

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**

**DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELÉCTRICA**

---



**UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA**

**FORMULACIÓN DE LA POTENCIA DE  
DESEQUILIBRIO.**

**APLICACIÓN A REDES ELÉCTRICAS  
DESEQUILIBRADAS SINUSOIDALES**

**TESIS DOCTORAL**

Doctorando:

Pedro Ángel Blasco Espinosa

Dirigida por:

Dr. D. José Manuel Diez Aznar

Dr. D. Joaquín Montañana Romeu

**Valencia, Julio 2015**



# **AGRADECIMIENTOS**

*Desde estas líneas quiero expresar mi más sincero agradecimiento a todas aquellas personas que de algún modo han contribuido a la realización de este trabajo. En especial a José Manuel, Ximo y Vicente por su dedicación y apoyo.*

*Gracias.*



# RESUMEN

La presente tesis doctoral se centra en la descripción de la formulación de las potencias de desequilibrio en régimen permanente de los sistemas trifásicos lineales a tres hilos dados los flujos de potencia desequilibrados en las redes eléctricas sinusoidales. Para ello, se basa en la Teoría Unificada de las Potencias (UPM, Unified Power Measurement) y en la IEEE Std. 1459-2010. A partir de dichas teorías, se definen una serie de parámetros de desequilibrio que permiten la formulación y el análisis de las potencias complejas de desequilibrio del sistema, así como la obtención de éstas en cualquier punto de la red, verificando en todo momento la potencia aparente total para un sistema desequilibrado ( $S_T$ ) expresada por Buchholz, la UPM y por la IEEE Std 1459-2010.

A partir del uso de la definición de la potencia eléctrica instantánea trifásica, la tesis aporta la descripción de una serie de parámetros de desequilibrio debidos a las componentes resistivas ( $A, B$ ) y reactivas ( $C, D$ ) de las cargas, empleando la tensión de secuencia positiva y las intensidades activas y reactivas determinadas por las características de las cargas y de las redes eléctricas. Estos parámetros permiten la determinación de las ineficiencias del sistema debidas a los desequilibrios en régimen permanente, dando lugar a nuevas expresiones fasoriales de las potencias de desequilibrio en las redes eléctricas desequilibradas, tanto totales ( $\overline{D}_u$ ) como las debidas a la asimetría de las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ), y/o de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ).

La potencia aparente total de un sistema desequilibrado ( $S_T$ ) es reformulada a fin de contemplar de forma correcta la equivalencia de las potencias de desequilibrio de una transformación estrella - triángulo efectuada mediante el teorema de Kennelly (Rosen).

Partiendo de sistemas desequilibrados en cargas y equilibrados en tensiones se formulan los parámetros de desequilibrio los cuales verifican la Teoría Unificada de las Potencias (UPM), para posteriormente considerando tensiones y corrientes desbalanceadas, formular de forma separada las potencias de desequilibrio complejas que un sistema experimenta ante un desequilibrio de ambas magnitudes.

El análisis de los flujos de potencia en las redes desequilibradas, para la obtención de las tensiones nodales y de las corrientes circulantes por las líneas, se realiza mediante el uso del software RDAP (Radial Distribution Analysis Package), así como en determinados casos PsPICE, Matpower (MatLab) y PowerWorld.

Se presentan una serie de supuestos prácticos diseñados para las distintas configuraciones de las redes y condiciones de las tensiones de alimentación de las cargas, los cuales permiten constatar que las aportaciones de la presente tesis son acordes con la Teoría UPM y la IEEE Std. 1459-2010.

# RESUM

La present tesi doctoral se centra en la descripció de la formulació de les potències de desequilibri en règim permanent dels sistemes trifàsics lineals a tres fils donats els fluxos de potència desequilibrats a les xarxes elèctriques sinusoïdals. Per a això, es basa en la Teoria Unificada de les Potències (UPM, Unified Power Measurement) i en la IEEE Std. 1459-2010. A partir d'aquestes teories, es defineixen una sèrie de paràmetres de desequilibri que permeten la formulació i l'anàlisi de les potències complexes de desequilibri del sistema, així com l'obtenció d'aquestes en qualsevol punt de la xarxa, verificant a tot moment la potència aparent total per a un sistema desequilibrat ( $S_I$ ) expressada per Buchholz, la UPM i la IEEE Std. 1459-2010.

A partir de l'ús de la definició de la potència elèctrica instània trifàsica, la tesi aporta la descripció d'una sèrie de paràmetres de desequilibri deguts a les components resistives ( $A$ ,  $B$ ) i reactives ( $C$ ,  $D$ ) de les càrregues, emprant la tensió de seqüència positiva i les intensitats actives i reactives determinades per les característiques de les càrregues i de les xarxes elèctriques. Aquests paràmetres permeten la determinació de les ineficiències del sistema degudes als desequilibris en règim permanent, donant lloc a noves expressions fasorials de les potències de desequilibri a les xarxes elèctriques desequilibrades, tant totals ( $\overline{D}_u$ ) com les degudes a l'asimetria de les intensitats ( $\overline{D}_{ui}$ ) i/o de les tensions ( $\overline{D}_{uv}$ ).

La potència aparent total d'un sistema desequilibrat ( $S_I$ ) és reformulada a fi de contemplar de forma correcta l'equivalència de les potències de desequilibri d'una transformació estrella – triangle efectuada mitjançant el teorema de Kenelly (Rosen).

Partint de sistemes desequilibrats en càrregues i equilibrats en tensions es formulen els paràmetres de desequilibri els quals verifiquen la Teoria Unificada de les Potències (UPM), per posteriorment considerant tensions i corrents desbalancejades, formular de forma separada les potències de desequilibri complexes que un sistema experimenta davant d'un desequilibri de totes dues magnituds.

L'anàlisi dels fluxos de potència a les xarxes desequilibrades, per a l'obtenció de les tensions nodals i dels corrents circulants per les línies, es realitza mitjançant l'ús del software RDAP (Radial Distribution Analysis Package), així com en determinats casos PsPICE, Matpower (MatLab) i PowerWorld.

Es presenten una sèrie de supòsits pràctics dissenyats per a les diferents configuracions de les xarxes i condicions de tensions d'alimentació de les càrregues, els quals permeten constatar que les aportacions de la present tesi són concordes amb la Teoria UPM i la IEEE Std. 1459-2010.



# ABSTRACT

This thesis will focus on the description of the formulation of the unbalance powers steady linear-phase three wire systems, given the imbalanced sinusoidal electric network flows, based on the Unified Theory of the Power (UPM, Unified Power Measurement) and the IEEE Std. 1459-2010. From these theories, a series of imbalanced parameters allow a formulation and analysis of a complex unbalance powers system, as well as the obtaining of these at any point in the network are defined, checking at all times the total apparent power to an unbalanced system ( $S_I$ ) expressed by Buchholz, the UPM and the IEEE Std. 1459-2010.

Using the definition of the electric instantaneous three-phase power, this thesis provides the description of a series of imbalance parameters of the loads due to resistive components ( $A$ ,  $B$ ) and reactive ( $C$ ,  $D$ ) using the positive sequence voltage and the active and reactive currents determined by characteristics of the loads and electrical networks. These parameters allow the determination of system inefficiencies due to imbalances in permanent regime, giving rise to new complex expressions of unbalance powers in the unbalanced electrical networks, as much totals ( $\overline{D}_u$ ) due to the asymmetry of the currents ( $\overline{D}_{ui}$ ) and/or voltages ( $\overline{D}_{uv}$ ).

Total apparent power of an unbalanced system ( $S_I$ ) is reformulated in order to correctly see the equivalence of the unbalanced powers of a star-delta transformation done by the Kennelly (Rosen) theorem.

Starting from unbalanced load systems and balanced voltages systems, the imbalance parameters are formulated. These parameters check the Unified Theory of the Power (UPM). After, we analyze unbalanced systems in voltages and currents, and the complex unbalance powers are formulated separately when a system undergoes with both imbalance indicators.

The analysis of the power flows in unbalanced networks, to obtain the nodal voltages and currents circulating into lines, is performed using the software RDAP (Radial Distribution Analysis Package) and in certain cases PsPICE, Matpower (MatLab) and PowerWorld.

A series of practical cases designed for different network configurations and conditions of the supply voltage loads, which allow contribution findings of this thesis, are consistent with the UPM theory and IEE Std. 1459-2010.

# ÍNDICE

<b><u>CAPÍTULO - 1:</u></b>	1
<b>ESTADO DEL ARTE</b> .....	3
1.1. INTRODUCCIÓN .....	
1.2. EFECTOS Y CAUSAS DE LAS INEFICIENCIAS EN LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS .....	6
1.3. TEORÍAS DE LAS POTENCIAS ELÉCTRICAS .....	11
1.3.1. Teorías conservacionistas. Teoría de Steinmetz .....	15
1.3.2. Teoría de Buchholz .....	21
1.3.3. IEEE Std 1459/2010 .....	22
1.3.4. Teoría de la potencia reactiva instantánea .....	27
1.3.5. Teoría unificada de las potencias, UPM (Unified Power Measurement) .....	32
1.4. CONCLUSIONES .....	39

## **CAPÍTULO - 2:**

<b>FORMULACIÓN DE LA POTENCIA DE DESEQUILIBRIO PARA REDES ELÉCTRICAS DESEQUILIBRADAS SINUSOIDALES ALIMENTADAS CON TENSIONES EQUILIBRADAS</b> .....	41
2.1. INTRODUCCIÓN .....	43
2.2. ANTECEDENTES .....	44
2.3. MÓDULO DE LA POTENCIA DE DESEQUILIBRIO, $D_{ui}$ .....	46
2.4. FORMULACIÓN DE LA POTENCIA DE DESEQUILIBRIO MEDIANTE LA POTENCIA INSTANTÁNEA, $p(t)$ .....	47
2.4.1. Cargas lineales alimentadas por un sistema de tensiones sinusoidales equilibradas .....	51
2.5. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE DESEQUILIBRIO “A, B, C, D” EN SISTEMAS A 3 HILOS EN TRIÁNGULO. APLICACIÓN A UNA CARGA INDIVIDUAL .....	54
2.5.1. Circuito equivalente de una carga conectada en triángulo .....	58

2.5.2. Cálculo de los parámetros “A, B, C y D” en un sistema a 3 hilos en triángulo aplicado a una carga individual .....	60
2.5.3. Formulación del Fasor de potencia de desequilibrio debido a las intensidades, $\bar{D}_{ui}$ .....	82
2.6. APLICACIÓN A VARIAS CARGAS DE LOS PARÁMETROS DE DESEQUILIBRIO “A, B, C, D” EN UN SISTEMA A 3 HILOS EN TRIÁNGULO .....	87
2.7. CONCLUSIONES .....	92

### **CAPÍTULO - 3:**

<b>FORMULACIÓN DE LA POTENCIA DE DESEQUILIBRIO PARA REDES ELÉCTRICAS DESEQUILIBRADAS SINUSOIDALES ALIMENTADAS CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS .....</b>	<b>95</b>
3.1. INTRODUCCIÓN .....	97
3.2. ANTECEDENTES .....	98
3.3. POTENCIAS DE DESEQUILIBRIO, EN MÓDULO Y FASOR .....	99
3.3.1. Potencia de desequilibrio debida a las intensidades: $D_{ui}$ ; $\bar{D}_{ui}$ .....	101
3.3.2. Potencia de desequilibrio debida a las tensiones: $D_{uv}$ ; $\bar{D}_{uv}$ .....	103
3.3.3. Potencia total de desequilibrio: $D_u$ ; $\bar{D}_u$ .....	105
3.4. ESTUDIO PARA UNA CARGA EN TRIÁNGULO .....	107
3.4.1. Circuito equivalente de una carga conectada en triángulo .....	107
3.4.2. Estudio para una carga en triángulo sin línea de alimentación .....	110
3.4.3. Estudio para una carga en triángulo con línea de alimentación .....	110
3.5. ESTUDIO PARA VARIAS CARGAS EN TRIÁNGULO .....	113
3.5.1. Estudio para varias cargas desequilibradas conectadas en paralelo sin considerar las pérdidas de la red de alimentación .....	113
3.5.2. Estudio para varias cargas desequilibradas conectadas en paralelo considerando la red de alimentación. Caso general .....	116
3.6. CÁLCULO DEL DESEQUILIBRIO EN UN SISTEMA A 3 HILOS CONECTADO EN ESTRELLA .....	123
3.6.1. Circuito equivalente de una carga conectada en estrella .....	123

3.6.2. Estudio de una carga en estrella sin línea de alimentación. Potencia de desequilibrio debida a las intensidades, $\bar{D}_{ui}$ .....	126
3.7. CONCLUSIONES .....	131

## **CAPÍTULO - 4:**

<b>SUPUESTOS PRÁCTICOS</b> .....	133
4.1. INTRODUCCIÓN .....	133
4.2. CARGAS INDIVIDUALES A TRES HILOS ALIMENTADAS CON TENSIONES EQUILIBRADAS .....	145
4.2.1. Cargas conectadas en triángulo .....	145
Supuesto nº 1.1: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) equilibradas conectadas en triángulo .....	145
Supuesto nº 1.2: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas ( $P$ ) desequilibradas conectadas en triángulo .....	149
Supuesto nº 1.3: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas reactivas ( $Q$ ) desequilibradas conectadas en triángulo .....	154
Supuesto nº 1.4: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo .....	159
4.2.2. Cargas conectadas en estrella .....	165
Supuesto nº 1.5: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en estrella .....	165
4.3. CARGAS INDIVIDUALES A TRES HILOS ALIMENTADAS CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS .....	170
4.3.1. Cargas conectadas en triángulo .....	170
Supuesto nº 2.1: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) equilibradas conectadas en triángulo .....	170

Supuesto nº 2.2: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas ( $P$ ) desequilibradas conectadas en triángulo .....	176
Supuesto nº 2.3: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas reactivas ( $Q$ ) desequilibradas conectadas en triángulo .....	182
Supuesto nº 2.4: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo .....	188
4.3.2. Cargas conectadas en estrella .....	194
Supuesto nº 2.5: Red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en estrella .....	194
4.4. CARGAS EN PARALELO A TRES HILOS ALIMENTADAS CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS .....	199
Supuesto nº 3.1: Red trifásica a tres hilos sin pérdidas de potencia, con tensiones y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo (valores nominales de tensión compuesta 0.4 KV) .....	199
Supuesto nº 3.2: Red trifásica a tres hilos sin pérdidas de potencia, con tensiones y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo (valores nominales de tensión compuesta 20 KV) .....	208
Supuesto nº 3.3: Red trifásica a tres hilos con pérdidas de potencia, con tensiones y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo (valores nominales de tensión compuesta 0.4 KV) .....	217
Supuesto nº 3.4: Red trifásica a tres hilos con pérdidas de potencia, con tensiones y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo (valores nominales de tensión compuesta 20 KV) .....	227

4.5.	RED DE SUMINISTRO TRIFÁSICA DE A TRES HILOS CON CINCO NODOS DE CONSUMO CONSTITUIDOS POR CARGAS ACTIVAS Y REACTIVAS ( <i>PQ</i> ) DESEQUILIBRADAS CONECTADAS EN TRIÁNGULO (valores nominales de tensión compuesta 20 KV) .....	237
4.6.	APLICACIÓN PRÁCTICA DEL COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA ELÉCTRICO A 4 HILOS, CONSTITUIDO POR UNA CARGA RESISTIVA EQUILIBRADA CONECTADA EN ESTRELLA, ALIMENTADA CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS MEDIANTE UN TRANSFORMADOR TIPO “HIGH LEG TRANSFORMERS (4WD)”	249

### **CAPÍTULO - 5:**

	CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO .....	255
5.1.	CONCLUSIONES .....	257
5.2.	FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO .....	259

### **CAPÍTULO - 6:**

	REFERENCIAS .....	261
--	-------------------	-----





## GLOSARIO DE MAGNITUDES

$A_u$	Módulo del Fasor Potencia total de desequilibrio de un sistema trifásico desequilibrado con tensiones equilibradas.
$\bar{A}_u$	Fasor Potencia Total de desequilibrio de un sistema trifásico desequilibrado con tensiones equilibradas.
$A$	Parámetro de la componente real de desequilibrio debido a las componentes resistivas de las cargas.
$B$	Parámetro de la componente imaginaria de desequilibrio debido a las componentes resistivas de las cargas.
$C$	Parámetro de la componente imaginaria de desequilibrio debido a las componentes reactivas de las cargas.
$D$	Parámetro de la componente real de desequilibrio debido a las componentes reactivas de las cargas.
$D_u, D_{1U}$	Potencia total de desequilibrio de un sistema trifásico desequilibrado.
$\bar{D}_u$	Potencia compleja total de desequilibrio de un sistema trifásico desequilibrado.
$D_{ui}$	Módulo de la Potencia de desequilibrio debida a las corrientes de un sistema trifásico desequilibrado.
$\bar{D}_{ui}$	Potencia compleja de desequilibrio debida a las corrientes de un sistema trifásico desequilibrado.
$D_{uiA}(t)$	Potencia activa instantánea de desequilibrio debida a los elementos resistivos de las cargas de un sistema trifásico desequilibrado.
$D_{uiA}$	Potencia activa de desequilibrio debida a los elementos resistivos de las cargas de un sistema trifásico desequilibrado.
$\bar{D}_{uiA}$	Potencia compleja de desequilibrio debida a los elementos resistivos de las cargas de un sistema trifásico desequilibrado.
$D_{uiR}(t)$	Potencia activa instantánea de desequilibrio debida a los elementos reactivos de las cargas de un sistema trifásico desequilibrado.
$D_{uiR}$	Potencia activa de desequilibrio debida a los elementos reactivos de las cargas de un sistema trifásico desequilibrado.
$\bar{D}_{uiR}$	Potencia compleja de desequilibrio debida a los elementos reactivos de las cargas de un sistema trifásico desequilibrado.

$D_{uv}$	Potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones de un sistema trifásico desequilibrado.
$\bar{D}_{uv}$	Potencia compleja de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones de un sistema trifásico desequilibrado.
$H$	Potencia armónica que une los efectos de la potencia de desequilibrio y la distorsión según la teoría de la potencia reactiva instantánea.
$\bar{I}_Z$	Intensidad de fase y/o línea, siendo $z = a,b,c$ ó $z = ab, bc, ca$
$\bar{I}_{ZA}$	Intensidad activa de fase y/o línea, siendo $z = a,b,c$ ó $z = ab, bc, ca$
$\bar{I}_{ZR}$	Intensidad reactiva de fase y/o línea, siendo $z = a,b,c$ ó $z = ab, bc, ca$
$\bar{I}_{Lz}$	Intensidad de línea de la fase “z”.
$i(t)$	Intensidad instantánea.
$i_{a,b,c}(t)$	Intensidad instantánea de cada una de las fases.
$i_A(t)$	Intensidad activa instantánea.
$i_Q(t)$	Intensidad reactiva instantánea.
$i_z^+(t)$	Intensidad instantánea de secuencia positiva de cada una de las fases.
$i_{az}^+(t)$	Intensidad instantánea activa de secuencia positiva de cada una de las fases.
$i_{rz}^+(t)$	Intensidad instantánea reactiva de secuencia positiva de cada una de las fases.
$i_z^-(t)$	Intensidad instantánea de secuencia negativa de cada una de las fases.
$i_z^0(t)$	Intensidad instantánea de secuencia homopolar de cada una de las fases.
$I_e$	Intensidad efectiva.
$\bar{I}_{0a}$	Intensidad de línea de componente homopolar referida a la fase “a”.
$\bar{I}_{0ab}$	Intensidad de fase de componente homopolar referida a la fase “ab”.
$P_Z$	Potencia activa de la fase “z”. siendo $z = a,b,c$ ó $z = ab, bc, ca$
$P_0$	Potencia activa de una carga a tensión de referencia $V_0$
$p(t)$	Potencia instantánea.
$p_A(t)$	Potencia activa instantánea.
$p_Q(t)$	Potencia reactiva instantánea.
$P^+$	Potencia activa de secuencia positiva.
$P^-$	Potencia activa de secuencia negativa.
$P^0$	Potencia activa de secuencia homopolar.

$p(\approx)$	Termino sinusoidal de la potencia real instantánea según la Ta. de la potencia reactiva instantánea.
$P_0$	Término constante de la potencia de secuencia cero instantánea según la Ta. de la potencia reactiva instantánea.
$PF_e$	Factor de potencia efectivo.
$[P]$	Transformada de Park.
$p_{a-3F}(t)$	Potencia activa trifásica instantánea.
$p_{r-mono}(t)$	Potencia reactiva monofásica instantánea.
$p_{r-3F}(t)$	Potencia reactiva trifásica instantánea.
$p_A(t)$	Potencia instantánea de asimetría de un sistema trifásico desequilibrado.
$p_D(t)$	Potencia instantánea de distorsión de un sistema trifásico con elementos de características no lineales.
$P'_Z$	Componente real de la potencia aparente $\bar{S}_A$ debida las intensidades activas y tensiones de componente positiva.
$P''_Z$	Componente imaginaria de la potencia aparente $\bar{S}_A$ debida las intensidades activas y tensiones de componente positiva.
$Q_Z$	Potencia reactiva de la fase "z". siendo $z = a,b,c$ ó $z = ab, bc, ca$
$Q_0$	Potencia reactiva de una carga a tensión de referencia $V_0$
$Q^+$	Potencia reactiva de secuencia positiva.
$Q^-$	Potencia reactiva de secuencia negativa.
$Q^0$	Potencia reactiva de secuencia homopolar.
$q(\approx)$	Termino sinusoidal de la potencia imaginaria instantánea según la Ta. de la potencia reactiva instantánea.
$Q''_Z$	Componente real de la potencia aparente $\bar{S}_R$ debida las intensidades reactivas y tensiones de componente positiva.
$Q'_Z$	Componente imaginaria de la potencia aparente $\bar{S}_R$ debida las intensidades reactivas y tensiones de componente positiva.
$\bar{S}_Z$	Potencia aparente fasorial de la fase "z", siendo $z = a,b,c$ ó $z = ab, bc, ca$
$\bar{S}_A$	Potencia aparente debida a los efectos de los elementos resistivos de las cargas y la tensión de secuencia positiva.

$\bar{S}_R$	Potencia aparente debida a los efectos de los elementos reactivos de las cargas y la tensión de secuencia positiva.
$S_Z$	Potencia aparente en valor eficaz de la fase “z”, siendo $z = a,b,c$ ó $z = ab, bc, ca$
$S_{1U}, S_1$	Potencia total aparente fundamental de un sistema desequilibrado de un sistema trifásico.
$S_{13H}$	Potencia aparente fundamental de un sistema desequilibrado a tres hilos.
$S_{14H}$	Potencia aparente fundamental de un sistema desequilibrado a cuatro hilos.
$S_{1(\Delta)}$	Potencia aparente total de una carga conectada en triángulo
$S_{+(\Delta)}$	Potencia aparente de secuencia positiva de una carga conectada en triángulo
$S_{L(\Delta)}$	Potencia aparente debida a los efectos de las corrientes de secuencia positiva y negativa de una carga conectada en triángulo.
$S_{C(\Delta)}$	Potencia aparente debida a los efectos de la componente de secuencia homopolar de la corriente de una carga conectada en triángulo.
$S_{1(Y)}$	Potencia aparente total de una carga conectada en estrella
$S_{+(Y)}$	Potencia aparente de secuencia positiva de una carga conectada en estrella.
$S_{L(\Delta)}$	Potencia aparente debida a los efectos de las corrientes de secuencia positiva y negativa de una carga conectada en estrella.
$S_{C(\Delta)}$	Potencia aparente debida a los efectos de la componente de secuencia homopolar de la tensión de una carga conectada en estrella.
$S^+, S_+$	Potencia aparente de secuencia positiva
$S^-$	Potencia aparente de secuencia negativa
$S^0$	Potencia aparente de secuencia homopolar
$S_e$	Potencia aparente efectiva
$S_U$	Potencia aparente de desequilibrio
$\bar{V}_{ZN'}$	Tensión simple entre fase “z” y Neutro “N”
$\bar{V}_Z$	Tensión compuesta entre fases para $z = ab, bc, ca$ o simple para $z = a, b, c$
$V_0$	Tensión de partida o referencia.
$v(t)$	Tensión instantánea.

$v_{a,b,c}(t)$	Tensión instantánea de cada una de las fases. Tensión simple instantánea.
$v_{ab,bc,ca}(t)$	Tensión compuesta instantánea.
$v_z^+(t)$	Tensión instantánea de secuencia positiva de cada una de las fases.
$v_z^-(t)$	Tensión instantánea de secuencia negativa de cada una de las fases.
$v_z^0(t)$	Tensión instantánea de secuencia homopolar de cada una de las fases.
$V_e$	Tensión efectiva.
$V_{0a}$	Tensión simple de secuencia homopolar referida a la fase “a”.
$\bar{Z}_z$	Impedancia de la fase “z”, siendo $z = a,b,c$ ó $z = ab,bc,ca$
$\lambda$	Factor de potencia. Índice de eficiencia del sistema.
$\theta_i^{(r+1)}$	Valor del ángulo de la tensión calculada en la iteración “ $r+1$ ”
$\theta_{D_{ui}}$	Valor del ángulo de la potencia de desequilibrio debida a las potencias aparentes activas y reactivas.
$\theta_{D_{uv}}$	Valor del ángulo de la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones.
$\theta_{D_u}$	Valor del ángulo de la potencia total de desequilibrio de un sistema trifásico.
$\delta_-$	Grado de desequilibrio entre las tensiones de secuencia negativa y positiva.
$\delta_0$	Grado de asimetría entre las tensiones de secuencia homopolar y positiva.



# MOTIVACIÓN, OBJETIVOS Y SUMARIO DE LA TESIS

## MOTIVACIÓN

Las redes eléctricas se caracterizan en su funcionamiento por estar desequilibradas tanto en tensiones como en intensidades. Bajo estas circunstancias, los procedimientos de cálculo se encuentran bien definidos desde el punto de vista del análisis de los flujos de potencia, pero no así desde el punto de vista de las potencias debidas a los desequilibrios tanto de corrientes como de tensiones en régimen permanente, por lo cual se hace necesario estimar y predecir el estado y funcionamiento de la red bajo éstas condiciones.

En cualquier punto de un sistema eléctrico, la cuantificación de la potencia aparente no viene determinada exclusivamente por las potencias activas y reactivas de la red, salvo que su reparto sea equitativo entre cada una de las fases, dando lugar en el caso contrario a ineficiencias debidas a los desequilibrios. Así pues, las potencias debidas a los fenómenos de desequilibrio deben de estar incluidas en la determinación de la potencia total aparente. Por lo tanto, el hecho de no incluirlas hace que ésta no sea cuantificada de manera adecuada.

Buchholz definido a principios del siglo XX la potencia total aparente para un sistema desequilibrado en régimen permanente ( $S_I$ ), del cual era posible obtener el valor de la potencia total de desequilibrio del sistema analizado, pero no cuantificaba separadamente los desequilibrios debidos a las asimetrías de las intensidades causadas por las cargas ni los debidos a las asimetrías de las tensiones. Así mismo, la más moderna IEEE Std. 1459-2010 desarrollada a partir de los trabajos del “IEEE Working Group in Sinusoidal Situations” publicada inicialmente en el 2000 y elevada en el año 2010 a su versión “Redline” tampoco cuantifica de forma separada éstas potencias de desequilibrio. Es en 2007 cuando se publica la Teoría Unificada de las Potencias (UPM. Unbalanced Power Measurement) por parte de V. León, J. Montañana y J. Giner; el artículo “Phasor total unbalance power: Formulation and some properties”, en el que se cuantifica mediante el denominado “Fasor potencia total de desequilibrio ( $\bar{A}_U$ )” la

potencia de desequilibrio en modo complejo debida a las corrientes en sistemas lineales alimentados con tensiones equilibradas.

A partir de esta teoría, la cual está patrocinada por “Fluke Electronics Corporation”, se desarrolla la presente tesis donde se formula en forma fasorial y de manera separada, la potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ) y las potencias de desequilibrio debidas a las asimetrías de las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ) y de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ). Para lo cual, partiendo de la definición de la potencia trifásica instantánea, se describen una serie de parámetros de desequilibrio que relacionan las componentes reales e imaginarias de las potencias debidas a las cargas de tipo resistivo ( $A$ ,  $B$ ) y a las de tipo reactivo (inductivo y/o capacitiva) ( $C$ ,  $D$ ), los cuales permiten el cálculo complejo de las potencias de desequilibrio únicamente conociendo las tensiones nodales y los flujos de corriente circulantes por la red; además de permitir la determinación de las ineficiencias debidas a los desequilibrios de las intensidades y de las tensiones en cualquier punto de la red sin necesidad de establecer circuitos equivalentes en cada punto de estudio.

Se constata que la transformación de un circuito de triángulo a estrella o viceversa empleando el teorema de Kennelly (Rosen) no es aplicable a efectos del cálculo de potencias de desequilibrio, ya que no verifica la equivalencia del valor de la potencia total aparente para sistemas desequilibrados formulada inicialmente por Buchholz. Para solventar esto, se reformula la potencia total para que la transformación sea equivalente a efectos de la determinación de las potencias de desequilibrio.

Las aportaciones de la tesis se centran en la determinación de los parámetros de desequilibrio ( $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ) que a partir de la potencia instantánea dan lugar a la formulación fasorial de las potencias de desequilibrio, totales ( $\overline{D}_u$ ), debida a la asimetría de las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ) y debida a la simetría de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ). Así mismo, se adecua la expresión de la potencia total aparente ( $S_I$ ) para que sea equivalente en transformaciones triángulo-estrella a efectos del cálculo de las potencias de desequilibrio. Esto hace que las aportaciones sean de utilidad, ya que pueden dar lugar, entre otros, al desarrollo de sistemas de compensación de las potencias de desequilibrio y al desarrollo de estrategias de planificación y de operación de las redes eléctricas. Así mismo cabe resaltar que las expresiones aportadas son válidas para cualquier nivel de tensión.



## OBJETIVOS

El objetivo de la presente tesis se centra en la necesidad de formular las ineficiencias debidas a las potencias de desequilibrio que en régimen permanente se originan en las redes eléctricas como consecuencia del desequilibrio de las intensidades y de las tensiones. Para ello, partiendo de la Teoría Unificada de las Potencias (UPM, Unified Power Measurement) y de la IEEE Std. 1459-2010 se formulan las expresiones complejas capaces de cuantificar estos fenómenos.

En la presente tesis se plantean los siguientes objetivos:

- Analizar diferentes teorías relativas a la cuantificación de las potencias eléctricas, en especial la Potencia total aparente para sistemas desequilibrados de Buchholz, la IEEE Std 1459-2010 y la Teoría Unificada de las Potencias (UPM, Unified Power Measurement).
- Desarrollar a la luz de la UPM, la formulación de las potencias de desequilibrio expresadas de forma compleja, tanto de la potencia total como de las potencias debidas a las asimetrías de las intensidades originadas por las cargas resistivas y/o reactivas; así como de las potencias de desequilibrio debidas a las asimetrías de las tensiones; que junto con las definiciones de la UPM y la IEEE Std. 1459-2010 constituyan una contribución a éstas.
- Desarrollar una herramienta flexible de cálculo que permita la cuantificación de las potencias de desequilibrio en las redes eléctricas.



## SUMARIO

La presente tesis doctoral está estructurada como sigue:

En el **Capítulo 1 “Estado del Arte”**, se realiza una descripción de las causas y los efectos de las ineficiencias en los sistemas eléctricos, así como una cronológica de diferentes teorías de cuantificación y medida de la potencia eléctrica centrándose en las Teorías de Steinmetz de la potencia instantánea, la Teoría de Buchholz de la potencia total aparente de un sistema desequilibrado, la IEEE Std 1459-2010, la Teoría de la potencia reactiva instantánea y la Teoría Unificada de las Potencias (UPM, “Unified Power Measurement”).

En el **Capítulo 2 “Formulación de la Potencia de Desequilibrio para redes eléctricas desequilibradas sinusoidales alimentadas con tensiones equilibradas”** se formulan los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” así como la potencia compleja de desequilibrio debido a las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ) para sistemas con tensiones equilibradas, verificándose su correspondencia con el “Fasor Potencia Total de Desequilibrio ( $\overline{A}_u$ )” definido por la UPM y con el módulo de la potencia total de desequilibrio ( $D_{1u}$ ).

Partiendo de la definición de la potencia instantánea trifásica, se desarrollan los parámetros de desequilibrio, identificando por separado las componentes reales e imaginarias de los efectos de las componentes resistivas ( $A, B$ ) y reactivas ( $C, D$ ) de las cargas, a partir de los cuales se formula la potencia compleja de desequilibrio debida a la asimetría de las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ).

Del análisis de la configuración de las redes se hace necesaria la transformación triángulo-estrella, para la cual a efectos de la determinación de las potencias de desequilibrio no puede utilizarse el Teorema de Kennelly (Rosen) ya que no verifica la igualdad de la potencia total de desequilibrio ( $S_1$ ) entre ambos tipos de conexión. Para ello se deduce un circuito equivalente de transformación que incluye correctamente los fenómenos del desequilibrio.

En el **Capítulo 3 “Formulación de la Potencia de Desequilibrio para redes eléctricas desequilibradas sinusoidales alimentadas con tensiones desequilibradas”** se formulan, partiendo del desarrollo efectuado en el capítulo anterior de la potencia compleja de desequilibrio debido a las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ), las potencias de desequilibrio debidas a las asimetrías de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ) y la potencia compleja total de desequilibrio del sistema ( $\overline{D}_u$ ), la cual verifica el valor en módulo de la potencia de desequilibrio obtenida mediante el Teoría de Buchholz, UPM y la IEEE Std. 1459-2010.

Para establecer la validez de la formulación descrita, se estudian tanto cargas individuales como agrupadas considerando que están alimentadas mediante líneas con y sin pérdidas; en conexión triángulo y estrella para una red eléctrica trifásica de tres hilos.

En el **Capítulo 4 “Supuestos Prácticos”** se analizan y presentan los resultados de los supuestos prácticos empleados para la justificación de las aportaciones a la cuantificación de las potencias de desequilibrio descritas en los capítulos 2 y 3 de la presente tesis. Para ello inicialmente se parte de una red trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas individuales tanto equilibradas como desequilibradas identificando los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” descritos para el cálculo de la Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\overline{D}_{ui}$ ), que en el supuesto de tensiones equilibradas verifica el “Fasor Potencia de Desequilibrio ( $\overline{A}_u$ )” expresada en la UPM (Unified Power measurement).

Posteriormente se exponen los mismos supuestos prácticos bajo la condición de una red de alimentación con tensiones desequilibradas, mostrándose los valores complejos de forma separada para las potencias de desequilibrio debidas a las asimetría de las corrientes ( $\overline{D}_{ui}$ ), y de las tensiones ( $\overline{D}_{ui}$ ) y la potencia de desequilibrio total ( $\overline{D}_u$ ), la cual verifica en módulo la ( $D_{1U}$ ) que puede ser obtenida mediante la aplicación del Teoría de Buchholz, UPM y la IEEE Std. 1459-2010.

En tercer lugar se analizan y presentan los resultados de la aplicación del cálculo de los parámetros de desequilibrio y de las potencias complejas de desequilibrio en redes a tres hilos con tensiones y cargas desequilibradas considerando cargas en paralelo conectadas

con y sin líneas de distribución que aporten pérdidas adicionales. En este caso se han realizado los cálculos con tensiones de 0.4 kV (B.T.) y con tensiones de 20 kV con la finalidad de mostrar más claramente el valor del desequilibrio producido por las tensiones. Se muestra la aplicación de las aportaciones a una red de distribución a 20 kV constituida por cinco nudos, un nudo de referencia o Slack y cuatro nudos de carga PQ. Los cálculos para la determinación de las tensiones nodales y de los flujos de corriente en las líneas se han efectuado mediante el software RDAP “Radial Distribution Analysis Package” empleado en los “Test feeders” para sistemas radiales incluidos en IEEE, así como en determinados casos PsPICE, Matpower (MatLab), PowerWorld, CYME y ETAP.

Se aporta una aplicación práctica, realizada en el laboratorio, del comportamiento de un sistema eléctrico constituido por una carga resistiva conectada en estrella y alimentado con tensiones desequilibradas mediante un transformador del tipo “High Leg Transformers (4WD Transformers Service)”, en el cual se muestra la concordancia de los resultados obtenidos mediante la aplicación de las aportaciones desarrolladas en la presente tesis con los valores obtenidos de las mediciones efectuadas con un equipo de análisis “Fluke 435 Series II” el cual incorpora la Teoría UPM.

En el **Capítulo 5 “Conclusiones y futuras líneas de trabajo”** se presentan las conclusiones y aportaciones que se derivan de la presente tesis, así como las futuras líneas de trabajo que a partir de ésta pueden ser desarrolladas.

Por último, en el **Capítulo 6 “Referencias”** se recogen las referencias bibliográficas, artículos, libros de texto, normativas, programas informáticos de análisis, etc., utilizados en la realización de la tesis.



# Capítulo: 1

## ESTADO DEL ARTE





## **Capítulo 1:**

### **ESTADO DEL ARTE**

#### **1.1.- INTRODUCCIÓN**

Desde los inicios del siglo XX se han abordado distintas teorías encaminadas a la definición de la potencia eléctrica, dividiendo ésta en componentes transformables en energía útil (energía activa) y en componentes ineficientes que no son transformables en energía útil, entre ellas la potencia reactiva.

Inicialmente en el cálculo de las instalaciones eléctricas tanto a nivel de baja como de alta tensión se ha adoptado la suposición de que las cargas son lineales y equilibradas, lo que implica “*a priori*” una simplificación de las características reales de las redes eléctricas y de las cargas que de estas se alimentan, ya que conlleva implícitamente el no considerar las ineficiencias inherentes a la no linealidad y el desequilibrio de los sistemas eléctricos y por tanto la obtención de valores aproximados, no siempre aceptables, pudiendo llegar a tener desviaciones elevadas con respecto a los valores reales.

Desde el último tercio del siglo XX la consideración idealizada de cargas lineales y equilibradas dejó de ser válida debido a la evolución tecnología y a la creciente complejidad de los sistemas eléctricos, caracterizándose por el cada vez más elevado uso de cargas no lineales, equipos electrónicos, variadores de frecuencia, generaciones distribuidas, cargas monofásicas, etc., que han llevado al crecimiento incesante de corrientes no sinusoidales con alto contenido de armónicos, lo que se traduce en potencias de distorsión y a desequilibrios por asimetría de las tensiones y las corrientes en las redes, dando lugar a potencias de desequilibrio que en todo caso provocan problemas en las redes eléctricas y en las cargas que a ellas se conectan.

Esto hace que ya no sea suficiente la separación únicamente en potencias activas y potencias reactivas según la forma “tradicional” de concepción de las potencias; basada

en formas de onda de tensiones y corrientes sinusoidales y en potencias reactivas debidas a desfases ocasionados por reactancias inductivas y/o capacitivas.

Por tanto, es necesaria la identificación de las ineficiencias que se pueden producir en un sistema eléctrico, así como la caracterización de estas; tanto las debidas a las potencias de distorsión por no linealidad, como las debidas a las potencias de desequilibrio ocasionadas por las asimetrías de las tensiones y/o corrientes, haciendo necesaria la identificación y cuantificación de sus efectos en las redes y sistemas eléctricos.

A consecuencias de la constatación de dichos comportamientos, se han desarrollado con mayor o menor éxito, diferentes teorías que han intentado dar una respuesta. Entre las más recientes, y a partir de las cuales se aborda la presente tesis, están la IEEE Std. 1459-2010 [42] que intenta identificar y unificar criterios referentes a los fenómenos eléctricos bajo condiciones sinusoidales o no sinusoidales y de equilibrio o desequilibrio; así como la Teoría Unificada de las Potencias (UPM, Unified Power Measurement) desarrollada por V. León, J. Montañana y J. Giner, miembros del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universitat Politècnica de València (UPV) [59].

Así pues, se entiende por ineficiencia en un sistema eléctrico a toda circunstancia que lo aleja de su funcionamiento ideal, por lo que puede considerarse que; sí en un sistema eléctrico al menos una cualquiera de las magnitudes de la potencia eléctrica, tensión e intensidad, puede ser descompuesta en dos o más componentes, implica la existencia de ineficiencias en el mismo [54].

En un sistema eléctrico en régimen permanente, pueden presentarse los siguientes fenómenos energéticos [39], [42], [53], [59]:

- **Transferencia de energía neta** o flujo de potencia unidireccional, que corresponden a potencias efectivas útiles que pueden ser transformadas. Se produce a secuencia directa y frecuencia fundamental.
- **Ineficiencias** debidas a la naturaleza y comportamiento energético de los elementos que componen el sistema eléctrico así como a la forma de conexión de estos, dando lugar a potencias no útiles que cuantifican el efecto de la energía

eléctrica que no puede ser transformada. Estas ineficiencias quedan caracterizadas por los siguientes fenómenos:

- Flujo bidireccional de potencia debido a los desfases.
- Distorsión armónica debida a la existencia de elementos y componentes no lineales del sistema eléctrico.
- Sistemas polifásicos asimétricos.

De las potencias no útiles, la ineficiencia más común, ya que en la mayoría de los casos es inherente a las propias características de los elementos que forman el sistema eléctrico, es la **potencia debida a los desfases** denominada potencia reactiva, que se produce a secuencia directa y frecuencia fundamental, y está provocada por la existencia de desfases entre la tensión y la corriente producida por elementos reactivos (inductivos y/o capacitivos) en los sistemas eléctricos o por la existencia de cargas asimétricas que dan lugar a desfases. Jeon en 2006 [46], pone de manifiesto que la existencia de desequilibrios da lugar a la aparición de potencia reactiva, lo cual es corroborado posteriormente por V. León y M. Graña [58], [39] y Czarnecki [22] [23] [19].

La ineficiencia debida a elementos de características no lineales provoca la existencia de frecuencias armónicas distintas de la fundamental, constituyendo la que se denomina **potencia de distorsión** armónica. Por último la falta de simetría en las instalaciones caracterizada por tensiones [10], [11], y/o corrientes con distinto valor eficaz y/o ángulo en alguna fase dan lugar a flujos de potencia de valor medio nulo cuantificados por la **potencia de desequilibrio** o asimetría [6], [12], [16], [20], [54], [55], [60], [79].

Hoy en día, en la mayoría de situaciones solo se consideran las ineficiencias de los sistemas eléctricos no lineales y/o desequilibrados a nivel de estudios de investigación, trascendiendo estos de forma muy exigua a nivel de cálculo y desarrollo de instalaciones y sistemas eléctricos.

La presente tesis se centrará en la formulación de la potencia de desequilibrio causada por la asimetría de tensiones e intensidades aplicada a las redes eléctricas sinusoidales. El estudio se realiza teniendo en cuenta la IEEE Std 1459-2010 y la Teoría Unificada de las Potencias (UPM, Unified Power Measurement).

## **1.2. EFECTOS Y CAUSAS DE LAS INEFICIENCIAS EN LOS SISTEMAS ELÉCTRICOS**

Ante la constatación de la existencia de potencias que transforman la energía en potencia útil y las debidas a ineficiencias que provocan flujos de potencia no útiles, se hace necesario delimitar cada una de ellas a fin de cuantificar sus efectos.

Los **efectos de las ineficiencias** en los sistemas eléctricos dan lugar a [54], [61]:

- Elevación de los valores de las corrientes en las distintas partes del sistema eléctrico y, por tanto, caídas de tensión y pérdidas por efecto Joule más elevadas.
- Limitación de la capacidad de los generadores para producir potencia útil, disminuyendo la eficiencia del sistema.
- Sobredimensionamiento de los elementos y encarecimiento del sistema eléctrico.
- Necesidad de una mayor producción de energía eléctrica que conlleva una degradación medioambiental.

Como se indicó anteriormente, aunque la existencia del fenómeno del desequilibrio y sus efectos desfavorables fueron descritos hace tiempo [17], solo recientemente se ha tomado en consideración sus efectos reales y han sido incorporados en las normas y estándares de medida de la potencia eléctrica [3], [18], [31], [34], [42], [53], [66].

Un sistema se considera equilibrado, cuando las tensiones e intensidades circulantes debidas a las impedancias de las cargas, tienen el mismo valor en módulo y sus ángulos son iguales y desfasados entre sí  $120^\circ$ . El fenómeno del desequilibrio en los sistemas eléctricos trifásicos se debe a la existencia de tensiones y corrientes asimétricas. Esta circunstancia nunca se cumple y, por tanto, todo sistema eléctrico es desequilibrado.

### **a) Causas de los desequilibrios.**

Las causas de los desequilibrios en los sistemas eléctricos son debidas tanto al afecto de las asimetrías en tensiones como al de las corrientes, así [3]:

### Desequilibrio en tensiones:

- La medida y las definiciones de los desequilibrios debido a las tensiones ha sido objeto de numerosos artículos y documentos que recopilan los estándares adoptados por organismos y asociaciones tales como IEC, IEEE, NEMA. En los últimos años han surgido en función de los diferentes estándares definiciones de las potencias de desequilibrio los cuales son aplicados de forma dispar en los distintos países [3], [4], [5], [68], [75], [80]. A nivel de normativa española, la medida de la tensión de desequilibrio se encuentra recogida en la norma UNE-EN 50160 [10] (IEC-CENELEC).

La medida adoptada como factor o índice de desequilibrio por IEC e IEEE, relaciona la componente de secuencia inversa y de secuencia directa; mientras que el índice de desequilibrio adoptado por NEMA y algunas publicaciones de IEEE se basan en las desviaciones máximas de las tensiones respecto de su valor promedio.

En todo caso, las definiciones de desequilibrios de tensión se aplican a un sistema de potencia sinusoidal.

La definición de factor o índice de desequilibrio, adoptada por IEEE Std. 1159-2009, y que es considerado como la **definición verdadera** por [3], [75], adopta las relaciones entre las tensiones de secuencia inversa y homopolar con la tensión de secuencia directa, expresadas mediante los factores ( $UF^- = (U^-/U^+) \cdot 100$ ;  $UF^0 = (U^0/U^+) \cdot 100$ ). Del mismo modo, aunque con un método alternativo de cálculo, la IEC 61000-4-30 [11] mediante la expresión  $\left( AF = \sqrt{\frac{1-\sqrt{3-6\beta}}{1+\sqrt{3-6\beta}}} \right)$  tiene desviaciones nulas respecto a la anterior.

Desde finales del siglo pasado han sido publicadas distintas formulaciones para definir la potencia de desequilibrio [4], [5], [47], [68], [80], [83]. En el trabajo publicado en 2012 por Herrera-Salmerón [75] se pone de manifiesto, mediante una comparación entre las distintas definiciones del índice de desequilibrio de tensión y la definición verdadera ( $UF^-$ ;  $UF^0$ ;  $AF$ ), de las significativas diferencias entre los distintos índices o factores de desequilibrio con respecto a

esta; poniendo además de manifiesto una diferencia adicional cuando en el sistema existe distorsión.

- El desequilibrio en tensiones puede estar provocado por distintos motivos [75]; entre los que cabe reseñar:
  - Reparto desigual entre las distintas fases de cargas monofásicas, las cuales además, pueden tener una topología aleatoria. Puede dar lugar a que una carga trifásica equilibrada conectada en el mismo punto de suministro que las cargas monofásicas provoque un consumo de intensidades desequilibrado.
  - Las cargas monofásicas alimentadas mediante generadores de inducción autoexcitados dan lugar a sobretensiones y sobreintensidades, que además conlleva una reducción de la eficiencia por el aumento de la temperatura y de las vibraciones mecánicas en el generador [7].
  - Los motores de inducción alimentados con tensiones desequilibradas tienen un efecto multiplicador de los efectos de los desequilibrios tanto de tensiones como de corrientes. Este efecto se debe a los diferentes valores de impedancia que el motor presenta para las componentes de secuencia directa e inversa, siendo menor la de secuencia inversa, incrementándose la corriente de secuencia inversa, lo que conlleva un desequilibrio en las intensidades, un incremento en las caídas de tensión de las impedancias de línea y un incremento en el desequilibrio de las tensiones [4], [34], [84].
  - En los sistemas de potencia, el desequilibrio de tensiones puede estar provocado por: la asimetría de las impedancias de los arrollamientos de los transformadores, la presencia de bancos de transformadores en estrella y en triángulo en vacío, las impedancias de transmisión asimétricas debidas posiblemente a una transposición incompleta de las líneas [42, 43, 44] y la fusión accidental de fusibles en bancos de condensadores [47].

### **Desequilibrio en Intensidades:**

Puede estar provocado por las siguientes causas:

- El desequilibrio de las intensidades debidas a la existencia de cargas monofásicas o trifásicas desequilibradas hace aconsejable, sí no necesario, el reparto simétrico entre las fases, lo cual es difícil o imposible de conseguir en la mayoría de casos.
- El consumo desequilibrado puede provenir en muchas ocasiones de cargas no lineales que pueden dar lugar a desequilibrios asociados a la distorsión que complican los procesos de medida y de mitigación [75].
- Las principales cargas monofásicas que provocan asimetrías en las redes eléctricas de distribución en media y alta tensión son las siguientes [3], [54]:
  - Hornos de inducción (cuando funcionan a la frecuencia fundamental de la red).
  - Hornos de fusión de resistencia.
  - Instalaciones inductivas por calentamiento.
  - Hornos de resistencia para la fabricación de electrodos.
  - Instalaciones de calentamiento por arco voltaico.
  - Máquinas de soldadura por resistencia.
  - Hornos de fusión de acero de arco voltaico.
  - Sistemas de tracción eléctrica, por la conexión fase-tierra.

### **b) Efectos de los desequilibrios.**

De los efectos de los desequilibrios en los sistemas eléctricos, cabe reseñar los siguientes [3], [79]:

- Las **tensiones asimétricas** producen diferentes efectos según cuál sea el tipo de receptor:
  - En transformadores y líneas, para una misma carga activa, la intensidad causada por la asimetría puede llegar a ser el doble de la que existiría en una situación de simetría.

- En los transformadores conectados en triángulo – estrella (DY), los desequilibrios dan lugar a la aparición de intensidades de secuencia homopolar en el secundario, causando calentamientos, pérdidas por efecto Joule y aumento de las caídas de tensión [13], [55].
- En los motores asíncronos, los aumentos de temperatura son significativos para valores de asimetría de tensiones superiores al 1%, y especialmente perjudiciales cuando se alcanza el 2% en máquinas totalmente cargadas. Un desequilibrio del 3.5% puede provocar un incremento del 25% en la temperatura del motor debido al aumento de pérdidas de potencia y disminución de la eficiencia [16].
- En los generadores eólicos puede dar lugar a vibraciones, estrés y sobrecalentamientos en los componentes mecánicos [6].
- Los equipos de regulación y control, según marca la CIE 146, deben estar preparados para aceptar un grado de asimetría de hasta el 2%. En caso de superar este nivel, su funcionamiento puede verse afectado de manera significativa.
- Aparición de potencias reactivas, puesto de manifiesto recientemente por Jeon [46], y corroborado por V. León [22], [39], [58], de la Universitat Politècnica de València (UPV), y por Czarnecki [23].
- La aparición de desequilibrios de tensiones y/o corrientes provoca un aumento de la potencia aparente para la misma potencia útil, lo que conlleva una disminución en la eficiencia del sistema.
- En instalaciones en baja tensión, industriales, comerciales, etc., alimentadas en el punto de conexión común con tensiones desequilibradas puede dar lugar a efectos perjudiciales tanto en los equipos de las instalaciones y como en el sistema de potencia, debido a que un bajo desequilibrio en tensiones puede producir un aumento desproporcionado en las corrientes de fase [47], [75], [69].
- En instalaciones conectadas en estrella a cuatro hilos sometida a desequilibrios de tensiones y/o corrientes, debido a la impedancia no despreciable del conductor de neutro, provoca una caída de tensión, mayor cuanto más elevado sea el desequilibrio, dando lugar a diferencias de potencial entre generador y receptor y desequilibrios de tensiones entre las fases.



- En los equipos de compensación de potencia reactiva mediante baterías de condensadores, puede provocar la aparición de resonancias.
- Si el valor del desequilibrio es muy elevado puede producirse la desconexión de alguna o de todas las fases para evitar la sobrecarga del sistema [33].

En el presente capítulo se describen las teorías de cuantificación y medida de la potencia eléctrica. A lo largo de los diferentes apartados nos centraremos principalmente en el comportamiento y cuantificación de las redes eléctricas afectadas por fenómenos de desequilibrio.

### **1.3.- TEORÍAS DE LAS POTENCIAS ELÉCTRICAS**

Para analizar los flujos de potencia de un sistema eléctrico es imprescindible cuantificar y medir de forma adecuada los diferentes fenómenos que intervienen en la transferencia de energía, como se encuentran entre sí relacionados y en la medida de lo posible, intentar dar un significado físico a cada uno de ellos. Los tipos de potencia y la cantidad de cada una de ellas que fluyen en un sistema eléctrico dependerán principalmente de las características del suministro de energía de la red y de la topología de las cargas que se encuentran conectadas a ella. Desde hace varias décadas, debido principalmente a las características y a la conexión de las cargas, en el análisis de los sistemas eléctricos es necesario estudiar los fenómenos debidos a los desequilibrios existentes en los sistemas trifásicos y la distorsión debida a lo no linealidad de las cargas. La aparición de estos efectos hace que la medida de la transferencia de energía basada en las teorías clásicas diste mucho de la realidad [85]. En este trabajo nos centraremos exclusivamente en el estudio de redes eléctricas desequilibradas sinusoidales

El empleo de los sistemas eléctricos para la transferencia de energía se inició en las tres últimas décadas del siglo XIX. La primera experiencia conocida en transmisión de energía eléctrica es atribuida a H.Fontaine en 1873 en la Exposición de Viena. En un principio, la energía se generaba en forma de corriente continua, pero, casi inmediatamente, se sustituyeron estos sistemas eléctricos por los de corriente alterna monofásica, primero, y trifásica, después, debido a la capacidad de transmitir la energía a muy largas distancias.

No obstante, pronto se observó que las corrientes necesarias para transmitir la energía neta eran mayores en corriente alterna que en corriente continua. La explicación física a este hecho fue proporcionada por separado, en el año 1888, por W. Stanley [86] y O.B. Shallenberger [81], quienes, simultáneamente, atribuyeron el mayor valor de la corriente en los circuitos de corriente alterna a la presencia en ellos de bobinas.

Pocos años después, en 1897, C.P. Steinmetz [87] desarrolló el modelo analítico que explicaba el funcionamiento de los sistemas monofásicos lineales. Desde entonces, esta teoría ha sido recogida por numerosas normas y reglamentos, y en la actualidad es utilizada tanto en la enseñanza como en la práctica industrial.

La aplicación de la teoría de Steinmetz sobre otros sistemas eléctricos dio lugar a un conjunto de teorías, desarrolladas a lo largo del tiempo, denominadas para algunos autores Teorías Conservativas de la Energía Eléctrica, que son las que tradicionalmente se han utilizado, y continúan siéndolo hoy en día, en la industria o en la enseñanza y han tenido el respaldo de influyentes sociedades científicas, como la IEEE de EEUU, en sus normativas. Destaca C.I. Budeanu [9] como autor de una de estas teorías, aplicada a los sistemas monofásicos no lineales, e incluso en el pasado reciente, A.E. Emanuel fue un importante defensor de las mismas.

No obstante, las teorías de conservativas sólo aciertan en explicar el funcionamiento de los sistemas lineales, monofásicos y trifásicos equilibrados. En los demás casos, las magnitudes que se establecen no siempre están relacionadas con el fenómeno que pretenden caracterizar o cuantificar.

En el año 1922, F. Buchholz [8] pone en cuestión el modelo de funcionamiento de los sistemas desequilibrados lineales aportado por las teorías de la Energía y establece una nueva formulación más rigurosa de la potencia aparente.

La expresión de la potencia aparente de Buchholz no tuvo, por aquél entonces el apoyo de la Comunidad Científica, como tampoco lo tuvo la teoría desarrollada en el año 1932 por S. Fryze [34] para los sistemas monofásicos no lineales, al considerarse que sus magnitudes (potencias) no se derivaban de la energía, no cumplían el Principio de Conservación de la Energía y, por tanto, no tenían “significado físico”.

Hasta las últimas décadas del pasado siglo XX, estas teorías fueron utilizadas y aceptadas ya que en principio identificaban fielmente los fenómenos que se producían en los sistemas eléctricos. A partir de esa época, debido a los importantes cambios que se producen en estos sistemas, se pone de manifiesto que los resultados obtenidos en base a las antiguas teorías no son correctos cuando las tensiones y corrientes del sistema no son sinusoidales y equilibradas [65]. A partir de los años 70, aparecen numerosas teorías de la potencia eléctrica, basadas en principio, en modificaciones y ampliaciones de las teorías clásicas de Budeanu [9] y Fryze [34], [35]. En su conjunto, estos nuevos trabajos disponen en la actualidad con respaldos muy significativos de la Comunidad Científica, sin embargo, no siempre explican de forma adecuada el funcionamiento de los sistemas eléctricos. En algunos casos, porque no se tratan de verdaderas teorías de la potencia eléctrica que explican el funcionamiento de los sistemas eléctricos, sino que están enfocados a diseñar los circuitos de control de la mejora de eficiencia del sistema. En otros casos, porque no han sido definidos de forma correcta ya que incumplen la 1ª Ley de Kirchhoff.

En 1972 [82], Shepherd y Zakikhami establecen su modelo de funcionamiento de los sistemas monofásicos no lineales como una modificación de la teoría de Budeanu. En este modelo aparecen tres tipos de potencias con dimensiones de potencia aparente y ortogonales entre sí, denominadas: potencia aparente activa, reactiva y de distorsión.

En 1980 Depenbrock aporta el modelo FBD (Fryze Buchholz Depenbrock), donde sienta las bases para el cálculo en valor instantáneo de las corrientes activas. El trabajo no fue publicado en inglés hasta 1993 [24].

En 1980 [52], Kusters y Moore, desarrollan su modelo de funcionamiento en sistemas monofásicos no lineales como una modificación de la teoría de Fryze. Como novedad, los autores descomponen la potencia ficticia de Fryze en dos componentes: potencia reactiva principal y residual.

En 1981 [63], Nowomiesjki utiliza el modelo de potencia de Fryze y descompone la corriente de los sistemas monofásicos no lineales en tres diferentes: activa, reactiva y de distorsión.

En 1983 [1], H. Akagi, Y. Kanazawa y A. Nabae proponen la teoría de la potencia instantánea más conocida por “*Teoría p-q*” y en 1984 [2], los mismos autores proponen

un modelo para obtener, a partir de la potencia instantánea, las potencias activa y reactiva en sistemas trifásicos y las tensiones y corrientes que las producen. La gran aceptación de esta teoría y su amplia utilización en el control de dispositivos de compensación y mejora de la calidad de suministro eléctrico, la han consolidado como una de las teorías de la potencia eléctrica de compensación más extendidas. Basándose en la teoría “ $p-q$ ” propuesta inicialmente por Akagi y otros autores, han surgido numerosas teorías que proponen diferentes modificaciones sobre la misma. En 1992 [90], Willems presentó la expansión de la teoría “ $p-q$ ” a sistemas polifásicos. En 1993 [89], Watanabe adapta la teoría de la potencia instantánea de Akagi a sistemas trifásicos a 4 hilos. En 1994 [88], Nabae presenta una modificación de la teoría “ $p-q$ ” para que fuese aplicable a sistemas de cuatro hilos. En 1996 [67], Peng y Lai presentaron una generalización de la potencia reactiva instantánea. En 1996 [62], Nabae y Tanaka reformularon la teoría “ $p-q$ ” en coordenadas polares. En 1999 [50], fueron Kim y el propio Akagi quienes presentaron la teoría “ $p-q-r$ ” que expresa las variables de la teoría “ $p-q$ ” utilizando una transformación de coordenadas a un sistema de referencia giratorio. En la actualidad sigue siendo objeto de numerosos trabajos de investigación [50], [51], [73], [74], [76].

Las teorías de la potencia instantánea surgen a partir de desarrollos matemáticos complejos, con mayor o menor grado de abstracción, en los que no se puede establecer una relación directa entre las magnitudes calculadas y los fenómenos físicos reales presentes en el sistema eléctrico.

En 1997 [53] Vicente León Martínez, Joaquín Montañana Romeu y José Giner, miembros del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universitat Politècnica de València (UPV) presentan la “Teoría Unificada de la potencia eléctrica, UPM, (Unified Power Measurement)”, basándose en que los fenómenos inherentes a toda transferencia de energía en un sistema eléctrico se encuentran reflejados en la expresión de la potencia instantánea, además dichos fenómenos se hallan caracterizados por componentes de las tensiones y corrientes de cada fase, que verifican las leyes y teoremas de la Teoría de Circuitos. La UPM (Unified Power Measurement), así como el desarrollo de esta, se encuentra plasmado en numerosas publicaciones y trabajos [39], [53], [54], [55], [56], [57], [58], [59], [61],

En el año 2000, como resultado de los trabajos del “IEEE Working Group in non-sinusoidal situations” [41], se publicó la norma IEEE Std. 1459 en su versión “trial use”, siendo ascendida a “full use” en 2002 y actualizada en 2010 a la versión “Red Line” [42]. En este estándar se incluyen definiciones para las medidas de las magnitudes de potencia de los sistemas eléctricos en condiciones sinusoidales o no sinusoidales y equilibradas o desequilibradas. A partir de la potencia aparente efectiva, que es la misma que la introducida por Buchholz en 1950 [7], se presenta una elegante descomposición de los términos de potencia atendiendo a los fenómenos físicos que las producen. Se desarrolla la base matemática que permite el cálculo de las componentes de la potencia aparente debidas al fenómeno de transferencia de energía útil, al fenómeno de desfase, al de desequilibrio y al de distorsión. La IEEE Std. 1459 fue desarrollada pensando en equipos de medida, esto se debe a que necesita al menos un ciclo completo de la señal de red en régimen estacionario para alcanzar resultados correctos, alejándose de la idea de compensación instantánea de las teorías surgidas a raíz de Akagi, quien presenta una descomposición de potencias en base a los fenómenos que tienen lugar en los sistemas eléctricos y todas las magnitudes obtenidas tienen un claro significado físico, es decir cada magnitud está asociada a un fenómeno real. Desde su aparición es objeto de numerosos trabajos y publicaciones [29], [32], [64], [77], [91], [92].

### 1.3.1.- Teorías conservacionistas. Teoría de Steinmetz [87]

C.P. Steinmetz en 1897 [87] presenta su teoría donde se desarrolla el primer modelo físico y analítico para el estudio de los sistemas monofásicos lineales. A través de este modelo, Steinmetz explicaba y cuantificaba porque no toda la potencia eléctrica en corriente alterna se transforma en energía útil. Partiendo de valores instantáneos, establece que la aplicación de una diferencia de potencial sinusoidal sobre un receptor **monofásico lineal**, en el que existen elementos reactivos, da lugar al paso de una corriente sinusoidal de la misma frecuencia. Esta corriente o intensidad se encuentra desfasada un ángulo ( $\varphi$ ) respecto a la tensión y viene dada por la siguiente expresión:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}\omega t \quad (1.1)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi) \quad (1.2)$$

La corriente puede ser separada en dos componentes ortogonales, donde:

$$i(t) = i_A(t) + i_Q(t) \quad (1.3)$$

$$i_A(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \text{sen}\omega t \quad (1.4)$$

$$i_Q(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \cdot \text{sen}(\omega t - \pi/2) \quad (1.5)$$

Cada una de estas corrientes identifica un fenómeno energético diferenciado. La corriente  $i_A(t)$  representa la corriente activa y caracteriza la energía neta o transformable del sistema. La corriente  $i_Q(t)$  representa la corriente reactiva y caracteriza la energía reactiva o de desfase del sistema.

Cada uno de estos fenómenos energéticos queda reflejado a partir de la expresión de la potencia instantánea de la siguiente forma:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) \quad (1.6)$$

$$p(t) = 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \text{sen}^2\omega t - V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \cdot \text{sen} 2\omega t \quad (1.7)$$

El primer término se manifiesta como un flujo de potencia unidireccional. El valor medio cuantifica la potencia activa “ $P$ ” y caracteriza la transferencia de energía neta o transformable del sistema.

$$p_A(t) = 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \text{sen}^2\omega t \quad (1.8)$$

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = V \cdot I \cdot \cos\varphi \quad (1.9)$$

El segundo término se manifiesta como un flujo de potencia sinusoidal del doble de frecuencia de la tensión e intensidad y cuyo valor medio es nulo. Representa y cuantifica la potencia reactiva del sistema “ $Q$ ” o de desfase.

$$p_Q(t) = -V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \cdot \text{sen} 2\omega t \quad (1.10)$$

$$Q = V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \quad (1.11)$$

Steinmetz define la potencia reactiva como la amplitud de la potencia reactiva instantánea en base a las siguientes razones:

- a) por ser nulo el valor medio de la potencia reactiva instantánea.
- b) por la semejanza existente con la expresión de la potencia activa.

- c) y fundamentalmente por la relación que existe entre su valor y el fenómeno que cuantifica (en este caso, las oscilaciones de potencia entre el generador y el receptor debidas al desfase), cuyo origen se halla en la carga y descarga de la energía que en forma de campos electromagnéticos se almacena en las bobinas y condensadores.

La energía total del sistema para un sistema eléctrico monofásico en corriente alterna sinusoidal viene determinada por la potencia aparente “ $S$ ” a través de la siguiente expresión:

$$S = V \cdot I = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (1.12)$$

Para los seguidores de la Teoría Clásica, la potencia aparente debe ser conservativa, dado que sus dos componentes ( $P$  y  $Q$ ) también lo son.

La energía reactiva constituye una ineficiencia del sistema ya que no se transforma en energía útil. Por lo tanto, el cociente entre la potencia activa y aparente, denominado factor de potencia del sistema eléctrico, representa un índice que mide la eficiencia del sistema:

$$\lambda = \frac{P}{S} = \cos\varphi \quad (1.13)$$

### Sistemas trifásicos lineales equilibrados

La traslación directa de la Teoría de Steinmetz a los sistemas trifásicos lineales, llevada a cabo a principios del siglo XX, condujo a idénticos resultados a los obtenidos para los sistemas monofásicos lineales. Al igual que en los sistemas monofásicos y como una generalización de los mismos, en los sistemas trifásicos se consideran dos fenómenos que son el de transferencia de energía neta y los fenómenos reactivos.

La siguiente figura muestra un circuito trifásico equilibrado en tensiones e intensidades.

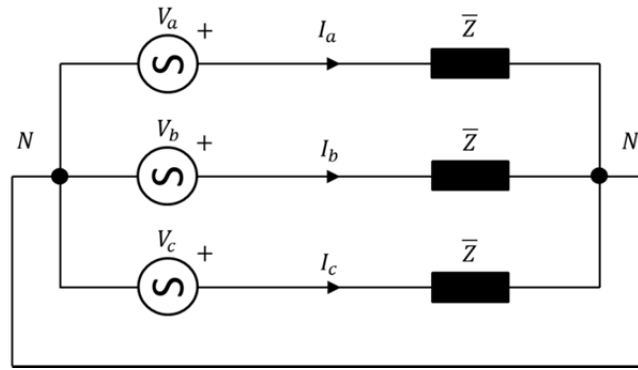


Figura nº 1.1: Sistema trifásico lineal equilibrado

Las expresiones temporales de las tensiones e intensidades en cada una de las fases del sistema serán las siguientes:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}\omega t \\ v_b(t) &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega t - 120) \\ v_c(t) &= \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega t - 240) \end{aligned} \quad (1.14)$$

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi) \\ i_b(t) &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi - 120) \\ i_c(t) &= \sqrt{2} \cdot I \cdot \text{sen}(\omega t - \varphi - 240) \end{aligned} \quad (1.15)$$

La potencia instantánea total del sistema viene determinada por la suma de las potencias de cada una de las fases, y al igual que en los sistemas monofásicos, tendrá dos componentes: activa y reactiva.

$$p(t) = \sum_{z=a,b,c} v_z(t) \cdot i_z(t) = v_a(t) \cdot i_a(t) + v_b(t) \cdot i_b(t) + v_c(t) \cdot i_c(t) \quad (1.16)$$

Al desarrollar esta expresión de la potencia instantánea, y al igual que en los sistemas monofásicos, las dos componentes de la potencia: activa y reactiva, representan los fenómenos energéticos de la transferencia de energía neta y de desfase.

$$p(t) = p_A(t) + p_Q(t) \quad (1.17)$$

a) Potencia activa instantánea:

$$\begin{aligned} p_A(t) &= 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \text{sen}^2\omega t + 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \text{sen}^2(\omega t - 120) + \\ &+ 2 \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi \cdot \text{sen}^2(\omega t - 240) \end{aligned} \quad (1.18)$$



$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) \cdot dt = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi \quad (1.19)$$

b) Potencia reactiva instantánea:

$$p_Q(t) = -V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \cdot \text{sen } 2\omega t - V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \cdot \text{sen } 2(\omega t - 120) - V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \cdot \text{sen } 2(\omega t - 240) \quad (1.20)$$

$$Q = 3 \cdot V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \quad (1.21)$$

c) Potencia aparente:

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = 3 \cdot V \cdot I \quad (1.22)$$

### Sistemas trifásicos lineales desequilibrados

En los sistemas desequilibrados, estas teorías de la energía proceden de idéntica forma que en los equilibrados, utilizando para ello el sistema mostrado en la figura nº 1.2.

En este caso, las expresiones temporales de las tensiones e intensidades de cada fase serán las siguientes:

$$\begin{aligned} v_a(t) &= \sqrt{2} \cdot V_a \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a) \\ v_b(t) &= \sqrt{2} \cdot V_b \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_b - 120) \\ v_c(t) &= \sqrt{2} \cdot V_c \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_c - 240) \end{aligned} \quad (1.23)$$

$$\begin{aligned} i_a(t) &= \sqrt{2} \cdot I_a \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a - \varphi_a) \\ i_b(t) &= \sqrt{2} \cdot I_b \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_b - \varphi_b) \\ i_c(t) &= \sqrt{2} \cdot I_c \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_c - \varphi_c) \end{aligned} \quad (1.24)$$

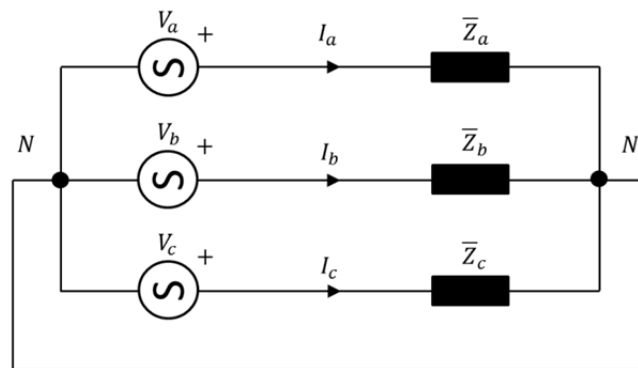


Figura nº 1.2: Sistema trifásico lineal desequilibrado.

Al igual que en los sistemas equilibrados, ya que estas teorías tan solo contemplan el fenómeno de transferencia de energía neta y el de reactiva, a través de la expresión de la potencia total instantánea, se deducen las componentes activa y reactiva del sistema trifásico.

a) Potencia activa instantánea:

$$\begin{aligned} p_A(t) &= 2 \cdot V_a \cdot I_a \cdot \cos\varphi_a \cdot \text{sen}^2(\omega t + \alpha_a) \\ &+ 2 \cdot V_b \cdot I_b \cdot \cos\varphi_b \cdot \text{sen}^2(\omega t + \alpha_b) \\ &+ 2 \cdot V_c \cdot I_c \cdot \cos\varphi_c \cdot \text{sen}^2(\omega t + \alpha_c) \end{aligned} \quad (1.25)$$

$$P = V_a \cdot I_a \cdot \cos\varphi_a + V_b \cdot I_b \cdot \cos\varphi_b + V_c \cdot I_c \cdot \cos\varphi_c \quad (1.26)$$

b) Potencia reactiva instantánea

$$\begin{aligned} p_Q(t) &= 2 \cdot V_a \cdot I_a \cdot \text{sen}\varphi_a \cdot \text{sen}^2(\omega t + \alpha_a) \\ &+ 2 \cdot V_b \cdot I_b \cdot \text{sen}\varphi_b \cdot \text{sen}^2(\omega t + \alpha_b) \\ &+ 2 \cdot V_c \cdot I_c \cdot \text{sen}\varphi_c \cdot \text{sen}^2(\omega t + \alpha_c) \end{aligned} \quad (1.27)$$

$$Q = V_a \cdot I_a \cdot \text{sen}\varphi_a + V_b \cdot I_b \cdot \text{sen}\varphi_b + V_c \cdot I_c \cdot \text{sen}\varphi_c \quad (1.28)$$

c) Potencia aparente

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2} = \sqrt{\left(\sum_{z=abc} P_z\right)^2 + \left(\sum_{z=abc} Q_z\right)^2} \quad (1.29)$$

### Incorrecciones de las teorías conservacionistas.

El autor de este trabajo comparte la opinión con otros autores como la UPM (Unified Power Measurement) [53], Czarnecki y Enmanuel, de que el uso de las teorías conservacionistas únicamente son válidas en sistemas lineales monofásicos y trifásicos equilibrados. Su empleo en el análisis de sistemas trifásicos lineales desequilibrados y no lineales conduce a resultados erróneos. Centrándonos en el fenómeno de desequilibrio, cabe destacar las siguientes incorrecciones:

- El principal planteamiento erróneo de estas teorías es no considerar como fenómeno energético a los desequilibrios. Los desequilibrios si dan lugar a energías y que son ineficiencias del sistema y como tales, perturban los flujos de transferencia de energía útil.

- En los sistemas desequilibrados, las expresiones de la potencia instantánea activa y reactiva no representan adecuadamente los fenómenos de transferencia de energía útil y de desfase, ya que hay términos que representan a energías debidas a desequilibrios. En las expresiones se encuentran inmersas las potencias inversas y homopolares, tanto en la componente activa como reactiva. Si no existiese desequilibrio, estas potencias ineficientes tendrían un valor nulo.
- La expresión de la potencia aparente no es una magnitud conservativa porque no incluye el fenómeno de desequilibrio. El no tener en cuenta todas las energías presentes en el sistema, solo la potencia activa y reactiva, da lugar a resultados erróneos que conlleva el mal dimensionamiento de los sistemas.

### 1.3.2.- Teoría de Buchholz [8]

Los errores de las teorías Conservacionistas al explicar el funcionamiento de los sistemas trifásicos desequilibrados, así como la incorrecta formulación de la potencia aparente en estos sistemas eléctricos, son resueltos por F. Buchholz [85] en 1922 y posteriormente por Goodhue [38], considerando que las magnitudes tensión y corriente de los circuitos trifásicos tienen tres componentes ortogonales, que son las correspondientes a cada una de sus fases. De esta manera, define a la potencia legal o potencia aparente del sistema, como la define Filipski más recientemente [32] de forma similar a los sistemas monofásicos, como el producto de los valores eficaces de la tensión ( $V$ ) y de la corriente ( $I$ ) del sistema.

$$S = V \cdot I = \sqrt{(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) \cdot (I_a^2 + I_b^2 + I_c^2)} \quad (1.30)$$

Esta magnitud, expresada en función de los valores eficaces de las tensiones y corrientes de las fases o en función de valores de secuencia [53] [26], es muy utilizada a nivel de investigación desde hace casi tres décadas, ya que tiene en cuenta a todos los fenómenos existentes en el sistema.

Se encuentra incluida en la norma IEEE Std. 1459-2010 [41]

### 1.3.3.- IEEE Std.1459/2010 [41]

La IEEE Std. 1459-2010 [41], es la última revisión de la norma estándar 1459 de IEEE, que recopila los trabajos realizados por “*IEEE Working Group in non-sinusoidal situations*” [61] y que fue publicada inicialmente en 2000 con rango de “*Trial Use*” y elevada a “*Full Use*” en 2010 para posteriormente pasar a su versión actual “*Red Line*”.

En esta norma se resumen diversas teorías usadas para la medida de cantidades relacionadas con la potencia eléctrica. En ella se ponen de manifiesto tanto las expresiones matemáticas usadas en el pasado como las más recientes. En su aplicación se incluyen las diversas condiciones que pueden darse en un sistema eléctrico y que son: linealidad, no linealidad, equilibrio y desequilibrio.

Las definiciones clásicas de potencia activa, reactiva y aparente, frecuentemente usadas se basan en el conocimiento desarrollado en los años 40 del siglo XX, y que fueron y algunas aún son válidas sobre todo para propósitos comerciales, siempre y cuando las formas de onda de la tensión sean sinusoidales. Pero en los últimos 50 años, se han producido una serie de cambios en los sistemas provocados entre otras cosas por:

1. Profusa utilización de equipos electrónicos, tales como variadores de velocidad, rectificadores, balastos electrónicos, hornos de arco de inducción, ordenadores personales, etc., lo que ha generado la presencia de flujos de energía no activa que distorsionan las tensiones y corrientes, siendo los causantes de la presencia de armónicos en los sistemas.

Surgimiento de nuevas definiciones de la potencia eléctrica, que conllevan sus correspondientes discusiones, aprobaciones y rechazos, como podemos ver en numerosos trabajos y publicaciones [17], [18], [24], [28], [29], [32], [41], [45], [64], [77], [91], [92].

2. La instrumentación usada hoy en día en la mayoría de aplicaciones es analógica y diseñada para el trabajo con ondas sinusoidales, a la frecuencia fundamental (50/60 Hz), lo que provoca que con ondas distorsionadas se produzcan errores no aceptables, lo que ha derivado en el uso de sistemas de adquisición y medida, que conectados con un ordenador en el que se halle implementado el

procedimiento de medida más adecuado, nos facilite la cuantificación de los parámetros eléctricos de nuestro interés.

En esta norma, surgen nuevas definiciones de la potencia eléctrica, que ya se plantean en las siguientes situaciones más acordes con nuestros días, tales como:

1. Presencia en los sistemas de tensiones y corrientes no sinusoidales.
2. Existencia de sistemas desequilibrados en la generación y/o en carga.

Las definiciones y expresiones que contiene la norma se agrupan en dos secciones. La primera sección contiene el análisis de los sistemas eléctricos monofásicos lineales y no lineales. En la segunda sección se abordan los sistemas eléctricos trifásicos equilibrados y desequilibrados, tanto lineales como no lineales. Debido a que el interés en este trabajo son los sistemas eléctricos trifásicos lineales, nos centraremos principalmente en abordar este tipo de sistemas, dejando de lado la aplicación del resto de configuraciones posibles. En los sistemas trifásicos sinusoidales lineales, se establece un doble planteamiento, diferenciando entre los sistemas eléctricos equilibrados o desequilibrados.

### Sistemas trifásicos lineales equilibrados

En los sistemas trifásicos lineales equilibrado, la norma plantea en primer lugar la potencia instantánea para sistemas trifásicos a 3 y 4 hilos y las definiciones para cuantificar las potencias activa, reactiva y aparente, que coinciden con la formulación que se ha expuesto en los apartados anteriores dentro de las teorías conservacionistas basadas en la Teoría de Steinmetz [87] y que pasamos a recordar:

- a) Potencia instantánea para 3 hilos:

$$p = v_{ab} \cdot i_a + v_{cb} \cdot i_c = v_{ac} \cdot i_a + v_{bc} \cdot i_b = v_{ba} \cdot i_b + v_{ca} \cdot i_c = P \quad (1.31)$$

- b) Potencia instantánea para 4 hilos:

$$p = v_a \cdot i_a + v_b \cdot i_b + v_c \cdot i_c = P \quad (1.32)$$

- c) Potencia activa:

$$P = 3 \cdot V \cdot I \cdot \cos\varphi \quad (1.33)$$

d) Potencia reactiva:

$$Q = 3 \cdot V \cdot I \cdot \text{sen}\varphi \quad (1.34)$$

e) Potencia aparente:

$$S = 3 \cdot V \cdot I \quad (1.35)$$

### Sistemas trifásicos lineales desequilibrados

En la cuantificación de las potencias eléctricas en los sistemas trifásicos lineales desequilibrados, la norma recopila y contempla tres planteamientos posibles.

El **primer planteamiento** es idéntico al descrito anteriormente para los sistemas equilibrados, donde las definiciones y expresiones de las potencias activa y reactiva vienen determinadas como la suma aritmética de la correspondiente a cada una de las fases.

$$P = P_a + P_b + P_c = V_a \cdot I_a \cdot \cos\varphi_a + V_b \cdot I_b \cdot \cos\varphi_b + V_c \cdot I_c \cdot \cos\varphi_c \quad (1.36)$$

$$Q = Q_a + Q_b + Q_c = V_a \cdot I_a \cdot \text{sen}\varphi_a + V_b \cdot I_b \cdot \text{sen}\varphi_b + V_c \cdot I_c \cdot \text{sen}\varphi_c \quad (1.37)$$

$$S = \sqrt{(P_a + P_b + P_c)^2 + (Q_a + Q_b + Q_c)^2} = \sqrt{P^2 + Q^2} \quad (1.38)$$

El **segundo planteamiento**, emplea componentes simétricas [36] en lugar de componentes de fase en las definiciones de las potencias eléctricas; así:

a) Potencia activa:

$$P^+ = 3 \cdot V^+ \cdot I^+ \cdot \cos\varphi^+ \quad (1.39)$$

$$P^- = 3 \cdot V^- \cdot I^- \cdot \cos\varphi^- \quad (1.40)$$

$$P^0 = 3 \cdot V^0 \cdot I^0 \cdot \cos\varphi^0 \quad (1.41)$$

$$P = P^+ + P^- + P^0 \quad (1.42)$$

b) Potencia reactiva:

$$Q^+ = 3 \cdot V^+ \cdot I^+ \cdot \text{sen}\varphi^+ \quad (1.43)$$

$$Q^- = 3 \cdot V^- \cdot I^- \cdot \text{sen}\varphi^- \quad (1.44)$$

$$Q^0 = 3 \cdot V^0 \cdot I^0 \cdot \text{sen}\varphi^0 \quad (1.45)$$

$$Q = Q^+ + Q^- + Q^0 \quad (1.46)$$

c) Potencia aparente:

$$S^+ = |S^+| = |P^+ + jQ^+| \quad (1.47)$$

$$S^- = |S^-| = |P^- + jQ^-| \quad (1.48)$$

$$S^0 = |S^0| = |P^0 + jQ^0| \quad (1.49)$$

$$S = |S| = |S^+ + S^- + S^0| \quad (1.50)$$

El **tercer planteamiento** se refiere a la **Teoría de Emanuel. A.** [25] en el que expone la idea de que los sistemas trifásicos desequilibrados (lineales y no lineales) pueden ser explicados en base a un circuito virtual equilibrado que posea las mismas pérdidas de potencia que el sistema trifásico desequilibrado real y que consuma una potencia aparente denominada “Potencia Aparente Efectiva “ $S_e$ ”.

En el caso de la presente tesis, nos centraremos únicamente en los sistemas trifásicos lineales.

La Potencia aparente efectiva ( $S_e$ ), en función de los valores efectivos de la tensión e intensidad, viene determinada por la siguiente expresión:

$$S_e = 3 \cdot V_e \cdot I_e \quad (1.51)$$

La condición de igualdad de pérdidas de potencia del circuito real y del equivalente propuesto, para un **sistema a 4 hilos**, [27], [28] se expresa como:

$$r \cdot (I_a^2 + I_b^2 + I_c^2 + \rho \cdot I_n^2) = 3 \cdot r \cdot I_e^2 \quad (1.52)$$

$$I_e = \sqrt{\frac{I_a^2 + I_b^2 + I_c^2 + \rho \cdot I_n^2}{3}} = \sqrt{(I^+)^2 + (I^-)^2 + (1 + 3 \cdot \rho) \cdot (I^0)^2} \quad (1.53)$$

siendo:

- $I_e$ : Intensidad efectiva
- $r$ : Resistencia de la línea.
- $r_n$ : Resistencia del neutro.
- $\rho$ : ratio ( $r_n/r$ )

Si consideramos que  $r_n = r$ , es decir,  $\rho = 1$ , el valor de  $I_e$  vendrá dado por la siguiente expresión:

$$I_e = \sqrt{\frac{I_a^2 + I_b^2 + I_c^2 + I_n^2}{3}} = \sqrt{(I^+)^2 + (I^-)^2 + 4 \cdot (I^0)^2} \quad (1.54)$$

Si en la expresión de igualdad de pérdidas de potencia en el circuito real y en el circuito equivalente, se sustituyen las corrientes por las tensiones en bornes del receptor, se define la tensión efectiva como:

$$V_e = \sqrt{\frac{3 \cdot (V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) + V_{ab}^2 + V_{bc}^2 + V_{ca}^2}{18}} = \sqrt{(V^+)^2 + (V^-)^2 + \frac{(V^0)^2}{2}} \quad (1.55)$$

En un **sistema a 3 hilos**, [26] las expresiones de los valores de intensidad y tensión efectiva serán las siguientes:

$$I_e = \sqrt{\frac{I_a^2 + I_b^2 + I_c^2}{3}} = \sqrt{(I^+)^2 + (I^-)^2} \quad (1.56)$$

$$V_e = \sqrt{\frac{V_{ab}^2 + V_{bc}^2 + V_{ca}^2}{9}} = \sqrt{(V^+)^2 + (V^-)^2} \quad (1.57)$$

A partir de la potencia aparente efectiva “ $S_e$ ” y la potencia aparente de secuencia positiva “ $S^+$ ”, se cuantifica en módulo el valor de la potencia aparente de desequilibrio  $S_U$ , mediante la siguiente expresión:

$$S_U = \sqrt{S_e^2 - (S^+)^2} = \sqrt{S_e^2 - ((P^+)^2 + (Q^+)^2)} \quad (1.58)$$

La norma IEEE Std 1459 y Emanuel definen el factor de potencia efectivo como:

$$PF_e = \frac{P}{S_e} \quad (1.59)$$

#### Incorrecciones a tener en cuenta.

La norma y Emanuel aciertan al separar las potencias activa y reactiva de secuencia directa y frecuencia fundamental [27], [53], [91]. De esta manera, reconoce, aunque implícitamente, el significado de los fenómenos de energía útil y reactiva, respectivamente. Asimismo, acierta al definir y cuantificar la potencia de desequilibrio como energía ineficiente.



No obstante, la definición de potencia aparente efectiva no es adecuada para cuantificar los efectos de los demás fenómenos. A pesar de que en su obtención se relaciona con un hecho físico (las pérdidas de potencia), se trata de una magnitud formal que no recoge el funcionamiento real de los receptores, ni establece los fenómenos que en ellos se manifiestan. En los sistemas a tres hilos, no se tienen en cuenta los fenómenos debidos a la componente homopolar de las tensiones y corrientes de las fases del receptor, mientras que en los sistemas a cuatro hilos, se valora de forma desproporcionada los efectos del hilo neutro sobre el desequilibrio y la distorsión, magnificándolos [39].

La potencia aparente efectiva no determina la potencia aparente del receptor real y, por tanto, las potencias de desequilibrio y no fundamental de Emanuel, que se obtienen a partir de ella, no son adecuadas para cuantificar los fenómenos del desequilibrio y de la distorsión.

Tampoco los factores de potencia definidos por Emanuel son útiles para determinar la eficiencia del sistema real. El factor de potencia (1.59), definido por la relación entre la potencia activa y la potencia aparente efectiva, tiene términos en el numerador que no contribuyen a la eficiencia y el denominador está mal definido, tal como se ha indicado. Asimismo, los factores de potencia de frecuencia fundamental y secuencia directa sólo son útiles para conocer cuánto se puede mejorar la eficiencia del sistema [27], [77].

Finalmente, el modelo de potencia de Emanuel no proporciona información suficiente para el diseño de dispositivos de mejora de la eficiencia, dado que no se definen componentes de las tensiones y corrientes que caracterizan a los fenómenos de desequilibrio y distorsión [39].

#### **1.3.4.- Teoría de la potencia reactiva instantánea. [1]**

Las definiciones de las potencias eléctricas dentro del marco temporal datan de los años 30, sin embargo, no es hasta 1983 cuando Akagi, Kanazawa y Nabae presentan la teoría de la potencia reactiva instantánea, más conocida desde su inicio como teoría  $p-q$  [1] En esta teoría, los autores proponen un modelo para obtener, a partir de la potencia instantánea, las potencias activa y reactiva en sistemas trifásicos y las tensiones y corrientes que las producen. La gran aceptación de esta teoría y su amplia utilización en el control de dispositivos de compensación y mejora de la calidad de suministro

eléctrico, la han consolidado como una de las teorías de la potencia eléctrica de compensación más extendidas.

En su formulación inicial, Akagi presenta sus trabajos para analizar los **sistemas a tres hilos**. Para ello, propone transformar las tensiones e intensidades trifásicas a un **marco de referencia** estacionario de dos dimensiones denominado  $\alpha\beta$ . Para el cambio al nuevo sistema de referencia utiliza la transformada de Park “[P]”:

$$[P] = \frac{\sqrt{2}}{3} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \quad (1.60)$$

Las componentes de tensiones e intensidades en el sistema de referencia  $\alpha\beta 0$  se determinan de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} v_\alpha \\ v_\beta \end{bmatrix} = [P] \cdot \begin{bmatrix} v_a \\ v_b \\ v_c \end{bmatrix} \quad (1.61)$$

$$\begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} = [P] \cdot \begin{bmatrix} i_a \\ i_b \\ i_c \end{bmatrix} \quad (1.62)$$

Utilizando estas variables transformadas, Akagi define las potencias de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} p_{\alpha\beta} \\ q_{\alpha\beta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_\alpha & v_\beta \\ -v_\beta & v_\alpha \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_\alpha \\ i_\beta \end{bmatrix} \quad (1.63)$$

El término “ $p_{\alpha\beta}$ ” es la **potencia real instantánea**, que está constituida por un término constante que coincide con la potencia activa ( $P$ ) y una suma de términos sinusoidales “ $p(\approx)$ ” que cuantifican los fenómenos de distorsión y desequilibrio en el sistema trifásico.

$$p(t) = p_{\alpha\beta} = v_\alpha \cdot i_\alpha + v_\beta \cdot i_\beta = P + p(\approx) \quad (1.64)$$

El término “ $q_{\alpha\beta}$ ”, fue la verdadera innovación de la formulación de esta teoría, que denominó como **potencia imaginaria instantánea**. Desde el punto de vista físico, Akagi establece que la potencia reactiva no se puede medir en el plano real, sino sobre

un eje ortogonal, definido por el vector potencia imaginaria instantánea, y que surge como producto de tensiones y corrientes de fases distintas del sistema transformado. Es por ello que Akagi, propone como unidad para esta potencia imaginaria el IVA (Imaginary Volt-Ampere). De idéntica forma a la planteada en la potencia real instantánea, la potencia imaginaria está constituida de un término constante ( $Q$ ) que representa la energía reactiva y una suma de términos sinusoidales “ $q(\approx)$ ” debida a los fenómenos de distorsión y desequilibrio.

$$q(t) = q_{\alpha\beta} = v_{\alpha} \cdot i_{\beta} - v_{\beta} \cdot i_{\alpha} = Q + q(\approx) \quad (1.65)$$

En 1984, los mismos autores [2] plantearon la extensión de la teoría a sistemas trifásicos a **cuatro hilos**. Para ello, introducen un nuevo **sistema de referencia**, denominado “ $\alpha\beta 0$ ” que incorpora la influencia del neutro a través de las componentes homopolares de las tensiones e intensidades del sistema trifásico. Las corrientes y tensiones instantáneas se transforman al sistema de ejes “ $\alpha\beta 0$ ” mediante:

$$\begin{bmatrix} v_0 \\ v_{\alpha} \\ v_{\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (1.66)$$

$$\begin{bmatrix} i_0 \\ i_{\alpha} \\ i_{\beta} \end{bmatrix} = \sqrt{\frac{2}{3}} \cdot \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \end{bmatrix} \quad (1.67)$$

Ligada al eje 0, se introduce una nueva componente de la potencia asociada a los valores de las componentes homopolares de la tensión e intensidad, denominada: potencia instantánea de secuencia cero u homopolar “ $p_0$ ”. La expresión inicial de las potencias se modificada de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} p_{\alpha\beta} \\ q_{\alpha\beta} \\ p_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{\alpha} & v_{\beta} & 0 \\ -v_{\beta} & v_{\alpha} & 0 \\ 0 & 0 & v_0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i_{\alpha} \\ i_{\beta} \\ i_0 \end{bmatrix} \quad (1.68)$$

La potencia de secuencia cero, al igual que en el resto de potencias definidas anteriormente, contiene un término constante y otro oscilante.

$$p_0(t) = v_0 \cdot i_0 = P_0 + p_0(\approx) \quad (1.69)$$

Akagi considera que la potencia de secuencia cero “ $p_0$ ” no afecta a la potencia imaginaria instantánea, de ahí que solo sea incluida en la expresión de la potencia real instantánea, quedando de la siguiente forma:

$$p(t) = p_{\alpha\beta} + p_0 = v_\alpha \cdot i_\alpha + v_\beta \cdot i_\beta + v_0 \cdot i_0 \quad (1.70)$$

En 1993, Watanabe, Stephan y Aredes [89] establecen nuevos conceptos de las **potencias activas y reactivas instantáneas en sistemas desequilibrados** a 3 y 4 hilos con cargas lineales. En el análisis plantean el sistema trifásico mediante componentes simétricas y proponen las siguientes expresiones de las potencias eléctricas:

- Término constante de la potencia real instantánea:

$$P = 3 \cdot V^+ \cdot I^+ \cdot \cos(\theta^+ - \varphi^+) + 3 \cdot V^- \cdot I^- \cdot \cos(\theta^- - \varphi^-) \quad (1.71)$$

- Términos sinusoidales de la potencia real instantánea:

$$p(\approx) = -3 \cdot V^+ \cdot I^- \cdot \cos(2\omega t + \theta^+ + \varphi^-) - 3 \cdot V^- \cdot I^+ \cdot \cos(2\omega t + \theta^- + \varphi^+) \quad (1.72)$$

- Término constante de la potencia imaginaria instantánea:

$$Q = -3 \cdot V^+ \cdot I^+ \cdot \sen(\theta^+ - \varphi^+) + 3 \cdot V^- \cdot I^- \cdot \sen(\theta^- - \varphi^-) \quad (1.73)$$

- Términos sinusoidales de la potencia imaginaria instantánea:

$$q(\approx) = 3 \cdot V^+ \cdot I^- \cdot \sen(2\omega t + \theta^+ + \varphi^-) - 3 \cdot V^- \cdot I^+ \cdot \sen(2\omega t + \theta^- + \varphi^+) \quad (1.74)$$

- Término constante de la potencia de secuencia cero instantánea:

$$P_0 = 3 \cdot V^0 \cdot I^0 \cdot \sen(\theta^0 - \varphi^0) \quad (1.75)$$

- Términos sinusoidales de la potencia de secuencia cero instantánea:

$$q(\approx) = -3 \cdot V^0 \cdot I^0 \cdot \sen(2\omega t + \theta^0 + \varphi^0) \quad (1.76)$$

- Potencia armónica, mide los efectos en conjunto de la potencia de desequilibrio y de distorsión, expresada en valores eficaces de los flujos de las potencias instantáneas:

$$H = \sqrt{P(\approx)^2 + Q(\approx)^2} \quad (1.77)$$

- Potencia aparente, expresa la ortogonalidad entre las potencias activas ( $P$ ), reactivas ( $Q$ ) y armónica ( $H$ ):

$$S = \sqrt{P^2 + Q^2 + H^2} \quad (1.78)$$

En base a estas expresiones, se exponen las siguientes conclusiones:

- La potencia de secuencia cero “ $p_0$ ” no es una energía útil, ya que representan a energías que se manifiestan como consecuencia del desequilibrio, por lo tanto, no forma parte de la expresión de la potencia real instantánea.
- Al igual que sus antecesores, solo las secuencias positiva y negativa pueden producir potencia reactiva.

#### Incorrecciones a tener en cuenta.

Las correcciones en la aplicación de esta teoría, compartidas por el autor de este trabajo así como por la UPM (Unified Power Measurement) y otros autores [73], [93], son las siguientes:

- La potencia activa no contiene términos debidos a la secuencia homopolar, por tanto, no es igual al valor medio de la potencia instantánea. Se considera, acertadamente, que la potencia activa de secuencia cero no contribuye a la eficiencia del sistema; sin embargo, no dice lo mismo de la potencia activa de secuencia inversa, que también se obtiene con mala calidad en el suministro.
- La potencia reactiva tampoco tiene términos debidos a la secuencia homopolar [73], pero sí a la secuencia inversa. Esta última se suma aritméticamente a la potencia reactiva de secuencia directa, sin tener en cuenta su carácter inductivo o capacitivo, por lo que su valor puede ser incluso superior a la potencia reactiva tradicional.

### 1.3.5.- Teoría unificada de las potencias, UPM (Unified Power Measurement) [53]

La Teoría Unificada de la Potencia Eléctrica UPM, (Unified Power Measurement) [53], [59], fue descrita por Vicente León Martínez, Joaquín Montañana Romeu y José Giner, miembros del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universitat Politècnica de València (UPV) en 1997 partiendo de la utilización de la definición de la potencia instantánea  $p(t)$  la cual tiene pleno significado físico y refleja los fenómenos debidos a la transferencia de energía en los sistemas eléctricos caracterizados por componentes de las tensiones e intensidades de cada fase, conocidas de la Teoría de Circuitos, que verifican las leyes de Kirchhoff y el Principio de Superposición.

Considerando las ineficiencias posibles en un sistema eléctrico, las tensiones e intensidades instantáneas pueden ser expresadas como [56]:

$$v_z(t) = \underbrace{v_z^+(t)} + \underbrace{v_z^-(t)} + \underbrace{v_z^0(t)} + \underbrace{\sum_{n=2}^{\infty} v_{nz}(t)} \quad (1.79)$$

$$i_z(t) = \underbrace{i_{az}^+(t)} + \underbrace{i_{rz}^+(t)} + \underbrace{i_z^-(t)} + \underbrace{i_z^0(t)} + \underbrace{\sum_{m=2}^{\infty} i_{mz}(t)} \quad (1.80)$$

Las expresiones anteriores dividen las tensiones e intensidades de cada fase en tres componentes de frecuencia fundamental, mediante la aplicación del Teorema de Fortescue (Stokvis) [36], de secuencia directa  $(v_z^+(t); i_z^+(t))$ , de secuencia inversa  $(v_z^-(t); i_z^-(t))$  y de secuencia homopolar  $(v_z^0(t); i_z^0(t))$  y en un sumatorio infinito de términos de tensión e intensidad múltiplos de la frecuencia fundamental debidos a las componentes armónicas de los elementos no lineales  $(\sum_{n=2}^{\infty} v_{nz}(t); \sum_{m=2}^{\infty} i_{mz}(t))$ .

- El **primer término** de las expresiones anteriores  $(v_z^+(t); i_{az}^+(t); i_{rz}^+(t))$  caracteriza el efecto debido al desfase entre la tensión de secuencia directa del generador y las corrientes, que se separan en dos términos ortogonales entre sí  $(i_{az}^+(t); i_{rz}^+(t))$  que muestran la corriente activa que determina la potencia efectiva  $(p_e(t))$  que puede ser transformada en energía eficiente y la corriente reactiva debida al desfase, que es ortogonal a la tensión y determina la

ineficiencia provocada por la existencia de elementos reactivos y que da lugar a la potencia reactiva ( $p_R(t)$ ) que no puede ser transformada.

- El **segundo término** caracterizado por las secuencias inversas y homopolares ( $v_z^-(t); v_z^0(t); i_z^-(t); i_z^0(t)$ ) muestra el efecto de las asimetrías debidas a las cargas y el modo de conexión de estas, representándose como  $v_{Az}, i_{Az}$ .
- El **tercer término** corresponde a la distorsión debida a la no linealidad de elementos constituyentes del sistema eléctrico ( $\sum_{n=2}^{\infty} v_{nz}(t); \sum_{m=2}^{\infty} i_{mz}(t)$ ), que es representado como  $v_{Dz}, i_{Dz}$ .

La figura siguiente muestra de forma esquemática lo anteriormente expuesto según la UPM (Unified Power Measurement):.

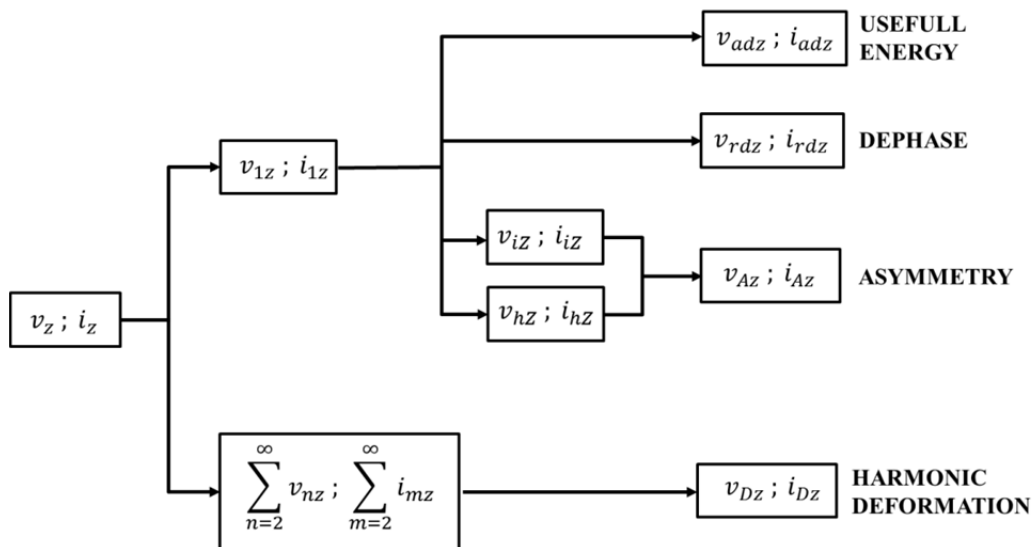


Figura nº 1.3: Fenómenos energéticos de acuerdo con la Teoría Unificada de las Potencias. Obtenido de la referencia [54]

Los fenómenos energéticos de transferencia de energía que se manifiestan en los sistemas eléctricos en régimen permanente, están caracterizados por las componentes de la potencia instantánea  $p(t)$ ; así:

$$p(t) = \sum_{z=1,2,3} v_z(t) \cdot i_z(t) \quad (1.81)$$

en la que sustituyendo los términos  $v(t)$  e  $i(t)$  de las expresiones (1.79) y (1.80) la potencia instantánea quedará como:

$$p(t) = \sum_{z=1,2,3} \left[ \left( v_z^+(t) + \sum_{x=-,0} v_z^x(t) + \sum_{n=2}^{\infty} v_{nz}(t) \right) \cdot \left( i_{az}^+(t) + i_{rz}^+(t) + \sum_{y=-,0} i_z^y(t) + \sum_{m=2}^{\infty} i_{mz}(t) \right) \right] \quad (1.82)$$

Agrupando adecuadamente los términos e identificando los efectos debidos a los fenómenos energéticos ocasionados por las ineficiencias atribuibles al desfase, asimetría y distorsión, la potencia instantánea puede ser expresada como:

$$p(t) = \sum_{z=1,2,3} \left[ \underbrace{\frac{v_z^+(t) \cdot i_{az}^+(t)}{p_e(t)} + \frac{v_z^+(t) \cdot i_{rz}^+(t)}{p_r(t)}}_{\text{}} + \underbrace{\sum_{\substack{x=-,0 \\ x=y}} v_z^x(t) \cdot i_z^y(t) + \sum_{\substack{x=+,-,0 \\ x \neq y}} v_z^x(t) \cdot i_z^y(t)}_{p_A(t)} + \underbrace{\sum_{\substack{n=2 \\ n=m}} v_{nz}(t) \cdot i_{mz}(t) + \sum_{\substack{n,m=1 \\ n \neq m}} v_{nz}(t) \cdot i_{mz}(t)}_{p_D(t)} \right] \quad (1.83)$$

quedando como:

$$p(t) = p_e(t) + p_r(t) + p_A(t) + p_D(t) \quad (1.84)$$

Identificando cada uno de los términos atribuibles a la potencia tendremos:

- El **primer término**  $p_e(t)$  de (1.84) corresponde a la **potencia efectiva instantánea** debida a las componentes de secuencia directa y frecuencia fundamental de tensión e intensidad activa. Caracteriza la transferencia de energía neta con un flujo de potencia unidireccional de valor medio no nula y capaz por tanto de transformarse por completo en otro tipo de energía.

$$p_{a-mono}(t) = v_a(t) \cdot i_a(t) = 2 \cdot V \cdot I \cdot \text{sen}^2(\omega t) = V \cdot I \cdot (1 - \cos(2\omega t)) \quad (1.85)$$

$$p_{a-3F}(t) = \sum_{z=1}^3 v_z^+(t) \cdot i_{az}^+(t) \quad (1.86)$$



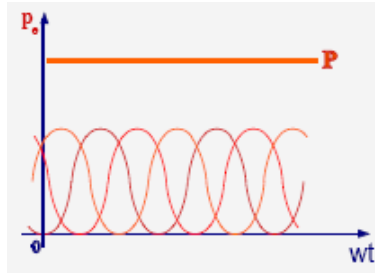


Figura nº 1.4: Componente de la potencia efectiva instantánea. Obtenido de la referencia [54]

Expresada en valores eficaces es:

$$P = 3 \cdot V^+ \cdot I_a^+ = 3 \cdot V^+ \cdot I^+ \cdot \cos \rho^+ \quad (W) \quad (1.87)$$

similar a la potencia activa clásica, considerando únicamente las componentes de secuencia directa y que puede ser también expresada como:

$$P = 3 \cdot \sqrt{V^{+2} \cdot I_a^{+2}} \quad (1.88)$$

- El **segundo término**  $p_r(t)$  de (1.84) define la **potencia instantánea reactiva** debida a los desfases y está dada por las componentes de secuencia directa a frecuencia fundamental de tensión e intensidad reactiva. Caracteriza un flujo de potencia bidireccional, debido a los desfases que ocasionan los elementos reactivos (inductivos y/o capacitivos) del sistema eléctrico, y tiene un valor medio nulo, por lo que no puede ser transformada.

A esta potencia se le denomina como potencia reactiva (o potencia de desfase), y se manifiesta siempre a frecuencia fundamental.

$$p_{r-mono}(t) = v(t) \cdot i_r(t) = V \cdot I \cdot \cos(2\omega t + \pi/2) \quad (1.89)$$

$$p_{r-3F}(t) = \sum_{z=1}^3 v_z^+(t) \cdot i_{rz}^+(t) \quad (1.90)$$

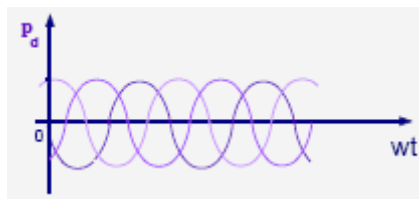


Figura nº 1.5: Componente de la potencia reactiva instantánea. Obtenido de la referencia [54]

Expresada en valores eficaces es:

$$Q = 3 \cdot \sqrt{V^{+2} \cdot I_r^{+2}} = 3 \cdot V^+ \cdot I_r^+ = 3 \cdot V^+ \cdot I^+ \cdot \text{sen } \rho^+ \quad (VAR) \quad (1.91)$$

similar a la potencia reactiva clásica, considerando únicamente las componentes de secuencia directa y que puede ser también expresada como:

$$Q^2 = 9 \cdot V^{+2} \cdot I_r^{+2} \quad (1.92)$$

- El **tercer término**  $p_A(t)$  de (1.84) identifica la **potencia instantánea de Asimetría o Desequilibrio** de los sistemas trifásicos (en general es extensible a todos los sistemas polifásicos) debida a la existencia de algún valor de tensión e intensidad de módulo y/o ángulo de desfase distinto del correspondiente a un sistema trifásico equilibrado.

La potencia instantánea de asimetría para un sistema trifásico desequilibrado será:

$$p_A(t) = \sum_{z=1}^3 (v_z(t) \cdot i_z(t)) = \sum_{z=1}^3 \left[ \sum_{\substack{x=y \\ x,y=-,0}} (v_z^x \cdot i_z^y) + \sum_{\substack{x \neq y \\ x,y=+,-,0}} (v_z^x \cdot i_z^y) \right] \quad (1.93)$$

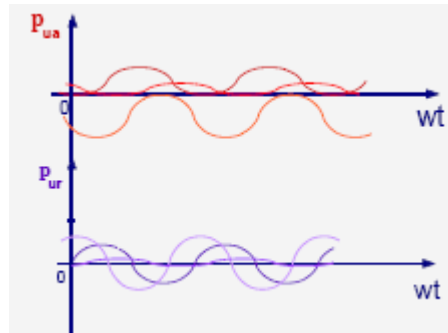


Figura n° 1.6: Componente de la potencia instantánea de desequilibrio o asimetría.

Obtenido de la referencia [54]

y expresada en valor eficaz:

$$A_u = 3 \cdot \sqrt{\sum_{\substack{x=y \\ x,y=-,0}} (V^{x2} \cdot I^{y2}) + \sum_{\substack{x \neq y \\ x,y=+,-,0}} (V^{x2} \cdot I^{y2})} \quad (VA) \quad (1.94)$$

- El **cuarto término**  $p_D(t)$  de (1.84) cuantifica la **potencia instantánea de distorsión armónica**, debida a elementos de características no lineales que lleva aparejada la existencia de tensiones y corrientes armónicas múltiplo de la fundamental.

La potencia de distorsión en valor instantáneo se expresa según:

$$p_D(t) = \sum_{n,m=2}^{\infty} v_n(t) \cdot i_m(t) + \sum_{\substack{n \neq m \\ n,m=1}}^{\infty} v_n(t) \cdot i_m(t) \quad (1.95)$$

y en valor eficaz:

$$D_u = 3 \cdot \sqrt{\sum_{n,m=2}^{\infty} (V_n^2 \cdot I_m^2) + \sum_{\substack{n \neq m \\ n,m=1}}^{\infty} (V_n^2 \cdot I_m^2)} \quad (VA) \quad (1.96)$$

Así, la **potencia aparente** ( $S_u$ ) y las componentes de las potencias presentes en un sistema eléctrico definidas por la UPM, expresadas en valores eficaces, será:

$$S_u^2 = P^2 + Q^2 + A_u^2 + D_u^2 \quad (1.97)$$

Este trabajo se centrara exclusivamente en el **estudio de redes desequilibradas**, por lo que la ineficiencia de distorsión ( $D_u$ ) no será considerada. Así la expresión de la potencia aparentes, será:

$$S_u = 3 \cdot \sqrt{(V^{+2} + V^{-2} + V^{0^2}) \cdot (I^{+2} + I^{-2} + I^{0^2})} = P^2 + Q^2 + A_u^2 \quad (1.98)$$

Las potencias activa o eficiente ( $P$ ), reactiva ( $Q$ ) y de desequilibrio ( $A_u$ ) son ortogonales entre sí, sumándose cuadráticamente, ya que cuantifican fenómenos diferentes. Su representación gráfica en los lados de un tetraedro, cuya diagonal es la potencia aparente será:

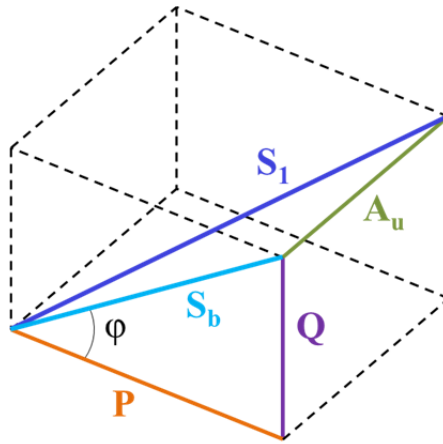


Figura nº 1.7: Tetraedro de potencias de un circuito trifásico desequilibrado en cargas.  
Obtenido de la referencia [53]

donde se pone de manifiesto el error que se comete al cuantificar la potencia aparente de la forma clásica con respecto a la expuesta por la UPM (Unified Power Measurement) en la cual se consideran las ineficiencias en los sistemas eléctricos.

$$S_1^2 = \underbrace{P^2 + Q^2}_{S_b^2} + A_u^2 = S_b^2 + A_u^2 \quad (1.99)$$

$$S_1^2 \geq S_b^2$$

Dado que la potencia de asimetría o desequilibrio aparece como consecuencia de los desequilibrios en las cargas, su valor será nulo cuando estos no existan coincidiendo en este caso la expresión anterior con la de la potencia aparente clásica.

Con el fin de cuantificar la eficiencia del sistema, la UPM define el factor de eficiencia ( $\varepsilon$ ), mide el grado de energía que es aprovechable por el sistema, permitiendo determinar conjuntamente la eficiencia y la calidad de suministro de cualquier sistema eléctrico.

$$\varepsilon = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + A_u^2}} \quad (1.100)$$

En 2007 el grupo de investigación GINTEC (Grupo de investigación en Nuevas Tecnologías en Ingeniería Eléctrica) de la Universitat Politècnica de València (UPV) compuesto por Vicente León Martínez, Joaquín Montañana Romeu y José Giner, definió la potencia de desequilibrio de forma compleja mediante el “Fasor Potencia Total de Desequilibrio,  $\bar{A}_u$ ” [59] [58]:

$$\begin{aligned} \bar{A}_u &= |\bar{A}_{up}| \cdot \vec{p} + |\bar{A}_{uq}| \cdot \vec{q} = \\ &= \sqrt{2} \cdot (|P_1 + a^2 \cdot P_2 + a \cdot P_3| \cdot \vec{p} + |Q_1 + a^2 \cdot Q_2 + a \cdot Q_3| \cdot \vec{q}) \end{aligned} \quad (1.101)$$

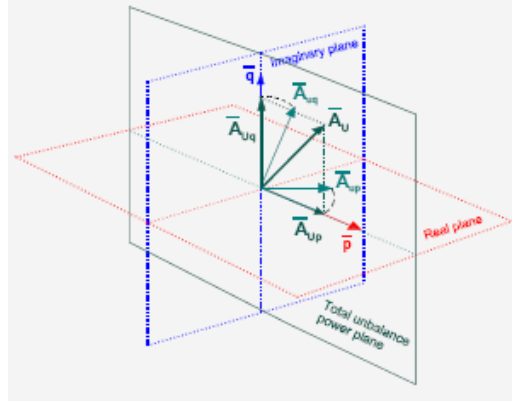


Figura n°1.8: Fasor potencia de desequilibrio y sus componentes. Obtenido la referencia [59]

Donde los términos  $P_z$  y  $Q_z$  corresponden a las potencias activas (o eficientes) y reactivas de cada fase,  $\vec{p} = e^{j0^\circ}$ ,  $\vec{q} = e^{j90^\circ}$  son versores definidos en el espacio propio de la potencia de desequilibrio o asimetría y  $\bar{A}_{up}$ ,  $\bar{A}_{uq}$  son las componentes del fasor de potencia de desequilibrio debidos a las asimetrías de las cargas activas y reactivas, respectivamente.

El módulo del fasor de potencia de desequilibrio es:

$$A_u = \sqrt{[(P_1 - P_2)^2 + (P_2 - P_3)^2 + (P_3 - P_1)^2] + [(Q_1 - Q_2)^2 + (Q_2 - Q_3)^2 + (Q_3 - Q_1)^2]} \quad (1.102)$$

y su argumento determina la responsabilidad de las cargas activas y reactivas en la ineficiencia debida al desequilibrio.

#### 1.4. CONCLUSIONES

La presente tesis se centra en la formulación de la potencia de desequilibrio aplicada a redes eléctricas desequilibradas sinusoidales.

En este capítulo se han expuesto inicialmente las causas y los efectos de las ineficiencias en los sistemas eléctricos, centrandó estas en las producidas por los desequilibrios debidos a la asimetría de tensiones y corrientes. Seguidamente se

describen cronológicamente diversas teorías relacionadas con la potencia eléctrica, mostrando de entre la existentes, las particularmente más relevantes en cuanto a los objetivos de la tesis.

En la descripción queda patente como, desde inicios del pasado siglo hasta la actualidad, no existe un consenso en la definición de las potencias debidas a las ineficiencias del sistema. Para ello se parte de la teoría conservacionista de Steinmetz [87], pasando por la Teoría de Buchholz [8], la IEEE Std 1459-2010 [41] que recoge la Teoría de Emanuel [25] e implícitamente reconoce a la teoría de Buchholz, la Teoría de la Potencia Reactiva Instantánea de Akagi [59], hasta llegar a la Teoría Unificada de la Potencia Eléctrica (UMP, Unified Power Measurement). Se muestran las principales características de cada una de ellas y se exponen algunas consideraciones sobre estas.

# Capítulo: 2

**FORMULACIÓN DE LA POTENCIA  
DE DESEQUILIBRIO PARA REDES  
ELÉCTRICAS DESEQUILIBRADAS  
SINUSOIDALES ALIMENTADAS CON  
TENSIONES EQUILIBRADAS**





## **Capítulo 2:**

# **FORMULACIÓN DE LA POTENCIA DE DESEQUILIBRIO PARA REDES ELÉCTRICAS SINUSOIDALES ALIMENTADAS CON TENSIONES EQUILIBRADAS**

## **2.1. INTRODUCCIÓN**

En el presente capítulo se formula una nueva expresión compleja del “Fasor Potencia de Desequilibrio debida a las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ )”, válida para redes eléctricas alimentadas con tensiones equilibradas. Este trabajo se centra principalmente en sistemas trifásicos a 3 hilos. Se establecen unos parámetros de desequilibrio denominados “ $A, B, C, D$ ”, mostrándose la correspondencia de la formulación de ( $\overline{D}_{ui}$ ) con el módulo de la potencia total de desequilibrio de un sistema trifásico  $D_{1U}$  (2.1), y con el “Fasor Potencia Total de Desequilibrio  $\overline{A}_U$ ” definido en la Teoría Unificada de las Potencias (UPM, Unified Power Measurement) [59] desarrollada por Vicente León Martínez, Joaquín Montañana Romeu y José Giner, miembros del Departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universitat Politècnica de València (UPV).

Partiendo de la expresión de la potencia total aparente  $S_I$ , formulada por Buchholz [8] en valores de fase y por la UPM [53] en valores de secuencia, se identifica el módulo de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes en estado estacionario para cargas lineales  $D_{ui}$ , y, mediante el uso de la definición de la potencia trifásica instantánea  $p(t)$  se determinan los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” aplicados a sistemas desequilibrados constituidos tanto por cargas individuales como por varias cargas conectadas en paralelo alimentadas por un sistema de tensiones sinusoidales equilibradas.

Mediante el uso de los parámetros de desequilibrio quedan caracterizados y cuantificados la totalidad de los fenómenos del desequilibrio del sistema trifásico en cualquier punto de este sin la necesidad de determinar circuitos equivalentes para el punto de estudio.

Se constata que la transformación triángulo – estrella realizada mediante el uso del Teorema de Kennelly (Rosen), necesaria en estudio de las redes eléctricas, no es equivalente a efectos del cálculo de las potencias de desequilibrio, aportándose un circuito equivalente de transformación que incluye correctamente los fenómenos de desequilibrio.

## 2.2. ANTECEDENTES

El fenómeno de la potencia de desequilibrio constituye una ineficiencia de los sistemas eléctricos trifásicos que se define como una potencia aparente producida a frecuencia fundamental (50 Hz – 60 Hz) expresada en VA, tal y como se muestra en la IEEE Std 1459-2010 [42], así como en otros trabajos de Emanuel [26], [28] y la UPM (Unified Power Measurement) [53], [59], [58].

El valor en módulo de la potencia total de desequilibrio en sistemas lineales, según la IEEE Std 1459-2010 y la UPM (Unified Power Measurement) está determinado por la siguiente expresión:

$$S_{1U} = D_{1U} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2} \quad (2.1)$$

donde:

- $S_{1U}$ ,  $D_{1U}$  corresponde al valor en módulo de la potencia total de desequilibrio de un sistema trifásico e incluye la totalidad de efectos causantes del desequilibrio debidos a cargas lineales, incorporando de forma conjunta los efectos debidos al desequilibrio de las cargas (corrientes) y de las tensiones.
- $S_+$  corresponde al valor en módulo de la potencia total aparente de secuencia positiva debida a las secuencias positivas de la tensión e intensidad.

$$S_+ = 3 \cdot V_+ \cdot I_+ \quad (2.2)$$

- $S_I$  corresponde al valor en módulo de la potencia total aparente fundamental de un sistema desequilibrado formulada mediante componentes de fase por Buchholz (2.3) y que coincide con la potencia total aparente expresada en

valores de secuencia formulada según la UPM [53, 59] (2.4), siendo sus expresiones respectivas para 3hilos (3H) y para 4 hilos (4H):

$$S_{1_{3H}} = \sqrt{(V_{ab}^2 + V_{bc}^2 + V_{ca}^2) \cdot (I_{ab}^2 + I_{bc}^2 + I_{ca}^2)} \quad (2.3)$$

$$S_{1_{4H}} = \sqrt{(V_a^2 + V_b^2 + V_c^2) \cdot (I_a^2 + I_b^2 + I_c^2)}$$

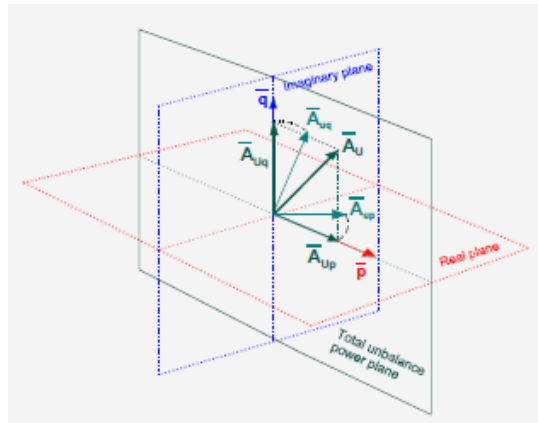
$$S_{1_{3H}} = 3 \cdot \sqrt{(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2 + V_{0ab}^2) \cdot (I_{+ab}^2 + I_{-ab}^2 + I_{0ab}^2)} \quad (2.4)$$

$$S_{1_{4H}} = 3 \cdot \sqrt{(V_{+a}^2 + V_{-a}^2 + V_{0a}^2) \cdot (I_{+a}^2 + I_{-a}^2 + I_{0a}^2)}$$

Como se indicó en el Capítulo 1, la Teoría Unificada de las Potencias UPM (Unified Power Measurement), propone una expresión del “Fasor Potencia total de Desequilibrio  $\bar{A}_U$ ” (2.5) que cuantifica en forma compleja el fenómeno de desequilibrio debido a las cargas y que se formula a partir de las potencias activas ( $P$ ) y reactiva ( $Q$ ) de las cargas conectadas al sistema. Su aplicación es válida para sistemas trifásicos a 3 y 4 hilos con cargas desequilibradas siempre que estén alimentadas por tensiones equilibradas sinusoidales.

El “fasor potencia total de desequilibrio,  $\bar{A}_U$ ” se sitúa en un plano definido por dos versores unitarios,  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  ortogonales entre sí, siendo su expresión:

$$\bar{A}_U = \sqrt{2} \cdot (|P_a + a^2 \cdot P_b + a \cdot P_c| \cdot \vec{p} \mp |Q_a + a^2 \cdot Q_b + a \cdot Q_c| \cdot \vec{q}) \quad (2.5)$$



Representación gráfica del Fasor Potencia total de Desequilibrio  $\bar{A}_U$  obtenido de [53, 59], mostrada en el Capítulo 1, Figura nº 1.8

La principal ventaja que aporta el fasor  $(\bar{A}_U)$  es que se trata de un número complejo y permite separar los efectos del desequilibrio debidos a la naturaleza resistiva y/o reactiva de las cargas. La componente real representa la potencia debida al desequilibrio de la potencia activa de las cargas y la componente imaginaria representa la potencia ocasionada por las potencias reactivas, donde el ángulo muestra la relación entre los desequilibrios debidos a las cargas activas y reactivas.

Como inconveniente, para el estudio en redes eléctricas desequilibradas, es que únicamente es válido para tensiones sinusoidales equilibradas, lo que limita su uso en el estudio de los flujos de potencia los cuales se caracterizan por el desequilibrio de corrientes y tensiones en los nudos de consumo.

### 2.3. MÓDULO DE LA POTENCIA DE DESEQUILIBRIO; $D_{ui}$

Partiendo de la expresión formulada por la UPM en (2.4) donde se utilizan los valores de las tensiones e intensidades de secuencia obtenidos mediante el teorema de Fortescue (Stokvis) [36], para 3 o 4 hilos:

$$S_1 = 3 \cdot \sqrt{(V_+^2 + V_-^2 + V_0^2) \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2)}$$

y agrupando términos, esta puede ser expresada de la siguiente manera:

$$S_1 = \sqrt{\underbrace{3^2 \cdot V_+^2 \cdot I_+^2}_{S_+^2} + \underbrace{3^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_-^2 + I_0^2) + 3^2 \cdot (V_-^2 + V_0^2) \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2)}_{D_U^2}} \quad (2.6)$$

Bajo la consideración de tensiones equilibradas, tanto en valores simples como compuestos, se tiene que las tensiones de secuencia negativa y homopolar son nulas ( $V_- = V_0 = 0$ ); lo que permite simplificar la expresión anterior, quedando esta como:

$$S_1 = \sqrt{\underbrace{3^2 \cdot V_+^2 \cdot I_+^2}_{S_+^2} + \underbrace{3^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_-^2 + I_0^2)}_{D_u^2}} \quad (2.7)$$

Por tanto, el valor en módulo de la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las intensidades, denominada en adelante  $D_{ui}$ , será:

$$D_{ui} = \sqrt{3^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_-^2 + I_0^2)} \quad (2.8)$$

donde:

- La potencia total de desequilibrio ( $D_{1u}$ ) expresada en (2.1) es la misma que ( $D_{ui}$ ), siendo esta debida únicamente al desequilibrio de corrientes, y que coincide con el de las cargas.
- El desequilibrio debido a las cargas está producido por la tensión (simple o compuesta) de secuencia positiva ( $V_{+a}$  ó  $V_{+ab}$ ) y las corrientes de línea o fase de secuencia negativa y homopolar ( $I_{-a}; I_{0a}$  ó  $I_{-ab}; I_{0ab}$ ).

#### 2.4. FORMULACIÓN DE LA POTENCIA DE DESEQUILIBRIO MEDIANTE LA POTENCIA INSTANTÁNEA $p(t)$

La nueva formulación del fasor potencia de desequilibrio está basada en la expresión de la potencia instantánea aplicada inicialmente a sistemas monofásicos lineales desarrollada por Steinmetz en 1897 [87] y que es aplicable a sistemas trifásicos lineales.

Sea la potencia total instantánea  $p(t)$ , aplicada a un sistema monofásico, que se define como:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = p_A(t) + p_Q(t) \quad (2.9)$$

siendo:

$$v(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \sin(\omega t + \alpha) \quad (2.10)$$

$$i(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi) = i_A(t) + i_Q(t) \quad (2.11)$$

La intensidad tiene dos componentes ortogonales entre sí que caracterizan sendos fenómenos energéticos diferenciados:

$$i(t) = i_A(t) + i_Q(t)$$

Donde:

- $i_A(t)$ : Intensidad activa, que responde a una energía neta o transformable:  
 $i_A(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot \sin(\omega t)$

- $i_Q(t)$ : Intensidad reactiva, que representa la energía reactiva o de desfase:

$$i_Q(t) = \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

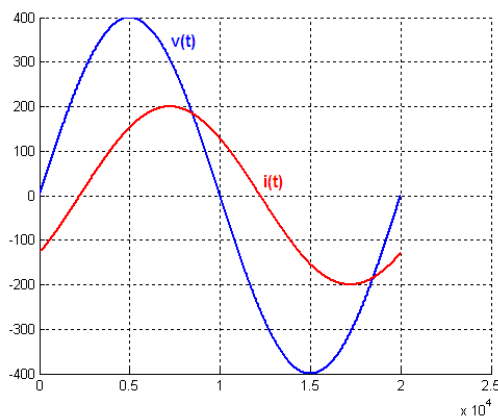
Así pues, la potencia queda definida por dos componentes que representan sendos fenómenos energéticos, donde  $p_A(t)$  constituye la potencia activa o útil de valor medio no nulo que se manifiesta por un flujo de potencia unidireccional y que es transformable en energía, y  $p_Q(t)$  constituye el fenómeno de la energía reactiva o de desfase, de valor medio nulo y no transformable en energía útil.

Las expresiones anteriores se corresponden con:

$$p(t) = v(t) \cdot i(t) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \sin(\omega t + \alpha) \cdot \sqrt{2} \cdot I \cdot \sin(\omega t + \alpha - \varphi) = p_A(t) + p_Q(t) \quad (2.12)$$

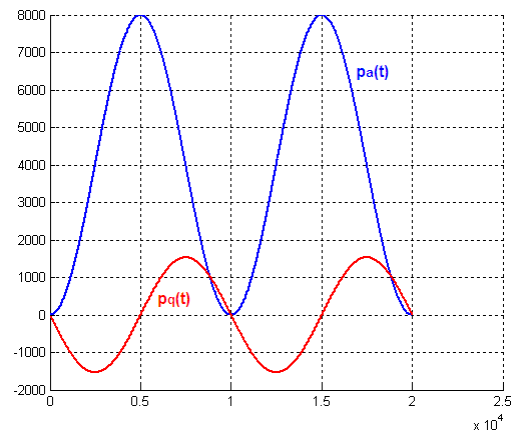
$$p_A(t) = V \cdot I \cdot \cos \varphi \cdot [1 - \cos 2(\omega t + \alpha)] = P \cdot [1 - \cos 2(\omega t + \alpha)] \quad (2.13)$$

$$p_Q(t) = -V \cdot I \cdot \sin \varphi \cdot \sin 2(\omega t + \alpha) = -Q \cdot \sin 2(\omega t + \alpha) \quad (2.14)$$



(a)

Funciones de onda de la tensión  $v(t)$  e intensidad  $i(t)$  desfasadas



(b)

Funciones de onda de la potencia activa  $p_A(t)$  y potencia reactiva  $p_Q(t)$

Figura nº 2.1: Funciones de onda de la tensión e intensidad (a) y potencias activas y reactivas (b)

Sí consideramos un sistema trifásico de cargas lineales desequilibradas, representado por la figura nº 2.2 el cual se encuentra alimentado con un sistema de tensiones instantáneas equilibradas  $v_z(t)$ , para el caso de tensiones equilibradas, el valor de la tensión coincide con el valor de la tensión de secuencia positiva  $v_{a,b,c}(t) = v_{+a,b,c}(t)$ :

$$\begin{aligned}
 v_a(t) &= \sqrt{2} \cdot V_a \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a) \\
 v_b(t) &= \sqrt{2} \cdot V_b \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_b) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a - 120) \\
 v_c(t) &= \sqrt{2} \cdot V_c \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_c) = \sqrt{2} \cdot V \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a + 120)
 \end{aligned}
 \tag{2.15}$$

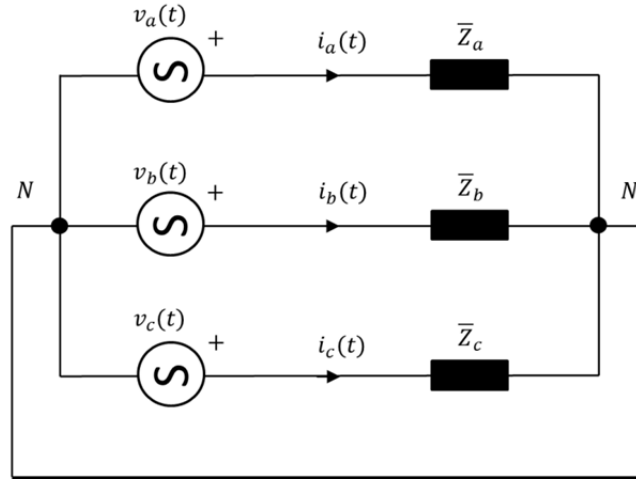


Figura nº 2.2: Sistema de cargas líneas desequilibradas alimentado con tensiones equilibradas

y las corrientes instantáneas desequilibradas  $i_z(t)$  resultantes de las cargas son las siguientes:

$$\begin{aligned}
 i_a(t) &= \sqrt{2} \cdot I_a \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a - \varphi_a) \\
 i_b(t) &= \sqrt{2} \cdot I_b \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a - 120 - \varphi_b) \\
 i_c(t) &= \sqrt{2} \cdot I_c \cdot \text{sen}(\omega t + \alpha_a + 120 - \varphi_c)
 \end{aligned}
 \tag{2.16}$$

La potencia instantánea total del sistema trifásico quedará de la siguiente forma:

$$p(t) = \sum_{z=a,b,c} v_z(t) \cdot i_z(t) = v_a(t) \cdot i_a(t) + v_b(t) \cdot i_b(t) + v_c(t) \cdot i_c(t) = p_A(t) + p_Q(t)
 \tag{2.17}$$

Siendo las expresiones correspondientes a la potencia activa  $p_A(t)$  y reactiva instantánea total  $p_Q(t)$ :

$$\begin{aligned}
 p_A(t) &= \underbrace{\sum_{Z=a,b,c} V_Z \cdot I_Z \cdot \cos \varphi_Z - \sum_{Z=a,b,c} V_Z \cdot I_Z \cdot \cos \varphi_Z \cdot \cos 2(\omega t + \alpha_Z)}_{\text{Potencia instantánea activa}} \\
 &= \sum_{Z=a,b,c} P_Z - \underbrace{\sum_{Z=a,b,c} P_Z \cdot \cos 2(\omega t + \alpha_Z)}_{D_{uiA}(t)}
 \end{aligned}
 \tag{2.18}$$

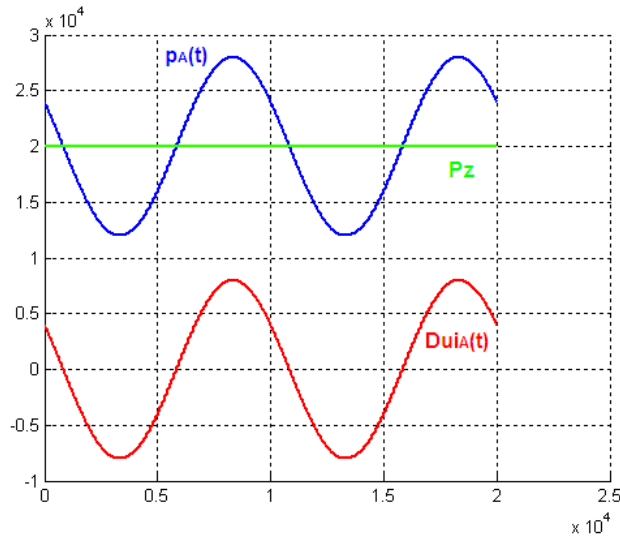


Figura nº 2.3: Funciones de onda de potencia activa instantánea trifásica  $p_A(t)$ , potencia activa en valor eficaz ( $P_Z$ ) y potencia instantánea activa de desequilibrio  $D_{uiA}(t)$  según la expresión (2.18)

$$\begin{aligned}
 p_Q(t) &= - \underbrace{\sum_{Z=a,b,c} V_Z \cdot I_Z \cdot \sin \varphi_Z \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_Z)}_{\text{Potencia instantánea reactiva}} \\
 &= - \underbrace{\sum_{Z=a,b,c} Q_Z \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_Z)}_{D_{uiR}(t)}
 \end{aligned}
 \tag{2.19}$$

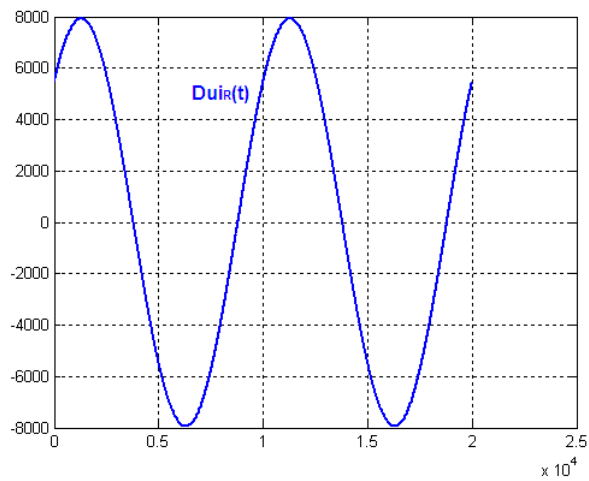


Figura nº 2.4: Función de onda de potencia reactiva instantánea trifásica. Potencia instantánea reactiva de desequilibrio  $D_{uiR}(t)$  según la expresión (2.19)

donde:

- El primer término de (2.18), se corresponde con la potencia activa total del sistema expresado en valor eficaz.



$$\begin{aligned}
 P_Z &= \sum_{Z=a,b,c} V_Z \cdot I_Z \cdot \cos \varphi_Z = P_a + P_b + P_c \\
 P_a &= V_a \cdot I_a \cdot \cos \varphi_a \\
 P_b &= V_b \cdot I_b \cdot \cos \varphi_b \\
 P_c &= V_c \cdot I_c \cdot \cos \varphi_c
 \end{aligned} \tag{2.20}$$

- El segundo término de (2.18) se corresponde con la potencia activa instantánea debida al desequilibrio de las intensidades.

$$\begin{aligned}
 D_{ui_A}(t) &= - \left[ \sum_{Z=a,b,c} \frac{V_Z \cdot I_Z \cdot \cos \varphi_Z}{P_Z} \cos 2(\omega t + \alpha_Z) \right] = \\
 &= - [P_a \cdot \cos 2(\omega t + \alpha_a) + P_b \cdot \cos 2(\omega t + \alpha_b) + P_c \cdot \cos 2(\omega t + \alpha_c)]
 \end{aligned} \tag{2.21}$$

- La expresión (2.19) determina la potencia reactiva instantánea debida al desequilibrio de las intensidades.

$$\begin{aligned}
 D_{ui_R}(t) &= q_a(t) + q_b(t) + q_c(t) = \\
 &= - \sum_{Z=a,b,c} \frac{V_Z \cdot I_Z \cdot \sin \varphi_Z}{Q_Z} \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_Z) = \\
 &= - [Q_a \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_a) + Q_b \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_b) + Q_c \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_c)]
 \end{aligned} \tag{2.22}$$

#### 2.4.1. Cargas lineales alimentadas por un sistema de tensiones sinusoidales equilibradas

Si se considera un sistema trifásico lineal **equilibrado** alimentado con tensiones sinusoidales equilibradas, se tendrá que:

- El primer término de (2.18),  $\sum_{Z=a,b,c} V_Z \cdot I_Z \cdot \cos \varphi_Z$  se corresponde con la potencia activa total del sistema en valor eficaz.
- El segundo término de (2.18),  $\sum_{Z=a,b,c} V_Z \cdot I_Z \cdot \cos \varphi_Z \cdot \cos 2(\omega t + \alpha_Z)$  tiene un valor nulo.
- La expresión (2.19),  $\sum_{Z=a,b,c} V_Z \cdot I_Z \cdot \sin \varphi_Z \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_Z)$  tiene un valor nulo.

En el caso de **intensidades desequilibradas**, se tendrá que:

- El primer término de la expresión (2.18) y de (2.20) representa la potencia activa total en valores eficaces  $(\sum_{Z=a,b,c} P_Z = \sum_{Z=a,b,c} V_Z \cdot I_Z \cdot \cos \varphi_Z = P_a + P_b + P_c)$ .

Su valor medio instantáneo es siempre positivo, véase la figura nº 2.3.

Al ser la tensión equilibrada, el valor de la tensión coincide con el de secuencia positiva ( $\bar{V}_Z = \bar{V}_{+Z}$ ) y la potencia activa total coincide con la potencia activa de secuencia positiva del sistema ( $P_Z = P_{+Z}$ ).

- El segundo término de la expresión (2.18) y (2.21) tiene un valor no nulo y es debido a las componentes resistivas de la carga  $(\sum_{Z=a,b,c} P_Z \cdot \cos 2(\omega t + \alpha_Z))$ .

Su valor medio instantáneo es nulo al tener una forma de onda alternante ( $\pm$ ) sobre el eje temporal según se muestra en la figura nº 2.3.

Dado que las tensiones son equilibradas, representa la potencia resultante del desequilibrio debido a los elementos resistivos de las cargas. En adelante se denominará  $D_{ui_A}$  (2.24).

- Las expresiones (2.19) y (2.22) tienen un valor no nulo y es debido a las componentes reactivas de la carga  $(\sum_{Z=a,b,c} Q_Z \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_Z))$ . Su valor medio instantáneo es nulo al tener una forma de onda alternante ( $\pm$ ) sobre el eje temporal.

Dado que las tensiones son equilibradas representa la potencia resultante del desequilibrio debida a los elementos reactivos (inductivos y/o capacitivos) de las cargas. En adelante se denominará  $D_{ui_R}$  (2.25).

Por lo tanto, la potencia total instantánea puede ser expresada según:

$$p(t) = p_A(t) + p_Q(t) = P_Z + D_{ui}(t) = P_Z + (D_{ui_A}(t) + D_{ui_R}(t)) \quad (2.23)$$

$$D_{ui_A}(t) = \sum_{Z=a,b,c} P_Z \cdot \cos 2(\omega t + \alpha_Z) \quad (2.24)$$

$$D_{ui_R}(t) = \sum_{Z=a,b,c} Q_Z \cdot \sin 2(\omega t + \alpha_Z) \quad (2.25)$$

Desarrollando las expresiones  $D_{ui_A}$  (2.24) y  $D_{ui_R}$  (2.25) en base a relaciones trigonométricas, se obtendrán parámetros representativos de las partes reales e

imaginarias de las potencias de desequilibrio bajo la condición de cargas lineales desequilibradas y tensiones sinusoidales equilibradas.

a)  **$D_{ui_A}$ : Potencia activa de desequilibrio debida a los elementos resistivos de la carga. Factores de desequilibrio “A y B”.**

Desarrollando la expresión  $D_{ui_A}$  (2.24) correspondiente a la potencia resultante del desequilibrio de los elementos resistivos de las cargas, esta puede ser expresada de la siguiente forma:

$$D_{ui_A}(t) = \underbrace{-\left(\sum_{Z=a,b,c} P_Z \cdot \cos 2\alpha_Z\right) \cdot \cos 2\omega t}_{A(t)} + \underbrace{\left(\sum_{Z=a,b,c} P_Z \cdot \sin 2\alpha_Z\right) \cdot \sin 2\omega t}_{B(t)} \quad (2.26)$$

$$= A(t) + B(t)$$

Siendo la potencia de desequilibrio  $D_U = \sqrt{2} \cdot P$  según [59] y expresado mediante notación fasorial como  $\bar{D}_{ui_A} = A + j \cdot B$ , se tiene que:

$$A = -\sqrt{2} \cdot \sum_{Z=a,b,c} P_Z \cdot \cos 2\alpha_Z = -\sqrt{2} \cdot (P_a \cos 2\alpha_a + P_b \cos 2\alpha_b + P_c \cos 2\alpha_c)$$

$$B = \sqrt{2} \cdot \sum_{Z=a,b,c} P_Z \cdot \sin 2\alpha_Z = \sqrt{2} \cdot (P_a \sin 2\alpha_a + P_b \sin 2\alpha_b + P_c \sin 2\alpha_c) \quad (2.27)$$

b)  **$D_{ui_R}$ : Potencia reactiva de desequilibrio debido a los elementos reactivos de la carga. Factores de desequilibrio C y D.**

Desarrollando la expresión  $D_{ui_R}$  (2.25) correspondiente a la potencia resultante del desequilibrio de los elementos reactivos (inductivos y/o capacitivos) de la carga, esta puede ser expresada de la siguiente forma:

$$D_{ui_R}(t) = \underbrace{-\left(\sum_{Z=a,b,c} Q_Z \cdot \sin 2\alpha_Z\right) \cdot \cos 2\omega t}_{C(t)} + \underbrace{\left(\sum_{Z=a,b,c} Q_Z \cdot \cos 2\alpha_Z\right) \cdot \sin 2\omega t}_{D(t)} \quad (2.28)$$

$$= C(t) + D(t)$$

Siendo la potencia de desequilibrio  $D_U = \sqrt{2} \cdot Q$  según [59] y expresado mediante notación fasorial como  $\bar{D}_{uiR} = D + j \cdot C$ , se tiene que:

$$C = -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q_z \cdot \sin 2\alpha_z = -\sqrt{2} \cdot (Q_a \sin 2\alpha_a + Q_b \sin 2\alpha_b + Q_c \sin 2\alpha_c)$$

$$D = -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q_z \cdot \cos 2\alpha_z = -\sqrt{2} \cdot (Q_a \cos 2\alpha_a + Q_b \cos 2\alpha_b + Q_c \cos 2\alpha_c)$$
(2.29)

## 2.5. CÁLCULO DE LOS PARÁMETROS DE DESEQUILIBRIO “A, B, C, D” EN SISTEMAS A 3-HILOS EN TRIÁNGULO. APLICACIÓN A UNA CARGA INDIVIDUAL.

La figura nº 2.5 representa el esquema de un sistema eléctrico trifásico a tres hilos constituido por una carga lineal desequilibrada alimentada a través de un sistema de tensiones cualesquiera.

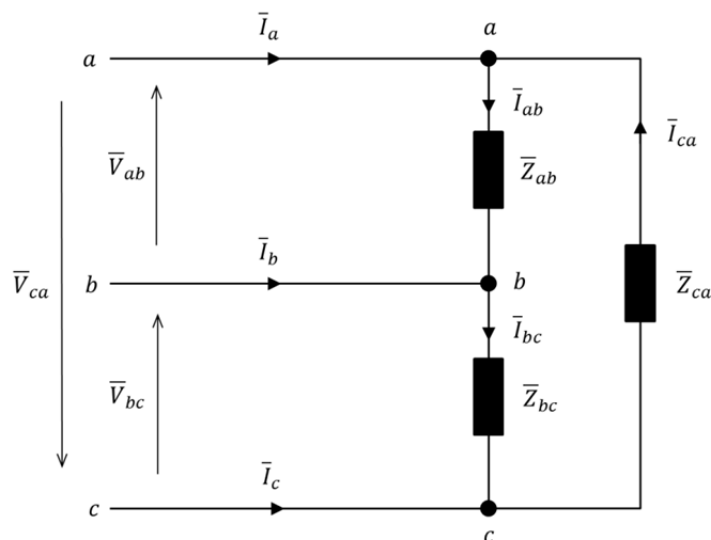


Figura nº 2.5: Carga lineal en triángulo alimentada por una fuente cualesquiera

Si se denomina a la potencia aparente de la **carga conectada en triángulo** como  $S_{1(\Delta)}$ , según la siguiente expresión, ya definida en (2.4), se tiene que:

$$\begin{aligned}
 S_{1(\Delta)} &= 3 \cdot \sqrt{\left( V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2 + \underbrace{V_{0ab}^2}_0 \right) \cdot (I_{+ab}^2 + I_{-ab}^2 + I_{0ab}^2)} \\
 &= \sqrt{\underbrace{9 \cdot (V_{+ab}^2 \cdot I_{+ab}^2)}_{S_{+(\Delta)}^2} + \underbrace{9 \cdot [(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{-ab}^2 + (V_{-ab}^2 \cdot I_{+ab}^2)]}_{S_{L(\Delta)}^2} + \underbrace{9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}_{S_{C(\Delta)}^2}} \quad (2.30)
 \end{aligned}$$

donde:

- El primer término  $S_{+(\Delta)}^2$  es debido a los efectos de las componentes de secuencia positiva de las tensiones compuestas e intensidades de fase de la carga.
- El segundo término  $S_{L(\Delta)}^2$  es debido a los efectos de las corrientes de secuencia negativa y positiva con las tensiones negativas y positivas.
- El tercer término  $S_{C(\Delta)}^2$  es debido a los efectos de la componente de secuencia homopolar de las intensidades de la carga.

Aplicando el Teorema de Kennelly (Rosen) a la carga conectada en triángulo, se obtendrá su equivalente en conexión estrella, según se muestra en la figura nº 2.6.

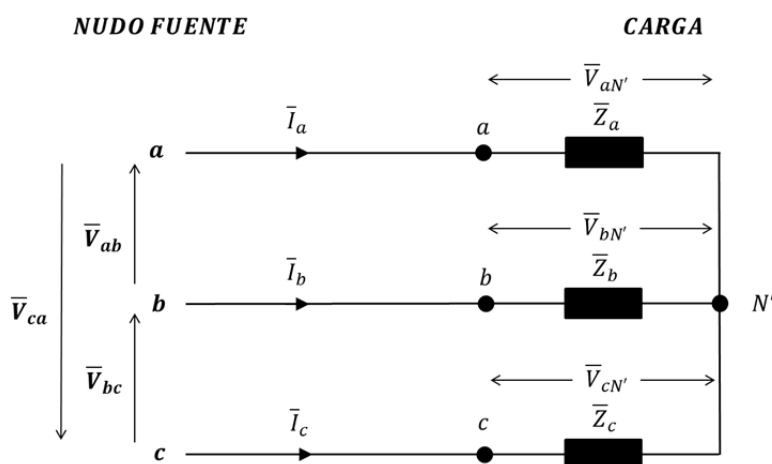


Figura nº 2.6: Carga en estrella obtenida mediante la transformación de conexión triángulo a estrella por medio del Teorema de Kennelly (Rosen)

En la cual, las impedancias corresponden a:

$$\begin{aligned}\bar{Z}_a &= \frac{\bar{Z}_{ab} \cdot \bar{Z}_{ca}}{\bar{Z}_{ab} + \bar{Z}_{bc} + \bar{Z}_{ca}} \\ \bar{Z}_b &= \frac{\bar{Z}_{ab} \cdot \bar{Z}_{bc}}{\bar{Z}_{ab} + \bar{Z}_{bc} + \bar{Z}_{ca}} \\ \bar{Z}_c &= \frac{\bar{Z}_{bc} \cdot \bar{Z}_{ca}}{\bar{Z}_{ab} + \bar{Z}_{bc} + \bar{Z}_{ca}}\end{aligned}\quad (2.31)$$

Al tratarse de un sistema trifásico alimentado a 3 hilos, desde el punto de vista del valor de las componentes simétricas, se cumplirá que la componente homopolar de la corriente de línea del sistema tendrá un valor nulo.

$$\bar{I}_{0a} = \frac{1}{3} \cdot (\bar{I}_a + \bar{I}_b + \bar{I}_c) = 0 \quad (2.32)$$

Si se denomina a la potencia aparente de la **carga conectada en estrella** como  $S_{1(Y)}$ , según la expresión (2.4), se tiene que:

$$\begin{aligned}S_{1(Y)} &= 3 \cdot \sqrt{(V_{+a}^2 + V_{-a}^2 + V_{0b}^2) \cdot (I_{+a}^2 + I_{-a}^2 + I_{0a}^2)} \\ &= \sqrt{\underbrace{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2)}_{S_{+(Y)}^2} + \underbrace{9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)]}_{S_{L(Y)}^2} + \underbrace{9 \cdot (I_{+a}^2 + I_{-a}^2) \cdot V_{0a}^2}_{S_{C(Y)}^2}}\end{aligned}\quad (2.33)$$

donde:

- El primer término  $S_{+(Y)}^2$  es debido a los efectos de las componentes de secuencia positiva de las tensiones simples e intensidades de fase de la carga.
- El segundo término  $S_{L(Y)}^2$  es debido a los efectos de las componentes de las corrientes simples de secuencia negativa y al de la corriente de secuencia positiva con la tensión negativa.
- El tercer término  $S_{C(Y)}^2$  es debido a los efectos de la componente de secuencia homopolar de las tensiones simples.

Analizando y verificando las expresiones de la potencia aparente total del sistema con carga conectada en triángulo  $S_{1(\Delta)}$  según (2.30) y su transformación en estrella  $S_{1(Y)}$  según (2.33), se deducen las siguientes observaciones:

- Tal y como se desprende del Teorema de Kennelly (Rosen), el primer término de ambas expresiones correspondiente a las secuencias positivas de tensiones e intensidades, tienen el mismo valor; así:

$$S_{+(\Delta)}^2 = S_{+(Y)}^2 = 9 \cdot (V_{+ab}^2 \cdot I_{+ab}^2) = 9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) \quad (2.34)$$

- El según término de ambas expresiones tienen el mismo valor, siendo:

$$S_{L(\Delta)}^2 = S_{L(Y)}^2 = 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{-ab}^2 = 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] \quad (2.35)$$

- El tercer término de ambas expresiones tienen valores diferentes:

$$\begin{aligned} S_{C(\Delta)}^2 &\neq S_{C(Y)}^2 \\ 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2 &\neq 9 \cdot (I_{+a}^2 + I_{-a}^2) \cdot V_{0a}^2 \end{aligned} \quad (2.36)$$

De todo ello cabe concluir, que las potencias totales aparentes en triángulo  $S_{1(\Delta)}$  y en estrella  $S_{1(Y)}$  son distintas en los sistemas equilibrados, ya que no son equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, por lo tanto, energéticamente las transformaciones de triángulo a estrella y viceversa realizadas a partir del Teorema de Kennelly (Rosen) no verifican la expresión (2.1) de la potencia total aparente. De ahí que sea necesario deducir un nuevo circuito de transformación de una carga conectada en triángulo a conexión estrella, que incluya correctamente los fenómenos de desequilibrio. Esto solo se podrá conseguir cuando el tercer término de las expresiones tenga el mismo valor  $S_{C(\Delta)}^2 = S_{C(Y)}^2$  y por lo tanto, se han de cumplir las siguientes condiciones respecto a los módulos de  $V_{0a}$  y de  $I_{0a}$ :

- a) Transformación de Triángulo a Estrella:

$$V_{0a} = \sqrt{\frac{(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}{(I_{+a}^2 + I_{-a}^2)}} = I_{0ab} \cdot \sqrt{\frac{(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2)}{(I_{+a}^2 + I_{-a}^2)}} \quad (2.37)$$

- b) Transformación de Estrella a Triángulo:

$$I_{0ab} = \sqrt{\frac{(I_{+a}^2 + I_{-a}^2) \cdot V_{0a}^2}{(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2)}} = V_{0a} \cdot \sqrt{\frac{(I_{+a}^2 + I_{-a}^2)}{(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2)}} \quad (2.38)$$

### 2.5.1. Circuito equivalente de una carga conectada en triángulo.

Sea una **carga lineal desequilibrada** conectada en triángulo a una red a tres hilos alimentada por un sistema de tensiones compuestas equilibradas, el cual queda representado mediante la figura siguiente:

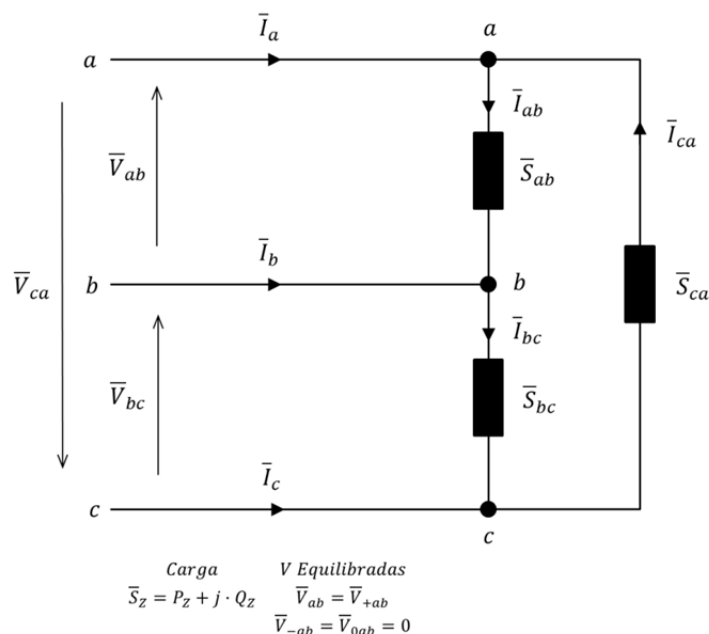


Figura n° 2.7: Carga en triángulo alimentada por un sistema de tensiones equilibradas

Desde el punto de vista de los fenómenos activos y reactivos, dado que las tensiones compuestas se consideran equilibradas, el circuito mostrado en la figura n° 2.7 puede ser representado según muestra la figura n° 2.8.

Donde las corrientes expresadas de forma separada en sus componentes activas (ocasionada por los elementos resistivos de las cargas) y reactivas (ocasionada por los elementos reactivos, inductivos y/o capacitivos de las cargas), según (2.11), son:

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_a &= \bar{I}_{aA} + \bar{I}_{aR} \\
 \bar{I}_b &= \bar{I}_{bA} + \bar{I}_{bR} \\
 \bar{I}_c &= \bar{I}_{cA} + \bar{I}_{cR}
 \end{aligned}
 \tag{2.39}$$



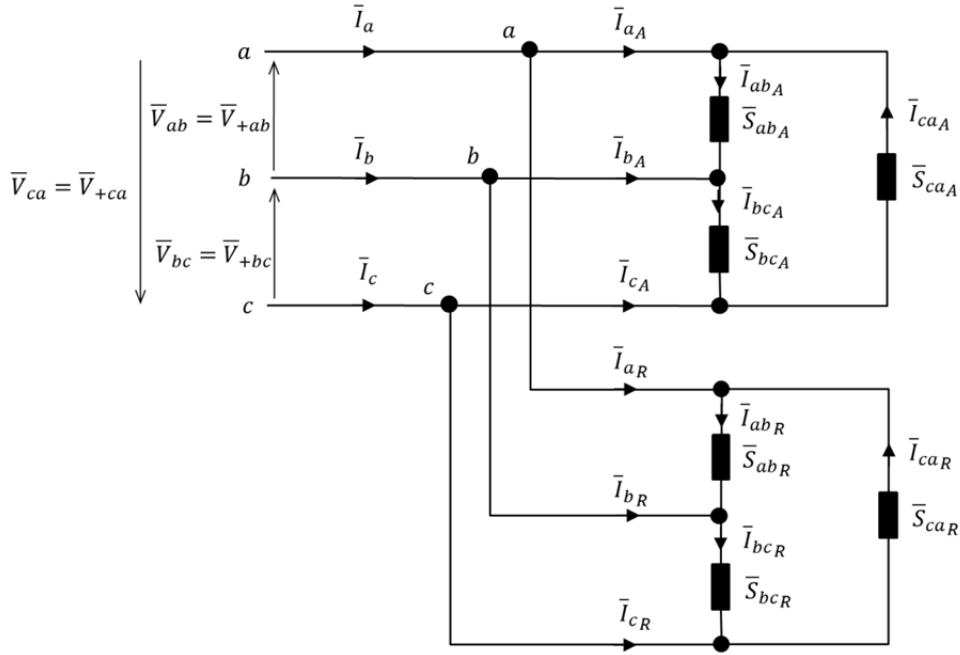


Figura nº 2.8: Carga en triángulo con los efectos activos y reactivos separados

Tal y como se ha mencionado anteriormente, la transformación de triángulo a estrella mediante el uso del Teorema de Kennelly (Rosen) no es correcta desde el punto de vista de la determinación de la potencia de desequilibrio.

Para un sistema con tensiones compuestas equilibradas, donde ( $V_{-ab}^2 = V_{0ab}^2 = 0$ ); la tensión simple de secuencia homopolar ( $V_{0a}$ ) según (2.37) ha de cumplir la siguiente condición:

$$V_{0a} = I_{0ab} \cdot \sqrt{\frac{(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2)}{(I_{+a}^2 + I_{-a}^2)}} = I_{0ab} \cdot V_{+ab} \cdot \sqrt{\frac{1}{(I_{+a}^2 + I_{-a}^2)}} \quad (2.40)$$

la cual se cumple siempre y cuando en el circuito equivalente de la transformación de triángulo a estrella se consideren las tensiones simples equilibradas, según se muestra en la figura nº 2.9.

La tensión simple en la línea coincide con la tensión simple de secuencia directa del nudo fuente:

$$\bar{V}_{Z=a,b,c} = \bar{V}_{+Z=a,b,c} = \left( \frac{\bar{V}_{+Z=ab,bc,ca}}{\sqrt{3}} \right) \cdot e^{-30j} \quad (2.41)$$

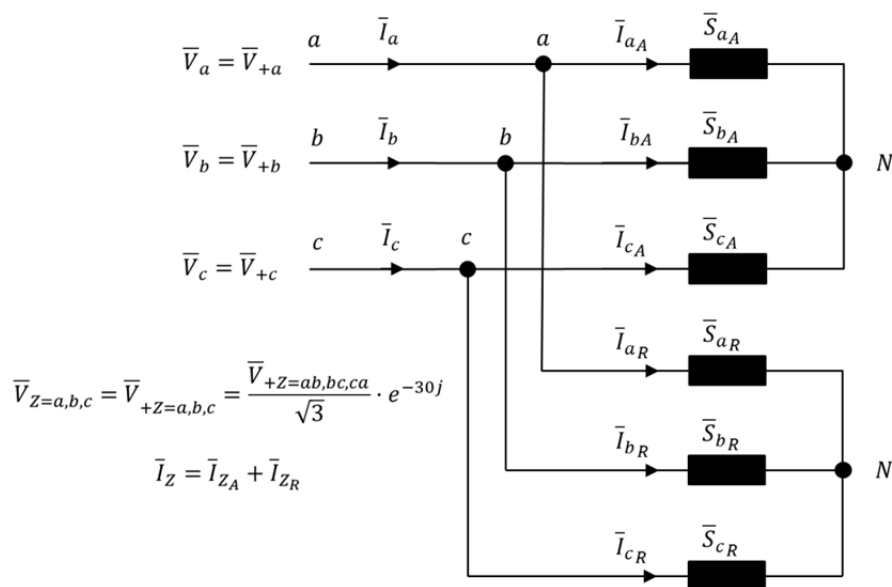


Figura nº 2.9: Carga equivalente al triángulo

### 2.5.2. Cálculo de los parámetros de desequilibrio $A$ , $B$ , $C$ y $D$ en un sistema a 3 hilos en triángulo aplicado a una carga individual.

En este punto se particularizará el cálculo para un sistema a 3 hilos con una carga conectada en triángulo.

En el punto 2.4., se han descrito de forma genérica los parámetros de desequilibrio debidos a los elementos resistivos de las cargas ( $A$  y  $B$ ) y a los elementos reactivos (inductivos y/o capacitivos) de las cargas ( $C$  y  $D$ ) a partir de la definición de potencia instantánea.

a) Potencias aparentes debidas a los elementos resistivos ( $\bar{S}_A$ ) y reactivos de las cargas ( $\bar{S}_R$ ), y a la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+Z}$ ).

Sea un sistema trifásico a tres hilos que alimenta una carga conectada en triángulo según la figura nº 2.10, donde se van mostrar las características y consideraciones respecto de las tensiones e intensidades a tener en cuenta a la hora de determinar las correspondientes potencias aparentes debidas a los elementos resistivos ( $\bar{S}_A$ ) y reactivos

inductivos y/o capacitivos ( $\bar{S}_R$ ) de la carga, necesarias para el estudio de los parámetros de desequilibrio “A, B, C y D”.

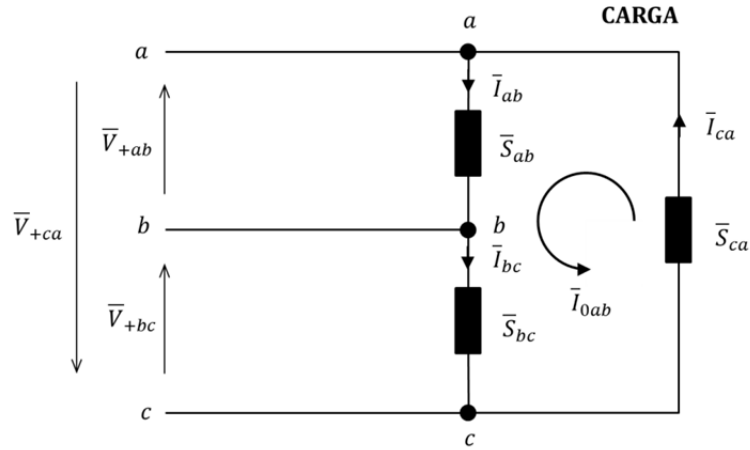
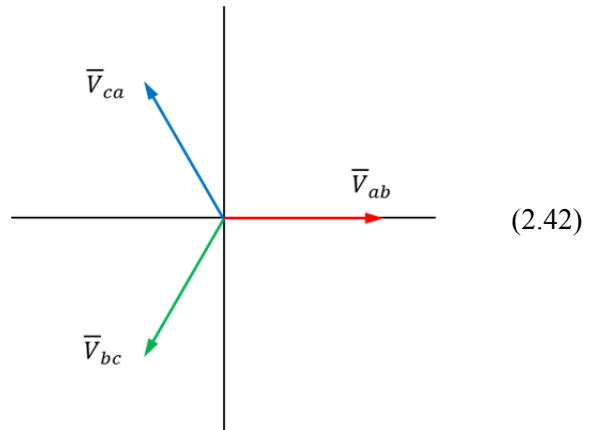


Figura nº 2.10: Topología de una carga en triángulo a 3 hilos.

En el sistema trifásico a 3 hilos de tensiones compuestas equilibradas proporcionadas por un generador o nudo fuente, cabe considerar que:

- Las tensiones se caracterizan por:

$$\begin{aligned} \bar{V} &= \sum_{z=ab, bc, ca} \bar{V}_z = 0 \\ \bar{V}_{ab} &= V_{ab} \cdot e^{\alpha_{ab} j} \\ \bar{V}_{bc} &= V_{ab} \cdot e^{\alpha_{ab} - 120j} \\ \bar{V}_{ca} &= V_{ab} \cdot e^{\alpha_{ab} + 120j} \\ \bar{V}_{ab} &= \bar{V}_{+ab} \\ \bar{V}_{-ab} &= \bar{V}_{0ab} = 0 \end{aligned}$$



- La carga estará definida por las potencias aparentes asociadas a cada fase del triángulo:

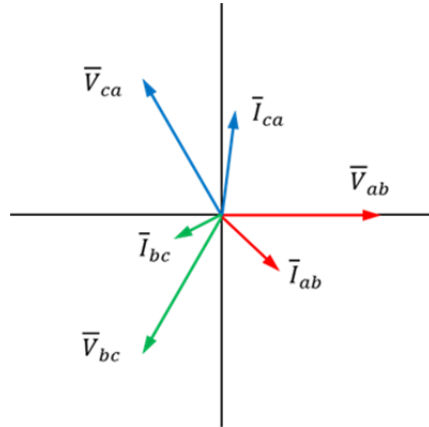
$$\bar{S}_Z = P_Z + j \cdot Q_Z \quad ; \quad Z = ab, bc, ca \quad (2.43)$$

- y las intensidades resultantes de fase que circulan en el interior de la carga y de línea exteriores a esta, serán respectivamente:

$$\sum_{Z=ab, bc, ca} \bar{I}_Z = \sum_{Z=ab, bc, ca} \left( \frac{\bar{S}_Z}{\bar{V}_Z} \right)^* \neq 0$$

$$\bar{I}_{+-0} ab \neq 0$$

$$\sum_{Z=a, b, c} \bar{I}_Z = 0$$

$$\bar{I}_{0a} \neq 0$$

(2.44)

Las corrientes pueden expresarse de forma separada en sus componentes debidas a los efectos de las cargas de origen activo (resistencias) y de origen reactivo (reactancias inductivas y capacitivas) según muestra (2.45) y la figura n° 2.11:

$$\bar{I}_Z = \bar{I}_{ZA} + \bar{I}_{ZR} ; Z = ab, bc, ca \quad (2.45)$$

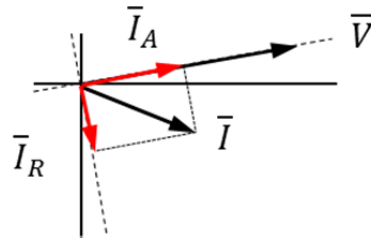


Figura n° 2.11: Componentes de la intensidad, activa (A) y reactiva inductiva (R)

Siendo:

- $\bar{I}_{ZA}$ : Las componentes activas de las corrientes de fase, ocasionadas por los elementos resistivos de las cargas, quedan determinadas en sus módulos por la relación entre la potencia activa ( $P$ ) que define la carga de tipo resistivo en cada fase y su correspondiente tensión de secuencia positiva.

El ángulo, al ser una componente activa, estará en fase con la tensión (Figura n° 2.11); así su valor vendrá determinado por la siguiente expresión:

$$\bar{I}_{ZA} = \left( \frac{P_Z}{V_{+Z}} \right) \cdot e^{\alpha_{v+z} j} ; Z = ab, bc, ca \quad (2.46)$$

- $\bar{I}_{ZR}$ : Las componentes reactivas de las corrientes de fase, ocasionadas por los elementos reactivos inductivos y/o capacitivos de las cargas, se determinan de forma análoga a las componentes activas; así su módulo es la relación entre la

potencia reactiva de la carga ( $Q$ ) que define la carga de tipo reactivo y la tensión compuesta de secuencia directa a la que está sometida.

Su ángulo se encuentra desfasado con respecto al de la tensión  $-90^\circ$  para el caso de carga reactiva de tipo inductivo y  $+90^\circ$  para una carga reactiva de tipo capacitivo (Figura n° 2.11). El valor de  $\bar{I}_{Z_R}$  vendrá determinado por la siguiente expresión:

$$\bar{I}_{Z_R} = \left( \frac{Q_Z}{V_{+Z}} \right) \cdot e^{\alpha_{v+Z}j} ; \quad Z = ab, bc, ca \quad (2.47)$$

***Determinación de las potencias aparentes debidas a los elementos resistivos ( $\bar{S}_A$ ) y reactivos ( $\bar{S}_R$ ) de las cargas***

Las tensiones simples en las líneas, se determinarán partiendo de las tensiones compuestas de secuencia positiva según (2.30) que de forma extendida vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{Z=a,b,c} &= \bar{V}_{+Z=a,b,c} = \left( \frac{\bar{V}_{+Z=ab,bc,ca}}{\sqrt{3}} \right) \cdot e^{-30j} \\ \bar{V}_a &= \bar{V}_{+a} = \left( \frac{\bar{V}_{+ab}}{\sqrt{3}} \right) \cdot e^{(\alpha_{ab}-30)j} \\ \bar{V}_b &= \bar{V}_{+b} = \left( \frac{\bar{V}_{+bc}}{\sqrt{3}} \right) \cdot e^{(\alpha_{bc}-30)j} = \left( \frac{\bar{V}_{+ab}}{\sqrt{3}} \right) \cdot e^{[(\alpha_{ab}-120)-30]j} \\ \bar{V}_c &= \bar{V}_{+c} = \left( \frac{\bar{V}_{+ca}}{\sqrt{3}} \right) \cdot e^{(\alpha_{ca}-30)j} = \left( \frac{\bar{V}_{+ab}}{\sqrt{3}} \right) \cdot e^{[(\alpha_{ab}+120)-30]j} \end{aligned} \quad (2.48)$$

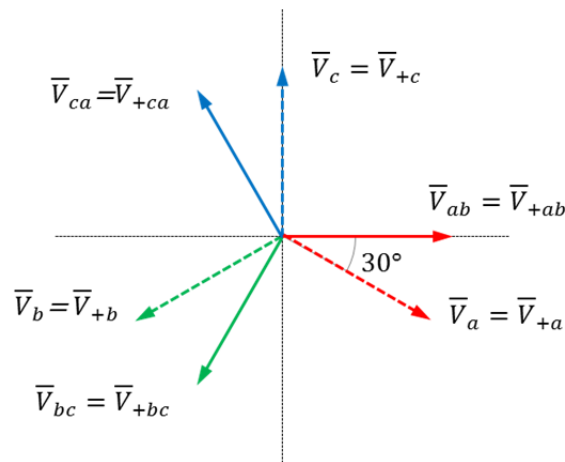


Figura n° 2.12: Relación entre las tensiones compuestas y simples de secuencia positiva

Las intensidades de línea, que circulan por la línea que alimenta a la carga, se obtendrán aplicando la primera ley de Kirchhoff a las corrientes de fase en cada nudo.

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= \bar{I}_{ab} - \bar{I}_{ca} \\ \bar{I}_b &= \bar{I}_{bc} - \bar{I}_{ab} \\ \bar{I}_c &= \bar{I}_{ca} - \bar{I}_{bc}\end{aligned}\quad (2.49)$$

y del mismo modo para las intensidades de fase activas y reactivas:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{aA} &= \bar{I}_{abA} - \bar{I}_{caA} & \bar{I}_{aR} &= \bar{I}_{abR} - \bar{I}_{caR} \\ \bar{I}_{bA} &= \bar{I}_{bcA} - \bar{I}_{abA} & \bar{I}_{bR} &= \bar{I}_{bcR} - \bar{I}_{abR} \\ \bar{I}_{cA} &= \bar{I}_{caA} - \bar{I}_{bcA} & \bar{I}_{cR} &= \bar{I}_{caR} - \bar{I}_{bcR}\end{aligned}\quad (2.50)$$

El valor de la potencia aparente a partir de la expresión de la potencia compleja vendrá dado por la siguiente expresión:

$$\bar{S}_Z = \bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_Z^* = \bar{V}_{+Z} \cdot (\bar{I}_{ZA}^* + \bar{I}_{ZR}^*) = \bar{S}_A + \bar{S}_R ; \quad Z = a, b, c \quad (2.51)$$

Los dos términos de la expresión anterior representan la separación de la potencia aparente total en la potencia  $\bar{S}_A$  debida a los elementos resistivos y en  $\bar{S}_R$  debida a los elementos reactivos (inductivos y/o capacitivos) de la carga. Cada una de ellas, al ser variables complejas tendrá a su vez componente real e imaginaria, siendo sus correspondientes expresiones:

$$\begin{aligned}\bar{S}_A &= \bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{ZA}^* = P'_Z + j \cdot Q''_Z \\ \bar{S}_R &= \bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{ZR}^* = P''_Z + j \cdot Q'_Z\end{aligned}\quad (2.52)$$

y en cada caso, sus componentes corresponderán a:

$$\begin{aligned}P'_Z &= \text{Real}(\bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{ZA}^*) = V_{+Z} \cdot I_{ZA} \cdot \cos(\alpha_{+Z} - \varphi_{ZA}) \\ Q''_Z &= \text{Imaginaria}(\bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{ZA}^*) = V_{+Z} \cdot I_{ZA} \cdot \sin(\alpha_{+Z} - \varphi_{ZA}) \\ P''_Z &= \text{Real}(\bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{ZR}^*) = V_{+Z} \cdot I_{ZR} \cdot \cos(\alpha_{+Z} - \varphi_{ZR}) \\ Q'_Z &= \text{Imaginaria}(\bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{ZR}^*) = V_{+Z} \cdot I_{ZR} \cdot \sin(\alpha_{+Z} - \varphi_{ZR})\end{aligned}\quad (2.53)$$

Como se comprueba en las expresiones anteriores, el estudio de las potencias  $\bar{S}_A$  y  $\bar{S}_R$  se realizará considerando las variables de la carga en triángulo, para lo cual se tomarán las

tensiones simples de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ), empleando para ello el circuito equivalente expuesto en el punto 2.4.1.

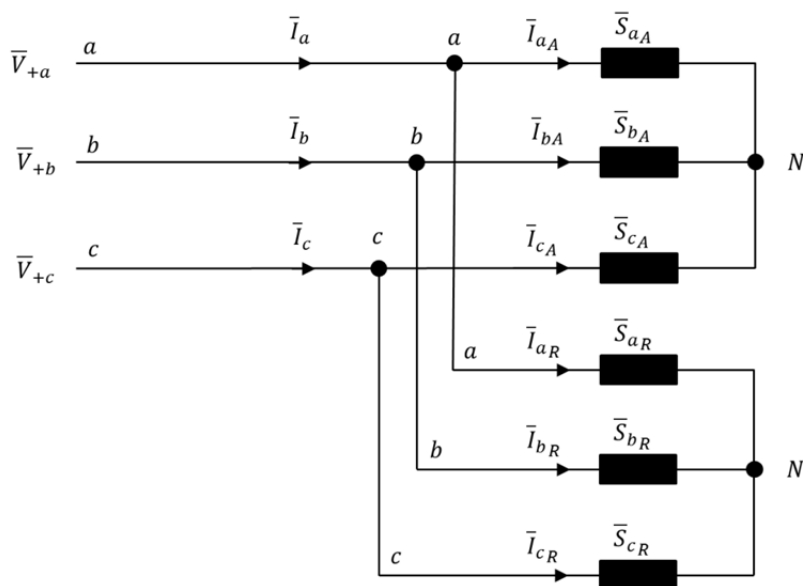


Figura nº 2.12: Topología de una carga en triángulo a 3 hilos.

La potencia aparente de secuencia positiva total del sistema, viene dada según (2.51) por:  $\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$ ; donde cabe considerar que:

- $\bar{S}_A$ : representa la **potencia aparente debida a los elementos resistivos de las cargas**, y es causada por la tensión de secuencia positiva y a la intensidad de línea activa obtenida según (2.51) y (2.52).

En un sistema de tensiones equilibradas, la potencia activa de secuencia positiva es igual a la suma de las potencias activas parciales de cada una de las fases:  

$$P_+ = P_a + P_b + P_c$$

En el caso de la potencia ( $\bar{S}_A$ ), la suma de las potencias parciales de cada línea coincide con la potencia positiva ( $P_+ = S_A$ ); pero el reparto es distinto en cada una de las fases, dando lugar por tanto a una potencia de desequilibrio causada por los elementos resistivos de la carga.

- $\bar{S}_R$ : representa la **potencia aparente debida a los elementos reactivos de la cargas** (inductivos y/o capacitivos), y es debida a la tensión de secuencia positiva y a la intensidad de línea reactiva obtenida según (2.51) y (2.52)

En un sistema de tensiones equilibradas, la potencia reactiva de secuencia positiva es igual a la suma de las potencias reactivas parciales de cada fase;

$$Q_+ = Q_a + Q_b + Q_c$$

En el caso de la potencia ( $\bar{S}_R$ ), la suma de las potencias parciales de cada línea coincide con la potencia positiva ( $Q_+ = S_R$ ); pero el reparto es distinto en cada una de las fases, dando lugar por tanto a una potencia de desequilibrio causada por los elementos reactivos de las carga.

- $\bar{V}_+$ : representa la tensión simple de secuencia positiva, la cual para un sistema alimentado con tensiones equilibradas, coincide con la tensión simple según (2.41) y (2.49).

Partiendo de la expresión (2.51), esta puede ser escrita de forma más extendida como:

$$\bar{S}_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R = \underbrace{\bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_a^*}_{\bar{S}_a} + \underbrace{\bar{V}_{+b} \cdot \bar{I}_b^*}_{\bar{S}_b} + \underbrace{\bar{V}_{+c} \cdot \bar{I}_c^*}_{\bar{S}_c} = \bar{S}_a + \bar{S}_b + \bar{S}_c \quad (2.54)$$

Teniendo en cuenta que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos, se tendrán unas nuevas componentes de intensidades activas y reactivas que verifiquen de forma genérica, tanto para la fase como para la línea, que:  $\bar{I}_Z = \bar{I}_{ZA} + \bar{I}_{ZR}$

A continuación se reescriben de forma conjunta y extendida las expresiones (2.51) y (2.52) con los parámetros que definen las potencias aparentes debidas a los elementos resistivos ( $\bar{S}_A$ ) y reactivos ( $\bar{S}_R$ ) de la carga:

$$\begin{aligned} \bar{S}_A &= \bar{S}_{aA} + \bar{S}_{bA} + \bar{S}_{cA} \\ &= \sum_{Z=a,b,c} \bar{S}_{ZA} = \sum_{Z=a,b,c} \bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{ZA}^* = \sum_{Z=a,b,c} P'_Z + j \cdot \underbrace{\sum_{Z=a,b,c} Q''_Z}_0 \\ \bar{S}_{aA} &= \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{aA}^* = P'_a + j \cdot Q''_a \\ \bar{S}_{bA} &= \bar{V}_{+b} \cdot \bar{I}_{bA}^* = P'_b + j \cdot Q''_b \\ \bar{S}_{cA} &= \bar{V}_{+c} \cdot \bar{I}_{cA}^* = P'_c + j \cdot Q''_c \end{aligned} \quad (2.55)$$



$$\begin{aligned}
 \bar{S}_R &= \bar{S}_{aR} + \bar{S}_{bR} + \bar{S}_{cR} \\
 &= \sum_{Z=a,b,c} \bar{S}_{ZR} = \sum_{Z=a,b,c} \bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{ZR}^* = \underbrace{\sum_{Z=a,b,c} P_Z''}_{0} + j \cdot \sum_{Z=a,b,c} Q_Z' \\
 \bar{S}_{aR} &= \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{aR}^* = P_a'' + j \cdot Q_a' \\
 \bar{S}_{bR} &= \bar{V}_{+b} \cdot \bar{I}_{bR}^* = P_b'' + j \cdot Q_b' \\
 \bar{S}_{cR} &= \bar{V}_{+c} \cdot \bar{I}_{cR}^* = P_c'' + j \cdot Q_c'
 \end{aligned} \tag{2.56}$$

La siguiente figura muestra las componentes resistivas y reactivas de la potencia e intensidades representadas mediante el circuito equivalente de la carga transformada a una conexión estrella.

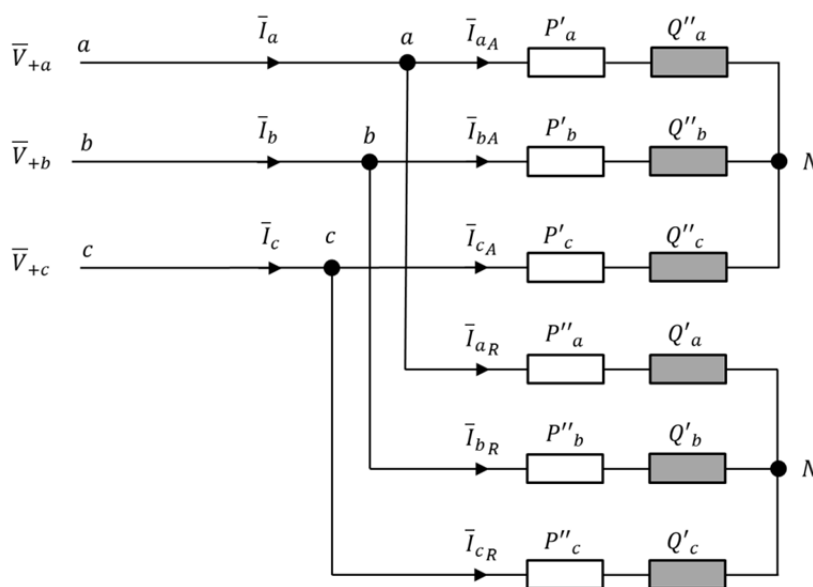


Figura nº 2.13: Componentes activa y reactiva de la intensidad y potencia representadas en el circuito equivalente al triángulo.

De lo expuesto anteriormente y de las ecuaciones (2.55) y (2.56) cabe considerar que:

- Existe para cada corriente activa (componentes resistivas de la carga) y reactiva (componentes reactivas de la carga) una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga; siendo estas  $P'$ ,  $Q''$  y  $P''$ ,  $Q'$  respectivamente.
- Estas potencias se caracterizan por:

$$\begin{aligned}
 P_Z &= \sum_{Z=a,b,c} P'_Z + j \cdot \sum_{Z=a,b,c} P''_Z \\
 P_a &= P'_a + P''_a \\
 P_b &= P'_b + P''_b \\
 P_c &= P'_c + P''_c \\
 \sum P'_Z &= P'_a + P'_b + P'_c = P_+ \\
 \sum P''_Z &= P''_a + P''_b + P''_c = 0 \\
 & \hspace{20em} (2.57) \\
 Q_Z &= \sum_{Z=a,b,c} Q'_Z + j \cdot \sum_{Z=a,b,c} Q''_Z \\
 Q_a &= Q'_a + Q''_a \\
 Q_b &= Q'_b + Q''_b \\
 Q_c &= Q'_c + Q''_c \\
 \sum Q'_Z &= Q'_a + Q'_b + Q'_c = Q_+ \\
 \sum Q''_Z &= Q''_a + Q''_b + Q''_c = 0
 \end{aligned}$$

La formulación de los Parámetros de Desequilibrio “A, B” y “C, D” debidos a las componentes resistivas y reactivas (inductivas y/o capacitivas) de las cargas según las expresiones (2.58) y (2.59) respectivamente, está basada en el uso de la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+Z}$ ) considerando un ángulo de desfase cualquiera ( $\alpha_{+Z}$ ), y de las intensidades activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) según (2.46, 2.55) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) según (2.47, 2.56); de forma que **se cuantifican separadamente los efectos de las potencias causadas por las cargas resistivas y reactivas.**

Dado que están formulados en función de la variable tensión equilibrada de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+Z}$ ), estas expresiones son válidas para la determinación de la potencia de desequilibrio debida a las intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ ), tanto para tensiones de fase/línea equilibradas como desequilibradas (según se muestra en el Capítulo 3), a diferencia de la potencia de desequilibrio definida por la UPM (Unified Power Measurement) como “Fasor Potencia Total de Desequilibrio, ( $\bar{A}_U$ )” [59] que lo hace para tensiones equilibradas.

En el caso particular de sistemas alimentados con tensiones equilibradas, los valores de las tensiones de secuencia positiva coinciden con los de las tensiones en valores de fase ( $\bar{V}_{+z} = \bar{V}_z$ ). Las potencias de fase/línea de las cargas, tal como se muestra en la expresión (2.57), coinciden con la descomposición real e imaginaria de las potencias aparentes debidas a cargas resistivas (2.55) y reactivas (2.56):

$$P_Z = P'_Z + P''_Z$$

$$Q_Z = Q'_Z + Q''_Z$$

de manera que, como se expone en el punto 2.4.3, la formulación de la “Potencia de Desequilibrio debida a las Intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ )”, es concordante con el “Fasor Potencia Total de Desequilibrio, ( $\bar{A}_U$ )” definido en la UPM; diferenciándose en que esta emplea en su expresión los valores de las potencias activas y reactivas que caracterizan las cargas según (2.5), y es válida para tensiones equilibradas [59], mientras que la expresión propuesta en (2.70) utiliza en la determinación de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D”, las tensiones equilibradas de secuencia positiva y las intensidades activas y reactivas de forma separada; mostrando como intensidades activas (debidas a cargas resistivas) e intensidades reactivas (debidas a cargas reactivas inductivas y/o capacitivas) dan lugar a potencias activas y reactivas independientemente de la existencia o no de componentes resistivas y/o reactivas de las cargas [46], [39], [22], según se muestra en las expresiones (2.55) y (2.56) y la figura nº 2.13.

En el siguiente apartado “b) Cálculo de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D”” se exponen las expresiones de los parámetros de desequilibrio causados por las intensidades activas (A, B) según (2.58) y por las intensidades reactivas (C, D) según (2.59). Además se muestran las representaciones gráficas fasoriales desplazadas un ángulo ( $2\alpha_{+z}$ ) debido a un desfase de la tensión de secuencia positiva distinto de cero, donde se observa que las componentes reales e imaginarias debidas a las cargas resistivas (A, B) y a las cargas reactivas (C, D) son ortogonales entre sí y pueden ser sumadas entre ellas según se expone en (2.72).

Además, se muestra como la suma fasorial de las potencias de desequilibrio activas y reactivas ocasionadas individualmente por cada fase (a, b, c), dan como resultante la potencia total de desequilibrio debida a la intensidad activa ( $\bar{D}_{uiA}$ ) (componentes

resistivas de las cargas) y debida a la intensidad reactiva ( $\bar{D}_{ui_R}$ ) (componentes reactivas de las cargas) según se muestra en las figuras n° 2.17 y n° 2.21 respectivamente; así:

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_A} &= \bar{D}_{ui_{a-A}} + \bar{D}_{ui_{b-A}} + \bar{D}_{ui_{c-A}} \\ \bar{D}_{ui_R} &= \bar{D}_{ui_{a-R}} + \bar{D}_{ui_{b-R}} + \bar{D}_{ui_{c-R}}\end{aligned}$$

A continuación se describe más detalladamente la formulación de los parámetros de desequilibrio “A, B” y “C, D” así como sus características mediante la representación gráfica fasorial.

**b) Cálculo de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D”**

Sean las expresiones genéricas correspondientes a los parámetros de desequilibrio para intensidades activas (elementos resistivos) según (2.27) y para intensidades reactivas (elementos reactivos) según (2.29), donde las variables  $P_z$  y  $Q_z$  corresponden a la potencia activa (componente real) y reactiva (componente imaginaria) de la potencia calculada mediante las variables de tensión ( $\bar{V}_{+Z=a,b,c}$ ) e intensidad ( $\bar{I}_{Z=a,b,c}$ ).

Como se comprueba en (2.51), la potencia aparente puede ser expresada en dos componentes complejas: ( $\bar{S}_A$ ) según (2.55), causada por la intensidad activa debida a los elementos resistivos de la carga; y ( $\bar{S}_R$ ) según (2.56), causada por la intensidad reactiva debida a los elementos reactivos de la carga.

Los **parámetros “A, B”** debidos a la potencia resultante de los desequilibrios de las intensidades activas, causados por los elementos resistivos de la carga, serán:

$$\begin{aligned}A &= \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{Z=a,b,c} P'_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] + j \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{Z=a,b,c} Q''_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] = \\ &= \left[ -\sqrt{2} \cdot (P'_a \cos 2\alpha_{+a} + P'_b \cos 2\alpha_{+b} + P'_c \cos 2\alpha_{+c}) \right] + \\ &+ j \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot (Q''_a \cos 2\alpha_{+a} + Q''_b \cos 2\alpha_{+b} + Q''_c \cos 2\alpha_{+c}) \right]\end{aligned}\tag{2.58}$$

$$\begin{aligned}
 B &= \left[ \sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P'_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] + j \cdot \left[ \sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q''_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] = \\
 &= \left[ \sqrt{2} \cdot (P'_a \sin 2\alpha_{+a} + P'_b \sin 2\alpha_{+b} + P'_c \sin 2\alpha_{+c}) \right] + \\
 &\quad + j \cdot \left[ \sqrt{2} \cdot (Q''_a \sin 2\alpha_{+a} + Q''_b \sin 2\alpha_{+b} + Q''_c \sin 2\alpha_{+c}) \right]
 \end{aligned}$$

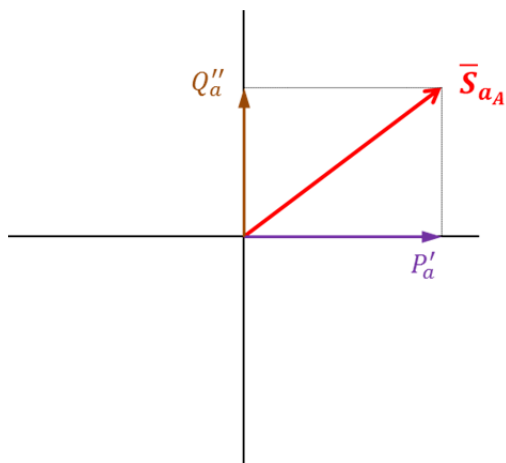
A continuación se muestra individualmente para cada fase ( $\bar{S}_{a_A}, \bar{S}_{b_A}, \bar{S}_{c_A}$ ), la representación fasorial de las potencias aparentes, debidas a las componentes resistivas de las cargas, descompuestas según la expresión (2.55) y expresadas según la formulación de los parámetros de desequilibrio activos “A, B” de (2.58).

En las figuras 2.14 (a), 2.15 (a) y 2.16 (a), se representa la descomposición fasorial de las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_{z_A}$ ) sobre el eje real-imaginario desplazado  $0^\circ$ ; donde las proyecciones muestran las potencias de componente real ( $P'_z$ ) e imaginaria ( $Q''_z$ ) debidas a las cargas de tipo resistivo.

En las figuras 2.14 (b, c), 2.15 (b, c) y 2.16 (b, c), se representan según la expresión (2.58) para un ángulo de desfase de la tensión de secuencia positiva ( $\alpha_{+z}$ ) distinto de cero, las potencias reales ( $P'_z$ ) e imaginarias ( $Q''_z$ ) sobre el sistema de ejes dado por el ángulo de la tensión de secuencia positiva de cada fase ( $2\alpha_{+z}$ ).

En las figuras 2.14 (d), 2.15 (d) y 2.16 (d), se representan, sobre un mismo eje de referencia dado por ( $2\alpha_{+a}$ ), las aportaciones de las potencias reales ( $P'_z$ ) e imaginarias ( $Q''_z$ ) que constituyen, fase a fase los parámetros de desequilibrio “A, B”; donde se puede observar la ortogonalidad de estos, así como la coincidencia con la representación de las figuras denotadas con la letra (a). La resultante de la suma de las componentes A y B corresponde a la potencia de desequilibrio debida a las corrientes que ocasiona individualmente cada fase ( $\bar{D}_{ui-z}$ ).

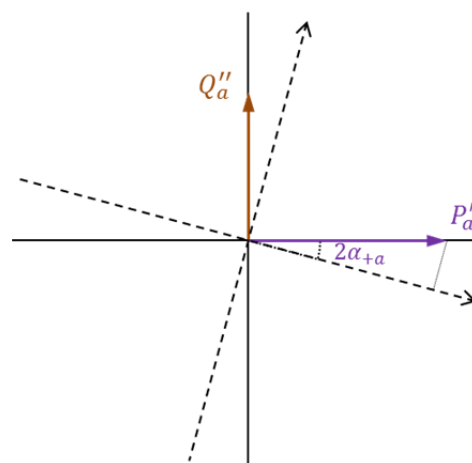
Fase “a”:



(a):

Descomposición fasorial de la potencia activa  $\bar{S}_{a_A}$  correspondiente a la fase “a”:

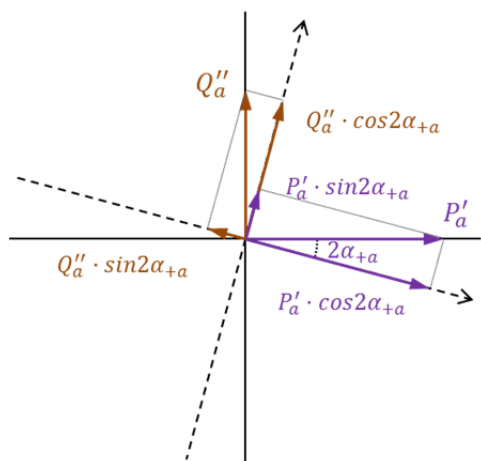
$$\bar{S}_{a_A} = \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{a_A}^* = P'_a + j \cdot Q''_a$$



(b):

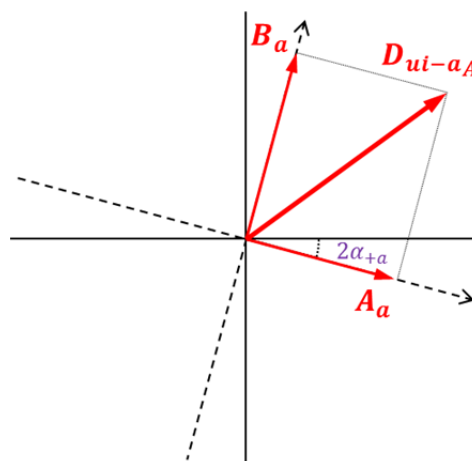
Según la expresión (2.58)

Ejes desplazados  $2\alpha_{+a}$  respecto de  $\bar{S}_{a_A}$ .



(c):

Descomposición de las potencias  $P'_a$  y  $jQ''_a$  en sus partes reales e imaginarias proyectadas sobre los ejes desplazados  $2\alpha_{+a}$



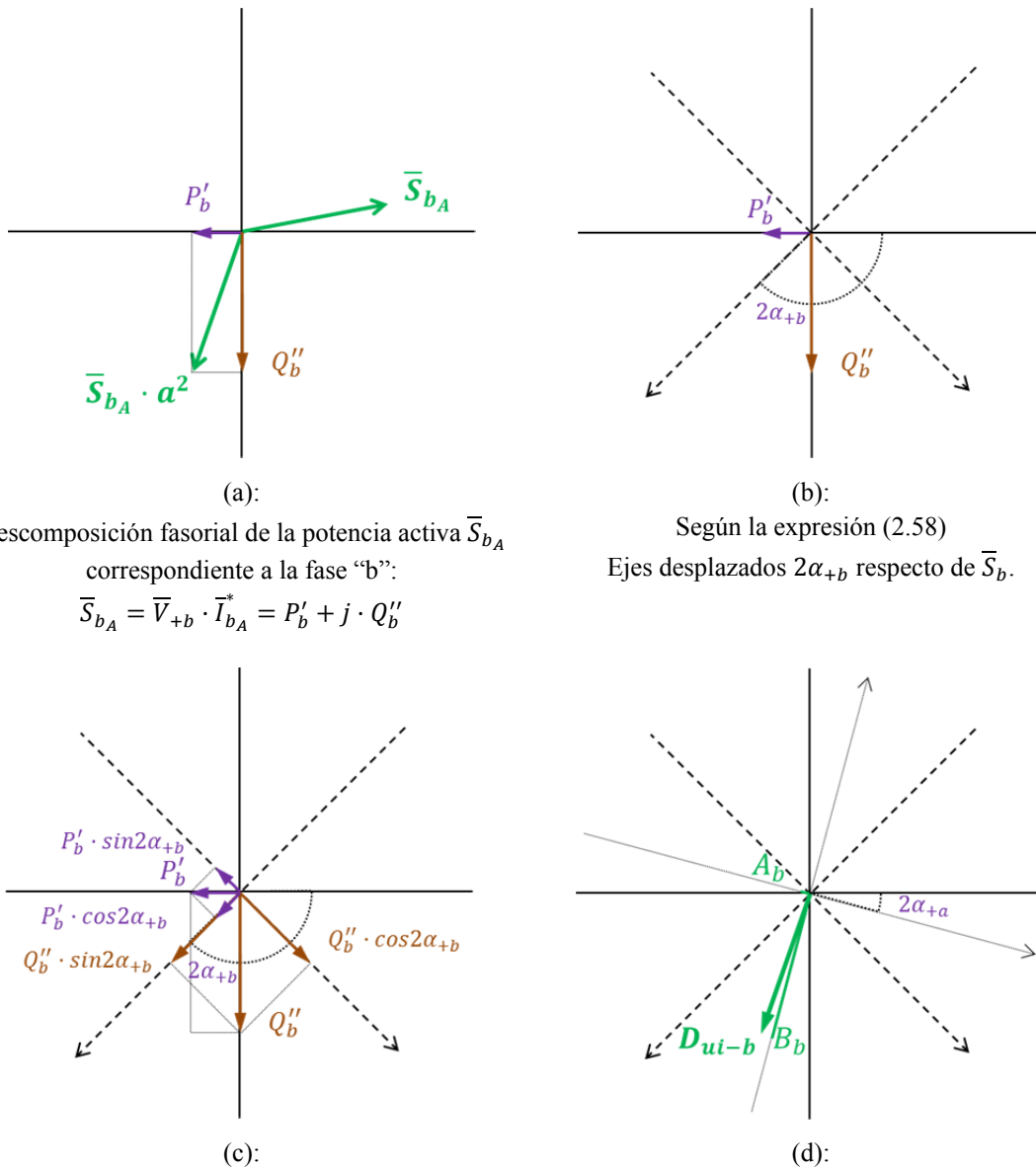
(d):

Aporte parcial de la potencia activa “ $\bar{S}_{a_A}$ ” a los parámetros de desequilibrio “A y B”.

Se corresponden a la suma de fasores reales e imaginarios proyectados sobre el plano de  $2\alpha_{+a}$ . La resultante es el desequilibrio parcial  $D_{ui-a_A}$ .

Figura nº 2.14: Representación fasorial de los parámetros de desequilibrio A y B de la fase “a”

Fase “b”:



Descomposición fasorial de la potencia activa  $\bar{S}_{b_A}$  correspondiente a la fase “b”:  
 $\bar{S}_{b_A} = \bar{V}_{+b} \cdot \bar{I}_{b_A}^* = P'_b + j \cdot Q''_b$

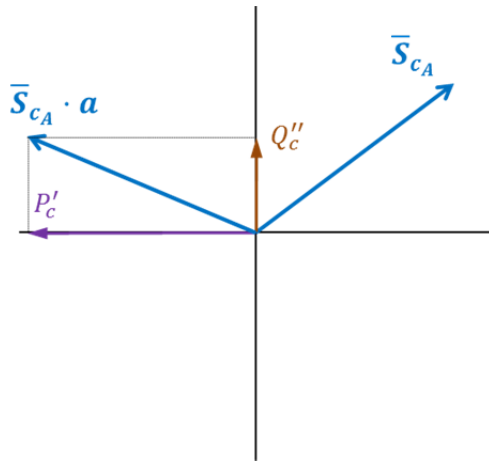
Según la expresión (2.58)  
 Ejes desplazados  $2\alpha_{+b}$  respecto de  $\bar{S}_b$ .

Descomposición de las potencias  $P'_b$  y  $jQ''_b$  en sus partes reales e imaginarias proyectadas sobre los ejes desplazados  $2\alpha_{+b}$

Aporte parcial de la potencia activa “ $\bar{S}_{b_A}$ ” a los parámetros de desequilibrio “A y B”.  
 Se corresponden a la suma de fasores reales e imaginarios proyectados sobre el plano de  $2\alpha_{+a}$ .  
 La resultante es el desequilibrio parcial  $D_{ui-b_A}$

Figura nº 2.15: Representación fasorial de los parámetros de desequilibrio A y B de la fase “b”

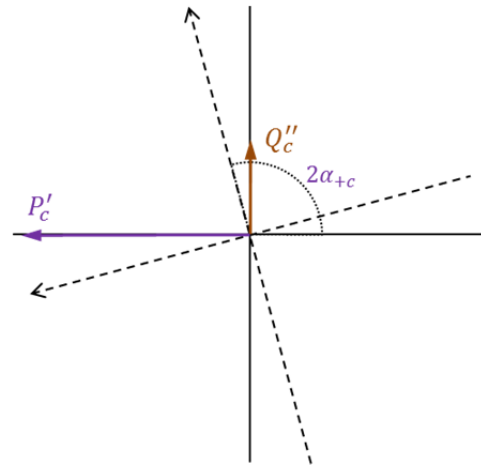
Fase “c”:



(a):

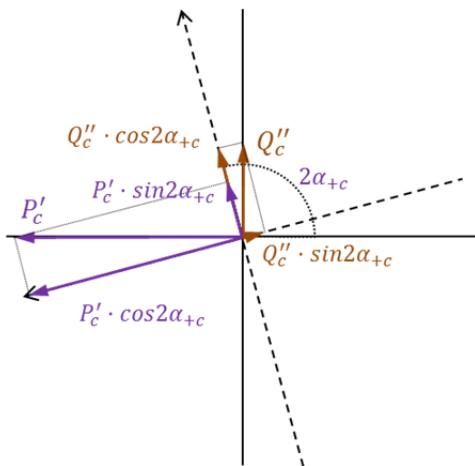
Descomposición fasorial de la potencia activa  $\bar{S}_{cA}$  correspondiente a la fase “c”:

$$\bar{S}_{cA} = \bar{V}_{+c} \cdot \bar{I}_{cA}^* = P'_c + j \cdot Q''_c$$



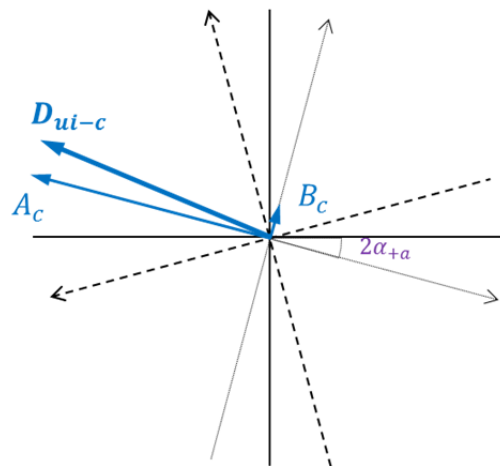
(b):

Según la expresión (2.58)  
Ejes desplazados  $2\alpha_{+c}$  respecto de  $\bar{S}_c$ .



(c):

Descomposición de las potencias  $P'_c$  y  $jQ''_c$  en sus partes reales e imaginarias proyectadas sobre los ejes desplazados  $2\alpha_{+c}$



(d):

Aporte parcial de la potencia activa “ $\bar{S}_{cA}$ ” a los parámetros de desequilibrio “A y B”.  
Se corresponden a la suma de fasores reales e imaginarios proyectados sobre el plano de  $2\alpha_{+a}$ .  
La resultante es el desequilibrio parcial  $D_{ui-cA}$

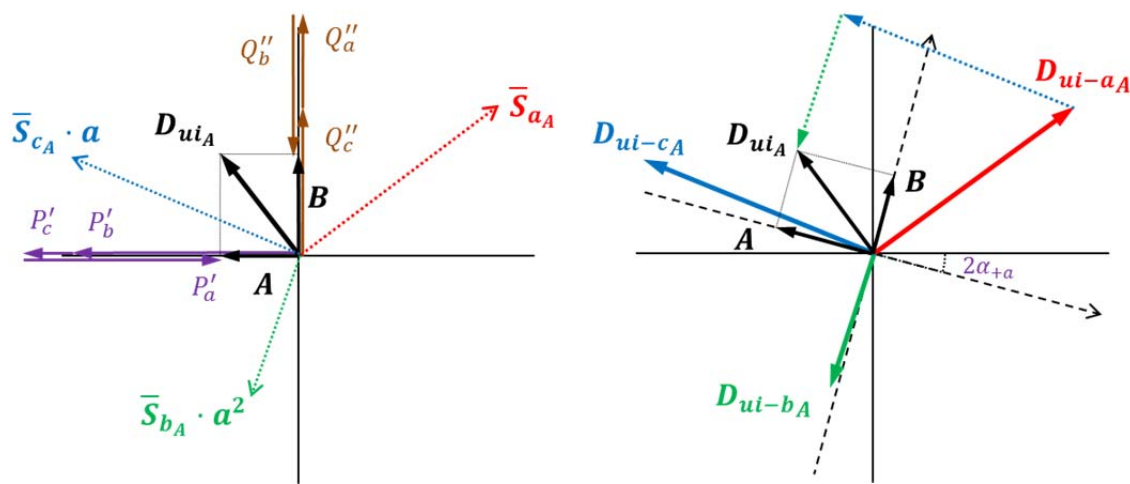
Figura nº 2.16: Representación fasorial de los parámetros de desequilibrio A y B de la fase “c”

La representación fasorial en conjunto de las tres fases correspondientes a las potencias activas debidas a los elementos resistivos de la carga y de las potencias de desequilibrio se muestra en la Figuras nº 2.17.



Como se puede observar, la resultante de la suma fasorial de las potencias activas ( $\bar{S}_{a_A} + \bar{S}_{b_A} \cdot a^2 + \bar{S}_{c_A} \cdot a$ ) se corresponde con la potencia total de desequilibrio activa  $\bar{D}_{ui_A}$  (debida a los elementos resistivos de las cargas), según muestra la figura 2.17 (a). Así mismo, las resultantes parciales de los desequilibrios de cada fase ( $\bar{D}_{ui-a_A} + \bar{D}_{ui-b_A} + \bar{D}_{ui-c_A}$ ) se corresponde con la potencia de desequilibrio activa según la figura 2.17 (b), la cual se encuentra referenciada a los ejes definido por  $2\alpha_{+a}$  según la expresión (2.58).

En ambos casos, los parámetros de desequilibrio “A, B” son ortogonales entre sí, y se encuentran como muestra cada figura referenciados a los planos real e imaginario (a) y a los ejes definidos por el ángulo  $2\alpha_{+a}$ . Su resultante coincide con la suma de los parámetros parciales debidos a cada fase, según se muestran en las figuras 2.14 (c), 2.15 (c) y 2.16 (c).



(a):  
 Representación fasorial de las potencias activas “ $D_{ui-a_A}, D_{ui-b_A}, D_{ui-c_A}$ ” correspondientes a las fases a, b, c.

(b):  
 Representación fasorial de la suma las potencias de desequilibrio resultantes ( $\bar{D}_{ui-a_A} + \bar{D}_{ui-b_A} + \bar{D}_{ui-c_A}$ ) proyectadas sobre el plano de  $2\alpha_{+a}$ .

Figura nº 2.17: Representación fasorial de la potencia  $\bar{D}_{ui_A}$  y de los parámetros de desequilibrio “A, B” debidos a las potencias activas.

Los **parámetros de desequilibrio “C, D”** debidos a la potencia resultante de los desequilibrios de las intensidades reactivas, causadas por los elementos reactivos (inductivos y/o capacitivos) de la carga, serán:

$$\begin{aligned}
 C &= \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P''_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] + j \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q'_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] = \\
 &= \left[ -\sqrt{2} \cdot (P''_a \sin 2\alpha_{+a} + P''_b \sin 2\alpha_{+b} + P''_c \sin 2\alpha_{+c}) \right] + \\
 &\quad + j \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot (Q'_a \sin 2\alpha_{+a} + Q'_b \sin 2\alpha_{+b} + Q'_c \sin 2\alpha_{+c}) \right] \\
 &\hspace{20em} (2.59) \\
 D &= \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P''_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] + j \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q'_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] = \\
 &= \left[ -\sqrt{2} \cdot (P''_a \cos 2\alpha_{+a} + P''_b \cos 2\alpha_{+b} + P''_c \cos 2\alpha_{+c}) \right] + \\
 &\quad + j \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot (Q'_a \cos 2\alpha_{+a} + Q'_b \cos 2\alpha_{+b} + Q'_c \cos 2\alpha_{+c}) \right]
 \end{aligned}$$

A continuación se muestra individualmente para cada fase  $\bar{S}_{aR}$ ,  $\bar{S}_{bR}$ ,  $\bar{S}_{cR}$ , la representación fasorial de las potencias aparentes reactivas, debidas a las componentes reactivas (inductivas y/o capacitivas de las cargas, descompuestas según la expresión (2.56) y expresadas según la formulación de los parámetros de desequilibrio reactivos “D, C” de (2.59).

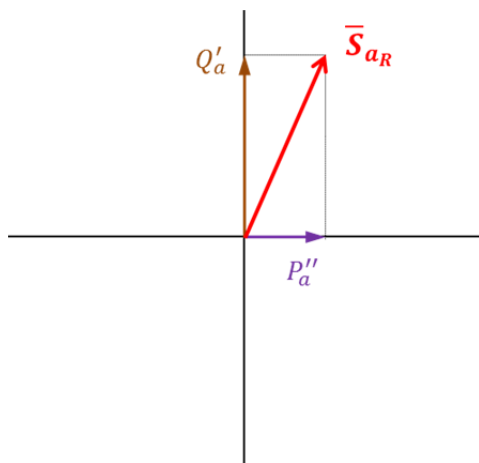
En las figuras 2.18 (a), 2.19 (a) y 2.20 (a) se representa la descomposición fasorial de las potencias aparentes reactivas ( $\bar{S}_{zR}$ ) sobre el eje real-imaginario desplazado  $0^\circ$ ; donde las proyecciones muestran las potencias de componente real ( $P''_z$ ) e imaginaria ( $Q'_z$ ) debidas a las cargas de tipo resistivo.

En las figuras 2.18 (b, c), 2.19 (b, c) y 2.20 (b, c) se representan, según la expresión (2.59) para un ángulo de desfase de la tensión de secuencia positiva ( $\alpha_{+z}$ ) distinto de cero, las potencias reales ( $P''_z$ ) e imaginarias ( $Q'_z$ ) sobre el sistema de ejes dado por el ángulo de la tensión de secuencia positiva de cada fase ( $2\alpha_{+z}$ ).

En las figuras 2.18 (d), 2.19 (d) y 2.20 (d) se representan, sobre un mismo eje de referencia dado por ( $2\alpha_{+a}$ ), las aportaciones de las potencias reales ( $P''_z$ ) e imaginarias ( $Q'_z$ ) que constituyen, fase a fase los parámetros de desequilibrio “D, C”; donde se puede observar la ortogonalidad de estos, así como la coincidencia con la representación

de las figuras denotadas con la letra (a). La resultante de la suma de las componentes  $D$  y  $C$  corresponde a la potencia de desequilibrio debida a las corrientes que ocasiona individualmente cada fase ( $\bar{D}_{ui-z}$ ).

Fase “a”:

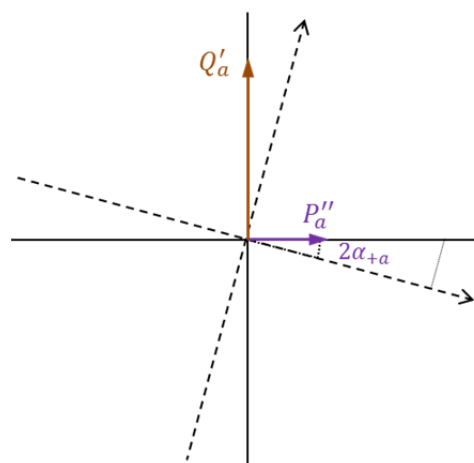


(a):

Descomposición fasorial de la potencia reactiva

$\bar{S}_{aR}$  correspondiente a la fase “a”:

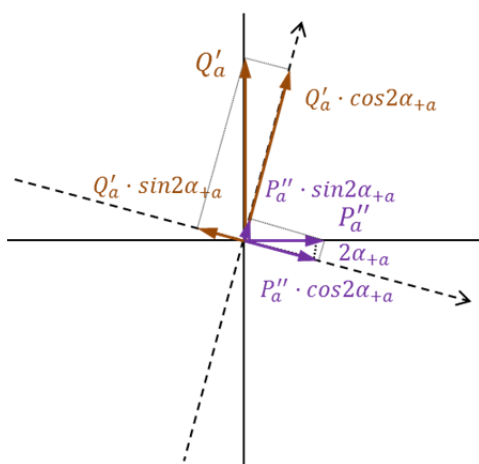
$$\bar{S}_{aR} = \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{aA}^* = P''_a + j \cdot Q'_a$$



(b):

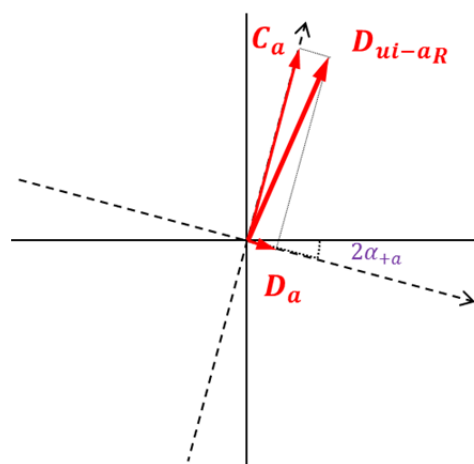
Según la expresión (2.59)

Ejes desplazados  $2\alpha_{+a}$  respecto de  $\bar{S}_{aR}$ .



(c):

Descomposición de las potencias  $P''_a$  y  $jQ'_a$  en sus partes reales e imaginarias proyectadas sobre los ejes desplazados  $2\alpha_{+a}$

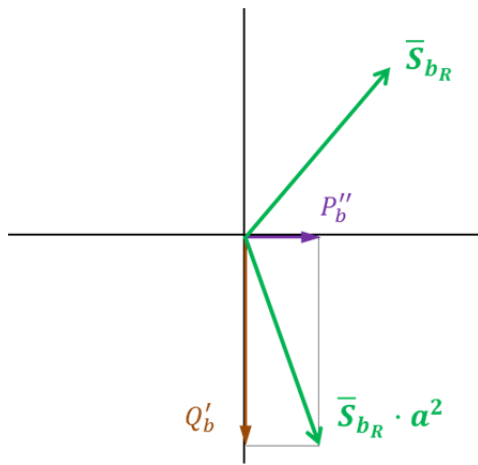


(d):

Aporte parcial de la potencia activa “ $\bar{S}_{aA}$ ” a los parámetros de desequilibrio “C y D”. Se corresponden a la suma de fasores reales e imaginarios proyectados sobre el plano de  $2\alpha_{+a}$ . La resultante es el desequilibrio parcial  $D_{ui-aA}$

Figura n° 2.18: Representación fasorial de los parámetros de desequilibrio C y D de la fase “a”

Fase “b”:

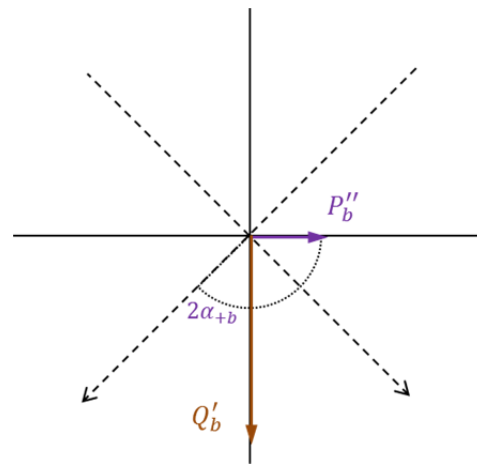


(a):

Descomposición fasorial de la potencia reactiva

$\bar{S}_{bR}$  correspondiente a la fase “b”:

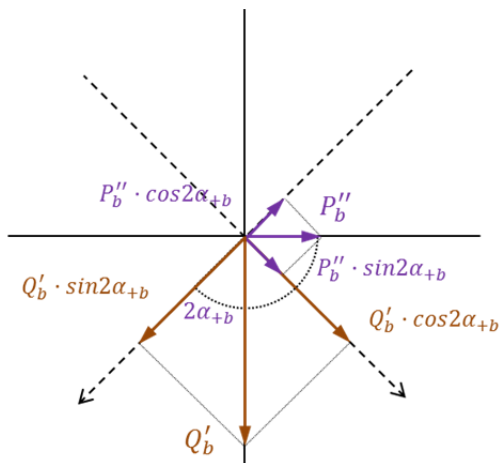
$$\bar{S}_{bR} = \bar{V}_{+b} \cdot \bar{I}_{bA}^* = P''_b + j \cdot Q'_b$$



(b):

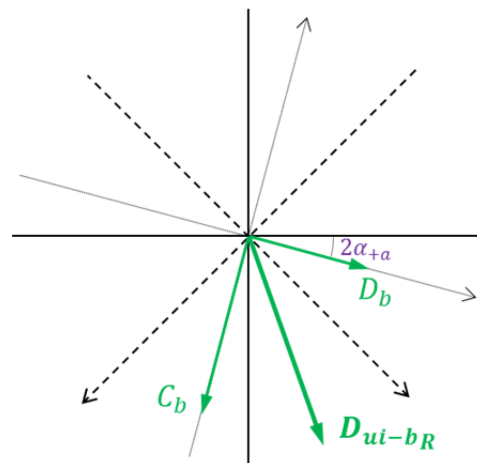
Según la expresión (2.59)

Ejes desplazados  $2\alpha_{+b}$  respecto de  $\bar{S}_{bR}$ .



(c):

Descomposición de las potencias  $P''_b$  y  $jQ'_b$  en sus partes reales e imaginarias proyectadas sobre los ejes desplazados  $2\alpha_{+b}$



(d):

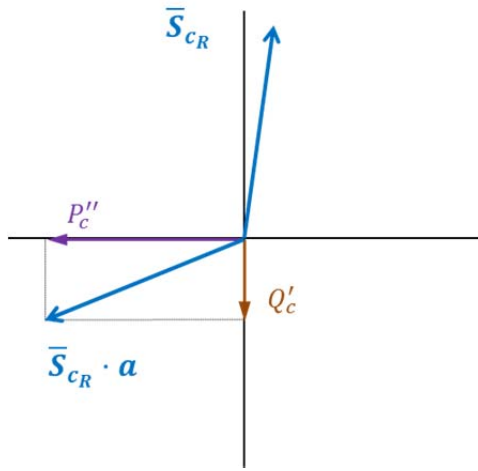
Aporte parcial de la potencia activa “ $\bar{S}_{bA}$ ” a los parámetros de desequilibrio “C y D”.

Se corresponden a la suma de fasores reales e imaginarios proyectados sobre el plano de  $2\alpha_{+a}$ .

La resultante es el desequilibrio parcial  $D_{ui-bA}$

Figura nº 2.19: Representación fasorial de los parámetros de desequilibrio C y D de la fase “b”

Fase “c”:

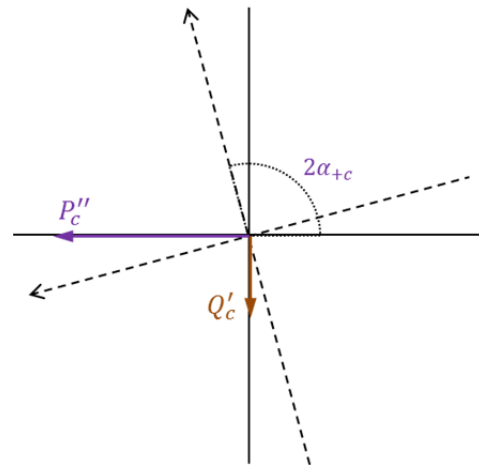


(a):

Descomposición fasorial de la potencia reactiva

$\bar{s}_{cR}$  correspondiente a la fase “v”:

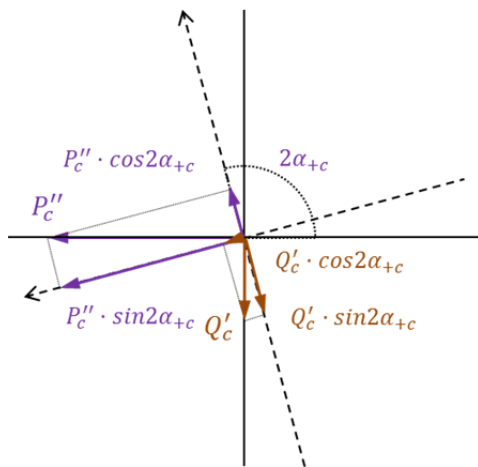
$$\bar{s}_{cR} = \bar{V}_{+c} \cdot \bar{I}_{cA}^* = P'_c + j \cdot Q'_c$$



(b):

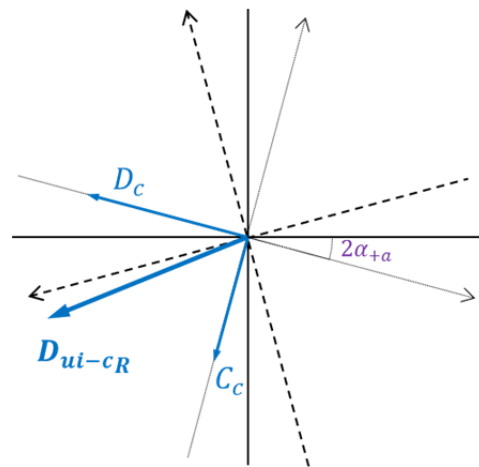
Según la expresión (2.59)

Ejes desplazados  $2\alpha_{+c}$  respecto de  $\bar{s}_{cR}$ .



(c):

Descomposición de las potencias  $P'_c$  y  $jQ'_c$  en sus partes reales e imaginarias proyectadas sobre los ejes desplazados  $2\alpha_{+c}$



(d):

Aporte parcial de la potencia activa “ $\bar{s}_{cA}$ ” a los parámetros de desequilibrio “C y D”.

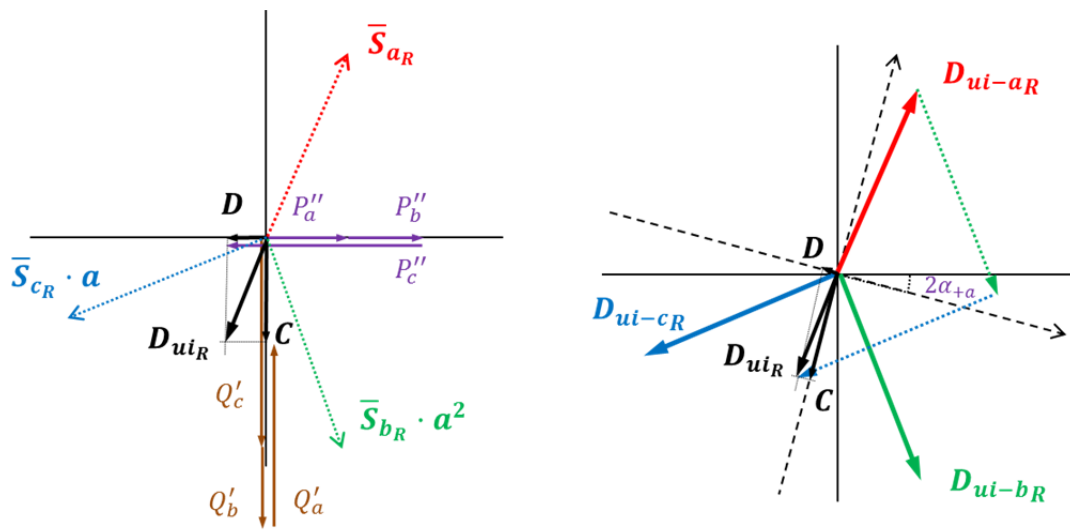
Se corresponden a la suma de fasores reales e imaginarios proyectados sobre el plano de  $2\alpha_{+c}$ . La resultante es el desequilibrio parcial  $D_{ui-cA}$

Figura nº 2.20: Representación fasorial de los parámetros de desequilibrio C y D de la fase “c”

La representación fasorial en conjunto de las tres fases correspondientes a las potencias reactivas debidas a los elementos reactivos de la carga y de las potencias de desequilibrio se muestra en la Figuras nº 2.21.

Como se puede observar, la resultante de la suma fasorial de las potencias reactivas  $(\bar{S}_{a_R} + \bar{S}_{b_R} \cdot a^2 + \bar{S}_{c_R} \cdot a)$  se corresponde con la potencia total de desequilibrio reactiva  $\bar{D}_{ui_R}$  (ocasionada por las componentes de las cargas de tipo reactivas) según muestra la figura 2.21 (a). Así mismo las resultantes parciales de los desequilibrios de cada fase  $(\bar{D}_{ui-a_R} + \bar{D}_{ui-b_R} + \bar{D}_{ui-c_R})$  se corresponde con la potencia de desequilibrio reactiva según la figura 2.21 (b), la cual se encuentra referenciada a los ejes definido por  $2\alpha_{+a}$  según la expresión (2.59).

En ambos casos, los parámetros de desequilibrio “C, D” son ortogonales entre sí, y se encuentran como muestra cada figura referenciados a los planos real e imaginario (a) y a los ejes definidos por el ángulo  $2\alpha_{+a}$ . Su resultante coincide con la suma de los parámetros parciales debidos a cada fase, según se muestran en las figuras 2.18 (c), 2.19 (c) y 2.20 (c).



(a):  
Representación fasorial de las potencias reactivas “ $D_{ui-a_R}$ ,  $D_{ui-b_R}$ ,  $D_{ui-c_R}$ ” correspondientes a las fases a, b, c.

(b):  
Representación fasorial de la suma las potencias de desequilibrio resultantes  $(\bar{D}_{ui-a_R} + \bar{D}_{ui-b_R} + \bar{D}_{ui-c_R})$  proyectadas sobre el plano de  $2\alpha_{+a}$ .

Figura nº 2.21: Representación fasorial de la potencia  $\bar{D}_{ui_R}$  y de los parámetros de desequilibrio “C, D” debidos a las potencias reactivas.

De las expresiones descritas para los parámetros de desequilibrio debidos a las componentes resistivas “A, B” y a las componentes reactivas de las cargas “C, D”, (2.58) y (2.59) respectivamente, se concluye que:

- Para cargas en triángulo transformada en estrella, con tensiones simples equilibradas, según lo expuesto en el punto 2.5, se demuestra que la potencia de desequilibrio producida por los elementos resistivos de la carga  $P'_z$  y  $Q''_z$ , así como por los elementos reactivos (inductivos y/o capacitivos de la carga)  $P''_z$  y  $Q'_z$ , están en fase y tienen el mismo valor en módulo y ángulo.

Así las componentes de la expresión (2.58) correspondiente a la parte real e imaginaria de las potencias  $P'_z$  y  $Q''_z$  tendrán el mismo valor:

$$\begin{aligned} \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P'_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] &= j \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q''_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] \\ \left[ \sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P'_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] &= j \cdot \left[ \sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q''_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] \end{aligned} \quad (2.62)$$

de igual modo que las componentes de la expresión (2.59) correspondiente a las partes real e imaginaria de las potencias  $P''_z$  y  $Q'_z$ :

$$\begin{aligned} \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P''_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] &= j \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q'_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] \\ \left[ \sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P''_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] &= j \cdot \left[ \sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q'_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] \end{aligned} \quad (2.63)$$

Por esta razón, los parámetros de desequilibrio según las expresiones (2.58) y (2.59) pueden ser formulados como sigue:

$$\begin{aligned} A &= 2 \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P'_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] = 2 \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q''_z \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] \\ B &= 2 \cdot \left[ \sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P'_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] = 2 \cdot \left[ \sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q''_z \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] \end{aligned} \quad (2.64)$$

$$\begin{aligned}
 D &= 2 \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P_Z'' \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] = 2 \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q_Z' \cdot \sin 2\alpha_{+z} \right] \\
 C &= 2 \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} P_Z'' \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right] = 2 \cdot \left[ -\sqrt{2} \cdot \sum_{z=a,b,c} Q_Z' \cdot \cos 2\alpha_{+z} \right]
 \end{aligned} \tag{2.65}$$

- Para cargas en triángulo con tensiones compuestas equilibradas, las potencias ( $Q_Z'$ ) correspondientes a la componente imaginaria de ( $\bar{S}_A$ ) y la potencia ( $P_Z''$ ) correspondiente a la componente real de ( $\bar{S}_R$ ) tienen valor nulo según (2.55) y (2.56); dado que las intensidades que las caracterizan ( $\bar{I}_A$ ) e ( $\bar{I}_R$ ) están desfasadas entre sí  $\pm 90^\circ$ .

### 2.5.3. Formulación del Fasor Potencia de Desequilibrio debida a las Intensidades, $\bar{D}_{ui}$

Partiendo de los conceptos expresados en los puntos anteriores; en este punto se expone una nueva expresión de la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ ), en un sistema eléctrico alimentado con tensiones equilibradas, la cual es concordante con el “Fasor Potencia total de Desequilibrio ( $\bar{A}_U$ )” definido en la Teoría Unificada de las Potencias UPM (Unified Power Measurement) según se expone en la expresión (2.5).

Esta nueva expresión está basada en los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” obtenidos mediante la potencia instantánea  $p(t)$ , según (2.58) y (2.59); que corresponden a las potencias aparentes debidas a los elementos resistivos ( $\bar{S}_A$ ) y a las potencias aparentes debidas a los elementos reactivos de las cargas ( $\bar{S}_R$ ), determinadas en función de las tensiones de secuencia positiva; que para el caso de tensiones equilibradas coinciden con las tensiones de fase, y con las corrientes activas y reactivas determinadas según (2.50).



Los parámetros correspondientes a la potencia aparente debidas a los elementos resistivos de la carga ( $\overline{S}_A$ ), “A, B” expresados en el dominio fasorial quedan representados en un plano definido por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ), (según se muestra en la figura n°: 2.22); donde el parámetro A representa la componente real y el parámetro B la componente imaginaria de la potencia activa de desequilibrio; siendo su expresión fasorial:

$$\overline{D}_{ui_A} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b} \quad (2.66)$$

que expresada en valor absoluto será:

$$D_{ui_A} = \sqrt{A^2 + B^2} \quad (2.67)$$

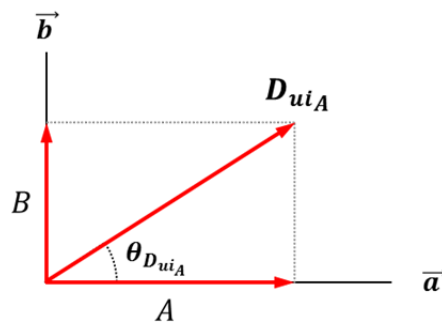


Figura n° 2.22: Representación en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  de la potencia de desequilibrio debido a las cargas resistivas  $D_{ui_A}$

La posición del fasor resultante de la potencia de desequilibrio debida a los elementos resistivos de las cargas ( $\overline{D}_{ui_A}$ ) mostrado en la figuras n° 14 a n° 17, tiene como proyección sobre los ejes definidos por los versores ( $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ ) los parámetros de desequilibrio “A, B”, los cuales son ortogonales entre sí, según se muestra en la siguiente figura 2.23 (a).

Así mismo, en la figura 2.23 (b) se muestran estos representados en función de la expresión (2.58) respecto del ángulo de la tensión de secuencia positiva ( $2\alpha_{+a}$ ), donde se puede observar que la potencia total de desequilibrio activa ( $\overline{D}_{ui_A}$ ) no varía.

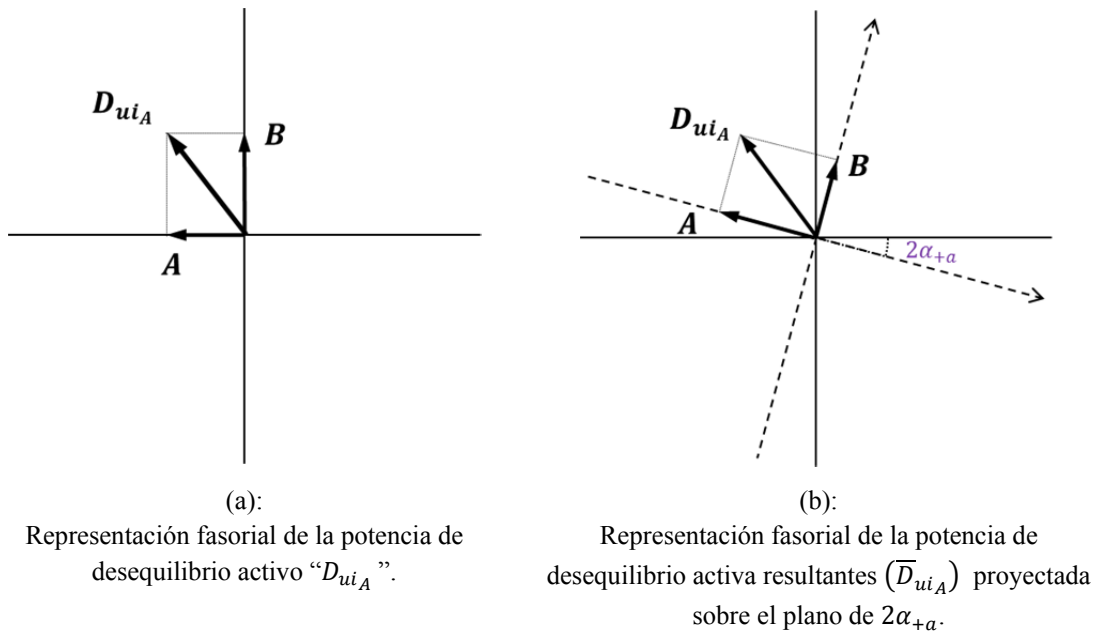


Figura nº 2.23: Representación de la potencia de desequilibrio debido a las cargas activas  $D_{ui_A}$

Los parámetros correspondientes a la potencia aparente debidas a los elementos reactivos de la carga ( $\overline{S}_R$ ), “ $C$ ,  $D$ ” expresados en el dominio fasorial quedan representados en un plano definido por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ ) según se muestra en la Figura nº: 2.24, donde el parámetro “ $C$ ” representa la componente real y el parámetro “ $D$ ” la componente imaginaria de la potencia reactiva de desequilibrio, siendo su expresión fasorial:

$$\overline{D}_{ui_R} = D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \quad (2.68)$$

que expresada en valor absoluto será:

$$D_{ui_R} = \sqrt{D^2 + C^2} \quad (2.69)$$

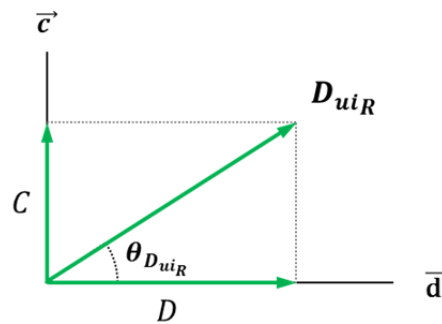


Figura nº 2.24: Representación en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$  de la potencia de desequilibrio debido a las cargas reactivas  $D_{ui_R}$

La posición del fasor resultante de la potencia de desequilibrio debida a las intensidades reactivas ( $\overline{D}_{ui_R}$ ) mostrado en la figuras n° 18 a n° 21, tiene como proyección sobre los ejes definidos por los versores ( $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ ), los parámetros de desequilibrio “ $C$ ,  $D$ ”, los cuales son ortogonales entre sí, según se muestra en la figura 2.25 (a).

Así mismo, en la figura 2.25 (b) se muestran representados en función de la expresión (2.59) respecto del ángulo de la tensión de secuencia positiva ( $2\alpha_{+a}$ ), donde se puede observar que la potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_{ui_R}$ ) no varía.

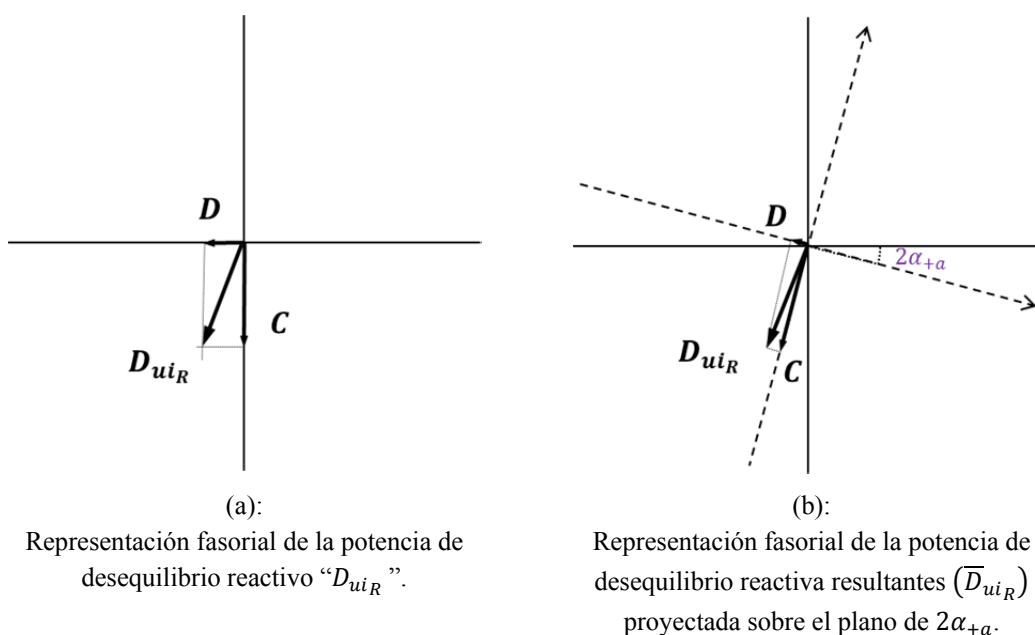


Figura n° 2.25: Representación de la potencia de desequilibrio debido a las cargas reactivas  $D_{ui_R}$

Las potencias resultantes del desequilibrio debido a los elementos resistivos  $D_{ui_A}$  y reactivos  $D_{ui_R}$  de las cargas representan fenómenos de desequilibrio diferentes causados respectivamente por las corrientes activas y reactivas.

El fasor potencia total de desequilibrio debido a las intensidades  $\overline{D}_{ui}$ , queda a su vez definido en un plano formado por dos versores ortogonales entre sí,  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  que caracterizan la potencia de desequilibrio ocasionada por las potencias aparentes debida a los elementos resistivos  $D_{ui_A}$  y a los reactivos de la carga  $D_{ui_R}$ , siendo su expresión fasorial:

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui} &= D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \vec{p} + \sqrt{D^2 + C^2} \cdot \vec{q}\end{aligned}\quad (2.70)$$

la cual expresada en módulo será:

$$\begin{aligned}D_{ui} &= \sqrt{D_{ui_A}^2 + D_{ui_R}^2} = \sqrt{(A^2 + B^2) + (D^2 + C^2)} \\ \theta_{D_{ui}} &= \text{atan}\left(\frac{D_{ui_R}}{D_{ui_A}}\right) = \text{atan}\left(\frac{\sqrt{D^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)\end{aligned}\quad (2.71)$$

Su presentación gráfica en el plano definido por  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  será:

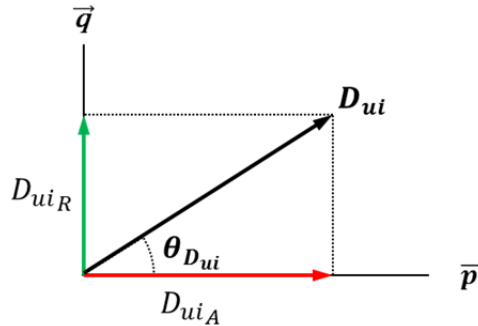


Figura n° 2.26: Representación en el plano definido por  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$  de la potencia de desequilibrio debida a las cargas  $D_{ui}$

Los valores de  $D_{ui_A}$  y  $D_{ui_R}$  no son conservativos, pero los parámetros de desequilibrio que los caracterizan “ $A, B, C, D$ ” sí lo son, por lo que estos pueden sumarse individualmente en todos los elementos que concurren a un nudo o línea verificando el principio de conservación de la energía y permitiendo determinar los flujos de potencia de desequilibrio en cualquier punto de la red así como los debidos a las pérdidas de esta sin necesidad de calcular un circuito equivalente en el punto de estudio.

En conclusión, bajo la presente condición de cargas lineales desequilibradas alimentadas por tensiones sinusoidales equilibradas  $\bar{D}_{ui}$ , coincide con el módulo de (2.1) y con el “Fasor Potencia Total de Desequilibrio  $\bar{A}_u$ ” (2.5), los cuales se vuelven a mostrará continuación:

$$\begin{aligned}D_U = A_U = D_{ui} &= \sqrt{S_1^2 - S_+^2} = 3 \cdot \sqrt{V_+^2 \cdot (I^2 + I_0^2)} \\ \bar{A}_U = \bar{D}_{ui} &= \sqrt{2} \cdot (|P_a + a^2 \cdot P_b + a \cdot P_c| \cdot \vec{p} \mp |Q_a + a^2 \cdot Q_b + a \cdot Q_c| \cdot \vec{q})\end{aligned}$$

## 2.6. APLICACIÓN A VARIAS CARGAS DE LOS PARÁMETROS DE DESEQUILIBRIO “A, B, C, D” EN UN SISTEMA A 3-HILOS EN TRIÁNGULO.

Se estudiará el comportamiento de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” en dos cargas desequilibradas en triángulo conectadas en paralelo a un mismo nudo fuente o punto común de conexión (PCC).

Para ello, sea un sistema formado por dos cargas en triángulo conectadas en paralelo, alimentadas por un nudo fuente de tensiones compuestas equilibradas, según muestra la Figura nº 28.

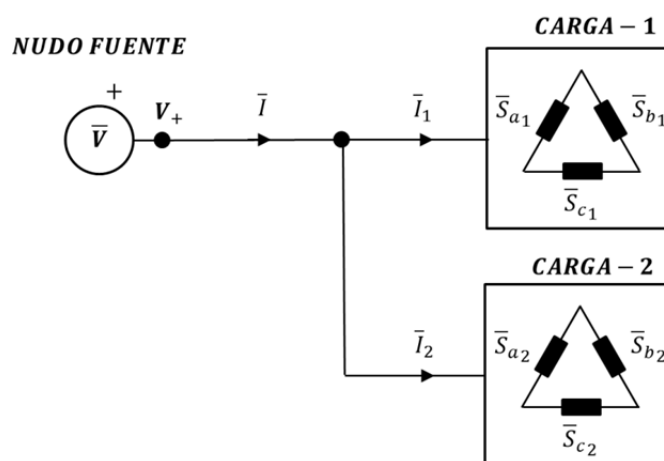


Figura nº 2.27: Esquema topológico de un circuito con dos cargas en paralelo conectadas en triángulo

Las tensiones a la cual están sometidas ambas cargas son las mismas que el nudo fuente y las intensidades vendrán dadas por la suma de las intensidades de cada una de las cargas, es decir:  $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_1} + \bar{I}_{Z_2}$ .

La naturaleza de ambas cargas está caracterizada por sus correspondientes potencias aparentes de fase, que definen las corrientes de fase y línea según se muestra en la Figura nº 2.28.

Tal y como se ha comentado en el apartado anterior, la potencia de desequilibrio del sistema formado por ambas cargas puede ser determinado mediante la suma aritmética de los parámetros de desequilibrio “A, B, C y D” definidos en el punto 2.4.2, extendiendo las expresiones para un caso general de “n” cargas.

No es necesario determinar una carga equivalente, suma en paralelo de las “ $n$ ” cargas, ya que el resultado de los parámetros de desequilibrio de la carga equivalente son los mismos que la suma de las cargas individuales.

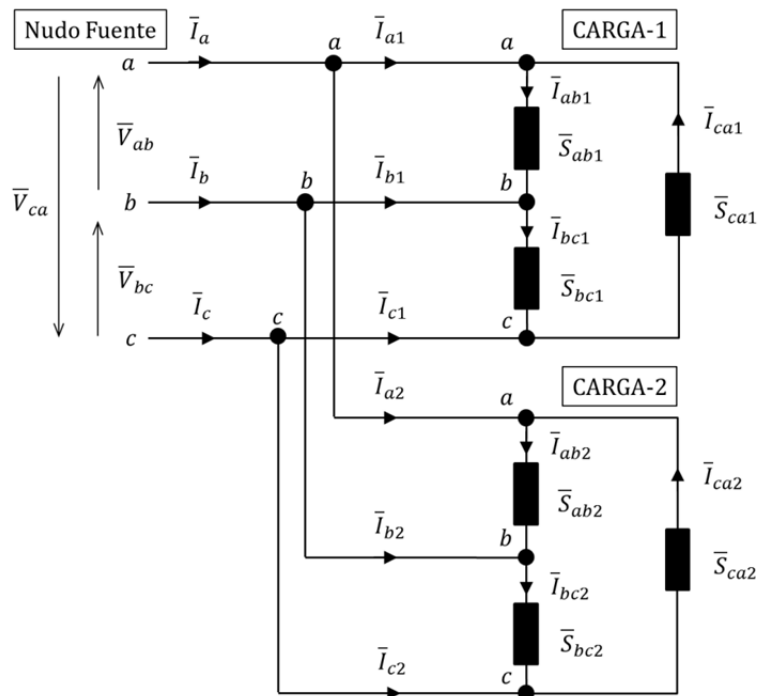


Figura nº 2.28: Dos cargas en paralelo, conexión triángulo

Los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” verifican el principio de conservación de la energía.

Para efectuar el estudio se conocen como variables de inicio las potencias aparentes de fase características de cada carga y la tensión a la que se encuentran sometidas.

Cada carga es analizada individualmente, determinando la tensión de secuencia positiva y su correspondiente intensidad activa y reactiva debida a la de naturaleza de las cargas (resistencias y/o reactancias) según la expresión (2.50) y la figura 2.29.

En el capítulo 4, se mostrarán los cálculos numéricos completos para dos cargas desequilibradas conectadas en paralelo sin considerar la red de alimentación.

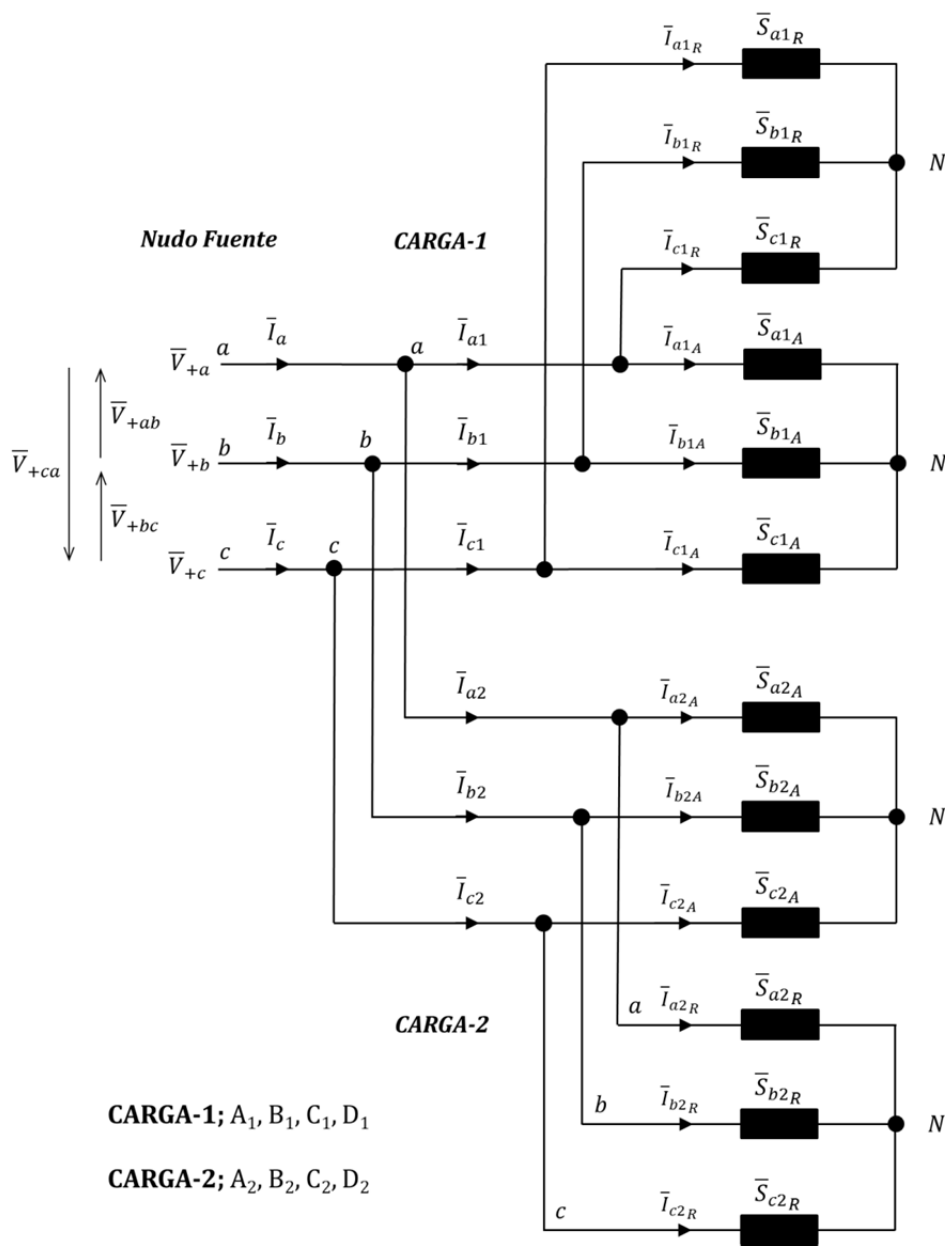


Figura n° 2.29: Circuito equivalente visto desde el exterior de dos cargas en paralelo con sus componentes activas y reactivas.

**a) Potencia de desequilibrio debida a las intensidades;  $\bar{D}_{ui}$**

La potencia de desequilibrio debida a una carga ( $\bar{D}_{ui}$ ) es, según la expresión (2.70):

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q} = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \vec{p} + \sqrt{D^2 + C^2} \cdot \vec{p}$$

donde los parámetros “A, B, C, D” para dos cargas en paralelo corresponden a la suma aritmética de cada carga:

$$\begin{aligned} A &= A_1 + A_2 \\ B &= B_1 + B_2 \\ C &= C_1 + C_2 \\ D &= D_1 + D_2 \end{aligned}$$

y extendido de forma general a “ $n$ ” cargas conectadas en paralelo se tendrá la correspondiente expresión de los parámetros de desequilibrio:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{n=1}^{\infty} A_n \\ B &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \\ C &= \sum_{n=1}^{\infty} C_n \\ D &= \sum_{n=1}^{\infty} D_n \end{aligned} \tag{2.72}$$

Las potencias de desequilibrio activas y reactivas ( $D_{ui_A}$  y  $D_{ui_R}$ ) definidas en el plano ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ); y expresado de forma general para “ $n$ ” cargas será la misma que la ya expresada en (2.67) y (2.69):

$$\begin{aligned} D_{ui_A} &= \sqrt{A^2 + B^2} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} A_n\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} B_n\right)^2} \\ D_{ui_R} &= \sqrt{D^2 + C^2} = \sqrt{\left(\sum_{n=1}^{\infty} D_n\right)^2 + \left(\sum_{n=1}^{\infty} C_n\right)^2} \end{aligned} \tag{2.73}$$

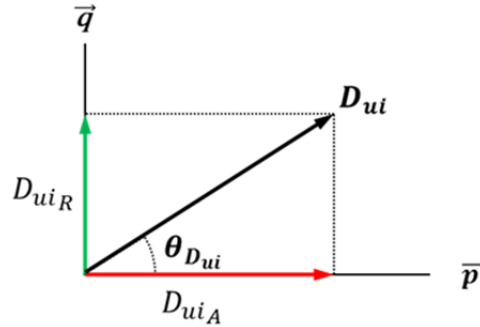
La suma de los valores individuales de cada carga de ( $D_{ui_A}$  y  $D_{ui_R}$ ) no se corresponde al valor total.

$$\begin{aligned} D_{ui_A} &\neq D_{ui_{A-1}} + D_{ui_{A-2}} \neq \sum D_{ui_{A-n}} \\ D_{ui_R} &\neq D_{ui_{R-1}} + D_{ui_{R-2}} \neq \sum D_{ui_{R-n}} \end{aligned} \tag{2.74}$$

La expresión para la potencia de desequilibrio debida a “ $n$ ” cargas en paralelo no varía de la expresada en (2.70) y (2.71), la cual se repite a continuación:

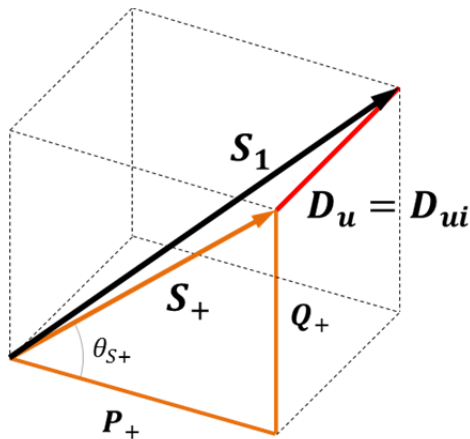


$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui} &= D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \vec{p} + \sqrt{D^2 + C^2} \cdot \vec{p} \\ D_{ui} &= \sqrt{D_{uiA}^2 + D_{uiR}^2} = \sqrt{(A^2 + B^2) + (D^2 + C^2)} \\ \theta_{D_{ui}} &= \text{atan}\left(\frac{D_{uiR}}{D_{uiA}}\right) = \text{atan}\left(\frac{\sqrt{D^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}}\right)\end{aligned}$$



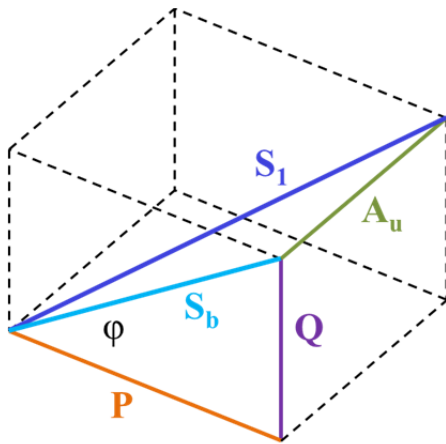
Al igual que en el apartado anterior, puede comprobarse que el módulo del cálculo de  $\bar{D}_{ui}$  mediante el uso de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” verifica la equivalencia de la carga en triángulo ( $\Delta$ ) – estrella (Y) de la potencia aparente total  $S_1$  ;  $\left(S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_{ui}^2}\right)$ .

La potencia de desequilibrio debida a las intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ ) puede ser representada gráficamente en un tetraedro, donde en cada lado se muestran que las potencias activas de secuencia positiva ( $P_+$ ), reactiva de secuencia positiva ( $Q_+$ ) y de desequilibrio ( $D_{ui}$ ) son ortogonales entre sí:



$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_{ui}^2} = \sqrt{(P_+^2 + Q_+^2) + D_{ui}^2}$$

Esta representación es coincidente para tensiones equilibradas con la expuesta por la UPM (Unified Power Measurement) [54] mostrada por la figura nº 1.7 .



$$S_1 = \sqrt{S_b^2 + A_u^2} = \sqrt{(P^2 + Q^2) + A_u^2}$$

## 2.7. CONCLUSIONES

A continuación se enumeran las conclusiones alcanzadas en el presente capítulo:

- Partiendo de la definición de la potencia total instantánea  $p(t)$ , se han determinado los parámetros de desequilibrio “A, B” debidos a las componentes resistivas de las cargas y “C, D” debidos a las componentes reactivas inductivas y/o capacitivas de las cargas. Estos parámetros se caracterizan por poder ser sumados directamente para cada tramo de la red eléctrica, permitiendo cuantificar la totalidad de los fenómenos de desequilibrio del sistema en cualquier punto de esta sin necesidad de determinar circuitos equivalentes para el punto de estudio.
- Los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” determinados para tensiones equilibradas ( $\bar{V}_{+z} = \bar{V}_z$ ) son válidos para el cálculo de las potencias de desequilibrio para tensiones desequilibradas.
- Partiendo de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” se ha formulado una nueva expresión de la Potencia compleja de desequilibrio debida a las intensidades “ $\bar{D}_{ui}$ ” para tensiones equilibradas, la cual es equivalente con el “Fasor Potencia Total de Desequilibrio,  $\bar{A}_u$ ” expresado en la UPM (Unified Power Measurement) [59] de Vicente León Martínez, Joaquín Montañana

Romeu y José Giner, miembros del departamento de Ingeniería Eléctrica de la Universitat Politècnica de València (UPV).

- Se constata que la transformación triángulo – estrella mediante el uso del teorema de Kennelly (Rosen) necesario para el análisis de las redes eléctricas no puede emplearse de forma directa ya que no es equivalente a efectos de la determinación de las potencias de desequilibrio.
- Se deduce un circuito equivalente de transformación que incluye correctamente los fenómenos del desequilibrio.



# Capítulo: 3

**FORMULACIÓN DE LA POTENCIA  
DE DESEQUILIBRIO PARA REDES  
ELÉCTRICAS DESEQUILIBRADAS  
SINUSOIDALES ALIMENTADAS CON  
TENSIONES DESEQUILIBRADAS**



### **Capítulo 3:**

## **FORMULACIÓN DE LA POTENCIA DE DESEQUILIBRIO PARA REDES ELÉCTRICAS DESEQUILIBRADAS SINUSOIDALES ALIMENTADAS CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS**

### **3.1. INTRODUCCIÓN**

En el presente capítulo se muestra como, partiendo de la formulación de la Potencia compleja de Desequilibrio debida a las intensidades " $\overline{D}_{ui}$ " definida en el "Capítulo 2" para redes eléctricas desequilibradas sinusoidales alimentadas con tensiones equilibradas, se identifican las componentes de la potencia total aparente " $S_I$ " según (2.1), (2.3) y (2.4), correspondientes a la potencia de secuencia positiva " $S_+$ " y a la potencia total de desequilibrio " $D_{IU}$ "; separando de ésta las partes debidas a las potencias de desequilibrio causada por las intensidades " $D_{ui}$ " y a las causadas por las tensiones " $D_{uv}$ ".

Se muestra como la Potencia de desequilibrio debida a las intensidades " $D_{ui}$ " expresada mediante el uso de los parámetros de desequilibrio " $A, B, C, D$ " definidos en el "Capítulo 2", es válida tanto para tensiones equilibradas como para tensiones desequilibradas. A partir de lo cual, se formulan las expresiones fasoriales correspondientes a las potencias de desequilibrio debidas a las tensiones " $\overline{D}_{uv}$ " y a la potencia total de desequilibrio " $\overline{D}_u$ ". Ambas expresiones fasoriales corresponden a una **aportación novedosa**, ya que ni la norma IEEE Std. 1459-2010 [42], ni la Teoría Unificada de las Potencias, UPM (Unified Power Measurement) [53] las incorporan en sus publicaciones.

En ambos casos, a nivel de valores absolutos, se verifica la expresión (2.1) del módulo de la potencia total de desequilibrio " $S_{IU}$ ".

Se expondrán las características y el uso de las expresiones indicadas anteriormente para sistemas alimentados con tensiones desequilibradas a 3 hilos, tanto para cargas

individuales como para varias cargas, con y sin línea de alimentación, mostrándose como la nueva formulación definida para determinar las potencias de desequilibrio de tensiones y total, basada en la utilización de “ $D_{ui}$ ” para tensiones equilibradas, es válida también para tensiones desequilibradas.

Se comprobará que las potencias de desequilibrio formuladas mediante la utilización de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” verifican la potencia total aparente del sistema “ $S_I$ ”.

### 3.2. ANTECEDENTES

Tal como se describió en el “Capítulo 2”, el fenómeno de la potencia de desequilibrio constituye una ineficiencia del sistema que se define como una potencia aparente expresada en VA. El valor en módulo de la potencia total de desequilibrio está determinado por la expresión (2.1), la cual se vuelve a mostrar a continuación:

$$S_{1U} = D_{1U} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$$

donde:

- $S_{1U}, D_{1U}$  corresponde al valor en módulo de la potencia total aparente de desequilibrio de un sistema trifásico e incluye de forma conjunta la totalidad de efectos causantes del desequilibrio debidos a cargas lineales. Incorpora en el caso presente de intensidades y tensiones desequilibradas, los efectos debidos tanto a las corrientes  $D_{ui}$  (2.6), como a las tensiones  $D_{uv}$  (3.8); siendo la potencia total de desequilibrio  $D_u = \sqrt{D_{ui}^2 + D_{uv}^2}$  (3.4).
- $S_+$  corresponde al valor en módulo de la potencia total aparente en secuencia positiva según (2.2), debida a las secuencias positivas de la tensión e intensidad.

$$S_+ = 3 \cdot V_+ \cdot I_+$$

- $S_I$  corresponde al valor en módulo de la potencia total aparente para un sistema desequilibrado formulada en valores de fase por Buchholz [8] en (2.3) y que coincide con la potencia total aparente formulada en valores de secuencia en



(2.4) según la Teoría Unificada de las Potencias UPM (Unified Power Measurement) [53].

### 3.3. POTENCIAS DE DESEQUILIBRIO, EN MÓDULO Y FASOR.

Para la determinación de las expresiones en módulo de las potencias de desequilibrio se utilizará la expresión formulada por UPM empleando valores de secuencia, de forma análoga a lo expuesto en el “Capítulo 2”, así:

Sea la potencia total  $S_l$  expresada en variables de secuencia según (2.3) para 3 hilos (3H) y para 4 hilos (4H):

$$\begin{aligned}
 S_{1_{3H}} &= 3 \cdot \sqrt{(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2 + V_{0ab}^2) \cdot (I_{+ab}^2 + I_{-ab}^2 + I_{0ab}^2)} \\
 &= \sqrt{\sum V_{+,-,0ab}^2 \cdot \sum I_{+,-,0ab}^2} \\
 S_{1_{4H}} &= 3 \cdot \sqrt{(V_{+a}^2 + V_{-a}^2 + V_{0a}^2) \cdot (I_{+a}^2 + I_{-a}^2 + I_{0a}^2)} \\
 &= \sqrt{\sum V_{+,-,0a}^2 \cdot \sum I_{+,-,0a}^2}
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

la cual, para no dificultar su notación, se escribirá de forma genérica como:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sqrt{\frac{3^2 \cdot V_+^2 \cdot I_+^2}{s_+^2} + \frac{3^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_-^2 + I_0^2) + 3^2 \cdot (V_-^2 + V_0^2) \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2)}{D_U^2}} \\
 &= \sqrt{S_+^2 + D_U^2}
 \end{aligned} \tag{3.2}$$

Partiendo de la formulación general, se agruparán términos según expresiones ya mostradas en (3.2) y en (2.7); quedando como sigue:

$$\begin{aligned}
 S_1 &= \sqrt{\frac{3^2 \cdot V_+^2 \cdot I_+^2}{s_+^2} + \frac{3^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_-^2 + I_0^2)}{D_{ui}^2(2.7)} + \frac{3^2 \cdot (V_-^2 + V_0^2) \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2)}{D_{uv}^2}} \\
 &= \sqrt{S_+^2 + (D_{ui}^2 + D_{uv}^2)}
 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Donde la parte que corresponde a la potencia total de desequilibrio ( $D_U$ ) puede ser expresada como suma de dos componentes diferenciadas, la debida al desequilibrio de

las intensidades ( $D_{ui}$ ) y la debida al desequilibrio de las tensiones ( $D_{uv}$ ). Así su expresión será la siguiente:

$$D_U = \sqrt{D_{ui}^2 + D_{uv}^2} \quad (3.4)$$

siendo:

- $D_{ui}$ : la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las intensidades, definida en (2.7):

$$D_{ui} = \sqrt{3^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_+^2 + I_0^2)}$$

- $D_{uv}$ : la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones:

$$D_{uv} = \sqrt{3^2 \cdot (V_-^2 + V_0^2) \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2)} \quad (3.5)$$

Se incorporan a las expresiones los grados de desequilibrio ( $\delta_-$ ) (3.6) y asimetría ( $\delta_0$ ) (3.7) como las relaciones en módulo entre las tensiones de secuencia inversa y homopolar respecto de la tensión de secuencia directa respectivamente, en concordancia con los factores de desequilibrio (UF) [75], [43], [11]. Ambos grados de desequilibrio muestran las relaciones de ineficiencia entre las tensiones de secuencia; así:

$$\delta_- = \frac{V_-}{V_+} \quad (3.6)$$

$$\delta_0 = \frac{V_0}{V_+} \quad (3.7)$$

La expresión (3.4) puede ser formulada aplicando los grados de desequilibrio y asimetría expuestos anteriormente; así expresando (3.5) de forma separada se tendrá:

$$\begin{aligned} D_U &= \sqrt{D_{ui}^2 + \underbrace{3^2 \cdot V_-^2 \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2) + 3^2 \cdot V_0^2 \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2)}_{D_{uv}^2}} \\ &= \sqrt{D_{ui}^2 + 3^2 \cdot \delta_-^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2) + 3^2 \cdot \delta_0^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2)} \end{aligned} \quad (3.8)$$

y considerando la expresión de la Potencia de Desequilibrio debida a las intensidades ( $D_{ui}$ ) según (2.7), la potencia total de secuencia directa ( $S_+$ ) según (2.2) y los términos

debidos los grados de desequilibrio (3.6) y asimetría (3.7) de las tensiones; la expresión de la Potencia Total de Desequilibrio ( $D_u$ ) pueden ser agrupada como sigue:

$$\begin{aligned}
 D_U &= \sqrt{D_{ui}^2 + \delta_-^2 \cdot (S_+^2 + D_{ui}^2) + \delta_0^2 \cdot (S_+^2 + D_{ui}^2)} \\
 &= \sqrt{D_{ui}^2 + \underbrace{(\delta_-^2 + \delta_0^2) \cdot (S_+^2 + D_{ui}^2)}_{D_{uv}^2}} \\
 &= \sqrt{D_{ui}^2 + D_{uv}^2} \\
 &= \sqrt{S_1^2 - S_+^2}
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

donde, como puede comprobarse, la potencia total de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones ( $D_{uv}$ ), puede ser expresada como:

$$D_{uv} = \sqrt{(\delta_-^2 + \delta_0^2) \cdot (S_+^2 + D_{ui}^2)} \tag{3.10}$$

A continuación se analizan de forma separada los términos correspondientes a las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ;  $D_{uv}$ ;  $D_u$ ) mostrando sus expresiones tanto en módulo como de forma fasorial.

### 3.3.1. Potencia de desequilibrio debida a las intensidades; $D_{ui}$ ; $\bar{D}_{ui}$

La Potencia de desequilibrio, debida a las intensidades dada por la naturaleza resistiva y/o reactiva de las cargas, formulada en su valor en módulo según la expresión (2.8), queda determinada como la relación de la tensión equilibrada secuencia positiva ( $V_{+a}$ ) con las intensidades de línea o fase de secuencia inversa y homopolar ( $I_{-a}$ ;  $I_{0a}$  ó  $I_{-ab}$ ;  $I_{0ab}$ ), siendo su formulación:

$$D_{ui} = \sqrt{3^2 \cdot V_+^2 \cdot (I_-^2 + I_0^2)} = 3 \cdot V_+ \cdot \sqrt{I_-^2 + I_0^2}$$

La expresión fasorial se define en un plano delimitado por dos versores ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ) que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las potencias de desequilibrio producidas por los elementos resistivos  $D_{uiA}$  y reactivos de la carga  $D_{uiR}$ ; siendo esta según (2.70):

$$\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$$

La representación gráfica de  $\bar{D}_{ui}$  se muestra en la figura siguiente:

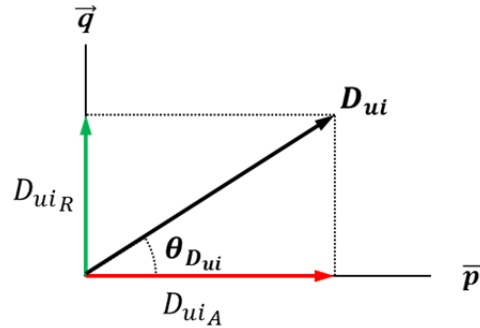


Figura n° 3.1: Representación gráfica de la potencia de desequilibrio debida a corrientes  $D_{ui}$  en el plano formado por los versores  $\vec{p}$  y  $\vec{q}$

Su valor se determina en función de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” descritos en el “Capítulo 2”, según las expresiones (2.58) y (2.59), siendo la formulación fasorial en función de los parámetros que la definen (2.70):

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ui} &= D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \vec{p} + \sqrt{D^2 + C^2} \cdot \vec{q} \end{aligned}$$

y expresado en módulo y ángulo según (2.71):

$$\begin{aligned} D_{ui} &= D_{ui_A}^2 + D_{ui_R}^2 = \sqrt{(A^2 + B^2) + (D^2 + C^2)} \\ \theta_{D_{ui}} &= \text{atan} \left( \frac{D_{ui_A}}{D_{ui_R}} \right) = \text{atan} \left( \frac{\sqrt{D^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \end{aligned}$$

Estas expresiones son válidas tanto para tensiones simples como compuestas, equilibradas o desequilibradas; ya que en el procedimiento de cálculo expuesto en el “Capítulo 2” se emplean las tensiones equilibradas de secuencia directa.

En el caso de sistemas alimentados con tensiones simples o compuestas equilibradas, éstas coinciden con el valor de la tensión de secuencia directa, ya que ( $\bar{V}_Z = \bar{V}_{+Z}$ ); pero no en el caso sistemas alimentados con tensiones desequilibradas, donde ( $\bar{V}_Z \neq \bar{V}_{+Z}$ ). Por esta razón, los valores de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D”, así como los de las potencias aparentes de desequilibrio debidas a las intensidades activas causadas por las componentes resistivas de las cargas ( $D_{ui_A}$ ), y las debidas a las intensidades

reactivas causadas por las componentes reactivas inductivas y/o capacitivas de las cargas ( $D_{uiR}$ ), no coinciden para sistemas alimentados con tensiones equilibradas o desequilibradas.

### 3.3.2. Potencia de desequilibrio debida a las tensiones; $D_{uv}$ ; $\bar{D}_{uv}$

El valor en módulo de la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones, queda definida por las expresiones (3.5) y (3.10) como sigue:

$$D_{uv} = \sqrt{3^2 \cdot (V_-^2 + V_0^2) \cdot (I_+^2 + I_-^2 + I_0^2)} = \sqrt{(\delta_-^2 + \delta_0^2) \cdot (S_+^2 + D_{ui}^2)}$$

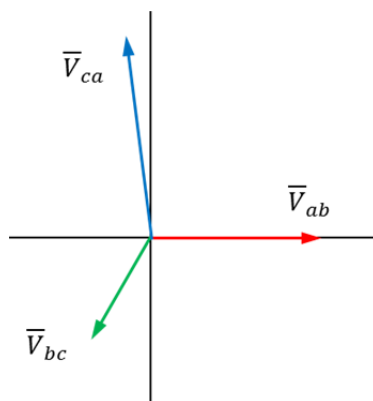


Figura 3.2: Representación gráfica de los fasores de tensión desequilibrada de las fases “a, b y c”

Su valor dependerá de la potencia de desequilibrio para tensiones equilibradas debida a las intensidades ( $D_{ui}$ ), de la potencia aparente de secuencia positiva  $S_+$ , y de los grados de desequilibrio ( $\delta_-$ ) y asimetría de las tensiones ( $\delta_0$ ).

En su expresión fasorial, se encuentra definida en un plano delimitado por los versores unitarios ortogonales entre sí ( $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ), que caracterizan las componentes de la potencia de desequilibrio de tensiones, activa ( $D_{uvA}$ ) y reactiva ( $D_{uvR}$ ) según la expresión:

$$\bar{D}_{uv} = D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \quad (3.11)$$

La cual, formulada en función de sus variables, según (3.10), será:

$$\begin{aligned}
 D_{uv_A} &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \sqrt{D_{ui_A}^2 + P_+^2} = \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \\
 D_{uv_R} &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \sqrt{D_{ui_R}^2 + Q_+^2} = \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \\
 D_{uv} &= \sqrt{D_{uv_A}^2 + D_{uv_R}^2} \\
 \theta_{D_{uv}} &= \text{atan} \left( \frac{D_{uv_R}}{D_{uv_A}} \right)
 \end{aligned} \tag{3.12}$$

donde

- Los parámetros de desequilibrio debidos a las componentes resistivas “A, B” y reactivas “C, D” de las cargas, se corresponden con las expresiones (2.58) y (2.59) respectivamente.
- Las potencias de secuencia directa activas ( $P_+$ ) y reactivas ( $Q_+$ ), responden a la expresión general:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+$$

y a la suma de las componentes reales ( $P'$ ,  $P''$ ) e imaginarias ( $Q'$ ,  $Q''$ ) de las potencias debidas a las intensidades activas (causadas por los elementos resistivos de las cargas) ( $\bar{S}_A$ ) y debidas a las intensidades reactivas (causadas por los elementos reactivos de las cargas) ( $\bar{S}_R$ ) respectivamente, según lo expuesto en las expresiones (2.55), (2.56) y (2.57); que a continuación vuelven a mostrar :

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_A &= \sum_{Z=a,b,c} \bar{S}_{Z_A} = \sum_{Z=a,b,c} \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{Z_A}^* = \sum_{Z=a,b,c} P'_Z + j \cdot \sum_{Z=a,b,c} Q''_Z \\
 \bar{S}_R &= \sum_{Z=a,b,c} \bar{S}_{Z_R} = \sum_{Z=a,b,c} \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{Z_R}^* = \sum_{Z=a,b,c} P''_Z + j \cdot \sum_{Z=a,b,c} Q'_Z \\
 P_+ &= \sum_{Z=a,b,c} P'_Z + \sum_{Z=a,b,c} P''_Z \\
 Q_+ &= \sum_{Z=a,b,c} Q'_Z + \sum_{Z=a,b,c} Q''_Z
 \end{aligned}$$

La representación gráfica de la expresión fasorial (3.11) definida en el plano ( $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ ) corresponde a la figura nº 3.3:

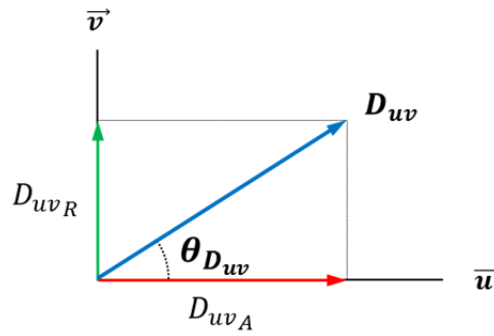


Figura nº 3.3: Representación gráfica de la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones  $D_{uv}$  en el plano formado por los versores  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$

### 3.3.3. Potencia total de desequilibrio; $D_u$ ; $\bar{D}_u$

Determina la potencia total de desequilibrio del sistema, que se corresponde en su valor en módulo con la potencia total de desequilibrio en sistemas lineales según la norma IEEE Std 1459-2010 [41] y la Teoría Unificada de las Potencias UPM (Unified Power Measurement) [59] según las expresiones (2.1) y (3.9); siendo definido por:

$$D_u = D_{1U} = S_{1U} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2} = \sqrt{D_{ui}^2 + D_{uv}^2}$$

El fasor potencia total de desequilibrio  $\bar{D}_u$  se encuentra definido por la relación entre los módulos de la potencia de desequilibrio debida a las intensidades ( $D_{ui}$ ) según (2.70) y al de las tensiones ( $D_{uv}$ ) según (3.12).

Expresado en el dominio fasorial, está delimitado por dos versores unitarios ( $\vec{p}_i$ ) y ( $\vec{q}_v$ ) ortogonales entre sí; quedando determinado mediante la expresión siguiente:

$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \vec{p}_i + D_{uv} \cdot \vec{q}_v \quad (3.13)$$

siendo su valor en módulo y ángulo expresado en función de (2.70) y (3.12):

$$\begin{aligned} D_u &= \sqrt{D_{ui}^2 + D_{uv}^2} \\ \theta_{D_u} &= \text{atan}\left(\frac{D_{uv}}{D_{ui}}\right) \end{aligned} \quad (3.14)$$

La representación gráfica de la expresión fasorial (3.13) definida en el plano ( $\vec{p}_i$  y  $\vec{q}_v$ ) correspondiente a la figura nº 3.4:

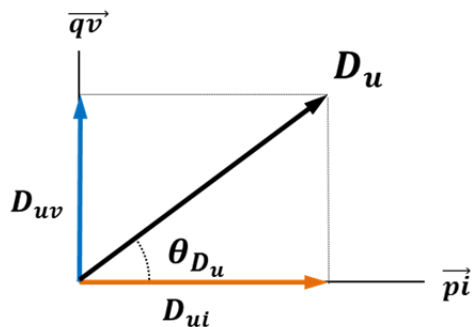


Figura n° 3.4: Representación gráfica de la potencia total de desequilibrio  $D_u$  en el plano formado por los versores  $\vec{p}_i$  y  $\vec{q}_v$

El cálculo de las potencias de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ;  $\bar{D}_{uv}$ ;  $\bar{D}_u$ ) mediante el uso de los parámetros de desequilibrio “A, B, C y D” verifica la equivalencia de la carga en triángulo - estrella (línea, generador o nudo fuente) de la potencia total aparentes  $S_1$ ; ( $S_1 = \sqrt{S_+^2 - D_u^2}$ ) según lo expuesto en el punto 2.4.

El conjunto de potencias que interviene en la determinación de las potencias de desequilibrio pueden ser representadas gráficamente en dos tetraedros, donde en sus lados se muestran las relaciones de ortogonalidad entre ellas, según se muestra a continuación:

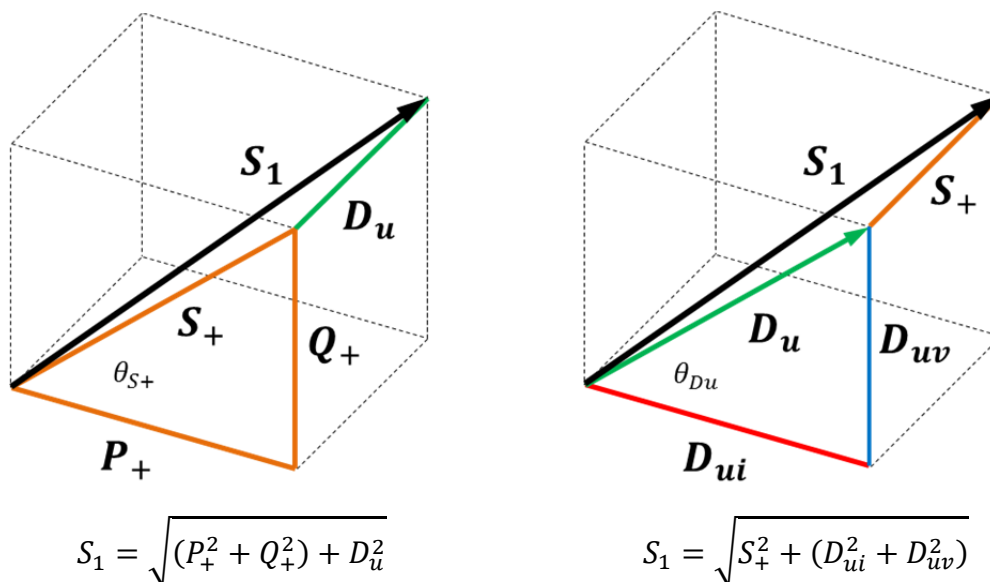


Figura n° 3.5: Representación gráfica de las potencias de secuencia positiva ( $S_+$ ,  $P_+$ ,  $Q_+$ ), de las potencias de desequilibrio ( $D_u$ ,  $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ) y de la potencia total de un sistema ( $S_1$ ).



### 3.4. ESTUDIO PARA UNA CARGA EN TRIÁNGULO

#### 3.4.1. Circuito equivalente de una carga conectada en triángulo

Sea una red trifásica a tres hilos que alimenta a una carga conectada en triángulo mediante un sistema de tensiones desequilibradas cualesquiera, representado mediante la figura nº 3.6.

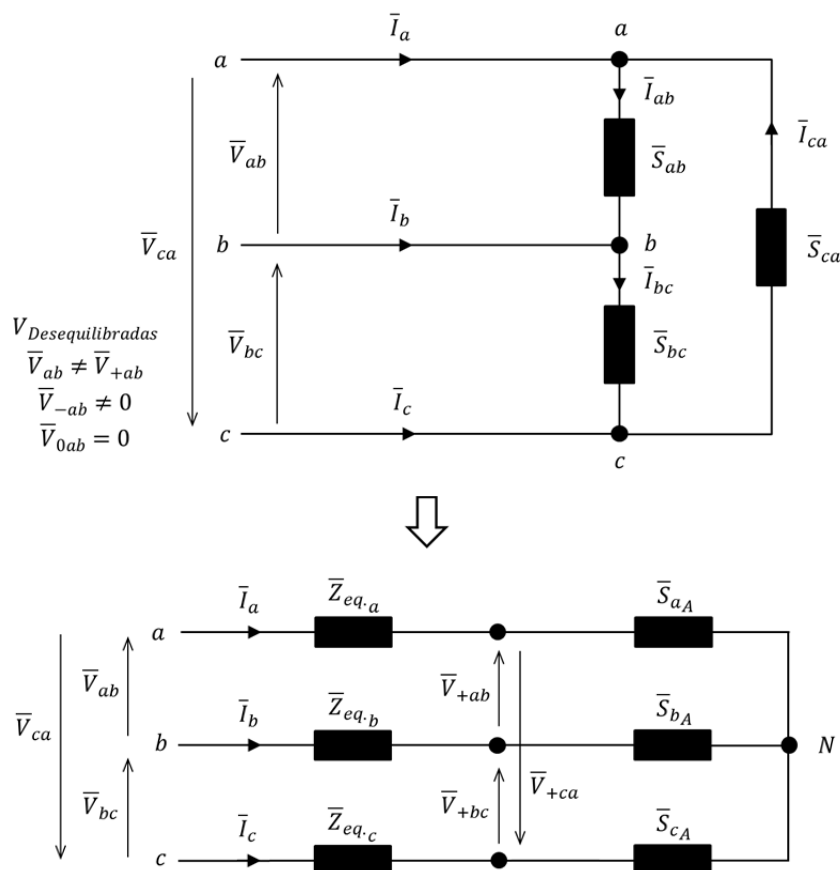


Figura nº 3.6: Carga en triángulo alimentada por un sistema de tensiones desequilibradas

Sí consideramos la carga conectada directamente a un nudo fuente, el circuito equivalente de transformación de triángulo a estrella de la carga desde el punto de vista de la potencia de desequilibrio será el mostrado en la figura nº 3.7, según lo expuesto en el punto 2.5.1.

Así pues, la tensión compuesta del nudo fuente será:

$$\begin{aligned}
 \bar{V}_Z &= \bar{V}_{Z_{12}} + \bar{V}_{Z_2} = \bar{V}_{+Z} + \bar{V}_{-Z}; \quad Z = ab, bc, ca \\
 \bar{V}_{Z_2} &= \bar{V}_{+Z} \\
 \bar{V}_{Z_{12}} &= \bar{V}_{-Z}
 \end{aligned}
 \tag{3.15}$$

La impedancia  $\bar{Z}_{eq}$  que caracteriza los efectos de la tensión de secuencia negativa de la carga en triángulo, está sometida a la caída de tensión ( $\bar{V}_{Z_{12}}$ ) y se corresponde con la tensión de secuencia negativa, según (3.15).

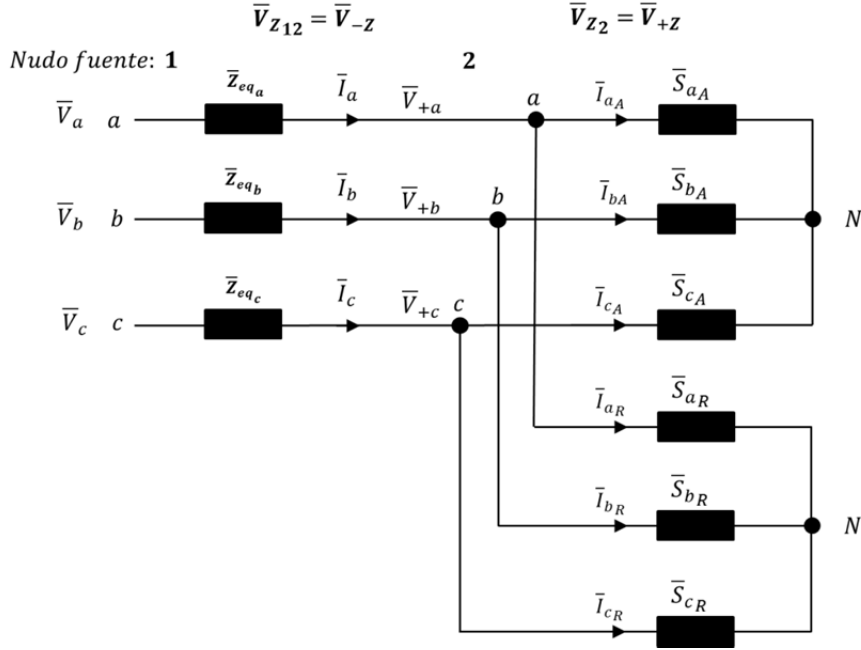


Figura nº 3.7: Carga equivalente al triángulo considerando los efectos de las secuencias + y -

La caída de tensión expresada en función de tensiones simples será:

$$\bar{V}_{Z_{12}} = \bar{V}_Z - \bar{V}_{Z_2} = \bar{V}_Z - \bar{V}_{+Z} = \bar{V}_{-Z} + \bar{V}_{0Z}; \quad Z = a, b, c \quad (3.16)$$

Para el estudio del desequilibrio para una carga descrito en el “Capítulo 2” se utilizan las tensiones equilibradas de secuencia positiva. Así para determinar la potencia de desequilibrio que la impedancia ( $\bar{Z}_{eq}$ ) aporta en la carga, consideramos la tensión de secuencia positiva de la caída de tensión producida entre los puntos 1 y 2 ( $\bar{V}_{Z_{12}}$ ) mediante la aplicación del Teorema de Stokvis, la cual tiene valor nulo según se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \bar{V}_{+a_{12}} &= \bar{V}_{a_{12}} + a \cdot \bar{V}_{a_{12}} + a^2 \cdot \bar{V}_{a_{12}} = V_{+a_{12}} \cdot e^{\alpha_{v+a_{12}} j} = 0 \\ \bar{V}_{+b_{12}} &= V_{+a_{12}} \cdot e^{\alpha_{v+a_{12}} + 120j} = 0 \\ \bar{V}_{+c_{12}} &= V_{+a_{12}} \cdot e^{\alpha_{v+a_{12}} - 120j} = 0 \end{aligned} \quad (3.17)$$

las potencias de desequilibrio debidas a las intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ ) según las expresiones (2.58) y (2.59), las debidas a las tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ) y total ( $\bar{D}_u$ ) según (3.11) y (3.13) respectivamente tendrán valor nulo, no aportando potencia de desequilibrio, con lo que se desprecian para el cálculo del desequilibrio del sistema:

$$\begin{aligned} A, B, C, D_{12} = 0 \quad \bar{D}_{ui_{12}} = 0 \\ \bar{D}_{uv_{12}} = 0 \\ \bar{D}_{u_{12}} = 0 \end{aligned} \quad (3.18)$$

Para que la transformación de la carga de triángulo a estrella sea efectiva a efectos de la determinación de las potencias de desequilibrio se ha de cumplir la condición expresada en (2.37):

$$V_{0a} = \sqrt{\frac{I_{0ab}^2 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2)}{(I_{+a}^2 + I_{-a}^2)}} = I_{0ab} \cdot \sqrt{\frac{(V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2)}{(I_{+a}^2 + I_{-a}^2)}}$$

La siguiente figura representa una carga equivalente al triángulo vista desde la línea de alimentación a esta, a efectos del análisis de las potencias de desequilibrio, donde las intensidades de línea son expresadas en sus componentes activas y reactivas de forma separada;  $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ , y las tensiones alimentación son equilibradas de secuencia positiva.

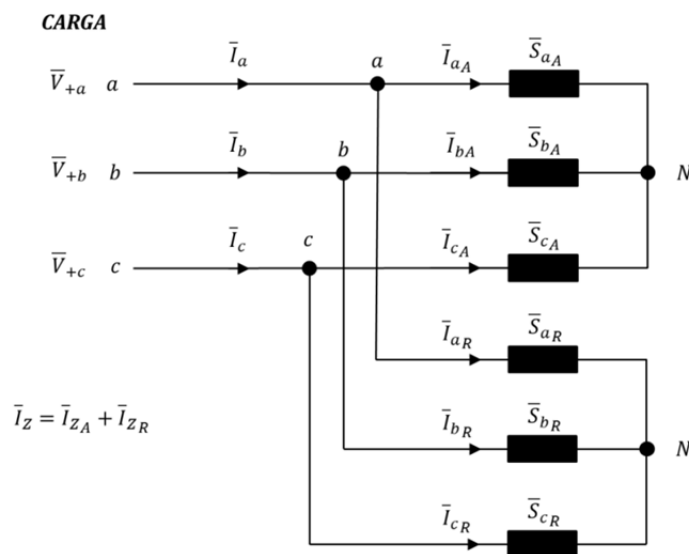


Figura nº 3.8: Carga en triángulo vistos sus efectos desde la línea de alimentación

### 3.4.2. Estudio para una carga en triángulo sin línea de alimentación.

El estudio para una carga en triángulo sin línea de alimentación se corresponde con lo expuesto en el “Capítulo 2”, punto 2.4.

Notar que como se ha expuesto anteriormente en el punto 3.3.1, los valores de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ”, así como los de las potencias aparentes activas y reactivas de desequilibrio ( $D_{ui_A}; D_{ui_R}$ ), no coinciden para sistemas alimentados con tensiones simples equilibradas y desequilibradas, ya que ( $\bar{V}_Z \neq \bar{V}_{+Z}$ ).

### 3.4.3. Estudio para una carga en triángulo con línea de alimentación.

Se estudiará la aplicación de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” para una carga desequilibrada conectada en triángulo a un nudo fuente del cual depende el valor de referencia de las tensiones.

Para ello, sea un sistema formado por una carga alimentada por un nudo fuente de tensiones desequilibradas mediante una línea de alimentación caracterizada por los valores de la impedancia de línea ( $\bar{Z}_L$ ), según se muestra en la figura nº 3.9

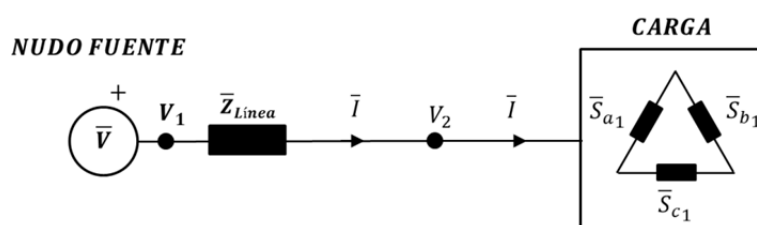


Figura nº 3.9: Esquema de la topología de un circuito con una carga conectada en triángulo mediante una línea de alimentación caracterizada por la impedancia de línea

La impedancia de la línea ( $\bar{Z}_L$ ) que alimenta a la carga tiene unas pérdidas de potencia debidas a la longitud y a las características de resistencia y reactancia del conductor  $\bar{Z}_L = R_L + j \cdot X_L (\Omega/Km)$ . Las pérdidas han de ser asumidas desde el nudo fuente o generador a fin de proporcionar la potencia demanda por la carga.

$$S_{\text{Generador o nudo fuente}} = S_{\text{Línea}} + S_{\text{Carga}} \quad (3.19)$$

La intensidad total que circula por la línea será la debida a la carga, más la debida a la impedancia de la línea (pérdidas de la línea;  $\Delta \bar{S}_{Lz}$ ).

Se mostrará como las potencias de desequilibrio del sistema ( $\bar{D}_{ui}$ ;  $\bar{D}_{uv}$ ;  $\bar{D}_u$ ) son determinadas mediante la suma aritmética de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” definidos en el “Capítulo 2” según las expresiones (2.58) y (2.59), analizados individualmente para la carga y para la línea, sin necesidad de calcular una carga equivalente que englobe a ambas.

La figura siguiente muestra el circuito de una carga en triángulo con una línea de alimentación.

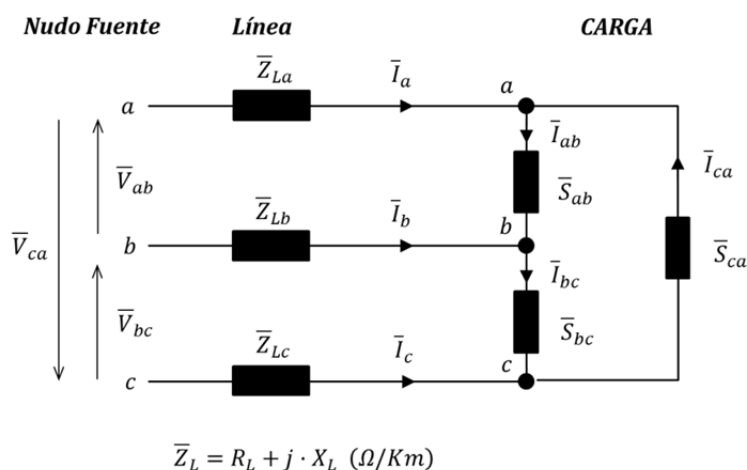


Figura nº 3.10: Esquema de una carga conectada en triángulo mediante una línea de alimentación

En el “Capítulo 4” se muestran los cálculos numéricos completos para cargas desequilibradas conectadas en triángulo considerando la impedancia de la red de alimentación.

#### a) Determinación de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D”

El valor de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” totales del conjunto de la instalación, vistos desde el nudo fuente de alimentación al circuito constituido por una línea de suministro y una carga conectada en triángulo; se corresponde a la suma aritmética de cada uno de los parámetros debidos a las pérdidas de potencia de la línea

ocasionados por su impedancia característica ( $\bar{Z}_L$ ) y a los de la carga en estrella equivalente al triángulo, representada según el punto 2.5, así:

$$\begin{aligned} A &= A_L + A_{carga} \\ B &= B_L + B_{carga} \\ C &= C_L + C_{carga} \\ D &= D_L + D_{carga} \end{aligned} \quad (3.20)$$

La siguiente figura muestra el circuito completo considerando las pérdidas debidas a la impedancia de la línea de alimentación y la carga:

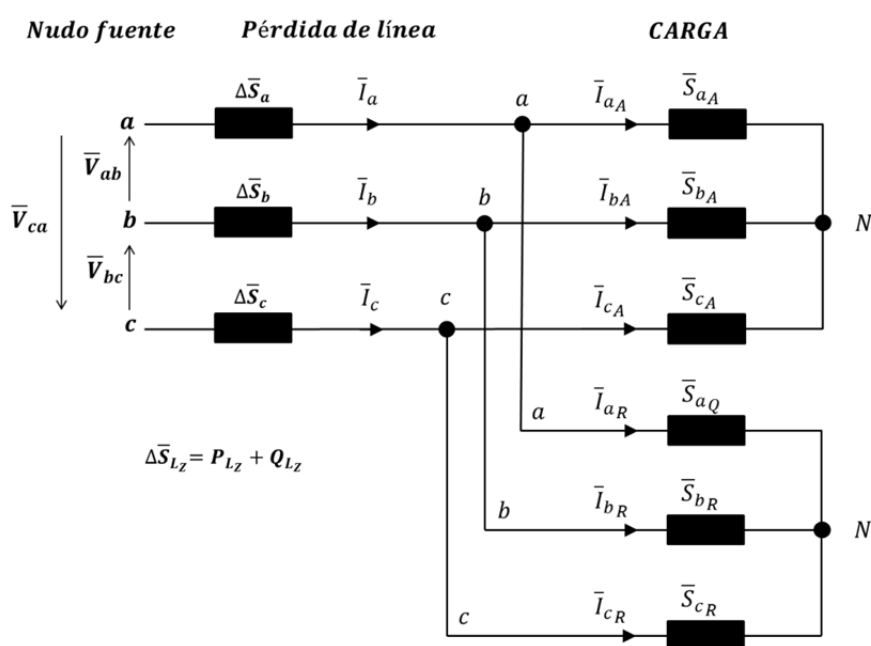


Figura n° 3.11: Esquema de una carga en triángulo (representada por su equivalente en estrella), alimentada mediante una línea.

Una vez determinados los parámetros de desequilibrio, los cálculos de la Potencia de desequilibrio debida a intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ ), Potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ) y Potencia de desequilibrio total del sistema ( $\bar{D}_u$ ), se corresponden con lo expuesto en el punto 3.3, apartados 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 respectivamente

### 3.5. ESTUDIO PARA VARIAS CARGAS EN TRIÁNGULO

#### 3.5.1. Estudio para varias cargas desequilibradas conectadas en paralelo sin considerar las pérdidas de la red de alimentación

En el presente caso de estudio, se considerarán dos cargas desequilibradas en triángulo conectadas en paralelo a un nudo fuente del cual depende el valor de las tensiones desequilibradas, según se muestra la figura n° 3.12.

Las tensiones a la cual están sometidas ambas cargas son las mismas que el nudo fuente y la intensidad será la suma fasorial de ambas cargas, línea a línea  $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_1} + \bar{I}_{Z_2}$ .

Ambas cargas están caracterizadas por sus correspondientes potencias aparentes de fase, que definen las corrientes de fase y línea.

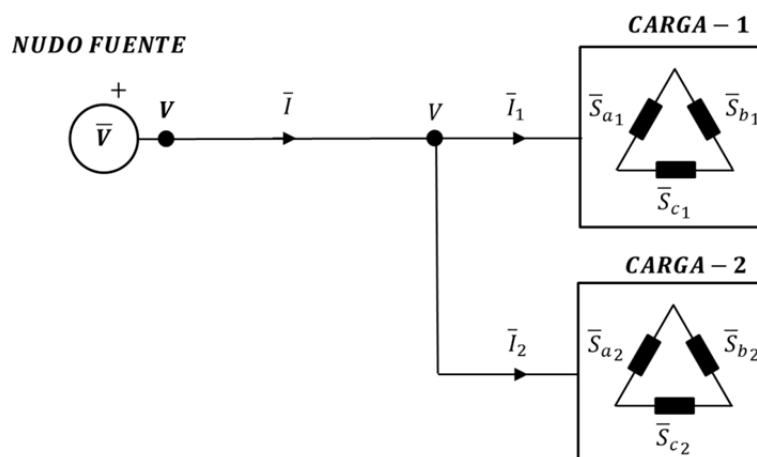


Figura n° 3.12: Esquema de la topología de un circuito con dos cargas en paralelo conectada en triángulo sin considerar la impedancia de la línea de alimentación.

Se mostrará como la potencia de desequilibrio del sistema puede ser determinada mediante la suma aritmética de los parámetros de desequilibrio "A, B, C, D" definidos en el "Capítulo 2" según las expresiones (2.58) y (2.59), extendiendo estas para un caso general de "i" cargas en paralelo. El estudio coincidirá con lo ya expuesto en el punto 2.6 para tensiones equilibradas.

Para efectuar el estudio se conocen como variables de inicio las potencias aparentes de fase características de cada carga ( $\bar{S} = P + j \cdot Q$ ) y la tensión de alimentación a la que se encuentran sometidas, no siendo necesario determinar una carga equivalente suma en paralelo de las "i" cargas.

La figura 3.13 muestra dos cargas en triángulo conectadas en paralelo alimentadas desde un nudo fuente de tensiones desequilibradas.

Cada carga será analizada separadamente, determinando la tensión de secuencia positiva y su correspondiente intensidad activa y reactiva debida a la de naturaleza (resistiva y/o reactiva) de las cargas ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ) según (2.50) y la Figura nº 3.13.

En el “Capítulo 4”, se muestran los cálculos numéricos completos para dos cargas desequilibradas conectadas en paralelo sin considerar las pérdidas debidas a la impedancia de la red de alimentación.

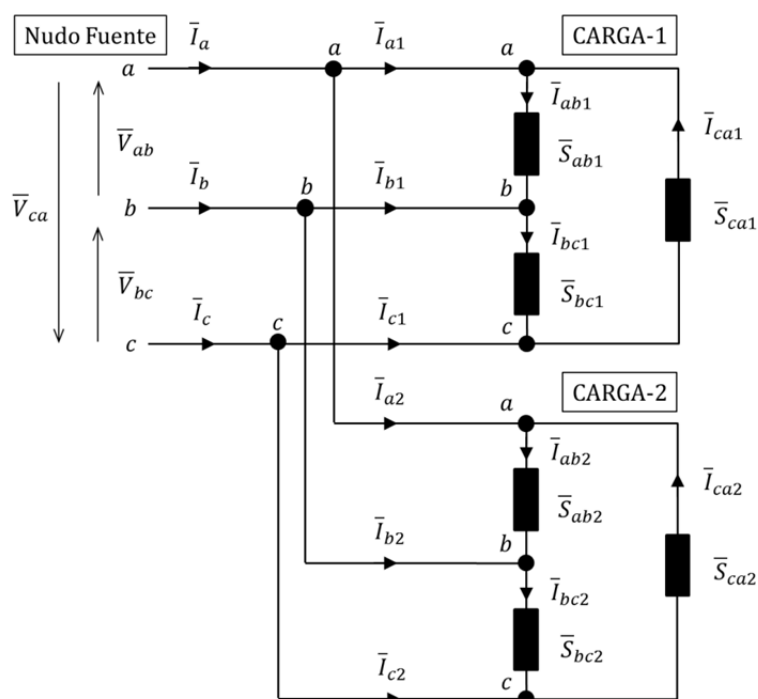


Figura nº 3.13: Dos cargas en paralelo conectadas en triángulo, sin pérdidas en la línea de alimentación

#### a) Determinación de los Parámetros de desequilibrio “A, B, C, D”

El valor de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” totales de la instalación, vistos desde el nudo fuente de ambas cargas en paralelo, corresponde a la suma aritmética de cada una, según lo ya expuesto en el punto 2.6 para tensiones equilibradas, así:

$$\begin{aligned}
 A &= A_1 + A_2 \\
 B &= B_1 + B_2 \\
 C &= C_1 + C_2 \\
 D &= D_1 + D_2
 \end{aligned}
 \tag{3.21}$$



Extendido de forma general a “*i*” elementos en paralelo se tendrá:

$$\begin{aligned}
 A &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i & B &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \\
 C &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i & D &= \sum_{i=1}^{\infty} D_i
 \end{aligned}
 \tag{3.20}$$

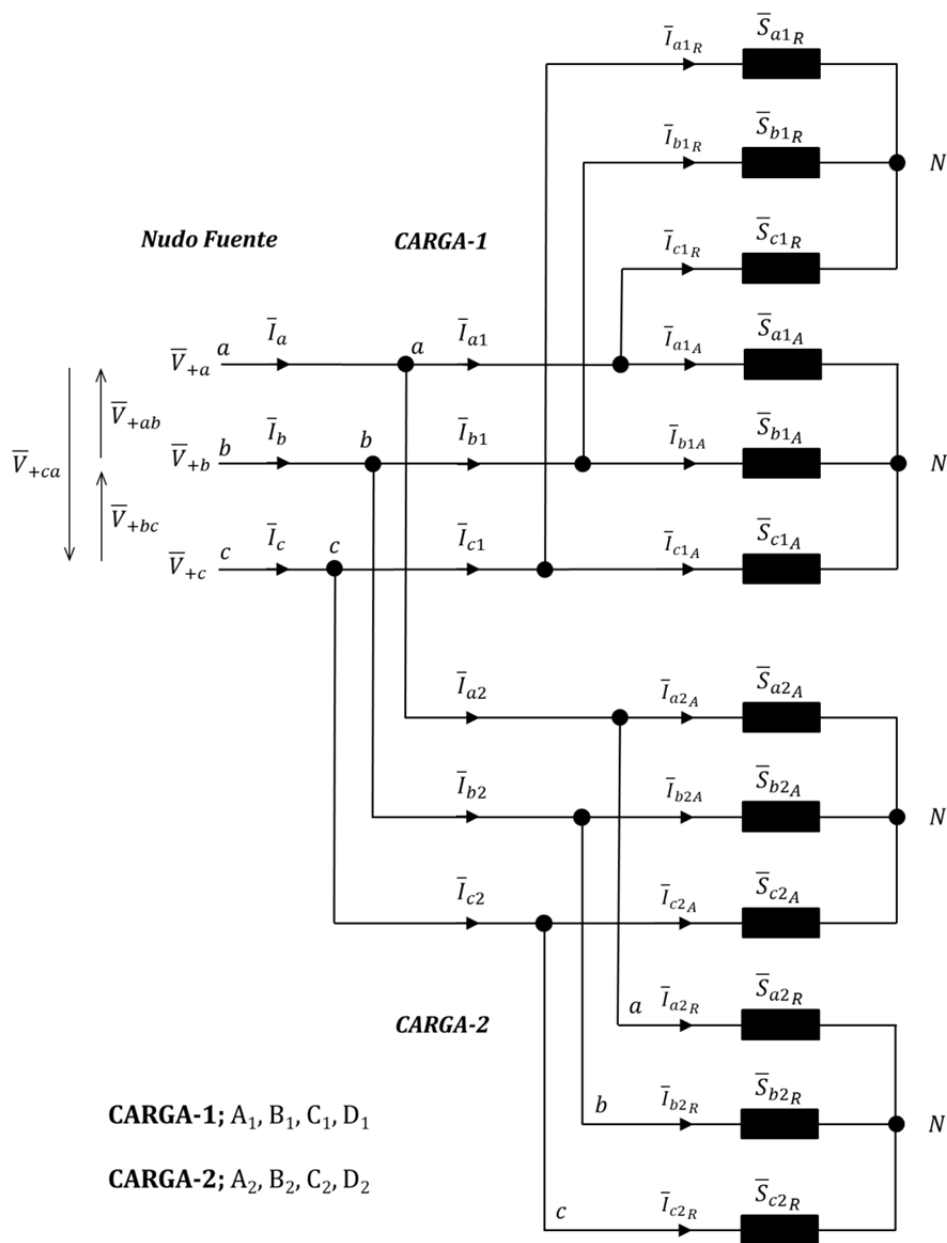


Figura nº 3.14: Dos cargas en paralelo, conexión equivalente en triángulo

Una vez determinados los parámetros de desequilibrio, los cálculos correspondientes a la Potencia de desequilibrio debida a las intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ ), la Potencia de desequilibrio

debida a la asimetría de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ) y la Potencia de desequilibrio total del sistema ( $\overline{D}_u$ ), se corresponden con lo expuesto en el punto 3.3, apartados 3.3.1, 3.3.2 y 3.3.3 respectivamente.

### 3.5.2. Estudio de varias cargas desequilibradas conectadas en paralelo considerando la red de alimentación. Caso general

En este apartado se considerará un modelo general en el cual se dispondrán cargas conectadas en paralelo a una línea de alimentación en la cual se consideran las pérdidas debidas a su impedancia característica.

Para ello, sea un sistema dotado de un nudo fuente con tensiones desequilibradas de la que parte una línea de alimentación caracterizada por sus correspondientes valores de impedancia de línea ( $\overline{Z}_{Línea} = R_{Línea} + j \cdot X_{Línea}$ ) a la cual se conectan en paralelo a un nodo común dos cargas desequilibradas en triángulo, según muestra la figura siguiente.

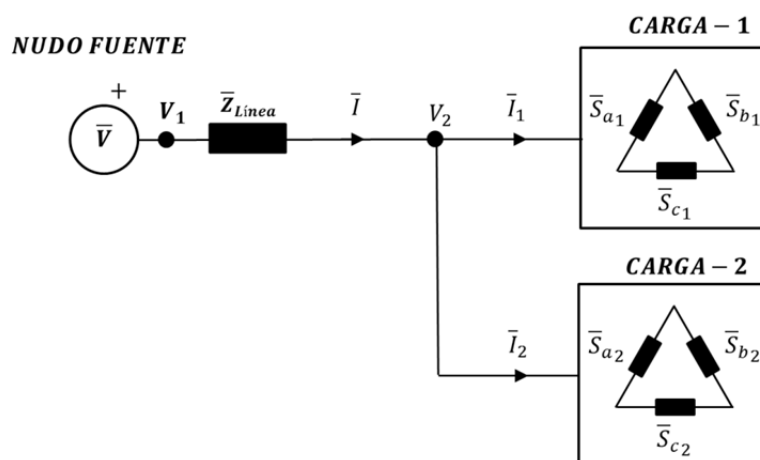


Figura nº 3.15: Esquema de la topología de un circuito con dos cargas en paralelo conectada en triángulo considerando la impedancia de la línea de alimentación.

La impedancia de la línea de alimentación tiene como consecuencia unas pérdidas de potencia en la línea, las cuales han de ser asumidas desde el nudo fuente o generador a fin de proporcionar la potencia demandada desde las cargas.

$$S_{generador} = S_{Línea} + S_{Cargas} \quad (3.23)$$

El nudo de conexión de las cargas establece el valor de la tensión a la que están sometidas las cargas y la intensidad será la suma fasorial de ambas cargas, fase a fase

$\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_1} + \bar{I}_{Z_2}$ . La intensidad total que circula por la línea será la debida a las cargas de consumo más la debida a la impedancia de la línea (pérdidas de la línea).

Se mostrará como las potencias de desequilibrio del sistema formado por la línea de alimentación y ambas cargas, pueden ser determinadas utilizando los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” definidos en el Capítulo 2 (2.58) y (2.59) desde el mismo nudo fuente o mediante la suma aritmética de los debidos a la línea y a las cargas. Se extenderán las expresiones para un caso general de “i” cargas y líneas, comprobando que se verifica el Principio de conservación de la energía.

Para efectuar el estudio se deberán conocer como variables de inicio, las potencias aparentes de fase que caracterizan cada carga ( $\bar{S} = P + j \cdot Q$ ), los parámetros  $R$  y  $X$  de la impedancia de la línea y la tensión a la que se encuentra sometido cada nudo.

Cada tramo de red de alimentación estará definido por su correspondiente impedancia de línea  $\bar{Z}_L = R_L + j \cdot X_L$  ( $\Omega/Km$ ) que identifica las características y la naturaleza del conductor. Para el análisis del sistema, estos valores de impedancia se traducen en cargas en serie entre los nudos de consumo, que producen pérdidas activas y reactivas según queda representado en la figura 3.16.

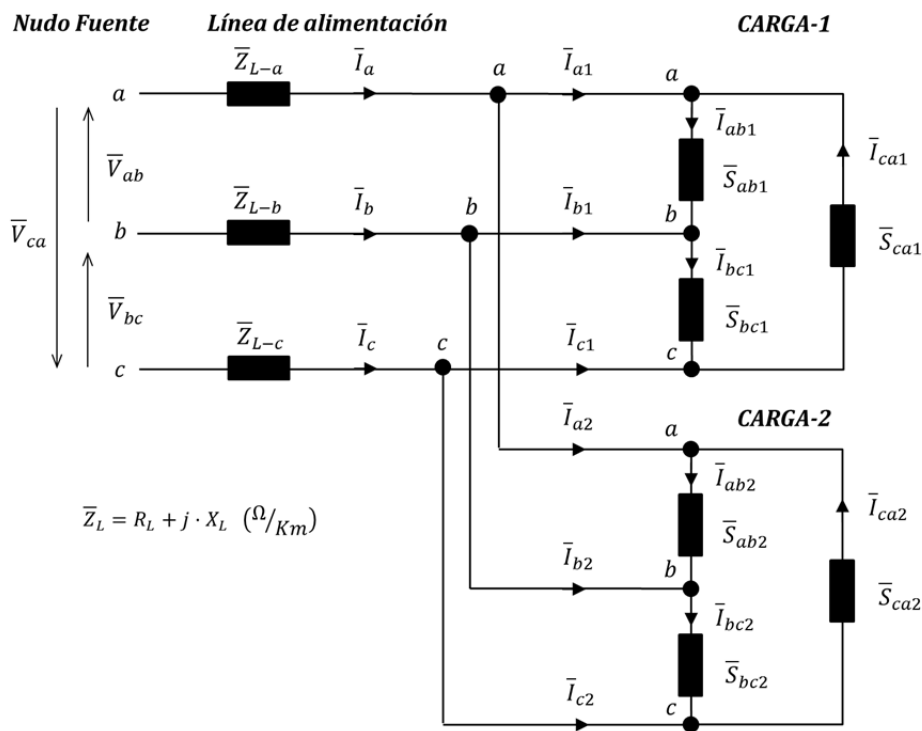


Figura nº 3.16: Dos cargas en paralelo conectadas en triángulo con línea de alimentación.

Cada tramo de línea de alimentación y cada carga serán analizadas separadamente, determinando la tensión de secuencia positiva de cada nodo y su correspondiente intensidad activa y reactiva debida a la naturaleza (resistiva y/o reactiva) de las cargas ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_Q}$ ) según se muestra más detalladamente en la siguiente figura.

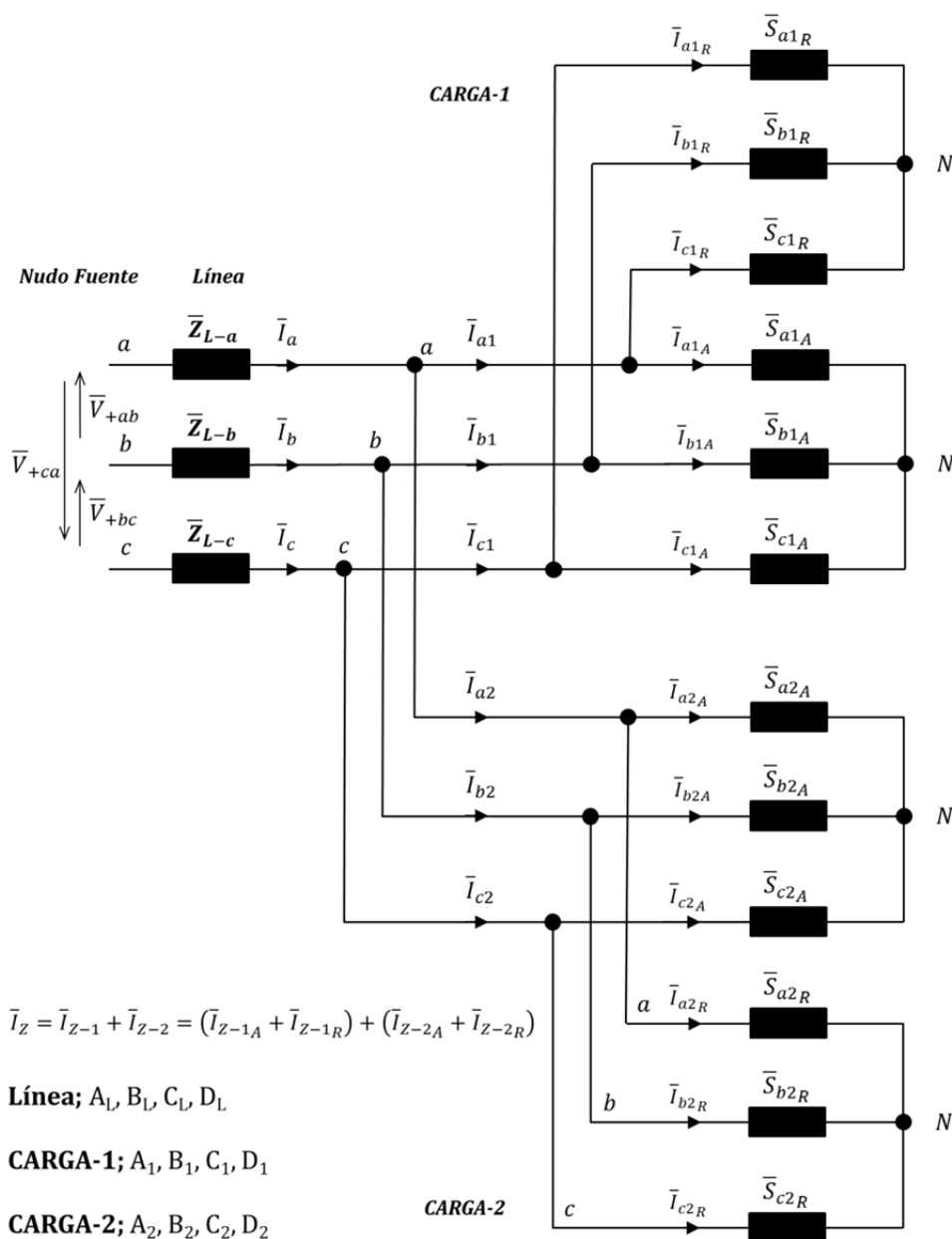


Figura n° 3.17: Dos cargas en paralelo, conexión equivalente en triángulo con línea de alimentación

Con la finalidad de presentar en este punto un caso de estudio general, considerando cargas en paralelo conectadas a una red de alimentación, se volverán a exponer las expresiones correspondientes a los cálculo de los valores de los parámetros de

desequilibrio “ $A, B, C, D$ ”, Potencia de desequilibrio debida a intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ), Potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ) y Potencia de desequilibrio total del sistema ( $\overline{D}_u$ ), que se corresponden con lo expuesto en el punto 3.3, apartados 3.3.1, 3.2 y 3.3.3 respectivamente.

En el Capítulo 4 se muestran los cálculos numéricos completos para varias cargas desequilibradas conectadas en paralelo considerando la línea de alimentación; así como para una red de distribución de cinco nodos.

**a) Parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” y Potencia de desequilibrio debida a las intensidades;  $\overline{D}_{ui}$**

La potencia de desequilibrio debida a una carga ( $\overline{D}_{ui}$ ) es según la expresión (2.70):

$$\overline{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q} = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \vec{p} + \sqrt{D^2 + C^2} \cdot \vec{q}$$

donde los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” para un sistema compuesto por una red de alimentación ( $L$ ) con dos cargas en paralelo ( $1, 2$ ) se corresponden con la suma aritmética de cada elemento según lo expuesto en el punto 2.6:

$$\begin{aligned} A &= A_L + A_1 + A_2 \\ B &= B_L + B_1 + B_2 \\ C &= C_L + C_1 + C_2 \\ D &= D_L + D_1 + D_2 \end{aligned}$$

y extendido de forma general a una red de alimentación radial compuesta por “ $i$ ” nodos de consumo y tramos de red se tiene:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \\ B &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \\ C &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i \\ D &= \sum_{i=1}^{\infty} D_i \end{aligned} \tag{3.24}$$

donde las potencias de desequilibrio ( $D_{ui_A}$ ;  $D_{ui_R}$ ) debidas a las componentes resistivas y reactivas de las cargas, representan fenómenos distintos según el punto (2.4.3.) y se definen en un plano formado por dos versores ortogonales ( $\vec{p}$ ) y ( $\vec{q}$ ); así las potencias de desequilibrio deberán sumarse de forma cuadrática.

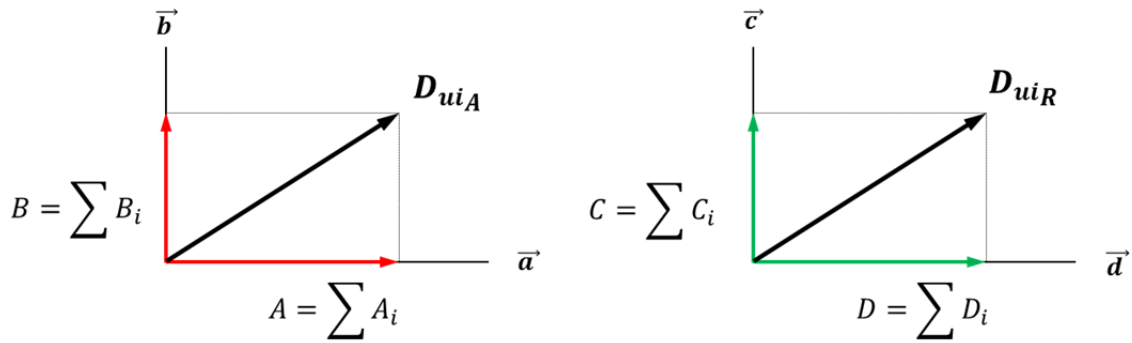
En el caso de una línea de alimentación con dos cargas en paralelo, la determinación de las potencias de desequilibrio será:

$$\begin{aligned} D_{ui_A} &= \sqrt{(A_L + A_1 + A_2)^2 + (B_L + B_1 + B_2)^2} \\ D_{ui_R} &= \sqrt{(D_L + D_1 + D_2)^2 + (C_L + C_1 + C_2)^2} \end{aligned} \quad (3.25)$$

y expresado de forma general para “i” cargas y tramos de red, se corresponde con la expresión general (2.71) considerando (3.24):

$$D_{ui_A} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

$$D_{ui_R} = \sqrt{D^2 + C^2}$$



La potencia de desequilibrio debida a las cargas será según (2.70) y (2.71) expresada en función de sus componentes en módulo y argumento vendrá dada por:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ui} &= D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q} \\ &= \sqrt{A^2 + B^2} \cdot \vec{p} + \sqrt{D^2 + C^2} \cdot \vec{q} \\ D_{ui} &= \sqrt{D_{ui_A}^2 + D_{ui_R}^2} = \sqrt{(A^2 + B^2) + (D^2 + C^2)} \\ \theta_{D_{ui}} &= \text{atan} \left( \frac{D_{ui_R}}{D_{ui_A}} \right) = \text{atan} \left( \frac{\sqrt{D^2 + C^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right) \end{aligned}$$

siendo su representación gráfica definida por los versores ortogonales ( $\vec{p}$ ) y ( $\vec{q}$ ), al igual que la mostrada en la figura 3.18, la siguiente:

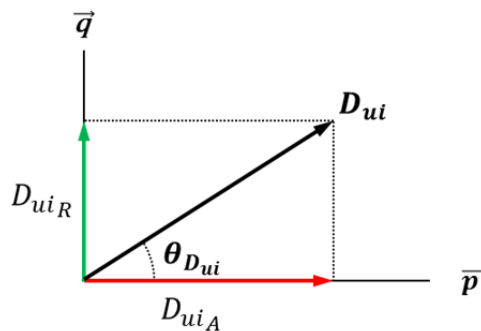


Figura n° 3.18: Representación gráfica del fasor potencia de desequilibrio debida a las intensidades  $\bar{D}_{ui}$

### b) Potencia de desequilibrio debida a las tensiones; $\bar{D}_{uv}$

La potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones no varía respecto a lo descrito en el punto 3.3.2 del presente Capítulo 3; siendo las expresiones formuladas en (3.11) y (3.12), que a continuación se repiten:

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ D_{uv} &= \sqrt{D_{uvA}^2 + D_{uvR}^2} \\ \theta_{D_{uv}} &= \text{atan} \left( \frac{D_{uvR}}{D_{uvA}} \right)\end{aligned}$$

quedando cada parámetro expresado en función de:

$$\begin{aligned}D_{uvA} &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \sqrt{D_{uiA}^2 + P_+^2} = \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \\ D_{uvR} &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \sqrt{D_{uiR}^2 + Q_+^2} = \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \\ \delta_- &= \frac{V_-}{V_+} \\ \delta_0 &= \frac{V_0}{V_+}\end{aligned}$$

donde:

- $P_+$ : Corresponde a la suma de las potencias activas positivas parciales de cada carga y tramo de línea de alimentación:  $P_+ = \sum_{i=1}^{\infty} P_i' + \sum_{i=1}^{\infty} P_i''$

- $Q_+$ : Corresponde a la suma de las potencias reactivas positivas parciales de cada carga y tramo de línea de alimentación:  $Q_+ = \sum_{i=1}^{\infty} Q'_i + \sum_{i=1}^{\infty} Q''_i$
- $\delta_-$ : Corresponde al grado de desequilibrio del nudo fuente desde el que se estudia el sistema. Las tensiones de secuencia serán asimismo las tensiones compuestas  $V_{-a}$  y  $V_{+a}$
- $\delta_0$ : Corresponde al grado de asimetría del nudo fuente desde el que se estudia el sistema. Las tensiones de secuencia serán asimismo las tensiones compuestas  $V_{0a}$  y  $V_{+a}$

La Figura n° 3.19 pertenece a la representación gráfica del fasor potencia de desequilibrio debida a tensiones.

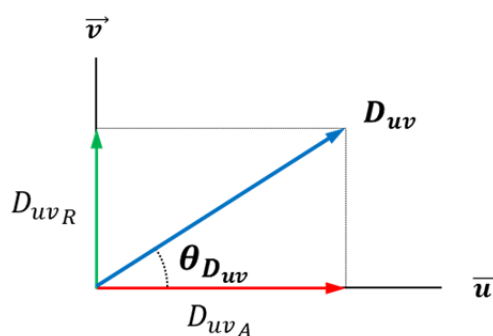


Figura n° 3.19: Representación gráfica del fasor potencia de desequilibrio debida a las tensiones  $\bar{D}_{uv}$

### c) Potencia total de desequilibrio; $\bar{D}_u$

La potencia total de desequilibrio no varía de lo expuesto en el punto 3.3.3 y las expresiones (3.13) y (3.14), siendo su expresión fasorial definida en el plano formado por los versores unitarios  $\bar{p}_i$  y  $\bar{q}_v$  y por su expresión en módulo y argumento:

$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \bar{p}_i + D_{uv} \cdot \bar{q}_v$$

$$D_u = \sqrt{D_{ui}^2 + D_{uv}^2}$$

$$\theta_{D_u} = \text{atan} \left( \frac{D_{uv}}{D_{ui}} \right)$$



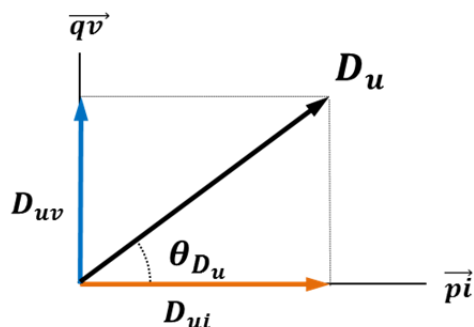


Figura nº 3.20: Representación gráfica del fasor potencia total de desequilibrio  $\bar{D}_u$

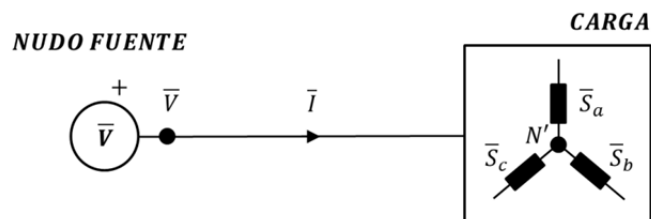
El cálculo de la Potencia de desequilibrio debida a cargas ( $\bar{D}_{ui}$ ), la Potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ) y la Potencia de desequilibrio total del sistema ( $\bar{D}_u$ ) mediante el uso de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” verifica la equivalencia de la carga en triángulo a estrella (línea, generador o nudo fuente) y de la potencia aparente total del sistema  $S_T$ ; ( $S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$ )

Como se ha descrito en el punto 2.4 del Capítulo 2, la potencia total aparente del sistema ( $S_T$ ) obtenida mediante la aplicación del teorema de Kenelly (Rosen) no aporta el mismo resultado, por lo cual ha de ser corregida mediante el uso de las expresiones formuladas en 2.37 y 2.38 según sea el caso de estudio.

### 3.6. CÁLCULO DEL DESEQUILIBRIO EN UN SISTEMA A 3 HILOS EN CONEXIÓN ESTRELLA

#### 3.6.1. Circuito equivalente de una carga conectada en estrella.

Sea una carga conectada en estrella a una red de alimentación trifásica a tres hilos, la cual queda representada por la figura siguiente.



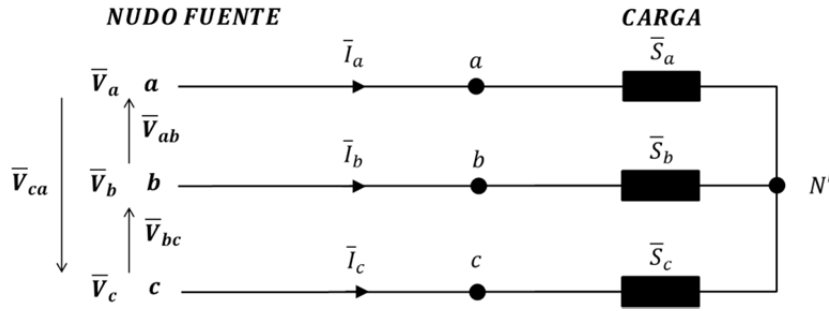


Figura nº 3.21: Esquema de la topología de un circuito con una carga conectada en estrella mediante una línea de alimentación trifásica a 3 hilos

Si se considera una carga desequilibrada conectada directamente a un nudo fuente de tensión que establece los valores de referencia ( $\bar{V}_{Z=a,b,c} = \bar{V}_{+Z} + \bar{V}_{-Z} + \bar{V}_{0Z}$ ), el circuito equivalente exterior a la carga para la determinación de las potencias de desequilibrio será el mostrado en la figura nº 3.22.

En el cual se comprueba que la tensión simple del nudo fuente será:

$$\begin{aligned}\bar{V}_Z &= \bar{V}_{Z12} + \bar{V}_{Z2N'} = (\bar{V}_{-Z} + \bar{V}_{0Z}) + \bar{V}_{+ZN}; \quad Z = a, b, c \\ \bar{V}_{Z2N'} &= \bar{V}_{+ZN} \\ \bar{V}_{Z12} &= \bar{V}_{-Z} + \bar{V}_{0Z}\end{aligned}\tag{3.26}$$

La impedancia equivalente ( $\bar{Z}_{-0eq}$ ) caracteriza los efectos de la tensión de secuencia de secuencia inversa y homopolar a la que está alimentada la carga. Así la caída de tensión  $\bar{V}_{Z12}$  se corresponde con la suma de las componentes de la tensión de secuencia homopolar ( $\bar{V}_{0Z}$ ) y de secuencia negativa ( $\bar{V}_{-Z}$ ).

El estudio del desequilibrio para una carga descrito en el Capítulo 2, se basa en tensiones equilibradas de secuencia positiva; así para estudiar la potencia de desequilibrio que aporta la impedancia equivalente a las secuencias inversas y homopolar ( $\bar{Z}_{-0eq} = \bar{Z}_{-} + \bar{Z}_{0}$ ) se considerará la tensión de secuencia positiva de la caída de tensión producida entre los puntos 1-2 ( $\bar{V}_{Z12} = \bar{V}_{-Z} + \bar{V}_{0Z}$ ) la cual se muestran a continuación.

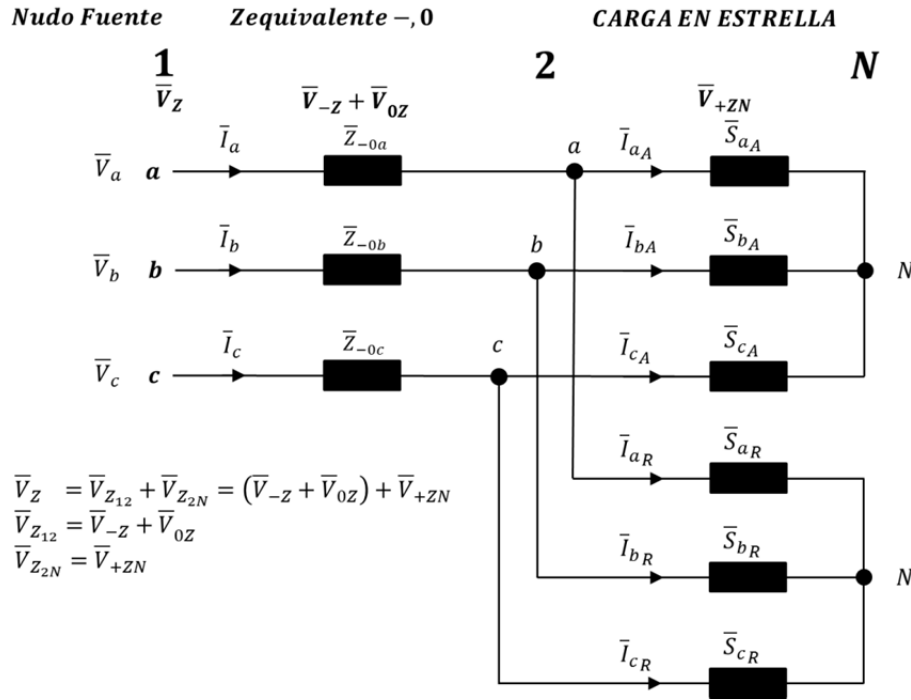


Figura n° 3.22: Carga equivalente considerando los efectos de las tensiones de secuencia +,-,0

- La caída de tensión entre los punto 1 y 2 ( $\bar{V}_{Z12}$ ); se corresponde con la tensión debida a la secuencias negativa y homopolar; así:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{a12} &= \bar{V}_{-a12} + \bar{V}_{0a12} \\ \bar{V}_{b12} &= \bar{V}_{-b12} + \bar{V}_{0b12} \\ \bar{V}_{c12} &= \bar{V}_{-c12} + \bar{V}_{0c12}\end{aligned}\quad (3.27)$$

- Aplicando a las tensiones el teorema de Stokvis para obtener sus valores de secuencia, se tendrá que la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+a12}$ ) es nula.

$$\begin{aligned}\bar{V}_{+a12} &= \frac{1}{3} \cdot (\bar{V}_{a12} + a \cdot \bar{V}_{b12} + a^2 \cdot \bar{V}_{c12}) = V_{+a12} \cdot e^{\alpha v_{+a12} j} = 0 \\ \bar{V}_{+b12} &= V_{+a12} \cdot e^{\alpha v_{+a12} + 120j} = 0 \\ \bar{V}_{+c12} &= V_{+a12} \cdot e^{\alpha v_{+a12} - 120j} = 0\end{aligned}\quad (3.28)$$

Con lo cual, los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” según las expresiones (2.58) y (2.59) tendrán valor nulo, consecuentemente las potencias de desequilibrio  $\bar{D}_{ui}$  según (2.70),  $\bar{D}_{uv}$  según (3.11) y  $\bar{D}_u$  según (3.13), que aporta la caída de tensión ( $\bar{V}_{Z12} = \bar{V}_{-Z} + \bar{V}_{0Z}$ ) al desequilibrio total de una carga en estrella son nulas, despreciándose para el cálculo del desequilibrio del sistema y permitiendo reducir el circuito

equivalente de la estrella, en el que se consideran los efectos de las tensiones de secuencia mostrado en la figura nº 2.21, al mostrado en la figura nº 3.22.

$$\begin{aligned}
 A, B, C, D &= 0 \\
 \bar{D}_{ui} &= 0 \\
 \bar{D}_{uv} &= 0 \\
 \bar{D}_u &= 0
 \end{aligned}
 \tag{3.29}$$

La siguiente figura representa una carga en estrella considerando todos los efectos de las tensiones de secuencia inversa y homopolar para el análisis de desequilibrios, donde las intensidades de línea son expresadas en sus componentes activas y reactivas de forma separada ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{ZA} + \bar{I}_{ZR}$ ), y las tensiones simples de alimentación son equilibradas de secuencia positiva.

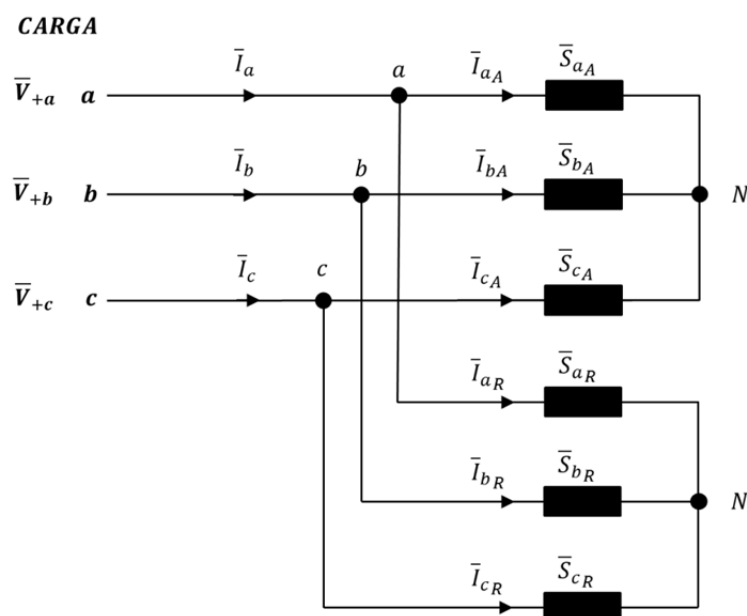


Figura nº 3.23: Carga en estrella con tensiones simples de secuencia positiva e intensidades activas y reactivas

### 3.6.2. Estudio de una carga en estrella sin línea de alimentación. Determinación de la potencia de desequilibrio debida a las intensidades $\bar{D}_{ui}$

Sea la conexión de una carga en estrella en un sistema de alimentación trifásico a 3 hilos sin conductor de retorno por neutro representada por la figura siguiente. En el caso de las tensiones simples en la línea, estas presentarán una diferencia de potencial entre los

puntos comunes de conexión o neutro de la carga y del nudo fuente (a excepción de cargas y tensiones de nudo fuente equilibradas):

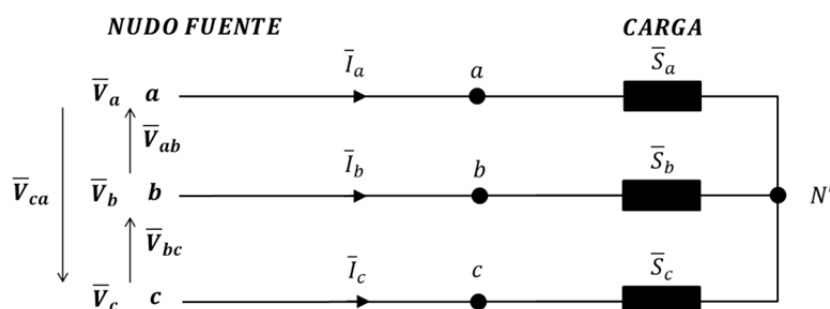


Figura nº 3.24: Esquema de una carga conectada en estrella a una línea trifásica a 3 hilos

Partiendo de lo expuesto en el punto 2.4.2 del Capítulo 2, para tensiones equilibradas de secuencia directa, se mostrarán las consideraciones particulares de las correspondientes potencias debidas a las componentes resistivas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ) de las cargas, necesarias para el estudio de los parámetros de desequilibrio "A, B, C y D" así como las relativas a la potencia de desequilibrio debida a las corrientes  $\bar{D}_{ui}$ .

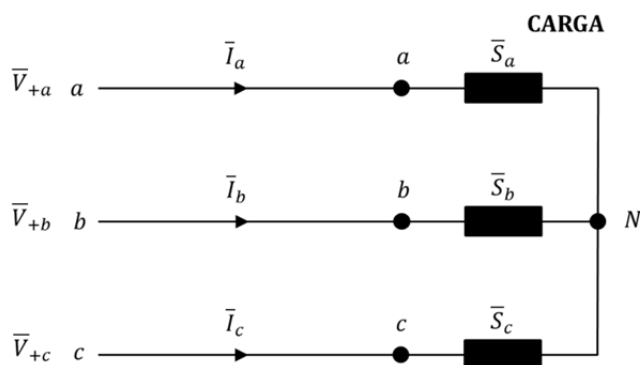


Figura nº 3.25: Esquema de una carga conectada en estrella a una línea trifásica a 3 hilos alimentada por tensiones de secuencia directa

Las intensidades activas y reactivas de cada línea (debidas a los elementos resistivos y reactivos de las cargas, respectivamente), se corresponden con las siguientes expresiones (considerar:  $-90^\circ$  para elementos inductivos, y  $+90^\circ$  para capacitivos):

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_{ZA} &= I_{ZA} \cdot e^{\varphi_{I_{ZA}}} = I_{ZA} \cdot e^{\alpha_{v+z}} & \bar{I}_{ZR} &= I_{ZR} \cdot e^{\varphi_{I_{ZR}}} = I_{ZR} \cdot e^{\alpha_{v+z}} \\
 \bar{I}_{aA} &= I_{aA} \cdot e^{\varphi_{I_{aA}}} = I_{aA} \cdot e^{\alpha_{v+a}} & \bar{I}_{aR} &= I_{aR} \cdot e^{\varphi_{I_{aR}}} = I_{aR} \cdot e^{\alpha_{v+a} \mp 90} \\
 \bar{I}_{bA} &= I_{bA} \cdot e^{\alpha_{v+b}} & \bar{I}_{bR} &= I_{bR} \cdot e^{\alpha_{v+b} \mp 90} \\
 \bar{I}_{cA} &= I_{cA} \cdot e^{\alpha_{v+c}} & \bar{I}_{cR} &= I_{cR} \cdot e^{\alpha_{v+c} \mp 90}
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

y considerando que la conexión en estrella a tres hilos sin conductor de retorno, se caracteriza por ser nulo el sumatorio las corrientes de línea, se tendrá que:

$$\begin{aligned}
 \bar{I}_Z &= \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R} ; \quad Z = a, b, c \\
 \sum \bar{I}_Z &= \sum \bar{I}_{Z_A} + \sum \bar{I}_{Z_R} = 0 \\
 \text{siendo: } \sum \bar{I}_{Z_A} &= \left| \sum I_{Z_A} \right| \cdot e^{\varphi_{\bar{I}_{Z_A}}} = \bar{I}_{a_A} + \bar{I}_{b_A} + \bar{I}_{c_A} \\
 \sum \bar{I}_{Z_R} &= \left| \sum I_{Z_R} \right| \cdot e^{\varphi_{\bar{I}_{Z_R}}} = \bar{I}_{a_R} + \bar{I}_{b_R} + \bar{I}_{c_R}
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde los módulos del sumatorio de las corrientes de componente activa ( $\sum I_{Z_A}$ ) y el de la componente reactiva ( $\sum I_{Z_R}$ ) tienen el mismo valor y una diferencia entre ambos ángulos de 180° respecto del valor de  $\varphi_{\bar{I}_{Z_A}}$ , según se muestra a continuación.

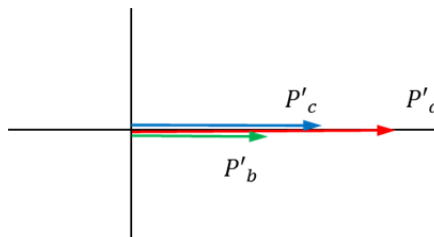
$$\begin{aligned}
 \sum \bar{I}_{Z_A} &= - \sum \bar{I}_{Z_R} \\
 \left| \sum I_{Z_A} \right| \cdot e^{\varphi_{\bar{I}_{Z_A}}} &= - \left| \sum I_{Z_R} \right| \cdot e^{\varphi_{\bar{I}_{Z_R}}} = \left| \sum I_{Z_A} \right| \cdot e^{\varphi_{\bar{I}_{Z_A}} \pm 180} \\
 \varphi_{\sum \bar{I}_{Z_A}} - \varphi_{\sum \bar{I}_{Z_R}} &= \pm 180 \\
 \text{sí: } \varphi_{\sum \bar{I}_{Z_A}} &= - ; \quad \varphi_{\sum \bar{I}_{Z_A}} - \varphi_{\sum \bar{I}_{Z_R}} = +180 \\
 \varphi_{\sum \bar{I}_{Z_A}} &= + ; \quad \varphi_{\sum \bar{I}_{Z_A}} - \varphi_{\sum \bar{I}_{Z_R}} = -180
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

La potencia aparente en la línea tendrá dos componentes, activa debida a las resistencias ( $\bar{S}_A$ ) y reactiva debida a las reactancias ( $\bar{S}_R$ ) según (2.51), las cuales al ser variables complejas tendrán a su vez componente real e imaginaria, tal como se muestra en (2.52)

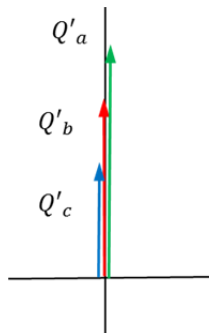
$$\begin{aligned}
 \bar{S}_Z &= \bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_Z^* = \bar{V}_{+Z} \cdot (\bar{I}_{Z_A}^* + \bar{I}_{Z_R}^*) = \bar{S}_A + \bar{S}_R ; \quad Z = a, b, c \\
 \bar{S}_A &= \bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{Z_A}^* = P'_Z + j \cdot Q''_Z \\
 \bar{S}_R &= \bar{V}_{+Z} \cdot \bar{I}_{Z_R}^* = P''_Z + j \cdot Q'_Z
 \end{aligned}$$

Aplicando las expresiones de (3.30) se tendrá que las potencias activas y reactivas, tendrán cada una de ellas una componente nula debida al desfase de 90° entre ellas. La componente imaginaria de la potencia activa ( $Q''_A$ ) y la componente real de la potencia reactiva ( $P''_R$ ) tendrá valor cero.

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_A &= \bar{S}_{a_A} + \bar{S}_{b_A} + \bar{S}_{c_A} \\
 &= \sum P'_{Z_A} + \underbrace{\sum Q''_{Z_A}}_0 \\
 &= \sum \bar{S}_{Z_A} = P_+ = \sum P'_{Z_A}
 \end{aligned}
 \tag{3.33}$$



$$\begin{aligned}
 \bar{S}_R &= \bar{S}_{a_R} + \bar{S}_{b_R} + \bar{S}_{c_R} \\
 &= \underbrace{\sum P''_{Z_R}}_0 + \sum Q'_{Z_R} \\
 &= \sum \bar{S}_{Z_R} = Q_+ = \sum Q'_{Z_R}
 \end{aligned}
 \tag{3.34}$$



La figura siguiente muestra el esquema equivalente de una carga conectada en estrella a tres hilos en función de las componentes de las potencias debidas a los elementos resistivos ( $P'$ ,  $Q''$ ) y de las debidas a los elementos reactivos ( $P''$ ,  $Q'$ ).

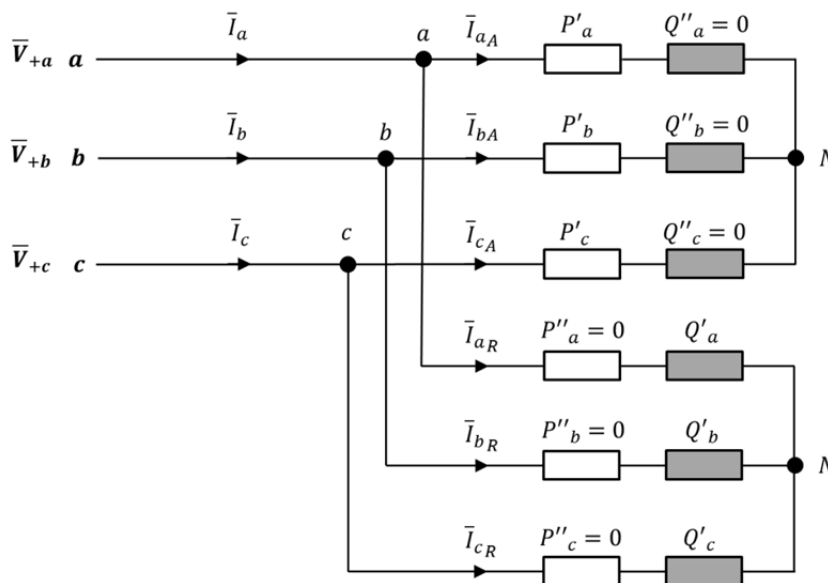


Figura n° 3.26: Esquema de una carga conectada en estrella a una línea trifásica a 3 hilos en función de las componentes de potencias debidas a los elementos resistivos y las debidas a los elementos reactivos

a) **Fasor de potencia de desequilibrio debida a la intensidad  $\bar{D}_{ui}$**

El cálculo de los parámetros de desequilibrio “A, B, C, D” se corresponde con lo expuesto en el punto 2.4.2 del Capítulo 2 y con las expresiones (2.58) y (2.59).

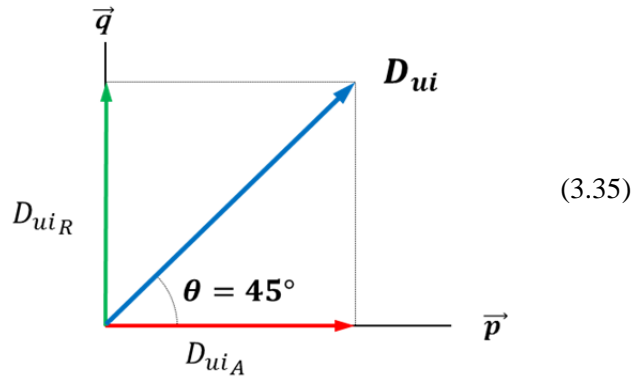
Dado que el sumatorio de las intensidades de línea es nula y que los módulos de los sumatorios de las corrientes activas y reactiva tienen el mismo valor y sus ángulos varían entre ellos  $180^\circ$ , según (3.31) y (3.32); el fasor potencia de desequilibrio expuesto en el punto 2.4.3 se caracteriza por:

- Los valores en módulo de las potencias de desequilibrio activas ( $D_{ui_A}$ ) y reactivas ( $D_{ui_R}$ ) tienen el mismo valor.
- Como consecuencia, el ángulo de la potencia de desequilibrio ( $\theta_{D_{ui}}$ ) tiene un valor de  $45^\circ$ .

$$|D_{ui_A}| = |D_{ui_R}|$$

$$D_{ui} = \sqrt{D_{ui_A}^2 + D_{ui_R}^2}$$

$$\theta_{D_{ui}} = \text{atan}\left(\frac{D_{ui_R}}{D_{ui_A}}\right) = 45^\circ$$



En consecuencia:

- Para cargas en estrella con tensiones simple equilibradas, las potencias ( $Q_Z''$ ) correspondientes a la componente imaginaria de ( $\bar{S}_A$ ) y la potencia ( $P_Z''$ ) correspondiente a la componente real de ( $\bar{S}_R$ ) tienen valor nulo según (2.55) y (2.56), dado que las intensidades que las caracterizan ( $\bar{I}_A$ ) e ( $\bar{I}_R$ ), están desfasadas entre si  $\pm 90^\circ$ .
- El fasor potencia de desequilibrio tendrá un valor nulo ( $D_{ui} = 0$ ;  $\theta_{D_{ui}} = 0$ ) cuando las tensiones ( $\bar{V}_Z = \bar{V}_{+a}$ ), y las cargas sean equilibras (únicamente con cargas activas ( $P$ ), reactivas ( $Q$ ) o ambas ( $P-Q$ )).
- En el resto de casos posibles el ángulo de desfase es de  $45^\circ$ , lo cual implica que, a excepción del caso anterior; sea cual sea la tensión y la carga el sistema, este responde ante un desequilibrio en corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) con una potencia de desequilibrio activa y reactiva de igual valor ( $D_{ui_p} = D_{ui_q}$ ), independientemente de la existencia o no de cargas activas y/o reactivas.



### 3.7. CONCLUSIONES DEL CAPÍTULO

A continuación se enumeran las conclusiones alcanzadas en el presente capítulo:

- Partiendo del desarrollo de la definición de la Potencia aparente total de un sistema desequilibrado “ $S_T$ ”, se identifican separadamente las componentes vinculadas con los fenómenos de desequilibrio debidos a las asimetrías de las intensidades ( $D_{ui}$ ) y de las tensiones ( $D_{uv}$ ).
- Se formulan las expresiones en módulo de las potencias de desequilibrio debidas a la asimetría de las tensiones ( $D_{uv}$ ) y la potencia total de desequilibrio ( $D_u$ ); las cuales son expresadas en función del módulo de la Potencia de desequilibrio debida a las intensidades ( $D_{ui}$ ), definida para tensiones equilibradas en el Capítulo 2, y de los grados de desequilibrio y asimetría ( $\delta$ ,  $\delta_0$ ).
- A partir de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ” descritos en el Capítulo 2 para un sistema alimentado con tensiones equilibradas, se formulan fasorialmente de forma separada las potencias de desequilibrio debidas a intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ ), debidas a la simetría de las tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ) y total ( $\bar{D}_u$ ) para tensiones desequilibradas.
- Se verifica que las potencias de desequilibrio de un sistema eléctrico en el cual se han considerado las pérdidas ocasionadas por la línea de alimentación pueden ser hallados mediante la suma de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$ ”, sin necesidad de determinar un circuito equivalente en el punto de estudio del sistema. Para ello, basta con conocer las tensiones nodales y las potencias o impedancias de las cargas e impedancias de las líneas; y determinar así los parámetros de desequilibrio de cada elemento que constituye el sistema eléctrico.
- Las cargas conectadas en estrella a un sistema trifásico a tres hilos, se caracterizan por producir potencias de desequilibrio debidas a las intensidades activas ( $\bar{D}_{ui_A}$ ) y reactivas ( $\bar{D}_{ui_R}$ ) del mismo valor, y tener la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las intensidades ( $\bar{D}_{ui}$ ) un ángulo de  $45^\circ$ .



# Capítulo: 4

## SUPUESTOS PRÁCTICOS



## **Capítulo 4:**

### **SUPUESTOS PRÁCTICOS**

#### **4.1. INTRODUCCIÓN**

En el presente capítulo se mostrarán los supuestos prácticos realizados con cargas individuales con y sin tensiones equilibradas, cargas en paralelo con tensiones desequilibradas alimentadas mediante líneas de suministro trifásicas a tres hilos con y sin pérdidas de potencias debidas a las impedancias en las líneas y una red de alimentación de cinco nodos con cargas activas y reactivas “ $PQ$ ” conectadas en triángulo.

Así mismo, se ha realizado una simulación práctica de laboratorio de una carga resistiva alimentada mediante un transformador del tipo “High Leg Transformer, 4WD” empleando un equipo de análisis de redes “Fluke 435 Series II.

Se mostraran los cálculos de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” así como los cálculos de las potencias de desequilibrio debidos a la asimetría de las intensidades ( $D_{ui}$ ), y se comprobará como la suma de los valores los parámetros de desequilibrio obtenidos de cada carga y de la línea de alimentación, se corresponden con los valores obtenidos en el nudo fuente, según lo expuesto en el punto 3.4.1 del capítulo 3, verificando que para la obtención de los citados parámetros no es necesario realizar circuitos equivalentes de la red en el nudo de estudio para la obtención de las potencias de desequilibrio, pudiendo estas ser determinadas en cualquier punto del sistema.

Se comprobará como las potencias totales aparentes de un sistema en estrella ( $S_{I(Y)}$ ) y triángulo ( $S_{I(\Delta)}$ ) no son equivalentes desde el punto de vista de la determinación de las potencias de desequilibrio empleando las transformaciones de triángulo a estrella y viceversa realizadas a partir del Teorema de Kenelly (Rosen), ya que proporcionan resultados distintos y no verifican la expresión (2.1) de la potencia total aparente expuesta por Buchholz, según se describe en el punto 2.4 del Capítulo 2. Así pues, para que las transformaciones de cargas conectadas en triángulo a estrella incluyan adecuadamente los fenómenos del desequilibrio, se deberán cumplir las condiciones

expuestas en las expresiones (2.37) para la transformación de triángulo a estrella o la (2.38) para la transformación de estrella a triángulo.

Los cálculos mostrados en los supuestos se ha realizado para valores de impedancias de línea característicos de las redes eléctricas y con tensiones compuestas de 20 KV y de 0,4 KV.

Los valores de las tensiones nodales y corrientes de línea han sido obtenidos mediante el cálculo efectuado utilizando el software de análisis de sistemas radiales de suministro “Radial Distribution Analysis Package, RDAP” [72] empleado en los “Test feeders” para sistemas radiales incluidos en la IEEE [44], así como en determinados casos PsPICE [71], Matpower (Matlab), Power World [70], ETAP [30] y CYME [15].

Se aporta una aplicación práctica, realizada en el laboratorio, del comportamiento de un sistema eléctrico constituido por una carga resistiva conectada en estrella y alimentado con tensiones desequilibradas mediante un transformador del tipo “High Leg Transformers (4WD Transformers Service)”.

## **DESCRIPCIÓN DE LOS SUPUESTOS ESTUDIADOS**

A continuación se enumeran los supuestos prácticos en que se ha dividido el presente capítulo, mostrando las principales características que se dan en cada uno de ellos en cuanto a las potencias de desequilibrio se refiere.

Los supuestos prácticos planteados se han estructurado de la siguiente forma:

- Cargas individuales conectadas a una red a tres hilos y alimentadas con tensiones equilibradas. Se plantean cinco supuestos prácticos; los cuatro primeros (Supuestos del 1.1 al 1.4) corresponden a: carga en triángulo equilibrada (Supuesto 1.1), carga desequilibrada resistiva (Supuesto 1.2.), carga desequilibrada reactiva (Supuesto 1.3.) y carga desequilibrada activa y reactiva (Supuesto 1.4). El supuesto 1.5 corresponde a una carga desequilibra activa y reactiva conectada en estrella.

Al corresponder a cargas alimentadas con tensiones equilibradas, la Potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las intensidades ( $D_{ui}$ ) será igual a la potencia total de desequilibrio del sistema ( $D_{ui} = D_u$ ), no existiendo potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones ( $D_{uv}$ ).

- Cargas individuales conectadas a una red a tres hilos y alimentada con tensiones desequilibradas. Se plantean los mismos cinco supuestos prácticos descritos en el párrafo anterior (Supuestos del 2.1 al 2.5). En este caso considerando que las cargas están alimentadas con tensiones desequilibradas.

Al estar las cargas alimentadas con tensiones desequilibradas, en todos los supuestos, aún con cargas equilibradas (Supuesto 2.1), se producen potencias de desequilibrio, debidas a la asimetría de las intensidades ( $D_{ui}$ ), de las tensiones ( $D_{uv}$ ) y total del sistema ( $D_u$ ).

- Cargas desequilibradas en triángulo conectadas en paralelo a una red trifásica a tres hilos y alimentadas con tensiones desequilibradas. Se plantean cuatro supuestos de prácticos, los supuestos 3.1 y 3.2 corresponden a dos cargas en paralelo, considerando que la línea de suministro no tiene pérdidas, alimentadas con tensiones compuestas de 0,4 kV y 20 kV respectivamente. Los supuestos 3.3 y 3.4 responden a las mismas características, pero considerando que la línea de alimentación sí tiene pérdidas debidas a la impedancia propia de esta.

Se comprueba como las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) pueden ser determinadas en cualquier punto del sistema mediante la suma de los parámetros de desequilibrio “A, B, C y D” sin la necesidad de determinar circuitos equivalentes.

- Red de distribución trifásica a tres hilos con cargas desequilibradas conectadas en triángulo. Se plantea una red de distribución de cinco nodos, con cargas “PQ” desequilibradas conectadas en triángulo, alimentada a una tensión compuesta de 20 kV.

Se muestran los valores de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) así como el uso de los parámetros de desequilibrio descritos en los puntos anteriores.

- Aplicación práctica al comportamiento de un sistema eléctrico alimentado por un transformador tipo “High Leg Transformers (4WD). Se ha realizado un montaje de laboratorio, que simula un transformador del tipo “High Leg Transformers (4WD Transformers Service)” el cual suministra tensiones simples desequilibradas a una carga resistiva equilibrada conectada en estrella.

Se muestra como los valores obtenidos mediante el uso de la formulación aportada en la presente tesis es concordante con la medición de la potencia de desequilibrio obtenidos mediante el uso de un equipo de análisis de redes eléctricas “Fluke 435 Series II”.

A continuación se describen de forma más detallada los supuestos indicados en el punto anterior:

**Estudio de la potencias de desequilibrio para cargas individuales alimentadas con tensiones equilibradas:**

Al estar la carga alimentada por un sistema de tensiones equilibradas, la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las intensidades  $D_{ui}$  será igual a la potencia total de desequilibrio  $D_u$ .

Se describen cinco supuestos:

*Supuesto 1.1. Línea trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas (PQ) equilibradas conectadas en triángulo:*

Se muestra como bajo la condición de tensiones de alimentación equilibradas y cargas PQ equilibradas, el sistema está equilibrado y no origina ninguna potencia de desequilibrio.



Este supuesto constituye el caso ideal, en el cual el reparto de potencias en cada fase es igual entre ellas y no da lugar a potencias de desequilibrio en el sistema.

**Supuesto 1.2.** *Línea trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas (P) desequilibradas conectadas en triángulo:*

Se muestra como bajo la condición de tensiones de alimentación equilibradas y carga resistiva (P) desequilibrada, se origina una potencia de desequilibrio  $D_{ui}$  debida a las intensidades activas producidas por las componentes resistencias de la carga  $D_{ui_A}$ ; siendo la potencia de desequilibrio:  $\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p}$

**Supuesto 1.3.** *Línea trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas reactivas (Q) desequilibradas conectadas en triángulo:*

Se muestra como bajo la condición de tensiones de alimentación equilibradas y carga reactiva (Q) desequilibrada, se origina una potencia de desequilibrio  $D_{ui}$  debida a las intensidades reactivas producidas por las componentes reactivas (inductivas y/o capacitivas) de la carga  $D_{ui_R}$ ; siendo la potencia de desequilibrio  $\bar{D}_{ui} = D_{ui_R} \cdot \vec{q}$

**Supuesto 1.4.** *Línea trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas (PQ) desequilibradas conectadas en triángulo:*

Se muestra como bajo la condición de tensiones de alimentación equilibradas y carga con componentes activas y reactivas (PQ) desequilibradas, se origina una potencia de desequilibrio  $D_{ui}$  debida a ambas componentes de la carga (resistiva y reactiva inductivas y/o capacitiva); siendo la potencia de desequilibrio:  $\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$

**Supuesto 1.5.** *Línea trifásica a tres hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas (PQ) desequilibradas conectadas en estrella:*

Se muestra como bajo la condición de tensiones de alimentación equilibradas y carga con componentes activas y reactivas (PQ)

desequilibradas, se origina una potencia de desequilibrio  $D_{ui}$  debida a ambas componentes de la carga (resistivas y reactancias inductivas y/o capacitivas); siendo la potencia de desequilibrio  $\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$

La potencia de desequilibrio debida a intensidades producida por una carga conectada en estrella y alimentada por una red a tres hilos, se caracteriza por tener ambas componentes del desequilibrio ( $D_{ui_A}, D_{ui_R}$ ) el mismo valor y un ángulo de desequilibrio de  $45^\circ$ .

### **Estudio de las Potencias de Desequilibrio para cargas individuales alimentadas con tensiones desequilibradas:**

Al estar alimentadas por tensiones desequilibradas, se determinaran separadamente las potencia de desequilibrio debida a las intensidades  $D_{ui}$ , debida a la simetría de las tensiones  $D_{uv}$ , y total  $D_u$  del sistema.

Se describen cinco supuestos, en los cuales se muestran sus características en cuanto a las potencias de desequilibrio.

#### ***Supuestos 2.1 a 2.4 para el caso de una carga individual conectada en triángulo:***

En los supuestos del 2.1 al 2.4 se estudia una carga trifásica individual alimentada mediante una línea a tres hilos con tensiones desequilibradas.

Como en los supuestos anteriores (del 1.1 al 1.4), cada carga está caracterizada por sus componentes de PQ equilibrada, P desequilibrada, Q desequilibrada y PQ desequilibrada, respectivamente.

Se considera la transformación equivalente triángulo – estrella para que la potencia total aparente de desequilibrio sea igual en ambos casos según se expone en el punto 2.5.

Los cuatro supuestos de carga en triángulo, en lo relativo a potencias de desequilibrio, tienen los mismos efectos, así:

- Se muestra como bajo la condición de tensiones de alimentación desequilibradas y cargas activas y reactivas (PQ) tanto equilibradas como desequilibradas, el sistema se encuentra desequilibrado causado por la asimetría de las tensiones.
- Se origina una potencia de desequilibrio en las intensidades  $D_{ui}$  debida a ambas componentes de la carga (resistiva y reactiva), así la potencia de desequilibrio serán  $\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$ .
- Así mismos, la asimetría de las tensiones causa una potencia de desequilibrio  $D_{uv}$ , cuantificada por  $\bar{D}_{uv} = D_{uv_A} \cdot \vec{u} + D_{uv_R} \cdot \vec{v}$
- La Potencia de desequilibrio total del sistema será  $D_u$ .

*Supuesto 2.5 para el caso de una carga individual PQ en estrella:*

- Se muestra como bajo la condición de tensiones de alimentación desequilibradas y carga con componentes activas y reactivas (PQ) desequilibradas, se origina una potencia de desequilibrio  $D_{ui}$  debida a ambas componentes carga y la asimetría de las tensiones; siendo expresada por  $\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$ ; la cual se caracteriza por tener  $D_{ui_A}$  y  $D_{ui_R}$  el mismo valor y un ángulo de desequilibrio de  $45^\circ$ .
- Así mismo se produce una potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones  $D_{uv}$ , dando lugar a una potencia total de desequilibrio de la carga  $D_u$ .

### **Cargas en paralelo a tres hilos con tensiones desequilibradas:**

Se describen cuatro supuestos divididos de la siguiente forma:

*Supuestos 3.1 y 3.2 se consideran dos cargas en paralelo conectadas en triángulo alimentadas por una línea trifásica a tres hilos sin pérdidas de potencia ( $\bar{Z}_L = 0$ ).*

- Se muestra como la determinación de los desequilibrios totales del sistema ( $\bar{D}_{ui}$ ,  $\bar{D}_{uv}$  y  $\bar{D}_u$ ) son obtenidos mediante la suma de los parámetros de

desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ” de cada carga de forma individual, no siendo necesaria la determinación de una carga equivalente de ambas.

- Así mismo, dados los desequilibrios de corrientes y tensiones, se originan potencias de desequilibrio  $\bar{D}_{ui}$  y  $\bar{D}_{uv}$  debidas a las componentes activas y reactivas de las cargas.
- Se evidencia que las potencias totales aparentes de las cargas ( $S_I$ ) no son equivalentes a efectos de la determinación de las potencias de desequilibrio, difiriendo sus valores si son calculadas como estrella o triángulo. Para que la transformación de triángulo-estrella sea equivalente e incluya los fenómenos de desequilibrio se aplican las expresiones de transformación según se expone en el punto 2.5 para cada carga individual y total, las cuales son coincidentes con las determinadas directamente mediante la aplicación de la potencia de desequilibrio  $D_u$  basada en los parámetros “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ”.

*En los supuestos 3.3 y 3.4 se consideran dos cargas en paralelo conectadas en triángulo alimentadas por una línea trifásica a tres hilos con pérdidas de potencia debidas a la impedancia de la línea ( $\bar{Z}_L = R_L + j \cdot X_L$ ).*

- Se muestra como la determinación de los desequilibrios totales del sistema ( $\bar{D}_{ui}$ ,  $\bar{D}_{uv}$  y  $\bar{D}_u$ ) son obtenidos mediante la suma de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ” de cada carga y del tramo de línea de suministro de forma individual, no siendo necesaria la determinación de una carga equivalente global del circuito.
- Así mismo, dados los desequilibrios de corrientes y tensiones, se originan potencias de desequilibrio  $\bar{D}_{ui}$  y  $\bar{D}_{uv}$  debidas tanto a las componentes activas y reactivas de las cargas y como a la impedancia de suministro.

Para poner de manifiesto que las aportaciones descritas son válidas para cualquier nivel de tensión y resaltar las diferencias en cuanto a la potencia de desequilibrio debida a la asimetría de las tensiones  $D_{uv}$  se han considerado los supuestos 3.1 y 3.3 para una tensión de alimentación compuesta de 0.4 kV y los supuestos 3.2 y 3.4 para una tensión de 20 kV.

**Red de suministro trifásica a tres hilos de cinco nodos con tensiones desequilibradas y cargas activas y reactivas (PQ) desequilibradas conectadas en triángulo:**

Se considera una red de suministro radial a 20 kV, que parte de un nudo de referencia o slack con cuatro nudos de carga desequilibrada conectados en triángulo y alimentados mediante una línea de suministro trifásica a tres hilos en la cual se consideran las pérdidas de potencia debidas a su impedancia característica ( $\bar{Z}_L = R_L + j \cdot X_L$ ).

Se muestran los resultados de los flujos de potencia de la red, mediante los valores de las tensiones nodales y de las corrientes circulantes por cada tramo de línea, los cuales han sido determinados mediante el software de cálculo RDAP [36] empleado en los “Test feeders” para sistemas radiales incluidos en la IEEE [45].

Con el uso de los datos obtenidos se determinan los valores de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” debidos a las cargas y a los tramos de la red de suministro. A partir de los cuales se determinan las potencias de desequilibrio debidas a intensidades  $D_{ui}$ , debidas a las tensiones  $D_{uv}$  y totales  $D_u$  en cada punto de la red; mostrándose de forma completa las aportaciones descritas en el presente trabajo.

Se describe el uso de los parámetros de desequilibrio, mostrándose como pueden ser determinados los desequilibrios en cada elemento de carga y tramo de la red, permitiendo cuantificar la totalidad de los fenómenos de desequilibrio del sistema en cualquier punto sin la necesidad de reducción a un circuito equivalente en el punto de estudio.

**Aplicación práctica del comportamiento de un sistema eléctrico alimentado por un transformador del tipo “High Leg Transformers (4WD):**

Se ha realizado un montaje de laboratorio, mediante el uso de tres autotransformadores monofásicos que simulan un transformador trifásico del tipo “High Leg Transformers (4WD Transformers Service)”, el cual suministra tensiones simples desequilibradas a una carga resistiva equilibrada conectada en estrella.

Se muestra como los valores obtenidos mediante el uso de la formulación aportada en la presente tesis es concordante con la medición de la potencia de desequilibrio de intensidades obtenidos mediante el uso de un equipo de análisis de redes eléctricas “Fluke 435 Series II”.

La empresa “Fluke Electronics Corporation” patrocina la “Teoría de las Potencias UPM (Unified Power Measurement)” e incorpora la medición de la potencia de desequilibrio mediante la implementación de la UPM, el valor de la cual es coincidente con el valor de la “Potencia total de Desequilibrio ( $\overline{D}_u$ )” aportada de este trabajo.

## 4.2. CARGAS INDIVIDUALES A TRES HILOS ALIMENTADAS CON TENSIONES EQUILIBRADAS

### 4.2.1. Cargas conectadas en triángulo.

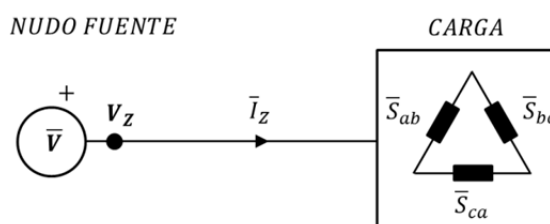
#### Supuesto nº 1.1: Red trifásica a 3 hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) equilibradas conectadas en triángulo

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas equilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\bar{V}_{ab} = 400 \cdot e^{0j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{bc} = 400 \cdot e^{-120j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{ca} = 400 \cdot e^{120j} \text{ V}$$



y unas potencias equilibradas de las cargas conectadas en triángulo de:

$$\bar{S}_{ab} = \bar{S}_{bc} = \bar{S}_{ca}$$

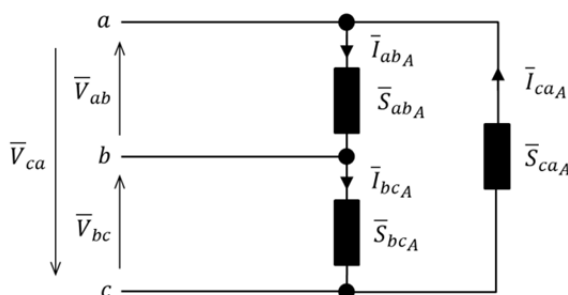
$$\bar{S}_{ab} = 4600 + j \cdot 500 \text{ VA}$$

Las intensidades de fase que circulan en el interior de la carga tienen los siguientes valores:

$$\bar{I}_{ab} = 11.568 \cdot e^{-6.203j} \text{ A}$$

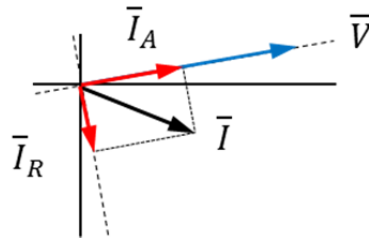
$$\bar{I}_{bc} = 11.568 \cdot e^{-126.203j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{ca} = 11.568 \cdot e^{113.797j} \text{ A}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50) obtenidas mediante la aplicación de la 1ª ley de Kirchhoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46), y reactivas según (2.47), de las corrientes de fase que circulan en la carga determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las correspondientes potencias activas y reactivas determinadas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43), así:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= 20.036 \cdot e^{-36.203j} \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 20.036 \cdot e^{-156.203j} \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 20.036 \cdot e^{83.797j} \text{ A}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{I}_{aA} &= 19.919 \cdot e^{-30.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bA} &= 19.919 \cdot e^{-150.0} \text{ A} \\ \bar{I}_{cA} &= 19.919 \cdot e^{90.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{aR} &= 2.165 \cdot e^{-120.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bR} &= 2.165 \cdot e^{120j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cR} &= 2.165 \cdot e^{0.0j} \text{ A}\end{aligned}$$

Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ), (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva no han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones y las cargas son equilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\begin{aligned}\bar{S}_A &= (4600 + 4600 + 4600) + j \cdot (0 + 0 + 0) = 13800 + j \cdot 0 \text{ VA} \\ \bar{S}_R &= (0 + 0 + 0) + j \cdot (500 + 500 + 500) = 0 + j \cdot 1500 \text{ VA} \\ \bar{S}_+ &= 3 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot e^{-30.0j} \cdot 20.036 \cdot e^{-36.203j*} = 13800 + j \cdot 1500 \text{ VA}\end{aligned}$$

donde:

- Los valores imaginarios ( $Q''$ ) de la potencia activa  $\bar{S}_A$ , y reales ( $P''$ ) de la potencia reactiva  $\bar{S}_R$ , son nulos.
- El reparto de la potencia aparente positiva de cada línea ( $P_+; Q_+$ ), en el caso de cargas y tensiones equilibradas, se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P-Q$ ) de la carga.

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las



corrientes activas  $D_{ui_A}$  y a las corrientes reactivas  $D_{ui_R}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$$

- $D_{ui_A}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_A} &= A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b} \\ D_{ui_A} &= \sqrt{A^2 + B^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$\begin{aligned}A &= 0 \\ B &= 0 \\ D_{ui_A} &= 0\end{aligned}$$

Los valores de las variables  $D_{ui_A}$ ,  $A$  y  $B$  son nulos cuando las potencias activas de las cargas se encuentran equilibradas.

- $D_{ui_R}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_R} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{ui_R} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$\begin{aligned}C &= 0 \\ D &= 0 \\ D_{ui_R} &= 0\end{aligned}$$

Los valores de las variables  $D_{ui_R}$ ,  $C$  y  $D$  son nulos cuando las potencias reactivas de las cargas se encuentran equilibradas.

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\overline{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71) es:

$$\overline{D}_{ui} = 0 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} = 0$$

Cuando las tensiones y las cargas están equilibradas, la potencia de asimetría debida a las cargas ( $D_{ui}$ ) es nula.

**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\overline{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , (3.11):

$$\overline{D}_{uv} = D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v}$$

siendo nulos los valores de cada parámetro según (3.12) debido a que las tensiones y las cargas están equilibradas:

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0 & D_{uvA} &= 0 \\ \delta_0 &= 0 & D_{uvR} &= 0 \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0 & \overline{D}_{uv} &= 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

**c) Potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\vec{p}$ ,  $\vec{q}$ ).

$$\overline{D}_u = D_{ui} \cdot \vec{p} + D_{uv} \cdot \vec{q}$$

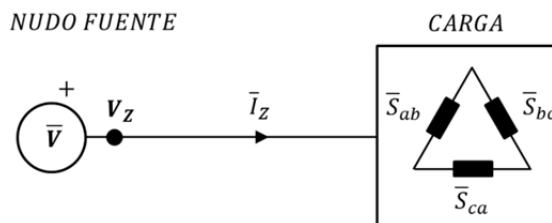
En el caso particular de tensiones equilibradas la potencia total de desequilibrio es igual a la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\overline{D}_u = \overline{D}_{ui}$ ), así el valor fasorial del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) será:

$$\begin{aligned} \overline{D}_u &= 0 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} \\ \overline{D}_u &= 0 \cdot e^{0j} \end{aligned}$$

**Supuesto n° 1.2: Línea trifásica a 3 hilos con tensiones equilibradas y cargas activas ( $P$ ) desequilibradas conectadas en triángulo**

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas equilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ab} &= 400 \cdot e^{0j} \text{ V} \\ \bar{V}_{bc} &= 400 \cdot e^{-120j} \text{ V} \\ \bar{V}_{ca} &= 400 \cdot e^{120j} \text{ V}\end{aligned}$$

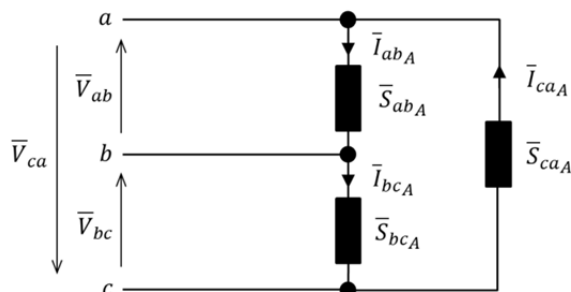


y unas potencias desequilibradas de las cargas de tipo resistivo conectadas en triángulo de:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ab} &= 4600 + j \cdot 0 \text{ VA} \\ \bar{S}_{bc} &= 7200 + j \cdot 0 \text{ VA} \\ \bar{S}_{ca} &= 3000 + j \cdot 0 \text{ VA}\end{aligned}$$

Las intensidades de fase activas que circulan en el interior de la carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{ab} &= 11.500 \cdot e^{-0j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bc} &= 18.00 \cdot e^{-120.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{ca} &= 7.50 \cdot e^{120.00j} \text{ A}\end{aligned}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50) obtenidas mediante la aplicación de la 1° ley de Kirchhoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46), y reactivas según (2.47), de las corrientes de fase que circulan en la carga determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las correspondientes potencias activas y reactivas determinadas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43), así:

$$\begin{array}{l}
 \bar{I}_a = 16.756 \cdot e^{-23.070j} \text{ A} \\
 \bar{I}_b = 25.754 \cdot e^{-142.750j} \text{ A} \\
 \bar{I}_c = 22.699 \cdot e^{76.627j} \text{ A}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{c}
 \bar{I} = \bar{I}_A \quad \bar{V} \\
 \text{Diagrama de fasores: un eje horizontal real y un eje vertical imaginario. Una línea roja apunta hacia el cuadrante superior derecho, etiquetada como } \bar{I} = \bar{I}_A. \text{ Una línea azul apunta hacia el cuadrante superior izquierdo, etiquetada como } \bar{V}.
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \bar{I}_{aA} = 16.756 \cdot e^{-23.070j} \text{ A} \\
 \bar{I}_{bA} = 25.754 \cdot e^{-142.750j} \text{ A} \\
 \bar{I}_{cA} = 22.699 \cdot e^{76.627j} \text{ A}
 \end{array}$$

Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ), (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva no han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son equilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_A &= \frac{(3800 + 5900 + 5100)}{\Sigma P'} + j \cdot \frac{(-461.880 - 750.555 + 1212.436)}{\Sigma Q''} = 14800 + j \cdot 0 \text{ VA} \\
 \bar{S}_R &= 0 \\
 \bar{S}_+ &= 3 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot e^{-30.0j} \cdot 21.362 \cdot e^{-30.0j*} = 14800 + j \cdot 0 \text{ VA}
 \end{aligned}$$

donde:

- Al considerar las corrientes activas de  $\bar{S}_A$ , la suma de valores imaginarios  $Q''_+$  es nula.
- La potencia aparente reactiva es nula debido a que no existen cargas reactivas y las tensiones compuestas son equilibradas.
- El reparto de la potencia aparente positiva de cada línea ( $P_+$ ;  $Q_+$ ), en el caso de tensiones equilibradas, se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P$ - $Q$ ) de la carga.

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las

corrientes activas  $D_{ui_A}$  y a las corrientes reactivas  $D_{ui_R}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$$

- $D_{ui_A}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_A} &= A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b} \\ D_{ui_A} &= \sqrt{A^2 + B^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = [10748.023 - 8343.560 - 7212.489] = -4808.326 \quad VA$$

$$B = [0 - 14451.989 + 12492.398] = -1959.592 \quad VA$$

$$\bar{D}_{ui_A} = -4808.326 \cdot \vec{a} - 1959.529 \cdot \vec{b} \quad VA$$

$$D_{ui_A} = 5192.302 \quad VA$$

- $D_{ui_R}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_R} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{ui_R} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$C = 0$$

$$D = 0$$

$$D_{ui_R} = 0$$

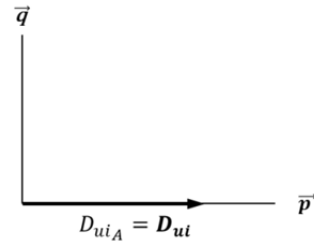
Los valores de las variables  $D_{ui_R}, C$  y  $D$  son nulos cuando las potencias reactivas de las corrientes de componente reactiva son nulas.

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71) es:

$$\bar{D}_{ui} = 5192.302 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} = 5192.302 \text{ VA}$$

$$D_{ui} = 5192.302 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui}} = 0$$



**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , (3.11):

$$\bar{D}_{uv} = D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v}$$

siendo nulos los valores de cada parámetro (3.12) debido a que las tensiones están equilibradas:

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0 \\ \delta_0 &= 0 \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D_{uvA} &= 0 \\ D_{uvR} &= 0 \\ \bar{D}_{uv} &= 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\vec{p}, \vec{q}$ ).

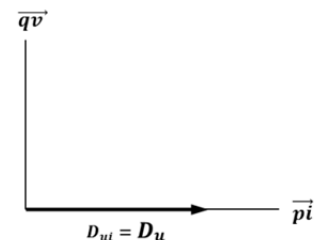
$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \vec{p} + D_{uv} \cdot \vec{q}$$

En el caso particular de tensiones equilibradas la potencia total de desequilibrio es igual a la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_u = \bar{D}_{ui}$ ), así el valor fasorial del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) será:

$$\bar{D}_u = 5192.302 \cdot \vec{p} + 0 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_u = 5192.302 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_u} = 0$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

$$S_{1(\Delta)} = 15684.39 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 15248.61 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$S_1 = 15684.39 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui} = D_u$ ) basadas en los parámetros "A, B, C y D" según se expone en el Capítulos 2, siendo:

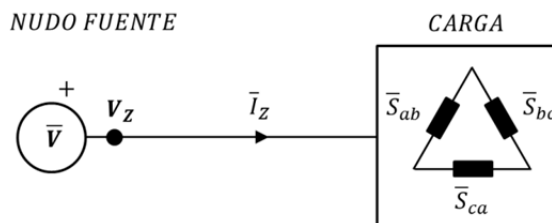
$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

$$S_1 = \sqrt{14800^2 + 5192.30^2} = 15684.39 \text{ VA}$$

**Supuesto n° 1.3: Red trifásica a 3 hilos con tensiones equilibradas y cargas reactivas ( $Q$ ) desequilibradas conectadas en triángulo**

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas equilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ab} &= 400 \cdot e^{0j} \text{ V} \\ \bar{V}_{bc} &= 400 \cdot e^{-120j} \text{ V} \\ \bar{V}_{ca} &= 400 \cdot e^{120j} \text{ V}\end{aligned}$$

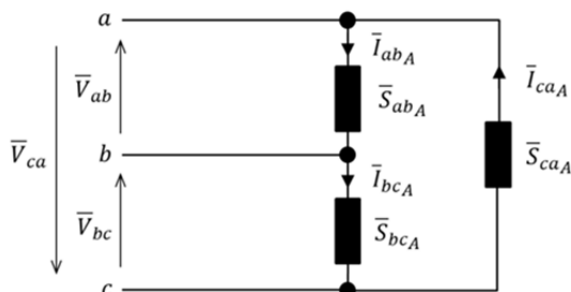


y unas potencias reactivas desequilibradas de las cargas de tipo inductivo conectadas en triángulo de:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ab} &= 0 + j \cdot 5000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{bc} &= 0 + j \cdot 8000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{ca} &= 0 + j \cdot 4500 \text{ VA}\end{aligned}$$

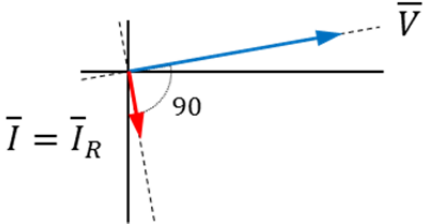
Las intensidades de fase reactivas ( $\bar{I} = \bar{I}_R$ ) que circulan en el interior de la carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{ab} &= 12.50 \cdot e^{-90j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bc} &= 20.00 \cdot e^{-150.0j} \text{ A} \\ \bar{I}_{ca} &= 11.25 \cdot e^{30.0j} \text{ A}\end{aligned}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50) obtenidas mediante la aplicación de la 1° ley de Kirchhoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46), y reactivas según (2.47), de las corrientes de fase que circulan en la carga determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las correspondientes potencias activas y reactivas determinadas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43), así:



$$\begin{aligned}
 \bar{I}_a &= 20.578 \cdot e^{-118.259j} \text{ A} \\
 \bar{I}_b &= 28.395 \cdot e^{127.589j} \text{ A} \\
 \bar{I}_c &= 27.415 \cdot e^{-9.183j} \text{ A}
 \end{aligned}$$


$$\begin{aligned}
 \bar{I}_{aR} &= 20.578 \cdot e^{-118.259j} \text{ A} \\
 \bar{I}_{bR} &= 28.395 \cdot e^{127.589j} \text{ A} \\
 \bar{I}_{cR} &= 27.415 \cdot e^{-9.183j} \text{ A}
 \end{aligned}$$

Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ), (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva no han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son equilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\begin{aligned}
 \bar{S}_A &= 0 \\
 \bar{S}_R &= \frac{(144.338 + 826.025 - 1010.363)}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{(4750 + 6500 + 6250)}{\Sigma Q'} = 0 + j \cdot 17500 \text{ VA} \\
 \bar{S}_+ &= 3 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot e^{-30.0j} \cdot 25.259 \cdot e^{-120.0j^*} = 0 + j \cdot 17500 \text{ VA}
 \end{aligned}$$

donde:

- Al considerar las corrientes reactivas de  $\bar{S}_R$ , la suma de valores reales  $P''_+$  es nula.
- La potencia aparente activa es nula debido a que no existen cargas activas y las tensiones compuestas son equilibradas.
- El reparto de la potencia aparente positiva de cada línea ( $P_+; Q_+$ ), en el caso de tensiones equilibradas, se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P-Q$ ) de la carga.

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{ui_A}$  y a las corrientes reactivas  $D_{ui_R}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$$

- $D_{ui_A}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{ui_A} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{ui_A} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = 0$$

$$B = 0$$

$$\bar{D}_{ui_A} = 0$$

Los valores de las variables  $D_{ui_A}$ ,  $A$  y  $B$  son nulos cuando las potencias activas de las cargas se encuentran equilibradas o son nulas.

- $D_{ui_R}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\bar{D}_{ui_R} = D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c}$$

$$D_{ui_R} = \sqrt{D^2 + C^2}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$D = [408.248 - 1224.745 + 1428.869] = 612.372 \text{ VA}$$

$$C = [0 - 2121.320 - 2474.874] = -4596.194 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{ui_R} = 612.372 \cdot \vec{d} - 4596.194 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

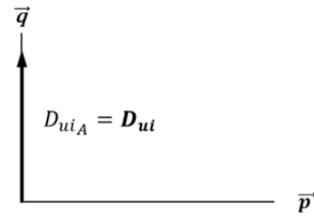
$$D_{ui_R} = 4636.809 \text{ VA}$$

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\overline{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71) es:

$$\overline{D}_{ui} = 0 \cdot \vec{p} + 4636.809 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui} = 4636.809 \quad VA$$

$$\theta_{D_{ui}} = 90$$



**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\overline{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , (3.11):

$$\overline{D}_{uv} = D_{uv_A} \cdot \vec{u} + D_{uv_R} \cdot \vec{v}$$

siendo nulos los valores de cada parámetro (3.12) debido a que las tensiones están equilibradas:

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0 & D_{uv_A} &= 0 \\ \delta_0 &= 0 & D_{uv_R} &= 0 \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0 & \overline{D}_{uv} &= 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

**c) Potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\vec{p}_i, \vec{q}_v$ ).

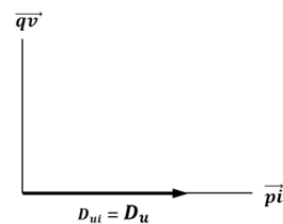
$$\overline{D}_u = D_{ui} \cdot \vec{p}_i + D_{uv} \cdot \vec{q}_v$$

En el caso particular de tensiones equilibradas la potencia total de desequilibrio es igual a la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\overline{D}_u = \overline{D}_{ui}$ ), así el valor fasorial del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) será:

$$\overline{D}_u = 4636.809 \cdot \vec{p}_i + 0 \cdot \vec{q}_v \quad VA$$

$$D_u = 4636.809 \quad VA$$

$$\theta_{D_u} = 0$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

$$S_{1(\Delta)} = 18103.87 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 17804.49 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$S_1 = 18103.87 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui} = D_u$ ) basadas en los parámetros "A, B, C y D" según se expone en el Capítulos 2, siendo:

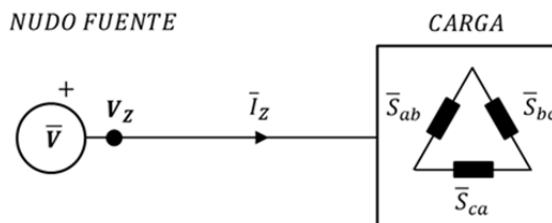
$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

$$S_1 = \sqrt{17500^2 + 4636.81^2} = 18103.87 \text{ VA}$$

**Supuesto nº 1.4: Red trifásica a 3 hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo**

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas equilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ab} &= 400 \cdot e^{0j} \text{ V} \\ \bar{V}_{bc} &= 400 \cdot e^{-120j} \text{ V} \\ \bar{V}_{ca} &= 400 \cdot e^{120j} \text{ V}\end{aligned}$$

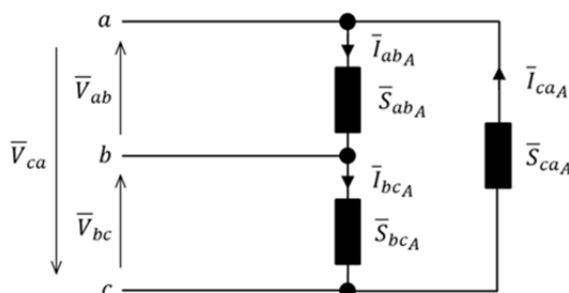


y unas potencias aparentes de las cargas desequilibradas conectadas en triángulo de:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ab} &= 4600 + j \cdot 5000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{bc} &= 7200 + j \cdot 8000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{ca} &= 3000 + j \cdot 4500 \text{ VA}\end{aligned}$$

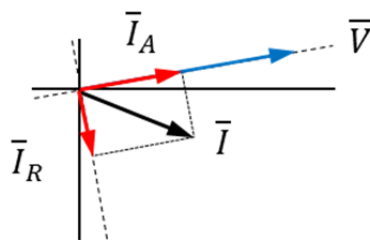
Las intensidades de fase que circulan en el interior de la carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{ab} &= 16.985 \cdot e^{-47.386j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bc} &= 26.907 \cdot e^{-168.013j} \text{ A} \\ \bar{I}_{ca} &= 13.521 \cdot e^{63.69j} \text{ A}\end{aligned}$$



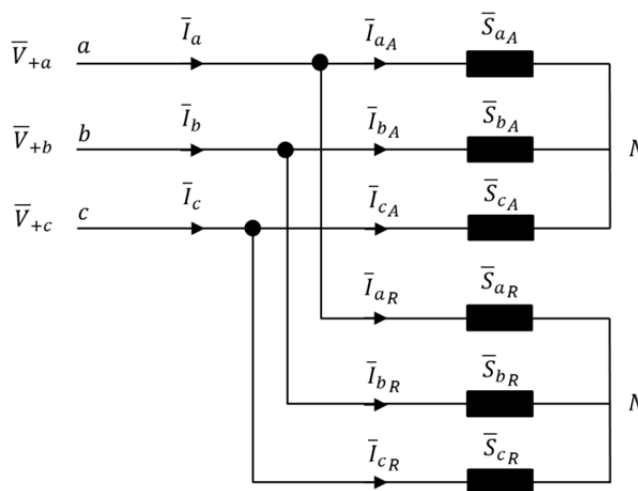
Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50) obtenidas mediante la aplicación de la 1º ley de Kirchhoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46), y reactivas según (2.47), de las corrientes de fase que circulan en la carga determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las correspondientes potencias activas y reactivas determinadas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43), así:

$$\begin{aligned} \bar{I}_a &= 25.229 \cdot e^{-77.391j} \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 38.447 \cdot e^{169.644j} \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 36.848 \cdot e^{28.724j} \text{ A} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \bar{I}_{aA} &= 16.576 \cdot e^{-23.070j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bA} &= 25.754 \cdot e^{-142.750j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cA} &= 22.699 \cdot e^{76.627j} \text{ A} \\ \bar{I}_{aR} &= 20.578 \cdot e^{-118.259j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bR} &= 28.395 \cdot e^{127.589j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cR} &= 27.415 \cdot e^{-9.183j} \text{ A} \end{aligned}$$

La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella a una carga en triángulo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar  $(\bar{I}_Z = \bar{I}_{ZA} + \bar{I}_{ZR})$ , (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa  $(\bar{I}_{ZA})$  y reactiva  $(\bar{I}_{ZR})$  de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva no han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son equilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas  $(\bar{S}_A)$  y reactivas  $(\bar{S}_R)$ , considerando las tensiones simples positivas  $(\bar{V}_{+a})$  y las intensidades de línea  $(\bar{I}_{a,b,c})$  según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\bar{S}_A = \frac{(3800 + 5900 + 5100)}{\Sigma P'} + j \cdot \frac{(-461.8800 - 750.555 + 1212.436)}{\Sigma Q''=0} = 14800 + j \cdot 0 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_R = \frac{(144.338 + 826.025 - 1010.363)}{\Sigma P''=0} + j \cdot \frac{(4750 + 6500 + 6250)}{\Sigma Q'} = 0 + j \cdot 17500 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot e^{-30.0j} \cdot 33.081 \cdot e^{-79.778j^*} = 14800 + j \cdot 17500 \text{ VA}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P', P''; Q', Q''$ ), en el caso de tensiones equilibradas y cargas desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P-Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\Sigma P'_z = P_+ ; \Sigma Q'_z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{uiA}$  y a las corrientes reactivas  $D_{uiR}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q}$$

- $D_{uiA}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{uiA} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{uiA} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = [10748.023 - 8343.860 - 7212.489] = -4808.326 \text{ VA}$$

$$B = [0 - 14451.989 + 12492.398] = -1959.592 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiA} = -4808.326 \cdot \vec{a} - 1959.529 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{uiA} = 5192.302 \text{ VA}$$

- $D_{uiR}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uiR} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{uiR} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$D = [408.248 - 1224.745 + 1428.869] = -612.372 \text{ VA}$$

$$C = [0 - 2121.320 - 2474.874] = -4596.194 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiR} = -612.372 \cdot \vec{d} - 4596.194 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

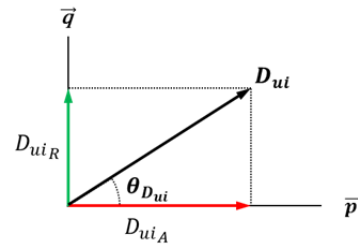
$$D_{uiR} = 4636.809 \text{ VA}$$

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71) es:

$$\bar{D}_{ui} = 5192.302 \cdot \vec{p} + 4636.809 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui} = 6961.322 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui}} = 41.765$$



**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , (3.11):

$$\bar{D}_{uv} = D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v}$$

siendo nulos los valores de cada parámetro (3.12) debido a que las tensiones están equilibradas:

$$\begin{aligned}\delta_- &= 0 & D_{uvA} &= 0 \\ \delta_0 &= 0 & D_{uvR} &= 0 \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0 & \bar{D}_{uv} &= 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v}\end{aligned}$$



**c) Potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\overline{p\hat{i}}, \overline{q\hat{v}}$ ).

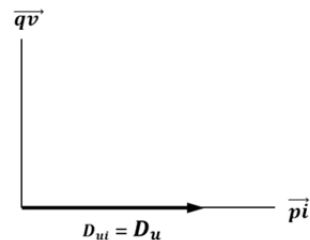
$$\overline{D}_u = D_{ui} \cdot \overline{p\hat{i}} + D_{uv} \cdot \overline{q\hat{v}}$$

En el caso particular de tensiones equilibradas la potencia total de desequilibrio es igual a la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\overline{D}_u = \overline{D}_{ui}$ ), así el valor fasorial del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) será:

$$\overline{D}_u = 6961.322 \cdot \overline{p\hat{i}} + 0 \cdot \overline{q\hat{v}} \quad VA$$

$$D_u = 6961.322 \quad VA$$

$$\theta_{D_u} = 0$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

$$S_{1(\Delta)} = 23953.08 \quad VA$$

$$S_{1(Y)} = 23570.79 \quad VA$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los

fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$S_1 = 23953.08 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui} = D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

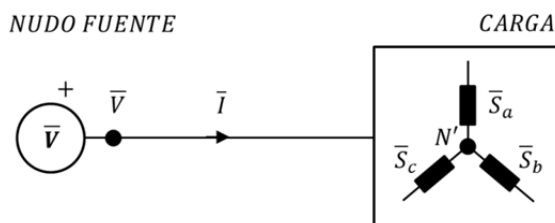
$$S_1 = \sqrt{22919.21^2 + 6961.32^2} = 23953.08 \text{ VA}$$

### 4.2.2. Cargas conectadas en estrella

#### Supuesto nº 1.5: Red trifásica a 3 hilos con tensiones equilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en estrella

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas equilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_a &= 230 \cdot e^{0j} \text{ V} \\ \bar{V}_b &= 230 \cdot e^{-120j} \text{ V} \\ \bar{V}_c &= 230 \cdot e^{120j} \text{ V}\end{aligned}$$



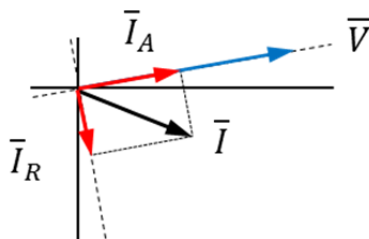
y unas potencias aparentes de las cargas desequilibradas conectadas en triángulo de:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ab} &= 4600 + j \cdot 5000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{bc} &= 7200 + j \cdot 8000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{ca} &= 3301.92 + j \cdot 8751.67 \text{ VA}\end{aligned}$$

Las intensidades de fase que circulan en por la carga y la línea según las expresiones (3.30) y (3.32) tienen los siguientes valores:

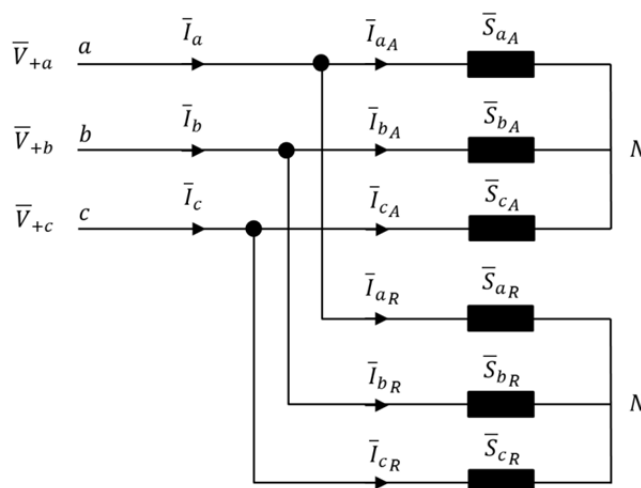
Las componentes activas ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las corrientes de línea deben cumplir  $\Sigma \bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R} = 0$ ; determinadas según las expresiones (3.30) y (3.32) considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+a}$ ), y las correspondientes potencias activas y reactivas según la expresión (2.43) ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43). Tendrán los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= 29.540 \cdot e^{-47.386j} \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 46.795 \cdot e^{-168.013j} \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 40.669 \cdot e^{50.671j} \text{ A}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{I}_{aA} &= 20.000 \cdot e^{-0.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bA} &= 31.304 \cdot e^{-120.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cA} &= 14.356 \cdot e^{120.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{aR} &= 21.739 \cdot e^{-90.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bR} &= 34.783 \cdot e^{-210.00j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cR} &= 38.051 \cdot e^{30.00j} \text{ A}\end{aligned}$$

La figura siguiente representa el esquema de una carga en estrella, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 3.5.1.



Considerando que los valores de las intensidades de línea permanecen fijos y han de verificar ( $\sum \bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R} = 0$ ), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva no han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son equilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\bar{S}_A = \frac{(4600 + 7200 + 3301.924)}{\Sigma P'} + j \cdot \frac{(0 + 0 + 0)}{\Sigma Q''=0} = 15101.924 + j \cdot 0 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_R = \frac{(0 + 0 + 0)}{\Sigma P''=0} + j \cdot \frac{(5000 + 8000 + 8751.666)}{\Sigma Q'} = 0 + j \cdot 21751.666 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \frac{400}{\sqrt{3}} \cdot e^{-0.0j} \cdot 38.377 \cdot e^{-55.228j^*} = 15101.924 + j \cdot 21751.666 \text{ VA}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones equilibradas y cargas desequilibradas se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P-Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria igual de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\Sigma P'_Z = P_+$  ;  $\Sigma Q'_Z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{ui_A}$  y a las corrientes reactivas  $D_{ui_R}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$$

- $D_{ui_A}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_A} &= A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b} \\ D_{ui_A} &= \sqrt{A^2 + B^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = [6505.382 - 5091.169 - 2334.813] = -920.599 \text{ VA}$$

$$B = [0 - 8818.163 + 4044.014] = -4774.149 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{ui_A} = -920.599 \cdot \vec{a} - 4774.149 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui_A} = 4862.098 \text{ VA}$$

- $D_{ui_R}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_R} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{ui_R} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$D = [0 - 9797.959 - 10718.558] = -920.599 \text{ VA}$$

$$C = [7071.068 - 56656.854 - 6188.362] = -4774.149 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{ui_R} = -920.599 \cdot \vec{d} - 4774.149 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

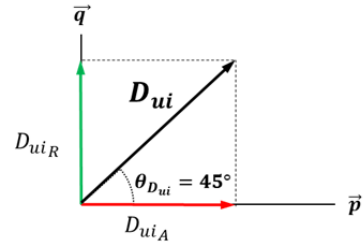
$$D_{ui_R} = 4862.098 \text{ VA}$$

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (3.35) es:

$$\bar{D}_{ui} = 4862.098 \cdot \vec{p} + 4862.098 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui} = 6876.045 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui}} = 45$$



Se constata que, en conexión estrella, la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas ( $\bar{D}_{ui_A}$ ) y la debida a las corrientes reactivas ( $\bar{D}_{ui_R}$ ), tienen el mismo valor en módulo y por tanto el ángulo de desfase de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes es de  $45^\circ$ , según lo expuesto en el punto 3.5.2 apartado a).

**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , (3.11):

$$\bar{D}_{uv} = D_{uv_A} \cdot \vec{u} + D_{uv_R} \cdot \vec{v}$$

siendo nulos los valores de cada parámetro (3.12) debido a que las tensiones están equilibradas:

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0 & D_{uv_A} &= 0 \\ \delta_0 &= 0 & D_{uv_R} &= 0 \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0 & \bar{D}_{uv} &= 0 \cdot \vec{u} + 0 \cdot \vec{v} \end{aligned}$$

**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\vec{p}, \vec{q}$ ).

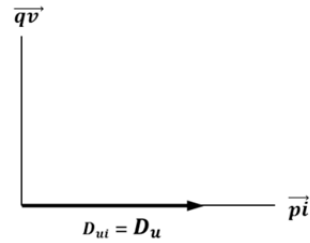
$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \vec{p} + D_{uv} \cdot \vec{q}$$

En el caso particular de tensiones equilibradas la potencia total de desequilibrio es igual a la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\overline{D}_u = \overline{D}_{ui}$ ), así el valor fasorial del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) será:

$$\overline{D}_u = 6876.045 \cdot \overline{p\vec{i}} + 0 \cdot \overline{q\vec{v}} \quad VA$$

$$D_u = 6876.045 \quad VA$$

$$\theta_{D_u} = 0$$



### 4.3. CARGAS INDIVIDUALES A TRES HILOS ALIMENTADAS CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS

#### 4.3.1. Cargas conectadas en triángulo.

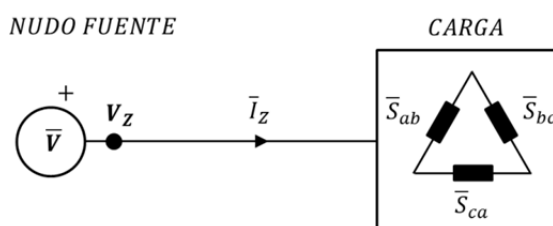
**Supuesto nº 2.1: Red trifásica a 3 hilos con tensiones desequilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) equilibradas conectadas en triángulo**

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas desequilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\bar{V}_{ab} = 400 \cdot e^{0j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{bc} = 365 \cdot e^{-120j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{ca} = 383.699 \cdot e^{124.5310j} \text{ V}$$



y unas potencias aparentes de las cargas equilibradas conectadas en triángulo de:

$$\bar{S}_{ab} = \bar{S}_{bc} = \bar{S}_{ca}$$

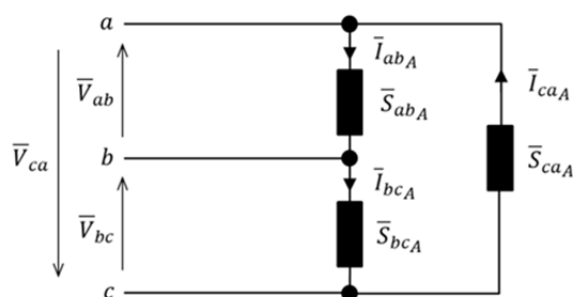
$$\bar{S}_{ab} = 4600 + j \cdot 500 \text{ VA}$$

Las intensidades de fase que circulan en el interior de la carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$$\bar{I}_{ab} = 11.568 \cdot e^{-6.203j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{bc} = 12.677 \cdot e^{-126.203j} \text{ A}$$

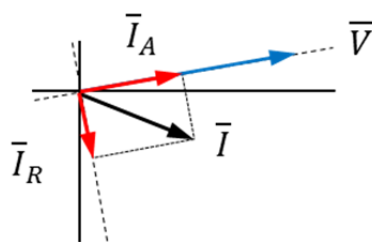
$$\bar{I}_{ca} = 12.059 \cdot e^{118.327j} \text{ A}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50) obtenidas mediante la aplicación de la 1ª ley de Kirchhoff sobre las respectivas componentes activas, según (2.46), y reactivas, según (2.47), de las corrientes de fase que circulan en la carga determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las potencias activas y reactivas determinadas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43); así:

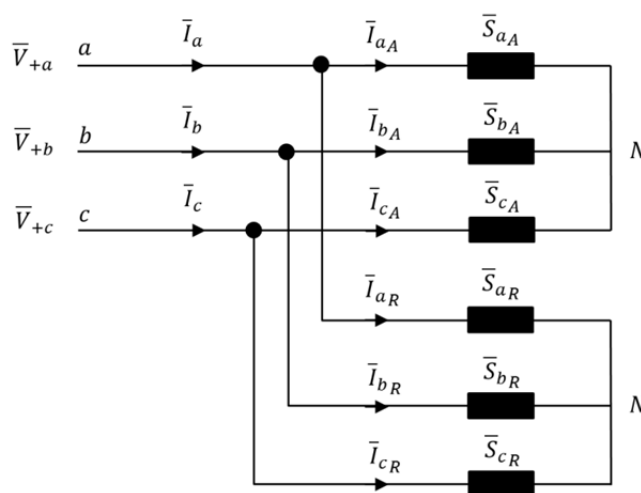


$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= 20.914 \cdot e^{-34.565j} \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 21.004 \cdot e^{-154.690j} \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 20.919 \cdot e^{85.159j} \text{ A}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{I}_{aA} &= 20.357 \cdot e^{-29.300j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bA} &= 20.814 \cdot e^{-146.974j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cA} &= 21.308 \cdot e^{90.812j} \text{ A} \\ \bar{I}_{aR} &= 1.975 \cdot e^{-105.572j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bR} &= 2.820 \cdot e^{123.026j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cR} &= 2.118 \cdot e^{-12.586j} \text{ A}\end{aligned}$$

La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella a una carga en triángulo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar  $(\bar{I}_Z = \bar{I}_{ZA} + \bar{I}_{ZR})$ , (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa  $(\bar{I}_{ZA})$  y reactiva  $(\bar{I}_{ZR})$  de las intensidades de línea debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas  $(\bar{S}_A)$  y reactivas  $(\bar{S}_R)$ , considerando las tensiones simples positivas  $(\bar{V}_{+a})$  y las intensidades de línea  $(\bar{I}_{a,b,c})$  según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\begin{aligned}\bar{S}_A &= \frac{(4496.616 + 4596.414 + 4706.910)}{\Sigma P'} + j \cdot \frac{(63.795 - 121.413 + 57.618)}{\Sigma Q''=0} \\ &= 13799.940 + j \cdot 0 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_R &= \frac{(97.542 + 16.451 - 113.993)}{\Sigma P''=0} + j \cdot \frac{(425.369 + 622.811 + 453.863)}{\Sigma Q'} \\ &= 0 + j \cdot 1502.044 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot 220.914 \cdot e^{-28.487j} \cdot 20.946 \cdot e^{-34.699j^*} = 13799.940 + j \cdot 1502.044 \text{ VA}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P$ - $Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\Sigma P'_Z = P_+$  ;  $\Sigma Q'_Z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{uiA}$  y a las corrientes reactivas  $D_{uiR}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q}$$

- $D_{uiA}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{uiA} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{uiA} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = [12718.352 - 6500.311 - 6656.576] = -438.535 \text{ VA}$$

$$B = [0 - 11258.869 + 11529.528] = 270.659 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiA} = -438.535 \cdot \vec{a} + 270.659 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{uiA} = 515.334 \text{ VA}$$

- $D_{uiR}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “C y D” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uiR} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{uiR} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros C y D según (2.59) son:

$$D = [275.891 - 23.266 + 166.211] = 413.836 \text{ VA}$$

$$C = [0 - 40.298 - 279.226] = -319.523 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiR} = 413.836 \cdot \vec{d} - 319.523 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

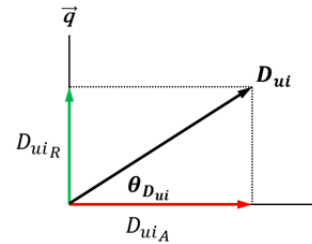
$$D_{uiR} = 522.834 \text{ VA}$$

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71) es:

$$\bar{D}_{ui} = 515.334 \cdot \vec{p} + 522.834 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui} = 734.115 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui}} = 45.414$$



**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right]\end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro (3.12) debidos a las tensiones están desequilibradas:

$$\delta_- = 0.053$$

$$\delta_0 = 0.000$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 0.053$$

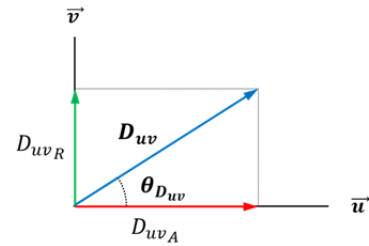
$$D_{uvA} = 729.297 \text{ VA}$$

$$D_{uvR} = 83.993 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uv} = 729.297 \cdot \bar{u} + 83.993 \cdot \bar{v} \text{ VA}$$

$$D_{uv} = 734.118 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{uv}} = 6.570$$



**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\bar{p}i, \bar{q}v$ ).

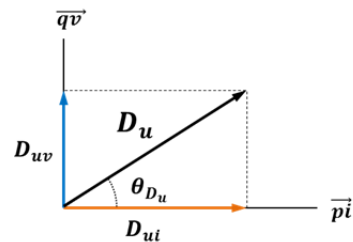
$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \bar{p}i + D_{uv} \cdot \bar{q}v$$

El valor fasorial del desequilibrio total (3.13) y (3.14) será:

$$\bar{D}_u = 734.115 \cdot \bar{p}i + 734.118 \cdot \bar{q}v$$

$$D_u = 1038.197$$

$$\theta_{D_u} = 45.00$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

$$S_{1(\Delta)} = 13920.21 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 13900.84 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$S_1 = 13920.21 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

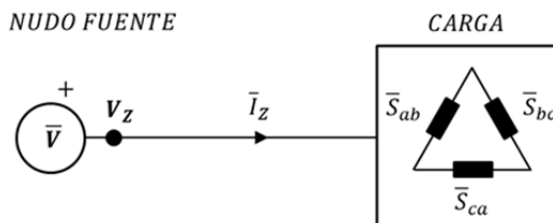
$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

$$S_1 = \sqrt{13881.44^2 + 1038.20^2} = 13920.21 \text{ VA}$$

**Supuesto nº 2.2: Red trifásica a 3 hilos con tensiones desequilibradas y cargas activas (P) desequilibradas conectadas en triángulo**

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas desequilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ab} &= 400 \cdot e^{0j} \text{ V} \\ \bar{V}_{bc} &= 365 \cdot e^{-120j} \text{ V} \\ \bar{V}_{ca} &= 383.699 \cdot e^{124.531j} \text{ V}\end{aligned}$$

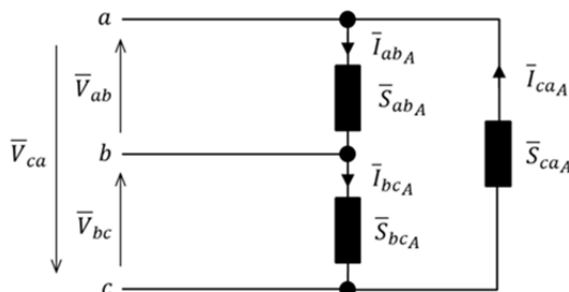


y unas potencias aparentes de las cargas resistivas desequilibradas conectadas en triángulo de:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{ab} &= 4600 + j \cdot 0 \text{ VA} \\ \bar{S}_{bc} &= 7200 + j \cdot 0 \text{ VA} \\ \bar{S}_{ca} &= 3000 + j \cdot 0 \text{ VA}\end{aligned}$$

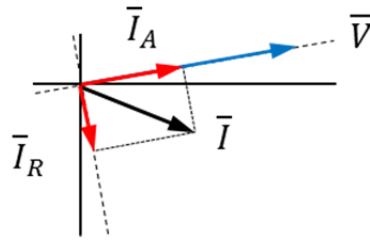
Las intensidades de fase que circulan en el interior de la carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned}\bar{I}_{ab} &= 11.500 \cdot e^{0.0j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bc} &= 19.726 \cdot e^{-120.0j} \text{ A} \\ \bar{I}_{ca} &= 7.819 \cdot e^{124.531j} \text{ A}\end{aligned}$$



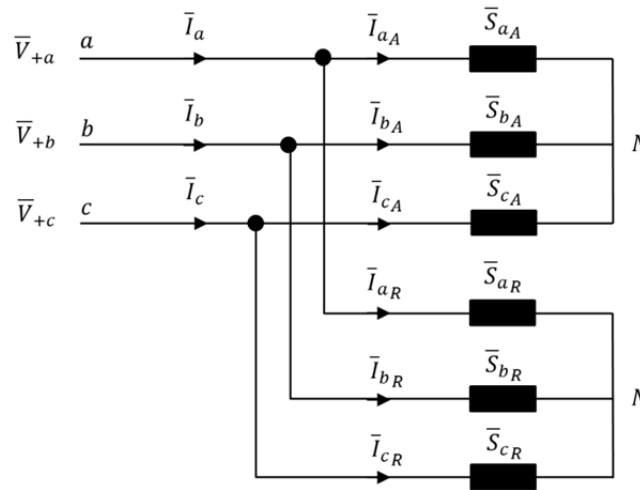
Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50) obtenidas mediante la aplicación de la 1º ley de Kirchoff sobre las respectivas componentes activas, según (2.46), y reactivas, según (2.47), de las corrientes de fase que circulan en la carga determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las potencias activas y reactivas determinadas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43); así, aun no existiendo cargas reactivas se comprueba desde la línea que la intensidad que circula tiene componentes activas y reactivas:

$$\begin{aligned}\bar{I}_a &= 17.185 \cdot e^{-22.013j} \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 27.354 \cdot e^{-141.352j} \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 24.143 \cdot e^{77.00j} \text{ A}\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}\bar{I}_{aA} &= 16.819 \cdot e^{-22.192j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bA} &= 27.344 \cdot e^{-139.839j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cA} &= 24.572 \cdot e^{77.486j} \text{ A} \\ \bar{I}_{aR} &= 0.370 \cdot e^{-13.837j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bR} &= 0.722 \cdot e^{-130.161j} \text{ A} \\ \bar{I}_{cR} &= 0.476 \cdot e^{-77.015j} \text{ A}\end{aligned}$$

La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella a una carga en triángulo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar  $(\bar{I}_Z = \bar{I}_{ZA} + \bar{I}_{ZR})$ , (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa  $(\bar{I}_{ZA})$  y reactiva  $(\bar{I}_{ZR})$  de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas  $(\bar{S}_A)$  y reactivas  $(\bar{S}_R)$ , considerando las tensiones simples positivas  $(\bar{V}_{+a})$  y las intensidades de línea  $(\bar{I}_{a,b,c})$  según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\begin{aligned}\bar{S}_A &= \frac{(3693.135 + 5971.978 + 5266.362)}{\Sigma P'} + j \cdot \frac{(-407.387 - 908.303 + 1315.691)}{\Sigma Q'=0} \\ &= 14931.475 + j \cdot 0 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_R &= \frac{(79.008 + 23.993 - 103.000)}{\Sigma P''=0} + j \cdot \frac{(-20.654 + 157.748 + 20.903)}{\Sigma Q'} \\ &= 0 + j \cdot 157.997 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot 220.914 \cdot e^{-28.487j} \cdot 22.531 \cdot e^{-29.093j^*} = 14931.475 + j \cdot 157.997 \text{ VA}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P-Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\Sigma P'_Z = P_+$  ;  $\Sigma Q'_Z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{uiA}$  y a las corrientes reactivas  $D_{uiR}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q}$$

- $D_{uiA}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{uiA} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{uiA} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = [10445.762 - 8445.652 - 7447.761] = -5447.651 \text{ VA}$$

$$B = [014628.298 + 12899.900] = -1728.398 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiA} = -5447.651 \cdot \vec{a} - 1728.398 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{uiA} = 5715.266 \text{ VA}$$



- $D_{uiR}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uiR} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{uiR} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$D = [223.468 - 33.931 + 145.665] = 335.202 \text{ VA}$$

$$C = [0 - 58.770 - 252.298] = -311.068 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiR} = 335.202 \cdot \vec{d} - 311.068 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

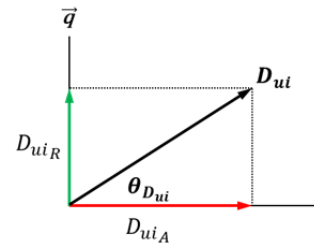
$$D_{uiR} = 457.300 \text{ VA}$$

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71) es:

$$\bar{D}_{ui} = 5715.266 \cdot \vec{p} + 457.300 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui} = 5733.531 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui}} = 4.575$$



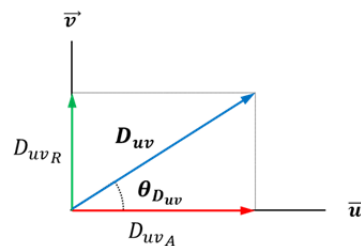
**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_z^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right]\end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro (3.12) debidos a las tensiones están desequilibradas:

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0.053 & D_{uvA} &= 844.338 \text{ VA} \\ \delta_0 &= 0.000 & D_{uvR} &= 25.551 \text{ VA} \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0.053 & \bar{D}_{uv} &= 844.338 \cdot \bar{u} + 25.551 \cdot \bar{v} \text{ VA} \\ & & D_{uv} &= 844.724 \text{ VA} \\ & & \theta_{D_{uv}} &= 1.733 \end{aligned}$$



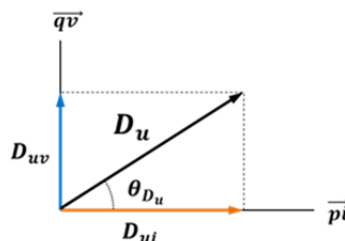
**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\bar{p}i, \bar{q}v$ ).

$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \bar{p}i + D_{uv} \cdot \bar{q}v$$

El valor fasorial del desequilibrio total (3.13) y (3.14) será:

$$\begin{aligned} \bar{D}_u &= 5733.531 \cdot \bar{p}i + 844.724 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_u &= 5795.424 \text{ VA} \\ \theta_{D_u} &= 8.381 \end{aligned}$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

$$S_{1(\Delta)} = 13838.70 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 13818.45 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$S_1 = 13838.70 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

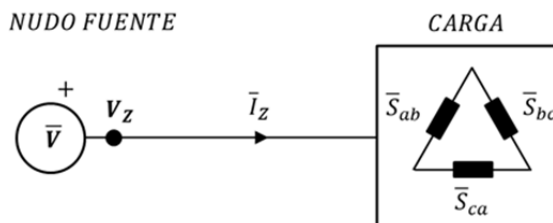
$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

$$S_1 = \sqrt{13880.16^2 + 1032.12^2} = 13838.70 \text{ VA}$$

**Supuesto nº 2.3: Red trifásica a 3 hilos con tensiones desequilibradas y cargas reactivas ( $Q$ ) desequilibradas conectadas en triángulo**

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas desequilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ab} &= 400 \cdot e^{0j} \text{ V} \\ \bar{V}_{bc} &= 365 \cdot e^{-120j} \text{ V} \\ \bar{V}_{ca} &= 383.699 \cdot e^{124.531j} \text{ V}\end{aligned}$$

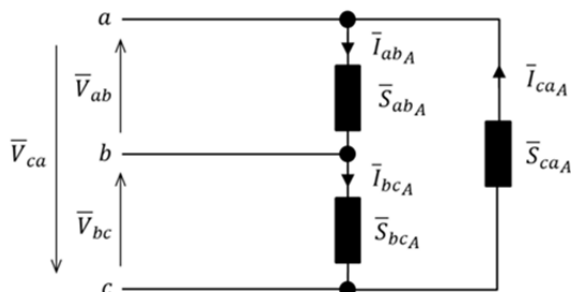


y unas potencias aparentes debidas a las cargas desequilibradas reactivas de tipo inductivo conectadas en triángulo de:

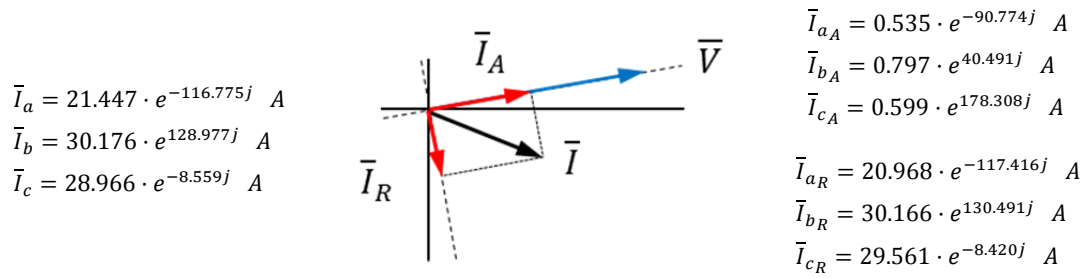
$$\begin{aligned}\bar{S}_{ab} &= 0 + j \cdot 5000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{bc} &= 0 + j \cdot 8000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{ca} &= 0 + j \cdot 4500 \text{ VA}\end{aligned}$$

Las intensidades de fase que circulan en el interior de la carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

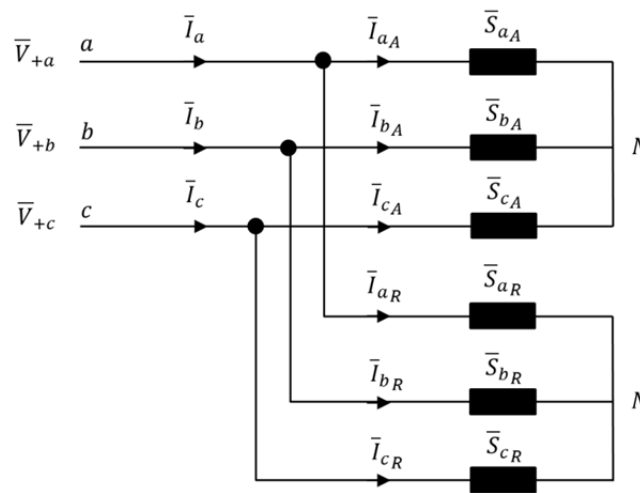
$$\begin{aligned}\bar{I}_{ab} &= 12.50 \cdot e^{-90.0j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bc} &= 21.918 \cdot e^{-210.0j} \text{ A} \\ \bar{I}_{ca} &= 11.728 \cdot e^{34.531j} \text{ A}\end{aligned}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50) obtenidas mediante la aplicación de la 1º ley de Kirchoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46), y reactivas según (2.47), de las corrientes de fase que circulan en la carga determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las potencias activas y reactivas determinadas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43); así, aun no existiendo cargas activas se comprueba que la intensidad la línea que circula tiene componentes activas y reactivas:



La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella a una carga en triángulo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar  $(\bar{I}_Z = \bar{I}_{ZA} + \bar{I}_{ZR})$ , (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa  $(\bar{I}_{ZA})$  y reactiva  $(\bar{I}_{ZR})$  de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas  $(\bar{S}_A)$  y reactivas  $(\bar{S}_R)$ , considerando las tensiones simples positivas  $(\bar{V}_{+a})$  y las intensidades de línea  $(\bar{I}_{a,b,c})$  según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\begin{aligned}\bar{S}_A &= \frac{(54.977 - 173.872 + 7.400)}{\Sigma P'} + j \cdot \frac{(104.658 + 27.469 - 132.126)}{\Sigma Q''=0} \\ &= -111.496 + j \cdot 0 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_R &= \frac{(86.594 + 1039.898 - 1126.492)}{\Sigma P''=0} + j \cdot \frac{(4631.264 + 6582.406 + 6432.420)}{\Sigma Q'} \\ &= 0 + j \cdot 17646.090 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot 220.914 \cdot e^{-28.487j} \cdot 26.626 \cdot e^{-118.849j^*} = -111.496 + j \cdot 17646.090 \text{ VA}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P$ - $Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\Sigma P'_Z = P_+$  ;  $\Sigma Q'_Z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{uiA}$  y a las corrientes reactivas  $D_{uiR}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q}$$

- $D_{uiA}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{uiA} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{uiA} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = [155.498 + 245.893 - 10.465] = 390.926 \text{ VA}$$

$$B = [0 + 425.899 + 18.126] = 444.024 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiA} = 390.926 \cdot \vec{a} + 444.024 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{uiA} = 591.591 \text{ VA}$$

- $D_{uiR}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uiR} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{uiR} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$D = [244.926 - 1470.638 + 1593.100] = 367.388 \text{ VA}$$

$$C = [0 - 2547.219 - 2759.331] = -5306.550 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiR} = 367.388 \cdot \vec{d} - 5306.550 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

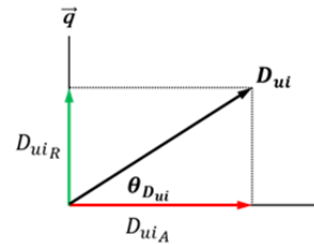
$$D_{uiR} = 5319.252 \text{ VA}$$

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71) es:

$$\bar{D}_{ui} = 591.591 \cdot \vec{p} + 5319.252 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui} = 5352.049 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui}} = 83.654$$



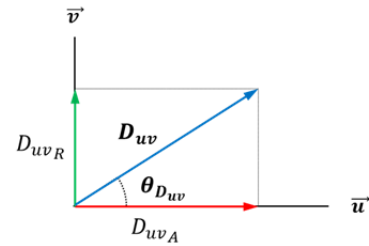
**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_z^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right]\end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro (3.12) debidos a las tensiones están desequilibradas:

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0.053 & D_{uvA} &= 31.793 \text{ VA} \\ \delta_0 &= 0.000 & D_{uvR} &= 973.327 \text{ VA} \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0.053 & \bar{D}_{uv} &= 31.793 \cdot \bar{u} + 973.327 \cdot \bar{v} \text{ VA} \\ & & D_{uv} &= 973.846 \text{ VA} \\ & & \theta_{D_{uv}} &= 88.129 \end{aligned}$$



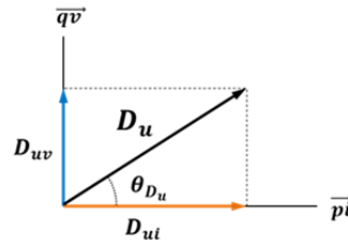
**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\bar{p}i, \bar{q}v$ ).

$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \bar{p}i + D_{uv} \cdot \bar{q}v$$

El valor fasorial del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) será:

$$\begin{aligned} \bar{D}_u &= 5352.049 \cdot \bar{p}i + 973.846 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_u &= 5439.927 \text{ VA} \\ \theta_{D_u} &= 10.313 \end{aligned}$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:



$$S_{1(\Delta)} = 18465.91 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 18011.35 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$S_1 = 18465.91 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

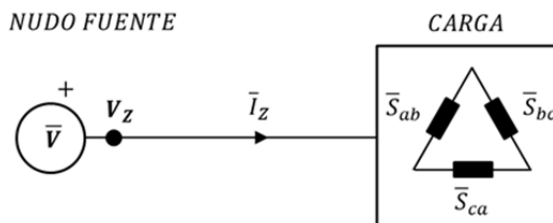
$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

$$S_1 = \sqrt{17646.44^2 + 5439.93^2} = 18465.91 \text{ VA}$$

**Supuesto nº 2.4: Red trifásica a 3 hilos con tensiones desequilibradas y cargas activas (P) y reactivas (Q) desequilibradas conectadas en triángulo**

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas desequilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\begin{aligned}\bar{V}_{ab} &= 400 \cdot e^{0j} \text{ V} \\ \bar{V}_{bc} &= 365 \cdot e^{-120j} \text{ V} \\ \bar{V}_{ca} &= 383.699 \cdot e^{124.531j} \text{ V}\end{aligned}$$

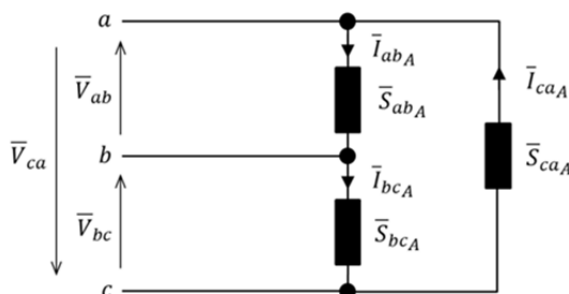


y unas potencias aparentes debidas a las cargas desequilibradas activas y reactivas de tipo inductivo conectadas en triángulo de:

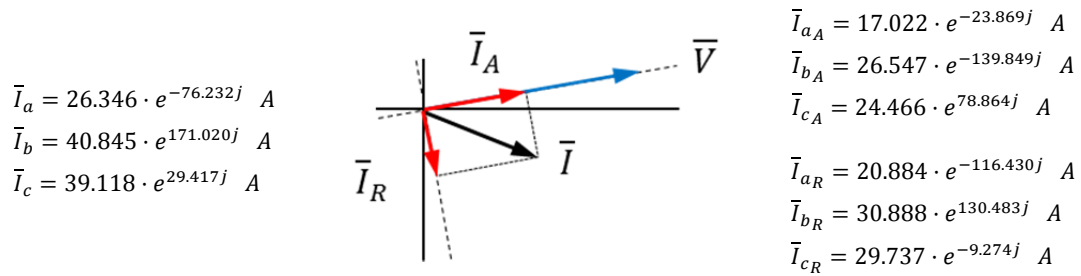
$$\begin{aligned}\bar{S}_{ab} &= 4600 + j \cdot 5000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{bc} &= 7200 + j \cdot 8000 \text{ VA} \\ \bar{S}_{ca} &= 3000 + j \cdot 4500 \text{ VA}\end{aligned}$$

Las intensidades de fase ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) que circulan en el interior de la carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

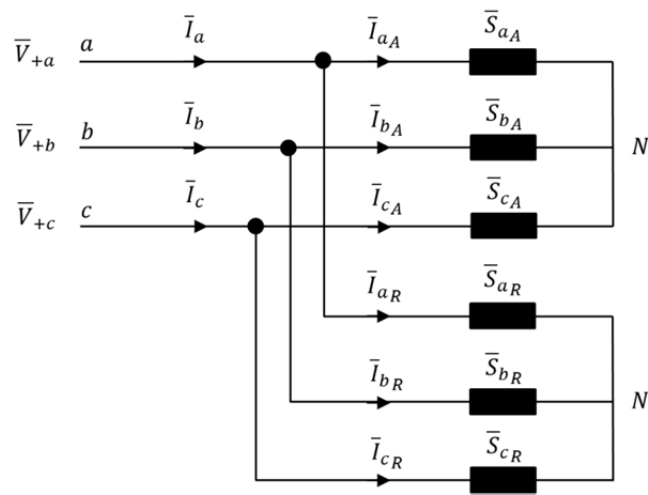
$$\begin{aligned}\bar{I}_{ab} &= 16.985 \cdot e^{-47.386j} \text{ A} \\ \bar{I}_{bc} &= 29.487 \cdot e^{-168.013j} \text{ A} \\ \bar{I}_{ca} &= 14.095 \cdot e^{68.221j} \text{ A}\end{aligned}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50) obtenidas mediante la aplicación de la 1º ley de Kirchhoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46), y reactivas según (2.47), de las corrientes de fase que circulan en la carga determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las potencias activas y reactivas determinadas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43); así:



La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella a una carga en triángulo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar  $(\bar{I}_Z = \bar{I}_{ZA} + \bar{I}_{ZR})$ , (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa  $(\bar{I}_{ZA})$  y reactiva  $(\bar{I}_{ZR})$  de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas  $(\bar{S}_A)$  y reactivas  $(\bar{S}_R)$ , considerando las tensiones simples positivas  $(\bar{V}_{+a})$  y las intensidades de línea  $(\bar{I}_{a,b,c})$  según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\begin{aligned}\bar{S}_A &= \frac{(3748.111 + 5796.105 + 5273.762)}{\Sigma P'} + j \cdot \frac{(-302.730 - 880.835 + 1183.565)}{\Sigma Q''=0} \\ &= 14819.979 + j \cdot 0 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{S}_R &= \frac{(165.602 + 1063.890 - 1229.492)}{\Sigma P''=0} + j \cdot \frac{(4610.611 + 6740.154 + 6453.323)}{\Sigma Q'} \\ &= 0 + j \cdot 17804.087 \text{ VA}\end{aligned}$$

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot 220.914 \cdot e^{-28.487j} \cdot 34.953 \cdot e^{-78.713j^*} = 14819.979 + j \cdot 17804.387 \text{ VA}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P$ - $Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\Sigma P'_Z = P_+$  ;  $\Sigma Q'_Z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{uiA}$  y a las corrientes reactivas  $D_{uiR}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q}$$

- $D_{uiA}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{uiA} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{uiA} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = [1061.260 - 8199.759 - 7458.226] = -5056.725 \text{ VA}$$

$$B = [0 - 14202.400 + 12918.026] = -1284.374 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiA} = -5056.725 \cdot \vec{a} - 1284.374 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{uiA} = 5217.287 \text{ VA}$$

- $D_{uiR}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uiR} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{uiR} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$D = [468.393 - 1504.568 + 1738.765] = 702.590 \text{ VA}$$

$$C = [0 - 2605.989 - 3011.629] = -5617.618 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{uiR} = 702.590 \cdot \vec{d} - 5617.618 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

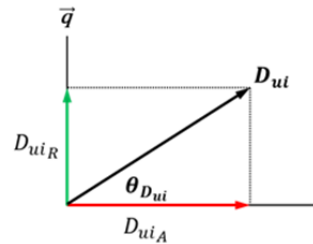
$$D_{uiR} = 5661.383 \text{ VA}$$

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71) es:

$$\bar{D}_{ui} = 5217.287 \cdot \vec{p} + 5661.383 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui} = 7698.789 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui}} = 47.338$$



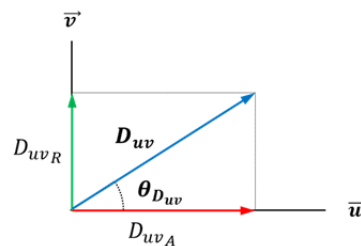
**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned}\bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_z^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right]\end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro (3.12) debidos a las tensiones están desequilibradas:

$$\begin{aligned}
 \delta_- &= 0.053 & D_{uvA} &= 829.741 \text{ VA} \\
 \delta_0 &= 0.000 & D_{uvR} &= 986.643 \text{ VA} \\
 \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0.053 & \bar{D}_{uv} &= 829.741 \cdot \bar{u} + 986.643 \cdot \bar{v} \text{ VA} \\
 & & D_{uv} &= 1289.161 \text{ VA} \\
 & & \theta_{D_{uv}} &= 49.937
 \end{aligned}$$



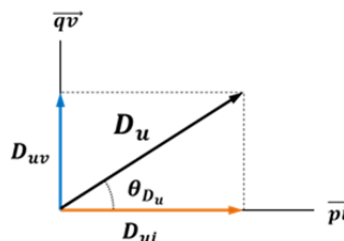
**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\bar{p}i, \bar{q}v$ ).

$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \bar{p}i + D_{uv} \cdot \bar{q}v$$

El valor fasorial del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) será:

$$\begin{aligned}
 \bar{D}_u &= 7698.789 \cdot \bar{p}i + 1289.161 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\
 D_u &= 7805.977 \text{ VA} \\
 \theta_{D_u} &= 9.506
 \end{aligned}$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

$$S_{1(\Delta)} = 24444.85 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 23906.17 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$S_1 = 24444.85 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

$$S_1 = \sqrt{23165^2 + 7805.98^2} = 24444.85 \text{ VA}$$

### 4.3.2. Cargas conectadas en estrella

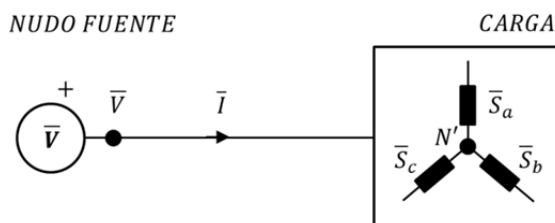
#### Supuesto nº 2.5: Red trifásica a 3 hilos con tensiones desequilibradas y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en estrella

Se considera un sistema a 3 hilos de tensiones compuestas desequilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente, de valores:

$$\bar{V}_a = 230 \cdot e^{0j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_b = 200 \cdot e^{-120j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_c = 250 \cdot e^{100j} \text{ V}$$



y unas potencias aparentes de las cargas desequilibradas conectadas en triángulo de:

$$\bar{S}_{ab} = 4600 + j \cdot 5000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{bc} = 7200 + j \cdot 8000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{ca} = 3046.41 + j \cdot 11181.49 \text{ VA}$$

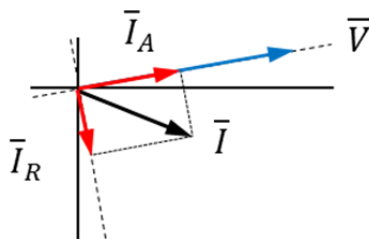
Las intensidades de fase que circulan en por la carga y la línea según las expresiones (3.30) y (3.32) tienen los siguientes valores:

Las componentes activas ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las corrientes de línea deben cumplir  $\sum \bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R} = 0$ ; determinadas según las expresiones (3.30) y (3.32) considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+a}$ ), y las correspondientes potencias activas y reactivas según la expresión (2.43) ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43). Tendrán los siguientes valores:

$$\bar{I}_a = 29.540 \cdot e^{-47.386j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_b = 53.814 \cdot e^{-168.013j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_c = 46.356 \cdot e^{45.240j} \text{ A}$$



$$\bar{I}_{aA} = 20.00 \cdot e^{-0.00j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{bA} = 36.00 \cdot e^{-120.00j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{cA} = 12.186 \cdot e^{120.00j} \text{ A}$$

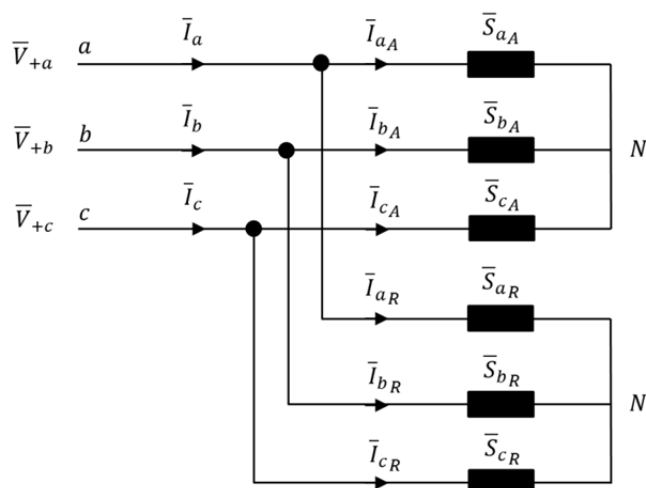
$$\bar{I}_{aR} = 21.739 \cdot e^{-90.00j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{bR} = 40.00 \cdot e^{-210.00j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{cR} = 44.726 \cdot e^{30.00j} \text{ A}$$

La figura siguiente representa el esquema de una carga en estrella, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 3.5.1.





Considerando que los valores de las intensidades de línea permanecen fijos y han de verificar ( $\sum \bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R} = 0$ ), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son equilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán:

$$\begin{aligned} \bar{S}_A &= \frac{(4533.333 + 8160.00 + 2762.075)}{\sum P'} + j \cdot \frac{(0 + 0 + 0)}{\sum Q''=0} = 15455.048 + j \cdot 0 \text{ VA} \\ \bar{S}_R &= \frac{(0 + 0 + 0)}{\sum P''=0} + j \cdot \frac{(4927.536 + 9066.667 + 10137.887)}{\sum Q'} = 0 + j \cdot 24132.090 \text{ VA} \\ \bar{S}_+ &= 3 \cdot 226.667 \cdot e^{-0.00j} \cdot 42.143 \cdot e^{-57.362j*} = 15455.048 + j \cdot 24132.090 \text{ VA} \end{aligned}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones equilibradas y cargas desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por línea ( $P-Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria igual de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\sum P'_Z = P_+$  ;  $\sum Q'_Z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{ui_A}$  y a las corrientes reactivas  $D_{ui_R}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$$

- $D_{ui_A}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_A} &= A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b} \\ D_{ui_A} &= \sqrt{A^2 + B^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $A$  y  $B$  según (2.58) son:

$$A = [6411.101 - 5769.991 - 1953.082] = -1311.972 \text{ VA}$$

$$B = [0 - 9993.918 + 3382.837] = -6611.081 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{ui_A} = -1311.972 \cdot \vec{a} - 6611.081 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui_A} = 6740.005 \text{ VA}$$

- $D_{ui_R}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_R} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{ui_R} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

En función de los parámetros  $C$  y  $D$  según (2.59) son:

$$D = [0 - 11104.354 - 12416.325] = -1311.972 \text{ VA}$$

$$C = [6968.589 - 6411.101 - 7168.569] = -6611.081 \text{ VA}$$

$$\bar{D}_{ui_R} = -1311.972 \cdot \vec{d} - 6611.081 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

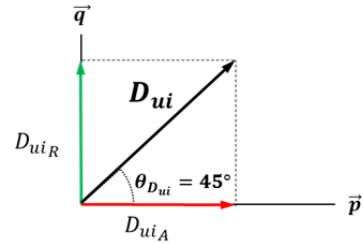
$$D_{ui_R} = 6740.005 \text{ VA}$$

El fasor potencia total de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) expresado en el dominio fasorial según (3.35) es:

$$\bar{D}_{ui} = 6740.005 \cdot \vec{p} + 6740.005 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui} = 9531.807 \quad VA$$

$$\theta_{D_{ui}} = 45$$



Se constata que, en conexión estrella, la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas ( $\bar{D}_{ui_A}$ ) y la debida a las corrientes reactivas ( $\bar{D}_{ui_R}$ ), tienen el mismo valor en módulo y por tanto el ángulo de desfase de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes es de  $45^\circ$ , según lo expuesto en el punto 3.5.2 apartado a).

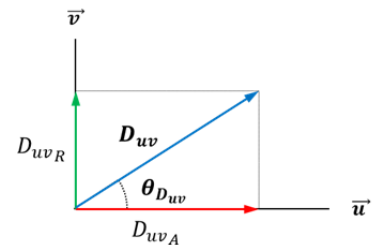
**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned} \bar{D}_{uv} &= D_{uv_A} \cdot \vec{u} + D_{uv_R} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right] \end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro (3.12) debidos a las tensiones están desequilibradas:

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0.064 & D_{uv_A} &= 1528.513 \quad VA \\ \delta_0 &= 0.064 & D_{uv_R} &= 2271.373 \quad VA \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0.09 & \bar{D}_{uv} &= 1528.513 \cdot \vec{u} + 2271.373 \cdot \vec{v} \quad VA \\ & & D_{uv} &= 2737.789 \quad VA \\ & & \theta_{D_{uv}} &= 56.062 \end{aligned}$$



c) **Potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\overline{p_i}, \overline{q_v}$ ).

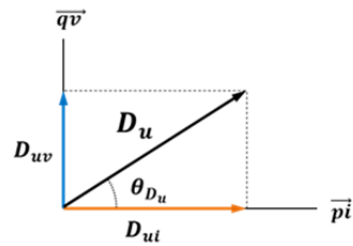
$$\overline{D}_u = D_{ui} \cdot \overline{p_i} + D_{uv} \cdot \overline{q_v}$$

El valor fasorial del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) será:

$$\overline{D}_u = 9531.807 \cdot \overline{p_i} + 2737.789 \cdot \overline{q_v} \quad VA$$

$$D_u = 9917.198 \quad VA$$

$$\theta_{D_u} = 16.025$$



#### 4.4. CARGAS EN PARALELO A TRES HILOS ALIMENTADAS CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS

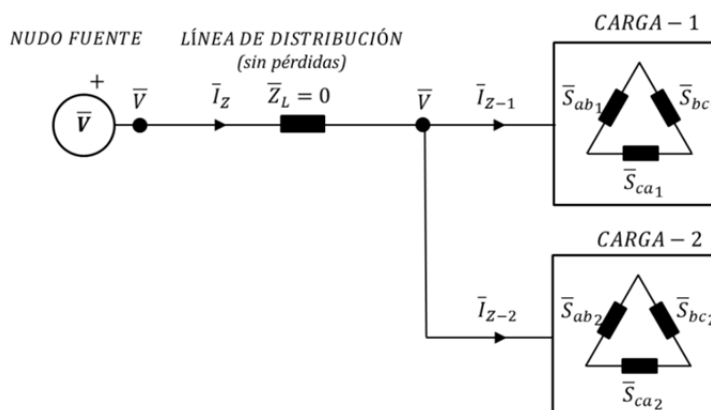
**Supuesto nº 3.1: Red trifásica a 3 hilos sin pérdidas de potencia, con tensiones y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo (valores nominales de tensión compuesta 0.4 KV)**

Se considera un sistema a 3 hilos, con dos cargas en triángulo conectadas en paralelo, alimentadas mediante una línea de suministro sin pérdidas de potencia ( $\bar{Z}_L = 0$ ). Se consideran que las tensiones compuestas desequilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente (no slack), tienen un valor de:

$$\bar{V}_{ab} = 325.80 \cdot e^{2.52j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{bc} = 316.56 \cdot e^{-117.06j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{ca} = 323.32 \cdot e^{124.15j} \text{ V}$$



Las potencias aparentes de ambas cargas desequilibradas conectadas en triángulo, con componentes activas y reactivas de tipo inductivo son:

$$\bar{S}_{ab-1} = 4600 + j \cdot 5000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{ab-2} = 7000 + j \cdot 10500 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{bc-1} = 7200 + j \cdot 8000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{bc-2} = 8500 + j \cdot 4000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{ca-1} = 3000 + j \cdot 4500 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{ca-2} = 5000 + j \cdot 8000 \text{ VA}$$

Las intensidades de fase ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) que circulan en el interior de cada carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$$\bar{I}_{ab-1} = 20.85 \cdot e^{-44.87j} \text{ A}$$

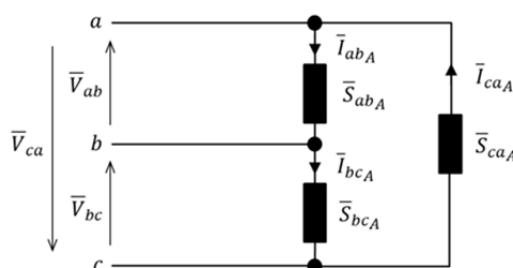
$$\bar{I}_{bc-1} = 34.00 \cdot e^{-165.07j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{ca-1} = 16.73 \cdot e^{67.84j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{ab-2} = 38.73 \cdot e^{-53.79j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{bc-2} = 29.68 \cdot e^{-142.26j} \text{ A}$$

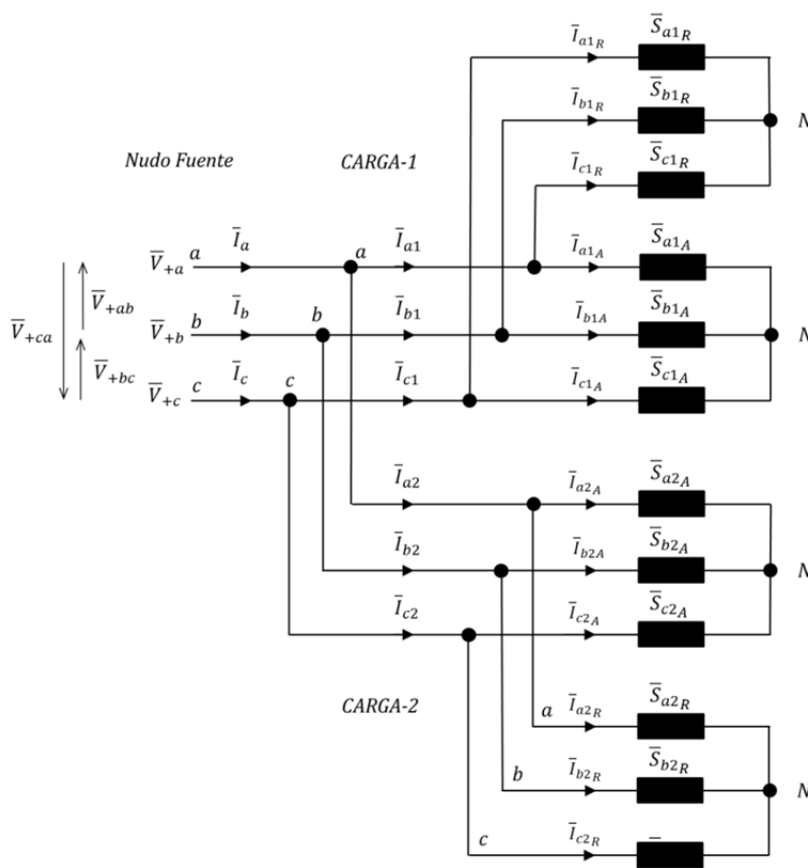
$$\bar{I}_{ca-2} = 29.18 \cdot e^{66.15j} \text{ A}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50), obtenidas mediante la aplicación de la 1º ley de Kirchoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46) y reactivas según (2.47) de las corrientes de fase que circulan en las cargas, determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las potencias activas y reactivas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43). Así las corrientes de línea de cada carga y la total ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \\ \bar{I}_a &= 90.285 \cdot e^{-77.492j} \text{ A} & \bar{I}_{a-1} &= 31.368 \cdot e^{-74.336j} \text{ A} & \bar{I}_{a-2} &= 58.990 \cdot e^{-79.170j} \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 95.892 \cdot e^{168.546j} \text{ A} & \bar{I}_{b-1} &= 48.003 \cdot e^{172.876j} \text{ A} & \bar{I}_{b-2} &= 48.162 \cdot e^{164.230j} \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 101.560 \cdot e^{42.874j} \text{ A} & \bar{I}_{c-1} &= 46.063 \cdot e^{31.766j} \text{ A} & \bar{I}_{c-2} &= 57.055 \cdot e^{51.822j} \text{ A} \end{aligned}$$

La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella de ambas cargas en triángulo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ), (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los valores de los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán para cada carga y la red total vista desde el nudo fuente:

Carga – 1:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{A-1} &= \frac{14828.810}{\Sigma P' = P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-1} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{17590.987}{\Sigma Q' = Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+1} &= 3 \cdot \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_{+ab1}^* = 3 \cdot 321.868 \cdot e^{-3.202j} \cdot 23.83 \cdot e^{-46.67j^*} \quad VA \\ &= P_{+1} + j \cdot Q_{+1} = 14828.810 + j \cdot 17590.987 \quad VA \end{aligned}$$

Carga – 2:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{A-2} &= \frac{20523.540}{\Sigma P' = P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-2} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{22442.533}{\Sigma Q' = Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+2} &= 3 \cdot \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_{+ab2}^* = 3 \cdot 321.868 \cdot e^{-3.202j} \cdot 31.50 \cdot e^{-44.36j^*} \quad VA \\ &= P_{+2} + j \cdot Q_{+2} = 20523.540 + j \cdot 22442.533 \quad VA \end{aligned}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\begin{aligned} \bar{S}_A &= \frac{35352.350}{\Sigma P' = P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA = \bar{S}_{A-1} + \bar{S}_{A-2} \\ \bar{S}_R &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{40033.520}{\Sigma Q' = Q+} \quad VA = \bar{S}_{R-1} + \bar{S}_{R-2} \\ \bar{S}_+ &= 3 \cdot \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{+a}^* = \bar{V}_+ \cdot (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)_+^* = 3 \cdot 185.831 \cdot e^{-26.798j} \cdot 95.80 \cdot e^{-75.35j^*} \quad VA \\ &= P_+ + j \cdot Q_+ = (P_{+1} + P_{+2}) + j \cdot (Q_{+1} + Q_{+2}) = 35352.350 + j \cdot 40033.520 \quad VA \end{aligned}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por fase

( $P-Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\sum P'_z = P_+$  ;  $\sum Q'_z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{uiA}$  y a las corrientes reactivas  $D_{uiR}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q}$$

- $D_{uiA}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\begin{aligned} \bar{D}_{uiA} &= A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b} \\ D_{uiA} &= \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

El valor de los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga según se expresa en (3.20) del 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \\ B &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \end{aligned}$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $A$  y  $B$  determinados según (2.58), para cada carga individual y para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:



Carga – 1:

$$A_1 = [10670.69 - 8321.86 - 7313.90] = -4965.07 \text{ VA}$$

$$B_1 = [0 - 14413.88 + 12668.05] = -1745.82 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$A_2 = [16828.69 - 10900.38 - 9709.95] = -3781.64 \text{ VA}$$

$$B_2 = [0 - 18880.01 + 16818.12] = -2061.89 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 = -4965.07 - 3781.64 = -8746.71 \text{ VA}$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i = B_1 + B_2 = -1745.82 - 2061.89 = -3807.71 \text{ VA}$$

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas será para cada carga y para el total de la red:

Carga – 1:

$$\bar{D}_{ui-1A} = -4965.07 \cdot \vec{a} - 1745.82 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1A} = 5263.062 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$\bar{D}_{ui-2A} = -3781.64 \cdot \vec{a} - 2061.89 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2A} = 4307.226 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\bar{D}_{uiA} = \bar{D}_{ui-1A} + \bar{D}_{ui-2A}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \vec{a} + j \cdot \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cdot \vec{b} = -8746.71 \cdot \vec{a} - 3807.71 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{uiA} = 9536.582 \text{ VA}$$

- $D_{uiR}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “C y D” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\bar{D}_{uiR} = D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c}$$

$$D_{uiR} = \sqrt{D^2 + C^2}$$

El valor de los parámetros de desequilibrio “C y D” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga según se expresa en (3.20) del 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $C$  y  $D$  determinados según (2.59), para cada carga individual y para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Carga - 1:

$$D_1 = [459.94 - 1295.83 + 1525.80] = 689.91 \text{ VA}$$

$$C_1 = [0 - 2244.45 - 2642.77] = -4887.22 \text{ VA}$$

Carga - 2:

$$D_2 = [2101.41 + 2591.69 - 1540.99] = 3152.11 \text{ VA}$$

$$C_2 = [0 + 4488.94 + 2669.07] = 7158.01 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i = D_1 + D_2 = 689.91 + 3152.11 = 3842.02 \text{ VA}$$

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i = C_1 + C_2 = -4887.22 + 7158.01 = 2270.80 \text{ VA}$$

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas será para cada carga y para el total de la red:

Carga - 1:

$$\bar{D}_{ui-1R} = 689.91 \cdot \vec{d} - 4887.22 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1R} = 4935.672 \text{ VA}$$

Carga - 2:

$$\bar{D}_{ui-2R} = 3152.11 \cdot \vec{d} + 7158.01 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2R} = 7821.314 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\bar{D}_{uiR} = \bar{D}_{ui-1R} + \bar{D}_{ui-2R}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cdot \vec{d} + j \cdot \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \vec{c} = 3842.02 \cdot \vec{d} + 2270.80 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{uiR} = 4462.919 \text{ VA}$$

Determinados los valores de las componentes parciales y de la red total de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) esta puede ser expresada en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71); siendo los valores de los desequilibrios:

Carga – 1:

$$\bar{D}_{ui-1} = 5263.06 \cdot \vec{p} + 4935.67 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui-1} = 7215.31 \quad VA$$

$$\theta_{D_{ui-1}} = 43.16$$

Carga – 2:

$$\bar{D}_{ui-2} = 4307.23 \cdot \vec{p} + 7821.31 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui-2} = 8928.89 \quad VA$$

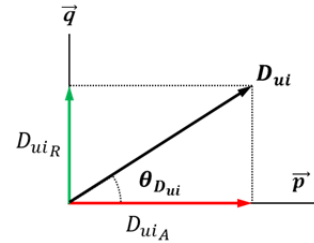
$$\theta_{D_{ui-2}} = 61.16$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\bar{D}_{ui} = 9539.582 \cdot \vec{p} + 4462.919 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui} = 10531.92 \quad VA$$

$$\theta_{D_{ui}} = 25.07$$



**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned} \bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right] \end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro correspondientes a los grados de desequilibrio y asimetría y a las potencias de desequilibrio debidas a las tensiones según (3.12) de las cargas y de la red en conjunto, considerando las tensiones nodales correspondientes:

Carga – 1:

$$\delta_- = 0.017$$

$$\delta_0 = 0.00$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 0.017$$

$$D_{uvA-1} = 269.13 \quad VA$$

$$D_{uvR-1} = 312.49 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-1} = 269.13 \cdot \vec{u} + 312.49 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-1} = 412.41 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-1}} = 49.26$$

Carga – 2:

$$D_{uvA-2} = 358.68 \quad VA$$

$$D_{uvR-2} = 406.49 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-2} = 358.68 \cdot \vec{u} + 406.49 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-2} = 542.11 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-2}} = 48.58$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\delta_- = 0.017$$

$$\delta_0 = 0.00$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 0.017$$

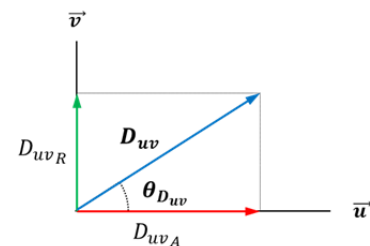
$$D_{uvA} = 626.28 \quad VA$$

$$D_{uvR} = 688.96 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv} = 626.28 \cdot \vec{u} + 688.96 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv} = 931.07 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv}} = 47.73$$



**c) Potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\overline{p}\hat{i}, \overline{q}\hat{v}$ ).

$$\overline{D}_u = D_{ui} \cdot \overline{p}\hat{i} + D_{uv} \cdot \overline{q}\hat{v}$$

Los valores correspondientes a cada carga y a la red en conjunto del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) serán los siguientes, expresados en modo fasorial, módulo y ángulo:

Carga – 1:

$$\overline{D}_{u-1} = 7215.31 \cdot \overline{p}\hat{i} + 412.41 \cdot \overline{q}\hat{v} \quad VA$$

$$D_{u-1} = 7227.09 \quad VA$$

$$\theta_{D_{u-1}} = 3.27$$

Carga – 2:

$$\overline{D}_{u-2} = 8928.89 \cdot \overline{p}\hat{i} + 542.11 \cdot \overline{q}\hat{v} \quad VA$$

$$D_{u-2} = 8945.34 \quad VA$$

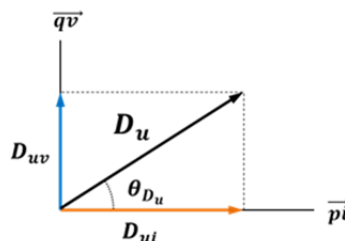
$$\theta_{D_{u-2}} = 3.47$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\overline{D}_u = 10531.92 \cdot \overline{p}\hat{i} + 931.07 \cdot \overline{q}\hat{v} \quad VA$$

$$D_u = 10572.99 \quad VA$$

$$\theta_{D_u} = 5.05$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

Carga – 1:

$$S_{1(\Delta)} = 24115.70 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 23677.79 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$S_{1(\Delta)} = 31700.19 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 30632.35 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$S_{1(\Delta)} = 54445.01 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 53539.88 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$\text{Carga – 1: } S_1 = 24115.70 \text{ VA}$$

$$\text{Carga – 2: } S_1 = 31700.19 \text{ VA}$$

$$\text{Red total vista desde el nudo fuente: } S_1 = 54445.01 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

$$\text{Carga – 1: } S_1 = \sqrt{23007.31^2 + 7227.09^2} = 24115.70 \text{ VA}$$

$$\text{Carga – 2: } S_1 = \sqrt{30411.89^2 + 8945.34^2} = 31700.19 \text{ VA}$$

$$\text{Red total vista desde el nudo fuente: } S_1 = \sqrt{53408.53^2 + 10572.99^2} = 54445.01 \text{ VA}$$

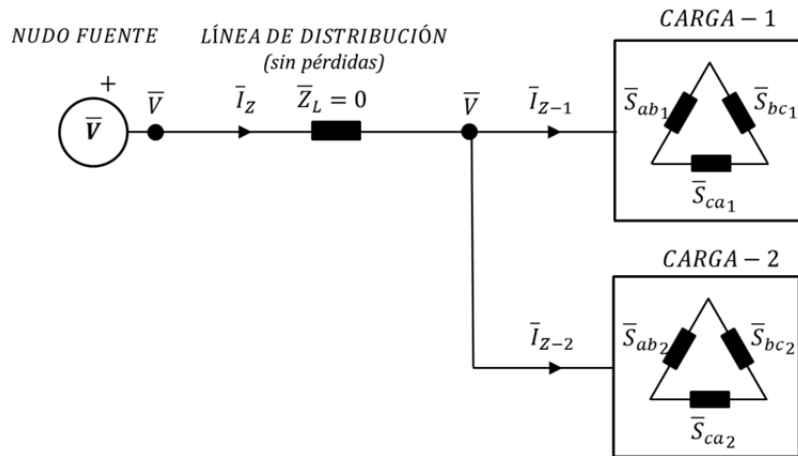
**Supuesto nº 3.2: Red trifásica a 3 hilos sin pérdidas de potencia, con tensiones y cargas activas y reactivas ( $PQ$ ) desequilibradas conectadas en triángulo (valores nominales de tensión compuesta de 20 KV)**

Se considera un sistema a 3 hilos, con dos cargas en triángulo conectadas en paralelo, alimentadas mediante una línea de suministro sin pérdidas de potencia ( $\bar{Z}_L = 0$ ). Se considera que las tensiones compuestas desequilibradas proporcionadas por el generador o nudo fuente (no slack), tienen un valor de:

$$\bar{V}_{ab} = 19988.00 \cdot e^{0.01j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{bc} = 19986.00 \cdot e^{-119.99j} \text{ V}$$

$$\bar{V}_{ca} = 19987.00 \cdot e^{120.01j} \text{ V}$$



Las potencias aparentes de ambas cargas desequilibradas conectadas en triángulo, con componentes activas y reactivas de tipo inductivo son:

$$\bar{S}_{ab-1} = 46000 + j \cdot 50000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{ab-2} = 70000 + j \cdot 105000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{bc-1} = 72000 + j \cdot 80000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{bc-2} = 85000 + j \cdot 40000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{ca-1} = 30000 + j \cdot 45000 \text{ VA}$$

$$\bar{S}_{ca-2} = 50000 + j \cdot 80000 \text{ VA}$$

Las intensidades de fase ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) que circulan en el interior de cada carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$$\bar{I}_{ab-1} = 3.40 \cdot e^{-47.38j} \text{ A}$$

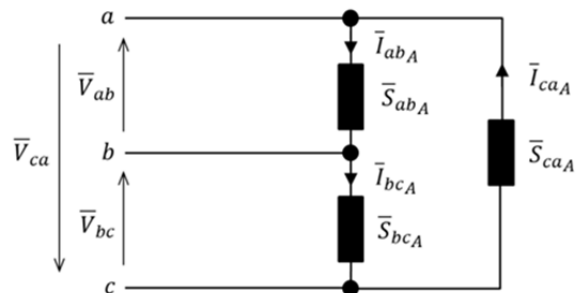
$$\bar{I}_{bc-1} = 5.39 \cdot e^{-168.00j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{ca-1} = 2.71 \cdot e^{63.71j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{ab-2} = 6.31 \cdot e^{-56.30j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{bc-2} = 4.70 \cdot e^{-145.19j} \text{ A}$$

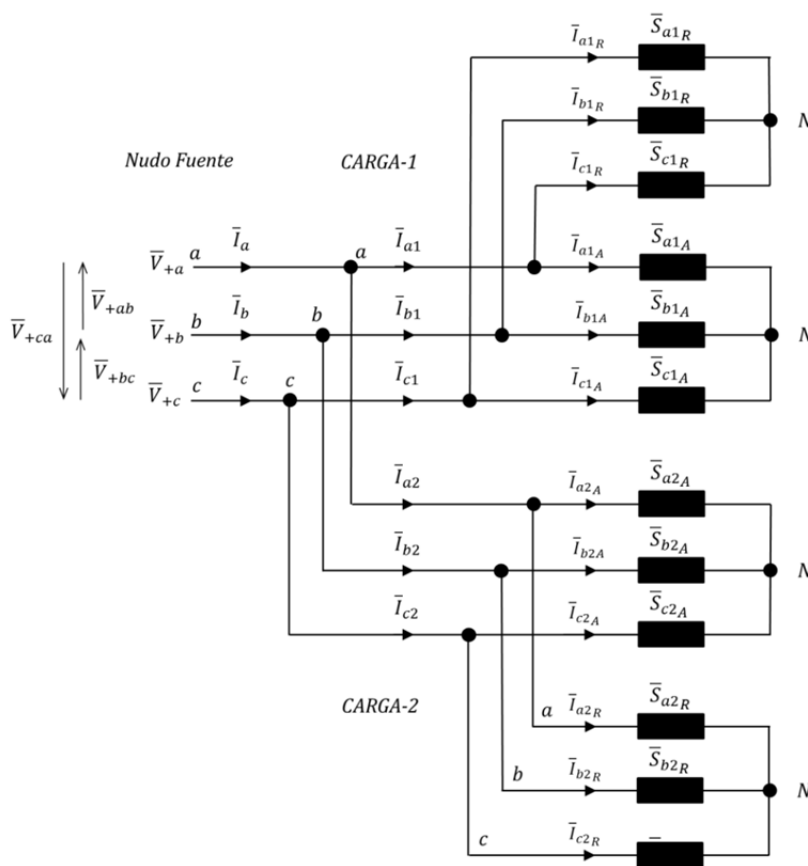
$$\bar{I}_{ca-2} = 4.72 \cdot e^{62.02j} \text{ A}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50), obtenidas mediante la aplicación de la 1º ley de Kirchoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46) y reactivas según (2.47) de las corrientes de fase que circulan en las cargas, determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ), y las potencias activas y reactivas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43); así las corrientes de línea de cada carga y la total ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) tienen el siguiente valor:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \\ \bar{I}_{a-2} &= 14.546 \cdot e^{-80.536j} \text{ A} & \bar{I}_a &= 5.049 \cdot e^{-77.380j} \text{ A} & \bar{I}_{a-1} &= 9.509 \cdot e^{-82.212j} \text{ A} \\ \bar{I}_{b-2} &= 15.446 \cdot e^{165.179j} \text{ A} & \bar{I}_b &= 7.694 \cdot e^{169.655j} \text{ A} & \bar{I}_{b-1} &= 7.798 \cdot e^{160.761j} \text{ A} \\ \bar{I}_{c-2} &= 16.289 \cdot e^{39.662j} \text{ A} & \bar{I}_c &= 7.374 \cdot e^{28.735j} \text{ A} & \bar{I}_{c-1} &= 9.156 \cdot e^{48.440j} \text{ A} \end{aligned}$$

La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella de ambas cargas en triángulo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ), (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán para cada carga y en total:

Carga – 1:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{A-1} &= \frac{148000.145}{\Sigma P'=P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-1} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{175003.177}{\Sigma Q'=Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+1} &= \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_{+ab1}^* = 3 \cdot 19987.000 \cdot e^{-0.012j} \cdot 3.82 \cdot e^{-49.77j^*} \quad VA \\ &= P_{+1} + j \cdot Q_{+1} = 148000.145 + j \cdot 175003.177 \quad VA\end{aligned}$$

Carga – 2:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{A-2} &= \frac{205001.184}{\Sigma P'=P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-2} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{224998.337}{\Sigma Q'=Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+2} &= \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_{+2}^* = 3 \cdot 19987.000 \cdot e^{-0.012j} \cdot 5.08 \cdot e^{-47.65j^*} \quad VA \\ &= P_{+2} + j \cdot Q_{+2} = 205001.184 + j \cdot 224998.337 \quad VA\end{aligned}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\begin{aligned}\bar{S}_A &= \frac{353001.33}{\Sigma P'=P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA = \bar{S}_{A-1} + \bar{S}_{A-2} \\ \bar{S}_R &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{400001.51}{\Sigma Q'=Q+} \quad VA = \bar{S}_{R-1} + \bar{S}_{R-2} \\ \bar{S}_+ &= \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{+a}^* = \bar{V}_+ \cdot (\bar{I}_1 + \bar{I}_2)_+^* = 3 \cdot 11539.50 \cdot e^{-29.99j} \cdot 15.41 \cdot e^{-78.56j^*} \quad VA \\ &= P_+ + j \cdot Q_+ = (P_{+1} + P_{+2}) + j \cdot (Q_{+1} + Q_{+2}) = 353001.33 + j \cdot 400001.51 \quad VA\end{aligned}$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por fase ( $P$ - $Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia



real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\sum P'_z = P_+$  ;  $\sum Q'_z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{ui_A}$  y a las corrientes reactivas  $D_{ui_R}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$$

- $D_{ui_A}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\begin{aligned} \bar{D}_{ui_A} &= A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b} \\ D_{ui_A} &= \sqrt{A^2 + B^2} \end{aligned}$$

El valor de los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga según se expresa en (3.20) del 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$\begin{aligned} A &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \\ B &= \sum_{i=1}^{\infty} B_i \end{aligned}$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $A$  y  $B$  determinados según (2.58), para cada carga individual y para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Carga – 1:

$$A_1 = [107478 - 83436.86 - 72127.64] = -48085.90 \text{ VA}$$

$$B_1 = [0 - 144516.89 + 124928.74] = -19588.15 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$A_2 = [169702.92 - 109599.12 - 95464.87] = -35361.07 \text{ VA}$$

$$B_2 = [0 - 189831.24 + 165350.01] = -24481.23 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 = -48.085.90 - 35.361.07 = -83446.97 \text{ VA}$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i = B_1 + B_2 = -19588.15 - 24481.23 = -44069.38 \text{ VA}$$

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas será para cada carga y para el total de la red:

Carga – 1:

$$\bar{D}_{ui-1A} = -48085.90 \cdot \vec{a} - 19588.15 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1A} = 51922.529 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$\bar{D}_{ui-2A} = -35361.07 \cdot \vec{a} - 24481.23 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2A} = 43008.56 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\bar{D}_{uiA} = \bar{D}_{ui-1A} + \bar{D}_{ui-2A}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \vec{a} + j \cdot \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cdot \vec{b} = -83446.97 \cdot \vec{a} - 44069.38 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{uiA} = 94386.99 \text{ VA}$$

- $D_{uiR}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “C y D” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\bar{D}_{uiR} = D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c}$$

$$D_{uiR} = \sqrt{D^2 + C^2}$$

El valor de los parámetros de desequilibrio “C y D” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga según se expresa en (3.20) del 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $C$  y  $D$  determinados según (2.59), para cada carga individual y para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Carga - 1:

$$D_1 = [4082.94 - 12250.41 + 14291.88] = 6124.41 \text{ VA}$$

$$C_1 = [0 - 21218.33 - 24754.26] = -45972.60 \text{ VA}$$

Carga - 2:

$$D_2 = [20412.14 + 26533.00 - 16326.93] = 30618.20 \text{ VA}$$

$$C_2 = [0 + 45956.50 + 28279.08] = 74235.58 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i = D_1 + D_2 = 6124.41 + 30618.20 = 36742.61 \text{ VA}$$

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i = C_1 + C_2 = -45972.60 + 74235.58 = 28262.98 \text{ VA}$$

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas será para cada carga y para el total de la red:

Carga - 1:

$$\bar{D}_{ui-1R} = 6124.41 \cdot \vec{d} - 45972.60 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1R} = 46378.747 \text{ VA}$$

Carga - 2:

$$\bar{D}_{ui-2R} = 30618.20 \cdot \vec{d} + 74235.58 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2R} = 80301.905 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\bar{D}_{uiR} = \bar{D}_{ui-1R} + \bar{D}_{ui-2R}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cdot \vec{d} + j \cdot \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \vec{c} = 36742.61 \cdot \vec{d} + 28262.98 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{uiR} = 46355.322 \text{ VA}$$

Determinados los valores de las componentes parciales y de la red total de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) esta puede ser expresada en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71); siendo los valores de los desequilibrios:

Carga – 1:

$$\bar{D}_{ui-1} = 51922.53 \cdot \vec{p} + 46378.75 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui-1} = 69619.95 \quad VA$$

$$\theta_{D_{ui-1}} = 41.77$$

Carga – 2:

$$\bar{D}_{ui-2} = 43008.56 \cdot \vec{p} + 80301.90 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui-2} = 91094.08 \quad VA$$

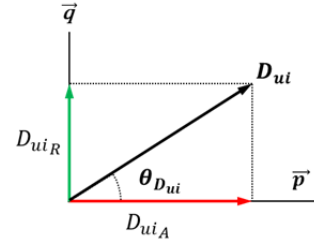
$$\theta_{D_{ui-2}} = 61.83$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\bar{D}_{ui} = 94368.995 \cdot \vec{p} + 46355.322 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui} = 105139.541 \quad VA$$

$$\theta_{D_{ui}} = 26.161$$



**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned} \bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right] \end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro correspondientes a los grados de desequilibrio y asimetría y a las potencias de desequilibrio debidas a las tensiones según (3.12) de las cargas y de la red en conjunto, considerando las tensiones nodales correspondientes:

Carga – 1:

$$\delta_- = 5.77 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_0 = 0.00$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 5.77 \cdot 10^{-5}$$

$$D_{uvA-1} = 9.06 \quad VA$$

$$D_{uvR-1} = 10.46 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-1} = 9.06 \cdot \vec{u} + 10.46 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-1} = 13.84 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-1}} = 49.10$$

Carga – 2:

$$D_{uvA-2} = 12.10 \quad VA$$

$$D_{uvR-2} = 13.80 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-2} = 12.10 \cdot \vec{u} + 13.80 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-2} = 18.36 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-2}} = 48.76$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\delta_- = 5.77 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_0 = 0.00$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 5.77 \cdot 10^{-5}$$

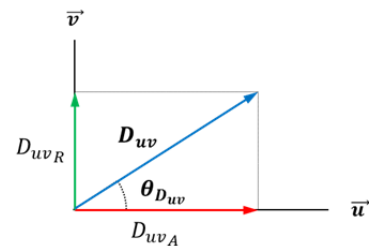
$$D_{uvA} = 21.11 \quad VA$$

$$D_{uvR} = 23.26 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv} = 21.11 \cdot \vec{u} + 23.26 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv} = 31.41 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv}} = 47.78$$



El valor del desequilibrio en tensiones es muy bajo dado que las tensiones del nudo origen de partida (no slack) están ligeramente desequilibradas.

**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\bar{p}\bar{i}$ ,  $\bar{q}\bar{v}$ ).

$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \bar{p}\bar{i} + D_{uv} \cdot \bar{q}\bar{v}$$

Los valores correspondientes a cada carga y a la red en conjunto del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) serán los siguientes, expresados en modo fasorial, módulo y ángulo:

Carga – 1:

$$\bar{D}_{u-1} = 69619.95 \cdot \bar{p}\bar{i} + 13.84 \cdot \bar{q}\bar{v} \quad VA$$

$$D_{u-1} = 69619.95 \quad VA$$

$$\theta_{D_{u-1}} = 0.01$$

Carga – 2:

$$\bar{D}_{u-2} = 91094.08 \cdot \bar{p}\bar{i} + 18.36 \cdot \bar{q}\bar{v} \quad VA$$

$$D_{u-2} = 91094.09 \quad VA$$

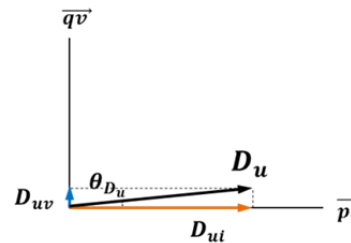
$$\theta_{D_{u-2}} = 0.01$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$\bar{D}_u = 105139.54 \cdot \bar{p}\bar{i} + 31.41 \cdot \bar{q}\bar{v} \quad VA$$

$$D_u = 105136.55 \quad VA$$

$$\theta_{D_u} = 0.02$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión ( $S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2}$ ) (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

Carga – 1:

$$S_{1(\Delta)} = 239535.16 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 235710.93 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$S_{1(\Delta)} = 317722.94 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 306429.00 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo fuente:

$$S_{1(\Delta)} = 543751.30 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 534627.65 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+}^2 + S_{L}^2 + S_{C}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$\text{Carga – 1: } S_1 = 239535.16 \text{ VA}$$

$$\text{Carga – 2: } S_1 = 317722.94 \text{ VA}$$

$$\text{Red total vista desde el nudo fuente: } S_1 = 543751.30 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total de la red coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

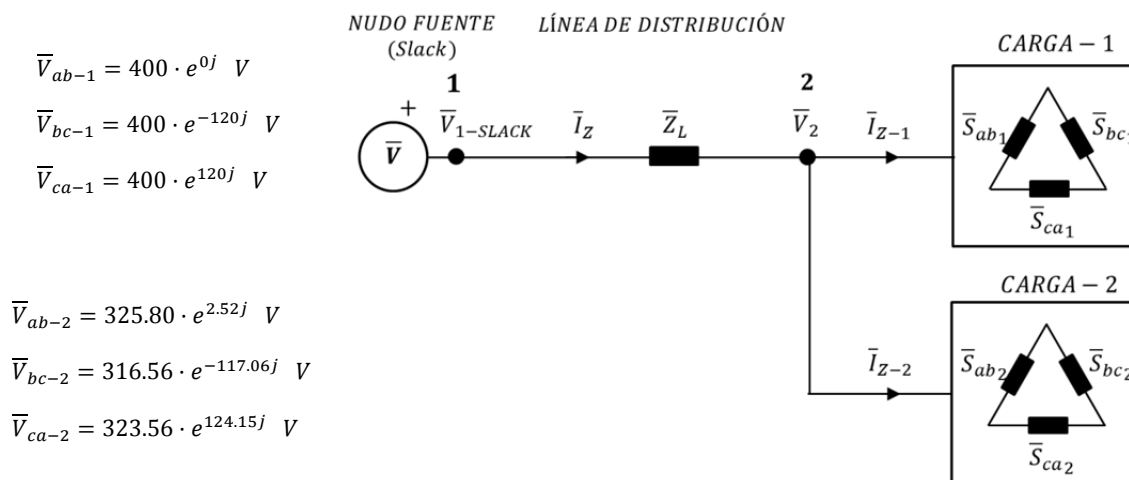
$$\text{Carga – 1: } S_1 = \sqrt{229164.58^2 + 69619.95^2} = 239535.16 \text{ VA}$$

$$\text{Carga – 2: } S_1 = \sqrt{304384.19^2 + 91094.09^2} = 317722.94 \text{ VA}$$

$$\text{Red total vista desde el nudo fuente: } S_1 = \sqrt{533489.60^2 + 105139.55^2} = 543751.30 \text{ VA}$$

**Supuesto nº 3.3: Red trifásica a 3 hilos con pérdidas de potencia, con tensiones y cargas activas y reactivas (PQ) desequilibradas conectadas en triángulo (valores nominales de tensión compuesta 0.4 KV)**

Se considera un sistema a 3 hilos, con dos cargas en triángulo conectadas en paralelo, alimentadas mediante una línea de suministro con pérdidas ( $\bar{Z}_L = R_L + j \cdot X_L$ ). Las tensiones compuestas desequilibradas de la red tendrán los siguientes valores, correspondiendo el nudo “1” al nudo de referencia o “slack” y el nudo “2” al nudo en que se encuentran ambas cargas conectadas en paralelo.



Las potencias aparentes de ambas cargas desequilibradas conectadas en triángulo al nudo 2, con componentes activas y reactivas de tipo inductivo son:

$\bar{S}_{ab-1} = 4600 + j \cdot 5000 \text{ VA}$	$\bar{S}_{ab-2} = 7000 + j \cdot 10500 \text{ VA}$
$\bar{S}_{bc-1} = 7200 + j \cdot 8000 \text{ VA}$	$\bar{S}_{bc-2} = 8500 + j \cdot 4000 \text{ VA}$
$\bar{S}_{ca-1} = 3000 + j \cdot 4500 \text{ VA}$	$\bar{S}_{ca-2} = 5000 + j \cdot 8000 \text{ VA}$

Las intensidades de fase ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) que circulan por cada carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$\bar{I}_{ab-1} = 20.85 \cdot e^{-44.87j} \text{ A}$

$\bar{I}_{bc-1} = 34.00 \cdot e^{-165.07j} \text{ A}$

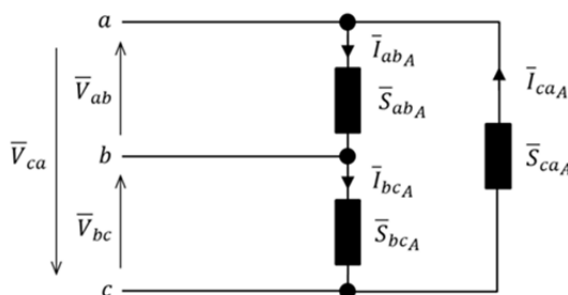
$\bar{I}_{ca-1} = 16.73 \cdot e^{67.84j} \text{ A}$

$\bar{I}_{ab-2} = 38.73 \cdot e^{-53.79j} \text{ A}$

$\bar{I}_{bc-2} = 29.68 \cdot e^{-142.26j} \text{ A}$

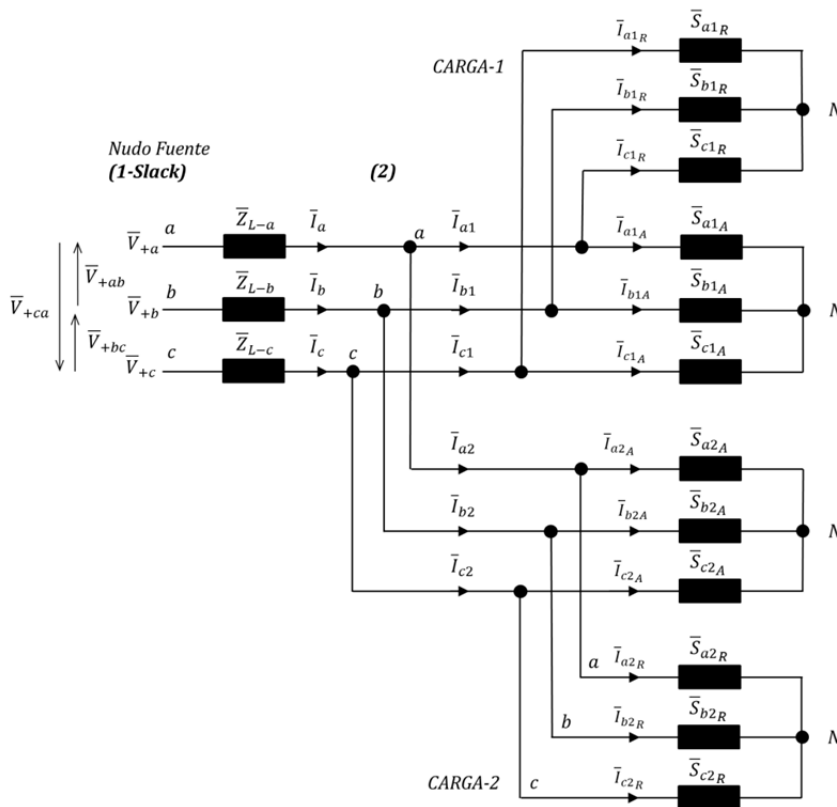
$\bar{I}_{ca-2} = 29.18 \cdot e^{66.15j} \text{ A}$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50), obtenidas mediante la aplicación de la 1º ley de Kirchhoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46) y reactivas según (2.47) de las corrientes de fase que circulan en las cargas, determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ) y las potencias activas y reactivas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43). Así las corrientes de línea de cada carga y la total que circula por la línea de suminsitro ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \\ \bar{I}_a &= 90.285 \cdot e^{-77.492j} \text{ A} & \bar{I}_{a-1} &= 31.368 \cdot e^{-74.336j} \text{ A} & \bar{I}_{a-2} &= 58.990 \cdot e^{-79.170j} \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 95.892 \cdot e^{168.546j} \text{ A} & \bar{I}_{b-1} &= 48.003 \cdot e^{172.876j} \text{ A} & \bar{I}_{b-2} &= 48.162 \cdot e^{164.230j} \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 101.560 \cdot e^{42.874j} \text{ A} & \bar{I}_{c-1} &= 46.063 \cdot e^{31.766j} \text{ A} & \bar{I}_{c-2} &= 57.055 \cdot e^{51.822j} \text{ A} \end{aligned}$$

La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella de una red de alimentación y ambas cargas en triángulo conectadas en paralelo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.





Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ), (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los valores de los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán para cada carga, para la línea de suministro y la red total vista desde el nudo origen (slack):

Carga – 1:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{A-1} &= \frac{14828.810}{\Sigma P' = P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-1} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{17590.99}{\Sigma Q' = Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+1} &= 3 \cdot \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_{+ab1}^* = 3 \cdot 321.868 \cdot e^{-3.202j} \cdot 23.83 \cdot e^{-46.67j^*} \quad VA \\ &= P_{+1} + j \cdot Q_{+1} = 14828.810 + j \cdot 17592.99 \quad VA \end{aligned}$$

Carga – 2:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{A-2} &= \frac{20523.54}{\Sigma P' = P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-2} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{22442.53}{\Sigma Q' = Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+2} &= 3 \cdot \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_{+ab2}^* = 3 \cdot 321.868 \cdot e^{-3.202j} \cdot 31.50 \cdot e^{-44.36j^*} \quad VA \\ &= P_{+2} + j \cdot Q_{+2} = 20523.54 + j \cdot 22442.53 \quad VA \end{aligned}$$

Línea de suministro:

$$\begin{aligned} \bar{S}_{A-L} &= \frac{11292.26}{\Sigma P' = P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-L} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{7185.98}{\Sigma Q' = Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+L} &= 3 \cdot \Delta \bar{V}_{+a1-2} \cdot \bar{I}_{+a}^* = 3 \cdot 46.57 \cdot e^{-42.88j} \cdot 31.50 \cdot e^{-34.126j^*} \quad VA \\ &= P_{+L} + j \cdot Q_{+L} = 11292.26 + j \cdot 7185.98 \quad VA \end{aligned}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$\bar{S}_A = \frac{46644.10}{\Sigma P' = P_+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA = \bar{S}_{A-1} + \bar{S}_{A-2}$$

$$\bar{S}_R = \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{47219.914}{\Sigma Q' = Q_+} \quad VA = \bar{S}_{R-1} + \bar{S}_{R-2}$$

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{+a}^* = 3 \cdot 230.94 \cdot e^{-30j} \cdot 95.80 \cdot e^{-75.35j^*} \quad VA$$

$$= P_+ + j \cdot Q_+ = (P_{+1} + P_{+2} + L) + j \cdot (Q_{+1} + Q_{+2} + L) = 46644.61 + j \cdot 47219.50 \quad VA$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por fase ( $P-Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\Sigma P'_Z = P_+$  ;  $\Sigma Q'_Z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{uiA}$  y a las corrientes reactivas  $D_{uiR}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q}$$

- $D_{uiA}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{uiA} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{uiA} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

El valor de los parámetro de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga y para la línea de suministro según se expresa en (3.20) del punto 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $A$  y  $B$  determinados según (2.58), para cada carga individual y para la línea de suministro; así como para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Carga - 1:

$$A_1 = [10670.69 - 8321.86 - 7313.90] = -4965.07 \text{ VA}$$

$$B_1 = [0 - 14413.88 + 12668.05] = -1745.82 \text{ VA}$$

Carga - 2:

$$A_2 = [16828.69 - 10900.38 - 9709.95] = -3781.64 \text{ VA}$$

$$B_2 = [0 - 18880.01 + 16818.12] = -2061.89 \text{ VA}$$

Línea de suministro:

$$A_L = [4893.97 - 2773.20 - 2764.65] = -643.88 \text{ VA}$$

$$B_L = [0 - 4803.32 + 4788.52] = -14.80 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + A_L = -4965.07 - 3781.64 - 643.88 = -9390.60 \text{ VA}$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i = B_1 + B_2 + B_L = -1745.82 - 2061.89 - 14.80 = -3822.51 \text{ VA}$$

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas será para cada carga, para la línea de suministro y el total de la red será:

Carga - 1:

$$\bar{D}_{ui-1A} = -4965.07 \cdot \vec{a} - 1745.82 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1A} = 5263.06 \text{ VA}$$

Carga - 2:

$$\bar{D}_{ui-2A} = -3781.64 \cdot \vec{a} - 2061.89 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2A} = 4307.226 \text{ VA}$$

Línea de suministro:

$$\bar{D}_{ui-LA} = -643.88 \cdot \vec{a} - 14.80 \cdot \vec{b} \text{ VA}$$

$$D_{ui-LA} = 644.05 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_A} &= \bar{D}_{ui-1_A} + \bar{D}_{ui-2_A} + \bar{D}_{ui-L_A} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \vec{a} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cdot \vec{b} = -9390.60 \cdot \vec{a} - 3822.51 \cdot \vec{b} \quad VA \\ D_{ui_A} &= 10138.78 \quad VA\end{aligned}$$

- $D_{ui_R}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_R} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{ui_R} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

El valor de los parámetro de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga y para la línea de suministro según se expresa en (3.20) del punto 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$\begin{aligned}D &= \sum_{i=1}^{\infty} D_i \\ C &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i\end{aligned}$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $C$  y  $D$  determinados según (2.59), para cada carga individual y para la línea de suministro; así como para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Carga - 1:

$$\begin{aligned}D_1 &= [13326.80 - 9306.17 - 8907.85] = -4887.22 \quad VA \\ C_1 &= [0 - 16118.75 + 15428.84] = -689.91 \quad VA\end{aligned}$$

Carga - 2:

$$\begin{aligned}D_2 &= [25931.03 - 10296.44 - 8476.57] = 7158.01 \quad VA \\ C_2 &= [0 + 17833.97 + 14681.86] = 3152.11 \quad VA\end{aligned}$$

Línea de suministro:

$$\begin{aligned}D_L &= [3377.64 - 1510.35 - 1882.09] = -14.80 \quad VA \\ C_L &= [0 - 2616.00 + 3259.88] = 643.88 \quad VA\end{aligned}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i = D_1 + D_2 + D_L = -4887.22 + 7158.01 - 14.80 = 2256.00 \text{ VA}$$

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i = C_1 + C_2 + C_L = -689.91 + 3152.11 + 643.88 = -3198.14 \text{ VA}$$

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas será para cada carga, para la línea de suministro y el total de la red será:

Carga - 1:

$$\bar{D}_{ui-1R} = -4887.22 \cdot \vec{d} - 689.91 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1R} = 4935.67 \text{ VA}$$

Carga - 2:

$$\bar{D}_{ui-2R} = 7158.01 \cdot \vec{d} - 3152.11 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2R} = 7821.314 \text{ VA}$$

Línea de suministro:

$$\bar{D}_{ui-LR} = -14.80 \cdot \vec{d} + 643.88 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-LR} = 644.05 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$\bar{D}_{uiR} = \bar{D}_{ui-1R} + \bar{D}_{ui-2R} + \bar{D}_{ui-LR}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cdot \vec{d} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \vec{c} = 2256.00 \cdot \vec{d} - 3198.14 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{uiR} = 3913.77 \text{ VA}$$

Determinados los valores de las componentes parciales (cargas y línea de suministro) y de la red total de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) esta puede ser expresada en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71); siendo los valores de desequilibrios de cada uno los siguientes:

Carga - 1:

$$\bar{D}_{ui-1} = 5263.068 \cdot \vec{p} + 4935.67 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1} = 7215.31 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui-1}} = 43.16$$

Carga - 2:

$$\bar{D}_{ui-2} = 4307.23 \cdot \vec{p} + 7821.31 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2} = 8928.89 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui-2}} = 61.16$$

Línea de suministro:

$$\bar{D}_{ui-L} = 644.05 \cdot \vec{p} + 644.05 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui-L} = 910.83 \quad VA$$

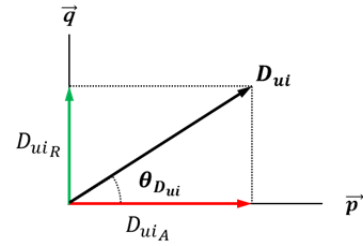
$$\theta_{D_{ui-L}} = 45$$

Red total vista desde el nudo origen (slack):

$$\bar{D}_{ui} = 10138.78 \cdot \vec{p} + 3913.77 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui} = 10867.96 \quad VA$$

$$\theta_{D_{ui}} = 21.11$$



**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned} \bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right] \end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro correspondientes a los grados de desequilibrio y asimetría y las potencias de desequilibrio debidas a tensiones según (3.12), de las cargas, de la línea de suministro y a la red en conjunto, considerando las tensiones nodales correspondientes:

Carga - 1:

$$\delta_- = 0.02$$

$$\delta_0 = 0.00$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 0.02$$

$$D_{uvA-1} = 269.13 \quad VA$$

$$D_{uvR-1} = 312.49 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-1} = 269.13 \cdot \vec{u} + 312.49 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-1} = 412.41 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-1}} = 49.26$$

Carga - 2:

$$D_{uvA-2} = 358.68 \quad VA$$

$$D_{uvR-2} = 406.49 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-2} = 358.68 \cdot \vec{u} + 406.49 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-2} = 542.11 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-2}} = 48.58$$

Línea de suministro:

$$\delta_- = 0.068$$

$$\delta_0 = 0.00$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 0.068$$

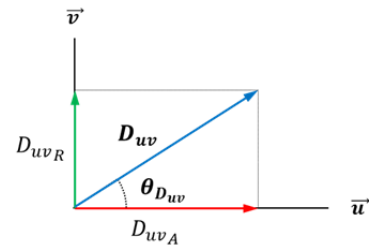
$$D_{uvA-L} = 769.68 \quad VA$$

$$D_{uvR-L} = 490.96 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-L} = 769.68 \cdot \vec{u} + 490.96 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-L} = 912.94 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-L}} = 32.53$$



Red total vista desde el nudo origen (slack):

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0.00 & D_{uvA} &= 0 \text{ VA} \\ \delta_0 &= 0.00 & D_{uvR} &= 0 \text{ VA} \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0.00 & \bar{D}_{uv} &= 0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} \text{ VA} \\ & & D_{uv} &= 0 \text{ VA} \\ & & \theta_{D_{uv}} &= 0 \end{aligned}$$

**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\bar{p}i, \bar{q}v$ ).

$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \bar{p}i + D_{uv} \cdot \bar{q}v$$

Los valores correspondientes a cada carga, a la línea de suministro y a la red en conjunto del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) serán los siguientes, expresados en modo fasorial, módulo y ángulo:

Carga – 1:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{u-1} &= 7215.31 \cdot \bar{p}i + 412.41 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_{u-1} &= 7227.09 \text{ VA} \\ \theta_{D_{u-1}} &= 3.27 \end{aligned}$$

Carga – 2:

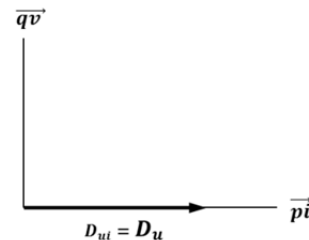
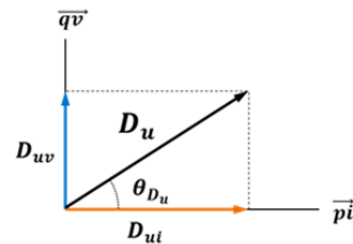
$$\begin{aligned} \bar{D}_{u-2} &= 8928.89 \cdot \bar{p}i + 542.11 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_{u-2} &= 8945.34 \text{ VA} \\ \theta_{D_{u-2}} &= 3.47 \end{aligned}$$

Línea de suministro:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{u-L} &= 910.83 \cdot \bar{p}i + 912.94 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_{u-L} &= 1289.60 \text{ VA} \\ \theta_{D_{u-L}} &= 45.07 \end{aligned}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack):

$$\begin{aligned} \bar{D}_u &= 10867.96 \cdot \bar{p}i + 0 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_u &= 10867.96 \text{ VA} \\ \theta_{D_u} &= 0 \end{aligned}$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión  $(S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2})$  (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

Carga – 1:

$$S_{1(\Delta)} = 24115.70 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 23677.79 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$S_{1(\Delta)} = 31700.19 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 30632.35 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$\text{Carga – 1: } S_1 = 24115.70 \text{ VA}$$

$$\text{Carga – 2: } S_1 = 31700.19 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

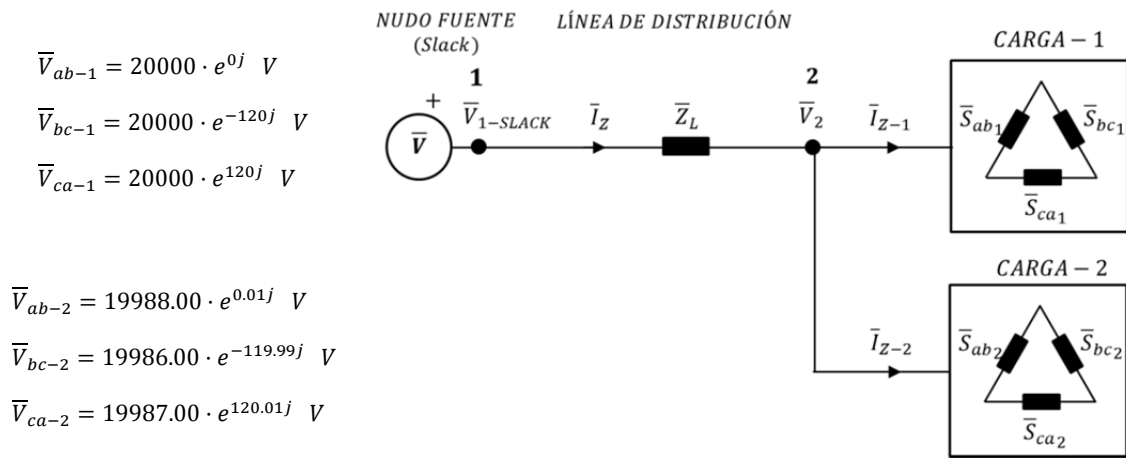
$$\text{Carga – 1: } S_1 = \sqrt{23007.31^2 + 7227.09^2} = 24115.70 \text{ VA}$$

$$\text{Carga – 2: } S_1 = \sqrt{30411.89^2 + 8945.34^2} = 31700.19 \text{ VA}$$



**Supuesto nº 3.4: Red trifásica a 3 hilos con pérdidas de potencia, con tensiones y cargas activas y reactivas (PQ) desequilibradas conectadas en triángulo (valores nominales de tensión compuesta 20 KV)**

Se considera un sistema a 3 hilos, con dos cargas en triángulo conectadas en paralelo, alimentadas mediante una línea de suministro con pérdidas ( $\bar{Z}_L = R_L + j \cdot X_L$ ). Las tensiones compuestas desequilibradas de la red tendrán los siguientes valores, correspondiendo el nudo “1” al nudo de referencia o “slack” y el nudo “2” al nudo en que se encuentran ambas cargas conectadas en paralelo.



Las potencias aparentes de ambas cargas desequilibradas conectadas en triángulo al nudo 2, con componentes activas y reactivas de tipo inductivo son:

$\bar{S}_{ab-1} = 4600 + j \cdot 5000 \text{ VA}$	$\bar{S}_{ab-2} = 7000 + j \cdot 10500 \text{ VA}$
$\bar{S}_{bc-1} = 7200 + j \cdot 8000 \text{ VA}$	$\bar{S}_{bc-2} = 8500 + j \cdot 4000 \text{ VA}$
$\bar{S}_{ca-1} = 3000 + j \cdot 4500 \text{ VA}$	$\bar{S}_{ca-2} = 5000 + j \cdot 8000 \text{ VA}$

Las intensidades de fase ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) que circulan por cada carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:

$$\bar{I}_{ab-1} = 3.40 \cdot e^{-47.38j} \text{ A}$$

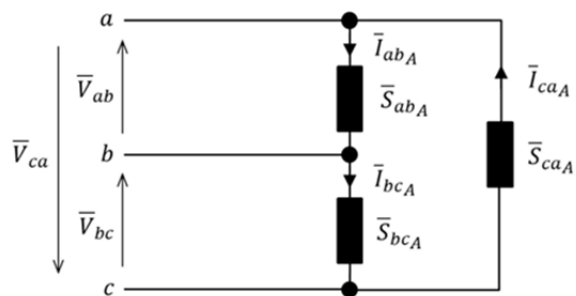
$$\bar{I}_{bc-1} = 5.39 \cdot e^{-168.00j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{ca-1} = 2.71 \cdot e^{63.71j} \text{ A}$$
  

$$\bar{I}_{ab-2} = 3.54 \cdot e^{-8.52j} \text{ A}$$

$$\bar{I}_{bc-2} = 4.70 \cdot e^{-145.19j} \text{ A}$$

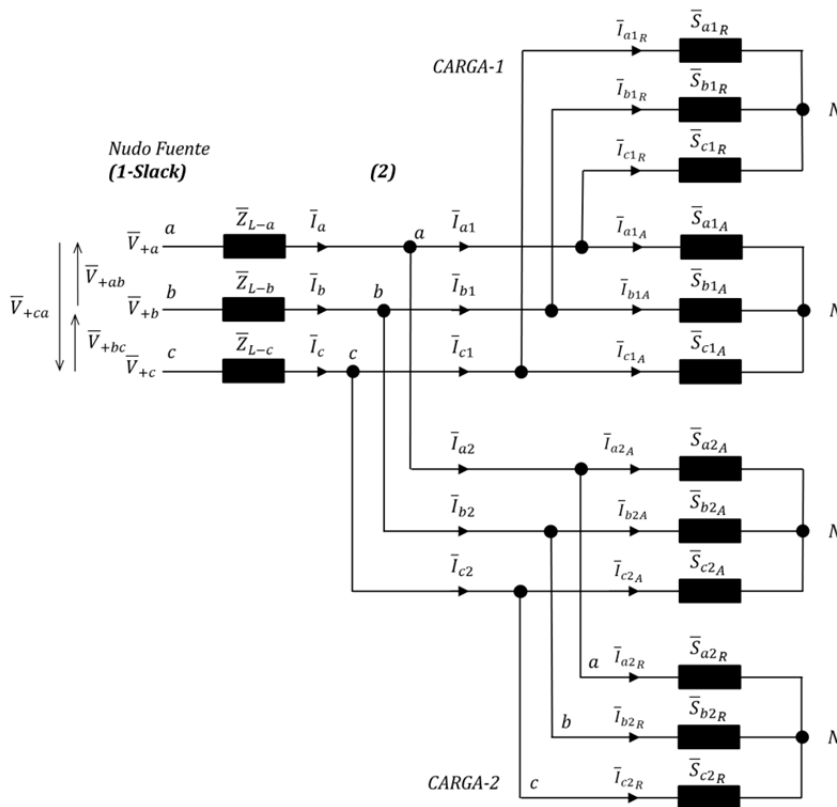
$$\bar{I}_{ca-2} = 4.72 \cdot e^{62.02j} \text{ A}$$



Las componentes activas ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50), obtenidas mediante la aplicación de la 1º ley de Kirchoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46) y reactivas según (2.47) de las corrientes de fase que circulan en las cargas, determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ) y las potencias activas y reactivas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43). Así las corrientes de línea de cada carga y la total que circula por la línea de suministro ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) tienen los siguientes valores:

$$\begin{aligned} \bar{I} &= \bar{I}_1 + \bar{I}_2 \\ \bar{I}_a &= 9.913 \cdot e^{-76.04j} \text{ A} & \bar{I}_{a-1} &= 5.049 \cdot e^{-77.38j} \text{ A} & \bar{I}_{a-2} &= 4.867 \cdot e^{-74.66j} \text{ A} \\ \bar{I}_b &= 14.951 \cdot e^{-177.02j} \text{ A} & \bar{I}_{b-1} &= 7.694 \cdot e^{169.66j} \text{ A} & \bar{I}_{b-2} &= 7.671 \cdot e^{-163.66j} \text{ A} \\ \bar{I}_c &= 16.289 \cdot e^{39.66j} \text{ A} & \bar{I}_{c-1} &= 7.374 \cdot e^{28.74j} \text{ A} & \bar{I}_{c-2} &= 9.156 \cdot e^{48.44j} \text{ A} \end{aligned}$$

La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella de una red de alimentación y ambas cargas en triángulo conectadas en paralelo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ), (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{Z_A}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{Z_R}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los valores de los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán para cada carga, para la línea de suministro y la red total vista desde el nudo origen (slack):

Carga – 1:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{A-1} &= \frac{148000.145}{\Sigma P'=P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-1} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{175003.177}{\Sigma Q'=Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+1} &= 3 \cdot \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_{+ab1}^* = 3 \cdot 19987.00 \cdot e^{-0.017j} \cdot 3.82 \cdot e^{-49.77j^*} \quad VA \\ &= P_{+1} + j \cdot Q_{+1} = 148000.145 + j \cdot 175003.177 \quad VA\end{aligned}$$

Carga – 2:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{A-2} &= \frac{205003.91}{\Sigma P'=P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-2} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{130503.06}{\Sigma Q'=Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+2} &= 3 \cdot \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_{+ab2}^* = 3 \cdot 19987.00 \cdot e^{-0.017j} \cdot 4.05 \cdot e^{-32.47j^*} \quad VA \\ &= P_{+2} + j \cdot Q_{+2} = 205003.91 + j \cdot 130503.06 \quad VA\end{aligned}$$

Línea de suministro:

$$\begin{aligned}\bar{S}_{A-L} &= \frac{223.753}{\Sigma P'=P+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA \\ \bar{S}_{R-L} &= \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{142.389}{\Sigma Q'=Q+} \quad VA \\ \bar{S}_{+L} &= 3 \cdot \Delta \bar{V}_{+a1-2} \cdot \bar{I}_{+a}^* = 3 \cdot 6.56 \cdot e^{-38.39j} \cdot 13.49 \cdot e^{-70.86j^*} \quad VA \\ &= P_{+L} + j \cdot Q_{+L} = 223.753 + j \cdot 142.389 \quad VA\end{aligned}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$\bar{S}_A = \frac{353227.81}{\Sigma P' = P_+} + j \cdot \frac{0}{\Sigma Q''} \quad VA = \bar{S}_{A-1} + \bar{S}_{A-2}$$

$$\bar{S}_R = \frac{0}{\Sigma P''} + j \cdot \frac{305648.63}{\Sigma Q' = Q_+} \quad VA = \bar{S}_{R-1} + \bar{S}_{R-2}$$

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_{+a} \cdot \bar{I}_{+a}^* = 3 \cdot 11547.01 \cdot e^{-30j} \cdot 13.49 \cdot e^{-70.86j^*} \quad VA$$

$$= P_+ + j \cdot Q_+ = (P_{+1} + P_{+2} + L) + j \cdot (Q_{+1} + Q_{+2} + L) = 353227.81 + j \cdot 305648.63 \quad VA$$

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por fase ( $P-Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\Sigma P'_Z = P_+$  ;  $\Sigma Q'_Z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas  $D_{uiA}$  y a las corrientes reactivas  $D_{uiR}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q}$$

- $D_{uiA}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{uiA} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{uiA} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

El valor de los parámetro de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga y para la línea de suministro según se expresa en (3.20) del punto 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $A$  y  $B$  determinados según (2.58), para cada carga individual y para la línea de suministro; así como para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Carga - 1:

$$A_1 = [107478.61 - 83436.86 - 72127.64] = -48085.90 \quad VA$$

$$B_1 = [0 - 144516.89 + 124928.74] = -19588.15 \quad VA$$

Carga - 2:

$$A_2 = [169706.78 - 109601.05 - 95464.87] = -35359.14 \quad VA$$

$$B_2 = [0 - 189834.59 + 165350.01] = -24484.58 \quad VA$$

Línea de suministro:

$$A_L = [72.76 - 65.67 - 56.16] = -49.07 \quad VA$$

$$B_L = [0 - 113.75 + 97.28] = -16.48 \quad VA$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i = A_1 + A_2 + A_L = -83494.11 \quad VA$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i = B_1 + B_2 + B_L = -44089.20 \quad VA$$

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas será para cada carga, para la línea de suministro y el total de la red será:

Carga - 1:

$$\bar{D}_{ui-1A} = -48085.90 \cdot \vec{a} - 19588.15 \cdot \vec{b} \quad VA$$

$$D_{ui-1A} = 51922.53 \quad VA$$

Carga - 2:

$$\bar{D}_{ui-2A} = -35359.14 \cdot \vec{a} - 24484.58 \cdot \vec{b} \quad VA$$

$$D_{ui-2A} = 43008.88 \quad VA$$

Línea de suministro:

$$\bar{D}_{ui-LA} = -49.07 \cdot \vec{a} - 16.48 \cdot \vec{b} \quad VA$$

$$D_{ui-LA} = 51.77 \quad VA$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_A} &= \bar{D}_{ui-1_A} + \bar{D}_{ui-2_A} + \bar{D}_{ui-L_A} \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} A_i \cdot \vec{a} + \sum_{i=1}^{\infty} B_i \cdot \vec{b} = -83494.11 \cdot \vec{a} - 44089.20 \cdot \vec{b} \quad VA \\ D_{ui_A} &= 94419.94 \quad VA\end{aligned}$$

- $D_{ui_R}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\begin{aligned}\bar{D}_{ui_R} &= D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c} \\ D_{ui_R} &= \sqrt{D^2 + C^2}\end{aligned}$$

El valor de los parámetro de desequilibrio “ $C$  y  $D$ ” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga y para la línea de suministro según se expresa en (3.20) del punto 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$\begin{aligned}D &= \sum_{i=1}^{\infty} D_i \\ C &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i\end{aligned}$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $C$  y  $D$  determinados según (2.59), para cada carga individual y para la línea de suministro; así como para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Carga - 1:

$$\begin{aligned}D_1 &= [134346.18 - 91927.35 - 88391.42] = -45972.60 \quad VA \\ C_1 &= [0 - 159222.85 + 153098.44] = -6124.41 \quad VA\end{aligned}$$

Carga - 2:

$$\begin{aligned}D_2 &= [127984.36 - 35713.10 - 84853.92] = 7417.33 \quad VA \\ C_2 &= [0 - 61856.91 + 146971.30] = 85114.40 \quad VA\end{aligned}$$

Línea de suministro:

$$\begin{aligned}D_L &= [56.14 - 22.14 - 50.47] = -16.48 \quad VA \\ C_L &= [0 - 38.35 + 87.42] = 49.07 \quad VA\end{aligned}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i = D_1 + D_2 + D_L = -38571.74 \text{ VA}$$

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i = C_1 + C_2 + C_L = 79039.06 \text{ VA}$$

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas será para cada carga, para la línea de suministro y el total de la red será:

Carga – 1:

$$\bar{D}_{ui-1R} = -45972.60 \cdot \vec{d} - 6124.41 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1R} = 46378.75 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$\bar{D}_{ui-2R} = 7417.33 \cdot \vec{d} + 85114.40 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2R} = 85436.98 \text{ VA}$$

Línea de suministro:

$$\bar{D}_{ui-LR} = -16.48 \cdot \vec{d} + 49.07 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{ui-LR} = 51.77 \text{ VA}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack): Línea de suministro + Carga 1 + Carga 2

$$\bar{D}_{uiR} = \bar{D}_{ui-1R} + \bar{D}_{ui-2R} + \bar{D}_{ui-LR}$$

$$= \sum_{i=1}^{\infty} D_i \cdot \vec{d} + \sum_{i=1}^{\infty} C_i \cdot \vec{c} = -38571.74 \cdot \vec{d} + 79039.06 \cdot \vec{c} \text{ VA}$$

$$D_{uiR} = 87948.58 \text{ VA}$$

Determinados los valores de las componentes parciales (cargas y línea de suministro) y de la red total de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ) esta puede ser expresada en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71); siendo los valores de desequilibrios de cada uno los siguientes:

Carga – 1:

$$\bar{D}_{ui-1} = 51922.53 \cdot \vec{p} + 46378.75 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui-1} = 69919.95 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui-1}} = 41.77$$

Carga – 2:

$$\bar{D}_{ui-2} = 43008.88 \cdot \vec{p} + 85436.98 \cdot \vec{q} \text{ VA}$$

$$D_{ui-2} = 95651.66 \text{ VA}$$

$$\theta_{D_{ui-2}} = 63.28$$

Línea de suministro:

$$\bar{D}_{ui-L} = 51.77 \cdot \vec{p} + 51.77 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui-L} = 73.21 \quad VA$$

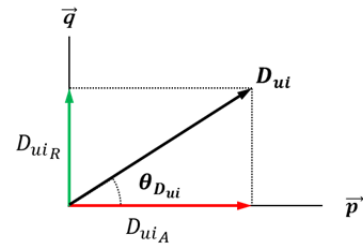
$$\theta_{D_{ui-L}} = 45$$

Red total vista desde el nudo origen (slack):

$$\bar{D}_{ui} = 94419.94 \cdot \vec{p} + 87948.58 \cdot \vec{q} \quad VA$$

$$D_{ui} = 129035.18 \quad VA$$

$$\theta_{D_{ui}} = 42.97$$



**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\bar{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\bar{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned} \bar{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right] \end{aligned}$$

siendo los valores de cada parámetro correspondientes a los grados de desequilibrio y asimetría y las potencias de desequilibrio debidas a tensiones según (3.12), de las cargas, de la línea de suministro y a la red en conjunto, considerando las tensiones nodales correspondientes:

Carga - 1:

$$\delta_- = 5.77 \cdot 10^{-5}$$

$$\delta_0 = 0.00$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 5.77 \cdot 10^{-5}$$

$$D_{uvA-1} = 9.06 \quad VA$$

$$D_{uvR-1} = 10.46 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-1} = 9.06 \cdot \vec{u} + 10.46 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-1} = 13.84 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-1}} = 49.10$$

Carga - 2:

$$D_{uvA-2} = 12.10 \quad VA$$

$$D_{uvR-2} = 9.01 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-2} = 12.10 \cdot \vec{u} + 9.01 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-2} = 15.09 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-2}} = 36.67$$

Línea de suministro:

$$\delta_- = 0.276$$

$$\delta_0 = 0.00$$

$$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} = 0.276$$

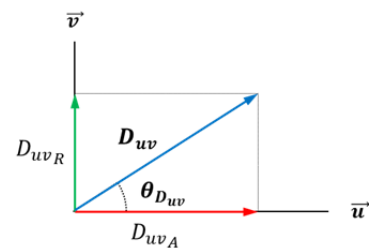
$$D_{uvA-L} = 63.39 \quad VA$$

$$D_{uvR-L} = 41.82 \quad VA$$

$$\bar{D}_{uv-L} = 63.89 \cdot \vec{u} + 41.82 \cdot \vec{v} \quad VA$$

$$D_{uv-L} = 75.95 \quad VA$$

$$\theta_{D_{uv-L}} = 33.41$$





Red total vista desde el nudo origen (slack):

$$\begin{aligned} \delta_- &= 0.00 & D_{uvA} &= 0 \text{ VA} \\ \delta_0 &= 0.00 & D_{uvR} &= 0 \text{ VA} \\ \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} &= 0.00 & \bar{D}_{uv} &= 0 \cdot \bar{u} + 0 \cdot \bar{v} \text{ VA} \\ & & D_{uv} &= 0 \text{ VA} \\ & & \theta_{D_{uv}} &= 0 \end{aligned}$$

**c) Potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\bar{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\bar{p}i, \bar{q}v$ ).

$$\bar{D}_u = D_{ui} \cdot \bar{p}i + D_{uv} \cdot \bar{q}v$$

Los valores correspondientes a cada carga, a la línea de suministro y a la red en conjunto del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) serán los siguientes, expresados en modo fasorial, módulo y ángulo:

Carga – 1:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{u-1} &= 69619.95 \cdot \bar{p}i + 13.84 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_{u-1} &= 69619.95 \text{ VA} \\ \theta_{D_{u-1}} &= 0.01 \end{aligned}$$

Carga – 2:

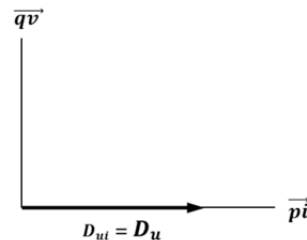
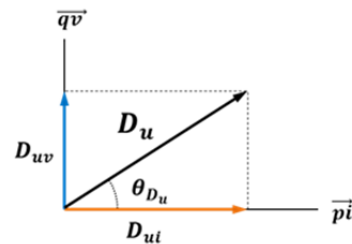
$$\begin{aligned} \bar{D}_{u-2} &= 95951.66 \cdot \bar{p}i + 15.09 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_{u-2} &= 95951.67 \text{ VA} \\ \theta_{D_{u-2}} &= 0.01 \end{aligned}$$

Línea de suministro:

$$\begin{aligned} \bar{D}_{u-L} &= 73.21 \cdot \bar{p}i + 75.95 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_{u-L} &= 105.49 \text{ VA} \\ \theta_{D_{u-L}} &= 46.05 \end{aligned}$$

Red total vista desde el nudo origen (slack):

$$\begin{aligned} \bar{D}_u &= 129035.18 \cdot \bar{p}i + 0 \cdot \bar{q}v \text{ VA} \\ D_u &= 129035.18 \text{ VA} \\ \theta_{D_u} &= 0 \end{aligned}$$



**d) Potencia aparente total del sistema ( $S_1$ ):**

El equivalente a estrella de la red trifásica a tres hilos con cargas conectadas en triángulo mediante la aplicación del Teorema de Kennelly (Rosen) no proporciona la misma potencia total de desequilibrio que considerándola como triángulo, no siendo equivalentes desde el punto de vista de las potencias de desequilibrio, ya que no verifican la expresión  $(S_{1u} = D_{1u} = \sqrt{S_1^2 - S_+^2})$  (2.1) según se muestra en el punto 2.4 del Capítulo 2.

Así los valores de la potencia total aparente de la carga según las expresiones (2.3) o (2.4) son los siguientes:

Carga – 1:

$$S_{1(\Delta)} = 239535.19 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 235710.93 \text{ VA}$$

Carga – 2:

$$S_{1(\Delta)} = 261164.50 \text{ VA}$$

$$S_{1(Y)} = 257798.83 \text{ VA}$$

mientras que la potencia total aparente del sistema considerando la transformación equivalente de las cargas de triángulo a estrella, en la cual se incluyen correctamente los fenómenos de desequilibrio obtenidas mediante las expresiones (2.36) y (2.37), tiene el siguiente valor:

$$S_{1(Y)}^2 = S_{+(Y)}^2 + S_{L(Y)}^2 + S_{C(Y)}^2$$

$$S_{1(Y)} = \sqrt{9 \cdot (V_{+a}^2 \cdot I_{+a}^2) + 9 \cdot [(V_{+a}^2 + V_{-a}^2) \cdot I_{-a}^2 + (V_{-a}^2 \cdot I_{+a}^2)] + 9 \cdot (V_{+ab}^2 + V_{-ab}^2) \cdot I_{0ab}^2}$$

$$\text{Carga – 1: } S_1 = 239535.19 \text{ VA}$$

$$\text{Carga – 2: } S_1 = 261164.50 \text{ VA}$$

donde se comprueba que el valor total coincide con el valor obtenido de la aplicación de los cálculos de las potencias de desequilibrio ( $D_{ui}$ ,  $D_{uv}$ ,  $D_u$ ) basadas en los parámetros “A, B, C y D” según se expone en el Capítulos 2, siendo:

$$S_1 = \sqrt{S_+^2 + D_u^2}$$

$$\text{Carga – 1: } S_1 = \sqrt{229194.58^2 + 69619.95^2} = 239535.16 \text{ VA}$$

$$\text{Carga – 2: } S_1 = \sqrt{243017.81^2 + 95651.67^2} = 261164.50 \text{ VA}$$

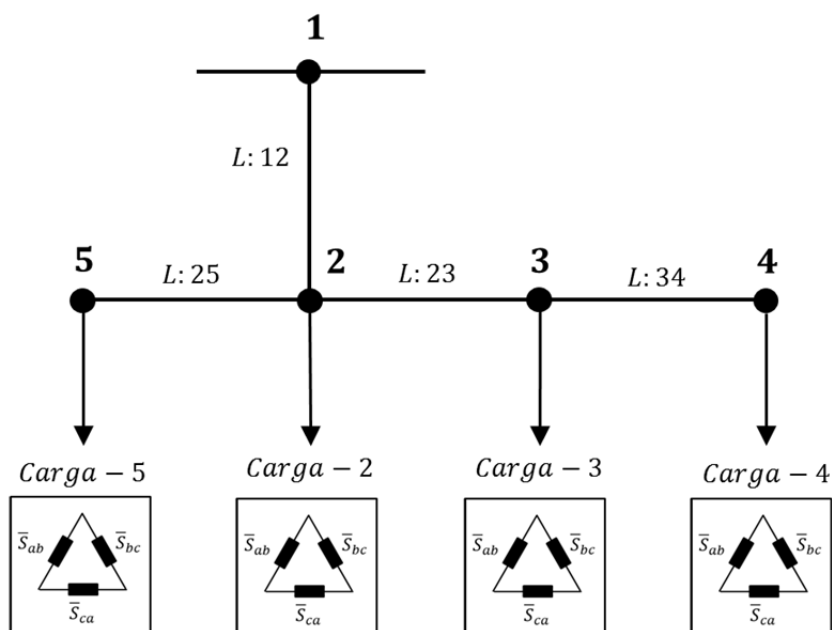
**4.5. RED DE SUMINISTRO TRIFÁSICA A TRES HILOS CON CINCO NODOS DE CONSUMO CONSTITUIDOS POR CARGAS ACTIVAS Y REACTIVAS (PQ) DESEQUILIBRADAS CONECTADAS EN TRIÁNGULO (valores nominales de tensión compuesta 20 KV)**

Se considera una red de suministro trifásica a 3 hilos constituida por un nudo de referencia o slack (nudo 1) y cuatro nudos de consumo, con cargas desequilibradas en triángulo.

La red de suministro se considera con pérdidas debidas a sus parámetros característicos de resistencia e inductancia ( $\bar{Z}_L = R_L + j \cdot X_L$ ).

Las tensiones en cada nudo están desequilibradas, a excepción del nudo origen de referencia (1) que se considera como equilibrado.

La topología de la red se muestra en la figura siguiente:



Los valores de las tensiones compuestas nodales expresadas en valores por unidad (p.u.) para una tensión base  $V_{base} = 20000$  V son los siguientes:

Valores por unidad

V base = 20000 kv

	Nudo - 1		Nudo - 2		Nudo - 3		Nudo - 4		Nudo - 5	
	V	ángulo	V	ángulo	V	ángulo	V	ángulo	V	ángulo
Vab =	1,0000	0,00	0,9772	0,21	0,9686	0,32	0,9638	0,39	0,9691	0,27
Vbc =	1,0000	-120,00	0,9768	-120,17	0,9664	-120,28	0,9602	-120,44	0,9716	-120,01
Vca =	1,0000	120,00	0,9714	120,04	0,9587	120,13	0,9499	120,16	0,9662	120,00

y expresadas en valores reales:

Valores reales V base = 20000 kV

	Nudo - 1		Nudo - 2		Nudo - 3		Nudo - 4		Nudo - 5	
	V	ángulo	V	ángulo	V	ángulo	V	ángulo	V	ángulo
Vab (V) =	20000,00	0,00	19544,00	0,21	19372,00	0,32	19276,00	0,39	19382,00	0,27
Vbc (V) =	20000,00	-120,00	19536,00	-120,17	19328,00	-120,28	19204,00	-120,44	19432,00	-120,01
Vca (V) =	20000,00	120,00	19427,66	120,04	19174,29	120,13	18998,23	120,16	19324,86	120,00

Las potencias aparentes de las cargas desequilibradas con componentes activas y reactivas de tipo inductivo (PQ) son las siguientes:

Cargas nodales

	Nudo - 2		Nudo - 3		Nudo - 4		Nudo - 5	
	P (kW)	Q (kVAr)	P (kW)	Q (kVAr)	P (kW)	Q (kVAr)	P (kW)	Q (kVAr)
Sab =	1000,00	500,00	500,00	800,00	1000,00	700,00	2000,00	1500,00
Sbc =	2000,00	700,00	1000,00	1000,00	1500,00	300,00	700,00	1000,00
Sca =	3000,00	1500,00	800,00	600,00	2000,00	1500,00	1000,00	800,00

siendo la potencia total demandada por estas:

Potencia total demandada por las cargas:

	Cargas total por fase	
	P (kW)	Q (kVAr)
Sab =	450,00	350,00
Sbc =	520,00	300,00
Sca =	680,00	440,00

S total =	1977,52	kVA
P total =	1650,00	kW
Q total =	1090,00	kVAr

Las líneas de suministro están caracterizadas por sus parámetros eléctricos de resistencia ( $R$ ), reactancia inductiva ( $X_L$ ) y longitud ( $L$ ). Se ha considerado que todos los tramos tienen iguales características definidas por los siguientes valores:

Longitud tramo de línea= 3281 feets (1 Km)

	R (Ω/Milla)	XL (Ω/Milla)	R (Ω)	XL (Ω)
Línea a =	1,06578	0,68690	0,411	0,265
Línea b =	1,06578	0,68690	0,411	0,265
Línea c =	1,06578	0,68690	0,411	0,265

siendo los valores de las pérdidas de potencia ( $\Delta S_L$ ) de cada tramo de línea en función de las caídas de tensión determinadas en cada nudo extremos de estas los siguientes:

Perdidas de potencia en las líneas

	L12		L23		L34		L25	
	P (kW)	Q (kVAr)	P (kW)	Q (kVAr)	P (kW)	Q (kVAr)	P (kW)	Q (kVAr)
$\Delta S_{La} =$	166,460	107,284	29,046	18,720	11,981	7,722	11,947	7,700
$\Delta S_{Lb} =$	103,854	66,934	16,783	10,816	4,776	3,078	13,455	8,672
$\Delta S_{Lc} =$	170,240	109,720	36,603	23,591	16,795	10,825	4,238	2,731

y el valor de la pérdida de potencia total debida a las líneas:

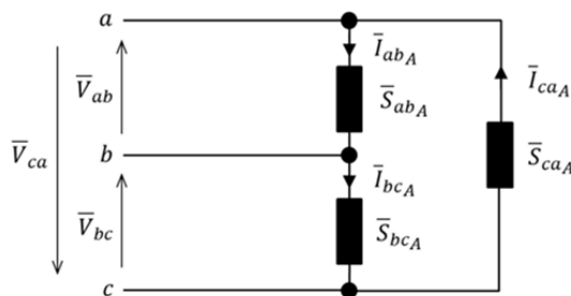
Perdidas de potencia totales en las líneas:

	Cargas total por fase	
	P (kW)	Q (kVAr)
$\Delta S_{La} =$	219,434	141,426
$\Delta S_{Lb} =$	138,868	89,501
$\Delta S_{Lc} =$	227,876	146,866

$\Delta S_{L total} =$	697,375 kVA
$\Delta P_{L total} =$	586,178 kW
$\Delta Q_{L total} =$	377,793 kVAr

Las intensidades de fase ( $\bar{I} = \bar{I}_A + \bar{I}_R$ ) que circulan por cada carga según las expresiones (2.46) y (2.47) tienen los siguientes valores:



Intensidades de fase de las cargas:

	Carga - 2		Carga - 3		Carga - 4		Carga - 5	
	I	ángulo	I	ángulo	I	ángulo	I	ángulo
$I_{ab} (A) =$	57,21	-26,36	48,70	-57,67	63,33	-34,60	128,99	-36,60
$I_{bc} (A) =$	108,46	-139,46	73,17	-165,28	79,66	-131,75	62,82	-175,02
$I_{ca} (A) =$	172,65	93,48	52,15	83,26	131,59	83,29	66,27	81,34

Las componentes activas ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactivas ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las corrientes de línea se determinan según (2.49) y (2.50), obtenidas mediante la aplicación de la 1ª ley de Kirchhoff sobre las respectivas componentes activas según (2.46) y reactivas según (2.47) de las corrientes de fase que circulan en las cargas, determinadas considerando la tensión de secuencia positiva ( $\bar{V}_{+ab}$ ) y las potencias activas y reactivas según ( $\bar{S}_Z = \bar{V}_{+ab} \cdot \bar{I}_Z^* = P_Z + j \cdot Q_Z$ ,  $Z = ab, bc, ca$ ) (2.43). Así las corrientes de línea de cada carga tienen los siguientes valores:

Intensidades de línea de las cargas:

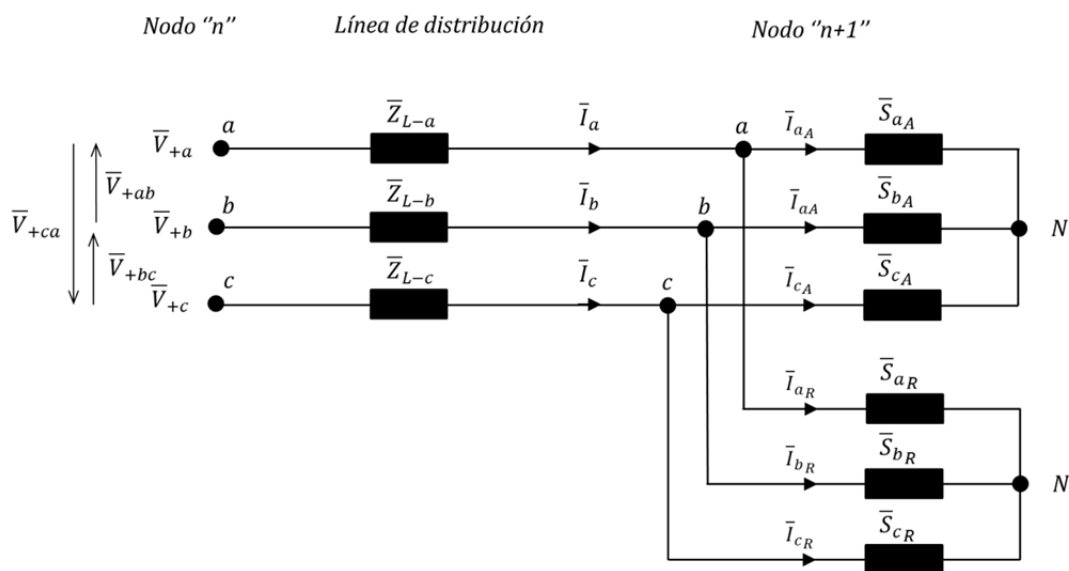
	Carga - 2		Carga - 3		Carga - 4		Carga - 5	
	I	ángulo	I	ángulo	I	ángulo	I	ángulo
la (A) =	207,13	-72,66	95,06	-77,90	170,66	-77,56	170,41	-56,69
lb (A) =	141,09	-161,36	99,40	166,88	107,75	-167,42	180,84	156,73
lc (A) =	253,27	73,49	104,24	42,47	202,05	70,21	101,49	44,37

y las intensidades que circulan por cada tramo de línea de suministro serán:

Intensidades que circulan por las líneas:

	L 12		L 23		L34		L25	
	I	ángulo	I	ángulo	I	ángulo	I	ángulo
la (A) =	636,10	-70,53	265,71	-77,68	170,66	-77,56	170,41	-56,69
lb (A) =	502,44	177,10	201,98	-179,74	107,75	-167,42	180,84	156,73
lc (A) =	643,28	63,22	298,28	60,85	202,05	70,21	101,49	44,37

La figura siguiente representa el esquema equivalente en estrella de un tramo de red de suministro y una carga en triángulo conectadas a un nodo estudiado desde el exterior de la carga, con las tensiones simples de secuencia directa y las intensidades de línea en las que las componentes activa y reactiva se representan de forma separada, según lo expuesto en el punto 2.4.2.



Considerando que los valores de las intensidades de fase y línea permanecen fijos y han de verificar ( $\bar{I}_Z = \bar{I}_{Z_A} + \bar{I}_{Z_R}$ ), (2.45), la potencia aparente positiva total del sistema es:

$$\bar{S}_+ = 3 \cdot \bar{V}_+ \cdot \bar{I}_+^* = P_+ + j \cdot Q_+ = \bar{S}_A + \bar{S}_R$$

En el supuesto de estudio, los valores de las componentes activa ( $\bar{I}_{ZA}$ ) y reactiva ( $\bar{I}_{ZR}$ ) de las intensidades debidas a las tensiones de secuencia positiva han variado de los obtenidos directamente de la carga ya que las tensiones son desequilibradas.

Los valores de los parámetros que definen las potencias aparentes activas ( $\bar{S}_A$ ) y reactivas ( $\bar{S}_R$ ), considerando las tensiones simples positivas ( $\bar{V}_{+a}$ ) y las intensidades de línea ( $\bar{I}_{a,b,c}$ ) según (2.51), (2.52) y (2.53), serán para cada carga:

Potencias de Secuencia directa de las Cargas

	Carga - 2	Carga - 3	Carga - 4	Carga - 5
S+ (kVA) =	6587,21	3324,44	5163,33	4956,86
P+ (kW) =	6005,53	2299,43	4512,38	3702,57
Q+ (kVAR) =	2706,46	2400,94	2509,67	3295,67

para cada tramo de línea:

Potencias de Secuencia directa de las Líneas

	L12	L23	L34	L25
S+ (kVA) =	512,61	93,53	35,55	32,02
P+ (kW) =	430,88	78,61	29,88	26,91
Q+ (kVAR) =	277,70	50,67	19,26	17,35

y para el total de la red vista desde el nudo origen:

Potencia total del sistema de secuencia directa

	Total sistema
S+ (kVA) =	20472,53
P+ (kW) =	17086,20
Q+ (kVAR) =	11277,70

- El reparto de las potencias de cada línea ( $P'$ ,  $P''$ ;  $Q'$ ,  $Q''$ ), en el caso de tensiones desequilibradas no se corresponde con la potencia aparente por fase ( $P-Q$ ) de la carga, existiendo para cada corriente activa y reactiva una potencia real e imaginaria distintas de las asignadas a la carga. La suma de las cuales según (2.57) se corresponde con las potencias activas y reactivas de secuencia positiva ( $\sum P'_z = P_+$  ;  $\sum Q'_z = Q_+$ ).

**a) Potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\bar{D}_{ui}$ ):**

La potencia de desequilibrio ( $\bar{D}_{ui}$ ) (2.70) queda definida por dos componentes ortogonales entre sí ( $\vec{p}$  y  $\vec{q}$ ), que caracterizan la potencia de desequilibrio debida a las

corrientes activas  $D_{ui_A}$  y a las corrientes reactivas  $D_{ui_R}$ , la cual queda expresada en función de los parámetros de desequilibrio “ $A$ ,  $B$ ,  $C$  y  $D$ ”, siendo:

$$\bar{D}_{ui} = D_{ui_A} \cdot \vec{p} + D_{ui_R} \cdot \vec{q}$$

- $D_{ui_A}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas expresada en el plano definido por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” según las expresiones (2.66) y 2.67);

$$\bar{D}_{ui_A} = A \cdot \vec{a} + B \cdot \vec{b}$$

$$D_{ui_A} = \sqrt{A^2 + B^2}$$

El valor de los parámetro de desequilibrio “ $A$  y  $B$ ” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga y para la línea de suministro según se expresa en (3.20) del punto 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$A = \sum_{i=1}^{\infty} A_i$$

$$B = \sum_{i=1}^{\infty} B_i$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros  $A$  y  $B$  determinados según (2.58), para cada carga individual y para la línea de suministro; así como para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Parámetros de desequilibrio de las cargas: A y B

	Carga -2	Carga -3	Carga -4	Carga -5
A (kVA) =	16,31	-478,82	21,61	1091,71
B (kVA) =	2464,73	372,48	1251,76	-1228,29

Parámetros de desequilibrio de las Líneas: A y B

	L12	L23	L34	L25
A (kVA) =	-5,40	-6,16	-3,90	5,83
B (kVA) =	54,06	13,21	7,90	-4,23

Parámetros de desequilibrio totales del sistema: A y B

	Total sistema
A (kVA) =	641,18
B (kVA) =	2931,63



El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas para cada carga, para la línea de suministro y el total de la red será:

Potencia de desequilibrio de las cargas debida a las corrientes activas:

	Carga - 2	Carga - 3	Carga - 4	Carga - 5
D <sub>ui-A</sub> (kVA) =	2464,79	606,64	1251,95	1643,33

Potencia de desequilibrio de las líneas debida a las corrientes activas:

	L12	L23	L34	L25
D <sub>ui-A</sub> (kVA) =	54,33	14,57	8,81	7,20

Potencia de desequilibrio total de la red debida a las corrientes activas:

	Total sistema
D <sub>ui-A</sub> (kVA) =	3000,92

- $D_{ui_R}$ : Potencia de desequilibrio debida a las corrientes reactivas expresada en el plano definido por  $\vec{c}$  y  $\vec{d}$ , mediante los parámetros de desequilibrio “C y D” según las expresiones (2.68) y 2.69);

$$\bar{D}_{ui_R} = D \cdot \vec{d} + C \cdot \vec{c}$$

$$D_{ui_R} = \sqrt{D^2 + C^2}$$

El valor de los parámetro de desequilibrio “C y D” del conjunto de la red, corresponde a la suma de los valores calculados individualmente para cada carga y para la línea de suministro según se expresa en (3.20) del punto 3.4, apartado 3.4.1 del Capítulo 3; no siendo necesario desarrollar un circuito equivalente del conjunto. Así:

$$D = \sum_{i=1}^{\infty} D_i$$

$$C = \sum_{i=1}^{\infty} C_i$$

A continuación se expresan los valores de los parámetros C y D determinados según (2.59), para cada carga individual y para la línea de suministro; así como para la red en conjunto obtenida como la suma de los parámetros individuales; siendo los siguientes resultados:

Parámetros de desequilibrio de las cargas: C y D

	Carga -2	Carga -3	Carga -4	Carga -5
D (kVA) =	416,84	-432,02	1113,24	174,84
C (kVA) =	1236,15	-234,89	1002,61	-844,66

Parámetros de desequilibrio de las Líneas: C y D

	L12	L23	L34	L25
D (kVA) =	54,06	13,21	7,90	-4,23
C (kVA) =	5,40	6,16	3,90	-5,83

Parámetros de desequilibrio totales del sistema: C y D

	Total sistema
D (kVA) =	1343,83
C (kVA) =	1168,84

El valor de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes activas será para cada carga, para la línea de suministro y el total de la red será:

Potencias de desequilibrio de las cargas debidas a las corrientes reactivas:

	Carga -2	Carga -3	Carga -4	Carga -5
D <sub>ui-R</sub> (kVA) =	1304,54	491,75	1498,17	862,56

Potencia de desequilibrio de las líneas debida a las corrientes activas:

	L12	L23	L34	L25
D <sub>ui-R</sub> (kVA) =	54,33	14,57	8,81	7,20

Potencia de desequilibrio total de la red debida a las corrientes activas:

	Total sistema
D <sub>ui-R</sub> (kVA) =	1781,04

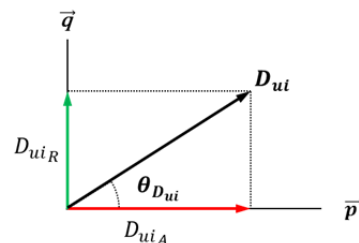
Determinados los valores de las componentes parciales (cargas y línea de suministro) y de la red total de la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $\overline{D}_{ui}$ ) esta puede ser expresada en el dominio fasorial según (2.70) y (2.71); siendo los valores de desequilibrios de cada uno de ellos:

Potencia de desequilibrio de las cargas:

	Carga -2	Carga -3	Carga -4	Carga -5
D <sub>ui-A</sub> (kVA) =	2464,79	606,64	1251,95	1643,33
D <sub>ui-R</sub> (kVA) =	1304,54	491,75	1498,17	862,56
D <sub>ui</sub> (kVA) =	2788,73	780,91	1952,41	1855,95
$\theta_{D_{ui}}$	27,89	39,03	50,12	27,69

Potencias de desequilibrio de las líneas:

	L12	L23	L34	L25
D <sub>ui-A</sub> (kVA) =	54,33	14,57	8,81	7,20
D <sub>ui-R</sub> (kVA) =	54,33	14,57	8,81	7,20
D <sub>ui</sub> (kVA) =	76,83	20,61	12,46	10,19
$\theta_{D_{ui}}$	45,00	45,00	45,00	45,00



Potencia de desequilibrio total del sistema:

	Total sistema
Dui-A (kVA) =	3000,92
Dui-R (kVA) =	1781,04
Dui (kVA) =	3489,65
$\theta$ Dui =	30,69

A continuación se exponen de forma conjunta las tablas resumen de resultados correspondientes a los parámetros de desequilibrio “A, B, C y D”, potencias de desequilibrio activas  $D_{uiA}$ , potencias de desequilibrio reactivas  $D_{uiR}$  y potencia total de desequilibrio  $D_{ui}$  para las cargas, las líneas de suministro y los valores totales del sistema:

Dui: Cargas / Nudo

	Carga - 2	Carga - 3	Carga - 4	Carga - 5
A (kVA) =	16,31	-478,82	21,61	1091,71
B (kVA) =	2464,73	372,48	1251,76	-1228,29
D (kVA) =	416,84	-432,02	1113,24	174,84
C (kVA) =	1236,15	-234,89	1002,61	-844,66
Dui-A (kVA) =	2464,79	606,64	1251,95	1643,33
Dui-R (kVA) =	1304,54	491,75	1498,17	862,56
Dui (kVA) =	2788,73	780,91	1952,41	1855,95
$\theta$ Dui =	27,89	39,03	50,12	27,69

Dui: Tramos de línea

	L12	L23	L34	L25
A (kVA) =	-5,40	-6,16	-3,90	5,83
B (kVA) =	54,06	13,21	7,90	-4,23
D (kVA) =	54,06	13,21	7,90	-4,23
C (kVA) =	5,40	6,16	3,90	-5,83
Dui-A (kVA) =	54,33	14,57	8,81	7,20
Dui-R (kVA) =	54,33	14,57	8,81	7,20
Dui (kVA) =	76,83	20,61	12,46	10,19
$\theta$ Dui =	45,00	45,00	45,00	45,00

Dui: Total del sistema

	Total sistema
A (kVA) =	641,18
B (kVA) =	2931,63
D (kVA) =	1343,83
C (kVA) =	1168,84
Dui-A (kVA) =	3000,92
Dui-R (kVA) =	1781,04
Dui (kVA) =	3489,65
$\theta$ Dui =	30,69

Así mismo se exponen los valores acumulados de las cargas y líneas de suministro que conectan con cada nodo, mostrando que sus valores pueden ser calculados mediante la

suma de los parámetros de desequilibrio “A, B, C y D”, según se expone en la expresión (3.20):

Tramos acumulados en cada nodo

	Carga - 5	L25	Acumulado C5 + L25
A (kVA) =	1091,71	5,83	1097,54
B (kVA) =	-1228,29	-4,23	-1232,52
D (kVA) =	174,84	-4,23	170,61
C (kVA) =	-844,66	-5,83	-850,49
Dui-A (kVA) =	1643,33	7,20	1650,37
Dui-R (kVA) =	862,56	7,20	867,43
Dui (kVA) =	1855,95	10,19	1864,44
θ Dui =	27,69	45,00	27,73

Tramos acumulados en cada nodo

	Carga - 4	L34	Acumulado C4 + L34	Carga-3	Acumulado Nodo - 3	L23	Acumulado C3 + L23
A (kVA) =	21,61	-3,90	17,71	-478,82	-461,11	-6,16	-467,27
B (kVA) =	1251,76	7,90	1259,67	372,48	1632,15	13,21	1645,36
D (kVA) =	1113,24	7,90	1121,14	-432,02	689,12	13,21	702,33
C (kVA) =	1002,61	3,90	1006,51	-234,89	771,62	6,16	777,77
Dui-A (kVA) =	1251,95	8,81	1259,79	606,64	1696,03	14,57	1710,42
Dui-R (kVA) =	1498,17	8,81	1506,66	491,75	1034,54	14,57	1047,95
Dui (kVA) =	1952,41	12,46	1963,95	780,91	1986,66	20,61	2005,93
θ Dui =	50,12	45,00	50,10	39,03	31,38	45,00	31,50

Tramos acumulados en cada nodo

	Nodo - 2 C5+L25	Nodo - 2 C3 + L23	Carga-2	Acumulado Nodo - 2
A (kVA) =	1097,54	-467,27	16,31	646,59
B (kVA) =	-1232,52	1645,36	2464,73	2877,57
D (kVA) =	170,61	702,33	416,84	1289,78
C (kVA) =	-850,49	777,77	1236,15	1163,44
Dui-A (kVA) =	1650,37	1710,42	2464,79	2949,32
Dui-R (kVA) =	867,43	1047,95	1304,54	1736,99
Dui (kVA) =	1864,44	2005,93	2788,73	3422,81
θ Dui =	27,73	31,50	27,89	30,50

Tramos acumulados en cada nodo

	Nodo - 2	L12	TOTAL Nodo - 1
A (kVA) =	646,59	-5,40	641,18
B (kVA) =	2877,57	54,06	2931,63
D (kVA) =	1289,78	54,06	1343,83
C (kVA) =	1163,44	5,40	1168,84
Dui-A (kVA) =	2949,32	54,33	3000,92
Dui-R (kVA) =	1736,99	54,33	1781,04
Dui (kVA) =	3422,81	76,83	3489,65
θ Dui =	30,50	45,00	30,69

**b) Potencia de desequilibrio debida a tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ):**

El fasor potencia de desequilibrio debida la asimetría de tensiones  $\overline{D}_{uv}$  queda caracterizado por dos versores unitarios ortogonales entre sí  $\vec{u}$  y  $\vec{v}$ , según las expresiones (3.11) y (3.12):

$$\begin{aligned} \overline{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ &= \sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2} \cdot \left[ \sqrt{(A^2 + B^2) + P_+^2} \cdot \vec{u} + \sqrt{(D^2 + C^2) + Q_+^2} \cdot \vec{v} \right] \end{aligned}$$

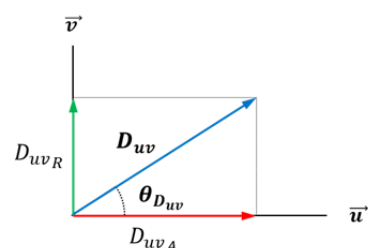
siendo los valores de cada parámetro correspondientes a los grados de desequilibrio y asimetría y las potencias de desequilibrio debidas a tensiones según (3.12), de las cargas, de la línea de suministro y a la red en conjunto, considerando las tensiones nodales correspondientes:

Potencia de desequilibrio de tensiones Duv en las cargas

	Carga -2	Carga -3	Carga -4	Carga -5
Duv-A (kVA) =	24,95	14,76	40,62	12,94
Duv-R (kVA) =	11,55	15,21	25,35	10,88
Duv (kVA) =	27,50	21,19	47,88	16,91
$\theta$ Duv =	24,84	45,86	31,97	40,06
$\delta_-$ =	3,84E-03	6,21E-03	8,67E-03	3,19E-03
$\delta_0$ =	4,36E-16	1,89E-16	8,23E-16	6,26E-16
$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2}$ =	3,84E-03	6,21E-03	8,67E-03	3,19E-03

Potencia de desequilibrio de tensiones Duv en las Líneas:

	L12	L23	L34	L25
Duv-A (kVA) =	65,09	17,62	10,92	8,86
Duv-R (kVA) =	42,41	11,62	7,43	5,98
Duv (kVA) =	77,69	21,11	13,21	10,69
$\theta$ Duv =	33,09	33,40	34,21	33,99
$\delta_-$ =	0,15	0,22	0,35	0,32
$\delta_0$ =	0,00	0,00	0,00	0,00
$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2}$ =	0,15	0,22	0,35	0,32



La potencia de desequilibrio total del sistema será nula, ya que se parte de un nudo de referencia (1) con tensiones equilibradas (Slack); así:

Potencia de desequilibrio de tensiones Duv total del sistema:

	Total sistema
Duv-A (kVA) =	0,00
Duv-R (kVA) =	0,00
Duv (kVA) =	0,00
$\theta$ Duv =	0,00
$\delta_-$ =	0,00
$\delta_0$ =	0,00
$\sqrt{\delta_-^2 + \delta_0^2}$ =	0,00

c) **Potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ):**

El fasor correspondiente a la potencia total de desequilibrio ( $\overline{D}_u$ ) se encuentra definido por la relación entre la potencia de desequilibrio debida a las corrientes ( $D_{ui}$ ) y a las tensiones ( $D_{uv}$ ), expresándose en el dominio fasorial por dos versores unitarios ortogonales entre sí ( $\overrightarrow{pi}$ ,  $\overrightarrow{qv}$ ).

$$\overline{D}_u = D_{ui} \cdot \overrightarrow{pi} + D_{uv} \cdot \overrightarrow{qv}$$

Los valores correspondientes a cada carga, a la línea de suministro y a la red en conjunto del desequilibrio total según las expresiones (3.13) y (3.14) serán los siguientes, expresados en modo fasorial, módulo y ángulo:

Desequilibrio total  $D_u$  de las cargas:

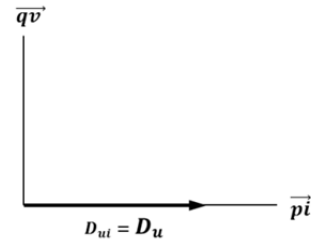
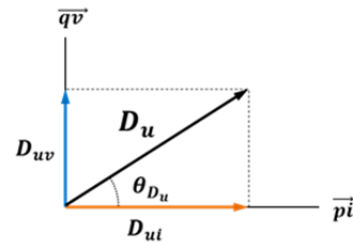
	Carga - 2	Carga - 3	Carga - 4	Carga - 5
Du (kVA) =	2788,86	781,20	1953,00	1856,03
$\theta_{Du}$ =	0,56	1,55	1,40	0,52

Desequilibrio total de las Líneas:

	L12	L23	L34	L25
Du (kVA) =	109,26	29,50	18,16	14,77
$\theta_{Du}$ =	45,32	45,68	46,66	46,38

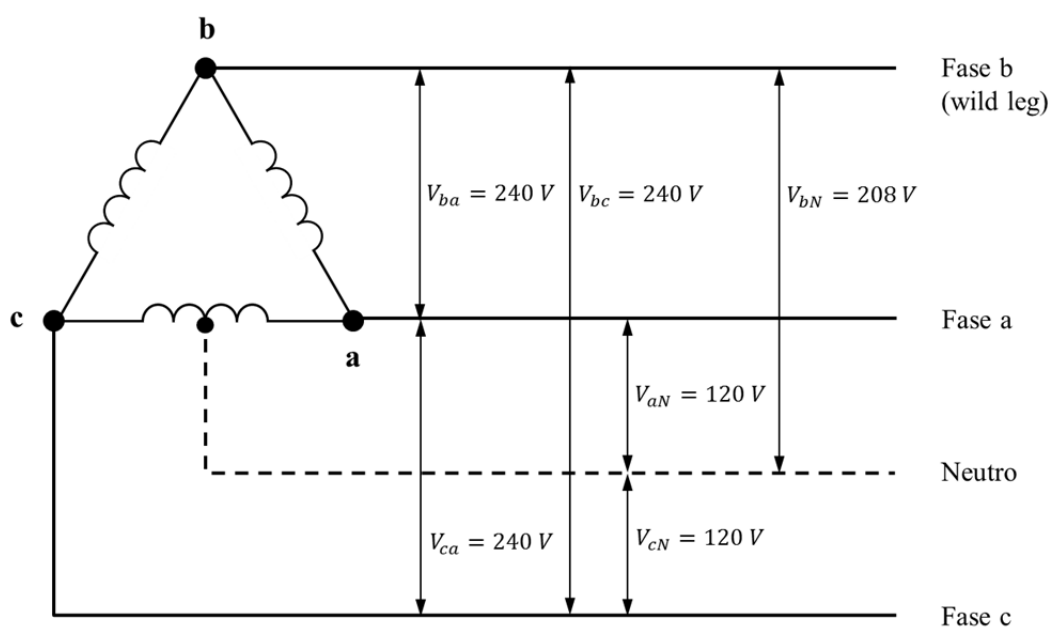
Desequilibrio total  $D_u$  del sistema:

	Total sistema
Du (kVA) =	3489,65
$\theta_{Du}$ =	0,00



**4.6. APLICACIÓN PRÁCTICA DEL COMPORTAMIENTO DE UN SISTEMA ELÉCTRICO A 4 HILOS, CONSTITUIDO POR UNA CARGA RESISTIVA EQUILIBRADA CONECTADA EN ESTRELLA, ALIMENTADA CON TENSIONES DESEQUILIBRADAS MEDIANTE UN TRANSFORMADOR TIPO “HIGH LEG TRANSFORMERS (4WD)”.**

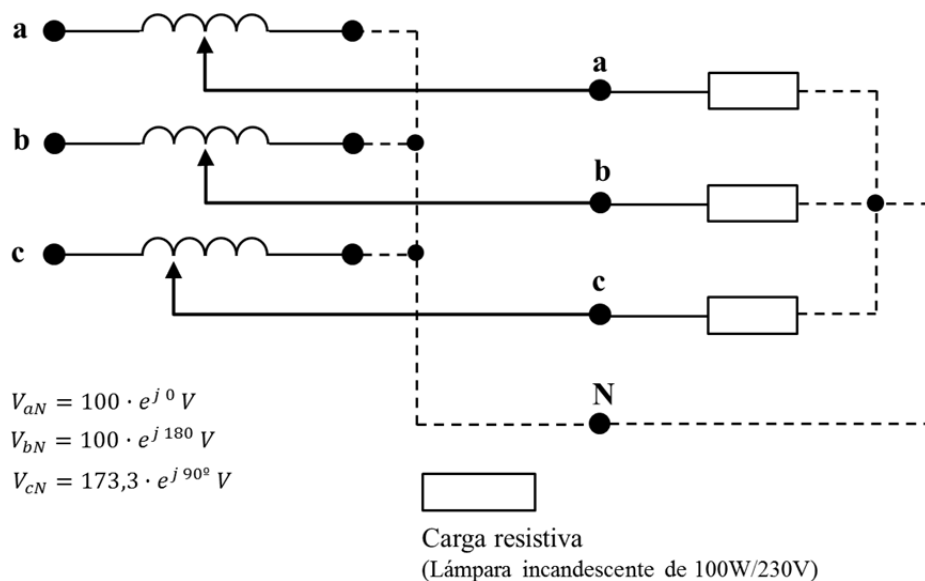
Para la realización de la aplicación práctica de laboratorio, se ha empleado transformador tipo “High Leg Transformers, (4WD Transformers Service)” que se corresponde a un transformador trifásico con los devanados del secundario conectados en triángulo, con una toma central en uno de los devanados para obtener un neutro. Esta conexión permite obtener tres niveles de tensión distintas según se muestra en la figura siguiente. Las tensiones características de este tipo de transformador son las siguientes; tensión entre fases ( $V_{ab,bc,ca} = 240\text{ V}$ ), entre las fases del devanado con la toma central y el neutro ( $V_{aN} = V_{cN} = \frac{1}{2}V_{ab,bc,ca} = 120\text{ V}$ ) y entre la fase restante y el neutro ( $V_{bN} = \sqrt{3} \cdot V_{aN} = 208\text{ V}$ ).



Transformador tipo “High Leg Transformers, 4WD Transformers Service”

Se ha simulado una red de suministro a 4 hilos con tensiones desequilibradas que es alimentada mediante transformador del tipo “High Leg Transformers, (4WD Transformers Service)” empleando tres autotransformadores monofásicos.

Las tensiones empleadas en la simulación son: entre fases ( $V_{ab,bc,ca} = 200\text{ V}$ ), entre las fases del devanado con la toma central y el neutro ( $V_{aN} = V_{cN} = \frac{1}{2}V_{ab,bc,ca} = 100\text{ V}$ ) y entre la fase restante y el neutro ( $V_{bN} = \sqrt{3} \cdot V_{aN} = 173,3\text{ V}$ ), A los secundarios de los autotransformadores monofásicos se conecta una carga resistiva equilibrada en estrella constituidas por lámparas incandescentes de 100W/230V; según se muestra en la figura:



Esquema de montaje de tres autotransformadores monofásicos que simulan el comportamiento de un transformador trifásico del tipo “High Leg Transformers, 4WD Transformers Service”

En la realización del supuesto se han empleado un vatímetro digital “Yokogawa WT130” mediante el cual se han controlado el nivel de tensiones de salida de los autotransformadores monofásicos y un analizador de redes “Fluke 435 Series II”.



Fotografía del montaje experimental utilizado en el supuesto práctico.



La empresa “Fluke Electronics Corporation” patrocina la “Teoría Unificada de las Potencias, UPM (Unified Power Measurement)” e incorpora la medición de la potencia de desequilibrio mediante la implementación de la UPM. El valor de la potencia de desequilibrio es coincidente con el valor de la “Potencia total de Desequilibrio ( $D_u$ )” para sistemas alimentados con tensiones desequilibradas y con la “Potencia de desequilibrio debida a la asimetría de intensidades ( $D_{ui} = D_u$ ) para el caso de sistemas alimentados con tensiones equilibradas, aportadas en esta tesis.

Se mostrará como los valores obtenidos mediante el uso de la formulación aportada en la presente tesis es concordante con la medición de la potencia de desequilibrio obtenidos mediante el uso del analizador de redes eléctricas “Fluke 435 Series II”.

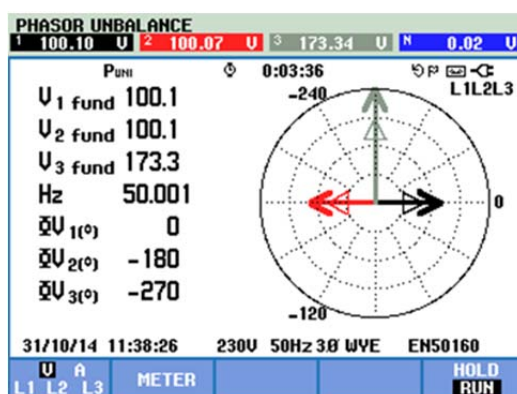
**DATOS DE PARTIDA:**

Tensiones:

Tensiones simples de cada fase:

	<i>Valores de fase</i>		<i>Valores por componentes de secuencia</i>	
	<i>Módulo</i>	<i>Ángulo</i>	<i>Módulo</i>	<i>Ángulo</i>
$V_{aN} =$	100.1 V	0	$V_{+aN} =$	115.559 V -30
$V_{bN} =$	100.1 V	-180	$V_{-aN} =$	0.026 V 30
$V_{cN} =$	173.3 V	-270	$V_{0aN} =$	57.767 V 30

Valores medidos por el analizador “FLUKE 435 Series II”:

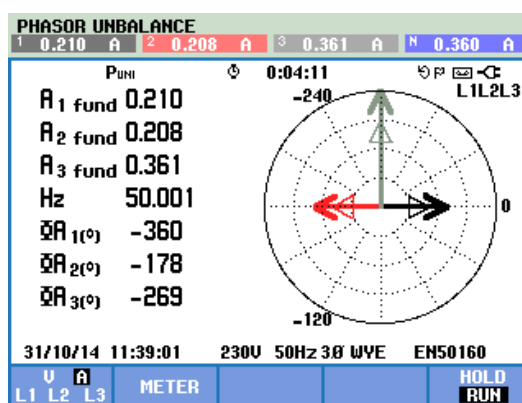


Intensidades:

Intensidades de línea de cada fase:

	<i>Valores de fase</i>		<i>Valores por componentes de secuencia</i>	
	<i>Módulo</i>	<i>Ángulo</i>	<i>Módulo</i>	<i>Ángulo</i>
$I_a =$	0.210 A	-0.273	$I_{+a} =$	0.240 A -30.701
$I_b =$	0.208 A	178.623	$I_{-a} =$	0.001 A 2.231
$I_c =$	0.361 A	89.267	$I_{0a} =$	0.122 A 88.961

Valores medidos por el analizador “FLUKE 435 Series II”:



Potencias:

Potencias de cada fase y totales:

	<i>Valores de fase</i>		<i>Valores por componentes de secuencia</i>	
	<i>P (W)</i>	<i>Q (VAr)</i>		
<i>Fase a</i>	21.00	0.10	$S_+$	83.242 W
<i>Fase b</i>	20.80	0.50	$P_+$	83.236 VAr
<i>Fase c</i>	62.50	0.80	$Q_+$	1.018 VA
<i>Total</i>	104.3	1.3	$S_1$	104.312 VA

Valores medidos por el analizador “FLUKE 435 Series II”:

POWER & ENERGY				
P <sub>UNI</sub> 0:00:41				
	L1	L2	L3	Total
W	21.0	20.8	62.5	104.3
VA	21.0	20.8	62.5	104.3
var	0.1	0.5	0.8	1.3
PF	1.00	1.00	1.00	1.00
31/10/14 11:43:35 230V 50Hz 3Ø WYE EN50160				
UP DOWN	TREND	EVENTS 0	HOLD RUN	

Potencias de desequilibrio:

Potencias de desequilibrio calculadas según la formulación aportada en la presente tesis permiten determinar las potencias de desequilibrio de forma separada, relacionándolas con los efectos que las causan; así:

- Potencia de desequilibrio debida a las intensidades,  $\overline{D}_{ui}$ :

$$\begin{aligned} \overline{D}_{ui} &= D_{uiA} \cdot \vec{p} + D_{uiR} \cdot \vec{q} \\ \overline{D}_{ui} &= 29.559 \cdot \vec{p} + 30.043 \cdot \vec{q} \quad VA \\ \mathbf{D}_{ui} &= \mathbf{42.147} \quad VA \\ \theta_{D_{ui}} &= 45.465 \end{aligned}$$

- Potencia de desequilibrio debida a las tensiones,  $\overline{D}_{uv}$ :

$$\begin{aligned} \overline{D}_{uv} &= D_{uvA} \cdot \vec{u} + D_{uvR} \cdot \vec{v} \\ \overline{D}_{uv} &= 44.154 \cdot \vec{u} + 15.027 \cdot \vec{v} \quad VA \\ \mathbf{D}_{uv} &= \mathbf{46.641} \quad VA \\ \theta_{D_{uv}} &= 18.795 \end{aligned}$$

- Potencia total de desequilibrio,  $\overline{D}_u$ :

$$\begin{aligned} \overline{D}_u &= D_{ui} \cdot \vec{p} + D_{uv} \cdot \vec{v} \\ \overline{D}_u &= 42.147 \cdot \vec{p} + 46.641 \cdot \vec{v} \quad VA \\ \mathbf{D}_u &= \mathbf{62.863} \quad VA \\ \theta_{D_u} &= 47.898 \end{aligned}$$

Potencia total de desequilibrio: Valores medidos por en analizador “FLUKE 435 Series II”.

La potencia total de desequilibrio medida, se corresponde con la “Potencia Total de Desequilibrio” formulado en la UPM (Unified Power Measurement” [59].

$$VA_{unb} = 62.1 \text{ VA}$$

En este ejemplo práctico, las tensiones de alimentación de la carga no están equilibradas, con lo cual la potencia mostrada por el equipo analizador no muestra separadamente la potencia de desequilibrio debida a las intensidades y a las tensiones, sino la total producida.

LOGGER				
PUNI		0:01:15		
	L1	L2	L3	Total
W	21.0	20.8	62.4	104.2
	L1	L2	L3	Total
VA	21.0	20.8	62.5	104.2
				Total
VAUnb				62.1
	L1	L2	L3	Total
var	0.1	0.5	0.8	1.3
31/10/14 12:11:23 230V 50Hz 3Ø WVE EN50160				
UP	DOWN	TREND	EVENTS	HOLD
			0	RUN

El valor en módulo de la potencia total de desequilibrio, determinado en función de las aportaciones de la presente tesis  $D_u$ , es el mismo que el mostrado por el analizador:

$$D_u = 62.863 \text{ VA}$$

$$VA_{unb} = 62.1 \text{ VA}$$

Cabe reseñar que las formulaciones aportadas en la tesis permiten diferenciar que parte de la potencia total de desequilibrio es causada por la asimetría de las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ) y que parte es la debida a la asimetría de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ).

Así mismo informa del grado de influencia que sobre el desequilibrio tienen las cargas de tipo resistivo y/o reactivo.

# Capítulo: 5

**CONCLUSIONES Y FUTURAS  
LÍNEAS DE TRABAJO**



## **Capítulo 5:**

### **CONCLUSIONES Y FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO**

#### **5.1. CONCLUSIONES**

A continuación se detallan las conclusiones y las aportaciones que se derivan de la presente tesis:

- Las potencias de desequilibrio en las redes eléctricas constituyen ineficiencias que en la mayoría de los casos no son cuantificadas y por tanto tenidas en cuenta a la hora de la planificación y operación de éstas. En la mayoría de los casos su cuantificación no va más allá del cálculo del módulo de la potencia aparente total de desequilibrio  $S_I$ , no determinando los efectos debidos a los desequilibrios de las corrientes y de las tensiones.
- El empleo de la Teoría Unificada de las Potencias (UPM, “Unified Power Measurement”) [59] formulada para cargas desequilibradas alimentadas con una sistema de tensiones equilibradas no se ajusta totalmente a las características de las redes eléctricas, ya que estas se caracterizan por operar con tensiones y cargas desequilibradas. Para solventar esto, la presente tesis aporta de forma separada la formulación mediante expresiones complejas de las potencias de desequilibrio debidas a las asimetrías de las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ), las asimetrías de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ) y la potencia total de desequilibrio del sistema ( $\overline{D}_u$ ).
- La potencia aparente total formulada para un sistema desequilibrado ( $S_I$ ) determinada mediante la Teoría de Buchholz [8], la UPM [67] o la IEEE Std. 1459-2010 [42] proporcionan valores distintos para cargas conectadas en triángulo o en estrella; no siendo posible el empleo de la transformación de circuitos estrella – triángulo mediante el uso del Teorema de Kennelly (Rosen), ya que a efectos de la determinación de las potencias de desequilibrio no representa un circuito equivalente. Para solventar este problema, se aporta un circuito equivalente que incluye una transformación

que cuantifica adecuadamente todos los fenómenos incluidos los de desequilibrio, especificándose cuales son las condiciones que se han de cumplir para la correcta determinación de la potencia aparente total ( $S_I$ ) en el caso de un sistema desequilibrado.

- A partir de la definición de la potencia trifásica instantánea  $p(t)$ , se desarrollan una serie de parámetros de desequilibrio que separan las componentes reales e imaginarias de las potencias debidas a las componentes resistivas ( $A, B$ ) y reactivas (inductivas y/o capacitivas) ( $C, D$ ) de las cargas; las cuales permiten la determinación de la potencia compleja de desequilibrio debida a la asimetría de las intensidades ( $\overline{D}_{ui}$ ), tanto para el caso de tensiones de alimentación equilibradas como desequilibradas.
- Se aporta la formulación en modo complejo de las potencias de desequilibrio debidas a la asimetría de las tensiones ( $\overline{D}_{uv}$ ) y total del sistema ( $\overline{D}_u$ ), en función de la potencia de desequilibrio debida a las intensidades.
- La aplicación de los parámetros de desequilibrio “ $A, B, C, D$ ” facilita el estudio de los desequilibrios en cualquier punto del sistema conociendo únicamente las tensiones nodales y las corrientes que circulan por las líneas, dado que los valores de estos parámetros pueden ser sumados directamente entre sí. Este hecho, permite cuantificar adecuadamente las potencias de desequilibrio en cualquier punto de la red, sin necesidad de determinar un circuito equivalente para el punto de estudio.
- En todos los casos, se constata que los módulos de las nuevas formulaciones de las potencias complejas de desequilibrio verifican las potencias de desequilibrio que pueden ser obtenidas mediante el Teorema de Buchholz, la IEEE Std. 1459-2010 y la UPM.
- El procedimiento descrito, permite independientemente del nivel de tensión utilizado, la aplicación directa a sistemas trifásicos lineales a tres o cuatro hilos.



## 5.2. FUTURAS LÍNEAS DE TRABAJO

A tenor de lo expuesto en la presente tesis y de las aportaciones anteriormente indicadas, se considera que las líneas de trabajo que en el futuro pueden ser desarrolladas a partir de este, son:

- El estudio aplicado a otras ineficiencias conocidas tales como régimen transitorio y no linealidad.
- El estudio comparativo con otras teorías de las potencias.
- El desarrollo de equipos activos y/o pasivos de compensación de las potencias de desequilibrio que contrarresten sus efectos.
- El desarrollo de estrategias en la planificación y la operación de las redes eléctricas frente a los desequilibrios que permitan una gestión eficiente de éstas, mediante la elaboración de protocolos de actuación por medio de simulaciones de los posibles escenarios a considerar, conjuntamente con la combinación de sistemas de monitorización en tiempo real de las variaciones de la topología de las redes que permitan una rápida actuación sobre éstas.



# Capítulo: 6

## REFERENCIAS



## **Capítulo 6:**

### **REFERENCIAS**

(Por orden alfabético)

- [1] Akagi H., Y. Kanazawa, A. Nabae, “Generalized theory of the instantaneous reactive power in the three-phase circuits,” Proceedings International Power Engineering Conference, pp. 1375-1386, 1983.
- [2] Akagi H., Y. Kanazawa, A. Nabae, “Instantaneous reactive power compensator comprising switching devices without energy storage components,” IEEE Trans. On Industrial Applications, vol. 20, pp. 625-630, 1984.
- [3] Alfonso, J. C., “Contribución a la mejora de los sistemas de medida basados en el IEEE Std 1459-2000”. Tesis Doctoral, Servicio de Publicaciones de la UPV, 2010.
- [4] ANSI/IEEE. “IEEE Recommended Practice for Electrical Power Distributions for Industrial Plants”. Std 141. Piscataway, N.J.: ANSI/IEEE, 1993.
- [5] Bollen M. H. J., “Definitions of voltage unbalance”. IEEE on Power Engineering Review. Nov. 2002, pp. 49-50.  
<http://dx.doi.org/10.1109/MPER.2002.1045567>
- [6] Brekken T., N. Mohan, “A novel doubly-fed induction wind generator control scheme for reactive power control and torque pulsation compensation under unbalanced grid voltage conditions”, Proceedings of the IEEE Power Electronics Specialists Conference, I.S.B.N. 0-7803-7754-0/03, 2003.
- [7] Buchholz F., “Das begriffsystem rechteistung. Wirleistung, totale blindleistung”, Munich, Germany: Selbstverlag, 1950.
- [8] Buchholz, F. “Die Drehstrom-Scheinleistung bei Ungleichmassiger Belastung Der Drei Zweige”. Licht und Kraft, N°2, Jan. 20, 1922, pp. 9-11.

- [9] Budeanu, C.I. “Puissances reactives et fictives”. Institut Romain de L'Energie, Bucharest - 1927.
- [10] CENELEC, “Voltage characteristics of electricity supplied by public distribution systems”, EN 50160. Bruxelles: CENELEC, 1999.
- [11] CENELEC, “Testing and measurement techniques – Power quality measurements methods, EN 6100-4-30. Bruxelles: CENELEC, 2003.
- [12] Chan T. F., Lai L. L., “Steady-State analysis and performance of a stand-alone three-phase induction generator with asymmetrically connect load impedances and excitation capacitances”, IEEE Trans. on Energy Conversion, Vol. 16, N° 4, pp. 327-333, Dec. 2001.
- [13] Chen J. H., W. Lee, M. Chen, “Using a static var compensator to balance a distribution system”, IEEE Trans. on Industry Applications, vol. 35, no. 2, pp. 298-304, Mar./Apr. 1999.
- [14] Ching Y. L., “Effects of Unbalanced Voltage on the Operation Performance of a Three-Phase Inductor Motor”, IEEE Trans. on Energy Conversion, Vol. 14, N° 2, June 1999.
- [15] CYME International T&D. Soluciones y software para sistema eléctricos de potencia. <http://www.cyme.com>. Software de análisis.
- [16] Czarnecki L. S., S. M. Hsu, “Thyristor controlled susceptances for balancing compensators operated under nonsinusoidal conditions”, IEE Proceedings – Electric Power Applications, vol. 141, no. 4, pp. 177-185, Jul. 1994.
- [17] Czarnecki L. S., “Comments on Apparent and reactive powers in three-phase systems: in search of a physical meaning and better resolution”, European transactions on electrical power ETEP, vol. 4, no. 5, pp. 421-426, Sept./Oct. 1994.

- [18] Czarnecki L. S., “Comments on Apparent power – a misleading quantity in the non-sinusoidal power theory: are all non-sinusoidal power theories doomed to fail?”. *European transactions on electrical power ETEP*, vol. 4, n° 4, pp. 427-432, Sept./Oct. 1994.
- [19] Czarnecki L. S., “Misinterpretations of some Power Properties of Electric Circuits”, *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 9, N° 4, October 1994.
- [20] Czarnecki L. S., Hsu S. M., Ghen G., “Adaptative balancing compensator”, *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 10, N° 3, pp. 1663-1669, Jul 1995.
- [21] Czarnecki L. S., “Budeanu and Fryze: two frameworks for interpreting power properties of circuits with nonsinusoidal voltages and currents”, *Electrical Engineering*, Vol. 80, 1997, pp. 359-367.
- [22] Czarnecki L. S., “Physical Interpretation of the Reactive Power in Terms of the CPC Power Theory”, *Electrical Power Quality and Utilisation, Journal*, Vol. XIII, n° 1, 2007, pp. 89-95.
- [23] Czarnecki L. S., Halley P. M., “Comments on “Physical Interpretation of the Reactive Power in Terms of CPC Power Theory Revised”, *Electrical Power Quality and Utilisation, Journal* Vol. XVI, N° 2, 2013.
- [24] Depenbrock M., “The FBD-Method, A generally applicable tool for Analyzing power relations”, *IEEE Trans. on Power Systems*, Vol. 8, N° 2, May 1993.
- [25] Emanuel A. E., “Power in nonsinusoidal situations. A review of definitions and physical meaning”, *IEEE Trns. on Power Delivery*, VOL. 5, n° 3, July 1990, pp 1377-1389.
- [26] Emanuel A. E., “Apparent and reactive powers in three-phase systems: In search of a physical meaning and a better resolution”, *ETEP*, Vol. 3, n° 1, January/February 1993, pp. 7-14.
- [27] Emanuel A.E., “The Buchholz-Goodhue apparent power definition: the practical approach for nonsinusoidal and unbalanced systems”, *IEEE Trans. on Power Delivery*, Vol. 13, n° 2, April 1998, pp. 344-350.

- [28] Emanuel A. E., “Apparent power definitions for three-phase systems”, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 14, n° 3, July 1999, pp- 767-772.
- [29] Emanuel A. E., “Summary of IEEE Standard 1459: Definitions for the Measurement of Electric Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced or Unbalanced Conditions”, IEEE Trans. on Industry Applications, Vol. 40, N° 3, May/June 2004.
- [30] ETAP. Electrical Engineering Software. <http://etap.com/> Software de análisis.
- [31] Filipski, P. S., “Polyphase Apparent Power and Power Factor under Distorted Waveform Conditions”, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 6, N° 3, July 1991.
- [32] Filipski, P. S., Bagzouz, Y., Cox, M. D. “Discussion of power definitions contained in the IEEE Dictionary, IEEE Trans. On Power Delivery, Vol. 9, No. 3, July 1994, pp:1237-1243.
- [33] Fraile J., “Electromagnetismo y circuitos eléctricos”, Colegio de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos, ISBN 84-7493-131-2.
- [34] Fryze S., “Active, reactive and apparent power in non-sinusoidal systems”. Przegląd Elektrot., n° 7, pp. 193-203, Polonia, 1931.
- [35] Fryze, S. “Wirk, Blind, und Scheinleistung in elektrischen Stromkreisen mit nichtsinusförmigen Verlauf von Strom und Spannung”. Elektrotechnische Zeitschrift Bd 53, 1932, n° 25, pp. 596-599.
- [36] Fortescue C. L., “Methods Symmetrical Co-ordinates Applied to the Solution of Polyphase Networks”, Presented at the 34<sup>th</sup> Annual Convention on American Institute of Electrical Engineers, Atlantic City, N.J., June 28, 1918.
- [37] Glover, J.D. and Sarma, M., “Power System Analysis and Design”, PWS-Kent Publishing, Boston, 1995.
- [38] Goodhue W. M., “Discussion to Reactive power concepts in need of clarification”. AIEE Trans. Vol.52, p. 787, Sept. 1933



- [39] Graña M.. “Significado y medida de los fenómenos de desfase en los sistemas trifásicos desequilibrados, lineales. Aplicación a la medida en sistemas con conductor neutro.”. Tesis Doctoral, Servicio de Publicaciones de la UPV, 2010.
- [40] Green R. K., J.L. Bowen, M.W. Chen, “Calculation of Transmission Line Constants”, Southwest IEEE Conference, conference paper, 1968.
- [41] IEEE Working group in non-sinusoidal situations: Effects on meter of performance and definitions of power, “Practical definitions in systems with non-sinusoidal waveforms and unbalanced loads: a discussion,” IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 11, no. 1, pp. 79-87, Jan. 1996.
- [42] IEEE Standard Definitions for the Measurement of Electric Power Quantities Under Sinusoidal, Nonsinusoidal, Balanced, or Unbalanced Conditions, IEEE Std 1459-2010 (Revision of IEEE Std 1459-2000), pp. 1-40.
- [43] IEEE, “IEEE Recommended Practice for Monitoring Electric Quality”, Std 1159. Piscataway, N.J.: IEEE, 2009.
- [44] IEEE Power Engineering Society. Power System Analysis, Computing and Economics Committee. Distribution System Analysis Subcommittee. <http://ewh.ieee.org/soc/pes/dsacom/testfeeders/index.html>
- [45] Jeon S. J., “Definitions of Apparent Power and Power Factor in a Power System Having Transmission Lines with Unequal Resistances”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol.20 n° 3, pp. 1806-1811, June 2005.
- [46] Jeon S. J., “Considerations on a Reactive Power Concept in a Multiline System”, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 21, n° 2, April 2006.
- [47] Jouane A, Benerjee B., “Assessment of voltage unbalance”, IEEE Trans. on Power Delivery. Vol. 16-4, pp. 782-790, Oct. 2001.
- [48] Kersting W. H., “Distribution Feeder Line Models”, IEEE Transactions on Industry Applications, 1995.
- [49] Kersting W. H., “Distribution System Modeling and Analysis”, CRC Press, Boca Raton, FL, 2007, ISBN 0-8493-5806-X.

- [50] Kim H., H. Akagi, "The instantaneous power theory on the rotating p-q-r reference frames", Proceedings of the IEEE International Conference on Power Electronics and Drive Systems, PEDS '99. vol. 1, pp. 422-427, 1999.
- [51] Kim H., Blaabjerg F., Back, B., "Spectral Analysis of Instantaneous Power in Single-Phase and Three-Phase Systems With of p-q-r Theory", IEEE Trans. on Power Electronics, Vol 17, N° 5, September 2002.
- [52] Kusters N. L., W. J. M. Moore, "On the definition of reactive power in nonsinusoidal conditions". IEEE Transactions on Power Applications Systems, Vol. 99, n° 5, 1980. pp. 1845-1850.
- [53] León V., "Método integral para la mejora de la eficiencia y la calidad del suministro de la energía eléctrica en Baja Tensión", Tesis Doctoral, Servicio de Publicaciones de la UPV, 1997.
- [54] León V., J. Montañana, J. Giner, A. Cazorla. "Ineficiencias de los Sistemas Eléctricos. Efectos, cuantificación y dispositivos de mejora de la eficiencia". Editorial Universidad Politécnica de Valencia, 2001. Ref 2001-4292, ISBN 84-9705-121-1
- [55] León V., J. Giner, J. Montañana, A. Cazorla, "Cortes en el suministro de energía eléctrica: una solución a la sobrecarga de los transformadores de CT.", Mundo electrónico, n° 327, pp. 34-38, Enero 2002.
- [56] León V., Montañana J., J. Giner, A. Cazorla. "Measurement of energies associated of power quality with unbalanced and nonsinusoidal voltages in electric power systems". 14th Power Systems Computation Conference PSCC 02, 2002, pp. 1-5.
- [57] León V.; Graña, M.; Chouza, J.; Cazorla, A.; Montañana, J.; Giner, J.; "Modelización de fenómenos energéticos de desfase en sistemas trifásicos desequilibrados, lineales a tres hilos". Conferencia Internacional de Energía y Medioambiente, TIEMA 2005. Camagüey, Cuba, Junio 2005. Universidad de Camagüey. Libro de actas.

- [58] León V., J. Montañana, J. Giner, A. Cazorla, J. Roger, M. Graña. “Power Quality Effects on the Measurement of Reactive Power in Three-Phase Power Systems in the Light of the IEEE Standard 1459-2000”, 9th International Conference. Electrical Power Quality and Utilisation. Barcelona. 2007.
- [59] León V., J. Montañana, A. Cazorla, J. Giner, J. Roger. “Phasor total unbalance power: Formulation and some properties”. Instrumentation and Measurement Technology Conference – IMTC 2007, Warsaw, Poland, May 1-3, 2007.
- [60] Lyon W. V., “Reactive power and unbalanced circuits”, Electrical World, pp. 1417-1420. Jun 1920.
- [61] Montañana J.. “Medida Integral de la eficiencia en el suministro de energía eléctrica en baja tensión.”. Tesis Doctoral, Servicio de Publicaciones de la UPV, 1999.
- [62] Nabae A., T. Tanaka, “A new definition of instantaneous active reactive current and a power based on instantaneous space vectors on polar coordinates in three phase circuits”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 11, no. 3, pp. 1238–1243, Jul. 1996.
- [63] Nowomiejski Z., “Generalized theory of electrical power”, Arch. Elektrotech, vol. 3, 1981, pp.177-182.
- [64] Orts-Grau S., Muñoz N., Alfonso J. C., Gimeno F. J., Segui S., “Discussion on Useless Active and Reactive Powers Contained in the IEEE Standard 1459”, IEEE Trans on Power Delivery, Vol. 26, N° 2, April 2011.
- [65] Page, C. H., “Reactive power in nonsinusoidal situation,” IEEE Trans. On Instrumentation and Measurement, 1980, vol. 29, no. 4, pp. 420–423.
- [66] Pajíc S., Emanuel, A. E., “Modern Apparent Power Definitions: Theoretical Versus Practical Approach-The General Case”, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 21, N° 4, October 2006.

- [67] Peng F., J. Lai, "Generalized instantaneous reactive power theory for three-phase power systems," IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, vol. 45, pp. 293-297, 1996.
- [68] Pillay P, Manyage M. "Definitions of voltage unbalance". IEEE on Power Engineering Review Magazine. Vol.21, pp. 50-51. May 2001. <http://dx.oj.org/10.1109/39.920965>
- [69] Pillay P, Manyage M. "Loss of life in induction machines operating with unbalanced supplies". IEEE Trans. on Energy Conversion. Vol. 21, pp. 813-822. Dec 2006. <http://dx.doi.org/10.110/TEC.2005.853724>
- [70] PowerWorld Corporation: <http://www.powerworld.com>. Software de análisis.
- [71] PSpice. ORCAD. Software de análisis.
- [72] "Radial Distribution Analysis Package, (RDAP)". W, H, Power Consultants (WHPC), 2007. Software de análisis.
- [73] Reginatto R., Ramos R. A., "On electrical power evaluation in dq coordinates under sinusoidal unbalanced conditions", IET Gener. Transm. Distrib. 2014, vol. 8, Iss. 5, pp. 976-982. [www.ietdl.org](http://www.ietdl.org)
- [74] Sanchez-Herrera M. R., "Nuevas propuestas en la teoría de la potencia reactiva instantánea: aplicación a la compensación de cargas industriales con filtros activos de potencia". Tesis Doctoral. Universidad de Huelva 2007.
- [75] Sanchez-Herrera, M. R., Salmerón P., Litrán S., Vallés A., "Análisis de las definiciones de desequilibrio de tensión en los sistemas de potencia". Dyna Marzo-Abril 2012, Vol 87, nº 2, 198/203.
- [76] Salmerón P., Montañó J.C., "Instantaneous power components in polyphase systems under nonsinusoidal conditions", IEEE Proc.-Sci Meas. Technol., Vol. 143, Nº 2, March 1996.

- [77] Salmerón P. Vázquez J. R., Herrea R. S., Litán S. P., “Los términos de potencia en el marco del standard IEEE 1429-2010”. XVII Reunión de grupos de investigación de ingeniería eléctrica, XVII RGIIE, Sevilla, 29 y 30 de Marzo, 2007.
- [78] Salmerón P. Vázquez J. R., Herrea R. S., Litán S. P., “Discusión sobre la potencia reactiva y la potencia aparente en sistemas con desequilibrio y distorsión”. XVII Reunión de grupos de investigación de ingeniería eléctrica, XVII RGIIE, Sevilla, 29 y 30 de Marzo, 2007.
- [79] Seguí S. “Contribución a la mejora de la eficiencia y al ahorro energético en instalaciones eléctricas desequilibradas y lineales, con neutro”. Tesis doctoral. Departamento de Ingeniería Electrónica de la Universidad Politécnica de Valencia, 2004.
- [80] Seiphethlo T.E., Rens A.P.J, “On the assessment of voltage unbalance”, 14th IEEE International Conference on Harmonics and Quality of Power (ICHQP). Bergamo (Italy): IEEE 2010, p.1-6. ISBN 978-1-4244-7244-4.
- [81] Shallenberger, O.B. “The Distribution of Electricity by Alternative Current”. Electrical World, March 3, 1888, pp. 114-115.
- [82] Shepherd W., P. Zakikhani. "Suggested definition of reactive power for nonsinusoidal systems". Proceedings IEE, Vol. 119, nº 9, 1972, pp. 1361-1362.
- [83] Singh A. K., Singh G. K., Mitra R., “Some observations on Definitions of Voltage Unbalance”, 39<sup>th</sup> North American Power Symposium (NAPS 2007), 2007.
- [84] Siddique A., Yadava G. S. Singh B. “Effects of Voltage Unbalance on Induction Motors”, Conference Record of the 2004 IEEE International Symposium on Electrical Insulation, Indianapolis, IN USA, 19-22 September 2004.
- [85] Srinivas, M.S. “Distribution Load Flows”. Proceedings of IEEE PES Winter Meeting, Vol.2, 2000, pp. 942-945.

- [86] Stanley, W. “Phenomena of Retardation in the Induction Coil. American Institute of Electrical Engineers, Vol. V, N° 4, January 1888, pp. 97-115.
- [87] Steinmetz, C.P. “Theory of alternating current phenomena”. Mc Graw. New York. 1897.
- [88] Togasawa S., T.Murase, H. Nakano, and A. Nabae, “Reactive power compensation based on a novel cross-vector theory,” IEEE Trans. on Industrial Applications, vol. 114, pp. 340-341, 1994.
- [89] Watanabe, R.M.; Stephan, M.A.; Aredes, M. “New concepts of instantaneous active and reactive powers in electrical systems with generic loads”. IEEE Transactions on Power Delivery, Vol. 8, n° 2, 1993, pp. 697- 703.
- [90] Willems J. L., “A new interpretation on the Akagi-Nabae power components for nonsinusoidal three-phase situations,” IEEE Trans. on Instrumentation and Measurement, vol. 41, pp. 523-527. 1992.
- [91] Willems J. L., Ghijselen J. A., Emanuel A. E., “The Apparent Power Concept and the IEEE Std 1459-2000”, IEEE Trans. on Power Delivery, vol. 20, n° 2, April 2005.
- [92] Willems J, L., Ghijselen J. A., Emanuel A. E., “Addendum to the Apparent Power Concept and the IEEE Standard 1459-2000”, IEEE Trans. on Power Delivery, Vol. 20, N° 2, April 2005.
- [93] Zhao C., Zhao X., “A New Method for Voltage Quality Evaluation Based on p-q-r Theory”, 2004 International Conference on Power System Technology – POWERCON 2004, Singapore, 21-24 Novembre 2004.

