

# **MODELIZACIÓN ESTOCÁSTICA DE SUBYACENTES Y DERIVADOS EUROPEOS MEDIANTE ÁRBOLES BINOMIALES: TEORÍA Y APLICACIÓN**

---

Valoración de un contrato de opciones de compra sobre la  
acción del Grupo Alstom

Autora:

Natalia Mariz Avis

Directores:

Dr. Juan Carlos Cortés López  
Dr. Rafael Jacinto Villanueva Micó

Master en Dirección Financiera y Fiscal  
Universitat Politècnica de València



## Índice de contenidos

Índice de gráficos .....	5
Índice de tablas .....	6
Índice de figuras .....	7
Resumen .....	9
Objetivos.....	11
1. Antecedentes. Situación Actual.....	13
2. Mercados financieros y mercado de derivados. Las opciones financieras.....	15
2.1 Mercados financieros y mercados de derivados .....	15
2.2 Las opciones financieras.....	17
3. Grupo Alstom .....	25
3.1 Magnitudes económico-financieras más relevantes del Grupo Alstom .....	26
3.1.1 Estructura económico-financiera. Análisis del balance.....	27
3.1.2 Situación operativa. Análisis de la cuenta de resultados.....	31
3.2 Acciones.....	34
4. Tres métodos <i>monoperiodo</i> para valorar opciones.....	35
4.1 Método de la Teoría de Juegos .....	35
4.2 Método de Duplicación de Carteras.....	38
4.3 Método del Valor Esperado .....	40
5. Introducción a los árboles binomiales <i>multiperiodo</i> . El modelo CRR y árbol binomial implícito.....	43
5.1 Construcción de un árbol binomial de varios periodos.....	43
5.2 Validación del modelo del subyacente .....	47
5.3 Modelo de CRR de Cox, Ross y Rubinstein.....	50
5.3.1 Convergencia entre el modelo discreto y continuo .....	53
5.4 Árbol binomial implícito .....	57
6. Aplicación del árbol binomial para la valoración de un contrato tipo <i>call</i> sobre las acciones del Grupo Alstom .....	61
6.1 Aplicación del árbol binomial mediante el modelo de Cox, Ross y Rubinstein....	62
6.1.1 Aproximación del modelo discreto CRR al modelo continuo log-normal.....	68
6.1.2 Efectos en la prima de opción de compra sobre la acción de Alstom .....	69
6.2 Aplicación del árbol binomial implícito .....	73
6.3 Validación del modelo para la acción de Alstom .....	84
7. Conclusiones finales.....	91
Bibliografía.....	93
Anexo 1. Glosario de términos utilizados.....	95
Anexo 2. Glosario de abreviaturas empleadas .....	97
Anexo 3. Características generales de los contratos de opciones de tipo europeo .....	98

Anexo 4. Vencimiento y ciclo de vida de las opciones de tipo europeo. Euronext .....	99
Anexo 5. Árbol binomial del subyacente. <i>Strike</i> 25 €.....	100
Anexo 6. Árbol binomial de la opción. <i>Strike</i> 25 €.....	102
Anexo 7. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial de la opción. <i>Strike</i> 23 €.....	104
Anexo 8. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial de la opción. <i>Strike</i> 27 €.....	106
Anexo 9. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial del subyacente. Tasa de interés libre de riesgo 0,5%. (1) .....	108
Anexo 9. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial de la opción. Tasa de interés libre de riesgo 0,5%. (2) .....	110
Anexo 10. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial del subyacente. Tasa de interés libre de riesgo 1%. (1) .....	112
Anexo 10. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial de la opción. Tasa de interés libre de riesgo 1%. (2) .....	114
Anexo 11. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial del subyacente. Dividendo semana 26 1,5 €/acción. (1).....	116
Anexo 11. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial de la opción. Dividendo semana 26 1,5 €/acción. (2).....	118
Anexo 12. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial del subyacente. Dividendo semana 26 2 €/acción. (1).....	120
Anexo 12. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial de la opción. Dividendo semana 26 2 €/acción. (2).....	122
Anexo 13. Probabilidades intermedias árbol binomial del subyacente. ....	124

## Índice de gráficos

<b>Gráfico 2.2.1</b> Diagrama de beneficios y pérdidas de una opción de compra. Posición: call comprada. ....	18
<b>Gráfico 2.2.2</b> Diagrama de beneficios y pérdidas de una opción de compra. Posición: call vendida.....	19
<b>Gráfico 2.2.3</b> Diagrama de beneficios y pérdidas de una opción de venta. Posición: put comprador. ....	19
<b>Gráfico 2.2.4</b> Diagrama de beneficios y pérdidas de una opción de venta. Posición: put contrapartida.....	20
<b>Gráfico 3.2.1</b> Cotización de la acción del Grupo Alstom periodo 2011-2014. ....	34
<b>Gráfico 6.2.1</b> Función de probabilidades explícitas e implícitas. ....	84
<b>Gráfico 6.3.1</b> Precio observado, valor estimado e Intervalo de Confianza al 95% para la acción del Grupo Alstom. ....	90

## Índice de tablas

<b>Tabla 2.2.1</b> Resumen de los efectos del análisis de sensibilidad de la prima de una opción de tipo europeo. ....	22
<b>Tabla 3.1.1</b> Balance consolidado del Grupo Alstom (2011-2014). ....	28
<b>Tabla 3.1.2</b> Patrimonio neto y pasivo consolidado del Grupo Alstom (2011-2014). ....	29
<b>Tabla 3.1.3</b> Balance analítico. Comparativa sectorial periodo 2011-2014. ....	30
<b>Tabla 3.1.4</b> Cuenta de resultados consolidada del Grupo Alstom (2011-2014). ....	31
<b>Tabla 3.1.5</b> Márgenes operativos de Alstom y empresas comparables (2011-2014). ..	33
<b>Tabla 4.1.1</b> Cartera inicial formada mediante el Método de la Teoría de Juegos. ....	36
<b>Tabla 4.2.1</b> Cartera inicial formada mediante el Método Duplicación de Carteras. ....	38
<b>Tabla 6.1.1</b> Cotizaciones reales y rendimiento de la acción de Alstom. ....	63
<b>Tabla 6.1.2</b> Desviación típica de los rendimientos y paso temporal. ....	65
<b>Tabla 6.1.3</b> Valores para las probabilidades y el tipo de interés por unidad de tiempo. ....	68
<b>Tabla 6.2.1</b> Probabilidades finales del árbol binomial del subyacente calculadas a partir del CRR. ....	74
<b>Tabla 6.2.2</b> Resultados obtenidos de la aplicación del modelo IBT. ....	81
<b>Tabla 6.2.3</b> Cálculo de la prima de opción de compra sobre las acciones de Alstom con el modelo IBT. ....	82
<b>Tabla 6.3.1</b> Estimaciones y precio real de la acción de Alstom. ....	85
<b>Tabla 6.3.2</b> Cálculo medidas de bondad de ajuste: MAPE Y RSME. ....	86
<b>Tabla 6.3.3</b> Medidas de bondad de ajuste. Resultado de la implementación del MAPE. ....	88
<b>Tabla 6.3.4</b> Medidas de bondad de ajuste. Resultado de la implementación del RSME. ....	88
<b>Tabla 6.3.4</b> Intervalo de Confianza del 95%. Datos obtenidos para las acciones del Grupo Alstom. ....	89

## Índice de figuras

<b>Figura 3.1.1</b> Presencia internacional del Grupo Alstom.....	25
<b>Figura 4.1.1</b> Diagrama de árbol de las posiciones en el precio de la acción y el contrato de opción de compra.....	36
<b>Figura 4.2.1</b> Diagrama de árbol de las posiciones en el precio del bono, la acción y el contrato de opción de compra.....	39
<b>Figura 4.3.1</b> Diagrama de árbol de las posiciones en el precio de la acción y el contrato de opción de compra con los datos de referencia. ....	41
<b>Figura 5.1.1</b> Árbol binomial del subyacente para dos periodos. ....	44
<b>Figura 5.1.2</b> Árbol binomial reducido del subyacente para dos periodos. ....	45
<b>Figura 5.1.3</b> Árbol binomial de una opción de compra para dos periodos. ....	45
<b>Figura 5.1.4</b> Árbol binomial de una opción de venta para dos periodos.....	47
<b>Figura 5.3.1</b> Diagrama de árbol de las posiciones en el precio del bono, la acción y el contrato de opción de compra.....	51
<b>Figura 6.1.1</b> Construcción de los primeros nodos del diagrama de árbol para la acción de Alstom.....	66
<b>Figura 6.1.2</b> Fragmento árbol de la opción call para la acción de Alstom. Periodos: $t = 51$ y $52$ . ....	67
<b>Figura 6.1.3</b> Fragmento del árbol de la opción call sobre la acción de Alstom. Cálculo de la prima de la opción.....	68
<b>Figura 6.1.4</b> Ejemplo de árbol binomial de una acción con reparto de dividendos.....	72
<b>Figura 6.2.1</b> Aplicación del modelo IBT. Cálculo de la función objetivo. ....	76
<b>Figura 6.2.2</b> Aplicación del modelo IBT. Suma del error.....	76
<b>Figura 6.2.3</b> Aplicación del modelo IBT. Restricción 1 suma de probabilidades. ....	78
<b>Figura 6.2.4</b> Aplicación del modelo IBT. Restricción 2 cálculo preliminar de la restricción. ....	79
<b>Figura 6.2.5</b> Aplicación del modelo IBT. Implementación de la restricción número 2..	80
<b>Figura 6.2.6</b> Aplicación del modelo IBT. Resolución del modelo de programación no lineal con Solver. ....	80

*A mi mentor D. Leopoldo Pons:*

*Escasas son estas líneas para agradecerle  
la oportunidad de formarme junto a usted.*

*Su profesionalidad, elegancia y alegría  
han sido y serán un ejemplo para todos.*

*Seguimos.*

## Resumen

Los derivados financieros son activos cuyo rendimiento futuro dependen de la evolución del subyacente al cual van referenciados, las opciones financieras son un tipo de instrumento derivado que permite al inversor tomar posiciones de cobertura ante las perspectivas que tiene el mismo del mercado (en este caso, el subyacente sería un índice bursátil de referencia del mercado), o de una empresa en concreto (el precio de la acción) en el futuro. Por lo que, si el inversor considera que el mercado en el futuro será alcista se decantará por tomar una posición larga en opciones tanto de compra como de venta, en cambio, si espera que el mercado tome un fase bajista, la posición con opciones de compra o de venta será en corto, es decir, venderá los contratos.

La importancia de la valoración de opciones reside en la fijación del desembolso inicial para suscribir el contrato, es decir, determinar un precio adecuado a la prima de la opción, que dependerá del valor intrínseco que tome el contrato a lo largo de su vida. Este valor se determina a partir del diferencial de precios entre el subyacente y el precio de ejercicio. El precio de ejercicio es conocido y se establece al inicio del contrato, si bien, el precio del subyacente en el futuro es indeterminado, lo que supone la implementación de técnicas de predicción que faciliten la tarea de fijar un valor adecuado a la prima de la opción.

Por tanto, la elección del modelo del subyacente, en definitiva, determinará la robustez de la valoración. Los modelos discretos, han sido los seleccionados en la presente memoria, implementados a través de la técnica de árboles binomiales. Cox, Ross y Rubinstein publican en 1979 un modelo de valoración de opciones de tipo discreto a partir de la construcción de una cartera híbrida bajo la premisa de que no existen oportunidades de arbitraje y de que se cumple el principio de neutralidad al riesgo que permita la calibración de los parámetros necesarios para llevar a cabo la valoración. Esta última asunción, provoca la fijación de una serie de probabilidades ficticias que permiten la creación de escenarios para el precio del subyacente, y consecuentemente, la fijación de la prima de la opción, cuyo rendimiento final de la inversión resulta equivalente a la tasa de interés libre de riesgo.

El segundo modelo implementado es el modelo de árboles binomiales implícitos basado, en la presente memoria, a partir de una aplicación práctica de Gastón Silverio Milanesi. Este modelo parte de la base propuesta por Cox, Ross y Rubinstein pero con la diferencia fundamental de no considerar a priori que la distribución de probabilidades de los precios es de tipo gaussiana o normal.

Resulta ineludible corroborar la robustez de las predicciones realizadas para el subyacente ya que determinará la correcta fijación de la prima de la opción, para ello, en este memoria, se aplican tres medidas de bondad de ajuste, el Error Porcentual Medio (*Mean Absolute Percentage Error* o MAPE), el Error Cuadrático Medio (*Root Mean Squared Error* o RMSE) y la construcción de Intervalos de Confianza al 95%. Para finalizar el test de robustez del modelo se construye un gráfico con las predicciones realizadas, los precios reales del subyacente y los Intervalos de Confianza.

Del mismo modo, la aplicación de un modelo de tipo discreto induce a cuestionarse si el mismo puede llegar a aproximarse a un modelo continuo, los cuales suelen ser más precisos. Por ello, se desarrolla dicha aproximación entre el modelo de Cox, Ross y Rubinstein y el modelo estocástico log-normal.

Todo ello se aplica sobre un contrato de opciones de compra de tipo europeo sobre la acción del Grupo Alstom, cuya fecha de suscripción fue el 18 de septiembre de 2014, con fecha de vencimiento el 19 de septiembre de 2015, y con un precio de ejercicio de 25 €. Por tanto, el periodo para la predicción es de un año completo, el cual se ha decidido dividir en pasos temporales semanales lo que supone trabajar con 52 periodos. La literatura sobre árboles binomiales indica que el uso de 30 y 60 periodos permite conseguir predicciones más afinadas, de hecho John C. Hull realiza una prueba sobre un mismo contrato variando el número de periodos llegando a la conclusión de que a medida que aumentan los periodos los resultados obtenidos por ambos enfoques convergen.

## Objetivos

---

El objetivo principal del presente Trabajo de Fin de Máster es el estudio, desarrollo y aplicación de un modelo financiero que permita la fijación del precio de suscripción de un contrato de opciones financieras de tipo europeo y cuyo subyacente no paga dividendos en el periodo valorado. La aplicación del mismo se ha llevado a cabo a través de dos modelos discretos, el primero de ellos, el propuesto por Cox, Ross y Rubinstein, el segundo, el árbol binomial implícito a partir de la aplicación práctica ofrecida por Gastón Silverio Milanesi. La valoración se realiza a partir de un contrato de opciones de compra sobre la acción del Grupo Alstom, corporación internacional dedicada a las ramas industriales de producción y suministro de energía, así como, la fabricación de trenes.

El objetivo principal de la memoria se basa en la fijación del precio de suscripción de un contrato de opciones financieras, es decir, la prima de la opción. Si bien, el desarrollo del mismo ha provocado que surjan diversos objetivos que subyacen del principal:

- Realizar una primera aproximación al concepto de opciones financieras y las posiciones de cobertura que se pueden tomar con las mismas.
- Conocer la filosofía del modelo de Cox, Ross y Rubinstein y el árbol binomial implícito desde una perspectiva de contexto y no tanto de desarrollo matemático.
- Calibrar los parámetros del modelo a partir de un histórico de precios reales del Grupo Alstom.
- Validar la modelización realizada sobre los precios de cotización del Grupo Alstom mediante medidas de bondad de ajuste.
- Comparación gráfica de la predicción realizada y los precios observados del Grupo Alstom.
- Realizar un análisis de sensibilidad al precio de la prima fijada en la modelización, alterando aspectos como, el precio de ejercicio, la tasa de interés libre de riesgo y una hipotética distribución de dividendos.
- Comprobar si el modelo discreto de Cox, Ross y Rubinstein puede aproximarse a un modelo estocástico log-normal.



## 1. Antecedentes. Situación Actual

Las finanzas cuantitativas permiten llevar a cabo análisis de tipo financiero incorporando desarrollos matemáticos que derivan de la estadística e incluso de la física. Resulta arriesgado datar con una fecha concreta el inicio de esta ciencia, si bien, puede destacarse el desarrollo formulado por Harry Markowitz sobre la construcción de carteras eficientes en 1952, modelos de predicción de insolvencia empresarial de la mano de William Beaver en 1966 o Edward Altman en 1968. Sobre los modelos de valoración de opciones, objetivo de la presente memoria, destacar la aportación de Fischer Black y Myron Scholes en 1973 con un modelo en tiempo continuo para la determinación de la prima de opciones tanto de compra como de venta. En la perspectiva de los modelos de tipo discreto es ineludible mencionar la propuesta de Cox, Ross y Rubinstein en 1979, modelo base de la presente memoria y que surge del desarrollo de Fischer Black y Myron Scholes.

La creciente aparición de nuevos instrumentos financieros, y en mayor medida de activos derivados, también suponen otro impulso al desarrollo de modelos de finanzas cuantitativas que permitan su comprensión y modelización. De hecho, en el campo de las opciones la innovación financiera ha provocado que, actualmente, exista una amplia gama de contratos de este tipo. Las opciones europeas y americanas se podrían considerar los contratos básicos. Una opción europea es aquella que otorga al tenedor el derecho de comprar o vender un activo subyacente en un fecha futura, en cambio, un contrato de opciones de tipo americano, permite a su propietario el ejercicio del derecho de compra o de venta en cualquier momento de la vida del mismo. Aquellos contratos de opciones no tradicionales se denominan exóticos, siendo aquellos que no llevan aparejado un precio de ejercicio fijo y cuyo valor intrínseco no depende del valor del subyacente en la fecha de ejercicio. En este contexto, puede destacarse las opciones *lookback*, las cuales pagan al tenedor el valor máximo de la acción en todo el periodo de la vida del contrato, lo que supone conocer el valor de la acción en cada lapso temporal. Las opciones *knockout* o barrera son opciones de tipo europeo en la que se fija un umbral de precios, de modo que si el precio del subyacente está por encima de ese umbral, en el caso de una opción de venta, esta carecería de valor con independencia del precio de la misma en la fecha de vencimiento. Y por último, destacar, las opciones *boom* y *crash* cuyos precios de ejercicio son la rentabilidad de un índice (Fernández, y otros, 1996).

Todos estos ejemplos son una evidencia de la complejidad de este tipo de productos, ello unido, al estudio a nivel académico de las finanzas cuantitativas, así como, el aumento de publicaciones especializadas sobre la modelización de instrumentos financieros cotizados son la clave de justificación de la presente memoria, abordando dicho estudio en la valoración de una opción de compra de tipo europeo sobre la acción del Grupo Alstom modelado a través de la propuesta Cox, Ross y Rubinstein y la implementación de árboles binomiales implícitos.



## 2. Mercados financieros y mercado de derivados. Las opciones financieras

La economía financiera se basa en la interpretación de los precios de los activos financieros, la valoración del riesgo, la organización de los intermediarios financieros y mercados, así como, la toma de decisiones empresariales, referidas a decisiones de inversión y financiación empresarial (Marín, y otros, 2010).

La economía financiera tiene un papel vital en el funcionamiento de la economía real y viceversa. Por ello, en este apartado, se realiza una primera aproximación al concepto de los mercados financieros, y en concreto, el mercado de derivados. Posteriormente, el capítulo se centra en un tipo de activo financiero concreto, las opciones financieras, activos que permiten al inversor tomar posiciones de cobertura con el fin de minimizar el riesgo.

### 2.1 Mercados financieros y mercados de derivados

El sistema financiero es el conjunto de instituciones, mercados e instrumentos que cumplen la función de canalizar el excedente de recursos de los agentes económicos hacia aquellas unidades que se encuentran en situación de déficit, es decir, el principal objetivo del sistema financiero es en poner en contacto a aquellos agentes que desean invertir con los que necesitan financiarse.

Esta canalización se realiza mediante dos vías, los mercados de valores y los intermediarios financieros. Prestando la atención a los mercados, estos se definen como el mecanismo o lugar donde se produce el intercambio de los activos financieros (título emitido por las unidades económicas de gasto, que suponen un medio para mantener riqueza para quien lo adquiere y un pasivo para quien lo emite) y se determina su precio. Existen distintos criterios de clasificación de los mercados financieros, atendiendo al tipo de activo financiero que en ellos se negocia, se encuentran los siguientes (Moya Clemente, 2015):

- Mercado de capitales:
  - Mercado de deuda pública.
  - Mercado de renta fija privada.
  - Mercado de renta variable.
- Mercados monetarios:
  - Mercado interbancario privado.
  - Mercado de intervenciones de Bancos Centrales.
- Mercados de instrumentos a plazo:
  - Mercados de derivados.
- Mercados de divisas:
  - Mercado al contado.
  - Mercado a plazo.

El apartado se va a centrar en los mercados de instrumentos a plazo, es decir, los mercados de derivados, y en concreto el mercado de opciones financieras.

En primer lugar, un instrumento derivado es un contrato de tipo financiero con efectos futuros indeterminados para las partes en el momento de su suscripción. Estos efectos dependen del comportamiento del subyacente al que cual se asocia cada contrato. El subyacente puede ser tanto una acción, un índice, una divisa, mercancías, etc. El derivado se verá influenciado por la evolución del precio del título subyacente, su variabilidad y su liquidez (Herranz Martín, 2001).

Las opciones financieras son un tipo de instrumento financiero. Las primeras negociaciones de este tipo de productos se remontan al siglo XVIII en Europa y Estados Unidos. Si bien, no es hasta el siglo XX cuando se crean las primeras organizaciones para la negociación de este tipo de productos. Un grupo de empresas constituyeron *Put and Call Brokers and Dealers Association*, esta asociación tenía como objetivo poner en contacto a los compradores y los vendedores de opciones. El inversor acudía a una de las empresas que componía la asociación y esta intentaba encontrar un vendedor, en el caso de que el contrato no se pudiera llevar a cabo con un tercero, era la propia empresa la que cerraba el contrato al precio acordado entre las partes. Este mercado carecía de un mecanismo que garantizase que el suscriptor cumpliera con el contrato establecido y no existía un mercado secundario que aportara liquidez a la opción.

No es hasta 1973 cuando se crea la Bolsa de Opciones de Chicago (*Chicago Board Options Exchange*) el primer mecanismo específico de negociación de estos contratos. Desde entonces, este tipo de mercados han ido adquiriendo cada vez más notoriedad en lo que se refiere al volumen negociado de títulos. De hecho, en 1980 las transacciones con opciones sobre acciones excedían del volumen de acciones cotizadas en la Bolsa de Valores de Nueva York. En esta misma década, y con la creciente popularidad de las opciones se inician las primeras negociaciones de opciones referenciadas a otros subyacentes como índices bursátiles u opciones sobre contratos de futuros (Hull, 2009).

En el caso de España no es hasta 1991 cuando se formula la primera regulación sobre este tipo de mercados a través del Real Decreto 1814/1991. Al amparo de éste, el Ministerio de Economía autoriza a la entidad MEFF, Sociedad Rectora de Productos Financieros Derivados de Renta Variable, S.A., (en adelante MEFF), como mercado secundario oficial de valores, convirtiéndose así, en el único mercado organizado específico en España para la negociación de este tipo de contratos (Comisión Nacional del Mercado de Valores, 1992).

Actualmente en el MEFF, se negocian tanto futuros como opciones cuyo subyacente recae sobre el IBEX 35 o ciertos títulos del Mercado Continuo Español y futuros sobre bonos a 10 años.

Hasta ahora, se ha descrito el inicio del mercado de opciones y la casuística española, un tanto rezagada con respecto al mercado americano, pero no se ha llegado a describir cuáles son las particularidades de este tipo de activos financieros.

## 2.2 Las opciones financieras

Las opciones son contratos que otorgan al tenedor o propietario del contrato el derecho de ejercer un acto de compra o venta de un determinado activo, sin que este ejercicio sea obligatorio, aspecto que diferencia un contrato de opciones con un futuro, en el cual el ejercicio, a vencimiento, es obligatorio. Estos contratos se componen de los siguientes elementos (Hull, 2009):

- Subyacente: activo de referencia que determina el valor de un contrato de opciones. Este puede estar materializado en una acción, un índice bursátil, una tasa de interés, una mercancía, etc. Esta última suele denominarse en el mercado financiero *commodities*, etc.
- Fecha de vencimiento: fecha que determina la expiración del contrato. En este contexto, se puede hacer una primera clasificación de las opciones:
  - Opciones de tipo europeo aquellas que únicamente se pueden ejercitar en la fecha de vencimiento del contrato.
  - Opciones americanas, aquellos contratos que pueden ejercitarse en cualquier momento durante la vida de los mismos.
- Precio de ejercicio: valor de la opción en el momento en el que se ejercite.
- Prima de la opción: valor del contrato en el momento en el que se suscribe. Es el precio que debe pagar el tenedor para participar en dicho contrato.

Existen dos tipos básicos de opciones, que a continuación se detallan:

### **Opciones de compra o call**

Las opciones de compra o *call* otorgan al tenedor el derecho de comprar un activo en un momento determinado. Tal y como se ha indicado, si la opción de compra es de tipo europeo solo se podrá ejercitar el derecho de compra en la fecha de vencimiento del contrato. Si se tratara de una opción de tipo americano el tenedor podría ejercer su derecho en cualquier momento de la vida del contrato.

Por el lado del vendedor del contrato, en el caso de que el tenedor ejercite su derecho, el vendedor se vería obligado a entregarle lo pactado al tenedor del contrato, que es quien paga la prima por tener el derecho a ejercitar el contrato para comprar el subyacente al precio de ejercicio estipulado en el contrato. En la práctica la liquidación se realiza mediante el diferencial de precios, entre el subyacente y el precio de ejercicio.

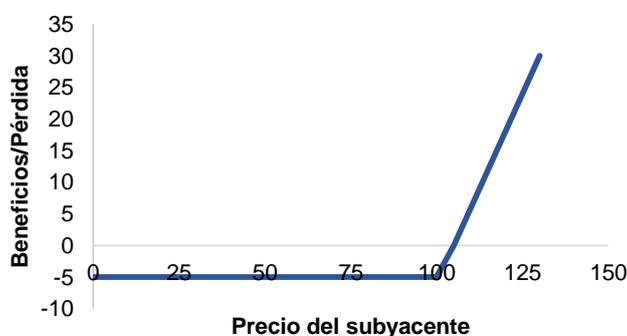
En el Gráfico 2.2.1 se muestra el diagrama de beneficios y pérdidas del comprador de una opción de compra. El inversor para adquirir el contrato debe pagar al vendedor una cantidad pactada, denominada prima de la opción, supóngase que esta es de 5 unidades monetarias (en adelante u.m.) y que el precio de ejercicio es de 100 u.m. (estos datos se van a mantener durante todo el apartado para centrar mejor la exposición).

El inversor ejercerá el contrato siempre y cuando el subyacente alcance valores superiores al precio de ejercicio, dado que el vendedor le deberá de entregar la cantidad resultante del diferencial de precios.

Por tanto, el tenedor de una *call* limita sus pérdidas al precio pagado para adquirirla, es decir, la prima de la opción, sus ganancias son potencialmente ilimitadas dependiendo del valor que alcance el subyacente. En el ejemplo propuesto, si el precio del subyacente alcanzara 130 u.m., como el precio de ejercicio es 100 u.m., el diferencial obtenido, también llamado *pay-off*, sería de 30 u.m.

El comprador de una *call* se dice que esta largo (*long position*) y estima que en el futuro el precio del subyacente se verá incrementado e intenta cubrirse ante aumentos en los precios, es decir, tiene una visión alcista del mercado o de ese subyacente en concreto.

**Gráfico 2.2.1** Diagrama de beneficios y pérdidas de una opción de compra. Posición: *call* comprada.



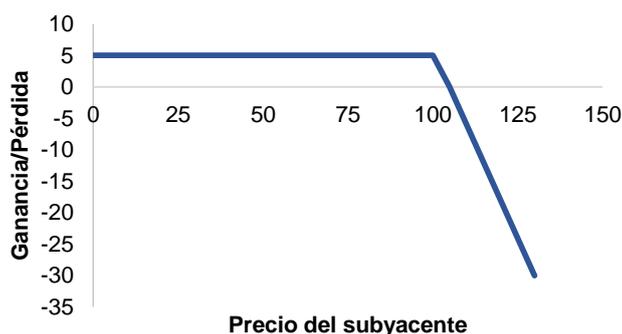
Fuente: Elaboración propia.

En el Grafico 2.2.2 se observa la contrapartida de una *call* vendida, es decir, la posición de un vendedor de opciones de compra.

En el inicio del contrato, el vendedor recibe el precio de la prima de la opción (5 u.m.). En el caso de que el tenedor ejerza su derecho, lo cual se hará siempre que el precio del subyacente supere las 100 u.m., el vendedor deberá entregar el diferencial de precios. Por lo que el vendedor tendrá ganancias si el tenedor de la *call* no ejerce el contrato, y dichas ganancias estarán limitadas a la prima recibida en el momento inicial del contrato; en cambio las pérdidas son potencialmente ilimitadas.

Por tanto, en este contexto, el vendedor de una *call* se dice que esta corto (*short position*) y que estima que los precios en el futuro decrecerán por lo que tiene una visión bajista del mercado o del subyacente negociado.

**Gráfico 2.2.2** Diagrama de beneficios y pérdidas de una opción de compra. Posición: *call* vendida.



Fuente: Elaboración propia.

### Opciones de venta o *put*

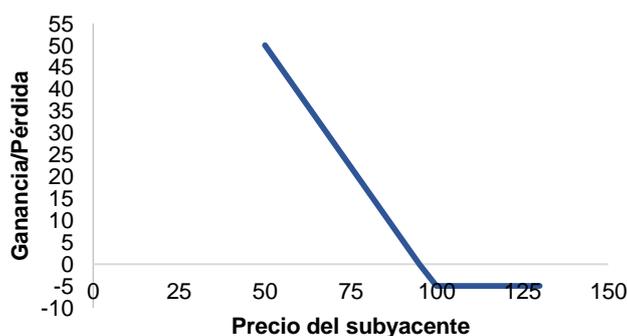
Las opciones de venta o *put* otorgan al tenedor el derecho de poder vender un determinado activo en una fecha futura. Esta fecha dependerá de que el contrato, como ya se ha indicado, sea de tipo europeo o americano.

En el Gráfico 2.2.3 se observa el diagrama de beneficios y pérdidas desde el punto de vista de un inversor que ha comprado una *put*. En el caso de opciones de venta, cabe matizar que el propietario del contrato también es el titular del subyacente, es decir, con la compra del contrato, adquiere el derecho a vender un activo que tiene en su poder.

Al inicio del contrato debe abonar la prima de la opción (5 u.m.) por lo que sus pérdidas quedan acotadas al desembolso inicial. El inversor ejercerá su derecho siempre y cuando el subyacente tome valores inferiores al precio de ejercicio, y ello supondrá la obtención de beneficios. En el caso de las opciones de venta los beneficios pueden ser altos, pero no ilimitados.

El comprador de una *put* espera que el precio del activo disminuya y por lo tanto obtener cierto beneficio, es decir, el inversor que adopta esta posición tiene una visión bajista del subyacente y su posición en la literatura comúnmente se denomina estar largo (*long position*).

**Gráfico 2.2.3** Diagrama de beneficios y pérdidas de una opción de venta. Posición: *put* comprador.



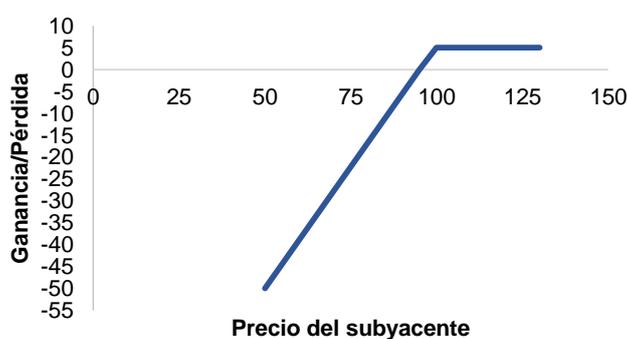
Fuente: Elaboración propia.

En el Gráfico 2.2.4 se muestra la contrapartida de un contrato de opciones de venta. En este caso el individuo ha vendido el contrato y por lo tanto adquiere la obligación de comprar el activo subyacente a su contrapartida, en el caso de que el tenedor de la *put* ejerza su derecho a vender.

Por tanto, el vendedor de la *put* limita sus ganancias a la prima recibida al inicio del contrato (5 u.m.). Las pérdidas son potencialmente altas pero limitadas, es decir, en el caso de que el subyacente careciera de valor, el diferencial de precios ascendería a 100 u.m., valor correspondiente al precio de ejercicio.

El vendedor de un contrato de venta espera que el subyacente aumente de valor con el fin de que el tenedor del mismo no ejerza su derecho de venta del subyacente, y de este modo obtener como beneficio el valor establecido como prima de la opción. Por tanto, toma una posición corta (*short position*) y alcista del mercado, o en su caso, del activo en concreto.

**Gráfico 2.2.4** Diagrama de beneficios y pérdidas de una opción de venta. Posición: *put* contrapartida.



Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, dejando a un lado un objetivo financiero de tipo especulativo, las opciones financieras son útiles para adoptar estrategias de cobertura ante posibles fluctuaciones futuras del precio de los activos. Las posibles posiciones se resumen en:

- Posición larga en opciones de compra y venta: el inversor espera que el precio del subyacente crezca en el futuro.
- Posición corta con opciones de compra y venta: el inversor estima una disminución en el precio del subyacente en el futuro.

Del análisis anterior se deduce que el beneficio para los tenedores de una opción de compra o de venta se determina únicamente por la diferencia entre el precio del subyacente en el momento en el que se ejerce el derecho que otorga cada contrato y el precio de ejercicio que se determina en el momento de la suscripción del mismo. Este valor, se denomina valor intrínseco o *pay-off*, y su expresión matemática en el caso de una opción de compra es:

$$\text{Valor intrínseco (call)} = \max(S_T - K; 0), \quad (2.2.1)$$

donde:

$S_T$  = valor del subyacente en el momento que se ejerce el derecho.

$K$  = precio de ejercicio.

La fórmula (2.2.1) refleja la actuación esperada por el inversor. En efecto, en el caso de que el precio del subyacente sea superior al de ejercicio ( $S_T > K$ ), ejercerá su derecho de compra y obtendrá como beneficios brutos (*pay-off*), el diferencial de precios entre el subyacente y el precio de ejercicio; en caso contrario ( $S_T < K$ ) no ejercerá su derecho de compra y el valor intrínseco o *pay-off* del contrato carecerá de valor.

Para una opción de venta la expresión del valor intrínseco o *pay-off* es la que sigue.

$$\text{Valor intrínseco (put)} = \max(K - S_T; 0), \quad (2.2.2)$$

donde:

$S_T$  = valor del subyacente en el momento que se ejerce el derecho.

$K$  = precio de ejercicio.

La fórmula (2.2.2) muestra como actuaría el tenedor de una *put*. En el caso de que el precio de ejercicio sea superior al alcanzado por el subyacente ( $K > S_T$ ), el inversor ejercerá su derecho de venta y obtendría el diferencial de precios. En caso contrario ( $K < S_T$ ), no ejercerá y el contrato en ese momento carecerá de valor.

Para finalizar el apartado, se va a analizar los efectos que provocan modificaciones de los parámetros del contrato en el precio de la prima de la opción. En concordancia con el objeto de la memoria se va a describir un análisis de sensibilidad de dicha variable, únicamente sobre contratos de opciones de tipo europeo. Se resumen los parámetros por lo que se ve influenciada la prima de la opción:

- Precio del subyacente al inicio.
- Precio de ejercicio.
- Tiempo al vencimiento.
- Volatilidad.
- Tasa de interés libre de riesgo.
- Pago de dividendos.

En la Tabla 2.2.1, se muestra a continuación, un resumen de los efectos en la prima de la opción ante aumentos de cada uno de los parámetros manteniendo el resto constantes (*ceteris paribus*<sup>1</sup>).

---

<sup>1</sup> *Ceteris paribus*: expresión latina utilizada en economía que significa que el resto de variables (exceptuando la modificada) se mantienen constantes.

**Tabla 2.2.1** Resumen de los efectos del análisis de sensibilidad de la prima de una opción de tipo europeo.

Parámetro	Opción de compra	Opción de venta
Precio del subyacente al inicio	+	-
Precio de ejercicio	-	+
Tiempo al vencimiento	?	?
Volatilidad	+	+
Tasa de interés libre de riesgo	+	-
Dividendos	-	+

Fuente: Elaboración propia a partir de (Hull, 2009)

- Precio del subyacente al inicio.** Como se observa en la Tabla 2.2.1 el efecto difiere entre los contratos. Para una *call* un aumento del precio del subyacente al inicio es ventajoso dado que ello supondrá muy probablemente un aumento del precio final del mismo,  $S_T$ , y por tanto también del *pay-off* de una opción de compra,  $\max(S_T - K; 0)$ . Por tanto, si un aumento del precio inicial del subyacente posibilita un mayor beneficio bruto, la prima que deberá pagarse por el contrato también deberá ser mayor. En cambio, para una opción de venta el efecto será justo el contrario. Un aumento del precio inicial del subyacente conlleva una pérdida de la prima del contrato debido a la disminución del *pay-off*, que para una opción *put* es  $\max(K - S_T; 0)$ .
- Precio de ejercicio.** El aumento del precio de ejercicio para una opción de compra supone que las posibilidades de obtener mayores beneficios (*pay-off*) se limiten, por lo tanto, el valor del contrato disminuye. De nuevo esto se deduce de la expresión del *pay-off* para una *call*:  $\max(S_T - K; 0)$ , ya que, si  $K$  aumenta, el *pay-off* disminuye. Para una opción de venta, el efecto es el contrario, el aumento del precio de ejercicio supone el incremento de su *pay-off*, lo que supone aumentar las posibilidades de obtener mejores resultados de la inversión y por tanto que el valor del contrato se encarezca. De nuevo esto se ve claramente a través de la expresión matemática del *pay-off* de una *put*:  $\max(K - S_T; 0)$ , si  $K$  aumenta, el *pay-off* también.
- Tiempo al vencimiento.** Este efecto no es posible cuantificarlo de forma exacta, aunque a priori un vencimiento a más largo plazo aumentaría el valor del contrato. Sin embargo, con un sencillo ejemplo se muestra que ello no tiene por qué ser siempre así. Considérese dos opciones *call* europeas idénticas en todos los aspectos, salvo que una de ellas vence en un año y la otra en dos años. Supóngase que se espera que el subyacente pague un dividendo muy grande dentro de año y medio. El dividendo dentro de año y medio hará que el precio de las acciones baje, de forma que es posible que el valor de la opción con vencimiento menor sea mayor que el de la opción con mayor vencimiento. Por tanto, las opciones europeas suelen tener más valor cuanto más tiempo falta para el vencimiento, pero no siempre tiene por qué ser así.
- Volatilidad.** Esta variable es una medida de incertidumbre sobre la fluctuación de los precios de las acciones. Un aumento de la volatilidad es beneficiosa para los inversores dado que aumenta la probabilidad de que el rendimiento de

la acción sea más elevado. Del mismo modo, ello también supone un mayor riesgo a que el rendimiento del subyacente sea escaso, nulo o negativo.

El propietario de una *call* se beneficia del aumento del precio, ya que, la diferencia  $S_T - K$  aumentará, y recuérdese que el *pay-off* de la opción de compra es  $\max(S_T - K; 0)$ , por lo que el beneficio (bruto) aumentará. En el escenario de una disminución fuerte del precio del subyacente, el tenedor no ejercerá su derecho y por lo tanto se encuentra protegido ante una posible tendencia decreciente del activo subyacente.

El propietario de una *put* se protege de las fuertes subidas no ejerciendo el derecho de venta, recuérdese que el *pay-off* de este tipo de contratos es  $\max(K - S_T; 0)$ , en cambio, se beneficia de las potenciales bajadas en el precio del subyacente porque la diferencia  $K - S_T$  aumenta.

- **Tasa libre de riesgo.** Antes de describir el efecto sobre los contratos, cabe destacar el papel de la tasa de interés libre de riesgo en el modelo binomial. Los modelos que posteriormente se describirán se basan en proyecciones futuras en una fecha determinada que se valoran en el momento actual. Para realizar dicha valoración es necesario descontar los flujos que resulten del contrato, la tasa de descuento empleada para su actualización es la tasa de interés libre de riesgo. La elección de esta tasa se justifica por la asunción que recae sobre los modelos binomiales en relación al principio de neutralidad al riesgo, que más adelante se detallará. Por tanto, un aumento de la tasa de interés libre de riesgo supone que el inversor espere un aumento de la rentabilidad en sus acciones y por otra parte, una disminución de flujos de efectivo futuros. Estos dos efectos causan un incremento en el valor de las opciones de compra y una disminución en los contratos de opciones de venta.
- **Distribución de dividendos.** El reparto que dividendos supone que el valor del subyacente se contraiga por lo que atendiendo a las expresiones vistas para el *pay-off* de una *call* y una *put*, en una *call* la reducción del precio del subyacente supone una disminución del *pay-off*. Efecto contrario se observa en la *put*, donde su *pay-off* aumenta.

Con el fin de ver estos efectos de forma práctica, en el Apartado 6.1.2 se realiza un breve análisis de sensibilidad sobre la prima de una *call* cuyo activo de referencia es la acción del Grupo Alstom.





### 3.1 Magnitudes económico-financieras más relevantes del Grupo Alstom

La teoría de Eugene Fama sobre los mercados eficientes parte de la idea de que los precios de las acciones reflejan toda la información disponible (Aragonés, y otros, 1994), parte de esta información es la de tipo económico-financiera, la cual es pública y suele actualizarse trimestralmente en las sociedades con títulos admitidos a negociación. Es por ello, que resulta interesante conocer las principales características de la estructura económico-financiera y operativa del Grupo Alstom, aspectos tales como el endeudamiento, rentabilidad financiera, niveles de márgenes operativos, etc. Con el fin de conocer la posición del grupo en los aspectos mencionados la comparación con empresas comparables resulta vital para extraer conclusiones.

El análisis económico-financiero, o análisis de estados financieros, consiste en el diagnóstico de la situación y perspectiva de la empresa con el fin de poder tomar decisiones adecuadas. Internamente este tipo de análisis permite a las empresas tomar medidas de corrección de puntos débiles y seguir potenciando aquellos puntos fuertes. Desde la perspectiva externa, éstas técnicas son de gran utilidad para todas aquellas personas interesadas por la sociedad, entre ellos los inversores, con el fin de conocer la situación y evolución previsible de la empresa. Si bien, existen limitaciones a tener en cuenta a lo hora de realizar un análisis de estados financieros (Amat, 2008):

- Se basan en datos históricos, por lo que puede resultar, en determinadas ocasiones, difícil de identificar la posible evolución de la sociedad.
- Los datos suelen referirse a la fecha de cierre de ejercicio. Por lo que pueden surgir escenarios muy distintos en aquellas empresas con estacionalidad.
- Manipulación de los datos contables.
- Puede resultar difícil obtener datos sectoriales representativos que permitan un robusto análisis comparativo.

El presente análisis económico-financiero abarca los últimos cuatro ejercicios económicos cerrados de la corporación, esto es, desde 2011 a 2014, los datos se han obtenido de los estados financieros consolidados que están publicados en la página web corporativa. Como empresas comparables, se han seleccionado tres corporaciones que operan a nivel internacional, estas son: Siemens AG, Bombardier INC y CAF (Construcciones y Auxiliar de Ferrocarriles, S.A.). Cabe tener en cuenta, que resulta complejo seleccionar empresas que se dediquen a las tres líneas de negocio del Grupo Alstom (producción y suministro energético y fabricación de trenes). A continuación, se describe de forma breve las principales características de las empresas calificadas como comparables:

- Siemens AG: grupo empresarial cotizado de origen alemán, que actualmente cuenta con líneas de negocio que abarcan ámbitos de distinta índole, desde electrodomésticos o material de equipo médico, hasta la producción de energía y fabricación de trenes. En el ejercicio 2014 cuenta con unos activos totales de 104.879 millones de euros y una cifra de ventas de 71.920 millones de euros. Como se va a comprobar, el tamaño de Siemens es significativamente mayor que el del Grupo Alstom (Siemens AG, 2015).
- Bombardier INC: grupo cotizado de origen canadiense dedicado a la construcción de medios de transporte, en concreto aviones y trenes. Operan a

nivel internacional, cerrando el ejercicio 2014 con un total de activos de 1.246 millones de dólares y una cifra de ventas de 20.111 millones de dólares (Bombardier INC, 2015).

- CAF: empresa cotizada de origen español fundada en 1917 dedicada a la fabricación de trenes. La corporación se consolida internacionalmente entre los ejercicios 1996 al 2000. En términos de tamaño empresarial, CAF es aquella cuyo tamaño es más reducido, cuenta con un activo en el ejercicio 2014 de 2.963 millones de euros, y una cifra de ventas de 1.447 millones de euros (CAF, 2015).

Una vez presentadas, las empresas comparables seleccionadas se procede a realizar un análisis de las principales magnitudes económico-financieras de la corporación. Destacar que no se pretende la consecución de un análisis de estados financieros en profundidad de la compañía dado que se escapa del objeto de la presente memoria, este apartado pretende que el lector tome una primera percepción de la situación de la misma.

### 3.1.1 Estructura económico-financiera. Análisis del balance

En la Tabla 3.1.1 se muestra el activo<sup>2</sup> consolidado del Grupo Alstom durante los ejercicios 2011 a 2014. La trayectoria de la compañía ha seguido una tendencia creciente pasando de 31.047 millones de euros en 2011 a 33.233 millones de euros en 2014, si bien se observa un cambio significativo en la estructura económica de la sociedad, los datos arrojan una estrategia de reducción de estructura de inmovilizado fijo y en menor medida corriente, ello se corrobora por el aumento de la partida correspondiente a los activos mantenidos para la venta que en el cierre de 2014 alcanzan los 21.415 millones de euros.

---

<sup>2</sup> El activo de una compañía muestra todos aquellos bienes y derechos que posee la misma, los cuales pueden ofrecer en un futuro un posible rendimiento o beneficio, siempre y cuando, sea susceptible de valoración económica.

**Tabla 3.1.1** Balance consolidado del Grupo Alstom (2011-2014).

Millones de €	2011	2012	2013	2014
Inmovilizado intangible	7.404	7.518	7.322	1.132
Inmovilizado material	2.852	3.024	2.968	656
Inversiones a l/p en empresas del grupo o asociadas	531	698	705	363
Otros activos no corrientes	545	515	510	473
Activo por impuesto diferido	1.472	1.711	1.647	732
<b>Activo no corriente</b>	<b>12.804</b>	<b>13.466</b>	<b>13.152</b>	<b>3.356</b>
Existencias	3.138	3.144	2.972	821
Proyectos en curso	3.752	4.158	3.951	2.554
Deudores	5.692	5.285	4.450	1.470
Otros activos corrientes	3.557	3.328	3.133	1.957
Inversiones financieras a c/p	13	36	26	61
Tesorería	2.091	2.195	2.276	1.599
<b>Activo corriente</b>	<b>18.243</b>	<b>18.146</b>	<b>16.808</b>	<b>8.462</b>
Activos mantenidos para la venta	0	0	293	21.415
<b>Total activo</b>	<b>31.047</b>	<b>31.612</b>	<b>30.253</b>	<b>33.233</b>

Fuente: Elaboración propia a partir de (Alstom, 2015).

Por el lado, del patrimonio neto y pasivo<sup>3</sup> (véase Tabla 3.1.2), se observa una reducción del patrimonio neto de la compañía en 2014, tras una senda de crecimiento en los ejercicios 2012 y 2013, pasado de 5.109 millones de euros en 2013 a 4.224 millones de euros en 2014, como consecuencia de la obtención de pérdidas en dicho periodo. Del mismo modo que en el activo, se observa una reclasificación de pasivos como consecuencia de la intención de la compañía de deshacerse de un porcentaje significativo de bienes, si bien la cuantía es más reducida (pasivos mantenidos para la venta: 15.173 millones de euros y 21.415 millones de euros, por parte de los activos mantenidos para la venta), lo que revela que parte de esos activos no llevan asociada una obligación con terceros.

<sup>3</sup> El patrimonio neto y pasivo masa patrimonial refleja las fuentes de financiación de la empresa. El patrimonio neto incluye aquella fuente de financiación interna que proviene tanto de las aportaciones del accionariado como de los rendimientos generados internamente no distribuidos. El pasivo incluye todas aquellas obligaciones futuras (a largo o a corto plazo) que la sociedad ha contraído con terceros.

**Tabla 3.1.2** Patrimonio neto y pasivo consolidado del Grupo Alstom (2011-2014).

Millones de €	2011	2012	2013	2014
<b>Patrimonio neto</b>	<b>4.434</b>	<b>5.104</b>	<b>5.109</b>	<b>4.224</b>
Provisiones a largo plazo	2.221	2.322	2.235	744
Deudas con entidades de crédito a largo plazo	3.863	4.197	4.009	2.847
Deudas derivadas de arrendamientos financieros	477	433	398	341
Pasivos por impuesto diferido	176	284	176	11
<b>Pasivo no corriente</b>	<b>6.737</b>	<b>7.236</b>	<b>6.818</b>	<b>3.943</b>
Provisiones a corto plazo	1.414	1.309	1.191	1.031
Deudas con entidades de crédito a corto plazo	634	283	1.250	1.947
Deudas derivadas de arrendamientos financieros	48	42	47	51
Pasivos a corto plazo derivados de proyectos	9.508	9.909	8.426	3.455
Acreeedores comerciales	4.080	4.041	3.819	917
Otros pasivos corrientes	4.192	3.688	3.593	2.492
<b>Pasivo corriente</b>	<b>19.876</b>	<b>19.272</b>	<b>18.326</b>	<b>9.893</b>
Pasivos mantenidos para la venta	0	0	0	15.173
<b>Total patrimonio y pasivo</b>	<b>31.047</b>	<b>31.612</b>	<b>30.253</b>	<b>33.233</b>

Fuente: Elaboración propia a partir de (Alstom, 2015)

El análisis comparativo se va realizar mediante los balances analíticos del Grupo Alstom, así como de las tres sociedades calificadas como comparables (Siemens AG, Bombardier INC y CAF). En balance analítico muestra las partidas más relevantes de una compañía, en términos relativos, es decir, cada partida sobre el total de la masa patrimonial. Ello permite la comparación de sociedades, dejando a un lado las diferencias de tamaño entre las mismas o la moneda utilizada por cada corporación. En la Tabla 3.1.3 se muestra el balance analítico de las cuatro sociedades durante el periodo 2011 a 2014.

**Tabla 3.1.3** Balance analítico. Comparativa sectorial periodo 2011-2014.

(%)	Alstom				Siemens AG				Bombardier INC				CAF			
	2011	2012	2013	2014	2011	2012	2013	2014	2011	2012	2013	2014	2011	2012	2013	2014
Activo no corriente	41,24	42,60	43,47	10,10	50,40	50,01	45,03	46,12	44,42	48,52	51,01	52,49	36,19	45,65	41,18	38,98
Existencias	22,19	23,10	22,88	10,16	14,53	15,04	14,93	14,49	31,00	29,97	28,04	28,86	15,35	9,40	5,69	6,09
Realizable	29,83	27,36	26,12	74,93	34,61	38,32	37,26	39,11	8,10	7,63	7,25	7,49	44,84	42,08	48,60	48,27
Tesorería	6,73	6,94	7,52	4,81	0,46	0,50	0,58	0,89	14,13	11,23	11,57	9,01	3,62	2,87	4,53	6,65
<b>Total</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>	<b>100,00</b>								
Patrimonio neto	14,28	16,15	16,89	12,71	30,85	30,03	27,46	30,23	2,81	5,34	8,34	0,20	28,03	26,51	25,98	25,27
Pasivo no corriente	21,70	22,89	22,54	11,86	27,37	32,95	34,00	35,27	47,09	46,68	44,71	51,15	17,84	24,78	26,91	33,20
Pasivo corriente	64,02	60,96	60,58	75,43	41,79	40,90	36,33	35,11	50,10	47,98	46,95	48,65	54,14	48,70	47,11	41,52

Fuente: Elaboración propia a partir de: (Alstom, 2015), (Siemens AG, 2015), (Bombardier INC, 2015) y (CAF, 2015).

En términos generales, y exceptuando 2014, las empresas mantiene una estructura económica similar, el activo no corriente de las mismas se sitúa en torno al 50% y el realizable<sup>4</sup> supone la segunda masa dentro del activo de las compañías, exceptuando en el caso de Bombardier. Por el lado del patrimonio neto y pasivo, las diferencias son más significativas, se observa una descapitalización de Alstom en comparación con Siemens o CAF, estas mantienen una estructura de patrimonio neto más fuerte, lo que supone para los acreedores mayores garantías, asimismo, Alstom se encuentra más endeudada que el resto de sociedades, exceptuando Bombardier. En cuanto a la política de financiación, se observa como en términos generales las sociedades se decantan hacia la financiación a corto plazo, exceptuando Siemens cuya estructura de pasivo es similar.

### 3.1.2 Situación operativa. Análisis de la cuenta de resultados

Los resultados operativos los muestra la cuenta de resultados de las compañías, este estado contable tiene como ventaja que incluye todos los saldos de un ejercicio económico de esta índole, a diferencia del balance que muestra el estado de las partidas contables de activos, pasivos y patrimonio neto a la fecha de cierre del ejercicio. En la Tabla 3.1.4 se muestra la cuenta de resultados consolidada.

**Tabla 3.1.4.** Cuenta de resultados consolidada del Grupo Alstom (2011-2014).

Millones de €	2011	2012	2013	2014
Ventas	19.934	20.269	5.726	6.163
Coste de ventas	-16.144	-16.324	-4.804	-5.237
Gastos de investigación y desarrollo	-682	-737	-122	-112
Gastos de comercialización	-900	-952	-204	-199
Gastos administrativos	-802	-793	-328	-297
<b>Margen de operaciones</b>	<b>1.406</b>	<b>1.463</b>	<b>268</b>	<b>318</b>
Otros ingresos	3	6	0	4
Otros gastos	-337	-282	-106	-943
<b>Resultado de explotación</b>	<b>1.072</b>	<b>1.187</b>	<b>162</b>	<b>-621</b>
Ingresos financieros	55	36	64	109
Gastos financieros	-232	-259	-223	-246
<b>Resultado antes de impuestos</b>	<b>895</b>	<b>964</b>	<b>3</b>	<b>-758</b>
Impuestos	-151	-146	164	-56
Resultado operaciones continuadas	744	818	167	-814
Resultado operaciones interrumpidas	0	0	399	113
<b>Resultado del ejercicio</b>	<b>744</b>	<b>818</b>	<b>566</b>	<b>-701</b>

Fuente: Elaboración propia a partir de (Alstom, 2015).

Las ventas de la compañía se han reducido de forma significativa durante los ejercicios 2013 y 2014, pasando de 20.269 millones de euros en 2012 a 6.163 millones de euros en 2014, aspecto que puede resultar el desencadenante de la política de

<sup>4</sup> El realizable es aquella partida que incluye todos los activos corrientes que no se clasifiquen como existencias o medios líquidos.

reducción de activos seguida por la corporación con el fin de mejorar la liquidez de la misma. En términos absolutos, las partidas de gasto que componen el margen de operaciones se han reducido en dichos ejercicios, con el fin de adecuarse al nivel de ventas. No obstante, la sociedad no ha podido ajustar los gastos todo lo que requería ese nivel de cifra de negocios durante 2014, provocando que el resultado de explotación sea negativo y que este se vea agravado por el impacto de los gastos financieros, resultando unas pérdidas de 701 millones de euros.

Desde la perspectiva comparativa en la Tabla 3.1.5 se observa en términos porcentuales los márgenes operativos sobre las ventas de Alstom y las empresas comparables.

El margen bruto de una sociedad lo constituye la diferencia entre las ventas asociadas a la actividad ordinaria de una empresa y los gastos directamente relacionados con las mismas. En el caso de Alstom, se observa como este margen es más reducido que el que arrojan Siemens AG y CAF, lo que supone un punto débil para la misma, dado que los gastos de personal y el resto de gastos asociados a la explotación menguan el resultado de explotación, dejando a la sociedad en una posición menos ventajosa que estas. Desde el punto de vista del inversor, Alstom puede resultar menos atractiva por este aspecto, dado que unos beneficios reducidos o como ocurre en 2014 la obtención de pérdidas dificulta la distribución de dividendos.

Todo ello, arroja que desde 2013 Alstom atraviese una situación complicada derivada de la reducción significativa de su cifra de negocios lo que ha provocado que la sociedad aplique políticas de desapalacamiento, a través de la venta de activos que va a suponer liberarse de obligaciones contraídas con terceros. Si esta política llega a su fin, Alstom previsiblemente mejorará su nivel de liquidez y se capitalizará, como consecuencia de la reducción del pasivo.

**Tabla 3.1.5** Márgenes operativos de Alstom y empresas comparables (2011-2014).

(%)	Alstom				Siemens AG				Bombardier INC				CAF			
	2011	2012	2013	2014	2011	2012	2013	2014	2011	2012	2013	2014	2011	2012	2013	2014
Margen Bruto	19,01	19,46	16,10	15,03	30,34	30,30	27,48	28,32	15,82	14,90	13,73	12,81	48,03	52,58	54,25	49,86
Resultado de explotación	5,38	5,86	2,83	-10,08	11,56	9,25	7,92	9,98	6,55	4,14	4,75	-2,81	9,55	8,22	9,86	7,95
Resultado del ejercicio	3,73	4,04	9,88	-11,37	10,06	7,08	5,70	7,33	4,56	3,57	2,82	-6,20	7,51	5,81	5,93	4,29

Fuente: Elaboración propia a partir de: (Alstom, 2015), (Siemens AG, 2015), (Bombardier INC, 2015) y (CAF, 2015).

### 3.2 Acciones

Las acciones del Grupo Alstom empezaron a cotizar en la Bolsa de París el 22 de junio de 1998. Actualmente, se encuentra dentro del índice bursátil<sup>5</sup> (en adelante índice) CAC 40 (*Cotation Assistée en Continu*), el cual se compone de las 40 empresas más capitalizadas del mercado Euronext París, asimismo, también se encuentra dentro del índice SBF 120 (*Société des Bourses Françaises*) compuesto por los 120 títulos con más volumen del mercado financiero francés.

En el Gráfico 3.2.1 se muestra la evolución del precio de cierre ajustado<sup>6</sup> de la acción del Grupo Alstom durante el periodo en el que se ha realizado el análisis financiero del Apartado 3.1, es decir, desde enero de 2011 a diciembre de 2014, los datos mostrados son mensuales.

**Gráfico 3.2.1** Cotización de la acción del Grupo Alstom periodo 2011-2014.



Fuente: Elaboración propia a partir de *Yahoo Finanzas* ([es.finance.yahoo.com](http://es.finance.yahoo.com)).

Durante el ejercicio 2011 la acción de Alstom sufre una disminución significativa en el precio de sus acciones. En los primeros meses del ejercicio, el precio de la acción se situaba alrededor de los 45 €, al final del mismo, este disminuye hasta los 25 €, no volviendo a los niveles del primer trimestre de 2011 durante todo el periodo analizado. En los ejercicios 2012 y 2013 la acción ha fluctuado entre los 25 € y 30 €. A principio de 2014 se produce una nueva disminución significativa de las acciones de la compañía, situándose el precio de la acción por debajo de los 20 €, una de las consecuencias de esta caída puede deberse a la reducción de las ventas que se publicaría en el informe anual de la corporativo, el cual se ha comentado en el Apartado 3.1.2.

<sup>5</sup> Un índice bursátil es un parámetro que muestra la evolución en el tiempo de una serie de títulos que cotizan en Bolsa, la selección de los títulos que componen el índice puede radicar en la capitalización bursátil, volumen, etc. Pueden calcularse de forma ponderada o simple.

<sup>6</sup> El precio de cierre ajustado se refiere al precio de cierre de la acción un día concreto el cual se ajusta a los dividendos repartidos y *splits* (aumento del número de acciones en circulación por la división del valor nominal de las mismas).

## 4. Tres métodos *monoperiodo* para valorar opciones

Este apartado proporciona una introducción de tres métodos financieros que permiten calcular el valor de la prima de una opción europea tanto de compra (*call*) como de venta (*put*). Estos métodos se denominan:

- Teoría de Juegos.
- Duplicación de Carteras.
- Valor Esperado.

Con el fin de clarificar la exposición, las metodologías se van a describir tanto de forma teórica como mediante un ejemplo práctico que ilustre los conceptos teóricos. El contenido de este apartado está basado en el texto de Joseph Stampfli y Victor Goodman (Stampfli, y otros, 2002).

A largo de toda la presentación, se asumirán los siguientes datos de partida comunes:

- Precio del subyacente al inicio de la valoración ( $S_0$ ): 100 u.m.
- Precio de ejercicio de la opción ( $K$ ): 105 u.m.
- Tasa de interés libre de riesgo ( $r$ ): 0,04879.

### 4.1 Método de la Teoría de Juegos

Para describir este enfoque es necesaria la construcción de una cartera, entendiendo como cartera una combinación de dos o más activos financieros entre los que se reparte la inversión (Gujarro, 2014). Se construye una cartera denominada de riesgo puro<sup>7</sup> con dos títulos, compuesta por:

- $a$  acciones,
- $b$  opciones de compra sobre dicha acción.

Cada título tiene un precio en el momento inicial de la adquisición ( $t = 0$ ). El precio inicial de las acciones es conocido,  $S_0$ , mientras que el valor del contrato de la opción en ese momento, representado por  $V_0$ , es el valor a determinar. Téngase en cuenta que el modelo se basa en que no existen oportunidades de arbitraje<sup>8</sup>. Recuérdese que el precio de ejercicio o *strike* de la opción de compra es  $K = 105$  u.m.

#### Paso 1 Construcción de una cartera de riesgo puro

Tal y como se ha indicado, en primer lugar, se construye una cartera denominada de riesgo puro, formada por acciones y opciones financieras, véase la Tabla 4.1.1, donde se muestra la posición inicial de la cartera.

<sup>7</sup> Riesgo puro indica que ambos productos financieros tienen un rendimiento incierto.

<sup>8</sup> Oportunidad de arbitraje indica que el inversor podría obtener un rendimiento libre de riesgo derivado de la inversión simultánea en dos o más mercados.



$$\pi_u = 120a + 15b.$$

De forma analítica:

$$\pi_T = \pi_u = aS_u + bU. \quad (4.1.1)$$

- En el caso de que la acción se situará en 90 u.m., el valor de la opción en ese instante sería:

$$D = \text{máx}(90 - 105; 0) = 0.$$

Por tanto la cartera tomaría el valor:

$$\pi_d = 90a.$$

De forma analítica:

$$\pi_T = \pi_d = aS_d + bD. \quad (4.1.2)$$

## Paso 2 Cálculo del número de títulos a invertir

El siguiente paso se basa en eliminar la incertidumbre, el modelo lo consigue igualando los dos posibles valores de la cartera a vencimiento, es decir, imponiendo la condición:

$$\pi_u = \pi_d.$$

Con el ejemplo numérico:

$$120a + 15b = 90a \rightarrow 15b = -30a,$$

esta expresión otorga un grado de libertad y por tanto se podría utilizar cualquier combinación de números  $a$  y  $b$  que cumplieran dicha ecuación. Por ejemplo:

$$a = 1 \text{ y } b = -2,$$

lo que supone vender dos opciones y comprar una acción. Obsérvese que existen infinitas combinaciones posibles para los valores de los parámetros  $a$  y  $b$ .

El resultado de esta estrategia supone que la posición del inversor sea:

$$\pi_1 = 120(1) + 15(-2) = 90.$$

De forma analítica:

$$\pi_u = \pi_d,$$

es decir, teniendo en cuenta (4.1.1) y (4.1.2) se tiene:

$$aS_u + bU = aS_d + bD \rightarrow a(S_u - S_d) = b(D - U).$$

Si se fija el número de títulos de opciones, despejando de la anterior igualdad se deduce el valor correspondiente del número de acciones que debe componer la cartera para eliminar la incertidumbre. Por ejemplo,

$$b = -1 \rightarrow a = \frac{U - D}{S_u - S_d}.$$

El valor de  $a$  es conocido como parámetro delta y juega un papel fundamental en la cobertura de riesgos.

### Paso 3 Cálculo de la prima de la opción

Las posiciones tomadas por el inversor en los dos momentos ( $t = 0$  y  $T$ ) analizados en el ejemplo numérico anterior, es decir, cuando  $a = 1$  y  $b = -2$ , son, respectivamente:

$$\pi_0 = 100 - 2V_0 \text{ y } \pi_T = 90.$$

Tal y como se ha detallado en el Capítulo 2, para valorar proyecciones futuras en el momento actual es necesario descontar los flujos, en este caso 90 u.m., a la fecha actual,  $t = 0$ . Estos modelos se basan en el principio de valoración neutral del riesgo<sup>12</sup>. Si bien, en la realidad, estas asunciones se alejan de la misma, ya que el inversor exigirá un mayor rendimiento de su cartera si está asumiendo un mayor riesgo. En este caso, esta valoración está dada por:

$$100 - 2V_0 = 90e^{-0,04879} \rightarrow V_0 = 7,14.$$

El valor de 7,14 u.m. refleja el valor del contrato en el momento de su suscripción.

De forma analítica, donde se había tomado  $b = -1$ , se tiene:

$$\begin{aligned} \pi_0 &= \pi_T e^{-rT} \rightarrow aS_0 - V_0 = (aS_u - U)e^{-rT}, \\ V_0 &= aS_0 + (U - aS_u)e^{-rT}, \text{ siendo } a = \frac{U-D}{S_u-S_d}. \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

## 4.2 Método de Duplicación de Carteras

El Método de Duplicación de Carteras se basa en la construcción de una cartera compuesta por acciones y bonos. Esta cartera se denominada cartera híbrida<sup>13</sup>. En la Tabla 4.2.1 se describe la posición que se adopta con la cartera, la cual se forma por:

- $a$  acciones de precio unitario  $S_0$ .
- $b$  bonos de precio unitario, es decir, 1 u.m.

**Tabla 4.2.1** Cartera inicial formada mediante el Método Duplicación de Carteras.

Cartera $t = 0$	Número de títulos	Precio	Total
Acciones	$a$	$S_0$	$aS_0$
Bonos	$b$	1	$b$
Posición en $t = 0$			$\pi_0 = aS_0 + b$

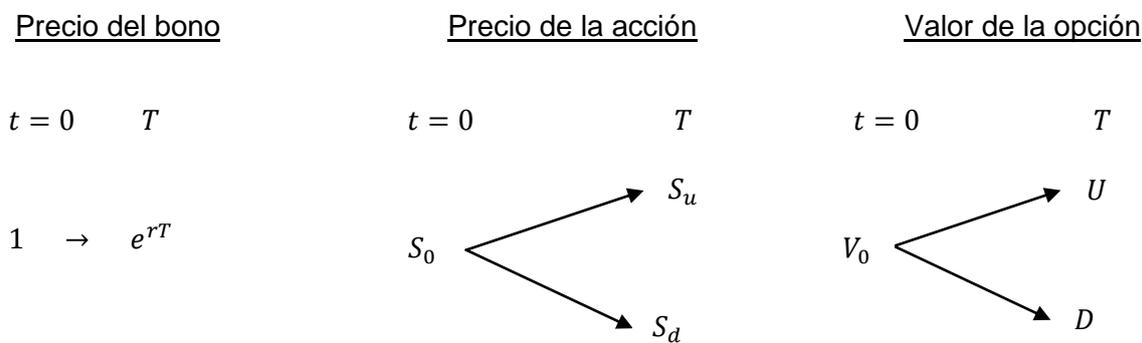
Fuente: Elaboración propia.

<sup>12</sup> La valoración neutral al riesgo significa que el máximo rendimiento esperado de cualquier título negociado es la tasa de interés libre de riesgo y que los flujos de efectivo futuros se valoran descontados a esta tasa.

<sup>13</sup> La denominación cartera híbrida indica que está compuesta por un activo sin riesgo, en este caso el bono, y un activo con riesgo, en este caso una acción.

En la Figura 4.2.1 se muestran los árboles para la cartera formada por el bono y la acción, así como el árbol de la opción *call*. Esta figura nos indica que al fijar el valor del bono en 1 u.m. su valor al vencimiento,  $T$ , es el resultante de la capitalización compuesta continuamente, es decir,  $e^{rT}$ . Se asume implícitamente, para simplificar la exposición, que el tipo de interés  $r$  está referido al período  $T$ . Por otra parte, como lo que se pretende con este método es determinar la prima  $V_0$  que debe pagarse al inicio del contrato de la opción *call*, se introduce el árbol correspondiente a este activo, donde se indica en la fecha de vencimiento,  $T$ , el *pay-off* que se obtendría en el caso de la acción tome el valor *up* ( $S_u$ ) y el valor *down* ( $S_d$ ), denotados respectivamente por  $U$  y  $D$ .

**Figura 4.2.1** Diagrama de árbol de las posiciones en el precio del bono, la acción y el contrato de opción de compra.



Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, en este escenario el valor de la cartera a vencimiento,  $T$ , puede tomar dos valores,  $\pi_u$  y  $\pi_d$ , dependiendo de si la acción toma el valor  $S_u$  o  $S_d$ , respectivamente. Con el fin de que no exista arbitraje, estos valores deben igualar al valor del *pay-off* de la opción. Por tanto, debe cumplirse:

$$\pi_T = \begin{cases} \pi_u = aS_u + be^{rT} = U, \\ \pi_d = aS_d + be^{rT} = D. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Ahora deben determinarse los valores  $a$  y  $b$  que determinan la cartera, resolviendo el sistema de ecuaciones lineales anterior. Es sencillo comprobar que dicha solución está dada por:

$$a^* = \frac{U - D}{S_u - S_d}, \quad b^* = \left( U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u \right) e^{-rT}. \quad (4.2.2)$$

Del mismo modo, en el instante inicial  $t = 0$ , se debe cumplir que el valor de la cartera y el de la prima de opción *call* coincidan, es decir,

$$V_0 = \pi_0 = a^* S_0 + b^*. \quad (4.2.3)$$

Sustituyendo los valores  $a^*$  y  $b^*$  obtenidos en (4.2.2) en la expresión (4.2.3) se obtiene el valor del contrato:

$$\begin{aligned}
 V_0 &= a^* S_0 + b^* = \frac{U - D}{S_u - S_d} S_0 + \left( U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u \right) e^{-rT} \\
 &= e^{-rT} U \left( \frac{e^{rT} S_0}{S_u - S_d} - \frac{S_d}{S_u - S_d} \right) + e^{-rT} D \left( \frac{S_u}{S_u - S_d} - \frac{e^{rT} S_0}{S_u - S_d} \right).
 \end{aligned}$$

Con el fin de simplificar es conveniente introducir la siguiente notación para el término del primer corchete de la última expresión (a partir del cual se deduce la expresión para el segundo corchete):

$$q = \frac{e^{rT} S_0 - S_d}{S_u - S_d}, \quad 1 - q = \frac{S_u - e^{rT} S_0}{S_u - S_d}. \quad (4.2.4)$$

Por tanto, la prima del contrato está dada por la expresión:

$$V_0 = e^{-rT} [qU + (1 - q)D], \quad \text{siendo } q = \frac{e^{rT} S_0 - S_d}{S_u - S_d}. \quad (4.2.5)$$

Obsérvese que el valor de  $V_0$  dado en (4.2.5) es equivalente al obtenido en el Método de la Teoría de Juegos explicitado en (4.1.3). Para comprobarlo basta desarrollar ambas expresiones y comprobar que coinciden.

Véase que

$$q = \frac{e^{rT} S_0 - S_d}{S_u - S_d} \in [0, 1].$$

Si se cumpliera que  $q < 0$ , entonces como  $S_u > S_d$ , se debería cumplir que  $e^{rT} S_0 < S_d$ . Esto supone una contradicción porque de ser así la inversión libre de riesgo ( $e^{rT} S_0$ ) proporcionaría una cantidad inferior que la peor que pudiera obtenerse con un activo con riesgo ( $S_d$ ). De ser así, nadie invertiría en activos sin riesgo, como por ejemplo, bonos, lo cual es una contradicción. Por tanto,  $q > 0$ .

Supóngase ahora que  $q > 1$ , en tal caso de nuevo a partir de la expresión de  $q$ , se debería cumplir que  $e^{rT} S_0 - S_d > S_u - S_d$ , es decir,  $e^{rT} S_0 > S_u$ . Esto supone que una inversión libre de riesgo siempre arrojará más beneficios ( $e^{rT} S_0$ ) que los mejores rendimientos obtenidos mediante una inversión con riesgo  $S_u$ . Esto conduce a una contradicción. Por tanto, necesariamente  $q < 1$ .

De todo el razonamiento anterior se deduce que  $0 < q < 1$ , pudiendo interpretarse como una probabilidad.

Los valores de  $q$  y  $1 - q$  dados en (4.2.4) se interpretan como la probabilidad asociada a los valores alcistas y bajistas que puede tomar la opción en el vencimiento, respectivamente. En la literatura especializada, la probabilidad  $q$  se denomina probabilidad neutral al riesgo porque se determina a partir de la condición (4.2.1) que hace que la inversión obtenida por la cartera híbrida y la obtenida por la opción coincidan, *neutralizando* el riesgo de la inversión.

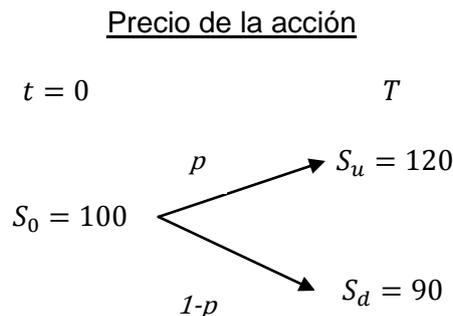
#### 4.3 Método del Valor Esperado

Este método se basa en la construcción de una cartera únicamente formada por acciones, aspecto que diferencia los dos métodos descritos en los apartados

anteriores, donde se combinaban acciones y opciones (Método de la Teoría de Juegos) y, acciones y bonos (Método de la Duplicación de Carteras). Esta técnica calibra los parámetros que componen la cartera a través del beneficio medio o esperado de la acción.

Con los datos de referencia explicitados al principio del Apartado 4, en la Figura 4.3.1 se muestra la evolución del precio de la acción en la fecha de vencimiento.

**Figura 4.3.1** Diagrama de árbol de las posiciones en el precio de la acción y el contrato de opción de compra con los datos de referencia.



Fuente: Elaboración propia.

Se establece un nuevo enfoque cuya particularidad es que el valor de la cartera en la fecha de vencimiento,  $T$ , cuyo valor se ha denotado como  $\pi_T$ , es una variable aleatoria que depende de las probabilidades asociadas al valor optimista del subyacente o posición *up*,  $S_u$ , y al valor pesimista o *down*,  $S_d$ , denotadas como  $p$  y  $1 - p$ , respectivamente.

Por tanto, en la fecha de vencimiento,  $T$ , surgen dos posibles valores para el precio de la acción, por tanto para el valor de la cartera:

$$\pi_T = \begin{cases} \pi_u & = 120, \\ \pi_d & = 90. \end{cases}$$

Como ya se ha indicado, el valor futuro de la acción está asociado a una probabilidad  $p$  que hace que el rendimiento medio coincida con una inversión sin riesgo, por tanto:

$$E[\pi_T] = 120p + 90(1 - p) = 30p + 90. \quad (4.3.1)$$

O en forma más general,

$$E[\pi_T] = pS_u + (1 - p)S_d = (S_u - S_d)p + S_d. \quad (4.3.2)$$

Por el principio de neutralidad del riesgo, la acción en el vencimiento tomará (en media) el siguiente valor

$$E[\pi_T] = 100e^{0,04879} = 105. \quad (4.3.3)$$

En la expresión (4.3.3) se muestra el valor resultante de capitalizar la inversión, como ya se ha indicado bajo la premisa de que el rendimiento esperado es igual a la tasa libre de riesgo.

La expresión general sería:

$$E[\pi_T] = S_0 e^{rT}. \quad (4.3.4)$$

A continuación, siguiendo con el ejemplo numérico, se obtiene el valor de  $p$  igualando las expresiones (4.3.1) y (4.3.3):

$$30p + 90 = 105 \rightarrow p = 0,5.$$

Mientras que en el contexto general, igualando (4.3.2) y (4.3.4), se tendría:

$$(S_u - S_d)p + S_d = S_0 e^{rT}, \quad p = \frac{S_0 e^{rT} - S_d}{S_u - S_d}. \quad (4.3.5)$$

Tal y como muestra la expresión general (4.3.5), el método se fundamenta en igualar el rendimiento esperado o medio de la acción, detallado en (4.3.2), con el valor cierto que debe tomar en la fecha de vencimiento, que es el resultante de capitalizar de forma continua la inversión y dado por (4.3.4). Ello permite obtener la probabilidad asociada al valor optimista o *up*,  $S_u$ , y valor pesimista o *down*,  $S_d$ . Nótese, por tanto, que no se están calculando probabilidades reales sino una probabilidad artificial que cumple la asunción básica del modelo, el principio de neutralidad al riesgo. Por otra parte, el valor de  $p$  de la expresión (4.3.5) coincide con el valor  $q$  calculado en el Método de Duplicación de Carteras, mostrado en la expresión (4.2.5). Se demuestra por tanto, que pese a las diferencias en la construcción de las carteras los resultados de dichas probabilidades coinciden.

Se determina la prima de la opción *call*, que es el objetivo de este apartado. Recuérdese que el precio de ejercicio propuesto al inicio del Capítulo 4, 105 u.m. y que el *pay-off* de una *call* es  $\max(S_T - K; 0)$ , por lo que el valor de la prima de la opción será el valor actualizado o descontado del *pay-off* de la opción *call*:

$$V_0 = E[\text{pay-off}] = \{0,5 \max(120 - 105; 0) + 0,5 \max(90 - 105; 0)\} e^{-0,04879} = 7,14 \text{ u.m.}$$

La expresión general sería:

$$V_0 = E[\text{pay-off}] = e^{-rT} (pU + (1 - p)D), \quad p = \frac{S_0 e^{rT} - S_d}{S_u - S_d}, \quad (4.3.6),$$

donde  $U = \max(S_u - K; 0)$  y  $D = \max(S_d - K; 0)$ . Obsérvese que este valor coincide con el obtenido mediante el Método de la Duplicación de Carteras (véase expresión (4.2.5)), ya que, los valores de las probabilidades  $p$  y  $q$  (véase (4.2.5) y (4.3.5)), coinciden, como se ha señalado anteriormente.

## 5. Introducción a los árboles binomiales *multi*periodo. El modelo CRR y árbol binomial implícito

El árbol binomial es una de las técnicas más utilizadas para la valoración de opciones. La esencia de la valoración se basa en modelizar el precio del activo subyacente hasta la fecha de expiración del contrato de opciones, dado que el valor de un derivado depende de la evolución del activo al que se encuentra referenciado. Por ello, como se indica en este capítulo, se puede construir un diagrama en forma de árbol que representa las diversas trayectorias que podría seguir el precio de la acción durante la vida del contrato de la opción (Hull, 2009). Se trata pues de un método de generación de escenarios posibles para la acción o subyacente y los correspondientes asociados al valor del contrato derivado u opción. La importancia de una correcta modelización del subyacente implica realizar una validación del mismo, lo cual, en esta memoria, se realizará en el Apartado 5.2.

Para construir el diagrama de árbol es necesario partir del precio del subyacente en el momento inicial,  $S_0$ , este es conocido por el inversor, a partir del mismo se inician las trayectorias que arrojan los valores  $S_u$  y  $S_d$  de la acción, las cuales se forman a partir de los coeficientes *up*,  $u$ , y *down*,  $d$ . Concretamente, como se ha visto en el Capítulo 2, para árboles de un período,  $S_d = dS_0$  y  $S_u = uS_0$ . Como ya se ha visto en la expresión (4.3.5), estas trayectorias van asociadas a una probabilidad,  $p$ , siendo ésta la que consigue que el rendimiento esperado de la acción coincida con el de una inversión sin riesgo. Se deduce por tanto, que esta probabilidad no es real sino aquella que cumple con el principio de neutralidad al riesgo.

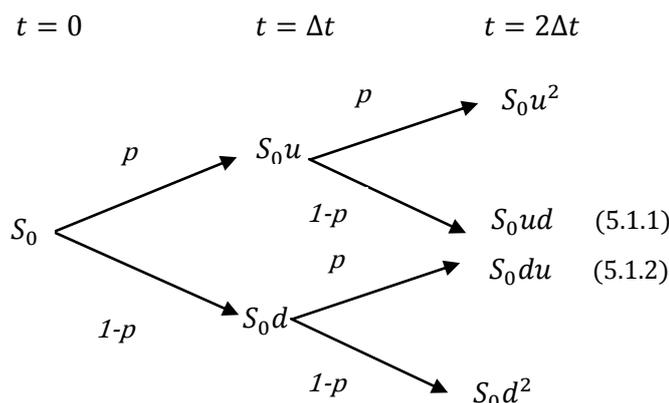
En el Capítulo 4 se han explicado tres métodos de valoración de opciones con un único paso temporal, el que se han deducido el valor de la probabilidad  $p$  (véase expresión (4.3.5)). No obstante, se han asumido valores arbitrarios para las trayectorias que puede seguir el precio del subyacente,  $S_u$  y  $S_d$ , asociados a los factores de revalorización y devaluación,  $u$  y  $d$ , respectivamente, que como ya se ha indicado se pueden asociar con el movimiento hacia arriba y hacia debajo de la acción, respectivamente. Nótese que no debe establecerse la premisa de que  $u > 1$  y  $d < 1$ , aunque ello pueda ser muy probable en la práctica; en cambio siempre se cumple que  $u > d$ . Uno de los objetivos de este capítulo es el cálculo de ambos parámetros que según el modelo utilizado puede variar en su forma de cálculo, pero todos ellos mantienen una filosofía similar, dichos coeficientes se obtienen a partir del histórico de rendimientos de un subyacente en concreto. En particular, más adelante, se detallará el modelo de Cox, Ross y Rubinstein para el cálculo de dichos parámetros.

### 5.1 Construcción de un árbol binomial de varios periodos

El árbol binomial es un diagrama que muestra los posibles valores que puede tomar el valor de una acción en distintos instantes de tiempo. La base de la metodología es discreta, es decir, la valoración se sustenta en variables aleatorias discretas.

Tal y como se ha indicado, el árbol binomial parte del precio actual del subyacente  $S_0$ , y con los parámetros  $u$  y  $d$  se forman las distintas trayectorias o caminos,  $S_u$  y  $S_d$ , que puede seguir la acción o el precio de cualquier otro subyacente. Cada una de estas trayectorias tiene asociada a una probabilidad denotada como  $p$  y  $1-p$ , respectivamente. En este apartado se asume que los valores  $p$ ,  $u$  y  $d$  son conocidos. En la Figura 5.1.1 se muestra un ejemplo de árbol binomial de varios periodos de tamaño unitario  $\Delta t$ .

**Figura 5.1.1** Árbol binomial del subyacente para dos periodos.



Fuente: Elaboración propia.

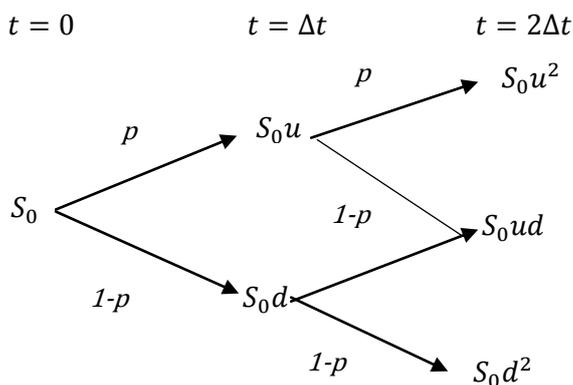
Como se observa en el primer periodo,  $t = \Delta t$ , hay dos posibles trayectorias  $S_0u$  y  $S_0d$ . En el segundo período,  $t = 2\Delta t$ , se abren dos trayectorias por cada nodo obtenido en  $t = \Delta t$ , el valor  $S_0u$  se multiplica por el coeficiente de movimiento hacia arriba, o  $up$ , y se obtiene  $S_0u^2$ . La segunda trayectoria, indicada en (5.1.1), se obtiene con el parámetro *down*, movimiento hacia abajo de la acción, resultando  $S_0ud$ .

Los nodos resultantes del escenario más pesimista correspondiente a  $S_0d$ , se forman con el mismo razonamiento, multiplicando el valor de la acción en  $t = \Delta t$  por los parámetros *up* y *down*, obteniéndose  $S_0du$  y  $S_0d^2$ . Nótese que los valores de las expresiones (5.1.1) y (5.1.2) coinciden, por la simetría del árbol binomial, el cual, si  $N$  denota el número total de períodos, crece a razón  $2^N$  nodos. Obsérvese que en el contexto actual, si  $T$  denota la fecha de vencimiento de la opción, se tiene:  $T = N\Delta t$ , o equivalentemente,  $\Delta t = \lfloor \frac{T}{N} \rfloor$ , donde  $\lfloor * \rfloor$  denota la función parte entera. Este hecho supone que, en el caso de utilizar un número amplio de pasos temporales, el árbol crecería de una forma muy rápida y acabaría siendo poco manejable, por lo que es aconsejable construir el árbol simplificado o reducido, tal y como se muestra en la Figura 5.1.2.

Pese a que el árbol se muestre de forma abreviada, no debe olvidarse la forma binomial del mismo, por lo que en el periodo  $t = N\Delta t$  tendrá  $2^N$  nodos. Este aspecto cobra importancia para el cálculo directo del valor de la prima de la opción de forma directa, en el cual debe tenerse en cuenta todos los caminos que se forman.

La interpretaci3n correcta del 6rbol no debe centrarse en el valor de cada uno de los nodos individuales, sino en el precio esperado de la acci3n en cada periodo  $t$ , siendo este el promedio de cada nodo, obtenido, al tratarse de una variable aleatoria discreta, como la suma de cada uno de los valores posibles creados segun el 6rbol binomial para un periodo  $t$  por su probabilidad asociada. Este valor promedio se detallar6 posteriormente en el Apartado 5.2.

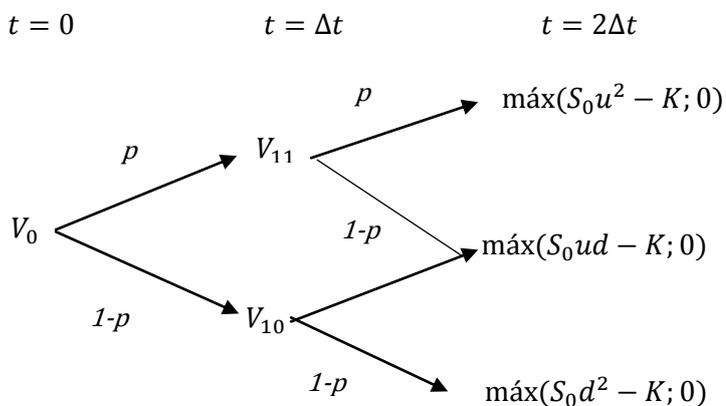
**Figura 5.1.2** 6rbol binomial reducido del subyacente para dos periodos.



Fuente: Elaboraci3n propia.

Una vez construido el 6rbol del subyacente, el siguiente paso es la valoraci3n de la opci3n, es decir, concretar el precio del contrato en el instante inicial  $t = 0$ . El proceso de c6lculo se realiza retrocediendo a lo largo del 6rbol, dado que en el momento de la suscripci3n solo se conoce el precio de ejercicio, precio asociado al momento de ejecutar el derecho de compra o venta, es decir, en el instante de vencimiento representado por  $T$ . Para una opci3n de compra de tipo europeo con un vencimiento en  $T = 2\Delta t$  el retroceso a lo largo del 6rbol (v6ase Figura 5.1.3) se realizar6 de la siguiente forma:

**Figura 5.1.3** 6rbol binomial de una opci3n de compra para dos periodos.



Fuente: Elaboraci3n propia.

$$V_{11} = e^{-r\Delta t}(\text{m6x}(S_0u^2 - K; 0)p + \text{m6x}(S_0ud - K; 0)(1 - p)), \quad (5.1.3)$$

$$V_{10} = e^{-r\Delta t}(\text{máx}(S_0ud - K; 0)p + \text{máx}(S_0d^2 - K; 0)(1 - p)), \quad (5.1.4)$$

$$V_0 = e^{-r\Delta t}(V_{11}p + V_{12}(1 - p)), \quad (5.1.5)$$

La valoración de la opción de compra en el vencimiento  $T = 2\Delta t$ , se obtiene a través del cálculo del valor intrínseco o *pay-off*, el cual muestra la actuación del inversor ante los distintos precios que puede tomar el subyacente en la fecha de vencimiento del contrato, que determinará el ejercicio o no de la opción de compra. Al tratarse de una *call* la expresión del *pay-off* se define como la diferencia entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio, es decir,  $\text{máx}(S_T - K; 0)$ .

Se obtendrán tantos valores intrínsecos como números de nodos finales existan, éstos mostrarán escenarios en los se ejercita la opción de compra,  $S_T > K$ , y por lo tanto, el nodo tomará valores superiores a cero y escenarios donde no se ejerza,  $S_T < K$ , en consecuencia, el nodo tendrá un valor nulo.

Al tratarse de distintos momentos de tiempo, se debe homogenizar el cálculo a partir del uso de reglas financieras de capitalización (cálculo del rendimiento esperado al final del árbol,  $T = N\Delta t$ ) o de actualización (en el momento inicial,  $t = 0$ ). El uso de estas leyes financieras conlleva seleccionar una tasa correcta de actualización o capitalización. En este método, se utiliza la tasa de interés libre de riesgo, lo que implica asumir que el rendimiento esperado de la acción equivale a dicho tipo de interés, en coherencia con la hipótesis fundamental de estas metodologías, el principio de neutralidad al riesgo.

Recuérdese que en un mundo neutral al riesgo los inversores son indiferentes al mismo por lo que no requieren ninguna compensación al riesgo asumido y el rendimiento esperado sobre todos los títulos negociados es la tasa de interés libre de riesgo (Hull, 2009).

El principio de neutralidad al riesgo es difícil que se cumpla en los mercados financieros reales, dado que el inversor siempre esperará un rendimiento adicional si la inversión conlleva un mayor riesgo. Este aspecto queda latente en diversos modelos de valoración de acciones como es el CAPM (*Capital Asset Pricing Model*) propuesto por Jack L. Treynor, William Sharpe, John Litner y Jan Mossin.

En la fórmula (5.1.3), se obtiene el valor  $V_{11}$ , es decir, el valor de la opción en el instante  $t = \Delta t$  en el nodo  $k = 1$ , para ello se realiza la actualización,  $e^{-r\Delta t}$ , del promedio de los valores obtenidos en las dos trayectorias del periodo  $t = 2\Delta t$ . Obsérvese que el promedio se calcula con el producto del valor final del árbol en cuestión por las probabilidades  $p$  y  $1 - p$  asociadas a cada rama de revalorización y de devaluación del subyacente.

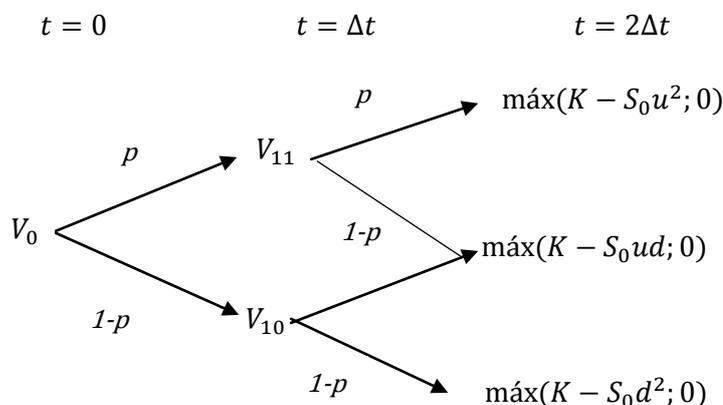
El valor  $V_{10}$  de la expresión (5.1.4), refleja el valor del precio de la opción de compra en el instante  $t = \Delta t$  en el nodo  $k = 0$ , calculado de la misma forma pero con los *pay-off* correspondientes al escenario más pesimista.

Por último, se calcula el valor del contrato en el momento de la suscripción, es decir, la prima de la opción,  $V_0$ , a partir de la expresión (5.1.5), calculada como el valor

promedio de los nodos anteriores  $V_{11}$  y  $V_{12}$ , actualizados a la tasa de interés libre de riesgo por el paso temporal,  $e^{-r\Delta t}$ .

En la Figura 5.1.4 se muestra el proceso de cálculo de la prima para un contrato de opciones de venta.

**Figura 5.1.4** Árbol binomial de una opción de venta para dos periodos.



Fuente: Elaboración propia.

$$V_{11} = e^{-r\Delta t}(\text{máx}(K - S_0u^2; 0)p + \text{máx}(K - S_0ud; 0)(1 - p)),$$

$$V_{10} = e^{-r\Delta t}(\text{máx}(K - S_0ud; 0)p + \text{máx}(K - S_0d^2; 0)(1 - p)),$$

$$V_0 = e^{-r\Delta t}(V_{11}p + V_{12}(1 - p)).$$

Como se puede observar la metodología de cálculo es idéntica para ambos tipos de opciones, la diferencia se centra en el *pay-off* de la opción. Para una opción de compra es  $\text{máx}(S_T - K; 0)$ , mientras que para una opción de venta está dado por  $\text{máx}(K - S_T; 0)$ . Tal y como se ha indicado, en el Capítulo 2 el inversor en opciones de venta espera que el precio del subyacente disminuya por tanto, solo ejercerá en el caso de que el precio de ejercicio (que recibe el tenedor la *put* si ejerce su derecho de venta) sea superior al que tome el subyacente, es decir  $K > S_T$ ; en el caso de que  $K < S_T$  el nodo tomará un valor nulo alno ejercerse el derecho de venta del subyacente. En la práctica los árboles binomiales que representan contratos de opciones, en el período de vencimiento (en los nodos situados más a la derecha del árbol) toman valores iguales a cero, donde se localizan los precios más reducidos del subyacente al vencimiento, en el caso de las opciones de compra, mientras que los nodos finales que suelen tomar un *pay-off* superior a cero son los correspondientes a las ramas superiores del árbol, dado que es donde se localizan los valores más altos del subyacente en la fecha de vencimiento. Lo contrario sucede con las opciones de venta o *put*.

## 5.2 Validación del modelo del subyacente

Tal y como se ha indicado en la introducción de este capítulo, la robustez de la valoración de un contrato de opciones reside en la correcta predicción del subyacente, ya que recuérdese la definición de derivado, este es aquel activo financiero cuyos

efectos son indeterminados en el futuro, y estos efectos dependen directamente del subyacente al cual está referenciado (véase Capítulo 2). Para realizar la validación del modelo del subyacente, se van a emplear las siguientes metodologías:

- Error Porcentual Absoluto Medio (*Mean Absolute Percentage Error*, MAPE).
- Error Cuadrático Medio (*Root Mean Squared Error*, RMSE).
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.
- Gráfico de observaciones (precio real del subyacente) y estimaciones.

Previamente a la descripción de estos enfoques, hay que tener en cuenta que el diagrama de árbol muestra las distintas trayectorias de precios que puede tomar el subyacente, siendo un error tratar dichas trayectorias de forma individual. La comprensión correcta del árbol del subyacente reside en calcular el promedio en cada uno de los instantes de tiempo en los que se realiza la estimación de precios, en función de las probabilidades de las ramas intermedias del árbol. Para ello, y antes de la aplicación de las cuatro metodologías propuestas para la validación, es necesario calcular el promedio del precio del subyacente de cada rama intermedia.

En primer lugar, se calculan de las probabilidades para cada período  $n$  del árbol binomial:

$$Q_{nj} = \frac{n!}{j!(n-j)!} p^j (1-p)^{n-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5.2.1)$$

Obsérvese que  $n = 0, 1, 2, \dots, N$ , siendo  $N$ , el período correspondiente al vencimiento y  $j$  el nodo intermedio dentro del período  $n$  en el que se calcula mediante (5.2.1) la probabilidad correspondiente al mismo.

Nótese que la notación empleada en (5.2.1) es distinta a la utilizada en los apartados siguientes dado que, en este caso, se están calculando probabilidades y valores promedios correspondientes a los nodos intermedios.

Una vez obtenidas las probabilidades intermedias  $Q_{nj}$  del diagrama de árbol para el subyacente, se procede al cálculo del promedio del precio del mismo a partir de la siguiente expresión:

$$\hat{S}_n = \sum_{j=0}^n S_{nj} \times Q_{nj}, \quad n = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (5.2.2)$$

donde  $\hat{S}_n$  representa el valor medio o esperado para el valor del subyacente en el período  $n$ -ésimo, es decir, correspondiente al tiempo:  $t = n\Delta t$ .

### Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE)

El MAPE es un tipo de medida de bondad de ajuste que se obtiene a partir del promedio de las diferencias absolutas entre el valor estimado,  $\hat{S}_n = \hat{S}_{t=n\Delta t}$ , obtenido mediante (5.2.2), y el valor observado o precio real del subyacente  $S_n = S_{t=n\Delta t}$ , dividido por precio real del subyacente  $S_n$ , para todos los períodos del árbol, quedando expresado el error como un porcentaje. Es decir, de forma analítica el MAPE quedaría expresado:

$$\text{MAPE} = \frac{100}{N} \sum_{n=0}^N \frac{|S_n - \hat{S}_n|}{S_n}.$$

El error obtenido se considerará tolerable cuando el valor del MAPE sea inferior al 5%, siendo este nivel de aproximación una referencia en el estándar estadístico.

### Error Cuadrático Medio (RMSE)

Del mismo modo que el MAPE, el RMSE es otro tipo de medida de bondad de ajuste que se basa en medir la distancia cuadrática por término medio entre los valores observados y los estimados para todos los períodos del árbol binomial. Para el RMSE no existe un nivel estándar de niveles de errores tolerables, no obstante, cuanto menor resulte su valor, el modelo presentará un menor error. La expresión del RMSE es la que sigue:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{\sum_{n=0}^N (S_n - \hat{S}_n)^2}{N}}.$$

### Intervalos de Confianza del 95%

La construcción de Intervalos de Confianza precisan de dos aspectos fundamentales, en primer lugar, la amplitud del intervalo, que determina la precisión de la estimación y deberá ser la menor posible, y en segundo lugar, la probabilidad de que el intervalo contenga el valor del parámetro a estimar, esto es el nivel de confianza por lo que este debe ser el mayor posible. Por lo tanto, la determinación del Intervalo de Confianza exige una decisión de compromiso entre conseguir el menor diámetro del intervalo y la mayor probabilidad asociada. Se ha considerado como más adecuado utilizar un nivel de confianza del 95%.

Existe un gran número de Intervalos de Confianza en función del modelo a validar. Basados en las propiedades de aproximación de una distribución binomial a una distribución normal o gaussiana cuando el número de pruebas binomiales es mayor que 25 o 30, la literatura de valoración de opciones considera adecuado el siguiente intervalo de confianza para el subyacente:

$$\left[ \hat{S}_t - 1,96\sqrt{np(1-p)}, \hat{S}_t + 1,96\sqrt{np(1-p)} \right]. \quad (5.2.3)$$

### Gráfico de observaciones y estimaciones

Una vez obtenidos los valores promedios del subyacente a partir de la expresión (5.2.2) y el Intervalo de Confianza del 95% a partir de la expresión dada en (5.2.3), éste se representa gráficamente, incorporando los precios observados del subyacente. Ello permite comprobar el grado de exactitud de las estimaciones de una forma visual,

lo cual junto con los errores MAPE y RMSE, permite corroborar la bondad del ajuste del modelo. Por el lado, del Intervalo de Confianza plasmado en el gráfico permite comprobar si el precio observado ha quedado dentro del mismo durante todo el periodo en el que se realiza la proyección.

### 5.3 Modelo de CRR de Cox, Ross y Rubinstein

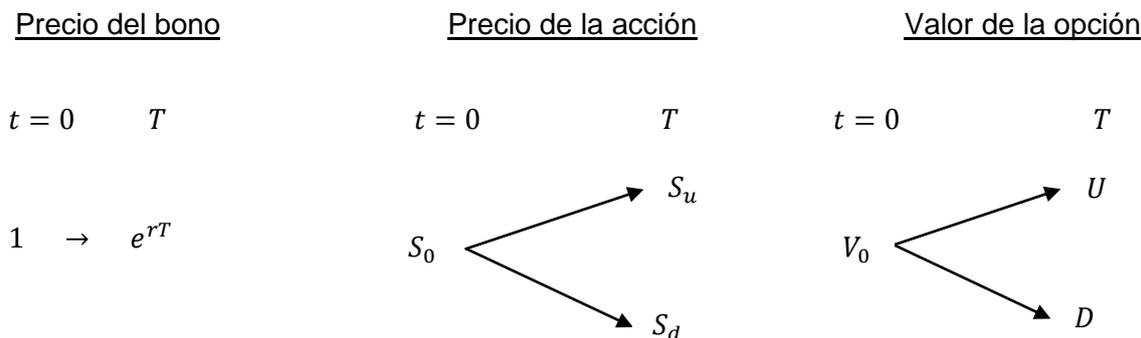
John C. Cox, Stephen A. Ross y Mark Rubinstein (en adelante CRR) publicaron en 1979 un modelo discreto de valoración de opciones financieras basado en la ausencia de oportunidades de arbitraje. El método propuesto tiene como principal ventaja que los conocimientos matemáticos necesarios para su desarrollo son más sencillos que los requeridos en el modelo propuesto por Fischer Black y Myron Scholes en 1973. Este modelo es conocido como *Black-Scholes* basado en un proceso estocástico de movimiento browniano geométrico<sup>14</sup>, ello conlleva incorporar en el modelo aleatoriedad, y por tanto, considera la incertidumbre existente en la evolución del precio de una acción, el cual se ve influenciado por múltiples factores (Cox, y otros, 1979). Pese al uso de un método discreto, que puede resultar un tanto menos preciso que el modelo continuo, en el Apartado 5.3.1 se va a plantear la convergencia entre ambos, con el fin de comprobar que el modelo propuesto por CRR puede captar la evolución del subyacente de forma similar al modelo continuo para describir la dinámica temporal del subyacente sobre un contrato de opciones financieras bajo ciertas situaciones.

El modelo CRR se fundamenta en el Método de Duplicación de Carteras descrita en el Apartado 4.2. Ese enfoque se basa en la construcción de una cartera híbrida compuesta por acciones y bonos, donde se eliminan las oportunidades de arbitraje igualando las posiciones en la fecha de vencimiento  $T = n\Delta t$  del contrato. Se resume, a continuación la citada metodología. En la Figura 5.3.1 se muestran las posiciones iniciales,  $t = 0$ , y en la fecha de vencimiento,  $T = \Delta t$ , es decir, con un período  $n = 1$ , para facilitar la representación de los árboles. La inversión consta de:

- Un número determinado de bonos,  $b$ , cuyo precio inicial es 1 u.m.
- $a$  acciones, cuyo precio inicial es  $S_0$ .

<sup>14</sup> Movimiento browniano geométrico proceso estocástico que describe la evolución temporal de una variable aleatoria, este movimiento resulta adecuado para describir el comportamiento de variables financieras.

**Figura 5.3.1** Diagrama de árbol de las posiciones en el precio del bono, la acción y el contrato de opción de compra.



Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, en este escenario el valor de la cartera a vencimiento,  $T$ , puede tomar dos valores denotados por  $\pi_u$  y  $\pi_d$ , dependiendo de si la acción toma el valor  $S_u$  ó  $S_d$ , respectivamente. Con el fin de que no existan oportunidades de arbitraje, estos valores deben igualar al valor del *pay-off* de la opción. Por tanto, debe cumplirse:

$$\pi_T = \begin{cases} \pi_u = aS_u + be^{rT} = U, \\ \pi_d = aS_d + be^{rT} = D. \end{cases} \quad (5.3.1)$$

Recuérdese el *pay-off* de un contrato de opciones:

- Para una *call*:

$$U = \text{máx}(S_u - K; 0),$$

$$D = \text{máx}(S_d - K; 0).$$

- Para una *put*:

$$U = \text{máx}(K - S_u; 0),$$

$$D = \text{máx}(K - S_d; 0).$$

En la expresión (5.3.1) se ha planteado un sistema de ecuaciones, en el que las incógnitas a determinar son el número de títulos a invertir en acciones,  $a$ , y en bonos,  $b$ . Es sencillo comprobar que dicha solución está dada por:

$$a = \frac{U - D}{S_u - S_d}, \quad b = \left( U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u \right) e^{-rT}. \quad (5.3.2)$$

En la publicación original del modelo CRR presentada en el *Journal of Financial Economics*, los autores no utilizan la capitalización o actualización compuesta continuamente en la construcción de la cartera, por lo que se han modificado, en este aspecto, las fórmulas propuestas.

Del mismo modo, en el instante inicial,  $t = 0$ , debe cumplirse que el valor de la cartera y el de la prima de la opción (en este caso, de tipo *call*), coincidan, es decir,

$$aS_0 + b = \pi_0 = V_0. \quad (5.3.3)$$

Sustituyendo los valores  $a$  y  $b$  obtenidos en (5.3.2) en la expresión (5.3.3) se obtiene el valor del contrato:

$$\begin{aligned} V_0 &= aS_0 + b = \frac{U - D}{S_u - S_d} S_0 + \left( U - \frac{U - D}{S_u - S_d} S_u \right) e^{-rT} \\ &= e^{-rT} U \left( \frac{e^{-rT} S_0}{S_u - S_d} - \frac{S_d}{S_u - S_d} \right) + e^{-rT} D \left( \frac{S_u}{S_u - S_d} - \frac{e^{-rT} S_d}{S_u - S_d} \right). \end{aligned} \quad (5.3.4)$$

Del mismo modo, que se hizo en el Método de Duplicación de Carteras, introduciendo la notación:

$$q = \frac{e^{rT} S_0 - S_d}{S_u - S_d}, \quad 1 - q = \frac{S_u - e^{rT} S_0}{S_u - S_d},$$

la prima del contrato se simplifica a la siguiente expresión:

$$V_0 = e^{-rT} (qU + (1 - q)D), \quad \text{siendo } q = \frac{e^{rT} S_0 - S_d}{S_u - S_d}. \quad (5.3.5)$$

Con la expresión (5.3.5) se ha concluido el Apartado 4.2 sobre la Metodología de Duplicación de Carteras, en la que se obtiene el valor de la prima del contrato de opciones. El modelo CRR profundiza más en la valoración de opciones y, en él se proponen expresiones para calibrar los factores de revalorización,  $u$ , que determina el movimiento hacia arriba o *up*, y de devaluación  $d$ , correspondiente al movimiento hacia abajo o *down*.

Tal y como se ha indicado, al principio del Capítulo 5, para el caso de la opciones de tipo europeo que son las que son objeto de modelización en esta memoria, existe un método directo de valoración que elimina la elaboración del diagrama de árbol de la opción mediante el retroceso a lo largo del árbol del subyacente. El método se basa en la idea detallada en el Método del Valor Esperado estudiado en el Apartado 4.3, y cuya idea central es que la prima de la opción es el valor actualizado de su *pay-off*, por tanto, para el caso  $T = N\Delta t$ , es decir,  $N = \lfloor \frac{T}{\Delta t} \rfloor$  periodos se tienen las siguientes fórmulas:

- Para una opción *call*:

$$C = e^{-rT} \left[ \sum_{j=0}^N \left( \frac{N!}{j!(N-j)!} \right) p^j (1-p)^{N-j} \max(u^j d^{N-j} S_0 - K; 0) \right], \quad T = N\Delta t,$$

- Para una opción *put*:

$$P = e^{-rT} \left[ \sum_{j=0}^N \left( \frac{N!}{j!(N-j)!} \right) p^j (1-p)^{N-j} \max(K - u^j d^{N-j} S_0; 0) \right], \quad T = N\Delta t,$$

donde, para el caso de la *call* se ha utilizado que su *pay-off* está dado por  $\max(S_T - K; 0)$ , después de  $j$  movimientos bajistas o *down* (y por tanto  $N-j$  movimientos alcistas o *up*, se cumplirá que  $S_T = u^j d^{N-j} S_0$ , y en consecuencia, el *pay-off* será:

$$\max(u^j d^{N-j} S_0 - K; 0).$$

Del mismo modo para una opción *put* se ha utilizado que su *pay-off* será:

$$\text{máx}(K - u^j d^{N-j} S_0; 0).$$

El modelo CRR propone las siguientes expresiones para los parámetros  $u$  y  $d$ :

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad (5.3.6)$$

siendo  $T = N\Delta t$  la fecha del vencimiento y  $N$  el número de períodos del árbol de longitud  $\Delta t$ . Obsérvese que queda garantizado que  $d < u$ .

Como se puede observar, se ha incorporado el parámetro  $\sigma$ , que hasta el momento no ha sido indicado en ningún enfoque para la valoración *uniperiodo* y que representa la volatilidad en el precio del subyacente. En el caso de la aplicación de esta memoria,  $\sigma$  es la volatilidad que presenta el precio de la acción del Grupo Alstom. En el Capítulo 6  $\sigma$  será estimada a partir de los rendimientos históricos de la acción de la compañía.

Por otra parte, hay que tener en cuenta las unidades de tiempo y el tipo de interés, dado que este último puede estar expresado en un intervalo de tiempo distinto al paso temporal del modelo. En ese caso, será necesario calcular el tipo de interés equivalente al periodo de referencia.

### 5.3.1 Convergencia entre el modelo discreto y continuo

El modelo binomial propuesto es por su naturaleza de tipo discreto, es decir, existen “huecos” entre los distintos pasos temporales, se asume que la cotización de los títulos se paraliza durante un tiempo determinado y mantiene su valor de apertura y cierre, aspecto diferenciador respecto de un modelo log-normal, el cual es un modelo de naturaleza continua. Piense en la bolsa española, esta cierra a las 17:30 horas y funciona durante los días hábiles, si bien, los títulos pueden cerrar a un precio y abrir a otro distinto, porque los valores de la cotizaciones pueden verse afectados por los acontecimientos que eventualmente puedan sufrir (al alza o a la baja) las empresas durante el período en que la bolsa no está operativa, otorgando con ello una naturaleza dual discreta-continua a los posibles modelos matemáticos que traten de describir la dinámica de los subyacentes cotizados.

Este apartado pretende comprobar que ambas metodologías convergen cuando el paso temporal entre los nodos del árbol es pequeño,  $\Delta t \rightarrow 0$ . Esto sucede, en forma aproximada, cuando los pasos temporales de las cotizaciones son días o semanas y el periodo calculado es amplio, por ejemplo un año completo.

El árbol binomial, tal y como se ha indicado, registra los movimientos al alza y a la baja del precio de un subyacente. Supóngase un número  $N$  de periodos con un paso temporal  $\Delta t$ , por lo que, si  $T$  denota la fecha de vencimiento,  $N = \left\lfloor \frac{T}{\Delta t} \right\rfloor$ , siendo  $\lfloor \cdot \rfloor$  la función parte entera del cociente. Por conveniencia, sea  $X_N$  una variable binomial aleatoria, que representa el número de movimientos hacia arriba del subyacente durante  $N$  periodos. Para que el modelo discreto se comporte como el correspondiente modelo continuo para el subyacente, el valor de cada nodo se calcula mediante la siguiente expresión (Stampfli, y otros, 2002):

- Si el precio del subyacente sube:

$$S_u = S e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (5.3.1.1).$$

- Y si el precio del subyacente baja:

$$S_d = S e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}} \quad (5.3.1.2).$$

En el vencimiento, es decir, para  $T = N\Delta t$ , si se reagrupan los términos de movimientos al alza y a la baja se obtiene que el valor del es:

$$S_T = S_0 e^{X_N(\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t})} e^{(n - X_N)(\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t})}. \quad (5.3.1.3)$$

El parámetro  $N - X_N$  cuenta el número de movimientos del subyacente a la baja. Si se eliminan los exponentes con logaritmos neperianos y se reagrupa la expresión (5.3.1.3), se obtiene:

$$\ln(S_T) = \ln(S_0) + n\mu\Delta t + (2X_N - n)\sigma\sqrt{\Delta t}.$$

o equivalentemente,

$$\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right) = N\mu\Delta t + (2X_N - N)\sigma\sqrt{\Delta t}. \quad (5.3.1.4)$$

Por conveniencia en lo que resta de apartado se trabajará con los logaritmos  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$  para determinar las condiciones bajo las cuales el modelo discreto binomial iguala al modelo continuo descrito por el modelo de subyacente log-normal que es la base del modelo de *Black-Scholes* para poner precio a derivados financieros tipo *call* y *put* europeos.

Recuérdese el valor de  $p$ , el cual expresa la probabilidad neutral al riesgo de un movimiento hacia arriba de la acción, determinado mediante el Método de Duplicación de Carteras y que sigue el principio de no arbitraje es:

$$p = \frac{e^{r\Delta t} S_0 - S_d}{S_u - S_d}. \quad (5.3.1.5)$$

El modelo pretende “forzar” que los movimientos en el subyacente sean aproximadamente simétricos, y que la probabilidad siga esa misma tónica, para ello se recurre al desarrollo de Taylor sobre la función exponencial. Este desarrollo se expresa como:

$$e^x \approx 1 + x + \frac{1}{2}x^2 \Rightarrow e^{-x} \approx 1 - x + \frac{1}{2}x^2. \quad (5.3.1.6)$$

A continuación se aplica en la fórmula (5.3.1.5), las expresiones (5.3.1.1) y (5.3.1.2) y, posteriormente, se sustituyen las aproximaciones del desarrollo de Taylor dadas en (5.3.1.6), hasta orden  $\Delta t$ ,

$$\begin{aligned} p &= \frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} = \frac{S_0 e^{r\Delta t} - S_0 e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}}{S_0 e^{\mu\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}} - S_0 e^{\mu\Delta t - \sigma\sqrt{\Delta t}}} = \frac{e^{(r-\mu)\Delta t} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \\ &\approx \frac{(1 + (r - \mu)\Delta t) - \left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)}{\left(1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right) - \left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)}. \quad (5.3.1.7) \end{aligned}$$

Simplificando la fórmula (5.3.1.7), se obtiene:

$$p \approx \frac{\left(r - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} = \frac{1}{2} + \frac{r - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}. \quad (5.3.1.8)$$

Por lo tanto, tomando el operador esperanza en (5.3.1.4), se tiene que la esperanza de los logaritmos  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$  según el modelo discreto binomial está dada por:

$$E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = N\mu\Delta t + (2E[X_N] - N)\sigma\sqrt{\Delta t}. \quad (5.3.1.9)$$

Recordando que si  $X_N \sim \text{Bi}(N; p)$ , entonces  $E[X_N] = Np$ , y utilizando (5.3.1.8), la esperanza dada en (5.3.1.9) puede aproximarse por

$$\begin{aligned} E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] &\approx \mu T + \left(2N\left(\frac{1}{2} + \frac{r - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) - N\right)\sigma\sqrt{\Delta t}, \\ E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] &\approx \mu T + \left(2\left(\frac{1}{2} + \frac{r - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t}\right) - 1\right)\sigma N\sqrt{\Delta t}, \\ E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] &\approx \mu T + \left(r - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)N\Delta t = \mu T + \left(r - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T. \end{aligned}$$

Por tanto, simplificando la expresión anterior, se tiene

$$E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] \approx \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T, \quad (5.3.1.10)$$

donde se ha utilizado que  $T = N\Delta t$ .

Por otra parte, en el modelo continuo de *Black-Scholes* se llega a la siguiente expresión para calcular la media de los logaritmos  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ , bajo la hipótesis de que dicho subyacente sigue una distribución log-normal (Allen, 2007):

$$S_T = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N(0; 1) \Rightarrow E\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)T. \quad (5.3.1.11)$$

El parámetro  $\mu$  se interpreta como un promedio de los rendimientos históricos del subyacente.

Obsérvese que las expresiones sobre el logaritmo  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$  del subyacente obtenidas mediante el modelo discreto binomial y continuo log-normal dadas por (5.3.1.10) y (5.3.1.11), respectivamente, son aproximadamente iguales si  $r \rightarrow \mu$  cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , o equivalentemente cuando  $N \rightarrow \infty$ , manteniendo  $T = N\Delta t$ , para legitimar la convergencia de la distribución binomial a la normal.

Se calcula a continuación, la varianza de los logaritmos  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ , mediante el modelo binomial. Para ello, se toma el operador varianza en (5.3.1.4), y se obtiene que la varianza de los logaritmos,  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$ , según el modelo discreto binomial está dada por:

$$V\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = V[N\mu\Delta t + (2X_N - N)\sigma\sqrt{\Delta t}] = 4\sigma^2\Delta tV[X_N].$$

Recordando que si  $X_N \sim \text{Bi}(N; p)$ , entonces  $V[X_N] = Np(1 - p)$ , se tiene

$$V\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = 4\sigma^2\Delta tNp(1 - p) = 4\sigma^2Tp(1 - p), \quad (5.3.1.12)$$

donde se ha utilizado que  $T = N\Delta t$ . Por otra parte, obsérvese tomando límites cuando  $\Delta t \rightarrow 0$  en la expresión (5.3.1.8) que

$$p \approx \frac{1}{2} + \frac{r - \mu - \frac{1}{2}\sigma^2}{2\sigma}\sqrt{\Delta t} \rightarrow \frac{1}{2} \text{ si } \Delta t \rightarrow 0,$$

Por tanto, tomando límites en (5.3.1.12) cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ , se tiene

$$V\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = 4\sigma^2Tp(1 - p) \rightarrow 4\sigma^2T\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sigma^2T. \quad (5.3.1.13)$$

Mientras que según el modelo continuo log-normal esta varianza vale:

$$S_T = S_0e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma\sqrt{T}Z}, \quad Z \sim N(0; 1) \Rightarrow V\left[\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)\right] = \sigma^2TV[Z] = \sigma^2T.$$

Por tanto, las varianzas de los logaritmos  $\ln\left(\frac{S_T}{S_0}\right)$  obtenidas vía el modelo discreto binomial y el modelo continuo log-normal coinciden.

Existen otras expresiones de probabilidad  $p$  que también han sido consideradas en la aproximación del modelo binomial al log-normal. Utilizando las expresiones de  $u$  y  $d$  dadas en (5.3.6), en la expresión (5.3.1.5), se obtiene, aplicando la aproximación de Taylor de la exponencial de orden  $\Delta t$ , la siguiente aproximación de  $p$ :

$$\begin{aligned} p &= \frac{S_0e^{r\Delta t} - S_d}{S_u - S_d} = \frac{S_0e^{r\Delta t} - S_0d}{S_0u - S_0d} = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = \frac{e^{r\Delta t} - e^{-\sigma\Delta t}}{e^{\sigma\sqrt{\Delta t}} - e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}}} \\ &\approx \frac{(1 + r\Delta t) - \left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)}{\left(1 + \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right) - \left(1 - \sigma\sqrt{\Delta t} + \frac{1}{2}\sigma^2\Delta t\right)} = \frac{\sigma\sqrt{\Delta t} + \left(r - \frac{1}{2}\sigma^2\right)\Delta t}{2\sigma\sqrt{\Delta t}} \\ &= \frac{1}{2} + \left(\frac{r}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4}\right)\sqrt{\Delta t}. \quad (5.3.1.14) \end{aligned}$$

Por tanto, la expresión (5.3.1.14) permite calibrar los parámetros de un árbol binomial para que se comporte como un modelo lognormal. Obsérvese que la probabilidad de

cada nodo depende de la tasa de interés del periodo,  $r$ , la volatilidad del subyacente,  $\sigma$  y el paso temporal,  $\Delta t$ , el cual debe ser reducido para que se cumpla la equivalencia entre los modelos discreto y continuo. En el Capítulo 6 se estudiará si el árbol calculado para la acción de Alstom, S.A. puede aproximarse al modelo log-normal.

## 5.4 Árbol binomial implícito

El modelo binomial discreto con un número elevado de periodos o el modelo log-normal suponen una distribución de probabilidad normal o gaussiana en los precios del subyacente, si bien esta asunción puede conllevar a que el ajuste del modelo no sea del todo preciso. Mark Rubinstein en 1994 publica una aplicación de árboles implícitos a partir de la idea de David Shimko en 1993 sobre opciones de tipo europeo sobre el índice *Standard and Poor's 500* (Dumas, y otros, 1998). La esencia del método reside en inferir la distribución de probabilidades del precio del subyacente y posteriormente obtener su precio y el valor del contrato de la opción, es decir, la prima de la misma, con el fin de comprobar si la distribución de probabilidades asociadas a las ramas del árbol se comportan de forma gaussiana o normal.

La diferencia entre el modelo binomial implícito, en adelante IBT (*Implied Binomial Tree*) y el propuesto por CRR reside en que los parámetros  $p$ ,  $1 - p$ ,  $u$  y  $d$  no permanecen constantes (Milanesi, 2012).

La aplicación del modelo sigue los siguientes pasos:

### Paso 1. Estimación de la volatilidad implícita

Es aconsejable que se realice el cálculo de la volatilidad implícita de los rendimientos del subyacente ya que se consigue la homogenización del modelo, resultando más correcto que el cálculo de la volatilidad basado en los rendimientos históricos. Para el cálculo de la volatilidad implícita se puede recurrir a la fórmula de valoración de opciones propuesta por *Black-Scholes*, que en el caso de la opción *call* es:

$$C = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2), \quad (5.4.1)$$

donde:

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{S_0}{K}\right) + \left[r + \left(\frac{\sigma^2}{2}\right)\right]T}{\sigma\sqrt{T}}, \quad d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T},$$

siendo

$$N(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy,$$

la función de distribución acumulativa de una variable aleatoria normal tipificada.

La variable objetivo a determinar es  $\sigma$  que surge de igualar el valor observado en el mercado con el valor teórico obtenido con la fórmula de *Black-Scholes*, minimizando la diferencia entre ambos. Para implantarlo, se define el precio objetivo, obtenido con el promedio entre los precios de compra o *ask* y venta o *bid* del contrato de opciones y

se somete a un proceso de iteraciones con el modelo continuo, el cual finaliza cuando ambos precios, es decir, el promedio real y el teórico convergen.

### Paso 2. Estimación del árbol binomial explícito mediante el modelo CRR

Este paso se ha estudiado a lo largo de los Apartados 5.1 y 5.3, sobre la construcción del árbol binomial del subyacente. Es importante señalar que la probabilidad asociada a los nodos finales, se calcula con la siguiente expresión (véase (5.2.1)):

$$Q_{Nj} = \frac{N!}{j!(N-j)!} p^j (1-p)^{N-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N, \quad (5.4.1)$$

donde recuérdese que  $N$  denota el número de periodos totales y  $j$  varía para nombrar a los últimos nodos del árbol binomial. El cálculo de las probabilidades finales de cada nodo, permite calcular de forma directa el valor del subyacente y de la opción al inicio del contrato. Esta expresión junto con el árbol explícito permite comprobar que no existen errores en el proceso de cálculo:

- Para el cálculo del valor del subyacente en el instante  $t = 0$ , se emplea la expresión:

$$S_0 = \left[ \sum_{j=0}^N S_{Nj} \times Q_{Nj} \right] e^{-rN\Delta t}, \quad (5.4.2)$$

donde  $S_{Nj}$  se refiere a los valores que toma el subyacente al final de cada nodo del árbol. El producto de dicho valor con su probabilidad explícita calculada,  $Q_{Nj}$ , en el nodo final correspondiente, actualizado al tipo de interés al que esté referida la inversión, ofrece el valor del subyacente en  $t = 0$ .

- Para el cálculo de la prima de la opción:

$$V_0 = \left[ \sum_{j=0}^N c_{Nj} \times Q_{Nj} \right] e^{-rN\Delta t},$$

donde  $c_{Nj} = \max(S_{Nj} - K; 0)$ , en este caso se ha utilizado el *pay-off* de una opción de compra, y, para una opción tipo *put* se sustituiría este valor por el correspondiente *pay-off*,  $p_{Nj} = \max(K - S_{Nj}; 0)$ . Los subíndices  $Nj$  indican el valor de la opción en el periodo final  $N$  en los nodos finales  $j = 0, 1, \dots, N$ .

### Paso 3. Cálculo de la probabilidad implícita

A continuación se detalla cómo se realiza el cálculo de las probabilidades implícitas, denotadas como  $Q_{Nj}^*$ , y las cuales se interpretan como la probabilidad de que el subyacente tome un valor correspondiente al final del nodo calculado. Nótese que se trata de un parámetro distinto a la volatilidad implícita expresada en el primer paso, la cual representa la fluctuación de los rendimientos del subyacente. Para obtener dichas

probabilidades es necesario plantear un modelo de programación no lineal que se detalla a continuación.

La **función objetivo** se centra en minimizar la diferencia al cuadrado entre la probabilidad explícita e implícita en cada uno de los nodos finales:

$$\text{min. error} = (Q_{Nj} - Q_{Nj}^*)^2.$$

Sujeto a las siguientes **restricciones**:

1. Que la suma de probabilidades implícitas sea igual a 1:

$$\sum_{j=0}^N Q_{Nj}^* = 1.$$

2. Que la diferencia entre el precio de mercado del subyacente y su valor intrínseco (calculado en la expresión (5.4.1)) sea cero. Con el enfoque de la volatilidad implícita, el modelo parte de los datos reales para intentar ajustar la evolución del mismo:

$$S_0 - \left[ \sum_{j=0}^N S_{Nj} \times Q_{Nj}^* \right] e^{-rN\Delta t} = 0.$$

3. Que el valor de la opción estimado con probabilidades implícitas se encuentre entre el precio real de venta o *bid*,  $B$ , y el precio de compra o *ask*,  $A$ . Nuevamente se observa cómo el modelo intenta captar la evolución real de los precios, pero en este caso, de la opción de compra:

$$A \leq \left[ \sum_{j=0}^N c_{Nj} \times Q_{Nj}^* \right] e^{-rN\Delta t} \leq B.$$



## 6. Aplicación del árbol binomial para la valoración de un contrato tipo *call* sobre las acciones del Grupo Alstom

En este capítulo se van a aplicar los conceptos teóricos tratados a lo largo de los Capítulos 2 y 5, con el fin de modelizar un contrato de opciones financieras tipo *call* sobre las acciones del Grupo Alstom. Existen diferentes fuentes de información financiera pública sobre este tipo de derivados como la *Chicago Board Options Exchange* o *The New York Stock Exchange*, en Estados Unidos, el MEFF en España o el *Euronext* que engloba alguna de las bolsas más importantes europeas, si bien, resulta complejo acceder a información detallada sobre los contratos. Este hecho, ha supuesto que el enfoque implícito no haya podido ser aplicado de forma completa.

La información referente al contrato de opciones *call* se ha seleccionado de la bolsa de valores europea *Euronext*, creada en el año 2000 por la agrupación de las bolsas de París, Ámsterdam y Bruselas. Desde 2002 son cinco bolsas la que forman el Euronext tras la incorporación de la bolsa de Lisboa y el mercado inglés de derivados con la entrada de la *London International Financial Futures and Options Exchange*. En la misma se negocian acciones, bonos corporativos, y derivados (Euronext, 2015).

La selección de un contrato de opciones sobre acciones del Grupo Alstom se fundamenta en que son contratos de tipo europeo, aspecto principal para la aplicación los modelos propuestos en el Capítulo 5, dado que si el ejercicio de la opción puede diferir de la fecha de vencimiento del contrato, el proceso de cálculo de la prima del contrato varía, dado que se incorpora en el modelo el ejercicio anticipado en todos los pasos temporales. Esto correspondería a las opciones de tipo americano que no son objeto de análisis en esta memoria. Por otra parte, de los contratos europeos que se encuentran en la bolsa de *Euronext*, la información sobre Alstom ha sido considerada como más completa, en lo que se refiere a los precios de ejercicio. Cabe destacar, que la información de los contratos puede resultar difusa en lo que se refiere las fechas exactas de inicio de negociación de estos, por lo que no se ha podido determinar con precisión la fecha inicial del contrato seleccionado.

Los contratos de opciones del mercado parisino y de tipo europeo, tal y como se muestra en el **Anexo 3** vencen el tercer viernes del mes de expiración del contrato. El contrato seleccionado sobre la acción de Alstom vence en septiembre, por tanto se entiende que la fecha de vencimiento será el 18 de septiembre de 2015. De los contratos que se muestran dentro de la página referente a Alstom, se ha seleccionado uno tipo *call* cuyo precio de ejercicio es 25 €. Sobre la fecha de suscripción del contrato, que marca el inicio de la valoración, como ya se ha indicado la información es escasa, no obstante, en el documento *Expiry Months Listed Per Class* que se adjunta como **Anexo 4**, se encuentran distintos periodos de vida de los contratos, Alstom se encuentra en el Grupo 2 por lo que la vida de los contratos puede ser de 6, 12, 18 y 24 meses, al no precisar la fecha de suscripción exacta, se ha decidido asumir que el contrato tiene la vida de un ejercicio completo, es decir, 12 meses por lo que se considera como inicio la tercera semana del mes de septiembre de 2014. A continuación se resumen los datos del contrato descritos hasta el momento:

- Opción *call* de tipo europeo.
- Precio de ejercicio o *strike*: 25 €.
- Fecha de suscripción: 19 de septiembre de 2014.
- Fecha de vencimiento: 18 de septiembre de 2015.

Una vez seleccionado el contrato se inicia la valoración de la prima de la opción. Dado que el valor de un contrato de derivados depende de la evolución del precio del subyacente al que está referenciado, se han extraído las cotizaciones de la acción de Alstom, el inicio de la predicción,  $S_0$ , que corresponde, en esta aplicación teórica, al precio de cierre ajustado del título el día 15 de septiembre de 2014, es evidente que no coincide con la fecha de suscripción (19 de septiembre), pero no ha sido posible incorporar esta fecha dado que el paso temporal seleccionado es semanal, y la página web utilizada para la extracción de los datos históricos (*Yahoo Finanzas*) sólo ofrece los datos referentes al primer día de la semana.

## 6.1 Aplicación del árbol binomial mediante el modelo de Cox, Ross y Rubinstein

Tal y como se introdujo en los Capítulos 2 y 5 para realizar la valoración mediante árboles binomiales, en primer lugar, es necesario calibrar los parámetros del modelo CRR, estos son los coeficientes de movimiento hacia arriba de la acción,  $u$ , y del movimiento hacia abajo de la misma,  $d$ , así como las probabilidades asociadas a cada movimiento, denotas por  $p$  y  $1 - p$ , respectivamente. Si bien, antes de calibrar dichos parámetros, y dada la información suministrada por la bolsa *Euronext*, es necesario decidir ciertas variables muy relevantes para la valoración, esto es la duración del contrato y el paso temporal de cada nodo y la tasa de interés libre de riesgo:

- Duración del contrato y paso temporal: se ha introducido que la duración del contrato se establece en un año, y que el paso temporal se fija semanal, lo que supone que se va a realizar una estimación del precio de la acción para 52 semanas, esto es, desde septiembre de 2014 a septiembre de 2015.
- Tasa de interés libre de riesgo: se ha seleccionado una letra a un año del mercado de deuda pública francés cuya fecha de subasta se sitúa en el 21 de agosto de 2014 y vencimiento el 20 de agosto de 2015. Esta subasta es la más próxima al contrato de opciones que se va a valorar. La tasa de interés anual de la misma se situó en 0,019% anual. Recuérdese el principio de neutralidad al riesgo del modelo aplicado, en el que es necesario aplicar dicha tasa dado que en el inversor es indiferente al riesgo y el rendimiento esperado de la inversión es la tasa de interés libre de riesgo. Este aspecto ya ha sido criticado a lo largo del Apartado 5.1. La selección de la deuda pública francesa se fundamenta en que el mercado de referencia para la acción de Alstom es el francés, así como el contrato de opciones está dentro del *Euronext* Francia. Cabe realizar un matiz, respecto al valor de la tasa libre de riesgo empleada, en este caso, una letra a un año del Estado francés, la cual puede resultar para el lector un tanto baja, actualmente y tras la recuperación de la economía francesa por la crisis financiera iniciada en 2007, la prima de riesgo del país se ha visto reducida, y ello unido al efecto de la deflación ha provocado que la rentabilidad de las letras sea muy reducida e incluso negativa. El mismo hecho puede verse en el mercado de deuda pública alemán.

A modo de resumen, a continuación se detallan los datos de partida de la valoración del contrato de opciones *call* sobre las acciones de Alstom, posteriormente se indican los pasos a seguir para realizar la valoración:

- Precio de ejercicio o *strike*: 25 €.
- Fecha de suscripción: 19 de septiembre de 2014.
- Fecha de vencimiento: 18 de septiembre de 2015.
- Paso temporal: semanal.
- Periodo de valoración en semanas: 52.
- Tasa de interés libre de riesgo anual: 0,019%.
- Precio inicial del subyacente,  $S_0$ : 27,56 €.

### Paso 1. Extracción de datos reales de la cotización del subyacente

En la Tabla 6.1.1 se muestran los precios de cierre ajustado de la acción de Alstom en el periodo de 16 de septiembre de 2013 a 15 de septiembre de 2014. Se ha seleccionado un rango de datos de un ejercicio económico completo con pasos semanales con el fin de homogenizar el proceso de valoración.

Mediante este histórico de datos se realiza la calibración de los parámetros del modelo CRR. Para ello, como es usual se ha utilizado el rendimiento de la acción:

$$\text{Rendimiento} = \frac{S_t}{S_{t-\Delta t}} - 1.$$

**Tabla 6.1.1** Cotizaciones reales y rendimiento de la acción de Alstom.

Fecha	Precio de cierre ajustado	Rendimiento
16/09/2013	27,02	-
23/09/2013	26,78	-0,0089
30/09/2013	25,02	-0,0657
07/10/2013	25,05	0,0012
14/10/2013	26,50	0,0579
21/10/2013	27,29	0,0298
28/10/2013	27,07	-0,0081
04/11/2013	28,24	0,0432
11/11/2013	27,16	-0,0382
18/11/2013	26,42	-0,0272
25/11/2013	27,03	0,0231
02/12/2013	25,61	-0,0525
09/12/2013	25,18	-0,0168
16/12/2013	25,73	0,0218
23/12/2013	26,27	0,0210
30/12/2013	26,03	-0,0091
06/01/2014	25,48	-0,0211
13/01/2014	27,57	0,0820
20/01/2014	21,61	-0,2162
27/01/2014	21,05	-0,0259
03/02/2014	20,98	-0,0033
10/02/2014	20,92	-0,0029
17/02/2014	19,70	-0,0583
24/02/2014	19,56	-0,0071
03/03/2014	19,49	-0,0036

Fecha	Precio de cierre ajustado	Rendimiento
10/03/2014	18,81	-0,0349
17/03/2014	20,15	0,0712
24/03/2014	19,40	-0,0372
31/03/2014	22,08	0,1381
07/04/2014	21,75	-0,0149
14/04/2014	22,57	0,0377
21/04/2014	27,00	0,1963
28/04/2014	29,76	0,1022
05/05/2014	28,24	-0,0511
12/05/2014	28,10	-0,0050
19/05/2014	28,61	0,0181
26/05/2014	29,00	0,0136
02/06/2014	29,65	0,0224
09/06/2014	29,60	-0,0017
16/06/2014	28,00	-0,0541
23/06/2014	26,82	-0,0421
30/06/2014	26,30	-0,0194
07/07/2014	26,53	0,0087
14/07/2014	27,60	0,0403
21/07/2014	27,24	-0,0130
28/07/2014	26,79	-0,0165
04/08/2014	26,01	-0,0291
11/08/2014	26,39	0,0146
18/08/2014	26,47	0,0030
25/08/2014	26,94	0,0178
01/09/2014	27,37	0,0160
08/09/2014	27,65	0,0102
<b>15/09/2014</b>	<b>27,56</b>	<b>-0,0033</b>

Fuente: Elaboración propia a partir *Yahoo Finanzas* ([es.finance.yahoo.com](http://es.finance.yahoo.com)).

## Paso 2. Calibración de los parámetros $u$ , $d$ y $p$

La estimación de los parámetros  $u$  y  $d$  se han calculado aplicando las siguientes expresiones obtenidas en (5.3.6) a lo largo del Apartado 5.3:

$$u = e^{\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} = e^{\sigma\sqrt{\Delta t}}, \quad d = \frac{1}{u} = e^{-\sigma\sqrt{\frac{T}{N}}} = e^{-\sigma\sqrt{\Delta t}},$$

donde  $\sigma$  es la desviación típica de los rendimientos calculados en la Tabla 6.1.1. El paso temporal empleado es:  $\Delta t = T/N = 1/52$ , que corresponde al tamaño del paso semanal respecto a las 52 semanas de cotización de la acción durante un año, al cual está referido el tipo de interés. Se han seleccionado 52 periodos debido a que el empleo de pasos temporales cortos, y según la literatura realizar las valoraciones con periodos de 30 a 60 instantes de tiempo, permite que la calibración de los parámetros sea más precisa (Hull, 2009), debido a la convergencia de las variables aleatorias binomiales normales o gaussianas. Así pues, el objetivo en este caso es doble, dado que este hecho va a permitir comprobar si el modelo discreto pueden llegar a aproximarse a uno de tipo continuo, tal y como se ha introducido en el Apartado 5.3.1.

Los resultados de las variables  $\sigma$  y  $\Delta t$  se indican en la Tabla 6.1.2.

**Tabla 6.1.2** Desviación típica de los rendimientos y paso temporal.

$\sigma$	$\Delta t$
0,056918	0,019231

Fuente: Elaboración propia.

Tras el este cálculo, se procede la estimación de los parámetros  $u$  y  $d$ :

$$u = e^{0,056918\sqrt{0,019231}} = 1,0079, \quad d = 1/1,0079 = 0,992. \quad (6.1.1)$$

En este caso,  $u > 1$  y  $d < 1$ , por tanto se puede hablar de coeficiente de revalorización y de depreciación del precio de la acción, respectivamente.

Una vez calibrados ambos parámetros, se puede determinar el valor de  $p$ , y  $1 - p$ , que se interpretan como las probabilidades asociadas a los coeficientes  $u$  y  $d$ , respectivamente. Recuérdese la expresión indicada (5.3.1.5) en el Apartado 5.2:

$$p = \frac{e^{r\Delta t}S_0 - S_d}{S_u - S_d}. \quad (6.1.2)$$

Nótese que se ha modificado la expresión indicada en (5.3.1.5). En la fórmula (6.1.2) se han eliminado los términos  $S_0$ ,  $S_u$  y  $S_d$ , ya que,  $S_u = S_0u$  y  $S_d = S_0d$ , por lo que simplificando  $S_0$ .

Por otro lado, obsérvese que el tipo de interés seleccionado viene expresado de forma anual y cada nodo representa un paso semanal, por lo que se debe realizar la equivalencia del tipo de interés para cada nodo con el fin de homogeneizar los parámetros del modelo.

Cabe matizar la expresión  $e^{r\Delta t}$ , esta en definitiva muestra el factor de capitalización compuesta continuamente. Debe por tanto realizarse la equivalencia del tipo de interés, en este caso, se ha recurrido a una tasa equivalente compuesta:

$$r\Delta t = (1 + 0,00019)^{1/52} - 1 = 0,00000365.$$

Una vez realizado el ajuste sobre la tasa de interés libre de riesgo, la cual ha quedado expresada en función del paso temporal semanal, se procede al cálculo de la probabilidad asociada al factor de revalorización  $up$ ,  $u$ , denotada como  $p$  y la probabilidad  $1 - p$  asociada al parámetro down,  $d$ .

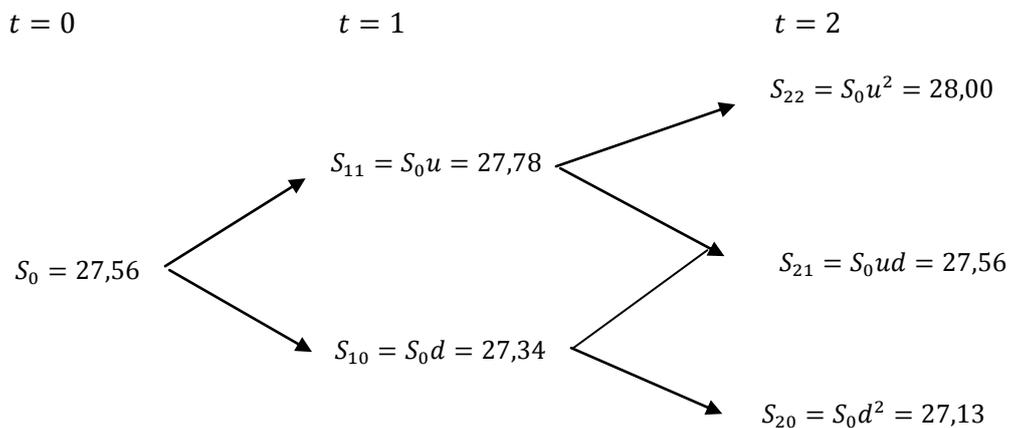
$$p = \frac{e^{0,00000365} - 0,992}{1,0079 - 0,992} = 0,4983, \quad 1 - p = 0,5017. \quad (6.1.3)$$

### Paso 3. Construcción del árbol binomial para el subyacente

La construcción del diagrama de árbol ha sido detallada en el Apartado 5.1. Dada la amplitud del árbol calculado en la Figura 6.1.1 se indica el cálculo de los primeros nodos, mostrándose el árbol completo en la **Anexo 5**.

Como se observa en la Figura 6.1.1 el árbol inicia las trayectorias a partir del valor del subyacente en el momento inicial  $t = 0$ , en este caso, el precio de la cotización de Alstom en el día 15 de septiembre de 2014, esto es 27,56 €. A partir de este instante se inicia la creación de escenarios, mediante el modelo binomial, de los distintos valores que puede tomar el precio de la acción tras la calibración de los parámetros.

**Figura 6.1.1** Construcción de los primeros nodos del diagrama de árbol para la acción de Alstom.



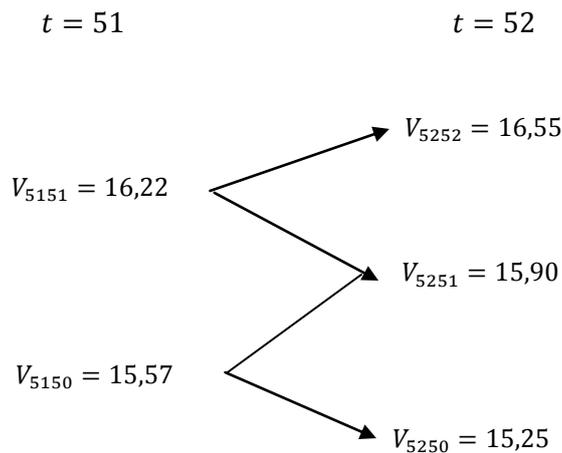
Fuente: Elaboración propia.

En el instante  $t = 1$ , se forman dos posibles escenarios para el precio de la acción, el correspondiente al instante  $t = 1$ , nodo  $k = 1$ , es el resultante del producto entre el valor del subyacente al inicio y el factor de revalorización  $up$ ,  $S_{11} = 27,56 \times 1,0079 = 27,78$  €. Del mismo modo, se forma el nodo  $t = 1$ ,  $k = 0$ :  $S_{10} = 27,56 \times 0,992 = 27,34$  €. El resto del árbol se construye mediante el mismo proceso de iteración hasta finalizar el mismo en el nodo  $S_{520} = 27,56 \times 0,992^{52} = 18,28$  €, el cual puede observarse al final de la **Anexo 5**.

#### Paso 4. Construcción del árbol binomial para la opción de compra. Cálculo de la prima de la opción

La construcción del árbol binomial para la opción de compra, tal y como se introdujo en el Apartado 5.1, se realiza a partir del diagrama de árbol del subyacente retrocediendo a lo largo del mismo. El primer paso es el cálculo del *pay-off* de la opción en los nodos finales, en este caso de aplicación, desde el nodo  $k = 0$  al nodo  $k = 52$ . Al tratarse de una opción de compra, los nodos de valor no nulo, de existir, estarán en las ramas superiores, dado que el *pay-off* de una *call* es  $\max(S_T - K; 0)$ , careciendo de valor las ramas inferiores del árbol.

**Figura 6.1.2** Fragmento árbol de la opción *call* para la acción de Alstom. Periodos:  $t = 51$  y  $52$ .



Fuente: Elaboración propia.

Como en el Paso 3, el árbol de la opción es de gran tamaño, éste se muestra completo en el **Anexo 6**. Sin embargo, para mayor claridad en la exposición, en la Figura 6.1.2 se muestran los dos últimos periodos del árbol de la opción *call* sobre la acción de Alstom, esto es  $t = 51$  y  $t = 52$ , y tres nodos desde  $k = 52$  a  $k = 50$ , en el caso del instante  $t = 52$ , para el periodo  $t = 51$  se muestran los nodos  $k = 51$  y  $k = 50$ . Se indica a continuación, el procedimiento de cálculo de los nodos correspondientes al periodo  $t = 52$ :

$$V_{5252} = \text{máx}(41,55 - 25; 0) = 16,55,$$

$$V_{5251} = \text{máx}(40,90 - 25; 0) = 15,90,$$

$$V_{5250} = \text{máx}(40,25 - 25; 0) = 15,25,$$

de esta forma se obtienen los nodos finales del árbol de la opción, el procedimiento continuaría hasta el último nodo, esto es  $V_{520} = \text{máx}(18,28 - 25; 0) = 0$ , donde la opción *call* toma un valor nulo, dado que no se ejercería debido a que el precio del subyacente es inferior al precio de ejercicio o *strike*. Los nodos intermedios hasta llegar a  $V_0$ , la prima de la opción, se calculan mediante el promedio de los nodos predecesores, que en este caso, recuérdese que se calcula de derecha a izquierda, actualizados a la tasa de interés libre de riesgo referida al instante temporal.

Previamente al cálculo del valor de la opción en  $t = 51$ , nótese los valores calculados para  $p$ ,  $r$  y  $\Delta t$ , calculados en el Paso 1. Estos valores se detallan en la Tabla 6.1.3. Mientras que los valores de la opción en  $t = 51$  son:

$$V_{5151} = e^{-0,00000365}(16,55 \times 0,4983 + 15,90 \times 0,5017) = 16,22,$$

$$V_{5150} = e^{-0,00000365}(15,90 \times 0,4983 + 15,25 \times 0,5017) = 15,57.$$

**Tabla 6.1.3** Valores para las probabilidades y el tipo de interés por unidad de tiempo.

Parámetro	Valor
$p$	0,4983
$1 - p$	0,5017
$r\Delta t$	0,00000365

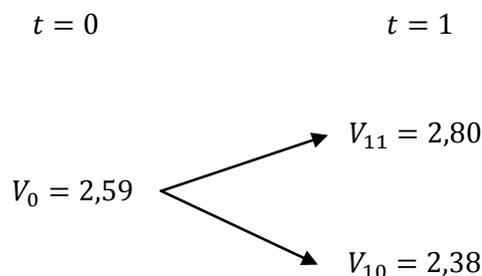
Fuente: Elaboración propia.

El cálculo del valor de la opción en el nodo  $V_{5149}$  requiere del valor en el nodo  $V_{5249}$ . Como no ha sido mostrado en la Figura 6.1.2 se ha omitido su cálculo, no obstante seguiría el mismo proceso de cálculo, es decir, es el promedio de los dos valores anteriores actualizado a la tasa de interés libre de riesgo correspondiente a un paso temporal, en este caso  $\Delta t = 1/52$ . Siguiendo este procedimiento se obtiene la prima de la opción de compra, la cual ha tomado el siguiente valor:

$$V_0 = e^{-0,00000365} (2,80 \times 0,4983 + 2,38 \times 0,5017) = 2,59.$$

Por tanto, el valor de la prima de la opción de este contrato de opciones call sobre la acción de Alstom se sitúa en 2,59 €. En la Figura 6.1.3 se muestra el detalle del árbol binomial de los nodos correspondientes a los tiempos  $t = 1$  y  $t = 0$ . Recuérdese que el **Anexo 6** ofrece el árbol completo de la opción de compra.

**Figura 6.1.3** Fragmento del árbol de la opción call sobre la acción de Alstom. Cálculo de la prima de la opción.



Fuente: Elaboración propia.

### 6.1.1 Aproximación del modelo discreto CRR al modelo continuo log-normal

En el Apartado 5.3.1 se explicó bajo qué condiciones el modelo discreto binomial puede aproximarse a un modelo continuo log-normal. La principal condición es la consideración de un número suficientemente grande de períodos, o equivalentemente, que el paso temporal entre los mismos sea suficientemente corto. En este caso de aplicación a la acción Alstom, el paso temporal es semanal y se han utilizado un total de 52 períodos, por lo que resulta interesante comprobar si el modelo propuesto puede llegar a comportarse como un modelo continuo. Para ello, recuérdese la expresión (5.3.1.14):

$$p \approx \frac{1}{2} + \left( \frac{r}{2\sigma} - \frac{\sigma}{4} \right) \sqrt{\Delta t}.$$

Que proporciona una aproximación de la probabilidad asociada al movimiento hacia arriba o *up* del subyacente propuesto por el modelo CRR. Este valor debe ser muy similar al dado por la expresión (5.3.1.5) y en ese caso, se puede afirmar que ambos modelos pueden aproximarse. En nuestro contexto de aplicación se tienen los siguientes valores numéricos:

$$p = \frac{e^{0,00000365} - 0,992}{1,0079 - 0,992} = 0,498258185. \quad (6.1.1.1)$$

A continuación, se aplica la fórmula (5.3.1.14) arroja el valor:

$$p = \frac{1}{2} + \left( \frac{0,00000365}{2 \times 0,0569} - \frac{0,0569}{4} \right) \sqrt{1/52} = 0,498258198. \quad (6.1.1.2)$$

Como se puede comprobar los resultados de las expresiones (6.1.1.1) y (6.1.1.2) coinciden prácticamente, por lo que se puede afirmar con seguridad que el modelo CRR aproxima bien a los resultados que se obtendrían bajo el modelo continuo log-normal en el caso de la acción de Alstom.

## 6.1.2 Efectos en la prima de opción de compra sobre la acción de Alstom

Al final del Apartado 2.1 se introdujeron los conceptos previos sobre el análisis de sensibilidad<sup>15</sup> en la prima de un contrato de opciones de tipo europeo. Se ha aplicado la metodología CRR sobre un contrato de opciones *call* sobre la acción de Alstom, cuyo *strike* está fijado en  $K = 25$  € y la prima de la opción obtenida se ha situado en  $V_0 = 2,59$  €. Con el fin de comprobar algunos de los efectos mencionados en el Apartado 2.1, se proponen los siguientes cambios en el contrato de opciones, manteniéndose el resto de parámetros del contrato constantes:

- Precio de ejercicio o *strike*:  $K = 23$  € y  $K = 27$  €.
- Tasa de interés libre de riesgo anual: 0,5 y 1%.
- Distribución de dividendos discretos en una fecha determinada: 1,5 € y 2 €.

### Precio de ejercicio

La disminución del precio de ejercicio de un contrato de opciones *call* de tipo europeo cuando el resto de variables del contrato se mantienen constantes provoca un aumento en el *pay-off*<sup>16</sup> de la opción, y por tanto, la prima del contrato aumenta, elevando así el desembolso inicial de la inversión, debido a que se incrementan las posibilidades de obtener beneficios para el inversor.

<sup>15</sup> Técnica que permite analizar los efectos de una inversión ante modificaciones de ciertos parámetros de la misma, manteniéndose el resto constantes.

<sup>16</sup> Recuérdese el *pay-off* de una opción *call*  $\max(S_T - k; 0)$ .

Supóngase que el precio de ejercicio o *strike* del contrato se sitúa en  $K = 23$  €. En el **Anexo 7** se muestra el árbol de la opción, téngase en cuenta que el árbol binomial del subyacente no se ve afectado. La prima de la opción quedaría establecida en:

$$V_0 = 4,56 \text{ €.}$$

Nótese como ha aumentado de forma significativa la prima de la opción. En los mercados financieros suelen negociarse paquetes de 100 opciones por lo que supondría aumentar el desembolso en 197,42 €.

En cambio, un aumento en el precio de ejercicio supondría disminuir el *pay-off*, y por tanto, el precio de la prima de la opción se vería afectada a la baja, es decir, el contrato sería más barato, dado que las posibilidades de obtener beneficios para el tenedor de la opción son más limitadas.

Se ha propuesto un aumento de dos unidades en el precio de ejercicio o *strike*, es decir, supóngase que se sitúa en  $K = 27$  €. En el **Anexo 8** se muestra el árbol de la opción con dicho precio de ejercicio. La prima de la opción en este caso se situaría en:

$$V_0 = 0,94 \text{ €.}$$

Como se puede comprobar la prima de la opción ha disminuido considerablemente. Del mismo modo, si se estuviera valorando la compra de un paquete de 100 opciones sobre acciones de Alstom, el desembolso inicial descendería en 164,62 €.

### Tasa de interés libre de riesgo

Las modificaciones en la tasa de interés libre de riesgo supone calibrar de nuevo los parámetros  $p$ , y por tanto,  $1 - p$ , estos representan las probabilidades asociadas a las trayectorias de movimiento hacia arriba o *up*, en el caso de  $p$ , y movimiento hacia abajo o *down*, cuya probabilidad viene dada por  $1 - p$ . Recuérdese, en primer lugar, la expresión de la probabilidad  $p$ :

$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d}.$$

En segundo lugar, la modificación de la tasa de interés libre de riesgo provoca cambios en el retroceso a lo largo del árbol binomial para calcular la prima de la opción, este retroceso seguía la siguiente expresión en el caso de la prima de la opción:

$$V_0 = e^{-r\Delta t}(V_{11}p + V_{12}(1 - p)), \quad (6.1.2.1)$$

por tanto, de la expresión (6.1.2.1) se deduce que un aumento del tipo de interés libre de riesgo disminuye el valor actual de los pagos futuros. Téngase en cuenta que en una opción de compra la prima de la opción y el precio de ejercicio lo paga el tenedor del contrato, por lo que se compensa el pago de la prima en el instante  $t = 0$ , con el

precio de ejercicio actualizado. En consecuencia, un aumento en el tipo de interés libre de riesgo provoca que la prima de la opción *call* aumente.

En este caso de aplicación, se propone el aumento de la tasa libre de riesgo anual de 0,019% a 0,5% y 1%. Véase, en primer lugar, la modificación de precio del contrato si  $r = 0,5\%$  anual. El árbol completo del subyacente y la opción de compra se detallan en el **Anexo 9**:

- Cálculo del tipo de interés equivalente:

$$r\Delta t = (1 + 0,005)^{1/52} - 1 = 0,00009592.$$

- Calibración de  $p$  y  $1 - p$ :

$$p = \frac{e^{0,00009592} - 0,992}{1,0079 - 0,992} = 0,5041, \quad 1 - p = 0,4959.$$

- Precio del contrato de opciones *call* sobre acción de Alstom:

$$V_0 = 2,71\text{€}.$$

En el caso de que  $r = 0,1\%$  anual, véase como se modifican las variables del modelo, (se adjunta como **Anexo 10** el árbol del subyacente y de la opción de compra):

- Cálculo del tipo de interés equivalente:

$$r\Delta t = (1 + 0,01)^{1/52} - 1 = 0,00019137$$

- Calibración de  $p$  y  $1 - p$ :

$$p = \frac{e^{0,00019137} - 0,992}{1,0079 - 0,992} = 0,51015, \quad 1 - p = 0,48985.$$

- Precio del contrato de opciones *call* sobre acción de Alstom:

$$V_0 = 2,82 \text{€}.$$

En los dos ejemplos propuestos se corrobora que un aumento de la tasa de interés libre de riesgo aumenta el precio del contrato en el momento  $t = 0$ , es decir, la prima de la opción. Si bien, el efecto sobre esta no es tan significativo como el observado en el caso de modificaciones sobre el precio de ejercicio.

### Distribución de dividendos discretos en una fecha determinada

En los modelos propuestos para la valoración de opciones, se ha obviado la distribución de dividendos en el caso de que el subyacente sea una acción. Con el fin de abordar este aspecto, en una primera aproximación, se propone asumir que la acción de Alstom en una fecha determinada distribuye un dividendo el cual es

conocido en el momento de la suscripción del contrato de opciones. Este aspecto, en la realidad puede resultar difícil de aplicar dado que el inversor debe tener dicha información previa a la valoración de la inversión, y esta información no siempre esta preestablecida de forma estatutaria en las compañías cotizadas, dado que es el Consejo de Administración de las corporaciones el que decide en última instancia el momento de distribución de los mismos.

La distribución de dividendos, recuérdese el análisis de sensibilidad mostrado en el Apartado 2.1, supone disminuir el precio del contrato de una opción *call*, dado que disminuye el precio del subyacente y su *pay-off* se ve reducido en el mismo montante que sea el dividendo.

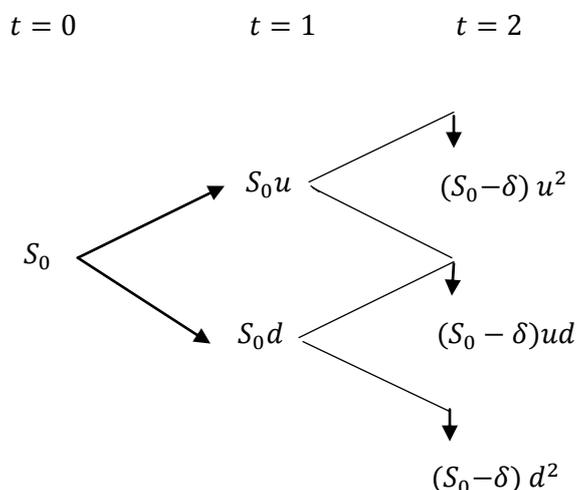
Supóngase que en el momento de suscripción, el Grupo Alstom publica un reparto de dividendos en la semana 26 de la valoración, a razón de 1,5 € por acción. Con estos datos, puede reajustarse el árbol binomial del subyacente teniendo en cuenta que en el periodo  $t = 26$  se debe eliminar en cada nodo el efecto de la distribución del dividendo en valor del mismo de la forma que sigue:

$$\begin{aligned} S_{260} &= (S_{250} - \delta)u, \\ S_{261} &= (S_{250} - \delta)d, \end{aligned} \quad (6.1.2.2)$$

donde  $\delta$  muestra el dividendo en unidades monetarias, en este caso de aplicación medido en euros.

En un intento de ejemplificar el efecto del reparto de dividendos por parte del Grupo Alstom, en la Figura 6.1.4, muestra los detalles en el supuesto anteriormente descrito. En dicha figura se muestra un árbol de dos periodos en el que se forman las trayectorias tal y como se ha descrito a lo largo de la memoria, con la distinción de que en el instante  $t = 2$  se produce un reparto de dividendos. Ello supone una reducción del valor del precio del subyacente, a partir del periodo  $t = 3$  el árbol del subyacente seguiría su evolución habitual.

**Figura 6.1.4** Ejemplo de árbol binomial de una acción con reparto de dividendos.



En el **Anexo 11** se muestra el árbol del subyacente y de la opción tras la incorporación de la hipotética distribución de dividendos de  $\delta = 1,5$  € por acción en el periodo  $t = 26$  (el ajuste del precio del subyacente se encuentra marcado en azul). Tras este cambio, el precio de la prima de la opción se sitúa en:

$$V_0 = 1,47.$$

En el caso en que el dividendo asciende a  $\delta = 2$  € por acción, y que se distribuye en el periodo  $t = 26$ , el reajuste del árbol del subyacente sigue el mismo procedimiento de cálculo que el expresado en (6.1.2.2). Del mismo modo, se adjunta como **Anexo 12** el árbol del subyacente y de la opción con los efectos del dividendo. La prima de la opción, en este caso, se sitúa en:

$$V_0 = 1,15.$$

Ambos casos corroboran lo introducido en el Apartado 2.1, la distribución de dividendos provoca una disminución del contrato de opciones de compra, dado que reduce su *pay-off* y por tanto, limita las posibilidades del inversor a obtener beneficios, por lo que el contrato resulta más barato.

## 6.2 Aplicación del árbol binomial implícito

La aplicación del árbol binomial implícito (IBT) se ha introducido en el Apartado 5.4. La base de la metodología reside en cuestionar si la distribución de probabilidades de los precios del subyacente sigue una forma gaussiana o normal.

A continuación se detallan los pasos que se han completado para la aplicación del modelo IBT al caso de la acción de Alstom.

### Paso 1. Estimación de la volatilidad implícita

La aplicación del IBT se inicia con el cálculo de la volatilidad implícita siguiendo la expresión (5.4.1) sobre la ecuación de *Black-Scholes* para calcular el valor de la prima de la opción. Este parámetro no ha podido ser aplicado debido a la falta de datos reales de los precios de compra o *ask* y venta o *bid* sobre el valor de la prima de la opción de compra sobre acciones del Grupo Alstom. Ello supone aplicar el modelo con la volatilidad calculada en el Apartado 6.1 ( $\sigma = 0,056918$ ).

### Paso 2. Estimación del árbol binomial explícito con el modelo CRR y cálculo de probabilidades finales

La obtención del árbol binomial explícito se introdujo en el Apartado 6.1 en el que los parámetros del modelo han sido calibrados a partir de los fundamentos del modelo CRR. En el **Anexo 5** se muestra el árbol del subyacente obtenido en el Paso 3 del mencionado apartado.

La aplicación del IBT requiere el cálculo de las probabilidades finales de cada una de las trayectorias seguidas por el árbol binomial del subyacente, para ello recuérdese la expresión (5.2.1) para el cálculo de probabilidades intermedias:

$$Q_{nj} = \frac{n!}{j!(n-j)!} p^n (1-p)^{n-j}, \quad j = 0,1,2, \dots, n, \quad n = 0,1,2, \dots, N.$$

Al tratarse de las probabilidades finales asociadas al último periodo, la expresión se denota de la siguiente forma, tal y como se ha mostrado en el Apartado 5.4.

$$Q_{Nj} = \frac{N!}{j!(N-j)!} p^j (1-p)^{N-j}, \quad (6.2.1)$$

donde  $N$  muestra el número de periodos totales, es decir,  $N = 52$  y  $j$  los últimos nodos del árbol binomial, esto es  $j = 0,1,2 \dots 52$ . Siguiendo la expresión (6.2.1) se obtienen las probabilidades finales asociadas al árbol del subyacente calculadas siguiendo la metodología del CRR, las cuales quedan mostradas en la Tabla 6.2.1.

**Tabla 6.2.1** Probabilidades finales del árbol binomial del subyacente calculadas a partir del CRR.

Nodo $j$	$Q_{Nj}$ (CRR)
0	2,661E-16
1	1,374E-14
2	3,479E-13
3	5,758E-12
4	7,005E-11
5	6,678E-10
6	5,195E-09
7	3,390E-08
8	1,894E-07
9	9,194E-07
10	3,926E-06
11	1,489E-05
12	5,050E-05
13	1,543E-04
14	4,269E-04
15	1,074E-03
16	2,466E-03
17	5,187E-03
18	1,002E-02
19	1,780E-02
20	2,916E-02
21	4,413E-02
22	6,175E-02
23	7,998E-02
24	9,597E-02
25	1,067E-01
26	1,101E-01
27	1,053E-01
28	9,334E-02
29	7,671E-02
30	5,840E-02
31	4,116E-02
32	2,682E-02
33	1,614E-02

Nodo $j$	$Q_{Nj}$ (CRR)
34	8,959E-03
35	4,575E-03
36	2,146E-03
37	9,214E-04
38	3,612E-04
39	1,288E-04
40	4,155E-05
41	1,208E-05
42	3,141E-06
43	7,254E-07
44	1,474E-07
45	2,601E-08
46	3,931E-09
47	4,984E-10
48	5,155E-11
49	4,179E-12
50	2,490E-13
51	9,698E-15
52	1,852E-16

Fuente: Elaboración propia.

Tal y como se muestra en el Tabla 6.2.1 las probabilidades más altas se encuentra en los nodos finales intermedios, siendo los extremos los que menor probabilidad llevan aparejada.

### Paso 3. Estimación de la probabilidad implícita

Tal y como ha quedado reflejado en el Apartado 5.4, la estimación de la probabilidad implícita requiere de un modelo de programación no lineal, cuya función objetivo es la minimización de las diferencias entre la probabilidad explícita calculada con el modelo CRR y la implícita en los nodos finales del árbol binomial del subyacente, siguiendo la siguiente expresión:

$$\min \text{error} = [Q_{nj} - Q_{nj}^*]^2. \quad (6.2.2)$$

En la Figura 6.2.1 se muestra la aplicación de la expresión (6.2.2) en el programa Excel®, en el cual se indica:

- La numeración de cada uno de los 52 nodos finales del árbol binomial de la acción del Grupo Alstom (columna A).
- Las probabilidades asociadas a los nodos finales del árbol binomial (columna B).
- Los coeficientes a calcular por el modelo de programación no lineal, representado estos las probabilidades implícitas asociadas a los nodos finales del árbol del subyacente (columna C).
- El error cuadrático calculado como la diferencia entre ambas probabilidades al cuadrado (columna D).

**Figura 6.2.1** Aplicación del modelo IBT. Cálculo de la función objetivo.

	A	B	C	D
1	Función objetivo. Mínimizar el error			
2				
3	Nodo	Q (CRR)	Q(IBT)	Error
4	52	1,85E-16	0,00	=(B4-C4)^2
5	51	9,70E-15	0,00	9,40E-29
6	50	2,49E-13	0,00	6,20E-26
7	49	4,18E-12	0,00	1,75E-23
8	48	5,16E-11	0,00	2,66E-21
9	47	4,98E-10	0,00	2,48E-19
10	46	3,93E-09	0,00	1,55E-17
11	45	2,60E-08	0,00	6,77E-16
12	44	1,47E-07	0,00	2,17E-14
13	43	7,25E-07	0,00	5,26E-13
14	42	3,14E-06	0,00	9,87E-12
15	41	1,21E-05	0,00	1,46E-10
16	40	4,16E-05	0,00	1,73E-09
17	39	1,29E-04	0,00	1,66E-08
18	38	3,61E-04	0,00	1,30E-07
19	37	9,21E-04	0,00	8,49E-07
20	36	2,15E-03	0,00	4,60E-06
21	35	4,58E-03	0,00	2,09E-05

Fuente: Elaboración propia.

Por tanto, la función objetivo, es la suma de la columna D, es decir, el error cuadrático medido como la diferencia al cuadrado entre las probabilidades obtenidas mediante ambas metodologías. Los valores numéricos de dicha Figura se muestra en la Figura 6.2.2.

**Figura 6.2.2** Aplicación del modelo IBT. Suma del error.

	A	B	C	D
36	20	2,92E-02	0,00	8,50E-04
37	19	1,78E-02	0,00	3,17E-04
38	18	1,00E-02	0,00	1,00E-04
39	17	5,19E-03	0,00	2,69E-05
40	16	2,47E-03	0,00	6,08E-06
41	15	1,07E-03	0,00	1,15E-06
42	14	4,27E-04	0,00	1,82E-07
43	13	1,54E-04	0,00	2,38E-08
44	12	5,05E-05	0,00	2,55E-09
45	11	1,49E-05	0,00	2,22E-10
46	10	3,93E-06	0,00	1,54E-11
47	9	9,19E-07	0,00	8,45E-13
48	8	1,89E-07	0,00	3,59E-14
49	7	3,39E-08	0,00	1,15E-15
50	6	5,19E-09	0,00	2,70E-17
51	5	6,68E-10	0,00	4,46E-19
52	4	7,00E-11	0,00	4,91E-21
53	3	5,76E-12	0,00	3,32E-23
54	2	3,48E-13	0,00	1,21E-25
55	1	1,37E-14	0,00	1,89E-28
56	0	2,66E-16	0,00	7,08E-32
57		1		=SUMA(D4:D56)

Fuente: Elaboración propia.

Una vez introducida la función objetivo del modelo de programación no lineal, se procede a la incorporación de las restricciones sujetas al mismo, las cuales se recuerdan a continuación:

1. Suma de probabilidades implícitas igual a 1:

$$\sum_{j=0}^N Q_{Nj}^* = 1.$$

2. La diferencia entre el precio de mercado real del subyacente al inicio y el valor intrínseco es igual a cero:

$$S_0 - \left[ \sum_{j=0}^n S_{Nj} \times Q_{Nj}^* \right] e^{-rN\Delta t} = 0.$$

3. El valor de la opción estimada con probabilidades implícitas se encuentre entre el precio de compra o *ask*,  $A$  y el precio de venta o *bid*,  $B$ :

$$A \leq \left[ \sum_{j=0}^N c_{Nj} \times Q_{Nj}^* \right] e^{-rN\Delta t} \leq B.$$

Tal y como se ha indicado en el paso correspondiente a la obtención de la volatilidad implícita, no se han podido extraer datos reales sobre el precio de venta y compra de la opción, lo que supone no poder aplicar la restricción número 3.

Para la aplicación de la “restricción número 1” se procede a la suma de las probabilidades implícitas que deben obtenerse y se fuerzan a que estas sumen uno. En la Figura 6.2.3 se muestra su implementación en Excel®. Recuérdese que en la columna C se muestran las probabilidades implícitas, tal y como ha quedado reflejado en la Figura 6.2.1.

**Figura 6.2.3** Aplicación del modelo IBT. Restricción 1 suma de probabilidades.

	A	B	C	D	E
34	22	6,17E-02	0,00	3,81E-03	
35	21	4,41E-02	0,00	1,95E-03	
36	20	2,92E-02	0,00	8,50E-04	
37	19	1,78E-02	0,00	3,17E-04	
38	18	1,00E-02	0,00	1,00E-04	
39	17	5,19E-03	0,00	2,69E-05	
40	16	2,47E-03	0,00	6,08E-06	
41	15	1,07E-03	0,00	1,15E-06	
42	14	4,27E-04	0,00	1,82E-07	
43	13	1,54E-04	0,00	2,38E-08	
44	12	5,05E-05	0,00	2,55E-09	
45	11	1,49E-05	0,00	2,22E-10	
46	10	3,93E-06	0,00	1,54E-11	
47	9	9,19E-07	0,00	8,45E-13	
48	8	1,89E-07	0,00	3,59E-14	
49	7	3,39E-08	0,00	1,15E-15	
50	6	5,19E-09	0,00	2,70E-17	
51	5	6,68E-10	0,00	4,46E-19	
52	4	7,00E-11	0,00	4,91E-21	
53	3	5,76E-12	0,00	3,32E-23	
54	2	3,48E-13	0,00	1,21E-25	
55	1	1,37E-14	0,00	1,89E-28	
56	0	2,66E-16	0,00	7,08E-32	
57	Total	1	0,00	7,805E-02	
58					
59	Restricción (1)	=SUMA(C4:C56)		=	1

Fuente: Elaboración propia.

Para finalizar el modelo de programación lineal se introduce la “restricción número 2”, (recuérdese que la “restricción número 3” no puede ser aplicada en este caso). Para ello se construye la siguiente tabla en Excel® que se muestra en la Figura 6.2.4.

Figura 6.2.4 Aplicación del modelo IBT. Restricción 2 cálculo preliminar de la restricción.

	A	B	C	D	E	F
62	Restricción (2)					
63	Nodo	Snj	Q(IBT)	SnjQ	Descuento	Total
64	52	41,55	0,00	0,00	0,9999963	=+D64*E64
65	51	40,90	0,00	0,00	0,9999963	0,00
66	50	40,25	0,00	0,00	0,9999963	0,00
67	49	39,62	0,00	0,00	0,9999963	0,00
68	48	39,00	0,00	0,00	0,9999963	0,00
69	47	38,39	0,00	0,00	0,9999963	0,00
70	46	37,79	0,00	0,00	0,9999963	0,00
71	45	37,20	0,00	0,00	0,9999963	0,00
72	44	36,62	0,00	0,00	0,9999963	0,00
73	43	36,04	0,00	0,00	0,9999963	0,00
74	42	35,48	0,00	0,00	0,9999963	0,00
75	41	34,92	0,00	0,00	0,9999963	0,00
76	40	34,38	0,00	0,00	0,9999963	0,00
77	39	33,84	0,00	0,00	0,9999963	0,00
78	38	33,31	0,00	0,00	0,9999963	0,00
79	37	32,79	0,00	0,00	0,9999963	0,00
80	36	32,27	0,00	0,00	0,9999963	0,00
81	35	31,77	0,00	0,00	0,9999963	0,00
82	34	31,27	0,00	0,00	0,9999963	0,00
83	33	30,78	0,00	0,00	0,9999963	0,00
84	32	30,30	0,00	0,00	0,9999963	0,00
85	31	29,82	0,00	0,00	0,9999963	0,00

Fuente: Elaboración propia.

Recuérdese que la “restricción número 2” establece que el valor observado de la acción del Grupo Alstom en el momento inicial debe coincidir con el valor intrínseco obtenido a partir de la probabilidad implícita. El cálculo de dicho valor se ha expresado en la fórmula (5.4.2), la cual se recuerda a continuación, nótese que en este caso, se utilizan las probabilidades implícitas:

$$\left[ \sum_{j=0}^N S_{Nj} \times Q_{Nj}^* \right] e^{-rN\Delta t}. \quad (6.2.3)$$

Se ha procedido a la implementación de la fórmula (6.2.3) multiplicando el valor del subyacente en cada nodo del último periodo,  $S_{nj}$ , por su probabilidad implícita correspondiente, tal y como queda mostrado en la columna D. A este producto se le aplica el factor de descuento, el cual se obtiene de la forma que sigue:

$$r\Delta t = (1 + 0,0002)^{1/52} - 1 = 0,00000365,$$

$$\text{Factor de descuento} = e^{-0,00000365} = 0,99999635.$$

En la columna F se ha introducido el producto entre el valor del subyacente al final por su probabilidad implícita descontada. La suma de esta columna debe reflejar el valor del subyacente al inicio de la valoración ( $S_0$ ). Por tanto, la restricción número 2 se formula como el valor resultante de esta suma que debe ser igual al precio observado por el subyacente al inicio, esto es 27,56 €. En la Figura 6.2.5 se muestran los resultados de este desarrollo.

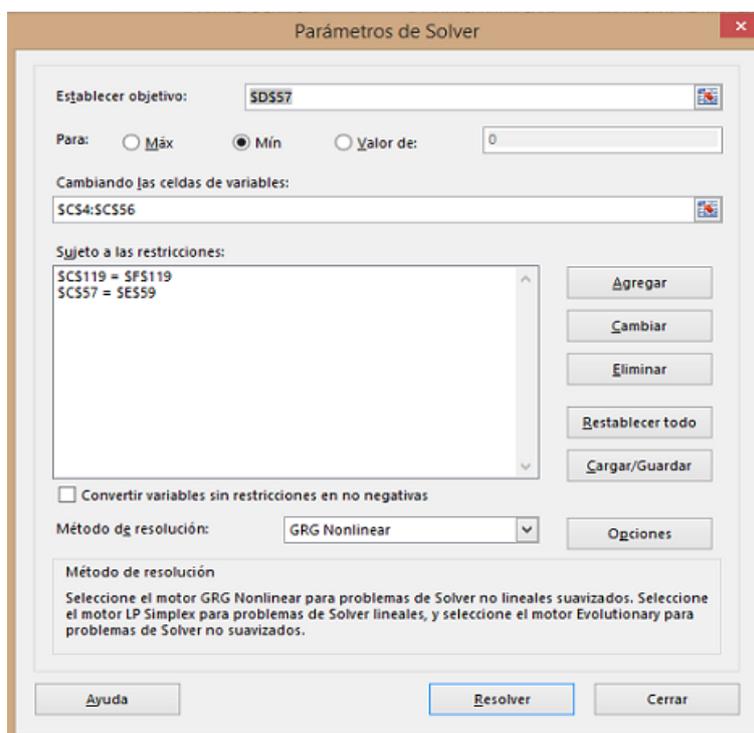
**Figura 6.2.5** Aplicación del modelo IBT. Implementación de la restricción número 2.

	A	B	C	D	E	F
102	14	22,80	0,00	0,00	0,9999963	0,00
103	13	22,45	0,00	0,00	0,9999963	0,00
104	12	22,10	0,00	0,00	0,9999963	0,00
105	11	21,75	0,00	0,00	0,9999963	0,00
106	10	21,41	0,00	0,00	0,9999963	0,00
107	9	21,07	0,00	0,00	0,9999963	0,00
108	8	20,74	0,00	0,00	0,9999963	0,00
109	7	20,42	0,00	0,00	0,9999963	0,00
110	6	20,10	0,00	0,00	0,9999963	0,00
111	5	19,78	0,00	0,00	0,9999963	0,00
112	4	19,47	0,00	0,00	0,9999963	0,00
113	3	19,17	0,00	0,00	0,9999963	0,00
114	2	18,87	0,00	0,00	0,9999963	0,00
115	1	18,57	0,00	0,00	0,9999963	0,00
116	0	18,28	0,00	0,00	0,9999963	0,00
117	Total		0,00			0,00
118						
119	Restricción (2) Total		=+SUMA(F64:F116)	=		27,56

Fuente: Elaboración propia.

Una vez introducido en Excel® la función objetivo, así como las restricciones, mediante el uso de Solver de Excel® se procede a la resolución del modelo. En la Figura 6.2.6 se muestra la implementación del mismo.

**Figura 6.2.6** Aplicación del modelo IBT. Resolución del modelo de programación no lineal con Solver.



Fuente: Elaboración propia.

Una vez ejecutado *Solver* se obtienen los coeficientes correspondientes a las probabilidades implícitas. Los resultados se detallan en la Tabla 6.2. La tabla construida para aplicar la “restricción número 2” resulta útil para comprobar si los datos obtenidos son válidos, dado permite corroborar, por un lado, que la suma de probabilidades es igual a uno (“restricción número 1”) y que el sumatorio de los valores actualizados del subyacente coincide con el precio observado en  $t = 0$  (“restricción número 2”).

**Tabla 6.2.2** Resultados obtenidos de la aplicación del modelo IBT.

Nodo	$Q_{Nj}^*$	$S_{Nj}$	$S_{Nj}Q_{Nj}^*$	Descuento	Total
52	-2,750E-05	41,55	-0,00114	0,99999635	-0,00114
51	-2,615E-05	40,90	-0,00107	0,99999635	-0,00107
50	-2,482E-05	40,25	-0,00100	0,99999635	-0,00100
49	-2,350E-05	39,62	-0,00093	0,99999635	-0,00093
48	-2,220E-05	39,00	-0,00087	0,99999635	-0,00087
47	-2,093E-05	38,39	-0,00080	0,99999635	-0,00080
46	-1,967E-05	37,79	-0,00074	0,99999635	-0,00074
45	-1,841E-05	37,20	-0,00068	0,99999635	-0,00068
44	-1,707E-05	36,62	-0,00063	0,99999635	-0,00063
43	-1,529E-05	36,04	-0,00055	0,99999635	-0,00055
42	-1,170E-05	35,48	-0,00042	0,99999635	-0,00042
41	-1,601E-06	34,92	-0,00006	0,99999635	-0,00006
40	2,902E-05	34,38	0,00100	0,99999635	0,00100
39	1,173E-04	33,84	0,00397	0,99999635	0,00397
38	3,509E-04	33,31	0,01169	0,99999635	0,01169
37	9,121E-04	32,79	0,02991	0,99999635	0,02991
36	2,137E-03	32,27	0,06898	0,99999635	0,06898
35	4,568E-03	31,77	0,14512	0,99999635	0,14512
34	8,953E-03	31,27	0,27994	0,99999635	0,27994
33	1,614E-02	30,78	0,49674	0,99999635	0,49673
32	2,682E-02	30,30	0,81255	0,99999635	0,81254
31	4,116E-02	29,82	1,22739	0,99999635	1,22739
30	5,840E-02	29,36	1,71439	0,99999635	1,71438
29	7,671E-02	28,90	2,21657	0,99999635	2,21656
28	9,334E-02	28,44	2,65487	0,99999635	2,65486
27	1,053E-01	28,00	2,94737	0,99999635	2,94736
26	1,101E-01	27,56	3,03389	0,99999635	3,03387
25	1,067E-01	27,13	2,89589	0,99999635	2,89588
24	9,598E-02	26,70	2,56295	0,99999635	2,56294
23	7,999E-02	26,29	2,10248	0,99999635	2,10247
22	6,175E-02	25,87	1,59779	0,99999635	1,59779
21	4,413E-02	25,47	1,12402	0,99999635	1,12402
20	2,917E-02	25,07	0,73124	0,99999635	0,73123
19	1,780E-02	24,68	0,43937	0,99999635	0,43937
18	1,002E-02	24,29	0,24348	0,99999635	0,24347
17	5,196E-03	23,91	0,12423	0,99999635	0,12423
16	2,476E-03	23,54	0,05828	0,99999635	0,05828

Nodo	$Q_{Nj}^*$	$S_{Nj}$	$S_{Nj}Q_{Nj}^*$	Descuento	Total
15	1,085E-03	23,17	0,02513	0,99999635	0,02513
14	4,385E-04	22,80	0,01000	0,99999635	0,01000
13	1,667E-04	22,45	0,00374	0,99999635	0,00374
12	6,362E-05	22,10	0,00141	0,99999635	0,00141
11	2,873E-05	21,75	0,00062	0,99999635	0,00062
10	1,848E-05	21,41	0,00040	0,99999635	0,00040
9	1,617E-05	21,07	0,00034	0,99999635	0,00034
8	1,613E-05	20,74	0,00033	0,99999635	0,00033
7	1,666E-05	20,42	0,00034	0,99999635	0,00034
6	1,729E-05	20,10	0,00035	0,99999635	0,00035
5	1,795E-05	19,78	0,00036	0,99999635	0,00036
4	1,859E-05	19,47	0,00036	0,99999635	0,00036
3	1,923E-05	19,17	0,00037	0,99999635	0,00037
2	1,986E-05	18,87	0,00037	0,99999635	0,00037
1	2,048E-05	18,57	0,00038	0,99999635	0,00038
0	2,106E-05	18,28	0,00038	0,99999635	0,00038
<b>Total</b>	<b>1,00</b>				<b>27,56</b>

Fuente: Elaboración propia.

Con las probabilidades implícitas obtenidas se puede aplicar la expresión (6.2.4) para calcular el valor de la prima de opción, y por tanto, observar si existen diferencias de valoración entre los modelos empleados.

$$V_0 = \left[ \sum_{j=0}^N c_{Nj} \times Q_{Nj}^* \right] e^{-rN\Delta t}, \quad \text{donde } c_{Nj} = \max(S_{Nj} - K; 0) \quad (6.2.4)$$

En la Tabla 6.2.3 se muestra el *pay-off* actualizado de la opción de compra en cada nodo. La suma de los mismos ofrece el valor de la prima de la opción,  $V_0$ , calculada mediante el modelo IBT, ascendiendo a un valor de 2,58697 €, recuérdese el valor obtenido para el contrato con el modelo CRR (véase Apartado 6.1), el cual sitúa la prima de la opción en 2,59039 €, lo que supone que exista una diferencia de precios de 0,039 € entre las primas de la *call* para ambos modelos.

La diferencia obtenida entre los modelos no resulta significativa, por lo que se puede afirmar que los modelos propuestos llegan a resultados similares.

**Tabla 6.2.3** Cálculo de la prima de opción de compra sobre las acciones de Alstom con el modelo IBT.

Periodo	Pay-off actualizado
52	-0,00046
51	-0,00042
50	-0,00038
49	-0,00034
48	-0,00031
47	-0,00028
46	-0,00025

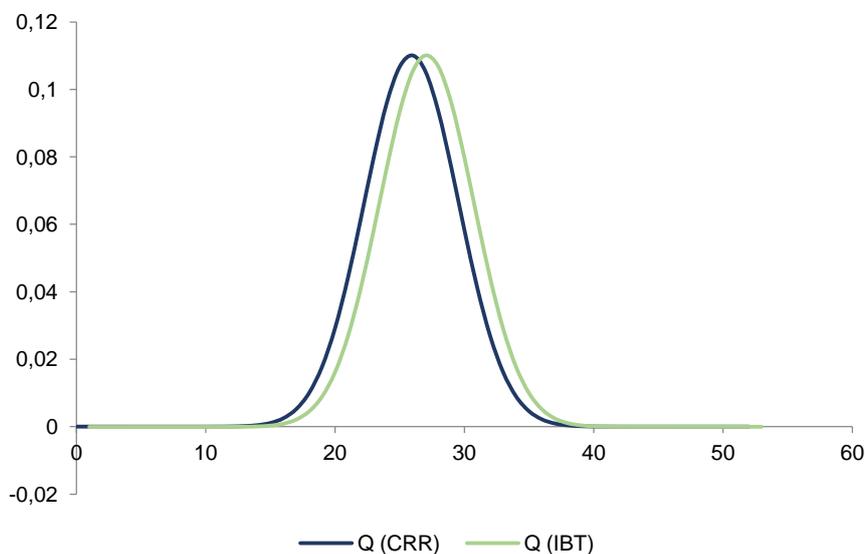
Periodo	Pay-off actualizado
45	-0,00022
44	-0,00020
43	-0,00017
42	-0,00012
41	-0,00002
40	0,00027
39	0,00104
38	0,00291
37	0,00710
36	0,01554
35	0,03091
34	0,05613
33	0,09328
32	0,14208
31	0,19851
30	0,25441
29	0,29889
28	0,32145
27	0,31565
26	0,28181
25	0,22720
24	0,16349
23	0,10280
22	0,05394
21	0,02067
20	0,00202
19	0,00000
18	0,00000
17	0,00000
16	0,00000
15	0,00000
14	0,00000
13	0,00000
12	0,00000
11	0,00000
10	0,00000
9	0,00000
8	0,00000
7	0,00000
6	0,00000
5	0,00000
4	0,00000
3	0,00000
2	0,00000
1	0,00000
0	0,00000
<b>Total</b>	<b>2,58697</b>
<b>Prima CRR</b>	<b>2,59039</b>
<b>Diferencia CRR</b>	<b>-0,00390</b>

Fuente: Elaboración propia.

Para finalizar el apartado se muestra en el Gráfico 6.2.1 la distribución de probabilidades de los nodos finales del árbol del subyacente, esto es  $j = 0,1,2 \dots 52$ , tanto explícitas, es decir, aquellas obtenidas mediante la aplicación del modelo CRR,

como las implícitas calculadas a lo largo del presente apartado a través del modelo IBT.

**Gráfico 6.2.1** Función de probabilidades explícitas e implícitas.



Fuente: Elaboración propia.

El Gráfico 6.2.1 muestra los histogramas en forma de función de densidad de probabilidad de los resultados obtenidos vía el modelo CRR y el modelo IBT. Se observa en este caso, que ambos modelos arrojan resultados similares, por tanto, se puede afirmar que bajo estas condiciones la distribución de probabilidades del modelo implícito se comporta de forma gaussiana.

### 6.3 Validación del modelo para la acción de Alstom

Siguiendo con lo introducido en el Apartado 5.2 se va a proceder a validar las estimaciones del precio de la acción del Grupo Alstom, subyacente de referencia para el contrato de opciones *call* valorado en la presente memoria, mediante los siguientes enfoques:

- Error Porcentual Absoluto Medio (*Mean Absolute Percentage Error*, MAPE).
- Error Cuadrático Medio (*Root Mean Squared Error*, RMSE).
- Construcción de Intervalos de Confianza del 95%.
- Gráfico de observaciones (precio real del subyacente) y estimaciones.

Tal y como se ha indicado en el Apartado 5.2, previamente a la aplicación de estos cuatro enfoques, se debe calcular la media de las estimaciones, con el fin de obtener una estimación individual para cada periodo en función de las probabilidades intermedias de cada nodo. En el **Anexo 13**, se adjunta el árbol de probabilidades intermedias del subyacente. A modo de ejemplo, se calcula a continuación la probabilidad asociada al valor  $S_{20}$ , recuérdese la expresión (5.2.1):

$$Q_{nj} = \frac{n!}{j!(n-j)!} p^n (1-p)^{n-j}, \quad j = 0, 1, 2, \dots, n. \quad (5.2.1)$$

por lo que aplicado al periodo  $n = 2$ , nodo  $j = 0$ :

$$Q_{20} = \frac{2!}{0!(2-0)!} [0,4983^2 (0,5017)^{2-0}] = 0,2517.$$

Una vez calculadas todas las probabilidades intermedias, se obtiene el promedio del precio de la acción para cada periodo, siguiendo la fórmula (5.2.2) que puede ser aplicada mediante la función “sumaproducto” del *software* Excel®, seleccionando las matrices correspondientes a los precios y sus probabilidades asociadas. En la Tabla 6.3.1, se muestran los precios medios estimados de la acción de Alstom,  $\hat{S}_t$ , durante el periodo de 15 de septiembre de 2014 a 14 de septiembre de 2015.

**Tabla 6.3.1** Estimaciones y precio real de la acción de Alstom

$t$	$\hat{S}_t$	$S_t$
0	27,560	27,560
1	27,562	27,110
2	27,563	26,810
3	27,565	25,510
4	27,566	26,100
5	27,568	27,080
6	27,570	27,760
7	27,571	27,950
8	27,573	28,960
9	27,575	28,920
10	27,576	28,130
11	27,578	28,060
12	27,579	27,350
13	27,581	26,650
14	27,583	26,910
15	27,584	26,880
16	27,586	26,830
17	27,587	26,580
18	27,589	28,720
19	27,591	29,120
20	27,592	28,740
21	27,594	28,600
22	27,596	28,540
23	27,597	29,550
24	27,599	29,420
25	27,600	30,010
26	27,602	29,470
27	27,604	28,960
28	27,605	28,780
29	27,607	29,760
30	27,609	29,010
31	27,610	29,320
32	27,612	28,040
33	27,613	28,040
34	27,615	28,000
35	27,617	28,280
36	27,618	28,510
37	27,620	28,120
38	27,621	26,400
39	27,623	26,500

$t$	$\hat{S}_t$	$S_t$
40	27,625	26,510
41	27,626	25,580
42	27,628	26,020
43	27,630	26,790
44	27,631	26,780
45	27,633	26,760
46	27,634	26,850
47	27,636	26,660
48	27,638	
49	27,639	
50	27,641	
51	27,643	
52	27,644	

Fuente: Elaboración propia.

El precio real de la acción no ha podido ser incorporado hasta el final del periodo estimado  $t = 52$ , debido al solapamiento de plazos entre la entrega de esta memoria y la fecha de vencimiento del contrato de opciones, la cual fija la semana límite de extracción de datos reales del precio de cotización de las acciones del Grupo Alstom.

Una vez calculado precio estimado promedio de la acción del Grupo Alstom, pueden aplicarse las medidas de bondad de ajuste indicadas al inicio del apartado:

#### Error Porcentual Absoluto Medio (MAPE)

Recuérdese que el MAPE se calcula mediante el promedio de las diferencias absolutas entre los valores estimados y observados dividido por el precio real del periodo correspondiente. La medida de error tal y como indica su nombre, está expresada en porcentaje, se considera tolerable aquel error que no supere el 5% (véase el Apartado 5.2).

Para la aplicación práctica del MAPE, en primer lugar, se calcula el error absoluto de la diferencia entre el precio real y la estimación obtenida por el modelo, para cada uno de los periodos. Dicho error absoluto se divide entre el valor observado o precio real del periodo correspondiente al error calculado. Una vez calculados los errores individuales en cada periodo  $t$ , se aplica la función “promedio” en Excel®. En la Tabla 6.3.2 se muestran los resultados obtenidos.

**Tabla 6.3.2** Cálculo medidas de bondad de ajuste: MAPE Y RSME.

$t$	$\hat{S}_t$	$S_t$	Error Absoluto	$\left(\frac{S_t - \hat{S}_t}{S_t}\right)$	Error <sup>2</sup>
0	27,560	27,560	0,000	0,000	0,000
1	27,562	27,110	-0,452	-0,017	0,204
2	27,563	26,810	-0,753	-0,028	0,567
3	27,565	25,510	-2,055	-0,081	4,222
4	27,566	26,100	-1,466	-0,056	2,151
5	27,568	27,080	-0,488	-0,018	0,238
6	27,570	27,760	0,190	0,007	0,036
7	27,571	27,950	0,379	0,014	0,143
8	27,573	28,960	1,387	0,048	1,924

$t$	$\hat{S}_t$	$S_t$	Error Absoluto	$\left(\frac{S_t - \hat{S}_t}{S_t}\right)$	Error <sup>2</sup>
9	27,575	28,920	1,345	0,047	1,810
10	27,576	28,130	0,554	0,020	0,307
11	27,578	28,060	0,482	0,017	0,233
12	27,579	27,350	-0,229	-0,008	0,053
13	27,581	26,650	-0,931	-0,035	0,867
14	27,583	26,910	-0,673	-0,025	0,452
15	27,584	26,880	-0,704	-0,026	0,496
16	27,586	26,830	-0,756	-0,028	0,571
17	27,587	26,580	-1,007	-0,038	1,015
18	27,589	28,720	1,131	0,039	1,279
19	27,591	29,120	1,529	0,053	2,339
20	27,592	28,740	1,148	0,040	1,317
21	27,594	28,600	1,006	0,035	1,012
22	27,596	28,540	0,944	0,033	0,892
23	27,597	29,550	1,953	0,066	3,813
24	27,599	29,420	1,821	0,062	3,317
25	27,600	30,010	2,410	0,080	5,806
26	27,602	29,470	1,868	0,063	3,489
27	27,604	28,960	1,356	0,047	1,840
28	27,605	28,780	1,175	0,041	1,380
29	27,607	29,760	2,153	0,072	4,636
30	27,609	29,010	1,401	0,048	1,964
31	27,610	29,320	1,710	0,058	2,924
32	27,612	28,040	0,428	0,015	0,183
33	27,613	28,040	0,427	0,015	0,182
34	27,615	28,000	0,385	0,014	0,148
35	27,617	28,280	0,663	0,023	0,440
36	27,618	28,510	0,892	0,031	0,795
37	27,620	28,120	0,500	0,018	0,250
38	27,621	26,400	-1,221	-0,046	1,492
39	27,623	26,500	-1,123	-0,042	1,261
40	27,625	26,510	-1,115	-0,042	1,243
41	27,626	25,580	-2,046	-0,080	4,188
42	27,628	26,020	-1,608	-0,062	2,586
43	27,630	26,790	-0,840	-0,031	0,705
44	27,631	26,780	-0,851	-0,032	0,725
45	27,633	26,760	-0,873	-0,033	0,762
46	27,634	26,850	-0,784	-0,029	0,615
47	27,636	26,660	-0,976	-0,037	0,953
48	27,638				
49	27,639				
50	27,641				
51	27,643				
52	27,644				

Fuente: Elaboración propia.

Tras la aplicación de la función promedio sobre los datos correspondientes a la columna  $\left(\frac{S_t - \hat{S}_t}{S_t}\right)$ , y expresión del resultado en términos porcentuales, el MAPE calculado ha sido:

**Tabla 6.3.3** Medidas de bondad de ajuste. Resultado de la implementación del MAPE.

MAPE (%)
0,443

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede comprobar el MAPE obtenido es inferior al 5%, nivel máximo de error que se ha considerado tolerable en este modelo de valoración.

### Error Cuadrático Medio (RSME)

El RMSE mide la distancia al cuadrado por término medio entre los valores observados y estimados. Estadísticamente no se fija un nivel de aceptación, como el que ha sido fijado en el MAPE, el análisis de los resultados se limita a que el valor obtenido sea lo menor posible.

Para el cálculo del RSME, se ha procedido al cálculo del error absoluto elevado al cuadrado, mostrado en la Tabla 6.3.2 en la última columna, con dichos datos se ha aplicado la función promedio y se ha obtenido el valor del RSME.

**Tabla 6.3.4** Medidas de bondad de ajuste. Resultado de la implementación del RSME.

RSME
1,304

Fuente: Elaboración propia.

El error cuadrático medio obtenido toma un nivel bajo, junto con el RSME y el valor del MAPE se puede afirmar que la bondad del ajuste del modelo tiene un nivel alto de aceptación.

### Intervalo de Confianza del 95%

En el Apartado 5.2 se ha propuesto el siguiente Intervalo de Confianza del 95% para el precio de las acciones del Grupo Alstom:

$$\left[ \hat{S}_t - 1,96\sqrt{np(1-p)}, \hat{S}_t + 1,96\sqrt{np(1-p)} \right],$$

por lo que, para obtener el límite inferior del intervalo, se selecciona la estimación del periodo  $t$  correspondiente que se desea calcular y se deduce la cifra resultante de multiplicar 1,96 por la raíz cuadrada del número total de periodos  $n = 52$  por el producto de las probabilidades asociadas al movimiento *up* y *down*. El límite superior del intervalo sigue el mismo procedimiento, pero se sustituye la resta por una suma del producto. En la Tabla 6.3.3 se muestran los resultados de los Intervalos de Confianza al 95% calculado para cada periodo  $t$  de la estimación del modelo del subyacente.

**Tabla 6.3.5** Intervalo de Confianza del 95%. Datos obtenidos para las acciones del Grupo Alstom.

<i>t</i>	IC superior	IC inferior
0	27,560	27,560
1	28,542	26,582
2	28,949	26,177
3	29,262	25,867
4	29,526	25,606
5	29,759	25,377
6	29,970	25,169
7	30,164	24,978
8	30,345	24,801
9	30,515	24,635
10	30,675	24,477
11	30,828	24,328
12	30,974	24,185
13	31,114	24,048
14	31,249	23,916
15	31,380	23,789
16	31,506	23,666
17	31,628	23,547
18	31,747	23,431
19	31,862	23,319
20	31,975	23,210
21	32,085	23,103
22	32,192	22,999
23	32,297	22,897
24	32,400	22,798
25	32,500	22,700
26	32,599	22,605
27	32,696	22,511
28	32,791	22,420
29	32,884	22,329
30	32,976	22,241
31	33,067	22,154
32	33,155	22,068
33	33,243	21,984
34	33,329	21,901
35	33,414	21,819
36	33,498	21,738
37	33,581	21,659
38	33,663	21,580
39	33,743	21,503
40	33,823	21,427
41	33,901	21,351
42	33,979	21,277
43	34,056	21,203
44	34,132	21,131
45	34,207	21,059
46	34,281	20,988
47	34,355	20,918
48	34,427	20,848
49	34,499	20,779
50	34,571	20,711
51	34,641	20,644
52	34,711	20,577

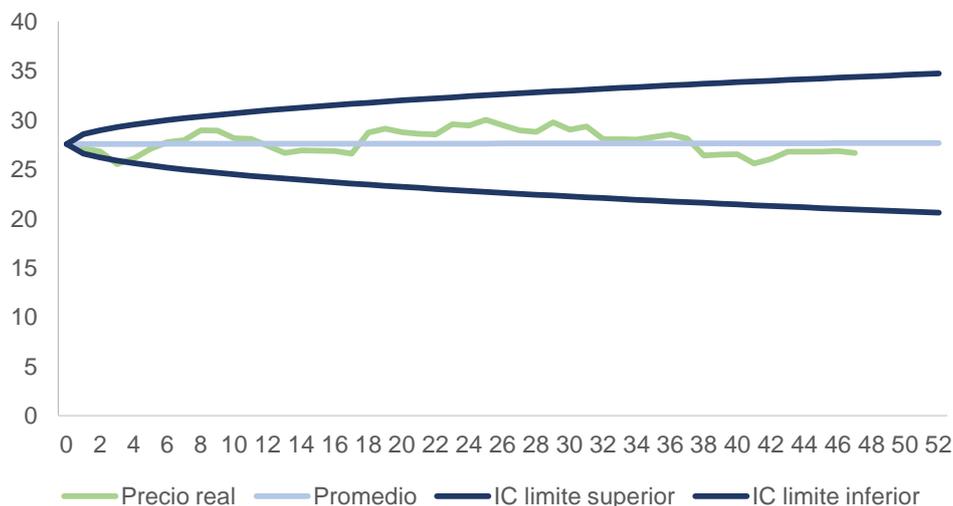
Fuente: Elaboración propia.

Mediante la obtención de estos intervalos se establecen los valores estimados entre los que puede fluctuar el precio real de la acción del Grupo Alstom.

### Gráfico comparativo del precio observado, estimado e ilustración del Intervalo de Confianza

Para finalizar la validación del modelo, se muestra en el Gráfico 6.31 el precio real de las acciones del Grupo Alstom, hasta la fecha de extracción de datos realizada  $t = 47$ , las estimaciones obtenidas mediante la aplicación del modelo CRR y el Intervalo de Confianza calculado a partir de los valores estimados, calculados hasta el periodo  $t = 52$ , semana en la cual finaliza el contrato de opciones *call* valorado. Recuérdese que por el solapamiento de plazos entre la fecha de defensa de esta memoria y el vencimiento de la opción no se han podido extraer el resto de cotizaciones del Grupo Alstom.

**Gráfico 6.3.1** Precio observado, valor estimado e Intervalo de Confianza al 95% para la acción del Grupo Alstom.



Fuente: Elaboración propia.

Como se observa en el Gráfico 6.3.1, el modelo propuesto para el subyacente a partir del CRR es capaz de incorporar dentro del Intervalo de Confianza las fluctuaciones reales de la acción del Grupo Alstom. Por tanto, el modelo propuesto recoge de forma satisfactoria el precio de las acciones de la sociedad durante el periodo seleccionado. Obsérvese que a partir del periodo  $t = 40$  la predicción puntual es bastante precisa. Cabe destacar que, pese a tratarse de un modelo discreto el ajuste del mismo es robusto, tal y como se ha indicado en el Apartado 6.1.1, es capaz de aproximarse a un modelo continuo, de hecho el gráfico comparativo calculado tiene un comportamiento muy parecido al que se obtendría mediante un modelo log-normal.

## 7. Conclusiones finales

La motivación de la presente memoria se ha basado en el estudio, desarrollo y aplicación de dos modelos discretos de valoración de opciones europeas mediante la implementación del modelo propuesto por Cox, Ross y Rubinstein y el modelo binomial implícito para modelizar la dinámica del activo subyacente. La valoración de un contrato de opciones reside en definitiva en el modelo del subyacente. Este modelo ha venido seguido del desarrollo de Cox, Ross y Rubinstein (CRR), dado que el modelo implícito, en definitiva, es una adaptación del mismo, que persigue dejar a un lado la presunción de que el modelo binomial se aproxima a una distribución de tipo gaussiana o normal. El análisis comparativo de ambos enfoques, mediante un ejemplo práctico con datos reales, ha sido el objetivo principal de esta memoria, donde se ha incluido el estudio riguroso de la base teórica de ambos modelos. Además, se ha incluido el análisis de la aproximación del modelo discreto CRR a un modelo continuo de tipo log-normal que suele ser el más utilizado en la modelización estocástica de subyacentes financieros.

La valoración se ha realizado sobre una opción de compra de tipo europeo sobre la acción del Grupo Alstom, que vence en fecha 18 de septiembre de 2015. En primer lugar, se ha desarrollado el árbol binomial del subyacente desde mediados de septiembre de 2014 hasta la fecha de expiración del contrato. Tal y como, se ha indicado a lo largo de la memoria, ha resultado complejo que coincidan las fechas exactas de inicio y vencimiento real del contrato con la valoración realizada, asimismo, se ha producido un solapamiento entre el plazo de entrega de esta memoria y fecha de expiración del contrato de opciones. No obstante, debe tenerse en cuenta que el presente trabajo es de investigación y pretende aplicar los modelos seleccionados y comprobar su robustez a través del uso de precios de cotización reales. Aunque podría haberse optado por tomar un período más corto de vida del contrato de la opción de compra, se ha preferido al mismo tiempo aprovechar el estudio para analizar si el modelo discreto funciona con históricos de cotizaciones más largos de lo que habitualmente se considera en muchos estudios prácticos (3-6 meses).

Como se ha indicado al inicio del presente capítulo, la esencia de la valoración reside en la predicción del precio del subyacente, dado que la valoración de la opción viene dada por su *pay-off* (para una *call*:  $\max(S_T - K; 0)$  para una *put*,  $\max(K - S_T; 0)$ ) actualizado a los periodos que correspondan. Se ha contrastado mediante tres medidas de bondad de ajuste (MAPE, RSME e Intervalos de Confianza al 95%) que la valoración del subyacente ha resultado robusta, por lo que consecuentemente la valoración de la prima de la opción puede considerarse correcta. Si bien, debe tenerse en cuenta, la asunción principal de los modelos utilizados, los cuales se basan en el principio de neutralidad del riesgo, el cual, desde una perspectiva real puede no resultar factible, el inversor no es neutral al riesgo, siempre exigirá mayores rentabilidades en función del riesgo asumido. Tal y como refleja el modelo de Markowitz, el cual permite la construcción de carteras de mínima varianza, es decir, con menor riesgo, pero que ineludiblemente llevando aparejada una menor rentabilidad potencial.

Por otra parte, se ha corroborado que el modelo discreto puede en determinadas ocasiones aproximarse a los resultados de un modelo continuo. Tal y como se ha mostrado, el modelo CRR se ha comportado de una forma muy similar a un modelo log-normal debido a la frecuencia del paso temporal seleccionado, en este caso de aplicación con un paso semanal, y al uso de un total de 52 periodos.

La aplicación del modelo IBT demuestra que la distribución de probabilidades, en este caso, es de tipo gaussiana, si bien ha resultado incompleta debido a la carencia de ciertos datos clave para su aplicación, en concreto los precios de compra y venta reales de los contratos, estos precios, en definitiva suponen la cotización diaria de los mismos. De este modo, se deduce la existencia de cierta incertidumbre al no conocer los efectos que podría haber supuesto implementar el modelo de forma completa, dado que los resultados obtenidos son muy similares a los ofrecidos por el CRR. Téngase en cuenta la teoría de Eugene Fama sobre los mercados eficientes si la misma es de aplicación completa al mercado en el que se opera, las cotizaciones no tienen memoria, es decir, sus precios futuros no dependen de lo que ocurrió en el pasado (Aragonés, y otros, 1994), y por tanto, la utilización de los rendimientos históricos para realizar valoraciones carecen de sentido. Por lo que la aplicación del IBT en este contexto puede resultar un tanto más correcta dado que no recurre a los rendimientos históricos.

## Bibliografía

### Libros y artículos

**Allen, Edward. 2007.** *Modeling with Itô Stochastic Differential Equations, Mathematical Modeling: Theory and Applications.* s.l. : Springer, 2007.

**Amat, Oriol. 2008.** *Ánàlisis económico-financiero.* Barcelona : Gestión 2000, S.L., 2008.

**Aragonés, José R. y Mascareñas, Juan. 1994.** *La eficiencia y el equilibrio en los mercados de capital.* Madrid : Ánàlisis financiero nº 64. Universidad Complutense de Madrid, 1994.

**Cox, John C, Ross, Stephen A y Rubinstein, Mark. 1979.** *Option pricing: a simplified approach.* s.l. : Journal of Financial Economics,7, 1979.

**Dumas, Bernad y Fleming, Jeff. 1998.** *Implied Volatility functions: empirical test.* s.l. : The journal of finance VOL. LIII No 6, 1998. Vol. LIII.

**Guijarro, Francisco. 2014.** *Finanzas Cuantitativas.* Valencia : Universidad Politècnica de Valencia, 2014.

**Herranz Martín, Felipe . 2001.** *Los derivados y el riesgo de mercado.* Madrid : Asociación Española de Contabilidad y Administración, 2001.

**Hull, John C. 2009.** *Introducción a los mercados de futuros y opciones.* s.l. : Pearson, 2009.

**Marín, José M. y Rubio, Gonzalo. 2010.** *Economía Financiera.* Barcelona : Antoni Bosch Editor, S.A., 2010.

**Milanesi, Gastón Silverio. 2012.** *Árboles binomiales implícitos (IBT) y la valuaciones de copiones financieras. Un caso de aplicación.* s.l. : Anàlisis Financiero nº 119, 2012.

**Moya Clemente, Ismael. 2015.** *El sistema financiero español.* Valencia : Universidad Politècnica de Valencia, 2015. Vol. Apuntes de Banca y Operaciones Financieras.

**Stampfli, Joseph y Goodman, Victor. 2002.** *Matemáticas para las finanzas.* s.l. : International Thomson Editores, S.A. , 2002.

### Páginas web

**Alstom. 2015.** [En línea] 2015. [Citado el: 15 de Agosto de 2015.]  
<http://www.alstom.com/worldwide/>.

**CAF. 2015.** [En línea] 2015. [Citado el: 18 de agosto de 2015.]  
<http://www.caf.es/upload/accionista/caf2014esp.pdf>.

**Bombardier INC. 2015.** [En línea] 2015. [Citado el: 18 de agosto de 2015.]  
<http://ir.bombardier.com/modules/misc/documents/62/74/04/42/14/Bombardier-Financial-Report-2014-en2.pdf>.

**Comisión Nacional del Mercado de Valores. 1992.**  
Orden de 8 de julio de 1992 por la que se autoriza el mercado de «MEFF, Sociedad Rectora de Productos Financieros . [En línea] 08 de 07 de 1992. [Citado el: 15 de 07 de 2015.]  
[http://www.cnmv.es/DocPortal/legislacion/ordenes/8julv\\_92.pdf](http://www.cnmv.es/DocPortal/legislacion/ordenes/8julv_92.pdf).

**Euronext. 2015.** 2014 A year in review. [En línea] Euronext N.V, 2015. [Citado el: 9 de julio de 2015.] <https://www.euronext.com/en/about-euronext>.

**Siemens AG. 2015.** [En línea] 27 de enero de 2015. [Citado el: 18 de agosto de 2015.]  
[http://www.siemens.com/investor/pool/en/investor\\_relations/Siemens\\_AR2014.pdf](http://www.siemens.com/investor/pool/en/investor_relations/Siemens_AR2014.pdf).

## Anexo 1. Glosario de términos utilizados

Activo	Todos aquellos bienes y derechos que posee una compañía, los cuales pueden ofrecer en un futuro un posible rendimiento o beneficio, siempre y cuando, sea susceptible de valoración económica
Análisis de sensibilidad	Técnica que permite analizar los efectos de una inversión ante modificaciones de ciertos parámetros de la misma, manteniéndose el resto constantes.
Árbol binomial	Diagrama que muestra los posibles valores que puede tomar el valor del subyacente y del contrato de opciones.
Call	Término inglés. Opción financiera que otorga el derecho de compra de un activo en una fecha futura.
Cartera	Combinación de dos o más activos financieros entre los que se reparte la inversión.
Cartera de riesgo puro	Cartera con rendimiento incierto.
Cartera híbrida	Cartera compuesta por un activo sin riesgo y un activo con riesgo.
<i>Ceteris paribus</i>	Expresión latina utilizada en economía que significa que el resto de variables (exceptuando la modificada) se mantienen constantes.
Dividendos	Fracción del beneficio empresarial distribuido al accionariado.
Índice bursátil	Parámetro que muestra la evolución en el tiempo de una serie de títulos que cotizan en Bolsa, la selección de los títulos que componen el índice puede radicar en la capitalización bursátil, volumen, etc. Pueden calcularse de forma ponderada o simple.
Movimiento browniano geométrico	Proceso estocástico que describe la evolución temporal de una variable aleatoria, este movimiento resulta adecuado para describir el comportamiento de variables financieras.
Oportunidad de arbitraje	Rendimiento libre de riesgo derivado de la inversión simultánea en dos o más mercados, en los que el precio de un mismo activo financiero es diferente.
Patrimonio neto y pasivo	Refleja las fuentes de financiación de la empresa. El patrimonio neto incluye aquella fuente de financiación interna que proviene tanto de las aportaciones del accionariado como de los rendimientos generados internamente no distribuidos. El pasivo incluye todas aquellas obligaciones futuras (a largo o a corto plazo) que la sociedad ha contraído con terceros.
Posición corta	Indica que el inversor vende activos financieros.
Posición larga	Indica que el inversor la compra de activos financieros.
Precio de cierre ajustado	Precio de cierre de la acción un día concreto el cual se ajusta a los dividendos repartidos y <i>splits</i> (aumento del número de acciones en circulación por la división del valor nominal de las mismas).
Precio de ejercicio	Valor de la opción en el momento en el que se ejercita e derecho de compra o venta.
Prima de la opción	Valor del contrato de opciones en el momento de su suscripción.
Principio de neutralidad al riesgo	Asunción para la construcción del modelo. Los inversores son indiferentes al riesgo. El rendimiento esperado de los títulos negociados es la tasa libre de riesgo y los flujos de efectivo futuros se descuentan a esa misma tasa.
Put	Término inglés. Opción financiera que otorga el derecho de venta de un activo en una fecha futura.

Realizable	Término que contablemente refleja todos aquellos activos corrientes que no se clasifiquen como existencias o medios líquidos.
Subyacente	Cualquier activo que se referencia a un contrato de derivados.
Tasa libre de riesgo	Rendimiento de un título en el que no existe incertidumbre sobre su retorno.
Valor intrínseco	Diferencia entre el precio del subyacente y el precio de ejercicio.
Volatilidad	Variabilidad en el precio de un activo, suele medirse con la desviación típica.

## Anexo 2. Glosario de abreviaturas empleadas

$u.m$	Unidades monetarias.
$S_T$	Valor del subyacente en el momento en el que se ejerce la opción.
$K$	Precio de ejercicio o <i>strike</i> .
$S_0$	Precio del subyacente al inicio de la valoración del contrato de opciones.
$r$	Tasa libre de riesgo.
$t$	Periodo en el que se realiza la valoración de la inversión.
$V_0$	Valor de la prima de la opción.
$S_u$	Trayectoria del árbol del subyacente. Movimiento hacia arriba de la acción.
$S_d$	Trayectoria del árbol del subyacente. Movimiento hacia abajo de la acción.
$T$	Fecha de vencimiento del contrato de opciones.
$U$	<i>Pay-off</i> en un instante concreto de la opción en la trayectoria <i>up</i> .
$D$	<i>Pay-off</i> en un instante concreto de la opción en la trayectoria <i>down</i> .
$p$	Probabilidad asociada a las trayectorias <i>up</i> .
$1 - p$	Probabilidad asociada a las trayectorias <i>down</i> .
$k$	Nodos que forman el diagrama de árbol.
$V_{nj}$	Valor de la opción en el periodo $n$ en el nodo $j$
$N$	Número de periodos totales del contrato
$j$	Nodo del árbol binomial.
$Q_{Nj}$	Probabilidad explícita correspondiente al nodo final del árbol binomial.
$Q_{Nj}^*$	Probabilidad implícita correspondiente al nodo final del árbol binomial.
$S_{Nj}$	Valor del subyacente correspondiente al nodo final del árbol binomial.
$c_{Nj}$	Valor de la opción call correspondiente al nodo final del árbol binomial.
$A$	Precio de compra real de la opción o <i>ask</i> .
$B$	Precio de venta real de la opción o <i>bid</i> .
$u$	Coefficiente de movimiento hacia arriba de la acción.
$d$	Coefficiente de movimiento hacia abajo de la acción.
$\delta$	Dividendo.

## Anexo 3. Características generales de los contratos de opciones de tipo europeo

### EUROPEAN STYLE OPTIONS ON EQUITY - CONTRACT SPECIFICATIONS – 10 SHARES

<b>OPTION STYLE</b>	European style, which can be exercised only at expiration.
<b>UNDERLYING INSTRUMENT</b>	Well-capitalized equity.
<b>CONTRACT SIZE</b>	Apart from exceptions or temporary adjustments for corporate actions, an equity option contract generally relates to 10 shares of the underlying equity security. The contract value is equal to the quoted option price in Euro multiplied by the number of underlying shares.
<b>MINIMUM PRICE MOVEMENT (TICK SIZE AND VALUE)</b>	The tick size of the premium quotation is equal to € 0.01 (€ 0.10 per contract).
<b>EXPIRY MONTHS</b>	Maturities are opened on the 4 nearest maturities of the March, September cycle.  For a subset of option classes on the list published by Euronext Paris, ten maturities are opened: 10 nearest maturities of the March and September cycle.  Equity options can be traded until their expiration date: the third Friday of the expiration month.  New expiration month are opened on the first trading day after a maturity expires.

Fuente: (Euronext, 2015).

## Anexo 4. Vencimiento y ciclo de vida de las opciones de tipo europeo. Euronext

### PARIS INDIVIDUAL EQUITY OPTIONS - EUROPEAN STYLE - EXPIRY CYCLES

GROUP 1	Cycle	Expiry Months Cycle	Lifetime (Months)
		Half-Yearly	2 nearest maturities of the June, December cycle
GROUP 2	Cycle	Expiry Months Cycle	Lifetime (Months)
		Half-Yearly	4 nearest maturities of the June, December cycle

### European Style Option Classes Physical Settlement

Group 1: 2 Half-Yearly		Group 2: 4 Half-Yearly	
Underlying Name	Mnemonic	Underlying Name	Mnemonic
Lagardère	MM3	Air Liquide	AI2
Sodexo	SW2	Crédit Agricole	AC3
Technicolor	TM3	EDF	DF3
Technip	TE3	Orange	FI3
		GDF Suez	GA3
		L'Oreal	OR2
		STMicroelectronics	ST3
		Total	TO2
		Vivendi	EX2
		Accor	AH2
		Air France-KLM	AF2
		Alcatel-Lucent	CG3
		Alstom	AS3
		AXA	CS9
		BNP Paribas	BN3
		Bouygues	EN9
		Cap Gemini	CA3
		Carrefour	CA2
		Casino Guichard-Perrachon	CO2
		Compagnie de Saint-Gobain	SG3
		Danone	BN2
		Airbus Group	EA3
		Kering	KR2
		LafargeHolcim	LG2
		LVMH	MC2
		Michelin	ML2
		Natixis	KN2
		Pernod Ricard	RI2
		Peugeot	UG2
		Renault	RN3
		Sanofi	SA3
		Schneider Electric	SU2
		Société Générale	GL3
		Suez Environnement	SE2
		TF1	TF3
		Thales	HO2
		Vallourec	VA2
		Veolia Environnement	VI3
		Vinci	DG2

Fuente: (Euronext, 2015).









## Anexo 7. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial de la opción. *Strike* 23 €

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03	8,27	8,52	8,77	9,02	9,28	9,53	9,79	10,05	10,31	10,57	10,84	11,11	11,38	11,65	11,93	12,20
	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03	8,27	8,52	8,77	9,02	9,28	9,53	9,79	10,05	10,31	10,57	10,84	11,11	11,38	11,65
		4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03	8,27	8,52	8,77	9,02	9,28	9,53	9,79	10,05	10,31	10,57	10,84	11,11
			3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03	8,27	8,52	8,77	9,02	9,28	9,53	9,79	10,05	10,31	10,57
				3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03	8,27	8,52	8,77	9,02	9,27	9,53	9,79	10,05
					3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03	8,27	8,52	8,77	9,02	9,27	9,53
						3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03	8,27	8,52	8,77	9,02
							3,09	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03	8,27	8,52
								2,88	3,09	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54	7,78	8,03
									2,68	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06	7,30	7,54
										2,48	2,68	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59	6,83	7,06
											2,29	2,48	2,68	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13	6,36	6,59
												2,09	2,28	2,48	2,68	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67	5,90	6,13
													1,90	2,09	2,28	2,48	2,68	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22	5,45	5,67
														1,72	1,90	2,09	2,28	2,48	2,68	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78	5,00	5,22
															1,54	1,71	1,90	2,09	2,28	2,48	2,68	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35	4,56	4,78
																1,36	1,53	1,71	1,89	2,08	2,28	2,47	2,67	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92	4,13	4,35
																	1,19	1,36	1,53	1,71	1,89	2,08	2,28	2,47	2,67	2,88	3,08	3,29	3,50	3,71	3,92
																		1,03	1,19	1,35	1,52	1,70	1,89	2,08	2,27	2,47	2,67	2,88	3,08	3,29	3,50
																			0,88	1,04	1,18	1,34	1,52	1,70	1,88	2,07	2,27	2,47	2,67	2,88	3,08
																				0,74	0,87	1,02	1,17	1,34	1,51	1,69	1,88	2,08	2,27	2,47	2,67
																					0,61	0,73	0,86	1,01	1,16	1,33	1,51	1,69	1,88	2,07	2,27
																						0,49	0,60	0,72	0,85	1,00	1,16	1,33	1,50	1,69	1,88
																							0,39	0,48	0,58	0,70	0,84	0,99	1,15	1,32	1,50
																								0,30	0,37	0,46	0,57	0,69	0,83	0,98	1,14
																									0,22	0,28	0,36	0,45	0,56	0,68	0,82
																										0,16	0,21	0,27	0,34	0,44	0,54
																											0,11	0,14	0,19	0,25	0,33
																												0,07	0,10	0,13	0,18
																													0,04	0,06	0,09
																														0,02	0,04
																															0,01







## Anexo 9. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial del subyacente. Tasa de interés libre de riesgo 0,5%. (1)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	
27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	
	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	
		27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	
			26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	
				26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	
					26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	
						26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	
							26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	
								25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	
									25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	
										25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	
											25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	
												25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	
													24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	
														24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	
															24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	
																24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	
																	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	
																		23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	
																			23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	
																				23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	
																					23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	
																						23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	
																							22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	
																								22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	
																									22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	
																										22,45	22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	
																											22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	
																													22,10	22,27	22,45	
																														21,92	22,10	
																															21,75	
																																21,58







## Anexo 10. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial del subyacente. Tasa de interés libre de riesgo 1%. (1)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31	32		
27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48		
	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92		
		27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38		
			26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84		
				26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31		
					26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79		
						26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27		
							26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77		
								25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27		
									25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78		
										25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30		
											25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82		
												25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36		
													24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90		
														24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44		
															24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00		
																24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56		
																	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13		
																		23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70		
																			23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29		
																				23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87		
																					23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47		
																						23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07		
																							23,00	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68		
																								22,82	23,00	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	
																									22,65	22,82	23,00	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	
																										22,48	22,65	22,82	23,00	23,17	23,35	23,54	23,72	
																											22,31	22,48	22,65	22,82	23,00	23,17	23,35	23,54
																												22,14	22,31	22,48	22,65	22,82	23,00	23,17
																													21,97	22,14	22,31	22,48	22,65	22,82
																														21,80	21,97	22,14	22,31	22,48
																															21,63	21,80	21,97	22,14
																																21,46	21,63	21,80
																																	21,29	21,46
																																		21,12
																																		20,95
																																		20,78
																																		20,61
																																		20,44
																																		20,27
																																		20,10
																																		19,93
																																		19,76
																																		19,59
																																		19,42
																																		19,25
																																		19,08
																																		18,91
																																		18,74
																																		18,57
																																		18,40
																																		18,23
																																		18,06
																																		17,89
																																		17,72
																																		17,55
																																		17,38

33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
35,76	36,04	36,33	36,62	36,91	37,20	37,49	37,79	38,09	38,39	38,70	39,00	39,31	39,62	39,94	40,25	40,57	40,90	41,22	41,55
35,20	35,48	35,76	36,04	36,33	36,62	36,91	37,20	37,49	37,79	38,09	38,39	38,70	39,00	39,31	39,62	39,94	40,25	40,57	40,90
34,65	34,92	35,20	35,48	35,76	36,04	36,33	36,62	36,91	37,20	37,49	37,79	38,09	38,39	38,70	39,00	39,31	39,62	39,94	40,25
34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48	35,76	36,04	36,33	36,62	36,91	37,20	37,49	37,79	38,09	38,39	38,70	39,00	39,31	39,62
33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48	35,76	36,04	36,33	36,62	36,91	37,20	37,49	37,79	38,09	38,39	38,70	39,00
33,03	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48	35,76	36,04	36,33	36,62	36,91	37,20	37,49	37,79	38,09	38,39
32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48	35,76	36,04	36,33	36,62	36,91	37,20	37,49	37,79
32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48	35,76	36,04	36,33	36,62	36,91	37,20
31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48	35,76	36,04	36,33	36,62
31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48	35,76	36,04
30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92	35,20	35,48
30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38	34,65	34,92
29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84	34,11	34,38
29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	33,84
28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31
28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79
27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27
27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77
26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27
26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78
26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30
25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82
25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36
24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90
24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44
24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00
23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56
23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13
22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70
22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29
22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87
21,92	22,10	22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47
21,58	21,75	21,92	22,10	22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07
21,24	21,41	21,58	21,75	21,92	22,10	22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68
	21,07	21,24	21,41	21,58	21,75	21,92	22,10	22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29
		20,91	21,07	21,24	21,41	21,58	21,75	21,92	22,10	22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91
			20,74	20,91	21,07	21,24	21,41	21,58	21,75	21,92	22,10	22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	23,17	23,35	23,54
				20,58	20,74	20,91	21,07	21,24	21,41	21,58	21,75	21,92	22,10	22,27	22,45	22,62	22,80	22,98	23,17
					20,42	20,58	20,74	20,91	21,07	21,24	21,41	21,58	21,75	21,92	22,10	22,27	22,45	22,62	22,80
						20,26	20,42	20,58	20,74	20,91	21,07	21,24	21,41	21,58	21,75	21,92	22,10	22,27	22,45
							20,10	20,26	20,42	20,58	20,74	20,91	21,07	21,24	21,41	21,58	21,75	21,92	22,10
								19,94	20,10	20,26	20,42	20,58	20,74	20,91	21,07	21,24	21,41	21,58	21,75
									19,78	19,94	20,10	20,26	20,42	20,58	20,74	20,91	21,07	21,24	21,41
										19,63	19,78	19,94	20,10	20,26	20,42	20,58	20,74	20,91	21,07
											19,47	19,63	19,78	19,94	20,10	20,26	20,42	20,58	20,74
												19,32	19,47	19,63	19,78	19,94	20,10	20,26	20,42
													19,17	19,32	19,47	19,63	19,78	19,94	20,10
														19,02	19,17	19,32	19,47	19,63	19,78
															18,87	19,02	19,17	19,32	19,47
																18,72	18,87	19,02	19,17
																	18,57	18,72	18,87
																		18,43	18,57
																			18,28

Fuente: Elaboración propia.





## Anexo 11. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial del subyacente. Dividendo semana 26 1,5 €/acción. (1)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	33,31	33,57	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63
	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,05	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10
		27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	31,30	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58
			26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	30,78	31,05	31,32	31,57	31,82	32,07
				26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	30,28	30,54	30,81	31,08	31,32	31,57
					26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	29,78	30,04	30,30	30,57	30,83	31,08
						26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	29,29	29,55	29,80	30,06	30,33	30,59
							26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	28,81	29,06	29,32	29,57	29,83	30,09
								25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	28,34	28,58	28,83	29,08	29,34	29,59
									25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	27,87	28,11	28,36	28,61	28,86	29,11
										25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	27,65	27,89	28,14	28,38	28,63	
											25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	26,96	27,19	27,43	27,67	27,91	
												25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	26,51	26,74	26,98	27,22	27,45	
													24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	26,07	26,30	26,53	26,77	27,00	
														24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	25,54	25,77	26,00	26,23	26,46	
															24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	25,22	25,45	25,68	25,91	26,14	
																24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	24,80	25,02	25,24	25,46	25,69	
																	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	24,39	24,60	24,82	25,04	25,26	
																		23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	23,98	24,19	24,41	24,63	24,84	
																			23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	23,58	23,79	24,00	24,22	24,43	
																				23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	23,19	23,40	23,60	23,81	24,03	
																					23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	22,80	23,01	23,21	23,42	23,63	
																						23,17	23,35	23,54	23,72	22,42	22,62	22,83	23,03	23,23	
																							22,98	23,17	23,35	23,54	22,25	22,44	22,65	22,85	
																								22,80	22,98	23,17	21,87	22,07	22,27	22,47	
																									22,62	21,32	21,51	21,70	21,90	22,09	
																										20,96	21,15	21,34	21,53	21,72	
																											20,79	20,98	21,17	21,36	
																												20,63	20,82	21,00	
																													20,47	20,65	
																														20,31	20,49
																															20,15

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
33,89	34,16	34,43	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,10	36,39	36,68	36,97	37,26	37,56	37,85	38,15	38,46	38,76	39,07	39,38	39,69
33,36	33,63	33,89	34,16	34,43	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,10	36,39	36,68	36,97	37,26	37,56	37,85	38,15	38,46	38,76	39,07
32,84	33,10	33,36	33,63	33,89	34,16	34,43	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,10	36,39	36,68	36,97	37,26	37,56	37,85	38,15	38,46
32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63	33,89	34,16	34,43	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,10	36,39	36,68	36,97	37,26	37,56	37,85
31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63	33,89	34,16	34,43	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,10	36,39	36,68	36,97	37,26
31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63	33,89	34,16	34,43	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,10	36,39	36,68
30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63	33,89	34,16	34,43	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,10
30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63	33,89	34,16	34,43	34,71	34,98	35,26	35,54
29,85	30,11	30,36	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63	33,89	34,16	34,43	34,71	34,98
29,36	29,62	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63	33,89	34,16	34,43
28,88	29,13	29,38	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36	33,63	33,89
28,40	28,65	28,90	29,15	29,40	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,36
27,94	28,18	28,43	28,67	28,92	29,17	29,40	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84
27,48	27,72	27,96	28,20	28,45	28,70	28,94	29,17	29,40	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33
27,02	27,26	27,50	27,74	27,98	28,22	28,47	28,72	28,94	29,17	29,40	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82
26,58	26,81	27,06	27,28	27,52	27,76	28,00	28,25	28,49	28,72	28,94	29,17	29,40	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32
26,14	26,37	26,60	26,83	27,07	27,30	27,54	27,78	28,02	28,27	28,49	28,72	28,94	29,17	29,40	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83
25,71	25,94	26,16	26,39	26,62	26,86	27,09	27,33	27,56	27,80	28,04	28,27	28,49	28,72	28,94	29,17	29,40	29,64	29,87	30,11	30,35
25,28	25,51	25,73	25,96	26,18	26,41	26,64	26,88	27,11	27,35	27,58	27,82	28,04	28,27	28,49	28,72	28,94	29,17	29,40	29,64	29,87
24,87	25,09	25,31	25,53	25,75	25,98	26,21	26,44	26,67	26,90	27,13	27,37	27,61	27,82	28,04	28,27	28,49	28,72	28,94	29,17	29,40
24,45	24,67	24,89	25,11	25,33	25,55	25,77	26,00	26,23	26,46	26,69	26,92	27,15	27,39	27,61	27,82	28,04	28,27	28,49	28,72	28,94
24,05	24,26	24,48	24,69	24,91	25,13	25,35	25,57	25,80	26,02	26,25	26,48	26,71	26,94	27,17	27,39	27,61	27,82	28,04	28,27	28,49
23,65	23,86	24,07	24,28	24,50	24,71	24,93	25,15	25,37	25,59	25,82	26,04	26,27	26,50	26,73	26,96	27,17	27,39	27,61	27,82	28,04
23,26	23,46	23,67	23,88	24,09	24,31	24,52	24,74	24,95	25,17	25,39	25,61	25,84	26,06	26,29	26,52	26,75	26,96	27,17	27,39	27,61
22,87	23,07	23,28	23,49	23,69	23,90	24,11	24,33	24,54	24,76	24,97	25,19	25,41	25,63	25,86	26,08	26,31	26,54	26,76	26,98	27,17
22,49	22,69	22,89	23,10	23,30	23,51	23,72	23,93	24,14	24,35	24,56	24,78	24,99	25,21	25,43	25,65	25,88	26,10	26,33	26,54	26,75
22,12	22,31	22,51	22,71	22,92	23,12	23,32	23,53	23,74	23,95	24,16	24,37	24,58	24,80	25,01	25,23	25,45	25,67	25,90	26,12	26,33
21,75	21,94	22,14	22,34	22,53	22,73	22,94	23,14	23,34	23,55	23,76	23,97	24,18	24,39	24,60	24,82	25,03	25,25	25,47	25,69	25,92
21,38	21,58	21,77	21,96	22,16	22,36	22,56	22,76	22,96	23,16	23,37	23,57	23,78	23,99	24,20	24,41	24,62	24,84	25,05	25,27	25,49
21,03	21,22	21,41	21,60	21,79	21,99	22,18	22,38	22,58	22,78	22,98	23,18	23,39	23,59	23,80	24,01	24,22	24,43	24,64	24,86	25,07
20,68	20,86	21,05	21,24	21,43	21,62	21,81	22,01	22,20	22,40	22,60	22,80	23,00	23,20	23,41	23,61	23,82	24,03	24,24	24,45	24,66
20,33	20,51	20,70	20,88	21,07	21,26	21,45	21,64	21,83	22,03	22,22	22,42	22,62	22,82	23,02	23,22	23,43	23,63	23,84	24,05	24,26
19,99	20,17	20,35	20,54	20,72	20,91	21,09	21,28	21,47	21,66	21,86	22,05	22,24	22,44	22,64	22,84	23,04	23,24	23,45	23,65	23,86
	19,83	20,01	20,19	20,37	20,56	20,74	20,93	21,11	21,30	21,49	21,68	21,88	22,07	22,26	22,46	22,66	22,86	23,06	23,26	23,46
		19,68	19,85	20,03	20,21	20,40	20,58	20,76	20,95	21,14	21,32	21,51	21,70	21,90	22,09	22,28	22,48	22,68	22,88	23,08
			19,52	19,70	19,88	20,06	20,24	20,42	20,60	20,78	20,97	21,16	21,34	21,53	21,72	21,92	22,11	22,30	22,50	22,70
				19,37	19,54	19,72	19,90	20,08	20,26	20,44	20,62	20,80	20,99	21,18	21,36	21,55	21,74	21,94	22,13	22,32
					19,22	19,39	19,56	19,74	19,92	20,10	20,28	20,46	20,64	20,82	21,01	21,20	21,38	21,57	21,76	21,95
						19,06	19,24	19,41	19,59	19,76	19,94	20,12	20,30	20,48	20,66	20,84	21,03	21,22	21,40	21,59
							18,91	19,09	19,26	19,43	19,61	19,78	19,96	20,14	20,32	20,50	20,68	20,86	21,05	21,23
								18,77	18,94	19,11	19,28	19,45	19,63	19,80	19,98	20,16	20,34	20,52	20,70	20,88
									18,62	18,79	18,96	19,13	19,30	19,47	19,65	19,82	20,00	20,18	20,36	20,54
										18,47	18,64	18,81	18,98	19,15	19,32	19,49	19,67	19,84	20,02	20,20
											18,33	18,49	18,66	18,83	19,00	19,17	19,34	19,51	19,69	19,86
												18,18	18,35	18,51	18,68	18,85	19,02	19,19	19,36	19,53
													18,04	18,20	18,37	18,53	18,70	18,87	19,04	19,21
														17,90	18,06	18,22	18,39	18,55	18,72	18,89
															17,76	17,92	18,08	18,24	18,41	18,57
																17,62	17,78	17,94	18,10	18,26
																	17,48	17,64	17,80	17,96
																		17,34	17,50	17,66
																			17,21	17,37

Fuente: Elaboración propia.





## Anexo 12. Análisis de sensibilidad. Árbol binomial del subyacente. Dividendo semana 26 2 €/acción. (1)

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30	31
27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,06	33,31	33,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10
	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	32,79	33,06	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58
		27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	32,27	32,53	30,80	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07
			26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	31,77	32,02	30,29	30,56	30,83	31,08	31,32	31,57
				26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	31,27	31,52	29,78	30,05	30,32	30,59	30,83	31,08
					26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	30,78	31,02	29,29	29,55	29,81	30,08	30,35	30,59
						26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	30,30	30,54	28,80	29,06	29,32	29,58	29,84	30,11
							26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	29,82	30,06	28,31	28,57	28,83	29,09	29,35	29,61
								26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	29,36	29,59	27,84	28,09	28,34	28,60	28,86	29,12	
									25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	27,37	27,62	27,87	28,12	28,38	28,63	
										25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	28,90	29,13	27,37	27,62	27,87	28,12	28,38	
											25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	28,44	28,67	26,91	27,16	27,40	27,65	27,90	
												25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	28,00	28,22	26,46	26,70	26,94	27,19	27,43	
													25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	27,56	27,78	26,01	26,25	26,49	26,73	26,97	
														25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	27,34	25,58	25,81	26,05	26,29	26,52	
															24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	27,13	25,38	25,61	25,84	26,08	
																24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	26,70	26,92	25,14	25,37	25,61	25,84
																	24,48	24,67	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	26,29	26,49	24,72	24,95	25,18	25,41
																		24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	25,87	26,08	24,30	24,52	24,75	24,98
																			24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	25,47	25,67	24,30	24,52	24,75	24,98
																				23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	25,27	24,48	24,70	24,92	25,14
																					23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	25,07	24,28	24,50	24,72
																						23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	24,87	24,08	24,30
																							23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48	24,68	23,89
																								23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10	24,29	24,48
																									22,98	23,17	23,35	23,54	23,72	23,91	24,10
																										22,80	22,98	23,17	23,35	23,54	23,72
																											22,62	22,80	22,98	23,17	23,35
																											20,46	20,66	20,85	21,05	21,24
																												20,30	20,49	20,69	20,88
																													20,14	20,33	20,52
																														19,98	20,17
																															20,01
																															19,83
																															19,67

32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52
33,37	33,63	33,90	34,16	34,44	34,71	34,99	35,26	35,54	35,82	36,11	36,39	36,68	36,97	37,26	37,56	37,86	38,16	38,46	38,76	39,07
32,84	33,10	33,37	33,63	33,90	34,16	34,44	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,11	36,39	36,68	36,97	37,26	37,56	37,86	38,16	38,46
32,33	32,58	32,84	33,10	33,37	33,63	33,90	34,16	34,44	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,11	36,39	36,68	36,97	37,26	37,56	37,86
31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,37	33,63	33,90	34,16	34,44	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,11	36,39	36,68	36,97	37,26
31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,37	33,63	33,90	34,16	34,44	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,11	36,39	36,68
30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,37	33,63	33,90	34,16	34,44	34,71	34,98	35,26	35,54	35,82	36,11
30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,37	33,63	33,90	34,16	34,44	34,71	34,98	35,26	35,54
29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,37	33,63	33,90	34,16	34,44	34,71	34,98
29,38	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,37	33,63	33,90	34,16	34,44
28,89	29,15	29,41	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,37	33,63	33,90
28,41	28,66	28,92	29,18	29,41	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84	33,10	33,37
27,93	28,18	28,44	28,69	28,95	29,18	29,41	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33	32,58	32,84
27,46	27,71	27,96	28,21	28,46	28,72	28,95	29,18	29,41	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82	32,07	32,33
27,00	27,25	27,49	27,74	27,99	28,24	28,49	28,72	28,95	29,18	29,41	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32	31,57	31,82
26,55	26,79	27,03	27,28	27,52	27,77	28,02	28,27	28,49	28,72	28,95	29,18	29,41	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83	31,08	31,32
26,11	26,34	26,58	26,82	27,06	27,31	27,55	27,80	28,05	28,27	28,49	28,72	28,95	29,18	29,41	29,64	29,87	30,11	30,35	30,59	30,83
25,67	25,90	26,14	26,37	26,61	26,85	27,09	27,33	27,58	27,83	28,05	28,27	28,49	28,72	28,95	29,18	29,41	29,64	29,87	30,11	30,35
25,24	25,47	25,70	25,93	26,16	26,40	26,64	26,88	27,12	27,36	27,61	27,83	28,05	28,27	28,49	28,72	28,95	29,18	29,41	29,64	29,87
24,81	25,04	25,27	25,50	25,73	25,96	26,19	26,43	26,67	26,91	27,15	27,39	27,61	27,83	28,05	28,27	28,49	28,72	28,95	29,18	29,41
24,39	24,62	24,84	25,07	25,29	25,52	25,76	25,99	26,22	26,46	26,70	26,93	27,18	27,39	27,61	27,83	28,05	28,27	28,49	28,72	28,95
23,98	24,20	24,42	24,65	24,87	25,10	25,32	25,55	25,78	26,02	26,25	26,49	26,72	26,96	27,18	27,39	27,61	27,83	28,05	28,27	28,49
23,58	23,79	24,01	24,23	24,45	24,67	24,90	25,12	25,35	25,58	25,81	26,04	26,28	26,51	26,75	26,96	27,18	27,39	27,61	27,83	28,05
23,18	23,39	23,61	23,82	24,04	24,26	24,48	24,70	24,93	25,15	25,38	25,61	25,84	26,07	26,30	26,54	26,75	26,96	27,18	27,39	27,61
22,78	22,99	23,21	23,42	23,63	23,85	24,07	24,29	24,51	24,73	24,95	25,18	25,41	25,64	25,87	26,10	26,33	26,54	26,75	26,96	27,18
22,40	22,61	22,81	23,02	23,24	23,45	23,66	23,88	24,10	24,32	24,54	24,76	24,98	25,21	25,43	25,66	25,89	26,12	26,33	26,54	26,75
22,02	22,22	22,43	22,63	22,84	23,05	23,26	23,48	23,69	23,91	24,12	24,34	24,56	24,79	25,01	25,23	25,46	25,69	25,92	26,12	26,33
21,64	21,84	22,05	22,25	22,46	22,66	22,87	23,08	23,29	23,51	23,72	23,94	24,15	24,37	24,59	24,81	25,04	25,26	25,49	25,71	25,92
21,27	21,47	21,67	21,87	22,08	22,28	22,49	22,69	22,90	23,11	23,32	23,53	23,75	23,96	24,18	24,40	24,62	24,84	25,06	25,29	25,51
20,91	21,11	21,30	21,50	21,70	21,90	22,10	22,31	22,51	22,72	22,93	23,14	23,35	23,56	23,77	23,99	24,21	24,42	24,64	24,86	25,09
20,55	20,75	20,94	21,14	21,33	21,53	21,73	21,93	22,13	22,34	22,54	22,75	22,96	23,16	23,37	23,59	23,80	24,02	24,23	24,45	24,67
20,20	20,39	20,58	20,78	20,97	21,17	21,36	21,56	21,76	21,96	22,16	22,36	22,57	22,77	22,98	23,19	23,40	23,61	23,83	24,04	24,26
19,86	20,04	20,23	20,42	20,61	20,81	21,00	21,19	21,39	21,59	21,79	21,99	22,19	22,39	22,60	22,80	23,01	23,22	23,43	23,64	23,85
19,52	19,70	19,89	20,07	20,26	20,45	20,64	20,83	21,03	21,22	21,42	21,62	21,81	22,01	22,22	22,42	22,62	22,83	23,03	23,24	23,45
	19,36	19,55	19,73	19,92	20,10	20,29	20,48	20,67	20,86	21,06	21,25	21,45	21,64	21,84	22,04	22,24	22,44	22,65	22,85	23,06
		19,21	19,39	19,57	19,76	19,94	20,13	20,32	20,51	20,70	20,89	21,08	21,28	21,47	21,67	21,87	22,07	22,27	22,47	22,67
			19,06	19,24	19,42	19,60	19,79	19,97	20,16	20,35	20,54	20,73	20,92	21,11	21,30	21,50	21,70	21,89	22,09	22,29
				18,91	19,09	19,27	19,45	19,63	19,82	20,00	20,19	20,37	20,56	20,75	20,94	21,14	21,33	21,52	21,72	21,92
					18,76	18,94	19,12	19,30	19,48	19,66	19,84	20,03	20,21	20,40	20,59	20,78	20,97	21,16	21,36	21,55
						18,61	18,79	18,97	19,14	19,32	19,51	19,69	19,87	20,05	20,24	20,43	20,62	20,80	21,00	21,19
								18,47	18,64	18,82	18,99	19,17	19,35	19,53	19,71	19,90	20,08	20,27	20,45	20,64
									18,32	18,50	18,67	18,84	19,02	19,20	19,38	19,56	19,74	19,92	20,11	20,29
										18,18	18,35	18,52	18,70	18,87	19,05	19,23	19,41	19,59	19,77	19,95
											18,03	18,21	18,38	18,55	18,72	18,90	19,08	19,25	19,43	19,61
												17,89	18,06	18,23	18,40	18,58	18,75	18,93	19,10	19,28
													17,75	17,92	18,09	18,26	18,43	18,60	18,78	18,95
														17,61	17,78	17,95	18,12	18,29	18,46	18,63
															17,47	17,64	17,81	17,97	18,14	18,31
																17,34	17,50	17,67	17,83	18,00
																	17,20	17,36	17,53	17,69
																		17,23	17,39	17,55
																			17,09	17,25
																				16,96
																				16,87

Fuente: Elaboración propia.





## Anexo 13. Probabilidades intermedias árbol binomial del subyacente.

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
1,00	5,017E-01	2,517E-01	1,263E-01	6,338E-02	3,180E-02	1,595E-02	8,005E-03	4,016E-03	2,015E-03	1,011E-03	5,073E-04	2,545E-04	1,277E-04	6,408E-05	3,215E-05	1,613E-05	8,094E-06	4,061E-06	2,038E-06	1,022E-06	5,130E-07	2,574E-07	1,291E-07	6,479E-08	3,251E-08	1,631E-08
	4,983E-01	5,000E-01	3,763E-01	2,517E-01	1,579E-01	9,506E-02	5,565E-02	3,191E-02	1,801E-02	1,004E-02	5,542E-03	3,033E-03	1,640E-03	8,909E-04	4,789E-04	2,563E-04	1,366E-04	7,250E-05	3,845E-05	2,031E-05	1,070E-05	5,623E-06	2,950E-06	1,544E-06	8,071E-07	4,211E-07
		2,483E-01	3,737E-01	3,750E-01	3,136E-01	2,360E-01	1,658E-01	1,109E-01	7,154E-02	4,487E-02	2,752E-02	1,657E-02	9,824E-03	5,751E-03	3,329E-03	1,909E-03	1,086E-03	6,128E-04	3,436E-04	1,916E-04	1,062E-04	5,863E-05	3,222E-05	1,764E-05	9,618E-06	5,228E-06
			1,237E-01	2,483E-01	3,114E-01	3,125E-01	2,744E-01	2,203E-01	1,658E-01	1,188E-01	8,198E-02	5,484E-02	3,577E-02	2,284E-02	1,433E-02	8,847E-03	5,300E-03	3,245E-03	1,934E-03	1,141E-03	6,681E-04	3,882E-04	2,240E-04	1,284E-04	7,322E-05	4,153E-05
				6,163E-02	1,546E-01	2,327E-01	2,725E-01	2,734E-01	2,469E-01	2,065E-01	1,628E-01	1,225E-01	8,881E-02	6,238E-02	4,268E-02	2,855E-02	1,873E-02	1,209E-02	7,681E-03	4,817E-03	2,986E-03	1,831E-03	1,112E-03	6,696E-04	3,990E-04	2,372E-04
					3,071E-02	9,245E-02	1,623E-01	2,172E-01	2,452E-01	2,461E-01	2,264E-01	1,947E-01	1,587E-01	1,239E-01	9,325E-02	6,805E-02	4,837E-02	3,360E-02	2,268E-02	1,531E-02	1,008E-02	6,546E-03	4,197E-03	2,660E-03	1,688E-03	1,036E-03
						1,530E-02	5,374E-02	1,079E-01	1,623E-01	2,036E-01	2,348E-01	2,256E-01	2,102E-01	1,846E-01	1,543E-01	1,239E-01	9,607E-02	7,230E-02	5,302E-02	3,800E-02	2,670E-02	1,842E-02	1,250E-02	8,364E-03	5,522E-03	3,602E-03
							7,624E-03	3,060E-02	6,909E-02	1,156E-01	1,594E-01	1,920E-01	2,087E-01	2,095E-01	1,970E-01	1,758E-01	1,499E-01	1,231E-01	9,778E-02	7,548E-02	5,681E-02	4,180E-02	3,015E-02	2,136E-02	1,488E-02	1,022E-02
								3,799E-03	1,715E-02	4,303E-02	7,917E-02	1,192E-01	1,555E-01	1,820E-01	1,957E-01	1,964E-01	1,861E-01	1,681E-01	1,457E-01	1,218E-01	9,872E-02	7,784E-02	5,988E-02	4,507E-02	3,326E-02	2,410E-02
									1,893E-03	9,497E-03	2,621E-02	5,260E-02	8,577E-02	1,205E-01	1,511E-01	1,733E-01	1,848E-01	1,855E-01	1,768E-01	1,613E-01	1,416E-01	1,202E-01	9,911E-02	7,957E-02	6,238E-02	4,787E-02
										9,431E-04	5,205E-03	1,587E-02	3,407E-02	5,983E-02	9,005E-02	1,205E-01	1,468E-01	1,657E-01	1,756E-01	1,762E-01	1,688E-01	1,552E-01	1,378E-01	1,185E-01	9,911E-02	8,081E-02
											4,699E-04	2,829E-03	9,227E-03	2,160E-02	4,065E-02	6,527E-02	9,278E-02	1,197E-01	1,426E-01	1,590E-01	1,676E-01	1,682E-01	1,617E-01	1,498E-01	1,342E-01	1,167E-01
												2,341E-04	1,527E-03	5,364E-03	1,346E-02	2,701E-02	4,607E-02	6,304E-02	9,444E-02	1,185E-01	1,387E-01	1,531E-01	1,606E-01	1,612E-01	1,555E-01	1,449E-01
													1,167E-04	8,194E-04	3,084E-03	8,252E-03	1,760E-02	3,178E-02	5,050E-02	7,239E-02	9,534E-02	1,169E-01	1,340E-01	1,477E-01	1,544E-01	1,550E-01
														5,812E-05	4,375E-04	1,756E-03	4,992E-03	1,127E-02	2,149E-02	3,594E-02	5,410E-02	7,465E-02	9,572E-02	1,153E-01	1,314E-01	1,429E-01
															2,896E-05	2,325E-04	9,916E-04	2,965E-03	7,114E-03	1,428E-02	2,507E-02	3,954E-02	5,703E-02	7,631E-02	9,572E-02	1,135E-01
																1,443E-05	1,231E-04	5,568E-04	1,766E-03	4,431E-03	9,337E-03	1,718E-02	2,832E-02	4,263E-02	5,941E-02	7,750E-02
																	7,190E-06	6,493E-05	3,095E-04	1,035E-03	2,727E-03	6,021E-03	1,158E-02	1,992E-02	3,123E-02	4,527E-02
																		3,415E-05	1,714E-04	6,018E-04	1,661E-03	3,833E-03	7,693E-03	1,379E-02	2,248E-02	
																		1,785E-06	1,791E-05	9,437E-05	3,472E-04	1,002E-03	2,412E-03	5,044E-03	9,399E-03	
																			8,804E-07	3,415E-06	1,714E-05	4,892E-05	1,303E-04	5,989E-04	1,503E-03	3,267E-03
																				4,431E-07	4,892E-06	2,822E-05	1,133E-04	3,553E-04	9,269E-04	
																					2,208E-07	2,548E-06	1,534E-05	6,415E-05	2,092E-04	
																						1,100E-07	1,325E-06	8,309E-06	3,613E-05	
																							5,482E-08	6,876E-07	4,485E-06	
																								2,731E-08	3,563E-07	
																									1,261E-08	

27	28	29	30	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	
8,184E-09	4,106E-09	2,060E-09	1,034E-09	5,187E-10	2,602E-10	1,306E-10	6,551E-11	3,287E-11	1,640E-11	8,275E-12	4,152E-12	2,083E-12	1,045E-12	5,244E-13	2,631E-13	1,320E-13	6,624E-14	3,324E-14	1,668E-14	8,367E-15	4,198E-15	2,106E-15	1,057E-15	5,303E-16	2,661E-16	0
2,194E-07	1,142E-07	5,933E-08	3,080E-08	1,597E-08	8,270E-09	4,279E-09	2,212E-09	1,142E-09	5,896E-10	3,041E-10	1,567E-10	8,068E-11	4,152E-11	2,136E-11	1,097E-11	5,638E-12	2,894E-12	1,485E-12	7,618E-13	3,905E-13	2,001E-13	1,025E-13	5,248E-14	2,688E-14	1,374E-14	1
2,833E-06	1,531E-06	8,249E-07	4,435E-07	2,378E-07	1,273E-07	6,799E-08	3,624E-08	1,929E-08	1,025E-08	5,438E-09	2,878E-09	1,522E-09	8,040E-10	4,241E-10	2,234E-10	1,176E-10	6,180E-11	3,245E-11	1,702E-11	8,920E-12	4,670E-12	2,443E-12	1,277E-12	6,667E-13	3,479E-13	2
2,344E-05	1,317E-05	7,373E-06	4,110E-06	2,283E-06	1,264E-06	6,977E-07	3,839E-07	2,107E-07	1,153E-07	6,297E-08	3,430E-08	1,864E-08	1,011E-08	5,475E-09	2,968E-09	1,596E-09	8,592E-10	4,619E-10	2,479E-10	1,302E-10	7,111E-11	3,729E-11	1,981E-11	1,081E-11	5,758E-12	3
1,397E-04	8,177E-05	4,759E-05	2,755E-05	1,587E-05	9,101E-06	5,196E-06	2,955E-06	1,674E-06	9,448E-07	5,315E-07	2,981E-07	1,666E-07	9,290E-08	5,165E-08	2,864E-08	1,585E-08	8,745E-09	4,816E-09	2,646E-09	1,451E-09	7,944E-10	4,340E-10	2,367E-10	1,289E-10	7,005E-11	4
6,381E-04	3,897E-04	2,363E-04	1,423E-04	8,511E-05	5,061E-05	2,993E-05	1,761E-05	1,031E-05	6,005E-06	3,484E-06	2,013E-06	1,158E-06	6,642E-07	3,796E-07	2,162E-07	1,227E-07	6,948E-08	3,922E-08	2,208E-08	1,240E-08	6,942E-09	3,879E-09	2,163E-09	1,203E-09	6,678E-10	5
2,323E-03	1,484E-03	9,386E-04	5,887E-04	3,663E-04	2,282E-04	1,387E-04	8,450E-05	5,117E-05	3,081E-05	1,845E-05	1,099E-05	6,518E-06	3,848E-06	2,282E-06	1,324E-06	7,719E-07	4,485E-07	2,596E-07	1,498E-07	8,616E-08	4,941E-08	2,825E-08	1,611E-08	9,159E-09	5,195E-09	6
6,922E-03	4,631E-03	3,063E-03	2,004E-03	1,299E-03	8,342E-04	5,313E-04	3,357E-04	2,105E-04	1,311E-04	8,114E-05	4,990E-05	3,052E-05	1,856E-05	1,123E-05	6,761E-06	4,052E-06	2,418E-06	1,436E-06	8,501E-07	5,012E-07	2,944E-07	1,723E-07	1,005E-07	5,847E-08	3,390E-08	7
1,718E-02	1,207E-02	8,364E-03	5,722E-03	3,870E-03	2,589E-03	1,715E-03	1,125E-03	7,317E-04	4,720E-04	3,022E-04	1,920E-04	1,212E-04	7,603E-05	4,739E-05	2,937E-05	1,811E-05	1,110E-05	6,776E-06	4,115E-06	2,488E-06	1,498E-06	9,884E-07	5,366E-07	3,193E-07	1,894E-07	8
3,603E-02	2,664E-02	1,938E-02	1,389E-02	9,821E-03	6,866E-03	4,730E-03	3,227E-03	2,180E-03	1,458E-03	9,669E-04	6,357E-04	4,146E-04	2,684E-04	1,728E-04	1,102E-04	6,993E-05	4,411E-05	2,766E-05	1,726E-05	1,071E-05	6,613E-06	4,064E-06	2,487E-06	1,515E-06	9,194E-07	9
6,440E-02	5,026E-02	3,849E-02	2,807E-02	2,146E-02	1,566E-02	1,127E-02	8,012E-03	5,628E-03	3,910E-03	2,688E-03	1,831E-03	1,235E-03	8,264E-04	5,484E-04	3,611E-04	2,361E-04	1,533E-04	9,889E-05	6,340E-05	4,041E-05	2,561E-05	1,614E-05	1,013E-05	6,320E-06	3,926E-06	10
9,883E-02	8,167E-02	6,602E-02	5,230E-02	4,086E-02	3,110E-02	2,341E-02	1,736E-02	1,270E-02	9,178E-03	6,553E-03	4,628E-03	3,234E-03	2,238E-03	1,535E-03	1,043E-03	7,034E-04	4,706E-04	3,125E-04	2,061E-04	1,350E-04	8,786E-05	5,684E-05	3,656E-05	2,339E-05	1,489E-05	11
1,309E-01	1,149E-01	9,834E-02	8,224E-02	6,732E-02	5,405E-02	4,261E-02	3,304E-02	2,522E-02	1,899E-02	1,410E-02	1,034E-02	7,494E-03	5,371E-03	3,810E-03	2,675E-03	1,863E-03	1,286E-03	8,792E-04	5,968E-04	4,021E-04	2,690E-04	1,788E-04	1,180E-04	7,743E-05	5,050E-05	12
1,499E-01	1,404E-01	1,277E-01	1,131E-01	9,771E-02	8,257E-02	6,836E-02	5,553E-02	4,433E-02	3,481E-02	2,699E-02	2,054E-02	1,546E-02	1,149E-02	8,449E-03	6,133E-03	4,411E-03	3,141E-03	2,216E-03	1,550E-03	1,075E-03	7,399E-04	5,052E-04	3,426E-04	2,307E-04	1,543E-04	13
1,489E-01	1,484E-01	1,449E-01	1,364E-01	1,248E-01	1,113E-01	9,696E-02	8,272E-02	6,917E-02	5,679E-02	4,584E-02	3,642E-02	2,859E-02	2,200E-02	1,676E-02	1,262E-02	9,386E-03	6,907E-03	5,031E-03	3,628E-03	2,593E-03	1,837E-03	1,290E-03	8,901E-04	6,218E-04	4,269E-04	14
1,282E-01	1,385E-01	1,439E-01	1,444E-01	1,404E-01	1,326E-01	1,220E-01	1,095E-01	9,617E-02	8,272E-02	6,980E-02	5,786E-02	4,718E-02	3,787E-02	2,997E-02	2,329E-02	1,802E-02	1,327E-02	1,032E-02	7,867E-03	5,665E-03	4,134E-03	2,989E-03	2,143E-03	1,523E-03	1,074E-03	15
9,545E-02	1,117E-01	1,251E-01	1,345E-01	1,394E-01	1,399E-01	1,363E-01	1,292E-01	1,194E-01	1,078E-01	9,531E-02	8,260E-02	7,027E-02	5,876E-02	4,836E-02	3,919E-02	3,132E-02	2,469E-02	1,922E-02	1,479E-02	1,125E-02	8,468E-03	6,308E-03	4,655E-03	3,403E-03	2,466E-03	16
6,133E-02	7,833E-02	9,498E-02	1,100E-01	1,222E-01	1,308E-01	1,353E-01	1,356E-01	1,325E-01	1,260E-01	1,169E-01	1,061E-01	9,442E-02	8,239E-02	7,062E-02	5,962E-02	4,939E-02	4,039E-02	3,257E-02	2,592E-02	2,037E-02	1,583E-02	1,216E-02	9,245E-03	6,968E-03	5,187E-03	17
3,384E-02	4,754E-02	6,288E-02	7,887E-02	9,437E-02	1,082E-01	1,195E-01	1,274E-01	1,316E-01	1,320E-01	1,290E-01	1,230E-01	1,146E-01	1,045E-01	9,350E-02	8,210E-02	7,085E-02	6,016E-02	5,031E-02	4,147E-02	3,372E-02	2,707E-02	2,147E-02	1,683E-02	1,305E-02	1,002E-02	18
1,592E-02	2,485E-02	3,615E-02	4,947E-02	6,412E-02	7,919E-02	9,366E-02	1,065E-01	1,195E-01	1,242E-01	1,281E-01	1,286E-01	1,258E-01	1,202E-01	1,124E-01	1,030E-01	9,258E-02	8,175E-02	7,099E-02	6,069E-02	5,111E-02	4,245E-02	3,479E-02	2,815E-02	2,251E-02	1,780E-02	19
6,322E-03	1,110E-02	1,795E-02	2,702E-02	3,820E-02	5,112E-02	6,510E-02	7,933E-02	9,288E-02	1,048E-01	1,145E-01	1,213E-01	1,249E-01	1,253E-01	1,228E-01	1,176E-01	1,103E-01	1,015E-01	9,165E-02	8,136E-02	7,106E-02	6,112E-02	5,152E-02	4,333E-02	3,577E-02	2,916E-02	20
2,093E-03	4,290E-03	7,639E-03	1,278E-02	1,987E-02	2,901E-02	4,002E-02	5,252E-02	6,588E-02	7,933E-02	9,205E-02	1,032E-01	1,122E-01	1,185E-01	1,219E-01	1,224E-01	1,200E-01	1,152E-01	1,084E-01	1,000E-01	9,073E-02	8,093E-02	7,105E-02	6,147E-02	5,243E-02	4,413E-02	21
5,668E-04	1,327E-03	2,759E-03	5,191E-03	8,970E-03	1,440E-02	2,168E-02	3,082E-02	4,163E-02	5,371E-02	6,648E-02	7,922E-02	9,118E-02	1,017E-01	1,101E-01	1,160E-01	1,192E-01	1,196E-01	1,174E-01	1,129E-01	1,065E-01	9,863E-02	8,981E-02	8,047E-02	7,100E-02	6,175E-02	22
1,224E-04	3,438E-04	8,338E-04	1,793E-03	3,486E-03	6,219E-03	1,030E-02	1,597E-02	2,327E-02	3,247E-02	4,305E-02	5,472E-02	6,693E-02	7,901E-02	9,090E-02	1,002E-01	1,080E-01	1,136E-01	1,166E-01	1,170E-01	1,149E-01	1,107E-01	1,047E-01	9,728E-02	8,890E-02	7,998E-02	23
2,025E-05	7,113E-05	2,070E-04	5,193E-04	1,154E-03	2,316E-03	4,260E-03	7,268E-03	1,160E-02	1,746E-02	2,494E-02	3,397E-02	4,431E-02	5,558E-02	6,726E-02	7,874E-02	8,941E-02	9,869E-02	1,061E-01	1,113E-01	1,141E-01	1,145E-01	1,126E-01	1,087E-01	1,030E-01	9,597E-02	24
2,413E-06	1,190E-05	4,111E-05	1,238E-04	3,208E-04	7,369E-04	1,523E-03	2,887E-03	5,075E-03	8,325E-03	1,288E-02	1,889E-02	2,640E-02	3,532E-02	4,542E-02	5,630E-02	6,748E-02	7,841E-02	8,861E-02	9,728E-02	1,043E-01	1,092E-01	1,119E-01	1,122E-01	1,105E-01	1,067E-01	25
1,844E-07	1,295E-06	6,281E-06	2,364E-05	7,353E-05	1,968E-04	4,654E-04	9,904E-04	1,995E-03	3,498E-03	5,903E-03	9,379E-03	1,412E-02	2,024E-02	2,775E-02	3,655E-02	4,630E-02	5,690E-02	6,761E-02	7,803E-02	8,762E-02	9,592E-02	1,025E-01	1,072E-01	1,097E-01	1,101E-01	26
6,781E-09	9,526E-08	6,930E-07	3,477E-06	1,352E-05	4,342E-05	1,196E-04	2,920E-04	6,105E-04	1,286E-03	2,388E-03	4,139E-03	6,750E-03	1,042E-02	1,531E-02	2,151E-02	2,901E-02	3,767E-02	4,725E-02	5,740E-02	6,768E-02	7,761E-02	8,673E-02	9,461E-02	1,009E-01	1,053E-01	27
	3,379E-09	4,916E-08	3,700E-07	1,918E-06	7,700E-06	2,550E-05	7,249E-05	1,819E-04	4,106E-04	8,470E-04	1,615E-03	2,873E-03	4,805E-03	7,603E-03	1,144E-02	1,646E-02	2,271E-02	3,016E-02	3,868E-02	4,800E-02	5,781E-02	6,768E-02	7,717E-02	8,586E-02	9,334E-02	28
		1,883E-09	2,534E-08	1,971E-07	1,055E-06	4,366E-06	1,489E-05	4,359E-05	1,125E-04	2,610E-04	5,530E-04	1,082E-03	1,974E-03	3,385E-03	5,486E-03	8,455E-03	1,244E-02	1,756E-02	2,384E-02	3,123E-02	3,969E-02	4,867E-02	5,814E-02	6,762E-02	7,671E-02	29
		8,388E-10	1,305E-08	1,047E-07	5,780E-07	2,465E-06	8,656E-06	2,606E-05	6,913E-05	1,647E-04	3,582E-04	7,189E-04	1,344E-03	2,361E-03	3,918E-03	6,179E-03	9,300E-03	1,342E-02	1,861E-02	2,490E-02	3,222E-02	4,041E-02	4,924E-02	5,840E-02	6,740E-02	30
			4,179E-10	6,710E-09	5,555E-08	2,448E-07	9,172E-07	7,773E-07	5,010E-06	1,550E-05	4,222E-05	1,033E-04	2,303E-04	4,737E-04	9,076E-04	1,632E-03	2,771E-03	4,469E-03	6,87E-03	1,013E-02	1,436E-02	1,961E-02	2,589E-02	3,313E-02	4,116E-02	31

