Universidad Politécnica de Valencia

Departamento de Matemática Aplicada

Operadores Pseudodiferenciales en Clases no Casianalíticas de tipo Beurling

Memoria presentada por
David Jornet Casanova
para optar al grado de
Doctor en Ciencias
Matemáticas

Doña Carmen Fernández Rosell y Don Antonio Galbis Verdú, Profesores Titulares del Departamento de Análisis Matemático de la Universidad de Valencia

CERTIFICAN:

que la presente memoria ''Operadores Pseudodiferenciales en Clases no Casianalíticas de tipo Beurling'' ha sido realizada bajo nuestra dirección por David Jornet Casanova y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste en cumplimiento de la legislación vigente presentamos y apadrinamos ante la Comisión de Doctorado de la Universidad Politécnica de Valencia la referida tesis firmando el presente certificado.

Valencia, a 20 de noviembre de 2003

Los directores:
Carmen Fernández Rosell y Antonio Galbis Verdú

a mis padres
a Carolina
a Alba y Valentín

Quisiera expresar mi agradecimiento a todas aquellas personas que me han mostrado su apoyo durante la realización de esta memoria: a los amigos de la unidad de Arquitectura Superior y de la unidad de Caminos, por su calidez y amistad. En especial, a Vicente Montesinos, por su amistad, ayuda y apoyo constantes en esta etapa de formación docente e investigadora.

También expresar mis sinceros agradecimientos a mis compañeros y amigos Mari Carmen, Alberto, Alfredo y Miguel, siempre dispuestos a prestarme su ayuda. A Félix, por su amistad, y sus sugerencias en el uso del sistema LaTeX, que han contribuido en dar al documento su aspecto definitivo.

Quiero expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a mis directores, Carmen Fernández y Antonio Galbis, su inestimable ayuda y dedicación en la dirección de este trabajo. Asimismo, su paciencia, su amistad y su apoyo constante, en definitiva, su excelente dirección de esta memoria. Y sobre todo, la confianza que depositaron en mí desde el principio.

Mi agradecimiento de forma especial a José Bonet Solves, por su confianza, amistad y apoyo constantes, y por el interés que siempre ha demostrado hacia mi persona y al proceso de elaboración de este trabajo.

Y por último, a ti Nati, que has estado conmigo en todo este largo caminar. Gracias mamá. A Valentín, mi padre, y la persona que me mostró este hermoso mundo de las Matemáticas. Y, no por ello en menor grado, a mi familia por la ilusión y el apoyo que me han dado.

Valencia, noviembre de 2003.

Resumen

Grosso modo, un operador pseudodiferencial es una aplicación $f \to Tf$ definida por

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} a(x, \xi) \hat{f}(\xi) e^{ix \cdot \xi} d\xi,$$

donde $\hat{f}$ es la transformada de Fourier de f y $a(x, \xi)$ es el *símbolo* de T. Por ejemplo, si $P(D)$ es un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes y $p(\xi)$ denota su polinomio característico, $P(D)$ se puede representar como antes con $a(x, \xi) = \frac{1}{(2\pi)^p} p(\xi)$, y es bien conocido que para todo $P(D)$ elíptico existe una función $a(\xi) = 1/((2\pi)^p p(\xi))$ para $|\xi|$ bastante grande, de forma que la integral anterior da una paramétrix para $P(D)$.

La teoría de los operadores pseudodiferenciales surgió del estudio de las integrales singulares y fue desarrollada a partir de 1965 con los estudios sistemáticos de Kohn y Nirenberg, Hörmander y otros.

Los operadores pseudodiferenciales (de orden finito o infinito) sobre clases de Grevrey han sido estudiados extensamente por muchos autores (Boutet de Monvel, Krée, Liess, Rodino, Zanghiratti, entre otros). Son siempre espacios de tipo Roumieu, y su estructura topológica es similar a la del espacio de las funciones real analíticas.

Por otra parte, el estudio de diversos problemas en clases de funciones ultradiferenciables (no casianalíticas) ha recibido recientemente mucha atención. Estas son clases intermedias entre las funciones real analíticas y el espacio de todas las funciones C^∞. Trabajaremos con funciones ultradiferenciables como las definidas por Braun, Meise y Taylor.

El propósito de esta tesis es introducir los operadores pseudodiferenciales (p.d.o.) en el contexto de las funciones ultradiferenciables de tipo Beurling, cuya topología es similar a la de C^∞. La tesis consta de tres capítulos.

En el Capítulo I se definen las amplitudes y los símbolos, y los operadores pseudodiferenciales son introducidos como límites de operadores con núcleo en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$. Con este punto de vista es inmediato que la clase de operadores pseudodiferenciales es cerrada al tomar adjuntos y que todo p.d.o. de clase (ω) admite una extensión lineal y continua $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$. Se prueba que tal operador es pseudolocal, es decir, reduce el (ω)-soporte singular. Muchos operadores son operadores pseudodiferenciales según nuestra definición. En particular, mencionamos los operadores en derivadas parciales con coeficientes variables en una clase conveniente de funciones, los operadores (ω)-regularizantes y los operadores ultradiferenciales en el sentido de Komatsu. La convolución con una solución fundamental de un operador ultradiferencial elíptico con coeficientes constantes también es un p.d.o. Sin embargo, no todo operador de convolución es un p.d.o.

En el Capítulo II se desarrolla el cálculo simbólico, cuyo objetivo es sustituir siempre que se pueda la teoría de los operadores por otra algebraica de los correspondientes símbolos.

El Capítulo III está dedicado al estudio de la (ω)-hipoelipticidad de operadores lineales en derivadas parciales de fuerza constante con coeficientes en un espacio de funciones ultradiferenciables $\mathcal{E}_{(\sigma)}$. Se prueba que para este tipo de operadores la (ω)-hipoelipticidad es equivalente a la homogéneo (ω)-hipoelipticidad, a priori más débil. También se establece una condición suficiente para la existencia de una paramétrix (pseudodiferencial).

Resum

Grosso modo, un operador pseudodiferencial és una aplicació $f \to Tf$ definida per

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

on $\hat{f}$ és la transformada de Fourier de f i $a(x,\xi)$ és el *símbol* de T. Per exemple, si $P(D)$ és un operador lineal en derivades parcials amb coeficients constants i $p(\xi)$ denota el seu polinomi característic, $P(D)$ es pot representar com abans amb $a(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^p}p(\xi)$, i és ben conegut que per a cada $P(D)$ el·líptic existeix una funció $a(\xi) = 1/((2\pi)^p p(\xi))$ per a $|\xi|$ bastant gran, de manera que la integral d'abans dóna una paramètrix per a $P(D)$.

La teoria dels operadors pseudodiferencials va sorgir de l'estudi de les integrals singulars i va ésser desenvolupada posteriorment a 1965 amb els estudis sistemàtics de Kohn i Nirenberg, Hörmander i altres.

Els operadors pseudodiferencials (de ordre finit o infinit) sobre classes de Gevrey han sigut estudiats extensament per molts autors (Boutet de Monvel, Krée, Liess, Rodino, Zanghiratti, entre altres). Són sempre espais de tipus Roumieu, i la seva estructura topològica és similar a la de l'espai de les funcions real analítiques.

D'altra banda, l'estudi de diversos problemes en classes de funcions ultradiferenciables (no quasianalítiques) ha rebut recentment molta atenció. Estes són classes intermèdies entre les funcions real analítiques i l'espai de totes les funcions C^∞. Nosaltres treballarem amb funcions ultradiferenciables com les definides per Braun, Meise i Taylor.

El propòsit d'aquesta tesi és introduir els operadors pseudodiferencials (p.d.o.) en el contexte de les funcions ultradiferenciables de tipus Beurling, espais amb una topologia semblant a la de C^∞. La tesi consta de tres capítols.

En el Capítol I es defineixen les amplituds i els símbols, i els operadors pseudodiferencials són introduïts com límits d'operadors amb nucli en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$. Amb aquest punt de vista és inmediat que la classe d'operadors pseudodiferencials és tancada al pendre adjunts i que tot p.d.o. de classe (ω) admet una extensió lineal i contínua $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$. Provem que tal operador es pseudolocal, és a dir, redueix el (ω)-suport singular. Molts operadors són operadors pseudodiferencials d'acord amb la nostra definició. En particular, esmentem els operadors en derivades parcials amb coeficients variables en una classe convenient de funcions, els operadors (ω)-regularitzants i els operadors ultradiferencials en el sentit de Komatsu. La convolució amb una solució fonamental d'un operador ultradiferencial el·líptic amb coeficients constants és també un p.d.o. Tanmateix, no tot operador de convolució es un p.d.o.

El càlcul simbòlic es desenvolupa en el Capítol II, l'objecte del qual és substituir tant com siga possible la teoria dels operadors per altra algebraica per als corresponents símbols.

El Capítol III està dedicat a l'estudi de la (ω)-hipoel·lipticitat d'operadors lineals en derivades parcials de força constant amb coeficients en espais de funcions ultradiferenciables $\mathcal{E}_{(\sigma)}$. Es prova que per aquest tipus d'operadors la (ω)-hipoel·lipticitat és equivalent a la, a priori més dèbil, homogeni (ω)-hipoel·lipticitat. També s'estableix una condició suficient per a l'existència d'una paramètrix (pseudodiferencial).

Summary

Roughly speaking, a pseudodifferential operator is a mapping $f \to Tf$ given by

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} a(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

where $\hat{f}$ is the Fourier transform of f and $a(x,y)$ is the *symbol* of T. For example, if $P(D)$ is a linear partial differential operator with constant coefficients and $p(\xi)$ denotes its characteristic polynomial, $P(D)$ can be represented as above with $a(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^p}p(\xi)$, and it is well-known that for every elliptic $P(D)$ there exists a function $a(\xi) = 1/((2\pi)^p p(\xi))$ for $|\xi|$ big enough, such that the above integral gives a parametrix for $P(D)$.

The theory of pseudodifferential operators grew out of the study of singular integral operators, and developed after 1965 with the systematic studies of Kohn and Nirenberg, Hörmander and others.

Pseudodifferential operators (of finite or infinite order) on Gevrey classes have been extensively studied by many authors (Boutet de Monvel, Krée, Liess, Rodino, Zanghiratti, among others). They are always spaces of Roumieu type, their topological structure is similar to that of the space of real analytic functions.

On the other hand, the study of several problems in classes of (non-quasianalytic) ultradifferentible functions has received recently much attention. These are intermediate classes between real analytic functions and the class of all C^∞-functions. We will work with ultradifferentiable functions as defined by Braun, Meise and Taylor.

The purpose of this thesis is to introduce pseudodifferential operators (p.d.o.) in the frame of ultradifferentiable functions of Beurling type, that is, spaces whose topology looks like the one of C^∞. The thesis is divided in three chapters.

In Chapter I, amplitudes and symbols are defined and pseudodifferential operators are introduced as limits of operators with kernel in $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$. With this point of view, it is immediate that the class of pseudodifferential operators is closed under taking adjoints and that every p.d.o. of (ω) class admits a continuous and linear extension $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$. We prove that such an operator is pseudolocal, that is, it shrinks (ω)-singular supports. Many operators are pseudodifferential operators according to our definition. In particular, we mention the partial differential operators with variable coefficients in a suitable class of functions, the (ω)-smoothing operators and the ultradifferential operators in the sense of Komatsu. The convolution operator with an elementary solution of a given elliptic ultradifferential operator with constant coefficients is also a pseudodifferential operator. However not every convolution operator is a p.d.o.

The symbolic calculus is developed in Chapter II. The aim is to replace as much as possible the theory of operators by an algebraic theory for the corresponding symbols.

Chapter III is devoted to the study of the (ω)-hypoellipticity of linear partial differential operators of constant strength having coefficients in spaces of ultradifferentiable functions $\mathcal{E}_{(\sigma)}$. It is shown that for this type of operators the (ω)-hypoellipticity is equivalent to the, a priori weaker, homogeneous (ω)-hypoellipticity. A sufficient condition for the existence of a (pseudodifferential) parametrix is also given.

Índice general

Introducción

Grosso modo, un operador pseudodiferencial es una aplicación $f \to Tf$ entre dos espacios de funciones definida mediante

$$(Tf)(x) = \int_{\mathbb{R}^p} a(x, \xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

siendo $\hat{f}$ la transformada de Fourier de f y $a(x, \xi)$ una función, a la que llamaremos símbolo, que estará sujeta a ciertas restricciones. El ejemplo más simple es el de un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes constantes, ya que si $p(\xi)$ es el polinomio característico del operador $P(D)$, como $\widehat{P(D)u}(\xi) = p(\xi)\hat{u}(\xi)$ usando la fórmula de inversión,

$$P(D)f(x) = \frac{1}{(2\pi)^p}\int_{\mathbb{R}^p} p(\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi.$$

Sabemos también que si $P(D)$ es elíptico,

$$Ef(x) = \int_{\mathbb{R}^p} a(\xi)\hat{f}(\xi)d\xi,$$

con $a(\xi) = 1/((2\pi)^p p(\xi))$ para $|\xi|$ grande proporciona una paramétrix para el operador $P(D)$.

Mediante transformación de Fourier, el operador diferencial $P(D)$ se convierte en una operación algebraica: multiplicación por el símbolo $p(\xi)$. Sin embargo, si consideramos ecuaciones en derivadas parciales con coeficientes variables la situación se complica. Así, por ejemplo, si $P(x, D) = D_x^2 + x^2$, la transformada de Fourier de $P(x, D)u$ es $\xi^2\hat{u}(\xi) + D_\xi^2\hat{u}(\xi)$, que es de la misma forma que $P(x, D)u$. Uno de los objetivos de la teoría de operadores pseudodiferenciales es convertir la teoría de operadores en derivadas parciales con coeficientes variables en una teoría algebraica de los correspondientes símbolos a través de la transformación de Fourier.

En efecto, si ponemos $p(x, \xi) = \xi^2 + x^2$, podemos escribir

$$P(x, D)u(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{R}} e^{ix\cdot\xi}p(x, \xi)\hat{u}(\xi)d\xi.$$

Observamos que esta representación puede definir un operador incluso si el símbolo $p(x, \xi)$ no es un polinomio en la variable ξ. El problema es determinar qué condiciones debemos exigir al símbolo para que los operadores actúen entre clases de funciones y/o distribuciones razonables, y que el operador retenga algunas de las propiedades importantes de los operadores en derivadas parciales, por ejemplo, que la clase sea cerrada por trasposición y por composición, cuando ésta esté definida, y que sea pseudolocal, es decir que la actuación del operador sobre una distribución no aumente el soporte singular. Además, sería deseable que si un operador pseudodiferencial (signifique esto lo que signifique) tiene una inversa o una paramétrix (esto es, una inversa módulo un operador regularizante), ésta sea también pseudodiferencial.

La teoría de los operadores pseudodiferenciales surge del estudio de las integrales singulares, y se desarrolló como tal a partir de 1965 con los trabajos de Kohn-Nirenberg [29] y Hörmander [23]. De hecho el término operador pseudodiferencial fue acuñado por Kohn y Nirenberg.

El descubrimiento por parte de Gevrey de que la ecuación del calor admite una solución fundamental que, sin ser real analítica en $\mathbb{R}^p \setminus \{0\}$, satisface buenas propiedades de regularidad, motivó el estudio de un tipo de funciones diferenciables, las clases de Gevrey. Estas son un caso particular de lo que hoy conocemos como clases no casi analíticas de funciones ultradiferenciables. Hay básicamente dos maneras de introducir estas clases de funciones, el punto de vista de Komatsu, que se centra en el crecimiento de las derivadas sobre los conjuntos compactos, y la teoría desarrollada por Björk a partir de ideas previamente esbozadas por Beurling [3], que presta atención al crecimiento de la transformada de Fourier. La teoría de funciones ultradiferenciables de Braun, Meise y Taylor [9] permite un tratamiento unificado de ambos puntos de vista. Si atendemos a la topología de los espacios de funciones, las clases de funciones ultradiferenciables pueden ser de dos tipos: las clases tipo Roumieu, cuya topología es similar a la del espacio de las funciones real analíticas, y los espacios de funciones de tipo Beurling, que tienen una estructura topológica como la de C^∞.

Volviendo a los operadores pseudodiferenciales, Sjöstrand [42] y Trèves [44] estudiaron una clase de operadores pseudodiferenciales que actúan sobre distribuciones y preservan la analiticidad. En esta línea debemos mencionar el trabajo de L. Boutet de Monvel y P. Kree [7].

En la primera mitad de la década de los 80 varios autores (Hashimoto-Matsuzawa-Morimoto [24], Iftimie [25] entre otros) dieron distintas versiones de operadores pseudodiferenciales tipo Gevrey. En 1987 Matsumoto [33] introduce símbolos y operadores pseudodiferenciales sobre clases de funciones no casi analíticas más generales, definidas por sucesiones (M_p), si bien en los resultados es a menudo necesario cambiar de sucesión y, consecuentemente, de espacio de funciones. Los símbolos considerados en todos estos trabajos son de tipo finito, es decir de crecimiento lento en la variable ξ. Con anterioridad, L. Boutet de Monvel había estudiado una cierta clase de operadores de orden infinito. En 1985, L. Zanghirati [45] da una versión de orden infinito de símbolos de tipo Gevrey. En todos los casos, los espacios de funciones son de tipo Roumieu.

Los significativos avances que en los últimos años se han producido en la comprensión de los operadores en derivadas parciales con coeficientes constantes y, con mayor generalidad, de los operadores de convolución sobre clases de funciones ultradiferenciables, nos llevaron de manera natural a plantearnos la conveniencia de definir y estudiar operadores pseudodiferenciales sobre clases de funciones de tipo Beurling. Este es el objetivo de la presente memoria.

El trabajo consta de tres capítulos, además de uno de preliminares.

En el primer capítulo se definen las clases de amplitudes/símbolos, así como los operadores pseudodiferenciales. Se comprueba que la clase es cerrada por trasposición y que los operadores son pseudolocales. Damos ejemplos de operadores pseudodiferenciales, lo que nos permite comprobar que muchos operadores naturales son pseudodiferenciales.

En el segundo capítulo se desarrolla el cálculo simbólico y el tercer capítulo se dedica al estudio de la (ω)-hipoelipticidad, fundamentalmente de operadores lineales en derivadas parciales de fuerza constante con coeficientes en una cierta clase no casi analítica de funciones ultradiferenciables.

Hay por supuesto muchas cuestiones que podrían haberse abordado. Por ejemplo, la (ω)-micro-hipoelipticidad, estudiando previamente la actuación de los operadores pseudodiferenciales sobre el (ω)-frente de ondas, la actuación de los operadores sobre otros espacios de funciones ultradiferenciables tipo $\mathcal{D}_{L_2,(\omega)}$, o el efecto que produce un cambio de variable en un operador ultradiferencial. Sobre ellos planeamos volver en un futuro próximo.

Capítulo 0

Preliminares

En este capítulo se introducen las clases de funciones y algunos lemas previos.

0.1. Notaciones, definiciones y resultados previos

Dados dos vectores $x = (x_1, \ldots, x_p)$ y $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_p)$ en $\mathbb{R}^p$, el *producto escalar* $x_1\xi_1 + \cdots + x_p\xi_p$ entre x y ξ se denota por $< x, \xi >$, o abreviadamente $x\xi$.

Usaremos la *notación estándar para los multi-índices*. Sea $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ el conjunto de los enteros no-negativos. Entonces $\mathbb{N}_0^p$ es el conjunto de todas las p-tuplas $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_p)$ con $\alpha_j \in \mathbb{N}_0$ para cada $j = 1, \ldots, p$.

La *longitud* de $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ es $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_p$; $\beta \leq \alpha$ significa que $\beta_j \leq \alpha_j$ para cada $j = 1, \ldots, p$. Como es habitual, $\alpha! = \alpha_1! \cdots \alpha_p!$ y, si $\beta \leq \alpha$:

$$\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1} \cdots \binom{\alpha_p}{\beta_p} = \frac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!\beta!}.$$

Escribimos

$$\partial^\alpha = (\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \cdots (\partial/\partial x_p)^{\alpha_p}$$

y, usando la notación $D_{x_j} = -i\, \partial/\partial x_j$, siendo i la unidad imaginaria, también escribiremos

$$D^\alpha = D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_p}^{\alpha_p}.$$

Igualmente, para $x \in \mathbb{R}^p$ pondremos

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_p^{\alpha_p}.$$

Las siguientes identidades y desigualdades se utilizarán con frecuencia en el estudio de los operadores pseudodiferenciales. Las recordaremos cuando haga falta.

Lema 0.1.1 *Sean $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^p$ y $N \in \mathbb{N}$. Se cumple:*

1. $p^N = \sum_{|\alpha|=N} \frac{N!}{\alpha!}$ *y, en particular,* $\sum_{|\alpha|=N} 1 \leq p^N$

2. $\alpha! \leq |\alpha|! \leq p^{|\alpha|}\alpha!$

3. $\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta} = 2^{|\alpha|}$

4. $\binom{\alpha}{\beta} \leq 2^{|\alpha|}$

5. $N^N \leq e^N N!$

6. $\binom{\alpha}{\beta} \leq \binom{|\alpha|}{|\beta|}$

7. $\dfrac{|\alpha|!}{\alpha!} \leq \dfrac{|\beta|!}{\beta!}$ *si* $\alpha \leq \beta$.

Introducimos a continuación la noción de función peso. Las definiciones así como los resultados que se enuncian a continuación sin demostración y sin referencia explícita pueden consultarse en [9].

Definición 0.1.2 *Una función peso es una función creciente continua* $\omega : [0,\infty[\to [0,\infty[$ *con las siguientes propiedades:*

(α) *existe* $L \geq 0$ *con* $\omega(2t) \leq L(\omega(t)+1)$ *para cada* $t \geq 0$,

(β) $\int_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}dt < \infty$,

(γ) $\log(t) = o(\omega(t))$ *cuando* t *tiende a* ∞,

(δ) $\varphi_\omega : t \to \omega(e^t)$ *es convexa.*

Cuando no haya ambigüedad escribiremos φ en lugar de φ_ω.

La propiedad (β) es una condición suficiente para que $\omega(t) = o(t)$ cuando $t \to +\infty$, debido a la desigualdad

$$0 \leq \frac{\omega(t)}{t} = \int_t^{+\infty} \frac{\omega(t)}{s^2}ds \leq \int_t^{+\infty} \frac{\omega(s)}{s^2}ds.$$

Si ω una función peso y además satisface la condición adicional

(ε) Existe una constante $C \geq 1$ tal que para cada $y > 0$ se cumple

$$\int_1^{+\infty} \frac{\omega(yt)}{t^2}dt \leq C\omega(y) + C$$

diremos que ω es un *peso fuerte* o que verifica la condición fuerte de no-casianaliticidad. Si ω es un peso fuerte entonces se cumple que $\omega(t) = o(t^d)$ cuando $t \to +\infty$, para cierta constante $0 < d < 1$ ([34]).

Para $z \in \mathbb{C}^p$, $z = (z_1, \ldots, z_p)$, consideraremos la extensión de ω dada por $\omega(z) := \omega(|z|)$ siendo $|z| := \sup |z_k|$. Llamamos polidisco de centro z y poliradio $r = (r_1, \ldots, r_p)$, siendo $r_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, p$, al subconjunto de $\mathbb{C}^p$ dado por

$$P(z,r) := \{w = (w_1, \ldots, w_p) \in \mathbb{C}^p \, : \, |w_k - z_k| < r_k \,, \text{ para todo } k = 1, \ldots, p\}.$$

Diremos que dos funciones peso ω_1 y ω_2 son equivalentes si existe una constante $C > 0$ de modo que

$$\frac{1}{C}\omega_1(x) \leq \omega_2(x) \leq C\omega_1(x),$$

para $x \in \mathbb{R}^p$ suficientemente grande.

Definición 0.1.3 *La conjugada de Young $\varphi^* : [0,\infty[\to \mathbb{R}$ de φ viene dada por*

$$\varphi^*(s) := \sup\{st - \varphi(t), t \geq 0\}.$$

Nota 0.1.4 **(a)** Para cada función peso ω existe una función peso σ tal que $\sigma(t) = \omega(t)$ para $t > 0$ suficientemente grande y $\sigma(t) = 0$ si $t \in [0,1]$. Por lo tanto, en lo sucesivo supondremos que $\omega|_{[0,1]} \equiv 0$. Así φ^* toma solamente valores no negativos y cumple $(\varphi^*)^* = \varphi$.
(b) La función φ^* es convexa, $\varphi^*(t)/t$ es creciente, $\varphi^*(0) = 0$ y $\lim_{t\to+\infty} \frac{t}{\varphi^*(t)} = 0$.
(c) Supongamos que σ y ω son dos funciones peso tales que $\sigma \leq \omega$, entonces se cumple que $\varphi^*_\omega \leq \varphi^*_\sigma$. En efecto, basta observar que para $t > 0$,

$$\varphi^*_\omega(t) = \sup_{s>0}\{st - \varphi_\omega(s)\} = \sup_{s>0}\{st - \omega(e^s)\} \leq$$
$$\leq \sup_{s>0}\{st - \sigma(e^s)\} = \varphi^*_\sigma(t).$$

A lo largo de esta memoria usaremos las siguientes propiedades de φ^* cuya demostración puede verse en [16].

Proposición 0.1.5 *(1) Para cada $\lambda > 0$ existe una constante positiva D_λ tal que*

$$\exp(2\lambda\varphi^*(\frac{y+1}{2\lambda})) \leq D_\lambda \exp(\lambda\varphi^*(\frac{y}{\lambda}))$$

para todo $y > 0$.

(2) Sea $L > 0$ tal que $\omega(et) \leq L(1 + \omega(t))$ para todo $t \geq 0$. Entonces:

a) $L^n\varphi^*(\frac{y}{L^n}) + ny \leq \varphi^*(y) + \sum_{j=1}^n L^j$ para todo $y \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$.
b) $\lambda L\varphi^*(\frac{y}{\lambda L}) + y \leq \lambda\varphi^*(\frac{y}{\lambda}) + \lambda L$ para todo $y \geq 0$, $\lambda > 0$.
c) $\lambda L^n\varphi^*(\frac{y}{\lambda L^n}) + n\frac{y}{\lambda} \leq \lambda\varphi^*(\frac{y}{\lambda}) + \lambda\sum_{j=1}^n L^j$ para todo $y \geq 0$, $\lambda > 0$ y $n \in \mathbb{N}$.

(3) Para cualesquiera $s, t, \lambda > 0$ se cumple

$$2\lambda\varphi^*(\frac{s+t}{2\lambda}) \leq \lambda\varphi^*(\frac{s}{\lambda}) + \lambda\varphi^*(\frac{t}{\lambda}) \leq \lambda\varphi^*(\frac{s+t}{\lambda})$$

(4) Dados $B > 0$ y $\lambda > 0$ existe una constante $C > 0$ tal que

$$B^n n! \leq Ce^{\lambda\varphi^*(\frac{n}{\lambda})}$$

para cada $n \in \mathbb{N}_0$.

Como consecuencia de la definición de φ^* obtenemos:

Lema 0.1.6 *Para cada $n, k \in \mathbb{N}$ y $t \geq 1$ se tiene*

1. $t^k \leq e^{n\varphi^*(\frac{k}{n})} e^{n\omega(t)}$,
2. $\inf_{j \in \mathbb{N}_0} t^{-j} e^{k\varphi^*(\frac{j}{k})} \leq e^{-k\omega(t) + \log t}$.

Demostración. (1) Dado que $(\varphi^*)^* = \varphi$ se tiene

$$\omega(t) = \varphi(\log t) = \sup_{s \geq 0} \{s \log t - \varphi^*(s)\} \quad \text{y},$$

y en particular

$$\frac{k}{n} \log t - \varphi^*(\frac{k}{n}) \leq \omega(t)$$

y así $k \log t - n\varphi^*(\frac{k}{n}) \leq n\omega(t)$.

(2) Dados $s \geq 0$ y $k \in \mathbb{N}$ existe $j \in \mathbb{N}_0$ tal que $\frac{j}{k} \leq s < \frac{j}{k} + \frac{1}{k}$, con lo cual

$$\omega(t) \leq \sup_{j \in \mathbb{N}_0} ((\frac{j}{k} + \frac{1}{k}) \log t - \varphi^*(\frac{j}{k})) = \frac{1}{k} \log t + \sup_{j \in \mathbb{N}_0} (\frac{j}{k} \log t - \varphi^*(\frac{j}{k})),$$

es decir, $\inf_{j \in \mathbb{N}_0} t^{-j} e^{k\varphi^*(\frac{j}{k})} \leq e^{-k\omega(t) + \log t}$. □

El siguiente resultado nos permite descomponer $\mathbb{R}_+$ en intervalos en los cuales el ínfimo en 0.1.6 se alcanza en un conjunto finito.

Lema 0.1.7 *Si $\frac{k}{N}\varphi^*(\frac{N}{k}) \leq \log t < \frac{k}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{k})$, entonces*

1. $\min_{0 \leq j \leq N} t^{-j} e^{k\varphi^*(\frac{j}{k})} \leq e^{-k\omega(t) + \log t}$,
2. $t^{-N} e^{2k\varphi^*(\frac{N}{2k})} \leq e^{-k\omega(t) + \log t}$.

Demostración. (1) Como $\frac{\varphi^*(t)}{t}$ es una función creciente, se tiene que $\log t < \frac{k}{j}\varphi^*(\frac{j}{k})$ (y, consecuentemente, $t^{-j} e^{k\varphi^*(\frac{j}{k})} > 1 = t^{-0} e^{k\varphi^*(\frac{0}{k})}$) para cada $j \geq N + 1$. Ahora la conclusión se sigue del lema 0.1.6.
(2) Ya sabemos que $t^{-(N-l)} e^{k\varphi^*(\frac{N-l}{k})} \leq e^{-k\omega(t) + \log t}$ para algún $l \in \{0, 1, \ldots, N\}$. Entonces, usando que $\frac{k}{l}\varphi^*(\frac{l}{k}) \leq \log t$ (y, por lo tanto, $t^{-l} e^{k\varphi^*(\frac{l}{k})} \leq 1$) obtenemos, aplicando la proposición 0.1.5, apartado (3),

$$\begin{aligned} t^{-N} e^{2k\varphi^*(\frac{N}{2k})} &\leq t^{-(N-l)} t^{-l} e^{k\varphi^*(\frac{N-l}{k})} e^{k\varphi^*(\frac{l}{k})} \\ &\leq e^{-k\omega(t) + \log t}. \end{aligned}$$

□

Definición 0.1.8 *Sea ω una función peso. Para cada abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ definimos los siguientes espacios de funciones:*

(1) *para cada compacto $K \subset \Omega$ y $\lambda > 0$ sea*

$$\mathcal{E}_\omega(K,\lambda) := \{f \in C^\infty(\Omega) : \quad |f|_{K,\lambda} < \infty\}$$

donde

$$|f|_{K,\lambda} := \sup_{x\in K} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} |f^{(\alpha)}(x)| \exp(-\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})). \tag{1.1}$$

(2) *el espacio de las* funciones ultradiferenciables de tipo Beurling *sobre Ω es el conjunto de todas las funciones $f \in C^\infty(\Omega)$ tales que $|f|_{K,m} < \infty$ para cada $K \subset\subset \Omega$ y cada $m \in \mathbb{N}$, es decir,*

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) := \underset{K\subset\subset\Omega}{\underset{\longleftarrow}{\operatorname{proj}}} \; \underset{m\in\mathbb{N}}{\underset{\longleftarrow}{\operatorname{proj}}} \; \mathcal{E}_\omega(K,m)$$

considerando la topología del límite proyectivo, es decir, la topología localmente convexa y metrizable dada por las seminormas $|f|_{K_n,n}$, $n \in \mathbb{N}$. Siendo $\{K_n\}$ una sucesión fundamental de compactos de Ω.

(3) *el espacio de las* funciones ultradiferenciables de tipo Roumieu *es el conjunto de todas las funciones $f \in C^\infty(\Omega)$ tales que para cada compacto $K \subset\subset \Omega$ existe $m \in \mathbb{N}$ con $|f|_{K,\frac{1}{m}} < \infty$, es decir,*

$$\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) := \underset{K\subset\subset\Omega}{\underset{\longleftarrow}{\operatorname{proj}}} \; \underset{m\in\mathbb{N}}{\underset{\longrightarrow}{\operatorname{ind}}} \; \mathcal{E}_\omega(K,\frac{1}{m})$$

considerando la topología, primero, del límite inductivo sobre $m \in \mathbb{N}$ para cada compacto K_n y luego tomando el límite proyectivo sobre éstos. Como antes, $\{K_n\}$ es una sucesión fundamental de compactos del abierto Ω.

En lo que sigue $*$ denotará indistintamente (ω) o $\{\omega\}$.

Definición 0.1.9 *Sea ω una función peso y K un compacto de Ω. Se define $\mathcal{D}_*(K)$ como el subespacio topológico de $\mathcal{E}_*(\Omega)$ formado por aquellas funciones que tienen soporte contenido en K.*

Definimos el espacio de funciones test de tipo Beurling como

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) := \underset{K\subset\subset\Omega}{\underset{\longrightarrow}{\operatorname{ind}}} \; \mathcal{D}_{(\omega)}(K),$$

y el espacio de funciones test de tipo Roumieu por

$$\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega) := \underset{K\subset\subset\Omega}{\underset{\longrightarrow}{\operatorname{ind}}} \; \mathcal{D}_{\{\omega\}}(K).$$

La propiedad (β) de la función peso ω garantiza que $\mathcal{D}_*(K)$ no es trivial, con lo que las clases de funciones ultradiferenciables definidas antes son no-casianalíticas.

Lema 0.1.10 *Para cada $B > 0$, el sistema de seminormas*

$$q_{K,\lambda}(f) := \sup_{x\in K} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} B^{-|\alpha|}|f^{(\alpha)}(x)| \exp\big(-\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})\big),$$

donde K es un compacto en Ω y $\lambda > 0$, define la topología de $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

Demostración. Sea $L \in \mathbb{N}$ tal que $\omega(et) \leq L(1+\omega(t))$, como en la proposición 0.1.5.

Supongamos primero que $B \geq 1$. Tomamos $s \in \mathbb{N}$ tal que $B \leq e^s$. Del apartado 2 c) de esta proposición, si definimos $A := \lambda(L^s + L^{s-1} + \cdots + L)$, se tiene

$$L^s\lambda\varphi^*(\tfrac{|\alpha|}{L^s\lambda}) + s|\alpha| \leq \lambda\varphi^*(\tfrac{|\alpha|}{\lambda}) + A.$$

Entonces, fijado $\lambda > 0$,

$$B^{|\alpha|}e^{L^s\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{L^s\lambda})} \leq e^A e^{\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})} \leq B^{|\alpha|}e^A e^{\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})},$$

es decir,

$$B^{-|\alpha|}e^{-\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})} \leq e^{-\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})} \leq e^A B^{-|\alpha|}e^{-L^s\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{L^s\lambda})}.$$

Así, fijado un compacto K en Ω y $\lambda > 0$, existe $\widetilde{\lambda} := L^s\lambda$ de manera que

$$q_{K,\lambda}(f) \leq |f|_{K,\lambda} \leq e^A q_{K,\widetilde{\lambda}}(f),$$

para cada $f \in \mathcal{E}_*(\Omega)$, siendo $|f|_{K,\lambda}$ la seminorma introducida en la ecuación (1.1).

Si $B < 1$, consideramos $1/B > 1$ y dado $\lambda > 0$ encontramos $\mu > 0$ y $C > 0$ tales que

$$B^{|\alpha|}e^{-\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})} \leq e^{-\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda})} \leq CB^{|\alpha|}e^{-\mu\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\mu})}.$$

de donde se deduce que, fijado un compacto $K \subset \Omega$ y $\lambda > 0$ existe $\mu > 0$, de modo que

$$|f|_{K,\lambda} \leq q_{K,\lambda}(f) \leq C|f|_{K,\mu}$$

para cada $f \in \mathcal{E}_*(\Omega)$.

Lo que prueba que el sistema de seminormas $\{q_{K,\lambda}\}$ es equivalente al introducido en la definición 0.1.8. $\square$

Los elementos de $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ se llaman ultradistribuciones de tipo Beurling en Ω de clase ω. El espacio dual de $\mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$, $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$, es el formado por las ultradistribuciones de tipo Roumieu en Ω. Como $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{\{\omega\}}(\Omega)$ con inclusión continua y densa, $\mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ se puede considerar como subespacio de $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$.

Sea $* = (\omega)$ ó $\{\omega\}$ y $T \in \mathcal{D}'_*(\Omega)$. Se define el soporte de T como

$$\operatorname{supp}_* T := \Big\{x \in \Omega \;\;|\;\; \begin{array}{l}\text{para cada entorno } U \text{ de } x\\ \text{existe } \varphi \in \mathcal{D}_*(U) \text{ tal que } < T,\varphi > \neq 0\end{array}\Big\}.$$

Si $T \in \mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$ entonces $\mathrm{supp}_{(\omega)} T = \mathrm{supp}_{\{\omega\}} T$.

También, si $\omega = o(\sigma)$, entonces $\mathcal{D}_{\{\sigma\}}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ con inclusión continua y de rango denso ([9, 3.9]), y por tanto, $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{\{\sigma\}}(\Omega)$. Si $T \in \mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega)$, se tiene

$$\mathrm{supp}_{(\omega)} T = \mathrm{supp}_{\{\omega\}} T = \mathrm{supp}_{\{\sigma\}} T.$$

Una ultradistribución $\mu \in \mathcal{D}'_*(\Omega)$ tiene extensión continua a $\mathcal{E}_*(\Omega)$ si, y sólo si, tiene soporte compacto en Ω. El espacio de ultradistribuciones de soporte compacto de tipo Beurling se denota por $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ y el de tipo Roumieu por $\mathcal{E}'_{\{\omega\}}(\Omega)$.

Introducimos a continuación la convolución de ultradistribuciones:

Definición 0.1.11 *Sean $\mu \in \mathcal{E}'_*(\mathbb{R}^p)$ y $\mu \neq 0$. Definimos :*

$$S_\mu : \mathcal{D}'_*(\mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathcal{D}'_*(\mathbb{R}^p), \;\; S_\mu(E) := \mu * E,$$

donde $< \mu * E, \varphi >=< E, \check{\mu} * \varphi >$ y $\check{\mu} * \varphi : x \rightarrow \mu(\varphi(x + \cdot))$, $x \in \mathbb{R}^p$. Entonces S_μ es un operador lineal y continuo.

Denotamos por $T_\mu : \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^p) \longrightarrow \mathcal{E}_*(\mathbb{R}^p)$ la restricción de S_μ a $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^p)$.

Definición 0.1.12 *Sea $f \in \mathcal{D}'_*(\Omega)$. Llamamos soporte singular de f respecto de $*$, denotado* $\mathrm{sing}_*\mathrm{supp}\, f$*, al complementario del mayor abierto A en Ω tal que $f \in \mathcal{E}_*(A)$.*

La transformada de Fourier-Laplace establece un isomorfismo entre los espacios de funciones test y ultradistribuciones de soporte compacto y ciertos espacios ponderados de funciones holomorfas.

Definición 0.1.13 *Sea $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. Llamamos transformada de Fourier-Laplace de φ a la función $\hat{\varphi} : \mathbb{C}^p \to \mathbb{C}$ definida como*

$$\hat{\varphi}(z) := \int_{\mathbb{R}^p} e^{-ix\cdot z} \varphi(x) dx, \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

La transformada de Fourier-Laplace de φ es la única función holomorfa en $\mathbb{C}^p$ cuya restricción a $\mathbb{R}^p$ coincide con la transformada de Fourier de φ.

Sea $K \subset \mathbb{R}^p$ un conjunto compacto y convexo. Entonces

$$H_K(x) := \sup_{y\in K} < x, y >, \quad x \in \mathbb{R}^p,$$

se llama función soporte de K.

Teorema 0.1.14 (Paley-Wiener) *Sea $K \subset \mathbb{R}^p$ un compacto convexo. Una función $h \in H(\mathbb{C}^p)$ es la transformada de Fourier-Laplace de alguna función $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ con* $\mathrm{supp}\,\varphi \subset K$ *si y sólo si para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante positiva C_n de modo que*

$$\big|h(z)\big| \leq C_n \exp\big(H_K(|\mathrm{Im} z|) - n\omega(z)\big), \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

Se deduce del teorema de Paley-Wiener que la topología del espacio $\mathcal{D}_{(\omega)}(K)$ introducido en la definición 0.1.9 viene dada por el sistema fundamental de seminormas

$$\|f\|_m := \int |\hat{f}(\xi)| e^{m\,\omega(\xi)} d\xi, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Definición 0.1.15 *(1) Para $z \in \mathbb{C}^p$ escribimos*

$$v_z(x) = \exp(-ix \cdot z), \quad x \in \mathbb{R}^p$$

(2) Se define la transformada de Fourier-Laplace $\hat{\mu}$ de $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ como

$$\hat{\mu}(z) =< \mu, v_z > .$$

El siguiente teorema constituye lo que se conoce como teorema de Paley-Wiener para ultradistribuciones con soporte compacto.

Teorema 0.1.16 (Paley-Wiener-Schwartz) *Sea $K \subset \mathbb{R}^p$ un compacto convexo. Para cada función entera f y cada función peso ω son equivalentes:*

(1) Existe una ultradistribución $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ con $\operatorname{supp} \mu \subset K$ tal que $\hat{\mu} = f$.

(2) Existe una constante $\lambda > 0$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C > 0$ cumpliendo:

$$|f(z)| \leq C \exp(H_K(\mathrm{Im} z) + \varepsilon |\mathrm{Im} z| + \lambda \omega(\mathrm{Re} z)), \quad z \in \mathbb{C}^p.$$

(3) Existe una constante $\lambda > 0$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una constante $C > 0$ cumpliendo:

$$\int_{\mathbb{R}^p} |f(x+iy)| e^{-\lambda\omega(x)} dx \leq C e^{H_K(y) + \varepsilon |y|}, \qquad y \in \mathbb{R}^p.$$

Ejemplo 0.1.17 Los siguientes son ejemplos de funciones peso (después de cierto cambio en $[0, A]$ para algún $A > 0$):

(1) $\omega(t) = t^\alpha$, $0 < \alpha < 1$. Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^p$. Nótese que para estos pesos las clases $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ (resp. $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$) coinciden con las clases de Gevrey $\Gamma^{(d)}(\Omega)$ (resp. $\Gamma^{\{d\}}(\Omega)$), siendo $d = 1/\alpha$. Recordamos que

$$\begin{aligned}\Gamma^{\{d\}}(\Omega) &= \{f \in C^\infty(\Omega) \ : \ \forall\, K \subset\subset \Omega\, \exists\, m \in \mathbb{N} \ : \\ &\quad \sup_{x \in K} \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{m^{|\alpha|} (|\alpha|!)^d} < +\infty\}.\end{aligned}$$

(2) $\omega(t) = (\log(1+t))^\beta$, $\beta > 1$.

(**3**) $\omega(t) = t(\log(1+t))^{-\beta}$, $\beta > 1$. Este peso no satisface la propiedad (ε).

(**4**) Sea $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$ una sucesión de números positivos con las siguientes propiedades:

(M1) $M_j^2 \leq M_{j-1}M_{j+1}$ para todo $j \in \mathbb{N}$,
(M2) Existen $A, H > 1$ con $M_n \leq AH^n \min_{0\leq j\leq n} M_j M_{n-j}$ para todo $n \in \mathbb{N}$,
(M3) Existe $A > 0$ con $\sum_{q=j+1}^{\infty} M_{q-1}/M_q \leq AjM_j/M_{j+1}$.

Si definimos $\omega_M : \mathbb{R} \to [0, \infty[$ por

$$\omega_M(t) = \begin{cases} \sup_{j\in\mathbb{N}_0} \log \frac{|t|^j M_0}{M_j} & \text{si } |t| > 0 \\ 0 & \text{si } t = 0 \end{cases}$$

entonces ω_M es una función par y continua y por [34, 3.11] existe una función peso fuerte κ con $\omega_M(t) \leq \kappa(t) \leq C\omega_M(t) + C$ para algún $C > 0$ y todo $t > 0$. Además se cumple:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{(M_j)}(\mathbb{R}^p) \quad &:= \quad \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^p) \,:\, \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \sup_{x\in K} \frac{|f^{(\alpha)}(x)|}{h^{|\alpha|}M_{|\alpha|}} < \infty \\ &\qquad \text{para cada}\, h > 0 \ \text{ y cada } K \subset \mathbb{R}^p \,\text{compacto}\} = \mathcal{E}_{(\kappa)}(\mathbb{R}^p). \end{aligned}$$

Para los espacios de Roumieu tenemos la identidad análoga. Nótese que por [9, 8.9] estas identidades se tienen bajo hipótesis más débiles sobre $\{M_p\}_{p\in\mathbb{N}_0}$.

Los espacios introducidos a continuación son espacios intermedios entre los de funciones test y los formados por funciones ultradiferenciables. Consecuentemente, los espacios obtenidos por dualidad constituyen espacios de ultradistribuciones estrictamente menores que $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ que contienen a las funciones acotadas. Dichos espacios han sido estudiados en [16].

Definición 0.1.18 *Para una función peso ω y $\lambda > 0$ denotamos*

$$\mathcal{D}_{L_1,\omega,\lambda}(\mathbb{R}^p) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^p) \ : \| \ f \ \|_{1,\lambda} < +\infty\}$$

siendo $\| \ f \ \|_{1,\lambda} := \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \| \ f^{(\alpha)}(x) \ \|_{L_1} \exp(-\lambda\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\lambda}))$. *Se define entonces*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p) \quad &:= \quad \mathrm{proj}_{n\in\mathbb{N}}\, \mathcal{D}_{L_1,\omega,n}(\mathbb{R}^p) \\ &= \quad \{f \in C^\infty(\mathbb{R}^p) \ : \| \ f \ \|_{1,n} < +\infty \ \forall \ n \in \mathbb{N}\}. \end{aligned}$$

Se cumple que $\mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ es un espacio de Fréchet. Estas propiedades y las que enunciaremos a continuación están demostradas en [16].

Teorema 0.1.19 *(1) $\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ con inclusiones continuas y densas.*

(2) Para cada $f \in \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ y $m \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\sup_{x\in\mathbb{R}^p} |\hat{f}(x)| \exp(m\omega(x)) < +\infty.$$

0.2. Operadores ultradiferenciales

A continuación introduciremos los operadores ultradiferenciales (con coeficientes constantes), que pueden ser considerados como operadores diferenciales de orden infinito, y que juegan un papel muy importante en la teoría estructural de las ultradistribuciones. Remitimos a [8] y [26].

Proposición 0.2.1 *Sea $G(z)$ una función entera en $\mathbb{C}^p$. Supongamos que* $\log|G| = O(\omega)$. *Entonces existe una constante $k > 0$ tal que*

$$|G^{(\alpha)}(0)| \leq \alpha! e^k e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})}.$$

Definición 0.2.2 *Sea $G(z)$ una función entera tal que* $\log|G| = O(\omega)$. *Entonces para $\varphi \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$,*

$$T_G(\varphi) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} (-i)^{|\alpha|} \frac{G^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} \varphi^{(\alpha)}(0),$$

define una ultradistribución $T_G \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ cuyo soporte se reduce al conjunto $\{0\}$. El operador de convolución

$$\begin{array}{rccc} G(D): & \mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p) \\ & \mu & \mapsto & T_G * \mu \end{array}$$

se llama operador ultradiferencial de clase (ω).

Si $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ se cumple que $G(D)f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ y además

$$G(D)f(x) = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} i^{|\alpha|} \frac{G^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x).$$

Observemos que la transformada de Fourier-Laplace de T_G es

$$\begin{aligned} \hat{T_G}(z) &= T_G(e^{-iz\cdot}) \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} (-i)^{|\alpha|} \frac{G^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} (-iz)^\alpha \\ &= \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \frac{G^{(\alpha)}(0)}{\alpha!} (-z)^\alpha \\ &= G(-z). \end{aligned}$$

Proposición 0.2.3 *Sea $G(D)$ un operador ultradiferencial de clase (ω). Se tiene:*

(a) $G(D) : \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p) \to \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ *es lineal y continuo.*

(b) $G(D) : \mathcal{D}'_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p) \to \mathcal{D}'_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ *es lineal y continuo.*

Capítulo 1

Operadores pseudodiferenciales

Como ya hemos dicho, la teoría de los operadores pseudodiferenciales se desarrolló a partir de 1965 con los trabajos de Kohn, Nirenberg y Hörmander. Consideraban operadores

$$f \to \int_{\mathbb{R}^p} p(x,\xi)\hat{f}(\xi)e^{ix\cdot\xi}d\xi,$$

siendo $p \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^p)$, que cumple, para cada compacto $K \subset \Omega$, estimaciones del tipo

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq c_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-|\beta|}.$$

La necesidad de incorporar soluciones fundamentales de operadores hipoelípticos motivó la introducción por parte de Hörmander de los símbolos de tipo (ρ,δ), esto es, símbolos que satisfacen las siguientes estimaciones

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq c_{\alpha\beta}(1+|\xi|)^{m-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}.$$

Claramente la integral anterior puede escribirse como una integral iterada

$$\int_{\mathbb{R}^p} p(x,\xi)\int_\Omega f(y)e^{i(x-y)\cdot\xi}dyd\xi,$$

lo que sugiere la posibilidad de reemplazar los símbolos $p(x,\xi)$, por funciones $a(x,y,\xi)$, $a \in C^\infty(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^p)$ si éstas satisfacen estimaciones análogas a las exigidas para $p(x,\xi)$ y sus derivadas. Estas funciones reciben el nombre de amplitudes.

El objetivo de este primer capítulo es definir los operadores pseudodiferenciales sobre clases no casi analíticas de funciones ultradiferenciables de tipo Beurling, analizar entre qué espacios de funciones ultradiferenciables actúan, así como estudiar extensiones de los mismos a otros espacios de funciones y de ultradistribuciones, y comprobar que son pseudolocales.

Las definiciones de símbolo y de amplitud se basan en las de [20], [18] y [45]. De hecho comprobamos que en el caso límite $\omega(t) = \log(1+t)$ recuperamos la definición de [18], mientras que para los pesos de Gevrey $\omega(t) = t^d$, $0 < d < 1$, nuestra definición es la que cabe esperar en el contexto Beurling a la vista de las definiciones de [45].

Contrariamente a lo que podría pensarse el interés de trabajar con amplitudes no reside en una mayor generalidad, sino en una mayor simplicidad. Así por ejemplo, trabajar con amplitudes permite estudiar fácilmente el adjunto de un operador pseudodiferencial y usar dualidad para demostrar de manera sencilla que todo operador pseudodiferencial se puede extender a una aplicación definida en el espacio de las (ultra-)distribuciones de soporte compacto y que toma valores en el espacio de todas las (ultra-)distribuciones. Definiremos los operadores pseudodiferenciales como límites de operadores integrales con núcleo en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$, lo que conseguiremos aproximando la amplitud por una sucesión de amplitudes con soporte compacto en la variable ξ. Veremos que la relación entre amplitudes y operadores no es uno a uno, pero que símbolos diferentes definen operadores diferentes.

Los ejemplos que damos en la sección 3 muestran que muchos operadores son pseudodiferenciales, según nuestra definición. Además no se trata de operadores exóticos, construidos ex-profeso para justificar la teoría, ya que, además de los operadores lineales en derivadas parciales con coeficientes en una clase adecuada de funciones ultradiferenciables, son pseudodiferenciales los operadores integrales con núcleo en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$, los operadores ultradiferenciales con coeficientes constantes o variables, o el operador de convolución definido por una solución fundamental de un operador ultradiferencial elíptico. Además, módulo un operador (ω)-regularizante, todo operador pseudodiferencial es la composición de un operador ultradiferencial con coeficientes constantes y un operador de orden finito.

1.1. Símbolos y amplitudes

Empezamos definiendo lo que entenderemos por amplitud en el contexto de las clases no casianalíticas de funciones ultradiferenciables de tipo Beurling.

Definición 1.1.1 *Sea Ω un abierto en $\mathbb{R}^p$, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, $d := \rho - \delta$ y supongamos que $\omega(t) = o(t^d)$ cuando $t \to \infty$. Una amplitud en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ es una función $a(x,y,\xi)$ en $C^\infty(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^p)$ tal que para cada compacto $Q \subset \Omega \times \Omega$ existe $R \geq 1$ y una sucesión $C_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, con la propiedad*

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y D^\beta_\xi a(x,y,\xi)| \leq C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{n})} e^{m\omega(\xi)} (1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta - |\beta|\rho} \tag{1.1}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x,y) \in Q$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$.

En caso de que $|\beta| = 0$ las estimaciones se tienen para cada $\xi \in \mathbb{R}^p$.

Si $a(x,y,\xi) = p(x,\xi)$, la función $p(x,\xi)$ se llama símbolo.

Nota 1.1.2 La condición $\omega(t) = o(t^d)$ en la definición de amplitud merece algunos comentarios. Si $\rho = 1$ y $\delta = 0$, esto no implica ninguna restricción sobre la función peso ω (como se dijo después de la definición 0.1.2). Para otros valores de ρ y/o de δ, esta suposición significa que $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ contiene, con inclusión continua y densa, la clase de Gevrey $\Gamma^{\{\frac{1}{d}\}}(\Omega)$ y asegura que, para cada $n \in \mathbb{N}$, $j! = O(e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})})$ cuando j tiende a infinito (véase la proposición 1.2.12).

El siguiente resultado proporciona varias formulaciones equivalentes de la noción de amplitud.

Lema 1.1.3 *Supongamos que $a(x,y,\xi)\in C^\infty(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^p)$. Entonces son equivalentes:*

1. *La función $a(x,y,\xi)\in S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$,*

2. *Para cada compacto $Q\subset\Omega\times\Omega$ existe $R\geq 1$ y una sucesión $C_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ cumpliendo, para cada $(x,y)\in Q$:*

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y D^\beta_\xi a(x,y,\xi)|\leq C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}|\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}e^{m\omega(\xi)} \tag{1.2}$$

siempre que $|\xi|\geq 1$ y $|\beta|=0$, ó $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq\frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$. Y también

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y a(x,y,\xi)|\leq C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}e^{m\omega(\xi)} \tag{1.3}$$

siempre que $|\xi|\leq 1$.

3. *Para cada compacto $Q\subset\Omega\times\Omega$ existen constantes $A\geq 1$ y $R\geq 1$ y una sucesión $C_n>0$, $n\in\mathbb{N}$, con la propiedad*

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y D^\beta_\xi a(x,y,\xi)|\leq C_n A^{|\alpha+\gamma+\beta|}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{n})}e^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$, $(x,y)\in Q$, $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq\frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$.

4. *Para cada compacto $Q\subset\Omega\times\Omega$ existen constantes $A\geq 1$, $B\geq 1$, $C\geq 1$, $R\geq 1$ y una sucesión $C_n>0$ ($n\in\mathbb{N}$) de modo que para cada $(x,y)\in Q$:*

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y D^\beta_\xi a(x,y,\xi)|\leq C_n\frac{A^{|\alpha|}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}C^{|\gamma|}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}B^{|\beta|}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}}{|\xi|^{-\delta|\alpha+\gamma|+\rho|\beta|}}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $|\xi|\geq 1$ y $|\beta|=0$, ó $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq\frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$. Y también

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y a(x,y,\xi)|\leq C_n A^{|\alpha|}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}C^{|\gamma|}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $|\xi|\leq 1$.

Demostración. (1) $\Rightarrow$ (2) : Supongamos que $a(x,y,\xi)\in S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Probaremos las desigualdades (1.2) y (1.3). Por coherencia con la definición 1.1.1, cuando $|\beta|=0$, se entiende que (1.1) se cumple para todo $|\xi|\geq 1$. Llamamos $B:=(2^\delta)^{\frac{1}{\rho-\delta}}$ y tomamos $s\in\mathbb{N}$ de manera que $B\leq e^s$. Sea $L\in\mathbb{N}$ de modo que $\omega(et)\leq L(1+\omega(t))$ para todo $t\geq 0$ y C_n la constante de la definición de amplitud 1.1.1 asociada al número natural $4nL^s$. Al ser

$$\frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})\geq\frac{4nL^s}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{4nL^s}),$$

se tiene

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \leq C_n e^{(\rho-\delta)4nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma+\beta|}{4nL^s})}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}e^{m\omega(\xi)}$$

para cada $(x,y) \in Q$, $n \in \mathbb{N}$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$. En el caso $|\xi| \geq 1$ se tiene que $1+|\xi| \leq 2|\xi|$. Y en particular,

$$\begin{aligned}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|} &\leq (2|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|} \leq \\ &\leq 2^{\delta|\alpha+\gamma|}|\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}.\end{aligned}$$

Además, de la convexidad de φ^* se sigue

$$\begin{aligned}4nL^s\varphi^*(\tfrac{|\alpha+\gamma+\beta|}{4nL^s}) &\leq 2nL^s\varphi^*(\tfrac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s}) + 2nL^s\varphi^*(\tfrac{|\beta|}{2nL^s}) \leq \\ &\leq 2nL^s\varphi^*(\tfrac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s}) + n\varphi^*(\tfrac{|\beta|}{n}).\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}2^{\delta|\alpha+\gamma|}e^{(\rho-\delta)2nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s})} &= B^{(\rho-\delta)|\alpha+\gamma|}e^{(\rho-\delta)2nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s})} \leq \\ &\leq e^{s(\rho-\delta)|\alpha+\gamma|}e^{(\rho-\delta)2nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s})}.\end{aligned}$$

Aplicando ahora 0.1.5(2c), tomando $A := 2n(L^s + L^{s-1} + \cdots + L)$, se tiene

$$s|\alpha+\gamma| + 2nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s}) \leq A + 2n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2n}).$$

Entonces, poniendo $D_n := C_n e^{A(\rho-\delta)}$, conseguimos

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| &\leq C_n e^{(\rho-\delta)2nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s})+(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}(2|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|}|\xi|^{-\rho|\beta|}e^{m\omega(\xi)} \\ &\leq D_n e^{(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2n})+(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}|\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}e^{m\omega(\xi)}.\end{aligned}$$

Otra vez de la convexidad de φ^* (véase 0.1.5) se tiene $2n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2n}) \leq n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n}) + n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})$, de donde

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \leq D_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}|\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}e^{m\omega(\xi)},$$

y se cumple (1.2).

Probemos ahora (1.3). Por el modo en que se ha seleccionado la sucesión (C_n) se tiene

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq C_n e^{(\rho-\delta)2nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s})}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $\xi \in \mathbb{R}^p$. Si $|\xi| \leq 1$, razonando como antes y usando $1+|\xi| \leq 2$,

$$C_n e^{(\rho-\delta)2nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2nL^s})}2^{\delta|\alpha+\gamma|} \leq D_n e^{(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{2n})}$$

y se obtiene
$$|D_x^\alpha D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \le D_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})+(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})} e^{m\omega(\xi)}$$
como queríamos.

(2) $\Rightarrow$ (1) : Probaremos primero la desigualdad en la definición de amplitud cuando $|\xi| \ge 1$. Después veremos que se llega a la misma desigualdad cuando $|\xi| \le 1$. Llamamos $A := (2^\rho)^{\frac{1}{\rho-\delta}}$ y tomamos $s \in \mathbb{N}$ de manera que $A \le e^s$. De la desigualdad (1.2), tomando de nuevo $L \in \mathbb{N}$ como en la proposición 0.1.5, y C_n asociada al número natural nL^s, se tiene
$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \le C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})} e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\beta|}{nL^s})} |\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|} e^{m\omega(\xi)}$$
siempre que $(x,y) \in Q$, $|\xi| \ge 1$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \ge \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$. Como $|\xi| \ge 1$, $1+|\xi| \le 2|\xi|$, de donde $|\xi|^{-\rho|\beta|} = 2^{\rho|\beta|}(2|\xi|)^{-\rho|\beta|} \le 2^{\rho|\beta|}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|}$. Ahora se razona como en la implicación anterior:
$$\begin{aligned} 2^{\rho|\beta|} e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\beta|}{nL^s})} &= A^{(\rho-\delta)|\beta|} e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\beta|}{nL^s})} \le \\ &\le e^{s(\rho-\delta)|\beta|} e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\beta|}{nL^s})}. \end{aligned}$$
Aplicando 0.1.5(2c), si $\widetilde{A} := n(L^s + L^{s-1} + \cdots + L)$,
$$e^{s|\beta|} e^{nL^s\varphi^*(\frac{|\beta|}{nL^s})} \le e^{\widetilde{A}} e^{n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}$$
con lo que si $E_n := C_n e^{\widetilde{A}(\rho-\delta)}$ se obtiene
$$\begin{aligned} &|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \le \\ &\quad \le C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})} 2^{\rho|\beta|} e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\beta|}{nL^s})} (1+|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|} e^{m\omega(\xi)} \le \\ &\quad \le E_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})} (1+|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|} e^{m\omega(\xi)}. \end{aligned}$$
Ahora, como φ^* es convexa,
$$n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n}) + n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n}) + n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n}) \le n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma+\beta|}{n})$$
lo que concluye la prueba para al caso $|\xi| \ge 1$.

Si $|\xi| \le 1$ y $\beta \ne 0$, no se cumple
$$\log(\frac{|\xi|}{R}) \ge \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n}).$$
Por tanto, sólo queda comprobar las estimaciones en la definición de amplitud cuando $|\xi| \le 1$ y $\beta = 0$. En este caso, de (1.3) deducimos
$$\begin{aligned} |D_x^\alpha D_y^\gamma a(x,y,\xi)| &\le C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})} e^{m\omega(\xi)} \le \\ &\le C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})} (1+|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|} e^{m\omega(\xi)}, \end{aligned}$$

lo que finaliza la demostración.

(1) $\Rightarrow$ (3) : Es trivial.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Sea $B := A^{\frac{1}{\rho-\delta}}$ y $s \in \mathbb{N}$ de manera que $B \leq e^s$. Sea $L \in \mathbb{N}$ como en la proposición 0.1.5. Por hipótesis, si C_n es la constante asociada al natural nL^s y usando que

$$\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n}) \geq \frac{nL^s}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{nL^s})$$

se obtiene

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \leq C_n A^{|\alpha+\beta+\gamma|} e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma+\beta|}{nL^s})}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}e^{m\omega(\xi)}$$

para cada $(x,y) \in Q$, $n \in \mathbb{N}$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$. Aplicando otra vez la proposición 0.1.5(2c), tomando $\widetilde{A} := n(L^s + \cdots + L)$,

$$\begin{aligned} A^{|\alpha+\beta+\gamma|}e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{nL^s})} &= B^{(\rho-\delta)|\alpha+\beta+\gamma|}e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{nL^s})} \leq \\ &\leq e^{(\rho-\delta)\widetilde{A}}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta+\gamma|}{n})}. \end{aligned}$$

Si ponemos $D_n := C_n e^{(\rho-\delta)\widetilde{A}}$, se tiene

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \leq D_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma+\beta|}{n})}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}e^{m\omega(\xi)}$$

como queríamos.

(1) $\Leftrightarrow$ (4) : Esta demostración es una combinación de (1) $\Leftrightarrow$ (2) y (1) $\Leftrightarrow$ (3). $\square$

Como consecuencia inmediata obtenemos el siguiente corolario:

Corolario 1.1.4 *Si $a(x,y,\xi)$ es una amplitud en $S_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$, para cada compacto $Q \subset \Omega \times \Omega$ existe una sucesión $C_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ con la propiedad*

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}|\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $(x,y) \in Q$ y $|\xi| \geq 1$.

Las acotaciones que proporcionan los siguientes resultados nos permitirán definir los operadores pseudodiferenciales y representarlos como integrales iteradas.

Proposición 1.1.5 *Sea $a(x,y,\xi)$ una amplitud en $S_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ y $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ una función test. Para cada compacto $K \subset \Omega$ y $n, \lambda \in \mathbb{N}$ existe una constante $C > 0$ tal que*

$$|\int D_x^\alpha a(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy| \leq Ce^{-\lambda\omega(\xi)}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}$$

para cada $x \in K$, $\xi \in \mathbb{R}^p$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$.

Demostración. La estimación es cierta si $|\xi| \leq 2^{1/(\rho-\delta)}$. En efecto, de la definición de símbolo, tomando $L \in \mathbb{N}$ como en la proposición 0.1.5, para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar una constante $C > 0$ cumpliendo

$$|D_x^\alpha a(x,y,\xi)| \leq Ce^{(\rho-\delta)nL\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL})}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $x \in K$, $y \in \operatorname{supp} f$ y $|\xi| \leq 2^{1/(\rho-\delta)}$. Ahora, $\rho - \delta \leq 1$, y $1 + |\xi| \leq B$, para cierta constante $B > 0$. Además, la expresión $e^{\omega(\xi)}$ está acotada. Sea $s \in \mathbb{N}$ de modo que $B \leq e^s$. Aplicando la proposición 0.1.5(2c), si llamamos $A := n(L^s + \cdots + L)$, después de modificar la constante C si es necesario, se cumple

$$|D_x^\alpha a(x,y,\xi)| \leq Ce^{nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL^s})}B^{|\alpha|}e^{-\lambda\omega(\xi)} \leq Ce^A e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{-\lambda\omega(\xi)},$$

lo que implica que

$$|\int D_x^\alpha a(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy| \leq \int |D_x^\alpha a(x,y,\xi)f(y)|dy \leq$$

$$\leq Ce^A\Big(\int |f(y)|dy\Big)e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{-\lambda\omega(\xi)},$$

que prueba la desigualdad buscada para $|\xi| \leq 2^{1/(\rho-\delta)}$.

Podemos suponer ahora que $|\xi| \geq 2^{1/(\rho-\delta)}(\geq 1)$, y aplicamos el corolario 1.1.4 al compacto $Q := K \times \operatorname{supp} f$ para obtener, para cada $s, n \in \mathbb{N}$, una constante $C > 0$ tal que

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq Ce^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{|\alpha|}{sn})}e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{|\gamma|}{sn})}|\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $x \in K$, $y \in \operatorname{supp} f$ y $|\xi| \geq 2^{1/(\rho-\delta)}$.

Como $\frac{\varphi^*(x)}{x}$ es creciente, $sn\varphi^*(\frac{|\alpha|}{sn}) \leq n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})$. Por el lema 0.1.6, al ser $|\xi| \geq 1$, se cumple $|\xi|^{\delta|\alpha|}e^{-\delta n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \leq e^{n\delta\omega(\xi)}$. De donde se deduce la siguiente estimación

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq Ce^{\rho n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{|\gamma|}{sn})}|\xi|^{\delta|\gamma|}e^{(m+n\delta)\omega(\xi)}.$$

Fijamos ahora $\xi \in \mathbb{R}^p$, $|\xi| \geq 2^{1/(\rho-\delta)}$, y tomamos $1 \leq k \leq p$ con $|\xi| = |\xi_k|$. Para cada $j \in \mathbb{N}$ se tiene, después de integrar por partes,

$$\begin{aligned}\int D_x^\alpha a(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy &= \frac{1}{\xi_k^j}\int D_{y_k}^j(D_x^\alpha a(x,y,\xi)f(y))e^{-iy\xi}dy \\ &= \frac{1}{\xi_k^j}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\int e^{-iy\xi}D_{y_k}^l D_x^\alpha a(x,y,\xi)D_{y_k}^{j-l}f(y)dy\end{aligned}$$

Dado que

$$|D_x^\alpha D_{y_k}^l a(x,y,\xi)| \leq Ce^{\rho n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}\frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{-\delta l}}e^{(m+n\delta)\omega(\xi)},$$

y $\sup_{y\in\mathbb{R}^p}|D^{j-l}_{y_k}f(y)| \leq |f|_{sn}e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}$, para cada $j,s\in\mathbb{N}$, existe cierta constante C que sólo depende de n,s y de la medida de Lebesgue del soporte de f de modo que

$$|\int D^\alpha_x a(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy| \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\xi|^j}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\int |D^l_{y_k}D^\alpha_x a(x,y,\xi)|\cdot|D^{j-l}_{y_k}f(y)|dy \leq$$

$$\leq C|f|_{sn}e^{\rho n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{(m+n\delta)\omega(\xi)}\frac{1}{|\xi|^j}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{-\delta l}}e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})} \leq$$

$$\leq C|f|_{sn}e^{\rho n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{(m+n\delta)\omega(\xi)}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{l-\delta l}}\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}}{|\xi|^{j-l}}.$$

Como $|\xi|\geq 2^{1/(\rho-\delta)}$, se tiene $\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})\geq 0$. Por lo que existe un número natural N tal que

$$\frac{sn}{N}\varphi^*(\frac{N}{sn}) \leq \log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}}) < \frac{sn}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{sn}).$$

Si $l<j\leq N$, tenemos que $e^{\frac{sn}{j-l}\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}\leq e^{\frac{sn}{N}\varphi^*(\frac{N}{sn})}\leq|\xi|$, y por tanto $\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}}{|\xi|^{j-l}}\leq 1$ y

$$\frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{(\rho-\delta)l}}\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}}{|\xi|^{j-l}} \leq \frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{(\rho-\delta)l}}(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}}{|\xi|^{j-l}})^{(\rho-\delta)} \leq (\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j}{sn})}}{|\xi|^j})^{(\rho-\delta)}.$$

Como $\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}=2^j$, finalmente deducimos que (proposición 0.1.5(3))

$$\begin{aligned}|\int D^\alpha_x a(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy| &\leq C|f|_{sn}e^{(\delta n+m)\omega(\xi)}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j}{sn})}}{|\xi|^j})^{(\rho-\delta)}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\\ &\leq C|f|_{sn}e^{(\delta n+m)\omega(\xi)}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j}{sn})}}{(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})^j})^{(\rho-\delta)}\end{aligned}$$

para cada $j\leq N$. Como $\frac{sn}{N}\varphi^*(\frac{N}{sn})\leq\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})<\frac{sn}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{sn})$, se sigue del lema 0.1.7(1) que

$$\begin{aligned}\min_{0\leq j\leq N}(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j}{sn})}}{(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})^j})^{(\rho-\delta)} &\leq e^{-sn(\rho-\delta)\omega(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})+(\rho-\delta)\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})}\\ &\leq e^{-sn(\rho-\delta)\omega(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})+\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})},\end{aligned}$$

y así se tiene

$$|\int D^\alpha_x a(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy| \leq C|f|_{sn}e^{(\delta n+m)\omega(\xi)}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{-sn(\rho-\delta)\omega(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})+\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})}.$$

Ahora es suficiente elegir s lo bastante grande para concluir, puesto que $\log(t)=o(\omega(t))$, cuando $t\to\infty$. $\square$

Proposición 1.1.6 *Sean $a(x, y, \xi)$ y f como los descritos en la proposición 1.1.5. Se cumple una estimación similar a la enunciada allí si sustituimos el símbolo $a(x, y, \xi)$ por la función $b(x, y, \xi) := a(x, y, \xi)e^{ix\xi}$.*

Demostración. Veamos primero que la estimación es cierta para valores de $|\xi| \leq 2^{1/(\rho-\delta)}$. Por la fórmula de Leibniz,

$$D_x^\alpha b(x, y, \xi) = e^{ix\xi} \sum_{\mu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\mu} \xi^{\alpha-\mu} D_x^\mu a(x, y, \xi).$$

Sea $B := 2^{1/(\rho-\delta)}$. Tomamos $s \in \mathbb{N}$ de modo que $4B^2 \leq e^s$. Usando la definición 1.1.1, para cada $n \in \mathbb{N}$ y $L \in \mathbb{N}$ como en la proposición 0.1.5 obtenemos una constante $C > 0$ de modo que

$$|D_x^\mu a(x, y, \xi)| \leq Ce^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL^s})}(1 + |\xi|)^{\delta|\mu|}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $x \in K$, $y \in \operatorname{supp} f$ y $|\xi| \leq 2^{1/(\rho-\delta)} = B$. De donde, $|\xi^{\alpha-\mu}| \leq |\xi|^{|\alpha-\mu|} \leq B^{|\alpha|}$, y así

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha b(x, y, \xi)| &\leq \sum_{\mu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\mu} |\xi^{\alpha-\mu}| \cdot |D_x^\mu a(x, y, \xi)| \\ &\leq Ce^{m\omega(\xi)} B^{|\alpha|} \sum_{\mu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\mu} e^{(\rho-\delta)nL^s\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL^s})}(1 + |\xi|)^{\delta|\mu|}. \end{aligned}$$

Además, $1 + |\xi| \leq 2B$, $\rho - \delta \leq 1$ y $\delta \leq 1$. Del crecimiento de $\varphi^*(x)$ se deduce que $nL^s\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL^s}) \leq nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL^s})$. Y, por otro lado, $\sum_{\mu\leq\alpha} \binom{\alpha}{\mu} = 2^{|\alpha|}$, de donde

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha b(x, y, \xi)| &\leq Ce^{m\omega(\xi)} B^{|\alpha|} \sum_{\mu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\mu} e^{nL^s\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL^s})}(2B)^{\delta|\mu|} \\ &\leq Ce^{m\omega(\xi)} B^{|\alpha|} e^{nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL^s})}(2B)^{\delta|\alpha|} \sum_{\mu \leq \alpha} \binom{\alpha}{\mu} \\ &\leq Ce^{m\omega(\xi)} e^{nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL^s})}(4B^2)^{|\alpha|}. \end{aligned}$$

Finalmente, de la proposición 0.1.5(2c), para $A := n(L^s + \cdots + L)$, se deduce que

$$(4B^2)^{|\alpha|} e^{nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL^s})} \leq e^{s|\alpha|} e^{nL^s\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL^s})} \leq e^A e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})},$$

y podemos concluir, modificando la constante C si es necesario, que

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha b(x, y, \xi)| &\leq Ce^A e^{m\omega(\xi)} e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \\ &\leq Ce^{-\lambda\omega(\xi)} e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}, \end{aligned}$$

puesto que la expresión $e^{\omega(\xi)}$ está acotada si $|\xi| \leq 2^{1/(\rho-\delta)}$.

Supongamos ahora que $|\xi| \geq 2^{1/(\rho-\delta)}$. Se deduce del corolario 1.1.4 que, para cada $s, n \in \mathbb{N}$ y $L \in \mathbb{N}$ como en la proposición 0.1.5, existe $C > 0$ con la propiedad

$$|D_x^\mu D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq Ce^{(\rho-\delta)snL\varphi^*(\frac{|\mu|}{snL})}e^{(\rho-\delta)snL\varphi^*(\frac{|\gamma|}{snL})}|\xi|^{\delta|\mu+\gamma|}e^{m\omega(\xi)},$$

siempre que $x \in K$, $y \in \operatorname{supp} f$ y $|\xi| \geq 2^{1/(\rho-\delta)}$. Como $\frac{\varphi^*(x)}{x}$ es creciente, $snL\varphi^*(\frac{|\gamma|}{snL}) \leq sn\varphi^*(\frac{|\gamma|}{sn})$, y así,

$$|D_x^\mu D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \leq Ce^{(\rho-\delta)snL\varphi^*(\frac{|\mu|}{snL})}e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{|\gamma|}{sn})}|\xi|^{\delta|\mu+\gamma|}e^{m\omega(\xi)}.$$

También se cumple que $snL\varphi^*(\frac{|\mu|}{snL}) \leq nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})$ ($\frac{\varphi^*(x)}{x}$ es creciente). Además, del lema 0.1.6, $|\xi|^{\delta|\mu|}e^{-\delta nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})} \leq e^{nL\delta\omega(\xi)}$ y así se obtiene la estimación

$$\begin{aligned}
|D_x^\mu D_y^\gamma a(x,y,\xi)| &\leq Ce^{(\rho-\delta)nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})}e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{|\gamma|}{sn})}|\xi|^{\delta|\mu+\gamma|}e^{m\omega(\xi)} \\
&= Ce^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{|\gamma|}{sn})}|\xi|^{\delta|\gamma|}|\xi|^{\delta|\mu|}e^{-\delta nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})}e^{\rho nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})}e^{m\omega(\xi)} \\
&\leq Ce^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{|\gamma|}{sn})}|\xi|^{\delta|\gamma|}e^{\rho nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})}e^{(m+nL\delta)\omega(\xi)}.
\end{aligned}$$

Hay que tener en cuenta que ahora

$$D_x^\alpha D_y^\gamma b(x,y,\xi) = e^{ix\xi}\sum_{\mu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\mu}\xi^{\alpha-\mu}D_x^\mu D_y^\gamma a(x,y,\xi).$$

Como $|\xi^{\alpha-\mu}| \leq |\xi|^{|\alpha-\mu|}$, de lo anterior se deduce que

$$\begin{aligned}
|D_x^\alpha D_y^\gamma b(x,y,\xi)| &\leq \sum_{\mu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\mu}|\xi|^{|\alpha-\mu|}|D_x^\mu D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \\
&\leq Ce^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{|\gamma|}{sn})}|\xi|^{\delta|\gamma|}e^{(m+nL\delta)\omega(\xi)}\sum_{\mu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\mu}|\xi|^{|\alpha-\mu|}e^{\rho nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})}
\end{aligned}$$

para cada $x \in K$, $y \in \operatorname{supp} f$ y $|\xi| \geq 2^{1/(\rho-\delta)}$. Aplicando integración por partes y eligiendo $1 \leq k \leq p$ de modo que $|\xi| = |\xi_k|$ se tiene que, para cada $j \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned}
\int D_x^\alpha b(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy &= \frac{1}{\xi_k^j}\sum_{\mu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\mu}\int \xi^{\alpha-\mu}D_{y_k}^j(D_x^\mu a(x,y,\xi)f(y))e^{-iy\xi}dy \\
&= \frac{1}{\xi_k^j}\sum_{\mu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\mu}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\int \xi^{\alpha-\mu}e^{-iy\xi}D_{y_k}^l D_x^\mu a(x,y,\xi)D_{y_k}^{j-l}f(y)dy
\end{aligned}$$

Hemos probado antes que

$$|D_x^\mu D_{y_k}^l a(x,y,\xi)| \leq Ce^{\rho nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})}\frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{-\delta l}}e^{(m+nL\delta)\omega(\xi)}.$$

Al ser $\sup_{y\in\mathbb{R}^p}|D_{y_k}^{j-l}f(y)|\le|f|_{sn}e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}$, para cada $j,s\in\mathbb{N}$, existe cierta constante $C>0$ que sólo depende de n,s y de la medida de Lebesgue del soporte de f de modo que

$$|\int D_x^\alpha b(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy|\le$$

$$\le\frac{1}{|\xi|^j}\sum_{\mu\le\alpha}\binom{\alpha}{\mu}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\int|\xi|^{|\alpha-\mu|}|D_{y_k}^l D_x^\mu a(x,y,\xi)|\cdot|D_{y_k}^{j-l}f(y)|dy\le$$

$$\le C|f|_{sn}e^{(m+nL\delta)\omega(\xi)}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{l-\delta l}}\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}}{|\xi|^{j-l}}\cdot s(\alpha,\xi),$$

siendo $s(\alpha,\xi):=\sum_{\mu\le\alpha}\binom{\alpha}{\mu}e^{nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})}|\xi|^{|\alpha-\mu|}$. Pero, de la convexidad de φ^*, $e^{nL\varphi^*(\frac{|\mu|}{nL})}\le e^{nL\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL})-nL\varphi^*(\frac{|\alpha-\mu|}{nL})}$. Además, del lema 0.1.6, $|\xi|^{|\alpha-\mu|}e^{-nL\varphi^*(\frac{|\alpha-\mu|}{nL})}\le e^{nL\omega(\xi)}$. Por último, se cumple $\sum_{\mu\le\alpha}\binom{\alpha}{\mu}=2^{|\alpha|}$, por lo que $s(\alpha,\xi)\le 2^{|\alpha|}e^{nL\omega(\xi)}e^{nL\varphi^*(\frac{|\alpha|}{nL})}$. Aplicando 0.1.5 de nuevo,

$$s(\alpha,\xi)\le e^{nL(1+\omega(\xi))}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}.$$

Consideremos, como en la proposición 1.1.5, un número natural N tal que

$$\frac{sn}{N}\varphi^*(\frac{N}{sn})\le\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})<\frac{sn}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{sn}).$$

Si $l<j\le N$, tenemos que $e^{\frac{sn}{j-l}\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}\le e^{\frac{sn}{N}\varphi^*(\frac{N}{sn})}\le|\xi|$, y por tanto $\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}}{|\xi|^{j-l}}\le 1$ y

$$\frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{(\rho-\delta)l}}\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}}{|\xi|^{j-l}}\le\frac{e^{(\rho-\delta)sn\varphi^*(\frac{l}{sn})}}{|\xi|^{(\rho-\delta)l}}\Big(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j-l}{sn})}}{|\xi|^{j-l}}\Big)^{(\rho-\delta)}\le\Big(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j}{sn})}}{|\xi|^j}\Big)^{(\rho-\delta)}.$$

Como $\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}=2^j$, deducimos que (proposición 0.1.5(3))

$$\begin{aligned}|\int D_x^\alpha b(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy| &\le Ce^{nL}|f|_{sn}e^{((1+\delta)nL+m)\omega(\xi)}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}\Big(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j}{sn})}}{|\xi|^j}\Big)^{(\rho-\delta)}\sum_{l=0}^{j}\binom{j}{l}\\ &\le Ce^{nL}|f|_{sn}e^{((1+\delta)nL+m)\omega(\xi)}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}\Big(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j}{sn})}}{(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})^j}\Big)^{(\rho-\delta)}\end{aligned}$$

para cada $j\le N$. Como $\frac{sn}{N}\varphi^*(\frac{N}{sn})\le\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})<\frac{sn}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{sn})$, se sigue del lema 0.1.7(1) que

$$\begin{aligned}\min_{0\le j\le N}\Big(\frac{e^{sn\varphi^*(\frac{j}{sn})}}{(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})^j}\Big)^{(\rho-\delta)} &\le e^{-sn(\rho-\delta)\omega(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})+(\rho-\delta)\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})}\\ &\le e^{-sn(\rho-\delta)\omega(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})+\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})},\end{aligned}$$

y en consecuencia

$$|\int D_x^\alpha b(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy| \leq$$

$$\leq Ce^{nL}|f|_{sn}e^{(L(1+\delta)n+m)\omega(\xi)}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{-sn(\rho-\delta)\omega(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})+\log(\frac{|\xi|}{2^{1/(\rho-\delta)}})},$$

lo que concluye la prueba, pues como en la proposición 1.1.5 basta elegir s suficientemente grande. □

Nota 1.1.7 Observemos que con la misma demostración tenemos un poco más en las proposiciones 1.1.5 y 1.1.6. De hecho, la estimación es uniforme si f va variando en un conjunto acotado $\mathcal{B}$ de $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, puesto que entonces existe una constante C_{sn} que sólo depende de la seminorma $|\cdot|_{sn}$ cumpliendo

$$|f|_{sn} \leq C_{sn},$$

para cada $f \in \mathcal{B}$.

1.2. Operadores pseudodiferenciales

El objetivo de esta sección es introducir los operadores pseudodiferenciales sobre clases no-casianalíticas de tipo Beurling. Los resultados de la sección anterior, más concretamente 1.1.5 y 1.1.6, nos permiten considerar la integral iterada

$$\int \Big(\int a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}f(y)dy\Big)d\xi,$$

siendo $a(x,y,\xi)$ una amplitud y f una función test. Sin embargo, esta integral iterada no siempre es una integral de Lebesgue doble, lo que crea dificultades, por ejemplo para intercambiar el orden de integración o en los procesos de paso al límite. Para evitar estos inconvenientes, siguiendo a [10], los operadores pseudodiferenciales en $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ se obtienen como límites de operadores cuyo núcleo es una función en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$, lo que conseguiremos aproximando la amplitud mediante amplitudes con soporte compacto en la variable ξ.

Lema 1.2.1 *Sea $a(x,y,\xi)$ una amplitud en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ y $\Psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. Entonces*

1. *$K(x,y) := \int a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}\Psi(\xi)d\xi$ pertenece a $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$,*
2. *$A : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, $A(f)(x) := \int K(x,y)f(y)dy$, es un operador lineal y continuo.*

Demostración. (1) Fijado un conjunto compacto $Q \subset \Omega\times\Omega$ y aplicando el corolario 1.1.4, deducimos que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $C > 0$ tal que

$$|D_x^\mu D_y^\nu a(x,y,\xi)| \leq Ce^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{n})}|\xi|^{\delta|\mu+\nu|}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $(x,y) \in Q$ y $|\xi| \geq 1$. Por otro lado, del lema 0.1.6 se obtienen las estimaciones

$$|\xi|^{\delta|\mu+\nu|} \leq e^{\delta n\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{n})} e^{\delta n\omega(\xi)} \quad \text{y} \quad |\xi|^{|\alpha+\gamma-\mu-\nu|} \leq e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma-\mu-\nu|}{n})} e^{n\omega(\xi)},$$

siempre que $|\xi| \geq 1$. Al ser φ^* convexa, $n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma-\mu-\nu|}{n}) + n\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{n}) \leq n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})$. Además, $\sum_{\mu\leq\alpha}\binom{\alpha}{\mu} = 2^{|\alpha|}$ y $\sum_{\nu\leq\gamma}\binom{\gamma}{\nu} = 2^{|\gamma|}$, por lo que

$$\sum_{\mu\leq\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma}\binom{\alpha}{\mu}\binom{\gamma}{\nu}|D_x^\mu D_y^\nu a(x,y,\xi)||\xi|^{|\alpha-\mu|}|\xi|^{|\gamma-\nu|} \leq$$

$$Ce^{((1+\delta)n+m)\omega(\xi)}\sum_{\mu\leq\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma}\binom{\alpha}{\mu}\binom{\gamma}{\nu}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma-\mu-\nu|}{n})}e^{\rho n\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{n})} \leq$$

$$C2^{|\alpha+\gamma|}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}e^{((1+\delta)n+m)\omega(\xi)}.$$

Si $|\xi| \leq 1$, razonando como en la demostración de la proposición 1.1.5, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $C > 0$ tal que

$$|D_x^\mu D_y^\nu a(x,y,\xi)| \leq Ce^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{n})}e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $(x,y) \in Q$. Y se deduce trivialmente que

$$\sum_{\mu\leq\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma}\binom{\alpha}{\mu}\binom{\gamma}{\nu}|D_x^\mu D_y^\nu a(x,y,\xi)||\xi|^{|\alpha-\mu|}|\xi|^{|\gamma-\nu|} \leq C2^{|\alpha+\gamma|}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}e^{m\omega(\xi)}.$$

Si derivamos paramétricamente la función $K(x,y)$ queda

$$D_x^\alpha D_y^\gamma K(x,y) = \sum_{\mu\leq\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma}\binom{\alpha}{\mu}\binom{\gamma}{\nu}\int D_x^\mu D_y^\nu a(x,y,\xi)\xi^{\alpha-\mu}(-\xi)^{\gamma-\nu}\Psi(\xi)e^{i(x-y)\xi}d\xi.$$

Se obtiene finalmente la estimación

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma K(x,y)| \leq Ce^{|\alpha+\gamma|}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}\int e^{((1+\delta)n+m)\omega(\xi)}|\Psi(\xi)|d\xi.$$

Lo que implica que $q_{Q,n}(K) < \infty$ para cada $n \in \mathbb{N}$, siendo $q_{Q,n}$ la seminorma definida en el lema 0.1.10. Esto prueba (1).

(2) Sea $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Fijado un compacto K de Ω tomamos $Q := K \times \operatorname{supp} f$, compacto en $\Omega \times \Omega$. De las estimaciones obtenidas en (1) queda, para cada $x \in K$, $n \in \mathbb{N}$,

$$|D_x^\alpha(Af)(x)| \leq \int |D_x^\alpha K(x,y)||f(y)|dy$$

$$\leq Ce^{|\alpha|}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}\Big(\int e^{((1+\delta)n+m)\omega(\xi)}|\Psi(\xi)|d\xi\Big)\Big(\int |f(y)|dy\Big).$$

De donde se deduce que

$$q_{K,n}(Af) \leq C\Big(\int e^{((1+\delta)n+m)\omega(\xi)} |\Psi(\xi)| d\xi \Big) \Big(\int |f(y)| dy \Big).$$

Utilizando la fórmula de inversión de Fourier, $f(y) = \frac{1}{(2\pi)^p} \int \hat{f}(\xi) e^{iy\xi} d\xi$, se concluye que el último factor de la expresión anterior está acotado por

$$D \int |\hat{f}(\xi)| d\xi \leq D \int |\hat{f}(\xi)| e^{\lambda\omega(\xi)} d\xi,$$

siendo $D > 0$ una constante que depende de la medida de Lebesgue del soporte de f y λ cualquier constante positiva. Lo que prueba que el operador A es continuo. $\square$

Sea $\Psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ una función test par tal que $\Psi(\xi) = 1$ para $|\xi| \leq 1$ y $\Psi(\xi) = 0$ para $|\xi| \geq 2$. Ponemos

$$(A_\delta f)(x) := \iint a(x,y,\xi) e^{i(x-y)\xi} f(y) \Psi(\delta\xi) dy d\xi.$$

Teorema 1.2.2 *Sea $a(x,y,\xi)$ una amplitud en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Entonces*

1. *Para cada $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ existe $A(f) := \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) - \lim_{\delta\to 0+} A_\delta(f)$ y*

$$A : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$$

   es un operador lineal y continuo,

2. $(Af)(x) = \int \big(\int a(x,y,\xi) e^{i(x-y)\xi} f(y) dy \big) d\xi.$

Demostración. (1) Fijamos un conjunto compacto $K \subset \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$. Ponemos

$$I(x,\xi) := \int a(x,y,\xi) f(y) e^{i(x-y)\xi} dy = \int b(x,y,\xi) f(y) e^{-iy\xi} dy,$$

donde $b(x,y,\xi) := a(x,y,\xi) e^{ix\xi}$. Y aplicamos la proposición 1.1.6 para conseguir, mediante derivación paramétrica, una constante $C > 0$ tal que

$$|D^\alpha_x I(x,\xi)| e^{-n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \leq C e^{-\omega(\xi)}$$

para cada $x \in K$, $\alpha \in \mathbb{N}^p_0$ y $\xi \in \mathbb{R}^p$.

Dados $0 < \delta_2 < \delta_1 < 1$ y $x \in K$, tenemos

$$(A_{\delta_1} f - A_{\delta_2} f)(x) = \int I(x,\xi)(\Psi(\delta_1\xi) - \Psi(\delta_2\xi)) d\xi.$$

De donde

$$|D^\alpha(A_{\delta_1}f - A_{\delta_2}f)(x)|e^{-n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \leq C\int e^{-\omega(\xi)}|\Psi(\delta_1\xi)-\Psi(\delta_2\xi)|d\xi.$$

Considerando ahora la seminorma $|\cdot|_{K,n}$ definida en 0.1.8 obtenemos la siguiente estimación

$$|A_{\delta_1}f - A_{\delta_2}f|_{K,n} \leq C\int e^{-\omega(\xi)}|\Psi(\delta_1\xi)-\Psi(\delta_2\xi)|d\xi.$$

Como $\Psi(\delta_1\xi)=\Psi(\delta_2\xi)$ si $|\xi|\geq\frac{2}{\delta_2}$ o si $|\xi|\leq\frac{1}{\delta_1}$ se tiene finalmente que

$$|A_{\delta_1}f - A_{\delta_2}f|_{K,n} \quad \leq C\int_{|\xi|\geq\frac{1}{\delta_1}} e^{-\omega(\xi)}|\Psi(\delta_1\xi)-\Psi(\delta_2\xi)|d\xi$$

por lo que existe el límite $A(f) := \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) - \lim_{\delta\to 0+} A_\delta(f)$. Una aplicación del principio de acotación uniforme da la continuidad de $A:\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)\to\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ (proposición [35, 23.27]).
(2) Obsérvese que

$$(Af)(x) = \lim_{n\to\infty}\int\Big(\int a(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy\Big)e^{ix\xi}\Psi(\frac{\xi}{n})d\xi.$$

Dado que para todo $k\in\mathbb{N}$ existe $C>0$ tal que $|\int a(x,y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dy|\leq Ce^{-k\omega(\xi)}$ para cada $\xi\in\mathbb{R}^p$, podemos aplicar el Teorema de la Convergencia Dominada para concluir que $(Af)(x)=\int\big(\int a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}f(y)dy\big)d\xi$. □

Definición 1.2.3 *El operador $A:\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)\to\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ introducido en el teorema 1.2.2 se llama operador pseudodiferencial asociado a la amplitud $a(x,y,\xi)$.*

En caso de que $a(x,y,\xi)=p(x,\xi)$ el operador pseudodiferencial A se denota por $P(x,D)$ y se tiene que

$$P(x,D)f = \int p(x,\xi)e^{ix\xi}\hat{f}(\xi)d\xi \tag{2.4}$$

para cada $f\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Es obvio que la expresión anterior tiene sentido para $f\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, e incluso para un clase de funciones mayor.

Proposición 1.2.4 *El operador $P(x,D)$ asociado al símbolo $p(x,\xi)$ en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ se puede extender a $\mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. La extensión es lineal y continua y toma valores en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.*

Demostración. Dada $f\in\mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ y $k\in\mathbb{N}$, su transformada de Fourier satisface

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^p}|\hat{f}(\xi)|e^{k\omega(\xi)}\leq C\parallel f\parallel_{1,k+1}$$

para cierta constante C que solo depende del peso ω (véase [16, 1.1.23]). Por lo tanto, la integral (2.4) es convergente también para $f\in\mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. Así $P(x,D)$ se puede extender a $\mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, y la extensión es lineal.

Si derivamos paramétricamente la integral que define el operador $P(x, D)$ queda

$$D_x^\alpha(P(x,D)f) = \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \int D_x^{\alpha-\beta} p(x,\xi)\xi^\beta \hat{f}(\xi)e^{ix\xi}d\xi,$$

siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{N}_0^p$.

Dado que la transformada de Fourier de $D^\beta f(\xi)$ cumple $\xi^\beta \hat{f}(\xi) = \widehat{D^\beta f}(\xi)$, se tiene que

$$|D_x^\alpha(P(x,D)f)| \leq \sum_{\beta\leq\alpha} \binom{\alpha}{\beta} \int |\widehat{D^\beta f}(\xi)||D_x^{\alpha-\beta} p(x,\xi)|d\xi.$$

Fijamos ahora un compacto $K \subset \Omega$. Razonando como en la proposición 1.1.5, existe una sucesión de números positivos (C_n) tal que

$$|D_x^\gamma p(x,\xi)| \leq C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})} e^{(m+n\delta)\omega(\xi)}$$

para cada multi-índice γ, cada $x \in K$ y $\xi \in \mathbb{R}^p$. La función $D^\beta f(\xi)$ también pertenece a $\mathcal{D}_{L_{1,(\omega)}}(\mathbb{R}^p)$ y, aplicando ahora, como antes, [16, 1.1.23] obtenemos

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^p} |\widehat{D^\beta f}(\xi)|e^{(n+m)\omega(\xi)} \leq C \parallel D^\beta f \parallel_{1,n+m+1} .$$

Por las propiedades de φ^* (proposición 0.1.5(3)) se tiene que

$$\begin{aligned} e^{(2n+2m+2)\varphi^*(\frac{|\alpha|+|\beta|}{2n+2m+2})} &\leq e^{(n+m+1)\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n+m+1})+(n+m+1)\varphi^*(\frac{|\beta|}{n+m+1})} \\ &\leq e^{(n+m+1)\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n+m+1})+n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}, \end{aligned}$$

siendo α un multi-índice. Entonces

$$\begin{aligned} \parallel D^\beta f \parallel_{1,n+m+1} &= \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \parallel (D^\beta f)^{(\alpha)} \parallel_{L_1} e^{-(n+m+1)\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n+m+1})} \\ &\leq e^{n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \parallel (D^\beta f)^{(\alpha)} \parallel_{L_1} e^{-(2n+2m+2)\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta|}{2n+2m+2})} \\ &\leq e^{n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})} \sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} \parallel f^{(\alpha)} \parallel_{L_1} e^{-(2n+2m+2)\varphi^*(\frac{|\alpha|}{2n+2m+2})} \\ &= \parallel f \parallel_{1,2m+2n+2} e^{n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}. \end{aligned}$$

Lo que implica

$$\sup_{\xi\in\mathbb{R}^p} |\widehat{D^\beta f}(\xi)|e^{(n+m)\omega(\xi)} \leq C \parallel D^\beta f \parallel_{1,n+m+1} \leq C \parallel f \parallel_{1,2n+2m+2} e^{n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}.$$

De lo anterior tenemos

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha(P(x,D)f)| &\le \sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int|\widehat{D^\beta f}(\xi)||D_x^{\alpha-\beta}p(x,\xi)|d\xi\\ &\le C_n\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta|}{n})}\int|\widehat{D^\beta f}(\xi)|e^{(n+m)\omega(\xi)}e^{n(\delta-1)\omega(\xi)}d\xi\\ &\le CC_n\parallel f\parallel_{1,2n+2m+2}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta|}{n})}e^{n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}\int e^{n(\delta-1)\omega(\xi)}d\xi\\ &\le CC_n\parallel f\parallel_{1,2n+2m+2}\, e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}\int e^{n(\delta-1)\omega(\xi)}d\xi.\end{aligned}$$

Como $\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}=2^{|\alpha|}\le e^{|\alpha|}$, finalmente conseguimos

$$q_{K,n}(P(x,D)f)\le CC_n\parallel f\parallel_{1,2n+2m+2}\int e^{-\omega(\xi)}d\xi,$$

para n bastante grande, lo que concluye la prueba. □

Teorema 1.2.5 *El operador pseudodiferencial A asociado a la amplitud $a(x,y,\xi)$ en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ admite una extensión lineal y continua $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)\to\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$.*

Demostración. Consideremos $b(x,y,\xi):=a(y,x,-\xi)$, que es una amplitud en la clase $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$, y denotemos por $B:\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)\to\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ el operador pseudodiferencial asociado. Entonces el operador traspuesto de B, $B^t:\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)\to\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, es lineal y continuo. Para concluir sólo tenemos que probar que B^t es la extensión de A buscada. Para ver esto, ponemos $(B_\delta f)(x):=\int\int b(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}f(y)\Psi(\delta\xi)dyd\xi$, siendo $\delta>0$. Si comprobamos que, dadas $\varphi,\phi\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$,

$$\int\varphi(B_\delta\phi)=\int(A_\delta\varphi)\phi,$$

razonando como en 1.2.2(2) (con el teorema de la Convergencia Dominada) se tendrá que $\int\varphi(B\phi)=\int(A\varphi)\phi$, lo que demuestra que $B^t|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)}=A$.

La comprobación de la igualdad que completa la prueba es sencilla:

$$\begin{aligned}
\int \varphi(x)(B_\delta\phi)(x)dx &= \int \varphi(x)\big(\int a(y,x,-\xi)\phi(y)e^{i(x-y)\xi}\Psi(\delta\xi)dyd\xi\big)dx \\
&= \int a(y,x,-\xi)\varphi(x)\phi(y)e^{i(x-y)\xi}\Psi(\delta\xi)dxdyd\xi \\
&= \int a(x,y,-\xi)\varphi(y)\phi(x)e^{i(y-x)\xi}\Psi(\delta\xi)dydxd\xi \\
&= \int a(x,y,\xi)\varphi(y)\phi(x)e^{i(x-y)\xi}\Psi(-\delta\xi)dydxd\xi \\
&= \int \phi(x)\big(\int a(x,y,\xi)\varphi(y)e^{i(x-y)\xi}\Psi(\delta\xi)dyd\xi\big)dx \\
&= \int (A_\delta\varphi)(x)\phi(x)dx,
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. $\square$

Corolario 1.2.6 *Sea $A : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ un operador pseudodiferencial con amplitud $a(x,y,\xi)$. Entonces $A^t|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)} : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ es un operador pseudodiferencial con amplitud $a(y,x,-\xi)$.*

En el caso de que el operador venga definido por un símbolo la extensión se puede dar explícitamente.

Teorema 1.2.7 *La extensión $\overline{P}(x,D) : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ del operador pseudodiferencial $P(x,D)$ viene dada por*

$$< \overline{P}(x,D)\mu, \psi >= \int \hat{\mu}(\xi)\big(\int e^{ix\xi}p(x,\xi)\psi(x)dx\big)d\xi.$$

Demostración. De la definición de símbolo para $p(x,\xi)$ existen $C > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

$$|p(x,\xi)| \le Ce^{m\omega(\xi)},$$

para cada $x \in \operatorname{supp}\psi$ y $\xi \in \mathbb{R}^p$. Lo que prueba que la integral

$$\int \big(\int e^{ix\xi}p(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi\big)\psi(x)dx$$

es absolutamente convergente.

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
< P(x,D)\varphi, \psi > &= \int \big(\int e^{ix\xi}p(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi\big)\psi(x)dx \\
&\overset{\text{Fubini}}{=} \int \hat{\varphi}(\xi)\big(\int e^{ix\xi}p(x,\xi)\psi(x)dx\big)d\xi
\end{aligned}$$

para cada $\varphi, \psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Así, sólo tenemos que probar que $\overline{P}(x, D) : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ es un operador bien definido, lineal y continuo. Para hacer esto, sea $\mathcal{F}$ un conjunto acotado en $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ y $\mu \in \mathcal{F}$. Por el teorema de Paley-Wiener-Schwartz 0.1.16 existen constantes $A > 0$ y $D > 0$ tales que $|\hat{\mu}(\xi)| \leq De^{A\omega(\xi)}$ para cada $\xi \in \mathbb{R}^p$ y $\mu \in \mathcal{F}$.

Sea $\mathcal{B}$ un conjunto acotado en $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ y $\psi \in \mathcal{B}$. Fijada $k := A + 1$, se deduce de la proposición 1.1.5 que existe cierta constante $C > 0$ tal que

$$|\int e^{ix\xi} p(x, \xi)\psi(x)dx| \leq Ce^{-k\omega(\xi)},$$

siempre que $\xi \in \mathbb{R}^p$. En virtud de la nota 1.1.7, la estimación obtenida es uniforme para cada $\psi \in \mathcal{B}$. Entonces tenemos

$$|\hat{\mu}(\xi)\big(\int e^{ix\xi} p(x, \xi)\psi(x)dx\big)| \leq CDe^{-\omega(\xi)} \quad (\psi \in \mathcal{B}),$$

de donde se sigue que $\overline{P}(x, D)\mu : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathbb{C}$ está acotado sobre conjuntos acotados y, consecuentemente, $\overline{P}(x, D)\mu \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$. Más aun, las estimaciones obtenidas también prueban que $\overline{P}(x, D) : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ transforma conjuntos acotados de $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ en conjuntos débilmente acotados de $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, por lo que concluimos que $\overline{P}(x, D)$ es continuo. □

La correspondencia entre amplitudes y operadores no es uno a uno, esto es, dos amplitudes distintas pueden definir el mismo operador como se verá más adelante (proposición 1.3.2). La situación es mucho mejor para símbolos.

Corolario 1.2.8 *Sean $p(x, \xi)$ y $q(x, \xi)$ dos símbolos en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^p)$ que definen el mismo operador pseudodiferencial. Entonces $p(x, \xi) = q(x, \xi)$.*

DEMOSTRACIÓN. Ponemos $r(x, \xi) := p(x, \xi) - q(x, \xi)$. Pretendemos demostrar que $r(x, \xi) = 0$. Por hipótesis $R(x, D)$ es el operador nulo y consecuentemente $< \overline{R}(x, D)\delta_y, \psi >= 0$ para cada $y \in \mathbb{R}^p$ y $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. Se deduce ahora del teorema 1.2.7 que

$$\int e^{-iy\xi}\big(\int e^{ix\xi} r(x, \xi)\psi(x)dx\big)d\xi = 0 \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^p,\ \psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p).$$

Fijada $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ tomamos $I(\xi) := \int e^{ix\xi} r(x, \xi)\psi(x)dx$, que es una función continua en $L_1 \cap L_2$. Hemos probado que la transformada de Fourier $\widehat{I}(y)$ de la función $I(\xi)$ se anula en todo en punto $y \in \mathbb{R}^p$, de donde se sigue que $\int e^{ix\xi} r(x, \xi)\psi(x)dx = 0$ para cada $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ y $\xi \in \mathbb{R}^p$. Así, $r(x, \xi) = 0$ en todo punto. □

En algunos casos se puede recuperar el símbolo a partir del operador pseudodiferencial que define. La proposición 1.5.5 mejorará el corolario anterior y el resultado que damos a continuación.

Proposición 1.2.9 *Sea $p(x,\xi)$ un símbolo en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\mathbb{R}^p)$ y supongamos que $P(x,D)$ admite una extensión lineal y continua $A:\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)\to\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. Entonces*

$$p(x,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^p}e^{-ix\xi}A(e^{i(\cdot)\xi})(x).$$

Demostración. Como $A^t:\mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)\to\mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, se deduce del corolario 1.2.6 que

$$A^t|_{\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)}:\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)\to\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$$

es un operador pseudodiferencial con amplitud $b(x,y,\xi):=p(y,-\xi)$. Entonces, para cada $\varphi\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ obtenemos (como en el teorema 1.2.2(2)),

$$(A^t\varphi)(x)=\int e^{ix\xi}\Big(\int p(y,-\xi)\varphi(y)e^{-iy\xi}dy\Big)d\xi.$$

Definimos $I(\xi):=\int p(y,-\xi)\varphi(y)e^{-iy\xi}dy$. Se tiene que $I\in L_1$ y además $\widehat{I}(-x)=(A^t\varphi)(x)$ lo cual implica, en particular, que $\widehat{I}\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. Así

$$\begin{aligned}< A(e^{i(\cdot)\xi}),\varphi > &= \int e^{ix\xi}\hat{I}(-x)dx\\ &= (2\pi)^pI(-\xi)=(2\pi)^p\int p(x,\xi)\varphi(x)e^{ix\xi}dx,\quad \varphi\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)\end{aligned}$$

de donde

$$A(e^{i(\cdot)\xi})(x)=(2\pi)^pp(x,\xi)e^{ix\xi},\ \text{para cada } x,\xi\in\mathbb{R}^p,$$

lo que concluye la prueba. □

En muchos de los resultados que obtendremos en adelante se necesitan condiciones más fuertes en la definición de amplitud.

Definición 1.2.10 *Sea Ω un conjunto abierto en $\mathbb{R}^p$, $0\le\delta<\rho\le 1$, $d:=\rho-\delta$ y supongamos que $\omega(t)=o(t^d)$ cuando $t\to\infty$. Una amplitud en $AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ es una función $a(x,y,\xi)$ en $C^\infty(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^p)$ tal que para cada conjunto compacto $Q\subset\Omega\times\Omega$ existen $R\ge 1$, $B\ge 1$ y una sucesión $C_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ con la propiedad*

$$|D^\alpha_xD^\gamma_yD^\beta_\xi a(x,y,\xi)|\le C_nB^{|\beta|}\beta!e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}e^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}\tag{2.5}$$

para cada $n\in\mathbb{N}$, $(x,y)\in Q$, $\log(\frac{|\xi|}{R})\ge\frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$.

Una amplitud en $AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ se dice de orden finito si satisface las desigualdades anteriores con $(1+|\xi|)^m$ en lugar de $e^{m\omega(\xi)}$.

Nota 1.2.11 Se puede establecer un resultado análogo al lema 1.1.3 para esta nueva definición de amplitud. Es decir, podemos considerar la estimación

$$A^{|\alpha+\gamma|}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})},$$

siendo $A \geq 1$ una constante que depende del compacto Q, que es equivalente a $e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}$ en la expresión (2.5). O sustituir $(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}$ por $|\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|}$.

Proposición 1.2.12 *Sea ω una función peso de manera que $\omega(t) = o(t^d)$, $d := \rho-\delta$. Se verifica:*

$$AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega) \subset S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega).$$

Demostración. Por 1.1.3 bastará comprobar que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $D_n > 0$ que cumple

$$|\alpha|! \leq D_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}, \quad \alpha \in \mathbb{N}_0^p.$$

Aplicando la fórmula de Stirling, bastará comprobar la desigualdad

$$|\alpha|^{|\alpha|}\frac{\sqrt{2\pi|\alpha|}}{e^{|\alpha|}} \leq D_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}.$$

Como $(\varphi^*)^* = \varphi$,

$$\begin{aligned} e^{|\alpha|\log|\alpha|-(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} &= e^{(\rho-\delta)n\left[\frac{|\alpha|}{n}\log(|\alpha|^{\frac{1}{\rho-\delta}})-\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})\right]} \\ &\leq e^{(\rho-\delta)n\omega(|\alpha|^{\frac{1}{\rho-\delta}})} \end{aligned}$$

Además, la condición que se le exige a la función peso es equivalente a que $\omega(t^{1/(\rho-\delta)}) = o(t)$ cuando $t \to \infty$. Así, dado $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n > 0$ tal que

$$\omega(t^{1/(\rho-\delta)}) \leq A_n + \frac{1}{n+1}t,$$

para cada $t > 0$. Como $\log t = o(\omega(t))$, existe $B > 0$ tal que

$$\frac{1}{2}\log(2\pi t) \leq B + (\rho-\delta)\omega(t^{1/(\rho-\delta)}),$$

para todo $t > 0$. En particular

$$\begin{aligned} (\rho-\delta)n\omega(t^{1/(\rho-\delta)}) &\leq (\rho-\delta)(n+1)\omega(t^{1/(\rho-\delta)}) - (\rho-\delta)\omega(t^{1/(\rho-\delta)}) \leq \\ &\leq A_n(n+1)(\rho-\delta) + B + t - \frac{1}{2}\log(2\pi t). \end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $D_n > 0$ tal que $e^{(\rho-\delta)n\omega(|\alpha|^{\frac{1}{\rho-\delta}})} \leq D_n\frac{e^{|\alpha|}}{\sqrt{2\pi|\alpha|}}$, para todo multi-índice α. Usando la proposición 0.1.5 se obtiene la desigualdad buscada. $\square$

Proposición 1.2.13 *Sean ω y σ dos funciones peso tales que $\sigma = O(\omega)$. Si $a(x,y,\xi)$ es una amplitud de orden finito respecto de ω, también es una amplitud de orden finito respecto de σ.*

DEMOSTRACIÓN. Supongamos sin pérdida de generalidad que $\sigma \leq \omega$ (basta sustituir σ por un peso equivalente). Por otra parte, por la nota 0.1.4(c) se tiene que $\varphi^*_\omega \leq \varphi^*_\sigma$, de donde, aprovechando la notación de la definición anterior 1.2.10,

$$\begin{aligned} |D^\alpha_x D^\gamma_y D^\beta_\xi a(x,y,\xi)| &\leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*_\omega(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}(1+|\xi|)^m(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho} \\ &\leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*_\sigma(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}(1+|\xi|)^{m+|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}. \end{aligned}$$

$\square$

Corolario 1.2.14 *Sean ω y σ dos funciones peso tales que $\sigma = O(\omega)$, y $a(x,y,\xi)$ la amplitud de orden finito respecto de ω que define el operador pseudodiferencial $A : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Entonces, A admite extensión lineal y continua*

$$\overline{A} : \mathcal{D}_{(\sigma)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega).$$

Proposición 1.2.15 *Sea $a_i(x,y,\xi)$ una amplitud en $S^{m_i,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ (resp. en $AS^{m_i,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$), $i = 1,2$. Entonces la función $a_1(x,y,\xi)a_2(x,y,\xi)$ es una amplitud en $S^{m_1+m_2,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ (resp. en $AS^{m_1+m_2,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$).*

DEMOSTRACIÓN. Veremos sólo el caso $a_i \in AS^{m_i,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$, $i = 1,2$. Todos los argumentos usados en el otro caso aparecen en el caso analítico. Fijado un compacto $Q \subset \Omega \times \Omega$, existen una sucesión (C_n) y una constante $R \geq 1$ tales que

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y D^\beta_\xi a_i(x,y,\xi)| \leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})} e^{m_i\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x,y) \in Q$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$, $i = 1,2$.

De la fórmula de Leibniz:

$$\begin{aligned} &\left|D^\alpha_x D^\gamma_y D^\beta_\xi\left(a_1(x,y,\xi)a_2(x,y,\xi)\right)\right| \leq \\ &\leq \sum_{\mu\leq\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma}\sum_{\theta\leq\beta}\binom{\alpha}{\mu}\binom{\gamma}{\nu}\binom{\beta}{\theta}|D^\mu_x D^\nu_y D^\theta_\xi a_1(x,y,\xi)|\cdot|D^{\alpha-\mu}_x D^{\gamma-\nu}_y D^{\beta-\theta}_\xi a_2(x,y,\xi)| \leq \\ &\leq {C_n}^2 e^{(m_1+m_2)\omega(\xi)}\sum_{\mu\leq\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma}\sum_{\theta\leq\beta}\binom{\alpha}{\mu}\binom{\gamma}{\nu}\binom{\beta}{\theta}\theta!(\beta-\theta)!B^{|\theta|+|\beta-\theta|}\cdot \\ &\qquad\cdot\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{n})}}{(1+|\xi|)^{\rho|\theta|-\delta|\mu+\nu|}}\cdot\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha-\mu+\gamma-\nu|}{n})}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta-\theta|-\delta|\alpha-\mu+\gamma-\nu|}}. \end{aligned}$$

De la convexidad de φ^* y de la propiedad

$$\sum_{\mu\leq\alpha}\sum_{\nu\leq\gamma}\binom{\alpha}{\mu}\binom{\gamma}{\nu} = 2^{|\alpha+\gamma|}$$

se deduce entonces que

$$\left|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta\left(a_1(x,y,\xi)a_2(x,y,\xi)\right)\right| \leq$$
$$\leq {C_n}^2 e^{(m_1+m_2)\omega(\xi)} B^{|\beta|}\beta! 2^{|\alpha+\gamma+\beta|} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho},$$

para cada $n \in \mathbb{N}$, $(x,y) \in Q$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$. Lo que finaliza la prueba. □

1.3. Ejemplos

Examinamos varios ejemplos para demostrar que la clase de los operadores pseudodiferenciales contiene suficientes elementos. En lo que sigue, supondremos que Ω es un abierto de $\mathbb{R}^p$.

1.3.1. El caso C^∞

Supongamos que $\omega(t) := \log(1+t)$. Este es un caso límite que no estamos considerando, ya que ω no satisface la propiedad γ en la definición 0.1.2. Se cumple que $\varphi^*(t) = \sup_{s\geq 0}\{st - \omega(e^s)\} = \sup_{s\geq 0}\{st - \log(1+e^s)\} = +\infty$ para cada $t > 1$. Se cumple además que $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$. En efecto, si $f \in C^\infty(\Omega)$, fijados un compacto $K \subset \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$ queremos probar que existe cierta constante $C_n > 0$ que cumple

$$|f^{(\alpha)}(x)| \leq C_n \exp(n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})),$$

para cada $x \in K$ y cada multi-índice α. Pero $\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n}) = +\infty$ cuando $|\alpha| > n$, con lo cual la estimación anterior es obvia.

El mismo argumento permite comprobar que $a(x,y,\xi)$ es una amplitud en la clase $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ cuando $\omega(t) = \log(1+t)$ si, y sólo si, para cada compacto $Q \subset \Omega\times\Omega$ y cada $\alpha,\beta,\gamma \in \mathbb{N}_0^p$ existe una constante $C > 0$ tal que

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \leq C(1+|\xi|)^{m+\delta(|\alpha+\gamma|)-\rho|\beta|},$$

siempre que $(x,y) \in Q$ y $\xi \in \mathbb{R}^p$. Luego $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ es la clase de símbolos definida por Grigis y Sjöstrand [18].

1.3.2. El caso Gevrey

Tomamos ahora $\omega(t) := t^d$, $0 < d < 1$. Entonces $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ es una clase de Gevrey de tipo Beurling (ver 0.1.17). En este caso $n\varphi^*(\frac{t}{n}) = n\sup_{s\geq 0}\{s\frac{t}{n} - e^{sd}\} = \frac{t}{d}\log(\frac{t}{nd}) - \frac{t}{d}$ (se comprueba que la función $g_t(s) = st - e^{sd}$ tiene un punto crítico en $s = \frac{1}{d}\log(\frac{t}{d})$, que es máximo). Veamos que, de la fórmula de Stirling, para cada $n \in \mathbb{N}$ existen constantes positivas A_n y B_n tales que

$$A_n(\alpha!)^{\frac{1}{d}}(\frac{1}{nd})^{\frac{|\alpha|}{d}} \leq e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \leq B_n(\alpha!)^{\frac{1}{d}}(\frac{2p}{nd})^{\frac{|\alpha|}{d}}.$$

Observemos primero que $e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} = \big((\frac{|\alpha|}{nd})^{|\alpha|}e^{-|\alpha|}\big)^{\frac{1}{d}}$, y además de la fórmula de Stirling $|\alpha|^{|\alpha|}e^{-|\alpha|} \sim |\alpha|!\sqrt{2\pi|\alpha|}$, por lo que para cada $n \in \mathbb{N}$ existen constantes positivas A_n y B_n de manera que

$$A_n(|\alpha|!\sqrt{2\pi|\alpha|})^{\frac{1}{d}}\big(\frac{1}{nd}\big)^{\frac{|\alpha|}{d}} \le e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \le B_n(|\alpha|!\sqrt{2\pi|\alpha|})^{\frac{1}{d}}\big(\frac{1}{nd}\big)^{\frac{|\alpha|}{d}}.$$

Ahora, si $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$, se sigue del lema 0.1.1 que $\alpha! \le |\alpha|! \le p^{|\alpha|}\alpha!$, de donde

$$\begin{aligned} A_n(\alpha!)^{\frac{1}{d}}\big(\frac{1}{nd}\big)^{\frac{|\alpha|}{d}} &\le A_n(|\alpha|!\sqrt{2\pi|\alpha|})^{\frac{1}{d}}\big(\frac{1}{nd}\big)^{\frac{|\alpha|}{d}} \\ &\le e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \\ &\le B_n(|\alpha|!\sqrt{2\pi|\alpha|})^{\frac{1}{d}}\big(\frac{1}{nd}\big)^{\frac{|\alpha|}{d}} \\ &\le B_n(\alpha!)^{\frac{1}{d}}(p^{|\alpha|}\sqrt{2\pi|\alpha|})^{\frac{1}{d}}\big(\frac{1}{nd}\big)^{\frac{|\alpha|}{d}} \\ &\le C_n(\alpha!)^{\frac{1}{d}}\big(\frac{2p}{nd}\big)^{\frac{|\alpha|}{d}}, \end{aligned}$$

como queríamos.

Entonces, $a(x,y,\xi)$ es una amplitud en $AS_{1,0}^{m;\omega}(\Omega)$ si, y sólo si, para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$ existen $R \ge 1$, $B \ge 1$ tales que para cada $\lambda > 0$ encontramos una constante $C > 0$ cumpliendo

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \le CB^{|\beta|}\beta!(\alpha!)^{\frac{1}{d}}(\gamma!)^{\frac{1}{d}}\lambda^{|\alpha|+|\gamma|}(1+|\xi|)^{-|\beta|}\exp[|\xi|^d]$$

para cada $(x,y) \in K$ y $|\xi| \ge R|\beta|^{\frac{1}{d}}\lambda$.
Esto se puede comparar con la definición de amplitud en las clases de Gevrey (de tipo Roumieu) que se encuentra por ejemplo en Rodino [38, p. 117, 130].

1.3.3. Operadores diferenciales de orden finito

Los operadores diferenciales lineales en derivadas parciales con coeficientes en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ son ejemplos de operadores pseudodiferenciales definidos por símbolos de orden finito. Consideremos el operador diferencial con coeficientes variables en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$,

$$P(x,D) = \sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma(x)D^\gamma.$$

Veamos que la función $p(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^p}\sum_{|\gamma|\le m} a_\gamma(x)\xi^\gamma$ es un símbolo en $AS_{1,0}^{m;\omega}(\Omega)$ (de orden finito) para este operador. Observemos primero que la derivada $D_x^\alpha D_\xi^\beta(a_\gamma(x)\xi^\gamma) = D^\alpha(a_\gamma(x))\frac{\gamma!}{(\gamma-\beta)!}\xi^{\gamma-\beta}$ siempre que $\beta \le \gamma$, y se anula en otro caso. Además, fijados un compacto $K \subset \Omega$ y $n \in \mathbb{N}$ existe una constante $C_n > 0$ tal que $|D_x^\alpha(a_\gamma(x))| \le C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}$ para cada $|\gamma| \le m$ y $x \in K$, por lo que, para cada $\xi \in \mathbb{R}^p$,

$$
\begin{aligned}
|D_x^\alpha D_\xi^\beta (a_\gamma(x)\xi^\gamma)| &\le |D_x^\alpha a_\gamma(x)| \frac{\gamma!}{(\gamma-\beta)!}(1+|\xi|)^{|\gamma-\beta|} \\
&\le C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \binom{\gamma}{\beta} \beta! (1+|\xi|)^{|\gamma|-|\beta|} \qquad (3.6) \\
&\le C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \binom{\gamma}{\beta} \beta! (1+|\xi|)^{m-|\beta|}
\end{aligned}
$$

siempre que $\beta \le \gamma$ y $|\gamma| \le m$. De propiedades de multi-índices (lema 0.1.1) se cumple que $\binom{\gamma}{\beta} \le 2^{|\gamma|} \le 2^m$, de donde

$$
\begin{aligned}
|D_x^\alpha D_\xi^\beta (p(x,\xi))| &\le \frac{C_n}{(2\pi)^p} \beta! e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} (1+|\xi|)^{m-|\beta|} \sum_{|\gamma|\le m} \binom{\gamma}{\beta} \qquad (3.7) \\
&\le \frac{C_n}{(2\pi)^p} \beta! e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} 2^m (1+|\xi|)^{m-|\beta|} \Big(\sum_{|\gamma|\le m} 1 \Big),
\end{aligned}
$$

luego $p(x,\xi)$ es un símbolo, puesto que el último factor de la expresión anterior sólo depende de m. Además,

$$P(x,D)\varphi = \int p(x,\xi) e^{ix\xi} \widehat{\varphi}(\xi) d\xi,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$.

1.3.4. Operadores regularizantes.

Los resultados siguientes caracterizan los operadores regularizantes como aquellos cuyo núcleo es una función ultradiferenciable y muestran que son ejemplos de operadores pseudodiferenciales.

Proposición 1.3.1 *Supongamos que $b(x,y,\xi) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^p)$ y existe $B > 0$ tal que $b(x,y,\xi) = 0$ si $|\xi| \ge B$. Entonces $b(x,y,\xi)$ es una amplitud en $AS^{0,\omega}_{1,0}(\Omega)$.*

En particular, si $\varphi(\xi)$ es una función test (en $\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$) que sólo depende de la tercera variable, entonces $\varphi \in AS^{0,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$, para cada $0 \le \delta < \rho \le 1$.

Demostración. Dado $n \in \mathbb{N}$, supongamos que $\log|\xi| \ge \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$.

Al ser $\lim_{t\to\infty} \frac{\varphi^*(t)}{t} = +\infty$, existe $L_n \in \mathbb{N}$ tal que si $|\beta| > L_n$, entonces $|\xi| \ge B$ y, en ese caso, $D_\xi^\beta b(x,y,\xi) = 0$.

Fijados un compacto Q de $\Omega \times \Omega$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}_0^p$ y $\beta \in \mathbb{N}_0^p$ con $|\beta| \le L_n$, como $b(x,y,\xi) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega \times \mathbb{R}^p)$, existe $C_n > 0$ tal que

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta b(x,y,\xi)| \le C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n}) + n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})},$$

siempre que $(x,y) \in Q$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$. Podemos suponer que $|\xi| \leq B$ (en caso contrario $b(x,y,\xi) = 0$), y así

$$\begin{aligned} & n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n}) \leq |\beta| \log(1+|\xi|) \leq \log(1+B)^{|\beta|} \\ & \text{y} \quad (1+|\xi|)^{|\beta|} \leq (1+B)^{L_n} \end{aligned}$$

con lo cual, si llamamos $D_n := C_n(1+B)^{L_n}$,

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta b(x,y,\xi)| \leq D_n e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}(1+B)^{|\beta|}(1+|\xi|)^{-|\beta|},$$

para todo $(x,y) \in Q$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$.

Si $b(x,y,\xi) = \varphi(\xi)$ es una función test (en $\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$) basta tener en cuenta que

$$(1+|\xi|)^{-|\beta|} \leq (1+|\xi|)^{-|\beta|\rho},$$

para cada $0 < \rho \leq 1$. □

Proposición 1.3.2 *Sea $K(x,y) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$, $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ tal que $\int \chi = 1$. Entonces se cumple:*

1. *La función $a(x,y,\xi) := K(x,y)e^{-i(x-y)\xi}\chi(\xi)$ es una amplitud en $AS^{0,\omega}_{1,0}(\Omega)$.*
2. *El operador pseudodiferencial asociado a la amplitud $a(x,y,\xi)$ es $A : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, $(A\varphi)(x) = \int K(x,y)\varphi(y)dy$.*

Demostración. (1) Es consecuencia inmediata de la proposición 1.3.1.

(2) Ya sabemos que (véase el teorema 1.2.2)

$$\begin{aligned} (A\varphi)(x) &= \int \Big(\int a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}\varphi(y)dy\Big)d\xi \\ &= \int \Big(\int K(x,y)\varphi(y)dy\Big)\chi(\xi)d\xi \\ &= \int K(x,y)\varphi(y)dy. \end{aligned}$$

□

El siguiente resultado clarifica el papel que juegan los los operadores integrales definidos por núcleos en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$. Aunque la demostración es estándar, hemos decidido incluirla para que la memoria sea lo más completa posible.

Proposición 1.3.3 *Sea $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ un operador lineal y continuo. Son equivalentes:*

1. *T admite una extensión lineal y continua $\widetilde{T} : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.*

2. Existe $K(x,y) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$ *tal que*

$$(T\varphi)(x) = \int K(x,y)\varphi(y)dy, \qquad \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega).$$

DEMOSTRACIÓN. (1) $\Rightarrow$ (2): Definimos $K(x,y) := \widetilde{T}(\delta_y)(x)$. Vamos a comprobar que $K \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$. En primer lugar observamos que si $1 \leq i \leq p$, $y_0 \in \Omega$, se tiene

$$-\partial_{y_i}\delta_{y_0} = \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) - \lim_{t\to 0} \frac{\delta_{y_0+te_i} - \delta_{y_0}}{t},$$

en la topología débil. En efecto, si $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ entonces $< f, \frac{\delta_{y_0+te_i}-\delta_{y_0}}{t} >= \frac{f(y_0+te_i)-f(y_0)}{t}$, que converge cuando $t \to 0$ a $\partial_{y_i} f(y_0) =< f, -\partial_{y_i}\delta_{y_0} >$. Por ser $\widetilde{T}$ débilmente continua, se sigue que, para cada $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$,

$$< \mu, \widetilde{T}\big(\frac{\delta_{y_0+te_i} - \delta_{y_0}}{t}\big) > \xrightarrow{t\to 0} < \mu, \widetilde{T}(-\partial_{y_i}\delta_{y_0}) >$$

y en particular, dado $x_0 \in \Omega$ tomamos $\mu = \delta_{x_0}$ y queda

$$\frac{K(x_0, y_0 + te_i) - K(x_0, y_0)}{t} \xrightarrow{t\to 0} \widetilde{T}(-\partial_{y_i}\delta_{y_0})(x_0).$$

Por inducción, dado $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ se tiene

$$\partial_y^\alpha K(x_0, y_0) = \widetilde{T}((-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \delta_{y_0})(x_0).$$

Además $\widetilde{T}((-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \delta_{y_0})(\cdot) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ y por lo tanto existe $\partial_x^\beta \partial_y^\alpha K(x,y)$ (y es continua en $\Omega \times \Omega$), lo que prueba que $K(x,y)$ es de clase C^∞.

Dados $k \in \mathbb{N}$ y un compacto $D \subset \Omega$, el conjunto

$$\{(-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \delta_{y_0} e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})} \,:\, \alpha \in \mathbb{N}_0^p, y_0 \in D\}$$

es acotado en $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$, ya que si $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ entonces $| < f, (-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \delta_{y_0} e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})} > | = |f^{(\alpha)}(y_0)| e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})}$. En consecuencia

$$\{\widetilde{T}((-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \delta_{y_0}) e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})} \,:\, \alpha \in \mathbb{N}_0^p, y_0 \in D\}$$

es acotado en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, de donde se sigue que para cada compacto $K \subset \Omega$,

$$\sup_{(x,y)\in K\times D} \sup_{\alpha,\beta} |\partial_x^\beta \partial_y^\alpha K(x,y)| e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta|}{k})} \leq$$

$$\leq \sup_{(x,y)\in K\times D} \sup_{\alpha,\beta} |\partial_x^\beta \widetilde{T}((-1)^{|\alpha|}\partial_y^\alpha \delta_y)(x)| e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})} e^{-k\varphi^*(\frac{|\beta|}{k})} < +\infty,$$

y $K \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$.

Por último, fijado $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, veamos que

$$(T\varphi)(x) = \int K(x,y)\varphi(y)dy.$$

Para ello, definimos $\mu := \int \varphi(y)\delta_y dy \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Si $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ entonces $< \mu, f >= \int \varphi(y)f(y)dy$, lo que prueba que $\mu = \varphi$. Por ser $\widetilde{T}$ lineal y continuo queda

$$T(\varphi) = \widetilde{T}(\int \varphi(y)\delta_y dy) = \int \varphi(y)\widetilde{T}(\delta_y)dy,$$

que es una integral vectorial en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Luego

$$\begin{aligned} T(\varphi)(x) &= < \delta_x, \int \varphi(y)\widetilde{T}(\delta_y)dy > \\ &= \int \varphi(y)\widetilde{T}(\delta_y)(x)dy \\ &= \int \varphi(y)K(x,y)dy. \end{aligned}$$

(2) $\Rightarrow$ (1): Como T es un operador pseudodiferencial, admite extensión lineal y continua $\widetilde{T} : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$. Cada $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ es límite de una sucesión $\{u_n\} \subseteq \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Comprobaremos que $\{\widetilde{T}(u_n)\}$ es de Cauchy en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, de donde $\widetilde{T}\mu \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Entonces, por el teorema de la gráfica cerrada, $\widetilde{T} : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ es continuo.

Dado un compacto $Q \subset \Omega$ y $k \in \mathbb{N}$, el conjunto

$$\mathcal{B} := \{\partial_x^\alpha K(x,\cdot)e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})} \ : \ x \in Q, \, \alpha \in \mathbb{N}_0^p\}$$

es acotado en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. En efecto, de la convexidad de la función φ^*, se tiene $2k\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta|}{2k}) \leq k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k}) + k\varphi^*(\frac{|\beta|}{k})$, siendo α, β dos multi-índices. De donde, fijado un compacto $D \subset \Omega$,

$$\begin{aligned} &\sup_{(x,y)\in Q\times D} \sup_{\alpha,\beta} \left|\partial_y^\beta \partial_x^\alpha K(x,y)\right| e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k}) - k\varphi^*(\frac{|\beta|}{k})} \leq \\ &\leq \sup_{(x,y)\in Q\times D} \sup_{\alpha,\beta} \left|\partial_y^\beta \partial_x^\alpha K(x,y)\right| e^{-2k\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta|}{2k})} < +\infty, \end{aligned}$$

pues $K \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$.

Por ser $\{u_n\}$ una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$, dados $\varepsilon > 0$, Q compacto en Ω y $k \in \mathbb{N}$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, si $n, \ell \geq n_0$, entonces $u_n - u_\ell \in \varepsilon\mathcal{B}^\circ$ y, en consecuencia,

$$|< u_n - u_\ell, \partial_x^\alpha K(x,\cdot) >| \, e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})} \leq \varepsilon.$$

De donde

$$\sup_{x\in Q}\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} |(Tu_n - Tu_\ell)^{(\alpha)}(x)|e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})} \le$$
$$\le \sup_{x\in Q}\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} |\int (u_n-u_\ell)(y)\partial_x^\alpha K(x,y)dy|e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha|}{k})} \le \varepsilon$$

lo que concluye la prueba. □

Los operadores $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ que admiten una extensión lineal y continua $\widetilde{T} : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ se llaman (ω)-*regularizantes*. Hemos visto que son exactamente los operadores integrales definidos por núcleos en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$.

1.3.5. Operadores ultradiferenciales.

En [27, p. 42] Komatsu considera una clase operadores diferenciales de orden infinito. Vamos a ver que dichos operadores son también operadores pseudodiferenciales.

Definición 1.3.4 *Un operador ultradiferencial de clase (ω) en el sentido de Komatsu es un operador $G(x,D) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} a_\alpha(x)D^\alpha$ tal que $a_\alpha \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ y que satisface la siguiente condición: existe $m\in\mathbb{N}$ tal que para cada conjunto compacto $K\subset\Omega$ y cada $n\in\mathbb{N}$ existe una constante $C_n>0$ con*

$$\sup_{x\in K}|D^\beta a_\alpha(x)| \le C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}e^{-m\varphi^*(\frac{|\alpha|}{m})}$$

para cada $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^p$.

Ejemplos de operadores ultradiferenciales en el sentido de Komatsu son los operadores en derivadas parciales con coeficientes en la clase $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, así como los operadores ultradiferenciales con coeficientes constantes (véase la sección 0.2). En este caso $G(z) := \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} a_\alpha z^\alpha$ es una función entera que satisface $\log|G(z)| = O(\omega(z))$.

Vamos a ver que la función $p(x,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^p}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} a_\alpha(x)\xi^\alpha$ es un símbolo en $AS^{k,\omega}_{1,0}(\Omega)$, para cierta constante $k\in\mathbb{N}$. Tomando un compacto $K\subset\Omega$ y $x\in K$, se tiene

$$\begin{aligned}(2\pi)^p|p(x,\xi)| &\le \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p}|a_\alpha(x)\xi^\alpha| \\ &\le C_1\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} e^{-m\varphi^*(\frac{|\alpha|}{m})}|\xi|^{|\alpha|} \\ &= C_1\sum_{k=0}^{+\infty} e^{-m\varphi^*(\frac{k}{m})}|\xi|^k\Big(\sum_{|\alpha|=k}1\Big).\end{aligned}$$

Ahora, si $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$ se cumple $p^k = \sum_{|\alpha|=k} \frac{k!}{\alpha!}$ (lema 0.1.1), de donde $\sum_{|\alpha|=k} 1 \leq p^k$ y, en consecuencia,

$$(2\pi)^p|p(x,\xi)| \leq C_1 \sum_{k=0}^{+\infty} e^{-m\varphi^*(\frac{k}{m})}(p(1+|\xi|))^k.$$

Una aplicación del lema 0.1.6 proporciona $(2p)^k(1+|\xi|)^k e^{-m\omega(2p+2p|\xi|)} \leq e^{m\varphi^*(\frac{k}{m})}$, con lo que

$$(2\pi)^p|p(x,\xi)| \leq C_1 e^{m\omega(2p+2p|\xi|)} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{1}{2^k},$$

lo que prueba que la serie que define $p(x,\xi)$ converge uniformemente en los compactos.

Supongamos que $|\alpha| = k$, del lema 0.1.6 se sigue ahora que $(4p)^k(1+|\xi|)^k e^{-m\omega(4p+4p|\xi|)} \leq e^{m\varphi^*(\frac{k}{m})}$, luego, si $\beta \leq \alpha$ tenemos

$$\begin{aligned}
|D_x^\gamma D_\xi^\beta(a_\alpha(x)\xi^\alpha)| &\leq |D_x^\gamma a_\alpha(x)|\tfrac{\alpha!}{(\alpha-\beta)!}(1+|\xi|)^{|\alpha-\beta|} \\
&\leq C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}\binom{\alpha}{\beta}\beta!(1+|\xi|)^{|\alpha|-|\beta|}e^{-m\varphi^*(\frac{|\alpha|}{m})} \\
&\leq \frac{1}{(1+|\xi|)^{|\beta|}}\beta! C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}2^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{|\alpha|}e^{-m\varphi^*(\frac{|\alpha|}{m})} \\
&\overset{|\alpha|=k}{\leq} \frac{1}{(1+|\xi|)^{|\beta|}}\beta! C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}2^k(1+|\xi|)^k e^{-m\varphi^*(\frac{k}{m})} \\
&\leq \frac{1}{(1+|\xi|)^{|\beta|}}\beta! C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}(\frac{1}{2p})^k e^{m\omega(4p+4p|\xi|)}.
\end{aligned}$$

Se deduce entonces que $p(x,\xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^p)$. Observemos ahora que $\#\{\alpha : |\alpha| = k\} = \sum_{|\alpha|=k} 1 \leq p^k$. Razonando como antes,

$$\begin{aligned}
(2\pi)^p|D_x^\gamma D_\xi^\beta p(x,\xi)| &\leq \sum_{\alpha\geq\beta}|D_x^\gamma D_\xi^\beta(a_\alpha(x)\xi^\alpha)| \\
&\leq \frac{1}{(1+|\xi|)^{|\beta|}}\beta! C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}\sum_{\alpha\geq\beta}2^{|\alpha|}(1+|\xi|)^{|\alpha|}e^{-m\varphi^*(\frac{|\alpha|}{m})} \\
&\leq \frac{1}{(1+|\xi|)^{|\beta|}}\beta! C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}\sum_{k=|\beta|}^{+\infty}2^k p^k(1+|\xi|)^k e^{-m\varphi^*(\frac{k}{m})} \\
&\leq C_n\beta! e^{n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}\Big(\sum_{k=|\beta|}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k\Big)(1+|\xi|)^{-|\beta|}e^{m\omega(4p+4p|\xi|)},
\end{aligned}$$

de donde se sigue que $p(x,\xi)$ es un símbolo. Además, si $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$,

$$G(x,D)\varphi = \sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} a_\alpha(x)D^\alpha\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^p}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} a_\alpha(x)\int e^{ix\xi}\xi^\alpha\hat{\varphi}(\xi)d\xi.$$

Y la serie

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p}|a_\alpha(x)|\int|\hat{\varphi}(\xi)|\cdot|\xi|^{|\alpha|}d\xi &\leq C_1\sum_{k=0}^{+\infty}p^k e^{-m\varphi^*(\frac{k}{m})}\int|\hat{\varphi}(\xi)|\cdot(1+|\xi|)^k d\xi\\ &\leq C_1\sum_{k=0}^{+\infty}(\frac{1}{2})^k\int|\hat{\varphi}(\xi)|e^{m\omega(2p+2p|\xi|)}d\xi<+\infty.\end{aligned}$$

Entonces, del Teorema de la Convergencia Dominada,

$$G(x,D)\varphi=\int e^{ix\xi}p(x,\xi)\hat{\varphi}(\xi)d\xi=P(x,D)\varphi.$$

Si los coeficientes del operador ultradiferencial son constantes podemos dar un resultado mejor.

Proposición 1.3.5 Sea $G(z)$ una función entera tal que $\log|G(z)|=O(\omega(z))$ cuando $|z|\to\infty$. La función G restringida a $\mathbb{R}^p$ es un símbolo en $AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ para algún $m\in\mathbb{N}$ y todo $0\leq\delta<\rho\leq 1$.

Demostración. En efecto, de las desigualdades de Cauchy en el polidisco $P(\xi,r)$, siendo r el poliradio $r=(1+|\xi|,\overset{p)}{\ldots},1+|\xi|)$, para cada multi-índice β y cierta constante ℓ se tiene

$$|D^\beta G(\xi)|\leq\beta!\frac{\sup_{|z-\xi|\leq 1+|\xi|}|G(z)|}{(1+|\xi|)^{|\beta|}}\leq\beta!\frac{e^{\ell\omega(1+2|\xi|)}}{(1+|\xi|)^{|\beta|}}\leq\beta!\frac{e^{\ell\omega(1+2|\xi|)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta|}},$$

pues si $|z-\xi|\leq 1+|\xi|$, se tiene en particular $|z|\leq 1+2|\xi|$. De la propiedad (α) de la función peso ω, $\ell\omega(1+2|\xi|)\leq m\omega(\xi)$ para cierta constante $m\in\mathbb{N}$ y todo $\xi\in\mathbb{R}^p$. $\square$

1.3.6. Multiplicación por una función

Si $f\in\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ entonces la función $p(x,\xi):=(2\pi)^{-p}f(x)\in AS^{0,\omega}_{1,0}(\Omega)$. Luego el operador $\varphi\to f\varphi$ es un operador pseudodiferencial:

$$P(x,D)\varphi=\frac{1}{(2\pi)^p}\int e^{ix\xi}f(x)\widehat{\varphi}(\xi)d\xi=\frac{f(x)}{(2\pi)^p}\int e^{ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)d\xi=f(x)\varphi(x).$$

1.3.7. Convolución con una función test

Sea $\varphi\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. El operador $f\mapsto\varphi*f$ es pseudodiferencial, definido por una amplitud en $AS^{0,\omega}_{1,0}(\mathbb{R}^p)$ porque es un operador integral con núcleo $K(x,y)=\varphi(x-y)$. Vamos a comprobar que, además, $(2\pi)^{-p}\widehat{\varphi}(\xi)$ es un símbolo en la clase $S^{0,\omega}_{1,0}(\mathbb{R}^p)$ para dicho operador.

En efecto, de las propiedades de la transformada de Fourier se tiene que la derivada parcial $\hat{\varphi}^{(\beta)}(\xi) = (-i)^{|\beta|}(x^\beta\varphi)^\wedge(\xi)$, siendo $\beta \in \mathbb{N}_0^p$. Entonces, integrando por partes se obtiene,

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}^{(\beta)}(\xi) &\overset{\text{Fourier}}{=} \int_{\mathbb{R}^p} (-ix)^\beta \varphi(x) e^{-i\xi x} dx \\ &\overset{\text{partes}}{=} \frac{(-1)^\beta}{(-i\xi)^\beta} \int_{\mathbb{R}^p} e^{-i\xi x} \big(\varphi(x)(-ix)^\beta\big)^{(\beta)} dx. \end{aligned}$$

Sea ahora $A > 1$ de modo que $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]^p =: D$. Existe una sucesión $\{C_n\}$ tal que

$$\sup_{t\in\mathbb{R}^p} |\varphi^{(\alpha)}(t)| \leq C_n e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \qquad [*]$$

para cada multi-índice α. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)| &\leq \frac{(2A)^p}{|\xi|^{|\beta|}} \sum_{\alpha\leq\beta} \binom{\beta}{\alpha} \tfrac{\beta!}{(\beta-\alpha)!} \sup_{t\in D} |t^{\beta-\alpha}\varphi^{(\beta-\alpha)}(t)| \\ &\leq \frac{(2A)^p C_n}{|\xi|^{|\beta|}} \sum_{\alpha\leq\beta} \binom{\beta}{\alpha}^2 \alpha! A^{|\beta-\alpha|} e^{n\varphi^*(\frac{|\beta-\alpha|}{n})} \end{aligned}$$

Aplicamos ahora la proposición 0.1.5(4) para obtener una constante $D_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $A^{-|\alpha|}|\alpha|! \leq |\alpha|! \leq D_n e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}$. Por otra parte, ha de ser $|\xi| \geq 1$ (podemos asumir que $\log|\xi| \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$). De donde, teniendo en cuenta que $\sum_{\alpha\leq\beta}\binom{\beta}{\alpha}^2 \leq \big(\sum_{\alpha\leq\beta}\binom{\beta}{\alpha}\big)^2 = 4^{|\beta|}$,

$$\begin{aligned} |\widehat{\varphi}^{(\beta)}(\xi)| &\leq \frac{(2A)^p C_n D_n}{|\xi|^{|\beta|}} A^{|\beta|} \sum_{\alpha\leq\beta} \binom{\beta}{\alpha}^2 e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} e^{n\varphi^*(\frac{|\beta-\alpha|}{n})} \\ &\leq \frac{(4A)^{|\beta|}}{|\xi|^{|\beta|}} \widetilde{C_n} e^{n\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})}. \end{aligned}$$

Una aplicación del lema 1.1.3 permite concluir que $\widehat{\varphi}(\xi)$ es un símbolo.

El operador pseudodiferencial asociado al símbolo $p(x,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^p}\widehat{\varphi}(\xi)$ es

$$\begin{aligned} P(x,D)f &= \frac{1}{(2\pi)^p} \int_{\mathbb{R}^p} e^{ix\xi} \widehat{\varphi}(\xi) \widehat{f}(\xi) d\xi = \\ &= (\varphi * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^p} \varphi(x-y) f(y) dy. \end{aligned}$$

1.3.8. Convolución con una ultradistribución con soporte singular el $\{0\}$

Sea $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R})$ una función test con $\operatorname{supp} f = [-1,1]$ y $f(0) \neq 0$. Ponemos $\varphi := f\chi_{[0,+\infty[}$ que es una ultradistribución con soporte compacto y $\operatorname{sing}_{(\omega)}\operatorname{supp}\varphi = \{0\}$. Entonces

$\hat{\varphi}(\xi)$ es un símbolo y el operador pseudodiferencial asociado es el operador $\psi \to 2\pi(\varphi * \psi)$ (véase el comentario posterior al teorema 1.5.7).

Vamos a ver primero que para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\hat{\varphi}(\xi) = \sum_{k=0}^{N} \frac{f^{(k)}(0)}{(i\xi)^{k+1}} + \frac{1}{(i\xi)^{N+1}} \int_0^1 f^{(N+1)}(t) e^{-it\xi} dt. \tag{3.8}$$

Haremos la demostración por inducción sobre N. La igualdad se cumple para $N = 1$, pues

$$\begin{aligned}
\widehat{\varphi}(\xi) &= \int_0^1 f(t) e^{-i\xi t} dt \\
&= -\frac{1}{i\xi} f(t) e^{i\xi t}\Big]_0^1 + \frac{1}{i\xi} \int_0^1 f'(t) e^{-i\xi t} dt \\
&= \frac{f(0)}{i\xi} + \frac{1}{i\xi} \int_0^1 f'(t) e^{-i\xi t} dt \\
&= \frac{f(0)}{i\xi} + \frac{1}{i\xi} \Big\{ \frac{f'(\xi)}{-i\xi} e^{-i\xi t}\Big]_0^1 + \frac{1}{i\xi} \int_0^1 f''(t) e^{-i\xi t} dt \Big\} \\
&= \frac{f(0)}{i\xi} + \frac{f'(0)}{(i\xi)^2} + \frac{1}{(i\xi)^2} \int_0^1 f''(t) e^{-i\xi t} dt.
\end{aligned}$$

Ahora, suponiendo la expresión (3.8) cierta para N y observando que

$$\begin{aligned}
\int_0^1 f^{(N+1)}(t) e^{-i\xi t} dt &= -\frac{1}{i\xi} f^{(N+1)}(t) e^{-i\xi t}\Big]_0^1 + \frac{1}{i\xi} \int_0^1 f^{(N+2)}(t) e^{-i\xi t} dt \\
&= \frac{f^{(N+1)}(0)}{i\xi} + \frac{1}{i\xi} \int_0^1 f^{(N+2)}(t) e^{-i\xi t} dt,
\end{aligned}$$

se concluye que

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \sum_{k=0}^{N+1} \frac{f^{(k)}(0)}{(i\xi)^{k+1}} + \frac{1}{(i\xi)^{N+2}} \int_0^1 f^{(N+2)}(t) e^{-i\xi t} dt,$$

con lo que (3.8) se cumple para cualquier valor de N.

Derivando N veces la expresión (3.8)

$$\begin{aligned}
\hat{\varphi}^{(N)}(\xi) &= \sum_{k=0}^{N} (-1)^N \frac{f^{(k)}(0)}{(i\xi)^{k+1}} N! \binom{N+k}{k} \frac{1}{\xi^N} \\
&+ \frac{1}{\xi^N i^{N+1}} \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(N+k)!}{N!} (-1)^k \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_0^1 (-it)^{N-k} f^{(N+1)}(t) e^{-it\xi} dt.
\end{aligned}$$

Para cada $n \in \mathbb{N}$ escribimos $C_n := |f|_n$, y supongamos que $\log|\xi| \geq \frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})$. Se cumple que $|\xi|^k \geq e^{\frac{nk}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})}$ y si $k \leq N$, como $\frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n}) \geq \frac{n}{k}\varphi^*(\frac{k}{n})$,

$$\frac{|f^{(k)}(0)|}{|\xi|^k} \leq \frac{C_n e^{n\varphi^*(\frac{k}{n})}}{e^{\frac{nk}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})}} \leq C_n,$$

con lo cual, teniendo en cuenta que $\binom{k+N}{k} \leq \binom{2N}{k} \leq 2^{2N} = 4^N$ para todo $k \leq N$, y que, de la proposición 0.1.5(4), existe $D_n > 0$ tal que $j! \leq D_n e^{n\varphi^*(\frac{j}{n})}$ para cada $j \in \mathbb{N}$ (y en particular para $j = N$), obtenemos

$$|\sum_{k=0}^{N}(-1)^N \frac{f^{(k)}(0)}{(i\xi)^{k+1}} N! \binom{N+k}{k} \frac{1}{\xi^N}| \leq \frac{C_n 4^N N!}{|\xi|^{N+1}} \leq \frac{C_n D_n 4^N e^{n\varphi^*(\frac{N}{n})}}{|\xi|^{N+1}}.$$

Por otro lado, $\sup_{t\in\mathbb{R}} |f^{(N+1)}(t)| \leq C_n e^{n\varphi^*(\frac{N+1}{n})}$. Además, dado $k \leq N$, $e^{\frac{n(k+1)}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})} \geq e^{\frac{n(k+1)}{k}\varphi^*(\frac{k}{n})} \geq e^{n\varphi^*(\frac{k}{n})}$. Usando que $\binom{N}{k} \leq 2^N$ y que

$$\sum_{k=0}^{N} \binom{N+k}{k} \leq \sum_{k=0}^{N} \binom{2N}{k} \leq \sum_{k=0}^{2N} \binom{2N}{k} = 2^{2N},$$

obtenemos

$$\begin{aligned}
&|\sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(N+k)!}{N!} (-1)^k \frac{1}{\xi^{k+1}} \int_0^1 (-it)^{N-k} f^{(N+1)}(t) e^{-it\xi}| \leq \\
&\leq \sum_{k=0}^{N} \binom{N}{k} \frac{(N+k)!}{N!k!} \frac{k!}{|\xi|^{k+1}} C_n e^{n\varphi^*(\frac{N+1}{n})} \\
&\leq C_n D_n e^{n\varphi^*(\frac{N+1}{n})} 2^N \sum_{k=0}^{N} \binom{N+k}{k} \frac{e^{n\varphi^*(\frac{k}{n})}}{e^{\frac{n(k+1)}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})}} \\
&\leq C_n D_n 8^N e^{n\varphi^*(\frac{N+1}{n})}.
\end{aligned}$$

Concluimos que

$$|\hat{\varphi}^{(N)}(\xi)| \leq A_n B^N |\xi|^{-N} e^{n\varphi^*(\frac{N+1}{n})}$$

para ciertas constantes $A_n > 0$, $B > 0$ y para cada $\log|\xi| \geq \frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})$. Esto demuestra que $\widehat{\varphi}(\xi)$ es un símbolo en la clase $S^{0,\omega}_{1,0}(\mathbb{R})$, puesto que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe una constante positiva B_n tal que (proposición 0.1.5(1))

$$e^{2n\varphi^*(\frac{N+1}{2n})} \leq B_n e^{n\varphi^*(\frac{N}{n})}, \quad N \in \mathbb{N},$$

y así,

$$|\hat{\varphi}^{(N)}(\xi)| \leq A_{2n} B_n B^N |\xi|^{-N} e^{n\varphi^*(\frac{N}{n})}$$

siempre que $\log|\xi| \geq \frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n}) \geq \frac{2n}{N}\varphi^*(\frac{N}{2n})$. Lo que finaliza la prueba.

1.3.9. Un operador pseudodiferencial que es una inversa a la derecha

Mostramos a continuación que la clase de operadores que estamos considerando contiene, no sólo los operadores ultradiferenciales, sino también parametrix bajo ciertas restricciones. Pone de manifiesto la necesidad de trabajar con símbolos de tipo (ρ, δ).

Sea Ω un abierto de $\mathbb{R}^p$. Recordemos que una función $f \in C^\infty(\Omega)$ es real analítica en el abierto Ω, y se denota $f \in \mathcal{A}(\Omega)$, cuando pertenece a la clase de Gevrey $\Gamma^{\{d\}}(\Omega)$, con $d = 1$.

Definición 1.3.6 *Una ultradistribución $\mu \in \mathcal{E}'_*(\mathbb{R}^p)$ se dice $*$-elíptica si cada solución $\nu \in \mathcal{D}'_*(\mathbb{R}^p)$ de la ecuación $\mu * \nu = g$ es una función real analítica cuando g es una función real analítica, siendo $* = (\omega)$ ó $\{\omega\}$.*

El operador ultradiferencial $G(D)$ de clase $*$ es $*$-elíptico, cuando la ultradistribución T_G asociada es $*$-elíptica.

Definición 1.3.7 *Una ultradistribución $\mu \in \mathcal{E}'_*(\mathbb{R}^p)$ se dice $*$-hipoelíptica si cada solución $\nu \in \mathcal{D}'_*(\mathbb{R}^p)$ de la ecuación $\mu * \nu = g$ es una función en $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^p)$ cuando g es una función en $\mathcal{E}_*(\mathbb{R}^p)$, siendo $* = (\omega)$ ó $\{\omega\}$.*

El operador ultradiferencial $G(D)$ de clase $*$ es $*$-hipoelíptico, cuando la ultradistribución T_G asociada es $*$-hipoelíptica.

Enunciamos a continuación la siguiente modificación debida a Chou, del teorema del Módulo-Mínimo.

Teorema 1.3.8 *[12, II.2.1] Sea g una función holomorfa en el disco $|z| \leq 3eR$ y supongamos que g no se anula $|z| \leq \frac{3r}{2}$. Entonces para todo $|z_0| = R$ se tiene que*

$$|g(0)| \geq \frac{|g(z_0)|^{3(H+1)}}{\left(\sup_{|\zeta|\leq 3eR} |g(\zeta)|\right)^{3H} \left(\sup_{|\zeta|\leq \frac{3r}{2}} |g(\zeta)|\right)^2}$$

para R, r y η cumpliendo $16\eta R < r$ y $H = 2 + \log\left(\frac{3e}{2\eta}\right)$.

Proposición 1.3.9 *Sea ω una función peso, $\omega(t) = o(t^d)$, $d < 1$, y sea $G(D)$ un operador ultradiferencial de clase (ω) con coeficientes constantes tal que $G(\xi)$ no se anula en $\mathbb{R}^p$. Supongamos que se satisface una de las condiciones siguientes:*

1. *$G(D)$ es elíptico,*
   o
2. *$G(D) : \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ es suprayectivo y $\{t^d\}$-hipoelíptico,*

entonces, existe un operador pseudodiferencial $P : \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ tal que $G(D) \circ P$ es la identidad sobre $\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$.

Demostración. Supongamos primero que se cumple (2): Sabemos de [5, 2.6, 3.3] que existen constantes $A > 0$ y $C > 0$ tales que la función entera G no se anula en la región $\{z \in \mathbb{C}^p : |\mathrm{Im} z| \leq C|\mathrm{Re} z|^d\}$ y

$$|G(\xi)| \geq \frac{1}{A}e^{-A\omega(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^p.$$

Podemos suponer que la constante $C \leq 1$. Sea $z \in \mathbb{C}^p$, $z = x + iy$, de manera que $|x| = |\mathrm{Re}\, z| \geq 1$ y $|\mathrm{Im} z| \leq \frac{C}{2}|\mathrm{Re} z|^d$. Ponemos $g(\lambda) := G(x + i(1-\lambda)y)$, $\lambda \in \mathbb{C}$. Claramente $g \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$. Veamos que si $|\lambda| < \frac{1}{2}$,

$$|\mathrm{Im}(x + i(1-\lambda)y)| \leq C|\mathrm{Re}(x + i(1-\lambda)y)|^d\,, \tag{3.9}$$

lo que probará que g no se anula en $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$.

Para ello escribimos $\lambda = \lambda_1 + i\lambda_2$. Entonces

$$x + i(1-\lambda)y = x + \lambda_2 y + i(1-\lambda_1)y,$$

y la desigualdad (3.9) se transforma en

$$|(1-\lambda_1)y| \leq C|x + \lambda_2 y|^d. \tag{3.10}$$

Observemos primero que $|\lambda_2 y| \leq \frac{1}{2}|y| \leq \frac{C}{4}|x|^d \leq \frac{C}{4}|x| \leq \frac{1}{4}|x|$, pues $|x| = |\mathrm{Re} z| \geq 1$ y $C \leq 1$. De donde se deduce,

$$C|x + \lambda_2 y|^d \geq C\big(|x| - |\lambda_2 y|\big)^d \geq C\big(|x| - \frac{1}{4}|x|\big)^d \geq C\big(\frac{3}{4}\big)^d|x|^d \geq \frac{3C}{4}|x|^d. \tag{3.11}$$

Por otro lado,

$$|(1-\lambda_1)y| \leq \frac{3}{2}|y| \leq \frac{3C}{4}|x|^d. \tag{3.12}$$

De las desigualdades (3.11) y (3.12) se obtiene la desigualdad buscada (3.10).

Aplicando el teorema del módulo mínimo de Chou 1.3.8 como en [5, 2.6, 2.8] a g para $r = \frac{1}{3}$, $R = 1$, $0 < \eta < \frac{1}{48}$ y $H = 2 + \log(\frac{3e}{2\eta})$ obtenemos

$$|g(0)| \geq \frac{|g(1)|^{3(H+1)}}{(\sup_{|\lambda|\leq 1/2}|g(\lambda)|)^2(\sup_{|\lambda|\leq 3e}|g(\lambda)|^{3H})}. \qquad (*)$$

Ahora, $g(0) = G(z)$, $g(1) = G(x)$, así que

$$|g(1)| = |G(x)| \geq \frac{1}{A}e^{-A\omega(x)}.$$

Además $|g(\lambda)| = |G(x + i(1-\lambda)y)| \leq Be^{B\omega(|x|+|1-\lambda||y|)}$ por ser $G(D)$ un operador ultradiferencial de clase (ω). Y como $0 < d < 1$, existe una constante $D > 0$ de modo que $|y| \leq \frac{C}{2}|x|^d \leq C|x| + D$ para cada $x \in \mathbb{R}^p$. Luego podemos hallar una nueva constante $K > 0$ tal que $\omega(|x| + |1-\lambda||y|) \leq K + K\omega(|x|)$ siempre que $|\lambda| \leq 3e$ (y en particular para cada $|\lambda| \leq \frac{1}{2}$). Por lo tanto $|g(\lambda)| \leq Be^{BK+BK\omega(|x|)}$. Entonces, deducimos de la desigualdad $(*)$ que

$$|G(z)| \geq \frac{e^{-A(3H+3)\omega(|x|)}}{B^{3H+2}e^{(3H+2)KB+(3H+2)KB\omega(|x|)}}.$$

Concluimos pues que existe $\widetilde{A} > 0$ de modo que

$$|G(z)| \geq \frac{1}{\widetilde{A}}e^{-\widetilde{A}\omega(|\mathrm{Re}z|)}.$$

Ahora consideramos la función

$$q(\xi) = \frac{1}{G(\xi)}$$

y fijamos $\xi \in \mathbb{R}^p$, $|\xi| \geq R$, siendo $R > 0$ una constante que determinaremos a continuación. Aplicamos las desigualdades de Cauchy en el polidisco $P(\xi, r)$ donde $r = (\frac{C}{4}|\xi|^d, \overset{p)}{\ldots}, \frac{C}{4}|\xi|^d)$, y queda

$$|q^{(\beta)}(\xi)| \leq \beta!(\frac{C}{4})^{-|\beta|}\frac{1}{|\xi|^{d|\beta|}}\sup_{|z-\xi|\leq\frac{C}{4}|\xi|^d}|q(z)|.$$

Se tiene que $|\mathrm{Im}z| \leq |z-\xi| \leq \frac{C}{4}|\xi|^d$. Tomamos $R > 0$, de modo que si $|\xi| > R$, se tenga $\frac{C}{4}|\xi|^d \leq \frac{1}{2}|\xi|$. Entonces, $|\mathrm{Re}z - \xi| \leq |z-\xi| \leq \frac{1}{2}|\xi|$, lo que implica que

$$|\mathrm{Re}z| \geq \frac{1}{2}|\xi| \geq \frac{1}{4}|\mathrm{Re}z|.$$

Con lo cual, $|\mathrm{Im}z| \leq \frac{C}{4}|\xi|^d \leq \frac{2^d}{4}C|\mathrm{Re}z|^d \leq \frac{C}{2}|\mathrm{Re}z|^d$ y, en particular, si se toma $R \geq 2^{1/d}$, $|\mathrm{Re}z| \geq \frac{1}{2^{1/d}}|\xi| \geq 1$. Entonces $q(z) \leq \widetilde{A}e^{\widetilde{A}\omega(|\mathrm{Re}z|)} \leq \widetilde{A}e^{\widetilde{A}\omega(2|\xi|)} \leq \widetilde{A}e^{\widetilde{B}\omega(|\xi|)}$, para cierta constante $\widetilde{B} > 0$. Por lo que finalmente, para cada $|\xi| \geq R$ se tiene

$$|q^{(\beta)}(\xi)| \leq \beta!(\frac{C}{4})^{-|\beta|}\frac{\widetilde{A}}{|\xi|^{d|\beta|}}e^{\widetilde{B}\omega(|\xi|)},$$

lo que demuestra que $q(\xi)$ es un símbolo en $AS^{m,\omega}_{d,0}(\mathbb{R}^p)$ para algún $m \in \mathbb{N}$.

El operador pseudodiferencial $P := P(x,D)$ definido por el símbolo

$$p(x,\xi) := ((2\pi)^p G(-\xi))^{-1}$$

es el operador de convolución definido por una solución fundamental de $G(D)$. Para ver esto, consideremos el funcional $E \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ definido por

$$E(\varphi) := \frac{1}{(2\pi)^p}\int\frac{\widehat{\varphi}(\xi)}{G(\xi)}d\xi,$$

para cada $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. Veamos que $G(D)E = \delta$: si $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, usando la notación $\check{G}(\xi) = G(-\xi)$ se tiene (véase la definición 0.2.2)

$$\begin{aligned} < G(D)E, \varphi > &= < E, G(-D)\varphi > = < E, T_{\check{G}} * \varphi > \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p}\int\frac{\widehat{T_{\check{G}} * \varphi(\xi)}}{G(\xi)}d\xi = \frac{1}{(2\pi)^p}\int\widehat{\varphi}(\xi)d\xi = \varphi(0) = < \delta, \varphi > . \end{aligned}$$

Además, fijado $x \in \mathbb{R}^p$, y usando la notación $T_x\varphi(y) = \varphi(y-x)$ y que $\widehat{T_x\check{\varphi}}(\xi) = e^{-ix\xi}\widehat{\check{\varphi}}(\xi) = e^{-ix\xi}\widehat{\varphi}(-\xi)$ para $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, obtenemos

$$\begin{aligned}(E*\varphi)(x) &= \; < E, \varphi(x-\cdot) > \; = \; < E, T_x\check{\varphi} > \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p}\int \frac{\widehat{T_x\check{\varphi}}(\xi)}{G(\xi)}d\xi \;=\; \frac{1}{(2\pi)^p}\int \frac{e^{-ix\xi}\widehat{\varphi}(-\xi)}{G(\xi)}d\xi \\ &= \frac{1}{(2\pi)^p}\int \frac{e^{ix\xi}\widehat{\varphi}(\xi)}{G(-\xi)}d\xi \;=\; P(x,D)\varphi.\end{aligned}$$

Por lo tanto, se satisface que $G(D)\circ P\varphi = \varphi$, para cada $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, pues

$$G(D)(P\varphi) = G(D)(E*\varphi) = G(D)E*\varphi = \delta*\varphi = \varphi.$$

Si se cumple (1), podemos proceder como antes teniendo en cuenta que ahora, de [5, 2.1] y [13, Tmas 3,4], existe una constante $A > 0$ tal que $G(z) \neq 0$ cuando $|\mathrm{Im} z| \leq A|\mathrm{Re} z|$ (es decir, $d = 1$) y además

$$|G(\xi)| \geq Ae^{-\frac{1}{A}\omega(\xi)}, \quad \xi \in \mathbb{R}^p.$$

En este caso el símbolo $q(\xi) \in AS^{m,\omega}_{1,0}(\mathbb{R}^p)$. $\square$

1.4. Operadores con soporte propio

Consideremos un subconjunto cerrado $C \subset \Omega\times\Omega$ y un subconjunto compacto $K \subset \Omega$. Sean $\pi_i : C \to \Omega$, $i = 1, 2$, las proyecciones. Definimos los conjuntos

$$C(K) := \{x \in \Omega \mid \text{ existe } y \in K : (x,y) \in C\} = \pi_1(\pi_2^{-1}(K)),$$

$$C^{-1}(K) := \{y \in \Omega \mid \text{ existe } x \in K : (x,y) \in C\} = \pi_2(\pi_1^{-1}(K)).$$

Ambos son conjuntos cerrados en Ω. En efecto, sea (x_n) una sucesión en $C(K)$ convergente a un punto x_0 de Ω. Veamos que $x_0 \in C(K)$. Por definición de $C(K)$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $y_n \in K$ tal que $(x_n, y_n) \in C$. Por ser K un conjunto compacto, la sucesión (y_n) posee una subsucesión (y_{n_k}) convergente a un punto $y_0 \in K$. Pero entonces, la sucesión (x_{n_k}, y_{n_k}) de C converge a (x_0, y_0) en $\Omega\times\Omega$. Al ser C cerrado, el punto $(x_0, y_0) \in C$, lo que implica que $x_0 \in C(K)$, pues, como ya sabemos, $y_0 \in K$. Análogamente se comprueba que $C^{-1}(K)$ es cerrado.

Definición 1.4.1 *Decimos que un subconjunto cerrado $C \subset \Omega\times\Omega$ es propio si las proyecciones $\pi_i : C \to \Omega$, $i = 1, 2$, cumplen que la imagen inversa de cada subconjunto compacto es compacto, es decir, si para cada conjunto compacto $K \subset \Omega$, los conjuntos $C(K)$ y $C^{-1}(K)$, definidos anteriormente, son compactos en Ω.*

Nota 1.4.2 Si $D \subset \Omega \times \Omega$ es propio y A es un subconjunto cerrado de D, entonces A es propio. Basta observar que si L es un subconjunto compacto de Ω,

$$(\pi_i|_A)^{-1}(L) = A \cap (\pi_i|_D)^{-1}(L), \quad i = 1, 2.$$

El teorema de los núcleos, que enunciamos a continuación, es válido también para clases no casianalíticas (véase [9, 8.1]):

Teorema 1.4.3 *Sean Ω_1 y Ω_2 abiertos en $\mathbb{R}^p$. Se tiene el isomorfismo canónico*

$$\mathcal{D}'_*(\Omega_1 \times \Omega_2)_b \cong \mathcal{D}'_*(\Omega_1)_b \widehat{\otimes}_\pi \mathcal{D}'_*(\Omega_2)_b \cong L_b(\mathcal{D}_*(\Omega_2); \mathcal{D}'_*(\Omega_1)),$$

siendo $* = (\omega)$ ó $\{\omega\}$.

En particular, si $\Omega = \Omega_1 = \Omega_2$, a cada operador $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ le corresponde una ultradistribución núcleo $K_T \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$, de manera que si $u, v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$,

$$< Tu, v > = < K_T, v \otimes u >,$$

siendo $\big(v \otimes u\big)(x, y) := v(x)u(y)$ una función en $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$.

Definición 1.4.4 *Un operador lineal y continuo $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ se dice que tiene soporte propio si el soporte de la ultradistribución núcleo de T es un subconjunto propio de $\Omega \times \Omega$.*

Lema 1.4.5 *Si el operador $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ tiene soporte propio, entonces también $T^t : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ tiene soporte propio.*

Demostración. Observemos que si $u, v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$,

$$< K_T, v \otimes u > = < Tu, v > = < v, T^t u > = < K_{T^t}, u \otimes v > .$$

Entonces,

$$\operatorname{supp} K_{T^t} = \{(y, x) \in \Omega \times \Omega \,|\, (x, y) \in \operatorname{supp} K_T\},$$

pues K_T se anula en un entorno de $(x_0, y_0) \in \Omega \times \Omega$ si, y sólo si, K_{T^t} se anula en un entorno de (y_0, x_0).

Sean $C := \operatorname{supp} K_T$ y $\widetilde{C} := \operatorname{supp} K_{T^t}$. Veamos que $\widetilde{C}$ es un subconjunto propio de $\Omega \times \Omega$. Fijado un compacto $K \subset \Omega$, de las observaciones anteriores, se tiene

$$\widetilde{C}(K) = C^{-1}(K) \quad \text{y} \quad \widetilde{C}^{-1}(K) = C(K),$$

que son conjuntos compactos, por ser $C = \operatorname{supp} K_T$ un conjunto propio. □

Proposición 1.4.6 *Sea $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ un operador lineal y continuo con soporte propio. Sea $C = \operatorname{supp} K_T$, entonces* *i)* $\operatorname{supp}(Tu) \subset C(\operatorname{supp} u)$*, para cada* $u \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$*. En particular* $T(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)) \subset \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$*.*

ii) T *admite una extensión lineal y continua* $\widetilde{T} : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$*.*

Demostración. i) Si $x_0 \notin C(\operatorname{supp} u)$, entonces $(\{x_0\} \times \operatorname{supp} u) \cap C = \emptyset$. Luego existe un entorno V de x_0 en Ω tal que $(V \times \operatorname{supp} u) \cap C = \emptyset$ y, en consecuencia, para cada $v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(V)$,

$$< Tu, v >=< K_T, v \otimes u >= 0$$

pues $\operatorname{supp}(v \otimes u) \subset V \times \operatorname{supp} u$, así que Tu se anula en un entorno de x_0. Por lo tanto, $x_0 \notin \operatorname{supp} Tu$, luego $T(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)) \subset \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Del teorema de la gráfica cerrada deducimos que $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ es lineal y continuo.

ii) Consideremos el operador traspuesto de T. Del apartado anterior se deduce que $T^t : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ es lineal y continuo. Por el lema 1.4.5 el operador T^t también tiene soporte propio, por lo tanto, según hemos demostrado, $T^t : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ es lineal y continuo. Entonces

$$(T^t)^t : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$$

es la extensión buscada. □

Como consecuencia del siguiente teorema podremos componer operadores pseudodiferenciales siempre que al menos uno de ellos tenga soporte propio.

Teorema 1.4.7 *Sea* $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ *un operador lineal y continuo que tiene soporte propio y que admite extensión lineal y continua* $\widetilde{T} : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$*. Entonces* T *es un operador bien definido, lineal y continuo, entre los siguientes espacios*

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega), \qquad \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$$

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega), \qquad \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$$

Demostración. Como T tiene soporte propio y $T(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, se sigue de la proposición anterior que $T(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)) \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$.

Fijamos ahora $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Existe una sucesión $\{u_j\} \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ que converge a u en $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. En particular, existe un conjunto compacto $L \subset \Omega$ tal que $\operatorname{supp} u_j \subset L$ para cada $j \in \mathbb{N}$. Si C denota el soporte de K_T (la distribución núcleo de T), por la proposición anterior

$$\operatorname{supp}(Tu_j) \subset C(\operatorname{supp} u_j) \subset C(L) =: Q,$$

que es un compacto de Ω. Al ser $\widetilde{T}(u)$ el $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)-$límite de $\{Tu_j\}$, resulta que $\operatorname{supp} \widetilde{T}u \subset Q$ y, por lo tanto, $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, $\widetilde{T} : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Por el teorema de la gráfica cerrada son continuos.

La restricción a $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ de T^t coincide con $\widetilde{T}^t$, con lo cual, $T^t : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Puesto que también T^t tiene soporte propio, concluimos que T^t es un operador lineal y continuo $T^t : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ y también $T^t : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$; de donde, tomando traspuestos obtenemos que los operadores $T : \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ y $T : \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ están bien definidos, y son lineales y continuos. □

También se da el recíproco:

Teorema 1.4.8 *Si $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ es un operador lineal y continuo, con extensión lineal y continua $T : \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, entonces T tiene soporte propio.*

Demostración. Sea K_T la distribución núcleo de T y $C := \operatorname{supp} K_T$. Dado un compacto $K \subset \Omega$, sea W un abierto relativamente compacto que contiene a K y cuya clausura está contenida en Ω. Por el teorema de factorización de Grothendieck existe un subconjunto compacto $Q \subset \Omega$ tal que $T(\mathcal{D}_{(\omega)}(W)) \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(Q)$. Veamos que $C(K) \subset Q$, lo que implica que $C(K)$ es compacto.

Sea $V := \Omega \setminus Q$ y sean $u \in \mathcal{D}_{(\omega)}(W)$ y $v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(V)$, entonces

$$< K_T, v \otimes u >=< Tu, v >= 0.$$

Como $\mathcal{D}_{(\omega)}(V) \otimes \mathcal{D}_{(\omega)}(W)$ es denso en $\mathcal{D}_{(\omega)}(V \times W)$, K_T se anula en $V \times W$, luego $C \cap (V \times W) = \emptyset$. Lo que implica que $C(K) \cap V = \emptyset$, pues si $x \in C(K) \cap V$ existe $y \in K$ tal que $(x, y) \in C$, de donde $(x, y) \in (V \times W) \cap C \neq \emptyset$.

Por otra parte, $T^t : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Si $L \subset \Omega$ es un conjunto compacto y W es un entorno abierto relativamente compacto de L con clausura contenida en Ω, como antes existe Q compacto en Ω tal que $T^t(\mathcal{D}_{(\omega)}(W)) \subset \mathcal{D}_{(\omega)}(Q)$. Por lo tanto, si $\widetilde{C} := \operatorname{supp} K_{T^t}$ resulta que $\widetilde{C}(L) \subset Q$, pero $\widetilde{C}(L) = C^{-1}(L)$, lo que termina la prueba. □

Podemos concluir pues que

Corolario 1.4.9 *Sea T un operador pseudodiferencial. T tiene soporte propio si, y sólo si, es un operador lineal y continuo entre los espacios*

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \quad y \quad \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega).$$

En tal caso, T también es lineal y continuo entre los espacios

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \quad y \quad \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega).$$

Ejemplo 1.4.10 Cada operador ultradiferencial $G(x, D) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} a_\alpha(x) D^\alpha$ en el sentido de Komatsu es un operador con soporte propio (véase la definición 1.3.4 y [27]). $G(x, D)^t$ es también un operador ultradiferencial, como demuestra Komatsu en [27, 2.5].

Ejemplo 1.4.11 Presentamos ahora un ejemplo de un operador pseudodiferencial que no tiene soporte propio. Sea $G(D)$ un operador ultradiferencial como el descrito en la proposición 1.3.9. Según se probó en dicha proposición, existe un operador pseudodiferencial P tal que $G(D) \circ P$ es la identidad sobre $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Este operador no tiene soporte propio ya que, según [6, Prop. 8], P no admite una extensión lineal y continua $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$.

1.5. Algunas consecuencias. La propiedad pseudolocal

El objetivo de esta sección es demostrar que los operadores pseudodiferenciales son pseudolocales. Además, de los resultados de las secciones anteriores, extraeremos algunas consecuencias acerca de la estructura de los operadores pseudodiferenciales (1.5.1, 1.5.4).

Ya sabemos que los operadores en derivadas parciales con coeficientes en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ y los operadores ultradiferenciales son ejemplos de operadores pseudodiferenciales. Ahora veremos que en muchos casos los operadores pseudodiferenciales se pueden expresar como la composición de un operador ultradiferencial de clase (ω) y un operador pseudodiferencial de orden finito.

Proposición 1.5.1 *Sea $P(x,D)$ el operador pseudodiferencial asociado al símbolo $p(x,\xi) \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Entonces podemos encontrar un operador ultradiferencial $G(D)$ de clase (ω) y un símbolo $q(x,\xi) \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ de orden finito tal que si $Q(x,D)$ es el correspondiente operador pseudodiferencial, se tiene que $P(x,D) = Q(x,D) \circ G(D)$.*

Demostración. Tomamos $D > 1$ tal que $D\omega(\frac{\xi}{2}) > m\omega(\xi)$. Sea G una función entera par que satisface $\log|G(z)| = O(\omega(z))$ cuando $|z|$ tiende a infinito y $|G(z)| \geq e^{D\omega(z)}$ siempre que $|\mathrm{Im} z| \leq |\mathrm{Re} z|/D$ ([30, 1.3]). Entonces, $1/G$ es un símbolo según la definición 1.2.10. De hecho, es obvio que $|1/G(z)| \leq e^{-D\omega(z)}$ en $\{z \in \mathbb{C}^p : |\mathrm{Im} z| < |\mathrm{Re} z|/D\}$ y además es holomorfa en este conjunto. Como en la demostración de la proposición 1.3.9, sea $\xi \in \mathbb{R}^p$, $\xi \neq 0$, y consideremos el polidisco $P(\xi, r)$ siendo $r = (\frac{1}{2D}|\xi|, \overset{p)}{\ldots}, \frac{1}{2D}|\xi|)$, que está contenido en $\{z \in \mathbb{C}^p : |\mathrm{Im} z| < \frac{|\mathrm{Re} z|}{D}\}$. En efecto, si $z \in P(\xi,r)$ se cumple $|\mathrm{Im} z| \leq |z-\xi| \leq \frac{1}{2D}|\xi| \leq \frac{1}{2}|\xi|$. Y también, $|\mathrm{Re} z - \xi| \leq |z-\xi| \leq \frac{1}{2}|\xi|$, lo que implica que $\frac{1}{4}|\mathrm{Re} z| \leq \frac{1}{2}|\xi| \leq |\mathrm{Re} z|$ y así

$$|\mathrm{Im} z| \leq \frac{1}{2D}|\xi| \leq \frac{1}{D}|\mathrm{Re} z|.$$

Por lo tanto podemos aplicar las desigualdades de Cauchy en $P(\xi,r)$ y queda

$$|(\frac{1}{G(\xi)})^{(\beta)}| \leq (2D)^{|\beta|}\beta! \frac{1}{|\xi|^{|\beta|}} \sup_{|z-\xi| \leq \frac{1}{2D}|\xi|} \frac{1}{|G(z)|}.$$

Ahora, si $|z-\xi| \leq \frac{1}{2D}|\xi|$, $\omega(|z|) \geq \omega(|\mathrm{Re} z|) \geq \omega(\xi/2)$, pues $\frac{1}{2}|\xi| \leq |\mathrm{Re} z|$ y ω es creciente. En consecuencia, $|G(z)|^{-1} \leq e^{-D\omega(z)} \leq e^{-D\omega(\xi/2)} \leq e^{-m\omega(\xi)}$, de donde se obtiene finalmente, para cierta constante $C > 0$,

$$|(\frac{1}{G(\xi)})^{(\beta)}| \leq C^{|\beta|}\beta! \frac{e^{-D\omega(\xi/2)}}{|\xi|^{|\beta|}} \leq C^{|\beta|}\beta! \frac{e^{-m\omega(\xi)}}{|\xi|^{\rho|\beta|}}.$$

Definimos $q(x,\xi) = \frac{p(x,\xi)}{G(\xi)}$. Es fácil ver que q es un símbolo de orden finito: fijados un compacto $K \subset \mathbb{R}^p$ y $n \in \mathbb{N}$, para cada $x \in K$ se tiene

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha D_\xi^\beta q(x,\xi)| &\leq \sum_{\mu \leq \beta} \tbinom{\beta}{\mu} |(\frac{1}{G(\xi)})^{(\mu)}||D_x^\alpha D_\xi^{\beta-\mu} p(x,\xi)| \\ &\leq C_n C^{|\beta|} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} \sum_{\mu \leq \beta} \tbinom{\beta}{\mu} (\beta-\mu)!\mu! \frac{(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|}}{|\xi|^{\rho|\beta|}} \\ &\leq C_n (4C)^{|\beta|} \beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})} (1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}, \end{aligned}$$

siempre que $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$, para cierta R.

Más aun, para cada $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} (Q(x,D) \circ G(D))(\varphi) &= \int q(x,\xi) e^{ix\xi} \widehat{G(D)(\varphi)}(\xi) d\xi \\ &= \int q(x,\xi) e^{ix\xi} G(\xi) \widehat{\varphi}(\xi) d\xi = P(x,D)(\varphi). \end{aligned}$$

□

A continuación analizamos el comportamiento del operador pseudodiferencial cuando está definido por una amplitud que no depende de la variable x. Una combinación del próximo resultado y la proposición 1.2.4 será útil en el estudio de la composición de operadores pseudodiferenciales.

Proposición 1.5.2 *Sea $b(y,\xi)$ una amplitud en $S_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ que no depende de la variable x. Para cada $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ y cada $x \in \mathbb{R}^p$, sea $Bf(x) = \int \big(\int b(y,\xi) e^{i(x-y)\xi} f(y) dy \big) d\xi$, entonces $Bf \in L_1(\mathbb{R}^p)$.*

Demostración. Ponemos $I(\xi) := \int b(y,\xi) f(y) e^{-iy\xi} dy$. En virtud de la proposición 1.1.5, fijada $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, tenemos que para cada $\lambda > 0$ existe una constante $C > 0$ tal que $|I(\xi)| \leq Ce^{-\lambda\omega(\xi)}$, con lo que $I \in L_1(\mathbb{R}^p)$, luego para cada $x \in \mathbb{R}^p$ podemos definir

$$(Bf)(x) = \int \Big(\int b(y,\xi) e^{i(x-y)\xi} f(y) dy \Big) d\xi.$$

Para cada $\alpha \in \mathbb{N}_0^p$,

$$D_\xi^\alpha I(\xi) = \int f(y) D_\xi^\alpha (b(y,\xi) e^{-iy\xi}) dy.$$

Usando la fórmula de Leibniz se tiene

$$D_\xi^\alpha (b(y,\xi) e^{-iy\xi}) = \sum_{\beta \leq \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} (-y)^\beta D_\xi^{\alpha-\beta} b(y,\xi) e^{-iy\xi}.$$

Luego

$$|D_\xi^\alpha I(\xi)| \leq \sum_{\beta \leq \alpha} \tbinom{\alpha}{\beta} |\int y^\beta f(y) D_\xi^{\alpha-\beta} b(y,\xi) e^{-iy\xi} dy|.$$

Si $y \in \operatorname{supp} f$, como b es una amplitud, existen $R \geq 1$ y $C_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tales que si $\log(|\xi|/R) \geq \frac{n}{|\alpha|}\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})$,

$$|D_y^\gamma(D_\xi^{\alpha-\beta} b(y,\xi))| \leq C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})+(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta|}{n})}|\xi|^{\delta|\gamma|-\rho|\alpha-\beta|}e^{m\omega(\xi)}.$$

Como $\log(|\xi|/R) \geq \frac{n}{|\alpha|}\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n}) \geq \frac{n}{|\alpha-\beta|}\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta|}{n})$, se deduce

$$|\xi|^{-\rho|\alpha-\beta|} \leq e^{-\rho n\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta|}{n})}.$$

Del lema 0.1.6, $|\xi|^{\delta|\gamma|}e^{-\delta n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})} \leq e^{\delta n\omega(\xi)}$, y concluimos que

$$|D_y^\gamma(D_\xi^{\alpha-\beta} b(y,\xi))| \leq C_n e^{\rho n\varphi^*(\frac{|\gamma|}{n})}e^{(m+n\delta)\omega(\xi)}.$$

Por lo que si $\log(|\xi|/R) \geq \frac{1}{|\alpha|}\varphi^*(|\alpha|) \geq \frac{n}{|\alpha|}\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})$ procediendo como en la demostración de la proposición 1.1.5 con la función $y^\beta f(y)$ y $D_\xi^{\alpha-\beta}b(y,\xi)$, encontramos para cada $k > 0$ una constante $D_{\beta,k}$ tal que si $\log(|\xi|/R) \geq \frac{1}{|\alpha|}\varphi^*(|\alpha|)$,

$$|D_\xi^\alpha I(\xi)| \leq \sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}|\int y^\beta f(y)D_\xi^{\alpha-\beta}b(y,\xi)e^{-iy\xi}dy| \leq e^{-k\omega(\xi)}\sum_{\beta\leq\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D_{\beta,k}.$$

Por lo tanto, podemos encontrar una constante $C_{\alpha,k}$ con

$$|D_\xi^\alpha I(\xi)| \leq C_{\alpha,k}e^{-k\omega(\xi)}$$

para $|\xi|$ grande. En consecuencia $D_\xi^\alpha I(\cdot) \in L_1$ y $\lim\limits_{|\xi|\to+\infty} D_\xi^\alpha I(\xi) = 0$. Integrando por partes,

$$x^\alpha(Bf)(x) = \int I(\xi)D_\xi^\alpha(e^{ix\xi})d\xi = (-1)^{|\alpha|}\int D_\xi^\alpha I(\xi)e^{ix\xi}d\xi.$$

Lo que implica que $x^\alpha(Bf)$ está acotado para cada α, y así Bf es integrable. $\square$

Proposición 1.5.3 *Sea $G(D)$ un operador ultradiferencial de clase (ω), $b(y,\xi)$ una amplitud en la clase $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ y B como en 1.5.2. Entonces, $G(D)\circ B$ es el operador dado por $x \to \int e^{ix\xi}\int G(\xi)b(y,\xi)f(y)e^{-iy\xi}dyd\xi$, $x \in \mathbb{R}^p$.*

Demostración. Sea $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Usaremos la notación para $I(\xi)$ de la prueba de 1.5.2. Procederemos por etapas:

(i) La función $(Bf)(x) = \int I(\xi)e^{ix\xi}d\xi$ se puede derivar bajo el signo integral. Razonando como en la demostración de la proposición 1.5.2, existe ahora una constante $C_{0,k}$ tal que $|I(\xi)| \leq C_{0,k}e^{-k\omega(\xi)}$ para todo $k > 0$, de donde $D_x^\alpha(e^{ix\xi}I(\xi)) = \xi^\alpha I(\xi)e^{ix\xi} \in L_1$. Luego, $D_x^\alpha(Bf)(x) = \int \xi^\alpha I(\xi)e^{ix\xi}d\xi$.

(ii) Sea $G(D) = \sum_\alpha a_\alpha D^\alpha$ un operador ultradiferencial de clase (ω). Existen $m \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ tales que $|a_\alpha| \leq Ce^{-m\varphi^*(\frac{|\alpha|}{m})}$. Por el apartado (i) ya sabemos que

$$G(D)(Bf)(x) = \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} a_\alpha \int \xi^\alpha I(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Veamos que $\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} |a_\alpha| \int |\xi|^{|\alpha|} |I(\xi)| d\xi < \infty$. Como en otras ocasiones, $\sum_{|\alpha|=k} 1 \leq p^k$, de donde, teniendo en cuenta $(2p)^k |\xi|^k e^{-m\omega(2p\xi)} \leq e^{m\varphi^*(\frac{k}{m})}$ se obtiene

$$\begin{aligned}
\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} |a_\alpha| \int |\xi|^{|\alpha|} |I(\xi)| d\xi &\leq \sum_{k=0}^\infty \sum_{|\alpha|=k} |a_\alpha| \int |\xi|^k |I(\xi)| d\xi \\
&\leq C \sum_{k=0}^\infty \Big(\sum_{|\alpha|=k} 1 \Big) e^{-m\varphi^*(\frac{k}{m})} \int |\xi|^k |I(\xi)| d\xi \\
&\leq C \sum_{k=0} (\frac{1}{2})^k \int |I(\xi)| e^{m\omega(2p\xi)} d\xi < \infty.
\end{aligned}$$

En consecuencia

$$\begin{aligned}
G(D)(Bf)(x) &= \int \sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^p} a_\alpha \xi^\alpha I(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\
&= \int G(\xi) I(\xi) e^{ix\xi} d\xi \\
&= \int \Big(\int b(y,\xi) G(\xi) e^{i(x-y)\xi} f(y) dy \Big) d\xi.
\end{aligned}$$

Como $G(z)$ es una función entera y $\log |G(z)| = O(\omega(z))$, de la proposición 1.3.5 y la proposición 1.2.15 se deduce que $b(y,\xi)G(\xi)$ es una amplitud en algún $S^{k,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Esto prueba que $G(D) \circ B$ es un operador pseudodiferencial con amplitud $b(y,\xi)G(\xi)$. □

Proposición 1.5.4 *Sea $b(y,\xi)$ una amplitud en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$, y B es como en 1.5.2. Entonces $Bf \in \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ para cada $f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ y $B : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ es continuo.*

Demostración. Para probar que $Bf \in \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ es suficiente ver que $Bf \in L_1$ y que $G(D)(Bf)$ pertenece a L_1 para cada operador ultradiferencial de clase (ω) ([2, 2.11]).

De la proposición 1.5.2 se tiene que $Bf \in L_1(\mathbb{R}^p)$. Por las proposiciones 1.5.2 y 1.5.3 el operador $G(D) \circ B$ toma valores en $L_1(\mathbb{R}^p)$. La continuidad de $B : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ se sigue del teorema de la gráfica cerrada. □

Como consecuencia de la proposición 1.5.4, se tiene la siguiente mejora de la proposición 1.2.9.

Proposición 1.5.5 *Sea $p(x,\xi)$ un símbolo en $S^m_{\rho,\delta}(\Omega)$ y $B:\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)\to\mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ el operador dado por la proposición 1.5.4 para $b(y,\xi):=p(y,-\xi)$. Entonces se cumple que $B^t(e^{i(\cdot)\xi})$ es una función, y*

$$p(x,\xi)=\frac{1}{(2\pi)^p}B^t(e^{i(\cdot)\xi})(x)e^{-ix\xi}.$$

Demostración. Sea $\varphi\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Usando la notación de la proposición 1.2.9,

$$(B\varphi)(x)=\int e^{ix\xi}\Big(\int p(y,-\xi)\varphi(y)e^{-iy\xi}dy\Big)d\xi.$$

Como allí, ponemos $I(\xi):=\int p(y,-\xi)\varphi(y)e^{-iy\xi}dy$, entonces $I\in L_1$ y además $\widehat{I}(-x)=(B\varphi)(x)$. Lo que implica

$$\begin{aligned}< B^t(e^{i(\cdot)\xi}),\varphi > &= \int_{\mathbb{R}^p} e^{ix\xi}(B\varphi)(x)dx=\\ &= \int_{\mathbb{R}^p} e^{ix\xi}\widehat{I}(-x)dx=(2\pi)^p\int_\Omega p(x,\xi)\varphi(x)e^{ix\xi}dx.\end{aligned}$$

Por lo tanto, para cada $x\in\Omega$ y $\xi\in\mathbb{R}^p$,

$$B^t(e^{i(\cdot)\xi})(x)=(2\pi)^p p(x,\xi)e^{ix\xi},$$

como queríamos probar. □

En el caso $\Omega=\mathbb{R}^p$ se concluye que dos símbolos distintos dan lugar a operadores pseudodiferenciales distintos (corolario 1.2.8). Sin embargo, esto no es cierto en general. Por ejemplo, sea $f\in\mathcal{D}_{(\omega)}(-2,-1)$ y sea $A:\mathcal{D}_{(\omega)}(1,2)\to\mathcal{E}_{(\omega)}(1,2)$ el operador pseudodiferencial con símbolo $p(x,\xi):=\frac{1}{2\pi}\widehat{f}(\xi)$. Entonces $\varphi\mapsto A(\varphi)$ es la restricción a $(1,2)$ de $f*\varphi$ y, en consecuencia, A es el operador nulo. Obsérvese en cambio, que el operador $B:\mathcal{D}_{(\omega)}(1,2)\to\mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R})$ con símbolo $\frac{1}{2\pi}\widehat{f}(-\xi)$ sí permite recuperar el símbolo, en virtud de la proposición anterior.

Nuestro siguiente objetivo es demostrar que los operadores pseudodiferenciales son pseudolocales, es decir, que la actuación de un operador pseudodiferencial sobre una ultradistribución de soporte compacto no aumenta su soporte singular. Para ello comprobaremos que salvo en la diagonal, la distribución núcleo del operador pseudodiferencial es una función en la clase de funciones ultradiferenciables correspondiente.

Sea $a(x,y,\xi)$ una amplitud en la clase $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ con operador pseudodiferencial asociado $A:\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)\to\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ y sea $K\in\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$ el núcleo de A. Consideremos una función test $\Psi\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ tal que $\Psi(\xi)=1$ para $|\xi|\le 1$ y $\Psi(\xi)=0$ para $|\xi|\ge 2$, entonces escribimos $K_n(x,y):=\int a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}\Psi(\frac{\xi}{2^n})d\xi$. Se sigue del lema 1.2.1 que $K_n\in\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$. Además, se cumple que

$$< K,\varphi\otimes\chi >=\lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}^{2p}}K_n(x,y)\varphi(x)\chi(y)dxdy,\quad \varphi,\chi\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p).$$

De hecho, del teorema 1.2.2,

$$\begin{aligned} < K, \varphi \otimes \chi > &= < A\chi, \varphi >= \lim_{n\to\infty} < A_n\chi, \varphi >= \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^{2p}} K_n(x,y)\varphi(x)\chi(y)dxdy. \end{aligned}$$

En particular, del teorema de los núcleos, $K = \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega\times\Omega) - \lim_{n\to\infty} K_n$.

Teorema 1.5.6 *El soporte singular respecto de (ω) del núcleo K de un operador pseudo-diferencial A está contenido en $\Delta := \{(x,y) \in \Omega\times\Omega; x = y\}$.*

Demostración. Dado $(x_0, y_0) \in (\Omega\times\Omega) \setminus \Delta$ tomamos un entorno abierto relativamente compacto Q de (x_0, y_0), disjunto con Δ. Probaremos que (K_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}_{(\omega)}(Q)$. Sin pérdida de generalidad podemos tomar $1 \le l \le p$ y $c_0 > 0$ tales que $|x_l - y_l| \ge c_0$ para cada $(x,y) \in Q$. Sea $R \ge \frac{3}{c_0}$ y sea (C_k) una sucesión de constantes positivas de modo que

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \le C_k e^{(\rho-\delta)k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{k})+(\rho-\delta)k\varphi^*(\frac{|\beta|}{k})}(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}e^{m\omega(\xi)}$$

para cada $k \in \mathbb{N}$, $(x,y) \in Q$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \ge \frac{k}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{k})$.

Ahora calculamos

$$\begin{aligned} &D_x^\alpha D_y^\gamma\big[K_n(x,y) - K_{n+1}(x,y)\big] = \\ &= \sum_{\beta\le\alpha}\sum_{\mu\le\gamma} \tbinom{\alpha}{\beta}\tbinom{\gamma}{\mu} \int e^{i(x-y)\xi}\xi^{\beta+\mu}(-1)^{|\mu|}D_x^{\alpha-\beta}D_y^{\gamma-\mu}a(x,y,\xi)\big(\Psi(\tfrac{\xi}{2^n}) - \Psi(\tfrac{\xi}{2^{n+1}})\big)d\xi. \end{aligned}$$

Fijamos $\overline{k} \in \mathbb{N}$ y tomamos $k > \overline{k}$ que determinaremos más tarde. Para cada $N \in \mathbb{N}$ se tiene, después de integrar por partes N veces,

$$D_x^\alpha D_y^\gamma\big(K_n(x,y) - K_{n+1}(x,y)\big) = \sum_{\beta\le\alpha}\sum_{\mu\le\gamma} \tbinom{\alpha}{\beta}\tbinom{\gamma}{\mu}\frac{(-1)^{N+|\mu|}}{(x_l-y_l)^N}\int e^{i(x-y)\xi}\lambda_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mu}d\xi$$

donde

$$\begin{aligned} \lambda_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mu} &= D_{\xi_l}^N\{\xi^{\mu+\beta}D_x^{\alpha-\beta}D_y^{\gamma-\mu}a(x,y,\xi)\big(\Psi(\tfrac{\xi}{2^n}) - \Psi(\tfrac{\xi}{2^{n+1}})\big)\} \\ &= \sum \tfrac{N!}{N_1!N_2!N_3!}\tfrac{(\mu_l+\beta_l)!}{(\mu_l+\beta_l-N_1)!N_1!}N_1!\xi^{\mu+\beta-N_1e_l}D_{\xi_l}^{N_2}\big(\Psi(\tfrac{\xi}{2^n}) - \Psi(\tfrac{\xi}{2^{n+1}})\big)D_{\xi_l}^{N_3}D_x^{\alpha-\beta}D_y^{\gamma-\mu}a(x,y,\xi), \end{aligned}$$

y la última suma se extiende sobre todos los N_1, N_2, N_3 tales que $N_1 + N_2 + N_3 = N$ y $N_1 \le \mu_l + \beta_l$. Aquí e_l es el multi-índice con 1 en la l-ésima posición y 0 en otro lugar.
La función $\Psi(\frac{\xi}{2^n}) - \Psi(\frac{\xi}{2^{n+1}})$ se anula si $|\xi| \le 2^n$ ó $|\xi| \ge 2^{n+2}$. Por lo tanto el soporte de $\Psi(\frac{\xi}{2^n}) - \Psi(\frac{\xi}{2^{n+1}})$ está contenido en $2^n \le |\xi| \le 2^{n+2}$ y esta desigualdad implica que $|\xi^{\mu+\beta-N_1e_l}| \le \frac{(2^{n+2})^{|\mu+\beta|}}{(2^n)^{N_1}}$. También se cumple

$$|D_{\xi_l}^{N_2}\big(\Psi(\tfrac{\xi}{2^n}) - \Psi(\tfrac{\xi}{2^{n+1}})\big)| \le 2|\Psi|_k e^{k\varphi^*(\frac{N_2}{k})}\frac{1}{(2^n)^{N_2}}.$$

Las estimaciones que siguen se dan en el soporte de $\Psi(\frac{\xi}{2^n}) - \Psi(\frac{\xi}{2^{n+1}})$. Sea $N \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{k}{N}\varphi^*(\frac{N}{k}) \le \log(\frac{2^n}{R^{1/(\rho-\delta)}})$. Entonces $\log(\frac{|\xi|}{R}) \ge \frac{k}{N_3}\varphi^*(\frac{N_3}{k})$. Usando que $\frac{\varphi^*(t)}{t}$ es creciente, $k\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{k}) \le \overline{k}\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{\overline{k}})$. Además, $(1+|\xi|)^{-\rho N_3} \le |\xi|^{-\rho N_3} \le (2^n)^{-\rho N_3}$. Del lema 0.1.6(1), tenemos

$$(1+|\xi|)^{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}e^{-\overline{k}\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{\overline{k}})} \le e^{\overline{k}\omega(1+|\xi|)} \le e^{\overline{k}\omega(2^{n+3})}.$$

En consecuencia,

$$\begin{aligned} |D_x^{\alpha-\beta}D_y^{\gamma-\mu}D_{\xi_l}^{N_3}a(x,y,\xi)| &\le C_k e^{(\rho-\delta)k\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{k})+(\rho-\delta)k\varphi^*(\frac{N_3}{k})}(1+|\xi|)^{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|\delta-N_3\rho}e^{m\omega(\xi)} \\ &\le C_k e^{\overline{k}\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{\overline{k}})}\Big(\frac{e^{k\varphi^*(\frac{N_3}{k})}}{(2^n)^{N_3}}\Big)^{\rho-\delta}e^{(m+\overline{k})\omega(2^{n+3})}. \end{aligned}$$

Usando el apartado (4) de la proposición 0.1.5, se tiene $N_1! \le E_k e^{k\varphi^*(\frac{N_1}{k})}$, y deducimos

$$\begin{aligned} |\lambda_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mu}| &\le \textstyle\sum \frac{N!}{N_1!N_2!N_3!}\frac{(\mu_l+\beta_l)!}{(\mu_l+\beta_l-N_1)!N_1!}\times \\ &\quad 2C_kE_k|\Psi|_k\frac{e^{k\varphi^*(\frac{N_1}{k})}}{(2^n)^{N_1}}\frac{e^{k\varphi^*(\frac{N_2}{k})}}{(2^n)^{N_2}}\Big(\frac{e^{k\varphi^*(\frac{N_3}{k})}}{(2^n)^{N_3}}\Big)^{(\rho-\delta)}\times \\ &\quad e^{\overline{k}\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{\overline{k}})}(2^{n+2})^{|\mu+\beta|}e^{(m+\overline{k})\omega(2^{n+3})}. \end{aligned}$$

Como $\log(\frac{2^n}{R}) \ge \frac{k}{N}\varphi^*(\frac{N}{k}) \ge \frac{k}{N_i}\varphi^*(\frac{N_i}{k})$ $(i=1,2)$ se tiene $\frac{e^{k\varphi^*(\frac{N_i}{k})}}{(2^n)^{N_i}} \le 1$. Por otro lado $\varphi^*(\frac{N_1}{k})+\varphi^*(\frac{N_2}{k})+\varphi^*(\frac{N_3}{k}) \le \varphi^*(\frac{N}{k})$,

$$\textstyle\sum_{N_1+N_2+N_3=N}\frac{N!}{N_1!N_2!N_3!} = 3^N, \qquad \sum_{N_1\le\mu_l+\beta_l}\frac{(\mu_l+\beta_l)!}{(\mu_l+\beta_l-N_1)!N_1!} \le 2^{|\mu+\beta|}$$

y del lema 0.1.6, $(2^{n+3})^{|\mu+\beta|} \le e^{\overline{k}\omega(2^{n+3})+\overline{k}\varphi^*(\frac{|\mu+\beta|}{\overline{k}})}$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} |\lambda_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mu}| &\le 2C_kE_k|\Psi|_k3^N\Big(\frac{e^{k\varphi^*(\frac{N}{k})}}{(2^n)^N}\Big)^{(\rho-\delta)}e^{\overline{k}\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{\overline{k}})}e^{(m+2\overline{k})\omega(2^{n+3})} \\ &:= I_{N,\alpha,\gamma}. \end{aligned}$$

Como el soporte de $\lambda_{N,\alpha,\beta,\gamma,\mu}(x,y,\cdot)$ está contenido en el conjunto $\{\xi\in\mathbb{R}^p : 2^n \le |\xi| \le 2^{n+2}\}$, cuya medida de Lebesgue es $(2^{n+1})^p(4^p-1)$, finalmente obtenemos

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma\big(K_n(x,y)-K_{n+1}(x,y)\big)| \le 2^{|\alpha+\gamma|}(2^{n+1})^p(4^p-1)\frac{1}{c_0^N}I_{N,\alpha,\gamma}.$$

Consideremos el sistema de seminormas en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ (véase lema 0.1.10)

$$q_{D,m}(f) := \sup_{x\in D}\sup_{\alpha\in\mathbb{N}_0^p} e^{-|\alpha|}|f^{(\alpha)}(x)|\exp\big(-m\varphi^*(\frac{|\alpha|}{m})\big),$$

siendo D un compacto de Ω y $m \in \mathbb{N}$.

Ponemos $R^* := R^{1/(\rho-\delta)}$. Entonces, usando que $\frac{3}{c_0} \leq R$, deducimos

$$q_{Q,\overline{k}}(K_n - K_{n+1}) \leq 2E_kC_k|\Psi|_k(2^{n+1})^p(4^p-1)\Big(\frac{(R^*)^N e^{k\varphi^*(\frac{N}{k})}}{(2^n)^N}\Big)^{(\rho-\delta)} e^{(m+2\overline{k})\omega(2^{n+3})}$$

siempre que $\log(\frac{2^n}{R^*}) \geq \frac{k}{N}\varphi^*(\frac{N}{k})$. Observemos que las estimaciones obtenidas también se verifican si reemplazamos N por $j \leq N$. Tomando ahora N tal que $\frac{k}{N}\varphi^*(\frac{N}{k}) \leq \log(\frac{2^n}{R^*}) < \frac{k}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{k})$ una aplicación del lema 0.1.7 da

$$\min_{0\leq j\leq N} \frac{(R^*)^j e^{k\varphi^*(\frac{j}{k})}}{(2^n)^j} \leq e^{-k\omega(\frac{2^n}{R^*})+\log(\frac{2^n}{R^*})}$$

y si k es bastante grande podemos concluir

$$q_{Q,\overline{k}}(K_n - K_{n+1}) \leq 2C_kE_k|\Psi|_k(2^{n+1})^p(4^p-1)e^{-\omega(2^n)}$$

de donde se sigue que (K_n) es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{E}_{(\omega)}(Q)$. Y consecuentemente (x_0, y_0) no pertenece al soporte singular respecto de (ω) de la distribución núcleo K. $\square$

Ahora estamos en condiciones de demostrar que los operadores pseudodiferenciales son pseudolocales.

Teorema 1.5.7 *Sea $A : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ un operador pseudodiferencial asociado a la amplitud $a(x,y,\xi)$ en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Entonces*

$$\mathrm{sing}_{(\omega)}\ \mathrm{supp}(A\mu)\ \subset\ \mathrm{sing}_{(\omega)}\ \mathrm{supp}(\mu)$$

para cada $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$.

Demostración. Sea $K \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$ la distribución núcleo del operador pseudodiferencial $A : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$.

Supongamos que $x_0 \notin \mathrm{sing}_{(\omega)} \mathrm{supp}\, \mu$, siendo $\mu \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ y tomamos V un entorno de x_0, W un entorno de $\mathrm{sing}_{(\omega)} \mathrm{supp}\, \mu$ tal que $\overline{V} \cap \overline{W} = \emptyset$. Sean $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(V)$, $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(W)$, $\varphi = 1$ en un entorno de x_0, y $\psi = 1$ en un entorno de $\mathrm{sing}_{(\omega)} \mathrm{supp}\, \mu$. Entonces

$$A\mu = A(\psi\mu) + A((1-\psi)\mu).$$

Se tiene que $(1-\psi)\mu$ tiene soporte compacto y, por la elección de ψ, $(1-\psi)\mu \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Por lo tanto $(1-\psi)\mu \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ y en consecuencia $A((1-\psi)u) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

Para concluir que $x_0 \notin \mathrm{sing}_{(\omega)} \mathrm{supp}\, A\mu$, es suficiente probar que $A(\psi\mu) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, siendo Ω un entorno de x_0. Para ello consideramos el operador $B : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ dado por $Bw := \varphi A(\psi w)$. Calculamos su núcleo: Para cada $\omega, v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ se tiene

$$\begin{aligned} < Bw, v > &= < A(\psi w), \varphi v > = < K, \varphi v \otimes \psi w > \\ &= < (\varphi \otimes \psi)K, v \otimes w > . \end{aligned}$$

Luego el núcleo de B es $K_B = (\varphi \otimes \psi)K$. Como $\mathrm{sing}_{(\omega)}\, \mathrm{supp}\, K \subset \Delta$ y $\mathrm{supp}\, \varphi \cap \mathrm{supp}\, \psi = \emptyset$, se tiene que $K_B \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$ y por lo tanto B se extiende a un operador lineal y continuo $B : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

Por último, sea $(u_j) \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ tal que $u_j \to u$ en $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. Para cada $v \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ se cumple

$$\begin{aligned} < \varphi A(\psi u), v > &= \lim_j < \varphi A(\psi u_j), v > = \lim_j < B(u_j), v >= \\ &= < B(u), v >, \end{aligned}$$

siendo $B(u) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Si Ω es un entorno de x_0 de modo que $\varphi = 1$ en Ω, entonces $A(\psi u)|_\Omega \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, lo que prueba que $x_0 \notin \mathrm{sing}_{(\omega)}\, \mathrm{supp}\, Au$. □

Ya hemos visto que algunos operadores de convolución son operadores pseudodiferenciales. Es natural preguntarse si todo operador de convolución es un operador pseudodiferencial. La respuesta, tal como se deduce del teorema anterior, es negativa. En efecto, si un operador de convolución $\psi \to \psi * S$, $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, $S \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, es un operador pseudodiferencial, el (ω)-soporte singular de S se reduce a $\{0\}$, pues si consideramos la convolución con S como operador de $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ a $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, en virtud del teorema 1.5.7,

$$\mathrm{sing}_{(\omega)}\, \mathrm{supp}(S) = \mathrm{sing}_{(\omega)}\, \mathrm{supp}(\delta * S) \subset \mathrm{sing}_{(\omega)}\, \mathrm{supp}(\delta) = \{0\}.$$

Por lo tanto, no todo operador de convolución es un operador pseudodiferencial.

Un argumento conocido permite deducir del teorema 1.5.6 que, dado un operador pseudodiferencial A, podemos encontrar un operador pseudodiferencial con soporte propio B tal que $A - B$ es (ω)-regularizante (véase, por ejemplo, [18]).

Lema 1.5.8 *Sean ω y σ dos funciones peso tales que $\omega(t^{1/r}) = o(\sigma(t))$ cuando $t \to \infty$ para cierto $0 < r \leq 1$. Entonces, dados $\lambda, \mu > 0$ existe $C_{\lambda,\mu} > 0$ de modo que, para todo $j \in \mathbb{N}_0$ se tiene*

$$\lambda \varphi^*_\sigma(\frac{j}{\lambda}) \leq C_{\lambda,\mu} + r\mu \varphi^*_\omega(\frac{j}{\mu}).$$

Demostración. Como $\omega(t^{1/r}) = o(\sigma(t))$ $(t \to \infty)$, dados $\lambda, \mu > 0$ existe $C := C_{\lambda,\mu} > 0$ tal que $\mu\omega(e^{t/r}) \leq C + \lambda\sigma(e^t)$ para cada $t > 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \lambda \varphi^*_\sigma(\frac{j}{\lambda}) &= \sup_{t>0} \{jt - \lambda\sigma(e^t)\} \leq \\ &\leq C + \mu r \sup_{t>0} \{\frac{j}{\mu}\frac{t}{r} - \varphi_\omega(\frac{t}{r})\} = C + \mu r \varphi^*_\omega(\frac{j}{\mu}), \end{aligned}$$

para cada $j \in \mathbb{N}_0$. □

Lema 1.5.9 *Sean ω y σ dos funciones peso tales que $\omega(t^{1/d}) = o(\sigma(t))$ cuando $t \to \infty$ siendo $d = \rho - \delta$. Si $a(x, y, \xi)$ es una amplitud en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ (respectivamente en $AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$) y $\chi(x, y) \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega \times \Omega)$, la función $a(x, y, \xi)\chi(x, y)$ es una amplitud en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ (respectivamente en $AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$).*

Demostración. Veamos el caso en que $a \in S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Para el caso en que $a \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ los mismos argumentos son válidos. Observemos también que si $\rho = 1$ y $\delta = 0$ la condición sobre los pesos no supone ninguna restricción.

La función $\chi \in AS^{0,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)(\subset S^{0,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega))$. En efecto, fijado un compacto $Q \subset \Omega \times \Omega$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $C_n > 0$ tal que

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y \chi(x,y)| \leq C_n e^{n\varphi^*_\sigma(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})},$$

siempre que $(x,y) \in Q$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^p_0$ y $n \in \mathbb{N}$. Por el lema 1.5.8, existe una constante D_n tal que

$$e^{n\varphi^*_\sigma(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})} \leq D_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*_\omega(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})},$$

de donde

$$|D^\alpha_x D^\gamma_y \chi(x,y)| \leq E_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*_\omega(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})},$$

para una nueva constante $E_n > 0$, siempre que $(x,y) \in Q$, $\alpha, \gamma \in \mathbb{N}^p_0$ y $n \in \mathbb{N}$. De donde se deduce que $\chi \in AS^{0,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Aplicando ahora la proposición 1.2.15 se concluye. $\square$

Teorema 1.5.10 *Sean ω y σ dos funciones peso tales que $\omega(t^{1/d}) = o(\sigma(t))$ cuando $t \to \infty$ siendo $d = \rho - \delta$. Todo operador pseudodiferencial T en la clase $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ (respectivamente en la clase $AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$) se puede descomponer como $T = T_1 + T_2$, siendo $T_1 \in S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ (respectivamente $T_1 \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$) un operador pseudodiferencial de soporte propio y T_2 un operador (ω)-regularizante.*

Demostración. Sea $(\varphi_j)_{j=1}^\infty$ una partición localmente finita de la unidad con $\varphi_j \in \mathcal{D}_{(\sigma)}(\Omega)$, $j = 1, 2, \ldots$.

Definimos $\chi(x,y) = \sum_{(j,k)\in I} \varphi_j(x)\varphi_k(y)$, siendo $I = \{(j,k) \mid \operatorname{supp}\varphi_j \cap \operatorname{supp}\varphi_k \neq \emptyset\}$. Entonces χ está bien definida y $\chi \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega \times \Omega) \subset \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega \times \Omega)$, puesto que la suma es localmente finita y $\omega(t) = o(\sigma(t))$, cuando $t \to \infty$.

Veamos que $1 - \chi$ se anula en un entorno de la diagonal $\Delta(\Omega \times \Omega) = \{(x,x) \mid x \in \Omega\}$. Dado $x_0 \in \Omega$ y $V \subset \Omega$ un entorno relativamente compacto de x_0, existe N tal que $\varphi_j|_V = 0$ si $j > N$. Además, si $(j,k) \notin I$, $(x_0, x_0) \notin \operatorname{supp}\varphi_j \times \operatorname{supp}\varphi_k$, luego existe $W \subset V$ entorno de x_0 tal que $(W \times W) \cap (\operatorname{supp}\varphi_j \times \operatorname{supp}\varphi_k) = \emptyset$, para cada $(j,k) \notin I$. En consecuencia

$$1 - \chi(x,y) = \sum_{j,k} \varphi_j(x)\varphi_k(y) - \sum_{(j,k)\in I} \varphi_j(x)\varphi_k(y) = \sum_{(j,k)\notin I} \varphi_j(x)\varphi_k(y) = 0,$$

para todo $(x,y) \in W \times W$. Por lo tanto $1 - \chi$ se anula en un entorno de (x_0, x_0), para cada $x_0 \in \Omega$, es decir, $1 - \chi$ se anula en un entorno de la diagonal.

Además, $\operatorname{supp}\chi \subset \cup_{(j,k)\in I} \operatorname{supp}\varphi_j \times \operatorname{supp}\varphi_k$, luego si K es un compacto de Ω y $C := \operatorname{supp}\chi$,

$$C(K) = \{x \in \Omega \mid \text{existe } y \in K \text{ con } (x,y) \in \operatorname{supp}\chi\}.$$

Pero $\{k \ : \ \operatorname{supp}\varphi_k \cap K \neq \emptyset\}$ es finito y si k varía en dicho conjunto $\{j \mid \text{existe } k \ : \ (j,k) \in I,\ \operatorname{supp}\varphi_k \cap K \neq \emptyset\} =: I_K$ es finito.

Veamos que $C(K) \subset \cup_{j \in I_K} \operatorname{supp} \varphi_j$. Para ello, sea $x \in C(K)$. De la definición de $C(K)$ existe $y \in K$ de modo que $(x, y) \in \operatorname{supp} \chi \subset \cup_{(j,k) \in I} \operatorname{supp} \varphi_j \times \operatorname{supp} \varphi_k$. Por lo que existe $(j, k) \in I$ tal que $(x, y) \in \operatorname{supp} \varphi_j \times \operatorname{supp} \varphi_k$. Así, $y \in K \cap \operatorname{supp} \varphi_k \neq \emptyset$ y, además, $x \in \operatorname{supp} \varphi_j$, siendo j tal que $(j, k) \in I$. Entonces $j \in I_K$, de donde la conclusión.

Como el conjunto I_K es finito, se deduce entonces que $C(K)$ es compacto. Análogamente, $C^{-1}(L)$ es compacto, por lo que concluimos que $\operatorname{supp} \chi$ es propio.

Sea ahora $a(x, y, \xi)$ una amplitud en la clase $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ que define el operador T (la demostración para el caso analítico es idéntica). Entonces

$$b_1(x, y, \xi) := \chi(x, y) a(x, y, \xi),$$

$$b_2(x, y, \xi) := (1 - \chi(x, y)) a(x, y, \xi)$$

son amplitudes en $S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Supongamos por un momento que esto es cierto. Entonces, $a = b_1 + b_2$, luego T se puede descomponer como $T = T_1 + T_2$ siendo T_i el operador pseudodiferencial asociado a b_i, $i = 1, 2$.

Como $\chi(x, y)$ es una suma localmente finita de funciones $\varphi_j \varphi_k$ resulta que el núcleo K_{T_1} del operador T_1 coincide con la distribución $\chi(x, y) K_T$, con lo cual $\operatorname{supp} K_{T_1} \subset \operatorname{supp} \chi$. Por lo tanto T_1 tiene soporte propio. Por el lema 1.5.9, $T_2 \in S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Además, como $\operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp} K_T \subset \Delta(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$ (teorema 1.5.6) y $K_{T_2} = (1 - \chi) K_T$, deducimos que $K_{T_2} \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^p)$, por 1.3.3 el operador T_2 es regularizante. $\square$

Capítulo 2

Cálculo simbólico

Uno de los objetivos de la teoría de operadores pseudodiferenciales es reemplazar tanto como sea posible el cálculo de los núcleos de los operadores por el cálculo de símbolos de modo que la teoría de los operadores se pueda convertir en una teoría algebraica para los correspondientes símbolos. Esto justifica la necesidad de desarrollar el cálculo simbólico en el contexto de las clases no casi analíticas.

La definición que presentamos de suma formal (de amplitudes) y de sumas formales equivalentes se basa en las definiciones que aparecen en Rodino [38] y Zanghirati [45] (para operadores en clases de Gevrey de tipo Roumieu) en el siguiente sentido: si tomamos $\omega(t) = t^d$, $0 < d < 1$, entonces nuestras definiciones son las 'reformulaciones' naturales de las definiciones de [38, 45] si pretendemos desarrollar una teoría para operadores pseudodiferenciales en clases de Gevrey de tipo Beurling.

Después de las primeras definiciones probamos que si una amplitud es equivalente a 0 entonces el operador pseudodiferencial que define es regularizante.

Los espacios de funciones $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ son límites inductivos de espacios de Fréchet y por tanto, topológicamente más complejos que los espacios de funciones test de tipo Gevrey (Roumieu) que son límite inductivo de una sucesión de espacios de Banach. Esta diferencia tiene su importancia cuando pretendemos construir una amplitud a partir de una suma formal y 'explica' la construcción por bloques que se lleva a cabo en la demostración del teorema 2.1.8. Por último, en relación con este problema queremos mencionar que la teoría de Matsumoto [33] no permite construir un símbolo a partir de una suma formal en el caso en que la clase sea lo suficientemente grande para contener todas las clases de Gevrey.

El trabajo con amplitudes, y no sólo con símbolos, permite estudiar fácilmente el adjunto de un operador y usar dualidad para probar de manera sencilla que todo operador pseudodiferencial se puede extender a una aplicación definida en el espacio de las (ultra)distribuciones de soporte compacto y que toma valores en el espacio de todas las (ultra)distribuciones. Pero también presenta algunos inconvenientes, siendo uno de ellos que un operador pseudodiferencial puede tener muchas representaciones distintas en términos de amplitudes. Además, no se puede esperar que la amplitud de una composición de operadores sea 'esencialmente' el producto de las dos amplitudes. El teorema 2.1.14 prueba que todo operador pseudodiferencial A se puede escribir, localmente y módulo un operador regularizante, como un operador $P(x,D)$ asociado a un símbolo $p(x,\xi)$ con desarrollo asintótico conocido y expresado en términos de la amplitud que define el operador A. Para obtener este resultado necesitamos trabajar con clases de funciones lo suficientemente grandes como para contener alguna clase de Gevrey. Esta condición se verifica si ω es un peso fuerte ([34]) y garantiza que un análogo al clásico teorema de Borel es cierto para la clase $\mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. No obstante, la posibilidad de resolver el problema de Borel no se utiliza explícitamente en la demostración que presentamos.

Después de introducir la traspuesta y la composición de sumas formales, probamos que nuestra clase de operadores pseudodiferenciales es cerrada al componer operadores y al tomar traspuestas y verificamos que, como era deseable, estas operaciones se reducen a operaciones formales entre los correspondientes símbolos de los operadores. Así, por ejemplo, bajo las condiciones apropiadas la composición $P(x,D)\circ Q(x,D)$ se puede expresar, módulo un operador regularizante, como un operador pseudodiferencial con símbolo $(2\pi)^p p(x,\xi)q(x,\xi)+r(x,\xi)$ donde $r(x,\xi)$ admite un desarrollo asintótico

$$r(x,\xi)\sim(2\pi)^p\sum_{j\neq 0}\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)D_x^\alpha q(x,\xi)$$

(teorema 2.3.3).

2.1. Cálculo simbólico

Uno de los problemas que se plantean es cómo determinar la clase de amplitudes de modo que la teoría de los operadores se pueda convertir en una teoría algebraica para las correspondientes amplitudes. Más aun, la clase de operadores debe ser cerrada para el producto y al tomar adjuntos de operadores. Esto justifica la necesidad de desarrollar en este contexto el cálculo simbólico clásico.

Definición 2.1.1 *Denotamos por* $FAS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *el conjunto de todas las sumas formales* $\sum_{j\in\mathbb{N}_0}a_j(x,y,\xi)$*, tales que* $a_j(x,y,\xi)\in C^\infty(\Omega\times\Omega\times\mathbb{R}^p)$ *y para cada conjunto compacto* $Q\subset\Omega\times\Omega$ *existen* $R\geq 1$*,* $B\geq 1$ *y una sucesión* $C_n>0$*,* $n\in\mathbb{N}$ *con la propiedad*

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a_j(x,y,\xi)|\leq C_nB^{|\beta|}\beta!e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+j}{n})}e^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho-(\rho-\delta)j} \tag{1.1}$$

para cada $j\in\mathbb{N}_0$*,* $(x,y)\in Q$ *y* $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq\frac{n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})$.

Observemos que, para cada $j\in\mathbb{N}$, $a_j(x,y,\xi)$ es una amplitud en $AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ (y, por lo tanto, cualquier suma finita de a_j's): en efecto, con la notación anterior, fijado $j\in\mathbb{N}$, se tiene

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a_j(x,y,\xi)|\leq C_nB^{|\beta|}\beta!e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})}e^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho-(\rho-\delta)j}.$$

Como $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq\frac{n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})\geq\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})$, se tiene $|\xi|^{j(\rho-\delta)}\geq e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})}$, y así

$$(1+|\xi|)^{-j(\rho-\delta)}\leq e^{-(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})}.$$

De donde se deduce

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a_j(x,y,\xi)| \leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})} e^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho},$$

lo que concluye la prueba.

Podemos establecer un resultado similar al lema 1.1.3. La prueba del mismo es análoga a la de dicho lema:

Lema 2.1.2 *La suma formal $\sum_{j\in\mathbb{N}_0} a_j(x,y,\xi)$ pertenece al espacio $FAS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ si, y sólo si, para cada conjunto compacto $Q\subset\Omega\times\Omega$ existen $R\geq 1$, $B\geq 1$, $A\geq 1$ y una sucesión $C_n>0$, $n\in\mathbb{N}$ cumpliendo una de las siguientes propiedades:*

(1) Para cada $(x,y)\in Q$:

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a_j(x,y,\xi)| \leq C_n\beta! B^\beta \frac{A^{|\alpha+\gamma|+j}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+j}{n})}}{|\xi|^{-\delta|\alpha+\gamma|+\rho|\beta|+(\rho-\delta)j}} e^{m\omega(\xi)} \tag{1.2}$$

siempre que $|\xi|\geq 1$ y $\beta=0$, $j=0$ ó $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq \frac{n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})$. Y también

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a_j(x,y,\xi)| \leq C_n\beta! B^\beta A^{|\alpha+\gamma|+j}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+j}{n})} e^{m\omega(\xi)} \tag{1.3}$$

para cada $|\xi|\leq 1$.

(2) Para cada $(x,y)\in Q$:

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a_j(x,y,\xi)| \leq C_n\beta! B^\beta \frac{A^{|\alpha+\gamma|+j}e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+j}{n})}}{(1+|\xi|)^{-\delta|\alpha+\gamma|+\rho|\beta|+(\rho-\delta)j}} e^{m\omega(\xi)} \tag{1.4}$$

siempre que $j\in\mathbb{N}_0$ y $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq \frac{n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})$.

Sea $a\in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ y pongamos $a_0:=a$, $a_j:=0$ para $j\neq 0$. Entonces podemos identificar a con la suma formal $\sum a_j$.

Ejemplo 2.1.3 Sea $a(x,y,\xi)\in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ y $p_j(x,\xi):=\sum_{|\alpha|=j}\frac{1}{\alpha!}D_\xi^\alpha\partial_y^\alpha a(x,y,\xi)_{|y=x}$. Entonces la serie $\sum_{j=0}^\infty p_j(x,\xi)$ es una suma formal en $FAS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$.

En efecto, por la regla de la cadena

$$D_x^\gamma D_\xi^\beta\big[D_\xi^\alpha\partial_y^\alpha a(x,y,\xi)_{|y=x}\big] = \sum_{\nu\leq\gamma}\binom{\gamma}{\nu}D_x^\nu D_y^{\gamma-\nu}\big[D_\xi^{\alpha+\beta}\partial_y^\alpha a(x,y,\xi)_{|y=x}\big].$$

Supongamos que $|\alpha|=j$. Fijado un compacto $K\subset\Omega$, dado que $a(x,y,\xi)\in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$, existen una sucesión (C_n) de números positivos y constantes $R \geq 1$ y $B \geq 1$ tales que

$$\begin{aligned}
&\big|D_x^\gamma D_\xi^\beta \big[D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha a(x,y,\xi)_{|y=x}\big]\big| \leq \\
&\leq \sum_{\nu\leq\gamma} \tbinom{\gamma}{\nu} |D_x^\nu D_y^{\gamma-\nu}\big[D_\xi^{\alpha+\beta}\partial_y^\alpha a(x,y,\xi)_{|y=x}\big]| \leq \\
&\leq C_n B^{|\beta|+|\alpha|}(\beta+\alpha)! \sum_{\nu\leq\gamma} \tbinom{\gamma}{\nu} \frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\nu+\gamma-\nu+\alpha|}{n})}}{(1+|\xi|)^{|\nu+\gamma-\nu+\alpha|\delta-\rho|\alpha+\beta|}} e^{m\omega(\xi)} \leq \\
&\leq C_n B^{|\beta|+j}(\beta+\alpha)! 2^{|\gamma|} \frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|+j}{n})}}{(1+|\xi|)^{|\gamma|\delta-\rho|\beta|-(\rho-\delta)j}} e^{m\omega(\xi)}.
\end{aligned}$$

siempre que $x \in K$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{|\alpha+\beta|}{n}\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta|}{n}) = \frac{|\beta|+j}{n}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})$.

Por lo tanto, de la definición de $p_j(x,\xi)$:

$$\begin{aligned}
&|D_x^\gamma D_\xi^\beta p_j(x,\xi)| \leq \\
&\qquad \leq C_n B^{|\beta|+j} 2^{|\gamma|} \frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|+j}{n})}}{(1+|\xi|)^{|\gamma|\delta-\rho|\beta|-(\rho-\delta)j}} e^{m\omega(\xi)} \sum_{|\alpha|=j} \frac{(\beta+\alpha)!}{\alpha!}.
\end{aligned}$$

Como $\binom{\beta+\alpha}{\alpha} \leq 2^{|\beta+\alpha|}$ se tiene

$$\sum_{|\alpha|=j} \frac{(\beta+\alpha)!}{\alpha!} = \beta! \sum_{|\alpha|=j} \frac{(\beta+\alpha)!}{\beta!\alpha!} \leq \beta! 2^{|\beta|+j} \sum_{|\alpha|=j} 1 \leq \beta! 2^{|\beta|+j} p^j.$$

Una aplicación del lema 2.1.2 concluye la prueba.

Definición 2.1.4 *Dos sumas formales $\sum a_j$ y $\sum b_j$ en $FAS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ se dice que son equivalentes si para cada conjunto compacto $Q \subset \Omega \times \Omega$ existen $R \geq 1$, $B \geq 1$ y dos sucesiones, (C_n) de números positivos, y (N_n) de números naturales, con la propiedad*

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta \sum_{j<N}(a_j - b_j)| \leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{n})} e^{m\omega(\xi)} (1+|\xi|)^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho-(\rho-\delta)N}$$

para cada $(x,y) \in Q$, $N \geq N_n$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n})$.

Nota 2.1.5 Si $a(x,y,\xi) = 0$ para cada $x,y \in \Omega$ y $|\xi| \geq M$ entonces $a \sim 0$. En particular, todo operador (ω)-regularizante está asociado a una amplitud equivalente a cero (véase la proposición 1.3.2).

Puede darse un resultado similar al lema 2.1.2 para la definición 2.1.4. De hecho, que $a \sim 0$ significa que: Fijado un conjunto compacto $Q \subset \Omega \times \Omega$, existen dos sucesiones (C_n) (de números positivos) y (N_n) (de números naturales) y constantes $B \geq 1$ y $R \geq 1$ tales que

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a(x,y,\xi)| \leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{n})} e^{m\omega(\xi)} |\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|-\rho|\beta|-(\rho-\delta)N}$$

para cada $(x,y) \in Q$, $N \geq N_n$, y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n})$ (podemos suponer que $N \geq 1$ siempre).

Proposición 2.1.6 *Sea A un operador pseudodiferencial definido por una amplitud $a \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ que es equivalente a cero. Entonces A es un operador (ω)-regularizante.*

Demostración. Veremos que $K(x,y) := \int e^{i(x-y)\xi} a(x,y,\xi)d\xi$ pertenece a $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$ y que $(Au)(x) = \int K(x,y)u(y)dy$ para cada $u \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Fijamos un conjunto compacto $Q \subset \Omega\times\Omega$, entonces (nota 2.1.5)

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma a(x,y,\xi)| \le C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{n})} e^{m\omega(\xi)} |\xi|^{\delta|\alpha+\gamma|-(\rho-\delta)N}$$

para cada $(x,y)\in Q$, $N \ge N_n$, y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \ge \frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})$.

Ahora fijamos $n_0 \in \mathbb{N}$ y tomamos $0 < \epsilon < 1$ y $n \in \mathbb{N}$ con $\omega(\frac{t}{R}) \ge \epsilon\omega(t) - \frac{1}{\epsilon}$ y $\epsilon(\rho-\delta)n > 2n_0$. Entonces, para cada $N \ge N_{8n}$ y $(\frac{8n}{N}\varphi^*(\frac{N}{8n}) \le)\frac{2n}{N}\varphi^*(\frac{N}{2n}) \le \log(\frac{|\xi|}{R}) \le \frac{2n}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{2n})$, teniendo en cuenta que

$$8n\varphi^*(\tfrac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|+N}{8n}) \le 4n\varphi^*(\tfrac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{4n}) + 4n\varphi^*(\tfrac{N}{4n}) \le n_0\varphi^*(\tfrac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{n_0}) + 4n\varphi^*(\tfrac{N}{4n}),$$

tenemos que $|D_x^\alpha D_y^\gamma\big(e^{i(x-y)\xi}a(x,y,\xi)\big)|$ no es mayor que

$$C_{8n}\sum_{\beta\le\alpha}\sum_{\mu\le\gamma}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\mu} e^{(\rho-\delta)8n\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|+N}{8n})}|\xi|^{|\beta+\mu|+\delta|\alpha-\beta+\gamma-\mu|-(\rho-\delta)N}e^{m\omega(\xi)} \le$$
$$\le C_{8n}\sum_{\beta\le\alpha}\sum_{\mu\le\gamma}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\mu} e^{(\rho-\delta)n_0\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{n_0})}|\xi|^{|\beta+\mu|+\delta|\alpha-\beta+\gamma-\mu|-(\rho-\delta)N}e^{m\omega(\xi)}e^{(\rho-\delta)4n\varphi^*(\frac{N}{4n})}.$$

Una aplicación del lema 0.1.6 proporciona

$$|\xi|^{\delta|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}e^{-\delta n_0\varphi^*(\frac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{n_0})} \le e^{n_0\omega(\xi)}$$

y también

$$|\xi|^{|\beta+\mu|} \le e^{n_0\varphi^*(\frac{|\beta+\mu|}{n_0})}e^{n_0\omega(\xi)}.$$

De la convexidad de φ^*,

$$\rho n_0\varphi^*(\tfrac{|\alpha-\beta+\gamma-\mu|}{n_0}) + n_0\varphi^*(\tfrac{|\beta+\mu|}{n_0}) \le n_0\varphi^*(\tfrac{|\alpha+\gamma|}{n_0}),$$

y, teniendo en cuenta $\sum_{\beta\le\alpha}\sum_{\mu\le\gamma}\binom{\alpha}{\beta}\binom{\gamma}{\mu} \le 2^{|\alpha+\gamma|}$, concluimos que

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma\big(e^{i(x-y)\xi}a(x,y,\xi)\big)| \le C_{8n}2^{|\alpha+\gamma|}e^{n_0\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n_0})}e^{(m+2n_0)\omega(\xi)}e^{(\rho-\delta)4n\varphi^*(\frac{N}{4n})}|\xi|^{-(\rho-\delta)N}.$$

Del lema 0.1.7(2), y usando que $\log(|\xi|/R) \le \ell\omega(\xi)$ para cierta constante $\ell\in\mathbb{N}$,

$$|\xi|^{-N}e^{4n\varphi^*(\frac{N}{4n})} \le R^{-N}\big(\tfrac{|\xi|}{R}\big)^{-N}e^{4n\varphi^*(\frac{N}{4n})} \le e^{-2n\omega(\xi/R)+\log(|\xi|/R)} \le$$
$$\le e^{-2n\omega(\xi/R)+\ell\omega(\xi)} \le e^{-2\epsilon n\omega(\xi)+\frac{2n}{\epsilon}+\ell\omega(\xi)}$$

y así

$$\left(|\xi|^{-N}e^{4n\varphi^*(\frac{N}{4n})}\right)^{(\rho-\delta)} \leq e^{-(\rho-\delta)2\epsilon n\omega(\xi)+(\rho-\delta)\frac{2n}{\epsilon}+(\rho-\delta)\ell\omega(\xi)} \leq D_{n_0}e^{(-4n_0+\ell)\omega(\xi)},$$

donde $D_{n_0} := e^{(\rho-\delta)\frac{2n}{\epsilon}}$. Lo que implica finalmente

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma\big(e^{i(x-y)\xi}a(x,y,\xi)\big)| \leq D_{n_0}2^{|\alpha+\gamma|}e^{n_0\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n_0})}e^{(m+\ell-2n_0)\omega(\xi)}.$$

Tomando n_0 lo bastante grande obtenemos que la integral que define $K(x,y)$ es convergente. Luego K es derivable bajo el signo integral y, si $E_{n_0} := D_{n_0}\int e^{(m+\ell-2n_0)\omega(\xi)}d\xi$,

$$\begin{aligned}|D_x^\alpha D_y^\gamma K(x,y)| &\leq D_{n_0}2^{|\alpha+\gamma|}e^{n_0\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n_0})}\int e^{(m+\ell-2n_0)\omega(\xi)}d\xi \leq \\ &\leq E_{n_0}e^{|\alpha+\gamma|}e^{n_0\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n_0})},\end{aligned}$$

siempre que $(x,y)\in Q$. Así

$$\sup_{(x,y)\in Q}\sup_{\alpha,\gamma}|D_x^\alpha D_y^\gamma K(x,y)|e^{-|\alpha+\gamma|}e^{-k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{k})} \leq E_k,$$

para todo $k \geq n_0$. Como Q es un compacto de $\Omega\times\Omega$ arbitrario, esto que prueba que $K\in\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$.

Para terminar, veamos que A coincide con el operador con núcleo K. Dada $u\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, para cada $x\in\Omega$ se tiene

$$Au(x) = \int\Big(\int a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}u(y)dy\Big)d\xi.$$

Fijado ahora un compacto $K\subset\Omega$, aplicando las estimaciones anteriores en el compacto $Q = K\times \operatorname{supp} u$ con $\alpha=\gamma=0$, obtenemos que para cada $x\in K$, la función $(y,\xi)\mapsto u(y)a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}$ pertenece a $L_1(\mathbb{R}^{2p})$ e intercambiando el orden de integración en la fórmula para $Au(x)$ queda

$$\int u(y)\Big(\int a(x,y,\xi)e^{i(x-y)\xi}d\xi\Big)dy,$$

es decir, $(Au)(x) = \int K(x,y)u(y)dy$, como queríamos probar. □

Lema 2.1.7 ([44, p. 241]) *Existe una sucesión $(\Phi_\ell)_{\ell\geq 1}$ y constantes $C,D>0$ tales que $\Phi_\ell\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$, $|\Phi_\ell(\xi)|\leq 1$, $\Phi_\ell(\xi)=1$ para $|\xi|\leq 2$, $\Phi_\ell(\xi)=0$ para $|\xi|\geq 3$ y con la propiedad*

$$|\Phi_\ell^\alpha(\xi)| \leq C(\frac{D}{3})^{|\alpha|}\ell^{|\alpha|+1}$$

siempre que $|\alpha|\leq 2\ell$.

Para construir una amplitud a partir de una suma formal, la idea es la siguiente: Para un n fijo, como en [45] podemos encontrar una función C^∞, a^n, que satisface las estimaciones en 1.2.10 solo para este n fijo. Como cada a^n es una serie de las funciones a_j's, podemos tomar, para cada n, un bloque finito de la serie, de modo que al juntar los bloques se obtenga una amplitud que es equivalente a la suma formal.

Sea (j_n) una sucesión creciente de números naturales tal que $j_n/n \to \infty$ cuando n crece. Para cada $j_n \leq j < j_{n+1}$, escribimos

$$\Psi_{j,n}(\xi) := 1 - \Phi_j\big(\frac{\xi}{Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}}\big), \tag{1.5}$$

donde $R \geq 1$ es la constante de la definición 2.1.1. Del lema 2.1.7 se deduce inmediatamente que si ξ está en el soporte de $\Psi_{j,n}(\xi)$, entonces

$$|\xi| \geq 2Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}.$$

Además, $|\Psi_{j,n}(\xi)| \leq 2$.

Derivando esta función se obtiene

$$D^i_\xi \Psi_{j,n}(\xi) = -\frac{D^i_\xi \Phi_j(\xi)}{(Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})})^{|i|}} \tag{1.6}$$

para cada multi-índice i. Una aplicación del lema 2.1.7 proporciona

$$|D^i_\xi \Psi_{j,n}(\xi)| \leq C(\frac{D}{3Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}})^{|i|} j^{|i|+1}$$

para cada multi-índice i con $|i| \leq 2j$.

Si $i \neq 0$ y $D^i_\xi \Phi_j(\xi) \neq 0$, se tiene

$$2Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} \leq |\xi| \leq 3Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}. \tag{1.7}$$

De donde se obtiene finalmente la desigualdad

$$|D^i_\xi \Psi_{j,n}(\xi)| \leq C(\frac{D}{|\xi|})^{|i|} j^{|i|+1}. \tag{1.8}$$

Teorema 2.1.8 *Sea $\sum a_j \in FAS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(U)$ y Ω un subconjunto abierto relativamente compacto de U. Entonces existe una amplitud $a \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ tal que $a \sim \sum a_j$ sobre Ω.*

Demostración. Consideremos las funciones $\Psi_{j,n}(\xi)$ definidas anteriormente.

Ya sabemos que

$$|D^i_\xi \Psi_{j,n}(\xi)| \leq C(\frac{D}{|\xi|})^{|i|} j^{|i|+1},$$

para cada $|i| \leq 2j$.

Asociado a R pongamos $R_1 := (2R)^{\rho-\delta}$. Como ya hemos dicho, $\Psi_{j,n}(\xi) \neq 0$ implica $|\xi| \geq 2Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}$ y así $e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})} \leq |\xi|^{j(\rho-\delta)}(\frac{1}{R_1})^j$. Mientras que si ξ está en el soporte de alguna derivada también se cumple que $|\xi| \leq 3Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}$ y por lo tanto $(\frac{|\xi|}{3})^{j(\rho-\delta)}(\frac{1}{R_1})^j \leq e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})}$.

De la convexidad de φ^* se deduce que

$$2n\varphi^*(\tfrac{|\alpha+\gamma|+j}{2n}) \leq n\varphi^*(\tfrac{|\alpha+\gamma|}{n}) + n\varphi^*(\tfrac{j}{n}),$$

para cada par de multi-índices α, γ y cada natural j. Así, de acuerdo con la definición 2.1.1 podemos elegir R lo bastante grande para que (por ejemplo, de modo que $\frac{2e^{Dp}}{R_1} < 1$)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{je^{Djp}}{R_1^j} < \infty, \tag{1.9}$$

y, para cierta sucesión (C_n),

$$\begin{aligned} |D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta a_j(x,y,\xi)| &\leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+j}{2n})} e^{m\omega(\xi)} |\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho} |\xi|^{-(\rho-\delta)j} \\ &\leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})} e^{m\omega(\xi)} |\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})} |\xi|^{-(\rho-\delta)j} \end{aligned}$$

siempre que $(x,y) \in \Omega$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})(\geq \frac{2n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{2n}))$.

Primero suponemos que $(x,y) \in \Omega$, $n \in \mathbb{N}$, $\log(\frac{|\xi|}{3R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$ y $\Psi_{j,n}(\xi) \neq 0$. Entonces $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \text{máx}\big(\frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n}), \frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})\big) \geq \frac{2n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{2n})$. Más aún, $D_\xi^i \Psi_{j,n}(\xi) \neq 0$ implica $\log(\frac{|\xi|}{3R}) \leq \frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})$, y consecuentemente, $|\beta| \leq j$ por ser $\varphi^*(t)/t$ creciente. Entonces podemos usar el lema anterior y estimar

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta\big(a_j(x,y,\xi)\Psi_{j,n}(\xi)\big)|e^{-m\omega(\xi)} \leq \sum_{i\leq\beta}\binom{\beta}{i}|D_\xi^i\Psi_{j,n}(\xi)D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^{\beta-i}a_j(x,y,\xi)|e^{-m\omega(\xi)}$$

que es menor que

$$\begin{aligned} &CC_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})}|\xi|^{-(\rho-\delta)j} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{i\leq\beta}\frac{\beta!}{(\beta-i)!i!}\frac{D^{|i|}j^{|i|+1}(\beta-i)!B^{|\beta-i|}}{|\xi|^{|i|}|\xi|^{\rho|\beta-i|}} \leq \\ &\leq CC_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})}|\xi|^{-(\rho-\delta)j} \cdot \\ &\quad \cdot \sum_{i\leq\beta}\frac{D^{|i|}j^{|i|+1}}{i!} \leq \\ &\leq CC_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}(\frac{1}{R_1})^j \sum_{i\leq\beta}\frac{D^{|i|}j^{|i|+1}}{i!}, \end{aligned} \tag{1.10}$$

donde en la última desigualdad se usa que $e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})} \leq |\xi|^{j(\rho-\delta)}(\frac{1}{R_1})^j$. Además,

$$\sum_{i\leq\beta} \frac{D^{|i|}j^{|i|+1}}{i!} \leq \sum_{|i|=0}^{\infty} \frac{D^{|i|}j^{|i|+1}}{|i|!}\frac{|i|!}{i!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{j(pDj)^k}{k!} = je^{pDj},$$

puesto que $\sum_{|i|=k} \frac{k!}{i!} = p^k$ (lema 0.1.1).

Sea (j_n) la sucesión definida después del lema 2.1.7. Por inducción, podemos elegir los términos de la sucesión (j_n) de modo que $j_1 := 1$, $j_n < j_{n+1}$, $\lim_{n\to\infty} \frac{j_n}{n} = \infty$ y

$$C_{n+1} \sum_{j=j_{n+1}}^{\infty} \frac{je^{pDj}}{R_1^j} \leq \frac{C_n}{2} \sum_{j=j_n}^{j_n+1} \frac{je^{pDj}}{R_1^j}.$$

Entonces

$$\overline{D}_n := C_n \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{je^{pDj}}{R_1^j}$$

satisface $\overline{D}_{n+1} \leq \frac{\overline{D}_n}{2}$. En efecto:

$$\overline{D}_{n+1} = C_{n+1} \sum_{j=j_{n+1}}^{j_{n+2}-1} \frac{je^{pDj}}{R_1^j} \leq \frac{C_n}{2} \sum_{j=j_n}^{j_n+1} \frac{je^{pDj}}{R_1^j} \leq \frac{1}{2}C_n \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \frac{je^{pDj}}{R_1^j} = \frac{\overline{D}_n}{2}.$$

Ahora probaremos que

$$a(x,y,\xi) := a_0(x,y,\xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} \Psi_{j,n}(\xi)a_j(x,y,\xi) \tag{1.11}$$

es una amplitud.

Veamos primero que la suma que define a es localmente finita: en efecto, dado que $\frac{j_n}{n} \to \infty$, fijado $\xi \in \mathbb{R}^p$, existe n tal que si $j \geq j_n$ se cumple

$$|\xi| < 2Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}.$$

Lo que implica que $\Psi_{j,n}(\xi) = 0$. Por lo tanto, la suma es localmente finita. Así, a es una función bien definida y C^∞.

Supongamos que $\log(\frac{|\xi|}{3R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{n})$. Entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta(\sum_{k=n}^{\infty} \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} \Psi_{j,k}(\xi)a_j(x,y,\xi))| \leq$$

$$\leq CB^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}e^{m\omega(\xi)} \sum_{k=n}^{\infty} C_k \sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1} \frac{je^{pDj}}{R_1^j} =$$

$$= CB^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|}{n})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho}e^{m\omega(\xi)} \sum_{k=n}^{\infty} \overline{D}_k.$$

Además, por la acotación (1.10), $a_0+\sum_{k=1}^{n-1}\sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1}\Psi_{j,k}a_j$ es una suma finita de amplitudes, y concluimos que $a(x,y,\xi)\in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Para terminar hay que probar que $a\sim\sum a_j$ sobre Ω. Para ello, supongamos que $(x,y)\in\Omega$ y $\log(\frac{|\xi|}{3R})\geq\frac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n})$. Estimamos las derivadas de

$$a-\sum_{j<N}a_j=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=j_k}^{j_{k+1}-1}\Psi_{j,k}a_j-\sum_{j=1}^{N-1}a_j.$$

Sólo consideraremos el caso $N>nj_n$ (esto es coherente con la definición 2.1.4 de sumas formales equivalentes). Para cada $j\in\mathbb{N}$ existe $k\in\mathbb{N}$ con $j_k\leq j<j_{k+1}$. Entonces $k<n$ implica $j\leq j_n(<N)$ y $\log(\frac{|\xi|}{3R})\geq\frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})\geq\frac{1}{j_n}\varphi^*(j_n)\geq\frac{k}{j}\varphi^*(\frac{j}{k})$, y resulta que la correspondiente función $\Psi_{j,k}$ es idénticamente 1, luego $\Psi_{j,k}-1\equiv 0$. Por otro lado, $k\geq n$ y $N>j$ también implican $\log(\frac{|\xi|}{3R})\geq\frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})\geq\frac{k}{j}\varphi^*(\frac{j}{k})$ y $\Psi_{j,n}(\xi)=1$.

En consecuencia, $a-\sum_{j<N}a_j$ se puede expresar como una suma de funciones $\Psi_{j,k}a_j$ con $j\geq N$ y $k\geq n$.

Se trata por lo tanto de dar una cota de la expresión

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta\big(a_j(x,y,\xi)\Psi_{j,k}(\xi)\big)|e^{-m\omega(\xi)} \tag{1.12}$$

cuando $j\geq N$ y $k\geq n$. Hemos supuesto que $\log(\frac{|\xi|}{3R})\geq\frac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n})$. Dado que $k\geq n$, en particular se tiene $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq\frac{k}{|\beta|}\varphi^*(\frac{|\beta|}{k})$. Podemos asumir también que $\log(\frac{|\xi|}{2R})\geq\frac{k}{j}\varphi^*(\frac{j}{k})$, pues en caso contrario $\Psi_{j,k}(\xi)=0$, entonces

$$\log(\tfrac{|\xi|}{R})\geq\max\big(\tfrac{k}{j}\varphi^*(\tfrac{j}{k}),\tfrac{k}{|\beta|}\varphi^*(\tfrac{|\beta|}{k})\big)\geq\tfrac{2k}{|\beta|+j}\varphi^*(\tfrac{|\beta|+j}{2k}).$$

Usamos ahora que $2k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+j}{2k})\leq k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{k})+k\varphi^*(\frac{j-N}{k})$ y la acotación (1.10) con $n=2k$. Así, la expresión (1.12) es menor que

$$\begin{aligned}
&CC_{2k}B^{|\beta|}e^{(\rho-\delta)2k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+j}{2k})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta}|\xi|^{-(\rho-\delta)j}\cdot\\
&\quad\cdot\sum_{i\leq\beta}\frac{\beta!}{(\beta-i)!i!}\frac{D^{|i|}j^{|i|+1}(\beta-i)!}{|\xi|^{|i|}|\xi|^{\rho|\beta-i|}}\leq\\
&\leq CC_{2k}B^{|\beta|}\beta!e^{(\rho-\delta)k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{k})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho-(\rho-\delta)N}\cdot\\
&\quad\cdot e^{(\rho-\delta)k\varphi^*(\frac{j-N}{k})}|\xi|^{-(\rho-\delta)(j-N)}je^{pDj}\leq\\
&\leq CC_{2k}B^{|\beta|}\beta!e^{(\rho-\delta)k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{k})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho-(\rho-\delta)N}\cdot\\
&\quad\cdot(\frac{1}{R_1})^{j-N}je^{pDj}=\\
&=CC_{2k}B^{|\beta|}R_1^N\beta!e^{(\rho-\delta)k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{k})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho-(\rho-\delta)N}\frac{je^{pDj}}{R_1^j},
\end{aligned}$$

donde la última desigualdad se sigue del hecho que $\Psi_{j,k}(\xi) \neq 0$ implica que $\log(\frac{|\xi|}{2R}) \geq \frac{k}{j}\varphi^*(\frac{j}{k}) \geq \frac{k}{j-N}\varphi^*(\frac{j-N}{k})$.

Finalmente obtenemos

$$|D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta\big(a - \sum_{j<N} a_j\big)| \leq \sum_{j\geq N} |D_x^\alpha D_y^\gamma D_\xi^\beta(\Psi_{j,k}a_j)|$$

donde en el último sumatorio se entiende que $k \geq n$. Al ser $k\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{k}) \leq n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{n})$, esta última expresión está dominada por

$$CB^{|\beta|}\beta! R_1^N e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+N}{n})}|\xi|^{|\alpha+\gamma|\delta-|\beta|\rho-(\rho-\delta)N} e^{m\omega(\xi)} \sum_{k\geq n} \overline{D}_k.$$

Lo que concluye la demostración, en virtud de la nota 2.1.5. □

Observemos que cualquier otra elección de la sucesión (j_n) y la constante R que satisfaga las estimaciones en la prueba del resultado anterior dará otra amplitud que define el mismo operador pseudodiferencial, módulo un operador (ω)-regularizante. Por tanto, en lo sucesivo asumiremos sin pérdida de generalidad que tanto los términos de la sucesión (j_n) como la constante R sean tan grandes como sea necesario.

Nuestro próximo propósito es dar la fórmula de expansión asintótica. En adelante, supondremos que $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ contiene la clase de Gevrey $\Gamma^{\{s\}}(\Omega)$ para algún $s > 1$. Entonces, para $\sigma(t) := t^{1/s}$, se tiene que $\mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega)$ está contenido (y es denso) en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ (véase [9]).

Supondremos que $\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n}) \geq n$ para cada $j \geq j_n$. Ponemos $\varphi_j := \Psi_{j,n}$ si $j_n \leq j < j_{n+1}$, $\varphi_0(\xi) = 1$.

Sea Ω un conjunto abierto relativamente compacto. En $L(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega), \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega))$ consideramos la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$.

Observemos además que, por la definición de φ_j, se tiene que $\varphi_j - \varphi_{j+1}$ es la diferencia de dos funciones test (véase el lema 2.1.7 y la definición de $\Psi_{j,n}$ en la ecuación (1.5)), luego $\varphi_j - \varphi_{j+1} \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$. De la proposición 1.3.1, $\varphi_j - \varphi_{j+1} \in AS^{0,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Como en la prueba de 1.2.2 tenemos lo siguiente

Lema 2.1.9 *Sea $a \in S^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ y A el operador pseudodiferencial definido por a. Entonces, para cada $u \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$,*

$$A(u) = \sum_{j=0}^{\infty} A_j(u)$$

siendo A_j el operador pseudodiferencial definido por la amplitud $(\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi)a(x,y,\xi)$.

Demostración. La función $(\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi)a(x,y,\xi)$ es una amplitud en $AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ en virtud de la proposición 1.2.15.

Procediendo como en el teorema 1.2.2 se tiene

$$A(u)(x) = \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) - \lim_{j\to+\infty} \int \Big(\int (1-\varphi_{j+1})(\xi) e^{i(x-y)\xi} a(x,y,\xi) u(y) dy \Big) d\xi,$$

y como $1-\varphi_{j+1} = (1-\varphi_0) + \cdots + (\varphi_j - \varphi_{j+1})$, se concluye. □

Sea U un abierto de $\mathbb{R}^p$ y Ω un subconjunto abierto de U relativamente compacto. Consideremos una suma formal $\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$ en $FAS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(U)$. De la definición 2.1.1 se deduce que, dado el compacto $\overline{\Omega}$, existe una sucesión (C_n) y constantes $R \geq 1$ y $B \geq 1$ de modo que

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p_j(x,\xi)| \leq C_n B^{|\beta|} \beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|+j}{n})} (1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|-(\rho-\delta)j} \tag{1.13}$$

para cada $x \in \overline{\Omega}$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})$.

Lema 2.1.10 *Sean U, Ω, $\sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$ y (C_n) como antes. Sea (j_n) como en la prueba de 2.1.8 que satisfaga además $\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n}) \geq \max(n, \log C_n)$ para $j \geq j_n$. Ponemos*

$$p(x,\xi) := \sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\xi) p_j(x,\xi),$$

que es un símbolo en $AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$. Entonces, el correspondiente operador pseudodiferencial $P(x,D)$ es el límite en $L(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega), \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega))$ de la sucesión de operadores

$$S_N : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega),$$

donde cada S_N es un operador pseudodiferencial con símbolo

$$\sum_{j=0}^{N} (\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi) (\sum_{l=0}^{j} p_l(x,\xi)).$$

Demostración. La función $p(x,\xi)$ es un símbolo, como se comprobó en la demostración del teorema 2.1.8 (véase la ecuación (1.11)). Para cada $j \in \mathbb{N}_0$, la función

$$(\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi) (\sum_{l=0}^{j} p_l(x,\xi))$$

es también un símbolo en $AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$.

En efecto, $\varphi_j - \varphi_{j+1} \in AS_{\rho,\delta}^{0,\omega}(\Omega)$ por ser una función test. Ya sabemos que $\sum_{l=0}^{j} p_l(x,\xi) \in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$. Por lo tanto, basta aplicar la proposición 1.2.15 para concluir.

Observemos ahora que

$$\sum_{j=0}^{N} (\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi) (\sum_{l=0}^{j} p_l(x,\xi)) = \sum_{j=0}^{N} \varphi_j(\xi) p_j(x,\xi) - \varphi_{N+1}(\xi) \sum_{j=0}^{N} p_j(x,\xi).$$

Sea B un conjunto acotado en $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$ y sea K un conjunto compacto en Ω. Vamos a ver que

(a) $\int (\sum_{j=0}^{N} \varphi_j(\xi) p_j(x,\xi)) e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \to \int (\sum_{j=0}^{\infty} \varphi_j(\xi) p_j(x,\xi)) e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi$

y

(b) $\int \varphi_{N+1}(\xi) (\sum_{j=0}^{N} p_j(x,\xi)) e^{ix\xi} \hat{u}(\xi) d\xi \to 0$

cuando N tiende a infinito, uniformemente sobre $x \in K$ y $u \in B$.
Como B es acotado en $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$, por el teorema de Paley-Wiener existe $D > 0$ con

$$|\hat{u}(\xi)| \leq D e^{-(m+3)\omega(\xi)}$$

para cada $u \in B$. Se sigue de la elección de las constantes (C_n) que

$$|p_j(x,\xi)| \leq C_n \frac{e^{(\rho-\delta) n \varphi^*(\frac{j}{n})}}{(1+|\xi|)^{(\rho-\delta)j}} e^{m\omega(\xi)}$$

siempre que $x \in \Omega$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{j} \varphi^*(\frac{j}{n})$. Como $\varphi_j(\xi) \neq 0$ y $j_n \leq j < j_{n+1}$ implican $\log(\frac{|\xi|}{2R}) \geq \frac{n}{j} \varphi^*(\frac{j}{n})$, se tiene

$$|\varphi_j(\xi) p_j(x,\xi) \hat{u}(\xi)| \leq \frac{C_n}{(2R)^{j(\rho-\delta)}} D e^{-3\omega(\xi)}.$$

Como $\log(t) = o(\omega(t))$ cuando $t \to \infty$, podemos suponer que $e^{-\omega(\xi)} \leq \frac{1}{|\xi|} \leq \frac{1}{e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}}$ para $\xi \in \mathrm{supp}\varphi_j$. Entonces, para $j_l \leq N < j_{l+1}$ se tiene, usando que $\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n}) \geq \log C_n$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $j_n \leq j < j_{n+1}$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=N+1}^{\infty} \int |\varphi_j(\xi) p_j(x,\xi) \hat{u}(\xi)| d\xi &\leq D \sum_{n=l}^{\infty} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{C_n}{(2R)^{j(\rho-\delta)}} \frac{1}{e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}} \int e^{-2\omega(\xi)} d\xi \leq \\ &\leq D \sum_{n=l}^{\infty} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{1}{(2R)^{j(\rho-\delta)}} \int e^{-2\omega(\xi)} d\xi \leq \\ &\leq \widetilde{D} \sum_{n=l}^{\infty} \sum_{j=j_n+1}^{j_{n+1}} \frac{1}{(2R)^{j(\rho-\delta)}}, \end{aligned}$$

lo que demuestra (a).

Para probar (b), dado N tomamos n con $j_n \leq N+1 < j_{n+1}$ y observemos que $\varphi_{N+1}(\xi) \neq 0$ implica que $\log(\frac{|\xi|}{2R}) \geq \frac{n}{N+1} \varphi^*(\frac{N+1}{n})$. Luego, dado que $|\varphi_N(\xi)| \leq 2$ para cada $N \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} |\varphi_{N+1}(\xi) (\sum_{j=0}^{N} p_j(x,\xi))| &\leq 2C_n \sum_{j=0}^{N} \frac{e^{n(\rho-\delta)\varphi^*(\frac{j}{n})}}{|\xi|^{j(\rho-\delta)}} e^{m\omega(\xi)} \\ &\leq 2C_n \sum_{j=0}^{\infty} \big(\frac{1}{2R}\big)^{(\rho-\delta)j} e^{m\omega(\xi)}. \end{aligned}$$

Como antes, por Paley-Wiener, y de la desigualdad $e^{-\omega(\xi)} \leq \frac{1}{|\xi|} \leq \frac{1}{2Re^{\frac{n}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{n})}}$,

$$\begin{aligned} |\varphi_{N+1}(\xi)(\sum_{j=0}^{N} p_j(x,\xi))\hat{u}(\xi)| &\leq 2DC_n \sum_{j=0}^{\infty} \big(\frac{1}{2R}\big)^{(\rho-\delta)j} e^{-2\omega(\xi)} e^{-\frac{n}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{n})} \\ &\leq Ce^{-\omega(\xi)} e^{-\frac{n}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{n})}, \end{aligned}$$

siendo $C := 2DC_n \sum_{j=0}^{\infty} \big(\frac{1}{2R}\big)^{(\rho-\delta)j}$. De donde se sigue (b), puesto que $j_n \leq N+1 < j_{n+1}$ implica $\frac{n}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{n}) \geq n$. □

Lema 2.1.11 *Para cada $n \in \mathbb{N}$ se tiene*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{N}{e^{\frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})}} = 0.$$

Demostración. En caso contrario existe $0 < \epsilon < 1$ y una sucesión no acotada (N_k) de números naturales tal que

$$\epsilon^{-N_k}(N_k)^{N_k} \geq e^{n\varphi^*(\frac{N_k}{n})}.$$

De la fórmula de Stirling se sigue que existe $A > 0$ tal que

$$N_k^{N_k} \leq A\frac{e^{N_k}N_k!}{\sqrt{2\pi N_k}},$$

que contradice la proposición 0.1.5, apartado (4). □

Lema 2.1.12 *Sean $m \geq n$ y $\frac{1}{e}e^{\frac{m}{j}\varphi^*(\frac{j}{m})} \leq t \leq e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}$. Entonces*

$$|t|^{j+1} \geq e^{n\omega(t)} e^{2m\varphi^*(\frac{j}{2m})} e^{-j}.$$

En particular

$$e^{n\varphi^*(\frac{j}{n})} \geq e^{(n-1)\omega(t)} e^{2n\varphi^*(\frac{j}{2n})}$$

si j es lo bastante grande.

Demostración. Como en la demostración del apartado (2) del lema 0.1.6 se tiene

$$n\omega(t) \leq \log(t) + \sup_{k\in\mathbb{N}_0}\{k\log(t) - n\varphi^*(\frac{k}{n})\}.$$

Dado que $0 < t \leq e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}$ y $\frac{\varphi^*(t)}{t}$ es una función creciente, se deduce que $k\log t - n\varphi^*(\frac{k}{n})$ siempre que $k \geq j$ y, por tanto, $n\omega(t) \leq \log(t) + l\log(t) - n\varphi^*(\frac{l}{n})$ para cierto $0 \leq l \leq j$

(véase el lema 0.1.7(1)). De donde

$$\begin{aligned} t^j &= t^l e^{-n\varphi^*(\frac{l}{n})} t^{j-l} e^{n\varphi^*(\frac{l}{n})} \\ &\geq e^{n\omega(t)-\log(t)} (\frac{e^{\frac{m}{j}\varphi^*(\frac{j}{m})}}{e})^{j-l} e^{m\varphi^*(\frac{l}{m})} \\ &\geq e^{n\omega(t)-\log(t)} (\frac{e^{\frac{m}{j-l}\varphi^*(\frac{j-l}{m})}}{e})^{j-l} e^{m\varphi^*(\frac{l}{m})} \\ &= e^{n\omega(t)-\log(t)} e^{m\varphi^*(\frac{j-l}{m})} e^{-(j-l)} e^{m\varphi^*(\frac{l}{m})} \\ &\geq e^{n\omega(t)-\log(t)} e^{-j} e^{2m\varphi^*(\frac{j}{2m})}. \end{aligned}$$

En particular, si $s = e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}$, obtenemos

$$\begin{aligned} e^{n\varphi^*(\frac{j}{n})} &= s^l e^{-n\varphi^*(\frac{l}{n})} s^{j-l} e^{n\varphi^*(\frac{l}{n})} \\ &\geq e^{n\omega(s)-\log(s)} e^{(j-l)\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} e^{n\varphi^*(\frac{l}{n})} \\ &\geq e^{n\omega(s)-\log(s)} e^{2n\varphi^*(\frac{j}{2n})}. \end{aligned}$$

Ahora, $\log(s) = o(\omega(s))$, cuando $s \to \infty$, luego $n\omega(s) - \log(s) \geq (n-1)\omega(s)$, si s es bastante grande. De donde, si $t \leq e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} = s$, entonces

$$e^{n\varphi^*(\frac{j}{n})} \geq e^{(n-1)\omega(s)} e^{2n\varphi^*(\frac{j}{2n})} \geq e^{(n-1)\omega(t)} e^{2n\varphi^*(\frac{j}{2n})},$$

lo que finaliza la prueba. □

Lema 2.1.13 *Sea $\sigma(t) = t^d$, $0 < d < 1$, y ω una función peso tal que $\omega(t) = o(\sigma(t))$. Entonces existe $\lambda > 0$ y una sucesión (j_n) de números naturales tal que*

$$\lambda\sigma(e^{\frac{n}{j}\varphi^*_\omega(\frac{j}{n})}) \geq j$$

para cada $j \geq j_n$.

Demostración. Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $A_n > 0$ con $\omega(t) \leq A_n + \frac{1}{n}\sigma(t)$ para todo $t \geq 0$. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \varphi^*_\omega(t) &= \sup_{s\geq 0}\{st - \omega(e^s)\} \geq \sup_{s\geq 0}\{st - A_n - \frac{1}{n}\sigma(e^s)\} = \\ &= -A_n + \frac{1}{n}\sup_{s\geq 0}\{nts - \sigma(e^s)\} = -A_n + \frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(nt). \end{aligned}$$

En particular, si $t = j/n$,

$$\frac{n}{j}\varphi^*_\omega(\frac{j}{n}) = \frac{\varphi^*_\omega(t)}{t} \geq -\frac{nA_n}{j} + \frac{1}{j}\varphi^*_\sigma(j).$$

Como A_n solo depende de la relación entre σ y ω, tomamos j_n tal que $\frac{A_n n}{j_n} \le 1$. Entonces, si $j \ge j_n$, al ser $\frac{1}{j}\varphi^*_\sigma(j) = \frac{1}{d}\log(\frac{j}{ed})$,

$$\frac{n}{j}\varphi^*_\omega(\frac{j}{n}) \ge -1 + \frac{1}{d}\log(\frac{j}{ed}),$$

es decir, $\sigma\big(e^{\frac{n}{j}\varphi^*_\omega(\frac{j}{n})}\big) \ge (\frac{1}{e})^d \frac{j}{ed}$, luego basta tomar $\lambda \ge de^{d+1}$. □

Teorema 2.1.14 *Sea ω una función peso tal que $\omega(t) = o(t^d)$, $d \le \rho - \delta$, $d < 1$. Sea $a \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(U)$ con operador pseudodiferencial asociado A y Ω un subconjunto abierto relativamente compacto de U. Entonces existen un operador pseudodiferencial $P(x,D)$: $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ y un operador (ω)-regularizante $R : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ tales que $A\varphi = P(x,D)\varphi + R\varphi$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Más aun*

$$p(x,\xi) \sim \sum_{j=0}^{\infty} p_j(x,\xi)$$

donde $p_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha_\xi \partial^\alpha_y a(x,y,\xi)_{|y=x}$.

Demostración. Sean $(\widetilde{C}_n)$ y $\widetilde{R} \ge 1$ la sucesión y la constante, respectivamente, asociadas a la definición de amplitud 1.2.10 para la función $a(x,y,\xi)$.

Observemos que la sucesión $(p_j(x,\xi))$ define una suma formal en $FAS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(U)$ en virtud del ejemplo 2.1.3. Sean (C_n) y $R \ge 1$ asociadas al compacto $\overline{\Omega}$ en la definición de suma formal 2.1.1 para $\sum_{j=0}^\infty p_j(x,\xi)$ como en la fórmula (1.13). Supondremos, por comodidad, que $C_n \ge \widetilde{C}_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$, y que $R \ge \widetilde{R}$.

Sea (j_n) como en el lema 2.1.13, que además cumpla las hipótesis del lema 2.1.10 para la suma formal $\sum_{j=0}^\infty p_j(x,\xi)$. Los términos de la sucesión (j_n) y la constante R se modificarán más adelante para que se cumplan ciertas condiciones (ya se sabe que se pueden tomar tan grandes como sea necesario).

Tomamos $p(x,\xi)$ como en el lema 2.1.10 y $P := P(x,D)$. De acuerdo con el lema 2.1.9, el operador A coincide con $\sum_{N=0}^\infty A_N$, siendo A_N el operador pseudodiferencial con amplitud $a(x,y,\xi)(\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi)$. Del lema 2.1.10 el operador $P = \lim_{N\to\infty} S_N$, donde S_N es el operador pseudodiferencial con símbolo $\sum_{j=0}^N(\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi)(\sum_{l=0}^j p_l(x,\xi))$. Por lo tanto, $A - P : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ se puede representar como $A - P := \sum_{N=0}^\infty P_N$, donde $P_N(u)(x) := \int K_N(x,y)u(y)dy$ y la serie es convergente en $L(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega), \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega))$, y además

$$K_N(x,y) = \int (\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi)(a(x,y,\xi) - \sum_{j=0}^N p_j(x,\xi))e^{i(x-y)\xi}d\xi$$

es una función en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$, como se deduce del hecho que $\varphi_N - \varphi_{N+1} \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ (basta aplicar el lema 1.2.1(1), pues ya sabemos que la función $\sum_{j=0}^N p_j(x,\xi)$ es un símbolo).

Así, cada operador P_N es (ω)-regularizante, y nuestro propósito es demostrar que también $\sum_{N=0}^\infty P_N$ es (ω)-regularizante. Para hacer esto necesitamos obtener una representación diferente de las series. No hay pérdida de generalidad en suponer que Ω es convexo (en otro caso, podemos recubrir el abierto Ω con una unión numerable de bolas, $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$, que son conjuntos convexos y, en vista del teorema 1.5.6, sólo tenemos que probar que la distribución núcleo de $A - P$ es una función ultradiferenciable de clase (ω) en $B_n \times B_n$, para cada $n \in \mathbb{N}$).

Procediendo como en [45, 2.25] consideremos, para $N \geq 1$, el desarrollo de Taylor de orden N de la función $a(x, y, \xi)$ respecto de la variable y, en $y = x$,

$$a(x,y,\xi) = \sum_{|\alpha|=0}^{N} \frac{1}{\alpha!}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)(y-x)^\alpha + \sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!}\omega_\alpha(x,y,\xi)(y-x)^\alpha,$$

siendo

$$\omega_\alpha(x,y,\xi) := (N+1)\int_0^1 \partial_y^\alpha a(x, x+t(y-x),\xi)(1-t)^N dt.$$

Entonces, para $N \geq 1$ tenemos

$$\begin{aligned}
&\int (\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi) a(x,y,\xi) e^{i(x-y)\xi} d\xi = \\
&= \int (\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi) \Big(\sum_{|\alpha|=0}^{N} \frac{1}{\alpha!}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)(y-x)^\alpha \Big) e^{i(x-y)\xi} d\xi + \\
&\quad + \int (\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi) \Big(\sum_{|\alpha|=N+1} \frac{1}{\alpha!}\omega_\alpha(x,y,\xi)(y-x)^\alpha \Big) e^{i(x-y)\xi} d\xi \\
&\overset{\text{Partes}}{=} \int (\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi) a(x,x,\xi) e^{i(x-y)\xi} d\xi + \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=1}^{N} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int e^{i(x-y)\xi} \sigma_{N,\alpha,\beta}(x,\xi) d\xi + \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=N+1} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int e^{i(x-y)\xi} \tau_{N,\alpha,\beta}(x,y,\xi) d\xi,
\end{aligned}$$

donde

$$\sigma_{N,\alpha,\beta}(x,\xi) := D_\xi^\beta(\varphi_N(\xi) - \varphi_{N+1}(\xi)) D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)$$

y

$$\tau_{N,\alpha,\beta}(x,y,\xi) := D_\xi^\beta(\varphi_N(\xi) - \varphi_{N+1}(\xi)) D_\xi^{\alpha-\beta}\omega_\alpha(x,y,\xi).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
K_N(x,y) &= \int (\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi)(a(x,y,\xi) - \sum_{j=0}^{N} p_j(x,\xi))e^{i(x-y)\xi}d\xi = \\
&= \int (\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi)(a(x,x,\xi) - p_0(x,\xi))e^{i(x-y)\xi}d\xi + \\
&\quad + \sum_{j=1}^{N} \Big(\sum_{|\alpha|=j} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int e^{i(x-y)\xi}\sigma_{N,\alpha,\beta}(x,\xi)d\xi - \\
&\qquad - \int e^{i(x-y)\xi}(\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi)p_j(x,\xi)d\xi \Big) + \\
&\quad + \sum_{|\alpha|=N+1} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int e^{i(x-y)\xi}\tau_{N,\alpha,\beta}(x,y,\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Ahora, cuando $\beta = 0$,

$$\sigma_{N,\alpha,0}(x,\xi) = (\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi)D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha a(x,x,\xi),$$

por lo tanto, de la definición de $p_j(x,\xi)$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \int e^{i(x-y)\xi}\sigma_{N,\alpha,0}(x,\xi)d\xi = \\
&= \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \int e^{i(x-y)\xi}(\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi)D_\xi^\alpha \partial_y^\alpha a(x,x,\xi)d\xi = \\
&= \int e^{i(x-y)\xi}(\varphi_N - \varphi_{N+1})(\xi)p_j(x,\xi)d\xi.
\end{aligned}$$

Además, $p_0(x,\xi) = a(x,x,\xi)$. Así que $K_N = \sum_{|\alpha|=1}^N A_\alpha^N + R_N$, siendo

$$A_\alpha^N(x,y) := \sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int e^{i(x-y)\xi}\sigma_{N,\alpha,\beta}(x,\xi)d\xi$$

y

$$R_N(x,y) := \sum_{|\alpha|=N+1} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int e^{i(x-y)\xi}\tau_{N,\alpha,\beta}(x,y,\xi)d\xi.$$

Por otro lado, usando $\sum\limits_{r=1}^{N}\sum\limits_{|\alpha|=1}^{N} = \sum\limits_{|\alpha|=1}^{N}\sum\limits_{r=|\alpha|}^{N}$ queda

$$\sum_{r=1}^{N}\sum_{|\alpha|=1}^{r} A_\alpha^r(x,y) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=1}^{N}\sum_{r=|\alpha|}^{N}\sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!}\int e^{i(x-y)\xi}D_\xi^\beta(\varphi_r(\xi)-\varphi_{r+1}(\xi))D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)d\xi$$

$$= \sum_{|\alpha|=1}^{N}\sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!}\int e^{i(x-y)\xi}D_\xi^\beta(\varphi_{|\alpha|}(\xi)-\varphi_{N+1}(\xi))D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)d\xi$$

Es decir, $\sum_{r=1}^{N}\sum_{|\alpha|=1}^{r} A_\alpha^r = \sum_{j=1}^{N} I_j - W_N$, con

$$I_j(x,y) := \sum_{|\alpha|=j}\sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!}\int e^{i(x-y)\xi}D_\xi^\beta\varphi_j(\xi)D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)d\xi$$

y

$$W_N(x,y) := \sum_{|\alpha|=1}^{N}\sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!}\int e^{i(x-y)\xi}D_\xi^\beta\varphi_{N+1}(\xi)D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)d\xi.$$

En consecuencia $\sum_{j=1}^{N} K_j = \sum_{j=1}^{N} I_j + \sum_{j=1}^{N} R_j - W_N$. Para terminar la demostración vamos a ver que $\sum_{j=1}^{\infty} R_j(x,y)$ y $\sum_{j=1}^{\infty} I_j(x,y)$ convergen en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$ y que la sucesión de operadores definida por los núcleos (W_N) converge a cero cuando N tiende a infinito.

(a) Sea $j_n \leq j < j_{n+1}$. Entonces

$$D_x^\mu D_y^\nu I_j(x,y) =$$

$$= \sum_{|\alpha|=j}\sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\sum_{\gamma\leq\mu}\binom{\mu}{\gamma}\frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!}\int \xi^\gamma(-\xi)^\nu D_\xi^\beta\varphi_j(\xi)D_x^{\mu-\gamma}(D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi))e^{i(x-y)\xi}d\xi$$

De donde se deduce que $|D_x^\mu D_y^\nu I_j(x,y)|$ no es mayor que

$$\sum_{|\alpha|=j}\sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\sum_{\gamma\leq\mu}\binom{\mu}{\gamma}\frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!}\int |\xi|^{|\gamma+\nu|}|D_\xi^\beta\varphi_j(\xi)||D_x^{\mu-\gamma}(D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi))|d\xi.$$

Fijamos $k\in\mathbb{N}$ y tomamos $n\geq k$ y $\ell := 2n$. Recordemos ahora la fórmula (1.7): si $\beta\neq 0$ y $D_\xi^\beta\varphi_j(\xi)\neq 0$ entonces

$$2Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} \leq |\xi| \leq 3Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} \tag{1.14}$$

y tenemos que $|D_x^{\mu-\gamma}D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)|$ es menor o igual que (nota 1.2.11)

$$C_\ell(\alpha-\beta)!B^{|\alpha-\beta|}e^{(\rho-\delta)\ell\varphi^*(\frac{|\mu-\gamma|}{\ell})+(\rho-\delta)\ell\varphi^*(\frac{|\alpha|}{\ell})}e^{m\omega(\xi)}|\xi|^{\delta(|\mu-\gamma|+|\alpha|)-\rho(|\alpha|-|\beta|)}.$$

Ahora usamos que $\ell\varphi^*(\frac{|\mu-\gamma|}{\ell}) + \ell\varphi^*(\frac{j}{\ell}) \le k\varphi^*(\frac{|\mu-\gamma|}{k}) + \ell\varphi^*(\frac{j}{\ell})$. Como $|\alpha| = j$, se tiene $\delta|\alpha| - \rho|\alpha-\beta| = \rho|\beta| - (\rho-\delta)j$ y así, $|D_x^{\mu-\gamma} D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)|$ está acotado por

$$C_\ell(\alpha-\beta)! B^{|\alpha-\beta|} e^{(\rho-\delta)(k\varphi^*(\frac{|\mu-\gamma|}{k})+\ell\varphi^*(\frac{j}{\ell}))} e^{m\omega(\xi)} |\xi|^{\delta|\mu-\gamma|+\rho|\beta|-(\rho-\delta)j}.$$

Tengamos en cuenta también que, al ser $|\beta| \le j$, $|D_\xi^\beta \varphi_j(\xi)| \le C(\frac{D}{|\xi|})^{|\beta|} j^{|\beta|+1}$ (véase la fórmula (1.8)) y $|\xi|^{\delta|\mu-\gamma|} e^{-\delta k\varphi^*(\frac{|\mu-\gamma|}{k})} \le e^{\delta k\omega(\xi)}$ (del lema 0.1.6). También $|\xi|^{|\nu+\gamma|} \le e^{k\varphi^*(\frac{|\nu+\gamma|}{k})+k\omega(\xi)}$ y, por de la fórmula (1.14),

$$\frac{1}{e} e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} \le \frac{2}{3} e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} \le \frac{|\xi|}{3R} \le e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}.$$

Podemos aplicar entonces el lema 2.1.12 para obtener la estimación

$$e^{2n\varphi^*(\frac{j}{2n})} \le e^{-(n-1)\omega(\frac{\xi}{3R})} e^{n\varphi^*(\frac{j}{n})}.$$

Luego $|D_x^\mu D_y^\nu I_j(x,y)|$ está mayorado por

$$C_\ell \sum_{|\alpha|=j} \sum_{0\ne\beta\le\alpha} \sum_{\gamma\le\mu} \binom{\mu}{\gamma} \frac{1}{\beta!} C D^{|\beta|} j^{|\beta|+1} e^{k\varphi^*(\frac{|\nu+\gamma|}{k})} B^j e^{\rho k\varphi^*(\frac{|\mu-\gamma|}{k})} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})} \cdot$$
$$\cdot \int e^{k\omega(\xi)} |\xi|^{-|\beta|} e^{-(\rho-\delta)(n-1)\omega(\frac{\xi}{3R})} e^{m\omega(\xi)} e^{k\delta\omega(\xi)} |\xi|^{\rho|\beta|} |\xi|^{-(\rho-\delta)j} d\xi$$

Como

i) $e^{k\omega(\xi)+\delta k\omega(\xi)+m\omega(\xi)} \le e^{(2k+m)\omega(\xi)}$,

ii) $|\xi|^{-|\beta|}|\xi|^{\rho|\beta|} \le 1$,

iii) $|\xi|^{-(\rho-\delta)j} \le \frac{1}{(2R)^{(\rho-\delta)j}} e^{-(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{j}{n})}$ (por la desigualdad (1.14)) y

iv) $e^{k\varphi^*(\frac{|\nu+\gamma|}{k})} e^{\rho k\varphi^*(\frac{|\mu-\gamma|}{k})} \le e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})}$

queda finalmente

$$|D_x^\mu D_y^\nu I_j(x,y)| \le$$
$$\le \sum_{|\alpha|=j} C_{2n} B^j e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})} \frac{1}{(2R)^{(\rho-\delta)j}} \sum_{0\ne\beta\le\alpha} \sum_{\gamma\le\mu} \binom{\mu}{\gamma} \frac{1}{\beta!} C D^{|\beta|} j^{|\beta|+1} \cdot A_{k,n,R},$$

siendo

$$A_{k,n,R} = \int e^{(2k+m)\omega(\xi)-(n-1)(\rho-\delta)\omega(\frac{\xi}{3R})} d\xi.$$

Dado k podemos elegir n suficientemente grande para asegurar que la integral $A_{k,n,R}$ es menor o igual que 1. Por otro lado, $\sum_{|\beta|=j} 1 \leq p^j$ y, al ser $\frac{|\beta|!}{\beta!} \leq p^{|\beta|}$, para cada $\beta \in \mathbb{N}_0^p$,

$$\begin{aligned}\sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!} D^{|\beta|} j^{|\beta|+1} &\leq \sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \frac{1}{|\beta|!} p^{|\beta|} D^{|\beta|} j^{|\beta|+1} \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \big(\sum_{|\beta|=k} \frac{1}{k!} (pDj)^k j \big) \leq j \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(p^2Dj)^k}{k!} = e^{p^2Dj} j\end{aligned}$$

También $\sum_{\gamma\leq\mu} \binom{\mu}{\gamma} \leq 2^{|\mu|} \leq e^{|\mu|}$. Entonces, para $j_n \leq j < j_{n+1}$, obtenemos

$$|D_x^\mu D_y^\nu I_j(x,y)| \leq CC_{2n} j p^j B^j \frac{e^{Djp^2}}{(2R)^{(\rho-\delta)j}} e^{|\mu|+k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})}.$$

Procediendo como en la prueba de 2.1.8 podemos elegir una sucesión (j_n) y una constante $R \geq 1$ de modo que la serie $\sum I_j(x,y)$ sea convergente en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$: en efecto, sea R de modo que

$$\frac{2pBe^{Dp^2}}{(2R)^{(\rho-\delta)}} < 1.$$

Esto asegura que la serie $\sum_{j=1}^{\infty} jp^j B^j \frac{e^{Djp^2}}{(2R)^{(\rho-\delta)j}}$ converge.

Elegimos entonces (j_n) para que la sucesión $(\overline{D}_n)$, definida por

$$\overline{D}_n := C_{2n} \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1} jp^j B^j \frac{e^{Djp^2}}{(2R)^{(\rho-\delta)j}},$$

cumpla $\overline{D}_{n+1} \leq \frac{\overline{D}_n}{2}$.

De donde, usando que $\sum_{j\geq j_n} = \sum_{s=n}^{\infty} \sum_{j=j_s}^{j_{s+1}-1}$ queda

$$\begin{aligned}|D_x^\mu D_y^\nu \big(\sum_{j\geq j_n} I_j(x,y) \big)| &\leq Ce^{|\mu|+k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})} \sum_{s=n}^{\infty} C_{2s} \sum_{j=j_s}^{j_{s+1}-1} jp^j B^j \frac{e^{Djp^2}}{(2R)^{(\rho-\delta)j}} = \\ &= Ce^{|\mu|+k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})} \sum_{s=n}^{\infty} \overline{D}_s,\end{aligned}$$

lo que concluye, pues la suma $\sum_{s=n}^{\infty} \overline{D}_s$ es un número finito que depende de n, es decir, de k.

(b) Con un argumento similar podemos probar que $\sum_{j=1}^{\infty} R_j(x,y)$ converge en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$ para una elección adecuada de (j_n) y $R \geq 1$. De hecho, recordemos que

$$R_j(x,y) = \sum_{|\alpha|=j+1} \sum_{\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int e^{i(x-y)\xi} \tau_{j,\alpha,\beta}(x,y,\xi) d\xi.$$

Luego

$$
\begin{aligned}
&|D_x^\mu D_y^\nu R_j(x,y)| \leq \\
&\leq \sum_{|\alpha|=j+1} \sum_{\beta\leq\alpha} \sum_{\gamma\leq\mu} \sum_{r\leq\nu} \binom{\mu}{\gamma}\binom{\nu}{r} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int |\xi|^{|\gamma+r|} |D_x^{\mu-\gamma} D_y^{\nu-r} \tau_{j,\alpha,\beta}(x,y,\xi)| d\xi.
\end{aligned}
$$

Ahora, fijamos $k \in \mathbb{N}$ y tomamos $n \geq k$ y $\ell = 2n+2$. Sea $j_n \leq j < j_{n+1}$. De la definición de $\tau_{j,\alpha,\beta}(x,y,\xi)$,

$$
\begin{aligned}
&|D_x^{\mu-\gamma} D_y^{\nu-r} \tau_{j,\alpha,\beta}(x,y,\xi)| \leq |D_\xi^\beta(\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi)|(j+1) \cdot \\
&\cdot \sum_{s\leq\mu-\gamma} \binom{\mu-\gamma}{s} \int_0^1 t^{|\nu-r|}(1-t)^{j+|\mu-\gamma-s|} |D_y^{\alpha+\nu-r} D_x^s D_y^{\mu-\gamma-s} D_\xi^{\alpha-\beta} a(x, x+t(y-x), \xi)| dt.
\end{aligned}
$$

donde $|\alpha| = j+1$. Ahora,

$$
\begin{aligned}
&|D_y^{\alpha+\nu-r} D_x^s D_y^{\mu-\gamma-s} D_\xi^{\alpha-\beta} a(x, x+t(y-x), \xi)| \leq \\
&\leq C_\ell B^{|\alpha-\beta|}(\alpha-\beta)! \frac{e^{(\rho-\delta)\ell\varphi^*(\frac{|\mu+\nu-r-\gamma|}{\ell})} e^{(\rho-\delta)\ell\varphi^*(\frac{j+1}{\ell})} e^{m\omega(\xi)}}{|\xi|^{\rho|\alpha-\beta|-\delta|\mu+\nu+\alpha-r-\gamma|}}
\end{aligned}
$$

Usamos entonces

(1) $|\xi|^{\delta|\mu+\nu-r-\gamma|} e^{-\delta k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu-r-\gamma|}{k})} \leq e^{\delta k\omega(\xi)}$

(2) $|\xi|^{|\gamma+r|} \leq e^{k\varphi^*(\frac{|\gamma+r|}{k})} e^{k\omega(\xi)}$

(3) $e^{k\varphi^*(\frac{|\gamma+r|}{k})} e^{\rho k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu-r-\gamma|}{k})} \leq e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})}$ y que

(4) $\sum_{s\leq\mu-\gamma} \binom{\mu-\gamma}{s} \leq 2^{|\mu-\gamma|}$,

para obtener que

$$|\xi|^{|\gamma+r|} |D_x^{\mu-\gamma} D_y^{\nu-r} \tau_{j,\alpha,\beta}(x,y,\xi)|$$

está acotado por

$$
\begin{aligned}
&|D_\xi^\beta(\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi)| \frac{e^{(k+m+\delta k)\omega(\xi)}}{|\xi|^{\rho(j+1-|\beta|)-\delta(j+1)}} \cdot \\
&\cdot 2^{|\mu-\gamma|} B^{j+1-|\beta|} C_\ell (\alpha-\beta)!(j+1) e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})} e^{(\rho-\delta)\ell\varphi^*(\frac{j+1}{\ell})}.
\end{aligned}
$$

Para terminar, distinguiremos casos:

Supongamos primero que $\beta = 0$, entonces $(\varphi_j - \varphi_{j+1}) \neq 0$ implica

$$\left(2Re^{\frac{n+1}{j+1}\varphi^*(\frac{j+1}{n+1})} \leq \right) 2Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} \leq |\xi| \leq 3Re^{\frac{n}{j+1}\varphi^*(\frac{j+1}{n})}$$

y, en particular,
$$\frac{1}{e}e^{\frac{n+1}{j+1}\varphi^*(\frac{j+1}{n+1})} \le \frac{|\xi|}{3R} \le e^{\frac{n}{j+1}\varphi^*(\frac{j+1}{n})}.$$
Ahora, una aplicación del lema 2.1.12 da
$$|\xi|^{j+2} \ge (3R)^{j+2} e^{n\omega(\frac{|\xi|}{3R})} e^{\ell\varphi^*(\frac{j+1}{\ell})} e^{-(j+1)},$$
y, en consecuencia, $|\xi|^{-(\rho-\delta)(j+1)} \le e^{(\rho-\delta)\log|\xi|} R^{-(\rho-\delta)(j+1)} e^{-(\rho-\delta)n\omega(\frac{|\xi|}{3R})} e^{-(\rho-\delta)\ell\varphi^*(\frac{j+1}{\ell})} e^{j+1}$. Podemos pues elegir n de manera que
$$|(\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi)| \frac{e^{(k+m+\delta k)\omega(\xi)}}{|\xi|^{(\rho-\delta)(j+1)}} 2^{|\mu-\gamma|} B^{j+1} C_\ell \; \alpha! \; (j+1) e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})} e^{(\rho-\delta)\ell\varphi^*(\frac{j+1}{\ell})}$$
esté mayorado por
$$2\frac{e^{-\omega(\xi)}}{R^{(\rho-\delta)(j+1)}} 2^{|\mu-\gamma|} (eB)^{j+1} C_\ell \; \alpha! \; (j+1) e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})}.$$

Supongamos ahora que $\beta \ne 0$. Usaremos que $|D_\xi^\beta(\varphi_j - \varphi_{j+1})(\xi)| \le |D_\xi^\beta \varphi_j(\xi)| + |D_\xi^\beta \varphi_{j+1}(\xi)|$. Como $j_n \le j < j_{n+1}$,

(i) $D_\xi^\beta \varphi_j(\xi) \ne 0 \Rightarrow 2Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})} \le |\xi| \le 3Re^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}$

(ii) $D_\xi^\beta \varphi_{j+1}(\xi) \ne 0 \Rightarrow \begin{cases} 2Re^{\frac{n}{j+1}\varphi^*(\frac{j+1}{n})} \le |\xi| \le 3Re^{\frac{n}{j+1}\varphi^*(\frac{j+1}{n})} & \text{si } j+1 < j_{n+1} \\ 2Re^{\frac{n+1}{j+1}\varphi^*(\frac{j+1}{n+1})} \le |\xi| \le 3Re^{\frac{n+1}{j+1}\varphi^*(\frac{j+1}{n+1})} & \text{si } j+1 = j_{n+1} \end{cases}$

Para acotar en el caso (i) tengamos en cuenta que, al ser $|\beta| \le j+1 \le 2j$, $|D^\beta \varphi_j(\xi)| \le C(\frac{D}{|\xi|})^{|\beta|} j^{|\beta|+1}$ (véase el lema 2.1.7), además el lema 2.1.12 da
$$|\xi|^{j+2} \ge (3R)^{j+2} e^{n\omega(\frac{|\xi|}{3R})} e^{2n\varphi^*(\frac{j+1}{2n})} e^{-(j+1)},$$
y, por lo tanto, $|\xi|^{-(\rho-\delta)(j+1)} \le e^{(\rho-\delta)\log|\xi|} R^{-(\rho-\delta)(j+1)} e^{-(\rho-\delta)n\omega(\frac{|\xi|}{3R})} e^{-(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{j+1}{2n})} e^{j+1}$. En el caso (ii), en cambio, $|D^\beta \varphi_{j+1}(\xi)| \le C(\frac{D}{|\xi|})^{|\beta|}(j+1)^{|\beta|+1}$. Y el lema 2.1.12 asegura, tanto si $j+1 < j_{n+1}$ como si $j+1 = j_{n+1}$, que
$$|\xi|^{j+2} \ge (3R)^{j+2} e^{n\omega(\frac{|\xi|}{3R})} e^{\ell\varphi^*(\frac{j+1}{\ell})} e^{-(j+1)},$$
y así, $|\xi|^{-(\rho-\delta)(j+1)} \le e^{(\rho-\delta)\log|\xi|} R^{-(\rho-\delta)(j+1)} e^{-(\rho-\delta)n\omega(\frac{|\xi|}{3R})} e^{-(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{j+1}{2n})} e^{j+1}$. Entonces podemos elegir n tal que
$$\big\{|D^\beta \varphi_j(\xi)| + |D^\beta \varphi_{j+1}(\xi)|\big\} \frac{e^{(k+m+\delta k)\omega(\xi)} 2^{|\mu-\gamma|} B^{j+1-|\beta|}}{|\xi|^{\rho(j+1-|\beta|)-\delta(j+1)}} C_\ell (\alpha-\beta)!(j+1) e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})} e^{(\rho-\delta)\ell\varphi^*(\frac{j+1}{\ell})}$$

está acotado por

$$2CD^{|\beta|}(j+1)^{|\beta|}C_\ell \frac{e^{-\omega(\xi)}}{R^{(\rho-\delta)(j+1)}} 2^{|\mu-\gamma|}B^{j+1-|\beta|}(\alpha-\beta)!e^{j+1}(j+1)^2 e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})}.$$

De donde se obtiene finalmente

$$\begin{aligned}
&|D_x^\mu D_y^\nu R_j(x,y)| \leq \\
&\leq \sum_{|\alpha|=j+1}\sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\gamma\leq\mu}\sum_{r\leq\nu}\binom{\mu}{\gamma}\binom{\nu}{r}\frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!}\int |\xi|^{|\gamma+r|}|D_x^{\mu-\gamma}D_y^{\nu-r}\tau_{j,\alpha,\beta}(x,y,\xi)|d\xi \\
&\leq 2CC_\ell \frac{e^{j+1}(j+1)^2B^{j+1}}{R^{(\rho-\delta)(j+1)}}2^{|\mu+\nu|}e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})}\int e^{-\omega(\xi)}d\xi \cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{|\alpha|=j+1}\sum_{\beta\leq\alpha}\sum_{\gamma\leq\mu}\sum_{r\leq\nu}\binom{\mu}{\gamma}\binom{\nu}{r}\frac{\big(D(j+1)\big)^{|\beta|}}{\beta!} \\
&\leq 2CC_\ell \frac{e^{j+1}(j+1)^2B^{j+1}}{R^{(\rho-\delta)(j+1)}}2^{2|\mu+\nu|}e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})}\int e^{-\omega(\xi)}d\xi \cdot \\
&\qquad \cdot \sum_{|\alpha|=j+1}\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{|\beta|!}{\beta!}\frac{\big(D(j+1)\big)^{|\beta|}}{|\beta|!}
\end{aligned}$$

Ahora $\frac{|\beta|!}{\beta} \leq p^{|\beta|} \leq p^{|\alpha|} = p^{j+1}$, y además, $\sum_{|\alpha|=j+1} 1 \leq p^{j+1}$. Por otro lado

$$\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{\big(D(j+1)\big)^{|\beta|}}{|\beta|!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{|\beta|=k}\frac{\big(D(j+1)\big)^k}{k!} \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\big(pD(j+1)\big)^k}{k!} = \big(e^{pD}\big)^{j+1}$$

Entonces

$$|D_x^\mu D_y^\nu R_j(x,y)| \leq \widetilde{C}_n \Big(\frac{e^{pD+1}Bp^2}{R^{\rho-\delta}}\Big)^{j+1}(j+1)^2 2^{2|\mu+\nu|}e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})},$$

para cierta constante $\widetilde{C}_n > 0$ que depende de n.

Procediendo como en el apartado (a) elegimos R de manera que

$$\frac{2e^{pD+1}Bp^2}{R^{\rho-\delta}} < 1,$$

y (j_n) de modo que la sucesión $(\widetilde{D}_n)$ dada por

$$\widetilde{D}_n := \widetilde{C}_n \sum_{j=j_n}^{j_{n+1}-1}\Big(\frac{e^{pD+1}Bp^2}{R^{\rho-\delta}}\Big)^{j+1}(j+1)^2$$

cumpla $\widetilde{D}_{n+1} \leq \frac{\widetilde{D}_n}{2}$.

Obtenemos en este caso

$$\begin{aligned}
&|D_x^\mu D_y^\nu\big(\sum_{s=n}\sum_{j=j_s}^{j_{s+1}-1} R_j(x,y)\big)| \leq \\
&\leq 4^{|\mu+\nu|} e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})} \sum_{s=n} \widetilde{C}_s \sum_{j=j_s}^{j_{s+1}-1} (\frac{e^{pD+1}Bp^2}{R^{\rho-\delta}})^{j+1}(j+1)^2 = \\
&= 4^{|\mu+\nu|} e^{k\varphi^*(\frac{|\mu+\nu|}{k})} \sum_{s=n} \widetilde{D}_s,
\end{aligned}$$

lo que demuestra que $\sum_{j=1}^\infty R_j(x,y) \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$.

(c) Sea $T_N : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ el operador con núcleo W_N. Como $\sum_{N=0}^\infty P_N$ converge en $L(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega), \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega))$, se deduce de (a) y (b) que (T_N) converge a un operador $T : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ en $L(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega), \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega))$: En efecto, ya sabemos que $\sum_{j=1}^N K_j = \sum_{j=1}^N I_j + \sum_{j=1}^N R_j - W_N$, por lo tanto, el operador $\sum_{j=0}^N P_j$ tiene núcleo

$$\sum_{j=0}^N K_j = K_0 + \sum_{j=1}^N I_j + \sum_{j=1}^N R_j - W_N. \tag{1.15}$$

Dado que $\sum_{j=1}^N I_j + \sum_{j=1}^N R_j$ converge en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$ cuando $N\to+\infty$, en particular, converge en $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$. Por el teorema de los núcleos 1.4.3, $\sum_{j=1}^N I_j + \sum_{j=1}^N R_j$ es el núcleo de un operador que converge en $L(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega), \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega))$ cuando $N\to+\infty$. Así, (T_N) también converge en $L(\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega), \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega))$.

Para probar que $T=0$ es suficiente ver que T se anula en el conjunto denso $\mathcal{D}_{(\sigma)}(\Omega)$, $\sigma(t) := t^d$. Para ver esto, fijamos $N\in\mathbb{N}$, $j_n \leq N+1 < j_{n+1}$, y ponemos $a_N := Re^{\frac{n}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{n})}$. Entonces $D^\beta\varphi_{N+1}(\xi) \neq 0$ implica que $2a_N \leq |\xi| \leq 3a_N$. Dado que

a) $|\xi|^{\rho|\beta|}|\xi|^{-|\beta|} \leq 1$,

b) $|\xi|^{(\rho-\delta)|\alpha|} \geq (2R)^{(\rho-\delta)|\alpha|} e^{(\rho-\delta)|\alpha|\frac{n}{N+1}\varphi^*(\frac{N+1}{n})} \geq (2R)^{(\rho-\delta)|\alpha|} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}$, si $1\leq|\alpha|\leq N$,

para $u\in\mathcal{D}_{(\sigma)}(\Omega)$ se tiene, usando de nuevo $|D_\xi^\beta\varphi_{N+1}(\xi)| \leq C\big(\frac{D}{|\xi|}\big)^{|\beta|}(N+1)^{|\beta|+1}$,

$$\begin{aligned}
&|T_N(u)(x)| \leq \\
&\leq \sum_{|\alpha|=1}^N \sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \frac{1}{\beta!(\alpha-\beta)!} \int \Big| D_\xi^\beta\varphi_{N+1}(\xi) D_\xi^{\alpha-\beta}\partial_y^\alpha a(x,x,\xi)\hat{u}(\xi)\Big| d\xi \leq \\
&\leq \sum_{|\alpha|=1}^N \sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \frac{CD^{|\beta|}(N+1)^{|\beta|+1}}{\beta!|\xi|^{|\beta|}} \frac{B^{|\alpha-\beta|}C_n e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}}{|\xi|^{(\rho-\delta)|\alpha|-\rho|\beta|}} \int_{|\xi|\geq 2a_N} e^{m\omega(\xi)}|\hat{u}(\xi)| d\xi \leq \\
&\leq \sum_{|\alpha|=1}^N \sum_{0\neq\beta\leq\alpha} \frac{CD^{|\beta|}(N+1)^{|\beta|+1}}{\beta!} \frac{B^{|\alpha-\beta|}C_n}{(2R)^{(\rho-\delta)|\alpha|}} \int_{|\xi|\geq 2a_N} e^{m\omega(\xi)}|\hat{u}(\xi)| d\xi.
\end{aligned}$$

Sea λ como en el lema 2.1.13. Entonces $\lambda\sigma(a_N) \geq N+1$. Para cada $u \in \mathcal{D}_{(\sigma)}(\Omega)$ se tiene $|\hat{u}(\xi)| \leq e^{-(m+\lambda p^2+1)\sigma(\xi)}$ para $|\xi|$ bastante grande (Paley-Wiener). Como $\log(t) \leq \frac{1}{3}\sigma(t)$ cuando $t \to \infty$ obtenemos

$$\begin{aligned}
\int_{|\xi|\geq 2a_N} e^{m\omega(\xi)}|\hat{u}(\xi)|d\xi &\leq \int_{|\xi|\geq 2a_N} e^{-(\lambda p^2+1)\sigma(\xi)}d\xi \\
&\leq \int_{|\xi|\geq 2a_N} e^{-\lambda p^2\sigma(\xi)-\sigma(\xi)}d\xi \leq e^{-\lambda p^2\sigma(2a_N)}\int_{|\xi|\geq 2a_N} e^{-\sigma(\xi)}d\xi \\
&\leq \frac{e^{-\lambda p^2\sigma(2a_N)}}{(2a_N)^2} < \frac{1}{(2a_N)^2 e^{p^2(N+1)}}
\end{aligned}$$

para N bastante grande.
Por el lema 2.1.11 podemos asumir que $\frac{j}{e^{\frac{n}{j}\varphi^*(\frac{j}{n})}} \leq \frac{1}{2^n}$ para cada $j \geq j_n$. En consecuencia, como $\sum_{\beta\leq\alpha}\frac{(N+1)^{|\beta|}}{\beta!} \leq e^{p^2(N+1)}$, obtenemos

$$\begin{aligned}
|T_N(u)(x)| &\leq \sum_{|\alpha|=1}^{N}\frac{C(DB)^{|\alpha|}C_n}{(2R)^{(\rho-\delta)|\alpha|}}\sum_{0\neq\beta\leq\alpha}\frac{(N+1)^{|\beta|+1}}{\beta!}\int_{|\xi|\geq 2a_N} e^{m\omega(\xi)}|\hat{u}(\xi)|d\xi \\
&\leq C\sum_{|\alpha|=1}^{N}\Big(\frac{BD}{2R^{\rho-\delta}}\Big)^{|\alpha|}\frac{N+1}{a_N}\frac{C_n}{2a_N} \leq \frac{C}{2^n}\sum_{j=1}^{N}\Big(\frac{pDB}{R^{\rho-\delta}}\Big)^j
\end{aligned}$$

pues $C_n \leq a_N$ (ver enunciado del lema 2.1.10). Se deduce entonces que $T_N(u)(x)$ converge a 0 uniformemente en $x \in \Omega$ cuando N tiende a infinito.

Finalmente, de (a), (b), (c) y de la fórmula (1.15) se obtiene que la distribución núcleo del operador $A-P$ es la función de $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega\times\Omega)$ dada por

$$K(x,y) := K_0(x,y) + \sum_{j=1}^{\infty} I_j(x,y) + \sum_{j=1}^{\infty} R_j(x,y).$$

Por lo tanto, $A-P$ es (ω)-regularizante. □

2.2. Propiedades de sumas formales

Cálculos conocidos ([45]) y las propiedades de φ^* permiten probar:

Proposición 2.2.1 *Sea* $\sum p_j \in FAS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ *una suma formal. La sucesión* (q_j) *dada por* $q_j(x,\xi) := \sum_{|\alpha|+h=j}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha\big(p_h(x,-\xi)\big)$, *para cada* j, *es una suma formal.*

Demostración. Sabemos que para cada compacto K en Ω existen constantes $B \geq 1$ y $R \geq 1$ y una sucesión (C_n) con la propiedad

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p_j(x,\xi)| \leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|+j}{n})}e^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|-(\rho-\delta)j}$$

siempre $x \in K$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})$.

Ahora

$$D_x^\beta D_\xi^\gamma q_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|+h=j} \frac{1}{\alpha!} D_x^\beta D_\xi^\gamma \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \big(p_h(x,-\xi)\big).$$

Supongamos que $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\alpha+\gamma|+j}\varphi^*(\frac{|\alpha+\gamma|+j}{n})$. Entonces

$$\begin{aligned} |D_x^\beta D_\xi^\gamma q_j(x,\xi)| &\leq \sum_{|\alpha|+h=j} \frac{1}{\alpha!} |D_x^{\alpha+\beta} D_\xi^{\alpha+\gamma} p_h(x,-\xi)| \leq \\ &\leq C_n e^{m\omega(\xi)} \sum_{|\alpha|+h=j} B^{|\alpha+\gamma|} \frac{(\alpha+\gamma)!}{\alpha!} \cdot \frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\beta|+h}{n})}}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha+\gamma|+(\rho-\delta)h-\delta|\alpha+\beta|}} = \\ &= C_n e^{m\omega(\xi)} \frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})}}{(1+|\xi|)^{\rho|\gamma|+(\rho-\delta)j-\delta|\beta|}} \sum_{|\alpha|+h=j} B^{|\alpha+\gamma|} \frac{(\alpha+\gamma)!}{\alpha!} \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|+h=j} B^{|\alpha+\gamma|} \frac{(\alpha+\gamma)!}{\alpha!} &= B^\gamma \gamma! \sum_{|\alpha|=0}^{j} \binom{\alpha+\gamma}{\alpha} B^{|\alpha|} \leq B^\gamma \gamma! \sum_{|\alpha|=0}^{j} \binom{|\alpha+\gamma|}{|\alpha|} B^{|\alpha|} \leq \\ &\leq B^\gamma \gamma! \sum_{k=0}^{j} \binom{j+|\gamma|}{k} (pB)^k \leq \\ &\leq B^\gamma \gamma! (1+pB)^{j+|\gamma|}, \end{aligned}$$

de donde se obtiene la conclusión, en virtud del lema 2.1.2. □

Definición 2.2.2 *Para* $\sum p_j \in FAS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ *definimos* $(\sum p_j)^t$ *como la suma formal* $\sum_j q_j$*, siendo*

$$q_j(x,\xi) := \sum_{|\alpha|+h=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \big(p_h(x,-\xi)\big).$$

En particular, si $p(x,\xi)$ *es un símbolo,* $p^t(x,\xi)$ *denota la suma formal* $\sum_j q_j$ *dada por*

$$q_j(x,\xi) := \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha D_x^\alpha \big(p(x,-\xi)\big).$$

Ejemplo 2.2.3 Supongamos que $P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$ es un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Sabemos que (véase el ejemplo 1.3.3) tiene símbolo

$$p(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^p} \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) \xi^\alpha.$$

Comprobaremos a continuación que la suma formal $p^t(x,\xi)$ coincide con el símbolo del operador traspuesto $P(x,D)^t$.

El operador traspuesto viene dado por

$$\begin{aligned} P^t(x,D)f &= \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}D^\alpha(a_\alpha(x)f(x)) = \\ &= \sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta a_\alpha(x)D^{\alpha-\beta}f(x). \end{aligned} \tag{2.16}$$

siendo $f\in\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$. Luego tiene símbolo

$$\widetilde{p}(x,\xi) := \frac{1}{(2\pi)^p}\sum_{|\alpha|\le m}(-1)^{|\alpha|}\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha}{\beta}D^\beta a_\alpha(x)\xi^{\alpha-\beta}. \tag{2.17}$$

Por otra parte, $p^t(x,\xi) = \sum_{j=0}^\infty p_j(x,\xi)$, donde $p_j(x,\xi) = \sum_{|\gamma|=j}\frac{1}{\gamma!}\partial_\xi^\gamma D_x^\gamma\big(p(x,-\xi)\big)$. Observemos que si $j>m$, entonces $p_j(x,\xi)=0$, pues $p(x,\xi)$ es un polinomio de grado m en la variable ξ. Si $j\le m$ se tiene

$$\begin{aligned} p_j(x,\xi) &= \sum_{|\gamma|=j}\frac{1}{\gamma!}\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \gamma\le\alpha}} D_x^\gamma a_\alpha(x)\frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}(-\xi)^{\alpha-\gamma}(-1)^{|\gamma|} = \\ &= \sum_{|\gamma|=j}\frac{1}{\gamma!}\sum_{\substack{|\alpha|\le m\\ \gamma\le\alpha}} D_x^\gamma a_\alpha(x)\frac{\alpha!}{(\alpha-\gamma)!}\xi^{\alpha-\gamma}(-1)^{|\alpha|}, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$\sum_{j=0}^m p_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\le m}\sum_{\gamma\le\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}(-1)^{|\alpha|}D_x^\gamma a_\alpha(x)\xi^{\alpha-\gamma} = p^t(x,\xi).$$

En [45] o [38, 3.2.19], se puede encontrar el siguiente resultado.

Proposición 2.2.4 $((\sum p_j)^t)^t = \sum p_j$.

Lema 2.2.5 *Sean α, α_1, α_2, β_1, y β_2 multi-índices. Entonces:*

$$S_{\alpha,\beta} := \frac{1}{\alpha!}\sum_{\beta_1\le\alpha_1}\sum_{\beta_2\le\alpha_2}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2}(\beta_2+\alpha)!(\alpha_2-\beta_2)! \le 2^{|\alpha_2|+j}\alpha_2!2^{|\alpha_1+\alpha_2|}. \tag{2.18}$$

Demostración. Basta observar que

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha!}(\beta_2+\alpha)!(\alpha_2-\beta_2)! &= \tbinom{\beta_2+\alpha}{\alpha}\beta_2!(\alpha_2-\beta_2)! \leq \\ &\leq \tbinom{\beta_2+\alpha}{\alpha}\alpha_2! \leq 2^{|\alpha_2|+j}\alpha_2!\end{aligned}$$

y que $\sum_{\beta_1\leq\alpha_1}\sum_{\beta_2\leq\alpha_2}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \leq 2^{|\alpha_1+\alpha_2|}$. □

Proposición 2.2.6 *Sean $\sum p_j \in FAS^{m_1,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ y $\sum q_j \in FAS^{m_2,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ dos sumas formales. La sucesión (r_j), definida por $r_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|+k+h=j}\frac{1}{\alpha!}\partial^\alpha_\xi p_h(x,\xi)D^\alpha_x q_k(x,\xi)$, es una suma formal en $FAS^{m_1+m_2,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$.*

Demostración. Denotamos $p^1_j = p_j$ y $p^2_j = q_j$ para cada j. Fijado un compacto K de Ω existen constantes $B \geq 1$, $R \geq 1$ y una sucesión (C_n) tales que

$$|D^\alpha_x D^\beta_\xi p^i_j(x,\xi)| \leq C_n B^{|\beta|}\beta! e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|+j}{n})}e^{m_i\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|-(\rho-\delta)j} \tag{2.19}$$

siempre que $x \in K$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|+j}\varphi^*(\frac{|\beta|+j}{n})$, $i = 1,2$.

El papel de los multi-índices α y β en la expresión (2.19), lo jugarán α_1, α_2, β_1 y β_2 en los cálculos que siguen, y α se usará para la definición de r_j.

Como

$$\begin{aligned}&D^{\alpha_1}_x D^{\alpha_2}_\xi r_j(x,\xi) = \\ &= \sum_{|\alpha|+k+h=j}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\beta_1\leq\alpha_1}\sum_{\beta_2\leq\alpha_2}\tbinom{\alpha_1}{\beta_1}\tbinom{\alpha_2}{\beta_2}D^{\beta_2}_\xi D^{\beta_1}_x\partial^\alpha_\xi p_h(x,\xi)\cdot D^{\alpha_1-\beta_1}_x D^\alpha_x D^{\alpha_2-\beta_2}_\xi q_k(x,\xi),\end{aligned}$$

teniendo en cuenta que

$$\tfrac{n}{|\alpha_2|+j}\varphi^*(\tfrac{|\alpha_2|+j}{n}) \geq \text{máx}\left(\tfrac{n}{|\alpha+\beta_2|+h}\varphi^*(\tfrac{|\alpha+\beta_2|+h}{n}), \tfrac{n}{|\alpha_2-\beta_2|+k}\varphi^*(\tfrac{|\alpha_2-\beta_2|+k}{n})\right)$$

resulta, para cada $x \in K$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\alpha_2|+j}\varphi^*(\frac{|\alpha_2|+j}{n})$:

$$\begin{aligned}&|D^{\beta_1}_x D^{\beta_2}_\xi\partial^\alpha_\xi p_h(x,\xi)|\cdot|D^{\alpha_1-\beta_1}_x D^\alpha_x D^{\alpha_2-\beta_2}_\xi q_k(x,\xi)| \leq \\ &\leq C_n^2 B^{|\alpha+\alpha_2|}(\beta_2+\alpha)!(\alpha_2-\beta_2)!\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha+\alpha_1|+h+k}{n})}e^{(m_1+m_2)\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha+\alpha_2|+(\rho-\delta)(h+k)-\delta|\alpha+\alpha_1|}} = \\ &= P_{n,\alpha,\beta,j}\end{aligned}$$

siendo $m := m_1+m_2$ y

$$P_{n,\alpha,\beta,j} := C_n^2 B^{|\alpha+\alpha_2|}(\beta_2+\alpha)!(\alpha_2-\beta_2)!\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha_1|+j}{n})}e^{m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha_2|+(\rho-\delta)j-\delta|\alpha_1|}}, \tag{2.20}$$

pues $|\alpha|+h+k=j$.

Por lo tanto,

$$|D_x^{\alpha_1} D_\xi^{\alpha_2} r_j(x,\xi)| e^{-m\omega(\xi)} B^{-(|\alpha_2|+j)} C_n^{-2} \frac{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha_2|+(\rho-\delta)j-\delta|\alpha_1|}}{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha_1|+j}{n})}} \leq$$
$$\leq \sum_{|\alpha|+h+k=j} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta_1\leq\alpha_1} \sum_{\beta_2\leq\alpha_2} \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} (\beta_2+\alpha)!(\alpha_2-\beta_2)! = \sum_{|\alpha|+h+k=j} S_{\alpha,\beta},$$

siendo $S_{\alpha,\beta}$ la expresión definida en la fórmula (2.18).

Del lema 2.2.5 y de la propiedad $\sum_{|\alpha|=s} 1 \leq p^s$ se deduce que el sumatorio anterior está acotado por

$$\sum_{|\alpha|=0}^{j} 2^{|\alpha_2|+j} \alpha_2! 2^{|\alpha_1+\alpha_2|} \leq j p^j 4^{|\alpha_2|} 2^{|\alpha_1|} \alpha_2!$$

Una aplicación del lema 2.1.2 permite concluir. □

Definición 2.2.7 *Para* $\sum p_j \in FAS_{\rho,\delta}^{m_1,\omega}(\Omega)$, $\sum q_j \in FAS_{\rho,\delta}^{m_2,\omega}(\Omega)$ *definimos* $(\sum p_j) \circ (\sum q_j) = \sum r_j$, *donde*

$$r_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|+k+h=j} \frac{1}{\alpha!} \partial_\xi^\alpha p_h(x,\xi) D_x^\alpha q_k(x,\xi).$$

Para demostrar el siguiente resultado necesitamos un lema.

Proposición 2.2.8 *Si* $\sum p_j \sim \sum p'_j$ *y* $\sum q_j \sim \sum q'_j$, *entonces* $(\sum p_j) \circ (\sum q_j) \sim (\sum p'_j) \circ (\sum q'_j)$.

Lema 2.2.9 *Si* $\sum p_j \sim 0$ *ó* $\sum q_j \sim 0$, *entonces* $(\sum p_j) \circ (\sum q_j) \sim 0$.

Demostración del lema 2.2.9. Por comodidad supondremos que $N_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en la definición 2.1.4.

Supongamos primero que $\sum q_j \sim 0$. Dado un conjunto compacto K de Ω sean $B \geq 1$, $R \geq 1$ y $C_n > 0$ ($n \in \mathbb{N}$) tales que

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta \big(\sum_{j<N} q_j\big)(x,\xi)| \leq C_n \beta! B^{|\beta|} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|+N}{n})} e^{m_2\omega(\xi)} (1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|-(\rho-\delta)N}$$

siempre que $x \in K$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|+N} \varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n})$, $N \in \mathbb{N}$.

Como

$$D_x^{\alpha_1} D_\xi^{\alpha_2} \big(\sum_{j<N} r_j\big) =$$
$$= \sum_{|\alpha|+h<N} \sum_{k=0}^{N-|\alpha|-h-1} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta_1\leq\alpha_1} \sum_{\beta_2\leq\alpha_2} \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \big(D_\xi^{\beta_2} D_x^{\beta_1} \partial_\xi^\alpha p_h\big) \big(D_x^{\alpha_1-\beta_1} D_x^\alpha D_\xi^{\alpha_2-\beta_2} q_k\big) =$$
$$= \sum_{|\alpha|+h<k} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta_1\leq\alpha_1} \sum_{\beta_2\leq\alpha_2} \binom{\alpha_1}{\beta_1}\binom{\alpha_2}{\beta_2} \big(D_\xi^{\beta_2} D_x^{\beta_1} \partial_\xi^\alpha p_h\big) \sum_{k=0}^{N-|\alpha|-h-1} D_x^{\alpha_1-\beta_1} D_x^\alpha D_\xi^{\alpha_2-\beta_2} q_k.$$

si suponemos a partir de ahora que $x \in K$, y

$$\log(\tfrac{|\xi|}{R}) \geq \tfrac{n}{|\alpha_2|+N}\varphi^*(\tfrac{|\alpha_2|+N}{n})\big(\geq \tfrac{n}{|\alpha_2-\beta_2|+N}\varphi^*(\tfrac{|\alpha_2-\beta_2|+N}{n})\big).$$

se cumple

$$|D_x^{\alpha_1-\beta_1+\alpha} D_\xi^{\alpha_2-\beta_2}\big(\sum_{k=0}^{N-|\alpha|-h-1} q_k\big)(x,\xi)| \leq$$
$$\leq C_n(\alpha_2-\beta_2)!B^{|\alpha_2-\beta_2|}\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha_1-\beta_1|+N-h}{n})}e^{m_2\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha_2-\beta_2|+(\rho-\delta)(N-|\alpha|-h)-\delta|\alpha_1-\beta_1+\alpha|}}.$$

Ponemos $m := m_1 + m_2$ y, como en la demostración de la proposición 2.2.6,

$$|D_x^{\beta_1}D_\xi^{\beta_2}\partial_\xi^\alpha p_h(x,\xi)|\cdot|D_x^{\alpha_1-\beta_1+\alpha}D_\xi^{\alpha_2-\beta_2}\big(\sum_{k=0}^{N-|\alpha|-h-1} q_k\big)(x,\xi)| \leq P_{n,\alpha,\beta,N}$$

siendo $P_{n,\alpha,\beta,N}$ la expresión definida en la fórmula (2.20) para $j = N$.

Finalmente queda

$$|D_x^{\alpha_1}D_\xi^{\alpha_2}\big(\sum_{j<N} r_j\big)| \leq$$
$$\Big(\sum_{\substack{\alpha,h\\|\alpha|+h<N}} S_{\alpha,\beta}\Big)\cdot C_n^2 B^{|\alpha_2|}\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha_1|+N}{n})}e^{m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha_1|+(\rho-\delta)N-\delta|\alpha_1|}},$$

siendo $S_{\alpha,\beta}$ la expresión definida en la fórmula (2.18).

Aplicando el lema 2.2.5:

$$\Big(\sum_{\substack{\alpha,h\\|\alpha|+h<N}} S_{\alpha,\beta}\Big) \leq$$
$$\leq \sum_{j=0}^{N-1}\sum_{|\alpha|=0}^{j} 2^{|\alpha_2|+j}\alpha_2!2^{|\alpha_1+\alpha_2|} \leq 4^{|\alpha_2|}2^{|\alpha_1|}\alpha_2!\sum_{j=0}^{N-1}(2p)^j \leq N(2p)^N 4^{|\alpha_2|}2^{|\alpha_1|}\alpha_2!$$

Supongamos ahora que $\sum p_j \sim 0$. Usando la notación de la demostración del caso anterior, suponemos además

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta\big(\sum_{j<N} p_j\big)(x,\xi)| \leq C_n\beta!B^\beta e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\alpha|+N}{n})}e^{m_1\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{\rho|\beta|+(\rho-\delta)N-\delta|\alpha|}$$

siempre que $x \in K$, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n})$.

Ahora se tiene

$$D_x^{\alpha_1} D_\xi^{\alpha_2}\big(\sum_{j<N} r_j\big) =$$
$$= \sum_{|\alpha|+k<N} \sum_{h=0}^{N-|\alpha|-k-1} \frac{1}{\alpha!} \sum_{\beta_1\leq\alpha_1} \sum_{\beta_2\leq\alpha_2} \tbinom{\alpha_1}{\beta_1}\tbinom{\alpha_2}{\beta_2}\big(D_\xi^{\beta_2} D_x^{\beta_1} \partial_\xi^\alpha p_h\big)\big(D_x^{\alpha_1-\beta_1} D_x^\alpha D_\xi^{\alpha_2-\beta_2} q_k\big).$$

Si $x \in K$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\alpha_2|+N}\varphi^*(\frac{|\alpha_2|+N}{n})\big(\geq \frac{n}{|\beta_2+\alpha|+N-|\alpha|-k}\varphi^*(\frac{|\beta_2+\alpha|+N-|\alpha|-k}{n})\big)$ se tiene

$$|D_\xi^{\beta_2} D_x^{\beta_1} \partial_\xi^\alpha\big(\sum_{h<N-|\alpha|-k} p_h\big)(x,\xi)| \leq$$
$$\leq C_n B^{|\alpha+\beta_2|}(\beta_2+\alpha)! \frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\beta_1|+N-|\alpha|-k}{n})} e^{m_1\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha+\beta_2|+(\rho-\delta)(N-|\alpha|-k)-\delta|\beta_1|}}.$$

El resto de cálculos es análogo al caso anterior. □

Demostración de la proposición 2.2.8. La aplicación $FAS_{\rho,\delta}^{m_1}(\Omega)\times FAS_{\rho,\delta}^{m_2}(\Omega) \to FAS_{\rho,\delta}^{m}(\Omega)$ tal que $(\sum p_j, \sum q_j) \mapsto (\sum p_j)\circ(\sum q_j)$ es bilineal. Entonces

$$(\sum p_j)\circ(\sum q_j) - (\sum p_j')\circ(\sum q_j') =$$
$$= (\sum p_j)\circ(\sum (q_j - q_j')) + (\sum (p_j - p_j'))\circ(\sum q_j'),$$

que es equivalente a cero por el lema 2.2.9. □

2.3. La composición y el operador traspuesto

Finalizamos este capítulo comprobando que nuestra clase de operadores pseudodiferenciales es cerrada al componer operadores y al tomar traspuestos de operadores.

Proposición 2.3.1 *Sea $P(x,D)$ el operador asociado a $p(x,\xi) \in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(U)$ y sea Ω un abierto relativamente compacto de U. Entonces el operador traspuesto (restringido a $\mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega)$) se puede descomponer como $P(x,D)^t = Q(x,D) + R$, siendo R un operador (ω)-regularizante y $Q(x,D)$ el operador definido por $q(x,\xi) \sim p^t(x,\xi)$.*

Demostración. Ya sabemos que $P(x,D)^t$ es el operador asociado a $p(y,-\xi)$ (véase el corolario 1.2.6). Entonces, es suficiente aplicar el teorema 2.1.14. □

Necesitamos ahora un resultado técnico relativo a sumas formales.

Lema 2.3.2 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^p$ un abierto, y sean $p(x,\xi), q(x,\xi) \in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$. Supongamos que $b(x,\xi) \in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ satisface $b(x,\xi) \sim q^t(x,-\xi)$ y que $r(x,\xi) \in AS_{\rho,\delta}^{2m,\omega}(\Omega)$ es equivalente a $\sum_j \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha(p(x,\xi)b(y,\xi))|_{y=x}$. Entonces, $r(x,\xi) \sim p(x,\xi)\circ q(x,\xi)$.*

DEMOSTRACIÓN. Observemos primero que $\sum_j \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_y^\alpha (p(x,\xi)b(y,\xi))|_{y=x}$ es una suma formal: De la proposición 1.2.15 la función $p(x,\xi)b(y,\xi)$ es una amplitud. Ahora, basta aplicar el ejemplo 2.1.3.

Por comodidad supondremos que $N_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ en la definición 2.1.4.

Recordemos que

$$q^t(x,-\xi) = \sum_j \sum_{|\alpha|=j} \frac{(-1)^{|\alpha|}}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha D_x^\alpha q(x,\xi)$$

y que

$$p(x,\xi)\circ q(x,\xi) = \sum_j \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(x,\xi) D_x^\alpha q(x,\xi).$$

Tenemos que estudiar las derivadas de

$$\sum_{j<N}\sum_{|\alpha|=j}\Big\{\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\big(p(x,\xi)D_x^\alpha b(x,\xi)\big) - \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)D_x^\alpha q(x,\xi)\Big\}.$$

Sumando y restando la expresión $\sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{s!}\partial_\xi^s D_x^s q(x,\xi)$ queda

$$\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\Big(p(x,\xi)D_x^\alpha\big[b(x,\xi) - \sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{s!}\partial_\xi^s D_x^s q(x,\xi)\big]\Big) +$$
$$\sum_{|\alpha|<N}\Big\{\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha\big(p(x,\xi)D_x^\alpha\big(\sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{s!}\partial_\xi^s D_x^s q(x,\xi)\big)\big) - \frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)D_x^\alpha q(x,\xi)\Big\}.$$

Acotaremos ahora las derivadas del primer sumando, que coincide con

$$\mathtt{I}_1(x,\xi) = \sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\sum_{r\le\alpha}\binom{\alpha}{r}\partial_\xi^r p(x,\xi)\cdot\partial_\xi^{\alpha-r}D_x^\alpha\big[b(x,\xi) - \sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{s!}\partial_\xi^s D_x^s q(x,\xi)\big]$$

Se tiene

$$\begin{aligned} D_x^\gamma D_\xi^\beta \mathtt{I}_1(x,\xi) \quad &= \quad \sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\gamma_1\le\gamma}\sum_{\beta_1\le\beta}\sum_{r\le\alpha}\binom{\gamma}{\gamma_1}\binom{\beta}{\beta_1}\binom{\alpha}{r}D_x^{\gamma_1}D_\xi^{\beta_1}\partial_\xi^r p(x,\xi)\cdot \\ &\cdot D_x^{\gamma-\gamma_1}D_\xi^{\beta-\beta_1}\partial_\xi^{\alpha-r}D_x^\alpha\big[b(x,\xi) - \sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{s!}\partial_\xi^s D_x^s q(x,\xi)\big]. \end{aligned}$$

Fijado un compacto $K\subset\Omega$ existen una sucesión (C_n) y constantes $R\ge 1$ y $B\ge 1$ tales que para cada $x\in K$ y

$$\log(\tfrac{|\xi|}{R}) \ge \tfrac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\tfrac{|\beta|+N}{n})\big(\ge \tfrac{2n}{|\beta-\beta_1+\alpha-r|+N}\varphi^*(\tfrac{|\beta-\beta_1+\alpha-r|+N}{2n})\big),$$

como $b(x,\xi)$ es equivalente a la suma formal $q^t(x,-\xi)$, se cumple

$$\begin{aligned}&\left|D_x^{\gamma-\gamma_1}D_\xi^{\beta-\beta_1}\partial_\xi^{\alpha-r}D_x^\alpha\big[b(x,\xi)-\sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{s!}\partial_\xi^s D_x^s q(x,\xi)\big]\right|\le\\ &\le C_{2n}(\beta-\beta_1+\alpha-r)!B^{|\beta-\beta_1+\alpha-r|}\frac{e^{(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{|\gamma-\gamma_1+\alpha|+N}{2n})}e^{m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta-\beta_1+\alpha-r|+(\rho-\delta)N-\delta|\gamma-\gamma_1+\alpha|}}.\end{aligned}$$

Luego, usando que $(\beta_1+r)!(\beta-\beta_1+\alpha-r)!\le(\beta+\alpha)!$,

$$\begin{aligned}\left|D_x^\gamma D_\xi^\beta \mathtt{I}_1(x,\xi)\right| &\le \sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}\sum_{\gamma_1\le\gamma}\sum_{\beta_1\le\beta}\sum_{r\le\alpha}\binom{\gamma}{\gamma_1}\binom{\beta}{\beta_1}\binom{\alpha}{r}\cdot\\ &\quad\cdot C_{2n}^2(\beta+\alpha)!B^{\beta+\alpha}\frac{e^{(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{|\gamma+\alpha|+N}{2n})}e^{2m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta+\alpha|+(\rho-\delta)N-\delta|\gamma+\alpha|}}\\ &\le C_{2n}^2\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}2^{|\gamma+\beta+\alpha|}B^{|\beta+\alpha|}(\beta+\alpha)!\frac{e^{(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{|\gamma+\alpha|+N}{2n})}e^{2m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta+\alpha|+(\rho-\delta)N-\delta|\gamma+\alpha|}}.\end{aligned}$$

Pero $\log(\frac{|\xi|}{R})\ge\frac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n})\ge\frac{n}{N}\varphi^*(\frac{N}{n})\ge\frac{n}{|\alpha|}\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})$, y en particular

$$(1+|\xi|)^{|\alpha|}\ge e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}.$$

Así
$$\frac{e^{(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{|\gamma+\alpha|+N}{2n})}}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha|}}\le\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|+N}{n})}e^{\rho n\varphi^*(\frac{|\alpha|}{n})}}{(1+|\xi|)^{\rho|\alpha|}}\le e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|+N}{n})}.$$

Como $\frac{(\beta+\alpha)!}{\alpha!}=\binom{\beta+\alpha}{\beta}\beta!\le 2^{|\beta|+N}\beta!$, se deduce

$$\begin{aligned}\left|D_x^\gamma D_\xi^\beta \mathtt{I}_1(x,\xi)\right| &\le C_{2n}^2\sum_{|\alpha|<N}\frac{1}{\alpha!}2^{|\gamma+\beta+\alpha|}B^{|\beta+\alpha|}(\beta+\alpha)!\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|+N}{n})}e^{2m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta|+(\rho-\delta)N-\delta|\gamma|}}\le\\ &\le C_{2n}^2 2^{|\gamma|}p^N(4B)^{|\beta|+N}\beta!N\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|+N}{n})}e^{2m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta|+(\rho-\delta)N-\delta|\gamma|}}.\end{aligned}$$

Vamos a acotar ahora las derivadas de

$$\begin{aligned}\mathtt{I}_2(x,\xi)&=\sum_{|\alpha|<N}\Big\{\sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{\alpha!s!}\partial_\xi^\alpha\big(p(x,\xi)\partial_\xi^s D_x^{\alpha+s}q(x,\xi)\big)-\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)D_x^\alpha q(x,\xi)\Big\}=\\ &=\sum_{|\alpha|<N}\Big\{\Big(\sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{\alpha!s!}\sum_{r\le\alpha}\binom{\alpha}{r}\partial_\xi^r p(x,\xi)\partial_\xi^{s+\alpha-r}D_x^{\alpha+s}q(x,\xi)\Big)-\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^\alpha p(x,\xi)D_x^\alpha q(x,\xi)\Big\}.\end{aligned}$$

La primera suma es

$$\sum_{|\alpha|<N}\sum_{|s|<N}\frac{(-1)^{|s|}}{\alpha!s!}\sum_{r\leq\alpha}\binom{\alpha}{r}\partial_\xi^r p(x,\xi)\partial_\xi^{s+\alpha-r}D_x^{\alpha+s}q(x,\xi)=$$
$$=\sum_{|r|<N}\sum_{|s|<N}\sum_{\substack{r\leq\alpha\\|\alpha|<N}}\frac{(-1)^{|s|}}{\alpha!s!}\binom{\alpha}{r}\partial_\xi^r p(x,\xi)\partial_\xi^{s+\alpha-r}D_x^{\alpha+s}q(x,\xi)=$$
$$=\sum_{|r|<N}\sum_{\substack{t\geq r\\|t|\leq 2N-2}}\sum_{s+\alpha=t}\frac{(-1)^{|s|}}{\alpha!s!}\binom{\alpha}{r}\partial_\xi^r p(x,\xi)\partial_\xi^{t-r}D_x^{t}q(x,\xi),$$

donde el último sumatorio se extiende solo sobre los multi-índices s,α tales que $r\leq\alpha$ y $|r|<N$, $|s|<N$. Lo denotaremos como $\sum_*$ para abreviar. De aquí queda:

$$\mathtt{I}_2(x,\xi)=$$
$$=\sum_{|r|<N}\Big\{\sum_{\substack{t\geq r\\|t|\leq 2N-2}}\sum\nolimits_*\frac{(-1)^{|s|}}{\alpha!s!}\binom{\alpha}{r}\partial_\xi^r p(x,\xi)\partial_\xi^{t-r}D_x^{t}q(x,\xi)-\frac{1}{\alpha!}\partial_\xi^r p(x,\xi)D_x^r q(x,\xi)\Big\}$$

- Para cada multi-índice r (de la primera suma) estudiamos el caso $t=r$. Aquí $s+\alpha=t=r$ y como $\alpha\geq r$ se tiene necesariamente que $\alpha=r, s=0$, y toda la expresión se reduce a
$$\frac{1}{r!}\partial_\xi^r p(x,\xi)D_x^r q(x,\xi)-\frac{1}{r!}\partial_\xi^r p(x,\xi)D_x^r q(x,\xi)=0.$$
- Para cada multi-índice r estudiamos ahora cuando $r\leq t$, $r\neq t$, $|t|<N$ con t fijo (un multi-índice). La suma
$$\sum\nolimits_*\frac{(-1)^{|s|}}{\alpha!s!}\binom{\alpha}{r}\partial_\xi^r p(x,\xi)\partial_\xi^{t-r}D_x^{t}q(x,\xi)=$$
$$=\frac{1}{r!}\partial_\xi^r p(x,\xi)\partial_\xi^{t-r}D_x^{t}q(x,\xi)\sum\nolimits_*\frac{(-1)^{|s|}}{s!(\alpha-r)!}$$

  Como en [19],
$$\sum\nolimits_*\frac{(-1)^{|s|}}{s!(\alpha-r)!}=\sum_{r\leq\alpha\leq t}\frac{(-1)^{|t-\alpha|}}{(t-\alpha)!(\alpha-r)!}\overset{k=\alpha-r}{=}(-1)^{|t-r|}\sum_{k\leq t-r}\frac{(-1)^{|k|}}{(t-r-k)!k!}=$$
$$=0$$

Entonces $\mathtt{I}_2(x,\xi)$ se reduce al sumatorio

$$\sum_{|r|<N}\Big\{\sum_{\substack{|t|=N\\t>r}}^{2N-2}\sum\nolimits_*\frac{(-1)^{|s|}}{s!\alpha!}\binom{\alpha}{r}\partial_\xi^r p(x,\xi)\partial_\xi^{t-r}D_x^{t}q(x,\xi)\Big\}.$$

Por lo tanto

$$D_x^\gamma D_\xi^\beta \mathtt{I}_2(x,\xi) =$$
$$= \sum_{|r|<N} \sum_{|t|=N}^{2N-2} \sum\nolimits_* \frac{(-1)^{|s|}}{s!\alpha!}\binom{\alpha}{r} \sum_{\gamma_1\le\gamma}\sum_{\beta_1\le\beta}\binom{\gamma}{\gamma_1}\binom{\beta}{\beta_1} D_x^{\gamma_1}D_\xi^{\beta_1}\partial_\xi^r p(x,\xi)\cdot D_x^{\gamma-\gamma_1}D_\xi^{\beta-\beta_1}\partial_\xi^{t-r}D_x^t q(x,\xi).$$

Luego si $x\in K$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \ge \frac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n})\big(\ge \frac{2n}{|\beta|+2N}\varphi^*(\frac{|\beta|+2N}{n})\big)$, dado que $\binom{\alpha}{r}\le 2^N$ y $\binom{\gamma}{\gamma_1}\binom{\beta}{\beta_1}\le 2^{|\gamma+\beta|}$, obtenemos

$$\big|D_x^\gamma D_\xi^\beta \mathtt{I}_2(x,\xi)\big| \le$$
$$\le \sum_{|r|<N} \sum_{|t|=N}^{2N-2} \sum\nolimits_* \frac{1}{s!\alpha!}2^{N+|\gamma+\beta|}C_{2n}B^{|\beta+t|}(\beta+t)!\frac{e^{(\rho-\delta)2n\varphi^*(\frac{|\gamma+t|}{2n})}e^{2m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta+t|-\delta|\gamma+t|}}.$$

Ahora bien, si $|t|>N$ entonces $|t|=N+\ell$, siendo $\ell\ge 1$ y

$$e^{2n\varphi^*(\frac{|\alpha+t|}{2n})} = e^{2n\varphi^*(\frac{|\alpha|+N+\ell}{2n})} \le e^{n\varphi^*(\frac{|\alpha|+N}{n})}e^{n\varphi^*(\frac{\ell}{n})}.$$

Además, $\log(\frac{|\xi|}{R}) \ge \frac{n}{|\beta|+N}\varphi^*(\frac{|\beta|+N}{n}) \ge \frac{n}{\ell}\varphi^*(\frac{\ell}{n})$ implica

$$e^{n\varphi^*(\frac{\ell}{n})}(1+|\xi|)^{-\ell}\le 1,$$

usando que $(t-s)!=\alpha!$, se obtiene

$$\big|D_x^\gamma D_\xi^\beta \mathtt{I}_2(x,\xi)\big| \le$$
$$\le \Big(\sum_{|r|<N} \sum_{|t|=N}^{2N-2} \sum\nolimits_* \binom{t}{s}\binom{\beta+t}{t}B^{|\beta+t|}\Big)\cdot C_{2n}\beta!\,2^{N+|\gamma+\beta|}\frac{e^{(\rho-\delta)n\varphi^*(\frac{|\gamma|+N}{n})}e^{2m\omega(\xi)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta|+(\rho-\delta)N-\delta|\gamma|}},$$

lo que concluye la demostración del lema, pues el primer factor de la expresión anterior está acotado por

$$\begin{aligned}\sum_{|r|<N} \sum_{|t|=N}^{2N-2} \sum_{|s|=|t|-N+1}^{N-1}\binom{t}{s}\binom{\beta+t}{t}B^{|\beta+t|} &\le \sum_{|r|<N} \sum_{|t|=N}^{2N-2} \sum_{|s|=|t|-N+1}^{N-1} 2^{|t|}2^{|\beta+t|}B^{|\beta+t|}\le\\ &\le 4^N 2^{|\beta|}4^N B^{|\beta|+2N}\sum_{|r|<N} \sum_{|t|=N}^{2N-2} \sum_{|s|=|t|-N+1}^{N-1} 1 \le\\ &\le N^3(2B)^{|\beta|}(4B)^{2N}p^{4N}.\end{aligned}$$

□

El objetivo del próximo teorema es componer dos operadores pseudodiferenciales $P(x,D)$ y $Q(x,D)$, módulo un operador regularizante, de modo que el símbolo de la composición admita un desarrollo asintótico equivalente a $(2\pi)^p(p(x,\xi)\circ q(x,\xi))$. Necesitaremos que al menos uno de los operadores tenga soporte propio.

Teorema 2.3.3 *Sean $p(x,\xi), q(x,\xi) \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(U)$ y W un conjunto abierto relativamente compacto en U. Denotemos por P y Q los correspondientes operadores pseudodiferenciales asociados y supongamos que P ó Q tiene soporte propio en W. Entonces, módulo un operador regularizante, se puede definir la composición $P \circ Q : \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$, $\overline{\Omega} \subset W$, de modo que coincide con el operador pseudodiferencial asociado a $(2\pi)^p(p(x,\xi) \circ q(x,\xi))$.*

Demostración. Supondremos que el operador P tiene soporte propio en W y tomamos Ω_1, relativamente compacto y abierto y que contenga a $\overline{W}$.

Sabemos que $Q = (Q^t)^t$ y que Q^t viene dado por $q(y,-\xi)$. En consecuencia, sobre Ω_1, $Q^t = Q' + T'$, siendo T' (ω)-regularizante y Q' definido por un símbolo q' sobre Ω_1, que es equivalente a q^t (véase la proposición 2.3.1). Como la clase de los operadores (ω)-regularizantes es cerrada al tomar traspuestos, sobre Ω_1, Q coincide, módulo un operador (ω)-regularizante, con el operador Q_1 asociado a $b(y,\xi) := q'(y,-\xi) \sim q^t(y,-\xi)$. Es decir, $Q = Q_1 + T_1$, siendo T_1 (ω)-regularizante. Entonces $P \circ T_1$ es el operador (ω)-regularizante obtenido al componer $T_1 : \mathcal{E}'_{(\omega)}(W) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(W)$ y $P : \mathcal{E}_{(\omega)}(W) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(W)$.

Por otra parte, podemos considerar $Q_1 : \mathcal{D}_{(\omega)}(W) \to \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p)$ y $P : \mathcal{D}_{L_1,(\omega)}(\mathbb{R}^p) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(W)$, con lo cual la composición $P \circ Q_1$ define un operador $\mathcal{D}_{(\omega)}(W) \to \mathcal{E}_{(\omega)}(W)$ y se tiene

$$P(Q_1 f)(x) = \int p(x,\xi)\widehat{Q_1 f}(\xi) e^{ix\xi} d\xi.$$

Pero, de la demostración de la proposición 1.5.3, apartado (i), $Q_1 f(x) = \hat{I}(-x)$, siendo $I(\xi) := \int b(y,\xi) f(y) e^{-iy\xi} dy$, lo que implica que $\widehat{Q_1 f}(\xi) = (2\pi)^p I(\xi)$. Esto es, $P \circ Q_1$ es el operador pseudodiferencial asociado a $a(x,y,\xi) = (2\pi)^p p(x,\xi) b(y,\xi)$.

Una aplicación del teorema 2.1.14 permite descomponer, en Ω,

$$P \circ Q_1 = S + T,$$

siendo T un operador (ω)-regularizante y S el operador pseudodiferencial asociado a $r(x,\xi) \in AS^{2m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$, símbolo equivalente a la suma formal

$$(2\pi)^p \sum_j \sum_{|\alpha|=j} \frac{1}{\alpha!} \partial^\alpha_\xi D^\alpha_y (p(x,\xi) b(y,\xi))|_{y=x}.$$

Dado que $b(x,\xi) \sim q^t(x,-\xi)$, se deduce del lema 2.3.2, que $r(x,\xi) \sim (2\pi)^p p(x,\xi) \circ q(x,\xi)$, lo que concluye la prueba. $\square$

Capítulo 3

Operadores hipoelípticos

Un operador pseudodiferencial de clase (ω), $P : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega) \to \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$, se dice que es (ω)-hipoelíptico si cumple que $\operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp} Pu = \operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp} u$ para cada $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$. La hipoelipticidad del operador proporciona información acerca de la regularidad de las soluciones de la ecuación $Pf = g$. Estamos interesados especialmente en el caso en que $P = P(x, D)$ es un operador en derivadas parciales con coeficientes variables. Restringimos nuestra atención a los operadores lineales en derivadas parciales de fuerza constante, que pueden considerarse como perturbaciones acotadas en un cierto sentido de operadores con coeficientes constantes, por lo que cabe esperar que tengan un comportamiento respecto a la regularidad de las soluciones similar al de los operadores con coeficientes constantes.

Este capítulo consta de dos partes bien diferenciadas. Los resultados obtenidos en la primera no dependen de la teoría desarrollada en los capítulos anteriores. En la segunda parte estudiamos la hipoelipticidad con el método de la paramétrix y es entonces cuando los operadores pseudodiferenciales juegan un papel esencial.

Es bien conocido que si P es un operador en derivadas parciales con coeficientes constantes entonces P es (ω)-hipoelíptico si, y solo si, P es homogéneo (ω)-hipoelíptico, en el sentido de que si Ω' es un abierto en Ω y $u \in \mathcal{D}'_*(\Omega')$ satisface $Pu = 0$ en Ω' entonces $u \in \mathcal{E}_*(\Omega')$. En consecuencia, siempre que σ sea una función peso tal que $\sigma = O(\omega)$, tendremos que si P tiene coeficientes constantes y es (ω)-hipoelíptico entonces P también es (σ)-hipoelíptico y un resultado análogo se cumple también cuando trabajamos con clases no casianalíticas de tipo Roumieu (en particular en las clases de Gevrey).

Los resultados anteriores no se mantienen si consideramos operadores con coeficientes variables. De hecho, varios autores (Rodino [39], Baouendi y Trèves [1], Okaji [36], Cattabriga, Rodino, Zanghirati [11], Gramchev [17]) han dado ejemplos de operadores cuyos coeficientes son funciones real analíticas, que son homogéneo hipoelípticos y no hipoelípticos. Así como operadores que son $\{t^d\}$-hipoelípticos $(0 < d < 1)$ y no son C^∞-hipoelípticos.

Demostramos que si un operador $P(x, D)$ de fuerza constante y coeficientes en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ es homogéneo (ω)-hipoelíptico entonces $P(x, D)$ es (σ)-hipoelíptico para cada $\sigma = O(\omega)$ (3.1.14). El hecho de que una clase de funciones ultradiferenciables de tipo Roumieu sea la intersección de todas las clases de Beurling que la contienen permite deducir un resultado análogo para las clases de Roumieu.

M. Taylor [43] probó que si $P(x, D)$ es un operador en derivadas parciales con coeficientes variables definidos en Ω, hipoelíptico y de fuerza constante en Ω, entonces el operador con coeficientes constantes $P(x_0, D)$ es hipoelíptico para cada $x_0 \in \Omega$. Nosotros obtenemos una versión del teorema de Taylor para clases no casianalíticas lo suficientemente grandes como para contener cualquier clase de Gevrey, como por ejemplo para $\omega(t) = (\log(1 + t))^s$, $s > 1$.

Para obtener los resultados anteriores necesitamos una discusión previa relativa a espacios locales de Hörmander, en la versión más general proporcionada por Björk [4].

En la segunda parte del capítulo presentamos una condición suficiente para que un operador pseudodiferencial de clase (ω) admita una paramétrix, esto es, una inversa a la izquierda módulo un operador regularizante. Esta condición fue obtenida por Hörmander para símbolos clásicos en C^∞. Una versión para operadores en clases de Gevrey se puede encontrar en [45].

Buscando condiciones para garantizar la hipoelipticidad de operadores en derivadas parciales con coeficientes variables en C^∞, Hörmander [23], e independientemente Malgrange [32], demostraron que si $P(x, D)$ tiene coeficientes C^∞ y fuerza constante en Ω y si $P(x_0, D)$ es hipoelíptico para cada $x_0 \in \Omega$, entonces $P(x, D)$ es hipoelíptico.

El resultado de Malgrange/Hörmander ha sido generalizado a operadores de fuerza constante que actúan sobre clases de Gevrey (de tipo Roumieu) cuyos coeficientes son funciones real analíticas, o pertenecen a alguna otra clase de Gevrey. Véase Iftimie [25] y Shafii-Zielezny [41]. Algunos resultados parciales para operadores que actúan sobre clases de funciones ultradiferenciables de tipo Roumieu $\mathcal{E}_{\{M_p\}}(\mathbb{R}^p)$, bajo ciertas condiciones sobre la sucesión $\{M_p\}$, pueden verse en Pascu [37].

Como consecuencia del resultado previamente obtenido acerca de la existencia de paramétrix, obtenemos algunas condiciones en los pesos (ω, σ) para poder concluir la (ω)-hipoelipticidad del operador de fuerza constante $P(x, D)$ a partir de la (σ)-hipoelipticidad de $P(x_0, D)$, y en el caso en que los coeficientes del operador sean funciones real analíticas o pertenezcan a alguna clase no casianalítica.

También damos un ejemplo de un operador (ω)-hipoelíptico que no es de fuerza constante, que se obtiene combinando y modificando sendos ejemplos de Kumano-go [28] y Liess-Rodino [31].

3.1. Operadores (ω)-hipoelípticos y homogéneo (ω)-hipoelípticos

Según la definición de Schwartz [40], un operador lineal en derivadas parciales P con coeficientes en $C^\infty(\Omega)$, siendo Ω un abierto de $\mathbb{R}^p$, es hipoelíptico en Ω si $Pu \in C^\infty(\Omega')$ implica que $u \in C^\infty(\Omega')$, para cada abierto $\Omega' \subset \Omega$ y para cada $u \in \mathcal{D}'(\Omega')$. O lo que es lo mismo, se da la igualdad

$$\text{sing supp}\, Pu = \text{sing supp}\, u$$

para toda $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ (véase [22, 13.4.4]).

Los operadores lineales en derivadas parciales con coeficientes constantes fueron caracterizados por Hörmander, quien dió varias condiciones equivalentes. Así, por ejemplo, $P(D)$ es hipoelíptico si, y sólo si, existen constantes positivas c y C tales que

$$|P^{(\alpha)}(\xi)|/|P(\xi)| \leq C|\xi|^{-|\alpha|c}$$

si $\xi \in \mathbb{R}^p$ y $|\xi|$ es bastante grande. En particular, podemos seleccionar α con longitud $|\alpha| = m = \text{grado}P$ de modo que $P^{(\alpha)}$ es una constante no nula, y se deduce que si $P(D)$ es hipoelíptico entonces existen $c, C > 0$ de modo que $|P(\xi)^{-1}| \leq C|\xi|^{-mc}$ si $|\xi|$ es suficientemente grande.

La definición de Schwartz motiva la siguiente

Definición 3.1.1 *Si P es un operador lineal en derivadas parciales con coeficientes en $\mathcal{E}_*(\Omega)$, se dice que P es $*$-hipoelíptico en Ω si*

$$\operatorname{sing}_* \operatorname{supp} Pu = \operatorname{sing}_* \operatorname{supp} u$$

para cada $u \in \mathcal{D}'_*(\Omega)$, donde $* = (\omega)$ ó $\{\omega\}$.

Definición 3.1.2 *Sea P como en la definición 3.1.1. Se dice que P es homogéneo $*$-hipoelíptico en Ω si para cada abierto Ω' de Ω y cada $u \in \mathcal{D}'_*(\Omega')$ con $Pu = 0$, se cumple $u \in \mathcal{E}_*(\Omega')$.*

Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que la ultradistribución u en las definiciones anteriores tiene soporte compacto.

Nuestro objetivo es demostrar que los operadores (ω)-hipoelípticos de fuerza constante coinciden con los operadores homogéneo (ω)-hipoelípticos. Como consecuencia, todo operador (ω)-hipoelíptico de fuerza constante será (σ)-hipoelíptico para cada función peso $\sigma = O(\omega)$. Para ello, extenderemos un resultado debido a Hörmander (véase [22, 13.3.3]) acerca de la existencia de un cierto operador de soluciones, lo que nos obliga a considerar versiones de los espacios $\mathcal{B}_{p,k}$ y $\mathcal{B}_{p,k}^{loc}$ (considerados por Hörmander en el capítulo 10 de [22]) para clases de funciones ultradiferenciables. Esta generalización, debida a Björk [4, 2.1], se obtiene tomando funciones peso k con un crecimiento más rápido que las definidas en [22].

Las definiciones que damos a continuación, así como los resultados que enunciamos sin demostración, se deben a Björk [4]. Véase también Fieker [15] para una versión para pesos no subaditivos.

En lo que sigue, la dimensión del espacio euclídeo será N y no p (es decir, trabajaremos sobre $\mathbb{R}^N$), para evitar confusiones al introducir los espacios $\mathcal{B}_{p,k}$.

Definición 3.1.3 *Sea ω una función peso. Denotamos por $\mathcal{S}_\omega$ el conjunto de todas las funciones $\varphi \in L_1(\mathbb{R}^N)$ tales que φ y $\widehat{\varphi} \in C^\infty$ y para cada multi-índice α y todo número no negativo λ se tiene*

$$p_{\alpha,\lambda}(\varphi) = \sup_{x\in\mathbb{R}^N} e^{\lambda\omega(x)}|D^\alpha\varphi(x)| < \infty,$$

$$\pi_{\alpha,\lambda}(\varphi) = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} e^{\lambda\omega(\xi)}|D^\alpha\widehat{\varphi}(\xi)| < \infty.$$

La topología de $\mathcal{S}_\omega$ está definida por las seminormas $p_{\alpha,\lambda}$ y $\pi_{\alpha,\lambda}$.

El espacio $\mathcal{S}_\omega$ es un espacio de Fréchet y la transformada de Fourier es un automorfismo de $\mathcal{S}_\omega$. Se tienen las inclusiones continuas

$$\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}_\omega \subset \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N). \tag{1.1}$$

Además, $\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $\mathcal{S}_\omega$, lo que nos permite identificar $\mathcal{S}'_\omega$ con un subespacio de $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$. De las inclusiones (1.1) obtenemos $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{S}'_\omega$.

La función $\omega(\xi) = \log(1 + |\xi|)$ no es una función peso (pues no cumple la condición (γ)). Pero es interesante observar que en este caso $\mathcal{S}_\omega = \mathcal{S}$, el espacio de las *funciones rápidamente decrecientes* introducido por Schwartz. Para un peso ω cualquiera, se cumple $\mathcal{S}_\omega \subset \mathcal{S}$. Una forma lineal y continua sobre $\mathcal{S}_\omega$ se llama ultradistribución ω-temperada. El espacio de todas las ultradistribuciones ω-temperadas se denota por $\mathcal{S}'_\omega$. Para cada $u \in \mathcal{S}'_\omega$ se define la transformada de Fourier $\widehat{u} \in \mathcal{S}'_\omega$ por

$$\widehat{u}(\varphi) = u(\widehat{\varphi}), \qquad \varphi \in \mathcal{S}_\omega.$$

La transformada de Fourier es un automorfismo continuo en $\mathcal{S}_\omega$ y en $\mathcal{S}'_\omega$.

Definición 3.1.4 *Sea ω una función peso. Se define $\mathcal{K}_\omega$ como el espacio de las funciones $k : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty[$ tales que, existe $\lambda > 0$ de modo que*

$$k(\xi + \eta) \leq e^{\lambda\omega(|\xi|)} k(\eta), \qquad \eta, \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Definimos también

$$M_k(\xi) := \sup_{\eta \in \mathbb{R}^N} \frac{k(\xi + \eta)}{k(\eta)}.$$

Si k, k_1 y k_2 pertenecen a $\mathcal{K}_\omega$ y $s \in \mathbb{R}$, se cumple $k_1 + k_2$, $k_1 \cdot k_2$, $\max(k_1, k_2)$, $\min(k_1, k_2)$ y k^s pertenecen a $\mathcal{K}_\omega$. Si P es un polinomio en $\mathbb{C}[z]$ no nulo, se tiene

$$\widetilde{P} \in \mathcal{K}_\omega,$$

siendo

$$\widetilde{P}(\xi) := \left[\sum_\alpha |D^\alpha P(\xi)|^2 \right]^{1/2}.$$

Siguiendo a Björk [4], generalizaremos a continuación los espacios $\mathcal{B}_{p,k}$ introducidos por Hörmander para el caso en que $k \in \mathcal{K}_\omega$.

Definición 3.1.5 *Sea ω una función peso, $k \in \mathcal{K}_\omega$ y sea $1 \leq p \leq \infty$. Denotamos por $\mathcal{B}^\omega_{p,k}$ el conjunto de los $u \in \mathcal{S}'_\omega$ tales que $\hat{u}$ es una función medible y*

$$\|u\|_{p,k} = \left((2\pi)^{-N} \int |k(\xi)\widehat{u}(\xi)|^p d\xi \right)^{1/p} < \infty, \tag{1.2}$$

donde $\|u\|_{\infty,k}$ denota $\operatorname{supess} k(\xi)|\widehat{u}(\xi)|$.

El espacio $\mathcal{B}^{\omega}_{p,k}$ es un espacio de Banach con la norma $\|\cdot\|_{p,k}$. Se tienen las inclusiones continuas $\mathcal{S}_{\omega} \subset \mathcal{B}^{\omega}_{p,k} \subset \mathcal{S}'_{\omega}$. Además $\mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ es denso en $\mathcal{B}^{\omega}_{p,k}$ si $p < \infty$.

La definición de $\mathcal{B}^{\omega}_{p,k}$ no depende de la función peso ω mientras $k \in \mathcal{K}_{\omega}$, en el siguiente sentido: Si ω_1 y ω_2 son dos funciones peso y $\omega_2 = O(\omega_1)$ entonces la restricción a $\mathcal{B}^{\omega_2}_{p,k}$ de la inclusión continua $i : \mathcal{D}'_{(\omega_2)}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{D}'_{(\omega_1)}(\mathbb{R}^N)$ es una isometría de $\mathcal{B}^{\omega_2}_{p,k}$ en $\mathcal{B}^{\omega_1}_{p,k}$.

Por lo tanto, podemos identificar todos los espacios $\mathcal{B}^{\omega}_{p,k}$ para cada función peso ω mientras $k \in \mathcal{K}_{\omega}$. Denotaremos el resultado de esta identificación por $\mathcal{B}_{p,k}$.

Si $k \in \mathcal{K}_{\omega}$, $u \in \mathcal{B}_{p,k}$ y $\phi \in \mathcal{S}_{\omega}$ entonces se sigue que $\phi u \in \mathcal{B}_{p,k}$ y

$$\| \phi u \|_{p,k} \leq \| \phi \|_{1,M_k} \| u \|_{p,k} .$$

Es útil conocer que las funciones en $\mathcal{K}_{\omega}$ pueden ser reemplazadas por otras equivalentes que varían mucho más lentamente:

Lema 3.1.6 *Si $k \in \mathcal{K}_{\omega}$, podemos encontrar, para cada $\delta > 0$, una función $k_{\delta} \in \mathcal{K}_{\omega}$ y una constante $C_{\delta} > 0$ tales que*

$$\begin{aligned} 1 \leq k_{\delta}(\xi)/k(\xi) &\leq C_{\delta} \\ M_{k_{\delta}}(\xi) &\leq e^{\lambda\omega(|\xi|)}, \end{aligned}$$

donde $\lambda > 0$ no depende de δ, y $M_{k_{\delta}} \to 1$ uniformemente en los compactos cuando $\delta \to 0$.

Observemos que si $k \in \mathcal{K}_{\omega}$ y k_{δ} es como en el lema 3.1.6, se cumple $\mathcal{B}_{p,k} = \mathcal{B}_{p,k_{\delta}}$. Además:

Proposición 3.1.7 *Sea $k \in \mathcal{K}_{\omega}$ y k_{δ} definida como en el lema 3.1.6. Para cada $\phi \in \mathcal{S}_{\omega}$ existe $\delta_0 > 0$ tal que*

$$\| \phi u \|_{p,k_{\delta}} \leq 2 \| \phi \|_{1,1} \| u \|_{p,k_{\delta}}$$

siempre que $0 < \delta < \delta_0$ y $u \in \mathcal{B}_{p,k}$.

Demostración. Solo hay que probar que existe $\delta_0 > 0$:

$$\| \phi \|_{1,M_{k_{\delta}}} \leq 2 \| \phi \|_{1,1}$$

siempre que $\delta < \delta_0$. Pero, del lema 3.1.6, sabemos que

$$M_{k_{\delta}}(\xi) \leq e^{\lambda\omega(|\xi|)}, \quad \text{para cada } \ \delta > 0.$$

Además, al ser $\phi \in \mathcal{S}_{\omega}$,

$$\int |\widehat{\phi}(\xi)| e^{\lambda\omega(|\xi|)} d\xi < +\infty.$$

Y se tiene que

$$\begin{aligned} \| \phi \|_{1,M_{k_{\delta}}} &= (2\pi)^{-N} \int |\widehat{\phi}(\xi)| M_{k_{\delta}}(\xi) d\xi \\ &\leq (2\pi)^{-N} \int |\widehat{\phi}(\xi)| e^{\lambda\omega(|\xi|)} d\xi, \end{aligned}$$

para cada $\delta > 0$. Por otra parte, del lema 3.1.6, $M_{k_\delta} \longrightarrow 1$ uniformemente en compactos. Así, se deduce del TCD, que

$$\int |\widehat{\phi}(\xi)| M_{k_\delta}(\xi) d\xi \longrightarrow \int |\widehat{\phi}(\xi)| d\xi,$$

es decir, $\| \phi \|_{1,M_{k_\delta}} \longrightarrow \| \phi \|_{1,1}$, cuando $\delta \to 0$. En particular, existe $\delta_0 > 0$ de modo que para todo $0 < \delta < \delta_0$, $\| \phi \|_{1,M_{k_\delta}} \leq 2 \| \phi \|_{1,1}$. □

Se puede definir para cada conjunto abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subespacio de $\mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ cuyos elementos se comportan localmente como los elementos de $\mathcal{B}_{p,k}$.

Definición 3.1.8 *Sea ω una función peso. Sea $k \in \mathcal{K}_\omega$ y $1 \leq p \leq \infty$. Definimos*

$$\mathcal{B}^{\omega,loc}_{p,k}(\Omega) = \{u \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega) \ : \ \forall\ \varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega),\ u\varphi \in \mathcal{B}^{\omega}_{p,k}\}.$$

La topología viene dada por el sistema de seminormas $u \mapsto \|\varphi u\|_{p,k}$ $(\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\Omega))$.

$\mathcal{B}^{\omega,loc}_{p,k}(\Omega)$ es un espacio de Fréchet y

$$\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) \subset \mathcal{B}^{\omega,loc}_{p,k}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega),$$

con inclusiones continuas.

Tal como sucede con los espacios $\mathcal{B}^{\omega}_{p,k}$, podemos afirmar que los espacios locales $\mathcal{B}^{\omega,loc}_{p,k}(\Omega)$ no dependen de ω. Sea ω una función peso y $k \in \mathcal{K}_\omega$. Identificamos todos los espacios $\mathcal{B}^{\omega,loc}_{p,k}(\Omega)$ para los cuales $k \in \mathcal{K}_\omega$ y llamamos al resultado de la identificación $\mathcal{B}^{loc}_{p,k}(\Omega)$.

Teorema 3.1.9 *Sea ω una función peso y k_1, k_2 en $\mathcal{K}_\omega$. Si $u_1 \in \mathcal{B}_{p,k_1} \cap \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$ y $u_2 \in \mathcal{B}_{\infty,k_2}$, se tiene $u_1 * u_2 \in \mathcal{B}_{p,k_1k_2}$ y además*

$$\| u_1 * u_2 \|_{p,k_1k_2} \leq \| u_1 \|_{p,k_1} \| u_2 \|_{\infty,k_2}.$$

Dado un polinomio $P(\xi)$, escribimos

$$\widetilde{P}(\xi) = \left[\sum_\alpha |D^\alpha P(\xi)|^2 \right]^{1/2}.$$

Decimos que el polinomio $Q(\xi)$ *es más débil que* $P(\xi)$, o que $P(\xi)$ *es más fuerte que* $Q(\xi)$ si, para cierta constante $C > 0$

$$\widetilde{Q}(\xi) \leq C\widetilde{P}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Si Q es más débil que P y P es más débil que Q diremos que P y Q son igualmente fuertes.

Definición 3.1.10 *Un operador en derivadas parciales lineal $P = P(x, D)$ con coeficientes en $C^\infty(\Omega)$ se dice que tiene fuerza constante si, dados $x_0, y_0 \in \Omega$ los polinomios $p(x_0, \xi)$ y $p(y_0, \xi)$ son igualmente fuertes como funciones de ξ, es decir:*

$$C^{-1}\widetilde{p}(y_0, \xi) \leq \widetilde{p}(x_0, \xi) \leq C\widetilde{p}(y_0, \xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^N,$$

para una constante $C > 0$ adecuada que depende de x_0, y_0.

Si $P = P(x, D)$ tiene fuerza constante, para un $x_0 \in \Omega$ fijo, se escribe $P_0(D) = P(x_0, D)$. Sea $P_0(\xi), \ldots, P_r(\xi)$ una base del espacio vectorial de dimensión finita de los polinomios más débiles que $P_0(\xi)$; entonces podemos escribir

$$P(x, D) = P_0(D) + \sum_{j=0}^{r} c_j(x) P_j(D),$$

donde los coeficientes $c_j(x) \in C^\infty(\Omega)$ están unívocamente determinados, y $c_j(x_0) = 0$ si $j = 0, 1, \ldots, r$. Si los coeficientes de $P(x, D)$ están en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ entonces cada función $c_j(x)$ está también en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$.

Estamos en condiciones de demostrar una extensión del teorema [22, 13.3.3].

Teorema 3.1.11 *Sea $P(x, D)$ un operador en derivadas parciales con coeficientes en $\mathcal{E}_{(\omega)}(U_0)$ y fuerza constante en U_0, entorno de $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Si X es un entorno bastante pequeño de x_0, existe una aplicación lineal $E : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ con las siguientes propiedades:*

(1) $P(x, D)\, Ef = f$ en X si $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$,

(2) $E\, P(x, D)u = u$ en X si $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(X)$,

(3) $\| Ef \|_{p,\widetilde{P_0}k} \leq C_k \| f \|_{p,k}$

si $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{B}_{p,k}$ y $k \in \mathcal{K}_\omega$ (C_k es independiente de f).

Demostración. Escribiendo, para cada $\varepsilon > 0$,

$$X_\varepsilon := \{x \in \mathbb{R}^N \mid |x - x_0| < \varepsilon\},$$

elegimos $\varepsilon_0 > 0$ de manera que se tenga $X_{\varepsilon_0} \subset U_0$. Sea $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\chi = 1$ en un entorno de la bola $\{x \mid |x| \leq 2\varepsilon_0\}$ y sea $F_0 = \chi E_0$, donde $E_0 \in \mathcal{B}^{loc}_{\infty,\widetilde{P_0}}(\mathbb{R}^N)$ es una solución fundamental de $P_0(D)$ (véase [22, 10.2.1]). Si $\operatorname{supp} f \subset X_{\varepsilon_0}$, tenemos $F_0 * f = E_0 * f$ en X_{ε_0}, y por lo tanto

$$P_0(D)(F_0 * f) = F_0 * (P_0(D)f) = E_0 * (P_0(D)f) = f \tag{1.3}$$

en X_{ε_0} si $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(X_{\varepsilon_0})$. Notar también que $F_0 \in \mathcal{B}_{\infty,\widetilde{P_0}}$.

Tomemos ahora $\psi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\psi(x) = 1$ cuando $|x| \leq 1$ y $\operatorname{supp} \psi \subset \{x \mid |x| \leq 2\}$. Denotando

$$\psi_\varepsilon(x) := \psi\Big(\frac{x - x_0}{\varepsilon}\Big),$$

vamos a probar que la ecuación

$$g+\sum_{j=0}^{r}\psi_\varepsilon c_j P_j(D)(F_0*g)=\psi_\varepsilon f \tag{1.4}$$

tiene solución única $g\in\mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ para cada $f\in\mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ y $0<\varepsilon<\varepsilon_1<\frac{\varepsilon_0}{2}$. Supongamos que esto es cierto por un momento. Ponemos

$$Ef=F_0*g.$$

De la ecuación (1.4) se tiene que $\operatorname{supp} g\subset\operatorname{supp}\psi_\varepsilon$. Como $\operatorname{supp}\psi_\varepsilon\subset X_{\varepsilon_0}$, se tiene $g\in\mathcal{E}'_{(\omega)}(X_{\varepsilon_0})$.

Se sigue ahora de las fórmulas (1.3) y (1.4),

$$\begin{aligned} P(D)Ef &= P(x,D)(F_0*g)=P_0(D)(F_0*g)+\sum_{j=0}^{r}c_jP_j(D)(F_0*g)=\\ &= g+\sum_{j=0}^{r}\psi_\varepsilon c_jP_j(D)(F_0*g)=\psi_\varepsilon f=f, \end{aligned}$$

en X_ε. Lo que prueba que

$$P(x,D)Ef=f$$

en X_ε, para cada $f\in\mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$.

Sea ahora $u\in\mathcal{E}'_{(\omega)}(X_\varepsilon)$, definimos $f=P(x,D)u$. Veamos que $g=P_0(D)u$ es una solución de la ecuación (1.4) para esta f. En efecto, dado que $X_{2\varepsilon}\subset X_{\varepsilon_0}$, se cumple (1.3), es decir

$$F_0*g=F_0*P_0(D)u=u$$

en $X_{2\varepsilon}$. Como ambas partes de la ecuación (1.4) tienen sus soportes en $X_{2\varepsilon}$, podemos aplicar esto último (teniendo en cuenta que $\psi_\varepsilon(x)=1$ si $x\in X_\varepsilon$ y que $\operatorname{supp} g\subset X_\varepsilon$, se tiene $\psi_\varepsilon g=g$):

$$\begin{aligned} g+\sum_{j=0}^{r}\psi_\varepsilon c_jP_j(D)(F_0*g)&=\psi_\varepsilon g+\sum_{j=0}^{r}\psi_\varepsilon c_jP_j(D)u=\\ &=\psi_\varepsilon(P_0(D)u+\sum_{j=0}^{r}c_jP_j(D)u)=\psi_\varepsilon P(x,D)u=\psi_\varepsilon f. \end{aligned}$$

Lo que implica que

$$E\,P(x,D)u=F_0*(P_0(D)u)=u \quad \text{en } X_\varepsilon.$$

Para probar la existencia y unicidad de soluciones en la ecuación (1.4) definimos

$$\begin{array}{rccl} A_\varepsilon: & \mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) & \longrightarrow & \mathcal{D}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)\\ & g & \rightsquigarrow & \sum_{j=0}^{r}\psi_\varepsilon c_jP_j(D)(F_0*g) \end{array}$$

Estimaremos la norma de $A_\varepsilon\, g$ en $\mathcal{B}_{p,k_\delta}$ siendo $k \in \mathcal{K}_\omega$ y k_δ como en el lema 3.1.6. Como $F_0 \in \mathcal{B}_{\infty,\widetilde{P}_0}$ y los polinomios $P_j(\xi)$ son más débiles que $P_0(\xi)$, existe una constante $C > 0$ tal que $\|P_j(D)F_0\|_{\infty,1} = \sup_{\xi\in\mathbb{R}^N} |P_j(\xi)\widehat{F}_0(\xi)| \le C$ para cada $j = 0, \dots, r$. Dado que $\psi_\varepsilon c_j \in \mathcal{S}_\omega$, de la proposición 3.1.7 y el teorema 3.1.9 se deduce:

$$\begin{aligned} \| A_\varepsilon g \|_{p,k_\delta} &\le 2\sum_{j=0}^{r} \| \psi_\varepsilon c_j \|_{1,1} \| P_j(D)F_0 * g \|_{p,k_\delta} \\ &\le 2C\sum_{j=0}^{r} \| \psi_\varepsilon c_j \|_{1,1} \| g \|_{p,k_\delta} \end{aligned} \tag{1.5}$$

siempre que $g \in \mathcal{B}_{p,k_\delta}$. Por tanto, $A_\varepsilon : \mathcal{B}_{p,k_\delta} \to \mathcal{B}_{p,k_\delta}$ es un operador lineal y continuo con norma $N(A_\varepsilon) \le 2C\sum_{j=0}^{r} \| \psi_\varepsilon c_j \|_{1,1}$. Por el lema [22, 13.3.2] podemos elegir $\varepsilon_1 > 0$ tal que $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_0/2$ y

$$\sum_{j=0}^{r} \| \psi_\varepsilon c_j \|_{1,1} < \frac{1}{4C},$$

siempre que $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$. Notar que la elección de ε_1 es independiente de la función k. De 1.5 se sigue entonces

$$\| A_\varepsilon g \|_{p,k_\delta} \le \frac{1}{2} \| g \|_{p,k_\delta}, \tag{1.6}$$

siempre que $g \in \mathcal{B}_{p,k_\delta}$. De donde se deduce que la norma del operador A_ε, $N(A_\varepsilon)$, es menor o igual que $1/2$. Luego el operador

$$I + A_\varepsilon : \mathcal{B}_{p,k_\delta} \longrightarrow \mathcal{B}_{p,k_\delta}$$

tiene inversa. Como $\mathcal{B}_{p,k_\delta} = \mathcal{B}_{p,k}$, obtenemos que la ecuación (1.4), que se puede escribir como

$$(I + A_\varepsilon)g = \psi_\varepsilon f,$$

tiene una única solución $g \in \mathcal{B}_{p,k}$, cuando $f \in \mathcal{B}_{p,k}$. Además $g \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$, puesto que ψ_ε tiene soporte compacto y

$$g = \psi_\varepsilon f - A_\varepsilon g = \psi_\varepsilon\big(f - \sum_{0}^{r} c_j P_j(D)(F_0 * g)\big).$$

Dado que cada conjunto finito de ultradistribuciones en $\mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ está contenido en algún $\mathcal{B}_{p,k}$, concluimos que la ecuación (1.4) tiene solución única $g \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ para cada $f \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$. De (1.6),

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \| g \|_{p,k_\delta} &= \| g \|_{p,k_\delta} - \frac{1}{2} \| g \|_{p,k_\delta} \le \| g \|_{p,k_\delta} - \| A_\varepsilon g \|_{p,k_\delta} \\ &\le \| g + A_\varepsilon g \|_{p,k_\delta} = \| \psi_\varepsilon f \|_{p,k_\delta}, \end{aligned}$$

aplicando el teorema 3.1.9,

$$\| E f \|_{p,\widetilde{P}_0 k_\delta} \leq \| F_0 \|_{\infty,\widetilde{P}_0} \| g \|_{p,k_\delta}$$

y de la proposición 3.1.7,

$$\| F_0 \|_{\infty,\widetilde{P}_0} \| g \|_{p,k_\delta} \leq 4 \| F_0 \|_{\infty,\widetilde{P}_0} \| f \|_{p,k_\delta} \| \psi_\varepsilon \|_{1,1},$$

lo que concluye la demostración, pues $\| \cdot \|_{p,k_\delta}$ y $\| \cdot \|_{p,k}$ son equivalentes. □

Es obvio ahora que:

Corolario 3.1.12 *Si $P(x,D)$ y X son como en el teorema 3.1.11, para cada $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(X)$ con $P(x,D)u \in \mathcal{B}_{p,k}$, se cumple*

$$u \in \mathcal{B}_{p,\widetilde{P}_0 k}.$$

Demostración. Sea $E : \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ la aplicación lineal del teorema 3.1.11. Escribimos $f = P(x,D)u \in \mathcal{B}_{p,k} \cap \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ (obsérvese que $\mathcal{E}'_{(\omega)}(X) \subset \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$). Por (2) del teorema 3.1.11, $Ef = E\,P(x,D)u = u$ en X. Puesto que $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(X)$ podemos tomar $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(X)$ de modo que $u = \varphi E(f)$. Así, aplicando (3),

$$\| u \|_{p,\widetilde{P}_0 k} = \| \varphi E f \|_{p,\widetilde{P}_0 k} < \infty.$$

□

En el siguiente corolario es esencial que podamos elegir el mismo X para cada k en el teorema 3.1.11:

Corolario 3.1.13 *Si $P(x,D)$ y X son como en el teorema 3.1.11, para cada $f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ existe $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ tal que*

$$P(x,D)u = f \text{ en } X.$$

Demostración. Sea $\chi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\chi = 1$ en un entorno de X. Entonces $\chi f \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{B}_{1,k}$ para todo $k \in \mathcal{K}_\omega$. Por el teorema 3.1.11(3) existe una solución $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ de $P(x,D)u = \chi f$ tal que $u \in \mathcal{B}_{1,\widetilde{P}_0 k}$ para todo $k \in \mathcal{K}_\omega$ (en particular $u \in \mathcal{B}_{1,k}$ para todo $k \in \mathcal{K}_\omega$).

Veamos que $u \in \mathcal{E}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$. Para verlo, comprobaremos que $\varphi u \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ para cada $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$: sabemos que $\varphi u \in \mathcal{B}_{1,k}$ para cada $k \in \mathcal{K}_\omega$. Lo que implica en particular que $\widehat{\varphi u} \in L_1$. Entonces $\varphi u = (2\pi)^{-N} \widehat{\widehat{\check{\varphi u}}}$ como distribuciones (por las propiedades de la transformada de Fourier en $\mathcal{S}'_\omega$). Como $\widehat{\widehat{\check{\varphi u}}}$ tiene un representante continuo (por ser $\widehat{\varphi u}$ integrable), se sigue que φu es continua y de soporte compacto. Dado que $\int |\widehat{\varphi u}(x)| e^{\lambda\omega(x)} dx < \infty$ para cada $\lambda > 0$, por ser $\varphi u \in \mathcal{B}_{1,k}$ para todo $k \in \mathcal{K}_\omega$, deducimos que $\varphi u \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$. Además,

$$P(x,D)u = \chi f = f \text{ en } X.$$

□

Teorema 3.1.14 *Sea $P(x,D)$ de fuerza constante en Ω con coeficientes en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$. Si $P(x,D)$ es homogéneo (ω)-hipoelíptico en Ω, entonces es (σ)-hipoelíptico en Ω para cada $\sigma \leq \omega$. En particular, si $P(x,D)$ es homogéneo (ω)-hipoelíptico y de fuerza constante en Ω, entonces es C^∞-hipoelíptico en Ω.*

Demostración. Fijamos un peso $\sigma \leq \omega$. Sea $f \in \mathcal{D}'_{(\sigma)}(\Omega) \subset \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ tal que $h := P(x,D)f \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega)$ y sea $x_0 \in \Omega$. Sea X un entorno abierto de x_0 como en el teorema 3.1.11 con σ en lugar de ω y $\chi \in \mathcal{D}_{(\sigma)}(\Omega)$ tal que $\chi = 1$ en X. Entonces $\chi h \in \mathcal{D}_{(\sigma)}(\Omega) \subset \mathcal{D}_{(\sigma)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}_{(\sigma)}(\mathbb{R}^N)$. Podemos aplicar ahora el corolario 3.1.13 para obtener $u \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{E}_{(\sigma)}(X)$ de modo que $P(x,D)u = \chi h = h = P(x,D)f$ en X. Al ser $P(x,D)$ homogéneo (ω)-hipoelíptico, $u - f \in \mathcal{D}'_{(\omega)}(\Omega)$ y $P(x,D)(u-f) = 0$ en X deducimos $u - f \in \mathcal{E}_{(\omega)}(X) \subset \mathcal{E}_{(\sigma)}(X)$. En particular, $f \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(X)$. Como x_0 es arbitrario, concluimos que $f \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega)$.

El mismo razonamiento prueba que para cada abierto $\Omega' \subset \Omega$ y $f \in \mathcal{D}'_{(\sigma)}(\Omega')$ con $P(x,D)f \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega')$ se cumple $f \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega')$, lo que prueba que $P(x,D)$ es (σ)-hipoelíptico. $\square$

Recordamos que si $\sigma = o(\omega)$ entonces $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega) \subset \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega)$ ([9, 4.7]).

Corolario 3.1.15 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto y $P(x,D)$ un operador con coeficientes en $\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega)$ y fuerza constante en Ω. Entonces $P(x,D)$ es $\{\omega\}$-hipoelíptico en Ω si, y solo si, es homogéneo $\{\omega\}$-hipoelíptico en Ω. Además, en este caso, $P(x,D)$ es $\{\sigma\}$-hipoelíptico en Ω para cada $\sigma = o(\omega)$.*

Demostración. Supongamos que $P(x,D)$ es homogéneo $\{\omega\}$-hipoelíptico en Ω. Observemos primero que si $\sigma = o(\omega)$ entonces $P(x,D)$ es homogéneo (σ)-hipoelíptico en Ω. En efecto, supongamos Ω' es un abierto de Ω y $u \in \mathcal{D}'_{(\sigma)}(\Omega')$ cumple $P(x,D)u = 0$. Como $u \in \mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega')$, resulta que $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega')$ y, por lo tanto $u \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega')$. El mismo razonamiento prueba que $P(x,D)$ es homogéneo $\{\sigma\}$-hipoelíptico.

Veamos ahora que $P(x,D)$ es $\{\omega\}$-hipoelíptico. Sea Ω' como antes y $u \in \mathcal{D}'_{\{\omega\}}(\Omega')$ con $P(x,D)u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega')$. Por el teorema 7.6 de [9] existe $\omega_0 = o(\omega)$ tal que $u \in \mathcal{D}'_{(\omega_0)}(\Omega')$.

Una aplicación de la proposición 3.5 de [5] proporciona

$$\mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega') = \bigcap \left\{ \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega') : \ \omega_0 \leq \sigma, \ \sigma = o(\omega) \right\}.$$

Entonces, para concluir que $u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega')$ bastará probar que $u \in \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega')$ para cada $\omega_0 \leq \sigma$, $\sigma = o(\omega)$. Pero $P(x,D)$ es (σ)-hipoelíptico (teorema 3.1.14) y $P(x,D)u \in \mathcal{E}_{\{\omega\}}(\Omega') \subset \mathcal{E}_{(\sigma)}(\Omega')$ para cada $\omega_0 \leq \sigma = o(\omega)$, lo que concluye la prueba. $\square$

El siguiente corolario se aplica en particular a los pesos $\omega(t) := (\log(1+t))^s$, $s \geq 1$. En el caso $s = 1$ se tiene $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$ y recuperamos el teorema de M. Taylor [43]. El resultado es consecuencia del hecho bien conocido de que todo operador hipoelíptico con coeficientes constantes es hipoelíptico en alguna clase de Gevrey.

Corolario 3.1.16 *Sea $\omega(t) = o(t^a)$ para cada $0 < a < 1$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un abierto. Sea $P(x, D)$ un operador con coeficientes en $\mathcal{E}_{(\omega)}(\Omega)$ y fuerza constante en Ω. Si $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico, entonces $P(x_0, D)$ es (ω)-hipoelíptico para cada $x_0 \in \Omega$.*

DEMOSTRACIÓN. Si $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico, entonces es hipoelíptico por el teorema 3.1.14 (y con coeficientes C^∞). Por el resultado de Taylor [43], el operador con coeficientes constantes $P(x_0, D)$ es hipoelíptico para cada $x_0 \in \Omega$. Entonces existe $0 < a < 1$ tal que $P(x_0, D)$ es $\{t^a\}$-hipoelíptico (véase [21]). Luego $P(x_0, D)$ es (ω)-hipoelíptico. $\square$

3.2. Una condición suficiente de hipoelipticidad

Consideremos un operador pseudodiferencial $P(x, D)$ definido por el símbolo $p(x, \xi)$. Estableceremos una condición suficiente para que el operador sea (ω)-hipoelíptico, usando para ello el método de la paramétrix.

Definición 3.2.1 *Se dice que un operador pseudodiferencial $P = P(x, D)$ definido por un símbolo $p(x, \xi) \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ es (ω)-hipoelíptico si se cumple*

$$\operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp} Pu = \operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp} u,$$

para cada $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$.

Definición 3.2.2 *Sea $P = P(x, D)$ un operador pseudodiferencial con soporte propio definido por un símbolo $p(x, \xi) \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$. Decimos que el operador pseudodiferencial $Q = Q(x, D)$ es una paramétrix por la izquierda (resp. por la derecha) de P si $Q\,P = I + R$ (resp. $P\,Q = I + R$), siendo R un operador (ω)-regularizante.*

Si el operador P tiene una parametrix por la izquierda Q, entonces es (ω)-hipoelíptico: fijada $u \in \mathcal{E}'_{(\omega)}(\Omega)$,

$$\begin{aligned} \operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp} u &= \operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp}(Q\,Pu - Ru) = \\ &= \operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp} Q\,Pu \subseteq \operatorname{sing}_{(\omega)} \operatorname{supp} Pu, \end{aligned}$$

pues R es (ω)-regularizante y Q es pseudolocal (véase el teorema 1.5.7).

Pretendemos ahora dar condiciones suficientes para la (ω)-hipoelipticidad de operadores pseudodiferenciales y obtener, así, criterios de hipoelipticidad fundamentalmente para operadores en derivadas parciales con coeficientes variables.

Lema 3.2.3 *Sea ω una función peso subaditiva. Fijamos $\lambda > 0$ y tomamos*

$$a_j := \frac{e^{\lambda\varphi^*(\frac{j}{\lambda})}}{j!}.$$

Entonces para cada $j, k \in \mathbb{N}$, se cumple

$$a_j \cdot a_k \leq a_{j+k}. \tag{2.7}$$

Demostración. Se tiene

$$\begin{aligned}
\frac{e^{\lambda\varphi^*(\frac{j}{\lambda})}}{j!}\cdot\frac{e^{\lambda\varphi^*(\frac{k}{\lambda})}}{k!} &= \sup_{s\geq 0}\frac{e^{js-\lambda\varphi(s)}}{j!}\cdot\sup_{t\geq 0}\frac{e^{kt-\lambda\varphi(t)}}{k!}\\
&= \sup_{u,v\geq 1}\frac{e^{j\log u+k\log v-\lambda(\omega(u)+\omega(v))}}{j!k!}\leq\\
&\leq \sup_{u,v\geq 1}\frac{u^jv^k}{j!k!}e^{-\lambda\omega(u+v)}\leq\frac{1}{(j+k)!}\sup_{u,v\geq 1}(u+v)^{j+k}e^{-\lambda\omega(u+v)}\\
&\leq \frac{1}{(j+k)!}\sup_{s\geq 0}e^{(j+k)s-\lambda\varphi(s)}=\frac{1}{(j+k)!}e^{\lambda\varphi^*(\frac{j+k}{\lambda})}.
\end{aligned}$$

□

Con una prueba análoga a la de la proposición 1.2.15 se tiene el siguiente resultado:

Lema 3.2.4 *Sean* $\sum_{j=0}^{\infty}a_j(x,y,\xi)\in FAS_{\rho,\delta}^{m_1,\omega}(\Omega)$ *y* $b(x,y,\xi)\in AS_{\rho,\delta}^{m_2,\omega}(\Omega)$. *Entonces* $\sum_j a_j(x,y,\xi)b(x,y,\xi)\in FAS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$, *siendo* $m=m_1+m_2$.

Lema 3.2.5 *Si* ω_1 *y* ω_2 *son funciones peso equivalentes, se cumple*

$$\bigcup_{m>0}AS_{\rho,\delta}^{m,\omega_1}(\Omega)=\bigcup_{m>0}AS_{\rho,\delta}^{m,\omega_2}(\Omega).$$

Demostración. Basta probar que si $p(x,\xi)\in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega_1}(\Omega)$ para cierto $m>0$, entonces $p(x,\xi)\in AS_{\rho,\delta}^{\widetilde{m},\omega_2}(\Omega)$ para otra constante $\widetilde{m}>0$.

Supondremos, sin pérdida de generalidad, que existe una constante $C>0$ tal que $\frac{1}{C}\omega_1(s)\leq\omega_2(s)\leq C\omega_1(s)$ para cada $s\geq 0$. Denotamos $\varphi_{\omega_i}(x)=\omega_i(e^x)$, $i=1,2$. Entonces

$$\begin{aligned}
\varphi_{\omega_1}^*(x) &= \sup_{s\geq 0}\{xs-\varphi_{\omega_1}(s)\}\leq\sup_{s\geq 0}\{xs-\frac{1}{C}\varphi_{\omega_2}(s)\}\\
&= \frac{1}{C}\sup_{s\geq 0}\{(Cx)s-\varphi_{\omega_2}(s)\}=\frac{1}{C}\varphi_{\omega_2}^*(Cx).
\end{aligned}\tag{2.8}$$

Tomamos ahora $k\in\mathbb{N}$ de manera que $k>C$. Sea K un subconjunto compacto en Ω. Como $p(x,\xi)\in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega_1}(\Omega)$, existen $R\geq 1$ y $B\geq 1$ tales que, para cada $n\in\mathbb{N}$ existe una constante $C_{nk}>0$ cumpliendo

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)|\leq C_{nk}\beta!B^{|\beta|}e^{(\rho-\delta)nk\varphi_{\omega_1}^*(\frac{|\alpha|}{nk})}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}e^{m\omega_1(\xi)}$$

siempre que $\alpha,\beta\in\mathbb{N}_0^N$, $x\in K$ y $\log(\frac{|\xi|}{R})\geq\frac{nk}{|\beta|}\varphi_{\omega_1}^*(\frac{|\beta|}{nk})$.

De la fórmula (2.8) obtenemos

$$nk\varphi_{\omega_1}^*(\frac{|\alpha|}{nk})\leq\frac{nk}{C}\varphi_{\omega_2}^*(\frac{|\alpha|}{nk/C})\leq n\varphi_{\omega_2}^*(\frac{|\alpha|}{n}),$$

y además

$$\frac{n}{|\beta|}\varphi^*_{\omega_2}(\frac{|\beta|}{n}) \geq \frac{nk}{|\beta|}\varphi^*_{\omega_1}(\frac{|\beta|}{nk}).$$

Por otra parte $\omega_1(\xi) \leq C\omega_2(\xi)$, entonces, llamando $\widetilde{m} := C \cdot m$ y $D_n := C_{nk}$, se tiene finalmente

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq D_n \beta! B^{|\beta|} e^{(\rho-\delta)n\varphi^*_{\omega_2}(\frac{|\alpha|}{n})}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}e^{\widetilde{m}\omega_2(\xi)}$$

siempre que $x \in K$ y $\log(\frac{|\xi|}{R}) \geq \frac{n}{|\beta|}\varphi^*_{\omega_2}(\frac{|\beta|}{n})$, lo que concluye la demostración. $\square$

El método de demostración del siguiente resultado es estándar (Kumano-go [28], Zanghirati [45]) y viene motivado por la expresión de una composición de operadores en términos de sumas formales. No obstante, hay que ser muy cuidadoso a la hora de obtener las estimaciones adecuadas para las derivadas.

Teorema 3.2.6 *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un subconjunto abierto y relativamente compacto, $0 \leq \delta < \rho \leq 1$, ω una función peso, σ un peso fuerte de modo que $\omega(t^{1/(\rho-\delta)}) = o(\sigma(t))$ cuando $t \to \infty$. Sea $p(x,\xi) \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ tal que:*

i) Existe $A > 0$ de modo que $|p(x,\xi)| \geq \frac{1}{A}e^{-m\omega(\xi)}$ si $|\xi| > A$,

ii) Existe $n \in \mathbb{N}$ y $C > 0$ cumpliendo

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C^{|\alpha|+|\beta|}\beta! e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(|\alpha|n)}|p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|}$$

siempre que $x \in \Omega$ y $|\xi| > A$.

Entonces existe $q(x,\xi) \in AS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$ tal que $q \circ p \sim 1$ en $FAS^{m,\omega}_{\rho,\delta}(\Omega)$.

Demostración. Al ser σ un peso fuerte, σ es equivalente a un peso subaditivo [34]. Supondremos, sin pérdida de generalidad, que σ es subaditivo. Ponemos $q_0(x,\xi) = \frac{1}{p(x,\xi)}$ para $x \in \Omega$, $|\xi| > A$. Probaremos por inducción que existe $C_1 > 0$:

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta q_0(x,\xi)| \leq C_1^{|\alpha|+|\beta|}\beta! e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n|\alpha|)}|q_0(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} \tag{2.9}$$

siempre que $x \in \Omega$ y $|\xi| > A$.

Esta desigualdad se cumple para $\alpha = \beta = 0$. Ahora, $p(x,\xi)q_0(x,\xi) = 1$ proporciona

$$p(x,\xi)D_x^\alpha D_\xi^\beta q_0(x,\xi) = -\sum_{\substack{\mu+\nu=\alpha\\ \gamma+\theta=\beta\\ (\nu,\theta)<(\alpha,\beta)}} \frac{\alpha!\beta!}{\mu!\nu!\gamma!\theta!}D_x^\mu D_\xi^\gamma p(x,\xi) D_x^\nu D_\xi^\theta q_0(x,\xi)$$

Por lo tanto, si suponemos que la desigualdad se cumple para $(\nu,\theta)<(\alpha,\beta)$, obtenemos

$$|p(x,\xi)D_x^\alpha D_\xi^\beta q_0(x,\xi)| \le \sum_{\substack{\mu+\nu=\alpha\\ \gamma+\theta=\beta\\ (\nu,\theta)<(\alpha,\beta)}} \frac{\alpha!\beta!}{\mu!\nu!\gamma!\theta!}|D_x^\mu D_\xi^\gamma p(x,\xi)||D_x^\nu D_\xi^\theta q_0(x,\xi)| \le$$

$$\le \sum_{\substack{\mu+\nu=\alpha\\ \gamma+\theta=\beta\\ (\nu,\theta)<(\alpha,\beta)}} \frac{\alpha!\beta!}{\mu!\nu!\gamma!\theta!} C^{|\mu+\gamma|}\gamma! e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\mu|)}|p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\gamma|+\delta|\mu|}\,.$$

$$\cdot C_1^{|\nu+\theta|}\theta! e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\nu|)}|q_0(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\theta|+\delta|\nu|}$$

$$\le \sum_{\substack{\mu+\nu=\alpha\\ \gamma+\theta=\beta\\ (\nu,\theta)<(\alpha,\beta)}} \frac{\alpha!\beta!}{\mu!\nu!} C^{|\mu+\gamma|}C_1^{|\nu+\theta|}\frac{e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\mu|)+\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\nu|)}}{(1+|\xi|)^{\rho|\beta|-\delta|\alpha|}}|p(x,\xi)||q_0(x,\xi)|$$

Usamos ahora que $C\le C_1$ y que $\frac{\alpha!}{\mu!\nu!}\le\frac{|\alpha|!}{|\mu|!|\nu|!}$. Del lema 3.2.3 se deduce

$$|p(x,\xi)D_x^\alpha D_\xi^\beta q_0(x,\xi)| \le$$
$$\le C_1^{|\alpha+\beta|}\beta! e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha|)}|p(x,\xi)||q_0(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|} \sum_{\substack{\mu+\nu=\alpha\\ \gamma+\theta=\beta\\ (\nu,\theta)<(\alpha,\beta)}} \Big(\frac{C}{C_1}\Big)^{|\mu+\gamma|}.$$

Ahora, de la desigualdad $\sum_{|\eta|=k}1\le N^k$ siendo η un multi-índice, se obtiene

$$\sum_{\substack{\mu+\nu=\alpha\\ \gamma+\theta=\beta\\ (\nu,\theta)<(\alpha,\beta)}} \Big(\frac{C}{C_1}\Big)^{|\mu+\gamma|} \le \sum_{k=1}^{|\alpha+\beta|}\sum_{|\eta|=k}\Big(\frac{C}{C_1}\Big)^k \le \sum_{k=1}^{|\alpha+\beta|}\Big(\frac{NC}{C_1}\Big)^k.$$

por lo que basta elegir C_1 lo bastante grande de modo que

$$\sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{NC}{C_1}\Big)^k<1.$$

Para $j\in\mathbb{N}$, definimos por inducción

$$q_j(x,\xi) = -q_0(x,\xi)\sum_{0<|\mu|\le j}\frac{1}{\mu!}\partial_\xi^\mu q_{j-|\mu|}(x,\xi)D_x^\mu p(x,\xi).$$

Vamos a comprobar que existen constantes positivas C_2 y C_3 tales que $C_1<C_2<C_3$ y para cada $x\in\Omega$ y $|\xi|>A$ se cumple

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta q_j(x,\xi)| \le \tag{2.10}$$
$$\le AC_2^{|\alpha+\beta|}C_3^j e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha|+j)}\frac{(|\beta|+j)!}{j!}e^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|-(\rho-\delta)j}.$$

La prueba es de nuevo por inducción. Para $j=0$ ya lo hemos probado, es la fómula (2.9). Supongamos que la estimación es cierta para $0\le \ell<j$ y que $C_3>C_2>C_1$ (siendo C_3 y C_2 bastante grandes). Entonces

$$\begin{aligned}
&|D_x^\alpha D_\xi^\beta q_j(x,\xi)| \le \\
&\le \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}} \frac{\alpha!\beta!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\beta_1!\beta_2!\beta_3!}\cdot |D_x^{\alpha_1}D_\xi^{\beta_1}q_0(x,\xi)|\cdot \\
&\quad\cdot \sum_{0<|\mu|\le j}\frac{1}{\mu!}|D_x^{\alpha_2}D_\xi^{\beta_2+\mu}q_{j-|\mu|}(x,\xi)||D_x^{\alpha_3+\mu}D_\xi^{\beta_3}p(x,\xi)| \\
&\le \sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}} \frac{\alpha!\beta!}{\alpha_1!\alpha_2!\alpha_3!\beta_1!\beta_2!\beta_3!}C_1^{|\alpha_1+\beta_1|}\beta_1!e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha_1|)}|q_0(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-\rho|\beta_1|+\delta|\alpha_1|}\cdot \\
&\quad\cdot \sum_{0<|\mu|\le j}\frac{1}{\mu!}AC_2^{|\alpha_2+\beta_2+\mu|}C_3^{j-|\mu|}\frac{(|\beta_2|+j)!}{(j-|\mu|)!}e^{m\omega(\xi)}e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n(|\alpha_2|+j-|\mu|))+\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n(|\alpha_3|+|\mu|))}\cdot \\
&\quad\cdot C^{|\alpha_3+\beta_3+\mu|}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta_2+\beta_3+\mu|+\delta|\alpha_2+\alpha_3+\mu|}(1+|\xi|)^{-(\rho-\delta)(j-|\mu|)}|p(x,\xi)|\beta_3!
\end{aligned}$$

Usando que $\frac{|\gamma|!}{\gamma!}$ aumenta con $|\gamma|$ (y por lo tanto $\frac{(|\beta_2|+j)!}{\beta_2!}\le\frac{(|\beta|+j)!}{\beta!}$) obtenemos, multiplicando y dividiendo por $(\alpha_2+\alpha_3)!$ y $j!$,

$$\begin{aligned}
&|D_x^\alpha D_\xi^\beta q_j(x,\xi)| \le \\
&\le (1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|-(\rho-\delta)j}\frac{(|\beta|+j)!}{j!}Ae^{m\omega(\xi)}\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}}\frac{\alpha!e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha_1|)}C_1^{|\alpha_1+\beta_1|}}{(\alpha_2+\alpha_3)!\alpha_1!}\cdot \\
&\cdot \sum_{0<|\mu|\le j}C_2^{|\alpha_2+\beta_2+\mu|}C_3^{j-|\mu|}C^{|\alpha_3+\beta_3+\mu|}\binom{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_2}\binom{j}{|\mu|}\frac{|\mu|!}{\mu!}e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n(|\alpha_2|+j-|\mu|))+\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha_3+\mu|)}
\end{aligned}$$

Como σ es subaditivo,

$$\binom{|\alpha_2+\alpha_3|+j}{|\alpha_2|+j-|\mu|}e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n(|\alpha_2|+j-|\mu|))+\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha_3+\mu|)}\le e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n(|\alpha_2+\alpha_3|+j))}.$$

Además

$$\begin{aligned}
\frac{\binom{|\alpha_2+\alpha_3|}{|\alpha_2|}\cdot\binom{j}{|\mu|}}{\binom{|\alpha_2+\alpha_3|+j}{|\alpha_2|+j-|\mu|}} &= \frac{|\alpha_2+\alpha_3|!j!}{(|\alpha_2+\alpha_3|+j)!}\cdot\frac{(|\alpha_2|+j-|\mu|)!|\alpha_3+\mu|!}{|\alpha_2|!|\alpha_3|!|\mu|!(j-|\mu|)!}\le \\
&\le \frac{\binom{|\alpha_2|+j-|\mu|}{j-|\mu|}2^{|\alpha_3+\mu|}}{\binom{|\alpha_2+\alpha_3|+j}{j}}\le 2^{|\alpha_3+\mu|},
\end{aligned}$$

puesto que $\binom{|\alpha_2|+j-|\mu|}{j-|\mu|} \leq \binom{|\alpha_2+\alpha_3|+j-|\mu|}{j-|\mu|} \leq \binom{|\alpha_2+\alpha_3|+j}{j}$. De donde se deduce

$$\begin{aligned}&\binom{\alpha_2+\alpha_3}{\alpha_2}\binom{j}{|\mu|}e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n(|\alpha_2|+j-|\mu|))+\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n|\alpha_3+\mu|)} \leq \\ &\qquad \leq \binom{|\alpha_2+\alpha_3|}{|\alpha_2|}\binom{j}{|\mu|}e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n(|\alpha_2|+j-|\mu|))+\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n|\alpha_3+\mu|)} \leq \\ &\qquad \leq e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n(|\alpha_2+\alpha_3|+j))}2^{|\alpha_3+\mu|}.\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}&|D^\alpha_x D^\beta_\xi q_j(x,\xi)| \leq \\ &\leq Ae^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|-(\rho-\delta)j}\frac{(|\beta|+j)!}{j!}C_3^jC_2^{|\alpha|+|\beta|}\cdot \\ &\cdot\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}}\Big(\frac{2C_1C}{C_2}\Big)^{|\alpha_1+\beta_1|+|\alpha_3+\beta_3|}\binom{\alpha}{\alpha_1}e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n|\alpha_1|)+\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n(j+|\alpha_2|+|\alpha_3|)}\sum_{0<|\mu|\leq j}\frac{|\mu|!}{\mu!}\Big(\frac{2C_2C}{C_3}\Big)^{|\mu|}.\end{aligned}$$

Como $\binom{\alpha}{\alpha_1} \leq \binom{|\alpha|}{|\alpha_1|} \leq \binom{|\alpha|+j}{|\alpha_1|}$ y σ es subaditivo se tiene

$$\binom{\alpha}{\alpha_1}e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n|\alpha_1|)+\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n(j+|\alpha_2|+|\alpha_3|))} \leq e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n(|\alpha|+j))}.$$

Por otro lado $|\mu|! \leq N^{|\mu|}\mu!$ y $\sum_{|\mu|=k}1 \leq N^k$, luego

$$\begin{aligned}&|D^\alpha_x D^\beta_\xi q_j(x,\xi)| \leq \\ &\leq Ae^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|-(\rho-\delta)j}C_3^jC_2^{|\alpha+\beta|}e^{\frac{1}{n}\varphi^*_\sigma(n(|\alpha|+j))}\frac{(|\beta|+j)!}{j!}\cdot \\ &\cdot\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}}\Big(\frac{2C_1C}{C_2}\Big)^{|\alpha_1+\beta_1|+|\alpha_3+\beta_3|}\sum_{0<k\leq j}\Big(\frac{2N^2C_2C}{C_3}\Big)^k.\end{aligned} \tag{2.11}$$

Ahora

$$\sum_{\substack{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=\alpha\\ \beta_1+\beta_2+\beta_3=\beta}}\Big(\frac{2C_1C}{C_2}\Big)^{|\alpha_1+\beta_1|+|\alpha_3+\beta_3|} \leq \sum_{k=0}^{|\alpha+\beta|}\sum_{|\eta|=k}\Big(\frac{2C_1C}{C_2}\Big)^k \leq \sum_{k=0}^{\infty}\Big(\frac{2NC_1C}{C_2}\Big)^k \leq 2, \tag{2.12}$$

si $C_2(> C_1)$ es lo bastante grande. También

$$\sum_{0<k\leq j}\Big(\frac{2N^2C_2C}{C_3}\Big)^k \leq \sum_{k=1}^{\infty}\Big(\frac{2N^2C_2C}{C_3}\Big)^k < \frac{1}{4}, \tag{2.13}$$

para una elección adecuada de $C_3(> C_2)$. De las fórmulas (2.11), (2.12) y (2.13) se deduce (2.10).

Del lema 1.5.8 concluimos que para cada $\ell \in \mathbb{N}$ existe una constante $D_\ell > 0$ de modo que, para cada j,

$$\begin{aligned}&|D_x^\alpha D_\xi^\beta q_j(x,\xi)| \leq \\ &\leq D_\ell A e^{m\omega(\xi)}(1+|\xi|)^{-\rho|\beta|+\delta|\alpha|-(\rho-\delta)j} C_3^j C_2^{|\alpha+\beta|} e^{(\rho-\delta)\ell\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|+j}{\ell})} \frac{(|\beta|+j)!}{j!},\end{aligned} \tag{2.14}$$

siempre que $x \in \Omega$ y $|\xi| \geq A$.

Además, se cumple

$$\frac{(|\beta|+j)!}{j!} \leq 2^{|\beta|+j}|\beta|! \leq 2^{|\beta|+j} N^{|\beta|}\beta!, \tag{2.15}$$

por lo que la sucesión q_j satisface las estimaciones de la definición 2.1.1 para $x \in \Omega$ y $|\xi| \geq A$ (véase el lema 2.1.2).

Extenderemos ahora la función q_j para todo $\xi \in \mathbb{R}^N$ y todo $j = 0,1,2,\ldots$. Sea $\varphi \in \mathcal{D}_{(\omega)}(\mathbb{R}^N)$ de modo que $\operatorname{supp}\varphi \subset \{\xi \in \mathbb{R}^N : |\xi| \leq 2A\}$ y $\varphi = 1$ para $|\xi| \leq A$. La función $\widetilde{q_j}(x,\xi) := q_j(x,\xi)(1-\varphi)(\xi)$ es una extensión de q_j para $|\xi| > 2A$, pues $q_j(x,\xi) = \widetilde{q_j}(x,\xi)$ para $|\xi| > 2A$. Además, se entiende que $\widetilde{q_j}(x,\xi) = 0$ para $|\xi| \leq A$. De la proposición 1.3.1 se tiene que $1-\varphi(\xi) \in AS_{\rho,\delta}^{0,\omega}(\Omega)$. Una aplicación del lema 3.2.4 permite concluir que $\widetilde{q_j} \in FAS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$. Por comodidad identificaremos q_j con $\widetilde{q_j}$.

Veamos ahora que $\sum q_j \circ p \sim 1$, como se deduce de la propia definición de los q_j 's. En efecto,

$$\begin{aligned} q_j(x,\xi)p(x,\xi) &= -\sum_{0<|\mu|\leq j} \tfrac{1}{\mu!}\partial_\xi^\mu q_{j-|\mu|}(x,\xi) D_x^\mu p(x,\xi) \\ &= -r_j(x,\xi) + q_j(x,\xi)p(x,\xi), \end{aligned}$$

para $j > 0$, siendo $\sum r_j = \sum q_j \circ p$. Entonces $r_j(x,\xi) = 0$ para todo $j > 0$ y además $r_0(x,\xi) = p(x,\xi)q_0(x,\xi) = 1$, para cada $x \in \Omega$ y $|\xi| \geq 2A$ (esto prueba que $\sum q_j \circ p \sim 1$, pues en la definición 2.1.1 podemos tomar la sucesión (N_n) y la constante $R \geq 1$ de modo que las estimaciones (1.1) se cumplan sólo cuando $|\xi| \geq 2A$). De los teoremas 2.1.8 y 2.2.8, existe un símbolo $q \in AS_{\rho,\delta}^{m,\omega}(\Omega)$ tal que $q \circ p \sim 1$. □

Corolario 3.2.7 *Sean Ω, ω, σ y $p(x,\xi)$ como en el teorema 3.2.6. Supongamos además que $P(x,D)$ es un operador pseudodiferencial con soporte propio. Entonces $P = P(x,D)$ es (ω)-hipoelíptico.*

Demostración. Sea $Q = Q(x,D)$ el operador asociado al símbolo $q(x,\xi)$ que proporciona el teorema 3.2.6. Aplicando el teorema 2.3.3 se tiene que $\left(\frac{1}{(2\pi)^N}Q\right) \circ P = I + R$ siendo R un operador pseudodiferencial (ω)-regularizante. Es decir, el operador $Q' = \frac{1}{(2\pi)^N}Q$ es una parametrix por la izquierda de P. Lo que implica que P es (ω)-hipoelíptico. □

Como aplicación, mostraremos a continuación un ejemplo de un operador (ω)-hipoelíptico que no es de fuerza constante. Este ejemplo se inspira en [28] y [31, 4.3.6].

Ejemplo 3.2.8 Sea $q(\xi) \geq 0$ un polinomio hipoelíptico, $m, m' \in \mathbb{N}_0$, $m > m'$. Definimos

$$p(x,\xi) = |x|^{2h} q(\xi)^m + q(\xi)^{m'}.$$

Vamos a encontrar ρ y δ de modo que $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ y si ω es una función peso tal que $\omega(t) = o(t^a)$ siendo $d := \rho - \delta < 1$ y $a < d$, entonces $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico.

Para ello, trataremos de aplicar el corolario 3.2.7. Observemos primero que si $\sigma(t) := t^r$ siendo $r := a/d$, entonces σ es un peso fuerte y además, $\omega(t^{1/(\rho-\delta)}) = o(\sigma(t))$.

Por otra parte, como q, y por lo tanto cualquier potencia de q es hipoelíptico, existen $C > 0$, $0 < \rho \leq 1$ tales que (véase [22, Teorema 11.1.3, II b)])

$$\left| \frac{\partial^\beta (q^m(\xi))}{q^m(\xi)} \right| \leq C|\xi|^{-\rho|\beta|} \qquad \text{y} \qquad \left| \frac{\partial^\beta (q^{m'}(\xi))}{q^{m'}(\xi)} \right| \leq C|\xi|^{-\rho|\beta|}.$$

Al ser $q(\xi) \geq 0$, se tiene $|p(x,\xi)| \geq |q(\xi)|^{m'} \geq \frac{1}{C}|\xi|^{\rho\lambda}$ para algún $\lambda > 0$. En particular, $|p(x,\xi)| \geq \frac{1}{C} e^{-\omega(\xi)}$ para cualquier peso ω si $|\xi|$ es suficientemente grande, luego se cumple la condición (i) de 3.2.6. Además

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial_\xi^\beta p(x,\xi)}{p(x,\xi)} \right| &\leq \frac{|x|^{2h} |\partial^\beta q^m(\xi)|}{|x|^{2h} q^m(\xi)} + \frac{|\partial^\beta q^{m'}(\xi)|}{q^{m'}(\xi)} \leq \\ &\leq 2C|\xi|^{-\rho|\beta|}. \end{aligned}$$

Por otra parte

$$|D^\alpha(|x|^{2h})| \leq K|x|^{2h}|x|^{-|\alpha|} = K(|x|^{2h})^{1-\frac{|\alpha|}{2h}}$$

para cierta constante K. Observemos que $1 - \frac{|\alpha|}{2h} \geq 0$, ya que en otro caso $D^\alpha(|x|^{2h}) = 0$. Si $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ y $\alpha \neq 0$ queda

$$\left| \frac{D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)}{p(x,\xi)} \right| \leq \min \left\{ \frac{D_x^\alpha(|x|^{2h}) |\partial_\xi^\beta q^m(\xi)|}{|x|^{2h} q^m(\xi)}, \frac{D_x^\alpha(|x|^{2h}) |\partial_\xi^\beta q^m(\xi)|}{q^{m'}(\xi)} \right\}. \tag{2.16}$$

Sea $s = grado(q)$ y supongamos que $h > m - m'$ tal que si $\tau = \frac{1}{2h}$, $\delta = \tau(m - m')s < \rho$. Distinguimos dos casos:

Caso 1: $\left(|x|^{2h}\right)^{-1} \leq \left(q(\xi)\right)^{m-m'}$, entonces

$$\left(|x|^{2h}\right)^{-\tau|\alpha|} \leq \left(q(\xi)\right)^{\tau|\alpha|(m-m')} \leq A^{|\alpha|} |\xi|^{\tau(m-m')|\alpha|s}$$

si $|\xi| \geq 1$ y A es grande. Por lo tanto

$$\begin{aligned} \left| \frac{D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)}{p(x,\xi)} \right| &\leq \frac{|D_x^\alpha(|x|^{2h})|}{|x|^{2h}} \cdot C|\xi|^{-\rho|\beta|} \leq \\ &\leq K\left(|x|^{2h}\right)^{-\tau|\alpha|} |\xi|^{-\rho|\beta|} \leq A^{|\alpha|} |\xi|^{\delta|\alpha| - \rho|\beta|}. \end{aligned}$$

Caso 2: Si $\left(|x|^{2h}\right)^{-1} \geq \left(q(\xi)\right)^{m-m'}$, entonces

$$\begin{aligned}\left(|x|^{2h}\right)^{1-\tau|\alpha|}\left(q(\xi)\right)^{m-m'} &\leq \left(q(\xi)\right)^{(1-\tau|\alpha|)(m'-m)+m-m'} = \\ &= \left(q(\xi)\right)^{\tau|\alpha|(m-m')} \leq A^{|\alpha|}|\xi|^{\tau(m-m')|\alpha|s}\end{aligned}$$

si $|\xi| \geq 1$. Luego

$$\begin{aligned}\frac{|D_x^\alpha(|x|^{2h})||\partial_\xi^\beta q^m(\xi)|}{q^{m'}(\xi)} &\leq K\left(|x|^{2h}\right)^{1-\frac{|\alpha|}{2h}}\left|\frac{\partial_\xi^\beta q^m(\xi)}{q^m(\xi)}\right| \cdot q^{m-m'}(\xi) \leq \\ &\leq KA^{|\alpha|}|\xi|^{\tau(m-m')s|\alpha|-\rho|\beta|} \leq KA^{|\alpha|}|\xi|^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}.\end{aligned}$$

Entonces, de la desigualdad (2.16), se tiene que, para cierta constante $B > 0$, se cumple

$$\left|\frac{D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)}{p(x,\xi)}\right| \leq KB^{|\alpha+\beta|}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|},$$

si $|\xi| \geq B$. Lo que implica

$$\left|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)\right| \leq KB^{|\alpha+\beta|}(1+|\xi|)^{\delta|\alpha|-\rho|\beta|}|p(x,\xi)|,$$

para $|\xi| \geq B$. Por lo tanto, el operador $P(x,D)$ es (ω)-hipoelíptico.

El operador no es de fuerza constante, puesto que si tomamos $x_0 = (0, \overset{N)}{\ldots}, 0)$ y $x_1 = (1, \overset{N)}{\ldots}, 1)$, el polinomio $p(x_1,\xi)$ tiene grado estrictamente mayor que el grado del polinomio $p(x_0,\xi)$. □

Para el caso en que $q(\xi)$ es el símbolo del laplaciano, véase Kumano-go [28].

Veamos algunas de las aplicaciones del teorema 3.2.6 para operadores en derivadas parciales con coeficientes variables. Empezamos con unos lemas previos.

Lema 3.2.9 *Sea* $p(x,\xi) = \frac{1}{(2\pi)^N}\sum_{|\gamma|\leq m} a_\gamma(x)\xi^\gamma$, $0 < r \leq 1$, $\omega(t^{1/r}) = o(\sigma(t))$ *cuando* $t \to \infty$. *Si* $a_\gamma \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$, *entonces* $p(x,\xi)$ *es un símbolo de clase* (ω) *y tipo* $(r,0)$.

Demostración. Fijado $n \in \mathbb{N}$ se cumple que para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $D_k > 0$ de modo que

$$\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha|) \leq D_k + rk\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{k})$$

siempre que $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ (lema 1.5.8). Usando que $a_\gamma \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$, fijado un compacto $K \subset \Omega$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$|D^\alpha a_\gamma(x)| \leq C_n e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha|)}$$

siempre que $|\gamma| \leq m$, $x \in K$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$. Por lo tanto, para cada $k \in \mathbb{N}$ existe $E_k > 0$ tal que

$$|D^\alpha a_\gamma(x)| \leq E_k e^{r\,k\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{k})}$$

siempre que $|\gamma| \leq m$, $x \in K$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$.

De la fórmula (3.6) se obtiene ahora, para $\beta \leq \gamma$,

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta (a_\gamma(x)\xi^\gamma)| \leq E_k e^{r\,k\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{k})} \binom{\gamma}{\beta} \beta! (1+|\xi|)^{m-|\beta|}$$

siempre que $|\gamma| \leq m$, $x \in K$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^N$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$.

Y finalmente

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq \frac{E_k}{(2\pi)^N} \beta! e^{r\,k\varphi_\omega^*(\frac{|\alpha|}{k})} 2^m (1+|\xi|)^{m-r|\beta|} \cdot \Big(\sum_{|\gamma|\leq m} 1 \Big)$$

siempre que $x \in K$, α y $\beta \in \mathbb{N}_0^N$ y $\xi \in \mathbb{R}^N$. □

Lema 3.2.10 *Sea $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ un operador con coeficientes constantes (ω)-hipoelíptico. Denotamos*

$$d(\xi) := \text{ínf}\{|\xi - z| \ : \ z \in \mathbb{C}^N, \ P(z) = 0\}, \quad \xi \in \mathbb{R}^N.$$

Entonces

$$\lim_{|\xi|\to+\infty} \frac{d(\xi)}{\omega(\xi)} = +\infty.$$

Demostración. Sabemos que $\displaystyle\lim_{\substack{|z|\to+\infty \\ P(z)=0}} \frac{|\text{Im} z|}{\omega(z)} = +\infty$ (teorema [5, 2.1]).

Supongamos ahora que existen $A > 0$, $(\xi_n) \subset \mathbb{R}^N$, $2^n < |\xi_n| < 2|\xi_{n+1}|$ de modo que $d(\xi_n) < A\omega(\xi_n)$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $z_n \in \mathbb{C}^N$ de modo que $P(z_n) = 0$, $|z_n - \xi_n| < A\omega(\xi_n) < |\xi_n|/2$ si n es suficientemente grande. Ahora, $|z_n| \geq |\xi_n| - A\omega(\xi_n) \geq |\xi_n|/2$. Además,

$$|\text{Re} z_n| = |\text{Re} z_n - \xi_n + \xi_n| \geq |\xi_n| - |z_n - \xi_n| \geq |\xi_n|/2.$$

Mientras que

$$|\text{Im} z_n| \leq |z_n - \xi_n| < A\omega(\xi_n),$$

de donde $|\text{Im} z_n| < A\omega(2|\text{Re} z_n|)$, lo que no puede ocurrir si $P(D)$ es (ω)-hipoelíptico. □

Lema 3.2.11 *Sea ω un peso fuerte y $P(D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha D^\alpha$ operador (ω)-hipoelíptico con coeficientes constantes. Entonces existe $0 < a < 1$ tal que $\omega(t) = o(t^a)$ y $P(D)$ es $\{t^a\}$-hipoelíptico.*

Demostración. Sea $d(\xi) := \text{ínf}\{|\xi - z| \ : \ z \in \mathbb{C}^N, P(z) = 0\}$, $\xi \in \mathbb{R}^N$. Denotamos entonces

$$M(R) := \inf_{|\xi|=R} d(\xi).$$

Por [22, Teorema 11.1.3, Corolario A.2.6] existen $A > 0$, $b \in \mathbb{Q}$ tales que

$$M(R) = AR^b(1 + o(1)), \quad \text{si } R \to +\infty. \tag{2.17}$$

Si $b \geq 1$, de la fórmula (2.17) se tiene $d(\xi) \geq M(|\xi|) \geq B|\xi|$ para cierta constante $B > 0$ si $|\xi|$ es bastante grande, luego $P(D)$ es elíptico (véase, por ejemplo, Hörmander [21]). En particular, $P(D)$ es $\{t^a\}$-hipoelíptico para todo $0 < a < 1$. Además, como ω es un peso fuerte, $\omega(t) = o(t^d)$ para cierta constante $0 < d < 1$, lo que concluye la prueba en este caso.

Si $0 < b < 1$ tomamos $a := b$. Sabemos que $\lim_{|\xi|\to+\infty} \frac{d(\xi)}{\omega(\xi)} = +\infty$ (lema 3.2.10), es decir,

$$\lim_{R\to+\infty} \frac{M(R)}{\omega(R)} = +\infty. \tag{2.18}$$

De las fórmulas (2.17) y (2.18) se obtiene

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{t^a}{\omega(t)} = +\infty,$$

es decir, $\omega(t) = o(t^a)$. Además, usando la fórmula (2.17) de nuevo,

$$d(\xi) \geq M(|\xi|) \geq A|\xi|^a(1 + o(1)) \geq B|\xi|^a$$

para cierta constante $B > 0$, siempre que $|\xi|$ sea lo bastante grande, lo que prueba que $P(D)$ es $\{t^a\}$-hipoelíptico (Rodino [39, 2.4]). $\square$

A partir de ahora $P(x, D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x)D^\alpha$ es un operador en derivadas parciales con coeficientes en cierta clase de funciones ultradiferenciables y de fuerza constante en Ω, y $x_0 \in \Omega$. En el próximo teorema, los coeficientes están en una clase de tipo Roumieu.

Teorema 3.2.12 *Sean σ y ω pesos tales que σ es un peso fuerte y $\omega(t^{1/r}) = o(\sigma(t))$ si $t \to \infty$ y $0 < r \leq 1$. Si $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$ y $P(x_0, D)$ es $\{t^r\}$-hipoelíptico, entonces $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico.*

Demostración. Sea $P_0(\xi), P_1(\xi), \ldots, P_k(\xi)$ una base del espacio vectorial de los polinomios más débiles que $P_0(\xi) := p(x_0, \xi)$. Pongamos

$$P(x, D) = \sum_{j=0}^{k} c_j(x)P_j(D)$$

donde $c_j(x) \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$, $c_0(x_0) = 1$ y $c_j(x_0) = 0$ si $j \neq 0$. Como en [38, p. 150] (nótese que hay una errata en [38]: donde pone $(1+|\xi|)^{-rm}$ debería ser $(1+|\xi|)^{rm}$), para cada compacto $K \subset \Omega$ existen $C > 0$ y $m \in \mathbb{N}$ tales que

(i) $|p(x, \xi)| \geq \frac{1}{C}(1 + |\xi|)^{rm}$,

(ii) $|D_\xi^\beta p(x, \xi)| \leq C|p(x, \xi)|(1 + |\xi|)^{-r|\beta|}$

siempre que $|\xi| \geq C$ y $x \in K$. Como $c_j(x) \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$ existen $n \in \mathbb{N}$ y $\widetilde{C} > 0$ de modo que

$$\max_{0\leq j\leq k} \sup_{x\in K} |D^\alpha c_j(x)| \leq \widetilde{C} e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha|)}$$

y obtenemos, para cierta $C > 0$,

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha|)} \sum_{j=0}^{k} |D^\beta P_j(\xi)|$$

para cada $x \in K$. Por otro lado, por ser $P_0(\xi) = p(x_0,\xi)$ un operador C^∞-hipoelíptico, se sigue del lema [38, 3.3.14],

$$|P_j(\xi)| \leq \widetilde{P}_j(\xi) \leq C_1 \widetilde{P}_0(\xi) \leq C_2 |P_0(\xi)|,$$

siempre que $|\xi|$ sea bastante grande.

Aplicando ahora el lema [38, 3.3.17] existe $C > 0$:

$$|D^\beta P_j(\xi)| \leq C|P_0(\xi)|(1+|\xi|)^{-r|\beta|},$$

siempre que $|\xi| \geq C$. Por lo tanto, existe $C > 0$ y $n \in \mathbb{N}$ cumpliendo

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha|)} |P_0(\xi)|(1+|\xi|)^{-r|\beta|}$$

si $|\xi| \geq C$.

El lema 3.3.14 y la proposición 3.3.16 de Rodino [38] permiten concluir

$$|P_0(\xi)| \leq \widetilde{p}(x_0,\xi) \leq C_1 \widetilde{p}(x,\xi) \leq C_2 |p(x,\xi)|$$

y las constantes C_1 y C_2 están acotadas uniformemente siempre que $x \in K$. Con lo que existe $C > 0$ y $n \in \mathbb{N}$:

$$|D_x^\alpha D_\xi^\beta p(x,\xi)| \leq C^{|\alpha|+|\beta|} e^{\frac{1}{n}\varphi_\sigma^*(n|\alpha|)} |p(x,\xi)|(1+|\xi|)^{-r|\beta|}$$

si $x \in K$, $|\xi| \geq C$ y $(\alpha,\beta) \neq (0,0)$.

Además, $p(x,\xi)$ es un símbolo de clase (ω) y tipo $(r,0)$ y podemos aplicar el corolario 3.2.7 para concluir. $\square$

Veamos algunas consecuencias de lo anterior. Sean σ y ω funciones peso.

Corolario 3.2.13 *Supongamos que σ es un peso fuerte y que*

$$r := \limsup_{t\to+\infty} \frac{\log(\sigma(t))}{\log t} > 0, \tag{2.19}$$

y supongamos que $\omega(t^{1/r}) = o(\sigma(t))$ cuando $t \to \infty$. Si $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$ y $P(x_0,D)$ es (σ)-hipoelíptico, entonces $P(x,D)$ es (ω)-hipoelíptico.

Demostración. Por el lema 3.2.11 existe $0 < a < 1$ tal que $\sigma(t) = o(t^a)$ y $P(x_0, D)$ es $\{t^a\}$-hipoelíptico. La condición $\sigma(t) = o(t^a)$ implica $r \leq a$. En efecto, de la fórmula (2.19) existe una sucesión (t_n) que tiende a infinito tal que

$$r = \lim_{n\to\infty} \frac{\log(\sigma(t_n))}{\log t_n}.$$

Supongamos que $r > a$. Entonces existe n_0 tal que

$$\frac{\log(\sigma(t_n))}{\log t_n} \geq a$$

para cada $n \geq n_0$. Lo que implica $\log(\sigma(t_n)) \geq \log({t_n}^a)$ $(n \geq n_0)$, y por lo tanto

$$\sigma(t_n) \geq {t_n}^a$$

siempre que $n \geq n_0$, que contradice la condición $\sigma(t) = o(t^a)$. Así, $r \leq a$, luego $P(x_0, D)$ es $\{t^r\}$-hipoelíptico. Por el teorema 3.2.12, $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico. □

Compárese el siguiente resultado con el teorema 3.3 y el ejemplo 1 de [25] y con el teorema 3 de [41].

Corolario 3.2.14 *Sea $\omega(t) = o(t^d)$, $0 < d \leq 1$, $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{t^{d'}\}}(\Omega)$ y $P(x_0, D)$ un operador $\{t^r\}$-hipoelíptico. Si $r \leq d'$ y $d' \geq \frac{d}{r}$ entonces $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico.*

Demostración. Si tomamos $\sigma(t) = t^{d'}$, $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$ y la condición $d' \geq \frac{d}{r}$ implica $\omega(t^{1/r}) = o(\sigma(t))$. Podemos aplicar de nuevo el teorema 3.2.12 para concluir. □

Corolario 3.2.15 *Sea $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{t^a\}}(\Omega)$, $0 < a \leq 1$, y supongamos que $P(x_0, D)$ $\{t^a\}$-hipoelíptico y $\omega(t) = o(t^{a^2})$. Entonces $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico.*

Demostración. Tomamos $\sigma(t) = t^a$ y $r := a$. Entonces $\omega(t^{1/r}) = o(\sigma(t))$. Se concluye por el teorema 3.2.12. □

Corolario 3.2.16 *Si los coeficientes a_α son real-analíticos y $P(x_0, D)$ es (ω)-hipoelíptico, entonces $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico.*

Demostración. Existe $0 < a < 1$ tal que $P(x_0, D)$ es $\{t^a\}$-hipoelíptico y $\omega(t) = o(t^a)$ cuando $t \to \infty$ (lema 3.2.11). Además, $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{t^{d'}\}}(\Omega)$ con $d' = 1$ y tomando $d = r = a$ se tiene $r \leq d'$ y $1 = d' \geq \frac{d}{r} = \frac{a}{a}$. Aplicamos el corolario 3.2.14 para concluir. □

Ahora abordamos el caso que no queda cubierto por el corolario 3.2.13.

Corolario 3.2.17 *Sea $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{t^a\}}(\Omega)$, $0 < a < 1$ y supongamos que $P(x_0, D)$ es (ω)-hipoelíptico. Si $\omega(t) = o(t^d)$ para cada $0 < d < 1$, entonces $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico.*

Demostración. Existe $d > 0$ tal que $P(x_0, D)$ es $\{t^d\}$-hipoelíptico. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $d < a$, con lo cual, como $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{t^d\}}(\Omega)$ y $\omega(t) = o(t^{d^2})$, aplicando el corolario 3.2.15 se concluye. $\square$

Corolario 3.2.18 *Supongamos que σ es un peso fuerte y $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$. Si $P(x_0, D)$ es elíptico y $\omega = o(\sigma)$, $P(x, D)$ es (ω)-hipoelíptico.*

Demostración. Basta aplicar el teorema 3.2.12 con $r = 1$. $\square$

Corolario 3.2.19 *Supongamos que $\sigma(t) = \big(\log(1+t)\big)^s$, $s > 1$. Si $a_\alpha \in \mathcal{E}_{\{\sigma\}}(\Omega)$ y $P(x_0, D)$ es (σ)-hipoelíptico, entonces es (ω)-hipoelíptico siempre que $\omega = o(\sigma)$.*

Demostración. Sabemos que existe $0 < r < 1$ tal que $P(x_0, D)$ es $\{t^r\}$-hipoelíptico. Además,

$$\frac{\omega(t^{1/r})}{\sigma(t)} = \frac{\omega(t^{1/r})}{\sigma(t^{1/r})} \cdot \frac{\sigma(t^{1/r})}{\sigma(t)} \longrightarrow 0,$$

cuando $t \to +\infty$. Es decir, $\omega(t^{1/r}) = o(\sigma(t))$. Para concluir basta aplicar el teorema 3.2.12. $\square$

Bibliografía

[1] **M.S. Baouendi**, **F. Trèves**, *A property of the functions and distributions annhilated by a locally integrable system of complex vector fields*, Ann. of Math., **113** (1981), 387-421.

[2] **J.J. Betancor, C. Fernández, A. Galbis**, *Beurling ultradistributions of L_p-growth*, J. Math. Anal. Appl., **279** (2003), 1, 246-265.

[3] **A. Beurling**, *Quasianalyticity and general distributions*, Lectures 4 and 5, American Mathematical Society Summer Institute, (Stanford, 1961).

[4] **G. Björck**, *Linear partial differential operators and generalized distributions*, Ark. Mat., **6** (1965), 351-407.

[5] **J. Bonet, C. Fernández, R. Meise**, *Characterization of the ω-hypoelliptic convolution operators on ultradistributions,* Ann. Acad. Sci. Fen. Math., **25** (2000), 261-284.

[6] **J. Bonet, C. Fernández, R. Meise**, *Operators of solution for convolution equations*, (Proceedings of the Second International Workshop held at Trier University 1997), Note di Mat., **17** (1997), 1-12.

[7] **L. Boutet De Monvel, P. Kree**, *Pseudodifferential operators and Gevrey classes*, Ann. Int. Fourier, **17** (1967), 295-323.

[8] **R.W. Braun**, *An extension of Komatsu's second structure theorem for ultradistributions*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sect. I.A., Math., **40** (1993), 411-417.

[9] **R.W. Braun, R. Meise, B.A. Taylor**, *Ultradifferentiable functions and Fourier analysis*, Result. Math., **17** (1990), 206-237.

[10] **A.P. Calderón**, *Lecture notes on pseudo-differential operators and elliptic boundary value problems* Consejo Nacional de Investigaciones Científicas y Técnicas. Instituto Argentino de Matemática. Buenos Aires (1976).

[11] **L. Cattabriga**, **L. Rodino**, **L. Zanghirati**, *Analytic-Gevrey hypoellipticity for a class of pseudo differential operators with multiple characteristics*, Comm. Partial Differential Equations, **15** (1990), 81-96.

[12] **C.C. Chou**, *La transformation de Fourier complexe et l'equation de convolution,* Lecture Notes in Math., **325**, Springer, Berlin, 1973.

[13] **C. Fernández, A. Galbis, M.C. Gómez-Collado**, *Elliptic convolution operators on non-quasianalytic classes,* Arch. Math., **73** (2001), 133-140.

[14] **C. Fernández, A. Galbis, D. Jornet**, *Pseudodifferential operators on non-quasianalytic classes of Beurling type*, aceptado para su publicación en Studia Math.

[15] **C. Fieker**, *P-Konvexität und ω-Hypoelliptizität für partielle Differentialoperatoren mit konstanten Koeffizienten*, Diplomarbeit. Heinrich-Heine-Universität, Düsseldorf (1993).

[16] **M.C. Gómez-Collado**, Ultradistribuciones casi-periódicas y operadores de convolucion elípticos PhD. Universidad de Valencia (2000).

[17] **T. Gramchev**, *Powers of Mizohata type operators in Gevrey classes*, Boll. Un. Mat. Ital., Sez. VII, **5-B** (1991), 135-156.

[18] **A. Grigis, J.A. Sjöstrand**, *Microlocal analysis for differential operators. An introduction*, London Mathematical Society Lecture Note Series, **196**. Cambridge University Press, Cambridge (1994).

[19] **L. Hörmander**, *Fourier integral operators I*, Acta. Math. **127** (1971), pp. 79-183.

[20] **L. Hörmander**, *Pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 129-209.

[21] **L. Hörmander**, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators I*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[22] **L. Hörmander**, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators II*, Springer-Verlag, Berlin (1983).

[23] **L. Hörmander**, *On interior regularity of the solutions of partial differential equations*, Comm. Pure Appl. Math., **11** (1958), 197-218.

[24] **S. Hashimoto, T. Matsuzawa, Y. Morimoto**, *Operateurs pseudo-differentiels et classes de Gevrey*, Comm. in Part. Diff. Eq., **8** (1983), 1277-1289.

[25] **V. Iftimie**, *Opérateurs hypoelliptiques dans des espaces de Gevrey*, Bull. Math. de la Soc. Sci. Math. de la R. S. de Roumanie, **27** (1983), 317-333.

[26] **H. Komatsu**, *Ultradistributions I, Structure theorems and a characterization*, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo, Sec. I.A., **20** (1973), 25-105.

[27] **H. Komatsu**, *An introduction to the theory of generalized functions*, Department of Mathematics. Science University of Tokyo (2000).

[28] **H. Kumano-go**, *Pseudo-differential Operators*, The MIT Press, Massachussetts (1974).

[29] **J.J. Kohn, L. Nirenberg**, *An algebra of pseudo-differential operators*, Comm. Pure Appl. Math., **18** (1965), 269-305.

[30] **M. Langenbruch**, *Continuation of Gevrey regularity for solutions of partial differential operators,* In: "Functional Analysis" (Proceedings of the First International Workshop held at Trier University 1994), Walter de Gruyter (1996), 249-280.

[31] **O. Liess, L. Rodino**, *Inhomogeneous Gevrey classes and related pseudodifferential operators*, Boll. Un. Mat. Ital. Analisi Funz. e Appl., Serie VI, vol. III-C, n. 1 (1984), 233-323.

[32] **B. Malgrange**, *Sur une classe d'operateurs différentiels hypoelliptiques*, Bull. Soc. Math. France, **85** (1957), 283-306.

[33] **W. Matsumoto**, *Theory of pseudo-differential operators of ultradifferentiable class*, J. Math. Kyoto Univ., **27** (1987), 453-500.

[34] **R. Meise, B.A. Taylor**, *Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type*, Ark. Mat., **26** (1988), 265-287.

[35] **R. Meise, D. Vogt**, *Introduction to Functional Analysis*, Clarendon Press, Oxford (1997).

[36] **T. Okaji**, *Gevrey hypoelliptic operators which are not C^∞-hypoelliptic*, J. Math. Kyoto Univ., **28** (1988), 311-322.

[37] **M. Pascu**, *Hypoelliptic operators in Denjoy-Carleman classes*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl., **30**, 131-145.

[38] **L. Rodino**, *Linear partial differential operators in Gevrey spaces*, World Scientific Pub. (1993).

[39] **L. Rodino**, *On the problem of hypoellipticity of the linear partial differential equations*, Developments in Partial Differential Equations and Applications to Mathematical Physics, Edited by G. Buttazo et al., Plenum Press, New York, 1992.

[40] **L. Schwartz**, *Théorie des distributions*, Hermann, Paris (1966).

[41] **M. Shafii-Mousavi, Z. Zielezny**, *On hypoelliptic differential operators of constant strength*, Pac. J. Math. **82** (1979), 249-256.

[42] **J. Sjöstrand**, *Propagation of analytic singularities for second-order Dirichlet problems*, Comm. Partial Diff. Eqns. **5**, Part I: 41-94, Part II: 187-207 (1980)

[43] **M. Taylor**, *Gelfand theory of pseudo differential operators and hypoelliptic operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **153** (1971), 495-510.

[44] **F. Trèves**, *Introduction to pseudodifferential and Fourier integral operators I*, Plenum Press, New York (1980).

[45] **L. Zanghirati**, *Pseudodifferential operators of infinite order and Gevrey classes*, Ann. Univ. Ferrara, Sez. VII, Sc. Mat., **31** (1985), 197-219.

Índice alfabético