



**UNIVERSIDAD POLITÉCNICA  
DE VALENCIA**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA DE  
SISTEMAS Y AUTOMÁTICA**

---

**TESIS DOCTORAL**

**MODELADO, ANÁLISIS Y DISEÑO  
DE SISTEMAS DE CONTROL  
CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**

**Realizada por: Ángel M. Cuenca Lacruz**  
**Dirigida por: Dr. Julián J. Salt Llobregat**

A mis padres y a mi mujer.

## AGRADECIMIENTOS

Durante el curso 1994-1995 tuve la suerte de asistir a las clases de Control de Procesos que impartía el profesor Julián Salt en la Escuela Universitaria de Informática. A decir verdad, quedé seducido por los contenidos de la asignatura y por la forma de exponerlos. En el verano de 1997, a la hora de decidir la temática en que se basaría mi Proyecto Fin de Carrera de la Licenciatura en Informática, no tuve dudas en consultar a Julián. Me propuso trabajar con unos sistemas que llamaba multifrecuencia y me mencionó varias veces el nombre de Kranc. Ahí empezó todo. Después vino la beca de Formación de Personal Investigador y con ella el Doctorado en Automática e Informática Industrial. Y hasta hoy. Como siempre he dicho, Julián fue algo más que mi director de proyecto y ha sido algo más que mi director de tesis. Considero que nos une una fuerte amistad, donde prevalecen las personas a las cosas. Gracias por todo, Julián.

Agradecer también a los profesores Sebastián Dormido, Manuel Pérez Polo, Pedro Albertos y Carlos Camiña por dedicar parte de su valioso tiempo a la tarea de revisión de este trabajo doctoral.

En el plano más personal, siempre le estaré agradecido a mis padres por la educación que he recibido de ellos y por ofrecerme todos sus medios para formarme profesionalmente. Las pequeñas metas que voy consiguiendo son, a su vez, grandes logros de ellos. También, agradecer a Maru su apoyo moral y que haya sabido comprender esas jornadas interminables de trabajo que han dado fruto a esta tesis doctoral.

Por último, agradecer muy especialmente esa labor que no se ve pero se siente realizada por el resto de familiares y amigos, la cual me ha permitido no decaer en los momentos más difíciles.

## RESUMEN DE LA TESIS

La Tesis se centra en el estudio de los sistemas muestreados de forma no convencional, cubriendo las fases siguientes:

- **Modelado:** Por un lado, se presenta una serie de leyes de recurrencia basadas en la representación interna, las cuales son deducidas a partir del método de las sustituciones sucesivas sobre las ecuaciones de estado y salida del sistema. Dichas leyes son aplicables a tres escenarios distintos: proceso continuo, proceso continuo antecedido de ZOH y proceso discreto. Por otro lado, se propone un método novedoso de modelado de este tipo de sistemas basado en la representación externa, el cual adopta una aproximación (variable discreta  $z$  media) al considerar el caso de muestreo irregular dentro del metaperiodo como una desviación del regular. Finalmente, mediante simulación se comprueba que la aproximación considerada es excelente, comparando la respuesta que para un sistema ofrece el modelado en representación externa con la que se obtiene del modelado en representación interna (siempre más exacto).
- **Análisis:** Se ha considerado tanto el dominio temporal como el frecuencial, trabajando con reguladores tipo P-I-D y siempre desde el punto de vista de la representación interna. Se pone de manifiesto que el patrón de muestreo puede ser considerado como un parámetro más de diseño. Dada la complejidad de estudiar el tema en un entorno de simulación clásico, se ha desarrollado una aplicación en SysQuake que ayuda a llevar a cabo la tarea de análisis de manera más sencilla, al permitir la interactividad.
- **Diseño:** Basándose en la descomposición en frecuencias del controlador con estructura no convencional y en la representación externa, se estudia tres tipos de controladores clásicos distintos: PID, reguladores de cancelación (tiempo mínimo y finito) y de asignación de polos. Se trata de adaptarlos para lograr un funcionamiento apropiado cuando el sistema sobre el que actúen reciba dichas acciones siguiendo un esquema no convencional. Este hecho suele suceder al aparecer retardos en la comunicación controlador-planta. Se pone de manifiesto la mejora que supone sobre las prestaciones del sistema la utilización de este tipo de controladores frente a la utilización de controladores bifrecuencia clásicos, ya que éstos generan sus acciones de control sin tener en cuenta la existencia de posibles retardos. Mediante el uso de Tornado-VxWorks se ha implementado una plataforma de tiempo real que permite verificar los resultados de la simulación.

## **THESIS SUMMARY**

The Thesis deals with the study of the non-conventional sampled-data systems, covering the following phases:

- **Modelling:** On the one hand, a series of recurrence laws based on the internal representation appears. These laws are applicable to three different scenes: continuous process, continuous process preceded of ZOH and discrete process. On the other hand, a new external representation based modelling is introduced, which adopts an approximation (a kind of average for the discrete variable  $z$ ) when the irregular sampling (within metaperiod) case is considered like a deviation of the regular one. Finally, by means of simulation it is easy to observe the considered approximation is excellent, by comparing the system response for the external representation modelling with the internal one (always exact).
- **Analysis:** Both the time domain and the frequency one are considered, working with P-I-D controllers and from the point of view of the internal representation. The sampling pattern is shown to be considered as a valid design parameter. Given the complexity to study the subject in a classic simulation environment, an interactive application in SysQuake is developed.
- **Design:** Starting from the rate decomposition of the controller with non-conventional structure and from the external representation, three kinds of different classic controllers are studied: PID, cancellation (minimum and finite time) and pole placement. The objective is to adapt them in order to work correctly when the system receives the control actions according to a non-conventional scheme. This fact usually happens when delays appear in the controller-system communication. In this case, it is observed a clear improvement over the system response when this kind of controllers versus the classical bi-rate ones is used. Finally, by means of the Tornado-VxWorks real-time operating system, a real-time platform is implemented to verify the simulation results.

## RESUM DE LA TESI

La Tesi se centra en l'estudi dels sistemes mostrejats de forma no convencional, cobrint les fases següents:

- **Modelatge:** D'una banda, es presenta una sèrie de lleis de recurrència basades en la representació interna, les quals són deduïdes a partir del mètode de les substitucions successives sobre les equacions d'estat i eixida del sistema. Dites lleis són aplicables a tres escenaris distints: procés continu, procés continu antecedent de ZOH i procés discret. D'altra banda, es proposa un mètode nou de modelatge d'este tipus de sistemes basat en la representació externa, el qual adopta una aproximació (variable discreta  $z$  mitjana) al considerar el cas de mostreig irregular dins del metaperíode com una desviació del regular. Finalment, per mitjà de simulació es comprova que l'aproximació considerada és excel·lent, comparant la resposta que per a un sistema ofereix el modelatge en representació externa amb la que s'obté del modelatge en representació interna (sempre més exacte).
- **Anàlisi:** S'ha considerat tant el domini temporal com el freqüencial, treballant amb reguladors tipus P-I-D i sempre des del punt de vista de la representació interna. Es posa de manifest que el patró de mostreig pot ser considerat com a un paràmetre més de disseny. Donada la complexitat d'estudiar el tema en un entorn de simulació clàssic, s'ha desenvolupat una aplicació en SysQuake que ajuda a dur a terme la tasca d'anàlisi de manera més senzilla, al permetre la interactivitat.
- **Disseny:** Basant-se en la descomposició en freqüències del controlador amb estructura no convencional i en la representació externa, s'estudia tres tipus de controladors clàssics distints: PID, reguladors de cancel·lació (temps mínim i finit) i d'assignació de pols. Es tracta d'adaptar-los per a aconseguir un funcionament apropiat quan el sistema sobre el qual actuen reba dites accions seguint un esquema no convencional. Este fet sol succeir a l'aparèixer retards en la comunicació controlador-planta. Es posa de manifest la millora que suposa sobre les prestacions del sistema la utilització d'este tipus de controladors enfront de la utilització de controladors bifreqüència clàssics, ja que estos generen les seues accions de control sense tindre en compte l'existència de possibles retards. Per mitjà de l'ús de Tornado-VxWorks s'ha implementat una plataforma de temps real que permet verificar els resultats de la simulació.

# TABLA DE CONTENIDOS

## CAPÍTULO 1

### INTRODUCCIÓN

1.1. TIPOS DE MUESTREO.....	1-3
1.2. ESQUEMAS DE CONTROL CON MUESTREO NO CONVENCIONAL.....	1-5
1.3. APLICACIONES ESPECÍFICAS.....	1-6
1.4. ANTECEDENTES Y PERSPECTIVA HISTÓRICA.....	1-7
1.5. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. OBJETIVOS Y ENFOQUE DEL TRABAJO.....	1-11

## CAPÍTULO 2

### MODELADO EN REPRESENTACIÓN INTERNA DE SISTEMAS CON MUESTREO NO CONVENCIONAL

2.1. INTRODUCCIÓN.....	2-3
2.2. CONCEPTOS BÁSICOS.....	2-3
2.2.1. Planteamiento general.....	2-3
2.2.2. Operador de Kranc.....	2-6
2.2.3. Tipos de operadores de Kranc.....	2-7
2.2.3.1. Operador de Kranc Regular.....	2-7
2.2.3.2. ZOH-Kranc.....	2-8
2.2.3.3. Kranc Digital.....	2-9
2.3. LEYES DE RECURRENCIA.....	2-10
2.3.1. Kranc Regular.....	2-10
2.3.2. ZOH-Kranc.....	2-12
2.3.3. Kranc Digital.....	2-14
2.4. EJEMPLOS.....	2-15
2.4.1. Ejemplo Kranc Regular.....	2-15
2.4.2. Ejemplo ZOH-Kranc.....	2-18
2.4.2.1. Validación mediante Modelado de Vélez.....	2-19
2.4.3. Ejemplo Kranc Digital.....	2-21
2.5. CONCLUSIONES.....	2-21

## CAPÍTULO 3

### MODELADO EN REPRESENTACIÓN EXTERNA DE SISTEMAS CON MUESTREO NO CONVENCIONAL

3.1. INTRODUCCIÓN.....	3-3
3.2. CONCEPTOS BÁSICOS.....	3-3
3.2.1. Planteamiento general.....	3-3
3.2.2. Polinomio $W(z_N)$ .....	3-6
3.2.3. Operador $z_N^{-i}$ .....	3-6
3.2.4. Mapa de Polos y Ceros (MPC) en $z_N$ .....	3-9
3.3. OBTENCIÓN DEL MODELADO FINAL.....	3-11
3.3.1. Ajuste del periodo de discretización.....	3-11
3.3.2. Ajuste de la ganancia estática.....	3-15
3.4. EJEMPLOS.....	3-16
3.4.1. Ejemplo 1: sistema con ceros discretos reales negativos.....	3-16
3.4.2. Ejemplo 2: sistema con ceros discretos complejos conjugados.....	3-25
3.4.3. Ejemplo 3: sistema con cero discreto real positivo.....	3-32
3.5. CONDICIONES DE APLICABILIDAD DEL MODELADO.....	3-38
3.5.1. Pruebas a partir de los procesos presentados en el capítulo.....	3-38
3.5.2. Relaciones empíricas que se deducen del estudio.....	3-42

3.6. CONCLUSIONES.....3-45

**CAPÍTULO 4**

**ANÁLISIS DE REGULADORES CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL EN EL DOMINIO TEMPORAL**

4.1. OBJETIVOS Y ENFOQUE DEL CAPÍTULO.....4-3

4.2. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS EN EL DOMINIO TEMPORAL.....4-4

4.2.1. Modelado del sistema en bucle cerrado mediante operadores de Kranc. ....4-4

4.2.2. Obtención del modelo de la cadena directa regulador-proceso.....4-4

4.2.3. Generación del lugar de raíces discreto del modelo en cadena directa. Transformación al plano continuo.....4-5

4.2.4. Simulación de la respuesta temporal del sistema.....4-6

4.3. ANÁLISIS DE REGULADORES TIPO P-I-D CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL .....4-7

4.3.1. Estructura interactiva. ....4-7

4.3.1.1. Planteamiento del problema.....4-7

4.3.1.2. Ejemplo.....4-8

4.3.1.2.1. Escenario del problema.....4-8

4.3.1.2.2. Modelado.....4-9

4.3.1.2.3. Implementación en simulación convencional.....4-10

4.3.1.2.4. Exposición y análisis de los resultados obtenidos en simulación convencional.....4-10

4.3.1.2.4.1. Caso muestreo regular .....4-10

4.3.1.2.4.2. Caso muestreo irregular N=2 .....4-10

4.3.1.2.4.3. Caso muestreo irregular N=3. ....4-14

4.3.1.2.4.4. Transformación al plano S. ....4-17

4.3.1.2.5. Implementación en simulación interactiva.....4-17

4.3.1.2.6. Validación mediante modelado de Vélez.....4-20

4.3.2. Estructura paralela.....4-21

4.3.2.1. Planteamiento del problema.....4-21

4.3.2.2. Ejemplo.....4-23

4.3.2.2.1. Escenario del problema.....4-23

4.3.2.2.2. Modelado.....4-24

4.3.2.2.3. Implementación.....4-25

4.3.2.2.4. Exposición y análisis de resultados.....4-26

4.3.2.2.4.1. Razonamientos previos.....4-26

4.3.2.2.4.2. Caso muestreo regular .....4-27

4.3.2.2.4.3. Caso muestreo irregular N=2. ....4-34

4.3.2.2.4.4. Transformación al plano S. ....4-35

4.3.2.2.5. Validación del modelado.....4-37

4.3.3. Consideración del esquema de muestreo como parámetro de diseño.....4-40

4.3.3.1. Ejemplo.....4-40

4.4. CONCLUSIONES.....4-48

**CAPÍTULO 5**

**ANÁLISIS DE REGULADORES CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL EN EL DOMINIO FRECUENCIAL**

5.1. OBJETIVOS Y ENFOQUE DEL CAPÍTULO.....5-3

5.2. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS EN EL DOMINIO FRECUENCIAL .....5-4

5.2.1. Modelado del sistema en bucle cerrado mediante operadores de Kranc. ....5-4

5.2.2. Obtención del modelo de la cadena directa regulador-proceso.....5-5

5.2.3. Generación del Diagrama de Bode y de Nyquist de la cadena directa regulador-proceso.....5-5

5.3. ANÁLISIS DE REGULADORES TIPO P-I-D CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL .....5-5

5.3.1. Estructura interactiva. ....5-6

5.3.1.1. Planteamiento del problema.....5-6

5.3.1.2. Ejemplo.....5-6

5.3.1.2.1. Escenario del problema.....5-6

5.3.1.2.2. Modelado.....5-7



5.3.1.2.3.	Implementación en simulación convencional.....	5-7
5.3.1.2.4.	Exposición y análisis de resultados obtenidos en simulación convencional. ....	5-7
5.3.1.2.4.1.	Caso muestreo regular.....	5-7
5.3.1.2.4.2.	Caso muestreo irregular N=2.....	5-8
5.3.1.2.5.	Implementación en simulación interactiva.....	5-14
5.3.2.	Estructura paralela.....	5-15
5.3.2.1.	Planteamiento del problema.....	5-15
5.3.2.2.	Ejemplo.....	5-16
5.3.2.2.1.	Escenario del problema.....	5-16
5.3.2.2.2.	Modelado.....	5-17
5.3.2.2.3.	Implementación.....	5-17
5.3.2.2.4.	Exposición y análisis de resultados.....	5-17
5.3.2.2.4.1.	Caso muestreo regular.....	5-17
5.3.2.2.4.2.	Caso muestreo irregular N=2.....	5-24
5.4.	CONCLUSIONES Y PROPUESTAS FUTURAS.....	5-26

**CAPÍTULO 6**

**DISEÑO DE REGULADORES CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL BASADO EN LA REPRESENTACIÓN EXTERNA**

6.1.	INTRODUCCIÓN. RESEÑAS SOBRE NOTACIÓN.....	6-3
6.2.	PLANTEAMIENTO GENERAL.....	6-8
6.3.	DISEÑO DE REGULADORES TIPO P-I-D.....	6-10
6.3.1.	Procedimiento 1º de diseño. Ejemplo.....	6-11
6.3.2.	Procedimiento 2º de diseño. Ejemplo.....	6-21
6.3.3.	Procedimiento 3º de diseño. Ejemplo.....	6-25
6.3.4.	Comparación de diseños P-I-D bifrecuencia con muestreo no convencional.....	6-32
6.3.4.1.	Objetivo y presentación del escenario.....	6-32
6.3.4.2.	Desarrollo de la experiencia.....	6-32
6.3.4.2.1.	Diseño P-I-D por discretización a intervalos irregulares de tiempo.....	6-32
6.3.4.2.2.	Diseño P-I-D por descomposición del regulador en frecuencia basado en el modelado con muestreo no convencional en representación externa.....	6-34
6.3.4.2.3.	Comparativa y análisis de resultados.....	6-36
6.3.4.2.4.	Conclusiones.....	6-38
6.3.5.	Estudio paramétrico del regulador tipo P-I-D bifrecuencia.....	6-39
6.3.5.1.	Objetivo y planteamiento del problema.....	6-39
6.3.5.2.	Planteamiento alternativo para entornos distribuidos.....	6-42
6.3.5.3.	Implementación en programa de simulación interactiva.....	6-44
6.3.5.4.	Análisis de resultados y conclusiones.....	6-46
6.4.	DISEÑO DE REGULADORES DE CANCELACIÓN.....	6-48
6.4.1.	Generalidades.....	6-48
6.4.2.	Estudio de la Realizabilidad y de la Estabilidad.....	6-48
6.4.3.	Reguladores de Tiempo Mínimo.....	6-51
6.4.4.	Reguladores de Tiempo Finito.....	6-54
6.4.5.	Metodología de resolución.....	6-55
6.4.6.	Metodología de implementación.....	6-56
6.4.7.	Estudio de órdenes y grados de libertad.....	6-56
6.4.7.1.	Tiempo Mínimo.....	6-56
6.4.7.2.	Tiempo Finito.....	6-58
6.4.8.	Ejemplo Regulador de Tiempo Mínimo.....	6-59
6.4.9.	Ejemplo Regulador de Tiempo Finito.....	6-64
6.4.10.	Diseño con Prealimentación.....	6-67
6.4.10.1.	Ejemplo.....	6-68
6.5.	REGULADORES DE ASIGNACIÓN DE POLOS Y CEROS.....	6-72
6.5.1.	Ejemplo 1.....	6-76
6.5.2.	Ejemplo 2.....	6-80
6.6.	VALIDACIÓN DEL MODELADO EN REPRESENTACIÓN EXTERNA MEDIANTE SIMULACIÓN A PARTIR DE LA ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE CONTROL CON MUESTREO NO CONVENCIONAL.....	6-83

6.6.1.	Planteamiento del escenario.....	6-83
6.6.2.	Desarrollo de las experiencias.....	6-85
6.6.2.1.	Regulador tipo P-I-D.....	6-85
6.6.2.1.1.	Procedimiento 1° de diseño.....	6-85
6.6.2.1.2.	Procedimiento 2° de diseño.....	6-90
6.6.2.1.3.	Procedimiento 3° de diseño.....	6-93
6.6.2.2.	Regulador de Cancelación.....	6-97
6.6.2.2.1.	Regulador de Tiempo Mínimo.....	6-97
6.6.2.2.2.	Regulador de Tiempo Finito.....	6-101
6.6.2.3.	Regulador de Asignación de Polos y Ceros.....	6-104
6.6.2.3.1.	Ejemplo 1.....	6-104
6.6.2.3.2.	Ejemplo 2.....	6-108
6.7.	DISEÑO DEL CONTROLADOR CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL PARA ENTORNOS CON RETARDOS ALEATORIOS ACOTADOS.....	6-112
6.7.1.	Ejemplo.....	6-113
6.8.	CONCLUSIONES.....	6-122

**CAPÍTULO 7**

**APLICACIÓN PRÁCTICA**

7.1.	PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.....	7-3
7.1.1.	Objetivo.....	7-3
7.1.2.	Implementación del sistema de control con muestreo no convencional sobre un sistema operativo de tiempo real.....	7-3
7.1.2.1.	Control bifrecuencia MRIC.....	7-4
7.1.2.2.	Control con muestreo no convencional PVT.....	7-4
7.1.3.	Obtención del patrón de muestreo no convencional para un caso particular de asincronía entre los muestreadores de entrada y salida al proceso en un entorno de tiempo real.....	7-8
7.2.	DISEÑO DE CONTROLADORES CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL E IMPLEMENTACIÓN SOBRE LA PLATAFORMA DE TIEMPO REAL.....	7-13
7.2.1.	Controlador tipo P-I-D.....	7-13
7.2.1.1.	Diseño del controlador bifrecuencia y del no convencional PVT.....	7-14
7.2.1.2.	Implementación en VxWorks. Resultados.....	7-15
7.2.2.	Controlador de Cancelación (Tiempo Mínimo).....	7-20
7.2.2.1.	Diseño del controlador bifrecuencia y del no convencional PVT.....	7-20
7.2.2.2.	Implementación en VxWorks. Resultados.....	7-22
7.2.3.	Controlador de Asignación de Polos (Tres Ramas).....	7-25
7.2.3.1.	Diseño del controlador bifrecuencia y del no convencional PVT.....	7-25
7.2.3.2.	Implementación en VxWorks. Resultados.....	7-27
7.3.	CONCLUSIONES.....	7-31

**CAPÍTULO 8**

**CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS**

8.1.	CONCLUSIONES.....	8-3
8.2.	TRABAJOS FUTUROS.....	8-3

**BIBLIOGRAFÍA.....**

**B-1**

**ANEXO I**

**OPERADORES DE KRANC CON MUESTREO NO CONVENCIONAL EN MATLAB**

I.1.	OPERADOR DE KRANC REGULAR.....	I-3
I.2.	OPERADOR ZOH-KRANC.....	I-4
I.3.	OPERADOR DE KRANC DIGITAL.....	I-6

**ANEXO II**

**APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL MÓDULO MÁXIMO PARA LA OBTENCIÓN DE LOS CEROS DE UN SISTEMA CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**

II.1. FORMALISMOS MATEMÁTICOS..... II-3  
 II.2. EJEMPLO: OBTENCIÓN DE LOS CEROS PARA EL SISTEMA DE LA SECCIÓN 3.3 UTILIZANDO MATHEMATICA..... II-4

**ANEXO III**

**MACROS MATLAB PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**

III.1. ANÁLISIS EN EL DOMINIO TEMPORAL..... III-3  
     III.1.1. Estructura interactiva. .... III-3  
     III.1.2. Estructura paralela..... III-7  
 III.2. AMPLIACIÓN PARA ANÁLISIS EN EL DOMINIO FRECUENCIAL..... III-25  
     III.2.1. Estructura interactiva. .... III-25  
     III.2.2. Estructura paralela..... III-26

**ANEXO IV**

**MACROS MATLAB PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**

IV.1. EJEMPLO DE MACRO MATLAB PARA ACTUACIÓN A INSTANTES IRREGULARES DE TIEMPO SOBRE EL PROCESO DEFINIDO A PERIODO BASE..... IV-3  
 IV.2. EJEMPLO DE MACRO MATLAB PARA ACTUACIÓN A PERIODO RÁPIDO SOBRE EL MODELO NO CONVENCIONAL HALLADO PARA EL SISTEMA..... IV-5

**ANEXO V**

**SISTEMA DE DESARROLLO CRUZADO TORNADO-VXWORKS**

V.1. CONFIGURACIÓN DEL ENTORNO DE DESARROLLO CRUZADO TORNADO-VXWORKS..... V-3  
 V.2. ÓRDENES INTERESANTES EN VXWORKS..... V-6  
 V.3. CÓDIGO DE LAS TAREAS A EJECUTAR EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL. .... V-7



## TABLA DE FIGURAS

Figura 1-1: Muestreo convencional.....	1-3
Figura 1-2: Muestreo asíncrono.....	1-4
Figura 1-3: Muestreo multifrecuencia.....	1-4
Figura 1-4: Muestreo cíclico o periódicamente variable en el tiempo o de orden múltiple.....	1-4
Figura 1-5: Muestreo aleatorio.....	1-5
Figura 1-6: Esquema de control con muestreo no convencional caso SISO.....	1-6
Figura 1-7: Esquema de control con muestreo no convencional caso MIMO.....	1-6
Figura 1-8: Esquema Descomposición Frecuencial.....	1-8
Figura 1-9: Esquema resumen perspectiva histórica (hasta década de los 80).....	1-14
Figura 1-10: Esquema resumen perspectiva histórica (a partir década de los 80).....	1-15
Figura 2-1: Secuencia de entrada muestreada no uniformemente.....	2-3
Figura 2-2: Descomposición en secuencias periódicas.....	2-4
Figura 2-3: Configuración del muestreo para el proceso.....	2-5
Figura 2-4: Descomposición vectorial de conexiones en un sistema continuo.....	2-5
Figura 2-5: Versión completa para descomposición vectorial de conexiones.....	2-6
Figura 2-6: Sistema multifrecuencia de forma compacta.....	2-7
Figura 2-7: Sistema monofrecuencia equivalente.....	2-7
Figura 2-8: Escenario Operador Kranc Regular.....	2-8
Figura 2-9: Escenario Operador ZOH-Kranc.....	2-8
Figura 2-10: Escenario Operador Kranc Digital.....	2-9
Figura 2-11: Muestreos de entrada y salida para el ejemplo bajo estudio.....	2-16
Figura 3-1: Diagrama de bloques simulación ejemplo 1.....	3-22
Figura 3-2: Respuestas simulación sin ajuste de ganancia ejemplo 1.....	3-23
Figura 3-3: Detalle respuestas simulación sin ajuste de ganancia ejemplo 1.....	3-23
Figura 3-4: Respuestas simulación con ajuste de ganancia ejemplo 1.....	3-24
Figura 3-5: Detalle respuestas simulación con ajuste de ganancia ejemplo 1.....	3-24
Figura 3-6: Diagrama de bloques simulación ejemplo 2.....	3-28
Figura 3-7: Respuestas simulación ejemplo 2.....	3-28
Figura 3-8: Detalle respuestas simulación ejemplo 2.....	3-29
Figura 3-9: Diagrama de bloques simulación ejemplo 2 rediscretizado.....	3-31
Figura 3-10: Respuestas simulación ejemplo 2 rediscretizado.....	3-31
Figura 3-11: Detalle respuestas simulación ejemplo 2 rediscretizado.....	3-32
Figura 3-12: Diagrama de bloques simulación 1 ejemplo 3.....	3-35
Figura 3-13: Respuestas simulación 1 ejemplo 3.....	3-35
Figura 3-14: Diagrama de bloques simulación 2 ejemplo 3.....	3-37
Figura 3-15: Respuesta simulación 2 ejemplo 3.....	3-37
Figura 3-16: Respuesta proceso sección 3.4.2 para $T_0=0.6$ seg y $t_1 = T_0 / 3$ , $t_2 = 2T_0 / 3$ .....	3-39
Figura 3-17: Respuesta proceso sección 3.4.2 para $T_0=0.8$ seg y $t_1 = T_0 / 3$ , $t_2 = 2T_0 / 3$ .....	3-40
Figura 3-18: Respuesta proceso sección 3.4.2 para $T_0=1$ seg y $t_1 = T_0 / 3$ , $t_2 = 2T_0 / 3$ .....	3-40
Figura 3-19: Respuesta proceso sección 3.4.2 para $T_0=0.8$ seg y patrón $t_1 = T_0 / 4$ , $t_2 = 3T_0 / 4$ .....	3-41
Figura 3-20: Respuesta proceso sección 3.4.1 para $T_0=0.6$ seg y patrón $t_1 = 0.25$ , $t_2 = 0.35$ .....	3-43
Figura 3-21: Respuesta proceso sección 3.4.1 para $T_0=0.6$ seg y patrón $t_1 = T_0 / 6$ , $t_2 = 5T_0 / 6$ .....	3-44
Figura 3-22: Respuesta proceso sec. 3.4.3 para $T_0=0.04$ seg y patrón $t_1 = 0.005$ , $t_2 = 0.035$ .....	3-44
Figura 3-23: Respuesta proceso sec. 3.4.3 para $T_0=0.04$ seg y patrón $t_1 = 0.001$ , $t_2 = 0.039$ .....	3-45

Figura 4-1: Diagrama de bloques y muestreos estructura interactiva .....	4-7
Figura 4-2: Modelado del sistema con estructura interactiva .....	4-9
Figura 4-3: Lugar de raíces muestreo regular.....	4-11
Figura 4-4: Salida intermuestreo muestreo regular.....	4-12
Figura 4-5: Lugar de raíces muestreo irregular N=2.....	4-12
Figura 4-6: Salida N=2 (muestreo irregular) subperiodo inicial.....	4-13
Figura 4-7: Salida N=2 (muestreo irregular) subperiodo final.....	4-13
Figura 4-8: LdR N=3 (muestreo irregular) subperiodo inicial y medio.....	4-15
Figura 4-9: Lugar de raíces N=3 (muestreo irregular) subperiodo final.....	4-15
Figura 4-10: Salida N=3 (muestreo irregular) subperiodo inicial.....	4-16
Figura 4-11: Salida N=3 (muestreo irregular) subperiodo final.....	4-16
Figura 4-12: LdR transformado a continuo N=2 (muestreo irregular).....	4-17
Figura 4-13: Aspecto aplicación en simulación interactiva con N=2 regular.....	4-18
Figura 4-14: Aspecto aplicación en simulación interactiva con N=2 irregular.....	4-19
Figura 4-15: Aspecto aplicación en simulación interactiva con N=3 regular.....	4-19
Figura 4-16: Diagrama de bloques y muestreos estructura paralela.....	4-22
Figura 4-17: Modelado del sistema con estructura paralela.....	4-25
Figura 4-18: Lugar de raíces muestreo regular en I.....	4-27
Figura 4-19: Salida muestreo regular en I.....	4-28
Figura 4-20: Lugar de raíces muestreo regular en D.....	4-29
Figura 4-21: Salida muestreo regular en D.....	4-29
Figura 4-22: Lugar de raíces muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo, N=2.....	4-31
Figura 4-23: Salida muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo, N=2.....	4-31
Figura 4-24: Lugar de raíces muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo.....	4-32
Figura 4-25: Salida muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo, N=3.....	4-32
Figura 4-26: Salida muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo, N=6.....	4-33
Figura 4-27: Salida a metaperiodo muestreo regular en D.....	4-34
Figura 4-28: Lugar de raíces muestreo irregular en D, N=2.....	4-36
Figura 4-29: Salida muestreo irregular en D, N=2.....	4-36
Figura 4-30: LdR transformado a continuo N=2 (muestreo irregular).....	4-37
Figura 4-31: Esquema Simulink estructura paralela.....	4-38
Figura 4-32: Salida muestreo regular en I esquema Simulink.....	4-38
Figura 4-33: Salida muestreo regular en D esquema Simulink.....	4-39
Figura 4-34: Salida muestreo regular en P esquema Simulink.....	4-39
Figura 4-35: Lugar de Raíces con rejilla en visión global.....	4-42
Figura 4-36: Lugar de Raíces con rejilla en visión detallada.....	4-42
Figura 4-37: Lugar de Raíces con rejilla transformado a S en visión global.....	4-43
Figura 4-38: Lugar de Raíces con rejilla transformado a S en visión detallada.....	4-43
Figura 4-39: Comparativa LdR casos monofrecuencia variado y bifrecuencia (escenario 1).....	4-44
Figura 4-40: Comparativa respuestas casos monofrec. variado y bifrecuencia (escenario 1).....	4-45
Figura 4-41: Comparativa acc. control casos monofrec. variado y bifrecuencia (escenario 1).....	4-45
Figura 4-42: Comparativa LdR casos monofrecuencia variado y bifrecuencia (escenario 2).....	4-46
Figura 4-43: Comparativa respuestas casos monofrec. variado y bifrecuencia (escenario 2).....	4-47
Figura 4-44: Comparativa acc. control casos monofrec. variado y bifrecuencia (escenario 2).....	4-47
Figura 5-1: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo regular.....	5-9
Figura 5-2: Fase del Diagrama de Bode muestreo regular.....	5-9
Figura 5-3: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo regular (ampliado).....	5-10
Figura 5-4: Fase del Diagrama de Bode muestreo regular (ampliado).....	5-10
Figura 5-5: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo irregular (subperiodo inicial) N=2.....	5-11
Figura 5-6: Fase del Diagrama de Bode muestreo irregular (subperiodo inicial) N=2.....	5-11
Figura 5-7: Magnitud del D. de Bode muestreo irregular (subperiodo inicial) N=2 (ampliado).....	5-12
Figura 5-8: Fase del Diagrama de Bode muestreo irregular (subperiodo inicial) N=2 (ampliado).....	5-12
Figura 5-9: Detalle márgenes de ganancia en Diagrama de Nyquist muestreo irregular N=2.....	5-13
Figura 5-10: Detalle márgenes de fase en Diagrama de Nyquist muestreo irregular N=2.....	5-13
Figura 5-11: Aspecto aplicación en simulación interactiva.....	5-15
Figura 5-12: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo regular en I.....	5-18

Figura 5-13: Fase del Diagrama de Bode muestreo regular en I.....	5-18
Figura 5-14: Diagrama de Nyquist muestreo regular en I.....	5-19
Figura 5-15: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo regular en D.....	5-20
Figura 5-16: Fase del Diagrama de Bode muestreo regular en D.....	5-20
Figura 5-17: Detalle márgenes de ganancia en Diagrama de Nyquist muestreo regular en D.....	5-21
Figura 5-18: Detalle márgenes de fase en Diagrama de Nyquist muestreo regular en D.....	5-21
Figura 5-19: Comparación de magnitud D. Bode estructura interactiva vs. paralela con N=6.....	5-23
Figura 5-20: Comparación de fase D. Bode estructura interactiva vs. paralela con N=6.....	5-23
Figura 5-21: Detalle márgenes de ganancia en Diagrama de Nyquist muestreo irregular en D.....	5-25
Figura 5-22: Detalle márgenes de fase en Diagrama de Nyquist muestreo irregular en D.....	5-25
Figura 6-1: Lazo de control multifrecuencia con muestreo no convencional.....	6-3
Figura 6-2: Operador dual.....	6-5
Figura 6-3: Detalle lazo de control multifrecuencia con muestreo no convencional.....	6-7
Figura 6-4: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular (comparativa 1) procedimiento 1°.....	6-16
Figura 6-5: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular (comparativa 2) procedimiento 1°.....	6-16
Figura 6-6: Acciones de control P-I-D bifrecuencia regular (comparativa 1) procedimiento 1°.....	6-17
Figura 6-7: Acciones de control P-I-D bifrecuencia regular (comparativa 2) procedimiento 1°.....	6-17
Figura 6-8: Respuesta P-I-D bifrecuencia irregular (comparativa 1) procedimiento 1°.....	6-18
Figura 6-9: Respuesta P-I-D bifrecuencia irregular (comparativa 2) procedimiento 1°.....	6-18
Figura 6-10: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular vs. irregular procedimiento 1°.....	6-19
Figura 6-11: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular vs. irregular (zoom) procedimiento 1°.....	6-19
Figura 6-12: Acc de control P-I-D bifrecuencia irregular (comparativa 1) procedimiento 1°.....	6-20
Figura 6-13: Acc. de control P-I-D bifrecuencia irregular (comparativa 2) procedimiento 1°.....	6-20
Figura 6-14: Respuestas P-I-D bifrecuencia regular versus irregular procedimiento 2°.....	6-24
Figura 6-15: Acciones de control P-I-D bifrecuencia regular versus irregular procedimiento 2°.....	6-24
Figura 6-16: Respuestas de lazo cerrado regular versus irregular continuas procedimiento 2°.....	6-25
Figura 6-17: Respuestas P-I-D bifrecuencia regular versus irregular procedimiento 3° situación 1ª.....	6-30
Figura 6-18: Acc. de control P-I-D bifrecuencia regular versus irregular procedimiento 3° situación 1ª.....	6-30
Figura 6-19: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular vs. irregular procedimiento 3° situación 2ª.....	6-31
Figura 6-20: Acc. de control P-I-D bifrecuencia regular vs. irregular procedimiento 3° situación 2ª.....	6-31
Figura 6-21: Salida discretización a tramos irregulares.....	6-34
Figura 6-22: Acciones de control discretización a tramos irregulares.....	6-34
Figura 6-23: Salida descomposición en frecuencia.....	6-35
Figura 6-24: Acciones de control descomposición en frecuencia.....	6-36
Figura 6-25: Comparativa salidas discretización irregular y descomposición en frecuencia.....	6-37
Figura 6-26: Comparativa acc. de control discretiz. irregular y descomposición en frecuencia.....	6-37
Figura 6-27: Comparativa salidas modelado irregular en RE a T y a t0.....	6-38
Figura 6-28: Comparativa acciones de control modelado irregular en RE a T y a t0.....	6-38
Figura 6-29: Aspecto programa simulación interactiva.....	6-45
Figura 6-30: Ilustración Conclusión 3ª programa simulación interactiva.....	6-45
Figura 6-31: Esquema Simulink Planteamiento 1.....	6-47
Figura 6-32: Respuesta de Simulink para Planteamiento 1.....	6-47
Figura 6-33: Respuesta a NT Tiempo Mínimo bifrecuencia regular.....	6-62
Figura 6-34: Detalle respuesta a T Tiempo Mínimo bifrecuencia regular.....	6-62
Figura 6-35: Acciones de control a T Tiempo Mínimo bifrecuencia regular.....	6-62
Figura 6-36: Respuesta a NT Tiempo Mínimo bifrecuencia irregular.....	6-63
Figura 6-37: Detalle respuesta a T Tiempo Mínimo bifrecuencia irregular.....	6-63
Figura 6-38: Acciones de control a T Tiempo Mínimo bifrecuencia irregular.....	6-63
Figura 6-39: Respuesta a NT Tiempo Finito bifrecuencia regular.....	6-66
Figura 6-40: Detalle respuesta a T Tiempo Finito bifrecuencia regular.....	6-66
Figura 6-41: Acciones de control a T Tiempo Finito bifrecuencia regular.....	6-66
Figura 6-42: Diagrama de bloques diseño con prealimentación.....	6-68
Figura 6-43: Detalle diagrama de bloques diseño con prealimentación.....	6-68
Figura 6-44: Respuesta a NT Tiempo Finito bifrecuencia regular e irregular.....	6-70
Figura 6-45: Detalle respuesta a T Tiempo Finito bifrecuencia regular.....	6-71
Figura 6-46: Detalle respuesta a T Tiempo Finito bifrecuencia irregular.....	6-71

Figura 6-47: Respuesta a NT Tiempo Finito bifrec. regular e irregular con Prealimentación.....	6-71
Figura 6-48: Detalle Respuesta a T Tiempo Finito bifre. regular e irregular con Prealiment.....	6-72
Figura 6-49: Esquema Control de Tres Ramas.....	6-73
Figura 6-50: Respuestas Regulador de Tres Ramas ejemplo 1 (comparativa).....	6-79
Figura 6-51: Acciones de control Regulador de Tres Ramas ejemplo 1 casos bifrecuencia.....	6-79
Figura 6-52: Respuestas Regulador de Tres Ramas ejemplo 2 (comparativa).....	6-82
Figura 6-53: Acciones de control Regulador de Tres Ramas ejemplo 2.....	6-82
Figura 6-54: Muestreo regular con base de tiempos común.....	6-84
Figura 6-55: Muestreo irregular con base de tiempos común (opción 1).....	6-84
Figura 6-56: Muestreo irregular con base de tiempos común (opción 2).....	6-85
Figura 6-57: Salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 1°.....	6-86
Figura 6-58: Acciones bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 1°.....	6-86
Figura 6-59: Salida bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 1°.....	6-87
Figura 6-60: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 1°.....	6-87
Figura 6-61: Comparativa salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 1°.....	6-88
Figura 6-62: Comparativa salidas bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 1°.....	6-89
Figura 6-63: Acciones bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 1°.....	6-89
Figura 6-64: Comparativa salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 2°.....	6-91
Figura 6-65: Comparativa acciones bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 2°.....	6-91
Figura 6-66: Salidas bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 2°.....	6-91
Figura 6-67: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 2°.....	6-92
Figura 6-68: Comparativa salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 2°.....	6-92
Figura 6-69: Comparativa salidas bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 2°.....	6-92
Figura 6-70: Comparativa acc. de control bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 2°.....	6-93
Figura 6-71: Comparativa salidas bifrecuencia regular vs. irregular tipo P-I-D proced. 2°.....	6-93
Figura 6-72: Comparativa salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 3°.....	6-95
Figura 6-73: Comparativa acc. de control bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 3°.....	6-95
Figura 6-74: Salida bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 3°.....	6-95
Figura 6-75: Acc. de control bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D proced. 3°.....	6-96
Figura 6-76: Comparativa salidas bifrec. reg. y regular aplic. irregular tipo P-I-D proced. 3°.....	6-96
Figura 6-77: Comparativa salidas bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 3°.....	6-96
Figura 6-78: Comparativa acc. de control bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 3°.....	6-97
Figura 6-79: Comparativa salidas bifrecuencia regular e irregular tipo P-I-D procedimiento 3°.....	6-97
Figura 6-80: Salidas bifrecuencia regular Tiempo Mínimo.....	6-98
Figura 6-81: Acciones bifrecuencia regular Tiempo Mínimo.....	6-99
Figura 6-82: Salidas bifrecuencia regular aplicado irregular Tiempo Mínimo.....	6-99
Figura 6-83: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular Tiempo Mínimo.....	6-99
Figura 6-84: Salidas bifrecuencia irregular Tiempo Mínimo.....	6-100
Figura 6-85: Acciones bifrecuencia irregular Tiempo Mínimo.....	6-101
Figura 6-86: Salidas regulador bifrecuencia Tiempo Finito.....	6-102
Figura 6-87: Acciones regulador bifrecuencia Tiempo Finito.....	6-103
Figura 6-88: Salidas bifrecuencia regular aplicado irregular Tiempo Finito.....	6-103
Figura 6-89: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular Tiempo Finito.....	6-103
Figura 6-90: Salidas bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 1.....	6-105
Figura 6-91: Acciones bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 1.....	6-105
Figura 6-92: Salida bifrecuencia regular aplicado irregular Tres Ramas ejemplo 1.....	6-106
Figura 6-93: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular Tres Ramas ejemplo 1.....	6-106
Figura 6-94: Comparativa salidas bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 1.....	6-106
Figura 6-95: Salida bifrecuencia irregular Tres Ramas ejemplo 1.....	6-107
Figura 6-96: Acciones bifrecuencia irregular Tres Ramas ejemplo 1.....	6-107
Figura 6-97: Salidas bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 2.....	6-109
Figura 6-98: Acciones bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 2.....	6-109
Figura 6-99: Salida bifrecuencia regular aplicado irregular Tres Ramas ejemplo 2.....	6-109
Figura 6-100: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular Tres Ramas ejemplo 2.....	6-110
Figura 6-101: Comparativa salidas bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 2.....	6-110
Figura 6-102: Salida bifrecuencia irregular Tres Ramas ejemplo 2.....	6-111
Figura 6-103: Acciones bifrecuencia irregular Tres Ramas ejemplo 2.....	6-111
Figura 6-104: Instante intermedio del patrón para controlador ante retardos aleatorios.....	6-112



Figura 6-105: Comparativa 1ª salidas ante escalón escenario con retardos aleatorios.....	6-115
Figura 6-106: Comparativa 1ª acciones de control ante escalón escenario con retardos aleatorios.....	6-115
Figura 6-107: Comparativa 2ª salidas ante escalón escenario con retardos aleatorios.....	6-116
Figura 6-108: Comparativa 2ª acciones de control ante escalón escenario con retardos aleatorios.....	6-116
Figura 6-109: Comparativa 3ª salidas ante escalón escenario con retardos aleatorios.....	6-117
Figura 6-110: Comparativa 3ª acciones de control ante escalón escenario con retardos aleatorios.....	6-117
Figura 6-111: Zoom comparativa 3ª salidas ante escalón escenario con retardos aleatorios.....	6-118
Figura 6-112: Comparativa 1ª salidas ante rampa escenario con retardos aleatorios.....	6-120
Figura 6-113: Comparativa 1ª acciones de control ante rampa escenario con retardos aleatorios.....	6-120
Figura 6-114: Comparativa 2ª salidas ante rampa escenario con retardos aleatorios.....	6-121
Figura 6-115: Comparativa 2ª acciones de control ante rampa escenario con retardos aleatorios.....	6-121
Figura 7-1: Descomposición en tareas para controlador bifrecuencia.....	7-6
Figura 7-2: Evolución temporal de las tareas caso bifrecuencia.....	7-6
Figura 7-3: Descomposición en tareas para controlador PVT.....	7-7
Figura 7-4: Evolución temporal de las tareas caso PVT.....	7-7
Figura 7-5: Escenario caso $\tau_1 = \tau_2$ ; $t_2 = t_1 > t_3$ .....	7-10
Figura 7-6: Implementación caso $\tau_1 = \tau_2$ ; $t_2 = t_1 > t_3$ .....	7-10
Figura 7-7: Escenario caso $\tau_1 < \tau_2$ ; $t_2 < t_1$ ; $t_1 > t_3$ .....	7-11
Figura 7-8: Implementación caso $\tau_1 < \tau_2$ ; $t_2 < t_1$ ; $t_1 > t_3$ .....	7-11
Figura 7-9: Escenario caso $\tau_1 > \tau_2$ ; $t_2 > t_1$ ; $t_1 > t_3$ .....	7-12
Figura 7-10: Implementación caso $\tau_1 > \tau_2$ ; $t_2 > t_1$ ; $t_1 > t_3$ .....	7-12
Figura 7-11: Ejecución de tareas PID caso bifrecuencia regular.....	7-17
Figura 7-12: Ejecución de tareas PID caso no convencional PVT.....	7-18
Figura 7-13: Salida de velocidad del motor para PID en cada caso contemplado.....	7-18
Figura 7-14: Acciones de control para PID en cada caso contemplado.....	7-19
Figura 7-15: Zoom acciones de control para PID en cada caso contemplado.....	7-19
Figura 7-16: Ejecución de tareas Cancelación caso bifrecuencia regular.....	7-23
Figura 7-17: Ejecución de tareas Cancelación caso no convencional PVT.....	7-23
Figura 7-18: Salida de velocidad del motor para Cancelación en cada caso contemplado.....	7-24
Figura 7-19: Acciones de control para Cancelación en cada caso contemplado.....	7-24
Figura 7-20: Zoom acciones de control para Cancelación en cada caso contemplado.....	7-25
Figura 7-21: Ejecución tareas Tres Ramas bifrecuencia regular PVT.....	7-28
Figura 7-22: Ejecución tareas Tres Ramas caso no convencional PVT.....	7-28
Figura 7-23: Salida de velocidad del motor para Tres Ramas en cada caso contemplado.....	7-29
Figura 7-24: Zoom salida de velocidad del motor para Tres Ramas en cada caso contemplado.....	7-29
Figura 7-25: Acciones de control para Tres Ramas en cada caso contemplado.....	7-30
Figura 7-26: Zoom acciones de control para Tres Ramas en cada caso contemplado.....	7-30
Figura V-1: Resumen instalación Tornado-VxWorks.....	V-5
Figura V-2: Detalle del conexionado en la plataforma de tiempo real.....	V-6

# **CAPÍTULO 1**

# **INTRODUCCIÓN**



## 1.1. TIPOS DE MUESTREO.

Se conoce por sistemas muestreados de forma convencional a aquellos sistemas en los que distintas variables (entradas, salidas, estados) están muestreadas cada  $T$  (periodo) unidades de tiempo (ver figura 1-1). Ese muestreo convencional será síncrono cuando todos los muestreadores del sistema estén sincronizados, y asíncrono cuando exista cierto retraso  $\Delta$  en el comienzo del muestreo de una variable del sistema respecto de otra u otras (ver figura 1-2). Todos los sistemas muestreados que no cumplan esta definición de muestreo convencional se les llamará sistemas muestreados de forma no convencional. Hay diferentes clases; alguna de ellas se expone seguidamente.

Se conoce por sistemas muestreados multifrecuencia (MF) a aquellos sistemas muestreados en los cuales dos o más variables son actualizadas a frecuencias distintas. Normalmente se considera que el muestreo es síncrono y periódico. Cuando los muestreadores no están sincronizados se habla de sistemas multifrecuencia asíncronos (ver figura 1-3). De este tipo de sistemas surge el control digital multifrecuencia o de muestreo multiperíodico como aquel tipo de control digital en el cual se suceden muestreos a frecuencias distintas.

Como extensión de los sistemas multifrecuencia, aunque claramente diferenciada, se puede considerar una situación no convencional de innegable interés práctico:

- el muestreo cíclico: también llamado periódicamente variable con el tiempo (PVT) o de orden múltiple, es un tipo de muestreo en el que las variables son muestreadas a intervalos variables de tiempo pero con la existencia de un periodo global  $T$ , a veces denominado metaperiodo (ver figura 1-4). Es éste el caso que más va a interesar en la realización de este trabajo como se detallará posteriormente en el apartado 1.5.

Por último, los sistemas muestreados de forma aleatoria son aquéllos en los que el muestreo se produce cada cierta cantidad variable de tiempo (sin la restricción de formar un patrón de muestreo que se repita cada periodo global  $T$ ) (ver figura 1-5).

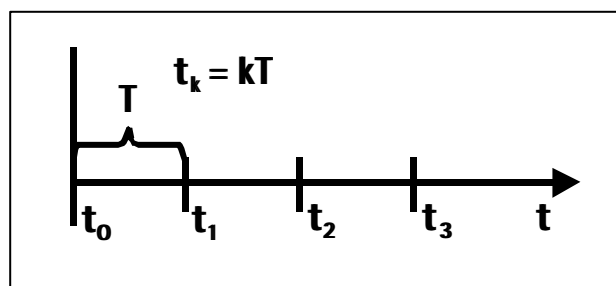


Figura 1-1: Muestreo convencional.

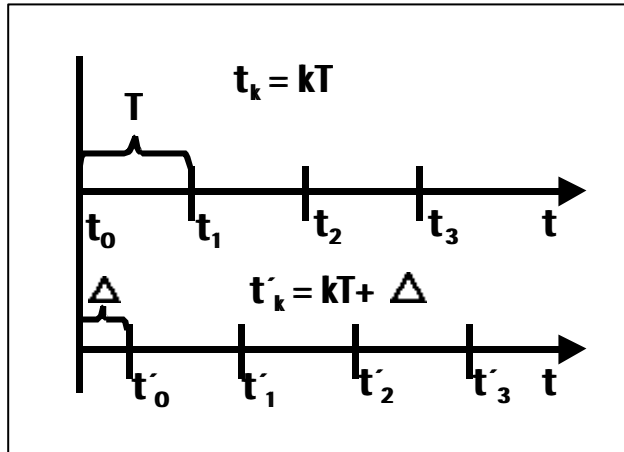


Figura 1-2: Muestreo asíncrono.

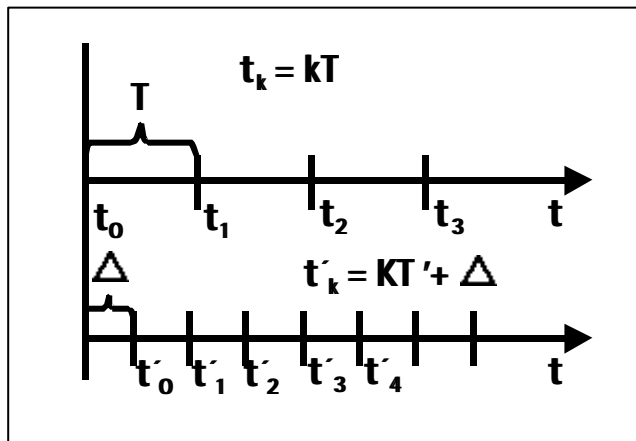


Figura 1-3: Muestreo multifrecuencia.

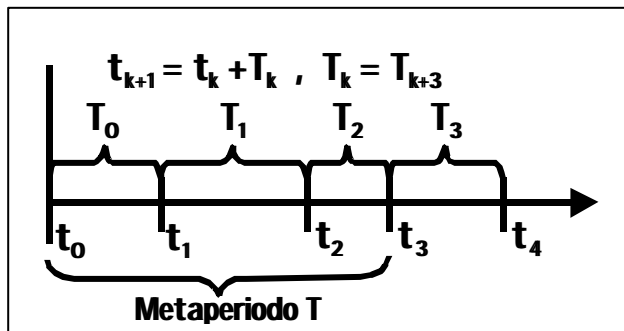


Figura 1-4: Muestreo cíclico o periódicamente variable en el tiempo o de orden múltiple.

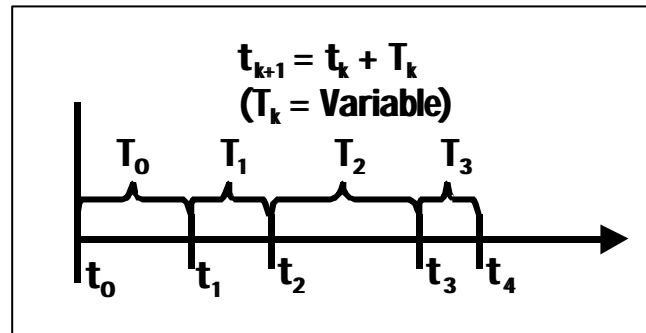


Figura 1-5: Muestreo aleatorio.

## 1.2. ESQUEMAS DE CONTROL CON MUESTREO NO CONVENCIONAL.

Como en otros casos, básicamente son dos las estructuras en las que se plantea el control con muestreo no convencional: la estructura SISO (Single Input Single Output) y la estructura MIMO (Multiple Input Multiple Output).

En la estructura más sencilla, SISO (ver figura 1-6), se presenta un escenario basado en la consideración de dos muestreadores independientes, uno a la salida del regulador y otro a la salida del proceso. El caso de la figura 1-6 representa un muestreo multifrecuencia regular, en el sentido de que se realiza cada  $T/m$  instantes de tiempo en la salida del regulador y cada  $T/n$  en la salida del proceso (recordar figura 1-3, salvando la asincronía). Sin embargo, perfectamente se podría haber dado a los muestreadores la característica de ser PVT (recordar figura 1-4) con lo que se trataría de secuencias irregulares de muestreo tanto en la salida del regulador como en la del proceso. Como se detallará en el apartado 1.5, es este último escenario planteado el que más va a interesar en la realización del presente trabajo.

Retomando por sencillez, pero sin pérdida de generalidad, el caso de muestreo multifrecuencia (regular), a partir de la estructura SISO se pueden derivar dos variantes de gran interés:

- variante MRIC (Multi-Rate Input Controller): se trata de hacer que, en la figura 1-6,  $m=1$  y  $n=1/N$ . De esta manera la actualización de la señal de control se hace cada  $T$  instantes de tiempo, mientras que la toma de la salida del proceso se hace cada  $NT$  instantes de tiempo. Esta estructura está muy indicada cuando no se puede tener acceso a frecuencias rápidas a la variable controlada, de manera que un control monofrecuencial degradaría las prestaciones del sistema. Ejemplos típicos donde se aplica esta estructura son analizadores de variables químicas y sensores con retrasos implícitos.
- variante MROC (Multi-Rate Output Controller): se trata de hacer que, en la figura 1-6,  $m=1/N$  y  $n=1$ . De esta manera la actualización de la señal de control se hace cada  $NT$  instantes de tiempo, mientras que la toma de la salida del proceso se hace cada  $T$  instantes de tiempo. Esta estructura está muy indicada cuando se trabaja en entornos donde hay muchas perturbaciones, de manera que se quiere disponer de

muchas muestras de la variable controlada con el fin de descartar aquéllas que estén degradadas por el influjo de dichas perturbaciones.

A lo largo de este trabajo, sobre todo en los capítulos de análisis y diseño, se va a hacer especial hincapié en la utilización de la primera de estas dos variantes del caso SISO, esto es, la variante MRIC.

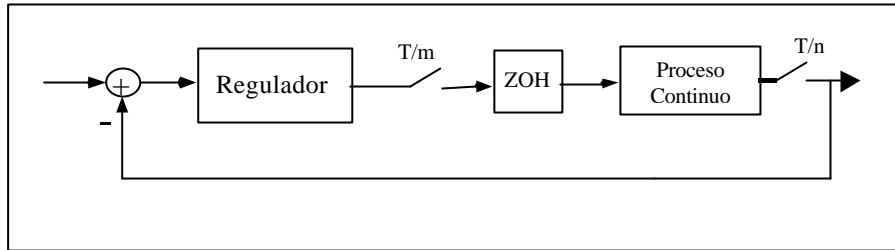


Figura 1-6: Esquema de control con muestreo no convencional caso SISO

Por último, la estructura MIMO supone la utilización de dos o más muestreadores a la entrada del proceso y otros tantos a la salida del mismo, con el fin de poder controlar dos o más variables del sistema. En la figura 1-7 se plantea esta estructura, observándose la presencia de hasta  $m$  muestreadores a la entrada del proceso y de hasta  $p$  a la salida del mismo. Parece un caso en el que de forma práctica natural surge la introducción de un sistema multifrecuencia, aún cuando se disponga de un conjunto de lazos monofrecuenciales en los que  $T_i = T_i'$ , si bien  $T_i \neq T_j$ , para  $i \neq j$ .

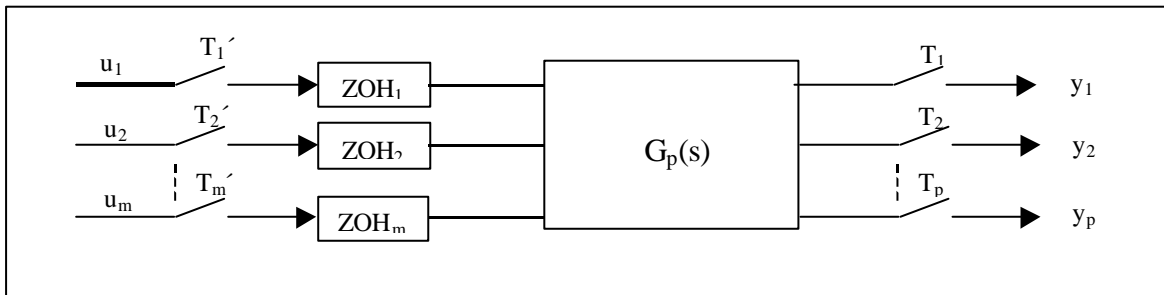


Figura 1-7: Esquema de control con muestreo no convencional caso MIMO

### 1.3. APLICACIONES ESPECÍFICAS.

El control digital multifrecuencia es un área significativa de investigación. Su aplicación es de notable interés, ya que el planteamiento en el que se basa se puede presentar en una serie de situaciones, las cuales se dan en un amplio espectro de entornos:

- Computador compartido en el tiempo por varios servicios de detección, los cuales le envían señales de forma periódica pero en ellos la información deseada no puede obtenerse en intervalos regulares de tiempo (Jury y Mullin, 1959).

- Aplicaciones prácticas en las que restricciones económicas o tecnológicas obligan al uso de esquemas de control donde el muestreo de las medidas de los sensores y de los cálculos de control deben realizarse a diferentes frecuencias. Así ocurre en las aplicaciones aeroespaciales (Glasson, 1982), (De la Sen et al., 1987), de robótica (Lee y Xu, 1993), (Tsao y Hutchinson, 1994), (Nemani et al., 1994), (Sun et al., 1996), (Valera, 1998), control de procesos químicos (Tham et al., 1991), (Lee et al., 1992), (Zhu y Ling, 1994) y de una variada gama de procesos, desde la molienda de cemento (Morant, Albertos y Crespo, 1986), (Salt, 1992) al controlador del disco duro de un ordenador (Hara y Tomizuka, 1998), (Baek y Lee, 1999).
- Situaciones en las que se puede plantear un fallo de sensores y en las que, por otra parte, no se pretende una duplicación de los mismos por razones económicas (Whitbeck y Didaleusky, 1980). Es una situación que puede ser tangencial a la caracterización por datos perdidos “missing and scarced data” (Albertos et al., 1997).
- Sistemas de control distribuido y multiprocesadores (Ritchey y Franklin, 1989), con circuitos de control de bus acoplado en los que, debido a la distribución espacial de la planta controlada, los datos deben ser enviados por medio de un bus serie (Hovestadt, 1991), (Casanova y Salt, 1999, 2000, 2002).
- Sistemas de tiempo real, en los que los muestreos se han de adecuar a los tiempos de respuesta de las diferentes tareas requeridas en un entorno de estas características (Albertos y Crespo, 1997).
- Sistemas multivariables en los que suele ser ventajoso disponer de diferentes frecuencias de muestreo en lazos distintos, para mejorar las prestaciones del sistema y reducir la carga de cálculo del computador (Patel y Munro, 1982), (Åström y Wittenmark, 1988).
- Sistemas de control digital en los que se introduce intencionadamente una estructura de control MF, con el objetivo de mejorar el cumplimiento de las especificaciones, tales como sobreimpulso, oscilaciones ocultas, márgenes, etc (Aracil, Jiménez y Feliu, 1984), (Kabamba, 1987), (Francis y Georgiou, 1988), (Hagiwara et al., 1990), (Feliu, Cerrada y Cerrada, 1990), (Voulgaris et al., 1994), (Graselli et al., 1995), (Colaneri y Kucera, 1997), etc.

#### **1.4. ANTECEDENTES Y PERSPECTIVA HISTÓRICA.**

A continuación se intenta plasmar el conjunto de aportaciones relativas al tema general de investigación de este trabajo. Se presentan de manera resumida, ya que resultaría sumamente farragoso detallar el conjunto de aportaciones que, en los más de 45 años de existencia del control digital multifrecuencia, se han producido en todos los ámbitos del mismo (modelado, análisis, diseño y aplicaciones). Además, se van a presentar desglosadas en dos dominios: el frecuencial y el temporal. A su vez, el frecuencial se dividirá en aportaciones



relativas a la técnica llamada “Descomposición Frecuencial” y en otras debidas a la técnica llamada “Descomposición Vectorial de Conexiones”. Ambas técnicas serán luego definidas.

Para seguir este apartado con mayor perspectiva temporal, se incorporan dos esquemas (figuras 1-9 y 1-10) que ubican la aportación de cada investigador en el eje de tiempos. El lector interesado puede encontrar en (Araki, 1993) una visión de conjunto con más de un centenar de referencias. Gran parte de la información que aquí se presenta toma como fuente (Camiña, 1999).

a) Dominio Frecuencial:

a.1) Descomposición Frecuencial:

La rama del Control Digital Multifrecuencia se inicia en la década de los 50 como un método de profundizar en el estudio de los sistemas muestreados monofrecuencia originados por las aplicaciones del radar durante la segunda Guerra Mundial. Según recogen en sus trabajos recopilatorios Walton (1981) y Glasson (1983), la contribución inicial más relevante en este campo fue la debida a Sklansky y Ragazzini (1955) que propusieron la llamada Descomposición Frecuencial, método consistente en la introducción de una serie de muestreadores ficticios que, operando a frecuencias múltiplos de la frecuencia original, permiten el estudio del comportamiento intermuestreo (ver figura 1-8). Más tarde Friedland (1961) aplica dicha técnica al estudio de estructuras de control en sistemas periódicos, seguido de las contribuciones de Coffey y Williams (1966) y Boykin y Frazier (1975) que se ocupan del análisis de sistemas de control multivariables y multifrecuencia.

Manteniendo el enfoque de modelado en representación externa se enmarcan los trabajos del grupo de Aracil (Aracil, Jiménez y Feliu, 1984), (Feliu, Cerrada y Cerrada, 1990), que plantean de forma simple y asequible la consideración en el modelo del comportamiento intermuestreo y lo aplican al diseño de reguladores bifrecuencia que eviten las oscilaciones ocultas indeseables, que frecuentemente se presentan en función de un alto periodo de medida de la salida del proceso a controlar. Actualmente, y en este mismo ámbito, cabe significar las aportaciones de (Salt y Albertos, 2000).

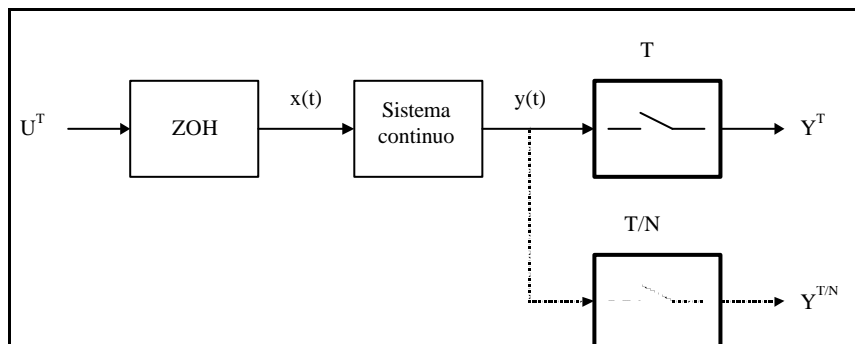


Figura 1-8: Esquema Descomposición Frecuencial

## a.2) Descomposición Vectorial de Conexiones:

Muy próximo al origen de la descomposición en frecuencia se desarrolla una técnica similar conocida como Descomposición Vectorial de Conexiones (Vector Switch Decomposition). Introducida por Kranc (Kranc, 1957a), el método consiste en representar al muestreador multifrecuencia como la superposición de varios muestreadores convencionales trabajando todos ellos con el mayor de los periodos de muestreo considerados en el sistema, lo que permite analizar al sistema MF mediante el uso de las técnicas usuales de los sistemas monofrecuencia, siempre que la relación entre frecuencias sea un número entero. Esta técnica ha sido la que se ha utilizado en el presente trabajo para desarrollar tanto el modelado en representación externa (capítulo 2) como en interna (capítulo 3) de sistemas muestreados de forma no convencional. Por tanto, se insta al lector a dichos capítulos para conocer más acerca de ella.

Ambas técnicas (Descomposición Frecuencial y Descomposición Vectorial de Conexiones) fueron exhaustivamente revisadas (y argumentada la relación entre ellas) en los trabajos debidos a Ragazzini y Franklin (1958) y a Jury (1958). Este último había introducido con anterioridad la transformación en Z modificada como herramienta para el estudio del problema planteado. Posteriormente Whitbeck y Didaleusky (1980) desarrollan una forma vectorial de la técnica de descomposición de conexiones (the pseudo measurements vector) y la aplican a varios problemas de control de vuelo.

La relación entre los dominios frecuencial y de espacio de estado (este último se verá posteriormente) no se establece claramente hasta 1986 en que Araki y Yamamoto analizan la estructura de control MF donde las diferentes frecuencias de muestreo se asocian con pares de variables entrada-salida y desarrollan, a partir de los trabajos de Kalman-Bertram, modelos de modulación de impulso (MIM) que permiten la conexión con la respuesta frecuencial y la formulación de criterios frecuenciales de estabilidad (Nyquist). El enfoque del trabajo está claramente relacionado con la técnica del Vector Switch Decomposition de Kranc. Basándose en este modelo sus autores desarrollaron como consecuencia lógica una serie de trabajos destinados a establecer reguladores que llamaron MRIC (multirate input controller) (Araki y Hagiwara, 1986), (Araki et al., 1992), y MROC (multirate output controller) (Hagiwara y Araki, 1988), (Hagiwara et al., 1990), (Er y Anderson, 1991) según se planteara la división regular de muestreos del periodo modelo (metaperiodo) en la entrada o la salida de la planta a controlar (tal y como se detalla en el apartado 1.2).

El trabajo de (Godbout, Jordan y Apostolakis, 1990) intenta generalizar el modelado antes expuesto planteando la consideración de vectores expandidos al máximo común divisor (m.c.d.) y fijando como única restricción, comprensible por otra parte desde una óptica industrial, de que todos estos periodos fueran conmensurables, es decir existiese un m.c.m. al que dividieran de forma entera todos los periodos de muestreo puestos en juego. En este caso la dimensionalidad del modelo presentado era muy elevada con respecto al anterior por lo que posteriores contribuciones de su grupo de trabajo (Apostolakis y Jordan, 1991 y 1992), (Apostolakis, 1992) se orientaron a eliminar los estados y salidas inobservables llevando a matrices de dimensiones mínimas.

En ese contexto de dimensión mínima debe resaltarse el modelo de los Operadores de Kranc, introducido por Thompson (1986 y 1988) de forma independiente al de Araki y

Yamamoto (1986), pero igualmente relacionado con la técnica de descomposición vectorial de conexiones. En base a tal técnica y la consideración de los periodos base (m.c.d.) y modelo (m.c.m.), se genera el operador de Kranc como una realización mínima, la cual está implementada en el programa CC.

Por su parte, Albertos (1990, 1991) propone el modelado por bloques BMIO (Block Multirate Input Output), en el que tras enlazar las representaciones externa e interna de un sistema muestreado establece el diseño por analogía con la realimentación del estado, así como la presentación de un deadbeat aplicable a esta situación. Por otra parte, el modelado de Salt (1992), similar al expuesto por Moore et al. (1993) a partir de una idea original de Mita y Chida (1988), se caracteriza por preservar el sentido físico de los parámetros del modelo, generado mediante la aplicación de la técnica de sustituciones sucesivas considerando únicamente los instantes de cambio de la señal de control en un metaperiodo.

#### b) Dominio Temporal:

En el dominio temporal el primer trabajo significativo es el de Kalman y Bertram (1959), en el que se muestra la flexibilidad de las variables de estado para describir la evolución de los sistemas muestreados de manera no convencional y en particular de los sistemas multifrecuencia. Aparentemente este primer trabajo pasó desapercibido. Tienen que transcurrir más de 15 años hasta que Barry (1975) publica un artículo en el que describe el diseño de un regulador MF con variables de estado y muestra que sus prestaciones son superiores al regulador monofrecuencia trabajando a la misma frecuencia base. Posteriormente y de forma independiente y paralela, Amit y Powell (1981) e investigadores de The Analytic Sciences Corporation (TASC) (Broussard y Glasson, 1980), (Glasson y Dowd, 1981) desarrollan una técnica de diseño de control MF basada en la formulación del control óptimo.

Paralelamente al desarrollo de los modelos de Araki, de Godbout y de Thompson (nombrados en la parte del dominio frecuencial) como realizaciones en espacio-estado, se establecen los modelados en representación interna a partir de la consideración de transformaciones matemáticas equivalentes. Así, Meyer y Burrus (1975, 1976) introducen un modelo mediante la partición por bloques de la matriz de transición de estados, que permite convertir un sistema lineal periódico en uno equivalente invariante con el tiempo (LTI) y que ha sido ampliamente utilizado con posterioridad (Graselli, 1984), (Colaneri et al., 1990, 1992), (Lin y Kin, 1993), (Longhi, 1994), (Coll et al., 1994), (Graselli et al., 1995), (Zhang, 1998), etc.

Otra técnica de gran difusión es la del lifting discreto, introducida por Khargonekar et al. (1985), que pone de manifiesto la existencia de un isomorfismo isométrico entre el sistema lineal periódico y el LTI equivalente (sistema “estirado”), de forma que se preservan las propiedades analíticas, algebraicas y de métrica de ambos sistemas. Con numerosas variantes (en función de las señales y/o estados que se estiran) y aplicaciones (Francis y Georgiou, 1988), (Chen y Francis, 1991), (Flamm, 1991), (Dahleh et al., 1992), (In y Zhang, 1994), (Khargonekar y Özgüler, 1994), (Voulgaris, 1996), (Graselli et al., 1996), etc, la técnica del lifting discreto fue generalizada al caso multivariable (MIMO) por Meyer (1990), donde además se la relaciona con la partición de la matriz de transición (Meyer y Burrus, 1975) y

con el operador de Kranc MIMO. Una ilustrativa comparación entre las diversas variantes del lifting discreto se encuentra en (Misra, 1996).

Con un planteamiento radicalmente diferente, el modelado de Tornero (Tornero, 1985), (Tornero y Albertos, 1986, 1987) supone un generador de modelos multifrecuenciales y como tal constituye una poderosa herramienta de simulación. Para ello se caracteriza al sistema MF por un conjunto de elementos físicos y una serie de eventos (muestreos y retenciones), de modo que una secuencia de eventos dada origina una secuencia de transformaciones sobre el vector de estado que pueden ser descritas por una matriz de transición única.

En la década de los 90 aparece la generalización de la transformación del lifting de Khargonekar et al. (1985) al caso continuo. La técnica del lifting continuo (Bamieh et al., 1991), (Toivonen, 1992), (Bamieh y Pearson, 1992), (Yamamoto y Araki, 1994), (Sagfors et al., 1998) se puede contemplar como una discretización que considera el sistema continuo como periódico y lo transforma en uno LTI equivalente de dimensión infinita. Su característica esencial radica en la incorporación del comportamiento intermuestreo como parámetro del modelo, lo que justifica su amplia aplicación a los problemas sobre robustez (Voulgaris y Bamieh, 1993), (Qiu y Chen, 1994), (Chen y Qiu, 1994), (Hayakawa, Hara y Yamamoto, 1994), (Dullerud y Glover, 1995, 1996), (Chen y Francis, 1996), (Toivonen y Sagfors, 1997), (Cantoni y Glover, 1997), (Toivonen, 1998), (Qiu y Tan, 1998), etc, y respuesta en frecuencia de los sistemas muestreados.

## **1.5. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA. OBJETIVOS Y ENFOQUE DEL TRABAJO.**

Tal y como se viene mencionando a lo largo del capítulo, de forma tradicional, el control de procesos por computador (control digital convencional) se diseña sobre la base de un periodo de muestreo constante, esto es, sensores y controladores presentan un mismo periodo de muestreo. La ventaja de establecer un control basado en muestreo convencional radica en el hecho de que facilita la etapa de modelado. No obstante, en situaciones reales, donde suelen existir problemas debido a la aparición de retardos (por la compartición de medios comunes entre las diferentes tareas ejecutadas en el sistema real, por la asincronicidad entre la toma de medidas y la inyección de acciones sobre el sistema, etc), la ventaja comentada anteriormente supone a su vez el inconveniente de afrontar con dificultad la fase de diseño del regulador, el cual, como se ha dicho, debe ser capaz de adaptarse a la sucesión de retardos de magnitud aleatoria que en el peor de los casos puede aparecer. A su vez, la elección del periodo de muestreo debe tener en cuenta el máximo tiempo para poder realizar todas las operaciones necesarias (la toma de información, el procesado de la misma para la generación de acciones de control, etc), siendo por tanto usual, que este tiempo de muestreo sea elegido, por diversos motivos, demasiado grande para conseguir controlar eficazmente el proceso. Por otra parte, se puede dar la situación de encontrarse ante casos en los que el proceso requiera por su propia naturaleza de un muestreo no convencional, ya sea porque forma parte de aplicaciones de control en las que los sensores requieren un tiempo de procesamiento elevado en comparación con las necesidades del sistema de control, o bien por otras razones de diversa índole.

En estas circunstancias, el empleo de estrategias de muestreo multifrecuencia permiten mejorar las especificaciones de tiempo o frecuencia (modificando el tiempo de establecimiento, las oscilaciones ocultas, los márgenes de fase y magnitud, etc), ya que con ellas se pueden adoptar diversos periodos de muestreo para sensores y para controladores. En un siguiente paso se puede considerar control con esquemas de muestreo no convencional PVT, en los que se asumen una sucesión irregular de instantes de muestreo en diferentes puntos del lazo de control. Evidentemente con estas técnicas no convencionales el problema de los retardos queda asumido en la etapa de modelado, la cual se puede establecer fuera de línea, dejando la fase de diseño del control expedita para el uso de reguladores convencionales, los cuales, por otra parte, pueden adoptar estructuras asimilables al caso concreto al que se aplican.

Como consecuencia de estas razones planteadas, parece necesario establecer como primer objetivo a cubrir en este trabajo la posibilidad de modelar aquellos sistemas que son susceptibles de ser muestreados de forma no convencional, y como caso particular, de forma periódicamente variable en el tiempo (PVT), esto es, estableciendo un patrón compuesto por muestreos espaciados de forma irregular en el tiempo pero que se repite para cada metaperiodo. De esta forma, una vez modelado el sistema bajo estudio, se podrán plantear otras fases dentro del estudio global del mismo como puedan ser las fases de análisis y de diseño. Así, en los capítulos 2 y 3 va a ser desarrollado este primer objetivo (modelado) atendiendo al punto de vista de la representación interna (RI) en el primero de ellos y a la representación externa (RE) en el segundo.

Posteriormente, en los capítulos 4 y 5 se trata la fase de análisis de sistemas muestreados de forma no convencional, estableciendo un caso concreto, en el que se considera la utilización de reguladores tipo P-I-D con estructura no convencional, dada su gran aceptación en la industria. Se pretende, por tanto, estudiar cómo se modifican las reglas clásicas de sintonía de reguladores P-I-D en este tipo de esquemas. Dado que resulta claro que un parámetro adicional en un regulador discretizado queda constituido por su periodo de muestreo y si, además, es posible la consideración de una sucesión irregular periódica (cíclica) de los mismos, se dispone de una serie de grados de libertad que pueden ser utilizados para aplicaciones de sintonización de reguladores tipo P-I-D. Así, en el capítulo 4 se hace el estudio desde el punto de vista del dominio temporal, mientras que en el capítulo 5 se hace desde el punto de vista frecuencial, estableciéndose una equivalencia clara entre ambos dominios. Se desarrollan programas de simulación (convencional e interactiva) para realizar en su completitud el estudio.

Por último, en el capítulo 6 se introducen una serie de pautas relativas a la fase de diseño de reguladores con estructura no convencional, los cuales han de ser capaces de controlar a los sistemas descritos anteriormente (muestreados de forma cíclica o PVT). Por una parte se pretende una adaptación de reguladores clásicos tipo P-I-D, cancelación, prealimentación, de asignación de polos, etc. en sistemas multifrecuencia. Por otra parte, y contando con los desarrollos realizados en la etapa de modelado de procesos enmarcados en esquemas de muestreo no convencional basados en la RE (capítulo 3), se pretende establecer una generalización de reguladores clásicos discretos dentro de este tipo de entornos, considerando la evidencia de que estos elementos van a procesar señales a diferentes frecuencias, por lo que puede surgir la eventual necesidad de estructuras no convencionales en aras a un adecuado funcionamiento de los reguladores reseñados. Es oportuno hacer hincapié

en la idea apuntada con anterioridad por la que se ha establecido el esquema de muestreo (regular o irregular a lo largo de cada metaperiodo) como una característica que puede exigir el sistema bajo estudio. Por ello, la aportación fundamental de este capítulo sexto es la posibilidad de diseñar reguladores ante cualquier patrón de muestreo demandable por el proceso, más allá de establecer si un patrón u otro va a suponer un mejor comportamiento en el sistema. No obstante, los conceptos de diseño expuestos en este capítulo 6 van a permitir, para aquellos procesos que admitan diversos patrones de muestreo (regulares e irregulares), comparar cuál de ellos supone mejor comportamiento del sistema. Al final del capítulo se hace énfasis en la mejora que aporta el diseño de controladores con estructura no convencional PVT respecto del diseño de controladores multifrecuencia cuando las acciones de control generadas por estos últimos son aplicadas de forma PVT. Este hecho es muy interesante, ya que viene a justificar el esfuerzo de modelado y diseño llevado a cabo para lograr el sistema de control con estructura no convencional. Además, pone de manifiesto la solución a un problema real como es el de los retardos, los cuales pueden aparecer al implementarse el sistema de control sobre un sistema de tiempo real, en el que normalmente el enlace regulador-proceso suele estar compartido por varias tareas, de forma que, al no disponer de exclusividad en la transmisión, las acciones generadas por el controlador multifrecuencia llegarán retrasadas al proceso, retardo, que como se dijo anteriormente, puede ser previsto en la etapa de modelado no convencional, diseñándose un controlador que genere las acciones de control oportunas en base al instante de tiempo en que realmente se inyectarán al proceso.

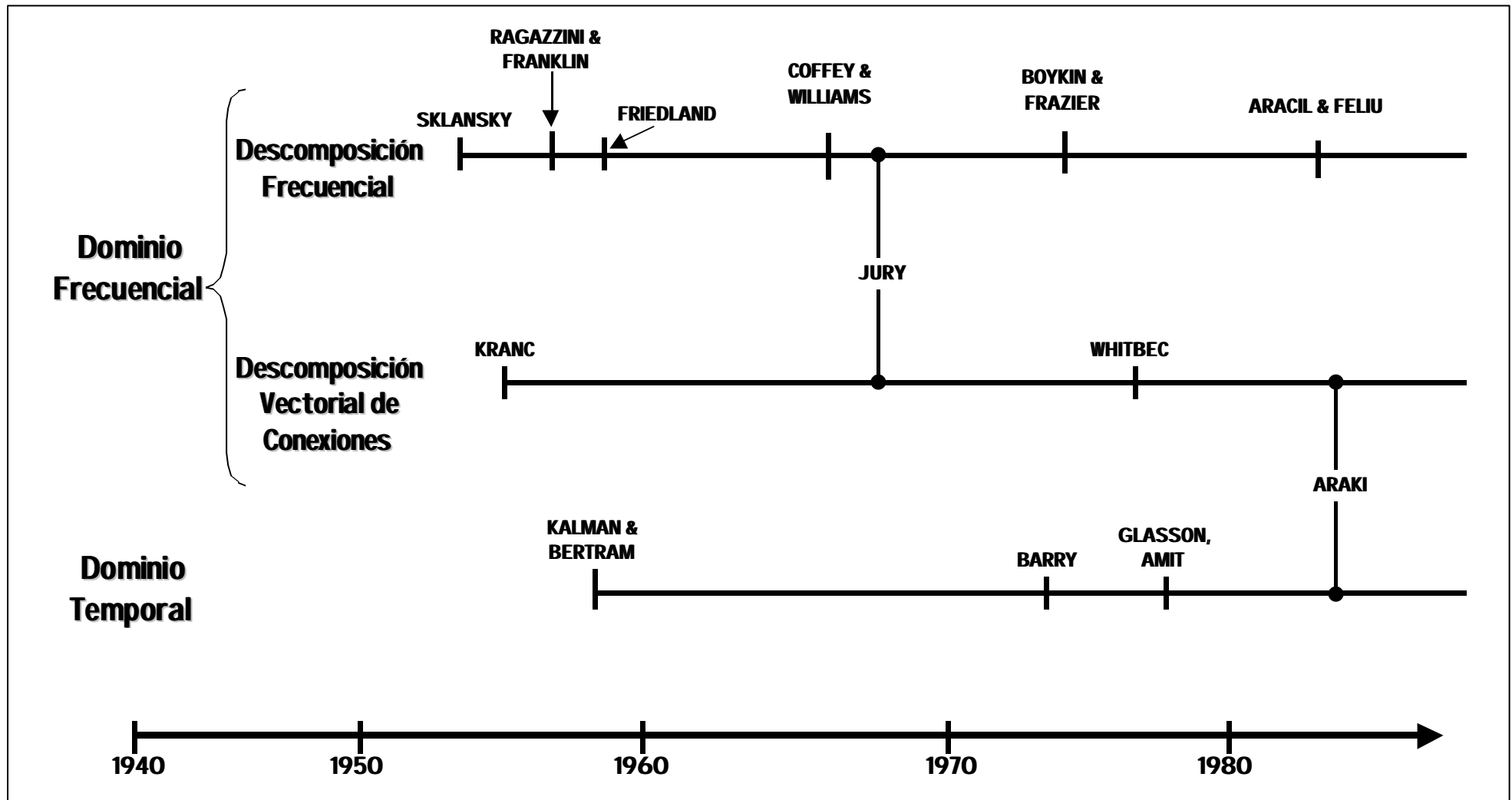


Figura 1-9: Esquema resumen perspectiva histórica (hasta década de los 80)

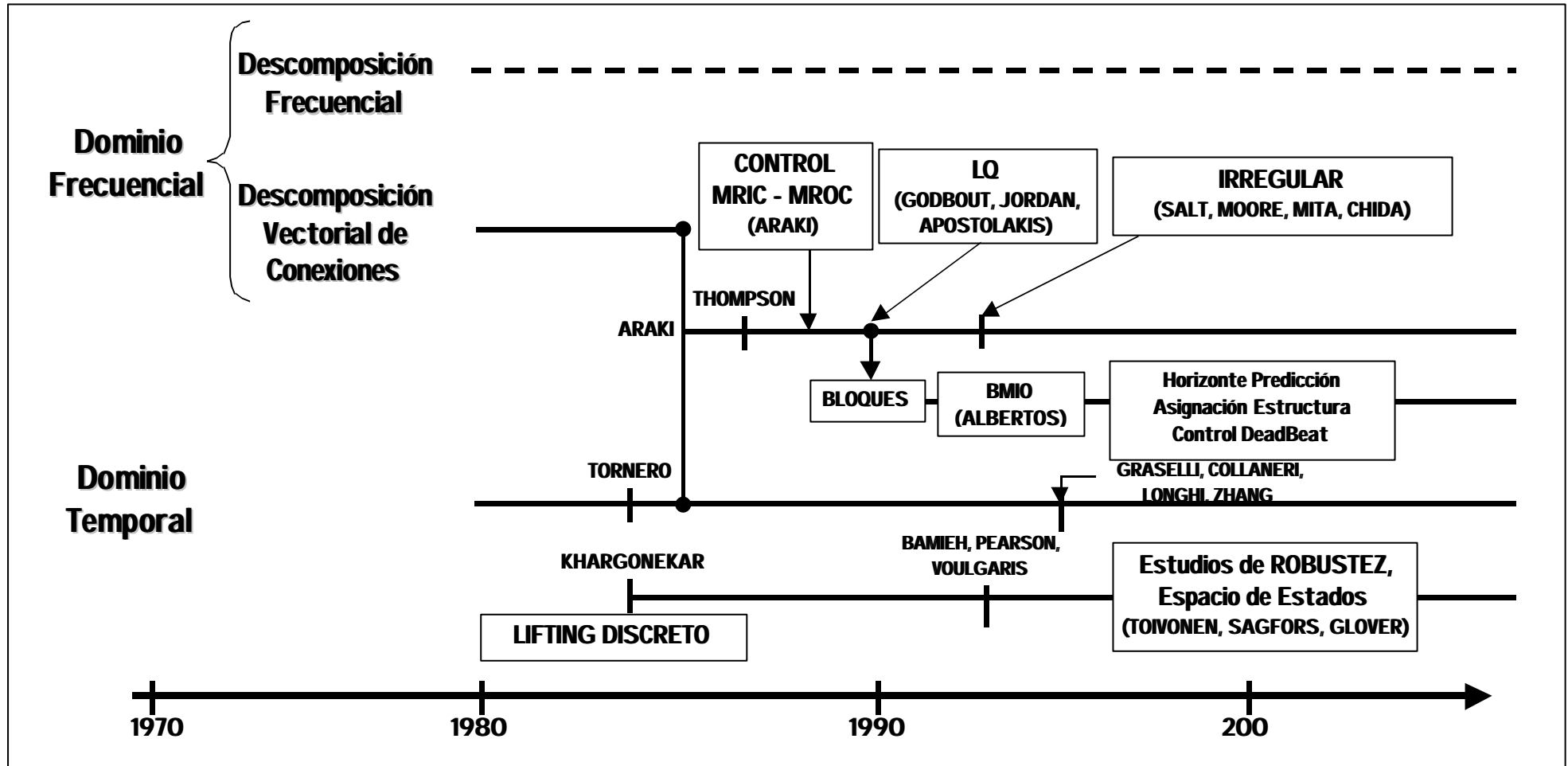


Figura 1-10: Esquema resumen perspectiva histórica (a partir década de los 80)



## **CAPÍTULO 2**

# **MODELADO EN REPRESENTACIÓN INTERNA DE SISTEMAS CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**



## 2.1. INTRODUCCIÓN.

En este capítulo se van a exponer y a aportar una serie de leyes de recurrencia basadas en la Metodología de Kranc (Kranc, 1957a), (Kranc, 1957b), a partir de las cuales se va a poder modelar por medio de la Representación Interna (RI) a un sistema muestreado de forma no convencional PVT. Dichas leyes, como luego se verá de forma detallada, están basadas en la realización de una serie de sustituciones sucesivas sobre las ecuaciones de estado y salida del sistema, estando este último definido a periodo base  $t_0$  (m.c.d. de los periodos existentes en los muestreadores a entrada y salida del mismo) mediante la cuádruple  $[A \ B; C \ D]$ . De esta manera, se podrá obtener la cuádruple  $[\bar{A} \ \bar{B}; \bar{C} \ \bar{D}]$  que modela a metaperiodo  $T_0$  el comportamiento del sistema muestreado. En el anexo I aparecen las leyes de recurrencia desarrolladas implementadas en Matlab.

El modelado en RI parte de un concepto teórico básico: el método de la Descomposición Vectorial de Conexiones. Por tanto, previamente a la exposición de las leyes comentadas, es conveniente introducir una serie de apuntes teóricos que giran en torno a dicho método en aras a contextualizar el modelado que se presenta.

## 2.2. CONCEPTOS BÁSICOS.

### 2.2.1. Planteamiento general.

Se va a partir de la idea de expresar una secuencia muestreada no uniformemente en el tiempo, en la que dentro del metaperiodo  $T_0$  tienen cabida  $N$  intervalos  $\tau_1$  hasta  $\tau_N$ , como la superposición de  $N$  secuencias muestreadas uniformemente a periodo  $T_0$ , empezando cada una de ellas en el instante de muestreo adecuado dentro del metaperiodo global  $T_0$ , es decir, en los instantes  $t_1$  hasta  $t_{N-1}$ , como puede apreciarse en las figuras 2-1 y 2-2. A la vista de la primera figura queda claro que:  $t_i = \sum_{j=1}^i \tau_j$ ,  $i = 1..N - 1$ .

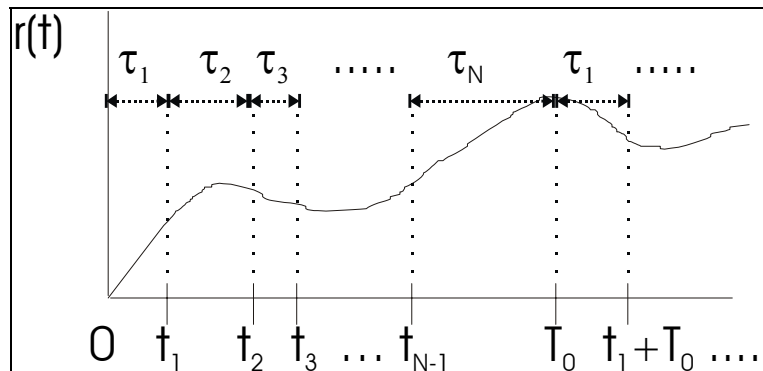


Figura 2-1: Secuencia de entrada muestreada no uniformemente

Si suponemos una secuencia muestreada de la forma antes comentada como entrada a una f.d.t. continua  $G(s)$  o discreta  $G(z)$ , tendremos una secuencia resultante de salida como la

superposición de  $N$  secuencias periódicas  $Y_i^*(mT_0+t_i)$  (figura 2-3). Es interesante notar que en el caso en que  $G(z)$  provenga de la discretización de  $G(s)$ , dicha discretización se realiza con ZOH y a periodo base (m.c.d de los intervalos  $\tau_1$  hasta  $\tau_N$ ), de tal manera que se producirá una retención durante todo el intervalo  $\tau_i$  del valor muestreado en cada instante  $t_{i-1}$  de la entrada. En la sección 2.2.3 se discutirá más detalladamente y en base a la naturaleza del sistema qué tratamiento se ha de adoptar para llevar a cabo el modelado del mismo en cada caso.

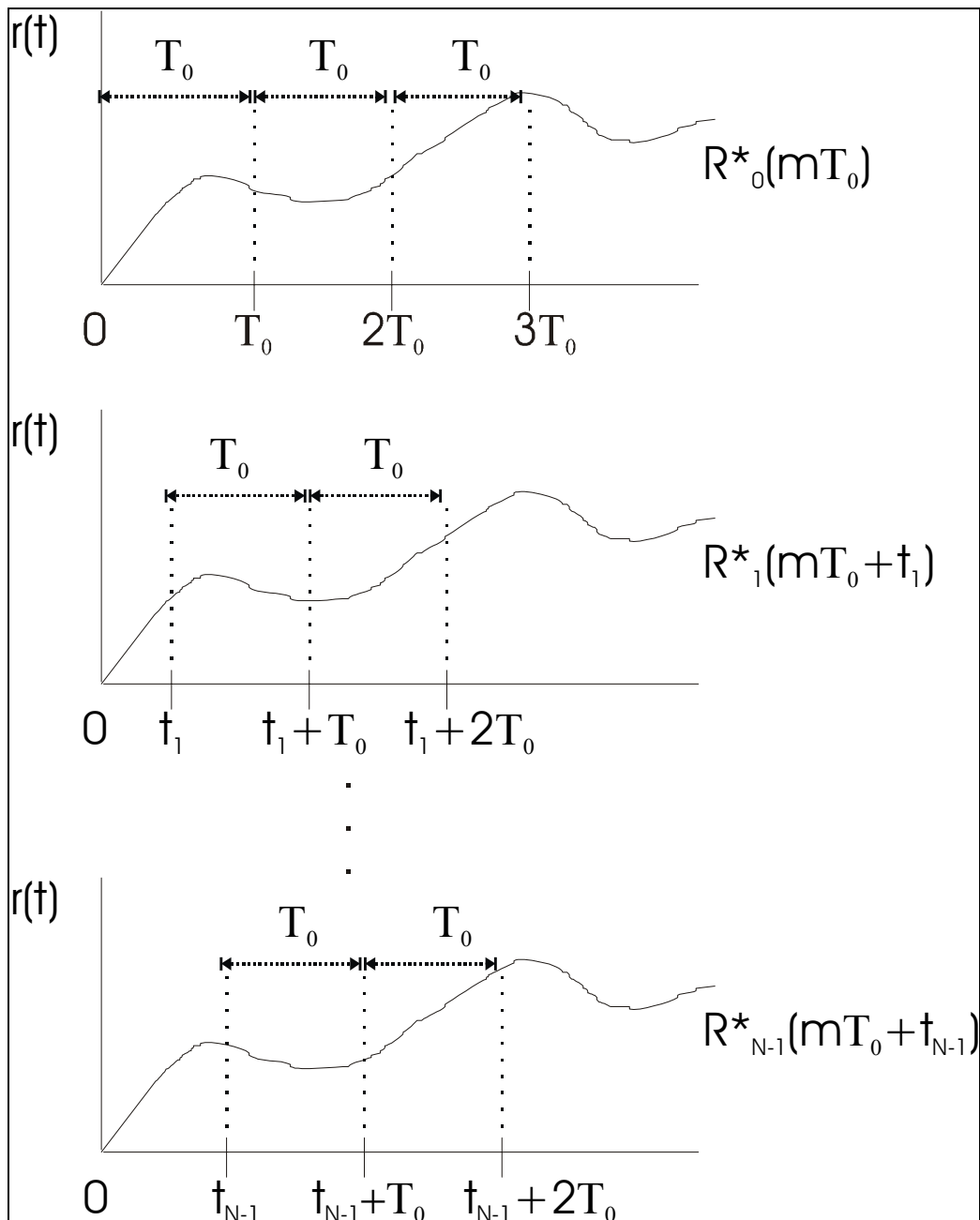


Figura 2-2: Descomposición en secuencias periódicas.

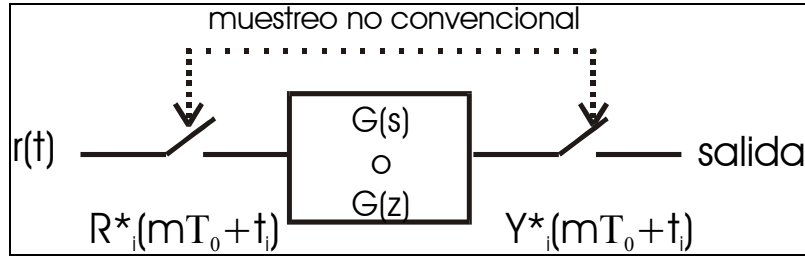


Figura 2-3: Configuración del muestreo para el proceso.

Así pues, tratando por ejemplo el caso continuo, esto es, para  $G(s)$ , la contribución de la primera secuencia de entrada  $R_0^*(mT_0)$  a la secuencia de salida periódica  $Y_0^*(mT_0)$  es proporcionada por  $R_0^*(mT_0)$  ponderada por  $g(0)$ ,  $g(T_0)$ ,  $g(2T_0)$ , etc, donde  $g(t)$  es la respuesta impulsional de  $G(s)$  en el instante  $t$ . Por su parte, la segunda secuencia de entrada  $R_1^*(mT_0+t_1)$  contribuye a  $Y_0^*(mT_0)$  mediante  $R_1^*(mT_0+t_1)$  ponderada por  $0$ ,  $g(T_0-t_1)$ ,  $g(2T_0-t_1)$ , es decir, se trata de coger la secuencia de entrada  $r(t)$  y adelantarla  $t_1$  instantes de tiempo, de tal forma que ahora la salida estará ponderada por la respuesta impulsional retrasada  $t_1$  instantes de tiempo. Se podría seguir evaluando la aportación de cada secuencia de entrada en la salida  $Y_0^*(mT_0)$ , y se observaría que realmente lo que se está desarrollando es el enfoque conocido como Descomposición Vectorial de Conexiones. Dicho enfoque, que queda sintetizado en la figura 2-4, es utilizado en citas bibliográficas estudiadas como (Kranc, 1957a), (Thomas y Lutte, 1972) y (Thompson, 1986), por nombrar alguna de ellas.

Una versión de la Descomposición Vectorial de Conexiones un poco más completa y apoyada en la notación discreta queda representada en la figura 2-5. En ella, por sencillez pero sin pérdida de generalidad, se presenta el mismo patrón de muestreo tanto a entrada como a salida del sistema  $G(s)$ . En cuanto a la notación de variable discreta empleada en la figura, tan sólo notar que  $z_N = e^{\frac{sT_0}{N}}$ , de donde se deduce que  $z_N^N = e^{sT_0}$ . En el capítulo 3 se entrará más a fondo con dicha notación ya que va a ser básica en el tratamiento del modelado en RE.

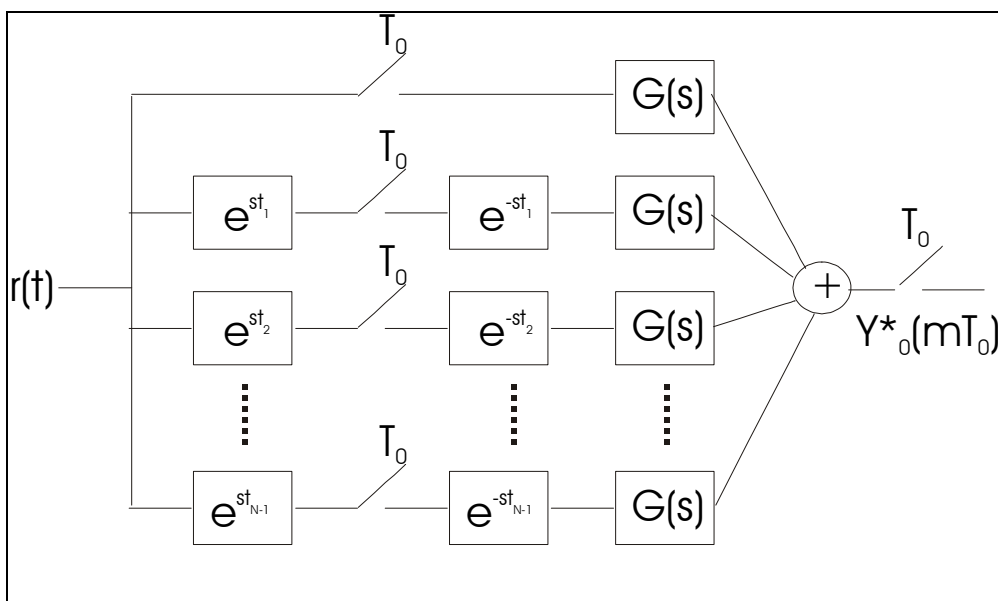


Figura 2-4: Descomposición vectorial de conexiones en un sistema continuo.

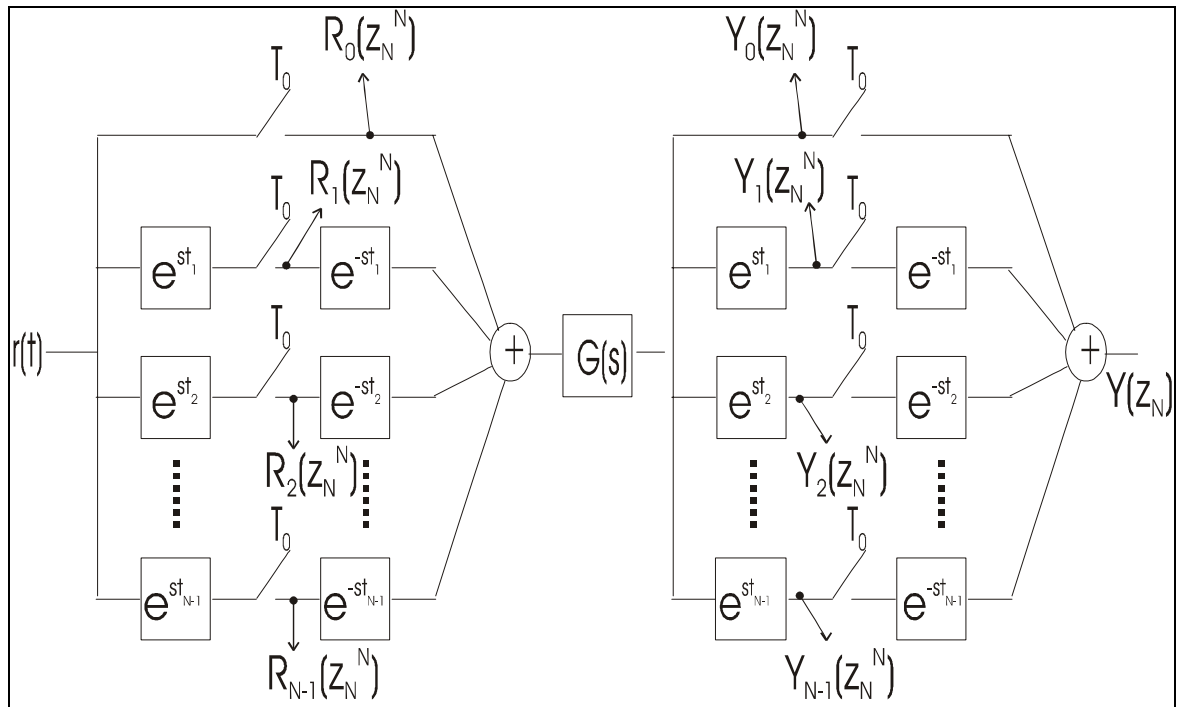


Figura 2-5: Versión completa para descomposición vectorial de conexiones

### 2.2.2. Operador de Kranc.

Retomando el planteamiento de la Descomposición Vectorial de Conexiones, si se observa la figura 2-5, a partir de ella se pueden deducir los siguientes vectores (llamados de adelanto y retardo, respectivamente):

$$E^{N+} = \begin{bmatrix} 1 \\ e^{st_1} \\ e^{st_2} \\ \vdots \\ e^{st_{N-1}} \end{bmatrix} \quad E^{N-} = [1, e^{-st_1}, e^{-st_2}, \dots, e^{-st_{N-1}}]$$

de manera que el sistema multifrecuencia expuesto en dicha figura puede reexpresarse de forma compacta como muestra la figura 2-6. En ella aparecen una serie de conceptos interesantes: la vectorización y la reducción de una señal (que pueden ser consultados en (Camiña, 1999)) y el operador de Kranc. Es este último el que más nos va a interesar, ya que la obtención del mismo va a permitir modelar en RI el sistema muestreado de forma no convencional.

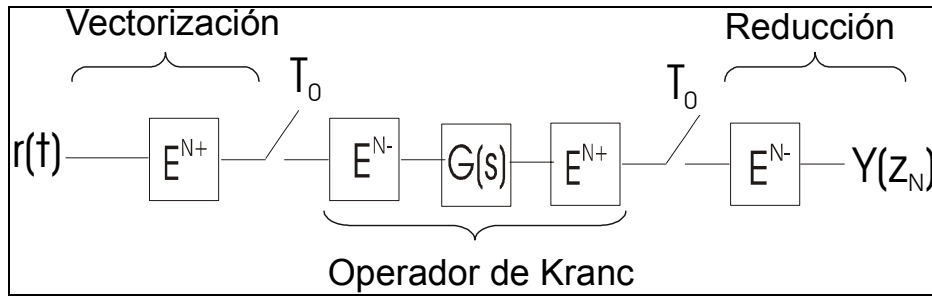


Figura 2-6: Sistema multifrecuencia de forma compacta.

El operador de Kranc se puede definir como el sistema digital empotrado definido a un periodo de  $T_0$  segundos (metaperiodo). El bloque de retardo del muestreador de entrada, el bloque de adelanto del muestreador de salida y la cuádruple asociada al sistema en su representación de variables de estado generan el operador de Kranc:

$$G^{T_0}(z) = (E^{N+} \cdot G(s) \cdot E^{N-})^{T_0}$$

Parece claro que la importancia de introducir el operador de Kranc radica en el hecho de obtener un sistema digital monofrecuencia equivalente al de la figura 2-6, el cual se puede ver en la figura 2-7.

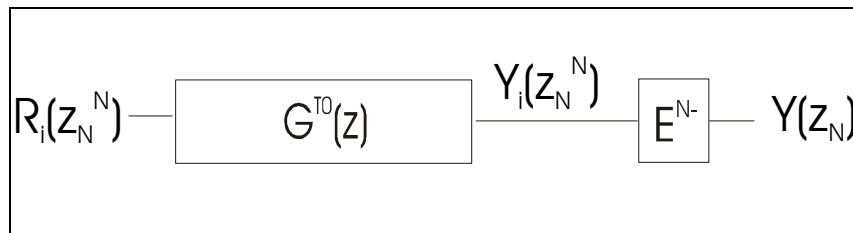


Figura 2-7: Sistema monofrecuencia equivalente.

Una vez visto sucintamente el concepto de operador de Kranc, ahora queda definir los diferentes casos que se pueden dar para él, los cuales dependerán de la naturaleza del proceso a tratar. Así tendremos el operador de Kranc Regular (para procesos continuos), el ZOH-Kranc (para procesos continuos a los que se antepone un retenedor de orden cero) y el Kranc Digital (para procesos discretos). Todos ellos se van a ver con más detalle en el siguiente apartado.

### 2.2.3. Tipos de operadores de Kranc.

#### 2.2.3.1. Operador de Kranc Regular.

Es el operador que se ha de utilizar cuando el proceso a muestrear es de naturaleza continua. El escenario que se presenta es el que muestra la figura 2-8. En ella se percibe una serie de periodos diferentes  $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  que vienen a establecer el tiempo que hay entre dos muestreos consecutivos tanto en el muestreador de entrada como en el de salida del sistema.

En el caso representado en dicha figura, por sencillez, como ya se comentó con anterioridad, el esquema de muestreos a entrada y salida es el mismo, pero podría ser diferente.

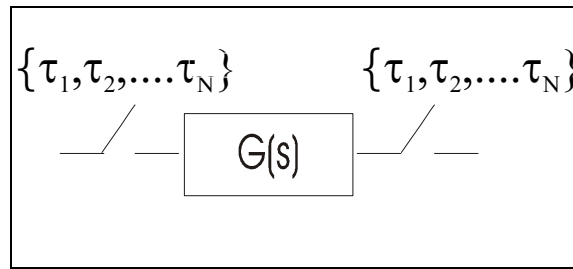


Figura 2-8: Escenario Operador Kranc Regular

En cualquier caso, habrá de obtenerse la transformada Z equivalente de la cuádruple  $G(s)$  para el periodo  $t_0$ :

$$G^{t_0}(z) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2-1)$$

y, a partir de ella, realizar el método de sustituciones sucesivas en aras a obtener las leyes de recurrencia por las que se rige cada uno de los valores que componen la cuádruple  $\begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B}; \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix}$ , la cual representa el modelado a metaperiodo  $T_0$  del sistema muestreado de forma no convencional para este caso Kranc Regular. Todo este planteamiento se desarrollará en la sección 2.3. En la sección 2.4 se introduce un ejemplo ilustrativo.

### 2.2.3.2. ZOH-Kranc.

El segundo tipo de operador de Kranc se genera en un sistema analógico precedido por un retenedor de orden cero (ZOH) y rodeado de muestreadores, como se observa en la figura 2-9. Nuevamente, en ella se percibe una serie de periodos diferentes  $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  que vienen a establecer el tiempo que hay entre dos muestreos consecutivos tanto a entrada como a salida. De igual forma, en el caso representado en dicha figura el esquema de muestreos a entrada y salida es el mismo por sencillez, pero podría ser diferente como ya se comentó con anterioridad.

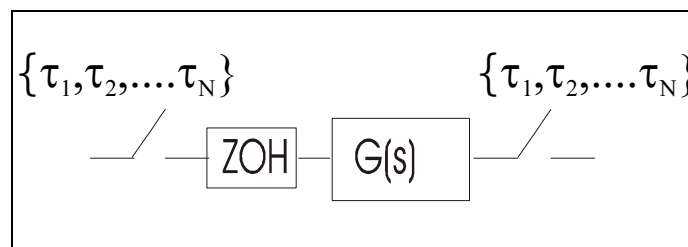


Figura 2-9: Escenario Operador ZOH-Kranc

Ahora se ha de calcular la transformada Z equivalente al conjunto  $H_0^{t_0}G(s)$  a periodo  $t_0$  donde  $H_0^{t_0}$  es el retenedor de orden cero definido también a  $t_0$ :



$$(H_0^{t_0} \cdot G(s))^{t_0} = \begin{vmatrix} A & B \\ C & D \end{vmatrix} \quad (2-2)$$

Queda patente, por tanto, que se produce una retención a periodo  $t_0$  de los muestreos que se dan a la entrada del sistema. Dicha retención tiene vigencia a lo largo de cada intervalo  $\tau_i, i=1..N$ .

A partir de (2-2), se ha de realizar el método de sustituciones sucesivas en aras a obtener las leyes de recurrencia por las que se rige cada uno de los valores que componen la cuádruple  $[\bar{A} \ \bar{B}; \bar{C} \ \bar{D}]$  del modelado del sistema muestreado de forma no convencional para este caso ZOH-Kranc. El desarrollo de todo este planteamiento queda plasmado en la sección 2.3. En la sección 2.4 aparece un ejemplo.

### 2.2.3.3. Kranc Digital.

El tercer tipo de operador se define para la cuádruple equivalente a una función de transferencia en Z, rodeada de muestreadores, como la representada en la figura 2-10. De la misma forma que en los operadores anteriores, en ella se percibe una serie de periodos diferentes  $\{\tau_1, \dots, \tau_N\}$  que vienen a establecer el tiempo que hay entre dos muestreos consecutivos tanto a entrada como a salida. En el caso representado en dicha figura, por sencillez, como ya se comentó con anterioridad, el esquema de muestreos a entrada y salida es el mismo, pero podría ser diferente.

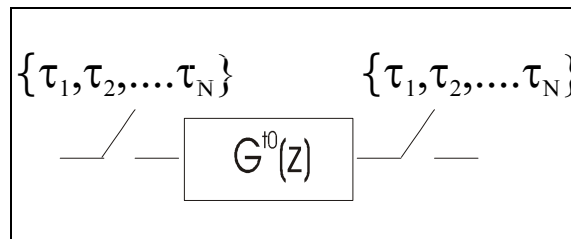


Figura 2-10: Escenario Operador Kranc Digital

En la literatura existente acerca del tema (por ejemplo, (Thompson, 1988) y (Camiña, 1999)) se habla de este operador pero en la vertiente regular. Allí se define el sistema discreto a periodo de entrada (regular), de manera que a la salida (que suele estar a otro periodo diferente, pero también regular) pasará señal cuando el patrón de entrada y salida estén en línea; de lo contrario pasará un cero como muestra a la salida. Aquí, sin embargo, y como puede observarse en la figura 2-10, dada la irregularidad planteada en los patrones de muestreo en la entrada y la salida, al sistema discreto se le exige estar definido a  $t_0$ , de manera que siempre que el muestreador irregular de la salida requiera muestra, podrá disponer de ella, más allá de que estén entrada y salida en línea (aspecto exigido en el caso regular). En definitiva, por lo comentado, el Kranc Digital para el caso irregular va a trabajar internamente a periodo  $t_0$  (aunque en su globalidad esté definido a metaperiodo  $T_0$ , como se verá en el apartado 2.3), mientras el regular lo hace internamente a periodo de entrada, lo cual significa una diferencia notable de partida entre caso regular e irregular, no existente para los otros dos operadores vistos anteriormente.

Cabe recalcar también que este operador tiene sentido ser aplicado a sistemas digitales puros, entendiendo como puros aquéllos que no provienen de discretizar con ZOH un sistema continuo. Para ello ya se dispone del operador ZOH-Kranc, cuya aplicación en dicho caso tiene más sentido físico.

Por tanto, por todo lo expuesto, la cuádruple  $G^{t_0}(z)$  queda definida a  $t_0$ :

$$G^{t_0}(z) = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \quad (2-3)$$

A partir de ella, se ha de realizar el método de sustituciones sucesivas en aras a obtener las leyes de recurrencia por las que se rige cada uno de los valores que componen la cuádruple  $[\bar{A} \quad \bar{B}; \bar{C} \quad \bar{D}]$ , la cual modela a metaperiodo  $T_0$  el sistema muestreado de forma no convencional para este caso Kranc Digital. Todo este planteamiento comentado se desarrollará en la sección 2.3.

En resumen, se está ante un operador de características similares al definido para sistemas continuos en 2.2.3.1, sólo que aquél se ha de aplicar a sistemas continuos y éste a sistemas digitales. Su interés radica, sobre todo, para ser aplicado a reguladores diseñados directamente en discreto o para aquéllos que, pese a ser diseñados en continuo, la técnica para discretizarlos no sea directamente la utilización de un retenedor de orden cero (caso en el que se debería utilizar el operador ZOH-Kranc).

### 2.3. LEYES DE RECURRENCIA.

En esta sección se van a deducir las leyes de recurrencia para la obtención de cada uno de los operadores de Kranc mencionados en el epígrafe anterior. Estas leyes van a tratar el caso más genérico: libre selección del número de muestreos a la entrada y a la salida del proceso, y libre elección del instante donde éstos se producen. Por tanto, se trata de leyes que representan situaciones más generales que las planteadas en las figuras 2-8, 2-9 y 2-10. A partir de ellas se va a poder obtener, de forma automática, la cuádruple  $[\bar{A} \quad \bar{B}; \bar{C} \quad \bar{D}]$  relativa al Operador de Kranc correspondiente, la cual representa internamente a periodo  $T_0$  (metaperiodo) a un proceso muestreado de forma no convencional.

Es importante comentar que en las leyes que se van a presentar se tiene una pequeña restricción: el primer muestreo, tanto en entrada como en salida, será en el instante 0 del metaperiodo, ya que suele ser un hecho bastante habitual en la práctica.

#### 2.3.1. Kranc Regular.

Partiendo de la cuádruple de (2-1) y de las ecuaciones de estado y salida que nos proporciona la representación interna:

$$\begin{aligned} y(k) &= Cx(k) + Du(k) \\ x(k+1) &= Ax(k) + Bu(k) \end{aligned}$$

se ha desarrollado mediante métodos de recurrencia (sustituciones sucesivas) una batería de ejemplos, los cuales arrojan una serie de sistemas de ecuaciones representables matricialmente y que, a la postre, han servido para obtener las leyes buscadas para este operador.

Así pues, estableciendo  $t_0$  (periodo conocido como intermuestreo o base) como el m.c.d. de los periodos involucrados en el sistema y  $T_0$  (periodo conocido como metaperiodo) como el m.c.m. de los periodos que participan en el sistema, se tiene la cuádruple  $[\bar{A} \ \bar{B}; \bar{C} \ \bar{D}]$  que define al Operador de Kranc Regular para un sistema con muestreo no convencional:

$$G^{T_0}(z) = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^K & A_{11}B & \cdots & A_{1m}B \\ C_1 & D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & D_{n1} & \cdots & D_{nm} \end{bmatrix}$$

donde:

$[A, B, C, D]$ : representación interna a  $t_0$  del proceso (procedente de (2-1))

$n$ : número de muestreos en la salida del proceso.

$m$ : número de muestreos en la entrada del proceso.

$K$ : número de muestreos a  $t_0$  en un metaperiodo  $T_0$ .

- $\bar{A} = A^K$
- $\bar{B} = [A_{11}B \ \cdots \ A_{1m}B]$ , en la que  $A_{1j} = A^{K-1-\sum_{x=1}^{j-1} dif(x)}$ , siendo  $dif$  el vector que incluye la diferencia de tiempos entre instantes de muestreo sucesivos en la entrada.

- $\bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$ , donde  $C_i = CA^{salida(i)}$ , siendo  $salida$  el vector donde están los instantes en los que hay muestreo en la salida.

- $\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1} & \cdots & D_{nm} \end{bmatrix}$ , teniendo cada  $D_{ij} = C\Psi_{ij}B + \Omega_{ij}$  el siguiente valor:

$$\Psi_{ij} = \begin{cases} A^{salida(i)-1-\sum_{x=1}^{j-1} dif(x)}, & salida(i)-1-\sum_{x=1}^{j-1} dif(x) \geq 0 \\ 0, & \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} D & , \left( salida(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) < 0 \right) \wedge (i \geq j) \\ 0 & , \left( salida(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) < 0 \right) \wedge (i \geq j) \wedge (salida(i) < entrada(j)) \\ 0 & , \left( salida(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) < 0 \right) \wedge (i < j) \\ 0 & , salida(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) \geq 0 \end{cases}$$

A la vez que se han definido las leyes de recurrencia se han ido aportando parámetros (vector de *salida*, vector de *entrada*, etc) que son de gran importancia a la hora de la implementación (ver en Anexo I.1) de este tipo de operadores.

Es interesante observar que el modelo está definido a metaperiodo  $T_0$ , pero internamente funciona a intermuestreo  $t_0$ , con el fin de reordenar correctamente las muestras tomadas tanto en el muestreador de entrada como en el de salida.

### 2.3.2. ZOH-Kranc.

Procediendo de la misma forma que en el apartado 2.3.1, pero considerando ahora un retenedor  $H_0^{t_0}(s)$  que precede al proceso continuo  $G(s)$ , si se establece  $t_0$  y  $T_0$  como es habitual, se tiene la cuádruple  $[\bar{A} \quad \bar{B}; \bar{C} \quad \bar{D}]$  que viene definida por las siguientes leyes de recurrencia:

$$G^{T_0}(z) = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \left| \begin{array}{c|ccc} A^K & A_{11}B & \cdots & A_{1m}B \\ \hline C_1 & D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \hline C_n & D_{n1} & \cdots & D_{nm} \end{array} \right|$$

donde:

$[A, B, C, D]$ : representación interna a  $t_0$  del proceso (procedente de (2-2))

$n$ : número de muestreos de salida del proceso

$m$ : número de muestreos de entrada al proceso

$K$ : número de muestreos a  $t_0$  en un metaperiodo  $T_0$

- $\bar{A} = A^K$

- $\bar{B} = [A_{11}B \quad \cdots \quad A_{1m}B]$ , en la que  $A_{1j} = \sum_{x=1}^{dif(j)} A^{K-x-\sum_{w=1}^{j-1} dif(w)}$ , siendo *dif* el vector que incluye la diferencia de tiempos entre instantes de muestreo sucesivos en la entrada.

- $\bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$ , donde  $C_i = CA^{salida(i)}$ , siendo *salida* el vector donde están los instantes

en los que hay muestreo en la salida.

- $\bar{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1} & \cdots & D_{nm} \end{bmatrix}$ , teniendo cada  $D_{ij} = C\Psi_{ij}B + \Omega_{ij}$  la siguiente definición:

$$\Psi_{ij} = \begin{cases} \sum_{x=1}^{dif(j)} A^{salida(i)-x-\sum_{w=1}^{j-1} dif(w)} & , salida(i) - x - \sum_{w=1}^{j-1} dif(w) \geq 0 \\ 0 & , \text{otro caso} \end{cases}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} D & , \left( salida(i) - dif(j) - \sum_{w=1}^{j-1} dif(w) < 0 \right) \wedge (i \geq j) \\ 0 & , \left( salida(i) - dif(j) - \sum_{w=1}^{j-1} dif(w) < 0 \right) \wedge (i \geq j) \wedge (salida(i) < entrada(j)) \\ D & , \left( salida(i) - dif(j) - \sum_{w=1}^{j-1} dif(w) < 0 \right) \wedge (i < j) \wedge (i + j = K) \\ 0 & , \left( salida(i) - dif(j) - \sum_{w=1}^{j-1} dif(w) < 0 \right) \wedge (i < j) \\ 0 & , \left( salida(i) - dif(j) - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) \geq 0 \right) \end{cases}$$

Nuevamente, a la vez que se han definido las leyes de recurrencia se han ido aportando parámetros (vector de *salida*, vector de *entrada*, etc) que son de gran importancia a la hora de la implementación (ver en Anexo I.2) de este tipo de operadores.

También se puede observar que el modelo está definido a metaperiodo  $T_0$ , pero internamente funciona a intermuestreo  $t_0$ , con el fin de reordenar correctamente las muestras tomadas a entrada y salida de cada muestreador.

### 2.3.3. Kranc Digital.

Tras todo lo comentado en 2.2.3.3 parece claro que las leyes de recurrencia que van a regir a este operador van a ser iguales a las deducidas para el operador Kranc Regular (para sistemas continuos). La diferencia radica, como ya se comentó en dicho apartado, en el hecho de que la aplicación de esta leyes tendrá sentido sólo si se parte de una función de transferencia de naturaleza discreta, mientras que en el otro operador dicha función es de naturaleza continua. No obstante, tanto un operador como otro parten de una cuádruple  $[A \ B; C \ D]$  que define por representación interna al proceso a periodo  $t_0$  (en el caso del operador Kranc Regular tras discretizar la función continua a  $t_0$ , y en el caso Kranc Digital directamente debido a su propia concepción a periodo  $t_0$ ). Como cabría esperar, si se dispone de un sistema continuo al cual se aplica el operador Kranc Regular de 2.3.1, la cuádruple  $[\bar{A} \ \bar{B}; \bar{C} \ \bar{D}]$  resultante será muy parecida a la que se obtendría tras discretizar a periodo  $t_0$  dicho sistema y aplicarle el operador Kranc Digital que se va a exponer en este apartado. En definitiva se trata del mismo sistema expresado de diferente manera.

Así pues, operando de la misma forma que con los otros operadores, si se establece  $t_0$  y  $T_0$  como es habitual, se tiene la cuádruple  $[\bar{A} \ \bar{B}; \bar{C} \ \bar{D}]$  que define al Operador Kranc Digital para un sistema con muestreo no convencional:

$$G^{T_0}(z) = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} = \begin{array}{c|ccc} A^K & A_{11}B & \cdots & A_{1m}B \\ \hline C_1 & D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_n & D_{n1} & \cdots & D_{nm} \end{array}$$

donde:

$[A, B, C, D]$ : representación interna a  $t_0$  del proceso (procedente de (2-3))

$n$ : número de muestreos en la salida del proceso

$m$ : número de muestreos en la entrada del proceso

$K$ : número de muestreos a  $t_0$  en un metaperiodo  $T_0$

- $\bar{A} = A^K$
- $\bar{B} = [A_{11}B \ \cdots \ A_{1m}B]$ , en la que  $A_{1j} = A^{K-1-\sum_{x=1}^{j-1} dif(x)}$ , siendo  $dif$  el vector que incluye la diferencia de tiempos entre instantes de muestreo sucesivos en la entrada.
- $\bar{C} = \begin{bmatrix} C_1 \\ \vdots \\ C_n \end{bmatrix}$ , donde  $C_i = CA^{salida(i)}$ , siendo  $salida$  el vector donde están los instantes en los que hay muestreo en la salida.

$$\bullet \quad \bar{D} = \begin{bmatrix} D_{11} & \cdots & D_{1m} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ D_{n1} & \cdots & D_{nm} \end{bmatrix}, \text{ teniendo cada } D_{ij} = C\Psi_{ij}B + \Omega_{ij} \text{ el siguiente valor:}$$

$$\Psi_{ij} = \begin{cases} A & , \text{ salida}(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) \geq 0 \\ 0 & , \text{ otro caso} \end{cases}$$

$$\Omega_{ij} = \begin{cases} D & , \left( \text{salida}(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) < 0 \right) \wedge (i \geq j) \\ 0 & , \left( \text{salida}(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) < 0 \right) \wedge (i \geq j) \wedge (\text{salida}(i) < \text{entrada}(j)) \\ 0 & , \left( \text{salida}(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) < 0 \right) \wedge (i < j) \\ 0 & , \text{ salida}(i) - 1 - \sum_{x=1}^{j-1} dif(x) \geq 0 \end{cases}$$

Se puede comprobar que las leyes planteadas son idénticas a las expuestas para el caso del operador Kranc Regular, con la salvedad de partir de la representación interna relativa a un sistema que se presume discreto puro. Nuevamente, a la vez que se han definido las leyes de recurrencia se han ido aportando parámetros (vector de *salida*, vector de *entrada*, etc) que son de gran importancia a la hora de la implementación (ver en Anexo I.3) de este tipo de operadores.

Al igual que en los operadores anteriores, el modelo está definido a metaperiodo  $T_0$ , pero internamente funciona a intermuestreo  $t_0$ , con el fin de reordenar correctamente las muestras tomadas a entrada y salida de cada muestreador.

## 2.4. EJEMPLOS.

### 2.4.1. Ejemplo Kranc Regular.

Se va a exponer uno de los ejemplos de modelado de proceso continuo de los que se han utilizado como batería de pruebas para deducir las leyes de recurrencia, con el fin de ver que dichas leyes se cumplen perfectamente. Para ello, se comparará la cuádruple  $[\bar{A} \quad \bar{B}; \bar{C} \quad \bar{D}]$  obtenida a partir de las leyes con la cuádruple obtenida a partir del desarrollo por recurrencia de las ecuaciones internas de estado y salida del proceso.

Concretamente, en la figura 2-11 se pueden observar los patrones de muestreo a entrada y salida para el ejemplo que se va a ilustrar. En él, claramente se establece un metaperiodo  $T_0$  de 9 instantes de tiempo.

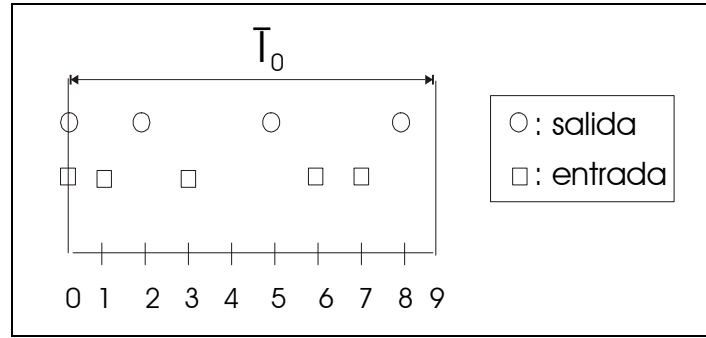


Figura 2-11: Muestras de entrada y salida para el ejemplo bajo estudio.

A continuación se presenta un esbozo del desarrollo por sustituciones sucesivas de las ecuaciones internas de salida y estado para el ejemplo:

$$\begin{aligned}
 & y(0) = Cx(0) + Du(0) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & y(1) = Cx(1) + Du(1) \\
 & x(1) = Ax(0) + Bu(0)
 \end{aligned} \right\} y(1) = CAx(0) + CBu(0) + Du(1) \\
 & \left. \begin{aligned}
 & y(2) = Cx(2) + Du(2) \\
 & x(2) = Ax(1) + Bu(1) = \\
 & = A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1)
 \end{aligned} \right\} y(2) = CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) \\
 & \vdots \\
 & \left. \begin{aligned}
 & y(8) = Cx(8) + Du(8) \\
 & x(8) = Ax(7) + Bu(7) = \\
 & = A^8x(0) + A^7Bu(0) + A^6Bu(1) + \\
 & + A^4Bu(3) + ABu(6) + Bu(7)
 \end{aligned} \right\} y(8) = CA^8x(0) + CA^7Bu(0) + CA^6Bu(1) + \\
 & + CA^4Bu(3) + CABu(6) + CBu(7)
 \end{aligned}$$

Puesto que se va a utilizar para la representación matricial el instante 9 del vector de estado, se halla como sigue:

$$x(9) = Ax(8) + Bu(8) = A^9x(0) + A^8Bu(0) + A^7Bu(1) + A^5Bu(3) + A^2Bu(6) + ABu(7)$$

El sistema muestreado del ejemplo queda en forma matricial (tanto para salidas como para el estado) como se presenta en (2-4):

$$\begin{Bmatrix} y(0) \\ y(2) \\ y(5) \\ y(8) \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ CA^5 \\ CA^8 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 & 0 \\ CA^4B & CA^3B & CAB & 0 & 0 \\ CA^7B & CA^6B & CA^4B & CAB & CB \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(3) \\ u(6) \\ u(7) \end{Bmatrix}$$



$$\begin{cases} x(1) \\ x(3) \\ x(6) \\ x(7) \\ x(9) \end{cases} = \begin{bmatrix} A \\ A^3 \\ A^6 \\ A^7 \\ A^9 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^2 B & AB & 0 & 0 & 0 \\ A^5 B & A^4 B & A^2 B & 0 & 0 \\ A^6 B & A^5 B & A^3 B & B & 0 \\ A^8 B & A^7 B & A^5 B & A^2 B & AB \end{bmatrix} \begin{cases} u(0) \\ u(1) \\ u(3) \\ u(6) \\ u(7) \end{cases} \quad (2-4)$$

De (2-4) se puede deducir la cuádruple del Operador de Kranc Regular para este caso, (2-5):

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A^9 \\ \bar{B} &= [A^8 B \quad A^7 B \quad A^5 B \quad A^2 B \quad AB] \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ CA^5 \\ CA^8 \end{bmatrix} \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 & 0 \\ CA^4 B & CA^3 B & CAB & 0 & 0 \\ CA^7 B & CA^6 B & CA^4 B & CAB & CB \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-5)$$

A continuación se comprueba que procediendo a través de las leyes deducidas se obtiene exactamente el mismo resultado para la cuádruple  $[\bar{A} \quad \bar{B}; \bar{C} \quad \bar{D}]$ :

$n = 4$ $m = 5$ $K = 9 \Rightarrow \bar{A} = A^9$	$salida = [0 \ 2 \ 5 \ 8] \Rightarrow \bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ CA^5 \\ CA^8 \end{bmatrix}$	}	$\Rightarrow \bar{D} = \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB & 0 & 0 & 0 \\ CA^4 B & CA^3 B & CAB & 0 & 0 \\ CA^7 B & CA^6 B & CA^4 B & CAB & CB \end{bmatrix}$
	$dif = [1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2] \Rightarrow \bar{B} = [A^8 B \quad A^7 B \quad A^5 B \quad A^2 B \quad AB]$		
$entrada = [0 \ 1 \ 3 \ 6 \ 7]$			

### 2.4.2. Ejemplo ZOH-Kranc.

Si se analiza el mismo ejemplo que se presenta en la figura 2-11, pero ahora para proceso continuo precedido de retenedor, partiendo del desarrollo por sustituciones sucesivas sobre la ecuación de estado y salida del proceso se tiene:

$$\begin{aligned}
 y(0) &= Cx(0) + Du(0) \\
 y(1) &= Cx(1) + Du(1) \\
 x(1) &= Ax(0) + Bu(0) \left. \vphantom{\begin{matrix} y(1) \\ x(1) \end{matrix}} \right\} y(1) = CAx(0) + CBu(0) + Du(1) \\
 y(2) &= Cx(2) + Du(2) \\
 x(2) &= Ax(1) + Bu(1) = \\
 &= A^2x(0) + ABu(0) + Bu(1) \left. \vphantom{\begin{matrix} y(2) \\ x(2) \end{matrix}} \right\} y(2) = CA^2x(0) + CABu(0) + CBu(1) + Du(1) \\
 &\vdots \\
 y(8) &= Cx(8) + Du(8) \\
 x(8) &= Ax(7) + Bu(7) = \\
 &= A^8x(0) + A^7Bu(0) + (A^6 + A^5)Bu(1) + \\
 &+ (A^4 + A^3 + A^2)Bu(3) + ABu(6) + Bu(7) \left. \vphantom{\begin{matrix} y(8) \\ x(8) \end{matrix}} \right\} y(8) = CA^8x(0) + CA^7Bu(0) + C(A^6 + A^5)Bu(1) + \\
 &\left. \vphantom{\begin{matrix} y(8) \\ x(8) \end{matrix}} \right\} + C(A^4 + A^3 + A^2)Bu(3) + CABu(6) + CBu(7) + Du(7)
 \end{aligned}$$

Nuevamente se va a utilizar para la representación matricial el instante 9 del vector de estado, por lo que se halla como sigue:

$$\begin{aligned}
 x(9) &= Ax(8) + Bu(8) = A^9x(0) + A^8Bu(0) + (A^7 + A^6)Bu(1) + (A^5 + A^4 + A^3)Bu(3) + \\
 &+ A^2Bu(6) + (A + I)Bu(7)
 \end{aligned}$$

En este caso, el sistema muestreado bajo estudio queda matricialmente como se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}
 \begin{Bmatrix} y(0) \\ y(2) \\ y(5) \\ y(8) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ CA^5 \\ CA^8 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB + D & 0 & 0 & 0 \\ CA^4B & C(A^3 + A^2)B & C(A + I)B + D & 0 & 0 \\ CA^7B & C(A^6 + A^5)B & C(A^4 + A^3 + A^2)B & CAB & CB + D \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(3) \\ u(6) \\ u(7) \end{Bmatrix} \\
 \begin{Bmatrix} x(1) \\ x(3) \\ x(6) \\ x(7) \\ x(9) \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} A \\ A^3 \\ A^6 \\ A^7 \\ A^9 \end{bmatrix} x(0) + \begin{bmatrix} B & 0 & 0 & 0 & 0 \\ A^2B & (A + I)B & 0 & 0 & 0 \\ A^5B & (A^4 + A^3)B & (A^2 + A + I)B & 0 & 0 \\ A^6B & (A^5 + A^4)B & (A^3 + A^2 + A)B & B & 0 \\ A^8B & (A^7 + A^6)B & (A^5 + A^4 + A^3)B & A^2B & (A + I)B \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u(0) \\ u(1) \\ u(3) \\ u(6) \\ u(7) \end{Bmatrix}
 \end{aligned}$$

donde se puede deducir la cuádruple  $[\bar{A} \quad \bar{B}; \bar{C} \quad \bar{D}]$  como:

$$\begin{aligned} \bar{A} &= A^9 \\ \bar{B} &= \begin{bmatrix} A^8 B & (A^7 + A^6)B & (A^5 + A^4 + A^3)B & A^2 B & (A+I)B \end{bmatrix} \\ \bar{C} &= \begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ CA^5 \\ CA^8 \end{bmatrix} \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB+D & 0 & 0 & 0 \\ CA^4 B & C(A^3 + A^2)B & C(A+I)B+D & 0 & 0 \\ CA^7 B & C(A^6 + A^5)B & C(A^4 + A^3 + A^2)B & CAB & CB+D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ahora se halla a través de las leyes deducidas, se obtiene exactamente el mismo resultado para la cuádruple que define al Operador ZOH-Kranc, como puede comprobarse a continuación:

$$\begin{aligned} n &= 4 \\ m &= 5 \\ K = 9 &\Rightarrow \bar{A} = A^9 \\ salida = [0 \ 2 \ 5 \ 8] &\Rightarrow \bar{C} = \begin{bmatrix} C \\ CA^2 \\ CA^5 \\ CA^8 \end{bmatrix} \\ dif = [1 \ 2 \ 3 \ 1 \ 2] &\Rightarrow \bar{B} = \begin{bmatrix} A^8 B & (A^7 + A^6)B & (A^5 + A^4 + A^3)B & A^2 B & (A+I)B \end{bmatrix} \\ entrada = [0 \ 1 \ 3 \ 6 \ 7] & \\ &\Downarrow \\ \bar{D} &= \begin{bmatrix} D & 0 & 0 & 0 & 0 \\ CAB & CB+D & 0 & 0 & 0 \\ CA^4 B & C(A^3 + A^2)B & C(A+I)B+D & 0 & 0 \\ CA^7 B & C(A^6 + A^5)B & C(A^4 + A^3 + A^2)B & CAB & CB+D \end{bmatrix} \end{aligned}$$

#### 2.4.2.1. Validación mediante Modelado de Vélez.

En (Vélez, 2000) se introduce una herramienta para Matlab-Simulink con la que se puede obtener la respuesta de sistemas multifrecuencia con muestreo no convencional. Dicha herramienta está basada en el modelado de estos sistemas desde el punto de vista de la representación interna y está implementada para modelar concretamente sistemas continuos que vienen precedidos por un ZOH. Por tanto, puede ser una herramienta útil para validar el modelado planteado en esta sección (ZOH-Kranc). Para ello se va a tomar como ejemplo el

siguiente sistema continuo, el cual en primer lugar se modelará mediante la herramienta de Vélez y después mediante las leyes de recurrencia presentadas en esta sección, de manera que se ha de comprobar que ambos modelados resulten equivalentes:

$$G_p(s) = \frac{1}{0.25s^2 + 1.25s + 1}$$

Se va a tomar  $T_0=0.18$  seg,  $t_0=0.015$  seg, y además un patrón de muestreos diferente a entrada y salida del proceso. Así, por ejemplo a entrada se tendrá un patrón para  $N=2$  irregular tal que  $[0, 0.045]$  y para salida un patrón con multiplicidad  $N=1$ . Por tanto, para el proceso se tendrán 2 entradas (instantes 0 y 0.045 de cada metaperiodo) y 1 salida (instante 0 de cada metaperiodo), de forma que se obtendrá el siguiente modelado según Vélez:

$$\bar{A}_p^V = \begin{bmatrix} 0.37058 & -0.11617 \\ 0.46469 & 0.95144 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_p^V = \begin{bmatrix} 0.019183 & 0.096989 \\ 0.019262 & 0.029295 \end{bmatrix}; \quad \bar{C}_p^V = [0 \quad 1]; \quad \bar{D}_p^V = [0 \quad 0]$$

mientras que según las leyes de recurrencia presentadas en esta sección:

$$\bar{A}_p = \begin{bmatrix} 8.4072 & -7.4592 \\ 8.0401 & -7.0851 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_p = \begin{bmatrix} 22.8723 & 37.1025 \\ 21.5447 & 30.3901 \end{bmatrix}; \\ \bar{C}_p = [0.4389 \cdot 10^{-3} \quad 0.4281 \cdot 10^{-3}]; \quad \bar{D}_p = [0 \quad 0]$$

Es interesante observar que de las matrices  $\bar{A}_p^V$  y  $\bar{A}_p$  se obtiene los mismos valores propios (concretamente, 0.8346 y 0.4874). Por su parte, se observa que los valores de las matrices  $\bar{B}_p^V$  y  $\bar{C}_p^V$  son numéricamente más robustos que los incluidos en las matrices  $\bar{B}_p$  y  $\bar{C}_p$ . Por tanto, es recomendable, en aras a obtener una representación equivalente pero numéricamente más robusta, realizar cierta transformación de los valores de las matrices  $\bar{B}_p$  y  $\bar{C}_p$ . Por ejemplo,  $\bar{B}_p' = \frac{1}{100} \cdot \bar{B}_p$ ;  $\bar{C}_p' = 100 \cdot \bar{C}_p$ .

En definitiva, ambos modelados, aunque numéricamente distintos (ya que su concepción es diferente), desembocan en una misma función de transferencia definida a  $T_0$  (que se puede obtener con el comando `ss2tf` de Matlab):

$$G^{T_0}(z) = \frac{0.0193z + 0.0018}{z^2 - 1.322z + 0.4066}$$

por lo que se puede concluir que la respuesta en bucle abierto que se alcanzaría para el sistema modelado por cualquiera de los dos métodos en cuestión sería idéntica. Se puede probar esta afirmación en general con cualquier otro patrón de muestreo o cualquier otro proceso.

### 2.4.3. Ejemplo Kranc Digital.

Valga como ejemplo ilustrativo de este caso el mismo mostrado en el apartado 2.4.1, ya que la forma de operar con los muestreadores de entrada y salida es exactamente la misma, salvando el hecho comentado ya acerca de tratar con un sistema de naturaleza discreta.

## 2.5. CONCLUSIONES.

En este capítulo se han introducido una serie de leyes de recurrencia basadas en la RI que se pueden utilizar a la hora de modelar sistemas muestreados de forma no convencional donde el proceso pueda ser continuo, continuo precedido de un retenedor de orden cero o discreto. Respectivamente, en cada caso apuntado se utilizará el operador Kranc Regular, el operador ZOH-Kranc y el operador Kranc Digital.

La característica más importante de las leyes planteadas es que suponen aportaciones a lo hecho en (Thompson, 1988), (Camiña, 1999), entre otros, donde tan sólo se trata el muestreo multifrecuencial en el que los diferentes muestreos se organizan a instantes regulares de tiempo dentro del metaperiodo global. Aquí, sin embargo, se generaliza para escenarios de muestreo no convencional PVT, permitiendo, por tanto, la posibilidad de tratar con patrones donde los diferentes muestreos se organicen de manera irregular dentro del metaperiodo global. Además, por otro lado, las leyes presentadas suponen también una aportación con respecto al modelado planteado en (Vélez, 2000) donde tan sólo se tratan escenarios de muestreo no convencional para procesos continuos precedidos de ZOH.

Las ventajas más significativas de este modelado son su flexibilidad (se puede adaptar a cualquier situación de muestreo no convencional), su simplicidad de formulación interna (uso de los valores de las secuencias y consideración de los instantes correspondientes a m.c.d.) y su elevada operatividad (utilización equivalente a una representación externa: f.d.t., álgebra de bloques, etc).

## **CAPÍTULO 3**

# **MODELADO EN REPRESENTACIÓN EXTERNA DE SISTEMAS CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**



### 3.1. INTRODUCCIÓN.

Este capítulo plantea un punto de vista diferente a la hora de modelar los sistemas que son muestreados de manera no convencional PVT: la Representación Externa (RE). Aunque diferente, el modelado en RE parte del mismo concepto teórico que el basado en la RI, esto es, la Descomposición Vectorial de Conexiones. Además, los valores que arroja son idénticos a los que se obtienen por el modelado en RI cuando se está ante un caso donde los diferentes muestreos dentro del metaperiodo se reorganizan de manera regular en el tiempo, y muy parecidos cuando la disposición de los muestreos es irregular a lo largo del metaperiodo, ya que, como luego se verá, en este caso el modelado por RE está basado en una aproximación (proceso muestreado de forma irregular en el tiempo pero expresado con variable discreta regular).

Con el fin de presentar el modelado basado en la RE, en primer lugar se van a exponer y sintetizar una serie de conceptos primordiales en aras a establecer las nociones básicas en las que se han basado los posteriores desarrollos, conducentes a lograr el mencionado modelado. Dichos desarrollos son los relativos a lo que se ha llamado ajuste del periodo de discretización y ajuste de la ganancia.

Por último, se mostrarán varios ejemplos de modelado en los que se comprueba por simulación la validez del mismo ante distintas situaciones. Para llevar a cabo dicha simulación se recurrirá a la aplicación científica Matlab-Simulink; más concretamente se hará uso de un toolbox de valía contrastada desarrollado en (Vélez, 2000) para sistemas muestreados multifrecuencia, los cuales son modelados en representación interna. Dicho modelado en RI se puede obtener también gracias a las leyes de recurrencia que se han introducido en el capítulo 2. De esta forma, la respuesta obtenida para el sistema bajo estudio en RI podrá ser comparada con la respuesta obtenida en el modelado por RE, con lo cual se podrá verificar si el modelo obtenido en RE mediante el modelado propuesto es válido o no.

### 3.2. CONCEPTOS BÁSICOS.

#### 3.2.1. Planteamiento general.

Como se ha mencionado en la introducción, se va a partir de la misma idea considerada en el modelado en RI, la cual queda sintetizada en las figuras 2-1 a 2-5 del capítulo anterior.

Concretamente el modelado en RE que se presenta se basa en el funcionamiento del ZOH-Kranc expuesto en el capítulo 2. Dicho modelado tiene sentido de ser aplicado en aquellos casos en los que, debido a la aparición de retrasos de diversa índole, el muestreo de una señal (que debería presuponerse uniforme en el tiempo) sufre desviaciones respecto de ese patrón uniforme, originándose situaciones de muestreo PVT. Por tanto, como luego se expondrá en la sección 3.2.3, el modelado intenta mediante la realización de una especie de media, que depende de los intervalos  $\tau_i$  considerados dentro del metaperiodo  $T_0$ , obtener la nueva fdt que represente el efecto de ese muestreo PVT sobre el proceso. Para ello, se partirá de considerar la situación de muestreo uniforme (discretización de  $G(s)$  a  $T_0/N$ ) y, a partir de ella, se deducirá la de muestreo PVT.



Por tanto, dado que, como ya se ha comentado y luego se discutirá, el modelado está basado en una aproximación (media), parece de gran interés estudiar para qué rango de valores de metaperiodo y de desviación de los retrasos respecto del muestreo uniforme puede tener vigencia dicho modelado (sección 3.5).

Para fijar una serie de conceptos de notación en los que se va a basar el modelado en RE se va a retomar la figura 2-5 del capítulo 2, donde aparece la variable  $z_N$ . Dicha variable u operador viene a decir que dentro de un metaperiodo  $T_0$  se producen  $N$  muestreos. Así, como ya se vio en el capítulo 2, su expresión matemática sería  $z_N = e^{s \frac{T_0}{N}}$ , de donde se deduce que  $z_N^N = e^{sT_0}$ .

Por tanto,  $z_N^{-i} = e^{-si \frac{T_0}{N}}$  debe ser interpretado como un retraso de  $i$  muestras consecutivas en el tiempo. Como se analizará en la sección 3.2.3, el espaciamiento entre ellas dentro del metaperiodo puede o no ser equidistante en el tiempo ya que, en general se va a tomar  $z_N^{-i} = e^{-st_i}$ , donde los diferentes  $t_i$  pertenecientes al metaperiodo  $T_0$  pueden disponerse entre ellos de forma no uniforme (o irregular) en el tiempo. Este concepto es importante para poder explicar posteriormente la relación entre los distintos instantes de muestreo que tienen cabida en un metaperiodo  $T_0$ , de tal forma que nos facultará a establecer patrones regulares o irregulares de muestreo dentro de dicho metaperiodo global.

Siguiendo con la figura 2-5 (anteponiendo al proceso un ZOH a periodo m.c.d.  $t_0$ ,  $H_0^{t_0}(s)$ , y desde el punto de vista de la RE) si se pretende determinar la contribución de cada secuencia de entrada a la primera secuencia de salida  $Y_0(z_N^N)$  se tiene que:

$$Y_0(z_N^N) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i(z_N^N) G_{-i}(z_N^N) \quad (3-1)$$

siendo  $R_i(z_N^N)$  la transformada  $Z$  de la secuencia de entrada a periodo  $T_0$  adelantada  $t_i$  instantes de tiempo y  $G_{-i}(z_N^N)$  la transformada  $Z$  de la respuesta impulsional a periodo  $T_0$  retrasada  $t_i$  instantes, o lo que es lo mismo, multiplicada por  $z_N^{-i} = e^{-st_i}$ , por lo que se tiene:  $G_{-i}(z_N^N) = Z^{T_0} [e^{-st_i} H_0^{t_0} G(s)]$ , donde  $Z^{T_0}$  simboliza la transformada  $Z$  a periodo  $T_0$ .

En general, la secuencia de salida  $p$ -ésima se obtiene por:

$$Y_p(z_N^N) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i(z_N^N) G_{p-i}(z_N^N) \quad (3-2)$$

Y finalmente para formar la secuencia de salida completa  $Y(z_N)$ , cada  $Y_p(z_N^N)$  es multiplicado por  $z_N^{-p}$  para situarlo correctamente en la secuencia global:

$$Y(z_N) = \sum_{p=0}^{N-1} z_N^{-p} Y_p(z_N^N) \quad (3-3)$$

Otra manera, equivalente y desde el punto de vista discreto, de ver la obtención de  $G_{\pm i}(z_N^N)$  se reduce a multiplicar  $G(z_N)$  por  $z_N^{\pm i}$  y seleccionar únicamente aquellos términos en  $z_N^0, z_N^{-N}, z_N^{-2N}$ , etc. Notar que  $G(z_N)$  procede de la discretización de  $G(s)$  con ZOH a periodo  $z_N$ , que es el periodo m.c.d. cuando el muestreo es uniforme a entrada y salida del proceso. En el caso de filtros o procesos (se va a utilizar indistintamente uno u otro apelativo) no recursivos, la operación planteada puede realizarse fácilmente inspeccionando los coeficientes correspondientes a  $z_N^{\pm i}, z_N^{-(N\pm i)}$ , etc, en  $G(z_N)$ . Sin embargo, para el caso de filtros recursivos esto no es tan sencillo. Por ello, en citas bibliográficas como (Thomas y Lutte, 1972), (Salt, 1992) y (Albertos, Salt y Tornero, 1996) se expone una brillante forma de tratar dichos filtros que se pasa a exponer:

Dado un proceso  $G(z_N) = \frac{B(z_N)}{A(z_N)}$  se trata de buscar un polinomio  $W(z_N)$  que

multiplicado a  $A(z_N)$  haga que en el denominador sólo existan términos en  $z_N^0, z_N^{-N}, z_N^{-2N}$ , etc. De esta forma, si se dividiera numerador por denominador se modificarían sólo los términos del numerador para  $z_N^0, z_N^{-N}, z_N^{-2N}$ , etc, y entonces cada  $G_i(z_N^N)$  podría obtenerse de la misma forma que en el caso no recursivo. Así:

$$G(z_N) = \frac{B(z_N)}{A(z_N)} = \frac{B(z_N)W(z_N)}{A(z_N)W(z_N)} = \frac{B(z_N)W(z_N)}{A'(z_N^N)} \quad (3-4)$$

donde

$$W(z_N) = \prod_{k=1}^{N-1} A\left(z_N e^{\frac{-j2\pi k}{N}}\right) = \frac{A'(z_N^N)}{A(z_N)} \quad (3-5)$$

Este polinomio  $W(z_N)$  viene a relacionar claramente los polos de la f.d.t. a periodo global (metaperiodo o periodo lento, lo cual se ha representado con la variable  $z_N^N$ ) con respecto a los polos a periodo intermedio (o rápido, y que se han representado por la variable  $z_N$ ).

Es interesante comentar que, tras operar con la ecuación (3-4), tan sólo habrá que fijarse en las funciones adelantadas  $G_i(z_N^N)$  (de subíndice positivo), ya que las funciones retrasadas  $G_{-i}(z_N^N)$  (de subíndice negativo) se pueden obtener fácilmente a través de la relación  $G_{-i}(z_N^N) = z_N^{-N} G_{N-i}(z_N^N)$ .

Por otro lado, si se observa nuevamente la expresión (3-4), se puede ver como ésta claramente viene expresada a dos frecuencias ( $z_N^N, z_N$ ). Por dicho motivo, en (Salt, 1992) y (Albertos, Salt y Tornero, 1996) esta expresión recibe el nombre de operador bifrecuencia,  $\tilde{G}(z, N)$ . De él se deduce que:

- los coeficientes de su denominador corresponden a los coeficientes de la f.d.t. expresada a periodo lento.
- si se suman los coeficientes de su numerador (que están a periodo rápido) en grupos de  $N$  en  $N$  (siendo  $N$  la multiplicidad del muestreo) se obtendrán los  $n$  coeficientes

correspondientes a la misma f.d.t. pero expresada a periodo lento (siendo n el orden de dicha f.d.t.).

En el epígrafe 6.1 dedicado a reseñas de notación se profundizará más acerca tanto del polinomio  $W(z_N)$  (que va a ser tratado también a continuación) como del operador bifrecuencia  $\tilde{G}(z, N)$ .

### 3.2.2. Polinomio $W(z_N)$

De toda la exposición teórica del epígrafe anterior, quizás lo más interesante para el estudio de modelado y posterior diseño de reguladores para procesos muestreados de forma no convencional es lo relativo al polinomio  $W(z_N)$ . En definitiva, lo que se está proponiendo es que dado un sistema discreto o discretizado a periodo rápido, tras multiplicar numerador y denominador por  $W(z_N)$  va a quedar una  $G(z_N)$  donde el denominador queda expresado a periodo lento y el numerador a periodo rápido. Veámoslo con un sencillo ejemplo:

Dada

$$G(z_2) = \frac{(1 - z_2^{-1})}{(1 - az_2^{-1})} = \frac{B(z_2)}{A(z_2)}$$

donde claramente se observa que hay un muestreo intermedio ( $N=2$ ) para cada metaperiodo  $T_0$ , se trata ahora de encontrar  $W(z_2)$  que multiplique numerador y denominador de  $G(z_2)$ . Recurriendo a la expresión (3-5) se tiene  $W(z_2) = (1 - az_2^{-1}e^{j\pi})$ , por lo que

$$G(z_2) = \frac{B(z_2)W(z_2)}{A(z_2)W(z_2)} = \frac{(1 - z_2^{-1})(1 - az_2^{-1}e^{j\pi})}{(1 - az_2^{-1})(1 - az_2^{-1}e^{j\pi})} = \frac{1 + z_2^{-1}(a - 1) - az_2^{-2}}{(1 - a^2z_2^{-2})}$$

Se comprueba, por tanto, lo dicho anteriormente, ya que el denominador queda expresado en variables del tipo  $z_N^0, z_N^{-N}$ , etc, (esto es, a periodo lento) y, por su parte, el numerador en variables del tipo  $z_N^0, z_N^{-1}, \dots, z_N^{-(N-1)}, z_N^{-N}$ , etc, (esto es, a periodo rápido); todo ello sin olvidar que se trata de una fdt a periodo rápido,  $G(z_2)$ . Además, para este ejemplo concreto, hay que prestar especial atención a la variable  $z_2^{-1}$  del numerador, ya que es la que marca el muestreo intermedio dentro del metaperiodo  $T_0$ , y por tanto, nos va a facultar a expresar el patrón deseado de muestreo (regular o irregular) dentro de dicho  $T_0$ . Tal y como está expresada  $G(z_2)$ , se podría interpretar que estamos ante un patrón regular, es decir, la muestra intermedia se encuentra en mitad del metaperiodo  $T_0$  ( $\tau_1 = \tau_2$ ), pero, no obstante, como al operador  $z_N^{-1}$  se le ha dado la característica de poder ser irregular en el dominio del tiempo, va a ser capaz de representar cualquier patrón irregular dentro del metaperiodo (esto es,  $\tau_1 \neq \tau_2$ ), como se va a pasar a ver en el siguiente apartado.

### 3.2.3. Operador $z_N^{-i}$ .

Para hacer frente a lo apuntado al final del párrafo anterior va a ser necesario previamente presentar una serie de razonamientos matemáticos en el dominio de la frecuencia

con el objetivo de obtener la ganancia del filtro  $G(j\omega)$ . Así, considerando una entrada de tipo senoidal  $r(t) = e^{j\omega t}$  y teniendo en cuenta la ecuación (3-2), se tendrá:

$$Y_p(z_N^N) = \sum_{i=0}^{N-1} R_i(z_N^N) G_{p-i}(z_N^N) = \frac{1}{1 - e^{j\omega T_0} z_N^{-N}} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\omega t_i} G_{p-i}(z_N^N)$$

ya que  $R_i(z_N^N) = \frac{e^{j\omega t_i}}{1 - e^{j\omega T_0} z_N^{-N}}$ .

La expresión anterior, si es definida desde el punto de vista de la transformada de Laplace y teniendo en cuenta el retraso de muestreo  $e^{-st_p}$  (equivalente en discreto  $z_N^{-p}$ , recordar expresión (3-3)) para situar finalmente cada secuencia de salida periódica correctamente en el tiempo, quedaría:

$$Y_p(s) = \frac{1}{T_0} \left\{ \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\omega t_i} G_{p-i}(e^{j\omega T_0}) e^{-st_p} \right\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s - j(\omega + k\omega_0)}$$

donde  $\omega_0 = \frac{2\pi}{T_0}$ .

Añadiendo el resto de transformadas de Laplace de las otras  $p-1$  secuencias periódicas de salida con el fin de obtener la transformada de Laplace de la secuencia completa  $Y(s)$ , se tiene:

$$Y(s) = \frac{1}{T_0} \left\{ \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\omega t_i} G_{p-i}(e^{j\omega T_0}) e^{-st_p} \right\} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{s - j(\omega + k\omega_0)}$$

A partir de aquí, haciendo  $k=0$  para eliminar las réplicas surgidas del muestreo de la señal y relacionando entrada y salida, se puede deducir la siguiente expresión para la ganancia del filtro:

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} e^{j\omega t_i} G_{p-i}(e^{j\omega T_0}) e^{-j\omega t_p} = \frac{1}{T_0} \sum_{p=0}^{N-1} \sum_{i=0}^{N-1} G_{p-i}(e^{j\omega T_0}) e^{-j\omega(t_p - t_i)}$$

Si se eliminan los  $G_{p-i}(e^{j\omega T_0})$  de subíndice negativo (Thomas y Lutte, 1972) la ganancia del filtro  $G(j\omega)$  queda como:

$$G(j\omega) = \frac{1}{T_0} \sum_{i=0}^{N-1} G_i(e^{j\omega T_0}) \sum_{k=1}^N \exp\left(-j\omega \sum_{l=k}^{i-1+k} \tau_l\right) \quad (3-6)$$

donde todas las variables que aparecen han sido descritas con anterioridad y, donde si  $l > N \rightarrow \tau_l = \tau_{l-N}$ .

Si se analiza y expande la expresión (3-6) vemos que los primeros términos de  $G(j\omega)$  son:

$$\frac{N}{T_0} \left[ G_0(e^{j\omega T_0}) + G_1(e^{j\omega T_0}) \left( \frac{e^{-j\omega\tau_1} + e^{-j\omega\tau_2} + \dots + e^{-j\omega\tau_N}}{N} \right) + \right. \\ \left. + G_2(e^{j\omega T_0}) \left( \frac{e^{-j\omega(\tau_1+\tau_2)} + e^{-j\omega(\tau_2+\tau_3)} + \dots + e^{-j\omega(\tau_N+\tau_1)}}{N} \right) + \dots \right]$$

Recordando la definición de cada  $G_i(z_N^N)$ ,  $G(z_N)$  podría ser escrito como

$$G(z_N) = G_0(z_N^N) + G_1(z_N^N)z_N^{-1} + G_2(z_N^N)z_N^{-2} + \dots + G_{N-1}(z_N^N)z_N^{-(N-1)} \quad (3-7)$$

ya que, como se ha visto  $G_{-i}(z_N^N) = Z^{T_0} [e^{-st_i} H_0^{t_0} G(s)]$ , por lo que, de manera similar  $G_i(z_N^N) = Z^{T_0} [e^{st_i} H_0^{t_0} G(s)]$ , y, tras calcular esta última transformada  $Z$  a periodo  $T_0$  de la señal adelantada  $t_i$  instantes de tiempo, habrá que retrasar este valor convenientemente (multiplicarlo por  $z_N^{-i} = e^{-st_i}$ ) para reubicarlo correctamente en el tiempo.

Por tanto, comparando la expresión (3-7) con la forma expandida de la expresión (3-6), se ve que la ganancia del filtro se puede encontrar tomando  $G(z_N)$ , con el numerador y el denominador modificados por la ecuación (3-5), y

a) reemplazando los factores de  $z_N^{-N}$  por  $e^{-j\omega T_0}$

b) reemplazando los términos que contienen  $z_N^{-1}$  por

$$\left( \frac{e^{-j\omega\tau_1} + e^{-j\omega\tau_2} + \dots + e^{-j\omega\tau_N}}{N} \right)$$

(es decir, se trata de una especie de media de todos los valores que puede tomar el operador  $z_N^{-1}$ ).

c) reemplazando los términos que contienen  $z_N^{-2}$  por

$$\left( \frac{e^{-j\omega(\tau_1+\tau_2)} + e^{-j\omega(\tau_2+\tau_3)} + \dots + e^{-j\omega(\tau_N+\tau_1)}}{N} \right)$$

(es decir, se trata nuevamente de una especie de media de todos los valores que puede tomar la operación  $z_N^{-2}$ )

d) así sucesivamente hasta  $z_N^{-(N-1)}$

e) finalmente, toda la expresión se multiplica por un factor global  $N/T_0$ .

Veamos todo esto retomando el ejemplo de la sección anterior. En dicho ejemplo se había llegado a:

$$G(z_2) = \frac{B(z_2)W(z_2)}{A(z_2)W(z_2)} = \frac{(1 - z_2^{-1})(1 - az_2^{-1}e^{j\pi})}{(1 - az_2^{-1})(1 - az_2^{-1}e^{j\pi})} = \frac{1 + z_2^{-1}(a - 1) - az_2^{-2}}{(1 - a^2z_2^{-2})}$$

por tanto, siguiendo los pasos antes descritos, quedará

$$G(jw) = \frac{2}{T_0} \left[ \frac{1 + \left( \frac{e^{-jw\tau_1} + e^{-jw\tau_2}}{2} \right) (a - 1) - ae^{-jwT_0}}{(1 - a^2 e^{-jwT_0})} \right] \quad (3-8)$$

A este nivel, manteniendo una frecuencia  $w$  fija y, por tanto, un  $T_0$  global fijo, se podría obtener diferentes valores para la ganancia del filtro dependiendo del esquema de muestreo considerado (valores de los periodos  $\tau_1$  y  $\tau_2$ ).

No obstante, se puede ir más allá todavía, intentando conseguir representar en un Mapa de Polos y Ceros (MPC) a periodo rápido ( $z_N$ ) los polos y ceros del filtro muestreado no uniformemente. Este hecho es de gran importancia, pues a partir de aquí se pueden establecer una serie de pautas de modelado en el dominio del tiempo a través de la representación externa para este tipo de filtros (o procesos).

### 3.2.4. Mapa de Polos y Ceros (MPC) en $z_N$ .

Entrando de lleno con el tema del MPC, cabe resaltar que, como se puede ver en la expresión (3-8) del ejemplo anterior (y para cualquier caso general), independientemente del esquema de muestreo considerado los polos siempre se van a encontrar en las mismas ubicaciones dentro del MPC, mientras que los ceros irán variando su situación en base a dicho esquema. Más concretamente, con la incorporación del polinomio  $W(z_N)$  los polos a representar en el MPC serán los propios del proceso a periodo rápido (llamémosles  $a_i$ ) más los nuevos que surgen por  $W(z_N)$  y que se sitúan en  $a_i e^{j2\pi k/N}$ ,  $k = 1, 2, \dots, N-1$  (según la propia definición de  $W(z_N)$ ). Por su parte, los ceros se determinan analizando el numerador,  $B(z_N)W(z_N)$ , y siguiendo los pasos descritos en la sección 3.2.3, pero ahora con respecto a la variable  $s$  de Laplace, es decir:

a) reemplazar  $z_N^{-N}$  por  $e^{-sT_0}$ .

b) reemplazar  $z_N^{-i}$  por  $\sum_{k=1}^N \frac{\exp\left(-s \sum_{l=k}^{i-1+k} \tau_l\right)}{N}$ .

Por tanto, una vez realizados los pasos anteriores, para obtener analíticamente los ceros tendremos un polinomio en  $S$  que habrá que igualar a 0. Partiendo de los valores originales de los ceros de  $B(z_N)W(z_N)$  (los correspondientes a un muestreo regular) se irán solucionando iterativamente las diferentes ecuaciones que se presenten consecuencia de modificar el esquema de muestreo (es decir, ir hacia patrones irregulares). Dichas soluciones darán las diferentes ubicaciones de los ceros en el plano continuo, por lo que habrá que hacer una posterior conversión al plano discreto  $z_N$ , la cual viene acompañada de un ajuste tanto del periodo de discretización como de la ganancia de la función obtenida. Ambos aspectos mencionados van a ser tratados en el epígrafe 3.3 con detalle.

A este nivel, para la obtención de los ceros del sistema muestreado de forma no convencional, es de gran ayuda la aplicación del Principio del Módulo Máximo (ver Anexo II). La manera en que se debe actuar es la siguiente: se parte (tras la aplicación de los pasos a) y b) expuestos anteriormente) del polinomio en  $S$  del numerador, llamémosle  $g(s)$ , y se toma la función  $f(s)=\text{Abs}(g(s))$ , donde  $\text{Abs}$  es la función valor absoluto. A partir de esta función  $f(s)$  se trata de averiguar para qué puntos se anula. Es interesante notar que  $f$  está definida tal que  $f : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ . Por tanto, los ceros de esta función serán mínimos relativos. Y todavía más, gracias al Principio del Módulo Máximo es posible probar que todos los extremos relativos de la función  $f$  son ceros de dicha función. De esta manera, si se consigue aislar un extremo relativo (mínimo) de  $f(s)$  se habrá conseguido aislar una raíz de  $g(s)$ . Por tanto, si se tiene aislados todos los extremos relativos (mínimos) de  $f(s)$  se tendrán todas las raíces de  $g(s)$ . Haciendo uso de herramientas científicas como Mathematica, se va a poder graficar la función  $f(s)$ , lo cual ayudará a encontrar los extremos relativos (mínimos) de la misma y, por ende, los ceros del sistema con muestreo no convencional. Se emplaza al lector al Anexo II donde aparecen los formalismos matemáticos del Principio del Módulo Máximo y un ejemplo aclarativo. Por último, comentar que cabría haberse planteado la utilización de técnicas de derivación de forma alternativa al Principio del Módulo Máximo para obtener los extremos relativos, pero es interesante notar que en el caso que nos ocupa (dominio de los complejos) para la obtención de éstos no se puede hacer uso de aquéllas, ya que la función valor absoluto,  $\text{Abs}$ , en los complejos no es derivable en el 0, y se está tratando de buscar aquellos puntos que anulan a  $g(s)$ , siendo  $g(s)$  justamente la función que actúa de argumento en  $\text{Abs}$ .

Con el fin de ilustrar un poco todo lo comentado en esta sección, se puede retomar el ejemplo utilizado a lo largo de todo el epígrafe 3.2. En él la forma de solucionar la ubicación de los ceros sería, como se ha dicho anteriormente, igualar a 0 la expresión del numerador de (3-8), la cual queda a continuación expresada ya en variable  $s$ :

$$1 + \left( \frac{e^{-s\tau_1} + e^{-s\tau_2}}{N} \right) (a-1) - ae^{-sT_0} = 0$$

Tras esto, lo siguiente sería partir del caso regular  $\tau_1=\tau_2=T_0/2$ , generándose la ecuación:

$$1 + \left( \frac{e^{-s\frac{T_0}{2}} + e^{-s\frac{T_0}{2}}}{2} \right) (a-1) - ae^{-sT_0} = 1 + e^{-s\frac{T_0}{2}} (a-1) - ae^{-sT_0} = 0$$

cuyas soluciones válidas serán el cero propio del proceso junto con el cero introducido por  $W(z_N)$ , que en este caso con muestreo regular se cancela con el polo que introduce a su vez  $W(z_N)$ .

Sin embargo, si se va hacia cualquier caso irregular, por ejemplo  $\tau_1=T_0/3$  y  $\tau_2=2T_0/3$ , el cero de  $W(z_N)$  (que se tenía en el caso de muestro regular) cambiará su ubicación (simbolizada por un nuevo polinomio  $W'(z_N)$ ), por lo que ya no se cancelará con el polo de  $W(z_N)$ . La resolución de la ecuación

$$1 + \left( \frac{e^{-s\frac{T_0}{3}} + e^{-s\frac{2T_0}{3}}}{2} \right) (a-1) - ae^{-sT_0} = 0$$

conducirá a la obtención del valor para dicho cero. Incluso el cero propio del proceso podrá variar, ya que el modelado que se intenta conseguir trata de hacer una aproximación de la f.d.t. a modelar relativa a un muestreo irregular como una f.d.t. representada en un MPC a  $z_N$  regular. De esta forma, permite comparar la aportación de la variación del esquema de muestreo (patrón irregular) respecto del caso de partida (muestreo regular).

A modo de conclusión, es interesante por tanto recalcar la idea de que el modelado planteado trata de, partiendo de una f.d.t. a periodo rápido  $z_N$  relativa a un muestreo regular (en el ejemplo,  $\tau_1=\tau_2$ ), conseguir otra f.d.t. también a periodo  $z_N$  pero esta vez relativa a un muestreo irregular (en el ejemplo,  $\tau_1 \neq \tau_2$ ), donde esa irregularidad queda constatada en una variación de los coeficientes del numerador con respecto a los del caso regular.

### 3.3. OBTENCIÓN DEL MODELADO FINAL.

Una vez planteado en el epígrafe anterior todo el enfoque teórico del que se parte, se va ahora a ampliar para conseguir el modelado final en representación externa de procesos muestreados no uniformemente en el tiempo. En esa línea, las ampliaciones básicas al modelado expuesto que van a ser presentadas se centran en los dos siguientes aspectos: ajuste del periodo de discretización y ajuste de la ganancia estática. Veamos detalladamente en qué consiste cada uno de ellos.

#### 3.3.1. Ajuste del periodo de discretización.

Llevar a cabo dicho ajuste va a suponer una conversión correcta (aunque aproximada) al plano discreto  $z_N$  de los ceros obtenidos en  $S$  al resolver la ecuación planteada en la sección anterior cuando el proceso se muestrea de forma irregular. Es decir, lo que se está proponiendo es que no se haga directamente la discretización con  $z_N = e^{s\frac{T_0}{N}}$ , siendo  $T_0/N$  el valor del periodo rápido (regular), sino que este periodo rápido surja como consecuencia de un reajuste que tenga en cuenta la naturaleza irregular del muestreo, aunque luego la fdt venga expresada a periodo  $T_0/N$  (de ahí que sea una conversión siempre aproximada).



Dependiendo de la ubicación en  $z_N$  de los ceros del caso regular (discretizados a  $T_0/N$  y teniendo en cuenta ya los que surgen del polinomio  $W(z_N)$ ) se van a presentar tres casos distintos en los que al ir hacia un muestreo irregular se tendrá que plantear un ajuste en el periodo de discretización. Los tres casos a los que se alude pasan a ser descritos seguidamente:

- ceros discretos reales negativos: este caso (que se ilustrará en el ejemplo 1 de la sección 3.4) se ha considerado como el más interesante. Su importancia radica en el siguiente hecho: partiendo del caso de muestreo regular en el que para obtener los ceros discretos (en este caso, reales negativos) se ha tomado el periodo rápido regular  $T_0/N$ , si al variar el esquema de muestreo (ir hacia un caso de muestreo irregular) se vuelve a tomar  $T_0/N$  como periodo de discretización, se va a producir un incremento del número de ceros del numerador  $B(z_N)W'(z_N)$  con respecto a los de partida (caso de muestreo regular), lo cual puede derivar (en la mayoría de situaciones) en hacer no realizable la f.d.t. modelada en RE. Por tanto, se propone cierta variación (ajuste) del periodo de discretización (ante casos de muestreo irregular) para realizar correctamente la conversión a  $z_N$ , de tal forma que se logrará que no sólo la respuesta se ajuste fielmente a la obtenida en RI (la cual se puede conseguir a partir del modelado propuesto en el capítulo 2) sino que quedará una f.d.t. realizable en RE y, por tanto, simulable.
- ceros discretos complejos conjugados: en este caso (y como luego se verá en el ejemplo 2 de la sección 3.4) cuando se va hacia un patrón con muestreo irregular es muy frecuente que se vuelva a obtener ceros discretos complejos conjugados. Si se toma estos ceros discretizados a  $T_0/N$  se observará que la respuesta de la f.d.t. discreta modelada en RE tiene un comportamiento diferente respecto de su modelado en RI ante un mismo esquema de muestreo irregular. Por tanto, si se varía (ajusta) correctamente el periodo de discretización para hacer la conversión a  $z_N$ , se observa que la respuesta se ajustará fielmente a la obtenida en RI (la cual se puede conseguir, como se dijo anteriormente, a partir del modelado propuesto en el capítulo 2).
- ceros discretos reales positivos: en este caso (que se ilustrará con el ejemplo 3 de la sección 3.4), más que un ajuste del periodo de discretización realmente lo que se va a hacer es un ajuste de los coeficientes del numerador de la f.d.t. modelada a  $z_N$ . Esto se va a lograr gracias a considerar los dos detalles apuntados acerca de la expresión (3-4), los cuales permiten relacionar una f.d.t. expresada a  $z_N$  con respecto a la correspondiente f.d.t. expresada a  $z_N^N$ ; recordar que estos detalles hacen referencia a que:
  - los coeficientes del denominador de (3-4),  $A(z_N^N)$ , corresponden directamente a los coeficientes de la f.d.t. expresada a periodo lento  $z_N^N$ .
  - si se suman los coeficientes del numerador de (3-4),  $B(z_N)W(z_N)$ , (que están a  $z_N$ ) en grupos de  $N$  en  $N$  (siendo  $N$  la multiplicidad del muestreo) se obtendrán los  $n$  coeficientes correspondientes a la misma f.d.t. pero expresada a  $z_N^N$  (siendo  $n$  el orden de dicha f.d.t.).

Una vez planteados los tres casos a tener en cuenta, en aras a lograr el ajuste correcto del periodo de discretización para el primero de ellos, se va a mostrar a continuación un estudio general que relaciona una raíz real negativa discreta (a periodo rápido  $z_N$ ) con su correspondiente par complejo conjugado continuo:

Dada una raíz real negativa discreta  $z_N$ , se tiene que, si  $s_1 = \sigma + j \frac{Nw_s}{2}$  y  $s_2 = \sigma - j \frac{Nw_s}{2}$ :

$$z_N = e^{s_1 \frac{T_0}{N}} = e^{\left(\sigma + j \frac{Nw_s}{2}\right) \frac{T_0}{N}} = e^{\frac{\sigma T_0}{N}} e^{j \frac{Nw_s T_0}{2N}} = e^{\frac{\sigma T_0}{N}} e^{j \frac{w_s T_0}{2}} = e^{\frac{\sigma T_0}{N}} e^{j \frac{2\pi T_0}{T_0 2}} = e^{\frac{\sigma T_0}{N}} e^{j\pi}$$

$$z_N = e^{s_2 \frac{T_0}{N}} = e^{\left(\sigma - j \frac{Nw_s}{2}\right) \frac{T_0}{N}} = e^{\frac{\sigma T_0}{N}} e^{-j \frac{Nw_s T_0}{2N}} = e^{\frac{\sigma T_0}{N}} e^{-j \frac{w_s T_0}{2}} = e^{\frac{\sigma T_0}{N}} e^{-j \frac{2\pi T_0}{T_0 2}} = e^{\frac{\sigma T_0}{N}} e^{-j\pi}$$

Como  $e^{\pm j\pi} = \cos(\pi) \pm j \operatorname{sen}(\pi) = -1 \pm 0j$ , se consigue  $z_N = -e^{\frac{\sigma T_0}{N}}$ .

En todo el proceso se observa que se ha utilizado un periodo rápido  $T_0/N$ , lo cual hace obtener correctamente la raíz si el muestreo es regular. Sin embargo, cuando el muestreo es irregular, parece que seguir considerando el periodo  $T_0/N$  para adquirir la raíz discreta negativa no es lo más conveniente; de hecho, de hacerlo trae consigo los problemas ya comentados y que se verán en el ejemplo de la sección 3.4.1. Por ello, se propone una alternativa que subyace de la idea comentada ya, por la que el modelado planteado viene a lograr una f.d.t. basada en un muestreo irregular pero representada a periodo regular  $T_0/N$ . Desde este punto de vista y, recordando que, para que la discretización arroje una raíz real negativa se ha de cumplir

$$s_{1,2} = \sigma \pm j \frac{Nw_s}{2} = \sigma \pm j \frac{N2\pi}{2T_0} = \sigma \pm j \frac{N\pi}{T_0} = \sigma \pm j \frac{\pi}{\frac{T_0}{N}} = \sigma \pm j \frac{\pi}{T_{rapido}}$$

podríamos concluir que, vista la parte imaginaria de cada raíz compleja conjugada obtenida en continuo, el periodo de discretización nuevo a considerar será el resultante de realizar la siguiente operación:

$$\frac{\pi}{T_{rapido}} = \text{parte imaginaria de la raíz continua caso irregular}$$

esto es

$$T_{rapido} = \frac{\pi}{\text{parte imaginaria de la raíz continua caso irregular}} \quad (3-9)$$

De esta forma, si se aplica  $z_N = e^{s_1 T_{rapido}}$  y  $z_N = e^{s_2 T_{rapido}}$  se tiene:

$$z_N = e^{s_1 T_{rapido}} = e^{\left(\sigma + j \frac{\pi}{T_{rapido}}\right) T_{rapido}} = e^{\left(\sigma T_{rapido} + j \frac{\pi}{T_{rapido}} T_{rapido}\right)} = e^{(\sigma T_{rapido} + j\pi)} = -e^{\sigma T_{rapido}}$$

$$z_N = e^{s_2 T_{rapido}} = e^{\left(\sigma - j \frac{\pi}{T_{rapido}}\right) T_{rapido}} = e^{\left(\sigma T_{rapido} - j \frac{\pi}{T_{rapido}} T_{rapido}\right)} = e^{\left(\sigma T_{rapido} - j\pi\right)} = -e^{\sigma T_{rapido}}$$

por lo que se asegura en la raíz discreta la parte imaginaria nula y la parte real negativa.

Como se ha dicho, en la sección 3.4 se recoge un ejemplo para este caso (ejemplo 1) y se aprecia que gracias al ajuste propuesto para el periodo se logra evitar el aumento del orden del numerador, aspecto que haría no realizable la función.

Tras lo expuesto, faltaría tratar el ajuste del periodo de discretización para los otros dos casos planteados (ceros complejos conjugados y ceros reales positivos):

- 1) si se dispone de partida (caso muestreo regular) de ceros complejos conjugados discretos, lo más seguro es que al ir hacia esquemas de muestreo irregulares también vuelvan a salir pares complejos conjugados discretos. Con el fin de sintonizar mejor la conversión y, por tanto, lograr de la f.d.t. modelada en RE para el caso irregular una respuesta más aproximada a la obtenida bajo el modelado en RI del proceso (muestreado ante el mismo patrón), a dichos pares complejos conjugados se les puede aplicar la alternativa vista, pero con una pequeña variación: puesto que ahora se parte de ceros en continuo cuyas partes imaginarias no se encuentran en  $N\omega_s/2$  (como sucedía con los ceros continuos pertenecientes al caso de los ceros reales negativos discretos) el ajuste vendrá establecido como sigue:

$$T_{rapido} = \left( \frac{\text{parte imaginaria de la raíz continua caso regular}}{\text{parte imaginaria de la raíz continua caso irregular}} \right) \cdot \left( \frac{T_0}{N} \right) \quad (3-10)$$

Se trata de una ecuación regida por los mismos criterios que la vista en (3-9), sólo que como se ha dicho, ahora no se parte de considerar con el valor  $N\omega_s/2$  a la parte imaginaria de la raíz continua del caso regular.

En la sección 3.4 se recoge un ejemplo para este caso (ejemplo 2) y se hace una comparativa para dejar patente que con el ajuste propuesto para el periodo se logra una mejor respuesta del sistema (más aproximada a la obtenida para el modelado en RI bajo el mismo esquema de muestreo).

- 2) si se dispone de partida (caso muestreo regular) de ceros reales positivos discretos, dado que provienen por discretización directamente de raíces continuas cuya parte imaginaria es nula, carece de sentido aplicar la estrategia de ajuste presentada anteriormente. En este caso lo que se ha de hacer es, una vez ajustada en ganancia la fdt modelada en RE para el caso de muestreo irregular (aspecto a tratar en 3.3.2.), plantear un reajuste de los coeficientes de su numerador, operando de la siguiente manera:
  - 1º) Conocida la f.d.t. a periodo rápido del caso regular, se sabe por (Salt, 1992) que sumando de  $N$  en  $N$  (multiplicidad) los coeficientes obtendremos los  $n$  (orden) coeficientes que definen a la f.d.t. a periodo lento.

- 2º) Conocida la f.d.t. a periodo rápido del caso irregular, y aplicando lo anteriormente expuesto (Salt, 1992), se obtendrán también los  $n$  coeficientes que definirán la f.d.t. a periodo lento. Dichos coeficientes deben coincidir con los obtenidos a partir del caso regular. De no ser así, se deberá reajustar los coeficientes a periodo rápido de la f.d.t. modelada para el caso irregular hasta conseguir que, aplicado nuevamente (Salt, 1992), coincidan con los obtenidos para el caso regular.

En la sección 3.4 se recoge un ejemplo para este caso (ejemplo 3) y se observa que la respuesta obtenida para la f.d.t. modelada por RE en el caso de muestreo irregular sigue fielmente a la obtenida por RI, como en los casos vistos anteriormente.

### 3.3.2. Ajuste de la ganancia estática.

Por lo que respecta a este ajuste, se mostrará por simulación que la fdt que modela al proceso muestreado de manera no uniforme (obtenida tras ajustar el periodo de discretización) presenta cierto desajuste en ganancia, por lo que para comportarse de manera similar a su correspondiente versión en RI (bajo el mismo esquema de muestreo) se le debe llevar a cabo un reajuste de la ganancia estática.

Para ello, si llamamos  $G_{reg}$  a la ganancia del caso regular y  $G_{irreg}$  a la del irregular, el ajuste final se producirá como sigue:

$$G(z_N)_{ajustada} = \frac{G_{reg}}{G_{irreg}} G(z_N)$$

Es necesario notar que, cuando se presente un sistema con polos discretos a periodo rápido fuera o sobre el círculo unidad es conocido que dicho sistema en bucle abierto será inestable o críticamente estable, respectivamente. En esos casos se sabe que no es correcto hablar de ganancia estática. Por ello, para hacer el ajuste final se deberá hacer únicamente a partir de los numeradores de las f.d.t. a periodo rápido, sin tener en cuenta los denominadores. El resultado es compatible con el ajuste presentado anteriormente, ya que, incluso en los casos de procesos estables, sucede que los denominadores no influyen en el ajuste final de la ganancia, dado que tanto la f.d.t. regular como la irregular comparten los mismos polos (son sólo los ceros los que cambian). En el apartado 6.4.8. del capítulo 6 se presenta un ejemplo de modelado de un sistema real críticamente estable en bucle abierto.

Para acabar la sección, decir que llevando a cabo las dos premisas (ajuste del periodo de discretización y ajuste de la ganancia estática), se llega a la conclusión de que el filtro (proceso) sometido a un muestreo periódico no uniforme en el tiempo queda modelado en representación externa de manera correcta (aunque aproximada). Por tanto, establecido dicho modelado tiene sentido empezar a plantearse, entre otras cosas, el diseño de diferentes tipos de reguladores con estructura no convencional capaces de controlar el comportamiento de estos procesos, lo cual se estudiará en el capítulo sexto.

### 3.4. EJEMPLOS.

En esta sección se presentan tres ejemplos que vienen a ilustrar por simulación todos los aspectos apuntados a lo largo del epígrafe dedicado a la obtención del modelado final.

En el primer ejemplo se trata el caso de los ceros discretos reales negativos. En él, en un primer lugar, al no realizarse el ajuste del periodo de discretización queda patente el aumento del número de ceros de la f.d.t. modelada para el caso de muestreo irregular, convirtiéndose incluso en no realizable. Posteriormente se muestra que con el ajuste de dicho periodo, el problema desaparece.

En segundo lugar, se va a mostrar un segundo ejemplo en el que se parte de un sistema discreto con ceros complejos conjugados (adquiridos del polinomio  $W(z_N)$ ), de tal forma que nos permitirá ver el beneficio que supone sobre la respuesta hacer un ajuste del periodo de discretización (tal y como se comenta en 3.3.1). Además también se observará como conforme se tome un metaperiodo  $T_0$  más pequeño la fdt modelada en RE para el caso irregular ajustará más su respuesta a la obtenida mediante el modelado en RI para el mismo esquema de muestreo irregular. Esto nuevamente pone patente el hecho de que el modelado planteado en RE trata de aproximar una fdt muestreada en irregular a una fdt expresada a  $T_0/N$ , por lo que conforme más cercanos estén el instante  $T_0/N$  y el intermedio (para un caso  $N=2$ ) del esquema irregular, mejor aproximación se tendrá.

Por otro lado, el tercer ejemplo muestra un sistema discreto con un cero real positivo. Se va a ver como variando el esquema de muestreo, dicho cero va a variar también su ubicación en el MPC. Además, se comprueba por simulación que en este tipo de casos, tras hacer un reajuste de los coeficientes del numerador, la respuesta va a seguir fielmente a la obtenida por RI para este proceso ante un mismo esquema de muestreo (como ya se comentó en 3.3.1).

#### 3.4.1. Ejemplo 1: sistema con ceros discretos reales negativos.

Supongamos la f.d.t. continua definida como sigue

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2}$$

Se discretiza con retenedor de orden cero (ZOH) a periodo rápido  $T_0/N$ , siendo  $T_0=0.2$  seg y  $N=2$ , por lo que queda:

$$\begin{aligned} G(z_2) &= \frac{0.0997z_2 - 0.0738}{z_2^2 - 1.7236z_2 + 0.7408} = \frac{0.0997(z_2 - 0.7402)}{(z_2 - 0.9048)(z_2 - 0.8187)} = \\ &= \frac{0.0997z_2^{-1}(1 - 0.7402z_2^{-1})}{(1 - 0.9048z_2^{-1})(1 - 0.8187z_2^{-1})} = \frac{B(z_2)}{A(z_2)} \end{aligned}$$

Como se sabe por la ecuación (3-5), una forma de expresión equivalente y más útil para nuestro cometido sería añadir a  $G(z_2)$  el polinomio  $W(z_2)$  en numerador y denominador, siendo en este caso:

$$W(z_2) = (1 + 0.9048z_2^{-1})(1 + 0.8187z_2^{-1})$$

por lo que

$$G(z_2) = \frac{B(z_2)W(z_2)}{A(z_2)W(z_2)} = \frac{0.0997z_2^{-1}(1 - 0.7402z_2^{-1})}{(1 - 0.9048z_2^{-1})(1 - 0.8187z_2^{-1})} \frac{(1 + 0.9048z_2^{-1})(1 + 0.8187z_2^{-1})}{(1 + 0.9048z_2^{-1})(1 + 0.8187z_2^{-1})} \quad (3-11)$$

Como puede observarse fácilmente, para el caso de muestreo regular (el planteado de partida con la ecuación anterior) se tienen dos polos reales positivos en  $z_2' = 0.9048$  y  $z_2'' = 0.8187$  (propios del proceso), y dos polos reales negativos (consecuencia del polinomio  $W(z_2)$ ) en  $z_2''' = -0.9048$  y  $z_2'''' = -0.8187$ . De la misma forma, se observan tres ceros en las posiciones  $z_2^1 = 0.7402$  (propio del proceso),  $z_2^{2'} = -0.9048$  y  $z_2^{2''} = -0.8187$  (consecuencia del polinomio  $W(z_2)$ ).

El problema va a venir justamente con los ceros últimos, los que surgen del polinomio  $W(z_2)$ , ya que como es conocido una raíz discreta que se halle en el semieje real negativo del plano Z al convertirla al plano S ofrece como solución un par de raíces complejas conjugadas. Este hecho, en principio no es problema, ya que ambas raíces en el caso regular conducen en discreto a la misma solución (una raíz real negativa); el problema surge cuando al variar el esquema de muestreo (es decir, ir hacia patrones irregulares) e intentar resolver la ecuación en S, obtenemos nuevamente un par de raíces complejas conjugadas que marcan la nueva ubicación de esos ceros en el plano S, pero las cuales, al convertirlas al plano Z suponen también un par de raíces complejas conjugadas discretas (y no una única raíz real negativa como en el caso anterior). Veámoslo en el ejemplo:

Expandiendo la  $G(z_2)$  hallada anteriormente (3-11) se tendría:

$$G(z_2) = \frac{B(z_2)W(z_2)}{A(z_2)W(z_2)} = \frac{0.0997z_2^{-1} + 0.09803z_2^{-2} - 0.05333z_2^{-3} - 0.05466z_2^{-4}}{1 - 1.48893z_2^{-2} + 0.548725z_2^{-4}}$$

y planteando los pasos de la sección 3.2.4:

$$G(z_2) = \frac{B(z_2)W(z_2)}{A(z_2)W(z_2)} \Rightarrow G(s) = \left( \frac{0.0997 - 0.05333e^{-sT_0}}{1 - 1.48893e^{-sT_0} + 0.548725e^{-2sT_0}} \right) \left( \frac{e^{-s\tau_1} + e^{-s\tau_2}}{2} \right) + \left( \frac{0.09803e^{-sT_0} - 0.05466e^{-2sT_0}}{1 - 1.48893e^{-sT_0} + 0.548725e^{-2sT_0}} \right) \quad (3-12)$$

Si  $\tau_1 = \tau_2 = T_0/2$ ,  $G(z_2)$  quedará:

$$G(z_2) \Rightarrow G(s) = \left( \frac{0.0997e^{-s\frac{T_0}{2}} - 0.05333e^{-3s\frac{T_0}{2}}}{1 - 1.48893e^{-sT_0} + 0.548725e^{-2sT_0}} \right) + \left( \frac{0.09803e^{-sT_0} - 0.05466e^{-2sT_0}}{1 - 1.48893e^{-sT_0} + 0.548725e^{-2sT_0}} \right) =$$

$$= \frac{0.0997e^{-s\frac{T_0}{2}} + 0.09803e^{-sT_0} - 0.05333e^{-3s\frac{T_0}{2}} - 0.05466e^{-2sT_0}}{1 - 1.48893e^{-sT_0} + 0.548725e^{-2sT_0}}$$

de tal forma que los ceros se obtendrán igualando el numerador a 0 y sacando las diferentes soluciones de la ecuación resultante. Tras hacer esto, se tendrán las tres soluciones siguientes:

$$\begin{cases} s' = -3.0083 \\ s'' = -1.0004 \pm 31.416i \\ s''' = -2.0004 \pm 31.416i \end{cases}$$

las cuales se pueden obtener también recurriendo a la expresión  $z_N = e^{s\frac{T_0}{N}}$ , o mejor a  $s = \frac{N}{T_0} \ln(z_N)$ , ya que no se trata más que de la versión continua de los polos discretos que ya conocíamos para el caso de muestreo regular (3-11).

Lo interesante viene ahora, cuando  $\tau_1 = T_0/3$  y  $\tau_2 = 2T_0/3$ , ya que (3-12) queda:

$$G(z_2) \Rightarrow G(s) = \left( \frac{0.0997 - 0.05333e^{-sT_0}}{1 - 1.48893e^{-sT_0} + 0.548725e^{-2sT_0}} \right) \left( \frac{e^{-s\frac{T_0}{3}} + e^{-s\frac{2T_0}{3}}}{2} \right) +$$

$$+ \left( \frac{0.09803e^{-sT_0} - 0.05466e^{-2sT_0}}{1 - 1.48893e^{-sT_0} + 0.548725e^{-2sT_0}} \right) = \quad (3-13)$$

$$= \frac{(0.0997 - 0.05333e^{-sT_0}) \left( \frac{e^{-s\frac{T_0}{3}} + e^{-s\frac{2T_0}{3}}}{2} \right) + 0.09803e^{-sT_0} - 0.05466e^{-2sT_0}}{1 - 1.48893e^{-sT_0} + 0.548725e^{-2sT_0}}$$

donde claramente se percibe que al denominador no le afecta el cambio de esquema de muestreo (ya que viene definido a periodo lento) y, sin embargo, el numerador (al estar definido a periodo rápido) adquiere una nueva expresión, la cual al igualarse a 0 dará las nuevas raíces en S.

Es en este punto en el que se plantea el ajuste del periodo de discretización, ya que si observamos las raíces continuas obtenidas:

$$\begin{cases} s' = -3.009 \\ s'' = -2.798 \pm 31.381i \\ s''' = 5.0001 \pm 29.0155i \end{cases}$$

al discretizar mediante  $z_N = e^{s \frac{T_0}{N}}$  se obtienen:

$$\begin{cases} z_2' = 0.74015 \\ z_2'' = -0.7559 \pm 0.0026i \\ z_2''' = -1.6015 \pm 0.3920i \end{cases}$$

lo cual supone en las dos últimas raíces la aparición de ceros complejos conjugados que aumentan el orden del numerador haciendo a  $G(z_2)$  no realizable (5 ceros y 4 polos).

Por su parte, véase como  $z_2'$ , el cero propio del proceso, se ha desplazado ligeramente con respecto a su ubicación en el caso de muestreo regular. En la sección 3.2.4 ya se comentó que este hecho podía suceder, aunque en el ejemplo mostrado es casi inapreciable. Es interesante recordar que esto se produce debido a la aproximación que se trata de hacer en el modelado, de tal manera que una f.d.t. muestreada de forma irregular viene aproximada a una f.d.t. definida a periodo regular  $T_0/N$ . A la postre,  $z_2'$  es un cero discreto real positivo; en la sección 3.4.3 se expone cómo tratar este tipo de ceros a través de un ejemplo en el que el desplazamiento se muestra de forma más acusada.

Así, retomando el ejemplo, según (3-9) el periodo a considerar para discretizar cada raíz será:

- la raíz  $s''$ :  $T_{\text{rapido}} = \pi / 31.381 = 0.1001$
- la raíz  $s'''$ :  $T_{\text{rapido}} = \pi / 29.0155 = 0.1082$

de tal forma que aplicando  $z_N = e^{s T_{\text{rapido}}}$  nos quedan las siguientes raíces discretas para cada caso:

- la raíz  $z_2'' = -0.7557$
- la raíz  $z_2''' = -1.7184$

donde se aprecia que ha desaparecido el par complejo conjugado, por lo que se evita la posibilidad de incrementar el orden del numerador. Así, la f.d.t. modelada para este caso irregular  $\tau_1 = T_0/3$  y  $\tau_2 = 2T_0/3$  quedaría:

$$\begin{aligned} G(z_2) &= \frac{0.0997(z_2 - 0.74015)(z_2 + 0.7557)(z_2 + 1.7184)}{(z_2 - 0.9048)(z_2 - 0.8187)(z_2 + 0.9048)(z_2 + 0.8187)} = \\ &= \frac{0.0997z_2^{-1} + 0.172874815z_2^{-2} - 0.05310124043z_2^{-3} - 0.0958271535z_2^{-4}}{1 - 1.48893z_2^{-2} + 0.548725z_2^{-4}} \end{aligned}$$

Pese a no haber realizado todavía el ajuste de la ganancia estática, se está ya en disposición de simular la f.d.t. modelada a  $T_0/N$  resultado de muestrear de forma irregular el proceso. Además se podría comparar ante una misma entrada (escalón unitario) la respuesta obtenida con la respuesta que ofrecerá el sistema si es muestreado de forma regular (f.d.t. a  $T_0/N$  del caso regular) e, incluso, con la respuesta que se obtendría del sistema modelado por RI al ser muestreado de forma irregular.



Los primeros casos pueden ser simulados fácilmente recurriendo a bloques estándar de Simulink, mientras que para el último caso, como ya se ha comentado con anterioridad, se va a recurrir a un toolbox específico para sistemas multifrecuencia desarrollado en Simulink por (Vélez, 2000).

En la figura 3-1 se muestra el diagrama de bloques utilizado en la simulación de este ejemplo, donde se tiene (de parte superior a inferior):

- Operador Multifrecuencia Irregular: se trata de un operador que recibe como parámetros de entrada la representación interna del proceso continuo ( $A_c=[-3 \ -2; \ 1 \ 0]$ ,  $B_c=[1;0]$ ,  $C_c=[1 \ 3]$ ,  $D_c=0$ ), el esquema de muestreo a entrada y salida ( $[0, T_0/3]$  en ambos casos) y el valor del metaperiodo ( $T_0=0.2$  seg). Nos sirve para ver la respuesta del sistema modelado en RI y muestreo de forma irregular.
- f.d.t. modelada en RE a  $T_0/N$  para el caso de muestreo irregular  $[0, T_0/3]$  a entrada y salida según el modelado descrito. Nos sirve para ver la respuesta del sistema modelado en RE y muestreo de forma irregular.
- f.d.t. modelada en RE a  $T_0/N$  para el caso de muestreo regular  $[0, T_0/2]$  a entrada y salida según el modelado descrito. Nos sirve para ver la respuesta del sistema modelado en RE y muestreo de forma regular.
- Operador Multifrecuencia Regular: trata también con la representación interna del proceso continuo pero generando ahora su respuesta de forma regular cada 0.01 seg. Nos permite obtener la salida pseudo-continua del proceso.

Es interesante notar que la respuesta que se va a obtener es ante escalón en la entrada (bloque step de la figura 3-1).

Las respuestas obtenidas se ven en la figura 3-2 y 3-3. La primera de ellas (figura 3-2) tiene como cometido mostrar el desajuste en ganancia en la respuesta de la f.d.t. correspondiente al caso irregular respecto de las otras respuestas simuladas. Por su parte, la segunda de las figuras (figura 3-3) muestra que, como cabía esperar, las respuestas correspondientes a la f.d.t. modelada en RE para el caso regular y al sistema modelado en RI al ser muestreado de forma irregular coinciden a metaperiodo ( $T_0=0.2$  seg) y, además, se ajustan fielmente a la respuesta pseudo-continua en los instantes donde se pueden comparar.

Por tanto, gracias a esta simulación se hace patente el desajuste de la ganancia relativa a la f.d.t. modelada en el caso de muestreo irregular según el modelado expuesto. De echo, si se observa la ganancia del caso regular y se compara con la del caso irregular se aprecia que, efectivamente, ambas ganancias son distintas. Se ve a continuación:

- f.d.t. caso regular ( $\tau_1=\tau_2=T_0/2$ ):

$$G(z_2) = \frac{0.0997z_2^{-1} + 0.09803z_2^{-2} - 0.05333z_2^{-3} - 0.05466z_2^{-4}}{1 - 1.48893z_2^{-2} + 0.548725z_2^{-4}} \Rightarrow G(1)_{regular} = 1.50072$$

- f.d.t. caso irregular  $\tau_1=T_0/3, \tau_2=2T_0/3$ :

$$G(z_2) = \frac{0.0997z_2^{-1} + 0.17287z_2^{-2} - 0.05310z_2^{-3} - 0.09583z_2^{-4}}{1 - 1.48893z_2^{-2} + 0.548725z_2^{-4}} \Rightarrow G(1)_{irregular} = 2.0679$$

Si a la f.d.t. del caso irregular se le aplica un ajuste de la ganancia estática se obtendría la siguiente f.d.t.:

$$\begin{aligned} G(z_2) &= \frac{G(1)_{regular}}{G(1)_{irregular}} \frac{(0.0997z_2^{-1} + 0.17287z_2^{-2} - 0.05310z_2^{-3} - 0.09583z_2^{-4})}{(1 - 1.48893z_2^{-2} + 0.548725z_2^{-4})} = \\ &= \frac{1.50072}{2.0679} \frac{(0.0997z_2^{-1} + 0.17287z_2^{-2} - 0.05310z_2^{-3} - 0.09583z_2^{-4})}{(1 - 1.48893z_2^{-2} + 0.548725z_2^{-4})} \quad (3-13) \end{aligned}$$

Es interesante ver que ambas f.d.t a periodo rápido (la del caso regular y la del caso irregular ajustada en ganancia) cumplen la ley que ha sido ya enunciada con anterioridad (Salt, 1992). Por su parte, se sabe que el denominador da directamente los coeficientes de la f.d.t. a periodo lento. Se comprueba a continuación:

- f.d.t. caso regular ( $\tau_1=\tau_2=T_0/2$ ):

$$G(z) = \frac{(0.0997 + 0.09803)z^{-1} - (0.05333 + 0.05466)z^{-2}}{1 - 1.48893z^{-1} + 0.548725z^{-2}} = \frac{0.19773z^{-1} - 0.10799z^{-2}}{1 - 1.48893z^{-1} + 0.548725z^{-2}}$$

- f.d.t. caso irregular  $\tau_1=T_0/3, \tau_2=2T_0/3$ :

$$\begin{aligned} G(z_2) &= \frac{1.50072}{2.0679} \frac{((0.0997 + 0.17287)z^{-1} - (0.05310 + 0.09583)z^{-2})}{(1 - 1.48893z^{-1} + 0.548725z^{-2})} \\ &= \frac{0.7257(0.272575z^{-1} - 0.148928z^{-2})}{(1 - 1.48893z^{-1} + 0.548725z^{-2})} = \frac{0.19780z^{-1} - 0.10807z^{-2}}{1 - 1.48893z^{-1} + 0.548725z^{-2}} \end{aligned}$$

Se observa claramente que, salvo error de aproximación en los últimos decimales, se trata de la misma f.d.t. a periodo lento para ambos casos. Además, en este caso al contar con la f.d.t. del proceso en continuo,  $G(s)$ , la f.d.t. a periodo lento obtenida debe coincidir con la que surge de discretizar la  $G(s)$  (presentada al principio del ejemplo) con ZOH a periodo  $T_0=0.2$  seg, la cual queda:

$$G(s) = \frac{s + 3}{s^2 + 3s + 2} \Rightarrow G(z) = \frac{0.1977z^{-1} - 0.1081z^{-2}}{1 - 1.4891z^{-1} + 0.5488z^{-2}}$$

Se vuelve a comprobar que la aproximación entre ambas expresiones es excelente.

La prueba que se acaba de exponer se puede utilizar para cualquier caso en general y sirve para cerciorarse de que el modelado para el caso irregular es correcto, ya que derivándolo a un caso con muestreo a periodo lento devuelve la f.d.t. esperada (es decir, como se ha visto, la f.d.t. esperada ha de ser la misma que se obtendría derivando a periodo lento la f.d.t. del caso regular y la misma, si se dispone, que se obtendría tras discretizar a periodo lento la f.d.t. continua).

De la misma forma que se ha simulado anteriormente, si ahora se considera la f.d.t. ajustada en ganancia (3-13) para el caso irregular se obtienen las respuestas de la figura 3-4 y 3-5. La figura 3-4 tiene como cometido mostrar que ahora la ganancia de todas las respuestas coincide. Por su parte, la figura 3-5 permite observar con mayor nivel de detalle como el valor de las diferentes respuestas coincide a metaperiodo ( $T_0=0.2$  seg), y lo que es más importante, el valor de la respuesta para el modelo en RE del caso irregular coincide prácticamente en los instantes intermedios del metaperiodo con el valor que se obtiene para el modelo en RI. Este hecho viene a corroborar que el modelado en RE para el caso irregular representa de forma aproximada el comportamiento real del sistema ante un patrón irregular de muestreos. Como es sabido, dicho comportamiento se puede lograr de manera exacta con el modelado en RI, pero tan sólo puede lograrse de forma aproximada (como se ha comentado) con el modelado en RE, dada la propia filosofía de concepción de este modelado.

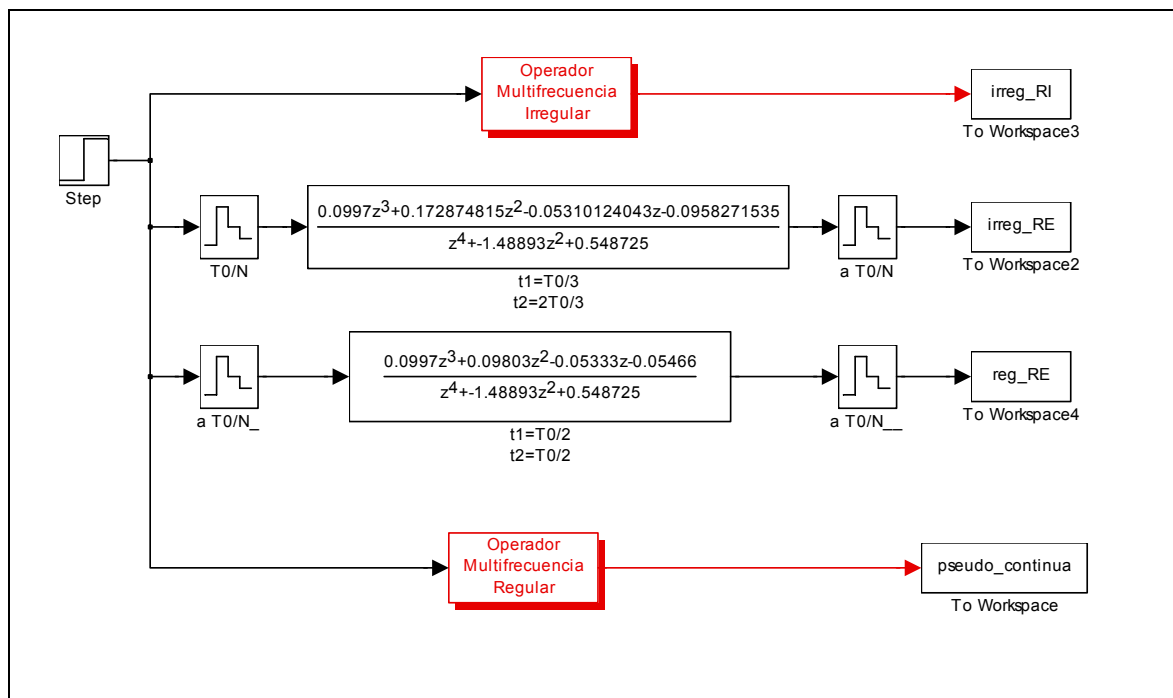


Figura 3-1 Diagrama de bloques simulación ejemplo 1.

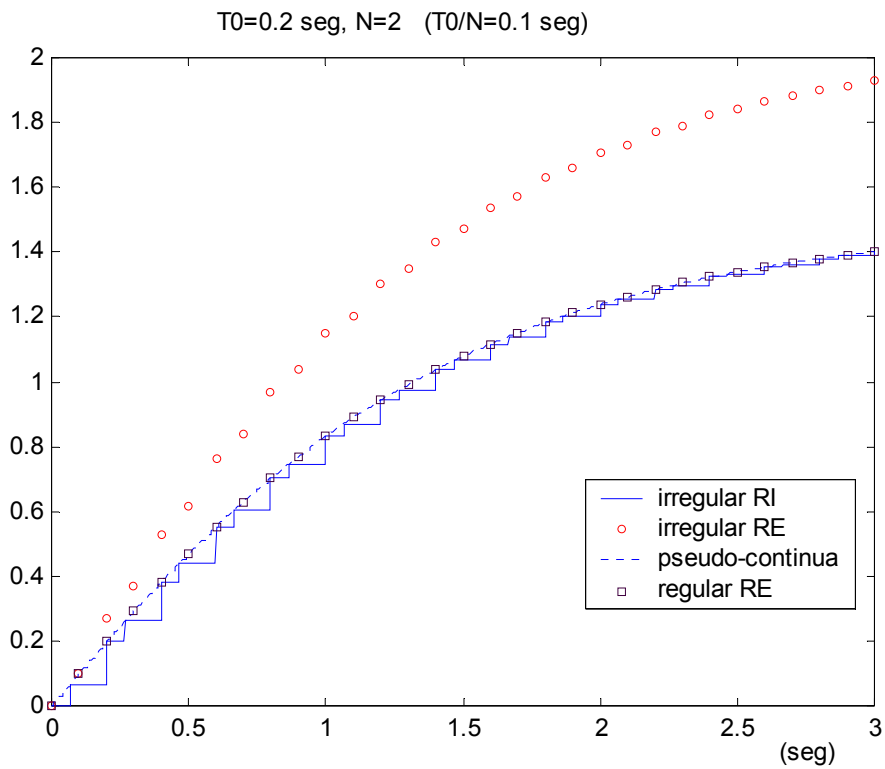


Figura 3-2: Respuestas simulación sin ajuste de ganancia ejemplo 1.

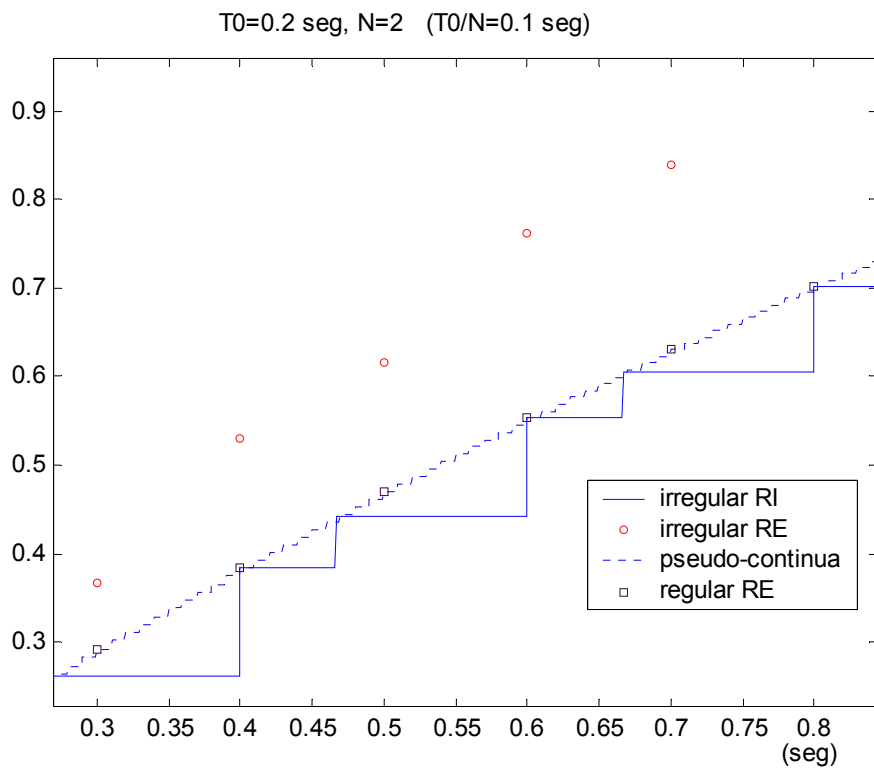


Figura 3-3: Detalle respuestas simulación sin ajuste de ganancia ejemplo 1.

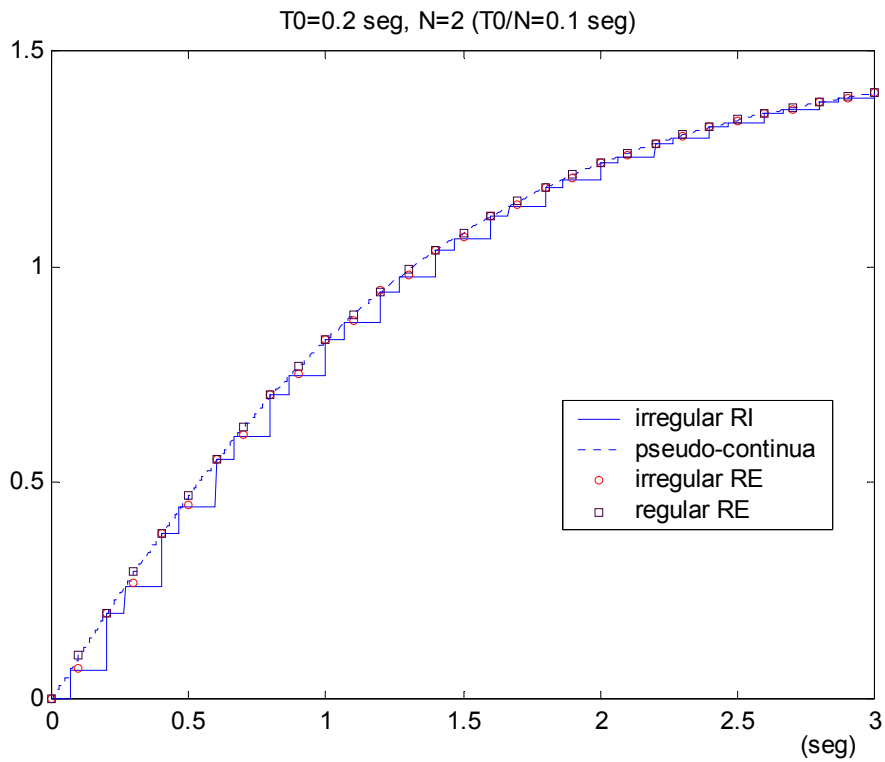


Figura 3-4: Respuestas simulación con ajuste de ganancia ejemplo 1.

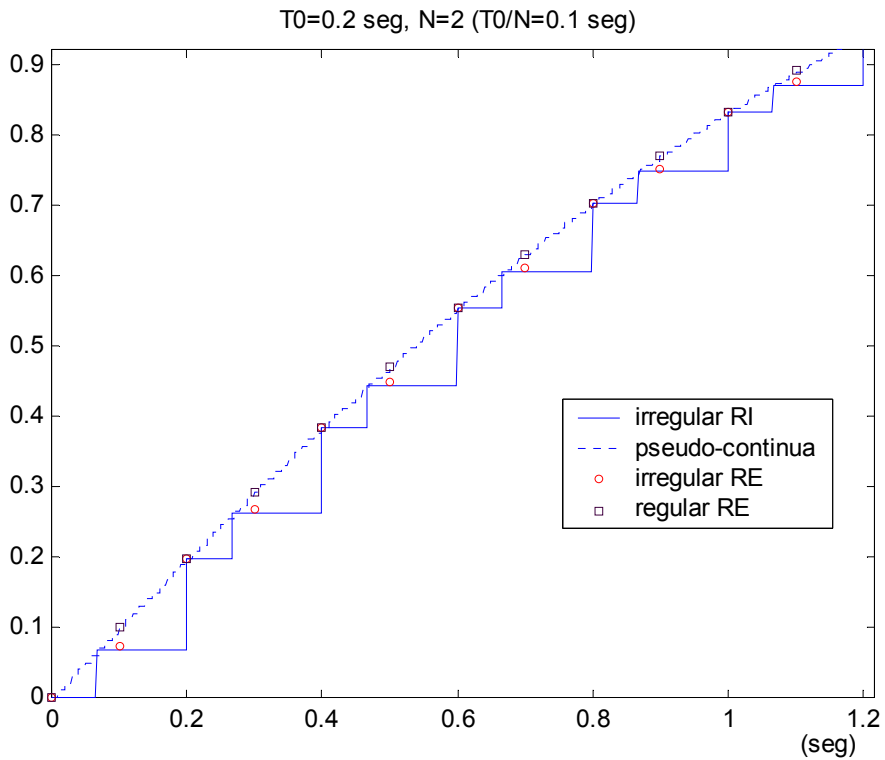


Figura 3-5: Detalle respuestas simulación con ajuste de ganancia ejemplo 1.

3.4.2. Ejemplo 2: sistema con ceros discretos complejos conjugados.

Se parte del siguiente sistema discreto definido a periodo rápido  $T_0/N$  (con  $T_0=2$  seg y  $N=2$ ):

$$G(z_2) = \frac{z_2^{-2}}{1 + 0.8z_2^{-1} + 0.8z_2^{-2}}$$

El polinomio  $W(z_2)$  de partida (caso regular) es (atendiendo a (3-5)):

$$W(z_2) = 1 - 0.8z_2^{-1} + 0.8z_2^{-2}$$

por lo que

$$\begin{aligned} G(z_2) &= \frac{B(z_2)W(z_2)}{A(z_2)W(z_2)} = \frac{z_2^{-2}}{(1 + 0.8z_2^{-1} + 0.8z_2^{-2})} \frac{(1 - 0.8z_2^{-1} + 0.8z_2^{-2})}{(1 - 0.8z_2^{-1} + 0.8z_2^{-2})} = \\ &= \frac{z_2^{-2} - 0.8z_2^{-3} + 0.8z_2^{-4}}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} \end{aligned} \quad (3-14)$$

Realizando los pasos descritos en 3.2.4 se llega a:

$$G(z_2) = \frac{z_2^{-2}(1 - 0.8z_2^{-1} + 0.8z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} \Rightarrow G(s) = \frac{e^{-sT_0} \left( 1 - 0.8 \left( \frac{e^{-s\tau_1} + e^{-s\tau_2}}{2} \right) + 0.8e^{-sT_0} \right)}{1 + 0.96e^{-sT_0} + 0.64e^{-2sT_0}}$$

donde para un caso de muestreo regular ( $\tau_1=\tau_2=T_0/2$ ) claramente se deduce que los dos ceros en  $S$  se ubican en  $s' = -0.111571 \pm 1.10714i$ , de tal forma que al discretizarlos, como ya sabíamos, en  $z_N$  se sitúan en  $z_2' = 0.4 \pm 0.8i$ . Por su parte, los cuatro polos están en  $z_2' = 0.4 \pm 0.8i$  y  $z_2'' = -0.4 \pm 0.8i$ , siendo los de  $z_2''$  los propios del proceso y los de  $z_2'$  los resultantes de  $W(z_2)$ . Como ya se vio en secciones anteriores, en el caso regular estos últimos coinciden en valor con los ceros resultantes de  $W(z_2)$ . Además, también se vio que los polos permanecerán en las ubicaciones mostradas independientemente del esquema de muestreo utilizado.

Si se varía el patrón de muestreo, de forma que  $\tau_1=T_0/3$  y  $\tau_2=2T_0/3$  (caso irregular), el modelo del proceso queda

$$G(z_2) \Rightarrow G(s) = \frac{e^{-sT_0} \left( 1 - 0.8 \left( \frac{e^{-s\frac{T_0}{3}} + e^{-s\frac{2T_0}{3}}}{2} \right) + 0.8e^{-sT_0} \right)}{1 + 0.96e^{-sT_0} + 0.64e^{-2sT_0}}$$

Igualando a cero el numerador se obtienen los nuevos ceros en  $S$ :  $s' = -0.1188 \pm 1.1421i$  que, al convertirlos a  $z_N$  (sin ajuste de periodo de discretización) quedan como  $z_2' = 0.3691 \pm 0.8076i$ . Por tanto, la f.d.t. que representa este caso irregular sin ajuste del periodo será:

$$G(z_2) = \frac{z_2^{-2} \left( (1 - 0.3691z_2^{-1})^2 + 0.8076^2 z_2^{-2} \right)}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} = \frac{z_2^{-2} (1 - 0.7382z_2^{-1} + 0.78845z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} \quad (3-15)$$

En el caso de hacer ajuste del periodo de discretización, se tendría (según (3-10)) que:

$$T_{\text{rapido}} = (1.10714/1.1421) * (2/2) = 0.969$$

con lo que el cero se ubicará (según  $z_N = e^{sT_{\text{rapido}}}$ ) en  $z_2' = 0.3989 \pm 0.797i$ , quedando la f.d.t. con ajuste de periodo de discretización:

$$G(z_2) = \frac{z_2^{-2} \left( (1 - 0.3989z_2^{-1})^2 + 0.797^2 z_2^{-2} \right)}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} = \frac{z_2^{-2} (1 - 0.7978z_2^{-1} + 0.79433z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} \quad (3-16)$$

Se podría hacer una simulación para ver el comportamiento de estas f.d.t. obtenidas para el caso irregular, pero previamente se debería hacer un ajuste de ganancia (por lo visto en 3.3.2). Así, si se evalúa la ganancia de cada f.d.t. se tiene:

- de (3-14),  $G(1)_{\text{regular}} = 0.3846$
- de (3-15),  $G(1)_{\text{irreg\_sin\_ajuste}} = 0.404$
- de (3-16),  $G(1)_{\text{irreg\_con\_ajuste}} = 0.3833$

por lo que realmente (3-15) queda:

$$G(z_2) = \frac{G(1)_{\text{regular}}}{G(1)_{\text{irreg\_sin\_ajuste}}} \frac{z_2^{-2} (1 - 0.7382z_2^{-1} + 0.78845z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} = \frac{0.3846}{0.404} \frac{z_2^{-2} (1 - 0.7382z_2^{-1} + 0.78845z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}}$$

y (3-16):

$$G(z_2) = \frac{G(1)_{\text{regular}}}{G(1)_{\text{irreg\_con\_ajuste}}} \frac{z_2^{-2} (1 - 0.7978z_2^{-1} + 0.79433z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} = \frac{0.3846}{0.3833} \frac{z_2^{-2} (1 - 0.7978z_2^{-1} + 0.79433z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}}$$

El diagrama de bloques de la simulación que compara estas f.d.t. del caso irregular ya ajustadas en ganancia queda representado en la figura 3-6. En dicha figura 3-6 se presentan (de parte superior a inferior):

- Regulador Multifrecuencia Irregular: este bloque, además del metaperiodo ( $T_0=2$  seg) y del esquema de muestreo a entrada y salida (ambos  $[0, T_0/3]$ ), recibe el modelo discreto multifrecuencia con muestreo irregular (obtenido por representación interna (RI) según las leyes de recurrencia que se presentan en el capítulo 2) del proceso bajo estudio. La respuesta de este bloque nos va a servir para comparar si la respuesta obtenida por externa (f.d.t. modeladas) se aproxima a la obtenida por interna mediante el modelado del capítulo 2.
- f.d.t. caso irregular  $[0, T_0/3]$  en RE con ajuste de ganancia, pero sin ajuste de periodo de discretización. Nos va a permitir comprobar la respuesta de la f.d.t. no ajustada en periodo.
- f.d.t. caso irregular  $[0, T_0/3]$  en RE con ajuste de ganancia y de periodo de discretización. Nos va a permitir comprobar la respuesta de la f.d.t. totalmente ajustada.

La respuesta ante escalón para cada caso queda representada en las figuras 3-7 y 3-8. La primera de ellas sirve básicamente para comprobar que el ajuste de ganancia es correcto, pero sin embargo, es en la segunda de ellas donde hay que prestar especial atención a los instantes marcados por el metaperiodo ( $T_0=2$  seg), de tal manera que a simple vista se ve que, pese a estar ajustada en ganancia la f.d.t. sin ajuste de periodo de discretización, la respuesta se aproxima poco en el transitorio a la del caso de RI, tanto a metaperiodo como a instantes intermedios de cada metaperiodo. Sin embargo la f.d.t. ajustada en ganancia y en periodo sigue fielmente a metaperiodo la respuesta obtenida por RI.

Todo esto se puede demostrar gracias a (Salt, 1992) ya que la f.d.t. a periodo lento que se deriva del caso totalmente ajustado coincide con la que se obtiene del caso regular. Se comprueba a continuación:

- f.d.t. caso regular ( $\tau_1=\tau_2= T_0/2$ ):

$$G(z_2) = \frac{z_2^{-2} - 0.8z_2^{-3} + 0.8z_2^{-4}}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} \Rightarrow G(z) = \frac{z^{-2}}{1 + 0.96z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

- f.d.t. caso irregular  $\tau_1= T_0/3$  y  $\tau_2=2T_0/3$ , sin ajuste de periodo de discretización:

$$G(z_2) = \frac{0.3846}{0.404} \frac{z_2^{-2}(1 - 0.7382z_2^{-1} + 0.78845z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} \Rightarrow G(z) = \frac{z^{-2}(0.9519 + 0.0478z^{-1})}{1 + 0.96z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$

- f.d.t. caso irregular  $\tau_1= T_0/3$  y  $\tau_2=2T_0/3$ , con ajuste de periodo de discretización:

$$G(z_2) = \frac{0.3846}{0.3833} \frac{z_2^{-2}(1 - 0.7978z_2^{-1} + 0.79433z_2^{-2})}{1 + 0.96z_2^{-2} + 0.64z_2^{-4}} \Rightarrow G(z) \approx \frac{z^{-2}}{1 + 0.96z^{-1} + 0.64z^{-2}}$$



Como se observa, la f.d.t. con ajuste de periodo de discretización es a periodo lento prácticamente la misma que en el caso regular, sin embargo, la que no tiene ajuste del periodo de discretización tiene unos coeficientes en el numerador sensiblemente diferentes.

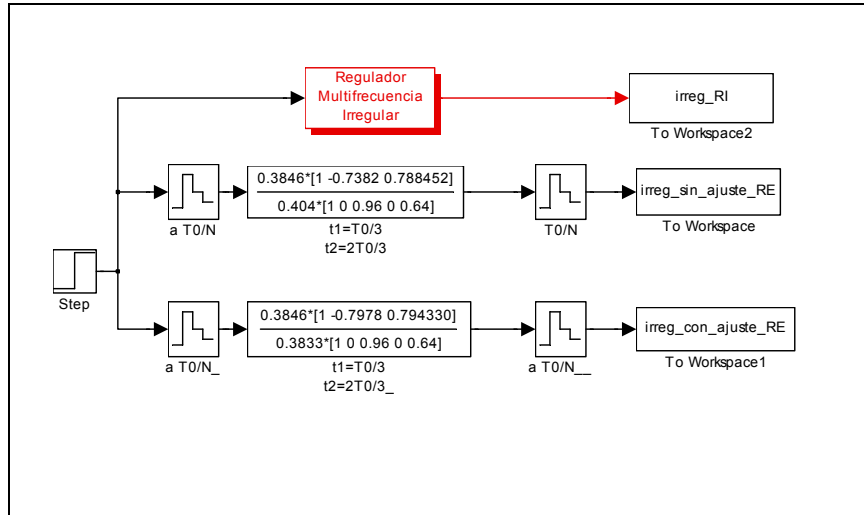


Figura 3-6: Diagrama de bloques simulación ejemplo 2.

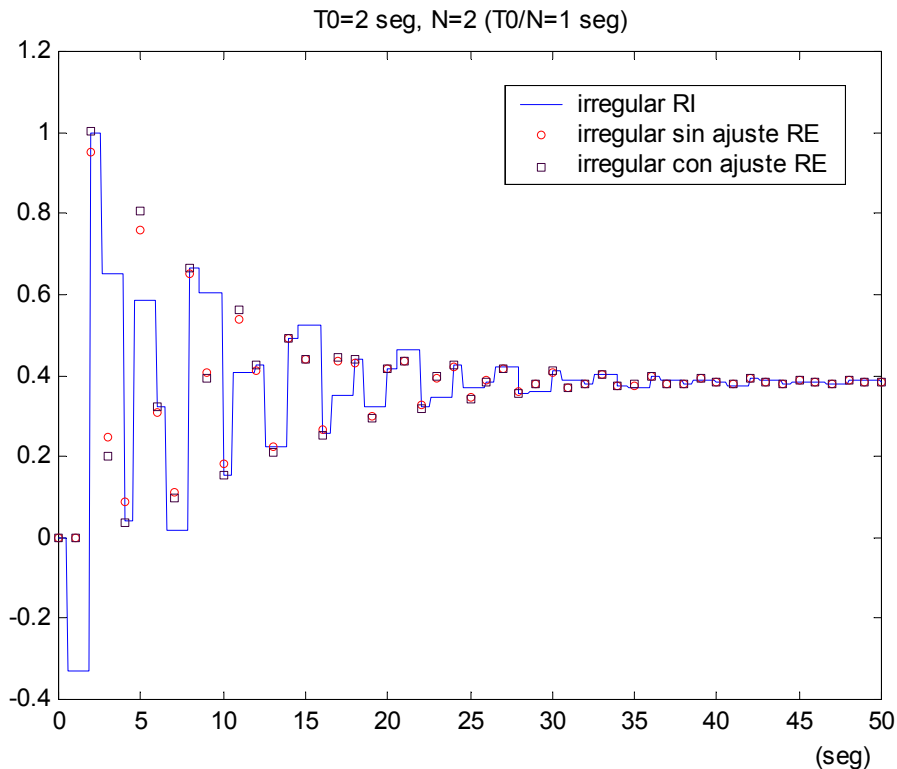


Figura 3-7: Respuestas simulación ejemplo 2

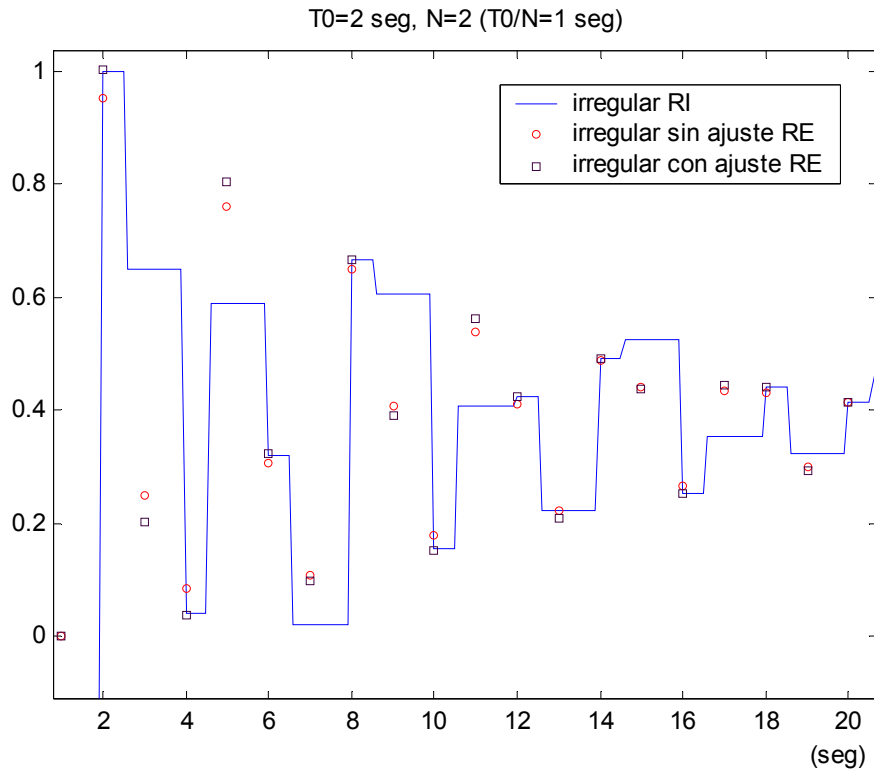


Figura 3-8: Detalle respuestas simulación ejemplo 2

Fijándose en los instantes intermedios de cada metaperiodo de la figura 3-8, se ve como el seguimiento de la fdt modelada en RE para el caso irregular y totalmente ajustada, con respecto a la modelada en RI no es lo fiel que se desearía. En esto tiene gran influencia el hecho de haber escogido un valor para el metaperiodo relativamente grande ( $T_0=2$  seg). Este aspecto pone de relevancia la necesidad de estudiar (estudio realizado en la sección 3.5) para qué valores de metaperiodo o qué desviación respecto del muestreo regular debe tener el irregular para que la aproximación realizada en el modelado deje de tener o siga teniendo validez. En este caso, rediscretizando el proceso de partida de este ejemplo para un metaperiodo más pequeño,  $T_0=0.2$  seg, se va a poder ver como ahora el seguimiento es mucho más fiel en esos instantes intermedios:

Recordar que se parte del siguiente sistema discreto definido a periodo rápido  $T_0/N$  (con  $T_0=2$  seg y  $N=2$ ):

$$G(z_2) = \frac{z_2^{-2}}{1 + 0.8z_2^{-1} + 0.8z_2^{-2}}$$

pero tras rediscretizarse con el comando d2d de Matlab para  $T_0=0.2$  seg se tiene:

$$G(z_2) = \frac{-0.1224z_2^{-1} + 0.1381z_2^{-2}}{1 - 1.937z_2^{-1} + 0.9779z_2^{-2}}$$

El polinomio  $W(z_2)$  de partida (caso regular) es en este caso (atendiendo a (3-5)):

$$W(z_2) = 1 + 1.937z_2^{-1} + 0.9779z_2^{-2}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} G(z_2) &= \frac{B(z_2)W(z_2)}{A(z_2)W(z_2)} = \frac{(-0.1224z_2^{-1} + 0.1381z_2^{-2})(1 + 1.937z_2^{-1} + 0.9779z_2^{-2})}{(1 - 1.937z_2^{-1} + 0.9779z_2^{-2})(1 + 1.937z_2^{-1} + 0.9779z_2^{-2})} = \\ &= \frac{-0.1224z_2^{-1} - 0.0989z_2^{-2} + 0.147805z_2^{-3} + 0.13505z_2^{-4}}{1 - 1.796z_2^{-2} + 0.9564z_2^{-4}} = \quad (3-17) \\ &= \frac{-0.1224z_2^{-1}(1 - 1.1283z_2^{-1})[(1 + 0.9685z_2^{-1})^2 + 0.1998z_2^{-2}]}{1 - 1.796z_2^{-2} + 0.9564z_2^{-4}} \end{aligned}$$

Realizando los pasos descritos en 3.2.4 para un patrón de muestreo donde  $\tau_1 = T_0/3$  y  $\tau_2 = 2T_0/3$  (caso irregular), y ajustando directamente el periodo de discretización, se llega a:

$$G(z_2) = \frac{-0.1224z_2^{-1}(1 - 1.1283z_2^{-1})[(1 + 1.3141z_2^{-1})^2 + 0.271z_2^{-2}]}{1 - 1.796z_2^{-2} + 0.9564z_2^{-4}}$$

donde se aprecia que el cero propio no ha variado su ubicación respecto a la que tenía en el caso regular, mientras que el cero complejo conjugado sí lo ha hecho ostensiblemente. Tan sólo queda ajustar la ganancia:

$$G(z_2) = \left( \frac{0.3837}{0.5315} \right) \left( \frac{-0.1224z_2^{-1}(1 - 1.1283z_2^{-1})[(1 + 1.3141z_2^{-1})^2 + 0.271z_2^{-2}]}{1 - 1.796z_2^{-2} + 0.9564z_2^{-4}} \right) \quad (3-18)$$

Finalmente se puede comprobar que el modelado está bien hecho, ya que tanto de (3-17) como de (3-18) se deriva la misma fdt a periodo lento ( $T_0 = 0.2$  seg), tras aplicar las leyes ya mencionadas de (Salt, 1992). En concreto, la fdt a  $T_0$  que resulta es:

$$G(z) = \frac{-0.2209z^{-1} + 0.2825z^{-2}}{1 - 1.796z^{-1} + 0.9564z^{-2}}$$

En la figura 3-9 se muestra el diagrama de bloques adoptado para simular este caso rediseñado, donde aparece de arriba abajo:

- Operador Multifrecuencia Irregular: similar al empleado en la figura 3-6, pero ahora considerando el metaperiodo con el valor  $T_0 = 0.2$  seg.
- f.d.t. caso irregular  $[0, T_0/3]$  modelada en RE.
- f.d.t. caso regular  $[0, T_0/2]$  modelada en RE.

En la figura 3-10 se ve una evolución global de las respuestas (ante escalón) simuladas en este caso. Por su parte en la figura 3-11 se observa con más detalle como el modelado en

RE para el caso irregular sigue ahora fielmente tanto a metaperiodo como a instantes intermedios a la respuesta del caso modelado en RI. Por su parte, el caso regular en RE difiere de los anteriores a instantes intermedios, pero coincide a metaperiodo, como cabía esperar.

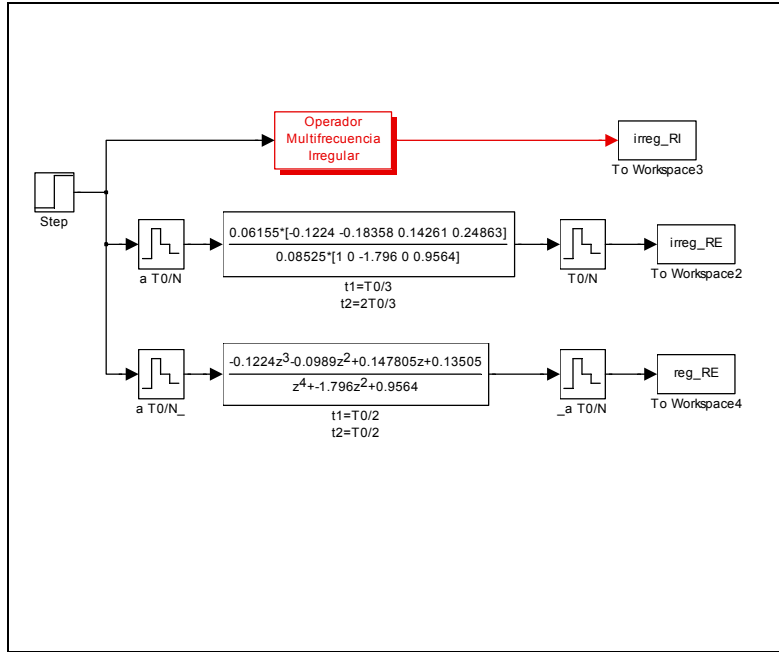


Figura 3-9: Diagrama de bloques simulación ejemplo 2 rediseñado.

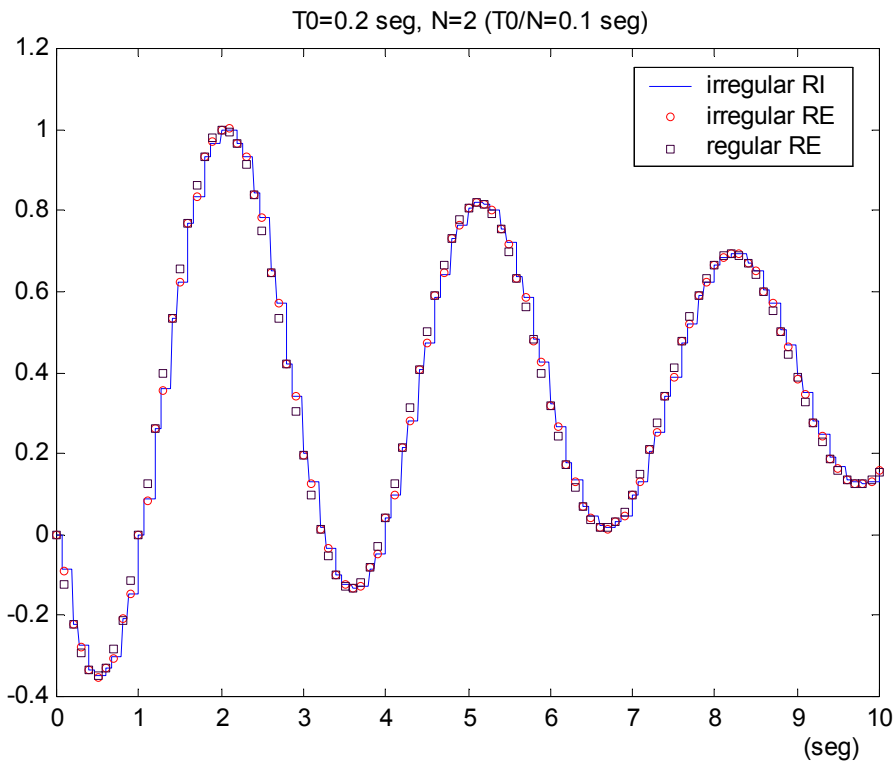


Figura 3-10: Respuestas simulación ejemplo 2 rediseñado.

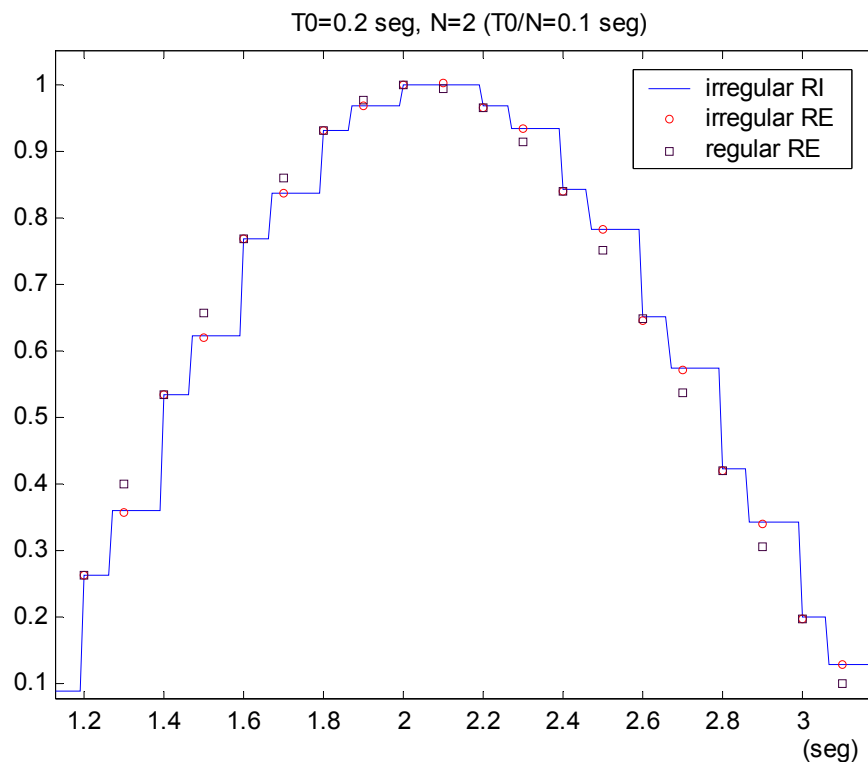


Figura 3-11: Detalle respuestas simulación ejemplo 2 rediscritizado.

### 3.4.3. Ejemplo 3: sistema con cero discreto real positivo.

Se parte del siguiente sistema continuo

$$G(s) = \frac{s + 50.21}{s + 11.16}$$

que discretizado a periodo rápido  $T_0/N$  (con  $T_0=0.04$  seg y  $N=2$ ) queda:

$$G(z_2) = \frac{1 - 0.1z_2^{-1}}{1 - 0.8z_2^{-1}}$$

El polinomio  $W(z_2)$  de partida (caso regular) es (atendiendo a (3-5)):

$$W(z_2) = (1 + 0.8z_2^{-1})$$

por lo que:

$$G(z_2) = \frac{B(z_2)W(z_2)}{A(z_2)W(z_2)} = \frac{(1 - 0.1z_2^{-2})(1 + 0.8z_2^{-1})}{(1 - 0.8z_2^{-1})(1 + 0.8z_2^{-1})} = \frac{1 + 0.7z_2^{-1} - 0.08z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} \quad (3-19)$$

Realizando los pasos descritos en 3.2.4 se llega a:

$$G(z_2) = \frac{1 + 0.7z_2^{-1} - 0.08z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} \Rightarrow G(s) = \frac{1 + 0.7\left(\frac{e^{-s\tau_1} + e^{-s\tau_2}}{2}\right) - 0.08e^{-sT_0}}{1 - 0.64e^{-sT_0}}$$

donde para un caso de muestreo regular ( $\tau_1=\tau_2= T_0/2$ ) claramente se deduce que los dos ceros en S se ubican en  $s'=-115.1293$  y  $s''=-11.1572 \pm 157.08i$ , de tal forma que al discretizarlos, como ya sabíamos, en  $z_N$  se sitúan en  $z_2'=0.1$  y  $z_2''=-0.8$ . Por su parte, los dos polos están en  $z_2'=0.8$  y  $z_2''=-0.8$ , siendo el de  $z_2'$  el propio del proceso y el de  $z_2''$  el resultante de  $W(z_2)$ . Como ya se vio en secciones anteriores, en el caso regular este último coincide en valor con el cero resultante de  $W(z_2)$ . Además, también se vio que los polos permanecerán en las ubicaciones mostradas, independientemente del esquema de muestreo utilizado.

Si se varía el patrón de muestreo, de forma que  $\tau_1= T_0/3$  y  $\tau_2= 2T_0/3$  (caso irregular), el modelo del proceso queda:

$$G(z_2) \Rightarrow G(s) = \frac{1 + 0.7\left(\frac{e^{-s\frac{T_0}{3}} + e^{-s\frac{2T_0}{3}}}{2}\right) - 0.08e^{-sT_0}}{1 - 0.64e^{-sT_0}}$$

Igualando a cero el numerador se obtienen los nuevos ceros en S:  $s'=-128.735$  y  $s''=-30.3422 \pm 148.41i$ .

El segundo de los ceros es complejo conjugado en S y se ha de convertir a real negativo en  $z_N$ ; la forma de tratar este tipo de ceros ya se ha visto en los ejemplos anteriores, por lo que no se analizará ahora en detalle. Simplemente comentar, que tras aplicar (3-9) se obtiene  $z_2''=-0.5261$ .

Por su parte, el primero de los ceros es real negativo en S; carece por tanto de sentido aplicarle la ecuación (3-9), ya que, además, en el caso regular es también real negativo, como se ha visto anteriormente. Por tanto, se le va a realizar un reajuste de los coeficientes del numerador según se comentó en 3.3.1. Para ello, se tomará como periodo de discretización  $T_0/N$  (periodo con  $N=2$  intermedio a  $T_0/3$  y  $2T_0/3$ ) quedando la conversión a  $z_N$  como  $z_2'=0.0762$ . Se ve claramente el movimiento que ha experimentado el cero propio del proceso respecto de su ubicación en el caso regular, como ya se comentó en secciones anteriores. Si se siguiera muestreando de forma irregular el proceso mediante otros patrones, los cuales supusieran que el muestreo intermedio se fuera acercando cada vez más al inicio del metaperiodo, se vería que efectivamente dicho cero iría cambiando su ubicación en una dirección concreta.

Por tanto, obtenidos los dos ceros, la f.d.t. que representa al sistema (sin ajuste de coeficientes todavía) será:

$$G(z_2) = \frac{(1 - 0.0762z_2^{-1})(1 + 0.5261z_2^{-1})}{1 - 0.64z_2^{-2}} = \frac{1 + 0.4499z_2^{-1} - 0.04009z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} \quad (3-20)$$

Se podría hacer una simulación para ver el comportamiento de esta f.d.t. obtenida para el caso irregular, pero previamente se debería hacer un ajuste de ganancia (por lo visto en 3.3.2). Así, si se evalúa la ganancia de cada f.d.t. se tiene:

- de (3-19),  $G(1)_{\text{regular}} = 4.5$
- de (3-20),  $G(1)_{\text{irregular}} = 3.9161421$

por lo que realmente (3-20) queda:

$$G(z_2) = \frac{G(1)_{\text{regular}}}{G(1)_{\text{irregular}}} \frac{(1 - 0.0762z_2^{-1})(1 + 0.5261z_2^{-1})}{1 - 0.64z_2^{-2}} = \frac{4.5}{3.91614} \left( \frac{1 + 0.4499z_2^{-1} - 0.04009z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} \right)$$

En la figura 3-12 se ve el esquema de bloques utilizado en la simulación, donde directamente se ha incluido:

- Operador Multifrecuencia Irregular: este bloque, además del metaperiodo ( $T_0=0.04$  seg) y del esquema de muestreo a entrada y salida (ambos  $[0, T_0/3]$ ), incluye el modelo del sistema continuo en RI. Nos va a servir para comparar si la respuesta obtenida por externa (f.d.t. modeladas) se aproxima a la obtenida por interna mediante el modelado presentado en el capítulo 2.
- f.d.t. modelada en RE caso irregular  $[0, T_0/3]$  con ajuste de ganancia, pero sin ajuste de coeficientes. Nos va a permitir comprobar la respuesta de la f.d.t. sin este ajuste último.

La respuesta ante escalón para cada caso queda representada en la figura 3-13. En ella hay que prestar atención tanto a los instantes marcados por el metaperiodo ( $T_0=0.04$  seg) como a los marcados por el muestreo intermedio ( $T_0/3$ ), de tal manera que a simple vista se ve que, pese a estar ajustada en ganancia la f.d.t. irregular obtenida en RE, al no tener ajuste de coeficientes su respuesta se aproxima poco a la del modelo en RI para los primeros instantes del transitorio.

Si se hace un estudio (por (Salt,1992)) de los coeficientes a periodo lento que surgen de la f.d.t. a periodo rápido del caso irregular (una vez ajustada en ganancia), se observa que:

$$G(z_2) = \frac{4.5}{3.91614} \left( \frac{1 + 0.4499z_2^{-1} - 0.04009z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} \right) \Rightarrow G(z) = \frac{1.14909 + 0.47091z^{-1}}{1 - 0.64z^{-1}}$$

que difieren sensiblemente de los obtenidos a partir de la f.d.t del caso regular

$$G(z_2) = \frac{1 + 0.7z_2^{-1} - 0.08z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} \Rightarrow G(z) = \frac{1 + 0.62z^{-1}}{1 - 0.64z^{-1}}$$

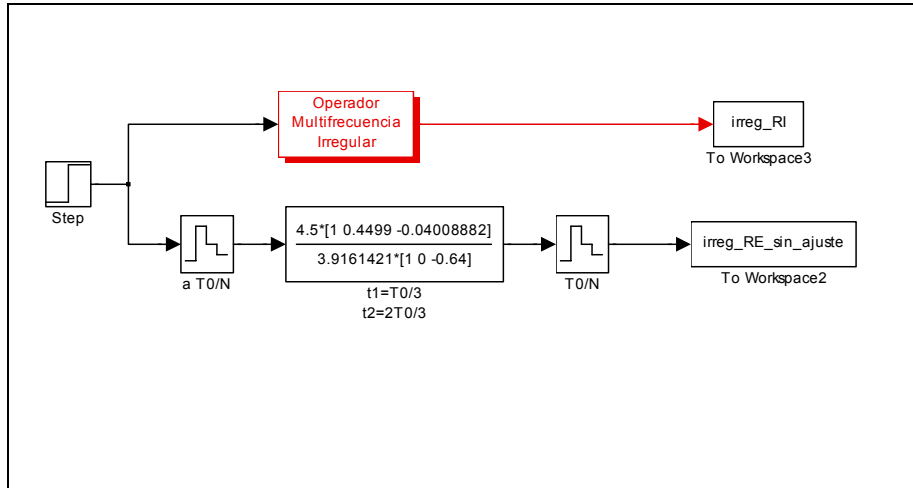


Figura 3-12: Diagrama de bloques simulación 1 ejemplo 3

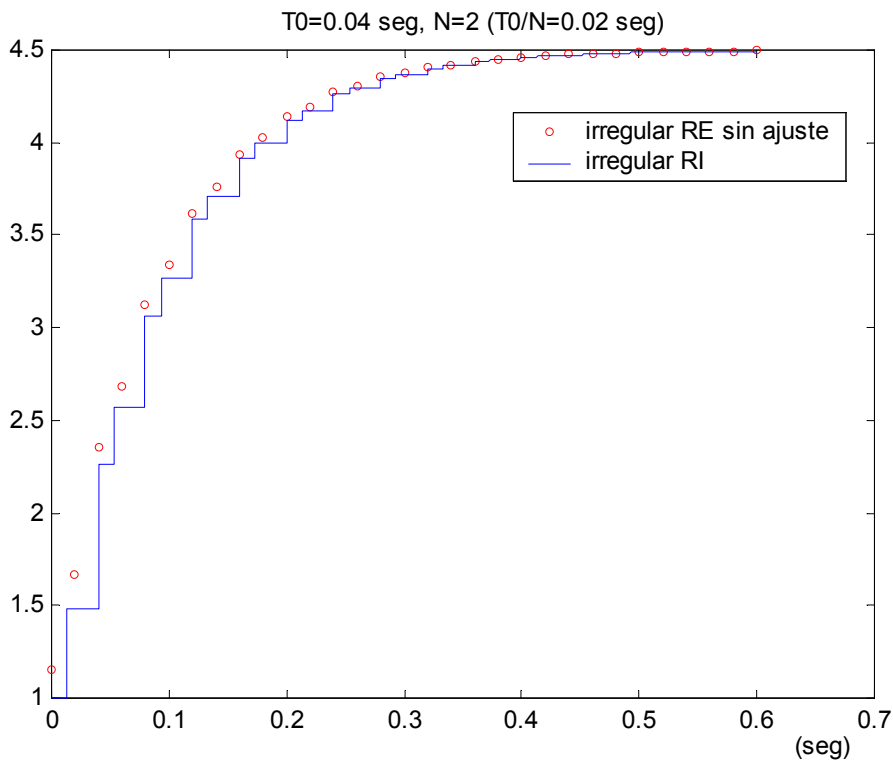


Figura 3-13: Respuestas simulación 1 ejemplo 3

Sin embargo, vista esta última f.d.t. a periodo lento, se podrían ajustar los coeficientes de la f.d.t. irregular a periodo rápido con el fin de que ésta al expresarla a periodo lento arroje los mismos coeficientes derivados del caso regular. De esta forma se estaría garantizando un comportamiento a metaperiodo ajustado al modelo por RI. Así pues, cogiendo (3-20)

$$G(z_2) = \frac{1 + 0.4499z_2^{-1} - 0.04009z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} \Rightarrow G(z) = \frac{1 + 0.40981z^{-1}}{1 - 0.64z^{-1}}$$



se observa un desajuste de valor 0.21019 en el coeficiente de la  $z^{-1}$  (a periodo lento) del numerador respecto de la f.d.t. a periodo lento derivada del caso regular. Para solventar dicho desajuste, se tendrá que actuar sobre los coeficientes de  $z_2^{-1}$  ó  $z_2^{-2}$  (a periodo rápido) de la f.d.t. del caso irregular, ya que son los que repercuten luego en el coeficiente de  $z^{-1}$  de la fdt lenta. Actuando sobre cualquiera de los coeficientes de las potencias anteriores se logra que el modelo en RE coincida con el de RI en los instantes marcados por el metaperiodo. Si además, el coeficiente elegido para el ajuste es el de  $z_2^{-2}$ , se logra un buen seguimiento también en los instantes intermedios del metaperiodo. Esta afirmación se puede comprobar fácilmente por simulación u observando la figura 3-13, donde el incremento que experimenta la respuesta en el instante intermedio (a lo largo de los distintos metaperiodos) para el modelo en RI es prácticamente el mismo que se experimenta para la respuesta del modelo en RE sin ajuste, lo cual significa que el desajuste viene justamente en el instante de final del metaperiodo, en el que se puede observar claramente que el incremento de ambas respuestas es diferente. Así, la nueva f.d.t. del caso irregular quedará:

$$G(z_2) = \frac{1 + 0.4499z_2^{-1} + (-0.04009 + 0.2109)z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} = \frac{1 + 0.4499z_2^{-1} + 0.1701z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow G(z) = \frac{1 + 0.62z^{-1}}{1 - 0.64z^{-1}}$$

Como es fácil deducir, esta nueva f.d.t. a periodo rápido para el caso irregular ya está ajustada en ganancia, por lo que se puede simular directamente. Para ello se ha utilizado el esquema de la figura 3-14, muy parecido al de la figura 3-12, salvo que ahora también aparece el modelo en RE del caso regular, el cual nos servirá para comprobar la bonanza que aporta el caso irregular frente a éste. En la figura 3-15 se ven las respuestas (ante escalón) simuladas, comprobándose que tanto a metaperiodo ( $T_0=0.04$  seg) como a instantes intermedios ( $T_0/3$ ) la respuesta del modelo irregular en RE se ajusta bastante bien a la del modelo irregular por RI, mientras que el modelo regular en RE sólo coincide con los anteriores en los instantes marcados por el metaperiodo (como cabría esperar).

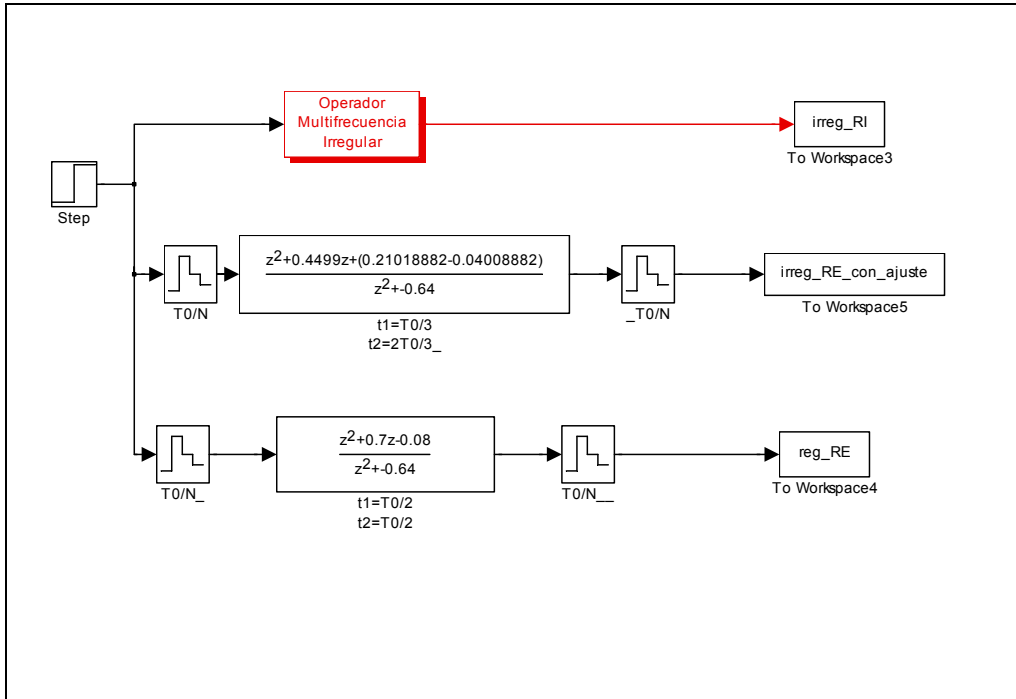


Figura 3-14: Diagrama de bloques simulación 2 ejemplo 3

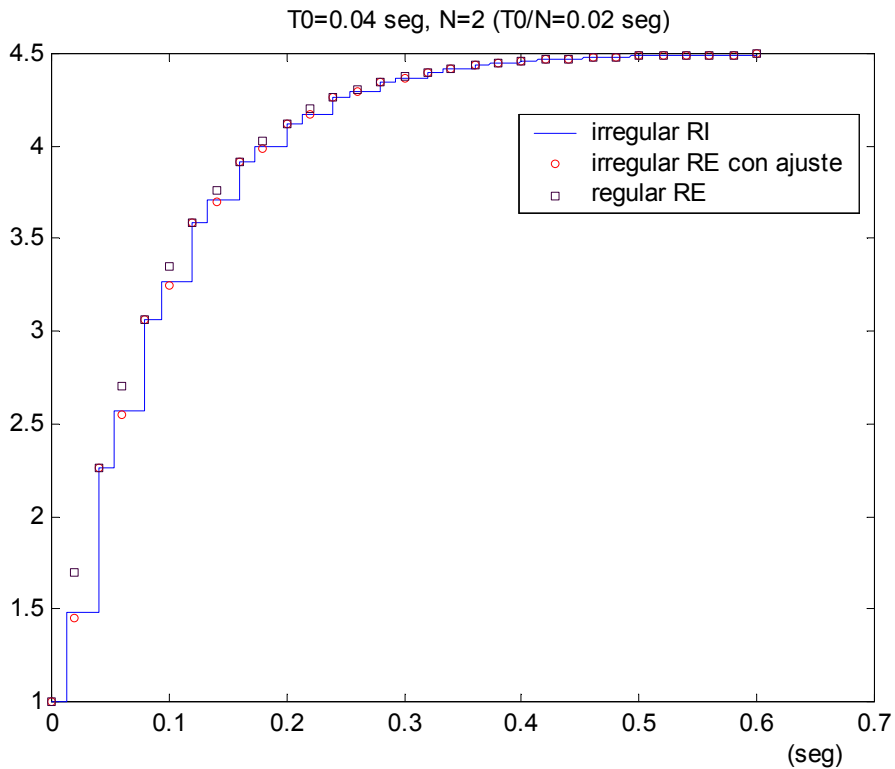


Figura 3-15: Respuesta simulación 2 ejemplo 3

### 3.5. CONDICIONES DE APLICABILIDAD DEL MODELADO.

En esta sección se pretende establecer una serie de relaciones empíricas a través de las cuales poder fijar bajo qué condiciones la aproximación en la que se basa el modelado en RE desarrollado resulta factible.

Para ello, primero se van a presentar una batería de pruebas llevadas a cabo con los procesos presentados a lo largo del capítulo. Tras ello, se expondrán las relaciones empíricas que se deducen del estudio.

#### 3.5.1. Pruebas a partir de los procesos presentados en el capítulo.

- Proceso de la sección 3.4.2.

Como ya se vio para este proceso, cuando  $T_0=2$  seg el modelado no permitía reflejar fielmente la respuesta del sistema en los instantes intermedios del metaperiodo. Sin embargo, cuando  $T_0$  era 10 veces menor ( $T_0=0.2$  seg) sí se comprobaba que la aproximación llevada a cabo era buena (comparando la respuesta obtenida por el modelado en RE con la que se obtiene a través del de RI). Parece claro que, como consecuencia de disminuir el metaperiodo, la distancia temporal  $d_{T_0}$  entre el instante intermedio regular de tiempo (con  $N=2$ ,  $T_0/2$ ) y el irregular escogido (en este caso,  $T_0/3$ ; por tanto  $d_{T_0} = T_0/2 - T_0/3$  seg) también disminuye. Concretamente se pasa de  $d_2 = 0.33$  seg a  $d_{0.2} = 0.033$  seg (10 veces más pequeña, como cabía esperar).

Se puede seguir evaluando este proceso para valores de metaperiodo cada vez mayores (manteniendo el mismo patrón de muestreo:  $\tau_1 = T_0/3$ ,  $\tau_2 = 2T_0/3$ ), con el fin de ver a partir de qué valor de  $T_0$  la aproximación deja de ser buena. Así, si:

- $T_0=0.6$  seg ( $d_{0.6} = 0.1$ ) el modelado devuelve:

$$G(z_2) = \frac{-0.2131z_2^{-1} - 0.114015z_2^{-2} + 0.25729z_2^{-3} + 0.5431z_2^{-4}}{1 - 0.641625z_2^{-2} + 0.874786z_2^{-4}}$$

cuya respuesta ante escalón (obtenida mediante simulación, de manera similar a las llevadas a cabo en la sección 3.4) desemboca en la figura 3-16. Se observa que nuevamente la aproximación es buena.

- $T_0=0.8$  seg ( $d_{0.8} = 0.133$ ) el modelado devuelve:

$$G(z_2) = \frac{-0.282824z_2^{-1} + 0.072914z_2^{-2} + 0.314354z_2^{-3} + 0.642007z_2^{-4}}{1 + 0.102604z_2^{-2} + 0.836493z_2^{-4}}$$

cuya respuesta simulada ante escalón de entrada se puede observar en la figura 3-17. Todavía es buena la aproximación.

-  $T_0=1$  seg ( $d_1 = 0.167$ ) el modelado devuelve:

$$G(z_2) = \frac{-0.3155z_2^{-1} + 0.31572z_2^{-2} + 0.2945z_2^{-3} + 0.70621z_2^{-4}}{1 + 0.79977z_2^{-2} + 0.7999z_2^{-4}}$$

cuya respuesta ante escalón de entrada se puede observar en la figura 3-18. Se percibe como ya la aproximación deja de ser buena para los instantes intermedios del metaperiodo.

Este hecho hace reflexionar acerca de si  $d_1$  podría considerarse para este proceso como una distancia a partir de la cual el modelado deja de ser efectivo. Considerando un nuevo patrón de muestreo, por ejemplo para el caso  $T_0=0.8$  seg, se podría intentar encontrar una distancia mayor a  $d_1$  que sirviera para ver si la afirmación anterior sigue cumpliéndose. Así, si  $\tau_1 = T_0/4$ ,  $\tau_2 = 3T_0/4$  se tiene  $d'_{0.8} = 0.2$ , que es mayor a  $d_1$ . La fdt resultante del modelado se muestra a continuación y la salida ante escalón en la figura 3-19. Se puede ver claramente como algunos instantes intermedios vuelven a diferir en cierta medida de los marcados por el modelado en RI:

$$G(z_2) = \frac{-0.2186z_2^{-1} + 0.0087z_2^{-2} + 0.147075z_2^{-3} + 0.809286z_2^{-4}}{1 + 0.79977z_2^{-2} + 0.7999z_2^{-4}}$$

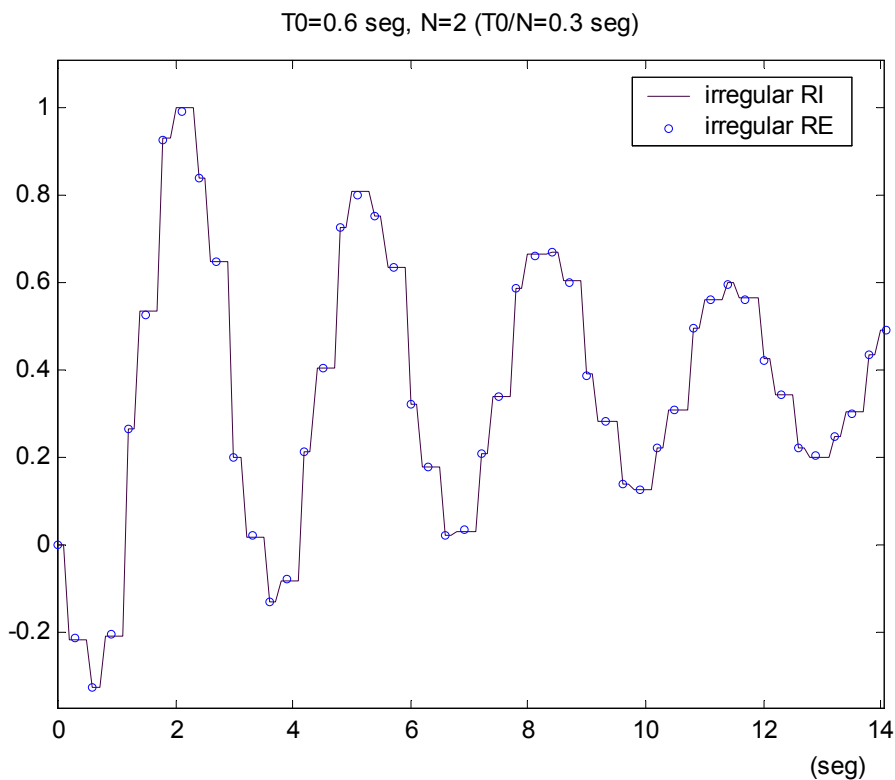


Figura 3-16: Respuesta proceso sección 3.4.2 para  $T_0=0.6$  seg y  $\tau_1 = T_0/3$ ,  $\tau_2 = 2T_0/3$

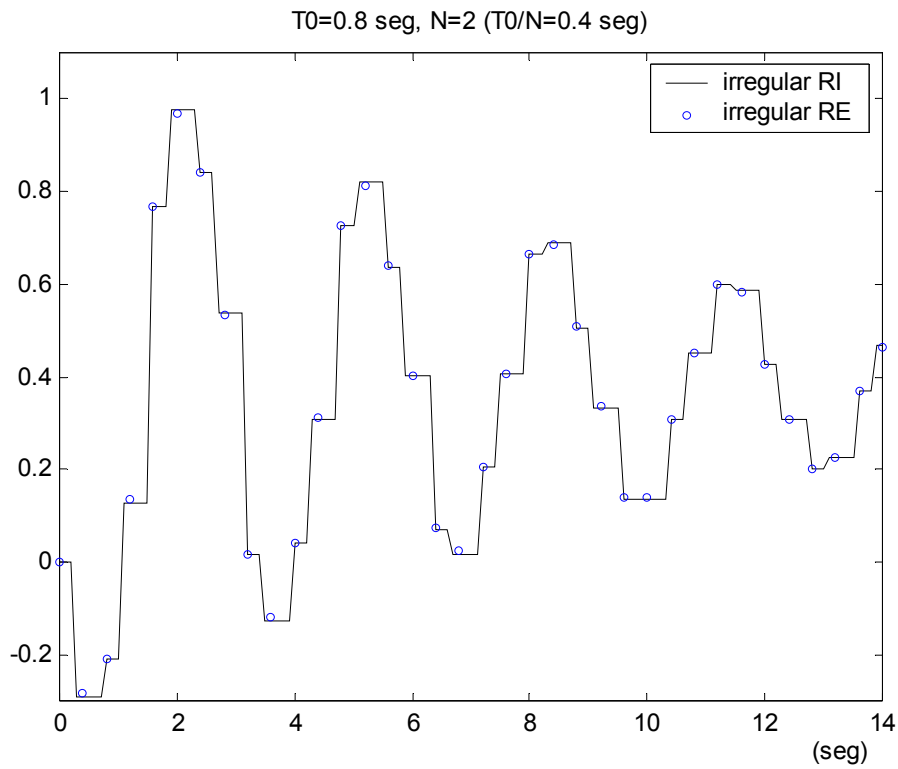


Figura 3-17: Respuesta proceso sección 3.4.2 para  $T_0=0.8$  seg y  $\tau_1 = T_0/3$ ,  $\tau_2 = 2T_0/3$

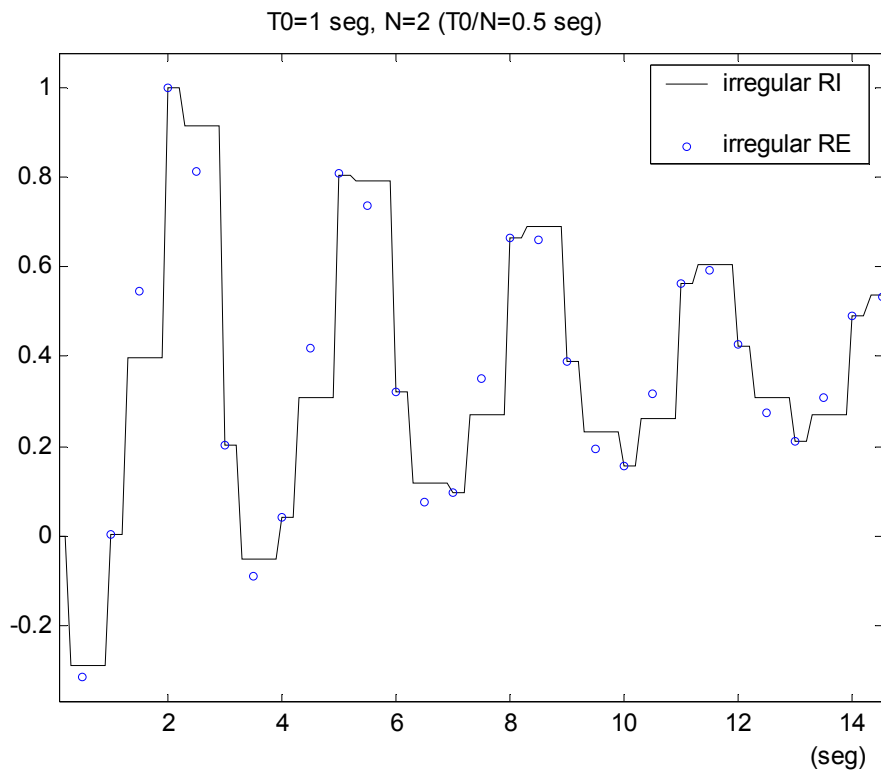


Figura 3-18: Respuesta proceso sección 3.4.2 para  $T_0=1$  seg y  $\tau_1 = T_0/3$ ,  $\tau_2 = 2T_0/3$

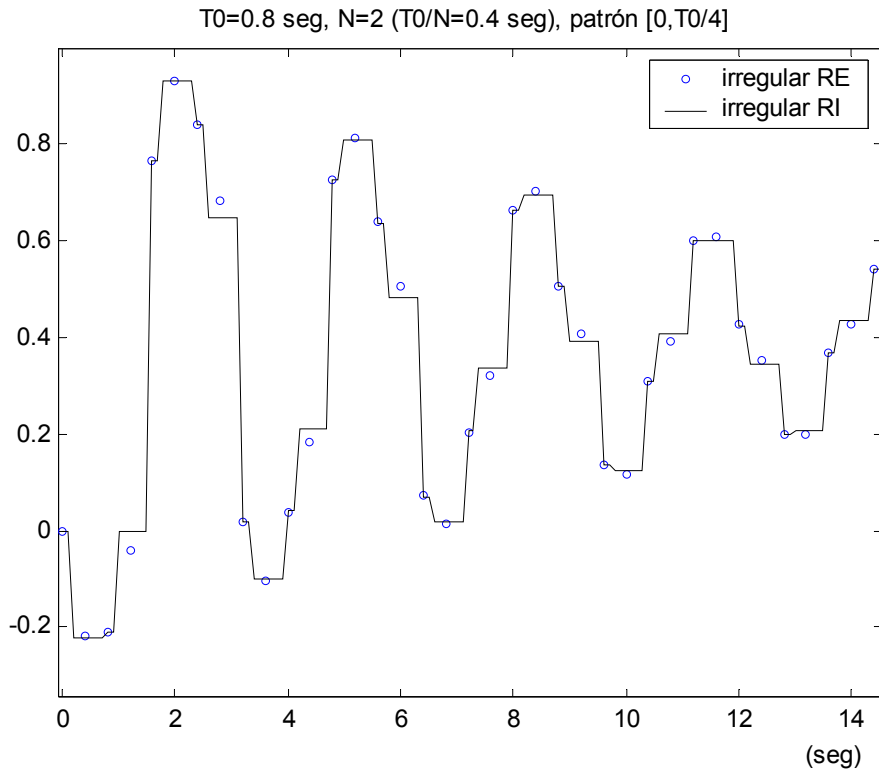


Figura 3-19: Respuesta proceso sección 3.4.2 para  $T_0=0.8$  seg y patrón  $\tau_1 = T_0/4$ ,  $\tau_2 = 3T_0/4$

Como consecuencia de este primer estudio se podría decir que, para este proceso, distancias aproximadamente superiores a 0.15 seg entre el instante intermedio del caso uniforme (regular) con respecto al no uniforme (irregular) supone pérdida de aplicabilidad del modelado desarrollado en RE.

- Proceso de la sección 3.4.1.

En dicha sección se vio que para  $T_0=0.2$  seg,  $N=2$  y  $\tau_1 = T_0/3$ ,  $\tau_2 = 2T_0/3$  el modelado era bastante fidedigno. De este caso se deduce  $d_{0.2} = 0.033$  seg. Si se evalúa ahora para  $T_0=0.6$  seg y  $N=2$  los dos siguientes patrones de muestreo:

- $\tau_1 = 0.25$ ,  $\tau_2 = 0.35 \Rightarrow d'_{0.6} = 0.05$ :

$$G(z_2) = \frac{0.2729z_2^{-1} + 0.280265z_2^{-2} - 0.0295z_2^{-3} - 0.050764z_2^{-4}}{1 - 0.8509z_2^{-2} + 0.16532z_2^{-4}}$$

- $\tau_1 = T_0/6$ ,  $\tau_2 = 5T_0/6 \Rightarrow d''_{0.6} = 0.2$ :

$$G(z_2) = \frac{0.154z_2^{-1} + 0.40622z_2^{-2} - 0.02216z_2^{-3} - 0.06508z_2^{-4}}{1 - 0.8509z_2^{-2} + 0.16532z_2^{-4}}$$

se puede observar como para el primero, la respuesta ante escalón comienza a mostrar valores discrepantes en las primeras iteraciones (figura 3-20), mientras que para el segundo (figura 3-21) dicha discrepancia se acrecienta todavía más. Esto hace pensar que a partir de una distancia aproximadamente superior a 0.05 seg, el modelado en RE para este proceso deja de tener viabilidad.

- Proceso de la sección 3.4.3.

Por último en esta sección se vio que para  $T_0=0.04$  seg,  $N=2$  y  $\tau_1 = T_0/3$ ,  $\tau_2 = 2T_0/3$  el modelado se aproximaba fielmente a la respuesta obtenida por RI. De este caso se deduce  $d_{0,2} = 0.0067$  seg. Si para el mismo  $T_0$  y  $N$  se evalúa ahora los dos patrones de muestreo siguientes:

- $\tau_1 = 0.005$ ,  $\tau_2 = 0.035 \Rightarrow d'_{0,04} = 0.015$ :

$$G(z_2) = \frac{1 + 0.2188z_2^{-1} + 0.4012z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}}$$

- $\tau_1 = 0.001$ ,  $\tau_2 = 0.039 \Rightarrow d''_{0,04} = 0.019$ :

$$G(z_2) = \frac{1 + 0.2005z_2^{-1} + 0.4195z_2^{-2}}{1 - 0.64z_2^{-2}}$$

se puede observar como para el primero, la respuesta ante escalón sigue siendo muy aproximada al caso de RI (figura 3-22), mientras que para el segundo (figura 3-23) se comienza a detectar cierto desajuste entre el valor suministrado por la RE y la RI. De aquí se puede deducir que a partir de una distancia aproximadamente de 0.019 seg (o incluso un poco inferior), el modelado en RE para este proceso deja de ser aplicable con rigor.

### 3.5.2. Relaciones empíricas que se deducen del estudio.

A la vista de los resultados obtenidos en el estudio desarrollado en el apartado anterior parece claro, como cabría esperar, que la aplicabilidad del modelado depende del proceso bajo estudio. Decir esto es equivalente a decir que puede depender, entre otras circunstancias, de la dinámica de los polos del proceso (constantes de tiempo), y en concreto, cuando se tiene un sistema de segundo orden o superior, del polo de dinámica más lenta o dominante.

Se establece que  $s = -\sigma \pm jw_p$  es un polo complejo conjugado continuo, donde  $\sigma$  es el factor de decrecimiento y  $w_p$  la pulsación propia del mismo (si el polo es real  $w_p = 0$ ). Si para cada caso estudiado se hace un recordatorio de las distancias temporales  $d$  a partir de las cuales (aproximadamente) no se puede garantizar un buen funcionamiento del modelado y se comparan con la parte real  $\sigma$  del polo de dinámica más lenta de cada proceso tratado, se puede ver que:

	Ejemplo sección 3.4.2	Ejemplo sección 3.4.1	Ejemplo sección 3.4.3
Valor de $\sigma$	0.1116	1	11.16
Valor de $d$	0.15	0.05	0.017

- conforme más lenta sea la dinámica del polo dominante (menor valor de  $\sigma$ ) mayor margen de variabilidad hay en el patrón de muestreo (mayor  $d$ ), y viceversa.
- la relación aproximada entre  $\sigma$  y  $d$  es tal que  $10\sigma \Rightarrow d/3$ , esto es, si aumenta aproximadamente 10 veces  $\sigma$  disminuye aproximadamente 3 veces  $d$ .

Por último, cabe insistir en que se trata de relaciones totalmente empíricas, fruto del estudio de los ejemplos presentados.

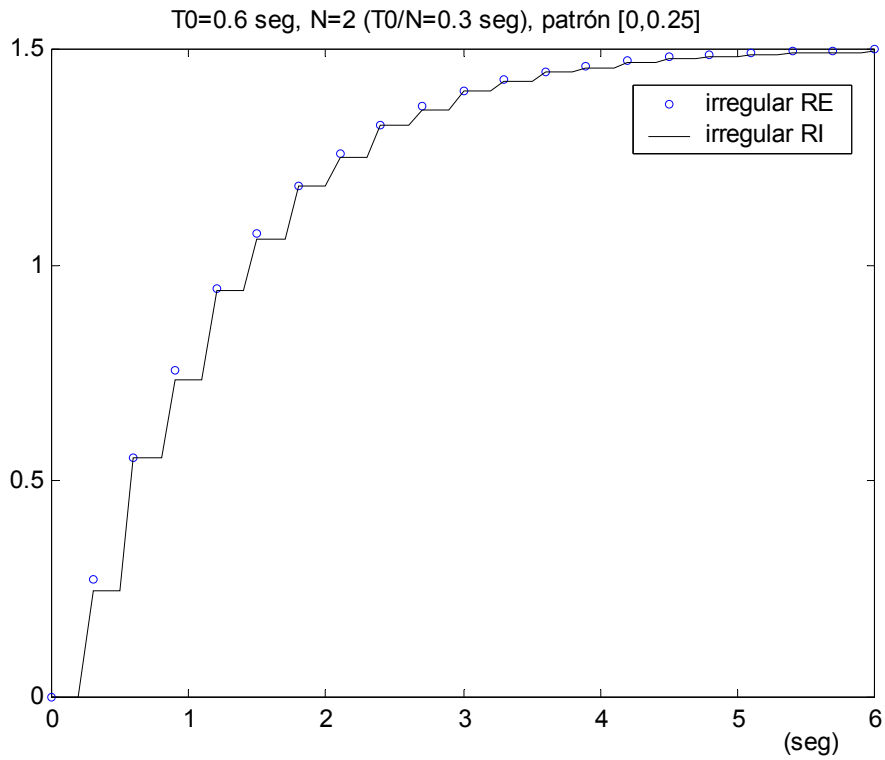


Figura 3-20: Respuesta proceso sección 3.4.1 para  $T_0=0.6$  seg y patrón  $\tau_1 = 0.25$ ,  $\tau_2 = 0.35$



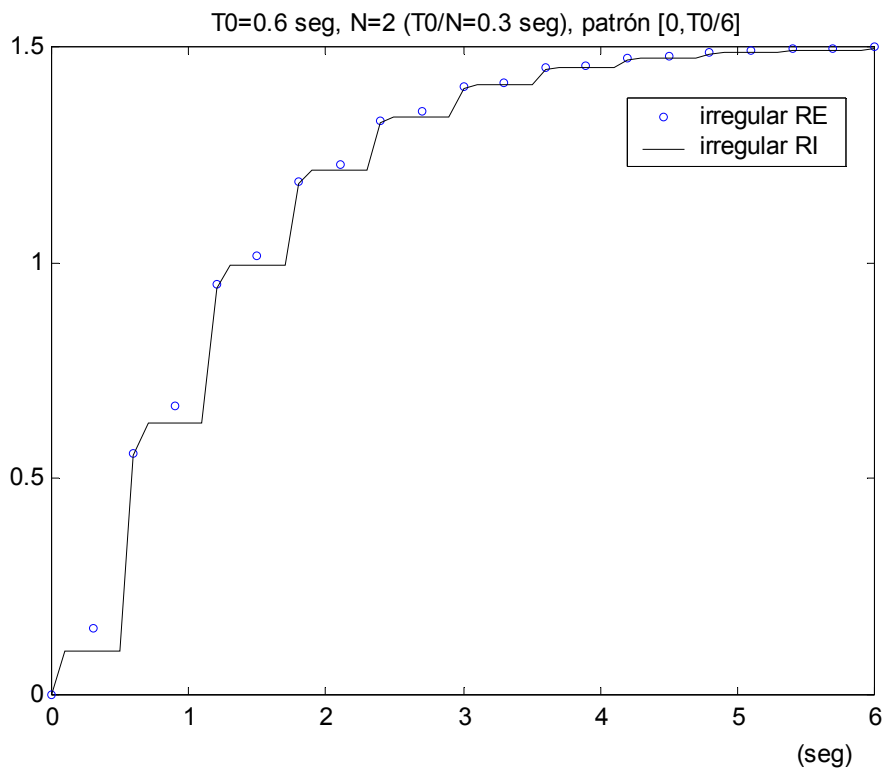


Figura 3-21: Respuesta proceso sección 3.4.1 para  $T_0 = 0.6$  seg y patrón  $\tau_1 = T_0 / 6$ ,  $\tau_2 = 5T_0 / 6$

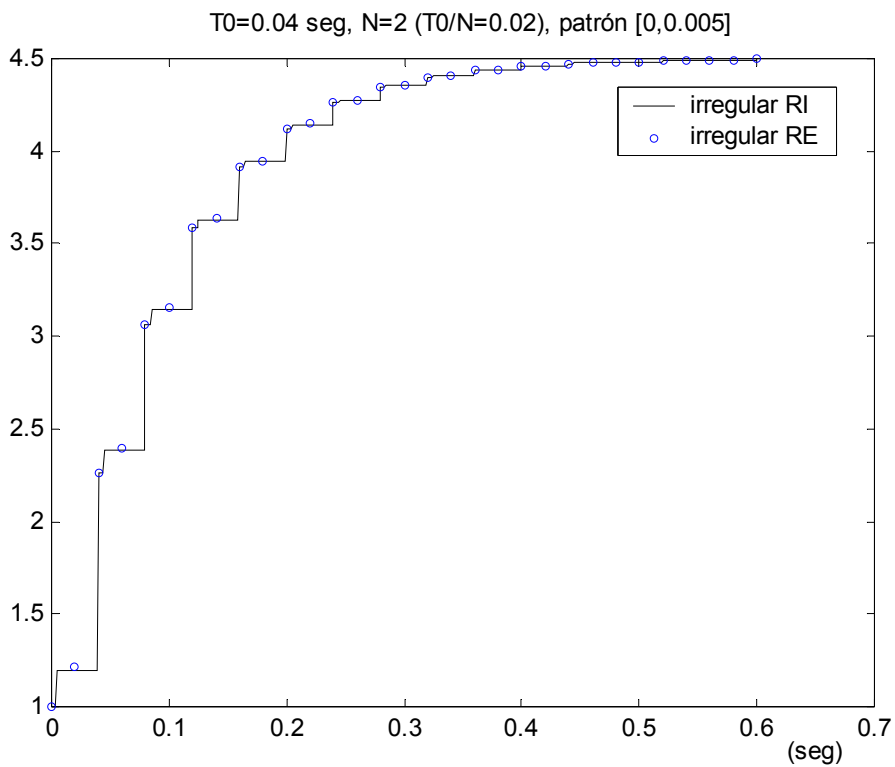


Figura 3-22: Respuesta proceso sec. 3.4.3 para  $T_0 = 0.04$  seg y patrón  $\tau_1 = 0.005$ ,  $\tau_2 = 0.035$

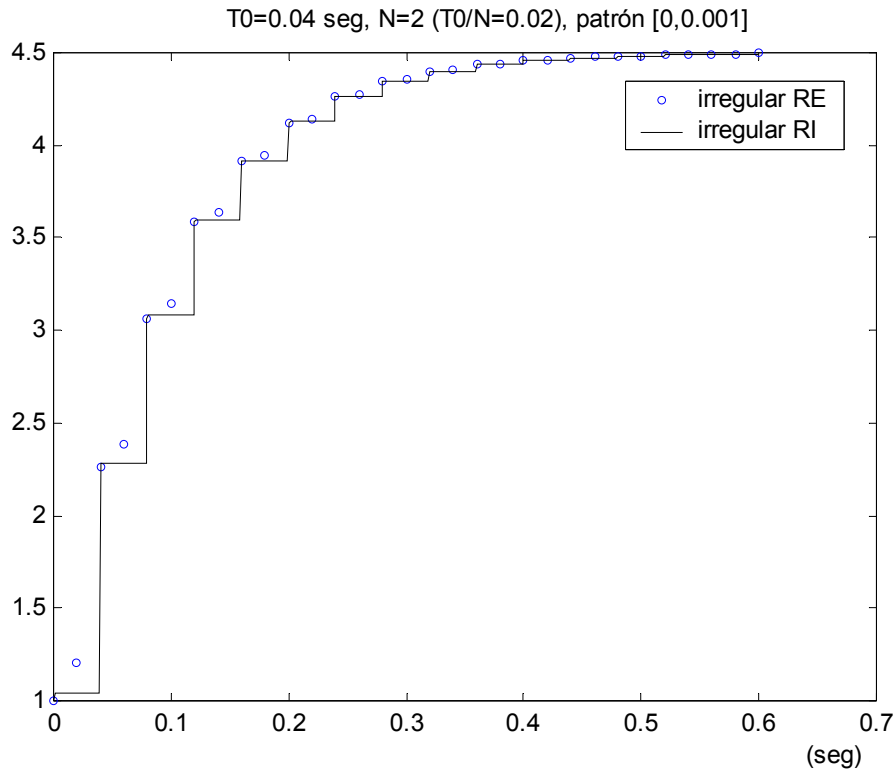


Figura 3-23: Respuesta proceso sec. 3.4.3 para  $T_0=0.04$  seg y patrón  $\tau_1 = 0.001, \tau_2 = 0.039$

### 3.6. CONCLUSIONES.

A lo largo de este capítulo se plantea un modelado para sistemas muestreados de forma no convencional basado en la RE. Para llevarse a cabo dicho modelado se parte de unos conceptos básicos acerca de este tipo de sistemas, para luego adentrarse en el tratamiento de la problemática concreta que subyace a la hora de lograr el modelado final. Al hilo de esto último, se hace un estudio detallado, tanto de las diferentes estructuras (ubicación de polos y ceros) que pueda presentar de partida el sistema bajo estudio, como de las repercusiones que estas estructuras pueden acarrear a la hora de muestrear dicho sistema de manera no uniforme en el tiempo.

A la vista de los resultados logrados por simulación, la respuesta obtenida con el modelado en RE logra aproximarse de manera clara a la respuesta que arroja el modelado por RI (que supone una respuesta exacta para el sistema), tanto a metaperiodo como a instantes intermedios del metaperiodo, siempre y cuando se cumplan las relaciones empíricas establecidas en la sección 3.5. Por tanto, como quiera que este modelado en RE se ha planteado para hacer frente a posibles retardos que surjan en un sistema de control, siempre que éstos se encuentren dentro de los rangos que establecen las relaciones deducidas, se garantiza un correcto modelado del sistema muestreado de forma no convencional PVT, el cual puede ser utilizado posteriormente en la etapa de diseño (capítulo 6).



## **CAPÍTULO 4**

# **ANÁLISIS DE REGULADORES CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL EN EL DOMINIO TEMPORAL**



#### 4.1. OBJETIVOS Y ENFOQUE DEL CAPÍTULO.

En este capítulo, como en el resto, una de las principales motivaciones para su desarrollo radica en la utilización de sistemas de tiempo real, en los que suelen aparecer retardos en el tratamiento de las distintas señales que intervienen, debido, entre otras razones, a la utilización de tareas y medios compartidos. Desde esta óptica parece razonable plantear un estudio de dichos sistemas con doble vertiente análisis-diseño cuando son muestreados de forma no convencional, con el fin de obtener un entorno de especificaciones alrededor del cual se encontrará el diseño del sistema de control, dada la posibilidad de fijar el esquema de muestreo no convencional como un parámetro más de diseño.

Para abordar la problemática planteada e investigar la factibilidad y validez de los reguladores de estructura no convencional aplicables a estas situaciones se va a utilizar en este capítulo el punto de vista del dominio temporal, ya que permite circunscribir una mayor facilidad e intuición a la hora de analizar los resultados alcanzados.

Además, el estudio analítico exhaustivo del sistema de control con muestreo no convencional se va a particularizar al caso basado en el hecho de que el regulador que se antepone al proceso es un Regulador tipo P-I-D, dado que este tipo de reguladores se caracterizan por tener gran robustez y ser muy utilizados en el control de procesos industriales. No obstante, el estudio podría ser fácilmente extrapolable a otro tipo de reguladores con estructura no convencional.

El análisis se llevará a cabo desde diferentes puntos de vista estructurales para el regulador, concretamente, en un primer estudio se le dotará de estructura interactiva y en un segundo estudio de estructura paralela. El objetivo será, por tanto, realizar un análisis de los resultados alcanzados con cada estructura para este tipo de reguladores cuando se les somete a esquemas de muestreo no convencionales.

Previo al estudio de los reguladores tipo P-I-D con estructura no convencional se introducirá un epígrafe titulado “Metodología de Análisis en el Dominio Temporal”, que expondrá las diferentes etapas que se han de llevar a cabo para poder hacer un correcto análisis del sistema de control con muestreo no convencional. Entre dichas etapas cobran gran importancia la dedicada al modelado del sistema con muestreo no convencional y la dedicada a determinar la cadena directa regulador-proceso. La primera es importante debido al hecho de que ha supuesto la elaboración previa de una serie de leyes de recurrencia (capítulo 2) basadas en la Metodología de Kranc (Kranc, 1957a), (Kranc, 1957b), (Thompson, 1986) las cuales hacen posible modelar con muestreo no-convencional el sistema bajo estudio. La segunda es importante por el hecho de que permite disponer de la formulación necesaria para considerar en última instancia el sistema en bucle cerrado como un sistema representado en forma monofrecuencial a metaperiodo (periodo que suele coincidir con el m.c.m. de los involucrados en el sistema).

Para finalizar, decir que se han desarrollado una serie de programas de simulación convencional en Matlab que hacen posible el estudio analítico. No obstante, dado que en dicho estudio son muchos los parámetros a considerar, se ha creído conveniente también implementarlo mediante un programa de simulación interactiva llamado SysQuake, el cual toma como base el código desarrollado en las macros realizadas en Matlab. Gracias a este

entorno de simulación interactiva se hace más intuitivo y sencillo el logro de las conclusiones que se deriven del análisis. Dichas conclusiones serán presentadas en el último epígrafe del capítulo.

## 4.2. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS EN EL DOMINIO TEMPORAL.

Para poder analizar los resultados que arroja un sistema de control con estructura no convencional cuando es estudiado desde el punto de vista del dominio temporal ha sido necesario seguir una serie de pasos, los cuales son descritos a continuación:

- 1º) Modelar mediante operadores de Kranc los diferentes elementos del sistema de control con muestreo no convencional en bucle cerrado.
- 2º) Obtener el modelo de la cadena directa formada por el regulador y el proceso.
- 3º) Generar el lugar de raíces discreto del modelo en cadena directa y su posterior transformación al plano continuo.
- 4º) Simular la respuesta temporal del sistema.

En los siguientes subapartados se describen con mayor detalle los pasos enunciados previamente.

### 4.2.1. Modelado del sistema en bucle cerrado mediante operadores de Kranc.

Para modelar el sistema de control con estructura no convencional (el cual será descrito en el epígrafe 4.3 para cada caso contemplado, esto es, estructura interactiva y estructura paralela) se ha de hacer uso de las leyes de recurrencia del capítulo 2, las cuales, como es sabido, permiten modelar dicho sistema al periodo m.c.m. de los existentes en el sistema (o también conocido como metaperiodo) aunque internamente funciona al periodo m.c.d de los existentes en el sistema (o también conocido como periodo base) con el fin de ubicar correctamente para cada metaperiodo sus respectivos muestreos de entrada y salida. También será necesario (sobre todo en el caso de estructura paralela) hacer uso de las matrices de conexión entre operadores, conocidas en la bibliografía como “connect”. Se insta al lector interesado a referencias como (Camiña, 1999) para conocer en detalle su funcionamiento.

En este estudio, y como más tarde se verá para cada caso en el epígrafe 4.3, los sistemas de control que se van a tratar se caracterizan por anteponer un ZOH tanto al proceso como al regulador (véase figura 4-1). Por tanto, a la hora de modelarlos se van a necesitar los llamados operadores ZOH-Kranc, cuyas leyes de recurrencia se presentan en el capítulo 2 apartado 2.3.2. No obstante, si se hubiera adoptado otra opción para regulador o proceso, esto es, tratamiento como sistema continuo o como sistema digital, se habría hecho uso de las leyes del capítulo 2 apartado 2.3.1 ó 2.3.3, respectivamente.

### 4.2.2. Obtención del modelo de la cadena directa regulador-proceso.

De la misma forma que se expone en (Salt, 1992) y (Salt, 1994), se va a detallar el modelo del sistema de control en bucle cerrado a partir de la consideración de la cadena directa formada por el regulador y el proceso del sistema de control. Tanto el uno como el

otro tendrán un modelo interno definido por el operador ZOH-Kranc de cada uno de ellos (que se obtiene mediante las leyes planteadas en el capítulo 2 para el caso de ZOH-Kranc), de tal forma que si se nombra con el subíndice  $p$  el modelo interno del proceso y con el subíndice  $R$  el del regulador, se tiene:

$$\begin{aligned}
 x_p[(k+1)T_0] &= \bar{A}_p x_p(kT_0) + \bar{B}_p \begin{bmatrix} u(kT_0) \\ u(kT_0 + t_1) \\ \vdots \\ u(kT_0 + t_{N-1}) \end{bmatrix} \\
 y_p(kT_0) &= \bar{C}_p x_p(kT_0) + \bar{D}_p \begin{bmatrix} u(kT_0) \\ u(kT_0 + t_1) \\ \vdots \\ u(kT_0 + t_{N-1}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \quad (4-1)$$

$$\begin{aligned}
 x_R[(k+1)T_0] &= \bar{A}_R x_R(kT_0) + \bar{B}_R e(kT_0) \\
 \begin{bmatrix} u(kT_0) \\ u(kT_0 + t_1) \\ \vdots \\ u(kT_0 + t_{N-1}) \end{bmatrix} &= \bar{C}_R x_R(kT_0) + \bar{D}_R e(kT_0)
 \end{aligned} \quad (4-2)$$

En las ecuaciones (4-1) y (4-2) queda patente la idea de que el modelo se define a metaperiodo  $T_0$ , pero internamente trabaja considerando los diferentes instantes  $\{0, t_1, \dots, t_{N-1}\}$  en los que se produce muestreo dentro del metaperiodo  $T_0$  ( $N$  es la multiplicidad).

Así pues, la unión directa de los modelos del regulador y proceso nos permite generar el modelo monofrecuencia del sistema completo:

$$\begin{aligned}
 \begin{bmatrix} x_R[(k+1)T_0] \\ x_p[(k+1)T_0] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_R & 0 \\ \bar{B}_p \bar{C}_R & \bar{A}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_R(kT_0) \\ x_p(kT_0) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{B}_R \\ \bar{B}_p \bar{D}_R \end{bmatrix} \cdot e(kT_0) \\
 y_p[(k+1)T_0] &= \begin{bmatrix} \bar{D}_p \bar{C}_R & \bar{C}_p \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_R[(k+1)T_0] \\ x_p[(k+1)T_0] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{D}_p \bar{D}_R \end{bmatrix} \cdot e(kT_0)
 \end{aligned} \quad (4-3)$$

#### 4.2.3. Generación del lugar de raíces discreto del modelo en cadena directa. Transformación al plano continuo.

Como se puede deducir de la ecuación (4-3) la cuádruple  $[\bar{A}_{cd}, \bar{B}_{cd}, \bar{C}_{cd}, \bar{D}_{cd}]$  que representa al modelo en cadena directa es:



$$\begin{aligned}\bar{A}_{cd} &= \begin{bmatrix} \bar{A}_R & 0 \\ \bar{B}_p \bar{C}_R & \bar{A}_p \end{bmatrix} \\ \bar{B}_{cd} &= \begin{bmatrix} \bar{B}_R \\ \bar{B}_p \bar{D}_R \end{bmatrix} \\ \bar{C}_{cd} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_p \bar{C}_R & \bar{C}_p \end{bmatrix} \\ \bar{D}_{cd} &= \begin{bmatrix} \bar{D}_p \bar{D}_R \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (4-4)$$

Por tanto, a partir de esta cuádruple  $[\bar{A}_{cd}, \bar{B}_{cd}, \bar{C}_{cd}, \bar{D}_{cd}]$  se puede generar fácilmente el lugar de raíces discreto perteneciente al sistema utilizando cualquier herramienta matemática (por ejemplo, Matlab) y ver cuál es la disposición de los polos y ceros del sistema para los diferentes esquemas de muestreo no convencional empleados.

Es evidente que el plano Z dispone de información acerca del significado relativo a la ubicación de los polos a lo largo del mismo. No obstante, como quiera que el significado físico de las diferentes zonas geométricas del plano S es más intuitivo a la hora de realizar el diseño de los sistemas de control, es recomendable hacer una transformación hacia dicho plano utilizando, por ejemplo, el sencillo método de la Transformación Bilineal utilizada en sentido inverso:

$$z \cong \frac{1 + \frac{T_0}{2}s}{1 - \frac{T_0}{2}s} \quad (4-5)$$

De esta forma se puede transformar de forma aproximada los polos obtenidos en el plano Z hacia el plano S y ver allí qué características cabe esperar del sistema, según el esquema de muestreo que se haya utilizado.

#### 4.2.4. Simulación de la respuesta temporal del sistema.

Nuevamente, haciendo uso de la cuádruple (4-4) se puede simular la respuesta temporal del sistema iterando las veces necesarias las ecuaciones de estado para la cadena directa:

$$\begin{aligned}x_{cd}[(k+1)T_0] &= \bar{A}_{cd}x_{cd}(kT_0) + \bar{B}_{cd}e(kT_0) \\ y_{cd}[(k+1)T_0] &= \bar{C}_{cd}x_{cd}[(k+1)T_0] + \bar{D}_{cd}e(kT_0)\end{aligned}\quad (4-6)$$

De esta forma se obtendría el estado  $x_{cd}$  y la salida  $y_{cd}$  del sistema en cada iteración a metaperiodo  $T_0$ . Si se desea la salida a intermuestreo  $t_0$  se ha de trabajar de la misma forma, pero con las ecuaciones de estado del regulador y del proceso a dicho periodo  $t_0$  y de forma independiente (no como cadena directa, ya que no se dispone de un modelo de la cadena directa a  $t_0$ ).



periodos involucrados en dicho sistema). De la misma forma, la referencia suministrada al sistema de control estará también muestreada a  $T_0$ , con lo que la entrada de error al regulador vendrá también capturada cada  $T_0$  instantes de tiempo. Por su parte, el muestreador ubicado a la salida del regulador, o lo que es lo mismo, a la entrada del proceso es un muestreador con la capacidad de seleccionar aquellas muestras deseadas, de entre las disponibles a periodo de intermuestreo, dentro de un metaperiodo.

De esta forma, como se plantea en (Salt, 1992), se va a poder llevar a cabo diferentes esquemas de muestreo en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso) para este sistema de control, de tal forma que permita extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta del sistema y en la ubicación de los polos dentro del plano Z, y por ende, tras una simple transformación, dentro del plano S.

Para poder llevar a cabo todo ello, primero es necesario presentar cómo queda modelado el bucle cerrado del sistema de control. Tras esto, se tendrán que implementar una serie de programas de simulación que ejecuten diversos patrones de muestreo para el modelo considerado. En primera instancia se desarrollan programas de simulación convencional, pero dado el gran número de parámetros que se deben tener en cuenta en ellos, se opta finalmente por implementar también un programa de simulación interactiva que haga más fácil e intuitiva la obtención de conclusiones. Parece claro que la mejor forma de ver todo ello es con un ejemplo.

#### 4.3.1.2. Ejemplo.

##### 4.3.1.2.1. Escenario del problema.

A continuación se describen los elementos constituyentes del sistema de control que van a servir para poner en práctica la metodología propuesta en el epígrafe 4.2 para este caso concreto.

Se cuenta con un regulador PID continuo, que incluye un filtro en la acción derivativa, expresado por:

$$G_R(s) = \left( 6 + 9 \frac{1}{s} + 0.6 \frac{s}{0.05s + 1} \right)$$

Igualmente se dispone de un proceso continuo definido por la siguiente f.d.t.:

$$G_P(s) = \frac{1}{(0.25s + 1)(s + 1)}$$

Planteados ya los elementos del sistema de control, se va a tomar un metaperiodo de  $T_0=0.18$  seg y un periodo de intermuestreo de  $t_0=0.015$  seg para ejecutar las pruebas. Así, para este caso particular, se dispondrá de 12 muestras a  $t_0$ , de las cuales se cogerán aquellas que sean requeridas por el patrón de muestreo considerado.

Por tanto, como ya se comentó con anterioridad, se va a poder llevar a cabo diferentes esquemas de muestreo en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso) para este sistema de control, de tal forma que permitan extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta del sistema y en la ubicación de los polos.

4.3.1.2.2. Modelado.

Siguiendo las pautas expuestas en el epígrafe 4.2 se llega al modelo representado en la figura 4-2, el cual se reduce a la conexión en serie de dos operadores ZOH-Kranc y la consiguiente realimentación.

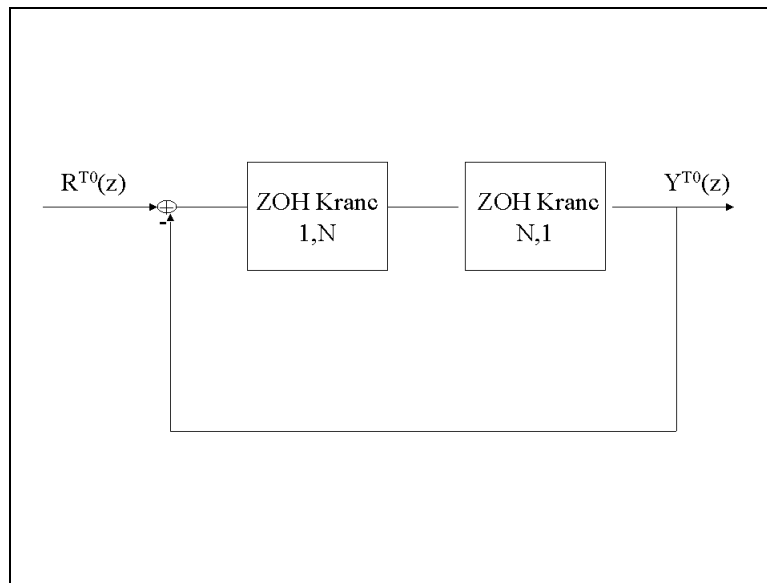


Figura 4-2: Modelado del sistema con estructura interactiva

Como se detalla en el capítulo 2, el modelado en RI presentado trabaja con los llamados operadores de Kranc. En este caso, y como ya se adelantó en el epígrafe 4.2, se trata de operadores ZOH-Kranc, puesto que tanto el regulador como el proceso anteponen un ZOH en su entrada.

La nomenclatura utilizada en la figura 4-2 (similar a la usada en (Camiña, 1999)) viene a denotar lo siguiente:

- ZOH-Kranc 1,N: operador ZOH-Kranc que tiene una única entrada y N salidas (recuérdese figura 4-1).
- ZOH-Kranc N,1: operador ZOH-Kranc que tiene N entradas y una única salida.

Recordar que ambos operadores trabajan internamente al periodo de intermuestreo ( $t_0$ ), reteniendo las entradas a  $t_0$  y capturando aquellas salidas deseadas múltiplos de  $t_0$  de las disponibles dentro del metaperiodo  $T_0$ .

#### 4.3.1.2.3. Implementación en simulación convencional.

En lo que respecta a la implementación, se ha generado un programa de simulación convencional en Matlab (ver Anexo III) capaz de obtener la respuesta a metaperiodo y a intermuestreo del sistema, así como el lugar de raíces discreto a metaperiodo ante diferentes esquemas de muestreo. Para ello ha sido necesario integrar en él la generación de los operadores ZOH-Kranc presentados en el capítulo 2, al igual que la formulación necesaria para considerar en última instancia el sistema en bucle cerrado como un sistema representado en forma monofrecuencial a metaperiodo, la cual fue presentada en el epígrafe 4.2.

Ya se tiene, por tanto, todo preparado para realizar una batería de pruebas basadas en la consideración de diferentes esquemas de muestreo (regulares o irregulares) en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso), y tras ello, superponer los diferentes lugares de raíces que se vayan obteniendo relativos a dichos esquemas en un plano  $Z$  común (para todos los casos considerados) correspondiente al metaperiodo, en aras a detectar la evolución de los polos del sistema a lo largo del plano  $Z$ .

#### 4.3.1.2.4. Exposición y análisis de los resultados obtenidos en simulación convencional.

##### 4.3.1.2.4.1. Caso muestreo regular.

Se va primero a mostrar la superposición de diferentes lugares de raíces en un plano  $Z$  referido al metaperiodo cuando tratamos casos de muestreo regular, es decir, casos en los que la sucesión de instantes  $\{0, t_1, \dots, t_{N-1}\}$  está equiespaciada en el tiempo, esto es, entre cada instante hay  $T_0/N$  unidades de tiempo. El objetivo es analizar la evolución global de los polos del sistema conforme  $N$  (multiplicidad) es mayor.

Como queda patente en la figura 4-3, conforme  $N$  va aumentando los polos del sistema se van moviendo por el plano  $Z$  describiendo una trayectoria clara. Más concretamente se aprecia que a mayor  $N$  menor sobreoscilación cabe esperar en la respuesta del sistema. Sin embargo, si se observa ésta en la figura 4-4, vemos que en algunos casos esto no es así, lo cual se debe a la influencia de los ceros que surgen del muestreo no convencional del sistema (Salt, 1992) (en el epígrafe 4.3.2.2.4.2. se introduce una nota aclaratoria que detalla más esta afirmación). De igual manera, si se observa la figura 4-4 se puede comprobar, por ejemplo, la mejoría en el tiempo de establecimiento que se produce a medida que  $N$  va aumentando.

##### 4.3.1.2.4.2. Caso muestreo irregular $N=2$ .

En segundo lugar se va a considerar el caso de muestreo irregular fijando  $N=2$ . Para facilitar el análisis se consideran dos subperiodos iguales dentro del metaperiodo, esto es, un subperiodo inicial que va desde el instante 0 seg hasta el 0.09 seg, y un subperiodo final que va desde el instante 0.09 seg al 0.18 seg.

De esta forma, fijándose en la figura 4-5, se observa la descripción de una trayectoria que une los polos en dos sentidos. El sentido derecho (trayectoria cruces pequeñas) representa el movimiento del muestreo regular hacia posiciones irregulares más cercanas al comienzo del metaperiodo (acortamiento del subperiodo inicial). El sentido izquierdo (trayectoria cruces

grandes), por su parte, representa el movimiento del muestreo regular hacia posiciones irregulares más cercanas al final del metaperiodo (acortamiento del subperiodo final).

En la figura 4-6 se muestra la respuesta del sistema en el caso de acortamiento del subperiodo inicial, comprobándose cómo la respuesta del sistema va sufriendo variaciones significativas según el esquema de muestreo considerado. Así el esquema  $[0,0.015]$ , esto es, aquél que corresponde al muestreo en el instante 0 seg y en el instante 0.015 seg, ofrece una respuesta parecida (aunque mejor) a la monofrecuencia (que se puede observar en la figura 4-4) dado que estamos haciendo un muestreo bifrecuencia muy cercano al monofrecuencial, en el sentido de que las dos muestras capturadas se toman juntas y al principio del metaperiodo (en el monofrecuencia se toma una única muestra al principio del metaperiodo). Por su parte, el muestreo irregular  $[0,0.06]$  no ofrece mejores resultados, en este caso, con respecto al muestreo regular  $[0,0.09]$ , ya que para el primero se observa mayor sobreoscilación máxima y mayor tiempo de establecimiento (aunque de forma moderada).

De la figura 4-7 se pueden deducir prácticamente las mismas conclusiones anteriores, pero ahora para el caso de acortamiento del subperiodo final.

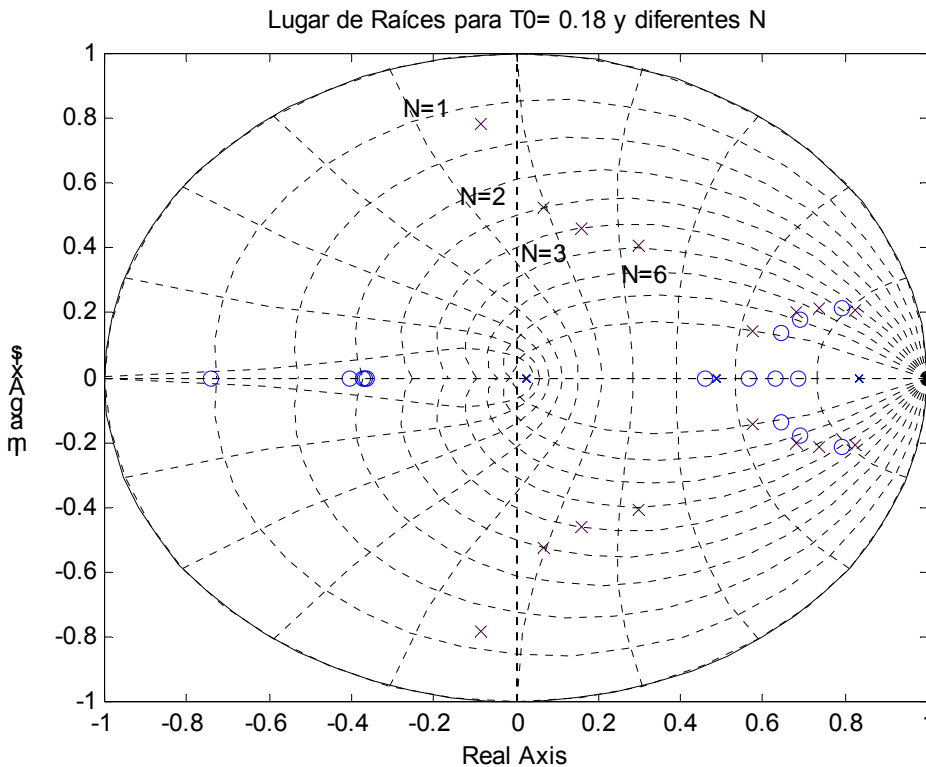


Figura 4-3: Lugar de raíces muestreo regular

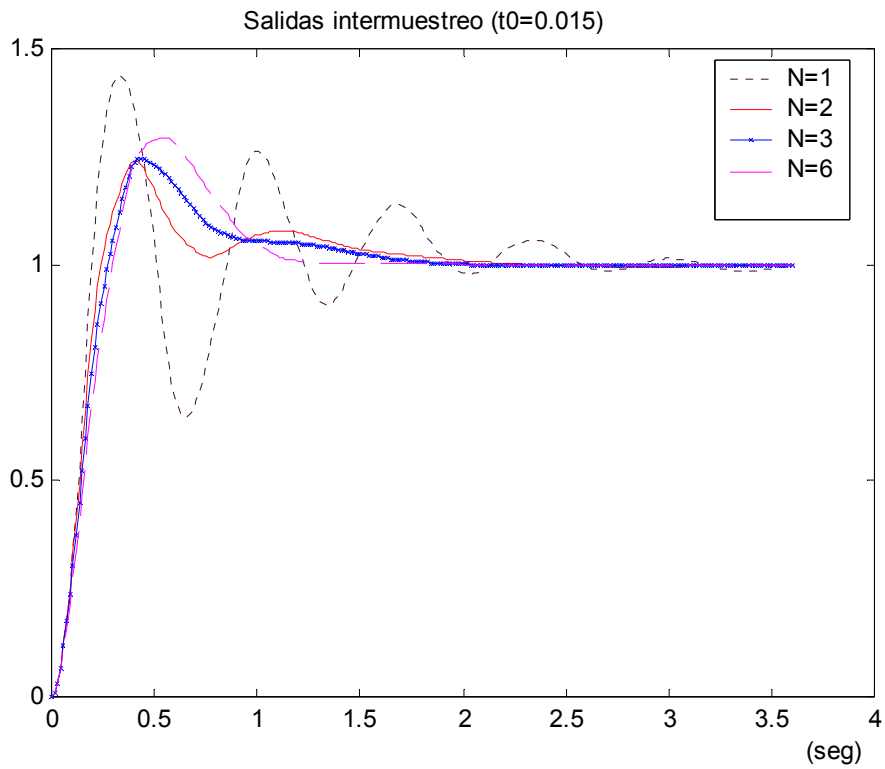


Figura 4-4: Salida intermuestreo muestreo regular

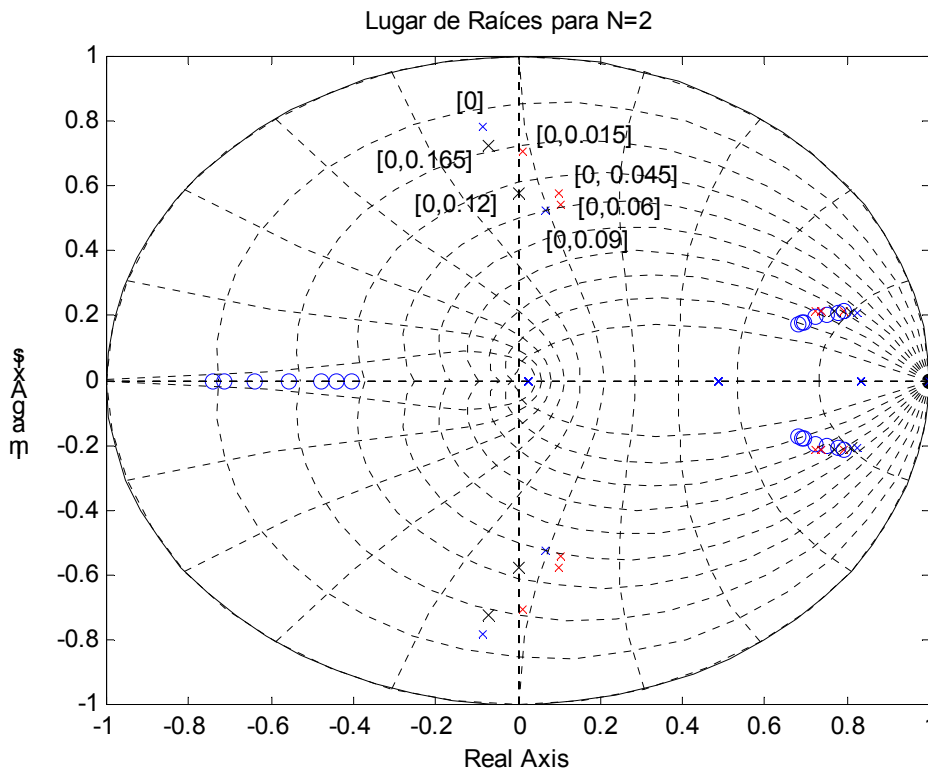


Figura 4-5: Lugar de raíces muestreo irregular N=2

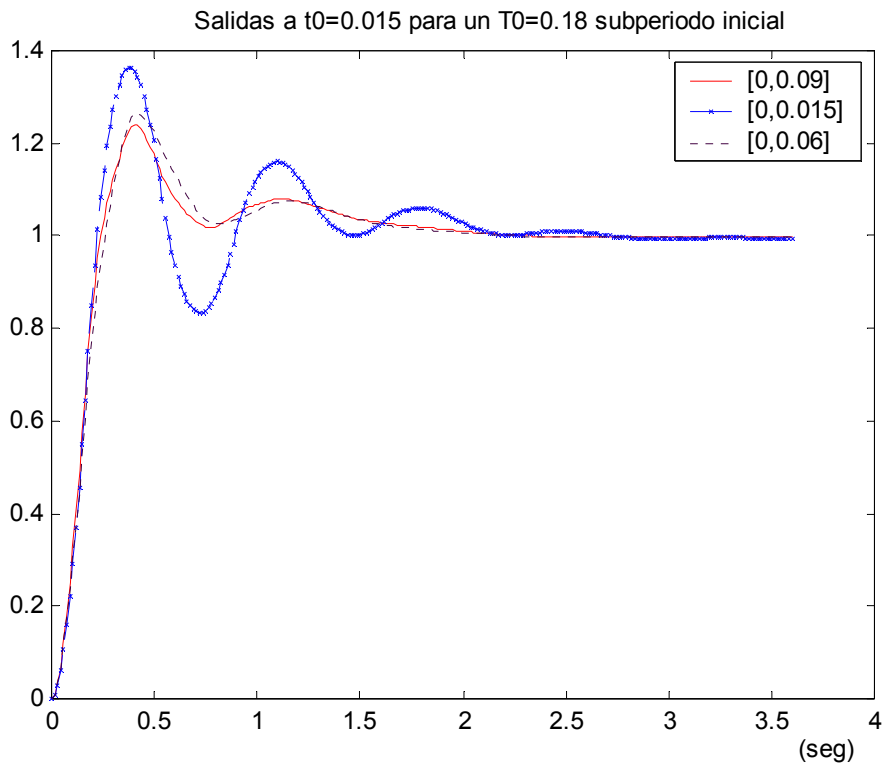


Figura 4-6: Salida N=2 (muestreo irregular) subperiodo inicial

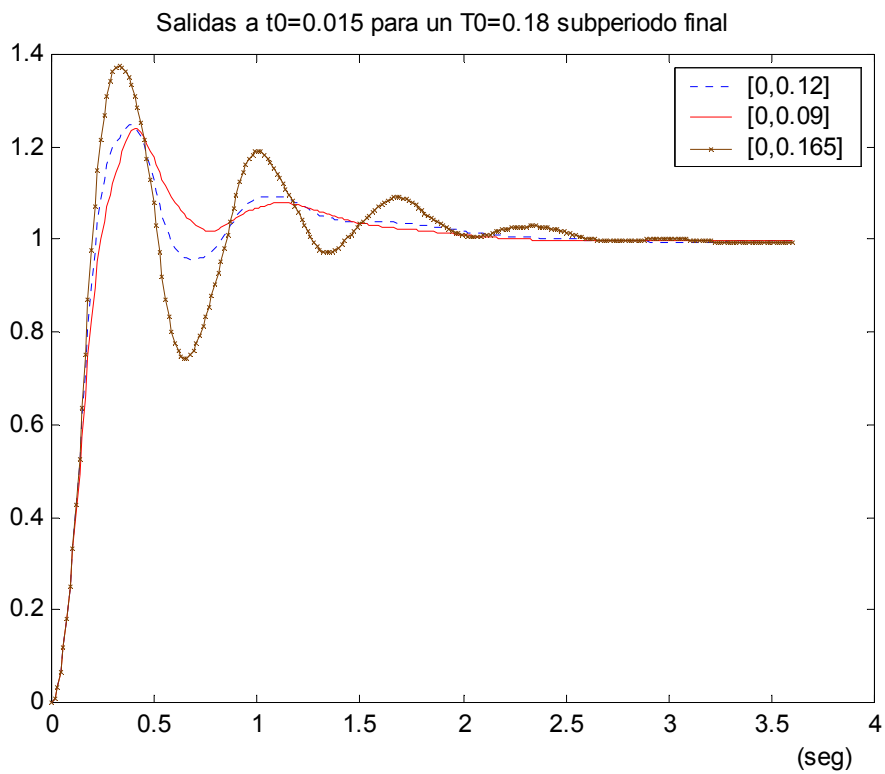


Figura 4-7: Salida N=2 (muestreo irregular) subperiodo final



#### 4.3.1.2.4.3. Caso muestreo irregular $N=3$ .

Finalmente se va a exponer el caso de muestreo irregular fijando  $N=3$ . En este caso se va a observar cómo también se forman unas trayectorias a lo largo del plano  $Z$  según se vaya variando el esquema de muestreo en cada subperiodo considerado.

Ahora se cuenta con tres subperiodos: el inicial (desde 0 hasta 0.06 seg), el medio (desde 0.06 hasta 0.12 seg) y el final (desde 0.12 hasta 0.18 seg).

Como ahora las distancias entre las diferentes ubicaciones de los polos van a ser muy pequeñas se expondrá de forma ampliada los diferentes lugares. Así, en la figura 4-8 se muestra el resultado de acortar tanto el subperiodo inicial (acercándolo hacia el inicio del metaperiodo, trayectoria de la derecha (cruces pequeñas)) como el subperiodo medio (acercándonos hacia el caso regular con  $N=2$ , trayectoria de la izquierda (cruces grandes)). En ambos casos, partiendo del caso regular con  $N=3$  ([0,0.06,0.12]) se evoluciona a lo largo del plano  $Z$  de forma coherente y, respectivamente, hacia el caso de muestreo irregular con  $N=2$  [0,0.12], y el caso de muestreo regular con  $N=2$ , [0,0.09].

Por su parte, en el caso de acortamiento del subperiodo final, la figura 4-9 establece claramente la trayectoria (cruces grandes) descrita por los polos, la cual partiendo del caso regular con  $N=3$  va hacia el irregular con  $N=2$  [0,0.06].

En cuanto a la respuesta del sistema, como cabía esperar, las variaciones son minúsculas entre los distintos esquemas de muestreo considerados, ya que la ubicación de los polos es muy similar en valor numérico. Así, en la figura 4-10 se muestra el caso del subperiodo inicial, donde las respuestas con  $N=3$  son todas muy parecidas excepto la del caso [0,0.015,0.12], ya que éste se encuentra muy cercano al caso  $N=2$  [0,0.12], el cual ofrece una respuesta con mayores oscilaciones, consecuencia de una menor multiplicidad (como ya se observó en la figura 4-4).

Lo mismo se puede decir de la figura 4-11, donde se muestra el caso del acortamiento del subperiodo final, aunque aquí no sea tan visible la diferenciación entre el caso  $N=3$  cercano al  $N=2$ , esto es, [0,0.06,0.165], y los demás casos  $N=3$ .

El mismo estudio se ha realizado para el caso de  $N=6$ , pero al no arrojar conclusiones diferentes de las expuestas hasta ahora no será incluido.

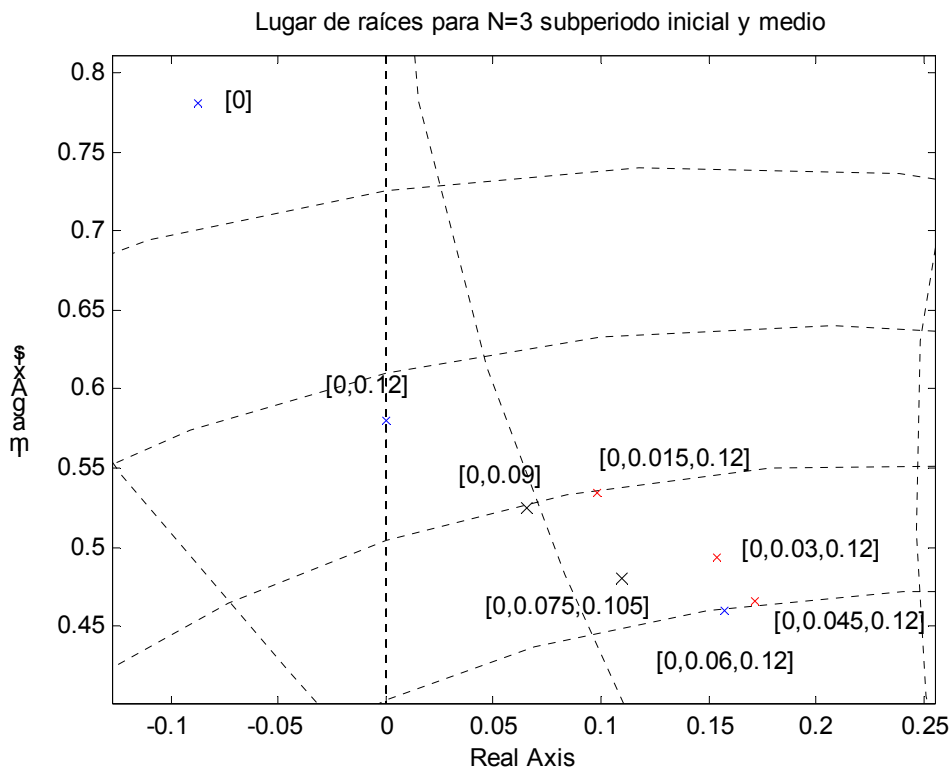


Figura 4-8: LdR N=3 (muestreo irregular) subperiodo inicial y medio

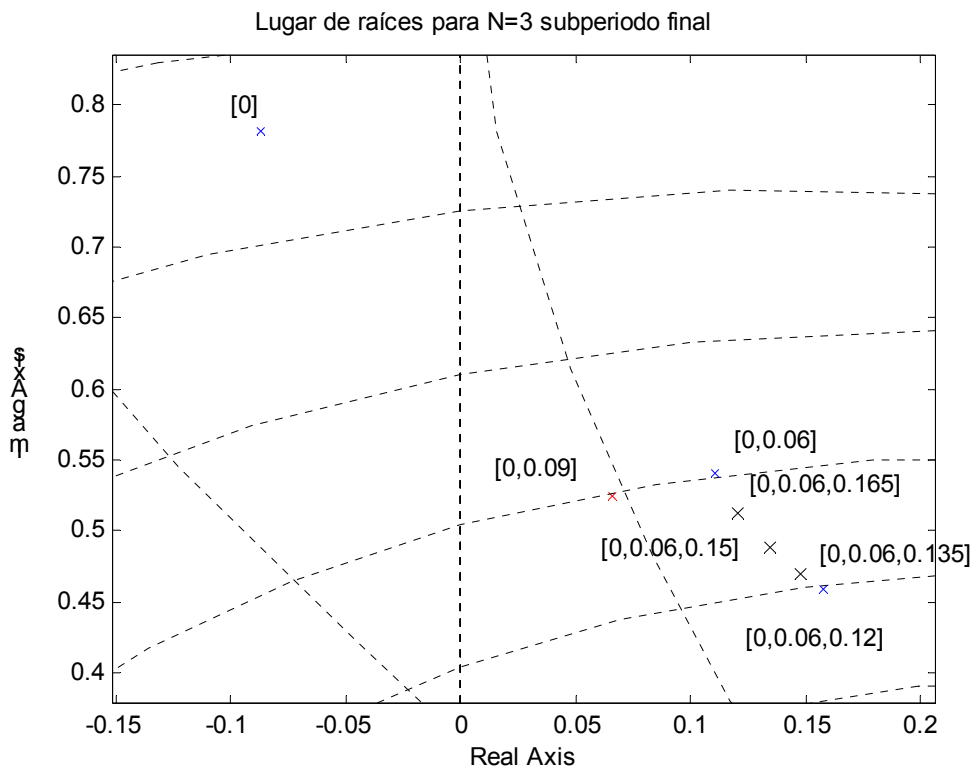


Figura 4-9: Lugar de raíces N=3 (muestreo irregular) subperiodo final

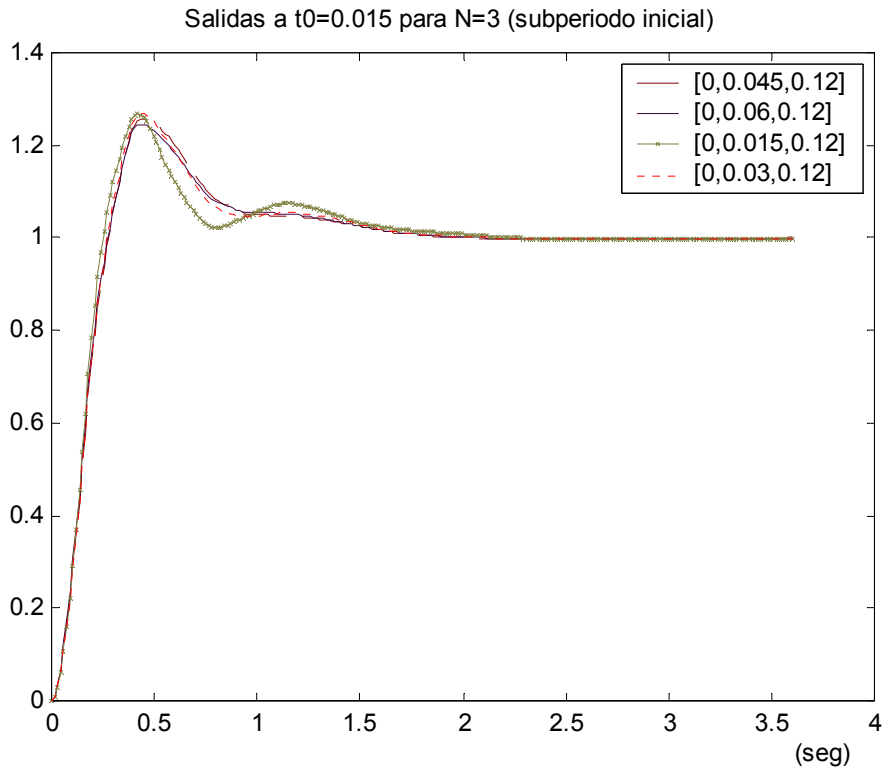


Figura 4-10: Salida N=3 (muestreo irregular) subperiodo inicial

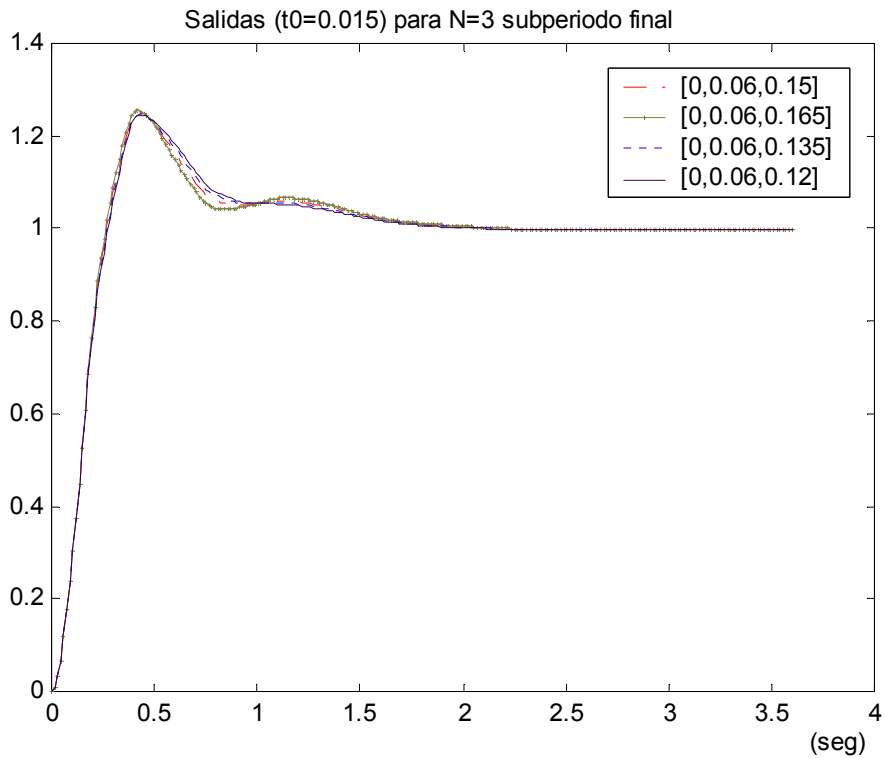


Figura 4-11: Salida N=3 (muestreo irregular) subperiodo final

4.3.1.2.4.4. Transformación al plano S.

Haciendo uso de la ecuación (4-5) se puede transformar de forma aproximada los polos obtenidos en el plano Z hacia el plano S y ver allí qué características cabe esperar del sistema, según el esquema de muestreo que se haya utilizado.

Así, para el caso de N=2 irregular (visto en la sección 4.3.1.2.4.2) se obtendría el lugar de raíces continuo descrito en la figura 4-12, donde es fácil comprobar que, por ejemplo, el muestreo [0,0.165] genera un sistema con mayor sobreoscilación y más lento que el generado a partir del esquema [0,0.12] (como se puede comprobar en la figura 4-7).

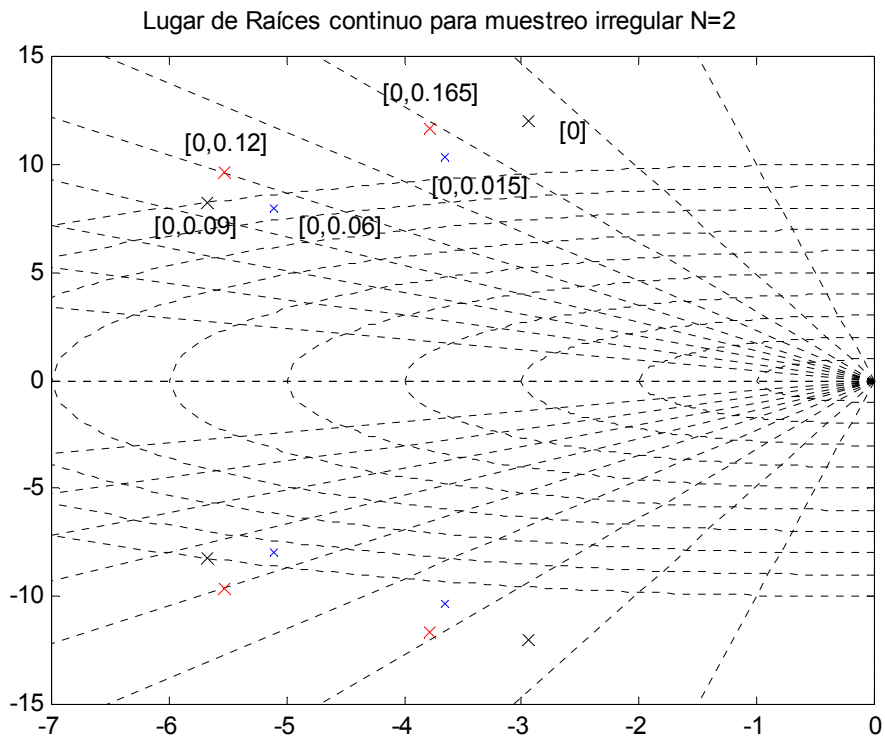


Figura 4-12: LdR transformado a continuo N=2 (muestreo irregular)

4.3.1.2.5. Implementación en simulación interactiva.

Como es fácil observar, la obtención de los resultados mediante simulación convencional ha supuesto un arduo trabajo, dada la gran cantidad de parámetros que se han tenido que variar en cada ejecución. Por ello se ha creído conveniente implementar todo el escenario del problema en un entorno de simulación interactiva, el cual va a permitir encontrar de manera más sencilla las conclusiones que arroja el estudio. Dicho entorno se muestra en la figura 4-13. En ella aparecen varias ventanas; tan sólo son de interés en este momento la central superior y la de la izquierda inferior, ya que las otras son relativas al estudio en frecuencia (que se analizará en el capítulo 5). La primera de las ventanas muestra el lugar de raíces del caso seleccionado como patrón de muestreo en la barra deslizadora de la parte izquierda superior. Por su parte, la segunda ventana hace referencia a la respuesta ante

escalón unitario que se dará en el sistema para el esquema seleccionado. Moviendo la ubicación del marcador de la barra deslizadora (que hace de muestreador entre regulador y proceso; recordar figura 4-1) se va a poder configurar el esquema de muestreo deseado, el cual tendrá su reflejo a nivel de lugar de raíces en la primera de las ventanas mencionadas y a nivel de repuesta en la segunda de ellas. Esta última además aporta información acerca de parámetros característicos de dicha respuesta como son la sobreoscilación máxima, el tiempo de pico y el tiempo de establecimiento (criterios del 95% y 98%). Para visualizarlos tan sólo se ha de poner el puntero del ratón sobre las líneas que los representan y observar el valor que devuelven en la barra de estado. Por su parte, la ventana que muestra el lugar de raíces aporta información acerca de la ubicación exacta de polos y ceros, al situar simplemente el puntero del ratón sobre ellos (la información queda reflejada nuevamente en la barra de estado).

Por último, recurriendo a la opción Settings de la barra de menú se puede configurar desde el proceso a tratar hasta el regulador tipo P-I-D que se antepone a él, además del valor del metaperiodo  $T_0$ , del intermuestreo  $t_0$  y de la multiplicidad  $N$ .

En la figura 4-13 se muestra el caso  $N=2$  regular para el proceso y regulador estudiados a lo largo del apartado 4.3.1.2 (con  $T_0=0.18$  y  $t_0=0.015$ ) mostrándose la misma respuesta y lugar de raíces que se mostraron para este caso en las figuras 4-4 y 4-3, respectivamente. Como parece fácil observar, variando el marcador de la barra deslizadora (que puede aspirar en este caso a 12 ubicaciones diferentes ( $T_0/t_0$ , en general)) se van a simular fácilmente todos los casos irregulares para  $N=2$  (en la figura 4-14 se muestra uno de ellos, dando también información en la barra de estado acerca de la ubicación del polo en bucle cerrado con parte imaginaria mayor). Lo mismo se podría decir para cualquier otro valor de  $N$  (en la figura 4-15 se muestra para  $N=3$  regular, dando además información acerca del tiempo de pico y la sobreoscilación máxima).

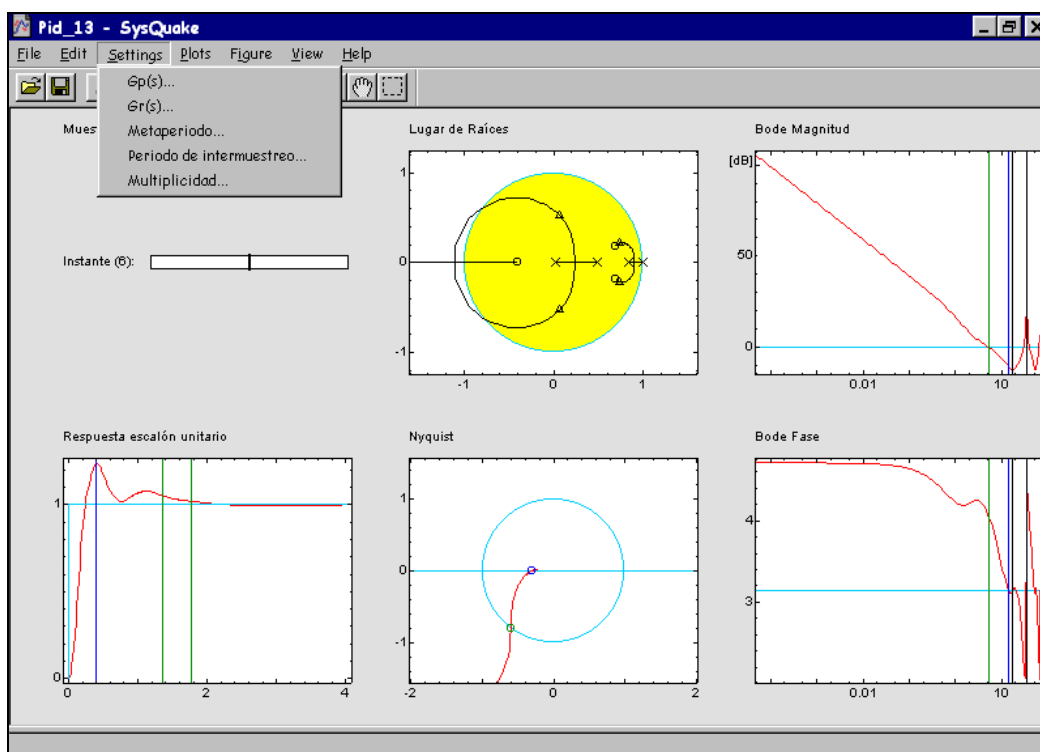


Figura 4-13: Aspecto aplicación en simulación interactiva con  $N=2$  regular.

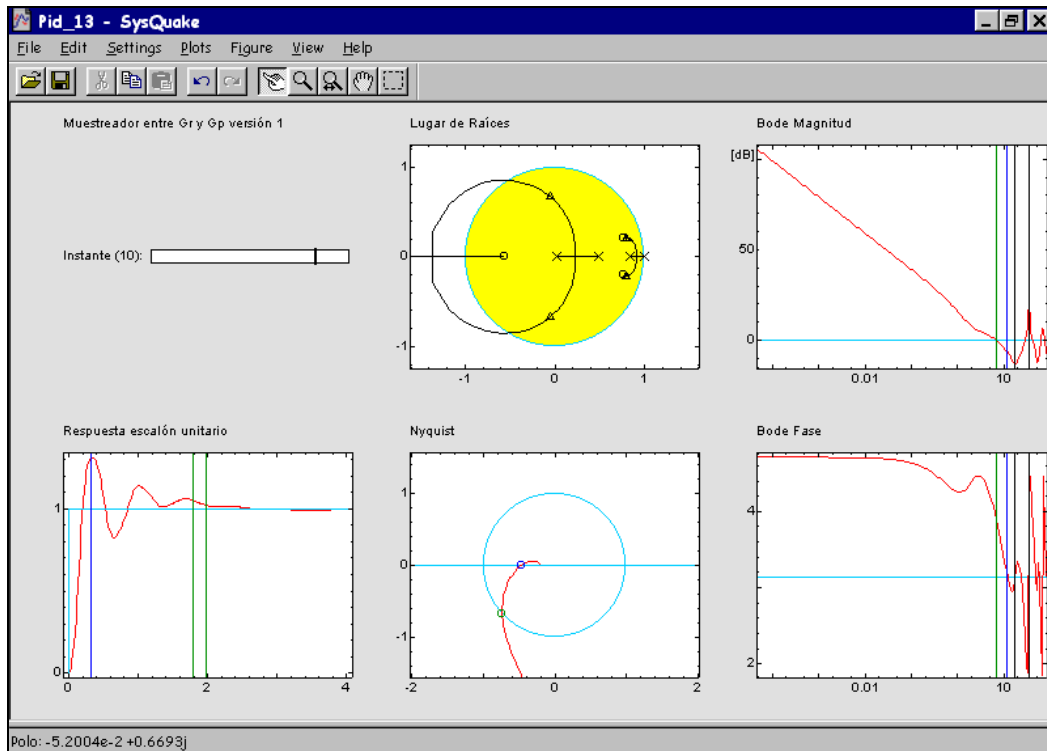


Figura 4-14: Aspecto aplicación en simulación interactiva con  $N=2$  irregular.

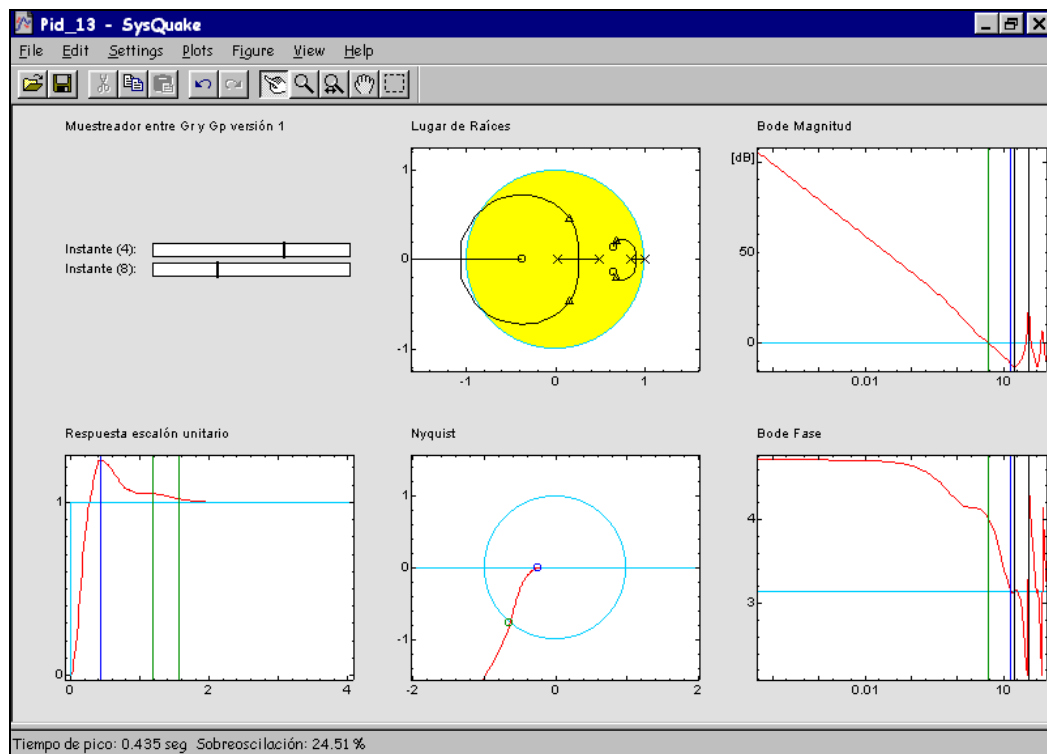


Figura 4-15: Aspecto aplicación en simulación interactiva con  $N=3$  regular.

#### 4.3.1.2.6. Validación mediante modelado de Vélez

Como se comentó en el capítulo 2 apartado 2.3.2.2, en (Vélez, 2000) se introduce una herramienta para Matlab-Simulink con la que se puede obtener la respuesta de sistemas multifrecuencia con muestreo no convencional. Dicha herramienta está basada en el modelado de estos sistemas desde el punto de vista de la representación interna y está implementada para modelar concretamente sistemas continuos que vienen antecidos por un ZOH. Por tanto, puede ser una herramienta útil para validar el modelado en cadena directa regulador-proceso que se ha presentado en este capítulo. Tomando como ejemplo el sistema de control planteado en 4.3.1.1, el objetivo, por tanto, es obtener primero el modelado de esta cadena directa mediante la herramienta de Vélez y después mediante las leyes de recurrencia presentadas en el capítulo 2 apartado 2.3.2, de manera que se ha de comprobar que ambos modelados resulten equivalentes.

Así pues, se va a tomar  $T_0=0.18$  seg,  $t_0=0.015$  seg, y

$$G_p(s) = \frac{1}{0.25s^2 + 1.25s + 1} \quad G_R(s) = 6 + 9\frac{1}{s} + 0.6\frac{s}{0.05s + 1}$$

además de un patrón de muestreos entre regulador y proceso para un  $N=2$  irregular tal que  $[0, 0.045]$  (por ejemplo). Observar en la figura 4-1 del capítulo 4 como tanto a la entrada del regulador como a la salida del proceso los muestreadores tienen una multiplicidad de  $N=1$ . Por tanto, para el proceso se tendrán 2 entradas (instantes 0 y 0.045 de cada metaperiodo) y 1 salida (instante 0 de cada metaperiodo). Vale la pena recordar el ejemplo presentado en 2.3.2.2, el cual hacía referencia a estos mismos proceso y patrón de muestreo. Por tanto, como allí ya se vio que ambos modelados resultaban equivalentes para el caso del proceso, no se va a volver a exponer ahora.

Por su parte, para el regulador se tiene 1 entrada (instante 0 de cada metaperiodo) y 2 salidas (instantes 0 y 0.045 de cada metaperiodo), de manera que se obtiene según Vélez:

$$\bar{A}_R^V = \begin{bmatrix} 0.027324 & 0 \\ 0.19454 & 1 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_R^V = \begin{bmatrix} 0.77814 \\ 0.42037 \end{bmatrix}; \quad \bar{C}_R^V = \begin{bmatrix} -14.438 & 2.8125 \\ -5.536 & 2.8125 \end{bmatrix}; \quad \bar{D}_R^V = \begin{bmatrix} 18 \\ 11.284 \end{bmatrix}$$

mientras que con las leyes de recurrencia presentadas en 2.3.2:

$$\bar{A}_R = \begin{bmatrix} 3.7802 & -2.7802 \\ 3.7529 & -2.7529 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_R = \begin{bmatrix} 35.5727 \\ 31.8199 \end{bmatrix}; \quad \bar{C}_R = \begin{bmatrix} -2.9752 & 3.0102 \\ -1.1295 & 1.1645 \end{bmatrix}; \quad \bar{D}_R = \begin{bmatrix} 18 \\ 11.2838 \end{bmatrix}$$

Aunque nuevamente las matrices son distintas numéricamente, ambos modelados llevan a la misma función de transferencia:

$$G^{T_0}(z) = \frac{\begin{pmatrix} 18z^2 - 28.5439z + 12.1197 \\ 11.2838z^2 - 14.7177z + 5.0096 \end{pmatrix}}{z^2 - 1.0273z + 0.0273}$$

Una vez obtenidos los modelos del regulador y proceso se puede establecer el modelado en cadena directa regulador-proceso (según ecuaciones (4-3) y (4-4) del presente capítulo), obteniéndose en el caso del modelado de Vélez:

$$\bar{A}_{cd}^V = \begin{bmatrix} 0.0273 & 0 & 0 & 0 \\ 0.1945 & 1 & 0 & 0 \\ -0.0139 & 0.3267 & 0.3706 & -0.1162 \\ -0.4403 & 0.1366 & 0.4647 & 0.9514 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_{cd}^V = \begin{bmatrix} 0.7781 \\ 0.4204 \\ 1.4397 \\ 0.6773 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{cd}^V = [0 \ 0 \ 0 \ 1]; \quad \bar{D}_{cd}^V = 0$$

y en el caso de las leyes de recurrencia expuestas en 2.3.2:

$$\bar{A}_{cd} = \begin{bmatrix} 3.7802 & -2.7802 & 0 & 0 \\ 3.7529 & -2.7529 & 0 & 0 \\ -109.9569 & 112.0554 & 8.4072 & -7.4592 \\ -98.4251 & 100.2423 & 8.0401 & -7.0851 \end{bmatrix}; \quad \bar{B}_{cd} = \begin{bmatrix} 35.5727 \\ 31.8199 \\ 830.3611 \\ 730.7211 \end{bmatrix}$$

$$\bar{C}_{cd} = [0 \ 0 \ 0.4389 \cdot 10^{-3} \ 0.4281 \cdot 10^{-3}]; \quad \bar{D}_{cd} = 0$$

Como era de esperar, nuevamente los dos modelados desembocan en una misma función de transferencia:

$$G^{T_0}(z) = \frac{0.6773z^3 - 0.5629z^2 - 0.1740z + 0.1929}{z^4 - 2.3493z^3 + 1.7920z^2 - 0.4538z + 0.0111}$$

por lo que se puede concluir que la respuesta en bucle cerrado que se alcanzaría para el sistema de control modelado por cualquiera de los dos métodos en cuestión sería idéntica. Se puede probar esta afirmación en general con cualquier otro patrón de muestreo o cualquier otro proceso y regulador.

#### 4.3.2. Estructura paralela.

##### 4.3.2.1. Planteamiento del problema.

Para llevar a cabo este segundo estudio se ha tomado como idea de partida el trabajo realizado por (López, 2001), donde se considera un sistema de control configurado de forma similar a la que se muestra en la figura 4-16. En ella se puede ver el diagrama de bloques y muestreos de dicho sistema de control para dotarlo de una estructura de control por computador con muestreo no convencional, considerando el regulador con estructura paralela. Se trata, por tanto, de un sistema de control muestreado, monovariante y de estructura no convencional que utiliza un controlador PID discretizado, paralelo y de estructura no convencional. Como se detallará a continuación, en dicho sistema se utilizan patrones de muestreo distintos para tomar muestras de la salida del proceso, reconstruir la señal de control y calcular las acciones de control.



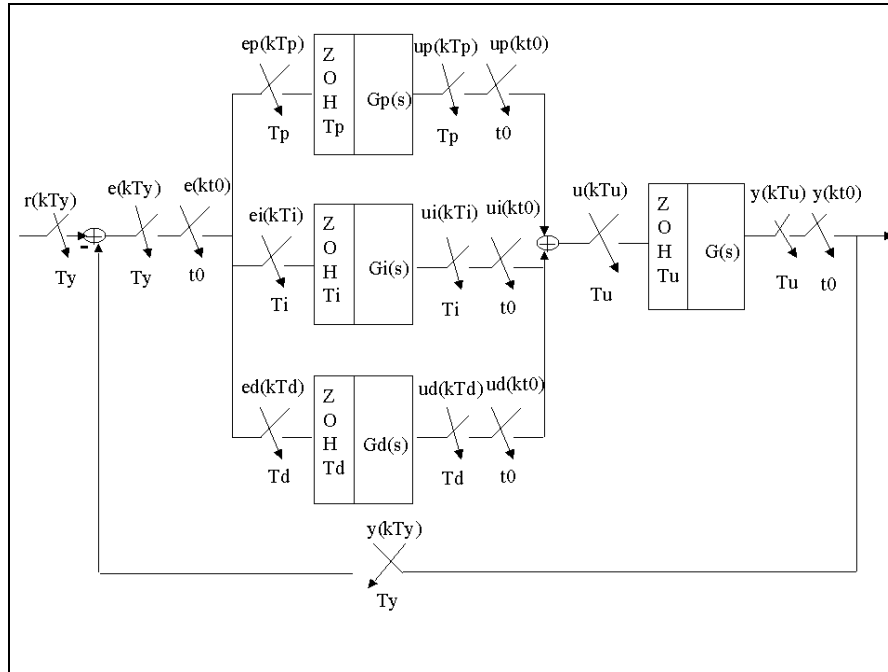


Figura 4-16: Diagrama de bloques y muestreos estructura paralela.

El funcionamiento del sistema se describe a continuación: como se puede apreciar en la figura 4-16 (donde por simplicidad se representa el caso de muestreo regular para los diferentes muestreadores) se dispone de un sistema de control donde el regulador queda descompuesto en sus tres acciones básicas, disponiéndolas en paralelo. Se tiene, por tanto, la parte proporcional  $G_p(s)$ , la parte integral  $G_i(s)$  y la parte derivativa  $G_d(s)$ . Tanto a dichas partes del regulador como al proceso  $G(s)$  se les anteponen respectivos retenedores de orden cero, funcionando éstos al periodo correspondiente para cada uno de los elementos involucrados en el sistema cuando se está ante patrones regulares de muestreo. Así, la parte proporcional (P) funciona a un periodo  $T_p$ , la parte integral (I) a  $T_i$ , la parte derivativa (D) a  $T_d$  y, por último, el proceso a  $T_u$ . El periodo  $t_0$  vuelve a ser el más pequeño de los periodos considerados en el sistema; nos sirve como base de tiempos común a todos los muestreadores y suele coincidir con el m.c.d. de todos los periodos involucrados en el mismo, motivo por el cual es usado para discretizar el proceso y las diferentes partes del regulador cuando se está ante patrones irregulares de muestreo. La medida del sistema se toma cada  $T_y$  instantes de tiempo, siendo este periodo el mayor de los encontrados en el sistema (lo llamaremos metaperiodo y normalmente coincidirá con el m.c.m. de todos los periodos involucrados en dicho sistema). De la misma forma, la referencia suministrada al sistema de control estará también muestreada a  $T_y$ , con lo que la señal de error general  $e(kT_y)$  vendrá también capturada cada  $T_y$  instantes de tiempo. Después ya, dicha entrada de error general se retiene a  $t_0$  para que cada acción la muestree según su patrón particular (regular o irregular), originando las señales de error  $e_p(kT_p)$  para la parte P,  $e_i(kT_i)$  para la parte I y  $e_d(kT_d)$  para la parte D. Como consecuencia de ello, se generarán acciones de control particulares a cada acción básica del regulador ( $u_p(kT_p)$  para la parte P,  $u_i(kT_i)$  para la parte I,  $u_d(kT_d)$  para la parte D), las cuales serán capturadas por los muestreadores de salida de cada acción básica de control y pasadas a una base de tiempos común con los muestreadores a  $t_0$ , para así, sumarlas adecuadamente en cada instante de tiempo  $t_0$ . Tras ello, el muestreador ubicado a la entrada del proceso muestreará cada  $T_u$  instantes de tiempo (en el caso regular) o según el patrón

irregular especificado, capturando la suma de las aportaciones de cada acción básica de control en los instantes correspondientes. Por último, la respuesta del proceso será capturada por el muestreador de salida del mismo, el cual trabaja a  $T_u$  (en el caso regular) o según el patrón irregular especificado, y posteriormente, la mencionada respuesta se pasará nuevamente a la base común de tiempos con el fin de ser muestreada convenientemente al periodo real de salida  $T_y$  (metaperiodo).

De esta forma, se ha podido configurar el sistema de control bajo estudio con una estructura no convencional y paralela en el regulador PID. Se dispone, por tanto, de seis muestreadores (los de las partes P, I y D, además del del proceso, el de salida y el de la base común de tiempos) con los que se pueden realizar infinidad de pruebas sobre el sistema de control. Entre otras, se antoja de gran utilidad probar la repercusión de cada acción básica sobre el comportamiento temporal final del sistema. Para ello, al igual que se hizo en el epígrafe 4.3.1 y tal y como se plantea en (Salt, 1992), se establecerán diferentes esquemas de muestreo en cada muestreador asociado a cada acción básica del regulador, de tal forma que permitan extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta del sistema y en la ubicación de los polos dentro del plano Z, y por ende, tras una simple transformación, dentro del plano S.

Para poder llevar a cabo todo ello, primero es necesario presentar cómo queda modelado el bucle cerrado del sistema de control. Tras esto, se tendrán que implementar una serie de programas de simulación que ejecuten diversos patrones de muestreo para el modelo considerado. Quizás, al igual que en el epígrafe 4.3.1, la mejor forma de ver todo esto sea con un ejemplo.

#### 4.3.2.2. Ejemplo.

##### 4.3.2.2.1. Escenario del problema.

A continuación se describen los elementos constituyentes del sistema de control que van a servir para poner en práctica la metodología propuesta en el epígrafe 4.2 para este caso concreto.

Se cuenta con un regulador PID continuo, que incluye un filtro en la acción derivativa, expresado por:

$$G_R(s) = \left( 6 + 9 \frac{1}{s} + 0.6 \frac{s}{0.05s + 1} \right)$$

donde

$$G_p(s) = 6$$

$$G_i(s) = 9 \frac{1}{s}$$

$$G_d(s) = 0.6 \frac{s}{0.05s + 1}$$

Igualmente se dispone de un proceso continuo definido por la siguiente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{1}{(0.25s + 1)(s + 1)}$$

Planteados ya los elementos del sistema de control, se va a tomar un metaperiodo de  $T_y=0.18$  seg y un periodo de intermuestreo de  $t_0=0.015$  seg para ejecutar las pruebas. En cuanto a los muestreadores del proceso y de las partes P, I y D irán variando según el esquema de muestreo considerado. Parece fácil observar que, en el caso de patrones regulares de muestreo,  $T_y$  siempre será igual en valor al más rápido de los periodos asociados a las acciones básicas del regulador, con el fin de dejar pasar hacia el proceso la más rápida de las contribuciones. En el caso de patrones irregulares en las partes P, I y D, el muestreador del proceso trabajará a  $t_0$  (base común de tiempos) para que todas las aportaciones del regulador paralelo repercutan sobre el proceso. Estos y otros casos son razonados con mayor detalle en el epígrafe 4.3.2.2.4.1.

Por tanto, como ya se comentó con anterioridad, se va a poder llevar a cabo diferentes esquemas de muestreo en el sistema de control, de tal forma que permitan extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta del sistema y en la ubicación de los polos.

#### 4.3.2.2.2. Modelado.

Siguiendo las pautas expuestas en el epígrafe 4.2 se llega al modelo representado en la figura 4-17, el cual es de una complejidad mayor al visto en el epígrafe 4.3.1.2.2.

Como se detalla en el capítulo 2, el modelado en RI presentado trabaja con los llamados operadores de Kranc. En este caso, y como ya se adelantó en el epígrafe 4.2, se trata de operadores ZOH-Kranc, puesto que tanto el regulador como el proceso anteponen un ZOH en su entrada.

La nomenclatura utilizada en la figura 4-17 viene a denotar lo siguiente:

- ZOH-Kranc P: operador ZOH-Kranc para la parte P del regulador, el cual tiene el mismo número de entradas que de salidas, dependiendo ambas del valor de  $T_p$ . Si se está ante un caso regular, el número de entradas y salidas será  $T_y/T_p$ . Si se está ante un caso irregular, el número de entradas y salidas lo dará el número de muestreos del muestreador de P dentro del metaperiodo  $T_y$ .
- ZOH-Kranc I: operador ZOH-Kranc para la parte I del regulador, el cual tiene el mismo número de entradas que de salidas, dependiendo ambas del valor de  $T_i$ . Si se está ante un caso regular, el número de entradas y salidas será  $T_y/T_i$ . Si se está ante un caso irregular, el número de entradas y salidas lo dará el número de muestreos del muestreador de I dentro del metaperiodo  $T_y$ .
- ZOH-Kranc D: operador ZOH-Kranc para la parte D del regulador, el cual tiene el mismo número de entradas que de salidas, dependiendo ambas del valor de  $T_d$ . Si se está ante un caso regular, el número de entradas y salidas será  $T_y/T_d$ . Si se está ante

un caso irregular, el número de entradas y salidas lo dará el número de muestreos del muestreador de  $D$  dentro del metaperiodo  $T_y$ .

- ZOH-Kranc Proc: operador ZOH-Kranc para el proceso, el cual tiene el mismo número de entradas que de salidas, dependiendo ambas del valor de  $T_u$ . Si se está ante un caso regular, el número de entradas y salidas será  $T_y/T_u$ . Si se está ante un caso irregular, el número de entradas y salidas lo dará el número de muestreos del muestreador del proceso dentro del metaperiodo  $T_y$ .
- $M_{txtw}$ : matriz de conexión, la cual conecta dos muestreadores que trabajan a diferentes frecuencias, tal que el periodo del muestreador de entrada a la conexión es  $t_w$  y el del muestreador de salida de la conexión es  $t_x$ .

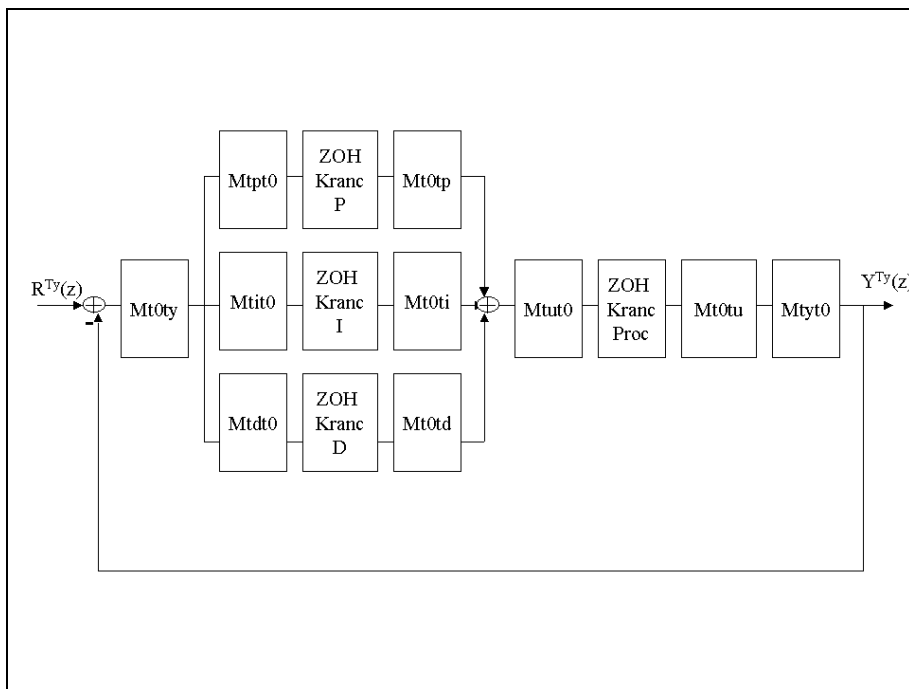


Figura 4-17: Modelado del sistema con estructura paralela

#### 4.3.2.2.3. Implementación.

En lo que respecta a la implementación, cabría realizar los mismos comentarios expuestos en el epígrafe 4.3.1.2.3 donde el caso tratado correspondía al de estructura interactiva en el regulador. No obstante, es importante hacer hincapié para el caso que nos ocupa ahora (estructura paralela en el regulador) en el hecho de que, para generar la cadena directa que en última instancia trata al sistema en bucle cerrado como un sistema representado en forma monofrecuencial a metaperiodo ha sido necesario obtener primero las cadenas directas de cada una de las partes básicas del regulador, para después disponerlas en paralelo y, finalmente, encadenar la estructura paralela con el proceso. Se trata de una ardua tarea consistente en repetir varias veces lo expuesto en el epígrafe 4.2.2, la cual, si cabe, ha sido más tediosa al haber de tener en cuenta, a la hora de formar las diferentes cadenas

individuales, las matrices de conexión involucradas en ellas. Véase la macro que implementa este caso en el Anexo III.

Ya se tiene, por tanto, todo preparado para realizar una batería de pruebas, basadas en la consideración de diferentes esquemas de muestreo (regulares o irregulares) en los respectivos muestreadores existentes en el sistema, y tras ello, superponer los diferentes lugares de raíces que se vayan obteniendo relativos a dichos esquemas en un plano Z común (para todos los casos considerados) correspondiente al metaperiodo, en aras a detectar la evolución de los polos del sistema a lo largo del plano Z.

#### 4.3.2.2.4. Exposición y análisis de resultados.

##### 4.3.2.2.4.1. Razonamientos previos.

Parece razonable, antes de evaluar las aportaciones individuales de cada acción básica, realizar una serie de pruebas previas que sirvan para confirmar ciertos aspectos de interés relativos al modo de funcionamiento de esta configuración del regulador. Para realizar dichas pruebas (y la de posteriores subapartados) se dispondrá de un  $T_y=0.18$  seg (metaperiodo) y un  $t_0=0.015$  seg (intermuestreo).

Lo primero que se va a hacer es probar el caso monofrecuencia ( $T_y=T_u=T_d=T_i=T_p$ ). Se comprueba mediante la respuesta temporal del sistema generada y mediante el lugar de raíces obtenido que coincide con los resultados arrojados anteriormente para el caso de estructura interactiva en el regulador (como cabía esperar). Dichas gráficas no se incluyen, puesto que son idénticas a las de las figuras 4-3 y 4-4 para el caso  $N=1$ .

Comprobado lo anterior, se ejecutarán dos nuevos casos:

- $T_u=0.09=T_y/2$ ,  $T_p=T_i=T_d=T_y$ : se obtienen los mismos resultados que en monofrecuencia, puesto que al muestreador  $T_u$  le llega la misma información que en dicho caso monofrecuencial, sólo que ahora la captura el doble de veces.

**Conclusión:** Son los muestreadores previos a las acciones básicas (los de P, I y D) los que pueden variar el efecto de éstas y no el posterior (el del proceso).

- $T_i=0.09=T_y/2$ ,  $T_p=T_u=T_d=T_y$ : se obtienen los mismos resultados que en monofrecuencia, puesto que al muestreador del proceso le llega la misma información que en dicho caso monofrecuencial, ya que la aportación a mitad de metaperiodo del muestreador de la parte I no es recogida en el del proceso para aplicarla a éste.

**Conclusión:** El muestreador del proceso debe ser al menos tan rápido como el más rápido de los muestreadores de las partes P, I y D, para que se prolongue hacia el proceso la contribución del muestreador más rápido de entre éstos.

4.3.2.2.4.2. Caso muestreo regular.

Hechos los razonamientos previos, se va a estudiar más concretamente el resultado de ir muestreando sucesivamente con un  $N$  mayor (de forma regular) en cada uno de los muestreadores correspondientes a las acciones básicas del regulador PID.

**Parte I:** Se va a empezar por el muestreador ubicado en la parte I. Para ello se ejecutarán los siguientes casos:

- Caso  $N=2$  en I:  $T_u=T_i=0.09=T_y/2$ ,  $T_p=T_d=T_y$
- Caso  $N=3$  en I:  $T_u=T_i=0.06=T_y/3$ ,  $T_p=T_d=T_y$

Los lugares de raíces superpuestos para el metaperiodo  $T_y$  y las salidas del proceso quedan representadas en las figuras 4-18 y 4-19 (comparadas con el caso monofrecuencia  $N=1$ ).

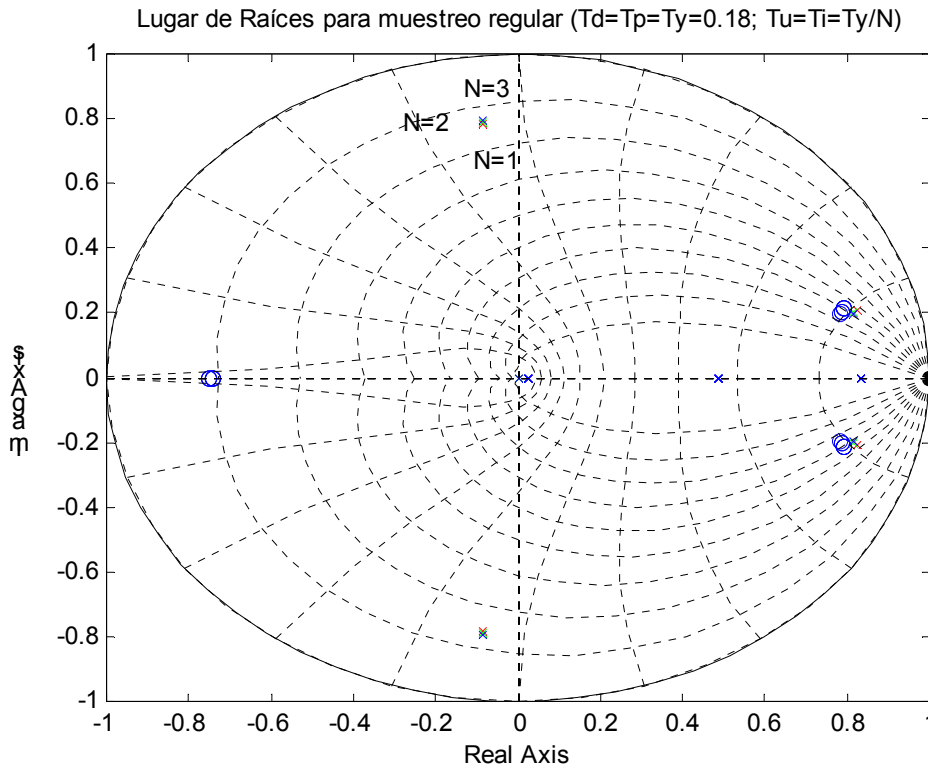


Figura 4-18: Lugar de raíces muestreo regular en I

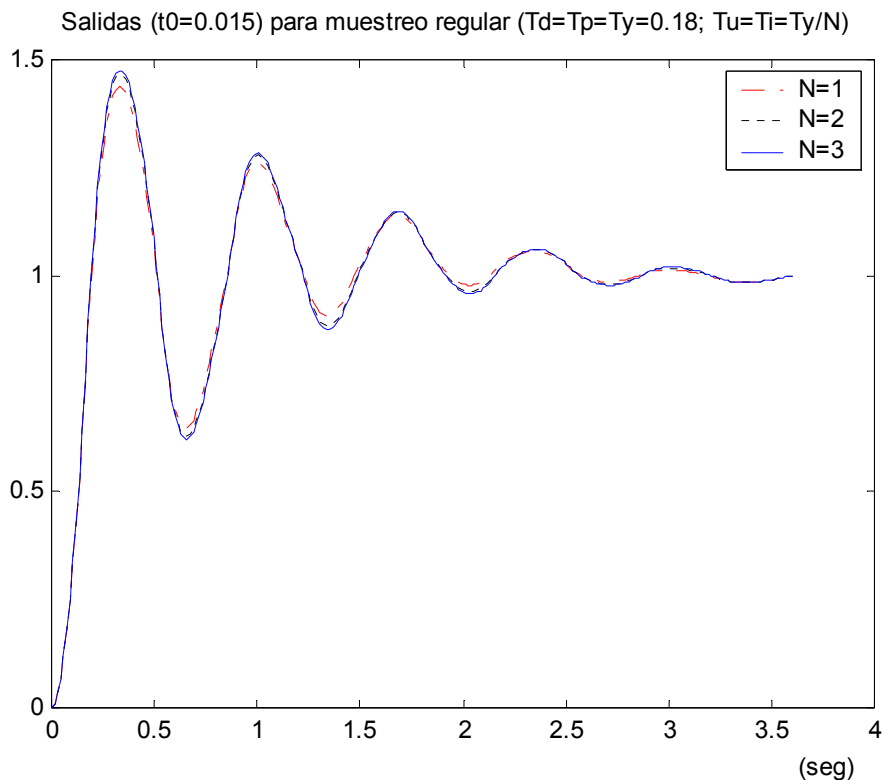


Figura 4-19: Salida muestreo regular en I

A la vista de estos resultados, se puede concluir que muestrear más rápidamente en I no aporta (al menos en este caso) mejoría en la respuesta del sistema (más bien, la empeora sensiblemente), lo cual viene refrendado por la ubicación de los polos en el lugar de raíces, los cuales prácticamente no varían su posición respecto del caso monofrecuencia (es más, incrementan sensiblemente su módulo, acercándose hacia posiciones más cerca del círculo unitario, menos estables). Todo esto viene a corroborar estudios clásicos (Ogata, 1974 y 1987) sobre el tema.

**Parte D:** Se va a pasar ahora a observar qué sucede cuando muestreemos más rápidamente en la parte D del regulador. Se prueban los siguientes casos:

- Caso  $N=2$  en D:  $T_u=T_d=0.09=T_y/2$ ,  $T_p=T_i=T_y$
- Caso  $N=3$  en D:  $T_u=T_d=0.06=T_y/3$ ,  $T_p=T_i=T_y$
- Caso  $N=6$  en D:  $T_u=T_d=0.03=T_y/6$ ,  $T_p=T_i=T_y$

Los lugares de raíces superpuestos para el metaperiodo  $T_y$  y las salidas del proceso quedan representadas en las figuras 4-20 y 4-21 (comparadas con el caso monofrecuencia  $N=1$ ).

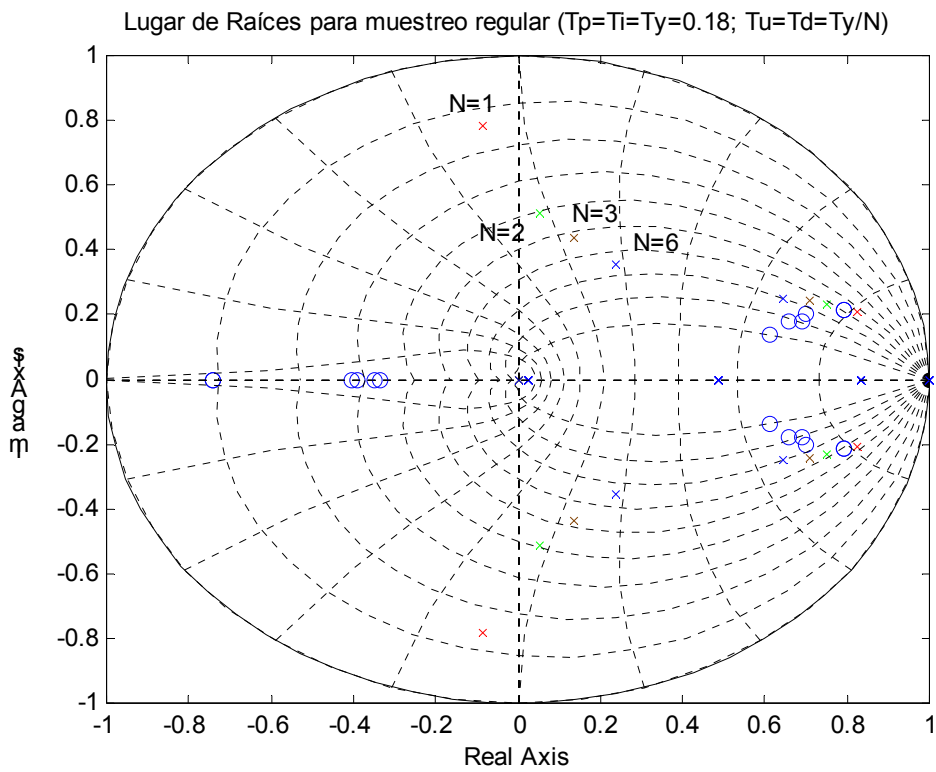


Figura 4-20: Lugar de raíces muestreo regular en D

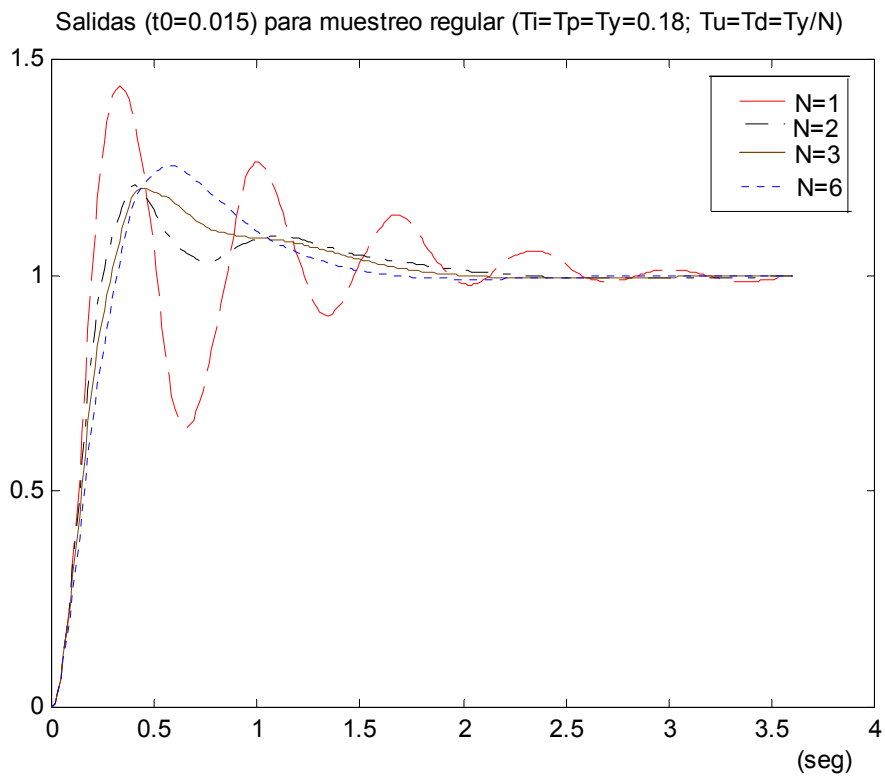


Figura 4-21: Salida muestreo regular en D



A la vista de los resultados se puede concluir que ahora muestrear más rápidamente en D sí aporta (al menos en este caso) mejoría en la respuesta del sistema con respecto al caso monofrecuencial (lo cual corrobora estudios clásicos (Ogata, 1974 y 1987) sobre el tema). Por lo que respecta al lugar de raíces, se ve una variación significativa en la posición de los polos, que recuerda mucho a la lograda para el caso bifrecuencia con estructura interactiva en el regulador (ver figura 4-3) donde se tenía (haciendo abuso de nomenclatura) que  $T_y/N=T_d=Ti=Tp=Tu$ . De hecho, si se compara para  $N=2$  dicho caso ( $T_y/2=T_d=Ti=Tp=Tu$ ) con el  $N=2$  en D se tienen los resultados que muestran las figuras 4-22 y 4-23. Como se observa a simple vista, los lugares de raíces prácticamente resultan iguales para ambas estructuras (paralela e interactiva) para el caso  $N=2$ . La variación entre sendos lugares supone tener una respuesta temporal sensiblemente diferente en el sistema para cada estructura, de tal forma que, se obtiene mejor tiempo de establecimiento para el caso interactivo, pero mayor sobreoscilación máxima; por su parte, el tiempo de pico es similar en ambos casos.

De la misma forma, se podría comparar los casos de  $N=3$  y  $N=6$  obteniéndose conclusiones similares a las expuestas en el párrafo anterior, aunque cabe reseñar que conforme  $N$  aumenta la diferencia entre las respuestas temporales dadas por una y otra estructura es mayor, es decir, se acusa el hecho de obtener un mejor tiempo de establecimiento para el caso interactivo, pero mayor sobreoscilación máxima. Igualmente, el lugar de raíces demuestra esa mayor diferencia comentada, ya que la ubicación de los polos se va haciendo más distante conforme  $N$  aumenta. Véanse en las figuras 4-24 a 4-26 el lugar de raíces completo de la comparativa y las diferentes respuestas temporales comparadas para cada  $N$ .

La diferencia entre la ubicación de los polos para el caso de muestreo regular tratado en D respecto del caso interactivo la marca la consideración del muestreo en I, esto es, se comprueba que si se considera el mismo esquema de muestreo regular tanto en D como en I el resultado es idéntico al que se obtiene con la estructura interactiva. Por tanto, se puede concluir que el incremento de la multiplicidad  $N$  en el muestreo de la parte D es el que aporta prácticamente todo el beneficio al sistema en cuanto a dinámica. Por su parte, la acción I tiene como cometido compensar la desviación que se da con respecto a la estructura interactiva cuando se incrementa  $N$  sólo en D, de tal forma que, si se usa el mismo  $N$  en D y en I la estructura paralela y la interactiva se comportan de forma equivalente.

**Parte P:** Por lo dicho en el párrafo anterior, el caso de variar (incrementar  $N$ ) regularmente en el muestreador  $T_p$  queda demostrado que no supone mejoría alguna respecto del caso monofrecuencia ( $N=1$ ) en dicha parte P, ya que ésta carece de dinámica y entonces suministra de forma repetida (repetición dada por el esquema de muestreo) la misma acción de control a cada metaperiodo (la cual coincide con la que se proporcionaría en el caso monofrecuencia,  $N=1$ ).

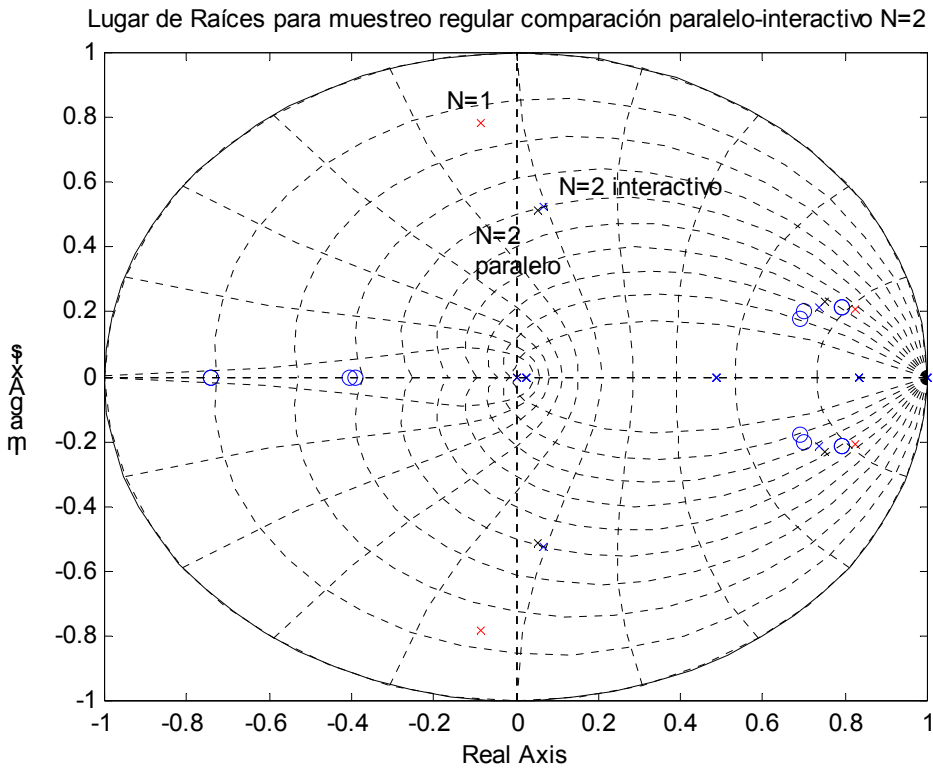


Figura 4-22: L. de raíces muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo, N=2

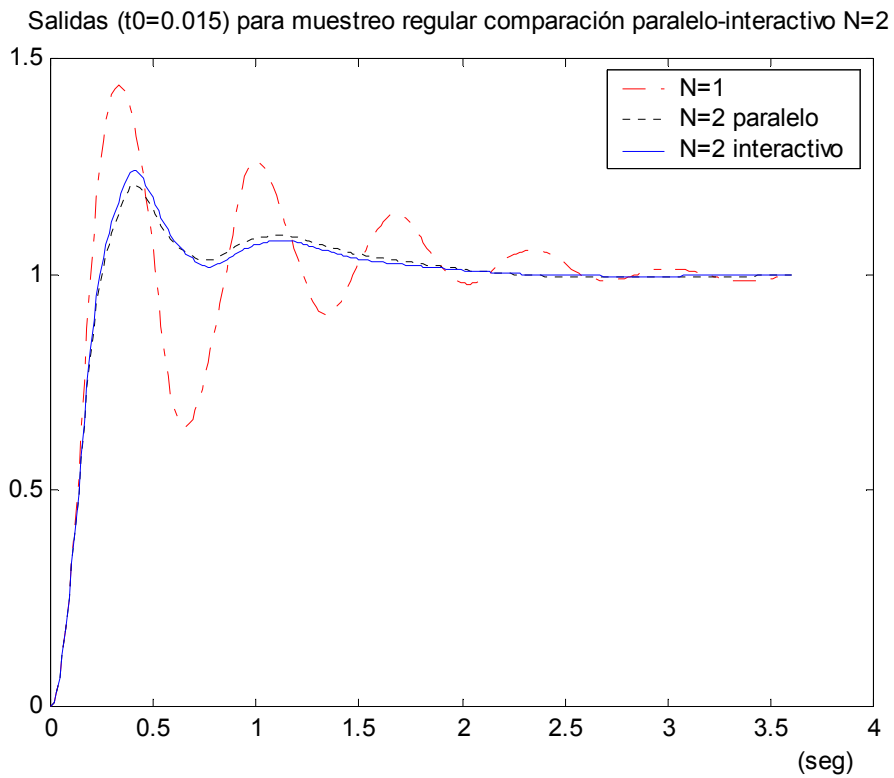


Figura 4-23: Salida muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo, N=2

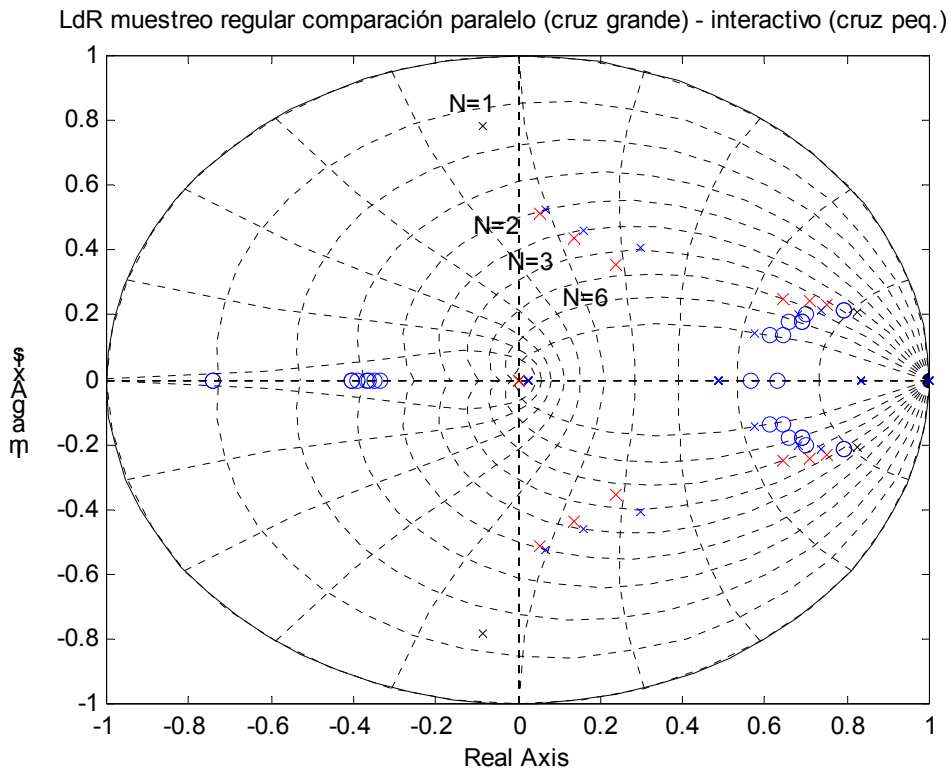


Figura 4-24: Lugar de raíces muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo

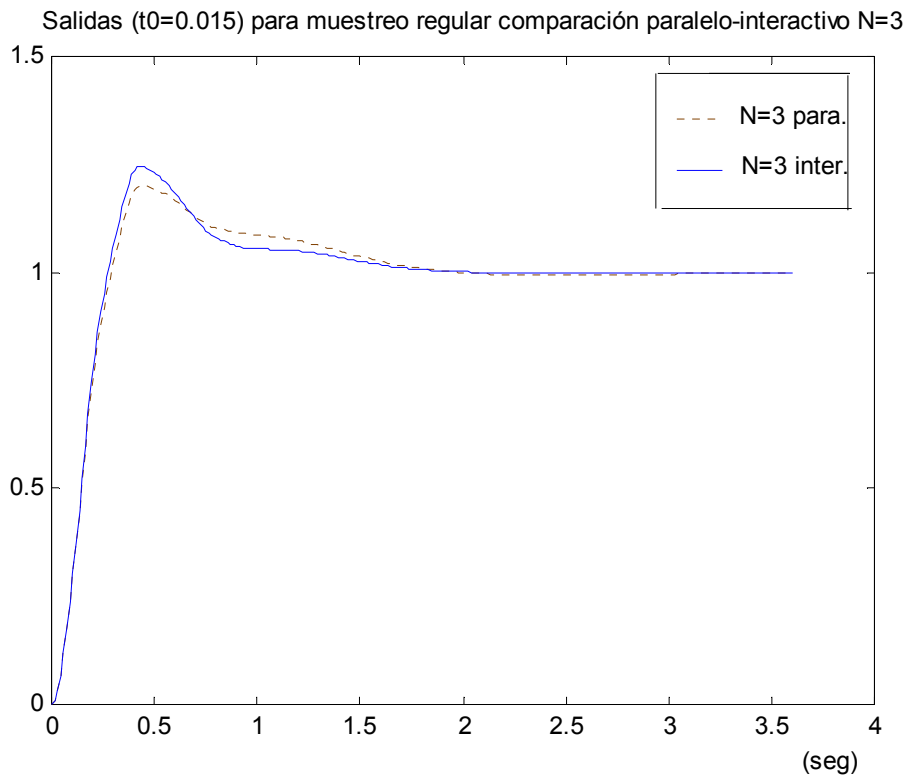


Figura 4-25: Salida muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo, N=3

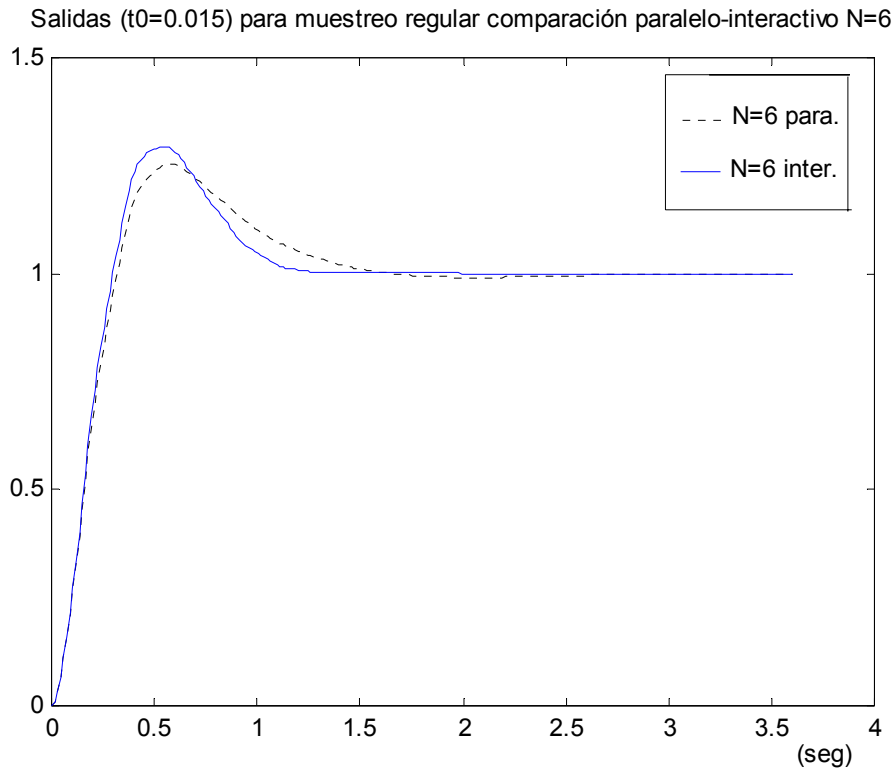


Figura 4-26: Salida muestreo regular comparación paralelo (parte D) – interactivo, N=6

**Nota aclaratoria:**

En otro orden de cosas, cabe hacer un comentario más acerca de la figura 4-21 (Salida muestreo regular en D) la cual expone, entre otras, las salidas cuando N=3 y N=6. Según la ubicación de los polos en el plano Z, la sobreoscilación máxima del caso N=6 debería ser menor que la del caso N=3. Sin embargo sale todo lo contrario. Esto hace pensar si la variación de sobreoscilación máxima es debida a los ceros del modelo con estructura no convencional o a efectos intermuestreo no recogidos en el muestreador de salida (que trabaja a  $T_y$ , metaperiodo al que están hallados los lugares de raíces respectivos). Para resolver esta duda se representan en la figura 4-27 las salidas a metaperiodo  $T_y$  para ambos casos.

A la vista de los resultados, se puede concluir que como ya se indica en (Salt, 1994) la variación de sobreoscilación máxima se debe a los ceros del modelo con estructura no convencional, puesto que a metaperiodo también queda reflejada dicha sobreoscilación (este efecto ya se ha detectado cuando se ha estudiado la estructura interactiva).

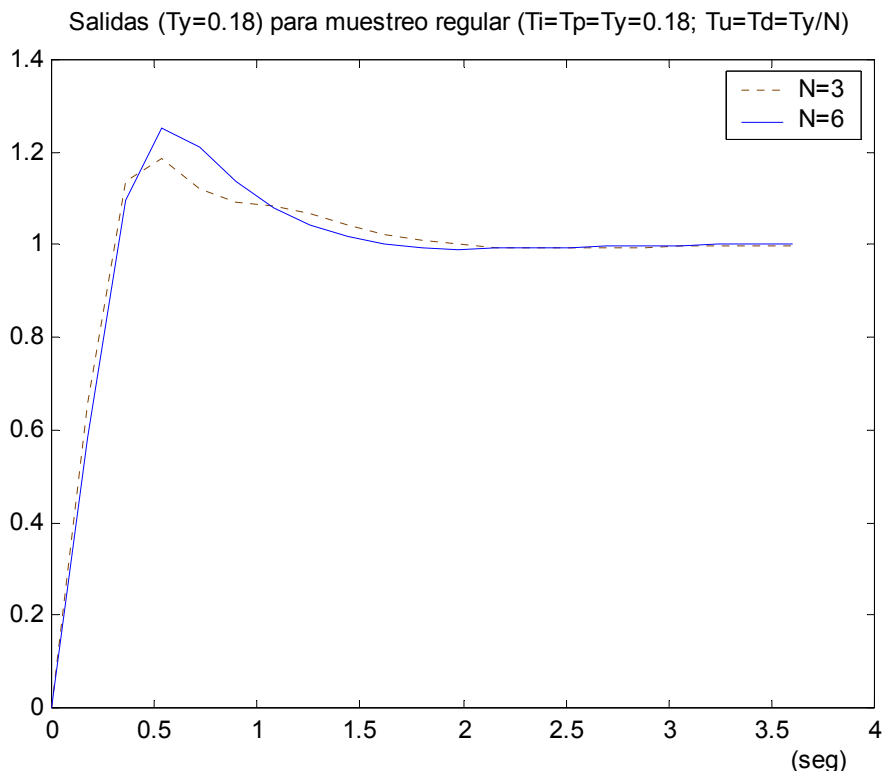


Figura 4-27: Salida a metaperiodo muestreo regular en D

#### 4.3.2.2.4.3. Caso muestreo irregular $N=2$ .

Visto el comportamiento del sistema de control para el caso de muestreo regular, se va a estudiar ahora el caso irregular. Dado que el tratamiento de los muestreadores de las partes I y P se ha comprobado que arrojan pocas conclusiones en el caso regular analizado anteriormente, se cree más conveniente centrar ahora el estudio solamente en la variación del esquema de muestreo en la parte D. Así pues, se va a pasar a mostrar los resultados correspondientes a los siguientes casos (tomando nuevamente  $T_y=0.18$  seg y  $t_0=0.015$  seg):

- $T_d=T_u=[0,0.015]$ ,  $T_p=T_i=T_y=[0]$ : muestreo irregular en los instantes 0 y 1 a  $t_0$  de cada metaperiodo en la parte D (y en el muestreador del proceso). El resto de muestreadores actúan capturando muestra únicamente en el instante 0 (comienzo de metaperiodo).
- $T_d=T_u=[0,0.06]$ ,  $T_p=T_i=T_y=[0]$ : muestreo irregular en los instantes 0 y 4 a  $t_0$  de cada metaperiodo en la parte D (y en el muestreador del proceso). El resto de muestreadores actúan capturando muestra únicamente en el instante 0 (comienzo de metaperiodo).
- $T_d=T_u=[0,0.12]$ ,  $T_p=T_i=T_y=[0]$ : muestreo irregular en los instantes 0 y 9 a  $t_0$  de cada metaperiodo en la parte D (y en el muestreador del proceso). El resto de muestreadores actúan capturando muestra únicamente en el instante 0 (comienzo de metaperiodo).

- $T_d=T_u=[0,0.165]$ ,  $T_p=T_i=T_y=[0]$ : muestreo irregular en los instantes 0 y 11 a  $t_0$  de cada metaperiodo en la parte D (y en el muestreador del proceso). El resto de muestreadores actúan capturando muestra únicamente en el instante 0 (comienzo de metaperiodo).

En la figura 4-28 se incluyen, además de los polos de los casos irregulares, los polos de los casos regulares (obtenidos en el epígrafe anterior) con  $N=1$  (caso monofrecuencial,  $[0]$ ) y  $N=2$  ( $[0,0.09]$ ), para que sirvan de referencia. Se observa nuevamente la descripción de dos trayectorias que unen los polos en dos sentidos. El sentido derecho (trayectoria cruces pequeñas) representa el movimiento del muestreo regular con  $N=2$  hacia posiciones irregulares más cercanas al comienzo del metaperiodo (hasta confluir en el caso monofrecuencial). El sentido izquierdo (trayectoria cruces grandes), por su parte, representa el movimiento del muestreo regular con  $N=2$  hacia posiciones irregulares más cercanas al final del metaperiodo (hasta confluir en el caso monofrecuencial). Recuérdese que estas trayectorias ya fueron descritas en el análisis del regulador con estructura interactiva (ver figura 4-5), sólo que allí, la trayectoria estaba un poco desplazada respecto a ésta, ya que se contaba con la aportación de la acción integral (aquí sólo se cuenta con muestreo bifrecuencia en la acción derivativa).

Las salidas (figura 4-29) quedan como cabía esperar vista la ubicación de los polos en el lugar de raíces. Se parecen mucho a las obtenidas con el regulador con estructura interactiva. Así pues, se aprecia que los casos donde el muestreo bifrecuencia se produce hacia el final del metaperiodo, los resultados son muy similares al caso monofrecuencial,  $N=1$  (el cual se puede ver en las figuras 4-21 y 4-23). Lo mismo se puede decir si el caso bifrecuencia toma sus muestreos hacia el principio del metaperiodo. Sin embargo, conforme el esquema de muestreo bifrecuencial irregular se acerca más al caso regular,  $[0,0.09]$ , la respuesta del sistema se asemeja más a la obtenida en dicho caso, como cabía esperar.

El mismo estudio se podría realizar para el caso de muestreo irregular con  $N=3$  y  $N=6$ , obteniéndose (al igual que ha sucedido con el caso  $N=2$ ) conclusiones similares a las obtenidas para el caso de estructura interactiva.

#### 4.3.2.2.4.4. Transformación al plano S.

Haciendo uso de la ecuación (4-5), tal y como se hizo en el planteamiento de estructura interactiva, se puede transformar de forma aproximada los polos obtenidos en el plano Z hacia el plano S y reafirmar allí qué características cabe esperar del sistema, según el esquema de muestreo que se haya utilizado.

Así, para el caso de  $N=2$  irregular (visto en la sección previa) se obtiene el lugar de raíces continuo descrito en la figura 4-30 (similar al de la figura 4-12), donde es fácil comprobar que, por ejemplo, el muestreo  $[0,0.165]$  genera un sistema con mayor sobreoscilación y más lento que el generado a partir del esquema  $[0,0.12]$  (como se puede comprobar en la figura 4-29).

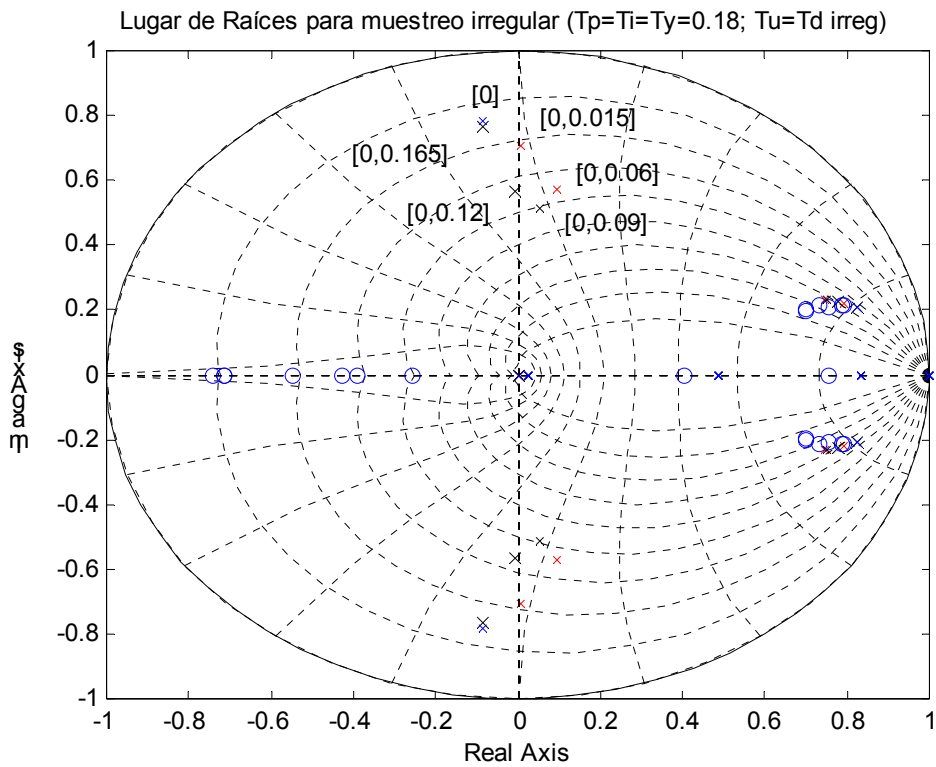


Figura 4-28: Lugar de raíces muestreo irregular en D, N=2

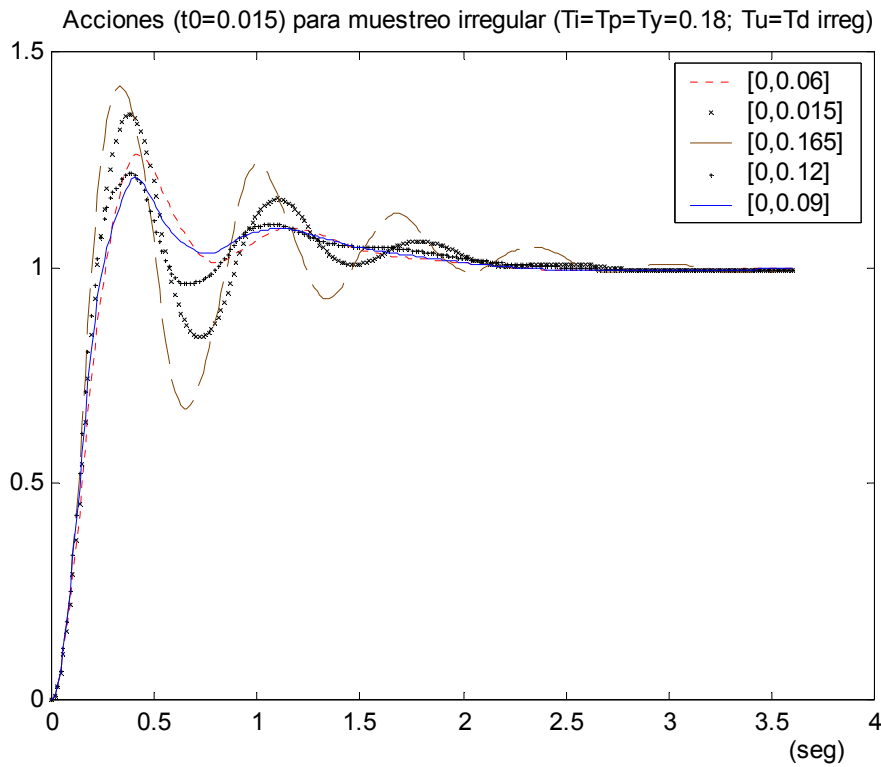


Figura 4-29: Salida muestreo irregular en D, N=2

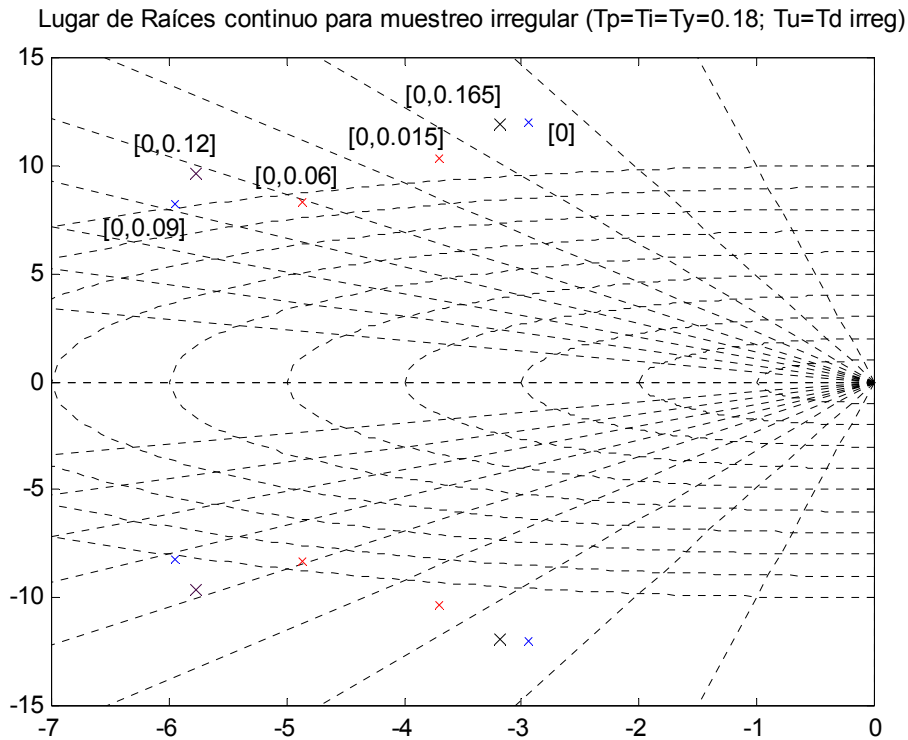


Figura 4-30: LdR transformado a continuo  $N=2$  (muestreo irregular)

#### 4.3.2.2.5. Validación del modelado.

Una vez analizadas y expuestas las diferentes salidas del sistema presentado en el apartado 4.3.2.1, y dado que dicho sistema requiere de un modelado con cierta complejidad, se va a pasar a continuación a validar dicho modelado mediante una simulación estándar en Simulink. Es preciso hacer notar que en Simulink tan sólo se puede implementar situaciones de muestreo regular, por lo que serán estas situaciones las que se utilizarán para realizar la validación.

Por tanto, el esquema Simulink equivalente para la figura 4-16 es el que se muestra en la figura 4-31. De él tan sólo se presentarán las respuestas a periodo  $T_u$  que se pueden obtener a la salida del proceso. Así, si se deja con  $N=1$  las partes P y D del controlador y se incrementa paulatinamente la multiplicidad ( $N=2$  y  $N=3$ ) en la parte I (y, recordar que también en el proceso), se obtendrán las respuestas de la figura 4-32, idénticas a las de la figura 4-19 (aunque a periodo  $T_u$ ). Por otro lado, si ahora es la parte D (junto con el proceso) la que incrementa su multiplicidad ( $N=2$ ,  $N=3$  y  $N=6$ ) dejando las otras partes con  $N=1$ , las salidas obtenidas serán las de la figura 4-33, las cuales también son iguales a las de la figura 4-21, pero nuevamente a periodo  $T_u$ . Por último la figura 4-34 muestra que, efectivamente, el incremento de la multiplicidad ( $N=2$  y  $N=3$ ) en la parte P (junto con el proceso) no supone ninguna variación significativa sobre la salida del sistema.



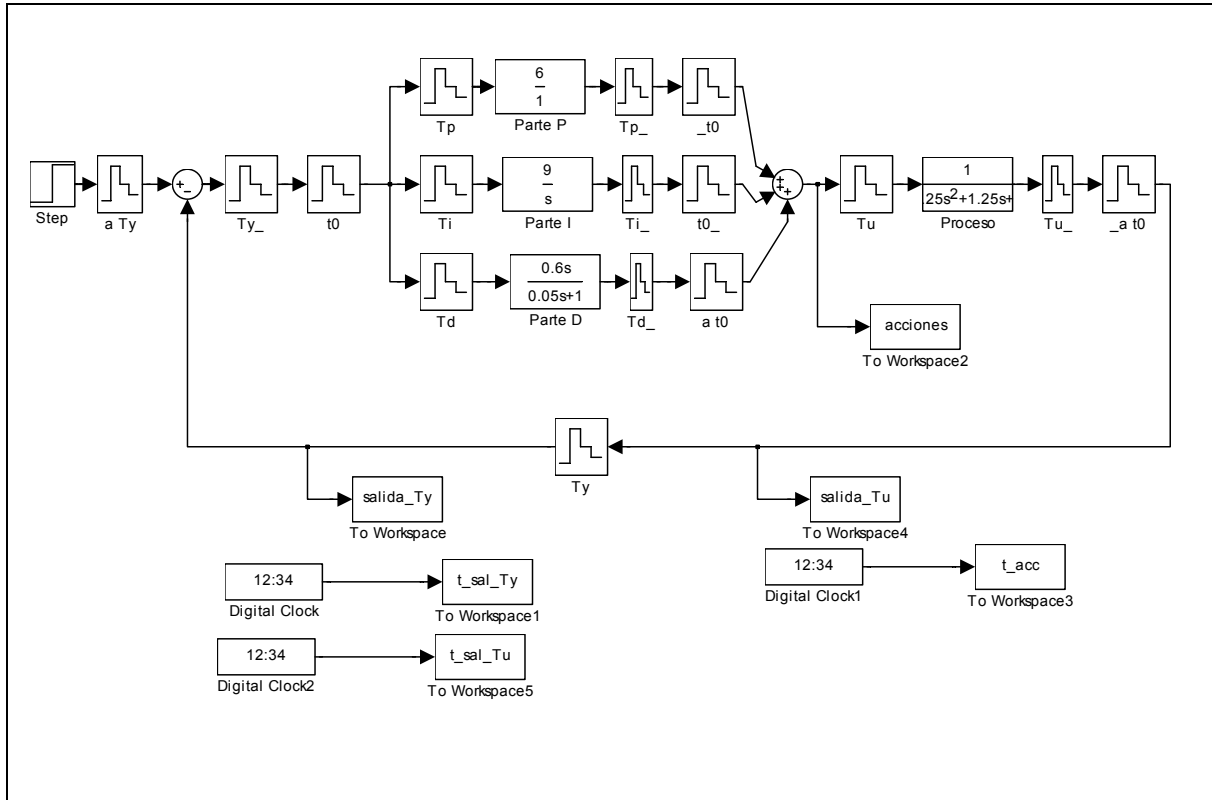


Figura 4-31: Esquema Simulink estructura paralela.

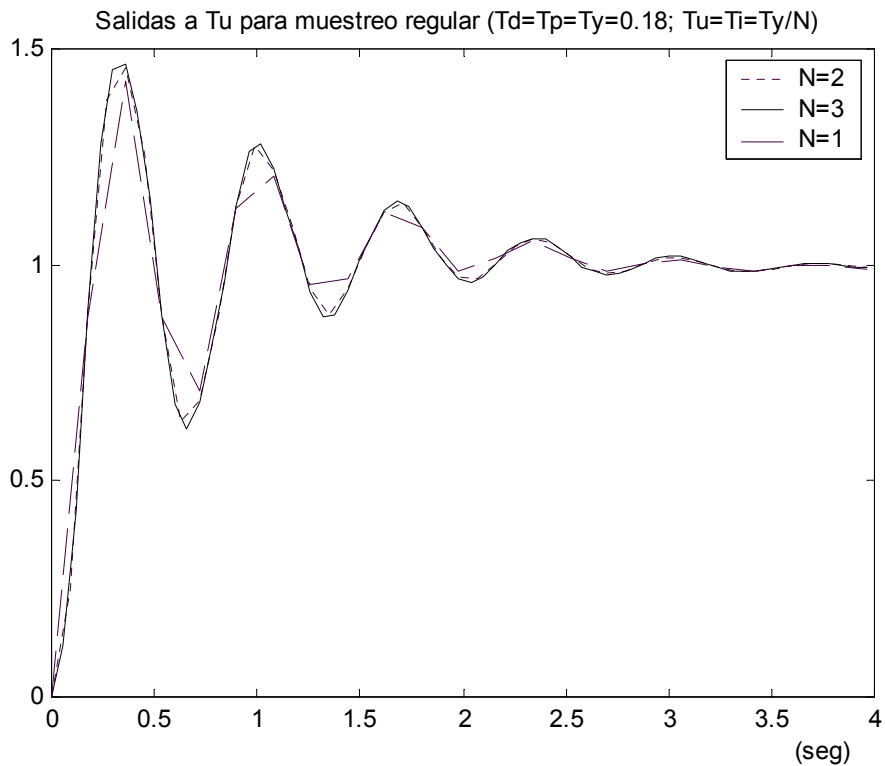


Figura 4-32: Salida muestreo regular en I esquema Simulink.

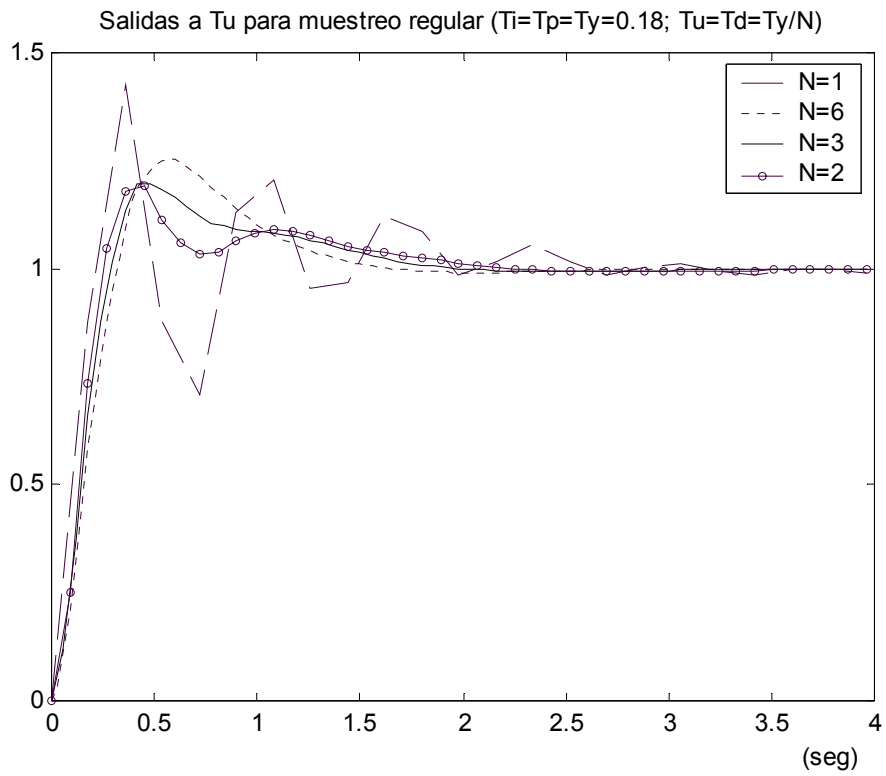


Figura 4-33: Salida muestreo regular en D esquema Simulink.

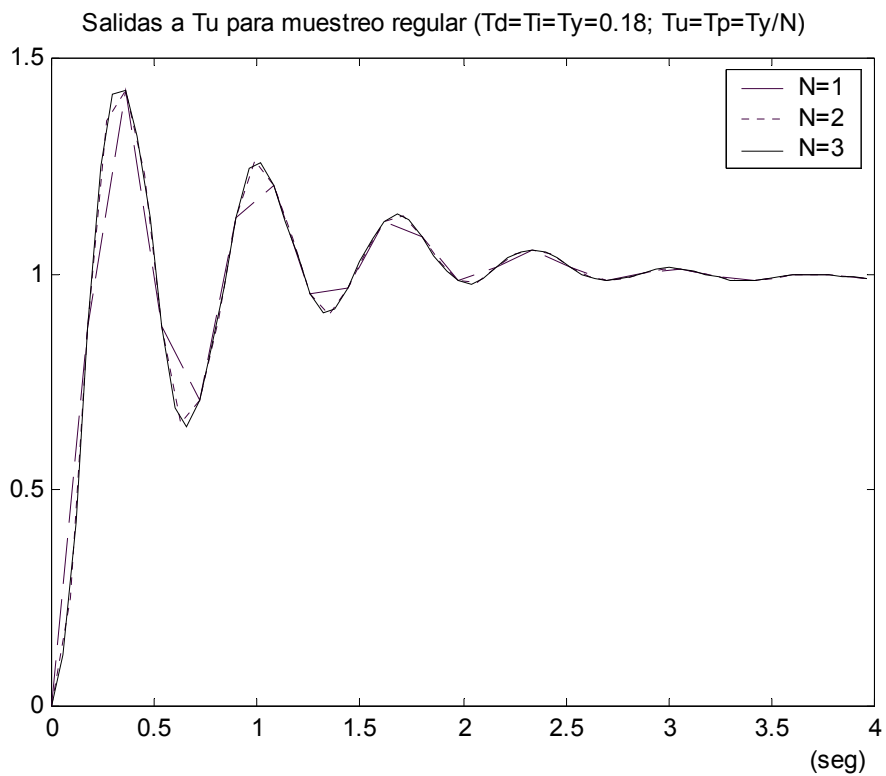


Figura 4-34: Salida muestreo regular en P esquema Simulink.

### 4.3.3. Consideración del esquema de muestreo como parámetro de diseño.

Tras estudiar en las secciones anteriores el comportamiento del sistema de control tanto cuando el regulador de estructura no convencional se presenta en versión interactiva como en versión paralela, cabe plantearse ahora la idea de poder diseñar en el Lugar de Raíces considerando el esquema de muestreo como un parámetro más de diseño. En definitiva, se trata de hacer una valoración cualitativa de los parámetros  $k_p$ ,  $t_i$  y  $t_d$  del regulador PID con el fin de hacer compatibles escenarios de muestreo no convencional con escenarios monofrecuenciales en los que se varíe el valor de los parámetros de partida del PID. Para lograr el objetivo marcado, y por sencillez, se va a realizar el estudio a partir de un ejemplo en el que se ha elegido la estructura interactiva en el regulador como enfoque de partida.

#### 4.3.3.1. Ejemplo.

Para llevar a cabo el estudio se va a elegir el siguiente ejemplo:

- proceso:  $G_p(s) = \left( \frac{1.5}{s^2 + 2s + 0.75} \right)$
- regulador PID con filtro derivativo:  $G_R(s) = 8 \cdot \left( 1 + \frac{1}{3.2s} + \frac{0.2s}{0.1s + 1} \right)$
- metaperiodo y periodo de intermuestreo:  $T_0 = 0.18$ ;  $t_0 = 0.015$

Este ejemplo, al igual que el de 4.3.1.2, se modela e implementa en Matlab obteniéndose sucesivos lugares de raíces a metaperiodo  $T_0$  para cada esquema de muestreo planteado en el muestreador intermedio a regulador y proceso. Además, en este caso en aras a lograr el objetivo que se persigue en esta sección (considerar el patrón de muestreo como un parámetro más de diseño) se incluye una rejilla junto a los diferentes lugares de raíces superpuestos que se obtienen. Dicha rejilla está formada por diferentes puntos que establecen la ubicación del par de polos complejos conjugados para un rango de valores de  $k_p$ ,  $t_d$  y  $t_i$  dentro del esquema monofrecuencial. Recordar que el par de polos complejos conjugados que están siendo analizados durante todo el capítulo es el par que coincide con tener parte imaginaria mayor, ya que, al no haber ceros cercanos a ellos (cosa que sí sucede con los otros polos), parece que van a influir más sobre el comportamiento dinámico del sistema.

El análisis planteado en el Lugar de Raíces se puede ver de forma global en la figura 4-35 y de forma más detallada en la figura 4-36. En la primera se observan los diferentes polos y ceros de bucle cerrado (además de los polos de bucle abierto) que presenta el sistema para diferentes esquemas de muestreo, prestando mayor atención en la segunda de las figuras a uno de los polos (el de parte imaginaria positiva) del par complejo conjugado que nos interesa, el cual viene acompañado de la nube de puntos (rejilla) que intersecta ubicaciones procedentes de casos de muestreo no convencional con  $N=2$  con ubicaciones de casos monofrecuenciales en los que  $k_p$ ,  $t_d$  y  $t_i$  han variado su valor con respecto al de partida. Concretamente,  $k_p$  varía dentro del rango [5.5 - 8] con incrementos de 0.25,  $t_d$  dentro del rango [0.18 - 0.23] con incrementos de 0.01 y  $t_i$  dentro del rango [2 - 3.5] con incrementos de 0.5. Para los tres parámetros se señala tanto en la figura 4-35 como en la 4-36 el sentido que toma el incremento (positivo) de cada uno de ellos, de manera que para cada valor de  $k_p$

(aparecen 11 distintos valores) se ve cómo variaría la ubicación del polo complejo conjugado en cuestión para los diferentes valores de  $t_d$  (aparecen 6 distintos) y, a su vez, para cada valor de  $k_p$  y  $t_d$  se observa cómo varía dicho polo dependiendo del valor de  $t_i$  (aparecen 4 distintos).

En la figura 4-37 se hace una transformación al plano  $S$  (como en el apartado 4.3.1.2.4.4) del par de polos complejos conjugados, ya que se antoja más sencilla la obtención de conclusiones para los parámetros  $k_p$ ,  $t_d$  y  $t_i$  en este plano. En la figura 4-38 se detalla más dicha transformación para uno de los polos del par complejo conjugado (el de parte imaginaria positiva). A partir de dicha figura si se pretende compatibilizar un caso monofrecuencia con un caso bifrecuencia con  $N=2$  (regular o irregular) manteniendo el esquema monofrecuencia y, por tanto, variando únicamente los parámetros  $k_p$ - $t_d$ - $t_i$  iniciales ( $k_p=8$ ,  $t_d=0.2$ ,  $t_i=3.2$ ), se pueden extraer fácilmente una serie de conclusiones a nivel cualitativo:

- se ha de reducir  $k_p$ , lo cual se puede explicar a partir de la idea de que al tener que inyectar en el caso bifrecuencia el doble de acciones de control ( $N=2$ ) sobre el proceso, la energía a suministrar al mismo se ha de repartir entre ambas acciones. Además se observa que este descenso en  $k_p$  es menos acusado conforme más cercana está la aplicación de una acción respecto de la otra, lo cual se puede explicar a partir del hecho de que en estos casos se trata de esquemas bifrecuencia más cercanos al monofrecuencial.
- se ha de aumentar  $t_d$  para los casos bifrecuencia que por norma general se encuentren dentro del primer subperiodo del metaperiodo (en el ejemplo, el subperiodo comprendido entre los instantes 0 y 0.09), mientras, por el contrario, se deberá reducir  $t_d$  para los casos que por norma general se encuentran en la situación contraria, esto es, los que se ubican dentro del segundo subperiodo del metaperiodo (en el ejemplo, el subperiodo que comienza a partir del instante 0.09 y acaba en el instante 0.165). Este hecho se puede explicar de manera empírica, ya que se ha observado que, por norma general, para un esquema bifrecuencia irregular con  $N=2$ , si el muestreo intermedio está dentro del primer subperiodo,  $k_p$  tiende a reducirse más que para el esquema de muestreo complementario (en el que se tiene el muestreo intermedio en el segundo subperiodo, guardando la misma distancia respecto al final del metaperiodo que tiene el otro caso respecto al inicio del metaperiodo), entonces, como ambos casos suelen ofrecer una respuesta parecida (aunque en general no idéntica), la manera de compensar esa diferencia a nivel de ganancia ( $k_p$ ) es aumentar  $t_d$  en un caso y reducirlo en el otro; así se puede conseguir finalmente un coeficiente de amortiguamiento (sobreoscilación máxima) similar (como se puede ver en las figuras 4-36 y 4-38).
- se ha de manejar  $t_i$  para ajustar finalmente la respuesta del sistema; de manera empírica no se deduce ninguna regla de sintonía clara, ya que, como  $k_p$  y  $t_i$  varían en el mismo sentido, dependiendo del valor que se coja para  $k_p$  se deberá aumentar o reducir el valor de  $t_i$ . Además, se observa que una variación relativamente grande en dicha acción (incrementos de 0.5 unidades de tiempo para el ejemplo) no representa modificaciones grandes en la ubicación del par complejo conjugado, mientras que con la variación de  $k_p$  y  $t_d$  dicho polo puede ser desplazado en mayor medida a lo largo del LdR. Por ello se piensa que esta acción sirve para el ajuste fino de la respuesta del sistema.

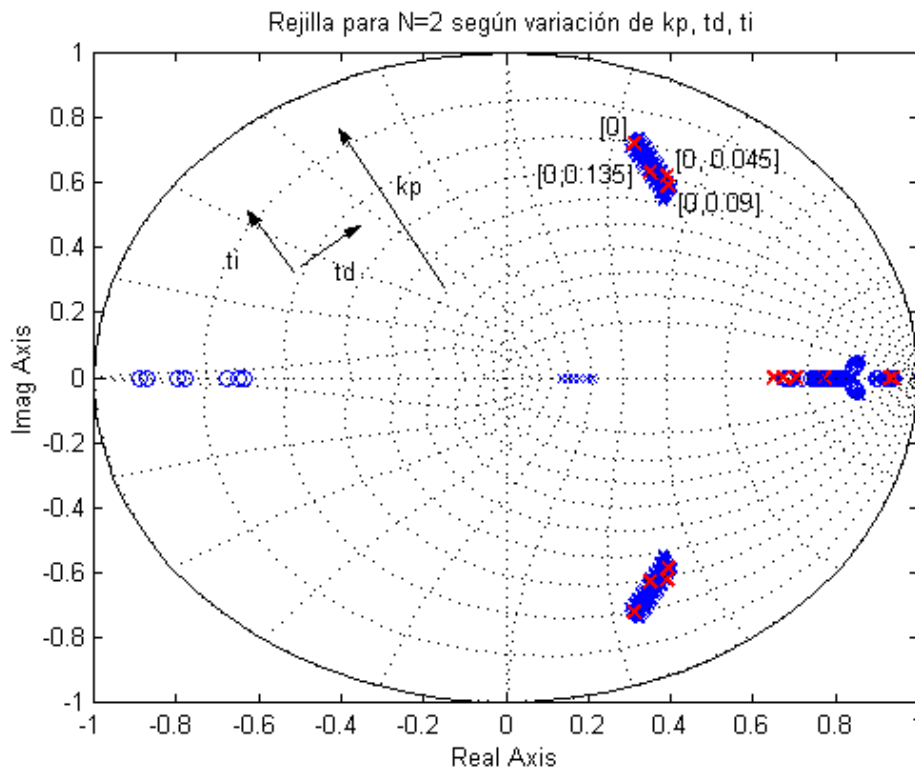


Figura 4-35: Lugar de Raíces con rejilla en visión global.

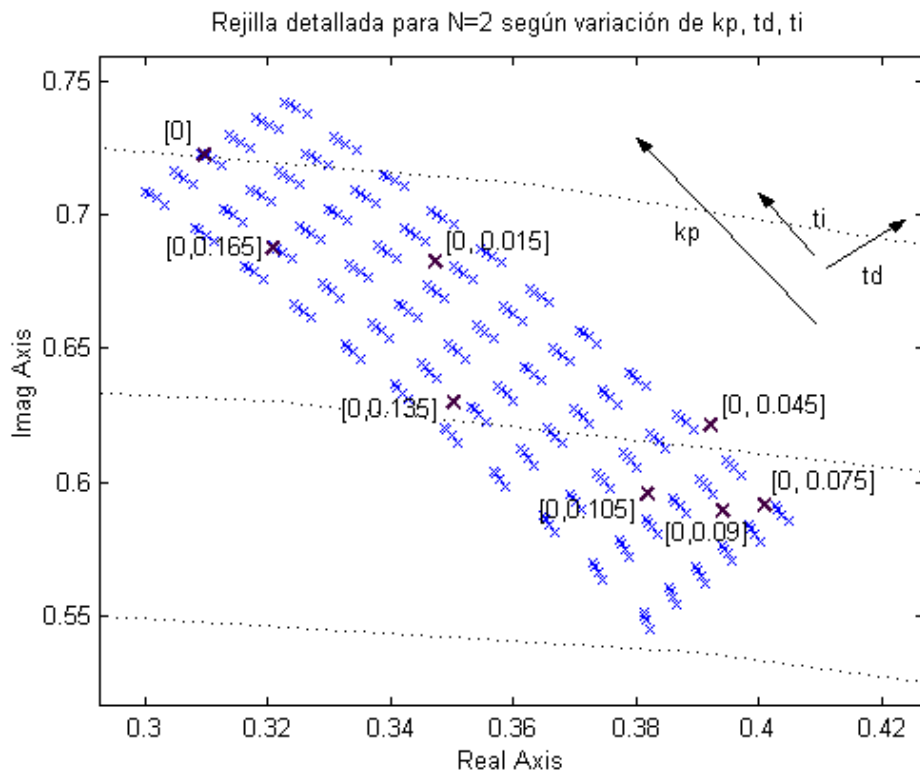


Figura 4-36: Lugar de Raíces con rejilla en visión detallada.

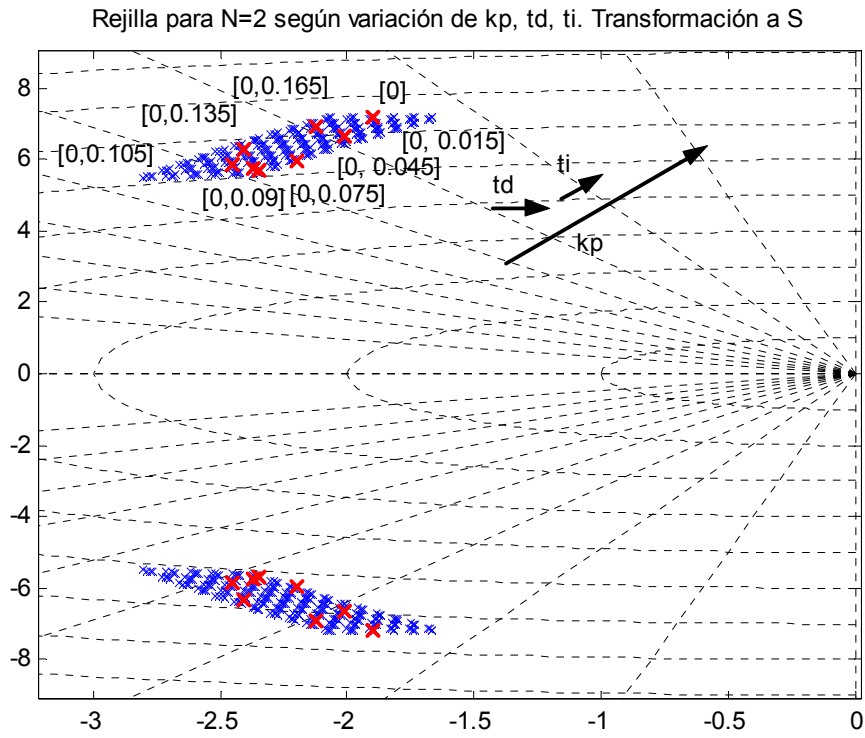


Figura 4-37: Lugar de Raíces con rejilla transformado a S en visión global.

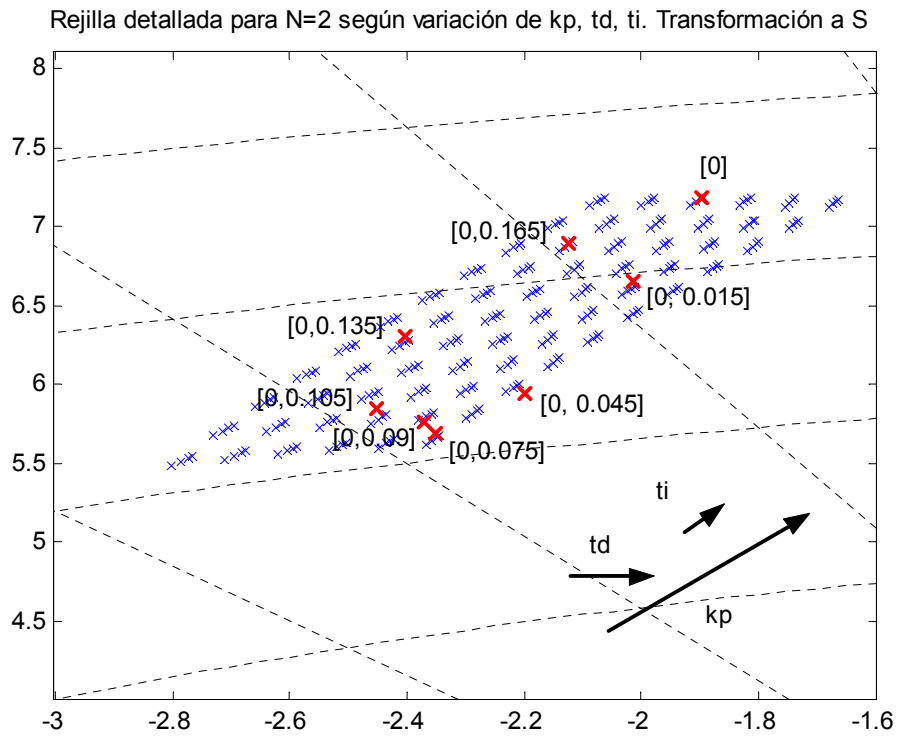


Figura 4-38: Lugar de Raíces con rejilla transformado a S en visión detallada.

Una vez vistas las reglas generales de sintonía que se han de seguir en el controlador PID para hacer compatibles escenarios monofrecuenciales con otros bifrecuenciales (en este caso con  $N=2$ ), las cuales permiten, por tanto, establecer el esquema de muestreo como un parámetro alternativo al diseño de dichos controladores PID, es necesario reseñar cierto aspecto interesante que va a hacer que algunos escenarios monofrecuenciales no se ajusten exactamente a su bifrecuencial asociado. La razón estriba en el hecho de que, además del par complejo conjugado que se ha estado analizando, hay otros polos y ceros de bucle cerrado en el sistema de control que repercuten en el comportamiento final del mismo, de manera que si la ubicación de éstos difiere mucho entre el caso monofrecuencial y el bifrecuencial asociado, la respuesta puede variar en cierta medida.

Así, volviendo al ejemplo de esta sección, si se analiza un primer escenario a nivel de LdR (figura 4-39) de manera que se escoge el caso bifrecuencia dado por el patrón de muestreo  $[0, 0.165]$  (representado en 4-39 con aspas y círculos pequeños) y se compara con el caso monofrecuencia en el que  $k_p=7.5$ ,  $t_i=3.25$  y  $t_d=0.19$  (como se puede deducir, por ejemplo, de 4-36; representado en 4-39 con aspas y círculos grandes) se puede ver que el par complejo conjugado de parte imaginaria mayor (el que se ha estudiado) coincide exactamente para ambos casos, al igual que en cierta medida los ceros y polos restantes, excepto una pequeña diferencia existente en el cero que aparece en la parte negativa. Gracias a esta bondad en la aproximación de un caso al otro, la respuesta del sistema de control para ambos es prácticamente idéntica (figura 4-40). En la figura 4-41 se muestran las acciones de control a suministrar al proceso en ambos casos, observándose que, pese a que en el caso bifrecuencia aparecen picos a final de cada metaperiodo (dado que se actúa en el instante 0.165 de cada uno de ellos), el discurrir general de ambas señales es similar, lo que hace posible que las respuestas también lo sean.

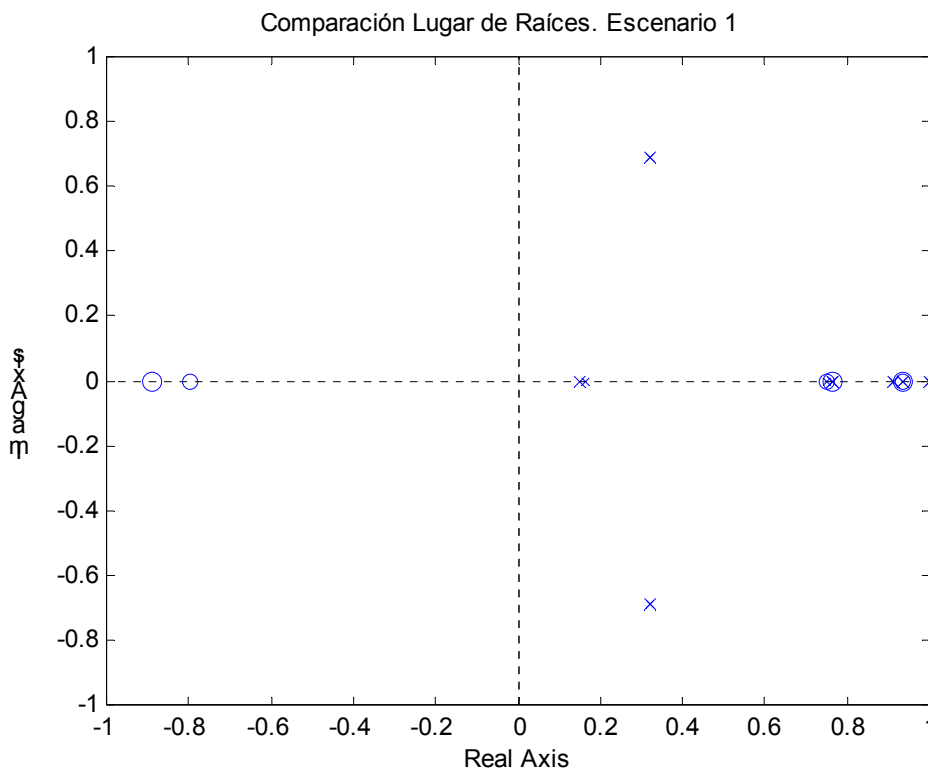


Figura 4-39: Comparativa LdR casos monofrecuencia variado y bifrecuencia (escenario 1).

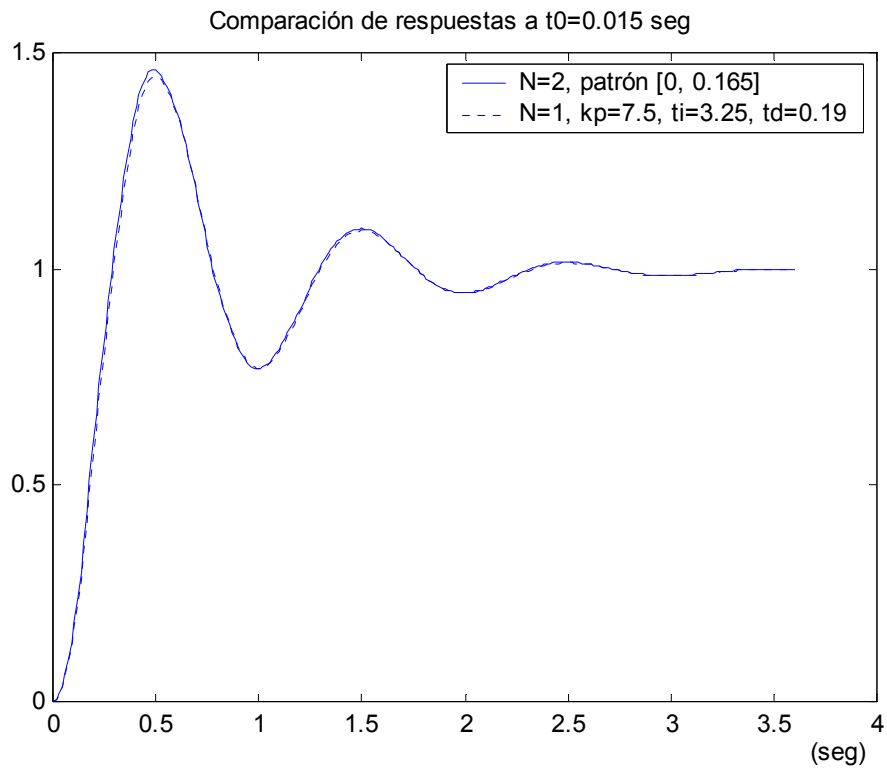


Figura 4-40: Comparativa respuestas casos monofrec. variado y bifrecuencia (escenario 1).

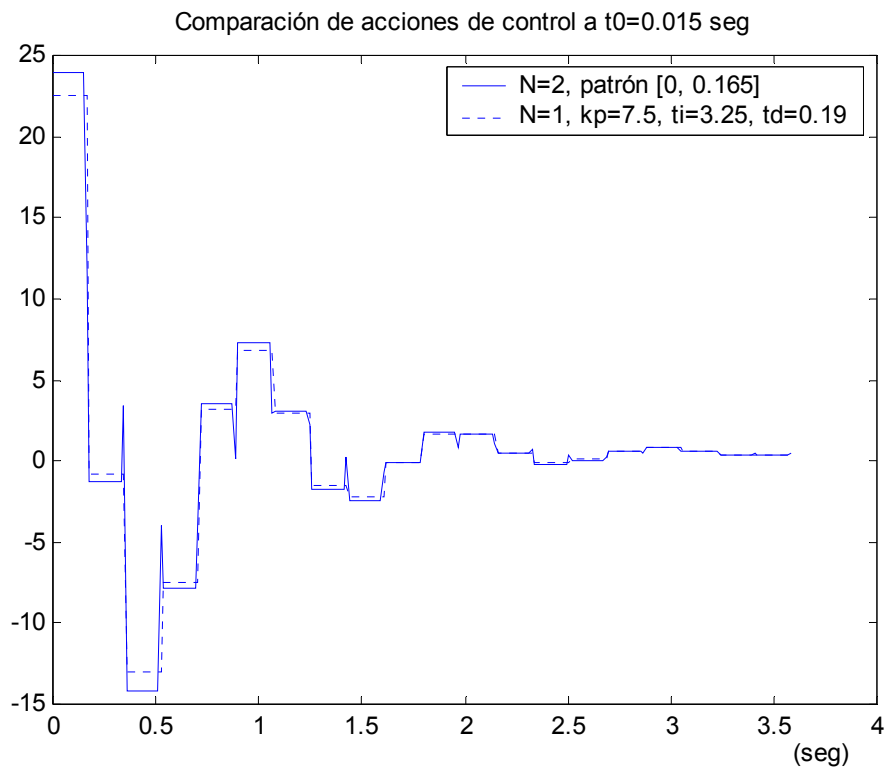


Figura 4-41: Comparativa acc. control casos monofrec. variado y bifrecuencia (escenario 1).



Sin embargo, si ahora se analiza un segundo escenario de manera que se escoge el esquema de muestreo bifrecuencia  $[0, 0.075]$  y se compara con el monofrecuencia asociado, esto es, con el que resulta de fijar  $k_p=5.5$ ,  $t_i=3.5$ ,  $t_d=0.23$  (como se puede deducir, por ejemplo, de 4-36), el LdR que se presenta en la figura 4-42 (en el que se simboliza nuevamente con aspadas y círculos pequeños el caso bifrecuencia, y con aspadas y círculos grandes el caso monofrecuencia) muestra que, aunque tanto el par complejo conjugado estudiado como uno de los pares polo-cero de la parte positiva del plano quedan bastante ajustados (al igual que anteriormente), sin embargo el otro par polo-cero positivo difiere en cierta medida en ambos casos, al igual que el cero negativo. Estas desviaciones de un caso con el otro hacen que la respuesta del sistema de control varíe para ambos, como se muestra en la figura 4-43. En ella se percibe, sobre todo, una diferencia clara a nivel de sobreoscilación máxima. Esto también se observa a nivel de acciones de control en la figura 4-44, donde ahora, la primera acción es muy distinta para ambos casos, al igual que las inmediatamente siguientes. Concretamente se observa que las del caso bifrecuencia son más enérgicas en el transitorio, influyendo, por tanto, en ese mayor nivel de sobreoscilación en la respuesta del sistema.

En definitiva, y como conclusión, cabe decir que el patrón de muestreo puede ser utilizado, tras lo estudiado, como un parámetro alternativo en el diseño del controlador PID, pero, no obstante, se deberá analizar la ubicación de los polos y ceros de bucle cerrado del sistema de control para finalmente compatibilizar escenarios de muestreo no convencional con escenarios monofrecuenciales.

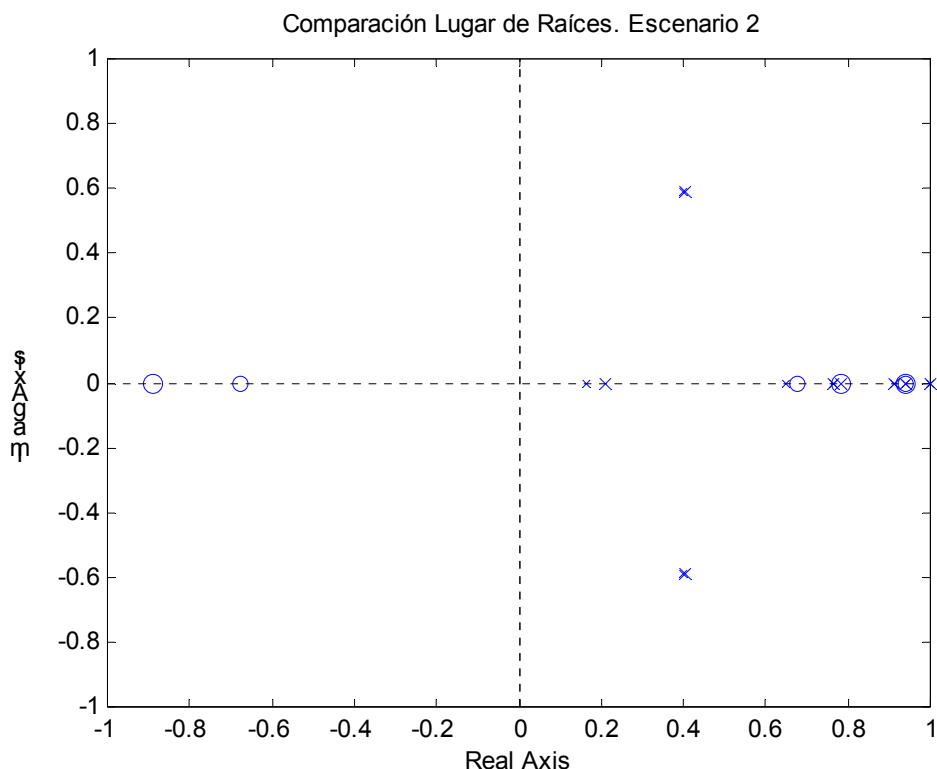


Figura 4-42: Comparativa LdR casos monofrecuencia variado y bifrecuencia (escenario 2).

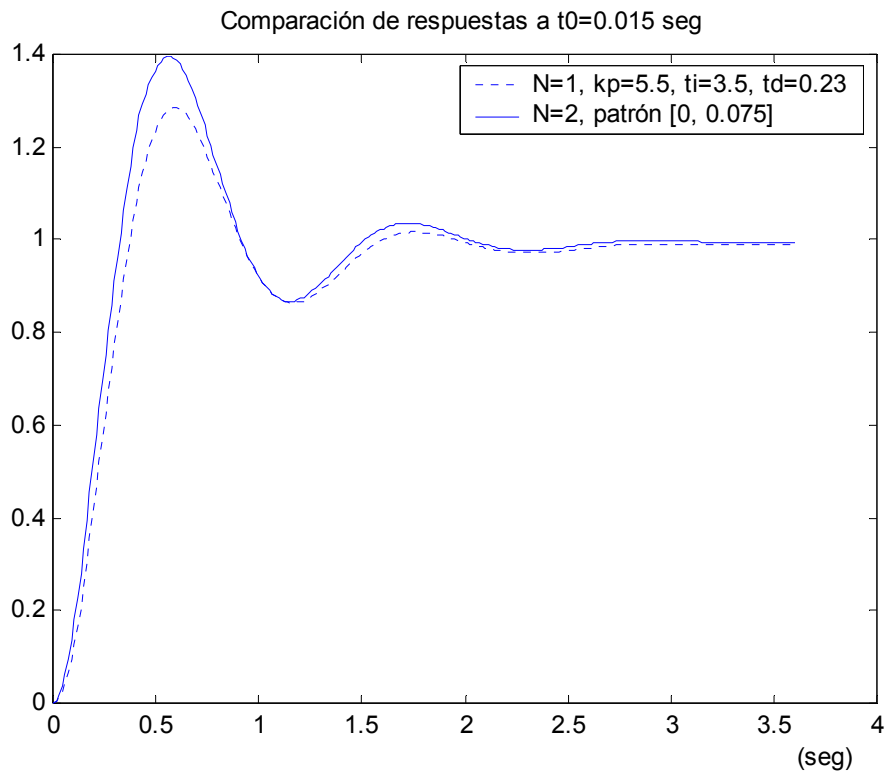


Figura 4-43: Comparativa respuestas casos monofrec. variado y bifrecuencia (escenario 2).

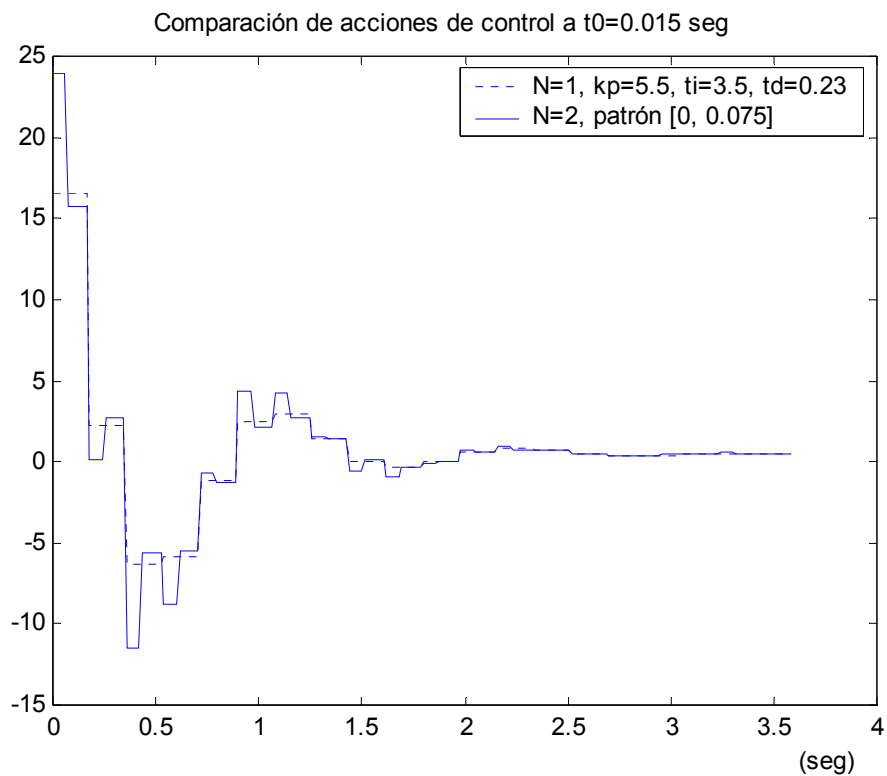


Figura 4-44: Comparativa acc. control casos monofrec. variado y bifrecuencia (escenario 2).

#### 4.4. CONCLUSIONES.

En el presente capítulo se plantea una metodología sencilla de análisis para sistemas de control con estructura no convencional desde el punto de vista del dominio temporal. Dicha metodología de análisis incluye el modelado de este tipo de sistemas. Para llevarlo a cabo se ha utilizado el modelado en RI desarrollado en el capítulo 2, el cual está basado en la Descomposición Vectorial de Conexiones (Thompson, 1986), que, a su vez, se basa en la metodología de Kranc (Kranc, 1957a), (Kranc, 1957b). Tras el modelado es necesario obtener la cadena directa formada por el regulador y el proceso (Salt, 1992) y (Salt, 1994), para a partir de ella y dado un esquema de muestreo, obtener el lugar de raíces y la respuesta temporal del sistema.

Para llevar a buen término la metodología de análisis introducida es necesario un esfuerzo importante de implementación a varios niveles: operadores de Kranc para muestreo no convencional (capítulo 2), macros de obtención de la cadena directa regulador-proceso y posterior generación de lugares de raíces y respuestas temporales a varios periodos de actuación (metaperiodo e intermuestreo).

Se ha trabajado indistintamente con muestreo regular e irregular, ya que la metodología de modelado utilizada otorga gran flexibilidad en el tratamiento del esquema de muestreo. Gracias a ello se ha podido detectar la descripción de trayectorias sobre el plano  $Z$  (y, tras transformación, sobre el plano  $S$ ) subyacentes a la ubicación de los polos (relativos a la cadena directa del sistema) obtenidos con el muestreo irregular, las cuales (trayectorias) confluyen desde y hacia la ubicación de los polos obtenidos en el muestreo regular para las diferentes multiplicidades.

Es interesante nombrar que el estudio se ha centrado en el caso de plantas muestreadas de forma lenta y que requieren un control a mayor frecuencia, ya que en principio presentan un mayor interés.

Como regulador se ha utilizado un PID con dos puntos de vista estructurales. En el primer estudio se ha utilizado un regulador PID con estructura interactiva, obteniendo resultados interesantes, pero limitando bastante el número de grados de libertad del sistema de control con estructura no convencional. Por ello, en un segundo estudio se ha propuesto una estructura paralela en el regulador, la cual enriquece nuestro sistema de control al dotarlo de mayor número de muestreadores y propiciar, por tanto, la posibilidad de extraer conclusiones individuales acerca de la aportación de cada muestreador situado en cada una de las acciones básicas del PID. Como consecuencia de este último estudio se puede concluir que el incremento de la multiplicidad ( $N$ ) en el muestreo de la parte derivativa ( $D$ ) es el que aporta prácticamente todo el beneficio al sistema en cuanto a dinámica (corroborando estudios clásicos, (Ogata, 1974 y 1987)). Por su parte, la acción integral ( $I$ ) tiene como cometido compensar la desviación que se da con respecto a la estructura interactiva cuando se incrementa  $N$  sólo en  $D$ , de tal forma que, si se usa el mismo  $N$  en  $D$  y en  $I$  la estructura paralela y la interactiva se comportan de forma equivalente. Además, el caso de incrementar  $N$  en el muestreador de la parte proporcional ( $P$ ) no supone mejoría alguna respecto del caso monofrecuencia ( $N=1$ ) en dicha parte  $P$ , ya que ésta suministra de forma repetida (repetición dada por el esquema de muestreo) la misma acción de control a cada metaperiodo (la cual coincide con la que se proporcionaría en el caso monofrecuencia,  $N=1$ ).

Como consecuencia del estudio en conjunto presentado en este capítulo se obtienen una serie de conclusiones, que se antojan prometedoras, relativas a la ubicación de los polos en el plano  $Z$  (y su posterior transformación al  $S$ ), lo cual puede ser de gran ayuda a la hora de determinar un entorno de especificaciones alrededor del cual diseñar el sistema de control de tiempo real. Dichas conclusiones van a ser expuestas de forma resumida:

- Conforme  $N$  aumenta se logra describir una trayectoria para los polos (relativos a la cadena directa del sistema) cuya evolución a través de los planos  $Z$  y  $S$  es coherente a las mejoras aportadas a la respuesta temporal del sistema. No obstante, estas mejoras no siempre se producirán sobre el sistema debido a la influencia de los ceros que surgen del muestreo no convencional del mismo.
- Si se muestrea de forma irregular el sistema, por ejemplo con  $N=2$ , se observa la descripción de una trayectoria que une los polos en dos sentidos. Hay un sentido que representa el movimiento del muestreo regular hacia posiciones irregulares más cercanas al comienzo del metaperiodo (lo que se ha llamado acortamiento del subperiodo inicial) y hay otro sentido que representa el movimiento del muestreo regular hacia posiciones irregulares más cercanas al final del metaperiodo (lo que se ha llamado acortamiento del subperiodo final). Esto mismo también se ha obtenido cuando se incrementa la multiplicidad a  $N=3$ , pero ahora se habla de trayectorias relativas a acortamiento de los subperiodos inicial, medio y final. Se puede generalizar a cualquier  $N$ .

Añadir que se han usado programas de simulación convencional (Matlab) e interactiva (SysQuake) como ayuda al estudio analítico para el caso de estructura interactiva para el regulador tipo P-I-D con estructura no convencional. En el caso de estructura paralela sólo se han implementado programas de simulación convencional (Matlab) dejando como propuesta futura la implementación en simulación interactiva.

Por último, en la sección final del capítulo se estudia la posibilidad de considerar el esquema de muestreo como un parámetro más de diseño para los controladores PID a partir de los polos que se antoja que tienen mayor influencia en la respuesta del sistema. El estudio demuestra que es posible compatibilizar escenarios de muestreo no convencional con escenarios monofrecuenciales en los que se ha variado los parámetros de partida del PID. No obstante, en casos puntuales se observa la influencia de los polos y ceros restantes del sistema de control, los cuales hacen surgir ciertas diferencias entre las respuestas bifrecuencial y monofrecuencial con parámetros  $k_p$ - $t_d$ - $t_i$  modificados.

## **CAPÍTULO 5**

# **ANÁLISIS DE REGULADORES CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL EN EL DOMINIO FRECUENCIAL**



## 5.1. OBJETIVOS Y ENFOQUE DEL CAPÍTULO.

El objetivo fundamental de este capítulo es establecer conclusiones acerca del significado en frecuencia que resulta de aplicar esquemas de muestreo no convencional sobre un sistema de control. Se trata, en definitiva, de a partir de la cadena directa regulador-proceso (como se hace en el capítulo 4) obtener el Diagrama de Bode y/o el de Nyquist de cada esquema de muestreo considerado en aras a determinar las características frecuenciales que se producen sobre el sistema (márgenes de fase y magnitud). De esta forma, se va disponer de otro punto de vista acerca del estudio de los sistemas de control de tiempo real, en los cuales, como ya se ha comentado a lo largo del trabajo, suelen aparecer retardos en el tratamiento de las distintas señales que intervienen en el mismo, debido, entre otras razones, a la utilización de tareas y medios compartidos. Por ello, parece razonable plantear un estudio de dichos sistemas con doble vertiente análisis-diseño cuando son muestreados de forma no convencional, con el fin de obtener un entorno de especificaciones alrededor del cual se encuentre el diseño del sistema de control, dada la posibilidad de fijar el esquema de muestreo no convencional como un parámetro más de diseño.

Por tanto, con el fin de introducir un método de análisis alternativo al temporal (visto en el capítulo 4), en este capítulo, como ya se ha comentado, se va a abordar la problemática planteada investigando la factibilidad y validez de los reguladores de estructura no convencional desde el punto de vista del dominio frecuencial.

El estudio se va a centrar (al igual que se hace en el capítulo 4) directamente en los Reguladores tipo P-I-D, ya que se caracterizan por tener gran robustez y ser muy utilizados en el control de procesos industriales. No obstante, el estudio podría ser fácilmente extrapolable a otro tipo de reguladores con estructura no convencional.

Se va a dotar de diferentes puntos de vista estructurales al regulador, concretamente, en un primer estudio se le dotará de estructura interactiva y en un segundo estudio de estructura paralela. Así, finalmente se podrá equiparar los resultados obtenidos desde la perspectiva frecuencial y desde la temporal para las dos diferentes estructuras del regulador.

Previo al apartado dedicado al estudio de los reguladores tipo P-I-D con estructura no convencional se introducirá un epígrafe titulado “Metodología de Análisis en el Dominio Frecuencial”, que expondrá las diferentes etapas que se han de llevar a cabo para poder hacer un correcto análisis del sistema muestreado de forma no convencional. Las primeras etapas son idénticas a las introducidas en el caso del dominio temporal (capítulo 4), es decir, se trata de las etapas relativas al modelado del sistema y a determinar la cadena directa regulador-proceso. La primera de ellas es importante debido al hecho de que ha supuesto la elaboración previa de una serie de leyes de recurrencia (capítulo 2) basadas en la Metodología de Kranc (Kranc, 1957a), (Kranc, 1957b), las cuales hacen posible modelar con muestreo no convencional el sistema bajo estudio. La importancia de la segunda etapa radica en el hecho de que nos permite disponer de la formulación necesaria para considerar en última instancia el sistema en bucle cerrado como un sistema representado en forma monofrecuencial a metaperiodo (periodo que suele coincidir con el m.c.m. de los involucrados en el sistema). Las etapas finales de la metodología propuesta varían respecto al estudio temporal, ya que ahora se va a enfatizar en la obtención del Diagrama de Bode y Nyquist del sistema, y no en la simulación de la respuesta temporal del mismo.

Con el fin de sintetizar, se van a hacer constantes referencias al capítulo del dominio temporal (capítulo 4), dado que los casos estudiados en el presente capítulo son los mismos que los estudiados en aquél.

Para finalizar, en el último epígrafe se presentarán las conclusiones más relevantes del capítulo, así como propuestas futuras que se deriven de él. También, en el Anexo III se incorporan aquellas variaciones que han sufrido las macros de simulación convencional (realizadas en Matlab) respecto de las utilizadas para el estudio en el dominio temporal, con el fin de albergar ahora el estudio desde el punto de vista frecuencial. Al igual que en el capítulo 4, dada la gran cantidad de parámetros que entran en liza a la hora de realizar las simulaciones se ha optado por implementar también en un programa de simulación interactiva el sistema de control bajo estudio en aras a determinar más fácilmente las conclusiones que se desprenden del mismo. Dicho programa de simulación interactiva toma como base el código desarrollado en las macros de Matlab.

## 5.2. METODOLOGÍA DE ANÁLISIS EN EL DOMINIO FRECUENCIAL.

Para poder analizar los resultados que arrojan los sistemas de control con estructura no convencional cuando son estudiados desde el punto de vista del dominio frecuencial ha sido necesario seguir una serie de pasos, los cuales son descritos a continuación:

- 1º) Modelar mediante operadores de Kranc los diferentes elementos del sistema de control con estructura no convencional en bucle cerrado.
- 2º) Obtener el modelo de la cadena directa formada por el regulador y el proceso.
- 3º) Generar el Diagrama de Bode y de Nyquist del modelo en cadena directa.

En los siguientes subapartados se describen con mayor detalle los pasos enunciados previamente. Los dos primeros pasos son exactamente los mismos que se describieron en el estudio desde el punto de vista temporal (capítulo 4). Por ello, simplemente se mencionarán a modo de recordatorio.

### 5.2.1. Modelado del sistema en bucle cerrado mediante operadores de Kranc.

Para modelar el sistema de control con estructura no convencional (el cual es descrito en el epígrafe 4.3 del capítulo 4 para cada caso contemplado) se recurre al capítulo 2, donde son planteadas las leyes de recurrencia que modelan a los sistemas muestreados de forma no convencional. También será necesario (sobre todo en el caso de estructura paralela) hacer uso de las matrices de conexión entre operadores, conocidas en la bibliografía como “connect”. Se insta al lector interesado a referencias como (Camiña, 1999) para conocer en detalle su funcionamiento.

Como ya se comenta en el capítulo 4 apartado 4.3 los sistemas de control que se van a tratar se caracterizan por anteponer un ZOH tanto al proceso como al regulador. Por tanto, a la hora de modelarlos se van a necesitar los llamados operadores ZOH-Kranc, cuyas leyes de recurrencia fueron presentadas en el capítulo 2 apartado 2.3.2.



### 5.2.2. Obtención del modelo de la cadena directa regulador-proceso.

En el apartado 4.2.2 del capítulo 4 ya se detallan las expresiones que rigen al modelo de la cadena directa del sistema de control. Se insta al lector a dicho apartado para recordarlas.

### 5.2.3. Generación del Diagrama de Bode y de Nyquist de la cadena directa regulador-proceso.

En la ecuación (4-4) del capítulo 4 se puede observar la cuádruple  $[\bar{A}_{cd}, \bar{B}_{cd}, \bar{C}_{cd}, \bar{D}_{cd}]$  que representa al modelo en cadena directa. A partir de dicha cuádruple se puede generar fácilmente los Diagramas de Bode y Nyquist discretos pertenecientes al sistema utilizando cualquier herramienta matemática (por ejemplo, Matlab) y ver cuáles son los márgenes de fase y ganancia del sistema para los diferentes esquemas de muestreo no convencional empleados.

Reseñar que dado que los diagramas de Bode y Nyquist son equivalentes, se van a utilizar a lo largo del trabajo indistintamente, dependiendo de lo que se quiera enfatizar en el análisis del sistema.

## 5.3. ANÁLISIS DE REGULADORES TIPO P-I-D CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL.

Como ya se ha avanzado con anterioridad, en este epígrafe se va a hacer un estudio de los Reguladores tipo P-I-D con estructura no convencional desde dos puntos de vista diferentes, esto es, primero se les va a dotar de una estructura interactiva para tratarlos de manera conjunta y, después, se les proporcionará una estructura paralela con el fin de estudiar las aportaciones individuales de cada acción básica de control.

Los pasos a seguir en el estudio serán los indicados en el epígrafe previo (5.2).

### 5.3.1. Estructura interactiva.

#### 5.3.1.1. Planteamiento del problema.

Para llevar a cabo este estudio se ha partido de la consideración de un sistema de control configurado como se muestra en la figura 4-1 del capítulo 4. En ella ya se vio como quedaba el sistema de control para dotarlo de una estructura de control por computador con muestreo no convencional, considerando el regulador con estructura interactiva. Se insta al lector al apartado 4.3.1.1 del capítulo 4 para recordar el funcionamiento de dicho sistema de control.

Además, se van a tener que ampliar los programas de simulación utilizados en dicho capítulo, con el fin de que sean capaces de obtener la respuesta frecuencial del sistema ante

diversos patrones de muestreo para el modelo considerado. Al igual que en el capítulo 4 se va a ilustrar todo el estudio con un ejemplo.

### 5.3.1.2. Ejemplo.

#### 5.3.1.2.1. Escenario del problema.

Con el fin de homologar resultados, se va a utilizar el mismo proceso y regulador del apartado 4.3.1.2.1 del capítulo 4, sólo que ahora su estudio vendrá regido por la metodología propuesta en el epígrafe 5.2, en la que se enfatiza en la obtención de la respuesta frecuencial.

Por tanto, se cuenta con un regulador PID continuo, que incluye un filtro en la acción derivativa, expresado por:

$$G_R(s) = \left( 6 + 9 \frac{1}{s} + 0.6 \frac{s}{0.05s + 1} \right)$$

y un proceso continuo definido por la siguiente f.d.t.:

$$G_p(s) = \frac{1}{(0.25s + 1)(s + 1)}$$

Se va a tomar nuevamente un metaperiodo de  $T_0=0.18$  seg y un periodo de intermuestreo de  $t_0=0.015$  seg para ejecutar las pruebas. Así, para el caso particular bajo estudio, se dispondrá de 12 muestras a  $t_0$ , de las cuales se cogerán aquellas que sean requeridas por el patrón de muestreo considerado.

Por tanto, como ya se comentó con anterioridad, se va a poder llevar a cabo diferentes esquemas de muestreo en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso) para este sistema de control, de tal forma que permitan extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta frecuencial del sistema (márgenes de fase y ganancia).

#### 5.3.1.2.2. Modelado.

Al igual que en el capítulo 4, siguiendo las pautas expuestas en el epígrafe 5.2 se llega al modelo representado en la figura 4-2 de dicho capítulo, el cual se reduce a la conexión en serie de dos operadores ZOH-Kranc y la consiguiente realimentación. Se insta nuevamente al lector al apartado 4.3.1.2.2 para recordarlo. Es interesante también recordar que ambos operadores trabajan internamente al periodo de intermuestreo ( $t_0$ ), reteniendo las entradas a  $t_0$  y capturando aquellas salidas deseadas múltiplos de  $t_0$  de las disponibles dentro del metaperiodo  $T_0$ .

### 5.3.1.2.3. Implementación en simulación convencional.

En lo que respecta a la implementación, se ha ampliado la macro Matlab generada en el capítulo 4 (ver en Anexo III dicha ampliación), con el fin de que sea capaz de obtener los diagramas de Bode y Nyquist del sistema de control ante diferentes esquemas de muestreo.

Ya se tiene, por tanto, todo preparado para realizar una batería de pruebas, basadas en la consideración de diferentes esquemas de muestreo (regulares o irregulares) en el muestreador de salida del regulador (entrada al proceso), y tras ello, superponer los diferentes diagramas de Bode y Nyquist que se vayan obteniendo relativos a dichos esquemas, en aras a detectar la evolución frecuencial del sistema.

### 5.3.1.2.4. Exposición y análisis de resultados obtenidos en simulación convencional.

#### 5.3.1.2.4.1. Caso muestreo regular.

Se va primero a mostrar la superposición de los diferentes diagramas de Bode discretos referidos al metaperiodo cuando tratamos casos de muestreo regular, es decir, casos en los que los distintos instantes  $\{0, t_1, \dots, t_{N-1}\}$  guardan consecutivamente una distancia equiespaciada de  $T_0/N$  unidades de tiempo. El objetivo es analizar la evolución global de la respuesta frecuencial (márgenes de fase y ganancia) del sistema conforme  $N$  (multiplicidad) es mayor.

Como queda patente en las figuras 5-1, 5-2, 5-3 y 5-4, el margen de ganancia del sistema es mayor conforme  $N$  va aumentando, lo cual hace concluir una característica interesante y favorable a los sistemas muestreados de forma no convencional: a mayor  $N$  mayor ganancia habrá que añadir al sistema en bucle abierto para alcanzar el límite de estabilidad en bucle cerrado. En otras palabras, a mayor  $N$  se consiguen sistemas más alejados de la inestabilidad.

Por lo que se refiere al margen de fase, nuevamente observando las figuras 5-1, 5-2, 5-3 y 5-4 se demuestra que el caso  $N=2$  con respecto al  $N=1$  (monofrecuencial) supone un incremento en el margen de fase del sistema, lo cual hace resaltar otra característica importante y favorable a los sistemas muestreados de forma no convencional, que radica en el hecho de poder añadir al sistema en bucle abierto un mayor desfase hasta alcanzar el límite de estabilidad en bucle cerrado como consecuencia de contar con un  $N$  mayor. Sin embargo, si se observa el caso  $N=3$  y  $N=6$  se percibe que con respecto al  $N=2$ , aquéllos disponen de menor margen de fase (concretamente, el  $N=6$  tiene menos que el  $N=3$ , que a su vez tiene menos que el  $N=2$ ), lo cual hace relacionar este suceso con el detectado en respuesta temporal cuando, en estos casos descritos, la sobreoscilación máxima del sistema aumentaba pese a disponer de  $N$  mayores. Al igual que se argumentó para el dominio temporal, esta situación se piensa que es debida a la influencia de los ceros que surgen del muestreo no convencional del sistema (Salt, 1992).

Estudiando más en detalle la relación entre coeficiente de amortiguamiento y margen de fase, en un sistema de segundo orden se conoce que dicha relación es directamente proporcional, lo cual se comprueba en el ejemplo bajo estudio analizándolo desde los dos

puntos de vista (temporal y frecuencial), ya que en el primero de ellos (temporal) se vio (en el capítulo 4) que (para los casos  $N=2$ , 3 y 6) a mayor  $N$  mayor sobreoscilación se tenía, o lo que es lo mismo, menor coeficiente de amortiguamiento, lo cual coincide con lo obtenido en el segundo de ellos (frecuencial), puesto que a mayor  $N$  se detecta menor margen de fase.

#### 5.3.1.2.4.2. Caso muestreo irregular $N=2$ .

En segundo lugar se va a considerar el caso de muestreo irregular fijando  $N=2$ . Para facilitar el análisis, al igual que se hizo en el estudio temporal, se consideran dos subperiodos iguales dentro del metaperiodo, esto es, un subperiodo inicial que va desde el instante 0 seg hasta el 0.09 seg, y un subperiodo final que va desde el instante 0.09 seg al 0.18 seg.

De esta forma, fijándose en las figuras 5-5, 5-6, 5-7 y 5-8, se observa como el margen de ganancia va aumentando conforme pasamos progresivamente desde el muestro irregular más cercano al caso monofrecuencia ([0,0.015]) hacia el muestreo regular con  $N=2$  ([0,0.09]).

De la misma forma, fijándose en las mismas figuras se percibe claramente como el peor (menor) margen de fase lo tiene el caso [0,0.015] y el mejor el caso [0,0.09] (regular con  $N=2$ ), quedando entre ellos los casos irregulares intermedios. Por tanto, el margen de fase va aumentando (mejorando) conforme se va progresivamente e irregularmente desde el caso monofrecuencia hacia el bifrecuencia regular con  $N=2$ .

Todo lo expuesto anteriormente viene a corroborar los resultados obtenidos a través del análisis previo en el dominio temporal para este caso irregular con  $N=2$ . En dicho análisis ya se observó que el esquema [0,0.015], esto es, aquél que corresponde al muestreo en el instante 0 seg y en el instante 0.015 seg, ofrece una respuesta parecida (aunque mejor) a la monofrecuencia dado que estamos haciendo un muestreo bifrecuencia muy cercano al monofrecuencial, en el sentido de que las dos muestras capturadas se toman juntas y al principio del metaperiodo (en el monofrecuencia se toma una única muestra al principio del metaperiodo). Por su parte, el muestreo irregular [0,0.06] no ofrece mejores resultados, en este caso, con respecto al muestreo regular [0,0.09], ya que para el primero se observa, desde el punto de vista temporal, mayor sobreoscilación máxima y mayor tiempo de establecimiento (aunque de forma moderada), lo que aquí (desde el punto de vista frecuencial) se ha traducido por menores márgenes de fase y ganancia.

En las figuras 5-9 y 5-10 se muestran diferentes perspectivas del diagrama de Nyquist obtenido para el caso tratado (acortamiento del subperiodo inicial), reflejando información acerca de los márgenes de ganancia y fase. Además se añaden los resultados del caso con acortamiento del subperiodo final. Parece fácil observar que para este último caso se pueden deducir prácticamente las mismas conclusiones expuestas anteriormente para el otro caso.

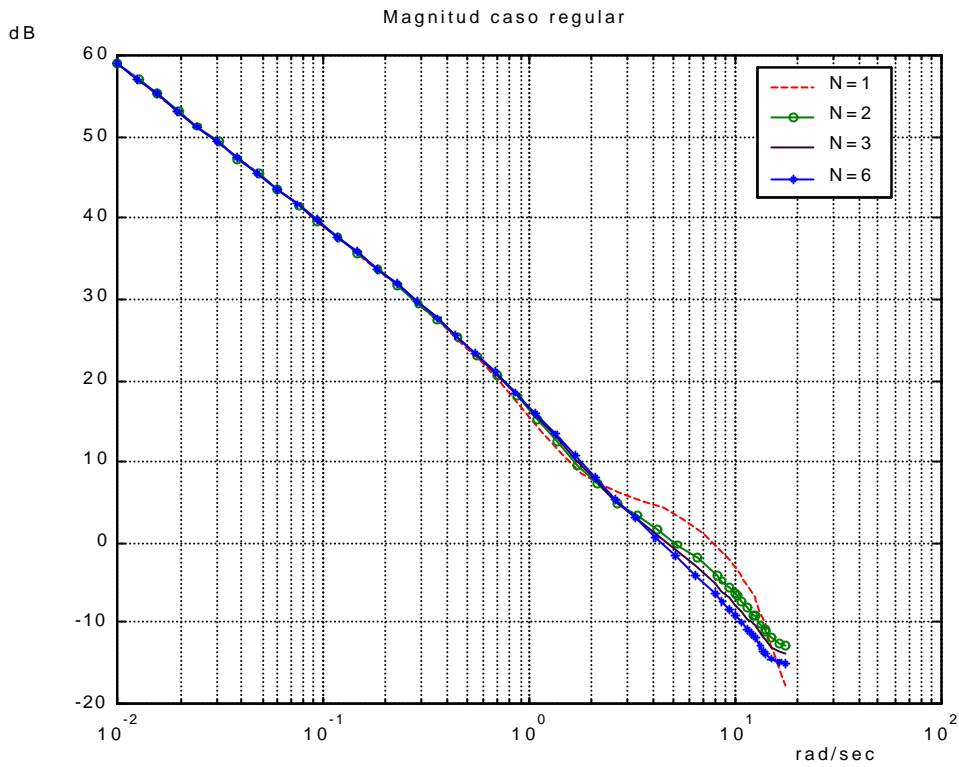


Figura 5-1: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo regular

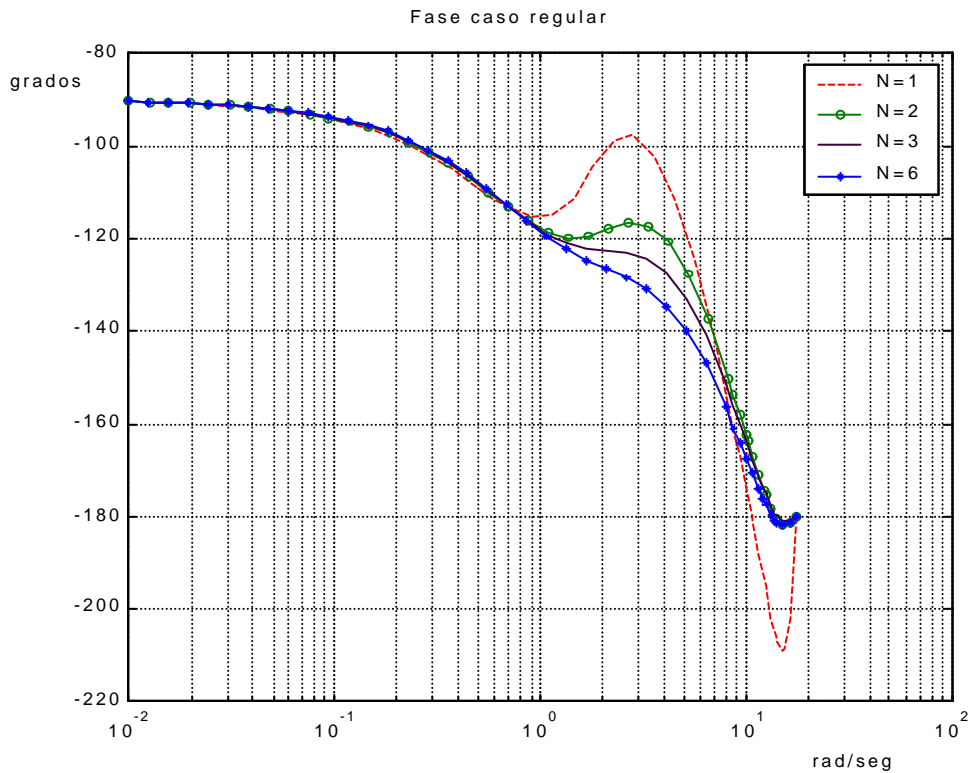


Figura 5-2: Fase del Diagrama de Bode muestreo regular

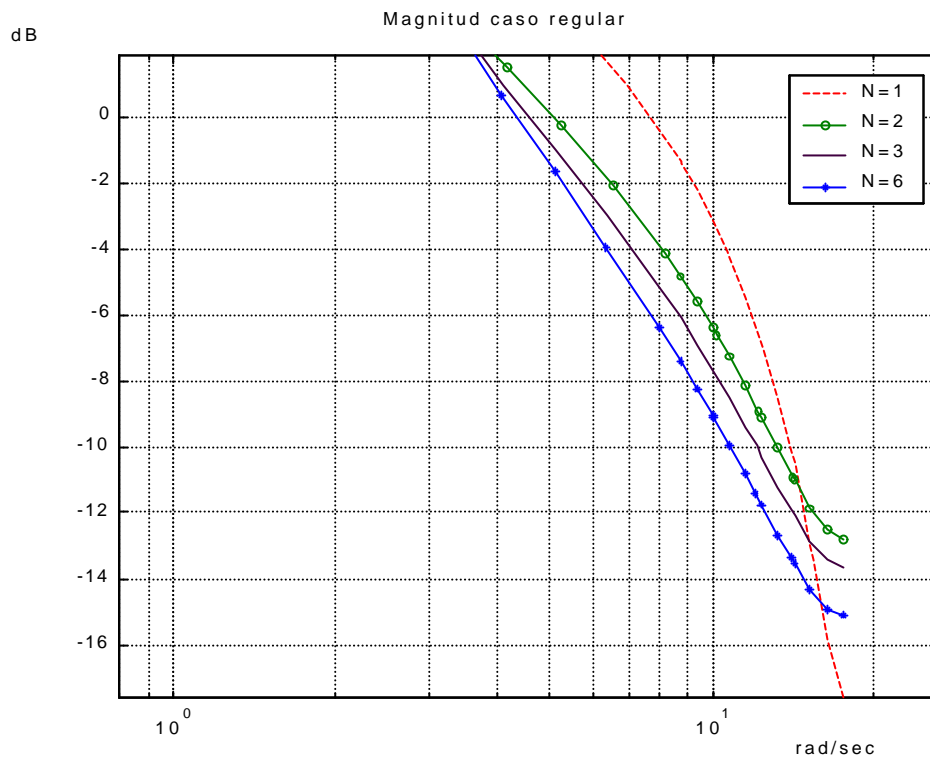


Figura 5-3: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo regular (ampliado)

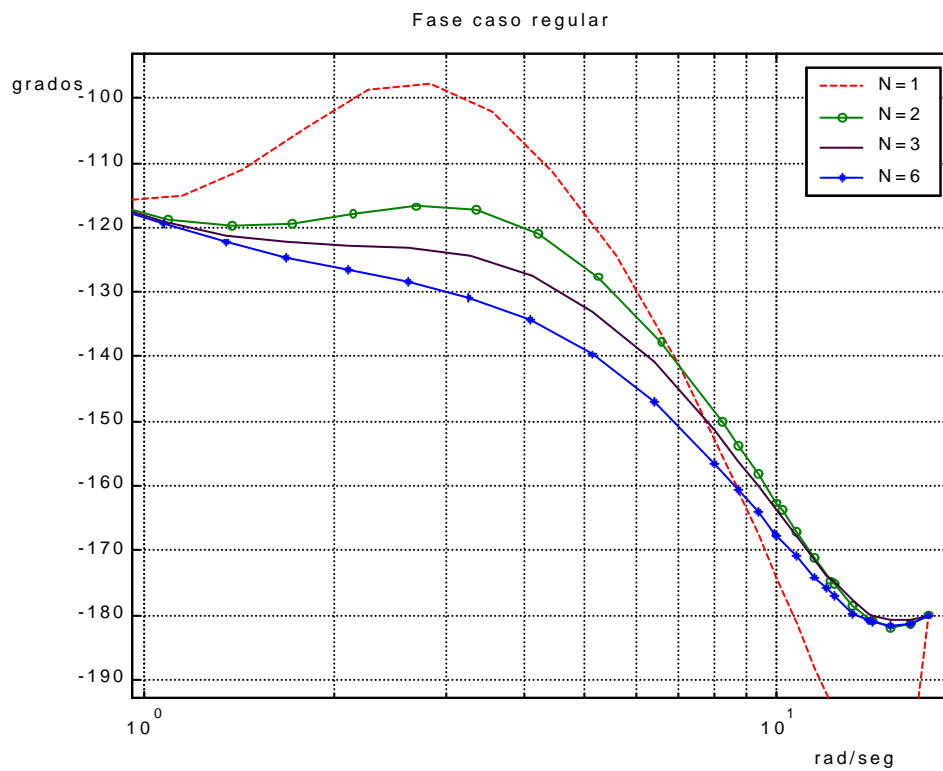


Figura 5-4: Fase del Diagrama de Bode muestreo regular (ampliado)

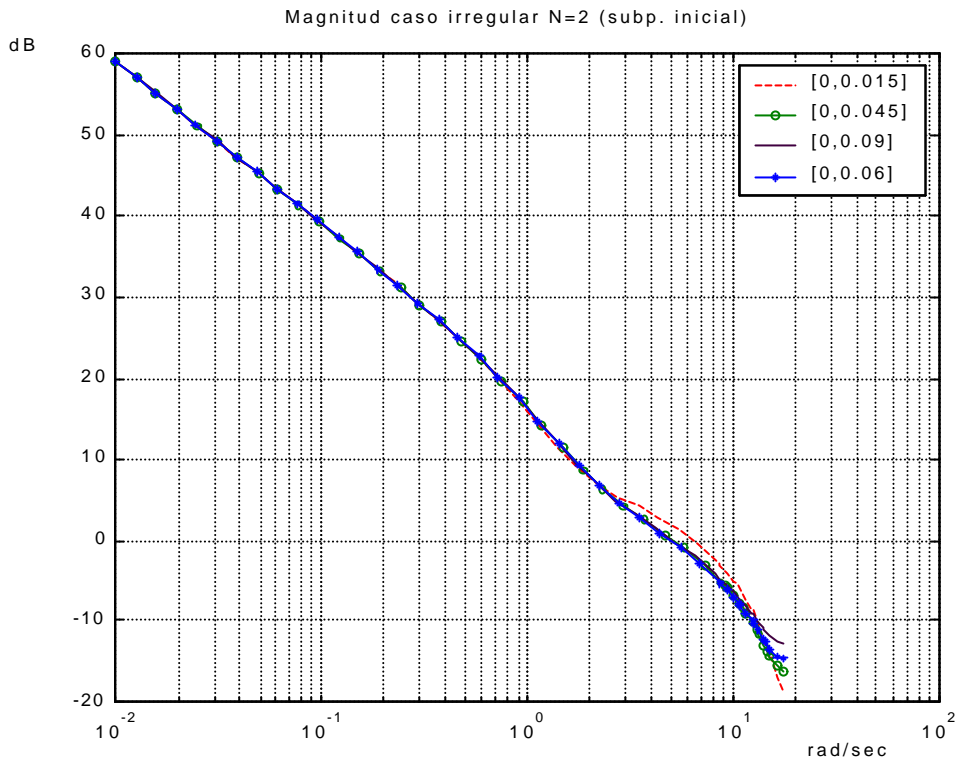


Figura 5-5: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo irregular (subperiodo inicial) N=2

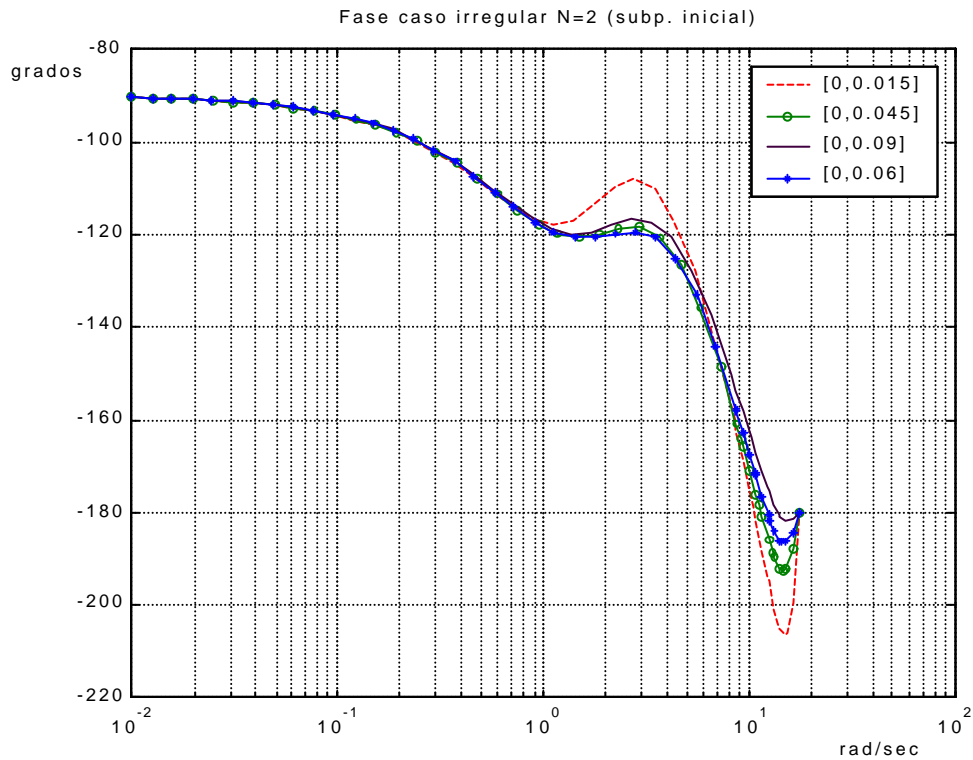


Figura 5-6: Fase del Diagrama de Bode muestreo irregular (subperiodo inicial) N=2

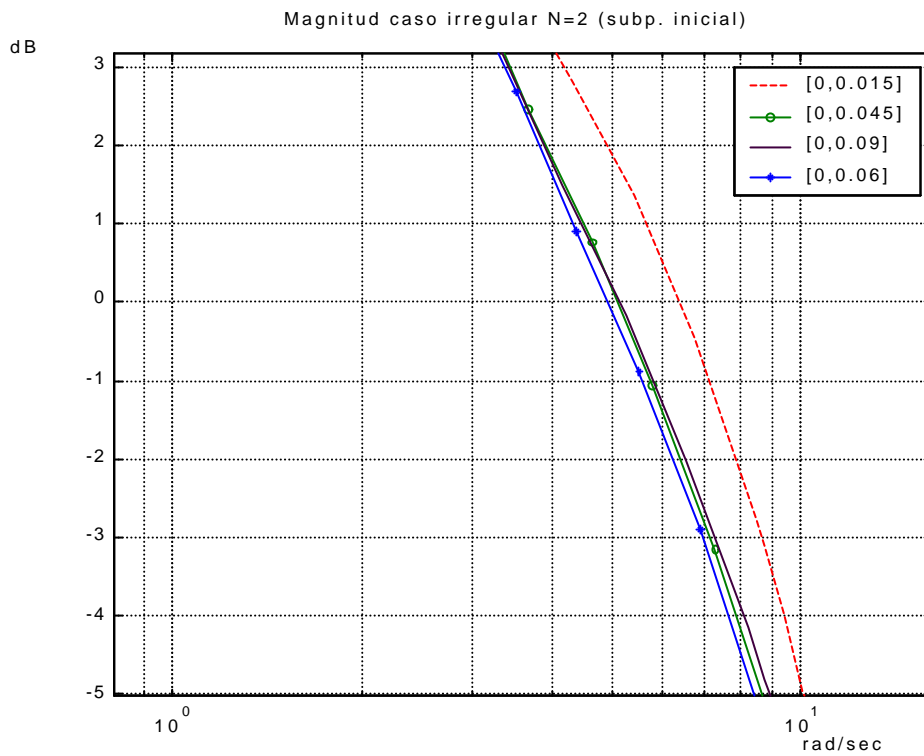


Figura 5-7: Magnitud del D. de Bode muestreo irregular (subperiodo inicial) N=2 (ampliado)

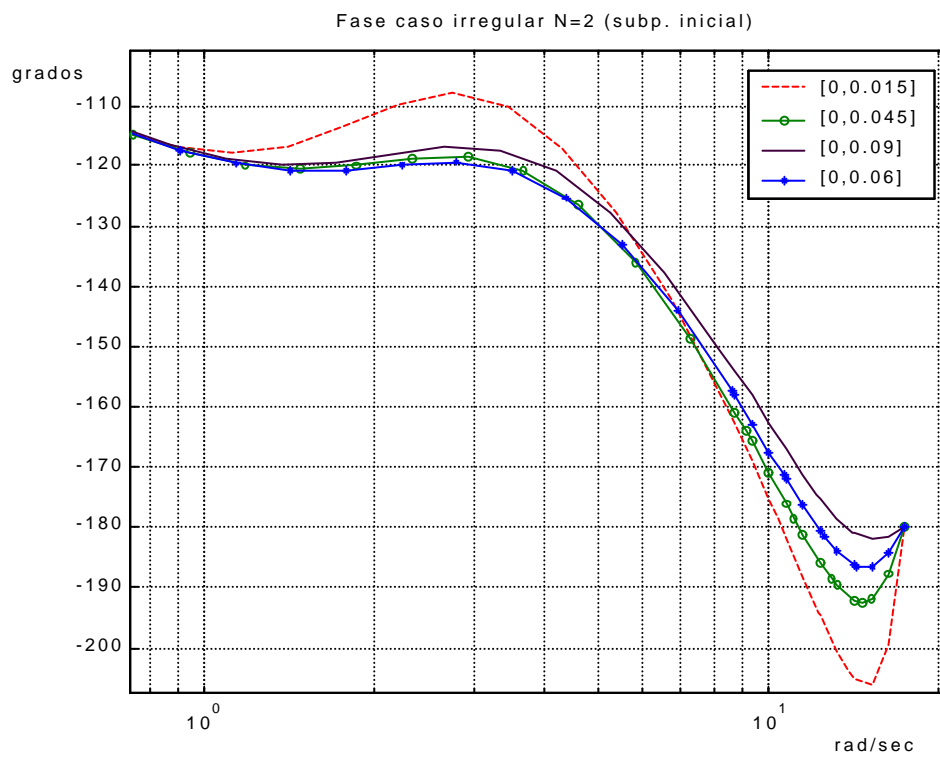


Figura 5-8: Fase del D. de Bode muestreo irregular (subperiodo inicial) N=2 (ampliado)



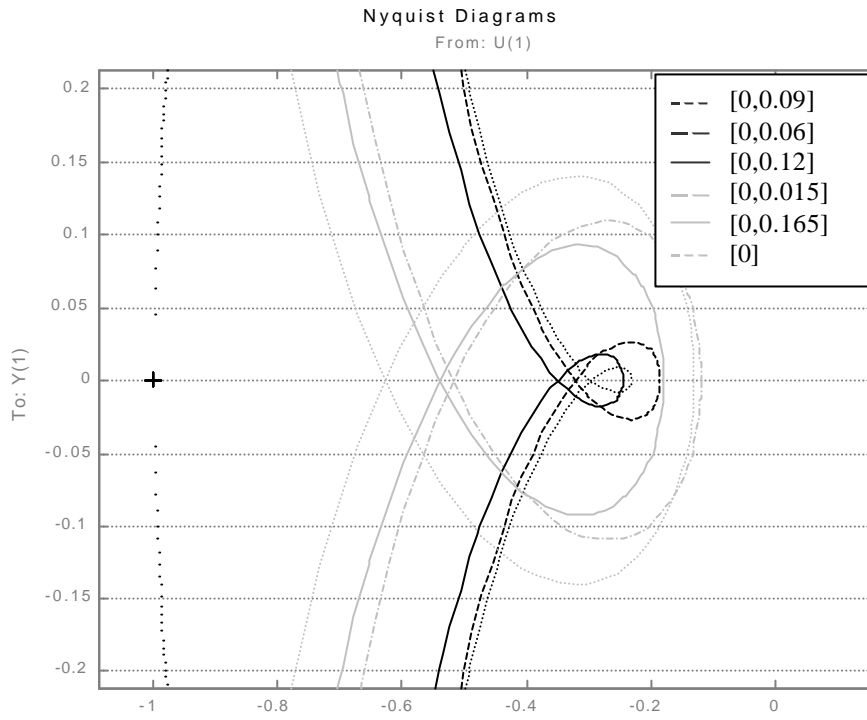


Figura 5-9: Detalle márgenes de ganancia en Diagrama de Nyquist muestreo irregular N=2

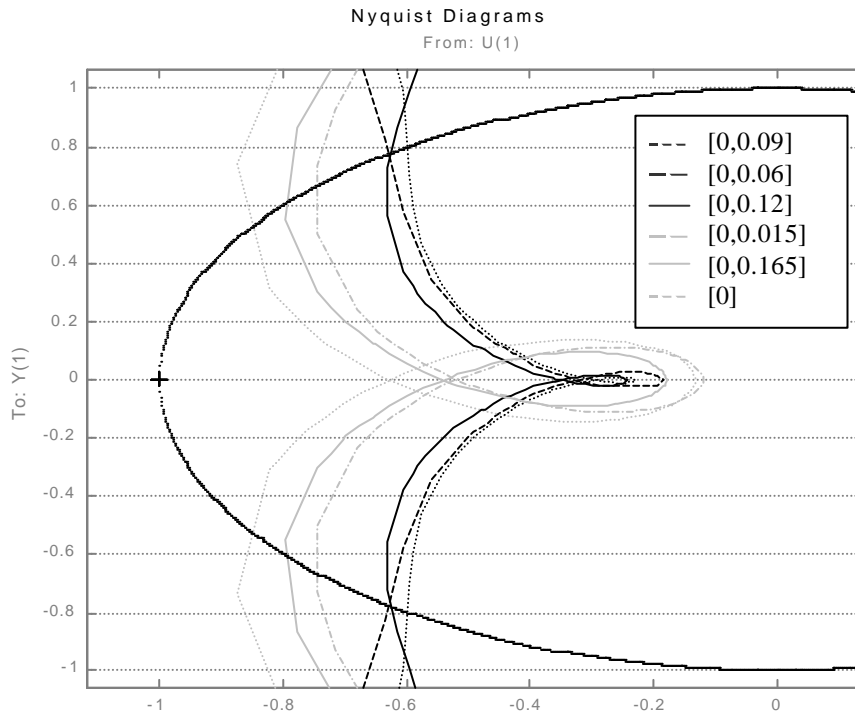


Figura 5-10: Detalle márgenes de fase en Diagrama de Nyquist muestreo irregular N=2

El estudio en frecuencia del caso de muestreo irregular con  $N=3$  y  $N=6$  arroja conclusiones similares a las presentadas para el caso de muestreo irregular con  $N=2$  visto en este epígrafe. Por ello, y para sintetizar, dichos resultados no van a ser expuestos. Así mismo, se comprueba que nuevamente los resultados para los casos  $N=3$  y  $N=6$  tienen una relación clara y directa con los obtenidos en el dominio temporal, como sucede con el caso  $N=2$ , ya que, en definitiva, se trata de estudiar el mismo sistema de control sometido al mismo esquema de muestreo pero desde una perspectiva diferente.

#### 5.3.1.2.5. Implementación en simulación interactiva.

Como es fácil observar, la obtención de los resultados mediante simulación convencional ha supuesto un arduo trabajo, dada la gran cantidad de parámetros que se han tenido que variar en cada ejecución. Por ello, al igual que en el capítulo 4, se ha creído conveniente implementar todo el escenario del problema en un entorno de simulación interactiva, el cual va a permitir encontrar de manera más sencilla las conclusiones que arroja el estudio. Dicho entorno ya se mostró en la figura 4-13. En ella aparecen varias ventanas; en este caso son de interés la superior derecha y las central y derecha inferiores, ya que las otras son relativas al estudio en el tiempo (analizado ya en el capítulo 4). La ventanas superior e inferior derecha muestran respectivamente el diagrama de Bode de Magnitud y el de Fase del caso seleccionado como patrón de muestreo en la barra deslizadora de la parte izquierda superior. Por su parte, la ventana inferior central representa el diagrama de Nyquist del caso bajo estudio. Nuevamente, moviendo la ubicación del marcador de la barra deslizadora (que hace de muestreador entre regulador y proceso; recordar figura 4-1) se va a poder configurar el esquema de muestreo deseado, el cual tendrá su reflejo a nivel de Bodes de Magnitud y Fase y diagrama de Nyquist en las ventanas correspondientes.

Como se puede observar en la figura 5-11, situando el puntero del ratón tanto en el diagrama de Bode de Magnitud como en el de Fase aparece una línea vertical color magenta (en el dibujo la línea situada más a la izquierda de las que son verticales) que permite saber en qué frecuencia (en rad/seg) se encuentra cierto punto de la respuesta frecuencial, lo cual se visualiza en la barra de estado de la aplicación (la barra inferior de la misma). Dicha línea tiene su correspondencia con el círculo del mismo color (magenta; el que está ubicado más abajo de los tres que se muestran) que aparece en el diagrama de Nyquist, cuyo cometido es idéntico. Además, en ambas ventanas de los Bode aparecen dos líneas verticales más, una verde (la segunda empezando por la izquierda) que marca la frecuencia de cruce de ganancia y el margen de fase, y otra azul (la tercera empezando por la izquierda) que marca la frecuencia de cruce de fase y el margen de ganancia. También ambas líneas tienen su correspondencia con los dos círculos (verde -el situado entre medias de los tres- y azul -el situado más arriba de los tres-, respectivamente) ubicados en el diagrama de Nyquist, que marcan los mismos parámetros frecuenciales comentados en cada caso. Finalmente, las dos líneas negras (dos últimas líneas empezando por la izquierda) marcan las frecuencias de Nyquist y de muestreo elegidas para el sistema (respectivamente), y las azules claras (las horizontales) ayudan a detectar los diferentes parámetros frecuenciales. Como ya se ha dicho, para visualizar todos estos parámetros tan sólo se ha de poner el puntero del ratón sobre las líneas que los representan y observar el valor que devuelven en la barra de estado.

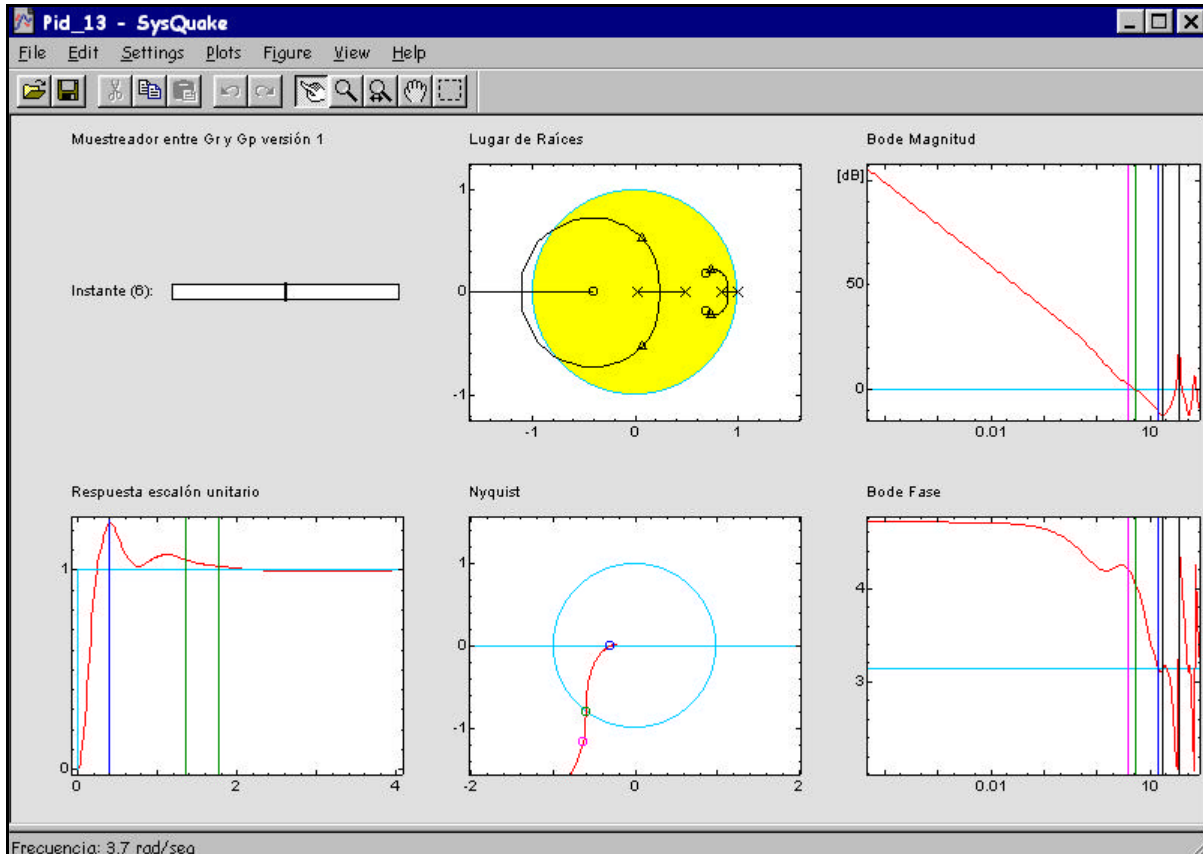


Figura 5-11: Aspecto aplicación en simulación interactiva.

Por último, como ya se comentó en el capítulo 4, recurriendo a la opción Settings de la barra de menú se puede configurar desde el proceso a tratar hasta el regulador tipo P-I-D que se antepone a él, además del valor del metaperiodo  $T_0$ , del intermuestreo  $t_0$  y de la multiplicidad  $N$ .

### 5.3.2. Estructura paralela.

#### 5.3.2.1. Planteamiento del problema.

Para llevar a cabo este segundo estudio se ha partido de la consideración del mismo sistema de control que ya se mostró en la figura 4-16 (capítulo 4). En ella se puede ver el diagrama de bloques y muestreos de dicho sistema de control para dotarlo de una estructura de control por computador con muestreo no convencional, considerando el regulador con estructura paralela. Se trata, por tanto, de un sistema de control muestreado, monovariable y con estructura no convencional que utiliza un controlador PID discretizado, paralelo y con estructura no convencional. Como ya se detalló en el apartado 4.3.2 (capítulo 4) en dicho sistema se utilizan patrones de muestreo distintos para tomar muestras de la salida del proceso, reconstruir la señal de control y calcular las acciones de control. Se insta al lector al apartado referido para recordar el funcionamiento del sistema de control planteado.

En definitiva, el sistema de control queda configurado de manera que se dispone de seis muestreadores (los de las partes P, I y D, además del del proceso, el de salida y el de la

base común de tiempos) con los que se pueden realizar infinidad de pruebas sobre el sistema de control. Entre otras, se antoja de gran utilidad probar la repercusión de cada acción básica sobre el comportamiento frecuencial final del sistema. Para ello, al igual que se hizo en el epígrafe 4.3.2, se establecerán diferentes esquemas de muestreo en cada muestreador asociado a cada acción básica del regulador, de tal forma que permitan ahora extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta frecuencial del sistema.

Para poder llevar a cabo todo ello, primero es necesario recordar cómo queda modelado el bucle cerrado del sistema de control. Tras esto, se tendrán que ampliar los programas de simulación utilizados en el capítulo dedicado al dominio temporal, con el fin de que sean capaces de obtener la respuesta frecuencial del sistema ante diversos patrones de muestreo para el modelo considerado. Quizás, al igual que se hizo en el epígrafe 5.3.1, la mejor forma de ver todo esto sea con un ejemplo.

### 5.3.2.2. Ejemplo.

#### 5.3.2.2.1. Escenario del problema.

Los elementos constituyentes del sistema de control que van a servir para poner en práctica la metodología propuesta en el epígrafe 5.2 son exactamente los mismos que los utilizados en el capítulo 4 apartado 4.3.2.2. Se cuenta, por tanto, con un regulador PID continuo, que incluye un filtro en la acción derivativa, expresado por:

$$G_R(s) = \left( 6 + 9 \frac{1}{s} + 0.6 \frac{s}{0.05s + 1} \right)$$

donde

$$G_p(s) = 6$$

$$G_i(s) = 9 \frac{1}{s}$$

$$G_d(s) = 0.6 \frac{s}{0.05s + 1}$$

Igualmente se cuenta con el mismo proceso continuo, definido por la siguiente f.d.t.:

$$G(s) = \frac{1}{(0.25s + 1)(s + 1)}$$

Planteados ya los elementos del sistema de control, se va a tomar un metaperiodo de  $T_y=0.18$  seg y un periodo de intermuestreo de  $t_0=0.015$  seg para ejecutar las pruebas. En cuanto a los muestreadores del proceso y de las partes P, I y D irán variando según el esquema de muestreo considerado. Parece fácil observar que, en el caso de patrones regulares de muestreo,  $T_u$  siempre será igual en valor al más rápido de los periodos asociados a las acciones básicas del regulador, con el fin de dejar pasar hacia el proceso la más rápida de las contribuciones. En el caso de patrones irregulares en las partes P, I y D, el muestreador del proceso trabajará a  $t_0$  (base común de tiempos) para que todas las aportaciones del regulador

paralelo repercutan sobre el proceso. Estos y otros casos ya fueron razonados con mayor detalle en el epígrafe 4.3.2.2.4.1. del capítulo 4, relativo al dominio temporal.

Así pues, como ya se comentó con anterioridad, se va a poder llevar a cabo diferentes esquemas de muestreo en el sistema de control, de tal forma que permitan extraer conclusiones acerca de cómo pueden afectar éstos en la respuesta frecuencial del sistema.

#### 5.3.2.2.2. Modelado.

Siguiendo las pautas expuestas en el epígrafe 5.2 se llega al modelo que ya fue representado en la figura 4-17 del capítulo 4, el cual es de una complejidad mayor al tratado en la versión interactiva del regulador PID. Se insta nuevamente al lector al apartado 4.3.2.2.2 para recordar la formación y componentes del modelo.

#### 5.3.2.2.3. Implementación.

En lo que respecta a la implementación, cabría realizar los mismos comentarios expuestos en el epígrafe 4.3.2.2.3. del capítulo 4, relativo al análisis en el dominio temporal. Una vez diseñada la macro Matlab para llevar a cabo el cometido de dicho epígrafe, se ha ampliado la mencionada macro (ver en Anexo III la ampliación) para que sea capaz de obtener los diagramas de Bode y Nyquist del sistema de control ante diferentes esquemas de muestreo.

De esta forma, se tiene todo preparado para realizar una batería de pruebas, basadas en la consideración de diferentes esquemas de muestreo (regulares o irregulares) en los respectivos muestreadores existentes en el sistema, y tras ello, ver cuál es la evolución frecuencial del mismo.

#### 5.3.2.2.4. Exposición y análisis de resultados.

##### 5.3.2.2.4.1. Caso muestreo regular.

Se va a realizar un estudio particularizado a cada muestreador ubicado en cada acción básica del regulador, de tal forma que se va a obtener el resultado de ir muestreando sucesivamente con un N mayor (de forma regular) en cada uno de ellos.

**Parte I:** Se va a empezar por el muestreador ubicado en la parte I. Para ello se ejecutarán los siguientes casos:

- Caso N=2 en I:  $T_u=T_i=0.09=T_y/2$ ,  $T_p=T_d=T_y$
- Caso N=3 en I:  $T_u=T_i=0.06=T_y/3$ ,  $T_p=T_d=T_y$

La magnitud y fase relativos al Bode de estos casos y el Nyquist de los mismos se encuentran de manera superpuesta en las figuras 5-12, 5-13 y 5-14, comparadas con el caso monofrecuencia N=1.

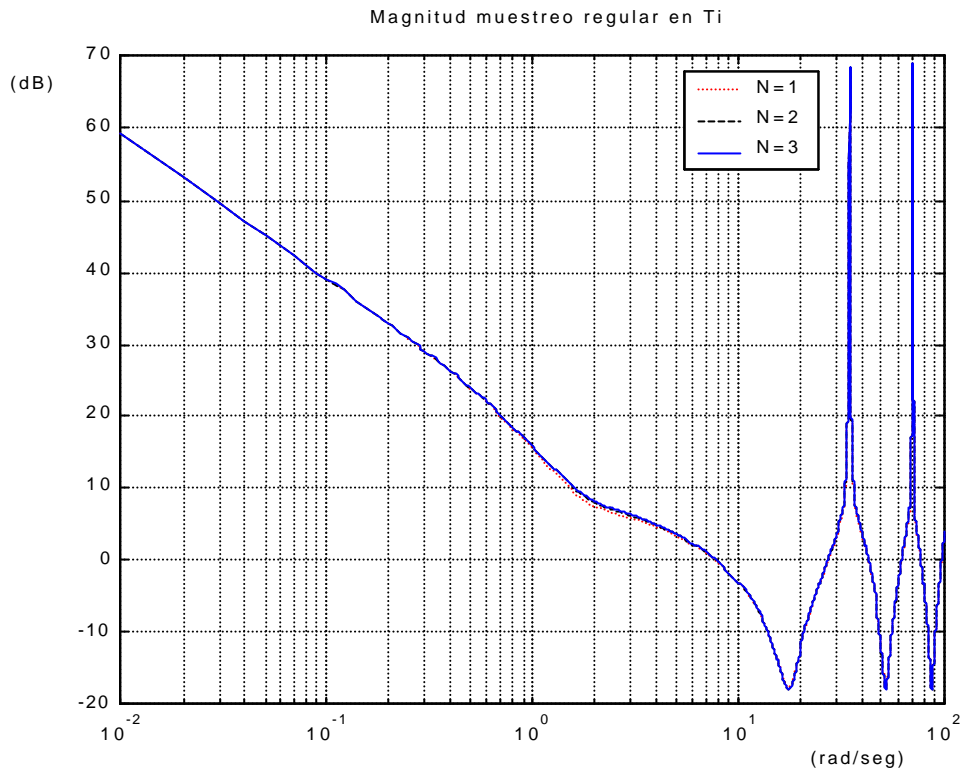


Figura 5-12: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo regular en I

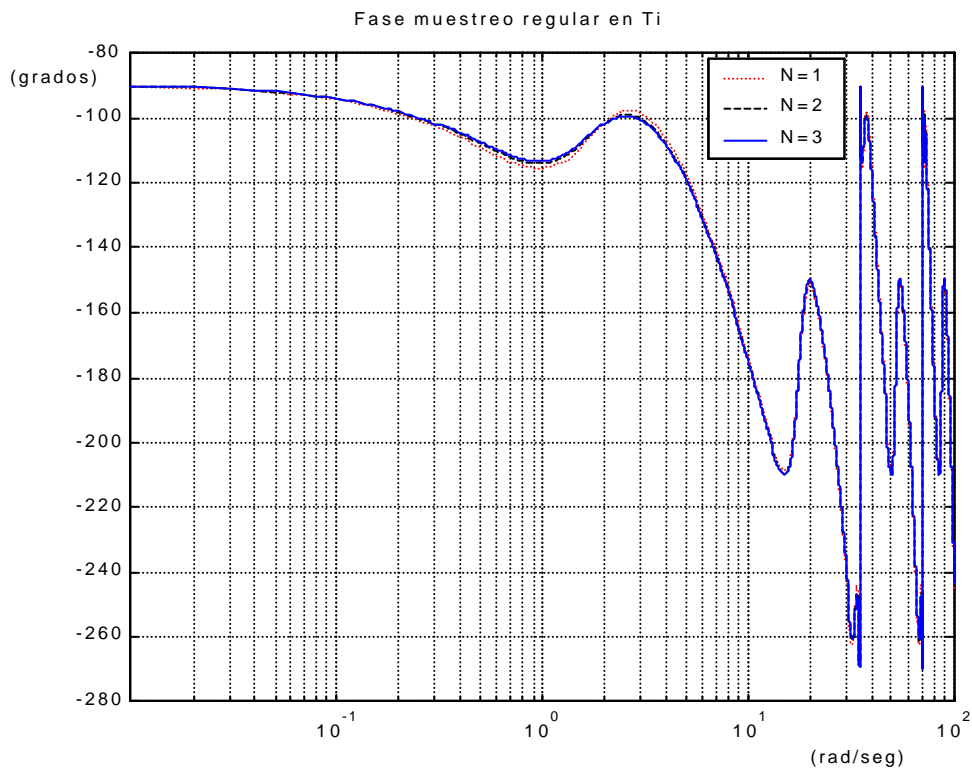


Figura 5-13: Fase del Diagrama de Bode muestreo regular en I

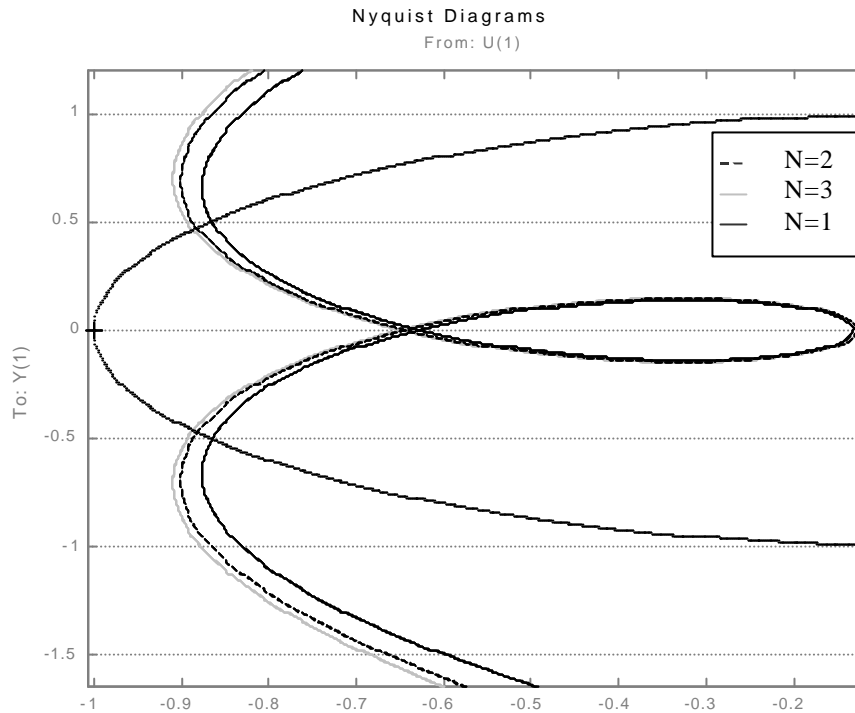


Figura 5-14: Diagrama de Nyquist muestreo regular en I

A la vista de estos resultados, se corroboran las conclusiones obtenidas en el análisis temporal (y que coinciden con estudios clásicos del tema (Ogata, 1974 y 1987)), donde se observó que muestrear más rápidamente en el muestreador de la parte I no aporta (al menos en este caso) mejoría en la respuesta del sistema (más bien, la empeora sensiblemente), lo cual viene refrendado en el análisis frecuencial por una leve disminución del margen de fase de los casos bifrecuencia (N=2 y N=3) con respecto al monofrecuencia (N=1). Esto se puede observar en las figuras 5-12 y 5-13 (superposición de los Bode de magnitud y fase para cada caso) y, quizás de forma más fácil y rápida, en la figura 5-14 (superposición de los Nyquist de los casos tratados). También en estas figuras se puede percibir cómo el margen de ganancia no experimenta prácticamente ningún cambio en los casos estudiados.

**Parte D:** Se va a pasar ahora a observar qué sucede cuando se muestrea más rápidamente en la parte D del regulador. Se prueban los siguientes casos:

- Caso N=2 en D:  $T_u=T_d=0.09=T_y/2$ ,  $T_p=T_i=T_y$
- Caso N=3 en D:  $T_u=T_d=0.06=T_y/3$ ,  $T_p=T_i=T_y$
- Caso N=6 en D:  $T_u=T_d=0.03=T_y/6$ ,  $T_p=T_i=T_y$

La magnitud y fase relativos al Bode de estos casos y el Nyquist de los mismos se encuentran en las figuras 5-15, 5-16, 5-17 y 5-18, comparadas con el caso monofrecuencia N=1.

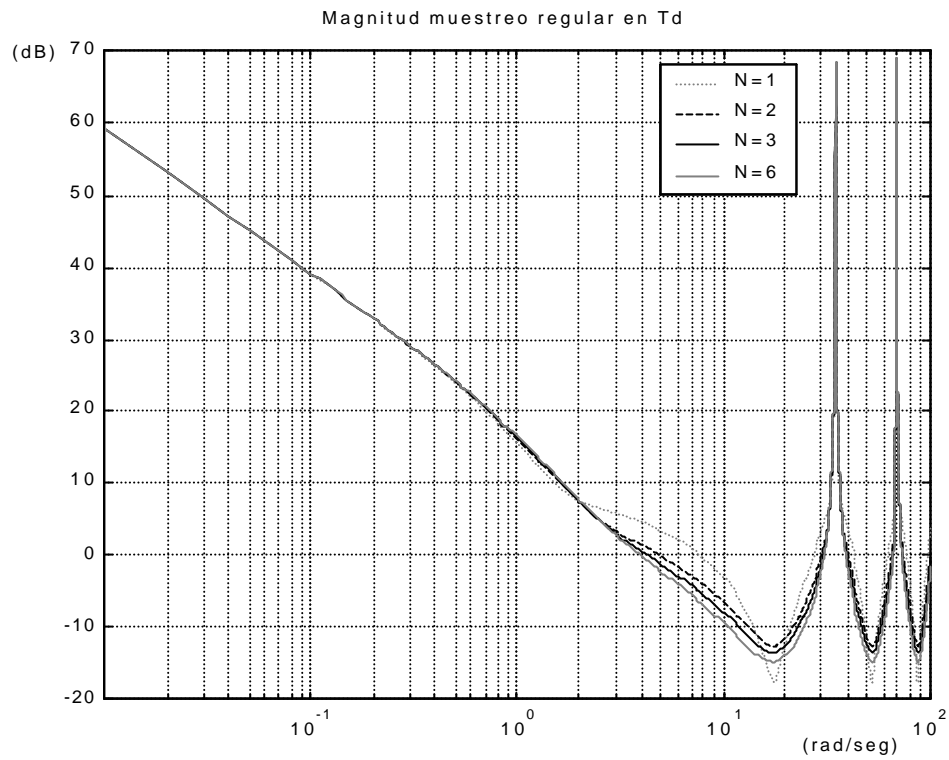


Figura 5-15: Magnitud del Diagrama de Bode muestreo regular en D

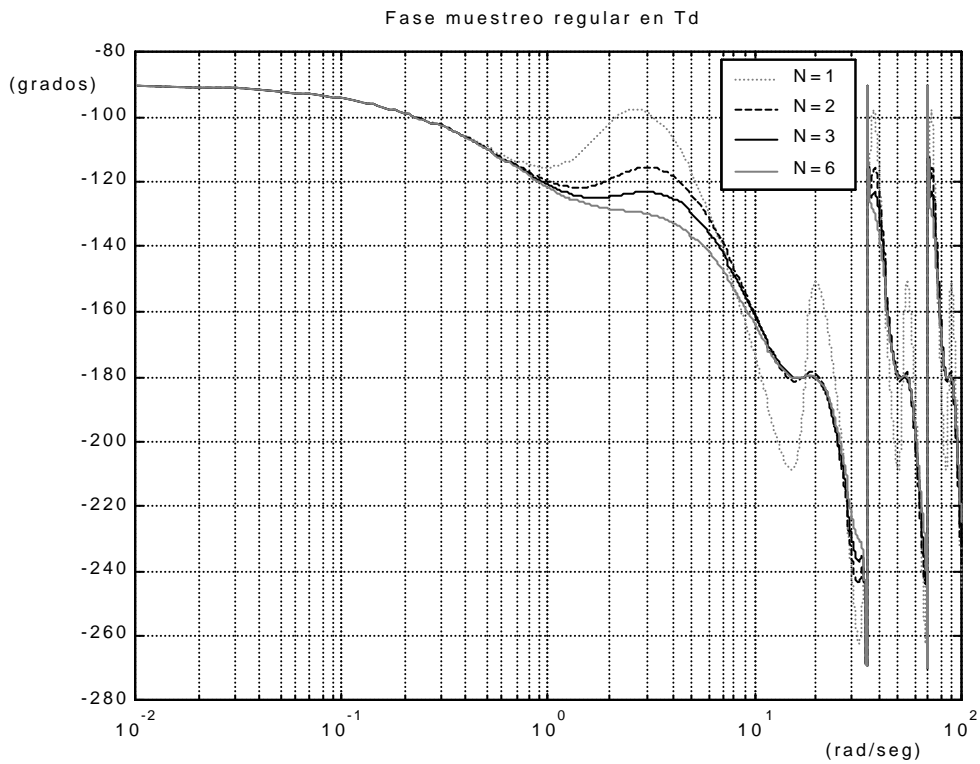


Figura 5-16: Fase del Diagrama de Bode muestreo regular en D



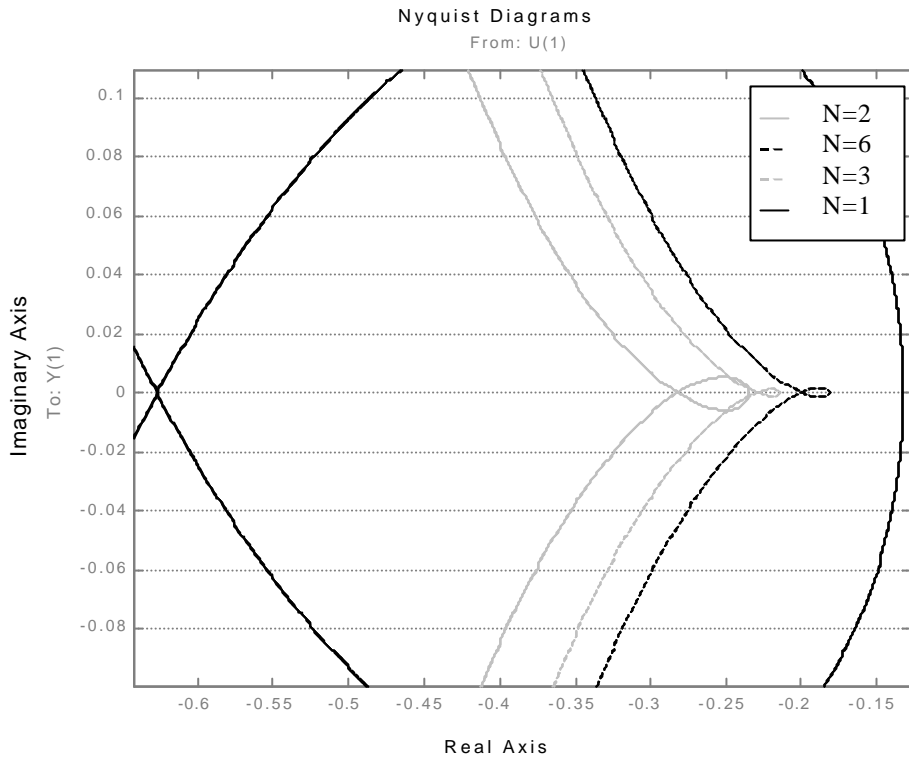


Figura 5-17: Detalle márgenes de ganancia en Diagrama de Nyquist muestreo regular en D

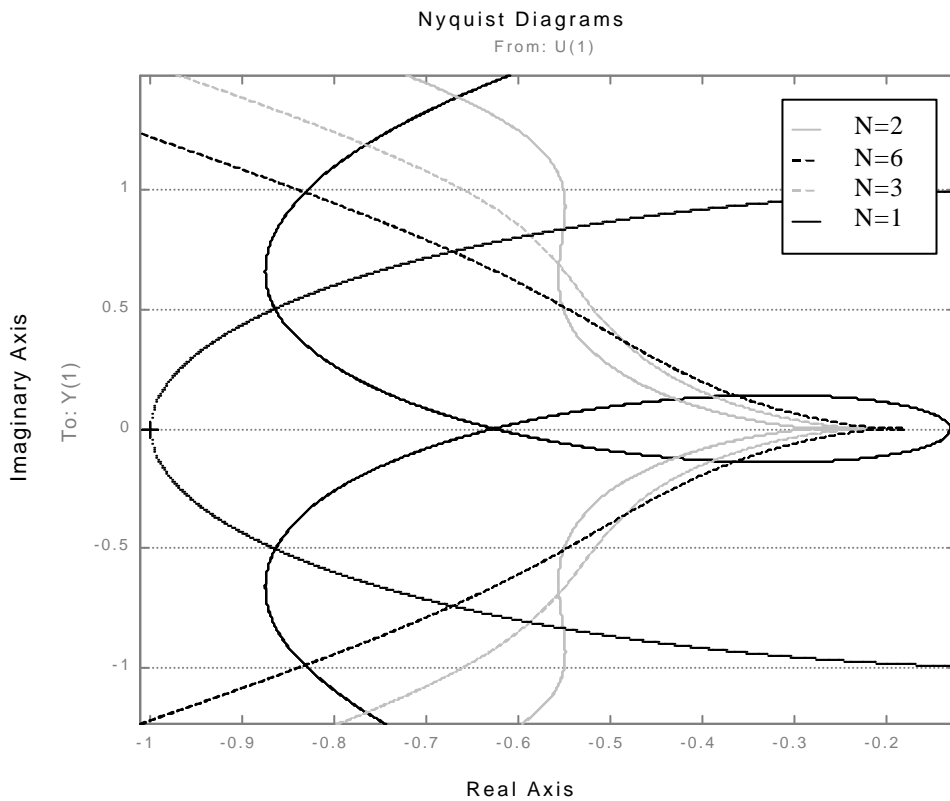


Figura 5-18: Detalle márgenes de fase en Diagrama de Nyquist muestreo regular en D

A la vista de los resultados se corroboran las conclusiones alcanzadas por el análisis temporal (y que coinciden con estudios clásicos del tema (Ogata, 1974 y 1987)), en el que se concluía que muestrear más rápidamente en el muestreador de la parte D sí aporta variaciones en la respuesta del sistema con respecto al caso monofrecuencial. Los Bodes y Nyquist obtenidos demuestran que pasar desde un muestreo monofrecuencia en D hacia un bifrecuencia con  $N=2$  supone ampliar el margen de fase y ganancia. Sin embargo, vuelve a ponerse de relieve el hecho ya mencionado en este capítulo y en el del dominio temporal acerca de la influencia de los ceros que surgen del muestreo no convencional; como ya se ha visto, estos ceros hacen que en algunos casos aumentar la multiplicidad ( $N$ ) reduzca claramente el margen de fase. Por su parte, el margen de ganancia en principio no sufre esta influencia de una forma tan directa, ya que aumenta con  $N$ .

Al igual que sucedía en el capítulo 4, relativo al análisis en el dominio temporal, nuevamente la perspectiva frecuencial demuestra que los resultados obtenidos para el muestreador de la parte D (ver figuras 5-15 y 5-16) son muy similares a los obtenidos con el regulador dispuesto en estructura interactiva (ver figuras 5-1 y 5-2). Las mínimas diferencias detectables en los valores numéricos de los márgenes de fase y ganancia entre ambos escenarios estriban nuevamente en la consideración del muestreo en I, esto es, se comprueba que si se considera el mismo esquema de muestreo regular tanto en D como en I el resultado es idéntico al que se obtiene con la estructura interactiva. Por tanto, se puede concluir que el incremento de  $N$  en el muestreo de la parte D es el que aporta prácticamente todo el beneficio al sistema en cuanto a márgenes de ganancia y fase. Por su parte, la acción I tiene como cometido compensar la desviación que se da con respecto a la estructura interactiva cuando se incrementa  $N$  sólo en D, de tal forma que, si se usa el mismo  $N$  en D y en I la estructura paralela y la interactiva se comportan de forma equivalente. Se han probado una serie de casos para diferentes  $N$  demostrándose lo dicho. En concreto, en las figuras 5-19 y 5-20 se presenta el caso comparativo para  $N=6$ . Se observa que la estructura paralela muestreando sólo con  $N=6$  en D obtiene resultados sensiblemente diferentes a los obtenidos si se muestrea a la vez con  $N=6$  en D y en I. Por su parte, estos últimos resultados son idénticos a los obtenidos con la estructura interactiva (comparar con figuras 5-1 y 5-2).

**Parte P:** Por lo dicho en el párrafo anterior, y como ya se dedujo en el capítulo 4, el caso de variar (incrementar  $N$ ) regularmente en el muestreador de la parte P queda demostrado que no supone mejoría alguna respecto del caso monofrecuencia ( $N=1$ ) en dicha parte P, ya que ésta carece de dinámica y entonces suministra de forma repetida (repetición dada por el esquema de muestreo) la misma acción de control a cada metaperiodo (la cual coincide con la que se proporcionaría en el caso monofrecuencia,  $N=1$ ).

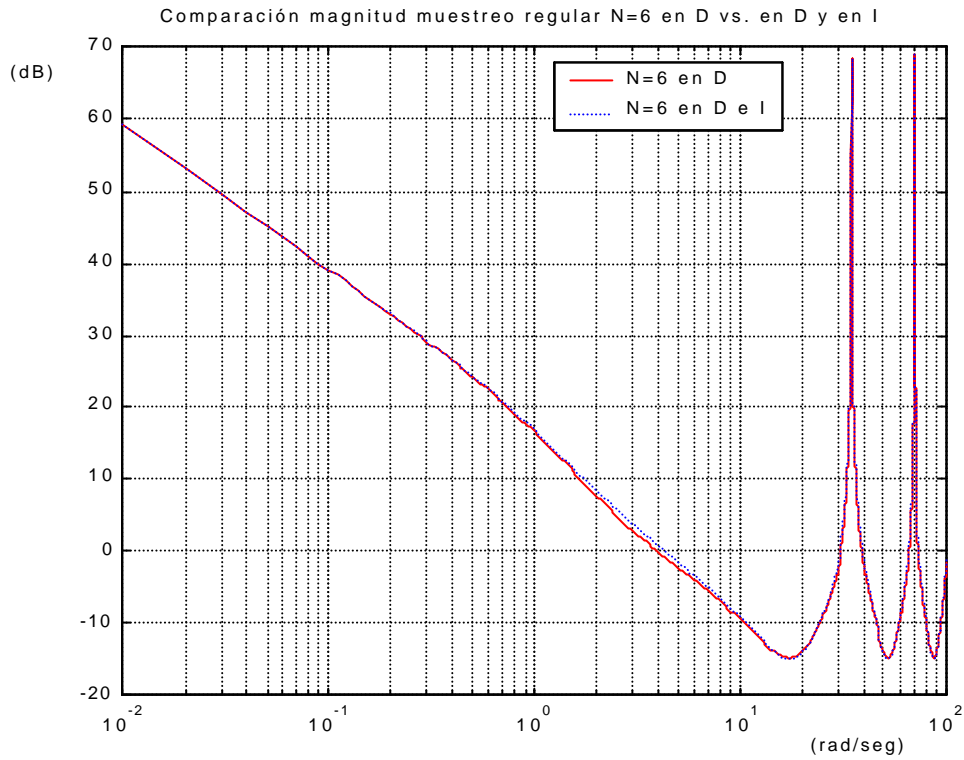


Figura 5-19: Comparación de magnitud D. Bode estructura interactiva vs. paralela con N=6

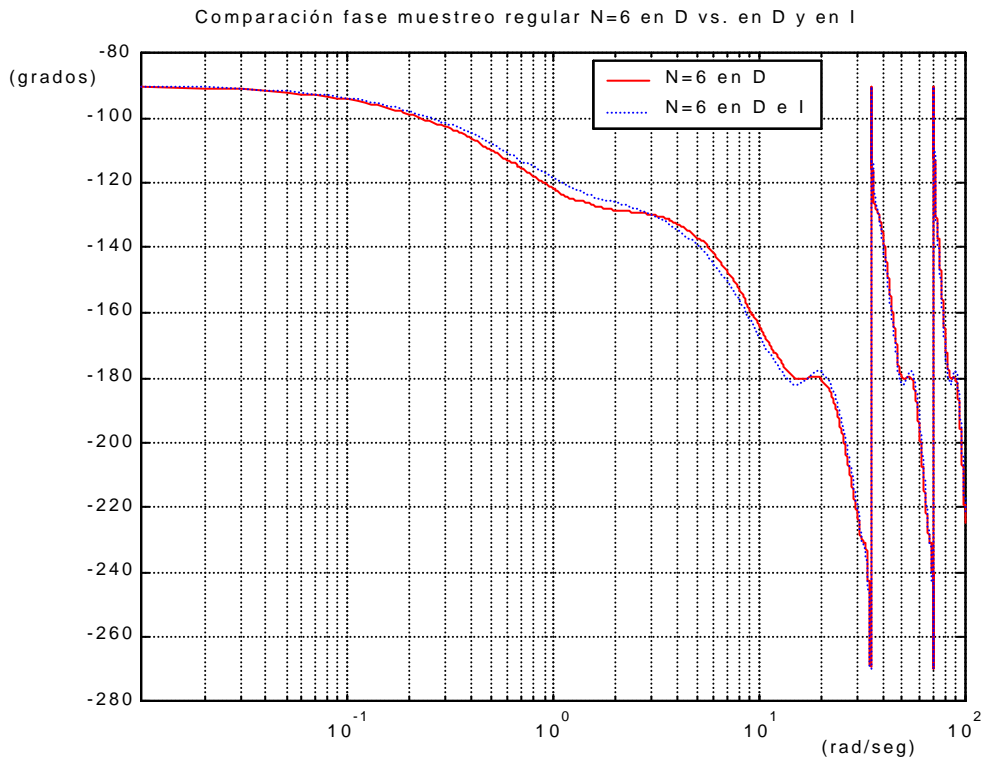


Figura 5-20: Comparación de fase D. Bode estructura interactiva vs. paralela con N=6

5.3.2.2.4.2. Caso muestreo irregular  $N=2$ .

Visto el comportamiento del sistema de control para el caso de muestreo regular, se va a estudiar ahora el caso irregular. Dado que el tratamiento de los muestreadores ubicados en las partes I y D se ha comprobado que arrojaba pocas conclusiones en el caso regular analizado anteriormente, se cree más conveniente centrar ahora el estudio solamente en la variación del esquema de muestreo en el muestreador de la parte D. Así pues, en las figuras 5-21 y 5-22 se va a mostrar los resultados relativos a la superposición de los Nyquist correspondientes a los siguientes casos (tomando nuevamente  $T_y=0.18$  seg y  $t_0=0.015$  seg):

- $T_d=T_u=[0,0.015]$ ,  $T_p=T_i=T_y=[0]$ : muestreo irregular en los instantes 0 y 1 a  $t_0$  de cada metaperiodo en la parte D (y en el muestreador del proceso). El resto de muestreadores actúan capturando muestra únicamente en el instante 0 (comienzo de metaperiodo).
- $T_d=T_u=[0,0.06]$ ,  $T_p=T_i=T_y=[0]$ : muestreo irregular en los instantes 0 y 4 a  $t_0$  de cada metaperiodo en la parte D (y en el muestreador del proceso). El resto de muestreadores actúan capturando muestra únicamente en el instante 0 (comienzo de metaperiodo).
- $T_d=T_u=[0,0.12]$ ,  $T_p=T_i=T_y=[0]$ : muestreo irregular en los instantes 0 y 9 a  $t_0$  de cada metaperiodo en la parte D (y en el muestreador del proceso). El resto de muestreadores actúan capturando muestra únicamente en el instante 0 (comienzo de metaperiodo).
- $T_d=T_u=[0,0.165]$ ,  $T_p=T_i=T_y=[0]$ : muestreo irregular en los instantes 0 y 11 a  $t_0$  de cada metaperiodo en la parte D (y en el muestreador del proceso). El resto de muestreadores actúan capturando muestra únicamente en el instante 0 (comienzo de metaperiodo).

En la figura 5-21 y 5-22 se incluyen, además de los casos irregulares, los casos regulares (obtenidos en el epígrafe anterior) con  $N=1$  (caso monofrecuencial,  $[0]$ ) y  $N=2$  ( $[0,0.09]$ ), para que sirvan de referencia.

Los resultados obtenidos se parecen mucho a las generados con el regulador con estructura interactiva para muestreo irregular y  $N=2$  (ver figuras 5-9 y 5-10). Así pues, se aprecia que los casos donde el muestreo bifrecuencia se produce hacia el final o el principio del metaperiodo, los márgenes de fase y ganancia son parecidos al caso monofrecuencial,  $N=1$ . Sin embargo, conforme el esquema de muestreo bifrecuencial irregular se acerca más al caso regular,  $[0,0.09]$ , la respuesta frecuencial del sistema se asemeja más a la obtenida en dicho caso, como cabía esperar.

El mismo estudio se podría realizar para el caso de muestreo irregular con  $N=3$  y  $N=6$ , obteniéndose (al igual que ha sucedido con el caso  $N=2$ ) conclusiones similares a las obtenidas para el caso de estructura interactiva.

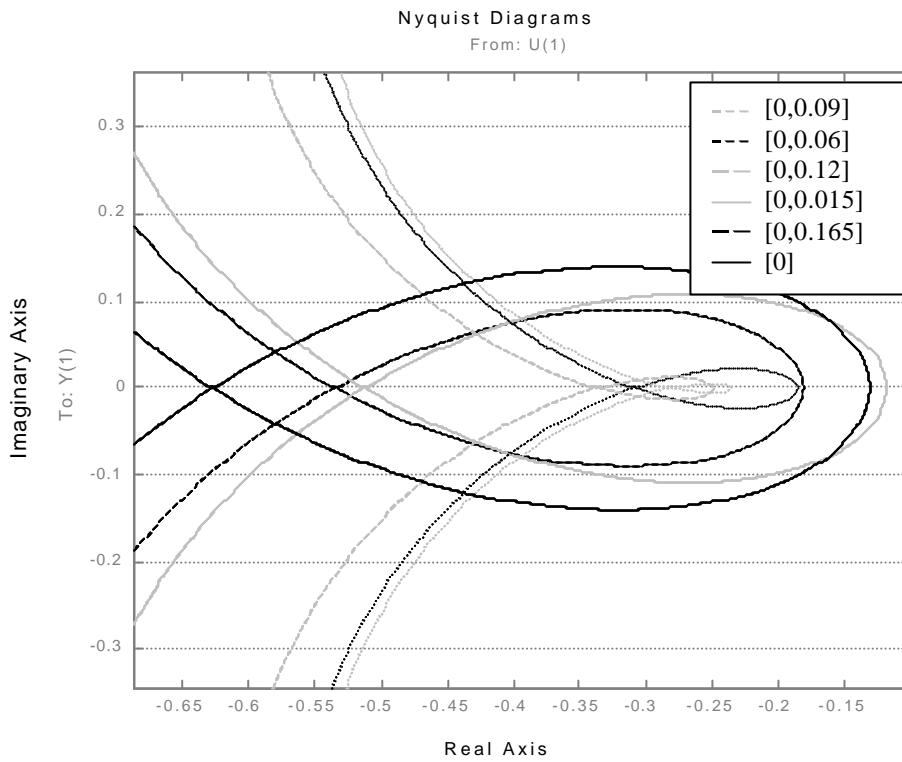


Figura 5-21: Detalle márgenes de ganancia en Diagrama de Nyquist muestreo irregular en D

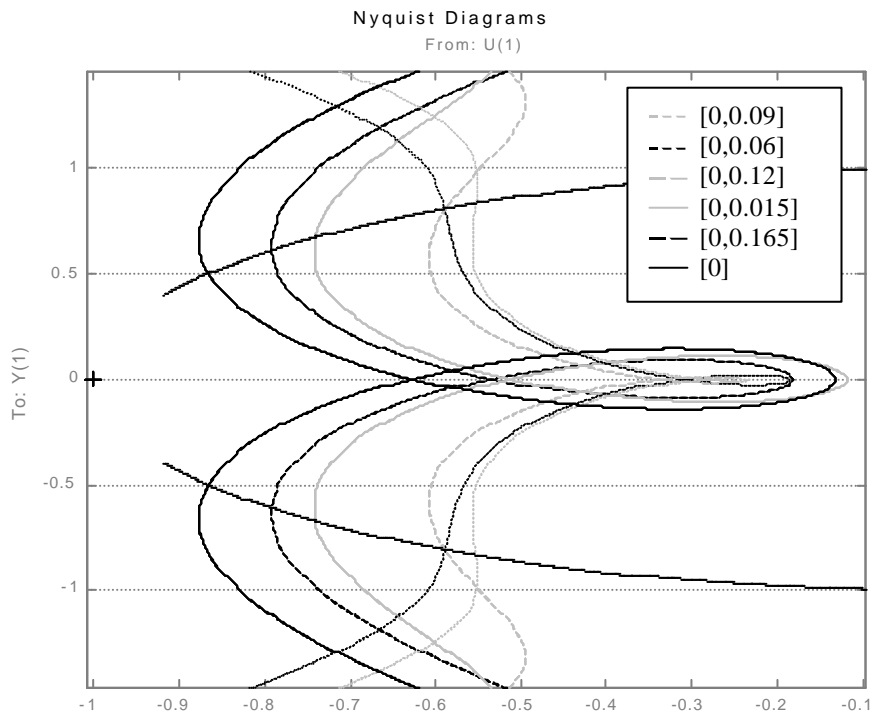


Figura 5-22: Detalle márgenes de fase en Diagrama de Nyquist muestreo irregular en D

## 5.4. CONCLUSIONES Y PROPUESTAS FUTURAS.

En el presente capítulo se plantea una metodología sencilla de análisis para sistemas de control con estructura no convencional desde el punto de vista del dominio frecuencial. Dicha metodología de análisis incluye el modelado de este tipo de sistemas. Para llevarlo a cabo se ha decidido utilizar, al igual que en el capítulo 4 (relativo al estudio desde el punto de vista del dominio temporal) el modelado en Representación Interna presentado en el capítulo 2, el cual está basado en la Metodología de Kranc (Kranc, 1957a), (Kranc, 1957b). Tras el modelado es necesario obtener la cadena directa formada por el regulador y el proceso (Salt, 1992), (Salt, 1994) para a partir de ella, y dado un esquema de muestreo, obtener la respuesta frecuencial del sistema.

Para llevar a buen término la metodología de análisis introducida es necesario ampliar las macros implementadas para llevar a cabo el estudio del dominio temporal (capítulo 4) con el fin de dotarlas de las instrucciones necesarias para generar la respuesta frecuencial (diagramas de Bode y Nyquist) correspondiente a los casos bajo estudio. De esta forma se puede obtener los márgenes de ganancia y fase de cada caso considerado (siempre a metaperiodo).

Como sucedió en el capítulo relativo al dominio temporal se ha trabajado indistintamente con muestreo regular e irregular, ya que la metodología de modelado utilizada otorga gran flexibilidad en el tratamiento del esquema de muestreo.

Se ha realizado una comparativa de los resultados obtenidos bajo la perspectiva temporal respecto de los obtenidos en el presente capítulo bajo el punto de vista frecuencial. Como parece comprobarse hay concordancia entre ambos.

Es interesante nombrar que nuevamente el estudio se ha centrado en el caso de plantas muestreadas de forma lenta y que requieren un control a mayor frecuencia, ya que presentan un mayor interés.

Se ha utilizado como regulador un PID con dos puntos de vista estructurales diferentes. En el primer estudio se ha utilizado un regulador PID con estructura interactiva, obteniendo resultados interesantes, pero limitando bastante el número de grados de libertad del sistema de control con estructura no convencional. Por ello, en un segundo estudio se ha propuesto una estructura paralela, la cual enriquece nuestro sistema de control al dotarlo de mayor número de muestreadores y propiciar, por tanto, la posibilidad de extraer conclusiones individuales acerca de la aportación de cada muestreador situado en cada una de las acciones básicas del PID. Como consecuencia de ambos estudios se han vuelto a comprobar las conclusiones obtenidas en el capítulo 4, esto es:

- El incremento de la multiplicidad ( $N$ ) en el muestreo de la parte derivativa ( $D$ ) es el que aporta prácticamente todo el beneficio al sistema en cuanto a márgenes de ganancia y fase, lo cual corrobora estudios clásicos del tema (Ogata, 1974 y 1987). Por su parte, la acción integral ( $I$ ) tiene como cometido compensar la desviación que se da con respecto a la estructura interactiva cuando se incrementa  $N$  sólo en  $D$ , de tal forma que, si se usa el mismo  $N$  en  $D$  y en  $I$  la estructura paralela y la

interactiva se comportan de forma equivalente. Aumentar  $N$  en la parte proporcional (P) no tiene influencia sobre el sistema.

- Por regla general, conforme  $N$  aumenta se produce mejoras en los márgenes de ganancia y fase. No obstante, hay casos en los que esto no es así para el margen de fase, lo cual se atribuye a la influencia de los ceros que surgen del muestreo no convencional.
- Si se evalúa el muestreo irregular, por ejemplo con  $N=2$ , se ve como los márgenes de fase y ganancia van aumentando conforme se va progresivamente desde el muestreo irregular más cercano al caso monofrecuencia hacia el muestreo regular con  $N=2$ . Esto cuadra con los resultados obtenidos desde la perspectiva temporal, ya que allí, se obtenían menores sobreoscilaciones máximas y menores tiempos de establecimiento conforme pasábamos igualmente desde patrones bifrecuencia irregulares similares al monofrecuencial hacia el bifrecuencial regular.

Por último decir que se han usado programas de simulación convencional (Matlab) e interactiva (SysQuake) como ayuda al estudio analítico para el caso de estructura interactiva para el regulador tipo P-I-D con estructura no convencional. En el caso de estructura paralela sólo se han implementado programas de simulación convencional (Matlab) dejando como propuesta futura la implementación en simulación interactiva.

## **CAPÍTULO 6**

# **DISEÑO DE REGULADORES CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL BASADO EN LA REPRESENTACIÓN EXTERNA**





## 6.1. INTRODUCCIÓN. RESEÑAS SOBRE NOTACIÓN.

Una vez establecidas las fases de modelado (capítulos 2 y 3) y análisis (capítulos 4 y 5) se está ya en condiciones de abordar la fase de diseño. En esta fase, partiendo del modelado en RE (capítulo 3), se va a estudiar el diseño de diferentes tipos de reguladores con estructura no convencional capaces de controlar el comportamiento de un sistema que sea muestreado de forma no uniforme en el tiempo.

Así pues, en este epígrafe, además de fijar algunos conceptos introductorios al diseño, se va a introducir la notación empleada en esta fase. Con el fin de hacer dicha notación más simple y eficiente, se considerará a NT como el periodo lento (metaperiodo  $T_0$ ) y a T como el periodo rápido, donde N (asumido entero por simplicidad y sin pérdida de generalidad) es la multiplicidad (esto es, la relación entre los periodos rápido y lento).

Para el diseño de reguladores no convencionales se va a considerar el lazo de control multifrecuencia de la figura 6-1. En ella claramente se observa que el proceso  $G_p(s)$  (se tomará, por norma general, un sistema SISO continuo lineal e invariante en el tiempo de orden n) va a ser muestreado en su entrada según cualquier patrón de muestreo (regular o irregular). Por su parte, a la salida se utilizará la medida del proceso tomada a periodo NT para ser realimentada. En cuanto al regulador multifrecuencia,  $\bar{G}_{R,N}^T$ , está diseñado para recibir una señal de error a periodo lento NT y generar N acciones de control sobre el proceso en cada metaperiodo NT. En la figura 6-3, que será explicada posteriormente, se plantea su estructura interna con mayor nivel de detalle.

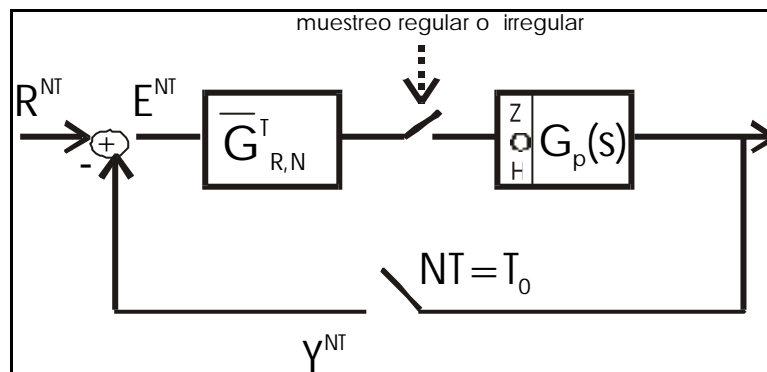


Figura 6-1: Lazo de control multifrecuencia con muestreo no convencional

Entrando con la notación, si se parte del proceso continuo  $G_p(s)$  al muestrearse a periodo lento NT (o lo que sería equivalente, al discretizarlo con un ZOH a periodo NT) se tendrá:

$$G_p^{NT} = \frac{B_p^{NT}}{A_p^{NT}} = \frac{Y^{NT}}{U^{NT}}$$

Por su parte, si se muestrea a periodo rápido T (es decir, si se discretiza con ZOH a periodo rápido T) se obtendrá:

$$G_p^T = \frac{B_p^T}{A_p^T} = \frac{Y^T}{U^T}$$

Como se ha visto en el capítulo 3, cuando se muestrea un sistema se ha de considerar un polinomio añadido que se ha llamado  $W(z_N)$  y que se rige según la expresión (3-5). A partir de ahora (y utilizando una simbología similar a (Salt, 1992) y (Albertos, Salt y Tornero, 1996)) se le llamará polinomio  $W^T$ . Vendrá definido por la expresión siguiente (que es equivalente a la (3-5)):

$$W^T = \prod_{i=1}^n (z_N^{N-1} + \mathbf{a}_{i,T} z_N^{N-2} + \dots + \mathbf{a}_{i,T}^{N-1}) = \frac{\prod_{i=1}^n (z_N^N - \mathbf{a}_{i,NT})}{\prod_{i=1}^n (z_N - \mathbf{a}_{i,T})} \quad (6-1)$$

siendo  $\mathbf{a}_{i,NT}$  los polos de la f.d.t. a periodo lento y  $\mathbf{a}_{i,T}$  los polos de la f.d.t. a periodo rápido. En (Salt, 1992) se demuestra además que:  $\mathbf{a}_{i,NT} = \mathbf{a}_{i,T}^N; \forall i = 1, \dots, n$ .

Con todo lo visto, cuando se está ante un caso regular, se tendrá:

$$G_p^T = \frac{B_p^T W_A^T}{A_p^T W_A^T} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n \times N} \tilde{b}_{i,T} z_N^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_{i,NT} z_N^{-iN}} = \frac{Y^T}{U^T} \quad (6-2)$$

donde el polinomio  $W^T$  es igual para numerador y denominador (son cancelables). Se les ha llamado  $W_A^T$  pues hacen referencia al denominador. En dicho denominador se pueden encontrar los coeficientes del proceso a periodo NT expandidos a periodo T,  $(A_p^{NT})^T$ , mientras que el numerador,  $\tilde{B}_p^T$ , posee los coeficientes del proceso, los cuales cumplen la ley de (Salt, 1992) enunciada en el capítulo 3.

Por su parte, cuando se está ante un caso irregular se tiene (tras operar según la metodología de modelado expuesta a lo largo del capítulo 3):

$$G_p^T = \frac{\hat{B}_p^T W_B^T}{A_p^T W_A^T} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} = \frac{\sum_{i=1}^{n \times N} \tilde{b}_{i,T} z_N^{-i}}{1 + \sum_{i=1}^n a_{i,NT} z_N^{-iN}} = \frac{Y^T}{U^T} \quad (6-3)$$

donde el polinomio  $W^T$  es distinto para numerador y denominador. El del denominador,  $W_A^T$ , queda como en el caso regular, puesto que al denominador no le afecta el cambio de esquema de muestreo, mientras que el del numerador,  $W_B^T$ , cambia con respecto al caso regular con el fin de representar el patrón irregular de muestreo introducido. Por su parte,  $\hat{B}_p^T$  es el numerador del proceso a periodo rápido, que fruto de la metodología de modelado empleada, puede incluso variar sus coeficientes. No obstante, tras multiplicarse por  $W_B^T$  y ajustar la ganancia, se tiene  $\tilde{B}_p^T$  cuyos coeficientes cumplen ya la ley de (Salt, 1992).

Es interesante observar que atendiendo al caso regular (y sin pérdida de generalidad), de (6-2) se puede deducir:

$$\tilde{B}_p^T U^T = [A_p^{NT}]^T Y^T$$

que haciéndole un skip en los instantes de tiempo T, esto es, volviendo a muestrear cada NT instantes de tiempo, se tiene un significado físico equivalente a la consideración de un

muestreador cada NT instantes de tiempo en la salida del proceso, es decir, una salida a periodo lento:

$$\left[ \tilde{B}_p^T U^T \right]^{NT} = \left[ A_p^{NT} \right]^T Y^T \Rightarrow \left[ \tilde{B}_p^T U^T \right]^{NT} = \left[ A_p^{NT} \right]^T \left[ Y^T \right]^{NT}$$

donde el significado de  $\left[ A_p^{NT} \right]^T$  es  $A_p^{NT}$  expresado con variable  $z_N$ . En la última expresión merece especial atención el término  $\left[ \tilde{B}_p^T U^T \right]^{NT}$ , el cual es indivisible, ya que (como es sabido) no se puede definir una función de transferencia entre una entrada rápida y una salida lenta.

Tanto caso regular como irregular responden al concepto de operador bifrecuencia introducido en (Salt, 1992) y que también puede ser encontrado en (Albertos, Salt y Tornero, 1996)); antes de mostrarlo, parece interesante fijarse en la figura 6-2 y sus consecuentes expresiones. En ella se muestra cómo se va a transformar una secuencia discreta (tipo escalón) a periodo lento en una secuencia discreta a periodo rápido\*:

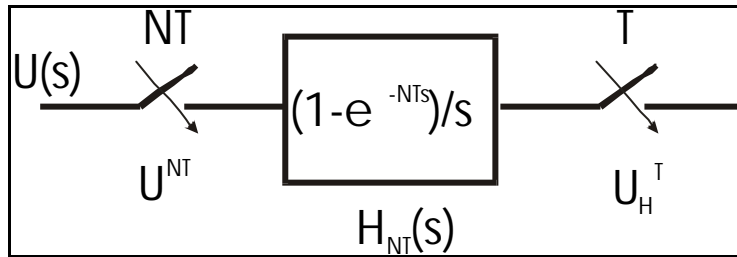


Figura 6-2: Operador dual

$$W_R^T = \frac{U_H^T}{U^{NT}} = \left[ H_{NT}(s) \right]^T = \left[ \frac{1 - e^{-NTs}}{s} \right]^T = \frac{1 - z_N^{-N}}{1 - z_N^{-1}} = \left( 1 + z_N^{-1} + \dots + z_N^{-(N-1)} \right) \quad (6-4)$$

por lo que, en el caso de entrada lenta y salida rápida es posible obtener la función de transferencia siguiente:

$$Y^T = \left[ U^{NT} H_{NT} G_p(s) \right]^T = \left[ U^{NT} \right]^T \left[ H_{NT} G_p(s) \right]^T$$

de donde, conocida (6-4), se tiene que:

$$\left[ H_{NT} G_p(s) \right]^T = W_R^T \left[ H_T G_p(s) \right]^T$$

por lo que, el operador bifrecuencia para entrada lenta y salida rápida en el caso regular (sin pérdida de generalidad) queda:

\* Notar que  $W_R^T$  relaciona entrada lenta y salida rápida, al contrario que  $W^T$ .

$$\tilde{G}(z, N) = G_p^{T, NT} = \frac{Y^T}{[U^{NT}]^T} = W_R^T G_p^T = W_R^T \frac{B_p^T}{A_p^T} = W_R^T \frac{B_p^T}{A_p^T} \frac{W_A^T}{W_A^T} = W_R^T \frac{\tilde{B}_p^T}{[A_p^{NT}]^T}$$

Así, si la salida es muestreada con periodo NT, se obtiene a partir de la expresión anterior:

$$\left[ \frac{Y^T}{[U^{NT}]^T} \right]^{NT} = \frac{[Y^T]^{NT}}{[U^{NT}]^T} = \frac{[Y^T]^{NT}}{U^{NT}} = \frac{[W_R^T \tilde{B}_p^T]^{NT}}{[A_p^{NT}]^T} = \frac{B_p^{NT}}{A_p^{NT}}$$

lo cual viene a corroborar la ley de (Salt, 1992) enunciada anteriormente.

A parte de la notación establecida para el proceso, en algunos casos de diseño de reguladores con estructura no convencional se va a necesitar trabajar también con la f.d.t. de bucle cerrado M(s). En esos casos, se tendrán también diversas versiones de la misma, tras muestrearse de una u otra manera. Se presentan a continuación dichas versiones de forma parecida a como se ha hecho con el proceso:

- muestreada a periodo lento NT:  $M^{NT} = \frac{B_M^{NT}}{A_M^{NT}}$
- muestreada a periodo rápido T caso regular:  $M^T = \frac{B_M^T W_{M_A}^T}{A_M^T W_{M_A}^T} = \frac{\tilde{B}_M^T}{(A_M^{NT})^T}$
- muestreada caso irregular (y modelada a periodo rápido T):  $M^T = \frac{\hat{B}_M^T W_{M_B}^T}{A_M^T W_{M_A}^T} = \frac{\tilde{B}_M^T}{(A_M^{NT})^T}$

Como se ha visto en el capítulo de modelado en RE, el proceso podrá modelarse, independientemente del esquema de muestreo, como una f.d.t. a periodo rápido T (regular) donde las posibles irregularidades en el muestreo quedan consideradas como variaciones de los coeficientes del numerador. Por ello, la figura 6-1 será equivalente a la 6-3 tras aplicar el modelado en RE.

Además, en la figura 6-3 es interesante observar cómo queda estructurado el regulador multifrecuencia. Dicho regulador se puede implementar como un regulador periódico, donde aparecen tres partes claramente diferenciadas:  $G_1^{NT}$ ,  $H_N^T$ ,  $G_2^T$ . Así, el error calculado a frecuencia baja es primero procesado por el sub-regulador definido a periodo lento  $G_1^{NT}$  y pasado a través del convertidor de frecuencia  $H_N^T$ . Dicho convertidor traduce una frecuencia baja (1/NT) en una frecuencia alta (1/T) de la forma vista en la figura 6-2. Para el caso de un escalón de entrada queda:

$$H_N^T = \frac{1 - z_N^{-N}}{1 - z_N^{-1}} = \frac{Y^T}{(U^{NT})^T}$$

El segundo sub-regulador, definido a periodo rápido,  $G_2^T$ , proporciona finalmente la entrada de control al proceso.

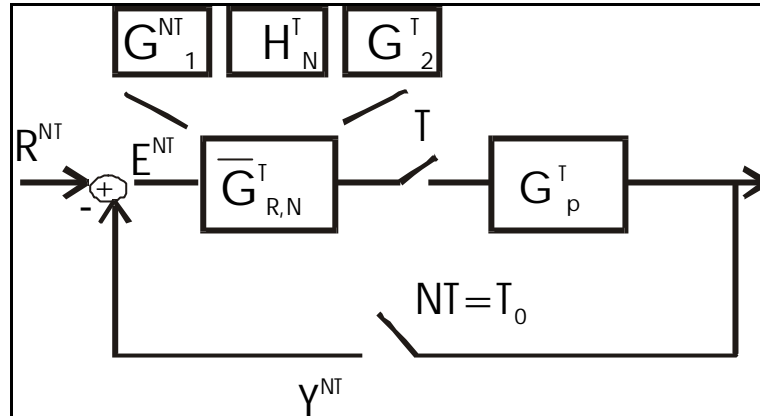


Figura 6-3: Detalle lazo de control multifrecuencia con muestreo no convencional

Establecido el escenario del problema, la tarea principal ahora es cómo diseñar el regulador multifrecuencia. Para ello va a ser de gran ayuda el siguiente lema, el cual hace referencia al control multifrecuencia en lazo cerrado.

- **Control multifrecuencia en lazo cerrado**

**Lema 1.** Con la notación anterior, la salida del proceso en sistemas controlados multifrecuencialmente, figura 6-3, viene expresada por :

$$\bar{Y}^T = \frac{G_p^T \bar{G}_{R,N}^T}{1 + [(G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}]^T} (R^T)^{NT} = \bar{M}_N^T (R^T)^{NT} \quad (6-5)$$

donde  $\bar{Y}^T$  es la secuencia rápida del proceso controlado multifrecuencialmente y  $\bar{M}_N^T$  es un operador bifrecuencia, proporcionando la salida muestreada a frecuencia rápida,  $1/T$ , y actualizando la entrada a frecuencia lenta,  $1/NT$ .

**Prueba.** El modelo completo para el sistema representado en la figura 6-3 puede ser descrito como:

$$\bar{Y}^T = G_p^T U^T; \quad U^T = \bar{G}_{R,N}^T E^{NT}; \quad (6-6)$$

Teniendo en cuenta el operador skip, la secuencia de error lenta es:

$$\begin{aligned} E^{NT} &= (E^T)^{NT} = (R^T - \bar{Y}^T)^{NT} = (R^T)^{NT} - (\bar{Y}^T)^{NT} \\ E^{NT} &= (R^T)^{NT} - (G_p^T \bar{G}_{R,N}^T E^{NT})^{NT} = (R^T)^{NT} - (G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT} E^{NT} \\ E^{NT} &= \frac{1}{1 + (G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}} (R^T)^{NT} \end{aligned}$$

lo que tras sustituir en (6-6) conduce a (6-5).

## 6.2. PLANTEAMIENTO GENERAL.

Dado un proceso continuo,  $G_p(s)$ , se diseña un regulador continuo,  $G_R(s)$ , para alcanzar una función de transferencia en bucle cerrado,  $M(s)$ . Si se asume un modo de operación monofrecuencia (todas las operaciones Sample/Hold a la misma frecuencia) para la implementación del regulador, es decir, para un regulador rápido,  $G_R^T$ , o lento,  $G_R^{NT}$ , el bucle cerrado viene dado, con un esquema monofrecuencial similar al de la figura 6-3, por:

$$M^T = \frac{Y^T}{U^T} = \frac{G_p^T G_R^T}{1 + G_p^T G_R^T}; \quad \text{ó} \quad M^{NT} = \frac{Y^{NT}}{U^{NT}} = \frac{G_p^{NT} G_R^{NT}}{1 + G_p^{NT} G_R^{NT}} \quad (6-7)$$

respectivamente. Los reguladores discretos,  $G_R^T$  ó  $G_R^{NT}$ , pueden ser diseñados o bien para seguir el comportamiento discreto de  $M(s)$ , o mediante la discretización del regulador continuo  $G_R(s)$  (diseño directo o indirecto, respectivamente). En cualquier caso, cuanto mayor sea el periodo de muestreo presumiblemente peor será el comportamiento intermuestreo de la salida.

Por tanto, el objetivo será diseñar un regulador multifrecuencia para alcanzar el rendimiento del sistema controlado a frecuencia rápida a partir de una secuencia de medidas de la salida a frecuencia lenta. En esta línea, en (Salt y Albertos, 2000) se propone el teorema que se muestra a continuación, el cual trata el caso particular bifrecuencia. El objetivo de este trabajo es replantearlo para tratar con sistemas muestreados de forma no convencional.

**Teorema 1** Dado un proceso continuo  $G_p(s)$ , y un modelo de referencia  $M(s)$  para el sistema controlado, asumiendo un periodo de actualización de control  $T$ , y la salida muestreada a periodo  $NT$ , figura 6-3, se define el regulador bifrecuencia  $\bar{G}_{R,N}^T = G_2^T H_N^T G_1^{NT}$  o también  $\bar{G}_{R,N}^T = G_{RR}^T H_N^T G_{RL}^{NT}$  donde:

- la parte rápida viene dada por:  $G_2^T = G_{RR}^T = \frac{M^T}{G_p^T} \quad (6-8)$

- la parte lenta viene dada por:  $G_1^{NT} = G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M^{NT}} \quad (6-9)$

- y el interfaz que une a ambos subreguladores,  $H_N^T$ , cuando la referencia es un escalón se trata de un convertidor de frecuencia tal que  $H_N^T = \frac{1 - z_N^{-N}}{1 - z_N^{-1}} \quad (6-10)$

- 1) Para cambios en escalón en la referencia, alcanzará el mismo rendimiento discreto que el regulador rápido, pero utilizando una frecuencia de muestreo lenta para la salida.
- 2) Si  $M^T$  se obtiene mediante (6-7), se puede evitar el rizado intermuestreo, pero la respuesta no coincide con la respuesta continua.
- 3) Resultados similares se pueden derivar para otras referencias de entrada con un convertidor de frecuencia generalizado,  $H_{I,N}^T$ .

**Prueba.** La salida del proceso  $\bar{Y}^T$  controlado mediante el regulador bifrecuencia viene dada por (6-5). Para que sea la misma que la salida del proceso controlado mediante el regulador rápido implica que:

$$\begin{aligned}\bar{Y}^T &= \frac{G_p^T \bar{G}_{R,N}^T}{1 + [(G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}]^T} (R^T)^{NT} = \\ &= G_p^T \bar{G}_{R,N}^T \frac{1}{1 + (G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}} (R^T)^{NT} = M^T R^T = Y^T\end{aligned}\quad (6-11)$$

Para coincidir, la secuencia lenta de salida deberá ser:

$$(\bar{Y}^T)^{NT} = Y^{NT} = \frac{G_p^{NT} G_R^{NT}}{1 + G_p^{NT} G_R^{NT}} R^{NT} = M^{NT} R^{NT} \quad (6-12)$$

Aplicando el operador skip a (6-11), resulta

$$(\bar{Y}^T)^{NT} = \left[ \frac{G_p^T \bar{G}_{R,N}^T}{1 + [(G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}]^T} (R^T)^{NT} \right]^{NT} = \left[ \frac{G_p^T \bar{G}_{R,N}^T}{1 + [(G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}]^T} \right]^{NT} (R^T)^{NT}$$

esto es

$$(\bar{Y}^T)^{NT} = (G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT} \frac{1}{1 + (G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}} (R^T)^{NT} = M^{NT} R^{NT} = Y^{NT} \quad (6-13)$$

Por skip nuevamente,  $(R^T)^{NT} = R^{NT}$ . Así pues, de (6-13)

$$1 + (G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT} = \frac{1}{1 - M^{NT}} \quad (6-14)$$

y volviendo a (6-11)

$$G_p^T \bar{G}_{R,N}^T (1 - M^{NT}) (R^T)^{NT} = M^T R^T$$

el regulador bifrecuencia viene dado por:

$$\bar{G}_{R,N}^T = \frac{M^T}{G_p^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} \frac{1}{1 - M^{NT}} \quad (6-15)$$

El convertidor de frecuencia (6-10), para referencias en escalón,  $r(t) = \text{constante}$ , es

$$H_N^T = \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{1 - z_N^{-N}}{1 - z_N^{-1}} \quad (6-16)$$



Esto completa la parte 1) del teorema. Para demostrar la parte 2), de (6-7),

$$\frac{M^T}{G_p^T} = \frac{G_R^T}{1 + G_p^T G_R^T} \quad (6-17)$$

y, por lo tanto, si el modelo del lazo cerrado se elige de esta manera, el regulador bifrecuencia no cancelará el numerador de la función de transferencia del proceso.

Finalmente, para una entrada en rampa, es decir  $r(t) = t$ , el convertidor de frecuencia (6-16) viene dado por

$$H_{1,N}^T = \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{1}{N} \left( \frac{1 - z_N^{-N}}{1 - z_N^{-1}} \right)^2 \quad (6-18)$$

introduciendo un retraso de  $N-1$  unidades, como se puede probar fácilmente.

Se puede derivar una expresión general del convertidor de frecuencia (6-16) para una entrada polinomial genérica.

En definitiva, este teorema facilita una manera sencilla de diseñar reguladores bifrecuencia, fácilmente implementables.

### 6.3. DISEÑO DE REGULADORES TIPO P-I-D.

Dado un proceso continuo  $G_p(s)$ , se diseña por técnicas clásicas un controlador PID continuo  $G_R(s)$ . Si se aplica un PID discretizado (Iserman, 1981), al elegir un periodo de muestreo lento se degradan las prestaciones del proceso controlado. Asumimos como aceptable el comportamiento discreto para un periodo de muestreo  $T$ , con el controlador rápido  $G_R^T$ , pero demasiado pobre si se toma como  $NT$ ,  $G_R^{NT}$ . La pregunta que se plantea la multifrecuencia es: si la entrada al proceso puede ser actualizada cada  $T$ , ¿es posible aplicar control PID con prestaciones similares al caso monofrecuencial rápido aún cuando la salida es medida cada  $NT$  seg? En este caso, la parte rápida del controlador multifrecuencia,  $G_{RR}^T$ , adapta la dinámica del proceso de tal forma que éste puede ser controlado por medio de la parte lenta,  $G_{RL}^{NT}$ , de dicho controlador multifrecuencia.

A la hora de llevar a cabo el diseño de reguladores tipo P-I-D con estructura no convencional se van a tener en cuenta tres procedimientos diferentes:

1º) En el primero de ellos se va a partir del diseño de un regulador tipo P-I-D para el proceso discretizado a periodo  $T$ , esto es, para  $G_p^T$ . Obtenido dicho regulador, mediante su versión continua  $G_R(s)$ , es posible generar la fdt continua de bucle cerrado,  $M(s)$ , que se dará para el sistema de control. A partir de ella, siguiendo la estructura general planteada para este tipo de controladores en el Teorema 1, se generarán las partes lenta y rápida del controlador bifrecuencia (regular). Por su parte, el controlador con estructura no convencional PVT (irregular), aunque compartirá con el anterior la parte lenta, obtendrá su parte rápida a partir

de modelar de manera no convencional (según patrón de muestreo, y siguiendo las pautas del capítulo 3) tanto el proceso como la fdt de bucle cerrado.

2º) En este segundo procedimiento se propone obtener sendos reguladores tipo P-I-D tanto para el proceso muestreado cada T instantes de tiempo (llamémosle regular) como para el proceso muestreado de forma no convencional PVT (llamésmole irregular). La idea, por tanto, es disponer de dos fdt de bucle cerrado diferentes para cada caso. Por tanto, ahora las partes lentas del controlador final serán diferentes y, en cuanto a las rápidas, la del caso regular se hallará igual que en el procedimiento 1º y, la del irregular, considerando ahora el modelo no convencional PVT de la fdt de bucle cerrado obtenido en este caso.

3º) En situaciones donde el modelo no convencional del proceso tenga algún cero de módulo mayor que la unidad, éstos pasarán a ser polos en la parte rápida del controlador con estructura no convencional diseñado según los procedimientos anteriores, lo que supondrá la generación de una señal de control inestable. Se propone la utilización de la “fdt calculada” (que posteriormente será definida) para formar la parte rápida del controlador, ya que con ella se consigue una cancelación total del modelo del proceso, y, con ello, de los ceros en cuestión.

A continuación se muestran los tres procedimientos mediante la realización de un ejemplo para cada uno de ellos.

### 6.3.1. Procedimiento 1º de diseño. Ejemplo.

Consideremos el proceso siguiente:

$$G(s) = \frac{4.482}{(s + 4.482)}$$

Un controlador tipo P-I-D continuo aceptable para dicho proceso viene dado por:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + T_D e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right]$$

con  $K_p = 0.7422$ ,  $T_D = 0.125$ ,  $T_I = 0.83333$ .

Una aproximación del controlador tipo P-I-D discreto para T viene dada por:

$$G_R(z) = \frac{q_0 + q_1 z^{-1} + q_2 z^{-2}}{1 - z^{-1}}$$

$$q_0 = K_p \left( 1 + \frac{T_D}{T} \right); \quad q_1 = -K_p \left( 1 + \frac{T}{T_I} + 2 \frac{T_D}{T} \right); \quad q_2 = K_p \left( \frac{T_D}{T} \right)$$

quedando en este caso para el PID diseñado (tomando T=0.25 seg):

$$G_R(z) = \left( \frac{1.113z^2 - 1.262z + 0.3711}{z^2 - z} \right)$$

Se diseña e implementa un controlador bifrecuencia para proporcionar a instantes regulares de tiempo acciones sobre el proceso (patrón regular), con  $T=0.25$  y  $N=2$  ( $NT=0.5$  seg), colocando una parte rápida y otra lenta dadas por:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{M^T}{G_p^T}$$

donde:

- $M^{NT}$  y  $M^T$  son las funciones de transferencia discretas equivalentes de  $M(s)$ , la primera a periodo lento y la segunda a periodo rápido con muestreo regular. Por tanto, siendo en este caso:

$$M(s) = \frac{41.58s^2 + 332.7s + 399.2}{s^3 + 146.1s^2 + 780.9s + 399.2}$$

entonces

$$M^{NT} = \frac{B_M^{NT}}{A_M^{NT}} = \frac{0.5185z_2^{-2} - 0.3087z_2^{-4} + 0.01824z_2^{-6}}{1 - 0.8347z_2^{-2} + 0.06278z_2^{-4} + 6.874 \cdot 10^{-20}z_2^{-6}}$$

$$\begin{aligned} M^T &= \frac{B_M^T}{A_M^T} \cdot \frac{W_{M_A}^T}{W_{M_A}^T} = \\ &= \frac{0.4296z_2^{-1}(1-0.7105z_2^{-1})(1-0.2386z_2^{-1})}{(1-0.8669z_2^{-1})(1-0.2891z_2^{-1})(1-5.38 \cdot 10^{-16}z_2^{-1})} \cdot \\ &\quad \frac{(1+0.8669z_2^{-1})(1+0.2891z_2^{-1})(1+5.38 \cdot 10^{-16}z_2^{-1})}{(1+0.8669z_2^{-1})(1+0.2891z_2^{-1})(1+5.38 \cdot 10^{-16}z_2^{-1})} = \\ &= \frac{0.4296(z_2^{-1} + 0.2069z_2^{-2} - 0.677013z_2^{-3} - 0.0418929z_2^{-4} + 0.0424865z_2^{-5} - 2.2857 \cdot 10^{-17}z_2^{-6})}{1 - 0.8351z_2^{-2} + 0.06281z_2^{-4} + 6.874 \cdot 10^{-20}z_2^{-6}} = \\ &= \frac{\tilde{B}_M^T}{(A_M^{NT})^T} \end{aligned}$$

- $G_p^T$  es la función de transferencia discreta a periodo rápido T para  $G_p(s)$  en el caso de muestreo regular, es decir, se trata de

$$\begin{aligned} G_p^T &= \frac{B_p^T}{A_p^T} \cdot \frac{W_A^T}{W_A^T} = \frac{0.6738833z_2^{-1}}{(1-0.3261167z_2^{-1})} \cdot \frac{(1+0.3261167z_2^{-1})}{(1+0.3261167z_2^{-1})} = \\ &= \frac{0.6738833z_2^{-1} + 0.2197646z_2^{-2}}{1 - 0.1063521z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} \end{aligned}$$

En este caso, la referencia suministrada al sistema de control va a ser un escalón por lo que, como es sabido por (6-16), el convertidor de frecuencias es un retenedor:

$$H_N^T = \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{1 - z_2^{-2}}{1 - z_2^{-1}}$$

La respuesta del sistema discreto  $G_p^T$  cuando es controlado de forma bifrecuencial se compara con la que se obtendría cuando el regulador presente las siguientes estructuras alternativas:

- monofrecuencia a periodo lento (NT) y rápido (T),
- continua,
- calculada, se trata de la respuesta del P-I-D cuando la parte rápida viene expresada según:

$$G_{RR}^T = \frac{M_c^T}{G_p^T} = \frac{G_R^T}{1 + G_R^T G_p^T}$$

donde  $M_c^T$  es la función de transferencia discreta obtenida a partir del proceso discreto rápido y a partir de la función de transferencia del controlador también a periodo rápido.

Lo enunciado en el Teorema 1 se puede comprobar para este ejemplo en la figura 6-4, ya que en ella se observa que:

- la respuesta del caso bifrecuencia sigue fielmente los puntos del sistema continuo controlado.
- por su parte, la respuesta calculada no sigue tan fielmente la respuesta continua, ya que para este ejemplo se observa como ofrece un transitorio peor (con más oscilaciones) que en el caso anterior.
- por lo que se refiere al permanente, ambas respuestas (bifrecuencia y calculada) generan un tiempo de establecimiento al  $\pm 98\%$  similar ( $t_c(\pm 98\%) \approx 6.25$  seg).

Por su parte, en la figura 6-5 se muestran las salidas monofrecuenciales comparadas con la bifrecuencia regular. Como cabría esperar, la monofrecuencia lenta (a NT) es la que peor comportamiento genera tanto en el transitorio como en el permanente. Sin embargo, es interesante observar como la respuesta monofrecuencia rápida presenta peor transitorio (más oscilaciones) con respecto a la bifrecuencia, aunque finalmente logra estabilizarse un poco antes ( $t_c(\pm 98\%) \approx 5.5$  seg para monofrecuencia rápida y  $t_c(\pm 98\%) \approx 6.25$  seg para bifrecuencia regular).

En las figuras 6-6 y 6-7 se muestran y comparan las acciones de control que se inyectarán al proceso para cada caso considerado.

Por otro lado, se podría considerar un caso de muestreo irregular en el que  $\tau_1 = 0.3$  seg y  $\tau_2 = 0.2$  seg. Aplicando el modelado visto en el capítulo 3, se obtendría para el proceso:

$$G_p^T = \frac{\hat{B}_p^T}{A_p^T} \cdot \frac{W_B^T}{W_A^T} = 0.936058 \frac{0.6738833z_2^{-1}(1+0.4167z_2^{-1})}{(1-0.1063521z_2^{-2})} =$$

$$= 0.936058 \frac{(0.6738833z_2^{-1} + 0.280807z_2^{-2})}{(1-0.1063521z_2^{-2})} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}$$

y para la función de bucle cerrado:

$$M^T = \frac{\hat{B}_M^T}{A_M^T} \cdot \frac{W_{M_B}^T}{W_{M_A}^T} =$$

$$= 0.985 \cdot 0.4296 \frac{(1-0.7106z_2^{-1})(1-0.2396z_2^{-1})(1+0.8905z_2^{-1})(1+0.295z_2^{-1})(1+6.5 \cdot 10^{-15}z_2^{-1})}{1-0.8351z_2^{-2} + 0.06281z_2^{-4} + 6.874 \cdot 10^{-20}z_2^{-6}} =$$

$$= 0.985 \left( \frac{0.4296z_2^{-1} + 0.10101z_2^{-2} - 0.29798z_2^{-3} - 0.02048z_2^{-4} + 0.0192z_2^{-5} + 1.26 \cdot 10^{-16}z_2^{-6}}{1-0.8351z_2^{-2} + 0.06281z_2^{-4} + 6.874 \cdot 10^{-20}z_2^{-6}} \right) =$$

$$= \frac{\tilde{B}_M^T}{(A_M^{NT})^T}$$

Se vuelve a simular el regulador bifrecuencia pero ahora para este caso de muestreo irregular del proceso, esto es, asumiendo una estructura no convencional sobre el mismo (aunque, a la hora de simular, la actuación se hace de forma regular en el tiempo, ya que el modelo no convencional viene expresado a periodo T, debido a la aproximación que lleva a cabo el modelado, como ya se ha comentado en otras ocasiones). Los resultados se muestran en las figuras 6-8, 6-9 y 6-10. En ellas se puede comprobar que:

- la respuesta bifrecuencia del caso irregular sigue fielmente a la respuesta continua (ver figura 6-8). Además, en los instantes a metaperiodo NT coincide con la respuesta bifrecuencia del caso regular, como se observa en la figura 6-10 y de manera ampliada en la figura 6-11, donde queda patente que fruto del cambio de esquema de muestreo, ambas respuestas son diferentes a periodo rápido T (aunque en este caso tan sólo ligeramente).
- la respuesta monofrecuencia a NT deducida a partir del modelo a T irregular (ver figura 6-9) coincide con la obtenida a partir del modelo regular (ver figura 6-5), como era de esperar si el modelado en irregular se ha hecho correctamente.
- en este caso, la respuesta monofrecuencia a T basada en el modelo irregular del proceso (ver figura 6-9) es mejor que la del caso regular (figura 6-5), ya que obtiene un  $t_e(\pm 98\%) \approx 5.25$  seg (ligeramente menor que el regular, que supone un  $t_e(\pm 98\%) \approx 5.5$  seg) y menos oscilaciones en el transitorio. Esto influye en una mejor respuesta calculada para este caso irregular con respecto al regular, ya que se percibe un transitorio con menos oscilaciones, aunque el  $t_e(\pm 98\%)$  sea prácticamente idéntico (comparar figuras 6-4 y 6-8). Además, al igual que en el caso regular, en el irregular la respuesta a T obtiene un mejor tiempo de establecimiento al  $\pm 98\%$  que la respuesta bifrecuencia, aunque en el transitorio genera más oscilaciones (ver figura 6-9).

Por otro lado, en las figuras 6-12 y 6-13 se muestran y comparan las acciones de control que se inyectarán al proceso para cada caso considerado con muestreo irregular.

Es interesante reflexionar acerca del hecho de que esta última simulación del sistema de control se ha hecho considerando la fdt modelada para un patrón de muestreo irregular dentro del metaperiodo NT como una fdt aproximada a periodo T regular. Aunque en el capítulo de modelado ya se vio que esta aproximación suele representar fielmente a la situación real, en secciones posteriores de este capítulo 6 (por ejemplo, la sección 6.3.4 y sobre todo la 6.6) se va a reincidir en ello aplicando ciertas formas alternativas de simulación (que en dichas secciones serán comentadas en profundidad, pero que básicamente logran inyectar al proceso la acción de control en el instante irregular adecuado, dando así mayor realismo a la simulación).

También es importante notar que es frecuente la aparición de ceros de módulo mayor de la unidad en el modelo irregular del proceso, ya que los ceros de partida (caso regular) que se encuentran en  $W_A^T$  tienen la tendencia a ir hacia ubicaciones externas al círculo unitario cuando se cambia a patrones irregulares, de manera que el polinomio  $W_B^T$ , que acoge esta variación de los ceros, suele tener alguno de ellos de módulo mayor que la unidad (sobre todo, cuanto más se aleja del regular el patrón irregular escogido).

Por tanto, los reguladores tipo P-I-D pueden traer situaciones de inestabilidad en la señal de control cuando son tratados con patrones irregulares. Este problema, sin embargo, puede ser solucionado de dos maneras distintas:

- formando el subregulador rápido a partir de la expresión que hemos llamado calculada, ya que con ella se garantiza la cancelación total de la fdt que modela al proceso (se presentan el procedimiento de diseño y un ejemplo en la sección 6.3.3 y otro ejemplo en el capítulo 7 sección 7.2.1),
- mediante el uso de los reguladores de cancelación, ya que éstos (como se verá en el apartado 6.4) cancelan en su interior (en  $\tilde{M}(z_2^{-1})$  ó  $M^T$ ) dichos ceros del proceso de módulo mayor que la unidad (se verán ejemplos en las secciones 6.4.8 a 6.4.10 y en el capítulo 7 sección 7.2.2)

Así, con cualquiera de estas dos distintas maneras, el subregulador rápido podrá generar una señal de control estable que, para dar más realismo a la simulación (y como se verá en la sección 6.6) podrá ser inyectada de manera irregular al proceso discretizado a  $t_0$ .

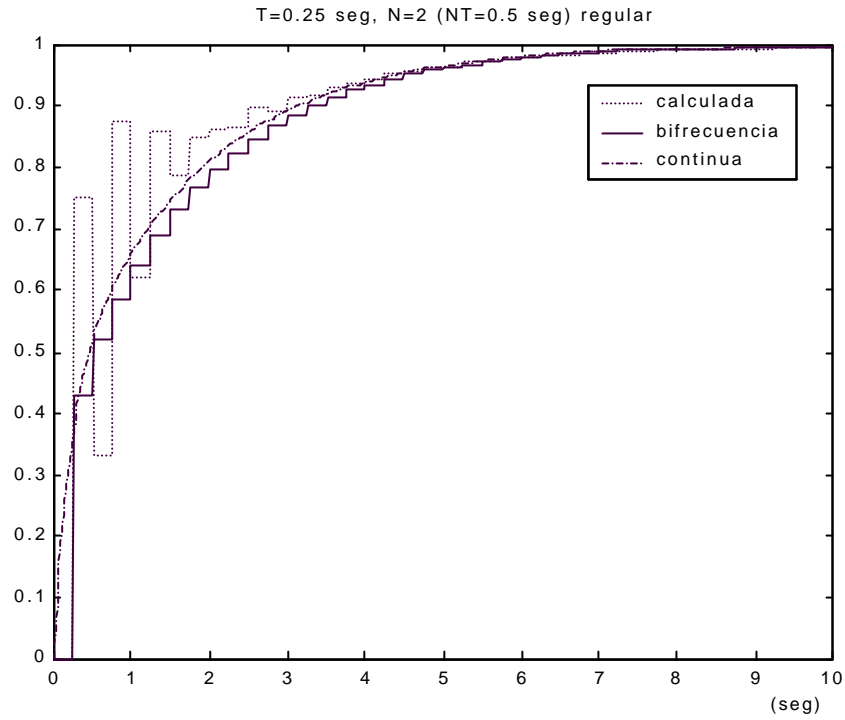


Figura 6-4: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular (comparativa 1) procedimiento 1º

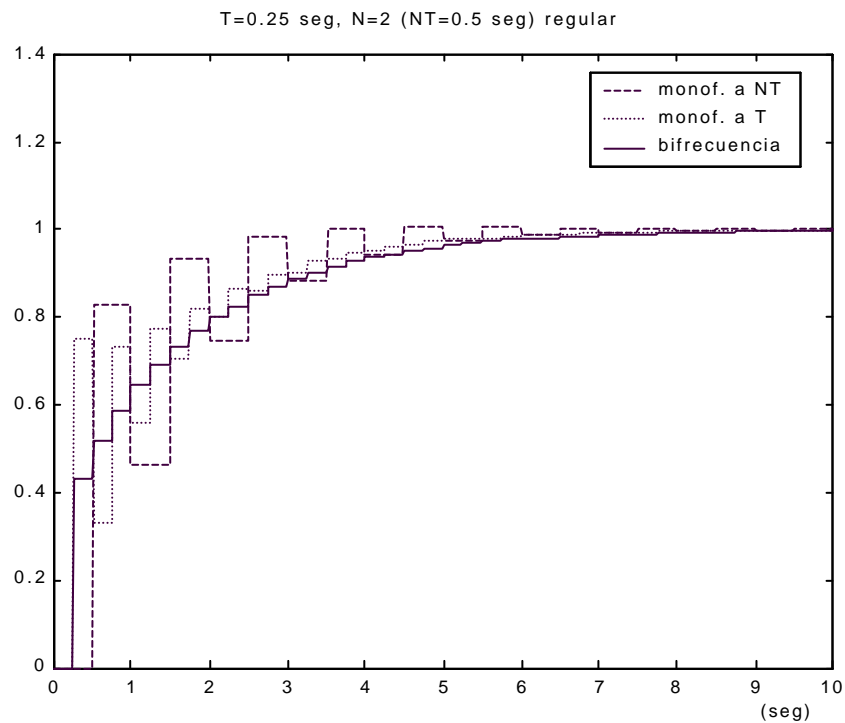


Figura 6-5: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular (comparativa 2) procedimiento 1º

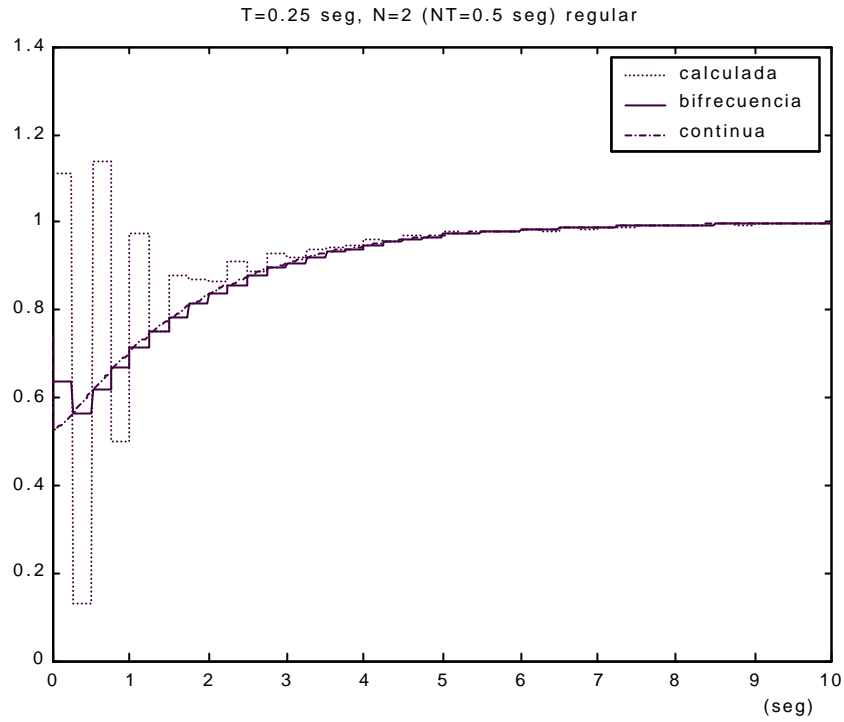


Figura 6-6: Acciones de control P-I-D bifrecuencia regular (comparativa 1) procedimiento 1º

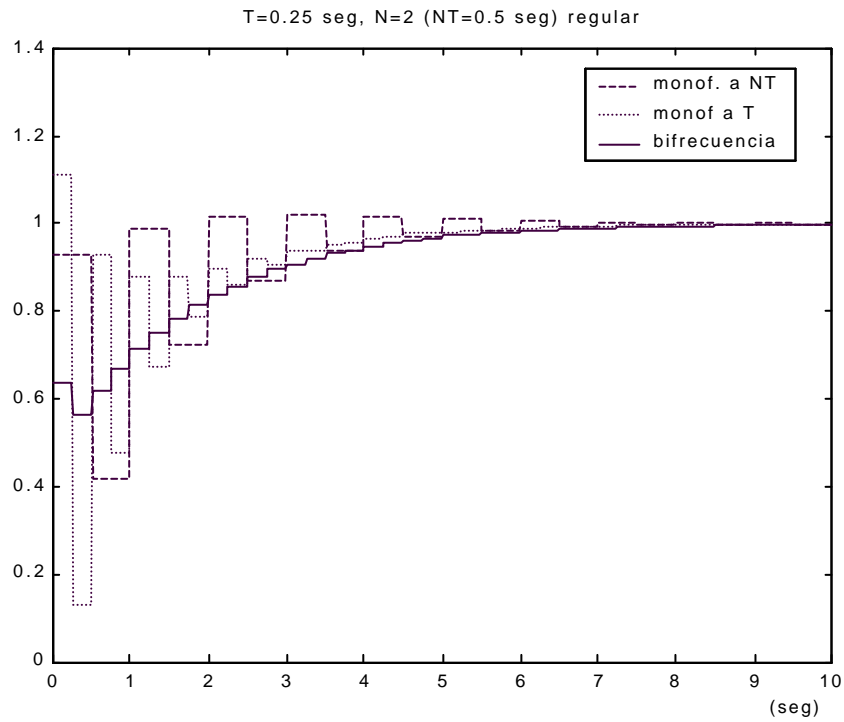


Figura 6-7: Acciones de control P-I-D bifrecuencia regular (comparativa 2) procedimiento 1º



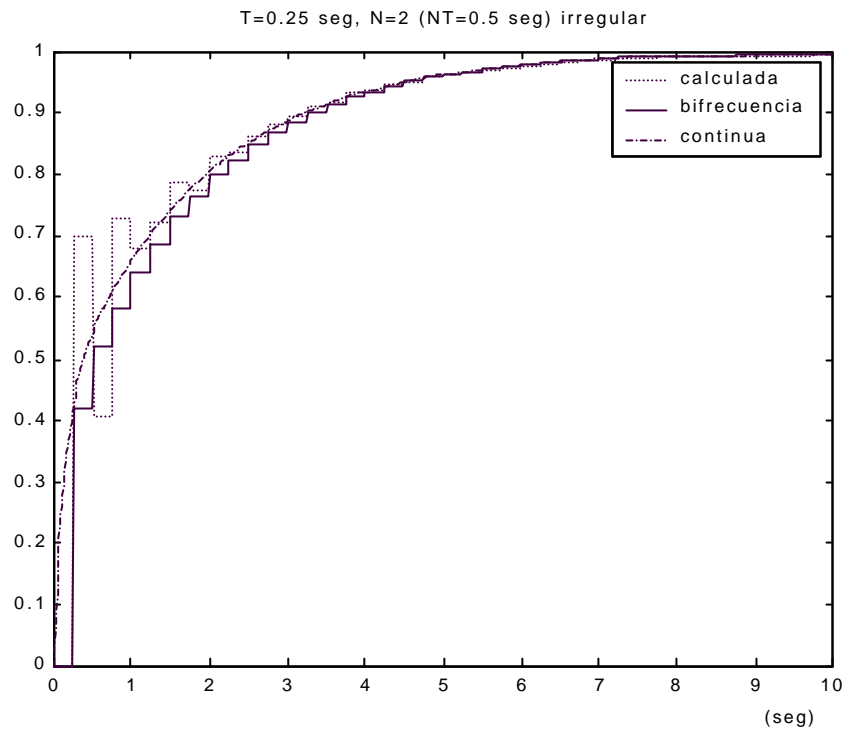


Figura 6-8: Respuesta P-I-D bifrecuencia irregular (comparativa 1) procedimiento 1°

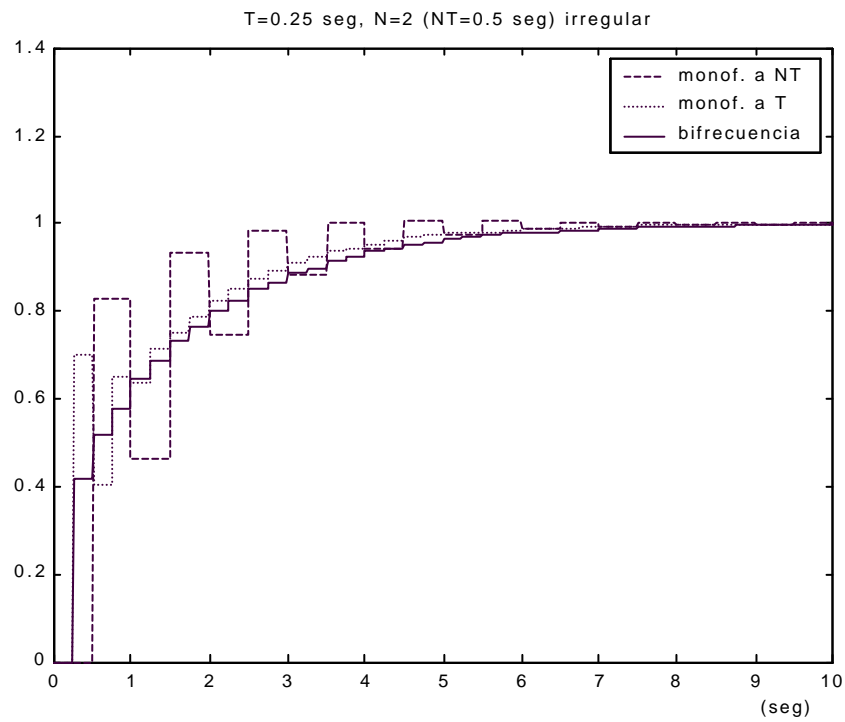


Figura 6-9: Respuesta P-I-D bifrecuencia irregular (comparativa 2) procedimiento 1°

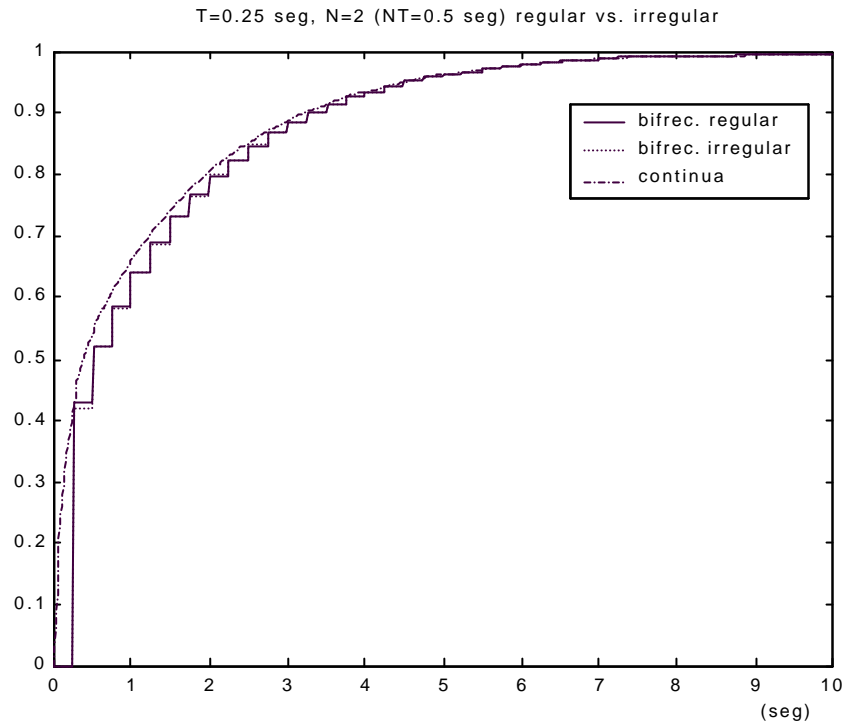


Figura 6-10: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular vs. irregular procedimiento 1º

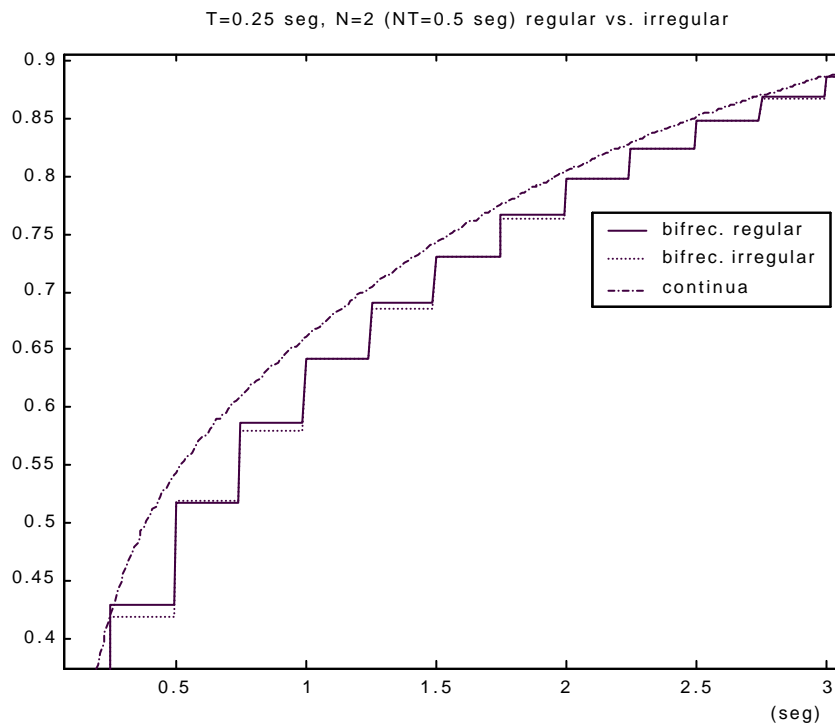


Figura 6-11: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular vs. irregular (zoom) procedimiento 1º

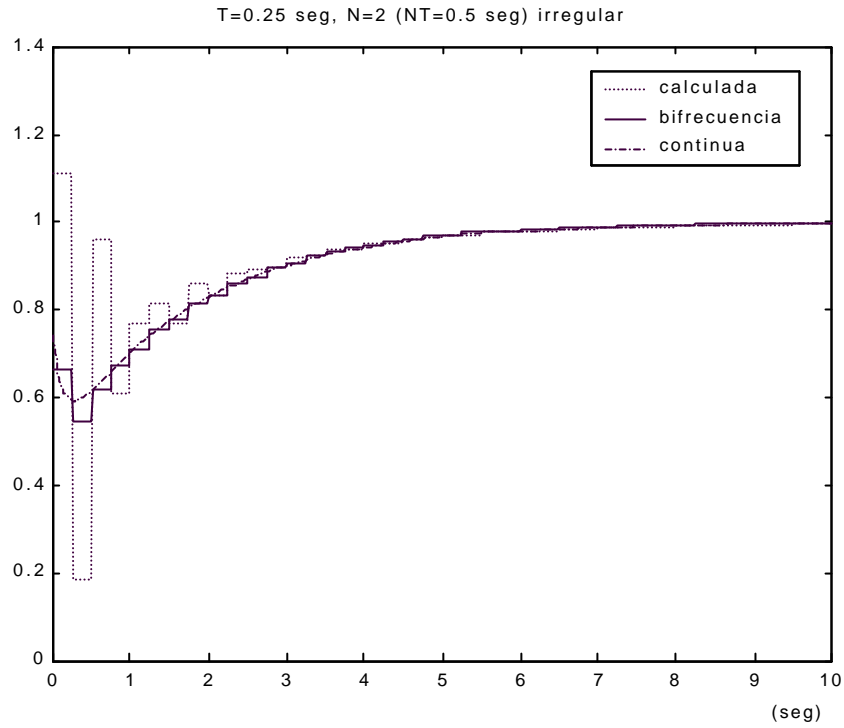


Figura 6-12: Acc de control P-I-D bifrecuencia irregular (comparativa 1) procedimiento 1°

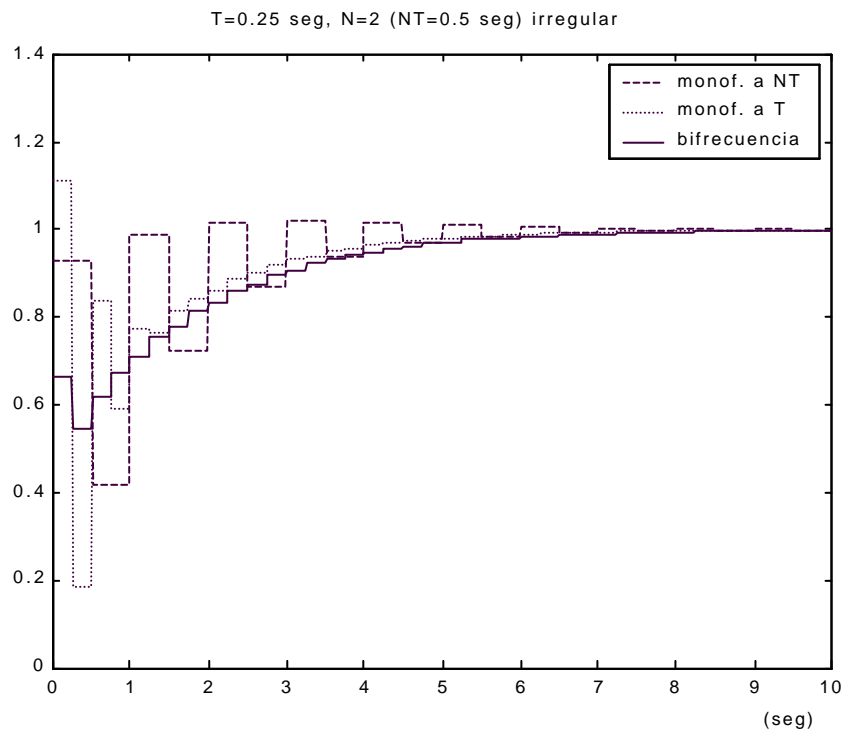


Figura 6-13: Acc. de control P-I-D bifrecuencia irregular (comparativa 2) procedimiento 1°

6.3.2. Procedimiento 2º de diseño. Ejemplo.

Se considera el siguiente proceso:

$$G(s) = \frac{1}{(s+10)}$$

Se va a tomar un metaperiodo  $NT=0.2$  seg con  $N=2$ . Se construyen sendos reguladores tipo P-I-D para el modelo discreto del proceso tanto cuando es sometido a un esquema de muestreo regular como cuando éste es no convencional PVT (patrón  $\tau_1=0.12$  y  $\tau_2=0.08$ ), obteniéndose en cada caso:

- caso regular:  $K_p = 12.987$ ,  $T_D = 0.025$ ,  $T_I = 0.1$
- caso no convencional PVT (irregular):  $K_p = 16.5978$ ,  $T_D = 0.025$ ,  $T_I = 0.1$

A partir de cada uno de los reguladores conseguidos se puede obtener una fdt continua de lazo cerrado para cada caso:

- caso regular:  $M_{reg}(s) = \frac{324.7s^2 + 12990s + 129900}{s^3 + 1335s^2 + 22990s + 129900}$
- caso irregular:  $M_{irreg}(s) = \frac{414.9s^2 + 16600s + 166000}{s^3 + 1425s^2 + 26600s + 166000}$

Como se comentó con anterioridad, este segundo procedimiento de diseño propone obtener las partes lenta y rápida de cada controlador de forma similar a como lo hacía el primero, pero ahora, deduciendo éstas a partir de la fdt continua de cada caso. En definitiva, lo que se plantea es:

- controlador regular:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{reg}^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{M_{reg}^T}{\frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}}$$

- controlador irregular:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{irreg}^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{M_{irreg}^T}{\frac{\tilde{\tilde{B}}_p^T}{(A_p^{NT})^T}}$$

donde, para el ejemplo bajo estudio:

- modelo regular (a T, patrón  $\tau_1=0.1$  y  $\tau_2=0.1$ ) del proceso:

$$G_p^T = \frac{B_p^T}{A_p^T} \cdot \frac{W_A^T}{W_A^T} = \frac{0.0632z_2^{-1}(1+0.3679z_2^{-1})}{1-0.1353z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}$$

- modelo regular (a T, patrón  $\tau_1=0.1$  y  $\tau_2=0.1$ ) de la fdt de bucle cerrado  $M_{reg}(s)$  :

$$\begin{aligned} M_{reg}^T &= \frac{B_M^T}{A_M^T} \cdot \frac{W_{M_A}^T}{W_{M_A}^T} = \\ &= \frac{0.6782z_2^{-1}[(1-0.2128z_2^{-1})^2 + 0.1324^2 z_2^{-2}]}{[(1-0.3719z_2^{-1})^2 + 0.1941^2 z_2^{-2}](1-4.82 \cdot 10^{-19} z_2^{-1})} \cdot \\ &\cdot \frac{[(1+0.3719z_2^{-1})^2 + 0.1941^2 z_2^{-2}](1+4.82 \cdot 10^{-19} z_2^{-1})}{[(1+0.3719z_2^{-1})^2 + 0.1941^2 z_2^{-2}](1+4.82 \cdot 10^{-19} z_2^{-1})} = \\ &= \frac{0.6782z_2^{-1} + 0.2158z_2^{-2} - 0.0527z_2^{-3} - 0.0191z_2^{-4} + 0.0075z_2^{-5} + 2.15 \cdot 10^{-22} z_2^{-6}}{1 - 0.2014z_2^{-2} + 0.03096z_2^{-4} + 1.908 \cdot 10^{-20} z_2^{-6}} = \\ &= \frac{\tilde{B}_M^T}{(A_M^{NT})^T} \end{aligned}$$

- modelo a NT de la fdt de bucle cerrado  $M_{reg}(s)$  :

$$M_{reg}^{NT} = \frac{B_M^{NT}}{A_M^{NT}} = \frac{0.894 z_2^{-2} - 0.07191 z_2^{-4} + 0.007499 z_2^{-6}}{1 - 0.2014 z_2^{-2} + 0.03096 z_2^{-4} + 1.908 \cdot 10^{-20} z_2^{-6}}$$

- modelo no convencional (a T, patrón  $\tau_1=0.12$  y  $\tau_2=0.08$ ) del proceso:

$$G_p^T = \frac{\hat{B}_p^T}{A_p^T} \cdot \frac{W_B^T}{W_A^T} = \frac{0.0588z_2^{-1}(1+0.4684z_2^{-1})}{1-0.1353z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}$$

- modelo no convencional (a T, patrón  $\tau_1=0.12$  y  $\tau_2=0.08$ ) de la fdt de bucle cerrado  $M_{irreg}(s)$  :

$$\begin{aligned} M_{irreg}^T &= \frac{\hat{B}_M^T}{A_M^T} \cdot \frac{W_{M_B}^T}{W_{M_A}^T} = \\ &= \frac{0.7479z_2^{-1}[(1-0.2066z_2^{-1})^2 + 0.1295^2 z_2^{-2}]}{[(1-0.3341z_2^{-1})^2 + 0.2012^2 z_2^{-2}](1+1.066 \cdot 10^{-6} z_2^{-1})} \cdot \\ &\cdot \frac{[(1+0.3423z_2^{-1})^2 + 0.2061^2 z_2^{-2}](1+5.867 \cdot 10^{-7} z_2^{-1})}{[(1+0.3341z_2^{-1})^2 + 0.2012^2 z_2^{-2}](1-1.066 \cdot 10^{-6} z_2^{-1})} = \end{aligned}$$

$$= \frac{0.9882 \cdot (0.7479z_2^{-1} + 0.20298z_2^{-2} - 0.0477z_2^{-3} - 0.0189z_2^{-4} + 0.0071z_2^{-5} - 7.56 \cdot 10^{91}z_2^{-6})}{1 - 0.1423z_2^{-2} + 0.023134z_2^{-4} - 2.6305 \cdot 10^{-14}z_2^{-6}} = \frac{\tilde{B}_M^T}{(A_M^{NT})^T}$$

- modelo a NT de la fdt de bucle cerrado  $M_{irreg}(s)$ :

$$M_{irreg}^{NT} = \frac{B_M^{NT}}{A_M^{NT}} = \frac{0.9394z_2^{-2} - 0.06529z_2^{-4} + 0.006724z_2^{-6}}{1 - 0.1423z_2^{-2} + 0.023134z_2^{-4} - 2.6305 \cdot 10^{-14}z_2^{-6}}$$

Presentadas las expresiones anteriores, por un lado se simula el sistema de control resultado de aplicar el controlador regular al modelo regular del proceso y, por otro lado, el sistema de control resultado de aplicar el controlador con estructura no convencional al modelo no convencional (definido a periodo T). Las respuestas que experimenta el sistema para cada uno de ellos se muestran en la figura 6-14, mientras que en la figura 6-15 quedan plasmadas las acciones de control aplicadas en cada situación. Como se ve en esta última, el hecho de aplicar unas acciones más enérgicas para el caso de muestreo no convencional PVT hace que la respuesta del sistema (ver figura 6-14) obtenga un mejor tiempo de establecimiento (aproximadamente de 0.3 seg) que para el caso contrario (aproximadamente de 0.4 seg).

Este mejor comportamiento del caso no convencional PVT puede ser explicado viendo la figura 6-16. En ella se muestran las respuestas que generan las fdt de lazo cerrado continuas para cada caso contemplado, observándose una convergencia al valor final ligeramente más rápida en la situación de muestreo no convencional PVT. Como ya se vio en la sección previa y se enunció en el Teorema 1, la tendencia de la salida del sistema de control discreto cuando utiliza un controlador bifrecuencia (tanto regular como irregular) es seguir la evolución de la salida del sistema de control continuo. De ahí que, como en este caso la  $M_{irreg}(s)$  supone un mejor comportamiento que la  $M_{reg}(s)$ , esto va a traer a su vez una mejor respuesta del sistema de control para el controlador con estructura no convencional PVT que para el controlador bifrecuencia regular.

Por último, comentar que en la sección 6.6.2.1.2. este segundo procedimiento de diseño de los controladores tipo P-I-D será simulado mediante una perspectiva mucho más realista (que será comentada en la sección 6.6.1). Se comprobará cómo se degradan las prestaciones del sistema cuando las acciones generadas por el controlador bifrecuencia regular son aplicadas al proceso siguiendo un patrón PVT, justificándose así el esfuerzo de diseño que supone la realización del controlador con estructura no convencional.

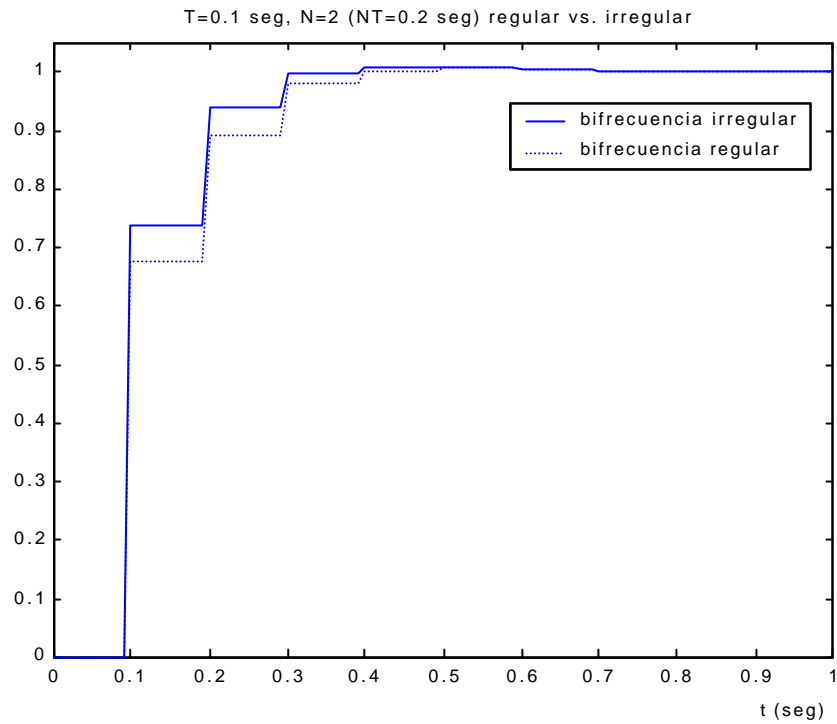


Figura 6-14: Respuestas P-I-D bifrecuencia regular versus irregular procedimiento 2º

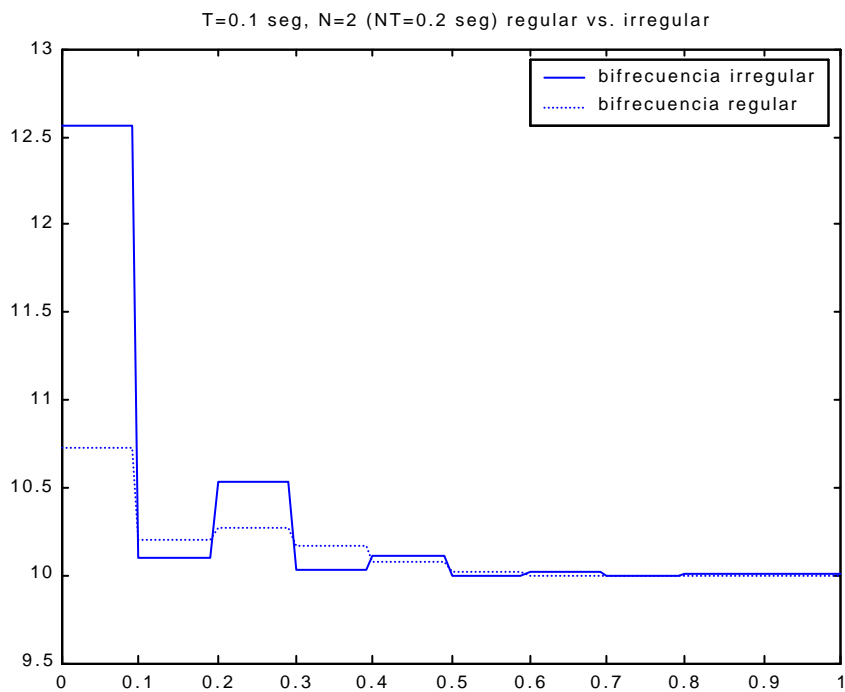


Figura 6-15: Acciones de control P-I-D bifrecuencia regular versus irregular procedimiento 2º

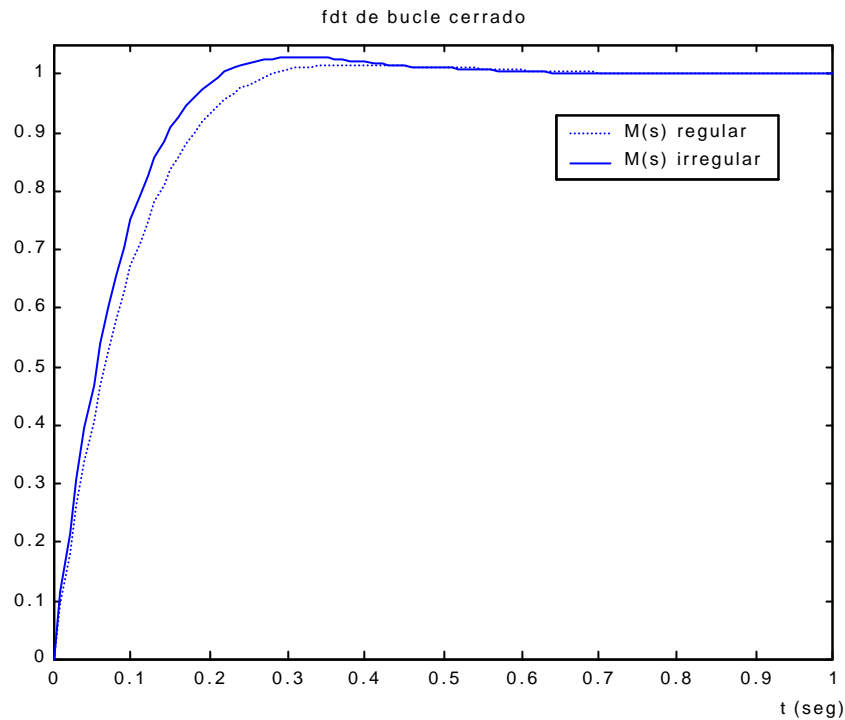


Figura 6-16: Respuestas de lazo cerrado regular versus irregular continuas procedimiento 2º

### 6.3.3. Procedimiento 3º de diseño. Ejemplo.

Como ya se comentó en la sección 6.3.1, existe la posibilidad de diseñar la parte rápida del controlador bifrecuencia mediante lo que se ha llamado  $fdt$  de lazo cerrado calculada (expresión (6-17)). En el ejemplo de dicha sección se mostraba que, en este caso, la salida del sistema ya no tiende a seguir la respuesta del sistema de control continuo, aunque, sin embargo, podría eliminar el efecto de rizado que pudiera aparecer a la salida del proceso (por Teorema 1).

En este procedimiento de diseño se va a utilizar esta alternativa (basada en el uso de la  $fdt$  calculada) pero con el fin de cancelar dentro de la parte rápida del controlador aquellos ceros de módulo mayor que la unidad existentes en el modelo no convencional del proceso, los cuales pudieran surgir al aplicar las técnicas de modelado del capítulo 3. En definitiva, lo que se propone es hacer posible la generación de una señal de control estable a inyectar al proceso, hecho que no ocurriría si el modelo contuviera algún cero de módulo mayor que la unidad, ya que en la parte rápida del controlador esos ceros se convierten en polos.

Para hacer el estudio lo más completo posible, se van a considerar dos situaciones: la primera, heredada del procedimiento 1º de diseño, se basará en partir de un único regulador tipo P-I-D para obtener las partes lenta y rápida tanto del controlador del caso regular como del irregular; la segunda, heredada del procedimiento 2º de diseño, partirá de un regulador tipo P-I-D para cada caso, de forma que cada uno de ellos sea utilizado para obtener las partes lenta y rápida de cada controlador.

El proceso bajo estudio será el modelo de un motor de corriente continua (el utilizado en el capítulo 7 para la implementación práctica) que se presenta a continuación:



$$G_p(s) = \frac{2.0024}{0.183s + 1}$$

El periodo rápido será  $T=0.02$  seg, siendo  $N=2$  ( $NT=0.04$  seg). El patrón no convencional de muestreo considerado será  $[0, 0.035]$ . A partir de estos datos, los modelos obtenidos para el proceso serán:

- modelo muestreo regular (patrón  $[0, 0.02]$ ):

$$G_p^T = \frac{B_p^T}{A_p^T} \cdot \frac{W_A^T}{W_A^T} = \frac{0.2073z_2^{-1}(1+0.89647z_2^{-1})}{1-0.8037z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}$$

- modelo muestreo irregular (patrón  $[0, 0.035]$ ):

$$G_p^T = \frac{\hat{B}_p^T}{A_p^T} \cdot \frac{W_B^T}{W_A^T} = \frac{0.5 \cdot 0.2073z_2^{-1}(1+2.7096z_2^{-1})}{1-0.8037z_2^{-2}} = \frac{\tilde{\tilde{B}}_p^T}{(A_p^{NT})^T}$$

Se observa como el modelo regular del proceso carece de ceros de módulo mayor que la unidad, por lo que se le puede aplicar las pautas de diseño habituales. Sin embargo, en el modelo irregular surge un cero de módulo mayor que la unidad, el cual deberá ser cancelado para que no genere una señal de control inestable; en aras a lograr esto, en este procedimiento de diseño se sugiere la utilización de la fdt calculada para hallar la parte rápida del controlador bifrecuencia con estructura no convencional PVT (irregular).

Para la primera situación a contemplar, se tendrá un único regulador tipo P-I-D de partida,  $G_R(s)$ , por medio del cual se podrá deducir la fdt continua de lazo cerrado,  $M(s)$ . Con todo ello y con los dos modelos discretos del proceso (regular e irregular) se podrán obtener las partes lenta y rápida de cada controlador. En este caso, el regulador tipo P-I-D de partida viene definido por los siguientes parámetros:  $K_p = 5.4876$ ,  $T_D = 0$ ,  $T_I = 0.033$ . En definitiva, se tendrá:

- controlador regular:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1-M^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{M^T}{\frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}}$$

- controlador irregular:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1-M^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{G_R^T}{1 + \frac{\tilde{\tilde{B}}_p^T}{(A_p^{NT})^T} G_R^T}$$

Como se sabe por el procedimiento 1° de diseño, ambas partes lentas son idénticas. Las diferencias vienen en las partes rápidas, dada la utilización de la fdt calculada en el caso irregular.

Por tanto, se tendrá:

- parte lenta:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M^{NT}} = \frac{1 - 0.2545z_2^{-2} + 0.07277z_2^{-4}}{1 - 1.368z_2^{-2} + 0.3678z_2^{-4}}$$

- parte rápida controlador regular:

$$G_{RR}^T = \frac{M^T}{\frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}} = \frac{0.8244 - 1.185z_2^{-1} + 0.3995z_2^{-2}}{0.2073 - 0.1847z_2^{-1} + 0.05592z_2^{-2}}$$

- parte rápida controlador irregular:

$$G_{RR}^T = \frac{G_R^T}{1 + \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} G_R^T} = \frac{5.488 - 2.195z_2^{-1} - 4.41z_2^{-2} + 1.764z_2^{-3}}{1 - 0.4198z_2^{-1} + 0.5363z_2^{-2} + 0.1749z_2^{-3}}$$

Calculadas las diferentes partes de cada controlador tipo P-I-D, se simulan éstos obteniendo las respuestas de la figura 6-17. En dicha figura se percibe claramente que la respuesta bifrecuencia regular sigue fielmente a la respuesta continua (por Teorema 1). Por su parte, en este caso la respuesta bifrecuencia irregular, concebida a partir de la fdt calculada, resulta ser una señal inestable, lo cual es debido, a su vez, porque la señal de control que se inyecta al proceso también lo es (ver figura 6-18). Este resultado parece aparentemente sorprendente, ya que, justamente se había optado por este procedimiento de diseño (empleo de la fdt calculada en la parte rápida del controlador) para evitar la generación de una señal de control inestable. Además, en dicha parte rápida se puede comprobar la inexistencia de polos de módulo mayor a la unidad, por lo que parece que la inestabilidad debe venir porque el sistema de control con estructura no convencional en lazo cerrado es de partida inestable. El por qué de esta inestabilidad quizás se deba encontrar en que el regulador de partida ha sido obtenido pensando en el modelo regular del proceso, por lo que, al aplicarse para deducir las partes lenta y rápida del controlador con estructura no convencional, genera un controlador que no está bien ajustado para actuar sobre el modelo irregular del proceso. Por tanto, se propone llevar a cabo la situación planteada en segundo término: partir de un regulador tipo P-I-D para cada modelo del proceso (heredado del procedimiento 2° de diseño).

Para esta segunda situación contemplada se tendrán dos regulador tipo P-I-D:

- $G_{R\_reg}(s)$  (para el modelo regular del proceso):  $K_p = 5.4876$ ,  $T_D = 0$ ,  $T_I = 0.033$  (el mismo que antes).

- $G_{R\_irreg}(s)$  (para el modelo irregular del proceso):  $K_p = 3.177$ ,  $T_D = 0$ ,  $T_I = 0.066$

Estos dos reguladores de partida para cada modelo del proceso,  $G_{R\_reg}(s)$  y  $G_{R\_irreg}(s)$ , van a hacer posible disponer de dos fdt de lazo cerrado distintas para cada caso,  $M_{reg}(s)$  y  $M_{irreg}(s)$ , respectivamente. Con todo ello y con los modelos discretos del proceso, se va a poder obtener las partes lenta y rápida de cada controlador. En definitiva, se tendrá:

- controlador regular:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{reg}^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{M_{reg}^T}{\frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}}$$

- controlador irregular:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{irreg}^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{G_{R\_irreg}^T}{1 + \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} G_{R\_irreg}^T}$$

Como se sabe por el procedimiento 2º de diseño, ahora ambas partes lentas serán distintas entre sí. La parte rápida del regular queda como en la situación primera, pero la del irregular varía, ya que ahora las fdt relativas al regulador que se contemplan en ella proceden del regulador  $G_{R\_irreg}(s)$ .

Por tanto, se tendrá:

- partes lentas:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{reg}^{NT}} = \frac{1 - 0.2545z_2^{-2} + 0.07277z_2^{-4}}{1 - 1.368z_2^{-2} + 0.3678z_2^{-4}}$$

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{irreg}^{NT}} = \frac{1 - 0.8122z_2^{-2} + 0.2001z_2^{-4}}{1 - 1.66z_2^{-2} + 0.6601z_2^{-4}}$$

- parte rápida controlador regular (la misma de antes):

$$G_{RR}^T = \frac{M_{reg}^T}{\frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}} = \frac{0.8244 - 1.185z_2^{-1} + 0.3995z_2^{-2}}{0.2073 - 0.1847z_2^{-1} + 0.05592z_2^{-2}}$$

- parte rápida controlador irregular:

$$G_{RR}^T = \frac{G_{R\_irreg}^T}{1 + \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} G_{R\_irreg}^T} = \frac{3.177 - 2.224z_2^{-1} - 2.553z_2^{-2} + 1.787z_2^{-3}}{1 - 0.664z_2^{-1} - 0.1287z_2^{-2} + 0.1666z_2^{-3}}$$

En la figura 6-19 se muestran las distintas respuestas consecuencia de simular los sistemas de control diseñados. Se ve como la salida para el sistema de control provisto del controlador bifrecuencia regular es idéntica a la obtenida en la figura 6-16 (como cabía esperar), valiendo los mismos comentarios efectuados para ella. Sin embargo, la respuesta que tiene el sistema cuando se utiliza el controlador bifrecuencia irregular, a diferencia de la situación probada en primer lugar, resulta ser estable, aunque no sigue fielmente a la respuesta continua concebida para el caso irregular (como ya se suponía por el Teorema 1), la cual en este caso tiene menos sobreoscilación, aunque más tiempo de establecimiento que la continua extraída para el caso regular.

El hecho de que sea estable la salida para el sistema de control con estructura no convencional diseñado en este segundo planteamiento es de gran importancia, ya que permite pensar que partir de un regulador tipo P-I-D diseñado para el modelo discreto no convencional PVT del proceso (es decir, un regulador que tenga en cuenta el cero de módulo mayor a la unidad que existe en dicho modelo) va a ir en beneficio de la respuesta del sistema, ya que la señal de control que se genera es estable (ver figura 6-20), y, a su vez, la salida de dicho sistema.

En la sección 6.6.2.1.3 se comprobará además que la salida del caso no convencional PVT (irregular) tiene mejores prestaciones que la salida del caso bifrecuencia regular cuando es aplicado de forma no convencional PVT según el patrón de muestreo elegido ([0, 0.035]), lo cual justifica el esfuerzo de diseño que supone la alternativa no convencional PVT presentada.

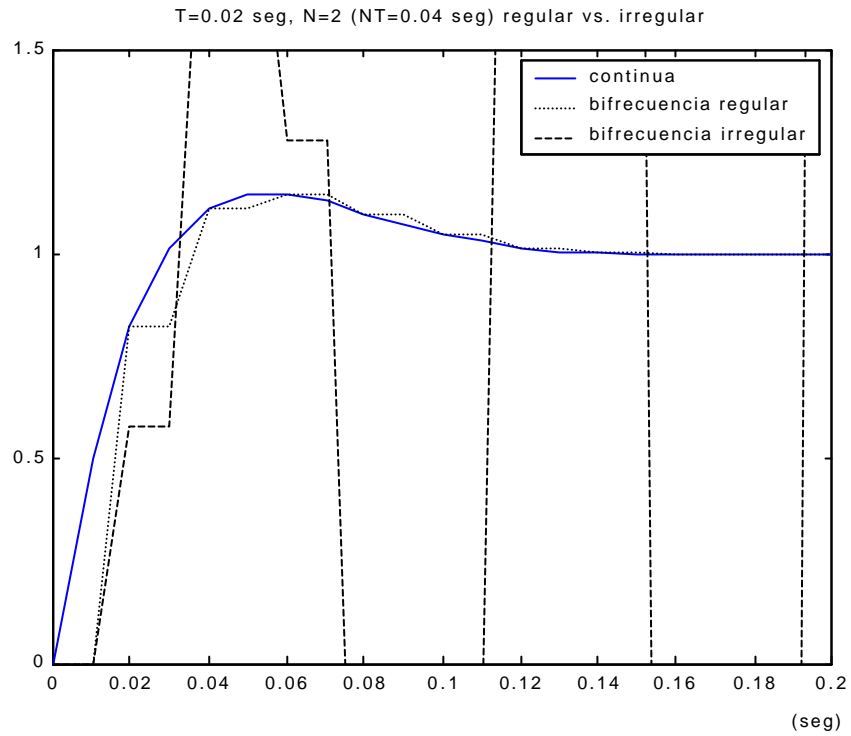


Figura 6-17: Respuestas P-I-D bifrecuencia regular versus irregular procedimiento 3º situación 1ª

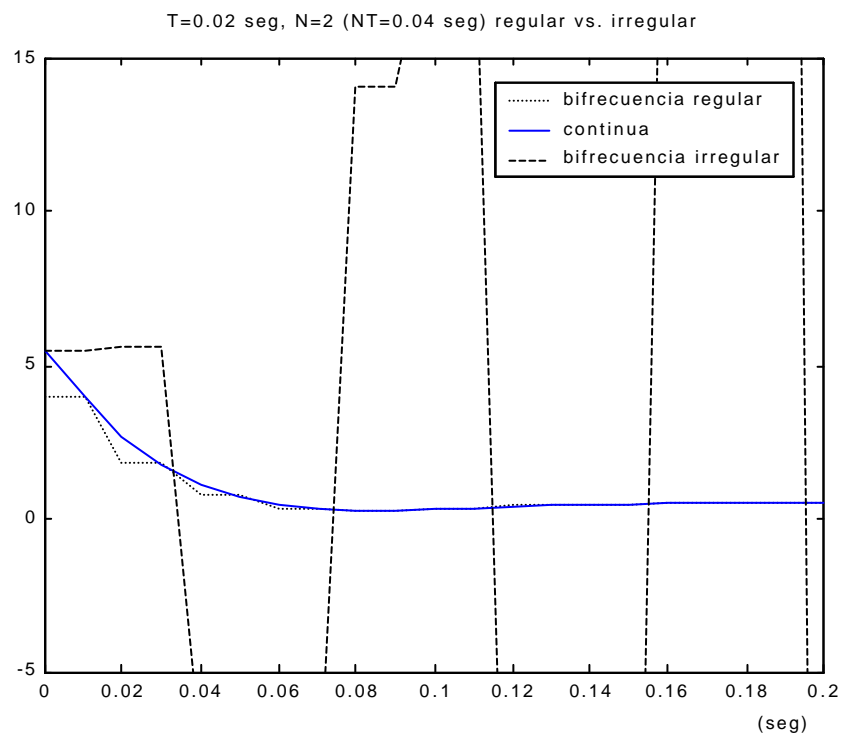


Figura 6-18: Acc. de control P-I-D bifrecuencia regular versus irregular procedimiento 3º situación 1ª

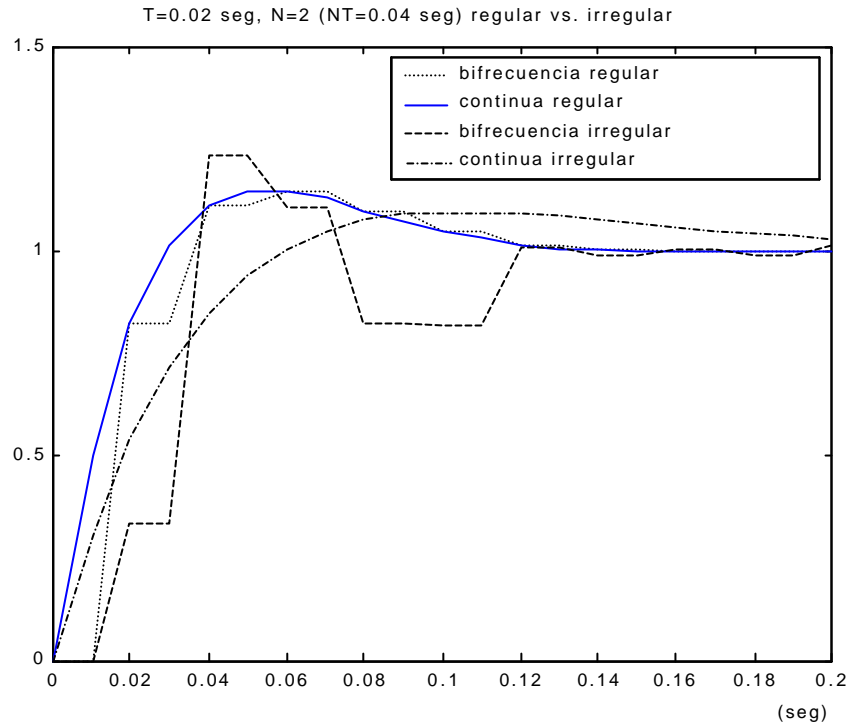


Figura 6-19: Respuesta P-I-D bifrecuencia regular vs. irregular procedimiento 3° situación 2ª

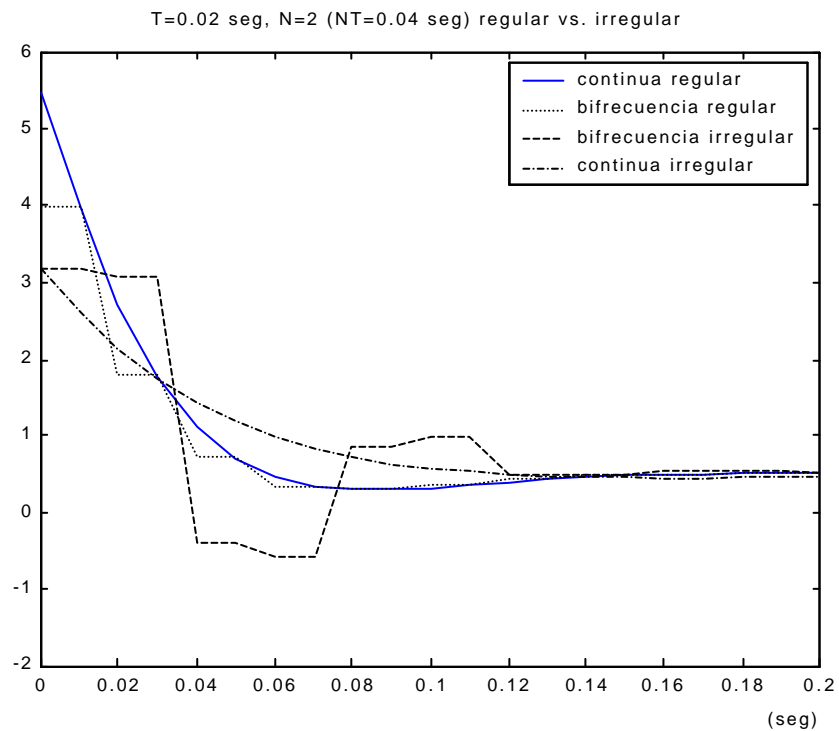


Figura 6-20: Acc. de control P-I-D bifrecuencia regular vs. irregular procedimiento 3° situación 2ª

#### 6.3.4. Comparación de diseños P-I-D bifrecuencia con muestreo no convencional.

##### 6.3.4.1. Objetivo y presentación del escenario.

El estudio que se va a realizar en este apartado va a considerar el sistema de control configurado como se muestra en la figura 6-1. En ella recordemos que aparece el proceso bajo estudio,  $G_p(s)$ , el cual va a recibir la actuación (a instantes regulares o irregulares de tiempo dentro de un metaperiodo global) del regulador discreto,  $\overline{G}_{R,N}^T$ . En esta ocasión se va a centrar el estudio al caso de actuación irregular sobre el proceso, de manera que el regulador se va a obtener por dos métodos de diseño no convencional diferentes. Así, y a la postre, se podrá comparar los beneficios de cada método sobre el sistema.

Ambos métodos a contemplar parten de la consideración de un regulador P-I-D continuo obtenido por técnicas clásicas de control, de manera que uno de ellos obtendrá la respuesta del sistema cuando dicho regulador es discretizado a intervalos de tiempo irregulares (Albertos y Salt, 1990), mientras que el otro la obtiene tras aplicar el método de diseño PID bifrecuencia con muestreo no convencional presentado en 6.3.1, el cual, como es sabido, se basa en la descomposición del regulador en una parte que funciona a frecuencia lenta y otra que lo hace a frecuencia rápida.

En aras de dotar del máximo realismo a la simulación del sistema de control bajo estudio, a la hora de llevarla a cabo se va a considerar al proceso discretizado a un periodo base,  $t_0$ , común entre los diferentes periodos involucrados en el sistema. De esta manera se le podrá inyectar las acciones de control (generadas por el regulador concebido en cada alternativa) en los instantes irregulares de tiempo marcados por el esquema de muestreo considerado. Así, si se considera  $N=2$  y el esquema de muestreo para cada metaperiodo  $NT$  como  $[0, t_1]$ , siendo  $t_1 \neq T$ , se tendría la situación de la figura 6-55 ó 6-56. Esta alternativa de simulación es explicada en mayor detalle en 6.6. Además en el Anexo IV.1 aparece una macro Matlab de ejemplo en la que se implementa dicha técnica de simulación.

A continuación se pasa a detallar la experiencia desarrollada, en la que primero se discretiza el regulador PID continuo a intervalos irregulares de tiempo y, después, se obtiene el regulador PID bifrecuencia por descomposición en frecuencia de partes lenta y rápida basado en el modelado con muestreo no convencional en RE del capítulo 3. Tras todo ello, se hace una comparativa y se analizan los resultados logrados.

##### 6.3.4.2. Desarrollo de la experiencia.

###### 6.3.4.2.1. Diseño P-I-D por discretización a intervalos irregulares de tiempo.

Se parte del proceso continuo:

$$G_p(s) = \frac{4.482}{s + 4.482}$$

Como se comentó con anterioridad, por técnicas de diseño clásico se consigue para él un regulador PID continuo de la forma:

$$u(t) = K_p \left[ e(t) + T_D e(t) + \frac{1}{T_I} \int_0^t e(\mathbf{t}) d\mathbf{t} \right]$$

con  $K_p=0.7422$ ,  $T_D=0.125$ ,  $T_I=0.8333$ .

Se crean una serie de programas en Matlab-Simulink que implementan la técnica de discretización introducida en (Albertos y Salt, 1990), la cual se basa en la consideración de intervalos irregulares de tiempo a la hora de determinar los coeficientes discretos de los reguladores. Dicha discretización obedece a la siguiente formulación (para  $N=2$  y  $NT=0.5$  seg):

$$G_R(z) = \frac{q_0 z^2 + q_1 z + q_2}{z(z-1)}$$

$$q_0 = K_p + \frac{K_d}{t_{k+i} - t_{k+i-1}}$$

$$q_1 = -K_p - \frac{K_d}{t_{k+i} - t_{k+i-1}} - \frac{K_d}{t_{k+i-1} - t_{k+i-2}} + K_i (t_{k+i} - t_{k+i-1})$$

$$q_2 = \frac{K_d}{t_{k+i-1} - t_{k+i-2}}$$

de tal manera que  $\overline{G}_{R,N}^T$  de la figura 6-1 se va a convertir en dos reguladores diferentes, tales que considerando el esquema de muestreo  $[0, t_1]$ , en este caso  $t_1=0.3$  seg, uno se aplicará en los instantes de inicio del metaperiodo (en 0,  $NT$ ,  $2NT$ , etc) y el otro en los instantes intermedios ( $t_1$ ,  $t_1+NT$ ,  $t_1+2NT$ , etc). El primero de ellos encontrará la siguiente relación de subperiodos:

$$t_{k+i} - t_{k+i-1} = NT - t_1$$

$$t_{k+i-1} - t_{k+i-2} = t_1 - 0$$

y se le llamará “regulador largo-corto”,  $G_{lc}$ , puesto que como  $t_1=0.3$  seg, encuentra el subperiodo largo primero y luego el corto. En el segundo de los reguladores,  $G_{cl}$ , la ubicación de los intervalos es la contraria. Las expresiones obtenidas para ellos son:

$$G_{lc}(z) = \frac{1.2061z^2 - 1.3372z + 0.3093}{z(z-1)}$$

$$G_{cl}(z) = \frac{1.0515z^2 - 1.2481z + 0.4639}{z(z-1)}$$

Cabe recordar que la simulación se hace considerando el proceso discretizado a  $t_0$  (periodo base, igual en este caso a 0.01 seg) introduciendo en el instante 0 (de cada metaperiodo  $NT$ ) y en el irregular oportuno (en este caso el 0.3 de cada metaperiodo) la acción de control sobre dicho proceso, según se señala en la figura 6-56. Procediendo de esta manera se obtienen los resultados mostrados en las figuras 6-21 y 6-22 (ante escalón unitario de entrada). Es interesante observar en la figura 6-21 como en este caso, aunque la salida del



sistema de control discreto sigue la tendencia de la salida continua, lo hace con bastantes oscilaciones en el transitorio, lo cual se puede explicar viendo la figura 6-22, en la que aparece la señal de control del sistema caracterizada por tener una respuesta oscilante (oscilaciones que son transmitidas a la salida). Este problema, como luego se constatará en la figura 6-23, se puede solucionar mediante el diseño por descomposición en frecuencia.

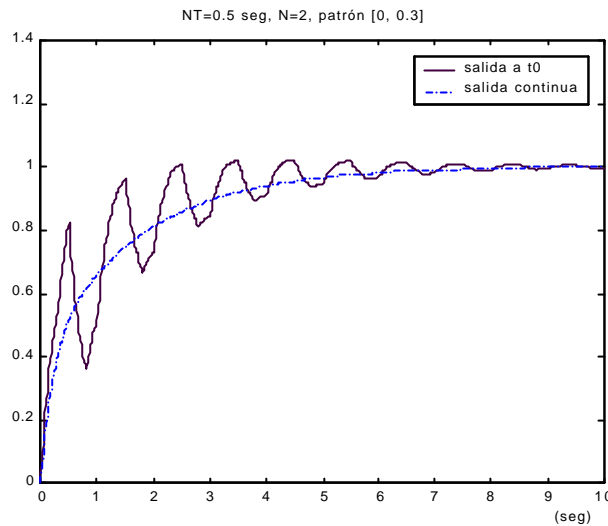


Figura 6-21: Salida discretización a tramos irregulares.

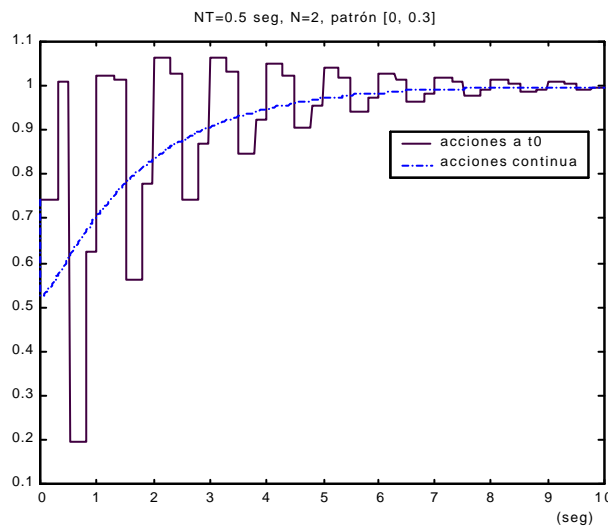


Figura 6- 22: Acciones de control discretización a tramos irregulares.

#### 6.3.4.2.2. Diseño P-I-D por descomposición del regulador en frecuencia basado en el modelado con muestreo no convencional en representación externa.

Para llevar a cabo este diseño primero se ha de modelar en RE de manera irregular tanto el proceso,  $G_p(s)$ , como la fdt de lazo cerrado,  $M(s)$ , siguiendo la metodología planteada en el capítulo 3. Como ambos son los mismos de la sección 6.3.1, sus modelados en irregular

ya aparecen desarrollados en dicha sección. Por tanto, se puede pasar ya a implementar un PID bifrecuencia con estructura irregular, de modo que se obtendrá, como se apuntó anteriormente, una expresión para el regulador  $\overline{G}_{R,N}^T$  (figura 6-1) en la que éste quedará descompuesto en frecuencia, desprendiéndose una parte a frecuencia rápida y otra a frecuencia lenta dadas por las siguientes expresiones respectivamente:

$$G_{RR}^T = \frac{M^T}{G_p^T} = \frac{(0.4192 + 0.0995 z_2^{-1} - 0.3331 z_2^{-2} - 0.03076 z_2^{-3} + 0.04891 z_2^{-4} + 0.002146 z_2^{-5} - 0.001938 z_2^{-6} - 1.319 \cdot 10^{-17} z_2^{-7})}{(0.6308 + 0.2629 z_2^{-1} - 0.5268 z_2^{-2} - 0.2195 z_2^{-3} + 0.03962 z_2^{-4} + 0.01651 z_2^{-5} + 4.336 \cdot 10^{-20} z_2^{-6} + 1.807 \cdot 10^{-20} z_2^{-7})}$$

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M^{NT}} = \frac{1 - 0.8347 z_2^{-2} + 0.06278 z_2^{-4} + 6.784 \cdot 10^{-20} z_2^{-6}}{1 - 1.353 z_2^{-2} + 0.3715 z_2^{-4} - 0.01824 z_2^{-6}}$$

En este caso, como la referencia a seguir es un escalón unitario, los bloques a frecuencia lenta y rápida vienen interconectados por un retenedor de orden cero, que hace de interfaz.

La respuesta y acciones de control que se obtienen para este diseño se muestran en las figuras 6-23 y 6-24. En la primera de ellas queda patente la mejoría que aporta este diseño con respecto al visto en la sección anterior, ya que ahora sí se consigue seguir sin oscilaciones en el transitorio la evolución de la respuesta continua. Ello se debe a que la señal de control generada en este caso por el sistema discreto es muy similar a la generada en el caso continuo (figura 6-24).

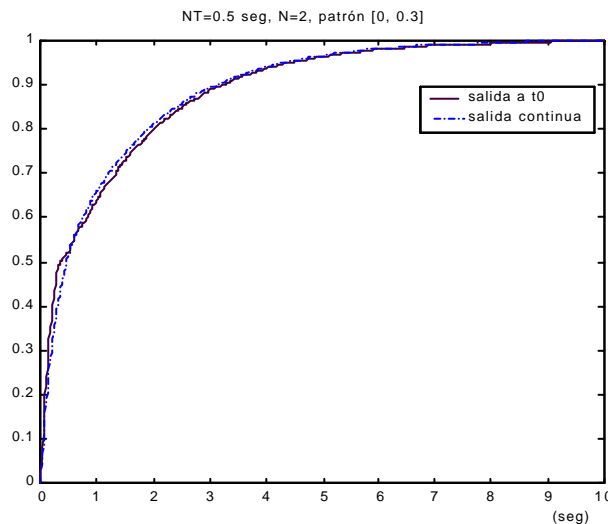


Figura 6-23: Salida descomposición en frecuencia.

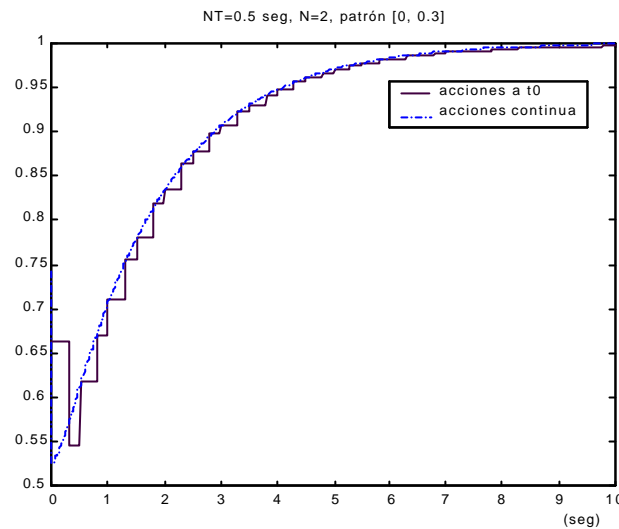


Figura 6-24: Acciones de control descomposición en frecuencia.

### 6.3.4.2.3. Comparativa y análisis de resultados.

Con el fin de poder comparar mejor los resultados obtenidos por cada método en lo referente a respuesta de salida y de control, en la figura 6-25 se hace una comparativa de las salidas obtenidas en ambos casos, y en la figura 6-26 de las acciones de control. En la leyenda se ha referido al método de la sección 6.3.4.2.1 como “tramos” (por aquello de discretización a tramos irregulares) y al método de la sección 6.3.4.2.2 como “lento-rápido” (por aquello de descomposición en frecuencias lenta y rápida).

A la vista de las gráficas (figuras 6-21, 6-23 y 6-25) se observa que en este caso las respuestas obtenidas por ambas alternativas terminan logrando el objetivo marcado como referencia, esto es, ambas siguen a un escalón unitario. Se observa fácilmente que la primera de las alternativas (diseño por discretización a tramos irregulares) experimenta en este caso un comportamiento subamortiguado, dado que su transitorio presenta oscilaciones. Por su parte, la segunda alternativa (diseño lento-rápido por modelado irregular en RE) presenta un mejor comportamiento, ya que éste es sobreamortiguado y alcanza un  $t_e(\pm 98\%) \approx 6$  seg, mientras que en la otra alternativa se tiene  $t_e(\pm 98\%) \approx 7$  seg. La explicación de un peor comportamiento en la primera alternativa se puede deducir a partir de las acciones de control que se suministran al proceso en ella. Como se observa en la figura 6-26, dichas acciones producen una señal de control oscilante, lo cual se transmite a la señal de salida, mientras que en la segunda alternativa la señal de control es mucho más suave y exenta de oscilaciones.

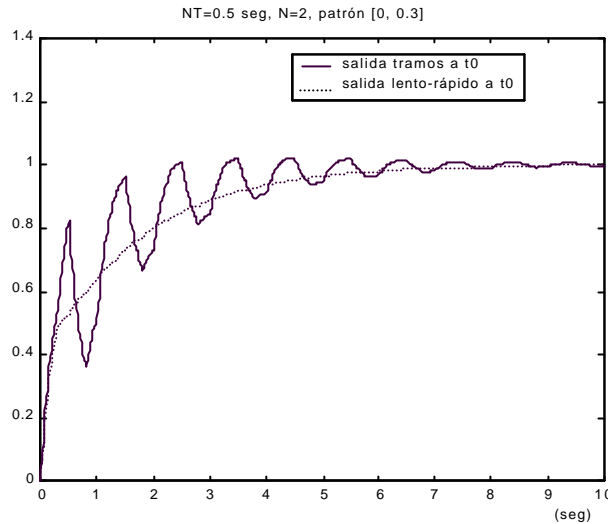


Figura 6-25: Comparativa salidas discretización irregular y descomposición en frecuencia

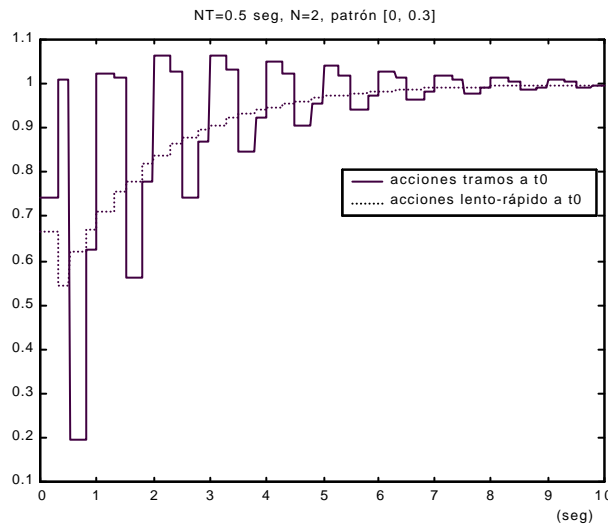


Figura 6-26: Comparativa acc. de control discretiz. irregular y descomposición en frecuencia

Por último, como se ha comentado en el capítulo 3, el modelado irregular en RE logra una fdt aproximada a periodo  $T$  donde la irregularidad del muestreo queda constatada como una variación de los coeficientes del numerador respecto a los de la fdt a periodo  $T$  regular. Por tanto, cabe plantearse si esta aproximación es buena o no. Para ello, se simula el sistema de control según lo expuesto en 6.3.4.2.2 y se compara la respuesta de salida y de control con la que se obtendría si el sistema de control se simula teniendo en cuenta que tanto el regulador como el proceso están definidos a periodo  $T$  con estructura irregular (recordar figura 6-3 y ver en anexo IV.2 un ejemplo de macro Matlab que implementa este tipo de simulación). En la figura 6-27 se contempla dicha comparativa para la salida del sistema, observándose que tan sólo los primeros valores del transitorio muestran mínimas discrepancias entre ambas salidas, mientras que el resto de valores coinciden. Este hecho es muy interesante, ya que de esta forma, la coincidencia de la mayoría de los valores a  $NT$  (que son los que se realimentan en el sistema de control bifrecuencia) de la salida a  $t_0$  y los de la salida a  $T$  hace que las acciones de control generadas en ambas estrategias (figura 6-28) sean idénticas; únicamente cambia el instante en el que se aplican, por lo que se puede concluir que las acciones generadas por el

regulador bifrecuencia con estructura no convencional irregular son las apropiadas para ser utilizadas en un escenario más realista, como es el expuesto en la sección 6.3.4.2.2. En el apartado 6.6. se retoma esta problemática analizándose para todos los casos de diseño que se estudian a lo largo del capítulo 6.

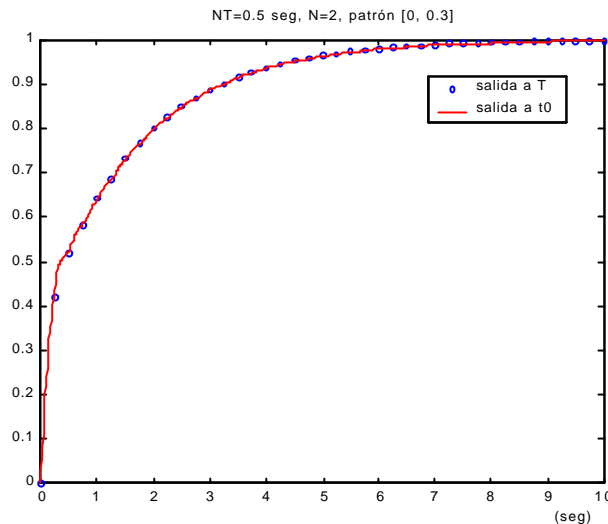


Figura 6-27: Comparativa salidas modelado irregular en RE a T y a t0.

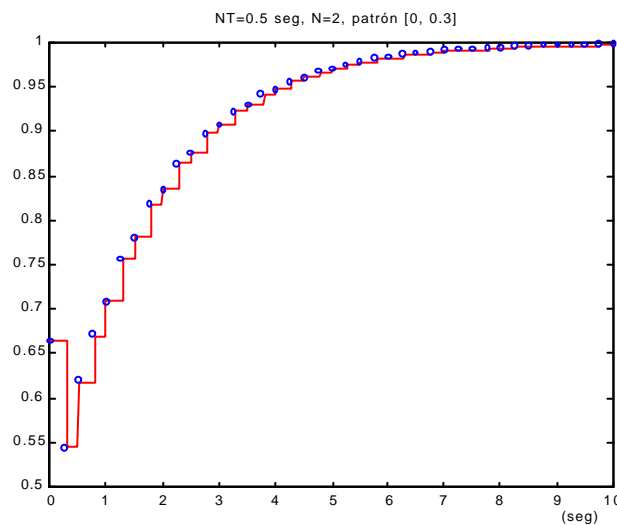


Figura 6-28: Comparativa acciones de control modelado irregular en RE a T y a t0.

#### 6.3.4.2.4. Conclusiones.

Se comparan dos alternativas diferentes de abordar un diseño PID bifrecuencia: discretización a tramos irregulares y diseño por descomposición en frecuencia basado en el modelado con muestreo no convencional en RE. La segunda de ellas, para este ejemplo, responde con un transitorio con menos oscilaciones y con menor  $t_c(\pm 98\%)$ .

Por último, la alternativa basada en el modelado con muestreo no convencional en RE se analiza en detalle, comparando la estrategia considerada en principio (figura 6-56) con otra

basada en la consideración del proceso modelado a T en el que va incluida por aproximación la estructura irregular (figura 6-3). Se comprueba que ambas estrategias resultan prácticamente iguales en lo referente a la evolución temporal tanto de la salida como de las acciones de control, lo cual es interesante a nivel de validación del modelado mediante simulación, tal y como se verá en 6.6.

### 6.3.5. Estudio paramétrico del regulador tipo P-I-D bifrecuencia.

#### 6.3.5.1. Objetivo y planteamiento inicial del problema.

El objetivo de esta sección es analizar la repercusión sobre la respuesta temporal del sistema de la variación de los valores de cada una de las acciones básicas del regulador bifrecuencia (de tipo P-I-D) que se antepone a dicho sistema. El mencionado regulador atiende a la expresión general (6-5) del control multifrecuencia en lazo cerrado, quedando particularizado como regulador tipo P-I-D. Para mayor simplicidad a la hora de realizar el estudio, pero sin pérdida de generalidad, se va a tomar el caso de muestreo regular del proceso a lo largo del metaperiodo con una multiplicidad de  $N=2$ . Además, el estudio se centrará en evaluar procesos de segundo orden, por ser bastante habituales. Por último, para dar mayor completitud al estudio, la respuesta del caso bifrecuencia será comparada con los casos monofrecuenciales (tanto a frecuencia rápida como a frecuencia lenta).

Sabiendo que el proceso será de segundo orden, cuando se discretice se tendrá la siguiente expresión general para cada caso:

- caso periodo lento:

$$G_p^{NT} = \frac{\hat{K}(z_N^N + \hat{f})}{(z_N^N - \hat{g})(z_N^N - \hat{h})} \quad (6-19)$$

- caso periodo rápido:

$$G_p^T = \frac{K(z_N + f)}{(z_N - g)(z_N - h)} \quad (6-20)$$

De la misma manera, el regulador presentará las siguientes expresiones generales:

- caso periodo lento:

$$G_R^{NT} = \frac{\hat{c}(z_N^N + \hat{d})(z_N^N - \hat{k})}{z_N^N (z_N^N - 1)} \quad (6-21)$$

- caso periodo rápido:

$$G_R^T = \frac{c(z_N + d)(z_N - k)}{z_N (z_N - 1)} \quad (6-22)$$

donde, dado el método de discretización empleado, los valores de  $\hat{c}, \hat{d}, \hat{k}$  y  $c, d, k$  son (considerando  $T_s$  el periodo de muestreo rápido y  $N=2$ ):

$$\hat{c} = K_p \left( \frac{1}{T_D} + \frac{1}{NT_s} \right) \quad c = K_p \left( \frac{1}{T_D} + \frac{1}{T_s} \right)$$

$$\hat{d} = \frac{-\frac{1}{NT_s}}{\left( \frac{1}{T_D} + \frac{1}{NT_s} \right)} \quad d = \frac{-\frac{1}{T_s}}{\left( \frac{1}{T_D} + \frac{1}{T_s} \right)}$$

$$\hat{k} = \left( 1 - \frac{NT_s}{T_I} \right) \quad k = \left( 1 - \frac{T_s}{T_I} \right)$$

Para ver la procedencia de los valores de los que dependen  $\hat{c}$ ,  $\hat{d}$ ,  $\hat{k}$  y  $c$ ,  $d$ ,  $k$  es interesante observar el tratamiento que se va a hacer para el regulador. Así, los valores de  $T_D$  y  $T_I$  se pueden conseguir directamente del PID definido en estructura interactiva, esto es:

$$PID(s) = k' \left( s + \frac{1}{T_D} \right) \left( \frac{s + \frac{1}{T_I}}{s} \right)$$

mientras que el valor de  $K_p$  se obtiene tras considerar la agrupación de la acción P y la D como un bloque P+D, tal que:

$$PD(s) = k' \left( s + \frac{1}{T_D} \right) = K_p (T_D s + 1) = (P + D)(s)$$

Considerado este bloque P+D se realiza la discretización del mismo, obteniendo el factor de la izquierda de (6-21) y (6-22), mientras que el factor de la derecha se obtiene directamente de la discretización de la acción I.

Tras todo lo expuesto, parecen claros los tres casos diferenciados que se van a considerar para la fdt de lazo cerrado:

- caso monofrecuencia a periodo lento:

$$\frac{Y^{NT}}{R^{NT}} = \frac{G_R^{NT} G_p^{NT}}{1 + G_R^{NT} G_p^{NT}}$$

- caso monofrecuencia a periodo rápido:

$$\frac{Y^T}{R^T} = \frac{G_R^T G_p^T}{1 + G_R^T G_p^T}$$

- caso bifrecuencia (recordar expresión (6-5) y figura 6-3):

$$\frac{\bar{Y}^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{G_p^T \bar{G}_{R,N}^T}{1 + [(G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}]^T}$$

que, en este caso, se utilizará como:

$$\frac{Y^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{G_p^T G_R^T}{1 + [(G_p^T G_R^T)^{NT}]^T} \quad (6-23)$$

En los casos monofrecuenciales se puede deducir fácilmente la expresión de la fdt de bucle cerrado tras considerar (6-19) y (6-21) ó (6-20) y (6-22), según se trate del caso monofrecuencia lento o del rápido, respectivamente. Así:

- fdt lazo cerrado caso monofrecuencia lento:

$$\frac{Y^{NT}}{R^{NT}} = \frac{\hat{K}\hat{c}(z_N^N + \hat{f})(z_N^N + \hat{d})(z_N^N - \hat{k})}{z_N^N(z_N^N - \hat{g})(z_N^N - \hat{h})(z_N^N - 1) + \hat{K}\hat{c}(z_N^N + \hat{f})(z_N^N + \hat{d})(z_N^N - \hat{k})}$$

- fdt lazo cerrado caso monofrecuencia rápido:

$$\frac{Y^T}{R^T} = \frac{Kc(z_N + f)(z_N + d)(z_N - k)}{z_N(z_N - g)(z_N - h)(z_N - 1) + Kc(z_N + f)(z_N + d)(z_N - k)}$$

Sin embargo, en el caso bifrecuencia se han de considerar una serie de pasos previos para obtener la expresión final. El primero de ellos, según indica el denominador de (6-23), se trata de pasar a periodo lento NT las expresiones a periodo rápido T tanto del proceso como del regulador. Para ello, recordando que N=2, se puede hacer uso del polinomio  $W^T$ , que junto a las leyes de (Salt, 1992), permiten convertir la fdt a periodo rápido como una fdt a periodo lento. Tras ello, el segundo paso será definir a periodo T la expresión obtenida anteriormente (según indica (6-23)). Así pues, haciendo uso de (6-20), (6-22) y  $W^T$ , se tiene:

$$\frac{Y^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{\frac{K(z_2 + f)}{(z_2 - g)(z_2 - h)} \frac{c(z_2 + d)(z_2 - k)}{z_2(z_2 - 1)}}{1 + \left[ \frac{K(z_2 + f)}{(z_2 - g)(z_2 - h)} \frac{c(z_2 + d)(z_2 - k)}{z_2(z_2 - 1)} \cdot \frac{(z_2 + g)(z_2 + h)z_2(z_2 + 1)}{\underbrace{(z_2 + g)(z_2 + h)z_2(z_2 + 1)}_{W^T}} \right]^T} \quad (6-24)$$

Al denominador de (6-24) se le aplica las leyes de (Salt, 1992) y, tras ello, se expresa a periodo T (como bien queda reflejado en (6-24)), lo cual supone hacer un *expand* de los coeficientes del numerador y denominador. Tras hacer todos estos cálculos se consigue una expresión de cierta complejidad, la cual viene definida en función de todos los parámetros considerados:



$$\frac{Y^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{Kc(n_7 z_2^7 + n_6 z_2^6 + n_5 z_2^5 + n_4 z_2^4 + n_3 z_2^3 + n_2 z_2^2 + n_1 z_2)}{(d_8 z_2^8 + d_6 z_2^6 + d_4 z_2^4 + d_2 z_2^2 + d_0)}$$

donde:

$$n_7 = 1$$

$$n_6 = h + g + f + l + d - k$$

$$n_5 = g(h - k + 1) + h(1 - k) - k + (h + g + l - k)f + (h + g + f + l - k)d$$

$$n_4 = d(f(g + h - k + 1) + g(h - k + 1) + h(1 - k) - k) + f(g(h - k + 1) + h(1 - k) - k) - g(h(k - 1) + k) - hk$$

$$n_3 = d(f(g(h - k + 1) + h(1 - k) - k) - g(h(k - 1) + k) - hk) - f(g(h(k - 1) + k) + hk) - ghk$$

$$n_2 = -(d(f(g(h(k - 1) + k) + hk) + ghk) + fghk)$$

$$n_1 = -fhgdk$$

$$fi_6 = d + f + g + h - k + 2$$

$$fi_4 = (d(f(g + h - k + 1) + g(h - k + 1) + h(1 - k) - k) + f(g(h - k + 1) + h(1 - k) - k) - g(h(k - 1) + k) - hk) + (d(f + g + h - k + 1) + f(g + h - k + 1) + g(h - k + 1) + h(1 - k) - k)$$

$$fi_2 = (d(f(g(h - k + 1) + h(1 - k) - k) - g(h(k - 1) + k) - hk) - f(g(h(k - 1) + k) + hk) - ghk) - (d(f(g(h(k - 1) + k) + hk) + ghk) + fghk)$$

$$fi_0 = -dfghk$$

$$d_8 = 1$$

$$d_6 = fi_6 Kc - g^2 - h^2 - 1$$

$$d_4 = fi_4 Kc + g^2(h^2 + 1) + h^2$$

$$d_2 = fi_2 Kc - g^2 h^2$$

$$d_0 = fi_0 Kc$$

### 6.3.5.2. Planteamiento alternativo para entornos distribuidos.

En esta sección se va a presentar un planteamiento bifrecuencia alternativo al anterior (pero igualmente basado en la figura 6-3 y atendiendo a la expresión (6-5)) para casos en los que por restricciones del entorno se deba distribuir la estructura del controlador en dos partes diferenciadas: una trabajando a periodo lento,  $G_1^{NT}$ , y la otra a periodo rápido,  $G_2^T$ . La primera de ellas es la que realiza básicamente el control y vendrá implementada mediante la acción integral del regulador, mientras que la segunda de ellas llevará a cabo el ajuste fino de dicho control, implementando las acciones proporcional y derivativa.

Es interesante reseñar que este planteamiento es alternativo y equivalente al anterior visto en 6.3.5.1 cuando se trata con periodos de muestreo pequeños (como se verá en 6.3.5.3), ya que en esos casos el parámetro correspondiente al cero del integrador es prácticamente idéntico tanto si se considera a periodo rápido,  $k$ , como a lento,  $\hat{k}$ . Sin embargo, conforme el periodo empleado en el sistema de control vaya aumentándose, la diferencia entre ambos planteamientos se hará mayor. No obstante, como en las aplicaciones industriales en que se está interesado los periodos de muestreo suelen ser bajos, la equivalencia planteada puede darse por buena.

La estructura que se plantea para el controlador bifrecuencia en este caso es:

$$\frac{Y^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{G_1^{NT} G_2^T h^T G_p^T}{1 + [(G_2^T h^T G_p^T)^{NT} G_1^{NT}]^T}$$

donde

- $G_p^T$  viene definido igual que en (6-20),
- $h^T = \frac{z_N + 1}{z_N}$  es el interfaz entre parte lenta y rápida del controlador para  $N=2$  (como ya se vio en las ecuaciones (6-4) y (6-16)),
- $G_2^T = \frac{c(z_N + d)}{z_N}$  es la parte rápida del controlador formada por las acciones proporcional y derivativa, cumpliéndose los mismos valores para  $c$  y  $d$  que en el apartado anterior.
- $G_1^{NT} = \frac{z_N^N - \hat{k}}{z_N^N - 1}$  es la parte lenta del controlador definida a periodo rápido y formada únicamente por la acción integral, cumpliéndose para  $\hat{k}$  el mismo valor que en el apartado anterior.

Trabajando de manera similar a como se hizo en 6.3.5.1 se alcanza:

$$\frac{Y^T}{(R^T)^{NT}} = \frac{Kc(c_7 z_2^7 + c_6 z_2^6 + c_5 z_2^5 + c_4 z_2^4 + c_3 z_2^3 + c_2 z_2^2 + c_1 z_2 + c_0) \left( \frac{z_2}{z_2 + 1} \right)^{\frac{1}{h^T}}}{(d_8 z_2^8 + d_6 z_2^6 + d_4 z_2^4 + d_2 z_2^2 + d_0)}$$

donde:

$$\begin{aligned} n_5 &= 1 \\ n_4 &= f + d + g + h + 1 \\ n_3 &= gf + gd + g + fd + f + d + hf + hd + hg + h \\ n_2 &= fd + gfd + gf + gd + hgf + hgd + hg + hfd + hf + hd \\ n_1 &= fdg + hfd + hgfd + hgf + hgd \\ n_0 &= fdgh \\ c_7 &= 1 \\ c_6 &= n_4 \\ c_5 &= n_3 - \hat{k} n_5 \\ c_4 &= n_2 - \hat{k} n_4 \\ c_3 &= n_1 - \hat{k} n_3 \\ c_2 &= n_0 - \hat{k} n_2 \\ c_1 &= -\hat{k} n_1 \\ c_0 &= -\hat{k} n_0 \\ fi_6 &= d + f + g + h + 1 \\ fi_4 &= (gf + gd + gfd + fd + hf + hd + hfd + hgf + hgd + hg) - (\hat{k} (d+f+1+h+g)) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 f_{i_2} &= fghd - \hat{k}(gf + gd + gfd + fd + hf + hd + hfd + hgf + hgd + hg) \\
 f_{i_0} &= dfgh\hat{k} \\
 d_8 &= 1 \\
 d_6 &= f_{i_6}Kc - g^2 - h^2 - 1 \\
 d_4 &= f_{i_4}Kc + g^2(h^2 + 1) + h^2 \\
 d_2 &= f_{i_2}Kc - g^2h^2 \\
 d_0 &= -f_{i_0}Kc
 \end{aligned}$$

En el numerador se percibe el producto final por la inversa de  $h^T$ , ya que se puede demostrar que cuando se trabaja con funciones de transferencia a periodo rápido no es necesario que el interfaz sea incluido; por tanto se ha de compensar su inclusión en el numerador de la función de transferencia bifrecuencia planteada. Sin embargo, cuando se trabaja con funciones definidas a periodo rápido y se desea que éstas pasen a ser definidas a periodo lento (como es el caso del denominador de la fdt bifrecuencia), entonces, sí se ha de incluir el interfaz en aras a realizar correctamente el *skip* de la función rápida.

Las estructuras monofrecuenciales no han sido revisadas en este caso, ya que siguen las mismas ecuaciones vistas en el apartado anterior.

### 6.3.5.3. Implementación en programas de simulación interactiva.

Vista la amplia gama de parámetros que se han de tener en cuenta para obtener la respuesta de cualquiera de los modelos en lazo cerrado presentados en las secciones anteriores, se ha creído necesaria la implementación de todos ellos en un programa de simulación interactiva, el cual, de forma sencilla, nos permitirá variar todos los parámetros contemplados, viendo fácilmente la consecuencia de dichas variaciones sobre las distintas respuestas. En concreto el programa se ha implementado en SysQuake y ofrece el aspecto que se muestra en la figura 6-29, donde se ha considerado el modelo en continuo de un motor de

c.c. que responde según la fdt  $G(s) = \frac{283.851}{s(s + 41.583)}$ , con un periodo de muestreo rápido

$T_s=0.015$  seg y con los parámetros *Kp-Ti-Td* que en dicha figura se muestran para el controlador.

En la figura mencionada se observa cómo está organizada la aplicación, de tal manera que las ventanas superiores muestran las tres respuestas juntas (monofrecuenciales y bifrecuenciales) para cada uno de los casos, de forma que en la central se muestra las respuestas resultado del planteamiento primero (el de 6.3.5.1), mientras que en la derecha se muestra las del planteamiento segundo (el de 6.3.5.2). Se percibe claramente como, efectivamente, ambos planteamientos resultan equivalentes (ya que el  $T_s$  utilizado es pequeño). Por su parte, las tres ventanas inferiores muestran cada una de las respuestas por separado; así, en la izquierda se muestran las bifrecuenciales de cada planteamiento, en la central la monofrecuencial lenta y en la derecha la monofrecuencial rápida. En la figura izquierda inferior se vuelve a comprobar que la comparación de las respuestas bifrecuenciales nos lleva a la conclusión de que, dado el  $T_s$  que se ha elegido, partiendo de cualquiera de los planteamientos se alcanza el mismo comportamiento para el sistema, ya que se observa la superposición de la respuesta del planteamiento 1 con la del planteamiento 2. Por su parte, recordar que las monofrecuenciales se obtenían por el mismo procedimiento en ambas alternativas.

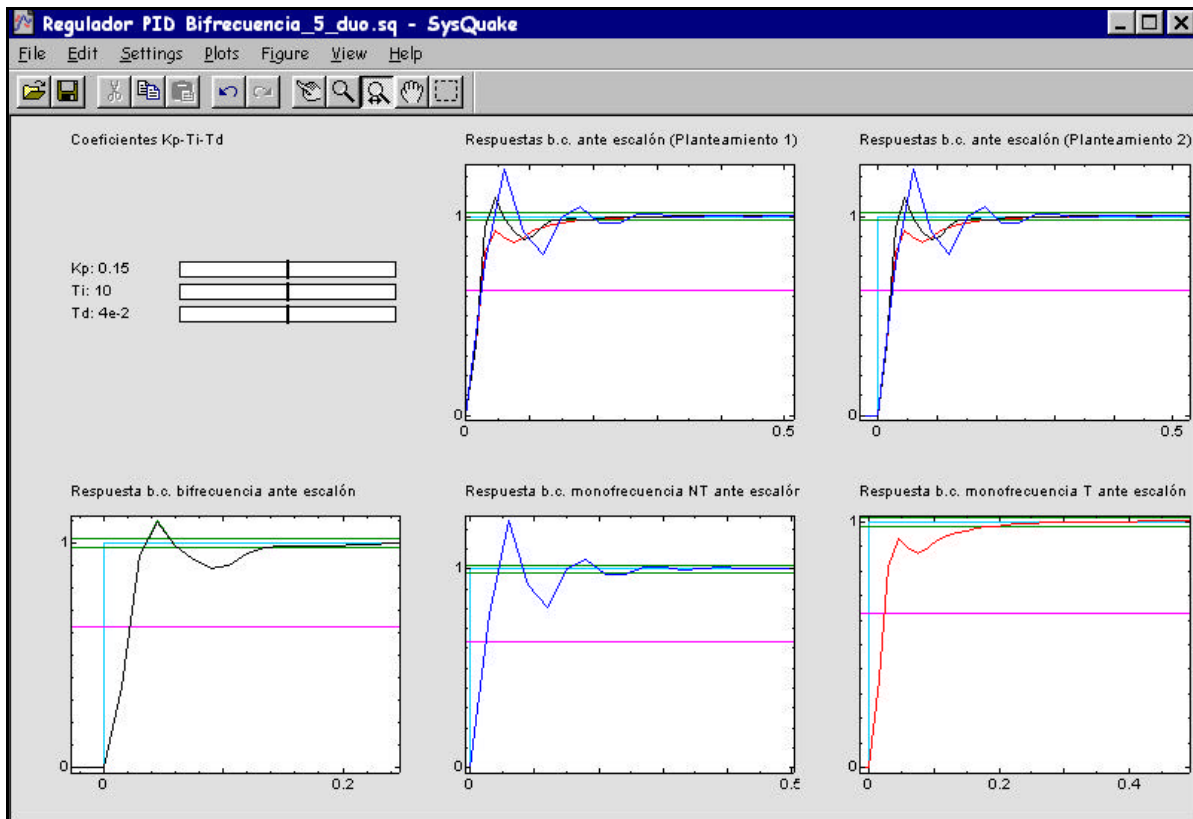


Figura 6-29: Aspecto programa simulación interactiva.

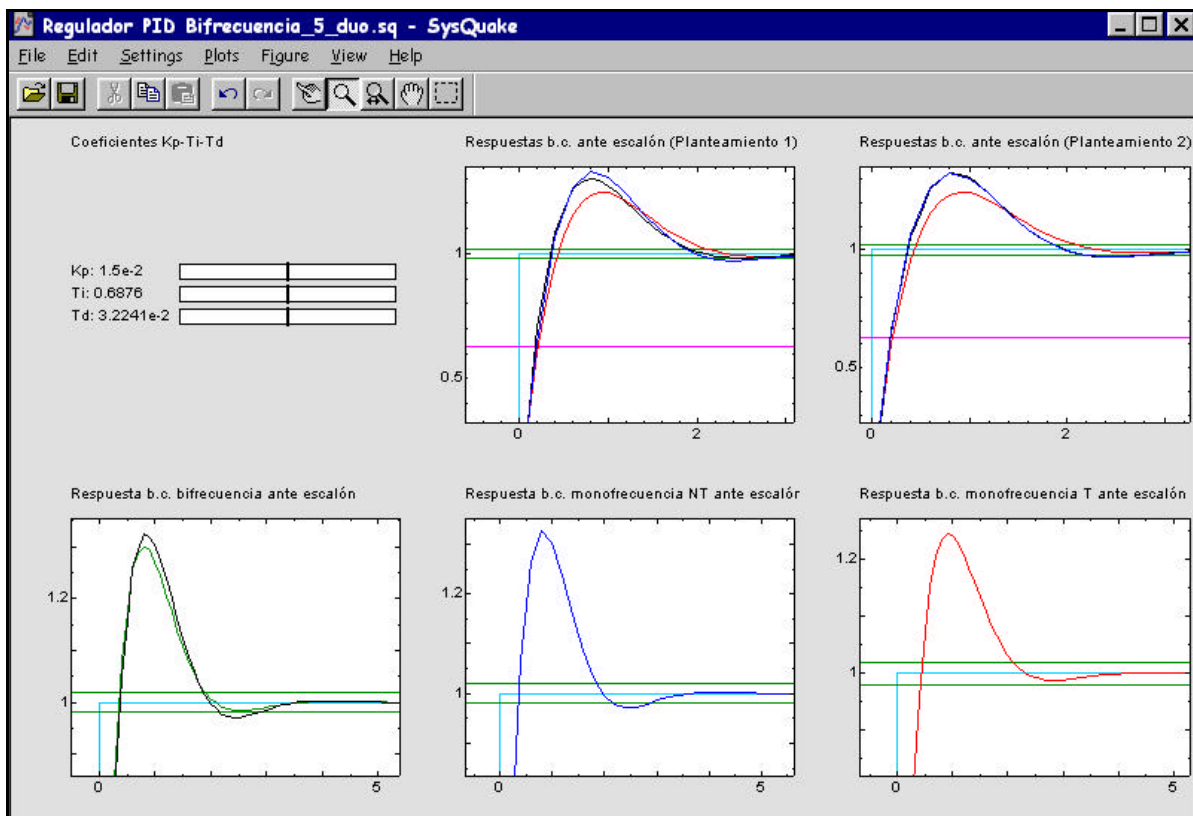


Figura 6-30: Ilustración Conclusión 3ª programa simulación interactiva.

Finalmente comentar que cada gráfica va acompañada de varias líneas: una color azul claro que refleja la entrada de referencia escalón unitario, otra color magenta, la cual sirve para detectar la constante de tiempos (viene en horizontal a una altura aproximada de 0.63 unidades en el eje Y), y dos verdes que encierran el área definida para el tiempo de establecimiento (con el criterio del 98%, por lo que aparecen en horizontal a una altura de 0.98 y 1.02 en el eje Y). Dejando el cursor encima de los puntos de intersección de dichas líneas con la respuesta del sistema se ve en la barra de estado el tiempo en segundos relativo al índice correspondiente. Por su parte, las barras deslizantes de la parte izquierda superior sirven para variar los parámetros correspondientes a las acciones básicas del regulador tipo P-I-D. Finalmente, los parámetros relativos al proceso y al periodo de muestreo (rápido) se pueden cambiar accediendo a la opción “Settings” de la barra de menú.

#### 6.3.5.4. Análisis de resultados y conclusiones.

Tras observar la repercusión sobre las distintas respuestas de la variación de cada uno de los parámetros se ha llegado a una serie de conclusiones, reflejándose las más interesantes a continuación:

1ª) Tal y como se ha definido la discretización del regulador tipo P-I-D, los parámetros del mismo que, por norma general, más influyen en la respuesta del sistema son el  $K_p$  y el  $T_d$ . Por su parte, el  $T_i$  suele modificar en menor medida el comportamiento dinámico del sistema, lo cual viene a reforzar las conclusiones extraídas en el capítulo 4 apartado 4.3.3.

2ª) Observando las expresiones (6-21) y (6-22), parece claro que el parámetro  $K_p$  guarda una relativa proporcionalidad inversa con el parámetro  $T_d$ , lo cual se comprueba al variar dichos parámetros en la aplicación, de forma que se obtienen respuestas relativamente semejantes tanto cuando se aumenta  $T_d$  como cuando se disminuye  $K_p$  (y viceversa).

3ª) Por norma general, la respuesta monofrecuencia lenta es peor que la rápida, mostrándose intermedia a ambas la respuesta bifrecuencia. No obstante, disminuyendo convenientemente  $K_p$  (o aumentando  $T_d$ ) se pueden obtener situaciones en las que la respuesta bifrecuencia alcance similares índices temporales (constante de tiempos  $\tau$  y tiempo de establecimiento  $t_e$ ) que la monofrecuencia rápida, como puede observarse en la figura 6-30. En ella, para el modelo en continuo del motor de c.c. presentado en la sección anterior, partiendo de un  $T_s=0.1$  seg y de los valores para las acciones básicas del regulador tales que  $K_p=0.015$ ,  $T_d=0.0125$ ,  $T_i=0.6876$ , cuando se aumenta el valor de  $T_d$  a 0.032241 la respuesta del caso bifrecuencia obtiene un tiempo de establecimiento similar al del caso monofrecuencia rápida (sobre todo, en este caso para la respuesta bifrecuencia del planteamiento 1 que viene en color verde), siendo ambos tiempos mejores que el del caso monofrecuencia lento, como era de esperar (véanse las gráficas inferiores de la figura 6-30). Por su parte, como muestran las ventanas superiores de dicha figura 6-30, todas las respuestas consideradas consiguen una constante  $\tau$  similar, aunque es evidente que la monofrecuencia rápida es la que menor sobreoscilación presenta.

4ª) Enlazando con la apreciación de que los dos planteamientos bifrecuencia aquí generan respuestas ligeramente distintas, se ha de insistir en que, como se dijo en la sección anterior, esto sucede porque ahora el periodo de muestreo (rápido) es relativamente mayor que lo era en el ejemplo expuesto en dicha sección (allí  $T_s=0.015$  seg y aquí  $T_s=0.1$  seg). Como se ha comentado en la conclusión 3ª, en el ejemplo de la figura 6-30, la respuesta

bifrecuencia del primer planteamiento obtiene mejor tiempo de establecimiento y menor sobreoscilación que la del segundo, lo cual se puede observar también recurriendo a las ventanas superiores, donde se ve claramente como en este caso el planteamiento 2 tiende a comportarse de forma más similar al monofrecuencia que el planteamiento 1, aunque, no obstante, ambos son muy parecidos, como se aprecia en la ventana izquierda inferior.

5ª) Si se establece un esquema sencillo en Simulink, se puede demostrar que realmente lo que se está haciendo en el primer planteamiento es lo que muestra la figura 6-31, es decir, un control en el que tanto regulador como proceso están definidos a periodo rápido y se realimenta la salida a periodo lento. Para el ejemplo planteado en la figura 6-30, y gracias a que ambos planteamientos bifrecuencia salen ligeramente distintos, se puede ver como la respuesta bifrecuencia del planteamiento 1 mostrada en dicha figura es exactamente igual que la respuesta *simout* que resulta del esquema Simulink, la cual es mostrada en la figura 6-32.

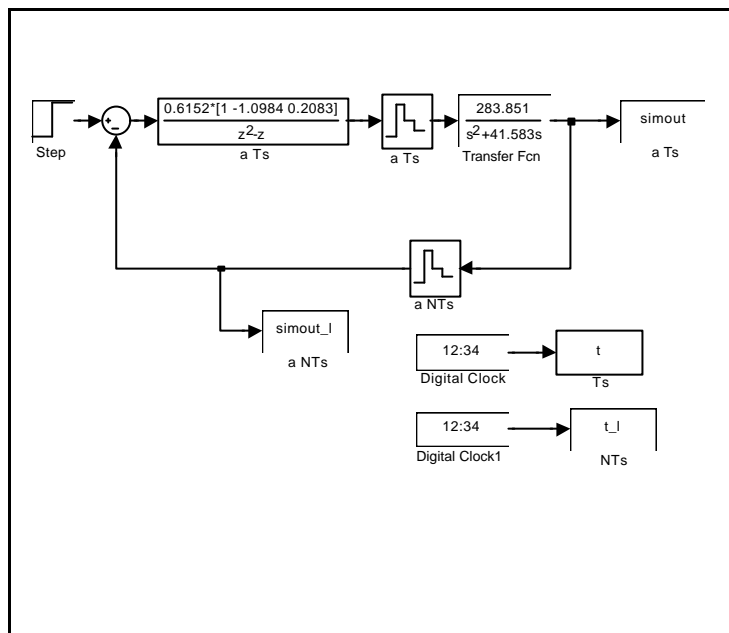


Figura 6-31: Esquema Simulink Planteamiento 1

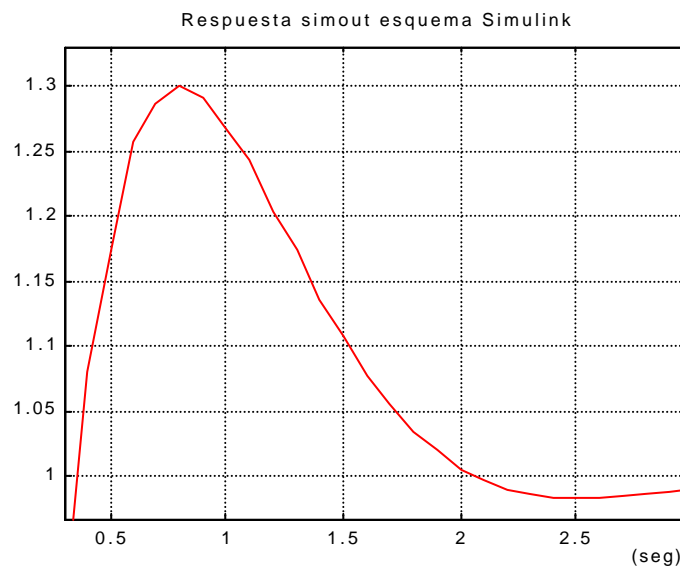


Figura 6-32: Respuesta de Simulink para Planteamiento 1.

## 6.4. DISEÑO DE REGULADORES DE CANCELACIÓN.

### 6.4.1. Generalidades.

En términos generales, la metodología de cálculo de este tipo de reguladores es la siguiente: si se conoce  $G_p(z)$  y la función de transferencia específica  $M(z)$  que materializa las especificaciones establecidas que el bucle cerrado debe verificar, es posible obtener (al menos matemáticamente) la función  $G_R(z)$ , ya que una simple operación a partir de la expresión de  $M(z)$ :

$$M(z) = \frac{G_R(z)G_p(z)}{1 + G_R(z)G_p(z)} \quad (6-25)$$

permite obtener que:

$$G_R(z) = \frac{1}{G_p(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)} \quad (6-26)$$

Es decir, en principio sería posible la obtención de cualquier  $M(z)$  deseada sin más que aplicar la expresión (6-26).

Dentro de este epígrafe, se integran todos aquellos reguladores cuyo paso final de síntesis implica la aplicación de la expresión (6-26) antes expuesta. Si se analiza detenidamente dicha formulación, parece claro que una parte queda dedicada a cancelar el proceso (inversa del proceso), añadiendo los términos adecuados para llegar al resultado final especificado.

Aparentemente, el despeje de la ecuación y consiguiente obtención analítica del regulador son pasos sencillos que exigen tan sólo el conocimiento de las funciones de transferencia del proceso y del bucle cerrado propuesto. Sin embargo, como luego se discutirá, es preciso estudiar conceptos tales como la realizabilidad, la estabilidad y la complejidad de implementación, entre otras, que restringirán la elección y cálculo del regulador  $G_R(z)$ , que tan simple parece asumiendo tan sólo la expresión algebraica (6-26). Más tarde se comprenderá que estas limitaciones se traducirán en la necesidad de una consideración previa minuciosa de las características del proceso que va a ser controlado.

Como es fácil de entender se trata de un control especialmente indicado cuando hay que implementar un algoritmo discreto de control, ya que la complejidad de la expresión obtenida puede ser tal que solamente sea viable su realización usando el computador (con su versatilidad añadida a cambios en estructura y parámetros), y no usando elementos analógicos propios de la construcción de reguladores continuos.

### 6.4.2. Estudio de la Realizabilidad y de la Estabilidad.

Expresamos  $G_p(z)$  y  $G_R(z)$  como sigue:

$$G_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} \quad G_R(z) = \frac{Q(z)}{P(z)} \quad (6-27)$$

• **Realizabilidad:**

Asumiendo la sustitución de las expresiones (6-27) en (6-25), se obtiene la expresión (6-28), según la cual:

$$M(z) = \frac{B(z)Q(z)}{A(z)P(z) + B(z)Q(z)} \quad (6-28)$$

Si denominamos  $r$  al grado del polinomio numerador de  $M(z)$ , y  $s$  al del denominador de dicha función, la realizabilidad del esquema global requiere que  $s \geq r$ . Como se deduce fácilmente de la expresión anterior:

$$\begin{aligned} r &= m + \mathbf{m} \\ s &= \max\{(n + \mathbf{h}), (m + \mathbf{m})\} = n + \mathbf{h} \end{aligned}$$

siendo  $m$  el grado del polinomio  $B$ ,  $\mathbf{m}$  el de  $Q$ ,  $n$  el de  $A$  y  $\mathbf{h}$  el de  $P$ .

La limitación antes apuntada exige que  $(n + \mathbf{h}) \geq (m + \mathbf{m})$ , inecuación que se verifica sin más que considerar la causalidad en el bloque regulador.

Además, el exceso de polos sobre ceros de  $M(z)$ , es:

$$(n + \mathbf{h}) - (m + \mathbf{m}) = (n - m) + (\mathbf{h} - \mathbf{m})$$

por lo que si se considera un regulador tal que  $\mathbf{h} = \mathbf{m}$ , se verificará, pues, que el exceso de polos sobre ceros en  $M(z)$  y en  $G_p(z)$  será el mismo.

En general, si  $\mathbf{h} \geq \mathbf{m}$ , la mencionada diferencia debe ser mayor o igual a la existente en el proceso. Por consiguiente, se deduce la importante restricción práctica de que la  $M(z)$  seleccionada debe preservar como mínimo el mismo retardo (diferencia entre polos y ceros) existente en el proceso cuya función de transferencia va a contener.

• **Estabilidad:**

Como ya se expuso, el regulador cancela los ceros y polos del proceso, o lo que es lo mismo los contiene (los ceros del proceso como polos, y los polos del proceso como ceros), por lo que se puede intuir que en la ecuación característica de lazo cerrado, esta situación da lugar a factores comunes que pueden conducir a un comportamiento inestable del conjunto, en el caso de que alguna de estas singularidades se encuentre fuera del círculo unidad.

A continuación se va a examinar la ecuación característica de bucle cerrado en el caso de existencia de polos y/o ceros de módulo mayor o igual que la unidad en el proceso. Se va a definir, para caracterizar esta situación:

$$G_p(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\prod_{i=1}^k (z - \mathbf{b}_i) B'(z)}{\prod_{j=1}^l (z - \mathbf{a}_j) A'(z)}$$



siendo  $\mathbf{a}_j$  y  $\mathbf{b}_i$  los polos y ceros del proceso, respectivamente, cuyo módulo es mayor o igual que la unidad.

Si a partir de este proceso se calcula analíticamente el regulador de cancelación mediante la expresión (6-26), se tiene que:

$$G_R(z) = \frac{\prod_{j=1}^l (z - \mathbf{a}_j) A'(z)}{\prod_{i=1}^k (z - \mathbf{b}_i) B'(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)} = \frac{\prod_{j=1}^l (z - \mathbf{a}_j) Q'(z)}{\prod_{i=1}^k (z - \mathbf{b}_i) P'(z)} = \frac{Q(z)}{P(z)}$$

por lo que se tendría la siguiente ecuación característica:

$$\prod_{i=1}^k (z - \mathbf{b}_i) \prod_{j=1}^l (z - \mathbf{a}_j) [A'(z)P'(z) + B'(z)Q'(z)] = 0$$

Como se puede apreciar el resultado es que se tiene un bucle cerrado inestable, ya que los factores comunes (productorios), no se pueden cancelar físicamente, puesto que pertenecen a bloques que en la realidad son disjuntos como son el proceso y el regulador. Debido a esta conclusión, se deben considerar las siguientes restricciones en la elección de la función de transferencia  $M(z)$ :

- Si existen polos del proceso con módulo mayor o igual que la unidad, el factor  $1-M(z)$  de (6-26) debe contenerlos.
- Si existen ceros del proceso con módulo mayor o igual que la unidad, deben estar contenidos en  $M(z)$  de (6-26).

Sin más que volver a mostrar la expresión (6-26) modificada con la notación introducida,

$$G_R(z) = \frac{\prod_{j=1}^l (z - \mathbf{a}_j) A'(z)}{\prod_{i=1}^k (z - \mathbf{b}_i) B'(z)} \frac{M(z)}{1 - M(z)}$$

se puede observar que con las limitaciones impuestas ahora la cancelación se produce en el interior del bloque regulador que es diseñado, por lo que no se transmitirá a la ecuación característica de bucle cerrado, lo cual daría problemas de estabilidad que son solucionados de esta forma.

Como se puede observar las anteriores restricciones hacen que no se pueda elegir cualquier  $M(z)$ , como ya se había anticipado.

### 6.4.3. Reguladores de Tiempo Mínimo.

La señal de error a frecuencia rápida se puede expresar como

$$E^T = R^T - \bar{Y}^T$$

si se asume el bucle bifrecuencial, por (6-5) se tiene que:

$$\bar{Y}^T = \frac{G_p^T \bar{G}_{R,N}^T}{1 + [(G_p^T \bar{G}_{R,N}^T)^{NT}]^T} (R^T)^{NT} = \bar{M}_N^T (R^T)^{NT}$$

a la vista de esta expresión y considerando el desarrollo de (Sklansky, 1955), se tiene que:

$$(R^T)^{NT} = Z[R(z_N)] = \frac{1}{N} \left[ R(z_N) + R\left(z_N e^{\frac{j2p}{N}}\right) + \dots + R\left(z_N e^{\frac{j2p(N-1)}{N}}\right) \right]$$

y sin más que sustituir en la expresión anterior y reordenar términos se obtiene

$$E(z_N) = R(z_N) \left[ 1 - \frac{1}{N} \tilde{M}(z_N) \right] - \frac{1}{N} \tilde{M}(z_N) \left[ R\left(z_N e^{\frac{j2p}{N}}\right) + \dots + R\left(z_N e^{\frac{j2p(N-1)}{N}}\right) \right]$$

Como se puede observar en (6-5) y para el caso de reguladores con una estructura propia de respuesta impulsional finita (FIR), como es el caso de los de tiempo mínimo y finito planteados en este capítulo, se podrá considerar que  $\bar{M}_N^T$  es de la forma  $\tilde{M}^T$  que se ha denotado en el plano  $z_N$  como  $\tilde{M}(z_N)$ .

Ya que se asume una referencia de la forma  $R(s) = \frac{1}{s^R}$  es claro que  $R(z_N)$  se puede expresar como  $\frac{P(z_N)}{(1 - z_N^{-1})^R}$ , donde  $P(z_N)$  es un polinomio en  $z_N^{-1}$  tal que  $P(1) \neq 0$ . Así pues se puede formular la expresión anterior como

$$E(z_N) = \frac{P(z_N)}{(1 - z_N^{-1})^R} \left[ 1 - \frac{1}{N} \tilde{M}(z_N) \right] - \frac{1}{N} \tilde{M}(z_N) \left[ \frac{P\left(z_N e^{\frac{j2p}{N}}\right)}{\left(1 - z_N^{-1} e^{\frac{-j2p}{N}}\right)^R} + \dots + \frac{P\left(z_N e^{\frac{j2p(N-1)}{N}}\right)}{\left(1 - z_N^{-1} e^{\frac{-j2p(N-1)}{N}}\right)^R} \right]$$

Para que el polinomio  $E(z_N)$  sea de grado finito, se tiene que cumplir que todos sus polos estén en el origen en el plano  $z_N$ , es decir, que su expresión presente una división exacta. Para que se cumpla esto, el término

- $\left[1 - \frac{1}{N} \tilde{M}(z_N)\right]$  debe contener  $(1 - z_N^{-1})^R$  como factor, o lo que es lo mismo, expresado a periodo lento  $1 - M(z_N^{-N})$  deberá contener el factor  $(1 - z_N^{-N})^R$ ,
- $\tilde{M}(z_N)$  debe contener también como factor

$$\left[ \left(1 - z_N^{-1} e^{-\frac{j2\mathbf{p}}{N}}\right) \left(1 - z_N^{-1} e^{-\frac{j4\mathbf{p}}{N}}\right) \dots \left(1 - z_N^{-1} e^{-\frac{j2\mathbf{p}(N-1)}{N}}\right) \right]^R$$

Esta última expresión es igual a

$$\left[ \frac{1 - z_N^{-N}}{1 - z_N^{-1}} \right]^R = \left[ 1 + z_N^{-1} + \dots + z_N^{-(N-1)} \right]^R = W_R(z_N^{-1})$$

que resulta ser similar a (6-4), sólo que ahora relativa a cualquier referencia de orden R.

Con todo lo visto, parece claro que en los reguladores de cancelación el conversor de frecuencias queda contemplado directamente en  $\tilde{M}(z_N^{-1})$ , de tal manera que, en los programas de simulación (realizados para este tipo de reguladores en Matlab), habrá que expandir la señal de control lenta en el regulador rápido, tal y como se explica en 6.4.6.

Así pues, se puede exponer un primer planteamiento para la obtención del regulador de tiempo mínimo a partir de las siguientes ecuaciones polinómicas diofánticas:

➤ **1<sup>er</sup> planteamiento:**

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z_N^{-1}) &= W_R(z_N^{-1}) z_N^{-d} \Omega(z_N^{-1}) \\ 1 - M(z_N^{-N}) &= (1 - z_N^{-N})^{\max(R, u)} \prod_j (1 - \mathbf{a}_{j,T}^N z_N^{-N}) \Lambda(z_N^{-N}) \end{aligned}$$

donde

- $W_R(z_N^{-1})$ : polinomio que depende de la referencia usada, y que tendrá la siguiente forma:

$$W_R(z_N^{-1}) = (1 + \dots + z_N^{-(N-1)})^R$$

donde  $N$  es la multiplicidad y  $R$  el orden de la referencia. Permite hacer el error en régimen permanente nulo ( $E(z_N)$  debe ser de grado finito).

- $d$ : diferencia entre el número de polos y ceros del proceso. Permite asegurar la realizabilidad.

- $(1 - z_N^{-N})^{max(R, \mathbf{u})}$ : polinomio construido en base a la referencia (de orden R) y al tipo  $\nu$  del sistema. Asegura que el polinomio  $1 - M(z_N^{-N})$  sea de grado finito.
- $\prod_j (1 - \mathbf{a}_{j,T}^N z_N^{-N})$ : polos del proceso  $G_p(z)$  de módulo  $\geq 1$  no incluidos ya en el término anterior. Permite asegurar la estabilidad.

En el caso de que el modelo del proceso contuviera ceros de módulo mayor o igual a la unidad, tal y como se ha visto en 6.4.2 éstos deberían ser cancelados en  $\tilde{M}(z_N)$ . Por tanto, se presenta un segundo planteamiento en el que se tiene en cuenta este hecho:

➤ **2º planteamiento:**

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z_N^{-1}) &= W_R(z_N^{-1}) B^*(z_N^{-1}) z_N^{-d} \Omega(z_N^{-1}) \\ 1 - M(z_N^{-N}) &= (1 - z_N^{-N})^{max(R, \mathbf{u})} \prod_j (1 - \mathbf{a}_{j,T}^N z_N^{-N}) \Lambda(z_N^{-N}) \end{aligned}$$

Es igual al anterior solo que ahora aparece  $B^*(z_N^{-1})$  en  $\tilde{M}(z_N^{-1})$ . Este polinomio  $B^*(z_N^{-1})$  estará formado por:

$$B^*(z_N^{-1}) = \prod_i (1 - \mathbf{b}_{i,T} z_N^{-1}) W^*(z_N^{-1})$$

donde

- $\prod_i (1 - \mathbf{b}_{i,T} z_N^{-1})$  son los ceros del proceso de fuera del círculo unidad, con lo que se asegura la estabilidad.
- $W^*(z_N^{-1})$  es un polinomio construido según (6-1), en el que en el caso:

- regular: como tenemos para el proceso tanto en numerador como en denominador el polinomio  $W_A^T$ , el  $W^*(z_N^{-1})$  se formará teniendo en cuenta solo los polos de fuera del círculo unidad. Si aparece algún polo justamente en  $z=-1$ , éste quedará contemplado directamente en el polinomio  $W_R^T$ , que en este caso particular quedaría expresado como:

$$W_R(z_N^{-1}) = \left[ 1 + z_N^{-1} + \dots + z_N^{-(N-1)} \right]^{max(R, \mathbf{u})}$$

- irregular: aquí en el denominador se tiene  $W_A^T$ , pero en el numerador aparece  $W_B^T$ , por tanto,  $W^*(z_N^{-1})$  está formado directamente por las raíces de módulo mayor o igual a la unidad que encontremos en  $W_B^T$ . Cabe resaltar nuevamente el caso en que justamente se tenga una raíz en  $z=-1$ ; si esto sucede esta raíz quedaría contemplada directamente en el polinomio  $W_R^T$ , que en este caso particular quedaría expresado como:

$$W_R(z_N^{-1}) = \left[ 1 + z_N^{-1} + \dots + z_N^{-(N-1)} \right]^{max(R, \mathbf{u})}$$

#### 6.4.4. Reguladores de Tiempo Finito

En este caso aparece un único planteamiento:

$$\begin{aligned}\tilde{M}(z_N^{-1}) &= W_R(z_N^{-1})B^*(z_N^{-1})\Omega(z_N^{-1}) \\ 1-M(z_N^{-N}) &= (1-z_N^{-N})^{\max(R,\mathbf{u})} \prod_j (1-\mathbf{a}_{j,T}^N z_N^{-N})\Lambda(z_N^{-N})\end{aligned}$$

En este planteamiento se tiene:

- $W_R(z_N^{-1})$ : igual que en los casos anteriores.
- $B^*(z_N^{-1})$ : numerador del operador bifrecuencia (lleva incluido el término  $z_N^{-d}$ ). Este término  $B^*(z_N^{-1})$  hace que el regulador sea de tiempo finito, eliminando las oscilaciones intermuestreo. Como es conocido hay que diferenciar el caso regular del irregular, de forma que:
  - regular:  $B^*(z_N^{-1}) = B^T W_A^T = \tilde{B}(z_N^{-1})$  (por 6-2)
  - irregular:  $B^*(z_N^{-1}) = \hat{B}^T W_B^T = \tilde{\tilde{B}}(z_N^{-1})$  (por 6-3)
- $(1-z_N^{-N})^{\max(R,\mathbf{u})}$ : igual que en el caso de tiempo mínimo.
- $\prod_j (1-\mathbf{a}_{j,T}^N z_N^{-N})$ : todos los polos del proceso que no han sido considerados en el término anterior, es decir, todos aquellos de módulo distinto de la unidad. Compensa el efecto de los ceros fruto de los polinomios  $W^T$  contemplados en  $B^*(z_N^{-1})$  e introducidos en  $\tilde{M}(z_N^{-1})$ .

En el apartado 6.4.8. se va a presentar un ejemplo de regulador de tiempo mínimo tanto desde la perspectiva de actuación sobre el proceso a instantes regulares de tiempo como desde la perspectiva de actuación irregular. El proceso a considerar será uno real; en concreto, se trata del eje Y de una estructura porticada que se haya en el Departamento de Ingeniería de Sistemas y Automática de la UPV. Se simulará primero el comportamiento del sistema ante el caso de actuar de forma regular sobre él, para después probar cómo sería dicho comportamiento si se actúa de forma irregular. De esta manera se podrán comparar las prestaciones que se obtienen con cada uno de los reguladores diseñados.

Como por norma general el enfoque de tiempo finito es más interesante que el de tiempo mínimo cuando nos encontramos ante casos reales como el comentado (dado que es capaz de generar acciones de control más suaves sobre el proceso), en el epígrafe 6.4.9. se va a diseñar un regulador de tiempo finito para el caso real bajo estudio.

Ambos ejemplos se verán en las secciones 6.4.8 y 6.4.9, pero antes se deben exponer las metodologías de resolución y posterior implementación llevadas a cabo para la obtención de los reguladores pertinentes.

#### 6.4.5. Metodología de resolución.

Una vez se ha decidido el tipo de regulador que se pretende diseñar, es decir, de tiempo mínimo o de tiempo finito, se aplicarán las ecuaciones obtenidas en el apartado anterior. Así pues, se deberá estudiar los órdenes de las dos ecuaciones para ajustar los órdenes de los polinomios  $\Omega(z_N^{-1})$  y  $\Lambda(z_N^{-N})$ . Se debe intentar hacer el polinomio  $\Lambda(z_N^{-N})$  del menor orden posible, pero siempre teniendo en cuenta que  $\tilde{m} = N \cdot m$ , siendo  $\tilde{m} = \text{ord}(\tilde{M}(z_N^{-1}))$  y  $m = \text{ord}(M(z_N^{-N}))$ .

Se propondrá, por lo tanto, el polinomio  $\Lambda(z_N^{-N})$ , de grado  $\lambda$ , ajustando el polinomio  $\Omega(z_N^{-1})$ , de grado  $q$ , para cumplir la ecuación correspondiente a  $\tilde{M}(z_N^{-1})$  de forma coherente.

Una vez planteadas las ecuaciones diofánticas se supondrá que los polinomios  $\tilde{M}(z_N^{-1})$  y  $M(z_N^{-N})$  tienen la forma:

$$\begin{aligned}\tilde{M}(z_N^{-1}) &= \tilde{m}_1 z_N^{-1} + \dots + \tilde{m}_i z_N^{-i} \\ 1 - M(z_N^{-N}) &= m_0 + m_1 z_N^{-N} + \dots + m_j z_N^{-jN}\end{aligned}$$

donde  $i$  y  $j$  dependen de los grados de las ecuaciones planteadas. A continuación, y por igualación de coeficientes, se construirá un sistema de ecuaciones mediante las  $\tilde{m}$  ecuaciones procedentes de  $\tilde{M}(z_N^{-1})$ , las  $m+1$  de  $M(z_N^{-N})$  y las  $m$  ecuaciones necesarias para hacer la ligadura entre ambas frecuencias. Esta ligadura establece que el lazo cerrado bifrecuencia y el lazo cerrado lento tienen que coincidir en los instantes  $kNT$ , donde  $k$  es entero. Para demostrar esto, se puede recurrir a la expresión (6-13) del Teorema 1, según la cual:

$$(\bar{Y}^T)^{NT} = (\bar{M}_N^T)^{NT} (R^T)^{NT} = M^{NT} R^{NT} = Y^{NT}$$

Para los casos más normales de diseño referido a entradas polinomiales tipo escalón y rampa se tendrán las siguientes expresiones:

- Caso escalón:

$$\begin{aligned}\left[\bar{M}_N^T R^T\right]^{NT} &= \left[\frac{w_1 z_N^{-1} + w_2 z_N^{-2} + w_3 z_N^{-3} + w_4 z_N^{-4} + \dots}{1 - z_N^{-1}}\right]^{NT} = \\ &= \left[\begin{aligned} &w_1 z_N^{-1} + (w_1 + w_2) z_N^{-2} + (w_1 + w_2 + w_3) z_N^{-3} \\ &+ (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) z_N^{-4} + \dots \end{aligned}\right]^{NT} = \text{¡con } N = 2! \\ &= (w_1 + w_2) z_N^{-2} + (w_1 + w_2 + w_3 + w_4) z_N^{-4} + \dots\end{aligned}$$

La posterior igualación de coeficientes de potencias análogas conduce a las referidas

ligaduras. En este caso concreto:

$$w_1 + w_2 = m_1$$

$$w_1 + w_2 + w_3 + w_4 = m_1 + m_2$$

- Caso rampa: Procediendo de forma análoga se llega a las siguientes ecuaciones de ligadura

$$2w_1 + w_2 = m_1$$

$$4w_1 + 3w_2 + 2w_3 + w_4 = 2m_1 + m_2$$

Además el número de incógnitas deberá ser igual que el número de ecuaciones para que se pueda resolver el sistema de ecuaciones. En el caso de que “Número de incógnitas > Número de ecuaciones” existirán grados de libertad, lo que significa que se podrá diseñar libremente un total de “Número de incógnitas - Número de ecuaciones” ecuaciones en aras a conseguir los objetivos de diseño, como es habitual en esta metodología de diseño digital.

#### 6.4.6. Metodología de implementación.

A la hora de implementar el algoritmo de control de un regulador multifrecuencia se van a considerar como entradas de referencia las más habituales, esto es, la entrada escalón y la entrada rampa. A partir de una u otra se construirá el polinomio  $W_R(z_N^{-1})$ . Las ecuaciones de ligadura serán (según el procedimiento mostrado en la sección anterior) de la forma  $m_i = \tilde{m}_{i,N}, \forall i$ .

Por su parte, cuando se implemente el programa de control se deberá considerar la expansión de las acciones de control lentas en el regulador rápido. Es decir, las acciones de control generadas por el subregulador lento serán rellenadas con ceros en los instantes de tiempo no múltiplos de  $NT$ . Esto no es más que hacer un *expand* de la señal de control lenta. En el Anexo IV.2 se muestra una macro Matlab ejemplo en la que se implementa un algoritmo de control de este tipo.

#### 6.4.7. Estudio de órdenes y grados de libertad.

En este apartado se va a realizar un estudio de los órdenes de las ecuaciones diofánticas propuestas en el diseño de reguladores multifrecuencia en el caso más habitual, esto es, cuando no hay polos ni ceros de módulo mayor o igual a la unidad. Dicho estudio tiene como fin detectar rápidamente la cantidad de grados de libertad que se tendrá en el diseño de los reguladores. La existencia de grados de libertad, como se comentó con anterioridad, supone la consideración de un mayor número de variables que de ecuaciones. Por norma general, la forma de deshacer dicha desigualdad es asignar a 0 las variables libres (las últimas  $\tilde{m}_i$ ).

##### 6.4.7.1. Tiempo Mínimo.

Se parte de:

$$\tilde{M}(z_N^{-1}) = W_R(z_N^{-1}) z_N^{-d} \Omega(z_N^{-1}) = \left[ 1 + \dots + z_N^{-(N-1)} \right]^R z_N^{-d} \Omega(z_N^{-1}) \quad (6-29)$$

$$1 - M(z_N^{-N}) = (1 - z_N^{-N})^R \Lambda(z_N^{-N}) \quad (6-30)$$

donde

$$\text{ord}(\tilde{M}(z_N^{-1})) = \tilde{m}$$

$$\text{ord}(W_R(z_N^{-1})) = R(N-1)$$

$$\text{ord}(\Omega(z_N^{-1})) = \mathbf{q}$$

$$\text{ord}(M(z_N^{-N})) = m$$

$$\text{ord}(\Lambda(z_N^{-N})) = \mathbf{1}$$

$d =$  diferencia n° polos y ceros del proceso

Puesto que se va a diseñar un regulador de tiempo mínimo se puede suponer que  $\text{ord}(\Lambda(z_N^{-N})) = 0$ , lo cual será siempre cierto si  $NR \geq (N-1)R + d$ , es decir, si  $R \geq d$  (que será cierto en la mayoría de los casos). Por tanto, de (6-30) se tiene:

$$m = R + \mathbf{1} = R + 0 = R$$

Y de (6-29):

$$\tilde{m} = N \cdot m = N \cdot R = (N-1)R + d + \mathbf{q}$$

$$NR = NR - R + d + \mathbf{q}$$

$$\mathbf{q} = R - d, \quad \forall N$$

En resumen, se tendrá

- Incógnitas:  $m$  (de  $M(z_N^{-N})$ ) +  $\tilde{m}$  (de  $\tilde{M}(z_N^{-1})$ ) + 1 (de  $\Lambda_0$ ) +  $(\mathbf{q} + 1)$  (de  $\Omega_i$ )
- Ecuaciones:  $(m + 1)$  (de  $M(z_N^{-N})$ ) +  $\tilde{m}$  (de  $\tilde{M}(z_N^{-1})$ ) +  $m$  (ligadura)

Como es bien sabido para que el sistema de ecuaciones tenga una única solución el número de ecuaciones debe ser igual al número de incógnitas. Así pues existirán grados de libertad siempre y cuando se cumpla la siguiente desigualdad:

Número de incógnitas > Número de ecuaciones

$$m + \tilde{m} + 1 + \mathbf{q} + 1 > m + 1 + \tilde{m} + m$$

$$\mathbf{q} + 1 > m$$

$$R - d + 1 > R$$

$$1 > d \Rightarrow d = 0$$

En este caso, existirá un grado de libertad como máximo siempre y cuando la diferencia entre polos y ceros del proceso sea 0. En el caso de que se hubiera considerado  $\lambda \neq 0$  se puede comprobar que la inecuación queda como sigue:  $N\mathbf{1} \geq d$ ; es decir, el producto entre la multiplicidad  $N$  y el grado de  $\Lambda(z_N^{-N})$  deberá de ser mayor que la diferencia de polos y ceros,  $d$ , para que hayan grados de libertad.



### 6.4.7.2. Tiempo Finito.

El razonamiento se va a llevar a cabo para el caso regular, lo cual no supone perder generalidad. Por tanto, en este caso se parte de:

$$\tilde{M}(z_N^{-1}) = W_R(z_N^{-1})B(z_N^{-1})W_A^T(z_N^{-1})\Omega(z_N^{-1}) = \left[1 + \dots + z_N^{-(N-1)}\right]^R \tilde{B}(z_N^{-1})\Omega(z_N^{-1}) \quad (6-31)$$

$$1 - M(z_N^{-N}) = (1 - z_N^{-N})^R \Lambda(z_N^{-N}) \quad (6-32)$$

donde

$$\tilde{B}(z_N^{-1}) = B(z_N^{-1})W_A^T(z_N^{-1}) \quad \text{siendo} \quad G_p = \frac{B(z_N^{-1})}{A(z_N^{-1})}$$

$$\text{ord}(B(z_N^{-1})) = b$$

$$\text{ord}(A(z_N^{-1})) = a$$

$$\text{ord}(\tilde{B}(z_N^{-1})) = a \cdot N$$

$$\text{ord}(\tilde{M}(z_N^{-1})) = \tilde{m}$$

$$\text{ord}(W_R(z_N^{-1})) = R(N-1)$$

$$\text{ord}(\Omega(z_N^{-1})) = \mathbf{q}$$

$$\text{ord}(M(z_N^{-N})) = m$$

$$\text{ord}(\Lambda(z_N^{-N})) = \mathbf{1}$$

Sin más que operar con (6-31) y (6-32) se obtendrá:

- de (6-32):

$$m = R + \mathbf{1}$$

- de (6-31):

$$\tilde{m} = N \cdot m = N \cdot (R + \mathbf{1}) = (N-1)R + a \cdot N + \mathbf{q}$$

$$NR + N\mathbf{1} = NR - R + aN + \mathbf{q}$$

$$\mathbf{q} = N\mathbf{1} + R - Na = N(\mathbf{1} - a) + R$$

En resumen, se tendrá

- Incógnitas:  $m$  (de  $M(z_N^{-N})$ ) +  $\tilde{m}$  (de  $\tilde{M}(z_N^{-1})$ ) +  $(\mathbf{1} + 1)$  (de  $\Lambda_i$ ) +  $(\mathbf{q} + 1)$  (de  $\Omega_i$ )
- Ecuaciones:  $(m + 1)$  (de  $M(z_N^{-N})$ ) +  $\tilde{m}$  (de  $\tilde{M}(z_N^{-1})$ ) +  $m$  (ligadura)

Existirán grados de libertad si se cumple la desigualdad:

Número de incógnitas > Número de ecuaciones

$$m + \tilde{m} + \mathbf{1} + 1 + \mathbf{q} + 1 > m + 1 + \tilde{m} + m$$

$$\mathbf{1} + \mathbf{q} + 1 > m \Rightarrow \mathbf{q} \geq R$$

$$\mathbf{1} + N(\mathbf{1} - a) + R + 1 > R + \mathbf{1}$$

$$N(\mathbf{1} - a) > -1 \approx \mathbf{1} \geq a$$

Por lo tanto existirán grados de libertad siempre y cuando el orden del denominador del proceso sea menor o igual que el orden del polinomio  $\Lambda(z_N^{-N})$  propuesto, o, de la misma forma, siempre y cuando coincida que el orden de la referencia sea menor o igual al orden del polinomio  $\Omega(z_N^{-1})$  contemplado.

#### 6.4.8. Ejemplo Regulador de Tiempo Mínimo.

Como se comentó con anterioridad, una vez vistas las metodologías de resolución e implementación, en esta sección se va a conseguir diseñar dos reguladores de tiempo mínimo para un caso real: el eje Y del robot porticado ubicado en el DISA. El primero de los controladores actuará de forma regular sobre el proceso, mientras que el segundo lo hará según un patrón irregular predeterminado (concretamente tomará en este caso  $\tau_1=2NT/3$ ,  $\tau_2=NT/3$ ).

El proceso bajo estudio queda representado en continuo como:

$$G_p(s) = \frac{2240.85}{s}$$

Se va a trabajar con un periodo lento  $NT=0.02$  seg y con una multiplicidad  $N=2$ . Siguiendo el modelado presentado en el capítulo 3, se tiene las siguientes f.d.t. discretas:

- caso regular:

$$G_p^T = \frac{B_p^T W_A^T}{A_p^T W_A^T} = \frac{22.4085 z_2^{-1} (1 + z_2^{-1})}{(1 - z_2^{-1})(1 + z_2^{-1})} = \frac{22.4085 z_2^{-1} + 22.4085 z_2^{-2}}{1 - z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}$$

- caso irregular ( $\tau_1=2NT/3$ ,  $\tau_2=NT/3$ ):

$$G_p^T = \frac{\hat{B}_p^T W_B^T}{A_p^T W_A^T} = 0.72603 \frac{22.4085 z_2^{-1} (1 + 1.75473 z_2^{-1})}{(1 - z_2^{-1})(1 + z_2^{-1})} = \frac{16.26919 z_2^{-1} + 28.54805 z_2^{-2}}{1 - z_2^{-2}} = \frac{\tilde{\tilde{B}}_p^T}{(A_p^{NT})^T} \quad (6-33)$$

Cabe mencionar que en este caso al tener un polo en  $z_2=1$ , el sistema es críticamente estable en bucle abierto, por tanto, como ya se indicó al final del capítulo de modelado, no tiene sentido hablar de ajuste de la ganancia estática, si no más bien de un ajuste a partir de los coeficientes del numerador. Por tanto, si se observa:

- numerador caso regular:

$$num_{reg}(z_2^{-1}) = 22.4085 z_2^{-1} + 22.4085 z_2^{-2} \Rightarrow num_{reg}(1) = 44.817$$

- numerador caso irregular:

$$num_{irreg}(z_2^{-1}) = 22.4085 z_2^{-1} + 39.3208 z_2^{-2} \Rightarrow num_{irreg}(1) = 61.7294$$

se comprende el ajuste final mostrado en (6-33).

Para terminar con lo relativo al modelado, notar que tanto de la f.d.t. regular como de la irregular se puede derivar la misma f.d.t. a periodo lento, (Salt 1992):

$$G_p^{NT} = \frac{B_p^{NT}}{A_p^{NT}} = \frac{44.817 z_2^{-2}}{(1 - z_2^{-2})}$$

que coincide con la resultante de discretizar  $G_p(s)$  a periodo NT.

Centrándose ya en aspectos de diseño, a continuación se plantean las ecuaciones diofánticas consideradas según los planteamientos de tiempo mínimo de 6.4.3. Es interesante observar que tanto en el caso regular como en el irregular se hará uso del segundo de los planteamientos, dado que en ambos casos el sistema presenta un cero de módulo mayor o igual que la unidad, el cual debe ser cancelado para evitar inestabilizar la respuesta del sistema. Por tanto, teniendo en cuenta que la referencia va a ser una rampa (algo habitual en entornos robotizados):

- caso regular:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z_2^{-1}) &= (1 + z_2^{-1})^2 z_2^{-1} (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1}) \\ 1 - M(z_2^{-2}) &= (1 - z_2^{-2})^2 \Lambda_0 \end{aligned} \quad (6-34)$$

- caso irregular:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z_2^{-1}) &= (1 + z_2^{-1})^2 z_2^{-1} (1 + 1.75473 z_2^{-1}) (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1} + \Omega_2 z_2^{-2}) \\ 1 - M(z_2^{-2}) &= (1 - z_2^{-2})^2 (\Lambda_0 + \Lambda_1 z_2^{-2}) \end{aligned} \quad (6-34b)$$

Planteadas las ecuaciones de (6-34) y (6-34b), se resuelve el sistema de ecuaciones que se deriva de cada una de ellas (según lo expuesto en 6.4.5). Tras ello, dependiendo del caso se obtendrán los siguientes reguladores:

- caso regular:

$$\begin{aligned} G_{RL}(z_2^{-2}) &= \frac{1}{1 - 2z_2^{-2} + z_2^{-4}} \\ G_{RR}(z_2^{-1}) &= \frac{1.5z_2^{-1} + 2z_2^{-2} - 2z_2^{-3} - 3z_2^{-4} + 0.5z_2^{-5} + z_2^{-6}}{22.4085z_2^{-1} + 22.4085z_2^{-2}} \end{aligned}$$

- caso irregular:

$$G_{RL}(z_2^{-2}) = \frac{1}{1 - 2z_2^{-2} + z_2^{-4}}$$

$$G_{RR}(z_2^{-1}) = \frac{0.660134z_2^{-1} + 2z_2^{-2} + 0.519585z_2^{-3} - 3z_2^{-4} - 2.01958z_2^{-5} + z_2^{-6} + 0.839864z_2^{-7}}{16.26919z_2^{-1} + 28.54805z_2^{-2}}$$

Como cabía esperar, se observa que en ambos casos los reguladores lentos coinciden, al igual que los coeficientes del numerador de los reguladores rápidos asociados a potencias pares. Todo ello se explica en el hecho de que en ambos casos (regular e irregular) hay muestreo en los instantes  $kNT$ , con  $k$  entero. Por su parte, como en el segundo planteamiento de tiempo mínimo se considera en  $\tilde{M}(z_2^{-1})$  los ceros de módulo mayor que la unidad de la f.d.t. del proceso, y dado que existe uno en este ejemplo, el cual, a su vez, contempla la variación del esquema de muestreo, los coeficientes del numerador asociados a potencias impares para ambos reguladores rápidos resultan diferentes, ya que el muestreo intermedio de cada metaperiodo se produce a instantes de tiempo distintos dependiendo del caso considerado (regular o irregular).

Por otro lado, los coeficientes del denominador para los reguladores rápidos pertenecientes a caso regular e irregular no coinciden entre sí, lo cual se debe al propio modelo del proceso que varía dependiendo del caso considerado.

Los reguladores anteriores se implementan (según lo expuesto en 6.4.6) mediante macros de Matlab. Los resultados se muestran en las figuras 6-33, 6-34 y 6-35 para caso regular, y 6-36, 6-37 y 6-38 para caso irregular.

A la vista de los resultados, como cabía esperar ambas respuestas (caso regular y caso irregular) logran seguir fielmente a la referencia y, además, coinciden a periodo lento (figuras 6-33 y 6-36). Sin embargo a periodo rápido (figuras 6-34 y 6-37) se observa que, en este caso, el enfoque irregular tiene un peor comportamiento en lo concerniente a rapidez en el seguimiento de la referencia, ya que al considerar en  $\tilde{M}(z_2^{-1})$  el cero de módulo mayor de la unidad que resulta del modelado en irregular, dicho término experimenta un aumento en su orden, que hace retrasar el seguimiento exacto de la referencia. En concreto este aumento es de una unidad (ya que  $\Omega_2 = 0$ ), lo que hace retrasar en un instante (a periodo rápido) la obtención de error nulo en el seguimiento de la referencia. De la misma forma, se puede observar que para el caso regular se cuenta con una señal de control que tras una primera acción relativamente enérgica se estabiliza en un valor, mientras que en el caso irregular se necesita de dos acciones (pero más suaves) hasta que se estabiliza la señal de control en el mismo valor aproximadamente que para el caso regular (figuras 6-35 y 6-38).

En definitiva, en este ejemplo se ha podido obtener una señal de control más suave en el caso irregular con respecto a la obtenida en el caso regular a costa de obtener a periodo rápido  $T$  un seguimiento más tardío de la referencia.

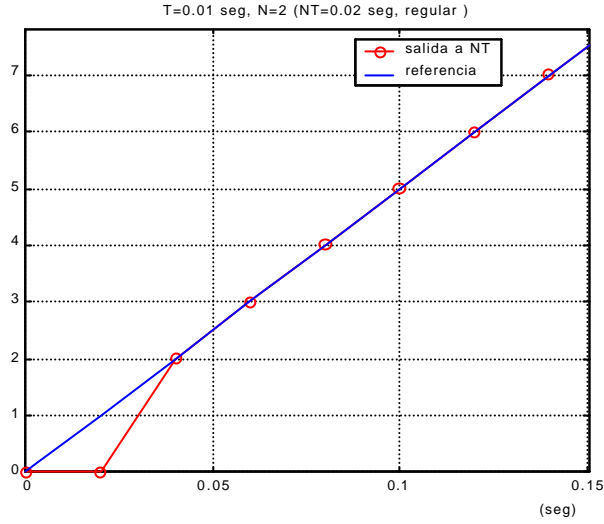


Figura 6-33: Respuesta a NT Tiempo Mínimo bifrecuencia regular

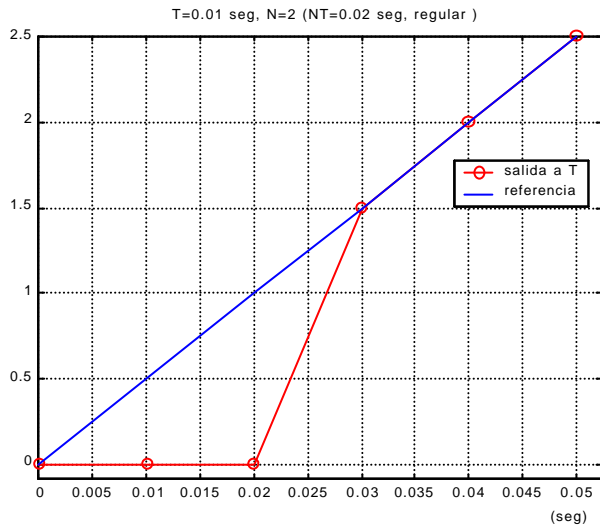


Figura 6-34: Detalle respuesta a T Tiempo Mínimo bifrecuencia regular

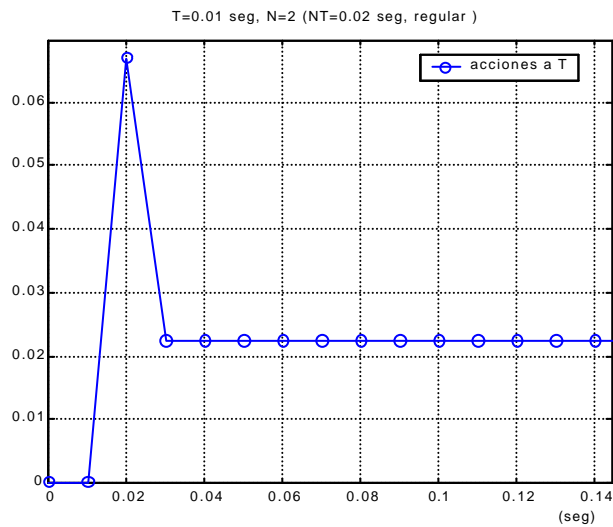


Figura 6-35: Acciones de control a T Tiempo Mínimo bifrecuencia regular

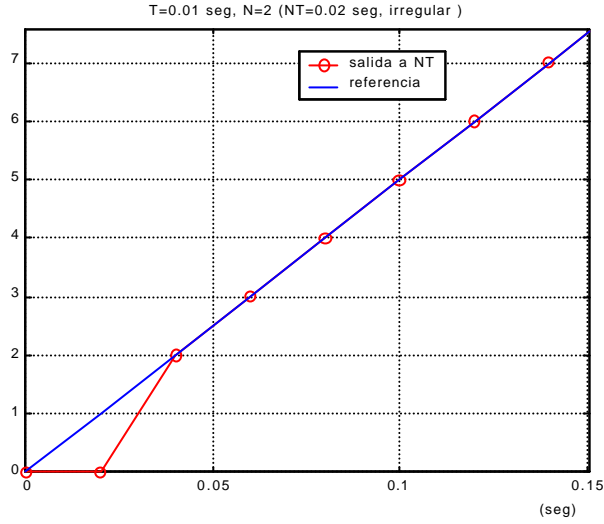


Figura 6-36: Respuesta a NT Tiempo Mínimo bifrecuencia irregular

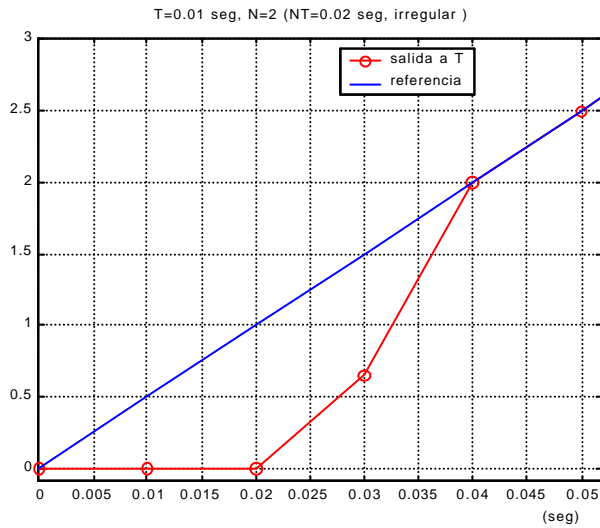


Figura 6-37: Detalle respuesta a T Tiempo Mínimo bifrecuencia irregular

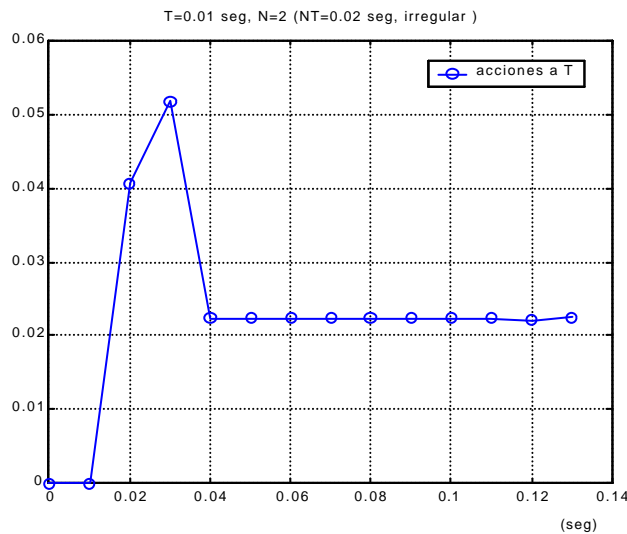


Figura 6-38: Acciones de control a T Tiempo Mínimo bifrecuencia irregular

#### 6.4.9. Ejemplo Regulador de Tiempo Finito.

Como se comentó con anterioridad, en esta sección se va a conseguir diseñar dos reguladores de tiempo finito para un caso real: el eje Y del robot porticado ubicado en el DISA. El primero de los controladores actuará de forma regular sobre el proceso, mientras que el segundo lo hará según un patrón irregular predeterminado (el mismo que 6.4.8, esto es,  $\tau_1=2NT/3$ ,  $\tau_2=NT/3$ ).

Centrándose directamente en aspectos de diseño (ya que el modelado se plantea en 6.4.8) a continuación se muestran las ecuaciones diofánticas consideradas en cada caso (según planteamiento de 6.4.4) teniendo en cuenta que la referencia va a ser una rampa (algo habitual en entornos robotizados):

- caso regular:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z_2^{-1}) &= (1 + z_2^{-1})^2 22.4085 z_2^{-1} (1 + z_2^{-1}) (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1} + \Omega_2 z_2^{-1}) \\ 1 - M(z_2^{-2}) &= (1 - z_2^{-2})^2 \Lambda_0 \end{aligned} \quad (6-35)$$

- caso irregular:

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z_2^{-1}) &= (1 + z_2^{-1})^2 0.72063 \cdot 22.4085 z_2^{-1} (1 + 1.75473 z_2^{-1}) (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1} + \Omega_2 z_2^{-2}) \\ 1 - M(z_2^{-2}) &= (1 - z_2^{-2})^2 (\Lambda_0 + \Lambda_1 z_2^{-2}) \end{aligned} \quad (6-36)$$

Planteadas las ecuaciones (6-35) y (6-36), se resuelven para cada una los sistemas de ecuaciones que se derivan de ellas (según lo expuesto en 6.4.5). Tras ello, se obtendrán los siguientes reguladores:

- caso regular:

$$\begin{aligned} G_{RL}(z_2^{-2}) &= \frac{1}{1 - 2z_2^{-2} + z_2^{-4}} \\ G_{RR}(z_2^{-1}) &= \frac{0.875z_2^{-1} + 2z_2^{-2} - 0.125z_2^{-3} - 3z_2^{-4} - 1.375z_2^{-5} + z_2^{-6} + 0.625z_2^{-7}}{22.4085z_2^{-1} + 22.4085z_2^{-2}} \end{aligned}$$

- caso irregular:

$$\begin{aligned} G_{RL}(z_2^{-2}) &= \frac{1}{1 - 2z_2^{-2} + z_2^{-4}} \\ G_{RR}(z_2^{-1}) &= \frac{0.660134z_2^{-1} + 2z_2^{-2} + 0.519585z_2^{-3} - 3z_2^{-4} - 2.01958z_2^{-5} + z_2^{-6} + 0.839864z_2^{-7}}{16.26919z_2^{-1} + 28.54805z_2^{-2}} \end{aligned}$$

Como cabía esperar, al igual que se observó en el ejemplo de tiempo mínimo, se ve que en ambos casos los reguladores lentos coinciden, al igual que los coeficientes del numerador de los reguladores rápidos asociados a potencias pares. Todo ello se explica en el hecho de que en ambos casos (regular e irregular) hay muestreo en los instantes  $kNT$ , con  $k$  entero. Por su parte, y dado que en el planteamiento de tiempo finito se considera en  $\tilde{M}(z_2^{-1})$  el numerador de la f.d.t. del proceso, que, a su vez, es donde se contempla la variación del esquema de muestreo, los coeficientes del numerador asociados a potencias impares para ambos reguladores rápidos son diferentes (al igual que en el ejemplo de tiempo mínimo), ya que el muestreo intermedio de cada metaperiodo se produce a instantes de tiempo distintos dependiendo del caso considerado (regular o irregular).

Es interesante también observar que los coeficientes del denominador de los reguladores rápidos tampoco coinciden entre ambos casos, como ya sucedía en tiempo mínimo, lo cual se debe al propio modelo del proceso considerado en uno u otro caso. Sin embargo, para los casos regulares se obtienen los mismos coeficientes tanto en tiempo finito como en tiempo mínimo, al igual que sucede con los casos irregulares, ya que tan sólo dependen del modelo de la f.d.t. a periodo rápido.

También destacar que para este ejemplo el regulador rápido del caso irregular coincide con el alcanzado en tiempo mínimo, dado que las ecuaciones diofánticas contempladas son similares (sólo se diferencian en que, en el caso de tiempo finito, se ha incluido en  $\tilde{M}(z_2^{-1})$  la constante perteneciente al ajuste de ganancia y la propia ganancia del proceso, lo cual no hace variar el resultado final de los coeficientes de dicho regulador). Esto va a hacer que el sistema de control de tiempo finito, en este caso, dé la misma señal de salida y de control que la obtenida en tiempo mínimo.

Por último, reseñar el hecho de que como los reguladores lentos son idénticos a los conseguidos en tiempo mínimo, los coeficientes asociados a potencias pares para los reguladores rápidos de tiempo finito coinciden, tanto en un caso como en el otro, con los calculados para tiempo mínimo. Todo ello hace prever la misma respuesta a periodo lento que la conseguida en tiempo mínimo.

Los reguladores mostrados anteriormente se implementan (según lo expuesto en 6.4.6) mediante macros de Matlab. Los resultados se muestran en las figuras 6-39, 6-40 y 6-41 para caso regular, y 6-36, 6-37 y 6-38 para caso irregular, ya que en este último caso se trata de las mismas respuestas obtenidas ya en tiempo mínimo.



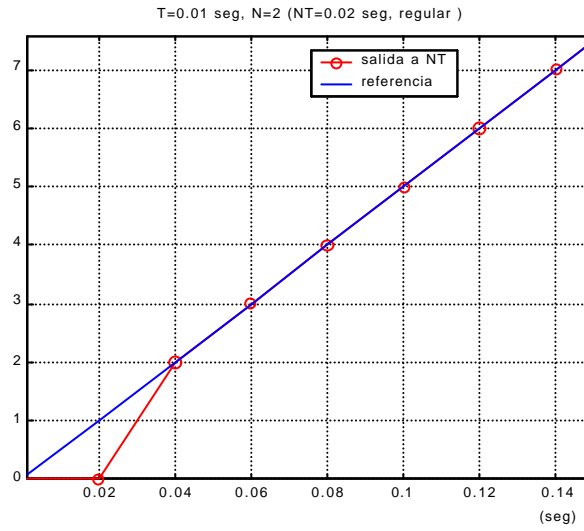


Figura 6-39: Respuesta a NT Tiempo Finito bifrecuencia regular

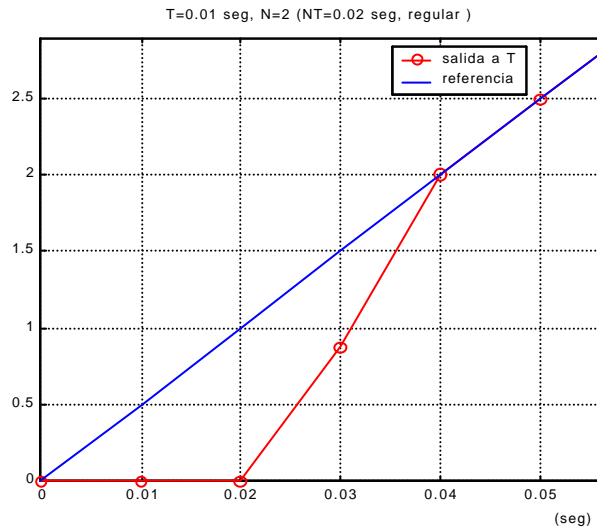


Figura 6-40: Detalle respuesta a T Tiempo Finito bifrecuencia regular

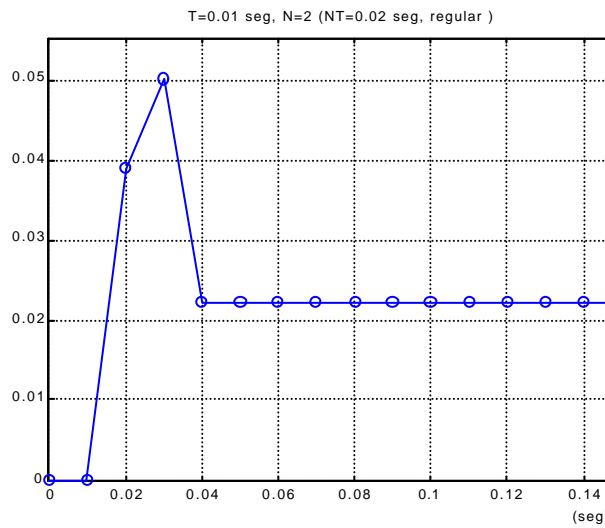


Figura 6-41: Acciones de control a T Tiempo Finito bifrecuencia regular

Como cabía esperar ambas respuestas (caso regular y caso irregular) logran seguir fielmente a la referencia y, además, coinciden a periodo lento entre ellas (figuras 6-39 y 6-36) y con las de tiempo mínimo (figuras 6-33 y 6-36). Sin embargo, a periodo rápido se observa en las figuras 6-40 y 6-37 que, en este caso, el enfoque regular tiene un comportamiento ligeramente mejor que el irregular, al generar menor error en el seguimiento de la referencia para los primeros instantes de simulación (régimen transitorio). De la misma forma, en el transitorio el caso regular actúa sobre el proceso con unas acciones levemente más suaves que el irregular, para terminar en el permanente actuando prácticamente con el mismo valor de acción de control rápida (figuras 6-41 y 6-38).

En definitiva, y aunque la diferencia entre caso regular e irregular es leve, se puede concluir que, en el ejemplo tratado, actuar bajo un esquema de muestreo regular sobre el proceso real repercute en un mejor seguimiento de la referencia y en la aplicación de acciones de control más suaves respecto del caso irregular.

Por último, si se compara la respuesta obtenida con el regulador de tiempo finito para el caso regular con respecto a la respuesta obtenida con el de tiempo mínimo, como era de esperar, esta última alcanza antes a la referencia a costa de someter al proceso a acciones de control de mayor magnitud. En el caso irregular esta diferencia se difumina dada la elección de  $\tilde{M}(z_2^{-1})$  en el regulador de tiempo mínimo.

#### 6.4.10. Diseño con Prealimentación.

La idea del control con prealimentación que quiere llevarse a cabo queda reflejada en la figura 6-42. En ella se puede observar que:

$$\frac{Y(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \left( 1 + \frac{G_f(z^{-1})}{G_c(z^{-1})} \right) \left( \frac{G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})}{1 + G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})} \right)$$

$$\text{si } G_f(z^{-1}) = \frac{1}{G_p(z^{-1})} \Rightarrow \frac{Y(z^{-1})}{R(z^{-1})} = \left( 1 + \frac{G_f(z^{-1})}{G_c(z^{-1})} \right) \left( \frac{G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})}{1 + G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})} \right) =$$

$$= \left( \frac{1 + G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})}{G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})} \right) \left( \frac{G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})}{1 + G_c(z^{-1})G_p(z^{-1})} \right) \Rightarrow Y(z^{-1}) = R(z^{-1})$$

es decir, se garantiza conseguir un seguimiento exacto de la referencia.

Si se considera como controlador un regulador de cancelación (vistos en las secciones previas), el diagrama de bloques quedará con mayor nivel de detalle como se muestra en la figura 6-43. En ella se puede ver que la acción de control que en última instancia se inyecta al proceso,  $U_i^T$ , resulta de sumar la acción a periodo rápido del regulador de cancelación,  $U_2^T$ , y la acción, también a periodo rápido, de la prealimentación,  $U_f^T$ . Recaltar que entre ambos bloques lento y rápido del regulador de cancelación existe la etapa de expansión de la señal de control lenta,  $Exp$ , con el fin de convertirla a rápida y poder así trabajar con el bloque definido

a periodo rápido. Con esta estructura de control se garantiza, por tanto, un seguimiento exacto de la referencia a periodo lento (periodo en el que se tiene medida de la salida del sistema).

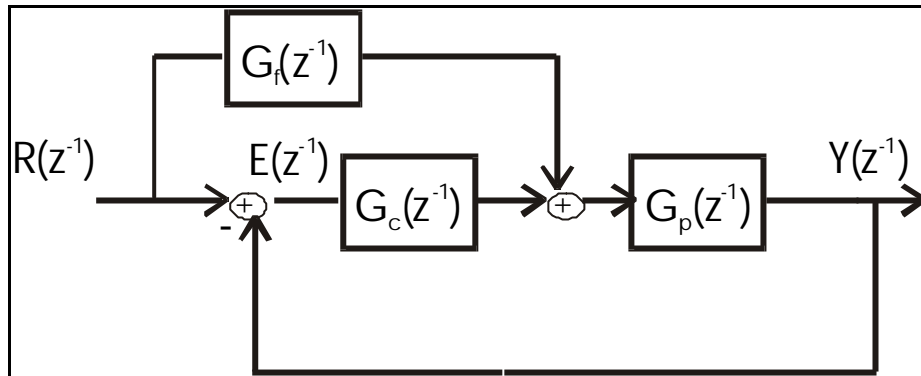


Figura 6-42: Diagrama de bloques diseño con prealimentación.

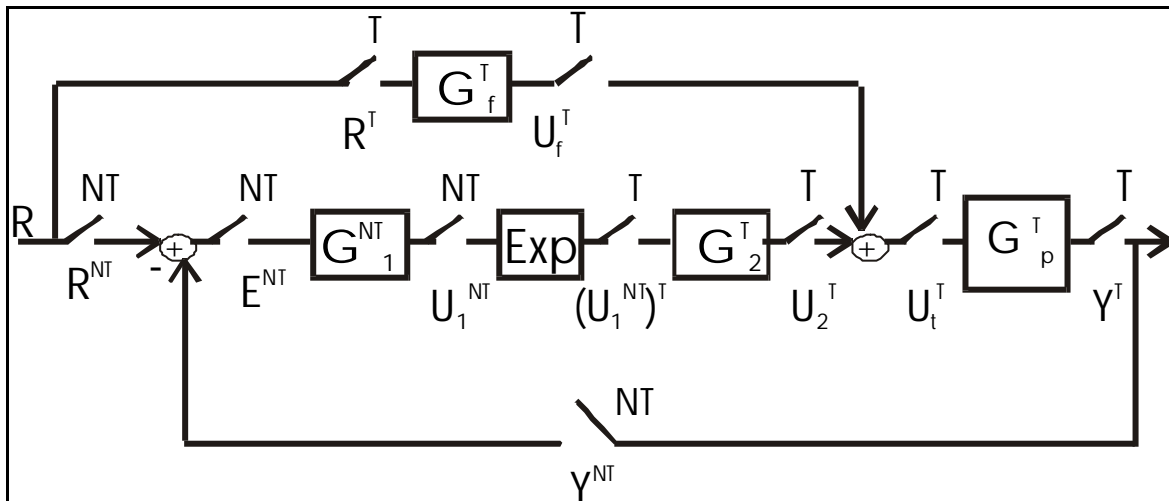


Figura 6-43: Detalle diagrama de bloques diseño con prealimentación.

#### 6.4.10.1. Ejemplo

Para el proceso presentado en 3.3 (capítulo 3) se diseña un regulador de tiempo finito, de manera que con  $NT=0.2$  y  $N=2$  quedan las ecuaciones diofánticas siguientes:

- caso regular:

$$\tilde{M}(z_2^{-1}) = (1 + z_2^{-1})^2 0.0997 z_2^{-1} (1 - 0.7402 z_2^{-1}) (1 + 0.9048 z_2^{-1}) (1 + 0.8187 z_2^{-1}) \cdot (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1} + \Omega_2 z_2^{-2} + \Omega_3 z_2^{-3} + \Omega_4 z_2^{-4}) \quad (6-37)$$

$$1 - M(z_2^{-2}) = (1 - z_2^{-2})^2 (1 - 0.9048 z_2^{-2}) (1 - 0.8187 z_2^{-2}) (\Lambda_0 + \Lambda_1 z_2^{-2})$$

- caso irregular ( $\tau_1=NT/3$ ,  $\tau_2=2NT/3$ ):

$$\begin{aligned} \tilde{M}(z_2^{-1}) &= (1+z_2^{-1})^2 \frac{1.50072}{2.0679} 0.0997 z_2^{-1} (1-0.74015 z_2^{-1}) (1+0.7557 z_2^{-1}) (1+1.7184 z_2^{-1}) \cdot \\ &\quad \cdot (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1} + \Omega_2 z_2^{-2} + \Omega_3 z_2^{-3} + \Omega_4 z_2^{-4}) \end{aligned} \quad (6-38)$$

$$1 - M(z_2^{-2}) = (1 - z_2^{-2})^2 (1 - 0.9048 z_2^{-2}) (1 - 0.8187 z_2^{-2}) (\Lambda_0 + \Lambda_1 z_2^{-2})$$

De (6-37) y (6-38), tras resolver los sistemas de ecuaciones derivados, se obtienen los siguientes reguladores:

- caso regular:

$$G_{RL}(z_2^{-2}) = \frac{1}{1 - 3.4889 z_2^{-2} + 4.53659 z_2^{-4} - 2.58638 z_2^{-6} + 0.54872 z_2^{-8}} = \frac{U_1^{NT}}{E^{NT}}$$

$$G_{RR}(z_2^{-1}) = \frac{-16.7483 z_2^{-1} + 3.48893 z_2^{-2} + 85.7271 z_2^{-3} - 9.7214 z_2^{-4} - 188.3144 z_2^{-5} + 11.2406 z_2^{-6} + 208.7041 z_2^{-7} - 6.8835 z_2^{-8} - 128.5688 z_2^{-9} + 2.2362 z_2^{-10} + 41.9178 z_2^{-11} - 0.3010 z_2^{-12} - 5.6576 z_2^{-13}}{0.0997 z_2^{-1} + 0.09803 z_2^{-2} - 0.0533 z_2^{-3} - 0.0546 z_2^{-4}} = \frac{U_2^T}{(U_1^{NT})^T}$$

- caso irregular:

$$G_{RL}(z_2^{-2}) = \frac{1}{1 - 3.4889 z_2^{-2} + 4.53659 z_2^{-4} - 2.58638 z_2^{-6} + 0.54872 z_2^{-8}} = \frac{U_1^{NT}}{E^{NT}}$$

$$G_{RR}(z_2^{-1}) = \frac{-9.6696 z_2^{-1} + 3.48893 z_2^{-2} + 75.3044 z_2^{-3} - 9.7214 z_2^{-4} - 203.9074 z_2^{-5} + 11.2406 z_2^{-6} + 270.3886 z_2^{-7} - 6.8835 z_2^{-8} - 191.4161 z_2^{-9} + 2.2362 z_2^{-10} + 69.5721 z_2^{-11} - 0.3010 z_2^{-12} - 10.2122 z_2^{-13}}{0.72572 (0.0997 z_2^{-1} + 0.1728 z_2^{-2} - 0.0533 z_2^{-3} - 0.0958 z_2^{-4})} = \frac{U_2^T}{(U_1^{NT})^T}$$

Como cabía esperar, y ya se comentó con anterioridad, los reguladores lentos y los coeficientes pares del numerador de los rápidos coinciden. Esto va a suponer tener una misma respuesta a periodo lento tanto para caso regular como irregular. Por su parte, los coeficientes impares del numerador y todos los coeficientes del denominador de los reguladores rápidos son distintos entre sí, ya que el patrón de muestreo es diferente, lo cual supondrá diferentes respuestas a periodo rápido.

Los resultados para este ejemplo se muestran en las figuras 6-44, 6-45 y 6-46. En ellas se observa que, aunque a periodo lento el transitorio es bueno, un análisis más detallado a periodo rápido descubre unos picos muy pronunciados tanto en el caso de muestreo regular como en el de irregular, los cuales pueden hacer incluso desaconsejable el uso de esta

estrategia de control. Sin embargo, en este caso, la adición de la técnica de control por prealimentación permite mejorar el régimen transitorio del sistema. Para ello, en cada caso se implementarán los siguientes reguladores de prealimentación (a añadir a los anteriores de tiempo finito):

- caso regular:

$$G_f(z_2^{-1}) = \frac{1 - 1.4889z_2^{-2} + 0.5487z_2^{-4}}{0.0997z_2^{-1} + 0.09803z_2^{-2} - 0.0533z_2^{-3} - 0.0546z_2^{-4}} = \frac{U_f^T}{R^T}$$

- caso irregular:

$$G_f(z_2^{-1}) = \frac{1 - 1.4889z_2^{-2} + 0.5487z_2^{-4}}{0.72572(0.0997z_2^{-1} + 0.1728z_2^{-2} - 0.0531z_2^{-3} - 0.0958z_2^{-4})} = \frac{U_f^T}{R^T}$$

Los resultados añadiendo la prealimentación se muestran en las figuras 6-47 y 6-48. Queda patente que a periodo lento (figura 6-47) se sigue en todo instante de tiempo  $kNT$  ( $k$  entero) fielmente a la referencia (tal y como establece el diseño con prealimentación), mejorando la respuesta conseguida anteriormente (figura 6-44). Por su parte, un estudio más detallado a periodo rápido (figura 6-48) revela un mejor comportamiento en lo referente a la sobreoscilación máxima del sistema respecto a la obtenida antes (figuras 6-45 y 6-46), pero, sin embargo, el tiempo de establecimiento aumenta considerablemente. Cabe hacer notar que la estrategia con prealimentación consigue respuestas idénticas tanto para el caso regular como el irregular, ya que, como se está trabajando con modelos lineales invariantes en el tiempo se consigue ajustar a periodo  $NT$  desde el principio la salida del sistema con la referencia, lo que supone la generación de una señal de error nula y, a su vez, una señal de control proveniente del regulador de cancelación también prácticamente nula, dejando toda la responsabilidad del control del proceso a la parte de la prealimentación, donde, como es sabido, el modelo del proceso es cancelado.

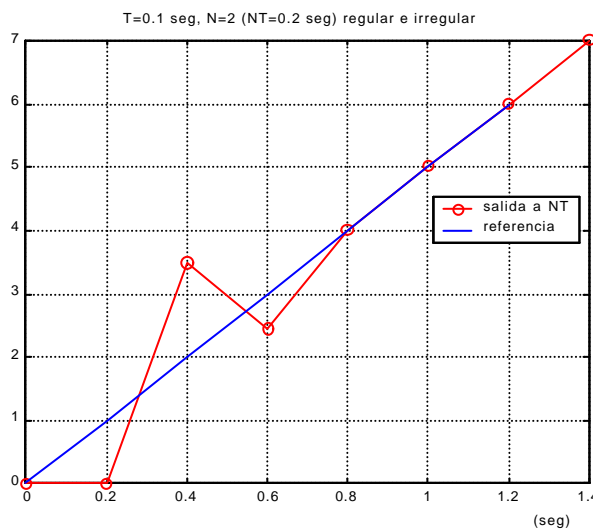


Figura 6-44: Respuesta a NT Tiempo Finito bifrecuencia regular e irregular

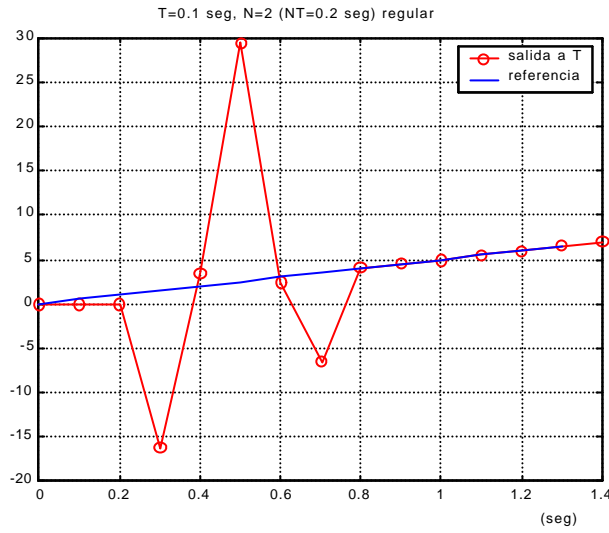


Figura 6-45: Detalle respuesta a T Tiempo Finito bifrecuencia regular

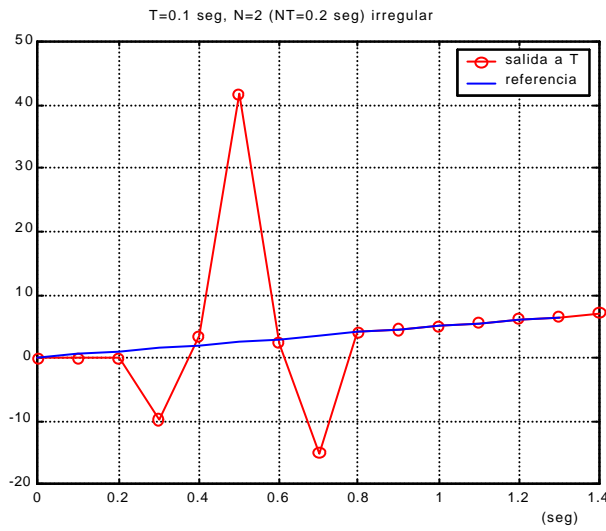


Figura 6-46: Detalle respuesta a T Tiempo Finito bifrecuencia irregular

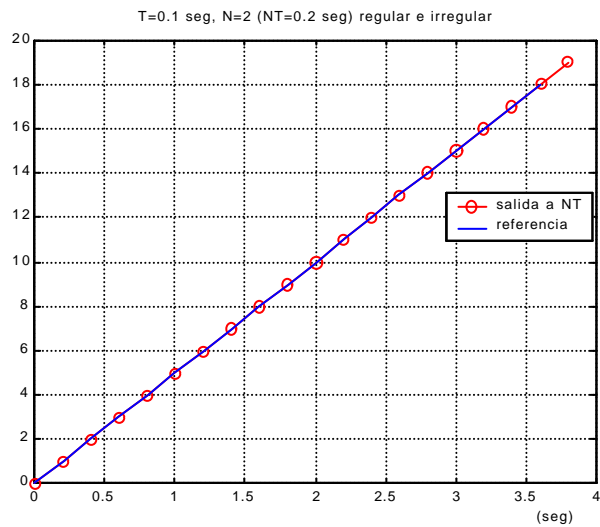


Figura 6-47: Respuesta a NT Tiempo Finito bifrec. regular e irregular con Prealimentación

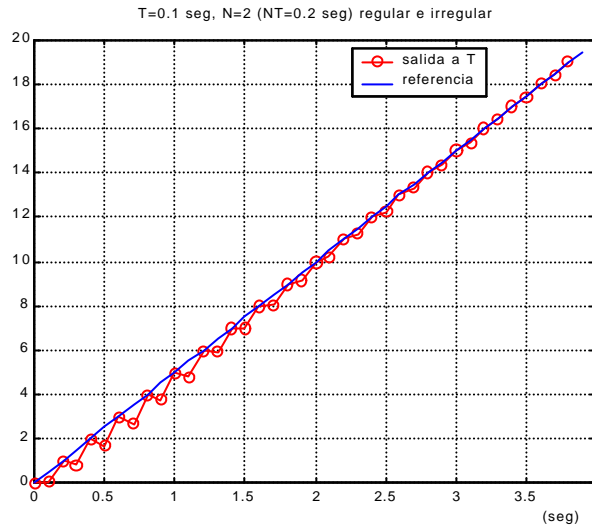


Figura 6-48: Detalle Respuesta a T Tiempo Finito bifre. regular e irregular con Prealiment.

### 6.5. REGULADORES DE ASIGNACIÓN DE POLOS Y CEROS.

La teoría y procedimientos desarrollados en el epígrafe anterior se han aplicado a reguladores de cancelación, que como es conocido, presentan un comportamiento poco robusto. Es por ello que ahora se van a aplicar a un tipo de reguladores de asignación de polos y ceros introducidos por (Åström y Wittenmark, 1988), quienes los acuñan como reguladores de tres ramas R-S-T, que son más robustos y cuyo diseño queda basado en la resolución de una ecuación diofántica en la asignación de polos (como es usual) y una etapa de prealimentación originalmente conocida por polinomio T.

Para no confundir la notación de la parte R del regulador con la notación empleada para la referencia de entrada, dicha parte R se simbolizará mediante el polinomio F. De la misma manera, para no confundir la parte T del regulador con el periodo rápido, se va a denotar por el polinomio P. Esta etapa P va a ser usada para ajustar la ganancia y en caso de que la planta presente ceros poco amortiguados o inestables hace que éstos no se cancelen, suponiendo las consecuencias beneficiosas que ya se han comentado.

La ley de control que rige al controlador de tres ramas F-S-P es (como puede observarse en la figura 6-49):

$$F^{NT} u^{NT} = P^{NT} R^{NT} - S^{NT} y^{NT} \Rightarrow u^{NT} = \frac{P^{NT}}{F^{NT}} R^{NT} - \frac{S^{NT}}{F^{NT}} y^{NT}$$

Se aprovecha este epígrafe para introducir un procedimiento alternativo, el cual en una primera fase permitirá formular el problema del regulador de estructura no convencional como un reacondicionamiento del regulador monofrecuencial lento y, que posteriormente, permite además una simplificación en función de los polinomios de tipo  $W^T$  introducidos con anterioridad.

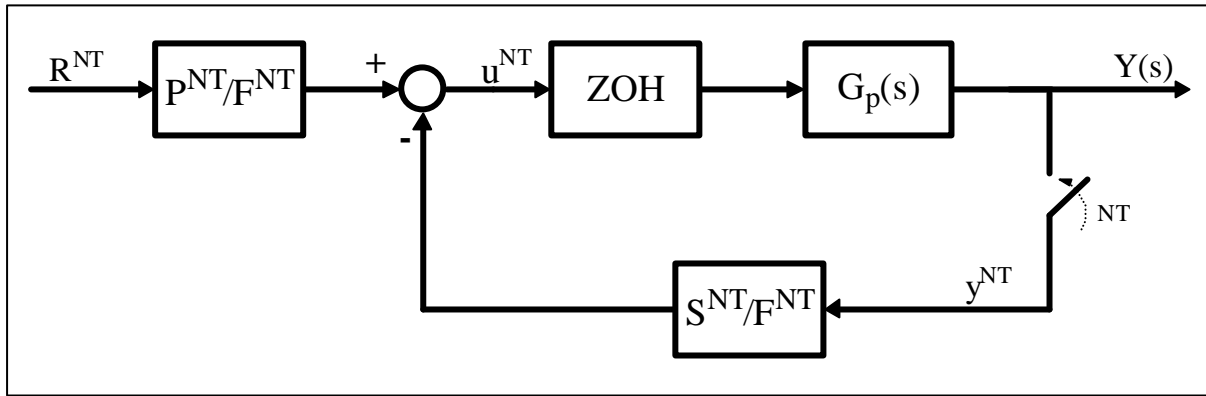


Figura 6-49: Esquema Control de Tres Ramas.

Como se ha visto antes (6-15):

$$G_p^T \bar{G}_{R,N}^T (1 - M^{NT})(R^T)^{NT} = M^T R^T$$

$$\bar{G}_{R,N}^T = \frac{M^T}{G_p^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} \frac{1}{1 - M^{NT}}$$

Si se tiene en cuenta la expresión del bucle monofrecuencial lento a NT (6-7):

$$M^{NT} = \frac{Y^{NT}}{U^{NT}} = \frac{G_p^{NT} G_R^{NT}}{1 + G_p^{NT} G_R^{NT}}$$

$$\frac{1}{1 - M^{NT}} = G_R^{NT} \frac{G_p^{NT}}{M^{NT}}$$

por lo que se puede expresar que:

$$\bar{G}_{R,N}^T = \frac{M^T}{G_p^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} G_R^{NT} \frac{G_p^{NT}}{M^{NT}}$$

en virtud, asimismo, de que ya se conoce que el bloque convertidor,  $\frac{R^T}{(R^T)^{NT}}$ , para el caso de una referencia escalón no es más que un retenedor que replica cada valor de salida del bloque lento (secuencia a NT) expandiéndola en una secuencia a T, se puede implementar el conjunto asumiendo un esquema a T, lo que supone tanto una expansión en los bloques a NT como una interface, que no es sino un retenedor de orden cero a T. Esta última afirmación puede ser comprobada experimentalmente desarrollando un esquema en Simulink.

Por lo tanto, esto significa que el bloque de readecuación a baja frecuencia del regulador lento se debería considerar como:



$$\left( \frac{G_p^{NT}}{M^{NT}} \right)^T$$

Según lo expuesto, en la implementación se podría simplificar el esquema haciendo uso de los polinomios introducidos anteriormente (sección 6.1) de la siguiente forma (para el caso más general, el irregular):

$$\left( \frac{G_p^{NT}}{M^{NT}} \right)^T = \frac{(B_p^{NT})^T (A_M^{NT})^T}{(A_p^{NT})^T (B_M^{NT})^T} = \frac{(B_p^{NT})^T A_M^T W_{M_A}^T}{(B_M^{NT})^T A_p^T W_A^T}$$

Como quiera que este bloque a NT expandido a T se va a multiplicar luego por el sistema siguiente

$$\frac{M^T}{G_p^T} = \frac{\hat{B}_M^T W_{M_B}^T A_p^T W_A^T}{A_M^T W_{M_A}^T \hat{B}_p^T W_B^T} = \frac{\tilde{\tilde{B}}_M^T A_p^T W_A^T}{A_M^T W_{M_A}^T \tilde{\tilde{B}}_p^T}$$

(recordar que la terminología  $\tilde{\tilde{B}}_M^T$  y  $\tilde{\tilde{B}}_p^T$  viene a denotar que el numerador está finalmente ajustado en ganancia), si se asume este producto se tendría que:

$$\frac{M^T}{G_p^T} \left( \frac{G_p^{NT}}{M^{NT}} \right)^T = \frac{\hat{B}_M^T W_{M_B}^T A_p^T W_A^T (B_p^{NT})^T A_M^T W_{M_A}^T}{A_M^T W_{M_A}^T \hat{B}_p^T W_B^T (B_M^{NT})^T A_p^T W_A^T} = \frac{\hat{B}_M^T W_{M_B}^T (B_p^{NT})^T}{\hat{B}_p^T W_B^T (B_M^{NT})^T} = \frac{\tilde{\tilde{B}}_M^T (B_p^{NT})^T}{\tilde{\tilde{B}}_p^T (B_M^{NT})^T}$$

por tanto, es suficiente considerar los siguientes bloques de readecuación multifrecuencial del regulador monofrecuencial lento:

- Bloque Lento:  $\frac{(B_p^{NT})^T}{(B_M^{NT})^T}$
- Bloque Rápido:  $\frac{\hat{B}_M^T W_{M_B}^T}{\hat{B}_p^T W_B^T} = \frac{\tilde{\tilde{B}}_M^T}{\tilde{\tilde{B}}_p^T}$

lo que conduciría a considerar:

$$\overline{G}_{R,N}^T = \frac{M^T}{G_p^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} G_R^{NT} \frac{G_p^{NT}}{M^{NT}} = \frac{\hat{B}_M^T W_{M_B}^T}{\hat{B}_p^T W_B^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} G_R^{NT} \frac{(B_p^{NT})^T}{(B_M^{NT})^T} = \frac{\tilde{\tilde{B}}_M^T}{\tilde{\tilde{B}}_p^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} G_R^{NT} \frac{(B_p^{NT})^T}{(B_M^{NT})^T} \quad (6-39)$$

En el caso particular de tener muestreo regular, se puede comprobar fácilmente (atendiendo a la notación expuesta en la sección 6.1) que (6-39) queda como sigue:

$$\bar{G}_{R,N}^T = \frac{M^T}{G_p^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} G_R^{NT} \frac{G_p^{NT}}{M^{NT}} = \frac{B_M^T W_{M_A}^T}{B_p^T W_A^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} G_R^{NT} \frac{(B_p^{NT})^T}{(B_M^{NT})^T} = \frac{\tilde{B}_M^T}{\tilde{B}_p^T} \frac{R^T}{(R^T)^{NT}} G_R^{NT} \frac{(B_p^{NT})^T}{(B_M^{NT})^T} \quad (6-40)$$

A la vista de esta expresión, parece claro que a la hora de diseñar un regulador bifrecuencia de este tipo basta con hacer el diseño de tres ramas a periodo NT, ya que, por su parte, tanto el bloque rápido como el lento se obtienen fruto del modelado a cada uno de los periodos.

Expuesto lo anterior, se va a profundizar ahora en la manera de proceder del diseño por asignación de polos (regulador de tres ramas, (Åström y Wittenmark, 1988)) para un caso concreto dado por un proceso de segundo orden con un cero:

Dado un proceso continuo cuya discretización a NT con ZOH conduce a:

$$G_p(z_N^N) = \frac{k(z_N^N + b)}{(z_N^N - a_1)(z_N^N - a_2)} = \frac{k(z_N^N + b)}{(z_N^{2N} + \mathbf{a}_1 z_N^N + \mathbf{a}_2)} = \frac{B_p^{NT}}{A_p^{NT}}$$

se propone como modelo en lazo cerrado (que incluya al cero del proceso)

$$M(z_N^N) = \frac{(1 + p_1 + p_2)}{(1 + b)} \frac{(z_N^N + b)}{(z_N^{2N} + p_1 z_N^N + p_2)} = \frac{B_M^{NT}}{A_M^{NT}}$$

según el procedimiento a seguir, la asignación de polos conlleva la resolución de la siguiente ecuación diofántica:

$$A_p^{NT} F^{NT} + B_p^{NT} S^{NT} = A_M^{NT}$$

Para el caso propuesto se deduce

$$F^{NT} = (z_N^N + f_1)$$

$$S^{NT} = (s_0 z_N^N + s_1)$$

lo cual trae las siguientes expresiones:

$$(z_N^N - a_1)(z_N^N - a_2)(z_N^N + f_1) + k(z_N^N + b)(s_0 z_N^N + s_1) = z_N^{3N} + p_1 z_N^{2N} + p_2 z_N^N$$

$$z_N^{3N} + (\mathbf{a}_1 + f_1 + k s_0) z_N^{2N} + (\mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 f_1 + k s_1 + k b s_0) z_N^N + (\mathbf{a}_2 f_1 + k b s_1) = z_N^{3N} + p_1 z_N^{2N} + p_2 z_N^N$$

Por igualación de coeficientes de misma potencia, se establece

$$z^2) \quad \mathbf{a}_1 + f_1 + k s_0 = p_1$$

$$z) \quad \mathbf{a}_2 + \mathbf{a}_1 f_1 + k s_1 + k b s_0 = p_2$$

$$z^0) \quad \mathbf{a}_2 f_1 + k b s_1 = 0$$

que resolviendo nos conduce a:

$$s_0 = \frac{p_1 - \mathbf{a}_1 - f_1}{k}$$

$$s_1 = -\frac{\mathbf{a}_2 f_1}{kb}$$

$$f_1 = \frac{p_2 - \mathbf{a}_2 + b\mathbf{a}_1 - bp_1}{\mathbf{a}_1 - \frac{\mathbf{a}_2}{b} - b}$$

Todo el procedimiento planteado es igualmente válido cuando se trabaja a periodo T.

### 6.5.1. Ejemplo 1.

A continuación se aplica la alternativa expuesta a un caso particular muy similar al tratado en (Åström, 1988). El objetivo del estudio es hacer un primer diseño a periodo NT para ser comparado posteriormente con otro a periodo T y con el bifrecuencia regular e irregular (para una N=2).

Sea el proceso de f.d.t. continua  $G(s) = \frac{100}{s^2 + 2s + 100}$ , el cual representa  $K = 1, w_N = 10, \mathbf{x} = 0.1$ . Si se discretiza con un periodo NT=0.5 seg tenemos:

$$G(z) = \frac{0.9014(z_2^2 + 0.1682)}{z_2^4 - 0.3148z_2^2 + 0.3679} = \frac{B_p^{NT}}{A_p^{NT}}$$

Pretendemos obtener una f.d.t. de lazo cerrado, tal que  $K = 1, w_N = 10, \mathbf{x} = 0.9$ , por lo que se tendrá  $M(s) = \frac{100}{s^2 + 18s + 100}$ , que discretizada a NT queda:

$$M(z) = \frac{0.9875(z_2^2 + 0.0256)}{z_2^4 + 0.0127z_2^2 + 0.0001234} = \frac{B_M^{NT}}{A_M^{NT}}$$

Aplicando la resolución general expuesta anteriormente, se obtiene:

$$s_0 = 0.187643$$

$$s_1 = -0.38426$$

$$f_1 = 0.158358$$

por lo que:

$$P^{NT} = \frac{1 + p_1 + p_2}{k(1 + b)} z_2^2 = 0.961826 z_2^2$$

$$S^{NT} = 0.187643 z_2^2 - 0.38426$$

$$F^{NT} = z_2^2 + 0.158358$$

De esta forma, la ley de control para el caso de diseño a NT queda:

$$U^{NT} = \left( \frac{0.961826z_2^2}{z_2^2 + 0.158358} \right) R^{NT} - \left( \frac{0.187643z_2^2 - 0.38426}{z_2^2 + 0.158358} \right) Y^{NT} \quad (6-41)$$

Si ahora se realiza el diseño a T=0.25 seg (recordar N=2), se tiene:

$$G(z_2) = \frac{1.5704(z_2 + 0.8101)}{z_2^2 + 1.2361z_2 + 0.6065} = \frac{B_p^T}{A_p^T}$$

$$M(z_2) = \frac{0.7583z_2 + 0.1553}{z_2^2 - 0.09754z_2 + 0.01111} = \frac{B_M^T}{A_M^T}$$

Aplicando la resolución general expuesta anteriormente, se obtiene:

$$s_0 = 0.107873$$

$$s_1 = 0.716561$$

$$f_1 = -1.503044$$

por lo que:

$$P^T = \frac{1 + p_1 + p_2}{k(1+b)} z_2 = 0.3213875 z_2$$

$$S^T = 0.107873 z_2 + 0.716561$$

$$F^T = z_2 - 1.503044$$

En este caso, la ley de control para el diseño a T queda:

$$U^T = \left( \frac{0.3213875 z_2}{z_2 - 1.503044} \right) R^T - \left( \frac{0.107873 z_2 + 0.716561}{z_2 - 1.503044} \right) Y^T$$

Por último sólo falta tratar los casos bifrecuencia:

- regular: recurriendo a la expresión (6-40)

- bloque rápido:  $\frac{B_M^T W_{M_A}^T}{B_p^T W_A^T} = \frac{\tilde{B}_M^T}{\tilde{B}_p^T} = \frac{0.7583(z_2 + 0.2048)}{1.5704(z_2 + 0.8101)} \frac{(z_2^2 + 0.09754z_2 + 0.01111)}{(z_2^2 - 1.2361z_2 + 0.6065)}$
- bloque lento:  $\frac{(B_p^{NT})^T}{(B_M^{NT})^T} = \frac{0.9014z_2^2 + 0.1516}{0.9875z_2^2 + 0.02529}$

donde  $W_{M_A}^T$  y  $W_A^T$  se deducen fácilmente de  $A_M^T$  y  $A_p^T$ , respectivamente.

- irregular (para  $\tau_1=NT/3$ ,  $\tau_2=2NT/3$ ): recurriendo a la expresión (6-39)

$$\begin{aligned}
 & \text{- bloq. rápido: } \frac{\hat{B}_M^T W_{M_b}^T}{\hat{B}_p^T W_B^T} = \frac{\tilde{B}_M^T}{\tilde{B}_p^T} = \frac{\left(\frac{0.7583}{1.39997}\right) \left(z_2 + 0.7011\right)}{\left(\frac{1.5704}{1.0365}\right) \left(z_2 + 0.8772\right)} \cdot \frac{\left(z_2^2 + 0.0898z_2 + 0.009412\right)}{\left(z_2^2 - 1.251z_2 + 0.621266\right)} \\
 & \text{- bloque lento: } \frac{\left(B_p^{NT}\right)^T}{\left(B_M^{NT}\right)^T} = \frac{0.9014z_2^2 + 0.1516}{0.9875z_2^2 + 0.02529}
 \end{aligned}$$

donde el bloque rápido se deduce a partir del modelado del capítulo 3, y el bloque lento coincide con el del caso regular.

Tanto en el caso regular como en el irregular falta comentar dos términos de sus respectivas expresiones (6-40) y (6-39):

- $\frac{R^T}{(R^T)^{NT}}$ : como las pruebas se hacen en Matlab y en Simulink y para un escalón, el convertidor de frecuencias quedará en el primer caso (macro Matlab) como una retención por programa de la acción de control a periodo lento, y en el segundo caso (bloque Simulink), tal y como se mencionó anteriormente, como un bloque retenedor de orden cero.
- $G_R^{NT}$ : se trata del regulador que implementa la ley de control a NT, (6-41).

Planteados los diferentes diseños, se implementan en Matlab y Simulink y se obtienen las respuestas de la figura 6-50. Se trata de respuestas pseudo-continuas para cada caso, de manera que nos permitirá ver claramente el efecto de las oscilaciones ocultas si éste existiera. Para lograr la simulación pseudo-continua de la respuesta bifrecuencia irregular se ha generado una macro Matlab que implementa el escenario que se plantea en la figura 6-55, el cual será comentado con detalle en la sección 6.6.

Pasando a analizar la figura 6-50, se ve como la respuesta monofrecuencia lenta tiene un peor transitorio que la rápida (como cabría esperar); por su parte, tanto la bifrecuencia regular como la irregular producen una respuesta intermedia a ambas monofrecuencias pero con la presencia de oscilaciones ocultas, lo cual hace que el sistema empeore su tiempo de establecimiento ( $t_e(\pm 98\%) \approx 2.25$  seg para caso regular y  $t_e(\pm 98\%) \approx 2.4$  seg para caso irregular). No obstante, pese a tener peor tiempo de establecimiento, el diseño irregular bifrecuencial presenta una señal de control con una evolución más progresiva que en el caso bifrecuencia regular, entendiéndose por más progresiva el hecho de no presentar variaciones en forma de dientes de sierra en el transitorio (ver figura 6-51).

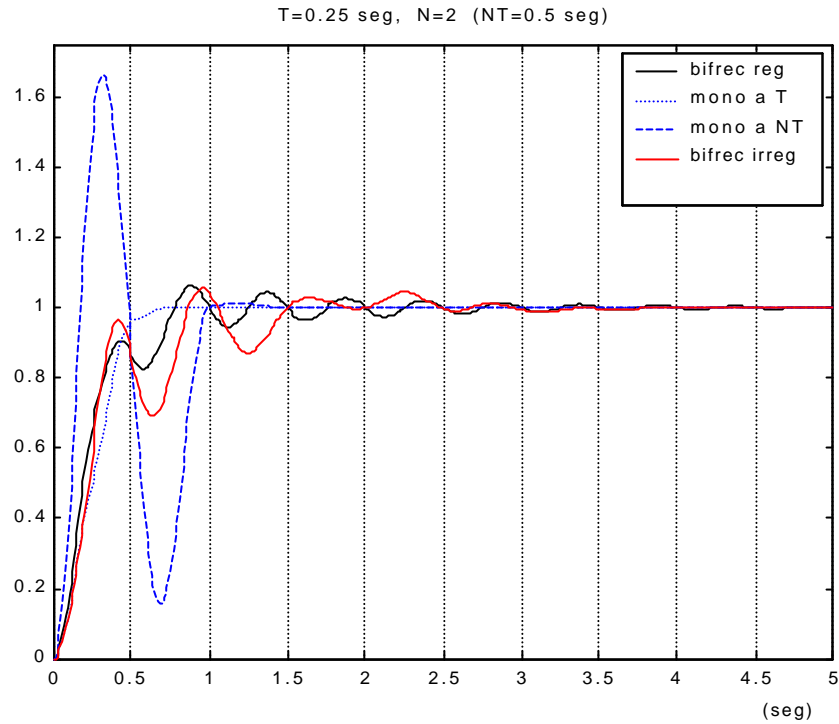


Figura 6-50: Respuestas Regulator de Tres Ramas ejemplo 1 (comparativa).

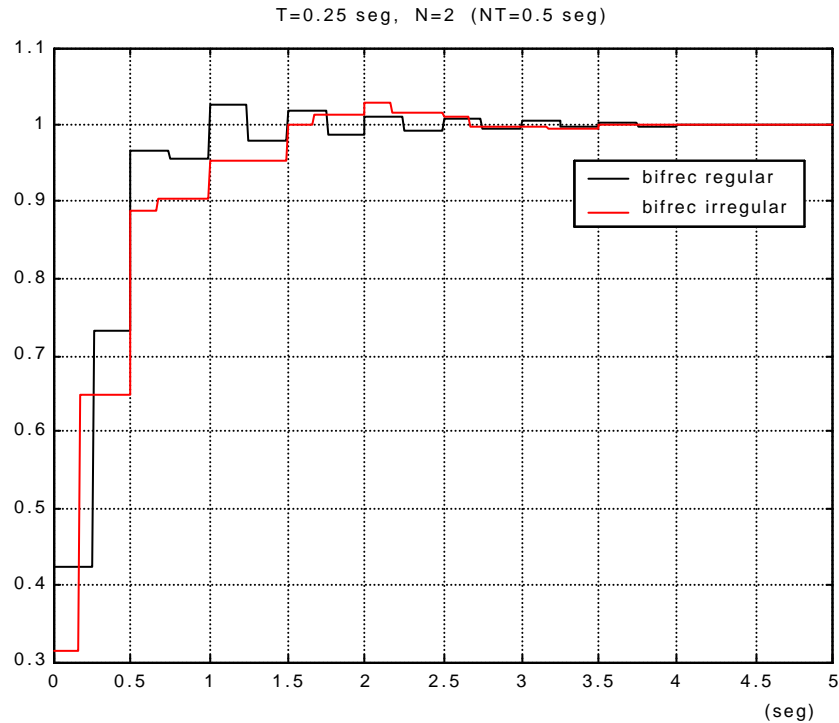


Figura 6-51: Acciones de control Regulator de Tres Ramas ejemplo 1 casos bifrecuencia.

6.5.2. Ejemplo 2.

Ahora se va a llevar a cabo otro ejemplo en el que el objetivo es comparar las respuestas bifrecuencia regular e irregular que resultan del nuevo sistema de control bajo estudio, caracterizándose las dos por no presentar oscilaciones ocultas (cosa que sí sucedía en el ejemplo anterior). Ello va a hacer que en la sección 6.6, cuando se comparan ambas junto a la respuesta que resulta de aplicar irregularmente las acciones obtenidas por el controlador bifrecuencia regular, se pueda observar de forma más evidente las mejoras que aporta el controlador con estructura no convencional PVT (irregular) frente al bifrecuencia regular cuando sus acciones se aplican según un patrón PVT (irregular).

Sea el proceso de f.d.t. continua  $G(s) = \frac{s+3}{s^2+2s+2}$ , el cual representa un  $t_p \approx 2.7$  seg y un  $t_e \approx 4$  seg. Si se discretiza con un periodo NT=0.6 seg se tiene:

$$G(z) = \frac{0.6656(z_2^2 - 0.1092)}{z_2^4 - 0.9059z_2^2 + 0.3012} = \frac{B_p^{NT}}{A_p^{NT}}$$

Se pretende obtener una f.d.t. de lazo cerrado, tal que tanto el tiempo de pico como el de establecimiento sean menores, concretamente  $t_p \approx 1$  seg y  $t_e \approx 2$  seg. La f.d.t. que logra dichas especificaciones es  $M(s) = \frac{s+3}{s^2+4s+8}$ , que discretizada a NT queda:

$$M(z) = \frac{0.3692(z_2^2 - 0.1138)}{z_2^4 - 0.2183z_2^2 + 0.09072} = \frac{B_M^{NT}}{A_M^{NT}}$$

Aplicando la resolución general expuesta anteriormente, se obtiene:

$$\begin{aligned} s_0 &= 1.136755 \\ s_1 &= -0.286035 \\ f_1 &= -0.069024 \end{aligned}$$

por lo que:

$$\begin{aligned} P^{NT} &= \frac{1+p_1+p_2}{k(1+b)} z_2^2 = 1.471404 z_2^2 \\ S^{NT} &= 1.136755 z_2^2 - 0.286035 \\ F^{NT} &= z_2^2 - 0.069024 \end{aligned}$$

De esta forma, la ley de control a NT queda:

$$U^{NT} = \left( \frac{1.471404 z_2^2}{z_2^2 - 0.069024} \right) R^{NT} - \left( \frac{1.136755 z_2^2 - 0.286035}{z_2^2 - 0.069024} \right) Y^{NT}$$

Por su parte, las f.d.t. a periodo rápido  $T=0.3$  seg (se toma  $N=2$ ) quedan:

$$G(z_2) = \frac{0.3289(z_2 - 0.3919)}{z_2^2 - 1.415z_2 + 0.5488} = \frac{B_p^T}{A_p^T}$$

$$M(z_2) = \frac{0.2439(z_2 - 0.3922)}{z_2^2 - 0.9059z_2 + 0.3012} = \frac{B_M^T}{A_M^T}$$

A partir de ellas se pueden conseguir los casos bifrecuencia:

- regular: recurriendo a la expresión (6-40)

- bloque rápido:  $\frac{B_M^T W_{M_A}^T}{B_p^T W_A^T} = \frac{\tilde{B}_M^T}{\tilde{B}_p^T} = \frac{0.2439(z_2 - 0.3922)}{0.3289(z_2 - 0.3919)} \cdot \frac{(z_2^2 + 0.9059z_2 + 0.3012)}{(z_2^2 + 1.415z_2 + 0.5488)}$
- bloque lento:  $\frac{(B_p^{NT})^T}{(B_M^{NT})^T} = \frac{0.6656(z_2^2 - 0.1092)}{0.3692(z_2^2 - 0.1138)}$

donde  $W_{M_A}^T$  y  $W_A^T$  se deducen fácilmente de  $A_M^T$  y  $A_p^T$ , respectivamente.

- irregular (para  $\tau_1=0.55$ ,  $\tau_2=0.05$ ): recurriendo a la expresión (6-39)

- bloq. rápido:  $\frac{\hat{B}_M^T W_{M_B}^T}{\hat{B}_p^T W_B^T} = \frac{\tilde{\tilde{B}}_M^T}{\tilde{\tilde{B}}_p^T} = \frac{1.10 \cdot 0.2439(z_2 - 0.37742)}{1.47 \cdot 0.3289(z_2 - 0.37724)} \cdot \frac{(z_2^2 + 0.7499z_2 + 0.2064)}{(z_2^2 + 0.7928z_2 + 0.1722)}$
- bloque lento:  $\frac{(B_p^{NT})^T}{(B_M^{NT})^T} = \frac{0.6656(z_2^2 - 0.1092)}{0.3692(z_2^2 - 0.1138)}$

donde el bloque rápido se deduce a partir del modelado del capítulo 3, y el bloque lento coincide con el del caso regular.

Tanto en el caso regular como en el irregular los términos referentes a  $\frac{R^T}{(R^T)^{NT}}$  y a  $G_R^{NT}$  (recordar (6-39) y (6-40)) cumplen el mismo cometido explicado en el ejemplo anterior.

Planteados los diferentes diseños, se implementan en Matlab y Simulink y se obtienen las respuestas de la figura 6-52. Se trata de respuestas pseudo-continuas para cada caso, de manera que nos permitirá ver claramente el efecto de las oscilaciones ocultas si éste existiera. Para lograr la simulación pseudo-continua de la respuesta bifrecuencia irregular se ha generado una macro Matlab que implementa el escenario que se plantea en la figura 6-56, el cual será comentado con detalle en la sección 6.6.

Pasando a analizar la figura 6-52, se ve como ambas respuestas bifrecuenciales no presentan ahora oscilaciones ocultas. Además se comportan de manera muy similar en cuanto



a tiempo de establecimiento, mostrando sin embargo un mejor comportamiento la respuesta bifrecuencia regular a nivel de sobreoscilación (9.6% del caso regular frente a 11.5% del irregular). Por su parte, las acciones de control suministradas al proceso se muestran en la figura 6-53. Cabe observar que el algoritmo irregular presenta en este caso una primera acción de control menos brusca que el regular, siendo el resto similares.

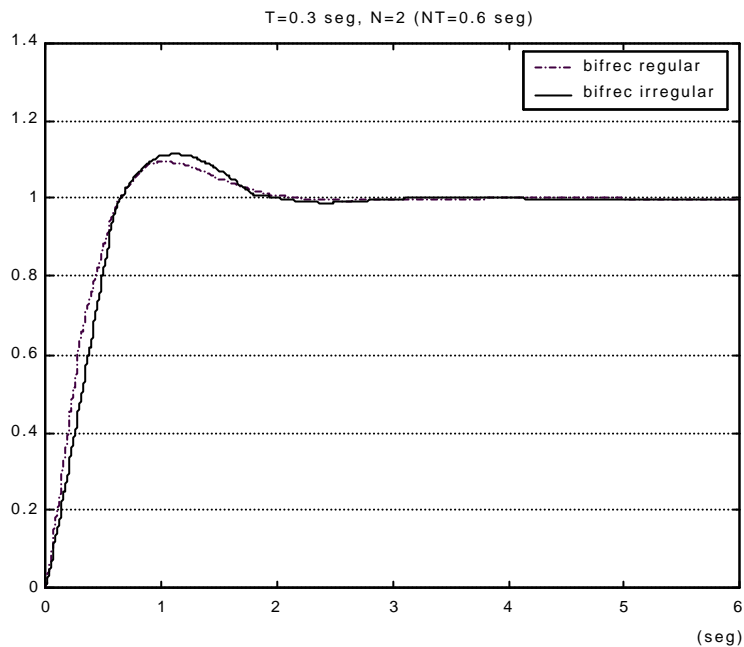


Figura 6-52: Respuestas Regulador de Tres Ramas ejemplo 2 (comparativa).

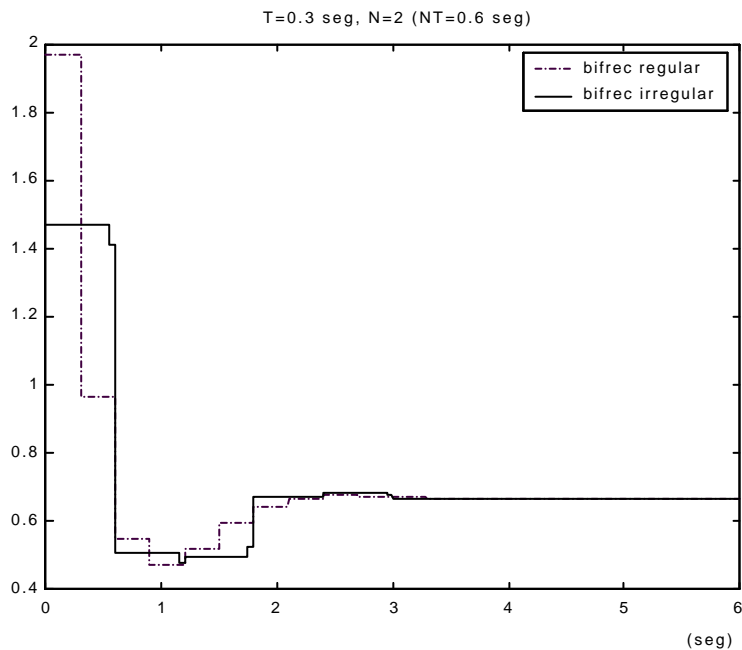


Figura 6-53: Acciones de control Regulador de Tres Ramas ejemplo 2.

## 6.6. VALIDACIÓN DEL MODELADO EN REPRESENTACIÓN EXTERNA MEDIANTE SIMULACIÓN A PARTIR DE LA ESTRUCTURA DEL SISTEMA DE CONTROL CON MUESTREO NO CONVENCIONAL.

### 6.6.1. Planteamiento del escenario.

Para validar mediante simulación el modelado de un sistema que es muestreado de forma no convencional se ha creído conveniente recurrir al escenario más realista posible, es decir, el escenario que subyace de considerar el proceso bajo estudio como parte de un sistema de control en el que el regulador actuará  $N$  veces sobre dicho proceso a instantes irregulares de tiempo dentro de un metaperiodo global  $NT$  (caso particular de la figura 6-1). Como se ve en dicha figura, la salida del sistema se realimenta cada  $NT$  instantes de tiempo, completando así el sistema de control multifrecuencia.

Los pasos que se han considerado oportunos para validar mediante simulación el modelado en RE han sido los siguientes:

- 1°. Desarrollar un diseño bifrecuencia regular, de manera que obtengamos un regulador que genere acciones de control cada  $T$  instantes de tiempo sobre el proceso. Observar la salida producida en este caso regular y compararla con la que se obtendría si hacemos uso de una base de tiempos,  $t_0$ , común a los periodos involucrados en el sistema,  $T$  y  $NT$ . De esta forma, y como se muestra en la figura 6-54, para un caso de  $N=2$  la acción de control producida en el instante 0,  $U(0)$ , se introducirá en el sistema en dicho instante de tiempo, y luego será retenida a  $t_0$  hasta el instante  $T$ . En dicho instante se genera una nueva acción de control,  $U(kT)$ , que se introducirá al sistema retenida a  $t_0$  hasta el siguiente metaperiodo  $NT$ . Como cabría esperar, ambas salidas deben ser similares (esta última con más resolución, puesto que el proceso está definido a  $t_0$ ).
- 2°. Aplicar el diseño regular del punto anterior, pero ahora la acción de control producida en el instante  $T$ ,  $U(kT)$ , se introducirá en el sistema en el instante de tiempo  $t_1$  ( $t_1 \neq T$ ), de manera que como cabría esperar nos va a servir para ver la pérdida de prestaciones que sufre la salida del sistema cuando las acciones de control diseñadas en regular le son aplicadas al sistema a instantes irregulares de tiempo. Véase figuras 6-55 y 6-56.
- 3°. Desarrollar un diseño bifrecuencia irregular. Como se conoce, el modelado en RE contemplado (capítulo 3) es capaz de crear por aproximación funciones de transferencia definidas a periodo  $T$  para el proceso muestreado de manera irregular, tal que el numerador de dicha fdt sintetiza la irregularidad mediante el cambio de ubicación de sus ceros con respecto a los obtenidos en el caso regular. Así pues, el regulador con estructura irregular obtenido va a generar acciones de control cada  $T$  instantes de tiempo sobre el proceso. Por tanto, lo primero que habría que hacer es observar la salida del sistema cuando éste está modelado en irregular (a periodo  $T$ ) y el regulador (diseñado en irregular a periodo  $T$ ) actúa sobre él. Si el modelado es correcto, la salida obtenida debería ser similar (recuérdese que se trata de una aproximación) a la que se obtuviera si se establece el escenario de la figura 6-55 ó 6-56, esto es, las acciones del regulador diseñado en irregular (generadas cada  $T$ ) se reescalan temporalmente para que actúen de forma irregular sobre el proceso, el cual, a su vez, estará ahora definido a  $t_0$ . En conclusión, si realmente las acciones generadas por el diseño irregular son adecuadas, la salida del

sistema definido a  $t_0$  se deberá parecer (aunque con más resolución y de forma aproximada) a la del caso anterior (sistema modelado en irregular definido a  $T$ ).

La problemática planteada en el tercer paso parece de gran importancia, ya que viene a justificar el esfuerzo de modelado y diseño llevado a cabo para lograr el sistema de control con estructura no convencional. Además, pone de manifiesto la solución a un problema real como es el de los retardos, los cuales pueden aparecer al implementarse el sistema de control sobre un sistema de tiempo real, en el que normalmente el enlace regulador-proceso suele estar compartido por varias tareas, de forma que, al no disponer de exclusividad en la transmisión, las acciones generadas por un controlador multifrecuencia no convencional (que pretende llevar a cabo un patrón regular de muestreos) llegarían retrasadas al proceso con la pérdida de prestaciones que ello puede suponer. Dicho retardo puede ser previsto en la etapa de modelado no convencional, diseñándose un controlador con estructura no convencional que genere las acciones de control oportunas previendo el instante de tiempo en que realmente se inyectarán al proceso.

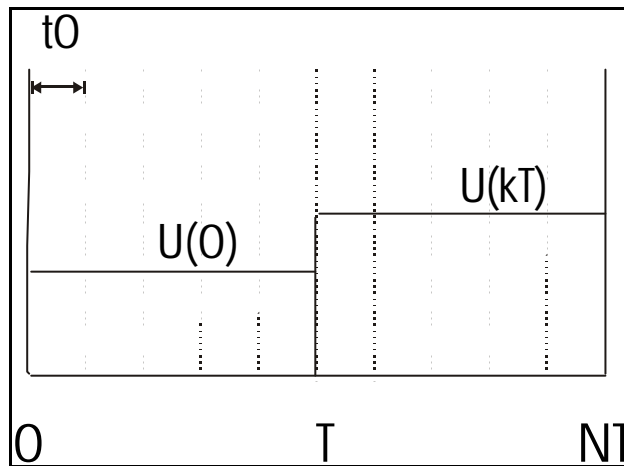


Figura 6-54: Muestreo regular con base de tiempos común.

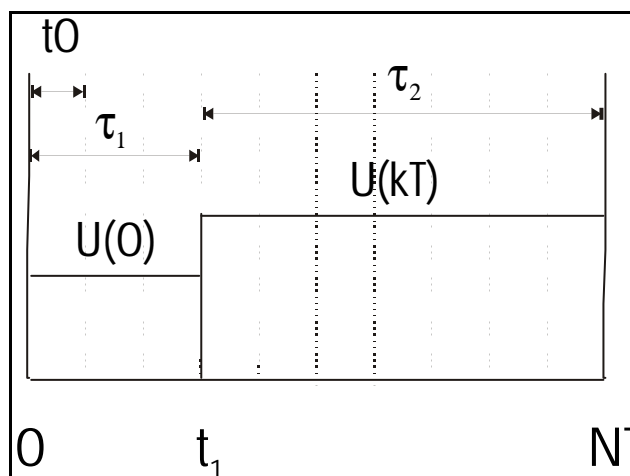


Figura 6-55: Muestreo irregular con base de tiempos común (opción 1)

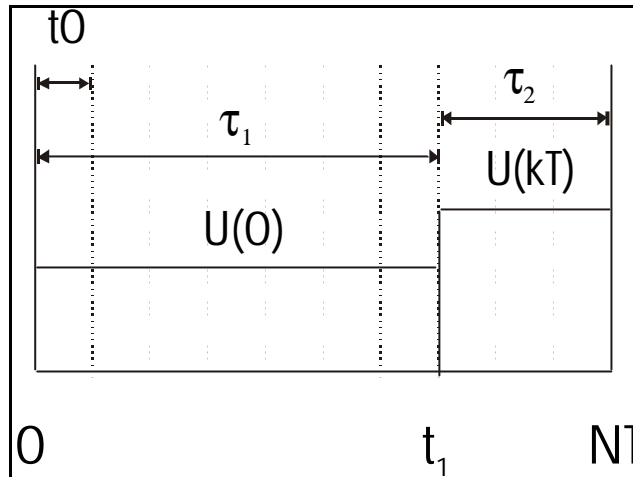


Figura 6-56: Muestreo irregular con base de tiempos común (opción 2)

Los tres pasos que se acaban de describir van a ser llevados a cabo para tres tipos de reguladores diferentes: Reguladores tipo P-I-D, Reguladores de Cancelación (dentro de esta categoría se trabajará con Reguladores de Tiempo Mínimo y Reguladores de Tiempo Finito) y Reguladores de Asignación de Polos (Reguladores de Tres Ramas). El objetivo es, por tanto, retomar los ejemplos vistos anteriormente para cada tipo de regulador estudiado y validar mediante simulación el modelado en RE del sistema de control diseñado en cada uno de ellos.

## 6.6.2. Desarrollo de las experiencias.

### 6.6.2.1. Regulador tipo P-I-D.

#### 6.6.2.1.1. Procedimiento 1º de diseño.

Si se recuerda el ejemplo utilizado en el apartado 6.3.1, en él se llegaba a unas expresiones a periodo rápido  $T$  tanto para la fdt de lazo cerrado,  $M^T$ , como para la fdt del proceso,  $G_p^T$ , en el caso regular y en el irregular. Además en ambos casos la fdt de lazo cerrado,  $M^{NT}$ , coincidía. Según este planteamiento de diseño de los reguladores tipo P-I-D con estructura no convencional, a partir de todo lo anterior se puede hallar la descomposición en frecuencia del regulador, la cual se basa en la obtención de las expresiones de los subreguladores lento y rápido:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{M^T}{G_p^T}$$

Cabe recordar que cuando la entrada de referencia es un escalón el interfaz entre parte lenta y rápida es un retenedor.

Para llevar a cabo el primer paso de 6.6.1 se parte del caso regular para  $M^T$  y  $G_p^T$ , obteniéndose el correspondiente  $G_{RR}^T$  de dicho caso regular. Conocida  $M^{NT}$  se simula el

sistema de control del ejemplo bajo estudio (mediante macros de Matlab y diagramas de bloques de Simulink), de manera que se obtienen las respuestas de las figuras 6-57 y 6-58. En la primera de ellas se observa que, efectivamente, cuando está definido a  $T$  tanto el regulador como el proceso la salida del sistema coincide cada  $T$  instantes de tiempo con la salida del mismo cuando el proceso está definido a  $t_0$  y las acciones retenidas a dicho periodo. Además, con el fin de hacer una posterior comparativa, se tomará como parámetro más significativo de las salidas generadas el tiempo de establecimiento (criterio 98%), siendo en este caso  $t_c(\pm 98\%) \approx 6$  seg. Por su parte, en la figura 6-58 se ve la evolución de las acciones de control, tanto las obtenidas a  $T$  como las retenidas a  $t_0$  cada  $T$  instantes de tiempo.

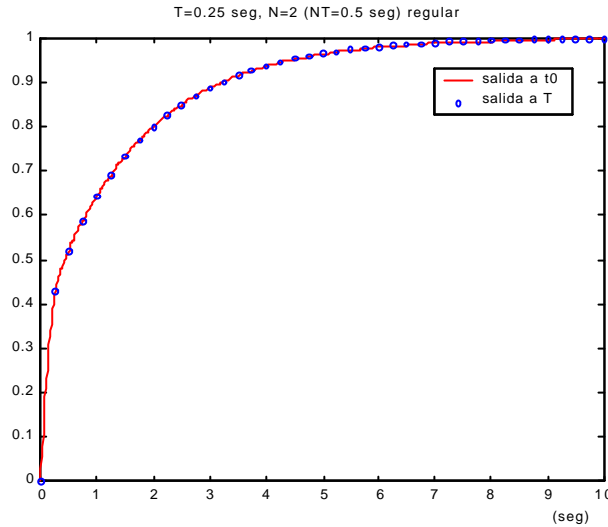


Figura 6-57: Salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 1º.

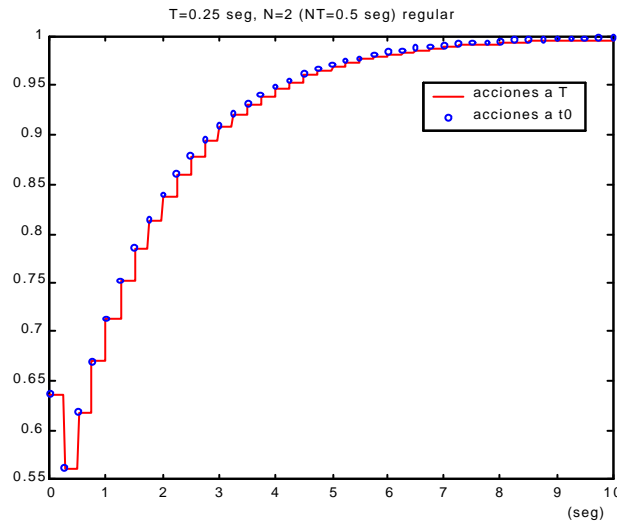


Figura 6-58: Acciones bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 1º.

Tras esto se va a pasar al segundo punto de la hipótesis de trabajo: comprobar la pérdida de prestaciones que surge en la salida del sistema cuando las acciones diseñadas en regular le son aplicadas al sistema en instantes irregulares de tiempo. En este ejemplo el patrón irregular que se va a utilizar es  $[0, 0.3 \text{ seg}]$  (recordar 6.3.1). Recurriendo nuevamente a Matlab-Simulink se obtienen una serie de resultados que se muestran en las figuras 6-59 y 6-

60. Así, en la figura 6-59 se observa que, efectivamente, la salida del sistema a  $t_0$  ofrece peor tiempo de establecimiento ( $t_c(\pm 98\%) \approx 7$  seg) que la obtenida anteriormente. Por su parte, en la figura 6-60 se observa en primera instancia que ahora la retención de las acciones es a instantes irregulares de tiempo; además, este hecho provoca que la señal de control cambie con respecto a la mostrada en 6-58, ya que el valor a NT de la salida que se realimenta en este caso es diferente con respecto al que se realimenta en la figura 6-57. Por último, en la figura 6-61 se ofrece una comparativa entre la salida resultado de aplicar a instantes regulares las acciones de control y la salida resultado de aplicar las acciones a instantes irregulares, observándose más fácilmente la pérdida de prestaciones en este último caso.

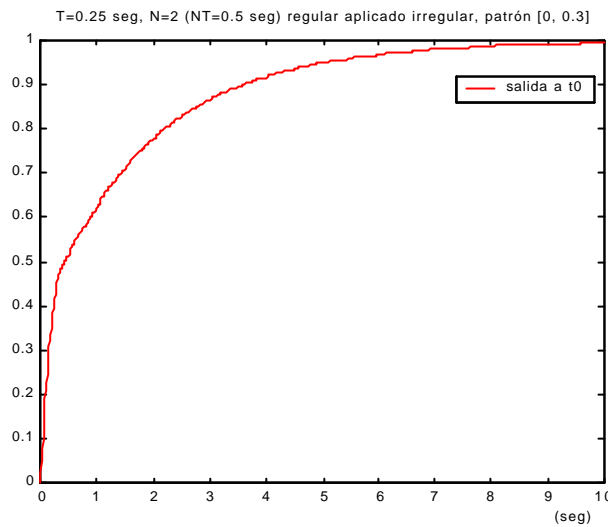


Figura 6-59: Salida bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 1°.

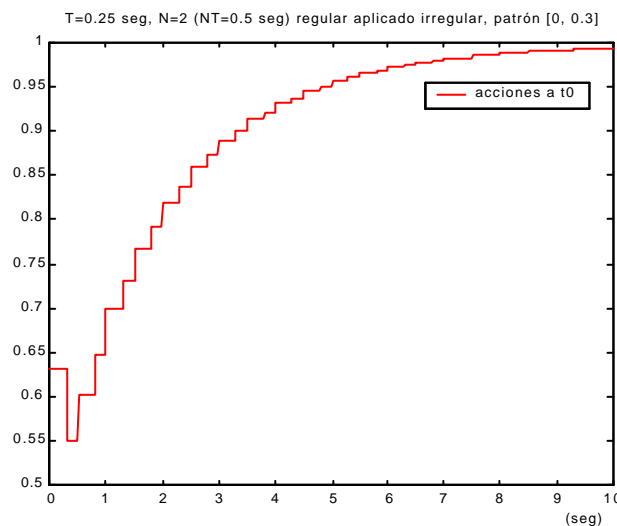


Figura 6-60: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 1°.

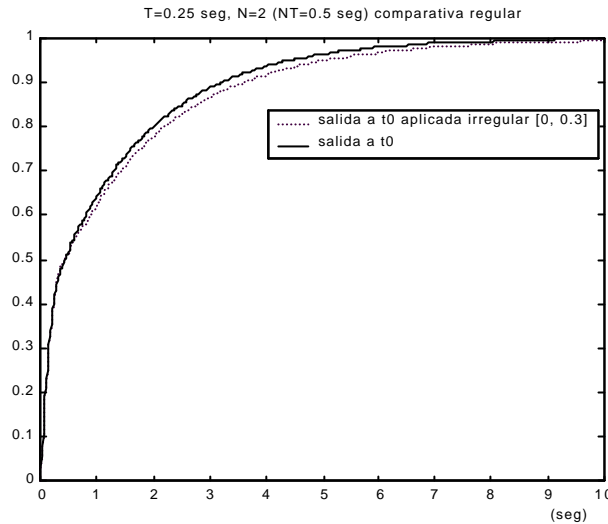


Figura 6-61: Comparativa salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 1°.

Por último, en el tercer paso a cubrir se trata de partir del caso irregular (patrón [0, 0.3]) para  $M^T$  y  $G_p^T$ , de manera que se obtenga el correspondiente  $G_{RR}^T$  de dicho caso irregular (aparece en 6.3.4.2.2). Conocida  $M^{NT}$  (que como se comentó es idéntica para caso regular e irregular) se simula el nuevo sistema de control con estructura no convencional. Los resultados que se obtienen se muestran en las figuras 6-62 y 6-63. En la primera de ellas se presenta tanto la salida a T, es decir, cuando regulador y proceso están definidos a dicho periodo incorporando en sus modelos la estructura irregular, como la salida a t0, esto es, cuando el proceso está definido a t0 y se le introduce la acción obtenida a T en el instante de tiempo correspondiente a periodo t0. Como se puede observar esta última salida coincide prácticamente siempre con la primera, tan sólo genera un mínimo error en los primeros valores del transitorio (como ya fue comentado en 6.3.4.2.3) lo cual puede ser debido a que, como ya se ha comentado en varias ocasiones, el modelo en RE que se está contemplando está basado en una aproximación a periodo T, por lo que algunos valores (transitorio) pueden generar cierto error con respecto a la salida que se obtiene si se contempla tanto regulador como proceso definidos a T con estructura irregular. Pese a todo, ambas salidas son muy parecidas y logran un tiempo de establecimiento similar ( $t_c(\pm 98\%) \approx 6$  seg).

Cabe pensar, como conclusión relativa al error generado en el transitorio, que la aproximación lograda para el modelo irregular será más exacta conforme la distancia temporal entre el instante intermedio elegido para el muestreo irregular (0.3 seg, en este caso) y el instante intermedio regular (T=0.25 seg, en este caso con N=2) sea más pequeña en valor, ya que así, ambos instantes intermedios estarán más próximos, con lo que cabe esperar que el error en la aproximación será menor.

Por su parte, la figura 6-63 muestra las acciones de control generadas por el regulador bifrecuencia irregular, las cuales, como era de suponer, varían respecto de las suministradas al proceso en el caso regular, aunque no obstante esta variación es mínima, lo que hace que ambas salidas (pertenecientes a casos regular e irregular) sean muy parecidas. Además, en dicha figura 6-63, se observa como son retenidas las acciones a t0 y reescaladas a instantes irregulares de tiempo para ser inyectadas al proceso.

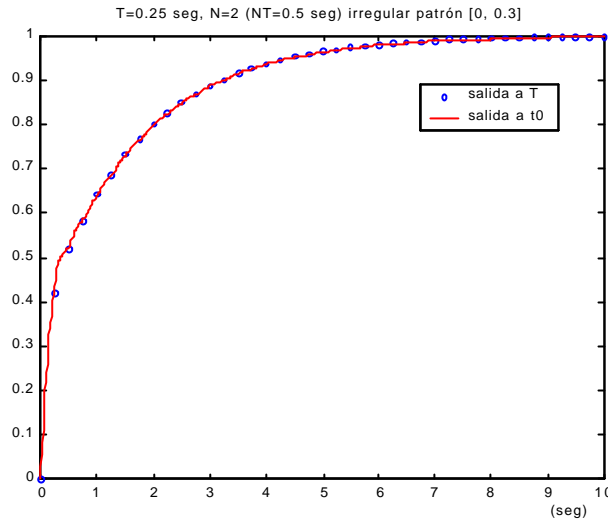


Figura 6-62: Comparativa salidas bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 1°.

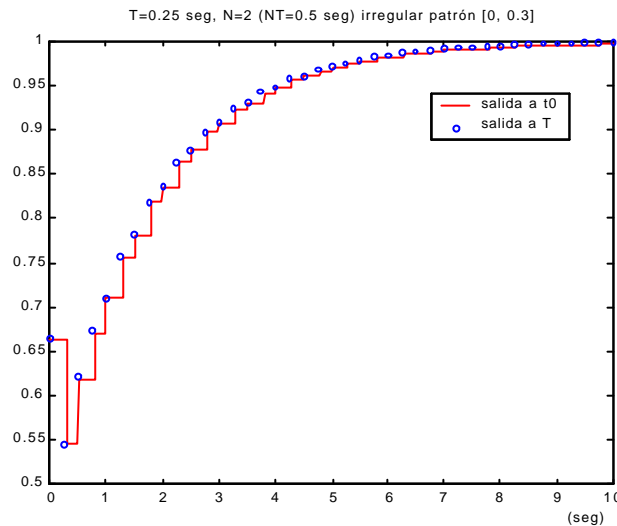


Figura 6-63: Acciones bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 1°.

## Conclusiones

1ª) Tras lo visto, aparentemente el esfuerzo que supone llevar a cabo un diseño bifrecuencia irregular está justificado, ya que el diseño regular aplicado a instantes irregulares de tiempo degrada las prestaciones del sistema (como cabía esperar). Por tanto, puede suceder que un proceso requiera de una actuación irregular (debido a la aparición de retardos en el sistema, entre otras causas) y si se le inyecta de manera irregular las acciones generadas por el regulador bifrecuencia regular, dicho proceso no se comportará como de él se esperaba. Sin embargo, el diseño irregular aplicado a instantes irregulares de tiempo permite que el sistema responda prácticamente como se esperaba de él, tras observar la salida cuando tanto regulador como proceso están definidos a T con estructura irregular.

2ª) En este caso, viendo el tiempo de establecimiento de las diferentes salidas del sistema se puede comprobar que el muestreo irregular del proceso y el regular producen salidas muy parecidas en prestaciones. Se puede probar como en otros casos el diseño irregular sí puede



producir mejoras sobre el sistema. No obstante, esta metodología, más allá de intentar aportar mejoras relativas al hecho de muestrear de forma irregular un proceso, permite la posibilidad de poder muestrearlo de dicha manera cuando éste lo requiera (presencia de retardos, etc). Por su puesto, en aquellos sistemas en los que no haya requisitos temporales críticos esta metodología faculta a estudiar qué tipo de muestreo producirá mejores prestaciones en el sistema.

#### 6.6.2.1.2. Procedimiento 2º de diseño.

Al igual que en el apartado anterior, en primer lugar se comprueba que la salida obtenida para el sistema de control basado en el controlador bifrecuencia regular (simulación de la sección 6.3.2) representa los valores cada  $T$  instantes de tiempo de la respuesta obtenida en este caso mediante la simulación propuesta en el paso 1º de 6.6.1. Esto se puede ratificar tanto en la figura 6-64 (salida) como en la 6-65 (acciones de control).

Por su parte, al aplicar el paso 2º de 6.6.1 se ve una ligera pérdida de prestaciones para el caso regular cuando las acciones son aplicadas irregularmente siguiendo un patrón  $[0, 0.12]$  dentro del metaperiodo  $NT=0.2$  seg, ya que el tiempo de establecimiento pasa a ser de aproximadamente 0.37 seg, mientras que anteriormente era de 0.31 segundos. Esto se puede comprobar en la figura 6-68. En la 6-67 se ve como las dos primeras acciones de control ( $N=2$ ) son idénticas al caso regular aplicado regularmente, como cabía esperar, pero luego ya se producen variaciones, dado que la salida en un caso y otro son ligeramente diferentes (ver figura 6-68).

Por tanto, vista la degradación de las prestaciones que experimenta el sistema de control, se propone utilizar el controlador con estructura no convencional diseñado en 6.3.2. Allí ya se vio que éste iba a suponer una mejora en el tiempo de establecimiento con respecto al caso regular, lo cual se ratifica con la metodología de simulación propuesta en el paso 3º de 6.6.1. (observar figura 6-71), ya que se consigue que éste (tiempo de establecimiento) se reduzca a aproximadamente 0.24 seg. Por su parte, en las figuras 6-69 y 6-70 se comprueba que la aproximación tomada para el modelo con muestreo no convencional del proceso puede darse por buena, dado que la diferencia entre la salida obtenida por la simulación de 6.3.2 (identificada como salida a  $T$  en la figura) y la salida obtenida en esta sección (identificada como salida a  $t_0$  en la figura) es prácticamente irrelevante.

## Conclusiones

1ª) Tras lo visto, aparentemente el esfuerzo que supone llevar a cabo un diseño bifrecuencia irregular está justificado, ya que el diseño regular aplicado a instantes irregulares de tiempo degrada las prestaciones del sistema.

2ª) En este caso, además, viendo el tiempo de establecimiento de las diferentes salidas del sistema se puede comprobar que el sistema de control con estructura no convencional (irregular) obtiene un mejor índice temporal que el caso regular.

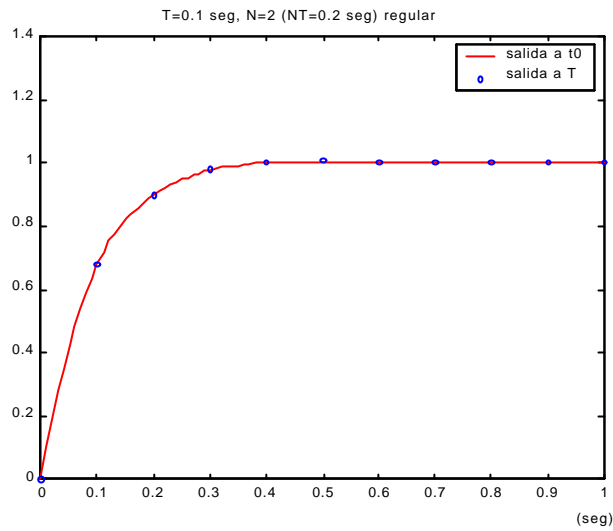


Figura 6-64: Comparativa salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 2°.

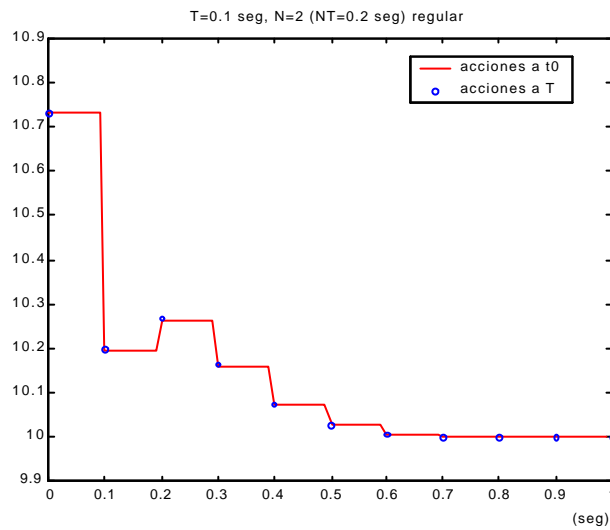


Figura 6-65: Comparativa acciones bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 2°.

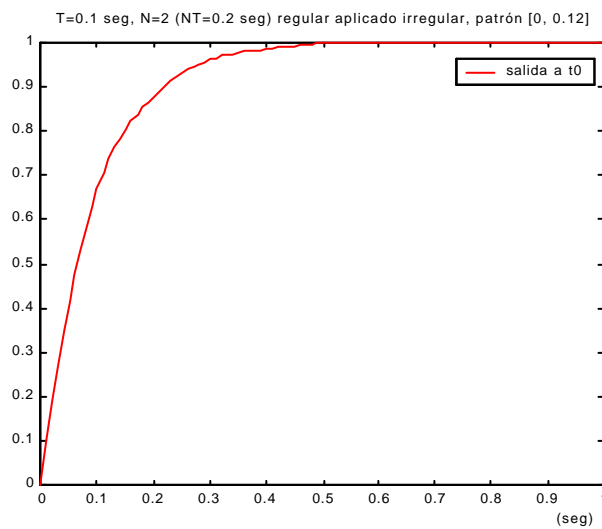


Figura 6-66: Salidas bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 2°.

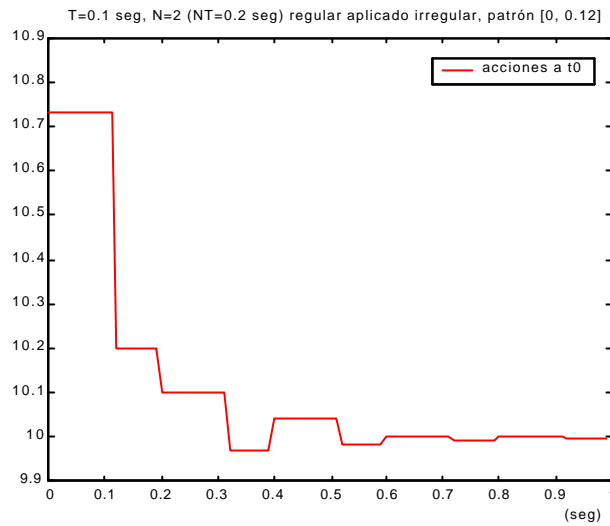


Figura 6-67: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 2°.

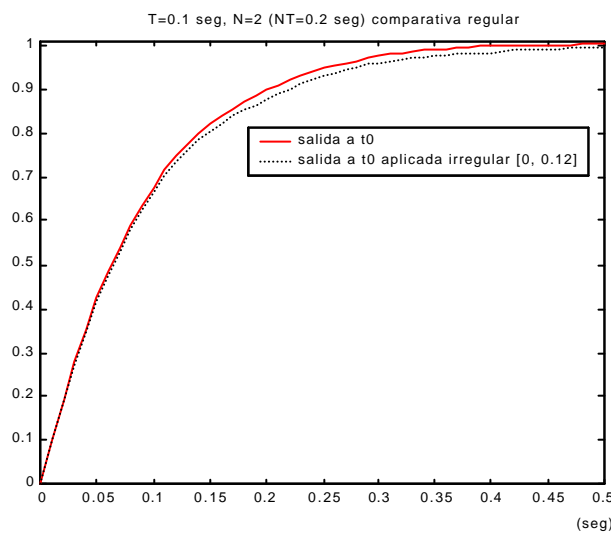


Figura 6-68: Comparativa salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 2°.

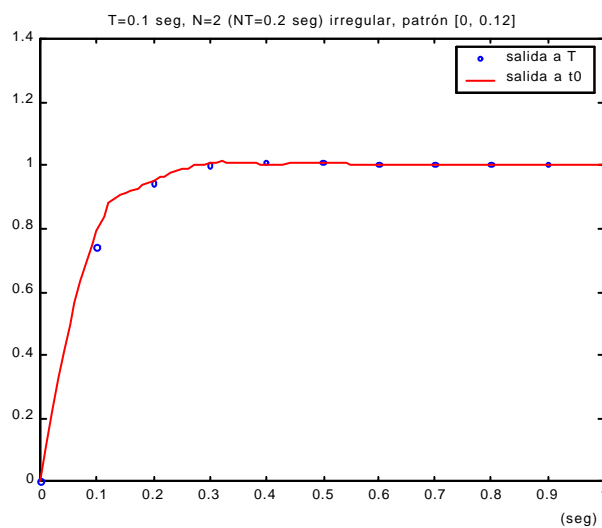


Figura 6-69: Comparativa salidas bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 2°.

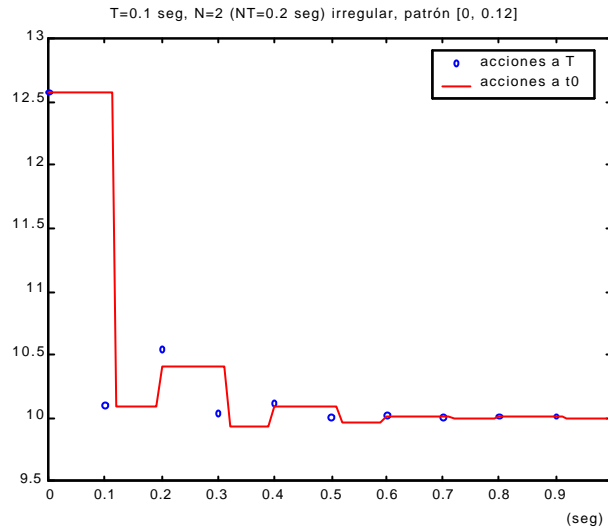


Figura 6-70: Comparativa acc. de control bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 2°.

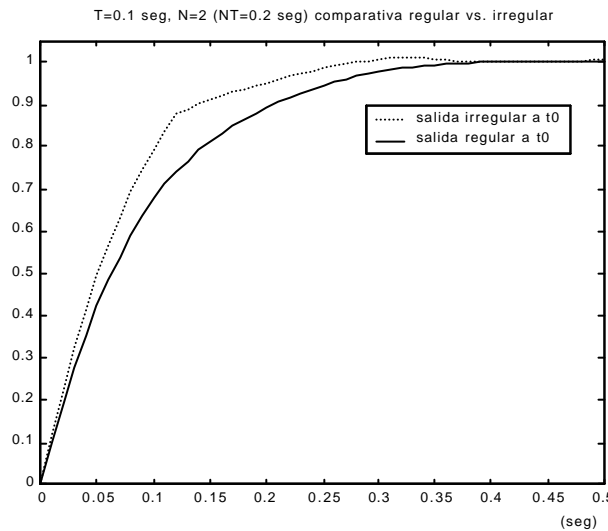


Figura 6-71: Comparativa salidas bifrecuencia regular vs. irregular tipo P-I-D proced. 2°.

### 6.6.2.1.3. Procedimiento 3° de diseño.

Dado que ha arrojado resultados más interesantes, se va a tratar directamente la segunda de las situaciones planteadas en 6.3.3, es decir, la que consideraba de partida dos reguladores tipo P-I-D distintos para formar el controlador bifrecuencia y el de estructura no convencional.

Al igual que en los apartados previos, en primer lugar se comprueba que la salida obtenida para el sistema de control basado en el controlador bifrecuencia regular (simulación de la sección 6.3.3) representa los valores cada T instantes de tiempo de la respuesta obtenida mediante la simulación propuesta para el paso 1° de 6.6.1. Esto se puede ratificar tanto en la figura 6-72 (salida) como en la 6-73 (acciones de control).

Por su parte, al aplicar el paso 2° de 6.6.1 se ve una clara pérdida de prestaciones para el caso regular cuando las acciones son aplicadas irregularmente siguiendo un patrón [0, 0.035] dentro del metaperiodo  $NT=0.04$  seg, ya que la sobreoscilación máxima pasa a ser de aproximadamente un 45%, mientras que anteriormente era de un 14%, y el tiempo de establecimiento ( $\pm 98\%$ ) pasa a ser aproximadamente 0.15 seg, mientras que antes era aproximadamente 0.12 seg. Esto se puede comprobar en la figura 6-76. En la figura 6-75 se ve como las dos primeras acciones de control ( $N=2$ ) son idénticas al caso regular aplicado regularmente, como cabía esperar, pero luego ya se producen variaciones, dado que la salida en un caso y otro son claramente diferentes (ver figura 6-76).

Por tanto, vista la degradación de las prestaciones que experimenta el sistema de control, se propone utilizar el controlador con estructura no convencional diseñado en 6.3.3. Observando la figura 6-79 se comprueba como con este controlador se alcanza una sobreoscilación parecida a la del caso regular (aunque un poco mayor, ya que es de aproximadamente un 24%, pero, no obstante, mucho menor que la del caso regular aplicado irregularmente). En lo que respecta al tiempo de establecimiento es similar en ambos casos (regular e irregular); concretamente de aproximadamente 0.12 seg. Por su parte, en las figuras 6-77 y 6-78 se comprueba que la aproximación tomada para el modelo con muestreo no convencional del proceso puede darse por buena, dado que la diferencia entre la salida obtenida por la simulación de 6.3.3 (identificada como salida a T en la figura) y la salida obtenida en esta sección (identificada como salida a  $t_0$  en la figura) es prácticamente irrelevante. Es importante observar como a metaperiodo ambas salidas son iguales, lo cual hace generar acciones de control idénticas en ambos casos; la única diferencia es el momento de actuación.

## Conclusiones

1ª) Tras lo visto, nuevamente parece que el esfuerzo que supone llevar a cabo un diseño bifrecuencia irregular está justificado, ya que el diseño regular aplicado a instantes irregulares de tiempo degrada las prestaciones del sistema.

2ª) En este caso, además, viendo el tiempo de establecimiento y la sobreoscilación de las diferentes salidas del sistema se puede comprobar que el sistema de control con estructura no convencional obtiene un índice temporal similar al del caso regular, aunque empeore un poco la sobreoscilación, pero siempre ambas cotas son menores que las obtenidas para el caso regular aplicado de forma irregular.

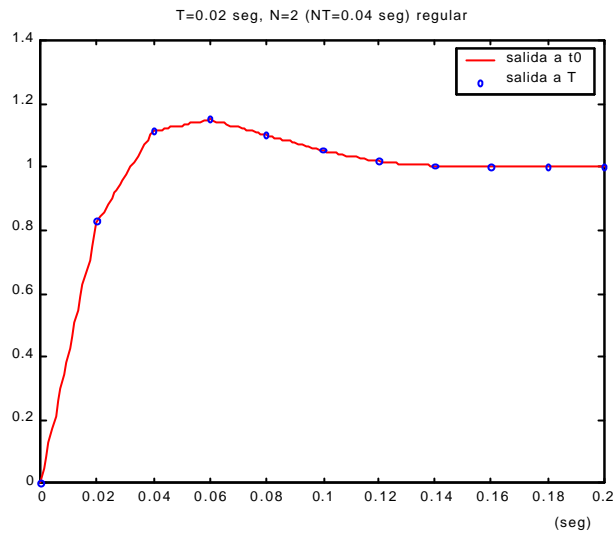


Figura 6-72: Comparativa salidas bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 3°.

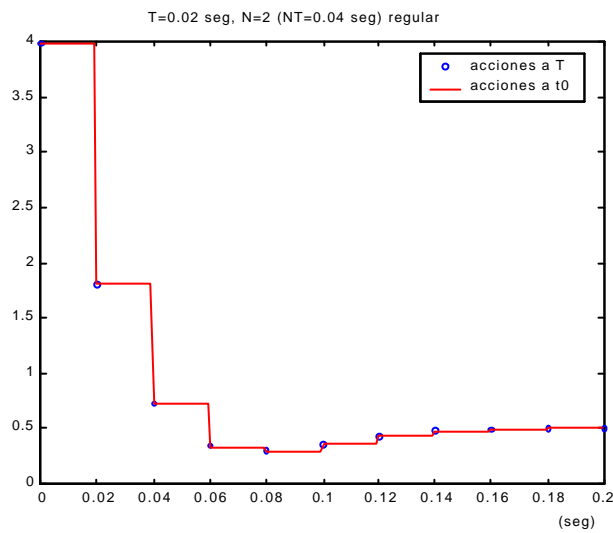


Figura 6-73: Comparativa acc. de control bifrecuencia regular tipo P-I-D procedimiento 3°.

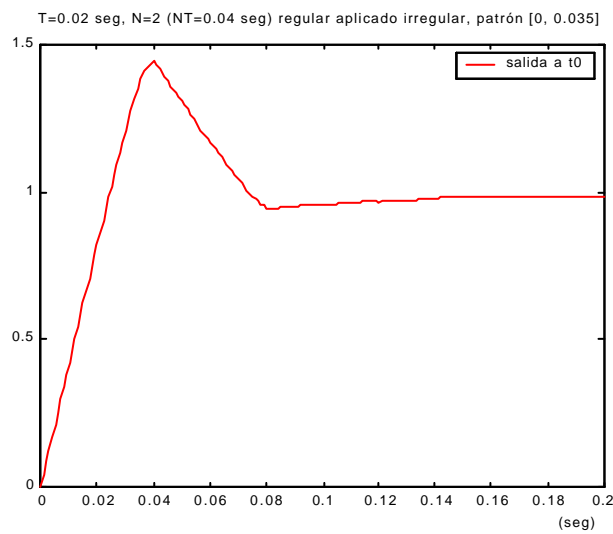


Figura 6-74: Salida bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D procedimiento 3°.

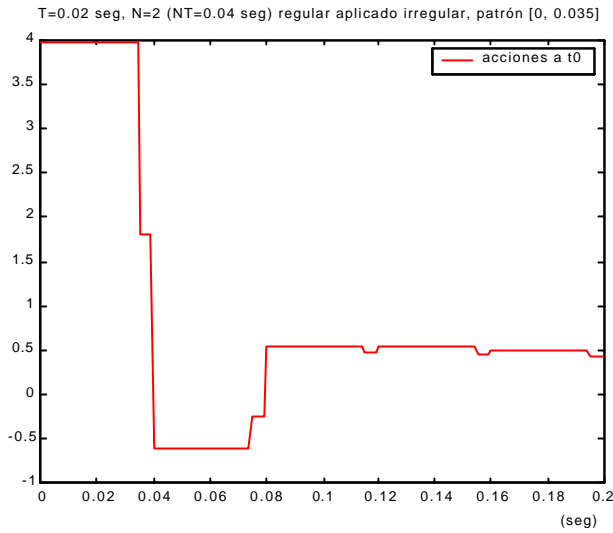


Figura 6-75: Acc. de control bifrecuencia regular aplicado irregular tipo P-I-D proced. 3°.

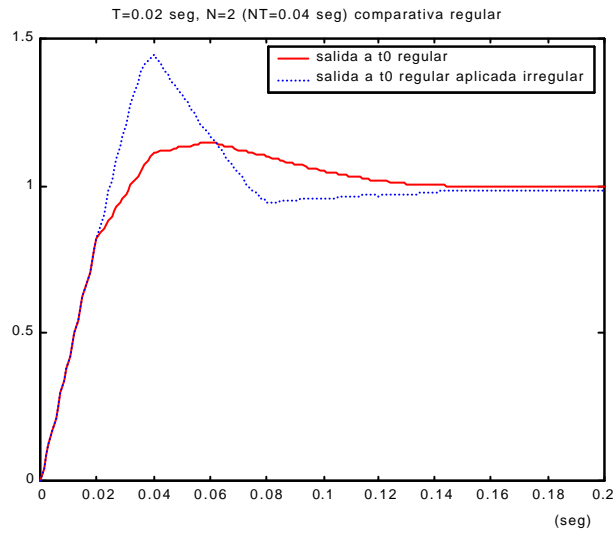


Figura 6-76: Comparativa salidas bifrec. reg. y regular aplic. irregular tipo P-I-D proced. 3°.

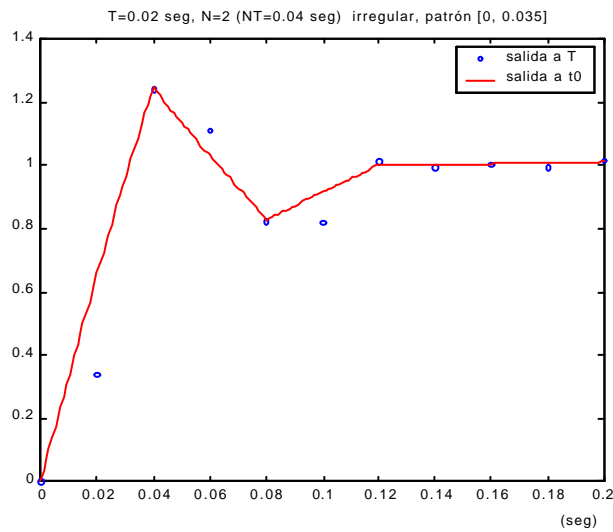


Figura 6-77: Comparativa salidas bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 3°.

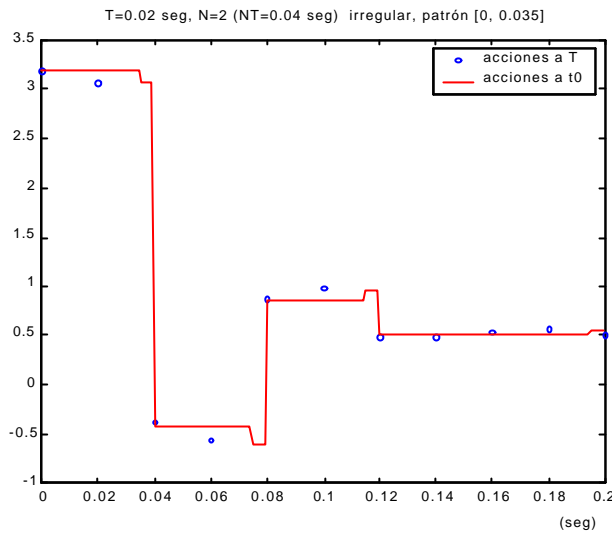


Figura 6-78: Comparativa acc. de control bifrecuencia irregular tipo P-I-D procedimiento 3°.

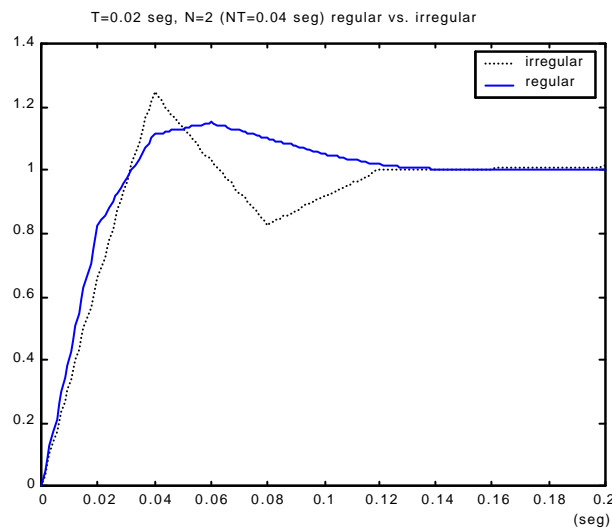


Figura 6-79: Comparativa salidas bifrecuencia regular e irregular tipo P-I-D procedimiento 3°.

### 6.6.2.2. Regulador de Cancelación.

#### 6.6.2.2.1. Regulador de Tiempo Mínimo.

Al igual que en el apartado anterior, el objetivo es comprobar la bonanza del modelado irregular en RE cuando el regulador, en este caso, es de Tiempo Mínimo. Para ello se van a llevar a cabo los mismos pasos que antes. Así, lo primero que hay que hacer es recordar los diseños realizados en 6.4.8, donde se obtienen sendos reguladores bifrecuencia, uno para el caso regular y otro para el caso irregular, partiendo del modelo continuo del proceso elegido (eje Y de la estructura porticada). Concretamente, dichos diseños surgen de resolver las ecuaciones diofánticas de (6-34) y (6-34b), para caso regular e irregular respectivamente.



Cabe recordar que, cuando la entrada de referencia es una rampa, el interfaz entre parte lenta y rápida es una expansión de la señal de control lenta, en aras a generar la señal de error del subregulador definido a frecuencia rápida.

Para llevar a cabo el primer paso de 6.6.1, se simula el sistema de control (mediante macros de Matlab) según la estrategia adoptada en la figura 6-54, obteniéndose las respuestas de las figuras 6-80 y 6-81. En la primera de ellas se observa que, efectivamente, cuando está definido a  $T$  tanto el regulador como el proceso la salida del sistema coincide cada  $T$  instantes de tiempo con la salida del mismo cuando el proceso está definido a  $t_0$  y las acciones retenidas a dicho periodo. Además, a fin de establecer una comparativa, se va a tomar nuevamente el tiempo de establecimiento (criterio 98%) como el parámetro que se antoja más significativo de las salidas generadas en este caso, observándose que  $t_e \approx 0.03$  seg. Por su parte, en la figura 6-81 se ve la evolución de las acciones de control, tanto las obtenidas a  $T$  como las retenidas a  $t_0$  cada  $T$  instantes de tiempo.

Tras esto se va a pasar al segundo punto de la hipótesis de trabajo: comprobar la pérdida de prestaciones que surge en la salida del sistema cuando las acciones diseñadas en regular le son aplicadas al sistema en instantes irregulares de tiempo (recordar que el patrón es en este caso  $[0, 2NT/3]$ ). Recurriendo nuevamente a Matlab se obtienen una serie de resultados que se muestran en las figuras 6-82 y 6-83. Así, en la figura 6-82 se observa que, efectivamente, la salida del sistema a  $t_0$  ofrece claramente peor tiempo de establecimiento ( $t_e \approx 0.25$  seg) que la obtenida anteriormente. Por su parte, en la figura 6-83 se observa en primera instancia que ahora la retención de las acciones es a instantes irregulares de tiempo; además, este hecho provoca que, pese a que las primeras acciones coinciden con las de la figura 6-81, hacia la quinta acción (a periodo  $T$ ) la señal de control cambia, ya que el valor a  $NT$  de la salida que se realimenta en este caso es diferente con respecto al que se realimenta en la figura 6-80 (como ya se vio con el regulador P-I-D). Se percibe claramente como la oscilación existente en la respuesta del sistema se debe a la señal de control, la cual es oscilante, transmitiendo dicha oscilación a la salida del sistema.

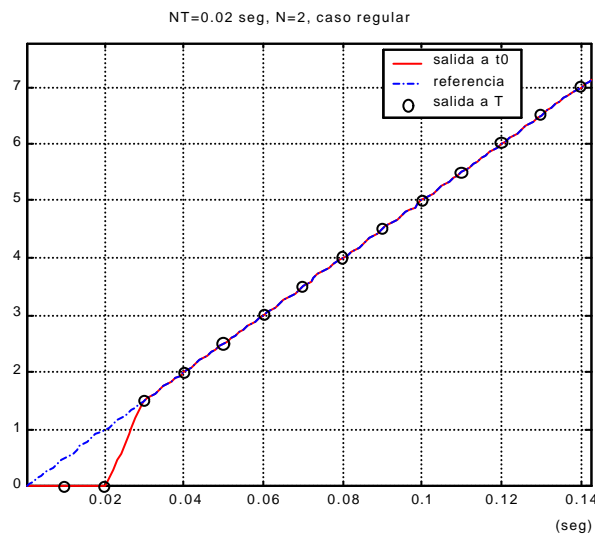


Figura 6-80: Salidas bifrecuencia regular Tiempo Mínimo.

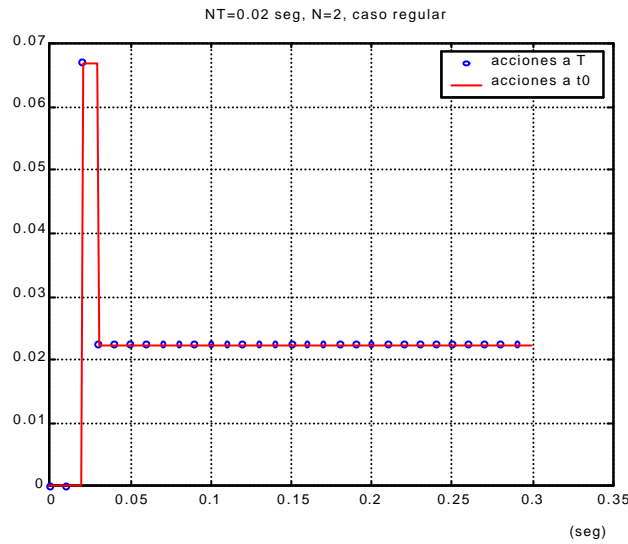


Figura 6-81: Acciones bifrecuencia regular Tiempo Mínimo.

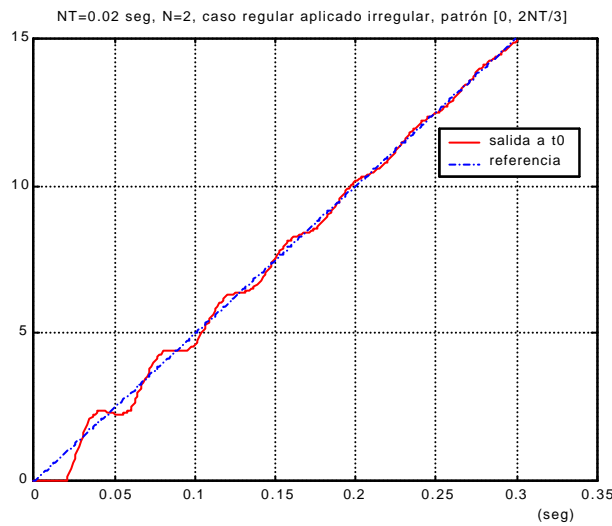


Figura 6-82: Salidas bifrecuencia regular aplicado irregular Tiempo Mínimo.

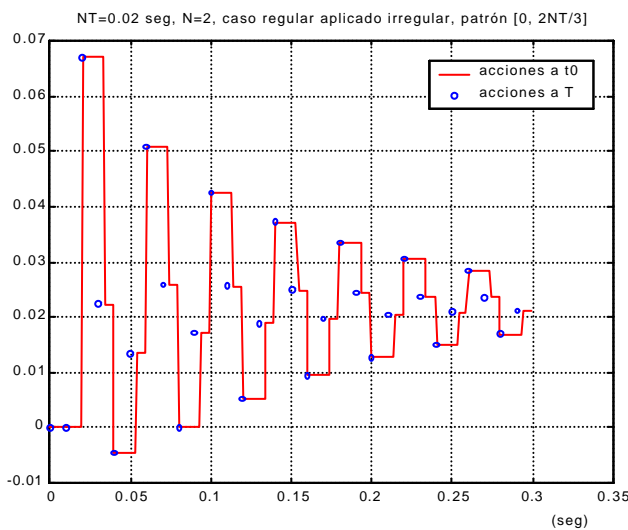


Figura 6-83: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular Tiempo Mínimo.

Por último, a partir del diseño del regulador bifrecuencia irregular logrado en 6.4.8 (para un esquema de muestreo  $[0, 2NT/3]$ ) se va a realizar el tercer paso de 6.6.1, en el que se simula el nuevo sistema de control con estructura no convencional según el planteamiento de la figura 6-56. Los resultados que se obtienen se muestran en las figuras 6-84 y 6-85. En la primera de ellas se presenta tanto la salida a T, es decir, cuando regulador y proceso están definidos a dicho periodo incorporando en sus modelos la estructura irregular, como la salida a  $t_0$ , esto es, cuando el proceso está definido a  $t_0$  y se le introduce la acción obtenida a T en el instante de tiempo correspondiente a periodo  $t_0$ . Como se puede observar, nuevamente, esta última salida coincide prácticamente siempre a NT con la primera, lo cual es muy interesante dado que es éste el valor que ha de realimentarse. Sin embargo, a instantes intermedios del metaperiodo genera cierto error, sobre todo en el transitorio. Como se argumentó para reguladores tipo P-I-D, esto puede ser debido a que el modelo en RE que se está contemplando está basado en una aproximación a periodo T, por lo que algunos valores (transitorio) pueden generar cierto error con respecto a la salida que se obtiene si se contempla tanto regulador como proceso definidos a T con estructura irregular. No obstante, el tiempo de establecimiento en este ejemplo es prácticamente igual en ambos casos:  $t_e \approx 0.04$  seg.

Por su parte, la figura 6-85 muestra las acciones de control generadas por el regulador bifrecuencia irregular, las cuales, por lo comentado ya en 6.4.8 relativo a la formación de  $\tilde{M}(z_2)$ , varían respecto de las suministradas al proceso en el caso regular, de manera que son más suaves haciendo que el sistema llegue al valor de referencia un poco más tarde. Es interesante observar como debido a la aproximación que se toma en el modelado hay ciertas acciones (las comprendidas en el rango de tiempo de 0.04 a 0.08 seg.) que difieren ligeramente de las que produciría el regulador bifrecuencia si actuara directamente sobre el proceso definido a T con estructura no convencional.

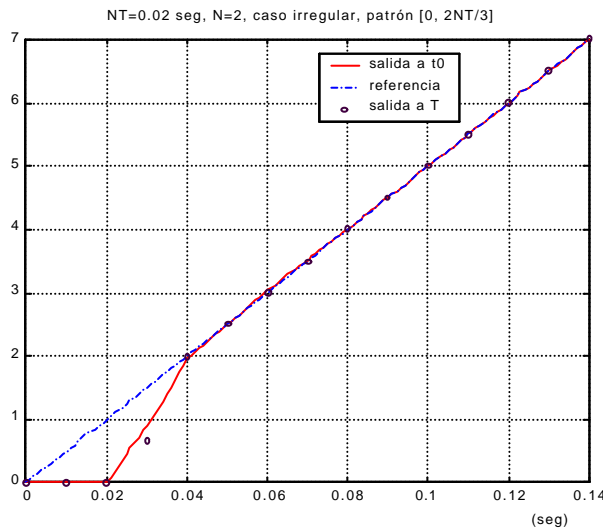


Figura 6-84: Salidas bifrecuencia irregular Tiempo Mínimo.

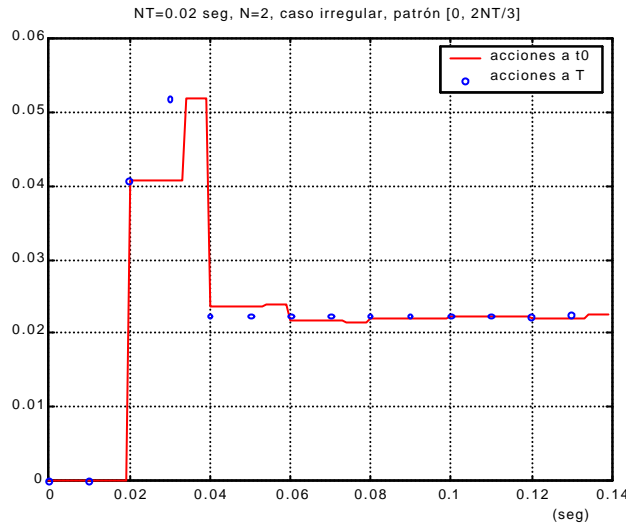


Figura 6-85: Acciones bifrecuencia irregular Tiempo Mínimo.

### Conclusiones

1ª) Tras lo visto, en principio, parece que nuevamente el esfuerzo que supone llevar a cabo un diseño bifrecuencia irregular está justificado, por lo dicho ya en regulador tipo P-I-D.

2ª) En este caso, aunque las acciones generadas son más suaves, se puede comprobar que el muestreo irregular del proceso ( $t_e \approx 0.04$  seg) no aporta mejoras, es más, posee sensiblemente peor tiempo de establecimiento que en el caso de muestreo regular ( $t_e \approx 0.03$  seg). No obstante, reincidir en que el objetivo de esta metodología es intentar ofrecer la posibilidad de poder muestrear al proceso de manera no convencional cuando éste lo requiera.

#### 6.6.2.2.2. Regulador de Tiempo Finito.

Al igual que en los apartados anteriores, el objetivo es comprobar la bonanza del modelado irregular en RE cuando el regulador, en este caso, es de Tiempo Finito. Para ello se van a llevar a cabo los mismos pasos que en ocasiones anteriores. Así, lo primero que hay que hacer es recordar los diseños realizados en 6.4.9, donde se obtienen sendos reguladores bifrecuencia, uno para el caso regular y otro para el caso irregular, partiendo del modelo continuo del proceso elegido (eje Y de la estructura porticada). Concretamente, dichos diseños surgen de resolver las ecuaciones diofánticas de (6-35) y (6-36), para caso regular e irregular respectivamente.

Nuevamente el interfaz entre parte lenta y rápida es una expansión de la señal de control lenta, en aras a generar la señal de error del subregulador a frecuencia rápida.

Para llevar a cabo el primer paso de 6.6.1, se simula el sistema de control (mediante macros de Matlab) obteniéndose las respuestas de las figuras 6-86 y 6-87. En la primera de ellas, como siempre, se observa que, efectivamente, cuando está definido a T tanto el regulador como el proceso la salida del sistema coincide cada T instantes de tiempo con la salida del mismo cuando el proceso está definido a  $t_0$  y las acciones retenidas a dicho periodo.

Además, a fin de establecer una comparativa, al igual que en apartados anteriores se va a tomar el tiempo de establecimiento (criterio 98%) como el parámetro que se cree más significativo de las salidas generadas en este caso, observándose que  $t_e \approx 0.04$  seg. También es interesante observar el valor en  $t=0.03$  seg para la salida,  $y(0.03) \approx 0.875$ , ya que este valor nos servirá para ver en este ejemplo qué opción (regular o irregular) genera menor error de seguimiento en el transitorio. Por su parte, en la figura 6-87 se ve la evolución de las acciones de control, tanto las obtenidas a T como las retenidas a  $t_0$  cada T instantes de tiempo.

Tras esto se va a pasar al segundo punto de la hipótesis de trabajo: comprobar la pérdida de prestaciones que surge en la salida del sistema cuando las acciones diseñadas en regular le son aplicadas al sistema en instantes irregulares de tiempo (como se indica en la figura 6-56). Recurriendo nuevamente a Matlab se obtienen una serie de resultados que se muestran en las figuras 6-88 y 6-89. Así, en la figura 6-88 se observa que, efectivamente, la salida del sistema a  $t_0$  ofrece peor tiempo de establecimiento ( $t_e \approx 0.08$  seg) que la obtenida anteriormente. Por su parte, en la figura 6-89 se observa en primera instancia que ahora la retención de las acciones es a instantes irregulares de tiempo; además, este hecho provoca que, pese a que las primeras acciones coinciden con las de la figura 6-87, nuevamente hacia la quinta acción (a periodo T) la señal de control cambia, ya que el valor a NT de la salida que se realimenta en este caso es diferente con respecto al que se realimenta en la figura 6-86. Este hecho ya se había observado para el regulador tipo P-I-D y para el de cancelación de Tiempo Mínimo.

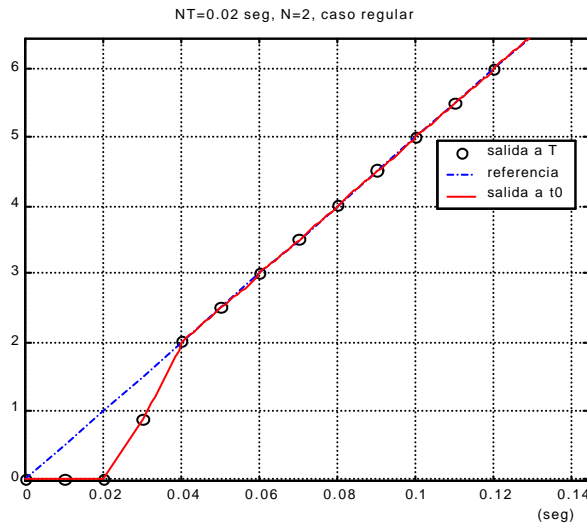


Figura 6-86: Salidas regulador bifrecuencia Tiempo Finito.

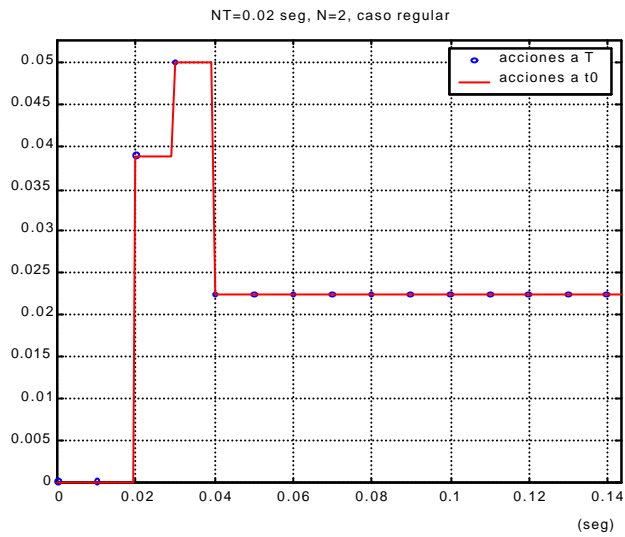


Figura 6-87: Acciones regulador bifrecuencia Tiempo Finito.

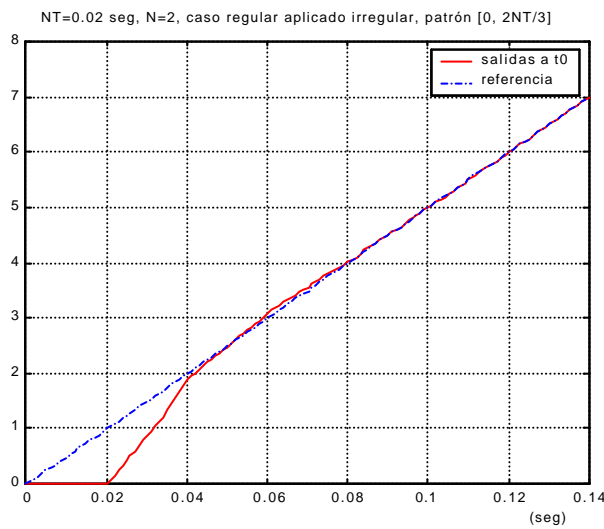


Figura 6-88: Salidas bifrecuencia regular aplicado irregular Tiempo Finito.

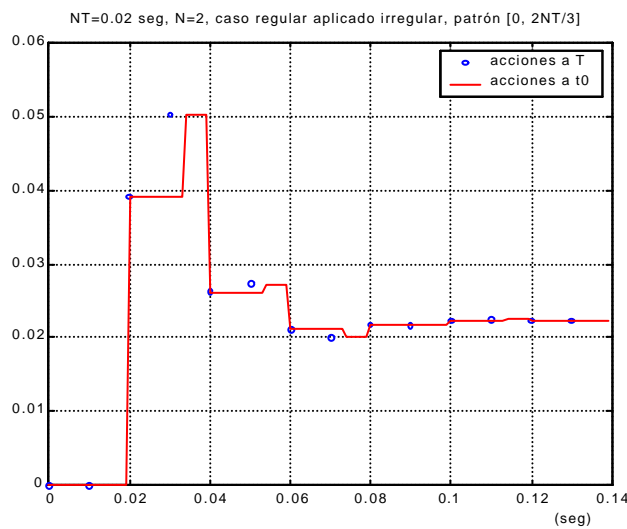


Figura 6-89: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular Tiempo Finito.

Por último, a partir del diseño del regulador bifrecuencia irregular logrado en 6.4.9. (para un esquema de muestreo  $[0, 2NT/3]$ ) se va a realizar el tercer paso de 6.6.1, en el que se simula el nuevo sistema de control con estructura no convencional según el planteamiento de la figura 6-56. Como ya se comentó en 6.4.9, el sistema de control obtenido en este caso irregular de tiempo finito es igual al obtenido en el caso irregular de tiempo mínimo, por lo que los resultados que se obtienen quedan ya presentados en las figuras 6-84 y 6-85. En la primera de ellas se presenta tanto la salida a T como la salida a  $t_0$ . Como se ha visto en los diseños anteriores, esta última salida coincide prácticamente siempre a NT con la primera, lo cual es muy interesante dado que es éste el valor que ha de realimentarse. Sin embargo, a instantes intermedios del metaperiodo vuelve a generar cierto error en el transitorio (se cree que por ser una fdt aproximada). Por ello, aunque el tiempo de establecimiento no varía en cada caso para este ejemplo, sí lo hace el valor a  $t=0.03$  seg, ya que, en la salida a T es de  $y(t)\approx 0.66$  (más lejano a la referencia que el del caso regular,  $y(t)\approx 0.875$ , esto es, mayor error en el seguimiento), mientras que en la salida a  $t_0$  es  $y(t)\approx 0.91$  (que es mejor que el del caso regular,  $y(t)\approx 0.875$ , y genera cierta diferencia a favor con respecto al de la salida a T).

Por su parte, la figura 6-85 muestra las acciones de control generadas por el regulador bifrecuencia irregular, las cuales en este caso son parecidas (aunque ligeramente de mayor magnitud las primeras de ellas) a las generadas en el caso regular. Además se observa como son retenidas a  $t_0$  y reescaladas a instantes irregulares de tiempo.

## Conclusiones

1ª) Tras lo visto, en principio, nuevamente el esfuerzo que supone llevar a cabo un diseño bifrecuencia irregular está justificado, por lo dicho ya en los diseños anteriores (tipo P-I-D y Tiempo Mínimo)

2ª) En este caso, se puede comprobar que el muestreo irregular del proceso a  $t_0$  ( $y(0.03)\approx 0.91$ ) aporta mejoras (en el transitorio) con respecto al caso de muestreo regular ( $y(0.03)\approx 0.875$ ), aunque sea a costa de aproximarse menos a la salida a T irregular, donde  $y(0.03)\approx 0.66$ . Estas mejoras relativas al esquema de muestreo se podrían aprovechar para conseguir mejores prestaciones del sistema.

### 6.6.2.3. Regulador de Asignación de Polos y Ceros.

#### 6.6.2.3.1. Ejemplo 1.

En este apartado se van a realizar sucesivamente los tres pasos descritos en 6.6.1, partiendo de los reguladores bifrecuencia regular e irregular de Tres Ramas diseñados en 6.5.1 para el proceso descrito allí.

Recordar que nuevamente se va a utilizar un escalón de entrada, por lo que el interfaz será un retenedor.

Para llevar a cabo el primer paso de 6.6.1 se implementa en Matlab-Simulink el sistema de control diseñado para el caso regular, demostrándose (figura 6-90), como siempre, que las salidas a T y a  $t_0$  coinciden cada T instantes de tiempo, pero, en este caso, debido a las

oscilaciones ocultas que aparecen, la salida a T logra un mejor tiempo de establecimiento (criterio 98%),  $t_e \approx 1$  seg, que la salida a  $t_0$ ,  $t_e \approx 2.25$  seg. En la figura 6-91, por su parte, se observan las acciones de control retenidas según la estrategia de la figura 6-54.

Si ahora se sigue la estrategia de la figura 6-55 con el diseño regular (para un patrón de muestreo  $[0, NT/3]$ ), la figura 6-92 muestra claramente la degradación de la salida del sistema a  $t_0$  (como se ha visto en apartados anteriores para los otros reguladores), de manera que ahora  $t_e \approx 3.25$  seg. En la figura 6-93 se puede ver claramente la estrategia utilizada en la actuación sobre el proceso, mientras que en la figura 6-94 se hace una comparación de las salidas a  $t_0$  regular y regular aplicada irregular.

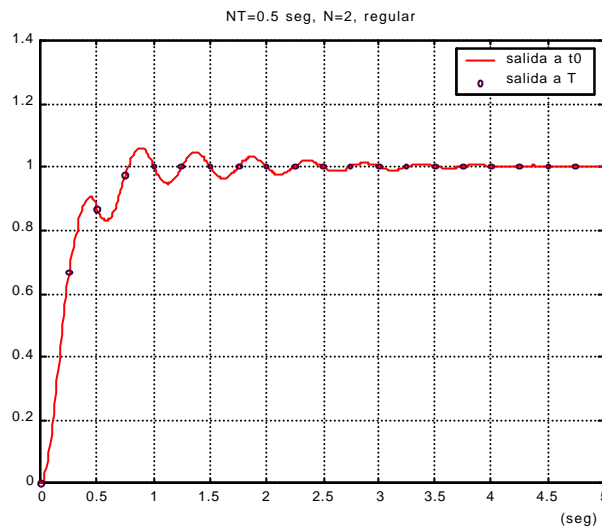


Figura 6-90: Salidas bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 1.

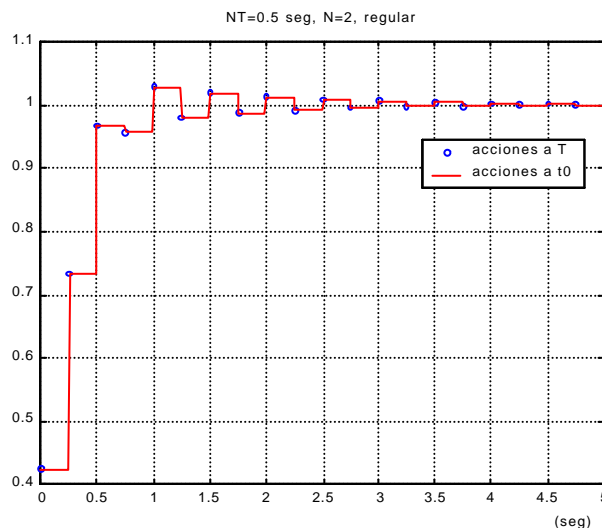


Figura 6-91: Acciones bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 1.



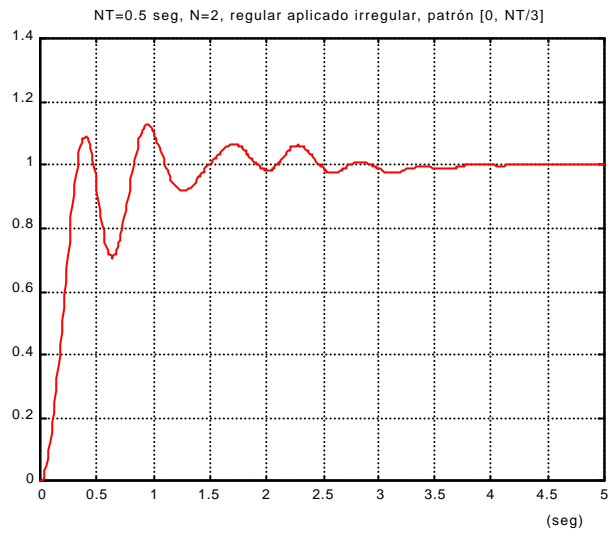


Figura 6-92: Salida bifrecuencia regular aplicado irregular Tres Ramas ejemplo 1.

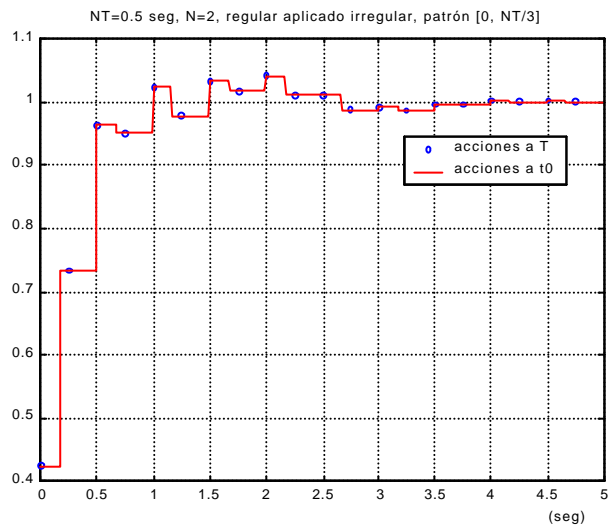


Figura 6-93: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular Tres Ramas ejemplo 1.

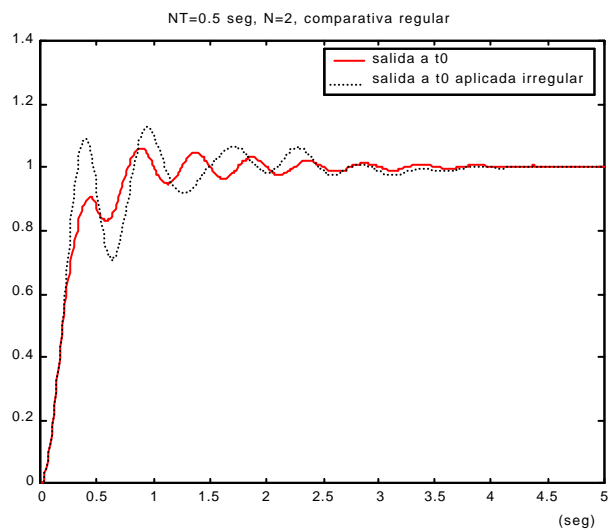


Figura 6-94: Comparativa salidas bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 1.

Por último, para llevar a cabo el tercer paso de 6.6.1, se recurre al diseño en irregular (patrón de muestreo  $[0, NT/3]$ ) del sistema de control desarrollado en 6.5.1. Se implementa con Matlab-Simulink dicho sistema obteniéndose la salida de la figura 6-95. En ella se ve nuevamente que la salida a  $t_0$  coincide prácticamente siempre a metaperiodo con la expresada a  $T$ , mientras que en los valores intermedios genera cierto error, en principio debido a la aproximación que sufre el modelado en irregular. En este caso irregular, la salida a  $T$  tiene un tiempo de establecimiento semejante al del caso regular ( $t_e \approx 1$  seg), mientras que la salida a  $t_0$  alcanza un  $t_e \approx 2.4$  seg, que es peor que el del caso regular,  $t_e \approx 2.25$  seg, pero mejora al del caso regular aplicado en irregular,  $t_e \approx 3.25$  seg. Nuevamente se observa (como en el caso regular) que, debido a las oscilaciones ocultas, el tiempo de establecimiento de la respuesta a  $t_0$  es peor que el de la respuesta a  $T$ .

Por su parte, en la figura 6-96 se muestran las acciones de control suministradas al proceso en este caso irregular. Es interesante observar que las acciones suministradas en el tramo temporal comprendido entre 0.5 y 2.5 seg difieren ligeramente de las que suministraría el regulador bifrecuencia al proceso si éste estuviera definido dentro del sistema de control a periodo  $T$  incorporando la estructura no convencional.

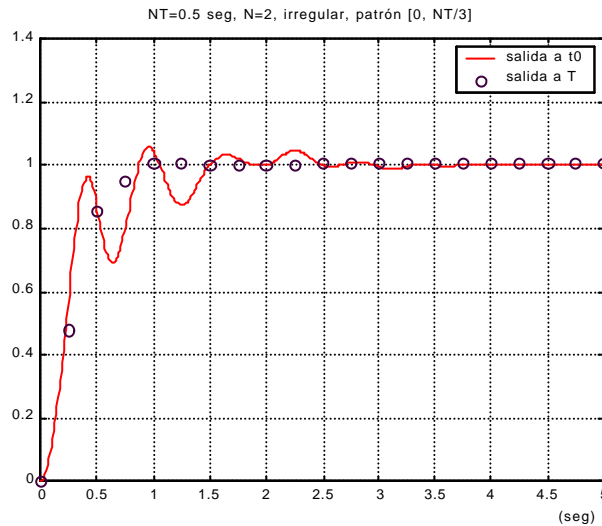


Figura 6-95: Salida bifrecuencia irregular Tres Ramas ejemplo 1.

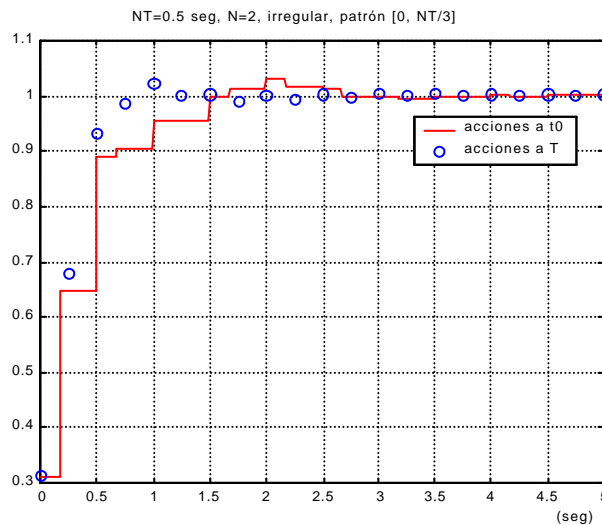


Figura 6-96: Acciones bifrecuencia irregular Tres Ramas ejemplo 1.

## Conclusiones

1ª) Como en los diseños anteriores, aparentemente el esfuerzo que supone llevar a cabo un diseño bifrecuencia irregular está justificado, ya que el diseño regular aplicado a instantes irregulares de tiempo degrada las prestaciones del sistema (como cabía esperar).

2ª) En este ejemplo, dado que se ha tratado con un metaperiodo relativamente grande ( $NT=0.5$  seg) y con un patrón de muestreo irregular donde el instante intermedio ( $NT/3$ ) se encuentra relativamente distanciado de  $T$  (instante ubicado a mitad del metaperiodo cuando  $N=2$ ), se dispone de una aproximación para el modelo con estructura no convencional del proceso que, cuando es simulado a  $t_0$ , genera cierto error en el transitorio para los valores intermedios con respecto a los de la salida a  $T$ . Dicho error resulta más evidente que en diseños anteriores, ya que en ellos o el metaperiodo tenía asignado un valor más pequeño o el instante intermedio del patrón irregular estaba más cercano a  $T$ .

### 6.6.2.3.2. Ejemplo 2.

En este apartado se van a realizar sucesivamente los tres pasos descritos en 6.6.1, partiendo de los reguladores bifrecuencia regular e irregular de Tres Ramas diseñados en 6.5.2 para el proceso descrito allí.

Recordar que nuevamente se va a utilizar un escalón de entrada, por lo que el interfaz será un retenedor.

Para llevar a cabo el primer paso de 6.6.1 se implementa en Matlab-Simulink el sistema de control diseñado para el caso regular, demostrándose, como siempre, que las salidas a  $T$  y a  $t_0$  coinciden cada  $T$  instantes de tiempo (ver figura 6-97). Se observa como la sobreoscilación es de  $\mathbf{d}(\%) \approx 9.6\%$  y el tiempo de establecimiento  $t_e \approx 1.8$  seg. En la figura 6-98, por su parte, se observan las acciones de control retenidas según la estrategia de la figura 6-54.

Si ahora se sigue la estrategia de la figura 6-56 con el diseño regular (para un patrón de muestreo  $[0, 0.55]$ ), la figura 6-99 muestra claramente la degradación de la salida del sistema a nivel del índice de sobreoscilación, ya que éste pasa a ser de  $\mathbf{d}(\%) \approx 27\%$ . Por su parte el  $t_e$  es similar al caso anterior. En la figura 6-100 se puede ver claramente la estrategia utilizada en la actuación sobre el proceso, mientras que en la figura 6-101 se hace una comparación de las salidas a  $t_0$  regular y regular aplicada irregular.

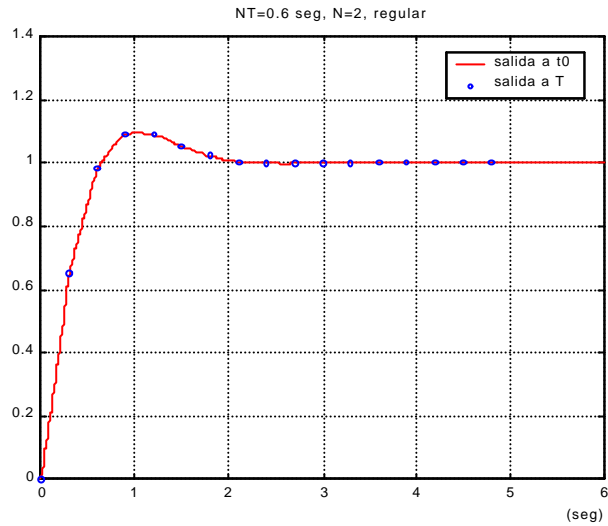


Figura 6-97: Salidas bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 2.

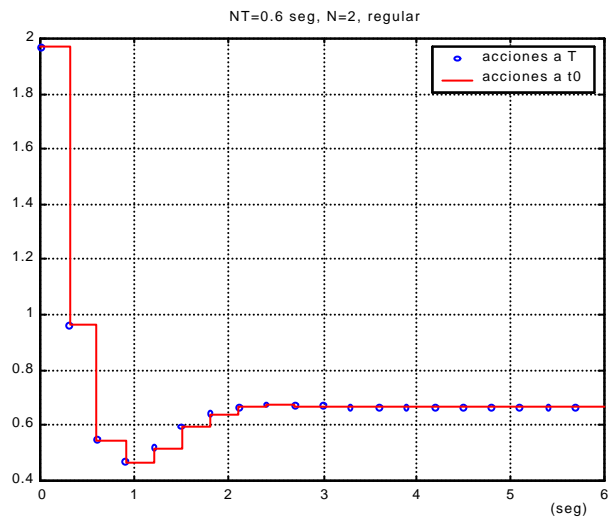


Figura 6- 98: Acciones bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 2.

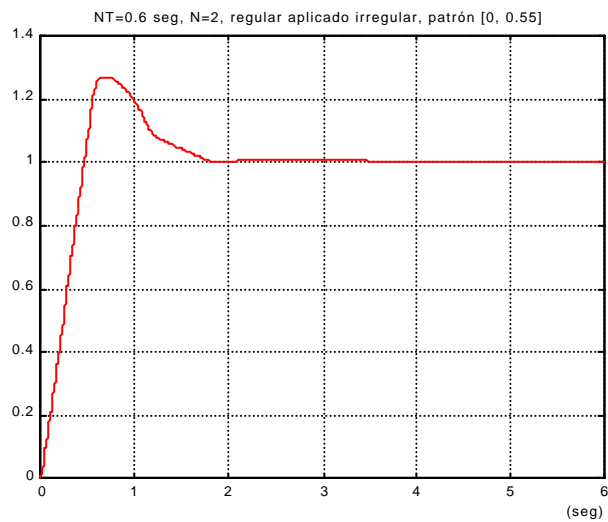


Figura 6-99: Salida bifrecuencia regular aplicado irregular Tres Ramas ejemplo 2.

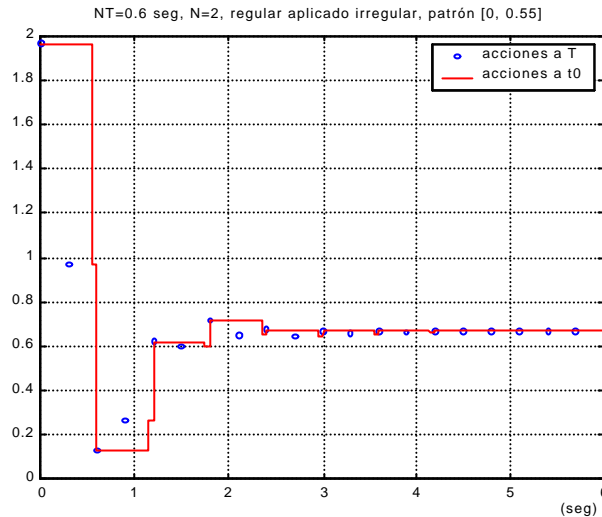


Figura 6-100: Acciones bifrecuencia regular aplicado irregular Tres Ramas ejemplo 2.

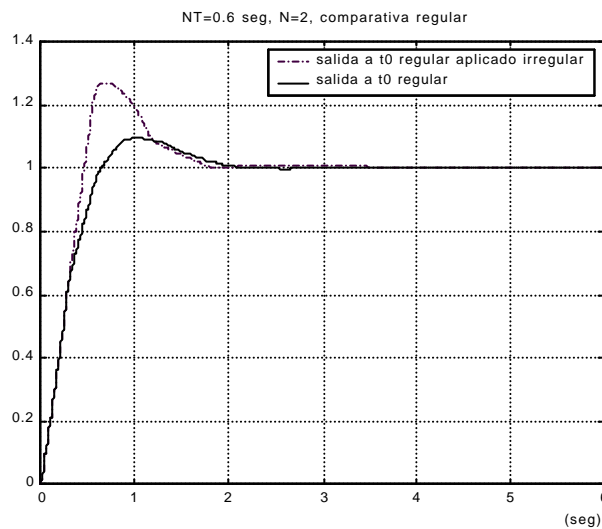


Figura 6-101: Comparativa salidas bifrecuencia regular Tres Ramas ejemplo 2.

Por último, para llevar a cabo el tercer paso de 6.6.1, se recurre al diseño en irregular (patrón de muestreo [0, 0.55]) del sistema de control desarrollado en 6.5.2. Se implementa con Matlab-Simulink dicho sistema obteniéndose la salida de la figura 6-102. En ella se ve nuevamente que la salida a  $t_0$  resulta ser una aproximación aceptable de la salida a  $T$ . Es necesario observar como ahora la salida vuelve a registrar una sobreoscilación parecida (aunque un poco peor) a la del caso regular ( $d(\%) \approx 11.5\%$ ) y mucho mejor que la del caso regular aplicado de forma no convencional PVT (irregular). Por su parte, el tiempo de establecimiento vuelve a ser semejante a los casos anteriores.

Por último, en la figura 6-103 se muestran las acciones de control suministradas al proceso en este caso irregular. Es interesante observar que estas acciones nuevamente son muy parecidas en valor a las que suministraría el regulador bifrecuencia al proceso si éste estuviera definido dentro del sistema de control a periodo  $T$  incorporando la estructura no convencional.

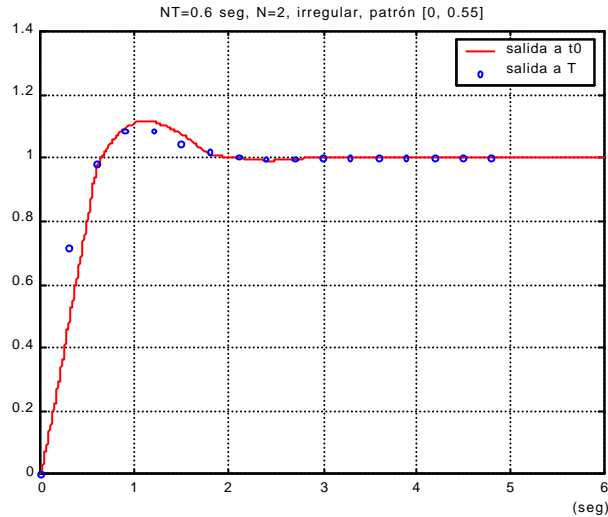


Figura 6-102: Salida bifrecuencia irregular Tres Ramas ejemplo 2.

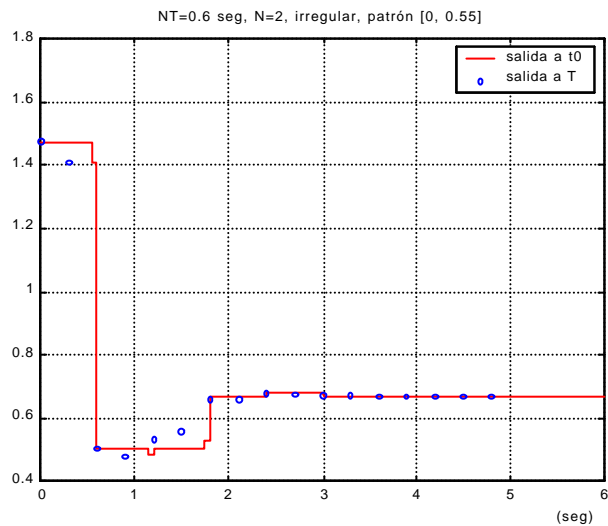


Figura 6-103: Acciones bifrecuencia irregular Tres Ramas ejemplo 2.

## Conclusiones

1ª) Como en los diseños anteriores, aparentemente el esfuerzo que supone llevar a cabo un diseño bifrecuencia irregular está justificado, ya que el diseño regular aplicado a instantes irregulares de tiempo degrada las prestaciones del sistema (como cabía esperar).

2ª) En este ejemplo, pese a que se ha tratado con un metaperiodo relativamente grande ( $NT=0.6$  seg) y con un patrón de muestreo irregular donde el instante intermedio (0.55) se encuentra relativamente distanciado de T (instante ubicado a mitad del metaperiodo cuando  $N=2$ ), se dispone de una aproximación para el modelo con estructura no convencional del proceso que, cuando es simulado a  $t_0$ , genera poco error en el transitorio con respecto a la salida a T. Esta mejora en la aproximación puede ser debida al hecho de que este ejemplo no presenta oscilaciones ocultas, ya que en el ejemplo anterior sí existían y se obtenía una peor aproximación para la salida a  $t_0$  del sistema de control con respecto a la salida que se obtendría a T para el mismo.

### 6.7. DISEÑO DEL CONTROLADOR CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL PARA ENTORNOS CON RETARDOS ALEATORIOS ACOTADOS.

En el último punto del capítulo 3 se ha comprobado experimentalmente que el modelado en RE del sistema muestreado de manera no uniforme reproduce mejor el comportamiento de éste si los instantes intermedios del metaperiodo  $T_0$  (o también  $NT$ ) se escogen dentro de un rango establecido a partir del parámetro  $d$  (distancia temporal que hay entre el instante de muestreo intermedio perteneciente a un esquema uniforme y uno no uniforme).

Por otro lado, es lógico pensar que en ciertos entornos los retardos se pueden producir de forma más o menos aleatoria dentro de ciertos rangos de tiempo. Si por simplicidad se tomara  $N=2$ , se podría considerar para nuestro caso que el rango de inyección de las acciones de control sobre el proceso podría estar acotado por el intervalo  $\left[ \frac{T_0}{2} - d .. \frac{T_0}{2} + d \right]$ .

A la vista de todo lo anterior, y con el fin de dar mayor viabilidad al diseño, parece interesante cuestionarse qué sucedería si para el escenario planteado se diseñara un controlador con estructura no convencional teniendo en cuenta como esquema de muestreo aquél en el que el instante intermedio venga dado por el punto medio del rango acotado entre el instante  $T_0/2$  y el parámetro  $d$ , tal y como se aprecia en la figura 6-104. El patrón de muestreo sería por tanto:

$$\left[ 0, \left( \frac{T_0}{2} - \frac{d}{2} \right) \right]$$

y supondría la consideración de un controlador “medio” de entre los casos posibles.

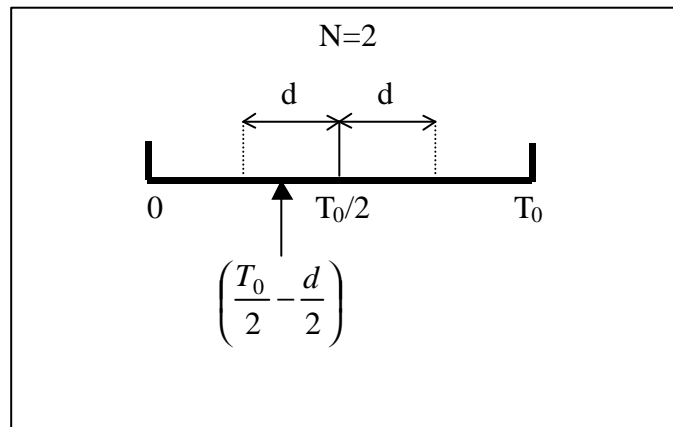


Figura 6-104: Instante intermedio del patrón para controlador ante retardos aleatorios.

Así pues, la idea sería, por un lado, ver en qué medida se empeoran las prestaciones del sistema al trabajar con un controlador bifrecuencia cuando la actuación real sobre el sistema sigue un patrón aleatorio (dentro de las cotas establecidas), y por otro lado, experimentar si se produce recuperación de prestaciones al aplicar las acciones generadas por el controlador con estructura no convencional siguiendo el mencionado patrón aleatorio.

Por último, también sería interesante comprobar si existe (y en qué medida) pérdida de prestaciones en el sistema de control cuando se aplica el controlador con estructura no convencional para un esquema de muestreo aleatorio con respecto a cuando éste es fijo PVT.

A continuación se ve todo lo apuntado por medio de un ejemplo.

### 6.7.1. Ejemplo.

En este ejemplo se toma como sistema a controlar el visto en el apartado 3.3 del capítulo 3, esto es:

$$G_p(s) = \frac{s+3}{s^2+3s+2}$$

Se toma, como allí,  $T_0=NT=0.2$  seg y  $N=2$ . Recordar que para este caso se vio en 3.5 que  $d \approx 0.05$  seg. Por tanto, el rango de acotación de los retardos va a ser  $[0.05..0.15]$  para cada metaperiodo (de 0.2 seg). Se estima aproximadamente como patrón “medio” de muestreo el dado por  $[0, NT/3]$ . En 3.3 ya se modeló para este patrón el sistema y se vio que suponía una respuesta bastante fiel para el mismo (al compararla con la que suministraba el modelado en RI). Por tanto, en base a dicho patrón se decide diseñar en primer lugar un controlador con estructura no convencional de cancelación; concretamente, de tiempo mínimo y para hacer frente a una referencia escalón. Así, las ecuaciones diofánticas para los casos regular (uniforme) e irregular (PVT) quedan:

- caso regular (patrón  $[0, NT/2]$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{M}(z_N^{-1}) &= (1+z_2^{-1})z_2^{-1}\Omega_0 \\ 1-M(z_N^{-N}) &= (1-z_2^{-2})\Lambda_0\end{aligned}$$

- caso irregular (patrón  $[0, NT/3]$ ):

$$\begin{aligned}\tilde{M}(z_N^{-1}) &= (1+z_2^{-1})z_2^{-1}(1+1.7184z_2^{-1})(\Omega_0 + \Omega_1z_2^{-1}) \\ 1-M(z_N^{-N}) &= (1-z_2^{-2})(\Lambda_0 + \Lambda_1z_2^{-2})\end{aligned}$$

de donde se deducen los siguientes subcontroladores a periodos rápido y lento, respectivamente:

- caso regular (patrón  $[0, NT/2]$ ):

$$\begin{aligned}G_{RR}(z_N^{-1}) &= \frac{(1+z_2^{-1})z_2^{-1}(1-0.9048z_2^{-1})(1-0.8187z_2^{-1})}{0.0997z_2^{-1}(1-0.7402z_2^{-1})} \\ G_{RL}(z_N^{-N}) &= \frac{1}{(1-z_2^{-2})}\end{aligned}$$

- caso irregular (patrón  $[0, NT/3]$ ):



$$G_{RR}(z_N^{-1}) = \frac{(1+z_2^{-1})z_2^{-1}0.3678(1-0.9048^2 z_2^{-2})(1-0.8187^2 z_2^{-2})}{0.0997 z_2^{-1}(1-0.74015 z_2^{-1})(1+0.7557 z_2^{-1})}$$

$$G_{RL}(z_N^{-N}) = \frac{1}{(1-z_2^{-2})}$$

Recordar que en este tipo de controladores el convertidor de frecuencias se encuentra dentro del subcontrolador rápido, por lo que la entrada suministrada a éste debe ser obtenida por medio de un expand de la salida del subcontrolador lento (acción de control a periodo NT).

Establecidos ya los distintos diseños se pasa a realizar la simulación de los mismos. En la figura 6-105 se muestran las salidas obtenidas dadas las secuencias de control suministradas en cada caso. Dichas secuencias se pueden observar en la figura 6-106, donde queda patente que en el caso regular se inyectan cada  $NT/2=0.1$  seg al proceso y en los otros dos casos según un patrón totalmente aleatorio pero acotado, tal que  $[0, [0.05..0.15]]$  (en el caso irregular, dada la magnitud de sus acciones, se puede ver mejor la secuenciación de las mismas en la figura 6-108). Se observa claramente (figura 6-105) que en el caso regular se obtiene un  $t_e(98\%)=0.1$  seg y se sigue fielmente la referencia de manera sobreamortiguada, cosa que no sucede en el caso de utilizar el controlador del diseño regular cuando sus acciones se aplican según el patrón aleatorio considerado (caso etiquetado en la figura como “regular aplicado irregular”), ya que en este caso, además de aparecer sobreoscilación ( $d(\%) \approx 50\%$ ), aparece también error de posición ( $e_p \approx 5\%$ ). Por su parte, si se aplican según el patrón aleatorio las acciones generadas por el controlador diseñado para el caso irregular (según patrón de muestreo no uniforme  $[0, NT/3]$ ) la respuesta recobra en cierto modo las prestaciones originales, dado que sigue sin error y de forma sobreamortiguada la referencia, aunque empeora el  $t_e(98\%) (\approx 0.6$  seg) con respecto al caso regular.

Por último, en las figuras 6-107 y 6-109 se comprueba que el controlador con estructura no convencional PVT (irregular) es bastante robusto ante el cambio de patrón de muestreo dentro del rango establecido ( $[0, [0.05..0.15]]$ ), ya que la salida que se obtiene en el caso de inyección aleatoria de acciones sobre el proceso es prácticamente igual para todos los patrones aleatorios considerados e incluso cuando se sigue el fijo PVT escogido ( $[0, NT/3]$ ) (ver patrones de muestreo para cada caso en la figuras 6-108 y 6-110, y esta última más detallada en 6-111).

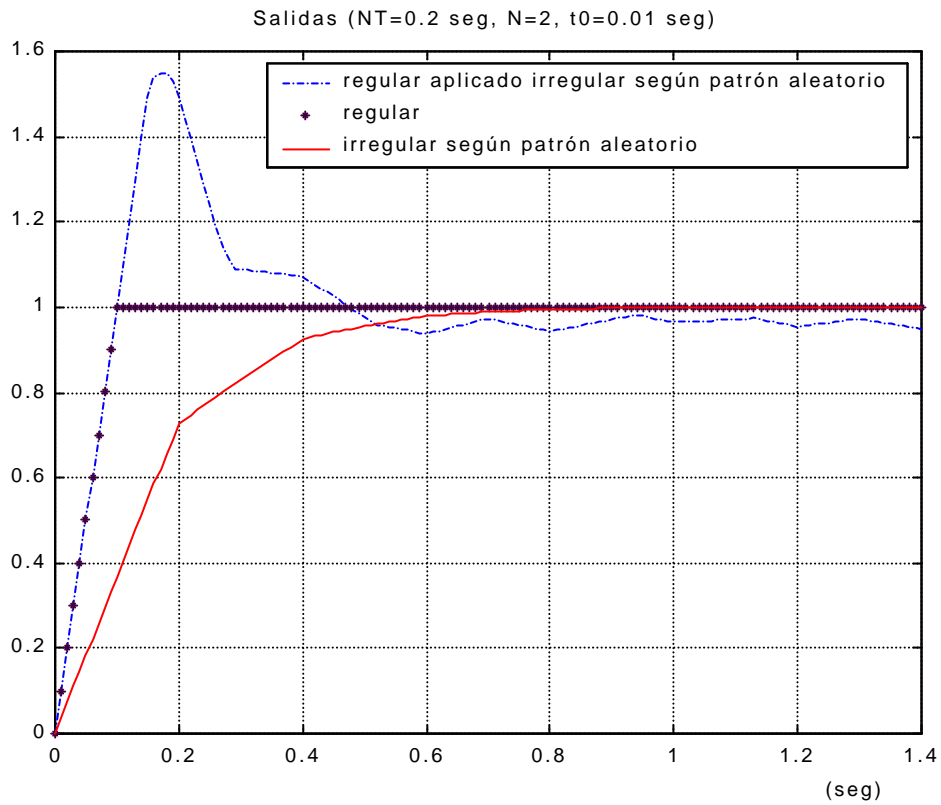


Figura 6-105: Comparativa 1ª salidas ante escalón escenario con retardos aleatorios.

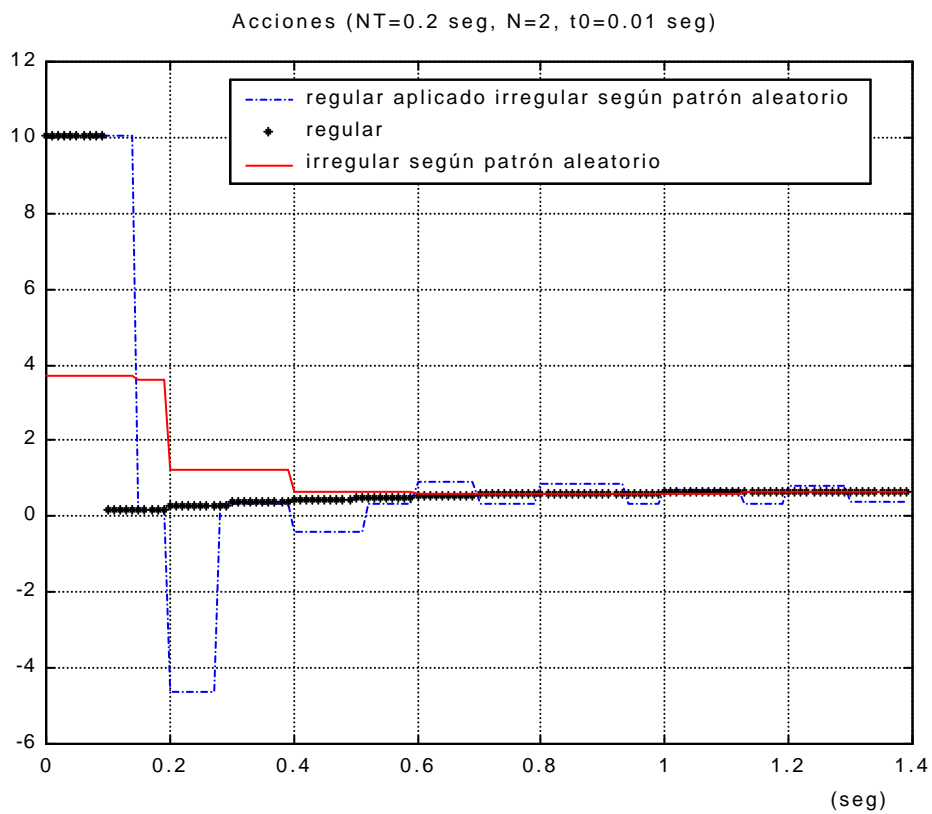


Figura 6-106: Comparativa 1ª acc. de control ante escalón escenario con retardos aleatorios.

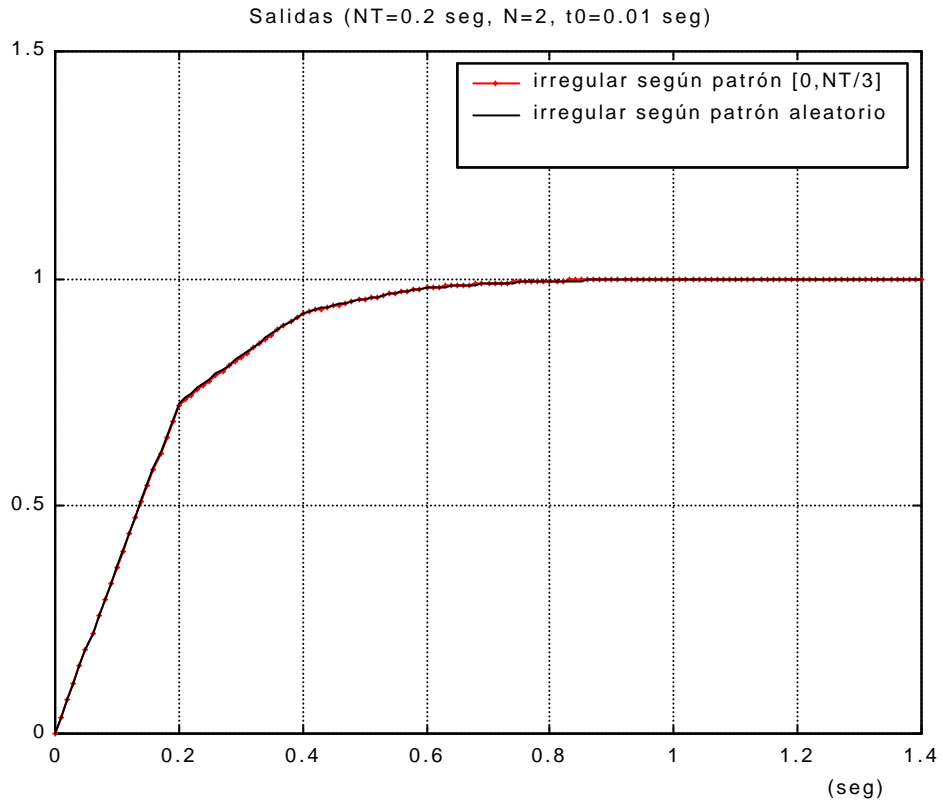


Figura 6-107: Comparativa 2ª salidas ante escalón escenario con retardos aleatorios.

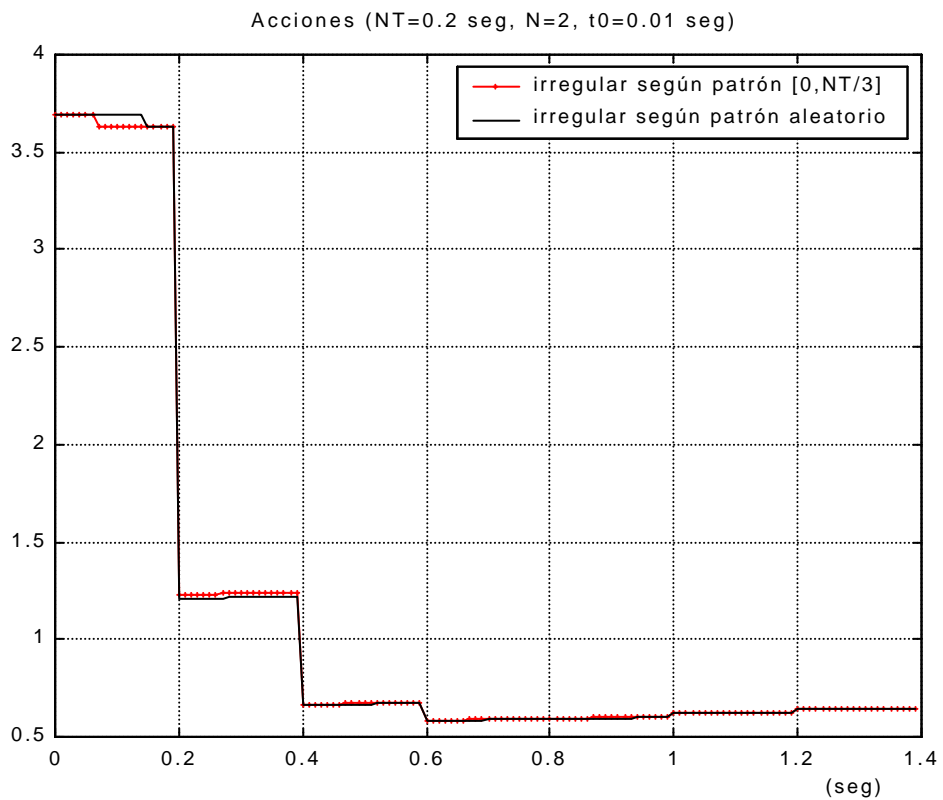


Figura 6-108: Comparativa 2ª acc. de control ante escalón escenario con retardos aleatorios.

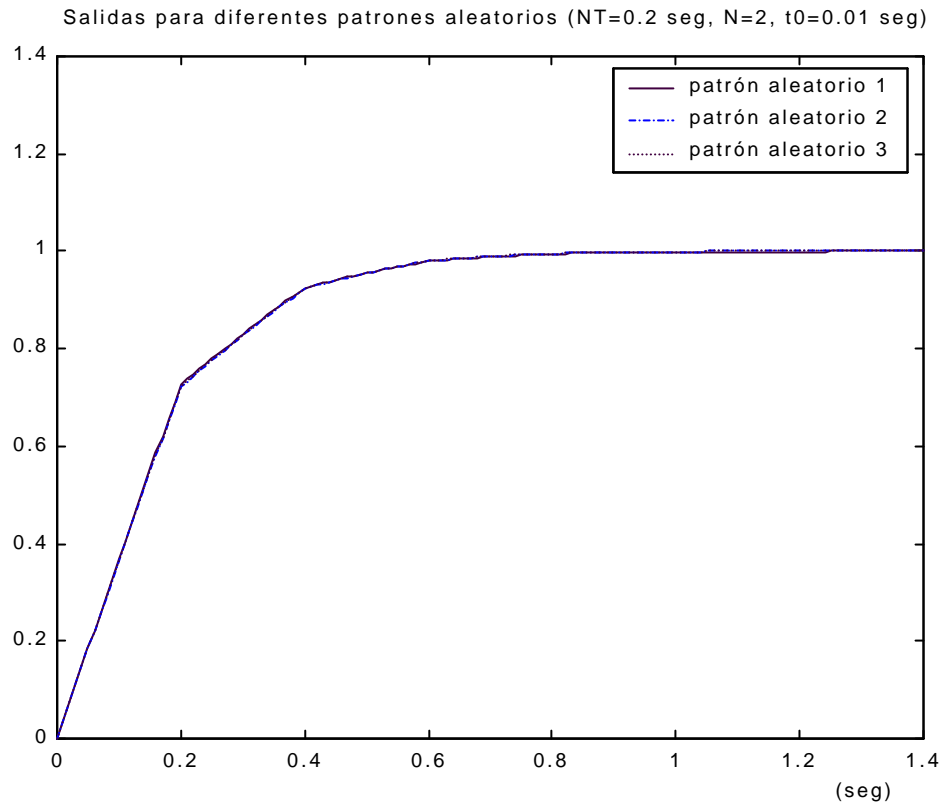


Figura 6-109: Comparativa 3ª salidas ante escalón escenario con retardos aleatorios.

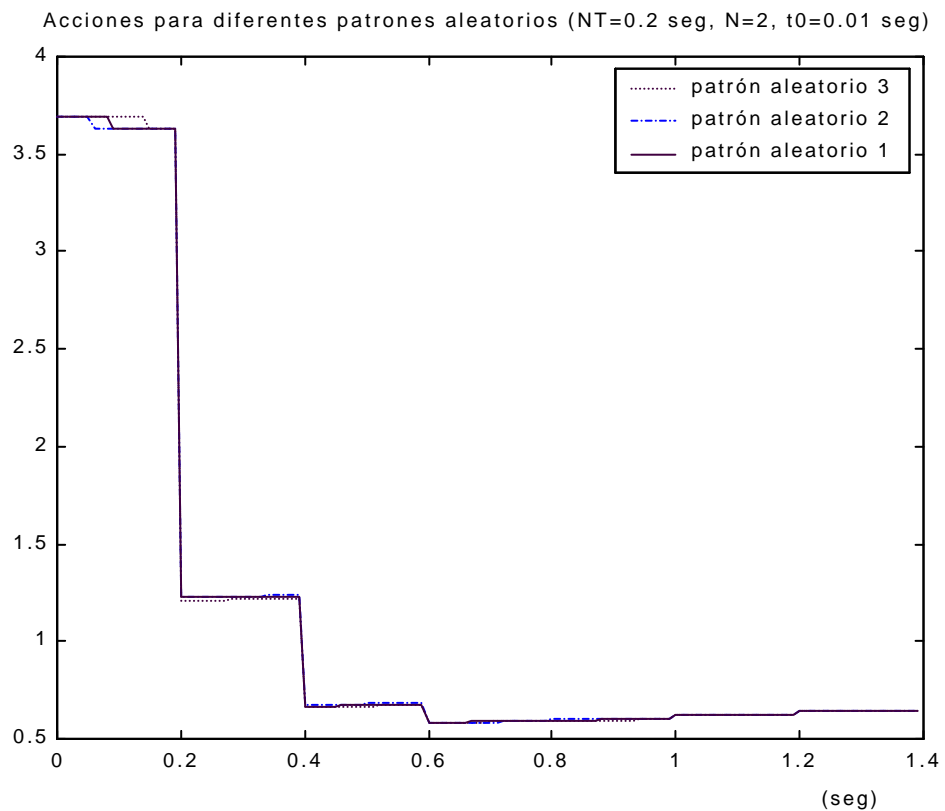


Figura 6-110: Comparativa 3ª acc. de control ante escalón escenario con retardos aleatorios.

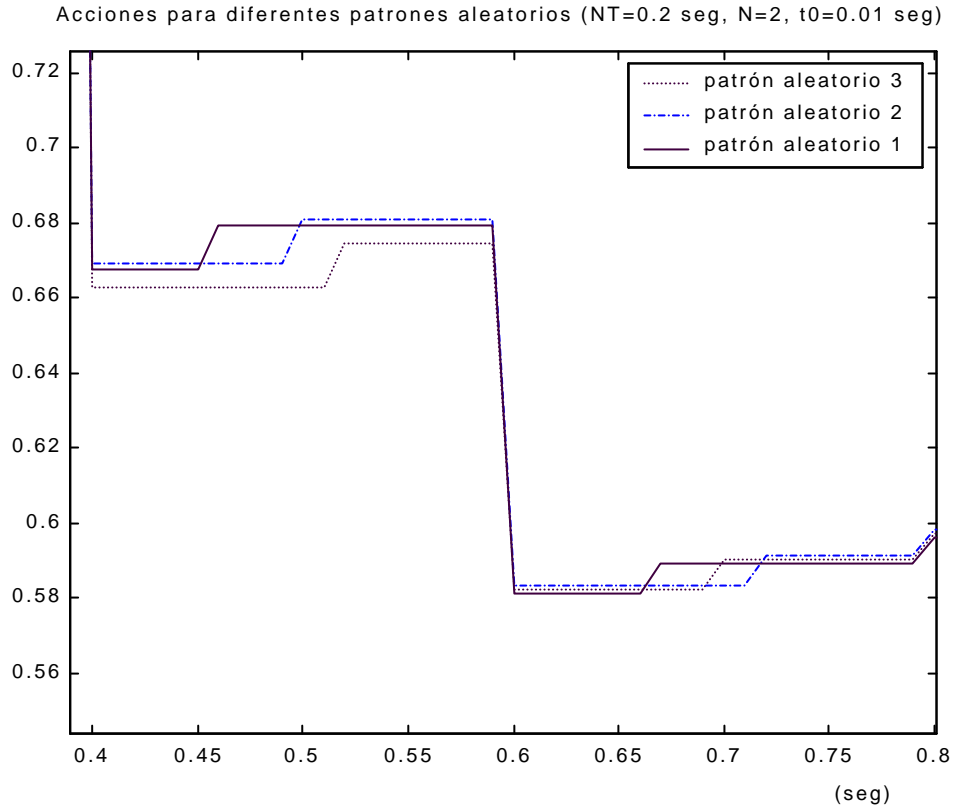


Figura 6-111: Zoom compar. 3ª acc. de control ante escalón escenario con retardos aleatorios.

La robustez mostrada por el controlador de estructura no convencional podría ser debida, en cierto modo, a la magnitud de las acciones de control que genera el mismo, esto es, se puede observar fácilmente como para los diferentes patrones aleatorios tratados prácticamente se obtienen las mismas acciones en cada metaperiodo, por lo que, aunque éstas se inyectan en instantes distintos, parece claro que las salidas respectivas no deben variar mucho.

Por este motivo, en segundo lugar se va a llevar a cabo otro diseño de tiempo mínimo pero ahora ante rampa, con el fin de ver si para este caso se pueden generar secuencias de control más diferentes en magnitud para cada patrón, lo cual, en principio, debería ocasionar variaciones más apreciables en las respectivas salidas. Las ecuaciones diofánticas en este diseño ante rampa quedan:

- caso regular (patrón [0, NT/2]):

$$\tilde{M}(z_N^{-1}) = (1 + z_2^{-1})^2 z_2^{-1} (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1})$$

$$1 - M(z_N^{-1}) = (1 - z_2^{-2})^2 \Lambda_0$$

- caso irregular (patrón [0, NT/3]):

$$\begin{aligned}\tilde{M}(z_N^{-1}) &= (1 + z_2^{-1})^2 z_2^{-1} (1 + 1.7184 z_2^{-1}) (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1} + \Omega_2 z_2^{-2}) \\ 1 - M(z_N^{-1}) &= (1 - z_2^{-2})^2 (\Lambda_0 + \Lambda_1 z_2^{-2})\end{aligned}$$

de donde se deducen los siguientes subcontroladores a periodos rápido y lento, respectivamente:

- caso regular (patrón [0, NT/2]):

$$\begin{aligned}G_{RR}(z_N^{-1}) &= \frac{(1 + z_2^{-1})^2 z_2^{-1} (1.5 - z_2^{-1}) (1 - 0.9048 z_2^{-1}) (1 - 0.8187 z_2^{-1})}{0.0997 z_2^{-1} (1 - 0.7402 z_2^{-1})} \\ G_{RL}(z_N^{-1}) &= \frac{1}{(1 - 2z_2^{-2} + z_2^{-4})}\end{aligned}$$

- caso irregular (patrón [0, NT/3]):

$$\begin{aligned}G_{RR}(z_N^{-1}) &= \frac{(1 + z_2^{-1})^2 z_2^{-1} (0.6681 - 0.4841 z_2^{-1}) (1 - 0.9048 z_2^{-1}) (1 - 0.8187 z_2^{-1})}{0.0997 z_2^{-1} (1 - 0.74015 z_2^{-1}) (1 + 0.7557 z_2^{-1})} \\ G_{RL}(z_N^{-1}) &= \frac{1}{(1 - 2z_2^{-2} + z_2^{-4})}\end{aligned}$$

La simulación de este diseño ante rampa (en figuras 6-112 y 6-113) desprende conclusiones similares a las vistas para el caso de escalón, esto es, si se utiliza un controlador bifrecuencia regular se obtiene unas prestaciones ( $t_e \approx 0.3$  seg) que son empeoradas cuando las acciones de dicho controlador son aplicadas según un patrón aleatorio acotado ( $t_e \approx 1.2$  seg y con oscilaciones), pero, si para ese patrón se utiliza las acciones que genera el controlador no convencional PVT las prestaciones son en cierto modo recuperadas ( $t_e \approx 0.6$  seg).

A continuación se prueba otros patrones no uniformes (verlos en figura 6-115), de manera que uno de ellos es aleatorio acotado, otro es el fijo PVT ([0, NT/3]) y el último es aleatorio pero fuera de las cotas establecidas. Para cada uno de estos casos se comprueba que en este diseño ante rampa (en diferencia al diseño ante escalón) sí se da mayores diferencias en cuanto a la magnitud de las acciones de control generadas, lo cual podría influir en la obtención de respuestas más representativas de cada caso. Así, observando la figura 6-114 se muestran las salidas que arroja cada patrón considerado, mostrando claramente que, pese a la mayor diferencia en magnitud de las acciones inyectadas por cada uno de ellos, las respuestas son similares (pero no idénticas como en el diseño ante escalón). Observar que la respuesta con peores índices de prestaciones es la referente a la aplicación de las acciones del controlador no convencional PVT en instantes no incluidos en el rango establecido. Esta degradación no obstante es mínima (oscilaciones y tiempo de establecimiento relativamente mayores que en los otros casos).

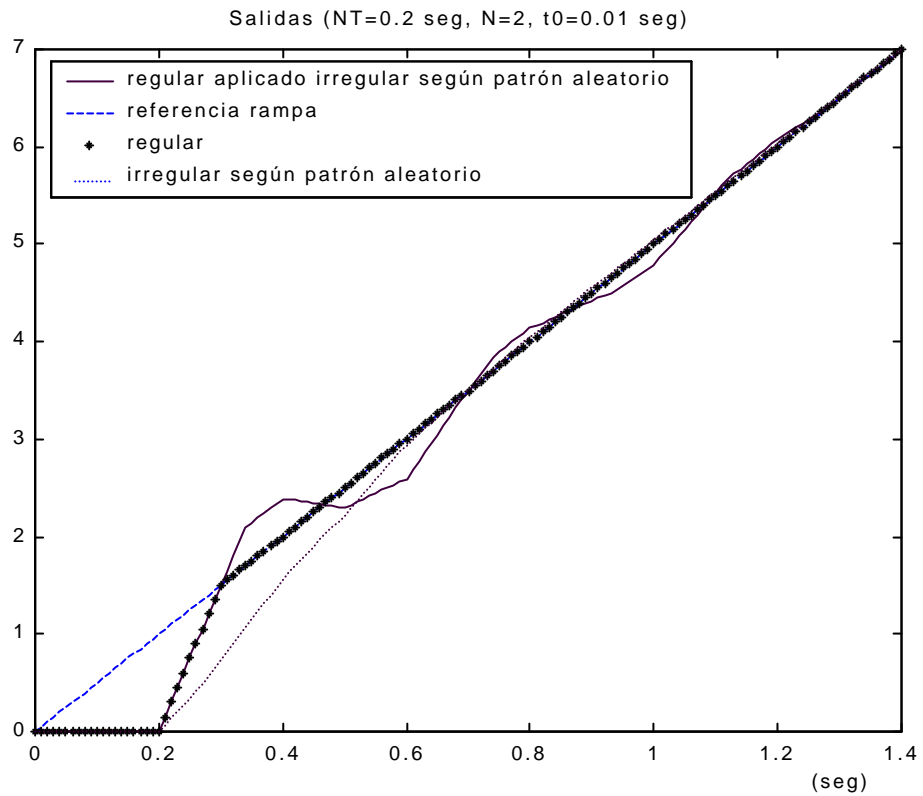


Figura 6-112: Comparativa 1ª salidas ante rampa escenario con retardos aleatorios.

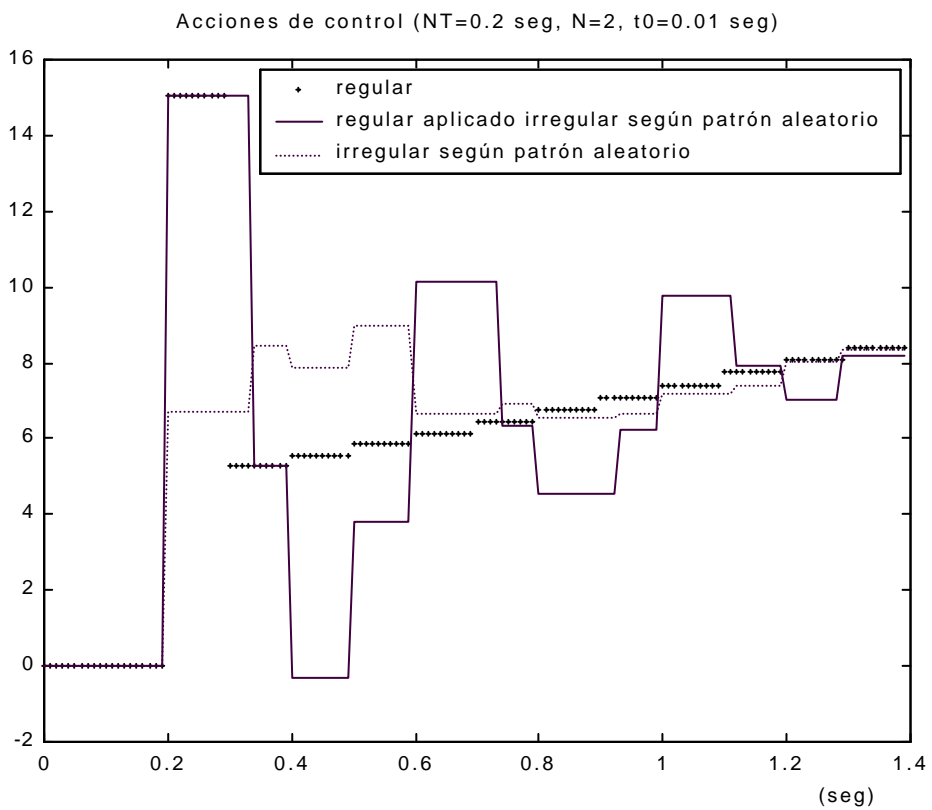


Figura 6-113: Comparativa 1ª acc. de control ante rampa escenario con retardos aleatorios.

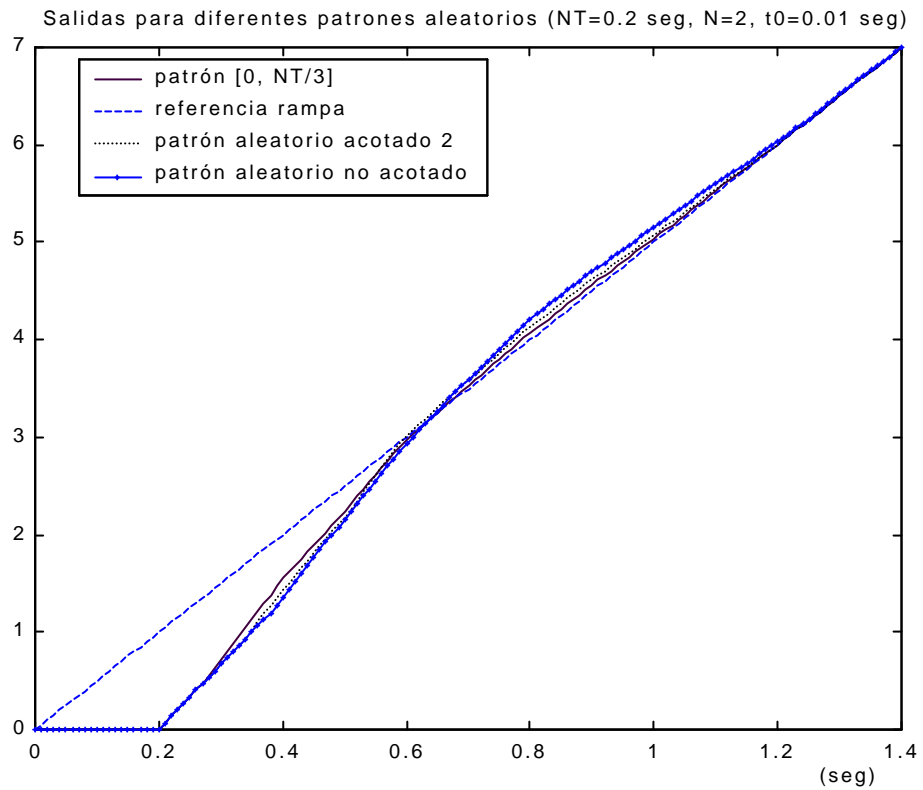


Figura 6-114: Comparativa 2ª salidas ante rampa escenario con retardos aleatorios.

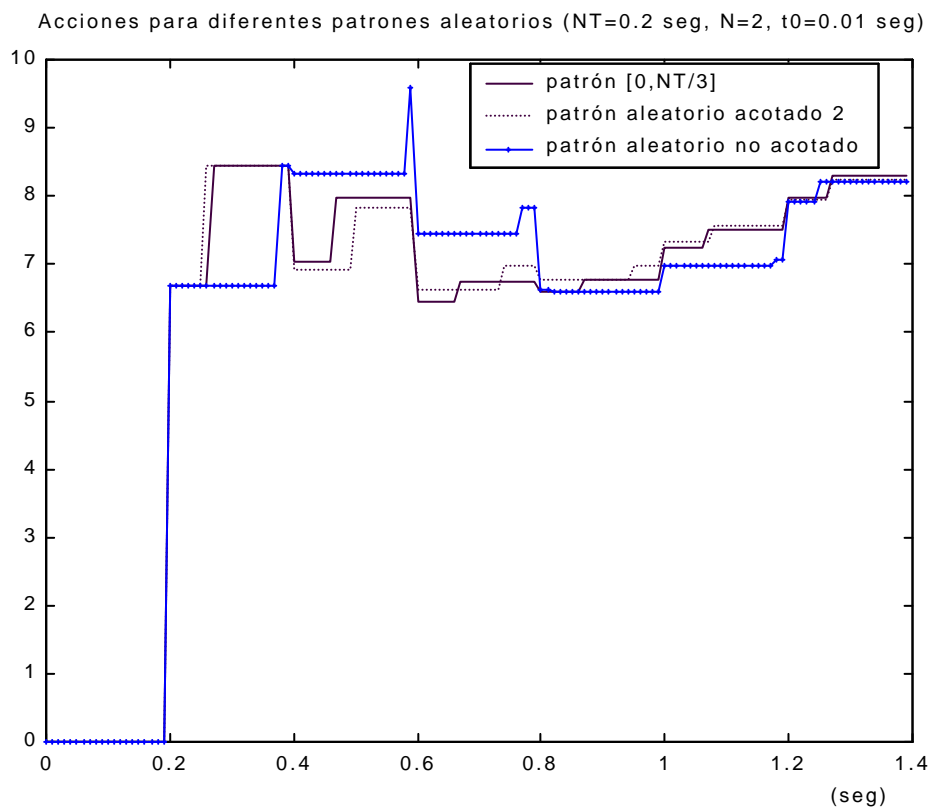


Figura 6-115: Comparativa 2ª acc. de control ante rampa escenario con retardos aleatorios.



## 6.8. CONCLUSIONES

En este capítulo se presenta un planteamiento general para diseñar reguladores bifrecuencia con estructura no convencional basado en la descomposición en frecuencia del mismo, de forma que se obtiene un subregulador trabajando a frecuencia rápida ( $1/T$ ) y otro que lo hace a frecuencia lenta ( $1/NT$ ), ambos interconectados por un interfaz que hace de conversor de frecuencias. Se particulariza a reguladores tipo P-I-D, de Cancelación (Tiempo Mínimo y Tiempo Finito) y de Asignación de Polos (Reguladores de tres Ramas).

Para el caso concreto de reguladores tipo P-I-D se detallan tres procedimientos distintos de diseño. Resaltar que, cuando se trabaja con patrones irregulares que supongan la aparición de ceros de módulo mayor o igual a la unidad en el modelo del proceso, se observan problemas de estabilidad. Para solventarlos se propone la utilización de la f.d.t. de b.c. "calculada" (procedimiento 3º de diseño) en la parte rápida del controlador con estructura no convencional en aras a cancelar dentro de este bloque los ceros en cuestión. Por otro lado, se realiza un estudio paramétrico del regulador P-I-D en el que se muestra la repercusión sobre el sistema de la variación de las diferentes acciones básicas de control, observando lo que se sabe por estudios clásicos del tema, esto es, que en general son la acción proporcional y la derivativa las que más influyen sobre la dinámica del proceso, mientras la integral tiene menor influencia. Todo ello se desarrolla sobre un entorno de simulación interactiva (SysQuake) que facilita la obtención de dichas conclusiones. Por último se compara el regulador bifrecuencia obtenido por descomposición en frecuencia con el que se obtiene por discretización a tramos irregulares (Albertos y Salt, 1990), observando, para el ejemplo tratado, un mejor comportamiento del sistema con el primero.

Por lo que se refiere a los reguladores de Cancelación se observa que el problema aparecido en el regulador anterior (tipo P-I-D) acerca de la estabilidad se resuelve atendiendo directamente a la propia concepción de este tipo de reguladores, ya que en ellos (Tiempo Mínimo y Tiempo Finito) se pueden cancelar los ceros de módulo mayor o igual a la unidad existentes en el proceso en las expresiones de las ecuaciones diofánticas. Además, se introduce toda una metodología de resolución e implementación de dichos reguladores.

En el caso de los reguladores de Asignación de Polos, se introduce un procedimiento alternativo de diseño, el cual en una primera fase permite formular el problema del regulador de estructura no convencional como un reacondicionamiento del regulador monofrecuencial lento y, que posteriormente, permite además una simplificación en función de los polinomios de tipo  $W^T$  introducidos.

Como todos los diseños realizados se han simulado teniendo en cuenta la aproximación basada en el hecho de que el proceso está definido a periodo  $T$  incluyendo en él la estructura no convencional, de forma que el regulador con estructura no convencional actúa sobre él cada  $T$  instantes de tiempo, se ha creído necesario validar todos ellos utilizando técnicas más realistas de simulación, las cuales permiten que dicho regulador pueda actuar sobre el proceso (definido a un periodo base) de manera irregular dentro del metaperiodo. Tras probar para todos los ejemplos desarrollados en el capítulo esta estrategia de validación por simulación, se observa que la aproximación utilizada en primer lugar se ajusta con bastante precisión al comportamiento más cercano a la realidad, el cual ha sido obtenido gracias a esta segunda estrategia de simulación.

Por último, se trata con un escenario en el que los retardos pueden producirse de manera aleatoria dentro de cierto rango y se comprueba mediante un ejemplo que el controlador con estructura no convencional diseñado hace posible reestablecer en cierto modo las prestaciones originales del sistema de control (las que se tienen en un caso bifrecuencia sin retardos), las cuales habían sido degradadas al inyectar de forma aleatoria las acciones del controlador bifrecuencia sobre el sistema.

# **CAPÍTULO 7**

# **APLICACIÓN PRÁCTICA**



## 7.1. PRESENTACIÓN DEL PROBLEMA.

### 7.1.1. Objetivo.

El objetivo principal de la aplicación a desarrollar es implementar sobre un sistema operativo de tiempo real un control con muestreo no convencional para un proceso real.

El motivo de elegir un sistema operativo de tiempo real para la implementación radica básicamente en el hecho de poder hacer un tratamiento lo más estricto posible en lo relativo a la temporización e instantes de actuación de cada una de las tareas en las que se va a descomponer el control con muestreo no convencional diseñado. En la sección 7.1.2 se presenta un planteamiento general de dicha descomposición de tareas y en la sección 7.1.3 se muestra un caso particular de asincronía entre el muestreador de entrada y el de salida del proceso, a partir del cual poder deducir el patrón de muestreo no convencional que realmente se da sobre dicho proceso. Sirva este caso particular como ejemplo del método a usar para la determinación del patrón de muestreo que se pueda dar en cualquier otro caso práctico real.

En cuanto al sistema operativo de tiempo real, concretamente se ha elegido VxWorks 5.4, el cual puede correr sobre Intel o Motorola (en nuestro caso particular será Intel). VxWorks va unido a Tornado, que es una aplicación que se ejecuta sobre Windows y que sirve como herramienta de edición, compilación (C y C++) y depuración. Así, en su totalidad, Tornado-VxWorks conforma lo que se conoce por sistema de desarrollo cruzado. En el anexo V.1 es presentado con mayor nivel de detalle.

El sistema real elegido es un servosistema digital de corriente continua. Concretamente la unidad mecánica 33-110 del motor Feedback 33-002 (SFT154). Dicho motor contiene en su eje un transductor de velocidad analógico (tacogenerador), a partir del cual, por tanto, se puede disponer de la salida de velocidad de giro del motor. Va a ser esta variable de salida la utilizada para llevar a cabo el control con muestreo no convencional que se plantea. Para más información acerca de este prototipo consultar el manual del fabricante (Manual1).

En cuanto al control con muestreo no convencional a desarrollar, la idea es partir de un diseño bifrecuencia (regular) MRIC y, tras comprobar las prestaciones que otorga al sistema, ver cómo se ven disminuidas éstas cuando las acciones de control proporcionadas por el controlador bifrecuencia diseñado son aplicadas de forma PVT (con un patrón concreto) sobre el sistema real. Tras esto, se diseñará y aplicará un controlador con muestreo no convencional PVT (irregular), el cual modificará el comportamiento anómalo del caso regular en su aplicación irregular, permitiendo recuperar, en cierto modo, las prestaciones conseguidas por el controlador bifrecuencia regular. En el epígrafe 7.2 se muestran los diferentes controladores diseñados e implementados y su efecto sobre el sistema real.

### 7.1.2. Implementación del sistema de control con muestreo no convencional sobre un sistema operativo de tiempo real.

En esta sección se va a presentar la descomposición en tareas (que se ejecutarán sobre el sistema operativo de tiempo real VxWorks) a la que va a ser sometida la figura 6-3

(capítulo 6) para implementar tanto el control bifrecuencia MRIC como el control con muestreo no convencional PVT mencionados al final del epígrafe anterior. Como más tarde se verá, el primer tipo de control puede quedar implementado como un caso particular del segundo.

#### 7.1.2.1. Control bifrecuencia MRIC.

La figura 7-1 pone de manifiesto la descomposición en tareas de tiempo real necesaria para implementar un control bifrecuencia MRIC con  $N=2$  sobre el sistema operativo de tiempo real (en nuestro caso, VxWorks) y para actuar sobre un sistema real (en nuestro caso, el motor Feedback). Como se puede observar, se trata de cuatro tareas actuando cada una de ellas a un periodo concreto. Así, la tarea CL implementa el subregulador lento y trabaja a periodo  $NT$ , al igual que la tarea A/D, la cual implementa la adquisición y conversión de la variable de salida (en nuestro caso, velocidad) del motor. Por su parte, tanto la tarea que implementa el subregulador rápido (CR) como la que suministra la acción de control al motor (D/A) funcionan a un periodo divisor del anterior, esto es, cada  $T$  segundos (ya que, por sencillez, se ha supuesto  $N=2$ ).

El hilo de ejecución para el inicio del metaperiodo  $NT$  mantendrá este orden:

- 1º. Tarea A/D: obtiene la medida de la salida y la almacena en una variable de memoria.
- 2º. Tarea CL: a partir de la referencia (también presente en memoria) y de la salida genera la señal de error con la cual obtendrá la acción de control lenta, que almacenará en memoria.
- 3º. Tarea CR: a partir de la acción lenta genera la acción rápida de control y la almacena en memoria.
- 4º. Tarea D/A: recoge la acción rápida y la aplica al motor.

Después ya, en el instante  $T$  intermedio del metaperiodo (hablando de  $N=2$ ), se vuelve a ejecutar la tarea CR y la tarea D/A, puesto que ambas actúan cada  $T$  segundos para hacer posible la bifrecuencia. Por tanto, a nivel de sistema operativo de tiempo real las cuatro tareas serán lanzadas en este orden y, luego ya, cada una actuará al periodo configurado. Toda esta evolución temporal de las mismas se puede ver en la figura 7-2.

Las variables de memoria consideradas vienen salvaguardadas mediante la implementación de semáforos, los cuales ofrecen zonas de exclusión mutua con el fin de asegurar el correcto uso de los valores almacenados en memoria.

Para más información acerca de la creación y temporización de las tareas, así como del uso de los semáforos, consultar el anexo V o el manual de VxWorks (Manual2, 1999).

#### 7.1.2.2. Control con muestreo no convencional PVT.

La figura 7-3 pone de manifiesto la descomposición en tareas de tiempo real necesaria para implementar un control con muestreo no convencional PVT con  $N=2$  sobre el sistema operativo de tiempo real y para actuar sobre un sistema real. Como se puede observar, se trata ahora de cinco tareas, cada una de ellas actuando a un periodo concreto. La diferencia

fundamental con respecto al caso de 7.1.2.1 radica en la consideración de dos tareas distintas para la conversión D/A y posterior aplicación sobre el proceso de la acción de control rápida obtenida por el subcontrolador rápido. La idea es que ahora cada una de ellas, D/A1 y D/A2, funcionen a periodo NT, pero la segunda de ellas estará retrasada  $\tau_1$  instantes de tiempo (tomando  $T < \tau_1 < NT$ ) respecto de la primera, de forma que, en su totalidad, ambas harán posible 2 actuaciones ( $N=2$ ) en cada metaperiodo sobre el proceso, concretamente en los instantes de tiempo marcados por el patrón de muestreo no convencional ( $[0, \tau_1]$ ).

Así, el hilo de ejecución que se propone ahora para el inicio del metaperiodo NT mantendrá el mismo orden que el visto en 7.1.2.1, cambiando la tarea D/A por la tarea D/A1 y añadiendo en último lugar la tarea D/A2. Dicha tarea D/A2 será lanzada la última y, al llevar consigo un retraso, comenzará a actuar tras  $\tau_1$  instantes de tiempo. Al igual que antes, en el instante T intermedio del metaperiodo (hablando de  $N=2$ ), se volverá a ejecutar la tarea CR y, a diferencia de entonces, ahora la tarea D/A2 tardará todavía un tiempo (en el caso particular que se está tratando,  $\tau_1 - T$  segundos) en suministrar la acción de control al proceso. Por tanto, a nivel de sistema operativo de tiempo real las cinco tareas serán lanzadas en el orden especificado. Tras ello, cada una actuará al periodo configurado (y en el caso particular de D/A2, tras un retraso de  $\tau_1$  instantes de tiempo). Toda esta evolución temporal queda plasmada en la figura 7-4. Como parece fácil observar, el planteamiento de 7.1.2.1 podría ser implementado a partir de este otro planteamiento considerando  $\tau_1 = T$ . Es decir, el caso bifrecuencia puede ser tratado como un caso particular del no convencional PVT, asumiendo  $\tau_1 = T$ .

Por su parte, es interesante observar que el caso  $\tau_1 < T$  no podría llevarse a cabo con esta filosofía de implementación, dado que como la segunda acción que suministra CR en cada metaperiodo NT se genera en el instante T, entonces D/A2 actuaría antes de recibirla (es decir, no aplicaría la acción rápida actualizada). Se propone como solución para este caso ejecutar la tarea CR a periodo NT, de forma que en cada ejecución realice dos iteraciones ( $N=2$ ) y, por tanto, halle tanto la acción a aplicar en el instante de inicio del metaperiodo como la que se aplicaría en  $\tau_1$  ( $< T$ ). Así, este caso particular de muestreo no convencional podría ser implementado utilizando el planteamiento de la figura 7-4 para las tareas D/A, pero ahora, D/A2 tendría  $\tau_1 < T$ .

No obstante, la metodología de implementación adoptada para el caso  $\tau_1 > T$  parece más realista que la anteriormente esbozada, dado que, por norma general, tiene más sentido hablar de acciones que se retrasan que no de acciones que se adelantan, sobre todo, cuando el trasiego de información entre computador y proceso viene dado mediante una red de comunicación (por ejemplo, Profibus). Por tanto, la metodología propuesta en primer término supone una sencilla forma de simular los retardos que se originarían en un sistema real cuando se dispone de un enlace compartido del tipo mencionado. Así, en ese supuesto, conociendo el retardo que introduce la red se podría extraer el patrón de muestreo no convencional (en el que se puede dar que  $\tau_1 > T$  o que  $\tau_1 < T$ , como se verá en 7.1.3) que realmente se produciría sobre el sistema y, a partir de ahí, diseñar un regulador con estructura no convencional PVT que generaría acciones de control cada T instantes de tiempo y que serían coherentes con el momento en que realmente se aplican al proceso.

Por su parte, en la plataforma de ensayo con la que se va a trabajar se dispone de enlaces directos entre las tarjetas de adquisición de datos y los accionadores y sensores del proceso, por lo que esos retardos de red no se van a dar. Por tanto, para simularlos es necesario emplear la primera de las estrategias anteriormente comentadas.

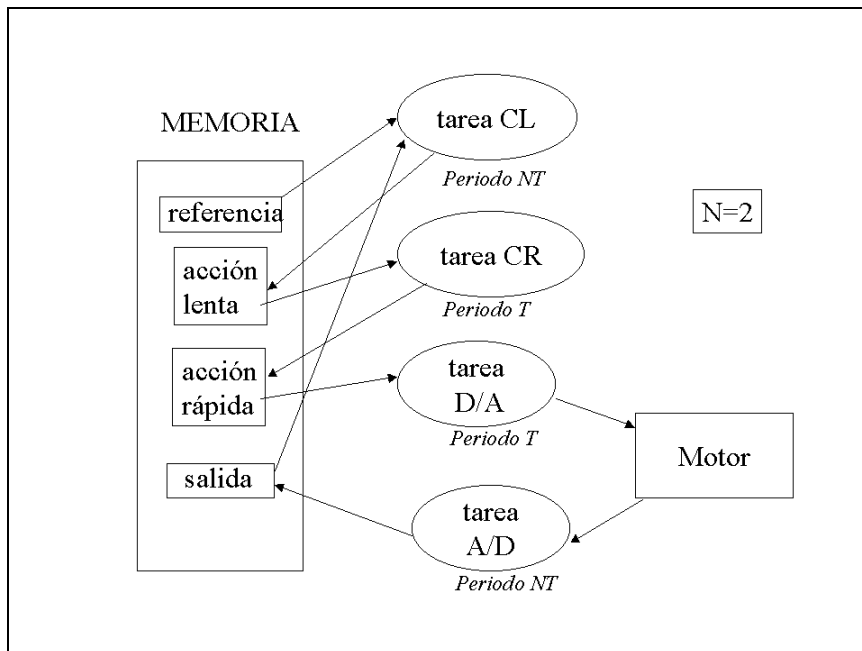


Figura 7-1: Descomposición en tareas para controlador bifrecuencia.

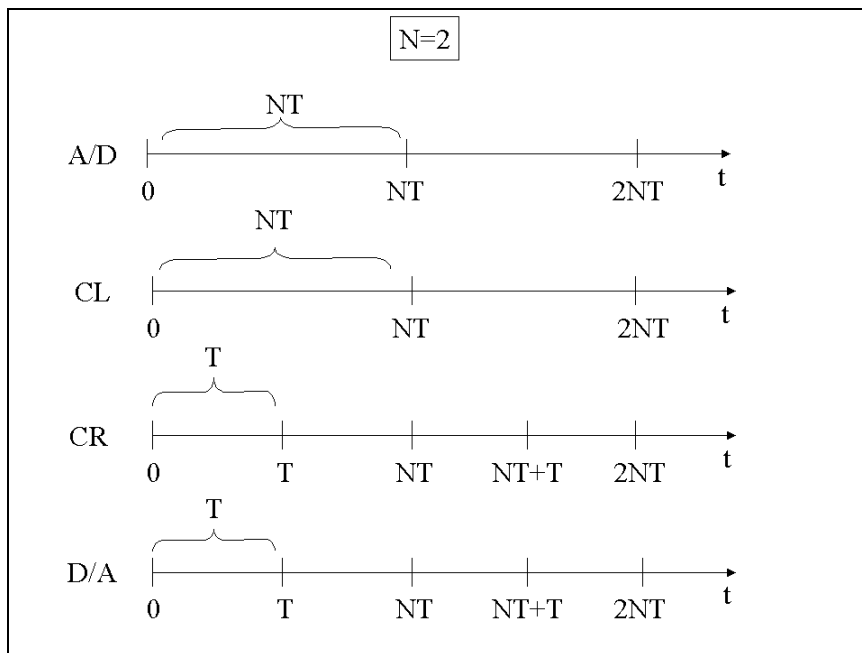


Figura 7-2: Evolución temporal de las tareas caso bifrecuencia.



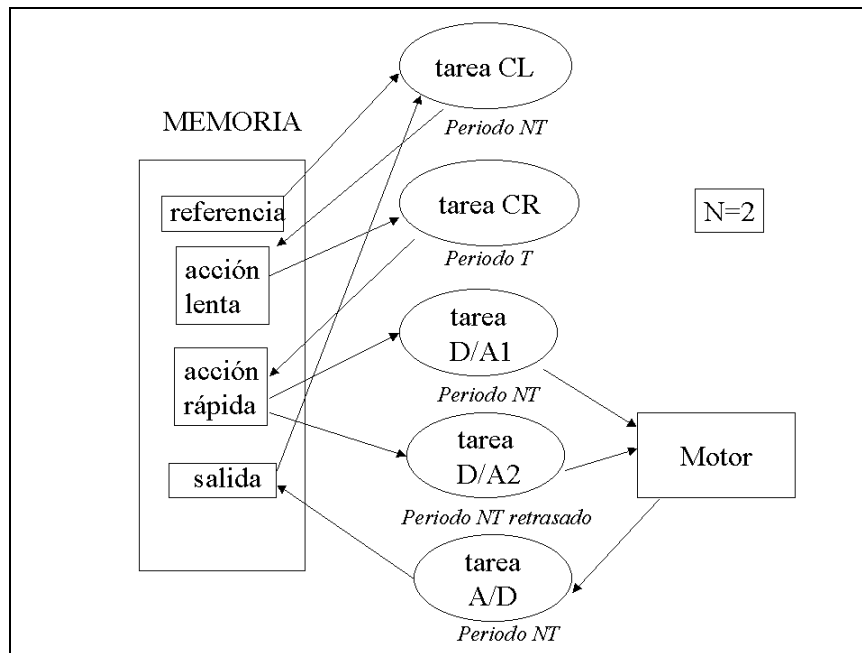


Figura 7-3: Descomposición en tareas para controlador PVT.

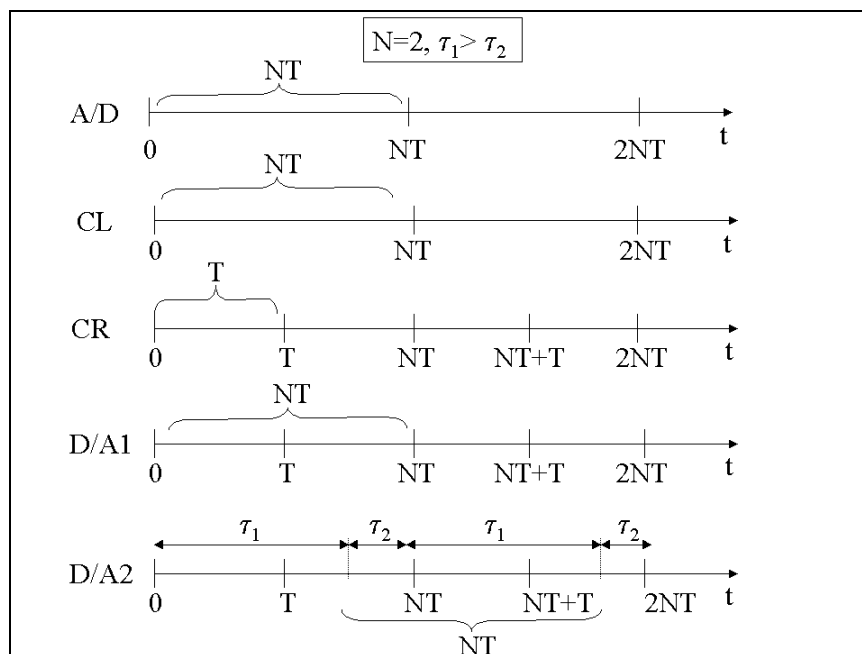


Figura 7-4: Evolución temporal de las tareas caso PVT.

### 7.1.3. Obtención del patrón de muestreo no convencional para un caso particular de asincronía entre los muestreadores de entrada y salida al proceso en un entorno de tiempo real.

El objetivo principal de esta sección no es hacer un análisis exhaustivo de los diferentes retardos que pueden aparecer en un sistema real de comunicación y control basado en red, ya que ello supondría rebasar con creces los objetivos de este trabajo. Tan sólo se intenta mostrar un caso particular a partir del cual observar cómo se podría deducir el patrón de muestreo no convencional sobre el proceso. Pese a tratarse de un caso particular se va a intentar partir de una situación lo más general posible, esto es, se trata de un caso entroncado en una situación particular de asincronismo entre muestreador de entrada y salida al proceso, la cual, por su parte, es una situación más general y realista que la de sincronismo.

En segundo lugar cabe mencionar que este estudio se va a hacer suponiendo de partida un muestreo MRIC sobre el proceso. Además cabe recordar que todo el desarrollo teórico (capítulos de modelado y diseño) ha partido del hecho siguiente: tanto la primera acción de control inyectada al proceso en cada metaperiodo como la salida muestreada en él se producen en el instante 0 de cada metaperiodo.

Para el estudio del caso planteado se van a tener en cuenta los siguientes retardos:

- retardo en el sentido ordenador hacia proceso, esto es, el que surge cuando se genera una acción en el controlador hasta que finalmente se aplica al proceso. Suponiendo un muestreo MRIC con  $N=2$ , se va a contar con 2 acciones de control en cada metaperiodo  $NT$ , siendo posible además que ambas acciones de control sufran retardos distintos debido a la diferente carga que experimente el sistema en cada momento de aplicación de las mismas. Este hecho es importante, ya que de él subyace la elección del patrón de muestreo no convencional.
- retardo en el sentido proceso hacia ordenador, esto es, el tiempo que hay que esperar hasta que realmente la muestra que se ha tomado del proceso llega al controlador. Este retardo, sin embargo, no va a ser trascendente, ya que se va a suponer menor que  $NT$ , por lo que va a ser encubierto por el retardo muestreo-acción que surge en cualquier sistema real de control.
- desfase entre muestreadores debido a la asincronía.

Se va a suponer conocidos de antemano todos estos retardos y que además se presentan de manera cíclica a cada metaperiodo. Así pues, se considerará como  $t_1$  el retardo asociado a la primera acción del metaperiodo,  $t_2$  el asociado a la segunda y  $t_3$  el asociado a la asincronía entre muestreadores. Se supondrá en cualquier caso que  $t_1$ ,  $t_2$  y  $t_3$  serán valores inferiores a  $T$ .

El caso a estudiar establece  $t_1 > t_3$ , por lo que en base al valor de  $t_2$  con respecto a  $t_1$  se tendrán las tres situaciones diferentes siguientes:

- caso patrón regular de muestreo  $\tau_1 = \tau_2$ :  $t_2 = t_1 > t_3$ . El controlador genera cada  $T$  instantes de tiempo acciones de control que manda al proceso, pero el muestreador de entrada al proceso (EP) realmente las aplica  $t_1 (= t_2)$  instantes después. El muestreador de salida del proceso (SP) tras  $t_3$  instantes obtiene medida del mismo. Esta medida la utilizará para calcular las acciones del metaperiodo siguiente, por lo que, como se dijo con anterioridad, da igual que lleguen retardadas al controlador, ya que se ha supuesto que ese retardo es menor que  $NT$ . Por su parte, es interesante, sin embargo, observar la diferencia de tiempo ( $t_4$ ) que se da entre el muestreo real en la entrada (debido al retraso  $t_1$ ) y el muestreo de la salida. Parece necesario considerar dicha diferencia, ya que de lo contrario la segunda acción aplicada en el metaperiodo no tendrá todo su efecto sobre la salida. Para ello, este retardo  $t_4$  se podría modelar como un retardo propio de la dinámica del proceso, para disponer en el muestreo de la salida del valor deseado de la misma. Otra manera de corregir este desfase  $t_4$  podría realizarse a nivel de sistema operativo de tiempo real, ya que, en este caso, se puede retrasar  $t_4 (= t_1 - t_3)$  instantes de tiempo la ejecución de la tarea de conversión A/D, de manera que la aplicación real de la primera acción de control de cada metaperiodo y la toma real de la salida del proceso se producirá en el mismo instante de tiempo, a pesar de los distintos valores de los retardos considerados. Solucionado esto, el patrón real de muestreo sobre el proceso es un patrón regular dentro del metaperiodo (caso bifrecuencia). En la figura 7-5 se presenta el escenario planteado y en la figura 7-6 la propuesta de implementación en un sistema operativo de tiempo real.
- caso patrón irregular con  $\tau_1 < \tau_2$ :  $t_2 < t_1$  y  $t_1 > t_3$ . El controlador manda sus acciones cada  $T$  segundos y el muestreador de entrada al proceso (EP) aplica la primera del metaperiodo tras  $t_1$  instantes de tiempo y la segunda tras  $t_2$  (que es menor que  $t_1$ ). El muestreador de salida del proceso (SP) comienza a tomar muestras cada  $NT$  instantes de tiempo tras un retardo de  $t_3$  instantes de tiempo. Se vuelve a observar el desfase  $t_4 (= t_1 - t_3)$ . La manera de solucionar este desfase, con el fin de muestrear la salida deseada del proceso, es igual a la adoptada en el caso anterior. Pero ahora, el patrón real de muestreo sobre el proceso es un patrón irregular dentro del metaperiodo (caso no convencional PVT con  $\tau_1 < \tau_2$ ). En la figura 7-7 se presenta el escenario planteado y en la figura 7-8 la propuesta de implementación en un sistema operativo de tiempo real.
- caso patrón irregular con  $\tau_1 > \tau_2$ :  $t_2 > t_1$  y  $t_1 > t_3$ . El controlador manda sus acciones cada  $T$  segundos y el muestreador de entrada al proceso (EP) aplica la primera del metaperiodo tras  $t_1$  instantes de tiempo y la segunda tras  $t_2$  (que es mayor que  $t_1$ ). El muestreador de salida del proceso (SP) comienza a tomar muestras cada  $NT$  instantes de tiempo tras un retardo de  $t_3$  instantes de tiempo. Se vuelve a observar el desfase  $t_4 (= t_1 - t_3)$ . La manera de solucionar este desfase, con el fin de muestrear la salida deseada del proceso, es igual a la adoptada en los casos anteriores. Al igual que en el caso precedente, el patrón real de muestreo sobre el proceso es un patrón irregular dentro del metaperiodo (caso no convencional PVT) pero ahora con  $\tau_1 > \tau_2$ . En la figura 7-9 se presenta el escenario planteado y en la figura 7-10 la propuesta de implementación en un sistema operativo de tiempo real.

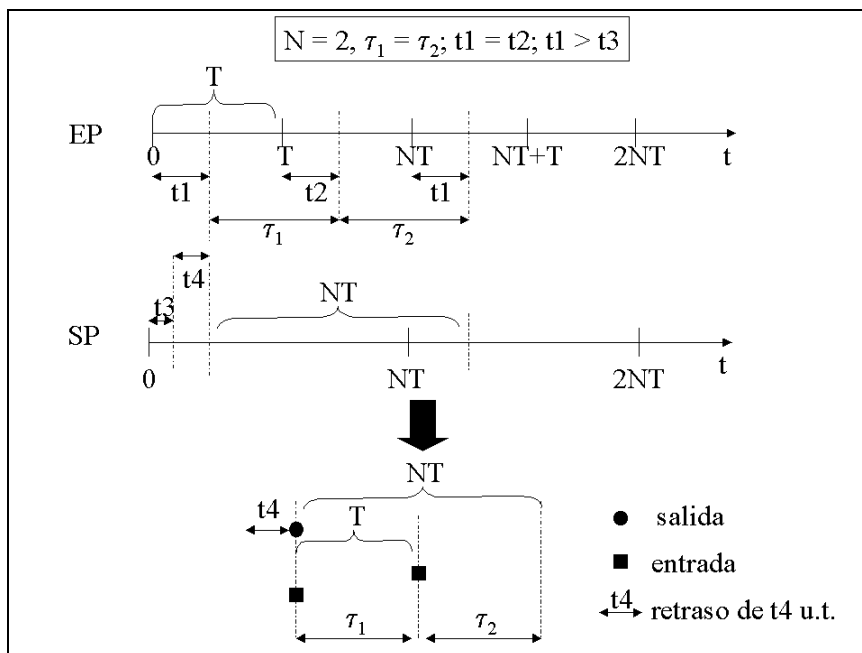


Figura 7-5: Escenario caso  $\tau_1 = \tau_2; t_2 = t_1 > t_3$

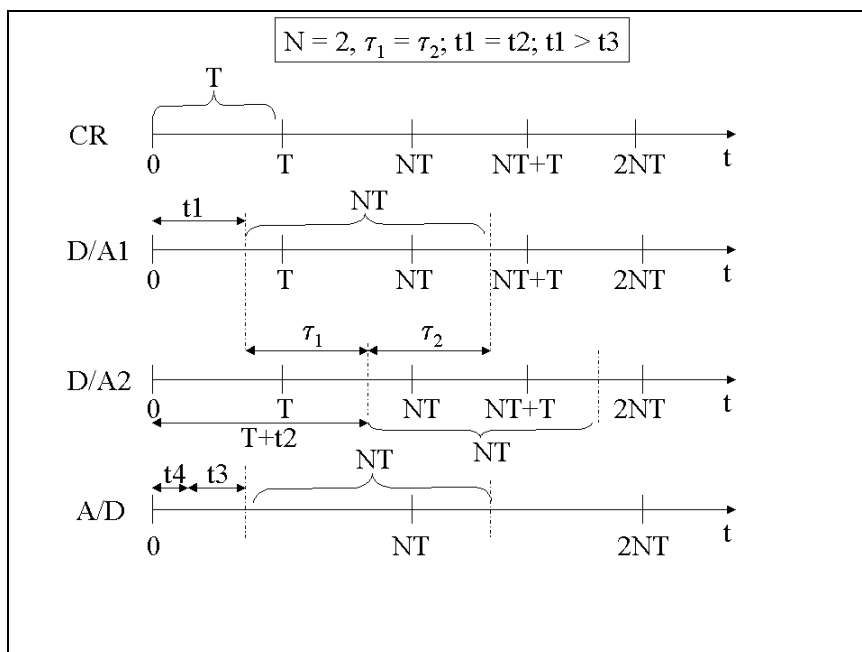


Figura 7-6: Implementación caso  $\tau_1 = \tau_2; t_2 = t_1 > t_3$

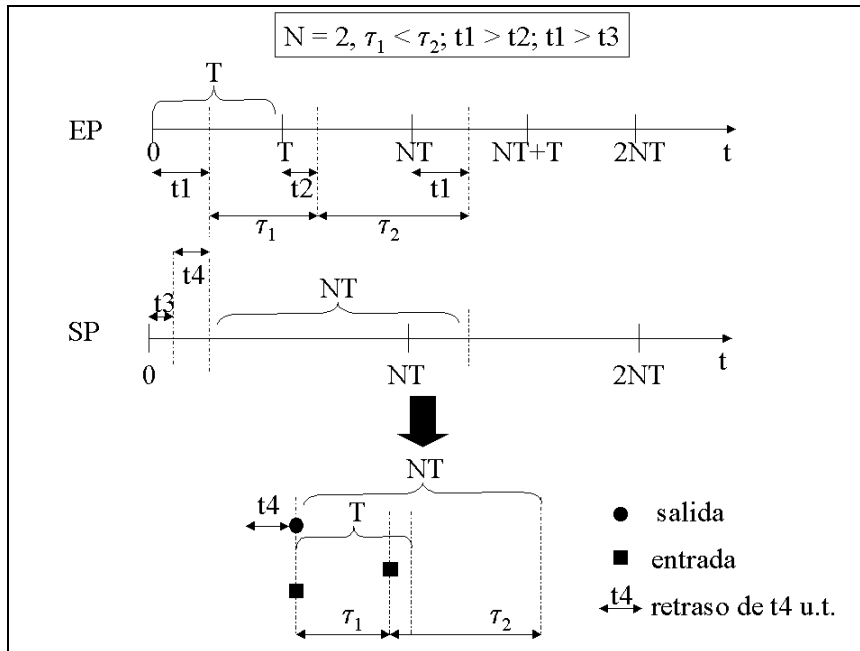


Figura 7-7: Escenario caso  $\tau_1 < \tau_2; t_2 < t_1 ; t_1 > t_3$

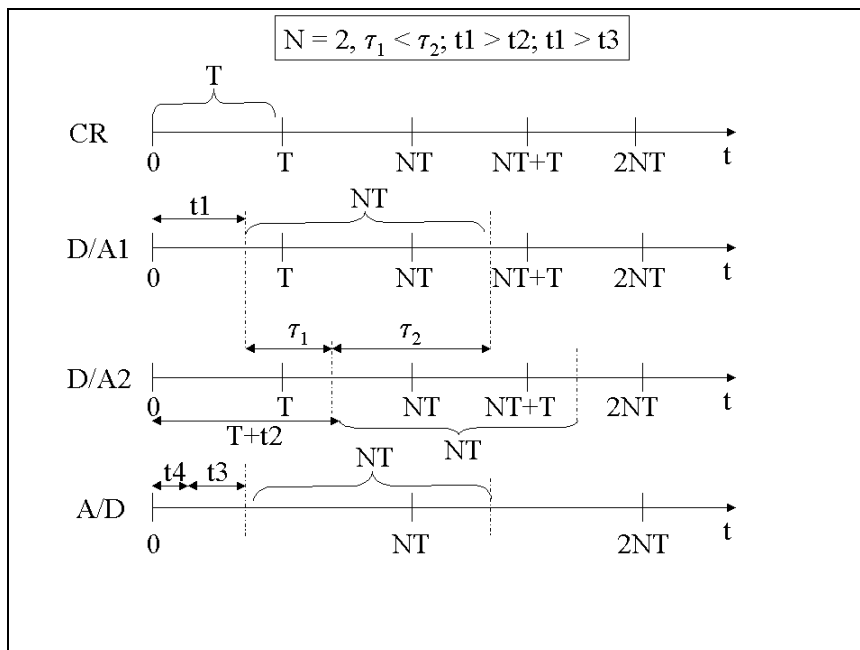


Figura 7-8: Implementación caso  $\tau_1 < \tau_2; t_2 < t_1 ; t_1 > t_3$

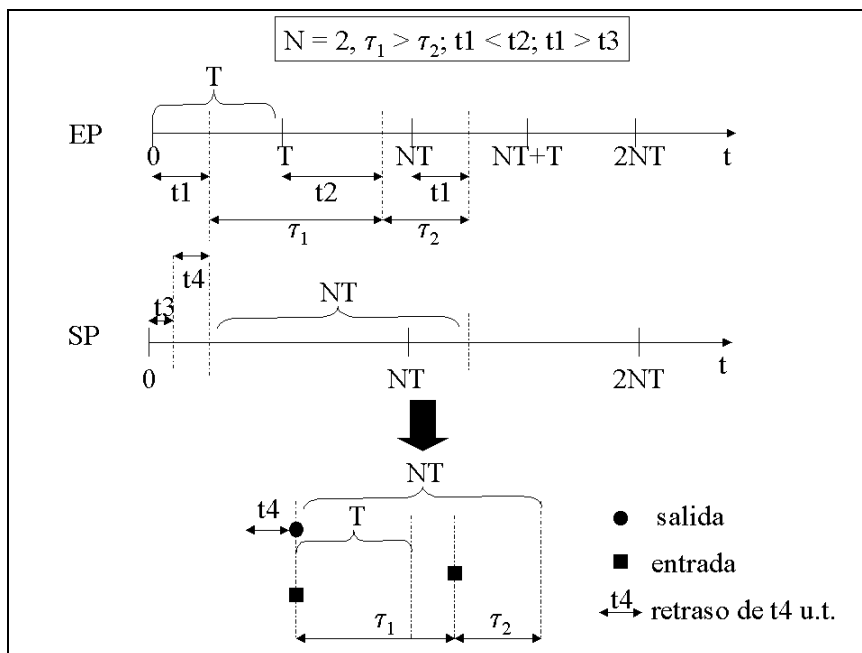


Figura 7-9: Escenario caso  $\tau_1 > \tau_2; t_2 > t_1; t_1 > t_3$

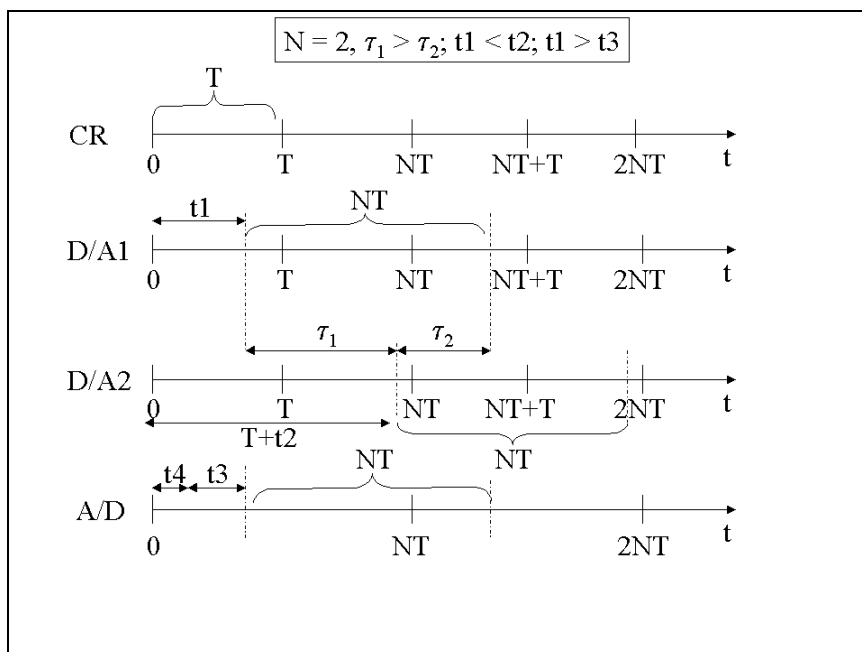


Figura 7-10: Implementación caso  $\tau_1 > \tau_2; t_2 > t_1; t_1 > t_3$

## 7.2. DISEÑO DE CONTROLADORES CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL E IMPLEMENTACIÓN SOBRE LA PLATAFORMA DE TIEMPO REAL.

En esta sección el objetivo es diseñar e implementar un controlador con estructura no convencional de cada uno de los tipos vistos en el capítulo 6, esto es, uno de tipo P-I-D, otro de Cancelación (Tiempo Mínimo/Tiempo Finito) y finalmente otro de Asignación de Polos (Tres Ramas).

Como se ha comentado con anterioridad, la variable del proceso a controlar es la velocidad angular. A partir del tacogenerador se puede obtener la tensión que representa a los diferentes valores de dicha variable. Tras identificar el prototipo, la relación entre la tensión de salida del motor ( $y$ ) y la tensión de entrada al motor ( $u$ ) queda expresada como fdt continua de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{2.0024}{0.183s + 1} = \frac{y(V)}{u(V)} \quad (7-1)$$

Lo siguiente que se ha de establecer es el patrón de muestreo no convencional a aplicar, considerando  $N=2$ . Por sencillez, dado que no existen retardos reales sobre la plataforma de pruebas (al disponer de enlaces directos entre sensores y actuadores respecto del controlador), se va a considerar que el retardo  $t_1$  relativo a la aplicación de la primera acción de control del metaperiodo es nulo y que el desfase entre el muestreo de la salida y de la entrada al proceso ( $t_3$ ) también es nulo. Por tanto, tan sólo se considerará un retardo  $t_2$  relativo a la aplicación de la segunda acción de control del metaperiodo, el cual dependiendo de cada diseño variará, al igual que el propio valor considerado para  $T$ . De esta manera, la descomposición en tareas y la evolución temporal de las mismas para el controlador PVT queda recogida respectivamente en las figuras 7-3 y 7-4. Por su parte, el controlador bifrecuencia (regular) podrá ser implementado con la estrategia de 7.1.2.1 o con la de 7.1.2.2 con  $\tau_1=T$ , como ya se comentó anteriormente.

### 7.2.1. Controlador tipo P-I-D.

En primer lugar se van a presentar las fdt utilizadas para diseñar tanto el controlador PID bifrecuencia (regular) como el de estructura no convencional PVT cuando la referencia a seguir es un escalón unitario. Concretamente, el patrón de muestreo elegido para este último obedece a  $\tau_1=0.07$  seg y  $\tau_2=0.03$  seg, dentro de un metaperiodo global de  $NT=0.1$  seg (recordar  $N=2$ ).

En segundo lugar se mostrará, gracias a la herramienta WindView que lleva consigo Tornado-VxWorks, la correcta ejecución de las tareas (en lo relativo a temporización e instantes de ejecución) en que queda implementado el sistema de control para los dos casos bajo estudio (bifrecuencia y no convencional PVT) en el sistema operativo de tiempo real VxWorks.

Por último se mostrarán los resultados logrados en cada caso, enfatizando en el hecho de que si se aplican las acciones de control generadas por el controlador bifrecuencia (regular) mediante un patrón PVT (instantes irregularmente espaciados) trae consigo una pérdida de

prestaciones en el sistema, las cuales pueden ser recuperadas (en cierto modo) si, considerando este patrón PVT, son aplicadas las acciones que genera el controlador PID con estructura no convencional.

### 7.2.1.1. Diseño del controlador bifrecuencia y del no convencional PVT.

El objetivo es diseñar (siguiendo las pautas de 6.3) e implementar dos controladores, uno bifrecuencia (para actuar a instantes regulares de tiempo) y otro con estructura no convencional (para actuar a instantes irregulares dentro del metaperiodo). Para ello, lo primero será modelar la fdt del proceso según el modelado del capítulo 3:

- para un patrón de muestreo regular ( $\tau_1=0.05$  seg y  $\tau_2=0.05$  seg):

$$G_p^T = \frac{B_p^T}{A_p^T} \cdot \frac{W_A^T}{W_A^T} = \frac{0.4787z_2^{-1}(1+0.7609z_2^{-1})}{1-0.5789z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} \quad (7-2)$$

- para un patrón de muestreo irregular (no convencional PVT con  $\tau_1=0.07$  seg y  $\tau_2=0.03$  seg):

$$G_p^T = \frac{\hat{B}_p^T}{A_p^T} \cdot \frac{W_B^T}{W_A^T} = \frac{0.3138z_2^{-1}(1+1.686z_2^{-1})}{(1-0.5789z_2^{-2})} = \frac{\tilde{\hat{B}}_p^T}{(A_p^{NT})^T} \quad (7-3)$$

Como se puede observar claramente en (7-3), la fdt del proceso modelado de forma no convencional posee un cero de módulo mayor que la unidad. Esto va a hacer que al construir el subregulador rápido, la acción de control que genere éste sea inestable. En el capítulo 6 (sección 6.3.3) se comenta una posible manera de hacer frente a este problema: considerar, para la creación de la parte rápida del controlador con estructura no convencional, lo que se ha llamado fdt calculada de bucle cerrado, la cual va a permitir cancelar el modelo discreto del proceso dentro del bloque rápido del controlador.

Para construir los controladores bifrecuencia regular y no convencional PVT se va a considerar la situación segunda de la sección 6.3.3, es decir, partir de dos reguladores tipo P-I-D diferentes para cada modelo del proceso, ya que parece que esta alternativa arroja mejores resultados. Así pues,

- $G_{R\_reg}(s)$ , para modelo regular:  $K_p = 1.655$ ,  $T_D = 0$ ,  $T_I = 0.0833$
- $G_{R\_irreg}(s)$ , para modelo irregular:  $K_p = 1.343$ ,  $T_D = 0$ ,  $T_I = 0.125$

Estos dos reguladores de partida para cada modelo del proceso,  $G_{R\_reg}(s)$  y  $G_{R\_irreg}(s)$ , van a hacer posible disponer de dos fdt de lazo cerrado distintas para cada caso,  $M_{reg}(s)$  y  $M_{irreg}(s)$ , respectivamente. Con todo ello y con los modelos discretos del proceso, se va a poder obtener las partes lenta y rápida de cada controlador. En definitiva, se tendrá:



- controlador regular:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{reg}^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{M_{reg}^T}{\frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}}$$

- controlador irregular:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{irreg}^{NT}} \quad G_{RR}^T = \frac{G_{R\_irreg}^T}{1 + \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} G_{R\_irreg}^T}$$

Numéricamente cada una de estas expresiones queda:

- partes lentas:

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{reg}^{NT}} = \frac{1 - 0.3894z_2^{-2} + 0.09461z_2^{-4}}{1 - 1.365z_2^{-2} + 0.3648z_2^{-4}} \quad (7-4)$$

$$G_{RL}^{NT} = \frac{1}{1 - M_{irreg}^{NT}} = \frac{1 - 0.6724z_2^{-2} + 0.1332z_2^{-4}}{1 - 1.5z_2^{-2} + 0.5002z_2^{-4}}$$

- parte rápida controlador regular:

$$G_{RR}^T = \frac{M_{reg}^T}{\frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T}} = \frac{0.6686 - 0.872z_2^{-1} + 0.2764z_2^{-2}}{0.4787 - 0.4798z_2^{-1} + 0.1473z_2^{-2}} \quad (7-5)$$

- parte rápida controlador irregular:

$$G_{RR}^T = \frac{G_{R\_irreg}^T}{1 + \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} G_{R\_irreg}^T} = \frac{1.343 - 0.806z_2^{-1} - 0.7776z_2^{-2} + 0.4666z_2^{-3}}{1 - 0.5785z_2^{-1} - 0.1211z_2^{-2} + 0.1525z_2^{-3}} \quad (7-6)$$

### 7.2.1.2. Implementación en VxWorks. Resultados.

Una vez halladas las expresiones (7-2) a (7-6), el objetivo es implementar en el sistema operativo de tiempo real VxWorks los dos controladores tipo P-I-D (el bifrecuencia y el de estructura no convencional PVT) para que interactúen con el sistema real (motor Feedback). En el anexo V.3 se muestra un ejemplo del código implementado en VxWorks para los controladores tipo P-I-D diseñados, que, a su vez, puede servir de ejemplo para el

resto de controladores (Cancelación y Asignación de Polos), dado que en éstos la implementación varía mínimamente.

Como se dijo con anterioridad, gracias a la herramienta WindView que introduce Tornado-VxWorks, se puede comprobar que el código implementado se ejecuta correctamente a nivel de tiempos de actuación y temporización de tareas. En las figuras 7-11 y 7-12 se presenta la ejecución de cada uno de los casos. Aunque WindView introduce toda una simbología necesaria para entender qué es lo que realmente se está ejecutando en cada momento, para poder interpretar someramente el contenido de estas figuras bastaría con conocer tres aspectos:

- el nombre de la tarea aparece a la izquierda del diagrama de tareas.
- cuando una tarea se ejecuta aparecen símbolos en la línea dedicada a ella dentro del diagrama.
- cuando una tarea está suspendida (es decir, a la espera de que el reloj cumpla el tiempo especificado para ella, de tal manera que, una vez cumplido, le mande una interrupción y la vuelva a poner en ejecución) aparecen puntos sobre la línea de la tarea.

Tras lo dicho, si se observa la figura 7-11 se aprecia que el código ejecutado por cada una de las tareas contempladas en el diseño (recordar figuras 7-3 y 7-4) es llevado a cabo siguiendo un patrón bifrecuencia donde los momentos en que actúa la tarea del subcontrolador rápido (regurapido) están equiespaciados en el tiempo ( $T=0.05$  seg). Dado que para el caso regular se ha escogido el planteamiento de 7.1.2.2 con  $\tau_1=T$ , la acción de control suministrada en cada instante de tiempo por el controlador rápido será recogida alternativamente por las tareas digiana y digiana2, que la aplicarán al motor también cada  $T$  instantes de tiempo. Se aprecia como digiana2 comienza a ejecutarse tras un retraso de  $T$  instantes respecto a digiana, y que ambas están temporizadas a periodo  $NT=0.1$  seg.

Por su parte, en la figura 7-12 se muestra la ejecución del sistema de control con estructura no convencional PVT ( $\tau_1=0.07$  seg y  $\tau_2=0.03$  seg), observándose que ahora digiana2 espera  $\tau_1=0.07$  seg para comenzar su ejecución, motivo por el cual la acción de control hallada en el instante  $T$  de cada metaperiodo será aplicada  $\tau_1-T$  instantes de tiempo después. Este planteamiento sirve para simular el caso en que, debido a un retraso introducido por el hipotético medio de comunicación que une al controlador con el accionador, la acción de control del instante  $T$  es aplicada más tarde al proceso. Si esta acción proviene del controlador bifrecuencia (lo que en secciones anteriores se ha llamado caso regular aplicado irregularmente) va a suponer pérdida de prestaciones en el sistema de control, mientras que si proviene del controlador con estructura no convencional el sistema se comportará de forma similar a como lo haría si no existiese dicho retraso y se hubiera aplicado el algoritmo bifrecuencia regular. En definitiva, la idea es prever cual será el retardo a considerar y, en función de ello, diseñar el controlador con estructura no convencional PVT cuyas acciones de control, aunque sean aplicadas tardíamente, no supondrán una degradación en las prestaciones del sistema.

Así, si se observa la figura 7-13 se ve que efectivamente las prestaciones del motor (sobre todo, el tiempo de establecimiento) empeoran cuando las acciones del algoritmo bifrecuencia regular son aplicadas de forma irregular PVT ( $t_e(\pm 2\%) \approx 0.5$  seg para algoritmo bifrecuencia regular,  $t_e(\pm 2\%) \approx 0.9$  seg para algoritmo bifrecuencia regular aplicado irregular

según patrón PVT). La sobreoscilación también empeora, pasando de ser de aproximadamente del 9% al 12%. Por su parte, cuando se aplica el algoritmo no convencional PVT según el patrón irregular considerado, se recobra en cierto modo la situación lograda por el algoritmo bifrecuencia regular ( $t_e(\pm 2\%) \approx 0.6$ ,  $\delta(\%) \approx 4\%$ ). Cabe notar que las diferentes salidas han sido tomadas por una tarea auxiliar que funciona a periodo T con el fin de graficar con más información la dinámica del proceso y, así, poder extraer mejor los índices respectivos.

En la figura 7-14 se muestran las acciones (rápidas) suministradas al motor en cada caso. Se comprueba que nuevamente la alternativa elegida para el diseño del controlador con estructura no convencional logra generar una acción de control estable sobre el sistema. Por su parte, en la figura 7-15 aparece más claramente el patrón de aplicación de las acciones suministradas al proceso (regularmente espaciado en el caso bifrecuencia regular, e irregularmente espaciado en el caso bifrecuencia regular aplicado de forma irregular y en el caso no convencional PVT).

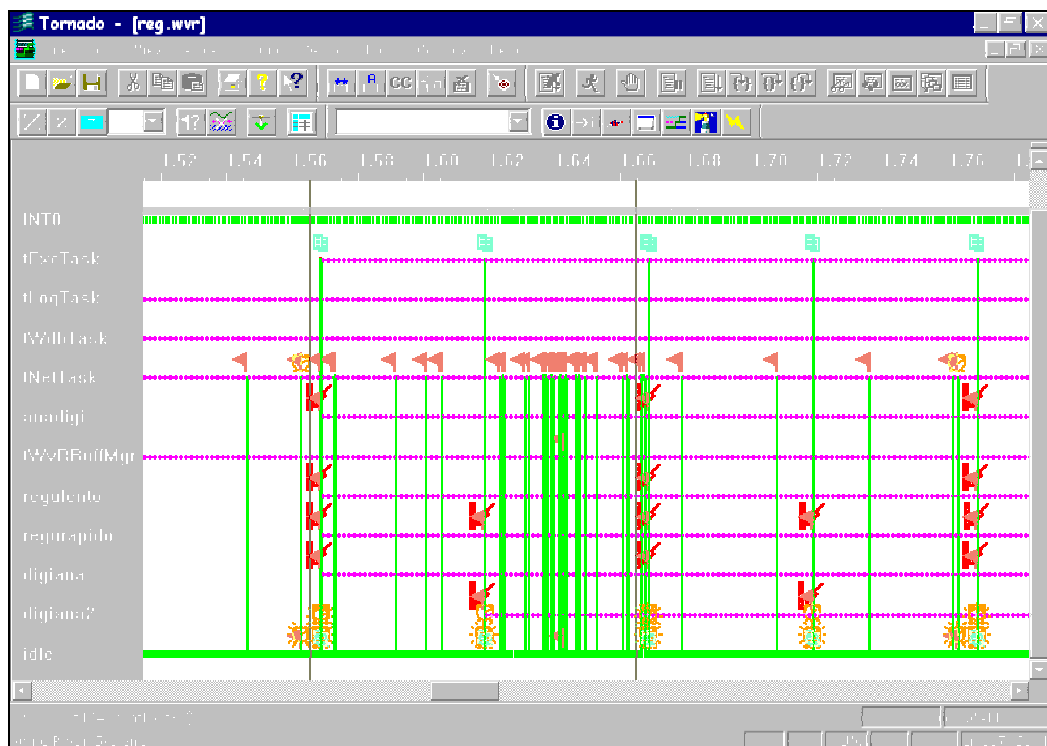


Figura 7-11: Ejecución de tareas PID caso bifrecuencia regular.

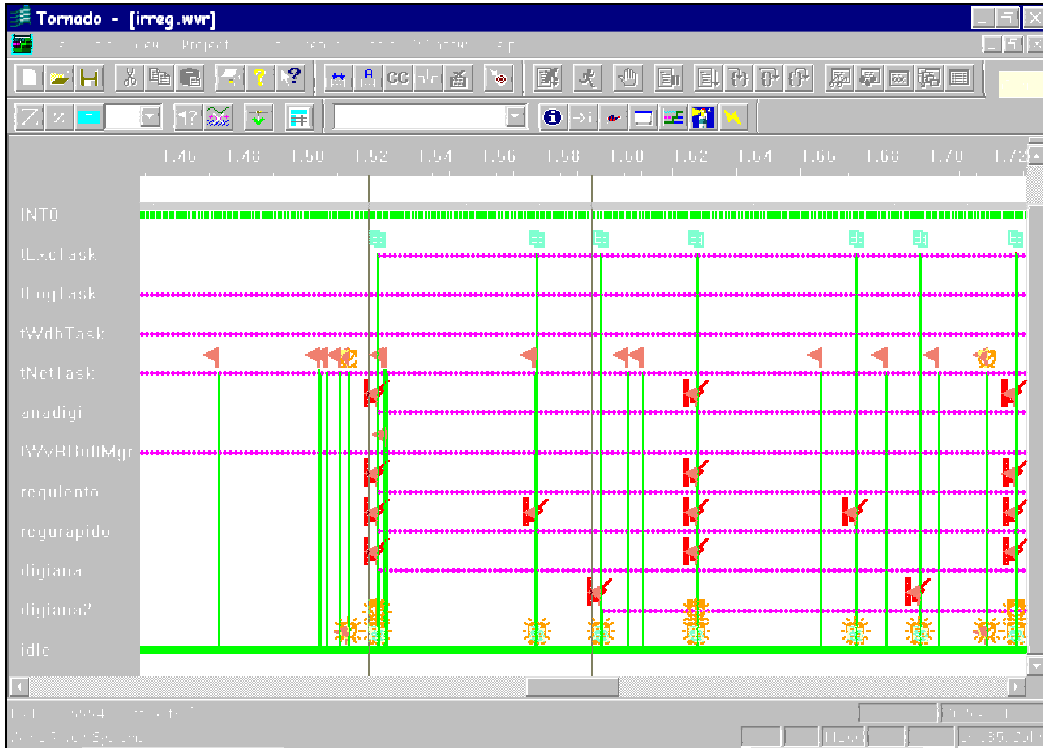


Figura 7-12: Ejecución de tareas PID caso no convencional PVT.

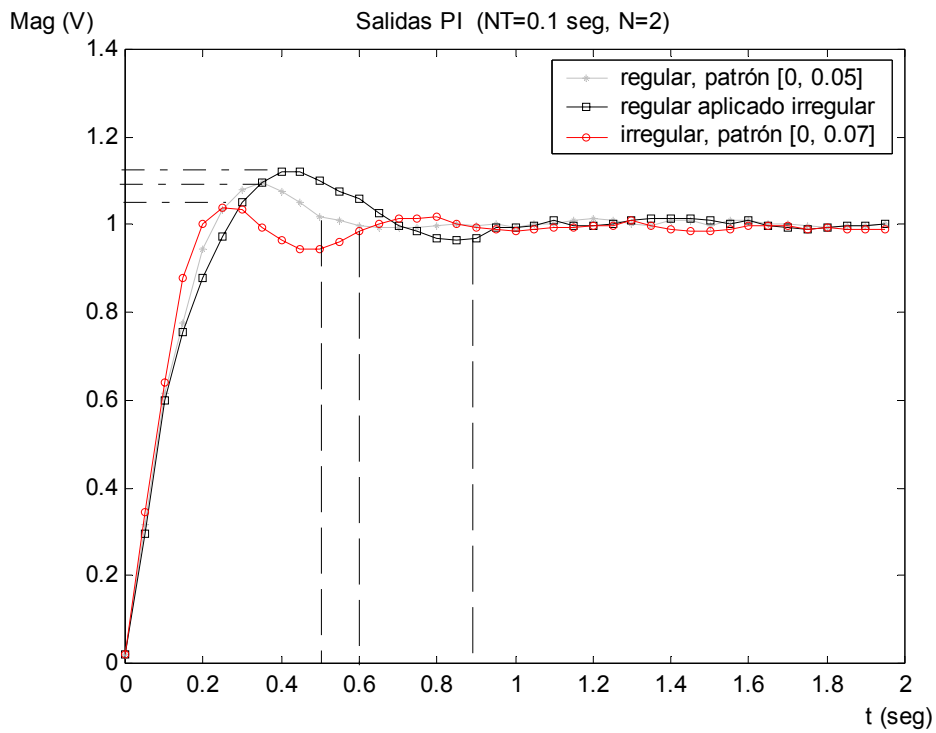


Figura 7-13: Salida de velocidad del motor para PID en cada caso contemplado

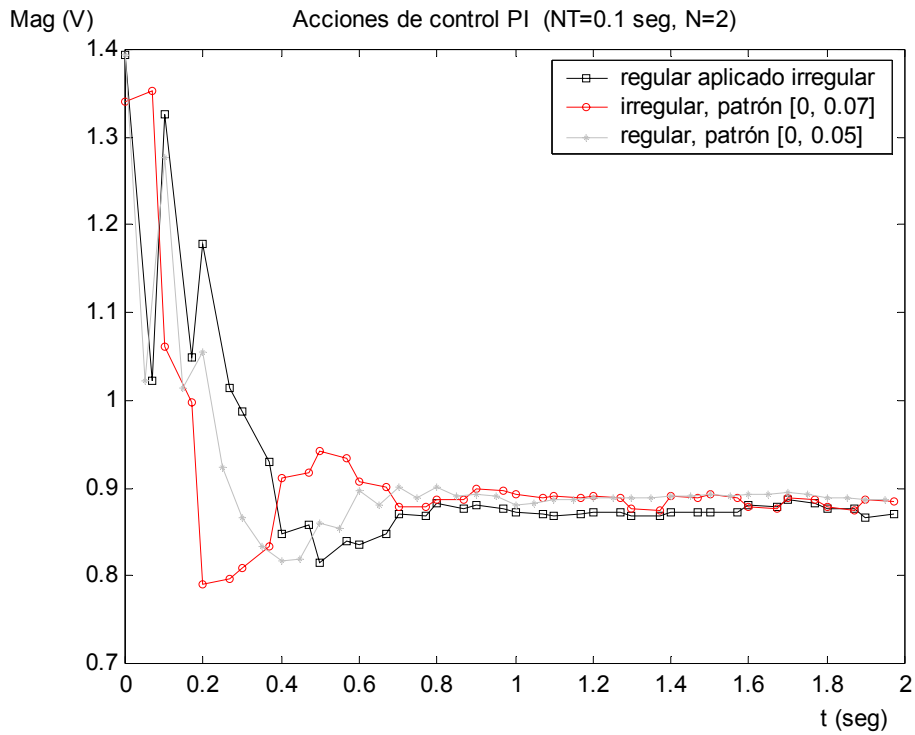


Figura 7-14: Acciones de control para PID en cada caso contemplado

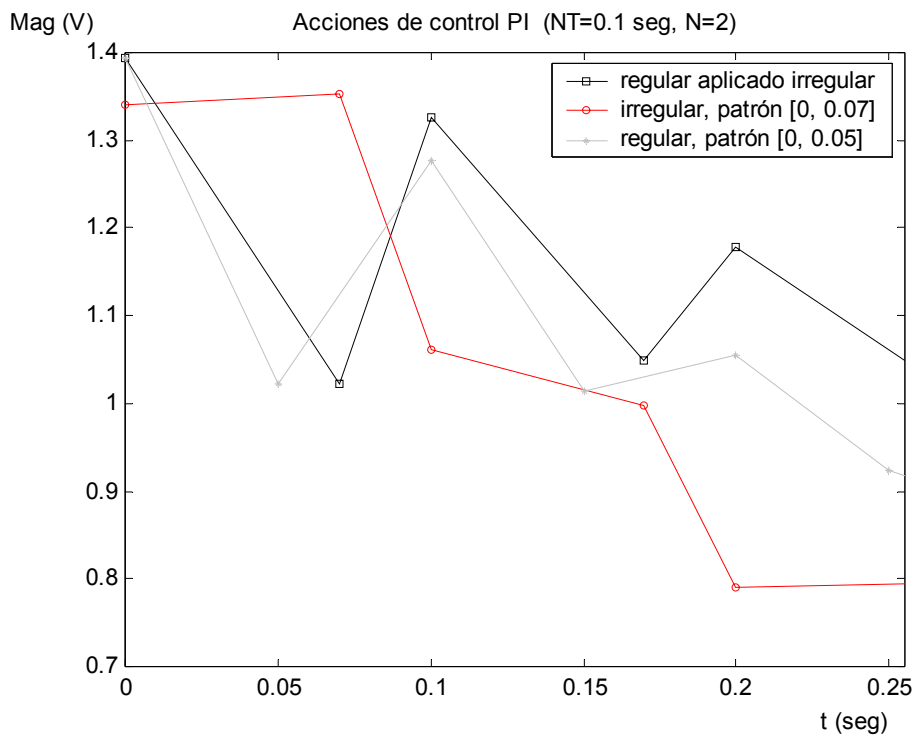


Figura 7-15: Zoom acciones de control para PID en cada caso contemplado

### 7.2.2. Controlador de Cancelación (Tiempo Mínimo).

Al igual que en la sección 7.2.1, en primer lugar se van a presentar las fdt utilizadas para diseñar tanto el controlador de Cancelación bifrecuencia (regular) como el de estructura no convencional PVT cuando, ahora, la referencia a seguir es una rampa de pendiente 0.25. Concretamente, en el primer caso se trata de un controlador de Cancelación basado en el primer enfoque del planteamiento de Tiempo Mínimo, mientras que en el segundo caso se ha utilizado el segundo enfoque de dicho planteamiento, ya que en el modelo no convencional del proceso surge un cero de módulo mayor que la unidad, el cual deberá ser cancelado.

El patrón de muestreo elegido para el controlador con estructura no convencional PVT obedece a  $\tau_1=0.17$  seg y  $\tau_2=0.03$  seg, dentro de un metaperiodo global de  $NT=0.2$  seg (recordar  $N=2$ ).

De la misma forma que en la sección 7.2.1 se mostrarán los diagramas de tareas de WindView y los resultados relativos a la variable a controlar (velocidad del motor) y a las acciones de control aplicadas.

#### 7.2.2.1. Diseño del controlador bifrecuencia y del no convencional PVT.

Partiendo del modelo de (7-1) para el proceso y siguiendo el modelado presentado en el capítulo 3, se tiene las siguientes f.d.t. discretas:

- caso muestreo regular sobre el proceso ( $\tau_1=0.1$  seg,  $\tau_2=0.1$  seg):

$$G_p^T = \frac{B_p^T W_A^T}{A_p^T W_A^T} = \frac{0.843z_2^{-1} (1 + 0.579z_2^{-1})}{(1 - 0.579z_2^{-1})(1 + 0.579z_2^{-1})} = \frac{0.843z_2^{-1} + 0.488z_2^{-2}}{1 - 0.3352z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} \quad (7-7)$$

- caso muestreo irregular sobre el proceso ( $\tau_1=0.17$  seg,  $\tau_2=0.03$  seg):

$$G_p^T = \frac{\hat{B}_p^T W_B^T}{A_p^T W_A^T} = \frac{0.435z_2^{-1} (1 + 2.0539z_2^{-1})}{(1 - 0.579z_2^{-1})(1 + 0.579z_2^{-1})} = \frac{0.435z_2^{-1} + 0.895z_2^{-2}}{1 - 0.3352z_2^{-2}} = \frac{\tilde{\hat{B}}_p^T}{(A_p^{NT})^T} \quad (7-8)$$

A partir de (7-7) y (7-8) ya se está en disposición de plantear las ecuaciones diofánticas para los diseños bifrecuencia (regular) y no convencional PVT (irregular) pretendidos. Para el primer caso, como se dijo anteriormente, se hará uso del primer planteamiento de Tiempo Mínimo, mientras que para el segundo caso se tomará el segundo de los planteamientos de Tiempo Mínimo. Así pues, teniendo en cuenta que la referencia a seguir va a ser una rampa, se pasan a presentar las ecuaciones diofánticas que aparecen en cada caso:

- ecuaciones diofánticas para controlador bifrecuencia (patrón regular  $\tau_1=0.1$  seg,  $\tau_2=0.1$  seg):

$$\begin{aligned}\tilde{M}(z_2^{-1}) &= (1 + z_2^{-1})^2 z_2^{-1} (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1}) \\ 1 - M(z_2^{-2}) &= (1 - z_2^{-2})^2 \Lambda_0\end{aligned}\quad (7-9)$$

- ecuaciones diofánticas para controlador con estructura no convencional PVT (patrón irregular  $\tau_1=0.17$  seg,  $\tau_2=0.03$  seg):

$$\begin{aligned}\tilde{M}(z_2^{-1}) &= (1 + z_2^{-1})^2 z_2^{-1} (1 + 2.0539 z_2^{-1}) (\Omega_0 + \Omega_1 z_2^{-1} + \Omega_2 z_2^{-2}) \\ 1 - M(z_2^{-2}) &= (1 - z_2^{-2})^2 (\Lambda_0 + \Lambda_1 z_2^{-2})\end{aligned}\quad (7-10)$$

Planteadas las ecuaciones diofánticas (7-9) y (7-10), se resuelve el sistema de ecuaciones que se deriva de cada una de ellas (según lo expuesto en 6.4.5), obteniéndose los controladores deseados:

- controlador bifrecuencia (patrón regular  $\tau_1=0.1$  seg,  $\tau_2=0.1$  seg):

$$G_{RL}(z_2^{-2}) = \frac{1}{1 - 2z_2^{-2} + z_2^{-4}} \quad (7-11)$$

$$G_{RR}(z_2^{-1}) = \frac{1.5z_2^{-1} + 2z_2^{-2} - 1.0028z_2^{-3} - 1.6704z_2^{-4} + 0.1676z_2^{-5} + 0.3352z_2^{-6}}{0.843z_2^{-1} + 0.488z_2^{-2}} \quad (7-12)$$

- controlador con estructura no convencional PVT (patrón irregular  $\tau_1=0.17$  seg,  $\tau_2=0.03$  seg):

$$G_{RL}(z_2^{-2}) = \frac{1}{1 - 2z_2^{-2} + z_2^{-4}} \quad (7-13)$$

$$G_{RR}(z_2^{-1}) = \frac{0.6012z_2^{-1} + 2z_2^{-2} + 1.0958z_2^{-3} - 1.6704z_2^{-4} - 1.333z_2^{-5} + 0.3352z_2^{-6} + 0.3012z_2^{-7}}{0.435z_2^{-1} + 0.895z_2^{-2}}$$

(7-14)

Cabe reseñar que nuevamente las parte lentas de los controladores (7-11) y (7-13) son iguales. Por su lado, las partes rápidas (7-12) y (7-14) son diferentes y, en concreto, se observa un incremento de orden en la parte rápida del controlador no convencional PVT debido a la inclusión del cero de módulo mayor que la unidad en su  $\tilde{M}(z_2^{-1})$ .

### 7.2.2.2. Implementación en VxWorks. Resultados.

Una vez conseguidas las expresiones (7-11) a (7-14), el objetivo es implementar en el sistema operativo de tiempo real VxWorks los controladores de Cancelación resultantes de las mismas en cada caso para que interactúen con el sistema real (motor Feedback).

Nuevamente mediante la herramienta WindView se comprueba que el código implementado se ejecuta correctamente a nivel de tiempos de actuación y temporización de tareas. En las figuras 7-16 y 7-17 se presenta la ejecución de cada uno de los casos. Observando la figura 7-16 se aprecia que el código ejecutado por cada una de las tareas contempladas en el diseño (recordar figuras 7-3 y 7-4) es llevado a cabo siguiendo un patrón bifrecuencia donde los momentos en que actúa la tarea del subcontrolador rápido (regurapido) están equiespaciados en el tiempo ( $T=0.1$  seg). La acción de control suministrada en cada instante de tiempo por el controlador rápido será recogida alternativamente por las tarea digiana y digiana2, que la aplicarán al motor también cada  $T$  instantes de tiempo. Se aprecia como digiana2 comienza a ejecutarse tras un retraso de  $T$  instantes respecto a digiana, y que ambas están temporizadas a periodo  $NT=0.2$  seg.

Por su parte, en la figura 7-17 se muestra la ejecución del sistema de control con estructura no convencional PVT ( $\tau_1=0.17$  seg y  $\tau_2=0.03$  seg), observándose que ahora digiana2 espera  $\tau_1=0.17$  seg para comenzar su ejecución, motivo por el cual la acción de control hallada en el instante  $T$  de cada metaperiodo será aplicada  $\tau_1-T$  instantes de tiempo después.

En cuanto a los valores de la salida del motor, si se observa la figura 7-18 se vuelve a apreciar que las prestaciones del motor empeoran cuando las acciones del algoritmo bifrecuencia regular son aplicadas de forma irregular PVT, ya que, aproximadamente el algoritmo bifrecuencia regular tiende a establecerse cerca de los 1.4 seg, mientras que el algoritmo bifrecuencia regular aplicado irregularmente según patrón PVT tiende a hacerlo más tarde (aproximadamente en 2.4 seg). Por su parte, cuando se aplica el algoritmo no convencional PVT según el patrón irregular considerado se recobra en cierto modo la situación lograda por el algoritmo bifrecuencia regular, ya que la salida tiende a establecerse aproximadamente a los 1.55 seg, tiempo ligeramente peor que el logrado para el bifrecuencia regular, pero que mejora al bifrecuencia regular aplicado de forma PVT según el patrón escogido. Comentar que, debido a ruidos y no linealidades en el proceso, surgen ciertos picos aislados en el seguimiento de la referencia para los algoritmos probados, los cuales (picos), al ser de poca magnitud, no son tenidos en cuenta para extraer las prestaciones de la dinámica general del sistema.

En la figura 7-19 se muestran las acciones (rápidas) suministradas al motor en cada caso. En la figura 7-20 aparece más claramente el patrón de aplicación de las mismas (regularmente espaciado en el caso bifrecuencia regular, e irregularmente espaciado en el caso bifrecuencia regular aplicado de forma irregular y en el caso no convencional PVT).



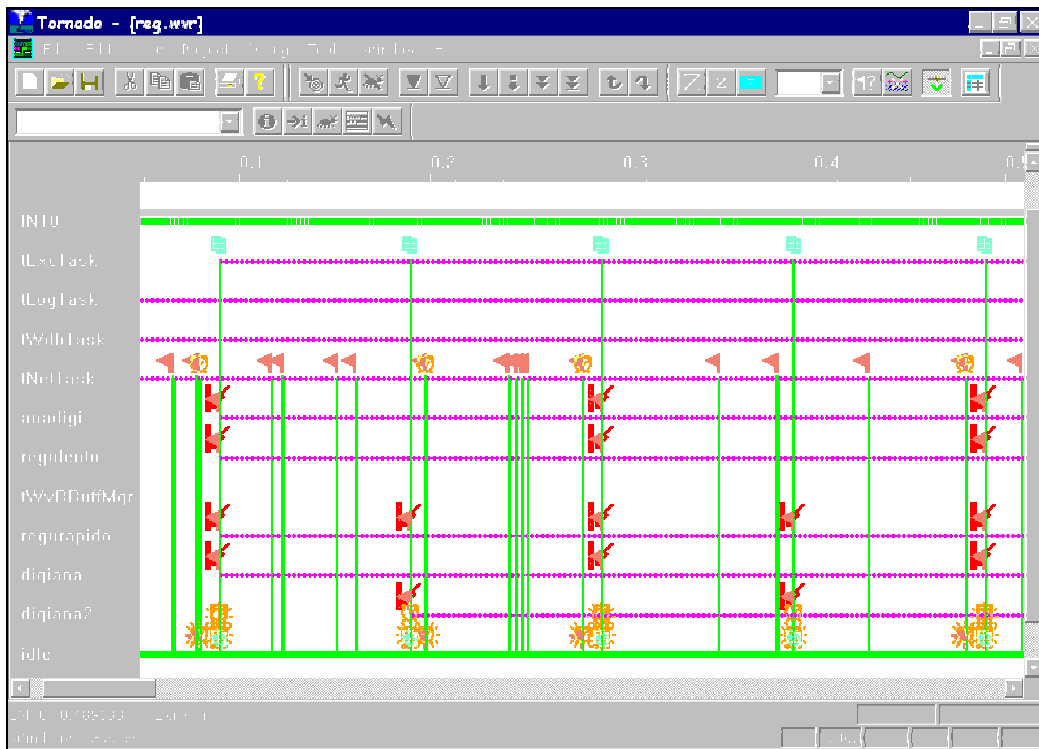


Figura 7-16: Ejecución de tareas Cancelación caso bifrecuencia regular

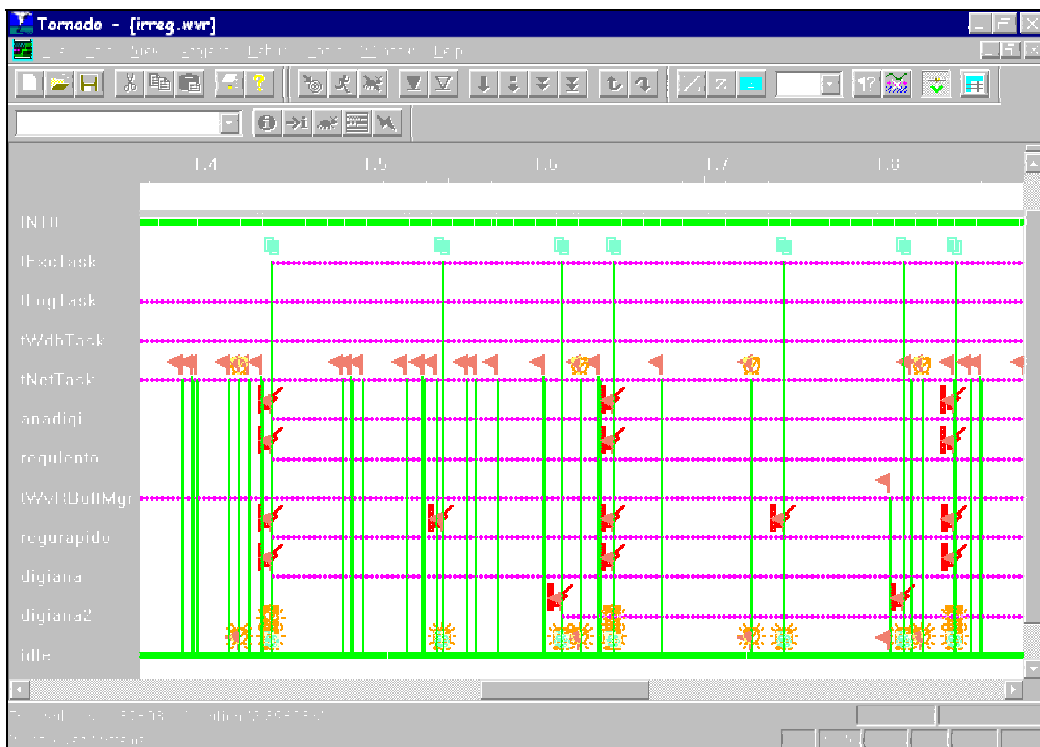


Figura 7-17: Ejecución de tareas Cancelación caso no convencional PVT

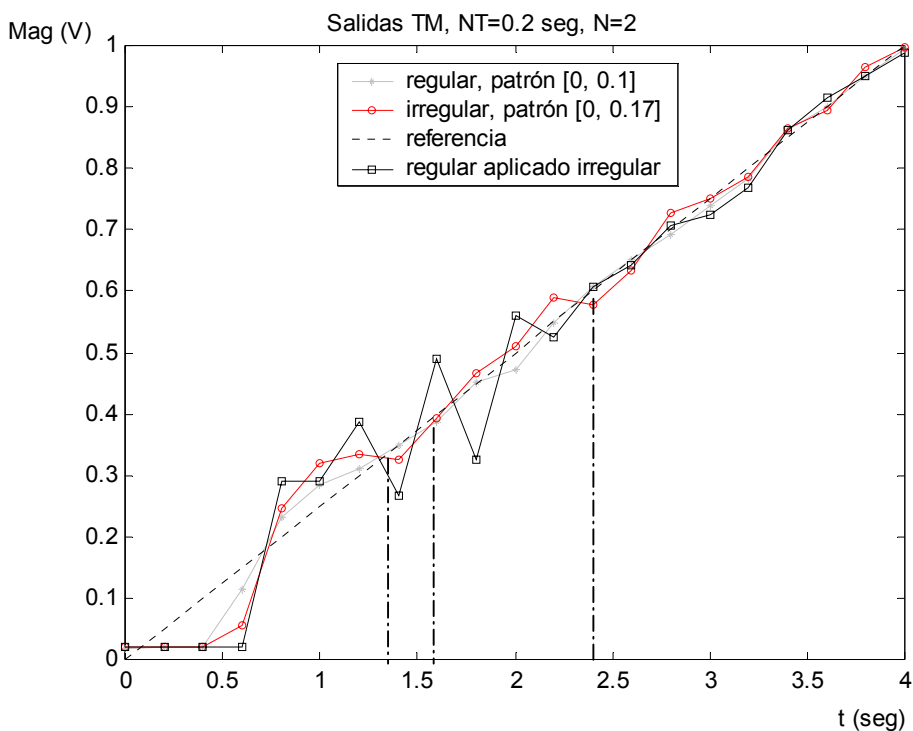


Figura 7-18: Salida de velocidad del motor para Cancelación en cada caso contemplado

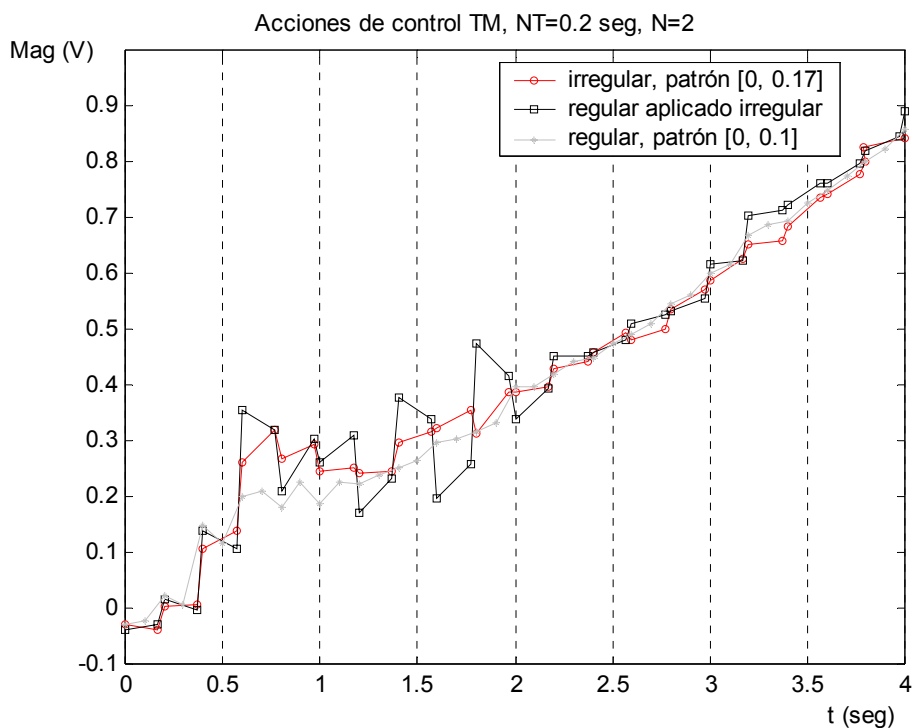


Figura 7-19: Acciones de control para Cancelación en cada caso contemplado

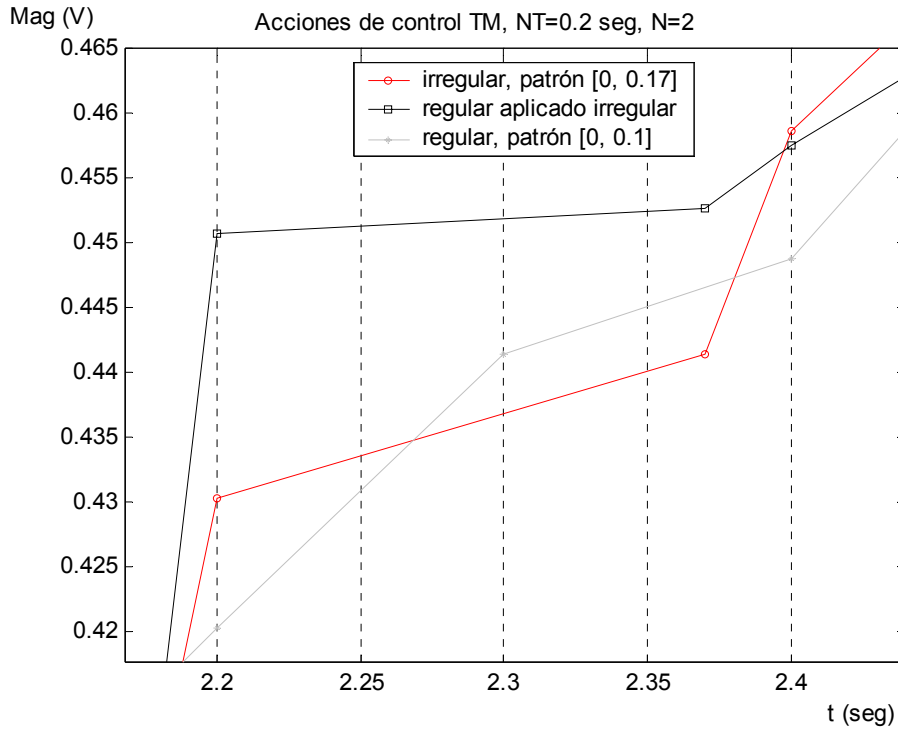


Figura 7-20: Zoom acciones de control para Cancelación en cada caso contemplado.

### 7.2.3. Controlador de Asignación de Polos (Tres Ramas).

Del mismo modo que en las secciones anteriores, se van a presentar en primer lugar las expresiones que hacen posible la obtención de cada controlador de Tres Ramas, el bifrecuencia y el de estructura no convencional PVT, con el fin de seguir ahora una referencia escalón unitario. En este caso, para el segundo de ellos se ha escogido un patrón de  $\tau_1=0.12$  seg y  $\tau_2=0.08$  seg, dentro de un metaperiodo de  $NT=0.2$  seg ( $N=2$ ). Después, se mostrará la ejecución de las diferentes tareas en el sistema de tiempo real VxWorks y los resultados conseguidos.

#### 7.2.3.1. Diseño del controlador bifrecuencia y del no convencional PVT.

Partiendo del modelo de (7-1) para el proceso y siguiendo el modelado presentado en el capítulo 3, se tiene las siguientes f.d.t. discretas:

- caso muestreo regular sobre el proceso ( $\tau_1=0.1$  seg,  $\tau_2=0.1$  seg):

$$G_p^T = \frac{B_p^T W_A^T}{A_p^T W_A^T} = \frac{0.843z_2^{-1} (1 + 0.579z_2^{-1})}{(1 - 0.579z_2^{-1})(1 + 0.579z_2^{-1})} = \frac{0.843z_2^{-1} + 0.488z_2^{-2}}{1 - 0.3352z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} \quad (7-15)$$

- caso muestreo irregular sobre el proceso ( $\tau_1=0.12$  seg,  $\tau_2=0.08$  seg):

$$G_p^T = \frac{\hat{B}_p^T W_B^T}{A_p^T W_A^T} = \frac{0.875z_2^{-1} (1 + 0.5212z_2^{-1})}{(1 - 0.579z_2^{-1})(1 + 0.579z_2^{-1})} = \frac{0.875z_2^{-1} + 0.456z_2^{-2}}{1 - 0.3352z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_p^T}{(A_p^{NT})^T} \quad (7-16)$$

Para llevar a cabo el diseño de ambos controladores, primero se debe saber cuál es la función de lazo cerrado que se quiere conseguir para el sistema; se propone una que tenga ganancia estática 1 y constante de tiempos 0.05 seg:

$$M(s) = \frac{2.0024}{0.05s + 2.0024}$$

Esta M(s) debe ser tratada según el modelado del capítulo 3, de forma que se tiene:

- caso muestreo regular sobre el proceso ( $\tau_1=0.1$  seg,  $\tau_2=0.1$  seg):

$$M^T = \frac{B_M^T W_{M_A}^T}{A_M^T W_{M_A}^T} = \frac{0.9818z_2^{-1} (1 + 0.0182z_2^{-1})}{(1 - 0.0182z_2^{-1})(1 + 0.0182z_2^{-1})} = \frac{0.9818z_2^{-1} + 0.0178z_2^{-2}}{1 - 0.00033z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_M^T}{(A_M^{NT})^T} \quad (7-17)$$

- caso muestreo irregular sobre el proceso ( $\tau_1=0.12$  seg,  $\tau_2=0.08$  seg):

$$M^T = \frac{\hat{B}_M^T W_{M_B}^T}{A_M^T W_{M_A}^T} = \frac{0.9961z_2^{-1} (1 + 0.00082z_2^{-1})}{(1 - 0.0182z_2^{-1})(1 + 0.0182z_2^{-1})} = \frac{0.9961z_2^{-1} + 0.00081z_2^{-2}}{1 - 0.00033z_2^{-2}} = \frac{\tilde{B}_M^T}{(A_M^{NT})^T} \quad (7-18)$$

Siguiendo las pautas de diseño del capítulo 6, se necesita también de:

$$M^{NT} = \frac{B_M^{NT}}{A_M^{NT}} = \frac{0.997z_2^{-1}}{1 - 0.00033z_2^{-2}}$$

$$G^{NT} = \frac{B_p^{NT}}{A_p^{NT}} = \frac{1.331z_2^{-1}}{1 - 0.3352z_2^{-2}}$$

para llevar a cabo el regulador  $G_R^{NT}$  (recordar expresiones (6-39) y (6-40)), el cual vendrá representado por:

$$F^{NT} = 1$$

$$S^{NT} = 0.2516 \quad (7-19)$$

$$P^{NT} = 0.749$$

Por último, a la vista de las ecuaciones (7-15) a (7-18), se obtiene el controlador de Tres Ramas bifrecuencia (regular), descompuesto en:

- bloque lento: 1.3351 (7-20)

- bloque rápido:  $\frac{0.9818z_2^{-1}(1+0.0182z_2^{-1})}{0.843z_2^{-1}(1+0.579z_2^{-1})}$  (7-21)

y el controlador con estructura no convencional PVT (irregular):

- bloque lento: 1.3351 (7-22)

- bloque rápido:  $\frac{0.9961z_2^{-1}(1+0.00082z_2^{-1})}{0.875z_2^{-1}(1+0.5212z_2^{-1})}$  (7-23)

Como siempre, las partes lentas ((7-20) y (7-22)) son iguales para ambos controladores, diferenciándose las partes rápidas ((7-21) y (7-23)) debido al diferente patrón de muestreo empleado en cada caso.

### 7.2.3.2. Implementación en VxWorks. Resultados.

Vistas las ecuaciones (7-15) a (7-23) se puede implementar en el sistema operativo de tiempo real VxWorks los dos controladores diseñados y observar las consecuencias sobre el motor Feedback.

En las figuras 7-21 y 7-22 se ve la correcta temporización de cada tarea para cada algoritmo implementado gracias a los diagramas de WindView.

En cuanto a la salida de velocidad del motor, en la figura 7-23 se percibe que efectivamente el sistema es capaz de seguir a la referencia. Ya, con mayor nivel de detalle, en la 7-24 se observa como, al igual que en los ejemplos vistos con anterioridad, se obtiene mejores prestaciones con el diseño bifrecuencia aplicado a instantes regulares de tiempo ( $t_e(\pm 2\%) \approx 0.295$  seg) que con el mismo aplicado según un patrón PVT irregular ( $t_e(\pm 2\%) \approx 0.37$  seg, llegando incluso a sobrepasar el valor final). Además, en este caso, al aplicar el algoritmo no convencional PVT se obtienen mejores prestaciones ( $t_e(\pm 2\%) \approx 0.26$  seg) no sólo con respecto al bifrecuencia aplicado irregularmente sino, también, con respecto a éste aplicado a instantes regulares de tiempo. Nuevamente, cabe resaltar que se ha tomado una tarea auxiliar que muestrea la salida del motor a  $t_0=0.001$  seg con el fin de poder obtener de forma más precisa las prestaciones del sistema.

En la figura 7-25 se muestran las acciones (rápidas) suministradas al motor en cada caso. En la figura 7-26 aparece más claramente el patrón de aplicación de las mismas (regularmente espaciado en el caso bifrecuencia regular, e irregularmente espaciado en el caso bifrecuencia regular aplicado de forma irregular y en el caso no convencional PVT).

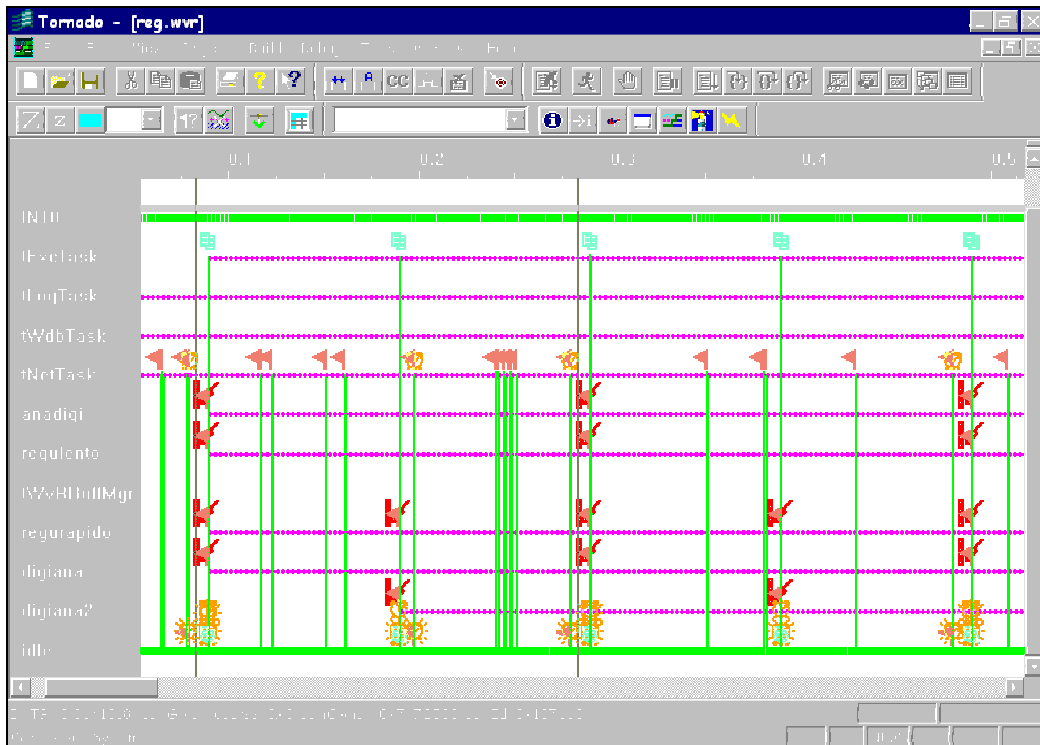


Figura 7-21: Ejecución tareas Tres Ramas caso bifrecuencia regular.

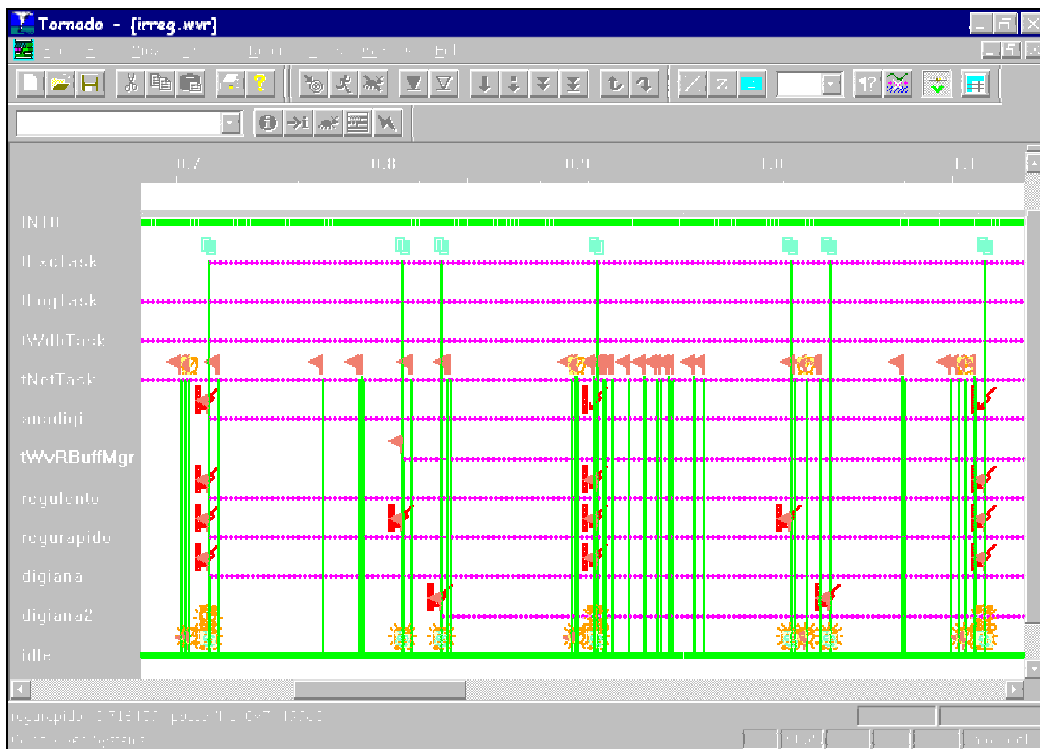


Figura 7-22: Ejecución tareas Tres Ramas caso no convencional PVT.

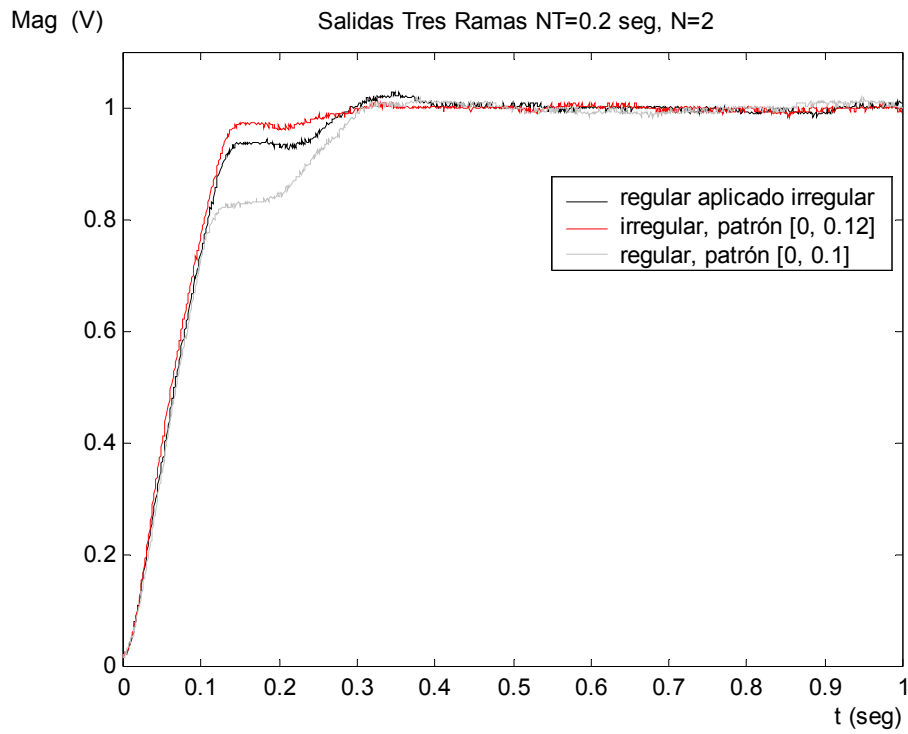


Figura 7-23: Salida de velocidad del motor para Tres Ramas en cada caso contemplado

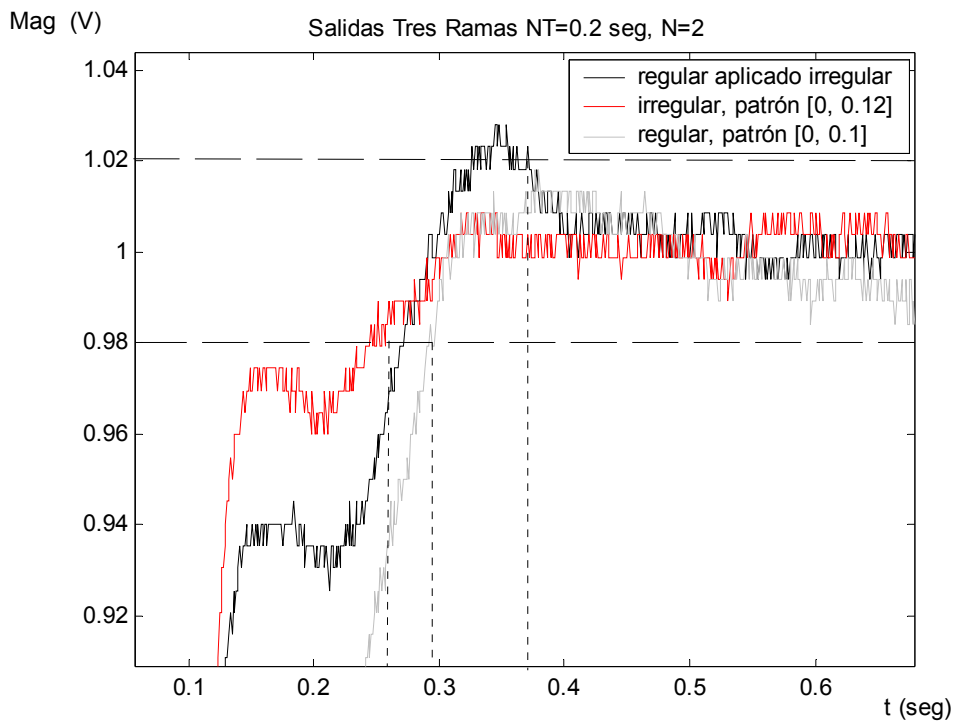


Figura 7-24: Zoom salida de velocidad del motor para Tres Ramas en cada caso contemplado

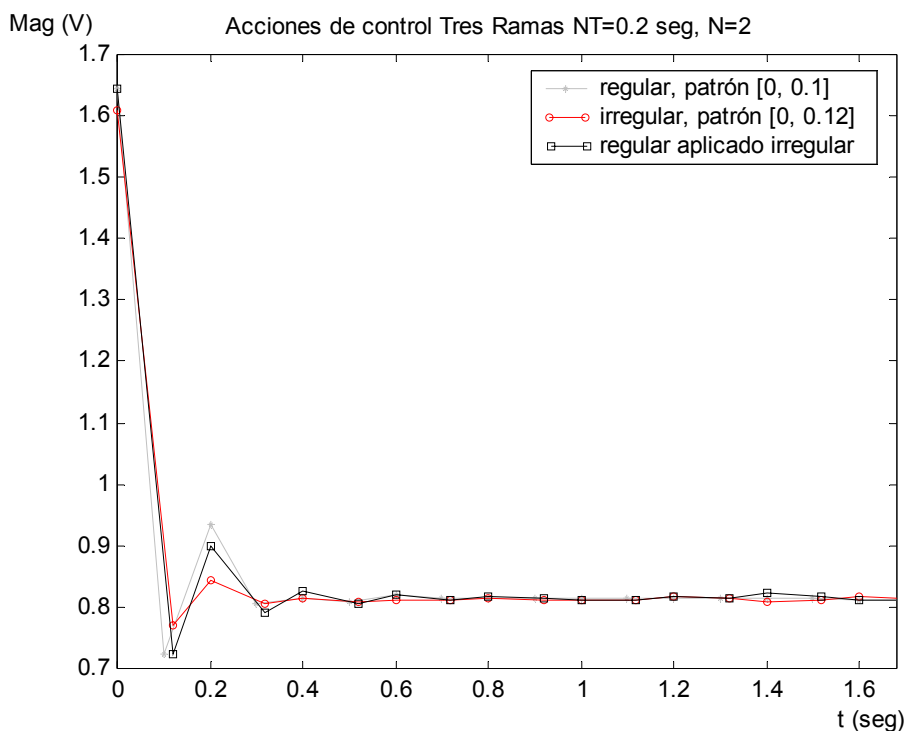


Figura 7-25: Acciones de control para Tres Ramas en cada caso contemplado

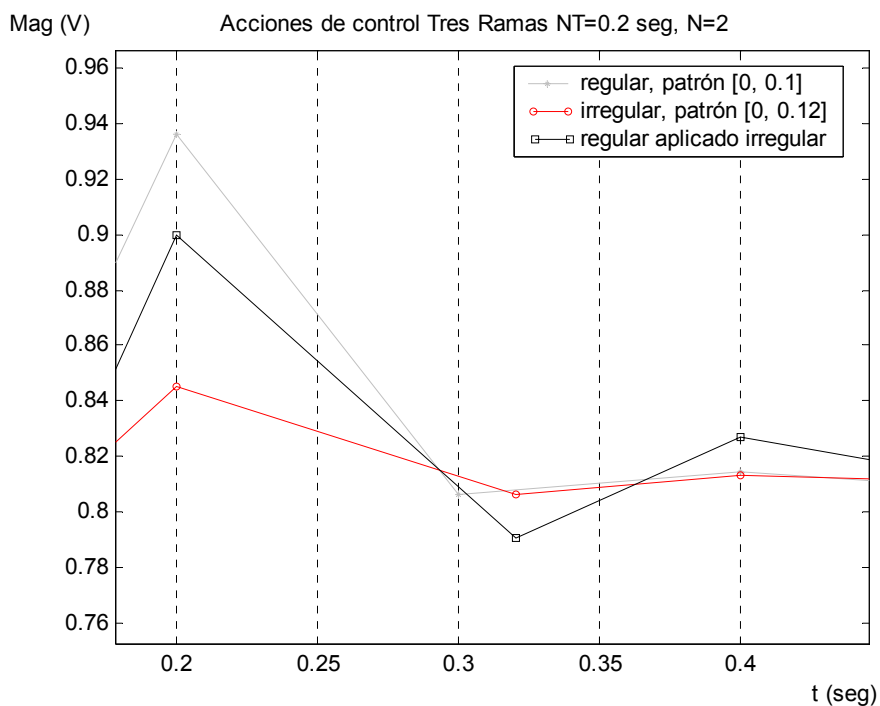


Figura 7-26: Zoom acciones de control para Tres Ramas en cada caso contemplado



### 7.3. CONCLUSIONES.

En este capítulo se presenta una manera sencilla de implementar controladores bifrecuencia MRIC sobre un sistema operativo de tiempo real. Se plantea tanto desde el punto de vista de una actuación equiespaciada (regular) en el tiempo como desde el punto de vista de una actuación PVT, en la que el espaciamiento entre las distintas acciones puede ser irregular con el tiempo.

El sistema operativo de tiempo real escogido es VxWorks, el cual cuenta con la ayuda de Tornado como plataforma de desarrollo, compilación y depuración. Ambos, Tornado-VxWorks, conforman lo que se conoce como entorno de desarrollo cruzado. Por su parte, el sistema real que se ha escogido es un motor de corriente continua de la casa Feedback.

Se ha presentado de manera somera que, efectivamente, en un sistema de control basado en red puede surgir la necesidad de emplear un esquema de muestreo no convencional debido a la aparición de diferentes retardos en el bucle de control. Se comentan posibles formas de implementar algunas de estas situaciones sobre el sistema operativo de tiempo real.

En última instancia se diseñan e implementan controladores bifrecuencia (PID, Cancelación y Asignación de Polos) para actuación regular y PVT sobre el motor, y se deduce de los resultados obtenidos que ambos controladores producen prestaciones similares sobre el sistema y, sobre todo, que la aplicación en instantes irregulares (dentro del metaperiodo) de las acciones de control proporcionadas por el controlador bifrecuencia regular suele comportar una caída de las prestaciones del sistema.

## **CAPÍTULO 8**

# **CONCLUSIONES Y TRABAJOS FUTUROS**



## 8.1. CONCLUSIONES.

De manera resumida se presentan a continuación las aportaciones más relevantes incluidas en la presente memoria:

- En relación al Modelado de Sistemas de Control con Muestreo No Convencional se plantean dos metodologías de modelado basadas en dos tipos de representación diferentes. Así, se introduce una metodología basada en la Representación Externa (RE) y otra en la Representación Interna (RI), comprobándose por simulación que la primera viene a ser una aproximación (bastante fidedigna) de la segunda, siendo esta última la que logra un modelo más próximo al comportamiento real del sistema. Para llevar a cabo el modelado en RE ha sido interesante el estudio realizado para obtener la nueva ubicación que adquieren los ceros del sistema cuando se pasa de un muestro uniforme dentro del metaperiodo a otro no uniforme. En ese estudio ha sido de gran importancia la consideración del Principio del Módulo Máximo, ya que facilita en gran manera la obtención del modelo final del proceso muestreado de forma no convencional. Por su parte, para conseguir el modelado en RI ha sido necesaria la obtención de una serie de leyes de recurrencia basadas en la metodología de Kranc (Kranc, 1957a), las cuales se sintetizan por medio de los llamados Operadores de Kranc para Sistemas con Muestreo No Convencional.
- En relación al Análisis de Sistemas de Control con Muestreo No Convencional se ha desarrollado una herramienta de simulación interactiva en SysQuake basada en el modelado en RI, la cual facilita el entendimiento y el estudio de este tipo de sistemas tanto desde el punto de vista temporal como frecuencial. Gracias a ella se puede ver fácilmente cómo puede afectar la variación del patrón de muestreo sobre el proceso bajo estudio, de manera que faculta a considerar a dicho patrón de muestreo como un parámetro más a tener en cuenta en el diseño del sistema de control. En esa línea, concretando en el caso de reguladores de tipo P-I-D, se demuestra que es posible compatibilizar escenarios de muestreo no convencional con escenarios monofrecuenciales en los que se ha variado los parámetros de partida del PID.
- En relación al Diseño de Sistemas de Control con Muestreo No Convencional se ha presentado una metodología general de diseño basada en la Descomposición en Frecuencia del controlador y en el modelado en RE, de tal manera que a partir de ella se hace una adaptación de algunos reguladores clásicos (PID, Cancelación -Tiempo Mínimo y Tiempo Finito-, Tres Ramas) para que a la hora de llevar a cabo su diseño se pueda considerar procesos muestreados de forma periódicamente variable en el tiempo (PVT). Esta metodología de diseño ha sido probada para un proceso real (motor de corriente continua) alojado dentro de una plataforma de tiempo real basada en el sistema operativo de tiempo real VxWorks. Tanto en la plataforma de ensayo como en las simulaciones se comprueba que si las acciones de control generadas por un controlador bifrecuencia (regular) son aplicadas siguiendo un patrón PVT, el sistema de control experimenta pérdida de prestaciones. Sin embargo, si a partir del patrón de muestreo PVT se diseña un controlador con estructura no convencional y se aplican sus acciones siguiendo los instantes de actuación del patrón PVT considerado, el sistema de control mejora claramente sus prestaciones.

## 8.2. TRABAJOS FUTUROS.

Tras la realización de este trabajo son varios los aspectos que quedan abiertos a futuras mejoras y estudios. Es en la parte de Análisis y Diseño donde, sobre todo, se considera la existencia de líneas que podrían cubrir trabajos futuros. A continuación se relacionan algunas de ellas:

- 1) Ampliación de la herramienta de simulación interactiva efectuada en SysQuake, de manera que:
  - contemple también la versión paralela del controlador tipo P-I-D. Así, se podrá observar rápidamente la influencia de cada una de las acciones básicas del controlador en el rendimiento global del sistema de control.
  - posibilite la inclusión de retardos sobre el proceso, ya que puede ser necesario en determinados casos.
  - permita tratar con otros esquemas multifrecuencia (por ejemplo, MROC).
  - permita elegir entre diversos controladores multifrecuencia (de cancelación, de asignación de polos, etc).
  - haga posible la inclusión de perturbaciones en las medidas, ya que éstas suelen aparecer en casos prácticos.
  - se pueda extender al caso multivariable.
- 2) Implementación práctica de controladores con estructura no convencional sobre un entorno basado en red. La idea es que el propio entorno (red) genere los retardos. Así, de antemano, haciendo un estudio de la cota temporal que van a suponer dichos retardos, se puede establecer el patrón de muestreo PVT. A partir de él, se modela el sistema y se diseña el controlador con estructura no convencional oportuno. Esta línea de actuación se piensa poner pronto en práctica por medio del proyecto CICYT “Diseño de Sistemas de Control basados en Red”, que ha sido aprobado y que comenzará en 2004 (con una duración total de 3 años). En él, el sistema físico a controlar será un robot porticado de 4 ejes (3 cartesianos más 1 de rotación en la mano) y la red de comunicación será una Profibus-DP.
- 3) Como parece lógico pensar, para determinados sistemas y en ocasiones concretas (por ejemplo, ante variabilidad temporal de los retardos considerados), puede que se haga necesaria la consideración de más de un patrón de muestreo PVT diferente. En esos casos, se puede generar tantos modelos del sistema y controladores con estructura no convencional como patrones se consideren, cambiando de un controlador a otro según el patrón de muestreo en curso. Esta sencilla operación, sin embargo, puede inestabilizar el sistema de control, por lo que se cree necesario un estudio detallado de la estabilidad para dicho sistema de control ante cambios en su controlador. Otra posible forma de abordar el problema sería la desarrollada al final del capítulo 6, donde se propone la utilización de un controlador “medio” que trabaja adecuadamente dentro de un rango, el cual acota la variabilidad de los retardos.
- 4) Aplicación a otros casos prácticos susceptibles de ser muestreados de forma no convencional PVT, así como a otras estructuras de control. Además, estudio de la posible

adición de otras técnicas avanzadas de control (horizonte de recesión, aspectos de control robusto, etc) a estas técnicas de muestreo no convencional.

# **ANEXO I**

# **OPERADORES DE KRANC CON MUESTREO NO CONVENCIONAL EN MATLAB**





**I.1. OPERADOR DE KRANC REGULAR.**

```

% Programa que obtiene las matrices de R.I. para cualquier número
% de muestreos en entrada y salida (para cualquier instante).
% CASO CONTINUO

% Introducir numerador y denominador del proceso
num = input('Numerador: ');
den = input('Denominador: ');
Ti = input('Periodo de intermuestreo: ');
[numd,dend] = c2dm(num,den,Ti,'zoh');
[a,b,c,d] = tf2ss(numd,dend);
a
b
c
d

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida

k = input('Número de muestreos en un periodo: ');
entrada = input('Instantes de muestreo a la entrada [t0..tn]: ');
salida = input('Instantes de muestreo a la salida [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia

dif=0;
for z=1:length(entrada)-1
    dif(z) = entrada(z+1) - entrada(z);
end
dif
% Obtención de matrices

A=a^k;

B=[];
for j=1:length(entrada)-1
    acum = 0;
    for x=1:j-1
        acum = acum + dif(x);
    end
    B=[B a^(k-1-acum)*b];
end

C=[];
for i=1:length(salida)-1
    C=[C;c*a^salida(i)];
end

D=[];
for i=1:length(salida)-1,
    for j=1:length(entrada)-1
        acum = 0;
        for x=1:j-1
            acum = acum + dif(x);
        end
        l=salida(i)-1-acum;
        if (l>=0)

```

```

        psi = a^1;
        sigma = 0;
    else if (i>=j)
        psi = 0;
        sigma = d;
    end
    if (i>=j) & (salida(i)<entrada(j))
        psi = 0;
        sigma = 0;
    end
    if (i<j)
        psi = 0;
        sigma = 0;
    end
    end
    D(i,j)=c*psi*b + sigma;
end
end
A
B
C
D

```

## I.2. OPERADOR ZOH-KRANC.

```

% Programa que obtiene las matrices de R.I. para distinto número
% de muestreos en entrada y salida (para cualquier instante) .
% CASO CONTINUO + RETENEDOR

% Introducir numerador y denominador del proceso
num = input('Numerador: ');
den = input('Denominador: ');
Ti = input('Periodo de intermuestreo: ');
[numd,dend] = c2dm(num,den,Ti,'zoh');
[a,b,c,d] = tf2ss(numd,dend);
a
b
c
d

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida

k = input('Número de muestreos en un periodo: ');
entrada = input('Instantes de muestreo a la entrada [t0..tn]: ');
salida = input('Instantes de muestreo a la salida [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entrada)-1
    dif(z) = entrada(z+1) - entrada(z);
end

% Obtención de matrices

A=a^k;

```

```

B=[];
for j=1:length(entrada)-1
    acum = 0;
    for w=1:j-1
        acum = acum + dif(w);
    end
    sumatorio = 0;
    for x=1:dif(j)
        sumatorio = sumatorio + a^(k-x-acum);
    end
    B=[B sumatorio*b];
end
A
B
C=[];
for i=1:length(salida)-1
    C=[C;c*a^salida(i)];
end
C

D=[];
for i=1:length(salida)-1,
    for j=1:length(entrada)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salida(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + a^(salida(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
        if ( (salida(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
            x = x - 1 ;
        end
        psi = sumatorio;
        sigma = 0;
        if (salida(i)-x-acum < 0)
            if (i>=j)
                sigma = d;
            end
            if ( (i>=j) & (salida(i)<entrada(j)) )
                sigma = 0;
            end
            if (i<j)
                sigma = 0;
            end
            if ( (i<j) & (i+j==k) )
                sigma = d;
            end
        else sigma = 0;
        end
        D(i,j)=c*psi*b + sigma;
    end
end
D

```

**I.3. OPERADOR DE KRANC DIGITAL.**

```

% Programa que obtiene las matrices de R.I. para cualquier número
% de muestreos en entrada y salida (para cualquier instante).
% CASO DIGITAL

% Introducir numerador y denominador del proceso discreto
numd = input('Numerador a periodo mcd: ');
dend = input('Denominador a periodo mcd: ');
[a,b,c,d] = tf2ss(numd,dend);
a
b
c
d

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida

k = input('Número de muestreos a mcd en un periodo : ');
entrada = input('Instantes de muestreo a la entrada [t0..tn]: ');
salida = input('Instantes de muestreo a la salida [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia

dif=0;
for z=1:length(entrada)-1
    dif(z) = entrada(z+1) - entrada(z);
end
dif
% Obtención de matrices

A=a^k;

B=[];
for j=1:length(entrada)-1
    acum = 0;
    for x=1:j-1
        acum = acum + dif(x);
    end
    B=[B a^(k-1-acum)*b];
end

C=[];
for i=1:length(salida)-1
    C=[C;c*a^salida(i)];
end

D=[];
for i=1:length(salida)-1,
    for j=1:length(entrada)-1
        acum = 0;
        for x=1:j-1
            acum = acum + dif(x);
        end
        l=salida(i)-1-acum;
        if (l>=0)
            psi = a^l;
            sigma = 0;

```

```
else if (i>=j)
    psi = 0;
    sigma = d;
end
if (i>=j) & (salida(i)<entrada(j))
    psi = 0;
    sigma = 0;
end
if (i<j)
    psi = 0;
    sigma = 0;
end
end
D(i,j)=c*psi*b + sigma;
end
end
A
B
C
D
```

## **ANEXO II**

# **APLICACIÓN DEL PRINCIPIO DEL MÓDULO MÁXIMO PARA LA OBTENCIÓN DE LOS CEROS DE UN SISTEMA CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**



## II.1. FORMALISMOS MATEMÁTICOS.

Sea  $G$  una región en el dominio de los complejos  $C$ . Entendemos por región un conjunto simplemente conexo (esto es, y valgan las expresiones, “sin agujeros” y de una “pieza”) y abierto (sin el “borde”) en  $C$ . Ejemplos de  $G$  pueden ser el propio  $C$ , un disco de radio  $R$  sin el borde, un semiplano sin la recta que lo delimita, etc.

Sea  $f(s)=\text{Abs}(g(s))$ , donde  $g(s)$  es el polinomio del numerador del sistema muestreado de forma no convencional, tras aplicarle los pasos a) y b) de la sección 3.2.4. La función  $f(s)$  puede quedar definida, por tanto, como sigue:

$$f : C \rightarrow \mathfrak{R}^+ \cup \{0\}$$
$$s \rightarrow f(s)$$

Es posible probar que todos los mínimos relativos de  $f(s)$  son ceros (matemáticamente hablando) de la función, y, más todavía, que todos los extremos relativos de  $f(s)$  son ceros (matemáticamente hablando), usando un resultado conocido como el Principio del Módulo Máximo.

- Teorema o Principio del Módulo Máximo:

Si  $f(s)$  es holomorfa, como función de variable compleja, y es no constante en una región  $G$ , entonces  $|f(s)|$  no tiene máximo en  $G$ .

- Aplicación para la obtención de los ceros del sistema con muestreo no convencional:

Dado que  $f(s)$  es una combinación lineal de exponenciales y de polinomios (ya que  $g(s)$  así lo es, como se puede ver en cualquiera de los ejemplos desarrollados en el capítulo 3), dicha  $f(s)$  es holomorfa, por lo que los extremos relativos de  $|f(s)|$  no son máximos.

Ahora bien, si  $f$  no tuviera ningún punto que la anulara, entonces  $1/f(s)$  sería holomorfa en  $G$  al serlo  $f$ , y entonces  $|1/f(s)|$ , por este principio, no tendría máximos, es decir,  $|f(s)|$  no tendría mínimos.

Parece claro, sin embargo, que van a aparecer extremos relativos, dado que se van a tener que considerar diferentes curvas de nivel o cortes de la región para alcanzar finalmente la ubicación de estos extremos. Pero dichos extremos relativos no son máximos por lo enunciado en el teorema, luego serán mínimos, y si son mínimos en ellos la función debe anularse, puesto que no debería aplicarse el resultado anterior.

Concluyendo, los mínimos hallados son ceros (matemáticamente hablando) de la función  $f(s)$  y, a la postre, son los ceros de la función  $g(s)$ , numerador del sistema muestreado de forma no convencional.

- Notas:
  - 1) este principio se puede encontrar en cualquier libro de variable compleja.
  - 2) donde dice holomorfa, puede sustituirse por derivable, e incluso analítica.



## II.2. EJEMPLO: OBTENCIÓN DE LOS CEROS PARA EL SISTEMA DE LA SECCIÓN 3.3 UTILIZANDO MATHEMATICA.

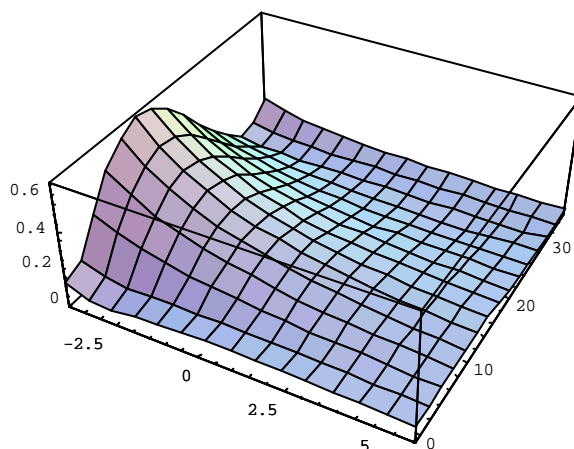
A continuación se van a presentar las órdenes seguidas en Mathematica 4.0 para la obtención de los ceros del numerador del ejemplo analizado a lo largo de la sección 3.3. Irán además acompañadas de comentarios que describirán someramente su funcionalidad y de las gráficas que resultan de ellas.

Lo primero que se ha de hacer es definir la función del numerador,  $g(s)$ , (esto es, el numerador de la ecuación (3-13)):

```
g@s_D := H0.09969 - 0.05333 * Exp@- s * 0.2DL * HExp@- s * 0.2 * 3D + Exp@- s * 0.4 * 3DL +
H0.09803 * Exp@- s * 0.2D - 0.05466 * Exp@- s * 0.4DL
```

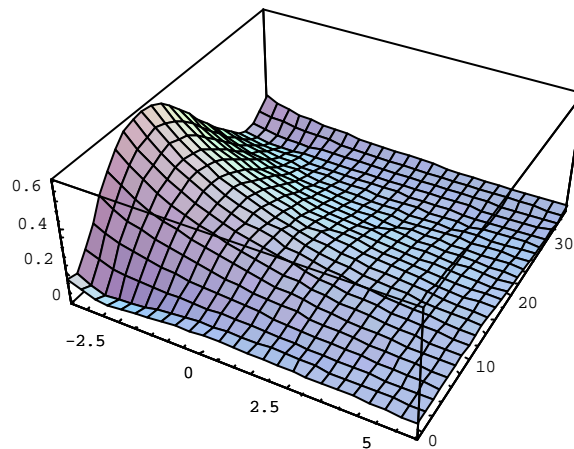
Tras ello, se define la función  $f$  como valor absoluto de  $g(s)$  y se plotea en 3D, dando un rango de representación en el eje X (parte real del número complejo en S) y en Y (parte imaginaria en S), por lo que el eje Z de la gráfica mostrará el valor del módulo del número complejo:

```
f@x_, y_D := Abs@g@x + ä yDD
Plot3D@f@x, yD, {x, -4.05, 6.05}, {y, -1, 35.4}<D;
```

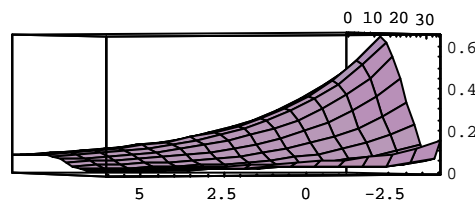


Mathematica 4.0 permite definir la curva 3D con mayor resolución a través del comando `PlotPoints`  $\rightarrow n$  (donde  $n$  es el número de líneas que da contorno a la gráfica), e incluso cambiar el punto de vista con el comando `ViewPoint`  $\rightarrow \{x, y, z\}$  (donde  $x, y, z$  son las coordenadas del nuevo punto de vista con el que se observa la gráfica). Ambas órdenes pueden facilitar la tarea de encontrar las raíces de la función.

`Plot3D@f@x, yD, 8x, - 4.05, 6.05<, 8y, - 1, 35.4<, PlotPoints @ 25D;`

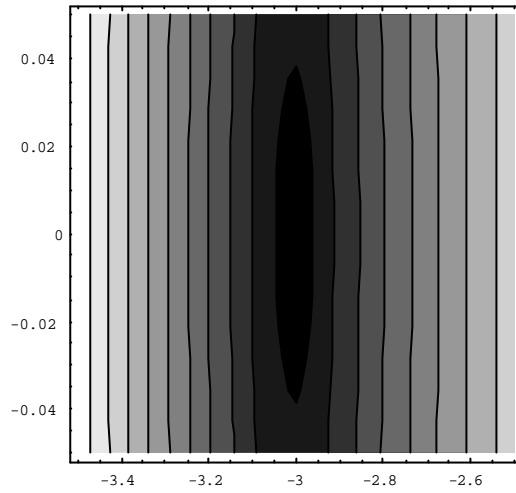


`Plot3D@f@x, yD, 8x, - 4.05, 6.05<, 8y, - 1, 35.4<, ViewPoint -> 898, 351, 3<D;`

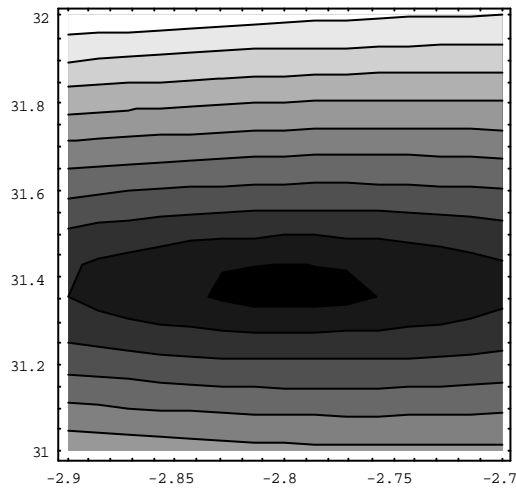


A la vista de las gráficas anteriores parece poder deducirse la ubicación de los tres ceros ( $g(s)$  proviene de una ecuación de tercer grado) que se han de encontrar, de manera que uno de ellos puede estar dentro de la zona delimitada aproximadamente por los valores  $\{-3.5, -2.5\}$  en  $X$  y  $\{-0.05, 0.05\}$  en  $Y$ . Igualmente, aproximadamente en la zona  $\{-2.9, -2.7\}$  en  $X$  y  $\{31, 32\}$  en  $Y$  parece estar otro de los ceros de la función. Por último, en el rango  $\{4, 6\}$  para  $X$  y  $\{28, 30\}$  para  $Y$  da la sensación de encontrarse el tercer cero. Pero para comprobarlo de manera más exacta se ha de recurrir al comando `ContourPlot`, el cual permite representar las gráficas anteriores en 2D, de tal forma que si se encuentra una curva cerrada dentro del rango elegido, las coordenadas  $(X, Y)$  que encierran dicha curva marcarán el valor del cero. Para interpretar las tonalidades utilizadas por Mathematica 4.0 en estas gráficas 2D se ha de tener en cuenta que cuanto más oscura sea la porción, menor es el valor que toma  $f$ . Así, si se ejecuta el comando `ContourPlot` para cada rango especificado anteriormente:

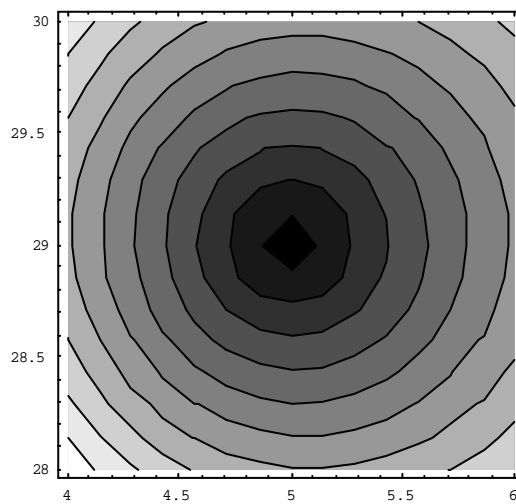
ContourPlot@f@x, yD, 8x, - 3.5, - 2.5<, 8y, - 0.05, 0.05<D



ContourPlot@f@x, yD, 8x, - 2.9, - 2.7<, 8y, 31, 32<D



ContourPlot@f@x, yD, 8x, 4, 6<, 8y, 28, 30<D



A la vista de las gráficas anteriores y afinando más todavía para cada rango contemplado en ellas, se puede deducir respectivamente que los ceros que se pretende encontrar estarán ubicados aproximadamente en las posiciones:

$$\begin{cases} s' = -3.009 \\ s'' = -2.798 \pm 31.381i \\ s''' = 5.0001 \pm 29.0155i \end{cases}$$

lo cual queda reflejado en la página 3-18. Como es sabido por la metodología de modelado expuesta en el capítulo 3, posteriormente a estos ceros se les debe hacer un ajuste en el periodo de discretización para obtener los verdaderos ceros discretos del sistema muestreado de forma no convencional.

## **ANEXO III**

# **MACROS MATLAB PARA EL ANÁLISIS DE SISTEMAS DE CONTROL CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**



### III.1. ANÁLISIS EN EL DOMINIO TEMPORAL.

#### III.1.1. Estructura interactiva.

```

% Programa que obtiene el Lugar de las Raíces de la cadena directa:
ZOH[Gr(s)]*ZOH[Gp(s)]para estructura interactiva.
% Para ello haya la cuádruple [A,B;C,D] por modelado de Kranc irregular
% tanto del ZOH[Gr(s)] como del ZOH[Gp(s)].

clear;

% Introducir numerador y denominador del PROCESO
nump = input('Numerador continuo del proceso: ');
denp = input('Denominador continuo del proceso: ');
Ti = input('Periodo de intermuestreo: ');
[numpd,denpd] = c2dm(nump,denp,Ti,'zoh');
[ap,bp,cp,dp] = tf2ss(numpd,denpd);

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
K = input('Número de muestreos en un periodo: ');
entrada = input('Instantes de muestreo a la entrada [t0..tn]: ');
salida = input('Instantes de muestreo a la salida [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entrada)-1
    dif(z) = entrada(z+1) - entrada(z);
end

% Obtención de matrices
Ap=ap^K;

Bp=[];
for j=1:length(entrada)-1
    acum = 0;
    for w=1:j-1
        acum = acum + dif(w);
    end
    sumatorio = 0;
    for x=1:dif(j)
        sumatorio = sumatorio + ap^(K-x-acum);
    end
    Bp=[Bp sumatorio*bp];
end
Ap
Bp

Cp=[];
for i=1:length(salida)-1
    Cp=[Cp;cp*ap^salida(i)];
end
Cp

```

```

Dp=[];
for i=1:length(salida)-1,
    for j=1:length(entrada)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salida(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + ap^(salida(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
        if ( (salida(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
            x = x - 1 ;
        end
        psi = sumatorio;
        sigma = 0;
        if (salida(i)-x-acum < 0)
            if (i>=j)
                sigma = dp;
            end
            if ( (i>=j) & (salida(i)<entrada(j)) )
                sigma = 0;
            end
            if (i<j)
                sigma = 0;
            end
            if ( (i<j) & (i+j==k) )
                sigma = dp;
            end
        else sigma = 0;
        end
        Dp(i,j)=sigma; %cp*psi*bp + sigma;
    end
end
Dp

% Introducir numerador y denominador del REGULADOR CONTINUO
numr = input('Numerador continuo del regulador: ');
denr = input('Denominador continuo del regulador: ');
Ti = input('Periodo de intermuestreo: ');
[numrd,denrd] = c2dm(numr,denr,Ti,'zoh');
[ar,br,cr,dr] = tf2ss(numrd,denrd);

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
K = input('Número de muestreos en un periodo: ');
entrada = input('Instantes de muestreo a la entrada [t0..tn]: ');
salida = input('Instantes de muestreo a la salida [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entrada)-1
    dif(z) = entrada(z+1) - entrada(z);
end

```



```

end

% Obtención de matrices
Ar=ar^K;

Br=[];
for j=1:length(entrada)-1
    acum = 0;
    for w=1:j-1
        acum = acum + dif(w);
    end
    sumatorio = 0;
    for x=1:dif(j)
        sumatorio = sumatorio + ar^(K-x-acum);
    end
    Br=[Br sumatorio*br];
end
Ar
Br

Cr=[];
for i=1:length(salida)-1
    Cr=[Cr;cr*ar^salida(i)];
end
Cr

Dr=[];
for i=1:length(salida)-1,
    for j=1:length(entrada)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salida(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + ar^(salida(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
        if ( (salida(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
            x = x - 1 ;
        end
        psi = sumatorio;
        sigma = 0;
        if (salida(i)-x-acum < 0)
            if (i>=j)
                sigma = dr;
            end
            if ( (i>=j) & (salida(i)<entrada(j)) )
                sigma = 0;
            end
            if (i<j)
                sigma = 0;
            end
            if ( (i<j) & (i+j==k) )
                sigma = dr;
            end
        end
    end
end

```

```

        else sigma = 0;
        end
        Dr(i,j)=sigma; %cr*psi*br + sigma;
    end
end
Dr

% Generamos la cuádruple [A,B;C,D] de la cadena directa (cd)
Acd=[Ar zeros((length(numrd)-1)); Bp*Cr Ap];
Bcd=[Br; Bp*Dr];
Ccd=[Dp*Cr Cp];
Dcd=[Dp*Dr];

figure(1);rlocus(Acd,Bcd,Ccd,Dcd,1)
p=rlocus(Acd,Bcd,Ccd,Dcd,1)

% Simulación de la respuesta temporal A METAPERIODO
% Aquí la k recoge cada cambio de metaperiodo
k=1;
niter=20;
ycd(1)=0; % salida inicial de la cadena directa
xcd(1,1)=0; % estado inicial de la cadena directa
xcd(2,1)=0;
xcd(3,1)=0;
xcd(4,1)=0;

for i=1:niter
    ref(i)=1;
end

% Cálculo del error, del estado y de la salida de la cadena directa
while k<=niter

    e(k)=ref(k)-ycd(k);
    xcd(:,k+1)=Acd*xcd(:,k)+Bcd*e(k);
    ycd(k+1)=Ccd*xcd(:,k+1)+Dcd*e(k);
    k=k+1;

end %While niter

t=(0:1:(length(ycd)-1))*Ti*K;
figure(2);plot(t,ycd);
%figure(4);plot(e)

% Simulación de la respuesta temporal A INTERMUESTREO
% Aquí la k recoge cada cambio a metaperiodo
k=1;

y_inter(1)=0; % salida inicial del proceso a intermuestreo y
a metaperiodo
y(1)=0;

xr_inter(1,1)=0; % estado inicial del regulador
xr_inter(2,1)=0;

```

```

xp_inter(1,1)=0;           % estado inicial del proceso
xp_inter(2,1)=0;

iteracion = 1;           % marca iteracion del bucle a intermuestreo

% Cálculo del error, del estado y de la salida del regulador y proceso
while k<=niter

    indice = 1;           % marca instante en que hay accion
    instante = 0;
    error(k)=ref(k)-y(k);

    while instante < salida(length(salida))

        xr_inter(:,iteracion+1) = ar*xr_inter(:,iteracion) + br*error(k);
        u(iteracion) = cr*xr_inter(:,iteracion) + dr*error(k);

        if instante == salida(indice)
            indice = indice + 1;
        else
            u(iteracion) = u(iteracion-1);
        end

        xp_inter(:,iteracion+1) = ap*xp_inter(:,iteracion) + bp*u(iteracion);
        y_inter(iteracion+1) = cp*xp_inter(:,iteracion+1) + dp*u(iteracion);
        instante = instante + 1;
        iteracion = iteracion + 1;

    end

    k=k+1;
    y(k) = y_inter(iteracion);

end %While niter

t=(0:1:(length(y_inter)-1))*Ti;
figure(3);plot(t,y_inter);

t=(0:1:(length(u)-1))*Ti;
figure(4);plot(t,u);

```

### III.1.2. Estructura paralela.

```

% Programa que obtiene el Lugar de las Raíces de la cadena directa:
ZOH[Gr(s)]*ZOH[Gp(s)] para estructura paralela.
% Para ello haya la cuádruple [A,B;C,D] por modelado de Kranc irregular
% tanto del ZOH[Gr(s)] como del ZOH[Gp(s)].

clear;

Th = input('Periodo de intermuestreo Th: ');
Kh = input('Número de muestreos en un periodo a Th: ');

```

```

% Introducir numerador y denominador del PROCESO
nump = input('Numerador continuo del PROCESO: ');
denp = input('Denominador continuo del PROCESO: ');
Tu = input('Periodo de control Tu: ');
[numpd,denpd] = c2dm(nump,denp,Tu,'zoh');
[ap,bp,cp,dp] = tf2ss(numpd,denpd);

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
K = input('Número de muestreos en el metaperiodo a Tu: ');
entradap = input('Instantes de muestreo a la entrada a Tu [t0..tn]: ');
salidap = input('Instantes de muestreo a la salida a Tu [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradap)-1
    dif(z) = entradap(z+1) - entradap(z);
end

% Obtención de matrices
Ap=ap^K;

Bp=[];
for j=1:length(entradap)-1
    acum = 0;
    for w=1:j-1
        acum = acum + dif(w);
    end
    sumatorio = 0;
    for x=1:dif(j)
        sumatorio = sumatorio + ap^(K-x-acum);
    end
    Bp=[Bp sumatorio*bp];
end
Ap
Bp

Cp=[];
for i=1:length(salidap)-1
    Cp=[Cp;cp*ap^salidap(i)];
end
Cp

Dp=[];
for i=1:length(salida)-1,
    for j=1:length(entrada)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salida(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + ap^(salida(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
    end
end

```

```

    if ( (salida(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
        x = x - 1 ;
    end
    psi = sumatorio;
    sigma = 0;
    if (salida(i)-x-acum < 0)
        if (i>=j)
            sigma = dp;
        end
        if ( (i>=j) & (salida(i)<entrada(j)) )
            sigma = 0;
        end
        if (i<j)
            sigma = 0;
        end
        if ( (i<j) & (i+j==k) )
            sigma = dp;
        end
    else sigma = 0;
    end
    Dp(i,j)=sigma; %cp*psi*bp + sigma;
end
end
Dp

% Introducir KRANC DE LA CONEXIÓN PREVIA DEL PROCESO (CONNECT DEL PROCESO)
% (se trata del operador Kranc de un proceso G(s)=1,
% por tanto, dc=1 siempre, siendo dc la matriz d de la RI discreta del
% G(s)=1)

acp=0; bcp=0; ccp=0;
dcp = 1;

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN PREVIA DEL PROCESO (CONNECT PREVIO DEL
PROCESO) ');
entradacpprev = input('Instant. de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacpprev= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcpprev=[];
for i=1:length(salidacpprev)-1,
    for j=1:length(entradacpprev)-1
        if entradacpprev(j)==salidacpprev(i)
            Dcpprev(i,j)= 1;
        else
            Dcpprev(i,j)= 0;
        end
    end
end
end
Dcpprev

% Introducir KRANC DE LA CONEXIÓN POSTERIOR DEL PROCESO (CONNECT DEL
PROCESO) (se trata del operador Kranc de un proceso G(s)=1,
% por tanto, dc=1 siempre, siendo dc la matriz d de la RI discreta del
% G(s)=1)

```

```

acp=0; bcp=0; ccp=0;
dcp = 1;

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN POSTERIOR PROCESO (CONNECT POSTERIOR PROCESO)');
entradacppost = input('Instant. de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacppost= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradacppost)-1
    dif(z) = entradacppost(z+1) - entradacppost(z);
end

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcppost=[];
for i=1:length(salidacppost)-1,
    for j=1:length(entradacppost)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salidacppost(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + acp^(salidacppost(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
        if ( (salidacppost(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
            x = x - 1 ;
        end
        psi = sumatorio;
        sigma = 0;
        if (salidacppost(i)-x-acum < 0)
            if (i>=j)
                sigma = dcp;
            end
            if ( (i>=j) & (salidacppost(i)<entradacppost(j)) )
                sigma = 0;
            end
            if (i<j)
                sigma = 0;
            end
            if ( (i<j) & (i+j==k) )
                sigma = dcp;
            end
        else sigma = 0;
        end
        Dcppost(i,j)= ccp*psi*bcp+sigma;
    end
end
Dcppost

```

```

% Introducir KRANC DE LA CONEXIÓN DE LA SALIDA (CONNECT DE LA SALIDA) (se
trata del operador Kranc de un proceso  $G(s)=1$ ,
% por tanto,  $dc=1$  siempre, siendo  $dc$  la matriz  $d$  de la RI discreta del
 $G(s)=1$ )

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN DE LA SALIDA (CONNECT SALIDA DEL PROCESO)');
entradacpsal = input('Instantes de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacpsal= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcpsal=[];
for i=1:length(salidacpsal)-1,
    for j=1:length(entradacpsal)-1
        if entradacpsal(j)==salidacpsal(i)
            Dcpsal(i,j)= 1;
        else
            Dcpsal(i,j)= 0;
        end
    end
end
Dcpsal

% Introducir KRANC DE LA PARTE P,  $dc=Kc$  siempre, siendo  $dc$  la matriz  $d$  de
la RI discreta del  $G(s)=Kc$ 
Kc = input('Constante proporcional de la PARTE P del REGULADOR: ');

app=0; bpp=0; cpp=0;
dpp = Kc;

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
Tp = input('Periodo de muestreo Tp: '); % aunque no se usa
K = input('No. de muestreos en un periodo para PARTE P del REGULADOR: ');
% aunque no se usa
entradapp = input('Instantes de muestreo a la entrada a Tp [t0..tn]: ');
salidapp = input('Instantes de muestreo a la salida a Tp [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradapp)-1
    dif(z) = entradapp(z+1) - entradapp(z);
end

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dpp=[];
for i=1:length(salidapp)-1,
    for j=1:length(entradapp)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salidapp(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + app^(salidapp(i)-x-acum);
        end
    end
end

```

```

        x=x+1;
        flag=1;
    end
    if ( (salidapp(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
        x = x - 1 ;
    end
    psi = sumatorio;
    sigma = 0;
    if (salidapp(i)-x-acum < 0)
        if (i>=j)
            sigma = dpp;
        end
        if ( (i>=j) & (salidapp(i)<entradapp(j)) )
            sigma = 0;
        end
        if (i<j)
            sigma = 0;
        end
        if ( (i<j) & (i+j==k) )
            sigma = dpp;
        end
    else sigma = 0;
    end
    Dpp(i,j)= cpp*psi*bpp+sigma;
end
Dpp

% Introducir KRANC DE LA CONEXIÓN POSTERIOR PARTE P (CONNECT DE P) (se
trata del operador Kranc de un proceso G(s)=1,
% por tanto, dc=1 siempre, siendo dc la matriz d de la RI discreta del
G(s)=1)
acp=0; bcp=0; ccp=0;
dcp = 1;

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN POSTERIOR A PARTE P (CONNECT POSTERIOR P)');
entradacpppost = input('Inst. de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacpppost= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradacpppost)-1
    dif(z) = entradacpppost(z+1) - entradacpppost(z);
end

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcpppost=[];
for i=1:length(salidacpppost)-1,
    for j=1:length(entradacpppost)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
    end
end

```



```

sumatorio = 0;
while ( (salidacpppost(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
    sumatorio = sumatorio + acp^(salidacpppost(i)-x-acum);
    x=x+1;
    flag=1;
end
if ( (salidacpppost(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
    x = x - 1 ;
end
psi = sumatorio;
sigma = 0;
if (salidacpppost(i)-x-acum < 0)
    if (i>=j)
        sigma = dcp;
    end
    if ( (i>=j) & (salidacpppost(i)<entradacpppost(j)) )
        sigma = 0;
    end
    if (i<j)
        sigma = 0;
    end
    if ( (i<j) & (i+j==k) )
        sigma = dcp;
    end
else sigma = 0;
end
Dcpppost(i,j)= ccp*psi*bcp+sigma;
end
Dcpppost

% KRANC DE LA CONEXIÓN PREVIA PARTE P (CONNECT DE P)
% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN PREVIA DE LA PARTE P (CONNECT PREVIA DE P)');
entradacppprev = input('Inst. de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacppprev= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcppprev=[];
for i=1:length(salidacppprev)-1,
    for j=1:length(entradacppprev)-1
        if entradacppprev(j)==salidacppprev(i)
            Dcppprev(i,j)= 1;
        else
            Dcppprev(i,j)= 0;
        end
    end
end
Dcppprev

% Introducir numerador y denominador de la parte INTEGRAL del REGULADOR
CONTINUO
numi = input('Numerador continuo de la parte INTEGRAL del REGULADOR: ');
deni = input('Denominador continuo de la parte INTEGRAL del REGULADOR: ');
Ti = input('Periodo de acción INTEGRAL Ti: ');
[numid,denid] = c2dm(numi,deni,Ti,'zoh');
[ai,bi,ci,di] = tf2ss(numid,denid);

```

```

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
K = input('Número de muestreos en un periodo a Ti: ');
entradai = input('Instantes de muestreo a la entrada a Ti [t0..tn]: ');
salidai = input('Instantes de muestreo a la salida a Ti [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradai)-1
    dif(z) = entradai(z+1) - entradai(z);
end

% Obtención de matrices
Ai=ai^K;

Bi=[];
for j=1:length(entradai)-1
    acum = 0;
    for w=1:j-1
        acum = acum + dif(w);
    end
    sumatorio = 0;
    for x=1:dif(j)
        sumatorio = sumatorio + ai^(K-x-acum);
    end
    Bi=[Bi sumatorio*bi];
end
Ai
Bi

Ci=[];
for i=1:length(salidai)-1
    Ci=[Ci;ci*ai^salidai(i)];
end
Ci

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Di=[];
for i=1:length(salidai)-1,
    for j=1:length(entradai)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salidai(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + ai^(salidai(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
        if ( (salidai(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
            x = x - 1 ;
        end
        psi = sumatorio;
        sigma = 0;
        if (salidai(i)-x-acum < 0)
            if (i>=j)
                sigma = di;
            end
        end
    end
end

```

```

    end
    if ( (i>=j) & (salidai(i)<entradai(j)) )
        sigma = 0;
    end
    if (i<j)
        sigma = 0;
    end
    if ( (i<j) & (i+j==k) )
        sigma = di;
    end
    else sigma = 0;
end
Di(i,j)= ci*psi*bi+sigma;
end
end
Di

% Introducir KRANC DE LA CONEXIÓN POSTERIOR PARTE I (se trata del operador
Kranc de un proceso  $G(s)=1$ ,
% por tanto,  $dc=1$  siempre, siendo  $dc$  la matriz  $d$  de la RI discreta del
 $G(s)=1$ )
acp=0; bcp=0; ccp=0;
dcp = 1;

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN POSTERIOR A PARTE I (CONNECT POSTERIOR I)');
entradacipost = input('Inst. de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacipost= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradacipost)-1
    dif(z) = entradacipost(z+1) - entradacipost(z);
end

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcpost=[];
for i=1:length(salidacipost)-1,
    for j=1:length(entradacipost)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salidacipost(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + acp^(salidacipost(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
        if ( (salidacipost(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
            x = x - 1 ;
        end
        psi = sumatorio;
        sigma = 0;
        if (salidacipost(i)-x-acum < 0)

```

```

        if (i>=j)
            sigma = dcp;
        end
        if ( (i>=j) & (salidacipost(i)<entradacipost(j)) )
            sigma = 0;
        end
        if (i<j)
            sigma = 0;
        end
        if ( (i<j) & (i+j==k) )
            sigma = dcp;
        end
    else sigma = 0;
    end
    Dcipost(i,j)= ccp*psi*bcp+sigma;
end
end
Dcipost

% Introducir KRANC DE LA CONEXIÓN PREVIA PARTE I
% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN PREVIA DE LA PARTE I (CONNECT PREVIA DE I)');
entradaciprev = input('Inst. de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidaciprev= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dciprev=[];
for i=1:length(salidaciprev)-1,
    for j=1:length(entradaciprev)-1
        if entradaciprev(j)==salidaciprev(i)
            Dciprev(i,j)= 1;
        else
            Dciprev(i,j)= 0;
        end
    end
end
end
Dciprev

% Introducir numerador y denominador de la parte DERIVATIVA del REGULADOR CONTINUO
numd = input('Numerador continuo de la parte DERIVATIVA del REGULADOR: ');
dend = input('Denominador cont. de la parte DERIVATIVA del REGULADOR: ');
Td = input('Periodo de acción DERIVATIVA Td: ');
[numdd,dendd] = c2dm(numd,dend,Td,'zoh');
[ad,bd,cd,dd] = tf2ss(numdd,dendd);

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
K = input('Número de muestreos en un periodo a Td: ');
entradad = input('Instantes de muestreo a la entrada a Td [t0..tn]: ');
salidad = input('Instantes de muestreo a la salida a Td [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradad)-1
    dif(z) = entradad(z+1) - entradad(z);
end

```

```

% Obtención de matrices

Ad=ad^K;

Bd=[];
for j=1:length(entrada)-1
    acum = 0;
    for w=1:j-1
        acum = acum + dif(w);
    end
    sumatorio = 0;
    for x=1:dif(j)
        sumatorio = sumatorio + ad^(K-x-acum);
    end
    Bd=[Bd sumatorio*bd];
end
Ad
Bd

Cd=[];
for i=1:length(salidad)-1
    Cd=[Cd;cd*ad^salidad(i)];
end
Cd

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dd=[];
for i=1:length(salidad)-1,
    for j=1:length(entrada)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salidad(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + ad^(salidad(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
        if ( (salidad(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
            x = x - 1 ;
        end
        psi = sumatorio;
        sigma = 0;
        if (salidad(i)-x-acum < 0)
            if (i>=j)
                sigma = dd;
            end
            if ( (i>=j) & (salidad(i)<entrada(j)) )
                sigma = 0;
            end
            if (i<j)
                sigma = 0;
            end
            if ( (i<j) & (i+j==k) )
                sigma = dd;
            end
        end
    end
end

```

```

        else sigma = 0;
        end
        Dd(i,j)= cd*psi*bd+sigma;
    end
end
Dd

% Introducir KRANC DE LA CONEXIÓN POSTERIOR PARTE D (CONNECT DE P) (se
trata del operador Kranc de un proceso  $G(s)=1$ ,
% por tanto, dc=1 siempre, siendo dc la matriz d de la RI discreta del
 $G(s)=1$ )
acp=0; bcp=0; ccp=0;
dcp = 1;

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN POSTERIOR A PARTE D (CONNECT POSTERIOR D)');
entradacdpost = input('Inst. de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacdpost= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradacdpost)-1
    dif(z) = entradacdpost(z+1) - entradacdpost(z);
end

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcdpost=[];
for i=1:length(salidacdpost)-1,
    for j=1:length(entradacdpost)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salidacdpost(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )
            sumatorio = sumatorio + acp^(salidacdpost(i)-x-acum);
            x=x+1;
            flag=1;
        end
        if ( (salidacdpost(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
            x = x - 1 ;
        end
        psi = sumatorio;
        sigma = 0;
        if (salidacdpost(i)-x-acum < 0)
            if (i>=j)
                sigma = dcp;
            end
            if ( (i>=j) & (salidacdpost(i)<entradacdpost(j)) )
                sigma = 0;
            end
            if (i<j)
                sigma = 0;
            end
            if ( (i<j) & (i+j==k) )
                sigma = dcp;
            end
        end
    end
end

```

```

        else sigma = 0;
        end
        Dcdpost(i,j)= ccp*psi*bcp+sigma;
    end
end
Dcdpost

% Introducir KRANC DE LA CONEXIÓN PREVIA PARTE D
% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA CONEXIÓN PREVIA DE LA PARTE D (CONNECT PREVIA DE D)');
entradacdprev = input('Instant. de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacdprev= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcdprev=[];
for i=1:length(salidacdprev)-1,
    for j=1:length(entradacdprev)-1
        if entradacdprev(j)==salidacdprev(i)
            Dcdprev(i,j)= 1;
        else
            Dcdprev(i,j)= 0;
        end
    end
end
Dcdprev

% Introducir KRANC DE LA RETENCIÓN PREVIA AL REGULADOR (se trata del
operador Kranc de un proceso G(s)=1,
% por tanto, dc=1 siempre, siendo dc la matriz d de la RI discreta del
G(s)=1)
acp=0; bcp=0; ccp=0;
dcp = 1;

% Introducir instantes de muestreo a la entrada y salida
disp('KRANC DE LA RETENCIÓN PREVIA AL REGULADOR (CONNECT RETENCIÓN PREVIA
REGULADOR)');
entradacret = input('Instantes de muestreo a la entrada a Th [t0..tn]: ');
salidacret= input('Instantes de muestreo a la salida a Th [t0..tn]: ');

% Cálculo del vector diferencia
dif=0;
for z=1:length(entradacret)-1
    dif(z) = entradacret(z+1) - entradacret(z);
end

% Obtención de matrices (Ac, Bc, Cc siempre serán cero)
Dcret=[];
for i=1:length(salidacret)-1,
    for j=1:length(entradacret)-1
        acum = 0;
        for w=1:j-1
            acum = acum + dif(w);
        end
        flag=0;
        x=1;
        sumatorio = 0;
        while ( (salidacret(i)-x-acum >= 0) & (x <= dif(j)) )

```

```

        sumatorio = sumatorio + acp^(salidacret(i)-x-acum);
        x=x+1;
        flag=1;
    end
    if ( (salidacret(i)-x-acum < 0) & (x > dif(j)) )
        x = x - 1 ;
    end
    psi = sumatorio;
    sigma = 0;
    if (salidacret(i)-x-acum < 0)
        if (i>=j)
            sigma = dcp;
        end
        if ( (i>=j) & (salidacret(i)<entradacret(j)) )
            sigma = 0;
        end
        if (i<j)
            sigma = 0;
        end
        if ( (i<j) & (i+j==k) )
            sigma = dcp;
        end
    else sigma = 0;
    end
    Dcret(i,j)= ccp*psi*bcp+sigma;
end
Dcret

% Generación de las cadenas involucradas en el esquema

% Cadena directa de la parte P
Dcdpp=[Dcpppost*Dpp*Dcppprev*Dcret];

% Cadena directa de la parte I
Acddi=[0 0 0;0 Ai 0;0 0 0];
Bcdi=[0;Bi*Dciprev*Dcret;0];
Ccddi=[zeros(length(entradaciprev)-1,1) Dcipost*Ci
zeros(length(entradaciprev)-1,1)];
Dcdi=[Dcipost*Di*Dciprev*Dcret];

% Cadena directa de la parte D
Acdd=[0 0 0;0 Ad 0;0 0 0];
Bcdd=[0;Bd*Dcdprev*Dcret;0];
Ccdd=[zeros(length(entradacdprev)-1,1) Dcdpost*Cd
zeros(length(entradacdprev)-1,1)];
Dcdd=[Dcdpost*Dd*Dcdprev*Dcret];

% Suma de contribuciones del regulador
Acdr = [Acddi zeros(length(numid)+1,length(numid)+1);
zeros(length(numid)+1,length(numid)+1) Acdd];
Bcdr = [Bcdi; Bcdd];
Ccdr = [Ccddi Ccdd];
Dcdr = [Dcdi+Dcdd+Dcdpp];

% Cadena directa del PROCESO
Acdp=[zeros(1,5);zeros(2,1) Ap zeros(2,1) zeros(2,1) ; zeros(1,5);
zeros(1,5)];

```



```

Bcdp=[zeros(1,length(entradacpprev)-1); Bp*Dcpprev;
zeros(1,length(entradacpprev)-1); zeros(1,length(entradacpprev)-1)];
Ccdp=[0 Dcpsal*Dcpost*Cp 0 0];
Dcdp=[Dcpsal*Dcpost*Dp*Dcpprev];

% Generamos cuádruple del sistema de control
Acd=[Acdr zeros(6,5); Bcdp*Ccdr Acdp];
Bcd=[Bcdr; Bcdp*Dcdr];
Ccd=[Dcdp*Ccdr Ccdp];
Dcd=[Dcdp*Dcdr];

figure(1);rlocus(Acd,Bcd,Ccd,Dcd,1)
p=rlocus(Acd,Bcd,Ccd,Dcd,1)

% Simulación de la respuesta temporal A METAPERIODO
% Aquí la k recoge cada cambio de metaperiodo
k=1;
niter=20;
ycd(1)=0; % salida inicial de la cadena directa
xcd(1,1)=0; % estado inicial de la cadena directa
xcd(2,1)=0;
xcd(3,1)=0;
xcd(4,1)=0;
xcd(5,1)=0;
xcd(6,1)=0;
xcd(7,1)=0;
xcd(8,1)=0;
xcd(9,1)=0;
xcd(10,1)=0;
xcd(11,1)=0;

for i=1:niter
    ref(i)=1;
end

% Cálculo del error, del estado y de la salida de la cadena directa
while k<=niter

    e(k)=ref(k)-ycd(k);
    xcd(:,k+1)=Acd*xcd(:,k)+Bcd*e(k);
    ycd(k+1)=Ccd*xcd(:,k+1)+Dcd*e(k);
    k=k+1;

end %While niter

t=(0:1:(length(ycd)-1))*Th*Kh;
figure(2);plot(t,ycd);

% Simulación de la respuesta temporal A METAPERIODO
% Aquí la k recoge cada cambio de metaperiodo
k=1;
niter=20;

ycd(1)=0;

```

```

xi(1)=0;           % estado inicial de la parte I del regulador
xd(1)=0;           % estado inicial de la parte D del regulador
xp(1,1)=0;         % estado inicial del proceso
xp(2,1)=0;

for i=1:niter
    ref(i)=1;
end

% Cálculo del error, del estado y de la salida de la cadena directa
while k<=niter

    e(k)=ref(k)-ycd(k);

    eret(:,k)=Dcret*e(k);

    ep(:,k)=Dcppprev*eret(:,k);
    ei(:,k)=Dciprev*eret(:,k);
    ed(:,k)=Dcdprev*eret(:,k);

    up(:,k)=Dpp*ep(:,k);

    xi(:,k+1)=Ai*xi(:,k)+Bi*ei(:,k);
    ui(:,k)=Ci*xi(:,k)+Di*ei(:,k);

    xd(:,k+1)=Ad*xd(:,k)+Bd*ed(:,k);
    ud(:,k)=Cd*xd(:,k)+Dd*ed(:,k);

    upret(:,k)=Dcpppost*up(:,k);
    uiret(:,k)=Dcipost*ui(:,k);
    udret(:,k)=Dcdpost*ud(:,k);

    uret(:,k)=uiret(:,k)+udret(:,k)+upret(:,k);
    % suma de contribuciones de control básicas

    ur(:,k)=Dcprev*uret(:,k);

    xp(:,k+1)=Ap*xp(:,k)+Bp*ur(:,k);
    yp(:,k+1)=Cp*xp(:,k+1)+Dp*ur(:,k);

    yret(:,k+1)=Dcpost*yp(:,k+1);

    ycd(:,k+1)=Dcpsal*yret(:,k+1);

    k=k+1;

end %While niter

t=(0:1:(length(ycd(1,:))-1))*Th*Kh;
figure(3);plot(t,ycd(1,:));
%figure(4);plot(e)

% Simulación de la respuesta temporal A INTERMUESTREO
%Pasamos a Th todas las partes consideradas

```

```

[numpd,denpd] = c2dm(nump,denp,Th,'zoh');
[ap,bp,cp,dp] = tf2ss(numpd,denpd);

[numid,denid] = c2dm(numi,deni,Th,'zoh');
[ai,bi,ci,di] = tf2ss(numid,denid);

[numdd,dendd] = c2dm(numd,dend,Th,'zoh');
[ad,bd,cd,dd] = tf2ss(numdd,dendd);

y_inter(1)=0;      % salida inicial del proceso a intermuestreo y muestreada
y(1)=0;

xi_inter(1)=0;      % estado inicial del regulador (parte D e I)
xd_inter(1)=0;

xp_inter(1,1)=0;      % estado inicial del proceso
xp_inter(2,1)=0;

iteracion = 1;      % marca iteracion del bucle a intermuestreo
instante=0;

indicep_ent = 1;      % indicep_ent marca instante en que hay entrada
al proceso
indicep_sal = 1;      % indicep marca instante en que hay salida del
proceso
indicepp_sal = 1;      % indicepp marca instante en que hay accion P
indicei_sal = 1;      % indicei marca instante en que hay accion I
indiced_sal = 1;      % indiced marca instante en que hay accion D
indicepp_ent = 1;      % indicepp marca instante en que hay error en P
indicei_ent = 1;      % indicei marca instante en que hay error en I
indiced_ent = 1;      % indiced marca instante en que hay error en D

niter_inter=niter*salidacpsal(length(salidacpsal));

for i=1:niter_inter
    ref_inter(i)=1;
end

% Cálculo del error, del estado y de la salida del regulador y proceso
while iteracion<=niter_inter

    if instante >= salidacpsal(length(salidacpsal))
        % salidap(length(salidap))=salidai(length(salidai))...
        indicepp_sal = 1;
        indicei_sal = 1;
        indiced_sal = 1;
        indicepp_ent = 1;
        indicei_ent = 1;
        indiced_ent = 1;
        indicep_sal = 1;
        indicep_ent = 1;
        instante = 0;
    end

    if instante == salidacpsal(indicep_sal)
        indicep_sal = indicep_sal + 1;
        y(iteracion) = y_inter(iteracion);
    end
end

```

```

else
    y(iteracion) = y(iteracion-1);
end

errorpp_inter(iteracion)=ref_inter(iteracion)-y(iteracion);
errori_inter(iteracion)=ref_inter(iteracion)-y(iteracion);
error_d_inter(iteracion)=ref_inter(iteracion)-y(iteracion);

% Parte I
if instante == salidaciprev(indicei_ent)
    indicei_ent = indicei_ent + 1;
else
    errori_inter(iteracion) = errori_inter(iteracion-1);
end

xi_inter(iteracion+1) = ai*xi_inter(iteracion) +
bi*errori_inter(iteracion);
ui_inter(iteracion) = ci*xi_inter(iteracion) +
di*errori_inter(iteracion);

if instante == salidacipost(indicei_sal)
    indicei_sal = indicei_sal + 1;
else
    ui_inter(iteracion) = ui_inter(iteracion-1);
end

% Parte D
if instante == salidacdprev(indiced_ent)
    indiced_ent = indiced_ent + 1;
else
    error_d_inter(iteracion) = error_d_inter(iteracion-1);
end

xd_inter(iteracion+1) = ad*xd_inter(iteracion) +
bd*error_d_inter(iteracion);
ud_inter(iteracion) = cd*xd_inter(iteracion) +
dd*error_d_inter(iteracion);

if instante == salidacdpost(indiced_sal)
    indiced_sal = indiced_sal + 1;
else
    ud_inter(iteracion) = ud_inter(iteracion-1);
end

% Parte P
if instante == salidacppprev(indicepp_ent)
    indicepp_ent = indicepp_ent + 1;
else
    errorpp_inter(iteracion) = errorpp_inter(iteracion-1);
end

upp_inter(iteracion) = dpp*errorpp_inter(iteracion);

if instante == salidacpppost(indicepp_sal)
    indicepp_sal = indicepp_sal + 1;
else
    upp_inter(iteracion) = upp_inter(iteracion-1);
end

```

```

% Suma de contribuciones
ur_inter(iteracion) =
  upp_inter(iteracion)+ui_inter(iteracion)+ud_inter(iteracion);

if instante == salidacpprev(indicep_ent)
  indicep_ent = indicep_ent + 1;
else
  ur_inter(iteracion) = ur_inter(iteracion-1);
end

xp_inter(:,iteracion+1) = ap*xp_inter(:,iteracion) +
  bp*ur_inter(iteracion);
y_inter(iteracion+1) = cp*xp_inter(:,iteracion+1) +
  dp*ur_inter(iteracion);

instante = instante + 1;
iteracion = iteracion + 1;

end %While niter_inter

t=(0:1:(length(y_inter)-1))*Th;
figure(4);plot(t,y_inter);

t=(0:1:(length(ur_inter)-1))*Th;
figure(5);plot(t,ur_inter);

```

## III.2. AMPLIACIÓN PARA ANÁLISIS EN EL DOMINIO FRECUENCIAL.

### III.2.1. Estructura interactiva.

```

% Programa que obtiene la Respuesta en Frecuencia de la cadena directa:
ZOH[Gr(s)]*ZOH[Gp(s)]para estructura interactiva.
% Para ello haya la cuádruple [A,B;C,D] por modelado de Kranc irregular
% tanto del ZOH[Gr(s)] como del ZOH[Gp(s)].
.
.
.
% Respuesta en Frecuencia
W=0.01:0.01:100;
[m, f, w]=dbode (Acd, Bcd, Ccd, Dcd, Ti*K, 1, W); % Ti*K es el metaperiodo

mag=20*log10 (m); % magnitud en decibelios

figure(5);
semilogx(w, mag); % gráfica de la magnitud en escala logarítmica para w

figure(6);
semilogx(w, f); % gráfica de la fase en escala logarítmica para w

figure(7);
dnyquist (Acd, Bcd, Ccd, Dcd, Ti*K, 1, W)

```

### III.2.2. Estructura paralela.

```
% Programa que obtiene la Respuesta en Frecuencia de la cadena directa:  
ZOH[Gr(s)]*ZOH[Gp(s)] para estructura paralela.  
% Para ello haya la cuádruple [A,B;C,D] por modelado de Kranc irregular  
% tanto del ZOH[Gr(s)] como del ZOH[Gp(s)].  
.  
.  
.  
% Respuesta en Frecuencia  
W=0.01:0.01:100;  
[m, f, w]=dbode (Acd, Bcd, Ccd, Dcd, Th*Kh, 1, W); % Th*Kh es el metaperiodo  
mag=20*log10 (m); % magnitud en decibelios  
  
figure(6);  
semilogx(w, mag); % gráfica de la magnitud en escala logarítmica para w  
  
figure(7);  
semilogx(w, f); % gráfica de la fase en escala logarítmica para w  
  
figure(8);  
dnyquist (Acd, Bcd, Ccd, Dcd, Th*Kh, 1, W)
```

## **ANEXO IV**

# **MACROS MATLAB PARA EL DISEÑO DE SISTEMAS DE CONTROL CON MUESTREO NO CONVENCIONAL**





#### IV.1. EJEMPLO DE MACRO MATLAB PARA ACTUACIÓN A INSTANTES IRREGULARES DE TIEMPO SOBRE EL PROCESO DEFINIDO A PERIODO BASE.

El objetivo de esta macro es implementar la técnica de simulación comentada en la sección 6.6. Por tanto, se plasma el regulador con estructura no convencional (hallado teniendo en cuenta el modelo no convencional del proceso) que actuará a instantes irregulares sobre dicho proceso (definido a periodo base  $t_0$ ) según el patrón considerado.

```
% PROGRAMA QUE IMPLEMENTA EL REGULADOR CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL DEL
PROCESO  $G(s)=4.482/s+4.482$ 
% DESCOMPONIENDO PARTE LENTA DE RÁPIDA y CON RETENCIÓN DE ACCIÓN LENTA
(REFERENCIA ESCALÓN).

clear;
%Multiplicidad
N=2;

%Relación Metaperiodo (T) con Perido Base (t0):  $M=T/t_0$ 
T=0.5;
t0=0.01;

%Relación del subperiodo tau1 con respecto a T
tau1=0.3;

%Inicializamos vectores auxiliares de acciones lentas y errores lentos
acc_l(1) = 0.0; acc_l(2) = 0.0; acc_l(3) = 0.0; acc_l(4) = 0.0;
error_l(1) = 0.0; error_l(2) = 0.0; error_l(3) = 0.0; error_l(4) = 0.0;

%Inicializamos vectores auxiliares de acciones rápidas y errores rápidos
error_r(1) = 0.0; error_r(2) = 0.0; error_r(3) = 0.0; error_r(4) = 0.0;
error_r(5) = 0.0; error_r(6) = 0.0; error_r(7) = 0.0; error_r(8) = 0.0;
acc_r(1) = 0.0; acc_r(2) = 0.0; acc_r(3) = 0.0; acc_r(4) = 0.0;
acc_r(5) = 0.0; acc_r(6) = 0.0; acc_r(7) = 0.0; acc_r(8) = 0.0;

%Inicializamos referencia escalón
n_iter_T=20;
n_iter_TN=40;

for i=1:n_iter_T
    ref(i) = 1;
end

% Inicializamos referencia intermuestreo
for i=1:n_iter_TN
    referencia(i) = 1;
end

% Inicializamos referencia periodo base
for i=1:n_iter_T*T/t0
    ref_t0(i) = 1;
end

% Primera posición es cero
```

```

pos(1) = 0.0; posiciones(1) = 0.0;

% Bucle donde se halla por cada acción lenta, dos rápidas
for i=1:n_iter_T
    error_l(1) = ref(i) - pos(i);
    errores(i)=error_l(1);
    acc_l(1) = error_l(1) - 0.8347*error_l(2) + 0.06278*error_l(3) + 6.784e-
    020*error_l(4) + 1.353*acc_l(2) - 0.3715*acc_l(3) + 0.01824*acc_l(4);
    acc_lentas(i) = acc_l(1);
    error_r(1) = acc_l(1);
    for j=1:N
        % con modelo para tau1=0.3
        acc_r(1) = (0.4192*error_r(1) + 0.0995*error_r(2) - 0.3331*error_r(3)
        - 0.03076*error_r(4) + 0.04891*error_r(5) + 0.002146*error_r(6) -
        0.001938*error_r(7) - 1.319e-017*error_r(8) - 0.2629*acc_r(2) +
        0.5268*acc_r(3) + 0.2195*acc_r(4) - 0.03962*acc_r(5) -
        0.01651*acc_r(6) - 4.336e-020*acc_r(7) - 1.807e-020*acc_r(8))/0.6308;
        acc_rapidas((N*(i-1))+j) = acc_r(1);
        if (j==1)
            for k=1:ceil(tau1/t0)
                acc_reten(((T/t0)*(i-1))+k)=acc_rapidas((N*(i-1))+j);
                if (((T/t0)*(i-1))+k)==1
                    yp(2) = 0.04383*acc_reten(1);
                end
                if (((T/t0)*(i-1))+k)>=2
                    yp(((T/t0)*(i-1))+k+1) = 0.04383*acc_reten(((T/t0)*(i-1))+k)
                    + 0.9562*yp(((T/t0)*(i-1))+k);
                end
            end
        end
        if (j==2)
            for k=ceil(tau1/t0)+1:T/t0
                acc_reten(((T/t0)*(i-1))+k)=acc_rapidas((N*(i-1))+j);
                yp(((T/t0)*(i-1))+k+1) = 0.04383*acc_reten(((T/t0)*(i-1))+k) +
                0.9562*yp(((T/t0)*(i-1))+k);
            end
        end
        error_r(8) = error_r(7);
        error_r(7) = error_r(6);
        error_r(6) = error_r(5);
        error_r(5) = error_r(4);
        error_r(4) = error_r(3);
        error_r(3) = error_r(2);
        error_r(2) = error_r(1);
        %error_r(1) = 0.0; % expansión de la acción lenta (error rápido)
        acc_r(8) = acc_r(7);
        acc_r(7) = acc_r(6);
        acc_r(6) = acc_r(5);
        acc_r(5) = acc_r(4);
        acc_r(4) = acc_r(3);
        acc_r(3) = acc_r(2);
        acc_r(2) = acc_r(1);
    end
    pos(i+1)=yp(((T/t0)*i)+1);
    acc_l(4) = acc_l(3);
    acc_l(3) = acc_l(2);
    acc_l(2) = acc_l(1);
    error_l(4) = error_l(3);
    error_l(3) = error_l(2);

```

```

    error_l(2) = error_l(1);
end

% Acondicionamiento y representación de resultados

t_ref=(0:1:(length(referencia)-1))*T/N;
t_yp=(0:1:(length(yp)-1))*t0;
t_ref_t0=(0:1:(length(ref_t0)-1))*t0;
acc_rapidas=acc_rapidas';
t_pos=(0:1:(length(pos)-1))*T;
t_ref_T=(0:1:(length(ref)-1))*T;

figure;
plot(t_pos,pos,'r');
%hold;
%plot(t_ref_T,ref);grid;

figure;
plot(t_yp,yp,'r');
%hold;
%plot(t_ref_t0,ref_t0);grid;

figure;
%plot(t_ref,acc_rapidas);grid;hold;
plot(t_ref_t0,acc_reten,'r');

acc_lentas=acc_lentas';
%figure;
%plot(t_ref_T,acc_lentas);grid;

errores=errores';
%figure;
%plot(t_ref_T,errores);grid;

```

## IV.2. EJEMPLO DE MACRO MATLAB PARA ACTUACIÓN A PERIODO RÁPIDO SOBRE EL MODELO NO CONVENCIONAL HALLADO PARA EL SISTEMA.

En este caso el objetivo de esta macro es implementar el regulador con estructura no convencional (hallado teniendo en cuenta el modelo no convencional del proceso), el cual actuará a periodo rápido  $T_0/N$  sobre el proceso modelado de forma no convencional según el patrón considerado y definido a  $T_0/N$ .

```

% PROGRAMA QUE IMPLEMENTA EL REGULADOR CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL DEL
PROCESO  $G(s)=22.4085/s$ 
% DESCOMPONRIENDO PARTE LENTA DE RÁPIDA y CON EXPANSIÓN DE ACCIÓN LENTA
(REFERENCIA RAMPA).

clear;
%Metaperiodo y Multiplicidad
T=0.02;
N=2;

```

```

%Inicializamos vectores auxiliares de acciones lentas y errores lentos
acc_l(1) = 0.0; acc_l(2) = 0.0; acc_l(3) = 0.0; error_l = 0.0;

%Inicializamos vectores auxiliares de acciones rápidas y errores rápidos
error_r(1) = 0.0; error_r(2) = 0.0; error_r(3) = 0.0; error_r(4) = 0.0;
error_r(5) = 0.0; error_r(6) = 0.0; error_r(7) = 0.0;
acc_r(1) = 0.0; acc_r(2) = 0.0;

%Inicializamos referencia rampa
for i=1:7
    ref(i) = (i-1);
end

% Inicializamos referencia intermuestreo
for i=1:14
    referencia(i) = (i-1)/N;
end

% Primera posición es cero
pos(1) = 0.0; posiciones(1) = 0.0;

% Bucle donde se halla por cada acción lenta, dos rápidas
for i=1:7
    error_l = ref(i) - pos((N*i)-1);
    errores(i)=error_l;
    acc_l(1) = error_l + 2*acc_l(2) - acc_l(3);
    acc_lentas(i) = acc_l(1);
    error_r(1) = acc_l(1);
    for j=1:N
        % Acciones para modelo según 2° planteamiento TM
        acc_r(1) = (0.660134*error_r(1) + 2*error_r(2) + 0.519585*error_r(3)
        - 3*error_r(4) - 2.01958*error_r(5) + error_r(6) +
        0.839864*error_r(7) -
        0.726028*22.4085*1.75473)*acc_r(2))/(0.726028*22.4085);
        if (i==1) & (j==1)
            pos((N*i)-1+j) = 0.726028*22.4085*acc_r(1);
        end
        if ((i==1) & (j==2)) | (i>1)
            pos((N*i)-1+j) = 0.726028*22.4085*acc_r(1) +
            0.726028*22.4085*1.75473*acc_r(2) + pos((N*i)-3+j);
        end
        acc_rapidas((N*(i-1))+j) = acc_r(1);
        if (j==N)
            posiciones(i+1)=pos((N*i)-1+j);
        end
        error_r(7) = error_r(6);
        error_r(6) = error_r(5);
        error_r(5) = error_r(4);
        error_r(4) = error_r(3);
        error_r(3) = error_r(2);
        error_r(2) = error_r(1);
        error_r(1) = 0.0; % expansión de la acción lenta (error rápido)
        acc_r(2) = acc_r(1);
    end
    acc_l(3) = acc_l(2);
    acc_l(2) = acc_l(1);
end

```

```
% Acondicionamiento y representación de resultados
t_ref=(0:1:(length(referencia)-1))*T/N;
t_pos=(0:1:(length(pos)-1))*T/N;
t_pos_T=(0:1:(length(posiciones)-1))*T;
t_ref_T=(0:1:(length(ref)-1))*T;

pos=pos';
acc_rapidas=acc_rapidas';
acc_lentas=acc_lentas';
ref=ref';
referencia=referencia';
posiciones=posiciones';
errores=errores';

figure;
plot(t_pos_T,posiciones,'r');
hold;
plot(t_ref_T,ref);grid;

figure;
plot(t_pos,pos,'r');
hold;
plot(t_ref,referencia);grid;

figure;
plot(t_ref,acc_rapidas);grid;

figure;
plot(t_ref_T,acc_lentas);grid;

figure;
plot(t_ref_T,errores);grid;
```

## **ANEXO V**

# **SISTEMA DE DESARROLLO CRUZADO TORNADO-VXWORKS**



## V.1. CONFIGURACIÓN DEL ENTORNO DE DESARROLLO CRUZADO TORNADO-VXWORKS.

Tornado y Vxworks forman lo que se conoce como un entorno de desarrollo cruzado, esto es, un entorno en el que tanto Tornado como VxWorks van a cooperar conjuntamente en el desarrollo y ejecución de una aplicación.

Concretando más, Tornado va a ser el entorno de desarrollo propiamente dicho, es decir, el sistema encargado de editar, compilar, analizar y transferir los programas. Por su parte, VxWorks es el sistema operativo que tras recibir los módulos de los programas compilados en Tornado, pasará a ejecutarlos (interactuando sobre el proceso real).

La característica más importante de este entorno cruzado es que está diseñado para trabajar en tiempo real, lo que justifica su uso en aplicaciones que interactúan con procesos físicos reales con restricciones temporales importantes. También parece indicado para abordar sistemas de control basados en red, donde la aparición de retardos, como consecuencia de la compartición del medio por parte de las diferentes tareas que intervienen en el sistema, lleva consigo un tratamiento temporal estricto de las mismas.

Se pasa ahora a comentar sucintamente qué material se ha necesitado para montar esta plataforma de tiempo real:

- Aspectos HW:
  - a) Dos PC's: Se trata de dos Pentium con 128 MB de RAM. Uno hace de host (entorno de desarrollo) y otro hace de target (entorno de ejecución). Deben incluir:
    - a.1) Host: tarjeta de red. En la plataforma montada se ha instalado una 3Com Fast Etherlink XL.
    - a.2) Target:
      - tarjeta de red, debiendo ser compatible con VxWorks en este caso con el fin de que el target pueda acceder (mediante un FTP Server) a la imagen de VxWorks que tiene el host. En la plataforma montada se ha instalado una 3Com Etherlink III (que VxWorks reconoce como elt(0,0)).
      - tarjetas de adquisición de datos necesarias para interactuar con el proceso. Se ha instalado la PCLAB-812 para tener un rango de conversión A/D de la salida del motor de  $\pm 10V$  y la PCLAB-726 para tener un rango de conversión D/A de la salida de control también de  $\pm 10V$ .
  - b) Cable de red: Nos servirá, obviamente, para conectar ambos PC's. Se ha utilizado un cable de tipo par trenzado con conector RJ-45 en cada uno de ellos.
- Aspectos SW:
  - a) Host: llevará instalado Tornado y un servidor de FTP, con el fin de que el target pueda conectarse al host para cargar la imagen del VxWorks (que reside en este último).



- b) Target: arrancará con un disquete de arranque (boot), que se crea en el host (a través de Tornado) como sigue:

1º) Editar el config.h del directorio que hay en el host en c:\tornado2\target\config\pcPentium y configurar correctamente para nuestro caso particular, la siguiente línea:

```
#define DEFAULT_BOOT_LINE \  
"elt(0,0)acuena:c:/ProyectosT2/Proyecto2/Project2/default/vxWorks  
h=158.42.22.38 e=158.42.16.31 u=target2 pw=target2 tn=angelc"
```

Se comenta a continuación qué es cada parámetro:

- elt(0,0) es el identificativo del tipo de tarjeta de red. En el caso que nos ocupa es una 3Com Etherlink III.
- acuena: es el nombre IP del PC host.
- c:/ProyectosT2/Proyecto2/Project2/default/vxWorks es el directorio al que debe acceder el PC target para adquirir la imagen del sistema operativo VxWorks.
- h=158.42.22.38 es la dirección IP del PC host.
- e=158.42.16.31 es la dirección IP del PC target.
- u=target2 pw=target2 son el usuario y password, respectivamente, que utilizará el target para iniciar una sesión FTP en el host, gracias a la cual, cargará la imagen del VxWorks.
- tn=angelc es el nombre IP del PC target.

2º) Todavía dentro del config.h, configurar los valores característicos de la tarjeta de red del target (en el caso de la 3Com Etherlink III, las constantes a definir son las acabadas en ELT):

```
#define IO_ADRS_ELT 0x0200  
#define INT_LVL_ELT 0x09  
#define INT_VEC_ELT (INT_NUM_IRQ0 + INT_LVL_ELT)  
#define NRF_ELT 0x00  
#define CONFIG_ELT 3 /* 0=EEPROM 1=AUI 2=BNC 3=RJ45 */
```

Estas constantes, en concreto, definen lo siguiente:

- IO\_ADRS\_ELT la dirección base de la tarjeta.
- INT\_LVL\_ELT la IRQ que utiliza la tarjeta.
- CONFIG\_ELT el tipo de conector utilizado por el cable de red.

3º) Entrar a Tornado, introducirse en el menú Build y tras ello:

- para crear el boot del target: entrar en Build Boot Rom, seleccionar como BSP pcPentium y como imagen a construir bootrom\_uncmp.

- para crear la imagen del VxWorks en el host (que será adquirida por el target via FTP): crear un proyecto nuevo para construir dicha imagen y seguir el asistente. Para más información consultar manual de Tornado (Manual3, 1999).

4º) Tras esto, abrir una ventana DOS para cambiar el nombre al fichero bootrom\_uncmp y hacer el mkboot. Por pasos:

- Hacer: copy bootrom\_uncmp bootrom.dat.
- Poner disquete en a:
- Hacer: mkboot a: bootrom.dat.

Con estos cuatro pasos se consigue construir el boot del target (en un disquete de 3½) que servirá para arrancarlo y, a través del FTP Server, conectarse con el host.

Por tanto, como resumen a la instalación, se muestra las siguientes figuras V-1 y V-2.

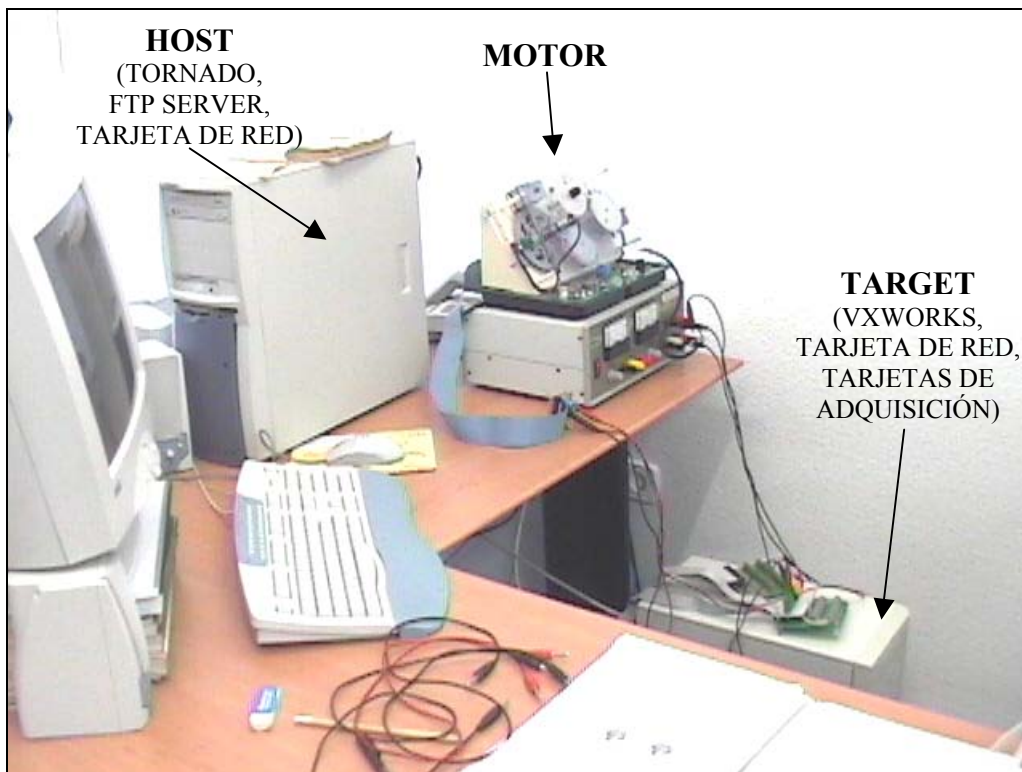


Figura V-1: Resumen de la instalación de Tornado-VxWorks.

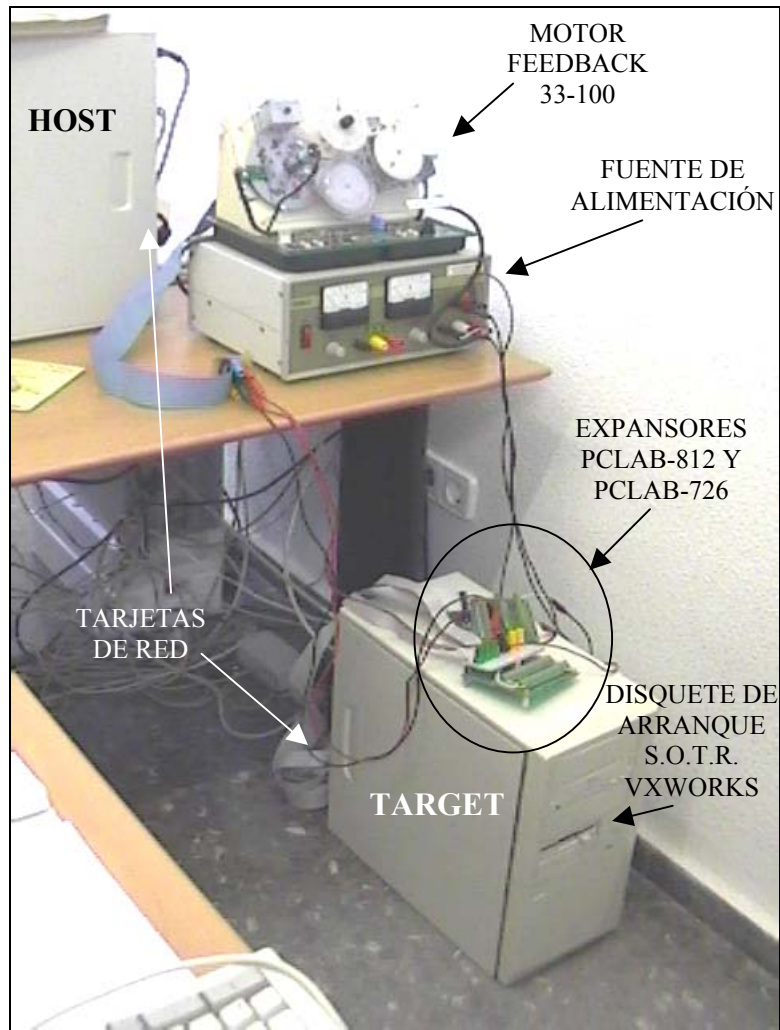


Figura V-2: Detalle del conexionado en la plataforma de tiempo real.

## V.2. ÓRDENES INTERESANTES EN VXWORKS.

En este apartado se van a agrupar las órdenes más utilizadas en base a la función que cumplen dentro del sistema operativo de tiempo real. Así, se cuenta con:

- órdenes relacionadas con semáforos:
  - SemBCreate: crea un semáforo binario, es decir, cuyo valor sólo puede ser 0 ó 1 (libre o cogido, respectivamente).
  - SemTake y SemGive: coge o libera un semáforo, respectivamente. Órdenes muy apropiadas para la exclusión mutua.
- órdenes relacionadas con tareas (creación, temporización, etc):
  - taskSpawn: crea una tarea asignándole un nombre lógico, espacio de pila, la función que ejecutará, etc.
  - sigaction (SIGALRM, &man, NULL): instala el manejador a ejecutar por una tarea cuando sea interrumpida por la señal de reloj. Es POSIX.
  - timer\_create(CLOCK\_REALTIME, NULL, &timerid): crea un temporizador asociado a una tarea. Es POSIX.
  - timer\_settime(timerid, TIMER\_ABSTIME, &value, NULL): carga el temporizador “timerid” para que actúe cada “value” tiempo. Es POSIX.
  - pause( ): deja suspendida a la tarea hasta que se produce la señal de interrupción como consecuencia del vencimiento del temporizador; en ese momento se pasa a ejecutar el manejador asociado a la tarea. Es POSIX.
  - timer\_delete(timerid): elimina el temporizador. Es POSIX.
  - clock\_setres(CLOCK\_REALTIME, &real): fija la resolución deseada para el reloj del sistema.
- órdenes relacionadas con acceso a entrada/salida:
  - SysOutByte: deja un byte especificado en el puerto detallado.
  - SysInByte: obtiene un byte de un puerto concreto.

### V.3. CÓDIGO DE LAS TAREAS A EJECUTAR EN LA IMPLEMENTACIÓN DE UN CONTROLADOR CON ESTRUCTURA NO CONVENCIONAL.

Se presenta a continuación el código C desarrollado en VxWorks para llevar a cabo la implementación de un controlador con estructura no convencional MRIC y con N=2. Véanse las figuras 7-3 y 7-4 para recordar las tareas consideradas.

- Tarea A/D:

```
#include <stdio.h>
#include <timers.h>
#include <vxWorks.h>
#include <sigLib.h>
#include <taskLib.h>
#include "vector2.h"
#include "pcl812.h"

/* PROGRAMA QUE CONVIERTE A/D LA SALIDA DE VELOCIDAD DEL MOTOR
   Y LA ESCRIBE EN MEMORIA */

int iter_ad;
struct sigaction man;
double velocidades[TamLento];

void tarea_anadigi(int senyal)
{
    int canal,AUX, DatoL, DatoH;
    double vel;

    /* FIJAMOS EL CANAL DE ENTRADA */
    canal=0;

    /* PROGRAMAMOS EL CANAL DE ENTRADA */
    sysOutByte(MuxCon, (char) (canal));

    /* INICIALIZACION DE LA GANANCIA */
    AUX=0;
    sysOutByte(GainCon, (char) (AUX));

    /* INICIALIZACION DEL REG DE CONTROL Y DE INTERRUPCIONES */
    AUX=1;
    sysOutByte(ModeCon, (char) (AUX));

    /* INICIO DE CONVERSION */

    AUX=1;
    sysOutByte(SoftTri, (char) (AUX));

    AUX = (int) (sysInByte(ADHigh));
    while ((AUX & 0x10) == 0x10) { AUX = (int) (sysInByte(ADHigh)); }

    DatoL = (int) (sysInByte(ADLow));
    DatoH = ((int) (sysInByte(ADHigh))) & (0x0f);

    /* una vez desplazados, ya podemos hacer la conversión */
    vel=((double) (DatoH*256+DatoL))*0.004884-10.0;
    /* LSB=0.004884; OFFSET=-10 */
}
```

```

escribe_v_vel(&vel);
velocidades[iter_ad] = vel;

iter_ad++;
}

void t_anadigi (void)
{
timer_t timerid;
struct itimerspec value;

FILE *fp1;

int j, error;
int itotal = TTotal/TLento;      /* numero total de iter_ades */

struct sigevent evento;

struct timespec res;

/* Recordamos la nueva resolucio n a los timers POSIX */

res.tv_sec=0;                    /* 0 seg. */
res.tv_nsec=5000000;            /* 5000000 nanoseg. = 5 miliseg.*/
/* ----- */
/* 0.005 -> periodo */

if ( (error = clock_setres (CLOCK_REALTIME, &res)) !=0 )
    printf ("Error al poner clock_setres\n");

iter_ad = 0;

/* Asocio manejador a senyal */

man.sa_flags=0;
man.sa_handler = tarea_anadigi;
sigemptyset (&man.sa_mask);
sigaction (SIGRTMIN, &man, NULL);

evento.sigev_signo = SIGRTMIN;
evento.sigev_notify = SIGEV_SIGNAL;

/* Creo y cargo timer */

timer_create(CLOCK_REALTIME, &evento, &timerid);

value.it_value.tv_sec=2;
value.it_value.tv_nsec=0;

value.it_interval.tv_sec=0;
value.it_interval.tv_nsec=500000000;

timer_settime(timerid, TIMER_ABSTIME, &value, NULL);

while (iter_ad < itotal)
{

```

```
    pause(); /* espero senyal como consecuencia del vencimiento del timer */
}

/* Termina timer y Volcado de resultados a buffers */

timer_delete(timerid);

fp1 = fopen ("c:/feedback/pid2/velocidades_regirreg.txt", "w");

for (j=0; j < itotal; j++)
    fprintf(fp1, "%d %f \n", j, velocidades[j]);

fclose(fp1);
}

void anadigi (void)
{
    taskSpawn ("anadigi", 99, VX_SUPERVISOR_MODE, 10000,
              (FUNCPTR) t_anadigi, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0);
}
```

#### ▪ Tarea D/A1:

```
#include <vxWorks.h>
#include <usrLib.h>
#include <taskLib.h>
#include "pcl812.h"
#include "vector2.h"
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <ctype.h>
#include <timers.h>
#include <sigLib.h>

/* PROGRAMA QUE CREA UNA TAREA PERIODICA PARA HACER LA CONVERSION
   D/A DE LA ACCION DE CONTROL QUE REPERCUTE SOBRE EL ACCIONADOR */

int iter_da;

void digiana (int senyal)
{
    int canal,DatoL,DatoH;
    double Dato;

    /* FIJAMOS CANAL PARA LA CONVERSIÓN */
    canal=1;

    /* LEEMOS ACCION DE CONTROL RAPIDA (DATO) DE MEMORIA */
    lee_v_acc_rapida(0, &Dato);

    /* PREPARAMOS LA ACCION DE CONTROL (DATO) PARA LA CONVERSIÓN */
    Dato=Dato*409.5;
    DatoH=(int) (Dato)/256.0;
    DatoL=(int) (Dato)-DatoH*256;
```

```

/* LO MANDAMOS A LA I/O */
if (canal==1)
{
  sysOutByte(DA0Low, (char) (DatoL));
  sysOutByte(DA0High, (char) (DatoH));
}
else
{
  sysOutByte(DA1Low, (char) (DatoL));
  sysOutByte(DA1High, (char) (DatoH));
}

iter_da++;
}

void t_digiana (void)
{
  timer_t timerid;
  struct itimerspec value;

  int DatoL,DatoH;
  double Dato;

  int error;
  int itotal = TTotal/TLento;      /* numero total de iter_daes */

  struct sigevent evento;

  struct timespec res;

  struct sigaction man;

  /* Recordamos la nueva resolucio n a los timers POSIX */

  res.tv_sec=0;                    /* 0 seg. */
  res.tv_nsec=5000000;            /* 5000000 nanoseg. = 5 miliseg.*/
  /* ----- */
  /* 0.005 -> periodo */

  if ( (error = clock_setres (CLOCK_REALTIME, &res)) !=0 )
    printf ("Error al poner clock_setres\n");

  iter_da = 0;

  /* Instalo manejador */

  man.sa_flags=0;
  man.sa_handler = digiana;
  sigemptyset(&man.sa_mask);

  sigaction (SIGRTMIN+3, &man, NULL);

  evento.sigev_signo = SIGRTMIN+3;
  evento.sigev_notify = SIGEV_SIGNAL;

  /* Creo timer */
  timer_create(CLOCK_REALTIME, &evento, &timerid);

```



```
value.it_value.tv_sec=2;
value.it_value.tv_nsec=0;

value.it_interval.tv_sec=0;
value.it_interval.tv_nsec=500000000;

timer_settime(timerid, TIMER_ABSTIME, &value, NULL);

while (iter_da < itotal)
{
    pause(); /* espero senyal como consecuencia del vencimiento del timer */
}

/* Termina timer */
timer_delete(timerid);
}

void tarea_digiana (void)
{
    taskSpawn ("digiana", 102, VX_SUPERVISOR_MODE, 10000,
               (FUNCPTR) t_digiana, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0);
}
```

▪ Tarea D/A2:

```
#include <vxWorks.h>
#include <usrLib.h>
#include <taskLib.h>
#include "pcl812.h"
#include "vector2.h"
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <ctype.h>
#include <timers.h>
#include <sigLib.h>

/* PROGRAMA QUE CREA, TRAS UN RETRASO, UNA TAREA PERIODICA PARA HACER LA
CONVERSION D/A DE LA ACCION DE CONTROL QUE REPERCUTE SOBRE EL ACCIONADOR */

int iter_da2;

void digiana2 (int senyal)
{
    int canal,DatoL,DatoH;
    double Dato;

    /* FIJAMOS CANAL PARA LA CONVERSIÓN */
    canal=1;

    /* LEEMOS ACCION DE CONTROL RAPIDA (DATO) DE MEMORIA */
    lee_v_acc_rapida(0, &Dato);

    /* PREPARAMOS LA ACCION DE CONTROL (DATO) PARA LA CONVERSIÓN */
    Dato=Dato*409.5;
    DatoH=(int) (Dato)/256.0;
    DatoL=(int) (Dato)-DatoH*256;

    /* LO MANDAMOS A LA I/O */
```

```

if (canal==1)
{
  sysOutByte(DA0Low, (char) (DatoL));
  sysOutByte(DA0High, (char) (DatoH));
}
else
{
  sysOutByte(DA1Low, (char) (DatoL));
  sysOutByte(DA1High, (char) (DatoH));
}

  iter_da2++;
}

void t_digiana2 (void)
{
  timer_t timerid;
  struct itimerspec value;

  int DatoL,DatoH;
  double Dato;

  int error;
  int itotal = TTotal/TLento;      /* numero total de iter_daes */

  struct sigevent evento;
  struct timespec res;
  struct sigaction man;

  /* Recordamos la nueva resolucio n a los timers POSIX */

  res.tv_sec=0;                    /* 0 seg. */
  res.tv_nsec=5000000;            /* 5000000 nanoseg. = 5 miliseg.*/
  /* ----- */
  /* 0.005 -> periodo */

  if ( (error = clock_setres (CLOCK_REALTIME, &res)) !=0 )
    printf ("Error al poner clock_setres\n");

  iter_da2 = 0;

  /* Instalo manejador */

  man.sa_flags=0;
  man.sa_handler = digiana2;
  sigemptyset(&man.sa_mask);

  sigaction (SIGRTMIN+4, &man, NULL);

  evento.sigev_signo = SIGRTMIN+4;
  evento.sigev_notify = SIGEV_SIGNAL;

  /* Creo timer */
  timer_create(CLOCK_REALTIME, &evento, &timerid);

  value.it_value.tv_sec=2;
  /*value.it_value.tv_nsec=250000000;*/      /*para muestreo regular*/

```

```
value.it_value.tv_nsec=300000000;    /*para muestreo irregular*/

value.it_interval.tv_sec=0;
value.it_interval.tv_nsec=500000000;

timer_settime(timerid, TIMER_ABSTIME, &value, NULL);

while (iter_da2 < itotal)
{
    pause(); /* espero senyal como consecuencia del vencimiento del timer */
}

/* Termina timer */
timer_delete(timerid);

/* Para el motor */
Dato=0.0;

Dato=Dato*409.5;
DatoH=(int) (Dato)/256.0;
DatoL=(int) (Dato)-DatoH*256;

sysOutByte(DA0Low, (char) (DatoL));
sysOutByte(DA0High, (char) (DatoH));
}

void tarea_digiana2 (void)
{
    taskSpawn ("digiana2", 102, VX_SUPERVISOR_MODE, 10000,
              (FUNCPTR) t_digiana2, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0);
}
```

#### ▪ Tarea CL:

```
#include <vxWorks.h>
#include <usrLib.h>
#include <taskLib.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <ctype.h>
#include <timers.h>
#include <sigLib.h>
#include "vector2.h"

/* PROGRAMA QUE CREA PERIODICAMENTE UNA TAREA PARA REALIZAR EL REGULADOR
LENTO Y ESCRIBIR SU ACCIÓN EN MEMORIA */

int iter_lento;

struct sigaction man;

double error[4];
double control_l[4];    /* acciones de control lentas */

double acclentas[TamLento];    /* buffers de resultados */
double errores[TamLento];
```

```

void tarea_rlento(int senyal)
{
    double ref;
    double vel;
    struct timespec rqt;

    /* LEEMOS VALOR DE LAS REFERENCIAS Y DE LA POSICION */

    lee_v_ref(iter_lento, &ref); /* ref(k) */

    lee_v_vel(0, &vel); /* y(k) */

    /* APLICAMOS ALGORITMO DE CONTROL */

    error[0] = ref - vel; /* e(k) */

    control_1[0]=error[0]+0.008565*error[1]+0.009315*error[2]-4.592e-
20*error[3]+0.975*control_1[1]+0.02378*control_1[2]+0.001189*control_1[3];

    escribe_v_acc_lenta(&control_1[0]);
    acclentas[iter_lento] = control_1[0];
    errores[iter_lento] = error[0];

    /* DESPLAZAMIENTO DE VALORES */

    control_1[3] = control_1[2];
    control_1[2] = control_1[1];
    control_1[1] = control_1[0];
    error[3] = error[2];
    error[2] = error[1];
    error[1] = error[0];

    iter_lento++;
}

void r_lento (void)
{
    timer_t timerid;
    struct itimerspec value;

    FILE *fp1;

    int j, err;
    int itotal = TTotal/TLento; /* numero total de iter_lentoes */

    struct sigevent evento;

    struct timespec res;

    /* Recordamos la nueva resolucio n a los timers POSIX */
    res.tv_sec=0; /* 0 seg. */
    res.tv_nsec=5000000; /* 5000000 nanoseg. = 5 miliseg.*/
    /* ----- */
    /* 0.005 -> periodo */

    if ( (err = clock_setres (CLOCK_REALTIME, &res)) !=0 )
        printf ("Error al poner clock_setres\n");
}

```

```
/* Inicializaciones para el control */

control_l[0] = 0.0; control_l[1] = 0.0;
control_l[2] = 0.0; control_l[3] = 0.0;
error[0] = 0.0; error[1] = 0.0; error[2] = 0.0; error[3] = 0.0;
iter_lento = 0;

/* Instalo manejador */

man.sa_flags=0;
man.sa_handler = tarea_rlento;
sigemptyset(&man.sa_mask);

sigaction (SIGRTMIN+1, &man, NULL);

evento.sigev_signo = SIGRTMIN+1;
evento.sigev_notify = SIGEV_SIGNAL;

/* Creo timer */
timer_create(CLOCK_REALTIME, &evento, &timerid);

value.it_value.tv_sec=2;
value.it_value.tv_nsec=0;

value.it_interval.tv_sec=0;
value.it_interval.tv_nsec=500000000;

timer_settime(timerid, TIMER_ABSTIME, &value, NULL);

while (iter_lento < itotal)
{
    pause(); /* espero senyal como consecuencia del vencimiento del timer */
}

/* Termina timer y Volcado de resultados a buffers */
timer_delete(timerid);

fp1 = fopen ("c:/feedback/pid2/acclentas.txt", "w");

for (j=0; j < itotal; j++)
    fprintf(fp1, "%d %f \n", j, acclentas[j]);

fclose(fp1);

fp1 = fopen ("c:/feedback/pid2/errores.txt", "w");
for (j=0; j < itotal; j++)
    fprintf(fp1, "%d %f \n", j, errores[j]);

fclose(fp1);
}
void regulador_lento (void)
{
    taskSpawn ("regulento", 100, VX_SUPERVISOR_MODE, 10000,
              (FUNCPTR) r_lento, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0);
}
}
```

- Tarea CR:

```

#include <vxWorks.h>
#include <usrLib.h>
#include <taskLib.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <ctype.h>
#include "vector2.h"
#include <timers.h>
#include <sigLib.h>

/* PROGRAMA QUE CREA PERIODICAMENTE UNA TAREA PARA REALIZAR EL REGULADOR
RÁPIDO Y ESCRIBE SU ACCIÓN EN MEMORIA */

int iter_rapido;

struct sigaction man;

double error_r[8];      /* entrada de error al reg. rapido (acc. lentas) */
double control_r[8];    /* accion de control rapida */
double accrapidas[TamRapido];

void tarea_rrapido(int senyal)
{
    /* LEEMOS VALOR DE LA ACCION LENTA (ENTRADA DE ERROR, DESDE LA PERSPECTIVA
DEL REG. RAPIDO */

    /*if ( (iter_rapido % MULTI) == 1 )      Expansion del error rapido
        error_r[0] = 0.0;
    else*/
        lee_v_acc_lenta(0, &error_r[0], &iter_rapido);

    /* APLICAMOS ALGORITMO DE CONTROL */

    /* Caso regular */
    control_r[0]=(0.7659*error_r[0]+0.2178*error_r[1]-0.01129*error_r[2]-
0.0196*error_r[3]-0.00132*error_r[4]+0.0003532*error_r[5]-7.731e-
005*error_r[6]-3.201e-017*error_r[7]-0.3805*control_r[1]-
0.01291*control_r[2]-0.003292*control_r[3]-0.01389*control_r[4]-
0.003543*control_r[5]+2.38e-027*control_r[6]+6.072e-
028*control_r[7])/1.492;

    /* Caso Irregular */
    control_r[0]=(0.7668*error_r[0]+0.217*error_r[1]-0.01142*error_r[2]-
0.01961*error_r[3]-0.001259*error_r[4]+0.0003572*error_r[5]-8.1e-
005*error_r[6]-3.329e-017*error_r[7]-0.4648*control_r[1]-
0.01218*control_r[2]-0.004022*control_r[3]-0.0131*control_r[4]-
0.004328*control_r[5]+2.246e-027*control_r[6]+7.418e-
028*control_r[7])/1.407;

    /* SATURACION */

    if (control_r[0] > 10.0)
        control_r[0] = 10.0;
    if (control_r[0] < -10.0)
        control_r[0] = -10.0;

```

```
accrapidas[iter_rapido] = control_r[0];
escribe_v_acc_rapida(&control_r[0]);

/* RECORREMOS VALORES */
error_r[7] = error_r[6];
error_r[6] = error_r[5];
error_r[5] = error_r[4];
error_r[4] = error_r[3];
error_r[3] = error_r[2];
error_r[2] = error_r[1];
error_r[1] = error_r[0];
control_r[7] = control_r[6];
control_r[6] = control_r[5];
control_r[5] = control_r[4];
control_r[4] = control_r[3];
control_r[3] = control_r[2];
control_r[2] = control_r[1];
control_r[1] = control_r[0];

iter_rapido++;
}

void r_rapido (void)
{
timer_t timerid;
struct itimerspec value;

FILE *fp1;

int j, error;
int itotal = TTotal/TRapido;      /* numero total de iter_rapidoes */

struct sigevent evento;
struct timespec res;

/* Recordamos la nueva resolucio n a los timers POSIX */

res.tv_sec=0;                      /* 0 seg. */
res.tv_nsec=5000000;               /* 5000000 nanoseg. = 5 miliseg.*/
/* ----- */
/* 0.005 -> periodo */

if ( (error = clock_setres (CLOCK_REALTIME, &res)) !=0 )
printf ("Error al poner clock_setres\n");

/* Inicializaciones para el control */
error_r[0] = 0.0; error_r[1] = 0.0;
error_r[2] = 0.0; error_r[3] = 0.0;
error_r[4] = 0.0; error_r[6] = 0.0; ;
error_r[5] = 0.0; error_r[7] = 0.0;

control_r[0] = 0.0; control_r[1] = 0.0;
control_r[2] = 0.0; control_r[3] = 0.0;
control_r[4] = 0.0; control_r[6] = 0.0;
control_r[5] = 0.0; control_r[7] = 0.0;
```

```

iter_rapido = 0;

/* Instalo manejador */
man.sa_flags=0;
man.sa_handler = tarea_rrapido;
sigemptyset(&man.sa_mask);

sigaction (SIGRTMIN+2, &man, NULL);

evento.sigev_signo = SIGRTMIN+2;
evento.sigev_notify = SIGEV_SIGNAL;

/* Creo timer */
timer_create(CLOCK_REALTIME, &evento, &timerid);

value.it_value.tv_sec=2;
value.it_value.tv_nsec=0;

value.it_interval.tv_sec=0;
value.it_interval.tv_nsec=250000000;

timer_settime(timerid, TIMER_ABSTIME, &value, NULL);

while (iter_rapido < itotal)
{
    pause(); /* espero senyal como consecuencia del vencimiento del timer */
}

/* Termina timer y Volcado de resultados a buffers */
timer_delete(timerid);

fp1 = fopen ("c:/feedback/pid2/acrapidas_regirreg.txt", "w");

for (j=0; j < itotal; j++)
    fprintf(fp1, "%d %f \n", j, accrapidas[j]);

fclose(fp1);
}

void regulador_rapido (void)
{
    taskSpawn ("regurapido", 101, VX_SUPERVISOR_MODE, 10000,
              (FUNCPTR) r_rapido, 0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0);
}

```

Además de estas tareas, contempladas en las figuras 7-3 y 7-4, es necesario de otras que hacen posible el lanzamiento e inicialización de aquéllas:

- Tarea lanzadora:

```

#include "lanzador.h"

void lanza (void)
{
    tarea_inicial();
    anadigi();
}

```



```
regulador_lento();
regulador_rapido();
tarea_digiana();
tarea_digiana2();
}
```

▪ Tarea inicial:

```
#include <vxWorks.h>
#include <usrLib.h>
#include <taskLib.h>
#include <stdio.h>
#include <string.h>
#include <ctype.h>
#include <ioLib.h>
#include "vector2.h"
#include "pcl812.h"

/* INICIALIZA LOS VECTORES Y TARJETAS */

void tarea_inicial(void)
{
    int error;
    int DatoL,DatoH;
    double Dato;

    /* CAMBIO RESOLUCION DEL RELOJ DEL SISTEMA, PONIENDOLA A 5 MSEG. */
    if ( (error = sysClkRateSet(200)) != 0)
        printf ("Error al hacer sysClkRateSet\n");

    /* Inicializo vector referencia */
    ini_v_ref();

    /* Inicializo vector posicion */
    ini_v_vel();

    /* Inicializo vector accion de control */
    ini_v_acc();

    /* Inicializo convDA */
    Dato=0.0;

    Dato=Dato*409.5;
    DatoH=(int) (Dato)/256.0;
    DatoL=(int) (Dato)-DatoH*256;

    sysOutByte(DA0Low, (char) (DatoL));
    sysOutByte(DA0High, (char) (DatoH));
}
```

Por último, para el tratamiento de los valores depositados en memoria, se requiere de un módulo específico que implementa las funciones necesarias:

```

/* vector2.c -- Modulo de descripcion de la funciones de acceso al vector
de memoria. */

/* Funciones:
void ini_v_ref(void)
void ini_v_vel(void)
void ini_v_acc(void)
void lee_v_ref(int posicion, double *pvalor)
void lee_v_pos(int posicion, double *pvalor)
void lee_v_acc_lenta(int posicion, double *pvalor, int iteracion)
void lee_v_acc_rapida(int posicion, double *pvalor)
void escribe_v_pos(ULONG *ppos)
void escribe_v_acc_lenta(double *pacc)
void escribe_v_acc_rapida(double *pacc) */

#include <stdio.h>
#include <vxWorks.h>
#include <semLib.h>
#include <msgQLib.h>

#define TAM 1 /* tamanyo del vector */
#define VAL 0.0 /* valor inicial del vector */

#define MULTI 2 /* multiplicidad */
#define TLento 0.5 /* periodo de muestreo lento */
#define TRapido TLento/MULTI /* periodo de muestreo rapido */
#define TTotal 10 /* tiempo total del rango de tiempo */
#define TamLento 20 /* TTotal/TLento */

double ref[TamLento]; /* vector donde se introduce la referencia;
debe ser de tamanyo=TTotal/TLento */
double vel[TAM]; /* vector donde se introduce la velocidad */
double acc_lenta[TAM]; /* vector donde se introduce la accion de
control lenta */
double acc_rapida[TAM]; /* vector donde se introduce la accion de
control rapida */

SEM_ID semMutexRef; /* semaforo para exclusion mutua de la referencia */
SEM_ID semMutexVel; /* semaforo para exclusion mutua de la velocidad */
SEM_ID semMutexAccLenta; /* semaforo para exclusion mutua de la accion
de control lenta */
SEM_ID semMutexAccRapida; /* semaforo para exclusion mutua de la accion
de control rapida */

void ini_v_ref(void)
/* inicializa el vector con un escalón unitario
y el semaforo de referencia */
{
int j;
FILE *fp1;

for (j=0; j<TamLento; j++)
ref[j] = 1.0;

for (j=0; j<TamLento; j++)
ref[j] = ref[j];
}

```

```
fp1 = fopen ("c:/feedback/pid2/referencias.txt", "w");

for (j=0; j < TamLento; j++)
    fprintf(fp1, "%d %f \n", j, ref[j]);

fclose(fp1);

semMutexRef = semBCreate (SEM_Q_FIFO, SEM_FULL);
}

void ini_v_vel(void)
/* inicializa el vector y el semaforo*/
{
    int contador;

    for (contador=0; contador<TAM; contador++)
        vel[contador] = VAL;

    semMutexVel = semBCreate (SEM_Q_FIFO, SEM_FULL);
}

void ini_v_acc(void)
/* inicializa el vector y el semaforo */
{
    int contador;

    for (contador=0; contador<TAM; contador++)
        acc_lenta[contador] = VAL;

    for (contador=0; contador<TAM; contador++)
        acc_rapida[contador] = VAL;

    semMutexAccLenta = semBCreate (SEM_Q_FIFO, SEM_FULL);
    semMutexAccRapida = semBCreate (SEM_Q_FIFO, SEM_FULL);
}

void lee_v_ref(int posicion,double *pvalor)
/* lee de la posicion que se le pasa como parametro y devuelve el valor
leido, para referencia */
{
    semTake (semMutexRef, WAIT_FOREVER);
    *pvalor = ref[posicion];
    semGive (semMutexRef);
}

void lee_v_vel(int posicion, double *pvalor)
/* lee de la posicion que se le pasa como parametro y devuelve el valor
leido, para velocidad */
{
    semTake (semMutexVel, WAIT_FOREVER);
    *pvalor = vel[posicion];
    semGive (semMutexVel);
}
```

```

void lee_v_acc_lenta(int posicion, double *pvalor, int *iteracion)
/* lee de la posición que se le pasa como parametro y devuelve el valor
leído, para acción de control lenta */
{
    semTake (semMutexAccLenta, WAIT_FOREVER);
    *pvalor = acc_lenta[posicion];
    semGive (semMutexAccLenta);
}

```

```

void lee_v_acc_rapida(int posicion, double *pvalor)
/* lee de la posición que se le pasa como parametro y devuelve el valor
leído, para acción de control rápida */
{
    semTake (semMutexAccRapida, WAIT_FOREVER);
    *pvalor = acc_rapida[posicion];
    semGive (semMutexAccRapida);
}

```

```

void escribe_v_vel(double *ppos)
/* escribe todo el vector al valor que se le pasa como parametro, para
posición */
{
    int contador;

    semTake (semMutexVel, WAIT_FOREVER);

    for (contador=0; contador<TAM; contador++)
        vel[contador] = *ppos;
    semGive (semMutexVel);
}

```

```

void escribe_v_acc_lenta(double *pacc)
/* escribe todo el vector al valor que se le pasa como parametro,
para acc. control lenta */
{
    int contador;

    semTake (semMutexAccLenta, WAIT_FOREVER);

    for (contador=0; contador<TAM; contador++)
        acc_lenta[contador] = *pacc;
    semGive (semMutexAccLenta);
}

```

```

void escribe_v_acc_rapida(double *pacc)
/* escribe todo el vector al valor que se le pasa como parametro,
para acc. control rápida*/
{
    int contador;
    semTake (semMutexAccRapida, WAIT_FOREVER);

    for (contador=0; contador<TAM; contador++)
        acc_rapida[contador] = *pacc;
    semGive (semMutexAccRapida);
}

```

# BIBLIOGRAFÍA



Albertos, P. (1990) Block multirate input-output model for sampled-data control systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-35, No 9, pp. 1085-1088.

Albertos, P. (1991) Input-Output Model for Unconventional Sampled-Data Control Systems. in Pichler, F. and Moreno, R. (ed.) *Computer Aided Systems Theory. Lectures Notes in Computer Science*, Vol. 585, Springer-Verlag, pp. 614-625.

Albertos, P. (1992) Soft Multirate Control. *Proc. of 31th IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 1946-1948.

Albertos, P.; Salt, J. (1990) Digital Regulators Redesign with Irregular Sampling. *Proceedings of the 11<sup>th</sup> IFAC World Congress*. Vol. 8, pp. 157-161. Tallin (U.R.S.S.).

Albertos P.; Salt J.; Tornero J. (1996) Dual Rate Adaptive Control. *Automatica*, Vol. 32, n. 7, pp 1027-1030,.

Albertos, P.; Crespo, A. (1997) Real-Time Control of Unconventionally Sampled Data Systems. *IFAC Workshop on Algorithms and Architectures for Real-time Control*, Vilamoura, Portugal.

Albertos, P.; Sanchis, R. (1994) Ripple-free design of sampled-data control systems. *Proc. of the Asian Control Conf.*, pp 365-368.

Albertos, P.; Sanchis, R.; Sala, A. (1997) Scarce data operating conditions: output predictors. *IFAC Symp. On Sysid*.

Amit, N.; Powell, J.D. (1981) Optimal control of multirate systems. *Proc. AIAA Guid. Contr. Conf.*, Albuquerque, NM.

Apostolakis, I.S. (1992) An estimation algorithm for multirate sampled digital control systems. *Int J. Control*, Vol. 56, No. 4, pp.813-830.

Apostolakis, I.S.; Jordan, D. (1991) A time invariant approach to multirate optimal regulator design. *Int. J. Control*. Vol.53, No. 5, pp 1233-1254.

Apostolakis, I.S.; Jordan, D. (1992) Robust design of reduced order multirate compensators using constrained optimization techniques. *Proc. of the 31st Conf. on Decision and Control*, Tucson, Arizona, pp. 1774-1779.

Aracil, R.; Jiménez, A.; Feliu, V. (1984) Multirate sampling technique in digital control systems simulation. *IEEE trans. on Systems, Man and Cybernetics*. Vol. 14, No. 5, pp. 776-780.

Araki, M. (1993) Recent development in digital control theory. *Proc. 12th IFAC World Congress*, Sydney, Australia, Vol. 9, pp. 951-960.

Araki, M.; Hagiwara, T. (1986) Pole assignment by multirate sampled-data output feedback. *Int. J. Control*, Vol. 44, pp. 1661-1673.

Araki, M.; Hagiwara, T.; Soma, H. (1992) Application of multilevel sampled-data controllers to simultaneous pole assignment problem. Proc. of 31th IEEE Conf. on Decision and Control, Tucson, Arizona, pp. 1762-1767.

Araki, M.; Ito, Y.; Hagiwara T. (1996) Frequency Response of Sampled-data Systems. Automatica. Vol. 32, No. 4, pp. 483-497.

Araki, M.; Yamamoto, K. (1986) Multivariable multirate sampled-data systems: State-space description, transfer characteristics, and Nyquist criterion. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-31, No. 2, pp. 145-154.

Åström, K.J.; Wittenmark, B. (1988) Sistemas controlados por Computador. Paraninfo, Madrid.

Baek, S.; Lee, S (1999) Design of Multi-Rate Estimator and its Application to a Disk Drive Servo System. Proceedings of the American Control Conference, San Diego.

Bamieh, B.; Pearson, J.B. (1992) A general Framework for Linear Periodic Systems with Applications to  $H_\infty$  Sampled-Data Control. IEEE Trans. On Automatic Control, Vol. AC-37, No.4, pp. 418-435.

Bamieh, B.; Pearson, J.B. (1992) The  $H_2$  problem for sampled data systems. Systems and Control letters, Vol. 19, pp. 1-12.

Bamieh, B.; Pearson, J.B.; Francis, B.A. (1991) A lifting technique for linear periodic systems with applications to sampled-data control. Systems and Control letters, Vol. 17, pp. 79-88.

Barry, P.E. (1975) Optimal control of multirate systems. Report RN-361, Research Department, Grumman Aerospace Corp.

Boykin, W.H.; Frazier, B.D. (1975) Analisis of multiloop multirate sampled-data systems. AIAA J. Guidance Contr. Dynamics. Vol . 13, pp. 453-456.

Boykin, W.H.; Frazier, B.D. (1975) Multirate sampled-data systems analysis via vector operator. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-20, pp. 548-551.

Braslavsky, J.H. (1996) Frequency Domain Analysis of Sampled-Data Control Systems. PhD. Thesis, Dept. of Electrical and Computer Engineering, University of Newcastle. Australia.

Braslavsky, J.H.; Middleton, R.H.; Freudenberg, J.S. (1998)  $L_2$ -Induced Norms and Frequency Gains of Sampled-Data Sensitivity Operartors. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. 43, No. 2, pp. 252-258.

Broussard, J.R.; Glasson, D.P. (1980) Optimal multirate flight control design. Proc. of the 1980 Joint Automatic Control Conf., San Francisco, CA.

Camina, C. (1999). Modelado y Respuesta en Frecuencia de los Sistemas Muestreados Multifrecuencia. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia.



Cantoni, M.W.; Glover, K. (1997)  $H_\infty$  Sampled-Data Synthesis and Related Numerical Issues. *Automatica*. Vol. 33, No. 12, pp. 2233-2241.

Casanova, V.; Salt, J. (1999) First approximation on the design of a multirate control loop for an ICCS. Proceedings of 15<sup>th</sup> ISPE/IEE International conference on CAD/CAM, robotics and factories of the future, Aguas de Lindoa (Brasil).

Casanova, V.; Salt, J. (2000) Multirate control for an ICCS environment. Part I : The random access delays. Proceedings of 2<sup>nd</sup> IFAC Workshop on linear time delay systems, Ancona (Italia).

Casanova, V.; Salt, J. (2002) Real-time implementation of multirate control techniques for an ICCS. Proceedings of 15<sup>th</sup> IFAC World Congress, Barcelona (España).

Chen, T.; Francis, B.A. (1991)  $H_2$ -optimal sampled-data control. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-36, No. 4, pp. 387-397.

Chen, T.; Francis, B.A. (1996)  $H_\infty$ -Optimal Sampled-data Control: Computation and Design. *Automatica*. Vol. 32, No. 2, pp. 223-228.

Chen, T.; Qiu, L. (1994)  $H_\infty$  design of general multirate sampled-data control systems. *Automatica*. Vol. 30, No. 7, pp. 1139-1152.

Coffey, T.C.; Williams, I.J. (1966) Stability analysis of multiloop, multirate sampled systems. *AIAA J. Guidance Contr. Dynamics*. Vol. 14, No.12, pp. 2178-2190.

Colaneri, P.; Kucera, V. (1997) The Model Matching Problem for Periodic Discrete-Time systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-42, pp. 1472-1476.

Colaneri, P.; Scattolini, R.; Schiavoni, N. (1990) Stabilization of multirate sampled-data linear systems. *Automatica*. Vol. 26, No. 2, pp. 377-380.

Colaneri, P.; Scattolini, R.; Schiavoni, N. (1992) LQG optimal control of multirate sampled-data systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*. Vol. 37, No. 5, pp. 675-682.

Coll, C.; Bru, R.; Hernández, V.; Sánchez, E. (1994) Discrete-time linear periodic realization in the frequency domain. *Linear Algebra and its Appl.*, Vol. 203-204, pp. 301-326.

Dahleh, M.A.; Voulgaris, P.G.; Valavani, L.S. (1992) Optimal and robust controllers for periodic and multirate systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-37, No. 1, pp. 90-99.

De la Sen, M.; Marco, J.L.; López-Abadía, C. (1987) Multirate adaptive control with applications to the lateral dynamics of aircraft. *Int. J. Control*, Vol. 45, pp. 759-778.

Dullerud, G.D.; Glover, K. (1996) Robust Performance of Periodic Systems. *IEEE Trans. On Automatic Control*, Vol. 41, No. 8, pp. 1146-1159.

Er, M.J.; Anderson, B.D.O. (1991) Practical Issues in multirate output controllers. *Int. J. Control*, Vol. 53, No. 5, pp. 1005-1020.

Feliu, V.; Cerrada, J.A.; Cerrada, C. (1990) A method to design multirate controllers for plants sampled at a low rate. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-35, pp. 57-60.

Feuer, A.; Goodwin, G.C. (1994) Generalized Sample-Hold Functions Frequency Domain Analysis of Robustness, Sensitivity, and Intersample Difficulties *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, No. 5, pp. 1042-1047.

Flamm, D.S. (1991) A new shift-invariant representation for periodic linear systems. *Systems and Control Letters*. Vol. 17, pp. 9-14.

Flamm, D.S. (1993) Single-loop stability margins for multirate and periodic control systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 38, No. 8, pp. 1232-1236.

Francis, B.A.; Georgiou, T.T. (1988) Stability theory for linear time-invariant plants with periodic digital controllers. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 33, No. 9, pp. 820-832.

Freudenberg, J.S.; Middleton, R.H.; Braslavsky, J.H. (1995) Inherent Design Limitations for Linear Sampled-Data Feedback Systems. *Int. J. Control*, Vol. 61, No. 6, pp. 1387-1421.

Friedland, B. (1961) Sampled-data control systems containing periodically varying members. *Proc. of the 1st IFAC Congress, Moscow*, pp. 361-367.

Fuster, A. (1988) External description for multivariable systems sampled in an aperiodic way. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 33, No. 4, pp. 381- 384.

Fuster, A.; Guillen, M. (1987) A new modelling technique for periodic sampling linear systems. *Int. J. Control.*, vol.45, No. 3, pp 951-968.

Glasson, D.P. (1982) A new technique for multirate digital control. *AIAA Journal of Guidance and Control Dynamics*. Vol. 5, pp. 379-382.

Glasson, D.P. (1983). Development and applications of multirate digital control. *Control Syst. Magazine*, 3, pp. 2-8.

Glasson, D.P.; Dowd, J. (1981) Research in Multirate Estimation and Control-Optimal Sample Rate Selection. Report No. TR-1356-2, The Analytic Sciences Corp., Reading, MA.

Godbout, L.F.; Jordan, D.; Apostolakis, I.S. (1990) Closed-loop model for general multirate digital control systems. *IEE Proceedings*, Vol. 137, Pt. D, No. 5, pp. 329-336.

Goodwin, G.C.; Feuer, A. (1992) Linear periodic control: A frequency domain viewpoint. *Systems and Control Letters*, Vol. 19, pp. 379-390.

Goodwin, G.C.; Feuer, A.; Lee, S.J. (1998) On the reconstruction of a finite sum of sinusoids from non-uniform periodic samples. *Int. J. Control*, Vol. 71, No. 4, pp. 615-629.

Goodwin, G.C.; Salgado, M. (1994) Frequency Domain Sensitivity Functions for Continuous Time Systems under Sampled Data Control. *Automatica*, Vol. 30, No. 8, pp. 1263-1270.

Graselli, O.M. (1984) A canonical decomposition of linear periodic discrete-time systems. *Int. J. Control*, Vol. 40, No. 1, pp. 201-214.

Graselli, O.M.; Jetto, L.; Longhi, S. (1995) Ripple-free dead-beat tracking for multi-rate sampled data systems. *Int. J. Control*, Vol. 61, No. 6, pp. 1437-1455.

Graselli, O.M.; Longhi, S.; Tornambe, A. (1995) System equivalence for periodic models and systems. *Siam J. Control and Optimization*, Vol. 33, No. 2, pp. 455-468.

Graselli, O.M.; Longhi, S.; Tornambe, A.; Valigi, P. (1996) Robust output regulation and tracking for linear periodic systems under structured uncertainties. *Automatica*, Vol. 32, No. 7, pp. 1015-1019.

Hagiwara, T.; Araki, M. (1988) Design of a stable feedback controller based on the multirate sampling of the plant output. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-33, No. 9, pp. 812-819.

Hagiwara, T.; Araki, M. (1995) FR Operator Approach to the  $H_2$  Analysis and Synthesis of Sampled-Data Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-40, No. 8, pp. 1411-1421.

Hagiwara, T.; Araki, M. (1996) Absolute stability of Sampled-Data Systems with a sector nonlinearity. *Systems and Control Letters*, Vol. 27, pp. 293-304.

Hagiwara, T.; Araki, M. (1998) Robust Stability of Sampled-Data Systems Under Possibly Unstable Additive/Multiplicative Perturbations. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-43, No. 9, pp. 1340-1346.

Hagiwara, T.; Fujimura, T.; Araki, M. (1990) Generalized multirate-output controllers. *Int. J. Control*, Vol. 52, No. 3, pp. 597-612.

Hagiwara, T.; Ito, Y.; Araki, M. (1995) Computation of the frequency response gains and  $H_\infty$ -norm of a sampled data system. *Systems and Control Letters*, Vol. 25, pp. 281-288.

Hagiwara, T.; Kuroda, G.; Araki, M. (1998) Popov-Type Criterion for Stability of Nonlinear Sampled-Data Systems. *Automatica*, Vol. 34, No. 6, pp. 671-682.

Halevi, Y., Ray A. (1988) Integrated Communication and Control Systems. Part I - Analysis. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. Vol. 110, 367-373.

Halevi, Y., Ray A. (1990) Performance Analysis of Integrated Communication and Control System Networks. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. Vol. 112, 365-371.

Hall, S.R.; Wereley N.M. (1990) Generalized Nyquist Stability Criterion for Linear Time Periodic Systems. Proc. of American Control Conf., San Diego, pp. 1518-1525.

Hara, T.; Tomizuka, M. (1998) Multi-rate Controller for Hard-disk Drive with Redesign of State Estimator. Proc. of the American Control Conf., Philadelphia, pp. 3033-3037.

Hayakawa, Y.; Hara, S.; Yamamoto, Y. (1994)  $H_\infty$  Type Problem for Sampled-Data Control Systems: A solution Via Minimum Energy Characterization. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-39, No. 11, pp. 2278-2284.

Hovestädt, E. (1991) Multirate control algorithms for time-variable sampling periods. IFAC Design Methods of Control Systems, Zurich, Switzerland, pp. 105-110.

In, H.; Zhang, C. (1994) A multirate digital controller for model matching. Automatica, Vol. 30, No. 6, pp. 1043-1050.

Isermann, R. (1981) Digital Control Systems. Springer Verlag.

Jury, E.I. (1958) Sampled Data Control Systems. John Wiley and Sons, Inc., New York.

Jury, E.I.; Mullin, F.J. (1959) The analysis of sampled-data control systems with a periodically time-varying sampling rate. IRE Trans. on Automatic Control, pp. 15-21.

Kabamba, P.T. (1987) Control of linear systems using generalized sampled-data hold functions. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-32, No. 9, pp. 772-783.

Kalman, R.E.; Bertram, J.E. (1959) A unified approach to the theory of sampling systems. J. Franklin Institute, Vol. 267, pp. 405-436.

Khargonekar, P.P.; Özgüler A.B. (1994) Decentralized Control and Periodic Feedback IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. 39, No. 4, pp. 877 - 882.

Khargonekar, P.P.; Poolla, K.; Tannenbaum, A. (1985) Robust control of linear time-invariant plants using periodic compensation. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-30, No. 11, pp. 1088 - 1096.

Kranc, G.M. (1957a) Input-output analysis of multirate feedback systems. IEEE Trans. on Automatic Control. Vol. AC-3, pp. 21-28.

Kranc, G.M. (1957b) Compensation of an error-sampled system by a multirate controller. Trans. AIEE, Vol. 6, M. 6, part II, pp. 149-155.

Lee, J.H.; Gelormino, M.S.; Morari, M. (1992) Model predictive control of multirate sampled-data systems: a state-space approach. Int. J. Control. Vol. 55, No. 1, pp. 153-191.

Lee, J.J.; Xu, Y. (1993) A Multi-Rate Control Scheme of Robot Manipulators. Journal of Systems Eng., Vol. 1, pp. 22-33.

Leung, G.M.H.; Perry, T.P.; Francis, B.A. (1991) Performance Analysis of Sampled-Data Control Systems. *Automatica*, Vol. 27, No. 4, pp. 699-704.

Lin, Ch.; Kin, Ch. (1993) Minimal periodic realizations of transfer matrices. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-38, No. 3, pp. 462-466.

Liou, L-W., Y., Ray A. (1990) Integrated Communication and Control Systems. Part III - Nonidentical Sensor and Controller Sampling. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. Vol. 112, 357-364.

Longhi, S. (1994) Structural Properties of Multirate Sampled-Data Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*. Vol. 39, No. 3, pp. 692-696.

López, I. (2001) Control de Procesos Continuos mediante un Sistema de Control Muestreado Multifrecuencia con Controlador PID Multifrecuencia. Documento interno del Departamento de Informática y Automática de la UNED.

Manual1 ( ) Manual de Usuario del Entrenador de Servos Analógicos Fundamentales 33-002. Manual del fabricante.

Manual2 (1999) VxWorks Reference Manual and Programmer's Guide.

Manual3 (1999) Tornado User's Guide (Windows Version).

Mellado, M.; Cartujo, P.; Dormido, S. (1971) Aplicación del muestreo aperiodico al problema de la adaptación de señales. *Anales de Física*, Vol. 67, No. 1-2, pp. 69-76.

Mellado, M.; Cartujo, P.; Guillén, J.M. (1970) Expresión general para el estudio de sistemas de muestreo aperiodico. *Anales de Física*, Vol. 64, No. 1-2, pp. 39-47.

Meyer, D.G. (1990) A new class of shift-varying operators, their shift-invariant equivalents, and multirate digital systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. AC-35, No. 4, pp. 429-433.

Meyer, R.A.; Burrus, C.S. (1975) A unified analysis of multirate and periodically time-varying digital filters. *IEEE Trans. Circuits Syst.*, CAS-22, pp.162-168.

Meyer, R.A.; Burrus, C.S. (1976) Design and implementation of multirate digital filters. *IEEE Trans. Acoust., Speech and Signal Processing*. Vol. ASSP-24, No.1, pp. 53-58.

Misra, P. (1996) Time-invariant Representation of Discrete Periodic Systems. *Automatica*, Vol. 32, No. 2, pp. 267-272.

Mita, T.; Chilla, Y. (1988) Two-delay robust control: Avoiding the problem on unstable zeros. *Proc. of the 27<sup>th</sup> IEEE Conf. on Decision and Control*, pp. 1883-1888.

Morant, F., Albertos, P., Crespo, A. (1986) Oxide composition control in a raw material mill. *IFAC Symp. on Microprocessor in Control*. Istanbul.

Moore, K.L.; Bhattacharyya, S.P.; Dahleh, M. (1993) Capabilities and limitations of multirate control schemes. *Automatica*, Vol. 29, No. 4, pp. 941-951.

Nemani, T.; Tsao, T.; Hutchinson, S. (1994) Multi-Rate Analysis and Design of Visual Feedback Digital Servo-Control System. *Journal of Dyn. Sys., Meas. and Control*, Vol. 116, No. 1, pp. 45-55.

Ogata, K. (1974) *Ingeniería de control moderna*. Prentice-Hall International, N. Jersey.

Ogata, K. (1987) *Dinámica de sistemas*. Prentice-Hall Hispanoamericana, México.

Patel, R.V.; Munro, N. (1982) *Multivariable System Theory and Design*. Pergamon Press, London.

Phillips, C.L.; Nagle, H.T. (1984) *Sistemas de Control Digital: Análisis y Diseño*. Editorial Prentice-Hall.

Qiu, L.; Chen, T. (1994)  $H_2$ -optimal design of multirate sampled-data systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, Vol. 39, No. 12, pp. 2506-2511.

Qiu, L.; Tan, K. (1998) Direct State Space Solution of Multirate Sampled Data  $H_2$  Optimal Control. *Automatica*, Vol. 34, No. 11, pp. 1431-1437.

Ragazzini, J.R.; Franklin, G.F. (1958) *Sampled Data Control Systems*. John Wiley and Sons, Inc., New York.

Ray A., Halevi, Y. (1988) Integrated Communication and Control Systems. Part II - Design Considerations. *Journal of Dynamic Systems, Measurement and Control*. Vol. 110, 374-381.

Ritchey, S.; Franklin, G. (1989) A stability criterion for asynchronous multirate linear systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*. Vol. 34, pp. 529-535.

Sagfors, M.F.; Toivonen, H.T.; Lennartson, B. (1998)  $H_\infty$  Control of Multirate Sampled-Data Systems: A State-Space Approach. *Automatica*, Vol. 34, No. 4, pp. 415-428.

Salt, J. (1992). Control de procesos industriales con muestreo no convencional. Tesis Doctoral. Departamento de Ingeniería de Sistemas, Computadores y Automática, Universidad Politécnica de Valencia.

Salt, J.; Albertos, P.; Tornero, J. (1994) Digital Control Improvement by Multirate Control. Proc. of the 3rd IEEE Conf. in Control Applications. Glasgow, U.K., Vol. 2, pp. 1459-1464.

Salt, J.; Camiña, C. (1997a) Control Digital con Muestreo No-Convencional: Perspectivas. III Seminario Internacional De Sistemas Avanzados de Manufactura. Universidad Tecnológica de Pereira (Colombia).

Salt, J.; Tornero, J.; Albertos, P. (1993) Modelling of Non-Conventional Sampled Data Systems. Proc. of the 2nd IEEE Conf. Control Applications. Vancouver, Canada, pp. 631-635.

Salt J.; Valera A. (1997b) Some Multirate Control Strategies of A Single-Link Flexible Joint Robot Manipulator. Proceedings of the 13th International Conference On Cad-Cam Robotics And Factories of The Future.

Salt, J.; Albertos, P. (2000) Multirate controllers design by rate decomposition. Proceedings of 30<sup>th</sup> Conference on Decision and Control, Sydney (Australia).

Sklansky, J.; Ragazzini, J.R. (1955). Analysis of errors in sampled-data feedback systems. AIEE Trans., Vol. 74, part II, pp. 65-71.

Skogestad, S.; Postlethwaite, I. (1996). Multivariable Feedback Control: Analysis and Design. John Wiley and Sons.

Sun, F.; Sun, Z.; Zhang, R.; Zhang, F. (1996) A multirate adaptive composite controller for flexible-link robots using neural networks. IEEE International Conf. on Systems, Man and Cybernetics, Vol. 2, pp. 1036-1041.

Tham, M.T.; Vagi, F.; Morris, A.J.; Wood, R.K. (1991) Multivariable and multirate self-tuning control. A distillation column case study. IEE Proc., Part D, Vol. 138, No. 1, pp. 9-24.

Thomas, H. W.; Lutte, N. P. (1972) Z-transform analysis of nonuniformly sampled digital filters. Proc. IEE, Vol. 119, No. 11.

Thompson, P.M. (1986) Gain and phase margins of multirate sampled-data feedback systems. Int. J. Control, Vol. 44, No. 3, pp. 833-846.

Thompson, P.M. (1988) Program CC, Ver. 4: Reference Manual, Tutorial and User's Guide. Systems Technology Inc. Hawthorne, CA.

Thompson, P.M.; Dailey, R.L.; Doyle, J.C. (1986) New Conic Sectors for Sampled-Data Feedback Systems. Systems and Control Letters, Vol. 7, pp. 395-404.

Thompson, P.M.; Stein, G.; Athans, M. (1983) Conic Sectors for Sampled-Data Feedback Systems. Systems and Control Letters, Vol. 3. pp. 77-82.

Toivonen, H.T. (1992) Sampled-Data Control of Continuous-time Systems with an  $H_\infty$  Optimally Criterion. Automatica, Vol. 28, No.1, pp. 45-54.

Toivonen, H.T.; Sagfors, M.F. (1997) The sampled-data  $H_\infty$  problem: a unified framework for discretization-based methods and Ricatti equation solution. Int. J. Control, Vol. 66, No. 2, pp. 289-309.

Toivonen, H.T. (1998) A mixed  $H_2/H_\infty$  control problem for sampled-data systems. Int. J. Control, Vol. 70, No. 4, pp. 579-602.

Tornero, J. (1985) Una nueva metodología para el estudio de sistemas muestreados multifrecuencia: Modelado y diseño de controladores. Tesis Doctoral. ETSII. Universidad Politécnica de Valencia.

Tornero, J.; Albertos, P. (1986) A new methodology for modelling, analysis and control design of non-conventional sampled data systems. Proc. of the IFAC Symp. on Software for Computer Control. Graz, Austria.

Tornero, J.; Albertos, P. (1987) An Event Oriented Simulation Method. Int. Symposium on AI, Expert Systems and Languages in Modelling and Simulation, pp. 126-137.

Tornero, J.; Gu, Y.; Tomizuka, M. (1999) Analysis of Multi-rate Discrete Equivalent of Continuous Controller. Proceedings of the American Control Conference, pp 2759-2763. San Diego, California.

Tsao, T.; Hutchinson, S. (1994) Multi-rate Analysis and Design of Visual Feedback Digital Servo-Control. Journal of Dynamic Systems Measurement and Control, Vol. 116, no. 1, pp. 45-55.

Valera, A. (1998) Análisis comparativo de técnicas de control de robots rígidos y flexibles. Tesis Doctoral. Dep. de Ingeniería de Sistemas y Automática. Univ. Politécnica, Valencia.

Valera, A.; Salt, J.; Sanchis, J.; Tornero, J. (1996) Dual Rate Control of a Single Flexible Manipulator. Proc. of the 12th International Conf. on CAD/CAM Robotics and Factories of the Future, London..

Vélez, C.M.; Salt, J. (2000) Simulation of Irregular Multirate Systems. Proceedings of 8<sup>th</sup> Symposium on Computer Aided Control System Design. Salford. United Kingdom.

Voulgaris, P. G. (1996) Optimal  $l_\infty$  to  $l_\infty$  estimation for periodic systems. IEEE Trans. on Automatic Control, Vol. AC-41. No. 9, pp. 1392-1396.

Voulgaris, P.G.; Dahleh, M.A.; Valavani, L.S. (1994)  $H_\infty$  and  $H_2$  optimal controllers for periodic and multirate systems. Automatica, Vol. 30, No. 2, pp. 251-263.

Voulgaris, P.G.; Bamieh, B. (1993) Optimal  $H_\infty$  and  $H_2$  control of hybrid multirate systems. System and Control Letters, Vol. 20, pp. 249-261.

Walton, V.M. (1981) State-space stability analysis of multirate-multiloop sampled data systems. Proc. of the AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conf. Lake Tahoe, NE. Paper 87-201.

Wereley, N.M.; Hall, S.R. (1990) Frequency Response of Linear Time Periodic Systems. Proc. of the 29th IEEE Conf. on Decision and Control, Honolulu, Hawaii, pp. 3650-3655.

Whitbeck, R.F.; Didaleusky, D.C.J. (1980) Multirate digital control systems with simulation applications. Report AFWAL-TR-80-3101, Vols. I, II and III. Flight Dynamics Laboratory. Systems Tech. Inc, Hawthorne, California.

Yamamoto, Y.; Araki, M. (1994) Frequency response of sampled-data systems. Their equivalence and relationships. Linear Algebra and its Applications, Vol. 205-206, pp. 1319-1339.



Zhang, J. (1998) Stabilizing predictive control for linear periodically time-varying systems. Proc. of the IFAC Low Cost Aut. Congress, TS13, pp. 21-25.

Zhang, C.; Zhang, J. (1997)  $H_2$  performance of continuous time periodically time varying controllers. Systems and Control Letters, Vol. 32, pp. 209-221.

Zhang, C.; Zhang, J.; Furuta, K. (1997) Analysis of  $H_2$  and  $H_\infty$  performance of discrete periodically time varying controllers. Automatica, Vol. 33, No. 4, pp. 619-634.

Zhu, K.Y.; Ling, K.V. (1994) Multirate control for a gasification process. Proc. of the American Control Conf., Green Valley, AZ, USA, Vol. 3, pp. 3268-3272.