

ANEXO 01: SEMEJANZAS EN EL PLANO Y CONJUNTOS FRACTALES DEFINIDOS POR IFS

1.1 Semejanzas del plano.

Una semejanza en el plano afín euclideo es la composición de isometrías (traslaciones, giros o simetrías) y una homotecia.

Las isometrías del plano vectorial euclideo son los giros y las simetrías.

Un **giro** de ángulo α es la aplicación lineal de \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.

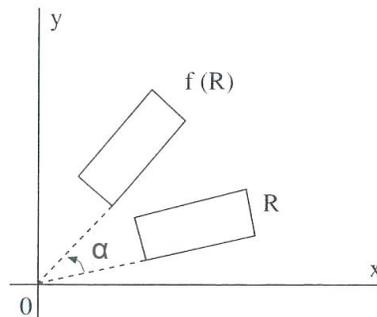


Imagen 84: Giro del ángulo α

DE GUZMÁN, M. (1993) *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Barcelona: Labor

Una **simetría** es la aplicación lineal de \mathbb{R}^2 cuya matriz asociada es del tipo $\begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}$.

En particular, la simetría respecto a la recta generada por $(1, 0)$ tiene por matriz asociada $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

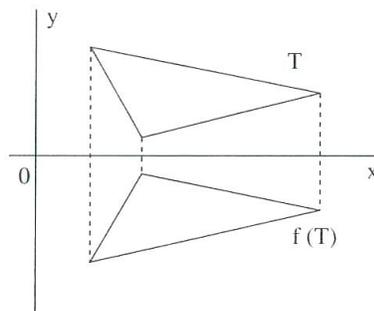


Imagen 84: Simetría respect al eje de abscisas

DE GUZMÁN, M. (1993) *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Barcelona: Labor

Una **homotecia** de razón k en el plano vectorial euclideo es una aplicación lineal cuya matriz asociada es $\begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

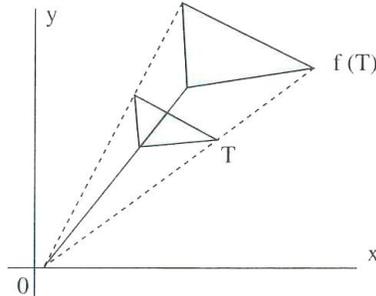


Imagen 86: Homotecia
 DE GUZMÁN, M. (1993) *Estructuras fractales y sus aplicaciones*. Barcelona: Labor

Por tanto, una semejanza f en el plano afín viene dada por una expresión de la forma $f(x, y) = (ax + by + e, cx + dy + f)$, donde $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a la composición de una isometría y una homotecia, siendo (e, f) el vector traslación.

1.2 Algunos conjuntos fractales definidos por IFS

1.2.1 El conjunto de Cantor.

El conjunto de Cantor viene definido por un sistema de dos funciones iteradas definidas en \mathbb{R} .

- f_1 es la homotecia en \mathbb{R} de razón $1/3$ dada por $f_1(x) = x/3$.

- f_2 es la composición de la homotecia en \mathbb{R} de razón $1/3$ y la traslación de vector $2/3$. Viene dada por $f_2(x) = x/3 + 2/3$.

$\{f_1, f_2\}$ es un sistema de funciones iteradas con razón de contractividad $1/3$. Su atractor es el conjunto de Cantor.

Tomando B el segmento $[0, 1]$, $F(B) = f_1(B) \cup f_2(B) = [0, 1/3] \cup [2/3, 1]$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = C$$

1.2.2 La curva de Koch.

El primer paso para la construcción de la curva de Koch consiste en transformar el intervalo $[0, 1]$, en una figura del plano formada por los segmentos OA , AB , BC y CD , siendo los puntos $O = (0, 0)$, $A = (\frac{1}{3}, 0)$, $B = (\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $C = (\frac{2}{3}, 0)$, $D = (1, 0)$. Hemos pasado de un segmento del plano de longitud 1 a cuatro de longitud $1/3$. Esta es la clave para obtener las cuatro funciones por las que viene definida la curva de Koch.

- f_1 es la homotecia del plano de razón $1/3$ definida por:

$$f_1(x, y) = (x/3, y/3).$$

- f_2 es la composición del giro de $\pi/3$ y la homotecia de razón $1/3$ y una traslación de vector $(1/3, 0)$ por lo que viene expresada por:

$$f_2(x, y) = (\frac{1}{6}x - \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{3}, \frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y)$$

- f_3 es la composición de un giro de $5\pi/3$, la homotecia de razón $1/3$ y una traslación de vector $(1/2, \frac{\sqrt{3}}{6})$ por lo que:

$$f_3(x, y) = (\frac{1}{6}x + \frac{\sqrt{3}}{6}y + \frac{1}{2}, -\frac{\sqrt{3}}{6}x + \frac{1}{6}y + \frac{\sqrt{3}}{6})$$

- f_4 es la composición de la homotecia de razón $1/3$ y la traslación de vector $(2/3, 0)$ siendo su expresión:

$$f_4(x, y) = (\frac{1}{3}x + \frac{2}{3}, \frac{1}{3}y)$$

Entonces $\{f_1, f_2, f_3, f_4\}$ es un IFS de razón $1/3$ cuyo atractor es la curva de Koch, es decir que si $B = [0, 1]$ y $F(B) = f_1(B) \cup f_2(B) \cup f_3(B) \cup f_4(B)$, $\lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B) = K$.

1.2.3. El triángulo de Sierpinski.

El triángulo de Sierpinski puede obtenerse a partir de un sistema de funciones iteradas $\{f_1, f_2, f_3\}$ de razón $1/2$.

- f_1 es la homotecia del plano de razón $1/2$ definida por:

$$f_1(x, y) = (\frac{1}{2}x, \frac{1}{2}y)$$

- f_2 es la composición de la homotecia de razón $1/2$ y la traslación de vector $(1/4, \frac{\sqrt{3}}{4})$.

Así pues:

$$f_2(x, y) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}, \frac{1}{2}y + \frac{\sqrt{3}}{4}).$$

- f_3 es la composición de la homotecia de razón $\frac{1}{2}$ y la traslación de vector $(\frac{1}{2}, 0)$ cuya expresión es:

$$f_3(x, y) = \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}y\right)$$

Si B es el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $(1, 0)$, $F(B) = f_1(B) \cup f_2(B) \cup f_3(B)$ es la figura formada por los tres triángulos obtenidos al unir los puntos medios de los lados de B .

Si llamamos T al triángulo de Sierpinski, se tiene que $T = \lim_{n \rightarrow \infty} F^n(B)$.

ANEXO 02: EL CONJUNTO DE JULIA Y DE MANDELBROT

Definición: Dada una aplicación $f: X \rightarrow X$, se dice que x_0 es un punto fijo de f si

$$x_0 = f(x_0).$$

Dado un punto $x_0 \in X$, se llama órbita de x_0 a la sucesión

$$\{f^n(x_0)\}_{n=0}^{\infty} = \{x_0, f(x_0), f^2(x_0), \dots\} \subset X.$$

x_0 es un punto periódico de periodo $n > 1$ si $f^n(x_0) = x_0$ y $f^i(x_0) \neq x_0, \forall i, 1 \leq i < n$.

La órbita de un punto de este tipo se llama órbita periódica de periodo n .

Definición: Dado un sistema dinámico (X, f) , decimos que un punto periódico x_0 es atractivo si la órbita de los puntos próximos a x_0 converge a la órbita de x_0 . Y se dice que x_0 es repulsivo si existen puntos infinitamente cercanos a él cuya órbita se aleja de la órbita de x_0 .

Consideramos la función $f_c: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ definida en la forma $f_c(z) = z^2 + c$, siendo $c \in \mathbb{C}$.

Dado un z_0 inicial, podemos calcular $z_1 = f_c(z_0)$, $z_2 = f_c(z_1) = f_c(f_c(z_0))$, $z_3 = f_c(z_2)$, ...,

$$z_{n+1} = f_c(z_n), \dots$$

Definición: Se llama órbita de z_0 para la función f_c a la sucesión $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$.

Julia y Fatou estudiaron el comportamiento de la órbita de cualquier punto de \mathbb{C} para la función f_c .

Por ejemplo la órbita de 0 para f_c sería $\{0, c, c^2 + c, (c^2 + c)^2 + c, \dots, f_c^n(0), \dots\}$

Definición: Dada una aplicación $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$, se define el **conjunto de Julia** asociado a f , $J(f)$, como el cierre de sus puntos periódicos repulsivos.

$J(f_c)$ es el conjunto de Julia asociado a la función cuadrática definida anteriormente.

Teorema: El conjunto de Julia para la función cuadrática $f_c(z) = z^2 + c$, $c = c_1 + c_2i$, es el atractor del sistema de funciones iteradas $\{g_1, g_2\}$ donde

$g_1(x, y) = (a, b)$, $g_2(x, y) = (-a, -b)$ siendo

$$a = \left(\frac{x - c_1 + \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$b = \left(\frac{-x + c_1 + \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ si } y \geq c_2$$

$$b = - \left(\frac{-x + c_1 + \sqrt{(x - c_1)^2 + (y - c_2)^2}}{2} \right)^{\frac{1}{2}}, \text{ si } y < c_2.$$

Entonces si $K \subset \mathbb{C}$ y $G(K) = g_1(K) \cup g_2(K)$, $J(f_c) = \lim_{n \rightarrow \infty} G^n(K)$.

Definición: **El conjunto de Mandelbrot** es el conjunto de los puntos $c \in \mathbb{C}$ para los que la órbita de 0 para f_c no diverge a infinito.

Nota: Una órbita para la función $f_c(z) = z^2 + c$ diverge a ∞ si y solo si algún punto de la órbita tiene módulo ≥ 2 . Por tanto, el conjunto de Mandelbrot es el conjunto de puntos c para los que ningún punto de la órbita de 0 tenga módulo ≥ 2 .

Se puede afirmar que, si $\forall i \in [1, n], |f_c^i(0)| < 2$, para $n \geq 1000$, la órbita no diverge.