Resumen

La presente memoria, “Espacios de Banach ponderados de funciones armónicas”, trata diversos tópicos del análisis funcional, como son las funciones peso, los operadores de composición, la diferenciabilidad Fréchet y Gâteaux de la norma y las clases de isomorfismos. El trabajo está dividido en cuatro capítulos precedidos de uno inicial en el que introducimos la notación y las propiedades conocidas que usamos en las demostraciones del resto de capítulos.

En el primer capítulo estudiamos espacios de Banach de funciones armónicas en conjuntos abiertos de $\mathbb{R}^d$ dotados de normas del supremo ponderadas. Definimos el peso asociado armónico, explicamos sus propiedades, lo comparamos con el peso asociado holomorfo introducido por Bierstedt, Bonet y Taskinen, y encontramos diferencias y condiciones para que sean exactamente iguales y condiciones para que sean equivalentes.

El capítulo segundo está dedicado al análisis de los operadores de composición con símbolo holomorfo entre espacios de Banach ponderados de funciones pluriarmónicas. Caracterizamos la continuidad, la compacidad y la norma esencial de operadores de composición entre estos espacios en términos de los pesos, extendiendo los resultados de Bonet, Taskinen, Lindström, Wolf, Contreras, Montes y otros para operadores de composición entre espacios de funciones holomorfas. Probamos que para todo valor del intervalo $[0, 1]$ existe un operador de composición sobre espacios ponderados de funciones armónicas tal que su norma esencial alcanza dicho valor.

La mayoría de los contenidos de los capítulos 1 y 2 han sido publicados por E. Jordá y la autora en [48].

El capítulo tercero está relacionado con el estudio de la diferenciabilidad Gâteaux y Fréchet de la norma. El criterio de Šmulyan establece que la norma de un espacio de Banach real X es Gâteaux diferenciable en $x \in X$ si y sólo si existe x^* en la bola unidad del dual de X débil expuesto por x y la norma es Fréchet diferenciable en x si y sólo si x^* es débil fuertemente expuesto en la bola unidad del dual de X por x. Mostramos que en este criterio la bola del dual de X puede ser reemplazada por un conjunto conveniente más pequeño, y aplicamos este criterio extendido para caracterizar los puntos de diferenciabilidad

Gâteaux y Fréchet de la norma de algunos espacios de funciones armónicas y continuas con valores vectoriales. A partir de estos resultados conseguimos una prueba sencilla del teorema sobre la diferenciabilidad Gâteaux de la norma de espacios de operadores lineales compactos enunciado por Heinrich y publicado sin la prueba. Además, éstos nos permiten obtener aplicaciones para espacios de Banach clásicos como H^∞ de funciones holomorfas acotadas en el disco y $A(\overline{\mathbb{D}})$ de funciones continuas en $\overline{\mathbb{D}}$ que son holomorfas en $\mathbb{D}$. Los contenidos de este capítulo han sido incluidos por E. Jordá y la autora en [47].

Finalmente, en el capítulo cuarto mostramos que para cualquier abierto U contenido en $\mathbb{R}^d$ y cualquier peso v en U, el espacio $h_{v_0}(U)$, de funciones armónicas tales que multiplicadas por el peso desaparecen en el infinito de U, es casi isométrico a un subespacio cerrado de c_0, extendiendo un teorema debido a Bonet y Wolf para los espacios de funciones holomorfas $H_{v_0}(U)$ en abiertos U de $\mathbb{C}^d$. Así mismo, inspirados por un trabajo de Boyd y Rueda también estudiamos la geometría de estos espacios ponderados examinando tópicos como la v-frontera y los puntos v-peak y damos las condiciones que proporcionan ejemplos donde $h_{v_0}(U)$ no puede ser isométrico a c_0. Para un conjunto abierto equilibrado U de $\mathbb{R}^d$, algunas condiciones geométricas en U y sobre convexidad en el peso v aseguran que $h_{v_0}(U)$ no es rotundo. Estos resultados han sido publicados por E. Jordá y la autora en [46].