VALENCIA 2000

Universidad Politécnica de Valencia
Departamento de Matemática Aplicada

Universalidad, Hiperciclicidad y Caos en Espacios de Fréchet

Memoria presentada por
Félix Martínez Giménez
para optar al grado de
Doctor en Ciencias
Matemáticas

D. Alfredo Peris Manguillot, Profesor Titular de Matemáticas en la E.T.S. de Arquitectura de la Universidad Politécnica de Valencia

CERTIFICA:

que la presente memoria ‘‘Universalidad, Hiperciclicidad y Caos en Espacios de Fréchet’’ ha sido realizada bajo mi dirección por Félix Martínez Giménez y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Y para que así conste en cumplimiento de la legislación vigente presento y apadrino ante la Comisión de Doctorado de la Universidad Politécnica de Valencia la referida tesis firmando el presente certificado.

Valencia, a 7 de julio de 2000

El director:
Alfredo Peris Manguillot

a mis padres

Quisiera expresar mi más profundo y sincero agradecimiento a todas aquellas personas que me han mostrado su apoyo durante la realización de esta memoria, en especial a E. Sánchez, María J. Rivera y J.A. López Molina.

Mi agradecimiento de forma especial a Alfredo Peris Manguillot por su inestimable ayuda, su paciencia, su apoyo en todo momento, su amistad y, en definitiva, por su excelente dirección de este trabajo, sin la cual no podría haberlo llevado a cabo.

Nuestro agradecimiento de forma especial a J. Bonet Solves, coautor de los resultados del capítulo 2, y por sus valiosas sugerencias e ideas que aportó al capítulo 3, en especial en el estudio de la hiperciclicidad de operadores de composición en el álgebra $L(E)$.

Por último, y no por ello en menor grado, a mi familia por la ilusión y el apoyo que me han dado.

Valencia, julio de 2000.

Índice General

Introducción

El propósito general de esta memoria es el estudio de la hiperciclicidad y el caos de operadores en espacios de sucesiones. También estudiamos la incidencia de los productos tensoriales en la universalidad.

En un espacio vectorial topológico, diremos que un vector del espacio es hipercíclico para un operador si la órbita del vector respecto de dicho operador, definida como el conjunto de sus iteraciones, es densa en el espacio. Un operador es hipercíclico si tiene un vector hipercíclico. La hiperciclicidad es un caso particular de una noción más amplia llamada universalidad. Una familia de operadores $\{T_i\}_{i\in I}$ se dice que es universal si existe un vector x de manera que $\{T_ix\}_{i\in I}$ es denso en el espacio. Como puede observarse la hiperciclicidad de un operador T consiste pues en estudiar la universalidad de la sucesión $\{T_n := T^n\}_{n\geq 1}$ de operadores formada por sus iteraciones.

Un vector se dice que es cíclico para un operador si la envoltura lineal de su órbita es densa en el espacio. Además la clausura de la envoltura lineal de la órbita de un vector es el menor subespacio cerrado invariante que contiene al vector. Por tanto un operador no tiene subespacios cerrados invariantes no triviales si y sólo si todo vector no nulo es cíclico. Un vector se dice que es supercíclico para un operador si los múltiplos escalares de los elementos de su órbita son densos en el espacio. Finalmente, un operador no tiene subconjuntos cerrados invariantes no triviales si y sólo si cada vector no nulo es hipercíclico. Obviamente un vector hipercíclico es supercíclico y a su vez un vector supercíclico es cíclico. Al igual que se observó anteriormente, los conceptos de ciclicidad y superciclicidad de un operador T también pueden estudiarse como un caso particular de universalidad, basta para ello con tomar las familias de operadores $\{\sum_{k=0}^{n} a_kT^k\}_{n\in\mathbb{N}_0,a_0,\dots,a_n\in\mathbb{K}}$ y $\{\lambda T^n\}_{\lambda\in\mathbb{K},n\in\mathbb{N}_0}$ respectivamente.

Los vectores y operadores hipercíclicos aparecen por primera vez en los trabajos de Birkhoff, MacLane y Rolewicz. En 1929 G.D. Birkhoff [17] estableció un interesante resultado sobre las órbitas de funciones por operadores traslación en el espacio de las funciones enteras. Concretamente, si consideramos el espacio de Fréchet $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ dotado de la topología de convergencia uniforme sobre los conjuntos compactos del plano complejo, y el operador traslación $T_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ definido como

$$T_a f(z) = f(z+a) \quad (f \in \mathcal{H}(\mathbb{C}),\ z \in \mathbb{C},\ a \in \mathbb{C}),$$

Birkhoff demuestra que si $a \neq 0$, entonces existe una función $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ cuya órbita $\{T_a^n f\}_{n=0}^{\infty}$ es densa en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Es decir, existe una función "universal" tal que, en cada conjunto compacto, sus traslaciones se aproximan a cualquier función entera tanto como se desee.

En 1952 G. R. MacLane [50] demuestra que el operador derivada $D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \to \mathcal{H}(\mathbb{C})$ también es hipercíclico.

El estudio de los operadores hipercíclicos en espacios de Hilbert apareció por primera vez en 1969 de la mano de S. Rolewicz [60], quien prueba que si B es el operador "backward shift" en l_2 definido como $B(a_1, a_2, a_3, \dots) := (a_2, a_3, \dots)$, entonces λB es hipercíclico para todo número complejo λ de módulo mayor que la unidad.

Referimos al excelente survey sobre universalidad e hiperciclicidad de K.G. Grosse-Erdmann [39] para más detalles y ejemplos.

Por otro lado, recientemente, el estudio de los operadores hipercíclicos ha aparecido en el análisis de los sistemas dinámicos discretos. Una de las definiciones más comúnmente aceptadas de aplicación caótica es la propuesta por R.L. Devaney [30]; una aplicación continua en un espacio métrico es caótica si es transitiva, el conjunto de puntos periódicos es denso en el espacio y tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales (véase 0.2.14). En 1992 Banks et al. [5] demuestran que en espacios métricos, una aplicación continua que es transitiva y posee un conjunto denso de puntos periódicos tiene necesariamente dependencia sensible de las condiciones iniciales. Para aplicaciones continuas en espacios métricos completos separables, transitividad es equivalente a hiperciclicidad y el estudio de la transitividad es el principal escalón para establecer que una aplicación es caótica. Por tanto en nuestro contexto de trabajo (espacios de Fréchet) tenemos que una aplicación continua es caótica si y sólo si es hipercíclica y posee un conjunto denso de puntos periódicos.

Pasamos a continuación a describir brevemente el contenido de los cinco capítulos de los que consta esta memoria. En el capítulo 0 establecemos algunas notaciones y preliminares que se usarán en la memoria. Es de resaltar la sección 0.2.4, en la que probamos un lema que será repetidamente utilizado en posteriores capítulos. Este lema puede ser considerado como una generalización del Principio de Comparación de Hiperciclicidad de Shapiro [65, p. 111].

En el capítulo 1 caracterizamos la hiperciclicidad y el caos de operadores backward shift ponderados en espacios escalonados de Köthe. De esta manera extendemos el estudio que hizo Salas [62] de la hiperciclicidad de este tipo de operadores en el espacio l_2. Nuestras caracterizaciones pueden aplicarse a operadores clásicos definidos en espacios de funciones al representar éstos como espacios de Köthe (véase [19, 28, 35, 48]); y a ejemplos que provienen de la Física (véase [36, 41, 59]). Probamos que perturbaciones de la identidad por operadores backward shift ponderados son hipercíclicas en espacios de Köthe, generalizando de esta manera otro resultado de Salas [62] en l_2, que a su vez respondía a una pregunta de Chan y Shapiro [28]. Además caracterizamos cuándo este tipo de operadores son caóticos. Finalmente, en la sección 1.4, estudiamos backward shift generalizados (en el sentido de Godefroy y Shapiro [36]) en espacios de Fréchet, contestando además de forma afirmativa a una pregunta en [36].

En el capítulo 2 demostraremos que ninguna perturbación de la identidad por un operador compacto en un espacio de Fréchet es caótica. Este resultado contrasta con la solución a la pregunta de Rolewicz [60] en 1969 sobre la existencia de operadores hipercíclicos en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita. En 1997 Ansari [2] y Bernal [8] contestan independientemente de forma afirmativa. Posteriormente Bonet y Peris [22] generalizan el resultado a espacios de Fréchet separables de dimensión infinita. En todos los casos los operadores hipercíclicos construidos son perturbaciones de la identidad por operadores compactos y por tanto no caóticos. Damos una respuesta negativa a la pregunta natural de si todo espacio de Fréchet separable de dimensión infinita admite operador caótico. Concretamente el contraejemplo es un espacio de Banach sobre el que no se pueden definir operadores caóticos. Éste está basado en resultados de Gowers y Maurey [37] concernientes a espacios de Banach hereditariamente indescomponibles.

El capítulo 3 está dedicado al estudio de la incidencia de los productos tensoriales en la universalidad, la hiperciclicidad y el caos. Este estudio nos permitirá obtener resultados sobre universalidad, hiperciclicidad y caos de operadores definidos en espacios de varias variables a partir de la correspondiente propiedad en espacios de funciones de una variable. Obtendremos también consecuencias para operadores de composición definidos en el álgebra $L(E)$.

En el capítulo 4 vamos a estudiar la hiperciclicidad y el caos de polinomios. Bernardes [11] probó que para $d > 1$ no existen polinomios continuos d-homogéneos hipercíclicos en ningún espacio de Banach. Peris [58] presenta ejemplos de polinomios continuos d-homogéneos y caóticos (por tanto hipercíclicos) en espacios de Fréchet. Por otra parte, sin exigir homogeneidad, también prueba que existen polinomios caóticos en l_p en [57]. Nosotros daremos condiciones para que ciertos polinomios sean hipercíclicos y/o caóticos en espacios de Köthe.

Capítulo 0

Notaciones y preliminares

En este primer capítulo incluimos algunas definiciones y resultados, de carácter preliminar, que serán útiles en el desarrollo de la memoria. Establecemos también las notaciones a utilizar.

0.1 Notaciones en espacios localmente convexos

Sea E espacio localmente convexo (e.l.c.), denotaremos por $\mathcal{U}_0(E)$ el sistema de todos los 0-entornos (0-ent.) absolutamente convexos (abx.) en E. Por $\mathcal{B}(E)$ entenderemos el sistema de todos los acotados abx. en E, y $\mathrm{sc}(E)$ representará el conjunto de todas las seminormas continuas en E. Si X es un espacio normado, B_X denotará la bola unidad cerrada.

Si A es un subconjunto abx. de E, denotaremos por p_A el funcional de Minkowski asociado a A, y $E_{(A)} := \operatorname{lin} A / \ker p_A$ será espacio normado con la norma inducida por p_A.

Sea $\langle E, F\rangle$ un par dual. Denotaremos por $\sigma(E,F)$ y $\beta(E,F)$ las topologías en E de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos finitos de F y los $\sigma(F,E)$-acotados respectivamente.

Si E es e.l.c., E' y E^* serán los respectivos duales topológico y algebraico. $\widetilde{E}$ representará la completación de E. Si $C \subset E$, por $\Gamma(C)$ entenderemos la envoltura absolutamente convexa de C.

Otras notaciones como en [43, 46, 47, 55, 71, 52].

0.2 Universalidad, hiperciclicidad y caos

En esta sección vamos a definir tres conceptos básicos a lo largo de esta memoria. Nos referimos a universalidad, hiperciclicidad y caos. También veremos algunas relaciones existentes entre ellos en nuestro contexto de trabajo.

0.2.1 Universalidad

Definición 0.2.1 *Una sucesión de operadores* $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ *en un e.l.c.* E *se dice que es universal si existe un vector* $x \in E$ *tal que*

$$\overline{\{T_n x : n \in \mathbb{N}\}} = E.$$

A un tal vector x *se le llama universal para la sucesión de operadores* $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$.

A continuación damos una condición suficiente para establecer la universalidad de una sucesión de operadores que resulta ser útil. Está inspirada en el Criterio de Hiperciclicidad que dio J. Bès [12] (véase también [14]). Sobre este criterio hablaremos más extensamente en la sección 0.2.2 cuando consideremos el caso particular de las iteraciones de un único operador.

Teorema 0.2.2 (Criterio de Universalidad) *Sea* $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de operadores en un espacio de Fréchet separable* E*. Si existen subconjuntos densos* X *e* Y *de* E*, una sucesión creciente de naturales* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ *y aplicaciones* $S_{m_k} : Y \longrightarrow E$*,* $k \in \mathbb{N}$ *(posiblemente discontinuas o no lineales) tales que*

(i) $T_{m_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en* X*,*

(ii) $S_{m_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en* Y*,*

(iii) $T_{m_k} \circ S_{m_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} Id_Y$ *puntualmente en* Y*,*

entonces la sucesión $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ *es universal.*

Basta tener en cuenta que, si $\{V_n : n \in \mathbb{N}\}$ es una base de la topología de E, entonces para cada $n, m \in \mathbb{N}$ fijamos $x \in X \cap V_m$, $y \in Y \cap V_n$. Por (i), (ii) y (iii) existe $k \in \mathbb{N}$ tal que tomando

$$z := x + S_{m_k} y \in V_m,$$

se tiene

$$T_{m_k} z = T_{m_k} x + T_{m_k}\left(S_{m_k} y\right) \in V_n.$$

Es decir, $z \in V_m \cap T_{m_k}^{-1}(V_n)$, luego

$$G_n := \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m^{-1} V_n$$

es un abierto denso en E. El resultado se sigue al aplicar el teorema de Baire a

$$G := \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{m=1}^{\infty} T_m^{-1} V_n,$$

ya que cada elemento de G es universal. A la vista de lo anterior podemos incluso afirmar que el conjunto de vectores universales es denso en E.

Para el desarrollo de capítulos posteriores resultará útil establecer la siguiente

Definición 0.2.3 *Diremos que una sucesión de operadores $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ en un e.l.c. E satisface el Criterio de Universalidad (CU) respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, si $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface las hipótesis del teorema 0.2.2.*

Observación 0.2.4 Claramente si $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface el Criterio de Universalidad respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, y $\{m_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ cumple el Criterio de Universalidad respecto de $\{m_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$.

Observación 0.2.5 Sea $\{T_n : (E, \tau_i) \to (E, \tau_i) \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de operadores en (E, τ_i), $i = 1, 2$. Si la topología τ_1 es más fina que la topología τ_2 y $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface el Criterio de Universalidad para la topología τ_1, entonces también cumple el Criterio de Universalidad para τ_2. Esta afirmación se demuestra sin dificultad y jugará un papel importante en el capítulo 3.

Según la definición 0.2.3 los subconjuntos densos X e Y no son en general subespacios de E, tampoco las aplicaciones $S_{m_k} : Y \longrightarrow E$ son necesariamente lineales. A continuación vamos a probar que sin pérdida de generalidad podemos suponer que X e Y son subespacios densos de E y que las aplicaciones S_{m_k} son lineales.

Lema 0.2.6 *Sea $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ una sucesión de operadores en un espacio localmente convexo E. Si $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface el Criterio de Universalidad respecto de la sucesión $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces existen subespacios densos X' e Y' de E y aplicaciones lineales $S'_{m_k} : Y' \longrightarrow E$, $k \in \mathbb{N}$, tales que*

(i) $T_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en* X',

(ii) $S'_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en* Y',

(iii) $T_{m_k} \circ S'_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} Id_{Y'}$ *puntualmente en* Y'.

Demostración. Por hipótesis sabemos que existen subconjuntos densos X e Y de E, una sucesión creciente de naturales $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, y aplicaciones $S_{m_k} : Y \longrightarrow E$, $k \in \mathbb{N}$, (posiblemente no lineales, posiblemente discontinuas) tales que

(a) $T_{m_k}x \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in X$,

(b) $S_{m_k}y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $y \in Y$,

(c) $(T_{m_k} \circ S_{m_k})y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} y$ para todo $y \in Y$.

Tomamos $X' := \mathrm{lin}(X)$ e $Y' := \mathrm{lin}(Y)$. Obviamente X' e Y' son subespacios densos de E. Sea $\mathcal{B}$ una base algebraica de Y' tal que $\mathcal{B} \subset Y$. Para cada $y \in \mathcal{B}$ y $k \in \mathbb{N}$ definimos $S'_{m_k}(y) := S_{m_k}(y)$ y extendemos S'_{m_k} a todo Y' por linealidad. Se tiene (i), (ii) y (iii) de manera trivial a partir de (a), (b) y (c). ■

Observación 0.2.7 En virtud del lema anterior y cuando sea necesario (especialmente en el capítulo 3) supondremos que si una sucesión de operadores $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface el Criterio de Universalidad respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces los subconjuntos densos X e Y de E son subespacios densos de E, y también que las aplicaciones S_{m_k} son lineales para todo $k \in \mathbb{N}$.

0.2.2 Hiperciclicidad

Como se mencionó en la introducción, de los tres conceptos cíclicos que existen, nos centraremos fundamentalmente en la hiperciclicidad. Es un caso particular e importante de universalidad, el cual consiste en estudiar la universalidad de la sucesión formada por las iteraciones de un mismo operador.

Definición 0.2.8 *Un operador T en un e.l.c. E se dice que es hipercíclico si la sucesión $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ es universal, es decir, si existe un vector $x \in E$ tal que la órbita de x por T definida como*

$$\mathrm{Orb}(T, x) := \{x, Tx, T^2x, \dots\}$$

es densa en E. A un tal vector x se le llama vector hipercíclico para T.

Como es de esperar existe una condición suficiente, similar al teorema 0.2.2, para establecer la hiperciclicidad de un operador. Es conocido como Criterio de Hiperciclicidad. La primera versión de este criterio la probó C. Kitai [44] en su tesis doctoral en 1982. Éste no fue publicado y posteriormente R.M. Gethner y J.H. Shapiro [35] redescubrieron el criterio en una forma un poco más general en 1987.

Teorema 0.2.9 (Criterio de Hiperciclicidad (Kitai, Gethner-Shapiro)) *Sea T un operador en un espacio de Fréchet separable E. Si existen subconjuntos densos X e Y de E, una sucesión creciente de naturales $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y una aplicación $S : Y \longrightarrow Y$ (posiblemente discontinua y no lineal) tales que*

(i) $T^{m_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en X,*

(ii) $S^{m_k} \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en Y,*

(iii) $T \circ S = Id_Y$,

entonces el operador T es hipercíclico.

Posteriormente Godefroy y Shapiro [36] generalizan el criterio observando que en lugar de iterar una única función $S : Y \to Y$ es suficiente tener una sucesión de aplicaciones $\{S_{m_k}\}$ que sean inversas por la derecha de $\{T^{m_k}\}$ y que también converjan puntualmente a cero en Y. Es decir, establecen la siguiente versión más general.

Teorema 0.2.10 (Criterio de Hiperciclicidad (Godefroy-Shapiro)) *Sea T un operador en un espacio de Fréchet separable E. Si existen subconjuntos densos X e Y de E, una sucesión creciente de naturales $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y aplicaciones $S_{m_k} : Y \longrightarrow E$, $k \in \mathbb{N}$ (posiblemente discontinuas y no lineales) tales que*

(i) $T^{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en* X,

(ii) $S_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en* Y,

(iii) $T^{m_k} \circ S_{m_k} = Id_Y, \ k \in \mathbb{N}$,

entonces el operador T es hipercíclico.

J. Bès [12] (véase también [14]) todavía demuestra una versión más débil relajando la condición (iii). Su prueba es consecuencia de 0.2.2.

Teorema 0.2.11 (Criterio de Hiperciclicidad (Bès)) *Sea T un operador en un espacio de Fréchet separable E. Si existen subconjuntos densos X e Y de E, una sucesión creciente de naturales $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y aplicaciones $S_{m_k} : Y \longrightarrow E$, $k \in \mathbb{N}$ (posiblemente discontinuas y no lineales) tales que*

(i) $T^{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en* X,

(ii) $S_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ *puntualmente en* Y,

(iii) $T^{m_k} \circ S_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} Id_Y$ *puntualmente en* Y,

entonces el operador T es hipercíclico.

Análogamente a como hicimos para universalidad resultará útil establecer la siguiente

Definición 0.2.12 *Diremos que un operador T en un e.l.c. E satisface el Criterio de Hiperciclicidad (respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$) en el sentido de Godefroy-Shapiro (resp. Bès), si T satisface las hipótesis del teorema 0.2.10 (resp. teorema 0.2.11).*

También puede obtenerse una propiedad análoga a la observación 0.2.4, es decir,

Observación 0.2.13 Si T satisface el Criterio de Hiperciclicidad respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, y $\{m_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces T satisface el Criterio de Hiperciclicidad respecto de $\{m_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$.

0.2.3 Caos

Recientemente la hiperciclicidad se ha visto relanzada al tener relación con el caos de sistemas dinámicos discretos. Concretamente la transitividad de una aplicación continua y la existencia de un punto con órbita densa (respecto de la misma aplicación) son equivalentes en nuestro contexto de trabajo. A continuación vamos a definir de forma precisa estos conceptos y pondremos de manifiesto su relación.

Para sistemas dinámicos discretos, una de las definiciones de aplicación caótica más comúnmente aceptadas es la de R.L. Devaney [30].

Definición 0.2.14 (Devaney) *Sea X un espacio métrico y $f : X \to X$ una aplicación continua. Se dice que f es caótica si*

1. *f es topológicamente transitiva, es decir, para todos U y V abiertos no vacíos de X, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*
$$f^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$
2. *El conjunto*
$$\mathcal{P} := \{x \in X : \exists n \in \mathbb{N} \text{ con } f^n x = x\}$$
de los puntos periódicos de f es denso en X.
3. *f tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales, es decir, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x \in X$ y todo U entorno de x, existen $y \in U$ y $n \in \mathbb{N}$ con*
$$d(f^n(x), f^n(y)) > \varepsilon.$$

A pesar de que la propiedad (3) es la más intuitiva y conocida del caos, Banks et alt. [5] prueban en 1992 que (3) se deduce de (1) y (2), y por tanto esta propiedad es redundante.

La relación existente entre la transitividad y la existencia de puntos con órbita densa a la que hacíamos referencia en la introducción de esta sección se debe a la siguiente

Proposición 0.2.15 *Sean X un espacio métrico de Baire separable y perfecto (i.e., sin puntos aislados) y $f : X \to X$ aplicación continua. Entonces existe $x \in X$ cuya órbita respecto de f es densa en X si y sólo si f es topológicamente transitiva.*

Demostración. Por hipótesis sea $z \in X$ tal que $\{f^n z \ : \ n \in \mathbb{N}_0\}$ es denso en X. Sean U y V abiertos no vacíos de X. Existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $f^k z \in U$. Como X no tiene puntos aislados $\{f^m z \ : \ m > k\}$ también es denso en X, luego existe $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^{k+n} z = f^n \left(f^k z\right) \in V.$$

Basta tomar $y := f^k z \in U$, tenemos entonces que $f^n y \in V$ y por tanto

$$f^n (U) \cap V \neq \emptyset.$$

Recíprocamente, como X es espacio métrico separable satisface el $2^{\underline{\text{o}}}$ axioma de numerabilidad. Elegimos por tanto $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ base de abiertos para la topología de X. Para cada $n \in \mathbb{N}$ definimos

$$G_n := \{x \in X \ : \ \exists\ m \in \mathbb{N} \text{ con } f^m x \in V_n\},$$

o equivalentemente

$$G_n = \bigcup_{m=1}^{\infty} (f^m)^{-1} (V_n).$$

Obviamente, para todo $n \in \mathbb{N}$, G_n es abierto en X. Veamos que cada G_n es denso en X. Sean $n \in \mathbb{N}$ y un abierto U de X fijos. Como f es transitiva existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m(U) \cap V_n \neq \emptyset,$$

esto es, existe $x \in U$ tal que $f^m x \in V_n$, de donde $x \in U \cap G_n$.

Por ser X espacio de Baire tenemos que

$$G := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} G_n$$

es denso en X.

Veamos que cada punto z de G tiene órbita, respecto de f, densa en X. Sea $z \in G$ y U abierto cualquiera de X. Por la elección de $\{V_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $V_{n_0} \subset U$. Por otro lado, como $z \in G \subset G_{n_0}$ tenemos que existe $m \in \mathbb{N}$ tal que

$$f^m z \in V_{n_0} \subset U,$$

por tanto $\mathrm{Orb}(f, z)$ es densa en X. ■

Una consecuencia inmediata en el contexto de trabajo en el que nosotros tenemos es

Corolario 0.2.16 *Sea E un espacio de Fréchet separable. Un operador en E es hipercíclico si y sólo si es topológicamente transitivo.*

Observación 0.2.17 La transitividad es el principal escalón para establecer el caos de una aplicación continua. En espacios de Fréchet y según acabamos de probar, para operadores hipercíclicos sólo nos resta probar la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos para establecer el caos del operador.

Observación 0.2.18 Aunque el concepto de hiperciclicidad se definió inicialmente para operadores (aplicaciones lineales y continuas), por extensión, aplicaciones continuas para las que existe un punto con órbita densa también es usual denominarlas hipercíclicas. De esta manera, en el capítulo 4 estudiaremos la hiperciclicidad y caos de polinomios en espacios de Fréchet, entendiendo por polinomios hipercíclicos aquellos que tienen un punto con órbita densa.

0.2.4 Un lema útil

J.H. Shapiro [65, p. 111] probó una condición muy útil, conocida como el Principio de Comparación de Hiperciclicidad, que dice: Si un operador T :

$(E, \tau) \to (E, \tau)$ es tal que existe un subespacio denso $F \hookrightarrow E$ y una topología más fina τ' en F de manera que $T|_F : (F, \tau') \to (F, \tau')$ es hipercíclico, entonces T es hipercíclico. Nosotros generalizamos esta condición, incluyendo a su vez otros aspectos como la universalidad y el caos.

Lema 0.2.19 *Sea $\{T_{i,n} : E_i \to E_i : n \in \mathbb{N}\}$ sucesión de operadores definidos en un espacio de Fréchet separable E_i, $i = 1, 2$ y sea $\phi : E_1 \to E_2$ una aplicación continua con rango denso tal que $T_{2,n} \circ \phi = \phi \circ T_{1,n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$. Es decir, el diagrama*

$$\begin{array}{ccc} E_1 & \xrightarrow{T_{1,n}} & E_1 \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\big\downarrow \\ E_2 & \xrightarrow{T_{2,n}} & E_2 \end{array}$$

es conmutativo para todo $n \in \mathbb{N}$. Si $\{T_{1,n} : n \in \mathbb{N}\}$ es universal (satisface CU), entonces $\{T_{2,n} : n \in \mathbb{N}\}$ es universal (satisface CU). En particular, si consideramos la sucesión formada por las iteraciones $T_{i,n} := T_i^n$ de un mismo operador ($i = 1, 2$), se tiene:

(1) Si T_1 es hipercíclico, entonces T_2 es también hipercíclico.

(2) Si T_1 es caótico, entonces T_2 es también caótico.

(3) Si T_1 satisface el Criterio de Hiperciclicidad (en cualquiera de los sentidos de Godefroy-Shapiro o Bès mencionados en 0.2.12), entonces T_2 también satisface el Criterio de Hiperciclicidad (en el mismo sentido de Godefroy-Shapiro o Bès, respectivamente).

Demostración. Sea $x \in E_1$ un vector universal para $\{T_{1,n}\}_{n\geq 1}$, es decir, $\{T_{1,n}x\}_{n\geq 1}$ es denso en E_1. Entonces $\{T_{2,n} \circ \phi x\}_{n\geq 1} = \{\phi \circ T_{1,n}x\}_{n\geq 1}$ es denso en E_2 ya que ϕ es una aplicación continua con rango denso. De aquí deducimos que ϕx es un vector universal para $\{T_{2,n}\}_{n\geq 1}$.

Supongamos ahora que $\{T_{1,n} : E_1 \to E_1\}_{n\geq 1}$ satisface CU. Entonces existen subconjuntos densos $X, Y \subset E_1$, una sucesión creciente de naturales $\{n_k\}_{k\geq 1}$ y aplicaciones $S_{n_k} : Y \to E_1$ tales que $T_{1,n_k} \circ S_{n_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} Id_Y$ puntualmente en Y y $\{T_{1,n_k}\}_{k\geq 1}$ y $\{S_{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergen puntualmente a 0 en X e Y respectivamente. Definimos $\bar{X} := \phi(X)$ y $\bar{Y} := \phi(Y)$, que son densos en E_2

ya que ϕ tiene rango denso en E_2. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\phi(0) = 0$, si no fuera así tomaríamos $\tilde{\phi}(x) := \phi(x) - \phi(0)$. Observamos en primer lugar que $T_{2,n_k} \circ \phi x = \phi \circ T_{1,n_k} x \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para todo $x \in X$.

Para cada $\bar{y} \in \bar{Y}$, tomamos $y \in Y$ tal que $\phi(y) = \bar{y}$. Definimos

$$\bar{S}_{n_k} : \bar{Y} \to E_2, \text{ como } \bar{S}_{n_k}(\bar{y}) = \phi(S_{n_k}(y)), \ \bar{y} \in \bar{Y}.$$

Teniendo en cuenta la continuidad de ϕ y que $\{S_{n_k} y\}_{k\geq 1}$ converge a 0 para todo $y \in Y$, se tiene que

$$\bar{S}_{n_k}(\bar{y}) = \phi(S_{n_k} y) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

para todo $\bar{y} \in \bar{Y}$. Finalmente

$$T_{2,n_k} \circ \bar{S}_{n_k} \bar{y} = T_{2,n_k} \circ \phi \circ S_{n_k} y = \phi \circ T_{1,n_k} \circ S_{n_k} y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \phi(y) = \bar{y},$$

para todo $\bar{y} \in \bar{Y}$.

Cuando tenemos la sucesión formada por las iteraciones $T_{i,n} := T_i^n$ de un mismo operador ($i = 1, 2$), por lo visto anteriormente, (1) y (3) están probados. Para probar (2) sólo nos queda ver que si T_1 tiene un conjunto denso de puntos periódicos, entonces T_2 también lo tiene. Si

$$\mathcal{P}_1 := \{x \in E_1 \ / \ x \text{ es un punto periódico para } T_1\},$$

entonces

$$\phi(\mathcal{P}_1) \subset \mathcal{P}_2 := \{y \in E_2 \ / \ y \text{ es un punto periódico para } T_2\}.$$

Por tanto si $\mathcal{P}_1$ es denso en E_1 tenemos que $\mathcal{P}_2$ es denso en E_2. ■

Observación 0.2.20 (1) El Principio de Comparación de Shapiro se deduce fácilmente del lema anterior si exigimos que ϕ sea una aplicación lineal e inyectiva. Si ϕ es continua y sobreyectiva, entonces el sistema dinámico (T_1, E_1) se dice que es una *extensión* del sistema dinámico (T_2, E_2), y (T_2, E_2) es también conocido como un *factor* de (T_1, E_1). Si $\phi : E_1 \to E_2$ es un homeomorfismo entre espacios métricos, entonces los sistemas dinámicos (E_1, T_1) y (E_2, T_2) se dice que son *topológicamente conjugados*. Herrero observó en [42] la invariabilidad por similaridades de la clase de operadores hipercíclicos en un espacio de Hilbert H.

(2) Si ϕ es inyectiva observamos que si T_1 satisface el Criterio de Hiperciclicidad original de Kitai y Gethner-Shapiro, en este caso podemos definir $\bar{S} : \bar{Y} \to \bar{Y}$ como $\bar{S}\bar{y} := \phi \circ S \circ \phi^{-1}\bar{y}$, $\bar{y} \in \bar{Y}$. Entonces T_2 satisface también el Criterio de Hiperciclicidad de Kitai y Gethner-Shapiro.

0.3 Espacios de sucesiones de Köthe

En esta sección consideraremos espacios de sucesiones escalonados de Köthe. Recordaremos la definición y también veremos la representación como espacios de Köthe de algunos espacios de funciones que aparecen con frecuencia en hiperciclicidad.

Definición 0.3.1 *Una matriz infinita $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ se dice que es una matriz de Köthe si para cada $j \in \mathbb{N}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ con $a_{j,k} > 0$ y $0 \leq a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$. Para $1 \leq p < \infty$, consideramos los espacios escalonados de Köthe*

$$\lambda_p(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \|x\|_k := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j \ a_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty, \ \forall \ k \in \mathbb{N} \right\} ,$$

para $p = \infty$ y $p = 0$

$$\lambda_\infty(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \|x\|_k := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j| \, a_{j,k} < \infty, \ \forall \ k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\lambda_0(A) := \left\{ x \in \lambda_\infty(A) \ : \ \lim_{j\to\infty} x_j a_{j,k} = 0, \ \forall \ k \in \mathbb{N} \right\},$$

y son espacios de Fréchet al dotarlos con las seminormas $\{\|.\|_k, \ k \in \mathbb{N}\}$ definidas.

Un caso particular de espacios escalonados de Köthe son los espacios de series de potencias. Son muy importantes porque muchos espacios de funciones del análisis clásico son isomorfos a espacios de series de potencias a través de representaciones en series.

Definición 0.3.2 *Sea* $\alpha = (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión creciente en* $[0,\infty[$ *con* $\lim_{j\to\infty}\alpha_j = \infty$ *y* $r \in \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$*. Consideramos los espacios*

$$\Lambda_r(\alpha) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ |x|_t^2 := \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|^2 e^{2t\alpha_j} < \infty \ \textit{para todo } t < r \right\},$$

llamados espacios de series de potencias de tipo finito si $r < \infty$ *y de tipo infinito si* $r = \infty$*. La sucesión* α *es llamada sucesión exponente.*

Observación 0.3.3 Los espacios $\Lambda_r(\alpha)$ son espacios de Fréchet ya que para toda sucesión estrictamente creciente $(t_k)_{k\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{k\to\infty} t_k = r$ y $A := (e^{t_k\alpha_j})_{j,k\in\mathbb{N}}$ tenemos que $\Lambda_r(\alpha) = \lambda_2(A)$.

Observación 0.3.4 Cuando consideremos espacios de series de potencias podemos restringir nuestro estudio a los espacios $\Lambda_0(\alpha)$ y $\Lambda_\infty(\alpha)$, ya que la transformación diagonal

$$D : \Lambda_r(\alpha) \longrightarrow \Lambda_0(\alpha) \ : \ Dx := (e^{r\alpha_j} x_j)_{j\in\mathbb{N}},$$

es un isomorfismo para todo $r \in \mathbb{R}$.

Los espacios de Köthe son una generalización de los clásicos espacios l_p. La matriz de Köthe A describe muchas de las propiedades del espacio, por ejemplo una que utilizaremos en esta memoria es la caracterización de espacios de Köthe nucleares.

Proposición 0.3.5 *Sea* $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ *una matriz de Köthe. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\lambda_p(A)$ *es nuclear para algún* $p \in [1,\infty]$.

(ii) $\lambda_p(A)$ *es nuclear para todo* $p \in [1,\infty]$.

(iii) $\lambda_p(A) = \lambda_q(A) = \lambda_0(A)$ *para todo* p, q *con* $1 \le p, q \le \infty$.

(iv) Para cada $k \in \mathbb{N}$ *existe un* $m \in \mathbb{N}$, $m \ge k$ *tal que*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{a_{j,k}}{a_{j,m}} < \infty.$$

Referimos al lector a [52] o a [71] para la demostración de la proposición anterior. Para otros resultados resultados sobre espacios de Köthe referimos a los citados textos y también a [15].

En relación con los espacios de sucesiones, unas clases de operadores muy importantes definidos en ellos son los llamados backward shift y backward shift ponderados.

Definición 0.3.6 *Se define la aplicación backward shift (unilateral) B actuando sobre una sucesión $(x_1, x_2, \dots)$ como*

$$B(x_1, x_2, \dots) := (x_2, x_3, \dots).$$

Dada una sucesión de pesos $w = (w_2, w_3, \dots)$, se define la aplicación backward shift ponderada (unilateral) B_w, asociada w como

$$B_w(x_1, x_2, \dots) := (w_2 x_2, w_3 x_3, \dots).$$

Es decir

$$B_w e_{j+1} = w_{j+1} e_j, \; j \in \mathbb{N}.$$

Obviamente los backward shifts son aplicaciones lineales. Necesitamos que en el espacio de sucesiones en el que estemos trabajando estén bien definidos y sean continuos. Ése es el caso para $B : l_p \to l_p$ y para $B_w : l_p \to l_p$ si y sólo si $w \in l_\infty$. Los operadores backward shifts han sido ampliamente estudiados en los espacios l_p. Nuestro objetivo es estudiarlos en espacios de Köthe en relación a la hiperciclicidad y el caos. La siguiente proposición caracteriza cuándo están bien definidos y son continuos.

Proposición 0.3.7 *Sean $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe y $w = \{w_j\}_{j\geq 2}$ una sucesión de pesos.*

(i) $B : \lambda_p(A) \to \lambda_p(A)$ está bien definido y es continuo si y sólo si la matriz A satisface

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\; \exists\, m > n \;:\; \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty, \tag{1}$$

donde si $a_{j+1,m} = 0$, tenemos que $a_{j,n} = 0$ y consideramos $0/0$ como 1.

(ii) $B_w : \lambda_p(A) \to \lambda_p(A)$ *está bien definido y es continuo si y sólo si* A *y* w *cumplen*

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n\ :\ \sup_{j\in\mathbb{N}} |w_{j+1}| \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty. \tag{2}$$

Demostración. Basta probar (ii). Si B_w es continuo, entonces

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n,\ \exists\ M > 0\ :\ \|B_w x\|_n \leq M\|x\|_m,\ \forall x \in \lambda_p(A).$$

Si tomamos en particular $x = e_{j+1}$, con $j = 1, 2, \ldots$ obtenemos

$$|w_{j+1}|\, \|e_j\|_n \leq M\|e_{j+1}\|_m,\ j = 1, 2, \ldots$$

luego

$$|w_{j+1}|\, a_{j,n} \leq M\ a_{j+1,m},\ j = 1, 2, \ldots$$

de donde

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} |w_{j+1}| \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty\ .$$

Recíprocamente, si la matriz de Köthe A satisface (2) entonces

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n,\ \exists\ M > 0\ :\ |w_{j+1}|\, a_{j,n} \leq M\ a_{j+1,m},\ j = 1, 2, \ldots$$

Dada una seminorma $\|.\|_n$ y dado $x \in \lambda_p(A)$, existe $m > n$ tal que si $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned} \|B_w x\|_n &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |w_{j+1}\ x_{j+1}\ a_{j,n}|^p\right)^{1/p} \\ &\leq M \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_{j+1}\ a_{j+1,m}|^p\right)^{1/p} \leq M\|x\|_m < \infty \end{aligned}$$

(respectivamente, para $p = 0$ tenemos

$$\begin{aligned} \|B_w x\|_n &= \sup_{j\in\mathbb{N}} |w_{j+1}\ x_{j+1}|\, a_{j,n} \\ &\leq M \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_{j+1}|\, a_{j+1,m} \leq M\|x\|_m < \infty\ ) \end{aligned}$$

y entonces $B_w : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ es continuo y está bien definido. ■

Observación 0.3.8 Nótese que en este caso $B_w : \lambda_p(A) \to \lambda_p(A)$ está bien definido si y sólo si es continuo.

En los capítulos 1 y 4 vamos a obtener caracterizaciones en espacios de Köthe para el caos de operadores backward shift y de polinomios homogéneos respectivamente. En estas caracterizaciones jugará un papel importante la inclusión canónica $l_\infty \subset \lambda_p(A)$, inclusión que pasamos a caracterizar a continuación.

Proposición 0.3.9 *Sea $A = (a_{j,n})_{j,n\in\mathbb{N}}$ matriz de Köthe. Entonces $l_\infty \subset \lambda_p(A)$ de forma canónica si y sólo si la matriz A satisface que $\{a_{j,n}\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_p$ ($l_0 := c_0$ si $p = 0$), para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Si la matriz A satisface la condición de que $\{a_{j,n}\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_p$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\{x_j\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_\infty$, entonces

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j a_{j,n}|^p \leq M^p \sum_{j\in\mathbb{N}} a_{j,n}^p < \infty, \ \forall\, n \in \mathbb{N},$$

donde $M := \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|$ (para $p = 0$ basta observar que el producto de una sucesión acotada y una convergente a cero es una sucesión convergente a cero).

Recíprocamente, si existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\{a_{j,n_0}\}_{j\in\mathbb{N}} \notin l_p$, entonces $x := \{1\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_\infty$ pero $x \notin \lambda_p(A)$. ■

Los operadores backward shift también pueden definirse si tomamos espacios de Köthe de sucesiones en $\mathbb{Z}$. En este caso caso, estos espacios generalizan los $l_p(\mathbb{Z})$.

Definición 0.3.10 *Una matriz infinita $A = (a_{j,k})_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}$ se dice que es una matriz de Köthe si para cada $j \in \mathbb{Z}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ con $a_{j,k} > 0$ y $0 \leq a_{j,k} \leq a_{j,k+1}$ para todo $j \in \mathbb{Z}$, $k \in \mathbb{N}$. Para $1 \leq p < \infty$, consideramos los espacios escalonados de Köthe*

$$\lambda_p(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \ : \ \|x\|_k := \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |x_j \ a_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty, \ \forall\, k \in \mathbb{N} \right\} ,$$

para $p = \infty$ y $p = 0$

$$\lambda_\infty(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}} \ : \ \|x\|_k := \sup_{j\in\mathbb{Z}} |x_j|\, a_{j,k} < \infty, \ \forall\, k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\lambda_0(A) := \left\{ x \in \lambda_\infty(A) \ : \ \lim_{|j|\to\infty} x_j a_{j,k} = 0, \ \forall \ k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Para sucesiones en $\mathbb{Z}$, los operadores backward shift continuos y bien definidos también pueden caracterizarse.

Definición 0.3.11 *Se define la aplicación backward shift bilateral B actuando sobre una sucesión $(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots)$ como*

$$B(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) := (\dots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, x_3, \dots),$$

es decir,

$$Be_i := e_{i-1}, \ i \in \mathbb{Z}.$$

Dada una sucesión de pesos $w = (\dots, w_{-2}, w_{-1}, w_0, w_1, w_2, \dots)$, se define la aplicación backward shift ponderada bilateral B_w, asociada a w como

$$B_w(\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots) := (\dots, w_{-1}x_{-1}, w_0x_0, w_1x_1, w_2x_2, w_3x_3, \dots),$$

es decir,

$$B_w e_i := w_i e_{i-1}, \ i \in \mathbb{Z}.$$

Proposición 0.3.12 *Sean $A = (a_{j,k})_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe y una sucesión $w = \{w_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$.*

(i) $B : \lambda_p(A) \to \lambda_p(A)$ está bien definido y es continuo si y sólo si la matriz A satisface

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, \ \exists \ m > n \ : \ \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty, \tag{3}$$

donde si $a_{j+1,m} = 0$, tenemos que $a_{j,n} = 0$ y consideramos $0/0$ como 1.

(ii) $B_w : \lambda_p(A) \to \lambda_p(A)$ está bien definido y es continuo si y sólo si A y w cumplen

$$\forall \ n \in \mathbb{N}, \ \exists \ m > n \ : \ \sup_{j\in\mathbb{Z}} |w_{j+1}| \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty. \tag{4}$$

Demostración. La demostración es completamente análoga a la del caso unilateral en la proposición 0.3.7. ■

Observación 0.3.13 Al igual que para sucesiones en $\mathbb{N}$ (proposición 0.3.9) podemos obtener la siguiente caracterización. Sea $A = (a_{j,n})_{j\in\mathbb{Z},n\in\mathbb{N}}$ matriz de Köthe. Entonces $l_\infty(\mathbb{Z}) \subset \lambda_p(A)$ de forma canónica si y sólo si la matriz A satisface que $\{a_{j,n}\}_{j\in\mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z})$ ($l_0(\mathbb{Z}) := c_0(\mathbb{Z})$ si $p = 0$), para todo $n \in \mathbb{N}$.

El estudio de operadores backward shift en espacios de Köthe será nuestro principal objetivo en el capítulo 1. Estos espacios pueden utilizarse como representación alternativa de espacios clásicos e importantes de funciones como por ejemplo espacios de funciones holomorfas. Además, algunos operadores en espacios de funciones son operadores backward shift (ponderados) al utilizar la representación mencionada anteriormente. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 0.3.14 Consideremos el espacio de las funciones enteras $\mathcal{H}(\mathbb{C})$, dotado de la topología de convergencia uniforme en los conjuntos compactos de $\mathbb{C}$. Si $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$, podemos considerar su desarrollo en serie de Taylor

$$f(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j, \ \forall z \in \mathbb{C}.$$

Para cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene que la serie

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)e^{jk}}{j!}$$

es absolutamente convergente. Por tanto

$$\left\{\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right\}_{j=0}^{\infty} \in \lambda_1(A),$$

tomando la matriz de Köthe

$$A = (a_{j,k})_{j\in\mathbb{N}_0,k\in\mathbb{N}} = \left(e^{jk}\right)_{j\in\mathbb{N}_0,k\in\mathbb{N}}.$$

Tenemos entonces una aplicación lineal y biyectiva Φ

$$\Phi : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \lambda_1(A) \ : \ f \longmapsto \left\{\frac{f^{(j)}(0)}{j!}\right\}_{j=0}^{\infty}.$$

Una sucesión fundamental de compactos de $\mathbb{C}$ está dada por

$$K_k = \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq e^k\}, \;\; k \in \mathbb{N}.$$

Para cada $f \in \mathcal{H}(\mathbb{C})$ y cada $k \in \mathbb{N}$ se tiene

$$\begin{aligned} \|f\|_k &= \sup_{z \in K_k} |f(z)| \\ &= \sup_{z \in K_k} \left| \sum_{j=0}^{\infty} \frac{f^{(j)}(0)}{j!} z^j \right| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \left| \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right| e^{jk} = \left\| \left\{ \frac{f^{(j)}(0)}{j!} \right\}_{j=0}^{\infty} \right\|_k . \end{aligned}$$

Φ es entonces una aplicación lineal, abierta y biyectiva entre espacios de Fréchet, por tanto un isomorfismo. Puede observarse que la matriz A cumple que para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $m > n$, tal que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{j,n}}{a_{j,m}} = \sum_{j=0}^{\infty} e^{j(n-m)} < \infty.$$

Como se citó en 0.3.5 esto implica que para $1 \leq p < \infty$, $\lambda_p(A)$ es un espacio nuclear y por tanto $\lambda_p(A) = \lambda_0(A)$ para $1 \leq p \leq \infty$ (véase [52, teorema 28.16] o también [71]). En consecuencia $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ es isomorfo al espacio de series de potencias $\Lambda_\infty(\alpha)$ para $\{\alpha_j\}_{j \geq 0} := \{j\}_{j \geq 0}$.

Otra posible elección es tomar la matriz de Köthe

$$\overline{A} = (\overline{a}_{j,k})_{j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}} = \left(\frac{e^{jk}}{j!} \right)_{j \in \mathbb{N}_0, k \in \mathbb{N}},$$

y el isomorfismo

$$\Psi : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \lambda_1(\overline{A}) \;\; : \;\; f \longmapsto \left\{ f^{(j)}(0) \right\}_{j=0}^{\infty}.$$

Consideremos ahora el operador derivada

$$D : \mathcal{H}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathcal{H}(\mathbb{C}) \;\; : \;\; f \longmapsto f'.$$

Si tomamos el isomorfismo entre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\lambda_1(\overline{A})$, tenemos que el diagrama

$$\begin{tikzcd} \mathcal{H}(\mathbb{C}) \arrow[r, "D"] \arrow[d, "\Psi"'] & \mathcal{H}(\mathbb{C}) \arrow[d, "\Psi"'] \\ \lambda_1(\overline{A}) \arrow[r, "B"] & \lambda_1(\overline{A}) \end{tikzcd}$$

es conmutativo y el operador derivada queda representado como el operador backward shift.

Si tomamos el isomorfismo entre $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ y $\lambda_1(A)$, tenemos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}(\mathbb{C}) & \xrightarrow{D} & \mathcal{H}(\mathbb{C}) \\ \Phi\downarrow & & \Phi\downarrow \\ \lambda_1(A) & \xrightarrow{B_w} & \lambda_1(A) \end{array},$$

es conmutativo tomando la sucesión $w = \{1, 2, \dots\}$. En este caso el operador derivada queda representado como un operador backward shift ponderado.

Ejemplo 0.3.15 Consideremos el espacio de las funciones holomorfas en el disco $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, dotado de la topología de convergencia uniforme en los conjuntos compactos de $\mathbb{D}$. Considerando la misma identificación que tomamos en 0.3.14, es decir, a cada función le hacemos corresponder la sucesión formada por los coeficientes de su desarrollo en serie de Taylor. De manera similar puede probarse que $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ es isomorfo a $\lambda_1(A)$ (véase [43, proposición 2.10.10]), donde

$$A = (a_{j,k}) := \left(e^{-(j/k)}\right)_{j\in\mathbb{N}_0, k\in\mathbb{N}}.$$

Se comprueba sin dificultad que $\lambda_1(A)$ es nuclear y entonces $\lambda_1(A) = \lambda_p(A)$ para todo $p \in [1, \infty] \cup \{0\}$. De esta manera, tomando $\alpha_n = n$, se tiene que

$$\lambda_2(A) = \Lambda_0(\alpha) = \left\{ x \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \ : \ \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|^2 r^{2n} < \infty \text{ para todo } r < 1 \right\}$$

es isomorfo a $\mathcal{H}(\mathbb{D})$.

Ejemplo 0.3.16 Consideremos ahora el producto de líneas, es decir, $\omega = \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$, con la topología producto. Este espacio también puede representarse como un espacio escalonado de Köthe. Concretamente si la matriz de Köthe $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ satisface que

$$\forall k \in \mathbb{N},\ \exists j(k) \ : \ a_{j,k} = 0, \forall j \geq j(k),$$

entonces $\omega = \lambda_1(A)$.

Obsérvese que teniendo en cuenta la caracterización obtenida en la proposición 0.3.7, todo backward shift es continuo y está bien definido en ω.

Ejemplo 0.3.17 Para $\alpha_j := \log j$, consideramos el espacio $s := \Lambda_\infty(\alpha)$, es decir,

$$s = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ |x|_k^2 := \sum_{j \in \mathbb{N}} |x_j|^2 j^{2k} < \infty \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \right\} = \lambda_2(A),$$

donde $A = \left(j^k\right)_{j,k \in \mathbb{N}}$. Como $\lambda_2(A)$ es nuclear tenemos que $s = \lambda_p(A)$ para todo $p \in [1, \infty] \cup \{0\}$ y por lo tanto

$$s = \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \lim_{j \to \infty} |x_j| \, j^k = 0 \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Este espacio s es llamado espacio de las sucesiones rápidamente decrecientes y es muy importante ya que muchos espacios de Fréchet de funciones diferenciables son isomorfos a s.

Ejemplo 0.3.18 Consideremos el espacio

$$\mathcal{M}_1 := \{ f : \mathbb{R} \to \mathbb{K}, \ f \text{ infinitamente diferenciable, par y } 2\pi \text{ periódica} \},$$

con la topología generada por la familia de seminormas

$$\|f\|_k := \sum_{0 \le p \le k} \sup \left\{ \left| f^{(p)}(x) \right| \ : \ 0 \le x \le \pi \right\}.$$

Se tiene que $\mathcal{M}_1$ es isomorfo a s. El isomorfismo viene dado por

$$f \mapsto (\frac{b_0}{2}, b_1, b_2, \dots),$$

donde $\frac{b_0}{2} + \sum_{m=1}^{\infty} b_m \cos mx$ es el desarrollo en serie de Fourier de $f(x)$ (para los detalles puede consultarse [71]).

Para ver más ejemplos, algunos de los cuáles se utilizarán en el capítulo 4, pueden consultarse [52, 45, 71].

0.4 Productos tensoriales

Para las notaciones de esta sección referimos a [29, 43].

Definición 0.4.1 *Sean E, F e.l.c. Se define la topología tensorial proyectiva π en $E \otimes F$ como la topología (localmente convexa) dada por la familia de seminormas*

$$\mathcal{Q}_\pi := \{p \otimes_\pi q \ : \ p \in \mathrm{sc}(E), \ q \in \mathrm{sc}(F)\},$$

donde si $z \in E \otimes F$

$$p \otimes_\pi q(z) := \inf \left\{ \sum_{j=1}^{n} p(x_j) q(y_j) \ : \ z = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j \right\}.$$

Un sistema de 0-entornos absolutamente convexos para esta topología viene dado por

$$\{\Gamma\,(U \otimes V) \ : \ U \in \mathcal{U}_0(E), \ V \in \mathcal{V}_0(F)\}.$$

Se denotará este espacio por $E \otimes_\pi F$ y a su completación por $E \widetilde{\otimes}_\pi F$.

Definición 0.4.2 *Sean E, F e.l.c. Se define la topología tensorial inyectiva ε en $E \otimes F$ como la topología (localmente convexa) dada por la familia de seminormas*

$$\mathcal{Q}_\varepsilon := \{p \otimes_\varepsilon q \ : \ p \in \mathrm{sc}(E), \ q \in \mathrm{sc}(F)\},$$

donde si $z \in E \otimes F$, $z = \sum_{j=1}^{n} x_j \otimes y_j$, $x_j \in E$, $y_j \in F$, $j = 1, \ldots, n$

$$p \otimes_\varepsilon q(z) := \sup \left\{ \left| \sum_{j=1}^{n} \langle x_j, x' \rangle \langle y_j, y' \rangle \right| \ : x' \in U_p^\circ, \ y' \in V_q^\circ \right\},$$

siendo U_p° el polar de

$$U_p := \{x \in E \ : \ p(x) < 1\},$$

y análogamente en F para V_q°. Se denotará este espacio por $E \otimes_\varepsilon F$ y a su completación por $E \widetilde{\otimes}_\varepsilon F$.

Observación 0.4.3 (1) Se tiene que $p \otimes_\varepsilon q \leq p \otimes_\pi q$ y por tanto la topología tensorial proyectiva es más fina que la inyectiva.

(2) Si E y F son espacios normados, entonces tenemos las normas tensoriales proyectiva $\pi(.;E,F)$ e inyectiva $\varepsilon(.;E,F)$ en $E\otimes F$ definidas como

$$\pi(z;E,F) := \inf\left\{\sum_{j=1}^{n}\|x_j\|\|y_j\| \ : \ z=\sum_{j=1}^{n}x_j\otimes y_j\right\},$$

$$\varepsilon(z;E,F) := \sup\left\{|\langle x'\otimes y',z\rangle| \ : \ x'\in B_{E'},\ y'\in B_{F'}\right\},$$

respectivamente.

Definiciones 0.4.4 *Sean E y F espacios normados. Dada $a(\cdot;E,F)$ una norma en $E\otimes F$, se dice razonable si $\varepsilon(\cdot;E,F)\leq a(\cdot;E,F)\leq \pi(\cdot;E,F)$.*

$a(\cdot;E,F)$ es norma tensorial en $E\otimes F$ si es razonable y se cumple que, dados E_i, F_i espacios normados, $T_i\in L(E_i,F_i)$, $i=1,2$, entonces $\| T_1\otimes T_2 \|\leq\| T_1 \|\cdot\| T_2 \|$.

Sea E (resp., F) e.l.c., $\mathcal{U}$ (resp., $\mathcal{V}$) una base de 0-ent. abx. y p_U (resp., p_V) el funcional de Minkowski asociado a $U\in\mathcal{U}$ (resp., $V\in\mathcal{V}$). Si a es una norma tensorial, definimos $(p_U\otimes_a p_V)(z):=a((Q_U\otimes Q_V)(z);E_{(U)},F_{(V)})$, donde $Q_U: E\longrightarrow E_{(U)}$, $Q_V: F\longrightarrow F_{(V)}$ son las correspondientes aplicaciones canónicas. Claramente, $p_U\otimes_a p_V$ es una seminorma en $E\otimes F$ para cada $U\in\mathcal{U}$ y $V\in\mathcal{V}$. Es más, por ser a norma tensorial, el sistema de seminormas $\{p_U\otimes_a p_V \ : \ U\in\mathcal{U},\ V\in\mathcal{V}\}$ define una topología localmente convexa, llamada a-topología, en $E\otimes F$. Escribiremos $E\otimes_a F$ para denotar el espacio $E\otimes F$ dotado de la a-topología.

Si A y B son subconjuntos abx. de E y F, respectivamente, llamaremos $a(A,B):=\{x\in E\otimes_a F \ / \ (p_A\otimes_a p_B)(x)\leq 1\}=\{x\in[A]\otimes[B] \ / \ a((Q_A\otimes Q_B)(x);E_{(A)},E_{(B)})\leq 1\}$.

El siguiente lema [56] será útil en capítulos posteriores.

Lema 0.4.5 *Si E_i, F_i son espacios localmente convexos, $T_i\in\mathcal{L}(E_i,F_i)$, $i=1,2$; entonces*

$$(T_1\otimes T_2)(a(A,B))\subset a(T_1(A),T_2(B))$$

para todo par de subconjuntos absolutamente convexos $A\subset E_1$, $B\subset E_2$.

Demostración. Para simplificar la notación, aquí $[C]$ denotará la envoltura lineal de C, para cualquier subconjunto C de un e.l.c. Los operadores $T_i,\ i = 1, 2$ inducen, de forma canónica

$$\tilde{T}_1 : E_{1(A)} \longrightarrow F_{1(T_1 A)}$$

$$\tilde{T}_2 : E_{2(B)} \longrightarrow F_{2(T_2 B)}$$

y se tiene el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} [A] \otimes [B] & \xrightarrow{T_1 \otimes T_2} & [T_1 A] \otimes [T_2 B] \\ {\scriptstyle Q_A \otimes Q_B}\Big\downarrow & & \Big\downarrow{\scriptstyle Q_{T_1 A} \otimes Q_{T_2 B}} \\ E_{1(A)} \otimes E_{2(B)} & \xrightarrow{\tilde{T}_1 \otimes \tilde{T}_2} & F_{1(T_1 A)} \otimes F_{2(T_2 B)} \end{array}$$

Sea $z \in a(A, B)$; por definición tenemos que

$$a((Q_A \otimes Q_B)(z); E_{1(A)}, E_{2(B)}) \leq 1,$$

de donde concluimos, teniendo en cuenta 0.4.4, que

$$a([(\tilde{T}_1 \otimes \tilde{T}_2) \circ (Q_A \otimes Q_B)](z); F_{1(T_1 A)} \otimes F_{2(T_2 B)}) \leq 1,$$

es decir, por la conmutatividad del diagrama anterior,

$$(T_1 \otimes T_2)(z) \in a(T_1 A, T_2 B).$$

■

0.5 Polinomios homogéneos

Nuestro objetivo en el capítulo 4 es el estudio de la hiperciclicidad y caos de polinomios en espacios de sucesiones Köthe. Para la notación y teoría en general de polinomios en espacios localmente convexos referimos al capítulo 1 del libro de S. Dineen [31]. Recordaremos aquí algunas definiciones y resultados.

Definiciones 0.5.1 *Sean E y F espacios vectoriales sobre $\mathbb{C}$ y $N \in \mathbb{N}$. Denotemos por $\otimes_N E$ el producto tensorial $E \otimes \overset{N}{\cdots} \otimes E$, definimos*

$$\begin{aligned} &i_N : E^N \to \otimes_N E, && (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes x_2 \cdots \otimes x_n \\ &\Delta_N : E \to E^N, && x \mapsto (x, x, \ldots, x) \\ &\delta_N : E \to \otimes_N E, && x \mapsto (x \otimes x \otimes \cdots \otimes x). \end{aligned}$$

Denotaremos por $\mathcal{L}_a({}^N E, F)$ el espacio de las aplicaciones N-lineales de E en F. Para cada $L \in \mathcal{L}_a({}^N E, F)$ existe una única $i_N^*(L) \in \mathcal{L}_a(\otimes_N E, F)$ tal que $L = i_N^*(L) \circ i_N$. Además, i_N^* es un isomorfismo algebraico de $\mathcal{L}_a({}^N E, F)$ en $\mathcal{L}_a(\otimes_N E, F)$.

Un polinomio N-homogéneo de E en F es una aplicación $P : E \to F$ tal que existe $L \in \mathcal{L}_a({}^N E, F)$ con $P = L \circ \Delta_N$ o equivalentemente, existe $T \in \mathcal{L}_a(\otimes_N E, F)$ con $P = T \circ \delta_N$ (véase [31, capítulo 1, proposición 1.3]). Denotaremos por $\mathcal{P}_a({}^N E, F)$ al espacio vectorial de los polinomios N-homogéneos de E en F.

En los espacios $\mathcal{L}_a({}^N E, F)$ y $\mathcal{P}_a({}^N E, F)$, el subíndice a hace referencia a "algebraico" ya que no hemos asumido en ningún momento continuidad. Si E y F son espacios localmente convexos y dotamos a E^N de la topología producto, denotaremos por $\mathcal{L}({}^N E, F)$ y $\mathcal{P}({}^N E, F)$ el espacio de las aplicaciones N-lineales y continuas de E en F y el espacio de los polinomios N-homogéneos continuos de E en F respectivamente.

Uno de los polinomios que se va a estudiar en el capítulo 4 es la potencia d-ésima del backward shift, definida en un espacio de sucesiones de Köthe. Caractericemos aquí cuándo este polinomio está bien definido y es continuo.

Proposición 0.5.2 *Sea A matriz de Köthe. El polinomio d-homogéneo*

$$P : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A) \; : \; \{z_i\}_{i \geq 1} \longmapsto \left\{z_{i+1}^d\right\}_{i \geq 1},$$

está bien definido y es continuo si y sólo si la matriz A satisface la condición

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m > n \; : \; \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^d} < \infty, \tag{5}$$

donde si $a_{j+1,m} = 0$, tenemos que $a_{j,n} = 0$ y consideramos $0/0$ como 1.

Demostración. Si P es continuo, entonces

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n,\ \exists\ M > 0\ :\ \|Px\|_n \leq M\|x\|_m^d,\ \forall x \in \lambda_p(A).$$

Si tomamos en particular $x = e_{j+1}$, con $j = 1, 2, \ldots$ obtenemos

$$\|e_j\|_n \leq M\|e_{j+1}\|_m^d,\ j = 1, 2, \ldots$$

luego

$$a_{j,n} \leq M\ a_{j+1,m}^d,\ j = 1, 2, \ldots$$

de donde

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^d} < \infty\ .$$

Recíprocamente, si la matriz de Köthe A satisface (4.1) entonces

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n,\ \exists\ M > 0\ :\ a_{j,n} \leq M\ a_{j+1,m}^d,\ j = 1, 2, \ldots$$

Dada una seminorma $\|.\|_n$ y dado $x \in \lambda_p(A)$, existe $m > n$ tal que si $1 \leq p < \infty$

$$\begin{aligned}
\|Px\|_n &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{j+1}^d\ a_{j,n}\right|^p\right)^{1/p} \\
&\leq M \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{j+1}^d\ a_{j+1,m}^d\right|^p\right)^{1/p} \\
&\leq M \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left|x_{j+1}\ a_{j+1,m}\right|^p\right)^{d/p} \leq M\|x\|_m^d < \infty
\end{aligned}$$

(respectivamente, para $p = 0$ tenemos

$$\begin{aligned}
\|Px\|_n &= \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|x_{j+1}^d\right| a_{j,n} \\
&\leq M \sup_{j\in\mathbb{N}} \left|x_{j+1}^d\right| a_{j+1,m}^d \leq M\|x\|_m^d < \infty\ )
\end{aligned}$$

y entonces $P : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ es continuo y está bien definido. ∎

0.6 Espacios (DF)

Definición 0.6.1 *Un espacio localmente convexo E es un espacio (DF) si posee las propiedades:*

(1) E tiene una sucesión fundamental de conjuntos acotados $\{B_n,\ n \in \mathbb{N}\}$, es decir, todo conjunto acotado está contenido en algún B_n.

(2) Toda intersección numerable $\cap_{n\in\mathbb{N}} U_n$ de 0-entornos en E que absorbe conjuntos acotados (bornívoro) es necesariamente un 0-entorno.

Observación 0.6.2 La clase de espacios (DF) incluye los duales fuertes de espacios de Fréchet y también los límites inductivos numerables de espacios de Banach (en particular los espacios de Banach). Se cumple además que el dual fuerte de un espacio (DF) es un espacio de Fréchet. Referimos a [52] para las demostraciones de éstas y otras propiedades de espacios (DF).

Definiciones 0.6.3 *Sea B un conjunto acotado abx. en un espacio localmente convexo E.*

(1) Se dice que B es total si su envoltura lineal es densa en E.

(2) Se dice que B es un disco de Banach si su envoltura lineal es un espacio de Banach con el funcional de Minkowski $\|.\|_B$.

Observación 0.6.4 Se cumple que E tiene un conjunto acotado total si y sólo si E'_b tiene norma continua. Además si E es completo y B es cerrado, entonces B es un disco de Banach.

0.7 Holomorfía infinita

Definición 0.7.1 *Dado un espacio localmente convexo E, se define el espacio de funciones enteras en E como*

$$\mathcal{H}(E) := \{f : E \to \mathbb{C} \ : \ f \textit{ es continua y } f_{|_F} \textit{ es}$$
$$\textit{holomorfa para cada } F \hookrightarrow E \textit{ finito dimensional}\}.$$

Consideraremos en $\mathcal{H}(E)$ la topología τ_o de convergencia uniforme en los conjuntos compactos de E.

Se define el espacio de las funciones enteras y acotadas en E como

$$\mathcal{H}_b(E) := \{f \in \mathcal{H}(E) \ : \ f(B) \text{ es acotado para todo } B \subset E \text{ conjunto acotado}\}.$$

Este espacio es usualmente dotado con la topología τ_b de convergencia uniforme en los conjuntos acotados de E.

Observación 0.7.2 (1) Si E es un espacio (DF), entonces $(\mathcal{H}_b(E), \tau_b)$ es un espacio de Fréchet (véase [34]).

(2) Si $f \in \mathcal{H}(E)$ (respectivamente $f \in \mathcal{H}_b(E)$), entonces f admite desarrollo en serie de la forma

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\widehat{d^n} f(0)}{n!}(z), \ z \in E,$$

donde la serie converge respecto de la topología τ_o (τ_b) y

$$\frac{\widehat{d^n} f(0)}{n!}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\lambda|=1} \frac{f(\lambda z)}{\lambda^{n+1}} d\lambda.$$

Además, la aplicación

$$\widehat{d^n} f(0) : E \longrightarrow \mathbb{C} \ : \ z \mapsto \widehat{d^n} f(0)(z)$$

es un polinomio continuo n-homogéneo.

Definición 0.7.3 *Dado un espacio localmente convexo E, se define el espacio de los n-tensores simétricos en E como*

$$\bigotimes_{n,s} E = \left\{ \sum_{i \in F} z_i \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes z_i \ : \ F \text{ es finito}, \ z_i \in E \right\} \hookrightarrow E \otimes \overset{n}{\cdots} \otimes E.$$

Denotaremos por $\bigotimes_{n,s,\varepsilon} E$ el espacio de los n-tensores simétricos dotado con la topología tensorial inductiva ε.

Observación 0.7.4 Se cumple que $\bigotimes_{n,s,\varepsilon} E'_b$ es un subespacio topológico del espacio $(\mathcal{P}(^n E), \tau_b)$ de los polinomios n-homogéneos en E con la topología de convergencia uniforme en los conjuntos acotados de E. Para verlo tan solo tenemos que identificar

$$\begin{array}{ccccc}
\bigotimes_{n,s} E' & \longrightarrow & \mathcal{P}(^n E) & & \\
z' \otimes \cdots \otimes z' & \mapsto & P : E & \to & \mathbb{C} \\
 & & z & \mapsto & \langle z, z' \rangle^n
\end{array}$$

Capítulo 1

Hiperciclicidad y caos de operadores “backward shift” en espacios escalonados de Köthe

El objetivo de este capítulo es el estudio de la hiperciclicidad y el caos de operadores backward shift ponderados en espacios escalonados de Köthe.

H. N. Salas [62] extendió el estudio de Rolewicz de la hiperciclicidad de los operadores backward shift en el espacio l_2 a operadores backward shift ponderados. La representación de ciertos operadores en espacios de funciones como operadores backward shift ponderados en espacios escalonados de Köthe motiva el estudio de la hiperciclicidad y el caos de estos operadores en espacios de Köthe.

El ejemplo clásico del operador derivada en el espacio de las funciones enteras puede ser representado fácilmente como un operador backward shift en un espacio de Köthe tal y como se vio en 0.3.14. Para ver más ejemplos de representaciones de operadores en espacios de Hilbert de funciones enteras como operadores backward shift ponderados en espacios de Köthe, véase [28] y [48], y puede consultarse [19] para espacios localmente convexos de funciones enteras más generales.

También pueden representarse como operadores backward shift ponderados los backward shift de Bergman [35], el operador aniquilación del oscilador cuántico armónico no forzado [41] y otros que provienen de la Física [36, 59].

Se obtendrán caracterizaciones para la hiperciclicidad y el caos de operadores backward shift ponderados unilaterales y bilaterales en espacios escalonados de Köthe en las secciones 1.1 y 1.2 respectivamente. Estas caracterizaciones han sido independientemente obtenidas por Grosse-Erdmann [38] para operadores y espacios de sucesiones más generales.

Salas mostró en [62] que la perturbación de la identidad por un backward shift ponderado en l_2 es siempre hipercíclico, contestando de esta manera a una pregunta de Chan y Shapiro [28]. Este tipo de operadores son esenciales en la construcción de operadores hipercíclicos en espacios de Banach [2, 8] y de Fréchet separables [22]. En la sección 1.3 generalizamos el mencionado resultado de Salas a espacios escalonados de Köthe, y también caracterizamos cuándo este tipo de operadores es caótico. Finalmente, en la sección 1.4, estudiamos backward shift generalizados (en el sentido de Godefroy y Shapiro [36]) en espacios de Fréchet, contestando además de forma afirmativa a una pregunta en [36].

1.1 Operadores backward shift ponderados unilaterales

S. Rolewicz [60] probó en 1969 que el operador $\lambda B : l_p \to l_p$ es hipercíclico si $|\lambda| > 1$ (de hecho es caótico [36]).

Comenzaremos esta sección obteniendo caracterizaciones de hiperciclicidad y caos para el operador backward shift B en espacios escalonados de Köthe $\lambda_p(A)$. Exigiremos que B esté bien definido y sea continuo en $\lambda_p(A)$. Según se vio en la proposición 0.3.7, es suficiente y necesario que la matriz A satisfaga la condición

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m > n\ :\ \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty, \tag{1.1}$$

donde si $a_{j+1,m} = 0$, tenemos que $a_{j,n} = 0$ y consideramos $0/0$ como 1. Para la hiperciclicidad tenemos la siguiente caracterización, donde en (ii) nos referimos al Criterio de Hiperciclicidad en el sentido de Godefroy y Shapiro (definición 0.2.12).

Proposición 1.1.1 *Sea A una matriz de Köthe que satisface la condición (1.1) y $1 \le p < \infty$ o $p = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\liminf_{j\in\mathbb{N}} a_{j,k} = 0$.

(ii) $B : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad.

(iii) $B : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ es hipercíclico.

Demostración. (i) $\to$ (ii). Sin pérdida de generalidad, teniendo en cuenta (1.1), podemos suponer que para cada $n \in \mathbb{N}$

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,n+1}} < \infty. \tag{1.2}$$

Definimos

$$M_1 := \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,1}}{a_{j+1,2}} < \infty$$

y aplicando reiteradamente (1.2) tomamos

$$M_k := \sup_{\substack{j\in\mathbb{N} \\ i=1,\dots,k}} \frac{a_{j,k}}{a_{j+i,2k}} < \infty \tag{1.3}$$

para cada $k > 1$.

Por hipótesis, sea $\{n_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión estrictamente creciente de enteros positivos tal que

$$a_{n_k+k+1,2k} < \frac{1}{kM_k}, \ \forall\, k \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Tomamos ahora $X := \operatorname{lin}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ y $S : X \to X$ aplicaciones lineales tales que $S(e_i) := e_{i+1}$, $i \in \mathbb{N}$. Obviamente se cumple que $B \circ S = Id_X$. Veamos que $\{B^{n_k}\}_{k\geq 1}$ y $\{S^{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergen puntualmente a 0 en X. Se tiene que $\{B^{n_k} e_i\}_{k\geq 1}$ es finalmente cero para cada $i \in \mathbb{N}$. Por otro lado, dado $k \in \mathbb{N}$ e $i \leq k$, tenemos que

$$\|S^{n_k} e_i\|_k = \|e_{n_k+i}\|_k = a_{n_k+i,k} \overset{(1.3)}{\leq} M_k a_{n_k+k+1,2k} \overset{(1.4)}{<} \frac{1}{k},$$

de donde se deduce que $\{S^{n_k} x\}_{k\geq 1}$ converge a 0 para cada $x \in X$.

(ii) $\to$ (iii) se sigue de aplicar el Criterio de Hiperciclicidad (teorema 0.2.11).

(iii) $\to$ (i). Sea $x \in \lambda_p(A)$ un vector hipercíclico para B. Entonces $\{x_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es necesariamente una sucesión no acotada en $\mathbb{K}$, ya que en caso contrario tendríamos, observando la primera coordenada, que $\{B^k x\}_{k\geq 1}$ no es denso en $\lambda_p(A)$. Tomamos $\{n_k\}_{k\geq 1}$ una sucesión estrictamente creciente de naturales tales que $|x_{n_k}| > 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Dado $n \in \mathbb{N}$, la sucesión $\{|x_k|\, a_{k,n}\}_{k\geq 1}$ pertenece a l_p (o c_0). En particular la sucesión $\{|x_{n_k}|\, a_{n_k,n}\}_{k\geq 1}$ converge a 0 y por tanto deducimos que

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k,n} = 0,$$

con lo que la demostración queda completa. ■

Observación 1.1.2 Nótese que en el caso clásico del espacio de Hilbert l_2, el operador $B : l_2 \to l_2$ tiene norma 1, por tanto no puede ser hipercíclico y necesitamos ponderar B con un escalar λ de módulo mayor que 1 para obtener la hiperciclicidad de λB. Según la proposición anterior, cuando consideramos espacios escalonados de Köthe es posible tener operadores backward shift hipercíclicos sin necesidad de ponderar con un escalar.

Para el caos de B en espacios de Köthe obtenemos la siguiente caracterización:

Teorema 1.1.3 *Sea A una matriz de Köthe que satisface la condición (1.1) y $1 \leq p < \infty$ (resp. $p = 0$). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) B tiene un punto periódico no nulo.

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{a_{i,k}\}_{i\geq 1} \in l_p$ (resp. $\{a_{i,k}\}_{i\geq 1} \in c_0$).

(iii) $l_\infty \subset \lambda_p(A)$ canónicamente.

(iv) B es caótico.

Demostración. (i) $\to$ (ii). Supongamos que B tienen un punto periódico no nulo, es decir, existen $x \in \lambda_p(A)$, $N > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $B^N x = x$ y $x_{n_0} \neq 0$. Tenemos entonces que x es periódico de período N y que $\{x_{n_0+jN}\}_{j\geq 0}$ es una sucesión constante no nula.

Si $1 \leq p < \infty$, para cada $k \in N$ tenemos

$$\begin{aligned} |x_{n_0}|^p \sum_{j=0}^{\infty} |a_{n_0+jN,k}|^p &= \sum_{j=0}^{\infty} |x_{n_0+jN}\ a_{n_0+jN,k}|^p \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i a_{i,k}|^p < \infty, \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta que $x_{n_0} \neq 0$, deducimos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{n_0+jN,k}|^p < \infty.$$

Para $1 \leq r < n_0$ y $n_0 < r \leq N$ aplicamos el mismo razonamiento que antes a $B^r x$ en lugar de a x, deduciendo que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{n_0-r+jN,k}|^p < \infty,\ r = 1, \ldots, n_0 - 1,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{n_0-r+jN,k}|^p < \infty,\ r = n_0 + 1, \ldots, N$$

de donde obtenemos que $(a_{i,k})_{i=1}^{\infty} \in l_p$.

Si $p = 0$, utilizando un razonamiento similar tendríamos para cada $k \in \mathbb{N}$ que

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_0-r+jN,k} = 0,\ 1 \leq r \leq N,$$

de donde $(a_{i,k})_{i=1}^{\infty} \in c_0$.

Notemos que (ii) y (iii) son equivalentes por la proposición 0.3.9 de la página 20.

(ii) ((iii)) $\to$ (iv). Por hipótesis, para cada $k \in \mathbb{N}$, $(a_{i,k})_{i=1}^{\infty} \in l_p$ (resp. c_0). Esto implica que $\lim_{i\to\infty} a_{i,k} = 0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Por la proposición 1.1.1 se tiene que B es hipercíclico.

Veamos que B posee un conjunto denso de puntos periódicos. En primer lugar observamos que si una sucesión es periódica, entonces es obviamente un punto periódico para B. Por otro lado, como $(a_{i,k})_{i=1}^{\infty} \in l_p$ (resp. c_0) para todo $k \in \mathbb{N}$, toda sucesión periódica pertenece a $\lambda_p(A)$. Afirmamos que

$$H := \{\{x_i\}_{i\geq 1} \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}\ :\ \{x_i\}_{i\geq 1} \text{ es una sucesión periódica }\}$$

es denso en $\lambda_p(A)$.

Sea e_i, $i \in \mathbb{N}$ fijo. Para cada $k \in \mathbb{N}$, como $(a_{j,k})_{j=1}^{\infty} \in l_p$ (resp. c_0)

$$\exists\ n_k \geq i\ :\ \left(\sum_{j=n_k+1}^{\infty} |a_{j,k}|^p\right)^{1/p} < \frac{1}{k}.$$

$$(\text{resp.}\ \sup_{j \geq n_k+1} |a_{j,k}| < \frac{1}{k})$$

Definimos $z \in H$ como

$$z_j := \begin{cases} 1 & \text{si } j \equiv i \pmod{n_k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \|z - e_i\|_k &= \left(\sum_{j=1}^{\infty} |a_{i+jn_k,k}|^p\right)^{1/p} \leq \left(\sum_{j=n_k+1}^{\infty} |a_{j,k}|^p\right)^{1/p} < \frac{1}{k} \\ (\text{resp.} &= \sup_{j \geq 1} |a_{i+jn_k,k}| \leq \sup_{j \geq n_k+1} |a_{j,k}| < \frac{1}{k}), \end{aligned}$$

y por tanto $e_i \in \overline{H}$, para todo $i \in \mathbb{N}$. La afirmación hecha queda demostrada sin más que tener en cuenta que H es un espacio vectorial y que $\text{lin}\{e_i : i \in \mathbb{N}\}$ es densa en $\lambda_p(A)$.

(iv) $\rightarrow$ (i) es trivial, luego la prueba está completa. ■

Nuestro próximo objetivo es el estudio de los operadores backward shift ponderados en espacios escalonados de Köthe. En este estudio jugará un papel importante el lema 0.2.19 probado en la sección 0.2.4. De esta manera será posible obtener caracterizaciones para la hiperciclicidad y el caos de operadores backward shift ponderados a partir de las caracterizaciones anteriores para el operador backward shift.

Supongamos que tenemos una sucesión de escalares $\{w_i\}_{i \geq 2}$. Recordamos que la aplicación backward shift ponderado B_w, asociado a la sucesión w viene dada por

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) := (w_2 x_2, w_3 x_3, w_4 x_4, \dots).$$

En primer lugar observamos que si $w_{i_0} = 0$ para algún $i_0 \in \mathbb{N}$, entonces

$$B_w^n(x_1, x_2, \dots) = \\ (0, \overset{(i_0-1)}{\dots}, 0, \prod_{j=i_0+1}^{i_0+n} w_j x_{i_0+n}, \prod_{j=i_0+2}^{i_0+n+1} w_j x_{i_0+n+1}, \dots), \ \forall\ n \geq i_0 - 1.$$

Por lo tanto, en este caso $\{B_w^n x\}_{n\geq 1}$ no puede ser denso en $\lambda_p(A)$ para cualquier $x \in \lambda_p(A)$. Por esta razón nos limitaremos al caso en que la sucesión w tiene todos sus elementos no nulos, es decir,

$$w_i \neq 0, \ \forall\ i \geq 2.$$

Definimos

$$v_1 := 1, \ v_i := \frac{1}{w_2 \cdots w_i}, \ i > 1, \tag{1.5}$$

y ahora tomamos, dada $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ matriz de Köthe,

$$\bar{A} := (\bar{a}_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}} \ : \ \bar{a}_{j,k} := |v_j|\, a_{j,k}, \ \forall\ j,k \in \mathbb{N}, \tag{1.6}$$

y la transformación diagonal $\phi_v : \lambda_p(\bar{A}) \longrightarrow \lambda_p(A)$ tal que

$$\phi_v(x_1, x_2, x_3, \dots) := (v_1 x_1, v_2 x_2, v_3 x_3, \dots).$$

Podemos construir el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \lambda_p(\bar{A}) & \xrightarrow{B} & \lambda_p(\bar{A}) \\ {\scriptstyle \phi_v}\big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_v}\big\downarrow \\ \lambda_p(A) & \xrightarrow{B_w} & \lambda_p(A) \end{array} \tag{1.7}$$

y establecer las siguientes

Propiedades:

1. El diagrama 1.7 es conmutativo.

2. ϕ_v es un isomorfismo.

3. B_w es continua en $\lambda_p(A)$ si y sólo si A y w satisfacen la condición

$$\forall\, n \in \mathbb{N},\ \exists\, m > n\ :\ \sup_{j\in\mathbb{N}} |w_{j+1}| \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty. \tag{1.8}$$

4. B y B_w son topológicamente conjugados. Por tanto tenemos que B es hipercíclico (satisface el Criterio de Hiperciclicidad, caótico) si y sólo si B_w es hipercíclico (satisface el Criterio de Hiperciclicidad, caótico)

Demostración. (1) Sea $x = \{x_i\}_{i\geq 1} \in \lambda_p(\bar{A})$, se tiene

$$\begin{aligned}\phi_v \circ Bx &= \phi_v(x_2, x_3, x_4, \dots)\\ &= (v_1x_2, v_2x_3, v_3x_4, \dots)\\ &= (x_2, \frac{1}{w_2}x_3, \frac{1}{w_2w_3}x_4, \dots).\end{aligned}$$

Por otro lado tenemos

$$\begin{aligned}B_w \circ \phi_v x &= B_w(v_1x_1, v_2x_2, v_3x_3, \dots)\\ &= (w_2v_2x_2, w_3v_3x_3, w_4v_4x_4, \dots)\\ &= (x_2, \frac{1}{w_2}x_3, \frac{1}{w_2w_3}x_4, \dots).\end{aligned}$$

(2) Para todo $x \in \lambda_p(\bar{A})$ y todo $n \in \mathbb{N}$ se tiene que

$$\|\phi_v x\|_n = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |v_i x_i a_{i,n}|^p\right)^{1/p} = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i \bar{a}_{i,n}|^p\right)^{1/p} = \|x\|_n,$$

por tanto ϕ_v es continua. ϕ_v es inyectiva ya que $v_i \neq 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Dado $x \in \lambda_p(A)$, tomamos $y = \{y_i\}_{i\geq 1} := \{\frac{x_i}{v_i}\}_{i\geq 1}$. Obviamente se tiene que $\phi_v y = x$ y además $y \in \lambda_p(\bar{A})$ ya que $\|y\|_n = \|x\|_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Al ser ϕ_v una biyección continua entre espacios de Fréchet tenemos que es un isomorfismo.

(3) Véase 0.3.7.

(4) Una vez probados (1) y (2), es la aplicación del lema 0.2.19. ■

Utilizando de forma conjunta estas propiedades y las caracterizaciones obtenidas para B en la proposición 1.1.1 y el teorema 1.1.3 obtenemos los siguientes corolarios.

Corolario 1.1.4 *Sean A una matriz de Köthe y w una sucesión satisfaciendo la condición (1.8), y $1 \leq p < \infty$ o $p = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\liminf_{i\in\mathbb{N}} \frac{a_{i,k}}{|w_2\cdots w_i|} = 0$.

(ii) $B_w : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad.

(iii) $B_w : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ es hipercíclico.

Demostración. Es inmediata por la proposición 1.1.1, tomando $\bar{A}$ dada por (1.6) y (1.5) y observando que

$$\bar{a}_{j,k} = |v_j|\, a_{j,k} = \frac{a_{j,k}}{w_2 \ldots w_j}.$$

■

Corolario 1.1.5 *Sean A una matriz de Köthe y w una sucesión satisfaciendo la condición (1.8), y $1 \leq p < \infty$ (resp. $p = 0$). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) B_w tiene un punto periódico no nulo.

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{\frac{a_{i,k}}{w_2\cdots w_i}\}_{i\geq 2} \in l_p$ (resp. $\{\frac{a_{i,k}}{w_2\cdots w_i}\}_{i\geq 2} \in c_0$).

(iii) B_w es caótico.

Demostración. Tomemos $\bar{A}$ la matriz dada por (1.6) y (1.5). Ahora aplicamos el teorema 1.1.3 y observamos que $x \in \lambda_p(\bar{A})$ es una sucesión periódica no nula para B si y sólo si $\phi_v x \in \lambda_p(A)$ es una sucesión periódica no nula para B_w. ■

Ejemplos 1.1.6 (1) Supongamos $A = (1)_{j,k\in\mathbb{N}}$ y $w = \{w_i\}_{i\geq 2} \in l^\infty$. Para $1 \leq p < \infty$ (resp. $p = 0$), aplicando las caracterizaciones anteriores tenemos que:

(i) ([62]) $B_w : l_p \to l_p$ es hipercíclico si y sólo si

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \prod_{i=2}^{j} |w_i| = \infty. \tag{1.9}$$

(ii) $B_w : l_p \to l_p$ es caótico si y sólo si

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{1}{\prod_{i=2}^{j} |w_i^p|} < \infty$$

$$(\text{resp. } \lim_{j\to\infty} \frac{1}{\prod_{i=2}^{j} w_i} = 0 \text{ para } p = 0).$$

(2) Si $A = (1)_{j,k\in\mathbb{N}}$ y $w = \{\lambda\}_{i\geq 2}$, con $\lambda \in \mathbb{K}$, entonces $B_w = \lambda B : l_p \to l_p$ es hipercíclico si y sólo si es caótico si y sólo si $|\lambda| > 1$.

1.2 Operadores backward shift ponderados bilaterales

H.N. Salas obtiene caracterizaciones en [62] para la hiperciclicidad de operadores backward shift bilaterales ponderados definidos en $l_2(\mathbb{Z})$. En esta sección pretendemos extender este estudio a espacios de Köthe y además obtener caracterizaciones para el caos.

Consideraremos sucesiones en $\mathbb{Z}$ y tendremos que

$$B(\ldots, x_{-2}, x_{-1}, \overset{\triangledown}{x_0}, x_1, x_2, \ldots) := (\ldots, x_{-1}, x_0, \overset{\triangledown}{x_1}, x_2, x_3, \ldots),$$

donde el pequeño triángulo marca la coordenada “central”.

Antes de entrar en materia vamos a hacer algunos comentarios sobre la aplicación “inversa” del backward shift, llamada forward shift. Puede plantearse tanto en el caso unilateral como en el bilateral. En primer lugar observaremos que el forward shift unilateral, es decir,

$$F(x_1, x_2, x_3, \ldots) := (0, x_1, x_2, \ldots),$$

no puede ser hipercíclico (por ejemplo en l_p). Basta observar que para todo $x \in l_p$, la órbita de x por F es

$$\begin{aligned} \mathrm{Orb}\{F, x\} &= \{x, Fx, F^2x, \ldots\} \\ &= \{(x_1, x_2, x_3, \ldots), (0, x_1, x_2, \ldots), (0, 0, x_1, \ldots), \ldots\}, \end{aligned}$$

y al tomar cualquier proyección p_i en la coordenada i-ésima se tiene que $p_i(\mathrm{Orb}\{F, x\})$ es un conjunto finito, por tanto las órbitas no pueden ser densas y consecuentemente F no puede ser hipercíclico.

La situación es bien distinta si tenemos sucesiones en $\mathbb{Z}$. En este caso el backward y el forward shift tienen un tratamiento similar, pudiendo ser cualquiera de ambos hipercíclicos y/o caóticos. Vamos a continuación a estudiar la hiperciclicidad y el caos de operadores backward shift (ponderados) bilaterales en espacios escalonados de Köthe. El estudio del caso forward shift se haría de manera análoga.

Sea por tanto una matriz de Köthe $A = (a_{j,k})_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}$ (en $\mathbb{Z}$) y consideremos los espacios de Köthe $\lambda_p(A)$. Exigiremos que B, dado por

$$Be_i := e_{i-1}, \ i \in \mathbb{Z},$$

esté bien definido y sea continuo en $\lambda_p(A)$. Según se vio en 0.3.12, es suficiente y necesario que la matriz A satisfaga la condición

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, \ \exists\, m > n \ : \ \sup_{j\in\mathbb{Z}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty, \tag{1.10}$$

donde si $a_{j+1,m} = 0$, tenemos que $a_{j,n} = 0$ y consideramos $0/0$ como 1. Para la hiperciclicidad tenemos la siguiente caracterización:

Proposición 1.2.1 *Sea A una matriz de Köthe que satisface la condición (1.10) y $1 \le p < \infty$ o $p = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$ e $i \in \mathbb{N}$, existe un natural n tal que

$$\max_{|j|\le i}\{a_{j+n,k}, a_{j-n,k}\} < \varepsilon.$$

(ii) $B : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad.

(iii) $B : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ es hipercíclico.

Demostración. (i) $\to$ (ii). Tomamos una sucesión creciente $\{n_k\}_{k\ge1}$ de naturales tales que para cada $k \in \mathbb{N}$ se cumpla que

$$\max_{|i|\le k}\{a_{i+n_k,k}, a_{i-n_k,k}\} < \frac{1}{k}.$$

Ahora ponemos $X := \text{lin}\{e_i : i \in \mathbb{Z}\}$ y definimos aplicaciones lineales $S : X \to X$ tales que $S(e_i) := e_{i+1}$, $i \in \mathbb{Z}$. Obviamente se cumple que $B \circ S =$

Id_X. Veamos que $\{B^{n_k}\}_{k\geq 1}$ y $\{S^{n_k}\}_{k\geq 1}$ convergen puntualmente a 0 en X. Dado $k \in \mathbb{N}$ and $|i| \leq k$, tenemos que

$$\|B^{n_k}e_i\|_k = \|e_{i-n_k}\|_k = a_{i-n_k,k} < \frac{1}{k},$$

$$\|S^{n_k}e_i\|_k = \|e_{i+n_k}\|_k = a_{i+n_k,k} < \frac{1}{k},$$

de donde se deducen las convergencias deseadas.

(ii) $\rightarrow$ (iii) se sigue de aplicar el Criterio de Hiperciclicidad (teorema 0.2.11).

(iii) $\rightarrow$ (i). Supongamos por reducción al absurdo que la propiedad (i) no se cumple. En este caso existen $k \in \mathbb{N}$, $\varepsilon_0 > 0$, $q \in \mathbb{N}$, y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que para todo $n \geq n_0$ tenemos

$$\max_{|j|\leq q}\{a_{j-n,k}, a_{j+n,k}\} \geq \varepsilon_0. \tag{1.11}$$

Definimos ahora el elemento $y = \{y_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ como

$$y_j := \begin{cases} 2/a_{j,k} & \text{si } |j| \leq q \\ 0 & \text{en cualquier otro caso} \end{cases}$$

Si x es un vector hipercíclico para B, al ser la órbita de x densa en el espacio, tomamos $m \in \mathbb{N}$ tal que $z := B^m x$ satisface que

$$\|y - z\|_k < 1.$$

En particular se tiene que

$$a_{j,k}|y_j - z_j| < 1 \Rightarrow a_{j,k}\frac{2}{a_{j,k}} - a_{j,k}|z_j| < 1 \Rightarrow |z_j| > \frac{1}{a_{j,k}} \text{ si } |j| \leq q.$$

Definimos ahora $M := \max_{|j|\leq q}\{a_{j,k}\}$. Como $z \in \lambda_p(A)$, existe $n_1 > n_0$ tal que $a_{j+n,k}|z_{j+n}| < \varepsilon_0/2M$ para todo $n \geq n_1$. Fijamos un natural $n > n_1$ tal que

$$\left\|B^n z - \frac{1}{3}y\right\|_k < \min\{\frac{1}{2}, \frac{\varepsilon_0}{M}\}.$$

Obtenemos en primer lugar que

$$a_{j-n,k}|z_j| < \frac{\varepsilon_0}{M} \Rightarrow a_{j-n,k} < \frac{\varepsilon_0}{M|z_j|} < \frac{\varepsilon_0 a_{j,k}}{2M} < \varepsilon_0 \text{ si } |j| \leq q.$$

Por otro lado se tiene que

$$a_{j,k}\left|\frac{1}{2}y_j - z_{j+n}\right| < \frac{1}{2} \Rightarrow |z_{j+n}| > \frac{1}{2a_{j,k}} \text{ si } |j| \leq q.$$

De esto se deduce que

$$a_{j+n,k} < \frac{\varepsilon_0}{2M\,|z_{j+n}|} < \varepsilon_0 \frac{a_{j,k}}{M} \leq \varepsilon_0 \text{ si } |j| \leq q$$

lo cual es una contradicción con (1.11). ■

A continuación vamos a obtener caracterizaciones para el caos del operador backward shift bilateral en espacios de Köthe. Los métodos utilizados en la demostración son similares a los del teorema 1.1.3.

Teorema 1.2.2 *Sea A una matriz de Köthe que satisface la condición (1.10) y $1 \leq p < \infty$ (resp. $p = 0$). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) B tiene un punto periódico no nulo.

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{a_{i,k}\}_{i\in\mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z})$ (resp. $\{a_{i,k}\}_{i\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$).

(iii) $l_\infty(\mathbb{Z}) \subset \lambda_p(A)$ canónicamente.

(iv) B es caótico.

Demostración. (i) → (ii). Supongamos que B tiene un punto periódico no nulo, es decir, existen $x \in \lambda_p(A)$, $N > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $B^N x = x$ y $x_{n_0} \neq 0$. Tenemos entonces que x es periódico de período N y que $\{x_{n_0+jN}\}_{j\in\mathbb{Z}}$ es una sucesión constante no nula.

Si $1 \leq p < \infty$, para cada $k \in N$ tenemos

$$\begin{aligned} |x_{n_0}|^p \sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{n_0+jN,k}|^p &= \sum_{j=-\infty}^{\infty} |x_{n_0+jN}\ a_{n_0+jN,k}|^p \\ &\leq \sum_{i=-\infty}^{\infty} |x_i a_{i,k}|^p < \infty, \end{aligned}$$

de donde, teniendo en cuenta que $x_{n_0} \neq 0$, deducimos que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{n_0+jN,k}|^p < \infty.$$

Para $n_0 < r < n_0 + N$ aplicamos el mismo razonamiento que antes a $B^{r-n_0}x$ en lugar de a x, deduciendo que

$$\sum_{j=-\infty}^{\infty} |a_{n_0-r+jN,k}|^p < \infty,\ r = 1, \dots, N-1,$$

de donde obtenemos que $(a_{i,k})_{i=-\infty}^{\infty} \in l_p(\mathbb{Z})$.

Si $p = 0$, utilizando un razonamiento similar tendríamos para cada $k \in \mathbb{N}$ que

$$\lim_{|j|\to\infty} a_{n_0-r+jN,k} = 0,\ 1 \le r \le N,$$

de donde $(a_{i,k})_{i=\infty}^{\infty} \in c_0(\mathbb{Z})$

Notemos que (ii) y (iii) son equivalentes por la observación 0.3.13 de la página 22.

(ii) ((iii)) $\to$ (iv). Por hipótesis, para cada $k \in \mathbb{N}$, $(a_{i,k})_{i=-\infty}^{\infty} \in l_p(\mathbb{Z})$ (resp. $c_0(\mathbb{Z})$). Esto implica que se cumple (i) de la proposición 1.2.1, luego B es hipercíclico.

Veamos que B posee un conjunto denso de puntos periódicos. En primer lugar observamos que si una sucesión en $\mathbb{Z}$ es periódica, entonces es obviamente un punto periódico para B. Por otro lado, como $(a_{i,k})_{i=-\infty}^{\infty} \in l_p(\mathbb{Z})$ (resp. $c_0(\mathbb{Z})$) para todo $k \in \mathbb{N}$, toda sucesión periódica pertenece a $\lambda_p(A)$. Afirmamos que

$$H := \{\{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in \mathbb{K}^{\mathbb{Z}}\ :\ \{x_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \text{ es una sucesión periódica } \}$$

es denso en $\lambda_p(A)$.

Sea e_i, $i \in \mathbb{Z}$ fijo. Para cada $k \in \mathbb{N}$, como $(a_{j,k})_{j=-\infty}^{\infty} \in l_p(\mathbb{Z})$ (resp. $c_0(\mathbb{Z})$)

$$\exists\ n_k > |i|\ :\ \left(\sum_{|j|\ge n_k+1} |a_{j,k}|^p\right)^{1/p} < \frac{1}{k}.$$

$$(\text{resp. } \sup_{|j|\ge n_k+1} |a_{j,k}| < \frac{1}{k})$$

Definimos $z \in H$ como

$$z_j := \begin{cases} 1 & \text{si } j \equiv i \pmod{2n_k} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Se tiene que

$$\begin{aligned} \|z - e_i\|_k &= \left(\sum_{\substack{j=-\infty \\ j \neq 0}}^{\infty} |a_{i+2jn_k,k}|^p \right)^{1/p} \leq \left(\sum_{|j| \geq n_k+1} |a_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \frac{1}{k} \\ \text{(resp.} &= \sup_{j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} |a_{i+2jn_k,k}| \leq \sup_{|j| \geq n_k+1} |a_{j,k}| < \frac{1}{k}), \end{aligned}$$

y por tanto $e_i \in \overline{H}$, para todo $i \in \mathbb{Z}$. La afirmación hecha queda demostrada sin más que tener en cuenta que H es un espacio vectorial y que $\mathrm{lin}\{e_i : i \in \mathbb{Z}\}$ es densa en $\lambda_p(A)$.

(iv) $\to$ (i) es trivial, luego la prueba está completa. ■

Para acabar esta sección vamos a obtener las correspondientes caracterizaciones (similares a los corolarios 1.1.4 y 1.1.5) para el caso ponderado del backward shift bilateral. Las técnicas utilizadas serán las mismas que allí, haciendo también uso de un diagrama conmutativo.

Supongamos que tenemos una sucesión de escalares $w = \{w_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$. Recordamos que la aplicación backward shift ponderado bilateral B_w, asociado a la sucesión w viene dada por

$$B_w e_i := w_i e_{i-1}, \ i \in \mathbb{Z}.$$

Supongamos también dada una matriz de Köthe $A = (a_{j,k})_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}}$. Como ocurría en el caso unilateral, también es cierto que si la sucesión w tiene alguna coordenada nula, entonces no puede ser hipercíclico. Supondremos por tanto que

$$w_i \neq 0, \ \forall i \in \mathbb{Z}.$$

Definimos

$$v_0 := 1, \ v_i := \frac{1}{|w_1 \cdots w_i|}, \ v_{-i} := |w_0 w_{-1} \cdots w_{-i+1}|, \ i > 0, \tag{1.12}$$

tomamos

$$\bar{A} := (\bar{a}_{j,k})_{j \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N}} \ : \ \bar{a}_{j,k} := v_j a_{j,k}, \ \forall \ j \in \mathbb{Z}, \ \forall \ k \in \mathbb{N}, \tag{1.13}$$

y la transformación diagonal $\phi_v : \lambda_p(\bar{A}) \longrightarrow \lambda_p(A)$ tal que

$$\phi_v(\dots, x_{-1}, \overset{\triangledown}{x_0}, x_1, \dots) := (\dots, v_{-1}x_{-1}, v_0\overset{\triangledown}{x_0}, v_1x_1, \dots).$$

Podemos construir el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \lambda_p(\bar{A}) & \xrightarrow{B} & \lambda_p(\bar{A}) \\ {\scriptstyle \phi_v}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_v}\Big\downarrow \\ \lambda_p(A) & \xrightarrow{B_w} & \lambda_p(A) \end{array} \tag{1.14}$$

y establecer las siguientes

Propiedades:

1. El diagrama 1.14 es conmutativo.

2. ϕ_v es un isomorfismo.

3. B_w es continua en $\lambda_p(A)$ si y sólo si A y w satisfacen la condición

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n\ :\ \sup_{j\in\mathbb{Z}} |w_{j+1}| \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} < \infty. \tag{1.15}$$

4. B y B_w son topológicamente conjugados. Por tanto tenemos que B es hipercíclico (satisface el Criterio de Hiperciclicidad, caótico) si y sólo si B_w es hipercíclico (satisface el Criterio de Hiperciclicidad, caótico)

Demostración. Las pruebas son análogas a las que se hicieron para el diagrama 1.7 en la página 41 y siguientes. ■

Aplicando estas propiedades y las caracterizaciones obtenidas para B en la proposición 1.2.1 y el teorema 1.2.2 obtenemos los siguientes

Corolario 1.2.3 *Sean A una matriz de Köthe y w una sucesión satisfaciendo la condición (1.15), y $1 \le p < \infty$ o $p = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) Para cada $k \in \mathbb{N}$, dado $\varepsilon > 0$ e $i \in \mathbb{N}$, existe un natural n tal que

$$\max_{|j|\le i}\{v_{j+n}a_{j+n,k}, v_{j-n}a_{j-n,k}\} < \varepsilon,$$

donde $\{v_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ están definidos por (1.12).

(ii) $B_w : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ *satisface el Criterio de Hiperciclicidad.*

(iii) $B_w : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A)$ *es hipercíclico.*

Demostración. La demostración es inmediata por la proposición 1.2.1, tomando $\bar{A}$ dada por (1.13). ■

Corolario 1.2.4 *Sea A una matriz de Köthe y w una sucesión satisfaciendo la condición (1.15), y $1 \leq p < \infty$ (resp. $p = 0$). Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) B_w *tiene un punto periódico no nulo.*

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{v_i a_{i,k}\}_{i\in\mathbb{Z}} \in l_p(\mathbb{Z})$ (resp. $\{v_i a_{i,k}\}_{i\in\mathbb{Z}} \in c_0(\mathbb{Z})$), donde $(v_j)_{j\in\mathbb{Z}}$ están definidas por (1.12).

(iii) B_w *es caótico.*

Demostración. Tomemos $\bar{A}$ dada por (1.13) y (1.12). Ahora aplicamos el teorema 1.2.2 y observamos que $x \in \lambda_p(\bar{A})$ es una sucesión periódica no nula para B si y sólo si $\phi_v x \in \lambda_p(A)$ es una sucesión periódica no nula para B_w. ■

Ejemplos 1.2.5 Supongamos $A = (1)_{j\in\mathbb{Z},k\in\mathbb{N}}$ y $w = \{w_i\}_{i\in\mathbb{Z}} \in l_\infty(\mathbb{Z})$. Para $1 \leq p < \infty$ (resp. $p = 0$), tenemos que

(i) $B_w : l_p(\mathbb{Z}) \to l_p(\mathbb{Z})$ es hipercíclico si y sólo si dado $\varepsilon > 0$ e $i \in \mathbb{N}$, existe un natural n tal que

$$\max_{|j|\leq i}\{\frac{1}{\prod_{k=1}^{j+n}|w_k|}, \prod_{k=0}^{j-n+1}|w_k|\} < \varepsilon.$$

Salas obtuvo en [62] una caracterización similar para el forward shift ponderado bilateral.

(ii) $B_w : l_p(\mathbb{Z}) \to l_p(\mathbb{Z})$ es caótico si y sólo si

$$\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\frac{1}{\prod_{i=1}^{j}|w_i^p|} + \prod_{i=0}^{-j+1}|w_i^p|\right) < \infty$$

$$(\text{resp. } \lim_{j\to\infty}\frac{1}{\prod_{i=1}^{j} w_i} = \lim_{j\to\infty}\prod_{i=0}^{-j+1} w_i = 0, \text{ para } p = 0).$$

1.3 Perturbaciones de la identidad por backward shift

Como se mencionó en la introducción del capítulo, varios autores se han interesado por la hiperciclicidad de perturbaciones de la identidad por operadores shift (forward o backward). Salas probó que la identidad más un operador backward shift ponderado es hipercíclico en l_p (véase [62, teorema 3.3]). En esta sección generalizamos este resultado a espacios escalonados de Köthe $\lambda_p(A)$ y también estudiamos cuando son caóticos perturbaciones de la identidad por operadores backward shift ponderados.

Teorema 1.3.1 *Sea B_w un operador (continuo) backward shift ponderado ($w_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$) en $\lambda_p(A)$, $1 \leq p < \infty$ o $p = 0$. Entonces $I + B_w$ es hipercíclico y satisface el Criterio de Hiperciclicidad.*

Demostración. Comenzaremos por el caso $I + B$. B es el operador backward shift continuo definido en $\lambda_p(A)$. Según se probó en 0.3.7 tenemos que la matriz A satisface la condición (1) de la página 18. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que

$$M_{k+1} := \sup_{j \in \mathbb{N}} \frac{a_{j,k}}{a_{j+1,k+1}} < \infty \tag{1.16}$$

para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos

$$\bar{w}_i := \frac{a_{i-1,i-1}}{a_{i,i}(1 + M_i)}, \ i \geq 2, \ (\bar{w}_i := 1 \text{ si } a_{i,i} = 0 \text{ o si } a_{i-1,i-1} = 0),$$

y tomamos el operador backward shift ponderado $B_{\bar{w}} : l_p \longrightarrow l_p$ dado por

$$B_{\bar{w}}(x_1, x_2, \dots) := (\bar{w}_2 x_2, \bar{w}_3 x_3, \dots).$$

Por 1.16, tenemos que $\bar{w}$ es una sucesión acotada y por tanto $B_{\bar{w}}$ está bien definido y es continuo en l_p. Consideraremos ahora una transformación diagonal $\phi_{\bar{v}} : l_p \longrightarrow \lambda_p(A)$ definida de la siguiente manera: si $a_{j,j} = 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$ tomamos $\bar{v}_j := 1$. En otro caso

$$\bar{v}_j = \begin{cases} \frac{1}{a_{j,j}(\prod_{i=1}^{j}(1+M_i))} & \text{si} \quad a_{j,j} \neq 0, \\ \\ \frac{1}{a_{k,k}(\prod_{i=1}^{k}(1+M_i))} & \text{si} \quad a_{j,j} = 0, \end{cases}$$

donde $k := \min\{j : a_{j,j} \neq 0\}$, $M_1 := 1$. Obsérvese que por (1.16), se tiene que si $a_{j,j} \neq 0$ entonces $a_{j+1,j+1} \neq 0$. Veamos que $\phi_{\bar{v}}$ está bien definida y es continua. Para ello fijamos $x \in l_p$ y $k \in \mathbb{N}$. Si $\|.\|_k$ denota la k-ésima seminorma en $\lambda_p(A)$, tenemos que

$$\begin{aligned}
\|\phi_{\bar{v}} x\|_k^p &\leq \sum_{j=1}^{k-1} a_{j,k}^p \bar{v}_j^p |x_j|^p + \sum_{\substack{j=k \\ a_{j,j}\neq 0}}^{\infty} \left(\frac{a_{j,k}}{a_{j,j}}\right)^p |x_j|^p + \sum_{\substack{j=k \\ a_{j,j}=0}}^{\infty} a_{j,k}^p \bar{v}_j^p |x_j|^p \\
&\leq \sum_{j=1}^{k-1} a_{j,k}^p \bar{v}_j^p |x_j|^p + \sum_{j=k}^{\infty} |x_j|^p + \sum_{\substack{j=k \\ a_{j,j}=0}}^{\infty} a_{j,k}^p \bar{v}_j^p |x_j|^p \\
&\leq N_k \|x\|^p,
\end{aligned}$$

donde N_k depende únicamente de k. Por tanto $\phi_{\bar{v}}$ está bien definida y es continua.

Veamos a continuación que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
l_p \arrow[r, "B_{\bar{w}}"] \arrow[d, "\phi_{\bar{v}}"'] & l_p \arrow[d, "\phi_{\bar{v}}"'] \\
\lambda_p(A) \arrow[r, "B"] & \lambda_p(A)
\end{tikzcd} \tag{1.17}$$

es conmutativo. Observemos primero que para $i \geq 1$ con $a_{i,i} \neq 0$ (luego $a_{i+1,i+1} \neq 0$) se tiene

$$\begin{aligned}
\bar{v}_i \bar{w}_{i+1} &= \frac{1}{a_{i,i}(\prod_{j=1}^{i}(1+M_j))} \frac{a_{i,i}}{a_{i+1,i+1}(1+M_{i+1})} \\
&= \frac{1}{(\prod_{j=1}^{i}(1+M_j))a_{i+1,i+1}(1+M_{i+1})} = \bar{v}_{i+1}.
\end{aligned}$$

Para $i \geq 1$ con $a_{i+1,i+1} = 0$ (luego $a_{i,i} = 0$) se tiene

$$\bar{v}_i \bar{w}_{i+1} = \frac{1}{a_{k,k}(\prod_{j=1}^{k}(1+M_j))} 1 = \bar{v}_{i+1}.$$

Para $i \geq 1$ con $a_{i,i} = 0$ y $a_{i+1,i+1} \neq 0$ se tiene

$$\bar{v}_i \bar{w}_{i+1} = \frac{1}{a_{k,k}(\prod_{j=1}^{k}(1+M_j))} 1 = \frac{1}{a_{i+1,i+1}(\prod_{j=1}^{i+1}(1+M_j))} = \bar{v}_{i+1},$$

ya que $k = \min\{j : a_{j,j} \neq 0\} = i + 1$. Sea $x \in l_p$, se tiene

$$B \circ \phi_{\bar{v}}(x_i)_{i\geq 1} = B(\bar{v}_i x_i)_{i\geq 1} = (\bar{v}_{i+1} x_{i+1})_{i\geq 1},$$

$$\phi_{\bar{v}} \circ B_{\bar{w}}(x_i)_{i\geq 1} = \phi_{\bar{v}}(\bar{w}_{i+1} x_{i+1})_{i\geq 1} = (\bar{v}_i \bar{w}_{i+1} x_{i+1})_{i\geq 1} = (\bar{v}_{i+1} x_{i+1})_{i\geq 1}.$$

Es trivial comprobar que si sumamos la identidad a B y a $B_{\bar{w}}$ el diagrama

$$\begin{array}{ccc} l_p & \xrightarrow{I+B_{\bar{w}}} & l_p \\ {\scriptstyle \phi_{\bar{v}}}\downarrow & & {\scriptstyle \phi_{\bar{v}}}\downarrow \\ \lambda_p(A) & \xrightarrow{I+B} & \lambda_p(A) \end{array} \tag{1.18}$$

sigue siendo conmutativo. Aplicando ahora un resultado de Salas [62, teorema 3.3] se obtiene que $I + B_{\bar{w}}$ es hipercíclico. Teniendo ahora en cuenta que $\phi_{\bar{v}}$ tiene rango denso ya que $\phi_{\bar{v}}(\text{lin}\{e_j,\ j \in \mathbb{N}\}) = \text{lin}\{e_j,\ j \in \mathbb{N}\}$, obtenemos que $I + B$ es hipercíclico en $\lambda_p(A)$ a partir del lema 0.2.19. León y Montes [48] prueban que $I + B_{\bar{w}}$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad y entonces, aplicando el mismo lema, obtenemos que $I + B$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad en $\lambda_p(A)$.

Para la situación general cuando tenemos $I + B_w$ en $\lambda_p(A)$, es suficiente observar que se puede reducir al caso que hemos visto utilizando un diagrama conmutativo al igual que hicimos en las dos secciones anteriores, es decir, podemos considerar

$$\begin{array}{ccc} l_p & \xrightarrow{I+B_{\bar{w}}} & l_p \\ {\scriptstyle \phi_{\bar{v}}}\downarrow & & {\scriptstyle \phi_{\bar{v}}}\downarrow \\ \lambda_p(\bar{A}) & \xrightarrow{I+B} & \lambda_p(\bar{A}) \\ {\scriptstyle \phi_{v}}\downarrow & & {\scriptstyle \phi_{v}}\downarrow \\ \lambda_p(A) & \xrightarrow{I+B_w} & \lambda_p(A) \end{array}$$

donde $\bar{A}$ y v_i se definen como en 1.5 y 1.6. ∎

Teorema 1.3.2 *Sea B_w un operador (continuo) backward shift ponderado ($w_j \neq 0$ para todo $j \in \mathbb{N}$) en $\lambda_p(A)$, $1 \leq p < \infty$ o $p = 0$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $I + B_w$ *es caótico.*

(ii)

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\limsup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,k}^{1/j}}{\left|\prod_{i=2}^{j} w_i\right|^{1/j}} \right) < \infty.$$

(iii) $I + B_w$ *tiene un punto periódico no fijo.*

Demostración. Probaremos en primer lugar las equivalencias para el caso $B_w = B$ y $\lambda_p(A)$ complejo.

(i) $\to$ (iii) Observemos en primer lugar que si $x = \{x_i\}_{i\geq 1} \in \lambda_p(A)$ es un punto fijo de $I + B$, entonces

$$(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots) = (x_1, x_2, \dots),$$

de donde se deduce que $x \in \mathrm{lin}\{e_1\}$. Como por hipótesis el conjunto de los puntos periódicos es denso en $\lambda_p(A)$, tenemos que necesariamente deben existir puntos periódicos no fijos.

(iii) $\to$ (ii) Si $T := I + B$ tiene un punto periódico no fijo de período $n > 1$, entonces $\ker(T - I) \subsetneq \ker(T^n - I)$, es decir, existe $z \in \lambda_p(A)$ tal que $(T^n - I)z = 0$ pero $(T - I)z \neq 0$. Tomando las raíces n-ésimas de la unidad en $\mathbb{C}$ y descomponiendo el polinomio $T^n - I$ tendríamos que

$$(T - \lambda_1 I)(T - \lambda_2 I) \dots (T - \lambda_{n-1} I)(T - I)z = 0,$$

de donde existe una raíz n-ésima de la unidad $\lambda \in \mathbb{C}$ ($\lambda \neq 1$) tal que $\ker(T - \lambda I) \neq \{0\}$. Sea $x \in \lambda_p(A)$ un vector propio de T de valor propio λ. Se tiene entonces que $x + Bx = \lambda x$, de donde $x_i + x_{i+1} = \lambda x_i$, $i \in \mathbb{N}$, lo cual implica que

$$x = x_1(1, (\lambda - 1), (\lambda - 1)^2, \dots) \in \mathrm{lin}\{(1, \delta, \delta^2, \dots)\},$$

con $\delta = \lambda - 1 \neq 0$. Entonces

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} |\delta|^{jp} a_{j,k}^p < \infty, \ \forall\, k \in \mathbb{N},$$

de donde tenemos que

$$\limsup_{j\in\mathbb{N}} \left(\delta a_{j,k}^{1/j}\right)^p \leq 1, \ \forall k \in \mathbb{N},$$

lo cual es equivalente a que

$$M := \sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\limsup_{j\in\mathbb{N}} a_{j,k}^{1/j}\right) < \infty.$$

(ii) $\to$ (i) La condición supuesta implica que existe $m > 0$ tal que

$$X := \{(z, z^2, z^3, \dots) \ : \ |z| \leq m, \ |1+z| = 1, \ \text{y} \ \frac{\arg(1+z)}{\pi} \in \mathbb{Q}\}$$

está contenido en $\lambda_p(A)$. Si $y = (y_j) \in \lambda_p(A)'$ entonces

$$\langle x, y \rangle = \sum_{j\in\mathbb{N}} z^j y_j = 0, \ \forall \ x \in X \ \Rightarrow \ y = 0,$$

lo que implica que $\overline{\mathrm{lin}(X)} = \lambda_p(A)$. Para obtener (i) finalmente observar que los elementos de X son todos periódicos para $I + B$ y que el conjunto de los puntos periódicos de una aplicación lineal es un subespacio vectorial.

Para el caso general en el que tenemos $T = I + B_w$, consideremos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} \lambda_p(\bar{A}) & \xrightarrow{I+B} & \lambda_p(\bar{A}) \\ {\scriptstyle \phi_v}\Big\downarrow & & {\scriptstyle \phi_v}\Big\downarrow \\ \lambda_p(A) & \xrightarrow{I+B_w} & \lambda_p(A) \end{array} \tag{1.19}$$

donde $\bar{A}$ y v_i vienen dadas por 1.5 y 1.6.

Teniendo en cuenta las propiedades que se probaron para este diagrama en la página 41, se tiene que el operador $I + B_w$ en $\lambda_p(A)$ es topológicamente conjugado con el operador $I + B$ en $\lambda_p(\bar{A})$, por tanto (i) y/o (iii) se satisfacen para $I + B_w$ si y sólo si se satisfacen para $I + B$. Por otro lado, teniendo en cuenta las definiciones de $\bar{A}$ y v_i según 1.5 and 1.6, se tiene la condición (ii) para $I + B$ en $\lambda_p(\bar{A})$ si y sólo si

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\limsup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,k}^{1/j}}{\left|\prod_{i=2}^{j} w_i\right|^{1/j}}\right) < \infty.$$

Para terminar tan solo nos falta por considerar el caso en que $\lambda_p(A)$ es real. Tomamos en este caso su complexificación $\tilde{\lambda_p}(A) := \lambda_p(A) + i\lambda_p(A)$ junto con la complexificación $\tilde{T}$ de $T = I + B_w$ definida como

$$\tilde{T}(x + iy) := Tx + iTy = (I + \tilde{B}_w)(x + iy), \; x, y \in \lambda_p(A).$$

Se tiene que T satisface (ii) si y sólo si $\tilde{T}$ satisface (ii). Las equivalencias entre (i) y/o (iii) para T y $\tilde{T}$ son inmediatas. ■

Ejemplos 1.3.3 (1) Para el caso particular de $\lambda_p(A) = l_p$ $(A = (1)_{j,k\in\mathbb{N}})$, la caracterización anterior puede escribirse como

$$\inf_{j\in\mathbb{N}} \prod_{k=2}^{j} |w_k|^{1/j} > 0.$$

(2) Si $\lambda_p(A) = \omega$ (el producto de líneas), $I + B_w$ es caótico para todo backward shift ponderado ya que el supremo en (ii) es 0.

1.4 Backward shift generalizados

En esta última sección del capítulo vamos a aplicar algunos de los resultados obtenidos en las secciones anteriores a operadores backward shift generalizados en espacios de Fréchet. Estos operadores son introducidos por Godefroy y Shapiro [36], generalizando los operadores backward shift a otros espacios no necesariamente de sucesiones.

Definición 1.4.1 *Un operador continuo S en un espacio de Fréchet E es un backward shift generalizado si satisface las siguientes condiciones:*

(GBS1) *El núcleo de S tiene dimensión 1.*

(GBS2) $\cup\{\ker S^n \;:\; n = 0, 1, 2, \dots\}$ *es densa en E.*

Operadores backward shift ponderados en l_p o en $\lambda_p(A)$ son backward shift generalizados. El operador derivada en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ por ejemplo también es un ejemplo típico. En [36] Godefroy y Shapiro muestran ejemplos de backward shift generalizados que son adjuntos de operadores de multiplicación en el espacio de Bergman $A^2(\Omega)$.

Los operadores backward shift generalizados también han aparecido recientemente en la solución del problema de Rolewicz sobre la existencia de operadores hipercíclicos en espacios de Banach separables (véase [2, 8]) y en espacios de Fréchet separables [22]. En ambos casos se usan perturbaciones de la identidad por operadores backward shift generalizados compactos.

Respecto a la estructura algebraica de los operadores backward shift generalizados se tiene que S es un operador backward shift generalizado si y sólo si existe una sucesión $\{x_n\}_{n\geq 1}$ en E tal que $Sx_n = x_{n-1}$, $n > 1$, $\ker S = \mathrm{lin}\{x_1\}$ y $\mathrm{lin}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ es denso en E (véase [36, proposición 3.3]).

Como consecuencia del teorema 1.3.1 tenemos

Teorema 1.4.2 *Si S es un backward shift generalizado en un espacio de Fréchet E, entonces $I + S$ es hipercíclico y satisface el Criterio de Hiperciclicidad.*

Demostración. Sea $\{e_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión de elementos no nulos de E tal que $Se_1 = 0$, $Se_{j+1} = e_j$, $j \in \mathbb{N}$, y $\mathrm{lin}\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ es densa en E. Fijemos una sucesión creciente fundamental de seminormas $\{\|.\|_k\}_{k\geq 1}$ en E. Si definimos $a_{j,k} := \|e_j\|_k$, $j, k \in \mathbb{N}$, entonces la matriz $A := (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ es una matriz de Köthe. Construimos

$$\psi : \lambda_1(A) \longrightarrow E \ ; \ \psi(x_1, x_2, \dots) := \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j e_j.$$

Se tiene que ψ está bien definido y es continuo ya que E es completo y se satisface

$$\|\psi x\|_k = \left\| \sum_{j\in\mathbb{N}} x_j e_j \right\|_k \leq \sum_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\, a_{j,k} =: |x|_k\,,$$

donde $|.|_k$ denota la k-ésima seminorma en $\lambda_1(A)$.

Si consideramos el operador backward shift B en $\lambda_1(A)$, veamos que está bien definido y es continuo. Concretamente vamos a probar que la matriz A satisface la condición 1.1. Por la continuidad de S tenemos que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe un natural $m > n$ tal que

$$\|Sx\|_n \leq \|x\|_m, \ \forall\, x \in E.$$

En particular $\|e_j\|_n \leq \|e_{j+1}\|_m$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y de aquí se deduce que

$$\frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}} \leq 1, \ \forall\, j \in \mathbb{N},$$

donde 0/0 se define como 1.

Veamos a continuación que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1(A) & \xrightarrow{I+B} & \lambda_1(A) \\ \psi \Big\downarrow & & \psi \Big\downarrow \\ E & \xrightarrow{I+S} & E \end{array} \tag{1.20}$$

es conmutativo. Si $x = (x_1, x_2, \dots) \in \lambda_1(A)$ tenemos que

$$\begin{aligned} (I+S) \circ \psi(x_1, x_2, \dots) &= (I+S) \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j e_j \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} x_j e_j + \sum_{j \in \mathbb{N}} x_{j+1} e_j = \sum_{j \in \mathbb{N}} (x_j + x_{j+1}) e_j, \\ \phi \circ (I+B)(x_1, x_2, \dots) &= \phi(x_1 + x_2, x_2 + x_3, \dots) \\ &= \sum_{j \in \mathbb{N}} (x_j + x_{j+1}) e_j. \end{aligned}$$

Además ψ tiene rango denso ya que $\text{lin}\{e_j : j \in \mathbb{N}\} \subset \text{Im}\, \psi$. Por el teorema 1.3.1 obtenemos que $I + B$ es hipercíclico y satisface el Criterio de Hiperciclicidad en $\lambda_1(A)$. Aplicando el lema 0.2.19, se obtiene la hiperciclicidad de $I + S$ y también que satisface el Criterio de Hiperciclicidad. ■

Observación 1.4.3 Godefroy y Shapiro preguntan en [36, 4.10(c)] sobre la hiperciclicidad de perturbaciones de la identidad por backward shift generalizados casinilpotentes. Salas, motivado por una cuestión de Chan y Shapiro [28, p. 1447], demuestra en [62] que $I+T$ es hipercíclico en l_p $(1 \leq p < \infty)$ para todo backward shift unilateral ponderado. El teorema 1.4.2 generaliza el resultado de Salas y da respuesta positiva a la pregunta de Godefroy y Shapiro.

Una consecuencia interesante del teorema anterior es el siguiente

Corolario 1.4.4 *Si E es un espacio de Fréchet (real o complejo) de funciones de clase $\mathcal{C}^\infty$ tales que el operador derivada $D : E \to E$ está bien definido y es continuo, y los polinomios son densos E, entonces $I + D$ es hipercíclico en E.*

Para la hiperciclicidad y caos de operadores backward shift generalizados en espacios de Fréchet, y también para el caos de perturbaciones de la identidad por operadores backward shift generalizados, tenemos las siguientes caracterizaciones:

Teorema 1.4.5 *Sea $S : E \to E$ un operador backward shift generalizado en un espacio de Fréchet E, y sea $\{e_j\}_{j\geq 1}$ una sucesión de elementos no nulos de E tales que $Se_1 = 0$, $Se_{j+1} = e_j$, $j \in \mathbb{N}$, y $\operatorname{lin}\{e_j : j \in \mathbb{N}\}$ es denso en E. Si $\{\|.\|_k\}_{k\geq 1}$ es una sucesión cualquiera fundamental de seminormas en E, entonces*

(a) *(1)* $\liminf_{j\in\mathbb{N}} \|e_j\|_k = 0$*, para todo $k \in \mathbb{N}$ implica que S es hipercíclico.*

(2) $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|e_j\|_k < \infty$*, para todo $k \in \mathbb{N}$ implica que S es caótico.*

(3) $\sup_{k\in\mathbb{N}} \left(\limsup_{j\in\mathbb{N}} \|e_j\|_k^{1/j}\right) < \infty$ *implica que $I + S$ es caótico.*

(b) Si $\{e_j\}_{j\geq 1}$ es una base topológica en E, entonces los recíprocos de (1) *y* (3) *también son ciertos.*

Demostración. (a) Aplicaremos el mismo argumento que en el teorema 1.4.2 para obtener los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} \lambda_1(A) & \xrightarrow{B} & \lambda_1(A) \\ {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow \\ E & \xrightarrow{S} & E \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} \lambda_1(A) & \xrightarrow{I+B} & \lambda_1(A) \\ {\scriptstyle\psi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\psi}\big\downarrow \\ E & \xrightarrow{I+S} & E \end{array}$$

Por lema 0.2.19 obtenemos (1), (2) y (3) aplicando 1.1.1, 1.1.3 y 1.3.2 respectivamente.

(b) Si $\{e_j\}_{j\geq 1}$ es una base topológica en E, entonces para todo $x \in E$ existe una sucesión (única) de escalares $\{x_j\}_{j\geq 1}$ tal que la serie $\sum_{j=1}^\infty x_j e_j$ es convergente y $x = \sum_{j=1}^\infty x_j e_j$. Esto implica que, tomando la matriz de Köthe

$A = (\|e_j\|_k)_{j,k\in\mathbb{N}}$, el operador

$$\varphi : E \to \lambda_0(A),\ \varphi(x) = \varphi(\sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j) := (x_j)_{j\in\mathbb{N}}$$

está bien definido y tiene rango denso ya que este rango contiene la base canónica, la cual es densa en $\lambda_0(A)$.

Por otro lado, toda base topológica en un espacio de Fréchet es equicontinua (véase por ejemplo [43, 14.2 y 14.3]), por tanto para todo $k \in \mathbb{N}$ existe un natural $k' \geq k$ y una constante $C > 0$ tal que para todo $x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j e_j \in E$, se tiene que

$$\left\| \sum_{j=n}^{m} x_j e_j \right\|_k \leq C\|x\|_{k'},\ \forall\, n, m \in \mathbb{N},\ m \geq n,$$

de donde obtenemos

$$\|\varphi(x)\|_k = \sup_{j\in\mathbb{N}} |x_j|\, \|e_j\|_k \leq C\|x\|_{k'},$$

y por tanto φ es continua.

Ahora consideramos los diagramas conmutativos

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{S} & E \\ \varphi\big\downarrow & & \varphi\big\downarrow \\ \lambda_0(A) & \xrightarrow{B} & \lambda_0(A) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{I+S} & E \\ \varphi\big\downarrow & & \varphi\big\downarrow \\ \lambda_0(A) & \xrightarrow{I+B} & \lambda_0(A) \end{array}$$

y aplicamos 1.1.1 y 1.3.2, para obtener los recíprocos de (1) y (3). ■

Observación 1.4.6 (1) Los recíprocos de (1) y (3) en el teorema anterior no son necesariamente ciertos si $\{e_j\}_{j\geq 1}$ no es una base topológica. Consideremos por ejemplo $S = 2B$ en l_1. S e $I + S$ son caóticos en l_1 por 1.1.5 y 1.3.2. Si denotamos por $\{f_j\}_{j\geq 1}$ la base canónica en l_1 y tomamos

$$e_n := \frac{1}{2^n}\left(\sum_{j=1}^{n} (n-j)^{n-j} f_j\right),\ n \in \mathbb{N},$$

entonces $\{e_j\}_{j\geq 1}$ y S satisfacen las hipótesis del teorema 1.4.5. Pero $\|e_n\| > \frac{(n-1)^{n-1}}{2^n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$, y entonces $\lim \|e_n\| = \infty$ y $\lim \|e_n\|^{1/n} = \infty$.

(2) El recíproco de (2) en el teorema 1.4.5 no es cierto en general, incluso si $\{e_j\}_{j\geq 1}$ es una base topológica en E. No obstante, una adaptación de la demostración del teorema 1.1.3 demuestra que, si $\{e_j\}_{j\geq 1}$ es una base absoluta en E, entonces S es caótico si y sólo si la serie $\sum_{j\in\mathbb{N}} \|e_j\|_k$ converge para todo $k \in \mathbb{N}$ (véase también [38, teorema 7]).

Capítulo 2

Existencia de operadores caóticos en espacios de Fréchet

Volviendo a los comienzos de la hiperciclicidad, Rolewicz [60] estudió el primer operador hipercíclico en espacios de Hilbert. Concretamente probó que $\lambda B : l_2 \to l_2$ es hipercíclico si y sólo si $|\lambda| > 1$. En este mismo artículo Rolewicz demuestra que los espacios de Banach de dimensión finita no admiten operadores hipercíclicos, preguntando si todo espacio de Banach separable de dimensión infinita admite operador hipercíclico. Recientemente Ansari [2] y Bernal [8] contestan independientemente de forma afirmativa a esta cuestión. Más tarde, Bonet y Peris [22] generalizan el resultado a espacios de Fréchet separables de dimensión infinita. En todos los casos la demostración está basada en un resultado de Salas [62] concerniente a la hiperciclicidad de perturbaciones de la identidad por operadores backward shift ponderados en l_1, con la particularidad de que los operadores backward shift ponderados que se utilizan en [2, 8, 22] son operadores compactos (la imagen de algún 0-entorno es un conjunto relativamente compacto). Si inspirados por estas construcciones nos preguntamos por el caos de perturbaciones de la identidad por operadores compactos en espacios de Fréchet, tenemos la siguiente

Proposición 2.1 *Ninguna perturbación de la identidad por un operador compacto en un espacio de Fréchet E es caótica.*

Demostración. Supongamos en primer lugar que E es un espacio de Banach complejo. Si $T : E \to E$ es compacto y $I + T$ es hipercíclico, utilizaremos el mismo argumento que Chan y Shapiro [28, proposición 4.3] para probar que el espectro de $I+T$ es $\{1\}$.

El adjunto $(I+T)^* = I+T^*$ de $I+T$ no tiene valores propios (véase Kitai [44, corolario 2.4]). Como $I+T^*$ también es una perturbación de la identidad por un operador compacto, se tiene que su espectro se reduce al único punto $\{1\}$, ya que en caso contrario $I+T^*$ tendría valores propios (véase [61, teorema 4.25(b)]). Por tanto $\sigma(I+T) = \sigma(I+T^*) = \{1\}$.

Si $I+T$ es caótico, entonces $I+T$ tiene un punto periódico no fijo. Utilizando el mismo argumento que se usó en el teorema 1.3.2 (apartado (iii) $\to$ (ii)) obtendríamos que existe una raíz n-ésima λ de la unidad ($\lambda \neq 1$) tal que λ es un valor propio de $I+T$. Esto es una contradicción.

Para E un espacio de Banach real, consideramos primero las complexificaciones $\tilde{E} = E+iE$ de E, y $I+\tilde{T}$ de $I+T$ ($(I+\tilde{T})(e+if) := (I+T)e+i(I+T)f$). Si $I+T$ es caótico, entonces $I+\tilde{T}$ es también caótico (véase [14]) y entonces $\tilde{T}$ no puede ser compacto, lo cual implica que T no es compacto y esto es una contradicción.

Si E es un espacio de Fréchet y $T : E \to E$ es un operador compacto, entonces existe un 0-entorno U en E absolutamente convexo tal que $\overline{T(U)}$ es un conjunto compacto. Entonces T induce un operador compacto $\bar{T} : \hat{E}_U \to \hat{E}_U$ en el espacio de Banach $\hat{E}_U$ asociado a U. La aplicación ("canonical linking map") $\phi : E \to \hat{E}_U$ es continua, tiene rango denso y $(I+\bar{T}) \circ \phi = \phi \circ (I+T)$. Como $I+\bar{T}$ no es caótico obtenemos que $I+T$ tampoco es caótico por el lema 0.2.19. ■

Teniendo en cuenta la proposición anterior y los comentarios hechos al principio del capítulo, observamos que la construcción general de operadores hipercíclicos en espacios de Fréchet separables infinito dimensionales siempre conduce a perturbaciones de la identidad por operadores compactos, y por tanto no pueden ser caóticos. De esta manera surge una pregunta natural:

¿Todo espacio de Fréchet separable infinito dimensional admite operador caótico?

A continuación vamos a contestar de forma negativa a la pregunta anterior. Concretamente probaremos que el dual de espacios de Banach complejos, separables, reflexivos y hereditariamente indescomponibles de Gowers y Maurey no admiten operadores caóticos. Nos basaremos en resultados de Gowers y Maurey [37, Sección 4] sobre operadores definidos en espacios de Banach complejos hereditariamente indescomponibles. La existencia de espacios de Banach de este tipo también se demuestra en el mismo artículo [37].

Teorema 2.2 *Si X es un espacio de Banach complejo y separable, con dual X' hereditariamente indescomponible, entonces X no admite operador caótico.*

Demostración. En primer lugar observaremos que la existencia de espacios de Banach hereditariamente indescomponibles con predual es una consecuencia del hecho de que los ejemplos de los espacios hereditariamente indescomponibles de Gowers y Maurey son reflexivos (véase [37, páginas 853 y 869]).

Por [37, teorema de la sección 4], todo operador A de X' en X' puede escribirse como $A = \lambda I + S$, con $\lambda \in \mathbb{C}$ y S estrictamente singular. Además, el espectro $\sigma(A)$ de A es finito, o consta de λ y una sucesión $(\lambda_n)_{n\geq 1}$ de valores propios con multiplicidad finita que converge a λ.

Supongamos que el operador $T : X \to X$ es caótico. Como T es hipercíclico, su adjunto $T^* : X' \to X'$ no puede tener valores propios (véase Kitai [44, corolario 2.4]). Por el resultado de Gowers y Maurey que acabamos de mencionar el espectro $\sigma(T) = \sigma(T^*)$ es finito. Como T es caótico, T tiene un punto periódico $p \neq 0$ en X, es decir, $(T^n - I)p = 0$ para algún $n \in \mathbb{N}$. Descomponiendo el polinomio

$$\lambda^n - 1 = (\lambda - \lambda_1) \dots (\lambda - \lambda_n)$$

y observando que

$$(T^n - I)p = (T - \lambda_1 I) \dots (T - \lambda_n I)p = 0,$$

concluimos que el espectro puntual $\sigma_p(T)$ es no vacío y necesariamente finito, ya que $\sigma_p(T) \subset \sigma(T)$. Definimos

$$A(T) := \{\mu \in \sigma_p(T) \ ; \ \mu^n = 1 \text{ para algún } n \in \mathbb{N}\},$$

y

$$P(T) := \prod_{\mu \in A(T)} (T - \mu I) \, .$$

Veamos que el conjunto de los puntos periódicos de T está contenido en $\ker(P(T))$. Si $x \neq 0$ es un punto periódico de T, entonces existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $(T^n - I)x = 0$. Descomponemos $\lambda^n - 1 = R(\lambda)Q(\lambda)$, donde $R(\lambda)$ es el producto de todos los factores de la forma $(\lambda - \lambda_i)$ y λ_i es una raíz n-ésima de la unidad que pertenece al espectro puntual $\sigma_p(T)$ de T, y obviamente $Q(\lambda) = (\lambda^n - 1)/R(\lambda)$. Si $R(T)x \neq 0$, entonces $Q(T)R(T)x = (T^n - I)x = 0$, de donde se deduce que $R(T)x \in \ker(Q(T))$. Consecuentemente, una de las raíces de $Q(\lambda)$ pertenece a $\sigma_p(T)$ y por tanto también pertenece a $A(T)$, lo cual es imposible. De aquí obtenemos que necesariamente $R(T)x = 0$ y entonces $P(T)x = 0$.

Como el conjunto de puntos periódicos de T es denso en X obtenemos que $P(T) = 0$. Teniendo en cuenta que un sencillo cálculo muestra que

$$\langle P(T)x, x' \rangle = \langle x, P(T^*)x' \rangle \, , \ \forall \ x \in X, \ \forall \ x' \in X',$$

se obtiene que $P(T^*) = 0$ y de aquí T^* tiene valores propios, lo cual es una contradicción con la hiperciclicidad de T. ■

Una consecuencia que podemos obtener observando detenidamente la demostración del teorema anterior es la siguiente

Proposición 2.3 *Si T es un operador hipercíclico en un espacio de Banach X complejo y separable, con dual X' hereditariamente indescomponible, entonces existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $T^N x = x$ para todo punto periódico $x \in X$ de T.*

Demostración. Si T no tiene puntos periódicos no nulos, entonces podemos tomar como N cualquier número natural fijo. Si T tiene algún punto periódico no nulo, utilizando la misma notación que en la demostración anterior, se tiene que el conjunto $A(T)$ de todas las raíces de la unidad que pertenecen al espectro puntual de T es finito. Definido el polinomio $P(\lambda)$ como antes, es decir,

$$P(\lambda) := \prod_{\mu \in A(T)} (\lambda - \mu) \, ,$$

podemos encontrar $N \in \mathbb{N}$ tal que $P(\lambda)$ divida al polinomio $\lambda^N - 1$. En la demostración anterior se probó que todo punto periódico $x \in X$ satisface $P(T)x = 0$. Por tanto $(T^N - I)(x) = 0$. $\blacksquare$

Capítulo 3

Productos tensoriales y universalidad

En este capítulo vamos a estudiar la incidencia de los productos tensoriales en la hiperciclicidad. El objetivo fundamental es establecer una herramienta bastante general que permita, e.g., obtener resultados de hiperciclicidad, caos o universalidad de operadores definidos en espacios de funciones de varias variables, a partir del conocimiento de la respectiva propiedad en espacios de funciones de una variable. La razón de ello estriba en que muchos operadores en espacios de funciones de varias variables se representan como productos tensoriales de operadores en espacios de funciones de una variable. Obtendremos también consecuencias para la universalidad de operadores de composición definidos en el álgebra $L(E)$ de los operadores $T : E \to E$ en un espacio de Fréchet E, dotada con la "strong operator topology" (SOT), o topología de la convergencia puntual. Aunque las consecuencias y ejemplos que presentaremos se centran en la hiperciclicidad y el caos, las herramientas y resultados generales son aplicables a otros tipos de universalidad como, e.g., la superciclicidad.

En la primera sección estableceremos los preliminares y resultados básicos sobre universalidad de productos tensoriales de operadores. Posteriormente aplicaremos la teoría establecida a diversos ejemplos, obteniendo como consecuencia resultados nuevos, otros que generalizan resultados conocidos y, en especial ofreciendo una vía alternativa y unificadora para estudiar operadores en espacios de naturaleza muy diversa que, aunque a priori no parezcan ser susceptibles de ser tratados vía los productos tensoriales, sin embargo es aplicable la teoría previa.

3.1 Universalidad de productos tensoriales de operadores

Recordamos que si la sucesión de operadores $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$, definidos en un espacio localmente convexo E satisface el Criterio de Universalidad, entonces existen subespacios densos X e Y de E, una sucesión creciente de naturales $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ y aplicaciones lineales $S_{m_k} : Y \longrightarrow E$, $k \in \mathbb{N}$ tales que

(i) $T_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puntualmente en X,

(ii) $S_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ puntualmente en Y,

(iii) $T_{m_k} \circ S_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} Id_Y$ puntualmente en Y.

En esta sección daremos condiciones que garanticen la universalidad de productos tensoriales de sucesiones de operadores. Estableceremos también nexos de conexión entre el problemas de la hiperciclicidad de sumas directas de operadores (en particular el problema de D. Herrero [42, p. 97]) y la hiperciclicidad de productos tensoriales. Por último, otra propiedad importante a estudiar en el contexto de este capítulo es el caos.

Podría decirse que el operador identidad está "lejos" de ser hipercíclico. Esto contrasta con el hecho que observaremos de que el producto tensorial del operador identidad con un operador que cumpla el Criterio de Hiperciclicidad es hipercíclico. Concretamente, tensorizar con la identidad es un caso particular, será suficiente tensorizar con un operador que satisfaga ciertas condiciones (la identidad las satisface). En este sentido damos la siguiente

Definición 3.1.1 *Diremos que una sucesión de operadores $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ en un espacio localmente convexo E cumple el Criterio de Tensor-Universalidad (CTU) respecto de la sucesión creciente de naturales $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ si existen subconjuntos densos X e Y de E y aplicaciones $S_{m_k} : Y \longrightarrow E$, $k \in \mathbb{N}$ (posiblemente no lineales, posiblemente discontinuas) tales que*

(i) $\{T_{m_k} x\}_{k=1}^{\infty}$ es acotado para cada $x \in X$,

(ii) $\{S_{m_k}y\}_{k=1}^{\infty}$ *es acotado para cada* $y \in Y$*,*

(iii) $T_{m_k} \circ S_{m_k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} Id_Y$ *puntualmente en* Y*.*

De manera similar, un operador T *en* E *se dice que satisface el Criterio de Tensor-Hiperciclicidad (CTH) si la sucesión de sus iteraciones* $\{T^n : n \in \mathbb{N}\}$ *cumple el Criterio de Tensor-Universalidad.*

Observación 3.1.2 Al igual que ocurría en 0.2.4, se prueba sin dificultad que si $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ cumple el Criterio de Tensor-Universalidad respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, y $\{m_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$ es una subsucesión de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, entonces $\{T_n : n \in \mathbb{N}\}$ satisface el Criterio de Tensor-Universalidad respecto de $\{m_{k_s}\}_{s=1}^{\infty}$.

Observación 3.1.3 Una demostración similar a la del lema 0.2.6 muestra que, sin pérdida de generalidad, podemos suponer en la definición anterior que los subconjuntos densos X e Y son subespacios densos de E y que las aplicaciones S_{m_k} son lineales para todo $k \in \mathbb{N}$.

Ejemplos 3.1.4 (1) Evidentemente, aquellas sucesiones de operadores que cumplan el Criterio de Universalidad también satisfacen el Criterio de Tensor-Universalidad.

(2) Es fácil observar que toda isometría en un espacio de Banach cumple el Criterio de Tensor-Universalidad.

(3) Si R es un operador en un espacio localmente convexo F que tiene un conjunto denso de puntos periódicos, entonces R cumple el Criterio de Tensor-Universalidad. Efectivamente, sea X el conjunto de puntos periódicos de R. Obviamente $\{R^k x\}_{k=1}^{\infty}$ es acotado para cada $x \in X$ ya que la órbita de x es finita. Por otro lado $R_{|X} : X \to X$ es biyectiva. Definamos por tanto $S_k := S^k$, $k \in \mathbb{N}$, con $S := (R_{|X})^{-1}$ para concluir que R satisface el Criterio de Tensor-Universalidad respecto de $\{k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

En particular, si $R^n = I$ para algún número natural n, entonces R satisface el Criterio de Tensor-Universalidad ya que cada $x \in F$ es un punto periódico de R.

Teorema 3.1.5 *Sean* E *y* F *espacios localmente convexos. Si la sucesión de operadores* $\{T_n^1 : E \longrightarrow E : n \in \mathbb{N}\}$ *satisface el Criterio de Universalidad y la* *sucesión* $\{T_n^2 : F \longrightarrow F : n \in \mathbb{N}\}$ *cumple el Criterio de Tensor-Universalidad, ambas respecto de la sucesión creciente de naturales* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$*, entonces*

$$\left\{T_n^1 \otimes T_n^2 : E \otimes_a F \longrightarrow E \otimes_a F;\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

satisface el Criterio de Universalidad respecto de $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$*, para cualquier norma tensorial* a*.*

En particular, si E *y* F *son espacios de Fréchet separables, entonces la sucesión*

$$\left\{T_n^1 \widetilde{\otimes} T_n^2 : E \widetilde{\otimes}_a F \longrightarrow E \widetilde{\otimes}_a F;\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

es universal.

Demostración. Por la observación 0.2.5, es suficiente probar el resultado para la topología tensorial π. Por hipótesis existen X^1, Y^1 subespacios densos de E, X^2, Y^2 subespacios densos de F y aplicaciones lineales $S_{m_k}^1 : Y^1 \longrightarrow E$, $S_{m_k}^2 : Y^2 \longrightarrow F$, $k \in \mathbb{N}$, tales que

(a) $T_{m_k}^1 x_1 \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $x_1 \in X^1$, $\{T_{m_k}^2 x_2\}_{k=1}^{\infty}$ está acotado para cada $x_2 \in X^2$;

(b) $S_{m_k}^1 y_1 \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $y_1 \in Y^1$, $\{S_{m_k}^2 y_2\}_{k=1}^{\infty}$ está acotado para cada $y_2 \in Y^2$;

(c) $(T_{m_k}^i \circ S_{m_k}^i) y_i \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} y_i$ para cada $y_i \in Y^i$, $i = 1, 2$.

Consideramos los subespacios densos $X^1 \otimes X^2$ e $Y^1 \otimes Y^2$ de $E \otimes_\pi F$ y las aplicaciones lineales $S_{m_k}^1 \otimes S_{m_k}^2 : Y^1 \otimes Y^2 \longrightarrow E \otimes_\pi F$, $k \in \mathbb{N}$. Veamos que se satisface

(1) $T_{m_k}^1 \otimes T_{m_k}^2 u \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $u \in X^1 \otimes X^2$,

(2) $S_{m_k}^1 \otimes S_{m_k}^2 v \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$ para cada $v \in Y^1 \otimes Y^2$,

(3) $(T_{m_k}^1 \otimes T_{m_k}^2) \circ (S_{m_k}^1 \otimes S_{m_k}^2) v \stackrel{k\to\infty}{\longrightarrow} v$ para cada $v \in Y^1 \otimes Y^2$.

En primer lugar observamos que es suficiente probar las convergencias (1), (2) y (3) para tensores simples ya que cada $z \in X^1 \otimes X^2$ se representa como $z = \sum_{i=1}^n x_i \otimes y_i$, con $x_i \in X^1$, $y_i \in X^2$, $i = 1, \dots, n$, y análogamente para $Y^1 \otimes Y^2$. Sean $\mathcal{U}_1$ y $\mathcal{U}_2$ bases de 0-entornos absolutamente convexos de los espacios E y F respectivamente.

(1) Sea $x_1 \otimes x_2 \in X^1 \otimes X^2$, $U_i \in \mathcal{U}_i$, $i = 1, 2$. Por (a) el conjunto $B := \{T^2_{m_k} x_2 : k \in \mathbb{N}\}$ es acotado, luego existe existe $V_1 \in \mathcal{U}_1$, $V_1 \subset U_1$ tal que

$$\Gamma(V_1 \otimes B) \subset \Gamma(U_1 \otimes U_2),$$

y también existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $T^1_{m_k} x_1 \in V_1, \ \forall\, k \geq k_0$. Entonces

$$\left(T^1_{m_k} \otimes T^2_{m_k}\right) x_1 \otimes x_2 = T^1_{m_k} x_1 \otimes T^2_{m_k} x_2 \in V_1 \otimes B \subset \Gamma(U_1 \otimes U_2), \ k \geq k_0.$$

(2) es análogo a (1) utilizando (b).

(3) Sea $x_1 \otimes x_2 \in Y^1 \otimes Y^2$, $U_i \in \mathcal{U}_i$, $i = 1, 2$. Tomamos $V_i \subset U_i$, $i = 1, 2$, 0-entornos tales que

$$\begin{aligned} \Gamma(V_1 \otimes \{x_2\}) &\subset \frac{1}{3}\Gamma(U_1 \otimes U_2), \\ \Gamma(\{x_1\} \otimes V_2) &\subset \frac{1}{3}\Gamma(U_1 \otimes U_2), \\ \Gamma(V_1 \otimes V_2) &\subset \frac{1}{3}\Gamma(U_1 \otimes U_2). \end{aligned}$$

Por (c) existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$T^i_{m_k} S^i_{m_k} x_i - x_i \in V_i, \ \forall\, k \geq k_0, \ i = 1, 2.$$

Por tanto tenemos que

$$\begin{aligned} &(T^1_{m_k} \otimes T^2_{m_k}) \circ (S^1_{m_k} \otimes S^2_{m_k}) x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_2 = \\ &\quad \left(T^1_{m_k} S^1_{m_k} \otimes T^2_{m_k} S^2_{m_k}\right) x_1 \otimes x_2 - x_1 \otimes x_2 = \\ &\quad T^1_{m_k} S^1_{m_k} x_1 \otimes T^2_{m_k} S^2_{m_k} x_2 - x_1 \otimes x_2 = \\ &\quad (T^1_{m_k} S^1_{m_k} x_1 - x_1) \otimes (T^2_{m_k} S^2_{m_k} x_2 - x_2) + \\ &\quad (T^1_{m_k} S^1_{m_k} x_1 - x_1) \otimes x_2 + x_1 \otimes (T^2_{m_k} S^2_{m_k} x_2 - x_2) \in \\ &\quad V_1 \otimes V_2 + V_1 \otimes \{x_2\} + \{x_1\} \otimes V_2 \subset \\ &\quad \frac{1}{3}\Gamma(U_1 \otimes U_2) + \frac{1}{3}\Gamma(U_1 \otimes U_2) + \frac{1}{3}\Gamma(U_1 \otimes U_2) = \Gamma(U_1 \otimes U_2). \end{aligned}$$

Si E y F son espacios de Fréchet separables, teniendo en cuenta que las extensiones $\left\{T_n^1 \widetilde{\otimes} T_n^2 : E\widetilde{\otimes}_a F \longrightarrow E\widetilde{\otimes}_a F \ : \ n \in \mathbb{N}\right\}$ de $\{T_n^1 \otimes T_n^2 \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ cumplen el Criterio de Universalidad en el espacio de Fréchet separable $E\widetilde{\otimes}_a F$, obtenemos el resultado aplicando el Criterio de Universalidad (teorema 0.2.2). ■

Por supuesto el resultado anterior tiene su correspondiente versión para hiperciclicidad sin más que tomar la sucesión de las iteraciones. La combinación de estas versiones y de 3.1.4.(3) nos proporcionan el siguiente

Corolario 3.1.6 *Sean E, F espacios localmente convexos y $T : E \to E$ operador que satisface el Criterio de Hiperciclicidad. Si el operador $R : F \to F$ tiene un conjunto denso de puntos periódicos, entonces*

$$T \otimes R : E \otimes_a F \longrightarrow E \otimes_a F$$

satisface el criterio de Hiperciclicidad para cualquier norma tensorial a. En particular, si los espacios E y F son metrizables y separables, entonces $T\widetilde{\otimes}R$ es hipercíclico en $E\widetilde{\otimes}_a F$.

Esto da también una consecuencia importante respecto al producto tensorial de operadores caóticos.

Corolario 3.1.7 *Si $T_1 : E \to E$ es caótico en el espacio de Fréchet separable E y $T_2 : F \to F$ es un operador que tiene un conjunto denso de puntos periódicos en el espacio metrizable y separable F, entonces*

$$T_1\widetilde{\otimes}T_2 : E\widetilde{\otimes}_a F \longrightarrow E\widetilde{\otimes}_a F$$

es caótico para toda norma tensorial a. En particular $T_1\widetilde{\otimes}T_2$ es caótico si T_1 y T_2 lo son.

Demostración. Por [14, proposición 2.13], T_1 satisface el Criterio de Hiperciclicidad respecto de una sucesión $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$. Aplicando 3.1.6 se tiene que $T_1\widetilde{\otimes}T_2$ es hipercíclico en $E\widetilde{\otimes}_a F$.

Sean $\mathcal{P}(T_1) \subset E$ y $\mathcal{P}(T_2) \subset F$ los conjuntos de puntos periódicos de T_1 y T_2 respectivamente. Observemos en primer lugar que $\mathcal{P}(T_1)$ y $\mathcal{P}(T_2)$ son espacios vectoriales densos, luego $\mathcal{P}(T_1) \otimes \mathcal{P}(T_2)$ es un subespacio denso de

$E\widetilde{\otimes}_a F$. Además, cada punto de $\mathcal{P}(T_1) \otimes \mathcal{P}(T_2)$ es un punto periódico de $T_1 \otimes T_2$. En efecto, si $z \in \mathcal{P}(T_1) \otimes \mathcal{P}(T_2)$ tenemos que $z = \sum_{i=1}^n \lambda_i x_i \otimes y_i$ con $x_i \in \mathcal{P}(T_1)$ e $y_i \in \mathcal{P}(T_2)$. Entonces z es un punto periódico de $T_1 \otimes T_2$, con período menor o igual que el mínimo común múltiplo de los períodos de x_i e y_i para $i = 1, \ldots, n$. ■

Como observamos en la introducción de esta sección y según se deduce de 3.1.6 $T\widetilde{\otimes}I$ es hipercíclico si T cumple el Criterio de Hiperciclicidad. A continuación probaremos el recíproco y también la relación existente con la hiperciclicidad de $T \oplus T$. Esto nos da una equivalencia, en este caso en el contexto de los productos tensoriales, con el problema clásico de Herrero.

Proposición 3.1.8 *Sea E un espacio de Fréchet separable, un operador $T : E \to E$ y F Fréchet separable tal que* $\dim(F) \geq 2$. *Entonces equivalen*

(1) T cumple el Criterio de Hiperciclicidad,

(2) $T\widetilde{\otimes}I : E\widetilde{\otimes}_a F \to E\widetilde{\otimes}_a F$ es hipercíclico para toda (alguna) norma tensorial a.

(3) $T \oplus T : E \oplus E \to E \oplus E$ es hipercíclico.

Demostración. (1) → (2) Basta aplicar 3.1.6 con $R = I$.

(3) → (1) Es el resultado de Bès [12, teorema 1.16] (ver también [14]).

(2) → (3) Como $\dim(F) \geq 2$, existen $f_1^*, f_2^* \in F'$ linealmente independientes. Definimos entonces $\phi : E\widetilde{\otimes}_a F \to E \oplus E$,

$$\phi\left(\sum e_i \otimes f_i\right) := \left(\sum e_i \langle f_i, f_1^* \rangle, \sum e_i \langle f_i, f_2^* \rangle\right).$$

El operador ϕ es sobreyectivo (dados $e_1, e_2 \in E$, tomamos $f_1, f_2 \in F$ tales que $\langle f_i, f_j^* \rangle = \delta_{ij}$ y entonces $\phi(e_1 \otimes f_1 + e_2 \otimes f_2) = (e_1, e_2)$). Además

$$\begin{aligned}(T \oplus T)\left(\phi\left(\sum e_i \otimes f_i\right)\right) &= \left(\sum Te_i \langle f_i, f_1^* \rangle, \sum Te_i \langle f_i, f_2^* \rangle\right) \\ &= \phi\left(\left(T\widetilde{\otimes}I\right)\left(\sum e_i \otimes f_i\right)\right),\end{aligned}$$

es decir, el diagrama

$$\begin{array}{ccc} E\widetilde{\otimes}_a F & \xrightarrow{T\widetilde{\otimes}I} & E\widetilde{\otimes}_a F \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\big\downarrow \\ E \oplus E & \xrightarrow{T\oplus T} & E \oplus E \end{array}$$

es conmutativo y concluimos aplicando el lema 0.2.19. ■

3.2 Ejemplos y aplicaciones

En esta última sección vamos a obtener algunas consecuencias como aplicación de técnicas basadas en productos tensoriales y de los resultados obtenidos en la sección anterior.

Ejemplo 3.2.1 En 1929 Birkhoff [17] probó la universalidad de operadores traslación en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ dotado de la topología de convergencia uniforme en los conjuntos compactos. Una generalización a $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ de esta clase de universalidad se debe a Abe y Zappa [1, sección 2]. Este resultado puede obtenerse también como aplicación de las técnicas de productos tensoriales.

Dado $z = (z_1, \dots , z_n) \in \mathbb{C}^n$, denotaremos la norma usual de z por $\|z\| := \left(\sum_{i=1}^n |z_i|^2\right)^{1/2}$, $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ es el espacio de funciones holomorfas en $\mathbb{C}^n$ dotado de la topología de convergencia uniforme en los conjuntos compactos. Para $a \in \mathbb{C}^n$, T_a denota el operador traslación

$$T_a : \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \to \mathcal{H}(\mathbb{C}^n) \ : \ T_a f(z) := f(z + a).$$

Sea $\{a^{(j)}\}_{j\geq 1}$ una sucesión en $\mathbb{C}^n$ con $\sup_j \left\|a^{(j)}\right\| = \infty$. Veamos que la sucesión de operadores $\{T_{a^{(j)}}\}_{j\geq 1}$ es universal. En primer lugar observamos que $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ puede ser representado como el producto tensorial $\widetilde{\bigotimes}_{n,\pi}\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (basta considerar la extensión del operador natural $f_1(z_1) \otimes \cdots \otimes f_n(z_n) \mapsto f(z_1, \dots , z_n) := f_1(z_1) \cdots f_n(z_n)$) y el operador T_a en $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$ coincide con $\widetilde{\bigotimes}_{i=1}^{n}{}_{\pi} T_{a_i}$ en $\widetilde{\bigotimes}_{n,\pi}\mathcal{H}(\mathbb{C})$. Como $\sup_j \left\|a^{(j)}\right\| = \infty$ tenemos que existe un índice $1 \leq i_0 \leq n$ tal que $\sup_j \left|a^{(j)}_{i_0}\right| = \infty$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $i_0 = 1$, $\lim_{j\to\infty} \left|a^{(j)}_1\right| = \infty$ y que existe $\alpha := \lim_{j\to\infty} \frac{a^{(j)}_1}{\left|a^{(j)}_1\right|}$ (sino pasaríamos a una subsucesión).

Veamos que en esta situación se tiene que la sucesión $\{T_{a^{(j)}_1}\}_{j\geq 1}$ satisface el Criterio de Universalidad. Tomamos

$$X := \operatorname{lin}\left\{e^{\lambda z} \ : \ \left|e^{\alpha\lambda}\right| < 1\right\}, \ Y := \operatorname{lin}\left\{e^{\lambda z} \ : \ \left|e^{\alpha\lambda}\right| > 1\right\}.$$

Un argumento de tipo Hahn-Banach demuestra que X e Y son densos en $\mathcal{H}(\mathbb{C})$ (véase por ejemplo [36, sección 5]). Sea ahora K un conjunto compacto de $\mathbb{C}$, tomamos $R > 0$ tal que $|z| \leq R$ para todo $z \in K$. Para cada función $e^{\lambda z}$ de X y para todo z de K tenemos que

$$e^{|\lambda| R} \left| e^{\lambda a_1^{(j)}} \right| = e^{|\lambda| R} \left| e^{\lambda \frac{a_1^{(j)}}{\left|a_1^{(j)}\right|}} \right|^{\left|a_1^{(j)}\right|} \xrightarrow{j \to \infty} 0.$$

Definimos $S_j := T_{-a_1^{(j)}}$, $j \in \mathbb{N}$. Obviamente $T_{a_1^{(j)}} \circ S_j = Id_Y$. Para cada función $e^{\lambda z}$ de Y y para todo z de K tenemos que

$$e^{|\lambda| R} \left| e^{-\lambda a_1^{(j)}} \right| = e^{|\lambda| R} \left| e^{\lambda \frac{a_1^{(j)}}{\left|a_1^{(j)}\right|}} \right|^{-\left|a_1^{(j)}\right|} \xrightarrow{j \to \infty} 0.$$

Para coordenadas $i \neq 1$, si $\left\{ \left| a_i^{(j)} \right| \right\}_{j \geq 1}$ es acotada, entonces $\{T_{a_i^{(j)}}\}_{j \geq 1}$ satisface el Criterio de Tensor-Universalidad respecto de $\{j\}_{j \geq 1}$. En caso contrario se tiene $\sup_j \left| a_i^{(j)} \right| = \infty$, lo cual implica la existencia de una subsucesión $\{j_k\}_{k \geq 1}$ tal que $\{T_{a_i^{(j)}}\}_{j \geq 1}$ satisface el Criterio de Universalidad respecto de $\{j_k\}_{k \geq 1}$. Por la observación 0.2.4 tenemos que $\{T_{a_1^{(j)}}\}_{j \geq 1}$ también satisface el Criterio de Universalidad respecto de $\{j_k\}_{k \geq 1}$ y entonces en cualquier caso tenemos productos tensoriales de sucesiones que satisfacen el Criterio de Universalidad o que satisfacen el Criterio de Tensor-Universalidad respecto de la misma sucesión. Por 3.1.5 obtenemos que T_a es universal en $\mathcal{H}(\mathbb{C}^n)$.

En el capítulo 1 estudiamos operadores backward shift ponderados en espacios escalonados de sucesiones de Köthe. Veamos cómo se comportan bajo productos tensoriales.

Proposición 3.2.2 *Sean $1 \leq p, q < \infty$. Supongamos que $B_v : l_p \to l_p$ y $B_w : l_q \to l_q$ son dos operadores (continuos) backward shift ponderados y que $a(., l_p, l_q)$ es una norma tensorial en $l_p \otimes l_q$. Entonces*

$$B_v \widetilde{\otimes} B_w : l_p \widetilde{\otimes}_a l_q \longrightarrow l_p \widetilde{\otimes}_a l_q$$

es hipercíclico si y sólo si

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^{n} |v_j w_j| = \infty.$$

Demostración. Observemos en primer lugar que para $(x_0, x_1, \dots) \in l_p$ y $(y_0, y_1, \dots) \in l_q$

$$|x_0 y_0| \leq \|x\|_p \|y\|_q,$$

luego

$$f : l_p \times l_q \longrightarrow \mathbb{K} \ : \ f(x,y) := x_0 y_0$$

es una aplicación bilineal y continua que induce un funcional $f \in (l_p \otimes_a l_q)'$ que puede ser extendido a $f \in \left(l_p \widetilde{\otimes}_a l_q\right)'$. A continuación, por lema 0.4.5 de la página 27 se tiene que $\left\{B^n \widetilde{\otimes} B^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ es un conjunto equicontinuo en $L\left(l_p \widetilde{\otimes}_a l_q, l_p \widetilde{\otimes}_a l_q\right)$. Por otro lado, dado $n \in \mathbb{N}$ y un tensor simple $x \otimes y$ con $x \in l_p$ e $y \in l_q$ se tiene que

$$\begin{aligned}
f \circ \left(B_v^n \widetilde{\otimes} B_w^n\right)(x \otimes y) &= f\left(B_v^n x \widetilde{\otimes} B_w^n y\right) \\
&= f\left(\left\{\left(\prod_{j=i-n+1}^{j=i} v_j\right) x_i\right\}_{i=n}^{\infty} \otimes \left\{\left(\prod_{j=i-n+1}^{j=i} w_j\right) y_i\right\}_{i=n}^{\infty}\right) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n} v_j w_j\right) x_n y_n,
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\left(\prod_{j=1}^{n} v_j w_j\right) f \circ \left(B^n \widetilde{\otimes} B^n\right)(x \otimes y) &= \left(\prod_{j=1}^{n} v_j w_j\right) f\left(\{x_i\}_{i=n}^{\infty} \otimes \{y_i\}_{i=n}^{\infty}\right) \\
&= \left(\prod_{j=1}^{n} v_j w_j\right) x_n y_n,
\end{aligned}$$

y entonces por linealidad tenemos

$$f \circ \left(B_v^n \widetilde{\otimes} B_w^n\right) = \left(\prod_{j=1}^{n} v_j w_j\right) f \circ \left(B^n \widetilde{\otimes} B^n\right) \tag{3.1}$$

en $l_p \widetilde{\otimes}_a l_q$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^{n} |v_j w_j| < \infty$, por (3.1) y por ser $\left\{B^n \widetilde{\otimes} B^n\right\}_{n=1}^{\infty}$ equicontinuo se tiene que $\left\{f \circ \left(B_v^n \widetilde{\otimes} B_w^n\right)\right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es un conjunto equicontinuo en $\left(l_p \widetilde{\otimes}_a l_q\right)'$.

Por tanto, para cada $z \in l_p \widetilde{\otimes}_a l_q$, el conjunto $\left\{ f \circ \left(B_v^n \widetilde{\otimes} B_w^n \right)(z) \right\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotado en $\mathbb{K}$ y entonces z no puede ser hipercíclico para $B_v \widetilde{\otimes} B_w$.

Recíprocamente, si $\sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^{n} |v_j w_j| = \infty$, tomamos

$$X = Y := \left\{ \sum_{i,j=0}^{n} \lambda_{i,j} e_i \otimes e_j \ : \ \lambda_{i,j} \in \mathbb{K},\ n \in \mathbb{N} \right\},$$

y para $i, j \in \mathbb{N}$ definimos

$$S(e_{i-1} \otimes e_{j-1}) := \frac{1}{v_i w_j} e_i \otimes e_j,$$

(obsérvese que $\sup_{n \in \mathbb{N}} \prod_{j=1}^{n} |v_j w_j| = \infty$ implica $v_i \neq 0 \neq w_i$ para todo $i \in \mathbb{N}$). Extendemos S a todo Y por linealidad y tomamos $S_m := S^m$. Veamos que $B_v \otimes B_w$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad. Se tiene:

(i) $B_v^m \otimes B_w^m (e_i \otimes e_j)$ es finalmente 0, luego $B_v^m \otimes B_w^m x \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 0$, para la a-topología en $l_p \otimes_a l_q$, para cada $x \in X$.

(ii) Sean

$$C_1 := 1 + \sup_{i \in \mathbb{N}} |v_i|\,,\ C_2 := 1 + \sup_{i \in \mathbb{N}} |w_i|\,.$$

Por hipótesis

$$\begin{array}{ll}
\exists\ m_1\ (>1) & : \displaystyle\prod_{i=1}^{m_1} |v_i w_i| > C_1\ C_2 \\
\exists\ m_2\ (> m_1 + 2) & : \displaystyle\prod_{i=1}^{m_2} |v_i w_i| > 2\ C_1^2\ C_2^2 \\
\vdots & \\
\exists\ m_k\ (> m_{k-1} + k) & : \displaystyle\prod_{i=1}^{m_k} |v_i w_i| > k\ C_1^k\ C_2^k \\
\vdots &
\end{array}$$

Definimos $n_k := m_k - k$, $k \in \mathbb{N}$. Dados $i, j \in \mathbb{N}$, llamamos

$$D_{i,j} := \prod_{\substack{r \leq i \\ s \leq j}} |v_r w_s|\,,$$

y tomamos $k > \max\{i, j\}$. Entonces

$$\begin{aligned}
\pi\left(S_{n_k}\left(e_i \otimes e_j\right)\right) &= \frac{1}{\prod_{r=1}^{n_k} |v_{i+r} w_{j+r}|} \pi\left(e_{i+n_k} \otimes e_{j+n_k}\right) \\
&= D_{i,j} \; \frac{1}{\prod_{r=1}^{i+n_k} |v_r| \prod_{s=1}^{j+n_k} |w_s|} \\
&< D_{i,j} \; \frac{C_1^k \; C_2^k}{\prod_{r=1}^{m_k} |v_r| \prod_{s=1}^{m_k} |w_s|} \\
&< \frac{D_{i,j}}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Luego $S_{n_k} y \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0$, para la topología tensorial proyectiva π y por tanto también para la a-topología, para cada $y \in Y$.

(iii) Como

$$\begin{aligned}
\left(B_v^m \otimes B_w^m\right)\left(S_m\left(e_i \otimes e_j\right)\right) &= \left(B_v^m \otimes B_w^m\right)\left(\frac{1}{\prod_{r=1}^{m} v_{i+r} w_{j+r}} e_{i+m} \otimes e_{j+m}\right) \\
&= e_i \otimes e_j,
\end{aligned}$$

se tiene que $\left(B_v^m \otimes B_w^m\right) \circ S_m = Id_Y$. Por tanto $B_v \widetilde{\otimes} B_w$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad en $l_p \widetilde{\otimes}_a l_q$, respecto de la sucesión $\{n_k\}_{k\geq 1}$ construida en (ii) y es entonces hipercíclico. ■

Ejemplo 3.2.3 El producto tensorial de dos operadores hipercíclicos no es en general hipercíclico. Para $1 \leq p, q < \infty$, tomar los operadores backward shift ponderados B_v y B_w respectivamente, donde

$$v_j := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad \frac{n(n-1)}{2} < j \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para } n \text{ par} \\ 2 & \text{si} \quad \frac{n(n-1)}{2} < j \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para } n \text{ impar} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \dots ,$$

y

$$w_j := \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad \frac{n(n-1)}{2} < j \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para } n \text{ impar} \\ 2 & \text{if} \quad \frac{n(n-1)}{2} < j \leq \frac{n(n+1)}{2} \quad \text{para } n \text{ par} \end{cases} \qquad j = 1, 2, \dots ,$$

es decir, $\{v_j\}_{j=1}^{\infty} = \{2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 2, 2, 2, \dots\}$ and $\{w_j\}_{j=1}^{\infty} = \{\frac{1}{2}, 2, 2, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \dots\}$. Si $n = \frac{m(m+1)}{2}$ para $m \geq 1$ impar, entonces $\prod_{j=1}^{n} v_j = 2^{\frac{m+1}{2}}$ y se tiene que $\sup_{n\in\mathbb{N}} \prod_{j=1}^{n} v_j = \infty$. Si $n = \frac{m(m+1)}{2}$ para $m \geq 2$ par, entonces $\prod_{j=1}^{n} w_j = 2^{\frac{m}{2}}$

y se tiene que $\sup_{n\in\mathbb{N}}\prod_{j=1}^{n} w_j = \infty$. Por 1.9 en la página 43, B_v y B_w son hipercíclicos en l_p y l_q respectivamente. Es trivial que $\prod_{j=1}^{n} v_j w_j = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y entonces por la proposición 3.2.2 obtenemos que, para cualquier norma tensorial a, $B_v\widetilde{\otimes}B_w$ no es hipercíclico en $l_p\widetilde{\otimes}_a l_q$.

K. Chan estudió en [27] la hiperciclicidad del operador $L_T(S) := T \circ S$ en el álgebra $L(H)$ (H espacio de Hilbert) dotado con la topología SOT ("strong operator topology") o topología de convergencia puntual. Su prueba era directa asumiendo que el operador T cumplía el Criterio de Hiperciclicidad. El hecho sorprendente es que no se puede utilizar un argumento de Baire ya que $L(H)$ con esta topología no es un espacio de Fréchet. Por otra parte no podemos tomar la topología fuerte en $L(H)$ porque entonces se pierde la separabilidad, esencial en hiperciclicidad. Este nuevo punto de vista de Chan también le permitió deducir de una manera elegante un resultado de Montes sobre la existencia de subespacios cerrados de dimensión infinita de vectores hipercíclicos de operadores T en espacios de Hilbert. Nosotros presentamos otra prueba, usando productos tensoriales, del resultado principal de Chan en álgebras más generales $L(E)$. También estudiamos operadores de composición por la derecha $R_T(S) := S \circ T$.

Recordamos la inclusión natural de $E' \otimes E$ en $L(E)$, dada por $f(e) := \sum < e_i', e > e_i$ si $f = \sum e_i' \otimes e_i \in E' \otimes E$. Esta inclusión es densa si consideramos la SOT en $L(E)$. Efectivamente, si $S \in L(E)$ y $x_1, \dots, x_n \in E$, fijamos la proyección $P : E \to \mathrm{lin}\{x_1, \dots, x_n\}$ y entonces $S \circ P \in E' \otimes E$, $S \circ Px_i = Sx_i,\ i = 1, \dots, n$. Además, la restricción de L_T a $E' \otimes E$ coincide con $I \otimes T$.

Teorema 3.2.4 *Sea una sucesión de operadores $\{T_n : E \to E,\ n \in \mathbb{N}\}$, donde E es un espacio de Fréchet separable con norma continua y los operadores T_n tienen rango denso y conmutan entre sí. Sea*

$$L_{T_n} : L(E) \longrightarrow L(E) \ : \ S \longmapsto T_n \circ S,\ n \in \mathbb{N},$$

considerando en $L(E)$ la SOT. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface el Criterio de Universalidad,

(ii) $\{L_{T_n}\}_{n=1}^{\infty}$ es universal.

En particular, si $T : E \to E$ es operador, equivalen

(i) T satisface el Criterio de Hiperciclicidad (respectivamente, es caótico),

(ii) L_T es hipercíclico (caótico).

Demostración. (i) $\to$ (ii) Observemos primero que E y $(E', \sigma(E', E))$ son separables. Además, como E tiene norma continua, veamos que podemos tomar $\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset E'$ conjunto equicontinuo tal que $\overline{\operatorname{lin}\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}}^{\sigma(E',E)} = E'$. Si U es un 0-entorno en E tenemos que U° (siendo $\sigma(E', E)$-compacto y $\sigma(E', E)$-metrizable) es $\sigma(E', E)$-separable. Fijamos $\|.\|$ norma continua en E, definimos $U := \{x \in E \ :\ \|x\| \leq 1\}$ y tomamos $\{f_i \ :\ i \in \mathbb{N}\} \subset U^\circ$ subconjunto numerable y $\sigma(E', E)$-denso de U°. La igualdad

$$E' = \overline{\bigcup_{\lambda \in \mathbb{K}} \lambda U^\circ}^{\sigma(E',E)}$$

se satisface por la forma en que hemos tomado U y entonces $\{f_i \ :\ i \in \mathbb{N}\}$ es un subconjunto equicontinuo de E' cuya envoltura lineal es $\sigma(E', E)$-densa en E'. Definimos $Y = \overline{\operatorname{lin}\{f_i,\ i \in \mathbb{N}\}}^{\|.\|^*}$, donde $\|.\|^*$ es el funcional de Minkowski de U°. Entonces $F := (Y, \|.\|^*)\widetilde{\otimes}_\varepsilon E$ es un espacio de Fréchet separable. La extensión $F \to E'_b\widetilde{\otimes}_\varepsilon E$ de la inclusión canónica, nos proporciona un operador $\phi : F \to L(E)$ con rango denso ya que $\operatorname{lin}\{f_i \otimes x,\ i \in \mathbb{N}, x \in E\}$ es denso en $L(E)$. Por el teorema 3.1.5 $\{I\widetilde{\otimes}T_n\}_{n=1}^\infty$ es universal en F. La implicación se sigue al aplicar el lema 0.2.19 al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{I\widetilde{\otimes}T_n} & F \\ \phi\big\downarrow & & \phi\big\downarrow \\ L(E) & \xrightarrow{L_{T_n}} & L(E) \end{array} . \tag{3.2}$$

(ii) $\to$ (i) Si $\{L_{T_n}\}_{n=1}^\infty$ es universal en $L(E)$, tomamos $x, y \in E$ tales que $\{x, y\}$ es linealmente independiente, y consideramos el diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} L(E) & \xrightarrow{L_{T_n}} & L(E) \\ \Psi\big\downarrow & & \Psi\big\downarrow \\ E \oplus E & \xrightarrow{T_n \oplus T_n} & E \oplus E \end{array}$$

donde $\Psi(R) := (Rx, Ry)$, $R \in L(E)$, y Ψ es sobreyectiva. Aplicando el lema 0.2.19 $\{T_n \oplus T_n\}_{n=1}^{\infty}$ es universal y entonces $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ satisface el Criterio de Universalidad por la observación que sigue a [14, teorema 2.3].

El caso caótico se obtiene observando que T es caótico si $T \oplus T$ lo es. ■

A continuación vamos a considerar el operador de composición por la derecha en $L(E)$, definido por $R_T(S) = S \circ T$. Su restricción a $E' \otimes E$ es

$$R_T(\sum e_i' \otimes e_i) = \sum T'e_i' \otimes e_i = (T' \otimes I)(\sum e_i' \otimes e_i),$$

donde $T' : E' \to E'$ es el operador traspuesto o adjunto de T. Para establecer el siguiente teorema utilizaremos algunos resultados que se citaron en la sección 0.6.

Teorema 3.2.5 *Sea una sucesión de operadores* $\{T_n : E \to E,\ n \in \mathbb{N}\}$*, donde* E *es un espacio (DF) que tiene disco total de Banach,* E_b' *es separable y los operadores* T_n *tienen rango denso y conmutan entre sí. Sea*

$$R_{T_n} : L(E) \to L(E)\ :\ S \mapsto S \circ T_n,\ n \in \mathbb{N},$$

considerando en $L(E)$ *la SOT. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(i) $\{T_n' : E_b' \to E_b'\}_{n=1}^{\infty}$ *satisface el Criterio de Universalidad.*

(ii) $\{R_{T_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *es universal.*

En particular, si $T : E \to E$ *es operador, equivalen*

(i) $T' : E_b' \to E_b'$ *satisface el Criterio de Hiperciclicidad (respectivamente es caótico).*

(ii) R_T *es hipercíclico (caótico).*

Demostración. (i) $\to$ (ii) Sea B un disco total de Banach en E. Como E_b' es separable, $B \subset B^{\circ\circ}$ es $\sigma(E, E')$-separable. Consideramos entonces $\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\} \subset B$ un subconjunto numerable $\sigma(E, E')$-denso. Tenemos entonces que $X := \text{lin}\{x_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ es denso en E y las extensiones

$$F := E_b' \widetilde{\otimes}_\varepsilon (X, \|.\|_B) \to E_b' \widetilde{\otimes}_\varepsilon (\text{lin}(B), \|.\|_B) \to L(E)$$

de las aplicaciones canónicas proporcionan un operador $\phi : F \to L(E)$ con rango denso. Por el teorema 3.1.5 $\{T_n'\widetilde{\otimes}I\}_{n=1}^{\infty}$ es universal en F. La implicación se sigue al aplicar el lema 0.2.19 al diagrama conmutativo

$$\begin{array}{ccc} F & \xrightarrow{T_n'\widetilde{\otimes}I} & F \\ \phi\Big\downarrow & & \phi\Big\downarrow \\ L(E) & \xrightarrow{R_{T_n}} & L(E) \end{array} .$$

(ii) $\to$ (i) Un argumento análogo al utilizado en (ii) $\to$ (i) en el teorema anterior nos proporciona la conclusión, tomando $\{f_1, f_2\} \subset E'$ linealmente independientes y definiendo $\Psi : L(E) \to E' \oplus E'$, $\Psi(R) := (R'f_1, R'f_2)$. ■

Observación 3.2.6 (1) Para espacios que admiten predual, algunas veces es más fácil encontrar operadores hipercíclicos en el predual que en el dual (el dual puede no ser separable). Podemos por tanto dar otro resultado alternativo al teorema 3.2.5: Si la sucesión $\{T_n : E \to E,\ n \in \mathbb{N}\}$ satisface el Criterio de Universalidad en un espacio de Fréchet E y E_b' tiene disco total de Banach separable, siendo T_n operadores con rango denso que conmutan entre sí, entonces $\{R_{T_n'} : L(E_b') \to L(E_b'),\ n \in \mathbb{N}\}$ es universal.

(2) Los teoremas 3.2.4 y 3.2.5 siguen siendo válidos si sustituimos la topología operador fuerte por la topología de convergencia uniforme en los conjuntos compactos de E y suponemos que E tiene la propiedad de aproximación. Basta observar que en este caso, por definición de propiedad de aproximación, $E' \otimes E$ es también denso en $L(E)$ con esta topología más fuerte.

(3) Los operadores L_T y R_T están bien definidos en cualquier ideal de $L(E)$. Una pregunta natural es en qué ideales de $L(E)$, con sus correspondientes topologías, se cumplen resultados análogos a 3.2.4 y 3.2.5. A través de productos tensoriales es relativamente sencillo dar resultados como los anteriores para ideales de operadores clásicos. Por ejemplo, sea $A(E)$ el ideal de operadores aproximables. Es decir, en el espacio $L(E)$ tomamos β la topología de convergencia uniforme en los conjuntos acotados de E. Entonces $A(E)$ es la β-clausura en $L(E)$ del subespacio de operadores con rango finito. Podemos por tanto poner $(A(E), \beta)$ en los teoremas 3.2.4 y 3.2.5 en lugar

de $L(E)$, ya que el espacio F definido allí es también denso y está incluido de forma continua en $(A(E), \beta)$. Recordamos aquí que $A(E) = M(E)$, el ideal de operadores Montel (es decir, aquéllos en los que la imagen de todo conjunto acotado es relativamente compacto) si el espacio E tiene la propiedad de aproximación. En particular, $A(E) = K(E)$, el ideal de operadores compactos, si E es un espacio de Banach con la propiedad de aproximación.

Otro ideal importante es el espacio de los operadores nucleares $N(E)$ cuando E es un espacio de Banach. Recordamos que $T \in N(E)$ si existen $e_i \in E$ y $e_i^* \in E^*$, $i \in \mathbb{N}$, tales que

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \|e_i\|\|e_i^*\|^* < \infty \text{ y } Tx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle e_i^*, x\rangle\, e_i \text{ para todo } x \in E.$$

$N(E)$ es un espacio de Banach cuando consideramos en él la norma nuclear natural definida como

$$\|T\|_N := \inf\left\{\sum_{i\in\mathbb{N}} \|e_i\|\|e_i^*\|^* \;:\; Tx = \sum_{i\in\mathbb{N}} \langle e_i^*, x\rangle\, e_i,\ \forall x \in E\right\},$$

para $T \in N(E)$ (véase [29] para más detalles). Los resultados anteriores siguen siendo ciertos para $(N(E), \|.\|_N)$. Para su demostración basta tomar la topología tensorial π en lugar de la ε.

Otros ejemplos de ideales de $L(E)$ (E Banach) en los cuales los resultados siguen siendo ciertos pueden obtenerse considerando diferentes normas tensoriales o usando la densidad de $N(E)$ junto con Criterio de Comparación de Hiperciclicidad.

El estudio de la existencia de subespacios cerrados de vectores universales fue iniciado en [10] (ver también [48], [53]). En [53] se dan condiciones generales bajo las cuales un operador en un espacio de Banach separable admite un subespacio cerrado de vectores hipercíclicos. En [27] K. Chan da una prueba del resultado anterior para espacios de Hilbert de forma muy elegante utilizando la hiperciclicidad del operador L_T en el álgebra $L(H)$. Recientemente A. Montes y C. Romero [54] adaptan la prueba de Chan para espacios de Banach separables y obtienen el resultado también para superciclicidad. Aquí presentamos una adaptación del argumento de Chan para espacios de Fréchet separables que admiten norma continua y para sucesiones universales de operadores.

Teorema 3.2.7 *Sea* $\{T_n : E \to E,\ n \in \mathbb{N}\}$ *una sucesión de operadores con rango denso en un espacio de Fréchet separable* E *con norma continua, que satisface el Criterio de Universalidad respecto de* $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$*, y que conmutan entre sí. Si existe un subespacio cerrado infinito dimensional* $X_0 \hookrightarrow E$ *tal que* $\lim_{k\to\infty} T_{m_k}x = 0$*, para todo* $x \in X_0$*, entonces existe un subespacio cerrado infinito dimensional* $Y_0 \hookrightarrow E$ *tal que*

$$\overline{\{T_{m_k}y \ :\ k \in \mathbb{N}\}} = E,\ \forall\ y \in Y_0 \setminus \{0\}.$$

Demostración. Según el teorema 3.2.4 existe $K \in L(E)$ universal para $\left\{L_{T_{m_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$. Además, K lo podemos suponer compacto. Efectivamente, hay que tener en cuenta primeramente que $\phi(R)$ es universal para $\left\{L_{T_{m_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$ si $R \in Y\widetilde{\otimes}_{\varepsilon}E$ es universal para $\left\{I\widetilde{\otimes}T_{m_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ en el diagrama 3.2. En segundo lugar, como Y es subespacio cerrado de $(E'_{U^\circ}, \|.\|^*)$, entonces todo elemento $R \in Y\widetilde{\otimes}_{\varepsilon}E$ es tal que el operador inducido $K := \phi(R)$ cumple que $\overline{K(U)}$ es compacto en E. Utilizando ahora un resultado clásico de Grothendieck [40, capítulo 5, parte 2, sección 2, teorema 1] el operador $I + K$ tiene rango cerrado (luego es abierto sobre la imagen) y núcleo finito-dimensional. Por tanto $Y_0 := (I + K)(X_0)$ es un subespacio cerrado infinito-dimensional de E. Si $y_0 \in Y_0 \setminus \{0\}$, existe $x_0 \in X_0$ ($x_0 \neq 0$) tal que $y_0 = x_0 + K(x_0)$. Entonces

$$\overline{\{T_{m_k}y_0,\ k \in \mathbb{N}\}} = E$$

ya que $\lim_{k\to\infty} T_{m_k}x_0 = 0$ y $\{T_{m_k}(Kx_0)\}_{k=1}^{\infty}$ es denso en E por ser K universal para $\left\{L_{T_{m_k}}\right\}_{k=1}^{\infty}$. ■

Finalmente, como consecuencia de técnicas basadas en productos tensoriales, vamos a dar algún ejemplo de operador de composición hipercíclico y caótico en holomorfía infinita. Concretamente estudiaremos la hiperciclicidad y el caos del operador de composición por la derecha con un operador lineal $T : E \to E$ en el espacio de las funciones enteras $\mathcal{H}(E)$ con una topología adecuada. En el siguiente teorema utilizaremos definiciones y observaciones que se hicieron en la sección 0.7. También observamos que para T lineal, $f(T(0)) = f(0)$. Esto nos obliga a restringirnos al espacio $\mathcal{H}_0(E) := \{f \in \mathcal{H}(E)\ :\ f(0) = 0\}$.

Teorema 3.2.8 *Sea E un espacio (DF) con la propiedad de aproximación y $T : E \to E$ un operador tal que $T' : E'_b \to E'_b$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad (es caótico). Entonces el operador de composición*

$$R_T : (\mathcal{H}_0(E), \tau_o) \longrightarrow (\mathcal{H}_0(E), \tau_o) \ : \ f \mapsto f \circ T,$$

es hipercíclico (caótico).

Si R_T es hipercíclico (caótico), entonces $T' : E'_b \to E'_b$ es hipercíclico (caótico).

Demostración. Consideremos en primer lugar

$$G := \left\{ f \in \mathcal{H}_b(E) \ : \ f(0) = 0, \ P_n(f) \in \bigotimes_{n,s} E', \ \forall \ n \in \mathbb{N} \right\} \hookrightarrow (\mathcal{H}_b(E), \tau_b).$$

En el espacio de Fréchet $F := \overline{G}^{\tau_b}$ tenemos que $R_T(F) \subset F$. En efecto, si $f \in G$, entonces

$$P_n(R_T(f)) = P_n(f) \circ T = (T' \otimes \cdots \otimes T')(P_n(f)) \in \bigotimes_{n,s} E'$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Tenemos entonces probado que $R_T(G) \subset G$ y de aquí se obtiene la inclusión deseada.

La extensión $\widetilde{\bigotimes}_{n,s,\varepsilon} T' =: T'_n$ de $T' \otimes \cdots \otimes T'$ a $\widetilde{\bigotimes}_{n,s,\varepsilon} E'_b = \overline{\bigotimes_{n,s} E'}^{\tau_b}$ satisface el Criterio de Hiperciclicidad (es caótico) respecto de una sucesión $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ (independiente de n), por un argumento similar al utilizado en el teorema 3.1.5.

Por lo tanto existen $X_n \subset \widetilde{\bigotimes}_{n,s,\varepsilon} E'_b$ denso y $S_{n,m_k} : X_n \to \widetilde{\bigotimes}_{n,s,\varepsilon} E'_b$, $k \in \mathbb{N}$, tales que T'_n, X_n y $\{S_{n,m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ satisfacen (i), (ii) y (iii) de la definición 0.2.12.

Definimos ahora $X := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\bigoplus_{k=1}^{n} X_k) \subset F$ denso, $S_{m_k} : X \to F$, $S_{m_k} := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} S_{n,m_k}$, $k \in \mathbb{N}$. Se sigue fácilmente que $R_T : F \to F$, X y $\{S_{m_k}\}_{k=1}^{\infty}$ satisfacen las condiciones del criterio de Hiperciclicidad, entonces R_T es hipercíclico (caótico) en F. La conclusión se sigue del Criterio de Comparación de Hiperciclicidad ya que $F \hookrightarrow \mathcal{H}_0(E)$ es denso (véase, e.g., [31, Ej. 2.79]). ■

Capítulo 4

Hiperciclicidad y caos de polinomios

El comportamiento dinámico de los polinomios, en lo que respecta a hiperciclicidad y caos, resulta ser bastante diferente del comportamiento de los operadores lineales. N.C. Bernardes [11] probó que para $d > 1$ no existen polinomios continuos d-homogéneos que admitan un vector con órbita densa (hipercíclicos) en ningún espacio de Banach. Este hecho no es cierto para espacios de Fréchet, A. Peris [58] presenta ejemplos de polinomios continuos d-homogéneos y caóticos (por tanto hipercíclicos) en espacios de Fréchet, para cualquier grado $d > 1$. Por otra parte, sin exigir homogeneidad, también prueba que existen polinomios caóticos en l_p en [57].

En este capítulo vamos a estudiar la hiperciclicidad y el caos de algunos polinomios definidos en espacios de sucesiones, concretamente en espacios escalonados de Köthe. Comenzaremos por polinomios d-homogéneos y posteriormente pasaremos a no homogéneos.

4.1 El polinomio $\{z_i\}_{i\geq 1} \longmapsto \left\{z_{i+1}^d\right\}_{i\geq 1}$

En esta sección estudiaremos el polinomio d-homogéneo

$$P\left(\{z_i\}_{i\geq 1}\right) := \left\{z_{i+1}^d\right\}_{i\geq 1},$$

definido en espacios de sucesiones de Köthe. Este polinomio se prueba que es caótico en el espacio $w := \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ en [58].

Sea $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe y $1 \leq p < \infty$ o $p = 0$. Nos restringiremos al caso $\mathbb{K} = \mathbb{C}$. Necesitamos que el polinomio P esté bien definido y sea continuo en $\lambda_p(A)$, según vimos en el capítulo 0 (proposición 0.5.2) es suficiente y necesario que la matriz A satisfaga la condición

$$\forall\ n \in \mathbb{N},\ \exists\ m > n\ :\ \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^d} < \infty. \tag{4.1}$$

Para estudiar el caos del polinomio P en $\lambda_p(A)$ pretendemos utilizar las caracterizaciones para el caos de operadores backward shift ponderados en espacios de Köthe que se obtuvieron en el capítulo 1. Con esta idea idea vamos a "linealizar" el polinomio P por medio de una aplicación $\{z_i\}_{i\geq 1} \overset{\phi}{\mapsto} \{e^{z_i}\}_{i\geq 1}$. Es decir, construiremos un diagrama conmutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} l_p & \xrightarrow{T} & l_p \\ \phi\Big\downarrow & & \phi\Big\downarrow \\ \lambda_p(A) & \xrightarrow{P} & \lambda_p(A) \end{array}$$

siendo T backward shift ponderado caótico, y ϕ aplicación continua con rango denso. En esta sección tendrá una relevancia especial la inclusión $l_\infty \subset \lambda_p(A)$ (que, según 0.3.9, es equivalente a $\{a_{j,k}\}_{j\geq 1} \in l_p,\ k = 1, 2, \dots$). Basta observar que $\phi(0) = \{1\}_{j\geq 1}$. El siguiente lema garantiza las condiciones necesarias que debe cumplir la aplicación ϕ.

Lema 4.1.1 *Sea $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe con $\{a_{j,k}\}_{j\geq 1} \in l_p$, para cada $k \in \mathbb{N}$ y $1 \leq p < \infty$ o $p = 0$. Consideremos la aplicación*

$$\phi : l_p \longrightarrow \lambda_p(A)\ :\ \{z_i\}_{i\geq 1} \longmapsto \{e^{z_i}\}_{i\geq 1}.$$

Se tiene que ϕ está bien definida, es continua y además tiene rango denso.

Demostración. Dado $z = \{z_i\}_{i\geq 1} \in l_p$, obviamente z es una sucesión acotada y también lo es $\{e^{z_i}\}_{i\geq 1}$. Por tanto $\phi(z) \in l_\infty \subset \lambda_p(A)$.

Para ver que ϕ es continua probaremos que es localmente Lipschitz. Observamos en primer lugar que

$$\left|e^z - e^{z'}\right| \leq |z - z'|\, e^{|z|+|z'|},\ \forall\ z,\ z' \in \mathbb{C}.$$

Dada una seminorma $\|.\|_n$, $n \in \mathbb{N}$, como $\{a_{j,n}\}_{j\geq 1} \in l_p$ sea $M_n := \sup_{j\in\mathbb{N}} a_{j,n}$. Si $x, y \in l_p$, entonces

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - \phi(y)\|_n^p &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n}^p \left|e^{x_j} - e^{y_j}\right|^p \\
&\leq M_n^p \sum_{j=1}^{\infty} e^{p(|x_j|+|y_j|)} \left|x_j - y_j\right|^p \\
&\leq M_n^p e^{p(\|x\|+\|y\|)} \sum_{j=1}^{\infty} \left|x_j - y_j\right|^p \\
&= M_n^p e^{p(\|x\|+\|y\|)} \|x - y\|^p.
\end{aligned}$$

Por tanto ϕ es localmente Lipschitz. Para el caso $p = 0$ sería

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_n = \sup_{j\in\mathbb{N}}\{a_{j,n} \left|e^{x_j} - e^{y_j}\right|\} \leq M_n e^{\|x\|+\|y\|} \|x - y\|.$$

Veamos finalmente que ϕ tiene rango denso. Sean $y \in \lambda_p(A)$, $\varepsilon > 0$ y una seminorma $\|.\|_n$. Como $\sum_{j\in\mathbb{N}} |y_j a_{j,n}|^p < \infty$ y $\{a_{j,n}\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_p$, sea un natural j_n tal que

$$\begin{aligned}
&\sum_{j>j_n} |y_j a_{j,n}|^p < \frac{\varepsilon}{2^p 3}, \\
&\sum_{j>j_n} a_{j,n}^p < \frac{\varepsilon}{2^p 3}.
\end{aligned}$$

Como la función exponencial compleja $\exp(z) := e^z$ tiene rango denso en $\mathbb{C}$, para $j = 1, 2, \ldots, j_n$, sea $x_j \in \mathbb{C}$ tal que

$$|e^{x_j} - y_j|^p < \frac{\varepsilon}{M_n^p j_n 3},\ j = 1, 2, \ldots j_n,$$

donde $M_n := \sup_{j\in\mathbb{N}} a_{j,n}$. Consideramos la sucesión

$$x := \{x_1, x_2, \ldots, x_{j_n}, 0, 0, \ldots\}.$$

Obviamente $x \in l_p$, además

$$\begin{aligned}
\|\phi(x) - y\|_n^p &= \sum_{j=1}^{\infty} |e^{x_j} - y_j|^p \, a_{j,n}^p \\
&= \sum_{j=1}^{j_n} |e^{x_j} - y_j|^p \, a_{j,n}^p + \sum_{j>j_n} |1 - y_j|^p \, a_{j,n}^p \\
&\leq M_n^p \sum_{j=1}^{j_n} |e^{x_j} - y_j|^p + \sum_{j>j_n} 2^p a_{j,n}^p + \sum_{j>j_n} 2^p \, |y_j|^p \, a_{j,n}^p \\
&\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon
\end{aligned}$$

donde hemos utilizado la desigualdad

$$|1 - z|^p \leq 2^p + 2^p \, |z|^p \, , \; p \geq 1, \; z \in \mathbb{C}.$$

Para $p = 0$ se razonaría de manera análoga con la norma supremo. ■

Tenemos ahora todos los ingredientes necesarios para poder caracterizar el caos respecto del polinomio P.

Teorema 4.1.2 *Sean un natural $d > 1$, una matriz de Köthe A que satisface la condición (4.1) y $1 \leq p < \infty$ o $p = 0$. Consideremos el polinomio*

$$P : \lambda_p(A) \to \lambda_p(A) \; : \; \{z_i\}_{i \geq 1} \mapsto \left\{z_{i+1}^d\right\}_{i \geq 1} .$$

Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(i) P tiene un punto periódico no nulo.

(ii) Para cada $k \in \mathbb{N}$, $\{a_{i,k}\}_{i \geq 1} \in l_p$.

(iii) $l_\infty \subset \lambda_p(A)$ de forma canónica.

(iv) P es caótico.

Demostración. (i) $\to$ (ii). Supongamos que P tiene un punto periódico no nulo, es decir, existen $x \in \lambda_p(A)$, $N > 0$ y $n_0 \in \mathbb{N}$ tales que $P^N x = x$ y $x_{n_0} \neq 0$. Centremos nuestra atención de momento en la sucesión

$$\{x_{n_0 + jN}\}_{j \geq 0} = \left\{ (x_{n_0})^{\frac{1}{d^{jN}}} \right\}_{j \geq 0} .$$

Obviamente $\lim_{j\to\infty} (x_{n_0})^{\frac{1}{d^{jN}}} = 1$, por tanto tomamos j_0 natural tal que

$$\frac{1}{2} < |x_{n_0}|^{\frac{1}{d^{jN}}} = |x_{n_0+jN}|\,,\ \forall\ j \geq j_0.$$

Si $1 \leq p < \infty$, para cada $k \in N$ tenemos

$$\begin{aligned}\frac{1}{2^p}\sum_{j\geq j_0} |a_{n_0+jN,k}|^p &\leq \sum_{j\geq j_0} |x_{n_0+jN}\ a_{n_0+jN,k}|^p \\ &\leq \sum_{i=0}^{\infty} |x_i a_{i,k}|^p < \infty,\end{aligned}$$

luego

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{n_0+jN,k}|^p < \infty.$$

Para $1 \leq r < n_0$ y $n_0 < r \leq N$ aplicamos el mismo razonamiento que antes a $P^r x$ en lugar de a x, deduciendo que

$$\sum_{j=0}^{\infty} |a_{n_0-r+jN,k}|^p < \infty,\ r = 1, \ldots, n_0 - 1,$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_{n_0-r+jN,k}|^p < \infty,\ r = n_0 + 1, \ldots, N$$

de donde obtenemos que $(a_{i,k})_{i=1}^{\infty} \in l_p$.

Si $p = 0$, utilizando un razonamiento similar tendríamos para cada $k \in \mathbb{N}$ que

$$\lim_{j\to\infty} a_{n_0-r+jN,k} = 0,\ 1 \leq r \leq N,$$

de donde $(a_{i,k})_{i=1}^{\infty} \in c_0$.

Notemos que (ii) y (iii) son equivalentes por la proposición 0.3.9 de la página 20.

(ii) ((iii)) $\to$ (iv). En primer lugar vamos a considerar el operador backward shift ponderado $dB : l_p \to l_p$. Sabemos que dB es caótico en l_p (véase 1.1.6). Por otro lado, por el lema 4.1.1, la aplicación

$$\phi : l_p \longrightarrow \lambda_p(A)\ :\ \{z_i\}_{i\geq 1} \longmapsto \{e^{z_i}\}_{i\geq 1}\,,$$

está bien definida, es continua y tiene rango denso. Veamos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc} l_p & \xrightarrow{dB} & l_p \\ {\scriptstyle\phi}\big\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\big\downarrow \\ \lambda_p(A) & \xrightarrow{P} & \lambda_p(A) \end{array}$$

es conmutativo. Si $\{z_i\}_{i\geq 1} \in l_p$ se tiene

$$\phi \circ dB(\{z_i\}_{i\geq 1}) = \phi(\{dz_{i+1}\}_{i\geq 1}) = \{e^{dz_{i+1}}\}_{i\geq 1},$$

$$P \circ \phi(\{z_i\}_{i\geq 1}) = P(\{e^{z_i}\}_{i\geq 1}) = \{e^{dz_{i+1}}\}_{i\geq 1}.$$

(iv) se obtiene aplicando el lema 0.2.19.

(iv) $\rightarrow$ (i) es trivial, luego la prueba está completa. ■

Observación 4.1.3 Puede parecer que este resultado entre en contradicción con el de Bernardes [11], el cual afirma que para $d \geq 2$ no existen polinomios continuos d-homogéneos hipercíclicos en ningún espacio de Banach. Veamos que las condiciones de la proposición anterior excluyen el caso Banach. Dada A una matriz de Köthe que satisface la condición (4.1), según acabamos de probar $\{a_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_p$ para todo $k \in \mathbb{N}$ si y sólo si P es caótico en $\lambda_p(A)$. Si $\lambda_p(A)$ fuera espacio de Banach entonces

$$\exists n_0 \in \mathbb{N} \ : \ \forall n > n_0, \ \exists M > 0 \text{ con } a_{j,n} \leq M a_{j,n_0}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

En primer lugar tomamos $j_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$a_{j,n_0} \geq a_{j+1,n_0}, \ j \geq j_0.$$

Consideramos $n > n_0$, por la condición (4.1) existe $m > n$ tal que

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^d} < \infty. \tag{4.2}$$

Por otro lado existe $M > 0$ tal que

$$a_{j,m} \leq M a_{j,n_0}, \ \forall j \in \mathbb{N}.$$

Para $j \geq j_0$ se tiene

$$\frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^d} \geq \frac{1}{M^d}\frac{a_{j,n}}{a_{j+1,n_0}^d} \geq \frac{1}{M^d}\frac{a_{j,n_0}}{a_{j+1,n_0}^d} \geq \frac{1}{M^d}\frac{a_{j+1,n_0}}{a_{j+1,n_0}^d} = \frac{1}{M^d}\frac{1}{a_{j+1,n_0}^{d-1}} \stackrel{j\to\infty}{\longrightarrow} \infty,$$

lo cual es una contradicción con (4.2).

Observación 4.1.4 Resulta también sorprendente que algunos polinomios hipercíclicos hereden propiedades que tienen los operadores (lineales) hipercíclicos. Por ejemplo, Ansari [2] prueba que cualquier potencia de un operador hipercíclico en un espacio localmente convexo es hipercíclico. En nuestro caso P^n es también hipercíclico en $\lambda_p(A)$ si P lo es. En realidad podemos decir esta afirmación de todo polinomio $P : F \to F$ que hayamos sido capaces de "linealizar", construyendo un diagrama conmutativo del tipo

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{T} & E \\ {\scriptstyle\phi}\Big\downarrow & & {\scriptstyle\phi}\Big\downarrow \\ F & \xrightarrow{P} & F \end{array},$$

siendo $T : E \to E$ operador hipercíclico y ϕ una aplicación continua con rango denso.

Ejemplos 4.1.5 (1) Si consideramos el producto de líneas $\omega = \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, con la topología producto, se tiene que el polinomio P es caótico en dicho espacio como consecuencia del teorema 4.1.2 (referimos a [58] para una prueba directa). Esto es sencillo de ver si representamos ω como espacio de Köthe $\lambda_1(A)$. En este caso la matriz A debe satisfacer la condición

$$\forall\ k \in \mathbb{N},\ \exists j(k)\ :\ a_{j,k} = 0, \forall j \geq j(k),$$

y obtenemos que P es caótico en ω.

(2) El polinomio P también es caótico en el espacio $\mathcal{H}(\mathbb{D})$ de las funciones holomorfas en el disco, dotado de la topología de convergencia uniforme en los compactos de $\mathbb{D}$. Este espacio es isomorfo al espacio de Köthe $\lambda_1(A)$, siendo

$$A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}} = \left(e^{-\frac{j}{k}}\right)_{j,k\in\mathbb{N}},$$

como se observó en 0.3.15. Veamos que P es caótico en $\lambda_p(A)$ para todo $p > 1$. Para cada $k \in \mathbb{N}$ fijo, obviamente $\{e^{-j/k}\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_p$. Para ver que se satisface la condición (4.1), sea $n \in \mathbb{N}$ fijo. Tomamos $m = nd$ y se tiene

$$\frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^d} = e^{\frac{1}{n}} < \infty,\ \forall\ j \in \mathbb{N}.$$

Otra situación en la que también podemos aplicar los resultados anteriores la tenemos en los espacios de series de potencias $\Lambda_r(\alpha)$. Como se mencionó en 0.3.4 es suficiente considerar los espacios $\Lambda_0(\alpha)$ y $\Lambda_\infty(\alpha)$, además la condición $l_\infty \subset \Lambda_r(\alpha)$ excluye el caso $r = \infty$.

Proposición 4.1.6 *Sea* $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *una sucesión monótona creciente en* $[0, \infty[$ *con* $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \infty$*. Si*

(a) $\sum_{j\in\mathbb{N}} r^{\alpha_j} < \infty$*, para todo* $r < 1$*, y*

(b) $\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} < \infty$*,*

entonces el polinomio

$$P : \Lambda_0(\alpha) \to \Lambda_0(\alpha) \; : \; \{z_i\}_{i\geq 1} \mapsto \left\{z_{i+1}^d\right\}_{i\geq 1},$$

es caótico para todo grado $d > 1$*.*

Demostración. Fijemos en primer lugar una sucesión estrictamente creciente de números $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ con $\lim_{k\to\infty} t_k = 0$, y tomemos la matriz de Köthe

$$A := \left(e^{t_k\alpha_j}\right)_{j,k\in\mathbb{N}}.$$

Se tiene que $\Lambda_0(\alpha) = \lambda_2(A)$, basta por tanto ver que A satisface la condición (4.1) y (ii) del teorema 4.1.2.

Por (b), tomamos $K \geq 1$ tal que

$$d\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j} < K, \; \forall \; j \in \mathbb{N}.$$

Sea $n \in \mathbb{N}$ fijo, como $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ es estrictamente creciente y tiene límite cero elegimos $m > n$ tal que

$$\frac{t_n}{K} < t_m < 0.$$

De aquí se deduce

$$t_n\frac{1}{d}\frac{\alpha_j}{\alpha_{j+1}} < t_m, \; \forall \; j \in \mathbb{N},$$

lo que implica

$$t_n\alpha_j - t_m d\alpha_{j+1} < 0, \ \forall\, j \in \mathbb{N},$$

y entonces se tiene

$$\frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^d} = \frac{e^{\alpha_j t_n}}{e^{d\alpha_{j+1}t_m}} = e^{\alpha_j t_n - d\alpha_{j+1}t_m} < 1, \ \forall\, j \in \mathbb{N}.$$

Finalmente observemos que para cada natural k fijo, por (a)

$$\{a_{j,k}\}_{j\in\mathbb{N}} = \left\{\left(\frac{1}{e^{-t_k}}\right)^{\alpha_j}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_p, \ 1 \leq p < \infty,$$

lo que finaliza la demostración. $\blacksquare$

Ejemplo 4.1.7 Como ya observamos anteriormente P es caótico en $\mathcal{H}(\mathbb{D})$, una generalización puede obtenerse si tomamos $\mathbb{D}^N := \mathbb{D}\times \overset{N}{\cdots} \times\mathbb{D}$ y consideramos $\mathcal{H}(\mathbb{D}^N)$. Puede probarse que $\mathcal{H}(\mathbb{D}^N) = \Lambda_0(\alpha)$ con $\{\alpha_j\}_{j\geq 1} := \{j^{1/n}\}_{j\geq 1}$ (véase [45]). Sin dificultad se demuestra que $\{\alpha_j\}_{j\geq 1}$ satisface las condiciones de la proposición 4.1.6, por tanto P es caótico en $\mathcal{H}(\mathbb{D}^N)$.

4.2 El polinomio $\{z_i\}_{i\geq 1} \longmapsto \left\{(z_{i+1}+1)^d - 1\right\}_{i\geq 1}$

En esta sección pretendemos estudiar el polinomio Q, definido en el espacio de Köthe $\lambda_p(A)$ ($1 \leq p < \infty$ o $p = 0$), y dado por

$$Q\left(\{z_i\}_{i\geq 1}\right) := \left\{(z_{i+1}+1)^d - 1\right\}_{i\geq 1},$$

donde el grado $d > 1$. Supondremos que $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Motivado por una cuestión de R. Aron [3], que explícitamente preguntaba si podrían existir polinomios (no homogéneos según el resultado de Bernardes) o bien aplicaciones holomorfas $f : X \to X$ que fueran hipercíclicos o caóticos en cierto espacio de Banach X, A. Peris [57] definió el polinomio Q anterior y probó que era caótico en l_p, $1 \leq p < \infty$ y en c_0 para cualquier grado $d > 1$. Esto motiva nuestro interés por el estudio del comportamiento de Q en espacios de Köthe $\lambda_p(A)$.

Necesitamos que el polinomio Q esté bien definido y sea continuo en $\lambda_p(A)$. Para ello en primer lugar observamos que

$$\begin{aligned} Q\left(\{z_i\}_{i\geq 1}\right) &= \left\{(z_{i+1}+1)^d - 1\right\}_{i\geq 1} \\ &= \left\{\sum_{k=0}^{d}\binom{d}{k} z_{i+1}^k - 1\right\}_{i\geq 1} \\ &= \left\{\sum_{k=1}^{d}\binom{d}{k} z_{i+1}^k\right\}_{i\geq 1} \\ &= \sum_{k=1}^{d}\binom{d}{k} P_k\left(\{z_i\}_{i\geq 1}\right), \end{aligned}$$

donde P_k es el polinomio k-homogéneo

$$P_k\left(\{z_i\}_{i\geq 1}\right) := \left\{z_{i+1}^k\right\}_{i\geq 1},$$

estudiado en la sección 4.1. Por tanto si exigimos que la matriz A satisfaga la condición

$$\forall\, n\in\mathbb{N},\ \exists\, m>n\ :\ \sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^k} < \infty,\ k=1,2,\ldots,d, \tag{4.3}$$

tenemos que

$$Q:\lambda_p(A)\longrightarrow \lambda_p(A)\ :\ \{z_i\}_{i\geq 1}\longmapsto \left\{(z_{i+1}+1)^d - 1\right\}_{i\geq 1},$$

está bien definido y es continuo.

De nuevo, para estudiar la hiperciclicidad y el caos del polinomio Q en $\lambda_p(A)$ pretendemos utilizar las caracterizaciones para la hiperciclicidad y el caos de operadores backward shift ponderados en espacios de Köthe que se obtuvieron en el capítulo 1. Como hicimos en la sección 4.1 vamos a "linealizar" el polinomio Q, en este caso por medio de la aplicación $\{z_i\}_{i\geq 1} \overset{\phi}{\mapsto} \{e^{z_i}-1\}_{i\geq 1}$, y de forma que la "linealización" será un operador backward shift ponderado. El siguiente lema garantiza las condiciones necesarias que debe cumplir la aplicación ϕ.

Lema 4.2.1 *Sea $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe y $1 \leq p < \infty$ o $p = 0$. Consideremos $\bar{A} = (\bar{a}_{j,k})_{j,j\in\mathbb{N}}$ la matriz (de Köthe) definida por $\bar{a}_{j,k} := \max\{1, a_{j,k}\}$ y la aplicación*

$$\phi : \lambda_p(\bar{A}) \longrightarrow \lambda_p(A) \ : \ \{z_i\}_{i\geq 1} \longmapsto \{e^{z_i} - 1\}_{i\geq 1}.$$

Se tiene que ϕ está bien definida, es continua y además tiene rango denso.

Demostración. Como $\bar{a}_{j,k} \geq 1$ para todo $j, k \in \mathbb{N}$, se cumple que $\lambda_p(\bar{A}) \subset c_0$ de forma canónica. Dado $z = \{z_i\}_{i\geq 1} \in \lambda_p(\bar{A})$, sea $M := \sup_{i\in\mathbb{N}} |z_i|$, tenemos que

$$|e^{z_i} - 1| \leq e^M |z_i|, \ i = 1, 2, \ldots$$

Dada una seminorma $\|.\|_n$, $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \|\phi(z)\|_n^p &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n}^p |e^{z_i} - 1|^p \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{a}_{j,n}^p e^{Mp} |z_i|^p = e^{Mp} \|z\|_n^p, \end{aligned}$$

(para $p = 0$ se tiene

$$\|\phi(z)\|_n = \sup_{j\in\mathbb{N}} \{a_{j,n} |e^{z_i} - 1|\} \leq e^M \sup_{j\in\mathbb{N}} \{\bar{a}_{j,n} |z_i|\} = e^M \|z\|_n \ ),$$

de donde la aplicación ϕ está bien definida en $\lambda_p(\bar{A})$.

Para ver que ϕ es continua probaremos que es localmente Lipschitz. De nuevo utilizaremos la desigualdad

$$\left| e^z - e^{z'} \right| \leq |z - z'| \, e^{|z|+|z'|}, \ \forall \ z, \ z' \in \mathbb{C}.$$

Dada una seminorma $\|.\|_n$, $n \in \mathbb{N}$, si $x, y \in \lambda_p(\bar{A})$, entonces

$$\begin{aligned} \|\phi(x) - \phi(y)\|_n^p &= \sum_{j=1}^{\infty} a_{j,n}^p |e^{x_j} - e^{y_j}|^p \\ &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \bar{a}_{j,n}^p e^{p(|x_j|+|y_j|)} |x_j - y_j|^p \\ &\leq e^{p\left(\|x\|_n+\|y\|_n\right)} \sum_{j=1}^{\infty} \bar{a}_{j,n}^p |x_j - y_j|^p \\ &= e^{p\left(\|x\|_n+\|y\|_n\right)} \|x - y\|_n^p. \end{aligned}$$

Por tanto ϕ es localmente Lipschitz. Para el caso $p = 0$ sería

$$\|\phi(x) - \phi(y)\|_n = \sup_{j\in\mathbb{N}}\{a_{j,n}\,|e^{x_j} - e^{y_j}|\} \leq e^{\|x\|_n + \|y\|_n}\|x - y\|_n.$$

Finalmente, tener en cuenta que las sucesiones finitas están contenidas en el rango de ϕ, por tanto ϕ tiene rango denso al ser éstas densas en $\lambda_p(A)$. ■

Tenemos ahora todos los ingredientes necesarios para poder abordar la hiperciclicidad y el caos del polinomio Q.

Proposición 4.2.2 *Sean un natural $d > 1$ y $A = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ una matriz de Köthe que satisface la condición (4.3). Consideramos el polinomio*

$$Q : \lambda_p(A) \longrightarrow \lambda_p(A) \ : \ \{z_i\}_{i\geq 1} \longmapsto \left\{(z_{i+1}+1)^d - 1\right\}_{i\geq 1}.$$

(i) Si para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\liminf_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,k}}{d^j} = 0,$$

entonces Q es hipercíclico.

(ii) Si para cada $k \in \mathbb{N}$

$$\left\{\frac{a_{j,k}}{d^j}\right\} \in l_p,$$

entonces Q es caótico.

Demostración. Definimos $\bar{A} = (\bar{a}_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}}$ como $\bar{a}_{j,k} := \max\{1, a_{j,k}\}$. Esto, junto con la condición (4.3) para $k = 1$ nos asegura que el backward shift ponderado

$$dB : \lambda_p(\bar{A}) \longrightarrow \lambda_p(\bar{A}) \ : \ \{z_i\}_{i\geq 1} \longmapsto \{dz_{i+1}\}_{i\geq 1},$$

está bien definido y es continuo. Por otro lado, por el lema 4.2.1, la aplicación

$$\phi : \lambda_p(\bar{A}) \longrightarrow \lambda_p(A) \ : \ \{z_i\}_{i\geq 1} \longmapsto \{e^{z_i} - 1\}_{i\geq 1}.$$

está bien definida, es continua y tiene rango denso.

Veamos que el diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\lambda_p(\bar{A}) & \xrightarrow{dB} & \lambda_p(\bar{A}) \\
\phi \big\downarrow & & \phi \big\downarrow \\
\lambda_p(A) & \xrightarrow{Q} & \lambda_p(A)
\end{array}$$

es conmutativo. Si $\{z_i\}_{i\geq 1} \in \lambda_p(\bar{A})$ se tiene

$$\phi \circ dB(\{z_i\}_{i\geq 1}) = \phi(\{dz_{i+1}\}_{i\geq 1}) = \{e^{dz_{i+1}} - 1\}_{i\geq 1},$$

$$Q \circ \phi(\{z_i\}_{i\geq 1}) = Q(\{e^{z_i} - 1\}_{i\geq 1}) = \{e^{dz_{i+1}} - 1\}_{i\geq 1}.$$

La conclusión se obtiene aplicando el lema 0.2.19 y las caracterizaciones para hiperciclicidad y caos de operadores backward shift ponderados obtenidas en los corolarios 1.1.4 y 1.1.5. ■

Ejemplos 4.2.3 (1) Si $A = (1)_{j,k\in\mathbb{N}}$, entonces para todo natural $d > 1$ se tiene que Q es hipercíclico y caótico en l_p (véase [57]).

(3) Como ya se observó en 0.3.17, un espacio de sucesiones muy importante por ser isomorfo a muchos espacios de Fréchet de funciones diferenciables es el de las sucesiones rápidamente decrecientes, denotado por s. Para su representación como espacio de Köthe basta tomar la matriz $A = (j^k)_{j,k\in\mathbb{N}}$, como además s es nuclear tenemos que $s = \lambda_p(A)$ para todo $1 \leq p \leq \infty$. La matriz A satisface

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a^k_{j+1,m}} = \sup_{j\in\mathbb{N}} \left(\frac{j}{j+1}\right)^n \frac{1}{(j+1)^{mk-n}} < \infty,\ k = 1, 2, \ldots, d,$$

para $m > n$ y además

$$\left\{\frac{j^k}{d^j}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_p,\ \forall\ k \in \mathbb{N}.$$

Por tanto Q es hipercíclico y caótico en s.

Consideremos a continuación espacios de series de potencias de tipo infinito $\Lambda_\infty(\alpha)$. En lo que sigue $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ es una sucesión monótona creciente en $[0, \infty[$ con $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \infty$. Recordamos que si tomamos una sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$

estrictamente creciente con $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ y $A := (e^{t_k\alpha_j})_{j,k\in\mathbb{N}}$ tenemos que $\Lambda_\infty(\alpha) = \lambda_2(A)$. Para fijar ideas tomaremos la sucesión $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} := \{k\}_{k\in\mathbb{N}}$.

En primer lugar observamos que para $m > n$ se tiene

$$n\alpha_j \le n\alpha_{j+1} < m\alpha_{j+1} \le km\alpha_{j+1},\ j \in \mathbb{N},\ k = 1, 2, \dots, d,$$

luego

$$\sup_{j\in\mathbb{N}} \frac{a_{j,n}}{a_{j+1,m}^k} = e^{n\alpha_j - km\alpha_{j+1}} < \infty,\ k = 1, 2, \dots, d.$$

Por tanto el polinomio Q está bien definido y es continuo en $\Lambda_\infty(\alpha)$ para cualquier α.

Proposición 4.2.4 *Sea $\alpha = \{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ una sucesión monótona creciente en $[0,\infty[$ con $\lim_{j\to\infty} \alpha_j = \infty$. Si*

$$\limsup_{j\to\infty} (\alpha_{j+1} - \alpha_j) = 0,$$

entonces el polinomio

$$Q : \Lambda_\infty(\alpha) \to \Lambda_\infty(\alpha)\ :\ \{z_i\}_{i\ge1} \longmapsto \left\{(z_{i+1} + 1)^d - 1\right\}_{i\ge1},$$

es caótico para todo grado $d > 1$.

Demostración. Por el teorema 4.2.2 basta comprobar que $\left\{\frac{e^{k\alpha_j}}{d^j}\right\}_{j\in\mathbb{N}} \in l_p$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Aplicando el criterio del cociente se tiene que

$$\limsup_{j\to\infty} \frac{e^{k\alpha_{j+1}}/d^{j+1}}{e^{k\alpha_j}/d^j} = \frac{1}{d}\left(e^k\right)^{\limsup_{j\to\infty}(\alpha_{j+1}-\alpha_j)} = \frac{1}{d} < 1.$$

■

Ejemplos 4.2.5 (1) Si $\alpha_j := \sum_{n=1}^{j} \frac{1}{n^r}$, con $0 < r \le 1$ tenemos que Q es caótico en $\Lambda_\infty(\alpha)$.

(2) Si $\{\alpha_j\}_{j\in\mathbb{N}} := \{\log j\}_{j\in\mathbb{N}}$ se tiene que $\Lambda_\infty(\alpha) = s$, siendo s el espacio de las sucesiones rápidamente decrecientes. Este ejemplo ya se citó en la página 101 y en 0.3.17, volvemos a él para dar algunos ejemplos más de espacios de funciones que son isomorfos a él y en los que el polinomio Q es caótico. Algunos de estos espacios son los siguientes:

(a) El espacio $C^\infty_{2\pi}(\mathbb{R})$ de las funciones infinitamente diferenciables en $\mathbb{R}$ y 2π periódicas, dotado con la topología generada por la sucesión de seminormas

$$\|f\|_k := \sup\left\{\left|f^{(p)}(x)\right| \ : \ x \in \mathbb{R},\ 1 \leq p \leq k\right\},$$

o equivalentemente por (véase [52])

$$\|f\|_k := \sum_{0\leq p\leq k} \left\|f^{(p)}\right\|^2_{L_2[-\pi,\pi]}.$$

(b) El espacio de las funciones rápidamente decrecientes $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ definido como

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}) := \{f \in C^\infty(\mathbb{R}) \ : \ \|f\|_k := \sum_{\alpha+\beta\leq k} \int |x|^{2\alpha} \left|f^{(\beta)}(x)\right|^2 dx < \infty \text{ for all } k \in \mathbb{N}\},$$

o equivalentemente por la sucesión de seminormas (véase [52])

$$|||f|||_k := \sup\left\{\left|x^\alpha f^{(\beta)}(x)\right| \ : \ x \in \mathbb{R},\ \alpha+\beta \leq k\right\},$$

seminormas de las que recibe el nombre de espacio de las funciones rápidamente decrecientes ya que todas sus derivadas decrecen más rápido que cualquier polinomio.

(c) Para a, b números reales con $a < b$, el espacio $C^\infty[a,b]$ de las funciones infinitamente diferenciables en $[a,b]$ dotado con la topología generada por la familia de seminormas

$$\|f\|_k := \sup\left\{\left|f^{(p)}(x)\right| \ : \ x \in [a,b],\ 1 \leq p \leq k\right\}.$$

(d) El espacio $\mathcal{D}[a,b]$ de las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto contenido en $[a,b]$, dotado con la topología generada por la misma sucesión de seminormas del ejemplo anterior.

Para los isomorfismos entre estos espacios y s puede consultarse [52, capítulo 29].

Bibliografía

[1] Y. Abe and P. Zappa. Universal functions on complex general linear groups. *J. Approx. Theory*, 100:221–232, 1999.

[2] S. I. Ansari. Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces. *J. Funct. Anal.*, 148(2):384–390, 1997.

[3] R. Aron. Comunicación personal, 1998.

[4] R. Aron and J. Bés. Hypercyclic differentiation operators. In *Function Spaces*, volume 232 of *Contemp. Math.*, pages 39–46. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999, Edwardsville, IL, 1998.

[5] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G Davis, and P. Stacey. On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99(4):332–334, 1992.

[6] L. Bernal-González. Densely hereditarily hypercyclic sequences and large hypercyclic manifolds. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127:3279–3285, 1999.

[7] L. Bernal-González. Hypercyclic sequences of differential and antidifferential operators. *J. Approx. Theory*, 96(2):323–337, 1999.

[8] L. Bernal-González. On hypercyclic operators on Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(4):1003–1010, April 1999.

[9] L. Bernal-González. Universal images of universal elements. *Studia Math.*, 138(3):241–250, 2000.

[10] L. Bernal-González and A. Montes-Rodríguez. Non-finite dimensional closed vector spaces of universal functions for composition operators. *J. Approx. Theory*, 82(3):375–391, September 1995.

[11] N.C. Bernardes. On orbits of polynomial maps in Banach spaces. *Quaestiones Math.* to appear.

[12] J. P. Bès. *Three Problems on Hypercyclic Operators.* PhD thesis, Kent State University, 1998.

[13] J. P. Bès. Invariant manifolds of hypercyclic vectors for the real scalar case. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(6):1801–1804, 1999.

[14] J. P. Bès and A. Peris. Hereditarily hypercyclic operators. *J. Funct. Anal.*, 167(1):94–112, 1999.

[15] K. D. Bierstedt, R. G. Meise, and W. H. Summers. Köthe sets and Köthe sequence spaces. In J. A. Barroso, editor, *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, volume 71 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 27–91, Amsterdam-New York, 1982. North-Holland.

[16] K.G. Bierstedt, J. Bonet, and A. Galbis. Weighted spaces of holomorphic functions on balanced domains. *Michigan Math. J.*, 40(2):271–297, 1993.

[17] G. D. Birkhoff. Démonstration d'un théoréme elémentaire sur les fonctions entiéres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 189:473–475, 1929.

[18] A. Boivin, A. Bonilla, and J.C. Fariña. Meromorphic approximation in weighted L_p spaces. *Proc. Roy. Irish Acad. Sect. A*, 95(1):47–64, 1995.

[19] J. Bonet. Hypercyclic and chaotic convolution operators. *J. London Math. Soc.* to appear.

[20] J. Bonet, A. Defant, and A. Galbis. Tensor products of Fréchet or (DF)-spaces with a Banach space. *J. Math. Anal. Appl.*, 166(2):305–318, 1992.

[21] J. Bonet, F. Martínez-Giménez, and A. Peris. A Banach space which admits no chaotic operator. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 2000. to appear.

[22] J. Bonet and A. Peris. Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces. *J. Funct. Anal.*, 159:587–595, 1998.

[23] A. Bonilla and J. Betancor. On a universality property of certain integral operators. *J. Math. Anal. Appl.* to appear.

[24] A. Bonilla and J.C. Fariña. Meromorphic and entire approximation in BMO-norm. *J. Approx. Theory*, 76(2):203–218, 1994.

[25] A. Bonilla and J.C. Fariña. Lip_α approximation on closed sets with lip_α extension. *Canad. Math. Bull.*, 38(1):23–33, 1995.

[26] A. Bonilla, F. Pérez-González, A. Stray, and R. Trujillo-González. Approximation in weighted Hardy spaces. *J. Anal. Math.*, 73:65–89, 1997.

[27] K. C. Chan. Hypercyclicity of the operator algebra for a separable Hilbert space. *J. Operator Theory*, 42:231–244, 1999.

[28] K. C. Chan and J. H. Shapiro. The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(4):1421–1449, 1991.

[29] A. Defant and K. Floret. *Tensor Norms and Operator Ideals.* North-Holland, Amsterdam, 1993.

[30] R. L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems.* Addison Wesley, Reading, MA, second edition, 1989.

[31] S. Dineen. *Complex Analysis on Infinite Dimensional Spaces.* Springer-Verlag, London, 1999.

[32] A. Galbis. Köthe sequence spaces with values in Fréchet or (DF) spaces. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*, 57(3):157–172, 1988.

[33] A. Galbis. Weighted Banach spaces of entire functions. *Arch. Math. (Basel)*, 62(1):58–64, 1994.

[34] P. Galindo, D. García, and M. Maestre. Holomorphic mappings of bounded type on (DF)-spaces. In K.D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth, and Maestre M., editors, *Progress in Functional Analysis*, volume 170 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 135–148, Amsterdam-New York, 1992. North-Holland.

[35] R. M. Gethner and J. H. Shapiro. Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(2):281–288, 1987.

[36] G. Godefroy and J. H. Shapiro. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.*, 98(2):229–269, 1991.

[37] W.T. Gowers and B. Maurey. The unconditional basic sequence problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(4):851–874, 1993.

[38] K.G. Grosse-Erdmann. Hypercyclic and chaotic weighted shifts. *Studia Math.* to appear.

[39] K.G. Grosse-Erdmann. Universal families and hypercyclic operators. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36(3):345–381, 1999.

[40] A. Grothendieck. *Topological Vector Spaces.* Gordon and Breach, New York/London/Paris, 1973.

[41] A. Gulisashvili and C. R. MacCluer. Linear chaos in the unforced quantum harmonic oscillator. *J. Dynam. Systems Measurement Control*, 118:337–338, June 1996.

[42] D. A. Herrero. Hypercyclic operators and chaos. *J. Operator Theory*, 28(1):93–103, 1992.

[43] H. Jarchow. *Locally Convex Spaces.* B. G. Teubner, Stuttgart, 1981.

[44] C. Kitai. *Invariant Closed Sets for Linear Operators.* PhD thesis, University of Toronto, 1982.

[45] M. Kocatepe and Z. Nurlu. Some special Köthe spaces. In T. Terzioğlu, editor, *Advances in the Theory of Fréchet Spaces*, volume 287 of *NATO ASI Series*, pages 269–296, Dordrecht, 1989. Kluver Academic Publishers.

[46] G. Köthe. *Topological Vector Spaces, I.* Springer-Verlag, Berlin/New York, 1969.

[47] G. Köthe. *Topological Vector Spaces, II.* Springer-Verlag, Berlin/New York, 1979.

[48] F. León-Saavedra and A. Montes-Rodríguez. Linear structure of hypercyclic vectors. *J. Funct. Anal.*, 148(2):524–545, 1997.

[49] J.A. López Molina, F. Martínez-Giménez, M.J. Rivera, and E.A. Sánchez Pérez. Montel maps on interpolation of echelon sequence Köthe spaces by the Goulaouic's method. In Hudzik/Skrzypczak, editor, *Function Spaces*, pages 367–377. Marcel Dekker, Inc, 2000.

[50] G. R. MacLane. Sequences of derivatives and normal families. *J. Analyse Math.*, 2:72–87, 1952.

[51] F. Martínez-Giménez and A. Peris. Hypercyclic and chaotic backward shift operators on Köthe echelon spaces. Preprint.

[52] R. Meise and D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis.* Oxford University Press, Oxford-New York, 1997.

[53] A. Montes-Rodríguez. Banach spaces of hypercyclic vectors. *Michigan Math. J.*, 43:419–436, 1996.

[54] A. Montes-Rodríguez and C. Romero-Moreno. Supercyclicity in the operator algebra. 2000. Preprint.

[55] P. Pérez Carreras and J. Bonet. *Barreled Locally Convex Spaces*, volume 131 of *North-Holland Mathematics Studies.* North-Holland, Amsterdam, 1987.

[56] A. Peris. *Productos Tensoriales de Espacios Localmente Convexos Casinormables y otras Clases Relacionadas.* PhD thesis, Universitat de Valencia, 1992.

[57] A. Peris. Chaotic polynomials on Banach spaces. 1998. Preprint.

[58] A. Peris. Chaotic polynomials on Fréchet spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127:3601–3603, 1999.

[59] V. Protopopescu and Y. Azmy. Topological chaos for a class of linear models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2:79–90, 1992.

[60] S. Rolewicz. On orbits of elements. *Studia Math.*, 32:17–22, 1969.

[61] W. Rudin. *Functional Analysis.* McGraw-Hill, New York, 1973.

[62] H.N. Salas. Hypercyclic weighted shifts. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(3):993–1004, 1995.

[63] E.A. Sánchez-Pérez. On the structure of tensor norms related to (p,σ)-absolutely continuous operators. *Collect. Math.*, 47(1):35–46, 1996.

[64] E.A. Sánchez-Pérez. The α-approximation property and the weak topology in tensor products of Banach spaces. *Rend. Sem. Mat. Univ. Padova*, 97:81–88, 1997.

[65] J. H. Shapiro. *Composition Operators and Classical Function Theory.* Springer-Verlag, New York, 1993.

[66] M. Valdivia. Representaciones de los espacios $\mathcal{D}(\Omega)$ y $\mathcal{D}'(\Omega)$. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid*, 72:385–414, 1978.

[67] M. Valdivia. Una representación del espacio $\mathcal{D}_+(\Omega)$. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid*, 72:560–571, 1978.

[68] M. Valdivia. A representation of the space $\mathcal{D}(K)$. *J. reine angew. Math.*, 320:97–98, 1980.

[69] M. Valdivia. Representaciones de los espacios $\mathcal{C}^m(V)$ y $\mathcal{D}^m(V)$. *Rev. Real Acad. Cienc. Exactas, Físicas y Naturales, de Madrid*, 75:589–596, 1981.

[70] M. Valdivia. A representation of the space $\mathcal{O}_M$. *Math. Z.*, 177:463–478, 1981.

[71] M. Valdivia. *Topics in Locally Convex Spaces.* North-Holland, Amsterdam/New York/Oxford, 1982.