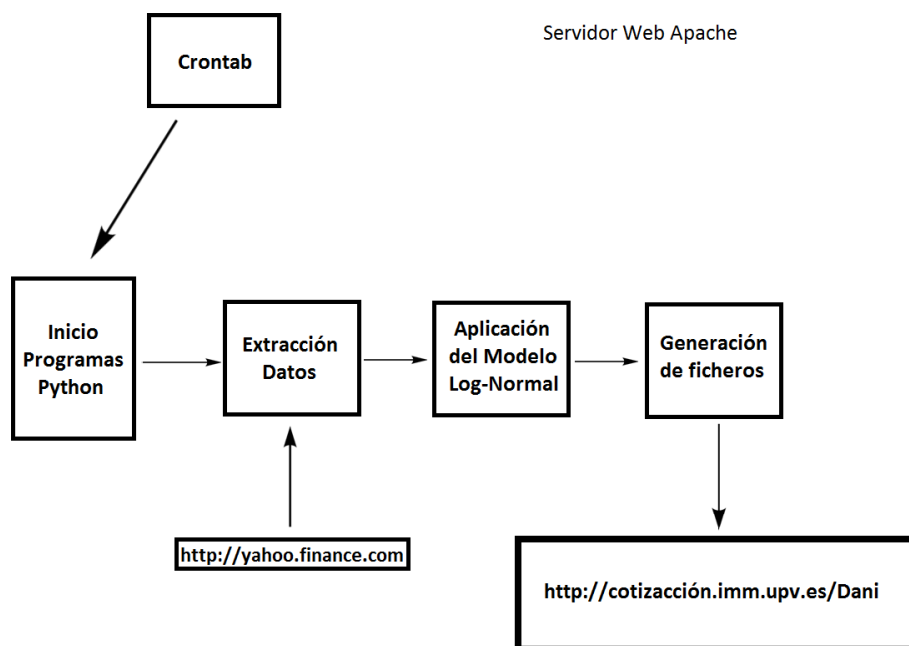


Figura 6.3: Proceso completo de los programas.

Fuente: Elaboración propia.

7. Conclusiones y propuestas de mejora

El objetivo principal de esta memoria ha sido el estudio y aplicación del Modelo Browniano Geométrico para llevar a cabo predicciones en el valor de activos subyacentes.

Para la elaboración de este Trabajo Final de Grado ha sido necesario ampliar considerablemente los conocimientos obtenidos en el Grado de Administración y Dirección de Empresas. No obstante, el contenido del trabajo está siempre relacionado con los contenidos estudiados en asignaturas como Modelos Matemáticos para ADE, Métodos Estadísticos, Banca y Bolsa, etc.

En el Capítulo 1 se ha hecho un resumen de lo que supone el presente trabajo, se han repasado las asignaturas cursadas a lo largo del curso que han tenido mayor presencia en éste y se han fijado los objetivos perseguidos con este TFG.

En el Capítulo 2 se pasa a hacer un repaso de la situación económica actual y precedente, así como un breve estudio de la compañía FCC, uno de los grupos españoles más importantes y con más presencia internacional. FCC ha sido escogida para este TFG por su magnitud y por la importancia del servicio que presta tanto en España como en el resto del mundo. Servicios de construcción, medioambientales y gestión de recursos naturales, que supondrán el futuro del mundo que conocemos.

Los Capítulos 3 y 4 de la memoria incluyen el desarrollo teórico del Modelo Browniano Geométrico como fundamento y pieza angular del trabajo y justificación para la posterior aplicación del mismo. En este estudio se introduce el Cálculo Estocástico de Itô, sin el cual es imposible resolver el modelo y calcular las principales funciones estadísticas del mismo. Es decir, este cálculo hace posible la aplicación del modelo al activo subyacente FCC (FCC.MC).

A lo largo del Capítulo 5, se presenta la aplicación del Modelo Browniano Geométrico para con el activo escogido para el trabajo: FCC (FCC.MC), de tal manera que se puedan realizar predicciones de su valor bursátil. En este capítulo se presenta el lenguaje *Python* de programación, gracias al cual ha sido posible la aplicación del modelo y la realización de los cálculos pertinentes.

Una vez claro esto, el siguiente paso es construir el modelo. Para ello es necesario estimar los parámetros del mismo. Esto es posible gracias a dos métodos: el de Máxima Verosimilitud y uno no paramétrico adaptado a las ecuaciones diferenciales estocásticas de Itô estudiadas en el capítulo anterior. Tras estas estimaciones se valida el modelo calculando estimaciones puntuales y por Intervalos de Confianza del 95% para el histórico de datos y haciendo uso de medidas estadísticas de bondad de ajuste: El error cuadrático medio y el MAPE. De este modo, se ha demostrado la calidad del modelo.

Además, a fin de darle un mayor valor añadido al presente trabajo final de grado, en el Capítulo 6 se presenta la creación de dos programas, con el lenguaje de programación *Python*, para aplicar el Modelo Browniano Geométrico y llevar a cabo las predicciones, no solo del activo subyacente FCC (FCC.MC) sino de cualquier otro que cotice en bolsa. De modo que es posible utilizar este modelo para predecir el valor del activo subyacente que se desee. Por último, los resultados del modelo (predicción a 5 días), han sido alojados en un servidor web dinámico que se actualizará diariamente y hará pública la información que ofrezcan los programas en la página web <http://cotizaccion.imm.upv.es/Dani>

Así, con el presente TFG se proporciona una herramienta de iniciación para la ayuda en la toma de decisiones sobre inversiones bursátiles. Y se considera de iniciación debido a la existencia de otros modelos estocásticos más complejos y cuyo estudio y aplicación futuros podría ser de gran interés; de tal modo podrían compararse los resultados de esos otros modelos con los obtenidos mediante el Modelo Browniano Geométrico y comprobar la viabilidad de éste. Algunos ejemplos

interesantes de modelos más complejos son los que se fundamentan en ecuaciones diferenciales estocásticas cuyo proceso aleatorio es una composición de un proceso continuo como el movimiento Browniano y un proceso discontinuo o de salto tipo *Poisson*²⁰ o el Modelo Black-Scholes²¹ para la valoración de opciones y de otros activos intangibles, como por ejemplo patentes.

Sería posible programar estos modelos en *Python* o en cualquier otro lenguaje de programación y, de igual modo, representar sus resultados en la página web <http://cotizacion.imm.upv.es> de modo que se cree sobre ella un interés mayor para inversores.

²⁰BENTH, F.E., KHOLODNYI, V., y LAURENCE, P. (2014). “Quantitative Energy Finance: Modeling, pricing and hedging in energy and commodity markets”. *Springer Science+Business Media*.

²¹ MERTON, R.C. (1973). “Theory of Rational Option Pricing”, en *Bell Journal of Economics and Management Sciences*.

Bibliografía

Libros:

ALLEN, E. (2007). *Modelling With Itô Stochastic Differential Equations*. Springer, Series Mathematical Modelling: Theory and Applications.

BAXTER, M. y REMIE, A. (2012). *Financial Calculus: An Introduction to Derivate Pricing*. Cambridge Univ. Press, 20th Edition.

BENTH, F.E., KHOLODNYI, V. y LAURENCE, P. (Ed. 2014). *Quantitative Energy Finance: Modeling, Pricing and Hedging in Energy and Commodity Markets*. Springer, Science+Business. Media B.V.

GONZÁLEZ DUQUE, R. (2014). *Python para todos*.

HULL, J.C. (2002). *Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones*. Pearson Education, 4^o Edición.

ITÔ, K. (1944). *Stochastic Integral*. Tokio. Proc. Imperial Acad.

ITÔ, K. (1961). *Lectures on Stochastic Processes*. Bombay. Tata Institute.

KLEBANER, F. C. (2011). *Introduction to Stochastic Calculus With Applications to Finance*. Imperial College Press.

LAMBERTON, D. y LAPEYRE, B. (1996). *Introduction to Stochastic Calculus to Finance*. Chapman & Hall/CRC.

YANAJARA, H. (2012). *Manual Sage para principiantes*.

ØKSENDAHL, B. (1980). *Stochastic Differential Equations*. Nueva York. Springer.

ØKSENDAHL, B. (1998). *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*. Springer.

Artículos:

BACHELIER, L. (1900). “Théorie de la spéculation” en *Annales du Science de L’Ecole Normale Supérieure*, vol. 17, p. 21-86.

ITÔ, K. (1951). “On stochastic differential equations” en *Memoirs, American Mathematical Society*, vol. 4, p. 1–51.

MERTON, R.C. (1973). “An inter temporal capital asset pricing model” en *Econometrica*, vol. 41, No. 5, p. 867-887.

MERTON, R.C. (1973). “Theory of rational option pricing” en *Bell Journal of Economics and Management Science (The RAND Corporation)*, vol. 4, No. 1, p. 141–183.

STANTON, R. (1997). “A non parametric model of term structure dynamic and the market price of interest rate risk” en *Journal of Finance*, vol. 52, issue 5, p. 1973-2002.

NELDER, J.A. y MEAD R. (1965). “A simplex method for function minimization” en *Computer Journal*, vol. 7, p. 308-313.

Páginas web:

<http://www.fccco.es/construccion/area-corporativa/presentacion/historia/index.html> (Consulta: 13 de Junio 2015)

<http://www.expansion.com/especiales/20aniversario/20grandesempresas/fcc.html> (Consulta: 13 de Junio 2015)

<http://fcc.es/fccweb/wcm/idc/groups/public/documents/document/mdaw/mdu3/~edisp/cscp074829.pdf> (Consulta: 13 de Junio 2015)

<http://www.fcc.es/fccweb/wcm/idc/groups/public/documents/document/mdaw/mdu0/~edisp/cscp071851.pdf> (Consulta: 13 de Junio 2015)

http://www.fcc.es/fccweb/wcm/idc/groups/public/documents/document/mdaw/mde4/~edisp/ucm_015860.pdf (Consulta: 13 de Junio 2015)

<http://www.fccco.es/construccion/area-corporativa/organizacion/personal-directivo/index.html> (Última consulta: 2 de Junio 2015)

http://www.elconfidencial.com/empresas/2014-10-17/fcc-vende-a-la-americana-crystal-clean-su-division-de-medio-ambiente-en-ee-uu_251906 (Última consulta: 2 de Junio 2015)

<http://es.investing.com/equities/fcc-ratios> (Última consulta: 2 de Junio 2015)

<http://www.infobolsa.es/cotizacion/cnmv-fcc> (Última consulta: 2 de Junio 2015)

<http://cotizacion.imm.upv.es> (Consulta: 13 de Junio 2015)

<http://www.eleconomista.es> (Última consulta: 10 de Junio 2015)

<https://www.python.org> (Consulta: 22 de Marzo 2015)

<http://www.scipy.org> (Consulta: 20 de Mayo 2015)

<http://www.ubuntu.com> (Consulta: 20 de Mayo 2015)

<http://www.yahoo.finance.com> (Última consulta: 13 de Junio 2015)

<http://es.schoolofdata.org/introduccion-a-la-extraccion-de-datos-de-sitios-web-scraping/> (Consulta: 5 de Junio 2015)

<http://www.asociaciondedirectivos.org/index.php?id=66> (Consulta: 14 de Junio 2015)

<http://vozpopuli.com/economia-y-finanzas/39628-fcc-continua-en-numeros-rojos-pierde-1-506-3-millones-el-46-mas-que-en-2012> (Consulta: 14 de Junio 2015)