UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA - UPV

Operadores y Semigrupos de Operadores en Espacios de Fréchet y Espacios Localmente Convexos

TESIS DOCTORAL

PRESENTADA POR:

José Alberto Conejero Casares

DIRIGIDA POR:

Dr. José Bonet Solves

Dr. Alfredo Peris Manguillot

VALENCIA 2004

D. José Bonet Solves, Catedrático de Universidad, y D. Alfredo Peris Manguillot, Titular de Universidad, ambos de la Universidad Politécnica de Valencia,

CERTIFICAMOS: que la presente tesis doctoral, titulada: “Operadores y Semigrupos de Operadores en Espacios de Fréchet y Espacios Localmente Convexos”, ha sido desarrollada por José Alberto Conejero Casares bajo nuestra dirección en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia.

Valencia, marzo de 2004

D. José Bonet Solves D. Alfredo Peris Manguillot

A mis padres

Agradecimientos

Han sido varios años desde que di mis primeros pasos en la realización de la memoria que a continuación les presento. Como en todo largo camino o travesía uno necesita de ánimos y de apoyos. Es por ello que quisiera dedicar unas líneas para mostrar mis agradecimientos a ciertas personas por el trato que han tenido conmigo durante este tiempo.

En primer lugar, quiero agradecer a mis directores José Bonet Solves y Alfredo Peris Manguillot la confianza depositada en mi, vuestra amistad, vuestra ayuda, vuestra paciencia con un servidor, y en definitiva, vuestra excelente dirección de mi trabajo durante estos años.

Al Vicerrectorado de Investigación de la Universidad Politécnica de Valencia por la concesión de la beca FPI, gracias a la cual comencé mis estudios de Doctorado.

A los profesores Teresa Bermúdez y Antonio Bonilla su colaboración en algunos de los resultados de la segunda parte de la memoria que forman parte de un artículo conjunto con ellos. También quisiera agradecer a Antonio su sugerencia del estudio de la hiperciclicidad de semigrupos definidos en sectores del plano complejo.

A mis amigos Mari Carmen, Esther, José Luis, David, Miguel y Félix el apoyo y compañerismo que me han mostrado en todo momento, tanto dentro como fuera de la Universidad. Quiero agradecer especialmente a Félix todas las molestias que se ha tomado conmigo por enseñarme a escribir en LaTeX de una manera elegante.

A mis compañeros del Depto. de Matemática Aplicada de las unidades de Arquitectura Superior y de la Facultad de Informática, por la amistad y el trato que he recibido por vuestra parte desde mi llegada a esta universidad.

A mis amigos de Castellón, a mis compañeros de la Mesa de contratados y a mis compañeros de piso por sacarme una sonrisa cuando me ha hecho falta, y en particular a Chelo, porque en este tiempo siempre he podido contar contigo.

A Lucía, porque eres lo mejor que me ha pasado y por regalarme los mejores momentos de cada día.

Y por supuesto a mi familia, por quererme tanto, y en especial a mis padres por habérmelo dado todo. No se cuántas mochilas he tenido para ir a clase desde aquella con unos astronautas que llevaba al parvulario, pero sí que sé que en todas ellas nunca me ha faltado nada. Gracias por haberme dado la oportunidad de estudiar siempre lo que he querido. Os estaré eternamente agradecido.

Muchas, muchas gracias a todos. Hacéis que me sienta verdaderamente afortunado.

Valencia, marzo de 2004.

Resumen

Esta Tesis está dividida en dos partes, cada una de las cuales con su propio capítulo de preliminares y con su propia bibliografía al final de cada parte.

La primera parte lleva por título “Operadores en Espacios de Fréchet y Espacios Localmente Convexos” y está formada por los capítulos del 1 al 4. Está dedicada al estudio de las clases de los monomorfismos, de los operadores casi abiertos, de los operadores abiertos y de los operadores sobreyectivos entre espacios de Fréchet y espacios localmente convexos. Estas clases han sido estudiadas por Berberian, Harte, Abramovich Aliprantis y Polyrakis en el contexto de espacios normados. Recopilamos estas definiciones y los preliminares correspondientes en el Capítulo 1.

Es conocido que en espacios normados los conjuntos de estas clases de operadores son abiertos. En el Capítulo 2 caracterizamos completamente este hecho cuando trabajamos con espacios localmente convexos. La caracterización para los monomorfismos depende únicamente de la normabilidad del espacio de partida y la de los operadores casi abiertos está relacionada con el levantamiento de acotados y con la casinormabilidad del espacio de partida. Otras propiedades y ejemplos son analizados.

El teorema clásico del rango cerrado para espacios de Banach dice que un operador $T \in L(E,F)$ tiene rango cerrado si, y sólo si, su operador adjunto $T' \in L(F',E')$ tiene rango cerrado. Un operador inyectivo entre espacios de Banach tiene rango cerrado si, y sólo si, es un monomorfismo. En el Capítulo 3 presentamos un análisis completo de las posibles extensiones de estos dos resultados cuando E y F ambos son espacios de Fréchet o ambos son espacios (DF) completos. Además añadimos algunos comentarios y contraejemplos.

En el Capítulo 4 estudiamos tres operadores que están asociados canónicamente con un operador dado $T \in L(E,F)$, usando los espacios de sucesiones acotadas $\ell_\infty(E)$ y los espacios de las sucesiones convergentes a cero $c_0(E)$. Investigamos las relaciones existentes entre las propiedades de T y las propiedades de los operadores asociados.

La segunda parte lleva por título “Semigrupos de Operadores Hipercíclicos y Caóticos” y está formada por los capítulos del 5 al 8. En esta parte estudiamos la hiperciclicidad, la propiedad de ser mezclante y el caos para semigrupos de operadores en $L(X)$, siendo X un F-espacio. Un F-espacio localmente convexo es un espacio de Fréchet. Nosotros trabajaremos con semigrupos cuyo semigrupo índice sea $\mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+$ o un sector del plano complejo.

En el Capítulo 5 introducimos las nociones básicas de hiperciclicidad, de la propiedad de ser mezclante y de caos para operadores y damos las correspondientes generalizaciones para semigrupos. También introducimos la notación que usaremos en esta parte de la memoria.

En el Capítulo 6 investigamos cómo se puede reducir el estudio de la hiperciclicidad y de la propiedad de ser mezclante en semigrupos al estudio de estos conceptos en discretizaciones concretas de dicho semigrupo. Generalizamos los Criterios de Hiperciclicidad para operadores dados por Kitai y Bès a semigrupos. También discutimos la existencia de discretizaciones autónomas hipercíclicas en semigrupos hipercíclicos y mezclantes.

La hiperciclicidad y el caos para semigrupos de traslación en espacios ponderados de funciones integrables y de funciones continuas han sido estudiados durante los últimos años. En el Capítulo 7 extendemos estos resultados para semigrupos cuyo semigrupo índice sea un sector del plano complejo y para límites proyectivos de espacios ponderados de funciones integrables y de funciones continuas. En este contexto damos algunos contraejemplos para completar los resultados del Capítulo 6.

Es conocido que en todo espacio de Fréchet existe un operador hipercíclico y que en todo espacio de Banach existe un semigrupo uniformemente continuo hipercíclico. En el Capítulo 8 probamos que en todo espacio de Fréchet distinto de ω existe un semigrupo analítico hipercíclico. También investigamos la existencia de semigrupos transitivos en ω y en φ.

Resum

Aquesta Tesis està dividida en dues parts, cadascuna de les quals amb el seu propi capítol de preliminars i amb la seua pròpia bibliografia al final de cada part.

La primera part es diu "Operadors en Espais de Fréchet y Espais Localment Convexes" i està formada pels capítols del 1 al 4. Està dedicada a l'estudi de les classes dels monomorfisms, dels operadors quasi oberts, dels operadors oberts i dels operadors sobrejectius entre espais de Fréchet i espais localment convexes. Estes classes han estat estudiades per Berberian, Harte, Abramovich Aliprantis i Polyrakis en el context d'espais normats. Recopilem aquestes definicions i els corresponents preliminars al Capítol 1.

Es conegut que als espais normats els conjunts d'aquestes classes d'operadors són oberts. Al Capítol 2, caracteritzem completament aquest fet quan treballem amb espais localment convexes. La caracterització per als monomorfisms depén únicament de la normabilitat de l'espai de partida i la dels operadors quasi oberts està relacionada amb l'alçament d'afitats i amb la quasinormabilitat de l'espai de partida. Altres propietats i exemples estan analitzats.

El teorema clàssic del rang tancat per a espais de Banach diu que un operador $T \in L(E,F)$ té rang tancat si, i només si, el seu operador adjunto $T' \in L(F',E')$ té rang tancat. Un operador injectiu entre espais de Banach té rang tancat si, i només si, és un monomorfism. Al Capítol 3 presentem una anàlisi completa de les possibles extensions d'aquestos dos resultats quan E i F ambdós són espais de Fréchet o ambdós son espais (DF) complets. A més anyadim alguns comentaris i contraexemples.

Al Capítol 4 estudiem tres operadors que estan associats canònicament amb un operador donat $T \in L(E,F)$, usant els espais de successions afitades $\ell_\infty(E)$ i els espais de les successions convergents cap a zero $c_0(E)$. Investiguem les relacions existents entre les propietats de T i les propietats dels operadors associats.

La segona part es diu "Semigrups d'Operadors Hipercíclics i Caòtics" i està formada pels capítols del 5 al 8. En aquesta part estudiem la hiperciclicitat, la propietat de ser barrejant i el caos per a semigrups de operadors en $L(X)$, estant X un F-espai. Un F-espai localment convexe és un espai de Fréchet. Nosaltres treballarem amb semigrups el semigrup índex del qual siga $\mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+$ o un sector del pla complexe.

Al Capítol 5 introduïm les nocions bàsiques d'hiperciclicitat, de la propietat de ser barrejant i del caos per a operadors i donem les corresponents generalitzacions per a semigrups. També introduïm la notació que gastarem en aquesta part de la memòria.

Al Capítol 6 investiguem cóm es pot reduir l'estudi de la hiperciclicitat i de la propietat de ser barrejant en semigrups a l'estudi d'aquestos conceptes en discretitzacions concretes del semigrup. Generalitzem els Criteris de Hiperciclicitat

per a operadors donats per Kitai i Bès a semigrups. També discutim l'existència de discretitzacions autònomes hipercícliques dins de semigrups hipercíclics i barrejants.

La hiperciclicitat i el caos per als semigrups de traslació en espais ponderats de funcions integrables i de funcions continues han estat estudiats durant els darrers anys. Al Capítol 7 extenem aquestos resultats per a semigrups el semigrup índex del qual és un sector del pla complexe i per a límits projectius d'espais ponderats de funcions integrables i de funcions contínues. En aquest context donem alguns contraexemples per a completar els resultats del Capítol 6.

És conegut que en tot espai de Fréchet existeix un operador hipercíclic i que en tot espai de Banach existeix un semigrup uniformement continu hipercíclic. Al Capítol 8 provem que en tot espai de Fréchet diferent de ω existeix un semigrup analític hipercíclic. També investiguem l'existència de semigrups transitius en ω i φ.

Summary

This Thesis is divided in two parts, each one with its own chapter of preliminaries, and its own bibliography and the end of each part.

The first part is called “Operators in Fréchet Spaces and Locally Convex Spaces”, and it consists of Chapters 1 to 4. It is devoted to the study of the classes of the monomorphisms, almost open, open and surjective operators between Fréchet and locally convex spaces. These classes have been studied by Berberian, Harte, Abramovich Aliprantis and Polyrakis in the context of normed spaces. We collect these definitions and the corresponding preliminaries in Chapter 1.

It is known that in normed spaces the sets of these classes of operators are open. In Chapter 2, we characterize this fact completely when we deal with locally convex spaces. The characterization for monomorphisms only depends on the normability of the domain space, and the one for almost open operators is related to the lifting of bounded sets and to the quasinormability of the domain space. Other properties and examples are analyzed.

The classical closed range theorem for Banach spaces states that an operator $T \in L(E,F)$ has closed range if, and only if, its adjoint operator $T' \in L(F',E')$ has closed range. An injective operator between Banach spaces has closed range if, and only if, it is a monomorphism. In Chapter 3 we present a complete analysis of the possible extensions of these two results when E and F are both Fréchet spaces or both complete (DF)-spaces, adding some remarks and counterexamples.

In Chapter 4 we study three operators which are canonically associated with a given operator $T \in L(E,F)$, using the spaces of bounded sequences $\ell_\infty(E)$ and the spaces of null sequences $c_0(E)$. We investigate the relations between the properties of T and the properties of the associated operators.

The second part is called “Hypercyclic and Chaotic Semigroups of Operators”, and it consists of Chapters 5 to 8. In this part we study hypercyclicity, mixing and chaos for semigroups of operators in $L(X)$, where X is an F-space. A locally convex F-space is a Fréchet space. We will deal with semigroups whose index semigroup is $\mathbb{R}, \mathbb{R}_0^+$ or a sector of the complex plane.

In Chapter 5 we introduce the basic notions of hypercyclicity, mixing and chaos for operators and give corresponding generalizations to semigroups. We also introduce the notation that will be used in this part of the memory.

In Chapter 6 we investigate how to reduce the study of hypercyclicity and mixing in semigroups to the study of these concepts to concrete discretizations of the semigroup. We generalize Hypercyclicity Criteria for operators given by Kitai and Bès to semigroups. We also discuss the existence of hypercyclic autonomous discretizations in hypercyclic and mixing semigroups.

Hypercyclicity and chaos of translation semigroups for weighted spaces of integrable and continuous functions has been studied during the last years. In Chap-

ter 7 we extend these results for semigroups with an index semigroup in a sector of the complex plane and for projective limits of weighted spaces of integrable and continuous functions. In this context, some counterexamples are given to complete the results of Chapter 6.

It is known that every Fréchet space supports a hypercyclic operator, and that every Banach space supports a hypercyclic uniformly continuous semigroup. In Chapter 8 we show that there exist a hypercyclic analytic semigroup on every Fréchet space different from ω. We also investigate the existence of transitive semigroups on ω and φ.

Índice general

Parte I

Operadores en Espacios de Fréchet y Espacios Localmente Convexos

Capítulo 1

Notación y preliminares

En este primer capítulo incluimos algunas definiciones y resultados, de carácter preliminar, que serán útiles en la primera parte de la memoria.

1.1. Notación

Nuestra notación para espacios de Banach, teoría de operadores y espacios localmente convexos es estándar y se puede hallar en los siguientes libros [Köt69, Rud73, Ber74, Jam74, Köt79, PCB87, Har88, MV97]. Recordamos la terminología que será usada reiteradamente.

Si no se indica lo contrario, E y F denotarán espacios de Hausdorff localmente convexos, en adelante e.l.c. En un e.l.c. E, denotaremos el conjunto de las seminormas continuas que definen la topología de E mediante $\mathrm{sc}(E)$. Si $p \in \mathrm{sc}(E)$, la bola unidad asociada a esta seminorma se denotará por

$$U_p := \{x \in E \ : \ p(x) \leq 1\}.$$

La familia de todos los entornos cerrados y absolutamente convexos del origen en E se denotará por $\mathscr{U}_0(E)$. Se define el *calibrador de Minkowski* asociado a $U \in \mathscr{U}_0(E)$ como

$$p_U(x) := \inf\{t > 0 \ : \ x \in tU\},$$

teniendo que $p_U \in \mathrm{sc}(E)$.

En el caso de que E sea un espacio normado con la norma $\|.\|$, su bola unidad cerrada se denotará por

$$U_E := \{x \in E \ : \ \|x\| \leq 1\}.$$

Si E no es un e.l.c. denotamos por $\mathscr{U}_0(X)$ la familia de todos los entornos equilibrados de 0 en E.

Si E es sólamente un espacio métrico, U_E^ε denotará la bola cerrada de centro cero y radio $\varepsilon > 0$.

El conjunto de todos los subconjuntos acotados, cerrados y absolutamente convexos de un e.l.c. E se denota por $\mathscr{B}(E)$, que forma una base de acotados para el espacio E. Si $B \in \mathscr{B}(E)$, indicaremos mediante E_B el espacio normado dado por la envoltura lineal de B y dotado de la norma definida por el calibrador de Minkowski p_B. El subconjunto $B \in \mathscr{B}(E)$ es un *disco de Banach* si E_B es un espacio de Banach. El espacio E se dice que es *localmente completo* si cada $B \in \mathscr{B}(E)$ es un disco de Banach. Todo espacio sucesionalmente completo es localmente completo.

1.2. Operadores entre espacios localmente convexos

El conjunto de todos los operadores lineales y continuos entre E y F lo denotaremos mediante $L(E,F)$, $L(E)$ si $E = F$, y mediante $L_b(E,F)$ nos referiremos al espacio localmente convexo de todos los operadores (siempre lineales y continuos) entre dos e.l.c. E y F, dotado de la topología localmente convexa dada por la convergencia uniforme sobre los conjuntos acotados de E. Una base de entornos de cero de $L_b(E,F)$ viene dada por la familia de conjuntos

$$\mathscr{W}(B,V) := \{T \in L(E,F) \,:\, T(B) \subset V\},$$

donde B varía en $\mathscr{B}(E)$ y V en $\mathscr{U}_0(F)$. Esta topología se puede definir a partir de la familia de seminormas

$$q_B(T) := \sup\{q(T(b)) \,:\, b \in B\}, \text{ con } B \in \mathscr{B}(E) \text{ y } q \in \mathrm{sc}(F).$$

Si los espacios E y F son normados esta topología coincide con la de la convergencia en norma de los operadores. Si $E = F$, escribiremos $L_b(E)$. En este caso I será el operador identidad.

Denotaremos por E' el dual topológico de E, i.e. el espacio $L(E,\mathbb{K})$, siendo $\mathbb{K}$ el cuerpo de escalares $\mathbb{C}$ o $\mathbb{R}$. Por E_b' denotaremos el dual topológico de E con la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de E, i.e. $L_b(E,\mathbb{K})$. Dado un operador $T \in L(E,F)$ denotaremos por $T' : F' \to E'$ a su operador adjunto.

1.3. Acerca de espacios localmente convexos

Comenzaremos dando algunos ejemplos de e.l.c. cuyas topologías vienen definidas por familias de seminormas y no son normados. Recordemos los siguientes:

1. $\mathscr{H}(\mathbb{C})$, el espacio de las funciones holomorfas definidas en $\mathbb{C}$ con la topología compacta abierta.

2. $\mathscr{C}(\Omega)$, el espacio de las funciones continuas definidas sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$ con la topología compacta abierta.

3. $\mathscr{D}'(\Omega)$, el espacio de las distribuciones definidas sobre un abierto Ω de $\mathbb{R}^N$.

4. ω, el espacio de todas las sucesiones con valores en $\mathbb{C}$ o en $\mathbb{R}$.

Recordemos algunas clases de espacios más generales que los espacios normados.

E es un espacio de *Fréchet* si es localmente convexo, métrico y completo. Si E es un espacio de Fréchet, denotamos mediante E'_{ind} el dual E' de E dotado de la topología bornológica asociada a E'_b. Grothendieck probó que $E'_{\text{ind}} = (E', \beta(E', E''))$, véase [Köt69, 29.4.2]. Se dice que un espacio de Fréchet es *distinguido* si se da la igualdad $E'_b = E'_{\text{ind}}$ topológicamente. Referimos al lector a [BD92, Köt69, MV97, PCB87] para detalles sobre espacios distinguidos.

1.3.1. Espacios semi-Montel y de Montel

Un e.l.c. se dice que es semi-Montel si todo conjunto acotado de E es relativamente compacto. Un espacio casitonelado y semi-Montel se dice que es un espacio de Montel. Para más información sobre espacios semi-Montel, véase [Hór66, Cáp. 3 Sec .9] y en general, para espacios de Montel, [Köt69, MV97].

1.3.2. Espacios de Schwartz y espacios casinormables

Un e.l.c. E se dice que es un espacio de *Schwartz* si para cada $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(E)$ tal que para cada $\varepsilon > 0$ existen una cantidad finita de elementos $x_1, \ldots, x_n \in V$ tales que $V \subset \cup_{j=1}^{n}(x_j + \varepsilon U)$. Todo subespacio y todo cociente de un espacio de Schwartz es un espacio de Schwartz. Todo espacio de Schwartz casitonelado y completo es un espacio de Montel. Para más información consúltese [MV97, pág. 284 y sig.].

Un e.l.c. E se dice que es *casinormable* si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(E)$ tal que para todo $\varepsilon > 0$ existe B acotado en E con $V \subset B + \varepsilon U$. La clase de los espacios casinormables fue introducida y estudiada por Grothendieck. Esta clase de espacios generaliza a los espacios de Schwartz. Contiene a los espacios normados y a los espacios nucleares, además de ser estable bajo la formación de cocientes. Todos los ejemplos vistos anteriormente en (i)-(iv) son casinormables.

1.3.3. Levantamiento de conjuntos acotados

Un operador $T \in L(E, F)$ se dice que *levanta conjuntos acotados con clausura* si para todo conjunto B acotado en F existe un conjunto C acotado en E tal que $B \subset$

$\overline{T(C)}$ con la clausura tomada en F. Denotaremos la clausura mediante una línea horizontal por encima del conjunto en cuestión indicando el espacio donde ésta se toma, que si no se dice lo contrario será la del espacio de llegada considerado en dicho contexto.

Si T levanta conjuntos acotados con clausura, entonces T tiene rango denso. El operador T se dice que *levanta conjuntos acotados* si todo conjunto acotado B en F está contenido en la imagen $T(C)$ de un conjunto acotado C en E. Claramente si T levanta conjuntos acotados, entonces T es sobreyectivo. Bonet y Dierolf [BD93] probaron que un operador sobreyectivo entre espacios de Fréchet que levanta conjuntos acotados con clausura, realmente levanta conjuntos acotados, véase también [MV97, Prop. 26.7]. Referimos al lector a [MV97, Cap. 26] para resultados de Palamodov, Merzon, Bonet, Dierolf, Meise y Vogt sobre levantamiento de acotados. En esta última cita y en [PCB87, Sec. 8.3] se puede ver la importancia de los espacios de Fréchet casinormables para el levantamiento de acotados.

El siguiente resultado de Valdivia [Val01] es un bonito complemento a estos resultados.

Teorema 1.1 *Un espacio de Fréchet E tiene la propiedad de que toda aplicación cociente $q : E \to G$ definida en E levanta conjuntos acotados si, y sólo si, una de las siguientes condiciones se cumple:*

1. *E es un espacio de Banach,*
2. *E es un espacio Schwartz, o*
3. *E es el producto de un espacio de Banach y de ω.*

1.3.4. Espacios (DF)

Un e.l.c. E es un espacio (DF) si verifica las siguientes propiedades:

1. E tiene un sistema fundamental numerable de conjuntos acotados.
2. Para cualquier subconjunto bornívoro $V \subset E$ que sea la intersección de una sucesión de entornos absolutamente convexos de 0, se tiene que $V \in \mathscr{U}_0(E)$.

El dual de un espacio (DF) es un espacio de Fréchet. Todo espacio normado es un espacio (DF). Todo espacio (DF) es casinormable. Un espacio (DFM) es un espacio (DF) que también es de Montel.

1.3.5. Límites inductivos

Sea E un e.l.c., $\{E_n\}_n$ una sucesión creciente de subespacios de E y $J_n : E_n \to E$ las inclusiones canónicas respectivas. Si $J_{n,n+1} : E_n \to E_{n+1}$ son inclusiones canónicas, supongamos que cada E_n está dotado de una topología localmente convexa y Haussdorff t_n tal que cada $J_{n,n+1} : (E_n,t_n) \to (E_{n+1},t_{n+1})$ es continua. En este caso, $\xi := \{(E_n,t_n)\}_n$ es una sucesión inductiva con respecto a las aplicaciones $\{J_n\}_n$. Cada (E_n,t_n) se dice que es un escalón de ξ. Una sucesión inductiva ξ es estricta si cada $J_{n,n+1}$ es un monomorfismo, véase la Sección 1.4.1.

Sea ξ una sucesión inductiva y sea t la topología localmente convexa más fina en E tal que cada inclusión $J_n : (E_n,t_n) \to (E,t)$ es continua. Entonces (E,t) se dice que es un *límite inductivo de la sucesión* ξ y escribimos $(E,t) = \operatorname{ind}\xi = \operatorname{ind}_n(E_n,t_n)$. Denotamos por (LB) y (LF) un límite inductivo de espacios de Banach y de Fréchet respectivamente. Un límite inductivo $(E,t) := \operatorname{ind}_n(E_n,t_n)$ se dice que es *regular* si para todo conjunto acotado B en (E,t), existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $B \subset E_n$ y B es acotado en E_n. Para más información sobre límites inductivos, consúltese [PCB87, Cáp. 8] y [Bie88, MV97]

1.3.6. Espacios de sucesiones de Köthe

En esta sección consideramos los espacios escalonados de Köthe de sucesiones. Para más información acerca de ellos, referimos al lector a [BMS82a] y a [MV97, Cáp. 27].

Definición 1.2 *Una matriz $A = (a_{j,k})_{j,k}$ de números no negativos se dice que es una matriz de Köthe si satisface las siguientes condiciones:*

1. *Para todo $j \in \mathbb{N}$ existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $a_{j,k} > 0$.*
2. *$a_{j,k} \le a_{j,k+1}$ para todo $j,k \in \mathbb{N}$.*

Para $1 \le p < \infty$ definimos los espacios escalonados de Köthe de sucesiones asociado a la matriz A como

$$\lambda_p(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \|x\|_k := \left(\sum_{j=1}^{\infty} |x_j a_{j,k}|^p \right)^{1/p} < \infty \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \right\}$$

y para $p = \infty$ y $p = 0$:

$$\lambda_\infty(A) := \left\{ x \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} \ : \ \|x\|_k := \sup_{j \in \mathbb{N}} |x_j| a_{j,k} < \infty \text{ para todo } k \in \mathbb{N} \right\},$$

$$\lambda_0(A) := \left\{ x \in \lambda_\infty(A) \ : \ \lim_{j\to\infty} x_j a_{j,k} = 0 \textit{ para todo } k \in \mathbb{N} \right\}.$$

Todos ellos son espacios de Fréchet cuando se dotan de la topología localmente convexa generada por la sucesión creciente de seminormas $\{\|\cdot\|_k\}_k$.

Vamos a dar un ejemplo de estos espacios que nos será muy útil a la hora de dar contraejemplos a ciertos resultados que aparecerán a lo largo de la memoria.

Ejemplo 1.3 Sea la matriz $A = (a_{i,j;k})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, k\in\mathbb{N}}$ definida como

$$a_{i,j;k} := \begin{cases} (ki)^k & \text{para } j < k, i \in \mathbb{N}, \\ k^j & \text{para } j \geq k, i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

El espacio $\lambda_1(A)$ es de Montel y tiene un cociente isomorfo a ℓ_1 como puede comprobarse en [Köt69, Sec. 31.5] o en [MV97, Ej. 27.21 y Prop. 27.22]).

1.4. Algunas clases de operadores

Para motivar las clases de operadores que aparecen en esta parte de la memoria, comenzaremos por recordar algunas nociones sobre el espectro de un operador.

Es un hecho conocido que el conjunto de los elementos invertibles en un álgebra de Banach es un conjunto abierto [MV97, Prop. 17.3]. Estos resultados son extensiones del hecho, véase e.g. [Jam74, Teor. 18.12]), de que el conjunto de los isomorfismos de un espacio de Banach X en un espacio de Banach Y es un subconjunto abierto del espacio $L_b(X,Y)$. Un caso particular aparece al considerar el álgebra de Banach $L(X)$ con la norma de operadores asociada a la de X. Las operaciones con las que $L(X)$ se dota de esta estructura son la suma, la composición de operadores y el producto de un escalar por un operador. El resultado tiene interés en relación con las propiedades topológicas del espectro de un operador. Recordemos cuál es su definición.

Definición 1.4 *Sea X un espacio de Banach complejo y sea $T \in L(X)$. Se define el conjunto resolvente de T como*

$$\rho(T) := \{ \lambda \in \mathbb{C} \ : \ T - \lambda I \text{ es invertible}\}.$$

Llamaremos espectro de T al conjunto $\sigma(T) := \mathbb{C}\backslash\rho(T)$ y llamaremos espectro puntual aproximado de T, $\sigma_{ap}(T)$, al conjunto de los $\lambda \in \mathbb{C}$ tales que para cada uno de ellos existe una sucesión de elementos $\{x_n\}_n \subset X$ con $\|x_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ tales que $\lim_{n\to\infty}(T(x_n) - \lambda x_n) = 0$ *en X. Claramente, $\sigma_{ap}(T) \subset \sigma(T)$.*

Se puede probar que el espectro de un operador $T \in L(X)$, con X un espacio de Banach complejo, es compacto y no vacío [MV97, Prop. 17.6]. La prueba consiste en ver que dicho conjunto está acotado por $\|T\|$ y que es cerrado. Esto último se demuestra de manera similar a como se demuestra que el conjunto de los elementos invertibles en un álgebra de Banach es un conjunto abierto, haciendo uso del siguiente resultado sobre la serie de las potencias de un operador $T \in L(X)$, que da una representación del inverso del operador $I-T$.

Teorema 1.5 (Desarrollo de Neumann, 1877). *Sea X un espacio de Banach y sea $T \in L(X)$. Si la serie $\sum_{n=0}^{\infty} T^n$ converge puntualmente para cada $x \in X$, entonces $I-T$ es invertible en $L(X)$ y además $\left(I-T\right)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} T^n$. Una condición suficiente para que se pueda aplicar este desarrollo es que $\|T\| < 1$.*

Observación 1.6 Bajo estas hipótesis, si $T \in L(X)$ es invertible y $S \in L(X)$ tal que cumple que $\|T-S\| \leq \frac{1}{\|T^{-1}\|}$, entonces S también es invertible.

Este teorema proporciona un método iterativo para calcular soluciones aproximadas de ecuaciones de la forma $x - Tx = y$, donde T es un operador lineal y continuo, y es el dato del problema y x es la incógnita. La aproximación obtenida a partir de la iteración n-ésima es $x_n = \sum_{k=0}^{n} T^k y$. Mediante este método podemos dar una estimación del error cometido al aproximar x, la solución exacta del problema, mediante la iteración n-ésima x_n:

$$\|x - x_n\| \leq \frac{\|T\|^{n+1}}{1-\|T\|}\|y\|.$$

La teoría de perturbación de Paley-Wiener contiene casos especiales del anterior teorema de Neumann. Referimos al lector al reciente artículo de Casazza y de Kalton [CK99] para ver extensiones de dicha teoría. En concreto destacamos el siguiente resultado:

Lema 1.7 *[CK99, Lema 4] Sean X,Y espacios de Banach y sean $S,T \in L(X,Y)$ tales que verifican que*

$$\|S(x) - T(x)\| \leq \lambda_1 \|S(x)\| + \lambda_2 \|T(x)\|,$$

para todo $x \in X$, y $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1)$ fijos. Entonces, si S tiene rango cerrado (resp. es inyectiva, tiene rango denso, es una aplicación abierta, es una aplicación cociente, es un isomorfismo) se tiene que T tiene rango cerrado (resp. es inyectiva, tiene rango denso, es una aplicación abierta, es una aplicación cociente, es un isomorfismo).

En esta parte de la memoria desarrollaremos nuestro trabajo en el contexto general de los espacios localmente convexos y con clases de operadores más generales que las de los operadores invertibles que serán la de los **monomorfismos**, u operadores **acotados inferiormente**, y la de los operadores **casi abiertos**.

1.4.1. Monomorfismos u operadores acotados inferiormente

En primer lugar, definimos la clase de los operadores acotados inferiormente de $L(X,Y)$ con X e Y espacios normados. Esta definición se puede hallar en [AAP96, Def. 2.1], en [Ber74, Def. 40.28] y en [Har88, Def. 3.3.1].

Definición 1.8 *Sean X,Y espacios normados. Un operador $T \in L(X,Y)$ está acotado inferiormente si existe $k > 0$ tal que se verifica que $\|x\| \leq k\|Tx\|$ para todo $x \in X$.*

Se les llama operadores acotados inferiormente porque la norma de un cierto elemento Tx está controlada inferiormente por la norma de x. A la hora de calcular la solución de una ecuación de la forma $Tx = y$, donde T es un operador lineal y continuo, y es el dato y x es la incógnita; se tiene, una vez calculada k, una acotación superior de la solución de dicha ecuación. Claramente todo operador acotado inferiormente es inyectivo con lo cual la solución de la ecuación $Tx = y$ es única.

La definición que damos a continuación de operador acotado inferiormente en e.l.c. generaliza la dada anteriormente para espacios normados.

Definición 1.9 *Se dice que el operador $T \in L(E,F)$ está acotado inferiormente si para cada seminorma $p \in \mathrm{sc}(E)$ existe una seminorma $q \in \mathrm{sc}(F)$ cumpliendo que $p(x) \leq q(Tx)$ para todo $x \in E$, o bien si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que $V \cap T(E) \subset T(U)$ y T es inyectivo.*

Decimos que un operador $T \in L(E,F)$ entre e.l.c. es un *homomorfismo topológico*, en el sentido de [Köt79, pág. 2 y sig.], si todo conjunto abierto M en E tiene una imagen abierta $T(M)$ en $T(E)$. Diremos simplemente homomorfismo si no hay lugar a confusiones. Si además es inyectivo diremos que T es un *monomorfismo*, i.e. T es un isomorfismo en la imagen $T(E) \subset F$. Los operadores acotados inferiormente se corresponden con los operadores que son *monomorfismos*. La clase de estos operadores entre espacios normados ha sido estudiada con detalle por Berberian [Ber74], Harte [Har88] y Abramovich, Aliprantis y Polyrakis [AAP96]. Denotaremos por $mo(E,F)$ el conjunto de los monomorfismos de E en F.

1.4.2. Operadores casi abiertos

Definamos ahora las clases de los operadores abiertos y de los operadores casi abiertos entre espacios normados. Este último caso ha sido estudiado por Harte en [Har88, pág. 65 y siguientes].

Definición 1.10 *[Har88, Def. 3.4.1] Sean X,Y espacios normados. Un operador $T \in L(X,Y)$ es abierto si existe $k > 0$ tal que se verifica $U_Y \subset kT(U_X)$.*

Un operador $T \in L(X,Y)$ es casi abierto si existe $k > 0$ tal que se verifica $U_Y \subset k\overline{T(U_X)}^Y$.

Los operadores abiertos se corresponden con los homomorfismos sobreyectivos. Estas definiciones se pueden generalizar al contexto de e.l.c.

Definición 1.11 *Se dice que el operador $T \in L(E,F)$ es abierto si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que $V \subset T(U)$.*

Un operador $T \in L(E,F)$ es casi abierto si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe un $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que $V \subset \overline{T(U)}^F$.

Denotaremos por $ca(X,Y)$ el conjunto de los operadores casi abiertos entre X e Y. Claramente todo operador abierto es casi abierto y sobreyectivo. Además todo operador casi abierto tiene rango denso.

Existe otra definición de operador casi abierto dada por Pták al extender el Teorema de la aplicación abierta de Banach-Schauder. A los primeros se les suele llamar en la literatura 'almost open' y a estos últimos 'nearly open'.

Definición 1.12 *Un operador $T \in L(E,F)$ es casi abierto en el sentido de Pták si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ se tiene que $\overline{T(U)}^F$ es un entorno de cero en $\overline{T(E)}$ o, de manera equivalente, si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ se tiene que $\overline{T(U)}^{T(E)}$ es un entorno de cero en $T(E)$.*

Los operadores casi abiertos en el sentido de la Definición 1.11 coinciden precisamente con los operadores casi abiertos en el sentido de Pták con rango denso. Los espacios tonelados se pueden caracterizar mediante la siguiente propiedad: *'Todo operador lineal, continuo y sobreyectivo T de un e.l.c. arbitrario E en un espacio tonelado F es casi abierto en el sentido de Pták'*, véase [Köt79, pág. 24].

La clase de los operadores casi abiertos entre espacios de Fréchet, y en particular al trabajar con espacios de Banach, coincide con la clase de los operadores sobreyectivos y con la clase de los operadores abiertos por el Teorema de la aplicación abierta de Banach-Schauder. Para ser precisos este hecho se debe al siguiente resultado intermedio que aparece en la prueba de dicho teorema.

Lema 1.13 *([MV97, Lema 8.2], [Köt69, pág. 166]). Sean* E,F *e.l.c. métricos siendo* E *además completo. Si un operador* $T \in L(E,F)$ *verifica que para todo* $\varepsilon > 0$ *existe un* $\delta > 0$ *tal que* $U_F^\delta \subset \overline{T(U_E^\varepsilon)}$*, entonces* T *es abierto y sobreyectivo.*

Capítulo 2

El conjunto de los monomorfismos y el de los operadores casi abiertos

En primer lugar, recordemos la definición de *divisor topológico* de un operador $T \in L(X)$.

Definición 2.1 *Sea X un espacio normado y sea $T \in L(X)$. T es un divisor topológico de cero por la izquierda si existe una sucesión $\{S_n\}_n \subset L(X)$ tal que $\|S_n\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n\to\infty} \|TS_n\| = 0$. Se dice que T es un divisor topológico de cero por la derecha si el límite que se tiene es $\lim_{n\to\infty} \|S_nT\| = 0$. Finalmente, se dice que T es un divisor topológico de cero si lo es por la izquierda y por la derecha.*

En 1974 Berberian [Ber74, Teor. 57.14] relacionó que un operador $T \in L(X)$, con X normado, *no fuera divisor topológico de cero por la izquierda* con que fuera un *monomorfismo* y que *no lo fuera por la derecha* con que fuera *sobreyectivo*. Además relacionó los operadores de ambas clases mediante el espectro puntual aproximado de un operador y de su correspondiente adjunto.

Posteriormente, en 1988, Harte vio que los conjuntos $mo(X,Y)$ y $ca(X,Y)$ son *abiertos* en $L(X,Y)$ cuando X,Y son normados [Har88, Teor. 3.3.3 y 3.4.3]. En 1996 Abramovich, Aliprantis y Polyrakis vieron que el conjunto de los elementos invertibles de $L(X,Y)$, con X,Y Banach, es igual al conjunto de los monomorfismos intersectado con la clausura en $L(X,Y)$ del conjunto de los operadores abiertos [AAP96, Teor. 3.3] y también que es igual al conjunto de los operadores abiertos intersectado con la clausura en $L(X,Y)$ del conjunto de los monomorfismos [AAP96, Teor. 3.4].

Finalmente, cabe mencionar el trabajo aparecido en 1999 de Arizmendi y Harte [AH99] en el que trabajan con ambas clases de operadores en el contexto general de espacios vectoriales topológicos y de álgebras de operadores.

En el caso de los operadores en $L(E)$, con E un e.l.c., Kasahara probó en 1972 en [Kas72] que si el conjunto de los isomorfismos es abierto en el espacio de operadores $L(E)$ dotado de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de E, entonces el espacio E tiene que ser necesariamente normable (consúltese la cita que aparece en [Akk85]). Si E es completo, $L_b(E)$ es una Q-álgebra si, y sólo si, E es normable. En la terminología de las álgebras topológicas, una Q-álgebra es un álgebra topológica con elemento identidad en el que el conjunto (grupo, con respecto a la multiplicación) de los elementos invertibles de dicha álgebra es un subconjunto abierto de la misma [Mal86, Def. 6.2].

Todos los resultados nuevos de este capítulo se hallan en el artículo del autor y Bonet [BC01b]. Para probar el primero de ellos utilizaremos el siguiente teorema debido a Kolmogoroff [Köt69, pág. 160].

Teorema 2.2 (Teorema de Kolmogoroff) *Un e.l.c. es normado si, y sólo si, existe un entorno del origen que sea acotado.*

En los siguientes teoremas caracterizamos cuando los conjuntos $mo(E,F)$ y $ca(E,F)$ son abiertos.

Teorema 2.3 *Supongamos que $mo(E,F)$ no es vacío. El conjunto $mo(E,F)$ es abierto en $L_b(E,F)$ si, y sólo si, E es normable.*

Demostración. En primer lugar, supongamos que $mo(E,F)$ es un conjunto abierto y no vacío. Elegimos $T \in mo(E,F)$ arbitrario y un entorno del origen en $L_b(E,F)$, $\mathscr{W}(B,V)$, que viene dado por una pareja $B \in \mathscr{B}(E)$ y $V \in \mathscr{U}_0(F)$ de tal manera que si $S \in L(E,F)$ cumple que $(T-S)(B) \subseteq V$, i.e. si $(T-S) \in \mathscr{W}(B,V)$, entonces $S \in mo(E,F)$.

Afirmamos que $V \cap T(E) \subseteq \overline{T(B)}$, hecho que implica que $V \cap T(E)$, además de ser un entorno de cero en $T(E)$, está acotado. Por tanto, $T^{-1}(V \cap T(E))$ será un entorno acotado de E por ser T un monomorfismo y por tanto E será un espacio normado aplicando el Teorema de Kolmogoroff.

Probamos dicha afirmación por reducción al absurdo: Supongamos que existe $x \in E$ con $T(x) \in V \setminus \overline{T(B)}$, en particular se tiene que $x \neq 0$ puesto que $0 \in B$ al ser B un conjunto absolutamente convexo. Aplicamos el Teorema de Hahn-Banach para hallar $v \in F'$ tal que

$$v(Tx) = 1 \text{ y } |v(Tb)| < 1 \text{ para todo } b \in B.$$

Definimos $S : E \to F$ como $Sz := Tz - v(Tz)Tx$ para cada $z \in E$. Claramente, se tiene que $S \in L(E,F)$. Además, para cada $b \in B$ tenemos que $(T-S)(b) = v(Tb)Tx \in V$, con lo cual, $(T-S) \in \mathscr{W}(B,V)$. Por lo supuesto anteriormente se tiene que $S \in mo(E,F)$, pero por otra parte, $Sx = 0$ y esto último implicaría que

S no es inyectiva al ser $x \neq 0$, llegando así a una contradicción, puesto que en la introducción vimos que todo monomorfismo es inyectivo.

Supongamos ahora que E es un espacio normado con la norma $\|.\|$ y fijemos $T \in mo(E,F)$. Por la definición de monomorfismo, se tiene que existe $q \in \mathrm{sc}(F)$ tal que $\|x\| \leq q(Tx)$ para todo $x \in E$. Usamos ahora seminormas para determinar entornos de T en $L_b(E,F)$. Consideramos el entorno de T formado por los $S \in L(E,F)$ que satisfacen que $q_{U_E}(T-S) \leq \frac{1}{2}$, i.e. $\sup\{q(Tx-Sx) : \|x\| \leq 1\} \leq \frac{1}{2}$. De esta manera tenemos para todo $x \in E$

$$\|x\| \leq q(Tx) \leq q(Sx) + q(Tx-Sx) \leq q(Sx) + \frac{1}{2}\|x\|.$$

Esto implica que $\|x\| \leq 2q(Sx)$ para todo $x \in E$, concluyendo de este modo que $S \in mo(E,F)$ para cualquier S que se halla en el entorno de T determinado por los S que verifican que $q_{U_E}(T-S) \leq \frac{1}{2}$.

□

Teorema 2.4 *Supongamos que $ca(E,F)$ no es vacío. El conjunto $ca(E,F)$ es un conjunto abierto en $L_b(E,F)$ si, y sólo si, el espacio F es normable y para cada $T \in ca(E,F)$ existe $B \in \mathscr{B}(E)$ tal que $\overline{T(B)}^F$ es un entorno del origen en F.*

Demostración. Supongamos que $ca(E,F)$ es un conjunto abierto en $L_b(E,F)$ y no vacío. Fijamos $T \in ca(E,F)$ arbitrario. Podemos asumir la existencia de una pareja $B \in \mathscr{B}(E)$ y $V \in \mathscr{U}_0(F)$, que determinan un entorno del origen en $L_b(E,F)$, tales que si $S \in L(E,F)$ verifica $(T-S)(B) \subset V$, entonces $S \in ca(E,F)$. Probaremos que $V \subset \overline{T(B)}$ utilizando la misma técnica que en la implicación análoga del Teorema 2.3, de donde se seguirá la necesidad de que F sea normable.

Procedamos por reducción al absurdo: Supongamos que existe $y \in V \setminus \overline{T(B)}$. Por el Teorema de Hahn-Banach existe $v \in F'$ con $v(y) = 1$, $|v(Tb)| < 1$ para todo $b \in B$. Definimos $S \in L(E,F)$ como $Sz := Tz - v(Tz)y$ para cada $z \in E$. Si tomamos $b \in B$, obtenemos que $(T-S)(b) = v(Tb)y \in V$. Por otra parte, $S(E) \subset \ker v$ ya que

$$v(Sz) = v(Tz) - v(Tz)v(y) = 0, \quad z \in E.$$

Esto implica que $S(E)$ no es denso en F puesto que $\ker v$ es cerrado al ser v continuo con lo cual si $S(E)$ fuera denso en F tendríamos que $\ker v = F$ y esto no se puede dar puesto que $v \neq 0 \in F'$. Por tanto, S no puede ser casi abierto al no tener rango denso, como hemos observado en la introducción, llegando así a una contradicción.

Para probar el recíproco fijamos $T \in ca(E,F)$. Por el supuesto de que F es normado y de que existe $B \in \mathscr{B}(E)$ tal que $\overline{T(B)}$ contiene un entorno del origen, que en este caso se puede considerar la bola unidad U_F de F, se tiene que el operador

$$\widehat{T} := T|_{E_B} : E_B \to F$$

es casi abierto entre los espacios normados E_B y F. Por [Har88, 3.4.3], existe $\varepsilon > 0$ tal que si $\widehat{R} \in L(E_B, F)$ y $\|\widehat{R} - \widehat{T}\|_{L(E_B,F)} \leq \varepsilon$, entonces $\widehat{R} \in ca(E_B, F)$. Sin embargo, $\mathscr{W}(B, U_F^\varepsilon)$ es un entorno del origen en $L_b(E,F)$. Si $S \in L(E,F)$ satisface $(S-T) \in \mathscr{W}(B, U_F^\varepsilon)$, entonces la restricción $\widehat{S} := S|_{E_B} \in L(E_B, F)$ satisface $\|\widehat{S} - \widehat{T}\|_{L(E_B,F)} \leq \varepsilon$. Por tanto $\widehat{S} \in ca(E_B, F)$ y de aquí se sigue que $\overline{\widehat{S}(B)}$ es un entorno del origen en F y como $\overline{\widehat{S}(B)} = \overline{S(B)}$, entonces $\overline{S(B)}$ es un entorno del origen en F. Como para cualquier entorno del origen $U \in E$ se tiene que existe $\lambda > 0$ tal que $\lambda B \subset U$, se deduce que $\overline{S(U)}$ es un entorno del origen en F, obteniendo así que $S \in ca(E,F)$.

□

El siguiente corolario es una consecuencia del Teorema de la aplicación abierta de Banach-Schauder y extiende el resultado de Abramovich, Aliprantis y Polyrakis [AAP96, Teor. 3.1].

Corolario 2.5 *Sean E y F espacios de Fréchet. Supongamos que existe un operador sobreyectivo de E en F. El conjunto de todos los operadores sobreyectivos de E en F es abierto en $L_b(E,F)$ si, y sólo si, F es un espacio de Banach y para cada operador $T \in L(E,F)$ sobreyectivo existe un subconjunto acotado B de E tal que $T(B)$ es un entorno en F.*

Demostración. Aplicando el Teorema de la aplicación abierta de Banach-Schauder podemos ver que los operadores sobreyectivos coinciden con los abiertos y los casi abiertos en este caso. Al no ser vacío $ca(E,F)$, por el Teorema 2.4 se tiene que F es normado y como es completo por ser Fréchet se llega a que F es un espacio de Banach. Por el mismo resultado se obtiene que además existe $B \in \mathscr{B}(E)$ tal que $\overline{T(B)}$ es un entorno del origen. Luego T, además de ser abierto, levanta acotados, y por tanto, podemos asegurar que existe $C \in \mathscr{B}(E)$ tal que $\overline{T(B)} \subset T(C)$. De esta manera $T(C)$ contiene al mencionado entorno. La implicación recíproca es evidente aplicando el Teorema 2.4.

□

Con respecto a las hipótesis hechas en los Teoremas 2.3 y 2.4 y en el Corolario 2.5 cabe mencionar que existen parejas de espacios de Banach o de espacios de Fréchet (E,F) tales que $mo(E,F) = \emptyset$ y $ca(E,F) = \emptyset$. Esto es conocido para $E = \ell_p$ y $F = \ell_q$ con $p \neq q$ (consultar [LT77, Cap. 2]). Vogt [Vog83] y Bonet [Bon87] investigaron parejas de espacios de Fréchet (E,F) tales que todo $T \in L(E,F)$ es un operador acotado. Estas parejas de espacios verifican que $mo(E,F)$ y $ca(E,F)$ son vacíos siempre que ni E ni F sean normables. Recordemos que un operador $T \in L(E,F)$ es *acotado* si existe $U \in \mathscr{U}_0(E)$ tal que $T(U)$ es acotado en F.

No todo operador sobreyectivo de un espacio de Fréchet E en un espacio de Banach F verifica que U_F esté contenida dentro de la imagen de un conjunto acotado de E.

Ejemplo 2.6 Consideremos el espacio escalonado de Köthe $\lambda_1(A)$ del Ejemplo 1.3 y el operador cociente $q : \lambda_1(A) \to \ell_1$. El operador q no levanta conjuntos acotados ya que los conjuntos acotados de $\lambda_1(A)$ son relativamente compactos por ser éste un espacio de Montel, y si los levantara, llegaríamos a una contradicción con el hecho de que la bola unidad de ℓ_1 no es compacta.

La Proposición 2.8 extiende el resultado de Miñarro que enunciamos a continuación.

Teorema 2.7 *[Miñ95, Teor. 1] Sea E un espacio de Fréchet casinormable y sea L un subespacio cerrado de E tal que E/L es normable, entonces el operador cociente $q : E \to E/L$ levanta conjuntos acotados.*

Proposición 2.8
1. *Sea E un espacio casinormable y sea F un espacio normado. Si $T \in ca(E,F)$, entonces existe $B \in \mathscr{B}(E)$ tal que $U_F \subset \overline{T(B)}$.*

2. *Si T es un operador abierto y sobreyectivo de un espacio localmente completo y casinormable E en un espacio de Banach F, entonces existe $B \in \mathscr{B}(E)$ tal que $T(B)$ es un entorno en F.*

Demostración. El apartado (2) es una sencilla consecuencia del apartado (1) y del Teorema de la aplicación abierta de Banach-Schauder, utilizando que E_B es un espacio de Banach al ser E un espacio localmente completo. El razonamiento es muy similar al que se emplea en el Corolario 2.5.

Probemos el apartado (1): Puesto que T es continuo, podemos hallar $U \in \mathscr{U}_0(E)$ verificando que $T(U) \subset \frac{1}{4}U_F$. Como E es un espacio casinormable, podemos encontrar $V \in \mathscr{U}_0(E)$ tal que para todo $\mu > 0$ existe $B \in \mathscr{B}(E)$ con $\mu V \subset B + U$. Aplicando que T es un operador casi abierto, dado que U_F es un entorno acotado, se puede encontrar $\lambda > 0$ verificando

$$U_F \subset \lambda \overline{T(V)} \subset \lambda T(V) + \frac{1}{4}U_F.$$

Aplicando que E es casinormable, con U y en particular con λ, hallamos $C \in \mathscr{B}(E)$ con $\lambda V \subset C + U$, para concluir que

$$U_F \subset \lambda T(V) + \frac{1}{4}U_F \subset T(C) + T(U) + \frac{1}{4}U_F \subset T(C) + \frac{1}{2}U_F.$$

Procediendo de manera recurrente tenemos que, para cada $n \in \mathbb{N}$,

$$U_F \subset \sum_{k=0}^{n-1} 2^{-k}T(C) + \frac{1}{2^n}U_F \subset T(2C) + \frac{1}{2^n}U_F.$$

De donde se sigue que $U_F \subset \overline{T(2C)}$.

□

El siguiente corolario extiende los resultados de Harte [Har88, Teor. 3.4.3] y de Abramovich, Aliprantis y Polyrakis [AAP96, Teor. 3.1].

Corolario 2.9 *1. Si E es un espacio casinormable y F es un espacio normado, entonces $ca(E,F)$ es un conjunto abierto en $L_b(E,F)$.*

2. Si E es un espacio localmente completo y casinormable y F es un espacio de Banach, entonces el conjunto de los operadores abiertos y sobreyectivos de E en F es abierto en $L_b(E,F)$.

Demostración. La prueba es directa combinando el Teorema 2.4 con la Proposición 2.8.

□

En [AAP96, pág. 460] podemos hallar un sencillo ejemplo que demuestra que 2.9.2 no se puede dar para espacios normados y que recogemos a continuación.

Ejemplo 2.10 Consideremos el espacio de todas las sucesiones eventualmente nulas dotado de la norma $\|.\|_\infty$ que denotamos por $(\varphi, \|.\|_\infty)$. Este espacio es normado pero no es completo, ni localmente completo. Sea $I : \varphi \to \varphi$ el operador identidad y sea $S : \varphi \to \varphi$, el operador de desplazamiento hacia adelante, definido como:

$$S(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots).$$

Dado $\varepsilon > 0$, se tiene que $S_\varepsilon := I + \varepsilon S$ cumple que $\|I - S_\varepsilon\| \leq \varepsilon$ y S_ε no es sobreyectivo mientras que I si lo es.

Desarrollamos estas ideas en el siguiente resultado.

Teorema 2.11 *1. Todo espacio de Banach separable de dimensión infinita X contiene un subespacio denso E tal que el conjunto de los operadores abiertos y sobreyectivos en E no es un conjunto abierto en el espacio normado $L(E)$.*

2. *Todo espacio de Banach de dimensión infinita X contiene un subespacio propio y denso F tal que el conjunto de los operadores sobreyectivos y abiertos en F es un conjunto abierto en el espacio normado $L(F)$.*

Demostración. 1. Por un resultado de Ovsepian y Pełczyński [OP75], existen sucesiones $\{x_n\}_n \subset X$, $\|x_n\| = 1$, $\overline{\operatorname{span}\{x_n\}_n} = X$ y $\{u_n\}_n \subset X'$ con $\|u_n\| \leq 2$ tales que $u_m(x_n) = \delta_{nm}$ (que es el delta de Kronecker), donde span denota la envoltura lineal de los elementos correspondientes. Sea $E := \operatorname{span}\{x_1, x_2, \ldots\}$. Para cada $\varepsilon > 0$ definimos $T_\varepsilon : E \to E$ como

$$T_\varepsilon x := x - \varepsilon \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+2}} u_n(x) x_{n+1}.$$

Claramente, el operador T_ε está bien definido, es lineal y es continuo por las propiedades de biortogonalidad de las sucesiones $\{x_n\}_n$ y $\{u_n\}_n$. Si tomamos $x \in E$ con $\|x\| \leq 1$, entonces

$$\|(I - T_\varepsilon)x\| \leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \|u_n\| \, \|x_{n+1}\| \leq \varepsilon.$$

Para cada $x := \sum_{i=1}^{k} \alpha_i x_i \in E$ con $\alpha_k \neq 0$, tenemos que

$$u_{k+1}(T_\varepsilon x) = -\frac{\varepsilon}{2} \frac{1}{2^{k+1}} \alpha_k \neq 0.$$

Esto implica que $x_1 \notin T_\varepsilon(E)$, puesto que $u_{k+1}(x_1) = 0$ por la biortogonalidad, con lo que se completa la prueba en este caso, puesto que los operadores T_ε no son sobreyectivos en E y se encuentran tan cerca como queramos del operador identidad.

2. Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita y sea $u : X \to \mathbb{K}$ una forma lineal que no sea continua. Entonces $F := \ker u$ es un hiperplano denso en X. Antes de comenzar la prueba de este apartado veamos la siguiente observación.

Observación 2.12 Sean X y F como acabamos de mencionar. Sea $g \in L(X)$ un operador sobreyectivo tal que $g(F) \subset F$. Sea $\tilde{g} := g|_F \in L(F)$ la restricción de g a F. Entonces:

(i) $g(X \setminus F) \subset X \setminus F$.

(ii) $\tilde{g}$ es sobreyectivo en F.

(iii) $\ker g = \ker \tilde{g}$.

Probamos (i) por reducción al absurdo: Supongamos que existe $z \in X \setminus F$ con $g(z) \in F$. Puesto que $X = F \oplus \mathrm{span}(z)$, podemos afirmar que

$$g(X) \subset g(F) \oplus \mathrm{span}(g(z)) \subset F \neq X,$$

que es una contradicción con que g sea sobreyectivo en X puesto que $z \in X \setminus F$.

Para poder probar (ii) elegimos $y \in F$. Dado que g es sobreyectiva existe $z \in X$ con $g(z) = y \in F$. Por (i) se obtiene que $z \in F$ y así $\tilde{g}$ es sobreyectivo.

Finalmente, para probar (iii) hay que observar, en primer lugar, que $\ker \tilde{g} \subset \ker g$. Veamos la otra inclusión, si $x \in \ker g \subset X$, tenemos que $g(x) = 0 \in F$. Por (i) $x \in F$ y $g(x) = 0$, i.e. $x \in \ker \tilde{g}$.

Continuamos con la prueba del apartado (2): Fijemos $T \in L(F)$ que sea sobreyectivo y abierto. Por la densidad de F existe una única extensión $\widehat{T} \in L(X)$ verificando que $\widehat{T}|_F = T$. Como T es un homomorfismo y está definido en un subespacio denso de X, aplicando [Köt79, 32.5(3)] se concluye que $\widehat{T}$, su extensión, es un homomorfismo en el espacio de Banach X. Por tanto $\widehat{T}(X)$ es un subespacio cerrado de X. Puesto que $F \subset \widehat{T}(X)$, tenemos que $\widehat{T}$ es sobreyectivo. Por [AAP96, 3.1], existe $\varepsilon > 0$ tal que si $R \in L(X)$ satisface $\|R - \widehat{T}\|_{L(X)} \leq \varepsilon$, entonces R es sobreyectivo. Sea $S \in L(F)$ cumpliendo $\|S - T\|_{L(F)} \leq \varepsilon$. La única extensión $\widehat{S} \in L(X)$ de S a X verifica $\|\widehat{S} - \widehat{T}\|_{L(X)} \leq \varepsilon$, y por tanto $\widehat{S}$ es sobreyectivo en X. Aplicando la Nota 2.12 a $g := \widehat{S}$, $\tilde{g} = g|_F = S$, podemos concluir que $S \in L(F)$ es sobreyectivo en F, y $\ker \widehat{S} = \ker S$. En estas condiciones, por [PCB87, 2.6.18] S es un homomorfismo en F. Por tanto $S \in L(F)$ es sobreyectivo y abierto. $\square$

En [AAP96, 3.3 y 3.4] se prueba que si E y F son espacios de Banach, el conjunto de los isomorfismos de E en F coincide con $mo(E,F) \cap \overline{ca(E,F)}$ y con $ca(E,F) \cap \overline{mo(E,F)}$, al tomar estas clausuras en $L_b(E,F)$.

Los ejemplos que presentamos a continuación muestran que estos resultados no se pueden generalizar si E y F son espacios de Fréchet.

Ejemplo 2.13 El operador de desplazamiento hacia adelante $S : \omega \to \omega$ (siendo ω el espacio de todas las sucesiones con valores escalares) definido como en el Ejemplo 2.10 es un monomorfismo y no es sobreyectivo, pues $(1,0,0,\dots)$ no tiene antiimagen posible por S. El operador $-S$ pertenece a la clausura de $ca(\omega,\omega)$. De hecho $H_n := -S + \frac{1}{n}I$ converge a $-S$ cuando n tiende a ∞ en $L_b(\omega,\omega)$ y $-S + \frac{1}{n}I$ es un operador sobreyectivo: de hecho, para $y = (y_j)_j \in \omega$, basta definir $x = (x_j)_j \in \omega$ como $x_j := ny_j + n^2 y_{j-1} + \ldots + n^{j-1} y_2 + n^j y_1$ para comprobar que $H_n(x) = y$. Como consecuencia $mo(\omega,\omega) \cap \overline{ca(\omega,\omega)}$ no está contenido en el conjunto de los isomorfismos sobreyectivos en ω.

Ejemplo 2.14 El operador de desplazamiento hacia atrás $B : \omega \to \omega$ definido como $B(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots)$ es sobreyectivo, no es inyectivo, pero pertenece a la clausura del conjunto $mo(\omega, \omega)$ en $L_b(\omega, \omega)$. De hecho, si definimos $H_n : \omega \to \omega$, de manera que

$$H_n(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (x_2, x_3, \ldots, x_n, x_1, x_{n+1}, \ldots),$$

se tiene que $H_n(x)$ converge a $B(x)$ cuando n tiende a ∞ para cada $x \in \omega$. Por el Teorema de Banach-Steinhaus [Köt79, 39.5(1)], H_n tiende a B cuando n tiende a ∞ sobre todo subconjunto precompacto de ω. Dado que ω es un espacio de Montel, H_n converge a B cuando n tiende a ∞ en $L_b(\omega, \omega)$. Como consecuencia $ca(\omega, \omega) \cap \overline{mo(\omega, \omega)}$ no está contenido en el conjunto de los isomorfismos sobre ω.

Todavía se puede decir más sobre las sucesiones de operadores que convergen fuertemente a un isomorfismo sobreyectivo $T \in L(E)$. Para ello necesitamos la siguiente extensión del resultado clásico para espacios de Banach que se debe a Garnir, De Wilde y Schmets [GDWS68, pág. 346]. Su prueba usa desarrollos en serie de Neumann.

Recordemos que un operador $T \in L(E, F)$ es *compacto* si existe $U \in \mathscr{U}_0(E)$ tal que $T(U)$ es relativamente compacto en F.

Teorema 2.15 (Garnir, De Wilde, Schmets). *Sea E un e.l.c. completo. Sea $T \in L(E)$ un operador tal que existe $U \in \mathscr{U}_0(E)$ con $(I - T)(U)$ acotado en E y además $(I - T)(U) \subset \alpha U$ para algún $0 < \alpha < 1$. Entonces T es un isomorfismo sobreyectivo en E y la serie $\sum_{k=0}^{\infty}(I - T)^k$ converge a T^{-1} en $L_b(E)$. Si $(I - T)$ es compacto no se necesita ningún supuesto de completitud sobre E.*

Proposición 2.16 *Sea E un e.l.c. y completo, $T \in L(E)$ un isomorfismo y $\{T_n\}_n$ una sucesión de operadores en $L(E)$ tales que existen $B \in \mathscr{B}(E)$, $U \in \mathscr{U}_0(E)$ verificando que para todo $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ con $(T - T_n)(U) \subset \varepsilon B$ para todo $n \geq n(\varepsilon)$. Entonces existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que, para todo $n \geq n_0$, T_n es un isomorfismo sobreyectivo en E.*

Antes de empezar con la prueba de esta proposición queremos hacer la siguiente puntualización.

Observación 2.17 Si $\{T_n\}_n$ y T verifican las hipótesis de la proposición anterior, entonces T_n converge a T en el sentido de Mackey en $L_b(E)$, en particular T_n converge a T en $L_b(E)$ cuando n tiende a ∞.

Demostración. Como T es un isomorfismo, $V := T(U) \in \mathscr{U}_0(E)$ y por hipótesis para todo $\varepsilon > 0$ existe $n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n \geq n(\varepsilon)$ tenemos que $(I -$

$T_nT^{-1})(V) \subset \varepsilon B$. Esto implica que, para todo $n \geq n(1)$, el operador $(I - T_nT^{-1})$ es acotado. Como B es acotado existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que $\varepsilon_0 B \subset \frac{1}{2}V$. Sea $n_0 := n(\varepsilon_0)$. Si $n \geq n_0$, tenemos que $(I - T_nT^{-1})(V) \subset \frac{1}{2}V$. Aplicando el Teorema 2.15 podemos concluir que T_nT^{-1} es un isomorfismo sobreyectivo en E, por lo que T_n es un isomorfismo para $n \geq n_0$ puesto que T también lo es.

$\square$

Capítulo 3

Dualidad entre monomorfismos y operadores casi abiertos

El siguiente resultado clásico, que puede ser visto tanto en [Ber74, Teor. 57.18 y Teor. 57.16] como en [Har88, Teor. 5.5.3 y Teor. 5.5.2], es muy útil cuando se trabaja con operadores entre espacios de Banach.

Teorema 3.1 *Sea $T \in L(X,Y)$ con X e Y espacios de Banach y $T' : Y' \to X'$ su correspondiente operador adjunto. Entonces*

1. *T es un monomorfismo si, y sólo si, T' es abierto,*
2. *T es abierto si, y sólo si, T' es un monomorfismo.*

La posibilidad de extender el Teorema 3.1 a e.l.c. arbitrarios ha sido considerada varias veces y es una cuestión bastante delicada incluso para espacios de Fréchet o para espacios (DF) completos. Hay muchos resultados relacionados que se hallan dispersos en la literatura, que incluyen por ejemplo el resultado clásico del Teorema del homomorfismo de Dieudonné-Köthe-Schwartz para espacios de Fréchet [Köt79, 33.4(2)]. El caso de espacios (gDF) y de Montel (también llamados espacios (DCF)) fue tratado por Hollstein [Hol78]. Más información puede ser hallada en el libro de Köthe [Köt79, Cáp. 32, 33].

La relación con sucesiones cortas y exactas de espacios de Fréchet y con el levantamiento de conjuntos acotados ha sido investigada por Meise y Vogt [MV97, Cáp. 26]. Véase también Dierolf [Die93]. Existen resultados muy interesantes sobre el adjunto de un homomorfismo entre espacios duales con la topología fuerte que fueron dados por Dierolf y Zarnadze [DZ92]. Recientemente, Wengenroth ha utilizado los functores derivados y el álgebra homológica en [Wen03, Cáp. 7] para investigar cuándo el adjunto de un homomorfismo en la categoría de los e.l.c. es también un homomorfismo. Nosotros recopilamos todos estos resultados añadiendo algunas consideraciones nuevas y contraejemplos, véanse los resultados 3.10, 3.17, 3.18 y 3.21. Los resultados de este capítulo han sido publicados en [BC01a].

El siguiente resultado será utilizado varias veces:

Teorema 3.2 *[Köt79, 32.4(3)]* Teorema del Homomorfismo de Grothendieck.

1. *El operador $T \in L(E,F)$ es un homomorfismo si, y sólo si, las siguientes dos condiciones se verifican:*

   a) *$T'(F')$ es $\sigma(E',E)$ cerrado en E', y*

   b) *para todo conjunto equicontinuo $M_1 \subset E'$ tal que $M_1 \subset T'(F')$ existe $M_2 \subset F'$ equicontinuo cumpliendo que $M_1 \subset T'(M_2)$.*

2. *T es casi abierto si, y sólo si, verifica la condición 3.2.1*b*, véase [Köt79, 34.1(4)].*

Por tanto, un operador $T : E \to F$ casi abierto es abierto si, y sólo si, $T'(F')$ es $\sigma(E',E)$ cerrado en E'.

Un e.l.c. E es un espacio de *Pták* si, y sólo si, todo $T \in L(E,F)$, con F e.l.c., que es casi abierto es abierto, véase [Köt79, Sec. 34.3]. Todo espacio de Fréchet es un espacio de Pták. El dual fuerte de un espacio de Fréchet reflexivo es un espacio de Pták. Todo cociente de un espacio de Pták es completo [Köt79, 34.3(3)].

3.1. El traspuesto de un monomorfismo

En esta sección estudiamos la relación entre que T sea un monomorfismo y que T' sea sobreyectivo y abierto, encontrando así extensiones del resultado 3.1.1. Nuestro primer resultado es bien conocido y generaliza [Har88, Teor. 5.5.3] para e.l.c.

Observación 3.3 Sean E y F e.l.c.

1. *Si $T \in L(E,F)$ es un monomorfismo, entonces $T' : F'_b \to E'_b$ es sobreyectivo.* Fijamos $u \in E'_b$ y definimos $v : T(E) \to \mathbb{K}$ como $v := u \circ T^{-1}$. Por el Teorema de Hahn-Banach existe $w \in F'$ tal que $w|_{T(E)} = v$, con lo que $T'(w) = u$.

2. *Si $T \in L(E,F)$ satisface que $T' : F'_b \to E'_b$ es sobreyectivo, entonces T es inyectivo,* como se sigue a partir de $\{0\} = (E')^\circ = T'(F')^\circ = \ker T$ por [Köt79, 32.1(5)].

Analizamos la condición necesaria en el Teorema 3.1.1 Comenzamos considerando el caso en que E y F sean espacios de Fréchet.

Proposición 3.4 *Sea $T \in L(E,F)$ un monomorfismo entre espacios de Fréchet. Supongamos que alguna de las siguientes condiciones se verifica:*

1. *Todo subconjunto acotado de $F/T(E)$ está contenido en la imagen de un subconjunto acotado de F por la aplicación cociente $q : F \to F/T(E)$,*

2. *$F/T(E)$ es un espacio de Montel,*

3. *E es distinguido,*

entonces $T' : F'_b \to E'_b$ es un homomorfismo sobreyectivo.

El supuesto 3 se da, en particular, si E es casinormable o si E es reflexivo (este último caso se obtiene a partir de [Köt79, 32.4(7)]).

Demostración.

1. Esto se obtiene a partir de un resultado mucho más profundo debido a Meise y Vogt [MV97, Lema 26.11].

2. Si $F/T(E)$ es de Montel, entonces todo subconjunto acotado de $F/T(E)$ es relativamente compacto. Una consecuencia clásica del Teorema de Banach-Dieudonné [Köt69, 21.10(1)] muestra que todo subconjunto compacto de $F/T(E)$ está contenido en la imagen de un subconjunto compacto de F mediante $q : F \to F/T(E)$ (véase e.g. [MV97, Cor. 26.22]). La conclusión se sigue del caso anterior.

3. El operador $T' : F'_b \to E'_b$ es sobreyectivo por la observación 3.3.1 y continuo por [MV97, Prop. 23.30(b)] al estar ambos duales dotados de la topología fuerte. Por tanto $T' : F'_{\mathrm{ind}} \to E'_{\mathrm{ind}}$ es un operador sobreyectivo entre espacios (LB). Por la versión del Teorema de la aplicación abierta entre espacios (LB) [PCB87, 8.4.11], se obtiene que $T' : F'_{\mathrm{ind}} \to E'_{\mathrm{ind}}$ es abierto.

   Como E es distinguido, $E'_{\mathrm{ind}} = E'_b$. Esto implica que $T' : F'_b \to E'_b$ es abierto, al ser la topología del límite inductivo en F' más fina que la fuerte. Así $T' : F'_b \to E'_b$ es un homomorfismo sobreyectivo.

□

Ejemplo 3.5 La implicación de la Proposición 3.4 no se da de manera general para espacios de Fréchet arbitrarios. Sea E un espacio de Fréchet no distinguido (e.g. [Köt69, Sec. 31.7] [MV97, Cor. 27.18 y Ej. 27.19]). Sea F un producto numerable de espacios de Banach tal que E es isomorfo a un subespacio cerrado de F, véase [MV97, Nota 24.5]. Denotamos por $T : E \hookrightarrow F$ el operador inclusión. El operador T es continuo y un monomorfismo. Supongamos que $T' : F'_b \to E'_b$ es un homomorfismo sobreyectivo. Como F'_b es un (LB) y por tanto bornológico, su cociente E'_b también es bornológico, lo que es una contradicción, puesto que E no es distinguido [MV97, pág. 300].

Observación 3.6 De la argumentación hecha en el ejemplo anterior se deduce que si $T \in L(E,F)$ es un monomorfismo entre espacios de Fréchet tal que $T' : F'_b \to E'_b$ es abierto y F es distinguido, entonces E también es distinguido.

El siguiente resultado de Palamodov [Pal71, Teor. 8.1] caracteriza que el espacio de salida sea distinguido en función de que esta implicación se cumpla para cualquier e.l.c. F. Este resultado también se puede consultar en [Wen03, Teor. 7.1 y 7.2].

Teorema 3.7 *Sea E un e.l.c. casitonelado. Entonces E'_b es bornológico si, y sólo si, para todo e.l.c. F tal que $T \in L(E,F)$ es un monomorfismo se tiene que $T' : F'_b \to E'_b$ es abierto.*

Es fácil comprobar que la necesidad en el Teorema 3.1.1 se da para espacios (DF).

Proposición 3.8 *Si $T \in L(E,F)$ es un monomorfismo entre espacios (DF), entonces $T' : F'_b \to E'_b$ es sobreyectivo y abierto.*

Demostración. El operador $T' : F'_b \to E'_b$ es lineal, continuo y sobreyectivo entre espacios de Fréchet gracias al Teorema 3.3.1. La conclusión se deduce del Teorema de la aplicación abierta de Banach-Schauder.

$\square$

Investigamos ahora el recíproco del Teorema 3.1.1. Esta implicación siempre se da para espacios de Fréchet como consecuencia del Teorema de Banach-Dieudonné.

Proposición 3.9 *Sean E y F espacios de Fréchet y sea $T \in L(E,F)$ un operador para el que $T' : F'_b \to E'_b$ es sobreyectivo y abierto, entonces T es un monomorfismo.*

Demostración. Consideremos $T \in L(E,F)$ tal que $T' : F'_b \to E'_b$ es abierto, entonces T' es un homomorfismo fuerte y, por [Köt79, 33.3(2)], T es un homomorfismo. La inyectividad es una consecuencia de la nota 3.3.2.

□

La condición suficiente en el Teorema 3.1.1 es falsa en general para espacios (DF).

Ejemplo 3.10 *Un operador lineal y continuo $T : E \to F$ entre espacios (LB) completos que no es un monomorfismo, pero cuyo adjunto $T' : F'_b \to E'_b$ es sobreyectivo y abierto*: El siguiente ejemplo se debe a Grothendieck y puede ser hallado en [PCB87, Ej. 8.6.13]. Existe una suma directa numerable de espacios de Banach reflexivos $(F,t) = \oplus_{k=1}^{\infty} F_k$ con un subespacio cerrado E tal que el espacio (LB)

$$(E,s) := \operatorname{ind}_n ((\oplus_{k=1}^{n} F_k) \cap E)$$

tiene una topología estrictamente más fina que la restricción $t|E$ de t a E pero tal que $(E,s)' = (E,t|E)'$. Los espacios (E,s) y (F,t) son espacios (DF) por ser espacios (LB).

Denotamos mediante $T : (E,s) \hookrightarrow (F,t)$ al operador inclusión que es continuo, pero que en este caso no es un monomorfismo. Por otra parte $T' : (F,t)'_b \to (E,s)'_b$ es sobreyectivo por el Teorema de Hahn-Banach. Como $(F,t)'_b$ y $(E,s)'_b$ son espacios de Fréchet, T' es abierto.

Proposición 3.11 *Sea E un espacio (DFM) y F un espacio (DF) casitonelado. Si $T' : F'_b \to E'_b$ es sobreyectivo y abierto, entonces $T \in L(E,F)$ es un monomorfismo.*

Demostración. Esto se obtiene a partir del Teorema del homomorfismo de Grothendieck, 3.2.1*a*, porque $T' : F'_b \to E'_b$ levanta los subconjuntos acotados de E'_b, ya que todo subconjunto acotado del espacio de Fréchet E'_b es relativamente compacto.

□

El mejor criterio para asegurar que un operador lineal y continuo entre espacios (DF) es un monomorfismo es el llamado lema de Baernstein [PCB87, Teor. 8.3.55]. Este fue utilizado con éxito por Bierstedt, Meise y Summers [BMS82b] (véase la referencia en [PCB87, pág. 486]) para demostrar que si un límite inductivo ponderado de espacios de Banach de funciones holomorfas en un subconjunto abierto de $\mathbb{C}^n$ satisface que las inclusiones canónicas de cada escalón en el límite inductivo son compactas, entonces la topología del límite inductivo puede ser descrita por seminormas supremo ponderadas; see e.g. [PCB87, Teor. 11.9.12].

Proposición 3.12 (Lema de Baernstein) *Sea F un espacio (DF). Sea E un e.l.c. tal que todo conjunto cerrado y acotado es compacto. Supongamos que $T \in L(E,F)$ satisface que $T^{-1}(B)$ está acotado en E para todo B, subconjunto acotado de F. Entonces T es un monomorfismo.*

Corolario 3.13 *[PCB87, Prop. 8.6.8(v)]. Sea $F := \mathrm{ind}_{\mathrm{n}}(F_n,t_n)$ un espacio (LB) tal que todo subconjunto acotado de F está acotado en un escalón. Sea E un subespacio de F. Si $(E,t|E)$ es semi-Montel, entonces se tiene la igualdad $(E,t|E) = \mathrm{ind}_{\mathrm{n}}(E\cap F_n, t_n|(E\cap F_n))$ topológicamente, i.e. E es un subespacio límite de (F,t).*

Corolario 3.14 *Si E y F son espacios de Fréchet-Montel, o son ambos espacios (DFM), entonces $T : E \to F$ es un monomorfismo si, y sólo si, $T' : F_b' \to E_b'$ es sobreyectivo y abierto.*

En el caso en que E y F sean espacios (LB) (o incluso espacios (LF)), los problemas considerados en esta sección están relacionados con la aciclicidad de los límites inductivos y con la condición (M) de Retakh. Referimos al lector a [Vog83] o a [PCB87, Sec. 8.6 y Nota 8.9.20]. Explicamos brevemente la relación: Sea $(F,t) := \mathrm{ind}_n(F_n,t_n)$ un espacio (LF), sea E un subespacio de F tal que $E\cap F_n$ es cerrado en (F_n,t_n) para cada n. Definimos $(E,s) := \mathrm{ind}_n(E\cap F_n, t_n|(E\cap F_n))$. Claramente, la inclusión $T : (E,s) \hookrightarrow (F,t)$ es continua e inyectiva. Entonces T es un monomorfismo débil si, y sólo si, $T' : (F,t)' \to (E,s)'$ es sobreyectivo y T es un monomorfismo si, y sólo si, $s = t|E$ en E. Caracterizaciones de estas dos propiedades en términos de las propiedades de $\mathrm{ind}_n(F_n/(E\cap F_n))$ son debidas a Palamodov, Retakh y Vogt. Las caracterizaciones son útiles para estudiar la sobreyectividad de operadores de convolución entre espacios de (ultra)-distribuciones. Consúltese [Vog83, Flo80, BGM97, Wen03]. Utilizando los últimos avances en la teoría de límites inductivos Frerick y Wengenroth [FW03] han probado de una manera más sencilla la caracterización de Hörmander, véase [Hör83], de la sobreyectividad de los operadores de convolución en espacios de distribuciones de Schwartz.

3.2. El traspuesto de un operador casi abierto

En esta sección establecemos la relación entre que un operador T sea casi abierto y que su adjunto T' sea un monomorfismo, extendiendo así el resultado 3.1.2 mencionado al principio de este capítulo. Existe una caracterización general para determinar cuando T' es un monomorfismo.

Teorema 3.15 *[Köt79, 32.5(2)] Sea $T \in L(E,F)$ con E,F e.l.c. Entonces $T' : F_b' \to E_b'$ es un monomorfismo si, y sólo si, T levanta conjuntos acotados con clausura.*

Los siguientes ejemplos bastante triviales muestran que se requieren más condiciones para asegurar que un operador $T \in L(E,F)$, tal que su adjunto $T' : F'_b \to E'_b$ verifica que es un monomorfismo, es (casi) abierto o sobreyectivo.

Ejemplo 3.16 1. Sea E un subespacio propio y denso de un espacio de Banach F y sea $T : E \hookrightarrow F$ el operador de inclusión canónica. El operador adjunto $T' : F'_b \to E'_b$ es un isomorfismo. Sin embargo, T es un operador lineal, continuo y abierto en su imagen pero no es sobreyectivo.

2. Sea (E,t) un espacio de Banach de dimensión infinita, $F := (E, \sigma(E,E'))$ y $T : E \to F$ el operador identidad. Entonces $T' : F'_b \to E'_b$ es un isomorfismo y T es sobreyectivo pero no es casi abierto, de hecho la topología t es estrictamente más fina que $\sigma(E,E')$. Como ambas topologías son del mismo par dual, por el Teorema de los bipolares las clausuras de los conjuntos convexos para ambas topologías coinciden.

Proposición 3.17 *Sea F un e.l.c. casitonelado y sea $T \in L(E,F)$ que satisface que $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo. Entonces T es casi abierto.*

Demostración. Por el Teorema 3.15, T tiene rango denso. Aplicamos el Teorema 3.2.2 para completar la prueba. Para comprobar la condición 1.b) del enunciado de 3.2, fijamos un subconjunto E-equicontinuo $M_1 \subset T'(F')$. Claramente M_1 está acotado en E'_b. Como T' es un monomorfismo, $M_2 := (T')^{-1}(M_1)$ está acotado en F'_b, y por tanto es F-equicontinuo por ser F casitonelado. Como $T'(M_2) = M_1$ la prueba está completa. $\square$

El supuesto sobre F es necesario, incluso si E y F son espacios (DF) completos.

Ejemplo 3.18 1. Sea (E,t) el espacio de Hilbert $\ell_2(I)$ con el conjunto de índices I de cardinal no numerable. Denotamos por t' la topología en E de la convergencia uniforme sobre los subconjuntos acotados y separables de E', y denotamos por F al espacio (E,t'). Tenemos que $t \gneqq t' \gneqq \sigma(E,E')$. Claramente t y t' son topologías del par dual (E,E'), por tanto tienen los mismos acotados. Como E es reflexivo, $(E,\sigma(E,E'))$ es casicompleto y podemos aplicar [Köt69, 18.4(4)] para concluir que F también es casicompleto. Como F es (DF) (véase e.g. [Köt69, pág. 401 nota después de 29.4(6)]), F es un espacio (DF) completo por [Köt69, 29.5(3)]. Denotamos por $T : E \to F$ al operador identidad. Su adjunto $T' : F'_b \to E'_b$ es un isomorfismo, sin embargo, aunque T es lineal, continuo y sobreyectivo, T no es casi abierto ni abierto.

2. Sea G un espacio de Fréchet no distinguido. Véase e.g. [MV97, Cor. 27.18]. Sean $E := G'_{\text{ind}}$, $F := G'_b$ y $T : E \to F$ el operador identidad, que es continuo pero no es abierto. Como E y F tienen los mismos conjuntos acotados, $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo. En este caso T no es casi abierto. (Obsérvese que F no es casitonelado.) Para ver esto denotamos por $\{U_n\}_n$ una base de entornos de 0 en G. Como G no es distinguido, existen $\alpha_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$ tales que el entorno de 0 en G'_{ind} definido como $U := \Gamma(\cup_{n=1}^{\infty} \alpha_n U_n^{\circ})$, siendo Γ la envoltura absolutamente convexa, no es un entorno de 0 en G'_b. Como E es (DF), aplicamos [PCB87, Prop. 8.2.27] para concluir que la clausura $\overline{U}$ de U en G'_b está contenida en $2U$. Si T fuese casi abierto, entonces $\overline{T(U)} = \overline{U}$ sería un entorno de 0 en G'_b. Esto es una contradicción dado que U no es un entorno en G'_b.

Corolario 3.19 *Sea E un espacio de Fréchet o el dual de un espacio de Fréchet reflexivo, sea F un espacio casitonelado. Si $T \in L(E,F)$ satisface que $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo, entonces T es sobreyectivo y abierto.*

Demostración. El espacio E es un espacio de Pták [Köt69, 34.3(5) y un comentario anterior a este resultado]. Por la Proposición 3.17, T es casi abierto, y por tanto casi abierto en el sentido de Pták en [Köt79, Cáp. 34]. Aplicamos [Köt79, 34.2(2)] para concluir que T es abierto en su imagen. Esto implica que $T : E \to T(E)$ es un homomorfismo sobreyectivo. Por [Köt79, 34.3(3)], $T(E)$ es también completo. Como $T(E)$ es un subespacio denso de F por ser T' inyectivo, concluimos que $T(E) = F$ y $T : E \to F$ es un homomorfismo sobreyectivo.

□

La principal aplicación de resultados como el corolario anterior es poder concluir la sobreyectividad de un operador entre espacios de Fréchet a partir de propiedades del operador traspuesto. Un criterio muy usual es el "criterio de sobreyectividad" debido a Meise y Vogt [MV97, Crit. 26.1]. Éste ha sido aplicado con éxito e.g. en [BGM97, 2.2]

Proposición 3.20 *[MV97, Crit. 26.1]. Sea $T \in L(E,F)$ un operador entre espacios de Fréchet. El operador T es sobreyectivo si, y sólo si, para todo subconjunto acotado B de E'_b, entonces $(T')^{-1}(B)$ está acotado en F'_b.*

Ejemplo 3.21 Existen E, F espacios (DF) bornológicos y $T \in L(E,F)$ tal que $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo pero T no es abierto. Nuestro ejemplo demuestra que un operador casi abierto entre espacios (DF) bornológicos no es necesariamente abierto.

Sea F un espacio (LB) completo que contiene un subespacio denso y tonelado $\tilde{E}$ que no es bornológico. F puede ser tomado como el dual de un espacio (FM) que no es (FS), donde (FS) indica que es un espacio de Fréchet y de Schwartz a la vez. Tales ejemplos fueron construidos por Valdivia [Val78]. Denotamos por E el espacio bornológico asociado a $\tilde{E}$ y por $T : E \to F$ a la inclusión continua. El operador T levanta conjuntos acotados con clausura. De hecho, como $\tilde{E}$ y F son espacios (DF) y T tiene rango denso, podemos aplicar [PCB87, 8.3.17, 8.3.25] para concluir que todo conjunto acotado en F está contenido en la clausura de un conjunto acotado en $\tilde{E}$. Como E y $\tilde{E}$ tienen los mismos conjuntos acotados, se sigue que T levanta conjuntos acotados con clausura, por tanto $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo aplicando el Teorema 3.15. Por la Proposición 3.17, T es casi abierto. Como $\tilde{E}$ no es bornológico, concluimos que T no es abierto en su imagen.

El resultado de la Proposición 3.20 ha sido mejorado recientemente por Frerick, Müller y Wengenroth en [FMW03, Teor. 3]

Proposición 3.22 *Sea E un espacio de Fréchet, F un espacio de Schwartz tonelado y $T \in L(E,F)$ un operador con rango denso. Supongamos que para cada subconjunto acotado $A \subset E'$ existe un subconjunto acotado $B \subset F'$ tal que $(T')^{-1}(A)$ está contenido en la envoltura lineal de B, entonces T es sobreyectivo y abierto.*

Discutimos ahora la implicación inversa y suponemos que $T : E \to F$ es un operador lineal, continuo y casi abierto entre e.l.c. Investigaremos si $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo, o de manera equivalente por el Teorema 3.15, si T levanta conjuntos acotados con clausura.

Suponemos en primer lugar que E y F sean espacios (DF). Nuestro siguiente resultado en el caso de que T se suponga abierta es [DZ92, Prop. 2.8]. Recordemos del Ejemplo 3.21 que operadores casi abiertos entre espacios (DF) no tienen porque ser abiertos ni sobreyectivos.

Proposición 3.23 *Sea $T : E \to F$ un operador, lineal, continuo y casi abierto. Si E es un espacio (DF), entonces $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo.*

Demostración. Aplicamos el Teorema 3.15. Sea $\{C_n\}_n$ una familia fundamental de conjuntos acotados de E. Supongamos que existe $C \in \mathscr{B}(F)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $c_n \in C$ con $c_n \notin n\overline{T(C_n)}$, con la clausura tomada en F. Por el Teorema de Hahn-Banach, para todo $n \in \mathbb{N}$ existe $u_n \in F'$ con $u_n(c_n) = n$ y $|u_n(T(x))| \leq 1$ para todo $x \in C_n$. El conjunto $\{u_n \circ T\}_n \subset E'$ está acotado con respecto a la topología $\beta(E',E)$. De hecho, fijemos $m \in \mathbb{N}$, como $C_m \subset C_n$ para todo $n \geq m$ entonces $|u_n(T(z))| \leq 1$ para todo $z \in C_m$. Ahora $u_n \circ T \in C_m^\circ$ para todo $n \geq m$. Usando que $u_1 \circ T, u_2 \circ T, \ldots, u_{m-1} \circ T \in E'$ se obtiene lo que queríamos ver.

Como E es (DF), $U := \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in E \ : \ |u_n \circ T(x)| \leq 1\}$ es un entorno de 0 en E. Como T es casi abierto, $\overline{T(U)}$ es un entorno de 0 en F, y así podemos encontrar $\lambda > 0$ tal que $C \subset \lambda \overline{T(U)}$. Para $n \in \mathbb{N}$ y $x \in U$ tenemos que $|u_n(T(x))| \leq 1$.

Como consecuencia $|u_n(c)| \leq \lambda$ para todo $c \in C$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, lo que es una contradicción.

$\square$

Las hipótesis de la Proposición 3.23 implican que F ha de ser necesariamente un espacio (DF).

Supongamos ahora que E es un espacio de Fréchet y que $T : E \to F$ es casi abierto. Como E es un espacio de Pták, T es abierto. Esto implica que $T(E)$ es un espacio de Fréchet. Como $T(E)$ es denso en F por ser casi abierto, concluimos que $T(E) = F$, por tanto T es sobreyectivo y F es un espacio de Fréchet. Como consecuencia el problema que tenemos que considerar es el siguiente: *'Sea $T : E \to F$ un operador lineal, continuo y sobreyectivo entre espacios de Fréchet, ¿cuándo levanta T conjuntos acotados con clausura?'*. Esta cuestión ha sido estudiada minuciosamente. Mencionamos [MV97, Cáp. 26] como referencia y recogemos en la siguiente Proposición algunos de los resultados conocidos.

Proposición 3.24 *Sea $T : E \to F$ un operador lineal, continuo y sobreyectivo entre espacios de Fréchet. Tenemos que:*

1. *Existen un espacio de Fréchet-Montel E, un espacio de Banach F y $T : E \to F$ lineal, continuo y sobreyectivo tal que $T' : F'_b \to E'_b$ no es un monomorfismo.*

2. *$T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo si, y sólo si, T levanta conjuntos acotados.*

3. *Si F es Montel o $\ker T$ es casinormable, entonces $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo.*

4. *Si E es casinormable y F es Banach, entonces $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo.*

5. *Si E es casinormable y $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo, entonces $\ker T$ es casinormable.*

Demostración.

1. Hay ejemplos muy conocidos debidos a Grothendieck. Consúltese [Köt79, Sec. 33.6].

2. Éste es un resultado de Bonet y de Dierolf [BD93]. Véase también [MV97, Prop. 26.7].

3. Si F es de Montel, este resultado se obtiene aplicando el Teorema de Banach-Dieudonné [MV97, Cor. 26.22 y Prop. 26.23]. Si $\ker T$ es casinormable, el resultado, originalmente debido a Palamodov y De Wilde, se sigue de [MV97, Lema 26.13].

4. Es un resultado de Miñarro [Miñ95]. La Proposición 2.8 extiende este resultado para e.l.c. con E casinormable y F normado.

5. Éste es un resultado de Cholodovskij [Cho76]. Consúltese también [MV97, Prop. 26.18].

□

Extensiones de algunos de estos resultados pueden ser halladas en [Wen03, Cáp. 7].

Corolario 3.25 *Sean E,F espacios Fréchet-Montel o bien sean ambos espacios (DFM), y sea $T : E \to F$ lineal y continuo. El operador T es sobreyectivo y abierto si, y sólo si, $T' : F'_b \to E'_b$ es un monomorfismo.*

Capítulo 4

Los operadores T^∞, T^0 y $T^\star$ asociados a un operador T

Sean E,F e.l.c. Consideremos el espacio de las sucesiones acotadas en E

$$\ell_\infty(E) := \{(x_n)_n \subset E \ : \ \text{la sucesión } (x_n)_n \text{ está acotada en } E\}$$

Dotaremos a este espacio de la topología dada por la base de entornos de cero $U^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(E)$, donde $U \in \mathscr{U}_0(E)$ y $U^{\mathbb{N}}$ está formado por todas las sucesiones en E tales que $x_n \in U$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos además el espacio

$$c_0(E) := \left\{(x_n)_n \subset E \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0\right\}$$

dotado de la topología inducida por $\ell_\infty(E)$ en él.

Dado un operador $T \in L(E,F)$, podemos considerar los operadores T^∞, T^0 y $T^\star$ definidos como sigue

$$\begin{array}{rccc} T^\infty: & \ell_\infty(E) & \longrightarrow & \ell_\infty(F) \\ & (x_n)_n & \longrightarrow & (Tx_n)_n, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} T^0: & c_0(E) & \longrightarrow & c_0(F) \\ & (x_n)_n & \longrightarrow & (Tx_n)_n, \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} T^\star: & \ell_\infty(E)/c_0(E) & \longrightarrow & \ell_\infty(F)/c_0(F) \\ & x + c_0(E) & \longrightarrow & Tx + c_0(F) \end{array}$$

El espacio $\ell_\infty(E)/c_0(E)$ se dice que es una “ampliación” del espacio E, del inglés *enlargement*, porque contiene una copia de E constituida por las clases $x + c_0(E)$. Para cada x, esta clase consiste exactamente en las sucesiones de E que “convergen a x”. Si E es un espacio normado, entonces el correspondiente espacio $\ell_\infty(E)/c_0(E)$ es completo [Har88, Teor. 4.5.2]. Si consideraramos la clausura de

E en $\ell_\infty(E)/c_0(E)$ ésta será la "completación" de E. De hecho, esta clausura será el cociente $c(E)/c_0(E)$, donde $c(E)$ es el espacio de las sucesiones de Cauchy en E, mientras que el espacio con el que identificamos E es $c_1(E)/c_0(E)$ siendo $c_1(E)$ el espacio de las sucesiones convergentes en E.

Harte utilizó estos espacios para generalizar resultados conocidos acerca de la invertibilidad de operadores en el contexto de espacios de Banach a espacios normados [Har88]. En el Capítulo 3 del mencionado libro se estudian las relaciones existentes en el contexto de espacios normados entre un operador T y su correspondiente operador $T^\star$. Citamos a continuación algunos resultados.

Teorema 4.1 *Sean X,Y espacios normados y $T \in L(X,Y)$.*

1. *Si $T^\star$ es inyectivo, entonces T es un monomorfismo, y si T es un monomorfismo, entonces $T^\star$ también lo es [Har88, Teor. 3.3.5.2].*

2. *Si $T^\star$ es casi abierto, entonces T es casi abierto, y si T es casi abierto, entonces $T^\star$ también lo es [Har88, Teor. 3.4.5.2].*

Comencemos nuestro estudio de estos operadores, para ello consideraremos E,F e.l.c. Como T es lineal, los operadores T^∞, T^0 y $T^\star$ también lo son. A continuación, veamos que estos operadores están bien definidos y son continuos.

Los operadores T^∞ y T^0 están bien definidos, puesto que la continuidad de T implica que la imagen de una sucesión acotada (resp. una sucesión que converge a cero) es también una sucesión acotada (resp. una sucesión que converge a cero).

Para obtener la continuidad de T^∞ consideremos $V' \in \mathscr{U}_0(\ell_\infty(F))$, entonces existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que $V^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(F) \subset V'$. Como T es continua, existe $U \in \mathscr{U}_0(E)$ tal que $T(U) \subset V$. Por tanto $U^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(E) \in \mathscr{U}_0(\ell_\infty(E))$ y tenemos que $T^\infty(U^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(E)) \subset V^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(F) \subset V'$. La continuidad de T^0 se deduce a partir de la de T^∞ por ser el operador T^0 una restricción de éste.

El hecho de que el operador $T^\star$ esté bien definido y sea continuo se deduce del siguiente lema y del hecho de que $T^\infty(c_0(E)) \subset c_0(F)$.

Lema 4.2 *Sean X,Y dos e.l.c. y X_0, Y_0 dos subespacios tales que $X_0 \subset X$ e $Y_0 \subset Y$. Sea $S \in L(X,Y)$ tal que $S(X_0) \subset Y_0$. Entonces el operador*

$$\widetilde{S} : X/X_0 \longrightarrow Y/Y_0$$

está bien definido y es continuo.

En el caso de que E sea localmente completo, se puede probar que $L(\ell_1, E) \cong \ell_\infty(E)$. De esta manera, para cada operador $T \in L(E,F)$, el operador T^∞ asociado a T se puede ver como un operador de composición $I_{\ell_1} \wedge T$. Para más información acerca de operadores de composición entre e.l.c. consúltese [Fri03].

4.1. Inyectividad

Claramente, si T es inyectivo, entonces T^∞ y T^0 son también inyectivos aplicando la inyectividad de T en cada coordenada. La implicación contraria es cierta mirando en la primera coordenada.

A partir de su definición, tenemos que $T^\star$ *es inyectivo si, y sólo si, para toda* $(x_n)_n \in \ell_\infty(E)$ *tal que* $(Tx_n)_n \in c_0(F)$ *se verifica que* $(x_n)_n \in c_0(E)$. Esto implica que T es inyectivo. De hecho, si $Tx = 0$ para algún $x \in E$, podemos considerar la sucesión $(x_n)_n$ con $x_n := x$ para todo $n \in \mathbb{N}$. En este caso tenemos que $(Tx_n)_n$ es la sucesión nula, y como $(x_n)_n \in c_0(E)$ por hipótesis, entonces llegamos a que $x = 0$. Sin embargo, la inyectividad de T no es suficiente como muestra el siguiente contraejemplo.

Ejemplo 4.3 Sea ℓ_1 el espacio de todas las sucesiones sumables en $\mathbb{K}$. Sea $(e_n)_n$ la base canónica de ℓ_1, y sea $T \in L(\ell^1)$ definido como $Te_n := \frac{1}{n^2}e_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. La sucesión $\left(\frac{1}{n^2}e_n\right)_n$ está en $c_0(\ell_1)$ pero $(e_n)_n$, aunque está acotada, no está en $c_0(\ell_1)$. En este caso $T^\star$ no es inyectivo ya que $\ker T^\star$ no es trivial.

Teorema 4.4 *Sea* $T \in L(E,F)$ *un monomorfismo, entonces* $T^\star$ *es inyectivo.*

Demostración. Probar la inyectividad de $T^\star$ es equivalente a probar que para toda $(x_n)_n \in \ell_\infty(E)$ tal que $(Tx_n)_n \in c_0(F)$ entonces $(x_n)_n \in c_0(E)$. Esto es cierto puesto que T es un monomorfismo y por tanto T^{-1} es continuo. □

Proposición 4.5 *Sea* E *un espacio semi-Montel y sea* $T \in L(E,F)$ *un operador inyectivo, entonces el operador* $T^\star$ *es inyectivo.*

Demostración. Consideremos una sucesión $(x_n)_n \in \ell_\infty(E)$ tal que $(Tx_n)_n \in c_0(F)$. Supongamos que $(x_n)_n \notin c_0(E)$, entonces existe $U \in \mathscr{U}_0(E)$ tal que existe una sucesión $(x_{n_k})_k$ con $x_{n_k} \notin U$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Como $(x_{n_k})_k$ es una sucesión acotada, existe $x \in E$ que es adherente a la subsucesión $(x_{n_k})_k$. Así, Tx es un punto adherente a $(Tx_{n_k})_k$ y por tanto $Tx = 0$. Como T es inyectivo podemos concluir que $x = 0$, con lo que la sucesión $(x_{n_k})_k$ tiene al 0 como un punto adherente. Este hecho contradice la construcción de la subsucesión $(x_{n_k})_k$.

□

En [Har88, Teor. 3.3.5.2] se prueba que si $T^\star$ es inyectiva y E,F son espacios normados, entonces T es un monomorfismo. En la siguiente proposición podemos rebajar la hipótesis de exigir la normabilidad de F a que únicamente sea metrizable.

Proposición 4.6 *Sea E un espacio normado y $T \in L(E,F)$ tal que $T^{\star}$ es inyectivo. Entonces $T^{-1} : T(E) \to E$ es sucesionalmente continuo. Si F es un espacio metrizable, entonces T es un monomorfismo.*

Demostración. Si $T^{-1} : T(E) \to E$ no es sucesionalmente continuo existe una sucesión $(x_n)_n \subset E$ tal que $(Tx_n)_n \in c_0(F)$ pero con $(x_n)_n \notin c_0(E)$, por tanto existe una subsucesión $(x_{n_k})_k$ y $\varepsilon > 0$ tal que $\|x_{n_k}\| \geq \varepsilon$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Definimos la sucesión $(z_k)_k$ con $z_k := \frac{x_{n_k}}{\|x_{n_k}\|}$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Claramente, $(z_k)_k \in \ell_\infty(E)$ porque todos sus elementos tienen norma igual a 1 y $(Tz_k)_k \in c_0(F)$ porque $(Tx_{n_k})_k \in c_0(F)$. Como $T^{\star}$ es inyectiva, entonces $(z_k)_k \in c_0(E)$ llegando así a una contradicción.

□

El supuesto de que F sea metrizable es necesario para obtener que T es un monomorfismo siempre que $T^{\star}$ sea inyectivo como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.7 Consideremos el operador identidad

$$T : (\ell_1, \|\cdot\|) \to (\ell_1, \sigma(\ell_1, \ell_\infty)).$$

Este operador es biyectivo, pero no es abierto porque en todo espacio de Banach de dimensión infinita la topología de la norma es estrictamente más fina que la topología débil. Por el Lema de Schur, e.g. [Köt69, 22.4(2)], ℓ_1 tiene la propiedad de que toda sucesión débilmente convergente en ℓ_1 también es convergente con la topología de la norma, por tanto T^{-1} es sucesionalmente continuo pero no es continuo. En resumidas cuentas, $T^{\star}$ es inyectivo, el espacio de salida es normado, pero T no es un monomorfismo.

Ejemplo 4.8 Existe un operador diferencial lineal $P(D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ de coeficientes constantes, $a_\alpha \in \mathbb{K}$ para todo $|\alpha| \leq m$, y existe un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ tal que

1. $P(D) : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es sobreyectivo, y
2. $P(D) : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ no es sobreyectivo.

Para consultar el ejemplo véase [Hör62, KJR70]. Se puede probar que si $P(D) : C^\infty(\Omega) \to C^\infty(\Omega)$ es sobreyectivo, entonces el operador

$$T := P(D)' : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathscr{D}(\Omega)$$

tiene un inverso $T^{-1} : T(\mathscr{D}(\Omega)) \to \mathscr{D}(\Omega)$ que es sucesionalmente continuo, por lo tanto $T^{\star}$ es inyectivo. Sin embargo, T no es un monomorfismo, puesto que si lo fuera $T' := P(D) : \mathscr{D}'(\Omega) \to \mathscr{D}'(\Omega)$ sería sobreyectivo por el Teorema de Hahn-Banach. Véase la observación 3.3.1.

4.2. Sobreyectividad

Evidentemente, si dado un operador $T \in L(E,F)$ cualquiera de los operadores T^∞ ó T^0 es sobreyectivo, entonces T es sobreyectivo. Para estudiar las condiciones bajo las que se da la implicación contraria es necesario hablar del levantamiento de conjuntos acotados.

Proposición 4.9 *Sea $T \in L(E,F)$ un operador que levanta conjuntos acotados, entonces T^∞ es sobreyectivo.*

Demostración. Consideremos $(y_n)_n \in \ell_\infty(F)$. Como T levanta conjuntos acotados, existe un conjunto acotado $C \subset E$ tal que $(y_n)_n \subset T(C)$. Por tanto, existe $(x_n)_n \in C$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como C está acotado tenemos que $(x_n)_n \in \ell_\infty(E)$, con lo que $T^\infty(x_n)_n = (y_n)_n$.

□

Evidentemente, si T levanta conjuntos acotados, entonces T es sobreyectiva. Sin embargo, la sobreyectividad de T no implica la sobreyectividad de T^∞. El supuesto del levantamiento de conjuntos acotados es necesario como muestra el siguiente ejemplo:

Ejemplo 4.10 En el Ejemplo 1.3 ya vimos un espacio escalonado de Köthe $\lambda_1(A)$ que era Montel y que tenía un cociente isomorfo a ℓ_1. Ambos espacios son espacios de Fréchet. La aplicación cociente $q : \lambda_1(A) \to \ell_1$ no levanta conjuntos acotados ya que los conjuntos acotados de $\lambda_1(A)$ son relativamente compactos, y no toda sucesión acotada en ℓ_1 es relativamente compacta.

Además, siempre que T^∞ sea sobreyectivo tenemos que $T^\star$ es sobreyectivo. Aunque el hecho de que $T^\star$ sea sobreyectivo no implica que lo sea T, como podemos ver a continuación.

Ejemplo 4.11 Sea X_0 un espacio normado no completo y sea X su completación con la norma. Si consideramos el operador inclusión $T : X_0 \hookrightarrow X$ se tiene que T no es sobreyectivo pero T^* sí que lo es en virtud de [Har88, Teor. 5.7.1], puesto que T es casi abierto. Como T no es sobreyectivo, tampoco lo será T^∞.

Finalmente, procedamos con el caso de T^0.

Proposición 4.12 *Sea F un e.l.c. metrizable y $T \in L(E,F)$ un operador que levanta conjuntos acotados, entonces T^0 es sobreyectivo.*

Demostración. Fijemos $(y_n)_n \in c_0(F)$, como F es metrizable existe una sucesión $(\alpha_n)_n \subset \mathbb{K}$ tal que $\lim_n |\alpha_n| = \infty$ y $(\alpha_n y_n)_n \in \ell_\infty(F)$. Como T levanta conjuntos acotados existe un acotado $C \subset E$ tal que $(\alpha_n y_n)_n \subset T(C)$. Así, existe $(x'_n)_n$ tal que $Tx'_n = \alpha_n y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Si definimos $x_n := \frac{1}{\alpha_n} x'_n$, se tiene que $(x_n)_n \in c_0(E)$ y además $T^0(x_n)_n = (y_n)_n$.

□

Teorema 4.13 *Sean E, F e.l.c. metrizables. Si $T \in L(E,F)$ es un operador sobreyectivo y abierto, entonces T^0 es sobreyectivo. En particular, si $T \in L(E,F)$ es un operador sobreyectivo entre espacios de Fréchet, entonces T^0 es sobreyectivo.*

Demostración. Sea $\{U_k\}_k$ una base de entornos absolutamente convexos de 0 en E. Claramente, $\{T(U_k)\}_k$ es una base de entornos de 0 en F. Si $(y_n)_n \in c_0(F)$, podemos encontrar una sucesión estrictamente creciente $(n_k)_k$ de números naturales con $n_1 = 1$ tal que $y_n \in T(U_k)$ para todo $n \geq n_{k+1}$. Definamos la siguiente sucesión $(x_n)_n$: para $1 \leq n < n_1$ tomemos $x_n \in E$ con $Tx_n = y_n$ y, de manera inductiva, para $n_k \leq n < n_{k+1}$ tomemos $x_n \in U_k$ con $Tx_n = y_n$. Claramente, $(x_n)_n \in c_0(E)$ y $T^0(x_n)_n = (y_n)_n$.

□

El supuesto de que E y F sean espacios metrizables es necesario como demuestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.14 Existe un espacio (DF), $F := \mathrm{ind}_n F_n$, que es (LB)-completo pero que contiene sucesiones convergentes a 0 que no están incluidas en ningún escalón F_n. Un espacio así se dice que *no es sucesionalmente retractivo*.

Como ejemplo de un espacio que verifique estas condiciones se puede tomar $F = (\lambda_1(A))'_b$, siendo éste el dual de un espacio escalonado de Köthe $\lambda_1(A)$ que sea Fréchet-Montel, pero que no sea Fréchet-Schwartz [MV97, Ej. 27.21]. El espacio que aparece en el Ejemplo 1.3 verifica estas condiciones.

Consideremos el operador cociente $T : E \to F$, donde $E := \oplus_{k=1}^{\infty} F_k$. Si un elemento $x \in E$ se representa como $(x^k)_k$ con $x^k \in F_k$ para todo $k \in \mathbb{N}$, entonces podemos definir T como $Tx := \sum_{k=1}^{\infty} x^k$ para todo $x = (x^k)_k$ en E.

Tomemos una sucesión $(x_n)_n \in c_0(E)$. Entonces existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $(x_n)_n \subset \oplus_{k=1}^{k_0} F_k$, por tanto $(Tx_n)_n \subset F_{k_0}$ y $(Tx_n)_n$ tiende a cero en F_{k_0}, sin embargo existen sucesiones en $c_0(F)$ que no tienen antiimagen en $c_0(E)$.

La hipótesis de que T sea abierta en el Teorema 4.13 es necesaria como muestra el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4.15 Sea φ el espacio de las sucesiones eventualmente nulas de $\mathbb{K}$. Este espacio puede ser dotado de la norma de la suma $\|\cdot\|_1$, y de la norma euclídea, $\|\cdot\|_2$. Consideremos $T : (\varphi, \|\cdot\|_1) \to (\varphi, \|\cdot\|_2)$ como el operador identidad. Éste es evidentemente continuo y sobreyectivo, pero no es abierto porque, si ese fuera el caso, las normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ coincidirían en un subespacio denso de ℓ_1 y esto implicaría que $\ell_1 = \ell_2$.

Por otra parte, el operador $T^0 : c_0(\varphi, \|\cdot\|_1) \to c_0(\varphi, \|\cdot\|_2)$ es inyectivo pero no es sobreyectivo. Consideremos la sucesión $(y_n)_n$ definida como sigue

$$y_n := \left(0, \ldots, 0, \frac{1}{n+1}, \ldots, \frac{1}{2n}, 0, \ldots\right) \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Claramente, $y_n \in \varphi$ y $\|y_n\|_1 \geq \frac{1}{2}$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto $(y_n)_n \notin c_0(\varphi, \|\cdot\|_1)$, pero $(y_n)_n \in c_0(\varphi, \|\cdot\|_2)$. Finalmente, usando la inyectividad de T^0, obtenemos que no existe ningún $(x_n)_n \in c_0(\varphi, \|\cdot\|_1)$ cumpliendo además que $T^0(x_n)_n = (y_n)_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

4.3. Homomorfismos

En esta sección estudiamos cuando los operadores T^∞, T^0 y $T^\star$ son monomorfismos, homomorfismos o abiertos.

A partir del siguiente diagrama conmutativo tenemos que siempre que T^∞ sea un homomorfismo, necesariamente T también lo es. Denotamos por $\pi_1 : \ell_\infty(E) \to E$ la proyección de la primera coordenada.

$$\begin{tikzcd}
\ell_\infty(E) \arrow[r, "T^\infty"] \arrow[d, "\pi_1"'] & \ell_\infty(F) \arrow[d, "\pi_1"] \\
E \arrow[r, "T"'] & F
\end{tikzcd}$$

Con un razonamiento similar se obtiene que si T^0 es un homomorfismo, entonces T también lo es.

Teorema 4.16 *Si $T \in L(E,F)$ es un monomorfismo, entonces T^∞ es un monomorfismo.*

Demostración. Para probar que T^∞ es un monomorfismo, tenemos que probar que es inyectivo, lo que es evidente ya que T lo es, y que para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe un $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que

$$(V^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(F)) \cap T^\infty(\ell_\infty(E)) \subset T^\infty(U^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(E)).$$

Dado $U \in \mathscr{U}_0(E)$ como T es un monomorfismo existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que $V \cap T(E) \subset T(U)$. Consideremos una sucesión $(y_n)_n \in V^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(F)$ de manera que exista otra sucesión $(x_n)_n \in \ell_\infty(E)$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(Tx_n)_n \subset V \cap T(E) \subset T(U)$ y T es inyectiva, tenemos que la sucesión $(x_n)_n$ pertenece a $U^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(E)$, quedando así la inclusión probada.

□

Teorema 4.17 *Si $T \in L(E,F)$ es un homomorfismo, entonces T^0 es un homomorfismo.*

Demostración. Para probar que T^0 es un homomorfismo tenemos que probar que para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que

$$(V^{\mathbb{N}} \cap c_0(F)) \cap T^0(c_0(E)) \subset T^0(U^{\mathbb{N}} \cap c_0(E)).$$

Dado $U \in \mathscr{U}_0(E)$ como T es un homomorfismo existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que $V \cap T(E) \subset T(U)$. Consideremos una sucesión $(y_n)_n \in V^{\mathbb{N}} \cap c_0(F)$ de manera que exista otra sucesión $(x_n)_n \in c_0(E)$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $(x_n)_n \in c_0(E)$ existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $x_n \in U$ para todo $n \geq n_0$. Por otra parte, como $y_n \in V \cap T(E)$, existe $z_n \in U$ tal que $Tz_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Finalmente, consideremos la sucesión $(w_n)_n$ definida como: $w_i = z_i$ para $1 \leq i < n_0$ y $w_i = x_i$ para $i \geq n_0$, la sucesión $(w_n)_n$ pertenece a $U^{\mathbb{N}} \cap c_0(E)$ y $T^0((w_n)_n) = (y_n)_n$. □

A continuación veremos un par de consideraciones sobre el operador $T^\star$.

Observación 4.18 Sea $T \in L(E,F)$ un operador tal que T^∞ es un homomorfismo. Como $T^\infty(c_0(E)) \subset c_0(F)$, se sigue que $T^\star : \ell_\infty(E)/c_0(E) \to \ell_\infty(F)/c_0(F)$ es un homomorfismo.

Sin embargo $T^\star$ puede ser un homomorfismo sin que lo tenga que ser T^∞ como muestra el siguiente ejemplo, véase [Har88, Teor. 4.7.4].

Ejemplo 4.19 Sean X, Y espacios normados con Y completo y $T \in L(X,Y)$ un operador inyectivo, sobreyectivo pero que no es abierto. Como T no es un homomorfismo T^∞ no puede serlo. Sin embargo, bajo estas condiciones tenemos que T es casi abierto y por [Har88, Teor. 3.4.5.2] tenemos que $T^\star$ es abierto.

Pasamos a estudiar cuando el operador T^∞ es abierto. Esto puede ser caracterizado por completo si T es abierto, usando la propiedad de descomposición acotada (BDP) introducida por Bonet y Dierolf [BD90].

Definición 4.20 *Sean E un e.l.c. e Y un subespacio de E. Sea $q : E \to E/Y$ el correspondiente operador cociente. Decimos que la pareja (Y,E) tiene la propiedad de descomposición acotada (BDP), si el operador $q^\infty : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(E/Y)$*

es un homomorfismo o, de manera equivalente, si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ *existe* $W \in \mathscr{U}_0(E)$ *tal que*

$$(W + \ker q)^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(E) \subset \ell_\infty(E) \cap U^{\mathbb{N}} + \ell_\infty(\ker q).$$

De hecho, q^∞ *es abierta en su imagen si, y sólo si, para todo* $U \in \mathscr{U}_0(E)$ *existe* $W \in \mathscr{U}_0(E)$ *tal que*

$$q(W)^{\mathbb{N}} \cap q^\infty(\ell_\infty(E)) \subset q^\infty(\ell_\infty(E) \cap U^{\mathbb{N}}),$$

o, de manera equivalente, si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ *existe* $W \in \mathscr{U}_0(E)$ *tal que*

$$(W + \ker q)^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(E) \subset \ell_\infty(E) \cap U^{\mathbb{N}} + \ker q^\infty,$$

El siguiente resultado puede ser encontrado en [BD90, pág. 65]

Proposición 4.21 *Sean* E *un e.l.c. e* Y *un subespacio de* E*, y consideremos la respectiva aplicación cociente* $q : E \to E/Y$*. Supongamos que además se satisface una de las siguientes condiciones:*

1. Y *es un subespacio complementado de* E*,*

2. Y *es casinormable,*

3. *todo subconjunto acotado de* E *es precompacto,*

entonces el operador $q^\infty : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(E/Y)$ *es abierto.*

En cuanto a esta última proposición, en el primer caso el operador q^∞ es también sobreyectivo, mientras que en el tercero no tiene porque serlo, como muestra el Ejemplo 4.10. Más aún, por [RD81, Ej. 3.6] existe un e.l.c. E cuyos conjuntos acotados son todos de dimensión finita y que contiene un subespacio casinormable Y tal que E/Y es normable y de dimensión infinita. Por tanto, en el segundo caso el operador q^∞ no tiene porque ser sobreyectivo.

En relación con la casinormabilidad, existen resultados de De Wilde [DW74] y Cholodovskiĭ [Cho76] y de Bonet y Dierolf [BD90, Prop. 1] que nos permiten caracterizar la relación existente entre que el operador q^∞ sea sobreyectivo y que sea un homomorfismo, véase [BD90, pág. 67].

Teorema 4.22 *(De Wilde y Cholodovskiĭ) Para un espacio de Fréchet* Y*, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. Y *es casinormable,*

2. *para todo espacio de Fréchet E que contiene a Y como subespacio topológico el operador $q^\infty : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(E/Y)$ es sobreyectivo (o, de manera equivalente, abierto).*

Proposición 4.23 *(Bonet y Dierolf) Para un e.l.c. metrizable y separable Y, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Y es casinormable,*

2. *para todo espacio de Fréchet E que contiene a Y como subespacio topológico, el par (Y,E) tiene la propiedad de descomposición acotada.*

A partir de los siguientes resultados tenemos la siguiente equivalencia en el contexto de espacios de Fréchet.

Corolario 4.24 *Sea Y un espacio de Fréchet separable. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *para todo superespacio de Fréchet E de Y, el operador q^∞ es un homomorfismo, siendo $q : E \to E/Y$ el operador cociente.*

2. *para todo superespacio de Fréchet E de Y, el operador q^∞ es sobreyectivo, siendo $q : E \to E/Y$ el operador cociente.*

Es necesario que ambas condiciones se verifiquen para todos los espacios E. El espacio escalonado de Köthe del Ejemplo 1.3, que es Fréchet-Montel y admite ℓ_1 como cociente, nos muestra que usando en concreto dicho operador cociente q tenemos que q^∞ no es sobreyectivo, pero sin embargo sí que es un homomorfismo.

A continuación presentamos un ejemplo donde el operador q^∞, asociado a un operador cociente q, es sobreyectivo pero no es un homomorfismo. Para ello, previamente debemos introducir la condición de densidad dual (DDC) en espacios (DF).

Definición 4.25 *Un espacio (DF) E con una sucesión fundamental de acotados absolutamente convexos $\{B_n\}_n$ se dice que cumple la condición de densidad dual, en lo sucesivo (DDC), si para cada sucesión decreciente $\{\mu_j\}_j$ de números estrictamente positivos y para cada $n \in \mathbb{N}$ existe un entorno U en E y $m \geq n$ tal que*

$$B_n \cap U \subset \overline{\Gamma\left(\cap_{j=1}^m \mu_j B_j\right)}$$

Referimos al lector a [BB88a, BB88b] para detalles y aplicaciones a espacios co-escalonados con valores vectoriales y a límites inductivos ponderados de espacios de funciones continuas. En el siguiente teorema resumimos una caracterización de (DDC) que puede ser encontrada en [BB03, Teor. 14].

Teorema 4.26 *Sea E un espacio (DF). Las siguientes condiciones son equivalentes:*

1. *E satisface la condición de densidad dual (DDC),*
2. *todo acotado de E es metrizable,*
3. *$\ell_\infty(E)$ es casitonelado,*
4. *$\ell_\infty(E)$ satisface la (DDC).*

Enunciamos el ejemplo al que hemos hecho referencia anteriormente.

Ejemplo 4.27 Consideremos $F = \mathrm{ind}_n F_n$ un espacio (LB) que no verifique la condición (DDC). Köthe y Grothendieck dieron un ejemplo de una matriz de Köthe $A = (a_{i,j;k})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2, k\in\mathbb{N}}$ definida como sigue: [Köt69, Sec. 31.7]

$$a_{i,j;k} := \begin{cases} 1 & \text{para } i \geq k, i \in \mathbb{N}, \\ j & \text{para } i < k, i \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

tal que si consideramos $F := \lambda_p(A)'_b$ para $1 < p < \infty$ entonces $\ell_\infty(F)$ no es tonelado. Este espacio es (LB), completo, regular y no verifica la (DDC) [BB88a]. También puede consultarse [Die85, 4.7] en lo relativo a ejemplos de este tipo.

Consideremos el operador cociente $T : E \to F$, donde $E := \oplus_{k=1}^{\infty} F_k$, tal como hicimos en el Ejemplo 4.14. Este espacio es un límite inductivo estricto de espacios de Banach que, por tanto, verifica la (DDC). Por el Teorema 4.26 tenemos que $\ell_\infty(E)$ es un espacio casitonelado, y como E es completo, entonces $\ell_\infty(E)$ es además tonelado. Claramente, T es continuo y sobreyectivo. Como ambos espacios son (LB), aplicando una versión adecuada del Teorema de la aplicación abierta [PCB87, Teor. 8.4.11] o [MV97, Teor. 24.30], obtenemos que T también es abierto.

Por otra parte, $T^\infty : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(F)$ es continuo, y además, se puede ver que es sobreyectivo usando la regularidad de F. Sin embargo, T^∞ no puede ser abierto porque $\ell_\infty(E)$ es tonelado y todo cociente de un espacio tonelado es tonelado, pero $\ell_\infty(F)$ no es tonelado como hemos mencionado con anterioridad.

A continuación estudiaremos la relevancia que tiene el levantamiento de acotados a la hora de determinar si T^∞ es un homomorfismo en función de T. Para ello necesitaremos el siguiente lema, cuya prueba se puede encontrar en [MV97, Lema 26.11].

Lema 4.28 *Sea $T \in L(E,F)$ y F un e.l.c. metrizable. Si T levanta conjuntos acotados, entonces para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que para todo conjunto acotado $B \subset F$ con $B \subset V$ existe un conjunto acotado $M \subset U$ tal que $T(M) = B$.*

Teorema 4.29 *Sea F un e.l.c. metrizable y $T \in L(E,F)$ un operador abierto. Si T levanta conjuntos acotados, entonces T^{∞} es abierto.*

Demostración. Fijemos $U \in \mathscr{U}_0(E)$ arbitrario, como T es abierto podemos encontrar $V_1 \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que $V_1 \subset T(U)$. Aplicando el lema anterior con U podemos encontrar $V_2 \in \mathscr{U}_0(F)$ cumpliendo que para todo $\{y_n\}_n \subset V_2$, existe una sucesión acotada $\{x_n\}_n \subset U$ tal que $Tx_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Definamos $V := V_1 \cap V_2$, entonces se puede comprobar que $V^{\mathbb{N}} \cap \ell_{\infty}(F) \subset T^{\infty}(U^{\mathbb{N}} \cap \ell_{\infty}(E))$.

□

La hipótesis del levantamiento de acotados es necesaria puesto que si consideramos una vez más el Ejemplo 4.10, tenemos que T es abierto, pero T^{∞} no es sobreyectivo y por tanto T^{∞} no puede ser abierto. Sin embargo, la hipótesis del levantamiento de acotados no es necesaria para el estudio del operador T^0 como vemos en el siguiente resultado.

Proposición 4.30 *Sean E,F e.l.c. metrizables y $T \in L(E,F)$ un operador abierto, entonces T^0 es abierto.*

Demostración. Dado un operador abierto $T \in L(E,F)$ entre espacios metrizables, por el Teorema 4.13 tenemos que el operador es sobreyectivo, y por el Teorema 4.17 tenemos que además es un homomorfismo, y por tanto abierto.

□

Para el caso en que los espacios E y F sean (DF) no metrizables el resultado no es cierto. Si consideramos el Ejemplo 4.14, se tiene T es un operador abierto entre espacios (DF), pero T^0 no es sobreyectivo y por tanto no puede ser abierto.

Finalmente, estudiemos el caso de los operadores casi abiertos.

Observación 4.31 Si dado un operador $T \in L(E,F)$ tenemos que T^{∞} o T^0 son casi abiertos, necesariamente T debe ser casi abierto. Veamos la prueba para el caso de T^{∞}. Si éste es casi abierto entonces para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ tenemos que existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que

$$V^{\mathbb{N}} \cap \ell_{\infty}(F) \subset \overline{T^{\infty}(U^{\mathbb{N}} \cap \ell_{\infty}(E))},$$

y proyectando la primera coordenada se tiene que $V \subset \overline{T(U)}$, y en particular T tiene rango denso.

En el caso de que únicamente tengamos levantamiento de acotados con clausura se puede obtener la siguiente generalización del Lema 4.28.

Lema 4.32 *Sea $T \in L(E,F)$ y F un e.l.c. metrizable. Si T levanta acotados con clausura, entonces para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que para todo conjunto cerrado, acotado y absolutamente convexo $B \subset F$ con $B \subset V$ existe un conjunto acotado $M \subset U$ tal que $B \subset \overline{T(M)}$.*

Demostración. Supongamos que no fuera así. Existe $U \in \mathscr{U}_0(E)$ tal que para todo entorno $V_m \in \mathscr{U}_0(F)$ perteneciente a $\{V_m\}_m$, una base de entornos de 0 en F, existe un conjunto cerrado, acotado y absolutamente convexo $B_m \subset V_m$ verificando que para cualquier conjunto acotado $C \subset U$ tenemos que $B_m \not\subset \overline{T(C)}$.

Como $B_m \subset V_m$, existe una sucesión de escalares $(\lambda_m)_m$ con $\lim_{m\to\infty} \lambda_m = \infty$, de manera que $B := \cup_{m\in\mathbb{N}} \lambda_m B_m$ está acotado en F. Por tanto, usando el levantamiento acotados con clausura tenemos que existe un conjunto acotado M en E con $B \subset \overline{T(M)}$. Como M es acotado existe $\varepsilon > 0$ tal que $\varepsilon M \subset U$. Si m se elige suficientemente grande de manera que $\varepsilon\lambda_m \geq 1$ entonces

$$\overline{T(\varepsilon M)} \supset \varepsilon B \supset \varepsilon\lambda_m B_m \supset B_m.$$

Definiendo $M_0 := \varepsilon M$ tenemos que $B_m \subset \overline{T(M_0)}$ y $M_0 \subset U$, llegando así a una contradicción.

$\square$

Observación 4.33 Si E,F son espacios (DF), el hecho de que $T \in L(E,F)$ sea casi abierto no implica que $T^\infty : \ell_\infty(E) \to \ell_\infty(E)$ sea casi abierto. Si volvemos al Ejemplo 4.27, tenemos un operador casi abierto T entre espacios (DF). Sin embargo, T^∞ no es casi abierto porque si $\ell_\infty(E)$ es tonelado y T^∞ es casi abierto, entonces $\ell_\infty(F)$ debería ser necesariamente tonelado y esto no es cierto en este caso. De hecho, si E es un espacio (DF) y T es casi abierto, necesariamente F debe ser un espacio (DF).

Teorema 4.34 *Sea F un e.l.c. metrizable y $T \in L(E,F)$. Si T levanta acotados con clausura, entonces T^∞ es casi abierto.*

Demostración. El operador T^∞ es casi abierto si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que para todo $W \in \mathscr{U}_0(F)$ tenemos que

$$V^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(F) \subset T^\infty(U^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(E)) + (W^{\mathbb{N}} \cap \ell_\infty(F))$$

Fijemos un entorno arbitrario $U \in \mathscr{U}_0(E)$. Consideremos $\{W_n\}_n$ una base de entornos decrecientes de 0 en F. Aplicando el lema anterior con U podemos encontrar $V \in \mathscr{U}_0(F)$ verificando que para toda sucesión acotada $(y_n)_n \subset V$ y para cada $W \in \mathscr{U}_0(F)$ existe una sucesión acotada $(x_n)_n \subset U$ y una sucesión

$(z_n)_n \in W \cap W_n$, tales que $Tx_n + z_n = y_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Claramente $(z_n) \subset W$ y además ésta es una sucesión acotada ya que converge a cero.

□

Teorema 4.35 *Sean E, F e.l.c. metrizables y $T \in L(E,F)$. Si T levanta conjuntos acotados con clausura, entonces T^0 es casi abierto.*

Demostración. El operador T^0 es casi abierto si para todo $U \in \mathscr{U}_0(E)$ existe $V \in \mathscr{U}_0(F)$ tal que para todo $W \in \mathscr{U}_0(F)$ tenemos que

$$V^{\mathbb{N}} \cap c_0(F) \subset T^0(U^{\mathbb{N}} \cap c_0(E)) + (W^{\mathbb{N}} \cap c_0(F))$$

Fijemos un entorno arbitrario $U \in \mathscr{U}_0(E)$. Consideremos $\{U_n\}_n$ una base de entornos decrecientes de 0 en E y $\{W_n\}_n$ una base de entornos decrecientes de 0 en F. Aplicando el Lema 4.32 con $U \cap U_m$ podemos encontrar $V^m \in \mathscr{U}_0(F)$, con $V^m \subset V^{m-1}$ para todo $m \in \mathbb{N}$ con $m > 1$, verificando que para toda sucesión $(y_n^m)_n \subset V^m$ y para todo $W \in \mathscr{U}_0(F)$ podemos hallar $x_n^{m,W} \in U \cap U_m$ y $z_n^{m,W} \in W \cap W_m$ tales que $Tx_n^{m,W} + z_n^{m,W} = y_n^{m,W}$ para todo $n, m \in \mathbb{N}$.

Definamos $V := V_1 \cap W_1$ y fijemos $W \in \mathscr{U}_0(E)$. Dada una sucesión $(y_n)_n \in V^{\mathbb{N}} \cap c_0(F)$, definimos $x_n := x_n^{m,W}$ y $z_n := z_n^{m,W}$ si $y_n \in (V_n \cap W_n) \setminus (V_{n+1} \cap W_{n+1})$. De esta manera tenemos que $(x_n)_n \in U^{\mathbb{N}} \cap c_0(E)$ y que $(z_n)_n \in W^{\mathbb{N}} \cap c_0(F)$.

□

Con respecto al operador T^*, en el contexto de espacios normados tenemos el siguiente resultado

Teorema 4.36 *[Har88, Teor. 3.4.5.2] Sean E, F espacios normados y sea $T \in L(E,F)$.*

1. *Si $T^{\star}$ es casi abierto, entonces T es casi abierto, y*

2. *si T es casi abierto, entonces $T^{\star}$ es abierto.*

Bibliografía

[AAP96] Y.A. Abramovich, C.D. Aliprantis, and I.A. Polyrakis. Some remarks on surjective and bounded below operators. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, XLIV:455–464, 1996.

[Akk85] M. Akkar. Sur le groupe des éléments inversibles d'une algèbre bornologique convexe. *Q*-algèbres bornologiques convexes. *C. R. Acad. Sc. Paris*, 300:35–38, 1985.

[AH99] H. Arizmendi and R. Harte. Almost openness in topological vector spaces. *Mathematical Proc. Royal Irish Acad.*, 99A-1:57–65, 1999.

[Ber74] S.K. Berberian. *Lectures in Functional Analysis and Operator Theory*. Springer, 1974.

[Bie88] K.D. Bierstedt. An introduction to locally convex inductive limits. In *Functional Analysis and its Applications (Nice 1986)*, pages 33–135, Singapore, 1988. World Sci. Publ.

[BB88a] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Dual density conditions in (DF)-spaces I. *Results Math.*, 14:242–274, 1988.

[BB88b] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Dual density conditions in (DF)-spaces II. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 57:567–589, 1988.

[BB03] K.D. Bierstedt and J. Bonet. Some aspects of the modern theory of Fréchet spaces. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.*, 97(2):159–188, 2003.

[BMS82a] K.D. Bierstedt, R.G. Meise, and W.H. Summers. Köthe sets and Köthe sequence spaces. In J.A. Barroso, editor, *Functional Analysis, Holomorphy and Approximation Theory*, volume 71 of *North-Holland Mathematics Studies*, pages 27–91, Amsterdam-New York, 1982. North-Holland.

[BMS82b] K.D. Bierstedt, R. Meise, and W.H. Summers. A projective description of weighted inductive limits. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 272(1):107–160, 1982.

[Bon87] J. Bonet. On the identity $L(E,F) = LB(E,F)$ for pairs of locally convex spaces E and F. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 99:249–255, 1987.

[BC01a] J. Bonet and J.A. Conejero. Duality for monomorphisms and almost open operators between locally convex spaces. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*, 70(4-5-6):183–193, 2001.

[BC01b] J. Bonet and J.A. Conejero. The sets of monomorphisms and of almost open operators between locally convex spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 129:3683–3690, 2001.

[BD90] J. Bonet and S. Dierolf. Countable strict inductive limits and the bounded decomposition property. *Proc. R. Ir. Acad.*, 90A(1):63–71, 1990.

[BD92] J. Bonet and S. Dierolf. On distinguished Fréchet spaces. In K.D. Bierstedt, J. Bonet, J. Horváth, and M. Maestre, editors, *Progress in Functional Analysis*, volume 170 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 201–214, Amsterdam, 1992. North-Holland.

[BD93] J. Bonet and S. Dierolf. On the lifting of bounded sets. *Proc. Edin. Math. Soc*, 36:277–281, 1993.

[BGM97] J. Bonet, A. Galbis, and R. Meise. On the range of convolution operators on non-quasianalytic ultradifferentiable functions. *Studia Math.*, 126(2):171–198, 1997.

[CK99] P.G. Casazza and N.J. Kalton. Generalizing the Paley-Wiener perturbation theory for Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(2):519–527, 1999.

[Cho76] V.E. Cholodovskiĭ. On quasinormability of semi-metrizable topological vector spaces. *Funk. Analiz.*, 7:157–160, 1976.

[DW74] M. De Wilde. Sur le relèvement des parties bornées d'un quotient d'espaces vectoriels topologiques. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liège*, 43:299–301, 1974.

[Die85] S. Dierolf. On spaces of continuous linear mappings between locally convex spaces. *Note di Matematica*, 5:147–255, 1985.

[Die93] S. Dierolf. On the three-space problem and the lifting of bounded sets. *Collect. Math.*, 44:81–89, 1993.

[DZ92] S. Dierolf and D.N. Zarnadze. On homomorphisms between locally convex spaces. *Note di Matematica*, XII:27–41, 1992.

[Flo80] K. Floret. Some aspects of the theory of locally convex inductive limits. In K.D. Bierstedt and B. Fuchssteiner, editors, *Functional Analysis: Surveys and Recent Results II*, volume 38 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 205–237, Amsterdam, 1980. North-Holland.

[FMW03] L. Frerick, J. Müller, and J. Wengenroth. Prescribed derivatives of holomorphic functions. *Complex Var. Theory Appl.*, 48:165–173, 2003.

[FW03] L. Frerick and J. Wengenroth. Surjective convolution operators on spaces of distributions. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat.*, 97(2):263–272, 2003.

[Fri03] M. Friz. *Operadores Wedge entre Espacios Localmente Convexos*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia, 2003.

[GDWS68] H.G. Garnir, M. De Wilde, and J. Schmets. *Analyse Fonctionelle I*. Birkhäuser-Verlag, Basel-Stuttgart, 1968.

[Har88] R. Harte. *Invertibility and singularity for bounded linear operators*. Marcel Dekker, New York-Basel, 1988.

[Hol78] R. Hollstein. Tensorprodukte von stetigen linearen Abbildungen in (F)-und (DCF)-Räumen. *J. reine angew. Math.*, 301:193–204, 1978.

[Hör62] L. Hörmander. On the range of convolution operators. *Ann. of Math.*, 76:148–170, 1962.

[Hör83] L. Hörmander. *The Analysis of Linear Partial Differential Operators*, volume II. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[Hór66] J. Hórvath. *Topological Vector Spaces and Distributions*, volume 1. Addison-Wesley, Reading, 1966.

[Jam74] G.J.O. Jameson. *Topology and Normed Spaces*. Chapman and Hall, London, 1974.

[Kas72] Kasahara. See note p. 206. *Bull. de la Soc. Math. France*, (Mémoire no. 31–3), 1972.

[KJR70] M.J. Kascic Jr. and B. Roth. A closed subspace of $\mathscr{D}(\Omega)$ which is not an (LF)-space. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 24:801–802, 1970.

[Köt69] G. Köthe. *Topological Vector Spaces, I*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1969.

[Köt79] G. Köthe. *Topological Vector Spaces, II*. Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1979.

[LT77] J. Lindenstrauss and L. Tzafiri. *Classical Banach spaces I: Sequence Spaces*, volume 92. Ergebnisse Math., 1977.

[Mal86] A. Mallios. *Topological Algebras Selected Topics*, volume 124 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland, Amsterdam, 1986.

[MV97] R. Meise and D. Vogt. *Introduction to Functional Analysis*. Oxford University Press, Oxford-New York, 1997.

[Miñ95] M.A. Miñarro. A characterization of quasinormable Köthe sequence spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 123:1207–1212, 1995.

[OP75] R.I. Ovsepian and A. Pełczyński. On the existence of a fundamental total and bounded biorthogonal sequence in every separable Banach space, and related constructions of uniformly bounded orthonormal systems in l^2. *Studia Math.*, 54:149–159, 1975.

[Pal71] V.P. Palamodov. Homological methods in the theory of locally convex spaces. *Uspehi Mat. Nauk*, 157(1):3–65, 1971. English transl. :Russian Math. Surveys, **26**(1971),1–64.

[PCB87] P. Pérez Carreras and J. Bonet. *Barrelled Locally Convex Spaces*, volume 131 of *North-Holland Mathematics Studies*. North-Holland, Amsterdam, 1987.

[RD81] W. Roelcke and S. Dierolf. On the three-space-problem for topological vector spaces. *Collect. Math.*, 32:13–35, 1981.

[Rud73] W. Rudin. *Functional Analysis*. McGraw-Hill, New York, 1973.

[Val78] M. Valdivia. A characterization of echelon Köthe-Schwartz spaces. In *Approximation Theory and Functional Analysis*, volume 35 of *North-Holland Math. Stud.*, pages 409–419, Amsterdam, 1978. North-Holland.

[Val01] M. Valdivia. Basic sequences in the dual of a Fréchet space. *Math. Nachr.*, 231:169–185, 2001.

[Vog83] D. Vogt. Fréchetträume, zwischen denen jede stetige lineare Abbildung beschränkt ist. *J. reine angew. Math.*, 345:182–200, 1983.

[Wen03] J. Wengenroth. *Derived Functors in Functional Analysis*, volume 1810 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer, 2003.

Parte II

Semigrupos de Operadores Hipercíclicos y Caóticos

Capítulo 5

Notación y preliminares

En esta parte de la memoria trabajaremos principalmente con F-espacios separables. Un F-espacio localmente convexo es un espacio de *Fréchet*. Si no se indica lo contrario, X será un F-espacio. Consideraremos que todos nuestros semigrupos están formados por operadores de $L(X)$. En este capítulo incluimos algunas definiciones y resultados, de carácter preliminar, necesarios para esta parte de la memoria.

5.1. Semigrupos de operadores

Comenzamos definiendo los semigrupos fuertemente continuos de operadores y comentando algunas cuestiones generales acerca de los mismos.

Definición 5.1 *Dado un semigrupo topológico Δ, una familia uniparamétrica $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ de operadores en $L(X)$ es un semigrupo fuertemente continuo, o un C_0-semigrupo, de operadores de $L(X)$ si satisface las siguientes condiciones:*

1. $T_0 = I$*, donde I representa al operador identidad en X,*
2. $T_t T_s = T_{t+s}$ *para todo $t, s \in \Delta$, (ley de semigrupo),*
3. $\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in\Delta}} T_t x = T_{t_0} x$ *para todo $t_0 \in \Delta$, $x \in X$.*

La tercera condición también se puede expresar diciendo que la aplicación

$$\begin{array}{ccc} \Delta & \longrightarrow & L_s(X) \\ t & \longrightarrow & T_t \end{array} \tag{5.1}$$

es continua para todo $t_0 \in \Delta$, donde $L_s(X)$ denota el espacio $L(X)$ dotado de la topología de la convergencia fuerte de operadores, en inglés *"strong operator topology"*, que es la topología de la convergencia puntual en el espacio X.

Si a la hora de ver la continuidad de la aplicación anterior se establece como topología en el espacio $L(X)$ la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de X, diremos que el semigrupo es **uniformemente continuo**. Cuando X sea un espacio normado, dicha topología coincidirá con la topología de la convergencia en la norma de operadores.

En adelante, el semigrupo índice Δ será $\mathbb{R},\mathbb{C}$ o un sector del plano complejo simétrico respecto del semieje real positivo. Es decir, dado $\alpha \in \left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ consideraremos $\Sigma_\alpha := \{\lambda \in \mathbb{C} \,:\, |\arg(\lambda)| \leq \alpha\}$. Obsérvese que $\Sigma_0 = \mathbb{R}^+$ es el semieje real positivo con el 0. Algunos ejemplos los daremos utilizando como sector el primer cuadrante, que no es más que el sector $\Sigma_{\frac{\pi}{4}}$ rotado un ángulo de $\frac{\pi}{4}$ radianes.

Denotaremos por Δ^* el semigrupo índice Δ sin el 0 y por $\partial\Delta$ a la frontera del sector Δ. Denotamos por $B(0,r)$ el disco cerrado de centro 0 y radio r en el plano complejo. Dados $r,r' > 0$, denotaremos por Δ_r el conjunto $\Delta \cap B(0,r)$; por Λ_r, el conjunto de los elementos de Δ_r de módulo igual a r y por $\Delta_{r,r'}$, la sección de corona circular dada por $\Delta \cap \overline{B(0,r')\backslash B(0,r)}$. En caso de tener $\Delta = \mathbb{R}$ ó $\Delta = \mathbb{R}^+$ los conjuntos Δ_r y $\Delta_{r,r'}$ serán intervalos. Si consideramos un subconjunto $B \subset \Delta$, $\mu(B)$ denotará la medida del mismo bien en $\mathbb{C}$ o bien en $\mathbb{R}$ dependiendo de si Δ es un sector o si es en realidad un intervalo. Por último, para $a > 0$ y $\tau \in \Delta$ definimos el conjunto

$$\Delta_a^{-1}(\tau) := \{t \in \Delta \,:\, \text{ existe } s \in \Delta_a \text{ tal que } t + s = \tau\}.$$

Si añadimos la condición de que la aplicación definida en (5.1) sea analítica tenemos la definición de semigrupo analítico.

Definición 5.2 *Una familia uniparamétrica $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ de operadores en $L(X)$ es un semigrupo analítico en $L(X)$ si satisface las siguientes condiciones:*

1. *$T_0 = I$, donde I se refiere al operador identidad en X,*

2. *$T_{t_1}T_{t_2} = T_{t_1+t_2}$ para todo $t_1,t_2 \in \Delta$, (ley de semigrupo),*

3. *$\lim\limits_{\substack{t\to t_0\\ t\in\Delta}} T_t x = T_{t_0} x$ para todo $x \in X$,*

4. *la aplicación $t \to T_t$ es analítica en el interior de Δ.*

Para más detalles sobre las definiciones de semigrupos analíticos y, en general, sobre semigrupos de operadores en el contexto de espacios de Banach, consúltense los libros de Pazy [Paz92] y de Engel y Nagel [EN00].

5.2. Universalidad, transitividad e hiperciclicidad

En esta sección nos ocupamos de los conceptos de universalidad, transitividad e hiperciclicidad, tanto en el caso de operadores, como en el caso de sus respectivas generalizaciones al contexto de semigrupos. Comencemos dando las correspondientes definiciones para sucesiones de operadores.

Definición 5.3 *Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión de operadores en $L(X)$. Se dice que dicha sucesión es **transitiva** si para cualquier pareja de subconjuntos abiertos no vacíos $U,V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$T_n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

Definición 5.4 *Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión de operadores en $L(X)$. Se dice que $x \in X$ es un vector **universal** para dicha sucesión si su órbita, definida como*

$$\mathrm{Orb}(\{T_n\}_n, x) := \{T_n x \,:\, n \in \mathbb{N}\}, \text{ es densa en } X.$$

Se dice que la sucesión de operadores $\{T_n\}_n$ es universal si tiene un vector universal.

Definición 5.5 *Un operador $T \in L(X)$ se dice que es **transitivo** si para cualquier pareja de subconjuntos abiertos no vacíos $U,V \subset X$, existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$T^n(U) \cap V \neq \emptyset.$$

En teoría de operadores, cuando se estudian las sucesiones que vienen dadas a partir de las iteraciones de un operador lineal y continuo T, a los elementos universales se les conoce como hipercíclicos. Nosotros utilizaremos éste término en vez de universal.

Definición 5.6 *Un operador $T \in L(X)$ se dice que es **hipercíclico** si existe $x \in X$ tal que su órbita, definida como*

$$\mathrm{Orb}(T, x) := \{T^n x \,:\, n \in \mathbb{N}_0\}, \text{ es densa en } X.$$

Dicho elemento x se dice que es un vector hipercíclico de T.

Antes de tratar las equivalencias existentes entre los conceptos de transitividad e hiperciclicidad recordemos las definiciones de conjuntos de primera y segunda categoría.

Definición 5.7 *Un subconjunto M de un espacio topológico E se dice que es denso en ninguna parte de E si su clausura no contiene ningún subconjunto abierto no vacío de E. Se dice que M es de primera categoría en E si M se puede expresar como una unión numerable de subconjuntos densos en ninguna parte de E; en caso contrario se dice que M es de segunda categoría.*

Por el Teorema de Baire un F-espacio es de segunda categoría.

Los conceptos de transitividad y de hiperciclicidad son equivalentes para F-espacios separables siguiendo un argumento que depende del Teorema de Baire, véase por ejemplo [GS91, Teor. 1.2] o [GE99, Teor. 3]. De hecho, con la misma prueba se obtiene que el conjunto de vectores hipercíclicos para T es un conjunto G_δ, i.e. se puede expresar como una intersección numerable de abiertos, y es denso en X. En 1995 Ansari [Ans95, Teor. 1] probó que en un e.l.c. E si un operador $T \in L(E)$ es hipercíclico, entonces T^n es hipercíclico para todo $n \in \mathbb{N}$, y no sólo eso, sino que obtuvo además que todas las potencias del operador T comparten los mismos vectores hipercíclicos. Este resultado y otros han sido generalizados por Wengenroth [Wen02] para espacios vectoriales topológicos. Para más información sobre hiperciclicidad recomendamos los trabajos de recopilación de Grosse-Erdmann [GE99, GE03] y de Bonet, Martínez-Giménez y Peris [BMGP03].

Se pueden dar definiciones similares a las de transitividad e hiperciclicidad para semigrupos de operadores.

Definición 5.8 *Un C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en $L(X)$ se dice que es* ***transitivo*** *si para cada pareja de subconjuntos abiertos no vacíos $U,V \subset X$ existe $t \in \Delta$ tal que*

$$T_t(U)\cap V \neq \emptyset.$$

Esta condición es equivalente a decir que para cualquier $y,z \in X$, y para cualquier $U \in \mathscr{U}_0(X)$ existe $v \in X$ y $t \in \Delta$ tal que $y-v \in U$ y $z-T_t v \in U$.

En esta última condición es suficiente con que tomemos y,z en un subconjunto denso de X.

Definición 5.9 *Un C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en $L(X)$ se dice que es* ***hipercíclico*** *si existe $x \in X$ tal que su órbita por el semigrupo, definida como*

$$\mathrm{Orb}(\{T_t\}_{t\in\Delta},x) := \{T_t x \,:\, t \in \Delta\},\ \textit{es densa en } X.$$

Dicho elemento x se dice que es un vector hipercíclico del semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$.

5.3. Ejemplos de semigrupos

Antes de dar algunos ejemplos de semigrupos recordemos algunos espacios de funciones con valores en $\mathbb{K}$ que aparecerán a lo largo de esta parte de la memoria. Sea ρ una función peso admisible en el sentido de la Definición 7.1, a partir de ella podemos definir los siguientes espacios:

Los espacios de funciones integrables

$$L^p_\rho(\Delta) := \left\{ f : \Delta \to \mathbb{K} \text{ medible} : \|f\|_{p,\rho} := \left(\int_\Delta |f(\tau)|^p \rho(\tau) d\tau \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \right\}$$

donde $1 \leq p < \infty$, y el espacio de funciones continuas

$$C_{0,\rho}(\Delta) = \left\{ f : \Delta \to \mathbb{K} \text{ continua } : \lim_{t\to\infty} f(t)\rho(t) = 0 \right\}$$

dotado de la norma

$$\|f\|_{\infty,\rho} := \sup_{t\in\Delta} |f(t)|\rho(t).$$

Si $\rho(t) = 1$ para todo $t \in \Delta$ nos referiremos a estos espacios como $L^p(\Delta)$ y $C_0(\Delta)$, respectivamente.

Los espacios de sucesiones

$$\ell^p(\beta) := \left\{ (x_n)_n \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}} : \|(x_n)_n\| = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^p \beta_n < +\infty \right\},$$

donde $1 \leq p < \infty$ y $\beta = (\beta_n)_n$ es una sucesión de números positivos. En el caso en que $\beta_n = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$ nos referiremos a este espacio como ℓ^p.

Ejemplos 5.10 Veamos algunos ejemplos de semigrupos hipercíclicos que han aparecido en la literatura. Hasta la fecha, la mayoría de los ejemplos conocidos tenían $\Delta = \mathbb{R}^+$ ó $\mathbb{R}$ como semigrupo índice.

1. En 1929 Birkhoff observó que en el espacio de las funciones enteras $\mathscr{H}(\mathbb{C})$ dotado de la topología compacta abierta, el operador de traslación

$$T_t x(s) = x(s+t)$$

es hipercíclico para todo $t \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ [Bir29], por tanto el semigrupo de traslación también es hipercíclico.

2. Posteriormente, Rolewicz [Rol69] probó la hiperciclicidad del semigrupo de traslación en el espacio $L^p_\rho(\mathbb{R})$ con $\rho(s) := a^{-|s|}$, $a > 1$ y $1 \leq p < \infty$.

3. Consideremos el siguiente problema de evolución lineal dado en el espacio ℓ^1 por
$$\begin{aligned} \tfrac{df}{dt} &= -af + bBf := Af \\ f(0) &= f_0 \in \ell^1, \end{aligned}$$
siendo B el operador de desplazamiento hacia atrás.

   El operador A genera un semigrupo analítico $\{T_t\}_{t\geq 0}$ que es solución de dicho problema, véase la Sección 5.6. Protopopescu y Azmy [PA92] probaron que este semigrupo es hipercíclico si $b > a \geq 0$. Independientemente MacCluer [Mac92, Lema B] probó el caso $a = 0$ y $b = 1$.

4. El problema de evolución lineal en $L^2(\mathbb{R}^+)$ enunciado como
$$\begin{aligned} \tfrac{df}{dt} &= a\tfrac{d^2 f}{dx^2} + b\tfrac{df}{dx} + cf := \quad Af \\ f(0,t) &= 0, \qquad \text{para } t \geq 0, \\ f(x,0) &= f_0(x), \ \text{para } x \geq 0, \end{aligned}$$
genera como solución en $L^2(\mathbb{R}^+)$ un semigrupo hipercíclico $\{T_t\}_{t\geq 0}$ si tenemos $a,b,c > 0$ y $c < \frac{b^2}{2a} < 1$, véase [DSW97, Ej. 4.12].

5. Un semigrupo continuo de funciones analíticas es una familia de funciones analíticas $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ del disco unidad $\mathbb{D}$ en sí mismo que satisface tres condiciones análogas a las de la Definición 5.1.

   A partir de estos semigrupos podemos considerar en el espacio $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ dotado de la topología compacta abierta, los semigrupos de operadores de composición $\{C_{\varphi_t}\}_{t\geq 0}$, donde
$$\begin{array}{rccc} C_{\varphi_t}: & \mathscr{H}(\mathbb{D}) & \longrightarrow & \mathscr{H}(\mathbb{D}) \\ & f & \longrightarrow & f \circ \varphi_t, \end{array}$$
   En general, se dice que $\varphi_t(z)$ es una transformación lineal fraccionaria, LFT, si se puede escribir como $\varphi_t(z) := \frac{az+b}{cz+d}$ para ciertas constantes $a,b,c,d \in \mathbb{C}$ tales que $ad - bc \neq 0$. Con esta condición se puede ver que φ_t no es univalente. Toda LFT tiene uno o dos puntos fijos en $\widehat{\mathbb{C}}$, el plano complejo ampliado. Si sólo hay uno se dice que es *parabólica*. Si tiene dos y es conjugada con una dilatación de razón positiva distinta de 1 se dice que es *hiperbólica*, y si lo es con una dilatación de razón negativa distinta de -1 se dice que es *loxodrómica*.

Veamos un par de ejemplos: si elegimos

$$\varphi_t(z) := \frac{(1+e^t)z - 1 + e^t}{(-1+e^t)z + 1 + e^t} \text{ para } t \geq 0,$$

tenemos que $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de automorfismos hiperbólicos, y si elegimos

$$\varphi_t(z) := \frac{(i-t)z + t}{-tz + t + i} \text{ para } t \geq 0,$$

tenemos que $\{\varphi_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo de automorfismos parabólicos.

Como en ninguno de los dos casos ninguna φ_t tiene un punto fijo en $\mathbb{D}$, por [Sha, Teor. 4.4] tenemos que cada una de ellas induce un operador de composición C_{φ_t} hipercíclico en $\mathscr{H}(\mathbb{D})$ y, por tanto, el semigrupo $\{C_{\varphi_t}\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico en ambos casos.

6. Mas ejemplos de semigrupos hipercíclicos pueden ser encontrados en [Web95, DVBW97, Her97, Ema98, BL01, How01, MT01, BL02, dEGE03].

5.4. Propiedades mezclante y débilmente mezclante

Un concepto más fuerte que el de hiperciclicidad es el de ser mezclante.

Definición 5.11

1. *Una sucesión de operadores $\{T_n\}_n$ en $L(X)$ se dice que es* ***mezclante*** *si para cualquier pareja de subconjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$T_n(U) \cap V \neq \emptyset \textit{ para todo natural } n \geq n_0.$$

2. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que es* ***mezclante*** *si lo es la sucesión de sus iteraciones.*

3. *Un C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en $L(X)$ se dice que es* ***mezclante*** *si para cada pareja de subconjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existe $r > 0$ tal que*

$$T_t(U) \cap V \neq \emptyset \textit{ para todo } t \in \Delta \textit{ con } |t| \geq r.$$

Otro concepto muy interesante debido a su relación con el Criterio de hiperciclicidad es el de ser débilmente mezclante. Profundizaremos en este concepto en el Capítulo 6.

Definición 5.12

1. *Una sucesión de operadores $\{T_n\}_n$ en $L(X)$ se dice que es* ***débilmente mezclante*** *si $\{T_n \oplus T_n\}_n$ es una sucesión transitiva en la suma directa $X \oplus X$.*

2. *Un operador $T \in L(X)$ se dice que es* ***débilmente mezclante*** *si la sucesión de sus iteraciones lo es.*

3. *Un C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en $L(X)$ se dice que es* ***débilmente mezclante*** *si el semigrupo $\{T_t \oplus T_t\}_{t\in\Delta}$ es transitivo en la suma directa $X \oplus X$.*

No todo operador débilmente mezclante es mezclante. En [Sal91] Salas construyó un operador T, de desplazamiento bilateral ponderado en el espacio de sucesiones de cuadrado sumable, tal que él y su traspuesto T' son débilmente mezclantes, pero $T \oplus T'$ no es hipercíclico; por tanto ni T, ni T' pueden ser mezclantes.

Observación 5.13 Con respecto a los ejemplos tratados en el apartado 5.10, podemos afirmar que todos los operadores de traslación del primer ejemplo son mezclantes. Los semigrupos de los ejemplos segundo y tercero son mezclantes siguiendo las pruebas originales. En el Capítulo 7 se caracteriza la propiedad mezclante para los semigrupos de traslación en espacios de funciones integrables más generales, extendiendo resultados de Desch, Schappacher y Webb [DSW97]. El semigrupo del ejemplo cuarto es mezclante si se hace una extensión de la prueba del Teorema 3.1 de [DSW97] que permita deducir que el semigrupo sea mezclante, en vez de que sea sólo hipercíclico. Finalmente, los semigrupos del quinto ejemplo son mezclantes por el Teorema 6.25, ya que para todo $t > 0$ el operador C_{φ_t} es mezclante. Este último hecho se deduce de la misma prueba de Shapiro [Sha, Teor. 4.4].

5.5. Caos

Comencemos dando la definición de punto periódico.

Definición 5.14 *Un elemento $x \in X$ se dice que es un* ***punto periódico*** *para $T \in L(X)$ si existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $T^n x = x$.*

Nosotros utilizaremos como definición de operador caótico la dada por Devaney [Dev89], que es una de las más aceptadas.

Definición 5.15 *Un operador $T \in L(X)$ se dice que es* ***caótico*** *si:*

1. *T es transitivo.*

2. *El conjunto de los puntos periódicos de T es denso en X.*

3. *T tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales.*

Se dice que el operador $T \in L(X)$ tiene *dependencia sensible respecto de las condiciones iniciales* si existe $U \in \mathscr{U}_0(X)$ de manera que para cada $V \in \mathscr{U}_0(X)$ y cada $x \in X$ existen $y \in X$ y $n \in \mathbb{N}$ tales que $x - y \in V$ pero $T^n x - T^n y \notin U$. Godefroy y Shapiro observaron que si un operador es hipercíclico en un F-espacio, entonces tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales [GS91, Prop. 6.1]. Banks et alt. [BBC$^+$92] vieron que en el caso de tener en vez de T una aplicación continua de un espacio métrico en sí mismo, la transitividad y la existencia de un conjunto denso de puntos periódicos permitían deducir la dependencia sensible de las condiciones iniciales.

Existen otras definiciones de caos como la dada por Auslander y Yorke en [AY80]. Un operador $T \in L(X)$ es *caótico en el sentido de Auslander y Yorke* si admite una órbita densa y tiene dependencia sensible de las condiciones iniciales. Según el resultado citado anteriormente de Godefroy y Shapiro, en el contexto de F-espacios este concepto equivaldría al de hiperciclicidad.

Damos a continuación la definición de punto periódico y de caos para un semigrupo de operadores.

Definición 5.16 *Un elemento $x \in X$ se dice que es un* ***punto periódico*** *para el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en $L(X)$ si existe $t \in \Delta^*$ tal que $T_t x = x$.*

Definición 5.17 *Un C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en $L(X)$ se dice que es* ***caótico*** *si:*

1. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es transitivo.*

2. *El conjunto de los puntos periódicos de $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es denso en X.*

Observación 5.18 Con respecto a los ejemplos tratados en el apartado 5.10, podemos afirmar que todos los operadores de traslación del primer ejemplo son caóticos, véase por ejemplo [Sha, Sec. 4.5], y por tanto, el semigrupo lo es. El segundo es caótico por [MYT03, Teor. 2]. Los semigrupos de los ejemplos tercero y cuarto son caóticos siguiendo las pruebas originales. Finalmente, los semigrupos del quinto ejemplo son caóticos, véase [Sha, Teor. 4.8].

5.6. Condiciones espectrales

Se define el generador infinitesimal de un semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ como el operador A que viene dado por el siguiente límite:

$$Ax := \lim_{\substack{t\to 0\\ t\in\Delta}} \frac{T_t x - x}{t},$$

definido allá donde dicho límite exista. Es conocido que el generador infinitesimal de un C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un operador cerrado y densamente definido en el contexto general de espacios de Fréchet, véase [Yos80, Teor. IX.3.1].

El generador infinitesimal de un semigrupo es importante ya que permite "reconstruir" el semigrupo. En muchos casos se puede ver que $\{T_t\}_{t\in\Delta} = \{e^{tA}\}_{t\in\Delta}$, calculando dicha exponencial a partir de la correspondiente serie de potencias,

$$e^{tA} := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n A^n}{n!}.$$

En un espacio de Banach X todo semigrupo uniformemente continuo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ en $L(X)$ se puede expresar de esta forma para un cierto operador $A \in L(X)$, véase por ejemplo [EN00, Teor. I.3.7]. En diversas ocasiones es de especial interés obtener el semigrupo a partir de la fórmula integral de Cauchy, como en el caso de los semigrupos analíticos en espacios de Banach [EN00, Sec. II.4].

En el contexto de espacios de Fréchet la hiperciclicidad de un semigrupo está relacionada con el espectro del semigrupo dual. El siguiente resultado es una extensión a espacios de Fréchet de un resultado de Costakis y Peris [CP02, Lema 4].

Proposición 5.19 *Si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un C_0-semigrupo hipercíclico en $L(X)$, con X un espacio de Fréchet, entonces el espectro puntual $\sigma_p(T_t')$ del adjunto de T_t es vacío para todo $t > 0$. Como consecuencia $p(T_t)$ tiene rango denso para todo $t > 0$ y para todo polinomio $p \neq 0$.*

Demostración. En primer lugar, estudiemos el caso en que X es un espacio complejo. Sea $x \in X$ un vector hipercíclico para el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Procediendo por reducción al absurdo, supongamos que existe $s > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$ e $y \in X' \setminus \{0\}$ tales que $T_s' y = \lambda y$. Fijemos un vector $z \in X$ arbitrario que cumpla que $\langle z, y\rangle \neq 0$. Distinguimos casos según los valores de λ:

Caso $|\lambda| < 1$: Podemos hallar una sucesión $\{t_n\}_n$ con $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ tal que $\lim_{n\to\infty} T_{t_n} x = z$. Los términos de esta sucesión se pueden escribir como $t_n = m_n s + s_n$ donde $m_n \in \mathbb{N}$ con $\lim_{n\to\infty} m_n = \infty$, y $s_n \in [0, s]$. Por tanto

$$\langle z, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_{t_n} x, y\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle T_{s_n} x, (T_s')^{m_n} y\rangle = \lim_{n\to\infty} \lambda^{m_n} \langle T_{s_n} x, y\rangle = 0$$

ya que $\lim_{n\to\infty} \lambda^{m_n} = 0$ y la sucesión $\{T_{s_n} x\}_n$ está acotada, llegando así a una contradicción.

Caso $|\lambda| \geq 1$: Como x es hipercíclico para el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$, existe $r \geq 0$ tal que $|\langle T_r x, y\rangle| > 1$. Como la familia $\{T_t : t \in [0, s]\}$ es equicontinua, existe $q \in \mathrm{sc}(X)$ tal que $|\langle T_t u, y\rangle| \leq 1$ si $t \in [0, s]$ y $q(u) \leq 1$. Como x es hipercíclico para el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$, existe $t' > r$ tal que $q(T_{t'}x) \leq 1$. Si expresamos t' como $t' = ms - t + r$ para un cierto $m \in \mathbb{N}$ y $t \in [0,s]$, tenemos que

$$1 \geq |\langle T_t(T_{t'}x), y\rangle| = |\langle T_r x, (T_s')^m y\rangle| = |\lambda|^m |\langle T_r x, y\rangle| > 1,$$

que es una contradicción.

Por tanto T_s' no tiene valores propios para ningún $s > 0$. Esto significa que el operador $T_t - \lambda I$ tiene rango denso para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ y para todo $t > 0$. Si consideramos un polinomio arbitrario $p \neq 0$ y descomponemos $p(T_t)$ como producto de monomios en T_t, obtenemos que $p(T_t)$ tiene rango denso.

Si X es un espacio real, consideramos su complexificación $\tilde{X} := X + iX$, y la del operador T_t que viene dada por $\tilde{T_t} := T_t + iT_t$. Una sencilla modificación del argumento muestra que $\tilde{T_t}'$ no tiene valores propios, concluyendo así que $p(T_t)$ tiene rango denso.

$\square$

Este resultado no es válido si lo intentamos extender a semigrupos definidos sobre un sector del plano complejo como muestra el Ejemplo 7.28. En ese caso veremos que existe un C_0-semigrupo hipercíclico que contiene un operador para el que existe un polinomio no constante $p(z) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k z^k$ que al evaluarlo en dicho operador no tendrá rango denso.

Capítulo 6

Hiperciclicidad y discretizaciones de semigrupos

6.1. Criterios de hiperciclicidad para operadores

Por lo general, la transitividad es una propiedad difícilmente computable en sistemas dinámicos no lineales. Sorprendentemente, éste no es el caso en el contexto de operadores lineales en espacios de dimensión infinita, dado que existen condiciones "computables" que son suficientes para probar la hiperciclicidad de un operador. Damos un repaso a ellas en esta sección.

En 1982 Kitai enunció por primera vez el conocido Criterio de hiperciclicidad en su tesis doctoral, que no llegó a ser publicada [Kit82, Teor. 1.4].

Criterio 6.1 *Sea $T \in L(X)$. Si existen un subconjunto denso $Y \subset X$ y un operador $S \in L(X)$ tales que*

1. *para todo $y \in Y$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} T^n y = \lim_{n\to\infty} S^n y = 0$,*

2. *$TS = I$,*

entonces T es hipercíclico.

Este criterio fue redescubierto por Gethner y Shapiro [GS87, Teor. 2.2] que además observaron que era suficiente con que la S del enunciado fuera una inversa a derecha de T, y que no era necesario que los subconjuntos de elementos donde T y S convergían a cero puntualmente fueran el mismo [GS87, Nota 2.3.b)]. Sin embargo, la observación más interesante que hicieron fue que para asegurar que el operador T fuera hipercíclico, bastaba con que las hipótesis del enunciado se cumplieran para una sucesión creciente de números naturales .

Muchas variaciones y generalizaciones se han hecho desde entonces. Actualmente se acepta como Criterio de hiperciclicidad la siguiente versión dada por Bès. Véase por ejemplo [BP99, Def. 1.2].

Criterio 6.2 (Criterio de hiperciclicidad)
Sea $T \in L(X)$. Si existen dos subconjuntos densos $Y, Z \subset X$, una sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}_k$ en $\mathbb{N}$ y aplicaciones $S_{n_k} : Z \to X$ tales que

1. *para todo $y \in Y$ se cumple que $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} y = 0$,*
2. *para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim_{k\to\infty} S_{n_k} z = 0$,*
3. *para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim_{k\to\infty} T^{n_k} S_{n_k} z = z$,*

entonces T es hipercíclico.

Basta con que el Criterio de hiperciclicidad se cumpla para una sucesión estrictamente creciente de números naturales para poder hablar de un operador débilmente mezclante.

Teorema 6.3 *[BP99, Teor. 2.3] Sea $T \in L(X)$. T es débilmente mezclante si, y sólo si, T verifica el Criterio de hiperciclicidad.*

Todavía permanece abierta la pregunta de Herrero [Her92a] sobre si todo operador hipercíclico ha de ser necesariamente débilmente mezclante, es decir, si todo operador hipercíclico ha de verificar necesariamente el Criterio de hiperciclicidad.

De [BP99] también podemos deducir una caracterización de que un operador sea mezclante en términos del Criterio de hiperciclicidad.

Teorema 6.4 *Sea $T \in L(X)$. T es mezclante si, y sólo si, para cada sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}_k$ en $\mathbb{N}$, existe una subsucesión $\{n_{k_j}\}_j$ tal que T cumple el Criterio de hiperciclicidad respecto de la sucesión $\{n_{k_j}\}_j$.*

Demostración. En primer lugar veamos que si T es mezclante y $\{n_k\}_k$ es una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$, entonces la sucesión de operadores $\{T^{n_k} \oplus T^{n_k}\}_k$ es hipercíclica:

Fijemos la sucesión $\{n_k\}_k$ y consideremos U_i, V_i subconjuntos abiertos no vacíos de X para $i = 1, 2$. Como T es mezclante, dado U_i, V_i, existe $m_i \in \mathbb{N}$ tal que $T^n(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para todo $n \geq m_i$. Si consideramos $n_k > \max\{m_1, m_2\}$, entonces $T^{n_k}(U_i) \cap V_i \neq \emptyset$ para $i = 1, 2$, hecho que implica que la sucesión $\{T^{n_k} \oplus T^{n_k}\}_k$ es hipercíclica.

Una vez visto que la sucesión de operadores $\{T^{n_k} \oplus T^{n_k}\}_k$ es hipercíclica, aplicando [BP99, Teor. 2.3] se obtiene que existe una subsucesión $\{n_{k_j}\}_j$ de $\{n_k\}_k$ tal que T cumple el Criterio de hiperciclicidad respecto de dicha subsucesión.

Recíprocamente, si se diera la condición del enunciado sin que T fuera mezclante, existirían subconjuntos abiertos no vacíos $U,V \subset X$ y una sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}_k$ en $\mathbb{N}$ tal que $T^{n_k}(U) \cap V = \emptyset$ para todo $k \in \mathbb{N}$, con lo cual la sucesión de operadores $\{T^{n_k}\}_k$ no sería hipercíclica, llegando así a una contradicción.

□

La caracterización del teorema anterior resulta muy poco manejable a la hora de computarla en ejemplos concretos, por ello establecemos una condición suficiente más sencilla para comprobar que un operador es mezclante.

Criterio 6.5 (Criterio mezclante)
Sea $T \in L(X)$. Si existen dos subconjuntos densos $Y, Z \subset X$, y aplicaciones $S_n : Z \to X$ tales que

1. *para todo $y \in Y$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} T^n y = 0$,*
2. *para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} S_n z = 0$,*
3. *para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim_{n\to\infty} T^n S_n z = z$,*

entonces T es mezclante.

Ejemplo 6.6 Consideremos en el espacio ℓ_1 el operador de desplazamiento hacia atrás B. Si definimos el operador $T := \lambda B$ con $|\lambda| > 1$, este operador verifica el Criterio mezclante definiendo $S_n := \frac{1}{\lambda^n} F^n$, siendo $F(x_1, x_2, x_3, \ldots) = (0, x_1, x_2, \ldots)$ y tomando $Y = Z = \varphi$.

Para la mayoría de ejemplos de operadores mezclantes conocidos se cumple el Criterio mezclante, sin embargo Grivaux ha probado recientemente que existen operadores mezclantes que no cumplen dicho criterio [Gri, Teor. 2.5].

6.2. Criterios de hiperciclicidad para sucesiones de operadores

En [BP99] Bès y Peris extendieron las equivalencias del Criterio de hiperciclicidad al caso en que en vez de tener la sucesión de las potencias de un operador, se tuviera una sucesión hipercíclica de operadores que conmutan con rango denso. Veamos en esta sección cómo se formulan el Criterio de hiperciclicidad y el Criterio mezclante para sucesiones de operadores.

Definición 6.7 *Sea $\{n_k\}_k$ una sucesión estrictamente creciente en $\mathbb{N}$. Una sucesión de operadores $\{T_n\}_n$ es* ***hereditariamente hipercíclica con respecto a la sucesión*** *$\{n_k\}_k$ si para cualquier subsucesión $\{n_{k_j}\}_j$ se tiene que la sucesión $\{T_{n_{k_j}}\}_j$ es hipercíclica.*

Un operador es ***hereditariamente hipercíclico con respecto a la sucesión*** *$\{n_k\}_k$ si lo es la correspondiente subsucesión de sus potencias. Un operador es* ***hereditariamente hipercíclico*** *en el sentido de Bès y Peris [BP99, Def. 1.2] si lo es con respecto a alguna sucesión.*

Teorema 6.8 *[BP99, Nota 2.6(3)] Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión en $L(X)$ de operadores que conmutan entre sí con rango denso. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{T_n\}_n$ cumple el* **Criterio de hiperciclicidad para sucesiones***:*
   "Existen dos subconjuntos densos $Y, Z \subset X$, una sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}_k$ en $\mathbb{N}$, y aplicaciones $S_{n_k} : Z \to X$ tales que

   a) *para todo $y \in Y$ se cumple que $\lim\limits_{k\to\infty} T_{n_k} y = 0$,*

   b) *para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim\limits_{k\to\infty} S_{n_k} z = 0$,*

   c) *para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim\limits_{k\to\infty} T_{n_k} S_{n_k} z = z$".*

2. *$\{T_n\}_n$ es hereditariamente hipercíclica.*

3. *$\{T_n\}_n$ es débilmente mezclante.*

Recientemente estos resultados han sido completados por Bernal y Grosse-Erdmann para sucesiones casi conmutantes de operadores, véase [BGGE03].

Podemos dar una versión del Criterio 6.5 para sucesiones de operadores que conmuten entre sí con rango denso.

Criterio 6.9 (Criterio mezclante para sucesiones)

Sea $\{T_n\}_n$ una sucesión en $L(X)$ de operadores que conmutan entre sí con rango denso. Si existen dos subconjuntos densos $Y, Z \subset X$, y aplicaciones $S_n : Z \to X$ tales que

1. *para todo $y \in Y$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n y = 0$,*

2. *para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} S_n z = 0$,*

3. *para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim\limits_{n\to\infty} T_n S_n z = z$,*

entonces $\{T_n\}_n$ es una sucesión mezclante.

6.3. Semigrupos hipercíclicos y discretizaciones

Dado un C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en $L(X)$, podemos "discretizarlo" de dos formas distintas:

> Discretización autónoma: Fijando $t_0 \neq 0$, consideramos la sucesión iterada $\{T_{t_0}^n\}_n = \{T_{nt_0}\}_n$.
>
> Discretización no necesariamente autónoma: Siendo $\{t_n\}_n \subset \Delta$ una sucesión arbitraria tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, consideramos la sucesión de operadores $\{T_{t_n}\}_n$.

En ambos casos toda discretización de un C_0-semigrupo consiste en una sucesión de operadores que conmutan entre sí.

En esta sección nos ocuparemos del estudio de las relaciones existentes entre las propiedades de transitividad, hiperciclicidad, ser mezclante y ser débilmente mezclante para semigrupos y para discretizaciones no necesariamente autónomas de los mismos. El caso autónomo lo trataremos en la Sección 6.5.

Lema 6.10 *Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ un C_0-semigrupo transitivo en $L(X)$. Para cualquier pareja de subconjuntos abiertos no vacíos $U,V \subset X$ y $r > 0$ existe $t \in \Delta$ con $|t| > r$ de manera que $T_t(U)\cap V \neq \emptyset$.*

Demostración. Supongamos que no fuera así, existe una pareja de subconjuntos abiertos no vacíos $U,V \subset X$ y existe $r > 0$ tales que $T_t(U)\cap V = \emptyset$ si $|t| > r$. Dados $x,y \in X$, sean $\{U_n^x\}_n$ y $\{U_n^y\}_n$ bases de entornos de x e y, respectivamente. Consideremos $T_t(U\cap U_n^x)\cap(V\cap U_n^y)$ con $x\in U$ e $y\in V$. Como el semigrupo es transitivo existe $t_{n,x,y} \in \Delta$ tal que $T_{t_{n,x,y}}(U\cap U_n^x)\cap(V\cap U_n^y) \neq \emptyset$. Según lo supuesto $t_{n,x,y} \in \Delta_r$, así, fijado $x \in U$, para cada $y \in V$ existe una sucesión $\{x_n\}_n \subset U$ que converge a x, una sucesión $\{y_n\}_n \subset V$ que converge a y, y una sucesión $\{t_{n,x,y}\}_n \subset \Delta_r$ tal que $T_{t_{n,x,y}}x_n = y_n$. Como Δ_r es un compacto existe una subsucesión de $\{t_{n,x,y}\}_n$ que converge a un valor $t_{x,y} \in \Delta_r$ para el que se cumple $T_{t_{x,y}}x = y$ por ser el semigrupo fuertemente continuo.

De esta manera la imagen de Δ_r, que es un compacto, por la aplicación $t \to T_t x$ contiene a un abierto en un espacio de dimensión infinita, llegando así a una contradicción.

□

Observación 6.11 Un análisis de la prueba del lema anterior permite observar que para cualquier discretización $\{T_{t_n}\}_n$ transitiva se cumple que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$.

En la siguiente proposición vemos que es equivalente hablar de la transitividad de un C_0-semigrupo a hacerlo en términos de una cierta discretización del mismo.

Proposición 6.12 *Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es transitivo.*
2. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ admite una discretización transitiva.*
3. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ admite una discretización hipercíclica.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Es suficiente hacer la prueba para los elementos de una base de abiertos de X. Como X es separable podemos encontrar una base numerable de abiertos no vacíos de X que denotaremos por $\{G_n\}_n$. A partir de ella consideramos la sucesión $\{(G_n,G_m)\}_{n,m}$ y la reordenamos como $\{(G_n^1,G_n^2)\}_n$. Vamos a construir una discretización $\{T_{t_n}\}_n$ que será transitiva.

En primer lugar tomamos (G_1^1,G_1^2), aplicando la definición de semigrupo transitivo tenemos que existe $t_1\in\Delta$ tal que $T_{t_1}(G_1^1)\cap G_1^2\neq\emptyset$.

A continuación tomamos (G_2^1,G_2^2), aplicando el Lema 6.10, existe $t_2\in\Delta$ con $|t_2|>\max\{|t_1|,2\}$ de manera que $T_{t_2}(G_2^1)\cap G_2^2\neq\emptyset$.

Supongamos que dado n existen $\{t_1,t_2,\dots,t_n\}\subset\Delta$, crecientes en módulo, de manera que $T_{t_i}(G_i^1)\cap G_i^2\neq\emptyset$ para $1\le i\le n$. Aplicando el Lema 6.10, dado (G_{n+1}^1,G_{n+1}^2), existe $t_{n+1}\in\Delta$ con $|t_{n+1}|>\max\{|t_n|,n+1\}$ tal que $T_{t_{n+1}}(G_{n+1}^1)\cap G_{n+1}^2\neq\emptyset$.

El recíproco es evidente. Finalmente 2. y 3. son equivalentes como se puede ver en [GS91, Teor. 1.2].

$\square$

Teorema 6.13 *Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es débilmente mezclante.*
2. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ admite una discretización mezclante.*
3. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ admite una discretización débilmente mezclante.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Como $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es débilmente mezclante, esto es equivalente a decir que el semigrupo $\{T_t\oplus T_t\}_{t\in\Delta}$ es transitivo, o lo que es lo mismo en virtud del Teorema 6.12, que existe una sucesión de operadores $\{T_{t_n}\}_n$ tal que la discretización de $\{T_t\oplus T_t\}_{t\in\Delta}$ dada por $\{T_{t_n}\oplus T_{t_n}\}_n$ es hipercíclica. Dado que los operadores de la sucesión $\{T_{t_n}\}_n$ conmutan con rango denso, aplicando [BP99, Nota 2.6.(3)] se tiene que es equivalente que la sucesión $\{T_{t_n}\oplus T_{t_n}\}_n$ sea hipercíclica a que exista una subsucesión $\{T_{t_{n_k}}\}_k$ de $\{T_{t_n}\}_n$ para la que se cumpla el

Criterio de hiperciclicidad, siendo ésta una sucesión mezclante. Por tanto $\{T_{t_{n_k}}\}_k$ es una discretización mezclante del semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$.

Finalmente, las implicaciones 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1. son evidentes.

$\square$

Teorema 6.14 *Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es mezclante.*
2. *Toda discretización de $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es mezclante.*
3. *Toda discretización de $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es débilmente mezclante.*
4. *Toda discretización de $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es transitiva.*

Demostración. Las implicaciones 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 4. son evidentes.

4. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ no es mezclante, entonces existe una pareja de subconjuntos abiertos no vacíos $U,V \subset X$ y una sucesión $\{t_n\}_n$ en Δ con $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ tales que $T_{t_n}(U)\cap V = \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, la discretización $\{T_{t_n}\}_n$ no sería transitiva, llegando así a una contradicción.

$\square$

6.4. Criterios de hiperciclicidad para semigrupos de operadores

Establecemos en esta sección el Criterio de hiperciclicidad y el Criterio mezclante para semigrupos de operadores. A su vez expresamos la relación existente entre que un semigrupo verifique uno de estos criterios y que lo hagan sus discretizaciones.

En primer lugar establecemos el Criterio de hiperciclicidad para semigrupos a partir de la versión dada del Criterio de hiperciclicidad para sucesiones, véase el Criterio 6.8.

Criterio 6.15 (Criterio de hiperciclicidad para semigrupos)

Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$. Si existe una sucesión $\{t_n\}_n$ en Δ con $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$, dos subconjuntos densos $Y,Z \subset X$, y aplicaciones $S_t : Z \to X$ definidas para todo $t \in \Delta$, tales que

1. *para todo $y \in Y$ se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} T_{t_n} y = 0$,*

2. *para todo* $z \in Z$ *se cumple* $\lim_{n\to\infty} S_{t_n} z = 0$,

3. *para todo* $z \in Z$ *se cumple* $\lim_{n\to\infty} T_{t_n} S_{t_n} z = z$,

entonces $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ *es un semigrupo débilmente mezclante.*

Corolario 6.16 *Sea* $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ *un* C_0*-semigrupo en* $L(X)$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ *cumple el Criterio de hiperciclicidad para semigrupos.*

2. $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ *admite una discretización que cumple el Criterio de hiperciclicidad para sucesiones.*

El siguiente criterio supone una extensión a semigrupos del Criterio 6.9 en el que se establece el Criterio mezclante para sucesiones.

Criterio 6.17 (Criterio mezclante para semigrupos)
Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ *un* C_0*-semigrupo en* $L(X)$*. Si existen dos subconjuntos densos* $Y, Z \subset X$*, y aplicaciones* $S_t : Z \to X$ *definidas para todo* $t \in \Delta$*, tales que*

1. *para todo* $y \in Y$ *se cumple que* $\lim_{t\to\infty} T_t y = 0$,

2. *para todo* $z \in Z$ *se cumple que* $\lim_{t\to\infty} S_t z = 0$,

3. *para todo* $z \in Z$ *se cumple que* $\lim_{t\to\infty} T_t S_t z = z$,

entonces $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ *es un semigrupo mezclante.*

Demostración. Sean dos subconjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$. Como los subconjuntos Y, Z son densos, elegimos $y \in Y \cap U$ y $z \in Z \cap V$. Sean $U', V' \in \mathscr{U}_0(X)$ tales que $y + U' \subset U$ y $z + V' \subset V$, y sea $V'' \in \mathscr{U}_0(X)$ tal que $V'' + V'' \subset V'$.

Por 1. se tiene que existe $r_1 > 0$ tal que $T_t y \in V''$ para todo t con $|t| \geq r_1$. Por 2. se tiene que existe $r_2 > 0$ tal que $S_t z \in U'$ para todo $t \in \Delta$ con $|t| \geq r_2$. Finalmente, sea $r_3 > 0$ tal que se tiene $T_t S_t z \in z + V''$ para todo $t \in \Delta$ con $|t| \geq r_3$.

Sea $r := \max\{r_1, r_2, r_3\}$. Así, para todo $t \in \Delta$ con $|t| > r$ tenemos por una parte $y + S_t z \in y + U' \subset U$, y por otra parte $T_t(y + S_t z) = T_t y + T_t S_t z \in V'' + z + V'' \subset z + V' \subset V$. De este modo $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo t con $|t| \geq r$.

□

Proposición 6.18 *Sea* $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ *un* C_0*-semigrupo en* $L(X)$*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{T_t\}_{t\in\Delta}$ cumple el Criterio mezclante para semigrupos.*
2. *Toda discretización de $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ cumple el Criterio mezclante para sucesiones.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Evidente.

2. $\Rightarrow$ 1. Para probar esta implicación necesitamos una discretización especial. Para ello tomamos una sucesión $\{t_n\}_n \subset \Delta$ tal que $\lim_{n\to\infty} t_n = \infty$ y que cumpla lo siguiente:

$$\Delta = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (t_n + \Delta_1) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \Delta_1^{-1}(t_n).$$

De esta manera tenemos una sucesión $\{t_n\}_n$ en Δ que verifica que para todo $\tau \in \Delta$ existen t_{n_τ}, t_{m_τ} en dicha sucesión y $s_\tau, s'_\tau \in \Delta_1$ de manera que $\tau = t_{n_\tau} + s_\tau = t_{m_\tau} - s'_\tau$.

Por hipótesis, la discretización $\{T_{t_n}\}_n$ cumple el Criterio mezclante para sucesiones, por tanto podemos asegurar que existen dos subconjuntos densos $Y, Z \subset X$, y aplicaciones $S_n : Z \to X$, tales que

(a) para todo $y \in Y$ se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} T_{t_n} y = 0$,

(b) para todo $z \in Z$ se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} S_n z = 0$,

(c) para todo $z \in Z$ se cumple $\lim\limits_{n\to\infty} T_{t_n} S_n z = z$.

Comprobemos las condiciones del Criterio mezclante para semigrupos:

(i) Todo $\tau \in \Delta$ se puede escribir como $\tau = t_{n_\tau} + s_\tau$ tal y como hemos indicado anteriormente. Por tanto, para todo $y \in Y$ se cumple que $\lim\limits_{\tau\to\infty} T_\tau y = 0$, puesto que $\lim_{n\to\infty} T_{t_n} y = 0$ por la condición (a) y $\{T_s\}_{s\in\Delta_1}$ es una familia equicontinua de operadores.

(ii) Para todo $\tau \in \Delta$ definimos $S_\tau := T_{s'_\tau} S_{m_\tau}$ si $\tau = t_{m_\tau} - s'_\tau$ con $s'_\tau \in \Delta_1$. De esta manera para cada $z \in Z$ se cumple que $\lim_{\tau\to\infty} S_\tau z = 0$, puesto que $\lim_{n\to\infty} S_n z = 0$ por la condición (b) y $\{T_s\}_{s\in\Delta_1}$ es una familia equicontinua de operadores.

(iii) Finalmente, como $T_\tau S_\tau = T_\tau T_{s'_\tau} S_{m_\tau} = T_{t_{m_\tau}} S_{m_\tau}$, para todo $z \in Z$ se cumple que $\lim_{\tau\to\infty} T_\tau S_\tau z = \lim_{\tau\to\infty} T_{t_{m_\tau}} S_{m_\tau} z = z$ ya que por la condición (c) tenemos que $\lim_{n\to\infty} T_{t_n} S_n z = z$.

$\square$

6.5. Discretizaciones autónomas

En esta sección comprobamos que en todo C_0-semigrupo hipercíclico $\{T_t\}_{t\geq 0}$ en $L(X)$ existen discretizaciones autónomas hipercíclicas. De hecho, la cantidad de elementos en $\mathbb{R}^+$ que dan lugar a éstas forman un subconjunto G_δ denso de $\mathbb{R}^+$. Sin embargo, este resultado no se puede generalizar para C_0-semigrupos de operadores en $L(X)$ cuyo semigrupo índice sea un sector del plano complejo.

El siguiente resultado es debido a Oxtoby y Ulam [OU41, Teor.6] e inspira el Teorema 6.20.

Teorema 6.19 (Oxtoby y Ulam)

Sea $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ un grupo uniparamétrico de automorfismos transitivos en un espacio métrico y separable E que no contenga ninguna curva aislada. Entonces para todos los valores de $t \in \mathbb{R}$, excepto en un conjunto de primera categoría, los automorfismos T_t son transitivos.

Una modificación de la demostración de este teorema nos lleva a relacionar la densidad de las órbitas de un semigrupo con la densidad de las órbitas obtenidas por medio de una discretización autónoma.

Teorema 6.20 *Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo hipercíclico en $L(X)$. Si $x \in X$ es un vector hipercíclico para el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$, entonces existe un subconjunto G_δ denso $A \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\{T_{nt}\}_n$ es una discretización autónoma hipercíclica para todo $t \in A$ que cuenta con x como vector hipercíclico.*

Demostración. Como X es separable podemos considerar una base numerable de subconjuntos abiertos de X, que denotamos por $\{G_n\}_n$, y definir los subconjuntos

$$A_j := \left\{t > 0 : \text{ existe } k \in \mathbb{N} \text{ tal que } T_{kt}x \cap G_j \neq \emptyset\right\}$$

para cada $j \in \mathbb{N}$.

Los conjuntos A_j son abiertos en $\mathbb{R}^+$: Fijemos $j \in \mathbb{N}$, consideramos únicamente los casos en que $A_j \neq \emptyset$. Por tanto, existe $t > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ tales que $T_{kt}x \in G_j$, que es abierto. Si d es la distancia en X, existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo $x' \in X$ con $d(T_{kt}x, x') < \varepsilon$ se cumple que $x' \in G_j$. Como el semigrupo es fuertemente continuo, la aplicación $t \to T_{kt}x$ continua, por tanto, existe $\delta > 0$ tal que para todo $t' > 0$ verificando que $|t - t'| < \delta$ tenemos que $d(T_{kt}x, T_{kt'}x) < \varepsilon$, y así, $T_{kt'}x \in G_j$.

Los conjuntos A_j son densos en $\mathbb{R}^+$: Consideremos un conjunto A_j arbitrario y un intervalo abierto genérico $I \subset \mathbb{R}^+$. Vamos a comprobar que $I \cap A_j \neq \emptyset$. Denotamos por $J := \{kt : k \in \mathbb{N} \text{ y } t \in I\}$. Como I es abierto existen a, b con $a < b$ y $[a, b] \subset I$. Dados a, b existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $a < k_0(b - a)$.

Nuestro primer objetivo es probar que $[\alpha,+\infty[\subset J$, siendo $\alpha := k_0a$: Si tomamos $\beta \geq \alpha$, entonces existe $k \geq k_0$ tal que $ka \leq \beta \leq (k+1)a$ y por tanto $0 \leq \beta - ka \leq a < k(b-a)$. Así, podemos encontrar $s_\beta \in [0,1[$ tal que $\beta - ka = s_\beta k(b-a)$ y entonces $\beta = ka + s_\beta k(b-a) = k(a+s_\beta(b-a))$ con $a+s_\beta(b-a) \in [a,b] \subset I$.

Por otra parte, como $\mathrm{Orb}(\{T_t\}_{t\geq 0},x)$ es densa en X, dado $j \in \mathbb{N}$ existe $t > \alpha$ cumpliendo que $T_tx \in G_j$. Como hemos probado que $[\alpha,+\infty[\subset J$, existe $k \in \mathbb{N}$ y $t' \in I$ cumpliendo que $t = kt'$, con lo que en realidad tenemos que $T_{kt'}x \in G_j$, lo que nos permite concluir que $t' \in A_j$ y entonces $A_j \cap I \neq \emptyset$.

Para concluir la prueba se define el conjunto

$$A := \bigcap_{j\in\mathbb{N}} A_j.$$

Éste es un conjunto de segunda categoría en $\mathbb{R}^+$. Por el Teorema de Baire, A no es vacío y es denso en $\mathbb{R}^+$. Dado $t \in A$, tenemos que $\mathrm{Orb}(T_t,x)$ es densa en X. Tomemos un subconjunto abierto no vacío $U \subset X$, como $\{G_n\}_n$ es una base de subconjuntos abiertos de X existe $i_U \in \mathbb{N}$ tal que $G_{i_U} \subset U$. Como $t \in A$ en particular $t \in A_{i_U}$ y se puede encontrar $k \in \mathbb{N}$ de manera que $T_{kt}x \in G_{i_U} \subset U$.

$\square$

Sin embargo, como veremos en el Ejemplo 7.26, si consideramos C_0-semigrupos cuyo semigrupo índice es un sector del plano complejo, éstos pueden ser hipercíclicos pero no tienen porqué tener discretizaciones autónomas hipercíclicas.

Si $\Delta = \mathbb{R}^+$ se puede ver que en todo C_0-semigrupo débilmente mezclante existen discretizaciones autónomas débilmente mezclantes y que es suficiente con que exista una de ellas para que el semigrupo lo sea.

Teorema 6.21 *Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$\{T_t\}_{t\geq 0}$ es débilmente mezclante.*
2. *$\{T_t\}_{t\geq 0}$ verifica el Criterio de hiperciclicidad para semigrupos.*
3. *Existe una discretización autónoma débilmente mezclante.*
4. *Existe una discretización autónoma que verifica el Criterio de hiperciclicidad para sucesiones.*

Demostración. 1. $\Leftrightarrow$ 2. Decir que el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es débilmente mezclante es equivalente a decir que éste cumple el Criterio de hiperciclicidad para semigrupos, puesto que por el Teorema 6.13 es equivalente que un semigrupo sea débilmente mezclante a que exista una discretización débilmente mezclante. Por el Corolario 6.16 es equivalente que un semigrupo cumpla el Criterio de hiperciclicidad para semigrupos a que una de sus discretizaciones cumpla el Criterio de hiperciclicidad para sucesiones. Finalmente, por el Teorema 6.8 es equivalente que una discretización cumpla el Criterio de hiperciclicidad para sucesiones a que sea débilmente mezclante.

3. $\Leftrightarrow$ 4. Por [BP99, Teor. 2.3].

1. $\Rightarrow$ 3. Como el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es débilmente mezclante, el semigrupo $\{T_t \oplus T_t\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico y aplicando el Teorema 6.20 existe $t > 0$ tal que el operador $T_t \oplus T_t$ hipercíclico. Por [BP99, Teor. 2.3] se tiene que $\{T_{nt}\}_n$ es una discretización autónoma débilmente mezclante.

3. $\Rightarrow$ 1. Evidente, puesto que si un semigrupo tiene una discretización autónoma débilmente mezclante, entonces con mayor razón el semigrupo también es débilmente mezclante.

$\square$

6.5.1. Órbitas densas en alguna parte e hiperciclicidad

Se dice que un operador $T \in L(X)$ *admite una órbita densa en alguna parte* si existe un vector $x \in X$ de manera que la clausura de $\mathrm{Orb}(T,x)$ contiene a un subconjunto abierto no vacío de X. Peris preguntó en [Per01b] si todo operador que poseyera un vector con una órbita densa en alguna parte era hipercíclico. Esta pregunta fue respondida afirmativamente por Bourdon y Feldman en el teorema que citamos a continuación.

Teorema 6.22 *[BF03, Teor. 2.4] Sea E un e.l.c. y $x \in E$ de manera que* $\mathrm{Orb}(T,x)$ *es densa en alguna parte, entonces* $\mathrm{Orb}(T,x)$ *es densa en E.*

Este resultado ha sido extendido por Wengenroth a espacios vectoriales topológicos que no son localmente convexos [Wen02]. Por otra parte, Costakis y Peris han probado que en un espacio de Banach todo C_0-semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ que posee un vector con una órbita densa en alguna parte es hipercíclico [CP02, Teor. 5].

Este resultado se puede generalizar al contexto de F-espacios adaptando la prueba del Teorema 6.20 para semigrupos con una órbita densa en alguna parte en combinación con el Teorema 6.22.

Corolario 6.23 *Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$ y sea $x \in X$ tal que la órbita* $\mathrm{Orb}(\{T_t\}_{t\geq 0},x)$ *es densa en alguna parte. Entonces existe un subconjunto G_δ denso $A \subset \mathbb{R}^+$ tal que x es un vector hipercíclico para toda discretización autónoma $\{T_{nt}\}_n$ con $t \in A$.*

Demostración. Sea $x \in X$ tal que $\mathrm{Orb}(\{T_t\}_{t\geq 0}, x)$ es densa en alguna parte de X, nuestro objetivo es encontrar un subconjunto G_δ denso $A \subset \mathbb{R}^+$ tal que $\mathrm{Orb}(T_t, x)$ sea densa en alguna parte para todo $t \in A$, de esta manera, aplicando [Wen02] tendremos que estas órbitas son densas en X.

Como $\mathrm{Orb}(\{T_t\}_{t\geq 0}, x)$ es densa en alguna parte de X, existe un subconjunto abierto no vacío $G \subset X$ de manera que $G \subset \overline{\mathrm{Orb}(\{T_t\}_{t\geq 0}, x)}$. El resto de la prueba es idéntica a la del Teorema 6.20 considerando que $\{G_n\}_n$ es una base de abiertos de G y no de X.

□

6.5.2. Criterios de hiperciclicidad para $\Delta = \mathbb{R}^+$

La hiperciclicidad de C_0-semigrupos de operadores con $\Delta = \mathbb{R}^+$ como semigrupo índice ha sido estudiada por varios autores (véase, e.g.,[Mac92, PA92, DSW97, Ema98, dEP00, BBM03]. Desch, Schappacher y Webb han dado criterios de hiperciclicidad para semigrupos [DSW97]. Véase también [dEGE03] para el caso de operadores no acotados.

En esta sección damos criterios de hiperciclicidad para estos semigrupos, inspirados en el caso discreto, caracterizando la hiperciclicidad de los mismos via la propiedad de ser débilmente mezclante. Estos resultados también son ciertos para semigrupos cuyo semigrupo índice sea $\Delta = \mathbb{R}$.

Dado $x \in X$ y un C_0-semigrupo de operadores $\{T_t\}_{t\geq 0}$ en $L(X)$, una *órbita hacia atrás* de x por el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es una familia de vectores $\{x_t\}_{t\geq 0}$ en X tal que $T_t x_t = x$ para todo $t \geq 0$. Los criterios 1. y 2. del siguiente resultado involucran la existencia de órbitas hacia atrás adecuadas. Inspirados por la formulación de Grosse-Erdmann del Criterio de hiperciclicidad para operadores, podemos dar un criterio de colapso/explosión 3. para semigrupos hipercíclicos. El siguiente resultado aparecerá en [CP].

Teorema 6.24 *Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe $\{t_k\}_k \subset \mathbb{R}^+$ estrictamente creciente y con $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, subespacios densos $Y, Z \subset X$, y una familia de aplicaciones lineales $S_t : Z \to X$ definidas para todo $t \geq 0$, tales que*

   (i) para todo $y \in Y$ se cumple $\lim\limits_{k\to\infty} T_{t_k} y = 0$,

   (ii) para todo $z \in Z$ se cumple $\lim\limits_{k\to\infty} S_{t_k} z = 0$ y $T_t S_t z = z$, para todo $t \geq 0$.

2. *Existe* $\{t_k\}_k \subset \mathbb{R}^+$ *estrictamente creciente con* $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, *y subconjuntos densos* $Y, Z \subset X$ *tales que*

   (i) para todo $y \in Y$ *se cumple que* $\lim\limits_{k\to\infty} T_{t_k} y = 0$,

   (ii) todo $z \in Z$ *admite una órbita hacia atrás* $\{z_t\}_{t\geq 0}$ *con* $\lim\limits_{k\to\infty} z_{t_k} = 0$.

3. *Existe* $\{t_k\}_k \subset \mathbb{R}^+$ *estrictamente creciente con* $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ *y subconjuntos densos* $Y, Z \subset X$, *tales que*

   (i) para todo $y \in Y$ *se cumple que* $\lim\limits_{k\to\infty} T_{t_k} y = 0$,

   (ii) para todo $z \in Z$ *existe una sucesión* $\{z_k\}_k$ *en* X *con* $\lim\limits_{k\to\infty} z_k = 0$ *y* $\lim\limits_{k\to\infty} T_{t_k} z_k = z$.

4. $\{T_t\}_{t\geq 0}$ *es débilmente mezclante.*

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. Trivial.

3. $\Rightarrow$ 4. El Criterio de hiperciclicidad permite pasar fácilmente al semigrupo suma directa $\{T_t \oplus T_t\}_{t\geq 0}$ en $X \oplus X$, 4. es entonces una consecuencia de [GE99, Teor. 2] o bien de [BP99, Nota 2.6(3)].

4. $\Rightarrow$ 1. Por el Teorema 6.21 existe $t_0 > 0$ tal que la discretización autónoma de $\{T_t\}_{t\geq 0}$ dada por $\{T_{nt_0}\}_n$ satisface el Criterio de hiperciclicidad. Por tanto, gracias a [Per01a, Teor. 2.3], podemos encontrar $Y_0, Z_0 \subset X$ subconjuntos densos de X, una sucesión estrictamente creciente $\{n_k\}_k \subset \mathbb{N}$ y una aplicación $S : Z_0 \to Z_0$ tales que

(a) $\lim\limits_{k\to\infty} T_{n_k t_0} y = \lim\limits_{k\to\infty} T_{t_0}^{n_k} y = 0$ para todo $y \in Y_0$,

(b) $\lim\limits_{k\to\infty} S^{n_k} z = 0$ para todo $z \in Z_0$,

(c) $T_{t_0} S z = z$, para todo $z \in Z_0$.

Más aún, la prueba de [Per01a, Teor. 2.3], en la que descansa en parte el Teorema 6.21, permite deducir que el conjunto Z_0 puede ser considerado de la forma $Z_0 = \{w_m\ , m \in \mathbb{Z}^-\}$ con $S w_m = w_{m-1}$ para todo $m \in \mathbb{Z}^-$ y siendo w_0 un vector hipercíclico para T_{t_0}. Aplicando T_{t_0} a la igualdad anterior se obtiene que $T_{t_0} w_{m-1} = w_m$ para todo $m \in \mathbb{Z}^-$.

Definimos los conjuntos Y, Z como las envolturas lineales de Y_0, Z_0, respectivamente, y $t_k := n_k t_0$ para todo $k \in \mathbb{N}$. La condición (i) del criterio (1) es entonces una consecuencia de la condición (a) enunciada previamente. Para definir las aplicaciones $S_t : Z \to X$ para todo $t \geq 0$ necesitamos considerar la siguiente familia de vectores:

$$z_{-t} := T_s w_m \quad \text{si } -t = mt_0 + s,\ 0 \leq s < t_0,\ m \in \mathbb{Z}^- \text{ y } z_0 = w_0.$$

La familia $\{z_{-t}\}_{t\geq 0}$ es una órbita hacia atrás de w_0, puesto que $T_t z_{-t} = w_0$ para todo $t \geq 0$: Dado $t \geq 0$ existe $k \in \mathbb{N}_0$ y s con $0 < s \leq t_0$ tales que $t = kt_0 + s$. Por otra parte $-t = -(k+1)t_0 + t_0 - s$ con $0 \leq t_0 - s < t_0$. Así

$$T_t z_{-t} = T_{t_0}^k T_s T_{t_0 - s} w_{-k-1} = T_{t_0} T_{t_0}^k w_{-k-1} = T_{t_0} w_{-1} = w_0.$$

Dados $r < 0$ y $t \geq 0$ definimos $S_t z_r := z_{r-t}$, de este modo $T_t S_t z = z$ para todo $z \in Z_0$. Por otra parte, $S_{t_k} w_m = S_{n_k t_0} z_{mt_0} = z_{(m-n_k)t_0} = w_{m-n_k} = S^{n_k} w_m$ converge a 0 cuando k tiende a ∞ para todo $m \in \mathbb{Z}^-$. Finalmente, el conjunto Z_0 es linealmente independiente. Si no fuera así, la órbita de w_0 bajo T_{t_0} tendría dimensión finita, cosa que no es posible ya que ésta es densa en X. Esto implica que podemos extender linealmente cada S_t a Z y concluir así el resultado.

□

En el caso de trabajar con el semigrupo índice $\Delta = \mathbb{R}^+$, se puede caracterizar un semigrupo mezclante como aquel en el que existe una discretización autónoma mezclante.

Teorema 6.25 *Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo mezclante.*
2. *Toda discretización autónoma es mezclante.*
3. *Existe una discretización autónoma mezclante.*

Demostración. $1 \Rightarrow 2$. Fijemos $t_0 > 0$ arbitrario, vamos a ver que T_{t_0} es un operador mezclante. Como el semigrupo $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es mezclante dados dos subconjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$ existe $s_0 > 0$ tal que $T_t(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $t \geq s_0$. Si consideramos $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $n_0 t_0 \geq s_0$, entonces $T_{t_0}^n(U) \cap V \neq \emptyset$ para todo $n \geq n_0$.

$2 \Rightarrow 3$. Evidente.

$3 \Rightarrow 1$. Sea $t_0 > 0$ tal que T_{t_0} es un operador mezclante. Dados dos subconjuntos abiertos no vacíos $U, V \subset X$ podemos encontrar $W' \in \mathscr{U}_0(X)$ y dos subconjuntos abiertos no vacíos $U' \subset U$ y $V' \subset V$ verificando

$$U' + W' \subset U, \qquad V' + W' \subset V.$$

Por la equicontinuidad local, existe $W \in \mathscr{U}_0(X)$ con $W \subset W'$ tal que $T_s(W) \subset W'$ para todo $0 \leq s \leq t_0$. Como T_{t_0} es un operador mezclante, existe $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de manera que

$$T_{nt_0}(U') \cap W \neq \emptyset, \quad T_{nt_0}(W) \cap V' \neq \emptyset, \quad \text{para todo } n \geq m.$$

Ahora bien, dado $t > mt_0$ existen $0 \leq s, s' \leq t_0$ y $n \geq m$ verificando que $t = nt_0 + s = (n+1)t_0 - s'$. Por otra parte, podemos encontrar $u \in U'$ y $w \in W$ tales que $T_{nt_0}u \in W$ y $T_{(n+1)t_0}w \in V'$. Definamos $w' := T_{s'}w \in W'$, tenemos que

$$T_t(u+w') = T_s(T_{nt_0}u) + T_{(n+1)t_0-s'}(T_{s'}w)$$

pertenece a $T_s(W) + T_{(n+1)t_0}w \in W' + V' \subset V$, deduciéndose de aquí que el semigrupo es mezclante.

□

Por el teorema que acabamos de probar, sabemos que si $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo mezclante, entonces todas las discretizaciones autónomas son mezclantes. Sin embargo, no sabemos si coinciden los vectores hipercíclicos.

Observación 6.26 Existen ejemplos de C_0-semigrupos $\{T_t\}_{t\in\Delta}$, con un sector del plano complejo como semigrupo índice, que no son mezclantes pero en los que toda discretización autónoma es mezclante como se puede ver en el Ejemplo 7.27.

Capítulo 7

Semigrupos de traslación hipercíclicos y caóticos

Desch, Schappacher y Webb han caracterizado la hiperciclicidad del semigrupo de traslación, con $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}$ como semigrupo índice, al actuar sobre espacios ponderados de funciones integrables y sobre espacios ponderados de funciones continuas, véase [DSW97, Sec. 4]. Estos resultados han sido completados para semigrupos mezclantes por Bermúdez, Bonilla, Peris y el autor [BBCP]. Por su parte, Matsui, Yamada y Takeo han caracterizado los semigrupos supercíclicos y caóticos en estos mismos espacios de funciones [MYT03]. Otras caracterizaciones de semigrupos caóticos en espacios ponderados de funciones integrables han sido debidas a deLaubenfels, Emamirad [dE01]. Estos últimos junto con Grosse-Erdmann han generalizado las nociones de semigrupos hipercíclicos y caóticos para familias de operadores no acotados, analizando estos conceptos en el caso particular de semigrupos C-regularizantes y de semigrupos de distribuciones regulares [dEGE03].

En el presente capítulo caracterizamos la hiperciclicidad y el caos de los semigrupos de traslación que tienen un sector del plano complejo como semigrupo índice, en el contexto de límites proyectivos de espacios ponderados de funciones integrables y de límites proyectivos de espacios ponderados de funciones continuas. Completamos estos resultados con varios ejemplos.

7.1. El semigrupo de traslación en $\mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ y en $\mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$

En esta sección definiremos los espacios en los que consideraremos el semigrupo de traslación y veremos que éste es un C_0-semigrupo en ellos. Con este fin probaremos algunos resultados de carácter técnico, que posteriormente nos serán de gran utilidad para caracterizar la hiperciclicidad de estos semigrupos.

Comenzamos dando la definición de función peso admisible definida en un sector del plano complejo, generalizando [DSW97, Def. 4.1]. De hecho, nuestra definición coincide en cada rayo del sector con la definición dada por ellos.

Definición 7.1 *Sea Δ un sector del plano complejo. Diremos que una función medible $\rho : \Delta \to \mathbb{R}$ es un función peso admisible si se satisfacen las siguientes condiciones:*

1. $\rho(t) > 0$ *para todo* $t \in \Delta$, *y*
2. *existen constantes* $M \geq 1$ *y* $w \in \mathbb{R}$ *tales que*

$$\rho(t) \leq Me^{w|t'|}\rho(t+t')$$

para todo $t, t' \in \Delta$.

La siguiente proposición justifica la necesidad de la condición 2. en la definición anterior. Esta proposición generaliza [EN00, Prop. I.5.5]

Proposición 7.2 *Sea X un espacio de Banach y $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ un C_0-semigrupo en $L(X)$. Entonces existen $M \geq 1$ y $w \in \mathbb{R}$ tales que*

$$\|T_t\| \leq Me^{w|t|} \text{ para todo } t \in \Delta.$$

Demostración. Elijamos $M \geq 1$ tal que $\|T_s\| \leq M$ para todo $s \in \Delta_1$. Fijado $t \in \Delta$ arbitrario éste se puede escribir como $t = nt_0 + s$ para $t_0 \in \Lambda_1$ con $\arg(t_0) = \arg(t)$, $n \in \mathbb{N}$ y $s \in \Delta$ con $|s| < 1$ y $\arg(s) = \arg(t_0)$. Entonces

$$\|T_t\| \leq \|T_s\| \cdot \|T_{t_0}\|^n \leq M^{n+1} = Me^{n\log M} \leq Me^{w|t|}$$

se cumple para $w := \log M$ y $t \in \Delta$.

$\square$

Enunciamos a continuación varios resultados de carácter técnico que serán de gran utilidad en esta sección. El primero de ellos es una extensión de [DSW97, Lema 4.2] a sectores del plano complejo.

Lema 7.3 *Sea Δ un sector del plano complejo y sea ρ una función peso admisible definida en Δ. Para todo $r > 0$ existen constantes $0 < A < B$, (dependientes únicamente de ρ y r) tales que para cada $t \in \Delta, t' \in \Delta_r$ y para cada $\tau \in [t, t+t']$ se tiene que:*

$$A\rho(t) \leq \rho(\tau) \leq B\rho(t+t').$$

Demostración. Fijemos en primer lugar $r > 0$ y a continuación $t \in \Delta$ y $t' \in \Delta_r$. Tomemos $\tau \in [t, t+t']$, de este modo $t+t'-\tau \in \Delta$ y $|t+t'-\tau| \leq r$. Además, supongamos sin pérdida de generalidad que $w \geq 0$ en la condición 7.1.2, de esta manera tenemos que

$$\rho(\tau) \leq Me^{w|t+t'-\tau|}\rho(t+t') \leq Me^{wr}\rho(t+t') \leq B\rho(t+t')$$

con $B := Me^{wr} > 1$. Análogamente

$$\rho(t) \leq B\rho(\tau).$$

Así, haciendo $A := \frac{1}{B}$ tenemos

$$A\rho(t) \leq \rho(\tau) \leq B\rho(t+t')$$

con $0 < A < B$.

□

Lema 7.4 *Sea Δ un sector del plano complejo y ρ una función peso admisible definida en Δ. Para todo $t \in \Delta$ y para todo $r > 0$ existe $C > 0$ tal que $\rho(t+t') \leq C$ para todo $t' \in \Lambda_r$.*

Demostración. Supongamos que existe una sucesión $\{t_j\}_j$ en Δ de la forma $t_j = t + t'_j$ con $t'_j \in \Lambda_r$ verificando que $\lim_{j\to\infty} \rho(t_j) = \infty$. Como la sucesión $\{t_j\}_j$ está en un compacto podemos encontrar una subsucesión de $\{t_j\}_j$, que denotaremos de la misma forma, de manera que $\lim_{j\to\infty} t_j = t_0$ para cierto $t_0 \in \Delta$, siendo $t_0 = t + t'_0$ para cierto $t'_0 \in \Lambda_r$.

Dado $t \in \Delta$ y $r > 0$ existe $z \in \Delta$ y $r' > 0$ tales que $t + \Delta_r \subset \Delta_{r'}^{-1}(z)$. Por la condición 7.1.2 de la definición de función peso admisible se cumple que existe $M > 1$ y $w \geq 0$ de manera que $\rho(t_j) \leq Me^{wr'}\rho(z)$ para todo $j \in \mathbb{N}$, ya que $t_j \in t + \Delta_r$ para todo $j \in \mathbb{N}$. De esta manera tendríamos que la sucesión $\{\rho(t_j)\}_j$ estaría acotada, llegando así a una contradicción.

□

De los Lemas 7.3 y 7.4 se deduce lo siguiente

Corolario 7.5 *Sea Δ un sector del plano complejo y ρ una función peso admisible definida en Δ. Para todo $t \in \Delta$ y para todo $r > 0$ existe $D > 0$ tal que $\rho(\tau) \leq D$ para todo $\tau \in t + \Delta_r$.*

Demostración. Fijado $r > 0$ y $t \in \Delta$, por el Lema 7.3 sabemos que existe $B > 0$ tal que $\rho(\tau) \leq B\rho(t+t')$ para todo $\tau \in [t, t+t']$ con $t' \in \Lambda_r$. Por el Lema 7.4 existe

$C > 0$ tal que $\rho(t+t') \leq C$ para todo $t' \in \Lambda_r$. Definiendo $D := BC$, tenemos que $\rho(\tau) \leq D$ para todo $\tau \in t + \Delta_r$.

$\square$

A continuación definimos los espacios sobre los que actuará el semigrupo de traslación.

Definición 7.6 *Sea $\{\rho_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones peso admisibles. Para $1 \leq p < \infty$ definimos el espacio $\mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$, cuya topología viene definida por la familia de seminormas*

$$p_n(u) := \left(\int_\Delta |u(s)|^p \rho_n(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

Además, definimos el espacio $\mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$ de las funciones que verifican

$$\lim_{s\to\infty} u(s)\rho_n(s) = 0 \text{ para cada } n \in \mathbb{N},$$

cuya topología viene definida por la familia de seminormas

$$p_n(u) := \sup_{s\in\Delta} |u(s)|\rho_n(s) \text{ para cada } n \in \mathbb{N}.$$

En ambos casos $\{p_n\}_n$ es un sistema fundamental de seminormas continuas. Estos espacios dotados de la topología del límite proyectivo son espacios de Fréchet. Resultados similares a los que obtendremos en esté capítulo se pueden obtener si consideramos espacios de funciones con valores reales análogos a éstos.

Observación 7.7 Recordemos que en nuestro contexto siempre trabajamos con espacios separables. En particular, la condición $\lim_{s\to\infty} u(s)\rho_n(s) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, no puede ser omitida de la definición de $\mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$ sin perder la separabilidad del espacio. Estos espacios están construidos de manera que existan subconjuntos densos de funciones suaves con soporte compacto.

Definición 7.8 *Sea X uno de los espacios $\mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ ó $\mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$ definidos a partir de una sucesión creciente de funciones peso admisibles $\{\rho_n\}_n$. Para $t \in \Delta$ y $u \in X$ definimos $T_t u$ como*

$$T_t u(s) = u(s+t) \text{ para todo } s \in \Delta.$$

Llamamos a $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ el semigrupo de traslación en X.

Proposición 7.9 *Sea X uno de los espacios $\mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ ó $\mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$ definidos a partir de una sucesión creciente de funciones peso admisibles $\{\rho_n\}_n$. El semigrupo de traslación $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es un C_0-semigrupo en $L(X)$.*

Demostración. Es evidente que T_t es lineal para todo $t \in \Delta$ y que la ley de semigrupo se cumple. En ambos casos veamos como la condición 7.1.2 nos permite asegurar que para todo $u \in X$ tenemos que $T_t u \in X$ y que T_t es un operador continuo. Para cada $n \in \mathbb{N}$ podemos encontrar $M_n \geq 1$ y $w_n \in \mathbb{R}$ tales que $\rho_n(s-t) \leq M_n e^{w_n|t|}\rho_n(s)$ para todo $s \in t+\Delta$. En el caso $X = \mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ tenemos

$$\begin{aligned}
p_n(T_t u)^p &= \int_\Delta |T_t u(s)|^p \rho_n(s)ds \\
&= \int_\Delta |u(s+t)|^p \rho_n(s)ds \\
&\leq \int_{t+\Delta} |u(s)|^p \rho_n(s-t)ds \\
&\leq \int_{t+\Delta} |u(s)|^p M_n e^{w_n|t|}\rho_n(s)ds \\
&\leq M_n e^{w_n|t|} p_n(u)^p,
\end{aligned}$$

de donde tomado raíces p-ésimas queda $p_n(T_t u) \leq M_n^{1/p} e^{w_n|t|/p} p_n(u)$. En el caso $X = \mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$ tenemos

$$\begin{aligned}
p_n(T_t u) &= \sup_{s\in\Delta} |T_t u(s)|\rho_n(s) \\
&= \sup_{s\in\Delta} |u(s+t)|\rho_n(s) \\
&\leq \sup_{s\in t+\Delta} |u(s)|\rho_n(s-t) \\
&\leq \sup_{s\in t+\Delta} |u(s)| M_n e^{w_n|t|}\rho_n(s) \\
&\leq M_n e^{w_n|t|} p_n(u)
\end{aligned}$$

Finalmente, nos queda probar que el semigrupo de traslación es un C_0-semigrupo. Fijemos $u \in X$, tenemos que probar que la aplicación

$$\begin{aligned}
\xi_u :&\Delta \to X \\
&t \to \xi_u(t) := T_t u
\end{aligned}$$

es continua para todo $t_0 \in \Delta$. Dado que X es un límite proyectivo basta comprobar que la aplicación

$$\begin{aligned}
\xi_u :&\Delta \to X_n \\
&t \to \xi_u(t) := T_t u
\end{aligned}$$

es continua para todo $t_0 \in \Delta$ y para todo $n \in \mathbb{N}$, siendo en cada caso $X_n = L^p_{\rho_n}(\Delta)$ ó $X_n = C_{0,\rho_n}(\Delta)$. Veremos la prueba en el primero de estos casos. En el espacio X_n

tenemos que p_n es una norma. Por tanto, dado un operador $T \in L(X_n)$ podemos definir una norma de operadores en X_n como

$$p_n(T) := \sup\{p_n(Tx) : x \in X_n \text{ y } p_n(x) \leq 1\}.$$

Fijados $t_0 \in \Delta$ y $n \in \mathbb{N}$, tenemos que probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $t \in \Delta$ con $|t_0 - t| < \delta$ se tiene $p_n(T_{t_0}u - T_t u) < \varepsilon$. Fijemos también $\varepsilon > 0$.

Como $p_n(T_t x) \leq M_n^{1/p} e^{w_n|t|/p} p_n(x)$ para todo $x \in X_n$, tenemos que $p_n(T_t) \leq M_n^{1/p} e^{w_n|t|/p}$. De esta manera existe $K > 0$ tal que $p_n(T_t) \leq K$ para todo $t \in B(t_0, 1) \cap \Delta$.

Como las funciones continuas de soporte compacto son densas en X_n, existe una de estas funciones $v \in X_n$ tal que $p_n(u - v) \leq \frac{\varepsilon}{3K}$. Sea $r > 0$ tal que $\mathrm{sop}(v) \subset \Delta_r$. Por el Lema 7.5 existe $D > 0$ tal que $\rho_n(s) \leq D$ para todo $s \in \Delta_r$.

Además, como las funciones continuas de soporte compacto son uniformemente continuas, existe $0 < \delta < 1$ tal que si $|t_0 - t| < \delta$ entonces

$$|v(s + t_0) - v(s + t)| < \frac{\varepsilon}{3(D\mu(\Delta_r))^{\frac{1}{p}}},$$

siendo $\mu(\Delta_r)$ la medida de Δ_r.

De esta manera tenemos

$$p_n(T_{t_0}v - T_t v) = \left(\int_{\Delta_r} |v(s + t_0) - v(s + t)|^p \rho_n(s) ds \right)^{\frac{1}{p}} \leq \frac{\varepsilon}{3}.$$

Juntando todas las estimaciones tenemos

$$\begin{aligned} p_n(T_{t_0}u - T_t u) &\leq p_n(T_{t_0}u - T_{t_0}v) + p_n(T_{t_0}v - T_t v) + p_n(T_t v - T_t u) \\ &\leq p_n(T_{t_0}) p_n(u - v) + \frac{\varepsilon}{3} + p_n(T_t) p_n(v - u) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

para todo $t \in B(t_0, \delta) \cap \Delta$. $\square$

7.2. Semigrupos de traslación hipercíclicos

En la presente sección caracterizamos la hiperciclicidad de los semigrupos de traslación en los espacios $\mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ con $1 \leq p < \infty$ y $\mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$.

Para los casos $\Delta = \mathbb{R}^+$ y $\Delta = \mathbb{R}$ Desch, Schappacher y Webb han obtenido las siguientes caracterizaciones en el contexto de espacios de Banach.

Teorema 7.10 *[DSW97, Teor. 4.7 y 4.8] Sea X uno de los espacios $L^p_\rho(\Delta)$ o $C_{0,\rho}(\Delta)$ dados a partir de una función peso admisible ρ definida en Δ y sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ el semigrupo de traslación en X. Entonces:*

1. *Si $\Delta = \mathbb{R}^+$, se tiene que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico si, y sólo si,*

$$\liminf_{t\to\infty} \rho(t) = 0.$$

2. *Si $\Delta = \mathbb{R}$, se tiene que $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es hipercíclico si, y sólo si, para todo $\theta \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{t_k\}_k$ en $\mathbb{R}^+$ con $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \rho(\theta + t_k) = \lim_{k\to\infty} \rho(\theta - t_k) = 0.$$

Este resultado se puede extender a los correspondientes límites proyectivos repitiendo la prueba para cada seminorma y teniendo en cuenta que como la sucesión de funciones peso es creciente, en cada caso se puede tomar una única sucesión $\{t_k\}_k$ para todas las funciones peso. La extensión quedaría formulada así:

Corolario 7.11 *Sea X uno de los espacios $\mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ o $\mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$ definidos a partir de una sucesión creciente de funciones peso admisibles $\{\rho_n\}_n$ y sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ el semigrupo de traslación en X. Entonces*

1. *si $\Delta = \mathbb{R}^+$, se tiene que $\{T_t\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico si, y sólo si, existe una sucesión $\{t_k\}_k$ en $\mathbb{R}^+$ tal que*

$$\lim_{k\to\infty} \rho_n(t_k) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

2. *si $\Delta = \mathbb{R}$, se tiene que $\{T_t\}_{t\in\mathbb{R}}$ es hipercíclico si, y sólo si, para todo $\theta \in \mathbb{R}$ existe una sucesión $\{t_k\}_k$ en $\mathbb{R}^+$ tal que*

$$\lim_{j\to\infty} \rho_n(\theta + t_k) = \lim_{j\to\infty} \rho_n(\theta - t_k) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Las pruebas de los siguientes resultados de este capítulo las veremos para el caso $X = \mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$, definido a partir de una sucesión creciente de funciones peso admisibles $\{\rho_n\}_n$. Las pruebas para el caso $X = \mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$ serían análogas, tomando las seminormas correspondientes.

Teorema 7.12 *Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ el semigrupo de traslación en X. Si la discretización $\{T_{t_k}\}_k$ es mezclante, entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \rho_n(t_k) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Fijemos una sucesión $\{t_k\}_k \subset \Delta$ tal que la discretización del semigrupo $\{T_{t_k}\}_k$ sea mezclante. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $r > 0$, por el Lema 7.5 se tiene que existe $D_{n,r} > 0$ tal que $\rho_n(s) \leq D_{n,r}$ para todo $s \in \Delta_r$.

Consideremos una función $u \in X$, $u \neq 0$ y tal que $\operatorname{sop}(u) \subset \Delta_r$. Como la discretización tomada es mezclante, para cada $j \in \mathbb{N}$ existe $k(j) \in \mathbb{N}$ de manera que para todo $k \geq k(j)$ existe una función $v_{k,j} \in X$ tal que

$$p_n(v_{k,j}) < \frac{1}{j(D_{n,r})^{1/p}} \qquad \text{y} \qquad p_n(u - T_{t_k}v_{k,j}) < \frac{1}{j}.$$

La elección de u implica que la restricción $w_{k,j}$ de $v_{k,j}$ a $t_k + \Delta_r$ verifica

$$p_n(u - T_{t_k}w_{k,j}) < \frac{1}{j}.$$

Aplicando la desigualdad triangular tenemos

$$p_n(u) \leq p_n(u - T_{t_k}w_{k,j}) + p_n(T_{t_k}w_{k,j}) \leq \frac{1}{j} + p_n(T_{t_k}w_{k,j}).$$

Por otra parte, de la estimación obtenida a partir del Lema 7.5 tenemos

$$\begin{aligned} p_n(T_{t_k}w_{k,j})^p &= \int_\Delta |w_{k,j}(s+t_k)|^p \rho_n(s)ds \\ &= \int_{\Delta_r} |v_{k,j}(s+t_k)|^p \rho_n(s)ds \\ &\leq D_{n,r} \int_{t_k+\Delta_r} |v_{k,j}(s)|^p ds. \end{aligned}$$

Por último, aplicando el Lema 7.3 existe $A_{n,r} > 0$ tal que $A_{n,r}\rho_n(t) \leq \rho_n(t+t')$ para todo $t \in \Delta$ y $t' \in \Delta_r$ con lo que

$$p_n(v_{k,j})^p \geq \int_{t_k+\Delta_r} |v_{k,j}(s)|^p \rho_n(s)ds \geq A_{n,r}\rho_n(t_k) \int_{t_k+\Delta_r} |v_{k,j}(s)|^p ds.$$

Combinando estas estimaciones llegamos a que

$$p_n(T_{t_k}w_{k,j})^p \leq \frac{D_{n,r}}{A_{n,r}\rho_n(t_k)} p_n(v_{k,j})^p \leq \frac{1}{A_{n,r}\rho_n(t_k)\, j^p} \qquad \text{para todo } k \geq k(j).$$

Teniendo en cuenta que $p_n(u) \neq 0$, ya que todas las funciones peso son estrictamente positivas, si no se cumpliera $\lim_{k\to\infty} \rho_n(t_k) = 0$ existirían $j \in \mathbb{N}$ y $k \geq k(j)$ tales que

$$\frac{1}{j} + p_n(T_{t_k}w_{k,j}) < p_n(u),$$

llegando así a una contradicción.

$\square$

Observación 7.13 Si un semigrupo es débilmente mezclante por el Teorema 6.13 existe una discretización mezclante. Aplicando el Teorema 7.12 tenemos que

$$\liminf_{t\to\infty} \rho_n(t) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Para encontrar una discretización mezclante a partir de una sucesión que tienda a ∞ y sobre la que los límites de las funciones peso se anulen es suficiente, en el caso de que el sector Δ sea distinto de $\mathbb{C}$, con añadir la hipótesis de que dicha sucesión se aleje de la frontera del sector, $\partial\Delta$.

Teorema 7.14 *Sea $\Delta \neq \mathbb{C}$. Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ el semigrupo de traslación en X. Si existe una sucesión $\{t_j\}_j \subset \Delta$ verificando*

1. $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$,
2. $\lim_{j\to\infty} d(t_j, \partial\Delta) = \infty$,
3. $\lim_{j\to\infty} \rho_n(t_j) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

entonces $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ admite una discretización $\{T_{s_k}\}_k$ que cumple el Criterio mezclante.

Demostración. Consideremos una sucesión $\{t_j\}_j \subset \Delta$ verificando las hipótesis del enunciado. A partir de esta sucesión consideramos una subsucesión, que denotaremos por $\{t_{j_k}\}_k$, verificando

1. $\rho_k(t_{j_k}) \leq \frac{1}{kM_k e^{2kw_k}}$,
2. $d(t_{j_k}, \partial\Delta) > 3k$.

tomando para todo $k \in \mathbb{N}$ las constantes $M_k, w_k > 0$ crecientes en $k \in \mathbb{N}$ y de manera que se verifique la condición 7.1.2 de la definición de función peso admisible para la función ρ_k.

Definimos la sucesión $\{s_k\}_k$ como $s_k := t_{j_k} - 2k$. Podemos asegurar que esta sucesión está contenida en Δ por la elección de la sucesión $\{t_{j_k}\}_k$. Probaremos que la discretización $\{T_{s_k}\}_k$ cumple el Criterio mezclante.

Tomamos como subconjuntos $Y = Z \subset X$ del enunciado de dicho criterio el subconjunto de las funciones continuas de soporte compacto que es denso en X. Para cada $k \in \mathbb{N}$ definimos la aplicación $S_k : Z \to X$ actuando sobre una función $u \in Z$ como

$$S_k u(t) := \begin{cases} u(t - s_k) & \text{si } t \in s_k + \Delta, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

A continuación verificamos las condiciones del Criterio mezclante. Teniendo en cuenta que $\lim_{k\to\infty} d(s_k, \partial\Delta) = \infty$ podemos asegurar que para todo $u \in Z$ existe $k_u \in \mathbb{N}$ de manera que $T_{s_k}u = 0$ para todo $k \geq k_u$, y así, $\lim_{k\to\infty} T_{s_k}u = 0$ para todo $u \in Z$.

Por otra parte, de la definición de S_k se tiene que para todo $u \in Z$ se cumple $T_{s_k}S_k u = u$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

Por último queda comprobar que $\lim_{k\to\infty} S_k u = 0$ para todo $u \in Z$. Elijamos $u \in Z$ y $r > 0$ tal que $\operatorname{sop}(u) \subset \Delta_r$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, utilizando el Lema 7.3 existe $A_{n,r} > 0$ tal que

$$p_n(u)^p = \int_{\Delta_r} |u(s)|^p \rho_n(s) ds \geq A_{n,r}\rho_n(0) \int_{\Delta_r} |u(s)|^p ds.$$

Además para todo $t \in \Delta_{3r}^{-1}(t_{j_k})$ se tiene que $\rho_n(t) \leq M_n e^{w_n 3r} \rho_n(t_{j_k})$. Como $s_k + \Delta_r \subset \Delta_{3k}^{-1}(t_{j_k})$ para todo $k \geq r$, entonces $\rho_k(t) \leq \frac{1}{k}$ para todo $t \in t_k + \Delta_r$ con $k \geq \max\{r,n\}$. A partir de estas estimaciones tenemos que para $k \geq \max\{r,n\}$ se cumple

$$\begin{aligned} p_n(S_k u)^p &= \int_{s_k+\Delta_r} |u(s-s_k)|^p \rho_n(s) ds \\ &\leq \int_{s_k+\Delta_r} |u(s-s_k)|^p \rho_k(s) ds \\ &\leq \frac{1}{k} \int_{\Delta_r} |u(s)|^p ds, \end{aligned}$$

con lo cual

$$p_n(S_k u)^p \leq \frac{1}{A_{n,r}\rho_n(0)k} p_n(u)^p,$$

por tanto $\lim_{k\to\infty} p_n(S_k u) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y así $\lim_{k\to\infty} S_k u = 0$ para todo $u \in Z$.

$\square$

En el Ejemplo 7.29 se puede ver cómo la discretización que se obtiene que verifica el Criterio mezclante puede no ser la discretización $\{T_{t_j}\}_j$ asociada a la sucesión $\{t_j\}_j$ que verifica las hipótesis del enunciado del Teorema 7.14.

Para el caso $\Delta = \mathbb{C}$ tenemos el siguiente resultado.

Teorema 7.15 *Sea $\{T_t\}_{t\in\mathbb{C}}$ el semigrupo de traslación en X. Si existe $\theta \in \mathbb{C}$ y una sucesión $\{t_j\}_j \subset \mathbb{C}$ verificando*

1. $\lim_{j\to\infty} t_j = \infty$,

2. $\lim_{j\to\infty} \rho_n(\theta + t_j) = \lim_{j\to\infty} \rho_n(\theta - t_j) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$,

entonces la discretización $\{T_{t_j}\}_j$ *es mezclante.*

Demostración. Supongamos que existe $\theta \in \mathbb{C}$ y una sucesión $\{t_j\}_j$ que verifique las hipótesis del enunciado. A partir de esta sucesión consideramos una sucesión de números naturales $\{j_k\}_k$ que verifique que para todo $j \geq j_k$ se cumpla que

1. $\rho_k(\theta + t_j) \leq \frac{1}{kM_k e^{2kw_k}}$,
2. $\rho_k(\theta - t_j) \leq \frac{1}{kM_k e^{2kw_k}}$,

tomando las constantes $M_k, w_k > 0$ crecientes en $k \in \mathbb{N}$ y de manera que se verifique la condición 7.1.2 de la definición de función peso admisible para cada función peso ρ_k.

Si consideramos los conjuntos $\Delta_{2r}^{-1}(\theta - t_j)$ para $r > |\theta|$ tenemos que $\Delta_{2r}^{-1}(\theta - t_j) = B(\theta - t_j, 2r)$ y por tanto $B(-t_j, r) \subset B(\theta - t_j, 2r)$. Por la condición 7.1.2 se tiene que $\rho_k(s) \leq M_k e^{w_k 2r} \rho_k(\theta - t_j)$ para todo $s \in B(-t_j, r)$.

Probemos que la discretización $\{T_{t_j}\}_j$ cumple el Criterio mezclante.

Tomamos como subconjunto $Y = Z \subset X$ del enunciado de dicho criterio el subconjunto de las funciones continuas de soporte compacto que es denso en X. Para cada $j \in \mathbb{N}$ definimos la aplicación $S_j : Z \to X$ actuando sobre una función $u \in Z$ como $S_j u(t) := u(t - t_j)$ para todo $t \in \mathbb{C}$. Verificamos las condiciones del Criterio mezclante.

Elijamos $u \in Z$ y $r > 0$ tal que $\mathrm{sop}(u) \subset B(0, r)$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$\begin{aligned} p_n(T_{t_j}u)^p &= \int_{B(-t_j,r)} |u(s+t_j)|^p \rho_n(s)ds \\ &= \int_{B(-t_j,r)} |u(s+t_j)|^p \rho_k(s)ds \\ &\leq \frac{1}{k} \int_{B(0,r)} |u(s)|^p ds, \end{aligned}$$

para todo $j \geq j_k$ con $k \geq \max\{r, n\}$.

Por otra parte, utilizando el Lema 7.3 existe $A_{n,r} > 0$ tal que

$$p_n(u)^p = \int_{B(0,r)} |u(s)|^p \rho_n(s)ds \geq A_{n,r}\rho_n(0) \int_{B(0,r)} |u(s)|^p ds,$$

con lo que

$$p_n(T_{t_j}u)^p \leq \frac{1}{A_{n,r}\rho_n(0)k} p_n(u)^p \quad \text{para todo } j \geq j_k \text{ con } k \geq \max\{r, n\}.$$

Por tanto, $\lim_{j\to\infty} p_n(T_{t_j}u) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así, $\lim_{j\to\infty} T_{t_j}u = 0$ para todo $u \in Z$.

Reemplazando $-t_j$ por t_j se pueden obtener estimaciones similares a las que hemos obtenido para ver que $\lim_{j\to\infty} T_{t_j}u = 0$ para todo $u \in Z$, pero en este caso para probar que para todo $u \in Z$ se cumple que $\lim_{j\to\infty} p_n(S_j u) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así poder concluir que $\lim_{j\to\infty} S_j u = 0$.

Finalmente, por la definición hecha de S_j se tiene que $T_{t_j} S_j u = u$ para todo $j \in \mathbb{N}$ y para todo $u \in Z$.

$\square$

7.3. Semigrupos de traslación mezclantes

En esta sección caracterizamos los semigrupos de traslación mezclantes en el contexto objeto de este capítulo. Veremos que para que éste sea mezclante es necesario y suficiente con que las funciones peso se anulen en el infinito.

Teorema 7.16 *Sea Δ un sector del plano complejo. El semigrupo de traslación $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en X es mezclante si, y sólo si,*

$$\lim_{t\to\infty} \rho_n(t) = 0 \text{ para todo } n \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Supongamos que el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es mezclante, por el Teorema 6.14 tenemos que para toda sucesión $\{t_k\}_k$ con $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$ la discretización $\{T_{t_k}\}_k$ es mezclante y por el Teorema 7.12 se cumple $\lim_{k\to\infty} \rho_n(t_k) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, por tanto, $\lim_{t\to\infty} \rho_n(t) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Para aplicar el Criterio mezclante al semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ tomamos como subconjunto $Y = Z \subset X$ del enunciado de dicho criterio el conjunto de las funciones continuas de soporte compacto que es denso en X. Definimos para cada $t \in \Delta$ la aplicación $S_t : Z \to X$. Para ello dada una función de soporte compacto $u \in Z$ con $\mathrm{sop}(u) \subset \Delta_r$ para cierto $r > 0$, definimos

$$S_t u(s) := \begin{cases} u(s-t) \text{ si } s \in t + \Delta_r \\ 0 \qquad\qquad \text{en otro caso} \end{cases}$$

A continuación verificamos las condiciones del Criterio mezclante. En primer lugar probamos que $\lim_{t\to\infty} T_t u = 0$ para todo $u \in Z$. Fijemos $u \in Z$ con $\mathrm{sop}(u) \subset \Delta_r$ para cierto $r > 0$. Distingamos dos casos:

1. Si $\Delta \neq \mathbb{C}$ se puede ver fácilmente $T_t u = 0$ para todo $t \in \Delta$ con $|t| \geq r$.

2. Si $\Delta = \mathbb{C}$ ó $\Delta = \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}$ dado $n \in \mathbb{N}$ existe $r_n \in \mathbb{N}$ de manera que $\rho_n(s) \leq \frac{1}{n}$ para todo $s \in \Delta$ con $|s| \geq r_n$, por tanto, para $t \in \Delta$ con $|t| \geq r_n + r$ tenemos que

$$p_n(T_t u)^p = \int_{-t+\Delta_r} |u(s+t)|^p \rho_n(s) ds \leq \frac{1}{n} \int_{\Delta_r} |u(s)|^p ds.$$

Por otra parte, utilizando el Lema 7.3 existe $A_{n,r} > 0$ tal que

$$p_n(u)^p = \int_{\Delta_r} |u(s)|^p \rho_n(s) ds \geq A_{n,r} \rho_n(0) \int_{\Delta_r} |u(s)|^p ds,$$

con lo cual

$$p_n(T_t u)^p \leq \frac{1}{A_{n,r}\rho_n(0)n} p_n(u)^p \quad \text{para todo } t \in \Delta \text{ con } |t| \geq r_n + r.$$

Por tanto. $\lim_{t\to\infty} p_n(T_t u) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así, $\lim_{t\to\infty} T_t u = 0$ para todo $u \in Z$.

De manera análoga probamos $\lim_{t\to\infty} S_t u = 0$ para todo $u \in Z$. Fijemos $u \in Y$, con $\mathrm{sop}(u) \subset \Delta_r$ para cierto $r > 0$. Si consideramos $t \in \Delta$ con $|t| \geq r_n + r$ tenemos que

$$p_n(S_t u)^p = \int_{t+\Delta_r} |u(s-t)|^p \rho_n(s) ds \leq \frac{1}{n} \int_{\Delta_r} |u(s)|^p ds.$$

combinando esta estimación con la obtenida previamente para $p_n(u)^p$ tenemos que

$$p_n(S_t u)^p \leq \frac{1}{A_{n,r}\rho_n(0)n} p_n(u)^p \quad \text{para todo } t \in \Delta \text{ con } |t| \geq r_n + r.$$

Por tanto, $\lim_{t\to\infty} p_n(S_t u) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$, y así, $\lim_{t\to\infty} S_t u = 0$ para todo $u \in Z$.

Finalmente, por definición tenemos que $T_t S_t u = u$ para todo $t \in \Delta$ y para todo $u \in Z$, y por tanto, $\lim_{t\to\infty} T_t S_t u = u$ para todo $u \in Z$.

□

Observación 7.17 Si el semigrupo de traslación es mezclante en un rayo, entonces lo es para toda discretización contenida en dicho rayo. El recíproco también es cierto por ser el semigrupo de traslación restringido a un rayo un C_0-semigrupo.

Observación 7.18 No es suficiente con que la condición $\lim_{t\to\infty} \rho_n(t) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumpla únicamente en rayos. En el Ejemplo 7.27 tenemos un semigrupo que es mezclante en cada rayo, y sin embargo, dicho semigrupo no es mezclante.

7.4. Semigrupos de traslación caóticos

El caos para los semigrupos de traslación en espacios $L^p_\rho(\mathbb{R}^+)$, con $1 \leq p < \infty$ y ρ una función peso admisible, ha sido caracterizado por deLaubenfels y Emamirad.

Teorema 7.19 *[dE01, Cor. 4.7] Sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ el semigrupo de traslación en $L^p_\rho(\mathbb{R}^+)$ con $1 \leq p < \infty$ y ρ una función peso admisible. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *$\{T_t\}_{t\geq 0}$ es un semigrupo caótico.*
2. *$\displaystyle\int_0^\infty \rho(s)ds < \infty$.*
3. *$\sup\{\mu \in \mathbb{R} : \int_0^\infty e^{\mu s}\rho(s)ds < \infty\} > 0$.*
4. *T_1 tiene un punto periódico no trivial.*
5. *T_1 es caótico.*

Obsérvese que según este resultado el semigrupo de traslación en $L^1_\rho(\mathbb{R}^+)$ con $\rho(s) = 1/(1+s)$ es hipercíclico e incluso mezclante, pero no es caótico. Véase [dE01, Nota 4.9].

Enunciamos también un resultado de Matsui, Yamada y Takeo [MYT03] en el que los autores dan otra caracterización de los semigrupos de traslación caóticos en los espacios ponderados de funciones $L^p_\rho(I)$ para $I = \mathbb{R}^+$ e $I = \mathbb{R}$. Para resultados más generales referimos a deLaubenfels y Emamirad [dE01].

Teorema 7.20 *[MYT03, Teor. 2] Sea $I = \mathbb{R}^+$ (resp. $I = \mathbb{R}$) y sea $\{T_t\}_{t\in I}$ el semigrupo de traslación en $L^p_\rho(I)$ con $1 \leq p < \infty$ y ρ una función peso admisible. El semigrupo de traslación $\{T_t\}_{t\in I}$ es caótico si, y sólo si, para todo $\varepsilon > 0$ y para todo $\theta > 0$ existe $P > 0$ tal que*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho(\theta + kP) < \varepsilon \qquad \left(\textit{resp.} \sum_{k\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}} \rho(\theta + kP) < \varepsilon \right).$$

Extendemos estos resultados para los semigrupos de traslación que tienen como semigrupo índice un sector del plano complejo. Comenzamos dando la extensión para los espacios $\mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ con $1 \leq p < \infty$ y $\{\rho_n\}_n$ una sucesión creciente de funciones peso admisibles.

Teorema 7.21 *Sea Δ un sector del plano complejo y $X = \mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$. El semigrupo de traslación $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es caótico en X si, y sólo si, existe un rayo R tal que para todo $z \in \Delta$ existe $t \in R$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(z+kt) < \infty \text{ si } \Delta \neq \mathbb{C} \qquad \left(\text{resp. } \sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_n(z+kt) < \infty \text{ si } \Delta = \mathbb{C} \right).$$

Demostración. Dado $z \in \Delta$ sea v la función definida como:

$$v(s) := \begin{cases} 1 & \text{si } s \in z+\Delta_1, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases}$$

Claramente, $v \in X$ por ser medible y de soporte compacto.

Por otra parte se tiene que $\int_{z+\Delta_1} \rho_1(s)ds > 0$, puesto que si no fuera así, tendríamos $\rho_1 = 0$ casi por todas partes en $z+\Delta_1$, contradiciendo la Definición 7.1 de función peso admisible.

Como el semigrupo es caótico, existe $t \in \Delta^*$ y $u \neq 0$ en X con $T_t u = u$ tales que

$$p_1(v-u)^p < \frac{1}{2} \left(\int_{z+\Delta_1} \rho_1(s)ds \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Por periodicidad podemos reemplazar t por mt para cierto $m \in \mathbb{N}$ suficientemente grande de manera que $|mt| > 1$. Además, como $\mathrm{sop}(v) \subset z+\Delta_1$ y u es t periódica podemos considerar, en vez de u, su restricción al conjunto

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}_0} (z+kt+\Delta_1) \text{ si } \Delta \neq \mathbb{C} \quad \text{ó} \quad \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} (z+kt+\Delta_1) \text{ si } \Delta = \mathbb{C},$$

haciendo que fuera del mismo valga 0.

Sea $B := \{s \in z+\Delta_1 : |1-u(s)| \leq \frac{1}{2}\}$. La medida de este conjunto, $\mu(B)$, es positiva, puesto que si no fuera así tendríamos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^p} \int_{z+\Delta_1} \rho_1(s)ds &> p_1(v-u)^p \\ &\geq \int_{(z+\Delta_1)\setminus B} |1-u(s)|^p \rho_1(s)ds \\ &> \frac{1}{2^p} \int_{(z+\Delta_1)\setminus B} \rho_1(s)ds \\ &= \frac{1}{2^p} \int_{z+\Delta_1} \rho_1(s)ds, \end{aligned}$$

que es una contradicción. Obsérvese que por la definición dada del conjunto B se cumple que $|u(s)| > \frac{1}{2}$ para todo $s \in B$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$, como ρ_n es una función peso admisible, por el Lema 7.3 existe A_n tal que $A_n\rho_n(s) \leq \rho_n(s+s')$ para todo $s \in \Delta$ y $s' \in \Delta_1$.

De esta manera, si $\Delta \neq \mathbb{C}$ se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_\Delta |u(s)|^p \rho_n(s)ds &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{z+kt+\Delta_1} |u(s)|^p \rho_n(s)ds \\
&\geq A_n \sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(z+kt) \int_{z+kt+\Delta_1} |u(s)|^p ds \\
&\geq A_n \sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(z+kt) \int_{kt+B} |u(s)|^p ds \\
&\geq \frac{A_n}{2^p} \mu(B) \sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(z+kt)
\end{aligned}$$

Como $u \in \operatorname{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ tenemos que $\int_\Delta |u(s)|^p \rho_n(s)ds < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y por tanto $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(z+kt) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

Las estimaciones para $\Delta = \mathbb{C}$ son similares tomando en el sumatorio $k \in \mathbb{Z}$, en vez de $k \in \mathbb{N}_0$ como acabamos de hacer.

Comprobemos el recíproco, para ello probemos en primer lugar que el semigrupo es hipercíclico:

1. Si $\Delta \neq \mathbb{C}$, para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $t_n \in R$ tal que $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_n(n+kt_n) < \infty$. Por tanto existe $k_n \geq n$ tal que $\rho_n(n+k_n t_n) \leq \frac{1}{n}$. La sucesión $\{t'_n\}_n$, definida como $t'_n := n+k_n t_n$ para todo $n \in \mathbb{N}$ está contenida en Δ y verifica las hipótesis del Teorema 7.14.

2. Si $\Delta = \mathbb{C}$, existe $t \in R$ tal que $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \rho_n(kt) < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por tanto, se cumple que

$$\lim_{k\to\infty} \rho_n(kt) = \lim_{k\to\infty} \rho_n(-kt) = 0 \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N}.$$

   La sucesión $\{t'_k\}_k$, definida como $t'_k := kt$ para todo $k \in \mathbb{N}$, está contenida en Δ y verifica las hipótesis del Teorema 7.15.

Veamos ahora que los puntos periódicos son densos. Como las funciones continuas de soporte compacto son densas, consideremos una función v continua con $\operatorname{sop}(v) \subset \Delta_r$ para cierto $r > 0$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$ y $\varepsilon > 0$.

Como la función peso ρ_n es admisible, existen $M_n \geq 1$ y $w_n \in \mathbb{R}$ tales que para todo $s \in \Delta_{3r}^{-1}(kt)$ se cumple que $\rho_n(s) \leq M_n e^{w_n 3r} \rho(kt)$ y en particular para todo $s \in kt - 2r + \Delta_r$.

Por hipótesis existe $t' \in R$ tal que $|t'| > 4r$ y $\sum_{k=1}^{\infty} \rho_n(kt') < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Elijamos $m_n \in \mathbb{N}$ de manera que

$$\sum_{k=1}^{\infty} \rho_n(km_nt') < \frac{\int_{\Delta_r} |v(s)|^p ds}{M_n e^{w_n 3r} n^p}.$$

Definimos la sucesión $\{t_n\}_n$ como $t_n := m_nt'$ para todo $n \in \mathbb{N}$ y la función u_n como:

$$u_n(s) := \begin{cases} v(s) & \text{si } s \in \Delta_r, \\ v(\tau) & \text{si } s = kt_n - 2r + \tau, \text{ para } k \in \mathbb{N} \text{ y } \tau \in \Delta_r, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Todas las funciones u_n son t_n-periódicas y cumplen que

$$\begin{aligned} p_n(v-u_n)^p &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{kt_n-2r+\Delta_r} |u_n(s)|^p \rho_n(s) ds \\ &\leq M_n e^{w_n 3r} \left(\int_{\Delta_r} |v(s)|^p ds \right) \sum_{k=1}^{\infty} \rho_n(kt_n) < \frac{1}{n^p}. \end{aligned}$$

Por tanto $\lim_{n\to\infty} u_n = v$. Únicamente nos queda probar que las funciones $\{u_n\}_n$ están en $\mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$. Para cada $m \in N$ se tiene que $p_m(u_n) \leq p_m(v-u_n) + p_m(v)$ y esta expresión es finita ya que $p_m(v)$ es finita al tener $v \in X$ y con unas estimaciones similares a las anteriores se tiene que

$$\begin{aligned} p_m(v-u_n)^p &= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{kt_n-2r+\Delta_r} |u_n(s)|^p \rho_m(s) ds \\ &\leq M_m e^{w_m 3r} \left(\int_{\Delta_r} |v(s)|^p ds \right) \sum_{k=1}^{\infty} \rho_m(kt_n) \\ &\leq M_m e^{w_m 3r} \left(\int_{\Delta_r} |v(s)|^p ds \right) \sum_{k=1}^{\infty} \rho_m(kt'), \end{aligned}$$

siendo el último término finito por hipótesis.

□

Para el caso $X = \mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$, con una prueba similar y tomando supremos en vez de integrales, se obtiene el siguiente resultado

Teorema 7.22 *Sea Δ un sector del plano complejo y $X = \mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$. El semigrupo de traslación $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ en X es caótico si, y sólo si, existe un rayo R tal que para todo $z \in \Delta$ existe $t \in R$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple*

1. $\lim_{k\to\infty} \rho_n(z+kt) = 0$ *si* $\Delta \neq \mathbb{C}$.

2. $\lim_{k\to\infty} \rho_n(z+kt) = \lim_{k\to\infty} \rho_n(z-kt) = 0$ *si* $\Delta = \mathbb{C}$.

La caracterización del caos para semigrupos de traslación del Teorema 7.21 tiene una formulación equivalente en términos de la integrabilidad de las funciones peso ρ_n en bandas. Para ello, dado un rayo R y $m \in \mathbb{N}$, definimos la banda de eje R y amplitud $2m$ como $F_{R,m} := \{z \in \Delta : d(z,R) < m\}$, donde $d(s,R)$ indica la distancia de s al rayo R. Denotaremos por R^* al rayo R menos el origen.

Teorema 7.23 *Sea Δ un sector del plano complejo y $X = \operatorname{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta,\mathbb{C})$. El semigrupo de traslación $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es caótico en X si, y sólo si, existe un rayo R en Δ tal que*

$$\int_{F_{R,m}} \rho_n(s)ds < \infty \quad \textit{para todo } n,m \in \mathbb{N}.$$

Demostración. Supongamos $\Delta \neq \mathbb{C}$ y fijemos $n,m \in \mathbb{N}$ arbitrarios. Como el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es caótico, por el Teorema 7.21 existe un rayo R tal que para todo $z \in \Delta$ existe $t_z \in R^*$ de manera que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_n(z+jt_z) < \infty.$$

Dado este rayo R, existe $z \in \Delta$ tal que para todo $t \in R$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $F_{R,m} \cap \Delta_{|t|,2|t|} \subset \Delta_r^{-1}(z+k_0t)$ para cierto $r > 0$. De hecho se cumple que para $k > k_0$, si $k = k_0 + j$ con $j \in \mathbb{N}$, tenemos que $F_{r,m} \cap \Delta_{(j+1)|t|,(j+2)|t|} \subset \Delta_r^{-1}(z+kt)$. Escojamos dicho z y el $t_z \in R$ correspondiente.

Dados R y t_z la integral sobre la banda $F_{R,m}$ de la función peso ρ_n puede descomponerse en

$$\begin{aligned}\int_{F_{R,m}} \rho_n(s)ds &= \int_{F_{R,m}\cap\Delta_{|t|}} \rho_n(s)ds + \int_{F_{R,m}\cap(\Delta\setminus\Delta_{|t|})} \rho_n(s)ds \\ &= \int_{F_{R,m}\cap\Delta_{|t|}} \rho_n(s)ds + \sum_{j=0}^{\infty} \int_{F_{R,m}\cap\Delta_{(j+1)|t|,(j+2)|t|}} \rho_n(s)ds.\end{aligned}$$

De esta expresión, como la función característica del sector $\Delta_{|t|}$ está en X, tenemos que la primera integral es finita para todo $n \in \mathbb{N}$.

De la admisibilidad de la función peso ρ_n se tiene que existen dos constantes $M_n > 1$ y $w_n \in \mathbb{R}$ tales que $\rho_n(s) \leq M_n e^{w_n r} \rho_n(z+kt_z)$ para todo $s \in \Delta_r^{-1}(z+kt_z)$ con $k \geq k_0$. De esta manera tenemos que

$$\int_{F_{R,m}\cap\Delta_{(j+1)|t_z|,(j+2)|t_z|}} \rho_n(s)ds \leq M_n e^{w_n r} \rho_n(z+(k_0+j)t_z)\mu(F_{R,m}\cap\Delta_{(j+1)|t_z|,(j+2)|t_z|}).$$

Obsérvese que $\mu(F_{R,m} \cap \Delta_{(j+1)|t_z|,(j+2)|t_z|}) < 2m|t_z|$ para todo $j \in \mathbb{N}$ con lo que tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{\infty} \int_{F_{R,m}\cap\Delta_{(j+1)|t_z|,(j+2)|t_z|}} \rho_n(s)ds &\leq \sum_{j=0}^{\infty} M_n e^{w_n r} \rho_n(z+(k_0+j)t_z) 2m|t_z| \\ &\leq 2m|t_z| M_n e^{w_n r} \sum_{j=0}^{\infty} \rho_n(z+jt_z)\end{aligned}$$

que es finito por hipótesis.

Para el caso $\Delta = \mathbb{C}$ el rayo en cuestión es una recta que pasa por el origen. Habría que repetir las estimaciones anteriores para las dos semirrectas en que el origen divide al rayo. Para este caso se usa el sumatorio de $\rho_n(z+jt_z)$ con $j \in \mathbb{Z}$ en vez de $j \in \mathbb{N}_0$.

Comprobemos el recíproco viendo que se cumple la condición suficiente del Teorema 7.21. Tomemos el rayo R del enunciado sobre cuyas bandas asociadas son integrables las funciones peso y elijamos $z \in \Delta$ arbitrario. Sea $m \in \mathbb{N}$ tal que la banda $F_{R,m}$ contiene a $z + \Delta_1$. Elijamos $t \in R$ con $|t| > 1$ y definamos la función v como:

$$v(s) := \begin{cases} 1 & \text{si } s = z + kt + s' \text{ con } k \in \mathbb{N}_0 \text{ y } s' \in \Delta_1, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Tenemos que $v \in X$ ya que $\int_{F_{R,m}} \rho_n(s)ds < \infty$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por el Lema 7.3 existe $A_n > 0$ tal que $A_n\rho_n(z+kt) \leq \rho_n(s)$ con $s \in z+kt+\Delta_1$, por tanto

$$\begin{aligned}\int_{F_{R,m}} \rho_n(s)ds \geq p_n(v)^p & \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{z+kt+\Delta_1} \rho_n(s)ds \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} A_n\rho_n(z+kt) \int_{z+kt+\Delta_1} ds \\ &\geq A_n \mu(\Delta_1) \sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(z+kt)\end{aligned}$$

y por tanto $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(z+kt) < \infty$.

$\square$

Corolario 7.24 *Sea $X = \mathrm{proj}_n L^p_{\rho_n}(\Delta)$ y R un rayo de Δ que no está contenido en la frontera de Δ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. *Existe* $t \in R$ *tal que* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \rho_n(kt) < \infty$ *si* $\Delta \neq \mathbb{C}$ $\left(\textit{resp. } \sum_{k\in\mathbb{Z}} \rho_n(kt) < \infty \textit{ si } \Delta = \mathbb{C}\right)$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

2. $\int_{F_{R,1}} \rho_n(s)ds < \infty$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

3. *Existe* $t \in R^*$ *y* $u \in X$, $u \neq 0$ *tales que* $T_t u = u$.

Además las condiciones 1.-3. implican que el semigrupo de traslación $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ *es caótico en* X.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. La prueba de esta implicación está contenida en la prueba del teorema anterior de la necesidad de la condición del enunciado, ya que si el rayo R no está en la frontera de Δ se puede tomar $z = 0$.

2. $\Rightarrow$ 3. Consideremos $r < 1$ y $t \in R$ con $|t| > 1$. La función v definida como:

$$v(s) := \begin{cases} 1 & \text{si } s = kt + s' \text{ con } k \in \mathbb{N} \text{ y } s' \in \Delta_r, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

es t-periódica y está en X por 2.

3. $\Rightarrow$ 1. Supongamos que existe $t' \in R^*$ y $u \in X$, $u \neq 0$ tales que $T_{t'}u = u$. Dado t', existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\mu(\mathrm{sop}(u) \cap \Delta_{k_0|t'|}) > 0$. Sea $t := k_0 t'$ y consideremos como $\tilde{u}$ la restricción de la función u al conjunto $\cup_{k=0}^{\infty}(kt + \Delta_{|t|})$, que es también una función no nula y t-periódica.

Para cada $m \in \mathbb{N}$ consideremos el conjunto $B_m := \{s \in \Delta_{|t|} : |\tilde{u}(s)| \geq 1/m\}$. Tal y como hemos elegido t, existe $m_0 \in \mathbb{N}$ tal que el conjunto B_{m_0} tiene medida positiva.

Por el Lema 7.3 existe $A_{n,t} > 0$ tal que $A_{n,t}\rho_n(kt) \leq \rho_n(s)$ con $s \in kt + \Delta_{|t|}$.

$$\begin{aligned} p_n(u)^p &\geq p_n(\tilde{u})^p \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{kt+\Delta_{|t|}} |u(s)|^p \rho_n(s)ds \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} A_{n,t}\rho_n(kt) \int_{kt+B_{m_0}} |u(s)|^p ds \\ &\geq \frac{A_{n,t}\mu(B)}{m_0^p} \sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(kt) \end{aligned}$$

y por tanto $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(kt) < \infty$.

Finalmente, veamos que la condición 1. implica que el semigrupo es caótico. En virtud del Teorema 7.21, probemos que existe un rayo R tal que para todo $z \in \Delta$ existe $t \in R$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ se cumple que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(z+kt) < \infty \text{ si } \Delta \neq \mathbb{C}.$$

La prueba para el caso $\Delta = \mathbb{C}$ es similar trabajando con el sumatorio de la misma expresión pero con el índice $k \in \mathbb{Z}$.

Por la condición 1. sabemos que existe un rayo R de Δ que no pertenece a la frontera de Δ y tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(kt) < \infty$ para cierto $t \in R$ y para todo $n \in \mathbb{N}$. Dado z, existe $k_0 \in R$ tal que $z \in \Delta_r^{-1}(k_0 t)$ para cierto $r > 0$, puesto que el rayo no está contenido en la frontera de Δ. Por tanto, fijado $n \in \mathbb{N}$, de la admisibilidad de la función peso ρ_n sabemos que existen constantes $M_n > 1$ y $w_n \in \mathbb{R}$ de manera que $\rho_n(z) \leq M_n e^{w_n r} \rho_n(k_0 t)$. De hecho, tenemos además que $\rho_n(z + jt) \leq M_n e^{w_n r} \rho_n((k_0 + j)t)$ para todo $j \in \mathbb{N}$.

De esta manera tenemos que

$$\sum_{j=0}^{\infty} \rho_n(z+jt) \leq \sum_{j=0}^{\infty} M_n e^{w_n r} \rho_n((k_0+j)t) \leq M_n e^{w_n r} \sum_{k=0}^{\infty} \rho_n(kt) < \infty.$$

$\square$

En este último corolario, la condición de que el rayo R no esté en la frontera de Δ es necesaria como muestra el Ejemplo 7.30.

Corolario 7.25 *Sea $X = \mathrm{proj}_n C_{0,\rho_n}(\Delta)$ y R un rayo de Δ que no pertenece a la frontera de Δ. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. $\displaystyle\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in R}} \rho_n(z) = 0$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.
2. *Existe $t \in R^*$ y $u \in X$, $u \neq 0$ tales que $T_t u = u$.*

Además las condiciones 1.-2. implican que el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es caótico en X.

Demostración. 1. $\Rightarrow$ 2. Consideremos la función u definida como:

$$u(s) := \begin{cases} 1 & \text{si } s \in F_{R,1}, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Esta función es t-periódica para cualquier $t \in R$. Veamos que $u \in X$: Para todo $s \in F_{R,1}$ existe $z \in R$ con $|z| > |s|$ tal que $s \in \Delta_1^{-1}(z)$. Fijemos $n \in \mathbb{N}$, como la función peso ρ_n es admisible existen $M_n > 1$ y $w_n \in \mathbb{R}$ tales que para todo $s \in F_{R,1}$ existe $z \in R$ tal que $\rho_n(s) \leq M_n e^{w_n} \rho(z)$. Por hipótesis se tiene que $\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in R}} \rho_n(z) = 0$ con lo que $\lim_{\substack{s\to\infty \\ s\in\Delta}} |u(s)|\rho_n(s) = 0$ y por tanto $\sup_{s\in\Delta} |u(s)|\rho_n(s) < \infty$.

2. $\Rightarrow$ 1. Fijado $n \in \mathbb{N}$ y reemplazando las integrales por supremos en la prueba de la implicación 3. $\Rightarrow$ 1. del corolario anterior, obtenemos que existe $t \in R$ tal que $\lim_{k\to\infty} \rho_n(kt) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Para todo $z \in R$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $z \in \Delta_{|t|}^{-1}(kt)$. De la admisibilidad de la función peso se obtiene que existen $M_n > 1$ y $w_n \in \mathbb{R}$ tales que para todo $z \in R$ existe $k \in \mathbb{N}$ tal que $\rho_n(z) \leq M_n e^{w_n|t|} \rho_n(kt)$, con lo que $\lim_{\substack{z\to\infty \\ z\in R}} \rho_n(z) = 0$.

La prueba de que la condición 1. implica que el semigrupo de traslación $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es caótico es similar a la prueba que se hace en el corolario anterior.

$\square$

7.5. Contraejemplos

En esta sección vemos algunos ejemplos de semigrupos de traslación que nos servirán para completar los resultados del capítulo anterior y de éste.

Ejemplo 7.26 Sea $\Delta = \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}^+$. Consideremos el espacio $L^p_\rho(\Delta)$ con $1 \leq p < \infty$ definido a partir de la función peso

$$\rho(x+iy) := \begin{cases} \left(\frac{y+1}{x+1}\right)^2 & \text{si } y \geq \sqrt{x+1} - 1 \\ \frac{1}{(y+1)^2} & \text{si } y < \sqrt{x+1} - 1 \end{cases}$$

En primer lugar comprobamos que la función ρ es una función peso admisible. Esta función es continua, por tanto medible, y positiva en todos los puntos de Δ. Sea $M := \sup\left\{\frac{(1+\alpha)^2}{e^\alpha} : \alpha \geq 0\right\}$. Veamos que

$$\rho(t) \leq M e^{|t'|} \rho(t+t') \text{ para todo } t, t' \in \Delta.$$

Consideramos $t = x+iy, t' = a+bi \in \Delta$. Distinguiremos varios casos según donde se hallen t y t'. Para ello, definimos como A y B las regiones de Δ donde cambia la definición de la función peso.

$$A := \left\{x+iy \in \Delta : y \geq \sqrt{x+1} - 1\right\}$$
$$B := \left\{x+iy \in \Delta : y < \sqrt{x+1} - 1\right\}$$

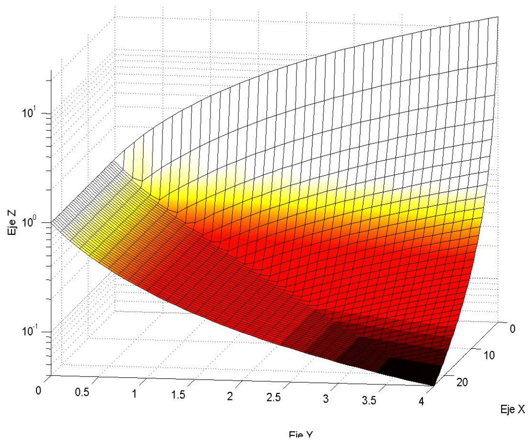

Figura 7.1: Función peso del Ejemplo 7.26.

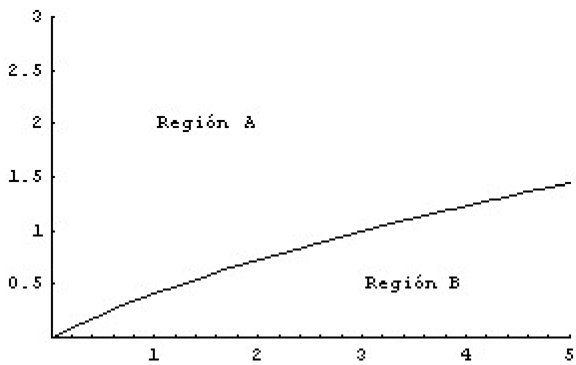

Figura 7.2: Regiones del sector.

1. Si $t, t+t' \in A$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \left(\frac{y+1}{y+b+1}\right)^2 \left(\frac{x+a+1}{x+1}\right)^2 \leq (1+a)^2 \leq Me^a \leq Me^{|t'|}.$$

2. Si $t, t+t' \in B$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \left(\frac{y+b+1}{y+1}\right)^2 \leq (1+b)^2 \leq Me^{|t'|}.$$

3. Si $t \in A, t+t' \in B$ entonces

$$\begin{aligned}\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} &= \frac{(y+1)^2(y+b+1)^2}{(x+1)^2} \leq \frac{(y+b+1)^4}{(x+1)^2} \\ &\leq \left(\frac{x+a+1}{x+1}\right)^2 \leq (1+a)^2 \leq Me^{|t'|},\end{aligned}$$

ya que $y+b+1 \leq \sqrt{x+a+1}$.

4. Si $t \in B, t+t' \in A$ entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \frac{(x+a+1)^2}{(y+1)^2(y+b+1)^2} \leq \frac{(y+b+1)^4}{(y+1)^2(y+b+1)^2} \leq (1+b)^2 \leq Me^{|t'|}$$

ya que $\sqrt{x+a+1} \leq y+b+1$.

Estudiemos ahora la hiperciclicidad de este semigrupo. La curva $y = \sqrt{x+1} - 1$ con $x \geq 0$ está contenida en Δ. Si consideramos la sucesión $\{t_j\}_j$, con $t_j = x_j + i\sqrt{x_j+1} - 1$, definida a partir de una sucesión $\{x_j\}_j$ en $\mathbb{R}^+$ con $\lim_{j\to\infty} x_j = \infty$, se tiene $\lim_{j\to\infty} \rho(t_j) = \lim_{j\to\infty} \frac{1}{x_j+1} = 0$, y por el Teorema 7.14 existe una discretización mezclante del semigrupo. Aplicando el Teorema 6.13 obtenemos que $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es un semigrupo débilmente mezclante.

Sin embargo, este semigrupo no es mezclante, puesto que si consideramos la función peso sobre cada rayo que sale del origen tenemos:

1. sobre el semieje real positivo $\rho(x+i0) = 1$ para todo $x \geq 0$,

2. sobre el semieje imaginario positivo

$$\lim_{y\to\infty} \rho(0+iy) = \lim_{y\to\infty} (y+1)^2 = \infty,$$

3. dado $m > 0$ sobre el rayo $y = mx$ con $x \geq 0$ existe $x_m > 0$ tal que si $x \geq x_m$ entonces $x + imx \in A$, y por tanto

$$\lim_{x\to\infty} \rho(x+imx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{mx+1}{x+1}\right)^2 = m^2.$$

En cualquier caso el límite es no nulo y aplicando el Teorema 7.10, puesto que nuestro semigrupo restringido a cada rayo equivale a un semigrupo de traslación en el mismo espacio que tiene como conjunto de índices $\mathbb{R}^+$, ninguna discretización del semigrupo contenida en un rayo es hipercíclica, y por tanto, el semigrupo no es mezclante. De hecho, ninguna discretización autónoma del semigrupo es mezclante.

Ejemplo 7.27 Sea $\Delta = \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}^+$. Consideremos el espacio $L^p_\rho(\Delta)$ con $1 \leq p < \infty$ definido a partir de la función peso

$$\rho(x+iy) := \begin{cases} \frac{\sqrt{x+1}}{y+1} & \text{si } y \geq \sqrt{x+1}-1 \\ \frac{y+1}{\sqrt{x+1}} & \text{si } y < \sqrt{x+1}-1 \end{cases}$$

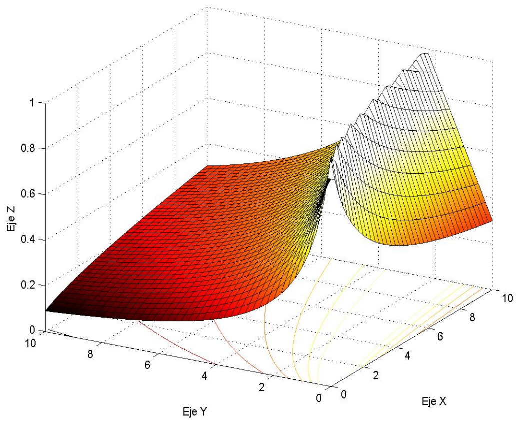

Figura 7.3: Función peso del Ejemplo 7.27.

En primer lugar comprobamos que la función ρ es una función peso admisible. Esta función es continua, por tanto medible, y positiva en todos los puntos de Δ. Sea $M \geq 1$, veamos que

$$\rho(t) \leq Me^{|t'|}\rho(t+t') \text{ para todo } t, t' \in \Delta.$$

Consideramos $t = x+iy, t' = a+bi \in \Delta$. Distinguiremos varios casos según donde se hallen t y t'. Para ello, definimos como A y B las regiones de Δ donde cambia la definición de la función peso de manera idéntica a como lo hemos hecho en el ejemplo anterior.

1. Si $t, t+t' \in A$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{y+1}\right)\left(\frac{y+b+1}{\sqrt{x+a+1}}\right) \leq (1+b) \leq Me^b \leq Me^{|t'|}.$$

2. Si $t, t+t' \in B$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \left(\frac{y+1}{\sqrt{x+1}}\right)\left(\frac{\sqrt{x+a+1}}{y+b+1}\right)$$
$$\leq \sqrt{\frac{x+a+1}{x+1}} \leq \sqrt{1+a} \leq Me^{a} \leq Me^{|t'|}.$$

3. Si $t \in A, t+t' \in B$ entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \left(\frac{\sqrt{x+1}}{y+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x+a+1}}{y+b+1}\right)$$
$$\leq \frac{\sqrt{x+a+1}}{y+b+1} \leq \frac{\sqrt{x+a+1}}{\sqrt{x+1}+b}$$
$$\leq \sqrt{\frac{x+|t'|+1}{x+1}} \leq \sqrt{1+|t'|} \leq Me^{|t'|}.$$

ya que $y+1 \geq \sqrt{x+1}$.

4. Si $t \in B, t+t' \in A$ entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \left(\frac{y+1}{\sqrt{x+1}}\right)\left(\frac{y+b+1}{\sqrt{x+a+1}}\right)$$
$$\leq \frac{y+1}{\sqrt{x+1}} < \frac{\sqrt{x+a+1}-b}{\sqrt{x+1}}$$
$$\leq \sqrt{\frac{x+|t'|+1}{x+1}} \leq \sqrt{1+|t'|} \leq Me^{|t'|}.$$

ya que $y+b+1 < \sqrt{x+a+1}$.

Estudiemos ahora la hiperciclicidad de este semigrupo. El límite de la función peso es 0 sobre cada rayo que sale del origen, veámoslo:

1. sobre el semieje real positivo

$$\lim_{x\to\infty} \rho(x+i0) = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\sqrt{x+1}} = 0,$$

2. sobre el semieje imaginario positivo

$$\lim_{y\to\infty} \rho(0+iy) = \lim_{y\to\infty} \frac{1}{y+1} = 0,$$

3. dado $m > 0$ sobre el rayo $y = mx$ con $x \geq 0$ existe $x_m > 0$ tal que si $x \geq x_m$, entonces $x + imx \in A$, y por tanto

$$\lim_{x\to\infty} \rho(x+imx) = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\sqrt{x+1}}{mx+1} \right) = 0.$$

Si consideramos la restricción del semigrupo a cada rayo, volvemos a tener un semigrupo que equivale a un semigrupo de traslación en el mismo espacio que tiene como conjunto de índices $\mathbb{R}^+$. Como el límite de la función peso en cada rayo es nulo, por el Teorema 7.16 la restricción del semigrupo a cada rayo es mezclante. De hecho, todas las discretizaciones autónomas son mezclantes.

Sin embargo, como la curva $y = \sqrt{x+1} - 1$ con $x \geq 0$ está contenida en Δ y en ella tenemos que $\rho(x + i(\sqrt{x+1} - 1)) = 1$, si consideramos una sucesión $\{t_k\}_k$ sobre dicha curva con $\lim_{k\to\infty} t_k = \infty$, por el Teorema 7.12 la discretización $\{T_{t_k}\}_k$ no puede ser mezclante y por el Teorema 6.14 el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ tampoco puede serlo.

Ejemplo 7.28 Sea $\Delta = \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}$. Consideremos el espacio $L^p_\rho(\Delta)$ con $1 \leq p < \infty$ definido a partir de la función peso

$$\rho(x+iy) := \begin{cases} e^{-x}(e^{-y}+1) & \text{si } y \geq 0, \\ 2e^{-x+y} & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

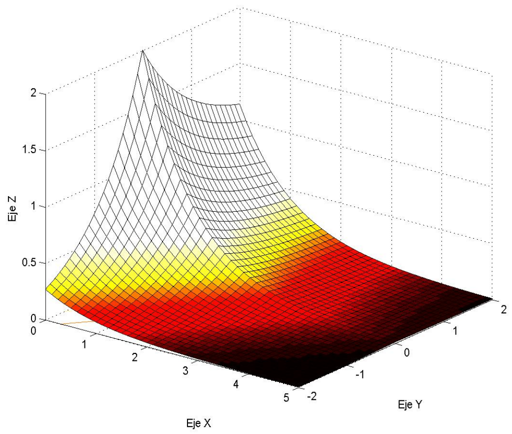

Figura 7.4: Función peso del Ejemplo 7.28.

En primer lugar comprobamos que la función ρ es una función peso admisible. Esta función es continua, por tanto medible, y positiva en todos los puntos de Δ. Sea $M \geq 2$, veamos que

$$\rho(t) \leq Me^{2|t'|}\rho(t+t') \text{ para todo } t,t' \in \Delta.$$

Consideramos $t = x+iy, t' = a+bi \in \Delta$. Distinguiremos varios casos según donde se hallen t y t'. Para ello, definimos como A y B los cuadrantes primero y cuarto del plano complejo, que es donde cambia la definición de la función peso.

1. Si $t, t+t' \in A$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \frac{e^{-x}(e^{-y}+1)}{e^{-x-a}(e^{-y-b}+1)} \leq 2e^a \leq Me^{2|t|},$$

   ya que $y, y+b \geq 0$.

2. Si $t \in A, t+t' \in B$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \frac{e^{-x}(e^{-y}+1)}{2e^{-x-a+y+b}} \leq \frac{1}{e^{-a+y+b}} \leq e^a \leq Me^{2|t|},$$

   ya que $y \geq 0, y+b < 0$.

3. Si $t \in B, t+t' \in A$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \frac{2e^{-x+y}}{e^{-x-a}(e^{-y-b}+1)} \leq e^a \leq Me^{2|t|},$$

   ya que $y < 0, y+b \geq 0$.

4. Si $t \in B, t+t' \in B$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \frac{2e^{-x+y}}{2e^{-x-a+y+b}} \leq e^{a-b} \leq Me^{2|t|}.$$

Se cumple que $T'_{is} = T_{-is}$ y que T_{-is} tiene valores propios para todo $s \in \mathbb{R}$. Haremos las estimaciones para el caso $p = 1$.

Elijamos $\frac{1}{e^2} < \lambda < 1$, a partir de él vamos a construir un vector propio, v_λ, asociado al valor propio λ para el operador T_{-2i}. Sea la familia de intervalos $\Omega_k := [0,1] \times i[2k, 2k+1]$ con $k \in \mathbb{Z}$.

Definimos

$$v_\lambda(z) := \begin{cases} \lambda^k & \text{si } z \in \Omega_k, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Sea $\mu_k = \max_{z\in\Omega_k} \rho(z)$. Se puede comprobar que $\mu_k \le e^{-2k}+1$ si $k\in\mathbb{Z}_0^+$ y que $\mu_k \le 2e^{-2k+1}$ si $k\in\mathbb{Z}_0^+$. A partir de estas estimaciones vamos a ver que $v_\lambda \in L^p_\rho(I)$.

$$\begin{aligned}\|v_\lambda\| &\le \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k(e^{-2k}+1)+\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{-k}2e^{-2k+1}\\ &= \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k+\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{e^2}\right)^k+\frac{2}{e}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda e^2}\right)^k<\infty\end{aligned}$$

puesto que son tres series geométricas de razón menor que 1 en módulo. De esta manera $T'_{2i}=T_{-2i}$ tiene un valor propio, y por tanto, existe un polinomio $q(z)=\sum_{k=0}^n \alpha_k z^k$ tal que el operador $q(T)=\sum_{k=0}^n \alpha_k T^k$ no tiene rango denso. Sin embargo, este semigrupo es hipercíclico por el Teorema 7.14 por lo que la Proposición 5.19 no se puede extender a semigrupos definidos sobre un sector del plano complejo.

Ejemplo 7.29 En primer lugar consideraremos una función peso $\rho:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ y veremos que es una función peso admisible, por tanto su extensión radial a un sector Δ distinto de $\mathbb{C}$ y de $\mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}$ definida como $\tilde{\rho}(z)=\rho(|z|)$ para todo $z\in\Delta$ será una función peso admisible en Δ.

La función $\rho:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ viene definida como

$$\rho(x+iy):=\begin{cases}1 & \text{si } 0\le t\le 1,\\ e^{k+(1/2)-s} & \text{si } t=k^2+s \text{ con } s\in(k^2,(k+1)^2]\end{cases}$$

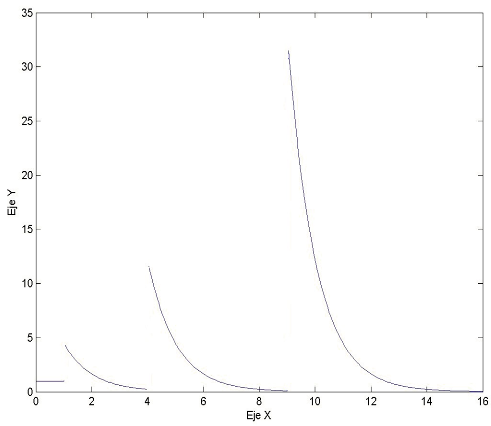

Figura 7.5: Función peso en $\mathbb{R}^+$ del Ejemplo 7.29.

En primer lugar comprobamos que la función ρ es una función peso admisible. Esta función es continua a trozos, por tanto es medible, y positiva en todos los puntos de $\mathbb{R}^+$. Sea $M \geq e^9$, veamos que

$$\rho(t) \leq Me^{t'}\rho(t+t') \text{ para todo } t,t' \in \mathbb{R}^+.$$

1. Si $0 \leq t, t+t' \leq 1$, entonces

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = 1 \leq Me^{t'}$$

2. Si $0 \leq t \leq 1$ y $t+t' \in (k^2,(k+1)^2]$ para cierto $k \in \mathbb{N}$, tenemos que $t+t' = k^2+s$ con $s \in (0,2k1]$ con lo que

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \frac{1}{e^{k+1/2-s}} \leq e^{k+1/2}$$

   En este caso $t' > k^2-1$ y para $k \geq 3$ tenemos que $e^{k+1/2} \leq e^{t'}$, por tanto tomando $M := e^9$ aseguramos que $e^{k+1/2} \leq Me^{t'}$ para todo $k \in \mathbb{N}$.

3. Si $t = k^2+s$ y $t+t' = (k+p)^2+s'$ con $p \in \mathbb{N}_0$ entonces tenemos

$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \frac{e^{k+1/2-s}}{e^{k+p+1/2-s'}} = e^{s'-p+s} \leq e^{t'} \leq Me^{t'}$$

   ya que $t' = p^2+2pk+s'-s$.

Ahora bien esta función peso cumple que $\rho(k^2) = e^{-k-1/2}$ y por tanto el límite respecto de k tiende a 0. Si elegimos una discretización $\{t_k\}_k$ en Δ con $|t_k| = k^2$, esta discretización no puede ser mezclante, puesto que si redefinimos la función peso como $\rho(k^2) = e^{k+1/2}$, cambiando el comportamiento en los extremos de cada tramo de definición, ni el espacio ni las funciones del mismo varían y sin embargo la discretizacion T_{t_k} no puede ser mezclante puesto $\lim_{k\to\infty}\rho(t_k) = \infty$ y no sería cero, contradiciendo el Teorema 7.12. Obsérvese que la sucesión $\{t_k\}_k$ cumple las hipótesis del Teorema 7.14 pero la discretización $\{T_{t_k}\}_k$ no es mezclante.

Ejemplo 7.30 Sea $\Delta = \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}^+$. Consideremos el espacio $L^p_\rho(\Delta)$ con $1 \leq p < \infty$ definido a partir de la función peso

$$\rho(x+iy) := \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq 2, \\ e^{x(y-2)} & \text{si } y < 2 \end{cases}$$

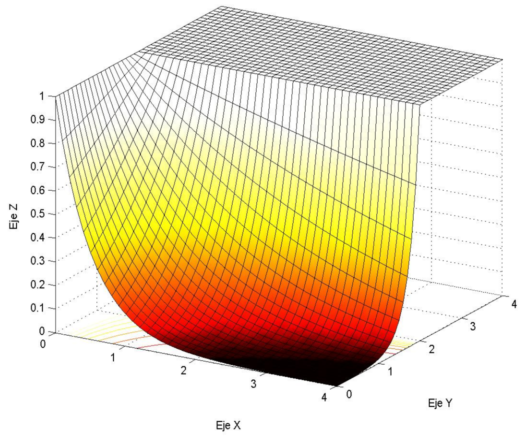

Figura 7.6: Función peso del Ejemplo 7.30.

En primer lugar comprobamos que la función ρ es una función peso admisible. Esta función es continua, por tanto medible, y positiva en todos los puntos de Δ. Sea $M \geq e$, veamos que

$$\rho(t) \leq Me^{2|t'|}\rho(t+t') \text{ para todo } t,t' \in \Delta.$$

Consideramos $t = x+iy, t' = a+bi \in \Delta$. Distinguiremos varios casos según donde se hallen t y t'. Para ello, definimos como A y B las regiones de Δ donde cambia la definición de la función peso: $A := \mathbb{R}^+ + i[2,+\infty)$ y $B := \mathbb{R}^+ + i[0,2)$. Obsérvese que el caso $t \in A, t+t' \in B$ no se puede dar.

1. Si $t, t+t' \in A$, entonces
$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = 1 \leq Me^{2|t'|}.$$

2. Si $t, t+t' \in B$, entonces
$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = \frac{e^{x(y-2)}}{e^{(x+a)(y+b-2)}} = \frac{e^{-xb}}{e^{a(y+b-2)}}$$
$$\leq \frac{1}{e^{a(b-2)}} \leq \frac{1}{e^{-2a}} \leq Me^{2a} \leq Me^{2|t'|}.$$
ya que $0 \leq b, y < 2$.

3. Si $t \in B, t+t' \in A$ entonces como $y < 2$
$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = e^{x(y-2)} \leq 1 \leq Me^{2|t'|}$$

La función u definida en Δ como

$$u(x+iy) := \begin{cases} 0 & \text{si } y \geq 1, \\ 1 & \text{si } y < 1 \end{cases}$$

está en $L^p_\rho(\Delta)$ y $T_t u = u$ para todo $t \in \mathbb{R}^+$. Por tanto el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ tiene un punto periódico y sin embargo no es caótico. Si elegimos $z = x+iy$ con $y > 2$ no existe ningún $t \in \Delta$ tal que $\sum_{k=0}^{\infty} \rho(z+kt) < \infty$, por tanto por el Teorema 7.21 el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ no es caótico.

Ejemplo 7.31 Sea $\Delta = \mathbb{R}^+ + i\mathbb{R}^+$. Consideremos el espacio $L^p_\rho(\Delta)$ con $1 \leq p < \infty$ definido a partir de la función peso

$$\rho(x+iy) := \begin{cases} 1 & \text{si } y \geq \sqrt{x}, \\ e^{y-\sqrt{x}} & \text{si } y < \sqrt{x} \end{cases}$$

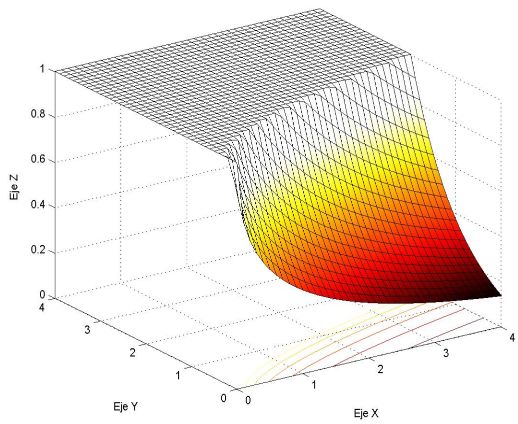

Figura 7.7: Función peso del Ejemplo 7.31.

En primer lugar comprobamos que la función ρ es una función peso admisible. Esta función es continua, por tanto medible, y positiva en todos los puntos de Δ. Sea $M \geq e$, veamos que

$$\rho(t) \leq Me^{2|t'|}\rho(t+t') \text{ para todo } t, t' \in \Delta.$$

Consideramos $t = x+iy, t' = a+bi \in \Delta$. Distinguiremos varios casos según donde se hallen t y t'. Para ello definimos como A y B las regiones de Δ donde cambia la definición de la función peso.

$$A := \left\{x+iy \in \Delta : y \geq \sqrt{x}\right\}$$
$$B := \left\{x+iy \in \Delta : y < \sqrt{x}\right\}$$

1. Si $t, t+t' \in A$, entonces
$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = 1 \leq Me^{2|t'|}.$$

2. Si $t \in A, t+t' \in B$ entonces
$$\begin{aligned}\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} &= \frac{1}{e^{y+b-\sqrt{x+a}}} \leq e^{\sqrt{x}+\sqrt{a}-y-b}\\ &\leq e^{\sqrt{a}-b} \leq e^{\sqrt{1+a}-b}\\ &\leq e^{1+a-b} \leq Me^{2|t'|},\end{aligned}$$
ya que $y \geq \sqrt{x}$.

3. Si $t \in B, t+t' \in A$ entonces
$$\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} = e^{y-\sqrt{x}} \leq 1 \leq Me^{2|t'|}.$$

4. Si $t, t+t' \in B$, entonces
$$\begin{aligned}\frac{\rho(t)}{\rho(t+t')} &= \frac{e^{y-\sqrt{x}}}{e^{y+b-\sqrt{x+a}}} = \frac{e^{-b}}{e^{\sqrt{x}-\sqrt{x+a}}}\\ &\leq e^{-b+\sqrt{a}} \leq e^{-b+\sqrt{1+a}}\\ &\leq e^{1-b+a} \leq Me^{2|t'|}.\end{aligned}$$

Si consideramos el rayo $R = \mathbb{R}^+$ tenemos que esta función peso es integrable en las bandas $F_{R,m}$ para todo $, \in \mathbb{N}$ por tanto por el Teorema 7.23 el semigrupo $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es caótico. Sin embargo, obsérvese que todos los puntos periódicos son degenerados, es decir si $T_t u = u$ para $t \neq 0$, entonces $t \in \partial\Delta$.

Capítulo 8

Existencia de semigrupos transitivos

La existencia de un operador hipercíclico implica que el espacio es de dimensión infinita, e.g. [Kit82, Teor. 1.2] o [GE99, Prop. 11]. Ansari [Ans97, Cor. 1] y Bernal [BG99] probaron, de manera independiente, que en todo espacio de Banach separable de dimensión infinita existe un operador hipercíclico, y por otra parte, Bonet y Peris extendieron este resultado a espacios de Fréchet [BP98, Teor. 1]. Las pruebas de ambos resultados descansan en un resultado anterior de Salas [Sal95] sobre la hiperciclicidad de ciertos operadores en ℓ^1.

Sin embargo, no sucede lo mismo para los operadores caóticos. Bonet, Martínez-Giménez y Peris probaron en [BMGP01] que existen espacios de Banach en los que no existe ningún operador caótico. Para ello muestran como ejemplo el dual de un espacio de Banach complejo hereditariamente indescomponible, reflexivo y separable. *Se dice que un espacio de Banach es hereditariamente indescomponible si para toda pareja Y, Z de subespacios de X cerrados y de dimensión infinita tales que $Y \cap Z = \{0\}$, se tiene que $Y + Z$ no es cerrado*. El primer ejemplo de estos espacios fue dado por Gowers y Maurey [GM93]. Ferenczi probó en [Fer99] que el dual de este espacio concreto también era hereditariamente indescomponible.

Basándose en los trabajos anteriores, Bermúdez, Bonilla y Martinón probaron en [BBM03, Teor. 2.4] que en todo espacio de Banach complejo, separable y de dimensión infinita existe un semigrupo uniformemente continuo hipercíclico, y que en todo espacio de Banach hereditariamente indescomponible cuyo dual también lo sea no existe ningún C_0-semigrupo caótico. Para más información sobre C_0-semigrupos en espacios hereditariamente indescomponibles referimos al lector a [RR96].

En la primera sección de este capítulo vemos que en todo espacio de Fréchet distinto de ω existe un semigrupo analítico mezclante. En la segunda sección introduciremos las nociones necesarias sobre módulos de torsión para probar posteriormente que no existe ningún semigrupo hipercíclico de la forma $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ en

ω con $A \in L(\omega)$.

Es conocido que en φ no existen operadores hipercíclicos, véase [BP98] o [GE99]. Sin embargo, Bonet, Frerick, Peris y Wengenroth han probado recientemente en [BFPW] que sí existen operadores transitivos. En la sección tercera probaremos que también existen semigrupos transitivos en este espacio.

Antes de comenzar con el desarrollo de este capítulo enunciamos el siguiente lema que será de gran utilidad a lo largo del mismo. Este resultado es en parte una generalización de [MGP02, Lema 2.1].

Lema 8.1 *Sean E_1, E_2 F-espacios y sea $\phi : E_1 \to E_2$ una aplicación continua con rango denso:*

1. *Sea $T_i \in L(E_i)$ un operador para $i = 1,2$ tal que $T_2\Phi = \Phi T_1$. Si T_1 es mezclante (hipercíclico), entonces T_2 es también mezclante (hipercíclico).*
2. *Sea $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ y $\{S_t\}_{t\in\Delta}$ C_0-semigrupos de operadores en E_1 y E_2 respectivamente, con Δ un sector del plano complejo, tales que $S_t\Phi = \Phi T_t$ para todo $t \in \Delta$. Si $\{T_t\}_{t\in\Delta}$ es mezclante (hipercíclico), entonces $\{S_t\}_{t\in\Delta}$ es también mezclante (hipercíclico).*

8.1. Existencia de semigrupos analíticos mezclantes

Para E un e.l.c. Dembart [Dem74] caracterizó los C_0-semigrupos localmente equicontinuos $\{T_t\}_{t\geq 0}$ en $L(E)$ que se pueden extender de manera analítica a un cierto sector Σ_α con $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$.

Teorema 8.2 *[Dem74, Sec. 5 Teor. 1] Sea E un e.l.c. sucesionalmente completo sobre $\mathbb{C}$ y sea $\{T_t\}_{t\geq 0}$ un C_0-semigrupo localmente equicontinuo con generador infinitesimal A. Si $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes*

1. *$\{T_t\}_{t\geq 0}$ tiene una extensión fuertemente analítica $\{T_t\}_{t\in\Sigma_\alpha}$ y la familia de operadores $\{T_t : t \in \overline{\Sigma_\theta \cap \Delta_r}\}$ es equicontinua para todo $\theta \in (0,\alpha)$ y $r > 0$.*
2. *Para todo $t > 0$, $T_t(E) \subset D(A)$, y para cierto $r > 0$ y para todo $\theta \in (0,\alpha)$, la familia de operadores $\{[e(\sin\theta)t\frac{d}{dt}T_t]^n : n \geq 1, t \in (0, r/n]\}$ es equicontinua en E.*

Observación 8.3 [Dem74, pág. 155] Nuestra formulación de 8.2.1 requiere únicamente que exista una extensión fuertemente analítica del operador $t \to T_t$ en $L(E)$ cuya restricción a $\mathbb{R}^+$ coincida con $\{T_t\}_{t\geq 0}$. Dembart observó que la aplicación $t \to T_t$ es un homomorfismo del semigrupo aditivo Σ_α en $L(E)$ y que esta aplicación es analítica al dotar a $L(E)$ de la topología de la convergencia uniforme sobre los acotados de E. También probó que la implicación 2. $\Rightarrow$ 1. sigue siendo cierta si $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

En el contexto de F-espacios, y por tanto de espacios de Fréchet, todos los C_0-semigrupos son localmente equicontinuos, i.e. la familia de operadores $\{T_t\}_{t\in\Delta_b}$ es equicontinua para todo $b > 0$.

Para la prueba del resultado principal de esta sección necesitaremos los siguientes lemas debidos por una parte a Bonet y Peris [BP98] y por otra a Desch, Schappacher y Webb [DSW97, Teor. 5.2].

Lema 8.4 *[BP98, Lema 2] Sea X un espacio de Fréchet separable de dimensión infinita y distinto de ω. Entonces existen sucesiones $\{x_n\}_n \subset X$ y $\{f_n\}_n \subset X'$ tales que*

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$, *y* $\overline{\operatorname{span}\{x_n : n\in\mathbb{N}\}} = X$.
2. $\{f_n\}_n$ *es equicontinua en* X'.
3. $f_m(x_n) = 0$ *si* $n \neq m$ *y* $(\langle x_n, f_n\rangle)_n \subset (0,1)$

Sea B el operador de desplazamiento hacia atrás definido en el espacio de sucesiones $\ell^1(w)$ asociado a una sucesión de números positivos $w = (w_n)_n$. Si existe $M > 0$ tal que $\sup_n \frac{w_n}{w_{n+1}} \leq M$ es fácil ver que $B \in L(\ell^1(w))$.

Lema 8.5 *[DSW97, Teor. 5.2] Sea $w = (w_n)_n$ una sucesión de números positivos. Si existe $M > 0$ tal que $\sup_n \frac{w_n}{w_{n+1}} \leq M$ entonces el semigrupo $\{e^{tB}\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico en $\ell_1(w)$.*

De hecho, analizando con detalle su prueba se observa que este resultado se puede extender para todo semigrupo de la forma $\{e^{tB}\}_{t\in\Delta}$ con Δ un sector del plano complejo, y que en realidad se obtiene que el semigrupo es mezclante, no sólo hipercíclico.

Seguidamente enunciamos el resultado principal de esta sección.

Teorema 8.6 *Todo espacio de Fréchet X separable, de dimensión infinita y distinto de ω admite un C_0-semigrupo analítico mezclante.*

Demostración. Sea $\{x_n\}_n \subset X$ y $\{f_n\}_n \subset X'$ como en el Lema 8.4.

Consideremos el operador $S \in L(X)$ definido como

$$Sx := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} f_{n+1}(x) x_n. \tag{8.1}$$

que aparece en [Her92b]. A partir de él consideremos el C_0-semigrupo $\{e^{tS}\}_{t\geq 0}$ y aplicamos el Teorema 8.2 para extender este semigrupo a un semigrupo analítico $\{e^{tS}\}_{t\in\Sigma_\theta}$ para $0<\theta<\frac{\pi}{2}$.

Por [Dem74, pág. 133] tenemos que $T_t' = ST_t$ ya que S es el generador infinitesimal del semigrupo $\{e^{tS}\}_{t\geq 0}$. De este modo $tT_t' = tSe^{tS} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(tS)^n}{(n-1)!}$ y utilizando la definición de S tenemos que

$$S^k := \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{kn+\frac{k^2-k}{2}}} f_{n+k}(x)x_n$$

Prosigamos con más cálculos, como $e^{ntS}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(ntS)^k}{k!}x$, entonces

$$S^n e^{ntS}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nt)^k}{k!}S^{n+k}x = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nt)^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(n+k)j+\frac{(n+k)^2-(n+k)}{2}}} f_{n+k+j}(x)x_j$$

Consideremos $p\in \mathrm{sc}(X)$

$$p(S^n e^{ntS}) \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(nt)^k}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(n+k)j+\frac{(n+k)^2-(n+k)}{2}}}|f_{n+k+j}(x)|p(x_j) \leq (*)$$

Ahora bien, como la sucesión $\{x_n\}_n$ converge a 0, entonces existe $M>0$ tal que $p(x_n)\leq M$ para todo $n\in\mathbb{N}$. Por otra parte, como la sucesión $\{f_n\}_n$ es equicontinua existe $q\in \mathrm{sc}(X)$ tal que $|f_n(x)|\leq q(x)$ para todo $x\in X$.

$$\begin{aligned}
(*) &\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(n+k)j+\frac{(n+k)^2-(n+k)}{2}}}q(x)p(x_j)\\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{M}{2^{(n+k)j+\frac{(n+k)^2-(n+k)}{2}}}q(x)\\
&\leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{2M}{k!}q(x)\\
&\leq 2eMq(x).
\end{aligned}$$

Consideremos $r>0$ tal que $r<e^{-1}$, entonces

$$p(e\sin(\theta)tSe^{tS})^n x) = |et\sin(\theta)|^n p(S^n e^{ntS}x) \leq 2eMq(x).$$

Por tanto, la familia de operadores $\{[e(\sin\theta)tT_t']^n \mid n\geq 1, t\in(0,r/n]\}$ es equicontinua en X.

Probemos ahora que el semigrupo $\{e^{tS}\}_{t\in\Sigma_\theta}$ con $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ es mezclante. En primer lugar, definamos $\Phi:\ell^1\to X$, como $\Phi((\alpha_j)_j):=\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j x_j$. Este operador es continuo y tiene rango denso. Por otra parte, definamos $\tilde{S}\in L(\ell^1)$ como

$$\tilde{S}((\alpha_j)_j):=\left(\frac{\alpha_2}{2},\cdots,\frac{\alpha_{n+1}}{2^n},\cdots\right).$$

De la definición de Φ se deduce que $S\Phi=\Phi\tilde{S}$ en ℓ^1 y por tanto $e^{tS}\Phi=\Phi e^{t\tilde{S}}$ para todo $t\in\Sigma_\theta$, con lo que si probamos que el semigrupo $\{e^{t\tilde{S}}\}_{t\in\Sigma_\theta}$ es mezclante, entonces el semigrupo $\{e^{tS}\}_{t\in\Sigma_\theta}$ es mezclante por el Lema 8.1.2.

Definamos $w_1:=1$, y $w_j:=2^{1+\cdots+(j-1)}$ para $j>1$ y $\Phi_w:\ell^1(w)\to\ell^1$ como $\Phi_w(\alpha_1,\alpha_2,\cdots):=(w_1\alpha_1,w_2\alpha_2,\cdots)$. Esta aplicación es lineal, continua y sobreyectiva. De la definición de Φ_w se deduce que $\tilde{S}\Phi_w=\Phi_w B$ en ℓ^1, y por tanto, $e^{t\tilde{S}}\Phi_w=\Phi_w e^{tB}$ para todo $t\in\Sigma_\theta$.

De acuerdo con el Lema 8.5 tenemos que $\{e^{tB}\}_{t\in\Sigma_\theta}$ es un semigrupo mezclante en $\ell^1(\beta)$, ya que $\sup_n \dfrac{\beta_n}{\beta_{n+1}}\le M$ para una cierta constante $M>0$. Por tanto, por el Lema 8.1.2 tenemos que $\{e^{t\tilde{S}}\}_{t\in\Sigma_\theta}$ es un semigrupo mezclante.

□

8.2. Semigrupos transitivos en ω

Sea E un e.l.c., denotamos por (E,E') un par dual. Sea $\mathbb{C}[z]$ el anillo de polinomios con coeficientes complejos. Un polinomio $p\in\mathbb{C}[z]$ de la forma $p(z)=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j z^j$ actúa sobre un elemento $A'\in L(E')$ de la siguiente forma

$$p(A')y=\sum_{j=0}^{k}\alpha_j(A')^j y \text{ para todo } y\in E'$$

Se puede probar que (E',A') es un módulo sobre $\mathbb{C}[z]$.

Sea $y\in E'$, si existe un polinomio $p\in\mathbb{C}[z]$, $p\neq 0$ con $p(A')y=0$ decimos que y tiene orden finito. Si todo $y\in E'\setminus\{0\}$ tiene orden finito, decimos que (E',A') es un *módulo de torsión*. Si no existe ningún $y\in E'\setminus\{0\}$ de orden finito entonces (E',A') es un *módulo libre de torsion*. Se puede comprobar fácilmente que (E',A') es un módulo de libre de torsión si, y sólo si, ningún $y\in E'$ es un vector propio para A'.

Herzog y Lemmert analizaron en [HL93] la relación existente entre que un operador sea hipercíclico en $L(E)$ y el hecho de que (E',A') sea un módulo libre de torsión. Kitai en [Kit82, Teor. 2.3 y Cor. 2.4] observó que si $A\in L(E)$ es hipercíclico entonces (E', A') es un módulo libre de torsion. Combinando estos resultados con la observación anterior de Herzog y Lemmert obtenemos el siguiente resultado:

Teorema 8.7 *[HL93, Teor. 1] Sea $A \in L(E)$ un operador hipercíclico, entonces (E', A') es un módulo libre de torsión.*

De este resultado se deduce como consecuencia directa que si (E', A') no es un módulo libre de torsión, entonces $(E', p(A'))$ no es un módulo libre de torsión para ningún $p \in \mathbb{C}[z]$, y por tanto, $p(A)$ no es un operador hipercíclico para ningún $p \in \mathbb{C}[z]$, de hecho A no es hipercíclico. Para el caso (ω, φ), Herzog y Lemmert probaron la implicación inversa del Teorema 8.7.

Teorema 8.8 *[HL93, Teor. 2] Sea $A \in L(\omega)$ y (φ, A') un módulo libre de torsión, entonces A es hipercíclico.*

Como consecuencia dedujeron que $p(A) \in L(\omega)$ es hipercíclico para todo $0 \neq p \in \mathbb{C}[z]$. Esto no es cierto en general para espacios de Fréchet $X \neq \omega$ como muestra el siguiente ejemplo de Salas [Sal91].

Ejemplo 8.9 Existen dos operadores hipercíclicos T_1 y T_2 definidos cada uno en un espacio de Hilbert, tales que la suma directa de ambos $T := T_1 \oplus T_2$ no lo es. Consideremos X como la suma directa de ambos espacios. Evidentemente, si T_1 y T_2 son hipercíclicos sus adjuntos no tienen valores propios, y por tanto, $T' = T_1' \oplus T_2'$ tampoco con lo que (X', T') es un módulo libre de torsión.

Observación 8.10 En [Sal95, Cor. 2.3] Salas dió un ejemplo de un operador de desplazamiento hacia atrás generalizado, T, definido en un espacio de Hilbert X de manera que T y T' eran hipercíclicos. Los operadores T y T' no tienen valores propios, puesto que como T es hipercíclico entonces T' no puede tener valores propios, pero como T' también es hipercíclico y X es un espacio de Hilbert, entonces su adjunto es T y no tiene tampoco valores propios. Finalmente, si consideramos $S := T'$, entonces S' es hipercíclico y (E', S') es libre de torsión.

Teorema 8.11 *Si $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo que está bien definido en ω con $A \in L(\omega)$, entonces $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ no es hipercíclico.*

Demostración.
Si $A \in L(\omega)$ satisface que e^{tA} está bien definido para todo $t \geq 0$, entonces (φ, A') es un módulo de torsión [HL93, Teor. 2 Nota 3]. Por tanto, para todo $y \in \varphi \setminus \{0\}$ existe $p \in \mathbb{C}[z], p \neq 0$ tal que $p(A')y = 0$, lo que implica que A' tiene valores propios en φ.

Por otra parte, si $\{e^{tA}\}_{t\geq 0}$ es hipercíclico en ω, por el Lema 5.19 $e^{tA'}$ no tiene valores propios para ningún $t > 0$. Por tanto, tA' no tiene valores propios para ningún $t > 0$, ni tampoco A', llegando así a una contradicción.

$\square$

8.3. Semigrupos transitivos en φ

Sea φ el espacio de las sucesiones eventualmente nulas, dotado de su topología natural, i.e. la topología fuerte con respecto al espacio ω, que coincide en este caso con la topología localmente convexa más fina. En [BFPW, Teor. 2.2] Bonet, Frerick, Peris y Wengenroth prueban que en φ existen operadores transitivos que son perturbaciones de la identidad por operadores de desplazamiento hacia atrás ponderados. Para ello utilizan el resultado de Salas [Sal95, Teor. 3.3] que dice que si $T \in L(\ell_1)$ es un operador de desplazamiento hacia atrás ponderado con pesos positivos acotados, entonces $I + T$ es hipercíclico.

Recordemos que dada una sucesión $w = \{w_n\}_n$ de pesos positivos denotamos por B_w el operador de desplazamiento hacia atrás ponderado que actúa sobre una sucesión $(x_1, x_2, \dots)$ como

$$B_w(x_1, x_2, \dots) = (w_2 x_2, w_3 x_3, \dots).$$

El primero en estudiar la hiperciclicidad del operador de desplazamiento hacia atrás fue Rolewicz [Rol69]. En [Sal95] extendió estos resultados para operadores de desplazamiento hacia atrás ponderados. Estos resultados han sido completados, junto con el correspondiente estudio del caos, por Grosse-Erdmann en [GE00] para ciertos F-espacios de sucesiones y por Martínez-Giménez y Peris en [MGP02] para espacios escalonados de Köthe.

Como ya hemos comentado al principio, Bonet y Peris [BP98, Obs. 7] y Grosse-Erdmann [GE99] probaron de manera independiente que no existen operadores hipercíclicos en φ, por tanto, no pueden existir semigrupos $\{T_t\}_{t\geq 0}$ hipercíclicos en φ, dado que si existieran podríamos aplicar el Teorema 6.23 llegando así a una contradicción.

En esta sección probamos que existen semigrupos transitivos en φ utilizando la metodología de [BFPW] que emplean dichos autores para probar que existen operadores transitivos en φ. Para ello se representa φ como un límite proyectivo no numerable de espacios ponderados ℓ^1. Nosotros tomaremos espacios ℓ^2 en vez de espacios ℓ^1. Los semigrupos que hallaremos serán de la forma e^{B_w}, donde B_w será un operador de desplazamiento hacia atrás ponderado mediante una sucesión de pesos positivos $w = (w_n)_n$.

Un *espectro proyectivo* $\mathscr{X}$ está formado por espacios vectoriales topológicos X_α, con α perteneciente a un conjunto dirigido de índices I, y por aplicaciones espectrales lineales y continuas $\rho^\alpha_\beta : X_\beta \to X_\alpha$ para $\alpha \leq \beta$ con $\rho^\alpha_\beta \circ \rho^\beta_\gamma = \rho^\alpha_\gamma$ para $\alpha \leq \beta \leq \gamma$ y con $\rho^\alpha_\alpha = id_{X_\alpha}$.

El límite proyectivo es $\operatorname{proj}\mathscr{X} = \{(x_\alpha)_{\alpha\in I} \in \prod_{\alpha\in I} X_\alpha : \rho^\alpha_\beta x_\beta = x_\alpha\}$ y ρ^α denota la restricción a $\operatorname{proj}\mathscr{X}$ de la proyección sobre la componente α . Se dice que $\mathscr{X}$ es *fuertemente reducido* si para cada α existe $\beta > \alpha$ tal que $\rho^\alpha_\beta X_\beta$ está contenido en la clausura del conjunto imagen de $\mathrm{Im}(\rho^\alpha)$ en X_α.

Una familia $T = (T_\alpha)_{\alpha\in I}$ de aplicaciones lineales y continuas definidas en X_α es un endomorfismo en $\mathscr{X}$ si conmuta con las aplicaciones espectrales: $T_\alpha \circ \rho^\alpha_\beta = \rho^\alpha_\beta \circ T_\beta$. El límite proyectivo de un morfismo se define como $T(x_\alpha)_{\alpha\in I} = (T_\alpha x_\alpha)_{\alpha\in I}$. Referimos al lector al trabajo de Wengenroth [Wen03] para más información sobre límites proyectivos.

Para nuestro propósito utilizaremos el siguiente resultado de [BFPW, Prop. 2.1] que garantiza que un operador sea transitivo en un límite proyectivo.

Proposición 8.12 *[BFPW, Prop. 2.1] Sea $\mathscr{X}$ un espectro proyectivo fuertemente reducido y sea $T = (T_\alpha)_{\alpha\in I}$ un endomorfismo en $\mathscr{X}$ con componentes transitivas. Entonces T es un operador transitivo en $X = \operatorname{proj}\mathscr{X}$.*

Decimos que la sucesión $\{\gamma_n\}_n$ es una *sucesión de comparación* si verifica que:

1. $\gamma_n > 0$ para cada n,
2. la sucesión de los cocientes $\left\{\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right\}_n$ es decreciente, y
3. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n} = 0$.

Dada una sucesión de comparación γ podemos definir los siguientes espacios de Hilbert:

1. el espacio $E^2(\gamma)$ de las series de potencias:

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n$$

que son funciones enteras, y para las que además

$$\|f\|^2_{2,\gamma} := \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-2} |f_n|^2 < \infty,$$

2. y el espacio $\ell^2\left(\frac{1}{\gamma}\right)$ de las sucesiones se escalares $(x_n)_n$ tales que

$$\|(x_n)_n\|_2^2 := \sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-2}|x_n|^2 < \infty.$$

Para probar el resultado principal de esta sección usaremos el siguiente teorema de Chan y Shapiro [CS91, Teor. 2.1]:

Teorema 8.13 *Para toda sucesión de comparación admisible γ, el operador de traslación $T_a = e^{aD}$ es hipercíclico en $E^2(\gamma)$ para cualquier $0 \neq a \in \mathbb{C}$.*

Probaremos que e^{B_w} es un operador transitivo en φ a partir de e^D usando el Lema 8.1. Enunciamos a continuación el resultado principal de esta sección.

Teorema 8.14 *Sea $w = (w_n)_n$ una sucesión de pesos positivos, entonces el semigrupo $\left\{e^{tB_w}\right\}_{t\geq 0}$ es transitivo en φ.*

Demostración. En primer lugar, definimos el operador de diferenciación en $E^2(\gamma)$ como

$$D\left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n\right) := \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) f_{n+1} z^n.$$

siempre que $\sum_{n=0}^{\infty} \gamma_n^{-2}|(n+1) f_{n+1}|^2 < \infty$. En [CS91, Prop. 1.1] se prueba que $D \in L(E^2(\gamma))$ si, y sólo si,

$$\text{la sucesión } \left\{(n+1)\frac{\gamma_{n+1}}{\gamma_n}\right\}_n \text{ está acotada.}(*)$$

Decimos que una sucesión de comparación que verifica la condición (*) es una *sucesión de comparación admisible*. Toda sucesión de comparación admisible es una sucesión de comparación. Consideremos a partir de ahora que γ es una sucesión de comparación admisible.

Además, definimos el operador de desplazamiento hacia atrás B_η, asociado a la sucesión $\eta = (1, 2, 3, \ldots)$, y el isomorfismo

$$\begin{array}{rrcl} \Psi: & E^2(\gamma) & \longrightarrow & \ell^2\left(\frac{1}{\gamma}\right) \\ & f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n z^n & \longrightarrow & (f_n)_n. \end{array}$$

Tomando este isomorfismo tenemos el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} E^2(\gamma) & \xrightarrow{D} & E^2(\gamma) \\ \Psi \downarrow & & \downarrow \Psi \\ \ell^2\left(\frac{1}{\gamma}\right) & \xrightarrow[B_\eta]{} & \ell^2\left(\frac{1}{\gamma}\right) \end{array}$$

que es conmutativo, y además verifica $B_\eta \Psi = \Psi D$. Como ambos espacios son de Hilbert y los operadores D y B_η son continuos (ambos lo son si, y sólo si, γ es una sucesión de comparación admisible), tenemos que e^D y e^{B_η} están bien definidos y que además se verifica que $e^{B_\eta}\Psi = \Psi e^D$. Por el Teorema 8.13, tenemos que e^D es hipercíclico en $E^2(\gamma)$, y aplicando el Lema 8.1 con Ψ tenemos que e^{B_η} también es hipercíclico en $\ell^2\left(\frac{1}{\gamma}\right)$.

Sea v la sucesión definida como $v_0 := 1$, $v_1 := 1$ y $v_n := \frac{n!}{w_n \dots w_2 w_1}$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Consideremos otra sucesión de comparación $\gamma' = \{\gamma'_n\}_n$ tal que la sucesión $\frac{\gamma'}{v} = \left(\frac{\gamma'_n}{v_n}\right)_n$ sea también una sucesión de comparación admisible. Para ello debemos tomar γ' de manera que el cociente

$$(n+1)\frac{\gamma'_{n+1}}{v_{n+1}} / \frac{\gamma'_n}{v_n} = w_{n+1}\frac{\gamma'_{n+1}}{\gamma'_n} (**)$$

decrezca a cero cuando n tienda a ∞. Tomando dichas sucesiones γ' y v aseguramos que los operadores B_η y B_w son continuos, y además, podemos definir el siguiente isomorfismo

$$\begin{array}{rccc} \Phi : & \ell^2\left(\frac{v}{\gamma'}\right) & \longrightarrow & \ell^2\left(\frac{1}{\gamma'}\right) \\ & (x_0, x_1, x_2, \dots) & \longrightarrow & (v_0 x_0, v_1 x_1, v_2 x_2, \dots). \end{array}$$

para obtener el siguiente diagrama

$$\begin{array}{ccc} \ell^2\left(\frac{v}{\gamma'}\right) & \xrightarrow{B_\eta} & \ell^2\left(\frac{v}{\gamma'}\right) \\ \Phi \downarrow & & \downarrow \Phi \\ \ell^2\left(\frac{1}{\gamma'}\right) & \xrightarrow[B_w]{} & \ell^2\left(\frac{1}{\gamma}\right) \end{array}$$

que es conmutativo y en el que se cumple que $B_w \Phi = \Phi B_\eta$.

Los operadores e^{B_η} y e^{B_w} están bien definidos y son continuos. Como hemos visto con anterioridad que el operador e^{B_η} es hipercíclico, por tanto usando otra vez el Lema 8.1 con Φ tenemos que e^{B_w} es también hipercíclico.

Consideremos como conjunto de índices I el conjunto de todas las sucesiones de comparación crecientes γ' que están formadas por números naturales, dotado del orden natural heredado de $\mathbb{N}^{\mathbb{N}_0}$, que verifican la condición (**). De esta manera φ puede ser representado como proj $\left(\ell^2\left(\frac{1}{\gamma'}\right)\right)$ para todo $\gamma' \in I$, tomando como aplicaciones espectrales las respectivas inclusiones en cada caso.

Para concluir la prueba definamos $S_{\gamma'} = e^{B_w} : \ell^2\left(\frac{1}{\gamma'}\right) \to \ell^2\left(\frac{1}{\gamma'}\right)$ que es hipercíclico y por tanto transitivo. Como $\left(S_{\gamma'}\right)_{\gamma' \in I}$ es un endomorfismo en el espacio $\text{proj}_{\gamma' \in I}\left(\ell^2\left(\frac{1}{\gamma'}\right)\right)$, por la Proposición 8.12 tenemos que $e^{B_w} : \varphi \to \varphi$ es transitivo. $\square$

Corolario 8.15 *Sea ξ un e.l.c. de sucesiones tal que $\varphi \subset \xi \subset \omega$ con inclusiones continuas y tales que φ es denso en el espacio ξ. Si w es una sucesión de pesos positivos tal que $B_w \in L(\xi)$ y e^{B_w} está bien definido en ξ, entonces $\{e^{tB_w}\}_{t \geq 0}$ es un semigrupo transitivo en ξ.*

Demostración. Inmediata aplicando el Lema 8.1 tomando $E_1 = \varphi$, $E_2 = \xi$, Φ como el operador inclusión y $T_1 = T_2 = e^{tB_w}$.

$\square$

Observación 8.16 Si establecemos una equivalencia entre el espacio φ y el espacio de los polinomios, se tiene que para que cualquier espacio Θ de funciones expresables formalmente mediante una serie de potencias, siempre que el operador derivada D verifique que $D \in L(\Theta)$ y e^D esté bien definido, entonces $\{e^{tD}\}_{t \geq 0}$ es transitivo en Θ.

Bibliografía

[Ans95] S.I. Ansari. Hypercyclic and cyclic vectors. *J. Funct. Anal.*, 128(2):374–383, 1995.

[Ans97] S.I. Ansari. Existence of hypercyclic operators on topological vector spaces. *J. Funct. Anal.*, 148(2):384–390, 1997.

[AY80] J. Auslander and J.A. Yorke. Interval maps, factors of maps, and chaos. *Tohoku Math. J.*, 32:177–188, 1980.

[BL01] J. Banasiak and M. Lachowicz. Chaos for a class of linear kinetic models. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. II*, 329:439–444, 2001.

[BL02] J. Banasiak and M. Lachowicz. Topological chaos for birth-and-death-type models with proliferation. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 12(6):755–775, 2002.

[BBC$^+$92] J. Banks, J. Brooks, G. Cairns, G. Davis, and P. Stacey. On Devaney's definition of chaos. *Amer. Math. Monthly*, 99(4):332–334, 1992.

[BBCP] T. Bermúdez, A. Bonilla, J.A. Conejero, and A. Peris. On hypercyclic, topologically mixing and chaotic semigroups on Banach spaces. Preprint(2004).

[BBM03] T. Bermúdez, A. Bonilla, and A. Martinón. On the existence of chaotic and hypercyclic semigroups in Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(8):2435–2441, 2003.

[BG99] L. Bernal-González. On hypercyclic operators on Banach spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 127(4):1003–1010, 1999.

[BGGE03] L. Bernal-González and K.G. Grosse-Erdmann. The Hypercyclicity Criterion for sequences of operators. *Studia Math.*, 157(1):17–32, 2003.

[BP99] J.P. Bès and A. Peris. Hereditarily hypercyclic operators. *J. Funct. Anal.*, 167(1):94–112, 1999.

[Bir29] G.D. Birkhoff. Démonstration d'un théoréme elémentaire sur les fonctions entiéres. *C. R. Acad. Sci. Paris*, 189:473–475, 1929.

[BFPW] J. Bonet, L. Frerick, A. Peris, and J. Wengenroth. Transitive and hypercyclic operators on locally convex spaces. *Bull. London Math. Soc.* To appear.

[BMGP01] J. Bonet, F. Martínez-Giménez, and A. Peris. A Banach space which admits no chaotic operator. *Bull. Lond. Math. Soc.*, 33(2):196–198, 2001.

[BMGP03] J. Bonet, F. Martínez-Giménez, and A. Peris. Linear chaos on Fréchet spaces. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 13(7):1649–1655, 2003.

[BP98] J. Bonet and A. Peris. Hypercyclic operators on non-normable Fréchet spaces. *J. Funct. Anal.*, 159(2):587–595, 1998.

[BF03] P.S. Bourdon and N.S. Feldman. Somewhere dense orbits are everywhere dense orbits. *Indiana Univ. Math. J.*, 52(3):811–819, 2003.

[CS91] K.C. Chan and J.H. Shapiro. The cyclic behavior of translation operators on Hilbert spaces of entire functions. *Indiana Univ. Math. J.*, 40(4):1421–1449, 1991.

[CP] J.A. Conejero and A. Peris. Linear transitivity criteria. Preprint(2003).

[CP02] G. Costakis and A. Peris. Hypercyclic semigroups and somewhere dense orbits. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 335:895–898, 2002.

[dE01] R. deLaubenfels and H. Emamirad. Chaos for functions of discrete and continuous weighted shift operators. *Ergodic Theory Dynam. Systems*, 21(5):1411–1427, 2001.

[dEGE03] R. deLaubenfels, H. Emamirad, and K.G. Grosse-Erdmann. Chaos for semigroups of unbounded operators. *Math. Nachr.*, 261(262):47–59, 2003.

[dEP00] R. deLaubenfels, H. Emamirad, and V. Protopopescu. Linear chaos and approximation. *J. Approx. Theory*, 105(1):176–187, 2000.

[Dem74] B. Dembart. On the theory of semigroups of operators on locally convex spaces. *J. Funct. Anal.*, 16:123–160, 1974.

[DSW97] W. Desch, W. Schappacher, and G.F. Webb. Hypercyclic and chaotic semigroups of linear operators. *Ergodic Theory and Dynam. Syst.*, 17:1–27, 1997.

[Dev89] R.L. Devaney. *An Introduction to Chaotic Dynamical Systems*. Addison-Wesley, Reading, MA, second edition, 1989.

[DVBW97] J. Dyson, R. Villella-Bressan, and G. Webb. Hypercyclicity of solutions of a transport equation with delays. *Nonlinear Anal.*, 29:1343–1351, 1997.

[Ema98] H. Emamirad. Hypercyclicity in the scattering theory for linear transport equation. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 350:3707–3716, 1998.

[EN00] K.J. Engel and R. Nagel. *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, volume 194 of *Graduate Texts in Mathematics*. Springer-Verlag, New York, 2000.

[Fer99] V. Ferenczi. Quotient hereditarily indecomposable Banach space. *Canad. J. Math.*, 51:566–584, 1999.

[GS87] R.M. Gethner and J.H. Shapiro. Universal vectors for operators on spaces of holomorphic functions. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 100(2):281–288, 1987.

[GS91] G. Godefroy and J.H. Shapiro. Operators with dense, invariant, cyclic vector manifolds. *J. Funct. Anal.*, 98(2):229–269, 1991.

[GM93] W.T. Gowers and B. Maurey. The unconditional basic sequence problem. *J. Amer. Math. Soc.*, 6(4):851–874, 1993.

[Gri] S. Grivaux. Some observations regarding the hypercyclicity criterion. Preprint(2004).

[GE99] K.G. Grosse-Erdmann. Universal families and hypercyclic operators. *Bull. Amer. Math. Soc.*, 36(3):345–381, 1999.

[GE00] K.G. Grosse-Erdmann. Hypercyclic and chaotic weighted shifts. *Studia Math.*, 139:47–68, 2000.

[GE03] K.G. Grosse-Erdmann. Recent developments in hypercyclicity. *Rev. R. Acad. Cien. Serie A Mat.*, 97(2):273–286, 2003.

[Her92a] D.A. Herrero. Hypercyclic operators and chaos. *J. Operator Theory*, 28(1):93–103, 1992.

[Her92b] G. Herzog. On linear operators having supercyclic operators. *Studia Math.*, 103:295–298, 1992.

[Her97] G. Herzog. On a universality of the heat equation. *Math. Nachr.*, 188:169–171, 1997.

[HL93] G. Herzog and R. Lemmert. Über Endomorphismen mit dichten Bahnen. *Math. Z.*, 213:473–477, 1993.

[How01] Keith E. Howard. A size structured model of cell dwarfism. *Discrete and Continuous Dynamical Systems-Series B*, 1(4):471–484, 2001.

[Kit82] C. Kitai. *Invariant Closed Sets for Linear Operators*. PhD thesis, University of Toronto, 1982.

[Mac92] C.R. MacCluer. Chaos in linear distributed systems. *J. Dynam. Systems Measurement Control*, 114:322–324, 1992.

[MGP02] F. Martínez-Giménez and A. Peris. Chaos for backward shift operators. *Internat. J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg.*, 12(8):1703–1715, 2002.

[MT01] M. Matsui and F. Takeo. Chaotic semigroups generated by certain differential operators of order 1. *SUT J. Math.*, 37(1):51–67, 2001.

[MYT03] M. Matsui, M. Yamada, and F. Takeo. Supercyclic and chaotic translation semigroups. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131:3535–3546, 2003.

[OU41] J.C. Oxtoby and S.M. Ulam. Measure-preserving homeomorphisms and metrical transitivity. *Ann. of Math.*, 42(4):874–920, October 1941.

[Paz92] A. Pazy. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, volume 44 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 1992.

[Per01a] A. Peris. Hypercyclicity criteria and the Mittag-Leffler theorem. *Bull. Soc. Roy. Sci. Liege*, 70(4-6):365–371, 2001.

[Per01b] A. Peris. Multi-hypercyclic operators are hypercyclic. *Math. Z.*, 236(4):779–786, 2001.

[PA92] V. Protopopescu and Y. Azmy. Topological chaos for a class of linear models. *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2:79–90, 1992.

[RR96] F. Räbiger and W.J. Ricker. C_0-groups and C_0-semigroups of linear operators on hereditarily indecomposable Banach spaces. *Arch. Math.*, 66:60–70, 1996.

[Rol69] S. Rolewicz. On orbits of elements. *Studia Math.*, 32:17–22, 1969.

[Sal91] H.N. Salas. A hypercyclic operator whose adjoint is also hypercyclic. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 112(3):765–770, 1991.

[Sal95] H.N. Salas. Hypercyclic weighted shifts. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347(3):993–1004, 1995.

[Sha] J. Shapiro. Notes on the dynamics of linear operators. Unpublished lecture notes, available at http://www.math.msu.edu/∽shapiro.

[Web95] G.F. Webb. Periodic and chaotic behavior in structured models of cell population dynamics. In A.C. McBride and G.F. Roach, editors, *Recent Developments in Evolution Equations*, volume 134 of *Pitman Research Notes in Mathematics*, pages 40–49, Harlow, 1995. Longman Scientific & Technical.

[Wen02] J. Wengenroth. Hypercyclic operators on non-locally convex spaces. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 131(6):1759–1761, 2002.

[Wen03] J. Wengenroth. *Derived Functors in Functional Analysis*, volume 1810 of *Lectures Notes in Mathematics*. Springer, 2003.

[Yos80] K. Yosida. *Functional Analysis*. Berlin-Heidelberg-New York. Springer-Verlag, sixth edition, 1980.