

**UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA**  
**Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales**



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA

**TESIS DOCTORAL**

---

**Modelado del crecimiento del desgaste  
ondulatorio en carriles ferroviarios**

---

*Presentada por:* D.<sup>a</sup> M<sup>a</sup> Paloma Vila Tortosa

*Dirigida por:* Dr. D. Luis Baeza González

Valencia, Diciembre de 2015



TESIS DOCTORAL

---

**Modelado del crecimiento del desgaste  
ondulatorio en carriles ferroviarios**

---

que para la obtención  
del grado de  
Doctora Ingeniera Industrial

presenta

D.<sup>a</sup> M<sup>a</sup> Paloma Vila Tortosa

en el

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales  
de la Universitat Politècnica de València

Dirigida por

Dr. D. Luis Baeza González

Valencia, Diciembre de 2015



# Resumen

El desgaste ondulatorio o corrugación en los carriles ferroviarios es un defecto que aparece en las superficies de rodadura de éstos, caracterizado por su geometría ondulada, siendo uno de los principales motivos de incremento anormal de ruido de rodadura y de vibraciones. A pesar de ser un problema ferroviario antiguo y existir una extensa bibliografía sobre el tema, siguen sin comprenderse las causas de su aparición en muchos casos. En este contexto, los modelos matemáticos que simulan el inicio y crecimiento de la corrugación pueden ayudar a entender las causas que la producen.

En esta Tesis, se presenta un modelo matemático no lineal para predecir el crecimiento de la corrugación en carriles ferroviarios. La herramienta desarrollada se basa en un proceso realimentado en el que intervienen, por una parte, la interacción dinámica vehículo-vía, y por otra, una metodología para la estimación del desgaste en el carril. El modelo de interacción considera la hipótesis de vía cíclica, así como la flexibilidad y los efectos inerciales asociados al giro del eje montado.

Tanto en el cálculo de la dinámica como en la estimación del desgaste, se hace uso de la misma teoría de contacto rueda-carril, que adopta hipótesis no hercianas y no estacionarias. En el modelo de contacto desarrollado, basado en la Teoría Variacional de Kalker, se discretiza el área potencial de contacto en elementos triangulares en los que las tensiones varían de forma lineal. Con ello se pretende conseguir una mejor representación de las distribuciones de tensiones respecto al método original.

A través de simulaciones, se analiza la influencia en el cálculo de la profundidad del desgaste en el carril de los efectos no estacionarios y de los efectos no hercianos en el contacto. Asimismo, se estudia la influencia de la flexibilidad y los efectos inerciales del eje montado en la estimación del desgaste y el crecimiento de la corrugación, con el fin de identificar posibles mecanismos de fijación de la longitud de onda asociados a la dinámica del eje montado.

**Palabras clave:** corrugación en carriles, desgaste, contacto rueda-carril, eje flexible rotatorio.



# Resum

El desgast ondulatori o la corrugació en els carrils ferroviaris és un defecte que apareix en les superfícies de rodament d'estos, caracteritzat per la seua geometria ondulada, sent un dels principals motius d'increment anormal de soroll de rodament i de vibracions. Tot i ser un problema ferroviari antic i existir una extensa bibliografia sobre el tema, segueixen sense comprendre's les causes de la seua aparició en molts casos. En este context, els models matemàtics que simulen l'inici i creixement de la corrugació poden ajudar a entendre les causes que la produeixen.

En aquesta Tesi, es presenta un model matemàtic no lineal per predir el creixement de la corrugació en carrils ferroviaris. La ferramenta desenvolupada es basa en un procés realimentat en el qual intervenen, d'una banda, la interacció dinàmica vehicle-via, i per l'altra, una metodologia per a l'estimació del desgast en el carril. El model d'interacció considera la hipòtesi de via cíclica, així com la flexibilitat i els efectes inercials associats al gir de l'eix muntat.

Tant en el càlcul de la dinàmica com en l'estimació del desgast, es fa ús de la mateixa teoria de contacte roda-carril, que adopta hipòtesis no hertzianes i no estacionàries. En el model de contacte desenvolupat, basat en la Teoria Variacional de Kalker, es discretitza l'àrea potencial de contacte en elements triangulars en què les tensions varien de forma lineal. Amb això es pretén aconseguir una millor representació de les distribucions de tensions respecte al mètode original.

Mitjançant simulacions, s'analitza la influència en el càlcul de la profunditat del desgast al carril dels efectes no estacionaris i dels efectes no hertzians al contacte. Així mateix, s'estudia la influència de la flexibilitat i els efectes inercials de l'eix muntat en l'estimació del desgast i el creixement de la corrugació, per tal d'identificar possibles mecanismes de fixació de la longitud d'ona associats a la dinàmica de l'eix muntat.

**Paraules clau:** corrugació en carrils, desgast, contacte roda-carril, eix flexible rotatori.



# Abstract

Rail corrugation is a wavy defect that appears on the running surfaces of rails. It is one of the main reasons for abnormal increase in rolling noise and vibrations. Despite it being an old railway problem and there being an extensive literature on the subject, the causes of its occurrence are not yet fully understood in many cases. In this context, mathematical models simulating the initiation and development of the corrugation can help understand the causes behind it.

In this Thesis, a nonlinear mathematical model is presented for predicting the growth of rail corrugation. The tool developed is based on a feedback process that involves, firstly, the vehicle-track interaction dynamics, and secondly, a methodology for estimating wear of rails. The train-track interaction model considers the hypothesis of cyclic track together with the flexibility and the inertial effects associated with the rotation of the wheelset.

The same wheel-rail contact model, which relies on non-hertzian and non-steady-state hypotheses, is used both for calculating the train-track dynamics and for estimating wear. In the contact model developed here, which is based on the Variational Theory by Kalker, the potential contact area is discretized into triangular elements on which the distributions of contact stresses vary linearly. By doing so, a better representation of the contact stresses distributions is expected to be obtained in comparison to the original method.

The influence of both the non-steady-state and the non-hertzian effects at wheel-rail contact on calculating the wear depth on the railhead is analyzed through simulations. Additionally, the influence of the flexibility and the inertial effects of the flexible rotating wheelset on estimating wear and rail corrugation growth is studied in order to identify possible wavelength-fixing mechanisms related to the dynamics of the wheelset.

**Keywords:** rail corrugation, wear, wheel-rail contact, rotating flexible wheelset.



*A mis padres y hermanos*

*A José Antonio*



# Agradecimientos

En primer lugar, quiero expresar mi agradecimiento a Luis Baeza por su confianza en mí y su apoyo durante toda esta etapa, por el tiempo dedicado a dirigir esta Tesis y por sus esfuerzos para que tomara un buen rumbo y saliera finalmente a la luz. También debo agradecerle sus valiosos consejos y su exhaustiva revisión del documento de la Tesis.

No me puedo olvidar de mis compañeros del CIIM de la línea de investigación de ferrocarriles, de los que estaban cuando empecé y de los que se han incorporado más recientemente, que en todo momento me han ofrecido su apoyo y colaboración y de todos aprendo todos los días. *¡Gracias chicos!*

También debo mi gratitud a todos los compañeros del DIMM, en especial a aquellos con los que he compartido docencia, por su inestimable ayuda con las clases y prácticas que eran nuevas para mí. A Fede, por sus consejos y ayuda impagable en todo lo relativo a la informática. A Marga, Amparo, Àngels y Eva por hacer fáciles todas las gestiones.

Y cómo no, también quiero dar las gracias a Alex, Anna, Sonia, Pere, Eduardo y Susana, por las convocatorias de los viernes por la tarde, en las que nos ponemos al día de nuestras cosas, arreglamos el mundo y nos reímos un rato.

Finalmente, quiero dar las gracias a las personas más importantes en mi vida. A mis padres, que siempre han sido para mí un ejemplo de esfuerzo, superación y trabajo constante, por su amor y apoyo incondicional. A mis hermanos, David y Javi, por ser mis primeros maestros y referentes. Sin ellos no sería como soy.

Y en especial a José Antonio, porque me apoya, me comprende y me anima constantemente.



# Índice general

<b>Resumen</b> .....	<b>i</b>
<b>Resum</b> .....	<b>iii</b>
<b>Abstract</b> .....	<b>v</b>
<b>Agradecimientos</b> .....	<b>ix</b>
<b>Índice general</b> .....	<b>xi</b>
<b>1 Introducción</b> .....	<b>1</b>
1.1 Antecedentes y motivación de la Tesis.....	1
1.2 Objetivos.....	2
1.3 Estructura y alcance de la Tesis.....	3
<b>2 Contribuciones de otros investigadores en el ámbito experimental</b> .....	<b>7</b>
2.1 Introducción.....	7
2.2 Clasificaciones y tipología de la corrugación en carriles.....	8
2.3 Otros trabajos basados en la observación del defecto.....	18
2.4 Pérdida de redondez de la banda de rodadura de la rueda.....	22
2.5 Otros defectos de la superficie de rodadura de los carriles que pueden desencadenar la formación de corrugación.....	25
2.6 Conclusiones.....	30
<b>3 Revisión de estudios teóricos sobre la corrugación en carriles</b> .....	<b>33</b>
3.1 Introducción.....	33
3.2 Revisión de modelos de interacción dinámica vehículo-vía.....	34
3.2.1 Modelos de vehículo.....	35
3.2.2 Modelos de vía.....	37
3.2.3 Modelos de contacto.....	41
3.2.4 Modelos de excitación.....	49
3.2.5 Revisión de modelos de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio de la frecuencia.....	50
3.2.6 Revisión de modelos de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio del tiempo.....	55

3.3 Revisión de modelos para estimar el desgaste.....	58
3.3.1 Modelo de desgaste de Archard.....	59
3.3.2 Modelo de desgaste proporcional a la energía disipada por fricción.....	61
3.3.3 Modelo de desgaste basado en el índice de desgaste $T\gamma/A$ .....	62
3.4 Revisión de modelos matemáticos para simular la corrugación en carriles.....	64
3.4.1 Estudios sobre corrugación en los años 80.....	64
3.4.2 Estudios sobre corrugación en la década de los 90.....	66
3.4.3 Estudios sobre corrugación entre los años 2000 y 2007.....	71
3.4.4 Estudios sobre corrugación entre el año 2008 y la actualidad.....	79
3.5 Conclusiones.....	87
<b>4 Modelos de contacto rueda-carril tridimensionales no estacionarios.....</b>	<b>91</b>
4.1 Introducción.....	91
4.2 El contacto de rodadura rueda-carril.....	92
4.2.1 Formulación del problema normal.....	95
4.2.2 Formulación del problema tangencial.....	97
4.2.3 Relaciones constitutivas: ecuaciones de Boussinesq-Cerruti.....	101
4.3 Modelo de contacto tangencial tridimensional no estacionario.....	105
4.3.1 Algoritmo numérico.....	106
4.3.2 Modelo cinemático.....	107
4.3.3 Modelo elástico.....	107
4.3.4 Método de resolución del problema tangencial de contacto.....	108
4.3.5 Análisis del proceso no estacionario de contacto.....	109
4.4 Modelo de contacto no herciano y no estacionario basado en la Teoría Variacional de Kalker.....	118
4.4.1 Resolución del problema normal de contacto.....	119
4.4.2 Resolución del problema tangencial de contacto.....	122
4.4.3 Modelo elástico. Cálculo de los coeficientes de influencia elástica para elementos triangulares con distribución de tensión lineal.....	125
4.4.4 Análisis de la influencia del contacto no herciano y del proceso no estacionario en las fuerzas y distribuciones de tensiones en el contacto.....	142
4.5 Conclusiones.....	167

<b>5 Método de cálculo del desgaste en la superficie de rodadura del carril.....</b>	<b>171</b>
5.1 Introducción.....	171
5.2 Modelo de desgaste.....	172
5.3 Método de estimación del desgaste en la superficie de rodadura del carril.....	173
5.3.1 Modelo de contacto Hertz/FASTSIM y modelo no estacionario.....	173
5.3.2 Modelo de contacto no herciano y no estacionario.....	176
5.4 Resultados del método de estimación del desgaste con el modelo de contacto herciano y no estacionario.....	177
5.4.1 Estudio de la convergencia a la solución estacionaria. Versión tridimensional del problema “de Cattaneo a Carter”.....	178
5.4.2 Resultados correspondientes a la variación de la fuerza normal.....	180
5.4.3 Resultados correspondientes a la variación de la fuerza longitudinal.....	183
5.5 Resultados del método de estimación del desgaste con el modelo no herciano y no estacionario.....	185
5.5.1 Influencia del valor de la fuerza normal en el nivel de desgaste uniforme... ..	186
5.5.2 Influencia del valor del pseudodeslizamiento longitudinal en el nivel de desgaste uniforme.....	186
5.5.3 Efecto de la variación de la fuerza normal.....	187
5.5.4 Efecto de la variación del pseudodeslizamiento longitudinal.....	188
5.5.5 Efecto de las variación simultánea de la fuerza normal y del pseudodeslizamiento longitudinal.....	190
5.5.6 Efecto del contacto no herciano producido por la rodadura sobre superficies corrugadas.....	192
5.6 Conclusiones.....	197
<b>6 Modelo de interacción dinámica vehículo-vía.....</b>	<b>201</b>
6.1 Introducción.....	201
6.2 Generación del modelo de interacción vehículo-vía mediante técnicas de subestructuración.....	203
6.3 Modelo de vehículo.....	205
6.3.1 Formulación del modelo de eje flexible rotatorio.....	205
6.3.2 Influencia de la velocidad de rotación en la respuesta libre del eje flexible rotatorio.....	209
6.4 Modelo de vía.....	216
6.4.1 El carril.....	217

6.4.2 Las traviesas.....	223
6.4.3 Las fuerzas en las placas de asiento.....	228
6.4.4 Las fuerzas en el contacto rueda-carril.....	229
6.5 Método de resolución temporal de la interacción vehículo-vía.....	229
6.6 Conclusiones.....	230
<b>7 Aplicación de los modelos al análisis del crecimiento de la corrugación.....</b>	<b>233</b>
7.1 Introducción.....	233
7.2 Estudio del crecimiento del desgaste ondulatorio en condiciones de rodadura libre del eje mediante Hertz/FASTSIM.....	235
7.2.1 Excitación del sistema vehículo-vía mediante rugosidad pseudoaleatoria.....	236
7.2.2 Excitación del sistema vehículo-vía mediante corrugación sinusoidal.....	241
7.3 Estudio del crecimiento del desgaste ondulatorio en curvas de radio elevado mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario.....	250
7.3.1 Excitación del sistema vehículo-vía mediante corrugación sinusoidal.....	251
7.3.2 Excitación del sistema vehículo-vía mediante rugosidad pseudoaleatoria.....	260
7.4 Análisis del efecto de la interacción bogie-vía en el crecimiento de la corrugación en curvas de radio elevado.....	274
7.5 Influencia de la presencia de un <i>squat</i> en la superficie de rodadura de los carriles en la formación de corrugación.....	283
7.6 Conclusiones.....	289
<b>8 Conclusiones.....</b>	<b>295</b>
<b>ANEXO 1 Ecuaciones de Boussinesq-Cerruti.....</b>	<b>307</b>
<b>ANEXO 2 Coeficientes de influencia elástica para carga uniforme sobre elementos rectangulares.....</b>	<b>317</b>
<b>ANEXO 3 Artículos publicados vinculados a la Tesis.....</b>	<b>321</b>
<b>Bibliografía.....</b>	<b>333</b>





# 1

## Introducción

### 1.1 Antecedentes y motivación de la Tesis

La presente Tesis Doctoral se enmarca en la línea de investigación de dinámica ferroviaria desarrollada en el Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica (CIIM) de la Universidad Politécnica de Valencia (UPV). Dentro de esta línea se realizan modelos correspondientes a la dinámica acoplada entre un vehículo ferroviario y la vía, que afectan a problemas de corrugación de los carriles, ovalización y poligonalización de las ruedas, planos de bloqueo en ruedas y otros tipos de desgastes anormales. Estos fenómenos se asocian a un rango de altas frecuencias y están caracterizados por la dinámica estructural de los elementos que conforman el sistema. El desgaste ondulatorio o corrugación en los carriles es el objeto de estudio en la presente Tesis Doctoral.

La corrugación de los carriles es un tipo de irregularidad que aparece en la superficie de rodadura del carril, caracterizado por una geometría ondulatoria cuya longitud de onda está comprendida entre unos pocos centímetros y 2 metros. La consecuencia más importante y frecuente de este tipo de irregularidad es el aumento del ruido de rodadura, pudiendo tener otro tipo de implicaciones como el incremento del nivel de vibraciones (en el vehículo y en el entorno) y la aceleración del deterioro de los elementos de la vía o de la rodadura. Es un problema que ha sido analizado en informes técnicos que datan de finales del siglo XIX, y sobre el cual no existe hasta la fecha una explicación completa y fehaciente.

En la literatura encontramos un número destacado de trabajos que han permitido establecer una correlación entre una longitud de onda observada, y alguna característica dinámica del sistema medida u obtenida teóricamente (bien una frecuencia propia, un aumento de la respuesta vibratoria calculada o de la fuerza en el contacto). Estos resultados, si bien no representan una descripción completa del problema, permiten colegir en este problema el papel de la interacción dinámica del vehículo con la vía. De este modo, se establece la formación de la

corrugación a partir de dos mecanismos: el mecanismo de fijación de la longitud de onda (o fenómeno dinámico principal que determina la formación de la irregularidad); y el mecanismo de daño (que habitualmente es el desgaste, también puede ser la deformación plástica; es el medio mediante el cual se forma la geometría ondulada).

La práctica ausencia de una explicación completa del problema sería el motivo de la falta de soluciones que permitan evitar este problema desde la fase de diseño. Además de las medidas correctivas basadas en el amolado de los carriles, son especialmente poco abundantes las técnicas capaces de prevenir este problema cuando éste tiene lugar. En este sentido, para medidas como los modificadores de fricción, que pueden resolver el problema en algunos casos, no ha sido posible probar de qué manera se produce este efecto beneficioso.

En este contexto, los modelos matemáticos para simular el crecimiento de la corrugación pueden ayudar a identificar y comprender los mecanismos involucrados en su formación y desarrollo, y a encontrar tratamientos y criterios de diseño que permitan evitar la aparición de este defecto.

La Tesis se plantea a través de una investigación sobre dos elementos fundamentales en la interacción dinámica vía-vehículo que no han sido suficientemente tratados en la literatura: el contacto rueda-carril y el papel de la dinámica del eje montado. Como herramienta de cálculo se propone la simulación del crecimiento de la rugosidad, implementando diferentes modelos de contacto y de eje montado. La principal motivación de esta Tesis será, por consiguiente, determinar el papel del contacto y de la dinámica del eje como mecanismos de fijación de la longitud de onda en problemas de corrugación.

## **1.2 Objetivos**

Los objetivos propuestos en esta Tesis son los siguientes:

- Revisar la bibliografía de los principales modelos matemáticos para predecir el crecimiento de la corrugación y de las conclusiones derivadas de dichos estudios.
- Estudiar la mecánica del contacto entre la rueda y el carril. Revisión bibliográfica de los principales modelos de contacto y análisis de sus ventajas y limitaciones.
- Desarrollar una metodología para mejorar la representación de las distribuciones de tensiones en el contacto, por medio de elementos de presión

piramidal sobre base hexagonal formada por elementos triangulares en los que las tensiones varían linealmente.

- Implementar un modelo de contacto tridimensional que permita considerar, en el problema tangencial de contacto, los efectos no estacionarios o transitorios; y en el problema normal de contacto, los efectos no hercianos, como la forma no elíptica del área de contacto, la asimetría de la distribución de tensiones y el desplazamiento del centro del área de contacto respecto de la proyección vertical del centro de la rueda.
- Desarrollar un procedimiento para estimar el desgaste en la superficie de rodadura de un carril, consistente en un modelo de contacto tridimensional para calcular las magnitudes del contacto, una ley de desgaste y una técnica para transferir las distribuciones de profundidad del desgaste en el contacto a la superficie de rodadura del carril.
- Analizar la influencia del proceso no estacionario de contacto entre la rueda y el carril en la estimación del desgaste y la corrugación, así como los efectos no hercianos.
- Estudiar el efecto de la dinámica del eje montado en el crecimiento de la corrugación.
- Identificar posibles mecanismos de fijación de la longitud de onda de la corrugación.

### **1.3 Estructura y alcance de la Tesis**

Aparte de este primer capítulo introductorio, el texto de esta Tesis Doctoral se estructura en otros siete capítulos, que se describen de forma resumida a continuación.

En el Capítulo 2 se analiza el problema de la corrugación o desgaste ondulatorio en los carriles ferroviarios y se revisan las principales clasificaciones realizadas de este defecto. Posteriormente, se enumeran las principales contribuciones realizadas por investigadores en el ámbito experimental acerca de la corrugación en carriles ferroviarios. A continuación, se describen defectos que afectan a las bandas de rodadura de las ruedas y que presentan similitudes con la corrugación en carriles. Finalmente, se tratan otros defectos que aparecen en las superficies de rodadura de los carriles que pueden desencadenar la formación de corrugación por las elevadas fuerzas de contacto que se pueden inducir al pasar los vehículos ferroviarios sobre ellos.

En el Capítulo 3 se revisan los estudios más importantes existentes en la literatura sobre la corrugación en carriles. El capítulo se centra en los trabajos teóricos en los que se desarrollan modelos matemáticos para representar la formación y crecimiento de este defecto, y se estudian los factores involucrados en el proceso.

En el Capítulo 4, en primer lugar, se analiza el contacto de rodadura entre la rueda y el carril, junto con las hipótesis consideradas en su modelado y formulación asociada. Finalmente, se presentan los dos modelos de contacto rueda-carril tridimensional no estacionarios empleados en esta Tesis.

En el Capítulo 5 se presenta la metodología desarrollada para estimar la corrugación en la superficie de rodadura del carril, considerando exclusivamente la mecánica del contacto por medio de los modelos de contacto no estacionarios presentados en el capítulo 4. Se analiza la influencia del proceso no estacionario de contacto en la predicción de la corrugación así como la de los efectos no hercianos.

En el Capítulo 6, se describe el modelo matemático empleado para simular la interacción dinámica entre el vehículo ferroviario y la vía. En primer lugar, se describe el modelo de vehículo ferroviario, que se reduce a un modelo de eje montado que incluye la flexibilidad y los efectos inerciales asociados al giro. Seguidamente, se presentan los primeros modos de vibración, las funciones de respuesta en frecuencia y el diagrama de Campbell del modelo de eje flexible rotatorio. A continuación, se desarrolla el modelo de vía cíclica adoptado en esta Tesis, basado en una metodología de subestructuración.

En el Capítulo 7, se presenta la metodología utilizada para predecir la evolución de la corrugación presente inicialmente en la superficie de rodadura el carril. La técnica se basa en un proceso realimentado en el que intervienen, por una parte el modelo de interacción dinámica vehículo-vía, que es un proceso que transcurre durante un corto periodo de tiempo; y por otra, el modelo de estimación del desgaste, que incluye un modelo de contacto y un modelo de desgaste, que se produce durante un largo periodo de tiempo. A continuación, se estudia el crecimiento de la corrugación empleando el modelo de interacción vehículo-vía y el modelo de desgaste. Se realizan análisis destinados a determinar la influencia de la dinámica del eje montado, en combinación con otros factores del contacto y de la vía, en el crecimiento de la corrugación.

En el Capítulo 8, se recogen las conclusiones más importantes del trabajo desarrollado en la Tesis, y se destacan las principales aportaciones.

En la parte final del documento, se ha incorporado unos anexos con información complementaria relativa a las funciones potencial de las cuales se derivan las

ecuaciones integrales de Boussinesq-Cerruti para el cálculo de los coeficientes de influencia elástica, que permiten relacionar las tensiones con los desplazamientos; y a las expresiones matemáticas de los coeficientes de influencia elástica para elementos rectangulares. Un tercer anexo recoge los artículos publicados durante el desarrollo de la Tesis.

Cierra el documento de la Tesis un listado de las referencias bibliográficas que se han consultado en la realización de este trabajo y que han sido citadas en el mismo.



## 2

# Contribuciones de otros investigadores en el ámbito experimental

### 2.1 Introducción

La corrugación de los carriles presenta características muy diversas, lo cual ha conducido a conjeturar la existencia de diferentes mecanismos a través de los cuales se produce el fenómeno. En este sentido, resulta fundamental y constituye una de las metodologías con mejores resultados, el trabajo de diversos investigadores que han acumulado experiencia a través de observaciones de campo y que ha facilitado la clasificación del problema. Sin duda, el investigador que más ha contribuido a profundizar en el conocimiento de este problema, no tanto a través del modelado como en la observación y en la clasificación del problema, ha sido Stuart Liddle Grassie, lo que justifica la importancia que se da en el presente capítulo de esta Tesis a sus aportaciones.

En este capítulo se analiza el trabajo publicado que contiene resultados obtenidos a partir de la observación en campo de la corrugación en carriles ferroviarios. Estos trabajos permitieron, primeramente, anticipar hipótesis sobre cómo se genera el defecto, y posteriormente establecer una clasificación. Las observaciones hicieron posible la identificación de algunos de los mecanismos que dan lugar a la formación de los diferentes tipos de la corrugación. En el apartado 2.2, se realiza una revisión de las contribuciones que condujeron a la clasificación del problema y a la determinación de algunos de los elementos que intervienen en el crecimiento del defecto. Otros trabajos en los que se muestran experiencias sobre el problema, se resumen en el apartado 2.3.

En el apartado 2.4, se hace un paréntesis para realizar una revisión básica sobre un problema semejante al que aparece en el carril que afecta a la banda de rodadura de la rueda. Este problema, conocido (según sus características) como ovalización, poligonalización, corrugación de la banda de rodadura u *OOR* (*Out-of-roundness*),

puede encerrar idénticos mecanismos que los que producen la corrugación en carriles, con la particularidad que la longitud de onda es (aproximadamente) un divisor del perímetro de la rueda.

En la última sección de este capítulo, el apartado 2.5, se describen brevemente algunos defectos que aparecen en la superficie de rodadura de los carriles, que se han relacionado de algún modo con la corrugación y pueden actuar como desencadenantes de ésta.

## 2.2 Clasificaciones y tipología de la corrugación en carriles

La tipología que presenta este defecto es variada, así como también se cree que sus causas pueden ser diversas. Se pueden establecer, por tanto, distintas clasificaciones atendiendo a sus características, causas, localización y tratamiento, como se verá en este apartado. La clasificación más sencilla de la corrugación en carriles, aunque resulte insuficiente, atiende exclusivamente a su longitud de onda. De este modo, se distingue entre **corrugación de longitud de onda corta** (*short pitch corrugation*), aproximadamente entre 25 y 80 mm en vías rectas y entre 70 y 150 mm en vías curvas, y **corrugación de longitud de onda larga** (*long wavelength corrugation*), desde 200 mm hasta 2000 mm.

En 1986, Alias [4] clasificó las irregularidades en la superficie de rodadura del carril en función de su longitud de onda en tres categorías: corrugación, con longitudes de onda comprendidas entre 30 y 80 mm y amplitudes de centésimas de milímetro; ondas cortas, con longitudes entre 150 y 300 mm y amplitudes hasta 1 mm, y ondas largas, con longitudes de hasta dos metros. En la misma línea, Lévy [115] clasificó las ondulaciones de la cabeza del carril en ondas cortas, con longitudes de onda hasta 250 mm; ondas medias, de 150 a 600 mm y ondas largas, de 0.3 a 2 m. Ambas clasificaciones atienden exclusivamente a la longitud de onda del defecto, pero pronto se demostró que estas clasificaciones eran incompletas, al detectarse casos en los que la corrugación podía presentar idénticas longitudes de onda, pero ser motivada por causas completamente diferentes.

Grassie y Kalousek publicaron en 1993 un trabajo [64], ampliamente citado posteriormente en la bibliografía, en el que se propuso una clasificación de la corrugación en carriles en seis tipos (ver Tabla 2.1), que denominaron *heavy haul*, *light rail*, *booted sleepers*, *contact fatigue*, *rutting* y *roaring rails*. Dicha clasificación se realizó atendiendo a dos mecanismos. Según los autores, el primer mecanismo, denominado **mecanismo de fijación de la longitud de onda**, es el que determina la longitud de onda del defecto ondulatorio y su posición a lo largo de la vía y se asocia a la interacción dinámica entre el vehículo y la vía. El segundo mecanismo,

que denominaron **mecanismo de daño**, es el responsable de la formación de la ondulación en la superficie de rodadura del carril. Los autores identificaron inicialmente cuatro mecanismos de daño: el flujo plástico, la flexión plástica, la fatiga de contacto de rodadura y el desgaste. El mecanismo de fijación de la longitud de onda y el mecanismo de daño se relacionan entre sí, constituyendo el mecanismo de formación de corrugación, por medio de un bucle realimentado (ver Figura 2.1).

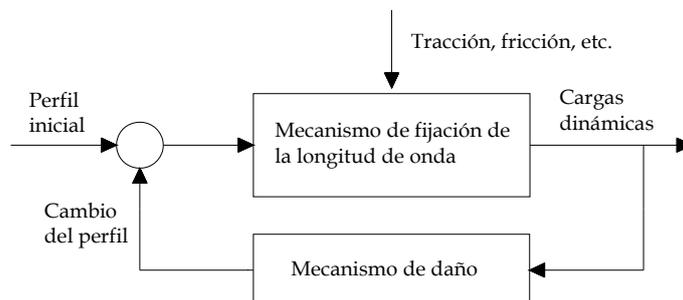


Figura 2.1. Mecanismo de generación de corrugación. Basado en la referencia [64].

Según estos autores, se podían explicar los mecanismos de fijación de la longitud de onda de cinco tipos de corrugación. En cambio, se desconocía el mecanismo de fijación de la longitud de onda del tipo de corrugación denominada *roaring rails*, que se había detectado principalmente en vías rectas y en tramos curvos de elevado radio en líneas de alta velocidad.

Los autores expusieron las características de cada tipo de corrugación identificado, explicaron las causas y propusieron una serie de tratamientos destinados a evitar la aparición de corrugación o controlar su crecimiento [64]. A continuación, se describe brevemente estos tipos de corrugación, en base a los trabajos de Grassie y Kalousek [64].

El tipo de corrugación denominada *heavy haul* (Figura 2.2) aparece principalmente en vías por las que circulan trenes de mercancías con elevadas cargas por eje (superiores a 22 toneladas) a velocidades bajas. Este tipo de corrugación presenta longitudes de onda largas, en el rango de 200 a 300 mm, y se propaga desde soldaduras, juntas de vía u otras irregularidades discretas de la cabeza del carril. Según Grassie y Kalousek, el mecanismo de fijación de la longitud de onda es la resonancia P2, en la que la masa no suspendida del vehículo oscila sobre la rigidez de la vía (Figura 2.4(a)) y cuya frecuencia suele variar entre 50 y 100 Hz (según las características de la vía); y el mecanismo de daño es el elevado flujo plástico que se produce en los valles de la corrugación, como consecuencia de las elevadas tensiones en el contacto rueda-carril. La corrugación *heavy haul* se forma tanto en

vía recta como en el carril exterior en curvas, aunque también se ha observado en el carril interior en curvas con exceso de peralte en vías por las que circulan tanto trenes de mercancías como de pasajeros, con cargas por eje inferiores.



Figura 2.2. Corrugación heavy haul. De la referencia [69].

Según Grassie y Kalousek, la corrugación denominada *light rail* presenta muchas similitudes con el tipo de corrugación *heavy haul*. Se caracteriza por presentar una longitud de onda larga comprendida entre 500 y 1500 mm, ser medible tanto en la cabeza como en el pie del carril y por propagarse a partir de soldaduras. Al igual que en la corrugación *heavy haul*, el mecanismo de fijación de la longitud de onda de este tipo de corrugación es la resonancia P2 de la vía. La diferencia fundamental es que el mecanismo de daño de la corrugación *light rail* es la flexión plástica del carril, que puede afectar a carriles con masas unitarias bajas, inferiores a 54 kg/m.

Los tipos de corrugación *heavy haul* y *light rail* no son muy frecuentes, sin embargo los tipos de corrugación cuyo mecanismo de daño es el desgaste afectan a todo tipo de vías de la mayoría de administraciones ferroviarias.

Por otra parte, según Grassie, la resonancia P2, al contrario de lo que se pensaba inicialmente en [64], no sólo está relacionada con los tipos de corrugación *heavy haul* y *light rail*, sino que también es la causa de la formación de corrugación denominada *otra resonancia P2* en una amplia variedad de vías [69]. Un ejemplo de ello es el tipo de corrugación de larga longitud de onda (entre 300 y 400 mm) asociado a la resonancia P2 observado en vías tranviarias (ver Figura 2.3), que inicialmente había sido relacionado con la resonancia de torsión de ejes [64]. En el caso en el que se excitaran a la vez las frecuencias de la resonancia P2 y de la primera resonancia de torsión de los ejes, ambas en el rango 50-100 Hz, la corrugación resultante podía ser más severa, como se observó en curvas pronunciadas en vías de metro [190]. Se observó que este tipo de corrugación aparecía tanto en vías en placa como en vías sobre balasto y el mecanismo de daño era el desgaste.



Figura 2.3. Corrugación resonancia P2 en una vía de tranvía.

El tipo de corrugación de longitud de onda más pequeña, denominado *roaring rails* por el ruido de rodadura que produce, aparece en vías rectas y en el carril exterior de curvas de elevado radio por las que circulan vehículos con bajas cargas por eje (inferiores a 20 t). El mecanismo de fijación de la longitud de onda en un principio se pensó que podría ser la resonancia *articulada-articulada* (*pinned-pinned*), en la que el carril vibra con una longitud de onda que es el doble de la distancia entre traviesas y con nodos localizados en las traviesas (Figura 2.4(b)), y el mecanismo de daño, el desgaste [64]. En un trabajo posterior [69], Grassie afirma que definitivamente la causa de este tipo de corrugación es la resonancia *articulada-articulada*. Este tipo de corrugación presenta la longitud de onda más pequeña que el resto de tipos de corrugación, dado que la frecuencia típica de la resonancia *articulada-articulada* es más elevada, en torno a 800-1200 Hz, que las frecuencias del resto de mecanismos de fijación de la longitud de onda. La Figura 2.5 muestra este tipo de corrugación en una vía recta.

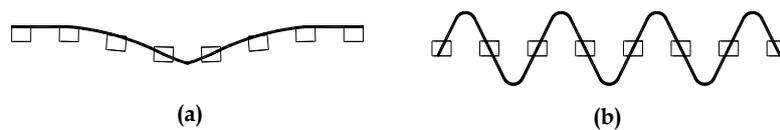


Figura 2.4. (a) Resonancia P2; (b) Resonancia articulada-articulada (*pinned-pinned*).

La corrugación denominada *rutting* surge principalmente en el carril interior en curvas de radio reducido y en vía recta cuando se produce una tracción o frenada severas, es decir, en aquellas condiciones en las que la relación entre la fuerza tangencial y la normal se encuentra cerca del límite de fricción. Este tipo de corrugación tiene su origen, según los autores, en las vibraciones *stick-slip* entre las dos ruedas de un mismo eje, al encontrarse una rueda en condiciones de deslizamiento y la otra no. El mecanismo de fijación de la longitud de onda es, según Grassie y Kalousek, el segundo modo de torsión de los ejes motorizados

(Figura 2.6); y el mecanismo de daño, el desgaste (ver Figura 2.7(a)), aunque también puede producirse deformación plástica en casos de corrugación ya desarrollada (ver Figura 2.7(b)).

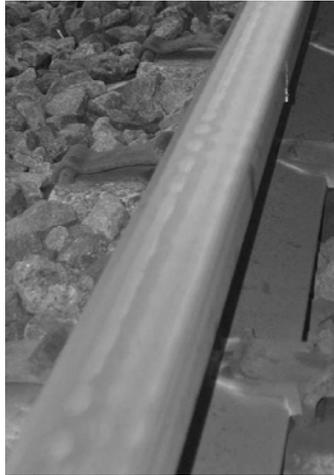


Figura 2.5. Corrugación roaring rails. De la referencia [69].

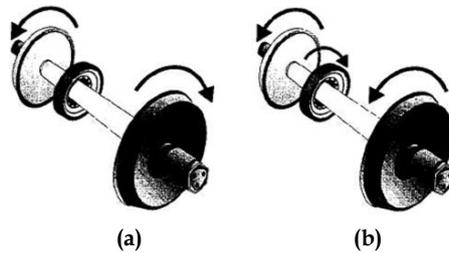


Figura 2.6. (a) 1ª resonancia a torsión del eje; (b) 2ª resonancia a torsión del eje. De la referencia [65].

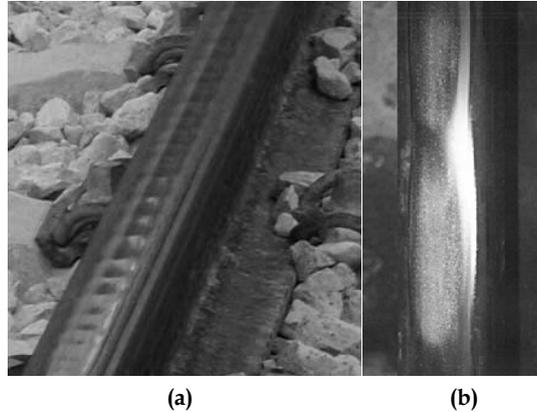


Figura 2.7. (a) Corrugación rutting; (b) Corrugación rutting con deformación plástica. De la referencia [69].

La corrugación *booted sleepers*, según Grassie y Kalousek, aparece en vías de metro en las que las traviesas de hormigón monobloque o bi-bloque se disponen sobre suelas elásticas para reducir las vibraciones que se transmiten por el suelo a las estructuras próximas a la vía. Se ha detectado principalmente en el carril bajo con longitudes de onda en torno a 50 mm en curvas pronunciadas. El mecanismo de daño es el desgaste, aunque también se ha observado deformación plástica en los picos de la corrugación en la dirección longitudinal y lateral, hacia el interior de la curva. El mecanismo de fijación de la longitud de onda es la primera antirresonancia vertical de la vía, aproximadamente entre 250 y 350 Hz, producida por la resonancia de flexión de las traviesas sobre la suela elástica, que está poco amortiguada. En esta antirresonancia, la traviesa vibra como un absorbente dinámico de vibraciones, ya que los elementos contiguos prácticamente no se desplazan. No obstante, también existen varias resonancias del eje ferroviario en el mismo rango de frecuencias que pueden magnificar los efectos de esta antirresonancia.

Tabla 2.1. Primera clasificación de la corrugación en seis tipos propuesta por Grassie y Kalousek [64]

Tipo de corrugación	Longitud de onda (mm)	Mecanismo de fijación de la longitud de onda	Mecanismo de daño	Lugar de aparición
1. Heavy haul	200-300	Resonancia P2	Elevado flujo plástico en valles	Vía recta y carril alto en curvas
2. Light rail	500-1500	Resonancia P2	Flexión plástica	Vía recta y curva
3. Booted sleepers	50	1ª Antirresonancia vertical y resonancias del eje ferroviario	Desgaste	Carril bajo en curvas severas
4. Contact fatigue	150-450	Resonancia P2	Fatiga de contacto de rodadura	Curvas
5. Rutting rails	150-450	Segunda resonancia de torsión del eje	Desgaste	Carril bajo en curvas
6. Roaring rails	25-80	¿?	Desgaste	Vía rectas y carril alto en curvas

Dado que algunos nuevos casos de corrugación observados no se ajustaban a la clasificación inicial en seis tipos de corrugación, Kalousek y Grassie publicaron en el año 2000 un nuevo trabajo [107], en el que se proponía clasificar la corrugación en carriles atendiendo primero al mecanismo de daño (flujo plástico, flexión plástica, fatiga de contacto de rodadura y desgaste); y a continuación, dentro de cada uno de los mecanismos de daño, al mecanismo de fijación de la longitud de onda. Según los autores, el mecanismo de fijación de la longitud de onda que comparten la mayoría de los tipos de corrugación es la resonancia P2, dando lugar a fuerzas dinámicas altamente destructivas, tanto para los elementos del vehículo como para los componentes de la vía. Por otra parte, los autores observaron que el desgaste era el mecanismo de daño que daba lugar a una mayor diversidad de corrugación, dado que se trata de un proceso gradual que siempre está presente en el contacto de rodadura rueda-carril, por lo que la corrugación asociada al desgaste constituye un problema en casi todo tipo de vías. Los autores señalaron que cualquier resonancia del vehículo sobre la vía podía desencadenar la formación de corrugación. Asimismo, apuntaron que la resonancia *articulada-articulada* probablemente fuera el mecanismo de fijación de la longitud de onda de la corrugación observada en líneas de alta velocidad y en algunas vías de metro. Los autores también señalaron que la tendencia actual de hacer circular vehículos de características uniformes podría ser una posible causa del incremento de la velocidad de formación de corrugación en determinadas vías.

Como posibles tratamientos de la corrugación asociada a la resonancia *articulada-articulada*, los autores propusieron la instalación de placas de asiento elásticas y carriles más rígidos y la reducción de la distancia entre traviesas, lo que desplazaría la frecuencia de la resonancia *articulada-articulada* hacia frecuencias mayores, a la vez que disminuiría su amplitud. También indicaron que el amolado de los carriles no sólo constituía el tratamiento más eficaz para controlar la corrugación, sino que al eliminar también la rugosidad de la superficie de rodadura de los carriles, y con ello disminuir las cargas dinámicas, también se conseguía retrasar la nueva aparición de corrugación. Por otra parte, con el reperfilado transversal de la cabeza del carril se reducían las fuerzas presentes al inscribir el vehículo una curva y las tensiones en el contacto en el carril interior, responsables del flujo plástico y la fatiga de contacto de rodadura. Como tratamiento eficaz para controlar la corrugación en curvas, los autores propusieron la lubricación y la instalación de carriles de acero de elevada dureza, que retardan el desgaste y son más resistentes al flujo plástico.

Grassie, en un trabajo posterior [66], defendió la idea que todos los tipos de corrugación identificados estaban relacionados con resonancias del sistema

vehículo-vía (como la segunda resonancia de torsión de ejes motorizados, la resonancia *articulada-articulada*, la resonancia P2, etc.) y que eran fenómenos de frecuencia constante, en vez de serlo de longitud de onda constante. Afirmó que la resonancia *articulada-articulada* era el mecanismo de fijación de la longitud de onda de la corrugación que aparecía en tramos de vía recta o en curvas de elevado radio en líneas de alta velocidad, denominada previamente *roaring rails*. Por otra parte, el autor sugirió que la coincidencia de dos resonancias del sistema acoplado vehículo-vía podía acentuar los efectos de cada resonancia por separado. En concreto, identificó un caso de corrugación resultante de la coincidencia de la resonancia P2 y la primera resonancia de torsión de los ejes, en el rango de frecuencias 40-100 Hz, en una vía de metro de Estados Unidos, al ser excitadas por el paso del vehículos sobre juntas de vía. Destacó los buenos resultados que presentaba el uso de *modificadores de fricción* para controlar la corrugación relacionada con el desgaste, principalmente en vías de metro, en las que existen coeficientes de rozamiento elevados.

En un trabajo más reciente [69], Grassie propone una nueva clasificación de la corrugación en seis tipos, en la que descarta que la fatiga de contacto de rodadura sea un mecanismo de daño que desencadene la formación de corrugación en carriles, sino más bien una consecuencia de las elevadas cargas dinámicas en el contacto que resultan de la presencia de corrugación en la superficie de rodadura de los carriles. El autor afirma que el tipo de vía tiene un efecto de mayor importancia de lo que se había supuesto inicialmente y que existen varios tipos de corrugación relacionados con la estructura de la vía. En consecuencia mantiene la nomenclatura de los tipos de corrugación *roaring rails*, *rutting*, *heavy haul* y *light rail* e introduce dos nuevos tipos de corrugación que denomina *otra resonancia P2* y *específica del tipo de vía*. De nuevo, clasifica los tipos de corrugación detectados según el mecanismo de fijación de la longitud de onda y el mecanismo de daño, aunque señala que todos los tipos de corrugación son defectos de frecuencia constante y que por tanto, la longitud de onda del defecto dependerá de la velocidad de los trenes que circulen por una determinada vía y de la frecuencia de la resonancia del sistema vehículo-vía asociada al mecanismo de fijación de la longitud de onda. Esta nueva clasificación se recoge en la Tabla 2.2.

Tabla 2.2. Última clasificación de la corrugación según mecanismos de daño y de fijación de la longitud de onda propuesta por Grassie [69].

Tipo de corrugación	Mecanismo de daño	Mecanismo de fijación de la longitud de onda	Frecuencia (Hz)	Lugar de aparición
1. Heavy haul	Flujo plástico en valles	Resonancia P2	50-100	Vía recta y curvas
2. Light rail	Flexión plástica	Resonancia P2	50-100	Vía recta y curvas
3. Otra resonancia P2	Desgaste	Resonancia P2	50-100	Vía recta y carril exterior en curvas
4. Roaring rails	Desgaste	Resonancia articulada-articulada	400-1200	Vía recta y carril exterior en curvas
5. Rutting	Desgaste	Segunda resonancia de torsión del eje	250-400	Carril interior en curvas
6. Específica de cada tipo de vía	Desgaste	Específico de cada tipo de vía	--	Vía recta y curvas

### 2.3 Otros trabajos basados en la observación del defecto

En 1991, Ahlbeck y Daniels estudiaron el crecimiento de la corrugación en el metro de Baltimore [3]. El defecto que predominaba aparecía en el carril bajo en tramos de vía curva con traviesas bi-bloque, aunque también se había detectado en vía recta a la entrada de túneles. Para investigar las causas de la corrugación, se realizaron dos series de pruebas, en las que se midió la respuesta dinámica del eje y de la vía a la corrugación existente en la superficie de rodadura de los carriles. Por otra parte, se observó que el programa de lubricación de las pestañas de las ruedas, que se había iniciado con anterioridad a la realización de las pruebas, ofrecía resultados satisfactorios en la reducción de la velocidad de crecimiento de la corrugación en curvas. Además de la lubricación de las pestañas de las ruedas, los autores propusieron una serie de métodos para el control de la corrugación, que son: empleo de carriles de acero de mayor dureza y resistencia, principalmente en vías por las que circulan trenes de transporte de mercancías con elevadas cargas por eje; mejora del diseño de la vía para evitar excitar resonancias del sistema acoplado vehículo-vía; mayor variedad de velocidades de los vehículos que circulan por una vía; y el amolado preventivo de las vías, con el fin de eliminar rugosidades en la superficie de rodadura de los carriles que pueden dar lugar a corrugación.

En 1992, Kalousek y Johnson investigaron la corrugación de longitud de onda corta que se había detectado en el metro de Vancouver [106]. Los autores identificaron tres factores que, de acuerdo con las observaciones realizadas, estaban relacionados con el desarrollo de la corrugación: desalineamiento de los ejes en los bogies, aparición de vibraciones *stick-slip* en el contacto rueda-carril y el desarrollo de contacto conforme entre la banda de rodadura de la rueda y el carril. Los tratamientos que propusieron fueron: reducción de la tolerancia del desalineamiento de los ejes en los bogies, el amolado del carril y mantenimiento del mismo ancho de vía en toda la línea. Los autores fueron pioneros en el empleo de un tratamiento de la corrugación conocido como *modificador de fricción*, que se ha utilizado desde entonces con excelentes resultados en vías del todo el mundo. Los *modificadores de fricción* son sustancias que limitan el coeficiente de rozamiento a niveles en torno a 0.35 y aseguran que la fuerza de rozamiento crezca con la velocidad de deslizamiento, con lo que resultan eficaces para controlar la corrugación derivada del fenómeno *stick-slip*, independientemente del mecanismo de fijación de la longitud de onda asociado.

En 1996, en el estudio desarrollado en [70], Grassie describió los ensayos realizados en varios tramos de vía de la red británica de ferrocarriles durante un periodo de tiempo de diez años para investigar el mecanismo de formación de corrugación de

longitud de onda corta. Para realizar las medidas de rugosidad, se desarrolló un equipo de medida, un perfilómetro montado sobre un carro, conocido como CAT (*Corrugation Analysis Trolley*), que permitía medir la rugosidad presente en la superficie de rodadura del carril a la velocidad de paso de un hombre y en grandes longitudes. Se observó que este tipo de corrugación surgía del desgaste desigual de los picos y valles, por el cual el desgaste en los valles era ligeramente superior, alrededor de un 10% mayor, al que se producía en los picos. Se observó que el amolado de los carriles retrasaba la aparición de la corrugación dos años y medio, en comparación con carriles nuevos sin amolar. El autor no encontró ninguna explicación para la periodicidad de la corrugación observada. En un estudio posterior, Grassie *et al.* [68] propusieron unos criterios para conseguir un amolado aceptable de las irregularidades longitudinales del carril.

En 1998, Grassie y Elkins investigaron la corrugación en carriles en cinco líneas de metro en Estados Unidos [65]. Observaron que el tipo más común de este defecto estaba asociado al rango de frecuencias comprendido entre 300 y 350 Hz y se presentaba como una especie de bache (de ahí la denominación *rutting*) en la superficie de rodadura del carril. El segundo tipo de corrugación más frecuente se encontraba en el intervalo de frecuencias comprendido entre 750 y 1000 Hz, y se caracterizaba por la periodicidad de la fase blanca martensítica en la cabeza del carril. A partir de las medidas de las características dinámicas de la vía y de los ejes motorizados, se concluyó que la corrugación que aparecía en el rango de frecuencias 300-350 Hz se debía a la excitación del segundo modo de torsión de los ejes (ver Figura 2.6(b)), en el que las dos ruedas oscilaban en fase, de forma que este modo constituía el principal mecanismo de fijación de la longitud de onda de la corrugación observada en las líneas de metro analizadas. La corrugación relacionada con el rango de frecuencias más altas era consecuencia de la resonancia *articulada-articulada*.

García Vadillo *et al.* llevaron a cabo una investigación acerca del efecto de la distancia entre traviesas en el crecimiento de la corrugación de longitud de onda corta en el carril bajo de un tramo de vía curva del metro de Bilbao [203]. En dicha vía, los carriles estaban dispuestos sobre una losa de hormigón con dos capas de material elástico. Inicialmente, la distancia entre traviesas era de un metro, pero al detectarse un crecimiento elevado de la corrugación después de unos pocos pasos de ruedas, se redujo dicha distancia a la mitad, intercalando una traviesa entre dos traviesas consecutivas. A diferencia de otros casos similares de corrugación del tipo *booted sleepers* y *rutting* analizados por Clark *et al.* [35], Grassie y Kalousek [64] y Hempelmann y Knothe [77], en los que la corrugación estaba presente a lo largo de la superficie de rodadura del carril o era mayor en las proximidades de las

traviesas, la corrugación analizada aparecía en el carril bajo entre traviesas (aproximadamente a mitad de vano). Los autores explicaron este caso particular de corrugación por el elevado pseudodeslizamiento lateral del eje delantero del bogie al circular por una vía curva, junto con la fuerza normal más baja, debido a la menor rigidez de la vía entre traviesas. Mediante un análisis modal de la vía, se detectó que el mecanismo de fijación de la longitud de onda resultaba de la excitación de la resonancia *articulada-articulada* lateral, siendo su frecuencia menor que las citadas en la bibliografía, por la mayor distancia entre traviesas de esta vía. Fue entonces cuando, después de sustituir los carriles corrugados por nuevos y observar que la corrugación volvía a iniciarse rápidamente, se instalaron traviesas intermedias entre las ya existentes, con el objetivo de aumentar la frecuencia de la resonancia *articulada-articulada* lateral, con lo que se consiguió detener el crecimiento de la corrugación.

En 2002, Hiensch *et al.* analizaron la corrugación observada en dos tramos de vía adyacentes de una vía que comunicaba dos ciudades holandesas, cuyas amplitudes eran significativamente diferentes [79]. En este trabajo, los autores recogieron los resultados de los análisis metalúrgicos realizados a dos muestras de carril, de diferentes fabricantes, extraídas del tramo de vía que no presentaba corrugación y del tramo de vía corrugado. Por otra parte, estudiaron el crecimiento de la corrugación en el tramo de vía corrugado por medio de simulaciones numéricas de la interacción vía-vehículo y del desgaste. Los autores atribuyeron los diferentes grados de corrugación detectados en la misma vía a la diferencia en resistencia al desgaste que presentaban los aceros de los dos carriles analizados.

Eadie *et al.* estudiaron el efecto de los *modificadores de fricción* sobre el desarrollo de la corrugación y otros fenómenos relacionados, como el ruido de rodadura [47]. Los autores mostraron cómo se reducía la aparición de ruido y vibraciones *stick-slip* al introducir un "tercer cuerpo", el *modificador de fricción*, en el contacto entre la rueda y el carril, capaz de cambiar la pendiente de la curva fuerza-pseudodeslizamiento de negativa a positiva y con ello, de retrasar el desarrollo de corrugación y el siguiente amolado de los carriles. En un trabajo posterior [48], Eadie *et al.* analizaron la influencia de los *modificadores de fricción* en el desarrollo de corrugación en dos curvas del metro de Bilbao a partir de medidas de la rugosidad realizadas durante varios años. Se registró la amplitud de la corrugación en tramos de vía recién amolados, en los que se aplicó *modificadores de fricción* sólo en parte de ellos, con el fin de analizar la influencia de éstos en el crecimiento de la corrugación. En la primera curva monitorizada, la vía estaba dispuesta sobre balasto, mientras que en la segunda, la vía estaba instalada sobre placa de hormigón. Se observó en ambas curvas que en los tramos de vía en los que no se

había aplicado *modificadores de fricción*, las amplitudes de la corrugación eran significativamente mayores que las de los tramos en los que sí se habían aplicado. Por otra parte, Egaña *et al.* [50] llevaron a cabo ensayos en un tramo de vía curva de radio reducido del metro de Bilbao, con la finalidad de determinar la influencia de los *modificadores de fricción* líquidos en el crecimiento de la corrugación. Concluyeron que la aplicación de los *modificadores de fricción* retrasaba o evitaba el desarrollo de la corrugación.

Saulot *et al.* centraron sus investigaciones en el estudio de la corrugación de longitud de onda corta observada en el carril bajo en vías curvas de radio pequeño del metro de París (RATP). Analizaron el mecanismo de daño involucrado mediante análisis metalúrgicos y tribológicos de muestras de carril corrugado [173], así como a partir de la reproducción del defecto en laboratorio [174]. Resaltaron el papel del deslizamiento lateral en el contacto entre el carril bajo y la rueda interna a la curva del eje montado delantero del bogie en el desgaste observado en los valles de la corrugación.

En 2009, Torstensson y Nielsen monitorizaron el crecimiento de rugosidad, así como la generación de ruido de rodadura en una vía curva pronunciada, de 120 m de radio, del metro de Estocolmo [194]. Se detectó que la corrugación (tipo *rutting*) se desarrollaba sólo en el carril bajo de la curva, con longitudes de onda comprendidas en el rango de 40 a 140 mm, predominando las longitudes de onda de 50 y 80 mm.

Recientemente, en 2014, Meehan *et al.* [138] han investigado la influencia de factores ambientales como la lluvia y humedad en el crecimiento de la corrugación en una vía curva del metro de Brisbane de 242 m de radio, en la que se había observado corrugación de longitud de onda entre 90 y 110 mm. Durante cuatro años, los autores realizaron medidas periódicas del perfil longitudinal de la vía mediante *CAT* que analizaron posteriormente para obtener tasas locales de crecimiento de la corrugación (relación entre amplitudes de los perfiles entre mediciones) para la longitud de onda predominante de 100 mm, que compararon con datos meteorológicos. Los resultados muestran una fuerte correlación entre la media diaria de precipitaciones y la tasa de crecimiento de la corrugación, de modo que si la primera aumenta, el crecimiento de la corrugación disminuye, según una relación lineal. Se detecta la misma tendencia con el porcentaje de humedad ambiental.

Zhang *et al.* [232] han estudiado un caso especial de corrugación en el metro de Pekín, en el que la corrugación aparece principalmente en tramos curvos de vía en placa de hormigón en los que los carriles se fijan mediante el sistema *Egg*. Tras

realizar medidas del perfil longitudinal de los carriles afectados mediante CAT y analizar los datos recogidos, observaron que las longitudes de onda más frecuentes eran 63 mm, 80 mm y 100 mm en vías en las que los vehículos circulan a 60 km/h. Los autores han clasificado el tipo de corrugación observada como *específica del tipo de vía*, de acuerdo con la clasificación de Grassie [69] y atribuyen la causa a la excitación de resonancias del sistema vehículo-vía en el rango de frecuencias entre 200 y 300 Hz favorecida por el tipo de sujeción de los carriles (sistema Egg), de baja rigidez, empleado para reducir la transmisión de vibraciones.

## 2.4 Pérdida de redondez de la banda de rodadura de la rueda

La banda de rodadura de la rueda puede estar afectada por irregulares de tipo ondulatorio, que según si su longitud de onda sea larga (superior a 150 mm) o corta (de 30 a 60 mm), producirán **pérdida de redondez** de la rueda, también conocida como *OOR (Out-Of-Round wheels)*, o **corrugación**, respectivamente.

La *OOR* puede ser periódica o estocástica. La **OOR periódica** se ha detectado exclusivamente en las ruedas de ejes equipados con frenos de disco. Se caracteriza por presentar un patrón de irregularidad periódico alrededor de la circunferencia de la rueda, superpuesto al radio constante de la misma. La longitud de onda de la irregularidad varía entre 150 mm y una vez la longitud de la circunferencia de la rueda, mientras que su amplitud es aproximadamente de 1 mm. Cuando el perfil de la rueda presenta de uno a cinco armónicos dominantes, la *OOR* periódica se denomina **poligonalización** de la rueda.

En la actualidad, no existe en la bibliografía una única explicación de las causas que producen este defecto. Müller *et al.* [144] concluyeron, a partir de experimentos realizados en una línea férrea de Alemania, que la *OOR* de las ruedas podía estar causada por la no homogeneidad de las propiedades del material a lo largo de la circunferencia de la rueda. Meinke *et al.* [140] y Morys [142] señalaron los desequilibrios dinámicos en el eje ferroviario, que producen en las ruedas vibraciones de gran amplitud, como una de las posibles causas de la *OOR* en ruedas. Por otra parte, Werner [221] explicó la formación de este defecto como el resultado del acoplamiento de la frecuencia de la fuerza de contacto producida por las irregularidades presentes en la banda de rodadura, con la frecuencia asociada a algún modo de vibración del eje ferroviario. Zacher [231] detectó ruedas de trenes alemanes de alta velocidad ICE (*Intercity-Express*) con uno, tres y cuatro lóbulos distribuidos a lo largo de las circunferencias de las mismas. Rode *et al.* [171] atribuyeron la formación de tres lóbulos en la banda de rodadura de las ruedas al sistema de fijación de éstas, en tres puntos, durante el proceso de perfilado, que

producía una *OOR* pequeña que se incrementaba con la rodadura. Nielsen *et al.* [151] también llegaron a la misma conclusión tras analizar ruedas de trenes del metro de Estocolmo, donde observaron que aproximadamente el 60% de las ruedas presentaban perfiles con tres armónicos dominantes. Soua y Pascal [181] investigaron la formación de tres perfiles de rueda diferentes, con uno, dos y cuatro armónicos dominantes mediante simulaciones numéricas. Los autores explicaron la formación del patrón de desgaste como resultado de la combinación de las vibraciones de torsión del cuerpo del eje ferroviario y el movimiento lateral de éste. Vohla *et al.* [211] después de observar que algunas irregularidades periódicas detectadas en ruedas coincidían con el número de diámetros nodales de los modos de vibración de las ruedas, defendieron la idea de que en el desarrollo de *OOR*, la excitación de los modos de vibración de las ruedas podría desempeñar una función importante. Basándose en investigaciones realizadas en ruedas de trenes *ICE*, Pallgen [159] concluyó que en el caso de ruedas enterizas de acero, el tercer armónico era el que predominaba en el perfil de la rueda, mientras que en ruedas con anillo elástico dominaba el segundo armónico, además de la existencia en ambos casos de cierta excentricidad (primer armónico). La Figuras 2.8 y 2.9, extraídas del trabajo de Pallgen [159], se corresponden con los casos de rueda enteriza y de rueda con anillo elástico, respectivamente.

Al igual que la *OOR* periódica, la ***OOR* estocástica** o **no periódica** sólo se ha detectado en ejes con frenos de disco. Este tipo de *OOR* se asocia con desequilibrios en el eje o a propiedades no homogéneas del material de las ruedas. En la Figura 2.10 se muestra un ejemplo de *OOR* estocástica, de la referencia [159], en la que se puede observar que el perfil de la rueda contiene diferentes armónicos.

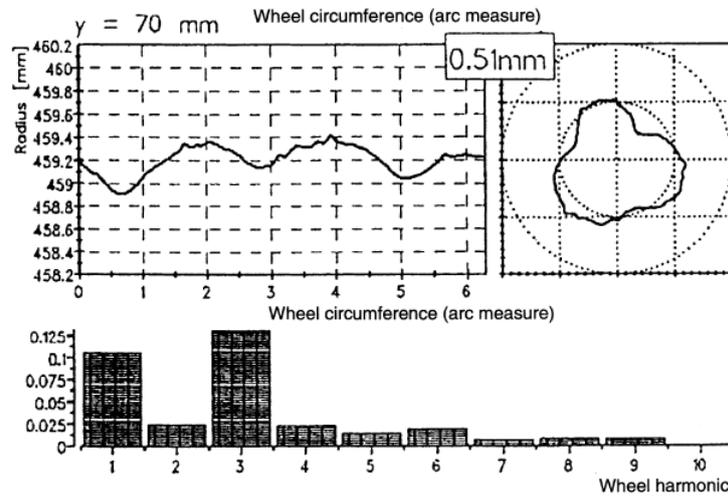


Figura 2.8. Pérdida de redondez OOR de una rueda entera con tres armónicos dominantes. El gráfico de barras representa la influencia de los diferentes armónicos en el perfil de la rueda. De la referencia [159].

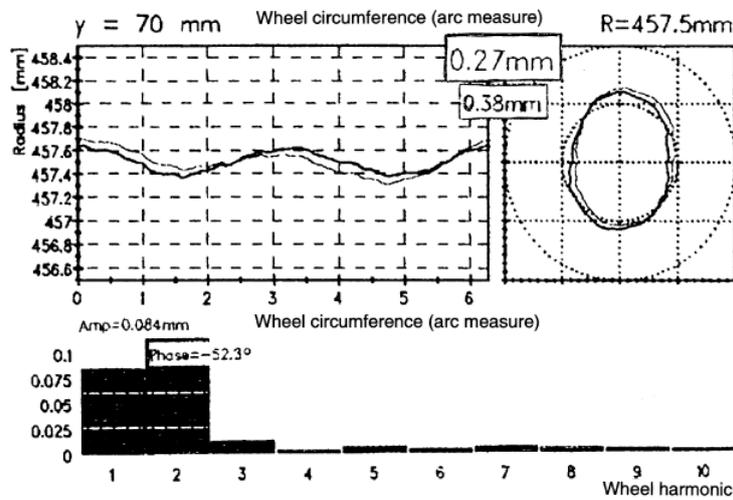


Figura 2.9. Pérdida de redondez OOR de una rueda con anillo elástico con dos armónicos dominantes. El gráfico de barras representa la influencia de los diferentes armónicos en el perfil de la rueda. De la referencia [159].

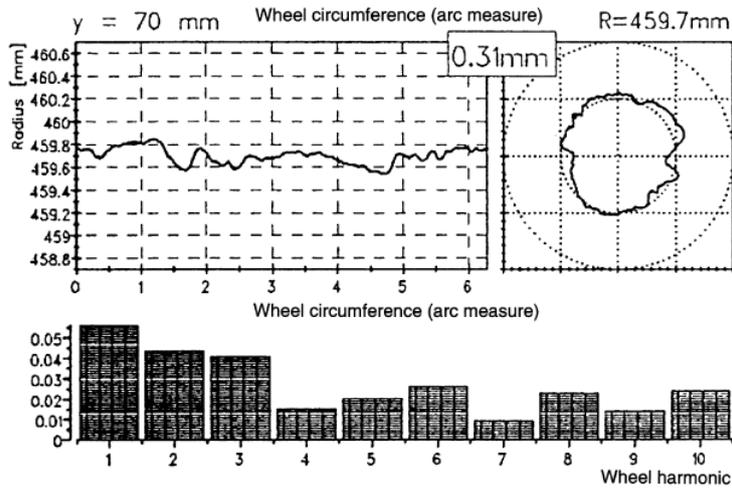


Figura 2.10. Pérdida de redondez estocástica de una rueda entera. El gráfico de barras representa la influencia de los diferentes armónicos en el perfil de la rueda. De la referencia [159].

La **corrugación** aparece en la banda de rodadura en ruedas en las que se emplean frenos de zapata que actúan contra la llanta de la rueda. La longitud de onda predominante de este defecto varía entre 30 y 60 mm y la amplitud es inferior a  $10\ \mu\text{m}$ . La explicación más aceptada de este defecto se debe a Vernersson [206], que basándose en estudios teóricos y experimentales llegó a la conclusión que durante el proceso de frenado algunas partes de la banda de rodadura de la rueda se calientan más que las zonas colindantes, con lo que se forman en las primeras puntos calientes debido a una inestabilidad termoelástica. Las zonas más calientes sobresalen de la superficie de la rueda debido a la dilatación térmica, con lo que están sujetas a un mayor desgaste que las otras zonas de la banda de rodadura. Al enfriarse la rueda, el volumen de material en los puntos calientes disminuye, formándose valles, que configuran el patrón de corrugación.

## 2.5 Otros defectos de la superficie de rodadura de los carriles que pueden desencadenar la formación de corrugación

En este apartado se describen otros defectos que se pueden encontrar en la superficie de rodadura de los carriles que pueden actuar como desencadenantes del inicio de corrugación, como son el **patinaje**, el **hundimiento de junta de vía** y los defectos relacionados con la **fatiga de contacto de rodadura**.

El **patinaje** (*wheel burn*), mostrado en la Figura 2.11, es un tipo de defecto relacionado con el desgaste, que suele aparecer de forma simétrica en los dos

carriles. Se forma por el mismo mecanismo que el patinaje de la rueda, es decir por el uso prolongado del freno.



Figura 2.11. Patinaje en la superficie de rodadura del carril.

El **hundimiento de junta de vía** (Figura 2.12) se caracteriza por presentar una abolladura vertical localizada en la junta entre dos tramos de carril. La causa más probable de su formación es la combinación de dos factores, por una parte la presencia de calas en la cabeza del carril y por la otra, las elevadas cargas por eje de los vehículos circulantes por la vía. En el caso de carriles continuos soldados, la causa de la aparición de este defecto se atribuye a una menor resistencia del material de aporte empleado para realizar la soldadura o a una transformación de las propiedades del material durante la soldadura, debido a las elevadas temperaturas del proceso. El paso continuo de vehículos sobre una junta de vía hundida provoca elevadas cargas dinámicas, que favorecen el desarrollo de este defecto. La presencia de este defecto en la superficie de rodadura de un carril produce efectos dinámicos muy similares a los de los planos de bloqueo en ruedas.



Figura 2.12. Hundimiento de junta de vía. De la referencia [200].

La **fatiga de contacto de rodadura** es un fenómeno genérico que se manifiesta en forma de defectos en la superficie de rodadura de los carriles, como **exfoliaciones** (*shelling*), *head checks*, *Belgrospi* y *squats*.

El término **exfoliación** (*shelling*) hace referencia a todo tipo de grietas de fatiga inducidas por debajo de la superficie del carril, a una profundidad que puede variar entre 2 y 8 mm. En la fase inicial, este defecto sólo es detectable mediante técnicas de ultrasonidos, ya que es difícil de apreciar durante una inspección visual de la cabeza del carril. En una fase intermedia, este defecto se presenta como puntos negros en la superficie de rodadura del carril. Las grietas de fatiga se desarrollan en un plano horizontal según la dirección longitudinal del carril en un ángulo de  $10^\circ$  a  $30^\circ$  hacia la superficie del carril, instante en el que se puede producir pérdidas de láminas de material de la superficie de rodadura del carril o formar un defecto transversal que puede desencadenar en una fractura del carril. La causa principal de este defecto se atribuye a las elevadas tensiones normales de contacto, que exceden el límite de fatiga del material.

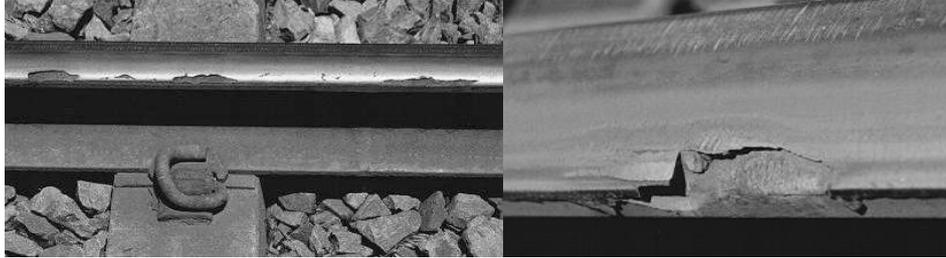


Figura 2.13. Exfoliación del carril (*shelling*).

Los *head checks* (Figuras 2.14 y 2.15) son grietas superficiales finas sensiblemente paralelas entre sí, separadas una distancia más o menos regular de 0.5 a 10 mm. Según las condiciones de contacto predominantes, las grietas forman, vistas desde arriba, un ángulo de aproximadamente  $45^\circ$ , con respecto a la dirección de rodadura y son la mayoría de las veces de longitud variable, como se puede apreciar en la Figura 2.14. En la última fase de crecimiento de las grietas se producen desconchados (*spalls*), que pueden tener una anchura que varía entre 10 y 15 mm y alcanzar una profundidad de 3 mm, como se puede observar en la Figura 2.15. Este defecto es causado por las elevadas tensiones tangenciales en el contacto rueda-carril, que provocan fatiga de contacto. Se detectan principalmente en cambios de vía y en el carril externo en tramos de vía curva.

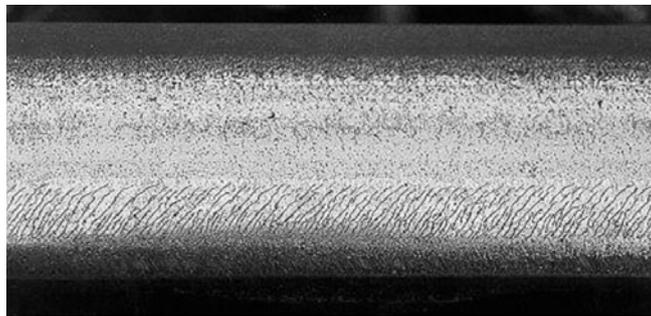


Figura 2.14. Grietas de fatiga de contacto de rodadura localizadas en el borde del carril en contacto con la pestaña de la rueda (*Head checks*).



Figura 2.15. Grietas de fatiga de contacto de rodadura con pequeños desconchados en la superficie de rodadura del carril (*Head checks* y *spalling*).

*Belgrospi* (Figura 2.16) es un nuevo tipo de defecto asociado a la fatiga de contacto de rodadura que sólo aparece en la superficie de rodadura del carril cuando ya existe un determinado nivel de corrugación. Este defecto fue detectado por primera vez en el carril externo de curvas de radio elevado en líneas de alta velocidad alemanas (velocidades superiores a 200 km/h), por los ingenieros Belz, Grohmann y Spiegel, cuyo acrónimo da nombre al defecto. Se presenta como agrupaciones de grietas, una especie de mezcla de *head checks* irregulares y pequeños *squats*, que se repiten de forma periódica a lo largo de la cabeza del carril, coincidiendo con los picos de una corrugación moderada de la superficie de rodadura del carril. Se cree que la causa de la formación de este defecto puede ser la combinación de elevadas cargas estáticas en el carril externo a la curva, altas cargas dinámicas inducidas por la corrugación y elevadas tensiones de contacto rueda-carril, que rebasan el límite de fatiga del acero del carril.

El *squat* (Figura 2.17) es otro defecto provocado por la fatiga de contacto de rodadura que se ha detectado principalmente en vías rectas y en curvas de elevado radio sobre las traviesas. En la mayoría de casos, se observa a continuación de este defecto, en el sentido de circulación de los vehículos, corrugación de longitud de onda comprendida entre 30 y 40 mm [119]. Este defecto se presenta como un hundimiento de la superficie de rodadura del carril de forma aproximadamente de dos lóbulos y de W en el perfil vertical, acompañado de grietas en forma de U, V o Y de coloración oscura. En las fases iniciales, se manifiesta como una pequeña indentación circular de color oscuro en la superficie de rodadura del carril, a partir de la cual crece, en fases posteriores, una grieta que se adentra en la cabeza del carril hasta una profundidad que suele oscilar de 3 a 6 mm. La presencia de la indentación inicial induce, al circular vehículos sobre la misma, cargas dinámicas cada vez mayores que favorecen la formación del *squat*, la deformación plástica de la zona afectada y el crecimiento de las grietas. Un estudio reciente, realizado por Li *et al.* [120], señala que los *squats* pueden iniciarse a partir de cualquier irregularidad presente en la superficie de rodadura del carril que produzca fuerzas

de contacto dinámicas de alta frecuencia, como indentaciones profundas, grietas grandes y corrugación.

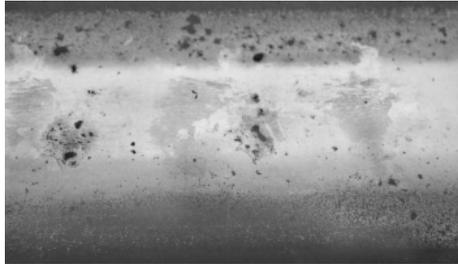


Figura 2.16. Belgrospi.

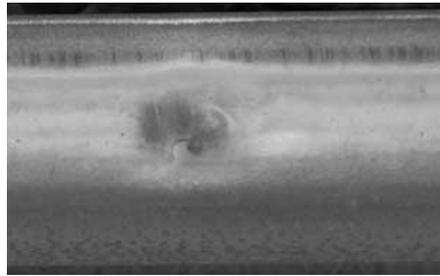


Figura 2.17. Squat.

## 2.6 Conclusiones

La corrugación en los carriles ferroviarios se manifiesta como una ondulación en la superficie de rodadura de los carriles, que produce un aumento de la dinámica vibratoria asociada a las masas no suspendidas y a la vía. La corrugación presenta efectos no deseados, como el ruido de rodadura y el incremento de la fuerza rueda-carril.

En este capítulo se ha descrito el problema de la corrugación en carriles ferroviarios, prestando especial atención a la tipología identificada por Grassie y Kalousek a través de observaciones de campo de este defecto. Se ha presentado la clasificación inicial de la corrugación en carriles en seis tipos, atendiendo a los mecanismos de fijación de longitud de onda y de daño, propuesta por Grassie y Kalousek en seis tipos (*heavy haul*, *light rail*, *booted sleepers*, *contact fatigue*, *rutting* y *roaring rails*) y cómo ha evolucionado esta clasificación hasta la actualidad.

La última clasificación de los tipos de corrugación propuesta por Grassie en seis tipos es la siguiente: *roaring rails*, *rutting*, *heavy haul*, *light rail*, *otra resonancia P2* y

*específica del tipo de vía.* Este autor señala que todos los tipos de corrugación son de frecuencia constante, puesto que los mecanismos de fijación de la longitud de onda son resonancias del sistema acoplado vehículo-vía y la longitud de onda del defecto dependería de la velocidad de circulación de los vehículos ferroviarios. En esta clasificación, la resonancia P2 es el mecanismo de fijación de la longitud de onda que comparten la mayoría de tipos de corrugación, a excepción del primer tipo, cuyo mecanismo de fijación de la longitud de onda sería la resonancia *articulada-articulada* vertical de la vía, según Grassie. Por otra parte, el desgaste es el mecanismo de daño que comparten la mayoría de los tipos de corrugación.

Asimismo, se han descrito los principales trabajos experimentales de campo de otros investigadores, realizados para esclarecer las causas asociadas a algunos casos de corrugación detectados principalmente en vías de metro y fundamentalmente encaminados a encontrar los tratamientos más efectivos. De este modo, investigadores como Ahlbeck y Daniels [3], Kalousek y Johnson [106] y Grassie [70] observaron que el amolado de los carriles retrasaba la reaparición del defecto. Por otra parte, Kalousek y Johnson [106], Eadie *et al.* [47, 48, 49] y Egaña *et al.* [50] comprobaron que los *modificadores de fricción* reducían el crecimiento de la corrugación. Ahlbeck y Daniels [3] observaron los beneficios de la lubricación de las pestañas de las ruedas en el retraso del crecimiento de la corrugación, mientras que Meehan *et al.* [138] han constatado que factores ambientales como las precipitaciones o la elevada humedad ambiental disminuyen la velocidad de crecimiento de la corrugación.

Existen otros defectos que afectan a las ruedas que presentan similitudes con la corrugación en los carriles. Se ha descrito, en primer lugar, la pérdida de redondez de las ruedas u *OOR* (siendo la poligonalización de la banda de rodadura un tipo particular de este defecto), que se ha observado en ejes ferroviarios con frenos de disco, y la corrugación de la banda de rodadura, detectada en ruedas con frenos de zapata.

Finalmente, se han descrito las características y posibles causas de otros defectos que afectan a las superficies de rodadura de carriles, que pueden desencadenar el inicio de la corrugación al producir variaciones de alta frecuencia de los parámetros del contacto rueda-carril, como patinajes, hundimientos de juntas de vía, indentaciones y *squats*.

La diversidad de tipologías de vías férreas, vehículos ferroviarios y condiciones de operación existentes en la actualidad en las líneas ferroviarias de todo el mundo puede conducir a una variedad de tipos de corrugación que no se ajusta única y exclusivamente a las clasificaciones en seis tipos de corrugación realizadas por

Grassie y Kalousek [64] y Grassie [69]. Algunos trabajos experimentales realizados por otros investigadores vienen a corroborar la anterior conclusión, ya que no todos los tipos de corrugación analizados encajan exactamente en la última clasificación de la corrugación realizada por Grassie o éstos no son producidos por los mecanismos de fijación de la longitud de onda catalogados.

Hasta el momento actual, el amolado de los carriles es el único tratamiento eficaz para eliminar la corrugación en carriles corrugados o para retrasar su aparición en carriles nuevos y eliminar grietas de fatiga, que se inician en la superficie. Sin embargo, las operaciones de amolado conllevan altos costes de mantenimiento de las vías. Por otra parte, la lubricación de las pestañas de las ruedas y el uso de modificadores de fricción en vías de radios reducidos, como las del metro, ha proporcionado buenos resultados, reduciendo la velocidad de crecimiento de la corrugación.

# 3

## Revisión de estudios teóricos sobre la corrugación en carriles

### 3.1 Introducción

La mayoría de los modelos desarrollados para predecir la formación y desarrollo de la corrugación en carriles incluyen, por una parte, un modelo de interacción dinámica vehículo-vía, que consta a su vez de un modelo de vehículo, un modelo de vía y un modelo de contacto rueda-carril para calcular las fuerzas y velocidades de deslizamiento en el área de contacto. Por otra parte, incorporan un modelo de desgaste, que generalmente comprende un modelo de contacto capaz de determinar las distribuciones de tensiones y de velocidades de deslizamiento y una ley de desgaste, que permite estimar el volumen de material desgastado. Los dos modelos se relacionan entre sí a través de un bucle realimentado, como el mostrado en la Figura 3.1. La idea de explicar la formación de la corrugación de longitud de onda corta en los carriles mediante un bucle realimentado entre la interacción dinámica y el mecanismo de daño se debe a Valdivia [204, 205], a Frederick [56] y a Hempelmann *et al.* [76].

En la bibliografía, se pueden encontrar diversas revisiones del estado del arte en los campos del modelado de la interacción vehículo-vía y crecimiento de la corrugación. Knothe y Grassie realizan una revisión en [109] de los modelos de la dinámica de vía y de la interacción vehículo-vía en el rango de altas frecuencias (hasta 5 kHz). Popp *et al.* [167] revisaron la dinámica vehículo-vía en el rango de medias frecuencias, de 50 a 500 Hz. Sato *et al.* [172] revisaron los estudios sobre la corrugación en los carriles, incluyendo un detallado resumen de las investigaciones realizadas en Japón, así como de las investigaciones más relevantes realizadas en Europa. Oostermeijer realizó una revisión de la literatura existente acerca de los estudios sobre la corrugación de longitud de onda corta en Alemania, Gran Bretaña, Holanda y Canadá, entre otros países [155].

Nielsen *et al.* presentaron en 2003 una revisión del estado del arte de la interacción vehículo-vía a elevadas frecuencias, y de los mecanismos de desgaste no uniforme en la rueda y el carril [151], analizando los tres tipos de desgaste no uniforme más frecuentes: corrugación de onda corta en carriles de vías rectas y de vías curvas de radio elevado, corrugación en ruedas producida por el frenado, y poligonalización de ruedas.

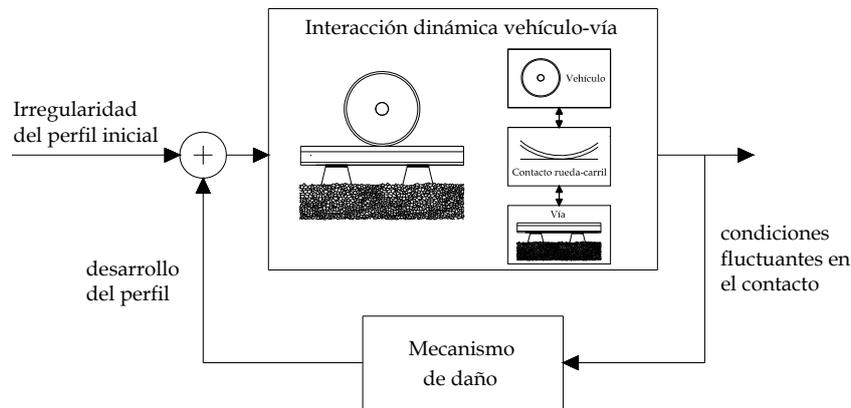


Figura 3.1. Bucle realimentado entre la interacción dinámica vehículo-vía y el mecanismo de daño. Adaptado de la referencia [76].

### 3.2 Revisión de modelos de interacción dinámica vehículo-vía

La creciente sensibilidad hacia problemas ferroviarios relacionados con la interacción dinámica del vehículo ferroviario con la vía, como la corrugación de ruedas y carriles, el ruido de rodadura producido por la rugosidad presente en las superficies de rodadura, los chirridos en curva (*squeal*) y vibraciones que se propagan a través de suelo a estructuras colindantes, se traduce en una mayor demanda de modelos de interacción vehículo-vía que puedan ser empleados de forma fiable en el rango de medias y altas frecuencias. Gran parte de los esfuerzos realizados en la mejora de los modelos de interacción dinámica vehículo-vía han sido motivados por la necesidad de investigar las causas de estos problemas ferroviarios, y desarrollar soluciones y tratamientos eficaces.

La dinámica ferroviaria clásica, regulada por la norma UNE-EN 14363:2007 [202], se ocupa del estudio del comportamiento dinámico del propio vehículo ferroviario, en aspectos como el guiado en curva, la estabilidad y el confort de los pasajeros. Estos aspectos son críticos en el rango de frecuencias que se encuentra por debajo de los 10 Hz, de manera que se suele procurar que las suspensiones de los vehículos garanticen que los modos de cuerpo rígido del bogie y de la caja se

produzcan a frecuencias comprendidas en dicho rango, con la finalidad de aislar a los pasajeros de vibraciones de alta frecuencia y de reducir la masa no suspendida efectiva [109]. Por debajo de los 10 Hz, de la receptancia vertical de la vía se deduce que su inercia tiene un efecto despreciable, y por tanto se considera rígida o únicamente se tiene en cuenta su flexibilidad. No obstante, por encima de los 20 Hz, la inercia de la vía cobra mayor relevancia, a la vez que las masas suspendidas del vehículo pierden importancia [109], debido a que la suspensión desacopla el bastidor del bogie y la caja del vehículo de la masa no suspendida (eje, cajas de grasa y motores de tracción apoyados en el eje, etc.). Según Knothe y Grassie, en este rango de frecuencias, la masa no suspendida del vehículo influye de forma significativa en la dinámica vertical del sistema vehículo-vía, pudiendo representarse de forma satisfactoria para el estudio de la interacción dinámica en la dirección vertical como un sólido rígido [109].

En la literatura, encontramos cómo frecuentemente la interacción dinámica vehículo-vía se resuelve en el dominio de la frecuencia o en el dominio del tiempo. El método de resolución en el dominio de la frecuencia exige que los modelos del vehículo, de la vía y del contacto rueda-carril sean lineales, lo que restringe estos modelos al estudio de las etapas iniciales de crecimiento de la corrugación, cuando la amplitud de la rugosidad es reducida, e impide a través de estos modelos incorporar los mecanismos asociados al desgaste que son siempre no lineales. En cambio, el método de resolución en el dominio del tiempo permite considerar el comportamiento no lineal de determinados elementos de la vía, como las placas de asiento y el balasto, así como del contacto entre rueda y carril. Este método es aplicable tanto en el análisis del inicio de la corrugación como en el estudio de su evolución. En los apartados 3.2.5 y 3.2.6 de esta Tesis se revisarán los principales modelos de interacción dinámica desarrollados en el dominio de la frecuencia y en el dominio del tiempo, respectivamente. Para ello, en las secciones 3.2.1 a 3.2.4 se describen algunos de los modelados que diferentes autores realizan de los distintos elementos que componen el problema de interacción vehículo-vía, que a saber son, la vía, el contacto, el vehículo y la excitación.

### 3.2.1 Modelos de vehículo

Como ya se ha comentado anteriormente, en el rango de bajas frecuencias, desde unos pocos hercios hasta unos 20 Hz, los modelos multicuerpo, que representan los distintos elementos del vehículo (eje, bastidor del bogie y caja) como sólidos rígidos interconectados entre sí mediante elementos viscoelásticos (u otros elementos), han formado parte de las metodologías que se han empleado de forma satisfactoria en los análisis de estabilidad, confort y guiado en curva. Sin embargo,

en el rango de medias y altas frecuencias, aproximadamente desde 20 Hz hasta 5 kHz, las suspensiones del vehículo permiten desacoplar el comportamiento dinámico de las masas no suspendidas, por lo que los modelos del vehículo se reducen a modelos del eje ferroviario [167], en los que se considera la parte proporcional del peso de la caja y del bogie, como una fuerza aplicada sobre el eje.

En este rango de frecuencias, también es habitual emplear modelos de bogie, compuestos normalmente por un bastidor y dos ejes. Popp *et al.* [167] indican que la deformación elástica del bastidor del bogie no es importante, con lo que éste se suele modelar como un sólido rígido, mientras que los ejes se pueden modelar como sólidos rígidos o elásticos. Estos modelos se han empleado en la bibliografía para considerar la influencia de la proximidad de dos ejes ferroviarios en la interacción dinámica con la vía [10, 149, 153, 195] y los efectos de dicha interacción en la corrugación de carriles [11, 80, 81].

Popp *et al.* [167] clasifican los modelos flexibles de eje ferroviario en tres tipos: los modelos multicuerpo, los modelos continuos y los modelos de elementos finitos. En los modelos multicuerpo, la flexibilidad del eje ferroviario se representa por medio de masas rígidas interconectadas entre sí mediante elementos viscoelásticos. La principal ventaja que ofrecen estos modelos es el número reducido de grados de libertad, lo que se traduce en un bajo coste computacional. Sin embargo, la mayoría de ellos no se pueden emplear en el estudio del desgaste de ruedas y carriles, al no representar la elasticidad del eje ferroviario de forma adecuada [167].

Popp *et al.* [167] enumeraron las características que debía tener un modelo de eje continuo adecuado para el rango de medias y altas frecuencias. Entre ellas cabe destacar las que hacen referencia a la implementación de los deformaciones del cuerpo del eje (flexión, torsión y elongación del eje) y de las ruedas (modos de flexión y paraguas), así como la inclusión de los efectos giroscópicos e inerciales debidos a la rotación. Un modelo continuo de eje ferroviario es el de Szolc [187], que modeló las ruedas y los discos de freno como sólidos rígidos, conectados al eje con membranas sin masa y el eje, como una viga elástica rotatoria que puede deformarse a torsión. Este autor, demostró que los efectos giroscópicos eran los responsables de que los picos de resonancia asociados a las frecuencias naturales del eje se separaran en dos picos y del fuerte acoplamiento entre la flexión en el plano lateral y vertical.

En lo referente a modelos de elementos finitos del eje, se pueden encontrar: modelos tridimensionales completos, modelos bidimensionales y modelos unidimensionales. En la actualidad, los modelos con un número elevado de grados

de libertad pueden abordarse gracias a la elevada potencia de los ordenadores y a programas informáticos comerciales de elementos finitos de los que se disponen.

La mayoría de modelos de eje ferroviario flexible que se encuentran en la bibliografía incluyen exclusivamente la flexibilidad del cuerpo del eje, mientras que representan las ruedas como sólidos rígidos [150, 196]. Este modelado puede ser válido si el objetivo es analizar el crecimiento de la corrugación en un rango de frecuencias entre 20 y 200 Hz, ya que por una parte Morys [143] indicó que hasta 200 Hz las ruedas se pueden considerar rígidas, y por otra parte, Szolc [188] observó que hasta 100 Hz los planos de las ruedas permanecían perpendiculares al cuerpo del eje. Sin embargo, cuando el rango de frecuencias de interés es superior a 200 Hz, como sucede en el caso de análisis de la corrugación de longitud de onda corta, la flexibilidad de las ruedas se debe implementar, ya que las deformaciones de las ruedas en las direcciones vertical y lateral pueden afectar a los pseudodeslizamientos en el contacto rueda-carril y, por tanto, a las fuerzas tangenciales y al desgaste [167].

### 3.2.2 Modelos de vía

Las formas constructivas de la vía más comunes son las conocidas como vía sobre balasto y vía en placa [52]. En la vía sobre balasto, los carriles están soportados por las traviesas, y éstas a su vez están apoyadas en una capa de balasto, dispuesta sobre la plataforma de la vía. En la vía en placa de hormigón, los carriles pueden estar embebidos en una losa de hormigón (directamente o a través de un elemento elástico intermedio) o bien soportados sobre elementos de apoyo, que quedan encajados en el hormigón. Con esto, se puede establecer una primera clasificación de los modelos de vía atendiendo a la disposición de los apoyos del carril. Según si el carril se representa apoyado sobre una base continua que lo soporta o por el contrario, éste se dispone sobre traviesas, se distinguirá entre modelos de vía sobre apoyos continuos y modelos de vía sobre apoyos discretos, respectivamente.

También, se puede establecer una clasificación de los modelos de vía atendiendo al número de capas de la estructura de la vía que incluye. De este modo, existen modelos de vía de una capa, en los que se representa exclusivamente el carril; de dos capas, que modela el carril y las traviesas; y de tres capas, que representa el carril, las traviesas y el balasto [109].

Por otra parte, se puede establecer otra clasificación de los modelos de vía en función de si ésta se considera de longitud infinita o de longitud finita. A priori, los modelos de vía de longitud infinita suponen una representación de la vía más cercana a la realidad, sin embargo tendrían que ser muy sencillos para poder

resolver la interacción dinámica de forma analítica o numérica. La alternativa a los modelos de vía infinita son los modelos de vía finita. En estos modelos de vía se debe considerar una longitud suficiente para disminuir los efectos de las condiciones de contorno en los extremos de la vía, al interactuar el vehículo con las ondas reflejadas en el extremo del modelo (efecto de borde).

Otra clasificación divide los modelos de vía según el método de resolución del problema de interacción empleado. En este sentido, la diversidad de las técnicas desarrolladas para considerar la dinámica de la vía es importante, lo cual está en concordancia con el número de aplicaciones que tiene este tipo de modelados en ámbitos distintos al que se trata en esta Tesis. De este modo y de forma generalizada en el estudio de la corrugación, se puede distinguir entre modelos de vía utilizados en el dominio de la frecuencia y modelos empleados en el dominio del tiempo, que se describirán con mayor detalle en los apartados 3.2.5 y 3.2.6. Normalmente, los modelos de vía empleados en modelos de interacción vehículo-vía en el dominio de la frecuencia son de longitud infinita, mientras que los modelos de vía que se implementan en el dominio del tiempo son de longitud finita.

A continuación, se revisa brevemente el modelado de los distintos elementos que componen la vía.

### *1. Modelado del carril*

Inicialmente, el carril se modeló como una viga de Euler-Bernoulli para análisis estáticos y de estabilidad. Este modelo analítico era adecuado para representar la respuesta del carril a la excitación dinámica vertical para frecuencias inferiores a 500 Hz [109]. No obstante, para frecuencias más altas este modelo del carril no es adecuado para representar el comportamiento dinámico del carril en la dirección vertical, ya que la deformación tangencial del carril cobra mayor importancia. Knothe y Grassie señalan que se puede modelar el comportamiento del carril en las direcciones vertical y longitudinal mediante una única viga de Timoshenko-Rayleigh hasta una frecuencia de 2.5 kHz [109]. Wu y Thompson observaron que el modelo de viga de Timoshenko podía representar la dinámica vertical del carril hasta 5 kHz, dado que la deformación de la sección del carril no influía de forma significativa en la interacción del vehículo con la vía en la dirección vertical en dicho rango de frecuencias. Sin embargo, en los modelos de interacción dinámica tridimensionales que implementan la dinámica lateral del carril, las deformaciones de la sección del carril no son despreciables por encima de 1.5 kHz [193], y que por tanto el carril no se puede representar como una única viga de Timoshenko.

Dado que para frecuencias superiores a 2 kHz, la respuesta del patín del carril puede ser notablemente superior a la de la cabeza, el modelado del carril para el estudio de la dinámica vertical de la vía como una única viga de Timoshenko resulta inadecuado y se adoptan modelos más complejos como modelos de varias vigas, como el de Wu y Thompson [222], o modelos de elementos finitos. El comportamiento de la vía en el plano lateral resulta de mayor complejidad, ya que el modelo del carril ha de considerar la deformación de la sección recta del carril. Wu y Thompson [223] desarrollaron un modelo en el que la cabeza y el pie del carril se modelaron como vigas infinitas de Timoshenko conectadas mediante un conjunto de vigas finitas que modelaban la flexión del alma del carril.

## **II. Modelado de la sujeción del carril**

El elemento más importante de sujeción del carril es la placa de asiento, dado que es ésta la que confiere las propiedades viscoelásticas de la unión del carril con la traviesa. Las placas de asiento de los carriles se fabrican habitualmente de un material elastómero, plástico o compuesto (en traviesas de madera, que no se tratan en esta Tesis, son metálicas). En gran medida, su comportamiento en el rango de frecuencias de interés para el análisis de la corrugación es no lineal. Según Popp *et al.* [167], el comportamiento de las placas de asiento de los carriles afecta significativamente la interacción dinámica vehículo-vía en el rango de frecuencias comprendido entre 200 y 700 Hz. Habitualmente, las placas de asiento se modelan como elementos viscoelásticos, mediante un muelle y un amortiguador viscoso en paralelo [109], o mediante una rigidez compleja [36]. Si el modelo de vía es bidimensional es suficiente considerar una única pareja muelle-amortiguador, en cambio si es tridimensional se debe considerar como una serie de parejas muelle-amortiguador distribuidas a lo largo de la dirección transversal del pie del carril. Algunos modelos de placa de asiento adoptan tres parámetros para representar el incremento de la rigidez con la frecuencia [9].

## **III. Modelado de las traviesas**

Las traviesas se representan como sólidos rígidos o flexibles. El modelado más sencillo de una traviesa consiste en una masa puntual interconectada con los otros elementos de la vía mediante elementos viscoelásticos. Este tipo de modelo es ampliamente empleado en modelos de interacción de la dinámica vertical vehículo-vía. Cuando se requiere modelar las traviesas como elementos flexibles, de forma similar a los carriles, se pueden adoptar formulaciones de vigas de Bernoulli o de Timoshenko continuas o bien, discretizando el volumen de la traviesa en elementos finitos tipo viga de Euler o de Timoshenko. Knothe y Grassie

[109] indican que para calcular de forma adecuada la interacción dinámica vehículo-vía hasta 1000 Hz es suficiente modelar las traviesas como sólidos rígidos.

#### ***IV. Modelado del balasto y plataforma de la vía***

De forma similar a las placas de asiento, el comportamiento elástico del balasto es no lineal, debido fundamentalmente al modo en que se produce el contacto de las piedras entre sí, y de éstas con la traviesa. Actualmente, el balasto es el componente de la vía cuyas propiedades mecánicas siguen siendo en gran medida desconocidas y por tanto, su modelado puede introducir mayores errores tanto en la simulación de la interacción dinámica vehículo-vía como en la predicción del crecimiento de la corrugación.

Knothe y Grassie [109] revisaron el modelado de los distintos tipos de apoyos de las traviesas mediante el balasto y la plataforma, distinguiendo entre cuatro modelos diferentes. El primer modelo, que es el más sencillo, considera que el carril está apoyado de forma discreta en las traviesas y el balasto bajo las mismas se modela mediante una pareja muelle-amortiguador. Los coeficientes de rigidez y amortiguamiento se obtienen de la correlación de medidas experimentales. En el segundo modelo, el balasto y la plataforma se representan de forma conjunta mediante un semiespacio elástico o viscoelástico. Este modelo se emplea fundamentalmente para el estudio de la propagación a través del suelo de las vibraciones que tienen origen en la interacción rueda-carril. En el tercer modelo, se representa el balasto mediante masas puntuales bajo las traviesas, conectadas entre ellas, a las traviesas y a la plataforma por medio de elementos viscoelásticos. El cuarto modelo considera apoyos discretos del carril y una capa continua de balasto sobre un semiespacio tridimensional que representa la plataforma.

La línea de investigación más actual sobre el comportamiento mecánico del balasto se inicia con el *método de los elementos discretos* desarrollado por Cundall [43], en el que la capa de balasto se representa como agrupaciones granulares. A través de diferentes estrategias de cálculo, como por ejemplo las expuestas en [124, 175], se analiza por medio del contacto no permanente entre sólidos irregulares, en presencia de fricción seca, el comportamiento dinámico del balasto. Con este método, a diferencia de otros, es posible obtener la red de fuerzas en el contacto entre partículas de forma realista. Este tipo de modelado se restringe fundamentalmente al estudio del comportamiento del balasto a medio y largo plazo frente a cargas cíclicas. Su elevado coste computacional dificulta su implementación en modelos de simulación dinámica vehículo-vía.

### 3.2.3 Modelos de contacto

A continuación, se describen las teorías de contacto de mayor relevancia que se han aplicado al estudio de la interacción dinámica entre el vehículo y la vía y a la estimación de la corrugación.

Las distintas teorías que se han desarrollado sobre el contacto entre la rueda y el carril en condiciones de rodadura se pueden incluir en la clasificación propuesta por Kalker [102] atendiendo a los siguientes criterios: modelado del problema elástico, consideración de los efectos inerciales, representación del proceso transitorio en el contacto y dimensión del problema de contacto.

Considerando el primer criterio, Kalker diferencia entre *Teorías Simplificadas*, en las que las relaciones entre los desplazamientos asociados a las deformaciones y las tensiones en el contacto se obtienen a partir de expresiones analíticas aproximadas y *Teorías Exactas*, en las que dichas relaciones derivan de la Teoría de la Elasticidad Lineal y se calculan por procedimientos semianalíticos o numéricos, mediante la resolución de las ecuaciones integrales de Boussinesq-Cerruti [25, 30]. Si bien Kalker no lo considera en su clasificación, atendiendo a la formulación del problema elástico existen modelos de *Contacto No Conforme* (casi todos, básicamente los hercianos y los basados en semiespacio infinito), y modelos de *Contacto Conforme* (principalmente, a través de elementos finitos).

En el caso de que los efectos inerciales asociados a los diferenciales de masa en las proximidades del contacto se consideren en los modelos de contacto, estaremos frente a *Teorías Dinámicas*. En cambio, si los modelos de contacto no incluyen dichos efectos, puesto que los consideran despreciables frente a las fuerzas transmitidas en el contacto, estos modelos están basados en *Teorías Cuasiestáticas*. Asimismo, Kalker señala que los efectos inerciales sólo tienen relevancia para velocidades superiores a 500 km/h, por lo que en la actualidad no se requieren *Teorías Dinámicas*. Sin embargo, Zili Li en una comunicación privada conjeturó que determinados problemas de interacción dinámica podrían estar influenciados por estos efectos dinámicos.

Cuando los modelos de contacto permiten representar el proceso transitorio que se produce como consecuencia de la variación de las fuerzas transmitidas en el contacto, se dice que están basados en *Teorías No Estacionarias*. Por el contrario, aquellos modelos que desprecian el efecto del transitorio en las distribuciones de tensiones y deformaciones, por considerar que éste se produce durante un periodo de tiempo corto y no tiene una influencia significativa en la dinámica vehicular, se dice que están basados en *Teorías Estacionarias*.

Por lo que respecta al último criterio, Kalker [102] divide las teorías de contacto en *Teorías Bidimensionales*, si las distribuciones de desplazamientos, deformaciones y tensiones están contenidos en el plano definido por los ejes longitudinal y vertical de la vía y en *Teorías Tridimensionales*, que permiten representar de forma más realista el problema de contacto, al calcular las tensiones, deformaciones y desplazamientos en función de las tres coordenadas espaciales.

En este punto, cabría establecer otra clasificación de los modelos de contacto tangenciales en función de si consideran la saturación de las fuerzas tangenciales según la ley de fricción de Coulomb, en cuyo caso se trataría de *Teorías No Lineales* o si por el contrario, no la implementan y consideran que existe una relación lineal entre fuerzas y pseudodeslizamientos, denominándose estas últimas *Teorías Lineales*.

En el contacto rueda-carril suele distinguirse entre contacto normal y el problema tangencial. Cuando las propiedades mecánicas del material de la rueda y el carril son similares y se adoptan las hipótesis de contacto no conforme, Kalker dice que se cumplen las hipótesis de cuasiidentidad elástica. En tal situación, el problema normal del contacto no depende del tangencial. Esta hipótesis es adoptada en la práctica totalidad de trabajos publicados sobre dinámica ferroviaria y en la totalidad de los programas comerciales. Esta hipótesis ha sido cuestionada, especialmente cuando el vehículo circula en curva.

### ***I. Problema de contacto normal***

Los primeros estudios sobre el contacto de cuerpos elásticos, que se remontan a 1882, se deben a Hertz. Hertz consideró el problema de contacto normal sin rozamiento entre dos cuerpos, suponiendo contacto no conforme [78]. Asumió que las superficies de los cuerpos en contacto se podían representar mediante funciones cuadráticas. Para evaluar las deformaciones locales, supuso que cada cuerpo se podía considerar como un semiespacio infinito sobre el cual se aplica la carga. El contacto entre las superficies de los cuerpos se realiza sin rozamiento (para poder considerar el contacto de dos sólidos de distintos materiales), de forma que sólo se transmite una distribución de tensiones normales entre ellos. En estas condiciones, concluyó que el área de contacto es elíptica, de semiejes  $a$  y  $b$ , y que la presión transmitida entre los cuerpos es semielipsoidal, según la expresión

$$p_z(x, y) = \frac{3F_z}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2}. \quad (3.1)$$

Frecuentemente, el contacto rueda-carril se representa en modelos de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio del tiempo como un muelle no lineal, cuya rigidez ( $C_H$ , en la ecuación (3.2)) se ajusta empleando el modelo de Hertz. De este modo, la fuerza normal en el contacto se obtiene a partir de la interpenetración ( $\delta$ ) entre la rueda y el carril

$$F_z = C_H \delta^{3/2}. \quad (3.2)$$

En modelos de interacción dinámica en el dominio de la frecuencia, el contacto se modela como un muelle lineal, cuya rigidez ( $K_H$ , en la ecuación (3.3)) se obtiene linealizando la relación anterior alrededor de la interpenetración correspondiente a la carga estática

$$F_z = K_H \delta. \quad (3.3)$$

El modelo herciano de contacto, que establece la relación entre fuerzas normales e interpenetración a partir de las ecuaciones (3.2) o (3.3), es el que con mayor frecuencia se implementa en el modelado de la dinámica de vehículos ferroviarios, si bien las hipótesis en las que se basa normalmente no se cumplen. En realidad, existen muy pocas situaciones en el contacto rueda-carril en las que se cumplan las hipótesis de la Teoría de Hertz, como por ejemplo, en perfiles fundamentalmente cónicos, pero incluso en estos casos se incumple la condición geométrica de este modelo cuando el eje se desplaza lateralmente. La limitación más importante de la Teoría de Hertz es que define las superficies en contacto mediante radios de curvatura constantes, cuando los perfiles transversales tanto de la rueda como del carril están definidos por varios radios de curvatura, funciones polinómicas, etc. Por otra parte, la Teoría de Hertz asume que las superficies en contacto son perfectamente lisas, cuando la realidad es que los perfiles longitudinales y circunferenciales de carriles y ruedas, respectivamente, presentan irregularidades que alteran los radios de curvatura, y con ello, la distancia indeformada entre los dos perfiles. Además, la Teoría de Hertz aproxima los cuerpos en contacto a semiespacios infinitos, hipótesis que sólo se cumple si el contacto rueda-carril es no conforme, es decir, si los radios de curvatura de las superficies en contacto son mucho mayores que el área de contacto. Con esto, la hipótesis de considerar la rueda y el carril como semiespacios infinitos únicamente se cumple cuando el desplazamiento relativo entre la rueda y carril es pequeño y existe contacto entre la cabeza del carril y la banda de rodadura de la rueda. Por el contrario, esta hipótesis no sería válida en el caso de contacto entre la superficie activa del carril y la pestaña de la rueda, o entre la garganta de la pestaña con la banda de rodadura y el carril, situaciones que suelen producirse al circular el vehículo por una curva de radio reducido. En estos casos el contacto es conforme, ya que los radios de

curvatura tanto de la rueda como del carril serían del mismo orden de magnitud que el tamaño del área de contacto.

El modelo de contacto no herciano más conocido es el que Kalker desarrolló entre 1983 y 1990 para la resolución del problema de contacto no estacionario: el algoritmo CONTACT [104]. Este modelo de contacto, basado en la *Teoría Exacta*, emplea un método variacional para calcular las distribuciones de tensiones normales y tangenciales en un área potencial de contacto discretizada en elementos rectangulares, en los que se asumen las magnitudes del contacto constantes. Aunque se trata del modelo de contacto más riguroso que existe en la actualidad para la resolución del problema de contacto en rodadura, su aplicación a la simulación dinámica se ve restringida por su elevado coste computacional.

Li [118] estudió el contacto rueda-carril no herciano [104], el contacto conforme entre la pestaña de la rueda y la cara activa del carril y el contacto multipunto, con el fin de simular el desgaste del perfil transversal de la rueda. Otros modelos de contacto normal no herciano son los presentados por Paul y Hashemi [161] y Le-The [114]. Paul y Hashemi resolvieron el problema de contacto conforme entre el carril y la pestaña de la rueda. Para ello, desarrollaron un método de elementos de contorno (BEM) para contacto conforme y emplearon una expresión analítica aproximada para obtener la función de influencia. Le-The supuso que los cuerpos en contacto eran sólidos de revolución con ejes casi paralelos, de modo que el área de contacto y la distribución normal de tensiones eran prácticamente simétricas respecto al eje  $y$ , perpendicular a la dirección de rodadura  $x$ . Con ello, Le-The discretizó el área de contacto en tiras según la dirección  $x$ , a las que asignó una distribución de tensiones semi-elíptica que se mantenía constante en cada tira según la dirección  $y$ . Al aplicar su modelo de contacto al problema de contacto rueda-carril, concluyó que determinadas combinaciones de perfiles de rueda y carril derivaban de forma clara en áreas de contacto no elípticas.

Actualmente, se pueden distinguir dos líneas en el desarrollo de modelos de contacto normal no hercianos: una encaminada a formulaciones avanzadas de elementos finitos y la otra, a métodos aproximados y de bajo coste computacional. La principal ventaja que presenta los modelos de contacto desarrollados en elementos finitos es que éstos pueden incorporar geometrías de contacto complejas y efectos no lineales. Sin embargo, a pesar de disponer en la actualidad de ordenadores muy potentes, el coste computacional para modelos de contacto tridimensionales completos sigue siendo muy elevado. La segunda línea, pretende desarrollar formulaciones de contacto aproximadas y de solución rápida para implementarlas en modelos de simulación dinámica y en modelos de interacción vehículo-vía para altas frecuencias. Piotrowski y Chollet clasifican los modelos de

esta línea en dos grupos [164]: métodos multihercianos y métodos de interpenetración virtual o ficticia. En los métodos multihercianos, desarrollados por Pascal y Sauvage [160], un conjunto de elipses sustituye a contactos multipunto y áreas de contacto no elípticas. En los métodos de interpenetración virtual, propuestos por Ayasse y Chollet [13], y Piotrowski y Kik [165], el área de contacto se estima a partir del área resultante de la interpenetración virtual de las dos superficies indeformadas. Asimismo, el método SRST [5] propuesto por Alonso y Giménez supera la limitación del modelo de Hertz en relación a la representación de la distancia indeformada entre rueda y carril como una función cuadrática, permitiendo considerar los perfiles reales. Una modificación posterior del método [6], permitió su aplicación a la resolución de problemas de multicontacto.

## II. Problema tangencial de contacto

En lo referente a los modelos de contacto tangenciales, Cattaneo [29] y posteriormente Mindlin [141] propusieron de forma independiente una solución analítica al problema tangencial de contacto 2D sin rodadura entre dos cilindros cuando existe deslizamiento en parte del contacto. Basándose en la metodología de Mindlin, Carter [28] desarrolló en 1926 la primera teoría de contacto de rodadura, en el marco de la dinámica ferroviaria, en la que se consideran los efectos de la fricción y la elasticidad de los sólidos en contacto. Se trata de una teoría de contacto no lineal, que permite obtener de forma exacta la relación entre velocidades de pseudodeslizamiento y fuerzas tangenciales transmitidas en el contacto entre un cilindro y un plano infinito (ambos se aproximan como semiespacios infinitos), considerando el problema como bidimensional y estacionario. Un año más tarde, Fromm [57] resolvió el problema bidimensional de contacto de rodadura de dos cilindros con las mismas propiedades elásticas, sin aproximarlos a semiespacios infinitos.

Posteriormente, Johnson y Vermeulen [207] ampliaron la teoría bidimensional desarrollada por Carter al problema tridimensional de dos esferas en contacto con rodadura, en el que se consideraban las velocidades de pseudodeslizamiento longitudinal y transversal, pero no el pseudodeslizamiento de *spin*, y se adoptaba la teoría de Hertz. Tal como realizaron Cattaneo, Mindlin y Carter, Johnson y Vermeulen realizan una suposición de la forma y posición del área de adhesión dentro del área de contacto que no es exacta, lo cual penaliza la precisión del método.

Shen, Hedrick y Elkins [176] modificaron el modelo de Johnson y Vermeulen. En su modelo adoptaron coeficientes de pseudodeslizamiento más precisos e incorporaron el pseudodeslizamiento de *spin*.

La *Teoría Lineal* [99], desarrollada en 1967 por Kalker, es una técnica semianalítica de cálculo de las fuerzas tangenciales en el contacto rueda-carril partiendo de un modelo herciano de contacto, suponiendo el coeficiente de rozamiento infinito, lo que equivale a considerar que en toda el área de contacto se produce adhesión. La limitación más importante que presenta este modelo es que sólo es válido cuando los pseudodeslizamientos en el contacto son muy pequeños, que es cuando el tamaño del área de deslizamiento es despreciable frente al área de adhesión, y se cumple la relación lineal entre fuerzas tangenciales y pseudodeslizamientos.

Posteriormente, Kalker desarrolló el algoritmo FASTSIM [103] basado en una *Teoría Simplificada* [101] para la resolución del problema tangencial y estacionario de contacto, con un coste computacional bajo. En este modelo, los desplazamientos en un punto dependen exclusivamente de las tensiones aplicadas en dicho punto, por medio de los coeficientes de flexibilidad  $L$ , lo que se conoce como una base de Winkler

$$\mathbf{u}(x, y) = L \mathbf{p}(x, y). \quad (3.4)$$

Los coeficientes de flexibilidad  $L$  fueron ajustados comparándolos a los resultados de la *Teoría Exacta*.

La simplificación de las relaciones de elasticidad expresada anteriormente no se puede aplicar al problema normal de contacto, con lo que éste se debe resolver con el modelo de Hertz. FASTSIM aún una precisión aceptable para buena parte de los problemas en dinámica ferroviaria, ya que presenta diferencias en torno al 10% con respecto a CONTACT si el pseudodeslizamiento de *spin* es reducido, y un bajo coste computacional, al ser 1000 veces más rápido que CONTACT [104]. En la actualidad FASTSIM es el modelo de contacto que más se utiliza en los modelos de interacción dinámica vehículo-vía, así como también se ha empleado para la simulación del desgaste de ruedas y carriles. No obstante, FASTSIM presenta limitaciones que algunos investigadores han tratado de resolver para extender su aplicabilidad: Alonso y Giménez modificaron el algoritmo original para considerar áreas de contacto no elípticas [7] y Giménez *et al.* [58] introdujeron un coeficiente de rozamiento dependiente del deslizamiento en el contacto. Por otra parte, Vollebregt [213] ha presentado recientemente una nueva versión del programa, FASTSIM2, que permite representar las magnitudes en el contacto con un orden de precisión más elevado y requiere un número menor de elementos para calcular las fuerzas tangenciales con la misma precisión que el algoritmo original.

Aparte del modelo de contacto CONTACT, que es el único modelo de contacto no estacionario y no lineal, existen pocos modelos de contacto que consideren los

efectos no estacionarios o transitorios en el contacto rueda-carril. Uno de ellos es el modelo lineal desarrollado por Knothe y Groß-Thebing [111] y Groß-Thebing [71], que calcula los coeficientes de pseudodeslizamiento complejos dependientes de la frecuencia para el caso de pequeñas oscilaciones armónicas del pseudodeslizamiento alrededor de un estado de referencia. Shen y Li [177] modificaron la *Teoría Simplificada* para representar el proceso no estacionario de contacto. En la misma línea, Alonso y Giménez [8] modificaron el modelo de contacto FASTSIM para permitir mayores variaciones armónicas de un único tipo de pseudodeslizamiento. Recientemente, Guiral *et al.* [74] han realizado mejoras del modelo anterior para representar adecuadamente las variaciones temporales de varios pseudodeslizamientos y de la fuerza normal.

La mayoría de los modelos existentes asumen contacto cuasi-estacionario, en el que la distribución de tensiones entre la rueda y carril en cada punto de interés no depende de la distribución en posiciones previas, es decir, se asumen independientes de la historia temporal de las condiciones en el contacto. De hecho, en los modelos de interacción dinámica se prefiere implementar modelos de contacto estacionarios, ya que tradicionalmente se ha considerado que los efectos transitorios en el contacto rueda-carril no influían significativamente en la interacción dinámica [104]. Sin embargo, si los parámetros del contacto sufren variaciones de elevada frecuencia en el tiempo necesario para el paso de una partícula a través del área de contacto, los efectos transitorios del proceso de contacto se deben considerar en el modelado del contacto rueda-carril. Knothe y Groß-Thebing [112] establecieron en qué situaciones es necesario modelar el contacto como no estacionario o transitorio, y cuándo es suficiente representar el contacto como una sucesión de estados cuasi-estacionarios, en función de la relación entre la longitud de onda  $L$  del fenómeno (corrugación, movimiento de lazo, etc.) y la longitud característica  $a$  del área de contacto (semieje del área de contacto en la dirección longitudinal). Estos autores concluyeron que si la relación  $L/a$  es inferior a 10, el modelo de contacto rueda-carril debe incorporar los efectos no estacionarios; mientras que si dicha relación es igual o superior a 10, el modelo de contacto puede ser estacionario, sin que se introduzcan errores importantes en los cálculos.

Por otra parte, en la simulación dinámica, la precisión y coste computacional de un modelo de contacto son factores decisivos a la hora de decantarse por un modelo u otro, fundamentalmente si se tiene en cuenta que el problema de contacto se ha de resolver para un número elevado de instantes temporales, sin que por ello se tenga que perder exactitud en los cálculos. En un trabajo reciente [214], Vollebregt *et al.* han comparado resultados de varios modelos de contacto con los del modelo

CONTACT, concluyendo que el programa USETAB [105], basado en la interpolación de parámetros del contacto tabulados, previamente calculados utilizando CONTACT, y en segundo lugar, el modelo FASTSIM proporcionan una mayor precisión en el cálculo de las fuerzas tangenciales que la *Teoría Lineal* [99], el modelo de Vermeulen y Johnson [207], el modelo de Shen *et al.* [176] y el modelo de Polach [166], cuando en el contacto aparecen elevados pseudodeslizamientos de *spin*. Sin embargo, los autores también señalan la necesidad de investigar cómo afecta el modelado del contacto rueda-carril en la simulación dinámica de vehículos ferroviarios, por ejemplo la implementación de efectos no hercianos en el contacto y de leyes de fricción más complejas, dependientes del espacio y del tiempo.

Cuando el objetivo es calcular el desgaste en las superficies de rodadura de los carriles, se requiere conocer las distribuciones de tensiones y deslizamientos en el área de contacto con la mayor precisión posible, con lo que gran parte de los modelos utilizados para calcular las fuerzas de contacto en los modelos de interacción dinámica vehículo-vía no son válidos. Es una práctica habitual en la bibliografía emplear diferentes modelos de contacto en la etapa de simulación de la interacción dinámica, en la que se utilizan modelos sencillos, de bajo coste computacional y estacionarios, y en la etapa posterior de cálculo del desgaste, donde se implementan modelos de contacto más sofisticados, capaces de representar adecuadamente el área de contacto, las distribuciones de tensiones, deslizamientos y profundidad del desgaste, y en algunos casos los efectos transitorios y no hercianos del contacto sobre superficies con irregularidades. Piotrowski y Kalker [163] sugieren que un modelo (de contacto) para estudiar el crecimiento de la corrugación debería tener en cuenta las no linealidades geométricas, como el desplazamiento del área de contacto respecto de la posición de la rueda cuando ésta circula sobre una superficie corrugada, la variación de la forma del área de contacto, y el proceso no estacionario de contacto. Xie *et al.* [227] señalaron la importancia de resolver el problema de contacto normal mediante un modelo no herciano cuando el objetivo es calcular el desgaste, ya que diversos efectos no hercianos y no lineales pueden afectar el ángulo de desfase entre el desgaste estimado y la corrugación o rugosidad inicial. Kaiser [98] resaltó la importancia de mejorar de forma consecuyente y simultánea el modelado del vehículo, la vía y el contacto rueda-carril, en los modelos de interacción dinámica vehículo-vía, considerando la flexibilidad y efectos rotatorios del eje ferroviario, y la flexibilidad de la vía y los efectos de la deformación de las estructuras en el contacto no herciano y no estacionario, para estudiar problemas como el ruido de rodadura y el desgaste ondulatorio.

Dado que CONTACT resuelve el problema tangencial de contacto no estacionario asumiendo un coeficiente de rozamiento constante, Croft [41, 42], Pieringer [162] y Vollebregt [215] han ampliado este modelo implementando un modelo de fricción dependiente de la velocidad de deslizamiento, con el fin de emplearlo, por una parte, en el estudio del ruido de rodadura [41], producido por la rugosidad en la superficie de rodadura del carril; y por otra, en el estudio del ruido de muy elevada frecuencia conocido como *squeal* (chirrido) [162], que surge al circular un vehículo por una curva de radio pequeño. Croft *et al.* [42] implementaron un modelo de fricción en función de la velocidad de deslizamiento en un modelo bidimensional no estacionario [41], basado en la Teoría Variacional de Kalker y en una versión modificada del modelo de contacto tridimensional CONTACT [104], y observaron que aparecían vibraciones *stick-slip* en las distribuciones de tensiones tangenciales en el borde anterior del área de contacto. Los autores concluyeron que al ser estas vibraciones de muy elevada frecuencia, la probabilidad de que éstas afectaran a los cálculos de desgaste ondulatorio y rugosidad era muy reducida, por ser el rango de frecuencias de interés para el estudio de estos problemas inferior. En consecuencia, en esta Tesis no se considerarán los efectos de la variación del coeficiente de rozamiento con la velocidad de deslizamiento local.

### 3.2.4 Modelos de excitación

Knothe y Grassie revisaron los cuatro modelos de excitación de creciente complejidad que se han utilizado en los modelos de interacción vehículo-vía [109] (ver Figura 3.2): desde el modelo más sencillo en que se considera una fuerza normal estática aplicada sobre el carril, denominado *modelo de la fuerza estática* hasta el modelo de excitación más realista, conocido como el *modelo de la masa móvil*, pasando por el *modelo de la fuerza móvil*, que supone una mejora del primero y el *modelo de la irregularidad móvil*. En este apartado, se pondrá mayor énfasis en los modelos de excitación *modelo de la irregularidad móvil* y *modelo de la masa móvil*, por ser los dos modelos de excitación de mayor complejidad que han sido ampliamente empleados en los modelos de interacción vehículo-vía, en los que se considera la excitación debida a la presencia de rugosidad o corrugación en la superficie de rodadura del carril.

La diferencia fundamental entre el *modelo de la irregularidad móvil* y el *modelo de la masa móvil* es que, en el primero, el eje o rueda permanece fijo con respecto a la vía y es una banda que contiene las irregularidades de la cabeza del carril y de la banda de rodadura de la rueda la que se desplaza entre la rueda y el carril a una velocidad constante; mientras que en el segundo, es la rueda la que se desplaza sobre un carril cuya superficie de rodadura contiene las irregularidades de la rueda

y del carril. El *modelo de la irregularidad móvil* se ha empleado en la bibliografía para investigar problemas de interacción rueda-carril en el dominio de la frecuencia, ya que el *modelo de la masa móvil*, más realista, es más difícil de implementar en el dominio de la frecuencia. En cambio, en el dominio del tiempo, el modelo de excitación que se utiliza siempre es el *modelo de la masa móvil*, dado que permite analizar los efectos dinámicos producidos por irregularidades cuyas características puedan variar con la posición de la rueda y con el tiempo.

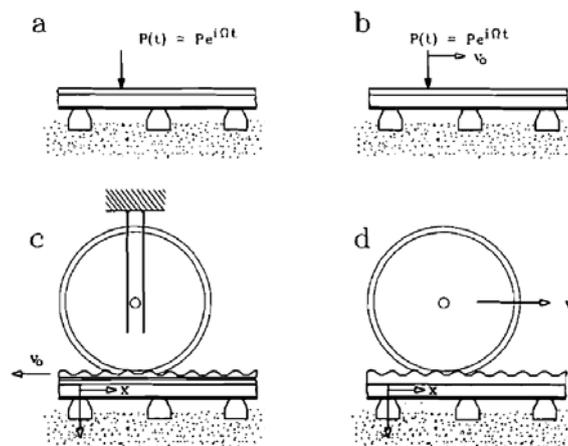


Figura 3.2. Modelos de excitación. (a) Modelo de la fuerza estacionaria; (b) Modelo de la fuerza móvil; (c) Modelo de la irregularidad móvil; (d) Modelo de la masa móvil. De la referencia [109].

### 3.2.5 Revisión de modelos de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio de la frecuencia

Los modelos de interacción dinámica en el dominio de la frecuencia se basan en el cálculo previo o medida de las receptancias u otras funciones de respuesta en frecuencia (FRFs) del vehículo y de la vía, cuando éstos se excitan mediante una fuerza aplicada en un punto. En este tipo de modelos, se supone que el sistema vehículo-vía se comporta de forma lineal, es decir que la respuesta es proporcional a la entrada o excitación, y que la interacción dinámica es estacionaria.

Knothe y Grassie [109] distinguen entre modelos de interacción dinámica en el dominio de la frecuencia que emplean FRFs obtenidas para una fuerza puntual estática, y modelos basados en FRFs obtenidas mediante una fuerza puntual móvil. A su vez, dentro de la anterior clasificación, se puede diferenciar entre modelos de interacción que permiten representar la variación de rigidez de la vía que conlleva el apoyo del carril de forma discreta en las traviesas y modelos que consideran el carril apoyado de forma continua en una base elástica.

Entre los modelos de interacción basados en FRFs obtenidas mediante una fuerza puntual estática cabe destacar el de Grassie *et al.* [62] y el de Ripke y Knothe [169]. Grassie *et al.* [62] desarrollaron un modelo en el que el carril se representaba como una viga de Timoshenko apoyada sobre una capa continua de traviesas rígidas o elásticas. Este modelo permitía calcular dos resonancias de la vía: la resonancia conocida como P2, que aparecía justo por encima de 100 Hz, en la que el carril y traviesas oscilan sobre el balasto, y la resonancia denominada  $P1^{1/2}$ , entre 300 y 500 Hz, en la que el carril oscila en oposición de fase a las traviesas. Obviamente, al tratarse de un modelo de vía continuamente apoyada, no podía predecir el comportamiento de la vía en las proximidades de resonancias relacionadas con los soportes discretos del carril, como es el caso de la resonancia *articulada-articulada*.

Esta limitación del modelo de Grassie *et al.* [62], la resolvieron Ripke y Knothe [169], que modelaron la vía sobre apoyos discretos y calcularon sus receptancias directas vertical y lateral, que se muestran en la Figura 3.3, tanto para el caso en el que la fuerza de excitación se aplicara sobre la traviesa, como a mitad de vano. Las receptancias calculadas por estos autores, nos servirán en este apartado de la Tesis como referencia para presentar las principales resonancias y antirresonancias de la vía. Se pueden apreciar varias resonancias y antirresonancias en la receptancia vertical (Figura 3.3(a)) que pueden ser importantes por lo que respecta a las magnitudes de la fuerza de interacción rueda-carril que provocan y por el desgaste irregular que pueden inducir. La primera resonancia, conocida como resonancia P2, se produce a frecuencias comprendidas aproximadamente entre 50 y 200 Hz (en la Figura 3.3(a) se produce aproximadamente a 150 Hz), dependiendo de las características de la vía. En esta resonancia los carriles y las traviesas vibran en fase sobre el balasto, que proporciona la rigidez y un elevado amortiguamiento, por ello el pico correspondiente aparece ancho y aplanado. La segunda resonancia,  $P1^{1/2}$ , aparece a una frecuencia comprendida entre 300 y 500 Hz (en la Figura 3.3(a) se produce en torno a 450 Hz), dependiendo en gran medida de la rigidez de las placas de asiento del carril. En esta resonancia, los carriles y las traviesas vibran en oposición de fase. Del mismo modo que la resonancia P2, es una resonancia con un amortiguamiento importante, dado que la mayor parte del amortiguamiento de esta resonancia la aporta el balasto, por eso aparece como un pico aplanado. La tercera resonancia, conocida como resonancia *articulada-articulada* (en inglés *pinned-pinned*) se produce en el rango de frecuencias entre 700 y 1200 Hz, dependiendo del tipo de carril y la distancia entre traviesas (en la Figura 3.3(a) se produce en 1070 Hz). En esta resonancia, los carriles vibran con una longitud de onda que es el doble de la distancia entre traviesas, con nodos situados en las traviesas, cuando la fuerza de excitación se aplica en un punto situado a la mitad del vano. Se trata de una resonancia poco amortiguada, de ahí que el pico de resonancia sea estrecho, ya

que el amortiguamiento sólo lo aporta el material del carril. También se distinguen dos antirresonancias (dos mínimos de la receptancia vertical) que pueden desempeñar un papel muy importante en el crecimiento de la corrugación, ya que a las frecuencias que tienen lugar, las fuerzas de contacto rueda-carril serán elevadas. En la primera antirresonancia, que aparece entre las dos primeras resonancias (aproximadamente a 300 Hz en la Figura 3.3(a)), la traviesa vibra entre el carril y el balasto, actuando como un absorbente dinámico de vibraciones, mientras que el carril apenas se mueve. La segunda antirresonancia aparece a una frecuencia superior a la frecuencia de la resonancia *articulada-articulada*, cuando la fuerza de excitación se aplica sobre un punto del carril que coincide con la posición de una traviesa, lo que indica que la rigidez de la vía en dicha posición y frecuencia es muy elevada.

En la receptancia lateral (ver Figura 3.3(b)), similar a la receptancia vertical, se puede observar que las frecuencias de las resonancias son inferiores que las frecuencias de las resonancias de la receptancia vertical, a la vez que los valores de las receptancias son mayores, debido a que la vía en la dirección lateral es más flexible que en la dirección vertical. La primera resonancia *articulada-articulada* se produce a 560 Hz y la segunda, en la que la cabeza y el pie del carril vibran en oposición de fase, tiene lugar a una frecuencia cercana a los 2000 Hz.

Algunos trabajos sobre análisis del crecimiento de la corrugación que emplean modelos de interacción dinámica en el dominio de la frecuencia, en los que se representa la vía sobre apoyos discretos y se obtienen las FRFs utilizando una fuerza de excitación estática son los de Frederick [56], Valdivia [204], Hempelmann *et al.* [76, 77], Clark *et al.* [35], Tassily y Vincent [189, 190], Müller [146, 147], Gómez y García Vadillo [59, 60] y Egaña *et al.* [51]. Los trabajos desarrollados por estos investigadores se revisarán con mayor profundidad en el apartado 3.4 de esta Tesis.

Sin embargo, el comportamiento de la vía es diferente cuando se considera, en vez de una fuerza de excitación estática, una fuerza de excitación armónica móvil. Ilias y Knothe [83] e Ilias y Müller [84] observaron que la fuerza móvil influenciaba significativamente la respuesta de la vía en torno a la frecuencia *articulada-articulada*. Estos autores observaron que la resonancia *articulada-articulada* se dividía en dos picos de resonancia, cuya separación aumentaba conforme la velocidad de la fuerza crecía, como se puede observar en la Figura 3.4.

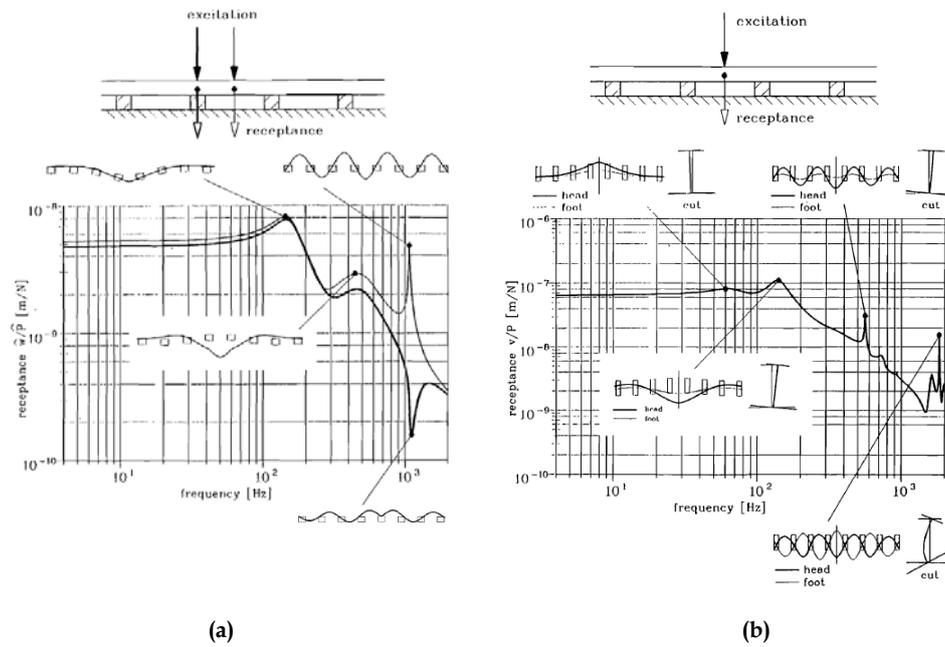


Figura 3.3. Receptancias directas de un carril UIC60 sobre traviesas rígidas, separadas entre sí 0.6 m. La excitación se aplica sobre la traviesa o a mitad de vano: (a) Receptancia vertical; (b) Receptancia lateral. De las referencias [110,169].

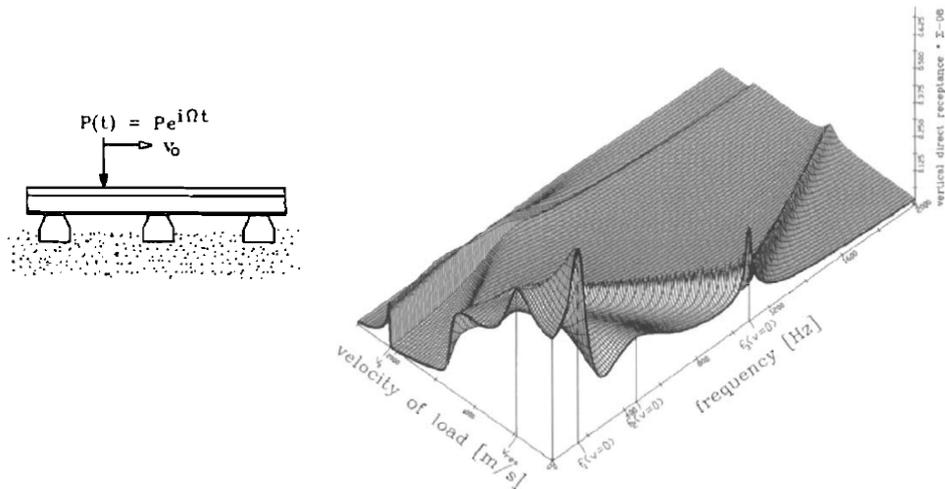


Figura 3.4. Receptancia vertical directa de un carril UIC60 sobre traviesas rígidas, separadas entre sí 0.6 m, en función de la velocidad de la fuerza de excitación móvil. De la referencia [84].

Ilias y Müller [84] proporcionaron unas expresiones aproximadas para calcular las frecuencias de los dos picos de resonancia *articulada-articulada*, en función de la frecuencia de esta resonancia para una velocidad nula, la velocidad de la fuerza móvil y la distancia entre traviesas. Los autores también investigaron el caso más realista, consistente en considerar la excitación por una masa móvil (un eje ferroviario en movimiento) circulando sobre un carril con corrugación sinusoidal. En la Figura 3.5, se muestra la relación entre el desplazamiento y la fuerza vertical (ratio de transmisión) de la vía producido por una masa en movimiento, en función de la velocidad de la masa móvil y la frecuencia. Los autores observaron que los picos de las primeras resonancias se desplazaban hacia frecuencias inferiores al aumentar la velocidad. Del mismo modo que en el caso de la fuerza móvil, la resonancia *articulada-articulada* se divide en dos picos que se separan al aumentar la velocidad, pero la diferencia de amplitud de los picos se debe a la modulación de la fuerza normal, que es máxima en el rango de frecuencias cercano a la frecuencia *articulada-articulada*. Por tanto, a la frecuencia correspondiente a la resonancia *articulada-articulada* que aparece con el *modelo de la fuerza estática* y con el *modelo de irregularidad móvil*, aparecerá una antirresonancia con el *modelo de la masa móvil*.

Además, Ilias y Müller realizaron una comparación de varios modelos de excitación para calcular tasas de crecimiento de la corrugación [84]. Observaron que los modelos de excitación conocidos como *modelo de la fuerza móvil* (A2 en la Figura 3.6) y *modelo de la masa móvil* (eje ferroviario rodando sobre un carril con irregularidades sinusoidales) (A3) podían representar la división del máximo de la fuerza normal de contacto asociado a la división de la resonancia *articulada-articulada*, mientras que el *modelo de la fuerza estática* (A1) no podía representar este efecto.

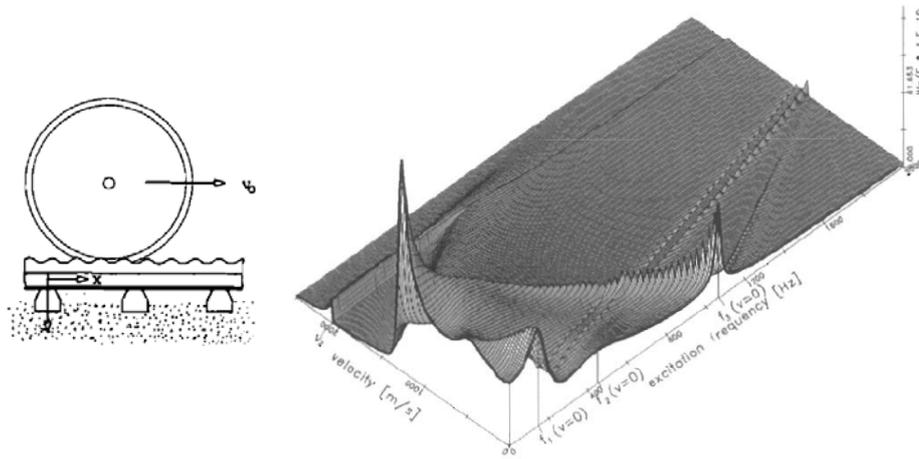


Figura 3.5. Ratio de transmisión (desplazamiento/fuerza) del carril UIC60 sobre traviesas rígidas, separadas entre sí 0.6 m en función de la velocidad de la masa móvil. De la referencia [84].

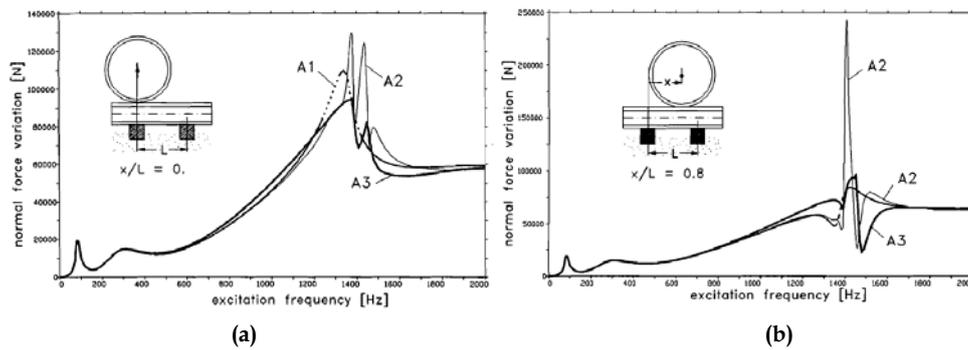


Figura 3.6. Variación de la fuerza normal de contacto rueda-carril en función de la frecuencia de excitación, empleando distintos modelos de excitación (A1 modelo de la fuerza estática; A2 modelo de la fuerza móvil y A3 modelo de la masa móvil). (a) Rueda situada sobre la traviesa; (b) Rueda situada entre traviesas ( $x/L=0.8$ ). De la referencia [84].

### 3.2.6 Revisión de modelos de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio del tiempo

Comparando los modelos de interacción dinámica en el dominio de la frecuencia y del tiempo, la desventaja más importante que presentan estos últimos es el mayor tiempo de cálculo que requieren. Sin embargo, el incremento de potencia de los ordenadores ha hecho posible que en la actualidad prácticamente se prefiera emplear modelos de interacción dinámica en el dominio del tiempo que modelos en el dominio de la frecuencia.

La principal ventaja que ofrecen las técnicas de resolución de la interacción dinámica vehículo-vía en el dominio del tiempo es que permiten considerar las no linealidades de la vía, como las debidas al balasto, a las placas de asiento y al contacto rueda-carril, entre otras, y los fenómenos transitorios que pueden tener lugar en dicha interacción. En estos modelos se emplea únicamente el modelo de excitación más realista, el de la *masa móvil*, que permite representar la excitación de una rueda ferroviaria por la presencia de irregularidades en la superficie de rodadura del carril cuyas características pueden variar con la posición y el tiempo.

Los modelos de vía en el dominio del tiempo se clasifican en dos grupos [109]: los modelos semianalíticos y los modelos de elementos finitos. Los modelos de elementos finitos de la vía suelen considerar una longitud de vía finita con al menos 15 vanos para reducir la influencia de los efectos de las condiciones de contorno impuestas en los bordes. Dado que un modelo tridimensional completo de la vía da lugar a un número elevado de grados de libertad, la mayoría de estos modelos se limitan a la dinámica vertical y en algunos casos también a la longitudinal. Ilias [85] empleó una combinación de las dos técnicas en el dominio del tiempo: utilizó el método de los elementos finitos para simular el movimiento vertical y longitudinal de la vía, mientras que la dinámica lateral de la vía se consideró mediante la transformación de receptancias al dominio temporal. La única no linealidad que tuvo en cuenta era la debida al contacto rueda-carril.

Nielsen e Igeland [149] estudiaron el comportamiento dinámico vertical de un bogie sobre un carril apoyado en puntos discretos, a través de las placas de asiento, mediante traviesas dispuestas sobre una base elástica. Analizaron la interacción dinámica bogie-vía en presencia de distintas irregularidades como: corrugación sinusoidal en la superficie de rodadura del carril, un plano de rueda y una traviesa mal soportada sobre el balasto. El problema de interacción se resolvió en el dominio del tiempo, aplicando una técnica de superposición modal para describir la vía. Este modelo de interacción conocido como DIFF, ha sido posteriormente mejorado por otros investigadores del grupo *Charmec* de la *Chalmers University of Technology* de Gotemburgo (Suecia).

Andersson y Abrahamsson [10] extendieron el modelo de interacción DIFF [149] para considerar la dinámica vertical, longitudinal y lateral para analizar el desgaste, denominando esta nueva versión DIFF3. El modelo del vehículo se reducía a un modelo de bogie, en el que el bastidor se asumió rígido y el eje consistía en dos ruedas rígidas y un cuerpo del eje que podía considerarse rígido o flexible. El cuerpo del eje ferroviario se modeló mediante elementos finitos y para reducir el número de grados de libertad del modelo se realizó una reducción modal. El modelo de contacto que emplearon permitía detectar la zona de contacto

y calcular las fuerzas de contacto normal y tangencial. Al comparar los resultados utilizando un cuerpo del eje rígido y otro flexible, se observó una gran diferencia en la fuerza longitudinal, siendo la fuerza obtenida por medio del eje rígido mucho más elevada. En cambio, para la fuerza vertical no se apreciaron diferencias significativas entre los resultados de ambos modelos.

Nielsen y Oscarsson [152] propusieron un método numérico para considerar las propiedades no lineales de la vía, asociadas al comportamiento de las placas de asiento, balasto y plataforma, en un modelo de interacción dinámica vehículo-vía desarrollado anteriormente [149], en el que se consideró un modelo de vehículo de parámetros concentrados, la vía se representó mediante un modelo de elementos finitos lineales y se adoptó un modelo de contacto rueda-carril no lineal. En el nuevo modelo, se adopta la técnica de superposición modal compleja para desacoplar las ecuaciones de movimiento del modelo lineal de la vía desarrollada previamente por uno de los autores [156]. Las no linealidades de la vía se consideran aplicando fuerzas transitorias equivalentes a los correspondientes nodos del modelo de elementos finitos de la vía.

En el grupo de investigación del CIIM de la UPV, Roda [170] desarrolló un modelo de interacción dinámica vehículo-vía en la dirección vertical basado en la técnica de subestructuración modal. El modelo desarrollado se aplicó al estudio de las fuerzas ocasionadas por planos de bloqueo en ruedas [14]. Posteriormente, Baeza y Ouyang [19] desarrollaron un modelo de vía cíclica tridimensional basado en un método de subestructuración, que es el empleado en esta Tesis y se describe en el Capítulo 6.

Asimismo se han desarrollado modelos de interacción dinámica vehículo-vía basados en la propagación de ondas, que emplean el método de las funciones de Green. En esta línea cabe destacar los trabajos de Nordborg [154], Mazilu [131] y Pieringer [162]. Pieringer ha implementado un modelo de interacción dinámica vehículo-vía basado en funciones de Green, en el que se representan las ruedas y los carriles mediante conjuntos de funciones de respuesta impulsional, para estudiar el ruido que se produce al circular los vehículos ferroviarios por curvas de radio reducido, conocido como *squeal*, modelando el contacto rueda-carril como no estacionario y no herciano, basándose en la Teoría Variacional de Kalker.

Correa *et al.* [39] han aplicado un método modificado de las fracciones racionales polinómicas para transformar un modelo de vía en el dominio de la frecuencia desarrollado previamente por los autores [59-61] al dominio del tiempo. El modelo de interacción dinámica vertical en el dominio temporal se utiliza para estudiar los

efectos dinámicos derivados del paso de la rueda sobre soldaduras defectuosas en el carril.

### **3.3 Revisión de modelos para estimar el desgaste**

El mecanismo de daño que se ha relacionado con un mayor número de casos de corrugación es el desgaste, que implica pérdida de material de las superficies en contacto. Sin embargo, el desgaste no siempre es el único mecanismo de daño presente en el contacto entre la rueda y el carril. Las cargas dinámicas transmitidas a través del contacto rueda-carril, si son elevadas, pueden producir deformación plástica, que derivará en un endurecimiento del material y tensiones residuales. Algunos estudios sobre corrugación [24, 56] concluyen que la deformación plástica puede contrarrestar la formación de corrugación debida al desgaste si las tensiones de contacto normales son máximas en las proximidades de los picos de la corrugación. Por este motivo, la mayoría de modelos de simulación de corrugación en carriles sólo consideran como mecanismo de daño el desgaste.

En el contacto entre la rueda y el carril pueden estar presentes varios mecanismos de desgaste simultáneamente. Algunos de ellos son, de acuerdo con la clasificación realizada por Bayer [21]: delaminación, oxidación o corrosión, desgaste abrasivo y desgaste adhesivo. La delaminación se caracteriza por el desprendimiento de capas finas de material de las superficies en contacto; la oxidación o corrosión consiste en la eliminación de partículas resultantes de una reacción química o electroquímica de las superficies en contacto; el desgaste abrasivo se debe a la presencia en el contacto de partículas de elevada dureza que, al ser comprimidas y arrastradas, eliminan material de las superficies de rodadura de rueda y carril, generalmente de menor dureza; y el desgaste adhesivo resulta en una transferencia de material de una superficie en contacto a la otra, de forma que éste queda pegado a la otra superficie.

A su vez, según la velocidad de deterioro de una superficie debido al desgaste, éste se clasifica en desgaste suave o severo. El desgaste suave predomina en la parte superior de la cabeza del carril, mientras que el desgaste severo se produce, principalmente, en la cara del carril en contacto con la pestaña de la rueda al describir una curva el vehículo ferroviario, en ausencia de lubricación, produciéndose eliminación de material por delaminación [55].

Se puede distinguir dos tipos de desgaste en el sistema rueda-carril:

- **Desgaste uniforme** a lo largo del perfil longitudinal del carril y de la banda de rodadura de la rueda, que modifica el perfil transversal de carril y rueda.
- **Desgaste no uniforme**, que afecta al perfil longitudinal de la superficie de rodadura de carril y al perfil circunferencial de la rueda, como es la corrugación del carril y la pérdida de redondez de las ruedas (OOR).

El objeto de estudio de esta Tesis es el desgaste no uniforme o corrugación de los carriles ferroviarios, por lo que el primer tipo de desgaste no se va a tratar aquí. Sin embargo, algunos modelos de desgaste que se han desarrollado para el análisis de la evolución de los perfiles (transversales) de ruedas y carriles se han empleado posteriormente para el estudio de la corrugación en carriles.

Los modelos de desgaste empleados para predecir la corrugación en la superficie de rodadura de los carriles y en las ruedas de los vehículos ferroviarios consideran que el desgaste es el resultado del deslizamiento relativo entre las superficies de rueda y carril que se produce en la zona de deslizamiento del área de contacto. Las velocidades de deslizamiento relativo en el área de contacto fluctúan con el tiempo, como consecuencia de la transmisión de cargas dinámicas entre la rueda y el carril, produciendo desgaste no uniforme en las superficies de rodadura de rueda y carril.

Los modelos de desgaste más usuales en la estimación del desgaste en los carriles y en la banda de rodadura de las ruedas son el modelo de desgaste proporcional al trabajo de fricción (o energía disipada por fricción) y el modelo de desgaste de Archard [12]. La mayoría de modelos desarrollados para la predicción del desgaste de los carriles emplean el modelo de desgaste proporcional al trabajo de fricción. Sin embargo, algunos autores, como Jendel [87], han empleado el modelo de Archard para la predicción del desgaste en ruedas, con buena concordancia con medidas experimentales. Asimismo, Telliskivi y Olofsson [191] lo emplean para simular el desgaste de los perfiles transversales de rueda y carril.

A continuación, se describe el modelo de desgaste de Archard, el modelo de desgaste proporcional a la energía disipada por fricción y un modelo de desgaste basado en el índice de desgaste  $T\gamma/A$ , que es derivado del anterior.

### 3.3.1 Modelo de desgaste de Archard

Según Archard [12], el volumen de material que se elimina de una superficie por desgaste se puede estimar mediante la siguiente expresión

$$V_w = k_w \frac{F_z d_s}{H} \text{ (m}^3\text{)}, \quad (3.5)$$

donde  $F_z$  (N) es la fuerza normal al contacto,  $d_s$  (m) es la distancia de deslizamiento dentro del área de contacto,  $H$  (N/m<sup>2</sup>) es la dureza del material más blando de las dos superficies en contacto y  $k_w$  es el coeficiente de desgaste, que depende de la carga normal y de la velocidad de deslizamiento. En la Figura 3.7, se muestra un mapa con los valores del coeficiente de desgaste obtenidos experimentalmente, en función de dichos parámetros [87]. Para el contacto entre la cabeza del carril y la banda de rodadura de la rueda, que se produce cuando el vehículo ferroviario circula por una vía recta o curva de elevado radio, en el que se producen presiones normales moderadas y bajas velocidades de deslizamiento, el valor del coeficiente de desgaste se encuentra entre  $1 \cdot 10^{-4}$  y  $10 \cdot 10^{-4}$ . Cuando el vehículo circula por una curva pronunciada el contacto se produce entre la cara activa del carril y la pestaña de la rueda en un área de contacto muy reducida, con lo que la presión normal y la velocidad de deslizamiento son elevadas.

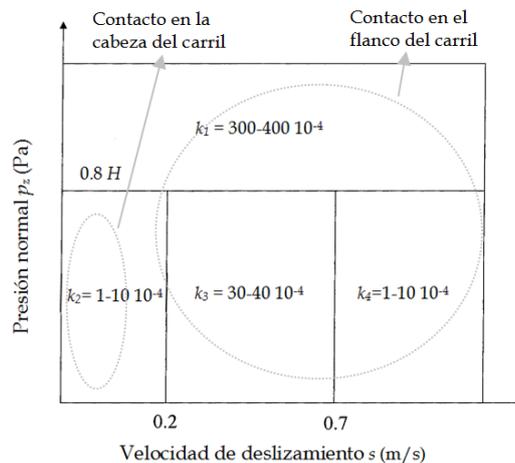


Figura 3.7. Coeficiente de desgaste en función de la presión normal y la velocidad de deslizamiento. Adaptado de [26].

Si se dividen los dos lados de la igualdad de la ecuación (3.5) por el área de contacto, se puede calcular la profundidad del desgaste mediante

$$\Delta z = k_w \frac{p_z |d_s|}{H} \text{ (m)}. \quad (3.6)$$

### 3.3.2 Modelo de desgaste proporcional a la energía disipada por fricción

Otro método de cálculo de desgaste considera que la pérdida de material por unidad de área  $\Delta m_w$  es proporcional al trabajo de fricción en el área de contacto por unidad de superficie o densidad de trabajo de fricción  $w_f$  (N/m)

$$\Delta m_w = C_w w_f \text{ (kg/m}^2\text{)}, \quad (3.7)$$

siendo  $C_w$  (kg/(Nm)) un parámetro que depende de los materiales de las superficies en contacto, la lubricación, la temperatura, etc. Algunos estudios se centran en modelar dicho parámetro con el fin de aplicarlo al análisis del crecimiento de la corrugación en carriles [216, 217].

La profundidad del desgaste se puede calcular a partir de la pérdida de material por unidad de área ( $\Delta m_w$ ) y la densidad del material ( $\rho$ ) del siguiente modo

$$\Delta z = \frac{\Delta m_w}{\rho} = \frac{C_w w_f}{\rho} \text{ (m)}. \quad (3.8)$$

El trabajo de fricción por unidad de superficie o densidad de trabajo de fricción se puede obtener integrando en un intervalo de tiempo  $[0, t]$  la potencia de fricción por unidad de superficie o densidad de potencia de fricción  $p_f$  (N/(ms))

$$w_f = \int_0^t p_f dt \text{ (N/m)}. \quad (3.9)$$

La potencia de fricción por unidad de superficie se calcula a partir de las tensiones tangenciales  $\mathbf{p}_\tau$  y la velocidad de deslizamiento relativo  $\mathbf{s}$

$$p_f = |\mathbf{p}_\tau \mathbf{s}| = |p_x s_x + p_y s_y| \text{ (N/(ms))}. \quad (3.10)$$

Sustituyendo las expresiones (3.9) y (3.10) en (3.8), la profundidad de desgaste se puede obtener a partir de la expresión siguiente

$$\Delta z = \frac{C_w w_f}{\rho} = \frac{C_w}{\rho} |\mathbf{p}_\tau \mathbf{s}| \Delta t = \frac{C_w}{\rho} |\mathbf{p}_\tau \mathbf{S}_\tau| \text{ (m)}, \quad (3.11)$$

donde  $\mathbf{S}_\tau$  son los deslizamientos en el contacto.

### 3.3.3 Modelo de desgaste basado en el índice de desgaste $T\gamma/A$

Un método que deriva del modelo de desgaste proporcional al trabajo de fricción, es el que permite calcular el índice de desgaste a partir de las fuerzas transmitidas en el contacto y los pseudodeslizamientos

$$w_i = k(F_x \xi + F_y \eta + M_z \phi). \quad (3.12)$$

Otro modelo de desgaste basado en el modelo de desgaste proporcional al trabajo de fricción es el que emplea Ward *et al.* [218] para estimar el desgaste que modifica el perfil transversal de ruedas. Según este modelo, la tasa de desgaste  $w_r$ , definida como masa eliminada por unidad de distancia de rodadura y por superficie del área de contacto, se calcula en función de la fuerza de contacto  $T$  (N), la velocidad de deslizamiento reducida  $\gamma$  y el área de contacto  $A$  ( $\text{mm}^2$ )

$$w_r = K_i \frac{T\gamma}{A} \quad ((\mu\text{g}/\text{m})/\text{mm}^2), \quad (3.13)$$

donde  $K_i$  ( $\mu\text{g}/\text{Nm}$ ), con  $i = 1, 2, 3$ , es el coeficiente de desgaste que depende del régimen de desgaste: suave ( $K_1$ ), intermedio ( $K_2$ ) y severo ( $K_3$ ).

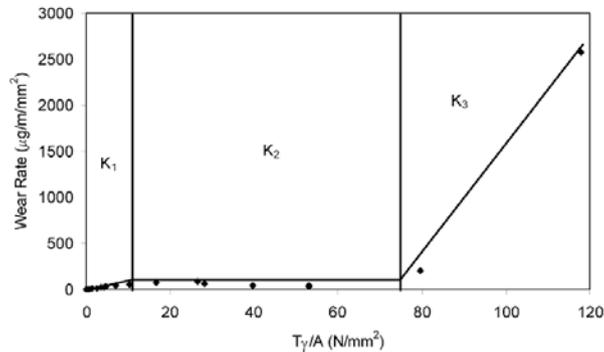


Figura 3.8. Tasa de desgaste para diferentes regímenes de desgaste determinados por los valores de índice de desgaste  $T\gamma/A$ . Extraído de [26].

Braghin *et al.* [26] a partir de ensayos experimentales determinaron los coeficientes de desgaste en función de los distintos regímenes de desgaste, definidos como intervalos del índice de desgaste  $T\gamma/A$  (ver Figura 3.8 y Tabla 3.1).

**Tabla 3.1. Regímenes y coeficientes de desgaste para los materiales de la rueda R8T y el carril UIC60 900A. Extraído de [26].**

Régimen de desgaste	Índice de desgaste $T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )	Tasa de desgaste $w_r = K_i \frac{T\gamma}{A}$ (μg/m/mm <sup>2</sup> )
$K_1$ (suave)	$T\gamma/A < 10.4$	$5.3 T\gamma/A$
$K_2$ (severo)	$10.4 < T\gamma/A < 77.2$	55
$K_3$ (catastrófico)	$77.2 < T\gamma/A$	$61.9(T\gamma/A - 77.2) + 55$

Este modelo de desgaste se aplica de forma global, esto es, permite obtener un valor de desgaste promedio en toda el área de contacto. Algunos investigadores emplean este modelo para estimar el desgaste de forma local, es decir en cada elemento de la discretización del área de contacto, considerando que el índice de desgaste  $T\gamma/A$  se puede calcular para cada elemento a partir de las tensiones tangenciales, las velocidades de deslizamiento y la velocidad del vehículo de la siguiente forma

$$\frac{T\gamma}{A} = \frac{|\mathbf{P}_t \cdot \mathbf{s}|}{V} \cdot 1 \cdot 10^{-6} \text{ (N/mm}^2\text{)}. \quad (3.14)$$

Una vez conocido el valor del índice de desgaste en cada elemento, se determina el régimen de desgaste correspondiente y el valor del coeficiente de desgaste  $K_i$  asociado en la Tabla 3.1.

Croft [41] combina este modelo de desgaste empírico con el modelo de desgaste proporcional a la energía disipada por fricción para analizar el crecimiento de la rugosidad en el carril debido al desgaste por varios mecanismos. En primer lugar, obtiene un coeficiente de desgaste equivalente a partir del índice de desgaste (ver Tabla 3.2) y posteriormente, emplea el modelo de desgaste proporcional a la energía disipada por fricción para calcular la profundidad de desgaste en cada elemento, mediante la expresión (3.11).

Tabla 3.2. Regímenes y coeficientes de desgaste equivalente  $C_w$  (kg/Nm). Extraído de [41].

Régimen de desgaste	Índice de desgaste $T\gamma/A$ (N/mm <sup>2</sup> )	Coficiente de desgaste equivalente $C_w$ (kg/Nm)
$K_1$ (suave)	$T\gamma/A < 10.4$	$5.3 \cdot 10^{-9}$
$K_2$ (severo)	$10.4 < T\gamma/A < 77.2$	$55 \cdot 10^{-9} / (T\gamma/A)$
$K_3$ (catastrófico)	$77.2 < T\gamma/A$	$[61.9 \cdot (T\gamma/A - 77.2) + 55] / (T\gamma/A) \cdot 10^{-9}$

### 3.4 Revisión de modelos matemáticos para simular la corrugación en carriles

En este apartado, se revisan los trabajos más relevantes sobre el modelado matemático de la corrugación, ordenados cronológicamente, desde los estudios iniciales a los más recientes, con el objetivo de analizar la evolución de los desarrollos más significativos a lo largo del periodo temporal comprendido entre los años 80 hasta la actualidad.

#### 3.4.1 Estudios sobre corrugación en los años 80

En 1983, Clark y Foster investigaron el mecanismo de formación de corrugación de longitud de onda corta y larga que habían observado en líneas de la *British Railways* [34], caracterizada por presentar una longitud de onda prácticamente constante e independiente de la velocidad de circulación de los vehículos. La hipótesis que adoptaron los autores es que la corrugación observada se debía a las vibraciones autoexcitadas entre un eje ferroviario flexible y una vía con apoyos discretos, con elevados pseudodeslizamientos en el contacto rueda-carril. Los dos mecanismos que analizaron fueron la variación de rigidez vertical de la vía debido a los apoyos discretos y las vibraciones *stick-slip* en el contacto. Según los autores, la corrugación de longitud de onda larga se podía explicar por la coincidencia de la frecuencia natural de un modo del eje montado y la frecuencia de paso por traviesas. Para investigar la corrugación de longitud de onda corta, consideraron que la relación entre la fuerza tangencial y el pseudodeslizamiento presentaba una pendiente negativa para elevados pseudodeslizamientos, que causaría las vibraciones *stick-slip* en el contacto. Anteriormente, Clark *et al.* [33] habían analizado los efectos dinámicos que producían los vehículos ferroviarios al circular sobre carriles con corrugación de longitud de onda corta mediante un modelo teórico y métodos experimentales. Concluyeron que los efectos dinámicos

asociados a la presencia de corrugación en la superficie de rodadura de los carriles tenían consecuencias como el asentamiento y pulverización del balasto, deterioro de la placa de asiento y sujeciones y agrietamiento de las traviesas de hormigón.

En 1985, Grassie y Johnson [63] presentaron varios métodos para la estimación del desgaste por medio del cálculo de la energía disipada por rozamiento en el contacto entre una rueda y un carril con corrugación sinusoidal. Emplearon un modelo de interacción vertical vehículo-vía que incluía un modelo de vía continuamente apoyada [62]. Los autores observaron que la máxima disipación de energía se producía en el flanco ascendente de la corrugación y que la amplitud de la disipación disminuía al reducirse la longitud de onda de la corrugación. Mediante los métodos propuestos, los autores no encontraron ningún mecanismo por el cual se iniciara la corrugación y lo atribuyeron a la omisión en sus modelos de la flexibilidad de la vía según las direcciones longitudinal y transversal, ya que sólo se había considerado ésta según la dirección vertical. Asimismo, señalaron que para el estudio de la corrugación se requerían modelos de vía con apoyos discretos, que pudieran representar la variación de rigidez de la vía.

En 1986, Frederick desarrolló una teoría lineal para predecir el crecimiento de la corrugación en el dominio de la frecuencia [56]. Su modelo, basado en receptancias para describir el comportamiento dinámico de la rueda y la vía en las direcciones vertical, lateral y longitudinal, partía de la hipótesis de que si el desfase entre el desgaste y la rugosidad inicial presente en el carril tomaba determinados valores, la rugosidad inicial podía crecer y formarse corrugación. La hipótesis realizada en el modelo fue posteriormente validada por medio de la comparación de los resultados numéricos y la corrugación de longitud de onda corta observada en los carriles, en las proximidades de las traviesas, en tramos de vía recta de líneas de la *British Railways*.

Un año después, Valdivia [204] asumió en su modelo para el estudio de la corrugación en carriles, que tanto la interacción dinámica rueda-carril, como el proceso de desarrollo de la corrugación, se podían considerar lineales. La formación de la corrugación se representaba mediante un bucle realimentado entre la interacción dinámica rueda-carril y el proceso de daño. La rugosidad que estaba presente en la superficie de rodadura del carril provocaba variaciones en las fuerzas de contacto y en el tamaño y forma del área de contacto. Asumió que las fluctuaciones de las fuerzas de contacto tangenciales, velocidades de pseudodeslizamiento y desgaste eran pequeñas y oscilaban alrededor de un valor medio, calculado mediante una simulación empleando modelos no lineales de interacción vehículo-vía y un programa informático de dinámica multicuerpo (MBD). El desgaste se consideró proporcional al trabajo de fricción en el área de

contacto y se predecía el crecimiento potencial de la corrugación por medio del valor que tomaba a lo largo de un vano la *tasa de crecimiento de la corrugación*.

Tanto Valdivia [204] como Frederick [56] concluyeron que la corrugación se debía principalmente a la antirresonancia *articulada-articulada* vertical (corrugación sobre traviesas) y en menor medida a la resonancia *articulada-articulada* vertical (corrugación a mitad de vano), cuyas frecuencias son muy similares.

En el trabajo de Clark *et al.* [35], la simulación del desgaste se realizó en el dominio de la frecuencia para una serie de pasos de rueda a diversas velocidades y para deslizamientos laterales variables. Se concluyó que la corrugación de longitud de onda corta se iniciaba debido a la vibración *stick-slip* lateral. Asimismo, se propusieron algunas soluciones para paliar la formación de la corrugación, como reducir el desalineamiento del eje, modificar la receptancia vertical del eje para minimizar la rigidez vertical a la frecuencia crítica, añadiendo amortiguamiento al modo articulado-articulado, y la circulación de una mayor variedad de trenes de diferentes características.

### 3.4.2 Estudios sobre corrugación en la década de los 90

En 1991, Tassily y Vincent [189] presentaron un modelo lineal para analizar el crecimiento de la corrugación en el dominio de la frecuencia en distintos tipos de vía de las líneas del metro de París (RATP), como vía curva sobre balasto y vía en placa de hormigón. El modelo desarrollado permitía estudiar el crecimiento de la corrugación en el rango de 0 a 500 Hz, ya que el modelo de vía no consideraba los apoyos discretos por medio de las traviesas y por tanto, no podía representar la resonancia y antirresonancia *articulada-articulada*, a través de funciones de transferencia complejas entre el desgaste y la rugosidad inicial.

Hempelmann *et al.* [76] investigaron la formación de patrones de corrugación en la superficie de rodadura del carril en el dominio de la frecuencia. Desarrollaron un modelo de corrugación lineal basado en el trabajo de Valdivia [204, 205], en el que los modelos de eje, vía y contacto eran válidos para el rango de frecuencias comprendido entre 50 y 3500 Hz. Para modelar el contacto rueda-carril emplearon un modelo de contacto lineal no estacionario como el de Groß-Thebing [72] y adoptaron un filtro de contacto similar al empleado por Remington [168], con el fin de considerar la influencia del tamaño del área de contacto cuando la longitud de ésta es similar a la longitud de onda de la corrugación. La capacidad de producir corrugación se representó a través de la *tasa de crecimiento local de la corrugación*, empleada por primera vez por Valdivia [204]. Mediante el modelo de corrugación desarrollado, se estudió la evolución del perfil del carril después de millones de

pasos de rueda, considerando tres tipos de irregularidades iniciales en su superficie de rodadura: rugosidad sinusoidal, rugosidad arbitraria y defectos discretos tipo junta de vía. Los autores concluyeron que la corrugación resultante dependía de las irregularidades presentes inicialmente en el carril y que el proceso de corrugación se podía explicar principalmente por la antirresonancia *articulada-articulada* vertical. En un trabajo posterior [77], Hempelmann y Knothe también señalaron las resonancias laterales de la vía como posibles desencadenantes de la corrugación, producidas por fuerzas laterales elevadas.

En 1993, Piotrowski y Kalker [163] presentaron un trabajo en el que, en primer lugar, estudiaron el contacto entre una rueda y una corrugación sinusoidal mediante un modelo tridimensional aproximado, cuyos resultados compararon con CONTACT. Los autores analizaron el desplazamiento geométrico en la dirección longitudinal del área de contacto y los cambios de forma de la misma al circular la rueda sobre una corrugación sinusoidal, distinguiendo entre corrugación superficial y corrugación profunda. En segundo lugar, presentaron un modelo no lineal de corrugación en el que se incorporaron no linealidades en el contacto rueda-carril, como el desplazamiento geométrico del área de contacto. Resolvieron el problema normal de contacto mediante la teoría de Hertz, teniendo en cuenta el radio de curvatura de los perfiles en el punto real de contacto, es decir corrigiendo la posición de la rueda con el desplazamiento geométrico y el problema tangencial, mediante el modelo estacionario de Shen *et al.* [176]. A partir de los resultados, observaron que los máximos de la fuerza normal estaban ligeramente adelantados a los máximos de la corrugación sinusoidal. Los autores destacaron la importancia de que un modelo no lineal de corrugación debía incorporar la no linealidad que introduce el desplazamiento geométrico y la forma cambiante del área de contacto y los efectos transitorios en el contacto.

Iceland, en 1996, investigó el crecimiento de la corrugación de onda corta en vías rectas debido al desgaste producido por ejes motorizados por medio de un modelo de interacción dinámica en el dominio del tiempo [80, 81]. En ese trabajo, se empleó un modelo de vía de elementos finitos lineales para el análisis de la dinámica vertical. El modelo del vehículo consistía en un sistema discreto no lineal masa-muelle-amortiguador. El contacto rueda-carril en la dirección vertical se modeló mediante un muelle herciano no lineal, que podía considerar la pérdida de contacto rueda-carril. Se emplearon dos tipos de modelo de vehículo: un modelo constituido por una única rueda y un modelo de bogie. Se observó que cuando se utilizaba el modelo de bogie, el crecimiento de la corrugación estaba dominado por las resonancias del sistema acoplado bogie-vía, en las que el tramo de carril comprendido entre dos ruedas de un mismo bogie vibraba con nodos localizados

en los puntos de contacto rueda-carril. Igeland analizó la influencia de la distancia entre los dos ejes de un bogie (empate) sobre la corrugación y concluyó que la longitud de onda de la corrugación dependía de dicha distancia, aunque también era sensible a la rugosidad inicial del carril. Además, se observó que cuando el empate era múltiplo de la distancia entre traviesas, una de las resonancias del sistema bogie-vía coincidía con la resonancia *articulada-articulada* y se amplificaba el efecto de dicha resonancia.

También en 1996, Hempelmann y Knothe [77] mejoraron el modelo lineal para la predicción de la corrugación de longitud de onda corta presentado en un trabajo anterior [76], incorporando un modelo avanzado de contacto rueda-carril que proporcionaba un efecto de filtrado, que impedía el crecimiento de las rugosidades de longitudes de onda muy pequeñas. Otra mejora del modelo de predicción residía en el uso de la *tasa global de crecimiento de la corrugación* frente a la *tasa local de crecimiento de la corrugación* empleada en [76], que proporcionaba una medida de la susceptibilidad de un tramo de vía a desarrollar corrugación, por medio de la comparación de los espectros de amplitudes de la rugosidad inicial y final de la superficie de rodadura del carril. Los autores identificaron dos mecanismos de formación de corrugación en carriles a partir de la *tasa global de crecimiento de la corrugación*. El primer mecanismo, de frecuencia constante, estaba asociado a determinadas posiciones de la vía en las que la rigidez era elevada, provocadas principalmente por antirresonancias entre los componentes de la vía. En concreto, se asoció a la antirresonancia *articulada-articulada* (en torno a 1000 Hz), que favorecía el crecimiento de la corrugación de longitud de onda corta (33 mm) y a la antirresonancia en la que la traviesa actúa como un absorber dinámico de vibraciones (entre 200 Hz y 450 Hz), vibrando entre el balasto y la placa de asiento, que propiciaba el desarrollo de corrugación de longitudes de onda intermedias (en torno a 100 mm). El segundo mecanismo detectado, de longitud de onda constante, era el denominado *filtro del contacto*, que impedía el crecimiento de la corrugación de longitudes de onda inferiores al tamaño del área de contacto. Los autores también observaron que la rigidez de la placa de asiento tenía una influencia importante en la formación de corrugación. Por una parte, aumentando la rigidez de las placas de asiento, la antirresonancia en la que la traviesa vibra entre el balasto y la placa de asiento se desplaza hacia frecuencias mayores e incrementa la tasa de crecimiento de la corrugación a la correspondiente longitud de onda, que será inferior. Por otra parte, observaron que el uso de placas de asiento menos rígidas retrasaba la formación de la corrugación a todas las frecuencias, pero no conseguía eliminarla completamente a la frecuencia de la antirresonancia *articulada-articulada*.

En 1997, Igeland e Ilias [82] compararon los resultados de simulaciones del crecimiento de la corrugación de longitud de onda corta obtenidos mediante dos modelos de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio del tiempo: uno desarrollado en la Universidad de Chalmers (Suecia) y el otro, en la Universidad Técnica de Berlín (Alemania). Mientras los modelos de vehículo y vía se consideraron lineales, todas las no linealidades del sistema se atribuyeron al contacto rueda-carril. En ambos modelos, la fuerza normal se calculaba por medio de un muelle no lineal de Hertz y el problema tangencial mediante la teoría no lineal y estacionaria de Shen *et al.* [176]. En cada instante de cálculo, los autores calculaban un valor medio de la profundidad del desgaste en el área de contacto. La profundidad del desgaste se asumió proporcional a la energía disipada por fricción en el área de contacto, que posteriormente asignaban a un punto del carril, obtenido a partir de la posición de la rueda, el desplazamiento geométrico y la posición del centro de la distribución del desgaste respecto del centro del área de contacto. Se compararon estos resultados con los obtenidos mediante el modelo no herciano y no estacionario CONTACT [104], encontrando muy pocas diferencias entre los resultados de ambos modelos. Los autores observaron que el desplazamiento geométrico del punto de contacto respecto a la proyección vertical del centro de la rueda, producido por la presencia de corrugación en la superficie de rodadura de los carriles, y la posición del centro de la distribución del desgaste en el área de contacto hacia la parte posterior de ésta, hacen que las máximas profundidades del desgaste se produzcan en las proximidades de los picos de la corrugación inicial. La magnitud de dicho desplazamiento es mayor para relaciones elevadas entre amplitud y longitud de onda de la corrugación inicial. Los autores concluyeron que el desplazamiento geométrico es un efecto no lineal que puede afectar significativamente el ángulo de desfase entre el desgaste y la corrugación inicial y no puede incluirse en un modelo de corrugación en el dominio de la frecuencia. Las no linealidades del modelo hacían que aparecieran frecuencias de excitación múltiplos de la frecuencia de paso por las traviesas y de la frecuencia de la corrugación inicial. Observaron que el efecto de la excitación del sistema vehículo-vía ocasionada por el paso por las traviesas era más pronunciado cuando la correspondiente frecuencia coincidía con una resonancia del sistema vehículo-vía.

En 1998, Grassie y Elkins [65] concluyeron, a partir de observaciones realizadas en cinco vías de líneas interurbanas de Norte América, que la mayor parte de la corrugación que aparecía en este tipo de vías surgía como consecuencia del deslizamiento longitudinal entre rueda y carril. A partir de medidas de las características dinámicas de la vía y de los ejes motorizados, los dos tipos de corrugación predominantes, asociados a frecuencias alrededor 300-350 Hz y 750-

1000 Hz, se relacionaron con el segundo modo de torsión de ejes motorizados y con la resonancia *articulada-articulada* de la vía, respectivamente. Por otra parte, los autores desarrollaron un modelo de interacción vehículo-vía para estudiar el tipo de corrugación que se producía en el rango de frecuencias 300-350 Hz. El modelo, creado empleando un programa informático comercial para sistemas multicuerpo, incluía un eje flexible a torsión y un modelo de vía con apoyos discretos. Se concluyó, a partir de los resultados del modelo desarrollado, que la corrugación se producía preferentemente a dos frecuencias: la primera, alrededor de 300 Hz, se correspondía con la frecuencia del segundo modo de torsión del eje; y la segunda, aproximadamente 100 Hz, con la resonancia P2, en la que la masa no suspendida del vehículo vibra sobre la rigidez de la vía.

Ilias estudió, en 1999, la influencia de la rigidez de las placas de asiento en las fuerzas resultantes de la interacción dinámica vehículo-vía y en el crecimiento de la corrugación de longitud de onda corta en los carriles [85]. El modelo de corrugación desarrollado constaba de un bucle realimentado entre la interacción dinámica vehículo-vía y un modelo de desgaste, que se consideraba proporcional al trabajo de fricción en el área de contacto. La rugosidad inicial que se consideraba como dato de entrada al modelo de corrugación se obtuvo de medidas del perfil del carril en una vía recién amolada. El modelo del vehículo constaba de un único eje conectado por medio de la suspensión primaria, constituida por elementos viscoelásticos, al bastidor del bogie. El carril se modeló como una viga de Timoshenko sobre apoyos discretos. Las traviesas se consideraron rígidas, y las placas de asiento y el balasto bajo las traviesas se representaron mediante elementos viscoelásticos. El problema de contacto normal se modeló mediante un muelle herciano no lineal y el contacto tangencial, que se asumió estacionario y no lineal, por medio del modelo de Shen *et al.* [176]. Se concluyó que las placas de asiento más rígidas producían ratios de desgaste más elevados y un crecimiento más rápido de la corrugación, y que la excitación paramétrica producida por el paso del vehículo sobre los apoyos discretos de la vía explicaba las longitudes de onda predominantes en el perfil final del carril, en el que éstas eran fracciones enteras de la distancia entre traviesas.

J. B. Nielsen desarrolló un modelo de desgaste no lineal [148] para investigar la formación y evolución de la corrugación en carriles, considerando exclusivamente la mecánica del contacto entre un cilindro y una superficie con una irregularidad periódica. Mediante el modelo, se demostró que aún manteniendo la fuerza normal, la tracción y el pseudodeslizamiento constantes, se podía desarrollar corrugación debido a las no linealidades del contacto. El modelo de corrugación desarrollado permitía predecir las longitudes de onda críticas para las cuales la

corrugación presentaba un mayor crecimiento y aquellas para las que la corrugación inicial no crecía. Por último, se demostró que la amplitud de la corrugación crecía de forma exponencial con una velocidad de crecimiento que se podía obtener de forma analítica, para una determinada corrugación inicial.

### 3.4.3 Estudios sobre corrugación entre los años 2000 y 2007

En 2000, Müller en los estudios recopilados en [145, 147] continuó con el trabajo iniciado por Valdivia [204] y Hempelmann *et al.* [76] para analizar el mecanismo de fijación de la longitud de onda de la corrugación de onda corta. Müller utilizó un modelo lineal, en el que la excitación del sistema vehículo-vía se producía mediante una banda corrugada móvil. Se mostró que varias resonancias del sistema acoplado vehículo-vía podían ser las causantes del desarrollo del tipo de corrugación de onda corta conocido como *roaring rails*: la antirresonancia *articulada-articulada* vertical, la elevada receptancia lateral de la vía entre 1600 y 1800 Hz, la antirresonancia vertical de la vía cerca de 300 Hz y las elevadas receptancias laterales del eje. Se observó que, si no se consideraba la dinámica estructural, sólo aumentaban las amplitudes de la corrugación inicial correspondientes a un rango de longitudes de onda limitado. Si se incluía la dinámica estructural, las longitudes de onda de la corrugación se podían calcular dividiendo la velocidad del tren entre la frecuencia de las antirresonancias de la receptancias vertical o las resonancias de la receptancia lateral.

Manabe, ese mismo año, continuando con el trabajo realizado por Igeland [80], propuso un modelo matemático para explicar el mecanismo de fijación de la longitud de onda en la corrugación que aparecía cuando se consideraban los dos ejes de un bogie en el modelo del vehículo [126]. Para ello, modeló el carril como una viga infinita de Euler-Bernoulli con una irregularidad sinusoidal en la superficie de rodadura y el bogie, como dos masas puntuales. Se concluyó que la interferencia entre las ondas que se transmiten a través del carril producidas por la excitación en varios puntos de éste era un posible mecanismo de fijación de la longitud de onda de la corrugación. Este mecanismo podría explicar por qué las longitudes de onda de la corrugación que se observaban no siempre variaban linealmente con la velocidad del vehículo.

En 2001, Gómez y García Vadillo en [59] estudiaron un tipo especial de corrugación de longitud de onda corta, observada en el carril bajo en tramos de vía curva de una línea del metro de Bilbao. Los autores relacionaron este tipo de corrugación con la que identificaron Grassie y Kalousek como corrugación *booted sleeper*, dado que los carriles se apoyaban sobre traviesas bi-bloque con suela

elástica. Pero a diferencia de la corrugación tipo *booted sleeper*, la corrugación observada estaba presente a mitad de vano con una longitud de onda de 66.1 mm. El estudio teórico empleaba el modelo lineal de corrugación de Frederick [56] y basándose además en los estudios de Tassilly y Vincent [189, 190] se desarrolló un modelo que permitía determinar la variación de la tasa de desgaste con la frecuencia. El modelo presentado estimaba la frecuencia a la que era más probable que apareciera la corrugación. Se concluyó que la causa que originaba el desgaste ondulatorio observado era la coincidencia de las frecuencias de la primera resonancia lateral *articulada-articulada* de la vía, en la que la cabeza y el pie del carril vibran en fase, y de la primera antirresonancia vertical de la vía, en la que la traviesa vibra de forma independiente respecto del carril y el balasto actuando como un absorbente dinámico de vibraciones.

Hiensch *et al.* [79] estudiaron, en el año 2002, el crecimiento de la corrugación en un tramo de vía corrugado de una vía holandesa por medio de simulaciones numéricas de la interacción vehículo-vía y del desgaste. Sin embargo, el modelo de simulación de la corrugación utilizado en este estudio no permitió a los autores verificar su hipótesis inicial acerca de que el material del carril menos resistente al desgaste podría presentar un buen comportamiento frente al tipo de corrugación objeto de estudio en su trabajo. Las simulaciones de la interacción dinámica vehículo-vía confirmaron que la baja receptancia de la vía en las proximidades de las traviesas, alrededor de 1200 Hz, debida a la antirresonancia *articulada-articulada*, junto con el elevado paso de vehículos con las mismas características y velocidades eran los causantes de la aparición de corrugación en el intervalo de longitudes de onda que se había observado (30-40 mm).

Ese mismo año, varios investigadores japoneses centraron sus investigaciones en el estudio de la corrugación en carriles de vía curva. Ishida *et al.* [86] estudiaron el efecto de la fuerza lateral de contacto en la corrugación en el carril bajo de vías curvas de radio de curvatura inferior a 600 m. Matsumoto *et al.* [130] investigaron la formación de la corrugación en vías curvas por medio de simulaciones numéricas, bancos de ensayos a escala real y medidas experimentales en vía. Concluyeron que la corrugación aparecía como consecuencia de las vibraciones *stick-slip*, el elevado pseudodeslizamiento y las fluctuaciones de la fuerza vertical en el contacto rueda-carril.

Böhmer y Klimpel [24] analizaron la influencia de la deformación plástica en el proceso de crecimiento de la corrugación como un posible mecanismo de saturación de dicho proceso. El proceso de crecimiento de la corrugación, en el que se consideraba tanto el desgaste como la deformación plástica, se modeló mediante dos bucles realimentados. El primer bucle estaba asociado al desgaste, que

constituía un mecanismo de daño a largo plazo, mientras que el segundo bucle se debía a la deformación plástica, a la que los autores consideraban un mecanismo de daño a medio plazo. Se concluyó que la acción simultánea del desgaste y de la deformación plástica conducía a un estado estacionario en el que la corrugación no crecía debido al efecto de la deformación plástica.

En 2003, Gómez y García Vadillo [60] propusieron un modelo lineal para explicar la corrugación de onda corta, que estimaba la *tasa de desgaste* como una función de la variación del perfil del carril con los pasos de ruedas. El modelo consideraba tanto la dinámica de la vía, con apoyos discretos, como la dinámica del eje, ésta última por medio de un modelo de elementos finitos. Las fuerzas y pseudodeslizamientos en el contacto se obtenían mediante un modelo teórico para bogies en vía curva. En el problema normal de contacto se empleó la teoría de Hertz, y para el contacto tangencial la teoría de Johnson y Vermeulen. El modelo implementa el *Finite Strip Method* y la teoría de estructuras periódicas [73]. Los resultados del modelo, receptancias de vía y de eje montado, así como predicciones de la *tasa de desgaste* para cada frecuencia, se compararon con las medidas experimentales de un caso especial de corrugación de longitud de onda corta detectado en el carril bajo en algunas curvas pronunciadas en una línea de metro de Bilbao [59]. Concluyeron que las antirresonancias de la dinámica vertical del sistema junto con los elevados valores de las receptancias en la dinámica lateral eran los principales mecanismos de formación de la corrugación objeto de estudio.

Nielsen [150] desarrolló un modelo de simulación del crecimiento de corrugación de onda corta en carriles de vías rectas y comparó los resultados obtenidos con las medidas experimentales realizadas en un tramo de vía en Holanda en un trabajo previo de Hiensch *et al.* [79]. El modelo de predicción de corrugación utilizado incluía un modelo de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio del tiempo, para calcular las fuerzas y velocidades de pseudodeslizamiento en el contacto rueda-carril, basado en los trabajos de Igeland [80] y de Nielsen e Igeland [149], y un modelo de desgaste que asumía que el desgaste era proporcional al trabajo de fricción en el área de contacto y que era consecuencia del deslizamiento longitudinal debido a los ejes ferroviarios motorizados. El perfil inicial del carril se supuso formado por un espectro de longitudes de onda comprendido entre 10-100 mm. Para el cálculo del desgaste se asumió que el área de contacto era elíptica y el desgaste se asignó al centro de la distribución de desgaste, con lo que se obtuvo el desgaste a lo largo de la línea central de ésta. El desgaste obtenido después de un paso de un eje se multiplicó por un número determinado de pasos de ejes y se sumó a la rugosidad inicial para estimar el perfil de rugosidad del carril después del número de pasos de ejes considerado.

En 2004, Andersson y Johansson [11] propusieron un método para predecir la corrugación en carriles, que incluía un modelo tridimensional de interacción vehículo-vía en el dominio del tiempo similar al de Andersson y Abrahamsson [10]. El modelo de la vía, de longitud finita, constaba de dos carriles modelados mediante elementos finitos y apoyos discretos, que se representaron como dos masas correspondientes a la traviesa y al balasto y tres capas de muelles y amortiguadores que representaban las rigideces y amortiguamientos de las placas de asiento, balasto y plataforma. El modelo de vehículo se reducía al modelo tridimensional de un bogie, constituido por dos ejes, el bastidor del bogie y la suspensión primaria (muelles lineales y amortiguadores viscosos). Los cuerpos de los ejes ferroviarios se modelaron de acuerdo con la teoría de vigas de Euler-Bernoulli-Sant Venant, que tiene en cuenta tanto la flexión como la torsión, mientras que las ruedas se consideraron rígidas. Para considerar perfiles realistas del carril y de la rueda, se adoptó un espectro de rugosidad inicial en el carril, con longitudes de onda en el intervalo de 2 a 10 cm, y las ruedas se supusieron sin rugosidad en las bandas de rodadura. El cálculo en las fuerzas de contacto rueda-carril vertical y tangencial se realizó por medio de la teoría de Hertz y el modelo de Shen *et al.* [176], respectivamente. Para el cálculo del desgaste, que se asumió proporcional al trabajo de fricción, las distribuciones de velocidades de deslizamiento y de tensiones tangenciales se obtuvieron empleando FASTSIM. Se estudiaron los efectos de la distancia entre los dos ejes de un bogie. Por medio de las simulaciones numéricas, se observó una mayor tasa de desgaste alrededor de dos longitudes de onda correspondientes a dos frecuencias (650 Hz y 880 Hz) asociadas a resonancias verticales de la vía excitadas por el paso de un bogie. La frecuencia de 650 Hz se correspondía con una resonancia del tramo de carril comprendido entre los dos ejes del bogie, y la frecuencia de 880 Hz, con la resonancia *articulada-articulada* vertical. Los autores observaron que un incremento en la distancia entre ejes de un mismo bogie (empate de bogie) suponía un desplazamiento de los máximos de la tasa de desgaste hacia frecuencias inferiores.

Jin *et al.* [90] estudiaron la influencia de la presencia de un patinaje, producido por el deslizamiento de las ruedas motrices, en la superficie de rodadura de un carril de una vía curva en el inicio y evolución de la corrugación en el carril. Esta irregularidad discreta producía variaciones de las fuerzas normal y tangencial de contacto, de los pseudodeslizamientos y del trabajo de fricción, con lo que en dichas condiciones la corrugación podía desarrollarse tras el primer paso de rueda. Para simular el inicio y propagación de la corrugación se desarrolló un algoritmo numérico en el que se combinaba una modificación de la teoría del contacto de rodadura de Kalker (implementada en el algoritmo CONTACT) con área de contacto no herciana, un modelo de desgaste proporcional al trabajo de fricción en

el contacto y un modelo de interacción dinámica vehículo-vía según la dirección vertical a la vía. A partir del espectro en frecuencia de la fuerza normal obtenida mediante el modelo de simulación, se identificaron dos frecuencias clave después de un paso de rueda, 118 Hz y 271 Hz. Se observó que estas frecuencias eran invariables con la velocidad del vehículo, por tanto era la longitud de onda de la corrugación la que dependía de la velocidad del vehículo. Conforme aumentaban los pasos de rueda, el modelo preveía que la frecuencia de 118 Hz dominaba el desarrollo de la corrugación. Los autores no indican si dichas frecuencias corresponden al vehículo o a la vía.

En 2005, Meehan *et al.* [135] desarrollaron un modelo analítico para investigar el crecimiento de la corrugación, empleando posteriormente un modelo de elementos finitos para validar los resultados del modelo analítico. Se consideró un bucle realimentado que englobaba la interacción dinámica vehículo-vía, el contacto rueda-carril, el proceso de desgaste y un retardo temporal en el paso de rueda para simular la variación del perfil del carril después de varios pasos de rueda. Se realizó un análisis de estabilidad a este modelo de corrugación con el fin de obtener una expresión analítica del crecimiento de la corrugación en función de parámetros del sistema acoplado vehículo-vía en el dominio de la frecuencia. El modelo analítico desarrollado condensaba un gran número de parámetros físicos en dos términos que describían la contribución al crecimiento de la corrugación por parte de la dinámica del sistema acoplado vehículo-vía (receptancias del eje y de la vía) y de las propiedades del contacto y del desgaste. A continuación, se realizó un análisis de sensibilidad para determinar la influencia de varios parámetros en la corrugación. Se observó que los parámetros que tenían mayor efecto en el crecimiento de la corrugación eran el coeficiente de desgaste, la relación entre la carga tangencial y el límite de rozamiento, el coeficiente de rozamiento y el amortiguamiento del vehículo y vía.

Wu y Thompson [224] investigaron el efecto de múltiples fuerzas de interacción rueda-carril en el crecimiento de la corrugación en carriles, con un método que combinaba la interacción dinámica rueda-carril, la mecánica del contacto y el desgaste. Se empleó un modelo cuasi-estático basado en un modelo de contacto bidimensional para resolver el problema de contacto no estacionario, en el que la fuerza de contacto normal y la curvatura de la superficie variaban. El desgaste en la cabeza del carril se calculó acumulando el desgaste que se producía en la zona de deslizamiento del área de contacto en cada paso temporal de la simulación. Se calculó la tasa de crecimiento de la corrugación para varias longitudes de onda de la corrugación inicial y dos velocidades del vehículo. Se observó que la máxima tasa de crecimiento de la corrugación se producía cuando el ángulo de desfase de

la fuerza dinámica de contacto normal con respecto a la corrugación inicial es de  $135^\circ$ , es decir, el pico de la fuerza dinámica de contacto normal se encontraba  $45^\circ$  adelantada respecto a la cresta de la corrugación. Con placas de asiento de baja rigidez, la fuerza dinámica de contacto bajo múltiples interacciones rueda-carril presentaba varios picos en el rango de frecuencias 400-1200 Hz debidos a las reflexiones de las ondas de los carriles entre las ruedas y en consecuencia, aparecían varios picos en la tasa de crecimiento de la corrugación. Con placas de asiento rígidas se observó una menor diferencia entre los resultados correspondientes a una única rueda y los de múltiples ruedas. Las placas de asiento rígidas enfatizaban los efectos de la antirresonancia *articulada-articulada*, ya que producían un crecimiento más rápido de la corrugación a esa frecuencia que las placas de asiento de rigidez baja, como había concluido anteriormente Ilias [85].

Wen y Jin estudiaron la influencia de los defectos geométricos en la dirección transversal a la vía en la corrugación en un tramo de vía curva [219]. Basándose en un trabajo anterior [90], desarrollaron un modelo de interacción dinámica entre medio vehículo y un tramo de vía curva más complejo, que consideraba la dinámica vertical y lateral del sistema. Los modelos de contacto y de desgaste utilizados en este trabajo eran los mismos que en [90]. El modelo de corrugación empleado consistía en un bucle realimentado entre la interacción dinámica vehículo-vía y el modelo de desgaste. Los defectos geométricos que se consideraron en las simulaciones numéricas eran variaciones aleatorias del ancho de vía. Mediante el modelo para la predicción de la corrugación desarrollado por los autores, se simuló la corrugación en la superficie de rodadura de los carriles considerando la influencia de las cuatro ruedas de un mismo bogie. Se concluyó que las variaciones en el ancho de vía producían fuerzas de contacto dinámicas y que con el paso de vehículos se desarrollaba la corrugación con diversas longitudes de onda. La corrugación resultante presentaba dos tipos de longitudes de onda: una de ellas asociada a la frecuencia de variación de las irregularidades de la vía (275 Hz) y la otra, relacionada con una frecuencia de la vía (740 Hz). A medida que aumentaban los pasos de vehículos, era esta última longitud de onda la que predominaba en el patrón de corrugación.

Jin *et al.* investigaron los efectos de las irregularidades de la vía en el inicio y desarrollo de la corrugación en carriles en vía curva [94]. En el análisis se consideraron tres tipos de irregularidades: rugosidad periódica y rugosidad estocástica con varias longitudes de onda en la superficie de rodadura del carril y variación de la rigidez vertical de soporte del carril debido a los apoyos discretos del carril por medio de traviesas. Se observó a partir de los resultados de las simulaciones numéricas que la amplitud de la corrugación inicial tendía a

disminuir a medida que aumentaban los pasos de ruedas, pero la corrugación desarrollada se desplazaba a lo largo de la dirección de rodadura. La amplitud de la corrugación estocástica tendía a estabilizarse, a la vez que surgía una corrugación de muy poca amplitud a determinadas frecuencias coincidentes con algunas frecuencias naturales de la vía. Por último, se concluyó que los apoyos discretos de los carriles por medio de traviesas influyen significativamente en la formación de corrugación en vía curva. Se observó que conforme crecía la velocidad del vehículo, mayor era la velocidad de crecimiento de la corrugación, que tendía a desplazarse según la dirección longitudinal de la vía al variar la velocidad del vehículo. En otro trabajo, Jin *et al.* [92] simularon el inicio de la corrugación en una curva. Los resultados mostraron que las resonancias de la vía podían ser las responsables del inicio de la corrugación después del primer paso de rueda. La longitud de onda de la corrugación inicial dependía de las frecuencias de resonancia de la vía y de la velocidad del vehículo, mientras que la profundidad y la velocidad de crecimiento de la corrugación dependían de la amplitud de la oscilación de la fuerza normal de contacto y de la vibración lateral de la vía. En [95], presentaron un modelo de interacción dinámica vehículo-vía tridimensional para el análisis de la corrugación.

En 2006, Egaña *et al.* analizaron la influencia de la rigidez de las placas de asiento en la formación de corrugación en el carril bajo de curvas de radio reducido en el metro de Bilbao [51]. Desarrollaron un modelo lineal en el dominio de la frecuencia, basándose en el modelo de Tassilly y Vincent [189], para la predicción de la corrugación. Mediante este modelo, se identificaron dos frecuencias como posibles mecanismos de fijación de la longitud de onda de la corrugación: la primera era la frecuencia a la que se produce la primera resonancia en la receptancia vertical de la vía (resonancia P2), en la que el carril y las traviesas vibran en fase; y la segunda, se correspondía con la antirresonancia que se encuentra entre las dos primeras resonancias de la receptancia vertical de la vía, en la que las traviesas vibran sobre las placas de asiento y actúan como absorbentes dinámicos de vibraciones. Se observó que la antirresonancia anterior era más pronunciada cuando se consideraban placas de asiento de rigidez elevada. Para contrastar los resultados del modelo y determinar la influencia de la rigidez de las placas de asiento en la corrugación, se sustituyó las placas de asiento en un tramo de vía curva por placas de asiento con baja rigidez y se midió el perfil del carril antes y después de realizar los cambios en la vía durante el mismo periodo de tiempo. Después de comparar las longitudes de onda y amplitudes de la corrugación antes y después de sustituir las placas de asiento, se concluyó que las placas de asiento de baja rigidez reducían el crecimiento de la corrugación y eliminaron la longitud de onda asociada a la anterior antirresonancia.

Sheng *et al.* [179] desarrollaron un modelo para la simulación de la corrugación en carriles que empleaba un método en el dominio de la frecuencia para calcular la respuesta de un carril con apoyos discretos ante una fuerza armónica que se desplazaba sobre el mismo [178]. Este método permitía el cálculo en el dominio del tiempo de las fuerzas de interacción dinámica entre el carril y una única rueda o varias ruedas que se mueven sobre un carril inicialmente liso o con rugosidad [180]. Para la predicción del desgaste se asumió que éste era proporcional al trabajo de fricción en el área de contacto; y para el cálculo de las tensiones tangenciales y velocidades de pseudodeslizamiento se emplearon dos modelos de contacto, un modelo bidimensional no estacionario similar al empleado por Wu y Thompson en [224] y el modelo tridimensional estacionario FASTSIM. Los resultados del modelo de corrugación mostraron que la excitación paramétrica debida a los apoyos discretos del carril contribuía de forma significativa al inicio de la corrugación, siendo el crecimiento de la corrugación máximo en las proximidades de la frecuencia *articulada-articulada*. Se observó que una baja rigidez de la placa de asiento reducía el crecimiento de la corrugación aunque se seguía desarrollando rugosidad en un amplio rango de frecuencias. La adopción de varias ruedas en el cálculo derivó en un crecimiento de la rugosidad menor que considerando una única rueda, por lo que los autores destacaron la conveniencia de considerar la influencia de múltiples ruedas en las simulaciones de corrugación.

En 2007, Johansson y Nielsen emplearon un modelo multicuerpo para simular la interacción tridimensional entre el vehículo y la vía, con el fin de investigar la hipótesis de que la corrugación en los carriles se producía debido a los ejes motorizados del tren de alta velocidad sueco X2 [96]. En particular, estudiaron el efecto de la corrugación presente en la banda de rodadura de las ruedas, causada por las microsoldaduras que resultan de la aplicación del freno, en el crecimiento de la corrugación en los carriles. El modelo de simulación empleaba un esquema iterativo que incluía un modelo de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio del tiempo y un modelo de desgaste. El problema normal de contacto se resolvió por medio de la teoría de Hertz y el problema tangencial, mediante el modelo de Shen *et al.* [176]. Para la estimación del desgaste se empleó la *Teoría Simplificada* de Kalker (FASTSIM) y el modelo de desgaste de Archard. Se observó a partir de las simulaciones numéricas que las fuerzas de contacto eran considerablemente mayores cuando las ruedas presentaban rugosidades en las bandas de rodadura. Sin embargo, se observó que después de varios pasos de ruedas con diferentes rugosidades, el crecimiento de la corrugación en el carril era similar al que se obtenía considerando las bandas de rodadura de las ruedas libres de rugosidades. Se concluyó que la influencia de las ruedas con rugosidad en el crecimiento de la corrugación se podía obviar siempre que no fuera excesivamente severa. Las

longitudes de onda de la corrugación de los carriles se podía explicar por el desgaste irregular debido a las elevadas fuerzas de contacto y velocidades de deslizamiento provocadas por las resonancias del sistema bogie-vía.

#### 3.4.4 Estudios sobre corrugación entre el año 2008 y la actualidad

En 2008, Belette *et al.* [22] y Meehan y Daniel [136] modificaron el modelo analítico de Meehan *et al.* [135] para investigar los efectos de las diferentes velocidades y frecuencias de paso de vehículos ferroviarios en el crecimiento de la corrugación, considerando varios perfiles iniciales del carril. El modelo de corrugación implementaba un bucle realimentado entre la interacción dinámica rueda-carril, un modelo de contacto lineal y un modelo de desgaste, en el que éste se asumía proporcional al trabajo de fricción en el área de contacto. De los resultados del modelo, se observó que las propiedades de la distribución de velocidades de paso de los vehículos tenía un efecto importante en el crecimiento de la corrugación para todos los perfiles iniciales del carril considerados en el cálculo. Los autores propusieron incrementar la variedad de velocidades de los vehículos como una medida para reducir la tasa de crecimiento de la corrugación. Como con otros modelos de corrugación que consideran múltiples ruedas, se concluyó que el aumento de la frecuencia de paso de las ruedas (por ejemplo, disminuyendo el empuje de bogie) podía afectar el crecimiento de la corrugación.

Daniel *et al.* desarrollaron un modelo no lineal en el dominio del tiempo de un bogie en curva [44], en el que mediante una descripción modal de los ejes ferroviarios se consideraron los modos de flexión y torsión de los cuerpos de los ejes así como la flexión de las ruedas. Por otra parte, los carriles se modelaron mediante parámetros modales ajustados a partir de datos de medidas de receptancias. En el modelo se consideró las vibraciones *stick-slip* debido a la relación fuerza-pseudodeslizamiento no lineal. Los resultados mostraron que debido a este fenómeno surgía corrugación cuyas longitudes de onda eran similares a la distancia entre traviesas, o corrugación con longitudes de onda más cortas asociadas a fracciones de la distancia entre traviesas, a máximos en la receptancia lateral de la vía y a frecuencias naturales relacionadas con la torsión o la flexión del eje. De los resultados, se concluyó que la combinación de una baja receptancia vertical y una elevada receptancia lateral de la vía junto con una resonancia del eje favorecía el desarrollo de corrugación. Las longitudes de onda mayores, relacionadas con la dinámica de la suspensión primaria, se desarrollaban primero; pero eran las longitudes de onda más pequeñas, asociadas a la dinámica lateral de la vía, las que resultaban en un crecimiento de la corrugación más rápido, siendo la longitud de onda de 100 mm, correspondiente a la excitación de

un modo lateral de la vía que producía fuertes variaciones del pseudodeslizamiento lateral en el eje delantero del bogie, la predominante en curvas pronunciadas.

Grassie y Edwards desarrollaron un modelo semianalítico sencillo para calcular la tasa de crecimiento de la corrugación como consecuencia de la variación de la fuerza normal asumiendo que las fuerzas tangenciales se mantenían constantes [67]. El modelo permitía explicar la formación de corrugación que aparecía a continuación de soldaduras y juntas de vía, en las que se podían producir fluctuaciones significativas de la fuerza normal.

Knothe y Groß-Thebing [112] concluyeron que los efectos no estacionarios debían ser incluidos en los modelos de contacto para el estudio del inicio y crecimiento de la corrugación. Según los autores, estos efectos actúan como un filtro sobre el crecimiento de las longitudes de onda de la corrugación, limitándolo al rango entre 20 y 100 mm, correspondiente al rango típico de longitudes de onda de la corrugación de longitud de onda corta. Según los autores, este efecto podría combinarse con resonancias del sistema, como la resonancia *articulada-articulada*, para producir una situación desfavorable para el crecimiento de la corrugación en longitudes de onda de alrededor de 30 a 40 mm.

Xie e Iwnicki implementaron un modelo de contacto no estacionario y no herciano completo, de acuerdo con el método variacional de Kalker [104] y llevaron a cabo un estudio del desgaste en el carril sin considerar la interacción dinámica vehículo-vía [227]. Realizaron simulaciones de desgaste considerando en primer lugar, fuerzas normales constantes y posteriormente, fuerzas normales sinusoidales, con corrugación de varias longitudes de onda. Observaron que con un modelo de contacto no herciano, el desgaste máximo tenía lugar en los picos de la corrugación, y por tanto la corrugación no crecería.

En otro trabajo, Xie e Iwnicki extendieron su modelo de análisis de la corrugación para incluir la interacción rueda-carril en el dominio temporal [228]. Considerando fuerzas y pseudodeslizamientos variables en el tiempo, calcularon el desgaste para ruedas motrices y no motrices para varias velocidades de avance y longitudes de onda de la corrugación sinusoidal. Observaron, de nuevo, que el desgaste máximo se producía en los picos de la corrugación inicial, con lo que la corrugación inicial disminuiría en vez de crecer. Se observó que la rugosidad disminuía con una rugosidad inicial de amplio rango de longitudes de onda. Empleando un modelo de contacto no herciano y no estacionario bidimensional [229], los autores obtuvieron resultados similares.

Jin *et al.* estudiaron la influencia de la distancia entre traviesas en la formación de corrugación en vías rectas cuando el vehículo ferroviario se encuentra en movimiento de lazo [88]. El modelo de predicción de la corrugación comprendía un modelo de contacto no herciano basado en la teoría de contacto de rodadura de Kalker, un modelo de desgaste proporcional al trabajo de fricción y un modelo de la dinámica acoplada entre medio vehículo ferroviario y la vía recta. Los carriles se modelaron mediante vigas de Euler, las traviesas se consideraron como cuerpos rígidos y el balasto, como cuerpos de masa equivalente. Se analizó el efecto de los apoyos discretos de la vía en la fuerza normal de contacto para diferentes velocidades del vehículo, así como las frecuencias de resonancia del eje y de la vía. Los autores detectaron que los máximos de la fuerza normal fluctuante se producían sobre las traviesas y que su amplitud y fase variaba con la velocidad. Se comprobó que cuando el ángulo de lazo alcanzaba su valor máximo, el pseudodeslizamiento lateral variaba a la frecuencia de paso por traviesas y a frecuencias de resonancia de la vía mayores y se iniciaba corrugación a estas frecuencias.

En otro trabajo [93], Jin y Wen analizaron el efecto del soporte discreto de la vía mediante traviesas en un tramo de vía curva en el inicio y desarrollo de corrugación. El modelo para la predicción de la corrugación era el mismo que el utilizado en [88], con la única diferencia que se consideró un modelo de vía curva [91, 92]. Las simulaciones numéricas mediante el modelo desarrollado se centraron en el análisis de las variaciones de las cargas normales en el contacto rueda-carril, los pseudodeslizamientos y el volumen desgastado de la superficie de rodadura del carril. Los resultados mostraron que las fluctuaciones de la fuerza normal y pseudodeslizamientos se producían a determinadas frecuencias: la frecuencia de paso por traviesas y las frecuencias de resonancia de la vía. Además, se observó que las frecuencias excitadas por las cuatro ruedas de un bogie no eran las mismas y que por tanto, la corrugación resultante presentaba longitudes de onda diferentes. Los autores analizaron la corrugación causada por las ruedas de un mismo bogie en tres secciones diferentes de la curva: en la curva de transición de entrada, dentro de la curva y en la curva de transición de salida. Se observó que el máximo volumen desgastado se producía debido a la rueda externa a la curva del eje delantero del bogie por las elevadas fuerzas de contacto normales y pseudodeslizamientos. En cambio, las amplitudes de la corrugación debida a las ruedas en contacto con el carril interno crecían más rápido y ésta presentaba longitudes de onda corta entre 28 y 130 mm.

Continuando la investigación iniciada en un trabajo anterior [90], Wen *et al.* analizaron el efecto de un patinaje en la superficie de rodadura del carril de una

vía curva en el inicio y desarrollo de corrugación provocada por la deformación plástica [220]. El método numérico consistía en el modelo de contacto bidimensional de Carter, un modelo elasto-plástico bidimensional de elementos finitos y un modelo de la dinámica vertical acoplada entre el vehículo ferroviario y un tramo de vía curva. El modelo para predecir la corrugación comprendía un bucle realimentado entre la dinámica acoplada vehículo-vía y el modelo de deformación plástica, que consideraba el efecto de endurecimiento del material por las cargas de contacto repetitivas. Se observó, a partir de los resultados, que el patinaje en el carril producía fuertes variaciones en las fuerzas de contacto que favorecían la deformación plástica y que la corrugación asociada a ella tendía a desplazarse a lo largo de la dirección de rodadura del carril. La velocidad de crecimiento de la corrugación disminuía conforme aumentaba el número de pasos de rueda, lo contrario que sucede cuando el mecanismo de daño es el desgaste.

Wu investigó los efectos de la excitación paramétrica debida al paso por traviesas y a la resonancia *articulada-articulada* en la corrugación en carriles [225]. El modelo de corrugación constaba de un bucle realimentado que incluía un modelo de interacción rueda-vía, un modelo de contacto y un modelo de desgaste, que se consideraba proporcional al trabajo de fricción. Para la simulación de la excitación paramétrica por el paso por traviesas en el dominio del tiempo se consideró un modelo de vía sencillo, desarrollado a partir de un análisis en el dominio de la frecuencia, que representaba una vía con apoyos discretos. El modelo del vehículo se reducía a una masa que representaba una rueda. Para resolver el problema de contacto normal y tangencial se adoptó el modelo de contacto de Hertz y el modelo bidimensional de Carter, respectivamente. Se simuló el crecimiento de la corrugación debida a la excitación paramétrica considerando que el carril presentaba inicialmente rugosidad y libre de ella. A partir de los resultados, se observó que la propia excitación paramétrica debida al paso por traviesas provocaba la aparición de corrugación sin que el carril presentara rugosidad previa, por la rigidez variable de la vía con apoyos discretos. Se concluyó que la rugosidad inicial tenía un menor efecto en el crecimiento de la corrugación en comparación con la excitación paramétrica si la amplitud de la rugosidad inicial era pequeña. Por otra parte, si la rugosidad y la excitación paramétrica no estaban en fase, la corrugación no se desarrollaba, pero si por el contrario, estaban en fase se disparaba el crecimiento de la corrugación.

Colette *et al.* emplearon un modelo lineal de predicción de la corrugación en el dominio de la frecuencia y un modelo no lineal en el dominio del tiempo para estudiar la corrugación en una sección de vía curva sobre balasto en una línea de metro de París [37]. Los autores habían observado que la corrugación en dicho

tramo de vía crecía únicamente en el carril bajo con dos longitudes de onda predominantes de 160 mm y 80 mm. Tras analizar *las tasas de crecimiento de la corrugación* calculadas a partir de los dos modelos, concluyeron que la resonancia P2 de la vía era la responsable de la corrugación de longitud de onda de 160 mm; mientras que la primera antirresonancia vertical de la vía, en la que la traviesa vibra entre el carril y el balasto, junto con la segunda resonancia lateral de la vía de frecuencia similar, eran las causantes de la corrugación de longitud de onda de 80 mm. Asimismo, se concluyó que el modelo de predicción de corrugación en el dominio del tiempo era más preciso, ya que permitía considerar las no linealidades del sistema vehículo-vía. Por otra parte, se realizó un estudio paramétrico y se propusieron medidas para limitar el crecimiento de la corrugación observada. Como, por ejemplo, el uso de absorbentes dinámicos de vibraciones en las traviesas para reducir el crecimiento de la corrugación de longitud de onda 80 mm, que los autores clasificaron del tipo *booted sleepers* [64, 69].

En 2009, Afferante y Ciavarella en [1], continuando el trabajo iniciado por Ciavarella y Barber [32], identificaron un mecanismo alternativo para la formación de corrugación. Afferante y Ciavarella, defendieron la idea de que la resonancia *articulada-articulada* no era la causa aducida en trabajos precedentes como la responsable de la formación de la corrugación de longitud de onda corta. Su razonamiento se basó en que las longitudes de onda de una gran parte de la corrugación medida experimentalmente no se podían explicar mediante un mecanismo de frecuencia constante. Empleando un modelo analítico que no consideraba los soportes discretos de la vía pero que incluía deslizamiento parcial en el contacto basado en la mecánica de contacto de Hertz, observaron que la corrugación podía aparecer en dos regímenes: primero, a bajas frecuencias alrededor de 500 Hz y segundo, a frecuencias superiores a 1500 Hz. A bajas frecuencias la longitud de onda de la corrugación estaba relacionada linealmente con la velocidad del vehículo, pero en el régimen de altas frecuencias, la longitud de onda permanecía prácticamente constante. Según los autores, el crecimiento de la corrugación dependía esencialmente de la geometría y de las condiciones de carga.

Oyarzabal *et al.* en [157] realizaron un estudio paramétrico con el fin de determinar la influencia de los parámetros más importantes de la vía sobre la corrugación en carriles y poder optimizar el diseño de la misma con el objetivo de minimizar su crecimiento. El modelo de corrugación, basado en trabajos anteriores de los autores [60], consistía en un bucle realimentado entre la interacción dinámica vehículo-vía, la mecánica del contacto y el proceso de desgaste. Del estudio paramétrico se observó que los parámetros que tenían mayor influencia en el crecimiento de la

corrugación eran la distancia entre traviesas, la masa de las traviesas, las rigideces vertical y lateral de las placas de asiento y la rigidez vertical del balasto. Del estudio de optimización, se obtuvieron varias combinaciones de tres parámetros, distancia entre traviesas, masa de una traviesa y rigidez vertical de la placa de asiento, que minimizaban la función de crecimiento de la corrugación.

Croft *et al.* estudiaron el efecto de amortiguadores del carril, empleados originalmente para limitar la transmisión de ruido de la vía a los alrededores, en las fuerzas de interacción y en el crecimiento de la corrugación [40]. Se adoptó un modelo de vía y de vehículo bidimensional basado en el trabajo de Nielsen *et al.* [149, 150], un modelo de contacto no herciano y no estacionario bidimensional y un modelo de desgaste. A partir de los resultados del modelo de interacción vehículo-vía, se observó que los amortiguadores del carril reducían las fuerzas de interacción y desplazaban el espectro en frecuencia de las fuerzas hacia frecuencias menores. Mediante el modelo de corrugación se predijo que los carriles sin amortiguadores desarrollaban corrugación cuya longitud de onda era la correspondiente a la frecuencia de la resonancia *articulada-articulada*. En cambio, los amortiguadores del carril reducían el crecimiento de la corrugación y desplazaban la corrugación a longitudes de onda mayores.

Meehan *et al.* en [137] generalizaron y ajustaron los modelos de crecimiento de la corrugación presentados anteriormente por los autores [22, 44, 134, 135] a las condiciones existentes en un tramo de vía curva objeto de estudio, con la finalidad de validar los resultados teóricos obtenidos en trabajos anteriores, en los que se apuntaba que ampliando la distribución de velocidades de paso de los vehículos se podría reducir el crecimiento de la corrugación [22]. Se realizaron predicciones de las variaciones esperadas en la tasa de crecimiento de la corrugación al ampliar la distribución de velocidades de paso de los vehículos, empleando medidas previas de la rugosidad de la vía para ajustar los modelos de crecimiento de la corrugación, mediante un modelo bidimensional [22, 135] y uno tridimensional más complejo [44]. Los resultados de ambos modelos fueron muy similares y confirmaron la conveniencia de ampliar la distribución de velocidades de paso de vehículos para reducir el crecimiento de la corrugación.

En 2010, Chen *et al.* [31] investigaron el mecanismo de formación de corrugación en carriles desde la perspectiva de las vibraciones autoexcitadas inducidas por la saturación de las fuerzas y pseudodeslizamientos en el contacto rueda-carril. En el estudio, se empleó un modelo de elementos finitos formado por un eje, vía y soportes del carril constituidos por elementos viscoelásticos, en el que se asume que las fuerzas en el contacto están saturadas, lo que supone una hipótesis realista cuando el eje se encuentra inscribiendo una curva pronunciada, o arrancando o

frenando en vía recta. Los resultados numéricos indicaron que cuando el coeficiente de rozamiento era mayor que 0.21 existía una marcada propensión a producirse vibraciones autoexcitadas del sistema vehículo-vía. Esta vibración autoexcitada podría ser responsable de la corrugación y el coeficiente de rozamiento tener un efecto notable en dicha vibración y por consiguiente, en la corrugación. Del análisis de sensibilidad a determinados parámetros, se observó que el coeficiente de rozamiento dinámico, la rigidez y amortiguamiento de los apoyos de las traviesas tenían una influencia significativa en la formación de corrugación. Los autores concluyeron que disminuyendo el coeficiente de rozamiento por debajo de un determinado nivel se podía evitar el crecimiento de la corrugación.

Xie e Iwnicki [230] investigaron el efecto de la vibración torsional del eje en el crecimiento de la rugosidad del carril. Se implementó un modelo de eje montado, en el que se consideraba la flexibilidad únicamente del cuerpo, un modelo de contacto bidimensional no herciano y no estacionario y el modelo de desgaste proporcional a la energía disipada por fricción. Se observó que la corrugación no crecía según longitudes de onda entre 30 mm y 100 mm porque el desgaste máximo se localizaba cerca de las crestas de la corrugación inicial.

Belette *et al.* analizaron la importancia relativa del filtro del contacto y la dinámica estructural en el crecimiento de la corrugación [23]. Para ello, desarrollaron un modelo de contacto bidimensional basado en el modelo de Hertz y de Carter, que permitía estudiar el comportamiento no lineal del mismo y modelaron el desgaste mediante el modelo de desgaste proporcional al trabajo de fricción. Se observó, a partir de la comparación de los resultados en el dominio de la frecuencia, que el efecto del filtro del contacto sólo incrementaba el crecimiento de la corrugación cuando las amplitudes de la corrugación inicial eran del orden de 1  $\mu\text{m}$ . Este efecto amplificador disminuía hasta un nivel prácticamente insignificante y la amplitud máxima se desplazaba hacia longitudes de onda mayores después de varios pasos de rueda. En comparación con el efecto de la dinámica estructural, el efecto del filtro del contacto en el crecimiento de la corrugación era mucho menor, pero proporcionaba un límite inferior a la longitud de onda de la corrugación.

Afferrante y Ciavarella [2] emplearon un modelo lineal, en el dominio de la frecuencia, similar al desarrollado por Frederick [56] para predecir el crecimiento de la corrugación. El objetivo del estudio era analizar las condiciones y los rangos de frecuencias en los que la corrugación podía crecer en los carriles de las vías de la *British Railways* dispuestos sobre traviesas de madera o de hormigón. Concluyeron que el reemplazo de las traviesas de madera por las de hormigón en las líneas de la *British Railways* a finales de los años 60 no era la causa del crecimiento de la

corrugación que se había observado, sino que éste podía atribuirse a la presencia de soldaduras, con el empleo del carril continuo soldado, o a efectos de resonancias paramétricas.

En 2011, Wu analizó los efectos de un absorbente de vibraciones del carril en el crecimiento de la corrugación de longitud de onda corta, combinando la dinámica del absorbente, de la vía y de la rueda, con la mecánica del contacto y el desgaste [226]. Se simuló el proceso de crecimiento de la corrugación y los resultados obtenidos mostraron que la corrugación cuya longitud de onda estaba relacionada con la resonancia *articulada-articulada* se suprimía mediante el absorbente de vibraciones del carril. El uso de absorbentes podría tener dos efectos; uno a corto plazo que sería la reducción de la transmisión del ruido de rodadura y el otro, a largo plazo, que conduciría a la disminución del crecimiento de la corrugación.

Batten *et al.* desarrollaron un modelo de corrugación en el dominio de la frecuencia para vías curvas, que validaron posteriormente con medidas de longitudes de onda de la corrugación en varias líneas [20]. El modelo se empleó para predecir el efecto de varios parámetros asociados a la dinámica del carril sobre la longitud de onda dominante en la corrugación, con posición relativa a los apoyos discretos del carril. Los autores concluyeron que la receptancia vertical de la vía y la masa no suspendida del vehículo eran suficientes para predecir la frecuencia dominante de la corrugación. Según los autores, si se combinan con los datos de velocidades medidas, se puede considerar el desplazamiento de la longitud de onda y predecir la longitud de onda dominante en el crecimiento de la corrugación.

Kurzeck [113] desarrolló un modelo para predecir el crecimiento de la corrugación en vías curvas en líneas de metro con el programa informático Simpack. Concluyó que el mecanismo de fijación de la longitud de onda se podía atribuir a la coincidencia de la primera resonancia de flexión simétrica del eje delantero del bogie con la resonancia P2 de la vía, cuando el coeficiente de rozamiento en el contacto rueda-carril era superior a 0.5 y el pseudodeslizamiento lateral era elevado.

Oyarzabal *et al.* [158] analizaron y compararon el crecimiento de la corrugación de en dos vías en placa (AFTRAV y STEDEF) y en vía sobre balasto. Emplearon el modelo lineal desarrollado previamente por los autores [60, 61] para calcular tasas de crecimiento de la corrugación para los distintos tipos de vía. Concluyeron que, para las velocidades del vehículo y radios de curvas considerados, en la vía AFTRAV, la corrugación crecía más despacio que en los otros tipos estudiados y que las tasas más elevadas de corrugación se debían a la rueda interna del eje delantero, especialmente en curvas de radio reducido. Continuando con este

trabajo, Correa *et al.* [38] estudiaron la tendencia de diferentes vías de alta velocidad al desarrollo de corrugación de longitud de onda corta. Los autores analizaron cuatro tipos de vía de alta velocidad, las vías en placa RHEDA 2000, AFTRAV, STEDEF y la vía sobre balasto de alto rendimiento, considerando diferentes velocidades del vehículo y radios de la vía. Implementando las receptancias de los distintos tipos de vía y del eje flexible, los autores calcularon los valores de la función de crecimiento de la corrugación que representaron frente a la frecuencia. De este estudio, concluyeron que la vía sobre balasto es el tipo de vía menos propenso a desarrollar corrugación, seguido por la vía AFTRAV, ya que las tasas de crecimiento de la corrugación para este tipo de vías eran notablemente inferiores a las obtenidas para los otros tipos de vía.

En 2012, Torstensson *et al.* [196] estudiaron el crecimiento de la corrugación tipo *rutting* en el carril bajo en curvas de radio pequeño, mediante un modelo de interacción dinámica vehículo-vía en el dominio del tiempo. En el modelado del eje montado, consideraron la flexibilidad del cuerpo del eje y los efectos giroscópicos asociados a la rotación. En el modelo de interacción se obtuvieron las fuerzas en contacto mediante Hertz/FASTSIM, empleando un algoritmo de cálculo de la posición del área de contacto; y el desgaste se calculó en una etapa de postproceso por medio de un modelo de contacto no herciano y no estacionario basado en la Teoría Variacional de Kalker [104]. Para elevados coeficientes de rozamiento, del orden de 0.6, se detectaron dos longitudes de onda, 50 y 110 mm, en las que el crecimiento de la corrugación podía ser factible. Posteriormente, Torstensson y Schilke [197] validaron el modelo de predicción mediante medidas experimentales y concluyeron que las dos longitudes de onda para las que el desgaste era mayor, 45 y 75 mm, estaban asociadas al primer modo de flexión antisimétrico del eje, y al primer modo de flexión simétrico del eje junto con la vibración del carril sobre la rigidez de la placa de asiento en la dirección lateral, respectivamente.

### 3.5 Conclusiones

La corrugación en los carriles es un problema antiguo de la tecnología ferroviaria, sin embargo hasta los años 80 no fueron desarrollados modelos matemáticos que pudieran explicar este fenómeno. Se puede decir que las últimas tres décadas han sido especialmente productivas, a través de los trabajos de Grassie en la Universidad de Cambridge en colaboración con la *British Railways*, la Universidad Técnica de Berlín, la Universidad del País Vasco, el grupo *Charmec* de la Universidad de Chalmers, el grupo de *Huddersfield-Manchester*, y la Universidad de *Queensland*, entre otras. La bibliografía asociada al modelado del crecimiento de la corrugación, aparte de ser extensa, presenta una estructura heterogénea propia de

los temas de investigación que continúan abiertos, existiendo, más allá del protagonismo de la interacción del vehículo con la vía, pocos paralelismos entre los modelos desarrollados. Aún así, se han propuesto mecanismos de crecimiento que no han tenido seguimiento, asociados al proceso de fabricación de los carriles, a la mecánica de contacto (desacoplada de la dinámica) o a la dinámica de baja frecuencia del vehículo (frecuencia de lazo). El crecimiento de la corrugación en carriles adolece de una explicación completa y fehaciente.

En estas condiciones, es necesario basar las explicaciones en los modelos más realistas que puedan considerar los elementos necesarios para el crecimiento de la corrugación, así como aquellos factores que puedan dificultar o incluso imposibilitar el crecimiento. En este sentido, según la hipótesis más aceptada, los modelos más adecuados deberían incorporar un bucle realimentado entre la interacción dinámica vehículo-vía, la mecánica del contacto y el proceso de desgaste (u otro mecanismo de daño). Por tanto, para modelar la corrugación, se requiere modelar el comportamiento dinámico del vehículo y la vía, un modelo de contacto y un modelo de desgaste. Para el rango de medias y altas frecuencias, desde 20 Hz hasta 2500 Hz, que es el rango de frecuencias de estudio de la corrugación, el modelado del vehículo se reduce al modelado del eje ferroviario (masas no suspendidas). En dicho rango de frecuencias, la dinámica de la vía así como la flexibilidad y los efectos giroscópicos del eje ferroviario cobran importancia. Existen muy pocos modelos de corrugación en la bibliografía que consideren la flexibilidad y los efectos inerciales debidos a la rotación en los modelos de eje ferroviario.

Por otra parte, el modelado del contacto rueda-carril también ha ocupado gran parte de los esfuerzos de los investigadores. En la mayoría de casos, para resolver la interacción dinámica entre el vehículo y la vía, se han utilizado modelos simplificados, como un muelle herciano no lineal para calcular la fuerza de contacto normal y el modelo de Shen *et al.* [176] para obtener las fuerzas tangenciales. En cambio, para estimar el desgaste en una etapa posterior, se requieren modelos de contacto más sofisticados, para poder representar las distribuciones de tensiones y de velocidades de deslizamiento en el contacto, como los modelos de Hertz y FASTSIM, y modelos como CONTACT, modelo no herciano y no estacionario basado en la Teoría Variacional de Kalker. Algunos investigadores, empleando modelos de contacto no hercianos y no estacionarios para la estimación del desgaste, han concluido que la corrugación no crecería para la mayoría de longitudes de onda, mientras que con los modelos Hertz/FASTSIM, se predice crecimiento de la corrugación inicial para la mayoría de longitudes de onda. Esto puede deberse a efectos no hercianos como el desplazamiento

geométrico del área de contacto respecto de la posición de la rueda cuando ésta rueda sobre una superficie irregular.

Es importante hacer constar que los modelos de corrugación más simplificados que aciertan en correlacionar, por ejemplo, una longitud de onda de corrugación observada con una resonancia u otra frecuencia característica del sistema, pueden probar la influencia de tal frecuencia del sistema en la generación de la corrugación, pero no explican la generación de la corrugación. La corrugación implica desgaste, y el desgaste es un fenómeno intrínsecamente no lineal. Por tanto, los modelos de contacto deben ser no hercianos y no estacionarios, características que han sido demostradas como determinantes en la formación de la corrugación.

Tan importante como el modelado del sistema mecánico es el postproceso de sus resultados y el modo a través del cual se infiere la evolución del desgaste. El desgaste a una determinada longitud de onda puede producirse mayormente en los valles de la irregularidad inicial (desfase de  $180^\circ$ ), lo cual significaría el crecimiento de la corrugación; puede producirse principalmente en las crestas (en fase), y la irregularidad que genera el desgaste desaparecería; puede estar el desgaste adelantado o retrasado  $90^\circ$  con respecto a la irregularidad inicial, y ésta tenderá a trasladarse en la dirección de la vía, sin aumentar su amplitud; o puede producirse en ambos flancos de la irregularidad inicial, produciéndose un *leakage* a través de la aparición de nuevas longitudes de onda. Por ello el postproceso debe considerar el desfase entre la corrugación (o rugosidad) original y el desgaste.



# 4

## Modelos de contacto rueda-carril tridimensionales no estacionarios

### 4.1 Introducción

Kalker afirmó en [102] que los efectos transitorios en el contacto rueda-carril no son especialmente relevantes en la simulación dinámica de vehículos ferroviarios. Por ello, los modelos de contacto empleados en simulaciones de interacción dinámica vehículo-vía son en su mayoría estacionarios. Sin embargo, cuando se trata de analizar problemas ferroviarios que pueden estar estrechamente relacionados con la rápida variación en el tiempo de las magnitudes del contacto, como es el caso de la corrugación de longitud de onda corta y el ruido de rodadura, el proceso transitorio en el contacto rueda-carril puede cobrar mucha importancia, especialmente en los casos en que, como indican Knothe y Groß-Thebing [108], la relación entre la longitud de onda del defecto y la dimensión característica del área de contacto en la dirección de rodadura es inferior a 10.

Kalker fue el primer investigador que consideró el proceso no estacionario o transitorio en el contacto rueda-carril, estudiando la evolución de las tensiones tangenciales en el área de contacto de una rueda inicialmente en reposo a la que se aplica una fuerza longitudinal constante. Dicha evolución de tensiones se conoce como la transición desde la solución de Cattaneo [29] a la solución estacionaria de Carter [28]. En cambio, para relaciones entre la longitud de onda del defecto y la dimensión característica del área de contacto que sean superiores a 10, Kalker indica que no es necesario realizar un análisis no estacionario o transitorio, sino que resulta suficiente considerar las variaciones de las magnitudes en el contacto como una sucesión de estados estacionarios [104].

Por otra parte, las hipótesis sobre las que se fundamenta la teoría de Hertz, especialmente la relativa al contacto entre superficies libres de rugosidad, hace que la suposición de que el contacto entre la rueda y carril se produzca en un área

elíptica y situada en la misma vertical que el centro de la rueda se aleje de la realidad. La presencia de rugosidad o corrugación en la superficie de rodadura del carril puede afectar significativamente la forma del área de contacto y la distribución de tensión normal. Por este motivo, para analizar el crecimiento de la corrugación en los carriles es necesario considerar dichos efectos no hercianos mediante un modelo de contacto normal que no esté basado en la teoría de Hertz.

Este capítulo se inicia presentando los fundamentos teóricos del contacto rueda-carril en el apartado 4.2. En primer lugar, se explica en qué consiste resolver el problema de contacto entre la rueda y el carril y se presentan las hipótesis que se adoptan usualmente para resolver este tipo particular de contacto. A continuación, se exponen las formulaciones del problema normal y tangencial de contacto y finalmente, se presentan las ecuaciones integrales de Boussinesq-Cerruti, que permiten relacionar los desplazamientos con las tensiones.

En el apartado 4.3, se presenta el desarrollo de un modelo tridimensional de contacto tangencial que permite representar los efectos no estacionarios que tienen lugar en el contacto rueda-carril. Mediante este modelo, se estudia el efecto del proceso no estacionario de contacto en las magnitudes del contacto y en el desgaste que se estima a partir de éstas. Por tanto, dado que los esfuerzos se centran en el estudio del problema tangencial, el problema normal se resuelve mediante la teoría de Hertz.

En el apartado 4.4, se implementa la Teoría Variacional de Kalker para resolver el problema normal y tangencial de contacto, a través de los algoritmos NORM y TANG [104]. A diferencia del método original de Kalker, CONTACT, en el que el área potencial de contacto se considera rectangular y se discretiza con elementos rectangulares en los que las tensiones son constantes, en esta Tesis se discretiza el área potencial de contacto, que se considera de forma hexagonal, en elementos triangulares en los que las tensiones varían de forma lineal, de modo que se eliminan las discontinuidades en las tensiones en las fronteras de los elementos. Con ello, se pretende aumentar el orden de precisión del método original, de forma que sea posible calcular las fuerzas en el contacto empleando un número menor de elementos.

## **4.2 El contacto de rodadura rueda-carril**

Considérese una rueda de un vehículo ferroviario en contacto de rodadura con un carril, en presencia de rozamiento seco. Debido a la carga normal a la que están sometidos los dos cuerpos elásticos se establece un área de contacto, cuyo tamaño se supone pequeño en comparación con los radios de curvatura de la rueda y el

carril. Si se transmite también una fuerza tangente entre la rueda y el carril, se produce una distribución de deformaciones debida a la distribución de tensiones tangenciales y un campo de velocidades de deslizamiento relativo en el área de contacto.

Suponiendo que en el eje se aplica un par motor, en la zona de contacto el material de la rueda pasa de un estado tensional de compresión a uno de tracción, que implica la formación de áreas locales de deslizamiento entre la rueda y el carril. De este modo, aparece en el área de contacto una zona de adhesión, donde no existe deslizamiento relativo entre las partículas de los dos cuerpos y una zona de deslizamiento, en la que sí existe. Este fenómeno conocido como pseudodeslizamiento, se manifiesta a escala macroscópica como una velocidad no nula en el punto teórico de contacto, correspondiente a la condición de rodadura con deslizamiento.

Conforme aumenta la fuerza tangencial al contacto transmitida entre los dos cuerpos, crece el área de deslizamiento dentro de la zona de contacto, mayor es la deformación producida así como la velocidad aparente del punto de contacto. La máxima fuerza tangencial al contacto que se puede transmitir según la teoría de Coulomb es  $\mu F_z$ , siendo  $\mu$  el coeficiente de rozamiento entre las superficies y  $F_z$  la fuerza normal al contacto. Cuando se produce esta situación, toda el área de contacto se ha transformado en zona de deslizamiento.

En los desarrollos que se realizan en este capítulo se adopta un sistema de referencia inercial  $xyz$  que se desplaza a la velocidad  $V$  del vehículo, situado en el punto teórico de contacto, en el que el eje  $x$  (eje 1) tiene la misma dirección y sentido que el movimiento de avance de la rueda, el eje  $y$  (eje 2) es transversal a la vía y el eje  $z$  (eje 3) es normal a la superficie de contacto, como se muestra en la Figura 4.1.

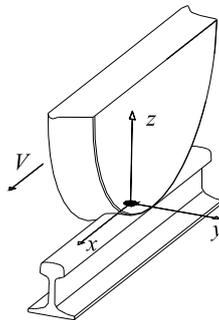


Figura 4.1. Sistema de referencia  $xyz$  (123).

Resolver el problema de contacto entre la rueda y el carril supone determinar el tamaño y forma del área de contacto, las distribuciones de tensiones normales y tangenciales, las distribuciones de desplazamientos y velocidades de deslizamiento y las fuerzas y momentos transmitidos a través del contacto. Previamente, es necesario conocer la geometría de los perfiles de la rueda y el carril en las proximidades del contacto, la interpenetración o aproximación entre ellos, las velocidades relativas entre rueda y carril en el contacto, las propiedades mecánicas de los materiales y el estado tribológico de las superficies en contacto.

A veces, algunos datos de entrada y resultados anteriores se pueden intercambiar. Por ejemplo, en vez de prescribir la interpenetración, se puede prescribir la fuerza normal y obtener la interpenetración como resultado; o se pueden prescribir las fuerzas tangenciales en lugar de las velocidades relativas y obtener éstas como resultado. El problema en el que se prescriben las fuerzas y se calcula el movimiento se conoce en Mecánica como problema dinámico directo; en el caso contrario, en el que se prescribe el movimiento y se determinan las fuerzas, se denomina problema dinámico inverso. En los modelos de contacto que se implementan en herramientas de simulación dinámica de vehículos ferroviarios se suelen prescribir la interpenetración y las velocidades relativas para obtener las fuerzas y momentos en el contacto, por lo que resolver el problema inverso es más usual que el problema directo.

Como paso inicial para poder resolver el problema de contacto se requiere plantear una serie de relaciones entre los desplazamientos, las tensiones y las velocidades de deslizamiento, a través de las ecuaciones de la elasticidad y las restricciones cinemáticas que se deben cumplir en el contacto.

En el planteamiento que se desarrolla en este apartado se supone que el tipo de contacto es no conforme. El contacto se considera conforme cuando el tamaño del área de contacto es del mismo orden de magnitud que los radios de curvatura de los cuerpos en contacto. En cambio, si el tamaño del área de contacto es mucho más pequeño que las dimensiones características de los cuerpos en contacto, éstos se pueden considerar como semiespacios infinitos al analizar las tensiones y deformaciones. Esta hipótesis es comúnmente aceptada en el modelado del contacto rueda-carril, y proporciona resultados precisos cuando los ejes ferroviarios circulan centrados en la vía. Cuando el contacto se produce en la pestaña o en la garganta del perfil de la rueda (lo cual se produce frecuentemente cuando el vehículo circula por una curva de radio pequeño), el contacto es conforme.

Si se cumplen las hipótesis de cuasiidentidad elástica de los sólidos en contacto, es decir, los materiales de los sólidos tienen propiedades elásticas similares (módulo de Young y coeficiente de Poisson) y ambos sólidos pueden considerarse como semiespacios infinitos desde el punto de vista de su comportamiento elástico, la distribución de tensiones normales en el contacto no depende de la distribución de tensiones tangenciales. De este modo, el problema normal de contacto se puede resolver previamente al problema tangencial, puesto que los dos problemas de contacto están desacoplados.

La metodología que se expone aquí, basada en el método variacional de Kalker, se hace uso de un modelo cinemático que se combina con un modelo elástico. En el planteamiento del problema cinemático se supone que las únicas deformaciones que aparecen en los cuerpos en contacto por rodadura son las producidas por las tensiones en el contacto y se concentran en las proximidades del mismo. El problema se resuelve a través de una doble discretización, una temporal y otra espacial, consistiendo esta última en una partición del área de contacto en elementos.

#### 4.2.1 Formulación del problema normal

La distancia indeformada entre los perfiles de los cuerpos se puede obtener a partir de la Figura 4.2, en función de la distancia deformada, los desplazamientos de ambos cuerpos en la dirección normal al contacto, debidos a la deformación elástica, y la aproximación o interpenetración entre los cuerpos si éstos se consideran como sólidos rígidos. Según la notación empleada en dicha figura, los superíndices (1) y (2) se asocian respectivamente a los sólidos 1 (rueda) y 2 (carril),  $\mathbf{x}$  es el vector posición de una partícula en la configuración no deformada,  $\mathbf{u}$  es el desplazamiento asociado a la deformación,  $u_n$  es la componente normal al contacto de  $\mathbf{u}$ ,  $h$  es la distancia entre las superficies indeformadas,  $\delta$  es la interpenetración o aproximación entre cuerpos y  $e$  es la distancia entre las superficies deformadas.

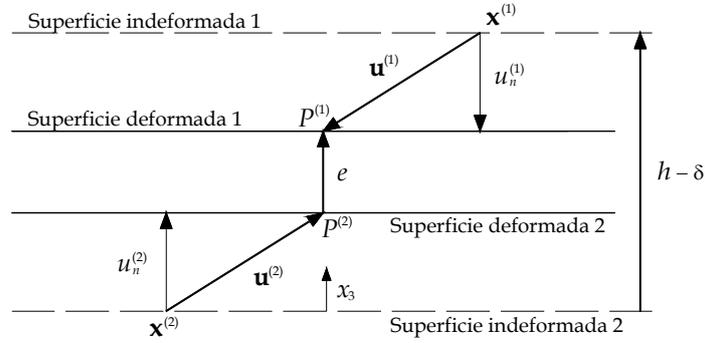


Figura 4.2. Definición de las distancias indeformada y deformada.

$$h = e + u_n^{(1)} + u_n^{(2)} + \delta \quad (4.1)$$

Si se tiene en cuenta el sentido positivo del eje  $z$  del sistema de referencia móvil situado en el contacto entre los cuerpos (ver Figura 4.1), los desplazamientos en la dirección normal a cada superficie se pueden expresar de la forma siguiente

$$\begin{aligned} u_n^{(1)} &= -u_3^{(1)} \\ u_n^{(2)} &= u_3^{(2)} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Se define la diferencia de desplazamientos entre los dos cuerpos según la dirección normal

$$u_3 = u_3^{(1)} - u_3^{(2)} \quad (4.3)$$

Sustituyendo las relaciones (4.2) y (4.3) en (4.1), la distancia indeformada queda en función de la diferencia de desplazamientos entre los cuerpos

$$h = e - u_3^{(1)} + u_3^{(2)} + \delta = e - u_3 + \delta \quad (4.4)$$

La cinemática del problema normal de contacto se formula a partir de la expresión de la distancia deformada, que se despeja de la expresión (4.4)

$$e = u_3 + h - \delta \quad (4.5)$$

Según el signo que adopta la distancia deformada  $e$  entre las partículas  $P^{(1)}$  y  $P^{(2)}$ , de la rueda y el carril, respectivamente, se pueden distinguir tres casos:

- Si la distancia deformada es positiva, las partículas  $P^{(1)}$  y  $P^{(2)}$  no están en contacto y la tensión normal es nula.

- Si la distancia deformada es nula, las partículas  $P^{(1)}$  y  $P^{(2)}$  están en contacto y la tensión normal es siempre positiva o nula.
- Si la distancia deformada es negativa, significa que habría interpenetración entre los cuerpos, lo cual es físicamente imposible.

Sintetizando, en el problema de contacto normal se definen las siguientes condiciones para un área potencial de contacto ( $A_c$ ), que tiene que cumplir el requisito de comprender el área real de contacto ( $C$ ), con lo que inevitablemente contendrá también una zona en la que no se produce contacto ( $E$ )

$$\text{En } C: e = 0 \text{ y } p_3 > 0 \quad (4.6)$$

$$\text{En } E: e > 0 \text{ y } p_3 = 0 \quad (4.7)$$

$$\text{Con } A_c = C \cup E \text{ y } C \cap E = \emptyset \quad (4.8)$$

#### 4.2.2 Formulación del problema tangencial

Al tratarse el problema de contacto rueda-carril de un problema tridimensional, las fuerzas tangenciales en el contacto se transmiten tanto según la dirección longitudinal de rodadura como en la dirección transversal a la misma. Debido a estas fuerzas, se producen deformaciones significativas en torno al área de contacto que son responsables de que el punto de contacto rueda-carril tenga una velocidad no nula en su configuración no deformada (a través de las formulaciones para el sólido rígido). En este sentido, las velocidades de pseudodeslizamiento serán las correspondientes al punto de contacto que se calculan para la configuración no deformada de la rueda, y el objetivo de las Teorías de Contacto será relacionarlas con las fuerzas transmitidas. Con esto, en la zona de contacto existirá una velocidad de pseudodeslizamiento según la dirección  $x$  y otra según la dirección  $y$ . Además, teniendo en cuenta que la normal en la zona de contacto entre la rueda y el carril no es perpendicular al vector velocidad angular del eje  $\omega$ , aparecerá una componente de la velocidad angular normal al área de contacto. Esta velocidad, denominada velocidad angular de *spin*  $\omega_3$ , se manifiesta como un giro relativo entre la rueda y el carril, cuyo eje de rotación es perpendicular al plano que contiene el área de contacto entre ambos cuerpos.

Habitualmente, se prefiere expresar las velocidades de pseudodeslizamiento reducidas respecto a la velocidad de avance del vehículo,  $V$

$$\xi = \frac{v_1}{V}; \quad \eta = \frac{v_2}{V}; \quad \phi = \frac{\omega_3}{V} \quad (4.9)$$

siendo  $v_1$  y  $v_2$  las velocidades de pseudodeslizamiento en las direcciones  $x$  e  $y$ , respectivamente, y  $\omega_3$ , la velocidad angular de *spin*. Con lo que  $\xi$ ,  $\eta$  y  $\phi$  son las velocidades de pseudodeslizamiento reducidas longitudinal, lateral y de *spin*, respectivamente. Por motivos de simplicidad, también serán referidas en esta Tesis como pseudodeslizamientos.

Se considera el problema en dos instantes de tiempo consecutivos separados por un incremento de tiempo  $\Delta t$ . En lo sucesivo, el superíndice (1) representa la rueda y (2) el carril. La Figura 4.3 esquematiza la configuración cinemática para dos instantes consecutivos.

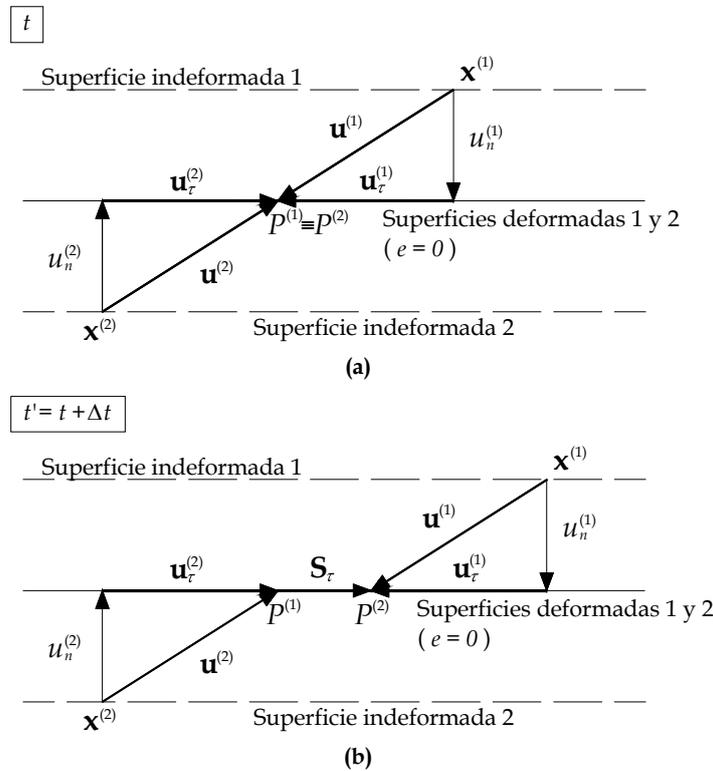


Figura 4.3. Definición del deslizamiento relativo.

Si en el instante de tiempo  $t$  una partícula de la rueda  $P^{(1)}$  y una partícula del carril  $P^{(2)}$  están en contacto (ver Figura 4.3(a)), se cumple que

$$\mathbf{x}^{(1)}(t) + \mathbf{u}_r^{(1)}(t) = \mathbf{x}^{(2)}(t) + \mathbf{u}_r^{(2)}(t), \quad (4.10)$$

donde  $\mathbf{x}^{(1)}$  y  $\mathbf{x}^{(2)}$  son las coordenadas de dos puntos cualesquiera de las superficies indeformadas de la rueda y del carril, respectivamente, y  $\mathbf{u}_r^{(1)}$  y  $\mathbf{u}_r^{(2)}$  son los

vectores de desplazamientos tangenciales ( $\mathbf{u}_\tau^{(a)} = \{u_1^{(a)}, u_2^{(a)}\}$ , con  $a = 1, 2$ ), medidos respecto al estado indeformado de la rueda y del carril, respectivamente.

En un instante posterior  $t' = t + \Delta t$ , si existe deslizamiento entre las dos partículas, éstas ya no estarán en contacto (ver Figura 4.3(b))

$$\mathbf{x}^{(1)}(t') + \mathbf{u}_\tau^{(1)}(t') = \mathbf{x}^{(2)}(t') + \mathbf{u}_\tau^{(2)}(t') + \mathbf{S}_\tau(t'), \quad (4.11)$$

siendo  $\mathbf{S}_\tau$  el vector deslizamiento relativo entre ambas partículas. Restando las ecuaciones (4.11) y (4.10) y dividiendo por el incremento de tiempo entre los dos instantes considerados,  $\Delta t$ , y haciéndolo tender a cero, resulta

$$\mathbf{s} = \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) - \dot{\mathbf{x}}^{(2)}(t) + \dot{\mathbf{u}}_\tau^{(1)}(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^{(2)}(t), \quad (4.12)$$

en la que  $\mathbf{s}$  es la velocidad de deslizamiento relativo entre las dos partículas. La velocidad relativa entre las partículas  $P^{(1)}$  y  $P^{(2)}$ , considerando los cuerpos en contacto como sólidos rígidos, se define como el deslizamiento rígido local

$$\mathbf{w} = \dot{\mathbf{x}}^{(1)} - \dot{\mathbf{x}}^{(2)} = V(\xi - y\phi, \eta + x\phi, 0)^T, \quad (4.13)$$

donde  $V$  es la velocidad nominal del centro de la rueda y  $(x, y)$  son las coordenadas del punto  $P$  en el sistema de referencia  $xyz$ .

Si se adopta la hipótesis de cuasiidentidad elástica de los cuerpos en contacto, la distribución de tensiones y la de desplazamientos debidos a las deformaciones serán simétricas en ambos sólidos. De este modo, las deformaciones en la rueda serán iguales, pero de signo contrario a las deformaciones del carril. Lo mismo sucederá con los desplazamientos debidos a las deformaciones, por lo que se define el vector de diferencias de desplazamientos tangenciales entre los cuerpos en contacto como

$$\mathbf{u}_\tau = \mathbf{u}_\tau^{(1)} - \mathbf{u}_\tau^{(2)}. \quad (4.14)$$

Desarrollando la derivada material del vector de diferencias de desplazamientos tangenciales, se llega a

$$\dot{\mathbf{u}}_\tau = \frac{D\mathbf{u}_\tau}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t}. \quad (4.15)$$

Como se considera que el movimiento principal del vehículo se produce en la dirección longitudinal  $x$  y las partículas de la rueda y del carril entran en el contacto a la misma velocidad del vehículo, pero en sentido contrario, se tiene que

$$\frac{\partial x}{\partial t} = -V \quad ; \quad \frac{\partial y}{\partial t} = 0. \quad (4.16)$$

Con lo que finalmente, (4.15) se puede expresar del siguiente modo

$$\dot{\mathbf{u}}_\tau = \frac{D\mathbf{u}_\tau}{Dt} = -V \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t}. \quad (4.17)$$

Sustituyendo las expresiones (4.13) y (4.17) en (4.12), resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{s} &= \dot{\mathbf{x}}^{(1)}(t) - \dot{\mathbf{x}}^{(2)}(t) + \dot{\mathbf{u}}_\tau^{(1)}(t) - \dot{\mathbf{u}}_\tau^{(2)}(t) = \mathbf{w} + \dot{\mathbf{u}}_\tau = \\ &= V(\xi - y\phi, \eta + x\phi) - V \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{u}_\tau}{\partial t} \end{aligned} \quad (4.18)$$

La expresión anterior relaciona los deslizamientos y los desplazamientos asociados a las deformaciones, con las velocidades de pseudodeslizamiento, caracterizando la cinemática de los puntos en contacto. Permite determinar las velocidades de deslizamiento que se producen en un problema de rodadura no estacionario, como es el caso que nos ocupa en este capítulo. Si el problema de rodadura se considera estacionario, la derivada del vector de diferencias de desplazamientos tangenciales respecto al tiempo será nula.

Por otra parte, en las *Teorías no Lineales* de contacto, las tensiones tangenciales que se transmiten en el contacto no pueden crecer de forma indefinida como sucede en la *Teoría Lineal*, sino que mediante una ley de fricción se impone un valor máximo que no pueden sobrepasar. Admitiendo la ley de Coulomb en el área de contacto, con un coeficiente de rozamiento  $\mu$  constante, la tensión tangencial que se puede transmitir en el contacto está acotada por el valor límite definido como el producto del coeficiente de rozamiento por la tensión normal

$$|\mathbf{p}_\tau| \leq \mu p_3, \text{ siendo } |\mathbf{p}_\tau| = \sqrt{p_1^2 + p_2^2}. \quad (4.19)$$

Una partícula en el contacto (C) puede encontrarse en una de las dos situaciones siguientes, según si la tensión tangencial resultante en el punto en el que está situada es inferior a su valor límite o si por el contrario, toma el valor límite (satura)

$$\text{Si } |\mathbf{p}_\tau| < \mu p_3 \Rightarrow |\mathbf{s}| = 0 \quad \text{Zona de adhesión (H)} \quad (4.20)$$

$$\text{Si } |\mathbf{p}_\tau| = \mu p_3 \Rightarrow |\mathbf{s}| \neq 0 \quad \text{Zona de deslizamiento (S)} \quad (4.21)$$

Cuando la tensión tangencial satura, se produce deslizamiento según la misma dirección que la resultante de la tensión tangencial, pero en sentido opuesto

$$\mathbf{p}_\tau = -\mu p_3 \frac{\mathbf{s}}{|\mathbf{s}|} . \quad (4.22)$$

La distribución de tensiones que aparece en el área de contacto se describe mediante el vector  $\mathbf{p}(\mathbf{x}, t) = \{p_1, p_2, p_3\}$ , siendo  $\mathbf{x} = \{x, y\}$  el vector de coordenadas de un punto perteneciente al área de contacto. Las componentes  $p_1$  y  $p_2$  representan las distribuciones de tensiones tangenciales, en la dirección longitudinal y transversal, respectivamente. La componente  $p_3$  define la distribución normal de tensiones en el área de contacto.

Las fuerzas resultantes  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$  y el momento de *spin*  $M_{sp}$  se obtienen por medio de las integrales de las distribuciones de tensiones en el área de contacto  $A_c$

$$F_i = \iint_{A_c} p_i dx dy \quad \text{con } i = 1, 2, 3 , \quad (4.23)$$

$$M_{sp} = \iint_{A_c} (xp_2 - yp_1) dx dy . \quad (4.24)$$

### 4.2.3 Relaciones constitutivas: ecuaciones de Boussinesq-Cerruti

La aplicación de la teoría de la elasticidad al problema de rodadura permite determinar la relación entre la distribución de tensiones y la de desplazamientos (o deformaciones). El objetivo principal de los modelos elásticos que relacionan tensiones y desplazamientos asociados a las deformaciones en el área de contacto es el de obtener los coeficientes de influencia elástica  $A_{ij}(x, y, x', y')$ . Cada coeficiente de influencia elástica  $A_{ij}$  representa el desplazamiento  $u_i(x, y)$  en el punto de coordenadas  $(x, y)$  según la dirección  $i$ , cuando actúa una carga unitaria  $p_j(x', y')$  en el punto  $(x', y')$  según la dirección  $j$ . De este modo

$$u_i(x, y) = \sum_j \int_{\partial V} A_{ij}(x, y, x', y') p_j(x', y') dS(x', y') , \quad \text{con } i, j = 1, 2, 3 \text{ y } j = 1, 2, 3 . \quad (4.25)$$

Los coeficientes de influencia elástica  $A_{ij}$  pueden calcularse de tres formas: mediante formulaciones analíticas sencillas aplicando la teoría de la capa fina, empleando métodos semianalíticos suponiendo los cuerpos en contacto como semiespacios infinitos, y a través de técnicas numéricas como el método de los elementos finitos (FEM) o el método de los elementos de contorno (BEM).

La forma más usual de calcular los coeficientes de influencia elástica según una *Teoría Exacta* es suponiendo los sólidos en contacto como semiespacios infinitos,

siempre que sea válida la hipótesis de contacto no conforme. Además, sólo se considera el campo de tensiones en torno al área de contacto, suponiendo despreciable el campo de tensiones en puntos de los sólidos alejados del contacto.

El método clásico para determinar las distribuciones de desplazamientos en un semiespacio infinito producidas por distribuciones de tensiones aplicadas en la superficie según una *Teoría Exacta* se debe a Boussinesq y Cerruti. Estos autores obtuvieron de forma independiente en [25, 30] soluciones para una carga normal y tangencial puntual aplicada sobre un semiespacio infinito, empleando funciones potencial (ver Anexo 1). Love [122] desarrolló, a partir de los estudios de Boussinesq y Cerruti, el método para cargas normales y tangenciales distribuidas sobre una superficie  $S$  y obtuvo las expresiones de los desplazamientos elásticos en cualquier punto del sólido en función de las derivadas de un conjunto de funciones potencial. Johnson [97] expone el método de una forma más simple: las distribuciones de tensiones y desplazamientos debidos a cargas distribuidas se determinan por superposición de las tensiones y desplazamientos producidos por fuerzas normales y tangenciales puntuales, como se explica en el Anexo 1. De este modo, las expresiones de los desplazamientos vienen dadas en función de las integrales de las distribuciones de tensiones sobre el área  $S$ .

Considerando de nuevo los dos cuerpos en contacto, se tiene que los desplazamientos en la superficie ( $z=0$ ) de los cuerpos 1 (rueda) y 2 (carril) ocasionados por una distribución de tensión normal cumplen

$$u_1^{(1)} = u_1^{(2)}, \quad (4.26)$$

$$u_2^{(1)} = u_2^{(2)}, \quad (4.27)$$

$$u_3^{(1)} = -u_3^{(2)}. \quad (4.28)$$

Las propiedades mecánicas de los materiales de ambos cuerpos se combinan del siguiente modo

$$\frac{1}{G} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{G^{(1)}} + \frac{1}{G^{(2)}} \right\}, \quad (4.29)$$

$$\frac{\nu}{G} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\nu^{(1)}}{G^{(1)}} + \frac{\nu^{(2)}}{G^{(2)}} \right\}, \quad (4.30)$$

$$K = \frac{G}{4} \left\{ \frac{1-2\nu^{(1)}}{G^{(1)}} - \frac{1-2\nu^{(2)}}{G^{(2)}} \right\}, \quad (4.31)$$

donde  $\nu$  es el coeficiente de Poisson,  $G$  es el módulo de elasticidad transversal y  $K$  es el coeficiente que relaciona el problema normal y tangencial de contacto.

Con esto, las diferencias de desplazamientos entre los dos cuerpos debidos a la distribución de tensión normal  $p_3(x', y')$  se pueden expresar, considerando las expresiones (A1.55) a (A1.57) del Anexo 1, como sigue

$$\begin{aligned} u_1 = u_1^{(1)} - u_1^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1-2\nu^{(1)}}{G^{(1)}} - \frac{1-2\nu^{(2)}}{G^{(2)}} \right) \iint_S \frac{p_3(x', y')(x-x')}{\rho^2} dx' dy' = \\ &= -\frac{K}{\pi G} \iint_S \frac{p_3(x', y')(x-x')}{\rho^2} dx' dy' \end{aligned} \quad (4.32)$$

$$\begin{aligned} u_2 = u_2^{(1)} - u_2^{(2)} &= -\frac{1}{4\pi} \left( \frac{1-2\nu^{(1)}}{G^{(1)}} - \frac{1-2\nu^{(2)}}{G^{(2)}} \right) \iint_S \frac{p_3(x', y')(y-y')}{\rho^2} dx' dy' = \\ &= -\frac{K}{\pi G} \iint_S \frac{p_3(x', y')(y-y')}{\rho^2} dx' dy' \end{aligned} \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} u_3 = u_3^{(1)} - u_3^{(2)} &= \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1-\nu^{(1)}}{G^{(1)}} + \frac{1-\nu^{(2)}}{G^{(2)}} \right) \iint_S \frac{p_3(x', y')}{\rho} dx' dy' = \\ &= \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_3(x', y')}{\rho} dx' dy' \end{aligned} \quad (4.34)$$

Si se aplica una distribución de tensiones según la dirección  $x$ ,  $p_1(x', y')$ , los desplazamientos de los dos cuerpos tendrán signos contrarios

$$u_1^{(1)} = -u_1^{(2)}, \quad (4.35)$$

$$u_2^{(1)} = -u_2^{(2)}, \quad (4.36)$$

$$u_3^{(1)} = u_3^{(2)}. \quad (4.37)$$

Considerando estas relaciones, las diferencias de desplazamientos entre los dos cuerpos, teniendo en cuenta las ecuaciones (A1.61) a (A1.63) del Anexo 1, resultan

$$u_1 = u_1^{(1)} - u_1^{(2)} = \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_1(x', y')}{\rho} dx' dy' + \frac{\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_1(x', y')(x-x')^2}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.38)$$

$$u_2 = u_2^{(1)} - u_2^{(2)} = \frac{\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_1(x', y')(x-x')(y-y')}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.39)$$

$$u_3 = u_3^{(1)} - u_3^{(2)} = \frac{K}{\pi G} \iint_S \frac{p_1(x', y')(x - x')}{\rho^2} dx' dy' \quad (4.40)$$

Las diferencias de desplazamientos producidas por una distribución de tensión según el eje  $y$  se pueden obtener a partir de las expresiones (4.38)-(4.40), intercambiando el subíndice 1 por el 2, y las variables  $x$  y  $x'$  por  $y$  e  $y'$ .

Cuando existe simetría elástica, los dos cuerpos en contacto tienen las mismas propiedades elásticas,  $G = G^{(1)} = G^{(2)}$  y  $\nu = \nu^{(1)} = \nu^{(2)}$ . En este caso, el coeficiente  $K$ , que acopla el problema normal y tangencial, se hace nulo, con lo que se puede resolver el problema normal de forma independiente del tangencial (cuasiidentidad elástica).

De este modo, para el contacto rueda-carril, en el que se asume simetría elástica y actúa tanto una distribución de tensión normal como distribuciones de tensiones tangenciales, las diferencias de desplazamientos se calculan combinando las expresiones (4.32)-(4.34) y (4.38)-(4.40)

$$u_1 = \frac{1}{\pi G} \iint_S \left( \frac{1-\nu}{\rho} + \frac{\nu(x-x')^2}{\rho^3} \right) p_1(x', y') dx' dy' + \frac{\nu}{\pi G} \iint_S \frac{(x-x')(y-y')}{\rho^3} p_2(x', y') dx' dy' \quad (4.41)$$

$$u_2 = \frac{\nu}{\pi G} \iint_S \frac{(x-x')(y-y')}{\rho^3} p_1(x', y') dx' dy' + \frac{1}{\pi G} \iint_S \left( \frac{1-\nu}{\rho} + \frac{\nu(y-y')^2}{\rho^3} \right) p_2(x', y') dx' dy' \quad (4.42)$$

$$u_3 = \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_3(x', y')}{\rho} dx' dy' \quad (4.43)$$

Por tanto, si las distribuciones de tensiones dentro del área  $S$  se pueden expresar de forma explícita, los desplazamientos en cualquier punto del sólido se pueden determinar evaluando las integrales de las distribuciones de tensiones sobre la superficie  $S$ . Sin embargo, dichas integrales sólo son fáciles de evaluar para distribuciones de tensiones simples, aplicadas sobre superficies de geometría sencilla. Han sido varios los investigadores que han tratado de resolver esta problemática. Gran parte de sus trabajos se centran en encontrar soluciones para distribuciones de tensiones simples aplicadas sobre dominios de geometría sencilla, a partir de las cuales se puedan obtener soluciones para distribuciones de

tensiones generales sobre dominios de geometría más compleja, aplicando el principio de superposición.

En este sentido, Love [122] determinó la expresión para el cálculo del desplazamiento normal debido a una presión normal constante aplicada sobre una superficie rectangular. Dydo y Busby [45, 46] desarrollaron las expresiones de las funciones potencial para distribuciones de tensiones constante, lineal y bilineal evaluadas en un área de contacto rectangular. Svec y Gladwell [186] obtuvieron una solución explícita para el desplazamiento normal asociado a una distribución de tensión normal de tipo polinómico actuante sobre una región triangular. Por otra parte, Kalker y van Randen [100] calcularon los coeficientes de influencia elástica para obtener la deflexión normal producida por una distribución lineal de tensión normal aplicada sobre un elemento triangular. Johnson y Bental (como se expone en [97]) determinaron el desplazamiento normal de una superficie por la acción de una distribución de carga normal piramidal sobre una base hexagonal formada por seis triángulos equiláteros. Li y Berger [116] proporcionaron soluciones de las ecuaciones integrales de Boussinesq-Cerruti para distribuciones de carga normal y tangencial constantes, lineales y bilineales actuantes sobre un área triangular. En un trabajo posterior [117], Li y Berger presentaron un método semianalítico para problemas de contacto normal con fricción, en los que empleaban las soluciones analíticas a las integrales de Boussinesq-Cerruti y elementos de carga piramidales actuantes sobre una base hexagonal formada por seis triángulos equiláteros.

### 4.3 Modelo de contacto tangencial tridimensional no estacionario

El modelo de contacto tangencial que se describe en este apartado ha sido desarrollado en el CIIM y publicado en la referencia [15]. Este modelo de contacto se utiliza en el Capítulo 5 con la finalidad de estudiar la influencia del proceso no estacionario que tiene lugar en el contacto rueda-carril en la estimación del desgaste. En primer lugar, se describe la formulación matemática del modelo, a través del algoritmo numérico, el modelo cinemático y elástico y el método de resolución del sistema de ecuaciones resultante. Posteriormente, se analiza el proceso no estacionario en el contacto rueda-carril, ocasionado por variaciones de alta frecuencia en las magnitudes del contacto.

### 4.3.1 Algoritmo numérico

El método de cálculo propuesto emplea una doble discretización del problema, una en el dominio espacial y otra en el temporal. A partir de la solución del problema normal de contacto mediante la teoría de Hertz, se conocen las dimensiones de la elipse de contacto  $a$ , semieje según la dirección longitudinal o de rodadura  $x$ ; y  $b$ , semieje según la dirección transversal  $y$ . La discretización espacial se basa en la división del área de contacto en elementos rectangulares de acuerdo con la discretización de Paul y Hashemi [161], como se muestra en la Figura 4.4. De este modo, la elipse de contacto se divide en  $n_y$  filas de ancho constante en la dirección transversal  $y$ , a su vez, cada una de ellas se divide en  $n_x$  elementos, de longitud dependiente de la coordenada  $y$ . Si las coordenadas del centro de un elemento  $I$  son  $(x_I, y_I)$ , el ancho  $\Delta y_I$  y la longitud  $\Delta x_I$  de cada elemento se obtienen del siguiente modo

$$\Delta y_I = \frac{2b}{n_y}, \quad (4.44)$$

$$\Delta x_I = \frac{2a}{n_x} \sqrt{1 - \left(\frac{y_I}{b}\right)^2}. \quad (4.45)$$

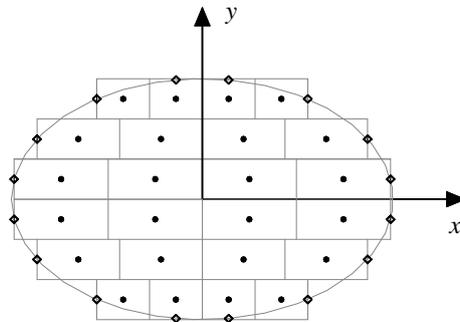


Figura 4.4. Discretización de Paul y Hashemi [161] de la elipse de contacto.

Se asume que la tensión es constante en cada elemento e igual al valor calculado en el centro. El valor de la distribución de tensión normal en cada elemento se calcula mediante

$$p_{I3} = \frac{3F_3}{2\pi ab} \sqrt{1 - \left(\frac{x_I}{a}\right)^2 - \left(\frac{y_I}{b}\right)^2}. \quad (4.46)$$

Los parámetros del contacto se calculan en los  $N$  nodos interiores (o centros de los elementos) de la malla de elementos rectangulares resultante de dicha discretización. Dentro de cada elemento, el valor de cada parámetro es aproximado según una distribución constante. De forma adicional, se adopta un conjunto de nodos exteriores, sobre la elipse, que resultan de la intersección de cada fila con la misma, en los que los parámetros del contacto se asumen de valor nulo (ver Figura 4.4).

### 4.3.2 Modelo cinemático

La ecuación que relaciona la velocidad de deslizamiento relativo entre dos partículas en contacto de la rueda y del carril  $\mathbf{s}$ , con la velocidad de deslizamiento rígido  $\mathbf{w}$  y la diferencia de desplazamientos asociados a las deformaciones elásticas  $\mathbf{u}$  resulta

$$\mathbf{s} = V \begin{Bmatrix} \xi - y\phi \\ \eta + x\phi \end{Bmatrix} + \frac{D\mathbf{u}}{Dt}, \quad (4.47)$$

donde  $\frac{D\mathbf{u}}{Dt}$  es la derivada material de las diferencias de desplazamientos.

Si las coordenadas de un nodo cualquiera  $I$  son  $(x_I, y_I)$ , la ecuación (4.47) correspondiente a dicho nodo es

$$\begin{Bmatrix} s_{I1} \\ s_{I2} \end{Bmatrix} = V \begin{Bmatrix} \xi - y_I\phi \\ \eta + x_I\phi \end{Bmatrix} + \frac{D\mathbf{u}_I}{Dt}. \quad (4.48)$$

La discretización temporal establece una aproximación a la derivada de  $\mathbf{u}_I$  empleando diferencias finitas

$$\frac{D\mathbf{u}_I}{Dt} \approx \frac{\mathbf{u}_I - \mathbf{u}_{I_0}}{\Delta t}, \quad (4.49)$$

donde  $\mathbf{u}_{I_0}$  representa la diferencia de desplazamientos asociados a las deformaciones en el nodo  $I$ , en la discretización realizada en el instante actual  $t$ , debido a la acción de la distribución de tensiones correspondiente el instante previo  $t - \Delta t$ , aplicada en la discretización asociada a dicho instante temporal.

### 4.3.3 Modelo elástico

En cada elemento se aplican tensiones constantes, que en el nodo  $J$  presentan los siguientes valores:  $p_{J3}$  cuando actúa una carga normal y  $p_{J1}$  y  $p_{J2}$  cuando lo hace

una carga tangencial longitudinal y transversal, respectivamente. Estas variables se refieren a las magnitudes aplicadas desde el carril a la rueda. Los valores resultantes de la integración de las distribuciones de tensiones en el área de contacto son las fuerzas  $F_1$ ,  $F_2$  y  $F_3$ , además del momento de *spin*  $M_3$ , cuya dirección es normal al plano de contacto. Estas acciones se obtienen como

$$F_i = \sum_{l=1}^N p_{il} \Delta x_l \Delta y_l, \text{ con } i = 1, 2, 3 \quad (4.50)$$

$$M_3 = \sum_{l=1}^N (x_l p_{l2} - y_l p_{l1}) \Delta x_l \Delta y_l. \quad (4.51)$$

Por la propiedad de cuasiidentidad elástica, el problema tangencial de contacto rueda-carril está desacoplado del normal, con lo que las diferencias de desplazamientos asociados a las deformaciones elásticas en la dirección  $x$  e  $y$ ,  $u_1$  y  $u_2$ , no se ven influenciadas por la tensión normal  $p_3$ . Con esto, la relación entre tensiones y diferencias de desplazamientos se puede expresar del siguiente modo

$$u_{l\tau} = \sum_{\kappa=1}^2 \sum_{j=1}^N A_{l\tau j\kappa} p_{j\kappa}, \quad \tau = 1, 2, \quad (4.52)$$

donde el coeficiente de influencia elástica  $A_{l\tau j\kappa}$  representa la diferencia de desplazamientos según la dirección  $\tau$  en el nodo  $l$ , cuando se aplica al nodo  $j$  una tensión unitaria constante según la dirección  $\kappa$ . Las expresiones para calcular los coeficientes de influencia elástica en elementos rectangulares sobre los que actúan cargas constantes se recogen en el Anexo 2.

#### 4.3.4 Método de resolución del problema tangencial de contacto

Para la resolución del problema de contacto tangencial se emplea una formulación en velocidades. Sustituyendo las relaciones (4.49) y (4.52) en (4.48), se obtiene el sistema

$$\begin{Bmatrix} s_{11} \\ s_{12} \end{Bmatrix} = V \begin{Bmatrix} \xi - y_l \phi \\ \eta + x_l \phi \end{Bmatrix} + \frac{1}{\Delta t} \sum_{\kappa=1}^2 \sum_{j=1}^N \begin{Bmatrix} A_{11j\kappa} p_{j\kappa} \\ A_{12j\kappa} p_{j\kappa} \end{Bmatrix} - \frac{\mathbf{u}_{l0}}{\Delta t}. \quad (4.53)$$

El problema se resuelve, en este caso, empleando como datos de entrada las fuerzas resultantes (problema directo), mediante el sistema formado por (4.50), (4.51) y (4.53). Para cada nodo  $l$  se determina el valor de la ecuación (4.53) después de conocer si dicho nodo está en adhesión o en deslizamiento. En los nodos en los que existe adhesión, el valor de  $s_l$  es cero y se desconoce el valor de la tensión

tangencial. Asumiendo la ley de Coulomb y la existencia de un coeficiente de fricción entre las superficies  $\mu$ , en los elementos en los que hay deslizamiento ( $\mathbf{s}_I \neq 0$ ) el valor de la tensión tangencial puede calcularse como

$$\begin{Bmatrix} p_{I1} \\ p_{I2} \end{Bmatrix} = -\frac{\mu p_{I3}}{\|\mathbf{s}_I\|} \begin{Bmatrix} s_{I1} \\ s_{I2} \end{Bmatrix}. \quad (4.54)$$

En problemas bidimensionales (un cilindro sobre un semiespacio infinito) el sistema de ecuaciones asociado a (4.53) es lineal. El problema tridimensional requiere un esfuerzo computacional mayor, ya que el problema no es lineal debido a la ecuación (4.54) y además, se necesita suponer qué elementos están en condiciones de adhesión y cuáles están en deslizamiento. Por este motivo, se empleará la regularización del coeficiente de fricción. Utilizando esta técnica se realiza una aproximación más suave a la ley de Coulomb, mediante la cual la distribución de tensiones tangenciales desaparece como variable independiente. Se realiza del siguiente modo

$$\begin{Bmatrix} p_{I1} \\ p_{I2} \end{Bmatrix} = -\frac{2\mu p_{I3} \operatorname{atan}(\|\mathbf{s}_I\|/\varepsilon)}{\pi \|\mathbf{s}_I\|} \begin{Bmatrix} s_{I1} \\ s_{I2} \end{Bmatrix}. \quad (4.55)$$

Esta expresión converge a la ley de Coulomb cuando el parámetro  $\varepsilon$  tiende a cero. En concreto se ha considerado un valor  $\varepsilon = 10^{-5}$  m/s en las simulaciones realizadas.

La solución del problema de contacto viene dada por el sistema de ecuaciones siguiente

$$\begin{Bmatrix} s_{I1} \\ s_{I2} \end{Bmatrix} = V \begin{Bmatrix} \xi - y_I \phi \\ \eta + x_I \phi \end{Bmatrix} - \frac{2\mu}{\pi \Delta t} \sum_{\kappa=1}^2 \sum_{j=1}^N \left( \frac{p_{j3} \operatorname{atan}(\|\mathbf{s}_j\|/\varepsilon)}{\|\mathbf{s}_j\|} \begin{Bmatrix} A_{I1j\kappa} s_{j\kappa} \\ A_{I2j\kappa} s_{j\kappa} \end{Bmatrix} \right) - \frac{\mathbf{u}_{I0}}{\Delta t}. \quad (4.56)$$

Este sistema se resuelve por medio de Newton-Raphson mediante una estimación previa de las incógnitas, esto es, las velocidades de deslizamiento de cada nodo  $\mathbf{s}_I = \{s_{I1}, s_{I2}\}^T$ . En el instante inicial, se puede considerar que la diferencia de desplazamientos en el área de contacto debidos a la distribución de tensiones tangenciales aplicada en el instante de tiempo anterior es nula, es decir  $\mathbf{u}_{I0} = 0$ .

#### 4.3.5 Análisis del proceso no estacionario de contacto

Con el fin de mostrar los efectos relacionados con el proceso de contacto no estacionario en rodadura, en este subapartado se presentan los resultados correspondientes a tres casos de carga distintos. Para estudiar las características del transitorio, se muestra en el subapartado *I* el cálculo presentado por Kalker en

[104], que estudia la convergencia a la solución estacionaria, pero extendido al caso tridimensional. Los resultados obtenidos a partir del modelo de contacto no estacionario se comparan con los resultados del modelo de contacto estacionario FASTSIM. En FASTSIM se simplifica el problema elástico mediante el modelo de Winkler, según el cual la relación (4.52) se puede expresar de la forma siguiente

$$\begin{Bmatrix} u_{11} \\ u_{12} \end{Bmatrix} \approx \begin{Bmatrix} A_{11j1} p_{j1} \\ A_{12j2} p_{j2} \end{Bmatrix}. \quad (4.57)$$

Asimismo, en los subapartados II y III de esta sección se muestra la evolución de las tensiones tangenciales en el área de contacto y las velocidades de pseudodeslizamiento cuando las fuerzas normal y longitudinal varían según funciones armónicas.

Los valores numéricos de los parámetros del modelo se resumen en la Tabla 4.1.

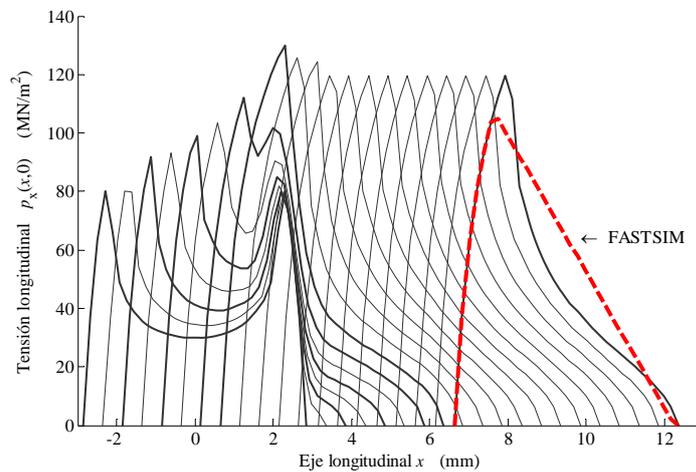
**Tabla 4.1. Parámetros del modelo de contacto no estacionario.**

Radio de la curvatura de la cabeza del carril (mm) (convexa)	300
Radio del perfil de la rueda (mm) (cóncava)	409
Radio de la rueda (mm)	500
Velocidad del vehículo (km/h)	100
Coeficiente de rozamiento	0.4
Módulo de Young (N/m <sup>2</sup> )	2.1 10 <sup>11</sup>
Coeficiente de Poisson	0.3
Incremento espacial ( $\Delta x = V\Delta t$ ) (mm)	0.05

### ***I. Estudio de la convergencia a la solución estacionaria. Versión tridimensional del problema “de Cattaneo a Carter”***

El principal motivo que justifica el uso de modelos de contacto estacionarios es la rápida convergencia del proceso de contacto no estacionario a la solución estacionaria. Los resultados mostrados en las Figuras 4.5 y 4.6 permiten entender la forma en la que tiene lugar esta evolución. Los cálculos se corresponden con la versión tridimensional del problema “de Cattaneo a Carter”, que consiste en la aplicación de una fuerza longitudinal constante desde el instante inicial. Desde un punto de vista práctico, este caso puede compararse a la aplicación repentina de un momento a un eje motorizado (o la aplicación del freno). Las fuerzas transmitidas

son  $F_1 = 2000 \text{ N}$  y  $F_3 = 10000 \text{ N}$ , y el resto de datos del modelo se recogen en la Tabla 4.1. En la Figura 4.5 se muestran las tensiones según la dirección de rodadura ( $p_1$ ) en una franja longitudinal del centro del área de contacto. El eje de abscisas se corresponde con el eje longitudinal del carril y muestra las posiciones sucesivas del área de contacto. La distribución estacionaria de tensiones se alcanza cuando la rueda recorre una distancia entre dos y tres veces el semieje longitudinal del área elíptica. El último cálculo se compara con la distribución de tensiones de FASTSIM. La distribución de tensiones es diferente, dado que FASTSIM implementa un modelo elástico simplificado, sin embargo, las zonas de adhesión y deslizamiento son comparables en ambos modelos.



**Figura 4.5.** Evolución de la tensión tangencial longitudinal (según el eje  $x$ ) en puntos del área de contacto situados sobre la recta  $y = 0$ , cuando se aplica una fuerza normal y longitudinal constantes ( $F_3 = 10000 \text{ N}$  y  $F_1 = 2000 \text{ N}$ ). El eje de abscisas representa la posición del área de contacto en el eje longitudinal. En línea discontinua se representa la solución de FASTSIM. En líneas de mayor grosor, las distribuciones mostradas en la Figura 4.6.

En la Figura 4.6, se muestran las distribuciones de tensión longitudinal indicadas mediante líneas de mayor grosor en la Figura 4.5.

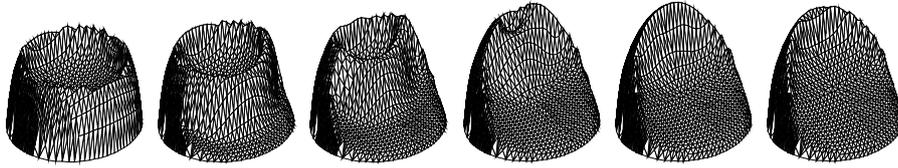


Figura 4.6. Instantáneas de la evolución de la distribución de tensión longitudinal cuando las fuerzas aplicadas permanecen constantes en el tiempo.

En la Figura 4.7 se muestra la evolución de la velocidad de pseudodeslizamiento reducida según la dirección longitudinal, en función de la posición del centro de la rueda, calculada por medio del modelo no estacionario. Este resultado se compara con la velocidad de pseudodeslizamiento constante obtenida con FASTSIM. En el instante inicial aparece una singularidad como consecuencia de una deformación instantánea que produce una velocidad de pseudodeslizamiento infinita. Además de este fenómeno, la velocidad de pseudodeslizamiento alcanza diferencias de alrededor del 80% con respecto al resultado del modelo estacionario. La diferencia con FASTSIM es de alrededor de un 3% con respecto a la respuesta estacionaria obtenida a partir de la teoría exacta en el último instante calculado.

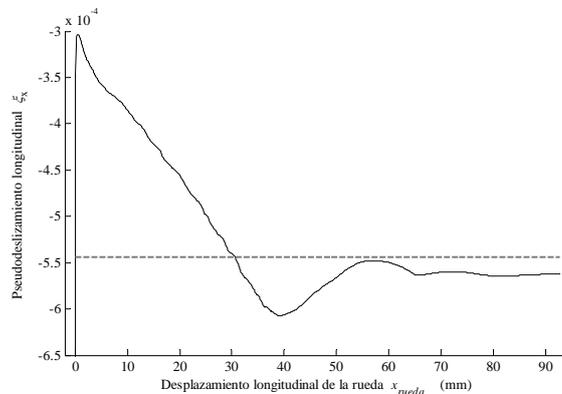


Figura 4.7. Velocidad de pseudodeslizamiento reducida en la dirección longitudinal en función del desplazamiento de la rueda según  $x$ .

## II. Análisis del transitorio producido por la variación de la fuerza normal

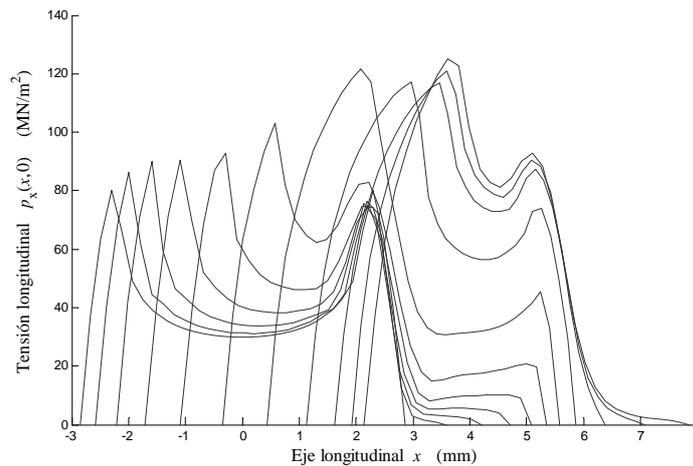
La influencia del proceso no estacionario es más evidente cuando se produce una variación en el tiempo de las fuerzas transmitidas a través del contacto. En este subapartado, se muestran los resultados de un cálculo en el que la fuerza longitudinal se mantiene constante (2000 N) y la fuerza normal varía según una ley sinusoidal, con una longitud de onda  $\lambda$

$$F_3 = F_{3m} + F_{3a} \sin\left(\frac{2\pi x_w}{\lambda}\right), \text{ siendo } F_{3m} = 10000 \text{ N y } F_{3a} = 4500 \text{ N}, \quad (4.58)$$

y donde  $x_w$  es la posición de la rueda sobre el carril. El cálculo se realiza para tres longitudes de onda  $\lambda$  distintas (5 mm, 7.1 mm y 12.5 mm) y los resultados se comparan con los de FASTSIM.

Si se analiza el valor de la tensión longitudinal para el caso en el que la fuerza normal varía más rápidamente ( $\lambda = 5$  mm), se puede apreciar cómo aparece una zona de deslizamiento en el borde anterior del área de contacto (ver Figuras 4.8 y 4.9). Este fenómeno no se puede representar mediante un modelo estacionario.

En la Figura 4.8, se representa la evolución de la tensión longitudinal desde el instante inicial hasta que se alcanza la respuesta permanente, en puntos pertenecientes a una franja longitudinal del centro del área de contacto.



**Figura 4.8.** Evolución de la tensión tangencial longitudinal (según el eje  $x$ ) durante el transitorio en puntos del área de contacto situados sobre la recta  $y=0$ , cuando se aplica una fuerza normal variable, con un valor medio de 10000 N y una amplitud de 4500 N, y una fuerza longitudinal constante, de 2000 N.

La Figura 4.9 muestra la evolución de la distribución de tensión longitudinal para un único ciclo de aplicación de la fuerza normal. En la Figura 4.10, se representan las distribuciones indicadas mediante líneas de mayor grosor en la Figura 4.9. El cálculo se realiza después de aplicar varios ciclos de fuerza normal con el objetivo de obtener la respuesta permanente.

En la Figura 4.11, se representan las velocidades de pseudodeslizamiento reducidas según la dirección longitudinal calculadas para las tres longitudes de onda consideradas. En el eje de abscisas se representa la relación  $x_w/\lambda$ , permitiendo comparar las diferentes frecuencias de la fuerza normal aplicada. Se pueden apreciar efectos significativos del proceso de contacto no estacionario en la velocidad de pseudodeslizamiento longitudinal obtenida con la variación de menor longitud de onda de la fuerza normal, cuando se compara con la calculada con FASTSIM.

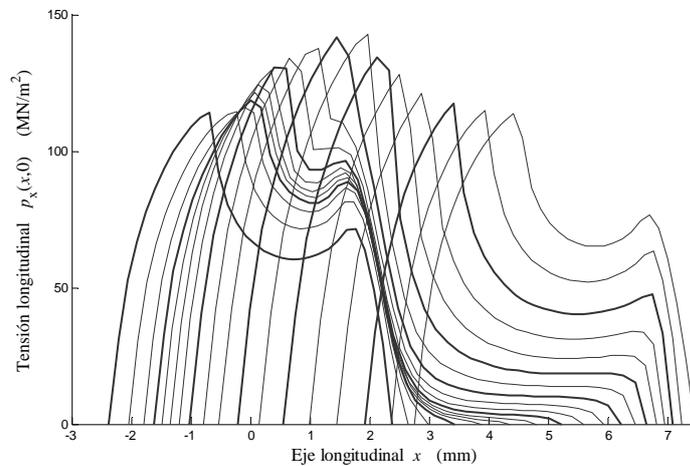


Figura 4.9. Evolución de la tensión tangencial longitudinal (según el eje  $x$ ) en puntos del área de contacto situados sobre la recta  $y=0$ , cuando se aplica una fuerza normal variable, con un valor medio de 10000 N y una amplitud de 4500 N, y una fuerza longitudinal constante de 2000 N, después de la aplicación de varios ciclos de variación de la fuerza (respuesta permanente). En líneas de mayor grosor, las distribuciones mostradas en Figura 4.10.

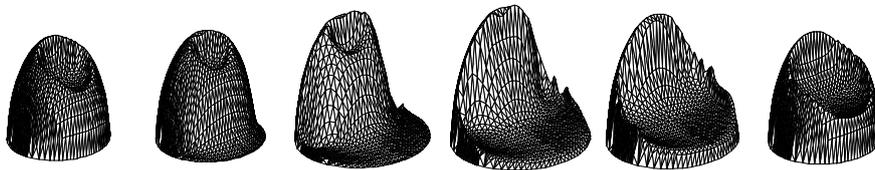


Figura 4.10. Instantáneas de la evolución de la distribución de tensión longitudinal, una vez alcanzada la respuesta permanente, cuando se aplica una fuerza normal variable.

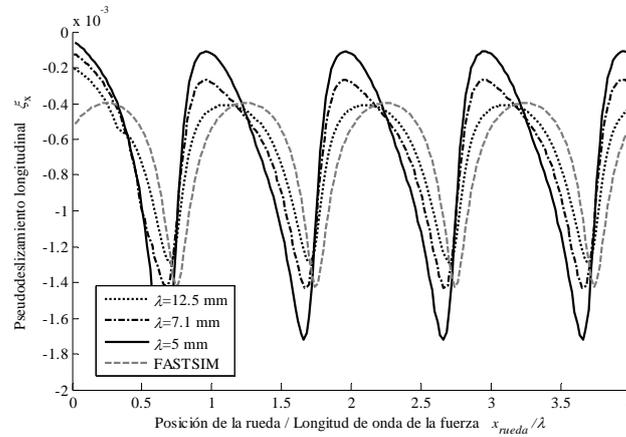


Figura 4.11. Velocidad de pseudodeslizamiento reducida en la dirección longitudinal, en función de la relación posición de la rueda/ longitud de onda de la variación de la fuerza normal.

### III. Análisis del transitorio producido por la variación de la fuerza longitudinal

En este subapartado se analiza la influencia de la variación de la fuerza longitudinal en los parámetros del contacto calculados empleando el modelo de contacto no estacionario. Para ello, se considera una fuerza longitudinal armónica, según (4.59), a la vez que se aplica una fuerza constante  $F_3 = 10000$  N en la dirección normal al contacto

$$F_1 = F_{1m} + F_{1a} \sin\left(\frac{2\pi x_{rueda}}{\lambda}\right), \text{ siendo } F_{1m} = 2000 \text{ N y } F_{1a} = 1000 \text{ N}. \quad (4.59)$$

Al igual que en el caso anterior, el problema de contacto se resuelve para tres longitudes de onda de variación de la fuerza longitudinal distintas (5 mm, 7.1 mm y 12.5 mm) y se comparan con los resultados de FASTSIM. Cuando la velocidad de pseudodeslizamiento reducida según la dirección longitudinal se analiza en la Figura 4.15, se observa, aparte de las discrepancias con FASTSIM, que dicha velocidad y la fuerza longitudinal algunas veces tienen la misma dirección, algo que no ocurre con los resultados de los modelos estacionarios. La explicación a este fenómeno puede deducirse de las Figuras 4.12 y 4.13, que muestran, respectivamente, la distribución de tensiones longitudinales desde el instante inicial hasta el fin del transitorio y la distribución de tensiones longitudinales una vez se ha alcanzado la respuesta permanente, después de la aplicación de varios ciclos de variación de la fuerza longitudinal. En la Figura 4.14 se muestran las distribuciones de tensiones tangenciales en tres dimensiones, correspondientes a

los casos indicados en la Figura 4.13 en líneas de mayor grosor. Estos resultados corresponden al caso en el que la fuerza longitudinal varía con una frecuencia mayor ( $\lambda = 5$  mm). Puede observarse que en estas condiciones aparece una zona en la que la dirección de las tensiones es opuesta a la de la fuerza resultante. Se sabe que este fenómeno sucede en problemas de *fretting* [199] y en este caso puede producir deslizamiento reverso.

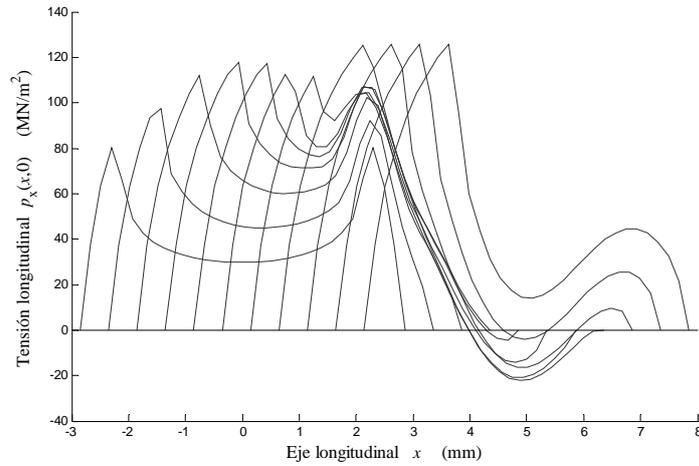


Figura 4.12. Evolución de la tensión tangencial longitudinal (según el eje  $x$ ) durante el transitorio en puntos del área de contacto situados sobre la recta  $y=0$ , cuando se aplica una fuerza longitudinal variable, con un valor medio de 2000 N y una amplitud de 1000 N, y una fuerza normal constante de 1000 N.

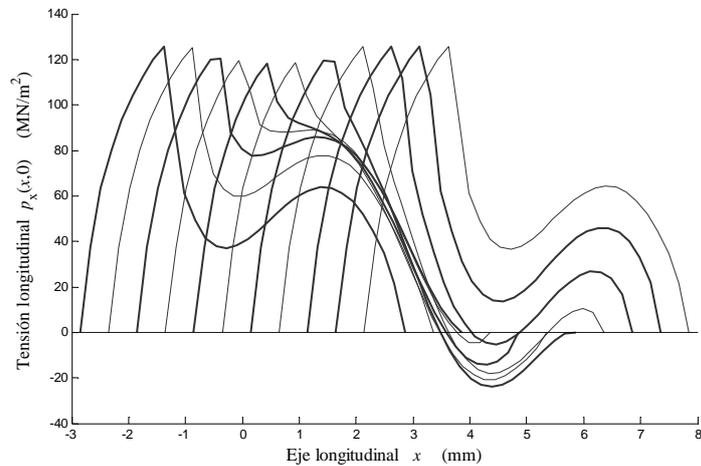


Figura 4.13. Evolución de la tensión tangencial longitudinal (según el eje  $x$ ) en puntos del área de contacto situados sobre la recta  $y=0$ , cuando se aplica una fuerza longitudinal variable, con un valor medio de 2000 N y una amplitud de 1000 N, y una fuerza normal constante de 10000 N, después de la aplicación de varios ciclos de variación de la fuerza (respuesta permanente). En líneas de mayor grosor, las distribuciones mostradas en la Figura 4.14.

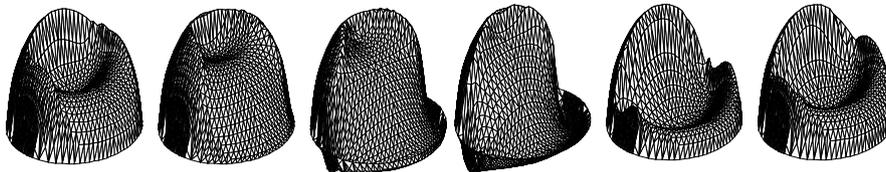


Figura 4.14. Instantáneas de la evolución de la distribución de tensión longitudinal, una vez alcanzada la respuesta permanente, cuando se aplica una fuerza longitudinal variable.

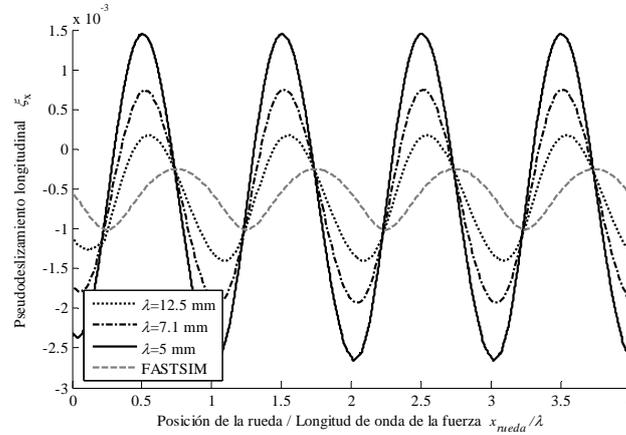


Figura 4.15. Velocidad de pseudodeslizamiento reducida en la dirección longitudinal en función de la relación entre la posición de la rueda y la longitud de onda de la variación de la fuerza longitudinal.

#### 4.4 Modelo de contacto no herciano y no estacionario basado en la Teoría Variacional de Kalker

Kalker propuso un principio en el que el área de contacto real y la distribución de tensiones minimizan la energía complementaria total, sujeto a la restricción de que la tensión normal sea positiva en el área de contacto real [104]. En este principio no se consideran las tensiones tangenciales, al asumir la hipótesis de cuasiidentidad de los cuerpos en contacto y considerar que éstos pueden ser tratados como semiespacios infinitos. Por ello, en el desarrollo que se realiza en este apartado, se aplica la Teoría Variacional, en primer lugar, al problema de contacto normal (subapartado 4.4.1) y a continuación, al problema tangencial (subapartado 4.4.2), considerando que ambos problemas están desacoplados. Las funciones de minimización para los problemas normal y tangencial son funciones cuadráticas de la tensión, y por tanto se pueden resolver empleando algoritmos de programación cuadrática o basados en multiplicadores de Lagrange, como los desarrollados por Kalker (NORM y TANG) como partes del algoritmo CONTACT [104].

Cuando los problemas de contacto normal y tangencial no se pueden resolver de forma independiente, la función de energía complementaria total para tensiones normales y tangenciales combinadas que se considera es la siguiente

$$V^* = \int_S \left( (h - \delta) + \frac{1}{2} u_3 \right) p_3 dS + \int_S \left( \mathbf{W}_\tau + \frac{1}{2} \mathbf{u}_\tau - \mathbf{u}'_\tau \right) \mathbf{p}_\tau dS \quad (4.60)$$

Considerando la discretización espacial del área potencial de contacto en elementos, en la que existen  $N$  nodos, la función a minimizar junto con las restricciones, resulta

$$\min_{p_{Ij}} F = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{l=1}^N \sum_{m=1}^N p_{li} D_{limj} p_{mj} \right) + \sum_{l=1}^N h_l p_{l3} + \sum_{\tau=1}^2 \sum_{l=1}^N (W_{l\tau} - u'_{l\tau}) p_{l\tau} \quad (4.61)$$

$$\text{sujeto a } p_{l3} \geq 0 \text{ y } |\mathbf{p}_{l\tau}| \leq \mu p_{l3}, \tau = 1, 2,$$

donde  $D_{limj}$  es el coeficiente de influencia elástica para obtener la diferencia de desplazamientos según la dirección  $i$  en el nodo  $l$  cuando se aplica al nodo  $m$  una tensión según la dirección  $j$ ,  $W_{l\tau}$  es el desplazamiento tangencial rígido y  $u'_{l\tau}$  es la diferencia de desplazamientos tangenciales correspondiente a la tensión tangencial aplicada en el instante temporal anterior. La metodología de cálculo de los coeficientes de influencia elástica desarrollada para este modelo de contacto se expondrá en el subapartado 4.4.3.

#### 4.4.1 Resolución del problema normal de contacto

La expresión correspondiente al principio variacional resulta

$$V^* = U_E^* + \int_S p_3 (h - \delta) dS, \quad (4.62)$$

$$\text{sujeto a } p_3 > 0,$$

donde  $U_E^*$  es la energía complementaria interna de los dos cuerpos en contacto, que para materiales elásticos lineales es numéricamente igual a la energía de deformación elástica

$$U_E^* = U_E = \frac{1}{2} \int_S p_3 u_3 dS. \quad (4.63)$$

Sustituyendo la ecuación (4.63) en (4.62) se obtiene la función de energía complementaria a ser minimizada por los valores de la tensión normal en toda el área de contacto

$$V^* = \frac{1}{2} \int_S p_3 u_3 dS + \int_S p_3 (h - \delta) dS \quad (4.64)$$

Si se considera un área potencial de contacto discretizada, con  $N$  nodos, la diferencia de desplazamientos normales vendrá dada por

$$u_{I3} = \sum_{J=1}^N D_{I3J3} p_{J3}. \quad (4.65)$$

Si se sustituye la ecuación (4.65) en (4.64) la función de energía complementaria evaluada en los elementos resulta

$$V^* = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N A_I p_{I3} \sum_{J=1}^N D_{I3J3} p_{J3} + \sum_{I=1}^N A_I p_{I3} (h_I - \delta), \quad (4.66)$$

sujeto a  $p_{I3} \geq 0$ .

Dado que el área de cada elemento  $A_I$  sobre el que se aplica la tensión normal y la aproximación entre los cuerpos  $\delta$  son constantes, no afectan al problema de minimización, con lo que la función objetivo a minimizar puede simplificarse del siguiente modo

$$\min_{p_{I3}} F_n = \frac{1}{2} \sum_{I=1}^N \sum_{J=1}^N p_{I3} D_{I3J3} p_{J3} + \sum_{I=1}^N h_I p_{I3} \quad (4.67)$$

sujeto a  $p_{I3} \geq 0$ .

Este problema de minimización con restricciones se puede resolver considerando el método de los multiplicadores de Lagrange y las condiciones necesarias para la existencia de un mínimo dadas por el teorema de Kuhn-Tucker.

El Lagrangiano se puede escribir como sigue

$$L(p_{I3}, \lambda_{I3}) = \frac{1}{2} \sum_{J=1}^N p_{I3} D_{I3J3} p_{J3} + h_I p_{I3} - \lambda_{I3} p_{I3}, \quad (4.68)$$

siendo  $\lambda_{I3}$  los multiplicadores de Lagrange. Según el teorema de Kuhn-Tucker, en el mínimo de la función objetivo (4.67), los multiplicadores de Lagrange deberán satisfacer las siguientes condiciones

$$\frac{\partial L(p_{I3}, \lambda_{I3})}{\partial p_{I3}} = \sum_{J=1}^N D_{I3J3} p_{J3} + h_I - \lambda_{I3} = 0, \quad (4.69)$$

$$p_{I3} \geq 0, \quad (4.70)$$

$$\lambda_{I3} \geq 0, \quad (4.71)$$

$$\lambda_{I3} p_{I3} = 0. \quad (4.72)$$

Considerando la definición de distancia deformada entre los cuerpos en contacto, se tiene que ésta es igual al multiplicador de Lagrange

$$e_I = \lambda_{I3} = \sum_{j=1}^N D_{I3j3} p_{j3} + h_I. \quad (4.73)$$

Con esto, teniendo en cuenta las relaciones (4.6) y (4.7) que satisface la distancia deformada en el área potencial de contacto, el problema normal de contacto se puede plantear de la siguiente forma en función de los multiplicadores de Lagrange

$$e_I = \lambda_{I3} = \sum_{j=1}^N D_{I3j3} p_{j3} + h_I$$

En  $C$ :  $p_{I3} > 0$  y  $\lambda_{I3} = e_I = 0$  (conjunto inactivo) (4.74)  
 En  $E$ :  $p_{I3} = 0$  y  $\lambda_{I3} = e_I > 0$  (conjunto activo)

El método que se emplea en este modelo de contacto para resolver el problema normal es el algoritmo NORM propuesto por Kalker [104]. En este algoritmo, los  $N$  nodos o puntos del área potencial de contacto en los que se calcula la solución (equivalente al número de elementos en el método CONTACT), se dividen en dos conjuntos: el conjunto activo, formado por los puntos que están fuera del contacto y el conjunto inactivo, constituido por el resto de puntos, que pertenecen al contacto. La solución se alcanza a través de un proceso iterativo en el que el conjunto activo se actualiza en cada iteración. Este algoritmo se puede resumir en los siguientes pasos:

1. Inicialmente se supone que todos los puntos se encuentran fuera del contacto (en el conjunto activo), con lo que:

$$p_{I3} = 0, \quad \forall I \in A_c$$

2. Se resuelve el sistema de  $N$  ecuaciones lineales para calcular la distancia deformada o la tensión normal:

$$\forall I \in C: e_I = \sum_{j=1}^N D_{I3j3} p_{j3} + h_I = 0 \Rightarrow \text{calcula } p_{I3}$$

$$\forall I \in E: p_{I3} = 0 \Rightarrow \text{calcula } e_I$$

3. Se comprueba que en todos los puntos la tensión normal es positiva o nula:

$$\text{¿ } p_{I3} \geq 0 \quad \forall I \in A_c? \text{}$$

Si existe algún punto  $I \in C$  en el que  $p_{13} < 0$  se mueve al exterior del contacto  $E$ , se impone  $p_{13} = 0$  y se vuelve al paso 2.

4. Se comprueba que en todos los puntos la distancia deformada es positiva o nula:

$$\dot{\epsilon}_I \geq 0 \quad \forall I \in A_c?$$

Si existe algún punto  $I \in E$  en el que  $e_I < 0$  se mueve al contacto  $C$ , se impone  $e_I = 0$  y se vuelve al paso 2.

El algoritmo finaliza cuando en todos los puntos del área potencial de contacto se cumplen las condiciones establecidas en (4.74).

#### 4.4.2 Resolución del problema tangencial de contacto

Para el problema de contacto tangencial, suponiendo que la tensión en la dirección normal  $z$  es nula, la función a minimizar presenta una forma similar a la del contacto normal, a excepción de que el término de la distancia indeformada entre los dos cuerpos  $h_I$  se sustituye por un término que representa el desplazamiento tangencial relativo entre las dos superficies, formado por el desplazamiento tangencial rígido  $W_{I\tau}$  y la diferencia de desplazamientos entre los dos cuerpos producida por la tensión tangencial anterior  $u'_{I\tau}$

$$\min_{p_{I\tau}} F_t = \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^2 \sum_{l=1}^N p_{I\tau} u_{I\tau} + \sum_{\tau=1}^2 \sum_{l=1}^N (W_{I\tau} - u'_{I\tau}) p_{I\tau}, \quad (4.75)$$

$$\text{sujeto a } |\mathbf{p}_{I\tau}| \leq \mu p_{13}.$$

Considerando que las diferencias de desplazamientos tangenciales  $u_{I\tau}$  se pueden obtener en función de las tensiones tangenciales  $p_{J\kappa}$  mediante los correspondientes coeficientes de influencia elástica  $D_{I\tau J\kappa}$  a partir de

$$u_{I\tau} = \sum_{\kappa=1}^2 \sum_{j=1}^N D_{I\tau j\kappa} p_{j\kappa}, \quad \tau = 1, 2, \quad (4.76)$$

la función (4.75) resulta

$$\min_{p_{I\tau}} F_t = \frac{1}{2} \sum_{\tau=1}^2 \sum_{l=1}^N \sum_{j=1}^N p_{I\tau} D_{I\tau j\kappa} p_{j\kappa} + \sum_{\tau=1}^2 \sum_{l=1}^N (W_{I\tau} - u'_{I\tau}) p_{I\tau}, \quad (4.77)$$

$$\text{sujeto a } |\mathbf{p}_{I\tau}| \leq \mu p_{13}.$$

Aplicando de nuevo el método de los multiplicadores de Lagrange y las condiciones necesarias para la existencia de un mínimo del teorema de Kuhn-Tucker, se tiene que el Lagrangiano resulta

$$L(p_{I\tau}, \lambda_{I\tau}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^N p_{I\tau} D_{Ij\tau} p_{j\tau} + (W_{I\tau} - u'_{I\tau}) p_{I\tau} - \lambda_{I\tau} (\mu p_{I3} - |\mathbf{p}_{I\tau}|) \quad (4.78)$$

En los mínimos de la función objetivo, los multiplicadores de Lagrange cumplirán las siguientes condiciones

$$\frac{\partial L(p_{I\tau}, \lambda_{I\tau})}{\partial p_{I1}} = \sum_{j=1}^N D_{I1j\tau} p_{j\tau} + W_{I1} - u'_{I1} + \lambda_{I1} \frac{p_{I1}}{|\mathbf{p}_{I\tau}|} = 0 \quad (4.79)$$

$$\frac{\partial L(p_{I\tau}, \lambda_{I\tau})}{\partial p_{I2}} = \sum_{j=1}^N D_{I2j\tau} p_{j\tau} + W_{I2} - u'_{I2} + \lambda_{I2} \frac{p_{I2}}{|\mathbf{p}_{I\tau}|} = 0 \quad (4.80)$$

$$\mu p_{I3} - |\mathbf{p}_{I\tau}| \geq 0 \quad (4.81)$$

$$\lambda_{I1} (\mu p_{I3} - |\mathbf{p}_{I\tau}|) = 0 \quad (4.82)$$

$$\lambda_{I2} (\mu p_{I3} - |\mathbf{p}_{I\tau}|) = 0 \quad (4.83)$$

$$\lambda_{I1} \geq 0 \quad (4.84)$$

$$\lambda_{I2} \geq 0 \quad (4.85)$$

Comparando con las ecuaciones del problema tangencial, se llega a las siguientes expresiones

$$S_{I1} = \sum_{j=1}^N D_{I1j\tau} p_{j\tau} + W_{I1} - u'_{I1} = -\lambda_{I1} \frac{p_{I1}}{|\mathbf{p}_{I\tau}|} \quad (4.86)$$

$$S_{I2} = \sum_{j=1}^N D_{I2j\tau} p_{j\tau} + W_{I2} - u'_{I2} = -\lambda_{I2} \frac{p_{I2}}{|\mathbf{p}_{I\tau}|} \quad (4.87)$$

Por otra parte, se sabe que los deslizamientos en el contacto tienen sentido contrario a las tensiones tangenciales

$$S_{I\tau} = -|\mathbf{S}_{I\tau}| \frac{p_{I\tau}}{|\mathbf{p}_{I\tau}|} \quad (4.88)$$

Comparando las expresiones (4.86) y (4.87) con (4.88) se deduce que los multiplicadores de Lagrange del problema tangencial son iguales y equivalen a la distancia deslizada

$$\lambda_{I1} = \lambda_{I2} = \lambda_{I\tau} = |\mathbf{S}_{I\tau}| \quad (4.89)$$

Una vez resuelto el problema normal, se conocen los puntos del área potencial de contacto ( $A_c$ ) que quedan fuera del contacto ( $E$ ) y los que pertenecen al contacto ( $C$ ), por lo que se puede plantear el problema tangencial de contacto exclusivamente para los puntos en contacto ( $C$ ) mediante las siguientes relaciones

$$S_{I\tau} = \sum_{j=1}^N D_{Ij\tau} p_{j\tau} + W_{I\tau} - u'_{I\tau} = -\lambda_{I\tau} \frac{p_{I\tau}}{|\mathbf{p}_{I\tau}|}, \quad \tau = 1, 2$$

$$\text{En } H: |\mathbf{p}_{I\tau}| < \mu p_{I3} \text{ y } \lambda_{I\tau} = |\mathbf{S}_{I\tau}| = 0 \text{ (conjunto activo)} \quad (4.90)$$

$$\text{En } S: |\mathbf{p}_{I\tau}| = \mu p_{I3} \text{ y } \lambda_{I\tau} = |\mathbf{S}_{I\tau}| > 0 \text{ (conjunto inactivo)}$$

Para resolver el problema tangencial de contacto se implementa el algoritmo TANG propuesto por Kalker [104]. En este algoritmo, de forma similar al algoritmo NORM, se dividen los puntos que pertenecen al contacto en dos conjuntos: el conjunto activo, constituido por los puntos que se encuentran en la zona de adhesión ( $H$ ) y el conjunto inactivo, formado por los puntos situados en la zona de deslizamiento ( $S$ ). Los pasos de este algoritmo son los siguientes:

1. Inicialmente, se supone que todos los puntos se encuentran en la zona de adhesión (conjunto activo), con lo que

$$S_{I\tau} = 0, \quad \tau = 1, 2 \quad \forall I \in C.$$

2. Se resuelve el sistema de ecuaciones no lineal mediante Newton-Raphson

$$\forall I \in H: S_{I\tau} = \sum_{j=1}^N D_{Ij\tau} p_{j\tau} + W_{I\tau} - u'_{I\tau} = 0 \Rightarrow \text{calcula } p_{I\tau}$$

$$\forall I \in S: |\mathbf{p}_{I\tau}| = \mu p_{I3} \Rightarrow p_{I1}^2 + p_{I2}^2 = (\mu p_{I3})^2 \Rightarrow \text{calcula } S_{I\tau}$$

3. Se comprueba que en todos los puntos de la zona de adhesión  $H$ , la tensión tangencial total es inferior al límite de fricción

$$\dot{\lambda} |\mathbf{p}_{I\tau}| < \mu p_{I3} \quad \forall I \in H?$$

Si existe algún punto en el que  $|\mathbf{p}_{I\tau}| \geq \mu p_{I3}$  se pasa a la zona de deslizamiento  $S$ , se impone que  $|\mathbf{p}_{I\tau}| = \mu p_{I3}$  y se vuelve al paso 2.

4. Se comprueba que en todos los puntos de la zona de deslizamiento  $S$ , el deslizamiento tiene signo opuesto a la tensión tangencial

$$\dot{\zeta} \frac{S_{I\tau}}{|\mathbf{S}_{I\tau}|} = - \frac{p_{I\tau}}{|\mathbf{p}_{I\tau}|} \quad \forall I \in S?$$

Si existe algún punto en el que  $S_{I\tau} = |\mathbf{S}_{I\tau}| \frac{p_{I\tau}}{|\mathbf{p}_{I\tau}|}$ , se pasa a la zona de adhesión, se impone  $S_{I\tau} = 0$  y se regresa al paso 2.

El algoritmo finaliza cuando en todos los puntos del área de contacto se cumplen las condiciones establecidas en (4.90).

#### 4.4.3 Modelo elástico. Cálculo de los coeficientes de influencia elástica para elementos triangulares con distribución de tensión lineal

En este subapartado, se expone el método desarrollado en esta Tesis para obtener los coeficientes de influencia elástica en elementos triangulares, sobre los que se aplican distribuciones de tensiones lineales, a partir de las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti. La idea original de la técnica para integrar dichas ecuaciones en dominios triangulares se debe a Svec y Gladwell [186]. Posteriormente, Li y Berger [116], empleando esta técnica, resolvieron las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti para distribuciones de tensiones constantes, lineales y bilineales sobre elementos triangulares.

El método se basa en la aproximación de las distribuciones de tensiones reales (continuas) mediante la superposición de distribuciones de tensiones de tipo piramidal que se aplican sobre bases hexagonales formadas por seis elementos triangulares equiláteros, como se muestra en la Figura 4.16. La idea original de este método se debe a Johnson, que propone en su libro *Contact Mechanics* [97] el método de superposición de *elementos de tensión piramidales*, pero no incluye en el mismo su desarrollo e implementación.

Según Johnson, con esta representación de las distribuciones de tensiones se conseguiría una mejora en el cálculo de las distribuciones de tensiones reales en comparación con el uso de elementos (normalmente cuadrados o rectangulares) en los que se considera la tensión constante. Como se puede apreciar en una representación bidimensional en la Figura 4.17, con este método se eliminan las discontinuidades en las tensiones en las fronteras de los elementos.

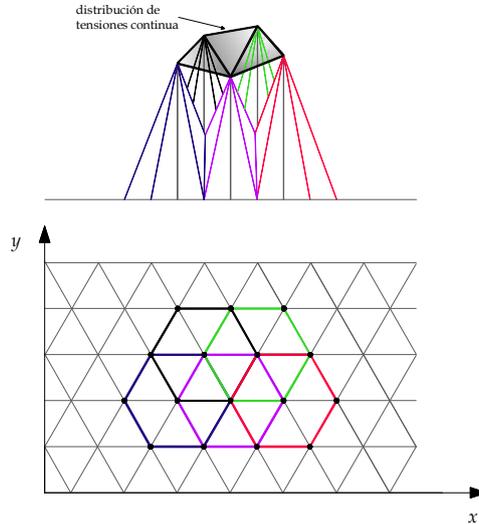


Figura 4.16. Cálculo de la distribución de tensiones continua mediante la superposición de distribuciones de tensiones de tipo piramidal.

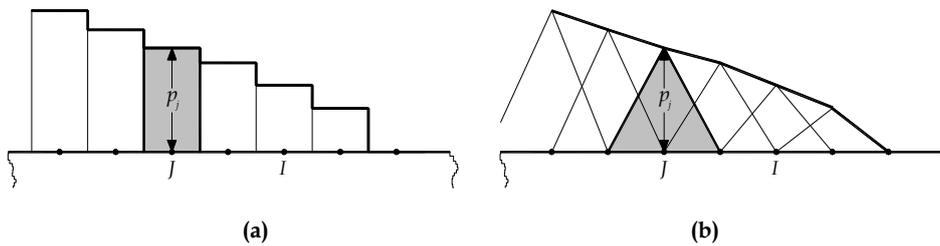


Figura 4.17. Representación de una distribución de tensiones mediante: (a) Elementos con tensión constante; (b) Elementos en los que se superponen tensiones lineales.

A priori, el método propuesto por estos autores constituye una herramienta potente para el análisis tridimensional del contacto entre dos cuerpos elásticos. Por una parte, permite representar un área de contacto cualquiera por medio de elementos triangulares de forma más precisa que mediante elementos rectangulares. Por otra parte, supone una mejora de los métodos que emplean elementos de contorno en los que se consideran cargas constantes en el dominio de cada elemento, al permitir representar de forma continua las distribuciones de tensiones en el área de contacto por medio de elementos en cuyos dominios se modelan las distribuciones de tensiones mediante funciones lineales. El método que se desarrolla en esta Tesis es válido para cualquier tipo de elemento triangular, no necesariamente equilátero.

### I. Distribuciones de tensiones lineales sobre elementos triangulares

Se consideran distribuciones lineales de tensiones  $p_i(x', y')$  aplicadas sobre un elemento triangular genérico  $P_1$ - $P_2$ - $P_3$  (ver Figura 4.18). Con esto, la expresión matemática de las distribuciones de tensiones es la correspondiente a la ecuación de un plano lineal que pasa por los tres vértices del elemento triangular. Para facilitar la obtención de los coeficientes de influencia elástica mediante la integración de las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti, dicha ecuación del plano se expresa en función de las coordenadas  $(x', y')$  del elemento triangular cargado (variables de integración en las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti) y de las coordenadas  $(x, y)$  del punto en el que se pretenden calcular los desplazamientos (constantes en las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti). De este modo, las distribuciones de tensiones sobre los elementos triangulares resultarían

$$p_i(x', y') = \alpha_1 + \alpha_2 (x - x') + \alpha_3 (y - y'), \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.91)$$

Los coeficientes  $\alpha_i$  se obtienen a partir de las coordenadas de los vértices del triángulo  $P_1(x'_1, y'_1)$ ,  $P_2(x'_2, y'_2)$  y  $P_3(x'_3, y'_3)$ , de los valores de la distribución de tensiones en dichos vértices  $p_{i_{p_1}}$ ,  $p_{i_{p_2}}$  y  $p_{i_{p_3}}$  que toman valor unitario en el vértice en el que se aplica la carga unitaria y valores nulos en los restantes vértices, y de las coordenadas  $(x, y)$  del punto  $P$  en el que se calculan los desplazamientos, mediante el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & x - x'_1 & y - y'_1 \\ 1 & x - x'_2 & y - y'_2 \\ 1 & x - x'_3 & y - y'_3 \end{Bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} p_{i_{p_1}} \\ p_{i_{p_2}} \\ p_{i_{p_3}} \end{Bmatrix} \quad (4.92)$$

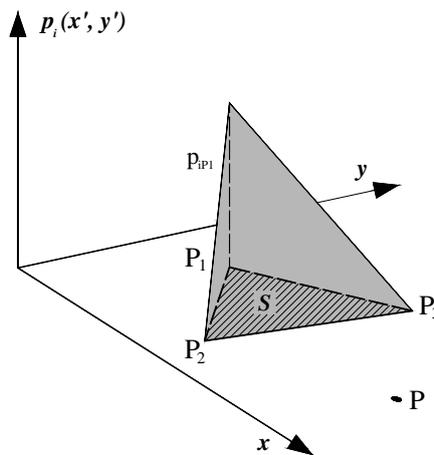


Figura 4.18. Distribución lineal de tensiones sobre un elemento triangular  $P_1$ - $P_2$ - $P_3$ .

Si consideramos que la carga unitaria siempre se aplica en el vértice  $P_1(x'_1, y'_1)$ , es decir,  $p_{i_{p_1}} = 1$ ,  $p_{i_{p_2}} = 0$  y  $p_{i_{p_3}} = 0$ , las expresiones que se derivan del sistema de ecuaciones (4.92) resultan

$$\alpha_1 = \frac{x'_2 y'_3 - y'_2 x'_3 + x(y'_2 - y'_3) + y(x'_3 - x'_2)}{x'_3(y'_1 - y'_2) + x'_2(y'_3 - y'_1) + x'_1(y'_2 - y'_3)} \quad (4.93)$$

$$\alpha_2 = \frac{y'_3 - y'_2}{x'_3(y'_1 - y'_2) + x'_2(y'_3 - y'_1) + x'_1(y'_2 - y'_3)} \quad (4.94)$$

$$\alpha_3 = \frac{x'_2 - x'_3}{x'_3(y'_1 - y'_2) + x'_2(y'_3 - y'_1) + x'_1(y'_2 - y'_3)} \quad (4.95)$$

## II. Obtención del coeficiente de influencia elástica del problema normal

El coeficiente de influencia elástica  $D_{33}(x, y, x', y')$ , que relaciona la diferencia de desplazamientos verticales  $u_3(x, y)$  con la distribución de tensión normal lineal  $p_3(x', y')$  aplicada sobre el área de un triángulo, de valor unitario en uno de los vértices y cero en los otros dos, se puede obtener como una combinación lineal de una serie de integrales  $I_i$  que se evaluarán en el dominio de cada elemento triangular

$$\begin{aligned} D_{33}(x, y, x', y') &= \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_3(x', y')}{\rho} dx' dy' = \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_S \frac{\alpha_1 + \alpha_2(x-x') + \alpha_3(y-y')}{\rho} dx' dy' = \\ &= \frac{1-\nu}{\pi G} \{\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3\} \end{aligned} \quad (4.96)$$

## III. Obtención de los coeficientes de influencia elástica del problema tangencial

Los coeficientes de influencia elástica  $D_{11}(x, y, x', y')$  y  $D_{21}(x, y, x', y')$ , que relacionan las diferencias de desplazamientos en las direcciones longitudinal  $u_1(x, y)$  y lateral  $u_2(x, y)$ , respectivamente, con la distribución de tensión longitudinal lineal  $p_1(x', y')$  se pueden calcular

$$\begin{aligned} D_{11}(x, y, x', y') &= \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_1(x', y')}{\rho} dx' dy' + \frac{\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_1(x', y')(x-x')^2}{\rho^3} dx' dy' = \\ &= \frac{1-\nu}{\pi G} \{\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3\} + \frac{\nu}{\pi G} \{\alpha_1 I_4 + \alpha_2 I_5 + \alpha_3 I_6\} \end{aligned} \quad (4.97)$$

$$D_{21}(x, y, x', y') = \frac{\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_1(x', y')(x-x')(y-y')}{\rho^3} dx' dy' = \frac{\nu}{\pi G} \{\alpha_1 I_7 + \alpha_2 I_6 + \alpha_3 I_8\} \quad (4.98)$$

De forma análoga, se calculan los coeficientes de influencia elástica  $D_{12}(x, y, x', y')$  y  $D_{22}(x, y, x', y')$ , a partir de las expresiones (4.41) y (4.42) respectivamente, para una distribución de tensiones tangenciales en la dirección  $y$ , dada por  $p_2(x', y')$

$$D_{12}(x, y, x', y') = \frac{\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_2(x', y')(x-x')(y-y')}{\rho^3} dx' dy' = \frac{\nu}{\pi G} \{\alpha_1 I_7 + \alpha_2 I_6 + \alpha_3 I_8\} \quad (4.99)$$

$$\begin{aligned} D_{22}(x, y, x', y') &= \frac{1-\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_2(x', y')}{\rho} dx' dy' + \frac{\nu}{\pi G} \iint_S \frac{p_2(x', y')(y-y')^2}{\rho^3} dx' dy' = \\ &= \frac{1-\nu}{\pi G} \{\alpha_1 I_1 + \alpha_2 I_2 + \alpha_3 I_3\} + \frac{\nu}{\pi G} \{\alpha_1 I_9 + \alpha_2 I_8 + \alpha_3 I_{10}\} \end{aligned} \quad (4.100)$$

Siendo las integrales de  $I_1$  a  $I_{10}$ , las integrales que se tienen que evaluar en el dominio de un elemento triangular

$$I_1 = \iint_S \frac{1}{\rho} dx' dy' \quad (4.101)$$

$$I_2 = \iint_S \frac{(x-x')}{\rho} dx' dy' \quad (4.102)$$

$$I_3 = \iint_S \frac{(y-y')}{\rho} dx' dy' \quad (4.103)$$

$$I_4 = \iint_S \frac{(x-x')^2}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.104)$$

$$I_5 = \iint_S \frac{(x-x')^3}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.105)$$

$$I_6 = \iint_S \frac{(x-x')^2(y-y')}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.106)$$

$$I_7 = \iint_S \frac{(x-x')(y-y')}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.107)$$

$$I_8 = \iint_S \frac{(x-x')(y-y')^2}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.108)$$

$$I_9 = \iint_S \frac{(y-y')^2}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.109)$$

$$I_{10} = \iint_S \frac{(y-y')^3}{\rho^3} dx' dy' \quad (4.110)$$

#### IV. Técnica de integración de las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti sobre elementos triangulares

En el desarrollo que se va a realizar para resolver las integrales (4.101)-(4.110), éstas se van a evaluar en el elemento triangular definido por los vértices  $P_1(x'_1, y'_1)$ ,  $P_2(x'_2, y'_2)$  y  $P_3(x'_3, y'_3)$  de la Figura 4.19, sobre el que se aplican las distribuciones de tensiones lineales  $p_i(x', y')$ . El punto  $P(x, y)$  es el punto en el que se desea obtener los desplazamientos  $u_i(x, y)$ .

Con el fin de obtener expresiones analíticas de la evaluación de las integrales (4.101)-(4.110), se adopta un sistema de coordenadas polares  $(r, \theta)$  con origen en el punto  $P$ . Considérese el subtriángulo  $S_1$ , resultante de unir el punto  $P$  con los vértices del lado 1 del elemento triangular (ver Figura 4.20). Mediante  $\delta_1$  se define el ángulo que forma el vector  $\overrightarrow{P_2P_1}$  con el sentido positivo del eje  $x$ ,  $n_1$  es la distancia normal desde el punto  $P$  al lado 1, y  $\varepsilon_1$  y  $\varepsilon_2$  son los ángulos que forma el vector  $\overrightarrow{P_2P_1}$  con los vectores  $\overrightarrow{PP_2}$  y  $\overrightarrow{PP_1}$ , respectivamente.

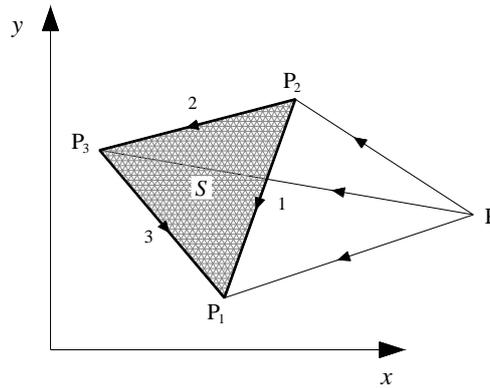


Figura 4.19. Elemento triangular  $P1-P2-P3$  cargado y punto  $P$  de cálculo de los desplazamientos.

Con esto, se cumplen las siguientes relaciones entre coordenadas cartesianas y polares

$$\theta = \delta_1 - \phi \quad (4.111)$$

$$x' - x = r \cos \theta = r \cos(\delta_1 - \phi) \quad (4.112)$$

$$y' - y = r \sin \theta = r \sin(\delta_1 - \phi) \quad (4.113)$$

$$r \in [0, n_1 \csc \phi] \quad (4.114)$$

$$\phi \in [\varepsilon_2, \varepsilon_1] \quad (4.115)$$

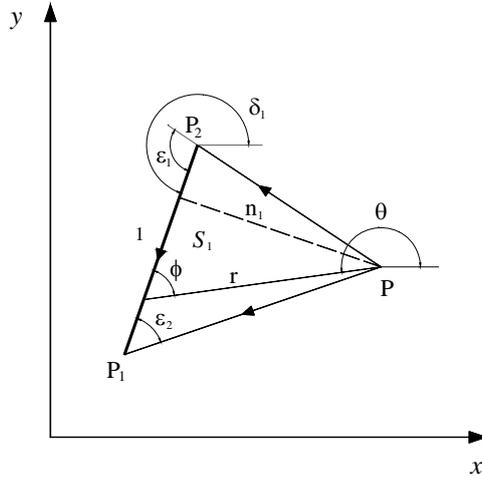


Figura 4.20. Sistema de coordenadas polares.

Análogamente, se definen el subtriángulo  $S_2$ , como el triángulo formado al unir el punto  $P$  con los vértices del lado 2 del elemento triangular y el subtriángulo  $S_3$ , como el resultante de unir el punto  $P$  con los vértices del lado 3 (ver Figura 4.21).

De forma general, se define  $n_k$  como la distancia normal desde el punto  $P$  al lado  $k$  del elemento triangular y  $\delta_k$ , como el ángulo que forma el lado  $k$  con el sentido positivo del eje  $x$ . El sentido positivo de cada lado  $k$  del triángulo viene dado por la dirección positiva (antihoraria) del producto vectorial del vector  $\overrightarrow{PP_k}$  y el vector resultante de unir los vértices del lado  $k$ . Tras la transformación de coordenadas que se ha realizado, las variables de integración serán: el ángulo  $\phi$ , que varía entre los ángulos extremos  $\varepsilon_{2k}$  y  $\varepsilon_{2k-1}$ , y la distancia  $r$  entre cualquier punto  $(x', y')$  del área del subtriángulo y el punto  $P$  de coordenadas constantes  $(x, y)$ .

Considerando las siguientes equivalencias entre coordenadas cartesianas y polares

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2} = r, \quad (4.116)$$

$$\begin{aligned} dx' dy' &= J dr d\theta = \begin{vmatrix} \frac{\partial x'}{\partial r} & \frac{\partial x'}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y'}{\partial r} & \frac{\partial y'}{\partial \theta} \end{vmatrix} dr d\theta = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} dr d\theta = \\ &= r (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) dr d\theta = r dr d\theta \end{aligned} \quad (4.117)$$

y sabiendo que  $d\theta = -d\phi$ , por ejemplo, la solución de la integral (4.101), evaluada en un subtriángulo  $S_k$ , resulta una expresión analítica que es función de parámetros geométricos del subtriángulo

$$\begin{aligned}
 I_1^{(k)} &= \iint_{S_k} \frac{1}{\rho} dx' dy' = \iint_{S_k} \frac{1}{r} r dr d\theta = \int_{\theta_1}^{\theta_2} d\theta \int_0^{n_k \csc \phi} dr = \int_{\varepsilon_{2k}}^{\varepsilon_{2k-1}} d\phi \int_0^{n_k \csc \phi} dr = \int_{\varepsilon_{2k}}^{\varepsilon_{2k-1}} \frac{n_k}{\sin \phi} d\phi = \\
 &= n_k \left[ \ln \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right]_{\varepsilon_{2k}}^{\varepsilon_{2k-1}} = n_k \left[ \ln \left| \tan \frac{\varepsilon_{2k-1}}{2} \right| - \ln \left| \tan \frac{\varepsilon_{2k}}{2} \right| \right] = n_k \ln \left[ \frac{\left| \tan \frac{\varepsilon_{2k-1}}{2} \right|}{\left| \tan \frac{\varepsilon_{2k}}{2} \right|} \right] \quad (4.118)
 \end{aligned}$$

De este modo, las integrales evaluadas en el área de cada elemento triangular  $I_m$ , se pueden calcular como el sumatorio de las integrales sobre las áreas de los tres subtriángulos  $S_1, S_2$  y  $S_3$  en los que se divide, asignándoles previamente los signos positivos o negativos para obtener el área del triángulo  $S$  original (ver Figura 4.21)

$$I_m = \sum_{k=1}^3 \text{sign}(S_k) I_m^{(k)} \quad m = 1, \dots, 10 \quad (4.119)$$

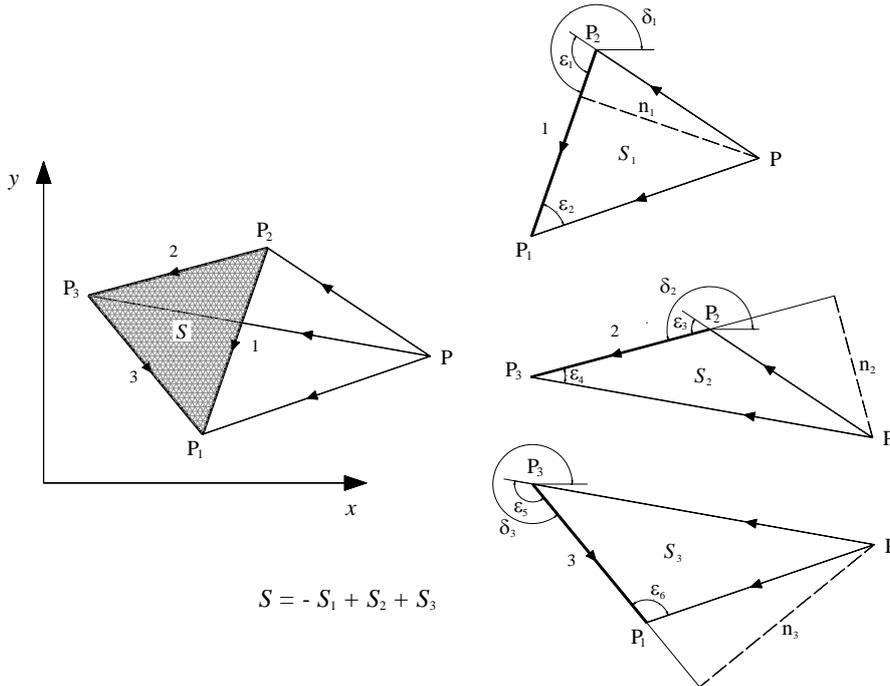


Figura 4.21. Definición de los parámetros asociados a las integrales sobre los tres subtriángulos  $S_1, S_2, S_3$  que constituyen el elemento triangular.

Como indican Svec y Gladwell [186], el desarrollo anterior es válido tanto si el punto  $P$  se encuentra en el interior del elemento triangular como en el exterior, siempre que se asignen los signos adecuados a las integrales de los subtriángulos resultantes.

Procediendo de la misma forma que para calcular la solución de  $I_1^{(k)}$  en (4.118), se obtienen las soluciones de las ecuaciones integrales (4.101)-(4.110) para los subtriángulos  $I_m^{(k)}$ , con  $k=1,2,3$  y  $m=1,\dots,10$ , en coordenadas polares. Estas soluciones se muestran a continuación

$$I_1^{(k)} = n_k \left[ \ln \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.120)$$

$$I_2^{(k)} = \frac{n_k^2}{2} \left[ \frac{\cos \delta_k}{\sin \phi} - \sin \delta_k \ln \left( \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.121)$$

$$I_3^{(k)} = \frac{n_k^2}{2} \left[ \frac{\sin \delta_k}{\sin \phi} + \cos \delta_k \ln \left( \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.122)$$

$$I_4^{(k)} = \frac{n_k}{2} \left[ (\cos 2\delta_k + 1) \ln \left( \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right) + 2 \cos(2\delta_k - \phi) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.123)$$

$$I_5^{(k)} = -\frac{n_k^2}{4} \left[ -(\cos 2\delta_k + 1) \frac{\cos \delta_k}{\sin \phi} + 2 \sin(3\delta_k - \phi) + \right. \\ \left. + [2 \sin 2\delta_k \cos \delta_k + (\cos 2\delta_k + 1) \sin \delta_k] \ln \left( \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.124)$$

$$I_6^{(k)} = \frac{n_k^2}{8} \left[ \frac{(\sin 3\delta_k + \sin \delta_k)}{\sin \phi} + (3 \cos 3\delta_k + \cos \delta_k) \ln \left( \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right) + \right. \\ \left. + 4 \cos(3\delta_k - \phi) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.125)$$

$$I_7^{(k)} = \frac{n_k}{2} \left[ \sin 2\delta_k \ln \left( \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right) + 2 \sin(2\delta_k - \phi) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.126)$$

$$I_8^{(k)} = -\frac{n_k^2}{8} \left[ \frac{(\cos 3\delta_k - \cos \delta_k)}{\sin \phi} + (\sin \delta_k - 3 \sin 3\delta_k) \ln \left( \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right) - \right. \\ \left. - 4 \sin(3\delta_k - \phi) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.127)$$

$$I_9^{(k)} = \frac{n_k}{2} \left[ (1 - \cos 2\delta_k) \ln \left( \left| \tan \frac{\phi}{2} \right| \right) - 2 \cos(2\delta_k - \phi) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.128)$$

$$I_{10}^{(k)} = -\frac{n_k^2}{4} \left[ - (1 - \cos 2\delta_k) \frac{\sin \delta_k}{\sin \phi} + 2 \cos(3\delta_k - \phi) + \right. \\ \left. - [2 \sin 2\delta_k \sin \delta_k + (1 - \cos 2\delta_k) \cos \delta_k] \ln \left( \left[ \tan \frac{\phi}{2} \right] \right) \right]_{\epsilon_{2k}}^{\epsilon_{2k-1}} \quad (4.129)$$

### V. Aplicación de la técnica de integración desarrollada para la obtención de los coeficientes de influencia elástica de un elemento rectangular a partir de dos elementos triangulares

En este subapartado, se verificará la correcta implementación de la técnica de integración de las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti sobre dominios triangulares, que se ha descrito en el apartado anterior. Con este objetivo, se aplicará esta técnica para obtener los valores numéricos de los coeficientes de influencia elástica de un elemento rectangular con distribuciones de tensiones constantes, a partir de dos elementos triangulares sobre los que se aplican tensiones constantes y unitarias. Posteriormente, los coeficientes de influencia elástica calculados de este modo, se compararán con los coeficientes obtenidos mediante las expresiones resultantes de integrar las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti sobre dominios rectangulares, considerando cargas constantes, que obtuvieron Love [123] y Kalker [104] y se recogen en el Anexo 2 de esta Tesis.

Para ello, consideremos el elemento rectangular de dimensiones  $2a \times 2b$  (1 mmx1 mm) que se muestra en la Figura 4.22(a), con un sistema de referencia  $Ox'y'$  situado en el centro del elemento. Dicho elemento rectangular lo consideraremos compuesto por dos elementos triangulares, como se muestra en la Figura 4.22(b).

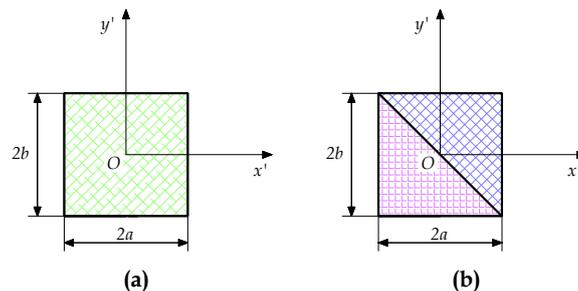


Figura 4.22. (a) Elemento rectangular; (b) Elemento rectangular representado mediante dos elementos triangulares.

En la Figura 4.23, se muestran los coeficientes de influencia elástica obtenidos considerando distribuciones de tensiones constantes y unitarias sobre dos triángulos, como se muestra en la Figura 4.22(b). En las Tablas 4.2 a 4.4 se

comparan diversos valores de los coeficientes de influencia elástica calculados para elementos rectangulares, según las expresiones del Anexo 2, y los obtenidos con las expresiones desarrolladas en este capítulo para elementos triangulares. Se puede observar que existe buena concordancia entre los resultados.

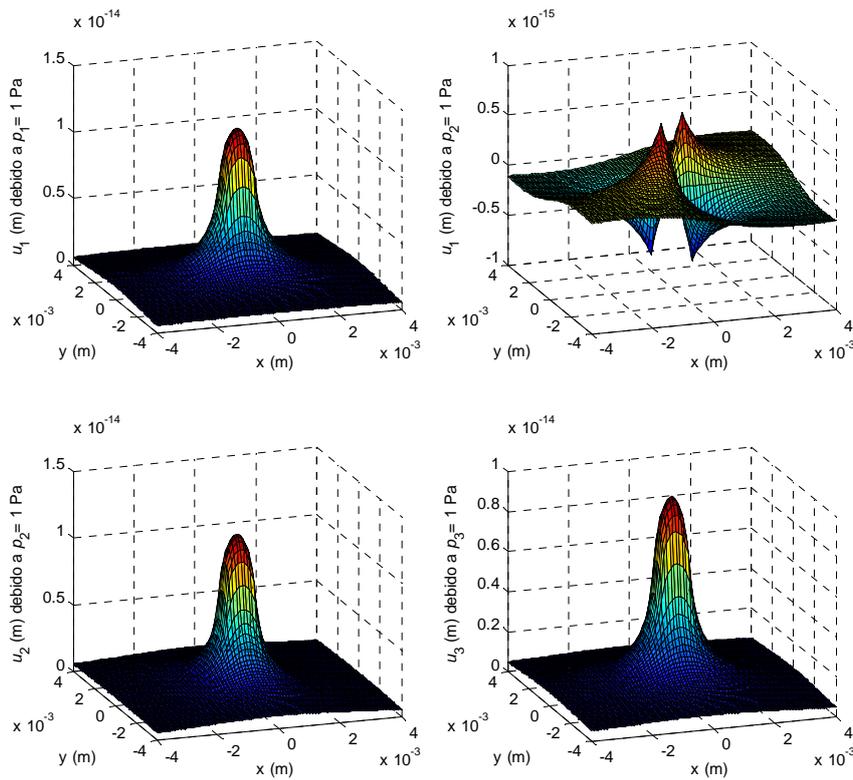


Figura 4.23. Diferencias de desplazamientos producidos por tensiones unitarias constantes sobre un área rectangular formada por dos triángulos (Coeficientes de influencia elástica).

Tabla 4.2. Comparación de coeficientes de influencia elástica en el centro de un rectángulo.

Diferencia de desplazamientos en $x_i = 0, y_i = 0$	Elemento cuadrado	2 elementos triangulares	Error (%)
$u_{11}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	$1.1981 \cdot 10^{-14}$	$1.1981 \cdot 10^{-14}$	$9.4663 \cdot 10^{-28}$
$u_{11}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa			
$u_{12}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	0	$1.3316 \cdot 10^{-31}$	$-1.3316 \cdot 10^{-29}$
$u_{12}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa	$1.1981 \cdot 10^{-14}$	$1.1981 \cdot 10^{-14}$	$9.4663 \cdot 10^{-28}$
$u_{13}$ (m) si $p_{j3} = 1$ Pa	$9.8667 \cdot 10^{-15}$	$9.8667 \cdot 10^{-15}$	$6.3109 \cdot 10^{-28}$

Tabla 4.3. Comparación de coeficientes de influencia elástica en el punto central de un lado del rectángulo.

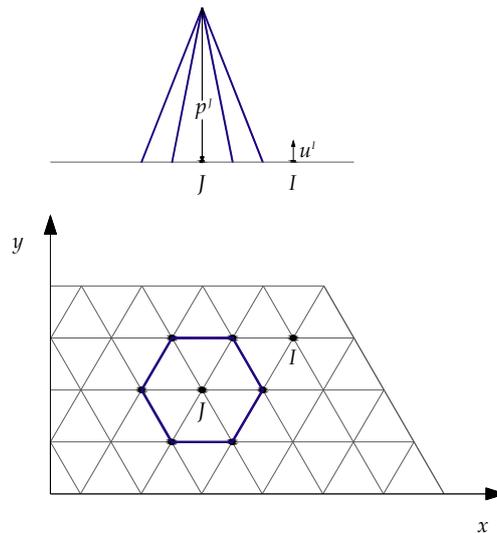
Diferencia de desplazamientos en $x_i = a, y_i = 0$	Elemento cuadrado	2 elementos triangulares	Error (%)
$u_{11}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	$4.0291 \cdot 10^{-15}$	$4.0291 \cdot 10^{-15}$	$-3.1554 \cdot 10^{-28}$
$u_{11}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa			
$u_{12}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	0	$1.6024 \cdot 10^{-31}$	$-1.6024 \cdot 10^{-29}$
$u_{12}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa	$3.0263 \cdot 10^{-15}$	$3.0263 \cdot 10^{-15}$	$-3.1554 \cdot 10^{-28}$
$u_{13}$ (m) si $p_{j3} = 1$ Pa	$2.9052 \cdot 10^{-15}$	$2.9052 \cdot 10^{-15}$	$-2.3666 \cdot 10^{-28}$

Tabla 4.4. Comparación de coeficientes de influencia elástica en un vértice del rectángulo.

Diferencia de desplazamientos en $x_i = a, y_i = b$	Elemento cuadrado	2 elementos triangulares	Error (%)
$u_{11}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	$2.4628 \cdot 10^{-15}$	$2.4628 \cdot 10^{-15}$	$-4.7332 \cdot 10^{-28}$
$u_{11}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa			
$u_{12}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	$4.0043 \cdot 10^{-16}$	$4.0043 \cdot 10^{-16}$	$1.4791 \cdot 10^{-29}$
$u_{12}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa	$2.4628 \cdot 10^{-15}$	$2.4628 \cdot 10^{-15}$	$-4.7332 \cdot 10^{-28}$
$u_{13}$ (m) si $p_{j3} = 1$ Pa	$2.0282 \cdot 10^{-15}$	$2.0282 \cdot 10^{-15}$	$-4.3387 \cdot 10^{-28}$

**VI. Aplicación de la técnica de integración desarrollada para la obtención de los coeficientes de influencia elástica de un elemento de tensión piramidal formado a partir de seis elementos triangulares equiláteros**

En este subapartado, se obtienen los coeficientes de influencia elástica correspondientes a distribuciones de tensiones de tipo piramidal sobre una base hexagonal formada por seis elementos triangulares equiláteros con un vértice en común (nodo  $J$ ) en el que se considera que el valor de tensión es unitario, como se muestra en la Figura 4.24. El valor de la longitud del lado de un triángulo ( $l_e$ ) se ha considerado de 1 mm. En la Figura 4.25, se representan las diferencias de los desplazamientos debidos a dicha distribución de tensiones, las cuales al ser el valor de la tensión unitario (altura de la pirámide), equivalen a los coeficientes de influencia elástica. En la Tabla 4.5 se recogen los valores de estos coeficientes en el centro de la pirámide de base hexagonal y en la Tabla 4.6, los valores correspondientes en un vértice de la base hexagonal de la pirámide.



**Figura 4.24. Elemento de tensión piramidal sobre base hexagonal, formada por 6 elementos triangulares equiláteros.**

Johnson [97] proporciona una expresión analítica para obtener el desplazamiento vertical (deflexión) en un cuerpo producido por la aplicación de una distribución de tensión normal de tipo piramidal sobre una base hexagonal, constituida por seis triángulos equiláteros. El desplazamiento vertical del cuerpo  $a$  en el centro del hexágono  $u_{3_0}$  se puede calcular mediante la siguiente expresión

$$u_{3_o}^{(a)} = \frac{1 - \nu^{(a)^2}}{2\pi E^{(a)}} 3\sqrt{3} \ln(3) l_e p_{3_o}^{(a)}, \quad (4.130)$$

siendo  $p_{3_o}$  el valor de la tensión normal en el centro del hexágono.

Por otra parte, el desplazamiento vertical en cualquier vértice del hexágono  $u_{3_v}$  se obtiene a partir del desplazamiento vertical en el centro del hexágono según

$$u_{3_v}^{(a)} = \frac{u_{3_o}^{(a)}}{3} \quad (4.131)$$

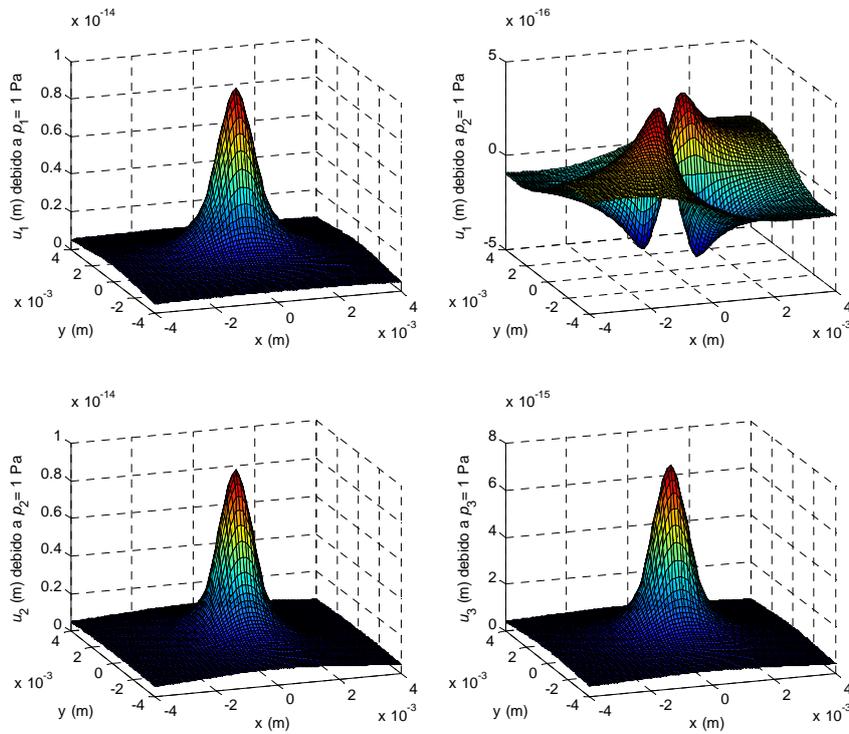


Figura 4.25. Diferencias de desplazamientos producidos por tensiones unitarias lineales sobre un área hexagonal (Coeficientes de influencia elástica).

Considerando que la diferencia de desplazamientos verticales entre los dos cuerpos en contacto ( $u_3$ ) es el doble del desplazamiento de uno de los dos cuerpos ( $u_3^{(a)}$ ), y sustituyendo los valores de las propiedades mecánicas del acero, del lado de un triángulo equilátero ( $l_e = 1$  mm) y el valor de la tensión normal en el centro

del hexágono, la diferencia de desplazamientos verticales entre los cuerpos en el centro del hexágono resulta

$$u_{3_o} = 2u_{3_o}^{(a)} = \frac{1-\nu^2}{\pi E} 3\sqrt{3} \ln(3) l_e p_{3_o} = 7.9882 \cdot 10^{-15} \text{ m},$$

y en un vértice del hexágono

$$u_{3_v} = \frac{u_{3_o}}{3} = 2.6627 \cdot 10^{-15} \text{ m}.$$

Estos valores de diferencias de desplazamientos concuerdan con los obtenidos con el método expuesto, que se muestran en negrita en las Tablas 4.5 y 4.6, respectivamente. Con lo que se puede concluir que se ha implementado correctamente la metodología descrita para el cálculo de los coeficientes de influencia elástica en elementos triangulares con distribuciones de tensiones lineales.

**Tabla 4.5. Coeficientes de influencia elástica en el centro de la pirámide de base hexagonal.**

Diferencia de desplazamientos en $x_i = 0$ $y_i = 0$	6 elementos triangulares equiláteros
$u_{i1}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	9.6999·10 <sup>-15</sup>
$u_{i1}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa	2.4652·10 <sup>-32</sup>
$u_{i2}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	9.6999·10 <sup>-15</sup>
$u_{i2}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa	9.6999·10 <sup>-15</sup>
$u_{i3}$ (m) si $p_{j3} = 1$ Pa	<b>7.9882·10<sup>-15</sup></b>

Tabla 4.6. Coeficientes de influencia elástica en un vértice de la pirámide de base hexagonal.

Diferencia de desplazamientos en $x_i = l_e, y_i = 0$	6 elementos triangulares equiláteros
$u_{11}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	$3.6479 \cdot 10^{-15}$
$u_{11}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa	
$u_{12}$ (m) si $p_{j1} = 1$ Pa	$-1.3558 \cdot 10^{-32}$
$u_{12}$ (m) si $p_{j2} = 1$ Pa	$2.8187 \cdot 10^{-15}$
$u_{13}$ (m) si $p_{j3} = 1$ Pa	$2.6627 \cdot 10^{-15}$

### VII. Comparación de la solución del problema normal de Hertz, discretizando la distribución de tensiones mediante elementos rectangulares de tensión constante y elementos triangulares de tensión lineal

En este subapartado, se estudia la convergencia a la solución analítica de Hertz de la solución al problema normal de contacto calculada mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario. El objetivo de este estudio es el de comparar la convergencia a la solución conocida de Hertz del modelo de contacto basado en la Teoría Variacional de Kalker, en el que se han calculado los coeficientes de influencia elástica por dos procedimientos: el empleado habitualmente, en el que se discretiza el área potencial de contacto en elementos rectangulares en los que se asumen las tensiones constantes y el desarrollado en esta Tesis, en el que se discretiza el área potencial de contacto en elementos triangulares equiláteros y se considera que las tensiones varían linealmente en su interior.

En la Figura 4.26 se representa el error relativo entre la fuerza vertical obtenida mediante los dos métodos descritos anteriormente y la fuerza vertical calculada mediante la teoría de Hertz, en función del tamaño del elemento y del número de puntos del área potencial de contacto que se encuentran dentro del área de contacto real. En la Figura 4.27 se muestra el error relativo entre la máxima tensión normal obtenida a partir de los dos métodos anteriores y la máxima tensión de la distribución de presión normal de Hertz.

Se puede observar en las Figuras 4.26 y 4.27 que los resultados obtenidos no son los esperados inicialmente, puesto que no se consigue mejorar la convergencia a la

solución semianalítica de Hertz empleando elementos triangulares en los que las tensiones varían linealmente en vez de elementos rectangulares con tensiones uniformes. A conclusiones similares llega Vollebregt en [212], al realizar un análisis preliminar, aproximando distribuciones de tensiones bilineales sobre elementos rectangulares discretizando dichos elementos en subelementos rectangulares en los que consideró las tensiones constantes.

Aún con ello, los errores relativos asociados al método de los elementos triangulares para un tamaño de elemento en torno a los 2 mm no son superiores en ningún caso al 1.2 %, con lo que se puede considerar el método aceptable.

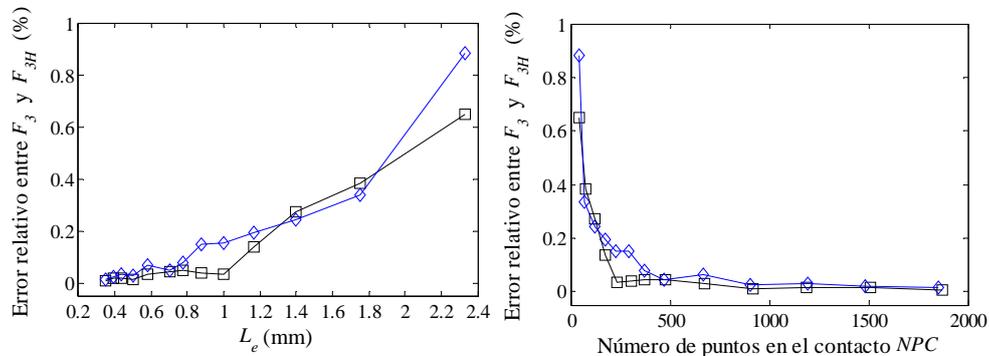


Figura 4.26. Error relativo entre la fuerza normal calculada con el modelo de contacto no herciano y no estacionario y la solución analítica de Hertz en función del tamaño de elemento y el número de puntos en el área de contacto real:  $\square$ , elementos rectangulares con carga constante;  $\diamond$ , elementos triangulares con carga lineal.

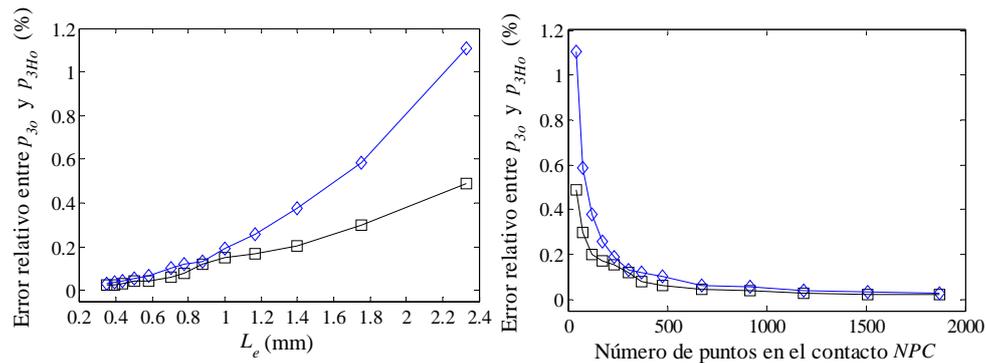


Figura 4.27. Error relativo entre la presión normal máxima calculada con el modelo no herciano y no estacionario y la presión normal máxima del modelo de Hertz en función del tamaño de elemento y el número de puntos en el área de contacto real:  $\square$ , elementos rectangulares con carga constante;  $\diamond$ , elementos triangulares con carga lineal.

#### **4.4.4 Análisis de la influencia del contacto no herciano y del proceso no estacionario en las fuerzas y distribuciones de tensiones en el contacto**

En este subapartado se aplica el modelo de contacto no herciano y no estacionario descrito en esta sección, en primer lugar, al estudio de los efectos no estacionarios producidos por variaciones de longitud de onda corta de parámetros del contacto. En segundo lugar, se analiza la influencia de los efectos no hercianos debidos a la circulación de la rueda sobre corrugación de longitud de onda corta en las fuerzas y distribuciones de tensiones en el contacto rueda-carril.

En las simulaciones realizadas, se ha adoptado un área potencial de contacto hexagonal de 17.5 mm de lado, con 14 elementos triangulares equiláteros de 1.25 mm de lado. Las matrices de coeficientes de influencia elástica se calculan una única vez, pudiendo almacenarse y emplearse en sucesivas simulaciones. El tamaño del paso espacial entre dos posiciones sucesivas del área potencial de contacto se ha considerado de 1.25 mm.

Los perfiles de la rueda y el carril se han aproximado mediante funciones cuadráticas, cuyos coeficientes vienen dados por los radios de la rueda y el carril que se indican en la Tabla 4.7.

**Tabla 4.7. Parámetros del modelo de contacto no herciano y no estacionario.**

Radio de la curvatura de la cabeza del carril (mm) (convexa)	300
Radio del perfil de la rueda (mm) (cóncava)	409
Radio de la rueda (mm)	500
Coefficiente de rozamiento	0.4

#### ***I. Análisis del proceso no estacionario en el contacto producido por la variación de la fuerza normal***

En este subapartado, se estudia mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario el efecto que produce en la fuerza longitudinal de contacto la variación de la fuerza normal según cuatro longitudes de onda (15 mm, 30 mm, 60 mm y 90 mm) de acuerdo con la expresión (4.132). El pseudodeslizamiento longitudinal se mantiene constante e igual a -0.002 y se calcula la fuerza longitudinal, esto es, se resuelve el problema dinámico inverso. Dado que las

superficies en contacto se consideran lisas, sin rugosidad ni corrugación, el contacto será herciano, ocasionando la variación de la fuerza normal una oscilación del tamaño de la elipse de contacto.

$$F_3(x) = F_{3m} + F_{3a} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ siendo } F_{3m} = 100 \text{ kN y } F_{3a} = 45 \text{ kN} \quad (4.132)$$

En la Figura 4.28, se representa la fuerza longitudinal en el contacto para cada longitud de onda de la fuerza normal frente a la relación entre la posición de la rueda y la longitud de onda de la variación  $x/\lambda$ . Dicha fuerza se compara con la obtenida con el modelo de contacto estacionario FASTSIM, cuya amplitud no varía con las distintas longitudes de onda de la fuerza normal.

Se puede observar en la Figura 4.28 que conforme disminuye la longitud de onda de la fuerza normal, la amplitud de la fuerza longitudinal también se reduce. No obstante, cuando la fuerza normal fluctúa con una longitud de onda superior a 60 mm, la fuerza longitudinal calculada con el modelo no herciano y no estacionario prácticamente coincide en amplitud con la obtenida con FASTSIM. Sin embargo, se aprecia un pequeño desfase entre la fuerza simulada con FASTSIM y la calculada con el modelo no herciano y no estacionario, que puede ser atribuible al proceso no estacionario en el contacto. Se puede apreciar que cuando se prescribe el pseudodeslizamiento longitudinal se requiere que la rueda recorra una distancia aproximadamente igual a una longitud de onda de la variación de la fuerza normal para que se alcance la solución permanente.

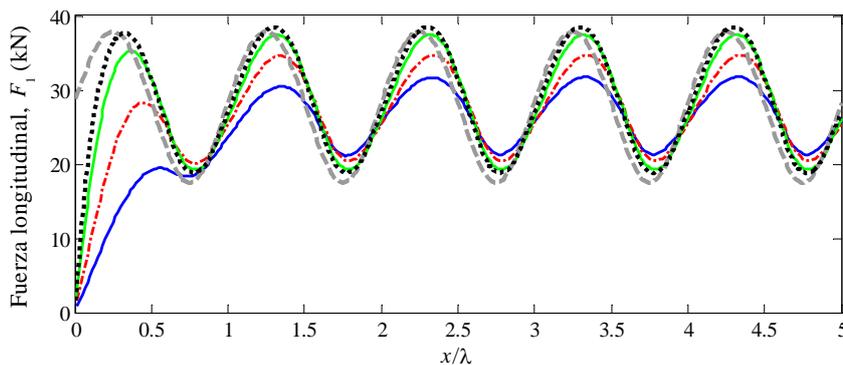


Figura 4.28. Comparación de la fuerza longitudinal calculada con el modelo no herciano y no estacionario para diferentes longitudes de onda de variación de la fuerza normal con la fuerza calculada con FASTSIM: —,  $\lambda=15$  mm; - - -,  $\lambda=30$  mm; —,  $\lambda=60$  mm; ·····,  $\lambda=90$  mm; - · - ·, FASTSIM.

## II. Análisis del proceso no estacionario en el contacto producido por la variación del pseudodeslizamiento longitudinal

En este subapartado, se analiza cómo afecta la variación del pseudodeslizamiento longitudinal con diferentes longitudes de onda en torno a un valor medio no nulo, según la expresión (4.133) y en torno a un valor medio nulo, de acuerdo con la expresión (4.134), a la fuerza longitudinal de contacto. En este caso, la fuerza normal de contacto se considera constante e igual a 100 kN, con lo que el tamaño de la elipse de contacto permanecerá constante.

$$\xi(x) = \xi_m + \xi_a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ con } \xi_m = -0.002 \text{ y } \xi_a = -0.001 \quad (4.133)$$

En la Figura 4.29 se representan las fuerzas longitudinales correspondientes a las cuatro longitudes de onda analizadas (15 mm, 30 mm, 60 mm y 90 mm), con el objetivo de compararlas con la fuerza longitudinal calculada con FASTSIM. Nuevamente, se observa que la fluctuación de mayor frecuencia del pseudodeslizamiento longitudinal se traduce en una fuerza longitudinal de menor amplitud pico a pico en comparación con la fuerza longitudinal resultante de una variación del pseudodeslizamiento con una longitud de onda mayor. También se puede apreciar en la Figura 4.29 que el desfase entre la fuerza longitudinal calculada con FASTSIM y la fuerza obtenida con el modelo no herciano y no estacionario es mayor a medida que disminuye la longitud de onda de variación del pseudodeslizamiento.

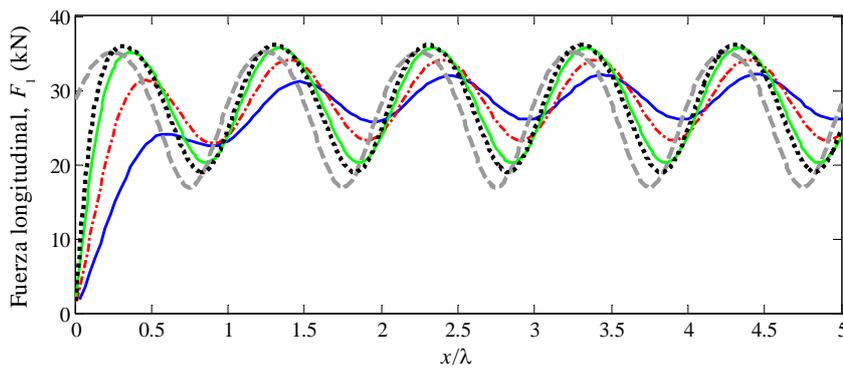


Figura 4.29. Comparación de la fuerza longitudinal obtenida con el modelo no herciano y no estacionario para diferentes longitudes de onda de variación del pseudodeslizamiento longitudinal respecto a un valor medio con la fuerza calculada con FASTSIM: —,  $\lambda=15$  mm; - - - - ,  $\lambda=30$  mm; —,  $\lambda=60$  mm; ·····,  $\lambda=90$  mm; - - - - , FASTSIM.

En la Figura 4.30, se muestra la fuerza longitudinal para las cuatro longitudes de onda de variación del pseudodeslizamiento longitudinal alternante puro, según la expresión

$$\xi(x) = \xi_a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ con } \xi_a = -0.002 \quad (4.134)$$

En este caso, al considerar un valor medio del pseudodeslizamiento nulo, la fuerza longitudinal resultante también oscila alrededor de cero. De forma similar a los casos anteriores, la amplitud de la fuerza longitudinal disminuye a medida que decrece la longitud de onda del pseudodeslizamiento.

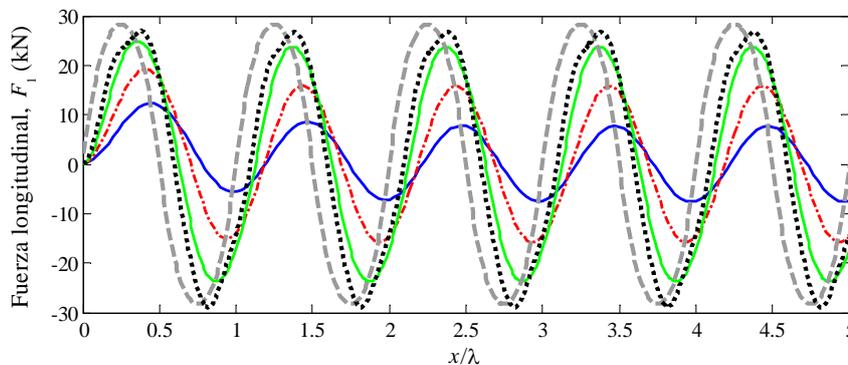


Figura 4.30. Comparación de la fuerza longitudinal obtenida con el modelo no herciano y no estacionario para distintas longitudes de onda de variación del pseudodeslizamiento longitudinal respecto a un valor medio nulo con la fuerza calculada con FASTSIM: —,  $\lambda=15$  mm; - - - ,  $\lambda=30$  mm; —,  $\lambda=60$  mm; ..... ,  $\lambda=90$  mm; - - - -, FASTSIM.

Se podría concluir a partir de los resultados mostrados en los subapartados anteriores que el modelo de contacto estacionario FASTSIM sobreestima la amplitud de la fuerza longitudinal cuando las longitudes de onda de la fluctuación de la fuerza normal o del pseudodeslizamiento longitudinal es inferior a 90 mm. Asimismo, FASTSIM no es capaz de representar el desfase que aparece en la fuerza longitudinal a medida que disminuye la longitud de onda de la variación de los parámetros del contacto.

### III. Estudio de la influencia en el contacto de la rodadura sobre superficies corrugadas

A continuación, se va a analizar el efecto que produce la rodadura de una rueda sobre un carril con corrugación en las distribuciones de tensiones normales y tangenciales mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario. Dado que la superficie de rodadura del carril presenta ondulaciones sinusoidales, las

condiciones en el contacto rueda-carril serán no hercianas. Únicamente se considera la variación del perfil longitudinal del carril debida a la corrugación sinusoidal presente en la superficie de rodadura de éste. La banda de rodadura de la rueda se asume libre de irregularidades. El perfil transversal real de la rueda no se ha modelado. Se prescribe una fuerza normal de 100 kN y un pseudodeslizamiento longitudinal medio de -0.2%.

Piotrowski y Kalker [163] definieron un factor para distinguir entre corrugación profunda o superficial, que denominaron *factor de superficialidad*

$$\alpha = \frac{\lambda^2}{4\pi^2 R_w z_0}, \quad (4.135)$$

donde  $\lambda$  y  $z_0$  son la longitud de onda y la amplitud de la corrugación, respectivamente, y  $R_w$  es el radio de la rueda. De este modo, la corrugación es superficial o poco profunda si  $\alpha > 1$ , y por el contrario, es profunda si  $\alpha \leq 1$ . En la Figura 4.31 se representa el *factor de superficialidad* frente a la longitud de onda de la corrugación para varias amplitudes del defecto, considerando el radio de la rueda  $R_w = 0.5$  m.

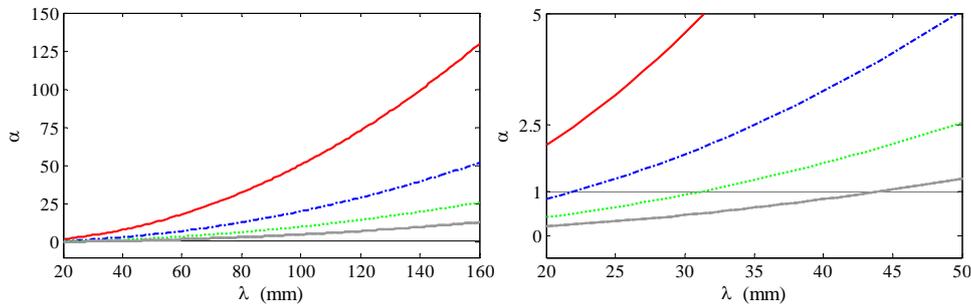


Figura 4.31. Factor de superficialidad  $\alpha$  de la corrugación sinusoidal en función de la longitud de onda, para varias amplitudes  $z_0$  del defecto: —, 10  $\mu\text{m}$ ; - - - , 25  $\mu\text{m}$ ; ..... , 50  $\mu\text{m}$ ; — , 100  $\mu\text{m}$ ;

Se va a estudiar la evolución de las distribuciones de tensiones en el contacto, una vez alcanzada la solución permanente, a lo largo de una longitud de onda de una corrugación de tipo sinusoidal, cuyo perfil longitudinal viene dado por la siguiente función

$$z(x) = z_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda} + \varphi\right) \quad (4.136)$$

En los resultados que se presentan a continuación, se han considerado dos tipos de corrugación inicial, ambas de una longitud de onda  $\lambda = 30$  mm: una superficial,

con una amplitud  $z_0 = 10 \mu\text{m}$  ( $\alpha = 4.56$ ) y otra profunda, con una amplitud  $z_0 = 50 \mu\text{m}$  ( $\alpha = 0.91$ ) con un ángulo de fase inicial  $\varphi = 0$  radianes.

Cuando la rueda está ascendiendo por un flanco de la corrugación (ver Figura 4.32), el centro del área de contacto entre la rueda y el carril no se localiza en la proyección vertical del centro de la rueda, sino que se encuentra desplazado hacia el pico de la corrugación una pequeña distancia, conocida como *desplazamiento geométrico*  $s_g$ .

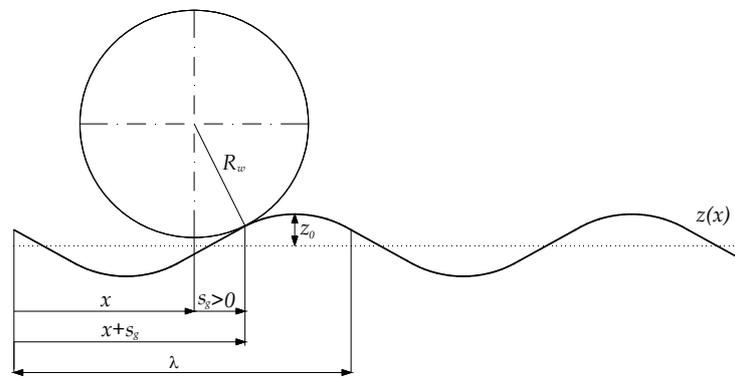


Figura 4.32. Representación del desplazamiento geométrico del centro del área de contacto debido al contacto entre la rueda y el flanco ascendente de la corrugación sinusoidal.

Debido al efecto de la rodadura sobre corrugación, la distribución de tensión normal al contacto no es simétrica, estando ligeramente inclinada hacia el pico de la corrugación. En la Figura 4.33, se muestran las distribuciones de tensiones normal y longitudinal en el área de contacto cuando la rueda asciende por un flanco de la corrugación superficial ( $\lambda = 30 \text{ mm}$  y  $z_0 = 10 \mu\text{m}$ ).

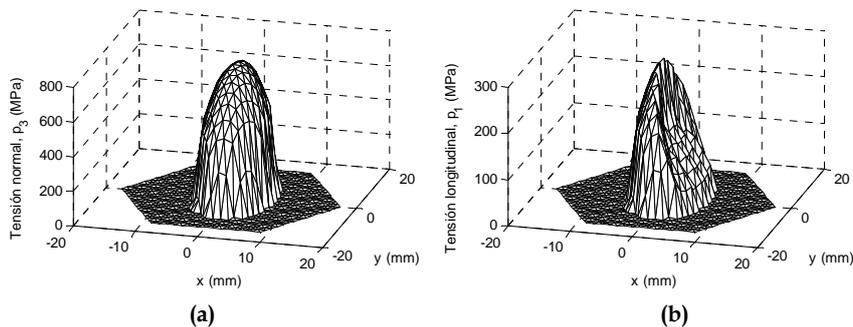
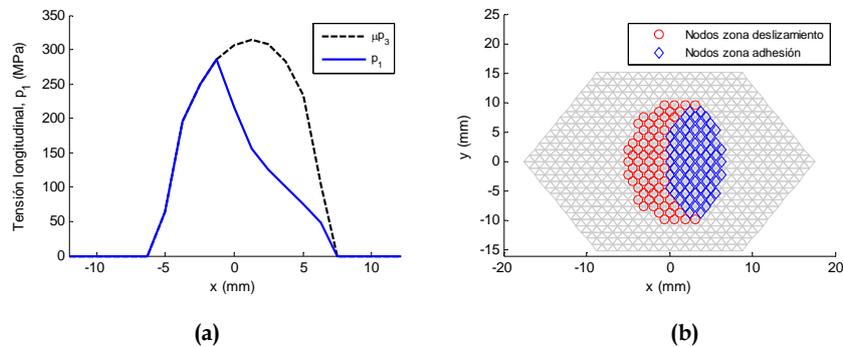


Figura 4.33. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y el flanco ascendente de la corrugación superficial: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

En la Figura 4.34(a) se representa la distribución de tensión longitudinal que se ha mostrado en la Figura 4.33(b), a lo largo de la línea longitudinal central del contacto junto con el límite de fricción. Como se ha comentado anteriormente, se observa, por una parte, que el centro del área de contacto se encuentra desplazado hacia la cresta de la corrugación inicial y, por la otra, se aprecia una ligera asimetría en las distribuciones de tensiones. En la Figura 4.34(b) se muestra la forma del área de contacto, casi elíptica, y la división de ésta en las zonas de adhesión y deslizamiento.



**Figura 4.34. Distribución de tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) y división del área de contacto en zona de deslizamiento y de adhesión. (a) Tensión longitudinal junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).**

En cambio, si la corrugación es profunda ( $\lambda = 30$  mm y  $z_0 = 50$   $\mu$ m), cuando la rueda asciende por un flanco de la corrugación, el efecto del desplazamiento geométrico es mucho más acusado, como se puede apreciar en la Figura 4.35, en la que se representan las distribuciones de tensiones normal y longitudinal en el contacto. Asimismo, resulta evidente la asimetría de la distribución de tensión normal, que se inclina hacia el pico de la corrugación. En la Figura 4.36, también se pueden advertir ambos efectos no hercianos.

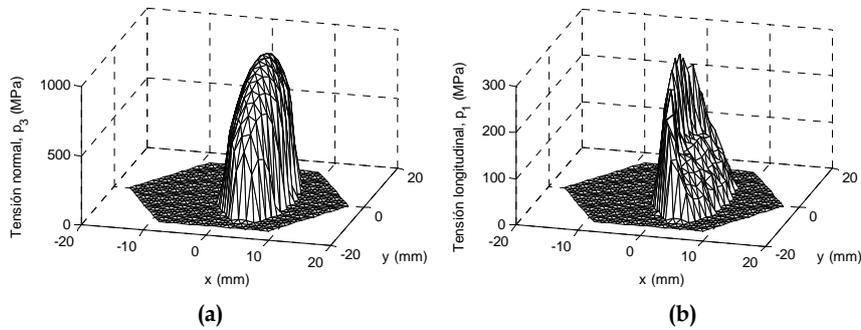


Figura 4.35. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y el flanco ascendente de la corrugación profunda: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

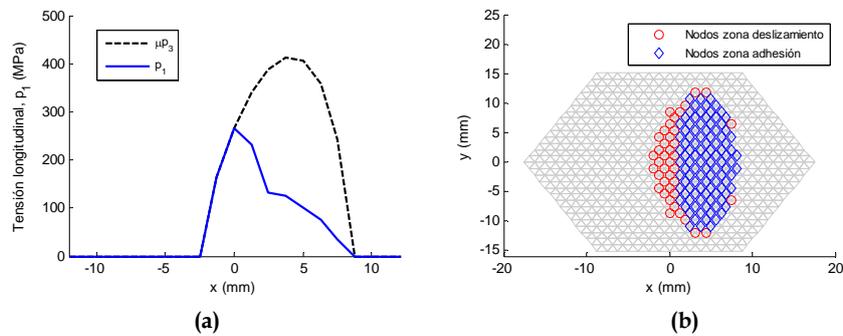


Figura 4.36. Distribución de tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) y división del área de contacto en zona de deslizamiento y de adhesión. (a) Tensión longitudinal junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

Considérese ahora que la rueda está subiendo por un flanco de la corrugación profunda, pero el punto de contacto nominal entre la rueda y la corrugación se localiza cerca del valle de la corrugación. En este caso, como se puede apreciar en la Figura 4.37, las distribuciones de tensiones presentarán dos máximos relativos, alejándose notablemente de la distribución de tensión normal de Hertz. En la Figura 4.38, se representa la tensión longitudinal en la línea central del contacto y se muestra la forma del área de contacto, con los nodos que se encuentran en condiciones de adhesión y deslizamiento. Se observa en la Figura 4.38(b) que la zona de deslizamiento, donde se produce el desgaste, ocupa la mayor parte del área de contacto.

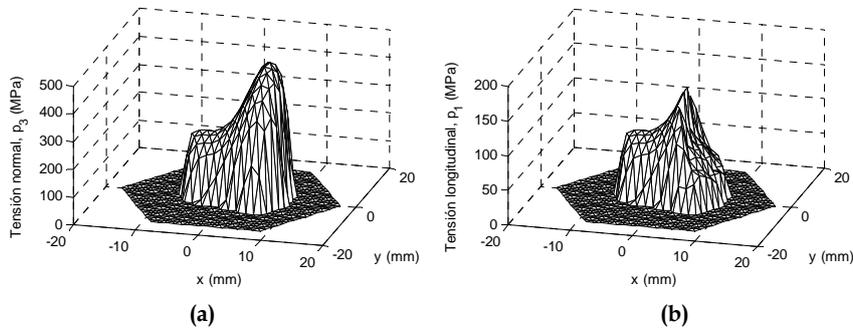


Figura 4.37. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y la transición valle-flanco ascendente de la corrugación profunda: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

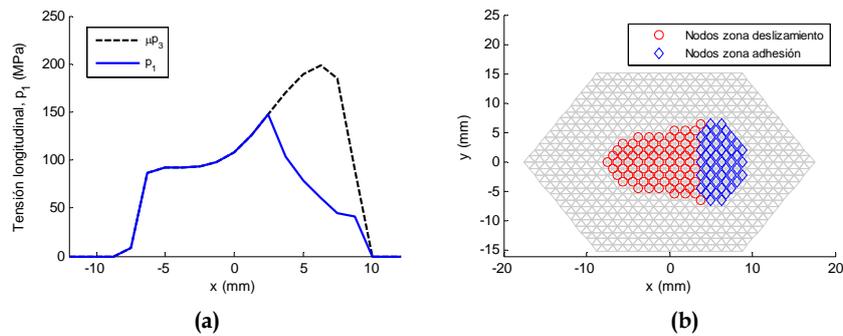


Figura 4.38. Distribución de tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) y división del área de contacto en zona de deslizamiento y de adhesión. (a) Tensión longitudinal junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

Cuando el contacto entre la rueda y carril se produce sobre el pico de la corrugación, el área de contacto no se desplaza respecto a la proyección vertical del centro de la rueda, como se ilustra en la Figura 4.39.

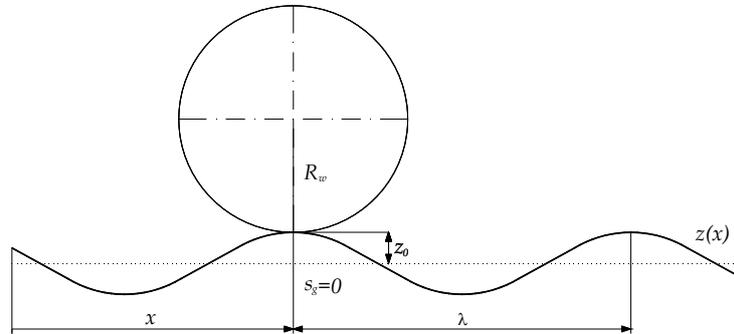


Figura 4.39. Representación del desplazamiento geométrico del punto de contacto debido al contacto entre la rueda y el pico de la corrugación sinusoidal.

En este caso, la distribución de tensión normal es simétrica, como puede apreciarse en las Figuras 4.40 y 4.41, correspondientes al paso de la rueda sobre la corrugación superficial. Se puede observar en la Figura 4.41(b) que la forma del área de contacto prácticamente responde a una elipse.

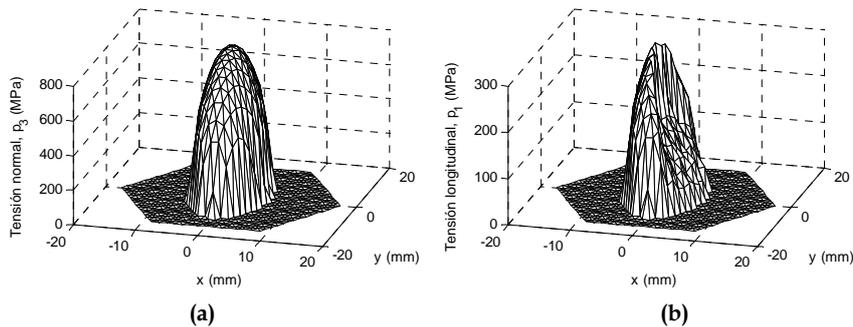


Figura 4.40. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y el pico de la corrugación superficial: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

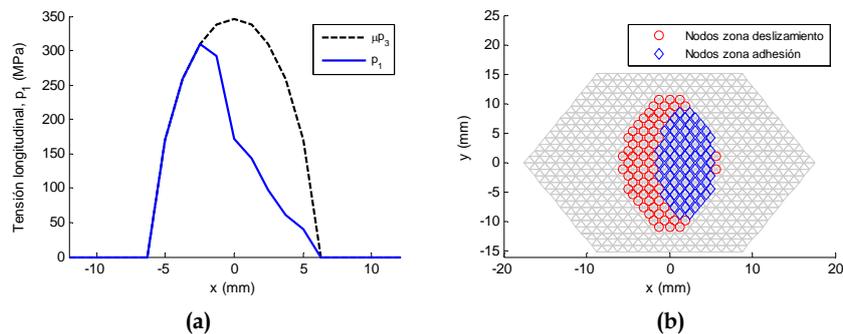


Figura 4.41. (a) Tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

No obstante, en el caso de que se trate de la corrugación profunda, la distribución de tensión normal sigue siendo simétrica, pero es sensiblemente más estrecha en la dirección longitudinal, a la vez que el valor máximo es casi 1.5 veces mayor al correspondiente a la corrugación superficial, como se deduce comparando las Figuras 4.40(a) y 4.42(a). En la Figura 4.43, se observa que la mayor parte del área de contacto la ocupa la zona de adhesión.

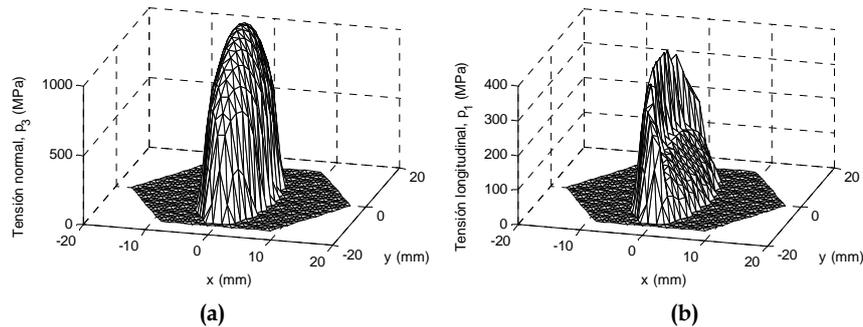


Figura 4.42. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y el pico de la corrugación profunda: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

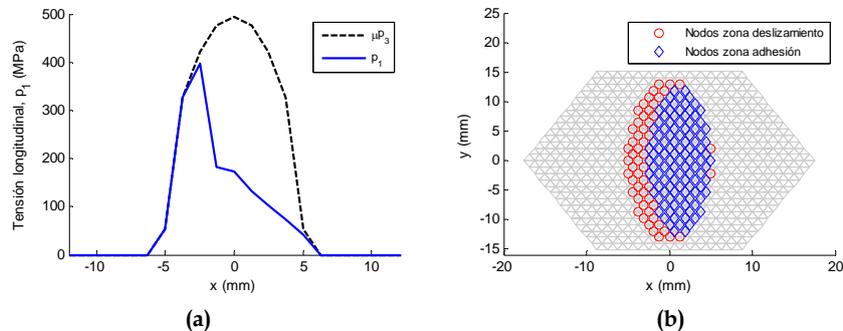


Figura 4.43. (a) Tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

De forma similar al caso en el que la rueda está ascendiendo por un flanco de la corrugación, cuando se encuentra descendiendo por un flanco (ver Figura 4.44), el centro del área de contacto se desplaza hacia el pico más próximo de la corrugación, tomando el desplazamiento geométrico signo negativo.

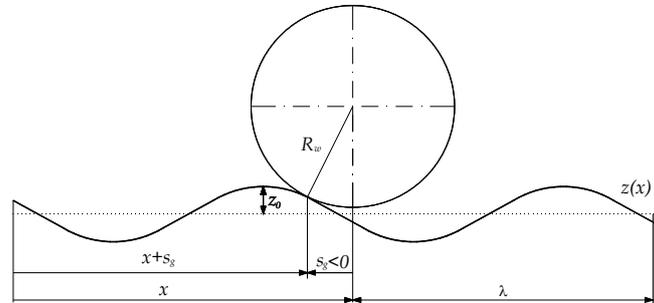


Figura 4.44. Representación del desplazamiento geométrico del centro del área de contacto debido al contacto entre la rueda y el flanco descendente de la corrugación sinusoidal.

Asimismo, la distribución de tensión normal, que es asimétrica, presenta una ligera inclinación hacia el pico de la corrugación sinusoidal, como se puede observar en las Figuras 4.45 y 4.46, correspondientes a la corrugación superficial. Se puede apreciar en la Figura 4.46(b) cómo la zona de deslizamiento se extiende en gran parte del área de contacto.

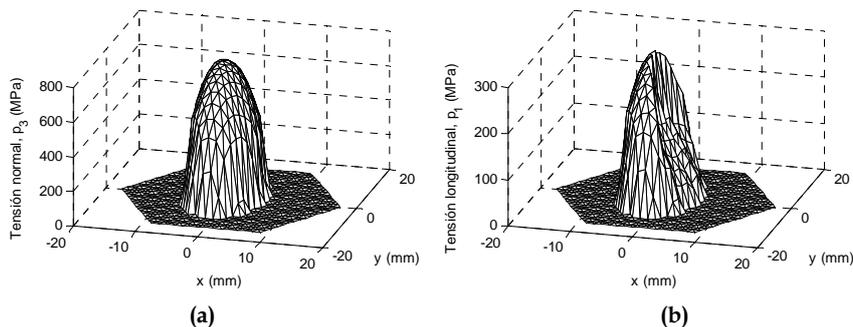


Figura 4.45. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y el flanco descendente de la corrugación superficial: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

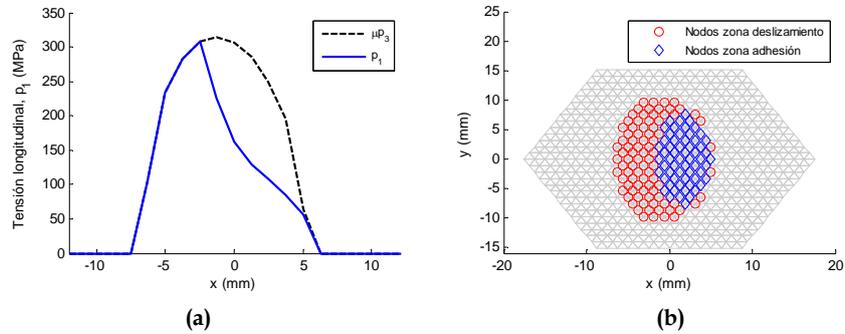


Figura 4.46. (a) Tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

Si se considera el caso de la corrugación profunda, cuando la rueda desciende por el flanco de la misma, el efecto del desplazamiento geométrico del área de contacto es más evidente, a la vez que lo es la asimetría de la distribución de tensión normal al contacto, como se muestra en las Figuras 4.47 y 4.48. El área de contacto, como se puede observar en la Figura 4.48(b), se aleja visiblemente de la forma elíptica de la Teoría de Hertz.

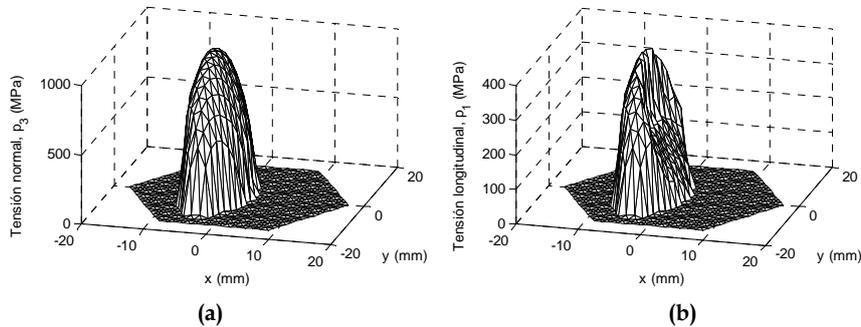


Figura 4.47. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y el flanco descendente de la corrugación profunda: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

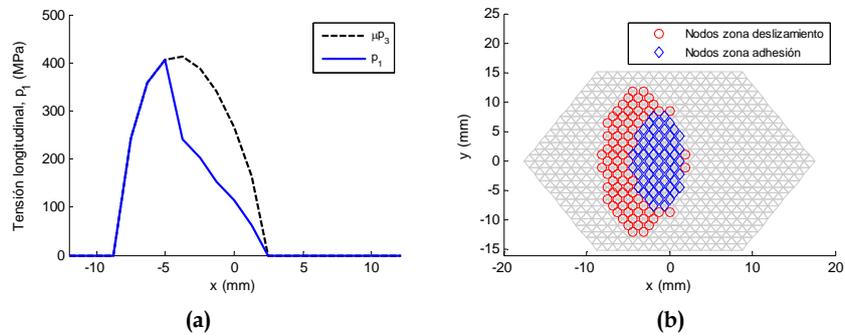


Figura 4.48. (a) Tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

Sin embargo, si la posición nominal del punto de contacto se encuentra próxima al valle de la corrugación profunda, las distribuciones de tensiones y el área de contacto cambian significativamente, como se puede apreciar en las Figuras 4.49 y 4.50. La distribución de tensión normal presenta dos máximos relativos (ver Figura 4.49(a)), siendo de mayor magnitud el más próximo al pico de la corrugación profunda. Como se puede observar en la Figura 4.50(b), la práctica totalidad del área de contacto (en forma de “lágrima”) se encuentra en la zona de deslizamiento.

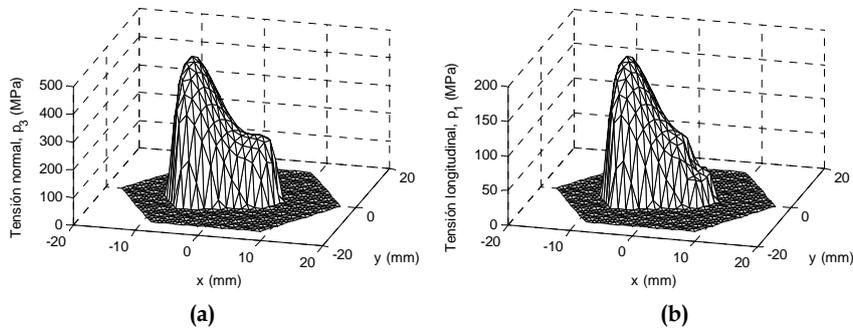


Figura 4.49. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y la transición flanco descendente-valle de la corrugación profunda: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

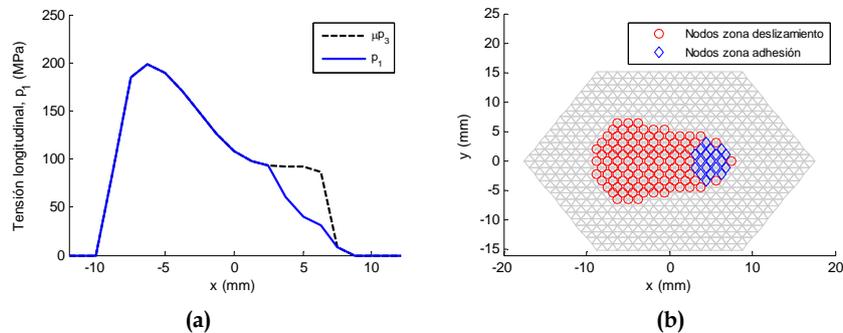


Figura 4.50. (a) Tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

Cuando la rueda se encuentra en el valle de la corrugación, el centro del área de contacto coincide con la proyección vertical del centro de la rueda (ver Figura 4.51), con lo que el desplazamiento geométrico del punto de contacto es nulo. En esta posición, el área de contacto resultante es más ancha en la dirección longitudinal en comparación con la resultante cuando la rueda está situada sobre el pico de la corrugación.

En las Figuras 4.52 y 4.53, se pueden ver las distribuciones de tensiones normal y longitudinal y las zonas de deslizamiento y adhesión del área de contacto, correspondientes al caso en que la rueda está en el valle de la corrugación superficial. La distribución de tensión normal presenta un aspecto achatado, como se puede observar en la Figura 4.52(a), y el área de contacto es casi circular (ver Figura 4.53(b)), en contraste con el área resultante del contacto entre la rueda y el pico de la corrugación.

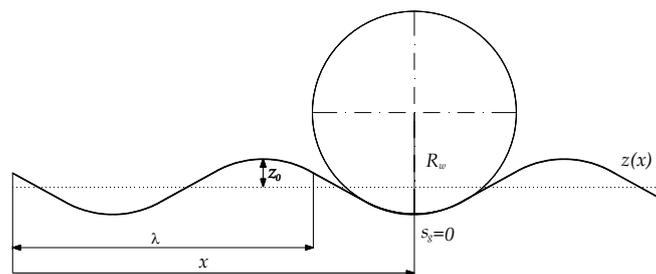


Figura 4.51. Representación del desplazamiento geométrico del centro del área de contacto cuando la rueda está en contacto con el valle de la corrugación sinusoidal.

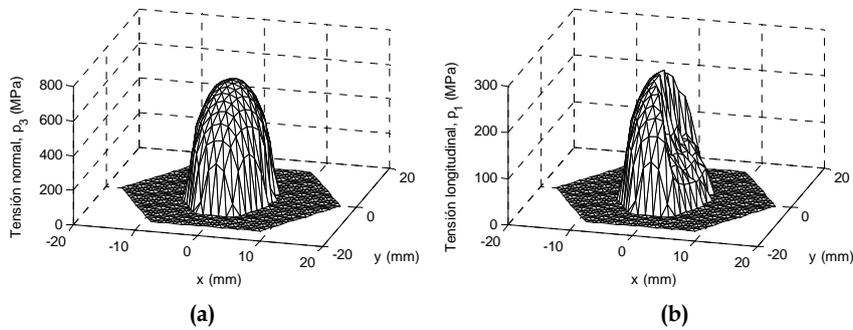


Figura 4.52. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y el valle de la corrugación superficial: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

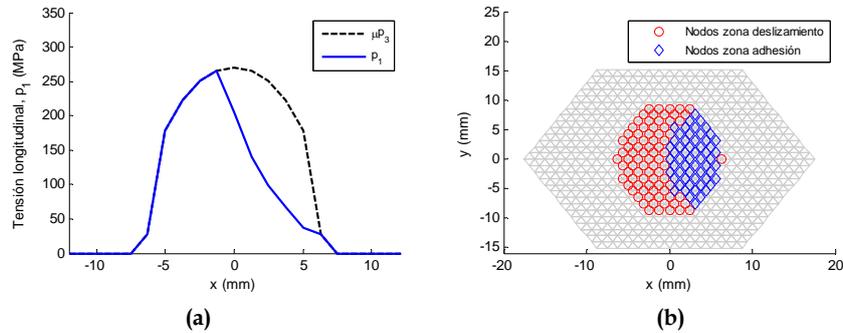


Figura 4.53. (a) Tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

En cambio, si se analiza el caso de la corrugación profunda, resulta interesante advertir cómo la distribución de tensión normal, aunque simétrica, presenta dos máximos de igual magnitud (ver Figura 4.54). El área de contacto resultante se asemeja a dos círculos unidos, como se puede observar en la Figura 4.55(b), y la zona de deslizamiento ocupa gran parte de la misma.

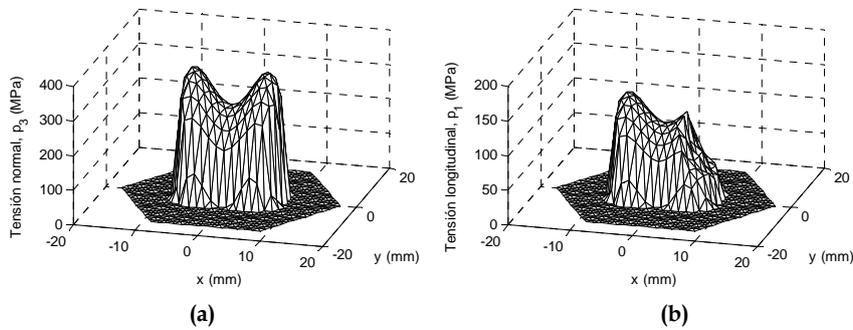


Figura 4.54. Distribuciones de tensiones en el contacto entre la rueda y el valle de la corrugación profunda: (a) Tensión normal; (b) Tensión tangencial longitudinal.

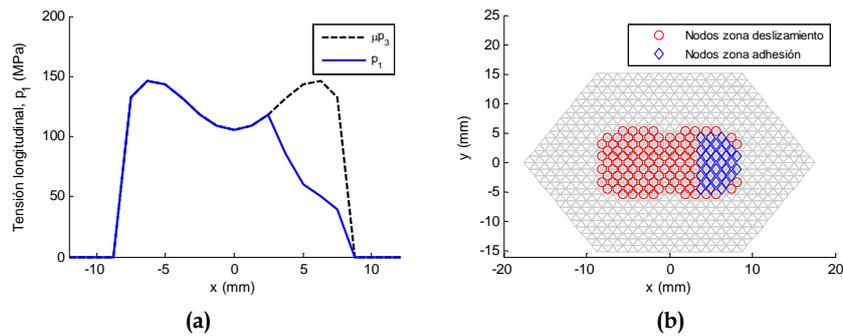


Figura 4.55. (a) Tensión longitudinal en la línea central del contacto ( $y=0$ ) junto con el límite de fricción; (b) Nodos en el contacto que se encuentran en las zonas de deslizamiento (rojo) y adhesión (azul).

Puesto que el desplazamiento que sufre el área de contacto debido al contacto entre la rueda y la corrugación es puramente geométrico, si el perfil de la corrugación es conocido, el *desplazamiento geométrico* se podrá calcular a partir de éste, de la siguiente forma [163]

$$\frac{s_g}{R_w} = \frac{\partial z(x + s_g)}{\partial x} \quad (4.137)$$

Si el perfil de la corrugación es de tipo sinusoidal, definido por la función (4.136), el *desplazamiento geométrico* calculado a partir de (4.137), resulta

$$s_g(x) = \frac{2\pi z_0 R_w}{\lambda} \cos\left(\frac{2\pi(x + s_g)}{\lambda} + \varphi\right). \quad (4.138)$$

Esta expresión es no lineal, pero es posible resolverla mediante Newton-Raphson. A partir de ella se puede deducir fácilmente el valor máximo del *desplazamiento geométrico*

$$|s_g|_{\max} = \frac{2\pi z_0 R_w}{\lambda}. \quad (4.139)$$

En la Figura 4.56, se representa el *desplazamiento geométrico* máximo en función de la longitud de onda de la corrugación sinusoidal para distintas amplitudes del defecto. Se puede observar, que para longitudes de onda cortas y amplitudes crecientes de la corrugación inicial, el *desplazamiento geométrico* no puede despreciarse, dado que puede tomar valores máximos de un orden de magnitud similar al tamaño del área de contacto.

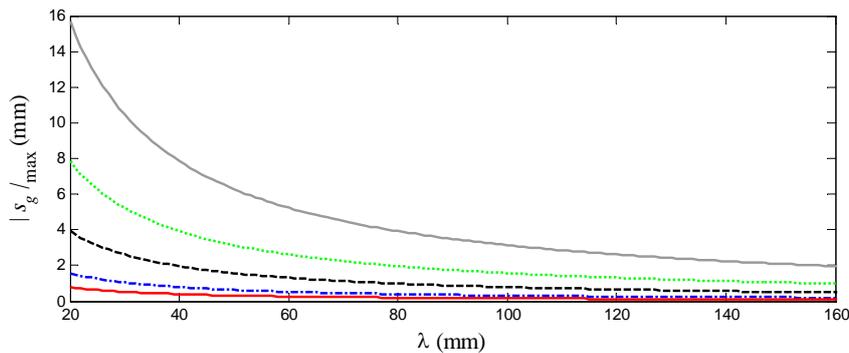


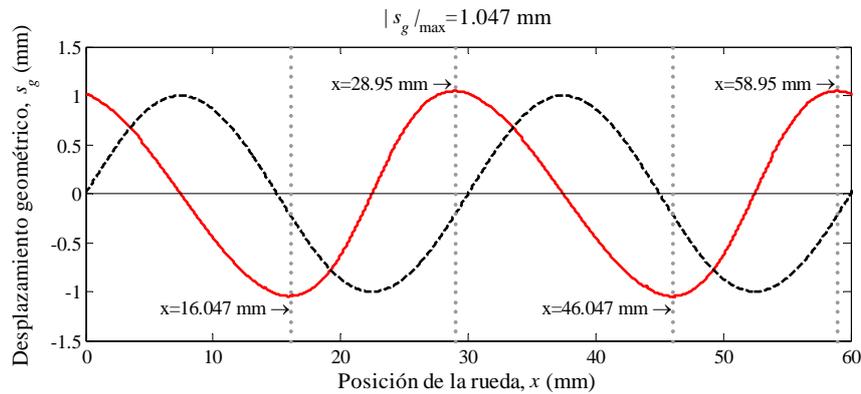
Figura 4.56. Variación del desplazamiento geométrico máximo en función de la longitud de onda para distintas amplitudes de la corrugación: —, 5  $\mu\text{m}$ ; - · - · -, 10  $\mu\text{m}$ ; - · - · - · -, 25  $\mu\text{m}$ ; · · · · ·, 50  $\mu\text{m}$ ; —, 100  $\mu\text{m}$ .

Así como también de la expresión (4.138) es posible obtener la posición del centro del área de contacto para la que tiene lugar el desplazamiento máximo

$$x + s_g = \frac{\lambda}{2} n, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (4.140)$$

En la Figura 4.57, se representa la evolución del *desplazamiento geométrico* en función de la posición del centro de la rueda, para el caso en el que la corrugación sea superficial, con una longitud de onda de 30 mm y una amplitud de 10  $\mu\text{m}$ . El valor máximo del desplazamiento es de 1.047 mm y se produce en las posiciones de la rueda indicadas en dicha figura. Se puede observar que cuando la rueda está ascendiendo por un flanco de la corrugación, el *desplazamiento geométrico* toma siempre signo positivo, lo cual indica que el centro del área de contacto se desplaza, según el sentido de circulación de la rueda, hacia el pico de la corrugación más cercano. En cambio, cuando la rueda está descendiendo por un

flanco de la corrugación inicial, el *desplazamiento geométrico* es negativo, lo que significa que el centro del área de contacto se desplaza, en sentido contrario al de la circulación de la rueda, hacia el pico de la corrugación que se acaba de pasar. Se observa que los máximos *desplazamientos geométricos* del área de contacto rueda-carril se producen cuando el centro de ésta se sitúa aproximadamente a la mitad de los flancos descendente y ascendente de la corrugación de 30 mm.



**Figura 4.57.** Desplazamiento geométrico asociado a una corrugación superficial, de amplitud 10  $\mu\text{m}$  y longitud de onda 30 mm: —, desplazamiento geométrico; ----, corrugación (x100).

Se puede apreciar en la Figura 4.58, en la que se comparan los *desplazamientos geométricos* para varias longitudes de onda de la corrugación superficial, cómo para longitudes de onda de la corrugación superiores a 60 mm, el *desplazamiento geométrico* máximo es inferior a la mitad del correspondiente a la longitud de onda de 30 mm. Por otra parte, independientemente de la longitud de onda de la corrugación, cuando la rueda se sitúa sobre un pico o en un valle de la corrugación, el *desplazamiento geométrico* del área de contacto rueda-carril es nulo.

Cuando la corrugación es profunda, la relación entre la amplitud y la longitud de onda de la misma es mayor que en el caso de la corrugación superficial, con lo que el *desplazamiento geométrico* máximo también lo será. En la Figura 4.59 se representa la evolución del *desplazamiento geométrico* con la posición del centro de la rueda para el caso de una corrugación de longitud de onda de 30 mm y una amplitud de 50  $\mu\text{m}$ , en el que el *desplazamiento geométrico* máximo es de 5.236 mm. Se observa que los máximos *desplazamientos geométricos* del área de contacto se producen cuando el centro de la rueda está situado en las proximidades del valle de la corrugación.

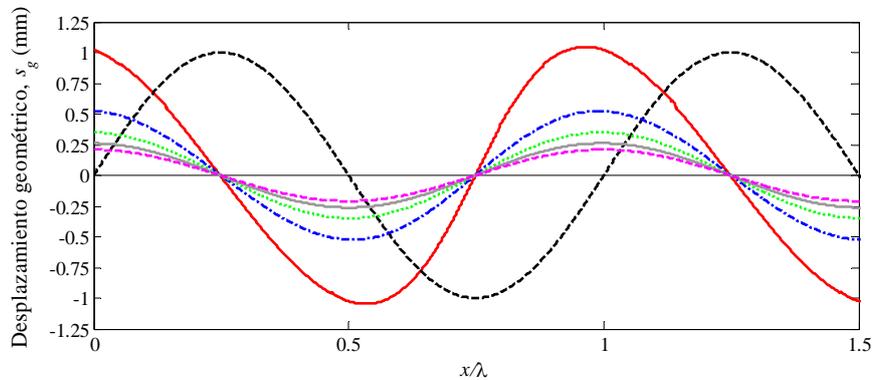


Figura 4.58. Comparación del desplazamiento geométrico asociado a una corrugación superficial de amplitud  $10\ \mu\text{m}$  y varias longitudes de onda: —, 30 mm; - - - - , 60 mm; ·····, 90 mm; —, 120 mm; - - - - , 150 mm; - · - ·, corrugación ( $\times 100$ ).

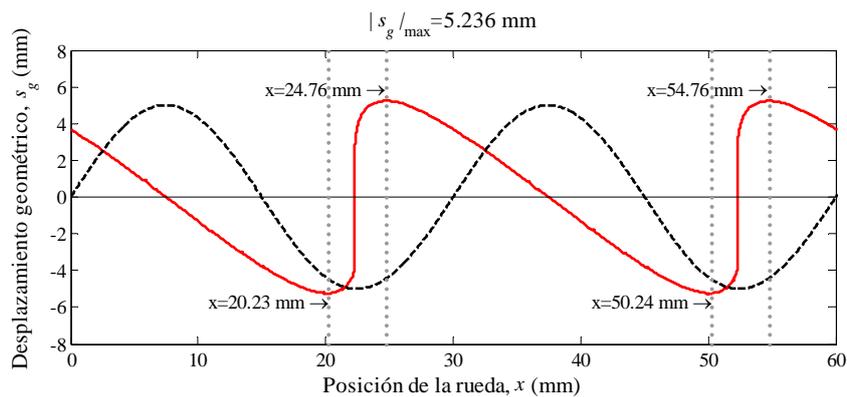


Figura 4.59. Desplazamiento geométrico asociado a una corrugación profunda, de amplitud  $50\ \mu\text{m}$  y longitud de onda 30 mm: —, desplazamiento geométrico; - - - - , corrugación ( $\times 100$ ).

En la Figura 4.60 se comparan los *desplazamientos geométricos* del área de contacto producidos por corrugación de amplitud  $50\ \mu\text{m}$  y varias longitudes de onda. Nuevamente, el *desplazamiento geométrico* del área de contacto es nulo cuando la rueda pasa por la cresta y por el valle de la corrugación, independientemente de la longitud de onda de ésta. Mientras que para la corrugación profunda de longitud de onda de 30 mm los máximos *desplazamientos geométricos* se producen en posiciones próximas al valle de ésta, como se puede apreciar en la Figura 4.59, para longitudes de onda superiores, los *desplazamientos geométricos* máximos ocurren cuando la rueda se aproxima a la mitad del flanco ascendente o se aleja de la mitad del flanco descendente de la corrugación superficial.

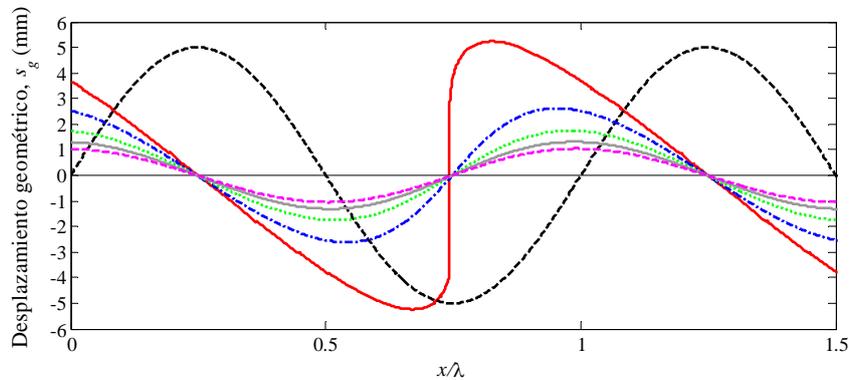


Figura 4.60. Comparación del desplazamiento geométrico asociado a una corrugación de amplitud  $50\ \mu\text{m}$  y varias longitudes de onda: —, 30 mm ( $\alpha=0.91$ ); - - - - , 60 mm ( $\alpha=3.65$ ); ·····, 90 mm ( $\alpha=8.21$ ); ———, 120 mm ( $\alpha=14.59$ ); - · - ·, 150 mm ( $\alpha=22.8$ ); - - - - -, corrugación ( $\times 100$ ).

El *desplazamiento geométrico* del área de contacto que se ha analizado en este subapartado es un efecto no lineal que puede tener una influencia importante en la distribución del desgaste a lo largo de la superficie de rodadura del carril. La influencia de este efecto no herciano sobre la distribución del desgaste en la superficie de rodadura de un carril se analizará con mayor profundidad en el Capítulo 5.

A continuación, se muestra la variación de la fuerza normal y longitudinal de contacto, en el caso en el que la rueda circula sobre un carril con corrugación de  $10\ \mu\text{m}$  de amplitud. Se ha considerado una fuerza normal constante de 100 kN y un pseudodeslizamiento longitudinal de  $-0.2\%$ . El pseudodeslizamiento lateral y el *spin* se han considerado nulos.

En la Figura 4.61, se representa la evolución de las fuerzas en el contacto para tres longitudes de onda del defecto: 30 mm, 60 mm y 90 mm, comprendidas en el rango de longitudes de onda de la corrugación denominada de longitud de onda corta (*short pitch corrugation*). Con el fin de comparar las fuerzas asociadas a las distintas longitudes de onda de la corrugación inicial, éstas se representan frente a la relación  $x/\lambda$ , definida como la posición del centro de la rueda entre la longitud de onda del defecto. Dado que se prescribe el pseudodeslizamiento longitudinal y no la fuerza longitudinal, la rueda ha de rodar una distancia equivalente a una longitud de onda de la corrugación para que la fuerza longitudinal alcance la solución permanente.

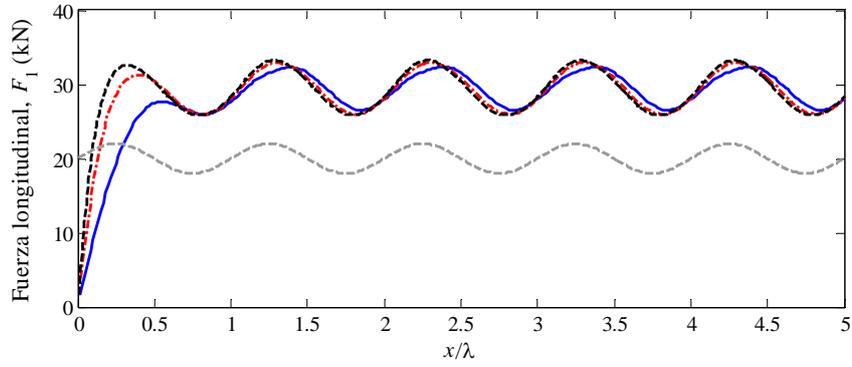
En las Figuras 4.61(a) y 4.62(a) se puede ver que la fuerza longitudinal está ligeramente desfasada respecto a la corrugación. Dicho ángulo de desfase

disminuye al aumentar la longitud de onda de la corrugación. Este efecto puede deberse al proceso no estacionario que se produce en el contacto rueda-carril.

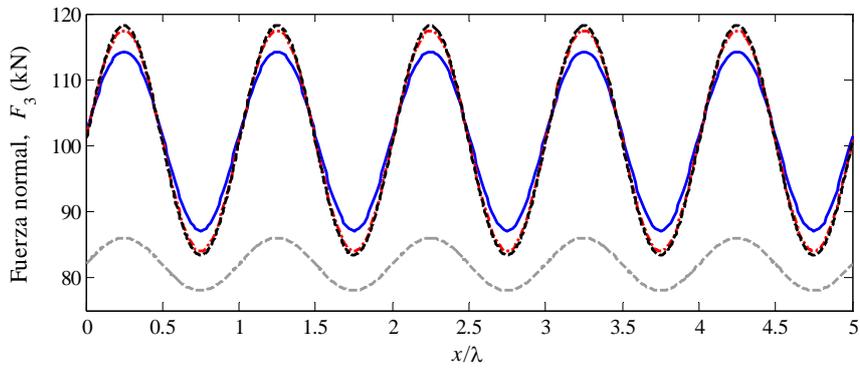
Se puede apreciar en las Figuras 4.61(b) y 4.62(b) que la fuerza normal está en fase con la corrugación inicial, produciéndose los máximos de esta fuerza cuando la rueda se encuentra sobre los picos de la corrugación. Mientras que la diferencia de amplitudes de la fuerza normal asociada las longitudes de onda de 60 mm y 90 mm es muy pequeña, la diferencia de amplitud de la fuerza normal entre éstas y la asociada a la longitud de onda de 30 mm es notable. Esto puede ser debido al proceso no estacionario de contacto, que como se mostrado en los subapartados *I* y *II* de la sección 4.4.4, para longitudes de onda reducidas, en las que  $\lambda/a < 10$ , se traduce en fuerzas en el contacto inferiores a las que se producen por las fluctuaciones de mayor longitud de onda.

En la Figura 4.62 se representan los valores dinámicos de las fuerzas longitudinal y normal al contacto de la Figura 4.61 a lo largo de una longitud de onda de la corrugación. En la Figura 4.62(a) se muestra la variación de la fuerza longitudinal respecto a su valor medio de 29.5 kN. El máximo valor alternante de la fuerza longitudinal es de 3.69 kN (12.5% del valor medio) y corresponde a la longitud de onda de 90 mm. El mínimo valor alternante corresponde a la corrugación de 30 mm de longitud de onda, siendo de 2.92 kN, lo que supone un 9.9% del valor medio. Por tanto, se observa que el valor alternante de la fuerza longitudinal crece con la longitud de onda, pero no lo hace de forma lineal, dado que la diferencia entre los valores alternantes correspondientes a las longitudes de onda de 90 mm y 60 mm es del 23%, mientras que la diferencia entre los valores alternantes asociados a las longitudes de onda de 60 mm y 30 mm es del 54%. Por otra parte, la fuerza longitudinal correspondiente a la corrugación de longitud de onda más corta presenta un desfase de aproximadamente  $45^\circ$  con respecto a ésta. Como se ha comentado anteriormente, estos resultados pueden deberse al proceso no estacionario que tiene lugar en el contacto.

En la Figura 4.62(b) se representa la fuerza normal dinámica ocasionada por las tres longitudes de onda de la corrugación consideradas. El valor alternante máximo de la fuerza normal, de 17.4 kN, corresponde a la longitud de onda de 90 mm y el mínimo, de 13.6 kN, a la longitud de onda de 30 mm. Considerando el valor medio de la fuerza normal, de 100 kN, la fuerza normal alternante producida por la corrugación de 30 mm, 60 mm y 90 mm de longitud de onda representa el 13.6%, 16.74% y 17.4 % de la fuerza normal media, respectivamente.



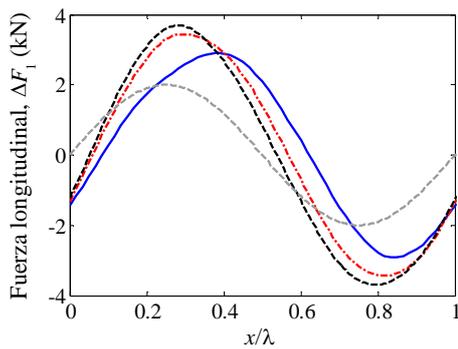
(a)



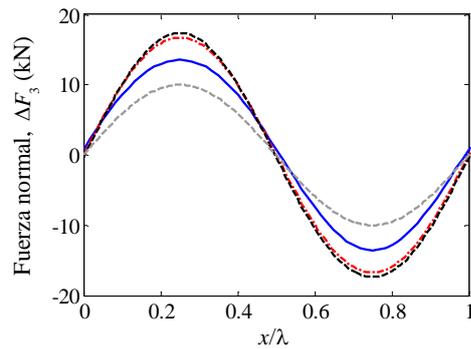
(b)

Figura 4.61. Evolución de la fuerza longitudinal (a) y normal (b) de contacto cuando la rueda circula sobre un carril con corrugación de 10  $\mu\text{m}$  de amplitud y varias longitudes de onda:

—,  $\lambda = 30 \text{ mm}$ ; - - - - ,  $\lambda = 60 \text{ mm}$ ; - - - - ,  $\lambda = 90 \text{ mm}$ ; - - - - corrugación (s. e.).



(a)



(b)

Figura 4.62. Valores dinámicos de la fuerza longitudinal (a) y normal (b) de contacto una vez superado el transitorio, cuando la rueda circula sobre un carril con corrugación de 10  $\mu\text{m}$  de amplitud y varias longitudes de onda:

—,  $\lambda = 30 \text{ mm}$ ; - - - - ,  $\lambda = 60 \text{ mm}$ ; - - - - ,  $\lambda = 90 \text{ mm}$ ; - - - - corrugación (s. e.).

En la Figura 4.63, se muestran las fuerzas longitudinal y normal dinámicas ocasionadas por una corrugación de 30 mm de longitud de onda, con diferentes amplitudes: 10  $\mu\text{m}$ , 25  $\mu\text{m}$  y 50  $\mu\text{m}$ . Se observa que el incremento de la amplitud de la corrugación produce mayores fuerzas dinámicas en el contacto. En la Figura 4.63(a) se representa la fuerza longitudinal dinámica a lo largo de una longitud de onda de la corrugación. Se puede observar que para la amplitud de la corrugación de 50  $\mu\text{m}$ , para la cual la corrugación es profunda con  $\alpha=0.91$ , la forma de onda de la fuerza longitudinal se aleja de la forma sinusoidal de la corrugación. Este mismo efecto se puede apreciar en la Figura 4.63(b), donde se muestra la fuerza normal dinámica. Esto se debe a efectos no hercianos que tienen lugar en el contacto, como el *desplazamiento geométrico* del área de contacto y la asimetría de la distribución de tensión normal a la misma, que son más acusados cuando se considera corrugación profunda. Por otra parte, para la amplitud de la corrugación de 50  $\mu\text{m}$ , el valor alternante de la fuerza longitudinal es aproximadamente el 50% del valor medio de ésta y el de la fuerza normal representa el 66% de su valor medio.

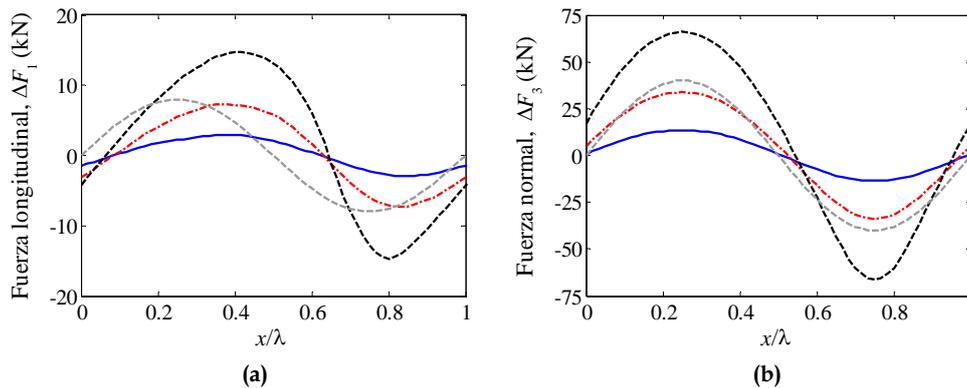


Figura 4.63. Valores dinámicos de la fuerza longitudinal (a) y normal (b) de contacto una vez superado el transitorio, cuando la rueda circula sobre un carril con corrugación de longitud de onda  $\lambda=30$  mm, con varias amplitudes: —, 10  $\mu\text{m}$  ( $\alpha=4.6$ ); - - - - , 25  $\mu\text{m}$  ( $\alpha=1.8$ ); - - - - - , 50  $\mu\text{m}$  ( $\alpha=0.91$ ); ······ corrugación (s. e.).

En la Figura 4.64 se representa la máxima tensión normal en el área de contacto frente a la relación entre la posición del centro de la rueda y la longitud de onda de la corrugación para una amplitud de ésta de 10  $\mu\text{m}$ . Resulta interesante observar que la corrugación con longitud de onda de 30 mm ocasiona tensiones normales al contacto significativamente superiores en los picos de la corrugación que las que producen la corrugación de longitud de onda mayor (un 5.4% superiores a las correspondientes a la longitud de onda de 90 mm). Sin embargo, en los valles de la corrugación, la tensión normal que produce es inferior, siendo ésta un 6% inferior a la correspondiente a la corrugación de longitud de onda de 90 mm.

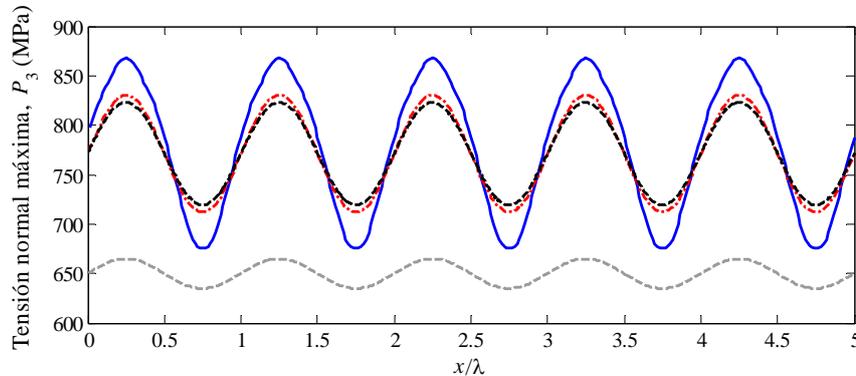


Figura 4.64. Evolución de la tensión normal máxima cuando la rueda circula sobre un carril con corrugación de  $10\ \mu\text{m}$  de amplitud y varias longitudes de onda: —,  $\lambda = 30\ \text{mm}$ ; - · - ·,  $\lambda = 60\ \text{mm}$ ; - - - -,  $\lambda = 90\ \text{mm}$ ; - · - · - · corrugación (s.e.).

Comparando las Figuras 4.61(b) y 4.64, se observa que cuando la rueda está sobre una cresta de la corrugación de longitud de onda de  $30\ \text{mm}$ , por un lado, la fuerza normal decrece, pero por otro, la tensión normal máxima en el contacto se incrementa considerablemente. Este efecto se debe a que la distribución de tensión normal, en dichas condiciones, presenta una forma esbelta, mientras que el área de contacto en la dirección longitudinal es más estrecha.

Cuando la amplitud de la corrugación es mayor, de  $50\ \mu\text{m}$ , los valores máximos de la tensión normal en el área de contacto que ocasiona son superiores a los correspondientes a la amplitud de  $10\ \mu\text{m}$ , como se muestra en la Figura 4.65. Nuevamente, se puede observar que los valores más grandes de la tensión normal máxima se producen cuando la rueda pasa por las crestas de la corrugación. Se observa que los valores máximos de la tensión normal máxima asociados a la corrugación de longitud de onda de  $30\ \text{mm}$  son un 22.5% superiores a los correspondientes a la corrugación de  $90\ \text{mm}$  de longitud de onda. Por otra parte, las máximas tensiones normales que se producen en los valles de la corrugación de  $30\ \text{mm}$  de longitud de onda son un 22.5% inferiores a las asociadas a la corrugación de mayor longitud de onda. Estas elevadas tensiones normales en el contacto con los picos de la corrugación pueden producir deformación plástica si el límite de fluencia del acero de los carriles es inferior a las mismas. El endurecimiento del acero localizado en las crestas de la corrugación reduciría la velocidad de desgaste en las mismas, produciendo un efecto de saturación del crecimiento de la corrugación [24].

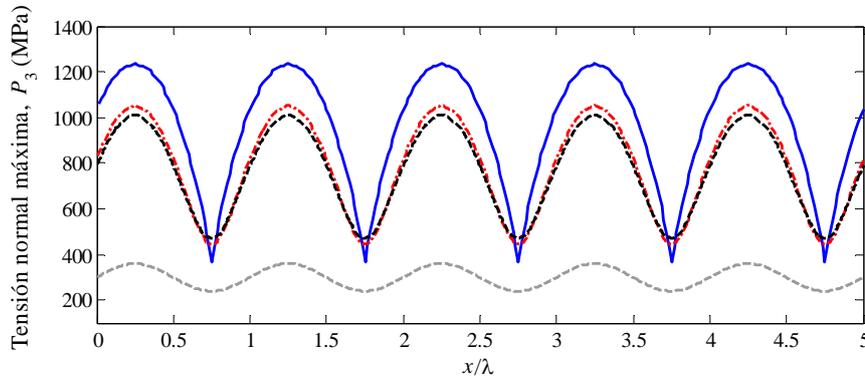


Figura 4.65. Evolución de la tensión normal máxima cuando la rueda circula sobre un carril con corrugación de 50  $\mu\text{m}$  de amplitud y varias longitudes de onda: —,  $\lambda = 30$  mm; - · - ·,  $\lambda = 60$  mm; - - - -,  $\lambda = 90$  mm; - - - - corrugación (s.e.).

## 4.5 Conclusiones

En el presente capítulo, en primer lugar, se han expuesto los fundamentos teóricos del contacto entre la rueda y el carril y las formulaciones del problema normal y tangencial de contacto. Asimismo, se han presentado las ecuaciones integrales de Boussinesq-Cerruti que permiten obtener los coeficientes de influencia elástica, que relacionan las tensiones con los desplazamientos en el contacto.

A continuación, se ha presentado el desarrollo de un modelo tridimensional de contacto tangencial no estacionario, basado en una teoría exacta, en la que las relaciones entre las tensiones en el contacto y los desplazamientos asociados a las deformaciones elásticas se obtienen a partir de la teoría de la elasticidad mediante un planteamiento semianalítico. Dichas relaciones se han calculado a partir del conjunto de soluciones de las ecuaciones integrales de Boussinesq-Cerruti, que se recogen en el Anexo 2. Utilizando el modelo herciano y no estacionario propuesto se ha analizado el efecto del proceso no estacionario en la evolución de los parámetros del contacto, comparando los resultados obtenidos con los del modelo estacionario FASTSIM.

Se puede concluir a partir de los resultados correspondientes al caso en el que se aplican fuerzas constantes que el proceso no estacionario tiene muy poca influencia en los parámetros del contacto. No obstante, cuando las fuerzas aplicadas experimentan variaciones rápidas en el tiempo se aprecian diferencias significativas que no pueden considerarse mediante modelos de contacto estacionarios, como FASTSIM. Estas diferencias pueden dar lugar a zonas de deslizamiento en el borde anterior del área de contacto y a contacto reverso (localmente, la dirección de la tensión tangencial es opuesta a la de la fuerza

externa transmitida en el contacto), que pueden influir en los resultados de desgaste en las superficies de rodadura de los carriles y las ruedas o al estudiar la fatiga de contacto por rodadura.

En segundo lugar, se ha presentado la formulación del modelo de contacto no estacionario y no herciano basado en la Teoría Variacional de Kalker que se ha implementado en esta Tesis con el fin de considerar los efectos no hercianos y no estacionarios en el contacto rueda-carril. Este modelo permite considerar la no linealidad asociada al desplazamiento geométrico y los efectos transitorios asociados a las variaciones de elevada frecuencia de los parámetros del contacto, lo que lo hace especialmente indicado para el estudio del crecimiento de la corrugación. Asimismo, se ha desarrollado e implementado en este modelo de contacto una metodología destinada al cálculo de los coeficientes de influencia elástica por medio de la integración de las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti en dominios triangulares con carga lineal. De este modo, las distribuciones de tensiones en el área de contacto varían linealmente en los elementos triangulares en los que ésta se discretiza, lo que se consigue por medio de la superposición de elementos de tensión piramidal sobre una base hexagonal compuesta por seis elementos triangulares equiláteros. Las principales conclusiones que se extraen de estos desarrollos son:

- Al contrario de lo esperado inicialmente, la mejora en la representación de las distribuciones de tensiones (se eliminan las discontinuidades en las fronteras de los elementos) en el contacto que supone el uso de la metodología presentada no se traduce en una mejora del orden de precisión, si se comparan los resultados con los correspondientes empleando elementos rectangulares en los que las magnitudes del contacto se suponen constantes.
- Con el modelo no herciano y no estacionario se ha estudiado el efecto del proceso no estacionario del contacto en las magnitudes del contacto, considerando condiciones hercianas en el mismo. Se ha constatado que los efectos no estacionarios son más notables cuando las magnitudes del contacto (fuerza normal y/o pseudodeslizamiento longitudinal) varían con longitudes de onda corta.
- Por otra parte, se han analizado los efectos no hercianos asociados a la rodadura sobre una superficie con corrugación sinusoidal (desplazamiento longitudinal del área de contacto y asimetría de las distribuciones de tensiones normales), señalando la importancia de considerarlos mediante modelos no hercianos con el fin de evitar resultados erróneos cuando se trata de calcular el desgaste y la evolución de la corrugación, especialmente cuando la relación

entre la amplitud y la longitud de onda de la corrugación inicial es elevada (o el *factor de superficialidad* de la corrugación es bajo), como se mostrará en el Capítulo 5 de esta Tesis.



# 5

## Método de cálculo del desgaste en la superficie de rodadura del carril

### 5.1 Introducción

El método que se propone en este capítulo para la estimación de la distribución del desgaste en la superficie de rodadura del carril combina un modelo de contacto tridimensional y una ley de desgaste. Los datos de entrada del modelo de cálculo del desgaste son las fuerzas resultantes transmitidas entre el carril y la rueda al pasar ésta una vez sobre un tramo del carril, la geometría del contacto y las propiedades de los materiales. Los resultados son las profundidades del desgaste en la dirección perpendicular al contacto en la superficie de rodadura del carril, como se representa en el esquema de la Figura 5.1.

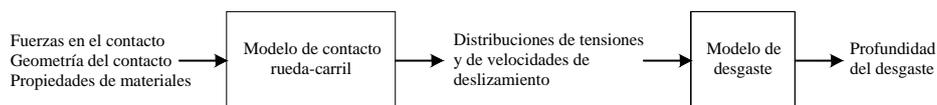


Figura 5.1. Esquema del modelo de cálculo del desgaste del carril para un único paso de rueda.

El modelo de cálculo del desgaste en la superficie de rodadura del carril que se presenta en este capítulo, se puede incluir dentro de un proceso realimentado de estimación del perfil desgastado del carril (ver Capítulo 7), en el que a partir del perfil inicial del carril, con pequeñas rugosidades, y de los datos del vehículo y de la vía, se obtendrían las fuerzas en el contacto mediante un modelo de interacción dinámica vehículo-vía, que se tratará en el Capítulo 6.

A continuación, se describe el modelo de desgaste que se ha implementado. Finalmente, se establece el procedimiento para el cálculo del desgaste en la superficie de rodadura del carril.

## 5.2 Modelo de desgaste

Es habitual considerar la hipótesis de que la corrugación en las superficies de rodadura de los carriles crece desde una rugosidad superficial inapreciable a simple vista, hasta irregularidades mayores, producidas por el desgaste en la interfaz rueda-carril. Se cree que el principal mecanismo de daño en la corrugación de onda corta (de 30 mm a 150 mm) es el desgaste [64, 69], mientras que la deformación plástica tiende a reducir las amplitudes de la corrugación [24], disminuyendo de este modo la velocidad de crecimiento de este defecto. En esta Tesis, no se consideran los efectos de la deformación plástica en el área de contacto.

El modelo de desgaste de Archard [12], como se ha comentado en el Capítulo 3, presenta la ventaja de que se dispone de mayor número de datos experimentales, al ser el modelo que con mayor frecuencia se emplea en tribología para modelar el desgaste por deslizamiento en seco. Retomando la ecuación original del modelo de Archard, se deducirá la expresión para calcular la profundidad del desgaste y la velocidad o ratio de desgaste. Según la ley de Archard, el volumen de material eliminado por desgaste ( $V_w$ ) es función de la fuerza normal transmitida en el contacto ( $F_3$ ), el deslizamiento local ( $d_s$ ) y la dureza del material más blando ( $H$ )

$$V_w = k_w \frac{F_3 d_s}{H} \text{ (m}^3\text{)}, \quad (5.1)$$

siendo la constante de proporcionalidad  $k_w$ , el coeficiente de desgaste.

Si se dividen los dos lados de la igualdad de la ecuación (3.5) por el área de contacto, se puede calcular la profundidad del desgaste  $\Delta z$  en cada punto del área de contacto a partir de

$$\Delta z = k_w \frac{p_3 |\mathbf{S}_\tau|}{H} \text{ (m)}, \quad (5.2)$$

donde  $p_3$  es la tensión normal y  $\mathbf{S}_\tau$  es el deslizamiento local. La anterior expresión es la que se empleará con el modelo no herciano y no estacionario (ver apartado 4.4) para calcular las distribuciones de profundidad del desgaste en el área de contacto.

Por otra parte, a partir de la ley de Archard, es posible calcular el ratio de desgaste o velocidad de eliminación de material en la dirección vertical  $\dot{w}$  mediante

$$\dot{w} = \frac{k_w}{H} p_3 \| \mathbf{s} \| \quad (\text{m/s}), \quad (5.3)$$

en la que  $\| \mathbf{s} \|$  es la velocidad de deslizamiento en el contacto. La anterior expresión es la que se utilizará para estimar las distribuciones de ratio de desgaste en el área de contacto con el modelo de contacto estacionario FASTSIM y el modelo de contacto no estacionario descrito en el apartado 4.3.

En este estudio, se asume que el coeficiente de desgaste no depende de las variaciones de la presión del contacto ni de las diferencias en la velocidad de deslizamiento dentro del área de contacto y se adopta un valor, para bajas velocidades de deslizamiento, de  $10^{-4}$ .

### 5.3 Método de estimación del desgaste en la superficie de rodadura del carril

El método de estimación del desgaste en la superficie de rodadura del carril se basa en el cálculo a partir de magnitudes obtenidas de un modelo de contacto tridimensional, como la distribución de tensión normal y la distribución de velocidad de deslizamiento (o alternativamente, el deslizamiento local), de la distribución de ratio de desgaste  $\dot{w}$  (con la expresión (5.3)) o de profundidad del desgaste  $\Delta z$  (mediante la ecuación (5.2)) en cada paso de la simulación.

Seguidamente, se calcula la profundidad del desgaste  $\Delta z$  en un conjunto de nodos distribuidos de forma regular, como se ilustra en la Figura 5.5, en los que se discretiza la superficie de rodadura del carril.

A continuación, se describe el procedimiento de estimación de la profundidad del desgaste en el carril, según el modelo de contacto que se implemente.

#### 5.3.1 Modelo de contacto Hertz/FASTSIM y modelo no estacionario

Para cada instante temporal de la simulación, en cada nodo  $J$  de la malla de elementos rectangulares (ver Figura 5.2) en los que se divide el área de contacto rueda-carril se obtiene el ratio de desgaste  $\dot{w}^J$ , a partir de los resultados del modelo de contacto Hertz/FASTSIM o el modelo no estacionario, como sigue

$$\dot{w}^J = \frac{k_w}{H} p_3^J \| \mathbf{s}^J \| \quad (5.4)$$

Con el fin de obtener distribuciones suaves de los ratios de desgaste en el contacto, se considera el conjunto de puntos formado por los centros de los elementos y puntos situados en el borde del área de contacto, como se indica en la Figura 5.2.

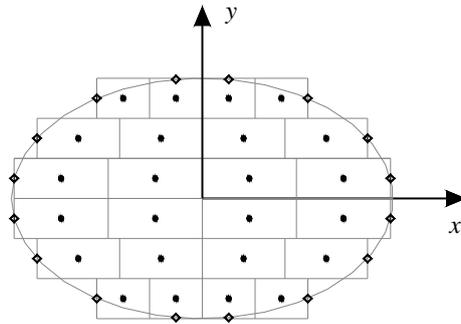


Figura 5.2. Centros de los elementos y puntos en el borde del área de contacto.

A continuación, por medio de una triangulación de Delaunay a partir del conjunto de puntos anterior (ver Figura 5.3), se estima una solución mejorada de la distribución de ratios de desgaste en el área de contacto (ver Figura 5.4). Se considera que el ratio de desgaste es nulo en los puntos situados en el borde del área de contacto.

De este modo, en cada elemento triangular resultante de la triangulación de Delaunay, es posible realizar una aproximación de la distribución de ratios de desgaste a partir de los valores en los nodos, por medio de una interpolación lineal de los valores nodales  $\dot{w}^j$ .

Las profundidades del desgaste en los nodos del carril se calculan haciendo avanzar en la dirección longitudinal el área de contacto correspondiente a cada instante temporal de cálculo una distancia igual al producto de la velocidad de circulación del vehículo y el incremento temporal entre dos cálculos consecutivos del modelo de contacto, como se muestra en la Figura 5.5.

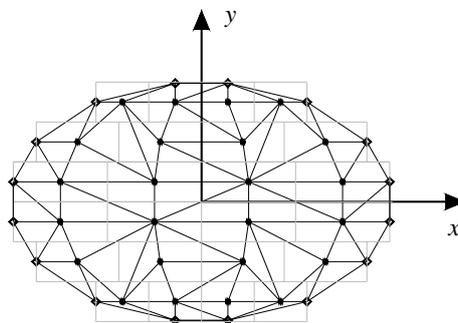


Figura 5.3. Triangulación de Delaunay del área de contacto a partir de los centros de los elementos rectangulares y puntos en el borde del área de contacto.

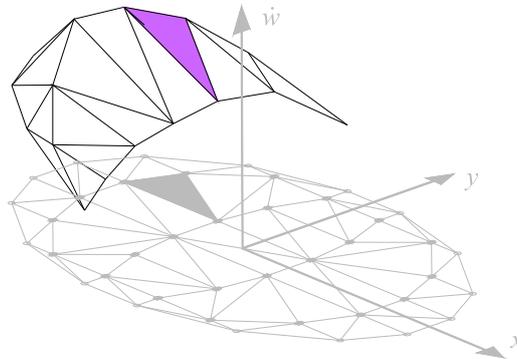


Figura 5.4. Obtención de una distribución suave de ratios de desgaste en el área de contacto a partir de una interpolación lineal de los valores nodales  $\dot{w}^l$ .

Si en un instante de tiempo  $i$  un nodo cualquiera  $k$  de la superficie de rodadura del carril está situado dentro del área de contacto, el valor del ratio de desgaste en dicho nodo  $\dot{w}_i^k$  puede estimarse por medio de una interpolación lineal de los valores nodales en el elemento triangular que contiene dicho punto del carril, como se representa en la Figura 5.6.

El valor total de la profundidad del desgaste en el nodo  $k$  del carril se calcula como el sumatorio de los ratios de desgaste  $\dot{w}_i^k$  en dicho nodo, correspondientes a los  $M$  instantes de tiempo discretos en los que se calcula dicho parámetro, por el incremento de tiempo entre dos instantes de cálculo consecutivos

$$\Delta z^k = \Delta t \sum_{i=1}^M \dot{w}_i^k \quad (5.5)$$

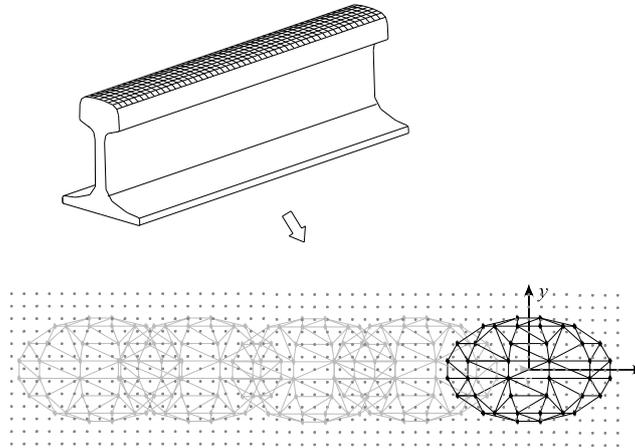


Figura 5.5. Nodos de la superficie de rodadura del carril en los que se calcula la profundidad del desgaste haciendo avanzar el área de contacto.

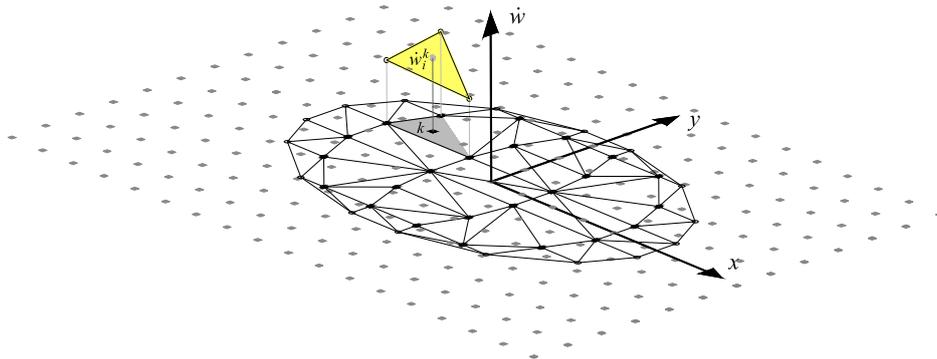


Figura 5.6. Interpolación del ratio de desgaste en los nodos de la malla del carril.

### 5.3.2 Modelo de contacto no herciano y no estacionario

El procedimiento del cálculo de la profundidad del desgaste en la superficie de rodadura del carril utilizando el modelo de contacto no herciano y no estacionario es similar al que se acaba de describir. La diferencia fundamental es que en lugar de calcular el ratio de desgaste, en cada paso de la simulación, para cada nodo  $J$  (vértices de los elementos triangulares) en los que se discretiza el área potencial de contacto se obtiene la profundidad del desgaste  $\Delta z^J$ , a partir de las magnitudes calculadas con el modelo de contacto no herciano y no estacionario

$$\Delta z^J = \frac{k_w}{H} p_3^J |S^J| \quad (5.6)$$

Para transferir los valores de profundidad del desgaste en el área de contacto a la superficie de rodadura del carril, ésta primero se discretiza en un conjunto de nodos distribuidos de forma regular, como se ha mostrado en la Figura 5.5. A continuación, se desplaza el área potencial de contacto según la dirección longitudinal una distancia igual al producto de la velocidad del vehículo y el incremento temporal entre dos pasos de la simulación ( $\Delta x = V\Delta t$ ).

Para cada paso temporal  $i$ , el valor de la profundidad del desgaste  $\Delta z_i^k$  en un nodo  $k$  del carril se calcula a partir de una interpolación lineal de los valores nodales (vértices) en el elemento triangular del área de contacto bajo el cual se encuentra dicho nodo del carril (ver Figura 5.6).

La profundidad del desgaste total en un nodo  $k$  del carril, se obtiene acumulando los  $M$  valores de profundidad del desgaste calculados en cada paso de la simulación, como sigue

$$\Delta z^k = \sum_{i=1}^M \Delta z_i^k \quad (5.7)$$

#### 5.4 Resultados del método de estimación del desgaste con el modelo de contacto herciano y no estacionario

En este apartado, se presentan los resultados de los cálculos realizados aplicando el modelo de estimación del desgaste en el carril, que implementa el modelo de contacto herciano y no estacionario descrito en el apartado 4.3, a casos que pueden corresponderse con situaciones reales. Estos resultados se comparan con los obtenidos por medio del modelo de contacto estacionario FASTSIM.

El primer cálculo realizado tiene por objeto establecer la influencia del empleo de un modelo de contacto basado en una teoría exacta en la estimación del desgaste. Para ello, se considera la versión tridimensional del problema conocido como “de Cattaneo a Carter” [104], en el que, adicionalmente a la fuerza normal constante transmitida en el contacto, se aplica una fuerza longitudinal constante desde el instante inicial. Con el fin de analizar los efectos de la transmisión de fuerzas de elevada frecuencia entre la rueda y el carril en los cálculos de desgaste, se considera, en primer lugar la variación de la fuerza normal, que es la consecuencia inmediata del paso de una rueda sobre una vía corrugada; y en segundo lugar, la variación de la fuerza longitudinal, que puede deberse a la dinámica del eje montado o a una inestabilidad de la transmisión.

En la Tabla 5.1, se recogen los valores numéricos de los parámetros del modelo de cálculo del desgaste, que se han considerado en este apartado.

**Tabla 5.1. Parámetros del modelo.**

Radio de la curvatura de la cabeza del carril (mm)(convexa)	300
Radio del perfil de la rueda ( mm) (cóncava)	409
Radio de la rueda (mm)	500
Velocidad del vehículo ( km/h)	100
Coefficiente de rozamiento	0.4
Módulo de Young ( N/m <sup>2</sup> )	2.1· 10 <sup>11</sup>
Coefficiente de Poisson	0.3
Relación $k_w/H$ del modelo de Archard ( m <sup>2</sup> / N)	3.40·10 <sup>-14</sup>
Valor medio de la fuerza normal (kN)	100
Amplitud de la fuerza normal (kN)	45
Valor medio de la fuerza longitudinal (kN)	20
Amplitud de la fuerza longitudinal (kN)	10

#### **5.4.1 Estudio de la convergencia a la solución estacionaria. Versión tridimensional del problema “de Cattaneo a Carter”**

Desde un punto de vista práctico, este caso se asociaría con la aplicación repentina del par de tracción en un eje motor. Los parámetros de contacto calculados mediante el modelo no estacionario convergen a sus valores estacionarios rápidamente, obteniéndose una desviación con respecto a las velocidades de pseudodeslizamiento calculadas empleando FASTSIM de tan sólo el 3%. Este resultado es acorde con las posibilidades del modelo simplificado para determinar la relación entre velocidades de pseudodeslizamiento reducidas y fuerzas tangenciales resultantes. En la Figura 5.7 se representa el desgaste estimado en la superficie de rodadura del carril a partir del modelo no estacionario y mediante FASTSIM. La fuerza normal aplicada al contacto es de 100 kN y la longitudinal de 20 kN. Si bien se aprecia una diferencia importante correspondiente a la zona donde se encuentra situada el área de contacto en el instante inicial, se observa que a partir de esa zona las formas desgastadas coinciden. Sin embargo, existe una

diferencia entre modelos del orden del 15% atribuible al empleo de un modelo elástico simplificado en FASTSIM.

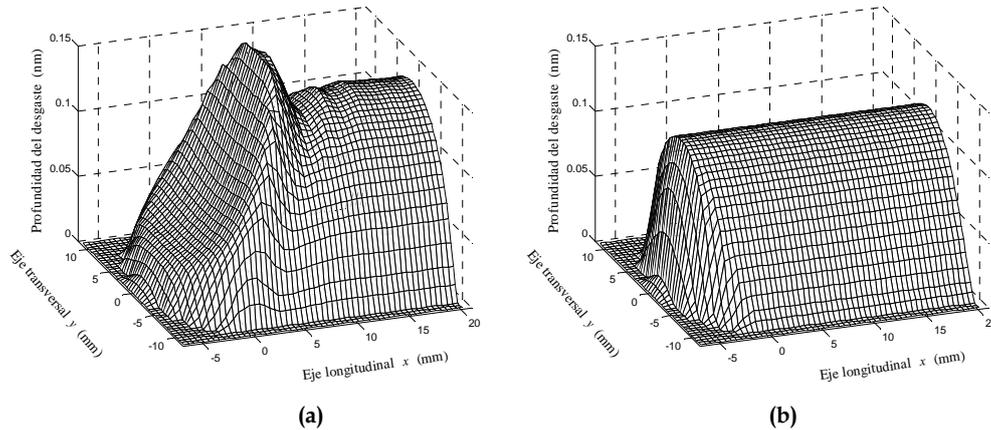


Figura 5.7. Profundidades del desgaste en la superficie de rodadura del carril cuando las fuerzas aplicadas al contacto permanecen constantes. (a) modelo no estacionario; (b) modelo estacionario (FASTSIM).

Como se puede apreciar en la Figura 5.8, la distribución de ratios de desgaste, invariable en el tiempo, que se ha calculado utilizando el modelo de contacto no estacionario difiere tanto en forma como en magnitud del obtenido a partir de los resultados de FASTSIM. Esta diferencia entre distribuciones de ratios de desgaste se debe a que el empleo de una teoría simplificada en FASTSIM afecta en mayor medida a los valores de velocidades de deslizamiento relativo, puesto que se obtienen a partir de las derivadas de los desplazamientos.

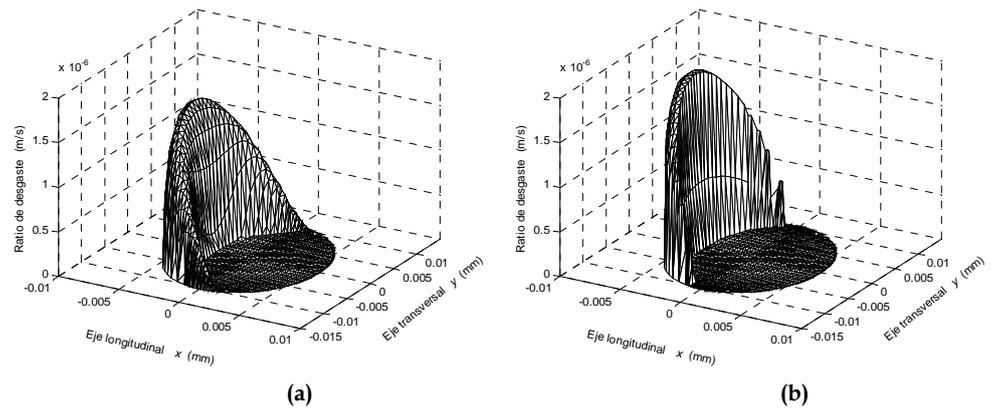


Figura 5.8. Ratios de desgaste obtenidos para fuerzas constantes en el contacto. (a) modelo no estacionario; (b) modelo estacionario (FASTSIM).

### 5.4.2 Resultados correspondientes a la variación de la fuerza normal

En este subapartado, se analiza el efecto de la variación de la fuerza normal en la profundidad del desgaste en la superficie de rodadura del carril. La variación de la fuerza normal es la consecuencia inmediata de la rodadura de una rueda sobre un carril corrugado. Se considera una variación sinusoidal de la fuerza normal al contacto, con dos longitudes de onda  $\lambda$  diferentes (15 mm y 30 mm), manteniendo constante la fuerza longitudinal aplicada, de 20 kN según la siguiente expresión

$$F_3 = F_{3m} + F_{3a} \sin\left(\frac{2\pi x_w}{\lambda}\right), \text{ siendo } F_{3m} = 100 \text{ kN y } F_{3a} = 45 \text{ kN}. \quad (5.8)$$

En las Figuras 5.9 y 5.10, se representan las profundidades del desgaste en la superficie de rodadura del carril calculadas mediante los dos modelos de contacto, cuando la fuerza normal aplicada varía con una longitud de onda de 15 mm y 30 mm, respectivamente. Estos resultados corresponden a un único ciclo de variación de la fuerza normal, una vez alcanzada la respuesta permanente. Se pueden apreciar diferencias tanto en la forma como en la magnitud del desgaste calculados con los dos modelos de contacto. Si bien una pequeña parte de la diferencia entre los resultados de desgaste obtenidos a partir de los dos modelos de contacto es atribuible al empleo de un modelo elástico simplificado en FASTSIM, la mayor parte de las diferencias observadas entre los resultados de los dos modelos se debe al proceso de contacto no estacionario.

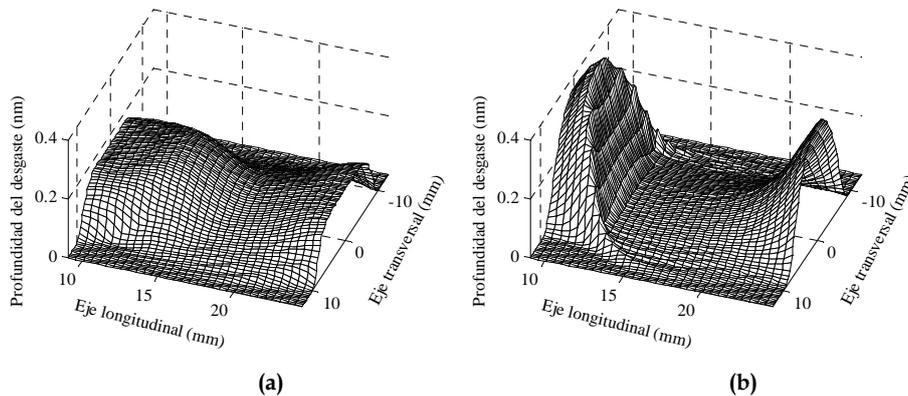


Figura 5.9. Profundidades del desgaste en la superficie de rodadura del carril cuando la fuerza normal varía con una longitud de onda  $\lambda = 15$  mm y la fuerza longitudinal permanece constante. (a) modelo no estacionario; (b) modelo estacionario (FASTSIM).

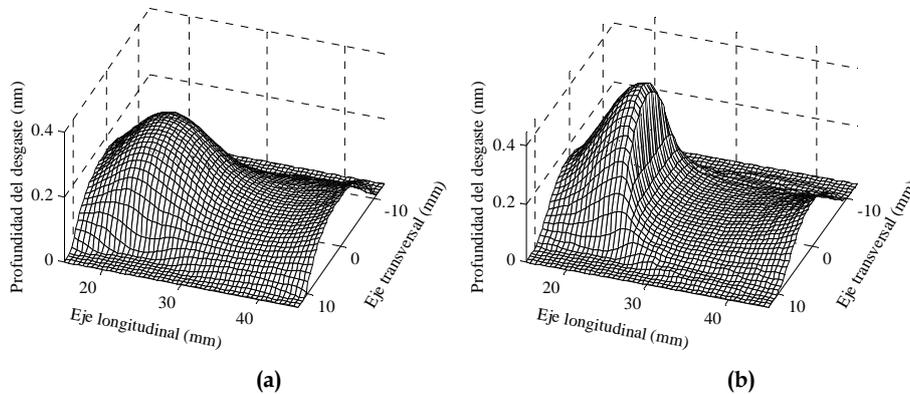


Figura 5.10. Profundidades del desgaste en la superficie de rodadura del carril cuando la fuerza normal varía con una longitud de onda  $\lambda = 30$  mm y la fuerza longitudinal permanece constante. (a) modelo no estacionario; (b) modelo estacionario (FASTSIM).

En las Figuras 5.11 y 5.12, se comparan las profundidades del desgaste que se han mostrado en las Figuras 5.9 y 5.10, en la línea longitudinal central de la superficie de rodadura del carril. Asimismo, para facilitar la comparación, se representa la fuerza normal fuera de escala.

Se aprecia en la Figura 5.11 correspondiente a la longitud de onda de 15 mm, en primer lugar, que la diferencia de magnitud de los máximos del desgaste obtenidos con los dos modelos de contacto es del orden del 23%. Por otra parte, se puede observar que existe una diferencia de la amplitud pico a pico de la profundidad del desgaste calculada con los dos modelos de en torno al 32%. Los máximos del desgaste se producen en las proximidades de los mínimos de la fuerza normal, lo cual indica, asumiendo que la fuerza normal está en fase con la corrugación que ocasiona su variación, que los valles de ésta se desgastan más rápido que los picos, aumentando la amplitud de la corrugación inicial. Con el modelo estacionario FASTSIM, se predice un crecimiento significativamente mayor que con el modelo no estacionario, dado que la profundidad del desgaste obtenida con el primero es aproximadamente el doble de la calculada con el segundo.

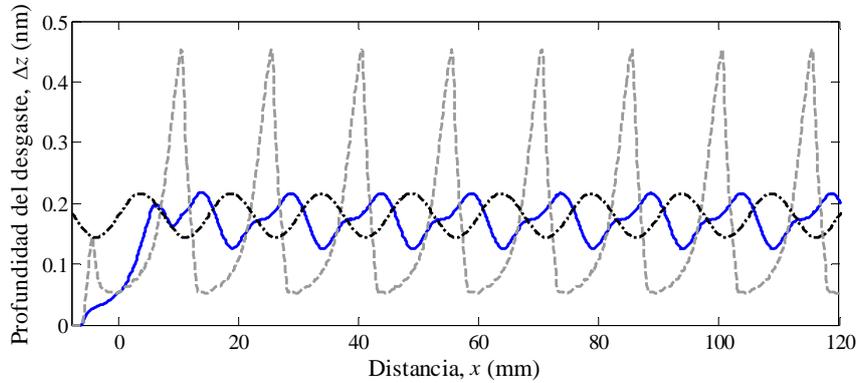


Figura 5.11. Profundidades del desgaste a lo largo del eje longitudinal del carril, cuando la fuerza normal varía con una longitud de onda  $\lambda = 15$  mm: —, modelo no estacionario; ·····, FASTSIM; -·-·-·-, fuerza normal (s. e.).

En la Figura 5.12, correspondiente a la longitud de onda de 30 mm, se observa que la diferencia en la magnitud de los máximos del desgaste calculado con los dos modelos de contacto es inferior a la de la Figura 5.11, alrededor del 17%. Por otra parte, la diferencia en la amplitud pico a pico de la profundidad del desgaste obtenida con los dos modelos también es inferior, aproximadamente del 20%. Los máximos del desgaste se sitúan en los mínimos de la fuerza normal, indicando que si los máximos de la fuerza normal se producen coincidiendo con las crestas de la corrugación, los valles de la corrugación se desgastarían más que las crestas, con lo que la amplitud de la corrugación inicial crecería.

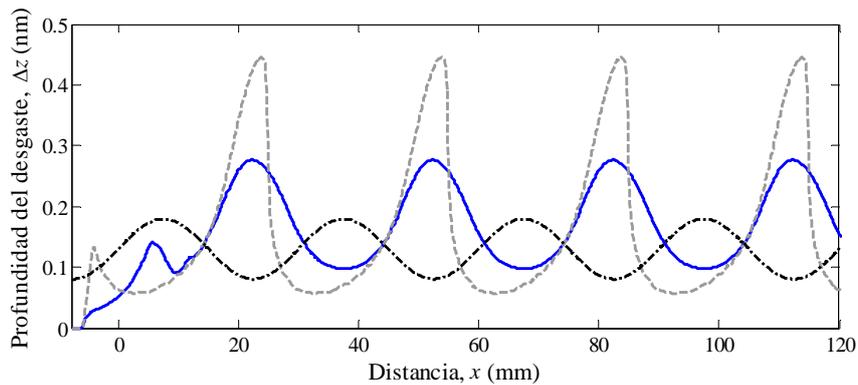


Figura 5.12. Profundidades del desgaste a lo largo del eje longitudinal del carril cuando la fuerza normal varía con una longitud de onda  $\lambda = 30$  mm: —, modelo no estacionario; ·····, FASTSIM; -·-·-·-, fuerza normal (s. e.).

### 5.4.3 Resultados correspondientes a la variación de la fuerza longitudinal

La variación de la fuerza longitudinal puede atribuirse a un modo de torsión del eje, a una inestabilidad de la transmisión o al acoplamiento de la dinámica vertical con la horizontal inducida por los efectos giroscópicos en el eje ferroviario. En este subapartado, se estudia el efecto en el desgaste de la aplicación de una fuerza longitudinal armónica en el contacto, con dos longitudes de onda  $\lambda$  diferentes, de acuerdo con la expresión

$$F_1 = F_{1m} + F_{1a} \sin\left(\frac{2\pi x_w}{\lambda}\right), \text{ siendo } F_{1m} = 20 \text{ kN y } F_{1a} = 10 \text{ kN}. \quad (5.9)$$

En las Figuras 5.13 y 5.14 se muestran las profundidades del desgaste calculadas a partir de los resultados de los modelos de contacto no estacionario y FASTSIM, aplicando los casos de carga dados por la expresión (5.9), con las longitudes de onda 15 mm y 30 mm, respectivamente. Nuevamente, se observan diferencias importantes en las profundidades de desgaste calculadas utilizando el modelo de contacto no estacionario y el modelo estacionario FASTSIM.

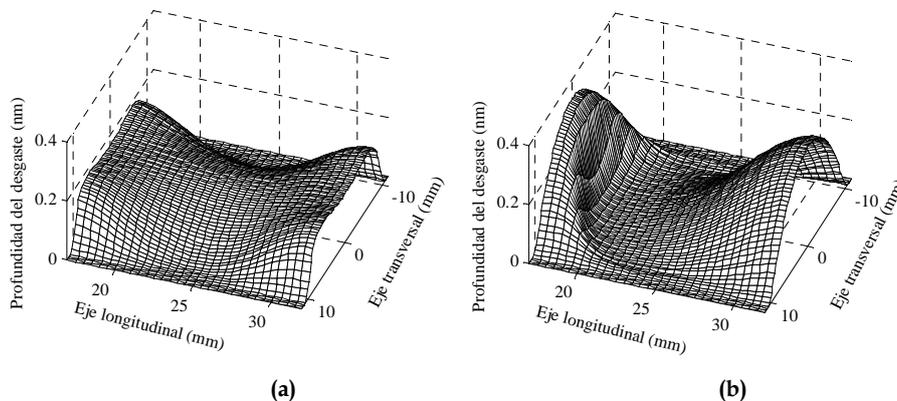
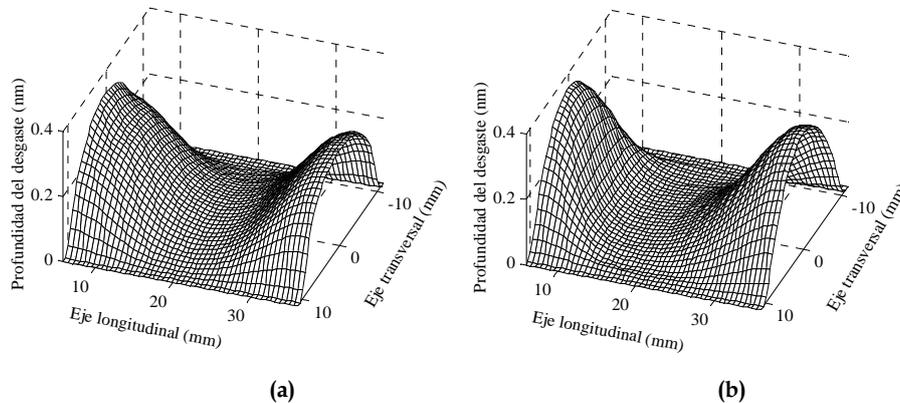


Figura 5.13. Profundidades del desgaste cuando la fuerza longitudinal varía con una longitud de onda  $\lambda = 15$  mm y la fuerza normal permanece constante. (a) modelo no estacionario; (b) modelo estacionario (FASTSIM).



**Figura 5.14.** Profundidades del desgaste cuando la fuerza longitudinal varía con una longitud de onda  $\lambda = 30$  mm y la fuerza normal permanece constante. (a) modelo no estacionario; (b) modelo estacionario (FASTSIM).

En las Figuras 5.15 y 5.16, se representan conjuntamente las profundidades del desgaste a lo largo de la línea longitudinal central de la superficie de rodadura del carril, obtenidas con los dos modelos de contacto, correspondientes a la variación de la fuerza longitudinal con la longitud de onda de 15 mm y de 30 mm, respectivamente. Para facilitar la comparación, se representa también la fuerza longitudinal fuera de escala.

Se observa en la Figura 5.15, una diferencia entre los máximos del desgaste del orden de 16%, mientras que la diferencia de amplitud pico a pico de las profundidades del desgaste es aproximadamente del 26%. Los máximos del desgaste calculado con los dos modelos están adelantados aproximadamente  $90^\circ$  al máximo de la fuerza longitudinal.

En la Figura 5.16 se puede observar una diferencia inferior entre los máximos del desgaste, en torno al 6%, calculado con los dos modelos de desgaste. La diferencia de las amplitudes pico a pico de las profundidades del desgaste es del orden del 9%. Los máximos del desgaste se localizan ligeramente adelantados ( $45^\circ$ , aproximadamente) con respecto a los máximos de la fuerza longitudinal.

Se puede apreciar en las Figuras 5.13 y 5.14 cómo para longitudes de onda de la variación de las fuerzas reducidas (elevada frecuencia de fluctuación), la amplitud del desgaste calculado con los modelos de contacto estacionario (FASTSIM) y no estacionario difieren significativamente. El proceso no estacionario del contacto actúa como una especie de filtro de las fluctuaciones de alta frecuencia en el contacto, estimando desgastes de amplitudes notablemente inferiores a las que predice el modelo de contacto estacionario FASTSIM.

Los resultados presentados en este apartado se han publicado en [16].

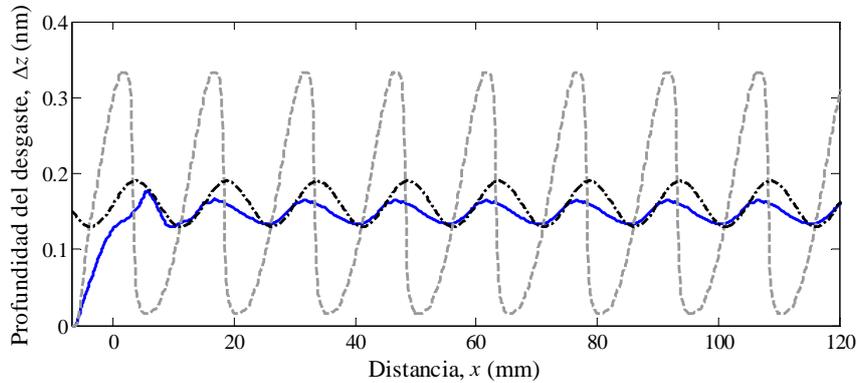


Figura 5.15. Profundidades del desgaste a lo largo del eje longitudinal del carril, cuando la fuerza longitudinal varía con una longitud de onda  $\lambda = 15$  mm: —, modelo no estacionario; ----, FASTSIM; -·-·-, fuerza longitudinal (s. e.).

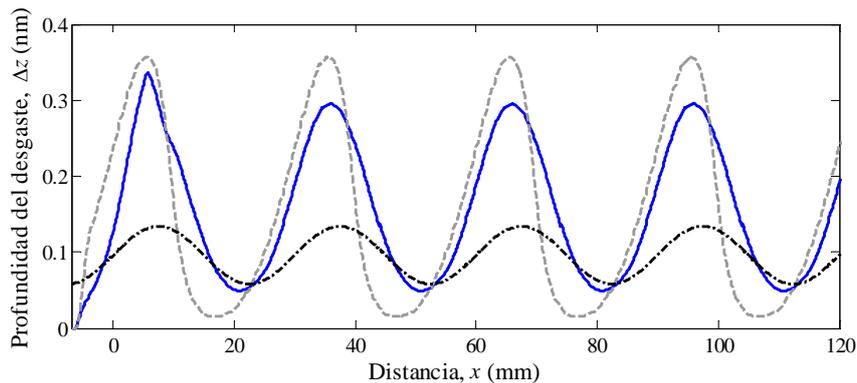


Figura 5.16. Profundidades del desgaste a lo largo del eje longitudinal del carril, cuando la fuerza longitudinal varía con una longitud de onda  $\lambda = 30$  mm: —, modelo no estacionario; ----, FASTSIM; -·-·-, fuerza longitudinal (s. e.).

### 5.5 Resultados del método de estimación del desgaste con el modelo no herciano y no estacionario

En el presente apartado, aplicando el modelo de contacto no herciano y no estacionario descrito en el apartado 4.4 al cálculo del desgaste, se analizará en primer lugar, la influencia del valor de la fuerza normal y del pseudodeslizamiento en el nivel de desgaste uniforme. A continuación, considerando condiciones hercianas en el contacto rueda-carril, se estudiará el efecto del proceso no estacionario que tiene lugar en el mismo cuando se producen variaciones de alta frecuencia en los parámetros del contacto. Finalmente, se analizarán la influencia

conjunta de los efectos no hercianos y no estacionarios que se producen cuando el contacto se establece entre la rueda y el carril afectado de corrugación de longitud de onda corta.

### 5.5.1 Influencia del valor de la fuerza normal en el nivel de desgaste uniforme

En este subapartado, se analiza el efecto de la fuerza normal de contacto en el nivel de desgaste calculado mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario. Para ello, se consideran diferentes valores de fuerza normal, que se asume constante, comprendidos entre 10 kN y 125 kN. Por otra parte, se adopta un valor constante del pseudodeslizamiento longitudinal e igual a  $-0.2\%$  y se calcula la profundidad del desgaste en la línea longitudinal central de la superficie de rodadura del carril. En la Figura 5.17, se muestra la profundidad del desgaste obtenida para diversos valores de fuerza normal de contacto. Se puede observar que la profundidad del desgaste uniforme aumenta conforme se incrementa la fuerza normal.

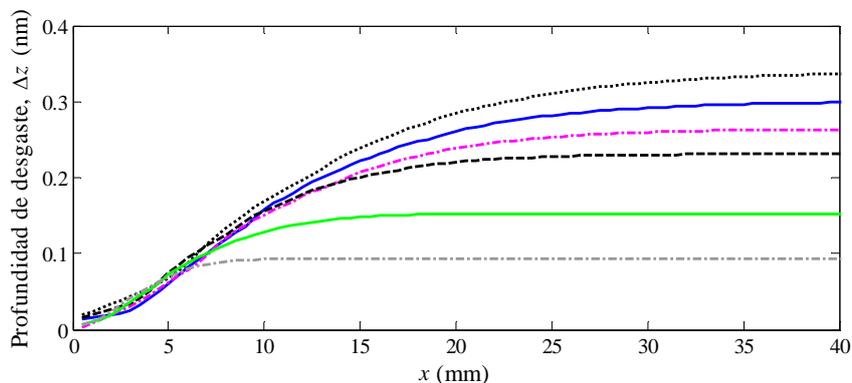


Figura 5.17. Profundidad del desgaste para varios valores de fuerza normal: ..... , 125 kN; —, 100 kN; - · - · - , 75 kN; - - - - - , 50 kN; — , 25 kN; - · - · - , 10 kN.

### 5.5.2 Influencia del valor del pseudodeslizamiento longitudinal en el nivel de desgaste uniforme

En este subapartado, se estudia el efecto del pseudodeslizamiento longitudinal en la profundidad del desgaste. Los resultados que se muestran en la Figura 5.18 se han obtenido considerando un valor constante de la fuerza normal de contacto igual a 100 kN y un coeficiente de rozamiento de 0.4. Se puede observar que a

medida que se incrementa el pseudodeslizamiento longitudinal, aumenta el nivel de desgaste. Esto es debido a que al aumentar el pseudodeslizamiento longitudinal, crece la zona de deslizamiento dentro del área de contacto hasta ocupar la totalidad de ésta, con lo que también la distribución de profundidad del desgaste en el área de contacto afectará a toda el área de contacto y su acumulación en la superficie de rodadura del carril dará lugar a niveles mayores de desgaste uniforme.

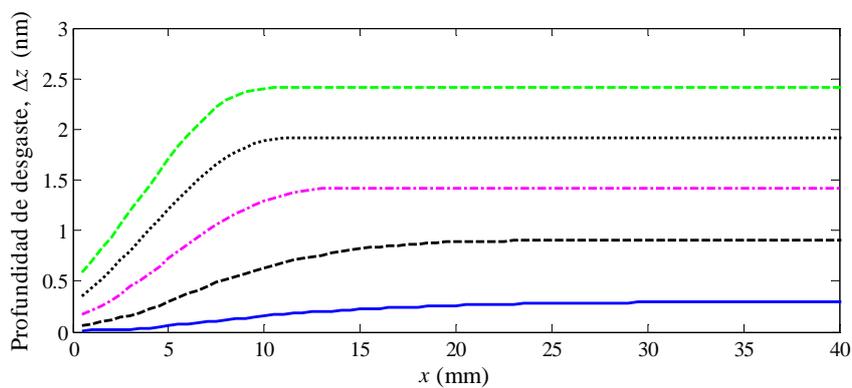


Figura 5.18. Profundidad del desgaste para varios pseudodeslizamientos longitudinales:

—, 1%; ·····, 0.8%; -·-·-, 0.6%; - - - -, 0.4%; ———, 0.2%.

### 5.5.3 Efecto de la variación de la fuerza normal

En este subapartado, se analiza el efecto de la variación sinusoidal de la fuerza normal de contacto según la siguiente expresión

$$F_3(x) = F_{3m} + F_{3a} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ donde } F_{3m} = 100 \text{ kN y } F_{3a} = 45 \text{ kN}, \quad (5.10)$$

considerando el pseudodeslizamiento longitudinal constante e igual a  $\xi = -0.002$ .

Se puede observar en la Figura 5.19, que la máxima profundidad del desgaste es mayor a medida que se incrementa la longitud de onda de la variación de la fuerza normal, siendo máxima en el caso en el que la fuerza normal fluctúa con una longitud de onda de 60 mm. Por otra parte, también se observa que los máximos de la profundidad del desgaste se sitúan desfasados con respecto los máximos de la fuerza normal, siendo el máximo desfase, de aproximadamente  $180^\circ$ , el que se produce en el caso de que la fuerza normal oscila con una longitud de onda muy corta de 15 mm.

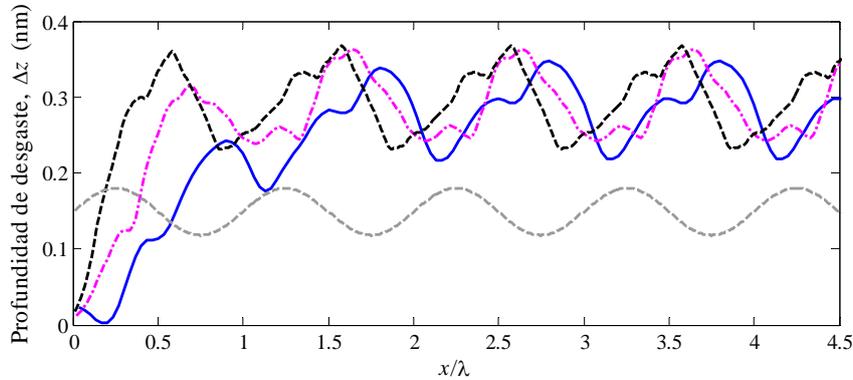


Figura 5.19. Profundidad del desgaste, cuando fluctúa la fuerza normal según varias longitudes de onda: —,  $\lambda=15$  mm; -·-·-,  $\lambda=30$  mm; -·-·-,  $\lambda=60$  mm; -·-·-, fuerza normal (s.e.).

#### 5.5.4 Efecto de la variación del pseudodeslizamiento longitudinal

En este subapartado, se estudia el efecto de la variación sinusoidal del pseudodeslizamiento longitudinal en la profundidad del desgaste. Para ello, en primer lugar, se considera que el pseudodeslizamiento longitudinal fluctúa según la siguiente expresión

$$\xi(x) = \xi_m + \xi_a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ con } \xi_m = -0.002 \text{ y } \xi_a = -0.001. \quad (5.11)$$

Se ha considerado un valor medio de pseudodeslizamiento longitudinal que produce una determinada fuerza longitudinal media, con la finalidad de simular la aplicación de una par de tracción en la rueda. En este caso, la fuerza normal de contacto se mantiene constante y se adopta un valor de  $F_3 = 100$  kN. En la Figura 5.20, se comparan las profundidades del desgaste obtenidas para tres longitudes de onda del pseudodeslizamiento longitudinal. Se puede observar que una fluctuación del pseudodeslizamiento longitudinal con una longitud de onda de 60 mm se traduce en mayores valores máximos de la profundidad del desgaste y, a su vez, en mayores valores alternantes, que producen valores mínimos de profundidad del desgaste que se aproximan a cero. Por otra parte, prescribiendo el pseudodeslizamiento longitudinal, los máximos de la profundidad del desgaste están ligeramente desfasados con respecto a la fuerza longitudinal, la cual tiene signo contrario al primero.

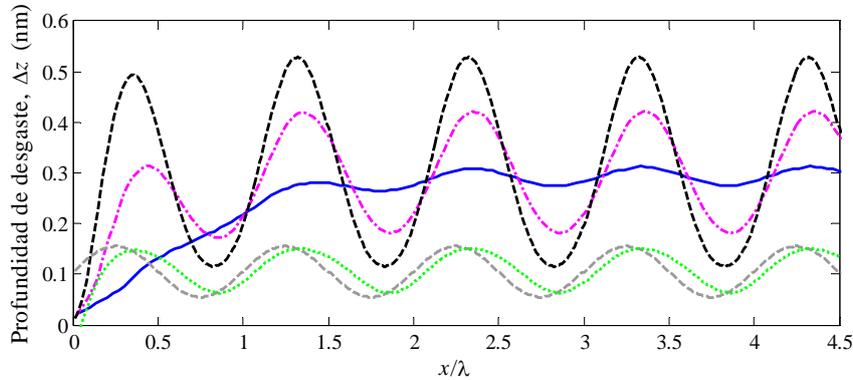


Figura 5.20. Profundidad del desgaste, cuando fluctúa el pseudodeslizamiento longitudinal según varias longitudes de onda: —,  $\lambda=15$  mm; —·—,  $\lambda=30$  mm; - - - - ,  $\lambda=60$  mm; - - - - , pseudodeslizamiento longitudinal (s.e.); ·····, fuerza longitudinal (s.e.).

En la Figura 5.21 se muestra la profundidad del desgaste obtenida con la variación del pseudodeslizamiento longitudinal sinusoidal, considerando únicamente la componente alternante del pseudodeslizamiento y manteniendo la fuerza normal constante  $F_3 = 100$  kN, según la expresión

$$\xi(x) = \xi_a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ con } \xi_a = -0.002. \quad (5.12)$$

Este caso sería el que se produciría en el contacto por la rodadura libre del eje montado sobre una superficie sin irregularidades. Se puede apreciar que, en este caso, la fuerza longitudinal está prácticamente en oposición de fase con el pseudodeslizamiento longitudinal. Por lo que respecta a la profundidad del desgaste, resulta interesante señalar que aparece según una longitud de onda que es la mitad de la longitud de onda de la variación del pseudodeslizamiento longitudinal, o lo que es equivalente, su frecuencia es el doble de la frecuencia de variación de éste. Este fenómeno se produce porque el pseudodeslizamiento oscila alrededor de cero, con lo que la fuerza longitudinal también lo hará, tomando de forma alternativa valores positivos y negativos. En cambio, el desgaste no puede tomar valores negativos, ya que ello equivaldría a que se aporta material a la superficie de rodadura del carril en vez de eliminarse, con lo que tomará siempre valores positivos aunque la fuerza longitudinal sea negativa. Por este motivo, la frecuencia de la profundidad del desgaste es el doble de la frecuencia de la fuerza y el pseudodeslizamiento longitudinal. Se puede observar en la Figura 5.21 que la profundidad del desgaste decrece a medida que se reduce la longitud de onda de la variación del pseudodeslizamiento longitudinal, hasta ser prácticamente nula para la longitud de onda de 15 mm.

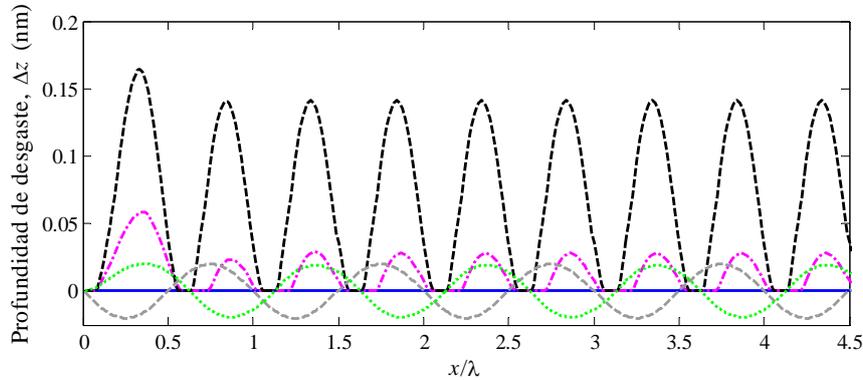


Figura 5.21. Profundidad del desgaste cuando fluctúa el pseudodeslizamiento longitudinal alrededor de cero, según varias longitudes de onda: —,  $\lambda=15$  mm; -·-·-,  $\lambda=30$  mm; -·-·-,  $\lambda=60$  mm; -·-·-, pseudodeslizamiento longitudinal (s.e.); ·····, fuerza longitudinal (s.e.).

### 5.5.5 Efecto de las variación simultánea de la fuerza normal y del pseudodeslizamiento longitudinal

En este subapartado, se presentan los resultados de desgaste cuando se considera la variación simultánea de la fuerza normal y el pseudodeslizamiento longitudinal con la misma longitud de onda y fase inicial, según las siguientes expresiones

$$F_3(x) = F_{3m} + F_{3a} \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ siendo } F_{3m} = 100 \text{ kN y } F_{3a} = 45 \text{ kN} \quad (5.13)$$

$$\xi(x) = \xi_m + \xi_a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ con } \xi_m = -0.002 \text{ y } \xi_a = -0.001 \quad (5.14)$$

Esta variación de parámetros del contacto podría deberse a la rodadura del eje montado, al que se aplica un par de tracción, sobre la vía corrugada. En la Figura 5.22 se muestra la profundidad del desgaste para tres longitudes de onda de variación de la fuerza normal y el pseudodeslizamiento longitudinal. Se puede apreciar en esta figura que la amplitud de la profundidad del desgaste se incrementa al aumentar la longitud de onda de variación de las anteriores magnitudes. Por otra parte, se observa que al disminuir la longitud de onda de variación de la fuerza normal y el pseudodeslizamiento longitudinal, se produce un mayor desfase entre los máximos de estas magnitudes y los máximos del desgaste. De este modo, para la longitud de onda de 15 mm, los máximos de la profundidad del desgaste se localizan próximos a los mínimos de la fuerza normal y del pseudodeslizamiento longitudinal. Sin embargo, los máximos de la profundidad del desgaste correspondientes a la longitud de onda de 60 mm se

producen muy próximos a los máximos de la fuerza normal, pero ligeramente desfasados (45° aproximadamente) con respecto a ésta. Ello implica que la corrugación de longitud de onda de 60 mm, que ha ocasionado la variación de la fuerza normal, no crecería puesto que los picos se desgastarían más rápido que los valles. Por otra parte, los máximos de la profundidad del desgaste correspondiente a la longitud de onda de 30 mm, presentan un desfase con respecto a la fuerza normal de 90°, aproximadamente.

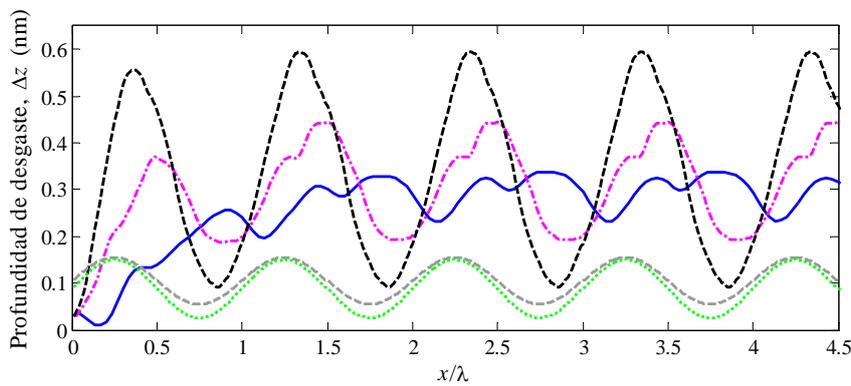


Figura 5.22. Profundidad de desgaste cuando fluctúa simultáneamente la fuerza normal y el pseudodeslizamiento longitudinal según varias longitudes de onda: —,  $\lambda=15$  mm; -·-·-,  $\lambda=30$  mm; -·-·-,  $\lambda=60$  mm; -·-·-, pseudodeslizamiento longitudinal (s.e.); ·····, fuerza normal (s.e.).

A continuación, se considera la fluctuación simultánea de la fuerza normal según la expresión (5.13) y el pseudodeslizamiento longitudinal alrededor del valor nulo

$$\xi(x) = \xi_m + \xi_a \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \text{ con } \xi_m = 0 \text{ y } \xi_a = -0.002. \quad (5.15)$$

Este caso se corresponde con la rodadura libre del eje montado sobre una vía corrugada. En la Figura 5.23 se observa el efecto que produce el pseudodeslizamiento alternante de valor medio nulo y la variación de la fuerza normal con tres longitudes de onda diferentes. Nuevamente, se puede apreciar para la longitud de onda de 60 mm que la profundidad del desgaste tiene una frecuencia del doble de la frecuencia de la fuerza normal y el pseudodeslizamiento longitudinal. A diferencia de los resultados presentados en la Figura 5.21, en los que la fuerza normal se ha mantenido constante, en la Figura 5.23 un ciclo de variación de la fuerza normal resulta en dos máximos del desgaste que aparecen como dos picos de diferente magnitud, estando el primero de ellos, de mayor magnitud, ligeramente desfasado con respecto a los máximos de la fuerza normal. Cuando la variación de la fuerza normal y el pseudodeslizamiento longitudinal

fluctúan con longitudes de onda inferiores, la profundidad del desgaste se reduce significativamente, hasta anularse cuando la variación es de mayor frecuencia.

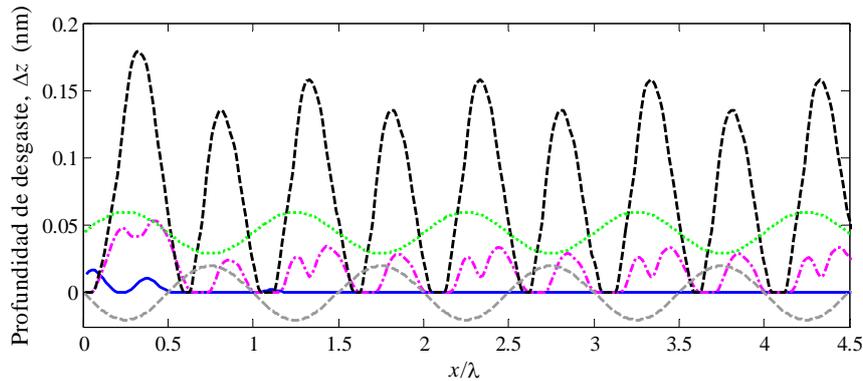


Figura 5.23. Profundidad de desgaste cuando fluctúa simultáneamente la fuerza normal y el pseudodeslizamiento longitudinal según varias longitudes de onda: —,  $\lambda=15$  mm; ·····,  $\lambda=30$  mm; — — — —,  $\lambda=60$  mm; - - - - -, pseudodeslizamiento longitudinal (s.e.); ·····, fuerza normal (s.e.).

Analizando los resultados presentados en los anteriores subapartados se puede concluir que el proceso no estacionario que tiene lugar en el contacto actúa como un filtro del desgaste cuando las oscilaciones de los parámetros de contacto son de elevada frecuencia (longitud de onda corta del orden del tamaño del área de contacto). La propia mecánica del contacto, al reducir la amplitud pico a pico de la profundidad del desgaste, inhibe el desgaste irregular en la superficie de rodadura del carril y con ello el crecimiento de la corrugación.

### 5.5.6 Efecto del contacto no herciano producido por la rodadura sobre superficies corrugadas

En este subapartado, se estudia el efecto del contacto no herciano en el desgaste de la superficie de rodadura del carril cuando ésta presenta un perfil longitudinal de tipo sinusoidal debido a la corrugación, definido por

$$z(x) = z_0 \sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right), \quad (5.16)$$

en la que  $z_0$  es la amplitud y  $\lambda$  es la longitud de onda de la corrugación sinusoidal y  $x$  es la posición de la rueda a lo largo del carril. Se prescribe una fuerza normal de 100 kN y un pseudodeslizamiento longitudinal medio de -0.2%. La rodadura sobre corrugación sinusoidal producirá la variación de la fuerza de contacto rueda-

carril con la misma longitud de onda que ésta, como se ha mostrado en el apartado 4.4.4.

En la Figura 5.24, se representa la profundidad del desgaste calculada mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario para tres longitudes de onda del perfil longitudinal del carril a las que puede ser factible el desarrollo de la corrugación: 30 mm, 60 mm y 90 mm. Con el fin de facilitar la comparación de las profundidades del desgaste para las distintas longitudes de onda, éstas se representan frente a la relación entre la posición del centro de la rueda y la longitud de onda del defecto,  $x/\lambda$ . Se puede observar que los máximos de la profundidad del desgaste se encuentran ligeramente desfasados respecto a los máximos de la corrugación inicial. Esto indica que los picos o crestas de la corrugación se desgastan más rápido que los valles, lo que implica que, tras múltiples pasos de rueda, el patrón de corrugación inicial quedaría suavizado al reducirse la amplitud pico a pico de la corrugación inicial. Por otra parte, para una corrugación inicial de  $10\ \mu\text{m}$  de amplitud, apenas se aprecian diferencias de valores máximos y amplitudes de la profundidad del desgaste para las tres longitudes de onda del defecto que se han considerado.

Mientras que el proceso no estacionario, como se ha tratado anteriormente, reduce la amplitud del desgaste cuando las variaciones de las magnitudes del contacto son de longitud de onda pequeña; los efectos no hercianos asociados a la rodadura sobre corrugación de longitud de onda corta parecen producir resultados contrarios: incremento de la amplitud de la profundidad del desgaste y disminución del desfase entre el máximo desgaste y la corrugación inicial.

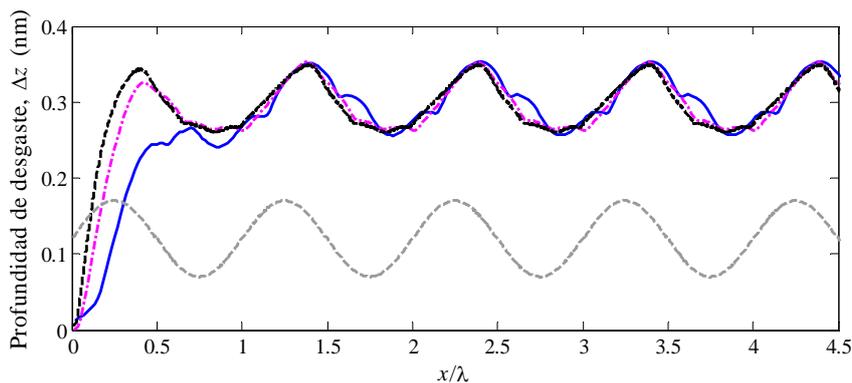


Figura 5.24. Profundidad de desgaste cuando la rueda circula sobre corrugación sinusoidal de amplitud  $10\ \mu\text{m}$  de varias longitudes de onda: —,  $\lambda=30\ \text{mm}$ ; ···,  $\lambda=60\ \text{mm}$ ; - · - ·,  $\lambda=90\ \text{mm}$ ; ·····, corrugación (s.e.)

A la misma conclusión se puede llegar observando las Figuras 5.25 y 5.26, en las que se representa la profundidad del desgaste para las tres longitudes de onda de la corrugación inicial citadas anteriormente y para las amplitudes de 25  $\mu\text{m}$  y 50  $\mu\text{m}$ , respectivamente. Por otra parte, se observa que la amplitud de la corrugación inicial influye en la amplitud pico a pico de la profundidad del desgaste, de modo que una mayor amplitud de la corrugación inicial produce desgaste con una mayor amplitud, como se puede apreciar en la Figura 5.27. En las Figuras 5.25 y 5.26 se puede observar cómo la amplitud de la profundidad del desgaste se incrementa al reducirse la longitud de onda de la corrugación sinusoidal, debido a los efectos no hercianos, entre ellos el *desplazamiento geométrico*, que es máximo para combinaciones de longitud de onda corta y elevada amplitud de la corrugación inicial (o lo que es equivalente, valores del *factor de superficialidad* próximos o inferiores a la unidad), como se ha mostrado en el apartado 4.4.4. Por otro lado, como se ha visto en las Figuras 4.64 y 4.65 de dicho apartado, los mayores valores de la tensión normal máxima se producen cuando la rueda está situada en las proximidades de las crestas de la corrugación y éstos son significativamente superiores para la corrugación de 30 mm de longitud de onda. Este hecho contribuye a que, para dicha longitud de onda, la profundidad del desgaste sea notablemente mayor que la calculada para las otras dos longitudes de onda, si se tiene presente que el desgaste mediante el modelo de Archard se obtiene a partir de la tensión normal.

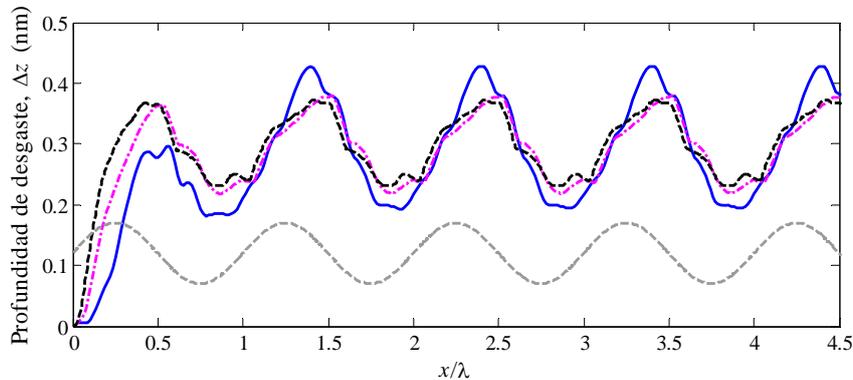


Figura 5.25. Profundidad de desgaste cuando la rueda circula sobre corrugación sinusoidal de amplitud 25  $\mu\text{m}$  de varias longitudes de onda: —,  $\lambda=30$  mm; ·····,  $\lambda=60$  mm; — — — —,  $\lambda=90$  mm; — — — —, corrugación (s.e.)

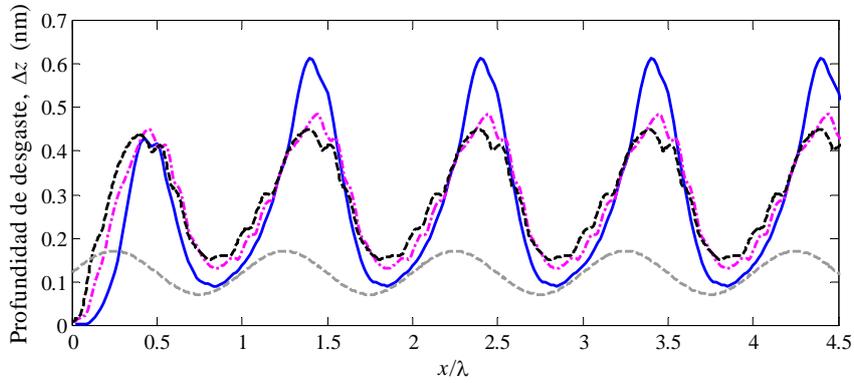


Figura 5.26. Profundidad de desgaste cuando la rueda circula sobre corrugación sinusoidal de amplitud 50  $\mu\text{m}$  de varias longitudes de onda: —,  $\lambda=30$  mm; - - - - ,  $\lambda=60$  mm; - - - - ,  $\lambda=90$  mm; - - - - , corrugación (s.e.).

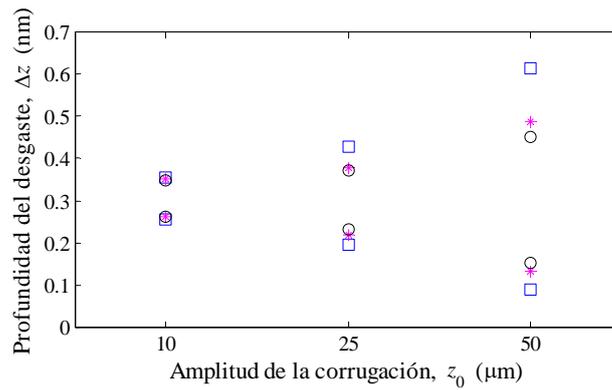


Figura 5.27. Valores máximos y mínimos de la profundidad del desgaste en función de la amplitud de la corrugación inicial: □,  $\lambda=30$  mm; \*,  $\lambda=60$  mm; ○,  $\lambda=90$  mm.

En la Figura 5.28, se representan las profundidades del desgaste, normalizadas respecto a los valores máximos, para las tres amplitudes de la corrugación inicial consideradas en esta sección, con el fin de facilitar su comparación.

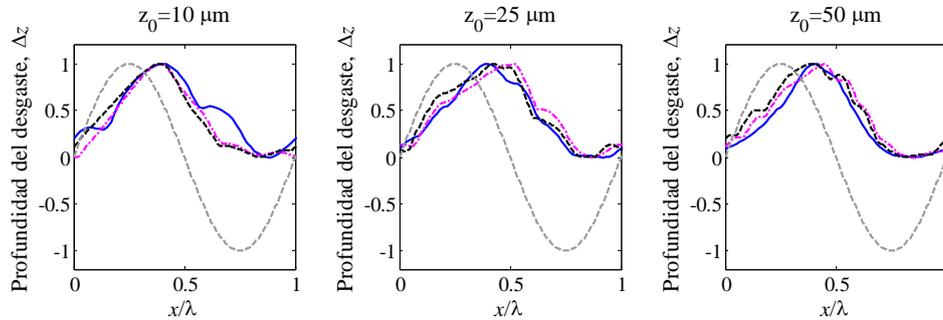


Figura 5.28. Profundidad del desgaste normalizada, cuando la rueda circula sobre corrugación sinusoidal de varias amplitudes y longitudes de onda: —,  $\lambda=30 \text{ mm}$ ; - - -,  $\lambda=60 \text{ mm}$ ; ·····,  $\lambda=90 \text{ mm}$ ; - - - - -, corrugación (s.e.).

En el caso de la amplitud de la corrugación inicial de  $10 \mu\text{m}$ , los ángulos de desfase entre los máximos del desgaste y la corrugación inicial para las longitudes de onda analizadas se encuentran entre  $45^\circ$  y  $55^\circ$ . El máximo desfase corresponde a la longitud de onda de  $30 \text{ mm}$ . Para la amplitud de la corrugación inicial de  $25 \mu\text{m}$ , los ángulos de desfase de los máximos del desgaste referido al máximo de la corrugación inicial, se encuentran entre  $55^\circ$  y  $95^\circ$ , siendo el desfase máximo el correspondiente a la longitud de onda de  $60 \text{ mm}$ . Cuando la amplitud de la corrugación inicial es de  $50 \mu\text{m}$ , el ángulo de desfase de los máximos del desgaste respecto al máximo de la corrugación inicial oscila entre  $55^\circ$  y  $70^\circ$ . El máximo desfase es el correspondiente a la longitud de onda de  $60 \text{ mm}$ . Se observa, por tanto, que para las tres amplitudes y longitudes de onda de la corrugación inicial analizadas, los máximos de la profundidad del desgaste se localizan con un desfase comprendido aproximadamente entre  $45^\circ$  y  $90^\circ$  con respecto a ésta, que a lo sumo podría producir un desplazamiento de la corrugación inicial al desgastarse con mayor velocidad el flanco descendente de ésta.

A partir de los anteriores resultados, se puede concluir que con la implementación de un modelo no herciano y no estacionario (que permite considerar efectos no lineales en el contacto rueda-carril, como el *desplazamiento geométrico*, la forma no elíptica del área de contacto y la asimetría de las distribuciones de tensiones normales), excluyendo la interacción dinámica vehículo-vía, no es posible predecir el crecimiento de la corrugación para ninguna de las longitudes de onda analizadas.

## 5.6 Conclusiones

En este capítulo se ha descrito, en primer lugar, el desarrollo de un método de cálculo de la profundidad del desgaste en la superficie de rodadura de un carril. El método se basa en el cálculo de la distribución de la profundidad del desgaste (o del ratio de desgaste) en el área de contacto mediante el modelo de desgaste de Archard, a partir de las magnitudes del contacto rueda-carril, obtenidas de un modelo de contacto tridimensional.

En el apartado 5.4, se ha estudiado la influencia del proceso de contacto no estacionario en la estimación del desgaste. Con este fin, se ha implementado el modelo de contacto herciano y no estacionario presentado en el apartado 4.3. Los resultados de este modelo se han comparado con los obtenidos empleando FASTSIM. Las principales conclusiones son:

- Se han encontrado discrepancias de aproximadamente el 15% entre el desgaste calculado con FASTSIM (*Teoría Simplificada*) y una *Teoría Exacta*, cuando se consideran condiciones estacionarias.
- El segundo conjunto de cálculos considera aquellas situaciones en las que la fuerza de contacto (normal o longitudinal) varía rápidamente. A medida que oscilan las condiciones en el contacto según una longitud de onda más pequeña, más evidentes son las diferencias entre la profundidad del desgaste obtenidas con los dos modelos de contacto. Este hecho implica que el tipo de modelo de contacto puede determinar el patrón de corrugación, principalmente en los casos de defectos de longitud de onda corta. Sin embargo, empleando FASTSIM no se puede predecir la anterior desviación. Las diferencias observadas son principalmente debidas al proceso no estacionario que tiene lugar en el contacto rueda-carril. En comparación con un modelo estacionario, los parámetros del contacto calculados mediante el modelo de contacto no estacionario están desfasados con respecto a la fuerza exterior aplicada.

En el apartado 5.5, empleando el modelo de contacto no herciano y no estacionario descrito en el apartado 4.4, se ha analizado, en primer lugar, el efecto del proceso no estacionario de contacto asumiendo hipótesis hercianas en el mismo (superficie de rodadura del carril lisa, sin irregularidades). De estos análisis se puede concluir lo siguiente:

- El incremento de la fuerza normal transmitida entre la rueda y carril, así como el aumento del pseudodeslizamiento longitudinal (manteniendo el coeficiente

de rozamiento constante) ocasionan un mayor nivel de desgaste uniforme en la superficie de rodadura del carril.

- Cuando se hace variar la fuerza normal, manteniendo constante el pseudodeslizamiento longitudinal, se observa que la amplitud del desgaste no uniforme es menor a medida que se reduce la longitud de onda de dicha fuerza, a la vez que se incrementa el desfase entre el desgaste y la fuerza.
- Si el pseudodeslizamiento longitudinal fluctúa alrededor de un valor medio dado, manteniendo constante la fuerza normal, se aprecia que conforme se reduce la longitud de onda de éste, disminuye la amplitud de la profundidad del desgaste. El desgaste está ligeramente desfasado respecto al pseudodeslizamiento y en fase con la fuerza longitudinal. Si el pseudodeslizamiento longitudinal es alternante puro, se observa que la profundidad del desgaste presenta una frecuencia que es doble de la del pseudodeslizamiento, reduciéndose su magnitud al disminuir la longitud de onda de la variación.
- Si se considera la variación simultánea de la fuerza normal y el pseudodeslizamiento longitudinal, se observa que se reduce significativamente la amplitud de la profundidad del desgaste y aumenta el desfase entre ésta y la fuerza normal a medida que disminuye la longitud de onda de dichas magnitudes.

En segundo lugar, se ha analizado el efecto en el desgaste de la rodadura sobre una superficie con corrugación sinusoidal. En este caso, la variación del perfil longitudinal del carril da lugar a condiciones no hercianas en el contacto rueda-carril. Las principales conclusiones que se extraen de estos análisis son:

- Se ha observado que los máximos de la profundidad del desgaste se localizan ligeramente desfasados (entre  $45^\circ$  y  $90^\circ$ ) con respecto a los máximos de la corrugación inicial para las tres longitudes de onda consideradas (30 mm, 60 mm y 90 mm). Esto implica que en las proximidades de crestas de la corrugación inicial es donde se produce la mayor eliminación de material, con lo que la amplitud de ésta se reduciría progresivamente con los pasos de ruedas.
- Por otra parte, se ha observado que el incremento de la amplitud de la corrugación inicial produce un aumento de la amplitud de la profundidad del desgaste en el carril. A su vez, el incremento de la amplitud de la profundidad del desgaste es mayor a medida que se reduce la longitud de onda de la corrugación inicial. Este último resultado es contrario al que se ha obtenido

considerando hipótesis hercianas en el contacto rueda-carril cuando se ha analizado la influencia del proceso no estacionario en el mismo. Ello se puede atribuir a los efectos no hercianos, como el desplazamiento geométrico del área de contacto y la asimetría de las distribuciones de tensiones en el contacto debido a la rodadura sobre corrugación, que son más acusados cuando ésta es profunda.

- Con lo anteriormente expuesto, se puede concluir que los efectos no hercianos conducen a resultados contrarios a los debidos al proceso no estacionario en el contacto. Como se ha demostrado en este capítulo, ambos deben ser considerados cuando se trata de estimar el desgaste no uniforme causado por fluctuaciones rápidas (alta frecuencia) en el contacto rueda-carril, producidas por el paso sobre corrugación de longitud de onda pequeña y amplitud elevada.



# 6

## Modelo de interacción dinámica vehículo-vía

### 6.1 Introducción

La corrugación de los carriles tiene asociado un fenómeno dinámico cuya naturaleza puede ser conjeturada a partir de las longitudes de onda de este defecto. Las frecuencias correspondientes al cociente entre la velocidad del vehículo y la longitud de onda de la corrugación se encuentran en un rango relativamente alto (entre unas decenas de hercios y varios kilohercios), suficientemente por encima de la frecuencia de corte asociada al filtrado de la suspensión primaria. Se trata, por consiguiente, de un problema de vibraciones que afecta a las masas no suspendidas y a la vía, y que tiene como principal consecuencia el aumento del ruido radiado.

En la bibliografía encontramos un número elevado de trabajos que aborda el modelado desde el punto de vista de la dinámica vertical. La dinámica vertical es, en primera aproximación, un problema lineal, lo cual permite adoptar hipótesis interesantes en este estudio, fundamentalmente la longitud infinita de la vía [73, 133]. Sin embargo, los trabajos basados en la linealidad pueden contribuir a señalar un mecanismo que interviene en la fijación de onda de un determinado caso observado en vía, pero no explican el problema. El desgaste se produce como consecuencia del deslizamiento horizontal, y su naturaleza es fuertemente no lineal. El acoplamiento entre la dinámica vertical que se excita por la rugosidad de los carriles y los movimientos horizontales que producen el desgaste no son evidentes, lo cual ha dificultado dar una explicación completa al problema de la corrugación. A través de los modelos avanzados del eje montado se concluye el fuerte acoplamiento existente entre la dinámica horizontal y la vertical en este elemento, debido a los efectos inerciales asociados al giro [208]. Ello ha permitido

inferir las posibilidades del eje como elemento responsable de algún tipo de corrugación.

Algunos trabajos señalan las posibilidades de la dinámica del eje montado en la formación de la corrugación en carriles. Popp *et al.* lo mencionan en la referencia [167]. Grassie y Kalousek [64] relacionaron el mecanismo de fijación de la longitud de onda de los tipos de corrugación *booted sleepers* y *rutting* con los modos de flexión y torsión del eje, respectivamente. Por otra parte, Grassie y Elkins [65] atribuyeron al segundo modo de torsión del eje, la corrugación observada en vías férreas en Norteamérica. Soua [181] observó que la combinación del movimiento lateral del vehículo y el primer modo de torsión del eje iniciaba la formación de desgaste irregular. Brockley y Ko [27] y Hayes y Tucker [75] señalaron la excitación de modos de torsión del eje y la dinámica longitudinal de la vía como posibles causantes de corrugación. Tassily y Vincent [189, 190] en su investigación sobre corrugación en vías curvas en el metro de París, concluyeron que el rango de frecuencias entre 60 y 80 Hz, en el que el crecimiento de corrugación era mayor, correspondía a la frecuencia del primer modo de flexión del eje delantero. Para el eje trasero, observaron que el máximo desgaste se producía en torno a 55 Hz, que corresponde a la frecuencia del primer modo de torsión. Hempelmann *et al.* [76, 77] señalan que la principal influencia de la flexibilidad del eje en la formación de corrugación se debía al acoplamiento de la dinámica vertical y lateral del eje por medio de la flexión del cuerpo del eje ferroviario. Gómez y García Vadillo [60] implementaron un modelo de eje flexible en su modelo lineal de predicción de la corrugación de longitud de onda corta, pero no consideraron los efectos del giro del eje. Recientemente, Torstensson *et al.* [194, 196, 197], en su estudio sobre la corrugación tipo *rutting*, han concluido que el primer modo simétrico y asimétrico de flexión de ejes ferroviarios motores puede ser el causante de corrugación en el carril bajo de vías curvas del metro. Los estudios anteriores justifican la adopción de un modelo avanzado del eje montado para estudiar el crecimiento de la corrugación en carriles.

En este capítulo se muestra el modelado de la interacción del vehículo con la vía desarrollado para la estimación del desgaste ondulatorio de los carriles. Del vehículo sólo se estudian las masas no suspendidas, que se consideran mediante un modelo avanzado que implementa la flexibilidad del eje montado y los efectos inerciales asociados al giro [17]. El modelo está orientado a la obtención de la respuesta a través de la simulación (vía integración de las ecuaciones del movimiento), lo cual permite incorporar una teoría de contacto no estacionaria, no lineal, y no herciana [210].

Las hipótesis de no linealidad implica adoptar un modelo de vía finita. Es necesario, por tanto, paliar los efectos asociados a los extremos, dado que las ondas se reflejan en ellos pudiendo volver a interactuar con el vehículo. Salvando soluciones clásicas poco efectivas (situando un amortiguador, una masa o una rigidez en el extremo del carril), en la bibliografía se presentan pocas alternativas para reducir los efectos de la reflexión de ondas. Una de ellas publicada en [193], consigue un efecto anecoico en determinadas bandas de frecuencias a través de una sección variable del extremo del carril. La hipótesis de vía cíclica [19] que se adopta en esta Tesis es más conveniente para estudios de corrugación, al no presentar límites en el periodo de la simulación.

## **6.2 Generación del modelo de interacción vehículo-vía mediante técnicas de subestructuración**

Implementar un modelo de interacción vehículo-vía realista tiene una gran repercusión en el coste computacional de la simulación. Por ello, en esta Tesis se combina un modelo de vía cíclica con una técnica de subestructuración para simular la interacción dinámica entre el vehículo y la vía en el dominio del tiempo.

El procedimiento que se sigue cuando se desarrolla un modelo basado en una técnica de subestructuración es el que se describe a continuación:

En primer lugar, se divide el sistema global en subestructuras de menor complejidad de análisis y se eligen las coordenadas de conexión entre las subestructuras, así como las coordenadas interiores. En segundo lugar, se analizan las subestructuras utilizando métodos teóricos, experimentales o híbridos, con el objetivo de determinar las propiedades dinámicas de las subestructuras.

Finalmente, tras definir las ecuaciones de movimiento reducidas de las subestructuras, éstas se ensamblan mediante las ecuaciones de restricción, las cuales describen la compatibilidad de fuerzas y desplazamientos entre las subestructuras. Se pueden emplear técnicas de unión de impedancias o técnicas de unión modal, según si la reducción de las subestructuras se haya realizado en coordenadas físicas o en coordenadas modales, respectivamente. En las técnicas de unión de impedancias se ensamblan las propiedades espaciales, es decir, las matrices de masa, amortiguamiento y rigidez; mientras que en las técnicas de unión modal se ensamblan las propiedades modales de las subestructuras, es decir, los modos de vibración retenidos, los cuales están relacionados con sistemas de ecuaciones diferenciales desacopladas.

El método de subestructuración empleado en esta Tesis considera tres tipos de subestructuras (ver Figura 6.1): el vehículo, los carriles y las traviesas. Cada subestructura se representa de forma independiente a las demás mediante un conjunto de ecuaciones diferenciales ordinarias. Las distintas subestructuras se relacionan entre sí a través de fuerzas externas: el vehículo y los carriles se conectan mediante las fuerzas de contacto, y los carriles y las traviesas mediante las fuerzas transmitidas en las placas de asiento. Dichas fuerzas se calculan a partir de desplazamientos y velocidades del sistema vehículo-vía. La resolución de la interacción vehículo-vía en el dominio del tiempo permite considerar la presencia de no linealidades en el sistema, como las relacionadas con los defectos en la superficie de rodadura del carril o de la rueda, el proceso no estacionario del contacto y el comportamiento no lineal de las placas de asiento y el balasto.

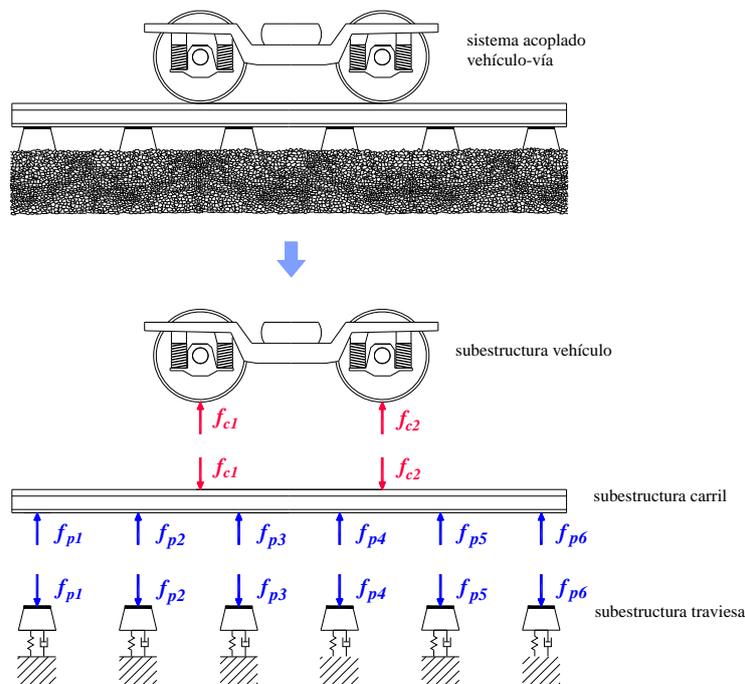


Figura 6.1. Subestructuras del sistema vehículo-vía (vehículo, carril y traviesa) y fuerzas de conexión entre subestructuras.

### 6.3 Modelo de vehículo

En esta Tesis, el modelo de vehículo se reduce a la representación de la masa no suspendida del vehículo con la suspensión primaria, a través de un modelo de eje ferroviario. El resto del vehículo se caracteriza mediante su peso, considerado como una fuerza constante aplicada sobre las cajas de grasa del eje.

#### 6.3.1 Formulación del modelo de eje flexible rotatorio

El modelo de eje flexible rotatorio que se emplea en esta Tesis es el desarrollado en el Centro de Investigación en Ingeniería Mecánica (CIIM) de la UPV [54,127,128]. A continuación se describe la formulación en la que se basa dicho modelo.

En el modelado de la cinemática del sólido se adopta el concepto de «configuración» del modo que se emplea en Mecánica del Medio Continuo (ver definición en [129]). La configuración de referencia se define de forma arbitraria, como la posición del eje no deformado en el instante  $t=0$ . Se hace uso de un sistema de referencia inercial  $xyz$  cuyo origen coincide con el centro de masas en la configuración de referencia, donde el eje  $y$  contiene el eje del eje montado en la configuración no deformada, el eje  $z$  es el vertical (positivo en sentido ascendente),  $z=0$  es el plano horizontal, y el eje  $x$  es positivo en el sentido de la marcha. Se supone que el eje gira con velocidad angular constante  $\Omega$ . La configuración no deformada para un instante  $t$  genérico consistirá en un giro del eje rígido desde la configuración de referencia cuyo ángulo según la dirección  $y$  es  $\Omega t$ .

Se define un sistema Euleriano de coordenadas a través del vector posición  $\mathbf{u}$  que sitúa un punto espacial del volumen del eje en la configuración no deformada. El vector posición de una partícula material del eje que en el instante  $t$  se encuentra en la configuración no deformada en la posición  $\mathbf{u}$ , será

$$\mathbf{r} = \mathbf{u} + \mathbf{w}(\mathbf{u}, t), \quad (6.1)$$

donde  $\mathbf{r}$  es la posición de la partícula, y  $\mathbf{w}$  es el desplazamiento asociado a la flexibilidad y a pequeños movimientos de sólido rígido.

Se definen las matrices  $\mathbf{J}$  y  $\mathbf{E}$  como sigue

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (6.2)$$

El tensor velocidad angular cumple las siguientes propiedades

$$\tilde{\Omega} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \Omega \\ 0 & 0 & 0 \\ -\Omega & 0 & 0 \end{pmatrix} = \Omega \mathbf{J} ; \text{ y } \tilde{\Omega} \tilde{\Omega} = -\Omega^2 \mathbf{E}. \quad (6.3)$$

La velocidad debida al movimiento de giro del eje es

$$\mathbf{v} = (v_1 \quad v_2 \quad v_3)^T = \tilde{\Omega} \mathbf{u} = \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} = \Omega \tilde{\mathbf{u}}, \quad (6.4)$$

donde  $\tilde{\mathbf{u}} = (u_3 \quad 0 \quad -u_1)^T$ .

La velocidad de una partícula se calcula a través de la derivada material del vector posición  $\mathbf{r}$ , y es

$$\frac{D\mathbf{r}}{Dt} = \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \frac{D\mathbf{w}}{Dt} = \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial u_i} + \dot{\mathbf{w}} + \sum_i v_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} = \Omega \mathbf{J} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{w}} + \Omega \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i}. \quad (6.5)$$

Con objeto de calcular la energía cinética del sólido, se debe obtener el cuadrado de la velocidad de la partícula

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{r}^T}{Dt} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} &= \Omega^2 \mathbf{u}^T \mathbf{E} \mathbf{u} + \dot{\mathbf{w}}^T \dot{\mathbf{w}} + \Omega^2 \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial u_i} \right) \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \right) \\ &+ 2\Omega \dot{\mathbf{w}}^T \mathbf{J} \mathbf{u} + 2\Omega^2 \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} + 2\Omega \dot{\mathbf{w}}^T \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{w}}{\partial u_i} \right). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Se adopta la siguiente aproximación

$$\mathbf{w}(\mathbf{u}, t) = \Phi(\mathbf{u}) \mathbf{q}(t), \quad (6.7)$$

siendo  $\Phi(\mathbf{u})$  la matriz (fila) que contiene las deformadas modales del sólido. Debe tenerse en cuenta que, debido a la simetría de revolución del eje, puede emplearse las deformadas modales en ejes fijos como base para los desplazamientos del eje.

La expresión de la energía cinética a través de las ecuaciones (6.6) y (6.7) es

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{1}{2} \int_{Vol} \rho \frac{D\mathbf{r}^T}{Dt} \frac{D\mathbf{r}}{Dt} d\nu = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{q}}^T \int_{Vol} \rho \Phi^T \Phi d\nu \dot{\mathbf{q}} + \frac{1}{2} \Omega^2 \int_{Vol} \rho \mathbf{u}^T \mathbf{E} \mathbf{u} d\nu \\ &+ \frac{1}{2} \Omega^2 \dot{\mathbf{q}}^T \int_{Vol} \rho \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) d\nu \mathbf{q} + \Omega \dot{\mathbf{q}}^T \int_{Vol} \rho \Phi^T \mathbf{J} \mathbf{u} d\nu \\ &+ \Omega^2 \dot{\mathbf{q}}^T \int_{Vol} \rho \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} d\nu + \Omega \dot{\mathbf{q}}^T \int_{Vol} \rho \Phi^T \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) d\nu \mathbf{q}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Los dos términos de los cuales se derivan las componentes inerciales de la ecuación del movimiento vía ecuaciones de Lagrange, son

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T &= \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \mathbf{\Phi} d\nu \ddot{\mathbf{q}} + \Omega \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) d\nu \dot{\mathbf{q}} - \Omega^2 \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \mathbf{E} \mathbf{u} d\nu \\
&+ \Omega \int_{Vol} \rho \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{\Phi} d\nu \dot{\mathbf{q}} + \Omega \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) d\nu \dot{\mathbf{q}} \\
&+ \Omega^2 \int_{Vol} \rho \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} d\nu - \Omega^2 \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \left( \sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) d\nu \mathbf{q} \\
&+ \Omega^2 \int_{Vol} \rho \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) d\nu \mathbf{q} + \Omega^2 \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \left( \sum_j \sum_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial u_i \partial u_j} \right) d\nu \mathbf{q}
\end{aligned} \tag{6.9}$$

$$\begin{aligned}
\left( \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \Omega^2 \int_{Vol} \rho \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) d\nu \mathbf{q} \\
&+ \Omega^2 \int_{Vol} \rho \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{J} \mathbf{u} d\nu + \Omega \int_{Vol} \rho \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}^T}{\partial u_i} \right) \mathbf{\Phi} d\nu \dot{\mathbf{q}}
\end{aligned} \tag{6.10}$$

Finalmente se obtiene los términos inerciales como

$$\begin{aligned}
\frac{D}{Dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{\mathbf{q}}} \right)^T - \left( \frac{\partial E_k}{\partial \mathbf{q}} \right)^T &= \ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) d\nu \dot{\mathbf{q}} + \Omega^2 \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \left( \sum_j \sum_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \mathbf{\Phi}}{\partial u_i \partial u_j} \right) d\nu \mathbf{q} \\
&- \Omega^2 \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \left( \sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \mathbf{\Phi}}{\partial u_i} \right) d\nu \mathbf{q} - \Omega^2 \int_{Vol} \rho \mathbf{\Phi}^T \mathbf{E} \mathbf{u} d\nu .
\end{aligned} \tag{6.11}$$

Las propiedades modales se calculan a partir de un modelo de elementos finitos (EF), por lo tanto, es oportuno utilizar la metodología de EF para el cálculo numérico de la ecuación de movimiento. Las funciones de forma modo se obtienen en el elemento  $e$ -ésimo de la malla de EF como sigue

$$\mathbf{\Phi}(\mathbf{u}) = \mathbf{N}^e(\mathbf{u}) \mathbf{\Phi}_{FE}^e , \tag{6.12}$$

siendo  $\mathbf{N}^e(\mathbf{u})$  las funciones de forma del  $e$ -ésimo elemento, y  $\mathbf{\Phi}_{FE}^e$  las deformadas modales calculadas en los nodos del  $e$ -ésimo elemento a través del modelo de EF.

En una primera fase se debe calcular cada integral en el volumen del sólido como la suma de las integrales en el volumen de los elementos, es decir

$$\int_{Vol} \bullet \, dv = \sum_{elements} \int_{Vol^e} \bullet \, dv \quad (6.13)$$

Las matrices a nivel de elemento son ensambladas en las matrices globales, siguiendo la técnica de ensamblado estándar de EF. La primera matriz del elemento en la ecuación (6.11) se obtiene por medio de la aproximación de la ecuación (6.12) de la siguiente manera

$$2\Omega \int_{Vol^e} \rho \Phi^T \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \Phi}{\partial u_i} \right) dv = 2\Omega \Phi_{FE}^{eT} \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv \Phi_{FE}^e = 2\Omega \Phi_{FE}^{eT} \mathbf{V}^e \Phi_{FE}^e, \quad (6.14)$$

definiendo  $\mathbf{V}^e$  para el elemento  $e$ -ésimo como

$$\mathbf{V}^e = \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \left( \sum_i \tilde{u}_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv. \quad (6.15)$$

Siguiendo el mismo procedimiento que la ecuación (6.14), se obtienen el resto de las matrices de los elementos

$$\mathbf{A}^e = \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \left( \sum_j \sum_i \tilde{u}_i \tilde{u}_j \frac{\partial^2 \mathbf{N}^e}{\partial u_i \partial u_j} \right) dv, \quad (6.16)$$

$$\mathbf{C}^e = \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \left( \sum_{i=1,3} u_i \frac{\partial \mathbf{N}^e}{\partial u_i} \right) dv, \quad (6.17)$$

$$\mathbf{c}^e = \int_{Vol^e} \rho \mathbf{N}^{eT} \mathbf{E} \mathbf{u} \, dv. \quad (6.18)$$

Los términos de la ecuación de Lagrange relacionados con las fuerzas no conservativas y energía elástica se calculan como procedimiento de aproximación modal estándar (debido a los desplazamientos de Euler y desplazamientos virtuales no dependen del tiempo). Las matrices de los elementos (por ejemplo  $\mathbf{A}^e$ ) se ensamblan en las matrices globales (dando la matriz  $\mathbf{A}$ ), obteniéndose la siguiente ecuación del movimiento

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega \Phi_{FE}^T \mathbf{V} \Phi_{FE} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \Omega^2 \Phi_{FE}^T (\mathbf{A} - \mathbf{C}) \Phi_{FE}) \mathbf{q} = \Omega^2 \Phi_{FE}^T \mathbf{c} + \mathbf{Q}, \quad (6.19)$$

siendo  $\mathbf{Q}$  las fuerzas generalizadas, y  $\mathbf{D}$  una matriz diagonal que contiene el cuadrado de las frecuencias naturales del sólido libre.

### 6.3.2 Influencia de la velocidad de rotación en la respuesta libre del eje flexible rotatorio

Una de las ventajas del modelo del eje es la posibilidad de obtener funciones de respuesta en frecuencia (FRF) así como las propiedades modales del sólido rotatorio. Para obtener la FRF, se supone una excitación armónica

$$\ddot{\mathbf{q}} + 2\Omega \Phi_{FE}^T \mathbf{V} \Phi_{FE} \dot{\mathbf{q}} + (\mathbf{D} + \Omega^2 \Phi_{FE}^T (\mathbf{A} - \mathbf{C}) \Phi_{FE}) \mathbf{q} = \Phi_{FE}^T \mathbf{F} e^{i\omega t}, \quad (6.20)$$

la solución estacionaria se obtiene de la función

$$\mathbf{w} = \Phi_{FE} \mathbf{q} = \Phi_{FE} \left[ -\omega^2 \mathbf{I} + 2\Omega i \omega \Phi_{FE}^T \mathbf{V} \Phi_{FE} + (\mathbf{D} + \Omega^2 \Phi_{FE}^T (\mathbf{A} - \mathbf{C}) \Phi_{FE}) \right]^{-1} \Phi_{FE}^T \mathbf{F} e^{i\omega t}, \quad (6.21)$$

de donde se obtiene el valor de la FRF receptancia.

La Tabla 6.1 muestra los siete primeros modos de vibración del eje no rotatorio libre, junto con las frecuencias naturales y multiplicidades. La FRF receptancia permite analizar la influencia de la velocidad de rotación en las frecuencias naturales del eje flexible rotatorio libre.

La receptancia directa  $H_{zz}(\omega)$  representa el desplazamiento del punto de contacto del eje con la vía en la dirección vertical, cuando la excitación se aplica sobre el mismo punto en la misma dirección. En la Figura 6.2, se representa la receptancia directa para dos velocidades de avance del eje: 0 y 100 km/h. En ella se muestran, para la velocidad nula, los picos de resonancia del eje flexible a las frecuencias naturales del eje no rotatorio que se recogen en la Tabla 6.1, las cuales se encuentran comprendidas en el rango de frecuencias de 0 Hz a 436 Hz (a excepción de la frecuencia natural correspondiente al tercer modo de paraguas a 1017 Hz). Si la velocidad del eje no es nula, los picos de resonancia asociados a los modos de vibración de multiplicidad 2 (por ejemplo, modos de flexión y modos de flexión de las ruedas) se dividen en dos picos de resonancia diferentes, uno de menor frecuencia asociado con el modo *backward*, en el que el eje gira hacia atrás, y el otro de mayor frecuencia, correspondiente al modo *forward*, en el que el eje gira hacia delante. Sin embargo, los picos de resonancia correspondientes a los modos de multiplicidad 1 permanecen invariables.

La diferencia entre las frecuencias del modo *backward* y el modo *forward* del cuerpo del eje la obtuvo Fayos [54] para una viga de Rayleigh simplemente apoyada como

$$\Delta\omega_k = \frac{2k^2\pi^2}{k^2\pi^2 + \lambda^2} \Omega, \quad (6.22)$$

donde  $k$  es el índice de multiplicidad del modo,  $\lambda$  es la esbeltez de la viga y  $\Omega$  es la velocidad angular de giro. En el caso del eje ferroviario, la esbeltez depende de la deformada modal, pudiendo llegar a ser muy baja. Si se considera en la expresión (6.22) que la esbeltez es igual a cero, resulta que la diferencia entre el modo *backward* y el modo *forward* es  $2\Omega$ , esto es, el doble de la velocidad de giro. Con esto se tendrá que los picos de resonancia asociados a los modos *forward* y *backward* se producirán a las siguientes frecuencias

$$\omega_{f,b} = \omega_{\Omega=0} \pm \Omega \quad (6.23)$$

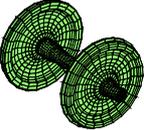
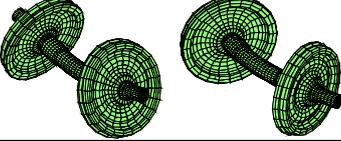
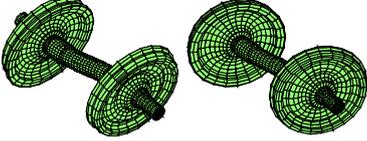
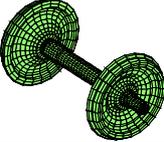
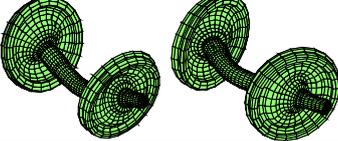
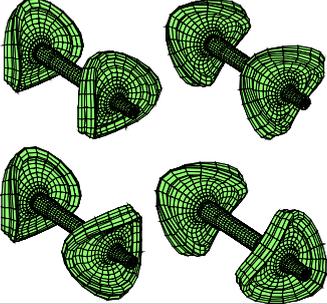
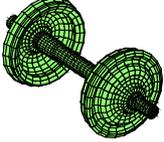
La rueda se comporta de forma similar a una placa circular [192]. Los modos de vibración de las ruedas se pueden clasificar atendiendo al número de diámetros nodales  $n$  y al número de círculos nodales  $m$ . Para  $n > 0$  existen dos modos de vibración independientes para cada frecuencia de resonancia, un modo *backward* y un modo *forward*, que se corresponden a dos ondas que giran en sentido contrario. De esta forma, en la receptancia, aparecerán dos picos a las frecuencias

$$\omega_{f,b} = \omega_{m,n} \pm n\Omega \quad (6.24)$$

Donde  $\omega_{m,n}$  es la frecuencia natural del modo de rueda con  $m$  círculos y  $n$  diámetros nodales y  $\Omega$  es la velocidad de giro de la rueda. Por tanto, la separación entre los dos picos será aproximadamente  $2n\Omega$ .

La Figura 6.3 muestra la receptancia cruzada  $H_{xz}(\omega)$ , que representa el desplazamiento del punto de contacto del eje con la vía en la dirección longitudinal, cuando la excitación se produce en el mismo punto en la dirección vertical, con frecuencias desde 0 a 400 Hz. Considerando la simetría de revolución del eje, el nivel de la respuesta sería previsible que fuera nula. Sin embargo, esto no sucede cuando la velocidad no es nula, sino que de nuevo se pueden apreciar los dos picos de resonancia asociados a cada modo de multiplicidad 2. Los picos de resonancia 2, 4, 7 y 9 corresponden a los modos *backward*, mientras que los modos 3, 5, 8, 10 están asociados a los modos *forward*. Los picos 1 y 6 son los correspondientes al primer modo de torsión y al primer modo paraguas, respectivamente, ambos de multiplicidad 1.

Tabla 6.1. Modos de vibración del eje flexible no rotatorio.

Modo	Multiplicidad	Frecuencia [Hz]	Deformada modal
1 <sup>er</sup> modo de torsión	1	81.5	
1 <sup>er</sup> modo de flexión	2	102	
2 <sup>o</sup> modo de flexión	2	179	
1 <sup>er</sup> modo paraguas	1	298	
3 <sup>er</sup> modo de flexión	2	357	
Modos de rueda (2 diámetros nodales, 0 círculos nodales)	4	383	
2 <sup>o</sup> modo de paraguas (1 círculo nodal, 0 diámetros nodales)	1	436	

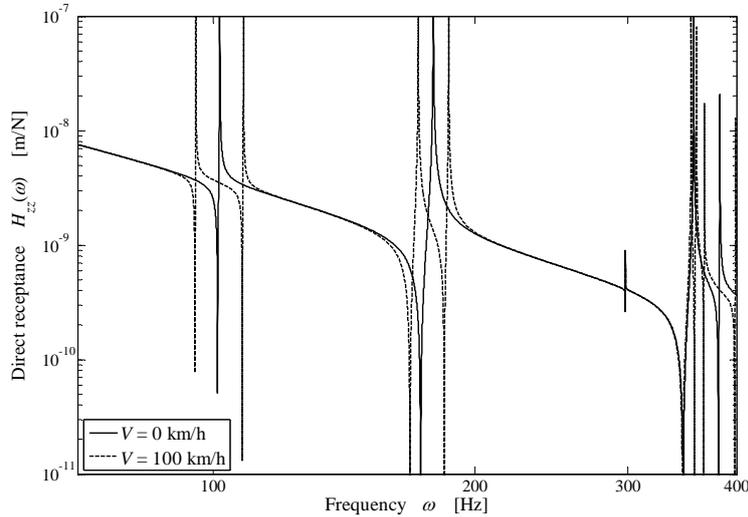


Figura 6.2. Módulo de la receptancia directa  $H_{zz}$  en función de la frecuencia, cuando la velocidad del vehículo es 0 km/h y 100 km/h. La excitación se aplica a la rueda en el punto de contacto según la dirección vertical y la medida de la respuesta se realiza en el mismo punto y dirección.

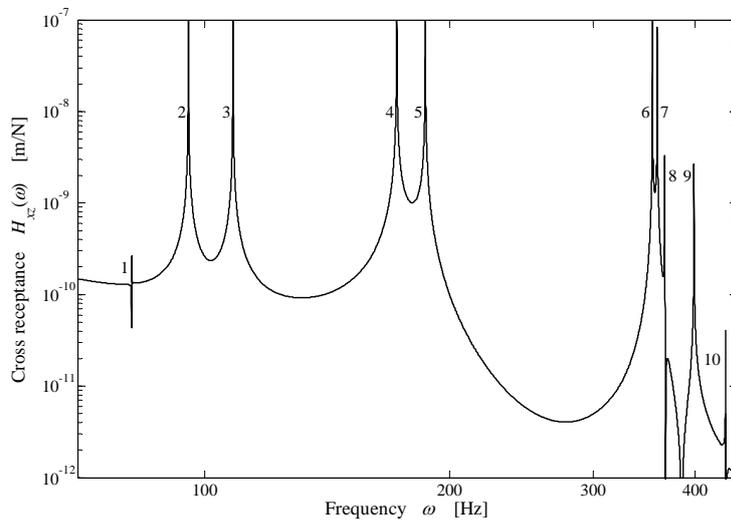


Figura 6.3. Módulo de la receptancia cruzada  $H_{xz}$  en función de la frecuencia, cuando la velocidad del vehículo de 100 km/h. La excitación se aplica a la rueda en el punto de contacto según la dirección vertical y la medida de la respuesta se realiza en el mismo punto en la dirección longitudinal. Pico 1: 1<sup>er</sup> modo de torsión; Picos 2 y 3: 1<sup>os</sup> modos de flexión, modo backward y forward, respectivamente; Picos 4 y 5: 2<sup>os</sup> modos de flexión (backward y forward); Pico 6: 1<sup>er</sup> modo paraguas; Picos 7 y 8: 3<sup>os</sup> modos de flexión (backward y forward); Picos 9 y 10: modos de ruedas (backward y forward).

En el diagrama de Campbell (ver Figura 6.4), se representan las frecuencias de los modos de vibración del eje montado en función de la velocidad del vehículo. Los modos de vibración de multiplicidad 1, ordenados de menor a mayor frecuencia, son (para el eje analizado): el primer modo de torsión y los modos simétricos y antisimétricos de paraguas. Los modos de multiplicidad 2, que son los tres primeros modos de flexión del eje y los modos de rueda, se separan en dos modos diferentes cuando la velocidad del vehículo es diferente de cero: el modo *backward* y el modo *forward*. La frecuencia de los modos *forward* aumenta a medida que la velocidad de vehículo se eleva, mientras que la frecuencia de los modos *backward* disminuye al aumentar la velocidad del vehículo. De esta forma, la diferencia entre las frecuencias de los modos *backward* y *forward* aumenta conforme la velocidad del vehículo es mayor.

Como se ha visto en el Capítulo 3, la coincidencia de dos modos diferentes del sistema vehículo-vía puede dar lugar a un mayor crecimiento de la corrugación a la correspondiente frecuencia. En este caso, puede resultar interesante investigar la influencia de la excitación simultánea de dos modos diferentes del eje flexible rotatorio en el cálculo del desgaste y en el crecimiento de la corrugación. Se puede observar en el diagrama de Campbell del eje flexible rotatorio de la Figura 6.4, que existen dos puntos de intersección entre el modo *backward* de ruedas, y los modos *backward* y *forward* asociados al tercer modo de flexión del eje. El primer punto de intersección se produce a una frecuencia de 360.8 Hz y a una velocidad de 142 km/h, entre el modo *backward* de rueda y el tercer modo de flexión *forward*, que denominaremos de aquí en adelante modos B-F. El segundo punto de intersección se debe a la coincidencia del modo *backward* de rueda y el tercer modo de flexión *backward*, que llamaremos modos B-B, a la frecuencia 352.5 Hz y a la velocidad 198 km/h.

En las Figuras 6.5 y 6.6, se muestran las receptancias directa y cruzada del eje flexible rotatorio, respectivamente, en el rango de frecuencias comprendido entre 342 Hz y 375 Hz, para las velocidades 142 km/h y 198 km/h. Como se puede observar, los efectos giroscópicos producen la división del pico de resonancia correspondiente al tercer modo de flexión del eje flexible no rotatorio en dos picos de resonancia diferentes asociados a los modos *backward* y *forward*. Se puede apreciar que la separación entre dichos picos es mayor para la velocidad de 198 km/h que para la de 142 km/h.

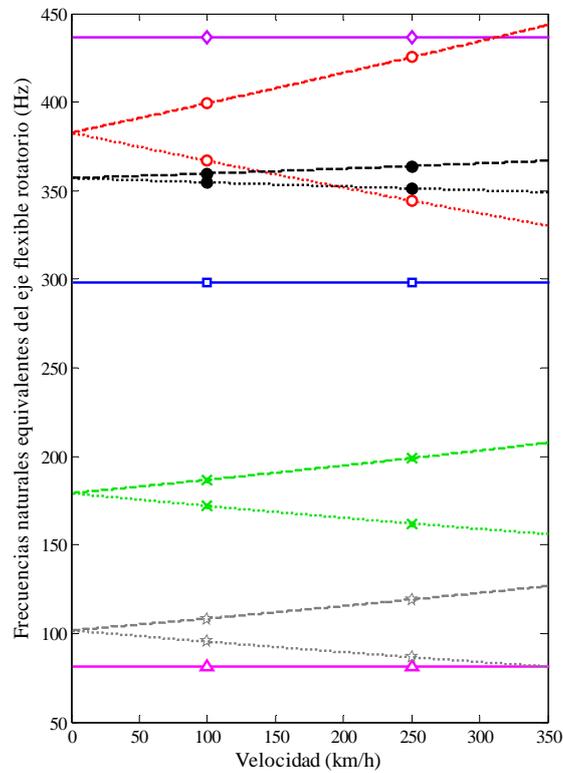


Figura 6.4. Diagrama de Campbell del eje ferroviario. Modos de multiplicidad 1: ▲, primer modo de torsión; ◻, primer modo de paraguas; ◊, segundo modo de paraguas. Modos de multiplicidad 2: \*, primer modo de flexión horizontal y vertical (----, modo forward; ·····, modo backward); \*, segundo modo de flexión horizontal y vertical (----, modo forward; ·····, modo backward); ●, tercer modo de flexión horizontal y vertical (----, modo forward; ·····, modo backward). Modo de multiplicidad 4: ○, modos de rueda (----, modos forward; ·····, modos backward).

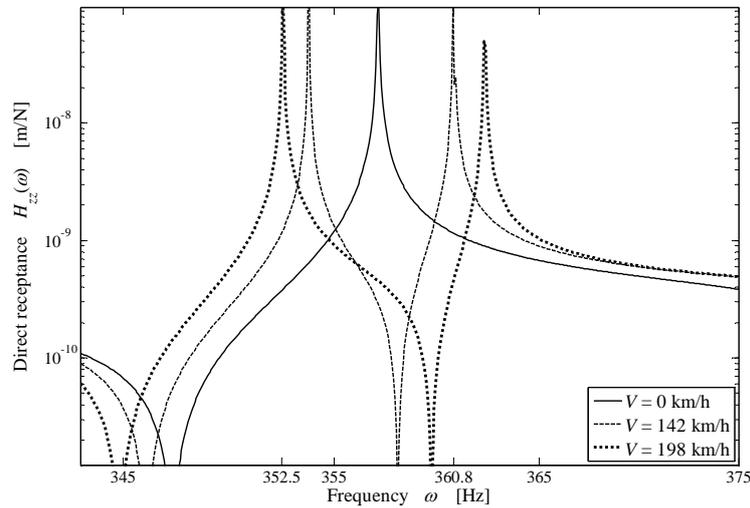


Figura 6.5. Módulo de la receptancia directa  $H_{zz}$  en función de la frecuencia para diferentes velocidades del vehículo (0 km/h, 142 km/h y 198 km/h). La excitación se aplica a la rueda en el punto de contacto en la dirección vertical y se mide la respuesta en el mismo punto y dirección.

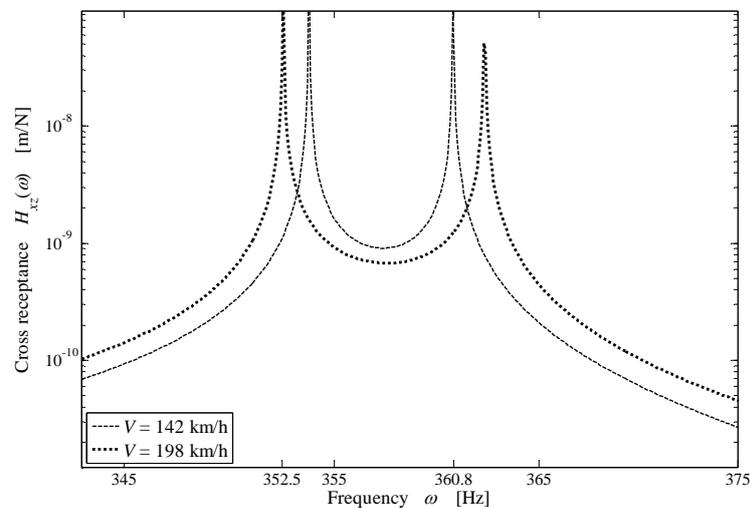


Figura 6.6. Módulo de la receptancia  $H_{xz}$  en función de la frecuencia para las velocidades 142 km/h y 198 km/h. La excitación se aplica a la rueda en el punto de contacto según la dirección vertical y se mide la respuesta en el mismo punto en la dirección longitudinal.

## 6.4 Modelo de vía

El modelo de vía cíclica implementado en esta Tesis es el publicado en [19]. La interpretación de una vía cíclica es la de una vía infinita sobre la cual circulan un número infinito de vehículos idénticos, distribuidos de forma uniforme sobre la vía, de modo que la distancia  $L$  entre cada vehículo y los vehículos adyacentes es la misma. Sin embargo, gracias a las propiedades de la periodicidad de estructuras, el estudio de la vía infinita se reduce al análisis de un tramo de vía de longitud  $L$ , como se puede apreciar en la Figura 6.7.

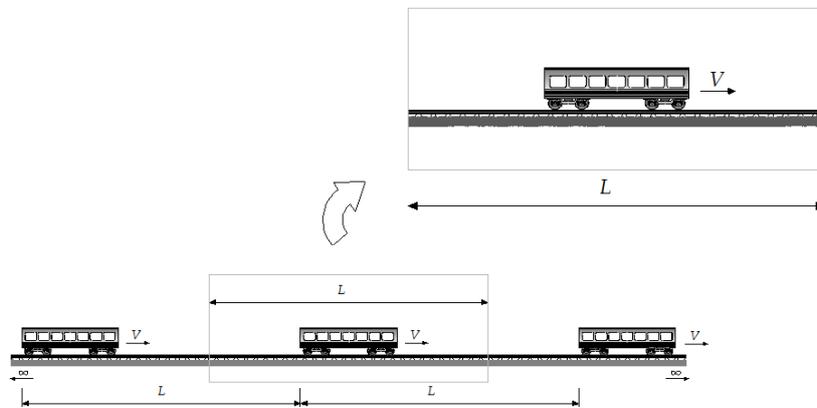


Figura 6.7. Modelo de vía cíclica.

Las condiciones de contorno en los extremos de la vía son los mismos, y por tanto, la vía infinita puede modelarse mediante las propiedades modales del tramo de vía de longitud  $L$  empleando un método modal.

Las traviesas se modelan como masas rígidas o como vigas de Timoshenko, y los carriles, como vigas de Timoshenko cíclicas, acopladas mediante placas de asiento, dispuestas entre carriles y traviesas. El balasto y las placas de asiento se representan como elementos viscoelásticos por medio de muelles lineales y amortiguadores viscosos (ver Figura 6.8).

Se define un sistema de coordenadas global  $xyz$ , con el eje  $x$  paralelo a los carriles y positivo en la dirección de movimiento del vehículo, el eje  $y$  transversal a la vía y el eje  $z$  vertical y positivo hacia arriba.

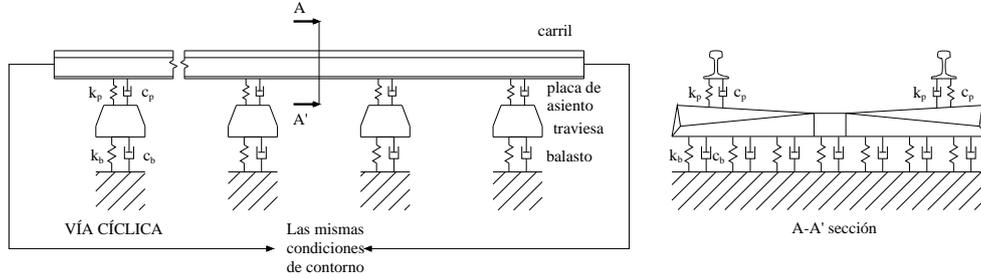


Figura 6.8. Elementos del modelo de vía cíclica.

### 6.4.1 El carril

Como se ha indicado anteriormente, el carril se representa como una viga de Timoshenko cíclica, que permite modelar la flexión vertical y horizontal del carril así como la torsión. Si se considera la vibración libre de una viga de Timoshenko de sección transversal constante, sus ecuaciones del movimiento resultan

$$-EI \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial x^2} + \kappa AG \left( \psi(x,t) - \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right) + mr^2 \frac{\partial^2 \psi(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (6.25)$$

$$\kappa AG \left( \frac{\partial \psi(x,t)}{\partial x} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \right) + m \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = 0, \quad (6.26)$$

en las que  $E$  es el módulo de Young,  $G$  es el módulo de rigidez transversal,  $I$  es el segundo momento de área,  $A$  es el área de la sección recta,  $\kappa$  es el coeficiente de Timoshenko,  $m$  es la masa por unidad de longitud,  $u(x,t)$  es el desplazamiento transversal y  $\psi(x,t)$  es el giro de la sección de la viga.

La solución de las ecuaciones diferenciales de movimiento presenta la forma siguiente

$$u(x,t) = U(x) q(t) \quad (6.27)$$

$$\psi(x,t) = \Psi(x) q(t) \quad (6.28)$$

Si se considera una solución armónica de la respuesta libre  $q(t) = \bar{q} e^{i\omega t}$ , junto con la primera y segunda derivada temporal  $\dot{q}(t) = i\omega \bar{q} e^{i\omega t}$  y  $\ddot{q}(t) = -\omega^2 \bar{q} e^{i\omega t}$ , respectivamente, y se combinan las ecuaciones del movimiento, se obtiene una única ecuación del movimiento que es función exclusivamente de  $U(x)$

$$EI \frac{d^4 U(x)}{dx^4} + \left( EI \frac{m\omega^2}{\kappa AG} + mr^2 \omega^2 \right) \frac{d^2 U(x)}{dx^2} - \left( m\omega^2 - \frac{m^2 r^2 \omega^4}{\kappa AG} \right) U(x) = 0 \quad (6.29)$$

El desplazamiento  $U(x)$  viene dado por la siguiente expresión

$$U(x) = A \sin \frac{\lambda x}{L} + B \cos \frac{\lambda x}{L} + C \sinh \frac{\lambda x}{L} + D \cosh \frac{\lambda x}{L} \quad (6.30)$$

El giro de la sección recta de la viga  $\Psi(x)$  se puede obtener de la ecuación (6.25) en la que previamente se habrá sustituido la derivada respecto de  $x$  de la ecuación (6.26)

$$\Psi(x) = \frac{1}{\kappa AG - m\omega^2 r^2} \left\{ \left( EI \frac{m\omega^2}{\kappa AG} + \kappa AG \right) \frac{dU(x)}{dx} + EI \frac{d^3 U(x)}{dx^3} \right\} \quad (6.31)$$

Para satisfacer las condiciones de contorno de la estructura cíclica se debe cumplir

$$U(0) = U(L) \quad (6.32)$$

$$\frac{d^{(j)} U(0)}{dx^{(j)}} = \frac{d^{(j)} U(L)}{dx^{(j)}}, \quad \text{con } j = 1, 2, \dots, \infty \quad (6.33)$$

Siendo el superíndice  $(j)$  la derivada  $j$ -ésima de  $U(x)$ . Las condiciones anteriores sólo se cumplen cuando los coeficientes  $C$  y  $D$  de la ecuación (6.30) son nulos. La ecuación característica correspondiente produce

$$\lambda_n = 2\pi n, \quad \text{con } n = 0, 1, \dots, \infty \quad (6.34)$$

donde el índice  $n = 0$  se reserva para los modos de cuerpo rígido.

Las funciones modales correspondientes son

$$U_{2n-1} = A_n \sin \frac{\lambda_n x}{L} \quad (6.35)$$

$$U_{2n} = B_n \cos \frac{\lambda_n x}{L} \quad (6.36)$$

Los giros de la sección recta se obtienen a partir de la ecuación (6.31):

$$\Psi_{2n-1} = \frac{A_n}{\kappa AG - m\omega_n^2 r^2} \left\{ \left( EI \frac{m\omega_n^2}{\kappa AG} + \kappa AG \right) \frac{\lambda_n}{L} - EI \frac{\lambda_n^3}{L^3} \right\} \cos \frac{\lambda_n x}{L} \quad (6.37)$$

$$\Psi_{2n} = \frac{B_n}{\kappa AG - m\omega_n^2 r^2} \left\{ - \left( EI \frac{m\omega_n^2}{\kappa AG} + \kappa AG \right) \frac{\lambda_n}{L} + EI \frac{\lambda_n^3}{L^3} \right\} \sin \frac{\lambda_n x}{L} \quad (6.38)$$

Cualquiera de las autofunciones (6.35) o (6.36) se puede sustituir en la ecuación (6.29),

obteniendo la siguiente ecuación algebraica

$$\frac{m^2 r^2 L^4}{\kappa AG} \omega_n^4 - \left( \frac{mEI\lambda_n^2 L^2}{\kappa AG} + mr^2 \lambda_n^2 L^2 + mL^4 \right) \omega_n^2 + EI\lambda_n^4 = 0 \quad (6.39)$$

De la ecuación anterior, de cuarto grado en  $\omega_n$ , se obtienen dos familias de frecuencias naturales

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{(EI\lambda_n^2 L^2 m + (mr^2 \lambda_n^2 L^2 + mL^4)\kappa AG) - \sqrt{(EI\lambda_n^2 L^2 m + (mr^2 \lambda_n^2 L^2 + mL^4)\kappa AG)^2 - 4m^2 r^2 L^4 EI\lambda_n^4}}{2m^2 r^2 L^4}} \quad (6.40)$$

$$\tilde{\omega}_n = \sqrt{\frac{(EI\lambda_n^2 L^2 m + (mr^2 \lambda_n^2 L^2 + mL^4)\kappa AG) + \sqrt{(EI\lambda_n^2 L^2 m + (mr^2 \lambda_n^2 L^2 + mL^4)\kappa AG)^2 - 4m^2 r^2 L^4 EI\lambda_n^4}}{2m^2 r^2 L^4}} \quad (6.41)$$

Cada familia de modos de vibración está formada por cuatro funciones y una frecuencia natural. Para la primera familia se tiene  $\hat{U}_{2n-1}$ ,  $\hat{U}_{2n}$ ,  $\hat{\Psi}_{2n-1}$ ,  $\hat{\Psi}_{2n}$  y  $\hat{\omega}_n$ , y para la segunda  $\check{U}_{2n-1}$ ,  $\check{U}_{2n}$ ,  $\check{\Psi}_{2n-1}$ ,  $\check{\Psi}_{2n}$  y  $\check{\omega}_n$ .

La normalización de los modos a la masa

$$\int_0^L (mU^2 + mr^2\Psi^2) dx = 1 \quad (6.42)$$

lleva a

$$A_n = B_n = \frac{\sqrt{2mL(1+r^2D_n^2)}}{mL(1+r^2D_n^2)}, \quad (6.43)$$

donde

$$D_n = \frac{1}{\kappa AG - m\omega_n^2 r^2} \left\{ - \left( EI \frac{m\omega_n^4}{\kappa AG} + \kappa AG \right) \frac{\lambda_n}{L} + EI \frac{\lambda_n^3}{L^3} \right\}. \quad (6.44)$$

Con lo que expresado en forma matricial, resulta

$$\begin{Bmatrix} U_{2n-1} \\ U_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_n & 0 \\ 0 & A_n \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\lambda_n x}{L} \\ \cos \frac{\lambda_n x}{L} \end{Bmatrix} \quad (6.45)$$

$$\begin{Bmatrix} \Psi_{2n-1} \\ \Psi_{2n} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -A_n D_n \\ A_n D_n & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \sin \frac{\lambda_n x}{L} \\ \cos \frac{\lambda_n x}{L} \end{Bmatrix} \quad (6.46)$$

Combinando las funciones modales de las dos familias de modos de vibración, se tienen las siguientes funciones modales

$$U_m(x) = A_m \sin \frac{\lambda_m x}{L} + B_m \cos \frac{\lambda_m x}{L}, \quad (6.47)$$

$$\Psi_m(x) = C_m \sin \frac{\lambda_m x}{L} + D_m \cos \frac{\lambda_m x}{L}, \quad (6.48)$$

donde  $U_m(x)$  es el desplazamiento vertical o lateral del modo  $m$ -ésimo en la coordenada  $x$  debido a la flexión y  $\Psi_m(x)$  es el respectivo giro de la sección.

Los desplazamientos lateral y vertical del eje del carril se pueden obtener a partir de las relaciones entre las coordenadas físicas y modales dadas por las siguientes transformaciones modales

$$u_r^y(x, t) = \sum_{m_y=1}^{N_{mry}} U_{m_y}^y(x) q_{r,m_y}^{ry}(t), \quad (6.49)$$

$$u_r^z(x, t) = \sum_{m_z=1}^{N_{mrz}} U_{m_z}^z(x) q_{r,m_z}^{rz}(t). \quad (6.50)$$

Y los giros de la sección recta del carril

$$\psi_r^x(x, t) = \sum_{m_x=1}^{N_{mrz}} \Psi_{m_x}^x(x) q_{r,m_x}^{rx}(t), \quad (6.51)$$

$$\psi_r^y(x, t) = \sum_{m_y=1}^{N_{mry}} \Psi_{m_y}^y(x) q_{r,m_y}^{ry}(t), \quad (6.52)$$

$$\psi_r^z(x, t) = \sum_{m_z=1}^{N_{mrz}} \Psi_{m_z}^z(x) q_{r,m_z}^{rz}(t), \quad (6.53)$$

en las que  $U_{m_i}^i(x)$  y  $\Psi_{m_i}^i(x)$  son las  $m_i$ -ésimas funciones modales de la viga de Timoshenko periódica, según la dirección  $i$ , y  $q_{r,m_i}^{ri}(t)$  son las coordenadas modales asociadas al modo  $m_i$  del carril  $r$ , según la dirección  $i$ .

Las ecuaciones del movimiento en coordenadas modales del carril  $r$ -ésimo, resultan

$$\ddot{q}_{r,m_x}^{\text{rx}}(t) + 2\xi_{m_x}^x \omega_{m_x}^x \dot{q}_{r,m_x}^{\text{rx}}(t) + (\omega_{m_x}^x)^2 q_{r,m_x}^{\text{rx}}(t) = f_{r,m_x}^{\text{rx}}(t) \quad m_x = 1, \dots, N_{mrx} \quad (6.54)$$

$$\ddot{q}_{r,m_y}^{\text{ry}}(t) + 2\xi_{m_y}^y \omega_{m_y}^y \dot{q}_{r,m_y}^{\text{ry}}(t) + (\omega_{m_y}^y)^2 q_{r,m_y}^{\text{ry}}(t) = f_{r,m_y}^{\text{ry}}(t) \quad m_y = 1, \dots, N_{mry} \quad (6.55)$$

$$\ddot{q}_{r,m_z}^{\text{rz}}(t) + 2\xi_{m_z}^z \omega_{m_z}^z \dot{q}_{r,m_z}^{\text{rz}}(t) + (\omega_{m_z}^z)^2 q_{r,m_z}^{\text{rz}}(t) = f_{r,m_z}^{\text{rz}}(t) \quad m_z = 1, \dots, N_{mrz} \quad (6.56)$$

O sin hacer distinción entre los tipos de modos

$$\ddot{q}_{r,m}^{\text{r}}(t) + 2\xi_m \omega_m \dot{q}_{r,m}^{\text{r}}(t) + \omega_m^2 q_{r,m}^{\text{r}}(t) = f_{r,m}^{\text{r}}(t) \quad m = 1, \dots, N_{mr},$$

siendo  $N_{mr} = N_{mrx} + N_{mry} + N_{mrz}$  y donde  $\omega_{m_i}^i$  y  $\xi_{m_i}^i$  son, respectivamente, la  $m_i$ -ésima frecuencia no amortiguada y el  $m_i$ -ésimo amortiguamiento modal del carril en la dirección  $i$ . Las fuerzas modales  $f_{r,m_i}^{\text{ri}}$  se calculan a partir de las magnitudes físicas, fuerzas y momentos transmitidos al carril desde el contacto y las placas de asiento.

Los desplazamientos y giros  $u_r^y, u_r^z, \psi_r^x, \psi_r^y$  y  $\psi_r^z$  están referidos al eje del carril (ver Figura 6.9) y están expresados en coordenadas físicas. El desplazamiento en la placa de asiento se calcula de la siguiente forma

$$\begin{bmatrix} x_i^p, y_i^p, z_i^p, \varphi_i^p, \chi_i^p, \eta_i^p \end{bmatrix}^T = \mathbf{T}_i^{RP} \begin{bmatrix} y_i, z_i, \varphi_i, \chi_i, \eta_i \end{bmatrix}^T, \quad (6.57)$$

donde la matriz  $\mathbf{T}_i^{RP}$  es

$$\mathbf{T}_i^{RP} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -z_p & 0 \\ 1 & 0 & z_p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.58)$$

$\mathbf{T}_i^{RP}$  es una matriz jacobiana, en la que  $z_p$  es la distancia entre el eje del carril y el punto de la sección del carril donde se calcula la fuerza de la placa de asiento.

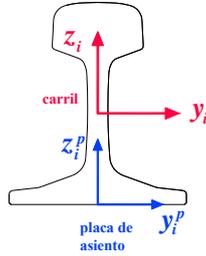


Figura 6.9. Sistemas de referencia del carril y de la placa de asiento.

La posición del punto de contacto en el carril depende del tiempo y por tanto los desplazamientos y velocidades en ese punto se deben calcular durante la simulación. Las funciones modales y las coordenadas modales proporcionan los desplazamientos en el eje del carril, de forma que los desplazamientos en el punto de contacto rueda-carril (ver Figura 6.10) se calculan mediante una matriz de rotación como sigue

$$\begin{bmatrix} x_i^c, y_i^c, z_i^c, \varphi_i^c, \chi_i^c, \eta_i^c \end{bmatrix}^T = \mathbf{T}_i^{RC} \begin{bmatrix} y_i, z_i, \varphi_i, \chi_i, \eta_i \end{bmatrix}^T, \quad (6.59)$$

donde  $\mathbf{T}_i^{RC}$  es otra matriz de rotación que depende de la posición sobre la vía ( $i$ -ésima posición)

$$\mathbf{T}_i^{RC} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z_c & 0 \\ 1 & 0 & -z_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \quad (6.60)$$

El vector  $\begin{bmatrix} x_i^c, y_i^c, z_i^c, \varphi_i^c, \chi_i^c, \eta_i^c \end{bmatrix}^T$  contiene los desplazamientos en el punto de contacto en coordenadas globales y el vector  $\begin{bmatrix} y_i, z_i, \varphi_i, \chi_i, \eta_i \end{bmatrix}^T$  corresponde a los desplazamientos y giros del carril referidos a su propio eje.

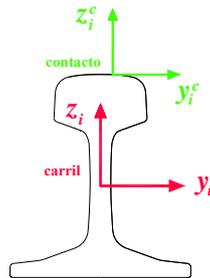


Figura 6.10. Sistemas de referencia del carril y del contacto rueda-carril.

Los desplazamientos del carril en el punto de contacto rueda-carril están referidos al sistema global de coordenadas, sin embargo las teorías de contacto están formuladas en el plano tangencial al área de contacto, por lo que en vía recta el plano global y tangencial al área de contacto están girados entre sí un ángulo igual al ángulo de conicidad de la rueda (ver Figura 6.11). La relación entre las coordenadas viene dada por una matriz de rotación

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_i^c \\ \tilde{y}_i^c \\ \tilde{z}_i^c \\ \tilde{\varphi}_i^c \\ \tilde{\chi}_i^c \\ \tilde{\eta}_i^c \end{bmatrix} = \mathbf{R}_i \begin{bmatrix} x_i^c \\ y_i^c \\ z_i^c \\ \varphi_i^c \\ \chi_i^c \\ \eta_i^c \end{bmatrix}. \quad (6.61)$$

Dicha matriz de rotación  $\mathbf{R}_i$  depende del ángulo de conicidad  $\gamma$

$$\mathbf{R}_i = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \gamma & \sin \gamma \\ 0 & -\sin \gamma & \cos \gamma \end{bmatrix}. \quad (6.62)$$

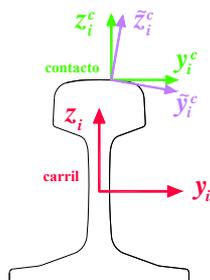


Figura 6.11. Sistemas de referencia del contacto rueda-carril.

### 6.4.2 Las traviesas

Se han desarrollado dos modelos de traviesa. El primer modelo representa las traviesas como masas rígidas, como se muestra en la Figura 6.12, conectadas, mediante elementos viscoelásticos que representan la placa de asiento y la capa de balasto, al carril y a la plataforma de la vía, respectivamente.

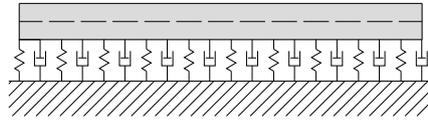


Figura 6.12. Traviesa rígida sobre base viscoelástica.

En el segundo modelo, se introduce la flexibilidad de una traviesa, describiéndola mediante un modelo de elementos finitos de una viga de Timoshenko sobre una base elástica de Winkler, que representa el balasto, como se representa en la Figura 6.13. Cada elemento finito tipo viga tiene dos nodos en los extremos y tres grados de libertad por nodo: desplazamiento lateral, desplazamiento vertical y giro según el eje  $x$ . Por tanto, las matrices de masa y de rigidez de un elemento serán matrices de 6x6 componentes.

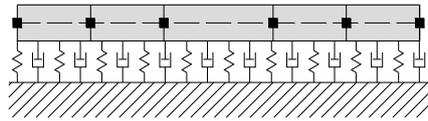


Figura 6.13. Traviesa flexible formada por cinco elementos finitos tipo viga de Timoshenko.

Este modelo permite, realizando una discretización de la traviesa en un número mayor de elementos, considerar una distribución no uniforme del balasto bajo la traviesa, como se muestra en la Figura 6.14.

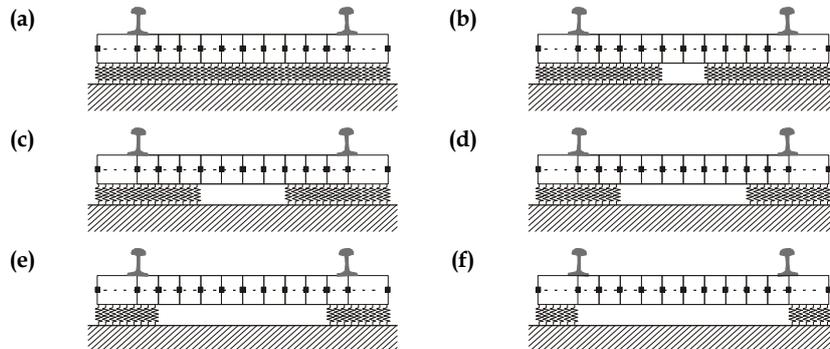


Figura 6.14. Modelos de traviesa. (a) El balasto está uniformemente distribuido bajo la traviesa.

De (b) a (f) El balasto de forma progresiva se desplaza hacia los extremos de las traviesas.

Las rigideces totales de las bases son idénticas en todos los casos.

La matriz de masa consistente  $\mathbf{m}^e$  de un elemento tipo viga de Timoshenko es

$$\mathbf{m}^e = \begin{bmatrix} 1/3 & 0 & 0 & 1/6 & 0 & 0 \\ 0 & A(r, \phi) & C(r, \phi) & 0 & B(r, \phi) & -D(r, \phi) \\ 0 & C(r, \phi) & E(r, \phi) & 0 & D(r, \phi) & -F(r, \phi) \\ 1/6 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & B(r, \phi) & D(r, \phi) & 0 & A(r, \phi) & -C(r, \phi) \\ 0 & -D(r, \phi) & -F(r, \phi) & 0 & -C(r, \phi) & E(r, \phi) \end{bmatrix}, \quad (6.63)$$

donde las funciones  $A(r, \phi)$ ,  $B(r, \phi)$ ,  $C(r, \phi)$ ,  $D(r, \phi)$ ,  $E(r, \phi)$  y  $F(r, \phi)$  se calculan a través de las siguientes expresiones

$$A(r, \phi) = \frac{\frac{13}{35} + \frac{7}{10}\phi + \frac{1}{3}\phi^2 + \frac{6}{5}\left(\frac{r}{L}\right)^2}{(1+\phi)^2}, \quad (6.64)$$

$$B(r, \phi) = \frac{\frac{9}{70} + \frac{3}{10}\phi + \frac{1}{6}\phi^2 + \frac{6}{5}\left(\frac{r}{L}\right)^2}{(1+\phi)^2}, \quad (6.65)$$

$$C(r, \phi) = \frac{\frac{11}{210} + \frac{11}{120}\phi + \frac{1}{24}\phi^2 + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi\right)\left(\frac{r}{L}\right)^2}{(1+\phi)^2} L, \quad (6.66)$$

$$D(r, \phi) = \frac{\frac{13}{420} + \frac{3}{40}\phi - \frac{1}{24}\phi^2 + \left(\frac{1}{10} - \frac{1}{2}\phi\right)\left(\frac{r}{L}\right)^2}{(1+\phi)^2} L, \quad (6.67)$$

$$E(r, \phi) = \frac{\frac{1}{105} + \frac{1}{60}\phi + \frac{1}{120}\phi^2 + \left(\frac{2}{15} + \frac{1}{6}\phi + \frac{1}{3}\phi^2\right)\left(\frac{r}{L}\right)^2}{(1+\phi)^2} L^2, \quad (6.68)$$

$$F(r, \phi) = \frac{\frac{1}{140} + \frac{1}{60}\phi + \frac{1}{120}\phi^2 + \left(\frac{1}{30} + \frac{1}{6}\phi - \frac{1}{6}\phi^2\right)\left(\frac{r}{L}\right)^2}{(1+\phi)^2} L^2, \quad (6.69)$$

siendo

$$\phi = \frac{12EI}{\kappa AGL^2}, \quad (6.70)$$

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}}, \quad (6.71)$$

donde  $E$  es el módulo de Young de la traviesa,  $I$  es el momento de inercia,  $A$  es el área de la sección transversal,  $G$  es el módulo de elasticidad transversal,  $L$  es la longitud de la traviesa y  $r$  es el radio de giro.

La matriz de rigidez de una viga de Timoshenko es

$$\mathbf{k}_T^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & 0 & \frac{12EI}{L^3(1+\phi)} & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(2-\phi)}{L(1+\phi)} & 0 & -\frac{6EI}{L^2(1+\phi)} & \frac{EI(4+\phi)}{L(1+\phi)} \end{bmatrix}. \quad (6.72)$$

La matriz de rigidez correspondiente a una base o fundación de Winkler es

$$\mathbf{k}_W^e = k_{wz} \frac{L}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & 22L & 0 & 54 & -13L \\ 0 & 22L & 4L^2 & 0 & 13L & -3L^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & 13L & 0 & 156 & -22L \\ 0 & -13L & -3L^2 & 0 & -22L & 4L^2 \end{bmatrix} + k_{wx} \frac{L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (6.73)$$

donde  $k_{wz}$  y  $k_{wx}$  son las rigideces según la dirección vertical y lateral de los muelles lineales que forman la fundación de Winkler.

Si se incorpora a la traviesa una base de Winkler, se suman las matrices anteriores a la matriz de rigidez de la viga de Timoshenko. De este modo, la matriz de rigidez de un elemento de una viga de Timoshenko con base de Winkler, resulta

$$\mathbf{k}_{TW}^e = \mathbf{k}_T^e + \mathbf{k}_W^e. \quad (6.74)$$

Finalmente, las matrices de masa y de rigidez de los elementos del modelo de elementos finitos de la traviesa se ensamblan, respectivamente, en la matriz de masa global  $\mathbf{M}_s$  y en la matriz de rigidez global  $\mathbf{K}_s$  de la traviesa. Las frecuencias

naturales y los modos de vibración de la traviesa se calculan resolviendo el problema generalizado de valores y vectores propios siguiente

$$\left(\mathbf{K}_s + \lambda^2 \mathbf{M}_s\right) \bar{\mathbf{U}}_s = \mathbf{0}. \quad (6.75)$$

La ecuación (6.75) tiene solución distinta de la solución trivial si la matriz de coeficientes es singular

$$\det\left(\mathbf{K}_s + \lambda^2 \mathbf{M}_s\right) = 0. \quad (6.76)$$

Desarrollando la ecuación (6.76) se obtiene el polinomio característico de grado  $2N_{ms}$

$$d_{2N_{ms}} \lambda^{2N_{ms}} + d_{2N_{ms}-2} \lambda^{2N_{ms}-2} + \dots + d_0 = 0, \quad (6.77)$$

cuyas raíces, se pueden expresar de la siguiente forma

$$\lambda_n = \pm i \varpi_n \quad n = 1, \dots, N_{ms}. \quad (6.78)$$

Es posible plantear para cada frecuencia natural  $\varpi_n$  el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\left(\mathbf{K}_s - \varpi_n^2 \mathbf{M}_s\right) \bar{\mathbf{U}}_{s_n} = \mathbf{0}. \quad (6.79)$$

Al ser la matriz de coeficientes  $\left(\mathbf{K}_s - \varpi_n^2 \mathbf{M}_s\right)$  singular, la solución del sistema de ecuaciones homogéneo (6.79) será distinta de la trivial, pero no será única. Generalmente, se considera una condición adicional de escalado o normalización de los vectores  $\bar{\mathbf{U}}_{s_n}$ , como en este caso en el que se normalizan a masa unitaria, obteniendo un vector propio o modo de vibración  $\Phi_n$  para cada frecuencia natural  $\varpi_n$ .

Las transformaciones modales que relacionan los desplazamientos y las coordenadas modales de traviesa y las fuerzas transmitidas por medio de las placas de asiento con las fuerzas modales de la traviesa son

$$\mathbf{u}_s(y, t) = \sum_{n=1}^{N_{ms}} \Phi_n(y) q_{s,n}^s(t), \quad (6.80)$$

$$f_{s,n}^s(t) = \sum_{r=1}^2 \Phi_n(y_r) F_{r,s}^p, \quad (6.81)$$

$$\mathbf{u}_s = \Phi \mathbf{q}_s^s, \quad (6.82)$$

donde  $q_{s,n}^s(t)$  y  $f_{s,n}^s(t)$  son la coordenada y la fuerza modal asociada al modo  $n$ -ésimo de la traviesa  $s$ -ésima, respectivamente. Cabe señalar que para obtener los desplazamientos de la traviesa se ha realizado un truncamiento modal, considerando un número finito  $N_{ms}$  de modos de vibración de la traviesa.

La ecuación de movimiento de la  $s$ -ésima traviesa en coordenadas modales es

$$\ddot{q}_{s,n}^s(t) + 2\zeta_n\varpi_n\dot{q}_{s,n}^s(t) + \varpi_n^2q_{s,n}^s(t) = f_{s,n}^s(t), \quad n=1,\dots,N_{ms}, \quad (6.83)$$

en la que  $\varpi_n$  es la  $n$ -ésima frecuencia no amortiguada de la traviesa y  $\zeta_n$  es el  $n$ -ésimo amortiguamiento modal. La fuerza modal de una traviesa  $s$ -ésima,  $f_{s,n}^s$ , se obtiene por medio de las fuerzas y momentos transmitidos a la traviesa desde las placas de asiento.

### 6.4.3 Las fuerzas en las placas de asiento

La fuerza transmitida entre el carril  $r$  y la traviesa  $s$  en la placa de asiento  $p$  se calcula en función de la cinemática de la traviesa y el carril del siguiente modo:

$$\mathbf{F}_{s,r}^p = \mathbf{K}_p(\mathbf{u}_r^p - \mathbf{u}_s^p) + \mathbf{C}_p(\dot{\mathbf{u}}_r^p - \dot{\mathbf{u}}_s^p), \quad (6.84)$$

en la que  $\mathbf{u}_r^p - \mathbf{u}_s^p$ ,  $\dot{\mathbf{u}}_r^p - \dot{\mathbf{u}}_s^p$ ,  $\mathbf{K}_p$  y  $\mathbf{C}_p$  son, respectivamente, el vector de desplazamientos relativos entre carril y traviesa en la posición de la placa de asiento  $p$ , el vector de velocidades relativas entre carril y traviesa, la matriz de rigidez y la matriz de amortiguamiento de la placa de asiento, de dimensión  $6 \times 6$ .

Los desplazamientos en el carril en la posición de la placa de asiento se obtienen a partir de los desplazamientos en el eje del carril como sigue

$$\mathbf{u}_r^p = \mathbf{T}^{RP} \mathbf{u}_r = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -z_p & 0 \\ 1 & 0 & z_p & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r^y \\ u_r^z \\ \psi_r^x \\ \psi_r^y \\ \psi_r^z \end{Bmatrix}, \quad (6.85)$$

donde  $z_p$  es la distancia entre el eje del carril y la posición de la placa de asiento.

Por otra parte, las velocidades del carril en la placa de asiento se obtienen como

$$\dot{\mathbf{u}}_r^p = \mathbf{T}^{RP} \dot{\mathbf{u}}_r \quad (6.86)$$

#### 6.4.4 Las fuerzas en el contacto rueda-carril

La interpenetración de los sólidos indeformados se calcula a partir de los desplazamientos del carril y de la rueda en el contacto y de las irregularidades presentes en las superficies de rodadura de ambos. Los desplazamientos del carril en el contacto se obtienen de la siguiente forma

$$\mathbf{u}_r^c = \mathbf{R} \mathbf{T}^{RC} \mathbf{u}_r = \mathbf{R} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & z_c & 0 \\ 1 & 0 & -z_c & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r^y \\ u_r^z \\ \psi_r^x \\ \psi_r^y \\ \psi_r^z \end{Bmatrix} \quad (6.87)$$

Por otra parte, las velocidades de pseudodeslizamiento reducidas en la dirección longitudinal y lateral se calculan a partir de las velocidades de rueda y carril en el contacto entre ambos cuerpos. Las velocidades del carril en el contacto se calculan de este modo

$$\dot{\mathbf{u}}_r^c = \mathbf{R} \mathbf{T}_{rc} \dot{\mathbf{u}}_r + V \mathbf{R} \mathbf{T}_{rc} \frac{\partial \mathbf{u}_r}{\partial x} \quad (6.88)$$

### 6.5 Método de resolución temporal de la interacción vehículo-vía

El paso previo a la resolución del modelo de interacción dinámica vehículo-vía es el ensamblado de las ecuaciones diferenciales ordinarias de movimiento de las distintas subestructuras: carriles, traviesas sobre balasto y vehículo, junto con las ecuaciones de restricción de los elementos de conexión de las subestructuras: el contacto rueda-carril y las placas de asiento.

El sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden resultante del ensamblado se puede expresar del siguiente modo

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{x}} + \mathbf{C} \dot{\mathbf{x}} + \mathbf{K} \mathbf{x} = \mathbf{F}, \quad (6.89)$$

donde el vector de coordenadas  $\mathbf{x}$  dependerá del modelo de eje montado que se implemente. Si se considera un modelo de eje rígido, el vector de coordenadas será el siguiente

$$\mathbf{x} = \left\{ \mathbf{w}^T \quad \mathbf{q}_1^{rT} \quad \mathbf{q}_2^{rT} \quad \mathbf{q}_1^{sT} \quad \cdots \quad \mathbf{q}_{N_s}^{sT} \right\}^T, \quad (6.90)$$

donde  $\mathbf{w}$  es el vector de coordenadas físicas o espaciales asociadas al modelo de eje rígido,  $\mathbf{q}_r^r$  es el vector de coordenadas modales de cada carril y  $\mathbf{q}_s^s$ , el vector de coordenadas modales asociado a cada traviesa del modelo de vía.

Si se opta por considerar el modelo de eje flexible rotatorio, el vector de coordenadas del sistema resultará

$$\mathbf{x} = \left\{ \mathbf{q}^w{}^T \quad \mathbf{q}_1^r{}^T \quad \mathbf{q}_2^r{}^T \quad \mathbf{q}_1^s{}^T \quad \dots \quad \mathbf{q}_{N_s}^s{}^T \right\}^T, \quad (6.91)$$

siendo  $\mathbf{q}^w$  el vector de coordenadas modales asociadas al eje flexible rotatorio.

Con el fin de resolver el sistema de ecuaciones global del modelo de interacción mediante integración numérica, se adopta un nuevo vector de coordenadas  $\mathbf{y} = \{ \mathbf{x} \quad \dot{\mathbf{x}} \}^T$ , que permite transformar el sistema de ecuaciones inicial (6.89) en un nuevo sistema de ecuaciones diferenciales de primer orden, cuya dimensión es el doble de la dimensión del sistema inicial

$$\dot{\mathbf{y}} = f(t, \mathbf{y}) = \mathbf{A} \mathbf{y} + \mathbf{B} \mathbf{F}, \quad (6.92)$$

donde las matrices  $\mathbf{A}$  y  $\mathbf{B}$  surgen de la transformación de un sistema de  $N$  ecuaciones de segundo orden en un sistema de  $2N$  ecuaciones de primer orden

$$\mathbf{A} = - \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{I} \\ \mathbf{M}^{-1}\mathbf{K} & \mathbf{M}^{-1}\mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad (6.93)$$

$$\mathbf{B} = \begin{Bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{M}^{-1} \end{Bmatrix}. \quad (6.94)$$

Habitualmente, este tipo de sistemas de ecuaciones diferenciales se integra mediante el método de integración de Runge-Kutta. De la solución del sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden en el intervalo temporal de integración requerido, se obtendrá para cada instante de tiempo de cálculo tanto el vector de coordenadas iniciales  $\mathbf{x}$  como su primera derivada temporal  $\dot{\mathbf{x}}$ .

## 6.6 Conclusiones

En este capítulo se ha presentado el modelado de la interacción del vehículo con la vía, empleado en las simulaciones para estimar el desgaste ondulatorio de los carriles que se describen en el Capítulo 7. El modelo de interacción vehículo-vía se basa en un método de subestructuración que considera tres tipos de subestructuras (vehículo, carriles y traviesas) independientes entre sí e interconectadas mediante fuerzas externas (fuerzas de contacto rueda-carril y fuerzas en las placas de asiento

de los carriles). La resolución de la interacción vehículo-vía se realiza en el dominio del tiempo, lo que posibilita considerar las no linealidades existentes en el sistema vehículo-vía.

Dado que en el rango de frecuencias en el que se produce la corrugación en carriles, las suspensiones de los vehículos aíslan las masas no suspendidas del resto de los elementos que los constituyen, sólo se modelan éstas a través de un modelo avanzado de eje montado que implementa la flexibilidad del mismo y los efectos inerciales asociados al giro. La formulación del modelo de eje flexible rotatorio está basada en coordenadas eulerianas. Se ha presentado la deducción de la ecuación del movimiento del eje y se ha descrito la obtención de las matrices que intervienen en la misma. Asimismo, se han descrito las características inerciales y modales del eje flexible rotatorio empleado en esta Tesis y se han mostrado sus receptancias y diagrama de Campbell.

La vía se representa por medio de un modelo de vía cíclica, en el que las condiciones de contorno en los extremos son las mismas, lo que resulta más adecuado para analizar el desarrollo de corrugación, ya que de esta forma no existen limitaciones en cuanto al periodo de la simulación. La interpretación física de una vía cíclica es la de una vía infinita sobre la que circulan un número infinito de vehículos idénticos, con una distribución espacial uniforme (distancia  $L$  entre vehículos). Sin embargo, el estudio de la vía infinita se limita a un tramo de vía de longitud  $L$ , debido a las propiedades de la periodicidad de estructuras.

Las traviesas se representan como masas rígidas (o flexibles por medio de vigas de Timoshenko) y los carriles, como vigas de Timoshenko cíclicas, acopladas mediante placas de asiento, dispuestas entre carriles y traviesas. El balasto y las placas de asiento se modelan como elementos viscoelásticos a través de muelles lineales y amortiguadores viscosos.



# 7

## Aplicación de los modelos al análisis del crecimiento de la corrugación

### 7.1 Introducción

En el presente capítulo, se estudian diferentes casos en los que se puede producir el crecimiento de la corrugación existente inicialmente en la superficie de rodadura de un carril. Se supondrá, por tanto, que en las superficies de rodadura de los carriles existen imperfecciones, en forma de rugosidad, corrugación, u otros tipos de defectos descritos en el Capítulo 2, que inducen variaciones en los parámetros del contacto y excitan las vibraciones del sistema acoplado vehículo-vía.

Las irregularidades existentes en la superficie de rodadura del carril producen oscilaciones en las fuerzas transmitidas en el contacto rueda-carril. Estas fuerzas dinámicas ocasionan distribuciones de tensiones y de velocidades de deslizamiento cambiantes en el tiempo, que son las responsables del desgaste no uniforme en la superficie de rodadura del carril. A partir de los resultados de profundidad del desgaste en la superficie de rodadura, se podría determinar el nuevo perfil desgastado del carril, que inducirá mayores variaciones en las fuerzas de contacto.

Con la aplicación de los modelos de eje ferroviario, de contacto rueda-carril y de vía cíclica que se han descrito en los capítulos anteriores, se pretende identificar mecanismos de fijación de la longitud de onda de la corrugación asociados a la dinámica del sistema vehículo-vía. Por ello, en este capítulo se van a integrar los diferentes modelos que se han descrito en esta Tesis en una herramienta para simular el crecimiento de la corrugación en los carriles ferroviarios. La herramienta de predicción del crecimiento de la corrugación permite incorporar diferentes modelos según las necesidades. Dicha herramienta consta de los siguientes modelos:

1. **Modelo de interacción dinámica vehículo-vía**, formado por:

1.1. Modelo de eje flexible rotatorio o el modelo de eje rígido (Capítulo 6).

1.2. Modelo de vía cíclica (Capítulo 6).

1.3. Modelo de contacto para calcular las fuerzas y pseudodeslizamientos en el contacto durante la simulación dinámica: Hertz/FASTSIM o el modelo no herciano y no estacionario (Capítulo 4).

2. **Modelo de contacto** para obtener las distribuciones de tensiones y las distribuciones de velocidades de deslizamiento en el contacto rueda-carril: Hertz/FASTSIM o modelo no herciano y no estacionario (Capítulo 4).

3. **Modelo de desgaste**: ley de desgaste de Archard para calcular las distribuciones de profundidad de desgaste en el contacto para cada instante de tiempo de cálculo y transferencia de la profundidad del desgaste a la superficie de rodadura del carril (Capítulo 5).

4. Modificación del perfil de la superficie de rodadura del carril con la profundidad del desgaste calculada.

En la Figura 7.1, se muestra un esquema del proceso realimentado que se ha implementado para simular la evolución de la corrugación en los carriles:

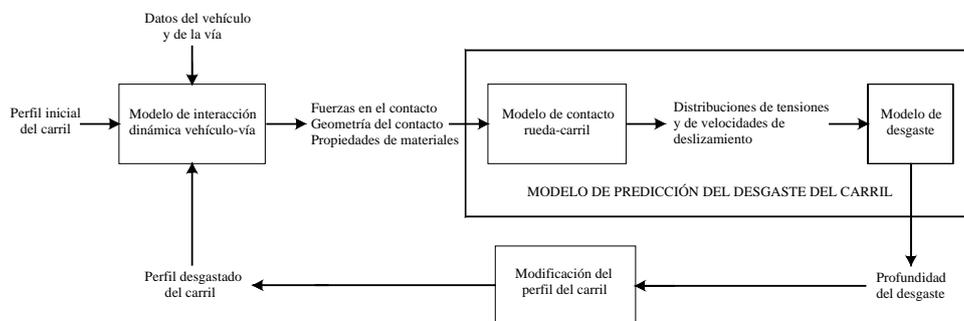


Figura 7.1. Esquema del proceso realimentado de predicción de corrugación en la superficie de rodadura del carril.

Se realizan una serie de simulaciones destinadas a detectar posibles mecanismos de fijación de la longitud de onda de la corrugación asociados principalmente a la dinámica del eje montado.

En primer lugar, se lleva a cabo una simulación empleando el modelo de contacto rueda-carril Hertz/FASTSIM en la que el eje rueda libremente, considerando la excitación del sistema vehículo-vía por medio de rugosidad pseudoaleatoria y

corrugación sinusoidal. Se comparan los resultados relativos a fuerzas en el contacto y de profundidad del desgaste obtenidos a partir de los dos modelos de eje montado: flexible rotatorio y rígido.

En segundo lugar, se estudia el crecimiento del desgaste ondulatorio y la rugosidad en curvas de radio elevado, implementando el modelo de eje flexible rotatorio y el modelo de contacto no herciano y no estacionario, cuando el sistema vehículo-vía se excita mediante corrugación sinusoidal y rugosidad pseudoaleatoria. Adicionalmente, se llevan a cabo una serie de simulaciones cuya finalidad es la de estudiar la influencia en el crecimiento de la corrugación y rugosidad en curva del modelado del eje montado y la rigidez vertical de las placas de asiento del carril. Asimismo, se analiza el efecto de la interacción de dos ejes flexibles rotatorios con la vía, en combinación con la rigidez vertical de las placas de asiento del carril, sobre el crecimiento de la rugosidad y la corrugación.

Finalmente, se estudia la posible influencia de la excitación ocasionada por un defecto discreto, un *squat*, en la formación de corrugación de longitud de onda corta.

## **7.2 Estudio del crecimiento del desgaste ondulatorio en condiciones de rodadura libre del eje mediante Hertz/FASTSIM**

El objetivo de las simulaciones que se presentan en esta sección es estudiar la influencia de la interacción dinámica del eje flexible rotatorio con la vía en el desgaste y crecimiento de la corrugación. Con el fin de estudiar la influencia del eje flexible rotatorio en el desgaste, se han comparado los resultados obtenidos con este modelo de eje con los calculados con un modelo de eje rígido. Se considera que el eje ferroviario se encuentra en todo momento en condiciones de rodadura libre, ya que no se aplica ningún par motor sobre el mismo.

Por otra parte, con el fin de simular el desplazamiento del peso de la caja transmitido a las ruedas debido a la circulación por vía curva, se ha considerado que la rueda izquierda (exterior a la curva) tiene una reducción del 20% en la carga normal que soporta, mientras que la carga normal transmitida a la rueda derecha (interior a la curva) es un 20% superior.

En la Tabla 7.1 se recogen los parámetros del modelo de vía utilizados en las simulaciones de este apartado. Los parámetros correspondientes al eje montado se resumen en la Tabla 7.2.

Tabla 7.1. Parámetros de la vía

Carril	
Masa (kg/m)	60.34
Módulo de Young (N/m <sup>2</sup> )	$2.1 \cdot 10^{11}$
Módulo de elasticidad transversal (N/m <sup>2</sup> )	$0.81 \cdot 10^{11}$
Área de la sección recta del carril (m <sup>2</sup> )	$7.69 \cdot 10^{-3}$
Segundo momento de área de la sección recta (m <sup>4</sup> )	$30.55 \cdot 10^{-6}$
Coefficiente de Timoshenko de la sección recta	0.4
Placa de asiento del carril	
Rigidez vertical (N/m)	$3.5 \cdot 10^8$
Coefficiente de amortiguamiento (Ns/m)	$50 \cdot 10^3$
Traviesa	
Masa (kg)	324
Distancia entre traviesas (m)	0.6
Balasto	
Rigidez vertical (N/m)	$100 \cdot 10^6$
Coefficiente de amortiguamiento (Ns/m)	$200 \cdot 10^3$

Tabla 7.2. Parámetros del eje montado

Masa (kg)	2700
Carga estática (kN)	200
Radio de rodadura (m)	0.5
Momento de inercia alrededor de los ejes vertical y lateral (kg · m <sup>2</sup> )	493
Momento de inercia alrededor del eje de giro (kg · m <sup>2</sup> )	169

### 7.2.1 Excitación del sistema vehículo-vía mediante rugosidad pseudoaleatoria

En este primer análisis, sólo se considera la flexión vertical del carril, despreciando los efectos de la vibración lateral y de torsión del carril en la dinámica vertical de la vía. Con el fin de identificar de una forma sencilla y rápida aquellas frecuencias comprendidas en el rango aproximado de 50 a 1000 Hz en las que el comportamiento dinámico del eje flexible rotatorio puede dar lugar a elevadas

fuerzas de contacto rueda-carril en la dirección vertical, se considerará inicialmente una excitación mediante una rugosidad en la banda de rodadura del carril, descrita mediante la superposición de funciones periódicas del tipo

$$z(x) = Z \sum_{n=1}^{N_f} \cos\left(\frac{2\pi x}{\lambda_n} + \varphi_n\right), \quad (7.1)$$

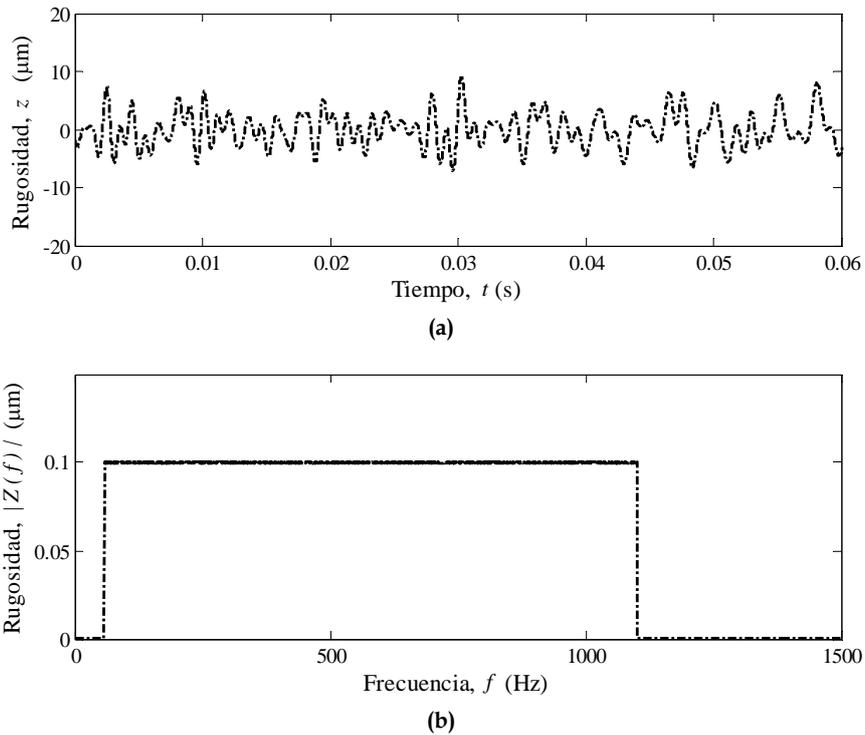
donde  $\varphi_n$  es el ángulo de fase inicial, que se calcula a partir de un conjunto de números aleatorios entre 0 y  $2\pi$ ,  $Z$  es la amplitud global de la rugosidad, que se ha fijado en  $0.1 \mu\text{m}$ .  $N_f$  es el número de armónicos y  $\lambda_n$  es un conjunto de longitudes de onda, que se han elegido entre 36 mm y 670 mm, de forma que si la velocidad del vehículo es de 40 m/s, la rugosidad implementada cubre el rango de frecuencias comprendido entre 60 y 1100 Hz, con la finalidad de excitar los modos del eje flexible rotatorio. Se han considerado 2029 longitudes de onda, con lo que el incremento de frecuencia es de 0.513 Hz. La simulación se realizó para  $1/0.513=1.95$  s. con el fin de minimizar problemas de *leakage*, con lo que el vehículo recorre exactamente una distancia correspondiente a 130 vanos, es decir, 78 m.

Los modelos de contacto que se implementan en el modelo de interacción son Hertz y FASTSIM, para resolver el problema normal y tangencial de contacto, respectivamente. FASTSIM proporciona una buena estimación de la relación entre pseudodeslizamientos y fuerzas de contacto si se satisfacen las hipótesis de contacto estacionario. Dado que la longitud del semieje  $a$  del área de contacto nominal (elíptica) es inferior a 6 mm, la mayoría de las longitudes de onda consideradas para simular la rugosidad pueden ser consideradas largas en comparación con la dimensión característica del contacto, puesto que se cumple que  $\lambda > 10a$ . Por otra parte, la reducida amplitud de la rugosidad ( $0.1 \mu\text{m}$ ) es otra condición que asegura que los efectos no hercianos y no estacionarios se puedan despreciar para las longitudes de onda más pequeñas, según [227]. Sin embargo, FASTSIM no proporciona resultados precisos de las velocidades de deslizamiento en el contacto, que pueden afectar los resultados de desgaste [16], y sólo pueden corregirse implementando una teoría de contacto exacta.

Los resultados obtenidos con el modelo de eje flexible rotatorio se comparan con los calculados empleando un modelo de eje rígido, con el fin de identificar posibles mecanismos que desencadenen el crecimiento de la rugosidad o corrugación.

En la Figura 7.2(a) se representa una muestra de la historia temporal de la rugosidad aleatoria, con frecuencias comprendidas entre 60 y 1100 Hz, que se implementa con el fin de excitar el sistema acoplado vehículo-vía. En la Figura 7.2(b) se puede observar la magnitud de la transformada discreta de Fourier de la

rugosidad aleatoria, que en el rango de frecuencias de 60 a 1100 Hz presenta una amplitud de  $0.1 \mu\text{m}$ , como se ha mencionado anteriormente.



**Figura 7.2. Rugosidad aleatoria de frecuencias comprendidas entre 60 y 1100 Hz y amplitud global  $0.1 \mu\text{m}$ . (a) Historia temporal de la rugosidad; (b) Magnitud de la transformada discreta de Fourier de la rugosidad.**

En la Figura 7.3 se comparan las magnitudes de las transformadas discretas de Fourier de las fuerzas normales de contacto obtenidas a partir de los modelos de eje flexible rotatorio y de eje rígido para las ruedas derecha e izquierda. Prácticamente no se observan diferencias entre los resultados obtenidos con los dos modelos de eje. Tanto en la Figura 7.3(a) como en la Figura 7.3(b) se distingue un pico de elevada amplitud a la frecuencia correspondiente al paso por traviesas (66.7 Hz). En torno a la frecuencia de 250 Hz, se observa un máximo más suavizado, que corresponde a la primera antirresonancia vertical de la vía y a aproximadamente a 1000 Hz, otro máximo de mayor amplitud que el anterior, que se debe a la excitación de la resonancia (y antirresonancia) *articulada-articulada* vertical de la vía.

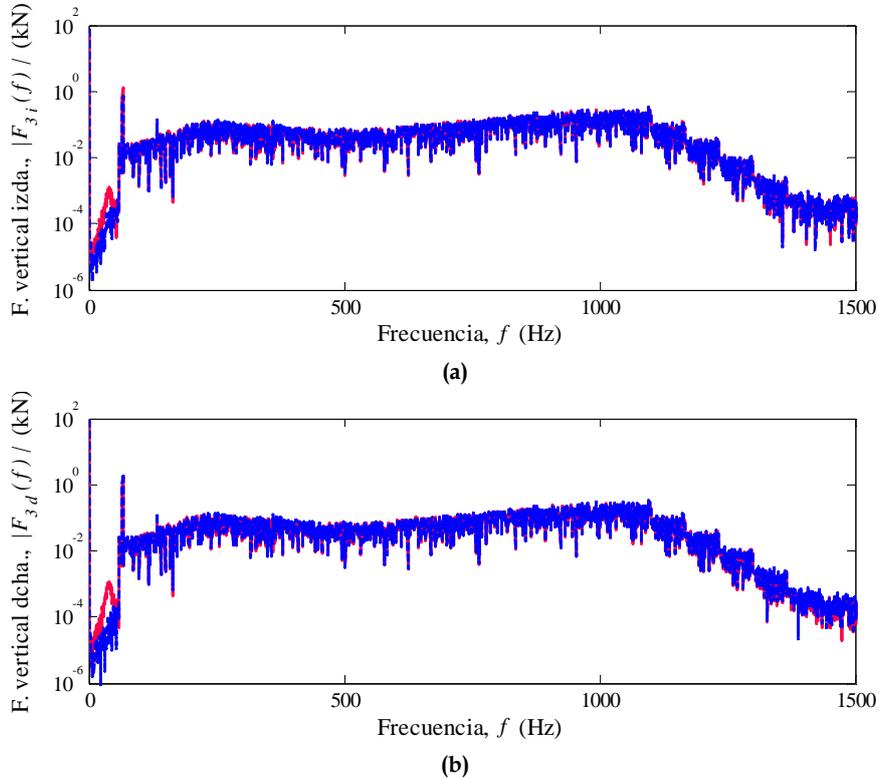


Figura 7.3. Magnitud de la transformada de Fourier de la fuerza vertical obtenida con los dos modelos de eje: ---, eje flexible; —, eje rígido. (a) Rueda izquierda; (b) rueda derecha.

En la Figura 7.4, en la que se representan conjuntamente las magnitudes de las transformadas discretas de Fourier de las fuerzas longitudinales de contacto, calculadas con los dos modelos de eje ferroviario, se pueden observar los mismos picos que aparecen en la Figura 7.3, excepto el que surge aproximadamente a 357 Hz. En la Figura 7.5, se muestran las magnitudes de las transformadas discretas de Fourier de las fuerzas longitudinales en el rango de frecuencias de 50 a 500 Hz y se pueden apreciar diferencias significativas entre los resultados de los dos modelos en torno a la frecuencia de 357 Hz. Dicha frecuencia coincide con la frecuencia natural del tercer modo de flexión (multiplicidad 2) del eje flexible. Este es el motivo por el cual únicamente se observa dicho pico a la frecuencia de 357 Hz en la magnitud de la transformada de Fourier de la fuerza longitudinal calculada con el modelo de eje flexible y no en la obtenida con el modelo de eje rígido.

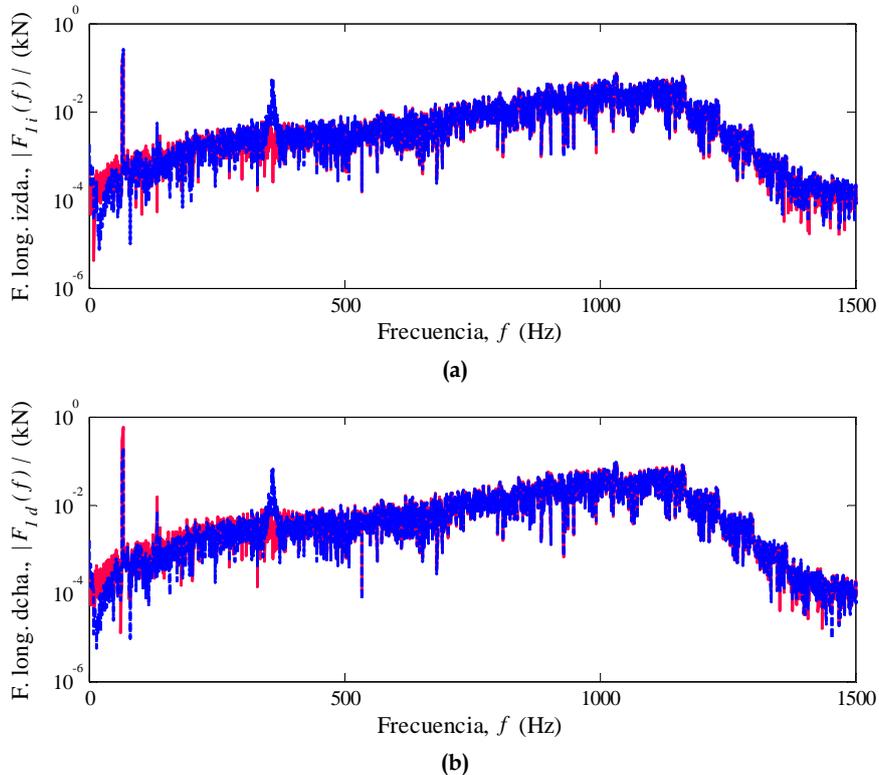


Figura 7.4. Magnitud de la transformada de Fourier de la fuerza longitudinal obtenida con los dos modelos de eje: ---, eje flexible; —, eje rígido. (a) Rueda izquierda; (b) rueda derecha.

El primer y segundo modo de flexión del eje ferroviario no parecen tener una influencia relevante en la magnitud de la fuerza longitudinal, dado que no se observan diferencias importantes entre los resultados obtenidos con los dos modelos de eje en la Figura 7.5.

Los anteriores resultados no pueden explicar un mecanismo de fijación de la longitud de onda de la corrugación en carriles, pero permiten encontrar las frecuencias en las que difieren las respuestas dinámicas de los dos modelos de eje. En la referencia [17] se concluye que las respuestas dinámicas de los diferentes modelos de eje ferroviario considerados (eje rígido, eje flexible no rotatorio y eje flexible rotatorio) son prácticamente coincidentes, excepto cuando se excitan los modos de vibración de los modelos de eje flexible. Por tanto, puede resultar interesante comparar los resultados de fuerzas de contacto y desgaste calculados con un modelo de eje rígido y con el modelo de eje flexible rotatorio descrito en el Capítulo 6, cuando la corrugación o rugosidad presente en la banda de rodadura del carril excita los modos de vibración del eje.

Los resultados presentados en este apartado se han publicado en [18].

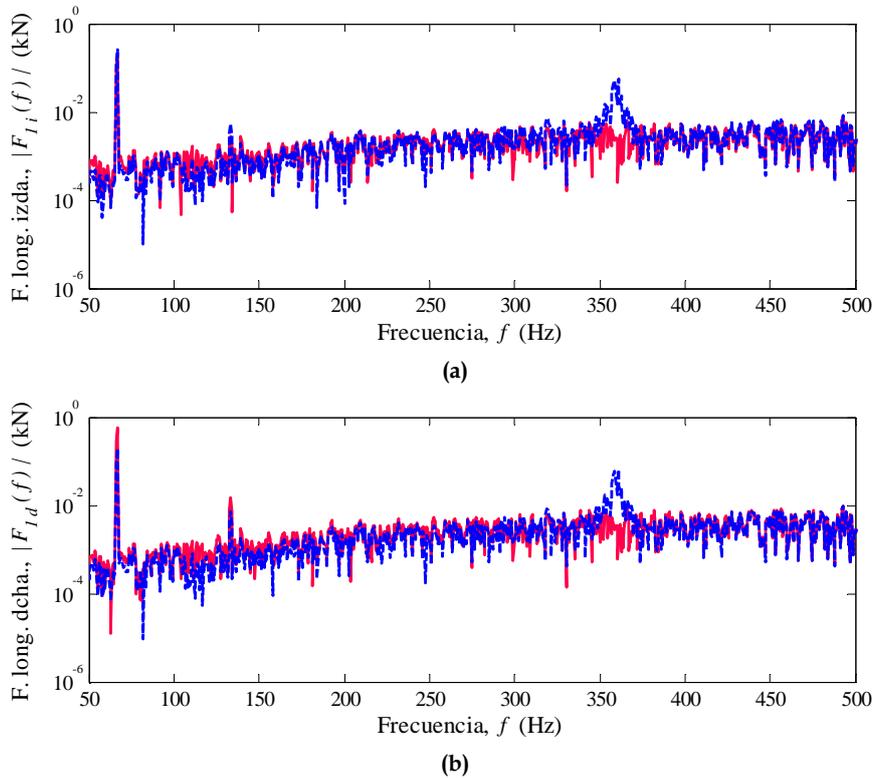


Figura 7.5. Magnitud de la transformada de Fourier de la fuerza longitudinal obtenida con los dos modelos de eje: ---, eje flexible; —, eje rígido. (a) Rueda izquierda; (b) rueda derecha.

### 7.2.2 Excitación del sistema vehículo-vía mediante corrugación sinusoidal

En el diagrama de Campbell, se representan las frecuencias de resonancia del eje montado en función de la velocidad del vehículo. El modelo del eje ferroviario flexible rotatorio empleado en esta Tesis considera los efectos giroscópicos debidos a la rotación, lo que produce la división del pico de resonancia relacionado con un modo de multiplicidad dos en dos picos diferentes, asociados a los modos de vibración *backward* y *forward*, cuya separación aumenta al incrementar la velocidad de rotación del eje, como se ha comentado en el subapartado 6.3.2.

Determinadas combinaciones de velocidad del eje y de longitud de onda de la rugosidad pueden producir la resonancia simultánea de dos modos de vibración del eje flexible rotatorio, con la consiguiente dinámica compleja que ello supone. Estos casos se originan para aquellas configuraciones asociadas a los puntos de

intersección de dos líneas en el diagrama de Campbell, mostrado en la Figura 7.6. Por medio del diagrama de Campbell se han detectado dos casos en los que coinciden dos frecuencias de resonancia del eje montado, que resultan de la intersección de la línea del modo *backward* de la rueda con dos diámetros nodales y ningún círculo nodal, con las líneas correspondientes al tercer modo de flexión *forward* (modos B-F, de aquí en adelante) y al tercer modo de flexión *backward* (modos B-B, a partir de ahora). En la Figura 7.6, el punto de intersección de la izquierda, correspondiente a los modos B-F, se produce a la frecuencia de 360.8 Hz y la velocidad de 142 km/h. El punto de intersección de la derecha, asociado a los modos B-B, a la frecuencia de 352.5 Hz y velocidad 198 km/h.

En esta sección, se consideran en el modelo de vía tanto la vibración vertical como la lateral y de torsión del carril. Se analizará el efecto de la excitación de los modos B-F y los modos B-B en la estimación del desgaste y la evolución de la corrugación inicial. Con este fin, se considera una corrugación sinusoidal inicial en la superficie de rodadura de los carriles. En una primera simulación, la longitud de onda de la corrugación inicial se fija en 110 mm y la velocidad del vehículo en 142 km/h, con el objetivo de que la frecuencia de excitación del eje ferroviario sea 360.8 Hz, justo la frecuencia de los modos B-F. En la segunda simulación se pretende excitar los modos B-B a la frecuencia de 352.5 Hz, con lo que se considera que la longitud de onda de la corrugación inicial es de 156 mm y la velocidad del vehículo es 198 km/h. En la Tabla 7.3 se recogen los datos correspondientes a los modos B-F y B-B y de la corrugación inicial que se implementa en el modelo de interacción con el fin de excitarlos.

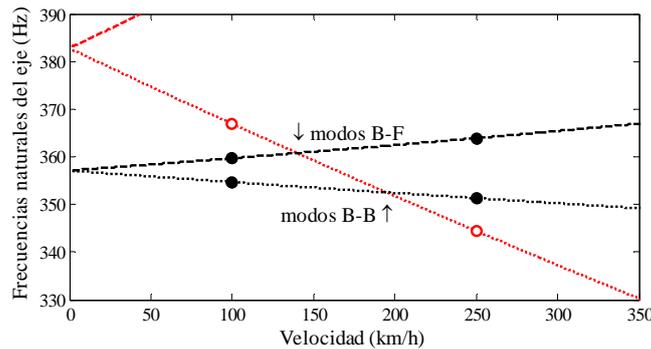


Figura 7.6. Vista ampliada de la zona del diagrama de Campbell en la que coinciden modos del eje: ○, modos de rueda (---, modos forward; ·····, modos backward); ●, tercer modo de flexión horizontal y vertical (----, modo forward; ·····, modo backward).

**Tabla 7.3. Frecuencias y velocidades correspondientes a los modos B-F y B-B y longitudes de onda y amplitudes de la corrugación inicial utilizada para excitar dichos modos.**

	Frecuencia (Hz)	Velocidad (km/h)	Longitud de onda de la corrugación (mm)	Amplitud ( $\mu\text{m}$ )
Modos B-F	360.8	142	109.6	100
Modos B-B	352.5	198	156	100

En la Figura 7.7, se representan las fuerzas de contacto (longitudinal, lateral y vertical) entre la rueda derecha del eje y el carril correspondientes a la primera simulación, es decir, a la excitación de los modos B-F. Las fuerzas de contacto se han obtenido empleando el modelo de eje flexible rotatorio y el modelo de eje rígido, con el fin de compararlas y establecer si la adopción de un modelo de eje de mayor complejidad tiene repercusiones en los parámetros del contacto. Al no haber aplicado ningún par motor, las fuerzas laterales y longitudinales resultan de las vibraciones de torsión, la rotación de la sección del carril y la propia dinámica del eje montado. Existen diferencias muy importantes entre las fuerzas longitudinal y lateral obtenidas mediante los dos modelos de eje, como se puede observar en las Figuras 7.7(a) y 7.7(b). Se puede apreciar en la Figura 7.7(a), cómo la amplitud máxima de la fuerza longitudinal resultante de la simulación realizada con el modelo de eje flexible rotatorio es de 5 a 6 veces la amplitud máxima de la fuerza obtenida con el modelo de eje rígido. La fuerza longitudinal calculada con el eje flexible rotatorio está en fase con la corrugación inicial, fluctúa con la misma frecuencia que ésta (360.8 Hz) y su amplitud presenta una modulación debida a la frecuencia de paso por las traviesas (65.7 Hz). Los máximos de esta fuerza se localizan unos 0.1 m por delante de las posiciones de las traviesas. La fuerza lateral calculada con el modelo de eje flexible rotatorio se observa en la Figura 7.7(b) que oscila con dos frecuencias, por una parte la frecuencia de la corrugación inicial y por la otra, la frecuencia de paso por traviesas. La fuerza lateral obtenida con el modelo de eje rígido también varía con estas dos frecuencias, pero los máximos de esta fuerza están desfasados respecto de los máximos de la fuerza calculada con el modelo de eje flexible rotatorio, de modo que los primeros se producen unos 0.2 m por delante de traviesas, mientras que los segundos, se producen aproximadamente 0.15 m por detrás de la posición de las traviesas. La relación entre la fuerza lateral máxima calculada con el modelo de eje flexible rotatorio y la obtenida con el modelo de eje rígido es aproximadamente 4. Por otra parte la magnitud de la fuerza lateral es del orden de 10 veces inferior a la fuerza longitudinal.

En la Figura 7.7(c) se observa que las discrepancias entre las fuerzas verticales calculadas con los dos modelos de eje no son tan grandes como en las fuerzas

tangenciales al contacto. De nuevo, se pueden distinguir claramente dos frecuencias en la evolución de la fuerza vertical: la frecuencia de la corrugación inicial y la frecuencia del paso por traviesas. Esta última frecuencia produce una modulación de la amplitud de la fuerza vertical, haciendo que los máximos absolutos de esta fuerza se localicen en las proximidades de las traviesas, con un factor de amplificación dinámica de 1.5 y de 1.35 cuando se calcula la fuerza con el modelo de eje flexible rotatorio y con el modelo de eje rígido, respectivamente. Se puede observar que la fuerza vertical calculada mediante el modelo de eje flexible rotatorio está ligeramente adelantada a la fuerza obtenida con el modelo de eje rígido y a su vez las dos están adelantadas a la corrugación inicial, aproximadamente  $90^\circ$  y  $45^\circ$ , respectivamente.

En la Figura 7.8, se muestran las fuerzas de contacto entre la rueda derecha y el carril que se han obtenido en la segunda simulación, en la que se excitan los modos B-B. Cabe destacar que la magnitud de las fuerzas longitudinal y lateral calculadas a partir del modelo de eje flexible rotatorio es del orden de la mitad de la magnitud de las fuerzas obtenidas con el mismo modelo cuando se excitan los modos B-F, lo que previsiblemente hará que el desgaste sea inferior en el caso de excitar los modos B-B.

Nuevamente, se observa en las Figuras 7.8(a) y 7.8(b) que las fuerzas longitudinal y lateral calculadas con el modelo de eje flexible rotatorio son notablemente superiores a las obtenidas con el modelo de eje rígido. En la evolución de estas fuerzas se pueden distinguir dos frecuencias: la frecuencia de la corrugación inicial (352.5 Hz) y la frecuencia de paso por traviesas (91.7 Hz para la velocidad de 198 km/h). Esta última produce en la fuerza longitudinal una modulación de su amplitud, y en la fuerza lateral hace que el valor medio varíe con una longitud de onda igual a la distancia entre traviesas. Con el modelo de eje rígido, el efecto de la excitación paramétrica es mayor en la fuerza lateral que en la longitudinal.

En la Figura 7.8(c), se representa la fuerza vertical obtenida con los dos modelos de eje, siendo en este caso la amplitud de la fuerza calculada con el modelo de eje rígido mayor que la de la fuerza simulada con el modelo de eje flexible rotatorio. Nuevamente, los máximos absolutos de la fuerza vertical se producen en las proximidades de las traviesas, con factores de amplificación dinámica de 1.4 y 1.2, con el modelo de eje rígido y el modelo de eje flexible, respectivamente. Se puede apreciar que la fuerza vertical calculada mediante el modelo de eje flexible rotatorio está en fase con la fuerza obtenida con el modelo de eje rígido y a su vez ambas están adelantadas a la corrugación inicial aproximadamente  $45^\circ$ .

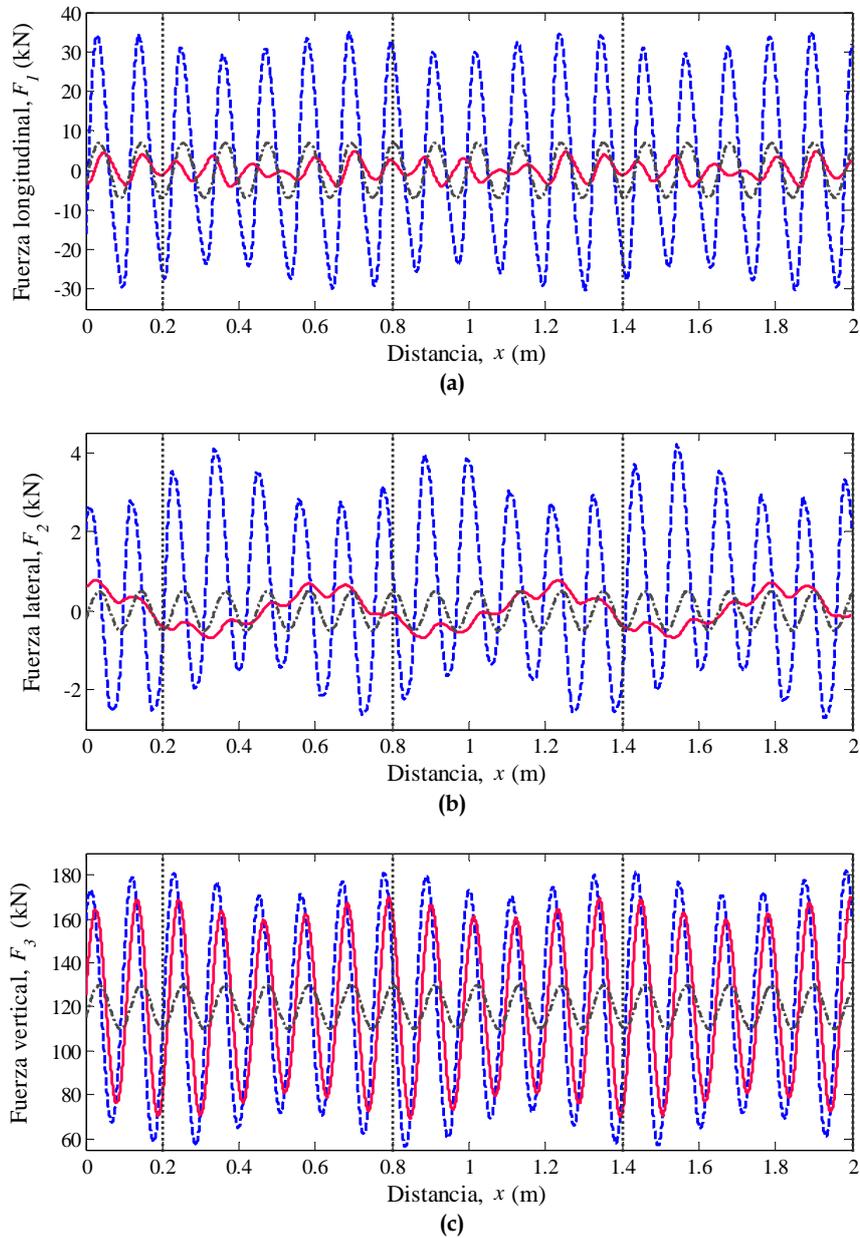


Figura 7.7. Fuerzas de contacto en la rueda derecha en función de la posición del centro de ésta, cuando el vehículo circula a una velocidad de 142 km/h: ---, eje flexible rotatorio; —, eje rígido; - - - - -, corrugación (sin escala); ·····, posición de las traviesas.

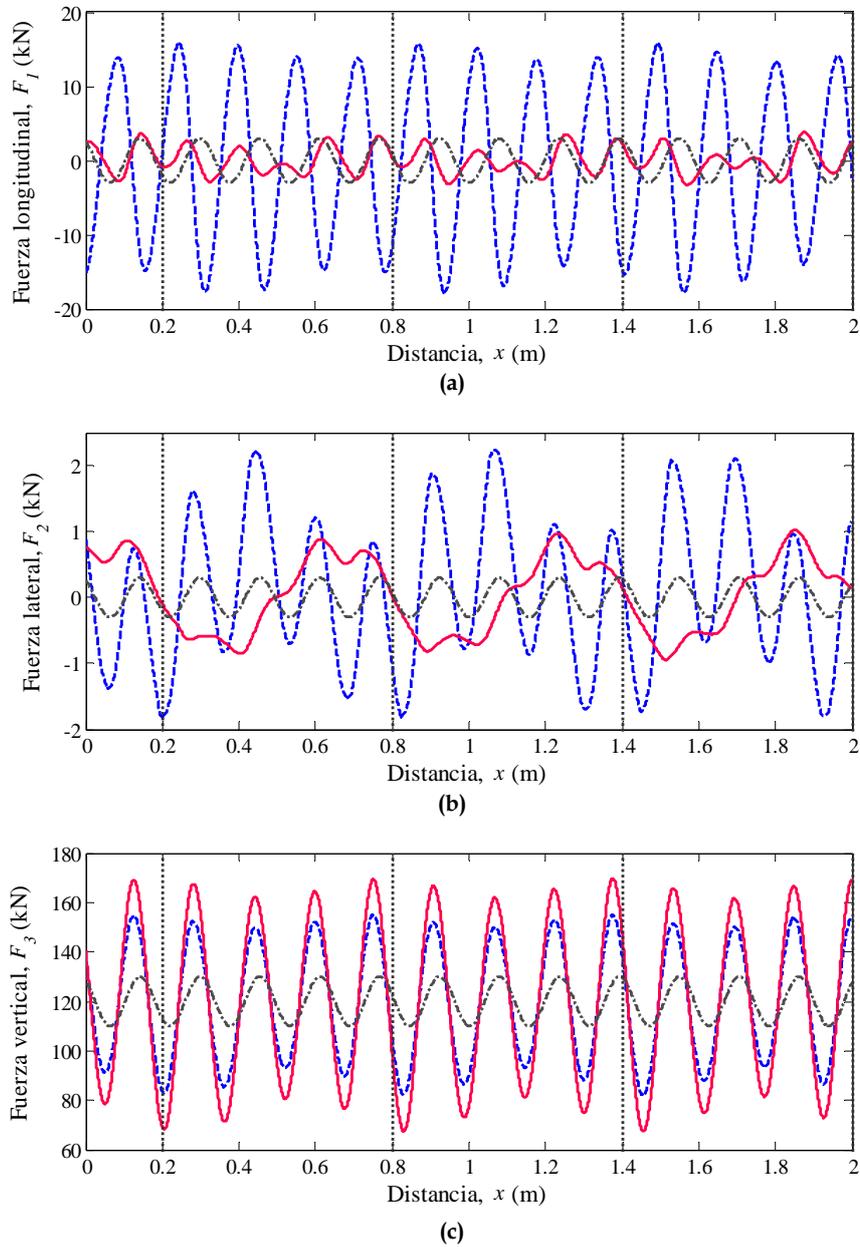


Figura 7.8. Fuerzas de contacto en la rueda derecha en función de la posición del centro de ésta, cuando el vehículo circula a una velocidad de 198 km/h: ----, eje flexible rotatorio; —, eje rígido; -·-·-, corrugación (sin escala); ·····, posición de las traviesas.

Las Figuras 7.9 y 7.10 muestran las profundidades del desgaste calculadas con el modelo de eje flexible rotatorio, a lo largo de dos vanos de vía, cuando se excita los modos B-F y los modos B-B, respectivamente. Estas profundidades del desgaste se han calculado en la línea central (longitudinal) de la superficie de rodadura del carril y se deben a un único paso de rueda. A efectos de una mayor claridad, se han representado dichos resultados junto con la corrugación inicial y se ha indicado la posición de las traviesas. En primer lugar, se observa que el valor máximo de la profundidad del desgaste que resulta de la excitación de los modos B-F es aproximadamente 5 veces superior que la máxima profundidad del desgaste que se calcula cuando se excitan los modos B-B del eje flexible rotatorio.

Tanto en la Figura 7.9 como en la Figura 7.10, se puede apreciar que el desgaste se produciría en las crestas y valles de la corrugación inicial, siendo la frecuencia de las profundidades del desgaste el doble de la frecuencia de la corrugación inicial.

Este último efecto se debe a que tanto el pseudodeslizamiento longitudinal como el lateral en el contacto rueda-carril fluctúan alrededor de cero (también lo hacen las correspondientes fuerzas), al rodar el eje libremente, sin aplicar ningún par motor. También existen posiciones en la superficie de rodadura del carril en las que el desgaste es nulo, debido a que la fuerza tangencial al contacto (resultante de la longitudinal y lateral) es nula y por tanto, la velocidad de deslizamiento local en el área de contacto también lo es. Se puede distinguir la frecuencia de paso de las traviesas superpuesta a la anterior, modulando la amplitud de la profundidad del desgaste. De esta forma, en la Figura 7.9 se observa que las máximas profundidades del desgaste se producen en la segunda mitad de los dos vanos en las proximidades de las traviesas, siendo mayor el desgaste en los valles de la corrugación inicial que en las crestas, con lo que cabe esperar que crezca la amplitud de la corrugación en dichas posiciones. En la Figura 7.10, las máximas profundidades del desgaste se localizan en la primera mitad de los dos vanos, también en posiciones próximas a las traviesas. Sin embargo, no se puede predecir a la vista de la Figura 7.10, si crecerá la corrugación inicial por producirse un mayor desgaste en los valles que en los picos, o si por el contrario, disminuirá la amplitud de ésta o si se desplazará el patrón de corrugación en dirección longitudinal del carril sin variar significativamente su amplitud.

En las simulaciones realizadas con el eje rígido las profundidades del desgaste obtenidas han sido nulas, debido a los bajos valores de pseudodeslizamientos (y de fuerzas tangenciales) que no han producido condiciones de deslizamiento en el contacto rueda-carril.

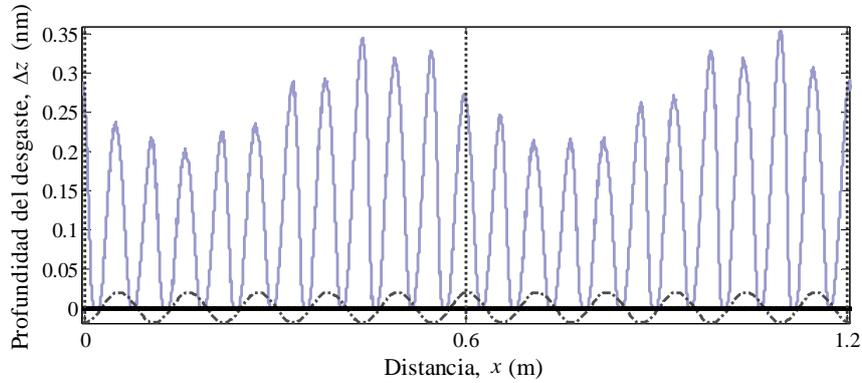


Figura 7.9. Profundidad del desgaste para el caso en el que se excitan los modos B-F: —, desgaste; ·····, corrugación inicial (sin escala); ·····, posición de las traviesas.

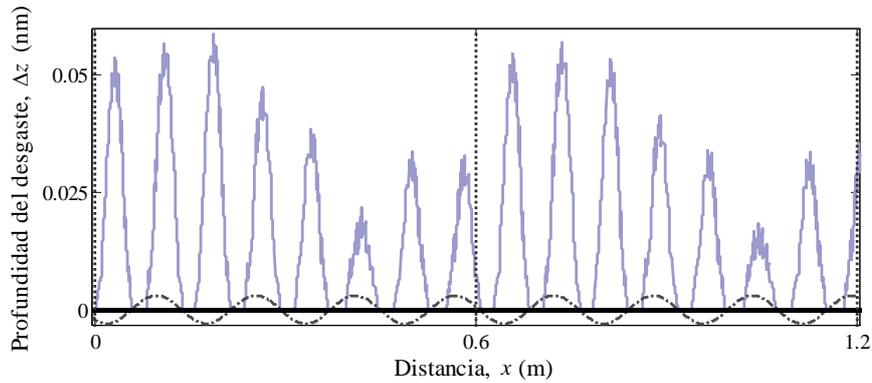


Figura 7.10. Profundidad de desgaste para el caso en el que se excitan los modos B-B: —, desgaste; ·····, corrugación inicial (sin escala); ·····, posición de las traviesas.

En las Figuras 7.11 y 7.12, se representa el perfil longitudinal del carril después de simular 100 000 pasos de rueda junto con el perfil inicial corrugado y la posición de las traviesas, para los casos en los que se excitan los modos B-F y los modos B-B del eje flexible rotatorio, respectivamente. Estos perfiles desgastados se han obtenido a partir de 100 simulaciones, de forma que tras cada simulación el perfil longitudinal del carril se ha actualizado con la profundidad del desgaste multiplicada por un factor de escalado igual a 1000. Previamente, se ha comprobado que se obtiene el mismo perfil longitudinal del carril realizando 10 simulaciones en las que se multiplica el desgaste por 100 que realizando una única simulación y escalando el desgaste con un factor de 1000.

A partir de la Figura 7.11 se puede concluir que la excitación de los modos B-F del eje flexible rotatorio, después de 100 000 pasos de rueda, ha producido un perfil longitudinal del carril en el que se superponen dos frecuencias: la frecuencia de la corrugación inicial y la frecuencia de la excitación paramétrica que produce el paso

por traviesas. El desgaste se ha producido tanto en los picos como en los valles de la corrugación inicial, pero comparando el perfil inicial y el perfil desgastado, se puede observar que la amplitud de la corrugación inicial se ha incrementado en la segunda mitad del cada vano, aproximadamente 0.2 m antes de la posición de las traviesas. Por tanto, se puede concluir que la excitación de los modos B-F del eje flexible rotatorio puede tener un papel importante en el desarrollo de la corrugación.

Sin embargo, observando la Figura 7.12, no se aprecia un cambio significativo en el perfil inicial del carril después de simular 100 000 pasos de rueda, cuando se excitan los modos B-B. El desgaste se produce tanto en las crestas como en los valles de la corrugación inicial, como se puede observar en las vistas ampliadas A y B de la Figura 7.12. El cambio más significativo en el perfil inicial es el que se puede apreciar en la vista ampliada A, que se debe al máximo del desgaste localizado en el flanco descendente de la corrugación inicial en la primera mitad de un vano que se observa en la Figura 7.10.

Los resultados presentados en este apartado se han publicado en [209].

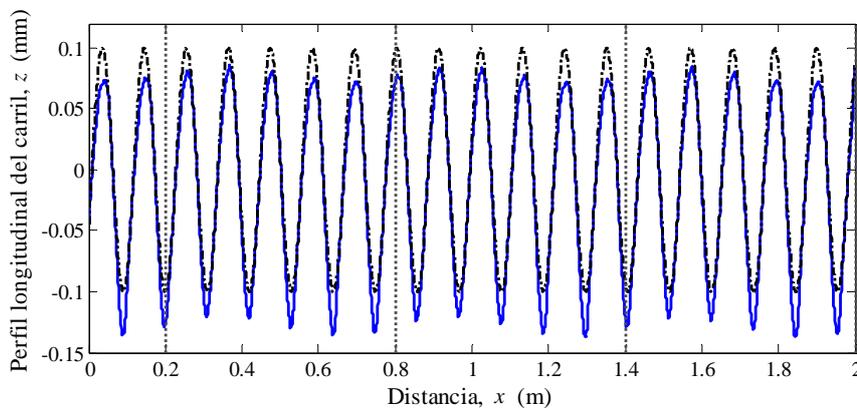


Figura 7.11. Perfil longitudinal del carril tras 100 000 pasos de rueda a  $V=142$  km/h, excitando los modos B-F: —, perfil final; - - - - -, perfil inicial; ······ posición de las traviesas.

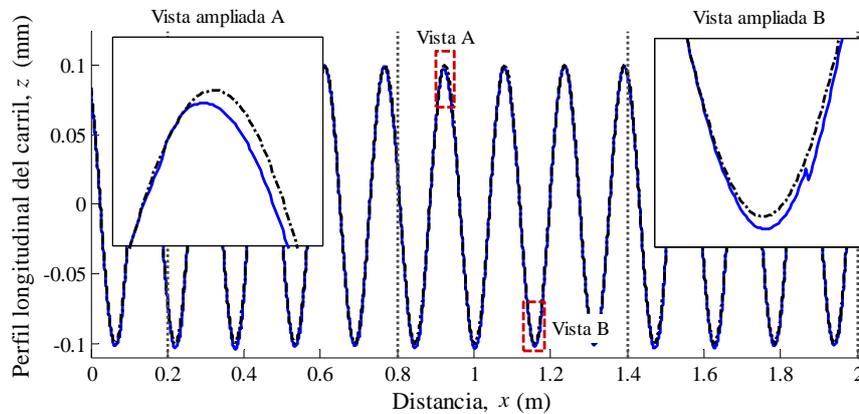


Figura 7.12. Perfil longitudinal del carril tras 100 000 pasos de rueda a  $V=198$  km/h, excitando los modos B-B: —, perfil final; - - - - -, perfil inicial; ····· posición de las traviesas.

### 7.3 Estudio del crecimiento del desgaste ondulatorio en curvas de radio elevado mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario

En este apartado, se han implementado condiciones en el contacto rueda-carril similares a las que pueden darse en la realidad cuando un vehículo ferroviario pasa por una curva de elevado radio a velocidades altas. En estas simulaciones no se ha supuesto ningún desequilibrio en el peso de la caja transmitido a cada rueda del eje y se considera el modelo de vehículo ferroviario reducido a un único eje ferroviario, dado que la formación de corrugación se atribuye en gran medida al eje delantero de los bogies [3]. Para simular el paso del eje ferroviario por una curva de radio elevado se prescriben valores medios de los pseudodeslizamientos longitudinales, de modo que se ha adoptado un valor medio positivo del pseudodeslizamiento longitudinal en el contacto entre la rueda interna y el carril bajo de la curva de 0.2%, y un valor medio de -0.2% para modelar las condiciones en el contacto entre la rueda externa y el carril alto de la curva [89], como se muestra en la Figura 7.13. El pseudodeslizamiento lateral se ha supuesto que es en todo caso inferior al pseudodeslizamiento longitudinal y no se ha impuesto ningún valor medio, con lo que éste oscilará alrededor de cero.

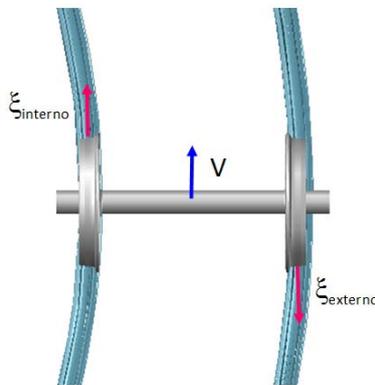


Figura 7.13. Pseudodeslizamientos longitudinales medios aplicados en el contacto rueda-carril para simular el paso del eje ferroviario por una curva de radio elevado.

En las simulaciones cuyos resultados se recogen en este apartado, se ha empleado el modelo de contacto no herciano y no estacionario, basado en la Teoría Variacional de Kalker [104], que se ha descrito en el Capítulo 4, tanto en la resolución de la interacción dinámica vehículo-vía como en el cálculo del desgaste. En primer lugar, se ha supuesto una corrugación de tipo sinusoidal en la superficie de rodadura del carril para calcular la profundidad del desgaste y estudiar el crecimiento de ésta cuando los modos B-F y B-B del eje flexible rotatorio son excitados a su paso sobre la corrugación inicial. Posteriormente, se ha implementado una rugosidad en la superficie de rodadura del carril con un amplio contenido en longitudes de onda y con amplitudes relativamente pequeñas, de acuerdo con la normativa de emisión de ruido de rodadura de los vehículos ferroviarios, con el fin de estudiar en qué bandas de frecuencias o longitudes de onda es posible el crecimiento de la rugosidad inicial.

### 7.3.1 Excitación del sistema vehículo-vía mediante corrugación sinusoidal

En este subapartado, se excita el sistema acoplado vehículo-vía mediante una corrugación sinusoidal, como se ilustra en la Figura 7.14, de longitud de onda tal que a la velocidad de avance del eje ferroviario se excita o bien el modo B-F o el modo B-B del eje ferroviario. En la Tabla 7.4 se recogen la amplitud y longitudes de onda de la corrugación inicial empleadas para excitar los modos B-F y B-B del eje flexible rotatorio.

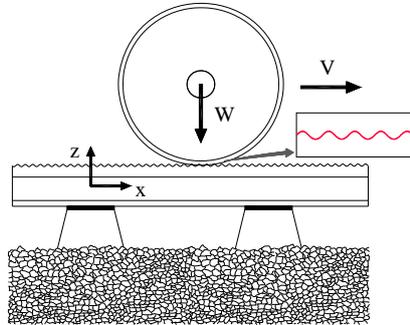


Figura 7.14. Excitación del sistema vehículo-vía con corrugación sinusoidal.

Tabla 7.4. Frecuencias y velocidades correspondientes a los modos B-F y B-B y longitudes de onda y amplitudes de la corrugación inicial utilizada para excitar dichos modos.

	Frecuencia (Hz)	Velocidad (km/h)	Longitud de onda de la corrugación (mm)	Amplitud ( $\mu\text{m}$ )
Modos B-F	360.8	142	109.6	10
Modos B-B	352.5	198	156	10

En la Figura 7.15 se representa la fuerza vertical de contacto rueda-carril junto con la corrugación inicial y la posición de las traviesas cuando se excitan los modos B-F y en la Figura 7.16 cuando se excitan los modos B-B. A simple vista se pueden distinguir dos longitudes de onda predominantes en la fuerza vertical: por una parte, se observa que la fuerza vertical varía con la misma longitud de onda que la corrugación inicial; y por otra, se puede apreciar que aparece otra longitud de onda mayor, superpuesta a la anterior, que es igual a la distancia entre traviesas, 0.6 m. Se puede observar tanto en la Figura 7.15 como en la Figura 7.16 que los máximos de la fuerza vertical se producen cuando la rueda se encuentra en las proximidades de las traviesas, en este caso cuando está situada entre 0.15 y 0.2 m por delante de la traviesa. En gran medida las fluctuaciones de amplitud en la fuerza vertical se deben a la variación de rigidez de la vía debido a que ésta no se encuentra apoyada en toda su longitud, sino en apoyos discretos. Con esto, la rueda experimenta fluctuaciones de rigidez a lo largo de la vía, que afectan a las fuerzas de contacto. Por otra parte, los máximos relativos de la fuerza vertical se localizan ligeramente adelantados a los picos de la corrugación inicial. Al no haber considerado desequilibrio de fuerzas entre las dos ruedas del eje y las dos ruedas soportar la misma carga estática de 100 kN, la fuerza vertical en el contacto resultante es la misma en los dos puntos de contacto y oscila alrededor de la carga estática que se aplica en cada rueda. Asimismo, se observa que la excitación de los modos B-F se traduce en una mayor fuerza vertical dinámica en comparación con la resultante de

la excitación de los modos B-B, lo que nos indica que el sistema vehículo-vía se comporta de una forma más rígida cuando se excitan los modos B-F.

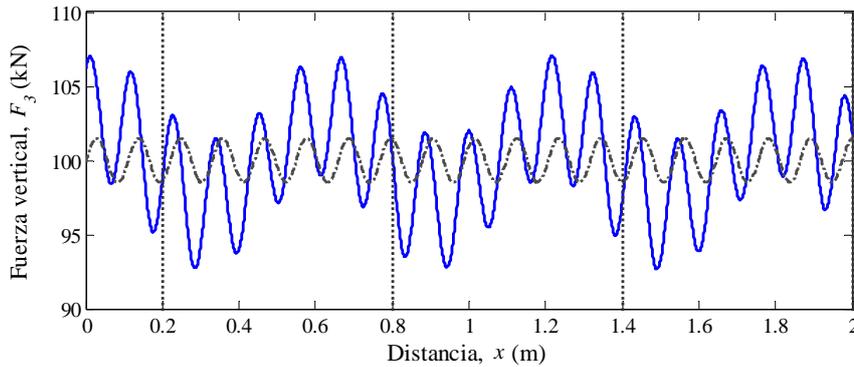


Figura 7.15. Fuerza vertical de contacto en el caso que se excita los modos B-F a  $V=142$  km/h: —, fuerza vertical; - - - - -, corrugación inicial (sin escala); ..... , posición de las traviesas.

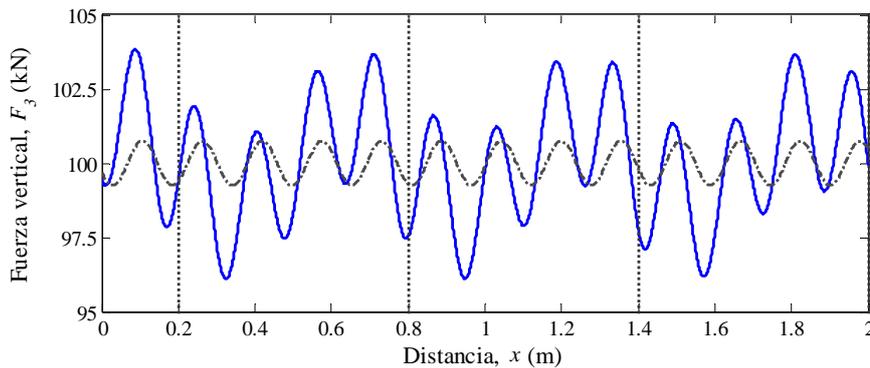


Figura 7.16. Fuerza vertical de contacto en el caso que se excita los modos B-B a  $V=198$  km/h: —, fuerza vertical; - - - - -, corrugación inicial (sin escala); ..... , posición de las traviesas.

En las Figuras 7.17 y 7.18, se muestra la fuerza lateral en el contacto rueda-carril cuando se excitan los modos B-F y B-B, respectivamente. Se puede observar, al igual que en la fuerza vertical, la influencia de la frecuencia de la corrugación inicial y la frecuencia de paso por traviesas en la evolución de la fuerza lateral, viéndose la fuerza lateral cuando se excitan los modos B-B prácticamente afectada por la frecuencia de paso por traviesas. Los valores máximos de la fuerza lateral se producen entre 0.05 y 0.1 m por detrás de la posición de las traviesas.

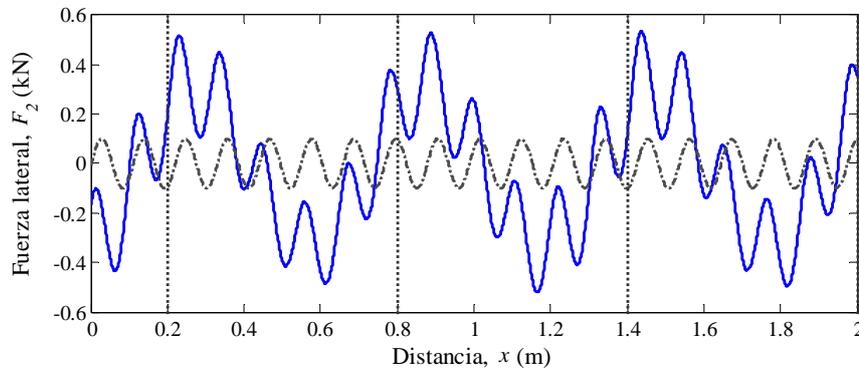


Figura 7.17. Fuerza lateral de contacto en el caso que se excita los modos B-F a  $V=142$  km/h: —, fuerza lateral; ·····, corrugación inicial (sin escala); ·····, posición de las traviesas.

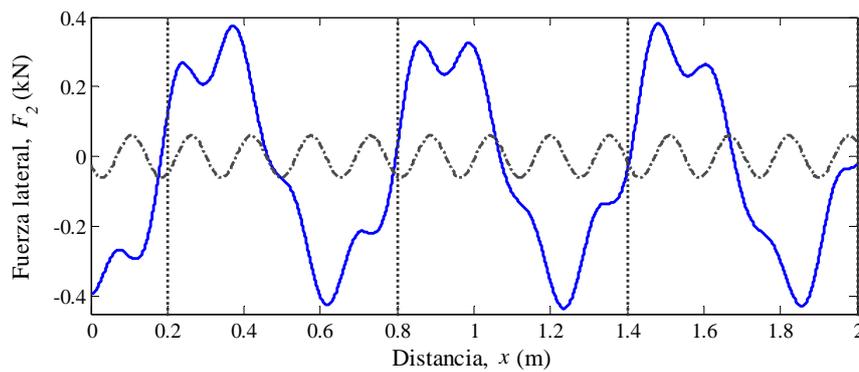


Figura 7.18. Fuerza lateral de contacto en el caso que se excita los modos B-B a  $V=198$  km/h: —, fuerza lateral; ·····, corrugación inicial (sin escala); ·····, posición de las traviesas.

En las Figuras 7.19 y 7.20 se representa la fuerza longitudinal de contacto en el carril interno a la curva, cuando se excitan los modos B-F y B-B, respectivamente. La fuerza longitudinal en el carril externo para los mismos casos se muestra en las Figuras 7.21 y 7.22. Se puede observar que la amplitud de la fuerza longitudinal es mayor en el caso de excitación de los modos B-F.

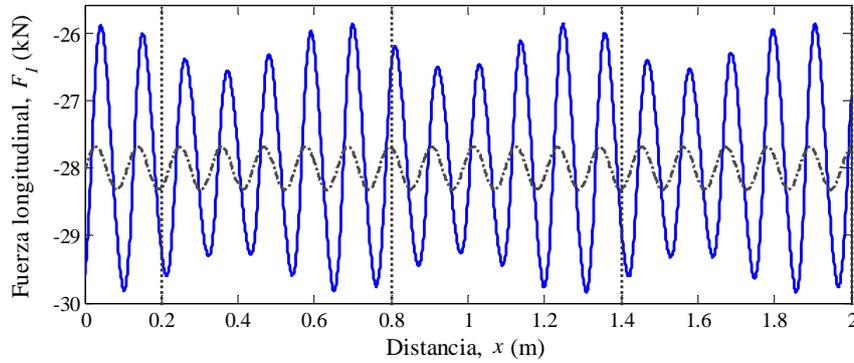


Figura 7.19. Fuerza longitudinal de contacto entre la rueda y el carril interno a la curva para el caso que se excita los modos B-F a  $V=142$  km/h: —, fuerza longitudinal; - - - - -, corrugación inicial (sin escala); ..... , posición de las traviesas.

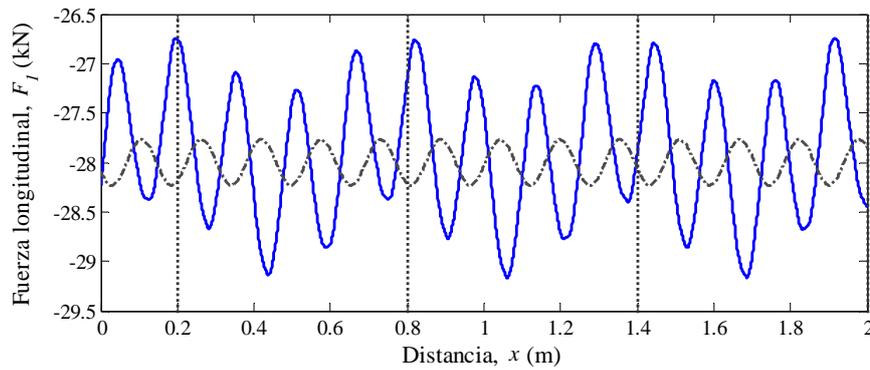


Figura 7.20. Fuerza longitudinal de contacto entre la rueda y el carril interno a la curva para el caso que se excita los modos B-B a  $V=198$  km/h: —, fuerza longitudinal; - - - - -, corrugación inicial (sin escala); ..... , posición de las traviesas.

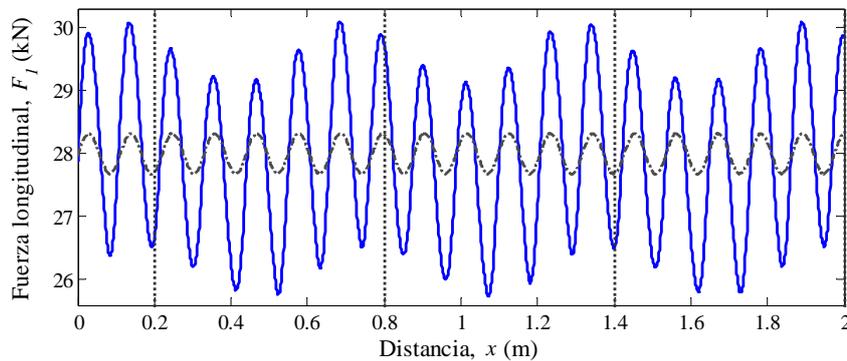


Figura 7.21. Fuerza longitudinal de contacto entre la rueda y el carril externo a la curva para el caso que se excita los modos B-F a  $V=142$  km/h: —, fuerza longitudinal; - - - - -, corrugación inicial (sin escala); ..... , posición de las traviesas.

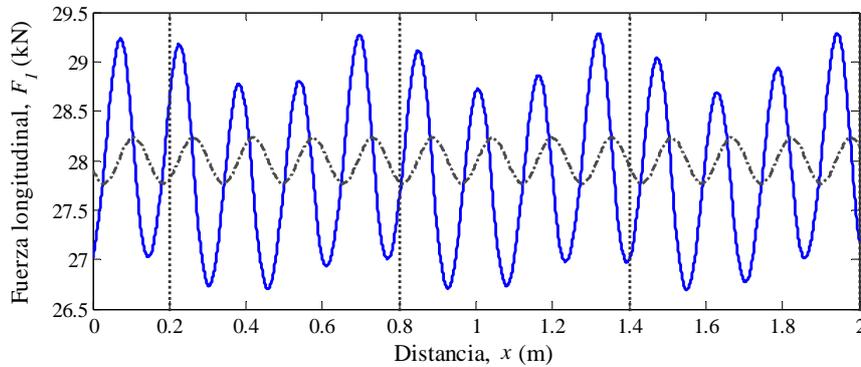


Figura 7.22. Fuerza longitudinal de contacto entre la rueda y el carril externo a la curva para el caso que se excita los modos B-B a  $V=198$  km/h: —, fuerza longitudinal; - - - - -, corrugación inicial (sin escala); ..... , posición de las traviesas.

Las profundidades del desgaste obtenidas cuando se excitan los modos B-F se muestran en la Figura 7.23 para tres vanos del carril interno a la curva y en la Figura 7.24, para el carril externo. El desgaste en los dos carriles se compara con la corrugación inicial, que se representa fuera de escala.

El ángulo de desfase entre el desgaste y la corrugación inicial es un parámetro importante que se ha considerado habitualmente para analizar el potencial crecimiento de la corrugación o rugosidad [196, 228]. De este modo, si el ángulo de fase entre el desgaste y la corrugación inicial está en torno a  $180^\circ$ , los máximos del desgaste tienen lugar en los valles y los mínimos en las crestas o picos de la corrugación, con lo que aumentaría la amplitud de la corrugación previa, ya que los valles se ahondarían, mientras que los picos apenas se desgastarían. Por el contrario, si el desgaste y la corrugación inicial están en fase, el desgaste máximo se produce en los picos de la corrugación, y el mínimo en los valles, con lo que la amplitud de la corrugación inicial disminuiría después de cada paso de rueda y el patrón inicial se eliminaría.

Se puede observar en la Figura 7.23, que cuando se excitan los modos B-F, el desgaste en el carril interno a la curva está prácticamente en oposición de fase respecto a la corrugación inicial, lo que indica que la amplitud de la corrugación inicial se incrementará con los pasos de ruedas. En cambio, de la Figura 7.24, en la que se representa el desgaste en el carril externo cuando se excitan los modos B-F, se puede concluir que al estar el desgaste en fase con la corrugación inicial, la amplitud de ésta disminuirá después de cada paso de rueda.

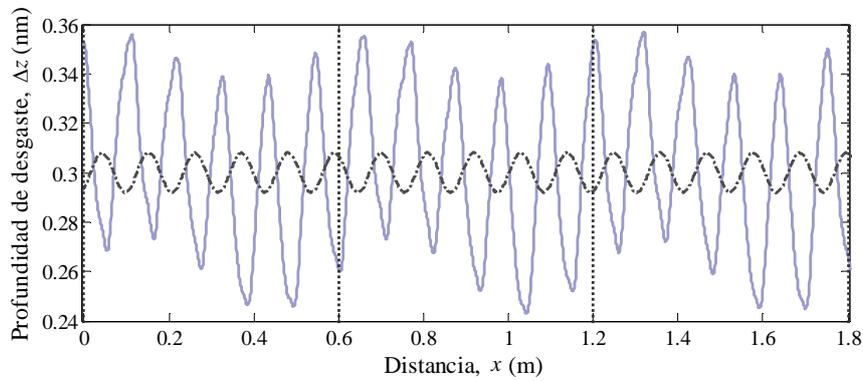


Figura 7.23. Profundidad del desgaste en el carril interno a la curva a lo largo de 3 vanos, para el caso que se excita los modos B-F a  $V=142$  km/h: —, desgaste; - - - - - , corrugación inicial (sin escala); ······, posición de las traviesas.

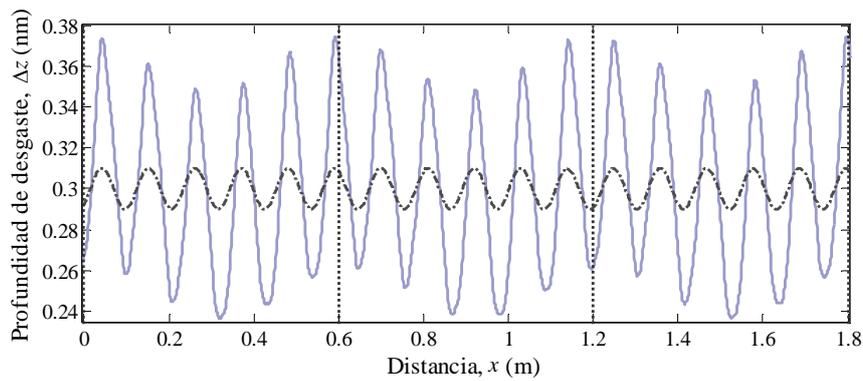


Figura 7.24. Profundidad de desgaste en el carril externo a la curva a lo largo de 3 vanos, para el caso que se excita los modos B-F a  $V=142$  km/h: —, desgaste; - - - - - , corrugación inicial (sin escala); ······, posición de las traviesas.

En la Figura 7.25 se representa la profundidad del desgaste en el carril interno a la curva, que resulta de la excitación de los modos B-B. El desgaste en el carril externo se muestra en la Figura 7.26. Aunque en ambos carriles, el desgaste está desfasado con respecto a la corrugación inicial, es difícil concluir si crecerá la amplitud de la corrugación previa o por el contrario no lo hará; o bien, si se producirá un desplazamiento longitudinal del patrón de corrugación sin incrementar su amplitud.

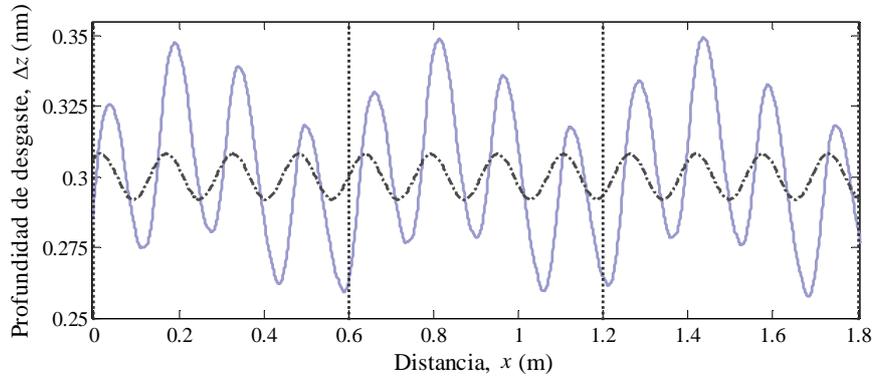


Figura 7.25. Profundidad de desgaste en el carril interno a la curva para el caso que se excita los modos B-B a  $V=198$  km/h: —, desgaste; - - - - - , corrugación inicial (sin escala); ..... , posición de las traviesas.

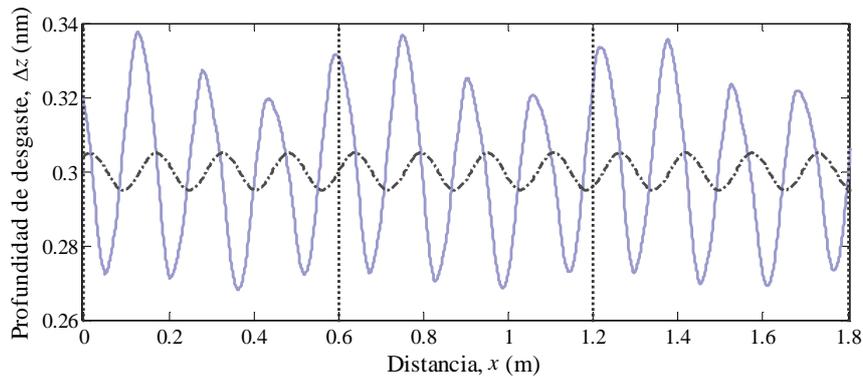


Figura 7.26. Profundidad de desgaste en el carril externo a la curva para el caso que se excita los modos B-B a  $V=198$  km/h: —, desgaste; - - - - - , corrugación inicial (sin escala); ..... , posición de las traviesas.

De la Figura 7.23 a la Figura 7.26, se pueden distinguir en la profundidad del desgaste dos longitudes de onda: la longitud de onda de la corrugación inicial y la longitud de onda igual a la distancia entre traviesas. Con el objetivo de analizar el contenido en frecuencia de la distribución del desgaste en la línea central de los dos carriles, se calcula y representa su transformada de Fourier, cuya magnitud se muestra en la Figura 7.27 para el caso en que se excitan los modos B-F del eje ferroviario y en la Figura 7.28, cuando se excitan los modos B-B. Para ello, se ha empleado la historia temporal del desgaste correspondiente a una distancia de 30 m (50 vanos), que se ha filtrado mediante una ventana Hanning para minimizar el error de *leakage*. En el espectro del desgaste que se muestra en la Figura 7.27, aparece un primer pico a la frecuencia de paso por traviesas  $f_{sp}$ , que es 65.7 Hz a la velocidad de 142 km/h. El pico de mayor amplitud aparece a la frecuencia correspondiente a la corrugación inicial  $f_c$ , que en este caso es 360.8 Hz. En la

Figura 7.28, también se pueden observar dichos picos, que cuando se excitan los modos B-B a la velocidad de 198 km/h, aparecen a la frecuencia de paso por traviesas a 91.7 Hz y a la frecuencia de excitación por la corrugación inicial a 352.5 Hz.

Aparte de los  $n$ -ésimos armónicos de la frecuencia de paso por traviesas  $nf_{sp}$  y de la corrugación inicial  $nf_c$ , en las Figuras 7.27 y 7.28 se distinguen picos a frecuencias que son combinaciones de estas frecuencias. Con esto, aparecen picos a frecuencias secundarias como por ejemplo,  $f_c - nf_{sp}$  y  $f_c + nf_s$ . Este efecto es propio de los sistemas no lineales, en los que si existen varias frecuencias principales se produce transferencia de energía entre ellas [125].

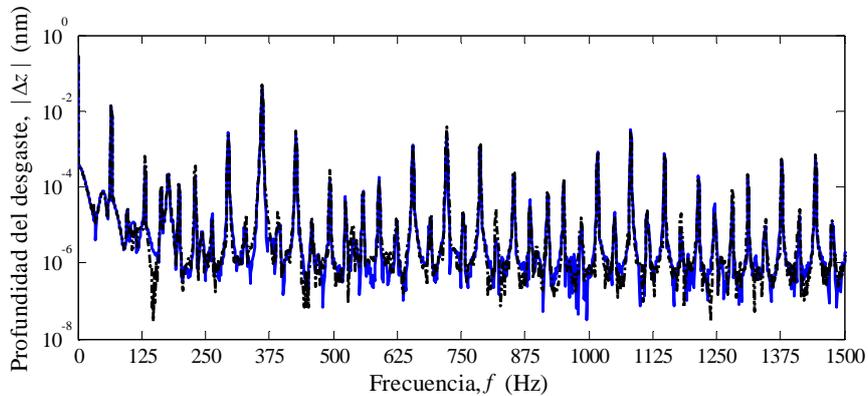


Figura 7.27. Transformada de Fourier de la profundidad del desgaste para el caso que se excita los modos B-F a  $V=142$  km/h: —, carril interno; - - - - -, carril externo.

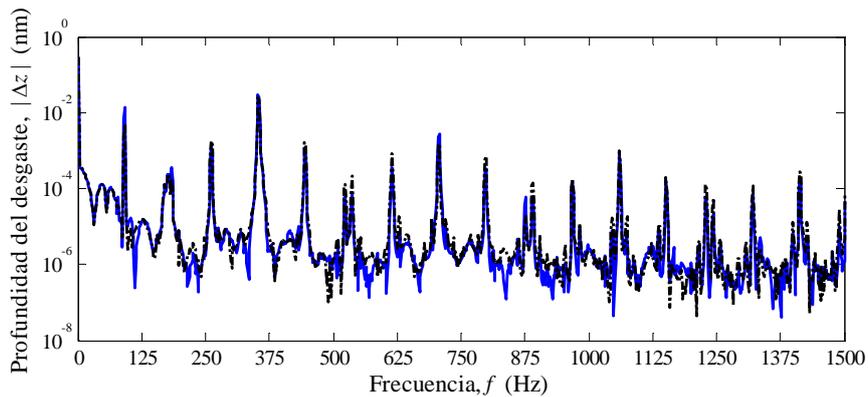


Figura 7.28. Transformada de Fourier de la profundidad del desgaste para el caso que se excita los modos B-B a  $V=198$  km/h: —, carril interno; - - - - -, carril externo.

### 7.3.2 Excitación del sistema vehículo-vía mediante rugosidad pseudoaleatoria

La norma UNE-EN ISO 3095:2005 [201] establece el espectro límite de rugosidad en las superficies de rodadura de los carriles para la aceptación de los trabajos de amolado de una vía, desde la perspectiva del ruido de rodadura. En este subapartado, se considera la rugosidad límite de dicha norma (ver Figura 7.29) para simular el perfil de la rugosidad, de bajo nivel, presente en las superficies de rodadura de carriles nuevos o recién amolados en forma de un amplio espectro de longitudes de onda, como se ilustra en la Figura 7.30.

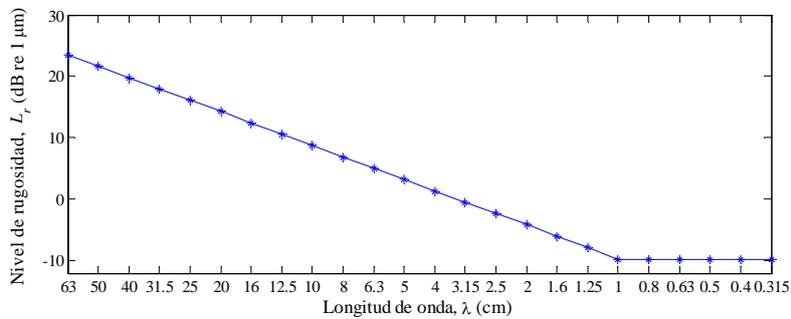


Figura 7.29. Espectro límite de rugosidad del carril. Obtenido a partir de [201].

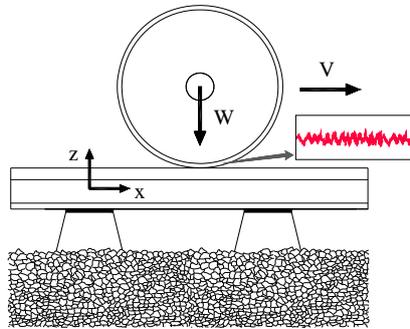


Figura 7.30. Excitación del sistema vehículo-vía mediante rugosidad pseudoaleatoria.

La norma indica el nivel de rugosidad, en decibelios, para las longitudes de onda centrales de 24 bandas de 1/3 de octava

$$\lambda_i = 0.01 \cdot 10^{k/10} \text{ (m)}, \text{ con } k = -5, -4, \dots, 18 \text{ e } i = 1, \dots, 24 \quad (7.2)$$

El nivel de rugosidad en cada banda se puede obtener a partir de la siguiente expresión

$$L_{r_i} = 20 \log_{10} \left( \frac{\tilde{r}_i}{r_{\text{ref}}} \right) \text{ (dB)}, \quad (7.3)$$

donde  $\tilde{r}_i$  es el valor cuadrático medio del perfil de la rugosidad evaluado en la banda  $i$  de 1/3 de octava, cuya longitud de onda central  $\lambda_i$  viene dada por la expresión (7.2) y  $r_{\text{ref}}$  es el valor de rugosidad de referencia, que suele considerarse de 1  $\mu\text{m}$ .

Siguiendo el procedimiento empleado por Hiensch *et al.* [79], el perfil de la rugosidad inicial en el carril se calcula como la superposición de funciones sinusoidales cuyas amplitudes se obtienen, para cada banda de 1/3 de octava, a partir de los niveles del espectro límite de rugosidad del carril

$$z(x) = \sum_{i=1}^M a_i \left[ \sum_{j=1}^N \sin \left( \frac{2\pi x}{\lambda_{ij}} + \varphi_{ij} \right) \right] \text{ (m)}, \quad (7.4)$$

donde  $M$  es el número de bandas de 1/3 de octava y  $N$  es el número de funciones seno que se consideran para obtener la rugosidad. Las  $M$  amplitudes correspondientes a cada banda  $a_i$ , se calculan mediante

$$a_i = \sqrt{\frac{2}{N}} 10^{L_{r_i}/20} \text{ (}\mu\text{m)}. \quad (7.5)$$

Los ángulos de fase inicial  $\varphi_{ij}$  se generan por medio de una distribución aleatoria uniformemente distribuida de 0 a  $2\pi$ . Las  $N$  longitudes de onda en cada banda  $\lambda_{ij}$ , se calculan considerando un incremento de número de onda constante

$$\Delta \kappa_i = \frac{2\pi}{N} \left( \frac{1}{\lambda_i^{\min}} - \frac{1}{\lambda_i^{\max}} \right), \quad (7.6)$$

siendo  $\lambda_i^{\min}$  y  $\lambda_i^{\max}$  las longitudes de onda de los extremos de cada banda, que se obtienen a partir de la longitud de onda del centro de cada banda  $\lambda_i$  de la siguiente forma

$$\lambda_i^{\max} = \lambda_i 2^{1/6}, \quad \lambda_i^{\min} = \frac{\lambda_i}{2^{1/6}}. \quad (7.7)$$

La tasa de crecimiento global de la corrugación, utilizada por Hempelmann y Knothe [77], es un indicador, adimensional e independiente del número de pasos de rueda, del aumento o disminución de la amplitud del defecto. Tras obtener los espectros de Fourier de las amplitudes de la rugosidad inicial del carril y de la

rugosidad tras  $n$  pasos de rueda, éstos se han promediado en bandas de 1/24 de octava y se ha calculado la tasa de crecimiento global para las frecuencias centrales de dichas bandas

$$\gamma_i = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{Z_{i,n}}{Z_{i,0}} \right), \text{ con } i = 1, \dots, M. \quad (7.8)$$

Si la tasa de crecimiento es positiva en una banda, indica que la amplitud de la rugosidad final es mayor que la inicial en dicha banda, con lo que crecería la rugosidad a la correspondiente frecuencia o longitud de onda. Por el contrario, si la tasa de crecimiento es negativa, la amplitud de la rugosidad decrecería en dicha banda, indicando que la rugosidad inicial se eliminaría con los pasos de rueda.

En las Figuras 7.31 y 7.32, se muestran las tasas de crecimiento global de la corrugación para ambos carriles y las dos velocidades estudiadas. Para la velocidad de 142 km/h, se puede observar en la Figura 7.31 que las tasas de crecimiento de la corrugación para longitudes de onda inferiores a 110 mm toman valores negativos, lo que indica que la rugosidad inicial de dichas longitudes de onda no crece. Sin embargo, la rugosidad con una longitud de onda de 110 mm puede crecer en el carril interno y derivar en corrugación, mientras que no se prevé crecimiento en esta longitud de onda en el carril externo. Se puede observar que en ambos carriles pueden crecer rugosidades con longitudes de onda entre 130 y 500 mm (sin que domine una longitud de onda sobre las demás, por lo que la rugosidad evolucionaría hacia una determinada irregularidad no ondulatoria cuyo espectro estaría en la banda de longitudes de onda entre 130 y 500 mm). Cuando el vehículo circula a 198 km/h, se obtienen resultados similares a los correspondientes a la velocidad de 142 km/h, como se puede ver en la Figura 7.32. En este caso, el crecimiento de rugosidad se produciría en ambos carriles con longitudes de onda que van desde 200 mm a 600 mm (de nuevo, sin que domine una longitud de onda). Por otra parte, en el carril interno, crecería la corrugación con longitud de onda de 156 mm, mientras que en el hilo alto no crecería. Cuando el vehículo circula tanto a 142 km/h como a 198 km/h, se observa un descenso de la tasa de crecimiento de la corrugación en las longitudes de onda asociadas a la frecuencia de 179 Hz (221 mm y 308 mm, respectivamente), que corresponde a la frecuencia del segundo modo de flexión del eje flexible.

En las Figuras 7.33 y 7.34, se presentan las relaciones entre la amplitud de la profundidad del desgaste y la amplitud de la rugosidad inicial del carril evaluada en bandas de 1/24 de octava para la velocidad de 142 km/h y 198 km/h, respectivamente. Para ambas velocidades del vehículo, se puede observar que cuanto más corta es la longitud de onda de la rugosidad, mayor es la relación entre

la amplitud de la profundidad de desgaste y la amplitud de la rugosidad inicial. Este hecho no implica que la rugosidad de longitud de onda corta crezca, como puede comprobarse en las Figuras 7.31 y 7.32, ya que ello depende de los ángulos de desfase entre las profundidades del desgaste y la rugosidad inicial. Se pueden distinguir algunos picos a la longitud de onda igual a la longitud del vano (600 mm), a longitudes de onda correspondientes a la frecuencia del modo de B-F en la Figuras 7.33 (110 mm) y al modo de B-B en la Figura 7.34 (156 mm) y a una longitud de onda alrededor de 35-40 mm, que puede deberse a la antirresonancia *articulada-articulada* vertical. El amplio pico a aproximadamente 200-250 mm es causado por la primera antirresonancia vertical de la vía, en la que las traviesas vibran independientemente de los carriles y del balasto, actuando como absorbentes dinámicos de vibraciones, cuya frecuencia puede coincidir con alguna frecuencia propia del eje montado.

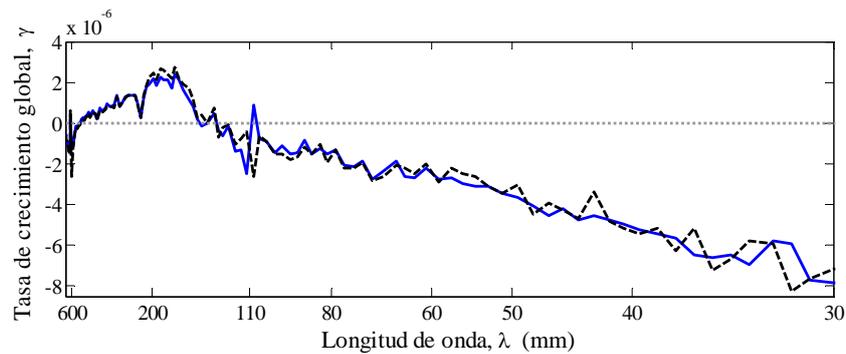


Figura 7.31. Tasa de crecimiento global de la corrugación cuando la velocidad del vehículo es  $V=142$  km/h: —, carril interno; ----, carril externo.

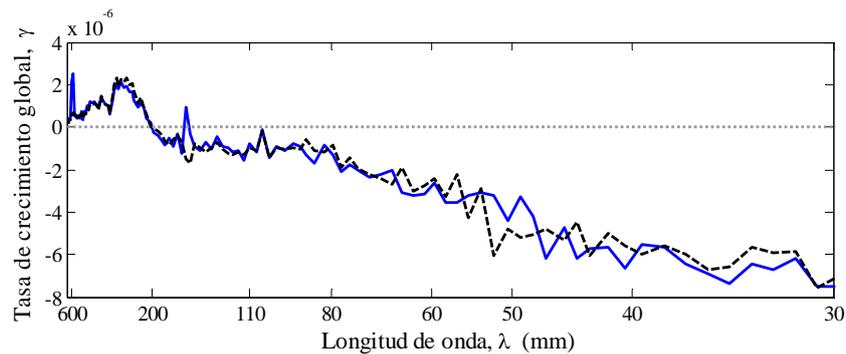


Figura 7.32. Tasa de crecimiento global de la corrugación cuando la velocidad del vehículo es  $V=198$  km/h: —, carril interno; ----, carril externo.

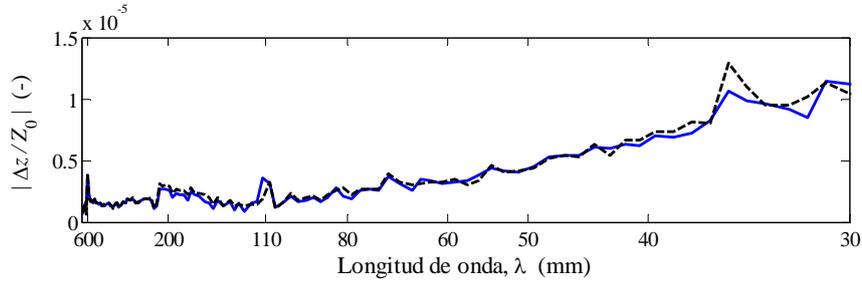


Figura 7.33. Relación entre las amplitudes del desgaste y de la rugosidad inicial cuando la velocidad del vehículo es  $V=142$  km/h: —, carril interno; - - - - -, carril externo.

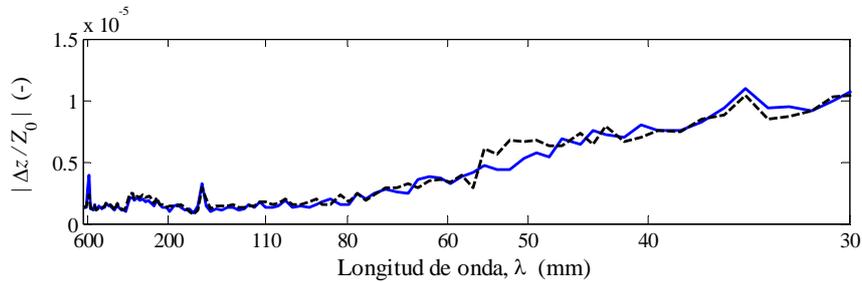


Figura 7.34. Relación entre las amplitudes del desgaste y de la rugosidad inicial cuando la velocidad del vehículo es  $V=198$  km/h: —, carril interno; - - - - -, carril externo.

En la Figura 7.35 se representa la relación entre la amplitud de las fuerzas de contacto rueda-carril y la amplitud de la rugosidad inicial en función de la frecuencia de excitación para las dos velocidades analizadas. Se puede observar en las Figuras 7.35(a) y 7.35(c) que las amplitudes de la fuerza longitudinal y vertical son mayores a medida que se incrementa la frecuencia de excitación. Ilias y Müller presentaron en [84] resultados similares a los obtenidos para la fuerza vertical, con un modelo lineal en el dominio de la frecuencia, que se reproducen en el Capítulo 3 de esta Tesis.

En la Figura 7.35(c), el primer pico aparece a la frecuencia del paso por traviesas (a 65.7 Hz para  $V=142$  km/h y a 91.7 Hz para  $V=198$  km/h). El segundo pico surge aproximadamente a la frecuencia de 250 Hz y puede deberse a la primera antirresonancia vertical de la vía. El tercer pico, más amplio que los anteriores, se debe probablemente a la antirresonancia *articulada-articulada* de la vía, que produce elevadas fuerzas en el contacto rueda-carril por la elevada rigidez de la vía a la frecuencia de dicha antirresonancia (en torno a 1100 Hz). En la Figura 7.35(a), aparte de los que aparecen en la Figura 7.35(c), se pueden distinguir dos picos que tienen lugar a frecuencias ligeramente inferiores a 375 Hz asociados a la excitación de los modos B-F y B-B del eje flexible rotatorio. Los máximos en la relación entre amplitudes de la fuerza lateral y la rugosidad inicial que se observan en la Figura 7.35(b), a excepción de los primeros picos asociados a las frecuencias de paso por

traviesas, de menor magnitud que los observados en la fuerza longitudinal y vertical (Figuras 7.35(a) y 7.35(c)), son debidos en gran medida a la dinámica del eje flexible rotatorio.

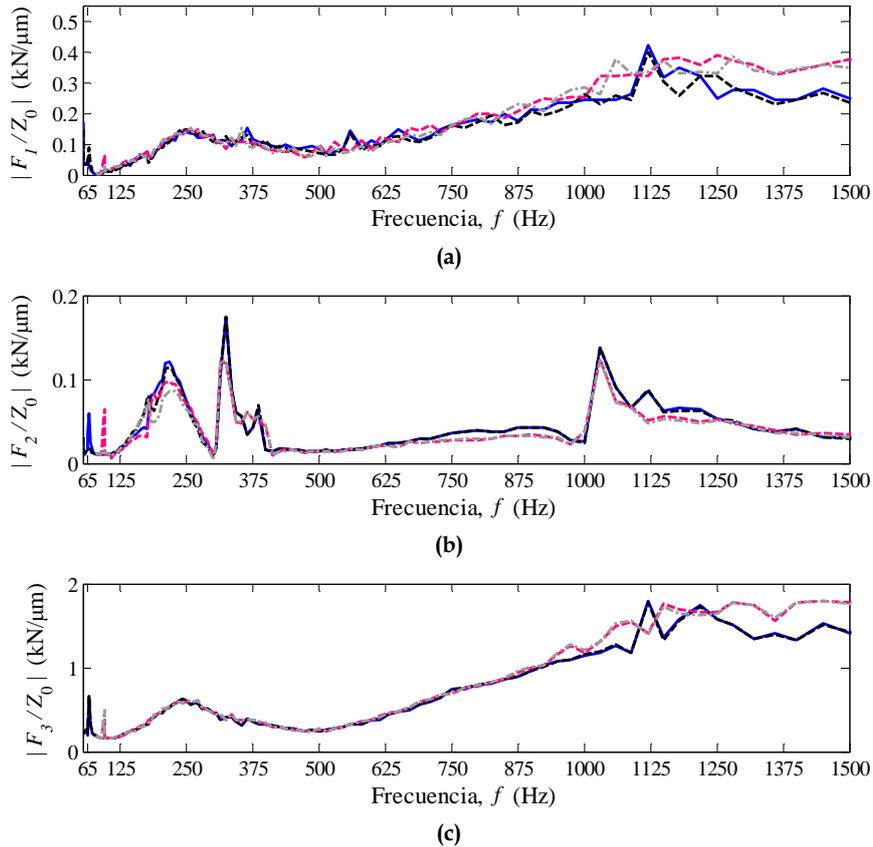


Figura 7.35. Comparación de relaciones entre las amplitudes de las fuerzas de contacto y de la rugosidad inicial:  $V=142$  km/h (—, carril interno; ----, carril externo);  $V=198$  km/h (-.-.-, carril interno; ..... , carril externo). (a) Fuerza longitudinal; (b) Fuerza lateral; (c) Fuerza vertical.

Los anteriores resultados han sido publicados en el artículo [210].

En los siguientes subapartados se analiza la influencia de la flexibilidad y la rotación del eje así como la de la rigidez vertical de la placa de asiento del carril en el desgaste y crecimiento de la corrugación.

### ***I. Análisis de la influencia de las vibraciones del eje en el desgaste y crecimiento de la corrugación***

En este subapartado, se analiza la influencia de la flexibilidad del eje ferroviario en la estimación del crecimiento de la corrugación y el desgaste. Con este fin, se comparan las tasas de crecimiento globales de la corrugación y las relaciones de amplitudes del desgaste y rugosidad inicial, calculadas con los modelos de eje flexible rotatorio y eje rígido. Únicamente se mostrarán los análisis correspondientes a velocidad del vehículo de 142 km/h, por no aportar los resultados asociados a la velocidad de 198 km/h información adicional a la anteriormente presentada.

A partir de las tasas de crecimiento mostradas en la Figura 7.36, se puede concluir que con el eje rígido no se predice crecimiento de la rugosidad en ninguna longitud de onda, para las condiciones simuladas de paso del eje ferroviario por una curva de radio elevado. En cambio, con el modelo de eje flexible rotatorio se estima, como se ha comentado anteriormente, el crecimiento de la amplitud de la rugosidad en los dos carriles en longitudes de onda comprendidas entre 130 mm y 600 mm, y en 110 mm en el carril interno.

En la Figura 7.37, se representa las relaciones de amplitudes de la profundidad del desgaste y la rugosidad inicial calculadas con los dos modelos de eje. Se puede observar que las mayores diferencias entre los resultados obtenidos a partir de los dos modelos se encuentran en las longitudes de onda superiores a 80 mm, o lo que es equivalente, para frecuencias de excitación inferiores a aproximadamente 495 Hz. Es importante recordar que la mayoría de los modos de vibración del eje flexible rotatorio considerado en las simulaciones realizadas en esta Tesis tienen asociadas frecuencias de resonancia inferiores a la anterior frecuencia, lo que explicaría los resultados obtenidos.

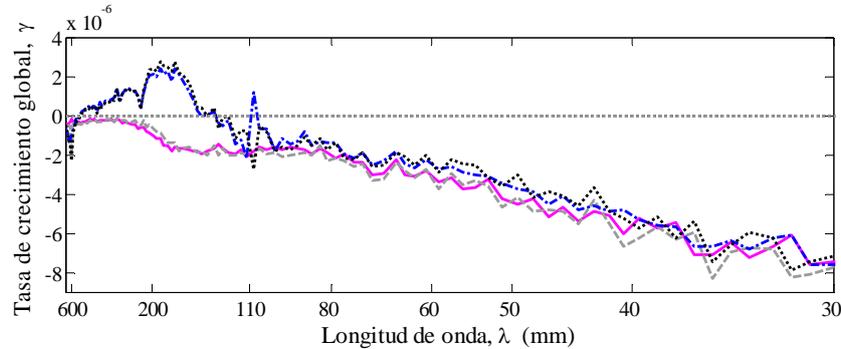


Figura 7.36. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación calculadas mediante el modelo de eje flexible rotatorio (— · — · —, carril interno; ·····, carril externo) y el modelo de eje rígido (—, carril interno; - - - -, carril externo) para  $V=142$  km/h.

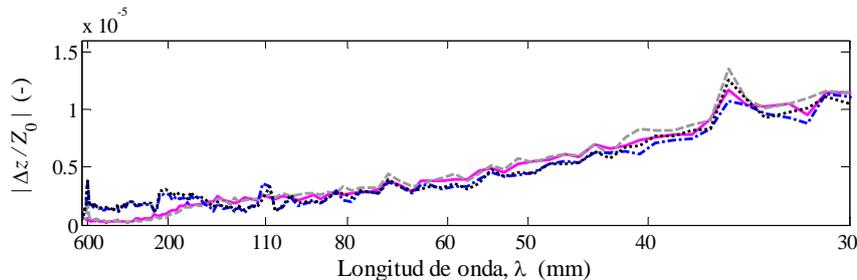


Figura 7.37. Comparación de las relaciones de las amplitudes del desgaste y de la rugosidad inicial, calculadas mediante el modelo de eje flexible rotatorio (— · — · —, carril interno; ·····, carril externo) y el modelo de eje rígido (—, carril interno; - - - -, carril externo) para  $V=142$  km/h.

## II. Influencia de la rotación del eje flexible en la simulación del desgaste y crecimiento de la corrugación

En este subapartado, se pretende analizar la influencia de los efectos giroscópicos asociados a la rotación del eje ferroviario en la estimación del desgaste y la predicción del crecimiento de la corrugación en los carriles. Con este objetivo, se comparan los resultados de dos simulaciones, en una de ellas se ha considerado la rotación del eje (modelo de eje flexible rotatorio) y en la otra no (modelo de eje flexible no rotatorio).

En la Figura 7.38, se comparan las tasas de crecimiento globales de la corrugación calculadas con los dos modelos de eje ferroviario cuando éste se mueve a la velocidad de 142 km/h. Se puede apreciar claramente que la única diferencia entre las tasas de crecimiento obtenidas con los dos modelos se produce en torno a la longitud de onda de 110 mm. Para dicha longitud de onda, con el modelo de eje flexible no rotatorio no se predice crecimiento de la rugosidad en el carril interno de la curva. Por el contrario, con el eje flexible rotatorio, como se ha visto

anteriormente, sí que se predice un incremento de la amplitud de la rugosidad inicial con longitud de onda de 110 mm, pudiéndose desarrollar con el paso de los vehículos corrugación a dicha longitud de onda en el carril interno.

La relación de amplitudes de la profundidad del desgaste y la rugosidad inicial calculada con los dos modelos de eje se representa en la Figura 7.39. De la misma forma que en la Figura 7.38, la única diferencia significativa se observa aproximadamente a la longitud de onda de 110 mm, a la cual aparece un máximo de dicha relación, calculada empleando el modelo de eje flexible rotatorio. Sin embargo, esto no sucede con la relación de amplitudes de la profundidad del desgaste y la rugosidad inicial simulada con el modelo de eje flexible, pero no rotatorio.

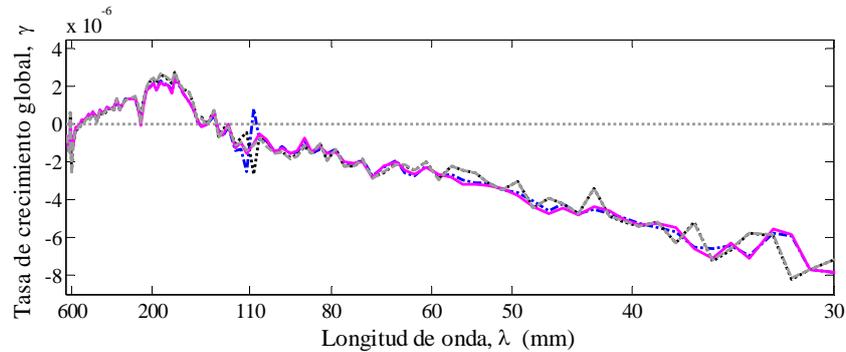


Figura 7.38. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación calculadas mediante el modelo de eje flexible rotatorio (— · — · —, carril interno; ·····, carril externo) y el modelo de eje flexible no rotatorio (—, carril interno; — — —, carril externo) para  $V=142$  km/h.

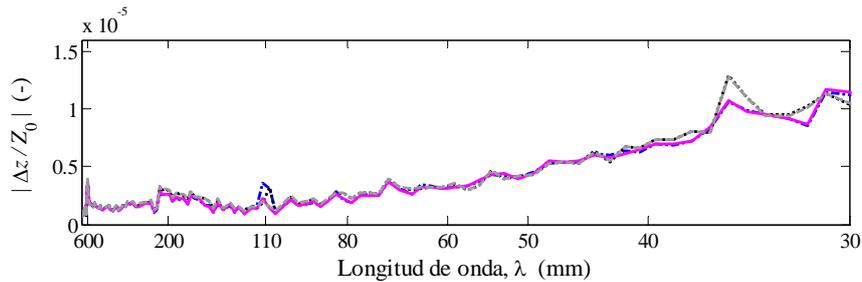


Figura 7.39. Comparación de las relaciones de las amplitudes del desgaste y de la rugosidad inicial, calculadas mediante el modelo de eje flexible rotatorio (— · — · —, carril interno; ·····, carril externo) y el modelo de eje flexible no rotatorio (—, carril interno; — — —, carril externo) para  $V=142$  km/h.

Cuando se realizan las mismas simulaciones con los dos modelos de eje, pero esta vez con la velocidad del eje de 198 km/h, se observan tanto en la Figura 7.40, en la que se comparan las tasas de crecimiento globales de la corrugación, como en la

Figura 7.41, donde se representan conjuntamente las relaciones de amplitudes de la profundidad del desgaste y la rugosidad inicial, las mismas discrepancias en los resultados en la longitud de onda de aproximadamente 156 mm.

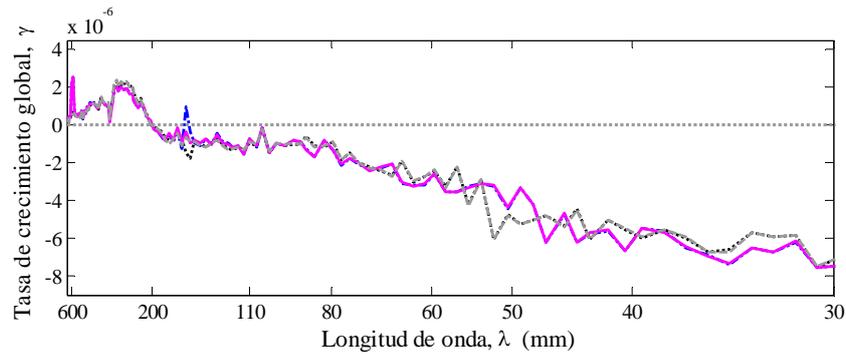


Figura 7.40. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación calculadas mediante el modelo de eje flexible rotatorio (— · — · —, carril interno; ·····, carril externo) y el modelo de eje flexible no rotatorio (—, carril interno; — · — · —, carril externo) para  $V=198$  km/h.

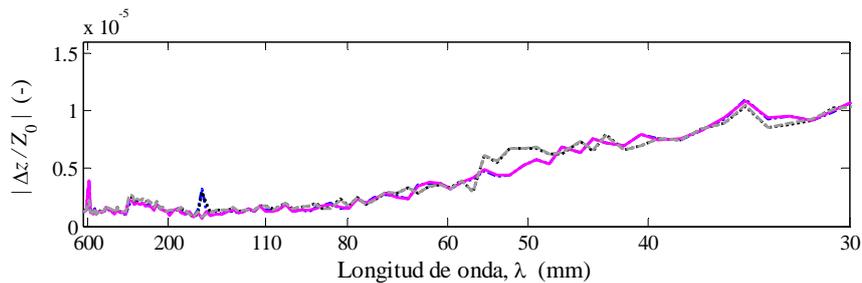


Figura 7.41. Comparación de las relaciones de las amplitudes del desgaste y de la rugosidad inicial, calculadas mediante el modelo de eje flexible rotatorio (— · — · —, carril interno; ·····, carril externo) y el modelo de eje flexible no rotatorio (—, carril interno; — · — · —, carril externo) para  $V=198$  km/h.

Para explicar estos resultados, cabe señalar que el modelo de eje flexible no rotatorio no permite representar la separación de los picos de resonancia asociados a los modos de multiplicidad 2 en dos picos diferentes a medida que crece la velocidad del eje ferroviario. Con esto, en el modelo de eje flexible no rotatorio no existen las coincidencias del modo de rueda *backward* con el tercer modo de flexión *forward* y *backward*, que hemos denominado modos B-F y B-B, respectivamente. Por tanto, los picos que se han observado en las Figuras 7.38 y 7.39 se producen por la excitación de los modos B-F del eje flexible rotatorio, mientras que los detectados en las Figuras 7.40 y 7.41 son debidos a la excitación de los modos B-B.

Con los anteriores resultados se demuestra la importancia de considerar los efectos giroscópicos asociados a la rotación del eje ferroviario en el estudio del crecimiento de la corrugación.

### III. Influencia de la rigidez de la placa de asiento en el desgaste y crecimiento de la corrugación

El presente subapartado tiene como objeto el estudio de la influencia de la rigidez vertical de la placa de asiento del carril en el desgaste y crecimiento de la corrugación en el mismo, cuando se excitan los modos B-F del eje flexible rotatorio a la velocidad de 142 km/h. De los resultados correspondientes a la excitación de los modos B-B a la velocidad de 198 km/h se extraen conclusiones similares a las que se comentan en esta sección para los modos B-F, y por consiguiente no se incluyen aquí.

En la Tabla 7.5 se recogen los valores de las rigideces y amortiguamientos en la dirección vertical de las placas de asiento del carril utilizados en los cálculos que se presentan en este subapartado.

**Tabla 7.5. Rigidez y amortiguamiento de las placas de asiento según la dirección vertical [132].**

Tipo de placa de asiento	Rigidez $k_p$	Amortiguamiento $c_p$
RÍGIDA	1000 MN/m	50 kNs/m
TÍPICA	300 MN/m	30 kNs/m
BLANDA	150 MN/m	20 kNs/m

La Figura 7.42 ilustra el efecto de la rigidez vertical de la placa de asiento del carril en la tasa de crecimiento de la corrugación en el carril interno, mediante la comparación de los resultados obtenidos de las simulaciones con las placas de asiento cuyas propiedades se resumen en la Tabla 7.5. Del análisis de los resultados mostrados en esta figura se desprende que con el empleo de una placa de asiento de rigidez elevada se potencia significativamente el crecimiento de la corrugación a la longitud de onda de 108 mm (tasa de crecimiento  $5 \cdot 10^{-6}$ ) debido a la excitación de los modos B-F del eje, además de a otras longitudes de onda entre 130 y 200 mm. En cambio, se observa que al anterior máximo le precede un mínimo a una longitud de onda de 111 mm, que corresponde a la frecuencia del tercer modo de flexión del eje (357 Hz).

En la Figura 7.43, se comparan las tasas de crecimiento de la corrugación en el carril externo calculadas considerando diferentes rigideces de las placas de asiento del carril. Se puede observar que la rugosidad crece en el carril externo con longitudes de onda comprendidas entre 150 mm y 465 mm para todas las placas de

asiento, exceptuando la longitud de onda de 220 mm, que corresponde a la frecuencia del segundo modo de flexión del eje (179 Hz), en la que se produce un mínimo de la tasa de crecimiento global de la corrugación para todas las placas de asiento, tomando valores negativos en la placa RÍGIDA. La tasa de crecimiento global máxima ( $4.4 \cdot 10^{-6}$ ) ocurre con la placa de asiento RÍGIDA para una longitud de onda de 130 mm. La corrugación de longitud de onda de 110 mm no crece con ninguna de las placas de asiento consideradas, ya que la tasa de crecimiento global toma valores negativos, pero en cambio sí que lo hace con la placa de mayor rigidez para una longitud de onda inferior, aproximadamente 100 mm.

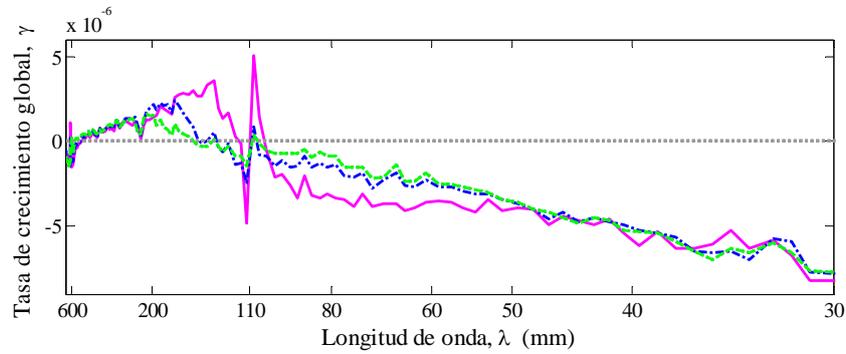


Figura 7.42. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación calculadas para el carril interno con distintas propiedades de las placas de asiento: —, placa RÍGIDA; - - - , placa TÍPICA; - · - · , placa BLANDA.

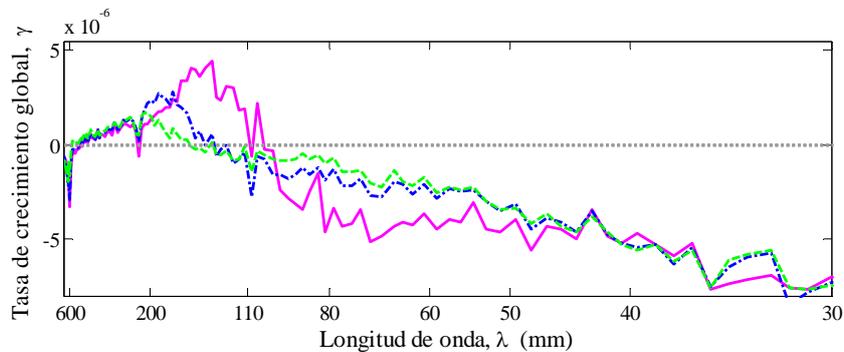
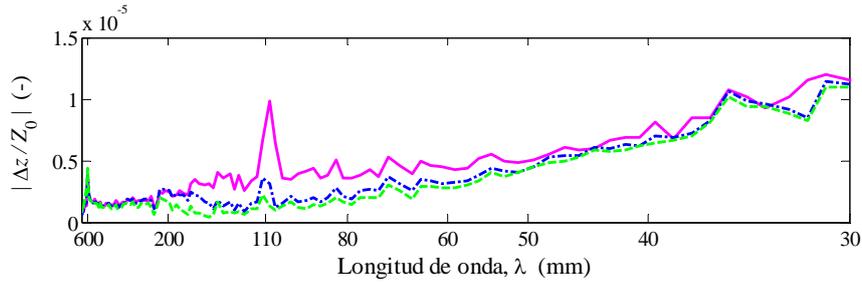


Figura 7.43. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación calculadas para el carril externo con distintas propiedades de las placas de asiento: —, placa RÍGIDA; - - - , placa TÍPICA; - · - · , placa BLANDA.

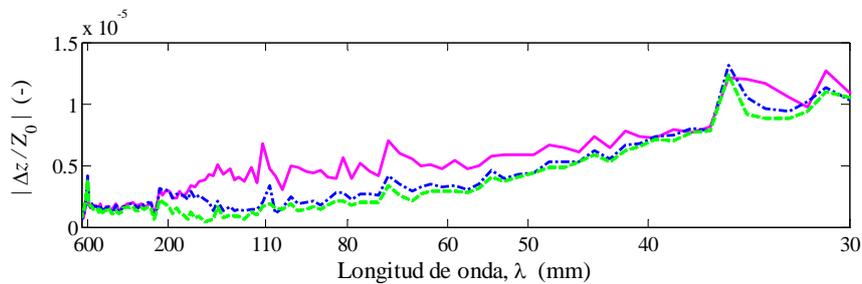
En la Figura 7.44 se representan las relaciones de amplitudes de la profundidad del desgaste y la rugosidad inicial en el carril interno, calculadas con las tres placas de asiento consideradas. Se distingue un máximo de esta relación a la longitud de onda aproximada de 110 mm en el cálculo realizado adoptando placas de asiento de elevada rigidez (placa RÍGIDA). Asimismo, con dicha placa de asiento, la

amplitud del desgaste es superior a la de las otras dos placas de asiento para longitudes de onda entre 45 y 200 mm. Con los otros dos tipos de placa de asiento, también se observa un pico a dicha longitud de onda, pero su magnitud es notablemente inferior.



**Figura 7.44.** Comparación de relaciones de amplitudes de desgaste y rugosidad inicial calculadas con distintas propiedades de las placas de asiento en el carril interno: —, placa RÍGIDA; - - - , placa TÍPICA; - · - · , placa BLANDA.

La Figura 7.45, correspondiente a la comparación de relaciones de amplitudes de la profundidad del desgaste y la rugosidad inicial en el carril externo, muestra máximos de menor magnitud a la longitud de onda de 110 mm, asociada a la excitación de los modos B-F, para las tres placas de asiento consideradas en este estudio.



**Figura 7.45.** Comparación de relaciones de amplitudes de desgaste y rugosidad inicial calculadas con distintas propiedades de las placas de asiento en el carril externo: —, placa RÍGIDA; - - - , placa TÍPICA; - · - · , placa BLANDA.

En la Figura 7.46 se representan las relaciones de las amplitudes de las fuerzas de contacto y la rugosidad inicial, en la que se puede observar el efecto de la rigidez de la placa de asiento en las mismas. En las Figuras 7.46(a) y 7.46(c), se aprecia cómo el incremento de la rigidez de las placas de asiento de los carriles produce un desplazamiento de los máximos de dichas relaciones hacia frecuencias más altas. El notable aumento de la magnitud del pico que aparece en torno a 250 Hz cuando se adoptan placas de asiento de rigidez media (placa TÍPICA) y que se ha desplazado aproximadamente a 375 Hz, empleando placas de rigidez alta (placa RÍGIDA)

puede deberse a la coincidencia en frecuencia de la primera antirresonancia vertical de la vía y la resonancia asociada a los modos B-F del eje. Los dos picos que se observan en la Figura 7.46(b) que incrementan sensiblemente su magnitud con la placa RÍGIDA están asociados a modos de vibración del eje flexible rotatorio.

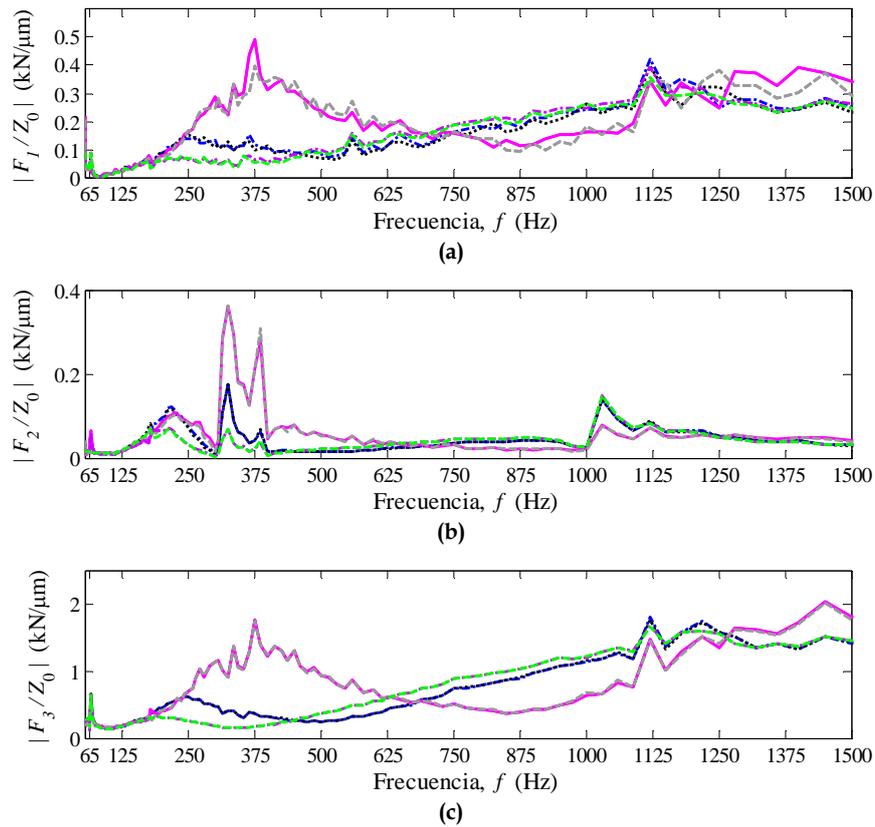


Figura 7.46. Comparación de relaciones de amplitudes de fuerzas en el contacto y rugosidad inicial calculadas con distintas propiedades de las placas de asiento: placa RÍGIDA (—, carril interno; ----, carril externo); placa TÍPICA (---, carril interno; ..... , carril externo); placa BLANDA (·-·-·, carril interno; - - - - , carril externo). (a) Fuerza longitudinal; (b) Fuerza lateral; (c) Fuerza vertical.

#### 7.4 Análisis del efecto de la interacción bogie-vía en el crecimiento de la corrugación en curvas de radio elevado

Iceland estudió la interacción dinámica entre un bogie formado por dos ejes rígidos y la vía [80] en el dominio del tiempo. Comparando el espectro en frecuencia de la fuerza de contacto del eje delantero del bogie con el de un único eje, observó que en el primero aparecían varios picos asociados a resonancias del sistema acoplado bogie-vía, en las que el carril vibra con “nodos” localizados en las ruedas del bogie. Concluyó que la distancia entre los ejes de un mismo bogie (empate de bogie) era un parámetro que tenía una influencia elevada en las fuerzas de contacto rueda-carril y en el desgaste y corrugación de los carriles. También observó que cuando el empate de bogie era múltiplo de la distancia entre traviesas, el pico asociado a una resonancia del sistema bogie-vía coincidía con la resonancia *articulada-articulada* de la vía.

En el trabajo anterior se utilizaron modelos simplificados que pueden afectar la estimación del desgaste y el crecimiento de la corrugación en carriles, como un modelo de contacto herciano y estacionario (muelle herciano no lineal y modelo de Shen *et al.* [176]), junto con un modelo de desgaste global con el que se estima la profundidad del desgaste global en el área de contacto y se asigna al punto teórico de contacto rueda-carril. Por otra parte, los efectos no estacionarios en el contacto rueda-carril, el desplazamiento longitudinal del área de contacto y la posición del máximo desgaste en la parte posterior del área de contacto son fenómenos no lineales que no fueron considerados en dicho estudio y que pueden influir en la predicción del crecimiento de la corrugación.

Posteriormente, Wu y Thompson [224] estudiaron la influencia de la interacción de varias ruedas con la vía en el crecimiento de la corrugación mediante un modelo en el dominio de la frecuencia. Observaron que la rigidez de la placa de asiento del carril afectaba tanto a las fuerzas en el contacto como al desgaste. En el espectro de las fuerzas de contacto, los picos asociados a reflexiones de ondas de los carriles en las ruedas aparecían a frecuencias inferiores en el caso que la placa de asiento era blanda y con mayor amplitud, en comparación con el caso de placas más rígidas, en el que el pico más pronunciado era el asociado a la resonancia *articulada-articulada*, mientras que el resto de picos prácticamente desaparecía.

Nuevamente, las limitaciones de los modelos empleados en el anterior trabajo pueden afectar los resultados de crecimiento de la corrugación. En primer lugar, la interacción dinámica vehículo-vía se resolvió en el dominio de la frecuencia, lo que supone asumir que el comportamiento del sistema vehículo-vía es lineal cuando se sabe que existen importantes no linealidades. El desplazamiento longitudinal del

área de contacto tampoco se consideró en dicho estudio, lo cual puede afectar al desfase entre el desgaste y la corrugación inicial y por tanto al crecimiento de la corrugación.

Andersson y Johansson [11] analizaron el crecimiento de la corrugación en vías rectas mediante un modelo de interacción dinámica bogie-vía en el dominio temporal. Comparando los espectros en frecuencia de las fuerzas de contacto y desgaste para diferentes valores del empate del bogie, observaron que se producía un desplazamiento de las frecuencias de los picos asociados a la flexión del carril entre las dos ruedas del bogie. Para empates grandes, las frecuencias de los picos eran inferiores a las correspondientes frecuencias de los picos que aparecían para empates pequeños. En este trabajo, el empleo de un modelo de contacto herciano y estacionario (FASTSIM) puede afectar a la estimación del desgaste y a los análisis del crecimiento de la corrugación, siendo los mismos autores los que señalan la conveniencia de repetir los cálculos realizados con un modelo de contacto no herciano y no estacionario.

En este apartado, se analiza el efecto de la interacción de dos ejes flexibles rotatorios con la vía en el crecimiento de la corrugación (ver Figura 7.47). Se simulan las condiciones de contacto en curva de radio elevado descritas en el apartado 7.3 de este capítulo. Asimismo, para un empate de bogie constante de 2.4 m, se estudia el efecto de la rigidez de la placa de asiento del carril y del valor del pseudodeslizamiento longitudinal medio en el crecimiento de la corrugación.

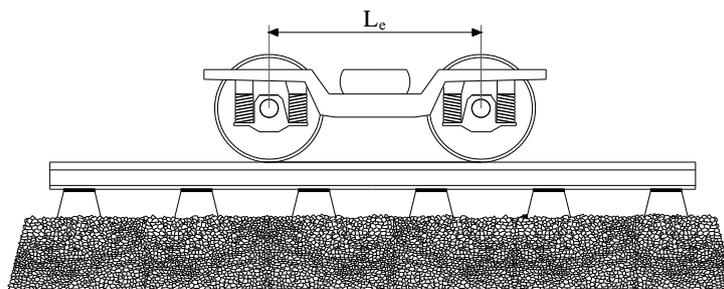


Figura 7.47. Interacción bogie-vía y empate de bogie.

En primer lugar, se comparan los resultados considerando un único eje flexible rotatorio con los obtenidos de la interacción de dos ejes flexibles rotatorios con la vía. En estos cálculos, se han modelado placas de asiento BLANDAS, cuya rigidez y amortiguamiento en la dirección vertical se indican en la Tabla 7.5. La interacción del vehículo sobre la vía con placas de asiento rígidas no produce diferencias importantes en los resultados obtenidos considerando dos ejes y un único eje. Se

muestran sólo los resultados correspondientes al eje delantero del bogie, ya que éste ejerce una mayor influencia en el desarrollo de la corrugación [3].

Las fuerzas en el contacto se comparan en la Figura 7.48, en la que se pueden apreciar claramente que en los espectros de las fuerzas calculadas con el modelo de vehículo formado por dos ejes flexibles rotatorios aparecen varios picos que no se observan utilizando un único eje. Estos picos están asociados a resonancias del tramo de carril comprendido entre dos ruedas de ejes distintos de un mismo bogie. En la fuerza normal, se observan 3 picos en los que los modos de flexión del tramo del carril entre dos ruedas son: 2 medias longitudes de onda (en torno a 500-550 Hz), 3 medias longitudes de onda (aproximadamente 750-800 Hz) y 4 medias longitudes de onda (en torno a 1080 Hz). Por otra parte, el empuje de bogie de 2.4 m es múltiplo de la distancia entre traviesas, de 0.6 m, con lo que el pico de mayor frecuencia que se observa, tiene lugar a la frecuencia *articulada-articulada* de la vía. Este pico también aparece en el espectro obtenido con un único eje, pero con una amplitud inferior.

El espectro de la fuerza longitudinal presenta muchas similitudes con el de la fuerza normal, excepto en las proximidades de los picos mencionados anteriormente, en los que las magnitudes de la fuerza longitudinal son mayores en el carril exterior. En el espectro de la fuerza lateral también se puede observar que las discrepancias entre las magnitudes de las fuerzas calculadas con los dos modelos de vehículo se deben a la excitación de frecuencias del sistema acoplado bogie-vía. Además, la casi coincidencia de la frecuencia asociada al tercer modo de paraguas del eje flexible rotatorio considerado (1017 Hz) con la correspondiente a la deformada *articulada-articulada* de la vía (aproximadamente 1080 Hz) conduce a una mayor magnitud de la fuerza lateral en la banda de 1 kHz, cuando se calcula con el modelo de bogie (en comparación con la obtenida con un solo eje).

En la Figura 7.49, se muestran los espectros de profundidades de desgaste en el carril. Mientras que para longitudes de onda de la rugosidad inicial superiores a 80 mm apenas se aprecian diferencias entre considerar un único eje o dos ejes, para longitudes de onda inferiores a ese valor (o frecuencias superiores aproximadamente a 500 Hz) la magnitud del desgaste estimado considerando la interacción de dos ejes es superior, especialmente en las longitudes de onda asociadas a las frecuencias del sistema bogie-vía. Sin embargo, aunque la relación entre la amplitud del desgaste y la rugosidad inicial sea elevada a estas frecuencias, no implica necesariamente que se incremente la amplitud de la rugosidad inicial, ya que como se ha comentado anteriormente, depende del desfase entre el desgaste y la rugosidad.

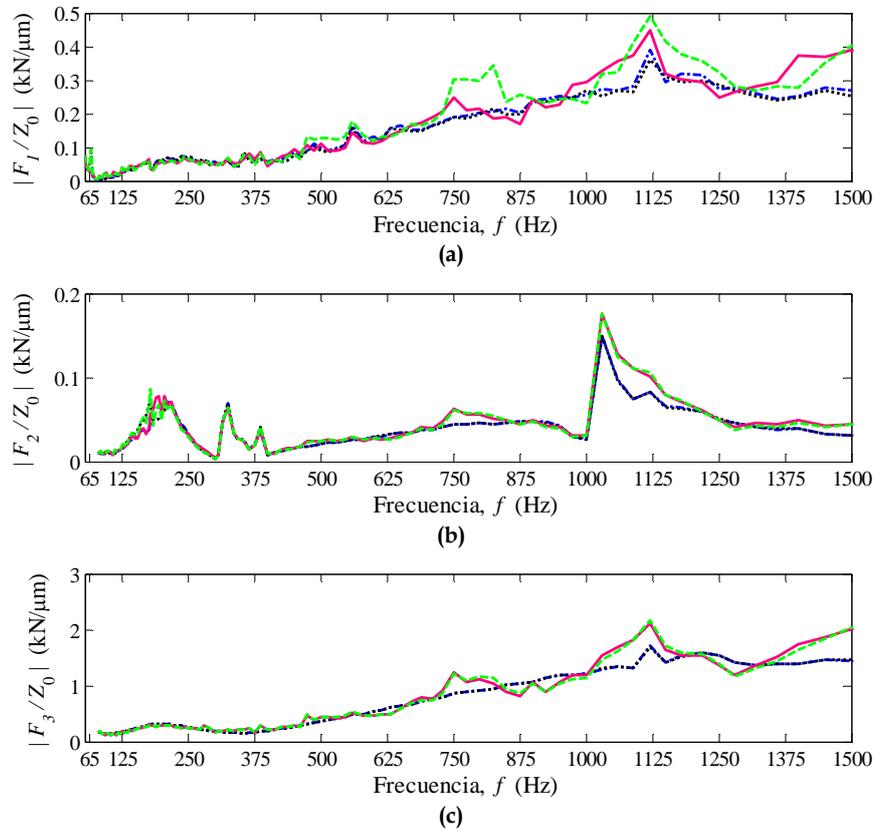


Figura 7.48. Comparación de fuerzas en el contacto: ---, carril interno modelo 1 EJE; ..... , carril externo modelo 1 EJE; —, carril interno modelo 2 EJES; - - - - , carril externo modelo 2 EJES. (a) Fuerza longitudinal; (b) Fuerza lateral; (c) Fuerza vertical.

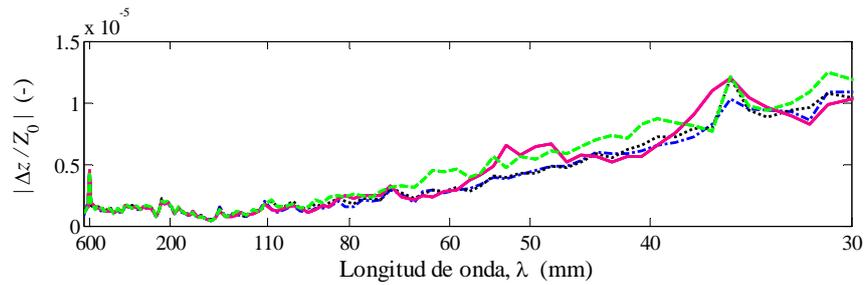
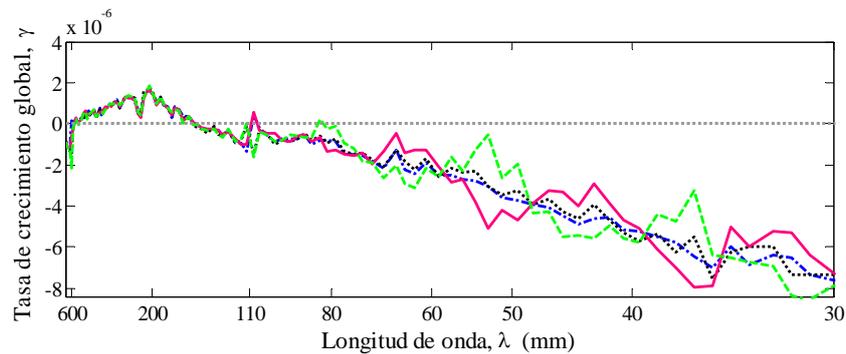


Figura 7.49. Comparación de profundidades de desgaste: ---, carril interno modelo 1 EJE; ..... , carril externo modelo 1 EJE; —, carril interno modelo 2 EJES; - - - - , carril externo modelo 2 EJES.

En la Figura 7.50 se comparan las tasas de crecimiento globales de la corrugación calculadas considerando el vehículo ferroviario reducido a un único eje flexible rotatorio y considerando éste constituido por un bogie con dos ejes flexibles rotatorios. Como se ha comentado anteriormente en relación al espectro de la

profundidad del desgaste, para longitudes de onda inferiores a 80 mm aproximadamente, apenas existen diferencias en la tasa de crecimiento de la corrugación obtenida con los dos modelos de vehículo.

Con ambos modelos se predice el crecimiento de una forma irregular de desgaste (no ondulatoria) en un rango de longitudes de onda entre 150 mm y 600 mm. Se estima el crecimiento de la corrugación con una longitud de onda de 110 mm únicamente en el carril interno, mientras que no se predice crecimiento de la corrugación para longitudes de onda inferiores a este valor con ninguno de los modelos de vehículo empleados. Sin embargo, en el caso del modelo de bogie, para longitudes de onda de aproximadamente 80 mm, 53 mm y 36 mm, la tasa de crecimiento de la corrugación en el carril externo es superior a la del interno, mientras que para las longitudes de onda de 65 mm, 43 mm y 32 mm sucede lo contrario. Este resultado nos indica, por una parte, la influencia de la interacción de los dos ejes de un bogie, fundamentalmente en rangos de frecuencias superiores a 500 Hz, y por otra parte, el efecto del signo del pseudodeslizamiento en la tasa de crecimiento de la corrugación y el efecto combinado de ambos.



**Figura 7.50. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación calculadas empleando 1 eje flexible rotatorio y 2 ejes flexibles rotatorios y placas de asiento blandas:**  
 - - - - - , carril interno modelo 1 EJE; ..... , carril externo modelo 1 EJE; ——— , carril interno modelo 2 EJES; - · - · - , carril externo modelo 2 EJES.

A continuación, el efecto de la rigidez de la placa de asiento del carril en las fuerzas de contacto, y en el desgaste y crecimiento de la corrugación se muestra en las siguientes figuras, en las que se comparan los resultados obtenidos empleando placa de asiento RÍGIDA, placa BLANDA y placa MUY BLANDA (según Tabla 7.6). Para mayor claridad de las gráficas, no se han incluido los resultados correspondientes a la placa de asiento de rigidez típica, ya que no aporta información adicional relevante.

**Tabla 7.6. Rigidez y amortiguamiento de las placas de asiento según la dirección vertical.**

Tipo de placa de asiento	Rigidez $k_p$	Amortiguamiento $c_p$
MUY BLANDA	75 MN/m	10 kNs/m

En la Figura 7.51 se comparan las fuerzas de contacto rueda-carril obtenidas con el modelo de bogie y las tres placas de asiento del carril mencionadas anteriormente. Tanto en el espectro de la fuerza normal como en el de la fuerza longitudinal, se puede apreciar claramente el efecto de la rigidez de la placa de asiento en los picos asociados a resonancias del sistema acoplado bogie-vía. Como se puede observar, el efecto de la interacción de dos ejes con la vía es más pronunciado a medida que se reduce la rigidez de la placa de asiento, de tal forma que con la placa de asiento MUY BLANDA, la magnitud de los picos asociados a resonancias del sistema acoplado bogie-vía es notablemente mayor que cuando se considera la placa de asiento RÍGIDA (con la que dichos picos no aparecen). Lo anterior nos indica que el efecto de la interacción de dos ejes con la vía es despreciable si la rigidez de la placa de asiento es elevada.

Otro efecto de la rigidez de la placa de asiento es que ocasiona un desplazamiento de los anteriores picos hacia frecuencias inferiores conforme disminuye su valor, lo que también se puede apreciar en la Figura 7.51. Este efecto también fue advertido por Andersson y Johansson en [11].

En las Figuras 7.52 y 7.53 se representan los espectros de las profundidades del desgaste obtenidas con las distintas placas de asiento consideradas en el carril interno y externo a la curva, respectivamente. En la Figura 7.52, se puede observar un pronunciado máximo del desgaste a la longitud de onda de 110 mm en el caso de la placa de asiento RÍGIDA, debido a la coincidencia de la frecuencia correspondiente a los modos B-F del eje flexible rotatorio con la frecuencia de la primera antirresonancia vertical de la vía. Le precede un pico de menor magnitud a la longitud de onda igual a la distancia entre traviesas, asociado a la excitación paramétrica del sistema.

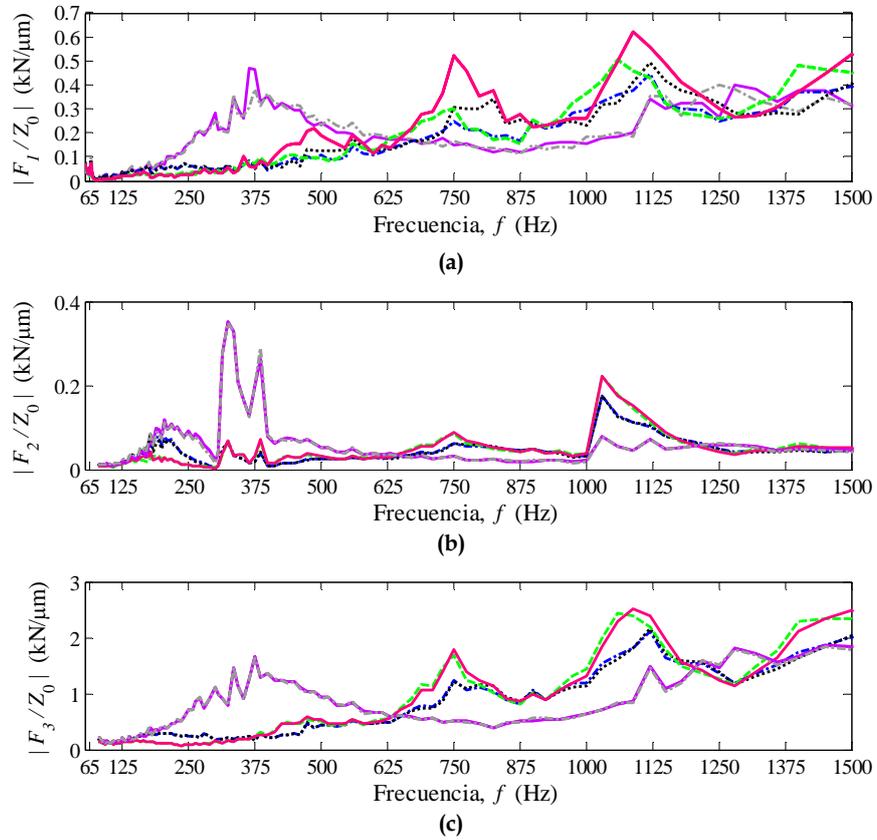


Figura 7.51. Comparación de fuerzas en el contacto. Carril interno: —, placa RÍGIDA; - - - - , placa BLANDA; - - - - , placa MUY BLANDA. Carril externo: - - - - , placa RÍGIDA; ..... , placa BLANDA; —, placa MUY BLANDA. (a) Fuerza longitudinal; (b) Fuerza lateral; (c) Fuerza vertical.

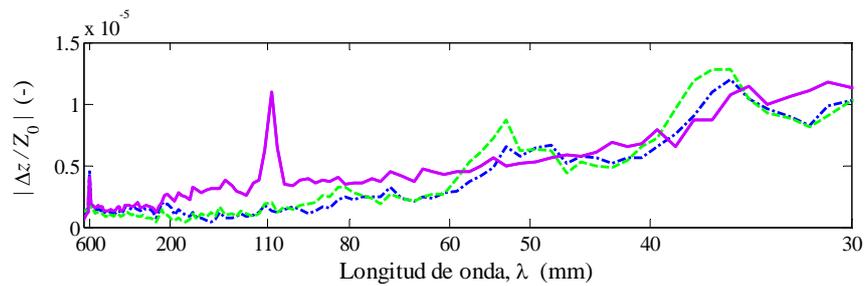


Figura 7.52. Comparación de profundidad del desgaste en el carril interno: —, placa RÍGIDA; - - - - , placa BLANDA; - - - - , placa MUY BLANDA.

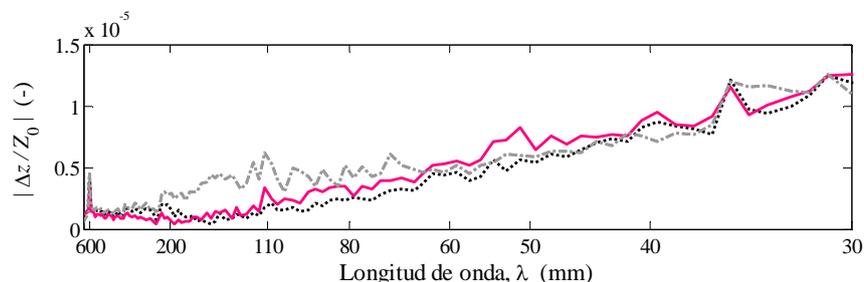


Figura 7.53. Comparación de profundidades de desgaste en el carril externo: -----, placa RÍGIDA; ..... , placa BLANDA; —, placa MUY BLANDA.

En las Figuras 7.54 y 7.55 se comparan las tasas de crecimiento globales de la corrugación del carril interno y externo, respectivamente, para varias rigideces de la placa de asiento del carril. Se puede distinguir en la Figura 7.54, un pico de magnitud  $6 \cdot 10^{-6}$  a aproximadamente 110 mm de longitud de onda, asociado a la placa de asiento RÍGIDA. Asimismo, para esta placa de asiento, se puede observar un crecimiento de la rugosidad de longitud de onda entre 120 y 200 mm significativamente superior al que se produce con las placas de asiento de menor rigidez. Con ningún tipo de placa de asiento se predice crecimiento de la rugosidad de longitud de onda inferior a 100 mm en el carril interno.

Sin embargo, en la Figura 7.55 se puede observar que cuando se emplea la placa de asiento MUY BLANDA, la tasa de crecimiento de la corrugación toma valores positivos en las longitudes de onda comprendidas entre 80 y 90 mm y en torno a 55 mm, debido a las resonancias del sistema acoplado bogie-vía, y se reduce en el rango entre 100 y 200 mm si se compara con los valores de la tasa de crecimiento correspondiente a la placa de asiento RÍGIDA. Este resultado es acorde con las observaciones que se han realizado de corrugación de longitud de onda corta en el carril exterior en curvas de radio elevado y en vías rectas [64, 69].

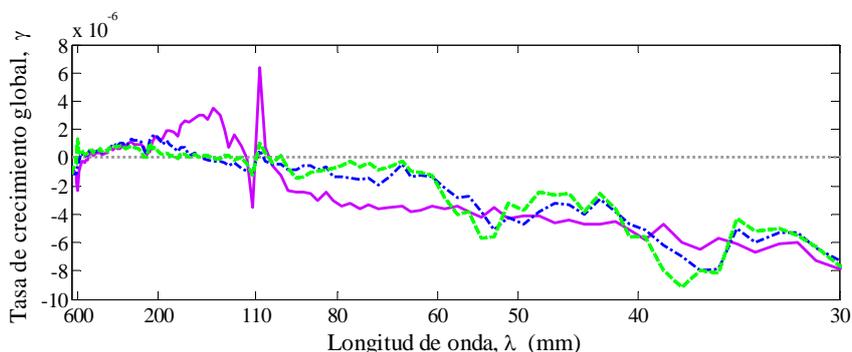


Figura 7.54. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación en el carril interno: —, placa RÍGIDA; ..... , placa BLANDA; ..... , placa MUY BLANDA.

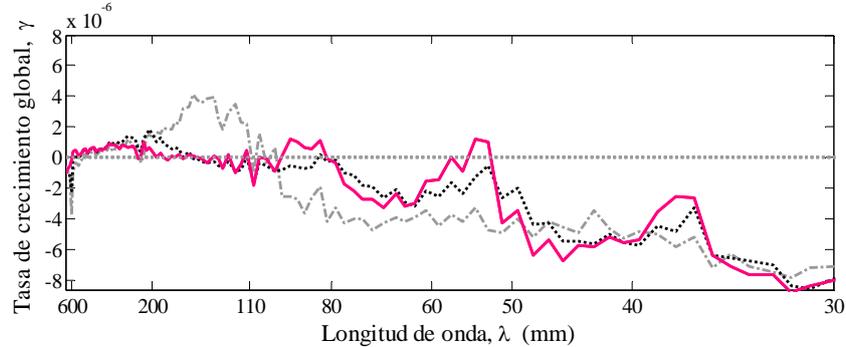


Figura 7.55. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación en el carril externo: - - - - -, placa RÍGIDA; ······, placa BLANDA; —, placa MUY BLANDA.

Como se puede observar en la Figura 7.56, si el pseudodeslizamiento longitudinal medio se reduce a la mitad del considerado en las simulaciones anteriores, es decir a 0.001, en el carril interno únicamente crece la rugosidad de longitud de onda inferior a 80 mm cuando se emplean placas de asiento del carril de rigidez muy baja (placa MUY BLANDA). Para la placa de asiento de mayor rigidez, se produce crecimiento de la corrugación para la longitud de onda próxima a 110 mm, pero la correspondiente tasa de crecimiento de la corrugación también se reduce a la mitad si se compara con la mostrada en la Figura 7.54.

El efecto combinado de la baja rigidez de la placa de asiento del carril y de un valor del pseudodeslizamiento longitudinal medio de -0.001 ocasiona en el carril externo de la curva el crecimiento de la corrugación en longitudes de onda en torno a 53 mm y 35 mm para la velocidad de circulación del eje de 142 km/h, como se muestra en la Figura 7.57, debido a la excitación de frecuencias asociadas al sistema bogie-vía.

Como se ha comentado anteriormente, las inspecciones visuales que se han realizado de corrugación de longitud de onda corta (corrugación tipo *roaring rails*) en el carril exterior en curvas de radio elevado y en vías rectas respaldan los resultados anteriores [64, 69]. Con esto, se puede concluir que el efecto combinado de la baja rigidez de las placas de asiento de los carriles, el reducido pseudodeslizamiento longitudinal medio negativo correspondiente a la fuerza longitudinal de tracción y la dinámica acoplada bogie-vía pueden explicar la formación de corrugación de longitud de onda corta en vía recta y en el carril externo en vía curva.

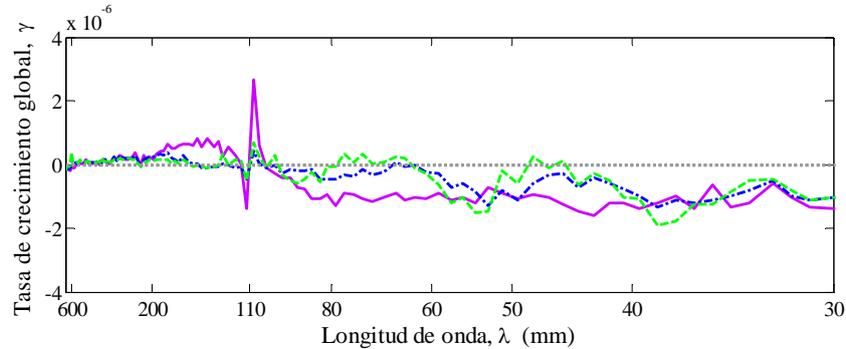


Figura 7.56. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación en el carril interno: —, placa RÍGIDA; - - - - , placa BLANDA; - - - - , placa MUY BLANDA.

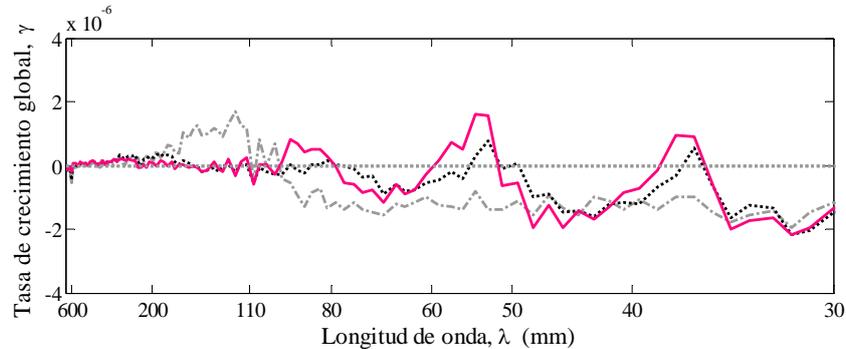


Figura 7.57. Comparación de tasas de crecimiento globales de la corrugación en el carril externo: - - - - , placa RÍGIDA; - - - - , placa BLANDA; —, placa MUY BLANDA.

## 7.5 Influencia de la presencia de un *squat* en la superficie de rodadura de los carriles en la formación de corrugación

Los defectos presentes en las superficies de rodadura de los carriles pueden actuar como desencadenantes del inicio de la corrugación debido a la excitación del sistema acoplado vehículo-vía que inducen.

En este apartado se investigan los efectos que produce la excitación del sistema vehículo-vía por la presencia de un tipo de defecto discreto, un *squat* (ver Capítulo 2), en la superficie de rodadura del carril en la formación de corrugación. Los datos de la vía y del eje montado empleados en las simulaciones que se muestran en este apartado se resumen en las Tablas 7.1 y 7.2, respectivamente. Sin embargo, estos cálculos se realizan considerando placas de asiento de los carriles rígidas, cuyas características se indican en la Tabla 7.5.

El perfil vertical de un *squat* de clase B, en su etapa intermedia de formación, presenta la típica forma en W. En este análisis se considera un perfil ideal en W para representar el *squat* de longitud 80 mm y profundidad 0.1 mm que se muestra en la Figura 7.58. Dado que, según Li *et al.* [119], el 74% de los *squats* se han detectado en vías rectas en las proximidades de las traviesas, en las simulaciones realizadas en esta Tesis se ha considerado que el *squat* está situado centrado sobre una traviesa, tal como se ilustra en la Figura 7.58.

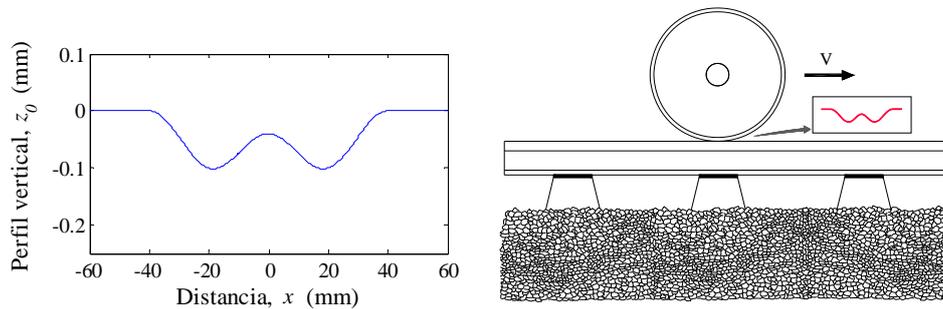


Figura 7.58. Perfil vertical de un *squat* de 80 mm de longitud y profundidad 0.1 mm situado centrado sobre una traviesa.

En la Figura 7.59 se compara la fuerza vertical de contacto resultante de la excitación del sistema vehículo-vía mediante el *squat* definido en la Figura 7.58, calculada mediante el modelo no herciano y no estacionario. Se han considerado dos modelos de eje diferentes: un modelo de eje rígido y el modelo de eje flexible rotatorio, descrito en el Capítulo 6. La velocidad del vehículo a su paso por el *squat* es de 142 km/h.

Se puede observar que la forma en W del perfil del *squat* produce en primer lugar, un mínimo en la fuerza vertical (35.81 kN con el eje flexible y 36.24 kN con el eje rígido) coincidente con el primer valle del *squat*. A continuación, se produce un máximo relativo en la fuerza vertical (123.7 kN con el eje flexible y 120 kN con el eje rígido) cuando la rueda se sitúa sobre el pico del *squat*, seguido de otro mínimo que coincide con el segundo valle del *squat*. La máxima fuerza vertical (181.92 kN con el eje flexible y 183 kN con el eje rígido) resulta del impacto entre la rueda y el carril pocos instantes después de pasar sobre el *squat*. Estas fuerzas máximas suponen unos factores de amplificación dinámica de 1.82 y 1.83 con el eje flexible y el eje rígido, respectivamente. Esta fuerza es la equivalente a la *fuerza P1* producida por un plano de bloqueo de una rueda o por un hundimiento de una junta de vía, de acuerdo con el trabajo de Tunna [198]. A esta fuerza máxima, le sigue otro máximo relativo, que Tunna denomina *fuerza P1<sup>1/2</sup>* y tras un mínimo en la fuerza vertical, otro valor máximo de la fuerza que se conoce como *fuerza P2*.

Tras pasar la rueda por el *squat*, como se puede ver en la Figura 7.59, la excitación ocasionada produce un transitorio en la fuerza vertical que consta de dos partes: en la primera (ver Figura 7.59(a)), de menor duración temporal, la fuerza vertical fluctúa con una longitud de onda en torno a 30 mm (asociada a la resonancia P1 o *articulada-articulada*, o más bien a la correspondiente antirresonancia sobre la traviesa) superpuesta a la longitud de onda asociada a la resonancia P2; mientras que en la segunda (ver Figura 7.59(b)), de mayor duración, la fuerza obtenida con el modelo de eje flexible rotatorio oscila con una longitud de onda aproximadamente igual a 110 mm superpuesta a la longitud de onda de 600 mm, que corresponde a la distancia entre traviesas. En la segunda parte, la fuerza calculada con el eje rígido únicamente fluctúa con la longitud de onda de 600 mm, debido a la excitación paramétrica.

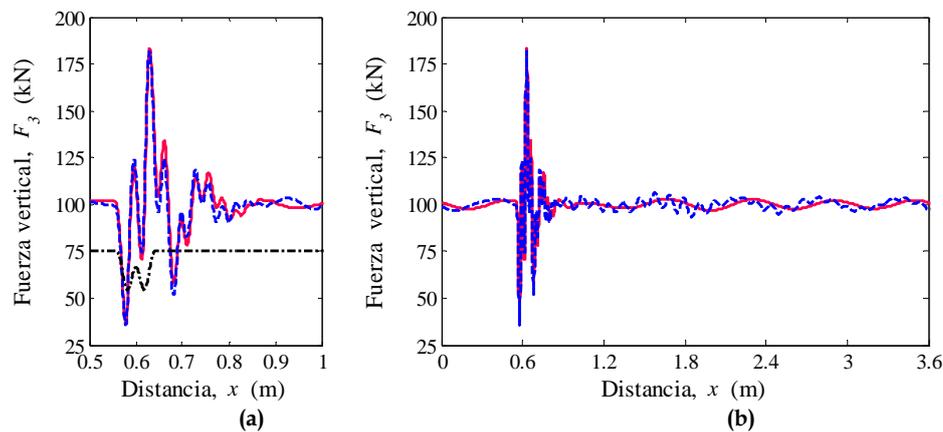


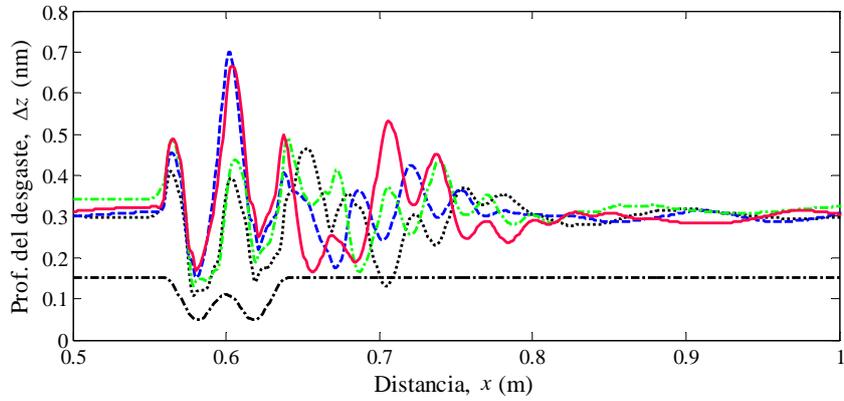
Figura 7.59. Fuerza vertical de impacto producida por un *squat* de 80 mm de longitud y 0.1mm de profundidad, cuando el vehículo circula a 142 km/h: ----, eje flexible rotatorio; —, eje rígido; - - - - - , perfil del *squat* (sin escala). (a) Fuerza en la zona próxima a la excitación; (b) Fuerza a lo largo de 6 vanos

En la Figura 7.60 se muestra la profundidad del desgaste después de un paso de rueda que se produce como consecuencia de la presencia del *squat* en la superficie de rodadura del carril. En la estimación del desgaste asociado a la excitación producida por un *squat*, se han simulado dos condiciones diferentes de circulación del eje montado en vía recta: con un par de frenado (pseudodeslizamiento longitudinal medio  $\xi=0.002$ ) y con un par de tracción (pseudodeslizamiento longitudinal medio  $\xi=-0.002$ ). Se puede observar en la Figura 7.60(a) que la máxima profundidad del desgaste que se predice mediante el modelo de eje flexible rotatorio se produce cuando la rueda está situada sobre el pico del *squat* y es ligeramente superior en el caso que el pseudodeslizamiento longitudinal medio es positivo (par de frenado) 0.7 nm que en el de pseudodeslizamiento medio negativo

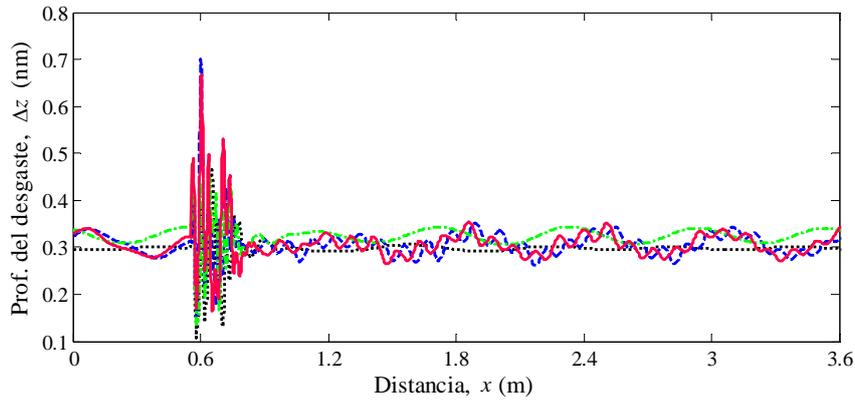
(par de tracción) 0.67 nm. Utilizando el modelo de eje rígido, el desgaste que se predice es inferior, debido a la discrepancia que existe entre las fuerzas tangenciales obtenidas mediante los dos modelos de eje montado, como se ha mostrado en apartados anteriores de este capítulo.

A continuación del *squat* (ver Figura 7.60(a)), la profundidad del desgaste fluctúa en los dos casos con una longitud de onda de aproximadamente 30 mm, lo que tras sucesivos pasos de ruedas podría derivar en un patrón de corrugación de dicha longitud de onda. Este resultado es acorde con las observaciones realizadas por Li *et al.* [120] acerca de que inmediatamente después de un *squat*, en el sentido de circulación de los vehículos, aparece corrugación de longitud de onda comprendida entre 20 y 40 mm en vías por las que circulan trenes a 140 km/h. A partir del segundo vano (ver Figura 7.60(b)), la profundidad del desgaste varía según dos longitudes de onda: por una parte, la longitud de onda igual a la distancia entre traviesas (600 mm) y por otra, una longitud de onda de 110 mm. Esta última longitud de onda no se detecta en la profundidad del desgaste calculada con el modelo de eje rígido, con lo que se deduce que se debe a la excitación de los modos B-F del eje flexible rotatorio y no a la resonancia  $P1 \frac{1}{2}$  de la vía.

En la Figura 7.61, se muestra la fuerza vertical debida a la excitación mediante el *squat* definido en la Figura 7.58, cuando el vehículo circula a 198 km/h. Nuevamente, se pueden observar discrepancias entre la fuerza obtenida mediante el modelo de eje flexible rotatorio y el modelo de eje rígido. Como se puede apreciar en la Figura 7.61(a), la fuerza vertical mínima es 26.47 kN con el eje flexible y 24.35 kN con el eje rígido y coincide con el primer valle del *squat*. La máxima fuerza vertical resultante del impacto de la rueda sobre el carril es 187.3 kN con el eje flexible y 182.6 kN con el eje rígido, lo cual implica factores de amplificación dinámica de 1.87 y 1.83, respectivamente. La fuerza vertical fluctúa según una longitud de onda de aproximadamente 40 mm durante el paso de la rueda por el primer vano a continuación del *squat*. En vanos posteriores (ver Figura 7.61(b)), se observa que la fuerza vertical varía con una longitud de onda de aproximadamente 156 mm debido a la excitación de los modos B-B del eje flexible rotatorio por el impacto de la rueda sobre el carril. Esta variación de la fuerza vertical no aparece en la fuerza vertical calculada con el eje rígido.



(a)



(b)

Figura 7.60. Profundidad del desgaste producido por la excitación asociada a un squat de 80 mm de longitud y 0.1mm de profundidad, cuando el vehículo circula a 142 km/h.  $\xi=0.002$ : ---, eje flexible rotatorio; ..... , eje rígido.  $\xi=-0.002$ : —, eje flexible rotatorio; - - - - , eje rígido. - - - - - , perfil del squat (sin escala). (a) Profundidad del desgaste en las proximidades del squat; (b) Profundidad del desgaste a lo largo de 6 vanos.

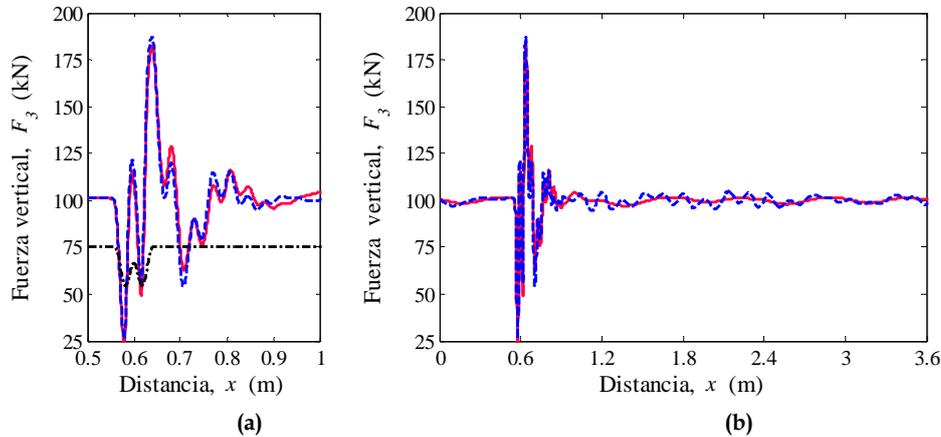
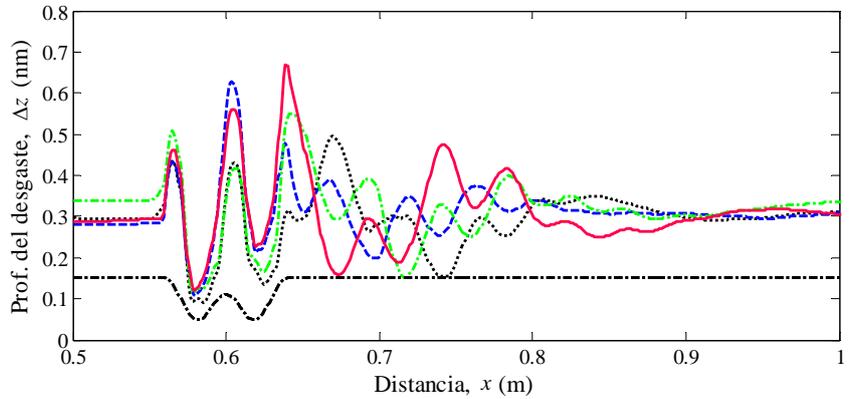
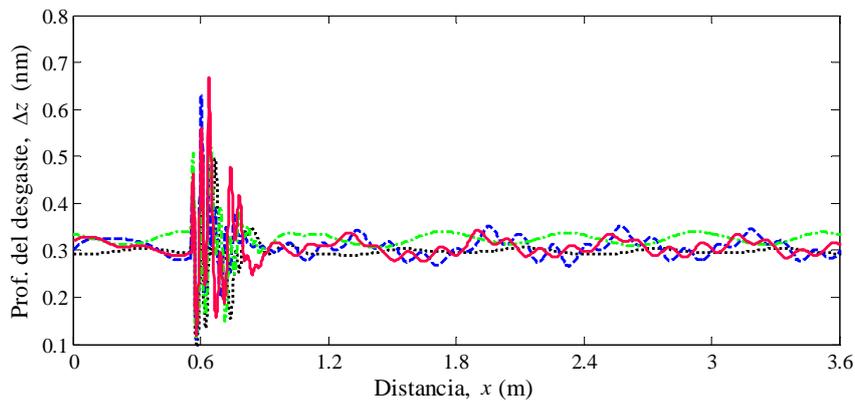


Figura 7.61. Fuerza vertical de impacto producida por un squat de 80 mm de longitud y 0.1mm de profundidad, cuando el vehículo circula a 198 km/h: ---, eje flexible rotatorio; —, eje rígido; - - - - -, perfil del squat (sin escala). (a) Fuerza en la zona próxima a la excitación; (b) Fuerza a lo largo de 6 vanos.

La profundidad del desgaste en la superficie de rodadura del carril se representa en la Figura 7.62. Para la velocidad de 198 km/h, la máxima profundidad del desgaste (0.68 mm) se obtiene, tras pasar la rueda el segundo valle del *squat*, mediante el modelo de eje flexible rotatorio cuando se simula la aplicación sobre éste de un par de tracción, como se puede observar en la Figura 7.62(a). El segundo máximo de la profundidad del desgaste, de 0.64 mm, se localiza sobre el pico del *squat* y se obtiene con el eje flexible rotatorio cuando se simula la aplicación de un par de frenado. Tras el paso por el *squat*, la profundidad del desgaste calculada con los dos modelos de eje varía con una longitud de onda de 40 mm. Después del segundo vano (ver Figura 7.62(b)), la profundidad del desgaste calculada con el eje flexible rotatorio oscila con una longitud de onda aproximada de 156 mm, por la excitación de los modos B-B de éste, superpuesta a la longitud de onda de la excitación paramétrica (600 mm).



(a)



(b)

Figura 7.62. Profundidad del desgaste producido por la excitación asociada a un squat de 80 mm de longitud y 0.1mm de profundidad, cuando el vehículo circula a 198 km/h.  $\xi_5=0.002$ : ---, eje flexible rotatorio; ·····, eje rígido.  $\xi_5=-0.002$ : —, eje flexible rotatorio; -·-·-, eje rígido. - - - - -, perfil del squat (sin escala). (a) Profundidad del desgaste en las proximidades del squat; (b) Profundidad del desgaste a lo largo de 6 vanos.

## 7.6 Conclusiones

En este capítulo, en primer lugar, se ha presentado una herramienta basada en un proceso realimentado destinada a la predicción del crecimiento de la corrugación y rugosidad en la superficie de rodadura del carril. Dicha herramienta consta de un modelo de interacción dinámica vehículo-vía, que implementa un modelo de eje montado (rígido o flexible rotatorio), un modelo de vía cíclica y un modelo de contacto rueda-carril; y un modelo de estimación del desgaste, que comprende un modelo de contacto tridimensional (Hertz/FASTSIM o el modelo no herciano y no estacionario) y el modelo de desgaste de Archard. Aplicando esta herramienta se

obtiene la profundidad del desgaste en la superficie de rodadura del carril, a partir de la cual es posible actualizar el perfil longitudinal y volver a iniciar el proceso.

En el apartado 7.2, se ha estudiado el crecimiento del desgaste ondulatorio en condiciones de rodadura libre del eje montado, esto es, sin aplicar ningún par motor, empleando el modelo de contacto Hertz/FASTSIM, tanto de la simulación dinámica como en la estimación del desgaste. En primer lugar, se ha implementado rugosidad pseudoaleatoria con el fin de excitar el sistema vehículo-vía en el rango de frecuencias comprendido entre 60 Hz y 1100 Hz. Comparando las transformadas de Fourier de las fuerzas en el contacto obtenidas a partir del modelo de eje flexible rotatorio y el modelo de eje rígido, se ha concluido que el tercer modo de flexión del eje montado puede desempeñar un papel importante en el crecimiento de la corrugación, dado que ocasiona mayores fuerzas longitudinales en torno a la frecuencia correspondiente a dicho modo.

En segundo lugar, utilizando el diagrama de Campbell del eje flexible rotatorio, se han identificado dos posibles casos en los que interviene el tercer modo de flexión del eje (multiplicidad 2). Dichos casos corresponden a la coincidencia en frecuencia, por una parte, del modo de rueda *backward* con el tercer modo de flexión *forward* (modos B-F) y por otra, a la coincidencia del modo de rueda *backward* con el tercer modo de flexión *backward* (modos B-B). Con esto, se han realizado dos simulaciones, en primer lugar considerando la excitación de los modos B-F (360.8 Hz) del eje flexible rotatorio mediante una corrugación sinusoidal de longitud de onda 110 mm y la velocidad de circulación del eje de 142 km/h y a continuación, excitando los modos B-B (352.5 Hz) a través de corrugación de 156 mm de longitud de onda y 198 km/h de velocidad de avance del eje. Dichas simulaciones se han realizado también mediante el modelo de eje rígido y se han comparado los resultados obtenidos de ambos modelos, referentes a fuerzas de contacto rueda-carril y de profundidad del desgaste en la superficie de rodadura del carril. Las conclusiones que se pueden extraer son:

- Se ha observado que mientras apenas existen discrepancias en las fuerzas normales calculadas con los dos modelos de eje montado, las fuerzas tangenciales (longitudinales y laterales) obtenidas a partir del modelo de eje flexible rotatorio cuando se excitan los modos B-F y B-B son significativamente superiores a las calculadas con el eje rígido.
- La profundidad del desgaste que resulta de la excitación de los modos B-F es aproximadamente cinco veces mayor que la calculada cuando se excitan los modos B-B. En las dos simulaciones, el desgaste se produce tanto en las crestas como en los valles de la corrugación sinusoidal inicial, siendo la frecuencia del

desgaste el doble de la frecuencia de la corrugación inicial, debido a que los pseudodeslizamientos longitudinal y lateral oscilan alrededor de cero. También se aprecia la influencia de la excitación paramétrica en las profundidades del desgaste obtenidas en las dos simulaciones.

- De la simulación de la evolución del perfil longitudinal del carril después de 100 000 pasos de ruedas, se observa que la excitación de los modos B-F produce un cambio más significativo del mismo que la excitación de los modos B-B. Aunque se localiza el desgaste tanto en las crestas como en los valles de la corrugación inicial, en éstos la profundidad desgastada es mayor, con lo que el perfil tras 100 000 pasos de ruedas presenta la misma longitud de onda que la corrugación inicial, pero su amplitud es mayor y se evidencia la presencia de la longitud de onda asociada a la excitación paramétrica por el paso por traviesas.

En el apartado 7.3, se ha analizado el crecimiento del desgaste ondulatorio en curvas de radio elevado empleando el modelo de contacto no herciano y no estacionario. Con el fin de simular las condiciones existentes en el contacto rueda-carril cuando un eje montado pasa por una curva de radio elevado, se han prescrito valores medios de los pseudodeslizamientos longitudinales (0.2% entre la rueda interna y el carril bajo de la curva y -0.2% entre la rueda externa y el carril alto de la curva).

En primer lugar, se ha investigado la influencia de la excitación de los modos B-F y B-B del eje flexible rotatorio en el crecimiento de la corrugación inicial bajo las condiciones simuladas de paso por curva del eje. Las longitudes de onda de los dos tipos de corrugación sinusoidal considerados para excitar los modos B-F y B-B son 110 mm (a 142 km/h) y 156 mm (a 198 km/h), respectivamente.

A continuación, se ha estudiado el crecimiento de la corrugación y la rugosidad, en el rango de frecuencias de 20 Hz a 1500 Hz, considerando la excitación del sistema vehículo-vía a través de rugosidad pseudoaleatoria según la norma UNE-EN ISO 3095:2005 [201]. A partir del cálculo de la tasa de crecimiento global de la corrugación (obtenida a partir de las amplitudes de los espectros en frecuencia de los perfiles longitudinales final e inicial del carril) se ha analizado el crecimiento de la rugosidad y corrugación. Las principales conclusiones son:

- Se predice crecimiento de la corrugación en el carril interno para las longitudes de onda correspondientes a los modos de B-F y B-B, 110 mm y 156 mm, respectivamente. Sin embargo, para las condiciones de contacto estudiadas, en el carril externo no crece la corrugación a dichas longitudes de onda.

- Con el modelo de contacto no herciano y no estacionario no se predice el crecimiento de la rugosidad inicial de longitudes de onda inferiores a 100 mm en ambos carriles. Estos últimos resultados son acordes a los obtenidos en los trabajos [40, 41, 196, 228], en los que se emplean modelos de contacto no hercianos y no estacionarios para calcular el desgaste y se concluye que la corrugación no crece en la mayoría de los casos estudiados debido a que los máximos del desgaste se localizan cerca de los picos de la corrugación previa. Este hecho se debe a efectos no hercianos, como el *desplazamiento geométrico* del área de contacto, que se ha demostrado que desplaza los máximos del desgaste hacia los picos de la corrugación [82], y a la asimetría de las distribuciones de tensiones normales.

Adicionalmente, se han realizado una serie de análisis con la finalidad de determinar la influencia del modelado de ciertos aspectos del eje montado, como las vibraciones y los efectos giroscópicos asociados a la rotación, y de la rigidez vertical de las placas de asiento de los carriles en el crecimiento de la rugosidad y corrugación en los carriles. Asimismo, se ha analizado el efecto del modelado de la interacción bogie-vía junto con la adopción de diferentes características de las placas de asiento de los carriles en el crecimiento de la rugosidad y corrugación. De estos análisis se puede concluir lo siguiente:

- Se han comparado las tasas de crecimiento de la corrugación calculadas con el modelo de eje flexible rotatorio y el modelo de eje rígido, con el fin de determinar la influencia de la dinámica del eje montado en el crecimiento de la corrugación y rugosidad. A diferencia de los resultados obtenidos empleando el modelo de eje flexible rotatorio, con el modelo de eje rígido no se predice crecimiento de la rugosidad ni de la corrugación para ninguna longitud de onda.
- A partir del estudio de la influencia de la rotación del eje flexible, en el que se han comparado las tasas de crecimiento de la corrugación obtenidas con el modelo de eje flexible rotatorio y el modelo de eje flexible no rotatorio, se ha constatado que el crecimiento de la corrugación de 110 mm de longitud de onda cuando el vehículo circula 142 km/h y de 156 mm, cuando éste avanza a 198 km/h, se debe a la excitación de los modos B-F y B-B del eje flexible rotatorio, respectivamente.
- Se ha analizado la influencia de la rigidez vertical de la placa de asiento del carril en el crecimiento de la corrugación, comparando los resultados de tres tipos de placas (RÍGIDA, TÍPICA y BLANDA). Se ha observado que la placa de asiento RÍGIDA potencia significativamente el crecimiento de la corrugación en

el carril interno, en comparación con los otros tipos de placas, con una longitud de onda de 110 mm por la excitación de los modos B-F del eje, junto con la primera antirresonancia vertical de la vía. Asimismo, se predice un mayor crecimiento de la rugosidad de longitudes de onda entre 130 mm y 200 mm. En el carril externo, la rugosidad crece en un amplio rango de longitudes de onda desde 120 mm hasta 600 mm, siendo máxima la tasa de crecimiento de la corrugación para la longitud de onda 130 mm y no observándose crecimiento de la corrugación a 110 mm por la excitación de los modos B-F del eje. Se concluye que las mayores tasas de crecimiento de la corrugación que se han obtenido con la placa de asiento RÍGIDA en comparación con la TÍPICA y BLANDA se debe a la coincidencia en frecuencia de la primera antirresonancia vertical de la vía, cuya frecuencia aumenta al incrementar la rigidez vertical de la placa de asiento, con la resonancia B-F del eje.

Con el fin de determinar la influencia de la interacción bogie-vía en el crecimiento de la corrugación, se han comparado los resultados de simulaciones empleando el modelo de eje flexible rotatorio y el modelo de bogie, formado por dos ejes flexibles rotatorios separados una distancia de 2.4 m (empate), en las que se ha considerado placas de asiento del carril blandas. Se ha observado que la magnitud del desgaste es mayor en aquellas longitudes de onda asociadas a frecuencias del sistema bogie-vía, sin embargo no se predice crecimiento de la corrugación con longitud de onda inferior a 110 mm en los carriles.

A continuación, con el modelo de bogie se ha analizado el efecto de la rigidez vertical de la placa de asiento, considerando tres tipos (RÍGIDA, BLANDA y MUY BLANDA). Se ha observado que al disminuir la rigidez de la placa de asiento, los picos asociados a resonancias del sistema bogie-vía se desplazan hacia frecuencias inferiores, a la vez que aumentan de magnitud. De este modo, en el carril externo con la placa MUY BLANDA se predice el crecimiento del desgaste ondulatorio con longitudes de onda en torno a 85 mm y 55 mm, mientras que en el carril interno con ninguna de las placas de asiento consideradas se predice el crecimiento de la corrugación con longitudes de onda inferiores a 110 mm.

Seguidamente, se ha analizado el efecto de que en el contacto rueda-carril el pseudodeslizamiento longitudinal medio sea inferior al considerado en el resto de simulaciones. Como consecuencia de prescribir un pseudodeslizamiento longitudinal medio de -0.1%, en el carril externo se predice el crecimiento de la corrugación con longitudes de onda aproximadas de 85 mm, 53 mm y 35 mm, empleando las placas de asiento BLANDA y MUY BLANDA, lo cual concuerda con observaciones de corrugación en el carril externo de curvas de elevado radio [69]. A partir de los resultados obtenidos, se puede resaltar la importancia de

considerar la interacción de los dos ejes de un bogie, especialmente si la rigidez vertical de la placa de asiento no es elevada, en la predicción del crecimiento de la corrugación de longitud de onda corta.

Por último, se ha mostrado cómo la rodadura de un eje flexible rotatorio sobre un defecto de la superficie de rodadura del carril como un *squat* produce la excitación de frecuencias propias de la vía y del eje montado, que ocasionan que la profundidad del desgaste en la superficie de rodadura del carril fluctúe con longitudes de onda asociadas a las mismas. Para las dos velocidades de circulación analizadas, 142 km/h y 198 km/h, se ha observado que tras pasar sobre el *squat*, en primer lugar, la longitud de onda de la profundidad del desgaste es de 30-40 mm, y posteriormente, ésta varía con una longitud de onda de 110 mm (142 km/h) y 156 mm (198 km/h), debido a la excitación de los modos B-F y B-B del eje flexible rotatorio, respectivamente.

# 8

## Conclusiones

Los objetivos principales de la Tesis, referentes al desarrollo de una herramienta de simulación del crecimiento del desgaste ondulatorio en carriles ferroviarios, capaz de considerar los efectos no hercianos y no estacionarios en el contacto rueda-carril se han alcanzado de forma satisfactoria. A continuación, se describen por capítulos las principales conclusiones que se extraen del trabajo desarrollado, y se señalan las principales contribuciones realizadas.

Las conclusiones particulares relacionadas con la revisión de los trabajos basados en las observaciones de campo de la corrugación en carriles y otros defectos que pueden contribuir a su formación (Capítulo 2) son las siguientes:

- La corrugación en carriles ferroviarios se presenta como ondulaciones en la superficie de rodadura de los carriles, de tipología diversa, lo que ha dado lugar a varias clasificaciones, atendiendo a su longitud de onda, lugar de aparición, causas probables, etc. La clasificación que ha sido más aceptada es la debida a Grassie y Kalousek [64], que divide la corrugación en seis tipos: *heavy haul*, *light rail*, *booted sleepers*, *contact fatigue*, *rutting* y *roaring rails*, atendiendo a dos mecanismos involucrados en el proceso de formación. Esta clasificación inicial ha sido modificada por Grassie [69] para explicar otros tipos de corrugación no detectados anteriormente, siendo la nueva clasificación propuesta: *roaring rails*, *rutting*, *heavy haul*, *light rail*, *otra resonancia P2* y *específica del tipo de vía*.
- El proceso de formación y desarrollo de la corrugación en carriles se puede explicar, según Grassie y Kalousek [64], por medio de dos mecanismos: el mecanismo de fijación de la longitud de onda (de frecuencia constante), asociado a la dinámica acoplada del sistema vehículo-vía y responsable de la longitud de onda del defecto; y a través de un mecanismo de daño, como el flujo plástico, la fatiga del contacto de rodadura, la flexión plástica y el desgaste, siendo este último el más frecuente.

- En la actualidad, no existen tratamientos generales que eviten por completo la formación y crecimiento de la corrugación en carriles. A través de trabajos experimentales desarrollados por varios investigadores en vías afectadas por corrugación de diferente tipología y origen, se ha tratado de investigar las causas que producen el defecto y, fundamentalmente, de encontrar soluciones. De este modo, se ha comprobado que el amolado de los carriles retrasa la reaparición del defecto (pero no la impide), mientras que los modificadores de fricción y la lubricación de las pestañas de las ruedas pueden reducir el crecimiento de la corrugación, especialmente en curvas pronunciadas en ambientes secos.
- Las bandas de rodadura de las ruedas de los vehículos ferroviarios también se ven afectadas por ondulaciones de diferentes longitudes de onda: la pérdida de redondez (*OOR*) de las ruedas y la corrugación de longitud de onda corta. Pese a las posibles similitudes con la corrugación de los carriles, las investigaciones existentes indican que el proceso de formación de estos defectos de las ruedas es distinto al de la corrugación en carriles.
- Los defectos presentes en las superficies de rodadura de los carriles (y de las bandas de rodadura de las ruedas), como rugosidad, corrugación, soldaduras defectuosas, juntas de vía hundidas, indentaciones, patinajes y *squats*, inducen fuerzas dinámicas en el contacto que pueden incrementar el deterioro de elementos del sistema, desencadenar el inicio de otros defectos y producir ruido y vibraciones.

En el Capítulo 3 se ha realizado una revisión de cerca de 60 trabajos teóricos sobre la corrugación en carriles, desarrollados a lo largo de las tres últimas décadas. Asimismo, se ha revisado el modelado de la interacción vehículo-vía, el contacto rueda-carril y el desgaste. Las principales conclusiones que se extraen son:

- La mayoría de trabajos teóricos sobre la corrugación en carriles que se encuentran en la bibliografía modelan el proceso de formación y crecimiento de este defecto por medio de un bucle realimentado. Dicho bucle considera, por una parte, un modelo de interacción dinámica vehículo-vía (que incluye un modelo de vehículo, un modelo de vía y un modelo de contacto rueda-carril) y por otra parte, incorpora un modelo de desgaste, que incluye un modelo de contacto para representar las distribuciones de tensiones y de velocidades de deslizamiento y una ley de desgaste, que permite estimar el volumen de material desgastado.
- Los modelos de interacción dinámica vehículo-vía en el rango de medias y altas frecuencias (aproximadamente desde 20 Hz hasta 5 kHz) se clasifican

atendiendo principalmente al modelado del vehículo, al modelado de la vía, al contacto rueda-carril y al método de resolución del sistema de ecuaciones resultante:

- En el rango de frecuencias de interés para el estudio de la corrugación en carriles, las suspensiones del vehículo desacoplan las masas no suspendidas del resto del vehículo, con lo cual, los modelos del vehículo se reducen a modelos del eje ferroviario, en los que se considera la parte proporcional del peso de la caja y del bogie, como una fuerza aplicada sobre el eje. Es habitual también emplear modelos de bogie, compuestos normalmente por un bastidor (modelado como un sólido rígido) y dos ejes, representados como sólidos rígidos o elásticos.
- En la bibliografía se pueden encontrar modelos de vía de longitud finita y modelos de vía infinita. Los primeros presentan un efecto de borde que ocasiona que las ondas generadas se reflejen en los extremos y vuelvan a interactuar con el vehículo, introduciendo errores en la simulación. Para minimizar este efecto se deben adoptar longitudes de vía importantes. Los modelos de vía infinita se dividen en dos grupos: los modelos en el dominio de la frecuencia y los modelos basados en la propagación de ondas en estructuras periódicas. Ambos grupos requieren adoptar hipótesis de linealidad sobre las propiedades mecánicas de la vía.
- Los modelos de contacto rueda-carril se clasifican según la teoría elástica en la que están basados (*Teorías Exactas* o *Teorías Simplificadas*), si consideran los efectos inerciales o no lo hacen (*Teorías Dinámicas* o *Cuasiestáticas*), si consideran el proceso no estacionario en el contacto o no (*Teorías No Estacionarias* o *Teorías Estacionarias*), en función de la dimensión del problema de contacto (*Teorías Tridimensionales* o *Teorías Bidimensionales*). También se puede establecer una clasificación atendiendo a hipótesis utilizadas en la resolución del problema normal y tangencial: si consideran las hipótesis de Hertz o no lo hacen en el problema normal (modelos hercianos y modelos no hercianos) y si adoptan hipótesis de linealidad o no en el cálculo de las fuerzas tangenciales (*Teoría Lineal* o modelos no lineales). Atendiendo a la formulación del problema elástico los modelos de contacto también se pueden dividir en modelos de *Contacto No Conforme* y modelos de *Contacto Conforme*.
- Habitualmente se considera que se satisface la hipótesis de cuasiidentidad elástica, con lo que se puede desacoplar el problema de contacto normal del tangencial. En los modelos de interacción dinámica vehículo-vía es

usual resolver el problema normal por medio de un muelle herciano no lineal (dominio temporal) o lineal (dominio de la frecuencia). No obstante, existe un creciente interés en el desarrollo de modelos de contacto normal no hercianos: modelos avanzados de elementos finitos y métodos aproximados y de bajo coste computacional. Estos últimos se pueden dividir en dos grupos: métodos multihercianos y métodos de interpenetración virtual o ficticia. En lo referente al problema tangencial, en los modelos de interacción dinámica vehículo-vía es habitual implementar modelos estacionarios de bajo coste computacional, como la *Teoría Lineal* de Kalker [99] o el modelo de Shen *et al.* [176] o FASTSIM [103]. Resulta poco habitual la implementación de modelos no hercianos y no estacionarios, como CONTACT [102, 104].

- Los métodos de resolución del sistema de ecuaciones resultante del modelo de interacción vehículo-vía se clasifican en: en el dominio de la frecuencia, asociado a un sistema lineal y a un menor coste computacional; y en el dominio del tiempo (o del espacio), relacionado con el comportamiento no lineal de componentes del sistema vehículo-vía y a un mayor coste computacional.
- Los modelos de desgaste más habituales representan la pérdida de material en las superficies de rodadura de rueda y carril como consecuencia del deslizamiento relativo entre las mismas. Los modelos de desgaste que se emplean con mayor frecuencia para la predicción de la corrugación en carriles son el modelo de desgaste de Archard y el modelo de desgaste proporcional al trabajo de fricción (o energía disipada por fricción). En menor medida, también se emplea el modelo de desgaste  $T\gamma/A$ , derivado del anterior. Los modelos de desgaste se pueden aplicar de forma global, asignando al punto teórico de contacto rueda-carril un valor promedio de desgaste en el área de contacto, o de forma local, calculando distribuciones de velocidad de desgaste o profundidad de desgaste en el área de contacto.
- De la revisión de trabajos teóricos sobre la corrugación en carriles desde los años 80 hasta la actualidad, se puede concluir:
  - Después de más de tres décadas de investigación por medio de modelos matemáticos, y quizás favorecido por la amplia variedad de vehículos ferroviarios, vías y condiciones de circulación en todo el mundo, la corrugación en carriles sigue siendo un problema ferroviario que carece de una explicación completa y definitiva de las causas que lo inician y promueven su crecimiento.

- Resulta difícil establecer paralelismos entre los trabajos sobre corrugación en carriles analizados en el Capítulo 3, más allá del modelado de la vía, el vehículo y el contacto rueda-carril. No obstante, se observa una clara evolución en el tiempo en el desarrollo de modelos de corrugación en carriles: mientras que los primeros modelos eran principalmente modelos lineales (dominio de la frecuencia), los modelos más recientes son mayoritariamente modelos no lineales (dominio del tiempo). Asimismo, se puede constatar una evolución favorable en la complejidad y realismo del modelado de la vía, del vehículo y del contacto rueda-carril.
- Hasta la actualidad se han identificado varias resonancias y antirresonancias del sistema vehículo-vía como las causas más probables (mecanismos de fijación de la longitud de onda) de determinados casos de corrugación estudiados: la resonancia *articulada-articulada* vertical de la vía (y su correspondiente antirresonancia sobre las traviesas); la resonancia P2; la primera antirresonancia vertical de la vía; el segundo modo de torsión del cuerpo del eje ferroviario motorizado; las resonancias del tramo de carril comprendido entre dos ejes ferroviarios de un mismo bogie; y la resonancia *articulada-articulada* lateral de la vía, en combinación con otras resonancias del sistema acoplado vehículo-vía.

En lo referente al desarrollo de modelos de contacto tridimensionales no estacionarios (Capítulo 4), que constituye uno de los capítulos del núcleo principal de la Tesis, se derivan las siguientes conclusiones:

- Se han presentado los fundamentos teóricos del problema de contacto entre la rueda y el carril así como la formulación general de dicho problema. Asimismo, se han presentado las ecuaciones integrales de Boussinesq-Cerruti, que intervienen en el problema elástico del contacto, relacionando las tensiones con los desplazamientos.
- Se ha presentado la formulación de un modelo de contacto tridimensional, herciano y no estacionario [15]. En este modelo, el área de contacto elíptica se discretiza en elementos rectangulares en los que las magnitudes del contacto son constantes. Empleando este modelo, se ha analizado la influencia del proceso no estacionario en las magnitudes del contacto, comparando los resultados obtenidos de este modelo con los resultantes de un modelo estacionario (FASTSIM).
- Se ha presentado e implementado la formulación del problema normal y tangencial de contacto de la Teoría Variacional de Kalker, correspondiente a los algoritmos NORM y TANG del método CONTACT [104]. A diferencia del

método original, en el que el área potencial de contacto (rectangular) se discretiza en elementos rectangulares en los que las tensiones son constantes, en esta Tesis se ha considerado un área potencial de contacto hexagonal, discretizada en elementos triangulares en los que las tensiones varían linealmente. Una de las aportaciones de esta Tesis es la implementación de una metodología de cálculo de los coeficientes de influencia elástica a través de la integración de las ecuaciones de Boussinesq-Cerruti en elementos triangulares con distribuciones de tensiones lineales. Sin embargo, la metodología presentada en comparación con elementos rectangulares en los que se consideran las magnitudes del contacto constantes no supone una mejora de la precisión, al contrario de lo que se esperaba inicialmente, constituyendo este resultado una de las principales contribuciones de esta Tesis. Con este modelo de contacto también se ha estudiado la influencia del proceso no estacionario en las magnitudes del contacto y la influencia de los efectos no hercianos en las mismas. Las principales conclusiones de estos cálculos son:

- Cuando la fuerza normal o el pseudodeslizamiento longitudinal en el contacto rueda-carril fluctúan según longitudes de onda pequeñas (altas frecuencias), el proceso no estacionario que tiene lugar en el contacto es más significativo, produciendo oscilaciones en la fuerza longitudinal de menor amplitud y mayor desfase respecto a la fuerza calculada con el modelo de contacto estacionario FASTSIM.
- Se han estudiado los efectos no hercianos producidos por la rodadura sobre corrugación sinusoidal superficial y profunda, como el desplazamiento longitudinal del área de contacto, la asimetría de las distribuciones de tensiones normales y los cambios de forma del área de contacto. Éstos son más relevantes cuando la relación entre la amplitud y la longitud de onda de la corrugación inicial es elevada (o el factor de superficialidad de la corrugación está en torno a la unidad). Se resalta la importancia de considerar dichos efectos a través de modelos no hercianos cuando se trata de estimar la distribución del desgaste a lo largo de la superficie de rodadura del carril.

En el Capítulo 5 se ha descrito la metodología desarrollada para la estimación del desgaste en la superficie de rodadura de un carril. Por una parte, se ha implementado un modelo de contacto tridimensional (FASTSIM, Modelo herciano no estacionario o Modelo no herciano y no estacionario) y por otra, se incorpora el modelo de desgaste de Archard para calcular la distribución de profundidad (o tasa) del desgaste en el área de contacto. La transferencia de la distribución de desgaste del área de contacto a la superficie de rodadura del carril pasa, en el caso

de FASTSIM y el modelo herciano no estacionario, por realizar previamente una triangulación de Delaunay del área de contacto elíptica a partir del conjunto de puntos centrales de los elementos rectangulares. El cálculo de la profundidad del desgaste en cada uno de los puntos en los que se discretiza la superficie de rodadura de un carril, se ha realizado considerando las sucesivas posiciones del área de contacto, y acumulando la profundidad del desgaste obtenida mediante interpolación lineal a partir de los valores nodales del elemento triangular que contiene dicho punto del carril.

- Se han presentado los resultados relativos a los cálculos de la profundidad del desgaste en el carril, obtenidos a partir del modelo de contacto herciano y no estacionario, comparándolos con los correspondientes al modelo de contacto estacionario FASTSIM. Se han simulado diferentes casos, como la aplicación repentina de una par motor al eje montado y las fluctuaciones de las fuerzas normal y longitudinal al contacto de forma independiente, según diferentes longitudes de onda pequeñas. Las principales conclusiones que se puede derivar de estos cálculos son:
  - Las diferencias entre los resultados de desgaste atribuibles al uso de diferentes modelos de elásticos en el modelo de contacto no estacionario (*Teoría Exacta*) y el empleado en FASTSIM (*Teoría Simplificada*) se cuantifican en torno al 15%.
  - A medida que se reduce la longitud de onda de la variación de la correspondiente fuerza de contacto, mayores son las diferencias relativas a la profundidad del desgaste calculada con el modelo de contacto no estacionario y el modelo estacionario FASTSIM. Estas discrepancias son atribuibles en gran medida al proceso no estacionario que tiene lugar en el contacto en dichas condiciones. Se concluye, por tanto, que el modelo de contacto estacionario FASTSIM no es adecuado para estimar el desgaste en el carril cuando se producen en el contacto rueda-carril fluctuaciones de alta frecuencia.
- Mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario se ha estimado la profundidad del desgaste en el carril, en primer lugar, asumiendo las hipótesis hercianas, con el fin de analizar la influencia del proceso no estacionario en el desgaste de forma independiente de los efectos no hercianos. En segundo lugar, se ha calculado la profundidad del desgaste en el carril como consecuencia del paso de la rueda sobre corrugación sinusoidal de longitud de onda corta. Las conclusiones de estos análisis son las siguientes:

- El desgaste uniforme en la superficie de rodadura del carril es mayor si se incrementa la fuerza normal en el contacto así como el pseudodeslizamiento longitudinal (con coeficiente de rozamiento constante). Las oscilaciones de la fuerza normal o del pseudodeslizamiento longitudinal según longitudes de onda pequeñas se traducen en menores amplitudes del desgaste no uniforme y mayores desfases entre las profundidades del desgaste y las oscilaciones que ocasionan el desgaste. Cuando se prescribe el pseudodeslizamiento alternante puro, la frecuencia de la profundidad del desgaste duplica a la de éste.
- La circulación sobre corrugación sinusoidal de longitud de onda corta ocasiona distribuciones de profundidad del desgaste en la superficie de rodadura del carril, cuyos máximos están desfasados entre 45° y 90° con respecto a las crestas de la corrugación inicial. Lo cual significa que las crestas y los flancos descendentes de la corrugación inicial se desgastarán a una velocidad mayor que los valles de ésta. En dichas condiciones, la corrugación inicial se eliminará con el paso de vehículos o se desplazará en la dirección de la vía, pero no crecerá su amplitud.
- El aumento de la amplitud de la corrugación inicial de forma simultánea a la disminución de su longitud de onda, ocasiona un incremento elevado de la amplitud de la profundidad del desgaste en el carril. Este resultado se debe a los efectos no hercianos (*desplazamiento geométrico*, asimetría de las tensiones normales y cambios en la forma del área de contacto), que son más significativos cuando la relación entre la amplitud y la longitud de onda de la corrugación inicial es elevada (o el *factor de superficialidad* de ésta es bajo).
  - El contacto no herciano parece tener el efecto contrario al del contacto no estacionario sobre la estimación del desgaste en el carril, cuando los parámetros del contacto varían según una longitud de onda pequeña. Por tanto, en la estimación del desgaste y la predicción del crecimiento de la corrugación de longitud de onda corta se deben considerar tanto los efectos no hercianos como el proceso no estacionario en el contacto, implementando un modelo de contacto no herciano y no estacionario.

En el Capítulo 6 se ha descrito el modelado de la interacción dinámica entre el vehículo y la vía para la estimación del desgaste ondulatorio de los carriles en el rango de altas frecuencias.

- La interacción vehículo-vía se resuelve en el dominio del tiempo por medio de un modelo basado en una técnica de subestructuración.

- En el rango de frecuencias de interés para el estudio de la corrugación en carriles, el modelo de vehículo puede reducirse a un modelo de eje montado. El modelo de eje montado que se implementa en el modelo de interacción dinámica entre el vehículo y la vía considera la flexibilidad y los efectos inerciales asociados al giro. Este modelo ha sido desarrollado en el CIIM de la UPV [53, 54, 127, 128]. En este capítulo, se ha resumido la formulación del modelo de eje flexible rotatorio, basada en el uso de coordenadas eulerianas. A continuación, se han mostrado las deformadas correspondientes a los modos de vibración del eje flexible no rotatorio y las receptancias del eje flexible rotatorio y del eje flexible no rotatorio. Finalmente, se ha mostrado el diagrama de Campbell del eje flexible rotatorio empleado en esta Tesis, en el que se representan las frecuencias naturales equivalentes del eje montado en función de la velocidad de circulación de éste. Mediante el diagrama de Campbell es posible identificar aquellos casos en los que, debido a la rotación, coinciden en frecuencia dos modos distintos del eje flexible rotatorio.
- El modelo de vía implementado en esta Tesis es el que se describe en [19]. Se trata de un modelo de vía cíclica, con el que se mitigan los efectos de borde de una vía finita al imponer las mismas condiciones de contorno en los extremos. Una vía cíclica es equivalente una vía infinita sobre la que circulan un número infinito de vehículos idénticos, separados entre sí una distancia dada. De esta forma, gracias a las propiedades de la periodicidad de estructuras, es posible estudiar una vía infinita, analizando un tramo de vía de longitud finita. La principal ventaja que ofrece este tipo de modelado de la vía es que no impone limitaciones en el tiempo total de simulación. En este modelo de vía, los carriles se modelan como vigas de Timoshenko cíclicas y las traviesas, como masas rígidas o como vigas de Timoshenko. Las placas de asiento y el balasto se representan como elementos viscoelásticos.

En el Capítulo 7 se han integrado los modelos descritos en esta Tesis a través de una herramienta de predicción del crecimiento de la corrugación en carriles, basada en un bucle realimentado. Dicha herramienta engloba un modelo de interacción dinámica vehículo-vía, que a su vez consta de un modelo de eje montado (rígido o flexible rotatorio), un modelo de vía cíclica y un modelo de contacto. Los resultados del modelo de interacción vehículo-vía son los datos de entrada del modelo de desgaste, formado por un modelo de contacto tridimensional (Hertz/FASTSIM o el modelo no herciano y no estacionario), el modelo de desgaste de Archard y un procedimiento de transferencia del desgaste del área de contacto al carril. El resultado es la profundidad del desgaste en la

superficie de rodadura del carril, a partir de la cual se actualiza el perfil longitudinal del carril y es posible iniciar nuevamente el bucle.

- Se han llevado a cabo un conjunto de simulaciones encaminadas a la investigación del papel desempeñado por la dinámica del eje montado en la estimación del desgaste y el análisis del crecimiento de la rugosidad o corrugación en la superficie de rodadura del carril.
- En primer lugar, se ha estudiado el crecimiento del desgaste ondulatorio mediante los modelos de contacto Hertz/FASTSIM, simulando la rodadura libre del eje flexible rotatorio.
  - Inicialmente se ha excitado el sistema vehículo-vía a través de rugosidad pseudoaleatoria. De este análisis se ha concluido que el tercer modo de flexión del eje montado (de multiplicidad 2) puede tener una influencia significativa en el desgaste, dado que ocasiona fuerzas longitudinales en el contacto, superiores a las obtenidas con el modelo de eje rígido.
  - Posteriormente, utilizando el diagrama de Campbell se han identificado dos casos correspondientes a dos resonancias distintas del eje flexible rotatorio en las que interviene el tercer modo de flexión: la coincidencia de las frecuencias del modo de rueda *backward* y el tercer modo de flexión *forward* (modos B-F); y la de las frecuencias del modo de rueda *backward* y el tercer modo de flexión *backward* (modos B-B). Implementando corrugación sinusoidal para excitar los modos B-F y B-B del eje flexible rotatorio, se ha analizado las fuerzas en el contacto y la profundidad del desgaste en el carril, comparándolas con los resultados obtenidos con el modelo de eje rígido. Tanto las fuerzas tangenciales (longitudinales y laterales) al contacto, como la profundidad del desgaste calculadas con el modelo de eje flexible rotatorio son significativamente superiores a las obtenidas con el eje rígido en los dos casos. Como consecuencia de la rodadura libre del eje montado (los pseudodeslizamientos son alternantes puros), la frecuencia de las profundidades del desgaste duplica la frecuencia de la corrugación inicial. La frecuencia de paso por traviesas también afecta a las profundidades del desgaste calculadas. Finalmente, se ha simulado la evolución del perfil sinusoidal inicial del carril después de 100 000 pasos de rueda en los dos casos analizados.
- En segundo lugar, se ha analizado el crecimiento del desgaste ondulatorio mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario, simulando el paso de un eje flexible rotatorio a velocidades altas por una curva de radio elevado. Con este fin, se han impuesto diferentes valores medios (con distintos

signos) de pseudodeslizamiento longitudinal en los contactos rueda-carril. Inicialmente se ha implementado corrugación sinusoidal con el fin de excitar los modos B-F y B-B del modelo de eje flexible rotatorio y se han obtenido las fuerzas y profundidades del desgaste. A continuación, se ha implementado rugosidad pseudoaleatoria con un contenido en longitudes de onda amplio. Se han calculado las transformadas discretas de Fourier de fuerzas de contacto, profundidades del desgaste y corrugación inicial, que tras promediarlas en bandas de 1/24 de octava y calcular las correspondientes tasas de crecimiento global de la corrugación, se han utilizado para analizar el crecimiento de la rugosidad en determinadas bandas y la corrugación en longitudes de onda definidas. Se derivan las siguientes conclusiones:

- A partir de la excitación del sistema vehículo-vía tanto a través de corrugación sinusoidal como mediante rugosidad pseudoaleatoria, se llega a la conclusión que la excitación de los modos B-F y los modos B-B del eje flexible rotatorio ocasiona el crecimiento de la corrugación con 110 mm y 156 mm de longitud de onda, respectivamente, en el carril interno a la vía curva. No se predice el crecimiento de la rugosidad (o corrugación) con longitudes de onda inferiores a 100 mm en ninguno de los dos carriles.
- Se ha constatado que modelar la flexibilidad así como los efectos giroscópicos asociados a la rotación del eje montado es muy importante, puesto que el no considerarlos afecta significativamente los cálculos de desgaste en la superficie de rodadura del carril y predicciones del crecimiento de la corrugación.
- Se ha investigado la influencia de la rigidez vertical de la placa de asiento del carril en el crecimiento de la rugosidad y corrugación, así como en las fuerzas del contacto. Se ha observado que la placa de asiento de mayor rigidez magnifica el crecimiento de la corrugación de 110 mm de longitud de onda en el carril interno, debido a la excitación de los modos B-F y la primera antirresonancia vertical de la vía.
- En tercer lugar, se ha investigado el efecto de la interacción bogie-vía en el crecimiento del desgaste ondulatorio, mediante el modelo de contacto no herciano y no estacionario. Se ha considerado el bogie constituido exclusivamente por dos ejes flexibles rotatorios, y se ha simulado su paso por una curva de radio elevado. Asimismo, se ha analizado la influencia de la rigidez vertical de la placa de asiento. Las conclusiones que se extraen de este estudio son:

- Se debe considerar la interacción de dos ejes flexibles rotatorios con la vía cuando se trata de predecir el crecimiento de corrugación de longitud de onda corta, a menos que la placa de asiento del carril tenga un rigidez vertical alta, puesto que se ha observado que el efecto de la interacción de los dos ejes es más evidente cuanto menor es la rigidez de la placa de asiento del carril.
- Con placas de asiento de baja rigidez vertical, cuando se prescriben en el contacto pseudodeslizamientos longitudinales medios pequeños, se predice el crecimiento de la corrugación en el carril externo a la curva, con longitudes de onda en torno a 85 mm, 53 mm y 35 mm.
- Finalmente, se ha mostrado el potencial de un defecto discreto en la superficie de rodadura del carril, un *squat*, como desencadenante de la formación de corrugación de longitud de onda corta. El paso de un eje flexible rotatorio sobre un *squat* ocasiona profundidades del desgaste en la superficie de rodadura del carril (inicialmente lisa) que oscilan, en las proximidades del defecto con longitudes de onda entre 30 mm y 40 mm, debido a la antirresonancia *articulada-articulada* vertical y en vanos más alejados, con longitudes de onda de 110 mm (por la excitación de los modos B-F) y de 156 mm (debido a los modos B-B).

# ANEXO 1

## Ecuaciones de Boussinesq-Cerruti

Se considera una distribución de carga continua sobre la superficie  $S$  de un cuerpo elástico. Sea el sistema de coordenadas  $(O; x, y, z)$  que se muestra en la Figura A1.1, elegido de modo que la superficie  $S$  del cuerpo  $a$  coincida con el plano  $z = 0$  y el sentido positivo del eje  $z$  sea hacia el interior del cuerpo elástico. Las variables  $(x', y')$  hacen referencia a cualquier punto de la superficie del área  $S$  sobre la que se aplican las cargas, mientras que las coordenadas  $(x, y)$  se refieren a cualquier punto de la superficie, situado en el interior del área  $S$  o en el exterior, en el que se obtienen los desplazamientos. Las fuerzas puntuales se modelan haciendo tender a cero el área de la superficie  $S$ , de modo que las fuerzas actúen en el origen del sistema de coordenadas.

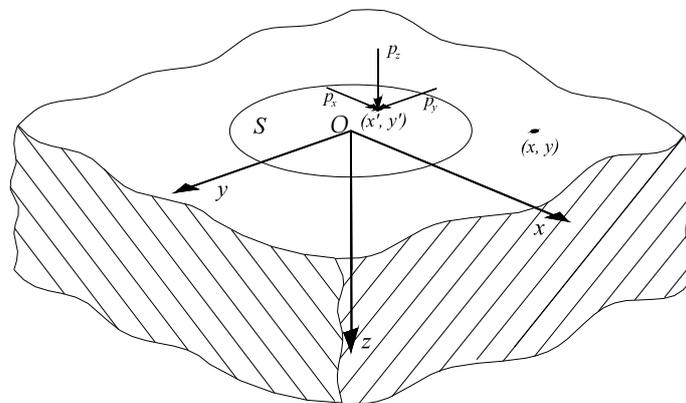


Figura A1.1. Sistema de coordenadas y sentido de aplicación de las cargas en la superficie  $S$ .

Se define en el sistema de referencia  $(O; x, y, z)$  la distancia entre los puntos anteriores como sigue

$$\rho = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + z^2} . \quad (\text{A1.1})$$

### A1.1 Funciones potencial

Johnson [97] define las siguientes funciones potencial, que satisfacen la ecuación de Laplace

$$F_1 = \iint_S p_x(x', y') [z \ln(\rho + z) - \rho] dx' dy', \quad (\text{A1.2})$$

$$G_1 = \iint_S p_y(x', y') [z \ln(\rho + z) - \rho] dx' dy', \quad (\text{A1.3})$$

$$H_1 = \iint_S p_z(x', y') [z \ln(\rho + z) - \rho] dx' dy'. \quad (\text{A1.4})$$

Además, se definen las siguientes funciones potencial, que son las derivadas respecto de  $z$  de las funciones anteriores

$$F = \frac{\partial F_1}{\partial z} = \iint_S p_x(x', y') \ln(\rho + z) dx' dy', \quad (\text{A1.5})$$

$$G = \frac{\partial G_1}{\partial z} = \iint_S p_y(x', y') \ln(\rho + z) dx' dy', \quad (\text{A1.6})$$

$$H = \frac{\partial H_1}{\partial z} = \iint_S p_z(x', y') \ln(\rho + z) dx' dy', \quad (\text{A1.7})$$

$$\Psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial G_1}{\partial y} + \frac{\partial H_1}{\partial z}, \quad (\text{A1.8})$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} + \frac{\partial H}{\partial z}. \quad (\text{A1.9})$$

### A1.2 Desplazamientos elásticos

Love [122] demostró que los desplazamientos elásticos en un punto  $(x, y, z)$  en el sólido, se pueden expresar mediante las siguientes funciones

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2 \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\}, \quad (\text{A1.10})$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2 \frac{\partial G}{\partial z} - \frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\}, \quad (\text{A1.11})$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{\partial H}{\partial z} + (1-2\nu)\Psi - z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\}. \quad (\text{A1.12})$$

### A1.2.1 Desplazamientos asociados a una fuerza normal a la superficie

Si se considera que sólo actúa sobre la superficie  $S$ , una tensión normal  $p_z(x', y')$ , las funciones potencial  $F = F_1 = G = G_1 = 0$  y los desplazamientos asociados a dicha tensión serán

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ -\frac{\partial H}{\partial x} + 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\}, \quad (\text{A1.13})$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ -\frac{\partial H}{\partial y} + 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\} = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\}, \quad (\text{A1.14})$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{\partial H}{\partial z} + (1-2\nu)\Psi - z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2(1-\nu)\Psi - z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\}. \quad (\text{A1.15})$$

Si se considera una fuerza concentrada  $F_z = \iint_S p_z(x', y') dx' dy'$ , las funciones potencial se simplifican de la siguiente forma

$$\Psi_1 = \frac{\partial H_1}{\partial z} = H = F_z \ln(\rho + z), \quad (\text{A1.16})$$

$$\Psi = \frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial z} = \frac{F_z}{\rho}. \quad (\text{A1.17})$$

Además, al ser  $x' = y' = 0$

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

A continuación, se calculan las siguientes derivadas de las funciones potencial

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial z} = \frac{\partial H}{\partial x} = F_z \frac{x}{\rho(\rho + z)}, \quad (\text{A1.18})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -F_z \frac{x}{\rho^3}, \quad (\text{A1.19})$$

$$\frac{\partial \Psi_1}{\partial y} = \frac{\partial H}{\partial y} = F_z \frac{y}{\rho(\rho + z)}, \quad (\text{A1.20})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial y} = -F_z \frac{y}{\rho^3}, \quad (\text{A1.21})$$

$$\frac{\partial \Psi}{\partial z} = -F_z \frac{z}{\rho^3}. \quad (\text{A1.22})$$

Sustituyendo las derivadas (A1.18) a (A1.22) en las expresiones (A1.13) a (A1.15), los desplazamientos debidos a una fuerza normal resultan

$$u_x = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} + z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\} = F_z \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{xz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right\}, \quad (\text{A1.23})$$

$$u_y = -\frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} + z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\} = F_z \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{yz}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{y}{\rho(\rho+z)} \right\}, \quad (\text{A1.24})$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2(1-\nu)\Psi - z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\} = F_z \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{z^2}{\rho^3} + \frac{2(1-\nu)}{\rho} \right\}. \quad (\text{A1.25})$$

### A1.2.2 Desplazamientos asociados a una fuerza tangencial a la superficie, según la dirección $x$

Si se considera ahora que sólo actúa sobre la superficie  $S$ , una tensión tangencial  $p_x(x', y')$ , se tendrá que algunas funciones potencial serán nulas  $G = G_1 = H = H_1 = 0$  y los desplazamientos se obtendrán a partir de las siguientes expresiones

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2 \frac{\partial F}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\}, \quad (\text{A1.26})$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\}, \quad (\text{A1.27})$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ (1-2\nu)\Psi - z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\}. \quad (\text{A1.28})$$

Asumiendo una carga tangencial según la dirección  $x$  concentrada  $F_x = \iint_S p_x(x', y') dx' dy'$ , aplicada en el centro de la superficie  $S$ , las funciones potencial, en este caso, resultan

$$\Psi_1 = \frac{\partial F_1}{\partial x} = -F_x \frac{x}{\rho + z}, \quad (\text{A1.29})$$

$$\Psi = \frac{\partial F}{\partial x} = F_x \frac{x}{\rho(\rho + z)}. \quad (\text{A1.30})$$

Considerando las siguientes expresiones de las derivadas

$$\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{F_x}{\rho}, \quad (\text{A1.31})$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} = -F_x \frac{\rho^2 - x^2 + \rho z}{\rho(\rho + z)^2}, \quad (\text{A1.32})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = -F_x \frac{x^2 \rho - (\rho + z)(\rho^2 - x^2)}{\rho^3(\rho + z)^2}, \quad (\text{A1.33})$$

$$\frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} = F_x \frac{xy}{\rho(\rho + z)^2}, \quad (\text{A1.34})$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = -F_x \frac{xy(z + 2\rho)}{\rho^3(\rho + z)^2}, \quad (\text{A1.35})$$

los desplazamientos se podrán expresar en función de las derivadas parciales de  $F$  y  $F_1$  como sigue

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2 \frac{\partial F}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right\} = \\ &= F_x \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{1}{\rho} + \frac{x^2}{\rho^3} + (1-2\nu) \left( \frac{1}{\rho+z} - \frac{x^2}{\rho(\rho+z)^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A1.36})$$

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2\nu \frac{\partial^2 F_1}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \right\} = \\ &= F_x \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{xy}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{xy}{\rho(\rho+z)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A1.37})$$

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial x} - z \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \right\} = \\ &= F_x \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{xz}{\rho^3} + (1-2\nu) \frac{x}{\rho(\rho+z)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A1.38})$$

### A1.2.3 Desplazamientos asociados a una fuerza tangencial a la superficie, según la dirección $y$

De forma similar a la tensión tangencial según el eje  $x$ , si se considera una tensión tangencial  $p_y(x', y')$  según la dirección  $y$ , se tendrá que algunas funciones potencial serán nulas  $F = F_1 = H = H_1 = 0$  y los desplazamientos se obtendrán a partir de las siguientes expresiones

$$u_x = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial x} - z \frac{\partial \Psi}{\partial x} \right\}, \quad (\text{A1.39})$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2 \frac{\partial G}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial \Psi_1}{\partial y} - z \frac{\partial \Psi}{\partial y} \right\}, \quad (\text{A1.40})$$

$$u_z = \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ (1-2\nu)\Psi - z \frac{\partial \Psi}{\partial z} \right\}. \quad (\text{A1.41})$$

Asumiendo una fuerza tangencial según la dirección  $y$  concentrada  $F_y = \iint_S p_y(x', y') dx' dy'$ , aplicada en el centro de la superficie  $S$ , las funciones potencial resultan en este caso

$$\Psi_1 = \frac{\partial G_1}{\partial y} = -F_y \frac{y}{\rho + z}, \quad (\text{A1.42})$$

$$\Psi = \frac{\partial G}{\partial y} = F_y \frac{y}{\rho(\rho + z)}. \quad (\text{A1.43})$$

Considerando las siguientes expresiones de las derivadas

$$\frac{\partial G}{\partial z} = \frac{F_y}{\rho}, \quad (\text{A1.44})$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} = -F_y \frac{\rho^2 - y^2 + \rho z}{\rho(\rho + z)^2}, \quad (\text{A1.45})$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial y^2} = F_y \frac{(\rho + z)(\rho^2 - y^2) - \rho y^2}{\rho^3(\rho + z)^2}, \quad (\text{A1.46})$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} = F_y \frac{xy}{\rho(\rho + z)^2}, \quad (\text{A1.47})$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} = -F_y \frac{xy(z+2\rho)}{\rho^3(\rho+z)^2}, \quad (\text{A1.48})$$

los desplazamientos debidos a la acción de la fuerza concentrada  $F_y$  resultan

$$\begin{aligned} u_x &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2\nu \frac{\partial^2 G_1}{\partial x \partial y} - z \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right\} = \\ &= F_y \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{xy}{\rho^3} - (1-2\nu) \frac{xy}{\rho(\rho+z)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A1.49})$$

$$\begin{aligned} u_y &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ 2 \frac{\partial G}{\partial z} + 2\nu \frac{\partial^2 G_1}{\partial y^2} - z \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \right\} = \\ &= F_y \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{1}{\rho} + \frac{y^2}{\rho^3} + (1-2\nu) \left( \frac{1}{\rho+z} - \frac{y^2}{\rho(\rho+z)^2} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (\text{A1.50})$$

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ (1-2\nu) \frac{\partial G}{\partial y} - z \frac{\partial^2 G}{\partial y \partial z} \right\} = \\ &= F_y \frac{1+\nu}{2\pi E} \left\{ \frac{yz}{\rho^3} + (1-2\nu) \frac{y}{\rho(\rho+z)} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{A1.51})$$

#### A1.2.4 Desplazamientos en la superficie producidos por una distribución de tensiones normal

Dado que se desea obtener los desplazamientos en la superficie, se deberá imponer en las expresiones (A1.23)-(A1.25) que  $z = 0$

$$u_x = \frac{-(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \frac{x}{\rho^2} F_z, \quad (\text{A1.52})$$

$$u_y = \frac{-(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \frac{y}{\rho^2} F_z, \quad (\text{A1.53})$$

$$u_z = \frac{(1-\nu^2)}{\pi E} \frac{F_z}{\rho}. \quad (\text{A1.54})$$

Aplicando el principio de superposición, se pueden obtener las expresiones de los desplazamientos en la superficie debidos a una distribución de tensiones normal, integrando las ecuaciones (A1.52) a (A1.54) sobre el área  $S$

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{-(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \iint_S \frac{p_z(x', y')(x-x')}{\rho^2} dx' dy' = \\
&= -\frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_S \frac{p_z(x', y')(x-x')}{\rho^2} dx' dy' \quad , \quad (A1.55)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y &= \frac{-(1-2\nu)(1+\nu)}{2\pi E} \iint_S \frac{p_z(x', y')(y-y')}{\rho^2} dx' dy' = \\
&= -\frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_S \frac{p_z(x', y')(y-y')}{\rho^2} dx' dy' \quad , \quad (A1.56)
\end{aligned}$$

$$u_z = \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S \frac{p_z(x', y')}{\rho} dx' dy' = \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p_z(x', y')}{\rho} dx' dy' . \quad (A1.57)$$

### A1.2.5 Desplazamientos en la superficie producidos por una distribución de tensiones tangencial según la dirección del eje $x$

Imponiendo que  $z=0$  en las expresiones (A1.36) a (A1.38), se obtienen las expresiones que permiten calcular los desplazamientos en la superficie producidos por una fuerza tangencial en la dirección  $x$

$$u_x = \frac{(1+\nu)}{\pi E} \left\{ (1-\nu) \frac{1}{\rho} + \nu \frac{x^2}{\rho^3} \right\} F_x , \quad (A1.58)$$

$$u_y = \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \frac{xy}{\rho^3} F_x , \quad (A1.59)$$

$$u_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{x}{\rho^2} F_x . \quad (A1.60)$$

Para determinar las expresiones de los desplazamientos debidos a una distribución de tensiones tangenciales según  $x$ , se aplica el principio de superposición, integrando sobre el área  $S$

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S \frac{p_x(x', y')}{\rho} dx' dy' + \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \iint_S \frac{p_x(x', y')(x-x')^2}{\rho^3} dx' dy' = \\
&= \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p_x(x', y')}{\rho} dx' dy' + \frac{\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p_x(x', y')(x-x')^2}{\rho^3} dx' dy' \quad , \quad (A1.61)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y &= \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \iint_S \frac{p_x(x', y')(x-x')(y-y')}{\rho^3} dx' dy' = \\
&= \frac{\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p_x(x', y')(x-x')(y-y')}{\rho^3} dx' dy' \quad , \quad (A1.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_z &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \iint_S \frac{p_x(x', y')(x-x')}{\rho^2} dx' dy' = \\
&= \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_S \frac{p_x(x', y')(x-x')}{\rho^2} dx' dy' \quad . \quad (A1.63)
\end{aligned}$$

### A1.2.6 Desplazamientos en la superficie producidos por una distribución de tensiones tangencial según la dirección del eje $y$

Imponiendo que  $z=0$  en las expresiones (A1.49) a (A1.51), se obtienen las expresiones que permiten calcular los desplazamientos en la superficie producidos por una fuerza tangencial en la dirección  $x$

$$u_x = \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \frac{xy}{\rho^3} F_y \quad , \quad (A1.64)$$

$$u_y = \frac{1+\nu}{\pi E} \left\{ (1-\nu) \frac{1}{\rho} + \nu \frac{y^2}{\rho^3} \right\} F_y \quad , \quad (A1.65)$$

$$u_z = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \frac{y}{\rho^2} F_y \quad . \quad (A1.66)$$

Para determinar las expresiones de los desplazamientos debidos a una distribución de tensiones tangenciales según  $y$ , se aplica el principio de superposición, integrando sobre el área  $S$

$$\begin{aligned}
u_x &= \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \iint_S \frac{p_y(x', y')(x-x')(y-y')}{\rho^3} dx' dy' = \\
&= \frac{\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p_y(x', y')(x-x')(y-y')}{\rho^3} dx' dy' \quad , \quad (A1.67)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_y &= \frac{1-\nu^2}{\pi E} \iint_S \frac{p_y(x', y')}{\rho} dx' dy' + \frac{\nu(1+\nu)}{\pi E} \iint_S \frac{p_y(x', y')(y-y')^2}{\rho^3} dx' dy' = \\
&= \frac{1-\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p_y(x', y')}{\rho} dx' dy' + \frac{\nu}{2\pi G} \iint_S \frac{p_y(x', y')(y-y')^2}{\rho^3} dx' dy' \quad , \quad (A1.68)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u_z &= \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{2\pi E} \iint_S \frac{p_y(x', y')(y-y')}{\rho^2} dx' dy' = \\ &= \frac{1-2\nu}{4\pi G} \iint_S \frac{p_y(x', y')(y-y')}{\rho^2} dx' dy' \end{aligned} \quad . \quad (\text{A1.69})$$

## ANEXO 2

### Coeficientes de influencia elástica para carga uniforme sobre elementos rectangulares

En este anexo se recogen las expresiones matemáticas de los coeficientes de influencia elástica correspondientes a la solución de las ecuaciones integrales de Boussinesq-Cerruti (ver Anexo 1) para distribuciones de tensiones constantes unitarias sobre elementos rectangulares.

Se define un área potencial de contacto  $A_c$  rectangular, que se divide en  $N = n_x n_y$  elementos rectangulares de dimensiones  $2a \times 2b$ , como se muestra en la Figura A2.1.

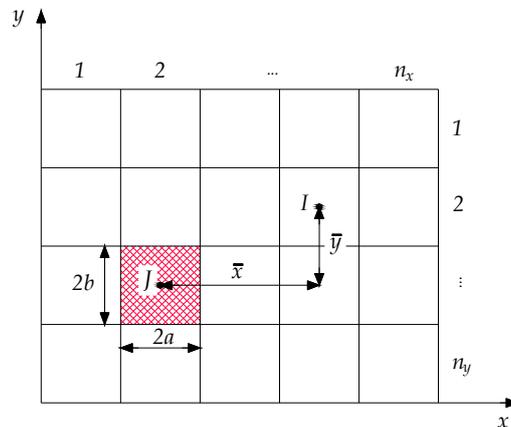


Figura A2.1. Discretización del área potencial de contacto en  $N$  elementos rectangulares.

El coeficiente de influencia elástica  $A_{iij}$  representa el desplazamiento en el punto  $I$  en la dirección  $i$  cuando se aplica una tensión unitaria en el punto  $J$  según la dirección  $j$ .

En el caso del contacto rueda-carril se asume la hipótesis de cuasiidoneidad elástica, ya que los dos cuerpos en contacto están fabricados del mismo material y por tanto presentan las mismas propiedades elásticas, módulo de Young  $E$  o módulo de rigidez torsional  $G$  y coeficiente de Poisson.

Considerando dicha hipótesis, los problemas de contacto normal y tangencial son independientes y las diferencias de desplazamientos asociados a las deformaciones entre los dos cuerpos en contacto se pueden calcular a partir de los coeficientes de influencia elástica del siguiente modo

$$u_{I\tau} = u_{I\tau}^{(1)} - u_{I\tau}^{(2)} = \sum_{\kappa=1}^2 \sum_{J=1}^N A_{I\tau J\kappa} p_{J\kappa}, \quad \tau = 1, 2, \quad (\text{A2.1})$$

$$u_{I3} = u_{I3}^{(1)} - u_{I3}^{(2)} = \sum_{J=1}^N A_{I3J3} p_{J3}. \quad (\text{A2.2})$$

Los coeficientes de influencia elástica  $A_{Iijj}$  para un elemento rectangular sobre el que se ejerce una carga uniforme se pueden calcular a partir de las siguientes expresiones

$$A_{I1J1} = \frac{2(1+\nu)}{\pi E} (J_1 + (1-\nu)J_2) = \frac{1}{\pi G} (J_3 - \nu J_2), \quad (\text{A2.3})$$

$$A_{I2J2} = \frac{2(1+\nu)}{\pi E} (J_2 + (1-\nu)J_1) = \frac{1}{\pi G} (J_3 - \nu J_1), \quad (\text{A2.4})$$

$$A_{I1J2} = A_{I2J1} = \frac{2\nu(1+\nu)}{\pi E} J_4 = \frac{\nu}{\pi G} J_4, \quad (\text{A2.5})$$

$$A_{I3J3} = \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} J_3 = \frac{1-\nu}{\pi G} J_3, \quad (\text{A2.6})$$

siendo  $J_1$  a  $J_4$  funciones que dependen de las dimensiones de los elementos en los que se discretiza el área potencial de contacto y de las coordenadas del centro del elemento en el que se aplica la tensión constante (punto  $J$ ) y de las coordenadas del punto en que se obtiene el desplazamiento (punto  $I$ ). Dado que las funciones  $J_1$  a  $J_4$  se han obtenido para un elemento rectangular centrado en el origen del sistema de referencia, se definen las coordenadas relativas  $\bar{x}$  e  $\bar{y}$  entre los puntos  $I$  y  $J$  de la siguiente forma

$$\bar{x} = x_I - x_J, \quad (\text{A2.7})$$

$$\bar{y} = y_I - y_J, \quad (\text{A2.8})$$

donde  $(x_I, y_I)$  y  $(x_J, y_J)$  son las coordenadas de los centros de los elementos  $I$  y  $J$ , respectivamente.

De este modo, las expresiones de las funciones  $J_1$  a  $J_4$  se pueden escribir como sigue

$$J_1 = (\bar{y} + b) \ln \left( \frac{(\bar{x} + a) + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} + b)^2}}{(\bar{x} - a) + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} + b)^2}} \right) + (\bar{y} - b) \ln \left( \frac{(\bar{x} - a) + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} - b)^2}}{(\bar{x} + a) + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} - b)^2}} \right) \quad (\text{A2. 9})$$

$$J_2 = (\bar{x} + a) \ln \left( \frac{(\bar{y} + b) + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} + b)^2}}{(\bar{y} - b) + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} - b)^2}} \right) + (\bar{x} - a) \ln \left( \frac{(\bar{y} - b) + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} - b)^2}}{(\bar{y} + b) + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} + b)^2}} \right) \quad (\text{A2. 10})$$

$$J_3 = J_1 + J_2 \quad (\text{A2. 11})$$

$$J_4 = -\sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} + b)^2} + \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} + b)^2} + \sqrt{(\bar{x} + a)^2 + (\bar{y} - b)^2} - \sqrt{(\bar{x} - a)^2 + (\bar{y} - b)^2} \quad (\text{A2. 12})$$



# ANEXO 3

## Artículos publicados vinculados a la Tesis

Este Anexo recoge la primera página de la versión del editor de cada artículo publicado durante la realización de la Tesis.

### Artículo 1:

L. Baeza, P. Vila, A. Roda, J. Fayos, Prediction of corrugation in rails using a non-stationary wheel-rail contact model, *Wear* 265 (2008) 1156-1162.

doi:10.1016/j.wear.2008.01.024

### Artículo 2:

P. Vila, A. Rovira, J. Fayos, L. Baeza, Dynamic model of a railway wheelset for corrugation problem analysis, *Noise and Vibration Worldwide* 40 (2009) 10-17.

doi:10.1260/095745609790251579

### Artículo 3:

L. Baeza, P. Vila, G. Xie, S.D. Iwnicki, Prediction of rail corrugation using a rotating flexible wheelset coupled with a flexible track model and a non-Hertzian/non-steady contact model, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 4493-4507.

doi:10.1016/j.jsv.2011.03.032

**Artículo 4:**

P. Vila, J. Fayos, L. Baeza, Simulation of the evolution of rail corrugation using a rotating flexible wheelset model, *Vehicle System Dynamics* 49 (2011) 1749-1769.

doi:10.1080/00423114.2011.552619

**Artículo 5:**

P. Vila, L. Baeza, J. Martínez-Casas, J. Carballeira, Rail corrugation growth accounting for the flexibility and rotation of the wheelset and the non-Hertzian and non-steady-state effects at contact patch, *Vehicle System Dynamics* 52 S1(2014) 92-108.

doi:10.1080/00423114.2014.881513



Contents lists available at ScienceDirect

Wear

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/wear](http://www.elsevier.com/locate/wear)

## Prediction of corrugation in rails using a non-stationary wheel-rail contact model

Luis Baeza<sup>a,\*</sup>, Paloma Vila<sup>a</sup>, Alejandro Roda<sup>a</sup>, Juan Fayos<sup>b</sup><sup>a</sup> Dpto. Ingeniería Mecánica y Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain<sup>b</sup> Instituto de Biomecánica de Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, Spain

### ARTICLE INFO

Article history:  
Accepted 14 January 2008  
Available online 19 May 2008

Keywords:  
Corrugation  
Non-steady state rolling contact

### ABSTRACT

Most of the models used for simulating the conditions existing in the wheel-rail contact are based on stationary theories. In such theories, the parameters associated with the wheel-rail contact are independent on the conditions applied on it previously. This supposition is a simplification of the real phenomenon, whose validity lies in the rapid convergence of the contact parameters to their stationary values. However, the conditions simulated by means of non-stationary theories may differ from those obtained by using stationary theories when external conditions vary rapidly. Certain types of rail corrugation may be related to high-frequency normal or tangential forces transmitted through the contact, which may determine the effect of the temporal history on the contact parameters, and consequently on the rail wear. In order to investigate the influence of the contact process on the results of models of corrugation calculation, a methodology for estimating the rail wear depth due to a wheel running on a stretch of rail is developed. The method implements an improved contact model where non-stationary hypotheses and an exact elastic model are taken into account. The results show the influence of the more realistic hypotheses adopted in the proposed method.

© 2008 Luis Baeza. Published by Elsevier B.V. All rights reserved.

### 1. Introduction

Rail corrugation has been a problem for railway industry as well as a subject of investigation by engineers all over the world for more than a century. Rolling noise, vibration, deterioration of vehicle and track components, along with discomfort to passengers are its principal negative effects. Nevertheless, the present operating conditions of railway vehicles, with higher speeds in passenger services and greater axle loads in freight trains, together with a general increase in railway traffic, make rail corrugation an even more serious problem. There is thus an incentive to study the causes and development of this phenomenon in order to prevent or minimise its effects.

This defect appears in all types of tracks, due to the continual passage of wheelsets, as a periodic undulation with a certain wavelength on the running surface of the rail. Grassie and Kalousek initially classified rail corrugation into six types [1]. Later, finding the typology to be even more extensive, they proposed classifying the phenomenon according to a wavelength-fixing mechanism related to resonance either from wheelsets, rails or the coupled

vehicle-track system, and a damage mechanism such as plastic deformation or wear [2]. These authors suggested that wear is the damage mechanism responsible for most types of corrugation.

Since the problem is complex, mathematical models to simulate the beginning and evolution of corrugation are an essential tool for its analysis. Some of the existing models combine three mechanical models: a vehicle-track dynamic interaction model, a rolling contact model and a wear model [3–6]. The irregularities initially present on the rail running surface cause variations in the wheel-rail contact forces, in creepage and in the size of the contact patch. The input data of the wear model is composed of the results given by the vehicle-track dynamic interaction models and the contact model. This approach was developed from the specially designed tools for classic railway dynamics, such as the FASTSIM algorithm [7], to calculate contact parameters.

FASTSIM provides excellent results in determining the relationship between creepage and contact-transmitted forces, also for calculating the stick and slip zones in the contact patch. It also has the advantage of a low computational cost since it employs a simplified elastic model. The elastic model considers that the displacements associated with the elastic deformations at a point in the contact patch are a linear function of the traction forces applied at that point (*Simplified Theory*), also known as Winkler's model or Elastic layer. The effect of this simplified assumption was corrected

\* Corresponding author.  
E-mail address: [lbazea@mcm.upv.es](mailto:lbazea@mcm.upv.es) (L. Baeza).



## Dynamic model of a railway wheelset for corrugation problem analysis

Paloma Vila<sup>1</sup>, Andrés Rovira<sup>1</sup>, Juan Fayos<sup>2</sup> and Luis Baeza<sup>1\*</sup>

<sup>1</sup>Dpto. de Ingeniería Mecánica, Universidad Politécnica de Valencia, Spain

<sup>2</sup>Instituto de Biomecánica de Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, Spain

\*email: lbaeza@mcm.upv.es

### Abstract

In the present work a model of flexible shafts is adapted for modelling the railway wheelset. The dynamic properties of the solid are obtained from a solid finite element model of a real wheelset. The model adopts an Eulerian coordinate set for numerical efficiency. Results of the crossed-receptance and mobility functions are presented, where the excitation is the vertical wheel-rail contact force and the displacement (or velocity) is measured in the wheel-rail contact plane. These results let us know that the gyroscopic effect may contribute to define the wavelength-fixing mechanism in some corrugation problems, even if the train speed is low.

### 1. Introduction

The conventional modelling of the railway vehicle, in which it is considered as a system of rigid bodies connected by viscoelastic elements, yields accurate enough results in the low-frequency range (up to 20 Hz, approximately). However, when it comes to analysing the dynamic interaction of the vehicle and the track in the mid- and high-frequency ranges (when studying problems such as corrugation) the use of these simplified wheelset models may lead to inaccurate results. This is due to the fact that in these frequency ranges the structural dynamics of the wheelset cannot be neglected. Accordingly, in these cases a more realistic wheelset model able to reproduce the elastic behaviour of the rotating wheelset should be adopted.

There exist a few research works in which the flexibility of the wheelset and the effects associated with rotation are considered. One of the pioneering works can be found in Ref. [1], in which the contact force is considered as a moving load on the perimeter of the wheel. In that work, only one wheel is modelled as a disc, and the results show that each peak at the FRF

function is decoupled into two resonances. However, the inertial effects due to rotation are neglected. The role of the inertial effects due to rotation in beams is discussed in [2], where it is found that these effects are more significant if the slenderness of the beam is low, and that is the case of the railway wheelset.

A model that considers the gyroscopic dynamics is due to Szolc [3-5], who considers a non-rotating beam (wheelset axle) linked through springs to rotating rigid bodies that represent the ring-wheels and brake discs. It is stated that the modal properties of the non-rotating wheelset differs from those of the rotating one. A similar approach was done in [6], where the dynamics of wheelsets that mount elastic wheels is studied.

The modelling of the continuous system can be based on general procedures of flexible multibody systems such as the method presented in [7-8], which uses modal coordinates, or through the Finite Element (FE) Method. These methods are based on Lagrangian coordinates and their main difficulty is the interaction with non-rotating structures, such as the track and the axleboxes in the case of the wheelset. The position of the contact point is occupied by a different material point in each time instant and consequently, the computational cost increases.

A continuous system approach of the wheelset was carried out in [9-10]. The method adopts a FE model and considers the inertial forces due to rotation. In order to solve the problems related to the interaction with the track, the contact forces were supposed to be applied in the centre axle of the wheelset.

An alternative to the previous methods is the use of Eulerian coordinates. The first works that show results from this methodology correspond to the Refs. [11-14]. Nevertheless, they did not publish their method until 2007 in Ref. [15]. Simultaneously, a method that employs Eulerian coordinates was published in [16]. The techniques are, however, very different:

This paper was presented at ISMA 2008, and is reproduced here with the kind permission of the conference chairman, Professor Sas, and the authors.





Contents lists available at ScienceDirect

Journal of Sound and Vibration

journal homepage: [www.elsevier.com/locate/jsvi](http://www.elsevier.com/locate/jsvi)



## Prediction of rail corrugation using a rotating flexible wheelset coupled with a flexible track model and a non-Hertzian/non-steady contact model

Luis Baeza<sup>a</sup>, Paloma Vila<sup>a</sup>, Gang Xie<sup>b</sup>, Simon D. Iwnicki<sup>b,\*</sup>

<sup>a</sup> Centro de Investigación en Tecnología de Vehículos, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s.n., 46022 Valencia, Spain

<sup>b</sup> Rail Technology Unit, Department of Engineering and Technology, Manchester Metropolitan University, M1 5GD, UK

### ARTICLE INFO

#### Article history:

Received 9 December 2010

Received in revised form

30 March 2011

Accepted 31 March 2011

Handling Editor: H. Ouyang

Available online 6 May 2011

### ABSTRACT

This paper presents a model for simulating vehicle–track interaction at high frequencies for investigations of rail roughness growth. The dynamic interaction model developed employs a substructuring technique and the whole system consists of a number of substructures that can be modelled independently. The systems are coupled through the forces at the wheel–rail contact and the railpad. A coupled, rotating flexible wheelset, a flexible track model and a non-Hertzian/non-steady contact model have been implemented and results are presented here for a free wheelset on a symmetrical track system with initial random and sinusoidal roughness. Both rigid and flexible wheelsets are considered.

© 2011 Elsevier Ltd. All rights reserved.

### 1. Introduction

Short-pitch rail corrugation has generally been investigated using models consisting of a train–track interaction model, a rolling contact model and a wear model. The wavelength-fixing mechanism was explored using either a frequency-domain method [1,2] or a time-domain method [3–5]. With the focus on the structural dynamics of the track, these models have suggested that resonances from track, for example P2 resonance and the pinned–pinned resonance, are responsible for the initiation of the short-pitch corrugation. As some models include a single wheel only, the flexibility of the wheelset was not coupled to the track dynamics. However, in some theories, torsional modes of the axle are seen as responsible for the generation of corrugation [6,7]. Due to the presence of roughness, contact geometry perturbations induce a variation of forces in the vertical and tangential direction and the torsional vibration of the wheelset axle may therefore be excited. To take account of the torsional vibration and other vibration modes of the wheelset, a full wheelset model at high frequency is required. A modal wheelset model for a flexible axle was recently proposed in [8]. It is noted that most of the previously developed models with wheelsets considered only the flexibility of the axle [5] and ignored the influence from the flexible wheels and rotating bodies. The Finite Element Method was adopted in [2,9] for modelling a non-rotating solid wheelset. The wheelset model used in the present work was presented in [10], where it was shown that the inertia effects associated with the rotation may be not negligible.

In the area of modelling the wheel–rail contact, the non-Hertzian effect was considered in [11,12] and the non-steady tangential contact was introduced in [13–16] to calculate wear. A linearised non-steady contact mechanics was used in

\* Corresponding author.

E-mail address: [S.D.Iwnicki@mmu.ac.uk](mailto:S.D.Iwnicki@mmu.ac.uk) (S.D. Iwnicki).



## Simulation of the evolution of rail corrugation using a rotating flexible wheelset model

Paloma Vila<sup>a</sup>, Juan Fayos<sup>b</sup> and Luis Baeza<sup>a\*</sup>

<sup>a</sup>*Centro de Investigación en Tecnología de Vehículos, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain;* <sup>b</sup>*Instituto de Biomecánica de Valencia, Universidad Politécnica de Valencia, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain*

(Received 29 July 2010; final version received 18 December 2010; first published 15 August 2011)

This paper presents a simulation tool designed for predicting the wear pattern on the running surface of the rails and for studying the evolution of rail corrugation after thousands of wheelset passages. This simulation tool implements a cyclic track model, a rotating flexible wheelset model, a wheel–rail contact model and a wear model. The vehicle–track system is modelled by using a substructuring technique, by which the vehicle, the rails and the sleepers are treated independently of each other and are coupled by the forces transmitted through the wheel–rail contact and the railpad. The vehicle model takes only account of the wheelset since the sprung masses of the vehicle are not relevant in the frequency range analysed. The wheelset model considers the flexibility of the wheelset and the effects associated with rotation. By using the Campbell diagram, two cases have been identified in which the combined effect of two different modes may give rise to higher wheel–rail contact forces and wear.

**Keywords:** rail corrugation; cyclic track; rotating flexible wheelset; substructuring technique

### 1. Introduction

Corrugation in rails remains nowadays one of the most widely spread defects in tracks world-wide. This defect is known not only to give rise to high-frequency vibrations, noise nuisance and loss of ride comfort, but also to trigger the formation of cracks in rails. Until now, rail grinding and friction modifiers are the only techniques that have proved to be effective in controlling corrugation. But, at the same time, the former technique leads to notably higher maintenance costs to be faced by railway administrations.

Much research efforts have focused on the understanding of the initiation and further development of rail corrugation with the aim to prevent or at least control the formation of this defect. However, since the first reports on corrugation at the end of the nineteenth century [1], only a few corrugation types were explained through mathematical models (see an example in [2]). Most of the wavelength-fixing mechanisms (see definition in [3]) were broadly found experimentally by identifying the corresponding frequency of the corrugation with certain natural frequency or resonance of the vehicle unsprung mass–track system [4]. The corrugation is

---

\*Corresponding author. Email: lbaeza@mcm.upv.es



## Rail corrugation growth accounting for the flexibility and rotation of the wheel set and the non-Hertzian and non-steady-state effects at contact patch

Paloma Vila, Luis Baeza\*, José Martínez-Casas and Javier Carballeira

*Centro de Investigación de Tecnología de Vehículos, Universitat Politècnica de València, Camino de Vera s/n, 46022 Valencia, Spain*

*(Received 31 October 2013; accepted 4 January 2014)*

In this work, a simulation tool is developed to analyse the growth of rail corrugation consisting of several models connected in a feedback loop in order to account for both the short-term dynamic vehicle-track interaction and the long-term damage. The time-domain vehicle-track interaction model comprises a flexible rotating wheel set model, a cyclic track model based on a substructuring technique and a non-Hertzian and non-steady-state three-dimensional wheel-rail contact model, based on the variational theory by Kalker. Wear calculation is performed with Archard's wear model by using the contact parameters obtained with the non-Hertzian and non-steady-state three-dimensional contact model. The aim of this paper is to analyse the influence of the excitation of two coinciding resonances of the flexible rotating wheel set on the rail corrugation growth in the frequency range from 20 to 1500 Hz, when contact conditions similar to those that can arise while a wheel set is negotiating a gentle curve are simulated. Numerical results show that rail corrugation grows only on the low rail for two cases in which two different modes of the rotating wheel set coincide in frequency. In the first case, identified by using the Campbell diagram, the excitation of both the backward wheel mode and the forward third bending mode of the wheel set model (B-F modes) promotes the growth of rail corrugation with a wavelength of 110 mm for a vehicle velocity of 142 km/h. In the second case, the excitation of both the backward wheel mode and the backward third bending mode (B-B modes) gives rise to rail corrugation growth at a wavelength of 156 mm when the vehicle velocity is 198 km/h.

**Keywords:** rail corrugation; flexible rotating wheel set; cyclic track; global corrugation growth rate

### 1. Introduction

Rail corrugation remains nowadays, after a long time of research and field observations, one of the most severe problems faced by railway administrations around the world. The reason for this can lie in the wide diversity of rail corrugation, which is probably produced by different causes. The most accepted classification of rail corrugation is due to Grassie and Kalousek, who classified various types of rail corrugation with respect to wavelength-fixing mechanisms and damage mechanisms.[1]

Several authors have concluded in their investigations that the formation and development of rail corrugation can be attributed to certain resonances and antiresonances of the coupled vehicle-track system, which act as wavelength-fixing mechanisms. Some examples of these

---

\*Corresponding author. Email: [baeza@mcm.upv.es](mailto:baeza@mcm.upv.es)



## Bibliografía

- [1] L. Afferrante, M. Ciavarella, Short-pitch rail corrugation: A possible resonance-free regime as a step forward to explain the “enigma”?, *Wear* 266 (2009) 934-944.
- [2] L. Afferrante, M. Ciavarella, Short pitch corrugation of railway tracks with wooden or concrete sleepers: An enigma solved?, *Tribology International* 43 (2010) 610-622.
- [3] D.R. Ahlbeck, L.E. Daniels, Investigation of rail corrugations on the Baltimore Metro, *Wear* 144 (1991) 197-210.
- [4] J. Alias, Characteristics of wave formation in rails, *Rail International* 17 (1986) 17-23.
- [5] A. Alonso, J.G. Giménez, A new method for the solution of the normal contact problem in the dynamic simulation of railway vehicles, *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 149-160.
- [6] A. Alonso, J.G. Giménez, Some new contributions to the resolution of the normal wheel-rail contact problem, *Vehicle System Dynamics* 44 (2006) 230-239.
- [7] A. Alonso, J.G. Giménez, Tangential problem solution for non-elliptical areas with the Fastsim algorithm, *Vehicle System Dynamics* 45 (2007) 341-357.
- [8] A. Alonso, J.G. Giménez, Non-steady state modelling of wheel-rail contact problem for the dynamic simulation of railway vehicles, *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 179-196.
- [9] C. Andersson, J. Oscarsson, Dynamic train/track interaction including state-dependent track properties and flexible vehicle components, *Vehicle System Dynamics* 33 (1999) 47-58.
- [10] C. Andersson, T. Abrahamsson, Simulation of interaction between a train in general motion and a track, *Vehicle System Dynamics* 38 (2002) 433-455.
- [11] C. Andersson, A. Johansson, Prediction of rail corrugation generated by three-dimensional wheel-rail interaction, *Wear* 257 (2004) 423-434.
- [12] J.F. Archard, Contact and rubbing of flat surfaces, *Journal of Applied Physics* 24 (1953) 981-988.
- [13] J.B. Ayasse, H. Chollet, Determination of the wheel-rail contact patch in semi-Hertzian conditions, *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 161-172.
- [14] L. Baeza, A. Roda, J.C.O. Nielsen, Railway vehicle/track interaction analysis using a modal substructuring approach, *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 112-124.

- [15] L. Baeza, F.J. Fuenmayor, J. Carballeira, A. Roda, Influence of the wheel-rail contact instationary process on contact parameters, *Journal of Strain Analysis in Engineering Design* 42 (2007) 377-387.
- [16] L. Baeza, P. Vila, A. Roda, J. Fayos, Prediction of corrugation in rails using a non-stationary wheel-rail contact model, *Wear* 265 (2008) 1156-1162.
- [17] L. Baeza, J. Fayos, A. Roda, R. Insa, High frequency railway vehicle-track dynamics through flexible rotating wheelsets, *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 647-659.
- [18] L. Baeza, P. Vila, G. Xie, S.D. Iwnicki, Prediction of rail corrugation using a rotating flexible wheelset coupled with a flexible track model and a non-Hertzian/non-steady contact model, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 4493-4507.
- [19] L. Baeza, H. Ouyang, A railway track dynamics model based on modal substructuring and a cyclic boundary condition, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 75-86.
- [20] R.D. Batten, P.A. Bellette, P.A. Meehan, R.J. Horwood, W.J.T. Daniel, Field and theoretical investigation of the mechanism of corrugation wavelength fixation under speed variation, *Wear* 271 (2011) 278-286.
- [21] R.G. Bayer, *Wear analysis for engineers*, HNB Publishing, New York, 2002.
- [22] P.A. Bellette, P.A. Meehan, W.J.T. Daniel, Effects of variable pass speed on wear-type corrugation growth, *Journal of Sound and Vibration* 314 (2008) 616-634.
- [23] P.A. Bellette, P.A. Meehan, W.J.T. Daniel, Contact induced wear filtering and its influence on corrugation growth, *Wear* 268 (2010) 1320-1328.
- [24] A. Böhmer, T. Klimpel, Plastic deformation of corrugated rails—a numerical approach using material data of rail steel, *Wear* 253 (2002) 150-161.
- [25] J. Boussinesq, *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*, Gauthier-Villars, Paris, 1885.
- [26] F. Braghin, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, S. Bruni, A mathematical model to predict railway wheel profile evolution due to wear, *Wear* 261 (2006) 1253-1264.
- [27] A. Brockley, P.L. Ko, An investigation of rail corrugation using friction-induced vibration theory, *Wear* 128 (1988) 99-106.
- [28] F.W. Carter, On the action of locomotive driving wheel, *Proc. R. Soc. London, Ser. A.* 112 (1926) 151-157.
- [29] C. Cattaneo, Sul contatto di due corpi elastici: distribuzione locale degli sforzi, *Rendiconti dell'Accademia nazionale dei Lincei*, 27, Ser. 6 (1938) 342-478.
- [30] V. Cerruti, *Mem. Fis. Mat.*, Accademia dei Lincei, Roma, 1882.
- [31] G.X. Chen, Z.R. Zhou, H. Ouyang, X.S. Jin, M.H. Zhu, Q.Y. Liu, A finite element study on rail corrugation based on saturated creep force-induced

- self-excited vibration of a wheelset-track system, *Journal of Sound and Vibration* 329 (2010) 4643-4655.
- [32] M. Ciavarella, J. Barber, Influence of longitudinal creepage and wheel inertia on short-pitch corrugation: a resonance-free mechanism to explain the roaring rail phenomenon, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part J: Journal of Engineering Tribology* 222 (2008) 171-181.
- [33] R.A. Clark, P. A. Dean, J. A. Elkins, S.G. Newton, Investigation into the dynamic effects of railway vehicles running on corrugated rails, *Journal of Mechanical Engineering Science* 24(2) (1982) 65-76.
- [34] R.A. Clark, P. Foster, On the mechanics of rail corrugation formation, *Vehicle System Dynamics* 12 (1-3) (1983) 35-43.
- [35] R.A. Clark, G. A. Scott y W. Poole, Short wave corrugations—an explanation based on slip-stick vibrations, *Proceedings of Applied Mechanics Rail Transportation Symposium*, Chicago (1988) Publicado por The American Society of Mechanical Engineers, New York.
- [36] A. Clot, *A dynamical model of a double-deck circular tunnel embedded in a full space*, Tesis doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica, Universitat Politècnica de Catalunya, 2014.
- [37] C. Collette, P. Vanhonacker, R. Bastaits, D. Levy, Comparison between time and frequency studies of a corrugated curve of RER Paris network, *Wear* 265 (2008) 1249-1258.
- [38] N. Correa, O. Oyarzabal, E. G. Vadillo, J. Santamaría, J. Gómez, Rail corrugation development in high speed lines, *Wear* 271 (2011) 2438-2447.
- [39] N. Correa, E.G. Vadillo, J. Santamaría, J. Gómez, A rational fraction polynomials model to study vertical dynamic wheel-rail interaction, *Journal of Sound and Vibration* 331 (2012) 1844-1858.
- [40] E. Croft, C.J.C. Jones, D.J. Thompson, Modelling the effect of rail dampers on wheel-rail interaction forces and rail roughness growth rates, *Journal of Sound and Vibration* 323 (2009) 17-32.
- [41] E. Croft, *The development of rail-head acoustic roughness*, Ph.D. Thesis, Institute of Sound and Vibration Research, University of Southampton, United Kingdom, 2009.
- [42] E. Croft, E.A.H. Vollebregt, D.J. Thompson, An investigation of velocity-dependent friction in wheel-rail rolling contact, *Noise and Vibration Mitigation for Rail Transportation Systems* 118 (2012) 33-41.
- [43] P.A Cundall, O.D.L Strack, A discrete numerical model for granular assemblies, *Geotechnique* 29 (1979) 47-65.
- [44] W.J.T. Daniel, R.J. Horwood, P.A. Meehan, N. Wheatley, Analysis of rail corrugation in cornering, *Wear* 265 (2008) 1183-1192.
- [45] J.R. Dydo, H.R. Busby, Complete 3-D elasticity solutions in the half-space for constant and linearly varying pressure loads, *Contact Mechanics:*

- Computational Techniques in Transactions on Engineering Sciences* 1 (1993) 19-26.
- [46] J.R. Dydo, H.R. Busby, Elasticity solutions for constant and linearly varying load applied to a rectangular surface patch on the elastic half-space, *Journal of Elasticity* 38 (1995) 153-163.
- [47] D.T. Eadie, J. Kalousek, K.C. Chiddick, The role of high positive friction (HPF) modifier in the control of short pitch corrugations and related phenomena, *Wear* 253 (2002) 185-192.
- [48] D.T. Eadie, M. Santoro, Top-of-rail friction control for curve noise mitigation and corrugation rate reduction, *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 747-757.
- [49] D.T. Eadie, M. Santoro, K. Oldknow, Y. Oka, Field studies of the effect of friction modifiers on short pitch corrugation generation in curves, *Wear* 265 (2008) 1212-1221.
- [50] J.I. Egaña, J. Viñolas, N. Gil-Negrete, Effect of liquid high positive friction (HPF) modifier on wheel-rail contact and rail corrugation, *Tribology International* 38 (2005) 769-774.
- [51] J.I. Egaña, J. Viñolas, M. Seco, Investigation of the influence of rail pad stiffness on rail corrugation on a transit system, *Wear* 261 (2006) 216-224.
- [52] C. Esveld, *Modern Railway Track*, MRT-Productions Delft, The Netherlands, 2001.
- [53] J. Fayos, L. Baeza, F.D. Denia, J.E. Tarancón, An Eulerian coordinate-based method for analysing the structural vibrations of a solid of revolution rotating about its main axis, *Journal of Sound and Vibration* 306 (2007) 618-635.
- [54] J. Fayos, *Dinámica estructural de cuerpos de revolución rotatorios: aplicación al eje de un vehículo ferroviario*, Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2008.
- [55] F.J. Franklin, T. Chung, A. Kapoor, Ratcheting and fatigue-led wear in rail-wheel contact, *Fatigue and Fracture of Engineering Materials and Structures* 26 (2003) 949-955.
- [56] C.O. Frederick, A rail corrugation theory, *Proceedings of the International Symposium on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems II* (1986) 181-212.
- [57] H. Fromm, Berechnung des Schlupfes beim Rollen deformierbaren Scheiben, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik* 7 (1927) 27-58.
- [58] J. Giménez, A. Alonso, E. Gómez, Introduction of a friction coefficient dependent on the slip in the Fastsim algorithm, *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 233-244.
- [59] I. Gómez, E.G. Vadillo, An analytical approach to study a special case of booted sleeper track rail corrugation, *Wear* 251 (2001) 916-924.

- [60] J. Gómez, E.G. Vadillo, A linear model to explain short pitch corrugation on rails, *Wear* 255 (2003) 1127-1142.
- [61] J. Gómez, E.G. Vadillo, J. Santamaría, A comprehensive track model for the improvement of corrugation models, *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 522-534.
- [62] S.L. Grassie, R.W. Gregory, D. Harrison, K.L. Johnson, The dynamic response of railway track to high frequency vertical/lateral/longitudinal excitation, *Journal of Mechanical Engineers Society* 24 (1982) 77-102.
- [63] S.L. Grassie, K.L. Johnson, Periodic microslip between a rolling wheel and a corrugated rail, *Wear* 101 (1985) 291-309.
- [64] S.L. Grassie, J. Kalousek, Rail corrugation: characteristics, causes and treatments, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 207 (1993) 57-68.
- [65] S.L. Grassie, J.A. Elkins, Rail corrugation on north American transit systems, *Vehicle System Dynamics* 28 (1998) 5-17.
- [66] S.L. Grassie, Rail corrugation: advances in measurement, understanding and treatment, *Wear* 258 (2005) 1224-1234.
- [67] S.L. Grassie, J.W. Edwards, Development of corrugation as a result of varying normal load, *Wear* 265 (2008) 1150-1155.
- [68] S.L. Grassie, M.J. Saxon, J. D. Smith, Measurement of longitudinal rail irregularities and criteria for acceptable grinding, *Journal of Sound and Vibration* 227(5) (1999) 949-964.
- [69] S.L. Grassie, Rail corrugation: characteristics, causes, and treatments, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 223 (2009) 581-596.
- [70] S.L. Grassie, Short wavelength rail corrugation: field trials and measuring technology, *Wear* 191 (1996) 149-160.
- [71] A. Groß-Thebing, Frequency-dependent creep coefficients for three-dimensional rolling contact problems, *Vehicle System Dynamics* 18 (1989) 359-374.
- [72] A. Groß-Thebing, Lineare Modellierung des instationären Rollkontaktes von Rad und Schiene, *VDI Fortschritt-Berichte* 199 (1993), Reihe 1, VDI Dusseldorf.
- [73] L. Gry, Dynamic modelling of railway track based on wave propagation, *Journal of Sound and Vibration* 195 (1996) 477-505.
- [74] A. Guiral, A. Alonso, L. Baeza, J.G. Giménez, Non-steady state modelling of wheel-rail contact problem, *Vehicle System Dynamics* 51 (2013) 91-108.
- [75] W.F. Hayes, H.G. Tucker, Wheelset-track resonance as a possible source of corrugation wear, *Wear* 144 (1991) 211-226.
- [76] K. Hempelmann, F. Hiss, K. Knothe, B. Ripke, The formation of wear patterns on rail tread, *Wear* 144 (1991) 179-195.

- [77] K. Hempelmann, K. Knothe, An extended linear model for the prediction of short pitch corrugation, *Wear* 191 (1996) 161-169.
- [78] H. Hertz, Über die Berührung fester elastische Körper, *Journal für reine und angewandte Mathematik* 92 (1882) 156-171.
- [79] M. Hiensch, J.C.O. Nielsen, E. Verheijen, Rail corrugation in the Netherlands—measurements and simulations, *Wear* 253 (2002) 140-149.
- [80] A. Igeland, Railhead corrugation growth explained by dynamic interaction between track and bogie wheelsets, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 210 (1996) 11-20.
- [81] A. Igeland, *Dynamic Train/Track Interaction: Simulation of Railhead Corrugation Growth under a Moving Bogie Using Mathematical Models Combined with Full-Scale Measurements*, Ph.D. Thesis, Department of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 1997.
- [82] A. Igeland, H. Ilias, Rail head corrugation growth predictions based on non-linear high frequency vehicle/track interaction, *Wear* 213 (1997) 90-97.
- [83] H. Ilias, K. Knothe, Ein diskret-kontinuierliches Gleismodell unter Einfluss schnell bewegter, harmonisch schwankender Wanderlasten. *Forstschritt-Berichte VDI, Reihe 12, 177* (1992), Düsseldorf: VDI-Verlag.
- [84] H. Ilias, S. Müller, A discrete-continuous track model for the wheelsets rolling over short wavelength sinusoidal rail irregularities, *Vehicle System Dynamics* 23 (1994) 221-233.
- [85] H. Ilias, The influence of railpad stiffness on wheelset/track interaction and corrugation growth, *Journal of Sound and Vibration* 227 (1999) 935-948.
- [86] M. Ishida, T. Moto, M. Takikawa, The effect of lateral creepage force on rail corrugation on low rail at sharp curves, *Wear* 253 (2002) 172-177.
- [87] T. Jendel, Prediction of wheel profile wear—comparisons with field measurements, *Wear* 253 (2002) 89-99.
- [88] X. Jin, X. Xiao, Z. Wen, Z. Zhou, Effect of sleeper pitch on rail corrugation at a tangent track in vehicle hunting, *Wear* 265 (2008) 1163-1175.
- [89] X. Jin, X. Xiao, Z. Wen, J. Guo, M. Zhu, An investigation into the effect of train curving on wear and contact stresses of wheel and rail, *Tribology International* 42 (2009) 475-490.
- [90] X. Jin, Z. Wen, K. Wang, W. Zhang, Effect of a scratch on curved rail on initiation and evolution of rail corrugation, *Tribology International* 37 (2004) 385-394.
- [91] X. Jin, Z. Wen, K. Wang, X. Xiao, Effect of passenger car curving on rail corrugation at a curved track, *Wear* 260 (2006) 619-633.
- [92] X. Jin, Z. Wen, W. Zhang, Z. Shen, Numerical simulation of rail corrugation on a curved track, *Computers and Structures* 83 (2005) 2052-2065.

- [93] X.S. Jin, Z.F. Wen, Effect of discrete track support by sleepers on rail corrugation at a curved track, *Journal of Sound and Vibration* 315 (2008) 279-300.
- [94] X.S. Jin, Z.F. Wen, K.Y. Wang, Effect of track irregularities on initiation and evolution of rail corrugation, *Journal of Sound and Vibration* 285 (2005) 121-148.
- [95] X.S. Jin, Z.F. Wen, K.Y. Wang, Z.R. Zhou, Q.Y. Liu, C.H. Li, Three-dimensional train-track model for study of rail corrugation, *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 830-855.
- [96] A. Johansson, J.C.O. Nielsen, Rail corrugation growth—Influence of powered wheelsets with wheel tread irregularities, *Wear* 262 (2007) 1296-1307.
- [97] K.L. Johnson, *Contact Mechanics*, Cambridge University Press, New York, 1985.
- [98] I. Kaiser, Refining the modelling of vehicle-track interaction, *Vehicle System Dynamics* 50 (2012) 229-243.
- [99] J.J. Kalker, *On the rolling contact of two elastic bodies in the presence of dry friction*, Doctoral Thesis, Delft University of Technology, Delft, The Netherlands, 1967.
- [100] J.J. Kalker, Y. Van Randen, A minimum principle for frictionless elastic contact with application to non-hertzian half-space contact problems, *Journal of Engineering Mathematics* 6 (1972) 193-206.
- [101] J.J. Kalker, Simplified theory of rolling contact, *Delft Progress Report Series C1* 1 (1973) 1-10.
- [102] J.J. Kalker, Survey of wheel-rail rolling contact theory, *Vehicle System Dynamics* 5 (1979) 317-358.
- [103] J.J. Kalker, A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact, *Vehicle System Dynamics* 11 (1982) 1-13.
- [104] J.J. Kalker, *Three-dimensional elastic bodies in rolling contact*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1990.
- [105] J.J. Kalker, Book of tables for the Hertzian creep-force law, *Proceedings of the 2nd Mini Conference on Contact mechanics and Wear of Wheel/Rail Systems*, Budapest (1996) 11-20.
- [106] J. Kalousek, K.L. Johnson, An investigation of short pitch wheel and rail corrugations on the Vancouver mass transit system, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part F: Journal of Rail and Rapid Transit* 206 (1992) 127-135.
- [107] J. Kalousek, S.L. Grassie, Rail corrugation: Causes and Cures, *International Railway Journal* (2000) 24-26.
- [108] K. Knothe, A. Groß-Thebing, Derivation of frequency dependent creep coefficients based on an elastic half-space model, *Vehicle System Dynamics* 15 (1986) 133-153.

- [109] K. Knothe, S.L. Grassie, Modelling of railway track and vehicle/track interaction at high frequencies, *Vehicle System Dynamics* 22 (1993) 209-262.
- [110] K. Knothe, Gleisdynamik and Wechselwirkung zwischen Fahrzeug und Fahrweg, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 79 (1999) 723-737.
- [111] K. Knothe, A. Groß-Thebing, Derivation of frequency dependent creep coefficients based on an elastic half-space model, *Vehicle System Dynamics* 15 (1986) 133-153.
- [112] K. Knothe, A. Groß-Thebing, Short wavelength rail corrugation and non-steady-state contact mechanics, *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 49-66.
- [113] B. Kurzeck, Combined friction induced oscillations of wheelset and track during the curving of metros and their influence on corrugation, *Wear* 271 (2011) 299-310.
- [114] H. Le-The, *Normal und Tangentialspannungsberechnung beim rollenden Kontakt für Rotationskörper mit nichtelliptischen Kontaktflächen*, Tesis Doctoral, Technische Universität Berlin, Berlin, Alemania, 1986.
- [115] D. Lévy, Conception d'un système de mesure et d'analyse de l'usure ondulatoire des rails, *Revue Général des Chemins de Fer* 108 (1989) 51-57.
- [116] J. Li, E. J. Berger, A Boussinesq-Cerruti solution set for constant and linear distribution of normal and tangential load over a triangular area, *Journal of Elasticity* 63 (2001) 137-151.
- [117] J. Li, E. J. Berger, A semi-analytical approach to three-dimensional normal contact problems with friction, *Computational Mechanics* 30 (2003) 310-322.
- [118] Z. Li, *Wheel-rail rolling contact and its application to wear simulation*, Tesis Doctoral, Technical University Delft, Delft, Holanda, 2002.
- [119] Z. Li, X. Zhao, C.Esveld, R. Dollevoet, M. Molodova, An investigation into the causes of squats—Correlation analysis and numerical modelling, *Wear* 265 (2008) 1349-1355.
- [120] Z. Li, R. Dollevoet, M. Molodova, X. Zhao, Squat growth—Some observations and the validation of numerical predictions, *Wear* 271 (2011) 148-157.
- [121] Q.Y. Liu, B. Zhang, Z.R. Zhou, An experimental study of rail corrugation, *Wear* 255 (2003) 1121-1126.
- [122] E.H. Love, *A treatise on the mathematical theory of the elasticity*, Cambridge University Press, 1952.
- [123] H. Love, The stress produced in a semi-infinite solid by pressure on part of the boundary, *Phil. Trans. Roy. Soc. London* A228 (1929) 377.
- [124] M. Lu, G. R. McDowell, The importance of modelling ballast particle shape in the discrete element method, *Granular Matter* 9 (2007) 69-80.
- [125] N.M.M. Maia, J.M.M. Silva, *Theoretical and experimental modal analysis*, Research Studies Press Ltd., Exeter, 1997.

- [126] K. Manabe, A hypothesis on a wavelength fixing mechanism of rail corrugation, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers* 214 (2000) 21-26.
- [127] J. Martínez, *Modelos dinámicos avanzados de ejes ferroviarios*, Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2013.
- [128] J. Martínez-Casas, L. Mazzola, L. Baeza, S. Bruni, Numerical estimation of stresses in railway axles using a train-track interaction model, *International Journal of Fatigue* 47 (2013) 18-30.
- [129] G. T. Mase, R. E. Smelser, G.E. Mase, *Continuum Mechanics for Engineers*, CRC Press, Taylor&Francis Group, 2010.
- [130] A. Matsumoto, Y. Sato, H. Ono, M. Tanimoto, Y. Oka, E. Miyauchi, Formation mechanism and countermeasures of rail corrugation on curved track, *Wear* 253 (2002) 178-184.
- [131] T. Mazilu, Green's functions for analysis of dynamic response of wheel/rail to vertical excitation, *Journal of Sound and Vibration* 306 (2007) 31-58.
- [132] L. Mazzola, Y. Bezin, S. Bruni, Vehicle-Track interaction: MB simulation for track loading limits and damage identification, *ECCOMAS Thematic Conference Multibody Dynamics 2011*, July 4-7 (2011), Bruxelles, Belgium.
- [133] D.J. Mead, A new method of analyzing wave propagation in periodic structures; applications to periodic Timoshenko beams and stiffened plates, *Journal of Sound and Vibration* 104 (1986) 9-27.
- [134] P.A. Meehan, W.J.T. Daniel, T. Campey, Wear-type rail corrugation prediction and prevention, *Proceedings of the Sixth International Conference on Contact Mechanics and Wear in Rail/Wheel Systems (CM2003)*, Gothenburg, Sweden, June 10-13 (2003) 445-454.
- [135] P.A. Meehan, W.J.T. Daniel, T. Campey, Prediction of the growth of wear-type rail corrugation, *Wear* 258 (2005) 1001-1013.
- [136] P.A. Meehan, W.J.T. Daniel, Effects of wheel passing frequency on wear-type corrugations, *Wear* 265 (2008) 1202-1211.
- [137] P.A. Meehan, P.A. Bellette, R.D. Batten, W.J.T. Daniel, R.J. Horwood, A case study of wear-type rail corrugation prediction and control using speed variation, *Journal of Sound and Vibration* 325 (2009) 85-105.
- [138] P.A. Meehan, P.A. Bellette, R. Horwood, "Does God play dice with corrugations?": Environmental effects on growth, *Wear* 314 (2014) 254-260.
- [139] T. Meinders, Modelling of a railway wheelset as a rotating elastic multibody system, *Machine Dynamic Problems*, 20 (1998) 209-219.
- [140] P. Meinke, S. Meinke, Polygonalization of wheel treads caused by static and dynamic unbalances, *Journal of Sound and Vibration* 227(5) (1999) 979-986.
- [141] R. D. Mindlin, Compliance of elastic bodies in contact, *Trans. ASME, Series E, Journal of Applied Mechanics* 16 (1949) 259-268.

- [142] B. Morys, Investigation on vibration in ICE-Wheelsets caused by unbalanced masses at high speeds, *Proceedings of the First ADAMS/Rail users meeting*, Utrecht, 1996.
- [143] B. Morys, Enlargement of out-of-round wheel profiles on high speed trains, *Journal of Sound and Vibration* 227 (1999) 965-978.
- [144] R. Müller, M. Diener, Verschleißerscheinungen an Radlaufflächen von Eisenbahnfahrzeugen, *ZEN+DET Glasers Annalen (Zeitschrift für Eisenbahnwesen und Verkehrstechnik)* 119 (1995) 177-192.
- [145] S. Müller, A linear wheel-track model to predict instability and short pitch corrugation, *Journal of Sound and Vibration* 227(5) (1999) 899-913.
- [146] S. Müller, A linear wheel-rail model to investigate stability and corrugation on straight track, *Wear* 243 (2000) 122-132.
- [147] S. Müller, Numerical simulation of the formation of short pitch corrugation, *Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik* 80 (2000) 53-56.
- [148] J.B. Nielsen, Evolution of rail corrugation predicted with a non-linear wear model, *Journal of Sound and Vibration* 227(5) (1999) 915-933.
- [149] J.C.O. Nielsen, A. Igeland, Vertical dynamic interaction between train and track—influence of wheel and track imperfections, *Journal of Sound and Vibration* 187 (1995) 825-839.
- [150] J.C.O. Nielsen, Numerical prediction of rail roughness growth on tangent railway tracks, *Journal of Sound and Vibration* 267 (2003) 537-548.
- [151] J.C.O. Nielsen, R. Lundén, A. Johansson, T. Vernersson, Train-track interaction and mechanisms of irregular wear on wheel and rail surfaces, *Vehicle System Dynamics* 40 (2003) 3-54.
- [152] J.C.O. Nielsen, J. Oscarsson, Simulation of dynamic train-track interaction with state-dependent track properties, *Journal of Sound and Vibration* 275 (2004) 515-532.
- [153] J.C.O. Nielsen, High-frequency vertical wheel-rail contact forces—Validation of a prediction model by field testing, *Wear* 265 (2008) 1465-1471.
- [154] A. Nordborg, Wheel/rail noise generation due to nonlinear effects and parametric excitation, *Journal of Acoustical Society of America* 111 (2002) 1772-1781.
- [155] K.H. Oostermeijer, Review on short pitch rail corrugation studies, *Wear* 265 (2008) 1231-1237.
- [156] J. Oscarsson, *Dynamic Train-track Interaction: Linear and Non-linear Track Models with Property Scatter*, Ph.D. Thesis, Department of Solid Mechanics, Chalmers University of Technology, Goteborg, Sweden, 2001.
- [157] O. Oyarzabal, J. Gómez, J. Santamaría, E.G. Vadillo, Dynamic optimization of track components to minimize rail corrugation, *Journal of Sound and Vibration* 319 (2009) 904-917.

- [158] O. Oyarzabal, N. Correa, E.G. Vadillo, J. Santamaría, J. Gómez, Modelling rail corrugation with specific-track parameters focusing on ballasted track and slab track, *Vehicle System Dynamics* 49 (2011) 1733-1748.
- [159] G. Pallgen, Unrunde Räder an Eisenbahnfahrzeugen, *Eisenbahningenieur* 49 (1998) 56-60.
- [160] J.P. Pascal, G. Sauvage, The available methods to calculate the wheel/rail forces in non Hertzian contact patches and rail damaging, *Vehicle System Dynamics* 22 (1993) 263-275.
- [161] B. Paul, J. Hashemi, Contact pressures on closely conforming elastic bodies, *Journal of Applied Mechanics* 48 (1981) 543-548.
- [162] A. Pieringer, *Time-domain modelling of high-frequency wheel/rail interaction*, Ph.D. Thesis, Department of Civil and Environmental Engineering, Chalmers University of Technology, Göteborg, Sweden, 2011.
- [163] J. Piotrowski, J. J. Kalker, A non-linear mathematical model for finite, periodic rail corrugations, *The First International Conference on Contact Mechanics*, Computational Mechanics Publication Inc., Southampton, 1993.
- [164] J. Piotrowski, H. Chollet, Wheel-rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact, *Vehicle System Dynamics* 43 (2005) 455-483.
- [165] J. Piotrowski, W. Kik, A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamics, *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 27-48.
- [166] O. Polach, A fast wheel-rail forces calculation computer code, *Vehicle System Dynamics* 33 (1999) 728-739.
- [167] K. Popp, H. Kruse, I. Kaiser, Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range, *Vehicle System Dynamics* 31 (1999) 423-464.
- [168] P.J. Remington, Wheel/Rail rolling noise I: Theoretical analysis, *Journal of Acoustics Soc. Am.* 81 (1987) 1805-1823.
- [169] B. Ripke, K. Knothe, Die unendlich lange Schiene auf diskreten Schwellen bei harmonischer Einzellasterregung, *VDI Fortschritt-Berichte*, Dusseldorf, 1991.
- [170] A. Roda, *Modelo dinámico de la interacción vía-vehículo basado en subestructuración*, Tesis Doctoral, Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales, Universidad Politécnica de Valencia, Valencia, 2006.
- [171] W. Rode, D. Müller, J. Villman, Results of DB AG Investigations "Out-of-Round Wheels", *Proceedings of the Corrugation Symposium-Extended Abstracts*, IFV Bahntechnik, Technische Universität Berlin, Germany, 1997.
- [172] Y. Sato, A. Matsumoto, K. Knothe, Review on rail corrugation studies, *Wear* 253 (2002) 130-139.

- [173] A. Saulot, S. Descartes, D. Desmyter, D. Levy, Y. Berthier, A tribological characterization of the “damage mechanism” of low rail corrugation on sharp curved track, *Wear* 260 (2006) 984-995.
- [174] A. Saulot, S. Descartes, Y. Berthier, Sharp curved track corrugation: From corrugation observed on-site, to corrugation reproduced on simulators, *Tribology International* 42 (2009) 1691-1705.
- [175] G. Saussine, C. Cholet, P.E. Gautier, F. Dubois, C. Bohatier, J.J. Moreau, Modelling ballast behaviour under dynamic loading. Part 1: A 2D polygonal discrete element method approach, *Computational Methods in Applied Mechanical Engineering* 195 (2006) 2841-2859.
- [176] Z.Y. Shen, J.K. Hedrick, J.A. Elkins, A comparison of alternative creep force models for rail vehicle dynamic analysis, *Proceedings of the 8th IAVSD Symposium, Cambridge*, (1983) 591-605.
- [177] Z. Shen, Z. Li, A fast non-steady state creep force model based on the simplified theory, *Wear* 191 (1996) 242-244.
- [178] X. Sheng, C.J.C. Jones, D.J. Thompson, Responses of infinite periodic structures to moving or stationary harmonic loads, *Journal of Sound and Vibration* 282 (2005) 125-149.
- [179] X. Sheng, D.J. Thompson, C.J.C. Jones, G. Xie, S.D. Iwnicki, P. Allen, S.S. Hsu, Simulations of roughness initiation and growth on railway rails, *Journal of Sound and Vibration* 293 (2006) 819-829.
- [180] X. Sheng, D.J. Thompson, C.J.C. Jones, Interactions between a moving wheel and a periodically supported rail, *Proceedings of IOA Spring Conference, Southampton* (2004) 80-91.
- [181] B. Soua, J.P. Pascal, Computation of 3D wear of the wheels in a high speed bogie, Report INRETS-LTN, Arcueil, France, 1995, 40.
- [182] Y. Suda, Effects of vibration system and rolling conditions on the development of corrugations, *Wear* 144 (1991) 227-242.
- [183] Y. Suda, H. Komine, T. Iwasa, Y. Terumichi, Experimental study on mechanism of rail corrugation using corrugation simulator, *Wear* 253 (2002) 162-171.
- [184] Y. Suda, M. Hanawa, M. Okumura, T. Iwasa, Study on rail corrugation in sharp curves of commuter line, *Wear* 253 (2002) 193-198.
- [185] Y.Q. Sun, S. Simson, Nonlinear three-dimensional wagon-track model for the investigation of rail corrugation initiation on curved track, *Vehicle System Dynamics* 45 (2007) 113-132.
- [186] O.J. Svec, G.M.L. Gladwell, An explicit Boussinesq solution for a polynomial distribution of pressure over a triangular region, *Journal of Elasticity* 1 (1971) 167-170.

- [187] T. Szolc, Medium frequency dynamic investigation of the railway wheelset-track system using a discrete-continuous model, *Archive of Applied Mechanics* 68 (1998) 30-45.
- [188] T. Szolc, Simulation of bending-torsional-lateral vibrations of the railway wheelset-track system in the medium frequency range, *Vehicle System Dynamics* 30 (1998) 473-508.
- [189] E. Tassilly, N. Vincent, A linear model for the corrugation of rails, *Journal of Sound and Vibration* 150 (1) (1991) 25-45.
- [190] E. Tassilly, N. Vincent, Rail corrugations: analytical model and field tests, *Wear* 144 (1991) 163-178.
- [191] T. Telliskivi, U. Olofsson, Wheel-rail wear simulation, *Wear* 257 (2004) 1145-1153.
- [192] D.J. Thompson, Wheel-rail noise generation, part V: Inclusion of wheel rotation, *Journal of Sound and Vibration* 161 (1993) 467-482.
- [193] D. Thompson, *Railway Noise and Vibration. Mechanisms, Modelling and Means of Control*, Elsevier Ltd, 2009.
- [194] P.T. Torstensson, J.C.O. Nielsen, Monitoring of rail corrugation growth due to irregular wear on a railway metro curve, *Wear* 267 (2009) 556-561.
- [195] P.T. Torstensson, J.C.O. Nielsen, L. Baeza, Dynamic train-track interaction at high vehicle speeds-Modelling of wheelset dynamics and wheel rotation, *Journal of Sound and Vibration* 330 (2011) 5309-5321.
- [196] P.T. Torstensson, A. Pieringer, J.C.O. Nielsen, Simulation of rail roughness growth on small radius curves using a non-Hertzian and non-steady wheel-rail contact model, *Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems (CM2012)*, Chengdu, China, 2012.
- [197] P.T. Torstensson, M. Schilke, Rail corrugation growth on small radius curves—Measurements and validation of a numerical prediction model, *Wear* 303 (2013) 381-396.
- [198] J.M. Tunna, Wheel/Rail forces due to wheel irregularities, *Proceedings of the 9th International Wheelset Congress*, paper 6-2, Montreal, Canada, 1988.
- [199] M. Tur, R.C. Sáez, F.J. Fuenmayor, Analytic approach to obtain shear traction in a cylindrical contact with reverse slip, *Journal of Strain Analysis for Engineering Design* 39 (2004) 717-727.
- [200] UIC Committee JRP-2, *Atlas of Wheel and Rail Defects*, UIC, Paris, 2004.
- [201] UNE-EN ISO 3095:2005, *Aplicaciones ferroviarias-Acústica-Medición del ruido emitido por vehículos que circulan sobre carriles*, Aenor, 2006.
- [202] UNE-EN 14363:2007, *Aplicaciones ferroviarias. Ensayos para la aceptación del comportamiento dinámico de los vehículos ferroviarios. Ensayos en línea y en parada*, Aenor, 2007.
- [203] E.G. Vadillo, J.A. Tárrago, G. Garate, C. Angulo, Effect of sleeper distance on rail corrugation, *Wear* 217 (1998) 140-146.

- [204] A.Valdivia, A linear dynamic wear model to explain the initiation mechanism of corrugation, *Proceedings of the 10th International Symposium on Dynamics of Vehicle on Roads and Tracks (IAVSD)* (1987) 493-496.
- [205] A. Valdivia, *Die Wechselwirkung zwischen hochfrequenter Rad-Schiene-Dynamik und ungleichförmigen Schienenverschleiß - Ein lineares Modell*, Tesis Doctoral, TU-Berlin, D83, 1988. (Trabajo también publicado en VDI-Fortschrittsbericht, Reihe 12. Nr 93, Dusseldorf, 1988).
- [206] T. Vernersson, Thermally induced roughness of tread braked railway wheels, Part 1: Brake rig experiments and Part 2: Modelling and field measurements, *Wear* 236 (1999) 96-116.
- [207] P.J. Vermeulen, K.L. Johnson, Contact of nonspherical bodies transmitting tangential forces, *Journal of Applied Mechanics* 31 (1964) 338-340.
- [208] P. Vila, A. Rovira, J. Fayos, L. Baeza, Dynamic model of a railway wheelset for corrugation problem analysis, *Noise and Vibration Worldwide* 40 (2009) 10-17.
- [209] P. Vila, J. Fayos, L. Baeza, Simulation of the evolution of rail corrugation using a rotating flexible wheelset model, *Vehicle System Dynamics* 49 (2011) 1749-1769.
- [210] P. Vila, L. Baeza, J. Martínez-Casas, J. Carballeira, Rail corrugation growth accounting for the flexibility and rotation of the wheelset and the non-Hertzian and non-steady-state effects at contact patch, *Vehicle System Dynamics* 52 S1(2014) 92-108.
- [211] G. Vohla, C. Linden, H. Brauchli, Corrugation of railway wheels-a brief presentation of their research on Internet in <http://www.ifm.mavt.ethz.ch/research/rail-4.html>, 1996.
- [212] E.A.H. Vollebregt, Refinement of Kalker's rolling contact model, *Proceedings of the 8th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems (CM2009)*, Firenze, Italia (2009) 1-8.
- [213] E.A.H. Vollebregt, P. Wilders, FASTSIM2: a second-order accurate frictional rolling contact algorithm, *Computational Mechanics* 47 (2011) 105-116.
- [214] E.A.H. Vollebregt, S.D. Iwnicki, G. Xie, P. Shackleton, Assessing the accuracy of different simplified frictional rolling contact mechanics, *Vehicle System Dynamics* 50 (2012) 1-17.
- [215] E.A.H. Vollebregt, 100-fold speed-up of the normal contact problem and other recent developments in CONTACT, *Proceedings of the 9th International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems (CM2012)*, Chengdu, China (2012) 79-86.
- [216] T.T. Vuong, P.A. Meehan, D.T. Eadie, K. Oldknow, D. Elvidge, P.A. Bellette, W.J. Daniel, Investigation of a transitional wear model for wear and wear-type rail corrugation prediction, *Wear* 271 (2011) 287-298.

- [217] T.T. Vuong, P.A. Meehan, Wear transitions in a wear coefficient model, *Wear* 266 (2009) 898-906.
- [218] A. Ward, R. Lewis, R.S. Dwyer-Joyce, Incorporating a railway wheel wear model into multibody simulations of wheelset dynamics, *Proceedings of the 29th Leeds-Lyon Symposium on Tribology*, Lyon, 2002.
- [219] Z. Wen, X. Jin, Effect of track lateral geometry defects on corrugations of curved rails, *Wear* 259 (2005) 1324-1331.
- [220] Z. Wen, X. Jin, X. Xiao, Z. Zhou, Effect of a scratch on curved rail on initiation and evolution of plastic deformation induced rail corrugation, *International Journal of Solids and Structures* 45 (2008) 2077-2096.
- [221] K. Werner, Radriffeln und periodischer Grübchenverschleiß bei Rollstandsversuchen durch Wechselwirkungen mit tonfrequenten Eigenschwingungen und kohärenten Ultraschallfeldern, *AET-Archives für Eisenbahntechnik* 28 (1973) 1-27.
- [222] T.X. Wu, D.J. Thompson, A double Timoshenko beam model for vertical vibration analysis of railway track at high frequencies, *Journal of Sound and Vibration* 224 (1999) 329-348.
- [223] T.X. Wu, D.J. Thompson, Analysis of lateral vibration behaviour of railway track at high frequencies using a continuously supported multiple beam model, *Journal of the Acoustical Society of America* 106 (1999) 1369-1376.
- [224] T.X. Wu, D.J. Thompson, An investigation into rail corrugation due to micro-slip under multiple wheel/rail interactions, *Wear* 258 (2005) 1115-1125.
- [225] T.X. Wu, Parametric excitation of wheel/track system and its effects on rail corrugation, *Wear* 265 (2008) 1176-1182.
- [226] T.X. Wu, Effects on short pitch rail corrugation growth of a rail vibration absorber/ damper, *Wear* 271 (2011) 339-348.
- [227] G. Xie, S.D. Iwnicki, Calculation of wear on a corrugated rail using a three-dimensional contact model, *Wear* 265 (2008) 1238-1248.
- [228] G. Xie, S.D. Iwnicki, Simulation of wear on a rough rail using a time-domain wheel-track interaction model, *Wear* 265 (2008) 1572-1583.
- [229] G. Xie, S.D. Iwnicki, Simulations of roughness growth on rails—results from a 2D non-Hertzian, non-steady contact model, *Vehicle System Dynamics* 46 (2008) 117-128.
- [230] G. Xie, S.D. Iwnicki, A rail roughness growth model for a wheelset with non-steady, non-Hertzian contact, *Vehicle System Dynamics* 48 (2010) 1135-1154.
- [231] M. Zacher, Unrunde Räder und Oberbausteifigkeit, *Eisenbahntechnische Rundschau* 45 (1990) 605-610.
- [232] H. Zhang, W. Liu, W. Liu, Z. Wu, Study on the cause and treatment of rail corrugation for Beijing Metro, *Wear* 317 (2014) 1572-1583.



Esta Tesis ha sido financiada a través de los siguientes proyectos:

Desarrollo de nuevas tecnologías destinadas a reducir el impacto acústico del transporte ferroviario en entornos urbanos (TRA2013-45596-C2-1-R).  
MINISTERIO DE ECONOMÍA Y COMPETITIVIDAD



Desarrollo de técnicas de modelado avanzadas para el estudio de la dinámica de vehículos ferroviarios (TRA2010-15669). MINISTERIO DE CIENCIA E INNOVACIÓN



