

UNIVERSIDAD POLITECNICA DE VALENCIA.

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA CARTOGRÁFICA,  
GEODESIA Y FOTOGRAMETRÍA.

---



## TESIS DOCTORAL

APORTACIÓN AL PROBLEMA GENERAL DE  
REDES LOCALES DE ALTA PRECISIÓN:  
CONDICIONANTES ESPECÍFICOS DE FIJACIÓN DE  
CRITERIOS TEORICOS Y PRÁCTICOS, DE  
CALIFICACIÓN DE PARÁMETROS INTERMEDIOS  
Y RESULTADOS FINALES.

**AUTOR:**

Dña. ANA BELÉN ANQUELA JULIAN

**DIRECTORES:**

Dr. D. MANUEL CHUECA PAZOS.  
Dr. D. JOSE LUIS BERNÉ VALERO

---

Valencia a 23 de febrero de 2001

*A Angel y a mi familia.*

## **AGRADECIMIENTOS.**

En primer lugar quiero agradecer a mis dos tutores D. Manuel Chueca Pazos y D. José Luis Berné Valero toda su ayuda y atención prestada. Gracias por guiarme y resolver todas las cuestiones que a lo largo del tiempo que me ha llevado abordar esta tesis doctoral, me habéis resuelto.

Gracias a Sergio Baselga por su ayuda en la elaboración de la aplicación informática, y por corregirme esos pequeños fallos que siempre se escapan en las aplicaciones prácticas.

Gracias a mi compañera Caren Femenia por prestarme una de las observaciones realizadas en la campaña de Gestalgar, que he utilizado en el segundo anexo de esta tesis doctoral.

Gracias a Angel Martín por tu ayuda, apoyo y cariño.

Y gracias a todas aquellas personas que de una forma u otra habéis contribuido a que esta tesis salga a la luz.

## RESUMEN.

Al diseñar, observar y calcular una Red Local de Alta precisión, cualquiera que sea su objetivo, se plantea siempre el problema de la fiabilidad de los datos, parámetros intermedios y resultados finales.

La tendencia en el momento presente es que la exigencia en rigor y precisión, y en definitiva, de calidad, crezca y crezca.

El concepto de precisión es fundamental en cualquier trabajo geodésica, y junto al de fiabilidad y costo, definen los tres parámetros fundamentales en cualquier actuación geodésica. [Nuñez et. al. 1991].

Se puede definir la fiabilidad como la capacidad de la red para detectar errores groseros en las observaciones. [Nuñez et. al. 1991].

Por tanto es necesario revisar los conceptos de figuras de error y algoritmos de cálculo. En ellos, incluso los redondeos practicados al realizar sucesivas operaciones aritméticas por el ordenador que se trate, tienen una importancia notable y no es indiferente la utilización de uno u otro equipo de los disponibles en el mercado.

En esta de tesis se tratará, como ejemplo de lo expuesto, al resolver un sistema de ecuaciones por mínimos cuadrados  $Ax - K = R$ , (sabiendo que A es la matriz de diseño, K el vector de los términos independientes, y R el vector de los residuos), ya sea como red ligada o como red libre, nos podemos encontrar con que la matriz  $S = A^T P A$  sea altamente sensible a cualquier operación de redondeo, resultando importantes discrepancias sobre el vector solución de las incógnitas X.

En general, la sensibilidad detectada es inevitable y puede suponer un serio inconveniente en la obtención de resultados fiables en redes que requieran altos niveles de rigor y precisión, como es el caso del control de deformaciones.

Sin embargo, antes de tomar la decisión extrema de repetir la observación, probablemente con nueva metodología e incluso, cambio de instrumentación, pueden intentarse mejorar la situación aplicando algún otro nuevo artificio de cálculo.

Así pues debemos tener en cuenta los siguientes aspectos:

4Cotas de error en S y  $b=A^T P K$

4Alternativas en la inversión de matrices.

4Consideración de toda la información disponible en las matrices varianza covarianza a través de nuevas figuras de error.

4Asociación de figuras de error también sobre los observables.

4Generación de Sistemas de ecuaciones lineales con matrices de diseño exacto que evitan los indeseables errores de redondeo.

A todo esto se dedicará la tesis titulada *“Aportación al problema general de las Redes Locales de Alta precisión: condicionantes específicos de fijación de criterios teóricos y prácticos, de calificación de parámetros intermedios y resultados finales”*.

## SUMMARY.

The present investigation deals with the reliability of the data, intermediate parameters and final results concerning the design, observation and computation of a local high precision network.

Nowadays precision, rigour, quality definitively is highly demanded.

Precision concept is fundamental in any geodetic work and, joined with reliability and cost, define the three fundamental parameters in any geodetic action (Nuñez et al. 1991).

It can be defined reliability as the capacity of a network to detect gross errors in the observations. (Nuñez et al. 1991).

So it is necessary to check the error figures and computation algorithms, included the numerical rounding errors introduced by the successive arithmetic operations of the computer, which play an important role.

An important part of the investigation is devoted to the resolution of a least-squares equations system as an example  $Ax-K=R$  (where A is the design matrix, K the independent terms vector and R the residuals vector), both free network or tie, where it can be found that the matrix  $S=A^T P A$  is highly sensitive to any rounding operation, resulting in a great discrepancies in the solution vector of the unknowns X.

This sensibility is inevitable and could become a grave inconvenient in the final results of a network with highly levels of precision and rigour demanded, such as deforming networks.

However, before to decide the observation repetition, probably with a new methodology and another instrumentation, we can improve the situation with some new calculation procedure.

Main topics of the investigation are:

- Error boundaries in S and  $b=A^T P K$ .
- Matrix inverse alternatives.
- Consideration about all the information available in the covariance matrix through a new error figures.
- Error figures about observables.
- Lineal system equations generation with exact design matrices which avoid the rounding errors.

These are the principal aspects to be treated in the present investigation entitled: "Contribution to the high precision local networks general problem: specific theoretician and practical conditions of judgement, intermediate parameters qualifications and final results".

## RESUM

A l' hora de dissenyar, observar i calcular una xarxa local d'alta precisió, qualsevol que sigui el seu objectiu, es planteja sempre el problema de la fiabilitat de les dades, paràmetres intermedis i resultats finals.

La tendència actual és que l'exigència en rigor i precisió, i, en definitiva, de qualitat, augmenti i augmenti.

El concepte de precisió es fonamental a qualsevol treball de geodèsia, i juntament amb la fiabilitat i cost, defineixen els tres paràmetres fonamentals per a qualsevol actuació geodèsica (Nuñez et al. 1991).

Es pot definir fiabilitat com a la capacitat d'una xarxa per detectar errors grollers a les observacions (Nuñez et al. 1991).

Per tant és necessari revisar els conceptes de figures d'error i algorismes de càlcul. En ells, inclús els redondejos practicats al realitzar successives operacions aritmètiques per l'ordinador que siga, tenen una importància notable i no es indiferent l'utilització d'un o d'altre equip dels disponibles en el mercat.

Aquesta tesi tractarà, com a exemple de l'exposat, la resolució d'un sistema d'equacions per mínims quadrats  $Ax-K=R$  (éssent  $A$  la matriu de disseny,  $K$  el vector dels termes independents i  $R$  el vector dels residus), ja sigui com a xarxa ligada o com a xarxa lliure, on ens podem trobar que la matriu  $S=A^T P A$  sigui altament sensible a qualsevol operació de redondeig, resultant importants discrepàncies sobre el vector solució de les incògnites  $X$ .

Normalment, la sensibilitat detectada és inevitable i pot suposar un seriós inconvenient sobre l'obtenció dels resultats finals sobre xarxes que requereixin alts nivells de rigor i precisió, com es el cas del control de deformacions.

Tanmateix, abans de pendre la decisió de repetir les observacions, probablement amb nova metodologia e inclús, amb canvi d'instrumentació, es pot intentar millorar la situació aplicant algun artifici de càlcul.

Així doncs, s'han de tenir en compte els següents aspectes:

- Cotes d'error sobre  $S$  i  $b=A^T P K$ .
- Alternatives a l'inversió de les matrius.
- Consideració de tota l'informació disponible sobre les matrius variança-covariança mitjançant noves figures d'error.
- Associació de figures d'error també sobre els observables.
- Generació de Sistemes d'equacions lineals amb matrius de disseny exacte que evitin els indesitjables errors de redondeig.

A tot això es dedicarà la tesis: “Aportació al problema general de les xarxes locals d’alta precisió: condicionants específics de fixació de criteris teòrics i pràctics, de qualificació de paràmetres intermedis i resultats finals”.

## ÍNDICE

<b>1 INTRODUCCIÓN.</b>	1
<b>2 OBJETIVOS.</b>	3
<b>3 MARCO DE REFERENCIA HISTÓRICO.</b>	5
<b>4 ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL VECTOR <math>\mathbf{b}</math> Y LAS MATRICES <math>\mathbf{S}</math> Y <math>\mathbf{S}^+</math> SOBRE EL VECTOR DE LAS INCÓGNITAS <math>\mathbf{X}</math></b>	12
4.1 Normas vectoriales.....	12
4.1.1 Aplicación de la norma vectorial.....	14
4.2 Normas matriciales.....	17
4.2.1 Aplicación de la norma matricial.....	21
4.3 Estudio particular del vector $\mathbf{b}$ y su influencia en $\mathbf{X}$ .....	27
4.3.1 Caso determinista.....	27
4.3.2 Caso red libre.....	35
4.4 Estudio particular de la matriz de diseño $\mathbf{S}$ y su influencia en el vector $\mathbf{X}$	37
4.5 Estudio particular de la matriz $\mathbf{S}^{-1}$ y su influencia sobre el vector $\mathbf{X}$ .....	40
<b>5 ACCESO A LOS MEJORES RESULTADOS.</b>	
<b>MÉTODO DE APROXIMACIÓN ITERATIVA</b>	42
5.1 Caso determinístico.....	43
5.1.1 Primera aplicación a las series.....	43
5.1.2 Segunda aplicación a las series de Neumann.....	46
5.1.3 Aplicación del algoritmo de las series de Neumann.....	48
5.2 Caso Redes libres.....	51
5.2.1 Consideraciones previas.....	51
5.2.2 Sobre las diferentes soluciones coincidentes con la “pseudoinversa” en una red genérica. Extensión a las Redes de	



Neumann.....	54
5.2.2 Estudio complementario de la matriz (I-S).....	62
5.3 Aplicación de la teoría de las series de Neumann sobre una red.....	65
5.3.1 Introducción.....	65
5.3.2 Descripción de la red.....	65
5.3.3 Compensación planimétrica empleando el método tradicional	66
5.3.3.1 Caso red libre.....	66
5.3.3.1.Caso red ligada.....	71
5.3.4 Compensación planimétricaa empleando el algoritmo de las series de Neumann.....	73
5.3.4.1 Caso red libre.....	73
5.3.4.1.1. Caso del sumatorio llevado al límite.....	73
5.3.4.1.2 Estudio de las series de Neumann para diversos términos del sumatorio.....	83
5.3.4.2 Caso red ligada.....	86
5.3.5 Estudio de los resultados obtenidos.....	88
<b>6 AMPLIACIÓN SOBRE FIGURAS DE ERROR EN REDES LIBRES Y LIGADAS</b>	
<b>LIGADAS</b>	97
6.1 Fundamentos teóricos.....	97
6.2 Fundamentos de aplicación.....	102
6.3 Interpretación geométrica.....	106
6.4 Sección del recinto de incertidumbre por sus planos coordenados.....	109
6.5 Proyección del recinto de incertidumbre por sus planos coordenados.....	115
6.6 Proyección de las secciones principales del recinto de incertidumbre sobre los planos coordenados.....	117
6.7 Algoritmo de cálculo.....	121
6.7.1 Determinación de una elipse en función de dos diámetros conjugados..	125
6.8 Aplicación práctica.....	128

---

<b>7 SOBRE EL HIPERELIPSOIDE DE OBSERVABLES. AVANCCES EN RECINTOS DE ERROR Y TEST DE CONTROL DE REDES</b>	141
7.1 Aplicación al cálculo de hiperelipsoides de observables sobre diferentes redes.....	153
<b>8 APLICACIÓN DE UNA MATRIZ DE DISEÑO DE ELEMENTOS EXACTOS</b>	169
8.1 Introducción.....	169
8.2 Preparación de los datos.....	169
8.3 Cálculo de $\delta S$ .....	171
8.4 Cálculo de $\delta b$ .....	172
8.5 Cálculo de $\delta A$ .....	173
8.5.1 Ejemplo de aplicación.....	175
8.6 Cálculo de $\delta K$ .....	181
8.7 Aplicación de cálculo de las matrices $\delta b$ y $\delta S$ sobre una red.....	183
8.8 Aplicación de una matriz de diseño de elementos exactos.....	189
8.8.1 Ejemplo de aplicación.....	191
<b>9 CONCLUSIONES</b>	204
<b>10 REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	206
<b>ANEXO 1</b>	209
<b>ANEXO 2</b>	227

## 1.- INTRODUCCIÓN.

Siguiendo el objetivo de valorar el problema de la fiabilidad de los datos, parámetros intermedios y resultados finales en una red local de alta precisión, se ha estructurado esta tesis doctoral en cinco grandes bloques o apartados.

Durante el primer capítulo se va a desarrollar y valorar, la influencia que tienen sobre el vector de las incógnitas  $x$ , los vectores y las matrices  $b = A^T P K$ ,  $S = A^T P A$  y  $S^+$  en el modelo matemático linealizado de mínimos cuadrados:

$$Ax - K = R$$

En este capítulo se verá la importancia que tiene el error de redondeo en el proceso del cálculo de la inversa de la matriz  $S$ , por tanto, en el segundo capítulo se propone una forma alternativa a la inversión de matrices en el ajuste de Redes Locales por mínimos cuadrados. Esta forma alternativa es la aplicación de la serie de Neumann, con la importante aportación a la compensación de Redes, de la aplicación de estas series sobre matrices de rango incompleto, característica principal de las matrices de diseño que se dan en la compensación de Redes libres.

El tercer capítulo de la tesis trata sobre la ampliación de las figuras de error en redes libres y ligadas. Hasta ahora, en la interpretación de la precisión de los resultados obtenidos tras la compensación de una red, se utilizaba la banda central de la matriz varianza covarianza de las correcciones a las coordenadas, desechando toda la información del resto de la matriz. Es interesante, generar una figura de error conjunta para la Red, que llamaremos hiperelipsoide o hipercilindro de error, según tratemos redes ligadas o libres, como ya se verá en el tercer capítulo.

El cuarto capítulo de esta tesis desarrolla las figuras de error en los observables, permitiendo establecer unos nuevos test de control de Redes, e incluso calcular unos errores en los observables que nos servirán para el cálculo de unos nuevos pesos en próximos ajustes.

Ya por último, y últimamente ligado con el primer capítulo de la tesis, se aplicará al ajuste, una matriz de diseño de elementos exactos, eso está justificado por la existencia de importantes errores en la aproximación de coeficientes de la matriz de diseño  $A$  del método convencional.

Paralelamente a la exposición teórica de cada uno de estos capítulos, se ha ido aplicando progresivamente, todo lo desarrollado sobre un ejemplo práctico.

En esta Tesis doctoral, se incluye dos anexos.

El primero describe la aplicación informática Red-Top, programa que calcula todo lo desarrollado en esta tesis.

El programa informático Red-Top fue iniciado a través de un proyecto final de carrera de la Titulación de Ingeniero en Geodesia y Cartografía realizado por D.

Antonio Martínez , y dirigido por los doctores D. Manuel Chueca Pazos, y D. José Luis Berné Valero, ambos Directores de esta tesis Doctoral. Este programa en su versión inicial, llamada min-cu, calculaba redes locales por mínimos cuadrados, tanto para aquellas que tenían rango completo como para las que no, empleando diferente cálculo numérico. También resolvía los problemas de diseño.

La actual versión del programa, ampliamente optimizado y completado con todo lo que en esta tesis doctoral se desarrolla, ha sido realizada por el Ingeniero en Geodesia y Cartografía D. Sergio Baselga, por uno de los Directores de esta Tesis Doctoral D. José Luis Berné Valero, y por mi misma.

En el segundo anexo de esta tesis, se aplica sobre una Red Local toda la teoría expuesta, empleando la aplicación informática antes señalada.

La línea de investigación que se desarrolla en esta memoria de tesis doctoral, se complementará con la adición al ajuste de observables GPS, cuestión en la que actualmente ya se está trabajando, a través de la futura tesis Doctoral de D. Sergio Baselga, y tutorizada por los mismos Doctores que dirigen esta tesis doctoral.

## 2.- OBJETIVOS.

El Objetivo fundamental de la tesis, es establecer todos los parámetros necesarios, en todas las fases del ajuste, para afirmar que una red es de precisión.

Según este objetivo fundamental, se estructura esta tesis doctoral en los siguientes apartados cuyos objetivos se exponen a continuación:

### I. Estudio de la influencia del vector $b$ , y las matrices $S$ y $S^+$ sobre el vector de la incógnitas $x$ .

Partiremos del modelo matemático linealizado de observaciones indirectas:

$$Ax - K = R$$

Para llegar a la solución mínimo cuadrática:

$$x = (A^T P A)^+ A^T P K$$

$$X = S^+ b$$

Cuando construimos este sistema de ecuaciones, y realizamos una serie de operaciones matemáticas para llegar a su solución, cometemos unos errores que es preciso valorar. El objetivo de este apartado es precisamente cuantificar como influye todo esto sobre el vector solución del sistema.

### II. Acceso a los mejores resultados. Método de la aproximación iterativa.

En el apartado anterior, se intuye como en el proceso de inversión o de pseudoinversión de matrices, se realiza un gran número de operaciones matemáticas que afectan en gran medida a la solución del sistema. En este apartado se propone un método de inversión de matrices consistente en un sumatorio de términos, cuyo objetivo es poder reducir la influencia de error en el proceso de inversión de matrices sobre el vector solución del sistema.

### III. Ampliación sobre figuras de error en redes libres y ligadas.

Hasta ahora, para hablar de la precisión obtenida en las coordenadas de los puntos, se recurría al cálculo de las elipses de error sobre los mismos.

En el cálculo de las elipses de error, como todos sabemos solo interviene la banda central de la matriz varianza covarianza de las correcciones a las coordenadas, obviando el resto de elementos de dicha matriz.

En este apartado se desarrollan unas nuevas figuras de error, tanto para redes libres como para redes ligadas, donde se tiene en cuenta todos los elementos de esta matriz, y cuyo objetivo fundamental no es otro que el de ayudar a

discernir entre alternativas distintas, y elegir y desarrollar la más adecuada en cualquier Red Local.

**IV. Desarrollo de los hiperelipsoides de observables.**

En este bloque se propone una forma de cálculo de error sobre los observables, error cuyo objetivo será el de calcular unos nuevos pesos que nos ayudarán a mejorar los resultados del ajuste.

**V. Aplicación de una matriz de diseño de elementos exactos.**

Como conclusión de todo lo expuestos anteriormente, en este bloque se propone la aplicación de una matriz de diseño de elementos exactos, cuyo objetivo es anular los errores producidos en el cálculo de una matriz de diseño tradicional, compuesta por ecuaciones de ángulo y de distancia, y por lo tanto, reducir la influencia de los errores de S sobre el vector de soluciones.

Paralelamente, también se introduce la mejora en la facilidad de compensación de redes mezclando observables de planimetría y altimetría, e incluso G.P.S.

### **3.- MARCO DE REFERENCIA HISTORICO.**

En la historia de la ciencia, quizás fue Aristóteles el primer hombre que se aproximó al concepto de aleatoriedad. En su *Metafísica*, considera el azar como “algo” que a partir de pequeñas causas produce distintos efectos.

El primer intento de aplicar los principios más elementales usados en el método de mínimos cuadrados, fue realizado por Tycho Brahe en 1582, el cual hizo una serie de observaciones para tratar de determinar la ascensión recta de la estrella  $\alpha$ -Arietis.

Repitió estas observaciones en los seis años siguientes y agrupó los resultados en parejas, de tal forma que un valor se refería a una observación del planeta Venus al este del sol y otro valor al oeste. Con esto, y por otros caminos, Tycho Brahe esperaba eliminar los errores debidos a la refracción y paralaje.

El resultado mejoró bastante hasta ser muy preciso. Según un cálculo reciente, el error probable de la media fue de  $\pm 6''$  y el valor final de la ascensión recta a finales de 1585 tenía sólo unos  $15''$  de diferencia con un valor obtenido en un cálculo moderno de la ascensión recta en aquella época.

Algunos principios similares a los empleados por Tycho Brahe, se aplicaron en la expedición a Laponia entre 1736 y 1736 para determinar las dimensiones de la Tierra y especialmente su achatamiento. Clarke en su libro "Geodesy" (1880) informó que cada observador hizo sus propias observaciones de los ángulos para después tomar el valor medio de estas observaciones para el ángulo.

Durante el Renacimiento Italiano se recibe un gran impulso en el estudio de fenómenos aleatorios. Por un lado el desarrollo del comercio obligó a la cualificación del riesgo asociado a los viajes, pérdidas de mercancías etc.

El siguiente paso en el desarrollo del método de mínimos cuadrados, llegó en 1748, cuando Euler escribió en un artículo sobre las diferencias en los movimientos de Saturno y Júpiter, que intentaba determinar una serie de incógnitas a partir de un cierto número de observaciones, mayor que el mínimo necesario, para obtener una solución única.

$$n^{\circ} \text{ observaciones} > n^{\circ} \text{ observaciones necesarias}$$

Los siguientes desarrollos tuvieron lugar nueve años después, cuando Simpson escribió un artículo llamado "Ensayo para mostrar las ventajas de tomar la media de un número de observaciones en astronomía". En realidad fue el primero en introducir el concepto de distribución de los errores (simétrica y finita en su rango), la cual fue más tarde ampliada para incluir el concepto de distribución continua.

En 1765 Lambert, y Boscovich, en 1770, intentaron desarrollar un método para conseguir los mejores valores de una cantidad desconocida a partir de un exceso

de observaciones. Utilizaron este método para determinar el centro de masas de una lámina. Su teoría se basaba en la proposición de que las incógnitas debían ser determinadas de tal manera que la suma de los valores absolutos de los errores cometidos fuera mínima.

En 1774, Laplace, estableció su principio, aplicándolo para calcular correcciones a una serie de observaciones que realizó para la determinación de las dimensiones terrestres, a partir dos o más observaciones de arcos de meridiano. Este principio basaba en dos proposiciones:

- ..
- 1) La suma de todos los errores cometidos ha de ser igual a cero
  - 2) La suma de los valores absolutos de los errores cometidos es mínima

Comenzando con  $n$  ecuaciones de observación e incógnitas  $h$  ( $n > h$ ), aplicó sus dos proposiciones para reducir las ecuaciones a  $h$  ecuaciones, a partir de las cuales se podrían calcular: las incógnitas. La teoría de este método se publicó en *Traité de mecanique celeste*.

Laplace también desarrolló la teoría de probabilidades y escribió una expresión para la integral de probabilidad(1812) la cual entraba en contradicción con su segunda proposición.

Más tarde, Gauss reconoció el mérito de Laplace con su descubrimiento de la integral de la probabilidad pero le criticó su segunda proposición ,y en particular haber hecho mínima la suma de los valores absolutos de los errores y no los cuadrados (principio de mínimos cuadrados definitivo) .

Al mismo tiempo, Lagrange hizo un estudio de los errores en las observaciones, basados en la teoría de probabilidades (1770) .

De todos los investigadores que buscaban un método para estimar los mejores valores de las incógnitas a partir de un determinado número de observables redundantes, Carl Friedrich Gauss debe ser considerado como uno de los más grandes.

Nació en Brunswick el 30 de Abril de 1777. A los 15 años comenzó a estudiar los trabajos de Newton, Euler y Lagrange. En 1794, durante su último año en Brunswick, y un año antes de inscribirse en la Universidad de Göttingen, descubrió lo que es conocido como el método de los mínimos cuadrados. La oportunidad de aplicar su teoría vino el 1 de Enero de 1801, cuando Piazzi descubrió el planeta Ceres.

Piazzi, observó el planeta durante 41 días. Gauss, al mismo tiempo, aplicó su nuevo método en la determinación de los parámetros de la órbita de este planeta recién descubierto.

Gauss predijo la posición que tendría este planeta en Diciembre de ese mismo año. Concretamente el 7 de diciembre, el astrónomo Zach redescubrió el planeta y publicó que la precisión de la posición fue “maravillosamente precisa”.



Después del descubrimiento de Ceres varios astrónomos propusieron a Gauss que publicara el método utilizado en sus cálculos.

Este, en 1809, criticó en su libro *Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium*, la segunda proposición Laplace y explicó porque rechazaba esta hipótesis. Pero no fue hasta 1826 cuando expuso el desarrollo completo de su método en *Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, societati regiae exhibita*.

Desde el punto de vista práctico, Gauss había ya descubierto el método de los mínimos cuadrados en 1795, y había desarrollado su teoría en 1798. Es curioso constatar que no dio, en principio, gran importancia a su descubrimiento, que a su mente privilegiada aparecía entonces como una regla casi evidente, esto explica que tardara más de diez años en publicarlo. Dunnington, en su libro *Carl Friedrich Gauss: Titan of Science*, dice al respecto:

“Originalmente, Gauss no concedió gran importancia al método de los mínimos cuadrados, sentía que era tan natural que forzosamente tenía que haber sido empleado por muchos de los que estaban involucrados en cálculos numéricos. Decía con frecuencia que hubiera sido capaz de apostar que anteriormente Tobías Mayer (1723-1762) lo había utilizado en sus cálculos. Más tarde descubrió, al examinar los papeles de Mayer, que hubiera perdido esa apuesta”.

El retraso de Gauss en publicar su teoría permitió a Legendre ser el primero en imprimir su trabajo (1806), con el nombre: *"Nuevos métodos para la determinación de las órbitas de los cometas"* y un apéndice *"Sobre el método de mínimos cuadrados"*.

Legendre, en 1805, mostró ya que el principio de la media aritmética, entonces en uso con el carácter de una norma útil y necesaria, era solo un caso particular de los mínimos cuadrados. Expuso entonces, por primera vez desde el punto de vista pragmático los fundamentos del método, que nació como una especie de regla de oro, para el imprescindible ajuste de observaciones discordantes. La inconsistencia del conjunto de datos observados se ponía de manifiesto mediante simples funciones lineales de los residuos, o diferencias entre cada medida y el valor único que se buscaba.

El caso más sencillo, de donde surgió el método, era el ajuste de una serie de observaciones mediante una recta de regresión. Entonces los requerimientos prácticos de encontrar una solución general, única, y de facilidad de cálculo, conducían naturalmente a minimizar la suma de los cuadrados de dichos residuos. En los razonamientos de Legendre no se recurría en ningún momento a los conceptos de probabilidad, sino más bien a requerimientos necesarios. La ley normal de Gauss no había sido todavía enunciada.

Respecto a la evolución histórica de las distribuciones, hay que señalar que la distribución normal fue obtenida en 1733 por De Moivre como aproximación para la distribución binomial.

De Moivre, francés residente en Inglaterra, enunció en 1733 un teorema de aproximación de la distribución normal mediante una binomial, dando origen a toda una serie de resultados conocidos con el nombre genérico de *Teoremas de límite*, cuyo planteamiento y resolución más general ha sido realizado en el siglo XX. gracias a los matemáticos A. Kolmogorov y B. De Finetti, ruso e italiano respectivamente. Newton y Dálambert, en el siglo. XVIII, contribuyeron al desarrollo el cálculo de Probabilidades.

Además de la distribución normal, los modernos métodos de mínimos Cuadrados utilizan otras distribuciones como la Chi-cuadrado o la t-Student.

Durante unos años, la distribución Chi-Cuadrado fue atribuida a Helmer, quien la empleó en 1876, pero actualmente se conoce que fue empleada previamente por Ernst Abbe, quien la incluyó en su tesis presentada en la Universidad de Jena en 1863.

La distribución T de Student fue obtenida por Gosset hacia 1900, el cual escribía con el seudónimo de Student todos sus trabajos. Esta distribución se aplica para la determinación de la desviación estándar de una muestra elegida de una población que sigue una distribución normal, cuando el número de valores de la muestra es tan pequeño como se quiera (al menos uno más del mínimo necesario); es la teoría de pequeñas muestras.

Otro desarrollo importante en el método mínimos cuadrados fue el descubrimiento de la correlación en 1877, atribuida a Francis Galton (relación que existe entre las observaciones). Por ejemplo, si se observan las direcciones de tres visuales provenientes de una estación, en el círculo horizontal de un teodolito, y los dos ángulos que se forman entre los tres rayos, se demuestra que esos dos ángulos están correlados matemáticamente. Si éstos ángulos fueran considerados como incorrelados en los cálculos, los resultados podrían ser erróneos.

En los últimos años del siglo XVIII, Lagrange escribió varias memorias, ordenando y generalizando numerosos resultados de la teoría de la Probabilidad, hasta que surge la figura del matemático francés, marqués de Laplace. Sus aportaciones a la mecánica clásica, Astronomía, Física y análisis matemático son notables, y su obra "*Theorie Analytique des Probabilités*" es considerada como la mayor aportación realizada por un solo hombre a la ciencia estadística. Con él nace el cálculo de probabilidades moderno. Laplace estudia también la Teoría de errores, y desarrolla rigurosamente el método de estimación mínimo cuadrático empleado unos años antes por Legendre y Gauss.

En sus investigaciones sobre la "*teoría de la Estimación*", se cercó al concepto de "suficiencia", siguiendo una línea de trabajo similar a la utilizada por Fisher un siglo más tarde.

El siglo XIX fue fértil en cuanto al desarrollo de la estadística, a pesar de los trabajos de distintos investigadores como Poisson, Quetelet (considerado como el fundador de la Estadística moderna y de la utilización del cálculo de probabilidades en

la Estadística), Cournot y otros, fueron oscurecidos por el “príncipe de las matemáticas”, el alemán Karl F. Gauss, que ocupa un lugar central en la historia de las matemáticas. También en estos años se desarrolla la Estadística Bayesiana.

La Escuela de matemáticos rusa proporcionó nombres de primera fila que contribuyeron al desarrollo de la Teoría de la probabilidad y de procesos Estocásticos: Chebyshev, Liapunov, Markov, etc.

En cuanto a los avances en cálculo numérico tenemos la factorización de Cholesky, desarrollada por André Louis Cholesky (1875-1918), comandante del ejército Francés de la época, durante la ocupación internacional de Creta entre 1906 y 1909. La utilizó por primera vez en unos trabajos sobre estudios geodésicos para calcular la solución de problemas de ajustes por mínimos cuadrados.

Uno de los avances, más importantes en el desarrollo más reciente de los mínimos cuadrados fue la introducción de matrices en los cálculos.

Aunque las matrices se conocían desde 1857, hasta 1934 no fueron aplicadas en esta teoría (A. C. Aitkan)

El método mínimos cuadrados era ya totalmente reconocido como el único aceptable para obtener la estimación de los mejores valores de un cierto número de incógnitas a partir de un exceso de observaciones. Pero, a pesar de las calculadoras, algunos cálculos eran impracticables (sobre todo a partir de 10 ecuaciones). De hecho, por ejemplo, se consideraba imposible calcular las 12 constantes requeridas para la orientación relativa y absoluta de un par de fotos colocado en un restituidor analógico.

En topografía, la falta de calculadoras más potentes, obligaba seguir utilizando métodos aproximados. En las triangulaciones, por ejemplo, se determinaban las coordenadas de las estaciones a partir de las direcciones observadas por intersección directa o inversa aplicando métodos semi-gráficos para estimar las coordenadas finales.

Con la aparición de las calculadoras electrónicas y programación, pronto fue posible el ajuste de grandes redes con miles de estaciones, así como la obtención de límites de confianza de las desviaciones estándar de las observaciones, así como los de las coordenadas finales.

El uso de los ordenadores ha producido que la necesidad calcular soluciones aproximadas haya disminuido notablemente.

En los primeros años de la década de los 70, en el siglo XX, geodestas como E Grafarend, J. Bossler, P. Meissl, V. Ahskenzi, etc, dieron las primeras soluciones al problema del control de calidad de una red geodésica, proponiendo métodos matemáticos adecuados al estudio de redes libres.

Cabe señalar los trabajos realizados por W. Baarda en la Universidad de Delft, publicados por la Netherlands Geodetic Comision, a través la sus Publications

on Geodesy, donde se señala *Statistical concepts in Geodesy*, publicada en el año 1967, donde se trata fundamentalmente la teoría de errores. Un año después el mismo autor publica *A testing procedure for use in Geodetic Networks*, donde se expone, entre otras cosas, la fiabilidad interna y externa de una red geodésica, y test de detección de errores groseros antes de una compensación llamado por el *Data-snooping*.

En el año 1973 W. Baarda publica *S-transformations and criterion matrices*.

En cuanto al diseño de Redes Geodésica, es un tema que interesa ya vivamente en 1972, a los Departamentos de Geodesia de las principales Universidades del mundo y a sus mejores especialistas.

El poder optimizar el trabajo geodésico, en la precisión de sus resultados, en la fiabilidad de las observaciones, y en su costo, es una idea atrayente.

Para conseguirlo, se realizan investigaciones, que resuelven desde distintos puntos de vista, los problemas planteados.

En 1977, se celebra en Sopron (Hungria) un Simposium de mejora de diseño, cálculo y control de redes Geodésicas, en donde se presentan los avances conseguidos hasta entonces y se proponen líneas de actuación.

En 1981, gran parte del Symposium de Redes Geodésicas y su cálculo, celebrado en Munich, se dedica al diseño de Redes.

Desde el 25 de Abril al 10 de Mayo de 1984, se realizó en Erice, Italia, el tercer curso de la Escuela Internacional de Geodesia Avanzada bajo el título *Optimización y diseño de redes geodésicas*.

En este, participaron los siguientes geodestas:

P. Teunissen con “El problema de diseño de orden cero”, K.R. Koch con “El problema de diseño de orden dos”, G. Schmitt con “Aspectos del diseño de redes: El problema de diseño de orden cuarto”, A. Dermanis con “Señalización en redes geodésicas”, H. Sünkel con “Análisis de Fourier de redes geodésicas”, E. Grafarend con “Matrices de criterio en redes de control de deformaciones”, F. Frumm y B. Benciolini en “Redes continuas”, P. Cross en “Aplicación de métodos numéricos en diseño de redes” y por último la intervención de F. Sansó con “Análisis de series de tiempo con aplicaciones en geodesia”.

Centrándonos en los trabajos realizados en España, cabe señalar la contribución de Alfonso Nuñez-García del Pozo y Gustavo Bada de Cominges, con su programa *Geored*, una aplicación informática para el cálculo, compensación y diseño de Redes Geodésicas. También son interesantes las aportaciones del primer autor en diversas comunicaciones del diseño, cálculo y compensación de la red de alta precisión de Robledo de Chavela.

Cabe señalar también la publicación en el año 1991, del curso de verano de Laredo “ Sistemas de posicionamiento Global”, realizado en la Universidad de Cantabria, y organizado por Rafael Ferrer Torio, con la participación de Benjamin Piña Patón, Alfonso Nuñez García del Pozo, José Luis Valbuena Duran e Isabelle Martinez Lopez.

Este, en el tercer capítulo trata el ajuste de Redes Geodésicas y su tratamiento matemático, donde se habla de los modelos matemáticos de compensación, y al final del mismo hay un apartado de la aplicación del método de mínimos cuadrados al ajuste de redes geodésicas.

Importante es señalar las numerosas contribuciones del profesor M. Sevilla, fundamentalmente a través de las publicaciones “Física de la Tierra”, de Editorial Complutense, y la publicaciones del Instituto de Astronomía y Geodesia.

El equipo de trabajo de la Universidad Politécnica de Valencia, capitaneado por el profesor Chueca, e integrado por los profesores José Luis Berné y José Herraiz, han contribuido a la comunidad científica con numerosas publicaciones docentes, siendo especialmente señalables los tratados de Topografía, publicados en el año 1996, donde su tomo tercero “Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia”, es el primer libro publicado en España que trata en profundidad el cálculo, ajuste y análisis de resultados de una red geométrica, aportando numerosos ejemplos de cálculo.

#### 4.- ESTUDIO DE LA INFLUENCIA DEL VECTOR $b$ Y LAS MATRICES $S$ Y $S^+$ SOBRE EL VECTOR DE LAS INCÓGNITAS $x$ .

Antes de tratar propiamente el tema que indica el título del apartado, repasemos unos conceptos previos como son las normas vectoriales y matriciales.

##### 1.- NORMAS VECTORIALES.

En el estudio y práctica de las redes locales y microgeodesia de Alta Precisión pueden abordarse importantes cuestiones a través de la teoría de normas y espacios normados vectoriales y matriciales con gran ventaja en rigor y economía de cálculo. Entre ellas destaca la valoración de la influencia del redondeo en la búsqueda de la mejor conducción y solución del cálculo. Expondremos a continuación una síntesis de conocimientos fundamentales de expresa aplicación a las disciplinas citadas.

Un vector genérico  $x_{n,1}$  es un elemento del espacio  $\mathfrak{R}^n$  y para nuestros fines aceptamos que se pueden escribir sus componentes como

$$\begin{aligned}x_i &\in \mathfrak{R} \\ 1 &\leq i \leq n \\ \mathfrak{R} &\equiv \text{cuerpo de los números reales}\end{aligned}$$

La aplicación de una “norma” o característica común a un conjunto infinito de vectores  $x$  como el descrito que dan lugar a un subespacio en  $\mathfrak{R}^n$ , define así mismo un “espacio vectorial normado”.

Para todos nuestros efectos esta norma puede representarse, previos los cálculos o algoritmos intermedios que se requieran para su determinación, por un número real y positivo. Su notación aceptada generalmente y que emplearemos en lo sucesivo es

$$\|x\| \equiv \text{“norma vectorial de } x \text{”} \quad (1)$$

generalmente resumida en “norma de  $x$ ”.

Como ejemplo, citemos las llamadas “normas euclideas”, muy empleadas en Algebra Lineal y que responden a la expresión:

$$\|x\|_a = [ |x_1|^a + |x_2|^a + \dots + |x_n|^a ]^{1/2} = \left( \sum_{i=1}^n |x_i|^a \right)^{1/a} \quad (2)$$

$i \in 1,2,3,\dots,n$

Para  $a = 2$  se obtiene la norma que da nombre al conjunto, con la significación física y geométrica de módulo o longitud del vector  $x$ , que utilizaremos ampliamente en lo que sigue.

Una norma general e indebidamente incluida entre las euclideas es la llamada “euclidea subinfinito” definida por:

$$\|x\|_{\infty} = \max_i |x_i| \quad i \in 1,2,3,\dots,n$$

Es fácil ver que las tres normas euclideas de subíndices 1,2,  $\infty$ , están relacionadas y verifican la expresión:

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n \|x\|_{\infty} \quad (3)$$

Generalizando y sintetizando lo expuesto, se demuestra en Algebra Lineal que cualquier **norma vectorial** es en definitiva una aplicación de un espacio vectorial en el campo de los números reales o complejos (reales en nuestro caso) que cumple con un condicionado que específico:

Así, si  $E$  es un espacio vectorial euclideo, y  $x \in E$ , llamaremos norma o módulo de  $x$  al número real  $\|x\|$  definido por [Puerta 1976]:

$$\|x\| = +\sqrt{\langle x, x \rangle}.$$

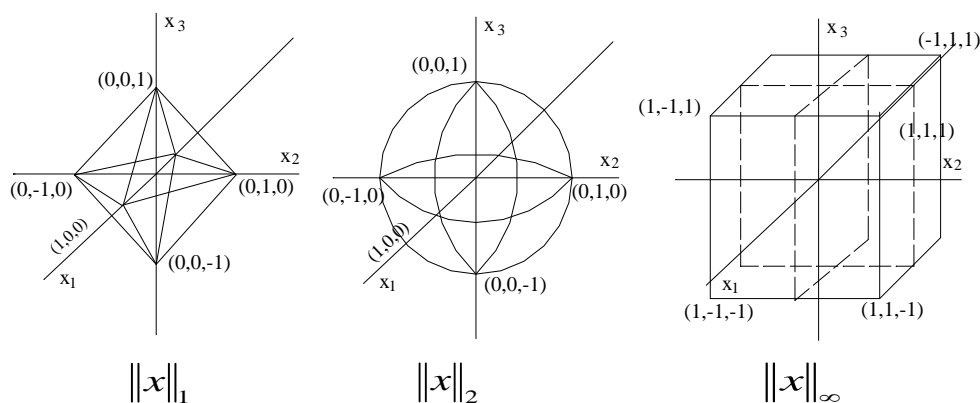
Con  $\langle x, x \rangle \equiv$  producto escalar

El espacio  $E$  se denomina “espacio vectorial normado”.

Tres sencillos ejemplos de normas y espacios normados según las ideas expuestas se representan en la figura 1. En ella se representan los tres espacios vectoriales normados en  $\mathfrak{R}^3$  con valor máximo de norma igual a la unidad y generados por cada una de las tres normas hasta ahora citadas. Se representarán por:

$$\{x : \forall x \in \mathfrak{R}^3 \Rightarrow \|x\|_a \leq 1\} \quad (4)$$

$a \in 1,2,\infty$



Así, se verificará simultáneamente que:

$$\|x\| = 0 \quad \text{si y solo si} \quad x = 0 \quad (5)$$

$$\|x\| > 0 \quad \Rightarrow \quad x \neq 0 \quad (6)$$

$$\|\lambda x\| = \lambda \cdot \|x\| \dots \dots \dots \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (7)$$

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad (8)$$

$$\|x - y\| \geq \|x\| - \|y\| \quad (9)$$

$$\Rightarrow \quad x, y \in \mathfrak{R}^n$$

$$\Rightarrow \quad \dots x_i, y_i \in \mathfrak{R}$$

Las dos últimas condiciones se denominan “de triángulo” por su sencilla interpretación geométrica, que en su momento aplicaremos.

#### 4.1.1.- APLICACIÓN DE LA NORMA VECTORIAL.

Consideremos la expresión:

$$\|x\|_M = \left[ \left( \frac{x_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{x_2}{\sigma_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{x_n}{\sigma_n} \right)^2 \right]^{1/2} = \sum_1^n \left[ \left| \frac{x_i}{\sigma_i} \right|^2 \right]^{1/2} \quad (10)$$

que nos resulta muy familiar en nuestros cálculos de ajuste por mínimos cuadrados y es una norma vectorial, según resulta inmediatamente del cambio de variable:

$$z_i = \frac{x_i}{\sigma_i}$$

Definiéndose del mismo la conocida norma euclídea ponderada de orden 2 [Strang 1997].

Es inmediata ya la conocida definición de solución mínimo-cuadrática, hipótesis de Gauss-Markov como, utilizando la notación usual:

“Solución mínima norma vectorial ponderada euclídea de orden dos aplicada al vector de residuos  $R$  en el espacio vectorial normado  $Ax - K = R$ ”.

Que generalmente se cita como “solución mínima norma”.

Efectivamente, (10) permite escribir, con la notación habitual:

$$\begin{aligned} \|R\|_M &= \left[ \left( \frac{R_1}{\sigma_1} \right)^2 + \left( \frac{R_2}{\sigma_2} \right)^2 + \dots + \left( \frac{R_n}{\sigma_n} \right)^2 \right]^{1/2} = \sum_1^n \left[ \left| \frac{R_i}{\sigma_i} \right|^2 \right]^{1/2} = \\ &= \sum_1^n [p_i R_i^2]^{1/2} = [R^T P R]^{1/2} \quad (11) \end{aligned}$$



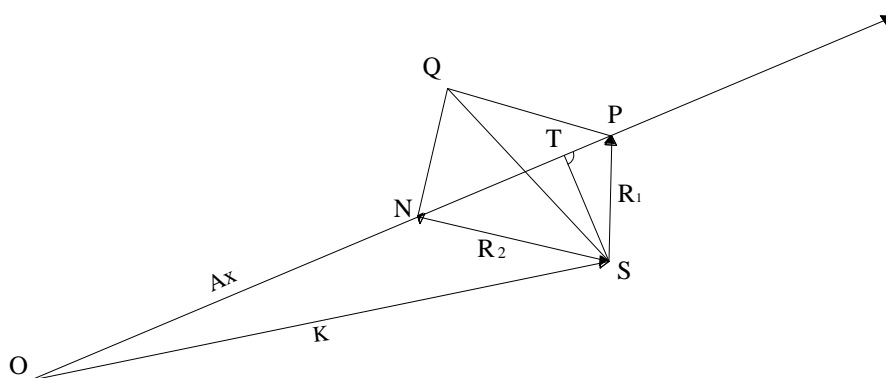
en el espacio vectorial definido por :

$$\{ R : \forall R \in Ax - K \} \quad (12)$$

siendo preciso demostrar que es un espacio normado.

En efecto,  $\| R \|_M$  cumple con (5), (6) y (7), como es trivial demostrar.

En cuanto a las condiciones (8) y (9), recordando la representación geométrica del hiperplano en  $\mathcal{R}^m$  definido por los vectores  $Ax$ , y  $K$ , en el que se encuentra el vector de residuos  $R$  (figura 2), es claro que, construyendo el paralelogramo  $SNQP$ , de lados no paralelos formados por dos vectores arbitrarios  $R_1$  y  $R_2$  y diagonal sobre el vector  $Ax$  se cumplirá :



En el triángulo  $SQP$  el lado  $SQ$  será menor que la suma de los otros dos, a saber:

$$\begin{aligned} SP &= | R_1 | \\ PQ &= | R_2 | \end{aligned}$$

Luego

$$\| R_1 + R_2 \|_M = \| \text{vec.SQ} \|_M < \| R_1 \|_M + \| R_2 \|_M \quad (13)$$

Y en el triángulo  $SNP$  el lado  $NP$  será mayor que la diferencia de los otros dos, a saber:

$$\begin{aligned} SP &= | R_1 | \\ SN &= | R_2 | \end{aligned}$$

$$\text{Luego } \| R_1 - R_2 \|_M = \| \text{vec.NP} \|_M > \| R_1 \|_M - \| R_2 \|_M \quad (14)$$

Se verifican por lo tanto las condiciones “de triángulo” (8) y (9) y el espacio estudiado  $Ax - K = R$  es normado según la norma  $\|R\|_M$ . La norma mínima, solución del ajuste, corresponderá al vector ST, proyección de K sobre Ax, según sabemos y es evidente en la figura.

Así pues, en el espacio normado definido no existe mejor solución. Sin embargo si se utiliza otro espacio normado con la misma norma, o se varían ambas figuras, es claro que cambiará también la solución óptima, encontrándose una para cada supuesto establecido.

No conocemos demostración rigurosa que determine norma y espacio normado simultáneamente óptimos entre todos los posibles. Justificaciones parciales de la solución expuesta pueden encontrarse [Chueca et. al. 1996], pero queda abierta la línea de investigación así definida. Por otra parte, es posible que no exista una solución universal para cualquier supuesto práctico y sea más acertado estudiar la más adecuada para cada caso. Sobre ello se volverá más adelante.

## 4.2.- NORMAS MATRICIALES.

Si  $S$  es un conjunto de números reales acotados superiormente y no vacío, existe un número real “ $y$ ” tal que  $y \leq z$  siendo “ $z$ ” la cota superior de  $S$ , para todo  $x \in S$ .

Al número “ $y$ ” se le denomina cota superior mínima o supremo de  $S$ . [De la Fuente. 1993] Así, puede escribirse, con la notación generalmente empleada:

$$(15) \quad y = \sup_{x \in S} (x) \quad \text{o bien} \quad y = \sup \{ x : x \in S \}$$

Del mismo modo se define “ $w$ ” como la cota inferior máxima o ínfimo de  $S$ :

$$(15)\text{bis} \quad w = \inf_{x \in S} (x) \quad \text{o bien} \quad w = \inf \{ x : x \in S \}$$

Existe toda una teoría general de normas matriciales. Para nuestro objeto y a él nos ceñiremos en la presente exposición, solamente son de aplicación las normas matriciales asociadas con normas vectoriales unitarias e inducidas en matrices cuadradas.

A semejanza de lo tratado en epígrafes anteriores, supuesta una norma vectorial cualquiera que, en nuestro caso y salvo que se indique expresamente otra cosa, será la norma euclídea de orden dos, con valor unidad (conjunto de vectores cuyo genérico representaremos por “ $v$ ” de módulo unidad) aplicada a un cierto campo vectorial normado, escribiremos la norma matricial asociada e inducida en la matriz cuadrada  $M$  en la forma y con la notación que sigue:

$$\| M \| = \sup \{ \| Mv \| : v \in \mathfrak{R}^n, \| v \| = 1 \} \quad (16)$$

Siendo  $M_{n,n}$ , matriz cuadrada, y  $v_{n,1}$ , vector columna genérico de módulo unidad, en espacio normado por la euclídea de orden dos., que será la superficie de la hipersfera de radio unidad en  $\mathfrak{R}^n$ .

Análogamente a las normas vectoriales, las matriciales que nos ocupan cumplirán simultáneamente el condicionado:

$$\| M \| = 0 \quad \text{si y solo si} \quad M = 0 \quad (17)$$

$$\| M \| > 0 \quad \Rightarrow \quad M \neq 0 \quad (18)$$

$$\| \lambda M \| = \lambda \cdot \| M \| \quad \Rightarrow \quad \forall \lambda \in \mathfrak{R} \quad (19)$$

$$\| M + N \| \leq \| M \| + \| N \| \quad (20)$$

$$\| M - N \| \geq \| M \| - \| N \| \quad (21)$$

$$\Rightarrow M_{n,n}$$

$$\Rightarrow N_{n,n}$$

Y se demuestra también que se cumple una nueva condición que se expresa según

$$\|MN\| \leq \|M\| \cdot \|N\| \quad (22)$$

Estudiemos uno por uno los axiomas propuestos. En efecto, siempre se podrá escribir, dentro del ámbito de estudio que nos afecta:

$$\|M\| \geq \|Mv\| = \frac{\|Mx\|}{\|x\|} \quad (23)$$

$$v = \frac{x}{\|x\|} = \frac{x}{\|x\|_2} = \text{vec.unitario} \quad (24)$$

De (23) se deduce la expresión fundamental que emplearemos frecuentemente

$$\|M\| \cdot \|x\| \geq \|Mx\| \quad (25)$$

Las tres primeras condiciones (17), (18) y (19) resultan triviales en virtud de (23) y (24).

En cuanto a la condición (20) se tendrá sucesivamente:

$$\|M + N\| = \sup \{ \|(M + N)v\| : \|v\| = 1 \} \leq \sup \{ \|Mv\| + \|Nv\| : \|v\| = 1 \}$$

en virtud de (8). Y en consecuencia

$$\begin{aligned} \|M + N\| &= \\ &= \sup \{ \|Mv\| + \|Nv\| : \|v\| = 1 \} \leq \sup \{ \|Mv\| : \|v\| = 1 \} + \sup \{ \|Nv\| : \|v\| = 1 \} = \\ &= \|M\| + \|N\| \end{aligned} \quad (26)$$

Análogamente, teniendo en cuenta (9), se obtiene (21) sin dificultad alguna.

Para deducir la condición (22) se puede operar iniciando el desarrollo con la aplicación de (23) al vector  $Nx$  y escribiendo, por definición de norma

$$\|M\| \geq \|Mv\| = \frac{\|MNx\|}{\|Nx\|} \quad (27)$$

Y sucesivamente

$$\|M\| \cdot \|Nx\| \geq \|MNx\| \quad (28)$$

y con

$$\|N\| \cdot \|x\| \geq \|Nx\| \quad (29)$$

multiplicando miembro a miembro

$$\|M\| \cdot \|N\| \cdot \|x\| \geq \|MNx\| \quad (30)$$

es decir

$$\|M\| \cdot \|N\| \geq \frac{\|MNx\|}{\|x\|} \quad (31)$$

y como (31) ha de cumplirse para cualquier valor de  $x$ , incluso el que haga máximo el segundo miembro, que, por definición de norma será (23), se tendrá:

$$\|M\| \cdot \|N\| \geq \|MN\| \quad (32)$$

según se quería demostrar.

Con un razonamiento semejante se obtiene también la expresión inversa:

$$\|N^{-1}\| \cdot \|M^{-1}\| \geq \|N^{-1}M^{-1}\| \quad (33)$$

El cálculo de la norma **para una matriz cuadrada arbitraria  $M$**  es una consecuencia inmediata del conocido **Cociente de Rayleigh**. En efecto, se tendrá, elevando al cuadrado en ambos miembros de (23) y por definición de norma matricial:

$$\|M\|^2 = \max \cdot \frac{\|Mx\|^2}{\|x\|^2} = \max \cdot \frac{x^T M^T M x}{x^T x} = C(RB) \quad (34)$$

Con la notación usual [Chueca et. al. 1996] se tendrá:

$$C(RB) = C(RM^T M)$$

Y teniendo en cuenta la ecuación característica de  $B$

$$\begin{aligned} (B - \mu I)x &= 0 \\ Bx &= \mu Ix \end{aligned}$$

$$C(RB) = \frac{x^T \mu I x}{x^T x} = \mu$$

Y finalmente resulta el Cociente de Rayleigh acotado en la forma de aplicación más extendida:

$$\mu_{\text{mínimo}} \leq C(\text{RB}) \leq \mu_{\text{máximo}}$$

De especial aplicación en matrices simétricas definido positivas o semidefinida positivas (con  $\mu_{\text{mínimo}} = 0$ ), que es nuestro caso.

Por el momento, escribiremos la expresión (34) en la forma:

$$\begin{aligned} \|M\|^2 &= \mu_{B_{\text{máximo}}} \\ \|M\| &= \mu_{B_{\text{máximo}}}^{1/2} \end{aligned} \quad (35)$$

Donde  $\mu_{B_{\text{máximo}}}$  es el mayor autovalor de la matriz simétrica  $B = M^T M$ , y si  $M$  es simétrica y  $M^T M = M^2$   $\|M\|^2 = \mu_{M^2_{\text{máximo}}} = \mu_{M_{\text{máximo}}}^2$   $\|M\| = \mu_{M_{\text{máximo}}}$

Una primera aplicación la obtenemos de la S-transformación de Baarda. Recordando su expresión y propiedades:

$$T_{Ap} = I - E^T (E E^T)^{-1} E$$

Matriz simétrica, definida positiva, de rango completo e idempotente, con la notación convenida, se cumplirá:

$$\text{Tr} [ T_{Ap} ] = \sum \mu_i = n = R ( T_{Ap} )$$

Siendo todos los autovalores positivos, con uno a lo menos mayor que la unidad y uno a lo menos menor que la unidad, (la única alternativa posible es que sean todos iguales a la unidad), se tendrá, aplicando (34) y (35):

$$\|T_{Ap}\|^2 = \|T_{Ap}\| = C(\text{RT}_{Ap}) = \mu_{\text{máximo}} \geq 1 \quad (36)$$

Siendo  $\mu_{\text{máximo}}$  el mayor autovalor de  $T_{Ap}$ , con lo que resulta inmediato, en virtud de (23):

$$\|T_{Ap}\| \geq 1 \geq \frac{\|T_{Ap} x\|}{\|x\|}$$

Que deberá cumplirse para cualquier  $x \in \mathfrak{R}^n$ , según hemos visto. Por tanto, también se cumplirá para las soluciones del ajuste definido por la S-transformación, que representamos por  $x_i$ , y siendo así mismo  $x_p$  la solución pseudoinversa, se cumple según sabemos:

$$T_{Ap} x_i = x_p$$

Y por tanto

$$1 \geq \frac{\|T_{Ap} x_i\|}{\|x_i\|} = \frac{\|x_p\|}{\|x_i\|}$$

Es decir

$$\|x_p\| \leq \|x_i\|$$

permitiendo definir al vector  $x_p$  de parámetros o variables, solución pseudoinversa de un ajuste mínimo cuadrático cualquiera, hipótesis Gauss-Markov, como “el de mínima norma euclidea de orden dos de todas las soluciones  $x_i$  posibles”. Su cota superior puede establecerse a priori por la expresión evidente:

$$\|T_{Ap}\| \cdot \|x_i\| \geq \|x_p\| \quad (38)$$

producto de la norma matricial de la matriz  $T_{Ap}$ , establecida en el autovalor  $\mu_{\text{máximo}}$  por la norma vectorial de una solución genérica  $x_i$

#### 4.2.1.- APLICACIÓN DE LA NORMA MATRICIAL.

En su aplicación a redes locales y microgeodesia, la teoría expuesta nos permite estudiar el efecto de los errores inevitables de cálculo producidos en los sistemas de ecuaciones normales deducidos a través de ajustes mínimo cuadráticos. La práctica fundamental es la correspondiente a perturbaciones en ambos miembros de los sistemas mencionados, debidos a la utilización de un número finito de cifras decimales en los números manejados en los cálculos. Es necesario pues definir el efecto de estas aproximaciones numéricas o “errores de redondeo” en los algoritmos fundamentales y resultados del cálculo.

Ciñéndonos exclusivamente al método de observaciones indirectas, el modelo matemático:

$$F(X) - C = 0 \quad (39)$$

Que suponemos linealizable por Taylor sin error apreciable en la forma

$$Ax - K = R \quad (40)$$

Se resuelve en el sistema normal

$$A^T P A x = A^T P K \quad (41)$$

Con la notación usual, que simplificamos en

$$S x = b \quad (42)$$

Cuya solución Gauss-Markov más general es

$$x = S^{-1} b \quad (43)$$

Donde  $S^-$  adoptará generalmente la forma de  $S^+$  como mejor solución libre, o  $S^{-1}$  en supuesto determinista. Cualquiera de las matrices descritas serán cuadradas, simétricas, y semidefinidas positivas, siendo definidas positivas y de rango completo en el caso determinista.

En cualquier circunstancia, supongamos que las características específicas del hardware y software empleado han dado lugar a una perturbación en los elementos de  $S^-$ , exacta, que se ha transformado en  $B$ , afectada de errores de redondeo y cálculo con números aproximados. Obviamente  $x$  exacta, (43) se transforma en  $x^{\wedge}$  aproximada y se tendrá:

$$x^{\wedge} = Bb \quad (44)$$

Aplicando la norma vectorial euclídea de orden dos y la matricial asociada, escribiremos (25).

$$\|x - x^{\wedge}\| = \|x - Bb\| = \|x - BSx\| = \|(I - BS)x\| \leq \|I - BS\| \cdot \|x\| \quad (45)$$

que permite obtener las cotas absoluta y relativa de error, a saber:

$$\|x - x^{\wedge}\| \leq \|I - BS\| \cdot \|x\| \quad (45)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|x - x^{\wedge}\|}{\|x\|} \leq \|I - BS\| \quad (46)$$

El primer valor (45) es poco significativo al modificarse con la escala del trabajo. Por ello se emplea casi exclusivamente el segundo como (46) “medida de la cota superior de error relativo debido a errores de cálculo y redondeo entre  $x$  (exacto) y  $x^{\wedge}$  (aproximado), establecida en la norma matricial  $\|I - BS\|$ , con la notación adoptada.”

Queda evidentemente por evaluar el valor más fiable de  $B$ .

Supongamos a continuación que el error de cálculo y redondeo se concentra en el segundo miembro “ $b$ ”, siendo su valor aproximado “ $b^{\wedge}$ ” en (42). Con un razonamiento en todo análogo al anterior, se sigue:

$$x^{\wedge} = S^- b^{\wedge} \quad (47)$$

$$\|x - x^{\wedge}\| = \|S^- b - S^- b^{\wedge}\| = \|S^- (b - b^{\wedge})\| \leq \|S^-\| \cdot \|b - b^{\wedge}\| \quad (48)$$

Que proporciona la cota superior de error absoluto, como antes. El cálculo de la cota de error relativo es sencillo multiplicando y dividiendo por  $\|Sx\| = \|b\|$ . En efecto:

$$\|x - x^{\wedge}\| \leq \|S^-\| \cdot \|b - b^{\wedge}\|$$



$$\|x - x^{\wedge}\| \leq \|S^{-}\| \|Sx\| \cdot \frac{\|b - b^{\wedge}\|}{\|b\|} \leq \|S^{-}\| \|S\| \|x\| \cdot \frac{\|b - b^{\wedge}\|}{\|b\|}$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \frac{\|x - x^{\wedge}\|}{\|x\|} \leq \|S^{-}\| \|S\| \cdot \frac{\|b - b^{\wedge}\|}{\|b\|} = \|S^{-}\| \|S\| \cdot \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (49)$$

Expresión fundamental que relaciona los errores relativos en  $x$  y en  $b$ , de tal manera que el primero está acotado por

$$k = \|S^{-}\| \|S\| \quad (50)$$

veces el segundo.

A (50) se le denomina “número de condición de la matriz  $S$ ” [Strang. 1997] y es fundamental en los cálculos que siguen. Su valor depende de la norma seleccionada para el proceso de cálculo.

Es claro que pequeñas desviaciones en el vector de términos independientes  $b$  pueden dar lugar a importantes errores en  $x$ , si el número de condición  $k$  de  $S$  es grande, circunstancia que debe ser tenida muy en cuenta en cualquier ajuste de alta precisión.

En otro aspecto de la cuestión, se escribe, en forma análoga a (40)

$$Sx^{\wedge} - b = r \quad (51)$$

Donde  $r$  = vector de residuos en  $x$  que valdrá

$$S(x^{\wedge} - x) = Sx^{\wedge} - Sx = (b + r) - b = b^{\wedge} - b = \delta b = r \quad (52)$$

Escribamos ahora

$$\|\delta x\| \cdot \|b\| = \|S^{-} r\| \cdot \|Sx\| \leq \|S^{-}\| \cdot \|r\| \cdot \|S\| \cdot \|x\|$$

de donde

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

y también

$$\|r\| \cdot \|x\| = \|S \delta x\| \cdot \|S^{-} b\| \leq \|S\| \|\delta x\| \cdot \|S^{-}\| \cdot \|b\|$$

de donde

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \geq \frac{1}{k} \frac{\|r\|}{\|b\|}$$

y en definitiva

$$\frac{1}{k} \frac{\|r\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\partial x\|}{\|x\|} \leq k \frac{\|r\|}{\|b\|} \quad (53)$$

expresión que acota inferior y superiormente el error en  $x$  debido a cálculos con números aproximados y redondeos durante el proceso. Una matriz  $S$  será tanto mejor “condicionada” cuanto menor sea  $k$ , su número de condición.

(53) también puede escribirse, evidentemente

$$(54)$$

$$\frac{1}{k} \frac{\|\partial b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\partial x\|}{\|x\|} \leq k \frac{\|\partial b\|}{\|b\|}$$

fórmula muy usada. Queda sin embargo pendiente la determinación de

$$\frac{\|\partial b\|}{\|b\|}$$

error relativo en el cálculo del término independiente  $b$ , en la forma más precisa y fiable que sea posible.

El número de condición en ajustes mínimo cuadráticos de redes locales, hipótesis Gauss-Markov, puede referirse a tres casos posibles:

a). Solución más general, red libre con matriz inversa generalizada  $S^-$ .

Su expresión será (50):

$$k = \|S^-\| \|S\|$$

y según (35), siendo

$$\begin{aligned} U &= S^{-T} \cdot S^- \\ V &= S^T \cdot S = S \cdot S = S^2 \end{aligned}$$

se deduce

$$k = (\mu_{U\text{máximo}} \cdot \mu_{V\text{máximo}})^{1/2} = \mu^{1/2}_{U\text{máximo}} \cdot \mu_{S\text{máximo}} \quad (55)$$

por ser  $S^-$  no simétrica, y  $S$  simétrica.

a.1). Caso particular con inversa generalizada recíproca y simétrica

$$k = \|S^-\| \|S\| = \mu_{S^- \text{ máximo}} \mu_{S \text{ máximo}} \quad (55 \text{ bis})$$

b). Solución red libre con matriz pseudoinversa.

$$k = \|S^+\| \|S\| = \mu_{S^+ \text{ máximo}} \cdot \mu_{S \text{ máximo}} \quad (56)$$

con ambas matrices, simétricas.

c). Solución determinista, red ligada

$$k = \|S^{-1}\| \|S\| = \frac{\mu_{S \text{ máximo}}}{\mu_{S \text{ mínimo}}} \quad (57)$$

con ambas matrices simétricas, de rango completo e invertibles por Cayley.

### 4.3.-ESTUDIO PARTICULAR DEL VECTOR $b$ Y SU INFLUENCIA EN $x$ . INTERPRETACION GEOMETRICA.

#### 4.3.1.-CASO DETERMINISTA

La matriz  $S = A^T P A$  será definida positiva, sus autovalores  $\mu_i \in 1,2,3\dots n$ , positivos, que suponemos ordenados en

$$0 < \mu_1 < \mu_2 < \mu_3 \dots < \mu_n \quad (58)$$

y dando lugar a un hiperelipsoide asociado a la red que en su forma standard (HES) será de semiejes

$$\phi_i = U \sqrt{\mu_i^{-1}} \quad (59)$$

$U = \text{Cte.}$

que confiere un sentido geométrico al autovalor  $\mu_i$  y a su inverso  $\mu_i^{-1}$  definidos como módulos de vectores cuya dirección común es la del semieje  $\phi_i$  y está representada por el autovector normalizado  $y_i$ , cuyos elementos son los cosenos directores de  $\phi_i$ . Así y desde ahora utilizaremos con idéntica significación "dirección de  $\phi_i$ " y "dirección de  $\mu_i$  o de  $\mu_i^{-1}$ ".

Escribiendo la factorización de  $S$  se tendrá.

$$S = \Gamma V \Gamma^T \quad (60)$$

$$\text{con } \Gamma = (y_1, y_2, y_3, \dots, y_n) = \Gamma_{n,n} \quad (61)$$

matriz ortogonal de autovectores columna  $y_i$  normalizados representativos de los cosenos directores ejes - autovalores

$$V = \text{matriz diagonal de autovalores } \mu_i = V_{n,n} \quad (62)$$

que implica

$$\Gamma^T = \Gamma^{-1} \quad (63)$$

$$S^{-1} = \Gamma V^{-1} \Gamma^T \quad (64)$$

siendo  $\Gamma$  y  $\Gamma^T = \Gamma^{-1}$  matrices rotación directa e inversa del sistema de coordenadas utilizado al definido por los ejes del hiperelipsoide, todo según teoría conocida.

La matriz simétrica  $S$  tendrá un conjunto completo de vectores propios  $y_i$  ortonormales. Por lo tanto, cualquier vector  $b$  podrá escribirse en la forma:

$$b = C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 + \dots + C_n y_n \quad (65)$$

donde  $C_i$  = proyección de  $b$  sobre  $\mu_i$  ( $0 \phi_i$ )

es decir

$$b = \sum_1^n C_i y_i \quad (66)$$

que define a:

$$b_i = C_i y_i \quad (67)$$

como el vector proyección del  $b$  sobre la dirección del autovalor  $\mu_i$ , que es precisamente  $y_i$ , según sabemos.

Y también podemos escribir análogamente

$$\delta b = \sum_1^n \delta C_i y_i \quad (68)$$

donde  $\delta C_i$  = cantidad infinitesimal relacionada con  $C_i$

que define a

$$\delta b_i = \delta C_i y_i \quad (69)$$

como el vector proyección del  $\delta b$  sobre la dirección del autovalor  $\mu_i$ , que es  $y_i$ .

Ello nos permite estudiar la repercusión que tendrá en  $x$  una componente cualquiera de  $\delta b$ , o lo que es lo mismo, un error de redondeo en un elemento cualquiera de  $b$ . Pero como al vector  $b$  (y consecuentemente al  $\delta b$ ) lo hemos descompuesto en vectores dirigidos en las direcciones de los autovalores  $\mu_i$ , que son las direcciones de los ejes  $\phi_i$  del hiperelipsoide, se sigue la interpretación geométrica evidente que define al error  $\delta x_i$  como el vector diferencial de error en la dirección del autovalor  $\mu_i$  (o  $\mu_i^{-1}$ , o  $\phi_i$ ) causada por la influencia de un error de redondeo  $\delta b_i$  en la misma dirección.

El cálculo de  $dx_i$  es sencillo. Se tendrá:

$$S(x + \delta x) = b + \delta b$$

$$S \delta x = \delta b$$

$$\delta x_i = S^{-1} \delta b_i = \Gamma V^{-1} \Gamma^T \delta C_i y_i =$$

$$= \delta C_i \Gamma V^{-1} \Gamma^T y_i = \delta C_i \Gamma V^{-1} \begin{pmatrix} y_j^T \\ y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_i^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix} y_i$$

entonces:

$$\delta x_i = \delta C_i \Gamma V^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

pues :

$$y_j^T y_i = 0$$

$$y_i^T y_i = 1$$

por definición de vectores normales, de donde:

$$\delta x_i = \delta C_i \Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_i^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

y

$$\delta x_i = \delta C_i (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_i \quad \cdots \quad y_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_i^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\delta x_i = \delta C_i y_i \mu_i^{-1} = \frac{\delta b_i}{\mu_i} \quad (70)$$

expresión fundamental que conduce a:

$$\delta_{x_i} = \frac{1}{\mu_i} |\delta b_{i1} + \delta b_{i22} + \cdots + \delta b_{ii} + \cdots + \delta b_{in}| \quad (71)$$

expresión desarrollada del vector error  $\delta x_i$  ocasionado en la dirección del semieje  $\phi_i$  del hiperelipsoide por un error de redondeo  $\delta b_i$  de la misma dirección.

En modulo escribiremos la expresión general:

$$\|\delta x_i\| = \frac{\|\delta b_i\|}{\mu_i} = U^{-2} \phi_i^2 \|\delta b_i\| \quad (72)$$

teniendo en cuenta (59) y demostrando que el error  $\delta b_i$  se amplifica hasta  $\delta x_i$  proporcionalmente al cuadrado  $\phi_i$  del semieje del elipsoide de idéntica dirección.

Todos los  $\delta x_i$   $i \in 1,2,3,\dots,n$  definen un nuevo hiperelipsoide standard de redondeo (HERS), nueva figura de error que se compondrá con la definida por el elipsoide clásico, definiendo otra nueva figura conjunta de error.

Es evidente que el error máximo inducido por el de redondeo se producirá en la dirección del semieje máximo  $\phi_1$ , es decir en la del autovector  $y_1$  asociado al autovalor mínimo  $y_1$  valdrá:

$$\|\delta x_{11}\| = \frac{\|\delta b_1\|}{\mu_1} = U^{-2} \phi_1^2 \|\delta b_1\| \quad (73)$$

Expresión fundamental. Obsérvese que, aún cuando más adelante nos ocuparemos de la determinación y cifrado de los errores de redondeo  $\delta b_i$ , la conclusión de que inducen errores  $\delta x_i$  en el vector  $X$  de variables compensadas, de figura

geométrica conocida y homotéticos, de razón conocida con los primeros es suficiente para multitud de supuestos de diseño.

Sin embargo, es claro que, según ya hemos visto, un simple cambio de escala y/o de unidades modifica  $S$  y sus autovalores y autovectores asociados. Despreciar o redondear la cifra  $q$ -ésima, que no tiene en cuenta el  $(q+1)$ ésimo, sino de la unidad adoptada, no es lo mismo ni en valor absoluto ni en significación física al variar las unidades adoptadas. No es lo mismo despreciar milésimas de radián o de metro que milésimas de milímetro o diezmiligrado. Por tanto, es más aconsejable, en vez de operar con los cambiantes errores absolutos hasta ahora estudiados, utilizar los invariables errores relativos como veremos a continuación. Sea cual fuere escala o unidades, el error relativo:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|}$$

donde evidentemente

$$\delta x = \delta x_1 + \delta x_2 + \dots + \delta x_i + \dots + \delta x_n \quad (74)$$

será constante. Se trata por lo tanto de estudiar su variación en función de la relación entre  $\delta b$  y  $\delta x$  y  $b$  y  $x$ , de tal manera que se busque, si es posible, un numerador máximo y un denominador mínimo. Para ello será preciso calcular para el vector  $x$  una expresión análoga a la (74).

Así, como en el caso anterior, podremos escribir teniendo en cuenta (66) y (67)

$$x = (A^T P A)^{-1} b = S^{-1} b \quad (75)$$

y sucesivamente se tendrá, con razonamiento idéntico al anterior

$$x = x_1 + x_2 + \dots + x_i + \dots + x_n \quad (76)$$

proyectando sobre los  $\phi_i$

y también

$$x_i = S^{-1} b_i = \Gamma V^{-1} \Gamma^T C_i y_i =$$



$$= C_i \Gamma V^{-1} \Gamma^T y_i = C_i \Gamma V^{-1} \begin{pmatrix} y_j^T \\ y_1^T \\ y_2^T \\ \vdots \\ y_i^T \\ \vdots \\ y_n^T \end{pmatrix} y_i = C \Gamma V^{-1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = C \Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_i^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_i = C_i (y_1 \quad y_2 \quad \cdots \quad y_i \quad \cdots \quad y_n) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \mu_i^{-1} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_i = C_i y_i \mu_i^{-1} = \frac{b_i}{\mu_i} \quad (77)$$

expresión fundamental que conduce a:

$$x_i = [b_{i1} + b_{i2} + \cdots + b_{ii} + \cdots + b_{in}] \quad (78)$$

En módulo escribiremos la expresión general:

$$\|x_i\| = \frac{\|b_i\|}{\mu_i} = U^{-2} \phi_i^2 \|b_i\| \quad (79)$$

que será mínima para  $\mu_i$ , máximo,  $\phi_i$ , mínimo, es decir:

$$\|x_n\| = \frac{\|b_n\|}{\mu_n} = U^{-2} \phi_n^2 \|b_1\| \quad (80)$$

proporcional a  $\phi_n^2$  mínimo.

Resumiendo, el error relativo ser máximo si:

- El error de redondeo  $\delta b$  se produce en la dirección del semieje  $\phi_1$ , máximo.
- El vector  $b$  está en la dirección del semieje  $\phi_n$ , mínimo.

Entonces

$$\|\delta x\| = \|\delta x_1\| \quad (81)$$

$$\|x_n\| = \frac{\|b_n\|}{\mu_n} \quad (82)$$

y se tendrá en dicho supuesto

$$\|\delta x\| = \|\delta x_1\| = \frac{\|\delta b_1\|}{\mu_1} = U^{-2} \phi_1^2 \|\delta b_1\| \quad (83)$$

$$\|x\| = \|x_n\| = \frac{\|b_n\|}{\mu_n} = U^{-2} \phi_n^2 \|b_1\| \quad (84)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \max = \frac{\mu_n}{\mu_1} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (85)$$

donde

$$k = \frac{\mu_n}{\mu_1} \quad (86)$$

como debía suceder, es el coeficiente o número de condición de la matriz de diseño  $A$  y mide el coeficiente de multiplicación del error relativo producido por el redondeo, comprobándose así la teoría antes expuesta. Y del mismo modo se demuestra que el error relativo ser mínimo si:

- El error de redondeo  $\delta b$  se produce en la dirección del semieje  $\phi_n$ , mínimo.
- El vector  $b$  esta en la dirección del semieje  $\phi_1$ , máximo.

Entonces

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \min = \frac{\mu_1}{\mu_n} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (87)$$

y definitivamente acotaremos el error relativo debido al redondeo mediante la expresión que antes dedujimos

$$\frac{1}{k} \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = k \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (88)$$

y de nuevo queda pendiente la evaluación rigurosa de

$$\frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (89)$$

que resolverá la cuestión completamente.

Es claro que el error relativo estudiado se calcula sobre  $x$ , corrección de  $X_a$ . No debe confundirse con el error relativo de  $X = x + X_a$ , variables corregidas.

### 4.3. 2.- CASO DE RED LIBRE.

Se tendrá, con la notación establecida y en el caso más general de red libre:

$$\|S\| = \frac{\|Sx\|}{\|x\|} = \frac{\|b\|}{\|x\|} \quad (90)$$

$$\|S^-\| = \frac{\|S^-\delta b\|}{\|\delta b\|} = \frac{\|\delta x\|}{\|\delta b\|} \quad (91)$$

y multiplicando miembro a miembro

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = \|S^-\| \|S\| \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (92)$$

como debía suceder, siendo el número de condición:

$$k = \|S^-\| \|S\| = \theta_n^{1/2} \mu_n \quad (93)$$

con  $\mu_n$  = autovalor máximo de  $S$

$\theta_n^{1/2}$  = autovalor máximo de  $S^{-T}S$

escribiéndose

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq k \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} \quad (94)$$

con conclusiones análogas a las antes establecidas. El error relativo será máximo si:

- El error de redondeo  $\delta b$  se produce en la dirección de algún semieje impropio.

- El vector  $b$  está en la dirección del semieje  $\phi_n$ , mínimo.

El error relativo será mínimo si:

- El error de redondeo  $\delta b$  se produce en la dirección del semieje  $\phi_n$ , mínimo.

- El vector  $b$  está en la dirección de algún semieje impropio.

La solución con inversa generalizada recíproca, teniendo en cuenta (55bis) se obtendrá a partir de:

$$k = \|S^+\| \|S\| = \mu_{S^- \text{ máximo}} \mu_{S \text{ máximo}} \quad (93\text{bis})$$

La solución pseudoinversa es un caso particular del anterior, partiendo de la  $S^+$  escogida, y sus autovalores  $\tau$ , resultando

$$k = \|S^+\| \|S\| = \tau_n \mu_n \quad (95)$$

con  $\mu_n$  = autovalor máximo de  $S$

$\tau_n$  = autovalor máximo de  $S^+$

y con el  $k$  calculado y de acuerdo con lo expuesto:

$$\frac{1}{k} \leq \frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

con las mismas conclusiones antes expuestas.

#### 4.4.-ESTUDIO PARTICULAR DE LA MATRIZ DE DISEÑO $S$ Y SU INFLUENCIA EN EL VECTOR $x$ . INTERPRETACION.

Con la notación usual escribiremos

$$S x = b \tag{97}$$

y suponemos que en los elementos de la matriz  $S$  se han producido determinados errores de redondeo que han modificado los valores del vector  $x$  de variables corregidas.

El resultado se expresa según

$$(S + \delta S)(x + \delta x) = b \tag{98}$$

puesto que  $b$  permanece inalterable.

Operando se tiene

$$Sx + x\delta S + S\delta x + \delta S \delta x = b \tag{99}$$

y teniendo en cuenta (97)

$$S\delta x + \delta S(x + \delta x) = 0 \tag{100}$$

y en definitiva

$$\delta x = - S^{-1} \delta S(x + \delta x) \tag{101}$$

caso más general

$$\delta x = - S^{+} \delta S(x + \delta x) \tag{102}$$

solución pseudoinversa

$$\delta x = - S^{-1} \delta S(x + \delta x) \tag{103}$$

solución determinista

Por definición de norma matricial  $\| M \|$ , apartado 1.2, (25), escribimos

$$\| M \| \cdot \| x \| \geq \| Mx \|$$

que podemos interpretar como el máximo coeficiente multiplicador que puede afectar al vector variable  $x$  cuando se realice la multiplicación  $Mx$ . Del mismo modo podemos expresar:

$$\|\delta S\| \|x + \delta x\| \geq \|\delta S(x + \delta x)\| \quad (104)$$

y a fortiori

$$\|S^{-1}\| \|\delta S\| \|x + \delta x\| \geq \|S^{-1} \delta S(x + \delta x)\| \quad (105)$$

es decir

$$\|S^{-1}\| \|\delta S\| \|x + \delta x\| \geq \|\delta x\| \quad (106)$$

y permutando los miembros y el sentido de la desigualdad

$$\|\delta x\| \leq \|S^{-1}\| \|\delta S\| \|x + \delta x\| \quad (107)$$

$$\|\delta x\| \leq \|S^{+}\| \|\delta S\| \|x + \delta x\| \quad (108)$$

$$\|\delta x\| \leq \|S^{-1}\| \|\delta S\| \|x + \delta x\| \quad (109)$$

en los tres casos considerados

La cota máxima de error relativo esperado será por tanto

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \max = \|S^{-1}\| \|\delta S\| \quad (110)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \max = \|S^{+}\| \|\delta S\| \quad (111)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \max = \|S^{-1}\| \|\delta S\| \quad (112)$$

y multiplicando y dividiendo por  $\|S\|$  y por definición de número de condición  $k$ , según apartado 1.2, y según (50)

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \max = k_i \frac{\|\delta S\|}{\|S\|} \quad (113)$$

donde  $i \in 1,2,3$

$k_1 = n^\circ$  de condición de  $\|S^-\| = \theta_n^{1/2} \mu_n$  o  $\|S^-\| = \theta_n' \mu_n$  si  $S^-$  es recíproca con  $\theta_n'$  autovalor máximo de  $S^-$ .

$k_2 = n^\circ$  de condición de  $\|S^+\| = \tau_n \mu_n$

$k_3 = n^\circ$  de condición de  $\|S^{-1}\| = \mu_1^{-1} \mu_n$

que es análoga a la expresión (54) del apartado 1.2, utilizada para acotar el error relativo en  $x$  debido a la perturbación de  $b$ . Obviamente, también puede escribirse sucesivamente:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \max = \theta_n^{1/2} \|\delta S\| = \theta_n' \|\delta S\| \quad \text{si es recíproca} \quad (114)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \max = \tau_n \|\delta S\| \quad (115)$$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} \max = \frac{1}{\mu_1} \|\delta S\| \quad (116)$$

completando todo ello la expresión (46), apartado 1.2

El número de condición  $k$  de la matriz de diseño  $S$  (o de su inversa, generalizada o no, que es lo mismo), es fundamental para la previsión de errores de redondeo en el sistema de ecuaciones normales, en ambos miembros y para el diseño general de redes. Se acostumbra a definir una red como mal o bien condicionada según sea el valor de su  $k$  correspondiente, siendo evidentemente tanto mejor el resultado a esperar cuanto menor sea.

Si la matriz  $S$  es casi singular y la red determinista,  $\mu_1$  se acerca a cero y  $k$  se hará muy grande, llegando a producirse, solo por esta razón, resultados inaceptables.

Teniendo en cuenta que en el caso de red libre  $S$  es singular por definición será inexcusable vigilar los valores de  $\theta_n$ ,  $\theta_n^{-1}$ ,  $\tau_n$ , en cualquier supuesto de diseño.



#### 4.5.- ESTUDIO PARTICULAR DE LA MATRIZ $S^{-1}$ Y SU INFLUENCIA SOBRE EL VECTOR $x$ .

Con la anotación usual, escribiremos:

$$Sx = b$$

Donde:

$$x = S^{-1} b$$

y suponemos que en los elementos de la matriz  $S^{-1}$  se han producido determinados errores de redondeo a lo largo de su cálculo, que han modificado los valores del vector  $x$  de las variables corregidas.

El resultado se expresa según:

$$x + \delta x = (S^{-1} + \delta S^{-1})b \quad (117)$$

Operando obtenemos:

$$x + \delta x = S^{-1}b + \delta S^{-1}b \quad (118)$$

$$x + \delta x = x + \delta S^{-1}b$$

y en definitiva:

$$\delta x = \delta S^{-1}b \quad (119)$$

Por definición de norma matricial, empleando la expresión (25) del capítulo 1.2:

$$\|\delta x\| = \|\delta S^{-1}b\| \leq \|\delta S^{-1}\| \|b\| \quad (120)$$

$$\|x\| = \|S^{-1}b\| \leq \|S^{-1}\| \|b\| \quad (121)$$

la cota máxima del error relativo esperado, será por tanto:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \frac{\|\delta S^{-1}\|}{\|S^{-1}\|} \quad (122)$$

pero como  $S^{-1}$  es simétrica, podemos afirmar:

$$\|S^{-1}\| = \mu_{S^{-1}max} = \frac{1}{\mu_{Smin}} \quad (123)$$

con lo cual, el error relativo nos quedará:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mu_{Smin} \|\delta S^{-1}\| \quad (124)$$

Nótese que en el caso de redes libres, donde la matriz  $S$  es singular  $\mu_{Smin} \rightarrow 0$ , con lo cual el error relativo en  $x$ , también tiende a 0.

## **5.- ACCESO A MEJORES RESULTADOS. METODO DE APROXIMACION ITERATIVA.**

A lo largo de las páginas anteriores se ha advertido reiteradamente que la resolución rigurosa de la cuestión propuesta requiere, el cálculo de los errores  $\delta b$  y  $\delta S$  según es preceptivo, cifrando sus respectivas cotas y probabilidades de comisión. Un importante esfuerzo es ya la posibilidad de determinación de un hiperelipsoide de error (HERS) según se expuso en 1.3.1 y las diversas expresiones fórmulas e intervalos de error deducidos. Sin embargo existiendo la insuficiencia descrita cuya resolución general entra de lleno en el cálculo con números aproximados, que es asequible, y en la influencia del software y hardware específico de que se trate en cada caso particular, que resulta mucho más difícil de abordar, sobre todo si se pretende alcanzar una practica extendida y eficaz, parece razonable intentar otros caminos.

Es claro que la importancia práctica del problema disminuye notablemente si se arbitra un algoritmo de cálculo que permita tener la certeza de una aproximación asintótica a la inalcanzable solución exacta, de tal manera que la precisión a esperar tan solo dependa del tiempo y la capacidad de cálculo disponibles o que sea necesario y razonable aplicar.

Así, desarrollamos a continuación una metodología de aproximación iterativa, basada en los trabajos de Wilkinson extendidos y aplicados a nuestro caso topográfico y microgeodésico particular.

## 5.1.- CASO DETERMINISTICO.

### 5.1.1.- PRIMERA APLICACIÓN DE LAS SERIES DE NEUMANN.

En el sistema de ecuaciones normales clásico

$$S x = b$$

la matriz  $S$ , simétrica, de rango completo y definido positiva, tendrá una ecuación característica de expresión

$$(S - \mu I)x = 0$$

que nos permite calcular su vector de autovalores  $\mu$ ., todos positivos.

Es claro que un simple cambio de escala definido por el de variable

$$x = \frac{y}{E}$$

permite escribir

$$\left( \frac{1}{E} S - \frac{1}{E} \mu I \right) y = 0$$

o lo que es lo mismo

$$(S_y - \mu_y I) y = 0$$

ecuación característica que difiere de la anterior exclusivamente en que sus autovalores se han modificado según la escala adoptada. Por consiguiente, con un cambio de escala adecuado (que se deshará o no al final del ajuste, según proceda), podemos conseguir que el máximo autovalor sea positivo e inferior a la unidad

$$\mu_{y \text{ máximo}} < 1$$

con lo que

$$\| S_y \| = \mu_{y \text{ máximo}} < 1 \tag{124}$$

Por consiguiente, con un simple cambio de escala podemos trabajar con una matriz de diseño  $S$  de norma inferior a la unidad. Así lo supondremos en lo que sigue.

Supuesto para simplificar la notación  $\| S \| < 1$ , se denomina “Serie de Neumann” al algoritmo indefinido [Kinkaid 1994]

$$S^0 = I, S^1, S^2, S^3, \dots, S^k \dots \tag{125}$$

con  $k \rightarrow \infty$

que vamos demostrar que es convergente y calcularemos su suma. En efecto, se cumplirá que la matriz

$$(I - S) = \text{invertible} \tag{126}$$

Si no lo fuera sería singular y a lo menos un autovalor sería nulo, que daría lugar a

$$(I - S)x = 0 \quad (127)$$

pudiendo normalizar  $x$  con lo que

$$\|x\| = 1 \quad (128)$$

y en virtud de (127)

$$\|Sx\| = 1 \quad (129)$$

y sucesivamente

$$1 = \|x\| = \|Sx\| \leq \|S\| \|x\| = \|S\| \quad (130)$$

que implica

$$\|S\| = 1$$

en contra de la hipótesis inicial.

Por otra parte, la consideración de que, en virtud de (124)

$$\|S\| = \mu_{S \text{ máximo}} < 1 \quad (131)$$

y

$$\|S\|^k = \|S^k\| = \mu_{S \text{ máximo}}^k = \mu_{S^k \text{ máximo}} \quad (132)$$

conduce a

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \|S^k\| = 0 \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{S \text{ máximo}}^k = 0 \quad (133)$$

que implica así mismo

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^k = 0 \quad (134)$$

pues  $(S^k - \mu_{S^k} I)x = 0$  con  $\mu_{S^k} = \mu_S^k = 0$  exige  $S^k x = 0$   $S^k = 0$   $x \neq 0$  para  $k \rightarrow \infty$

Consideremos ahora la expresión

$$L = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - S) \sum_{k=0}^{k=m} S^k \quad (135)$$

y desarrollando

$$(I - S) \sum_{k=0}^{k=m} S^k = \sum_{k=0}^{k=m} (S^k - S^{k+1}) = S^0 - S^{k+1} \quad (136)$$

Con lo que en el límite, con (124) y (134)

$$L = \lim_{m \rightarrow \infty} (I - S) \sum_{k=0}^{k=m} S^k = I \quad (137)$$

Y finalmente, teniendo en cuenta (126)

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} S^k = (I - S)^{-1} \quad (138)$$

Suma de la serie convergente de Neumann.

y se puede escribir, al ser evidentemente lícito cambiar S por I-S, en (138), por ser S de rango completo y  $\|S\| < 1$ , que implica  $\|I - S\| < 1$ :

$$S^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k \quad (139)$$

Permitiendo calcular  $S^{-1}$  con la precisión que se desee, bastando para ello tomar m suficientemente grande. La cuestión se reduce ya a pura capacidad de cálculo, supuesta determinada S a priori con la adecuada precisión.

Con (139) la expresión:

$$x = S^{-1}b = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k . b \quad (140)$$

resuelve el ajuste. Deteniendo el sumatorio en el elemento de orden genérico m, la fórmula de aplicación práctica será:

$$x = S^{-1}b = \sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k . b \quad (141)$$

No obstante, hay que tener presente que la convergencia de la serie no es en general tan acusada como sería deseable.

Recuérdese que la expresión (139) supone la aceptación de  $\|S\| < 1$ . En caso contrario es indispensable realizar previamente el cambio de escala adecuado.

### 5.1.2.- SEGUNDA APLICACIÓN DE LAS SERIES DE NEUMANN.

En ocasiones es difícil determinar a priori el límite “m” más adecuado para el sumatorio (141). Puede aliviarse el inevitable tanteo operando en la forma iterativa que sigue.

Sean las matrices cuadradas  $S_{n,n}$  y  $B_{n,n}$ , de norma inferior a la unidad, pudiendo escribir por tanto

$$\| I - SB \| < I$$

y con (139)

$$(SB)^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} (I - SB)^k \quad (142)$$

de donde, multiplicando a ambos miembros a izquierda y derecha por B y S resultan las dos expresiones

$$B(SB)^{-1} = BB^{-1}S^{-1} = S^{-1} = B \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} (I - SB)^k \quad (143)$$

$$(SB)^{-1}S = B^{-1}S^{-1}S = B^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} (I - SB)^k .S \quad (144)$$

Por otra parte, considerando una primera solución de orden cero

$$x_0 = S^{-1} b \quad (145)$$

se puede escribir sucesivamente:

$$S x_0 = b + r_0 \quad (146)$$

$$S(x - x_0) = r_0 = \text{vector de residuos} \quad (147)$$

$$(x - x_0) = S^{-1} r_0 = S^{-1} (Sx_0 - b) \quad (148)$$

$$x = x_0 + S^{-1} (Sx_0 - b) = x_0 + e_0 \quad (149)$$

con  $e_0 =$  vector de error

$$Sx = Sx_0 + Se_0 \quad (150)$$

$$Se_0 = b - Sx_0 = b - (b + r_0) = -r_0 \quad (151)$$

$$e_0 = -S^{-1} r_0 \quad (152)$$

con (146), (152) y (149) escribimos la primera iteración:

$$r_0 = b - Sx_0 \quad (153)$$

$$e_0 = -S^{-1} r_0 = -S^{-1} \text{aprox } r_0 \quad (154)$$

$$x_1 = x_0 + e_0 \quad (155)$$

y sucesivamente pueden efectuarse iteraciones sucesivas de precisión creciente, si  $S^{-1}$  crece a su vez en precisión.

Si así fuera, escribiremos la iteración de orden k en la forma

$$r_k = b - S x_k \quad (156)$$

$$e_k = -S^{-1}_k r_k = -S^{-1}_{kprox} r_k \quad (157)$$

$$x_{k+1} = x_k + e_k \quad (158)$$

que indica así mismo los cálculos sucesivos.

Pero si llamamos

$$B = S^{-1} = \text{matriz inversa aproximada de orden cero}$$

las sucesivas matrices cumplirán

$$\| I - SB \| < I \rightarrow 0$$

y se obtienen inmediatamente aplicando (144) , resultando los valores sucesivos

$$S^{-1}_{kprox} = B \sum_{k=0}^k (I - SB)^k \quad (159)$$

pudiéndose obtener los sucesivos valores (156), (157), y (158) que van mostrando la progresión del cálculo, y directamente y como comprobación

$$x_k = S^{-1}_{kprox} . b = B \sum_{k=0}^k (I - SB)^k . b \quad (160)$$

resultando el valor exacto de x para  $k \rightarrow \infty$  , como debía ser.



### 5.1.3.- APLICACIÓN DEL ALGORITMO DE LAS SERIES DE NEUMANN.

Supongamos la matriz  $M$  simétrica y definida positiva, procedente de otra  $M'$ , también simétrica y definida positiva donde, en la expresión general característica:

$$(M' - \lambda' I) x = 0$$

se ha efectuado el cambio de escala definido por

$$x = \frac{z}{k}$$

tal que

$$(M' - \lambda' I) \frac{z}{k} = (\frac{1}{k} M' - \frac{\lambda'}{k} I) z = 0$$

de lugar a

$$(\frac{1}{k} M' - \frac{\lambda'}{k} I) z = (M - \lambda I) z = 0$$

en donde

$$\lambda = \frac{\lambda'}{k} < 1$$

condición que se podrá lograr siempre.

Teniendo en cuenta de ahora en adelante que todos los autovalores de  $M$  serán menores que la unidad, escribimos la factorización clásica:

$$M = \Gamma V \Gamma^T$$

Con la notación usual, donde  $\Gamma$  = matriz ortogonal columna de autovectores

$V$  = matriz diagonal de autovalores

Cumpléndose

$$\Gamma^T = \Gamma^{-1}$$

Según sabemos

Y resulta elemental escribir

$$M^2 = \Gamma V \Gamma^T \Gamma V \Gamma^T = \Gamma V^2 \Gamma^T$$

$$M^3 = \Gamma V^2 \Gamma^T \Gamma V \Gamma^T = \Gamma V^3 \Gamma^T$$

$$M^4 = \Gamma V^3 \Gamma^T \Gamma V \Gamma^T = \Gamma V^4 \Gamma^T$$

.....

$$M^n = \Gamma V^{n-1} \Gamma^T \Gamma V \Gamma^T = \Gamma V^n \Gamma^T$$

Se trata en definitiva de calcular, teniendo en cuenta lo expuesto, la expresión:

$$S^{-1} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} M^k = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k$$

suponiendo  $M^0 = I$  según antes se vio, podremos escribir:

$$S^{-1} = I + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=m} M^k = I + \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^{k=m} (I - S)^k$$

Según el algoritmo conocido de Neumann, y se tendrá sucesivamente:

Y se tendrá sucesivamente:

$$M = \Gamma V \Gamma^T$$

$$M^2 = \Gamma V^2 \Gamma^T$$

-----

$$\begin{aligned} M + M^2 &= \Gamma V \Gamma^T + \Gamma V^2 \Gamma^T = \\ &= \Gamma (V \Gamma^T + V^2 \Gamma^T) = \Gamma (V + V^2) \Gamma^T \end{aligned}$$

y sucesivamente

$$\begin{aligned} M + M^2 + M^3 &= \Gamma (V + V^2) \Gamma^T + \Gamma V^3 \Gamma^T = \\ &= \Gamma [(V + V^2) \Gamma^T + V^3 \Gamma^T] = \Gamma (V + V^2 + V^3) \Gamma^T \end{aligned}$$

y por inducción es ya inmediato

$$\sum_{k=1}^{k=m} M^k = \Gamma \left( \sum_{k=1}^{k=m} V^k \right) \Gamma^T$$

y de la estructura de las matrices diagonal  $V^k$  se deduce fácilmente el paso al límite para  $m \rightarrow \infty$  según:

$$S^{-1} - I = \lim \left( \sum_{k=1}^{k=m} M^k \right) = \lim \left( \Gamma \left( \sum_{k=1}^{k=m} V^k \right) \Gamma^T \right) \quad (161)$$

que resulta definida evidentemente por el producto matricial:

$$S^{-1} - I = \Gamma(\text{diag}V)\Gamma^T \quad \mathbf{(162)}$$

donde los elementos del vector  $V$  serán las sumas infinitas de potencias enteras crecientes de los autovalores  $\lambda_j$  de la matriz  $M$ , con  $j \in 1,2,3,\dots,n$ .

Y así escribiremos el vector

$$V = \left( \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j} \right) = \left( \frac{1 - \mu_{Sj}}{\mu_{Sj}} \right) \quad (163)$$

Con  $M = I - S$ .

Y es inmediato:

$$S^{-1} = I + \Gamma(\text{diag}V)\Gamma^T \quad (164)$$

de donde:

$$S^{-1} = \Gamma \Gamma^T + \Gamma(\text{diag}V)\Gamma^T = \Gamma(I + \text{diag}V)\Gamma^T = \Gamma(\text{diag}V')\Gamma^T$$

con  $(\text{diag}V') = I + \text{diag}V$

$$V' = \frac{1}{1 - \lambda_j} = \frac{1}{\mu_{Sj}} \quad (165)$$

## 5.2.- CASO DE REDES LIBRES.

### 5.2.1.- CONSIDERACIONES PREVIAS.

Sea como antes

$$\| S \| < 1 \quad (\text{con o sin previa modificación de escala})$$

$$S^0 = I \quad 1 = \| S^0 \| > \| S^1 \| > \| S^2 \| > \| S^3 \| > \dots > \| S^k \| > \| S^{k+1} \| = \| S \|^{k+1} \rightarrow 0$$

$k \rightarrow \infty$

que implica, como sabemos

$$\lim_{k \rightarrow \infty} S^k = 0$$

Y con un desarrollo análogo al anterior, teniendo en cuenta el sistema general de ecuaciones normales y su solución más general

$$\begin{aligned} S x &= b \\ x &= S^{-1} b \end{aligned}$$

se podrá formular con el mismo algoritmo anterior

$$N = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k \quad (166)$$

Pero más adelante veremos que los autovalores  $\mu$  de la matriz  $S$  y  $\lambda$  de la matriz  $(I - S)$  guardan la relación

$$\mu = 1 - \lambda \quad (167)$$

conservando los mismos autovectores.

Por consiguiente,  $I - S$  tendrá  $R(S)$  autovalores iguales a la unidad, y siendo  $I - S$  simétrica por serlo  $S$ , se tendrá:

$$\| I - S \| = 1 \quad (168)$$

que impide continuar el algoritmo según el método empleado en el caso de redes ligadas.

En primer lugar, es preciso calcular la expresión de  $S^+$

En cualquier ajuste mínimo cuadrático, hipótesis de Gauss-Markov, con la notación usual escribiremos:

$$S = \Gamma V \Gamma^T$$

$$R(S) \leq n$$

Y supongamos que de alguna forma conocemos  $V^+$  (o su caso particular  $V^{-1}$ ) según teoría conocida sobre la que volveremos más adelante.







$$(S + I - I - \mu I)x = 0$$

o lo que es lo mismo multiplicando por  $-1$

$$(-S - I + I + \mu I)x = 0$$

$$[(I - S) - (1 - \mu)I]x = 0 \tag{173}$$

la evidente identidad de (172) y (173) permite definir la matriz (I-S) con:

- Los mismos autovectores de S.
- El vector de autovalores  $\lambda = (1 - \mu)$

Formemos la matriz:

$$M = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu_{n-d}^{-1} \\ 1_d \end{pmatrix} \tag{174}$$

en forma factorizada clásica.

Donde:

$\Gamma$ =matriz de autovectores columna de S.

$\mu_{n-d}^{-1}$ =vector columna de autovalores de S invertidos con  $\forall (n-d) \in d+1, d+2, d+3, \dots, d+(n-d)=d$

$d$  = defecto de rango de S  $\forall d' \in 1, 2, \dots, d$ , y  $d \in 1, 2, 3, 4$ .

Según sean los grados de libertad o constreñimientos de la red que se trate.

Simplifiquemos la notación de (174), en adelante:

$$M = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 1 \end{pmatrix} \Gamma^T \tag{175}$$

Adoptemos análoga notación a la anteriormente expuesta para los vectores:

$$\begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se tendrá sucesivamente:

$$S = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T \tag{176}$$



$$\begin{aligned}
 SMS &= \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T = \\
 &= \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T = S
 \end{aligned}$$

luego

$$SMS = S \quad (177)$$

$M \equiv$  matriz inversa generalizada de  $S$

Que **no** es inversa generalizada recíproca.

En efecto:

$$\begin{aligned}
 R(M) &= n \quad (\text{completo}) \\
 R(S) &= n-d \quad (\text{incompleto}).
 \end{aligned}$$

Y se tendrá:

$$R(MSM) \leq R(S) = n-d < R(M)$$

Sin embargo,  $M$  será solución del sistema de ecuaciones normales:

$$Sx = A^T P K = b \quad (178)$$

Según

$$x = M A^T P K = M b \quad (179)$$

O bien, con  $M = S_M^-$

$$x = S_M^- b \quad (180)$$

poniendo de manifiesto la condición de inversa generalizada de  $M$ , según notación usual.

Este proceso puede generalizarse formulando la matriz:

$$M_{g\delta} = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ \delta \end{pmatrix} \Gamma^T \quad (181)$$

con  $\delta =$  arbitrario.

En efecto:

$$\begin{aligned} SM_{g\delta}S &= \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ \delta \end{pmatrix} \Gamma^T \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T = \\ &= \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T = S \end{aligned} \quad (182)$$

Expresamos ahora:

$$I - S = \Gamma \text{diag} \begin{bmatrix} (1 - \mu)_{n-d} \\ 1_{d'} \end{bmatrix} \Gamma^T = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \lambda_{n-d} \\ 1_{d'} \end{pmatrix} \Gamma^T = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \Gamma^T \quad (183)$$

en forma análoga a la notación adoptada.

Se tendrá:

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k &= 1 + \sum_{k=0}^{k=m} \left[ \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \Gamma^T \right]^k = \\ &= 1 + \Gamma \sum_{k=0}^{k=m} \left[ \text{diag} \begin{pmatrix} \lambda \\ 1 \end{pmatrix} \right]^k \Gamma^T = 1 + \Gamma \text{diag} V'' \Gamma^T \end{aligned} \quad (184)$$

con el mismo proceso de cálculo ya conocido.

Donde

$$\text{diag} V'' = \text{diag} \begin{pmatrix} \frac{\lambda_j (\lambda_j^m - 1)}{\lambda_j - 1} \\ \lambda_j - 1 \\ m \end{pmatrix} \quad (18)$$

$$\begin{aligned} |\lambda_j| &< 1 \\ j &\in 1, 2, 3, \dots, n \end{aligned}$$

resultando inmediato:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\lambda_j (\lambda_j^m - 1)}{\lambda_j - 1} = \frac{\lambda_j}{1 - \lambda_j} = \frac{1 - \mu_j}{\mu_j}$$

particularizando cada autovalor, y cada elemento de (185).

Y también:

$$\sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k = \Gamma I \Gamma^T = \Gamma \text{diag} V^T \Gamma^T = \Gamma \text{diag} \left( 1 + \frac{\lambda(\lambda^m - 1)}{\lambda - 1} \right) \Gamma^T$$

suprimiendo los subíndices para simplificar la notación.

Siendo inmediato

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left[ 1 + \frac{\lambda_j(\lambda_j^m - 1)}{\lambda_j - 1} \right] = 1 + \frac{-\lambda_j}{\lambda_j - 1} = \frac{1}{1 - \lambda_j} = \frac{1}{\lambda_j} \quad (18)$$

y con suficiente aproximación y teniendo en cuenta (181) podemos escribir con notación análoga:

$$\sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k \approx \Gamma \text{diag} \left( \frac{\mu^{-1}}{m+1} \right) \Gamma^T = M_{gm} \quad (18)$$

matriz inversa generalizada, en sumatorio muy convergente, que completa la teoría de las series de Neumann.

Evidentemente, M en (175) es el caso particular  $M_{g\infty}$  en (187) y todas las matrices  $M_{gm}$  son sucesivas aproximaciones de :

$$M_{g\infty} = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{k=m} (I - S)^k = \Gamma \text{diag} \left( \frac{\mu^{-1}}{m \rightarrow \infty} \right) \Gamma^T \quad (18)$$

cuya serie de términos m es divergente, no teniendo sentido su aplicación formal en el límite.

Sin embargo, es claro que todas las soluciones:

$$x = M_{gm} A^T P K \quad (188)$$

M, propio.

Son aproximaciones de una misma solución y que esta correspondería a:

$$x = \Gamma \text{diag} \left( \frac{\mu^{-1}}{m+1} \right) \Gamma^T A^T P K \quad (18)$$

con m muy grande, en el entorno del infinito, pero sin llegar al límite, donde carece de sentido.

Así estamos definiendo la solución de la red mediante una matriz  $M_{gm}$ , de rango completo, con una definición de su figura de error tal que sus semiejes  $a_i$  en el elipsoide indicatriz estarán integrados en dos grupos:

$$a_i = \alpha \sqrt{\mu_i^{-1}}$$

$\forall i \in d+1, d+2, \dots, n$  fijos, para cualquier aproximación de la solución  $x$  de la red

$$a_j = \alpha \sqrt{m+1}$$

$\forall j \in 1, 2, \dots, d$ ,  
con  $d =$  número de constreñimientos de la red, pudiendo alcanzar  $a_j$  un valor tan grande como queramos.

Todo sucede a lo largo del método expuesto como si tratáramos de aproximar la solución  $S^+$  de la red, calculando la inversa clásica aproximada  $S^{-1}$  de la matriz  $S$ , sustituyendo sus autovalores nulos por casi nulos.

Teniendo en cuenta que podemos escribir lo que precede puesto que  $R(S^{-1}_{\text{aprox}}) = n$ , completo y que, según sabemos, los espacios fila y columna de  $S$ , cuadrada y simétrica son los mismos, se cumple:

$$\begin{aligned} \text{Espacio fila/columna de } S &\equiv \text{Espacio fila/columna de } S^+ \equiv \\ &\equiv \text{Espacio fila/columna de } M_{gm}(M_{g\delta}) \equiv \text{Espacio fila/columna de } S^{-1}_{\text{aprox}} \end{aligned}$$

Está claro que la solución que hemos encontrado está en el espacio columna de  $M_{gm}(M_{g\delta})$ , que dicha solución está por tanto en el espacio fila de  $S$  y que es determinista pues el espacio nulo de  $M_{gm}$  es cero (rango de  $M_{gm}$  o  $M_{g\delta}$ , completo).

Así pues, hemos llegado a la solución:

$$x = M_{gm}(M_{g\delta})A^T PK$$

en el  $EC \equiv EF$  de  $M_{gm}(M_{g\delta})$ , que es el espacio fila de  $S$ , y que puede explicarse según:

4 Una solución determinista equivalente a la clásica general:

$$x = x_F + x_N \quad (19)$$

donde  $x_F$  = vector fijo en el espacio fila de S, EF  
 $x_N$  = vector arbitrario en el espacio nulo de S, NU.

Que exige particularizarse con NU = 0.

$$x_N = 0$$

en el supuesto contemplado.

Es evidente la solución mínima norma vectorial en x, que se obtiene también a partir de la matriz pseudoinversa  $S^+$ , (o en caso de rango completo de  $S^{-1}$ ).

Puede también verse de otra forma:

Sea:

$$\begin{aligned} S &= \Gamma \text{diag}(\mu, 0) \Gamma^T \\ S^+ &= \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, 0) \Gamma^T \\ S^- &= \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T \end{aligned} \quad (191)$$

$\delta$  = arbitrario

Una solución de la red será:

$$x = S^- A^T P K$$

y aplicando el teorema de progresión de cofactores:

$$Q_{xx} = S^- A^T P Q_{KK} (S^- A^T P)^T = S^- A^T P Q P A S^- = S^- A^T P A S^- = S^- S S^-$$

con (195) y sustituyendo:

$$\begin{aligned} Q_{xx} &= \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T \Gamma \text{diag}(\mu, 0) \Gamma^T \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T = \\ &= \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \text{diag}(\mu, 0) \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T = \\ &= \Gamma \text{diag}(I, 0) \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T = \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, 0) \Gamma^T = S^+ \end{aligned}$$

como debía de ser, luego x, con matriz cofactor  $S^+$  es la solución pseudoinversa.

4Una figura de error definida por los  $a_i$  semiejes del hiperelipsoide fijos, y  $a_j$  variables con el sumatorio elegido, y crecientes hasta donde arbitrariamente se fije o se desee.

Pero si observamos la expresión de  $S^+$  en (170), es decir:

$$S^+ = \Gamma \text{diag} \begin{pmatrix} \mu^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} \Gamma^T \quad (192)$$

no es sino una particularización de (181) para  $\delta = 0$ .

La solución  $x$  será la misma, pero la figura del hiperelipsoide de error por lo que respecta a los autovalores variables, origen de semiejes también variables, varía respecto a ellos entre 0 e  $\infty$ .

La aparente incongruencia es perfectamente lógica. En efecto, la solución (192) puede escribirse:

$$X = x_F + Bx_{NU} \quad (193)$$

Con:

$x_{NU}$  = Vector de variables libres procedentes de columnas de pivote nulo en eliminación gaussiana que dan lugar al espacio nulo.

$$x_{NU} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_d \end{pmatrix}$$

con  $B$  = base cualquiera en  $NU$ .

Y pudiendo tomar las variables  $x_{NU}$  cualquier valor en el ajuste, sus semiejes de error a priori puede variar en todo el campo de los números reales positivos, de cero a infinito.

La consecuencia es doble, en su aspecto esencial:

- 1.- Puede alcanzarse la solución óptima pseudoinversa mínima norma en  $x$ , a través de matrices inversas generalizadas de rango completo y no recíprocas como las definidas en la páginas anteriores
- 2.- Es preciso revisar la teoría de formación de las figuras de error, teniendo en cuenta la existencia de las variables libres.

Por lo que respecta al rango de  $S^-$  es claro que, si:

$$S = SS^-S$$

$$R(S) \leq \text{mrmcc}(SS^-S)$$

mrmcc = mínimo rango matrices factores.

$$\begin{aligned} R(S) &\leq (R(S)R(S^-)R(S)) \\ n-d &\leq [n-d, R(S^-), n-d] \end{aligned}$$

luego:

$$R(S^-) \geq n-d \tag{194}$$

obsérvese que, que si  $S^-$  fuera recíproca:

$$\begin{aligned} R(S^-) &\leq (R(S^-)R(S)R(S^-)) \\ R(S^-) &\leq (R(S^-), n-d, R(S^-)) \end{aligned}$$

luego

$$R(S^-) \leq n-d \tag{195}$$

(194) y (195) simultáneamente exige:

$$R(S^-) = n-d = R(S)$$

En nuestro caso, no recíproca:

$$R(S^-) = n$$

perfectamente justificado.

### 5.2.3.- ESTUDIO COMPLEMENTARIO DE LA DEFINICIÓN DE LA MATRIZ $(I-S)$ .

De una consideración geométrica elemental. (longitud de un lado de un triángulo igual o mayor que la diferencia de los otros dos), escribiremos sucesivamente:

$$\begin{aligned} \|Ax - Bx\| &\geq \|Ax\| - \|Bx\| \\ \frac{\|Ax - Bx\|}{\|x\|} &\geq \frac{\|Ax\|}{\|x\|} - \frac{\|Bx\|}{\|x\|} \\ \|A - B\| &\geq \|A\| - \|B\| \end{aligned}$$

y con  $A=I$  y  $B=S$

$$\|I - S\| \geq \|I\| - \|S\| \geq 1 - \|S\|$$

y como realizamos un cambio de escala, tendremos:

$$\begin{aligned} 1 &> \|S\| \\ \|I - S\| &> 0 \end{aligned} \tag{196}$$

que permite que la norma de  $I-S$  sea mayor que la unidad, condición invalidante para los cálculos que anteceden..

Estudiando en detalle la matriz (166)

$$(I-S)^T = I^T - S^T = (I-S)$$

Con lo que vemos que se trata de una matriz simétrica, y por lo tanto:

$$(I-S)^T(I-S) = (I-S)^2$$

$$\|I - S\| = \sqrt{\lambda_{(I-S)^T(I-S)max}} = |\lambda|_{(I-S)max}$$

y por consiguiente, la condición necesaria y suficiente para conseguir, mediante un mismo cambio de escala que:

$$\begin{aligned} \|Sy\| &< 1 \\ \|I - S\| &\leq 1 \end{aligned}$$

en su caso más general, será efectuarlo según  $x = \frac{y}{E}$ , con:

$$E > \lambda_{max} \quad \lambda_{max} \in |\lambda_S|_{max} \quad |\lambda|_{(I-S)max} \tag{197}$$

Por otra parte, sea:

$$\begin{aligned} \pi &= x^T(I - S)x = x^T Ix - x^T Sx = x^T Ix - x^T \Gamma V \Gamma^T x = x^T Ix - (\Gamma^T x) V (\Gamma^T x) \\ \pi &= x^T Ix - z^T V z \end{aligned}$$

donde  $|x| = |z|$  por tratarse de una rotación de argumento  $\Gamma^T$ .  
Seguidamente:

$$\pi = x^T Ix - z^T V z = \sum x_i - \sum \lambda_i z_i^2 \quad \text{donde } 0 \leq \lambda_i \leq 1$$



después de aplicar el cambio de escala adecuado si procede.

Sustituyendo todos los  $\lambda_i$  por el mayor  $\lambda_{imax}$ , se tendrá:

$$\lambda_{imax} \sum z_i^2 > \sum \lambda_i z_i^2$$

pero en cualquier caso, por ser  $\lambda_{imax} \leq 1$ :

$$\lambda_{imax} \sum z_i^2 = \lambda_{imax} |z|^2 = \lambda_{imax} |x|^2 \leq |x|^2$$

luego:

$$\pi = \sum x_i^2 - \sum \lambda_i z_i^2 > \sum x_i^2 - \lambda_{imax} \sum z_i^2 = |x|^2 - \lambda_{imax} |z|^2 = |x|^2 - \lambda_{imax} |x|^2 > 0$$

y en definitiva:

$$\pi = x^T (I - S)x > 0 \tag{198}$$

y la matriz I-S en su caso más general, será definida positiva.

### 5.3.- APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE LAS SERIES DE NEUMANN SOBRE UNA RED.

#### 5.3.1.- INTRODUCCIÓN.

El objetivo de este apartado consiste en comprobar numéricamente sobre una red, la teoría vista de inversión de matrices aplicando las series de Neumann, sobre matrices con defecto de rango, y matrices de rango completo.

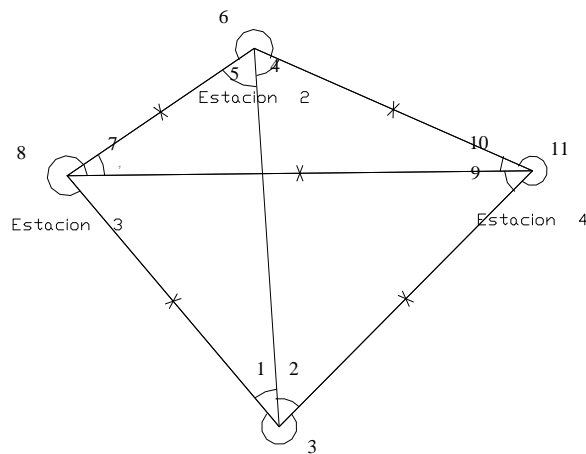
En primer lugar, se va a proceder a calcular y compensarla la red por el método tradicional. A continuación, se muestra los resultados obtenidos invirtiendo la matriz por el método de las series de Neumann, comprobando la unicidad de la solución. Ya por último, se muestra unos estudios sobre la inversa generalizada obtenida, comparando los autovalores de la matriz  $S = (A^T PA)$ , y la matriz  $S = (A^T PA)/c$ , sabiendo que  $c$  es el factor de escala de la matriz  $S$ , necesario para que la norma de la misma sea inferior a la unidad.

Toda esta metodología, se aplicará tanto para el tratamiento de la red como ligada, como para red libre.

#### 5.3.2.- DESCRIPCIÓN DE LA RED.

Se ha observado una red de triangulación, compuesta de 4. Para la observación, se ha empleado una Estación Total Elta 4 de Zeiss.

El gráfico de la red es el siguiente:



El resultado de la observación, aparece reflejado en la siguiente tabla, sabiendo las distancias reducidas aparecen en metros, y las lecturas angulares en graduación centesimal.

ANGULO	VALOR	DISTANCIA	VALOR
1	40.4543	1-3	1252.609
2	53.8572	1-4	1372.987
3	305.6886	2-3	862.825
4	69.4145	2-4	1159.042
5	66.1189	3-4	1774.031
6	264.4639		
7	93.4263		
8	306.5738		
9	49.6553		
10	27.0727		
11	323.2713		

Con las observaciones reducidas al elipsoide y a la proyección U.T.M.

Las coordenadas aproximadas de los vértices son:

- 1 ( 5954,372 ; 951,204 )
- 2 ( 5859,150 ; 2393,987 )
- 3 ( 5146,119 ; 1908,156 )
- 4 ( 6920,020 ; 1927,171 )

### 5.3.3 COMPENSACIÓN PLANIMÉTRICA EMPLEANDO EL ALGORITMO TRADICIONAL.

#### 5.3.3.1 CASO DE RED LIBRE.

Se va a compensar la red como libre empleando el método de las observaciones indirectas, fijando únicamente la escala de la red, con lo cual el número de constreñimientos será 3.

El número de ecuaciones es 16, donde 11 de ellas son de ángulo, y las restantes de distancia. El número de incógnitas será de 10, correcciones a cada una de las coordenadas, por lo tanto, el número de grados de libertad  $m - R(A) = 16 - 5 = 11$ .

Aplicando el algoritmo conocido, el cuadro de las ecuaciones sin ponderar es el siguiente:

VbleX( 1 )	VbleY( 1 )	VbleX( 2 )	VbleY( 2 )	VbleX( 3 )	VbleY( 3 )	VbleX( 4 )	VbleY( 4 )
-51.056008	298.946045	439.330641	28.995311	-388.2746	-327.941356	0.000000	0.000000
109.715807	355.125093	-439.330641	-28.995311	0.000000	0.000000	329.61483	-326.129782
-58.659799	-654.07114	0.000000	0.000000	388.27463	327.941356	-329.6148	326.129782
-439.330641	-28.995311	218.106413	-473.7513	0.000000	0.000000	221.224228	502.746578
439.330641	28.995311	-23.867263	-638.75116	-415.46337	609.755794	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	-194.23915	1112.50237	415.463377	-609.755794	-221.2243	-502.74658
-388.274633	-327.94135	-415.46338	609.755794	803.738010	-281.814438	0.000000	0.000000
388.274633	327.941356	415.463377	-609.75579	-803.738010	281.814438	0.000000	0.000000
329.614833	-326.12978	0.000000	0.000000	-3.846518	358.839997	-325.768315	-32.710215
0.000000	0.000000	221.224228	502.746578	3.846518	-358.839997	-225.070746	-143.906581
-329.614833	326.129782	-221.22423	-502.74657	0.000000	0.000000	550.839062	176.616796
0.645255	-0.763966	0.000000	0.000000	-0.645255	0.763966	0.000000	0.000000
-0.703338	-0.710854	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.703338	0.710854
0.000000	0.000000	0.826403	0.563078	-0.826403	-0.563078	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	-0.915304	0.402762	0.000000	0.000000	0.915304	-0.402762
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-0.999942	-0.010718	0.999942	0.010718

Donde las ecuaciones angulares están en segundos centesimales y las lineales en metros.

La matriz  $S = (A^T P A)$ , se muestra a continuación:

39704.33616	2179.464017	3410.286870	-6005.1232	-2415.35439	23092.467089	-18899.2686	-19266.8078
2179.464017	46984.57990	2630.94247	-8896.7122	-471.253030	-19754.401424	-4339.15346	-18333.4662
3410.286870	2630.94247	56516.56681	-6095.9927	-3141.20736	-11138.275893	-26785.6463	14603.32619
-6005.12326	-8896.71226	-6095.99278	61999.32359	13569.49663	-33789.484989	-1468.38058	-19313.1263
-24215.3543	-471.253030	-33141.2073	13569.49663	8555.637543	-11510.824349	-31199.0757	-1587.41925
23092.46708	-19754.4014	-11138.2758	-33789.4849	-11510.8243	46473.947570	-443.366846	7069.938842
-18899.2686	-4339.15346	-26785.6463	-1468.38058	-31199.0757	-443.366846	76883.9907	6250.900895
-19266.8078	-18333.4662	14603.32619	-19313.1263	-1587.41925	7069.938842	6250.900895	30576.65371

El vector de los términos independientes, expresados en segundos centesimales y metros, es el siguiente:

VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES ( K )

0.1789  
 0.0598  
 0.7611  
 0.2817  
 -0.0612  
 -27.2204  
 -5.1177  
 6.1177  
 -6.5128  
 3.1712  
 -3.6584  
 -0.00029356  
 0.03847766  
 0.01275650  
 0.00691219  
 0.02808905

Para ponderar las observaciones, se ha considerado un peso angular  $P_{\alpha}=0.0156$  y para las lineales,  $P_l=27778$ .

Aplicando el algoritmo de mínimos cuadrados para redes libres, se obtiene el siguiente cuadro, donde aparecen representadas las correcciones a las variables, así como las coordenadas compensadas.

**CORRECCIONES A LAS VARIABLES Y VARIABLES COMPENSADAS**

Correcciones	VARIABLES COMPENSADAS
-0.010135	X( 1 ) 5954.361864
-0.009330	Y( 1 ) 951.194669
0.004495	X( 2 ) 5859.154495
-0.000457	Y( 2 ) 2393.986542
-0.010845	X( 3 ) 5146.108154
-0.001522	Y( 3 ) 1908.154477
0.016485	X( 4 ) 6920.036485
0.011311	Y( 4 ) 1927.182311

En el siguiente listado aparece la matriz  $S^+=(A^T P A)=Q_{xx}$  , así como los autovalores de la misma:

**VALORES SINGULARES DE LA MATRIZ ( A<sup>t</sup> P A )**

```

130134.446491045000000000
101837.062587011000000000
88668.769706253100000000
69547.888871894700000000
57506.868413344200000000
0.00000000006352132 --> ELIMINADO
0.00000000006128450 --> ELIMINADO
0.0000000000618712 --> ELIMINADO
    
```

**MATRIZ COFACTOR  $Q_{xx} = Pseudo( A^t P A )$**

```

0.0000062965 -0.0000004025 -0.0000018636 0.0000016789 -0.0000021374 0.0000031468 -0.0000022955 -0.000004423
-0.0000004025 0.0000122635 -0.0000005408 -0.0000053876 0.0000002843 -0.0000035298 0.0000006590 -0.000003346
-0.0000018636 -0.0000005408 0.0000070255 0.0000000199 -0.0000022889 -0.0000026162 -0.0000028729 0.000003137
0.0000016789 -0.0000053876 0.0000000199 0.0000098637 -0.0000015055 -0.0000020637 -0.0000001933 -0.000002412
-0.0000021374 0.0000002843 -0.0000022889 -0.0000015055 0.0000065186 0.0000002418 -0.0000020922 0.000000979
0.0000031468 -0.0000035298 -0.0000026162 -0.0000020637 0.0000002418 0.0000055781 -0.0000007724 0.000000015
-0.0000022955 0.0000006590 -0.0000028729 -0.0000001933 -0.0000020922 -0.0000007724 0.0000072607 0.000000306
-0.0000044232 -0.0000033460 0.0000031370 -0.0000024122 0.0000009793 0.0000000154 0.0000003067 0.000005742
    
```

En la siguiente tabla se pueden observar los residuos de las observaciones obtenidos del ajuste:

RESIDUOS PONDERADOS Y RESIDUOS SIN PONDERAR

Ponderados	Sin ponderar
0.527257	4.221437
-0.587322	-4.702346
-0.064834	-0.519091
1.870112	14.972884
-0.112379	-0.899757
1.614565	12.926873
0.209622	1.678320
-0.334522	-2.678320
-0.003782	-0.030286
-0.904307	-7.240251
1.782389	14.270538
1.119446	0.006716
-0.846709	-0.005080
0.086911	0.000521
-0.112961	-0.000677
-0.103608	-0.000621

El número de grados de libertad resulta 11.

Estimador varianza observable peso unidad = 1.17232697

Estimador desviación típica 1.082740

Los resultados de la matriz varianza – covarianza aparecen reflejados a continuación:

MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA VARIABLES O PARAMETROS CORREGIDOS

0.00000738	-0.00000047	-0.00000218	0.00000196	-0.00000250	0.00000368	-0.00000269	-0.00000518
-0.00000047	0.00001437	-0.00000063	-0.00000631	0.00000033	-0.00000413	0.00000077	-0.00000392
-0.00000218	-0.00000063	0.00000823	0.00000002	-0.00000268	-0.00000306	-0.00000336	0.00000367
0.00000196	-0.00000631	0.00000002	0.00001156	-0.00000176	-0.00000241	-0.00000022	-0.00000282
-0.00000250	0.00000033	-0.00000268	-0.00000176	0.00000764	0.00000028	-0.00000245	0.00000114
0.00000368	-0.00000413	-0.00000306	-0.00000241	0.00000028	0.00000653	-0.00000090	0.00000001
-0.00000269	0.00000077	-0.00000336	-0.00000022	-0.00000245	-0.00000090	0.00000851	0.00000035
-0.00000518	-0.00000392	0.00000367	-0.00000282	0.00000114	0.00000001	0.00000035	0.00000673

A continuación, se va a proceder a estudiar la fiabilidad interna de la red, cuyos resultados, se resumen en la siguientes tablas:

---> Parametro de traslacion asociado : 4.12

**FIABILIDAD INTERNA DE LA RED**

<i>OBSERV.</i>	<i>RESIDUO</i>	<i>VBLE BAARDA</i>	<i>Nº REDUNDANCIA</i>	<i>MIN. ERROR. DETECTABLE</i>	<i>PARÁMETRO DE HOMOG.</i>
1	4.22143	0.512513	0.90278787	11.7199738	4.33615058
2	-4.70234	-0.577297	0.88288862	13.0078609	4.38474414
3	-0.51909	-0.066615	0.80800592	17.4098863	4.58342303
4	14.97288	1.891260	0.83403436	15.9322240	4.51133671
5	-0.89975	-0.113813	0.83164610	16.0694718	4.51780974
6	12.92687	1.829369	0.66444648	25.3810852	5.05437210
7	1.67832	0.218035	0.78844742	18.5004411	4.63992378
8	-2.67832	-0.347947	0.78844742	18.5004411	4.63992378
9	-0.03028	-0.003669	0.90663544	11.4613019	4.32693995
10	-7.24025	-0.874071	0.91303838	11.0224610	4.31174132
11	14.27053	1.820325	0.81782124	16.8569484	4.55583535
13	0.00671	1.886813	0.30026171	0.0408591	7.51877749
14	-0.00508	-1.422916	0.30203770	0.0406870	7.49663969
15	0.00052	0.131867	0.37053081	0.0348855	6.76838494
16	-0.00067	-0.167456	0.38815412	0.0336039	6.61294804
17	-0.00062	-0.135217	0.50081632	0.0267215	5.82180932

Suma de las redundancias 11.000000  
 Redundancia media .... 0.687500

**FIABILIDAD EXTERNA DE LA RED**

<i>OBSERVABLE</i>	$\sqrt{1-r_i}$	<i>PARAM. HOMOGENE</i>
1	0.311788	1.35196224
2	0.342215	1.50052697
3	0.438171	2.00832436
4	0.407388	1.83786804
5	0.410309	1.85370031
6	0.579269	2.92784518
7	0.459948	2.13412574
8	0.459948	2.13412574
9	0.305556	1.32212304
10	0.294892	1.27150038
11	0.426824	1.94453999
13	0.836503	6.28948447
14	0.835441	6.26300300
15	0.793390	5.36997529
16	0.782205	5.17268613
17	0.706529	4.11327896

### 5.3.3.2 CASO DE RED LIGADA.

Con los mismos observables que en el caso anterior, se ha procedido a considerar como fijos los puntos 1 y 2, siendo las coordenadas aproximadas del resto de los vértices, las mismas que las señaladas en el apartado anterior.

Aplicando el algoritmo conocido para las redes ligadas, se obtienen los siguientes resultados:

La matriz de diseño A, será la siguiente:

<b>VbleX(3)</b>	<b>VbleY(3)</b>	<b>VbleX(4)</b>	<b>VblY(4)</b>
-388.274633	-327.941356	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	329.614833	-326.129782
388.274633	327.941356	-329.614833	326.129782
0.000000	0.000000	221.224228	502.746578
-415.463377	609.755794	0.000000	0.000000
415.463377	-609.755794	-221.224228	-502.746578
803.738010	-281.814438	0.000000	0.000000
-803.738010	281.814438	0.000000	0.000000
-3.846518	358.839997	-325.768315	-32.710215
3.846518	-358.839997	-225.070746	-143.906581
0.000000	0.000000	550.839062	176.616796
-0.645255	0.763966	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.703338	0.710854
-0.826403	-0.563078	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.915304	-0.402762
-0.999942	-0.010718	0.999942	0.010718

La matriz  $S=A^T P A$  se expone a continuación:

88555.637543	-11510.824349	-31199.075789	-1587.419253
-11510.824349	46473.947570	-443.366846	7069.938842
-31199.075789	-443.366846	76883.990755	6250.900895
-1587.419253	7069.938842	6250.900895	30576.653717



El vector de los términos independientes:

0.1789  
0.0598  
0.7611  
0.2817  
-0.0612  
-27.2204  
-5.1177  
6.1177  
-6.5128  
3.1712  
-3.6584  
-0.00029356  
0.03847766  
0.01275650  
0.00691219  
0.02808905

Y con estos datos de partida, aplicamos el algoritmo de los mínimos cuadrados, donde se obtienen los siguientes resultados:

**MATRIZ COFACTOR  $Q_{xx} = \text{inv}(A^t P A)$**

0.0000137559	0.0000036591	0.0000057088	-0.0000012989
0.0000036591	0.0000232987	0.0000020762	-0.0000056216
0.0000057088	0.0000020762	0.0000156095	-0.0000033748
-0.0000012989	-0.0000056216	-0.0000033748	0.0000346270

**CORRECCIONES A LAS VARIABLES Y VARIABLES COMPENSADAS**

Correcciones Variables compensadas

-----  
-0.009784 X( 3 ) 5146.109215  
-0.005386 Y( 3 ) 1908.150613  
0.017116 X( 4 ) 6920.037116  
0.026548 Y( 4 ) 1927.197548

Numero de grados de libertad  $r = 12$

Estimador varianza observable peso unidad = 1.23168705

Estimador desviacion tipica 1.109813

**MATRIZ VARIANZA-COVARIANZA VARIABLES O PARAMETROS CORREGIDOS**

0.00001694	0.00000450	0.00000703	-0.00000159
0.00000450	0.00002869	0.00000255	-0.00000692
0.00000703	0.00000255	0.00001922	-0.00000415
-0.00000159	-0.00000692	-0.00000415	0.00004264

### 5.3.4 COMPENSACIÓN PLANIMÉTRICA EMPLEANDO EL ALGORITMO DE LAS SERIES DE NEUMANN.

En primer lugar vamos a aplicar el algoritmo de las series de Neumann con el sumatorio llevado al límite, donde tal y como se indica en el apartado anterior, se reduce al caso general para las redes libres, comprobando la unicidad de la solución inversa generalizada.

Se realizará un cálculo  $S^+ = \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, 0) \Gamma^T$ , caso de la pseudoinversa, y posteriormente las diferentes inversas generalizadas  $S^- = \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T$ , eligiendo arbitrariamente diferentes valores de  $\delta$ , donde se podrá observar la unicidad de la solución según (191).

Posteriormente aplicaremos las series de Neumann en redes libres para un número determinado de coeficientes en el sumatorio. Ya para terminar, aplicaremos las series de Neumann para el caso de las redes ligadas.

#### 5.3.4.1 CASO DE RED LIBRE.

##### 5.3.4.1.1. CASO DEL SUMATORIO LLEVADO AL LÍMITE.

Para el desarrollo del ajuste aplicando las series de Neumann, y según la teoría expuesta, es condición necesaria, que la norma de la matriz  $S = A^T P A$ , sea menor que la unidad, en otras palabras, que todos los autovalores de esta matriz sean inferiores a la unidad.

A continuación, se muestra la matriz  $S$ , el factor de escala aplicada a la misma, con el objetivo de hacerla de norma inferior a la unidad, y los nuevos autovalores escalados:

1.0e+004 \*

Columns 1 through 4

3.97042870057987 0.21794583330645 0.34102868702154 -0.60051232601862  
0.21794583330645 4.69845127483990 0.26309424653403 -0.88967122346859  
0.34102868702154 0.26309424653403 5.65165228643086 -0.60959895199549  
-0.60051232601862 -0.88967122346859 -0.60959895199549 6.19992950161201  
-2.42153374685546 -0.04712785623402 -3.31411874553721 1.35695141875407  
2.30924414941948 -1.97543645335913 -1.11382582722722 -3.37894701575762  
-1.88992364083745 -0.43391222462682 -2.67856222761218 -0.14684014247547  
-1.92667765739267 -1.83334359805742 1.46033053242289 -1.93131125965384

Columns 5 through 8

-2.42153374685546 2.30924414941948 -1.88992364083745 -1.92667765739267  
-0.04712785623402 -1.97543645335913 -0.43391222462682 -1.83334359805742  
-3.31411874553721 -1.11382582722722 -2.67856222761218 1.46033053242289  
1.35695141875407 -3.37894701575762 -0.14684014247547 -1.93131125965384  
8.85555699759601 -1.15108358960081 -3.11990450524575 -0.15873997162299  
-1.15108358960081 4.64738954317082 -0.04433473112864 0.70699392404349  
-3.11990450524575 -0.04433473112864 7.68839037352629 0.62508709788581  
-0.15873997162299 0.70699392404349 0.62508709788581 3.05766093288349

El factor de escala a aplicar a esta matriz, lo calcularemos como el máximo autovalor de la matriz S, al que se le sumará 100.

$c = 1.302343759391550e+005$

Y los autovalores de esta nueva matriz escalada serán:

0.99923215357482  
0.78195129666715  
0.53402026750158  
0.44156394903437  
0.68083928513423  
0.00000000000009  
0.00000000000000  
0.00000000000000

con tres autovalores nulos como debía de ser.

A continuación, aplicando el algoritmo citado en el texto, se muestran los resultados de la compensación:

**MATRIZ  $(A^T P A)^{-1}$ : (recuérdese que se trata de una matriz escalada)**

Columns 1 through 4

1.33431428959012 -0.05729185961947 -0.18024149475909 0.18396952789594  
-0.05729185961947 1.84722678429229 -0.06698240252718 -0.45102318817548  
-0.18024149475909 -0.06698240252718 1.29804184814916 0.02721625757057  
0.18396952789594 -0.45102318817548 0.02721625757057 1.53914761231115  
-0.06376393193322 0.03768557329466 -0.02298972651899 -0.19143430490136  
0.15184769651922 -0.20495826621177 -0.15765763052286 0.01508943622617  
-0.09030886296725 0.08658868876115 -0.09481062683734 -0.01975148063070  
-0.27852536475628 -0.19124533003395 0.19742377551049 -0.10321386018840

Columns 5 through 8

-0.06376393193322 0.15184769651922 -0.09030886296725 -0.27852536475628  
0.03768557329466 -0.20495826621177 0.08658868876115 -0.19124533003395  
-0.02298972651899 -0.15765763052286 -0.09481062683734 0.19742377551049  
-0.19143430490136 0.01508943622617 -0.01975148063070 -0.10321386018840  
1.10369911174304 0.06605115042576 -0.01694545323174 0.08769758111250  
0.06605115042576 1.22828833098102 -0.06024121637991 -0.03841950101620  
-0.01694545323174 -0.06024121637991 1.20206494301296 -0.00659599175252  
0.08769758111250 -0.03841950101620 -0.00659599175252 1.33287869121479

**MATRIZ  $T = A^T P K$  (matriz también escalada)**

-0.00542654302005  
-0.00528515074911  
0.00228633221680  
-0.00192176025389  
-0.01060071118643  
0.00032546556374  
0.01374092198932  
0.00688144543601

Y por último la solución de las incógnitas:

$$x = (A^T P A)^{-1} A^T P K$$

-0.01013577496126  
-0.00933079749223  
0.00449572292762  
-0.00045765354871  
-0.01084568570720  
-0.00152280389199  
0.01648573774139  
0.01131125493042

De esta solución cabe señalar los siguientes aspectos:

4La solución obtenida aplicando este método es exactamente la misma que la obtenida aplicando el algoritmo clásico para redes libres con matrices pseudoinversa. (ver página 68).

4La matriz inversa generada de  $(A^T P A)$ , se trata de una matriz inversa generalizada, donde, y a pesar de esto, se puede observar que la solución obtenida por ambos métodos coincide.

A modo de comparación, vamos a deshacer el cambio de escala a la matriz  $S^- = Q_{xx}$ , con el objetivo de poderla comparar con la obtenida en el método anterior:

1.0e-004 \*

Columns 1 through 4

```
0.10245484573240 -0.00439913496005 -0.01383977874193 0.01412603443363
-0.00439913496005 0.14183864828095 -0.00514321983302 -0.03463165427123
-0.01383977874193 -0.00514321983302 0.09966967928311 0.00208979060823
0.01412603443363 -0.03463165427123 0.00208979060823 0.11818289919324
-0.00489609071901 0.00289367327350 -0.00176525793234 -0.01469921466747
0.01165957109436 -0.01573764720211 -0.01210568479988 0.00115863696642
-0.00693433375912 0.00664868151260 -0.00728000008858 -0.00151661037942
-0.02138647056492 -0.01468470429983 0.01515911402706 -0.00792523935744
```

Columns 5 through 8

```
-0.00489609071901 0.01165957109436 -0.00693433375912 -0.02138647056492
0.00289367327350 -0.01573764720211 0.00664868151260 -0.01468470429983
-0.00176525793234 -0.01210568479988 -0.00728000008858 0.01515911402706
-0.01469921466747 0.00115863696642 -0.00151661037942 -0.00792523935744
0.08474714174226 0.00507171397332 -0.00130115056870 0.00673382741539
0.00507171397332 0.09431368040300 -0.00462560026456 -0.00295002765124
-0.00130115056870 -0.00462560026456 0.09230012693227 -0.00050647086877
0.00673382741539 -0.00295002765124 -0.00050647086877 0.10234461382435
```

Como puede observarse, no coincide con la obtenida aplicando el método de pseudoinversión de matrices.

Los autovalores de esta matriz resultan:

```
2.26467763545198
1.87258810359110
1.27885202603054
1.46877540975452
1.00076843646637
1.00000000000000
1.00000000000000
1.00000000000000
```

Con 3 autovalores igual a la unidad como debía de ocurrir.

A continuación se va a proceder a comprobar la unicidad de la solución inversa generalizada  $S^- = \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T$  para diferentes valores de  $\delta$  en los autovalores correspondientes a los defectos de rango.

En una primera prueba se va a dar valor 1 a los tres autovalores no significativos en el ajuste:

La matriz diagonal del sumatorio llevado al límite de los autovalores de la matriz (I-S):

Columns 1 through 4

0.00076843646637	0	0	0
0	0.27885202603054	0	0
0	0	0.87258810359110	0
0	0	0	1.26467763545198
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Columns 5 through 8

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.46877540975452	0	0	0
0	1.00000000000000	0	0
0	0	1.00000000000000	0
0	0	0	1.00000000000000

La matriz de autovectores de la matriz (I-S):

Columns 1 through 4

0.23315543251129	-0.30499202060764	-0.54423238732087	-0.19454923654517
-0.05461283525430	-0.11599718460270	-0.27348915821618	0.76799399445418
0.26428089441033	-0.45974766965842	0.44882706764943	-0.02032205941867
-0.37929317840996	0.11338411956460	-0.14969606117740	-0.56092693978164
-0.74609427272915	-0.04844399226757	0.10916021416809	0.11481991274258
0.30729575425453	-0.05199781192333	-0.17796619660418	-0.18306819573426
0.24865794591324	0.81318368250116	-0.01375489431844	0.10005138320055
0.12661025917916	0.05461087699668	0.60115141597914	-0.02399885910296

Columns 5 through 8

-0.06556999210164	0.51266094042427	-0.07013255352546	-0.49690295899125
0.26241446107045	-0.01036120698142	0.49481800028132	0.06608956084599
0.36585740250330	-0.36621415077440	-0.07263925228737	-0.49470020266426
0.50167731807512	-0.06836602733503	0.49465256065416	0.06623494036838
-0.40144301823728	-0.07026911780592	-0.07179516758659	-0.49544194036207
-0.57953054604476	-0.50271088738028	0.49341373672596	0.06732355472299
0.10115560759789	-0.08185186447020	-0.07182820348174	-0.49541291013333
-0.18456123287543	0.57786587951450	0.49649572234304	0.06461526626272

La matriz inversa generalizada:

Columns 1 through 4

1.84896665514509	-0.13014659396739	-0.11707281492523	0.08131735098505
-0.13014659396739	2.09654682235762	-0.13182571061475	-0.20117440459723
-0.11707281492523	-0.13182571061475	1.68215940386550	-0.01644476635876
0.08131735098505	-0.20117440459723	-0.01644476635876	1.79288974909204
0.15143358065753	-0.02985543534962	0.25305419438080	-0.25495951533782
-0.17393017861947	0.04884980802850	-0.04270397088548	0.29798532246033
0.11893851951101	0.01915326319196	0.18546309823842	-0.08249924316675
-0.04920412934962	0.05271269703016	-0.08222915016766	0.10715241401535

Columns 5 through 8

0.15143358065753	-0.17393017861947	0.11893851951101	-0.04920412934962
-0.02985543534962	0.04884980802850	0.01915326319196	0.05271269703016
0.25305419438080	-0.04270397088548	0.18546309823842	-0.08222915016766
-0.25495951533782	0.29798532246033	-0.08249924316675	0.10715241401535
1.35925412301878	0.03259656649160	0.23941145645864	-0.02056765093698
0.03259656649160	1.72899614388210	-0.08788737340644	-0.07959103104980
0.23941145645864	-0.08788737340644	1.45935791307240	-0.12156902427501
-0.02056765093698	-0.07959103104980	-0.12156902427501	1.91749080086099

Y la solución al sistema de ecuaciones:

x =

-0.01013577507907  
 -0.00933079749042  
 0.00449572301066  
 -0.00045765353364  
 -0.01084568569179  
 -0.00152280377767  
 0.01648573775944  
 0.01131125479781

que como puede observarse coincide con la solución de la pseudoinversa (pag. 68).

Ya por último los autovalores de la matriz  $S^{-1}$

1.00076843646637  
 1.27885202603054  
 1.99999923581451  
 1.87258810359111  
 1.72729245898873  
 1.46877540975452  
 2.27270830519676  
 2.26467763545198

Donde son los mismos que los de la matriz pseudoinversa con la excepción de los tres subrayados, que corresponden a los tres defectos de rango poco significativos.

A continuación vamos a hacer una segunda prueba para otro valor diferente del anterior de  $\delta$ :

La matriz diagonal del sumatorio llevado al límite de los autovalores de la matriz (I-S):

Columns 1 through 4			
0.00076843646637	0	0	0
0	0.27885202603054	0	0
0	0	0.87258810359110	0
0	0	0	1.26467763545198
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
Columns 5 through 8			
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.46877540975452	0	0	0
0	1.00000000000000	0	0
0	0	2.00000000000000	0
0	0	0	4.00000000000000



La matriz de autovectores:

Columns 1 through 4

0.23315543251129	-0.30499202060764	-0.54423238732087	-0.19454923654517
-0.05461283525430	-0.11599718460270	-0.27348915821618	0.76799399445418
0.26428089441033	-0.45974766965842	0.44882706764943	-0.02032205941867
-0.37929317840996	0.11338411956460	-0.14969606117740	-0.56092693978164
-0.74609427272915	-0.04844399226757	0.10916021416809	0.11481991274258
0.30729575425453	-0.05199781192333	-0.17796619660418	-0.18306819573426
0.24865794591324	0.81318368250116	-0.01375489431844	0.10005138320055
0.12661025917916	0.05461087699668	0.60115141597914	-0.02399885910296

Columns 5 through 8

-0.06556999210164	0.51266094042427	-0.07013255352546	-0.49690295899125
0.26241446107045	-0.01036120698142	0.49481800028132	0.06608956084599
0.36585740250330	-0.36621415077440	-0.07263925228737	-0.49470020266426
0.50167731807512	-0.06836602733503	0.49465256065416	0.06623494036838
-0.40144301823728	-0.07026911780592	-0.07179516758659	-0.49544194036207
-0.57953054604476	-0.50271088738028	0.49341373672596	0.06732355472299
0.10115560759789	-0.08185186447020	-0.07182820348174	-0.49541291013333
-0.18456123287543	0.57786587951450	0.49649572234304	0.06461526626272

La matriz inversa generalizada  $S^{-}$

Columns 1 through 4

2.59462288217188	-0.26336973888589	0.62547554487620	-0.05211090977451
-0.26336973888589	2.35449516591847	-0.26585247760702	0.05672090066451
0.62547554487620	-0.26585247760702	2.42162073638656	-0.15067527377780
-0.05211090977451	0.05672090066451	-0.15067527377780	2.05073210683056
0.89502845761402	-0.16361159739432	0.99355502658862	-0.38891988095475
-0.30889436457559	0.30634795904527	-0.17846010428619	0.55543120569115
0.86249243773950	-0.11461348982311	0.92592324636884	-0.21647018162741
-0.18034719317786	0.31119890122192	-0.21418978414865	0.36558465934956

Columns 5 through 8

0.89502845761402	-0.30889436457559	0.86249243773950	-0.18034719317786
-0.16361159739432	0.30634795904527	-0.11461348982311	0.31119890122192
0.99355502658862	-0.17846010428619	0.92592324636884	-0.21418978414865
-0.38891988095475	0.55543120569115	-0.21647018162741	0.36558465934956
2.10079681791678	-0.10289289317825	0.98091337479570	-0.15225298321126
-0.10289289317825	1.98605064253360	-0.22338727018619	0.17843716682247
0.98091337479570	-0.22338727018619	2.20081905846814	-0.25326513134204
-0.15225298321126	0.17843716682247	-0.25326513134204	2.17652420106853

La solución al sistema de ecuaciones:

-0.01013577508122  
-0.00933079749077  
0.00449572300852  
-0.00045765353400  
-0.01084568569394  
-0.00152280377802  
0.01648573775730  
0.01131125479744

Y los autovalores de la matriz inversa generalizada:

5.26290917533514  
2.73709618744537  
1.00076843646637  
1.27885202603054  
2.26467763545198  
1.87258810359110  
1.99999463721949  
1.46877540975452

Con los mismo comentarios que los obtenidos en la prueba anterior.

Ya por último vamos a realizar una prueba con unos valores de  $\delta$  mucho mayores:

La matriz diagonal del sumatorio llevado al límite de los autovalores de la matriz (I-S):

1.0e+007 \*

Columns 1 through 4

0.0000000007684	0	0	0
0	0.0000002788520	0	0
0	0	0.0000008725881	0
0	0	0	0.0000012646776
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Columns 5 through 8

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.0000004687754	0	0	0
0	0.0001000000000	0	0
0	0	0.0015235000000	0
0	0	0	1.5826548000000

La matriz de autovectores

Columns 1 through 4

0.23315543251129	-0.30499202060764	-0.54423238732087	-0.19454923654517
-0.05461283525430	-0.11599718460270	-0.27348915821618	0.76799399445418
0.26428089441033	-0.45974766965842	0.44882706764943	-0.02032205941867
-0.37929317840996	0.11338411956460	-0.14969606117740	-0.56092693978164
-0.74609427272915	-0.04844399226757	0.10916021416809	0.11481991274258
0.30729575425453	-0.05199781192333	-0.17796619660418	-0.18306819573426
0.24865794591324	0.81318368250116	-0.01375489431844	0.10005138320055
0.12661025917916	0.05461087699668	0.60115141597914	-0.02399885910296

Columns 5 through 8

-0.06556999210164	0.51266094042427	-0.07013255352546	-0.49690295899125
0.26241446107045	-0.01036120698142	0.49481800028132	0.06608956084599
0.36585740250330	-0.36621415077440	-0.07263925228737	-0.49470020266426
0.50167731807512	-0.06836602733503	0.49465256065416	0.06623494036838
-0.40144301823728	-0.07026911780592	-0.07179516758659	-0.49544194036207
-0.57953054604476	-0.50271088738028	0.49341373672596	0.06732355472299
0.10115560759789	-0.08185186447020	-0.07182820348174	-0.49541291013333
-0.18456123287543	0.57786587951450	0.49649572234304	0.06461526626272

La matriz inversa generalizada S<sup>-</sup>

1.0e+006 \*

Columns 1 through 4

3.90811242477737	-0.52027945974314	3.89033997838382	-0.52145208066969
-0.52027945974314	0.07285983790970	-0.51798524393678	0.07300895604632
3.89033997838382	-0.51798524393678	3.87341983453942	-0.51910195839112
-0.52145208066969	0.07300895604632	-0.51910195839112	0.07316606207723
3.89632412945996	-0.51875767752824	3.87911655867242	-0.51989359029871
-0.53023460551646	0.07414302103804	-0.52746490249642	0.07432605890870
3.89608989896700	-0.51872739291976	3.87889347600532	-0.51986244417774
-0.50838567876518	0.07132228496448	-0.50665941642502	0.07143627300789

Columns 5 through 8

3.89632412945996	-0.53023460551646	3.89608989896700	-0.50838567876518
-0.51875767752824	0.07414302103804	-0.51872739291976	0.07132228496448
3.87911655867242	-0.52746490249641	3.87889347600532	-0.50665941642502
-0.51989359029871	0.07432605890870	-0.51986244417774	0.07143627300789
3.88491203221107	-0.52839742958364	3.88468413164900	-0.50724065299001
-0.52839742958364	0.07569622758032	-0.52836104974585	0.07228923102083
3.88468413164900	-0.52836104974585	3.88445871825642	-0.50721800307010
-0.50724065299001	0.07228923102083	-0.50721800307010	0.07016874831007

La solución al sistema de ecuaciones

x =

-0.01014772989731  
-0.00932923043317  
0.00448402136080  
-0.00045606976785  
-0.01085747258896  
-0.00152109489715  
0.01647395419819  
0.01131265241197

Y los autovalores de la matriz inversa generalizada:

1.0e+007 \*

1.58276829974636  
0.00141020050595  
0.00010009974768  
0.00000022646776  
0.00000018725881  
0.00000010007684  
0.00000012788520  
0.00000014687754

Con las mismas conclusiones que las obtenidas en las pruebas anteriores.

Visto esto, hemos comprobado que existen infinitas soluciones de matrices inversas generalizadas que ofrecen la misma solución al ajuste.

#### 5.3.4.1.2 ESTUDIO DE LAS SERIES DE NEUMANN PARA DIVERSOS TÉRMINOS DEL SUMATORIO.

A continuación, se va a proceder a calcular esta misma red, con idénticos constreñimientos, pero deteniéndonos en un número determinado del sumatorio. Posteriormente, compararemos la solución obtenida en este apartado, con la obtenida en el anterior. Ya por último se mostrarán los autovalores de la matriz  $S^-$  para estudiar su evolución según el número de iteraciones empleadas.

Para 50 elementos del sumatorio, el resultado es:

x =

-0.01013578086139  
-0.00933079740475  
0.00449572706947  
-0.00045765279847  
-0.01084568494680  
-0.00152279817896  
0.01648573863413  
0.01131124829685

Como puede observarse, la solución al sistema de ecuaciones coincide exactamente con la obtenida en el método tradicional (ver pag 66 ).

A continuación se muestran los autovalores de la matriz  $S^-$ :

2.26467763545170  
1.87258810359109  
1.00076843646637  
1.27885202603054  
1.46877540975452  
50.99999999988511  
51.00000000000002  
51.00000000000000

Nótese como los primero cinco autovalores coinciden con los obtenidos en el apartado anterior (ver pag 76), en cambio, los tres últimos, en lugar de ser la unidad, aparecen multiplicados por el número de elementos del sumatorio, como debía de suceder por ser  $\|S\|=1$ .

Para 100 elementos del sumatorio resulta:

x =  
-0.01013578676151  
-0.00933079731727  
0.00449573121132  
-0.00045765204823  
-0.01084568418640  
-0.00152279246592  
0.01648573952687  
0.01131124166328

La solución sigue siendo la misma para el número de decimales considerado en el método tradicional.

Los autovalores de la matriz  $S^-$ , que se exponen a continuación, presentan las mismas características que para 100 iteraciones.

1.0e+002 \*  
0.02264677635452  
0.01872588103591  
0.01000768436466  
0.01278852026031  
0.01468775409755  
1.00999999999545  
1.01000000000000  
1.01000000000000

Para 500 elementos del sumatorio, el resultado es:

x =  
-0.01013583396251  
-0.00933079661743  
0.00449576434613  
-0.00045764604632  
-0.01084567810320  
-0.00152274676161  
0.01648574666882  
0.01131118859473

Autovalores

1.0e+002 \*  
0.02264677635451  
0.01872588103591  
0.01000768436466  
0.01278852026031  
0.01468775409754  
5.00999999988711  
5.00999999999999  
5.01000000000000

con idénticas características que las dos pruebas anteriores.

Y ya por último, para 1000 iteraciones:

x =  
-0.01013589296375  
-0.00933079574263  
0.00449580576465  
-0.00045763854394  
-0.01084567049919  
-0.00152268963124  
0.01648575559628  
0.01131112225902

Autovalores

1.0e+003 \*  
0.00226467763545  
0.00187258810359  
0.00100076843647  
0.00127885202603  
0.00146877540975  
1.00099999995489  
1.00099999999999  
1.00100000000000

De aquí podemos observar, como los autovalores significativos de la matriz  $S^{-1}$  se conservan independientemente del número de elementos elegidos en el sumatorio, siendo los tres últimos los que se incrementan proporcionalmente a los elementos del sumatorio.

5.3.4.2 CASO DE RED LIGADA.

De la misma forma que hemos realizado la compensación aplicando las series de Neumann sobre la red libre, se va a proceder ahora a aplicarlas sobre la red ligada.

El procedimiento a seguir es similar al caso de las redes libres, donde aplicándolo, obtenemos los siguientes resultados:

El factor de escala a aplicar para esta matriz  $S$  de rango completo es de:

$$c = 1.160634606274455e+005$$

El vector  $T = A^T P K$  escalado es:

-0.01189501845294  
0.00036520369420  
0.01541863727338  
0.00772164423733

Y por último el vector corrección a las incógnitas  $X=S^{-1}T$ , solución al sistema de ecuaciones es:

-0.00978410306798  
-0.00538677598262  
0.01711601642933  
0.02654851717801

Nótese que los resultados obtenidos son exactamente los mismos que los obtenidos por el método tradicional (pag. 72).

A modo de comprobación, aquí se muestra la matriz  $S^{-1}$  obtenida por aplicación de las series de Neumann, y a la que se le ha deshecho el cambio de escala.

1.0e-004 \*

```
0.13755970506857 0.03659206660828 0.05708806819413 -0.01299004723690
0.03659206660828 0.23298795571411 0.02076292044929 -0.05621652724436
0.05708806819413 0.02076292044929 0.15609579493417 -0.03374820491563
-0.01299004723690 -0.05621652724436 -0.03374820491563 0.34627066053852
```

Como puede observarse coincide exactamente con la obtenida empleando el método tradicional (pag. 72), como debía de ocurrir según la teoría expuesta.



### 5.3.5 ESTUDIO DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS.

A lo largo del desarrollo de este ejemplo, hemos comprobado la unicidad de la solución, empleando el método tradicional de inversión y pseudoinversión de matrices, y empleando el de las series de Neumann, tanto para un número determinado de elementos en el sumatorio, como para la convergencia de la serie.

En el caso de las redes ligadas, hemos visto como no cabe ninguna duda, ya que la matriz cofactor de las incógnita  $Q_{xx}=(A^T P A)^{-1}$  empleando los dos métodos coinciden exactamente.

En el caso de las redes libres, hemos visto como estas dos matrices no coinciden exactamente, a pesar de que se parezcan mucho. Este hecho ya se justificó en el apartado anterior, donde lo que se obtiene tras la aplicación de las series de Neumann, es una aproximación de la pseudoinversa, de la misma forma que en la aplicación de otro método numérico para el cálculo de la misma. Ahora cabe hacerse la siguiente pregunta:

- Aplicando el método de las series de Neumann, ¿Mejoramos el número de condicionamiento de la matriz S al aplicar un cambio de escala?

Para poder aplicar las series de Neumann en la inversión de matrices, bien sean estas de rango completo o no, es necesario escalar la matriz S de forma que la norma de esta sea menor que la unidad. Para ello se divide la matriz S por el máximo autovalor de la misma, a la que se le sumará una pequeña cantidad, ya que si solo se divide la matriz S, del máximo autovalor la misma, la norma de esta valdrá 1, y lo que se pretende conseguir es que la norma de la matriz S sea menor que la unidad.

Posteriormente, utilizamos una matriz auxiliar  $B=I-S$  sobre la que aplicamos la descomposición ortogonal. La pregunta que se nos plantea ahora es, si la nueva matriz B es más estable que la inicial S, en otras palabras, si el condicionamiento de la matriz B es mejor que el de la matriz S.

En primer lugar vamos a estudiar los autovalores de la matriz B y S, que según sabemos habrá tantos autovalores nulos como defectos de rango tenga la matriz.

Obsérvese que, en el método tradicional clásico, anulamos autovalores forzando los valores no nulos que se deducen del cálculo. Utilizando las series de Neumann no anulamos valor alguno, tratando la red libre como si fuera ligada. Es difícil justificar a priori que secuencia numérica es la más adecuada.

Hagamos el estudio para el caso de la red libre:

Según sabemos, la matriz S sin escalar es la siguiente:

1.0e+004 \*

Columns 1 through 4

3.97042870057987 0.21794583330645 0.34102868702154 -0.60051232601862  
0.21794583330645 4.69845127483990 0.26309424653403 -0.88967122346859  
0.34102868702154 0.26309424653403 5.65165228643086 -0.60959895199549  
-0.60051232601862 -0.88967122346859 -0.60959895199549 6.19992950161201  
-2.42153374685546 -0.04712785623402 -3.31411874553721 1.35695141875407  
2.30924414941948 -1.97543645335913 -1.11382582722722 -3.37894701575762  
-1.88992364083745 -0.43391222462682 -2.67856222761218 -0.14684014247547  
-1.92667765739267 -1.83334359805742 1.46033053242289 -1.93131125965384

Columns 5 through 8

-2.42153374685546 2.30924414941948 -1.88992364083745 -1.92667765739267  
-0.04712785623402 -1.97543645335913 -0.43391222462682 -1.83334359805742  
-3.31411874553721 -1.11382582722722 -2.67856222761218 1.46033053242289  
1.35695141875407 -3.37894701575762 -0.14684014247547 -1.93131125965384  
8.8555699759601 -1.15108358960081 -3.11990450524575 -0.15873997162299  
-1.15108358960081 4.64738954317082 -0.04433473112864 0.70699392404349  
-3.11990450524575 -0.04433473112864 7.68839037352629 0.62508709788581  
-0.15873997162299 0.70699392404349 0.62508709788581 3.05766093288349

Y los autovalores de la matriz S son:

1.0e+005 \*

1.30134375939155  
1.01836939136260  
0.69547796276929  
0.57506805339720  
0.88668679414316  
0.00000000000012  
0.00000000000000  
0.00000000000000

Puede observarse como los autovalores son muy grandes, y el antepenúltimo autovalor habría que considerarlo como 0, ya que esta matriz tiene un defecto de rango igual a 3, a pesar de ser demasiado grande.

Veamos ahora como se comporta la matriz  $B = I - S'$ , Siendo  $S' = S/c$ , con  $c$ =máximo autovalor de S al que se le ha sumado 100.

En primer lugar se muestra la matriz B:

Columns 1 through 4

```

0.69513205158407 -0.01673489289865 -0.02618576582122 0.04611012428079
-0.01673489289865 0.63923109847472 -0.02020159766857 0.06831308685229
-0.02618576582122 -0.02020159766857 0.56603989955223 0.04680783760812
0.04611012428079 0.06831308685229 0.04680783760812 0.52394062958396
0.18593660309677 0.00361869559355 0.25447342313719 -0.10419302960288
-0.17731448649920 0.15168318188756 0.08552471797059 0.25945123869110
0.14511711114740 0.03331779505202 0.20567244310854 0.01127506784722
0.14793925516968 0.14077263278890 -0.11213095788973 0.14829504466287
    
```

Columns 5 through 8

```

0.18593660309677 -0.17731448649920 0.14511711114740 0.14793925516968
0.00361869559355 0.15168318188756 0.03331779505202 0.14077263278890
0.25447342313719 0.08552471797059 0.20567244310854 -0.11213095788973
-0.10419302960288 0.25945123869110 0.01127506784722 0.14829504466287
0.32002922164473 0.08838554193546 0.23956075212457 0.01218879197434
0.08838554193546 0.64315185528727 0.00340422648083 -0.05428627571984
0.23956075212457 0.00340422648083 0.40964969363248 -0.04799708935357
0.01218879197434 -0.05428627571984 -0.04799708935357 0.76521859832829
    
```

Y los autovalores de esta:

```

0.00076784642518
0.21804870333285
0.46597973249842
0.55843605096563
0.31916071486577
0.999999999999991
1.000000000000000
1.000000000000000
    
```

Nótese que la matriz tratada  $B=I-S$ , tendrá un número de autovalores igual a la unidad, como defecto de rango tenga la matriz  $S$  o  $S'$ . Nótese que en este caso también son tres, pero con la diferencia de que el antepenúltimo valor está mucho mejor definido, del orden de 9 veces mejor de error relativo. Por otro lado, puede observarse como los autovalores son mucho menores que en el caso anterior, como debía de ocurrir.

Vamos ahora a estudiar el condicionamiento de ambas matrices.

Empleando (94), según la teoría expuesta, el número de condición de una matriz inversa generalizada se calculará(pag 35):

$$K = \|S^{-1}\| \|S\| = \mu_{S^{-1} \text{ máx } ino} \mu_{S \text{ máx } ino}$$

y para matrices pseudoinversas, empleando (95):

$$k = \| S^+ \| \cdot \| S \| = \tau_n \mu_n$$

Comencemos calculando el número de condición de la matriz inversa generalizada obtenida aplicando el método de las series de Neumann, para ello partiremos de la matriz  $S'$  escalada, cuyos autovalores son:

0.99923215357482  
0.78195129666715  
0.53402026750158  
0.44156394903437  
0.68083928513423  
0.000000000000009  
0.000000000000000  
0.000000000000000

luego  $\mu_{S_{\text{máximo}}} = 0.99923215357482$

Los autovalores de la matriz  $S^-$  son:

2.26467763545198  
1.87258810359110  
1.27885202603054  
1.46877540975452  
1.00076843646637  
1.000000000000000  
1.000000000000000  
1.000000000000000

luego  $\mu_{S^-_{\text{max}}} = 2.2646776345198$

Y ya por último el número de condición de la matriz  $S^-$  valdrá:

$$K = 2.262938076$$

Estudiamos ahora el número de condicionamiento de la matriz  $S^+$  obtenida por el método tradicional.

Los autovalores de la matriz  $S$  son:

130134.446491045000000000  
101837.062587011000000000  
88668.769706253100000000  
69547.888871894700000000  
57506.868413344200000000  
0.0000000000006352132  
0.0000000000006128450  
0.000000000000618712

luego  $\mu_{S \text{ máximo}} = 130134.446491045$

Los autovalores de la matriz  $S^+$  serán:

1.0e-004 \*  
0.00000062434329  
-0.00000016340849  
0.00000179349630  
0.09819569002301  
0.11277729016329  
0.07684317172319  
0.14378501531283  
0.17389057834657

Señalar, que los tres primeros autovalores que aparecen, son aproximadamente 0, y a efecto de cálculo de la matriz pseudoinversa, se anulan, quedando un defecto de rango igual a tres, como debía de ser. Visto esto  $\mu_{S^+ \text{ máximo}} = 0.17389057834657 \cdot 10^{-4}$ . Y el número de condicionamiento de la matriz  $S^+$  será:

$$K=2.262915416.$$

Muy parecido al obtenido en la aplicación de las series de Neumann.

A modo de comprobación, vamos a calcular ahora el número de condición K, del proceso para una red ligada, tanto en el método tradicional, como en el método de las series de Neumann.

Recordemos que para una solución determinista, el número de condición se calcula de la siguiente forma, empleando la expresión (57):

$$K = \|S^{-1}\| \|S\| = \frac{\mu_{S \text{ máximo}}}{\mu_{S \text{ mínimo}}}$$

Comencemos con el método de las series de Neumann, donde trabajamos con la matriz  $S'$  escalada. Los autovalores de  $S'$  serán:

0.99913840239245  
0.48526562534119  
0.37932963391859  
0.22555419139687

Luego  $\mu_{S' \text{ mínimo}} = 0.22555419139687$  y  $\mu_{S' \text{ máximo}} = 0.99913840239245$ , con lo cual, el número de condición para el ajuste determinista será:

$$K = 4.429704442$$

Vamos ahora a calcular el número de condición del ajuste determinista para el caso tradicional. Los autovalores de la matriz S son:

1.0e+005 \*

1.15963460627445  
0.56321607800640  
0.44026310031134  
0.26178600012546

Luego

$\mu_{S \text{ mínimo}} = 0.26178600012546 \cdot 10^5$  y  $\mu_{S' \text{ máximo}} = 1.15963460627445 \cdot 10^5$ , con lo cual, el número de condición para el ajuste determinista en el caso tradicional valdrá:

$$K = 4.429704437.$$

Como puede observarse, coincide el valor obtenido, ya que se trata de la misma matriz pero sin el cambio de escala.

A continuación se va a proceder a calcular la influencia del vector b, y matrices S y S' sobre el vector solución x, tanto para las matrices de rango completo, caso de red libre, como para las matrices de rango completo, caso de red ligada, así como diferenciando el caso de aplicación del algoritmo de las series de Neumann, como el algoritmo tradicional.

#### *INFLUENCIA DEL VECTOR b SOBRE LAS SOLUCIONES x.*

En primer lugar vamos a abordar el caso de la red libre, donde aplicando la expresión (94) se distinguen los siguientes casos:

##### ALGORITMO DE LAS SERIES DE NEUMANN.

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 2.262938076 \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

##### ALGORITMO CONVENCIONAL.

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 2.262915416 \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

Se puede observar como en el caso del algoritmo tradicional, la influencia sobre el vector x debido al vector b, es muy parecida que en el caso de la aplicación de las series de Neumann.

Para el caso de la red ligada, emplearemos la expresión (88), resultando, tanto para el algoritmo tradicional como para el caso de las series de Neumann:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 4.429704442 \frac{\|\delta b\|}{\|b\|}$$

ya que en ambos casos el condicionamiento coincidía.

#### *INFLUENCIA DE LA MATRIZ S SOBRE LAS SOLUCIONES x.*

Comencemos con el caso de RED LIBRE, donde aplicando la expresión (110), para el caso de las **series de Neumann** obtenemos:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 2.264677 \|\delta S\|$$

Aplicando la expresión (111), obtenemos el error relativo en x debido a la matriz S en el caso del **método convencional de pseudoinversa**:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 0.17389057834657 \cdot 10^{-4} \|\delta S\|$$

Notese que este último caso es mucho menos que el anterior.

#### RED LIGADA.

Aplicando la expresión (112) obtendremos para el algoritmo de las **series de Neumann**:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 4.433524351 \|\delta S\|$$

y para el caso tradicional:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 3.819913974 \cdot 10^{-5} \|\delta S\|$$

#### *INFLUENCIA DE LA MATRIZ S<sup>-1</sup> SOBRE LAS SOLUCIONES x.*

Empleando la expresión (124):

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq \mu_{Smin} \|\delta S^{-1}\|$$

obtenemos para el caso convencional:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 0.26178600012546 \cdot 10^5 \|\delta S^{-1}\|$$

y para el caso de las series de Neumann:

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} \leq 0.22555419139689 \|\delta S^{-1}\|$$

Es claro que en el caso de las redes libres, donde la matriz  $S$  es singular,  $\mu_{Smin}$  tiende a 0, con lo cual el error relativo en  $x$  también tiende a cero.

Ya por último  
, se presentan estos últimos datos de forma resumida en una tabla:



	RED LIBRE		RED LIGADA	
	NEUMANN	CONVENCIONAL	NEUMANN	CONVENCIONAL
<b>VECTOR b</b> $\frac{\ \delta x\ }{\ x\ } = a \frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	2.262938076	2.262915416	4.429704442	4.429704442
<b>MATRIZ S</b> $\frac{\ \delta x\ }{\ x + \delta x\ } \max = a \ \delta S\ $	2.264677	$0.17389057834657 \cdot 10^{-4}$	4.433524351	3.81991397
<b>MATRIZ S<sup>-1</sup></b> $\frac{\ \delta x\ }{\ x\ } = a \ \delta S^{-1}\ $	$\approx 0$	$\approx 0$	0.225554191	0.2617860001

## 6.- AMPLIACION SOBRE FIGURAS DE ERROR EN REDES LIBRES Y LIGADAS.

### 6.1 FUNDAMENTOS TEORICOS

La calidad de un trabajo topográfico, geodésico, fotogramétrico o de cualquier otra tecnología geográfica de aplicación, cartográfica o no, es actualmente un imperativo de exigencia aceleradamente estricta y rigurosa en todos los ámbitos de aplicación profesional que nos atañen.

Es decir que, como en cualquier realización de alta precisión y calidad de ingeniería superior, la que nos ocupa en esta tesis, referida esencialmente a los problemas microgeodésicos y relacionados con las redes locales de alta y muy alta precisión, debe iniciarse mediante un proyecto detallado en el que, entre otros capítulos, figure la exposición rigurosa y cifrada en detalle de las figuras de error a posteriori que se pretenden conseguir en función de la instrumentación y metodología adecuada para cubrir las tolerancias requeridas. Y es el objetivo final proyectarlo en función de las mismas figuras diseñadas a priori, de tal manera que cualquier supuesto lógico pueda predecirse con exactitud, sin vacilación alguna, y a través de un razonamiento estadístico-matemático riguroso. Creemos que es preciso, como hemos hecho hasta ahora, y como primera medida, avanzar en la teoría disponible con la mayor exigencia de rigor y tratando de abrir nuevos criterios y prácticas de aplicación.

Durante largo tiempo el establecimiento de errores a priori se ha fundamentado en procedimientos mayoritariamente empíricos o cuasi-empíricos. Un importante avance ha supuesto, desde que pudo ser tecnológicamente asequible disponer de capacidad de cálculo suficiente, la aplicación generalizada de las hipótesis de Gauss-Markov y el algoritmo de mínimos cuadrados, del que es preciso subrayar que debe esperarse esencialmente la obtención de figuras de error a posteriori rigurosas, cifradas matemática y estadísticamente en magnitud y poder de afirmación.

Sin embargo, las hipótesis de partida clásicas, indiscutibles por supuesto, presentan algún reparo de índole práctica que conviene poner de manifiesto.

En primer lugar, la hipótesis nula Gaus-Markov

$$H_0: R \sim N(0, s^2 Q)$$

que implica

$$E(R) = 0$$

supone considerar la población de R y es inalcanzable en la práctica por amplia y excelente que sea la muestra. Por otra parte, la matriz varianza-covarianza a priori de observables

$$\Sigma_0 = s^2 Q = s^2 P^{-1}$$

donde generalmente, y así lo aplicaremos cuando proceda en los cálculos que siguen, el factor de varianza a priori o estimador de la varianza del observable de peso unidad vale  $s^2 = 1$ , resulta necesariamente una matriz diagonal, que se compadece mal con el resultado a posteriori en que  $\sigma_{cc}$  es una matriz completa.

Y finalmente, las figuras de error a posteriori definidas hasta el momento por el que podemos llamar clásico conjunto de elipses absolutas y relativas en vértices y ejes, no tienen en cuenta más que la banda central de la matriz simétrica  $\sigma_{xx}$  formada por la diagonal principal y las dos subdiagonales inmediatas, a izquierda y derecha de ella, compuestas en su conjunto por las varianzas

$$\sigma_{xi}^2$$

$$i \in 1,2,3,4,\dots,n$$

n = n° de coordenadas de la red  
y las covarianzas

$$\sigma_{xij}$$

(i,j) subíndices genéricos de las coordenadas de un vértice cualquiera

El resto de las covarianzas, de indudable influencia en el error final, no se tienen en cuenta.

Así, la interpretación separada de las figuras a posteriori y especialmente su relación con las figuras a priori adolece en la metodología usual de cierta falta de rigor y resulta incompleta y en ocasiones de discutible fiabilidad, dificultando la predicción satisfactoria de resultados a partir de hipótesis de partida adecuadas.

Por todo ello es preciso avanzar en teoría y praxis proponiendo como objetivo, con apoyo informático adecuado, diseñar, proyectar, discernir entre alternativas distintas y elegir y desarrollar la más adecuada en cualquier red local o cuestión microgeodésica.

Una contribución atractiva hacia los objetivos formulados puede seguirse de la línea de investigación que revisa el algoritmo e interpretación clásicos de la figura de error de una red en su caso más general mediante las elipses o elipsoides asociados a sus vértices, según se considere planimetría y altimetría por separado o en conjunto.

Nos proponemos ampliar dichos criterios establecidos con los razonamientos que siguen a través de distintos algoritmos de aplicación que permiten aumentar fiabilidad y precisión en los resultados a posteriori así como disponer de instrumentos complementarios de diseño a priori de la red.

Fijando ideas y refiriéndonos al caso de planimetría y altimetría separados, por ser el de más extendido empleo, abordaremos a continuación y a través de una interpretación rigurosa y entendemos que original, tres nuevos algoritmos distintos del usualmente empleado en determinación de figuras de error standard o de nivel de significación prefijado

Recordemos conceptos teoricos vistos hasta ahora.

En primer lugar, establezcamos que la aceptación de la hipótesis nula Gauss-Marcov

$$H_0: E(R) = 0 \quad (199)$$

implica también la aceptación de

$$H_0: E(x - x_E) = 0 \quad (200)$$

en cualquier red exenta de errores groseros y con tanto mayor poder de afirmación cuanto más preciso sea el vector de observables  $O_T$ .

La matriz de diseño  $A$  y la de pesos a priori  $P$  permite obtener de inmediato

$$S = A^T P A$$

y formular la expresión mas general de la figura conjunta de error en la red, bajo la hipótesis nula  $H_0$ , según la expresión

$$\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2} = \frac{\frac{D(R^T P R)}{R(S)}}{\frac{R_1^T P_1 R_{11}}{m - R(S)}} = \frac{(x - x_E)^T S (x - x_E)}{R(S) \sigma_{01}^2} \approx F_{R(S), m-R(S), \alpha}$$

donde sabemos:

$$R^T P R = R_1^T P_1 R_{11} + D(R^T P R)$$

En efecto y teniendo en cuenta el significado de los dos sumandos, según la notación adoptada, siendo lícito escribir que:

$\sigma_{01}^2$  = estimador a posteriori de la varianza del observable de peso unidad de la red libre ajustada con  $m$  observables y  $R(S) = n-d$ .

puede aceptarse también como estimador de la misma denominación referido a la red conjunta,. también será lícito admitir la misma condición en la misma red para

$\sigma_{02}^2$  = estimador a posteriori de la varianza del observable de peso unidad en la red conjunta a partir de una muestra de  $R(S)$  observables (o variables tomadas como observables) adicionales.

Justificándose así la expresión del estadístico  $F$  antes formulada.

Avanzando en el algoritmo, la expresión de riguroso cumplimiento

$$A_2 x - K = 0$$

Particularizada en nuestro caso según  $A_2 = I$ ,  $K = x_E$ , resulta como sabemos

$$x - x_E = 0$$

donde  $R_2=0$ ,  $P_2 \rightarrow \infty$ , y las  $R(S)$  variables tomadas como observables definen una muestra de valores muy aproximadamente exactos en la red conjunto, con  $D(R^T P R) \approx 0$ .

La condición anterior implica que la hipótesis nula se cumplirá tanto mejor cuanto los  $m$  primeros observables de residuos  $R_1$  sean también más precisos, resultando así ambos estadísticos estimadores representativos de muestras del ajuste completo progresivamente significativos. Ello requiere  $R_1^T P_1 R_{11} \approx 0$ , pudiendo así formular el estadístico  $F$  inicial en un  $F$ -Test de una punta, con óptimo en  $F = 0$ , que implica  $D(R^T P R) = 0$  y la cumplimentación exacta de la hipótesis nula.

Es decir, de nuevo es preciso tener en cuenta que el algoritmo en estudio tiene tanto más poder de afirmación cuanto mas precisos sean los observables y, en consecuencia, más exacta la red. Es más inadecuada su aplicación a medida que la red sea de inferior calidad.

En principio podrán explicarse los resultados poco convincentes obtenidos por defecto de muestreo, hasta llegar a unas cifras de aceptación desaconsejable e incluso ilícita si  $\sigma_{02}^2$  y  $\sigma_{02}^2$  pudieran describirse más acertadamente como pertenecientes a dos poblaciones distintas, la primera de observables casi exactos, de muy alta precisión, y la segunda de precisión media o baja..

En definitiva y siempre teniendo en cuenta lo que precede, aceptemos que

podemos escribir

$$\frac{(x - x_E)^T S(x - x_E)}{\sigma_{01}^2 R(S) F_{R(S), m-R(S), \alpha}} \leq 1 \quad (201)$$

que define el recinto de error a posteriori limitado, si  $R(S) = n$ , rango completo, por un hiperelipsoide de  $n$  ejes en el espacio  $R^n$  con centro en el origen de coordenadas, nivel de significación  $\alpha$ , probabilidad de cumplimentación igual a  $(1-\alpha)$ , y equivalente a un  $F$ -Test de Snedecor de una sola punta con valor óptimo  $F = 0$ , que requiere la anulación de los vectores  $R$  o  $(x - x_E)$ , pues ambas condiciones se implican entre si e implican así mismo el cumplimiento riguroso de la hipótesis nula  $H_0$ , indiferentemente expresada como (199) o (200) .

El recinto a priori será evidentemente y con las mismas consideraciones anteriores.

$$\frac{(x - x_E)^T S (x - x_E)}{\sigma_0^2 R(S) F_{R(S), m-R(S), \alpha}} \leq 1$$

donde puede ser lícito tomar  $s^2 = \sigma_0^2 = 1$  según es práctica usual.

La rotación

$$z = \Gamma^T (x - x_E) \quad (201)$$

donde

$\Gamma$  = vector ortogonal de autovectores columna normalizados de S

refiere (109) a la forma canónica

$$\sum \frac{z_i^2 \mu_i}{\sigma_0^2 R(S) F_{R(S), m-R(S), \alpha}} \leq 1 \quad (203)$$

$i \in 1, 2, 3 \dots n$

con

$\mu > 0 \equiv$  autovalores de S

siendo S no singular, definida positiva y de rango completo,  $R(S) = n$ .

Se define como Hiperelipsoide Standard (HS) (o  $HS\alpha'$ ) al que cumple la condición, análoga a la establecida para las elipses standard clásicas

$$F_{R(S), m-R(S), \alpha'} = \frac{1}{R(S)} = \frac{1}{n} \quad (204)$$

con lo que la probabilidad de que el vector X exacto se encuentre dentro de HS valdrá :

$$P(HS) = P\left(\sum \frac{z_i^2}{\Phi_{HSi}^2} \leq 1\right) = 1 - \alpha' \quad (205)$$

siendo los semiejes de HS

$$\Phi_{HSi} = \sigma_o \sqrt{\mu_i^{-1}} \quad (206)$$

La condición expuesta implica que simultaneamente todas las coordenadas de todos los vértices de la red estén dentro del recinto de error HS con probabilidad  $1 - \alpha'$ .

Es alcanzable cualquier nivel de significación  $\alpha''$  mediante la práctica de una homotecia en el Hiperelipsoide Standard de factor

$$f_{\alpha''} = \sqrt{R(S)F_{R(S),m-R(S),\alpha''}} \quad (207)$$

resultando análogamente a (205) y (206) la probabilidad de que el vector X exacto se encuentre dentro del recinto definido por el hiperelipsoide homotético  $HH\alpha''$

$$P(HH\alpha'') = P\left(\sum \frac{z_i^2}{\Phi_{HH\alpha_i}^2} \leq 1\right) = 1 - \alpha'' \quad (208)$$

con

$$\phi_{HH\alpha_i} = f_{\alpha''} \sigma_0 \sqrt{\mu_i^{-1}} \quad (209)$$

Evidentemente y respecto a los ejes iniciales, la orientación de cada vector semieje será la definida por el autovector correspondiente.

Definidos todos los ejes, en módulo, dirección y sentido, queda geoméricamente definido el hiperelipsoide. Junto con su expresión analítica (201) se dispone ya de todos los instrumentos matemáticos necesarios para poder operar con él.

Se asociarán así al conjunto de semiejes (206) o (209) el conjunto de vectores máximos y mínimos de error a esperar, con nivel de significación  $\alpha', \alpha''$  en el entorno de un vértice en el espacio  $R^n$  definido por el vector  $X_a$ , representativo de la red en estudio.

El caso expuesto es el determinista o de red ligada, en formulación a priori. Las expresiones a posteriori son triviales, sustituyendo solamente  $\sigma_0^2$  por su estimación a posteriori  $\sigma_{01}^2$ , según se vió, o con mayor generalidad por cualquier otro estimador de las mismas características, que designaremos en general por  $\sigma^2$ .

Sin embargo adelantemos que dicho caso no es sino una particularización del más general definido por S singular, semidefinida positiva y  $R(S) = (n - d)$  presentando un defecto de rango igual a  $d = n^\circ$  de constreñimientos, que será así mismo igual al número de autovalores nulos que contenga.

## 6.2 FUNDAMENTOS DE APLICACIÓN.

De todas las expresiones de los recintos de error asociables a posteriori al ajuste de una red de alta precisión aceptamos en principio como más riguroso el expresado en (201), como recinto interior a un hiperelipsoide de  $R(S)$  ejes.

Sin embargo, según hemos avanzado, la teoría solo es irreprochable si se trata de una red ligada, caso determinista.

En dicho supuesto  $R(S) = n$ , el hiperelipsoide tiene  $n$  ejes y la matriz  $S$  es no singular, invertible de Cayley, clásica, y podemos escribir la expresión (206) en la forma

$$\Phi_{HSi} = \sigma_o \sqrt{\mu'_i}$$

Donde

$$\mu'_i = \text{autovalor de orden } i \text{ de } S^{-1} = \mu_i^{-1}$$

siendo

$$0 < \mu'_i = \mu_i^{-1} < \infty$$

en el campo de los números reales.

Sin embargo, si  $R(S) = n-d$  existirán  $d$  autovalores  $\mu_i$ , nulos y  $S$  será singular, no invertible apareciendo  $d$  semiejes de la forma (114) que, particularizando resultan

$$\Phi_{HSi} = \sigma_o \sqrt{\mu_i^{-1}} = \sigma_o \sqrt{\frac{1}{0}}$$

que no tienen sentido en Algebra ni significado físico alguno.

Es ilustrativo tratar de generalizar para matrices singulares la conocida demostración que sigue, aplicada a matrices de rango completo:



a) **Red ligada.**

$$(\sigma_{xx} - \text{diag} \frac{1}{\mu})x = 0$$

$$\sigma^2 S^{-1} x = \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$S^{-1} x = \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$SS^{-1} x = S \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$x = S \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$x = \frac{1}{\sigma^2} S \text{diag} \frac{1}{\mu} x = \sigma_{xx}^{-1} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$\text{diag} \mu . x = \text{diag} \mu . \sigma_{xx}^{-1} \text{diag} \frac{1}{\mu} x = \sigma_{xx}^{-1} \text{diag} \mu . \text{diag} \frac{1}{\mu} x = \sigma_{xx}^{-1} I x$$

$$(\sigma_{xx}^{-1} - \text{diag} \mu)x = 0$$

Resultando inversos los autovalores de  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xx}^{-1}$ .

Pero aplicando el mismo desarrollo a una red libre, solución pseudoinversa, se sigue:

b) **Red libre**

$$(\sigma_{xx} - \text{diag} \frac{1}{\mu})x = 0$$

$$\sigma^2 S^+ x = \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$S^+ x = \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$SS^+ x = S \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

Y teniendo en cuenta que

$$S.S^+ \neq I$$

no es posible despejar  $x$  como en el caso anterior. Por consiguiente, los autovalores  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma^+_{xx}$  no son inversos. Sí lo son, según hemos demostrado anteriormente, los no nulos correspondientes a variables principales. Los correspondientes a variables libres son nulos en ambas matrices. En cuanto a su significado físico, nos remitimos a la teoría ya expuesta. Debe de tenerse en cuenta en los cálculos que siguen.

Es preciso para seguir avanzando en el algoritmo acudir al empleo de matrices  $S^-$ , inversas generalizadas, cuya teoría conocemos y sobre la que hemos profundizado en los epígrafes anteriores.

De entre ellas, aceptando como mejor la solución definida por la pseudoinversa  $S^+$ , hemos demostrado que se puede formular aplicando un proceso basado en las Series de Neumann, que da lugar a la expresión (191), siendo lícito escribir

$$x = S^- A^T P K = S^+ A^T P K$$

donde

$$S^- = \Gamma \text{diag} (\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T$$

$$\delta = \text{arbitrario}$$

que conduce a una matriz  $S^-$  inversa generalizada no recíproca y de rango completo con  $R(S) = n-d$  autovalores reales y constantes y  $d$  autovalores reales y arbitrarios, siendo  $d$  el defecto de rango de  $S$ , pudiéndose aceptar

$$S^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^-$$

Resulta así en el caso de redes libres un recinto o figura  $n$ -dimensional de error riguroso y coherente con la realidad física.

En efecto, el conjunto de matrices  $S^- = \Gamma \text{diag} (\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T$  define un conjunto de hiperelipsoides de error con  $(n-d)$  ejes fijos, correspondientes a las variables principales, y  $d$  ejes arbitrarios con cada uno de los infinitos valores que puede adoptar  $\delta$ , correspondientes a las variables libres.

El vector de correcciones  $x$  será invariante y corresponderá siempre a la que hemos denominado “solución seudoinversa”. Es arbitraria también la designación de variables libres y principales, pero, elegidas éstas, su figura específica de error será invariante. No así la de las variables libres, que dependerá del valor de  $\delta$  adoptado en cada caso, según es acorde con el significado físico del ajuste.

Y para definir la mejor figura de error en redes libres y siendo arbitraria la matriz  $S^-$  a efectos de obtener la solución seudoinversa deseada, la correcta aplicación

de (109) exige buscar la que se aproxime más a una inexistente  $S^{-1}$ . En efecto, podemos escribir con tanta aproximación como queramos:

$$S = \lim \Gamma \text{diag}(\mu, \delta_1 \rightarrow 0) \Gamma^T$$

Y del mismo modo

$$S^{-1} = \lim \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \lim \frac{1}{\delta_1} \rightarrow \infty) \Gamma^T$$

Resultando

$$\lim SS^{-1} = \lim \Gamma \text{diag}(\mu, \delta_1 \rightarrow 0) \Gamma^T \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \lim \frac{1}{\delta_1} \rightarrow \infty) \Gamma^T = \lim \Gamma \text{diag}(1, \frac{\delta_1}{\delta_1} \rightarrow 1) \Gamma^T = I$$

Que permite considerar a  $S$  y  $S^{-1}$  como inversas clásicas  $S$  y  $S^{-1}$ , en el límite de ambas. Se deduce así una interpretación geométrica muy sencilla.

### 6.3 INTERPRETACION GEOMETRICA.

Según hemos demostrado la solución pseudoinversa es también la solución límite del proceso descrito cuando  $S^{-1} \rightarrow S^{-1}$ . Su figura de error corresponderá a un hiperelipsoide único con  $R(S)$  ejes finitos y  $d$  ejes tan grandes como queramos. Geométricamente implica y equivale a un proceso de degeneración de un hiperelipsoide en el espacio  $R^n$  algunos de cuyos ejes ( $d$  ejes exactamente) van aumentando progresivamente.

Estos ejes, en el límite, adoptan el carácter de direcciones de proyección desde los puntos en el infinito que respectivamente definen del hiperelipsoide de rango  $R(S) = n-d$ , de  $(n-d)$  ejes.

Hemos así definido el proceso de degeneración de una hipercuádrlica, que siempre da lugar a un hipercono, que, a su vez, se transforma en hipercilindro si los vértices de proyección están en el infinito, según es nuestro caso.

Estamos en condiciones de describir ya, en su caso más general y rigurosamente, el recinto de error de una red de alta precisión, definida por una matriz de diseño  $S$ , aceptando que corresponde "al espacio interior a un hipercilindro elíptico recto en  $R^n$  con  $d$  direcciones generatrices, iguales en número al de constreñimientos, y  $(n-d)$  ejes reales y finitos de expresión conocida en función de los autovalores distintos de cero de  $S$ , que será un hiperelipsoide de  $n$  ejes en el caso determinista o de red ligada, con el nivel de significación que corresponda en cualquier caso al coeficiente de homotecia aplicado sobre el recinto standard

El razonamiento expuesto permite establecer recintos de error que son función de los constreñimientos y, en definitiva, tienen en cuenta el defecto de rango de  $S$  y la división en variables principales y libres de la red, con importante ventaja en el rigor de los resultados que se deduzcan.

Pero es claro que nada se habrá conseguido si no puede accederse a una interpretación bi o tridimensional y que conserve íntegro o a lo menos aceptablemente el rigor alcanzado. Por consideraciones geométricas vamos a ver que pueden lograrse diversas interpretaciones válidas.

Así, una pareja de ejes coordenados  $x_i, x_j$  de ordenes  $i, j$  definen un hiperplano bidimensional en el espacio  $R^n$ , generado por dos vectores de  $n$  elementos con origen común, secante al hiperelipsoide o hipercilindro según una elipse, que limita el recinto de error asociado a la pareja de coordenadas  $(X_i, X_j)$ .

Si ambas coordenadas corresponden a un vértice de la red se establece así su recinto de error con la misma interpretación de las elipses de error o "de vértice", (a posteriori o a priori) utilizadas hasta ahora y como deduciremos y calcularemos en el epígrafe siguiente. En caso contrario el recinto de error expresa la dependencia entre dos coordenadas de vértices distintos relacionándolos entre sí en forma de elipses de error que llamaremos "elipses de correlación" y de las que también nos ocuparemos en seguida.

Pero cualquier eje coordenado  $x_i$  en  $R^n$  representa también el subespacio  $R^1$  de existencia de error en la coordenada de dicho orden, que está asociada a un vértice de la red y que por lo tanto puede representarse en  $R^2$ , plano del levantamiento. Y como consecuencia fundamental, cualquier pareja de ejes  $x_i, x_j$  pueden representarse así mismo y se confunden con el plano del levantamiento. Si ambos pertenecen a un mismo vértice, su origen o punto de error nulo, estará en el vértice.

Así pues ambos ejes pueden representarse sobre el plano del levantamiento con origen en el vértice  $(X_i, X_j)$  y dirección y sentido de los ejes, los adoptados para el levantamiento. La representación sobre el plano del levantamiento de la figura (elipse) de error asociada al vértice y definida anteriormente por la sección del plano coordenado con el recinto general de error de la red (hipercilindro o hiperelipsoide) es perfectamente lícita y constituye, al nivel de significación adoptado, la elipse de error del vértice.

Evidentemente, una pareja de ejes  $x_i, x_m$ , pertenecientes a dos vértices distintos, generan una nueva sección elíptica en el recinto general de error representable sobre el plano del levantamiento en el vértice definido por las coordenadas  $(X_i, X_m)$ . La **"elipse correlativa"** así generada permite obtener información rigurosa de la figura de error en un punto del área del levantamiento distinto de los vértices de la red básica. La red de elipses correlativas supone un progreso notable en la densificación de los puntos de información de error asequibles en la red. Debe tenerse en cuenta que solamente facilitan información las parejas de coordenadas ordenada-abscisa. Dos ordenadas o dos abscisas dan lugar, evidentemente, a puntos impropios del plano del levantamiento.

Obsérvese que los planos definidos hasta ahora son las únicas secciones del recinto general de error representables sobre el plano del levantamiento sin deformación ni modificación alguna de las figuras que en principio contengan. Cualquiera otra sección (p.ej. la que podría formar un par de semiejes (209) no tiene

representación sobre el plano del levantamiento . Cualquier figura representada sobre aquella carece de significación física en dicho subespacio  $R^2$  .

Aceptado lo que antecede, podemos formular tres criterios y desarrollar los cálculos correspondientes a cada uno de ellos válidos para avanzar en el conocimiento de la figura de error a priori y a posteriori de la red referida al plano del levantamiento y que trataremos como:

1.- Conjunto de elipses definidas geoméricamente como secciones del recinto de incertidumbre más general definido por el hipercilindro o hiperelipsoide  $HH\alpha$ " referido a los ejes de (201), por los planos coordenados  $x_i, x_j$ , dando lugar a todas las elipses de vértices y de correlación representables sobre el plano del levantamiento, según los conceptos antes desarrollados.

Recíprocamente es claro que el conjunto de elipses indicado y siendo conocidos los valores de los ejes del hipercilindro o hiperelipsoide permiten definir a éste último de forma unívoca.

2.- Proyección de  $HH\alpha$ " sobre cualquier plano  $x_i, x_j$  que da lugar a otra acepción de elipses de vértices y de correlación también con nivel de significación  $\alpha$ " en  $R^2$  del levantamiento, representativas geoméricamente en este caso de la ubicación del vértice exacto si ambas pertenecen a él o de la correlación entre dos coordenadas cualquiera de vértices diferentes.

Recíprocamente, también las elipses así definidas corresponden a un recinto  $HH\alpha$ " y solo uno.

3.- Proyección de los semiejes de  $HH\alpha$ " sobre los cualquier plano  $x_i, x_j$  que da lugar a otra acepción de elipses de vértices y de correlación también con nivel de significación  $\alpha$ " en  $R^2$  del levantamiento, representativas geoméricamente como en el caso anterior de la ubicación del vértice exacto si ambas pertenecen a él o de la correlación entre dos coordenadas cualquiera de vértices diferentes. Difiere del anterior en cuestiones relacionadas con las variables principales y libres, como veremos en su estudio monográfico.

Pueden existir y de hecho es seguro que en un futuro se desarrollarán, nuevos criterios de aplicación hasta alcanzar el óptimo que englobe y sustituya a todos. Los que vamos a utilizar presentan sus ventajas y sus inconvenientes en cada caso, que se pondrán de manifiesto. No obstante, parece en su conjunto y así lo hemos comprobado, una sensible mejora sobre la calidad y volumen de información de la situación que podemos ya llamar, clásica.

Estudiaremos a continuación cada uno de los supuestos planteados.

#### 6.4.-SECCION DEL RECINTO DE INCERTIDUMBRE POR SUS PLANOS COORDENADOS

La matriz P de los pesos en general correspondiente a un valor a priori  $\sigma_0^2 = k$  se expresa con la notación usual según

$$P_k = k \cdot \text{diag} \frac{1}{\sigma_i^2} = kP_1$$

De donde

$$S_k = A^T P_k A = kA^T P_1 A = kS_1$$

Resultando sucesivamente

$$\sigma_k^2 = \frac{R^T P_k R}{N} = k \frac{R^T P_1 R}{N} = k\sigma_1^2$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_k^2 S_k^{-1} = k\sigma_1^2 \frac{1}{k} S_1^{-1} = \sigma_1^2 S_1^{-1}$$

Invariante con cualquier valor a priori de  $\sigma_0^2 = k$  (incluyendo por supuesto  $k=1$ , o la notación usual  $s^2 = 1$ ), c.d.s.

En su caso más general podemos establecer la hipercuádrica no degenerada (hiperelipsoide) o degenerada (hipercilindro elíptico)  $HS\alpha'$  como figura de error de una red cualquiera, libre o ligada, a posteriori en la forma siguiente, en la que, para simplificar la notación, se ha suprimido el subíndice de la matriz de diseño S y los parámetros  $\sigma_0$  y  $\sigma$  por la invariancia antes demostrada. No obstante, en las aplicaciones prácticas deberán tenerse muy en cuenta para evitar penosos errores de cálculo.

En definitiva y a posteriori la figura de error standard será

$$x^T \frac{1}{\sigma^2} Sx = 1 \quad (210)$$

y a priori

$$x^T \frac{1}{\sigma_0^2} Sx = 1$$

que no es sino otra forma de escribir (201) teniendo en cuenta (204). Debe tenerse en cuenta que se ha simplificado la notación representando por el vector "x" al  $(x - x_E) = X - X_E$ , error absoluto del vector de coordenadas ajustadas  $X = X_a + x$ . [Chueca et.al 1996] de significado físico más riguroso para los cálculos que siguen.

Y las superficies homotéticas  $HH\alpha''$  se escribirán

$$\text{a posteriori} \quad x^T \frac{1}{\sigma^2} Sx = f^2 \quad (211)$$

$$\text{a priori} \quad x^T \frac{1}{\sigma_0^2} Sx = f^2$$

simplificando  $f^2 \equiv f_{\alpha}^2$

Del mismo modo con

$$\sigma_0^2 = s^2 = 1$$

y

$$S = A^T P A$$

conocidos a priori podemos establecer otra expresión de la figura de error a priori de la red en las formas

$$x^T S x = 1 \quad (212)$$

valor standard

$$x^T S x = f^2$$

nivel de significación  $\alpha$ "

Sin perjuicio de lo expuesto, una correcta aplicación de los algoritmos del PD2 (Problema de diseño de orden 2) es siempre aconsejable en redes de muy alta precisión a efectos de la determinación mas exacta posible de los pesos.

En cualquier caso, el F-Test permite cifrar la fiabilidad de los resultados del ajuste según

$$F = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = F_{m-R(S), \infty, \alpha}$$

y la inecuación

$$F_{m-R(S), \infty, \frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{m-R(S), \infty, 1-\frac{1}{2}\alpha}$$

en el nivel de probabilidad  $1-\alpha$ , según convenio de notación usualmente empleado, y método y algoritmo de aplicación conocidos.

De esta forma y tanto en el método ahora en estudio como en los que siguen, puede establecerse la comparación y predicción estadística rigurosa deseada entre el diseño inicial de la red y cualquier supuesto que se desee contrastar con él, aplicando el mismo F-Test que hasta ahora tan solo utilizábamos para establecer la compatibilidad o incompatibilidad de datos y resultados del ajuste..

Ciñéndonos a la configuración a priori de la red y tomando la (213) como más general, cortaremos por el plano definido por los ejes  $x_i$ ,  $x_j$  que expresamos en  $R^n$  como

$$x_k = 0 \quad \forall k \neq i, j \quad (215)$$







$$\sigma_{xx} = \begin{vmatrix} \sigma_{12} & & & & \\ & \sigma_{34} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & \sigma_{(n-1)n} \end{vmatrix} \quad (219)$$

y teniendo en cuenta que

$$\sigma_{xx} = \sigma^2 S^{-1} \quad (220)$$

Se tendrá

$$\sigma_{xx}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} S \quad (221)$$

y considerando (128) la inversa de  $\sigma_{xx}$  será

$$\sigma_{xx}^{-1} = \begin{vmatrix} \sigma_{12}^{-1} & & & & \\ & \sigma_{34}^{-1} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & \sigma_{(n-1)n}^{-1} \end{vmatrix} \quad (222)$$

que implica

$$S = \begin{vmatrix} s_{12} & & & & \\ & s_{34} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & s_{(n-1)n} \end{vmatrix} \quad (223)$$

En una red como la descrita las elipses de vértice a priori serán de la forma (217) y a posteriori de la (217 bis), o bien en este caso, lo que es lo mismo

$$x_{ij}^T \sigma_{ij}^{-1} x_{ij} = f^2 \quad (224)$$

expresión general conocida de las elipses clásicas de error, a posteriori con factor de homotecia  $f$ .

Las elipses correlativas a priori y a posteriori serán nulas.

Todo lo expuesto sucede como consecuencia de la independencia resultante de cada par de coordenadas afecta a un vértice arbitrario. Y podemos concluir que las elipses de error a priori y a posteriori de una red en su forma clásica corresponden a las que hemos denominado **elipses de vértice**, generadas por secciones de su hipercilindro o hiperelipsoide de error correspondiente por los planos coordenados de pares de ejes

representativos de coordenadas de vértices y tienen tanto más poder de afirmación cuanto más independientes puedan considerarse éstos entre sí, o sea cuando sean nulas o despreciables las covarianzas de coordenadas de vértices distintos.

### 6.5.-PROYECCIÓN DEL RECINTO DE INCERTIDUMBRE SOBRE SUS PLANOS COORDENADOS.

Proyectar el recinto de incertidumbre sobre los planos coordenados es un criterio tan válido como el anterior para obtener figuras de error representables en el subespacio  $R^2$  del levantamiento.

De esta suerte podemos establecer que la proyección del hiperelipsoide o hipercilindro  $HH\alpha''$  sobre el plano coordenado genérico  $x_i, x_j$  representa el recinto de incertidumbre con nivel de significación  $\alpha''$  de ubicación planimétrica del vértice exacto de coordenadas de dicha denominación.

Su cálculo es sencillo, teniendo en cuenta que en un espacio  $R^n$  existen  $(n-2)$  ejes rectilíneos distintos ortogonales al plano  $x_i, x_j$  que formarán las generatrices verticales de los hipercilindros rectos proyectantes deseados.

En efecto, en  $HH\alpha''$  (213) que expresaremos a priori para mayor sencillez y fijar ideas, pudiendo extenderse el cálculo que sigue al caso a posteriori con la simple utilización de (211), se tendrá la fórmula desarrollada

$$HH\alpha'' \equiv \sum s_{ii}x_i^2 + \sum 2s_{ij}x_ix_j - f^2 = 0 \quad (225)$$

$$i, j \in 1, 2, 3, \dots, n$$

$$s_{ij} = s_{ji}$$

Podremos levantar en un punto cualquiera de plano  $x_i, x_j$   $(n-2)$  rectas ortogonales a él, cada una de ellas paralela al resto de los ejes coordenados  $x_1, x_2, \dots, x_n$  distintos de los del plano escogido.

Sea esta recta arbitraria  $r_m$  paralela al eje  $x_m$  y pasando por un punto de coordenadas arbitrarias  $(x_i, x_j)$  en el repetido plano coordenado. Su expresión será:

$$r_m \equiv \begin{aligned} x_i &= x_i = \text{arbitrario} \\ x_j &= x_j = \text{arbitrario} \\ x_k &= 0 \\ &\forall k \neq m \end{aligned}$$

que se simplifica en

$$x_k = 0 \quad (226)$$

$$\forall k \neq i, j, m$$

Cortando a  $HH\alpha''$  por  $r_m$  según (135) resulta

$$s_{ii}x_i^2 + s_{jj}x_j^2 + s_{mm}x_m^2 + 2s_{ij}x_ix_j + 2s_{im}x_ix_m + 2s_{jm}x_jx_m - f^2 = 0 \quad (227)$$

Ecuación que, para cada pareja de valores  $x_i, x_j$ , cortará al hipercilindro o hiperelipsoide en dos puntos cuyas coordenadas en el eje  $x_m$  serán las soluciones de la ecuación de segundo grado en  $x_m$  (227).

La condición de tangencia de  $r_m$  a  $HH\alpha''$  se obtiene anulando el discriminante, dando lugar a:

$$4(s_{im}x_i + s_{jm}x_j)^2 - 4s_{mm}(s_{ii}x_i^2 + s_{jj}x_j^2 + 2s_{ij}x_ix_j - f^2) = 0$$

y operando

$$(s_{im}^2 - s_{mm}s_{ii})x_i^2 + (s_{jm}^2 - s_{mm}s_{jj})x_j^2 + 2(s_{im}s_{jm} - s_{ij}s_{mm})x_ix_j + s_{mm}f^2 = 0$$

que es preferible expresar en la forma

$$-\frac{s_{im}^2 - s_{mm}s_{ii}}{s_{mm}f^2}x_i^2 - \frac{s_{jm}^2 - s_{mm}s_{jj}}{s_{mm}f^2}x_j^2 - \frac{2(s_{im}s_{jm} - s_{ij}s_{mm})}{s_{mm}f^2}x_ix_j - 1 = 0 \quad (228)$$

$\forall m \neq i, j$

y que representa las (n-2) elipses sección recta sobre el plano  $x_i, x_j$ , del levantamiento, con centro o no en vértice según sean de dicha denominación o correlativas, expresión de la figura de incertidumbre deseada. Su configuración geométrica, al tener distintas orientaciones los ejes de las elipses componentes, será de roseta con simetría central.

Evidentemente, la información de error obtenida será de

- N rosetas de vértice
- N(N-1) rosetas correlativas

Con un total de  $N^2$  rosetas sobre el mismo retículo definido en el caso anterior y con la misma distribución geométrica.

## **6.6.-PROYECCIÓN DE LAS SECCIONES PRINCIPALES DEL RECINTO DE INCERTIDUMBRE SOBRE LOS PLANOS COORDENADOS**

Según hemos visto y siempre bajo la misma hipótesis nula, podemos llegar a definir dos conjuntos distintos de recintos de incertidumbre, disponiendo cada uno de ellos de su representación y justificación geométrica razonada.

Por otra parte, la figura de error que ya podemos llamar clásica, queda explicada como un caso particular del primero de los supuestos desarrollados.

En otro orden de ideas y recordando la teoría conocida, puede llegarse a otro tipo de figuras de error por consideraciones no estadísticas y generalmente a priori, dando lugar en planimetría a paralelogramos de incertidumbre (empíricamente sustituidos por elipses inscritas en ellos) y a curvas podarias de las mismas elipses con respecto a su centro. En ambos casos puede ampliarse el método a tres dimensiones, dando lugar a elipsoides y superficies podáricas complejas.

En cualquier caso, el nexo de unión de todos los supuestos, métodos y algoritmos considerados son los ejes reales propios de las secciones principales de los recintos de error, que coinciden con los lados de los paralelogramos y los ejes de simetría de las curvas podarias.

Puede completarse la exposición presente pues, con una nueva concepción de las figuras de error, proyectando cada pareja de semiejes de las secciones principales propias de hipercilindros o hiperelipsoides sobre los planos coordenados con los que respectivamente se superpondrían mediante la rotación antes definida  $\Gamma$ .

El método resuelve por primera vez el problema de las incógnitas libres en las redes de la misma denominación, que no abordan los dos anteriores, distinguiendo la morfología de las rosetas resultantes según sea el valor del rango  $R(S)$  de la matriz de diseño  $S$ .

El método da lugar a un tercer instrumento de diseño que debe utilizarse acompañando a los dos anteriormente desarrollados, en orden a lograr la mayor información posible sobre la red en estudio. En esencia es una síntesis de los dos anteriores al practicar secciones, al igual que en el primer procedimiento, seguido de proyecciones ortogonales, como en el segundo.

Trataremos cada proyección ortogonal descrita según su condición proyectiva rigurosa de homología afín espacial en  $R^n$  entre las elipses secciones principales y las proyectadas.

Todo el conjunto de aplicación no entraña en definitiva y bajo la hipótesis nula mayor empirismo que el que contienen los otros dos algoritmos anteriores.

Para el cálculo de los semiejes de las secciones principales determinaremos, como es preceptivo, los autovalores distintos de cero de la matriz  $S$  obteniendo así

$$C_{R(S), 2} = \frac{1}{2} [R(S) \cdot (R(S) - 1)] \quad (229)$$

Secciones elípticas posibles con representación geométrica coplanaria, sobre el plano del levantamiento pero sin localización específica en la red. Ello en principio puede parecer un serio inconveniente. Sin embargo, su proyección en cada uno de los planos conduce, como en el caso anterior, a nuevas rosetas de vértice y correlativas, conceptualmente idénticas a las anteriores.

Y así como en el caso anterior, la información de error obtenida será de

- N rosetas de vértice
- N(N-1) rosetas correlativas

Con un total de  $N^2$  rosetas sobre el mismo retículo definido en el caso anterior y con la misma distribución geométrica.

La diferencia esencial estriba en que el número de elipses de cada roseta no es independiente como en el caso anterior del rango de S, sino que, en este caso, estará compuesto de

$$\frac{1}{2} [R(S) \cdot (R(S) - 1)] \text{ elipses concéntricas, función del número de variables principales.}$$

suficiente para justificar el procedimiento con el indudable hecho de que ofrece información de conjunto más rigurosa y completa que los otros dos, asequible tanto a priori como a posteriori.

Además y en última instancia, es subrayable una vez más que el método en estudio no pretende sustituir sino tan solo complementar el resto de la doctrina conocida y expuesta.

En la práctica del diseño de redes, el criterio a emplear es lograr la mayor homogeneidad posible en las figuras de error a priori de vértices y ejes y conocer sus valores máximos y, con menos interés, sus orientaciones dominantes, si existen.

Solamente en el análisis a posteriori puede tener interés la definición del error en una zona determinada específicamente. En dicho supuesto, será preceptivo como más adecuado el algoritmo y ajuste con zona de precisión intrínseca.

Avanzando en el razonamiento, deben tenerse en cuenta las consideraciones siguientes.

La solución más general de la red estar formada por un vector  $x$  de  $n$  elementos (correcciones a coordenadas) en el espacio  $R_n$ , de las que  $R(S) = (n-d)$  serán variables principales y  $d$  variables libres, según la conocida expresión

$$x = x_F + x_N$$

donde  $x_F$  vector en el espacio fila, fijo y  $x_N$ , vector en el espacio nulo, arbitrario, y ambos complementos ortogonales en  $R^n$  de las variables.

Las variables libres pueden tomar cualquier valor arbitrario en  $x$ . Es inútil por tanto hablar a priori en general de figuras o elipses de error en ellas o en los ejes a que dan lugar. Simplemente, no tiene sentido. Y ello es particularmente cierto en fase de diseño, circunstancia que hasta ahora no habíamos tenido en cuenta.

Sin embargo, escogida una solución, y para fijar ideas sea pseudoinversa con matriz inversa generalizada no recíproca y de rango completo, o sea pseudoinversa con matriz pseudoinversa, cada variable libre adoptará un valor que formará parte del vector  $x$ , invariante. Ese valor debe llevar asociada una figura de error a posteriori que depende de la matriz de diseño  $S$  y del criterio geométrico de aplicación. Estas figuras son las elipses y rosetas hasta ahora estudiadas, independientes del defecto de rango de  $S$  en los casos anteriores, y teniéndolo en cuenta en el presente.

Su expresión matemática son los autovalores nulos

$$\mu_k = 0 \quad k \in 1,2,..w \leq 4$$

que implican semiejes

$$\Phi_k = \frac{1}{0}$$

en principio sin significado intrínseco físico ni algebraico alguno, obstáculo que según hemos visto, se sortea al considerar el cálculo como un simple paso al límite que les confiere ya un carácter totalmente distinto .

La elección de las variables libres es otro problema que depende de distintas consideraciones específicas de cada trabajo. En última instancia puede procederse por tanteos entre los vértices de la red que puedan ser elegidos.

Adoptada una solución, se sitúan las variables libres como últimos elementos del vector de correcciones  $x$ . Obsérvese que ello implica que la matriz de diseño  $A$ , como debe suceder, no es arbitraria en cuanto a la ordenación de variables.

Efectivamente, la inevitable transmisión de errores en el sentido de progresión de la observación de la red está siempre presente y es tanto más importante cuanto ésta sea más extensa.

Conseguir su homogeneización total a través de un ajuste anterior es ilusorio, como demuestra reiteradamente la experiencia práctica y así resulta significativo y práctica aconsejable ordenar el vector  $x$  en el sentido de las variables de obtención sucesiva y asociar a ellas, a lo menos en fase de diseño, los autovalores decrecientes, que darán lugar a semiejes de magnitud creciente, y por tanto, vértices de y áreas de recintos de error temible cada vez mayores, cuestión que tampoco se había considerado en los métodos anteriores. No obstante, veremos en el desarrollo del método y al final de su aplicación que al obtener rosetas en vez de elipses aisladas, se pierde de nuevo la validez de la información basada en la priorización antes mencionada.



Es claro que el algoritmo propuesto utiliza también permanentemente la totalidad de la matriz de criterio  $S$ , las  $Q_{xx}$  y las  $\sigma_{xx}$  en vez de las matrices menores de orden dos referidas a cada vértice, como sucede en el algoritmo clásico, con la evidente falta de rigor que ya se señaló anteriormente, que omite cualquier influencia o correlación del vértice en estudio, como debería ser preceptivo, siquiera con sus vecinos en la red.

Antes bien, la introducción de las elipses de correlación estudia y cifra expresamente las interdependencias entre todos los vértices de la red dos a dos, y coordenada a coordenada, sin que ello impida la aplicación a cualquier zona de precisión intrínseca, del algoritmo de ajuste conocido, deduciéndose de él los hiperelipsoides correspondientes a los que, en su caso, se podría aplicar también el método que nos ocupa.

Definida así la teoría básica, a continuación se desarrolla su algoritmo de cálculo.

### 6.7.- ALGORITMO DE CALCULO.

Se considera una red local en su caso más general de la que se conoce un vector  $X_a$  de coordenadas aproximadas y la matriz  $P_{m,m}$  de pesos a priori que permiten obtener la matriz de diseño  $A_{m,n}$  y la  $S_{n,n} = A^T P A$ , con defecto de rango  $d$  definido por  $0 \leq d \leq 4$ .

Es conocido el orden de observación en campo y se han ordenado de acuerdo con él las formas lineales que dan lugar a las filas de  $A$  así como el vector de correcciones  $x_{n,1}$ .

Se adopta  $s^2$  a priori igual a la unidad y se pretende diseñar una figura de error posible para la red observada y calculada, con una fiabilidad prefijada  $\varphi = 1 - \alpha$ ".

---

Sucesivamente y según teoría conocida se obtendrán:

- los autovalores de  $S$  y sean los elementos del vector  $\mu_{n,1}$ ,

y los elementos  $\mu_i$  de  $\mu_{n,1}$ , ordenados para fijar ideas de mayor a menor, siendo

$$\begin{aligned} \mu_i &> 0 && i \in 1,2,3,\dots,n-d \\ \mu_i &= 0 && i \in (n-d+1), (n-d+2) \dots n \end{aligned}$$

Se asocian, solamente como hipótesis de cálculo y para acceder a una primera alternativa de progresión de errores, elemento a elemento en el orden establecido los vectores  $\mu$  y  $x$ , y por tanto el vector de coordenadas corregidas  $X$  en el mismo orden de  $X_a$ ,  $x$ ,  $\mu$ .

Sean

$$X_i = X_{ai} + x_i \text{ asociada a } \mu_i \quad (230)$$

$$X_j = X_{aj} + x_j \text{ asociada a } \mu_j \quad (231)$$

y se tendrá según (207) , (209)

$$f_{\alpha'} = \sqrt{R(S)F_{R(S),m-R(S),\alpha'}} \quad (232)$$

$$\Phi_{HH\alpha'_i} = f_{\alpha'} \sigma \sqrt{\mu_i^{-1}} \neq 0 \quad (233)$$

$$\Phi_{HH\alpha'_j} = f_{\alpha'} \sigma \sqrt{\mu_j^{-1}} \neq 0 \quad (234)$$

semiejes de la elipse canónica de correlación asociada en principio a las coordenadas  $X_i, X_j$  obtenida cortando el recinto de incertidumbre (203) por el hiperplano coordinado formado por los ejes  $z_i, z_j$  de ecuación

$$z_I = 0 \tag{235}$$

$$\forall I \neq i, j$$

(n-2) ecuaciones obtenidas, como ya vimos, particularizando para cualquier valor de I distinto de los dos i, j elegidos

Los vectores (233) y (234) evidentemente son

$$\Phi_{HH\alpha^i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Phi_{HH\alpha^i} \tag{236}$$

$$\Phi_{HH\alpha^j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Phi_{HH\alpha^j} \tag{237}$$

Contenidos en el hiperplano (235) c.d.s.

Efectuando la rotación inversa a (202)

$$x = \Gamma z \tag{238}$$

por ser  $\Gamma^T = \Gamma^{-1}$  ya que  $\Gamma$  es ortogonal, resultando

$$(\Gamma^T)^{-1} = (\Gamma^{-1})^T = (\Gamma^T)^T = \Gamma \tag{239}$$

se obtendrá la elipse de correlación deseada referida a los ejes iniciales ( $x_i, x_j$ ) del recinto (201)

Siendo la matriz de autovectores columna

$$\Gamma = | \tau_{ij} | \quad (240)$$

$\tau_{ij}$  = elemento de orden j del autovector columna de orden i.

efectuamos la rotación (238) a los ejes (236) y (237) resultando

$$\Phi_{HH\alpha^i} = \Gamma \Phi_{HH\alpha^i} = \Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{1i} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \tau_{2i} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \vdots \\ \tau_{(i-1)i} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \tau_{ii} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \tau_{(i+1)i} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \vdots \\ \tau_{ji} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \vdots \\ \tau_{ni} \Phi_{HH\alpha^i} \end{pmatrix} \quad (241)$$

$$\Phi_{HH\alpha^j} = \Gamma \Phi_{HH\alpha^j} = \Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{1j} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \tau_{2j} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \vdots \\ \tau_{ij} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \vdots \\ \tau_{(j-1)j} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \tau_{jj} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \tau_{(j+1)j} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \vdots \\ \tau_{nj} \Phi_{HH\alpha^j} \end{pmatrix} \quad (242)$$

Que definen y se encuentran, como se dijo, en un hiperplano referido a un sistema de coordenadas en  $x$  distinto en general a cualquier plano coordenado análogo al (235).

(La expresión del hiperplano análogo al (235) mencionado será

$$x_I = 0 \quad (243)$$

$\forall I \neq i, j$

(n-2) ecuaciones obtenidas particularizando para cualquier valor de I distinto de los dos  $i, j$  elegidos

que evidentemente no cumplen (241) y (242).

Es claro que los elementos de ambos vectores (241) y (242) son las proyecciones de los semiejes  $\Phi_{HH\alpha}x_i$  y  $\Phi_{HH\alpha}x_j$  sobre los ejes coordenados  $x$ , al ser los elementos de cada autovector los cosenos directores de los ejes  $z$  con los  $x$ . Por lo tanto, la proyección de la elipse definida por los semiejes (241) y (242) sobre el hiperplano coordenado (243) será una nueva elipse de correlación, homológica afín de la inicial, que representa en planimetría una nueva figura de error distinta de las consideradas hasta ahora, hipotéticamente referida a las coordenadas  $X_i$ ,  $X_j$ , pudiéndose representar sobre el plano bidimensional del levantamiento.

Recíprocamente, el conjunto de elipses correlativas define un recinto de incertidumbre y solo uno de semiejes conocidos.

Téngase en cuenta que un par de autovalores  $\mu_i, \mu_j$  y autovectores  $\tau_i, \tau_j$  tienen siempre el significado físico de error máximo y mínimo, en magnitud y dirección, que según hemos visto y para mejor entender el proceso, asociamos a dos variables  $x_i, x_j$ . En el espacio  $R^2$ , utilizando dos a dos las coordenadas de los vértices, se obtienen directamente los semiejes de las elipses de error clásicas en el plano del levantamiento  $x_i, x_j$ . En el espacio  $R^n$  se obtienen elipses del mismo significado físico, pero fuera del plano del levantamiento, sobre el que es preciso proyectarlas para obtener el resultado deseado, siendo obvio que ni una rotación ni una proyección cambian la interpretación física establecida, justificándose así conceptualmente el método. Del mismo modo pueden obtenerse las elipses correlativas.

Siguiendo el desarrollo, de la elipse genérica proyectada se conocen dos semidiámetros conjugados, que son las proyecciones antes indicadas de (241) y (242) sobre los ejes coordenados  $x_i, x_j$ .

Todo se reduce ya a determinar, en el plano del levantamiento, la elipse referida a su centro y definida por:

- un semidiámetro cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas  $x_i, x_j$  son

$$\begin{aligned} \delta'_{ij}_{x_i} &= \tau_{ii} \Phi_{HH\alpha}^i \\ \delta'_{ij}_{x_j} &= \tau_{ji} \Phi_{HH\alpha}^i \end{aligned} \quad (244)$$

- el semidiámetro conjugado del anterior, de proyecciones sobre los mismos ejes de coordenadas

$$\begin{aligned} \delta'_{ij}_{x_i} &= \tau_{ij} \Phi_{HH\alpha}^j \\ \delta'_{ij}_{x_j} &= \tau_{jj} \Phi_{HH\alpha}^j \end{aligned} \quad (245)$$

Y si se desea una representación gráfica del resultado bastar con dibujar la elipse de vértice resultante - con centro en  $X_i, X_j$  si ambos valores son coordenadas de un vértice, según hemos supuesto, o en el lugar del retículo genérico que le corresponda como elipse correlativa, si no lo son.

No obstante, de nuevo es importante insistir que la representación gráfica es accesoria en el algoritmo, especialmente en su objetivo fundamental de aportación al estudio de diseño en el problema de orden cero (PD0).

---

La obtención de la proyección de los semiejes o semidiámetros  $\Phi_{HH\alpha^*X_i}$  y  $\Phi_{HH\alpha^*X_j}$  sobre dos ejes coordenados cualquiera es ya inmediata.

Se escribirá para las proyecciones del semidiámetro  $\Phi_{HH\alpha^*X_i}$  sobre  $(x_p, x_q)$

$$\delta ij_{xp} = \tau_{pi} \Phi_{HH\alpha^*i} = \text{proy.de.}\Phi_{HH\alpha^*xi} \text{sobre.}x_p$$

$$\delta ij_{xq} = \tau_{qi} \Phi_{HH\alpha^*i} = \text{proy.de.}\Phi_{HH\alpha^*xi} \text{sobre.}x_q$$

Y así mismo para las proyecciones del semidiámetro conjugado del anterior  $\Phi_{HH\alpha^*X_j}$  sobre los mismos ejes  $(x_p, x_q)$ .

$$\delta' ij_{xp} = \tau_{pj} \Phi_{HH\alpha^*j} = \text{proy.de.}\Phi_{HH\alpha^*xj} \text{sobre.}x_p$$

$$\delta' ij_{xq} = \tau_{qj} \Phi_{HH\alpha^*j} = \text{proy.de.}\Phi_{HH\alpha^*xj} \text{sobre.}x_q$$

En consecuencia, todas las elipses definidas por parejas de diámetros conjugados sobre un mismo plano coordenado  $(x_p, x_q)$ .formarán la roseta de error, de vértice o correlativa, que se representará en el plano del levantamiento como en los métodos anteriores ya explicados.

Es claro que, las rosetas pierden, según se dijo, la relación autovector-coordenada, poco importante dado el empirismo de dicho supuesto.

El problema ya queda reducido al clásico de determinación de una elipse conocidos dos diámetros conjugados, que resolvemos a continuación.

### **6.7.1.-DETERMINACION DE UNA ELIPSE EN FUNCION DE DOS DIAMETROS CONJUGADOS CONOCIDOS.[ Mataix. 1945]**

Supondremos solamente para fijar ideas que  $X_i$  corresponde a una abscisa cualquiera de la red y  $X_j$  a una ordenada. La elipse resultante podrá referirse al plano XY del levantamiento en la forma indicada anteriormente, pero téngase presente que las elipses correspondientes a abscisa-abscisa u ordenada-ordenada tienen análogo sentido físico y representación gráfica del mismo carácter.

Una cónica referida a su centro tiene la expresión:

$$a_{11} X^2 + 2 a_{12} XY + a_{22} Y^2 + a_{33} = 0 \tag{246}$$

y la relación entre las pendientes  $m$  y  $m'$  de dos semidiámetros conjugados de longitudes  $\delta$  y  $\delta'$  es

$$a_{22} mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0 \tag{247}$$

expresión de la involución de rectas conjugadas con centro en el de la cónica.

Y por ser elipse siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (248)$$

$$I = a_{11} + a_{22} \quad (249)$$

se deberá cumplir que

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad (250)$$

$$A.I < 0 \quad (251)$$

según teoría conocida.

La determinación de la cónica es inmediata. Particularizando en (246) los valores de  $\delta_{ijx_p}$ ,  $\delta_{ijx_q}$ ,  $\delta'_{ijx_p}$ ,  $\delta'_{ijx_q}$

$$a_{11}\delta_{ijx_p}^2 + 2a_{12}\delta_{ijx_p}\delta_{ijx_q} + a_{22}\delta_{ijx_q}^2 + a_{33} = 0 \quad (252)$$

$$a_{11}\delta'_{ijx_p}^2 + 2a_{12}\delta'_{ijx_p}\delta'_{ijx_q} + a_{22}\delta'_{ijx_q}^2 + a_{33} = 0 \quad (253)$$

$$m_{\delta_{ijpq}} = \frac{\delta_{ijx_q}}{\delta_{ijx_p}} \quad (254)$$

$$m'_{\delta'_{ijpq}} = \frac{\delta'_{ijx_q}}{\delta'_{ijx_p}} \quad (255)$$

particularizando en (247)

$$a_{22} m_{\delta_{ijpq}} m'_{\delta'_{ijpq}} + a_{12}(m_{\delta_{ijpq}} + m'_{\delta'_{ijpq}}) + a_{11} = 0 \quad (256)$$

El sistema formado por (252), (253) y (254) resuelve el problema.

Escrito en la forma:

$$M_{3,3} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_{33} \quad (257)$$

$$M a = - K a_{33} \quad (258)$$

y con  $a_{33} = -1$   
la solución es

$$a = M^{-1}K \quad (259)$$

que define la cónica.

Comprobada la cumplimentación de (250) y (251) las rectas ortogonales de la involución de semidiámetros conjugados son los semiejes de la elipse. En (247) se tendrá, con

$$m m' = -1 \quad (260)$$

$$-a_{22} + a_{12} \left( m - \frac{1}{m} \right) + a_{11} = 0 \quad (261)$$

$$m^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} m - 1 = 0 \quad (262)$$

de donde

$$m = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \pm \frac{1}{2a_{12}} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \quad (263)$$

que da lugar a  $m_{aijpp}$ ,  $m_{bijpq}$ , direcciones de los ejes de la elipse

Cortando por

$$y = m_{aijpp} x \quad (264)$$

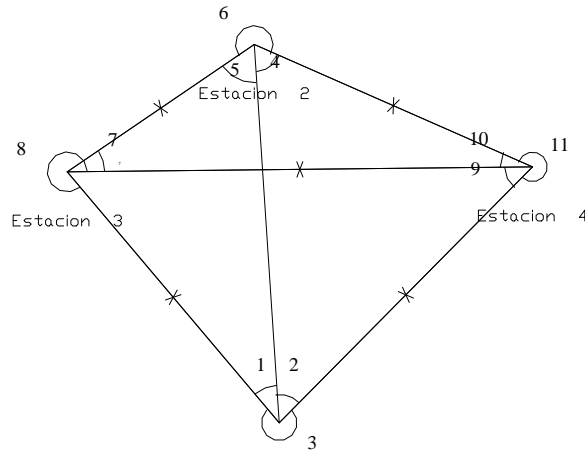
$$y = m_{bijpq} x \quad (265)$$

se obtienen los vértices de los ejes, sus longitudes, y la ecuación canónica de la elipse, resolviéndose el problema en su totalidad.



## 6.8.-APLICACIÓN PRACTICA

A continuación se va a proceder a calcular el hipercilindro de error, así como las elipses resultantes de la aplicación de los tres diferentes métodos, sobre la red en la que venimos trabajando hasta ahora.



Se parte de la compensación de la red como libre, con el único constreñimiento que impone la introducción de distancias reducidas.

En primer lugar se muestran las elipses clásicas absolutas y relativas:

### ELIPSES DE VERTICE

Vertice Semieje mayor Acimut semieje Semieje menor Acimut semieje

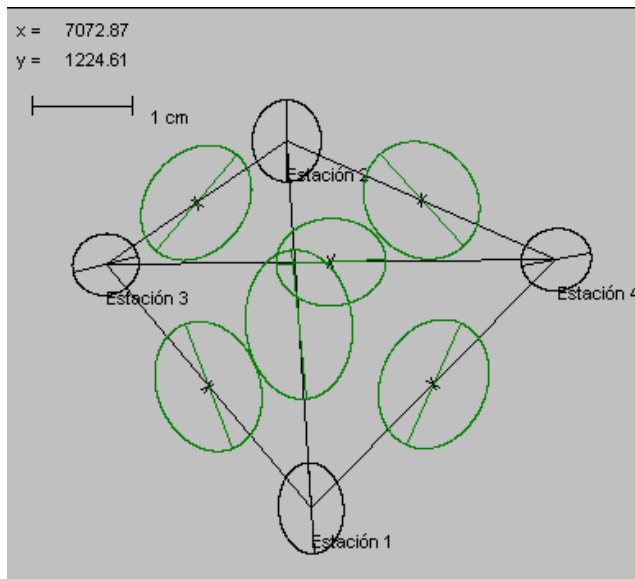
1	0.0038 mts	195.7311 gra	0.0027 mts	95.7311 gra
2	0.0034 mts	0.4481 gra	0.0029 mts	100.4481 gra
3	0.0028 mts	84.8792 gra	0.0025 mts	184.8792 gra
4	0.0029 mts	87.7719 gra	0.0026 mts	187.7719 gra

### ELIPSES RELATIVAS

Vertices Semieje mayor Acimut semieje Semieje menor Acimut semieje

1	2	0.0062 mts	193.9668 gra	0.0045 mts	93.9668 gra
3	0.0056 mts	176.3313 gra	0.0043 mts	76.3313 gra	
4	0.0056 mts	26.8019 gra	0.0044 mts	126.8019 gra	
2	3	0.0052 mts	44.7930 gra	0.0041 mts	144.7930 gra
4	0.0052 mts	152.4221 gra	0.0045 mts	52.4221 gra	
3	4	0.0046 mts	96.7509 gra	0.0036 mts	196.7509 gra

La representación gráfica de las mismas resulta:



#### EJES DEL HIPERCILINDRO STANDARD Y HOMOTETICO

---> Factor de homotecia para el HH : 5.16

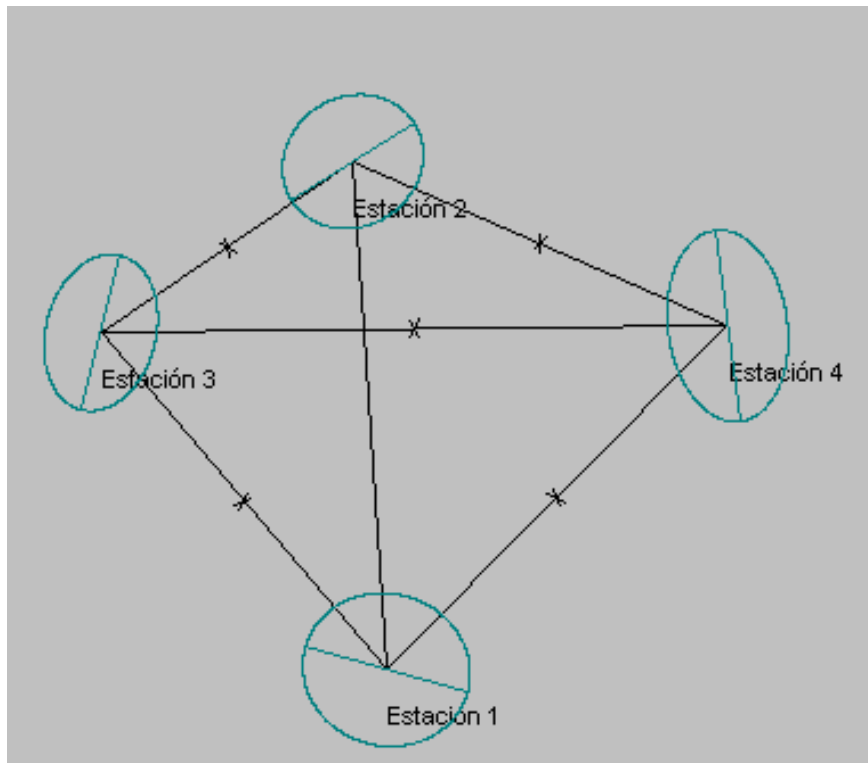
Hiperelipsoide Standard	Hiperelipsoide Homotetico
0.00277206 metros	0.01430387 metros
0.00313362 metros	0.01616951 metros
0.00335826 metros	0.01732864 metros
0.00379191 metros	0.01956626 metros
0.00417004 metros	0.02151741 metros

**1.- METODO DE LAS SECCIONES DEL HIPERELIPSOIDE**

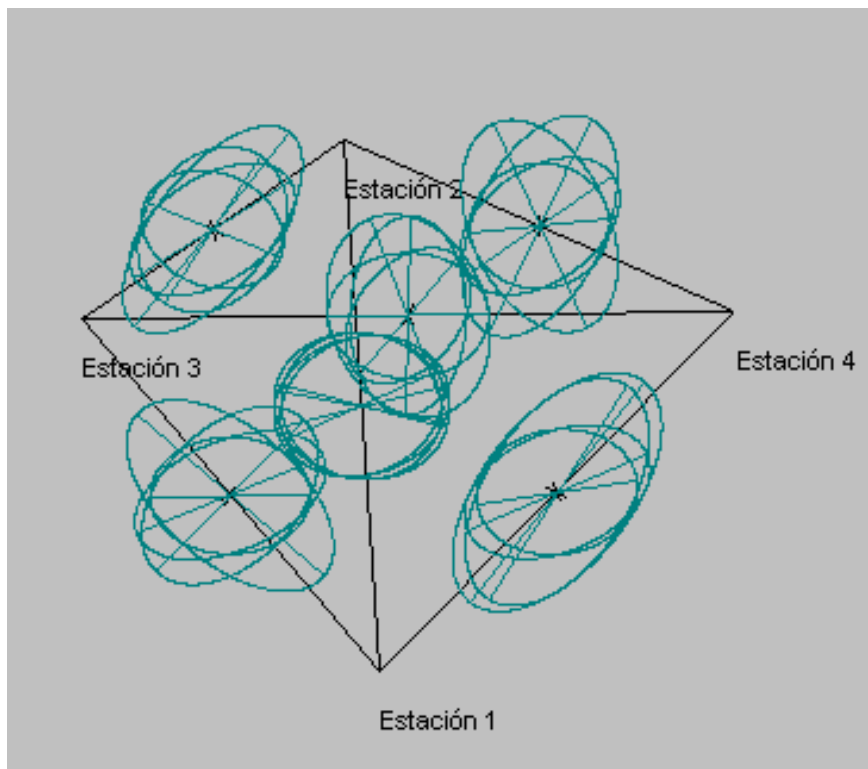
**ELIPSES DE ERROR CUADRO DE RESULTADOS EN HIPERELIPSOIDE STANDARD**

Variables	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1 2	0.0050 mts	117.1724 gra	0.0045 mts	17.1724 gra
3	0.0050 mts	112.2677 gra	0.0041 mts	12.2677 gra
4	0.0051 mts	84.2715 gra	0.0039 mts	184.2715 gra
5	0.0057 mts	75.1376 gra	0.0031 mts	175.1376 gra
6	0.0071 mts	145.3673 gra	0.0038 mts	45.3673 gra
7	0.0056 mts	74.7372 gra	0.0034 mts	174.7372 gra
8	0.0080 mts	42.5964 gra	0.0042 mts	142.5964 gra
2 3	0.0046 mts	116.0553 gra	0.0041 mts	16.0553 gra
4	0.0048 mts	72.3105 gra	0.0038 mts	172.3105 gra
5	0.0046 mts	99.2784 gra	0.0033 mts	199.2784 gra
6	0.0060 mts	49.5886 gra	0.0038 mts	149.5886 gra
7	0.0046 mts	91.0081 gra	0.0035 mts	191.0081 gra
8	0.0073 mts	36.6067 gra	0.0041 mts	136.6067 gra
3 4	0.0043 mts	63.4520 gra	0.0038 mts	163.4520 gra
5	0.0052 mts	64.3321 gra	0.0030 mts	164.3321 gra
6	0.0050 mts	36.5185 gra	0.0039 mts	136.5185 gra
7	0.0051 mts	61.5646 gra	0.0032 mts	161.5646 gra
8	0.0064 mts	173.1166 gra	0.0039 mts	73.1166 gra
4 5	0.0042 mts	125.3454 gra	0.0032 mts	25.3454 gra
6	0.0071 mts	42.8119 gra	0.0033 mts	142.8119 gra
7	0.0040 mts	93.7992 gra	0.0036 mts	193.7992 gra
8	0.0068 mts	28.2619 gra	0.0037 mts	128.2619 gra
5 6	0.0047 mts	15.9343 gra	0.0033 mts	115.9343 gra
7	0.0044 mts	44.1139 gra	0.0029 mts	144.1139 gra
8	0.0057 mts	1.7412 gra	0.0033 mts	101.7412 gra
6 7	0.0046 mts	99.0721 gra	0.0036 mts	199.0721 gra
8	0.0059 mts	176.8602 gra	0.0045 mts	76.8602 gra
7 8	0.0057 mts	191.6065 gra	0.0035 mts	91.6065 gra

Las elipses de vértice serán:



Y las elipses correlativas:



**2.- METODO DE LAS PROYECCIONES DEL HIPERELIPSOIDE**

ROSETAS DE ERROR CON FACTOR HOMOTECIA = 5.16

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DEL VERTICE NUMERO 1 \*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
3	0.0261 mts	115.9776 gra	0.0237 mts	15.9776 gra
4	0.0261 mts	112.1177 gra	0.0240 mts	12.1177 gra
5	0.0284 mts	109.1329 gra	0.0237 mts	9.1329 gra
6	0.0361 mts	137.0266 gra	0.0239 mts	37.0266 gra
7	0.0275 mts	105.9931 gra	0.0238 mts	5.9931 gra
8	0.0351 mts	63.4492 gra	0.0251 mts	163.4492 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DEL VERTICE NUMERO 2 \*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0225 mts	63.0909 gra	0.0202 mts	163.0909 gra
2	0.0225 mts	60.7850 gra	0.0203 mts	160.7850 gra
5	0.0245 mts	95.9234 gra	0.0210 mts	195.9234 gra
6	0.0301 mts	33.3125 gra	0.0207 mts	133.3125 gra
7	0.0244 mts	76.7844 gra	0.0203 mts	176.7844 gra
8	0.0239 mts	148.6853 gra	0.0224 mts	48.6853 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DEL VERTICE NUMERO 3\*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0284 mts	196.0007 gra	0.0189 mts	96.0007 gra
2	0.0273 mts	13.8495 gra	0.0170 mts	113.8495 gra
3	0.0276 mts	30.8078 gra	0.0184 mts	130.8078 gra
4	0.0309 mts	4.5236 gra	0.0176 mts	104.5236 gra
7	0.0250 mts	21.3734 gra	0.0182 mts	121.3734 gra
8	0.0251 mts	15.0318 gra	0.0170 mts	115.0318 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DEL VERTICE NUMERO 4 \*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0355 mts	3.9634 gra	0.0197 mts	103.9634 gra
2	0.0339 mts	194.5844 gra	0.0186 mts	94.5844 gra
3	0.0343 mts	180.4607 gra	0.0197 mts	80.4607 gra
4	0.0333 mts	193.0585 gra	0.0185 mts	93.0585 gra
5	0.0299 mts	190.0821 gra	0.0199 mts	90.0821 gra
6	0.0304 mts	191.7033 gra	0.0185 mts	91.7033 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 3 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0261 mts	111.8987 gra	0.0216 mts	11.8987 gra
4	0.0262 mts	110.3124 gra	0.0217 mts	10.3124 gra
5	0.0294 mts	74.6107 gra	0.0239 mts	174.6107 gra
6	0.0323 mts	119.4045 gra	0.0216 mts	19.4045 gra
7	0.0278 mts	84.6487 gra	0.0235 mts	184.6487 gra
8	0.0349 mts	127.1855 gra	0.0219 mts	27.1855 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 4 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0264 mts	84.2386 gra	0.0207 mts	184.2386 gra
3	0.0264 mts	84.8328 gra	0.0206 mts	184.8328 gra
5	0.0284 mts	94.6091 gra	0.0210 mts	194.6091 gra
6	0.0355 mts	137.1637 gra	0.0244 mts	37.1637 gra
7	0.0281 mts	85.9342 gra	0.0204 mts	185.9342 gra
8	0.0391 mts	67.4756 gra	0.0210 mts	167.4756 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 5 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0299 mts	75.1833 gra	0.0164 mts	175.1833 gra
3	0.0310 mts	68.7178 gra	0.0181 mts	168.7178 gra
4	0.0299 mts	75.2280 gra	0.0167 mts	175.2280 gra
6	0.0341 mts	81.7967 gra	0.0170 mts	181.7967 gra
7	0.0388 mts	68.1304 gra	0.0168 mts	168.1304 gra
8	0.0379 mts	77.9867 gra	0.0165 mts	177.9867 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 6 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0423 mts	150.9509 gra	0.0205 mts	50.9509 gra
3	0.0384 mts	146.8093 gra	0.0201 mts	46.8093 gra
4	0.0452 mts	158.6640 gra	0.0221 mts	58.6640 gra
5	0.0382 mts	140.7752 gra	0.0210 mts	40.7752 gra
7	0.0394 mts	142.2535 gra	0.0203 mts	42.2535 gra
8	0.0602 mts	140.3283 gra	0.0202 mts	40.3283 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0289 mts	74.7789 gra	0.0177 mts	174.7789 gra
3	0.0294 mts	69.7435 gra	0.0190 mts	169.7435 gra
4	0.0292 mts	74.8503 gra	0.0177 mts	174.8503 gra
5	0.0389 mts	67.1563 gra	0.0180 mts	167.1563 gra
6	0.0348 mts	79.1553 gra	0.0178 mts	179.1553 gra
8	0.0338 mts	82.2694 gra	0.0182 mts	182.2694 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0483 mts	36.8247 gra	0.0227 mts	136.8247 gra
3	0.0470 mts	40.2849 gra	0.0221 mts	140.2849 gra
4	0.0529 mts	39.4405 gra	0.0221 mts	139.4405 gra
5	0.0469 mts	47.9553 gra	0.0227 mts	147.9553 gra
6	0.0661 mts	50.8879 gra	0.0227 mts	150.8879 gra
7	0.0426 mts	45.5498 gra	0.0229 mts	145.5498 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 3 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0239 mts	115.3196 gra	0.0216 mts	15.3196 gra
4	0.0242 mts	110.5472 gra	0.0217 mts	10.5472 gra
5	0.0249 mts	166.8315 gra	0.0234 mts	66.8315 gra
6	0.0263 mts	91.4368 gra	0.0221 mts	191.4368 gra
7	0.0241 mts	143.7529 gra	0.0235 mts	43.7529 gra
8	0.0300 mts	132.9156 gra	0.0218 mts	32.9156 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 4 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0249 mts	72.0567 gra	0.0202 mts	172.0567 gra
3	0.0249 mts	72.2498 gra	0.0201 mts	172.2498 gra
5	0.0250 mts	70.1356 gra	0.0203 mts	170.1356 gra
6	0.0424 mts	49.2095 gra	0.0208 mts	149.2095 gra
7	0.0250 mts	72.3900 gra	0.0200 mts	172.3900 gra
8	0.0353 mts	60.3516 gra	0.0203 mts	160.3516 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 5 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0238 mts	102.0260 gra	0.0189 mts	2.0260 gra
3	0.0238 mts	103.0550 gra	0.0196 mts	3.0550 gra
4	0.0241 mts	102.3518 gra	0.0176 mts	2.3518 gra
6	0.0264 mts	92.8737 gra	0.0175 mts	192.8737 gra
7	0.0239 mts	95.1637 gra	0.0187 mts	195.1637 gra
8	0.0272 mts	98.2754 gra	0.0173 mts	198.2754 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 6 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0386 mts	39.8899 gra	0.0207 mts	139.8899 gra
3	0.0318 mts	47.8658 gra	0.0202 mts	147.8658 gra
4	0.0497 mts	39.0378 gra	0.0205 mts	139.0378 gra
5	0.0319 mts	48.3915 gra	0.0201 mts	148.3915 gra
7	0.0315 mts	49.7841 gra	0.0200 mts	149.7841 gra
8	0.0331 mts	58.8408 gra	0.0216 mts	158.8408 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0239 mts	90.3123 gra	0.0197 mts	190.3123 gra
3	0.0239 mts	89.0874 gra	0.0202 mts	189.0874 gra
4	0.0243 mts	90.9507 gra	0.0185 mts	190.9507 gra
5	0.0240 mts	85.8461 gra	0.0199 mts	185.8461 gra
6	0.0264 mts	92.6085 gra	0.0185 mts	192.6085 gra
8	0.0272 mts	99.0502 gra	0.0187 mts	199.0502 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0460 mts	29.6801 gra	0.0218 mts	129.6801 gra
3	0.0416 mts	34.5492 gra	0.0213 mts	134.5492 gra
4	0.0480 mts	35.2159 gra	0.0212 mts	135.2159 gra
5	0.0377 mts	36.5934 gra	0.0212 mts	136.5934 gra
6	0.0383 mts	40.8278 gra	0.0230 mts	140.8278 gra
7	0.0378 mts	36.1822 gra	0.0213 mts	136.1822 gra



\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 3 - 5 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0285 mts	58.7703 gra	0.0165 mts	158.7703 gra
2	0.0273 mts	64.3975 gra	0.0156 mts	164.3975 gra
4	0.0273 mts	63.8908 gra	0.0158 mts	163.8908 gra
6	0.0295 mts	63.2926 gra	0.0156 mts	163.2926 gra
7	0.0417 mts	60.0361 gra	0.0157 mts	160.0361 gra
8	0.0292 mts	67.2279 gra	0.0157 mts	167.2279 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 3 - 6 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0313 mts	26.9701 gra	0.0206 mts	126.9701 gra
2	0.0280 mts	26.5487 gra	0.0209 mts	126.5487 gra
4	0.0348 mts	25.5956 gra	0.0207 mts	125.5956 gra
5	0.0302 mts	50.8899 gra	0.0210 mts	150.8899 gra
7	0.0273 mts	48.9949 gra	0.0214 mts	148.9949 gra
8	0.0286 mts	44.8877 gra	0.0207 mts	144.8877 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 3 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0271 mts	57.2497 gra	0.0174 mts	157.2497 gra
2	0.0264 mts	61.5286 gra	0.0167 mts	161.5286 gra
4	0.0266 mts	61.7988 gra	0.0167 mts	161.7988 gra
5	0.0420 mts	58.7821 gra	0.0167 mts	158.7821 gra
6	0.0271 mts	62.8793 gra	0.0167 mts	162.8793 gra
8	0.0297 mts	63.1338 gra	0.0167 mts	163.1338 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 3 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0423 mts	176.1687 gra	0.0206 mts	76.1687 gra
2	0.0393 mts	175.8359 gra	0.0206 mts	75.8359 gra
4	0.0364 mts	178.3231 gra	0.0209 mts	78.3231 gra
5	0.0349 mts	164.3525 gra	0.0224 mts	64.3525 gra
6	0.0353 mts	170.4202 gra	0.0207 mts	70.4202 gra
7	0.0366 mts	165.0116 gra	0.0215 mts	65.0116 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 4 - 5 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0218 mts	131.8613 gra	0.0183 mts	31.8613 gra
2	0.0220 mts	124.2644 gra	0.0168 mts	24.2644 gra
3	0.0221 mts	138.1857 gra	0.0187 mts	38.1857 gra
6	0.0268 mts	106.7550 gra	0.0175 mts	6.7550 gra
7	0.0221 mts	134.3227 gra	0.0178 mts	34.3227 gra
8	0.0240 mts	118.3445 gra	0.0169 mts	18.3445 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 4 - 6 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0441 mts	36.2006 gra	0.0181 mts	136.2006 gra
2	0.0513 mts	40.8674 gra	0.0173 mts	140.8674 gra
3	0.0398 mts	42.3874 gra	0.0173 mts	142.3874 gra
5	0.0368 mts	42.7047 gra	0.0176 mts	142.7047 gra
7	0.0369 mts	42.8251 gra	0.0173 mts	142.8251 gra
8	0.0385 mts	47.3136 gra	0.0186 mts	147.3136 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 4 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0212 mts	71.1927 gra	0.0195 mts	171.1927 gra
2	0.0210 mts	91.2134 gra	0.0186 mts	191.2134 gra
3	0.0213 mts	60.0513 gra	0.0198 mts	160.0513 gra
5	0.0213 mts	126.6471 gra	0.0198 mts	26.6471 gra
6	0.0266 mts	97.1179 gra	0.0186 mts	197.1179 gra
8	0.0231 mts	106.0440 gra	0.0187 mts	6.0440 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 4 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0485 mts	26.7312 gra	0.0193 mts	126.7312 gra
2	0.0460 mts	28.3373 gra	0.0193 mts	128.3373 gra
3	0.0371 mts	25.4261 gra	0.0196 mts	125.4261 gra
5	0.0354 mts	29.1109 gra	0.0196 mts	129.1109 gra
6	0.0376 mts	41.3157 gra	0.0235 mts	141.3157 gra
7	0.0355 mts	27.9282 gra	0.0193 mts	127.9282 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 5 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0308 mts	47.8060 gra	0.0153 mts	147.8060 gra
2	0.0229 mts	43.9272 gra	0.0152 mts	143.9272 gra
3	0.0367 mts	48.3278 gra	0.0153 mts	148.3278 gra
4	0.0230 mts	45.5265 gra	0.0153 mts	145.5265 gra
6	0.0231 mts	45.5433 gra	0.0153 mts	145.5433 gra
8	0.0229 mts	43.4607 gra	0.0153 mts	143.4607 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 5 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0384 mts	14.9498 gra	0.0185 mts	114.9498 gra
2	0.0337 mts	1.7297 gra	0.0173 mts	101.7297 gra
3	0.0321 mts	189.8628 gra	0.0194 mts	89.8628 gra
4	0.0330 mts	197.2532 gra	0.0176 mts	97.2532 gra
6	0.0300 mts	199.8145 gra	0.0176 mts	99.8145 gra
7	0.0297 mts	198.6821 gra	0.0187 mts	98.6821 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 6 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

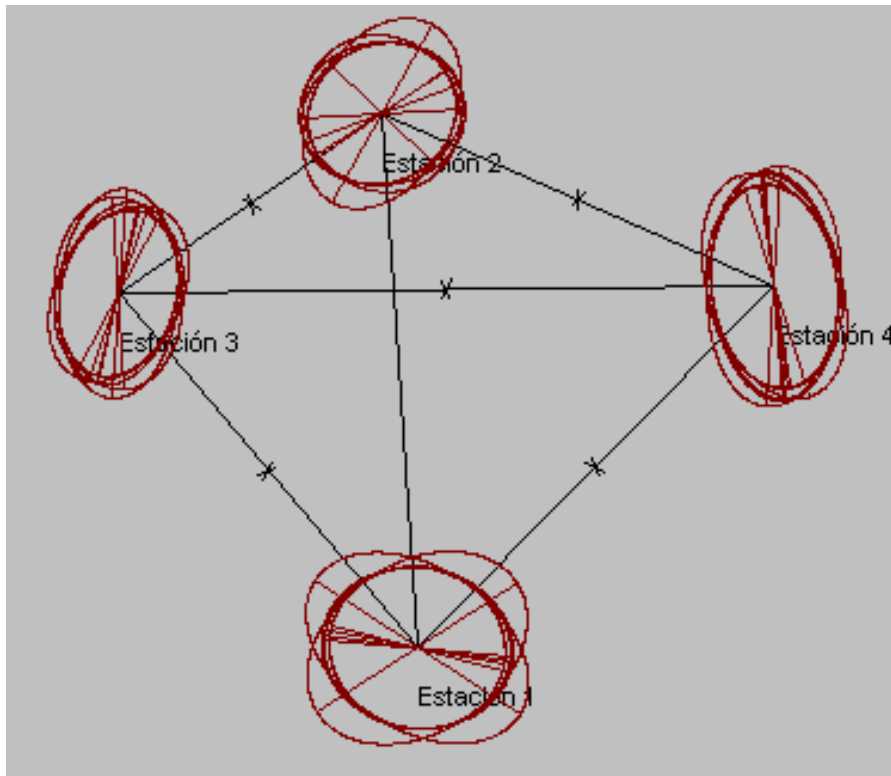
Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0297 mts	117.3296 gra	0.0193 mts	17.3296 gra
2	0.0264 mts	96.2495 gra	0.0186 mts	196.2495 gra
3	0.0249 mts	83.3941 gra	0.0201 mts	183.3941 gra
4	0.0308 mts	98.3787 gra	0.0186 mts	198.3787 gra
5	0.0245 mts	87.0680 gra	0.0199 mts	187.0680 gra
8	0.0243 mts	96.1114 gra	0.0187 mts	196.1114 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 6 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

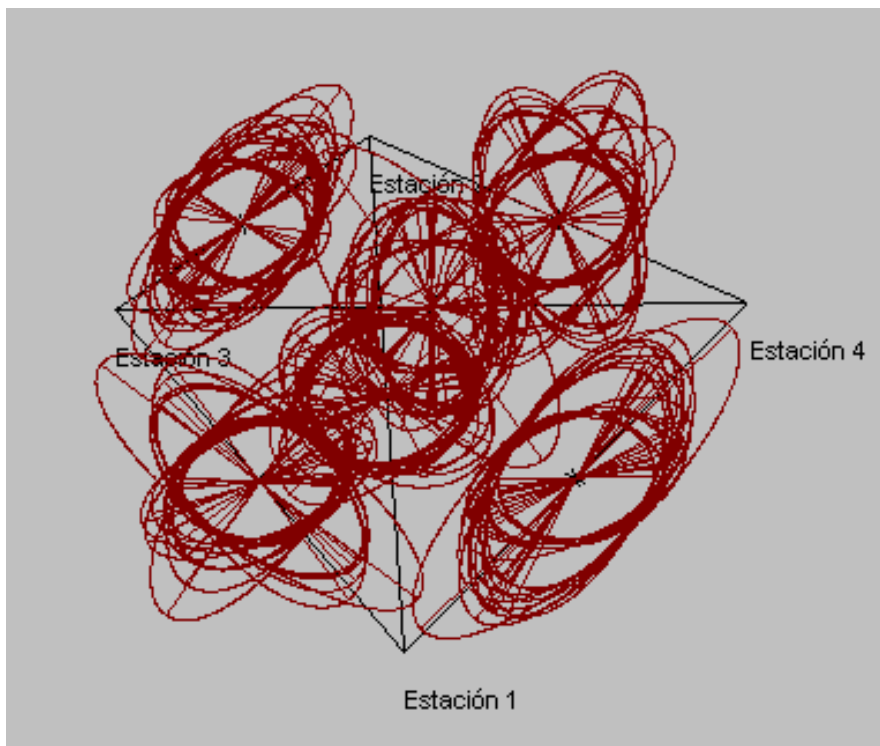
Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0579 mts	159.9523 gra	0.0239 mts	59.9523 gra
2	0.0337 mts	2.7487 gra	0.0264 mts	102.7487 gra
3	0.0345 mts	172.9413 gra	0.0233 mts	72.9413 gra
4	0.0344 mts	35.0851 gra	0.0297 mts	135.0851 gra
5	0.0309 mts	175.7937 gra	0.0236 mts	75.7937 gra
7	0.0311 mts	177.2741 gra	0.0232 mts	77.2741 gra

A continuación se muestra únicamente la representación gráfica de las rosetas de vértices con el objetivo de no congestionar la figura.

Las rosetas de vértice serán:



Y las correlativas:



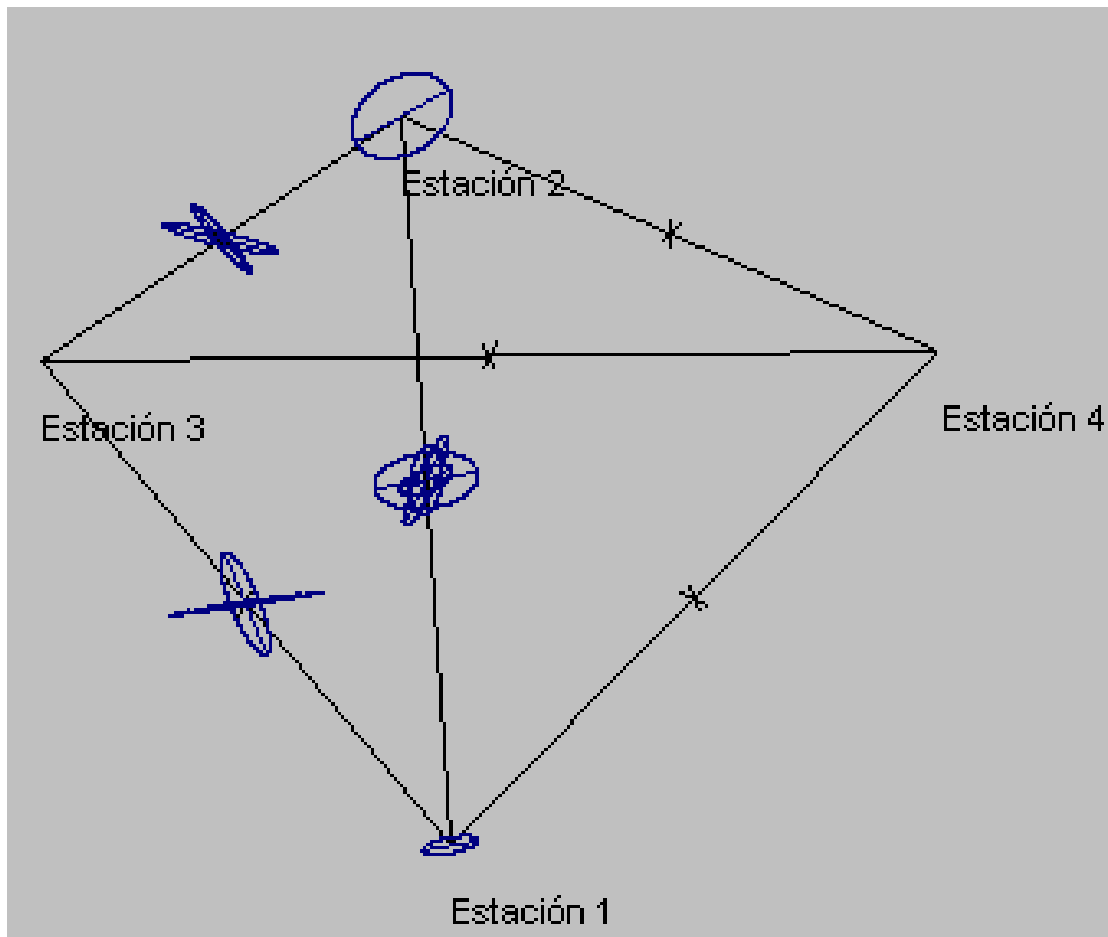
### 3.- METODO PROYECCIONES DE LAS SECCIONES PRINCIPALES

ELIPSES CORRELATIVAS CON FACTOR HOMOTECIA = 5.16

Variables Semieje mayor Acimut semieje Semieje menor Acimut semieje

1	2	0.0060 mts	87.2250 gra	0.0016 mts	187.2250 gra
	3	0.0074 mts	8.0039 gra	0.0034 mts	108.0039 gra
	4	0.0112 mts	90.6411 gra	0.0060 mts	190.6411 gra
	5	0.0117 mts	174.9099 gra	0.0030 mts	74.9099 gra
2	3	0.0107 mts	27.8916 gra	0.0020 mts	127.8916 gra
	4	0.0061 mts	71.9765 gra	0.0024 mts	171.9765 gra
	5	0.0168 mts	90.3314 gra	0.0004 mts	190.3314 gra
3	4	0.0115 mts	66.3485 gra	0.0081 mts	166.3485 gra
	5	0.0096 mts	154.9310 gra	0.0013 mts	54.9310 gra
4	5	0.0127 mts	114.8214 gra	0.0014 mts	14.8214 gra

Y la representación gráfica es:



## 6.- AMPLIACION SOBRE FIGURAS DE ERROR EN REDES LIBRES Y LIGADAS.

### 6.1 FUNDAMENTOS TEORICOS

La calidad de un trabajo topográfico, geodésico, fotogramétrico o de cualquier otra tecnología geográfica de aplicación, cartográfica o no, es actualmente un imperativo de exigencia aceleradamente estricta y rigurosa en todos los ámbitos de aplicación profesional que nos atañen.

Es decir que, como en cualquier realización de alta precisión y calidad de ingeniería superior, la que nos ocupa en esta tesis, referida esencialmente a los problemas microgeodésicos y relacionados con las redes locales de alta y muy alta precisión, debe iniciarse mediante un proyecto detallado en el que, entre otros capítulos, figure la exposición rigurosa y cifrada en detalle de las figuras de error a posteriori que se pretenden conseguir en función de la instrumentación y metodología adecuada para cubrir las tolerancias requeridas. Y es el objetivo final proyectarlo en función de las mismas figuras diseñadas a priori, de tal manera que cualquier supuesto lógico pueda predecirse con exactitud, sin vacilación alguna, y a través de un razonamiento estadístico-matemático riguroso. Creemos que es preciso, como hemos hecho hasta ahora, y como primera medida, avanzar en la teoría disponible con la mayor exigencia de rigor y tratando de abrir nuevos criterios y prácticas de aplicación.

Durante largo tiempo el establecimiento de errores a priori se ha fundamentado en procedimientos mayoritariamente empíricos o cuasi-empíricos. Un importante avance ha supuesto, desde que pudo ser tecnológicamente asequible disponer de capacidad de cálculo suficiente, la aplicación generalizada de las hipótesis de Gauss-Markov y el algoritmo de mínimos cuadrados, del que es preciso subrayar que debe esperarse esencialmente la obtención de figuras de error a posteriori rigurosas, cifradas matemática y estadísticamente en magnitud y poder de afirmación.

Sin embargo, las hipótesis de partida clásicas, indiscutibles por supuesto, presentan algún reparo de índole práctica que conviene poner de manifiesto.

En primer lugar, la hipótesis nula Gaus-Markov

$$H_0: R \sim N(0, s^2Q)$$

que implica

$$E(R) = 0$$

supone considerar la población de R y es inalcanzable en la práctica por amplia y excelente que sea la muestra. Por otra parte, la matriz varianza-covarianza a priori de observables

$$\Sigma_0 = s^2 Q = s^2 P^{-1}$$

donde generalmente, y así lo aplicaremos cuando proceda en los cálculos que siguen, el factor de varianza a priori o estimador de la varianza del observable de peso unidad vale  $s^2 = 1$ , resulta necesariamente una matriz diagonal, que se compadece mal con el resultado a posteriori en que  $\sigma_{cc}$  es una matriz completa.

Y finalmente, las figuras de error a posteriori definidas hasta el momento por el que podemos llamar clásico conjunto de elipses absolutas y relativas en vértices y ejes, no tienen en cuenta más que la banda central de la matriz simétrica  $\sigma_{xx}$  formada por la diagonal principal y las dos subdiagonales inmediatas, a izquierda y derecha de ella, compuestas en su conjunto por las varianzas

$$\sigma_{xi}^2$$

$$i \in 1,2,3,4,\dots,n$$

n = nº de coordenadas de la red  
y las covarianzas

$$\sigma_{xij}$$

(i,j) subíndices genéricos de las coordenadas de un vértice cualquiera

El resto de las covarianzas, de indudable influencia en el error final, no se tienen en cuenta.

Así, la interpretación separada de las figuras a posteriori y especialmente su relación con las figuras a priori adolece en la metodología usual de cierta falta de rigor y resulta incompleta y en ocasiones de discutible fiabilidad, dificultando la predicción satisfactoria de resultados a partir de hipótesis de partida adecuadas.

Por todo ello es preciso avanzar en teoría y praxis proponiendo como objetivo, con apoyo informático adecuado, diseñar, proyectar, discernir entre alternativas distintas y elegir y desarrollar la más adecuada en cualquier red local o cuestión microgeodésica.

Una contribución atractiva hacia los objetivos formulados puede seguirse de la línea de investigación que revisa el algoritmo e interpretación clásicos de la figura de error de una red en su caso más general mediante las elipses o elipsoides asociados a sus vértices, según se considere planimetría y altimetría por separado o en conjunto.

Nos proponemos ampliar dichos criterios establecidos con los razonamientos que siguen a través de distintos algoritmos de aplicación que permiten aumentar fiabilidad y precisión en los resultados a posteriori así como disponer de instrumentos complementarios de diseño a priori de la red.

Fijando ideas y refiriéndonos al caso de planimetría y altimetría separados, por ser el de más extendido empleo, abordaremos a continuación y a través de una interpretación rigurosa y entendemos que original, tres nuevos algoritmos distintos del usualmente empleado en determinación de figuras de error standard o de nivel de significación prefijado

Recordemos conceptos teóricos vistos hasta ahora.

En primer lugar, establezcamos que la aceptación de la hipótesis nula Gauss-Marcov

$$H_0: E(R) = 0 \quad (199)$$

implica también la aceptación de

$$H_0: E(x - x_E) = 0 \quad (200)$$

en cualquier red exenta de errores groseros y con tanto mayor poder de afirmación cuanto más preciso sea el vector de observables  $O_T$ .

La matriz de diseño  $A$  y la de pesos a priori  $P$  permite obtener de inmediato

$$S = A^T P A$$

y formular la expresión más general de la figura conjunta de error en la red, bajo la hipótesis nula  $H_0$ , según la expresión

$$\frac{\sigma_{02}^2}{\sigma_{01}^2} = \frac{\frac{D(R^T P R)}{R(S)}}{\frac{R_1^T P_1 R_{11}}{m - R(S)}} = \frac{(x - x_E)^T S (x - x_E)}{R(S) \sigma_{01}^2} \approx F_{R(S), m-R(S), \alpha}$$

donde sabemos:

$$R^T P R = R_1^T P_1 R_{11} + D(R^T P R)$$

En efecto y teniendo en cuenta el significado de los dos sumandos, según la notación adoptada, siendo lícito escribir que:

$\sigma_{01}^2$  = estimador a posteriori de la varianza del observable de peso unidad de la red libre ajustada con  $m$  observables y  $R(S) = n-d$ .

puede aceptarse también como estimador de la misma denominación referido a la red conjunta, también será lícito admitir la misma condición en la misma red para

$\sigma_{02}^2$  = estimador a posteriori de la varianza del observable de peso unidad en la red conjunta a partir de una muestra de  $R(S)$  observables (o variables tomadas como observables) adicionales.

Justificándose así la expresión del estadístico  $F$  antes formulada.



Avanzando en el algoritmo, la expresión de riguroso cumplimiento

$$A_2 x - K = 0$$

Particularizada en nuestro caso según  $A_2 = I$ ,  $K = x_E$ , resulta como sabemos

$$x - x_E = 0$$

donde  $R_2=0$ ,  $P_2 \rightarrow \infty$ , y las  $R(S)$  variables tomadas como observables definen una muestra de valores muy aproximadamente exactos en la red conjunto, con  $D(R^T P R) \approx 0$ .

La condición anterior implica que la hipótesis nula se cumplirá tanto mejor cuanto los  $m$  primeros observables de residuos  $R_1$  sean también más precisos, resultando así ambos estadísticos estimadores representativos de muestras del ajuste completo progresivamente significativos. Ello requiere  $R_1^T P_1 R_{11} \approx 0$ , pudiendo así formular el estadístico  $F$  inicial en un  $F$ -Test de una punta, con óptimo en  $F = 0$ , que implica  $D(R^T P R) = 0$  y la cumplimentación exacta de la hipótesis nula.

Es decir, de nuevo es preciso tener en cuenta que el algoritmo en estudio tiene tanto más poder de afirmación cuanto más precisos sean los observables y, en consecuencia, más exacta la red. Es más inadecuada su aplicación a medida que la red sea de inferior calidad.

En principio podrán explicarse los resultados poco convincentes obtenidos por defecto de muestreo, hasta llegar a unas cifras de aceptación desaconsejable e incluso ilícita si  $\sigma_{02}^2$  y  $\sigma_{01}^2$  pudieran describirse más acertadamente como pertenecientes a dos poblaciones distintas, la primera de observables casi exactos, de muy alta precisión, y la segunda de precisión media o baja..

En definitiva y siempre teniendo en cuenta lo que precede, aceptemos que

podemos escribir

$$\frac{(x - x_E)^T S(x - x_E)}{\sigma_{01}^2 R(S) F_{R(S), m-R(S), \alpha}} \leq 1 \quad (201)$$

que define el recinto de error a posteriori limitado, si  $R(S) = n$ , rango completo, por un hiperelipsoide de  $n$  ejes en el espacio  $R^n$  con centro en el origen de coordenadas, nivel de significación  $\alpha$ , probabilidad de cumplimentación igual a  $(1-\alpha)$ , y equivalente a un  $F$ -Test de Snedecor de una sola punta con valor óptimo  $F = 0$ , que requiere la anulación de los vectores  $R$  o  $(x - x_E)$ , pues ambas condiciones se implican entre si e implican así mismo el cumplimiento riguroso de la hipótesis nula  $H_0$ , indiferentemente expresada como (199) o (200).

El recinto a priori será evidentemente y con las mismas consideraciones anteriores.

$$\frac{(x - x_E)^T S(x - x_E)}{\sigma_0^2 R(S) F_{R(S), m-R(S), \alpha}} \leq 1$$

donde puede ser lícito tomar  $s^2 = \sigma_0^2 = 1$  según es práctica usual.

La rotación

$$z = \Gamma^T(x - x_E) \quad (201)$$

donde

$\Gamma$  = vector ortogonal de autovectores columna normalizados de S

refiere (109) a la forma canónica

$$\sum \frac{z_i^2 \mu_i}{\sigma_0^2 R(S) F_{R(S), m-R(S), \alpha}} \leq 1 \quad (203)$$

$i \in 1, 2, 3 \dots n$

con

$$\mu > 0 \equiv \text{autovalores de S}$$

siendo S no singular, definida positiva y de rango completo,  $R(S) = n$ .

Se define como Hiperelipsoide Standard (HS) (o  $HS\alpha'$ ) al que cumple la condición, análoga a la establecida para las elipses standard clásicas

$$F_{R(S), m-R(S), \alpha'} = \frac{1}{R(S)} = \frac{1}{n} \quad (204)$$

con lo que la probabilidad de que el vector X exacto se encuentre dentro de HS valdrá :

$$P(HS) = P\left(\sum \frac{z_i^2}{\Phi_{HSi}^2} \leq 1\right) = 1 - \alpha' \quad (205)$$

siendo los semiejes de HS

$$\Phi_{HSi} = \sigma_o \sqrt{\mu_i^{-1}} \quad (206)$$

La condición expuesta implica que simultaneamente todas las coordenadas de todos los vértices de la red estén dentro del recinto de error HS con probabilidad  $1 - \alpha'$ .

Es alcanzable cualquier nivel de significación  $\alpha''$  mediante la práctica de una homotecia en el Hiperelipsoide Standard de factor

$$f_{\alpha''} = \sqrt{R(S)F_{R(S),m-R(S),\alpha''}} \quad (207)$$

resultando análogamente a (205) y (206) la probabilidad de que el vector X exacto se encuentre dentro del recinto definido por el hiperelipsoide homotético  $HH\alpha''$

$$P(HH\alpha'') = P\left(\sum \frac{z_i^2}{\Phi_{HH\alpha''}^2} \leq 1\right) = 1 - \alpha'' \quad (208)$$

con

$$\phi_{HH\alpha''i} = f_{\alpha''} \sigma_0 \sqrt{\mu_i^{-1}} \quad (209)$$

Evidentemente y respecto a los ejes iniciales, la orientación de cada vector semieje será la definida por el autovector correspondiente.

Definidos todos los ejes, en módulo, dirección y sentido, queda geoméricamente definido el hiperelipsoide. Junto con su expresión analítica (201) se dispone ya de todos los instrumentos matemáticos necesarios para poder operar con él.

Se asociarán así al conjunto de semiejes (206) o (209) el conjunto de vectores máximos y mínimos de error a esperar, con nivel de significación  $\alpha', \alpha''$  en el entorno de un vértice en el espacio  $R^n$  definido por el vector  $X_a$ , representativo de la red en estudio.

El caso expuesto es el determinista o de red ligada, en formulación a priori. Las expresiones a posteriori son triviales, sustituyendo solamente  $\sigma_0^2$  por su estimación a posteriori  $\sigma_{01}^2$ , según se vió, o con mayor generalidad por cualquier otro estimador de las mismas características, que designaremos en general por  $\sigma^2$ .

Sin embargo adelantemos que dicho caso no es sino una particularización del más general definido por S singular, semidefinida positiva y  $R(S) = (n - d)$  presentando un defecto de rango igual a  $d = n^\circ$  de constreñimientos, que será así mismo igual al número de autovalores nulos que contenga.

## 6.2 FUNDAMENTOS DE APLICACIÓN.

De todas las expresiones de los recintos de error asociables a posteriori al ajuste de una red de alta precisión aceptamos en principio como más riguroso el expresado en (201), como recinto interior a un hiperelipsoide de  $R(S)$  ejes.

Sin embargo, según hemos avanzado, la teoría solo es irreprochable si se trata de una red ligada, caso determinista.

En dicho supuesto  $R(S) = n$ , el hiperelipsoide tiene  $n$  ejes y la matriz  $S$  es no singular, invertible de Cayley, clásica, y podemos escribir la expresión (206) en la forma

$$\Phi_{HSi} = \sigma_o \sqrt{\mu'_i}$$

Donde

$$\mu'_i = \text{autovalor de orden } i \text{ de } S^{-1} = \mu_i^{-1}$$

siendo

$$0 < \mu'_i = \mu_i^{-1} < \infty$$

en el campo de los números reales.

Sin embargo, si  $R(S) = n-d$  existirán  $d$  autovalores  $\mu_i$ , nulos y  $S$  será singular, no invertible apareciendo  $d$  semiejes de la forma (114) que, particularizando resultan

$$\Phi_{HSi} = \sigma_o \sqrt{\mu_i^{-1}} = \sigma_o \sqrt{\frac{1}{0}}$$

que no tienen sentido en Algebra ni significado físico alguno.

Es ilustrativo tratar de generalizar para matrices singulares la conocida demostración que sigue, aplicada a matrices de rango completo:

c) **Red ligada.**

$$(\sigma_{xx} - \text{diag} \frac{1}{\mu})x = 0$$

$$\sigma^2 S^{-1} x = \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$S^{-1} x = \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$SS^{-1} x = S \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$x = S \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$x = \frac{1}{\sigma^2} S \text{diag} \frac{1}{\mu} x = \sigma_{xx}^{-1} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$\text{diag} \mu \cdot x = \text{diag} \mu \cdot \sigma_{xx}^{-1} \text{diag} \frac{1}{\mu} x = \sigma_{xx}^{-1} \text{diag} \mu \cdot \text{diag} \frac{1}{\mu} x = \sigma_{xx}^{-1} I x$$

$$(\sigma_{xx}^{-1} - \text{diag} \mu)x = 0$$

Resultando inversos los autovalores de  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma_{xx}^{-1}$ .

Pero aplicando el mismo desarrollo a una red libre, solución pseudoinversa, se sigue:

d) **Red libre**

$$(\sigma_{xx} - \text{diag} \frac{1}{\mu})x = 0$$

$$\sigma^2 S^+ x = \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$S^+ x = \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

$$SS^+ x = S \frac{1}{\sigma^2} \text{diag} \frac{1}{\mu} x$$

Y teniendo en cuenta que

$$S.S^+ \neq I$$

no es posible despejar  $x$  como en el caso anterior. Por consiguiente, los autovalores  $\sigma_{xx}$  y  $\sigma^+_{xx}$  no son inversos. Sí lo son, según hemos demostrado anteriormente, los no nulos correspondientes a variables principales. Los correspondientes a variables libres son nulos en ambas matrices. En cuanto a su significado físico, nos remitimos a la teoría ya expuesta. Debe de tenerse en cuenta en los cálculos que siguen.

Es preciso para seguir avanzando en el algoritmo acudir al empleo de matrices  $S^-$ , inversas generalizadas, cuya teoría conocemos y sobre la que hemos profundizado en los epígrafes anteriores.

De entre ellas, aceptando como mejor la solución definida por la pseudoinversa  $S^+$ , hemos demostrado que se puede formular aplicando un proceso basado en las Series de Neumann, que da lugar a la expresión (191), siendo lícito escribir

$$x = S^- A^T P K = S^+ A^T P K$$

donde

$$S^- = \Gamma \text{diag} (\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T$$

$\delta = \text{arbitrario}$

que conduce a una matriz  $S^-$  inversa generalizada no recíproca y de rango completo con  $R(S) = n-d$  autovalores reales y constantes y  $d$  autovalores reales y arbitrarios, siendo  $d$  el defecto de rango de  $S$ , pudiéndose aceptar

$$S^+ = \lim_{\delta \rightarrow 0} S^-$$

Resulta así en el caso de redes libres un recinto o figura  $n$ -dimensional de error riguroso y coherente con la realidad física.

En efecto, el conjunto de matrices  $S^- = \Gamma \text{diag} (\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T$  define un conjunto de hiperelipsoides de error con  $(n-d)$  ejes fijos, correspondientes a las variables principales, y  $d$  ejes arbitrarios con cada uno de los infinitos valores que puede adoptar  $\delta$ , correspondientes a las variables libres.

El vector de correcciones  $x$  será invariante y corresponderá siempre a la que hemos denominado “solución seudoinversa”. Es arbitraria también la designación de variables libres y principales, pero, elegidas éstas, su figura específica de error será invariante. No así la de las variables libres, que dependerá del valor de  $\delta$  adoptado en cada caso, según es acorde con el significado físico del ajuste.

Y para definir la mejor figura de error en redes libres y siendo arbitraria la matriz  $S^-$  a efectos de obtener la solución seudoinversa deseada, la correcta aplicación

de (109) exige buscar la que se aproxime más a una inexistente  $S^{-1}$ . En efecto, podemos escribir con tanta aproximación como queramos:

$$S = \lim \Gamma \text{diag}(\mu, \delta_1 \rightarrow 0) \Gamma^T$$

Y del mismo modo

$$S^{-1} = \lim \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \lim \frac{1}{\delta_1} \rightarrow \infty) \Gamma^T$$

Resultando

$$\lim SS^{-1} = \lim \Gamma \text{diag}(\mu, \delta_1 \rightarrow 0) \Gamma^T \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \lim \frac{1}{\delta_1} \rightarrow \infty) \Gamma^T = \lim \Gamma \text{diag}(1, \frac{\delta_1}{\delta_1} \rightarrow 1) \Gamma^T = I$$

Que permite considerar a  $S$  y  $S^{-1}$  como inversas clásicas  $S$  y  $S^{-1}$ , en el límite de ambas. Se deduce así una interpretación geométrica muy sencilla.

### 6.3 INTERPRETACION GEOMETRICA.

Según hemos demostrado la solución pseudoinversa es también la solución límite del proceso descrito cuando  $S^{-1} \rightarrow S^{-1}$ . Su figura de error corresponderá a un hiperelipsoide único con  $R(S)$  ejes finitos y  $d$  ejes tan grandes como queramos. Geométricamente implica y equivale a un proceso de degeneración de un hiperelipsoide en el espacio  $R^n$  algunos de cuyos ejes ( $d$  ejes exactamente) van aumentando progresivamente.

Estos ejes, en el límite, adoptan el carácter de direcciones de proyección desde los puntos en el infinito que respectivamente definen del hiperelipsoide de rango  $R(S) = n-d$ , de  $(n-d)$  ejes.

Hemos así definido el proceso de degeneración de una hipercuádrlica, que siempre da lugar a un hipercono, que, a su vez, se transforma en hipercilindro si los vértices de proyección están en el infinito, según es nuestro caso.

Estamos en condiciones de describir ya, en su caso más general y rigurosamente, el recinto de error de una red de alta precisión, definida por una matriz de diseño  $S$ , aceptando que corresponde "al espacio interior a un hipercilindro elíptico recto en  $R^n$  con  $d$  direcciones generatrices, iguales en número al de constreñimientos, y  $(n-d)$  ejes reales y finitos de expresión conocida en función de los autovalores distintos de cero de  $S$ , que será un hiperelipsoide de  $n$  ejes en el caso determinista o de red ligada, con el nivel de significación que corresponda en cualquier caso al coeficiente de homotecia aplicado sobre el recinto standard

El razonamiento expuesto permite establecer recintos de error que son función de los constreñimientos y, en definitiva, tienen en cuenta el defecto de rango de  $S$  y la división en variables principales y libres de la red, con importante ventaja en el rigor de los resultados que se deduzcan.

Pero es claro que nada se habrá conseguido si no puede accederse a una interpretación bi o tridimensional y que conserve íntegro o a lo menos aceptablemente el rigor alcanzado. Por consideraciones geométricas vamos a ver que pueden lograrse diversas interpretaciones válidas.

Así, una pareja de ejes coordenados  $x_i$ ,  $x_j$  de ordenes  $i, j$  definen un hiperplano bidimensional en el espacio  $R^n$ , generado por dos vectores de  $n$  elementos con origen común, secante al hiperelipsoide o hipercilindro según una elipse, que limita el recinto de error asociado a la pareja de coordenadas  $(X_i, X_j)$ .

Si ambas coordenadas corresponden a un vértice de la red se establece así su recinto de error con la misma interpretación de las elipses de error o "de vértice", (a posteriori o a priori) utilizadas hasta ahora y como deduciremos y calcularemos en el epígrafe siguiente. En caso contrario el recinto de error expresa la dependencia entre dos coordenadas de vértices distintos relacionándolos entre sí en forma de elipses de error que llamaremos "elipses de correlación" y de las que también nos ocuparemos en seguida.

Pero cualquier eje coordenado  $x_i$  en  $R^n$  representa también el subespacio  $R^1$  de existencia de error en la coordenada de dicho orden, que está asociada a un vértice de la red y que por lo tanto puede representarse en  $R^2$ , plano del levantamiento. Y como consecuencia fundamental, cualquier pareja de ejes  $x_i, x_j$  pueden representarse así mismo y se confunden con el plano del levantamiento. Si ambos pertenecen a un mismo vértice, su origen o punto de error nulo, estará en el vértice.

Así pues ambos ejes pueden representarse sobre el plano del levantamiento con origen en el vértice  $(X_i, X_j)$  y dirección y sentido de los ejes, los adoptados para el levantamiento. La representación sobre el plano del levantamiento de la figura (elipse) de error asociada al vértice y definida anteriormente por la sección del plano coordenado con el recinto general de error de la red (hipercilindro o hiperelipsoide) es perfectamente lícita y constituye, al nivel de significación adoptado, la elipse de error del vértice.

Evidentemente, una pareja de ejes  $x_i, x_m$ , pertenecientes a dos vértices distintos, generan una nueva sección elíptica en el recinto general de error representable sobre el plano del levantamiento en el vértice definido por las coordenadas  $(X_i, X_m)$ . La **"elipse correlativa"** así generada permite obtener información rigurosa de la figura de error en un punto del área del levantamiento distinto de los vértices de la red básica. La red de elipses correlativas supone un progreso notable en la densificación de los puntos de información de error asequibles en la red. Debe tenerse en cuenta que solamente facilitan información las parejas de coordenadas ordenada-abscisa. Dos ordenadas o dos abscisas dan lugar, evidentemente, a puntos impropios del plano del levantamiento.

Obsérvese que los planos definidos hasta ahora son las únicas secciones del recinto general de error representables sobre el plano del levantamiento sin deformación ni modificación alguna de las figuras que en principio contengan. Cualquiera otra sección (p.ej. la que podría formar un par de semiejes (209) no tiene



representación sobre el plano del levantamiento . Cualquier figura representada sobre aquella carece de significación física en dicho subespacio  $R^2$  .

Aceptado lo que antecede, podemos formular tres criterios y desarrollar los cálculos correspondientes a cada uno de ellos válidos para avanzar en el conocimiento de la figura de error a priori y a posteriori de la red referida al plano del levantamiento y que trataremos como:

1.- Conjunto de elipses definidas geoméricamente como secciones del recinto de incertidumbre más general definido por el hipercilindro o hiperelipsoide  $HH\alpha$ " referido a los ejes de (201), por los planos coordenados  $x_i, x_j$ , dando lugar a todas las elipses de vértices y de correlación representables sobre el plano del levantamiento, según los conceptos antes desarrollados.

Recíprocamente es claro que el conjunto de elipses indicado y siendo conocidos los valores de los ejes del hipercilindro o hiperelipsoide permiten definir a éste último de forma unívoca.

2.- Proyección de  $HH\alpha$ " sobre cualquier plano  $x_i, x_j$  que da lugar a otra acepción de elipses de vértices y de correlación también con nivel de significación  $\alpha$ " en  $R^2$  del levantamiento, representativas geoméricamente en este caso de la ubicación del vértice exacto si ambas pertenecen a él o de la correlación entre dos coordenadas cualquiera de vértices diferentes.

Recíprocamente, también las elipses así definidas corresponden a un recinto  $HH\alpha$ " y solo uno.

3.- Proyección de los semiejes de  $HH\alpha$ " sobre los cualquier plano  $x_i, x_j$  que da lugar a otra acepción de elipses de vértices y de correlación también con nivel de significación  $\alpha$ " en  $R^2$  del levantamiento, representativas geoméricamente como en el caso anterior de la ubicación del vértice exacto si ambas pertenecen a él o de la correlación entre dos coordenadas cualquiera de vértices diferentes. Difiere del anterior en cuestiones relacionadas con las variables principales y libres, como veremos en su estudio monográfico.

Pueden existir y de hecho es seguro que en un futuro se desarrollarán, nuevos criterios de aplicación hasta alcanzar el óptimo que englobe y sustituya a todos. Los que vamos a utilizar presentan sus ventajas y sus inconvenientes en cada caso, que se pondrán de manifiesto. No obstante, parece en su conjunto y así lo hemos comprobado, una sensible mejora sobre la calidad y volumen de información de la situación que podemos ya llamar, clásica.

Estudiaremos a continuación cada uno de los supuestos planteados.

### 6.4.-SECCION DEL RECINTO DE INCERTIDUMBRE POR SUS PLANOS COORDENADOS

La matriz P de los pesos en general correspondiente a un valor a priori  $\sigma_0^2 = k$  se expresa con la notación usual según

$$P_k = k \cdot \text{diag} \frac{1}{\sigma_i^2} = kP_1$$

De donde

$$S_k = A^T P_k A = kA^T P_1 A = kS_1$$

Resultando sucesivamente

$$\sigma_k^2 = \frac{R^T P_k R}{N} = k \frac{R^T P_1 R}{N} = k\sigma_1^2$$

$$\sigma_{xx} = \sigma_k^2 S_k^{-1} = k\sigma_1^2 \frac{1}{k} S_1^{-1} = \sigma_1^2 S_1^{-1}$$

Invariante con cualquier valor a priori de  $\sigma_0^2 = k$  (incluyendo por supuesto  $k=1$ , o la notación usual  $s^2 = 1$ ), c.d.s.

En su caso más general podemos establecer la hipercuádrica no degenerada (hiperelipsoide) o degenerada (hipercilindro elíptico)  $HS\alpha'$  como figura de error de una red cualquiera, libre o ligada, a posteriori en la forma siguiente, en la que, para simplificar la notación, se ha suprimido el subíndice de la matriz de diseño S y los parámetros  $\sigma_0$  y  $\sigma$  por la invariancia antes demostrada. No obstante, en las aplicaciones prácticas deberán tenerse muy en cuenta para evitar penosos errores de cálculo.

En definitiva y a posteriori la figura de error standard será

$$x^T \frac{1}{\sigma^2} Sx = 1 \tag{210}$$

y a priori

$$x^T \frac{1}{\sigma_0^2} Sx = 1$$

que no es sino otra forma de escribir (201) teniendo en cuenta (204). Debe tenerse en cuenta que se ha simplificado la notación representando por el vector "x" al  $(x - x_E) = X - X_E$ , error absoluto del vector de coordenadas ajustadas  $X = X_a + x$ . [Chueca et.al 1996] de significado físico más riguroso para los cálculos que siguen.

Y las superficies homotéticas  $HH\alpha''$  se escribirán

a posteriori 
$$x^T \frac{1}{\sigma^2} Sx = f^2 \tag{211}$$

a priori 
$$x^T \frac{1}{\sigma_0^2} Sx = f^2$$

simplificando  $f^2 \equiv f_{\alpha}^2$

Del mismo modo con

$$\sigma_0^2 = s^2 = 1$$

y

$$S = A^T P A$$

conocidos a priori podemos establecer otra expresión de la figura de error a priori de la red en las formas

$$x^T S x = 1 \quad (212)$$

valor standard

$$x^T S x = f^2$$

nivel de significación  $\alpha$ "

Sin perjuicio de lo expuesto, una correcta aplicación de los algoritmos del PD2 (Problema de diseño de orden 2) es siempre aconsejable en redes de muy alta precisión a efectos de la determinación mas exacta posible de los pesos.

En cualquier caso, el F-Test permite cifrar la fiabilidad de los resultados del ajuste según

$$F = \frac{\sigma^2}{\sigma_0^2} = F_{m-R(S), \infty, \alpha}$$

y la inecuación

$$F_{m-R(S), \infty, \frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{m-R(S), \infty, 1-\frac{1}{2}\alpha}$$

en el nivel de probabilidad  $1-\alpha$ , según convenio de notación usualmente empleado, y método y algoritmo de aplicación conocidos.

De esta forma y tanto en el método ahora en estudio como en los que siguen, puede establecerse la comparación y predicción estadística rigurosa deseada entre el diseño inicial de la red y cualquier supuesto que se desee contrastar con él, aplicando el mismo F-Test que hasta ahora tan solo utilizábamos para establecer la compatibilidad o incompatibilidad de datos y resultados del ajuste..

Ciñéndonos a la configuración a priori de la red y tomando la (213) como más general, cortaremos por el plano definido por los ejes  $x_i$ ,  $x_j$  que expresamos en  $R^n$  como

$$x_k = 0 \quad \forall k \neq i, j \quad (215)$$





$$\sigma_{xx} = \begin{vmatrix} \sigma_{12} & & & & \\ & \sigma_{34} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & \sigma_{(n-1)n} \end{vmatrix} \quad (219)$$

y teniendo en cuenta que

$$\sigma_{xx} = \sigma^2 S^{-1} \quad (220)$$

Se tendrá

$$\sigma_{xx}^{-1} = \frac{1}{\sigma^2} S \quad (221)$$

y considerando (128) la inversa de  $\sigma_{xx}$  será

$$\sigma_{xx}^{-1} = \begin{vmatrix} \sigma_{12}^{-1} & & & & \\ & \sigma_{34}^{-1} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & \sigma_{(n-1)n}^{-1} \end{vmatrix} \quad (222)$$

que implica

$$S = \begin{vmatrix} s_{12} & & & & \\ & s_{34} & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ & & & & s_{(n-1)n} \end{vmatrix} \quad (223)$$

En una red como la descrita las elipses de vértice a priori serán de la forma (217) y a posteriori de la (217 bis), o bien en este caso, lo que es lo mismo

$$x_{ij}^T \sigma_{ij}^{-1} x_{ij} = f^2 \quad (224)$$

expresión general conocida de las elipses clásicas de error, a posteriori con factor de homotecia  $f$ .

Las elipses correlativas a priori y a posteriori serán nulas.

Todo lo expuesto sucede como consecuencia de la independencia resultante de cada par de coordenadas afecta a un vértice arbitrario. Y podemos concluir que las elipses de error a priori y a posteriori de una red en su forma clásica corresponden a las que hemos denominado **elipses de vértice**, generadas por secciones de su hipercilindro o hiperelipsoide de error correspondiente por los planos coordenados de pares de ejes

representativos de coordenadas de vértices y tienen tanto más poder de afirmación cuanto más independientes puedan considerarse éstos entre sí, o sea cuando sean nulas o despreciables las covarianzas de coordenadas de vértices distintos.

### 6.5.-PROYECCIÓN DEL RECINTO DE INCERTIDUMBRE SOBRE SUS PLANOS COORDENADOS.

Proyectar el recinto de incertidumbre sobre los planos coordenados es un criterio tan válido como el anterior para obtener figuras de error representables en el subespacio  $R^2$  del levantamiento.

De esta suerte podemos establecer que la proyección del hiperelipsoide o hipercilindro  $HH\alpha''$  sobre el plano coordenado genérico  $x_i, x_j$  representa el recinto de incertidumbre con nivel de significación  $\alpha''$  de ubicación planimétrica del vértice exacto de coordenadas de dicha denominación.

Su cálculo es sencillo, teniendo en cuenta que en un espacio  $R^n$  existen  $(n-2)$  ejes rectilíneos distintos ortogonales al plano  $x_i, x_j$  que formarán las generatrices verticales de los hipercilindros rectos proyectantes deseados.

En efecto, en  $HH\alpha''$  (213) que expresaremos a priori para mayor sencillez y fijar ideas, pudiendo extenderse el cálculo que sigue al caso a posteriori con la simple utilización de (211), se tendrá la fórmula desarrollada

$$HH\alpha'' \equiv \sum s_{ii}x_i^2 + \sum 2s_{ij}x_ix_j - f^2 = 0 \quad (225)$$

$i, j \in 1, 2, 3, \dots, n$

$s_{ij} = s_{ji}$

Podremos levantar en un punto cualquiera de plano  $x_i, x_j$   $(n-2)$  rectas ortogonales a él, cada una de ellas paralela al resto de los ejes coordenados  $x_1, x_2, \dots, x_n$  distintos de los del plano escogido.

Sea esta recta arbitraria  $r_m$  paralela al eje  $x_m$  y pasando por un punto de coordenadas arbitrarias  $(x_i, x_j)$  en el repetido plano coordenado. Su expresión será:

$$\begin{aligned} r_m \equiv & x_i = x_i = \text{arbitrario} \\ & x_j = x_j = \text{arbitrario} \\ & x_k = 0 \\ & \forall k \neq m \end{aligned}$$

que se simplifica en

$$x_k = 0 \quad (226)$$

$\forall k \neq i, j, m$

Cortando a  $HH\alpha''$  por  $r_m$  según (135) resulta

$$s_{ii}x_i^2 + s_{jj}x_j^2 + s_{mm}x_m^2 + 2s_{ij}x_ix_j + 2s_{im}x_ix_m + 2s_{jm}x_jx_m - f^2 = 0 \quad (227)$$



Ecuación que, para cada pareja de valores  $x_i, x_j$ , cortará al hipercilindro o hiperelipsoide en dos puntos cuyas coordenadas en el eje  $x_m$  serán las soluciones de la ecuación de segundo grado en  $x_m$  (227).

La condición de tangencia de  $r_m$  a  $HH\alpha''$  se obtiene anulando el discriminante, dando lugar a:

$$4(s_{im}x_i + s_{jm}x_j)^2 - 4s_{mm}(s_{ii}x_i^2 + s_{jj}x_j^2 + 2s_{ij}x_ix_j - f^2) = 0$$

y operando

$$(s_{im}^2 - s_{mm}s_{ii})x_i^2 + (s_{jm}^2 - s_{mm}s_{jj})x_j^2 + 2(s_{im}s_{jm} - s_{ij}s_{mm})x_ix_j + s_{mm}f^2 = 0$$

que es preferible expresar en la forma

$$-\frac{s_{im}^2 - s_{mm}s_{ii}}{s_{mm}f^2}x_i^2 - \frac{s_{jm}^2 - s_{mm}s_{jj}}{s_{mm}f^2}x_j^2 - \frac{2(s_{im}s_{jm} - s_{ij}s_{mm})}{s_{mm}f^2}x_ix_j - 1 = 0 \quad (228)$$

$\forall m \neq i, j$

y que representa las  $(n-2)$  elipses sección recta sobre el plano  $x_i, x_j$ , del levantamiento, con centro o no en vértice según sean de dicha denominación o correlativas, expresión de la figura de incertidumbre deseada. Su configuración geométrica, al tener distintas orientaciones los ejes de las elipses componentes, será de roseta con simetría central.

Evidentemente, la información de error obtenida será de

- N rosetas de vértice
- $N(N-1)$  rosetas correlativas

Con un total de  $N^2$  rosetas sobre el mismo retículo definido en el caso anterior y con la misma distribución geométrica.

## **6.6.-PROYECCIÓN DE LAS SECCIONES PRINCIPALES DEL RECINTO DE INCERTIDUMBRE SOBRE LOS PLANOS COORDENADOS**

Según hemos visto y siempre bajo la misma hipótesis nula, podemos llegar a definir dos conjuntos distintos de recintos de incertidumbre, disponiendo cada uno de ellos de su representación y justificación geométrica razonada.

Por otra parte, la figura de error que ya podemos llamar clásica, queda explicada como un caso particular del primero de los supuestos desarrollados.

En otro orden de ideas y recordando la teoría conocida, puede llegarse a otro tipo de figuras de error por consideraciones no estadísticas y generalmente a priori, dando lugar en planimetría a paralelogramos de incertidumbre (empíricamente sustituidos por elipses inscritas en ellos) y a curvas podarias de las mismas elipses con respecto a su centro. En ambos casos puede ampliarse el método a tres dimensiones, dando lugar a elipsoides y superficies podáricas complejas.

En cualquier caso, el nexo de unión de todos los supuestos, métodos y algoritmos considerados son los ejes reales propios de las secciones principales de los recintos de error, que coinciden con los lados de los paralelogramos y los ejes de simetría de las curvas podarias.

Puede completarse la exposición presente pues, con una nueva concepción de las figuras de error, proyectando cada pareja de semiejes de las secciones principales propias de hipercilindros o hiperelipsoides sobre los planos coordenados con los que respectivamente se superpondrían mediante la rotación antes definida  $\Gamma$ .

El método resuelve por primera vez el problema de las incógnitas libres en las redes de la misma denominación, que no abordan los dos anteriores, distinguiendo la morfología de las rosetas resultantes según sea el valor del rango  $R(S)$  de la matriz de diseño  $S$ .

El método da lugar a un tercer instrumento de diseño que debe utilizarse acompañando a los dos anteriormente desarrollados, en orden a lograr la mayor información posible sobre la red en estudio. En esencia es una síntesis de los dos anteriores al practicar secciones, al igual que en el primer procedimiento, seguido de proyecciones ortogonales, como en el segundo.

Trataremos cada proyección ortogonal descrita según su condición proyectiva rigurosa de homología afín espacial en  $R^n$  entre las elipses secciones principales y las proyectadas.

Todo el conjunto de aplicación no entraña en definitiva y bajo la hipótesis nula mayor empirismo que el que contienen los otros dos algoritmos anteriores.

Para el cálculo de los semiejes de las secciones principales determinaremos, como es preceptivo, los autovalores distintos de cero de la matriz  $S$  obteniendo así

$$C_{R(S), 2} = \frac{1}{2} [R(S) \cdot (R(S) - 1)] \quad (229)$$

Secciones elípticas posibles con representación geométrica coplanaria, sobre el plano del levantamiento pero sin localización específica en la red. Ello en principio puede parecer un serio inconveniente. Sin embargo, su proyección en cada uno de los planos conduce, como en el caso anterior, a nuevas rosetas de vértice y correlativas, conceptualmente idénticas a las anteriores.

Y así como en el caso anterior, la información de error obtenida será de

- N rosetas de vértice
- N(N-1) rosetas correlativas

Con un total de  $N^2$  rosetas sobre el mismo retículo definido en el caso anterior y con la misma distribución geométrica.

La diferencia esencial estriba en que el número de elipses de cada roseta no es independiente como en el caso anterior del rango de S, sino que, en este caso, estará compuesto de

$$\frac{1}{2} [R(S) \cdot (R(S) - 1)] \text{ elipses concéntricas, función del número de variables principales.}$$

suficiente para justificar el procedimiento con el indudable hecho de que ofrece información de conjunto más rigurosa y completa que los otros dos, asequible tanto a priori como a posteriori.

Además y en última instancia, es subrayable una vez más que el método en estudio no pretende sustituir sino tan solo complementar el resto de la doctrina conocida y expuesta.

En la práctica del diseño de redes, el criterio a emplear es lograr la mayor homogeneidad posible en las figuras de error a priori de vértices y ejes y conocer sus valores máximos y, con menos interés, sus orientaciones dominantes, si existen.

Solamente en el análisis a posteriori puede tener interés la definición del error en una zona determinada específicamente. En dicho supuesto, será preceptivo como más adecuado el algoritmo y ajuste con zona de precisión intrínseca.

Avanzando en el razonamiento, deben tenerse en cuenta las consideraciones siguientes.

La solución más general de la red estar formada por un vector  $x$  de  $n$  elementos (correcciones a coordenadas) en el espacio  $R_n$ , de las que  $R(S) = (n-d)$  serán variables principales y  $d$  variables libres, según la conocida expresión

$$x = x_F + x_N$$

donde  $x_F$  vector en el espacio fila, fijo y  $x_N$ , vector en el espacio nulo, arbitrario, y ambos complementos ortogonales en  $R^n$  de las variables.

Las variables libres pueden tomar cualquier valor arbitrario en  $x$ . Es inútil por tanto hablar a priori en general de figuras o elipses de error en ellas o en los ejes a que dan lugar. Simplemente, no tiene sentido. Y ello es particularmente cierto en fase de diseño, circunstancia que hasta ahora no habíamos tenido en cuenta.

Sin embargo, escogida una solución, y para fijar ideas sea pseudoinversa con matriz inversa generalizada no recíproca y de rango completo, o sea pseudoinversa con matriz pseudoinversa, cada variable libre adoptará un valor que formará parte del vector  $x$ , invariante. Ese valor debe llevar asociada una figura de error a posteriori que depende de la matriz de diseño  $S$  y del criterio geométrico de aplicación. Estas figuras son las elipses y rosetas hasta ahora estudiadas, independientes del defecto de rango de  $S$  en los casos anteriores, y teniéndolo en cuenta en el presente.

Su expresión matemática son los autovalores nulos

$$\mu_k = 0 \quad k \in 1,2,..w \leq 4$$

que implican semiejes

$$\Phi_k = \frac{1}{0}$$

en principio sin significado intrínseco físico ni algebraico alguno, obstáculo que según hemos visto, se sortea al considerar el cálculo como un simple paso al límite que les confiere ya un carácter totalmente distinto .

La elección de las variables libres es otro problema que depende de distintas consideraciones específicas de cada trabajo. En última instancia puede procederse por tanteos entre los vértices de la red que puedan ser elegidos.

Adoptada una solución, se sitúan las variables libres como últimos elementos del vector de correcciones  $x$ . Obsérvese que ello implica que la matriz de diseño  $A$ , como debe suceder, no es arbitraria en cuanto a la ordenación de variables.

Efectivamente, la inevitable transmisión de errores en el sentido de progresión de la observación de la red está siempre presente y es tanto más importante cuanto ésta sea más extensa.

Conseguir su homogeneización total a través de un ajuste anterior es ilusorio, como demuestra reiteradamente la experiencia práctica y así resulta significativo y práctica aconsejable ordenar el vector  $x$  en el sentido de las variables de obtención sucesiva y asociar a ellas, a lo menos en fase de diseño, los autovalores decrecientes, que darán lugar a semiejes de magnitud creciente, y por tanto, vértices de y áreas de recintos de error temible cada vez mayores, cuestión que tampoco se había considerado en los métodos anteriores. No obstante, veremos en el desarrollo del método y al final de su aplicación que al obtener rosetas en vez de elipses aisladas, se pierde de nuevo la validez de la información basada en la priorización antes mencionada.

Es claro que el algoritmo propuesto utiliza también permanentemente la totalidad de la matriz de criterio  $S$ , las  $Q_{xx}$  y las  $\sigma_{xx}$  en vez de las matrices menores de orden dos referidas a cada vértice, como sucede en el algoritmo clásico, con la evidente falta de rigor que ya se señaló anteriormente, que omite cualquier influencia o correlación del vértice en estudio, como debería ser preceptivo, siquiera con sus vecinos en la red.

Antes bien, la introducción de las elipses de correlación estudia y cifra expresamente las interdependencias entre todos los vértices de la red dos a dos, y coordenada a coordenada, sin que ello impida la aplicación a cualquier zona de precisión intrínseca, del algoritmo de ajuste conocido, deduciéndose de él los hiperelipsoides correspondientes a los que, en su caso, se podría aplicar también el método que nos ocupa.

Definida así la teoría básica, a continuación se desarrolla su algoritmo de cálculo.

### 6.7.- ALGORITMO DE CALCULO.

Se considera una red local en su caso más general de la que se conoce un vector  $X_a$  de coordenadas aproximadas y la matriz  $P_{m,m}$  de pesos a priori que permiten obtener la matriz de diseño  $A_{m,n}$  y la  $S_{n,n} = A^T P A$ , con defecto de rango  $d$  definido por  $0 \leq d \leq 4$ .

Es conocido el orden de observación en campo y se han ordenado de acuerdo con él las formas lineales que dan lugar a las filas de  $A$  así como el vector de correcciones  $x_{n,1}$ .

Se adopta  $s^2$  a priori igual a la unidad y se pretende diseñar una figura de error posible para la red observada y calculada, con una fiabilidad prefijada  $\varphi = 1 - \alpha$ ".

---

Sucesivamente y según teoría conocida se obtendrán:

- los autovalores de  $S$  y sean los elementos del vector  $\mu_{n,1}$ ,

y los elementos  $\mu_i$  de  $\mu_{n,1}$ , ordenados para fijar ideas de mayor a menor, siendo

$$\begin{aligned} \mu_i &> 0 && i \in 1,2,3,\dots,n-d \\ \mu_i &= 0 && i \in (n-d+1), (n-d+2) \dots n \end{aligned}$$

Se asocian, solamente como hipótesis de cálculo y para acceder a una primera alternativa de progresión de errores, elemento a elemento en el orden establecido los vectores  $\mu$  y  $x$ , y por tanto el vector de coordenadas corregidas  $X$  en el mismo orden de  $X_a$ ,  $x$ ,  $\mu$ .

Sean

$$X_i = X_{ai} + x_i \text{ asociada a } \mu_i \quad (230)$$

$$X_j = X_{aj} + x_j \text{ asociada a } \mu_j \quad (231)$$

y se tendrá según (207) , (209)

$$f_{\alpha'} = \sqrt{R(S)F_{R(S),m-R(S),\alpha'}} \quad (232)$$

$$\Phi_{HH\alpha'_i} = f_{\alpha'} \sigma \sqrt{\mu_i^{-1}} \neq 0 \quad (233)$$

$$\Phi_{HH\alpha'_j} = f_{\alpha'} \sigma \sqrt{\mu_j^{-1}} \neq 0 \quad (234)$$

semiejes de la elipse canónica de correlación asociada en principio a las coordenadas  $X_i, X_j$  obtenida cortando el recinto de incertidumbre (203) por el hiperplano coordinado formado por los ejes  $z_i, z_j$  de ecuación

$$z_I = 0 \tag{235}$$

$$\forall I \neq i, j$$

(n-2) ecuaciones obtenidas, como ya vimos, particularizando para cualquier valor de I distinto de los dos i, j elegidos

Los vectores (233) y (234) evidentemente son

$$\Phi_{HH\alpha^i} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Phi_{HH\alpha^i} \tag{236}$$

$$\Phi_{HH\alpha^j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \Phi_{HH\alpha^j} \tag{237}$$

Contenidos en el hiperplano (235) c.d.s.

Efectuando la rotación inversa a (202)

$$x = \Gamma z \tag{238}$$

por ser  $\Gamma^T = \Gamma^{-1}$  ya que  $\Gamma$  es ortogonal, resultando

$$(\Gamma^T)^{-1} = (\Gamma^{-1})^T = (\Gamma^T)^T = \Gamma \tag{239}$$

se obtendrá la elipse de correlación deseada referida a los ejes iniciales ( $x_i, x_j$ ) del recinto (201)

Siendo la matriz de autovectores columna

$$\Gamma = | \tau_{ij} | \quad (240)$$

$\tau_{ij}$  = elemento de orden j del autovector columna de orden i.

efectuamos la rotación (238) a los ejes (236) y (237) resultando

$$\Phi_{HH\alpha^i} = \Gamma \Phi_{HH\alpha^i} = \Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{1i} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \tau_{2i} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \vdots \\ \tau_{(i-1)i} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \tau_{ii} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \tau_{(i+1)i} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \vdots \\ \tau_{ji} \Phi_{HH\alpha^i} \\ \vdots \\ \tau_{ni} \Phi_{HH\alpha^i} \end{pmatrix} \quad (241)$$

$$\Phi_{HH\alpha^j} = \Gamma \Phi_{HH\alpha^j} = \Gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau_{1j} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \tau_{2j} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \vdots \\ \tau_{ij} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \vdots \\ \tau_{(j-1)j} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \tau_{jj} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \tau_{(j+1)j} \Phi_{HH\alpha^j} \\ \vdots \\ \tau_{nj} \Phi_{HH\alpha^j} \end{pmatrix} \quad (242)$$

Que definen y se encuentran, como se dijo, en un hiperplano referido a un sistema de coordenadas en  $x$  distinto en general a cualquier plano coordenado análogo al (235).

(La expresión del hiperplano análogo al (235) mencionado será

$$x_I = 0 \quad (243)$$

$$\forall I \neq i, j$$

(n-2) ecuaciones obtenidas particularizando para cualquier valor de I distinto de los dos  $i, j$  elegidos

que evidentemente no cumplen (241) y (242).



Es claro que los elementos de ambos vectores (241) y (242) son las proyecciones de los semiejes  $\Phi_{HH\alpha}x_i$  y  $\Phi_{HH\alpha}x_j$  sobre los ejes coordenados  $x$ , al ser los elementos de cada autovector los cosenos directores de los ejes  $z$  con los  $x$ . Por lo tanto, la proyección de la elipse definida por los semiejes (241) y (242) sobre el hiperplano coordenado (243) será una nueva elipse de correlación, homológica afín de la inicial, que representa en planimetría una nueva figura de error distinta de las consideradas hasta ahora, hipotéticamente referida a las coordenadas  $X_i$ ,  $X_j$ , pudiéndose representar sobre el plano bidimensional del levantamiento.

Recíprocamente, el conjunto de elipses correlativas define un recinto de incertidumbre y solo uno de semiejes conocidos.

Téngase en cuenta que un par de autovalores  $\mu_i, \mu_j$  y autovectores  $\tau_i, \tau_j$  tienen siempre el significado físico de error máximo y mínimo, en magnitud y dirección, que según hemos visto y para mejor entender el proceso, asociamos a dos variables  $x_i, x_j$ . En el espacio  $R^2$ , utilizando dos a dos las coordenadas de los vértices, se obtienen directamente los semiejes de las elipses de error clásicas en el plano del levantamiento  $x_i, x_j$ . En el espacio  $R^n$  se obtienen elipses del mismo significado físico, pero fuera del plano del levantamiento, sobre el que es preciso proyectarlas para obtener el resultado deseado, siendo obvio que ni una rotación ni una proyección cambian la interpretación física establecida, justificándose así conceptualmente el método. Del mismo modo pueden obtenerse las elipses correlativas.

Siguiendo el desarrollo, de la elipse genérica proyectada se conocen dos semidiámetros conjugados, que son las proyecciones antes indicadas de (241) y (242) sobre los ejes coordenados  $x_i, x_j$ .

Todo se reduce ya a determinar, en el plano del levantamiento, la elipse referida a su centro y definida por:

- un semidiámetro cuyas proyecciones sobre los ejes de coordenadas  $x_i, x_j$  son

$$\begin{aligned} \delta'_{ij}_{x_i} &= \tau_{ii} \Phi_{HH\alpha}^i \\ \delta'_{ij}_{x_j} &= \tau_{ji} \Phi_{HH\alpha}^i \end{aligned} \quad (244)$$

- el semidiámetro conjugado del anterior, de proyecciones sobre los mismos ejes de coordenadas

$$\begin{aligned} \delta'_{ij}_{x_i} &= \tau_{ij} \Phi_{HH\alpha}^j \\ \delta'_{ij}_{x_j} &= \tau_{jj} \Phi_{HH\alpha}^j \end{aligned} \quad (245)$$

Y si se desea una representación gráfica del resultado bastar con dibujar la elipse de vértice resultante - con centro en  $X_i, X_j$  si ambos valores son coordenadas de un vértice, según hemos supuesto, o en el lugar del retículo genérico que le corresponda como elipse correlativa, si no lo son.

No obstante, de nuevo es importante insistir que la representación gráfica es accesoria en el algoritmo, especialmente en su objetivo fundamental de aportación al estudio de diseño en el problema de orden cero (PD0).

---

La obtención de la proyección de los semiejes o semidiámetros  $\Phi_{HH\alpha^*X_i}$  y  $\Phi_{HH\alpha^*X_j}$  sobre dos ejes coordenados cualquiera es ya inmediata.

Se escribirá para las proyecciones del semidiámetro  $\Phi_{HH\alpha^*X_i}$  sobre  $(x_p, x_q)$

$$\delta ij_{xp} = \tau_{pi} \Phi_{HH\alpha^*i} = \text{proy.de.}\Phi_{HH\alpha^*xi} \text{sobre.}x_p$$

$$\delta ij_{xq} = \tau_{qi} \Phi_{HH\alpha^*i} = \text{proy.de.}\Phi_{HH\alpha^*xi} \text{sobre.}x_q$$

Y así mismo para las proyecciones del semidiámetro conjugado del anterior  $\Phi_{HH\alpha^*X_j}$  sobre los mismos ejes  $(x_p, x_q)$ .

$$\delta' ij_{xp} = \tau_{pj} \Phi_{HH\alpha^*j} = \text{proy.de.}\Phi_{HH\alpha^*xj} \text{sobre.}x_p$$

$$\delta' ij_{xq} = \tau_{qj} \Phi_{HH\alpha^*j} = \text{proy.de.}\Phi_{HH\alpha^*xj} \text{sobre.}x_q$$

En consecuencia, todas las elipses definidas por parejas de diámetros conjugados sobre un mismo plano coordenado  $(x_p, x_q)$ .formarán la roseta de error, de vértice o correlativa, que se representará en el plano del levantamiento como en los métodos anteriores ya explicados.

Es claro que, las rosetas pierden, según se dijo, la relación autovector-coordenada, poco importante dado el empirismo de dicho supuesto.

El problema ya queda reducido al clásico de determinación de una elipse conocidos dos diámetros conjugados, que resolvemos a continuación.

### **6.7.1.-DETERMINACION DE UNA ELIPSE EN FUNCION DE DOS DIAMETROS CONJUGADOS CONOCIDOS.[ Mataix. 1945]**

Supondremos solamente para fijar ideas que  $X_i$  corresponde a una abscisa cualquiera de la red y  $X_j$  a una ordenada. La elipse resultante podrá referirse al plano XY del levantamiento en la forma indicada anteriormente, pero téngase presente que las elipses correspondientes a abscisa-abscisa u ordenada-ordenada tienen análogo sentido físico y representación gráfica del mismo carácter.

Una cónica referida a su centro tiene la expresión:

$$a_{11} X^2 + 2 a_{12} XY + a_{22} Y^2 + a_{33} = 0 \tag{246}$$

y la relación entre las pendientes  $m$  y  $m'$  de dos semidiámetros conjugados de longitudes  $\delta$  y  $\delta'$  es

$$a_{22} mm' + a_{12}(m + m') + a_{11} = 0 \tag{247}$$

expresión de la involución de rectas conjugadas con centro en el de la cónica.

Y por ser elipse siendo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \quad (248)$$

$$I = a_{11} + a_{22} \quad (249)$$

se deberá cumplir que

$$A_{33} = a_{11}a_{22} - a_{12}^2 > 0 \quad (250)$$

$$A.I < 0 \quad (251)$$

según teoría conocida.

La determinación de la cónica es inmediata. Particularizando en (246) los valores de  $\delta_{ijx_p}$ ,  $\delta_{ijx_q}$ ,  $\delta'_{ijx_p}$ ,  $\delta'_{ijx_q}$

$$a_{11}\delta_{ijx_p}^2 + 2a_{12}\delta_{ijx_p}\delta_{ijx_q} + a_{22}\delta_{ijx_q}^2 + a_{33} = 0 \quad (252)$$

$$a_{11}\delta'_{ijx_p}^2 + 2a_{12}\delta'_{ijx_p}\delta'_{ijx_q} + a_{22}\delta'_{ijx_q}^2 + a_{33} = 0 \quad (253)$$

$$m_{\delta_{ijpq}} = \frac{\delta_{ijx_q}}{\delta_{ijx_p}} \quad (254)$$

$$m'_{\delta'_{ijpq}} = \frac{\delta'_{ijx_q}}{\delta'_{ijx_p}} \quad (255)$$

particularizando en (247)

$$a_{22} m_{\delta_{ijpq}} m'_{\delta'_{ijpq}} + a_{12}(m_{\delta_{ijpq}} + m'_{\delta'_{ijpq}}) + a_{11} = 0 \quad (256)$$

El sistema formado por (252), (253) y (254) resuelve el problema.

Escrito en la forma:

$$M_{3,3} \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{12} \\ a_{13} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} a_{33} \quad (257)$$

$$M a = - K a_{33} \quad (258)$$

y con  $a_{33} = -1$   
la solución es

$$a = M^{-1}K \quad (259)$$

que define la cónica.

Comprobada la cumplimentación de (250) y (251) las rectas ortogonales de la involución de semidiámetros conjugados son los semiejes de la elipse. En (247) se tendrá, con

$$m m' = -1 \quad (260)$$

$$-a_{22} + a_{12} \left( m - \frac{1}{m} \right) + a_{11} = 0 \quad (261)$$

$$m^2 + \frac{a_{11} - a_{22}}{a_{12}} m - 1 = 0 \quad (262)$$

de donde

$$m = -\frac{a_{11} - a_{22}}{2a_{12}} \pm \frac{1}{2a_{12}} \sqrt{(a_{11} - a_{22})^2 + 4a_{12}^2} \quad (263)$$

que da lugar a  $m_{aijpp}$ ,  $m_{bijpq}$ , direcciones de los ejes de la elipse

Cortando por

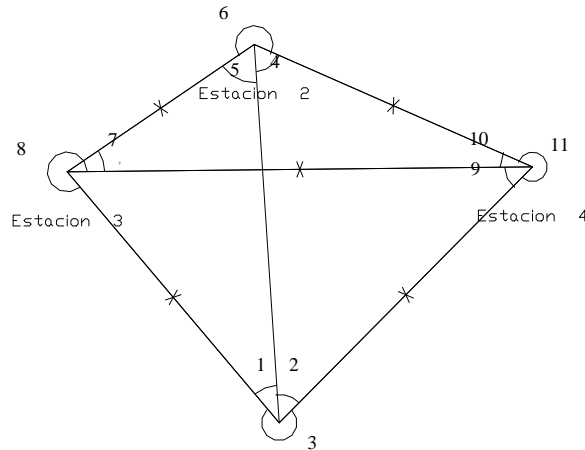
$$y = m_{aijpp} x \quad (264)$$

$$y = m_{bijpq} x \quad (265)$$

se obtienen los vértices de los ejes, sus longitudes, y la ecuación canónica de la elipse, resolviéndose el problema en su totalidad.

## 6.8.-APLICACIÓN PRACTICA

A continuación se va a proceder a calcular el hipercilindro de error, así como las elipses resultantes de la aplicación de los tres diferentes métodos, sobre la red en la que venimos trabajando hasta ahora.



Se parte de la compensación de la red como libre, con el único constreñimiento que impone la introducción de distancias reducidas.

En primer lugar se muestran las elipses clásicas absolutas y relativas:

### ELIPSES DE VERTICE

Vertice Semieje mayor Acimut semieje Semieje menor Acimut semieje

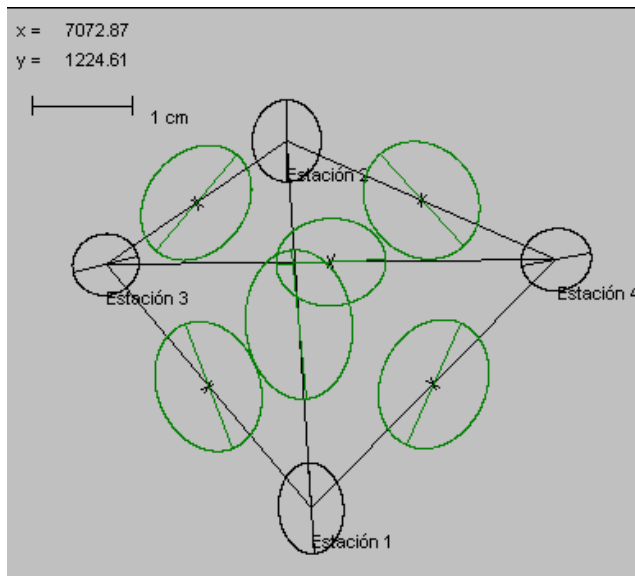
1	0.0038 mts	195.7311 gra	0.0027 mts	95.7311 gra
2	0.0034 mts	0.4481 gra	0.0029 mts	100.4481 gra
3	0.0028 mts	84.8792 gra	0.0025 mts	184.8792 gra
4	0.0029 mts	87.7719 gra	0.0026 mts	187.7719 gra

### ELIPSES RELATIVAS

Vertices Semieje mayor Acimut semieje Semieje menor Acimut semieje

1	2	0.0062 mts	193.9668 gra	0.0045 mts	93.9668 gra
3	0.0056 mts	176.3313 gra	0.0043 mts	76.3313 gra	
4	0.0056 mts	26.8019 gra	0.0044 mts	126.8019 gra	
2	3	0.0052 mts	44.7930 gra	0.0041 mts	144.7930 gra
4	0.0052 mts	152.4221 gra	0.0045 mts	52.4221 gra	
3	4	0.0046 mts	96.7509 gra	0.0036 mts	196.7509 gra

La representación gráfica de las mismas resulta:



#### EJES DEL HIPERCILINDRO STANDARD Y HOMOTETICO

---> Factor de homotecia para el HH : 5.16

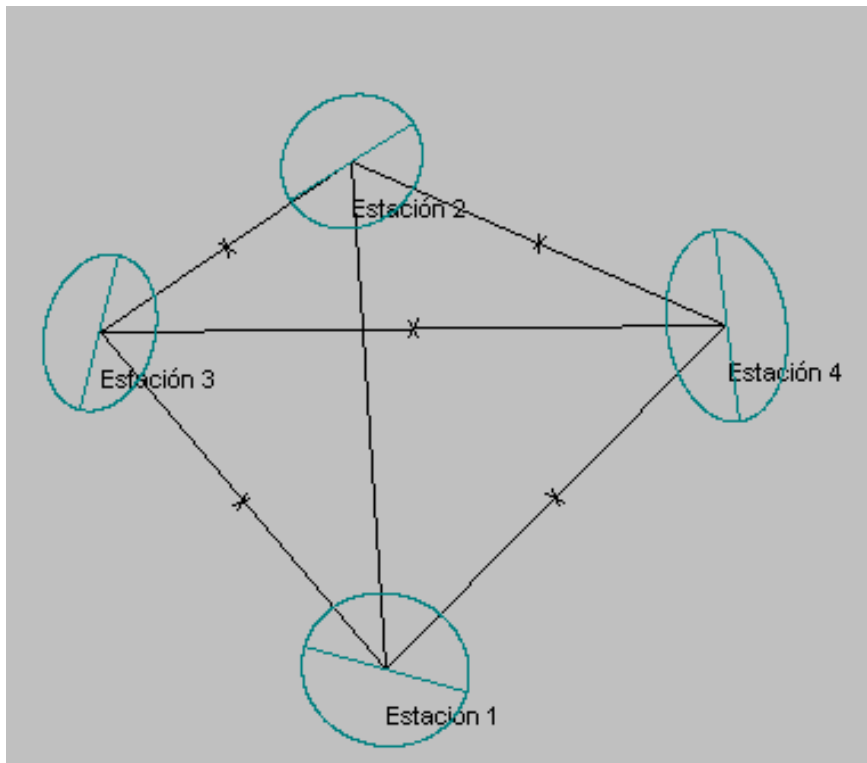
Hiperelipsoide Standard	Hiperelipsoide Homotetico
0.00277206 metros	0.01430387 metros
0.00313362 metros	0.01616951 metros
0.00335826 metros	0.01732864 metros
0.00379191 metros	0.01956626 metros
0.00417004 metros	0.02151741 metros

**1.- METODO DE LAS SECCIONES DEL HIPERELIPSOIDE**

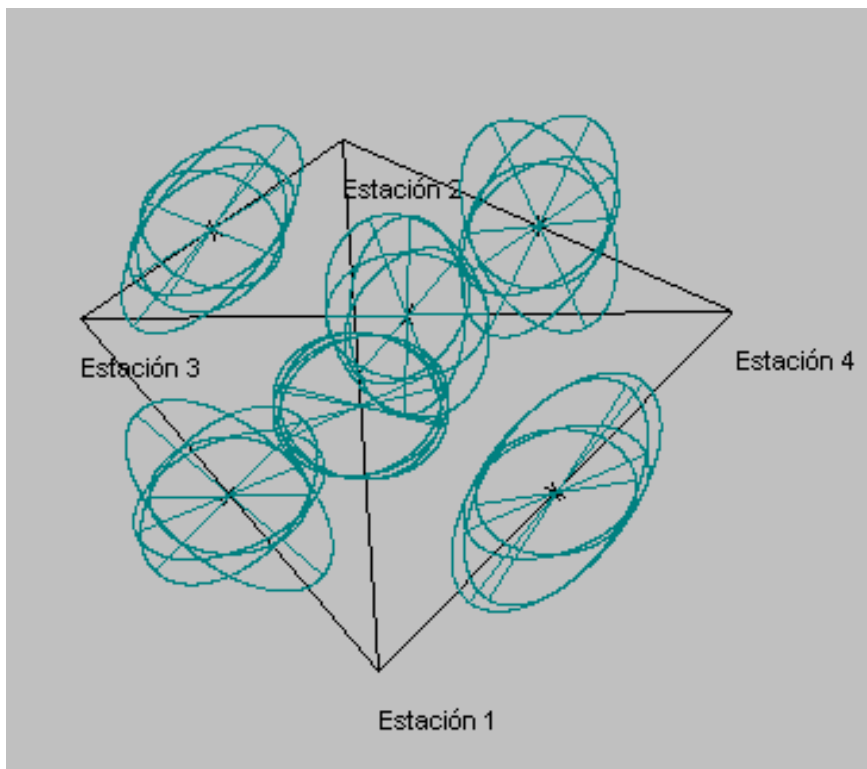
**ELIPSES DE ERROR CUADRO DE RESULTADOS EN HIPERELIPSOIDE STANDARD**

Variables	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1 2	0.0050 mts	117.1724 gra	0.0045 mts	17.1724 gra
3	0.0050 mts	112.2677 gra	0.0041 mts	12.2677 gra
4	0.0051 mts	84.2715 gra	0.0039 mts	184.2715 gra
5	0.0057 mts	75.1376 gra	0.0031 mts	175.1376 gra
6	0.0071 mts	145.3673 gra	0.0038 mts	45.3673 gra
7	0.0056 mts	74.7372 gra	0.0034 mts	174.7372 gra
8	0.0080 mts	42.5964 gra	0.0042 mts	142.5964 gra
2 3	0.0046 mts	116.0553 gra	0.0041 mts	16.0553 gra
4	0.0048 mts	72.3105 gra	0.0038 mts	172.3105 gra
5	0.0046 mts	99.2784 gra	0.0033 mts	199.2784 gra
6	0.0060 mts	49.5886 gra	0.0038 mts	149.5886 gra
7	0.0046 mts	91.0081 gra	0.0035 mts	191.0081 gra
8	0.0073 mts	36.6067 gra	0.0041 mts	136.6067 gra
3 4	0.0043 mts	63.4520 gra	0.0038 mts	163.4520 gra
5	0.0052 mts	64.3321 gra	0.0030 mts	164.3321 gra
6	0.0050 mts	36.5185 gra	0.0039 mts	136.5185 gra
7	0.0051 mts	61.5646 gra	0.0032 mts	161.5646 gra
8	0.0064 mts	173.1166 gra	0.0039 mts	73.1166 gra
4 5	0.0042 mts	125.3454 gra	0.0032 mts	25.3454 gra
6	0.0071 mts	42.8119 gra	0.0033 mts	142.8119 gra
7	0.0040 mts	93.7992 gra	0.0036 mts	193.7992 gra
8	0.0068 mts	28.2619 gra	0.0037 mts	128.2619 gra
5 6	0.0047 mts	15.9343 gra	0.0033 mts	115.9343 gra
7	0.0044 mts	44.1139 gra	0.0029 mts	144.1139 gra
8	0.0057 mts	1.7412 gra	0.0033 mts	101.7412 gra
6 7	0.0046 mts	99.0721 gra	0.0036 mts	199.0721 gra
8	0.0059 mts	176.8602 gra	0.0045 mts	76.8602 gra
7 8	0.0057 mts	191.6065 gra	0.0035 mts	91.6065 gra

Las elipses de vértice serán:



Y las elipses correlativas:





## 2.- METODO DE LAS PROYECCIONES DEL HIPERELIPSOIDE

ROSETAS DE ERROR CON FACTOR HOMOTECIA = 5.16

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DEL VERTICE NUMERO 1 \*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
3	0.0261 mts	115.9776 gra	0.0237 mts	15.9776 gra
4	0.0261 mts	112.1177 gra	0.0240 mts	12.1177 gra
5	0.0284 mts	109.1329 gra	0.0237 mts	9.1329 gra
6	0.0361 mts	137.0266 gra	0.0239 mts	37.0266 gra
7	0.0275 mts	105.9931 gra	0.0238 mts	5.9931 gra
8	0.0351 mts	63.4492 gra	0.0251 mts	163.4492 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DEL VERTICE NUMERO 2 \*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0225 mts	63.0909 gra	0.0202 mts	163.0909 gra
2	0.0225 mts	60.7850 gra	0.0203 mts	160.7850 gra
5	0.0245 mts	95.9234 gra	0.0210 mts	195.9234 gra
6	0.0301 mts	33.3125 gra	0.0207 mts	133.3125 gra
7	0.0244 mts	76.7844 gra	0.0203 mts	176.7844 gra
8	0.0239 mts	148.6853 gra	0.0224 mts	48.6853 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DEL VERTICE NUMERO 3\*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0284 mts	196.0007 gra	0.0189 mts	96.0007 gra
2	0.0273 mts	13.8495 gra	0.0170 mts	113.8495 gra
3	0.0276 mts	30.8078 gra	0.0184 mts	130.8078 gra
4	0.0309 mts	4.5236 gra	0.0176 mts	104.5236 gra
7	0.0250 mts	21.3734 gra	0.0182 mts	121.3734 gra
8	0.0251 mts	15.0318 gra	0.0170 mts	115.0318 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DEL VERTICE NUMERO 4 \*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0355 mts	3.9634 gra	0.0197 mts	103.9634 gra
2	0.0339 mts	194.5844 gra	0.0186 mts	94.5844 gra
3	0.0343 mts	180.4607 gra	0.0197 mts	80.4607 gra
4	0.0333 mts	193.0585 gra	0.0185 mts	93.0585 gra
5	0.0299 mts	190.0821 gra	0.0199 mts	90.0821 gra
6	0.0304 mts	191.7033 gra	0.0185 mts	91.7033 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 3 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0261 mts	111.8987 gra	0.0216 mts	11.8987 gra
4	0.0262 mts	110.3124 gra	0.0217 mts	10.3124 gra
5	0.0294 mts	74.6107 gra	0.0239 mts	174.6107 gra
6	0.0323 mts	119.4045 gra	0.0216 mts	19.4045 gra
7	0.0278 mts	84.6487 gra	0.0235 mts	184.6487 gra
8	0.0349 mts	127.1855 gra	0.0219 mts	27.1855 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 4 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0264 mts	84.2386 gra	0.0207 mts	184.2386 gra
3	0.0264 mts	84.8328 gra	0.0206 mts	184.8328 gra
5	0.0284 mts	94.6091 gra	0.0210 mts	194.6091 gra
6	0.0355 mts	137.1637 gra	0.0244 mts	37.1637 gra
7	0.0281 mts	85.9342 gra	0.0204 mts	185.9342 gra
8	0.0391 mts	67.4756 gra	0.0210 mts	167.4756 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 5 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0299 mts	75.1833 gra	0.0164 mts	175.1833 gra
3	0.0310 mts	68.7178 gra	0.0181 mts	168.7178 gra
4	0.0299 mts	75.2280 gra	0.0167 mts	175.2280 gra
6	0.0341 mts	81.7967 gra	0.0170 mts	181.7967 gra
7	0.0388 mts	68.1304 gra	0.0168 mts	168.1304 gra
8	0.0379 mts	77.9867 gra	0.0165 mts	177.9867 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 6 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0423 mts	150.9509 gra	0.0205 mts	50.9509 gra
3	0.0384 mts	146.8093 gra	0.0201 mts	46.8093 gra
4	0.0452 mts	158.6640 gra	0.0221 mts	58.6640 gra
5	0.0382 mts	140.7752 gra	0.0210 mts	40.7752 gra
7	0.0394 mts	142.2535 gra	0.0203 mts	42.2535 gra
8	0.0602 mts	140.3283 gra	0.0202 mts	40.3283 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0289 mts	74.7789 gra	0.0177 mts	174.7789 gra
3	0.0294 mts	69.7435 gra	0.0190 mts	169.7435 gra
4	0.0292 mts	74.8503 gra	0.0177 mts	174.8503 gra
5	0.0389 mts	67.1563 gra	0.0180 mts	167.1563 gra
6	0.0348 mts	79.1553 gra	0.0178 mts	179.1553 gra
8	0.0338 mts	82.2694 gra	0.0182 mts	182.2694 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 1 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
2	0.0483 mts	36.8247 gra	0.0227 mts	136.8247 gra
3	0.0470 mts	40.2849 gra	0.0221 mts	140.2849 gra
4	0.0529 mts	39.4405 gra	0.0221 mts	139.4405 gra
5	0.0469 mts	47.9553 gra	0.0227 mts	147.9553 gra
6	0.0661 mts	50.8879 gra	0.0227 mts	150.8879 gra
7	0.0426 mts	45.5498 gra	0.0229 mts	145.5498 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 3 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0239 mts	115.3196 gra	0.0216 mts	15.3196 gra
4	0.0242 mts	110.5472 gra	0.0217 mts	10.5472 gra
5	0.0249 mts	166.8315 gra	0.0234 mts	66.8315 gra
6	0.0263 mts	91.4368 gra	0.0221 mts	191.4368 gra
7	0.0241 mts	143.7529 gra	0.0235 mts	43.7529 gra
8	0.0300 mts	132.9156 gra	0.0218 mts	32.9156 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 4 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0249 mts	72.0567 gra	0.0202 mts	172.0567 gra
3	0.0249 mts	72.2498 gra	0.0201 mts	172.2498 gra
5	0.0250 mts	70.1356 gra	0.0203 mts	170.1356 gra
6	0.0424 mts	49.2095 gra	0.0208 mts	149.2095 gra
7	0.0250 mts	72.3900 gra	0.0200 mts	172.3900 gra
8	0.0353 mts	60.3516 gra	0.0203 mts	160.3516 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 5 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0238 mts	102.0260 gra	0.0189 mts	2.0260 gra
3	0.0238 mts	103.0550 gra	0.0196 mts	3.0550 gra
4	0.0241 mts	102.3518 gra	0.0176 mts	2.3518 gra
6	0.0264 mts	92.8737 gra	0.0175 mts	192.8737 gra
7	0.0239 mts	95.1637 gra	0.0187 mts	195.1637 gra
8	0.0272 mts	98.2754 gra	0.0173 mts	198.2754 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 6 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0386 mts	39.8899 gra	0.0207 mts	139.8899 gra
3	0.0318 mts	47.8658 gra	0.0202 mts	147.8658 gra
4	0.0497 mts	39.0378 gra	0.0205 mts	139.0378 gra
5	0.0319 mts	48.3915 gra	0.0201 mts	148.3915 gra
7	0.0315 mts	49.7841 gra	0.0200 mts	149.7841 gra
8	0.0331 mts	58.8408 gra	0.0216 mts	158.8408 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0239 mts	90.3123 gra	0.0197 mts	190.3123 gra
3	0.0239 mts	89.0874 gra	0.0202 mts	189.0874 gra
4	0.0243 mts	90.9507 gra	0.0185 mts	190.9507 gra
5	0.0240 mts	85.8461 gra	0.0199 mts	185.8461 gra
6	0.0264 mts	92.6085 gra	0.0185 mts	192.6085 gra
8	0.0272 mts	99.0502 gra	0.0187 mts	199.0502 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 2 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0460 mts	29.6801 gra	0.0218 mts	129.6801 gra
3	0.0416 mts	34.5492 gra	0.0213 mts	134.5492 gra
4	0.0480 mts	35.2159 gra	0.0212 mts	135.2159 gra
5	0.0377 mts	36.5934 gra	0.0212 mts	136.5934 gra
6	0.0383 mts	40.8278 gra	0.0230 mts	140.8278 gra
7	0.0378 mts	36.1822 gra	0.0213 mts	136.1822 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 3 - 5 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0285 mts	58.7703 gra	0.0165 mts	158.7703 gra
2	0.0273 mts	64.3975 gra	0.0156 mts	164.3975 gra
4	0.0273 mts	63.8908 gra	0.0158 mts	163.8908 gra
6	0.0295 mts	63.2926 gra	0.0156 mts	163.2926 gra
7	0.0417 mts	60.0361 gra	0.0157 mts	160.0361 gra
8	0.0292 mts	67.2279 gra	0.0157 mts	167.2279 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 3 - 6 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0313 mts	26.9701 gra	0.0206 mts	126.9701 gra
2	0.0280 mts	26.5487 gra	0.0209 mts	126.5487 gra
4	0.0348 mts	25.5956 gra	0.0207 mts	125.5956 gra
5	0.0302 mts	50.8899 gra	0.0210 mts	150.8899 gra
7	0.0273 mts	48.9949 gra	0.0214 mts	148.9949 gra
8	0.0286 mts	44.8877 gra	0.0207 mts	144.8877 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 3 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0271 mts	57.2497 gra	0.0174 mts	157.2497 gra
2	0.0264 mts	61.5286 gra	0.0167 mts	161.5286 gra
4	0.0266 mts	61.7988 gra	0.0167 mts	161.7988 gra
5	0.0420 mts	58.7821 gra	0.0167 mts	158.7821 gra
6	0.0271 mts	62.8793 gra	0.0167 mts	162.8793 gra
8	0.0297 mts	63.1338 gra	0.0167 mts	163.1338 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 3 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0423 mts	176.1687 gra	0.0206 mts	76.1687 gra
2	0.0393 mts	175.8359 gra	0.0206 mts	75.8359 gra
4	0.0364 mts	178.3231 gra	0.0209 mts	78.3231 gra
5	0.0349 mts	164.3525 gra	0.0224 mts	64.3525 gra
6	0.0353 mts	170.4202 gra	0.0207 mts	70.4202 gra
7	0.0366 mts	165.0116 gra	0.0215 mts	65.0116 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 4 - 5 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0218 mts	131.8613 gra	0.0183 mts	31.8613 gra
2	0.0220 mts	124.2644 gra	0.0168 mts	24.2644 gra
3	0.0221 mts	138.1857 gra	0.0187 mts	38.1857 gra
6	0.0268 mts	106.7550 gra	0.0175 mts	6.7550 gra
7	0.0221 mts	134.3227 gra	0.0178 mts	34.3227 gra
8	0.0240 mts	118.3445 gra	0.0169 mts	18.3445 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 4 - 6 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0441 mts	36.2006 gra	0.0181 mts	136.2006 gra
2	0.0513 mts	40.8674 gra	0.0173 mts	140.8674 gra
3	0.0398 mts	42.3874 gra	0.0173 mts	142.3874 gra
5	0.0368 mts	42.7047 gra	0.0176 mts	142.7047 gra
7	0.0369 mts	42.8251 gra	0.0173 mts	142.8251 gra
8	0.0385 mts	47.3136 gra	0.0186 mts	147.3136 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 4 - 7 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0212 mts	71.1927 gra	0.0195 mts	171.1927 gra
2	0.0210 mts	91.2134 gra	0.0186 mts	191.2134 gra
3	0.0213 mts	60.0513 gra	0.0198 mts	160.0513 gra
5	0.0213 mts	126.6471 gra	0.0198 mts	26.6471 gra
6	0.0266 mts	97.1179 gra	0.0186 mts	197.1179 gra
8	0.0231 mts	106.0440 gra	0.0187 mts	6.0440 gra

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 4 - 8 \*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0485 mts	26.7312 gra	0.0193 mts	126.7312 gra
2	0.0460 mts	28.3373 gra	0.0193 mts	128.3373 gra
3	0.0371 mts	25.4261 gra	0.0196 mts	125.4261 gra
5	0.0354 mts	29.1109 gra	0.0196 mts	129.1109 gra
6	0.0376 mts	41.3157 gra	0.0235 mts	141.3157 gra
7	0.0355 mts	27.9282 gra	0.0193 mts	127.9282 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 5 - 7 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0308 mts	47.8060 gra	0.0153 mts	147.8060 gra
2	0.0229 mts	43.9272 gra	0.0152 mts	143.9272 gra
3	0.0367 mts	48.3278 gra	0.0153 mts	148.3278 gra
4	0.0230 mts	45.5265 gra	0.0153 mts	145.5265 gra
6	0.0231 mts	45.5433 gra	0.0153 mts	145.5433 gra
8	0.0229 mts	43.4607 gra	0.0153 mts	143.4607 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 5 - 8 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0384 mts	14.9498 gra	0.0185 mts	114.9498 gra
2	0.0337 mts	1.7297 gra	0.0173 mts	101.7297 gra
3	0.0321 mts	189.8628 gra	0.0194 mts	89.8628 gra
4	0.0330 mts	197.2532 gra	0.0176 mts	97.2532 gra
6	0.0300 mts	199.8145 gra	0.0176 mts	99.8145 gra
7	0.0297 mts	198.6821 gra	0.0187 mts	98.6821 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 6 - 7 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

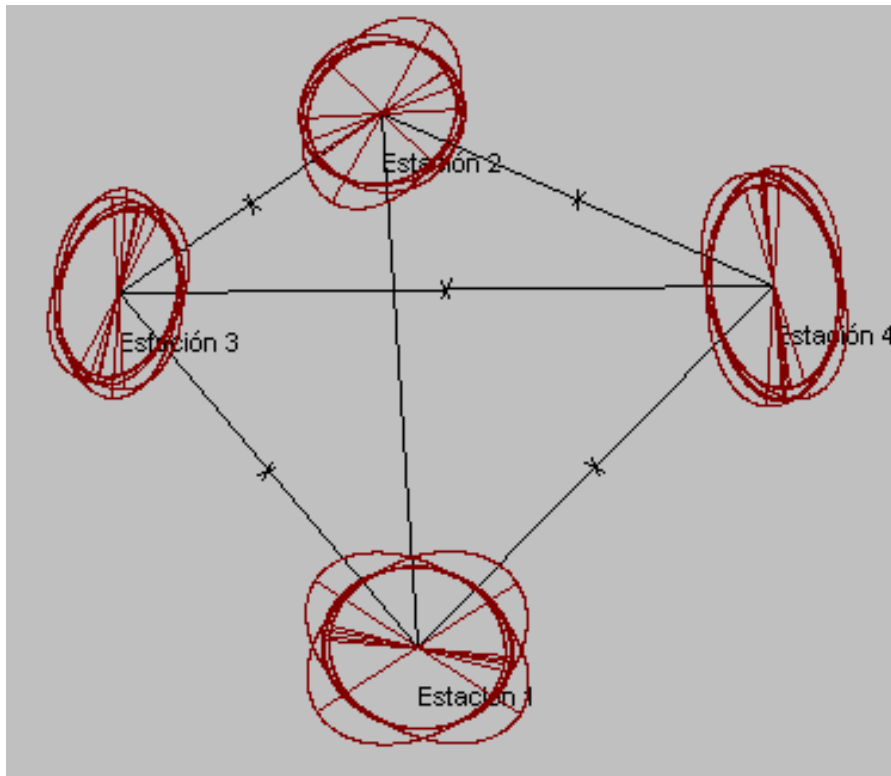
Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0297 mts	117.3296 gra	0.0193 mts	17.3296 gra
2	0.0264 mts	96.2495 gra	0.0186 mts	196.2495 gra
3	0.0249 mts	83.3941 gra	0.0201 mts	183.3941 gra
4	0.0308 mts	98.3787 gra	0.0186 mts	198.3787 gra
5	0.0245 mts	87.0680 gra	0.0199 mts	187.0680 gra
8	0.0243 mts	96.1114 gra	0.0187 mts	196.1114 gra

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ROSETA CON SIMETRIA CENTRAL DE LAS VARIABLES 6 - 8 \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

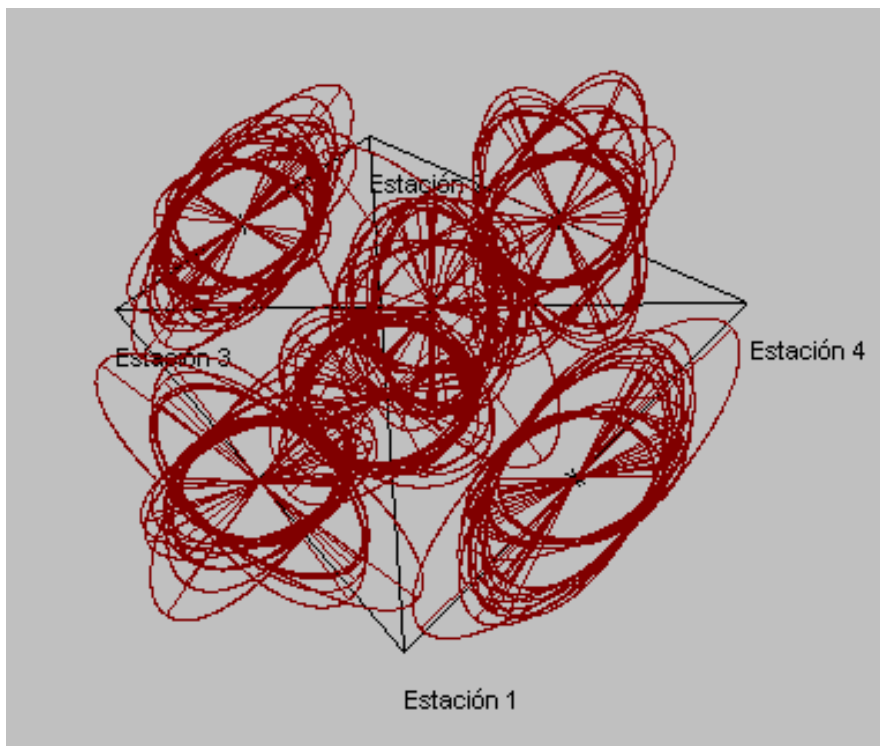
Nro Eje	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0579 mts	159.9523 gra	0.0239 mts	59.9523 gra
2	0.0337 mts	2.7487 gra	0.0264 mts	102.7487 gra
3	0.0345 mts	172.9413 gra	0.0233 mts	72.9413 gra
4	0.0344 mts	35.0851 gra	0.0297 mts	135.0851 gra
5	0.0309 mts	175.7937 gra	0.0236 mts	75.7937 gra
7	0.0311 mts	177.2741 gra	0.0232 mts	77.2741 gra

A continuación se muestra unicamente la representación gráfica de las rosetas de vértices con el objetivo de no congestionar la figura.

Las rosetas de vértice serán:



Y las correlativas:





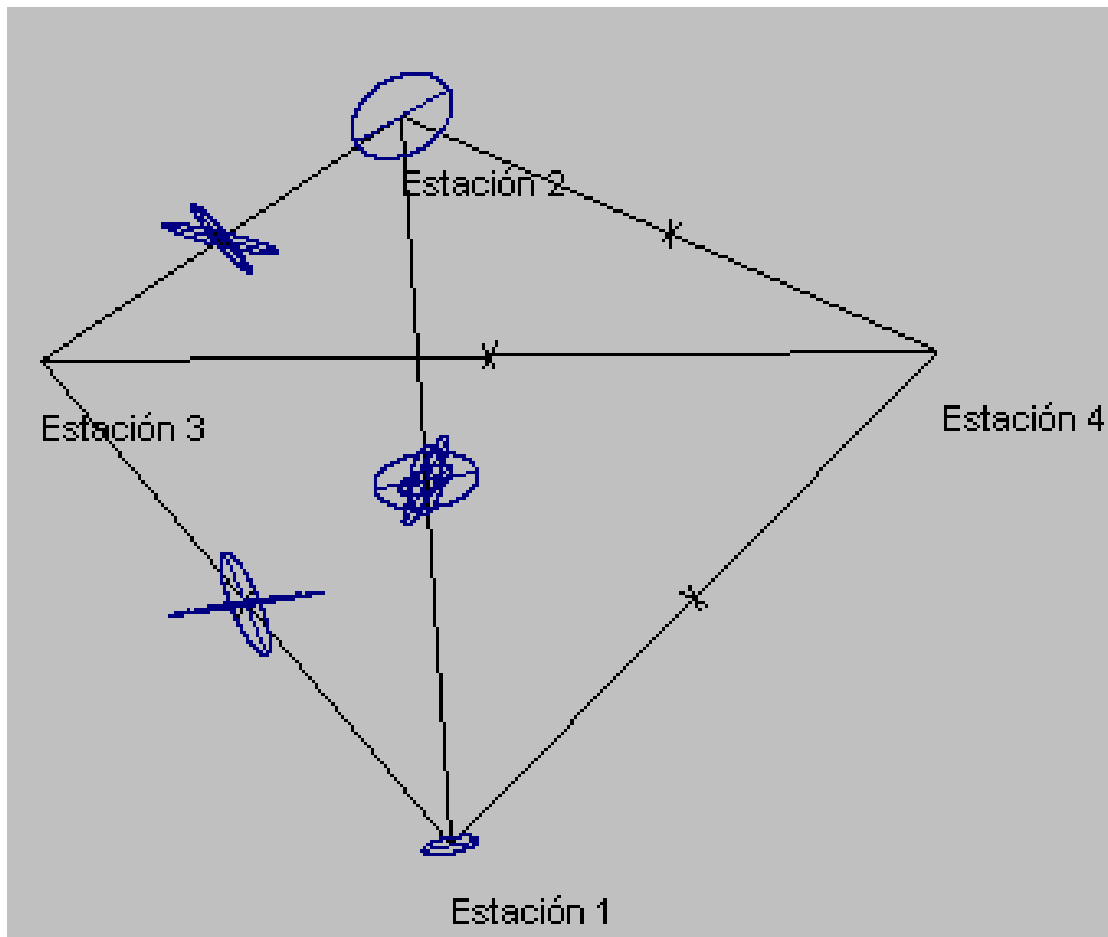
### 3.- METODO PROYECCIONES DE LAS SECCIONES PRINCIPALES

ELIPSES CORRELATIVAS CON FACTOR HOMOTECIA = 5.16

Variables Semieje mayor Acimut semieje Semieje menor Acimut semieje

1	2	0.0060 mts	87.2250 gra	0.0016 mts	187.2250 gra
	3	0.0074 mts	8.0039 gra	0.0034 mts	108.0039 gra
	4	0.0112 mts	90.6411 gra	0.0060 mts	190.6411 gra
	5	0.0117 mts	174.9099 gra	0.0030 mts	74.9099 gra
2	3	0.0107 mts	27.8916 gra	0.0020 mts	127.8916 gra
	4	0.0061 mts	71.9765 gra	0.0024 mts	171.9765 gra
	5	0.0168 mts	90.3314 gra	0.0004 mts	190.3314 gra
3	4	0.0115 mts	66.3485 gra	0.0081 mts	166.3485 gra
	5	0.0096 mts	154.9310 gra	0.0013 mts	54.9310 gra
4	5	0.0127 mts	114.8214 gra	0.0014 mts	14.8214 gra

Y la representación gráfica es:



## 8.- APLICACIÓN DE UNA MATRIZ DE DISEÑO DE ELEMENTOS EXACTOS.

### 8.1 INTRODUCCIÓN.

En el primer apartado de esta tesis doctoral, se ponía de manifiesto la influencia del vector  $b$ , y las matrices  $S$  y  $S^{-1}$  sobre el vector de las incógnitas.

En este apartado se van a tratar dos aspectos, en primer lugar, deducir la metodología que nos permite calcular  $\|\delta b\|$  y  $\|\delta S\|$ , necesarias para aplicar las expresiones (88), (114), (115), y (116) deducidas en el primer bloque de esta tesis doctoral.

Posteriormente, y mediante una aplicación práctica, se valoraran numéricamente los resultados obtenidos de las expresiones anteriores. Es aquí donde se pone de manifiesto estudiar una alternativa en la configuración de la matriz de diseño  $A$ , y donde se propone una nueva configuración de la misma cuya característica principal es que  $\delta A = 0$ .

De esta idea nace la aplicación de una matriz de diseño de elementos exactos en planimetría.

### 8.2 PREPARACIÓN DE LOS DATOS.

Para nuestros efectos tan solo nos interesa el algoritmo mínimo cuadrático, hipótesis Gauss-Markov, caso observaciones indirectas.

Es decir, el que corresponde al modelo matemático de tipo

$$F(X) - C = 0$$

Desarrollable linealmente por Taylor en la forma

$$Ax - K = R$$

Ponderado según una matriz diagonal  $P$  conocida a priori, que suponemos formada por las inversas de las varianzas de los observables que representamos según el vector  $O_T$  y compuesta exclusivamente la matriz de diseño  $A$  por observaciones de ángulo y/o de distancia, de expresiones conocidas a priori.

Utilizaremos también el vector  $K$  de términos independientes en la forma

$$K = O_T - O_{Ca}$$

Donde  $O_{Ca} = F(X_a) =$  vector de observables calculados

Todo ello con la notación y formulación conocida y usualmente empleada y aceptada.

En el cumplimiento riguroso de cuanto antecede, tan solo nos será preciso calcular las expresiones diferenciales de error.  $\delta S$  y  $\delta b$ , según ya vimos y, lo que es más importante, al haber sustituido la inversión, clásica o generalizada, de la matriz  $S$  por sumatorios parciales de términos de series enteras, bastará con el cálculo con números aproximados de productos de matrices de estructura conocida para disponer de toda la información y realizar todos los cálculos necesarios, hasta las conclusiones finales.

Los valores aproximados de  $\delta S$  y  $\delta b$ , según es preceptivo, se obtendrán:

- ∪ Aplicando la teoría clásica de cálculo con números aproximados a instrumentos y métodos de observación utilizados en el ajuste de que se trate.
- ∪ Complementando con la aplicación de los errores de redondeo propios del hardware y software disponible..

### 8.3.- CALCULO DE $\delta S$ .

Expresemos la matriz de diseño  $S$  en su forma usual, en función de la matriz  $A$ , de igual denominación, y la matriz de los pesos. Se tendrá:

$$S_{\text{exacta}} = S_{\text{aprox.}} + \delta S = S + \delta S \quad (309)$$

Del mismo modo

$$A_{\text{exacta}} = A_{\text{aprox.}} + \delta A = A + \delta A \quad (310)$$

Y aceptando  $P$  como exacta, tendremos:

$$\begin{aligned} S_{\text{exacta}} &= (A + \delta A)^T P (A + \delta A) = (A^T + \delta A^T) P (A + \delta A) = \\ &= A^T P A + (A^T P \delta A + \delta A^T P A + \delta A^T P \delta A) = S + \delta S \end{aligned} \quad (311)$$

de donde

$$\delta S = A^T P \delta A + \delta A^T P A + \delta A^T P \delta A \quad (312)$$

que generalmente puede reducirse a

$$\delta S = A^T P \delta A + \delta A^T P A \quad (313)$$

y a la muy cómoda expresión

$$\delta S = A^T \delta A + \delta A^T A \quad (314)$$

si previamente se reduce a peso unidad, según siempre es posible.

Finalmente, es inmediato escribir las normas

$$\| \delta S \| = \| A^T P \delta A + \delta A^T P A + \delta A^T P \delta A \| \quad (315)$$

$$\| \delta S \| = \| A^T P \delta A + \delta A^T P A \| \quad (316)$$

$$\| \delta S \| = \| A^T \delta A + \delta A^T A \| \quad (317)$$

de aplicación a las expresiones de error deducidas en epígrafes anteriores.

#### 8.4.- CALCULO DE $\delta b$ .

Con un razonamiento totalmente análogo se tiene sucesivamente

$$\begin{aligned} b_{\text{exacto}} &= (A + \delta A)^T P (K + \delta K) = (A^T + \delta A^T) P (K + \delta K) = \\ &= A^T P K + (A^T P \delta K + \delta A^T P K + \delta A^T P \delta K) = K + \delta K \end{aligned} \quad (318)$$

$$\delta b = A^T P \cdot \delta K + \delta A^T \cdot P K + \delta A^T \cdot P \cdot \delta K \quad (319)$$

$$\delta b = A^T P \cdot \delta K + \delta A^T \cdot P K \quad (320)$$

$$\delta b = A^T \cdot \delta K + \delta A^T \cdot K \quad (321)$$

Así como

$$\| \delta b \| = \| A^T P \cdot \delta K \| + \| \delta A^T \cdot P K \| + \| \delta A^T \cdot P \cdot \delta K \| \quad (322)$$

$$\| \delta b \| = \| A^T P \cdot \delta K \| + \| \delta A^T \cdot P K \| \quad (323)$$

$$\| \delta b \| = \| A^T \cdot \delta K \| + \| \delta A^T \cdot K \| \quad (324)$$

despreciando infinitesimos de segundo orden, y reduciendo a peso unidad respectivamente.

$\delta K$  puede calcularse fácilmente teniendo en cuenta que

$$K = O_T - O_{Ca}$$

$$O_{Ca} = F(X_a)$$

De donde

$$\delta K = \delta O_T - \delta O_{Ca} \quad (325)$$

$$\delta K = \delta O_T - \sum \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_{Xa} dX \quad (326)$$

siendo

$$\delta O_T = \text{vector a priori de precisión instrumental observada} \quad (327)$$

$$\delta O_{Ca} = \text{vector a priori de precisión instrumental calculada} \quad (328)$$

Que se expresan generalmente en suma de valores absolutos o en media cuadrática, por ser desconocida la dirección de los errores elementales. Es decir:

$$| \delta K | = | \delta O_T | + | \delta O_{Ca} | \quad (329)$$

$$| \delta K | = | O_T | + \left| \sum \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_{Xa} dX \right| \quad (330)$$

o bien

$$| \delta K |^2 = | O_T |^2 + \left| \sum \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_{Xa} dX \right|^2 \quad (331)$$

En cualquier ajuste la determinación cuidadosa de (327) es preceptiva a priori . En cuanto a (328), volveremos sobre ello de inmediato, al tratar de la matriz de diseño A.

### 8.5.- CALCULO DE $\delta A$ .

El trabajo desarrollado ha quedado reducido en síntesis a la determinación más cercana a la realidad física que nos sea dado lograr de la matriz  $\delta A$  , diferencial o de error previsible de la de diseño A. Es decir, cumpliéndose en el límite la expresión (310).

Según ya se dijo, aceptamos que la matriz A estará compuesta por los coeficientes de las formas lineales de observación correspondientes a observables de ángulo y distancias.

Ocupándonos en primer lugar de ángulos horizontales y distancias reducidas, con la notación corrientemente empleada, los coeficientes serán los del desarrollo lineal por Taylor del vector  $O_{Ca}$  de observables calculados a priori. Es decir, se tendrá sucesivamente:

$$C = F(X)$$

$$O_{Ca} + \delta O_{Ca} = F(X_a + \delta X) = F(X_a) + \sum \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_{x_a} dX \quad (332)$$

Siendo  $X_a$  = vector de coordenadas aproximadas a priori

Y con la notación acostumbrada, haremos  $\delta X = x$  y escribiremos:

$$\delta O_{Ca} = \sum \left( \frac{\partial F}{\partial X} \right)_{x_a} x = Ax \quad (333)$$

Que son los conocidos coeficientes de las formas lineales citadas anteriormente y que, según teoría conocida,[Chueca et.al. 1996] tendrán la expresión siguiente:

oPara una forma lineal de ángulo  $\angle ijk$  , con vértice en j, y sentido dextrorsum de ejes ij y jk., los seis coeficientes respectivos de  $x_i$  ,  $y_i$  ,  $x_j$  ,  $y_j$  ,  $x_k$  ,  $y_k$  , que serán los elementos no nulos de la fila correspondiente al observable angular citado de la matriz A , situados en la columnas definidas por las coordenadas indicadas y en el orden expuesto, son:

$$\frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}^2} - \frac{X_j - X_i}{l_{ij}^2} - \left( \frac{Y_k - Y_i}{l_{jk}^2} + \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}^2} \right) \left( \frac{X_k - X_j}{l_{jk}^2} + \frac{X_j - X_i}{l_{ij}^2} \right) \frac{Y_k - Y_j}{l_{jk}^2} - \frac{X_k - X_j}{l_{jk}^2} \quad (334)$$

Y para una forma lineal de distancia reducida  $ij$ , con las mismas consideraciones efectuadas en el caso anterior, se siguen los cuatro coeficientes, a saber:

$$-\frac{X_j - X_i}{l_{ij}^2} \quad -\frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}^2} \quad \frac{X_j - X_i}{l_{ij}^2} \quad \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}^2} \quad (335)$$

El problema se traslada ya pura y simplemente, al mejor conocimiento que nos sea dado alcanzar de la precisión a priori del vector de coordenadas aproximadas  $X_a$ . Un asequible cálculo posterior con números aproximados nos dará todos los elementos de  $\delta A$ .

Es remarcable la insuficiente atención que se ha prestado, incluso en trabajos encuadrados dentro de la más alta precisión, a la cuestión planteada, en claro deterioro de la fiabilidad en la interpretación de los resultados propuestos. Conocer la precisión asociada a cada elemento de  $\delta A$  (y también de  $\delta b$ , por supuesto) es esencial para valorar la importancia posterior del redondeo que, en ocasiones, puede no ser decisiva.

### 8.5.1.- EJEMPLO DE APLICACIÓN.

Consideremos la pequeña red utilizada a lo largo del Texto “Tratado de Topografía” de Chueca-Herráez-Berné. Datos en pag.121 y sig., Tomo III. Refiriéndonos al mismo , el vector  $X_a$  será el siguiente:

$$X_a = \begin{pmatrix} X_A \\ Y_A \\ X_B \\ Y_B \\ X_C \\ Y_C \\ X_D \\ Y_D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 199.94\ 79 \\ 599.77\ 48 \\ 1300.07\ 68 \\ 199.83\ 64 \\ 603.17\ 00 \\ 1670.19\ 00 \\ 1794.70\ 00 \\ 798.60\ 00 \end{pmatrix}$$

Supongamos que cada elemento de la matriz es exacto hasta las centésimas (centímetros) y que no se pierde la exactitud de dicha cifra al restar o sumar dos coordenadas. Así, separamos con un espacio las cifras exactas de cada elemento de la matriz.

Consideremos en la matriz A los coeficientes de la forma lineal de ángulo  $\angle_{ijk} \equiv \angle DBC$ .

El primer miembro de la forma lineal sin ponderar , expresando todos los elementos (coeficientes) de la fila correspondiente de A será:

$$278,42262\ x_B - 689,62456\ y_B + 353,54643\ x_C + 167,57120\ y_C - \mathbf{631,96905\ x_D} + 522,05337\ y_D$$

Elijamos un elemento cualquiera, p.ej. el señalado en negrita y escribiremos:

$$\rho \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}^2} = \rho \frac{Y_B - Y_D}{l_{DB}^2} = \rho \frac{Y_B - Y_D}{(Y_B - Y_D)^2 + (X_B - X_D)^2} = \rho \frac{598,763}{776,640^2} = 636620 \frac{598,763}{776,640^2} =$$

$$\rho \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}^2} = 631,96905$$

Con abstracción del signo que a nuestros efectos es indiferente.

Se trata de averiguar el número de cifras exactas de la expresión anterior.

Aplicando la teoría clásica de cálculo con números aproximados[Parellada. 1942] escribiremos sucesivamente:



Con la notación corrientemente empleada,

E = error absoluto, e = error relativo

Se tendrá:

$$M = \frac{N}{D} = \rho \frac{Y_j - Y_i}{l_{ij}^2} = 631,96905$$

$$e_M = e_N + e_D \leq \frac{1}{a \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{6 \cdot 10^{n-1}}$$

Donde:

a = primera cifra significativa de la izquierda de M

n = número de cifras exactas de M

$$N = \rho(Y_B - Y_D) = \rho \cdot 598,763 = \rho \cdot \Delta_y$$

$$e_N = e_{\Delta_y}$$

$$e_N = \frac{0,01}{598,763} = 1,6701 \cdot 10^{-5} \leq \frac{1}{5 \cdot 10^{n-1}}$$

$$10^{n-1} \leq 11975,26$$

$$n-1 \leq \log 11975,26 = 4,078$$

$$n \leq 5,078 = 5 \text{ cifras exactas}$$

$$D^2 = (Y_B - Y_D)^2 + (X_B - X_D)^2 = \Delta_y^2 + \Delta_x^2$$

$$E_D = E_{\Delta_y^2} + E_{\Delta_x^2}$$

$$E_{\Delta_y^2} \leq \frac{\partial (Y_B - Y_D)^2}{\partial (Y_B - Y_D)} d(Y_B - Y_D) \approx \frac{\partial (Y_B - Y_D)^2}{\partial (Y_B - Y_D)} E_{(Y_B - Y_D)}$$

Y así mismo

$$E_{\Delta_x^2} \leq \frac{\partial (X_B - X_D)^2}{\partial (X_B - X_D)} d(X_B - X_D) \approx \frac{\partial (X_B - X_D)^2}{\partial (X_B - X_D)} E_{(X_B - X_D)}$$

Con lo que, particularizando valores

$$E_{\Delta_y^2} \leq 2 \cdot 598,763 \cdot 0,01 = 11,975$$

Y tambien

$$E_{\Delta_x^2} \leq 2 \cdot 494,623 \cdot 0,01 = 9,892$$

Pero se tendrá

$$E_D = E_{\Delta_y^2} + E_{\Delta_x^2} \leq 11,975 + 9,892 = 21,8677$$

Y finalmente

$$e_D = \frac{E_D}{D^2} = \frac{21,8677}{776,640^2} = \frac{21,8677}{603169,0423} = 3,6255 \cdot 10^{-5} \leq \frac{1}{3 \cdot 10^{n-1}}$$

De donde es inmediato

$$10^{n-1} \leq 9194.134142$$

$$n - 1 \leq \log 9194.134142 = 3,9635108$$

$$n \leq 4.9651 = 4 \text{ cifras exactas}$$

y definitivamente

$$e_M = e_N + e_D \leq \frac{1}{5 \cdot 10^{5-1}} + \frac{1}{3 \cdot 10^{4-1}} = \frac{1}{50000} + \frac{1}{3000} = \frac{53}{150000} = 3.53337 \cdot 10^{-4}$$

$$e_M = 3.53337 \cdot 10^{-4} \leq \frac{1}{6 \cdot 10^{n-1}}$$

$$0.00212 \cdot 10^{n-1} \leq 1$$

$$10^{n-1} \leq 471.6981132$$

$$n-1 \leq \log 471.69811 = 2.673664$$

resultando

$$n \leq 3,673664 = 3 \text{ cifras exactas}$$

y la expresión del error relativo

$$e_M \leq \frac{1}{6 \cdot 10^{3-1}} = \frac{1}{600}$$

y el error absoluto será

$$E_M \leq e_M \cdot M = \frac{1}{600} 631,96905 = 1,05$$

pudiéndose escribir por tanto

$$A_{pq} + \delta A_{pq} = 631,96905 \pm 1,05$$

Y el elemento de  $\delta A$  buscado, en valor absoluto será

$$\delta A_{pq} = 1,05$$

que resuelve el problema. La repetición del algoritmo completa la matriz  $\delta A$ .

La interpretación física de los cálculos realizados es sencilla e importante. Efectivamente, cualquier forma lineal de

$$Ax - K = R$$

que puede desarrollarse según el sumatorio

$$\sum_{\substack{pq=mn, r=H, \dots \\ pq=1; r=A, B, C, \dots}} A_{pq} x_r - K = R_p$$

presenta en cada término una dimensión angular (diezmiligrados en nuestro caso).

Realicemos ahora el mismo proceso pero para los términos de la matriz de diseño A, correspondientes a la ecuación de lado.

La forma general de la ecuación de lado es:

$$\text{sen } \theta_{ij} dx_j - \text{sen } \theta_{ij} dx_i + \text{cos } \theta_{ij} dy_j - \text{cos } \theta_{ij} dy_i = l_{obs} - l_{cal} + r_{ij}$$

particularizando para nuestro eje AB, con  $D_{AB} = 1170.46$  m., la ecuación quedará:

$$-0.93982 dx_A + 0.34166 dy_A + 0.93982 dx_B - 0.34166 dy_B = -0.11 + r_{AB}$$

sabiendo que:

$$\text{sen } \theta_{AB} = \frac{x_B - x_A}{l_{AB}} = -0.93982$$

Calcularemos el error relativo de este término de la ecuación de lado:

E = error Absoluto, e = error relativo.

$$M = \frac{N}{D} = \frac{x_B - x_A}{l_{AB}} = -0.93982$$

$$e_M = e_N + e_D \leq \frac{1}{a \cdot 10^{n-1}} = \frac{1}{9 \cdot 10^{n-1}}$$

$$N = x_B - x_A = 1100.1289$$

$$e_N = e_{\Delta x} = \frac{0.01}{1100.1289} = 9.0898 \cdot 10^{-6} \leq \frac{1}{9 \cdot 10^{n-1}}$$

$$10^{n-1} \leq 12223.71352$$

$$n-1 \leq \log 12223.71352 = 4.087203$$

$n \leq 5.087203 = 5$  cifras exactas

$$D = [(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2]^{1/2}$$

$$E_D^2 = \left( \frac{\partial D}{\partial \Delta x} \right)^2 \sigma_{\Delta x}^2 + \left( \frac{\partial D}{\partial \Delta y} \right)^2 \sigma_{\Delta y}^2$$

despreciando el término de covarianza.

Operando sobre la expresión anterior obtendremos:

$$E_D \leq \frac{\Delta x}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} d(x_B - x_A) + \frac{\Delta y}{(\Delta x^2 + \Delta y^2)^{1/2}} d(y_B - y_A)$$

$$E_D \leq 0.93982 * 0.01 + 0.34166 * 0.01 = 0.01281$$

Y finalmente:

$$E_D = \frac{E_D}{D} = \frac{0.01281}{1170.57} = 1.0947 \cdot 10^{-5} \leq \frac{1}{1.10^{n-1}}$$

$$10^{n-1} \leq 91349.2281$$

$$n-1 \leq \log 91349.2281 = 4.960704882$$

$n = 5$  cifras exactas.

Y definitivamente:

$$e_M = e_N + e_D \leq \frac{1}{9.10^{5-1}} + \frac{1}{1.10^{5-1}} = \frac{1}{90000} + \frac{1}{10000} = 1.11 \cdot 10^{-4}$$

$$e_M = 1.11 \cdot 10^{-4} \leq \frac{1}{9.10^{n-1}}$$

$$10^{n-1} \leq 1010.10101$$

$$n-1 \leq 3.00436$$

$n \leq 4.00436 = 4$  cifras exactas

y la expresión del error relativo:

$$e_M = \frac{1}{9.10^{4-1}} = \frac{1}{9000}$$

y el error absoluto será:

$$E_M \leq e_M * M = \frac{1}{9000} 0.93982 = 1.0442 \cdot 10^{-4}$$

Pudiéndose escribir por tanto:

$$A_{pq} + \delta A_{pq} = 0.993982 \pm 1.0442 \cdot 10^{-4}$$

Y el elemento  $\delta A$  buscado, valdrá en valor absoluto:

$$\delta A = 1.0442 \cdot 10^{-4}$$

únicamente cabe señalar, que el término  $\delta A$  en las ecuaciones de lado es mucho menos, del orden de 15 veces, que el calculado en las ecuaciones de ángulo.

En las ecuaciones de ángulo, el término

$$\mathbf{631,96905 \cdot x_D}$$

del que solo se pueden tomar como exactas las cifras enteras es una magnitud angular expresada en dmgr. Su simple cálculo introduce en el término un error que debería ser despreciable. Pero su valor absoluto resulta

$$\delta A_{pq, x_D} = \mathbf{1,05 \cdot x_D}$$

despreciable si  $x_D$  es pequeño. En nuestro caso  $x_D$  se expresa en metros y la corrección resulta tan solo de unos pocos centímetros. Pero si la corrección fuera alcanzado o superara los 25-30 cm., circunstancia a la que generalmente no se presta atención, el efecto del término considerado será agregar un error de puro cálculo “ab inicio” en el entorno de 0,5 dmgr. Como la forma lineal tiene seis términos, cada forma lineal puede agregar en las condiciones indicadas hasta 2-3 dmgr de error, que se incrementará a lo largo de las operaciones matemáticas del algoritmo. Es claro que esta situación es inaceptable.

Resulta pues esencial vigilar la calidad no solamente del vector  $X_a$ , sino también del previsible vector de correcciones “x”, sacando del general olvido y teniendo siempre presente que la mejor solución mínimo cuadrática Gauss-Markov, según se ha demostrado con todo rigor, es la  $|x| = \text{mínimo}$ , como de nuevo resulta clarísimo en virtud de lo expuesto.

En general, el único camino viable es abandonar la , en nuestra opinión, reprochable costumbre de realizar un cálculo casi expedito para obtener las coordenadas aproximadas y sustituirlo por un verdadero ajuste previo. En casos de alta precisión, elevar a norma imprescindible la realización previa de una o varias campañas bien proyectadas, como afortunadamente ya se hace en algún trabajo de excelencia.

Por otra parte, la interpretación, tanto a priori como a posteriori de  $X_a$  y  $x$  requiere ser mejorada. Nos proponemos aportar una sensible mejora al problema revisando las actuales figuras de error y proponiendo otras nuevas, con criterios más rigurosos, basadas en los diversos hiperelipsoides de incertidumbre que más adelante se propondrán.

### 8.6.- CALCULO DE $\delta K$ .

Según (325):

$$\delta K = \delta O_T - \delta O_{Ca} = \delta O_T - \sum \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_a} dx$$

$\delta O_T$  =vector a priori de la precisión a priori observada.

Que para el problema que estamos tratando, y para observaciones angulares es 10 dmgr. Y para precisión lineal 0.01m.

En el caso de observaciones angulares la Función resulta ser:

$$F \equiv \alpha_{ca} = ar \cot g \frac{x_{i+1} - x_{ii} - x_{i-1} - x_{ii}}{y_{i+1} - y_i - y_{i-1} - y_i}$$

Entonces, el término  $\sum \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_a} dx$  resulta ser el sumatorio de cada uno de

los términos de la ecuación de ángulo multiplicado por la precisión a priori de las coordenadas, que estableceremos en 0.01m.

En el caso de las observaciones lineales la función resulta ser:

$$F \equiv l_{ij}^2 = (x_j - x_i)^2 - (y_j - y_i)^2$$

Entonces, el término  $\sum \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_a} dx$  resulta ser el sumatorio de cada uno de

los términos de la ecuación de lado multiplicado por la precisión a priori de las coordenadas, que estableceremos en 0.01m.

Para el mismo ejemplo anterior, aplicado a las ecuaciones de ángulo:

$$\begin{aligned} \sum \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_a} dx &= 4.37 \cdot 10^{-4} \cdot 0.01 + 1.083 \cdot 10^{-3} \cdot 0.01 + 5.55 \cdot 10^{-4} \cdot 0.01 + \\ &+ 2.63 \cdot 10^{-4} \cdot 0.01 + 9.92 \cdot 10^{-4} \cdot 0.01 + 8.02 \cdot 10^{-4} \cdot 0.01 = 4.15 \cdot 10^{-5} \text{ rad} \\ &\Leftrightarrow 26.4244 \text{ dmgr.} \end{aligned}$$

En la ecuación de lado, el tratamiento será similar:

$$\begin{aligned} \sum \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_a} dx &= 0.9398 \cdot 0.01 + 0.34166 \cdot 0.01 + 0.93982 \cdot 0.01 + \\ &0.34166 \cdot 0.01 = 0.025 \text{ m.} \end{aligned}$$

Si la precisión angular a priori de ese observable es  $\delta O_T = 10$  dmgr:

$$\delta K = \delta O_T - \delta O_{Ca} = -16.4244 \text{ dmgr.}$$

Y para la observación distanciométrica:

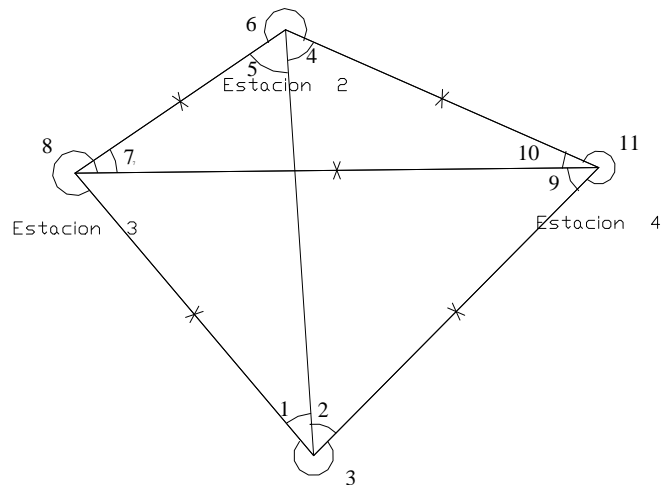
$$\delta K = \delta O_T - \delta O_{Ca} = -0.0156 \text{ m.}$$

## 8.6.- APLICACIÓN DE CALCULO DE LAS MATRICES $\delta b$ Y $\delta S$ SOBRE UN RED

A continuación vamos a aplicar toda la teoría desarrollada en este apartado sobre la red en la que habitualmente venimos trabajando.

Posteriormente, y una vez calculados las normas matriciales y vectoriales de  $S$ ,  $S^{-1}$  y  $b$ , acabaremos el ejemplo planteado en el apartado 7 de esta tesis, calculando ya definitivamente la influencia del vector  $b$ , matriz  $S$  y  $S^{-1}$  sobre las soluciones.

En primer lugar recordemos la red sobre la que estamos trabajando:



Formada por cuatro puntos, de los cuales ninguno vamos a considerar como fijo. Se han realizado 11 mediciones angulares y 5 distanciométrica, donde la precisión de los primeros es de 8 dmgr, y de los segundos 0.006m.

En primer lugar nos calcularemos el **vector  $\delta k$  y su norma**.

Calculamos el vector  $\delta k$  empleando la siguiente expresión:

$$\delta K = \delta O_T - \delta O_{Ca} = \delta O_T - \sum \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_a} dx$$

Considerando un error a priori en las coordenadas de  $dx = 0.01m$ , el vector  $\sum \left( \frac{\partial F}{\partial x} \right)_{x_a} dx$  resulta ser:



1.0e-007 \*

0.00000000639679  
-0.10000000258631  
0.09999999619602  
0.00000000141814  
0.00000000213371  
0.09999999690726  
0.000000001137328  
-0.000000001137328  
0.00000000102267  
0.00000000252944  
0.09999999975004  
0  
0.000000000000000  
0  
0  
0.000000000000000

Calculémonos ahora el vector  $\delta O_T$ :

8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
0.006000000000000  
0.006000000000000  
0.006000000000000  
0.006000000000000  
0.006000000000000

Ya por último, el vector  $\delta k$

8.000000000000000  
8.000000010000000  
7.999999900000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
7.999999900000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
8.000000000000000  
7.999999900000000  
0.006000000000000  
0.006000000000000  
0.006000000000000  
0.006000000000000  
0.006000000000000

Y la norma de este vector resulta:

$$\|\delta k\| = 26.53300170881539$$

Calculémonos ahora el vector  $\delta b$  y su norma. La expresión que nos lo calcula es:

$$\delta b = A^T P \cdot \delta K + \delta A^T \cdot PK$$

operando obtenemos la siguiente solución:

1.0e+002 \*

-0.09587831155958  
-2.45698196902287  
-0.15250269896103  
1.56315008193408  
-4.11371103644226  
0.31791991777606  
4.36484629531594  
0.53292424898981

y la norma de este vector resulta:

$$\|\delta b\| = 6.698673846436484e+002$$

Paralelamente, es necesario también calcular la norma del vector  $b$ :

Recordemos que el vector  $b = A^T P K$  resulta:

```
1.0e+003 *  
  
-0.70672244372327  
-0.68830830955450  
0.29775904944438  
-0.25027924737050  
-1.38057700587544  
0.04238680458293  
1.78954040010725  
0.89620075191838
```

y su norma:

$$\|b\| = 2.652912594934888e+003$$

Calculémonos ahora la matriz  $\delta S$  y su norma:

Para este cálculo emplearemos la expresión:

$$\delta S = A^T P \delta A + \delta A^T P A$$

operando obtendremos:

1.0e+002 \*

Columns 1 through 4

-0.00037707580435	-0.03509222810039	-0.07222891812738	-0.04096067867600
-0.03509222810039	-0.16390572994018	-0.06175579040688	-0.00966739981816
-0.07222891812738	-0.06175579040688	0.37800686430432	0.11709248332562
-0.04096067867600	-0.00966739981816	0.11709248332562	3.53222784719749
-0.00070066833209	0.00616202950717	0.11734877773531	0.79612282503897
0.07107678917807	0.04390520655711	-0.31269458694904	-0.94595223854822
-0.00026020068629	0.00449248404939	-0.02443081746734	-0.28773296667405
0.00178504360009	-0.00327225573962	-0.11712968787492	-0.77289203872121

Columns 5 through 8

-0.00070066833209	0.07107678917807	-0.00026020068629	0.00178504360009
0.00616202950717	0.04390520655711	0.00449248404939	-0.00327225573962
0.11734877773531	-0.31269458694904	-0.02443081746734	-0.11712968787492
0.79612282503897	-0.94595223854822	-0.28773296667405	-0.77289203872121
-0.57464648657956	-0.21418256678016	0.00250638886171	-0.01818253656061
-0.21418256678016	0.01027655665624	0.00287404894369	-0.01165957966707
0.00250638886171	0.00287404894369	0.15254757463664	0.08812533890815
-0.01818253656061	-0.01165957966707	0.08812533890815	0.02047794112647

Y su norma:

$$\|\delta S\| = 4.092086836286689e+002$$

Ya por último calculemos la matriz  $\delta S^{-1}$  y su norma:

La matriz inversa de  $\delta S$  resulta:

Columns 1 through 4

0.53614632191386 -0.08306582312133 0.21559657664416 -0.00591060505225  
 -0.08306582312133 -0.05077488743633 -0.05593306324175 0.00249925012991  
 0.21559657664416 -0.05593306324175 0.06907042717360 -0.00549815239905  
 -0.00591060505225 0.00249925012991 -0.00549815239905 0.00107151547483  
 -0.06994450883856 0.01793928123918 -0.00730193396811 0.00188649455116  
 0.34039239343652 -0.08618218611187 0.04505246551500 -0.00368479711951  
 0.40252987012482 -0.09908972640942 0.06718333596680 0.00297446927273  
 -0.66031287187217 0.16885146030622 -0.11307527524459 -0.00324687170378

Columns 5 through 8

-0.06994450883856 0.34039239343652 0.40252987012482 -0.66031287187217  
 0.01793928123918 -0.08618218611187 -0.09908972640942 0.16885146030622  
 -0.00730193396811 0.04505246551500 0.06718333596680 -0.11307527524459  
 0.00188649455116 -0.00368479711951 0.00297446927273 -0.00324687170378  
 -0.01633552510856 0.00196802690879 0.00860074754144 -0.01144255417364  
 0.00196802690879 0.00604148512925 0.02777875215780 -0.04269022831885  
 0.00860074754144 0.02777875215780 0.12367771141910 -0.06752501677192  
 -0.01144255417364 -0.04269022831885 -0.06752501677192 0.06652917601640

y su norma matricial:

$$\|\delta S^{-1}\| = 1.30108693102334$$

Para terminar con nuestro cometido, bastará con aplicar los resultados obtenidos sobre el estudio de la influencia del vector y matrices  $b, S$  y  $S^{-1}$  sobre las soluciones. Para ello elaboraremos una tabla similar a la que indicamos en la pagina 85.

	NEUMANN	CONVENCIONAL
<b>VECTOR b</b> $\frac{\ \delta x\ }{\ x\ } = a \frac{\ \delta b\ }{\ b\ }$	0.5713918642	0.5713861425
<b>MATRIZ S</b> $\frac{\ \delta x\ }{\ x + \delta x\ } max = a \ \delta S\ $	926.7058284	0.0071155788
<b>MATRIZ S<sup>-1</sup></b> $\frac{\ \delta x\ }{\ x\ } = a \ \delta S^{-1}\ $	0.2934640468	34060.45289

## 8.8.- APLICACIÓN DE UNA MATRIZ DE DISEÑO DE ELEMENTOS EXACTOS.

La solución mínima norma euclídea del vector  $Ax$  en el espacio normado definido por la ecuación general  $Ax-K = R$  permite al proyectista elegir  $A$  según mejor convenga al diseño del proyecto emprendido. Es evidente que una matriz de diseño  $A$  exacta en todos sus elementos ( $\delta A = 0$ ) es una alternativa al método más generalmente empleado que, a lo menos, merece la pena ser explorada.

Dicho desideratum es satisfecho por la forma lineal genérica:

$$\Delta X_{ijC} = \Delta X_{ijO} + R_{ij} \quad (336)$$

donde

$$\Delta X_{ijC} = (X_{jc} - X_{ic}) = \text{diferencia de coordenadas compensadas en el eje } ij$$

$$\Delta X_{ijO} = (X_{jo} - X_{io}) = \text{diferencia de coordenadas observadas en el eje } ij$$

Se trata del caso teórico de compensación con variables o parámetros tratados como observables. Es bien conocida su aplicación en nivelación, presentando de entrada la ventaja de permitir la resolución de redes tridimensionales con formas lineales perfectamente homogéneas en las tres dimensiones.

Puede escribirse por tanto la forma lineal de aplicación

$$X_{jc} - X_{ic} = \Delta X_{ijO} + R_{ij} \quad (337)$$

Todo se reduce a utilizar los observables, que por cierto realmente se leen en cualquier instrumento moderno:

$$\Delta X_{ijO} = D_{r_{ijO}} \text{ sen } \theta_{ijO} \quad (338)$$

$$\Delta Y_{ijO} = D_{r_{ijO}} \text{ cos } \theta_{ijO} \quad (339)$$

$$\Delta Z_{ijO} = D_{r_{ijO}} \text{ ctg } V_{ijO} \quad (340)$$

donde

$D_{r_{ijO}}$  = Distancia reducida del eje  $ij$

$\theta_{ijO}$  = Azimut del eje  $ij$

$V_{ijO}$  = Ángulo vertical de la visual  $ij$ .

explicitándose las tres coordenadas del espacio  $R^3$ .

Resolviendo el ajuste se obtendrán directamente las coordenadas compensadas, como incógnitas del problema.

Es conveniente sin embargo tener en cuenta que el modelo adoptado supone que no existe o es despreciable la rotación en el ajuste de la red, quedando éste geoméricamente definido tan solo por tres traslaciones elementales según los ejes de coordenadas, cuya orientación permanece invariable. Ello puede ser particularmente interesante en ajuste espacial de deformaciones y ajustes GPS. Y mixtos GPS-clásicos.

Con ello se disminuyen en tres los grados de libertad (rotaciones elementales alrededor de los tres ejes) en el caso más general. Por otra parte se independizan las tres coordenadas, pudiendo ser ajustadas por separado.

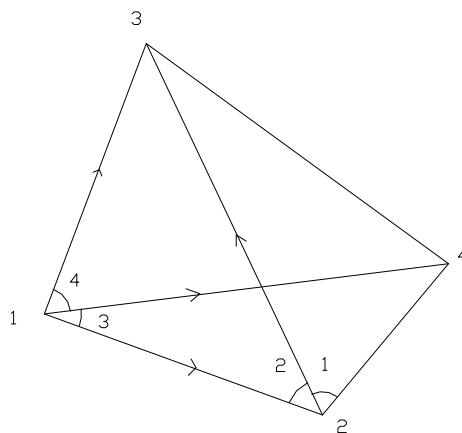




### 8.8.1 EJEMPLO DE APLICACIÓN.

Se va a proceder a compensar un red local de alta precisión empleando el algoritmo de matrices de diseño exactas. Posteriormente se compensará esta misma red empleando el algoritmo tradicional con el objetivo de comprobar la unicidad de la solución.

La red con la que se va a trabajar es la siguiente:



Donde los ángulos observados son los siguientes:

$$2 = 49.6247$$

$$3 = 30.0942$$

$$4 = 69.1690$$

y las distancias observadas:

$$12 = 1170.46$$

$$14 = 1607.00$$

$$23 = 1627.10$$

$$13 = 1143.90$$

En la observación de esta red, se ha trabajado con un instrumento que tiene una precisión angular por visual de  $10^{\text{cc}}$ , y lineal de 0.01 m.

Como partida, conocemos las coordenadas aproximadas de los puntos de la red, siendo estas:

VÉRTICE	X	
1	199.9479	599.7748
2	1300.0768	199.8364
3	603.1700	1670.1900
4	1794.7000	798.6000

Coordenadas en metros.

Con el objetivo de calcular los incrementos de coordenadas que van a formar las ecuaciones de nuestro sistema, partiremos del  $\theta_1^3 = 22.93215$  y posteriormente nos calculamos el resto de los acimutes:

$$\begin{aligned}\theta_1^4 &= 92.10115 & \theta_1^2 &= 22.93215 \\ \theta_2^3 &= 371.82005\end{aligned}$$

Con estos datos y las distancias observadas, obtenemos los incrementos de coordenadas siguientes:

$$\begin{aligned}\Delta x_1^2 &= 1100.04150 & \Delta y_1^2 &= -399.8565964 \\ \Delta x_1^4 &= 1594.64632 & \Delta y_1^4 &= 198.8770879 \\ \Delta x_1^3 &= 403.199196 & \Delta y_1^3 &= 1070.484759 \\ \Delta x_2^3 &= -696.94228 & \Delta y_2^3 &= 1470.279957\end{aligned}$$

Todos los incrementos de coordenadas están expresados en metros.

### **PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.**

#### *CASO TRADICIONAL..*

$$\begin{array}{ll} \text{Número de ecuaciones} & m=8 \\ \text{Número de incógnitas} & n=8 \\ \text{Defectos de rango de la matriz A} & d=2 \end{array}$$

Los defectos de rango de la matriz A en el caso tradicional, van a ser dos, ya que debemos fijar el  $\theta_1^3 = 22.93215$ , con lo cual, solamente nos queda los defectos de rango de la traslación en x, y en y.

$$\begin{aligned}R(A) &= n - d = 6 \\ \text{Grados de libertad } m-R(A) &= 2.\end{aligned}$$

#### *CASO DE LA MATRIZ DE DISEÑO EXACTA.*

$$\begin{array}{ll} \text{Número de ecuaciones} & m=8 \\ \text{Número de incógnitas} & n=8 \\ \text{Defectos de rango de la matriz A} & d=2 \end{array}$$

$$\begin{aligned}R(A) &= n - d = 6 \\ \text{Grados de libertad } m-R(A) &= 2.\end{aligned}$$

**COMPENSACIÓN CASO DE MATRIZ DE DISEÑO EXACTA.**

El sistema de ecuaciones sin ponderar se expone a continuación:

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1100.041506 \\ 1594.646326 \\ 403.1991961 \\ -696.9442279 \\ -399.8565964 \\ 198.8770879 \\ 1070.484759 \\ 1470.279957 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r_{12x} \\ r_{14x} \\ r_{13x} \\ r_{23x} \\ r_{12y} \\ r_{14y} \\ r_{13y} \\ r_{23y} \end{pmatrix}$$

Para el cálculo de los pesos aplicaremos las expresiones:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= (\text{sen } \theta_{ij})^2 \sigma_{Dij}^2 + (D_{ij} \cos \theta_{ij})^2 \sigma_{\theta_{ij}}^2 \\ \sigma_y^2 &= (\cos \theta_{ij})^2 \sigma_{Dij}^2 + (-D_{ij} \text{sen } \theta_{ij})^2 \sigma_{\theta_{ij}}^2 \end{aligned}$$

sabiendo que:

$$\begin{aligned} \sigma_{Dij}^2 &= 0.001 \\ \sigma_{\theta_{ij}}^2 &= 100 \text{ dmgr}^2 \text{ por visual} \rightarrow 2.46 \cdot 10^{-10} \text{ rad}^2 \end{aligned}$$

luego:

$$\begin{aligned} P_{xij} &\propto \frac{1}{\sigma_{xij}^2} \\ P_{yij} &\propto \frac{1}{\sigma_{yij}^2} \end{aligned}$$

Paralelamente se debe de considerar que el  $\theta_1^3$  se considera exacto, luego en las expresiones anteriores habrá que tener en cuenta que  $\sigma_{\theta_{13}}^2 = 0$ , para las ecuaciones que se refieren al eje 13, obteniendo:

$$\begin{aligned} \sigma_x^2 &= (\text{sen } \theta_{ij})^2 \sigma_{Dij}^2 \\ \sigma_y^2 &= (\cos \theta_{ij})^2 \sigma_{Dij}^2 \end{aligned}$$

A partir de estos datos nos podemos construir la tabla de varianzas y pesos:

ij	$\sigma_{xij}^2$	$P_{xij}$	$\sigma_{yij}^2$	$P_{yij}$
12	$9.22 \cdot 10^{-4}$	1083.8637	$4.1438 \cdot 10^{-4}$	2413.1911
14	$9.9441 \cdot 10^{-4}$	1005.6173	$6.4086 \cdot 10^{-4}$	1560.3828
13	$1.2424 \cdot 10^{-4}$	8048.9	$8.75 \cdot 10^{-4}$	1141.866
23	$7.1525 \cdot 10^{-4}$	1398.1028	$9.3601 \cdot 10^{-4}$	1068.3546

Resolviendo el sistema de ecuaciones obtenemos el siguiente resultado:

La matriz **S** resulta:

1.0e+004 \*

Columns 1 through 4

1.01383811900000	-0.10838639000000	-0.80489000000000	-0.10056172900000
-0.10838639000000	0.24819667690000	-0.13981028690000	0
-0.80489000000000	-0.13981028690000	0.94470028690000	0
-0.10056172900000	0	0	0.10056172900000
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Columns 5 through 8

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.51154399000000	-0.24131911000000	-0.11418660000000	-0.15603828000000
-0.24131911000000	0.34815456700000	-0.10683545700000	0
-0.11418660000000	-0.10683545700000	0.22102205700000	0
-0.15603828000000	0	0	0.15603828000000

La matriz  $S^+$

1.0e-003 \*

Columns 1 through 4

0.10497164884911	-0.02117849846824	0.05983872269236	-0.14363187307323
-0.02117849846824	0.29222107642912	-0.00126055757030	-0.26978202039058
0.05983872269236	-0.00126055757030	0.13018663410792	-0.18876479922998
-0.14363187307323	-0.26978202039058	-0.18876479922998	0.60217869269379
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Columns 5 through 8

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.11471240595081	-0.01035526507598	-0.05885245137957	-0.04550468949526
-0.01035526507598	0.20182983663119	-0.02090221103316	-0.17057236052205
-0.05885245137957	-0.02090221103316	0.29882420923837	-0.21906954682564
-0.04550468949526	-0.17057236052205	-0.21906954682564	0.43514659684294

Ya por último las soluciones  $x$ , con respecto al baricentro de la figura, sabiendo que este tiene coordenadas (0,0) al realizarse el ajuste como red libre:

1.0e+002 \*

-7.74483301318580  
 3.25611567715442  
 -3.71291291078284  
 8.20163024681420  
 -2.17373131439396  
 -6.17218298858149  
 8.53087473836940  
 -0.18496043539396

A partir de las coordenadas aproximadas del problema obtenemos el baricentro de la figura en el sistema marcado por estas.

Baricentro ( 974.47367 ; 817.1003 )

---

Luego las coordenadas compensadas serán:

- 1 ( 199.9903689 ; 599.72717 )
- 2 ( 1300.08524 ; 199.8820013 )
- 3 ( 603.1823789 ; 1670.187774 )
- 4 ( 1794.636695 ; 798.6042563 )

Y el vector desplazamiento lo obtenemos como diferencia de estas coordenadas compensadas con respecto a las iniciales del problema, resultando:

- 1 ( 0.0424689 ; -0.04763 )
- 2 ( 0.00844 ; 0.0456013 )
- 3 ( 0.0123789 ; -0.002226 )
- 4 ( -0.063305 ; 0.042563 )

Continuando con los resultados del ajuste, el vector de los residuos resulta:

0.05336303402123  
0  
-0.00718585970412  
0.04136910627471  
0.01142898124675  
-0.00000000000014  
-0.02415372366477  
0.02581569508857

El estimador de la varianza de la medición de peso unidad es  
3.79407383739168

Y la matriz varianza covarianza de variables o parámetros:

0.00039827018657	-0.00008035278695	0.00022703253223	-0.00054494993184
-0.00008035278695	0.00110870834081	-0.00000478264850	-0.00102357290536
0.00022703253223	-0.00000478264850	0.00049393770245	-0.00071618758618
-0.00054494993184	-0.00102357290536	-0.00071618758618	0.00228471042338
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

Columns 5 through 8

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.00043522733824	-0.00003928864030	-0.00022329054605	-0.00017264815189
-0.00003928864030	0.00076575730277	-0.00007930453202	-0.00064716413044
-0.00022329054605	-0.00007930453202	0.00113376111425	-0.00083116603618
-0.00017264815189	-0.00064716413044	-0.00083116603618	0.00165097831851

Con covarianzas nulas entre los elementos xy como era de esperar.

De la misma forma que hemos realizado en el apartado anterior a continuación se va a proceder a comprobar la unicidad de la solución inversa generalizada  $S^{-} = \Gamma \text{diag}(\mu^{-1}, \delta) \Gamma^T$  para diferentes valores de  $\delta$  en los autovalores correspondientes a los defectos de rango, aplicada en el ajuste con matriz de diseño exacta.

En una primera prueba se va a dar valor 1 a los dos autovalores no significativos en el ajuste:

La matriz diagonal del sumatorio llevado al límite de los autovalores de la matriz (I-S):

## Columns 1 through 4

3.52509038199085	0	0	0
0	13.78156475321652	0	0
0	0	1.0000000000000000	0
0	0	0	0.00559206784716
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

## Columns 5 through 8

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
3.96420841828537	0	0	0
0	10.41871672232932	0	0
0	0	1.0000000000000000	0
0	0	0	1.50789687827941

La matriz de los autovectores será:



## Columns 1 through 4

0.44396951261435	0.17866214108151	-0.500000000000000	-0.72178314694453
-	0.42602688457661	-0.500000000000000	-0.01190388948381
0.75389614074692			
0.46033556511659	0.24708998012093	-0.500000000000000	0.69067916517919
-	-0.85177900577905	-0.500000000000000	0.04300787124915
0.15040893698402			
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

## Columns 5 through 8

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0.27174695305615	0.00749267739094	-0.500000000000000	-0.82225145380851
0.63090299437505	0.29410579472745	-0.500000000000000	0.51523120363224
-0.69701435219432	0.50797417798435	-0.500000000000000	0.07831492409663
-0.20563559523688	-0.80957265010274	-0.500000000000000	0.22870532607965

La matriz inversa generalizada:

## Columns 1 through 4

2.38764985245248	0.11915804898606	1.57604822047467	-2.08285612191320
0.11915804898606	5.75485794619771	0.47733193019586	-4.35134792537963
1.57604822047467	0.47733193019586	2.84107760322049	-2.89445775389102
-2.08285612191320	-4.35134792537963	-2.89445775389102	11.32866180118386
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0

## Columns 5 through 8

0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
0	0	0	0
2.56281269450921	0.31378672377851	-0.55831258544026	-0.31828683284746
0.31378672377851	4.12939947836238	0.12412660143726	-2.56731280357816
-0.55831258544026	0.12412660143726	5.87359809679993	-3.43941211279693
-0.31828683284746	-2.56731280357816	-3.43941211279693	8.32501174922256

Y la solución al sistema de ecuaciones:

1.0e+002 \*

-7.74483301319694  
3.25611567717949  
-3.71291291078560  
8.20163024680306  
-2.17373131439358  
-6.17218298857977  
8.53087473836693  
-0.18496043539358

Exactamente la misma que en el caso anterior, quedando comprobado también para la compensación de redes con matrices de diseño exacta, la unicidad de la solución para infinitas matrices inversas generalizadas.

### COMPENSACIÓN CASO TRADICIONAL.

Empleando las conocidas ecuaciones de ángulo y de lado, obtenemos la siguiente matriz de diseño A sin ponderar:

$$A = \begin{pmatrix} 185.8139 & 511.1270 & 167.7324 & -343.5558 & -353.5464 & -167.5711 & 0 & 0 \\ -234.8219 & -118.0403 & 185.81398 & 511.1270 & 0 & 0 & 49.0079 & -393.0866 \\ -471.8263 & -196.8899 & 0 & 0 & 520.8343 & -196.1966 & -49.00795 & 393.0866 \\ -0.9398 & 0.3416 & 0.9398 & -0.3416 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9923 & -0.1237 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.9923 & 0.1237 \\ 0 & 0 & 0.4282 & -0.9036 & -0.4282 & 0.9036 & 0 & 0 \\ -0.3525 & -0.9358 & 0 & 0 & 0.3525 & 0.9358 & 0 & 0 \\ -520.8344 & 196.1967 & 0 & 0 & 520.8344 & -196.1967 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

El vector de los términos independientes resulta:

$$\begin{pmatrix} -1.6 \cdot 10^{-3} \\ -6.4 \cdot 10^{-3} \\ 6.7 \cdot 10^{-3} \\ -0.1101 \\ -9.8 \cdot 10^{-2} \\ -5.1 \cdot 10^{-2} \\ 5.7 \cdot 10^{-2} \\ -25.6 \end{pmatrix}$$

Nótese como la última ecuación corresponde a la del  $\theta_1^3$ , acimut de partida y fijo.

Para ponderar el sistema de ecuaciones, emplearemos un peso angular de  $P_\alpha = 5 \cdot 10^{-3}$ , y un peso lineal de  $P_l = 10000$ .

La matriz de constreñimientos únicamente contemplará el desplazamiento en x, y en y, tal y como se había dicho anteriormente.

Las soluciones obtenidas se muestran a continuación:

### Calculo de la matriz $S = A^t P A$

2712685577052.4	-1021860268162.5	-08895.0	02291.7	-2712685558368.6	1021860267564.2	-09788.9	-01693.5
-1021860268162.5	384931619513.7	03530.0	-02347.0	1021860265840.8	-384931616858.7	-01208.3	-00308.0
-08895.0	03530.0	10980.3	-06894.5	-02130.9	03729.7	00045.5	-00365.2
02291.7	-02347.0	-06894.5	11229.3	04477.5	-07877.7	00125.2	-01004.6
-2712685558368.6	1021860265840.8	-02130.9	04477.5	2712685560627.0	-1021860271342.1	-00127.6	01023.6
1021860267564.2	-384931616858.7	03729.7	-07877.7	-1021860271342.1	384931625122.0	00048.0	-00385.6
-09788.9	-01208.3	00045.5	00125.2	-00127.6	00048.0	09870.9	01035.0
-01693.5	-00308.0	-00365.2	-01004.6	01023.6	-00385.6	01035.0	01698.2

### Calculo de la matriz $S^+ = (A^t P A + E^t E)^{-1} - E^t (E E^t)^{-1} (E E^t)^{-1} E$

0.00001610	0.0000129	-0.0000235	-0.0000175	0.00001248	0.0000033	-0.0000074	0.00000067
0.00001311	0.0000969	-0.0000504	-0.0000089	-0.0000025	0.0000555	0.00003989	-0.0001428
-0.00002355	-0.0000505	0.00010426	0.00004077	-0.0000214	-0.000045	-0.0000616	0.00005414
-0.00001735	-0.0000089	0.00004097	0.00009336	-0.0000127	0.0000033	-0.0000107	-0.0000871
0.00001248	-0.0000026	-0.0000214	-0.0000129	0.00001938	0.0000156	-0.0000127	-0.0000006
0.00000352	0.0000555	-0.0000448	0.00000331	0.00001583	0.0000882	0.00002558	-0.0001464
-0.00000737	0.0000397	-0.0000616	-0.0000109	-0.0000127	0.0000253	0.00007940	-0.0000548
0.00000087	-0.0001429	0.00005434	-0.0000871	-0.0000005	-0.000146	-0.0000546	0.00037704

### Calculo correcciones a variables o parámetros iniciales $x = S^+ A^t P k$

+00.05517199  
 -00.04646925  
 -00.03324798  
 +00.03118357  
 +00.02831797  
 +00.01272799  
 -00.05024405  
 +00.00255499

Nótese que hay únicamente una pequeña diferencia con respecto al vector de desplazamiento obtenido en el caso de la matriz de diseño exacta.

### Calculo de los Residuos $R = A x - K$

-41.93299092  
 -01.16981240  
 -01.17049660  
 +00.00045343  
 -00.00000003  
 +00.00746880  
 -00.01108956  
 -00.00080575

**Varianza del observable de peso unidad  $\sigma_0^2 = 8.54375$**

---

**Matriz varianza-covar. de variables o parametros corregidos  $\sigma_{.xx} = \sigma_0^2 S^+$** 

0.0001375	0.0001103	-0.0002012	-0.0001499	0.0001066	0.0000284	-0.0000629	0.0000057
0.0001120	0.0008279	-0.0004304	-0.0000760	-0.0000211	0.0004744	0.0003408	-0.0012206
-0.0002012	-0.0004320	0.0008907	0.0003483	-0.0001831	-0.0003842	-0.0005263	0.0004626
-0.0001482	-0.0000760	0.0003500	0.0007976	-0.0001089	0.0000283	-0.0000915	-0.0007443
0.0001066	-0.0000228	-0.0001831	-0.0001105	0.0001656	0.0001336	-0.0001090	-0.0000055
0.0000301	0.0004744	-0.0003825	0.0000283	0.00013530	0.0007536	0.0002185	-0.0012508
-0.0000629	0.0003391	-0.0005263	-0.0000932	-0.0001090	0.0002168	0.0006784	-0.0004681
0.0000074	-0.0012206	0.0004642	-0.0007443	-0.0000039	-0.0012508	-0.0004664	0.0032214

## 9.- CONCLUSIONES..

Para terminar la presente investigación se presentan las conclusiones alcanzadas, indicando las aportaciones más relevantes, apoyada cada una de ellas con desarrollos teóricos y resultados obtenidos a través de toda la investigación. Se ha estructurado las conclusiones de la misma forma que la tesis doctoral, extrayéndose por separado estas, por cada uno de los apartados considerados. Estas conclusiones serán:

### **I Estudio de la influencia del vector $b$ , y las matrices $S$ , $S^{-1}$ , $S^-$ y $S^+$ sobre el vector de las incógnitas $x$ .**

- 4 Se ha valorado la influencia del error de redondeo sobre el vector de las incógnitas  $x$ , del vector  $b=A^T P K$ , acotando el valor máximo y mínimo, y aplicando el problema tanto para el caso de redes libres como para el de redes ligadas.
- 4 Se ha valorado la influencia del error de redondeo sobre el vector de las incógnitas  $X$ , de la matriz  $S=A^T P A$  para los casos de redes libres o ligadas.
- 4 A lo largo del proceso de inversión de la matriz  $S$ , se producen multitud de operaciones aritméticas, cuyos errores de redondeo influyen notablemente en la solución del sistema de ecuaciones  $Ax - K = R$ . También a lo largo de esta tesis doctoral se ha desarrollado una expresión que permite valorar la influencia de estos errores sobre el vector  $x$ .

### **II Acceso a los mejores resultados. Método de la aproximación iterativa.**

- 4 Aplicación a las redes locales las series de Neumann, que permite, para matrices de rango completo, invertirlas sumando una serie de  $n$  elementos, lo que permitirá valorar y reducir considerablemente los errores de redondeo sobre el proceso de inversión de matrices.
- 4 Aplicación a las series de Neumann sobre matrices de rango incompleto, llegando a una matriz inversa generalizada  $M$ , con  $\mu$  autovalores significativos y  $\delta$  autovalores arbitrarios, coincidentes en número con el defecto de rango de la matriz  $S$ , cuya solución es la misma que con la pseudoinversa de una red libre genérica.

### **III. Ampliación sobre figuras de error en redes libres y ligadas.**

- 4 Las figuras de error clásicas son revisadas en diversos aspectos, especialmente por el hecho de no tener en cuenta más que la banda central de la matriz simétrica  $\sigma_{xx}$ . A través de esta tesis doctoral, se ha llegado a la determinación, mediante tres nuevos algoritmos, de unas nuevas figuras de error más rigurosas, donde se considera la matriz completa, en todos sus elementos. Las nuevas figuras descritas como “rosetas de vértice” y “correlativas” densifican además los puntos de control específico de error de la red, sea libre o ligada.

- 4 Establecimiento de una figura de error, representada por un hipercilindro elíptico recto, con  $n-d$  ejes reales y finitos, que será un hiperelipsoide de  $n$  ejes en el caso determinístico o de red ligada.

#### **IV. Desarrollo de los hiperelipsoides de observables.**

- 4 Contribución al problema de diseño de orden 2 con los hiperelipsoides de observables, cuyos semiejes coinciden con la precisión en los observables, que nos servirán para el establecimiento de unos nuevos pesos en un ajuste posterior.
- 4 Establecimiento de una nueva batería de test estadísticos que nos permitirán estudiar la compatibilidad estadística entre diversos estimadores de varianza de la medición de peso unidad, obtenidos a priori, y resultado de diferentes ajustes. También comparan individualmente varianzas de observables a priori, con las obtenidas después del ajuste.

#### **V. Aplicación de una matriz de diseño de elementos exactos.**

- 4 Resolución del sistema de ecuaciones  $Ax - K = R$ , proponiendo una matriz de diseño  $A$ , de elementos exactos, que disminuye notablemente los errores de redondeo.

---

## 10.- REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Baarda W. (1967): Statistical concepts in Geodesy. Netherlands Geodetic comision, New Series, Vol 2 N° 4.
- Baarda W. (1968): A testing procedure for use in Geodetic Networks. Netherlands Geodetic comision, New Series, Vol 2 N° 5.
- Baarda W. (1973): S-Transformations and criterion matrices. Netherlands Geodetic comision, New Series, Vol 5 N° 1.
- Berne J. L, Anquela A. B.(1999): Estudio de las figuras de error en redes Topo-Geodésicas. I Asamblea Hispano-Portuguesa de Geodesia y Geofísica. pp 133-138
- Björck A. (1990): Least square methods. Elsevier science Publishers B.V
- Bolshakov V, Galdayev P. (1977): Teoría de la elaboración matemática de mediciones geodésicas. Mir Moscú.
- Camacho A.G, Martín M.D (1986): Constreñimientos internos en la compensación de estaciones. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de ciencias matemáticas. Consejo superior de investigaciones científicas. Instituto de astronomía y Geodesia. N° 153.
- Chandrasekaran S, Ipsen I. (1995): On the sensitivity of solution components in linear systems of equations. Siam J. Matrix anal. Appl. Vol. 16, No 1, pp. 93-112, January 1995.Society for Industrial and Applid mathematics 007.
- Chueca M., Herraез J., Berné J.L. (1995): Ampliación de redes topográficas y locales. Cuestiones de diseño. Servicio de publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia. SPUPV 95.274
- Chueca M., Herraез J., Berné J.L. (1996a): Tratado de Topografía. Tomo 1. Teoría de errores e instrumentación. Ed. Paraninfo.
- Chueca M., Herraез J., Berné J.L. (1996b): Tratado de Topografía. Tomo 2.Métodos Topográficos. Ed. Paraninfo.
- Chueca M., Herraез J., Berné J.L. (1996c): Tratado de Topografía. Tomo 3. Redes Topográficas y locales. Microgeodesia. Ed. Paraninfo.
- De la Fuente J. L.(1993): Tecnologías computacionales para sistemas de ecuaciones. Ed. Reverté.
- Domingo A (1997): Apuntes de ajustes de observaciones. Escuela un Universitaria de Ingeniería Técnica Topográfica. (Fundación general Universidad politécnica de Madrid).



- García S. (2000): Diseño y ajuste de Redes Topográficas en ingeniería. Una aplicación informática. Tesis Doctoral. Universidad de Oviedo. Departamento de Explotación y prospección de minas.
- Henneberg H. (1986): Redes geodésicas de alta precisión. III Curso de geodesia superior. Compensaciones y resultados. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de ciencias matemáticas. Consejo superior de investigaciones científicas. Instituto de astronomía y Geodesia. Nº 150.
- Kincaid D, Cheney, W. (1991): Análisis numérico. Wesley Iberoamericana.
- Lauf G.B, (1981): The method of least squares with applications in surveying. Royal Melbourne Institute of Technology.
- Levallois J.J (1969): Méthodes générales et techniques fondamentales. Collection scientifique de l'institut géographique national.
- Linkwitz H (1986): Compensación de grandes redes geodésicas. III Curso de geodesia superior. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de ciencias matemáticas. Consejo superior de investigaciones científicas. Instituto de astronomía y Geodesia. Nº 149.
- Martinez F. M. (1982): Diseño óptimo y control de redes topográficas. Aplicaciones. Top-car 82. II Congreso nacional de Topografía y Cartografía.
- Mataix C. (1945): Manual de Geometría analítica. Editorial Dossat.
- Otero J. (1998): Generalized inverse matrices and the Gauss-Markov Theorem. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de ciencias matemáticas. Consejo superior de investigaciones científicas. Instituto de astronomía y Geodesia. Nº 192.
- Parellada (1942): Calculo con números aproximados. Editorial Dossat.
- Puerta F. (1976): Algebra lineal. Borxareau Editores.
- Romero R, Zunica, L (1996): Estadística. Diseño de experimentos. Modelos de regresión. Servicio de Publicaciones de la Universidad Politécnica de Valencia.
- Sevilla M. J, Romero P., Nuñez A., Bada B. (1988): Compensaciones y resultados. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de ciencias matemáticas. Consejo superior de investigaciones científicas. Instituto de astronomía y Geodesia. Nº 165.

- Sevilla M. J, Romero P.. (1989): Compensación de redes de nivelación trigonométrica. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de ciencias matemáticas. Consejo superior de investigaciones científicas. Instituto de astronomía y Geodesia. Nº 177.
- Sevilla M. J. (1989): Inversión de matrices simétricas en el método de mínimos cuadrados. Universidad Complutense de Madrid. Facultad de ciencias matemáticas. Consejo superior de investigaciones científicas. Instituto de astronomía y Geodesia. Nº 106 (segunda edición).
- Sevilla M. J (1993): Teoría de errores de observación. Física de la Tierra. Geodesia marina y geode. Editorial Complutense. Nº 5.
- Strang (1986): Algebra lineal y sus aplicaciones. Addison Wesley Iberoamericana.
- Strang G, Borre K. (1997): Linear algebra, Geodesy and G.P.S. Wellesley Cambridge Press.
- Stoer J, Bulirsch R. (1980): Introduction to numerical Analysis. Springer-Verlag.
- Wilkinson J.H (1988): The algebraic eigenvalue problem. Carendon Press.
- Wilkinson J.H (1994): Rounding errors in algebraic processes. Dover Publications, inc.

## ANEXO1. APLICACIÓN INFORMÁTICA RedTop.

### 1.- PANTALLA PRINCIPAL.

Al ejecutar RedTop se muestra en pantalla un formulario como el siguiente:

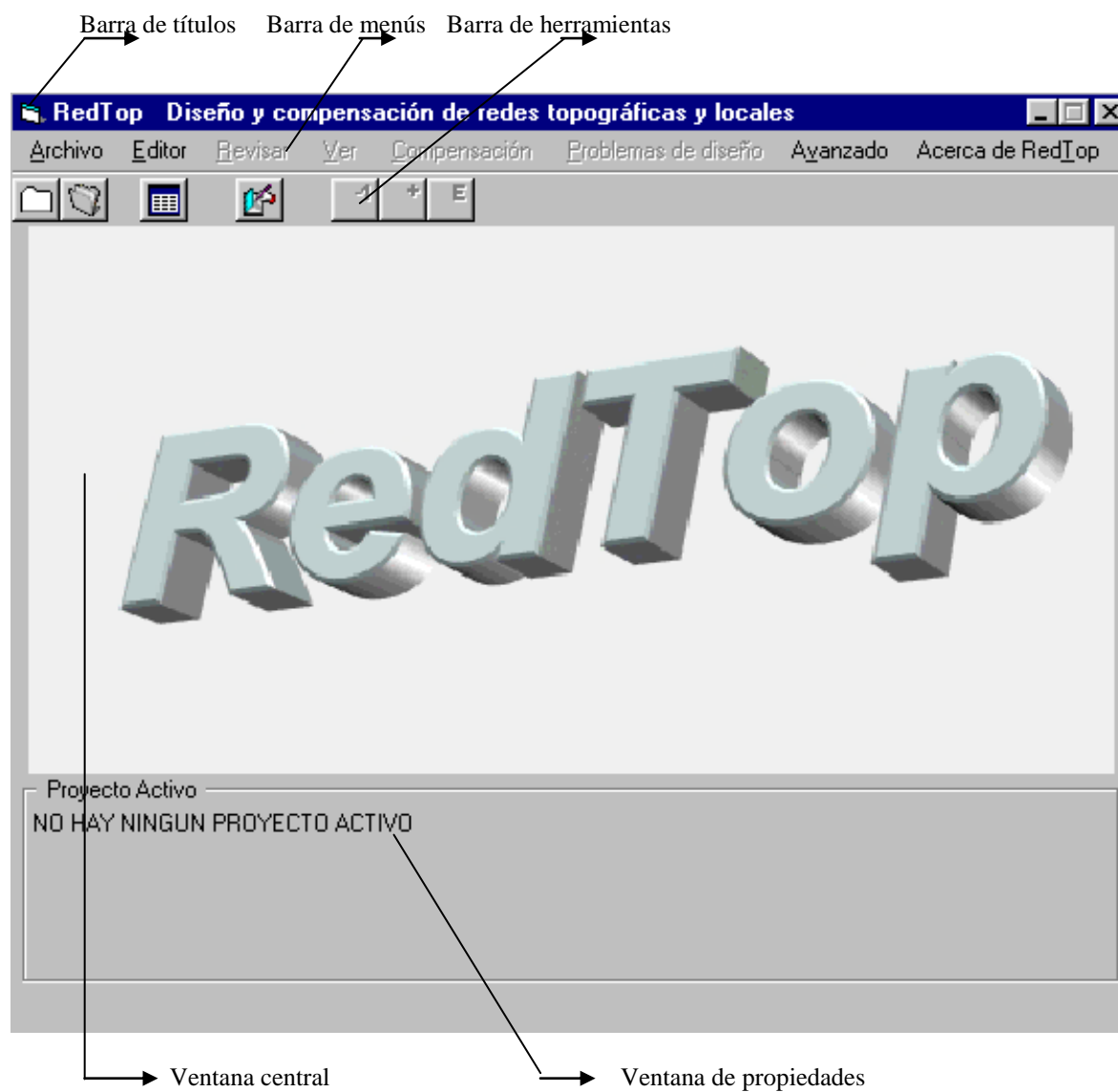


Figura 1. Pantalla inicial

### **4.1.1. Barra de títulos**

Es la barra horizontal situada en la parte superior de la pantalla, que contiene el nombre del programa, y en algunos formularios información adicional.

### **1.2. Barra de menús**

Es la barra que se encuentra a continuación de la de títulos. Proporciona el medio de acceso a todas las opciones del programa.

En determinados momentos, como en el de la figura que corresponde al arranque del programa, algunas opciones se encuentran desactivadas dado que no tiene sentido que sean utilizadas.

En la figura 1 lo están las correspondientes a los cálculos y visión de datos pues todavía no se ha abierto ningún proyecto.

Las letras subrayadas de los elementos del menú indican un modo de acceso rápido a ellos, mediante la pulsación de ALT + dicha letra. También algunas opciones dentro de los menús desplegables tienen una tecla de acceso rápido. Por ejemplo, con F6 se ejecuta la orden Opciones del menú Avanzado.

### **1.3. Barra de herramientas**

Contiene botones de acceso a las funciones más usadas del programa. Los botones, enumerados de izquierda a derecha son:

- Nuevo Proyecto
- Activar Proyecto
- Importar Matrices
- Editor de texto
- Compensación con matriz inversa clásica
- Compensación con pseudoinversa
- Compensación con matriz de constreñimientos.

No obstante, la función de cada botón se muestra si posamos el ratón sobre él unos breves instantes.

### **1.4. Ventana central**

Ocupa la mayor parte de la pantalla. No tiene más función que servir de fondo sobre el que se mostrarán los distintos mensajes de advertencia al usuario y cuadros de entrada.

### **1.5. Ventana de propiedades**

Contiene información relativa al proyecto activo en cada momento: Nombre del proyecto activo o de las matrices importadas, número de vértices y ecuaciones, o de ecuaciones e incógnitas, etc.

## 2. Menú Archivo



Figura 2. Menú Archivo

Contiene el acceso a elementos relacionados con la entrada de datos a la aplicación.

### 2.1. Nuevo Proyecto

Permite crear un proyecto nuevo, que no es más que un fichero ASCII en el que se han almacenado las coordenadas de los puntos fijos y variables, y los observables junto con sus pesos.

Al entrar en la opción Nuevo Proyecto se muestra un cuadro de diálogo tabulado, que no es más que tres fichas: una para introducir los datos de los vértices, otra para los observables y otra con las opciones para guardar el fichero.

Se muestra a continuación la ficha de coordenadas de los vértices:

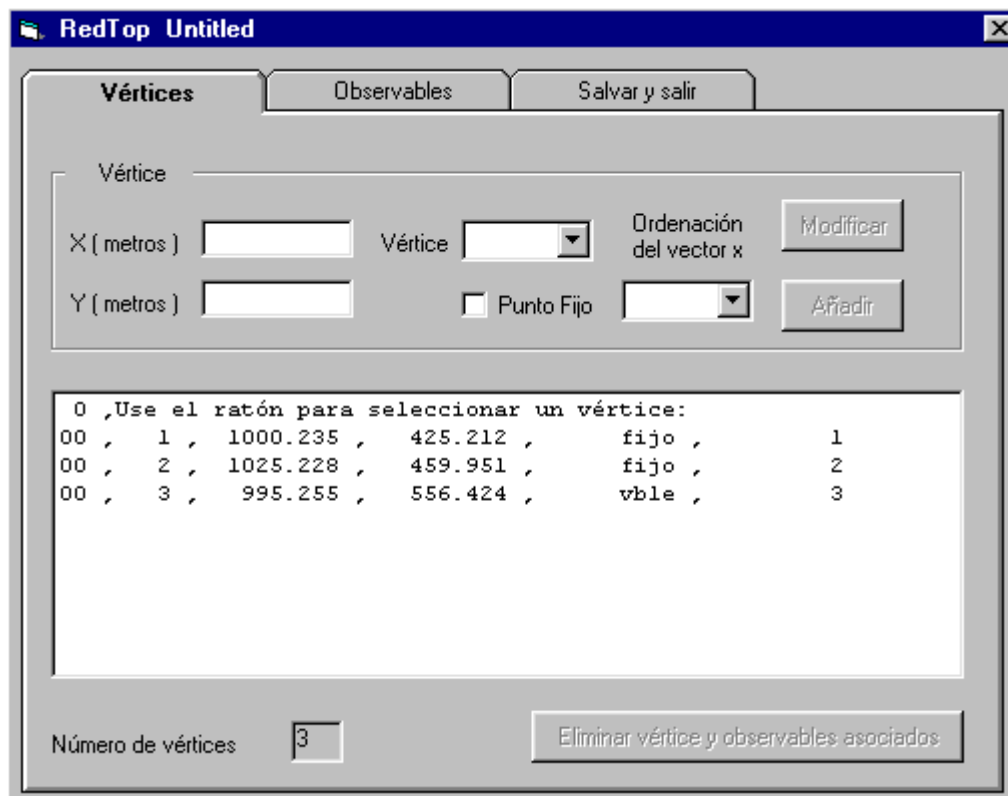


Figura 3. Nuevo Proyecto: introducción de las coordenadas.

La ficha Observables permite introducir las medidas realizadas en campo. Los ángulos deben introducirse en grados centesimales y las distancias en metros. El sentido de lectura de los ángulos es dextrorsum.

Con respecto a los pesos puede decirse que las observaciones del mismo tipo no han de tener necesariamente el mismo peso, puesto que los pesos se dan individualmente a cada observación.

RedTop Untitled

Vértices **Observables** Salvar y salir

Nuevo ángulo **Nueva distancia**

Pto inicial  Ecuacion  Añadir

Pto final  Distancia ( mts )

Peso  --> A todas ....

0 ,Use el ratón para seleccionar una ecuación:  
01 , 1 , 2 , 3 , 45.3655 , 0.005  
02 , 2 , 3 , 1 , 200.5695 , 0.005  
03 , -99 , 1 , 3 , 452.322 , 10000

Número de ecuaciones  Eliminar observable

Figura 4. Nuevo Proyecto: introducción de observables.

Por último, la página Salvar y Salir guarda el proyecto en disco, con el nombre deseado por el usuario.

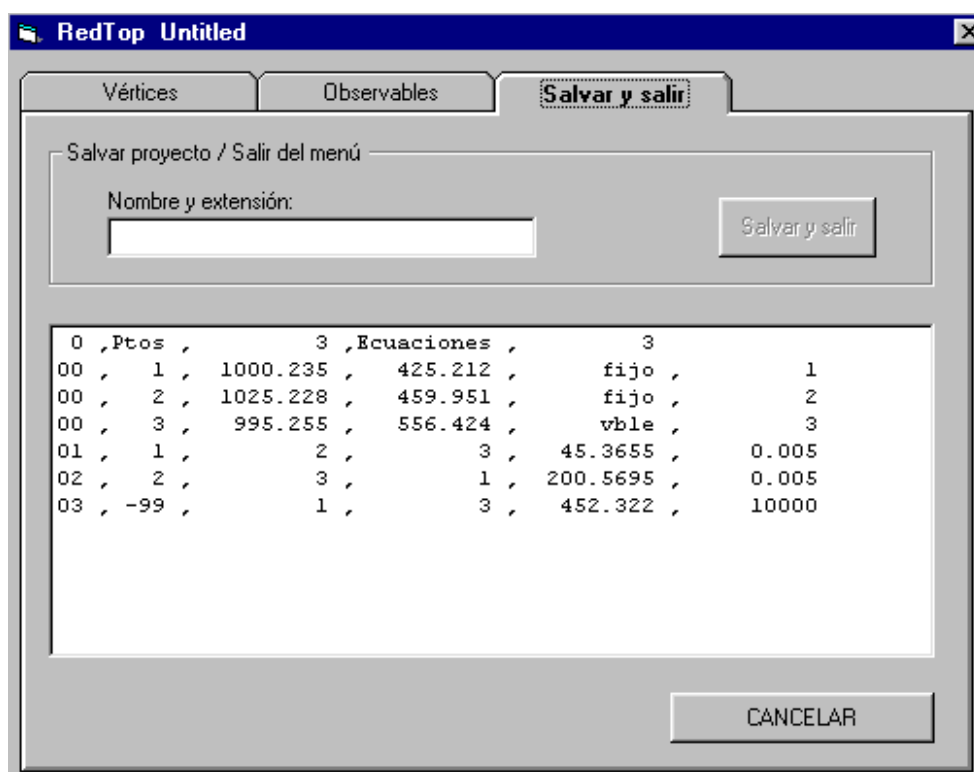


Figura 5. Nuevo Proyecto: salvar y salir.

## 2.2. Activar Proyecto

Permite abrir un proyecto almacenado para realizar los cálculos sobre él. Si lo que se desea es abrir el proyecto y modificar algún dato del mismo la opción apropiada sería Editar Proyecto.

El cuadro Abrir Proyecto permite al usuario moverse por las distintas unidades y carpetas y seleccionar el archivo deseado, del modo estándar en cualquier aplicación de Windows.

A continuación se muestra el cuadro Activar Proyecto.



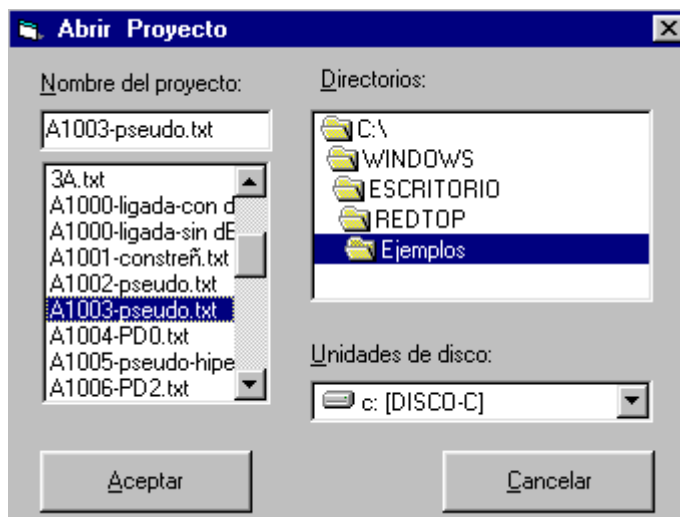


Figura 6. Activar Proyecto.

### 2.3. Editar Proyecto

Esta opción permite modificar los datos de un proyecto ya existente, para luego operar sobre ellos.

Tras un cuadro de selección de archivos como el de la figura 6 se muestra el de edición de datos, que es el mismo que ya vimos para la introducción (figuras 3 a 5).

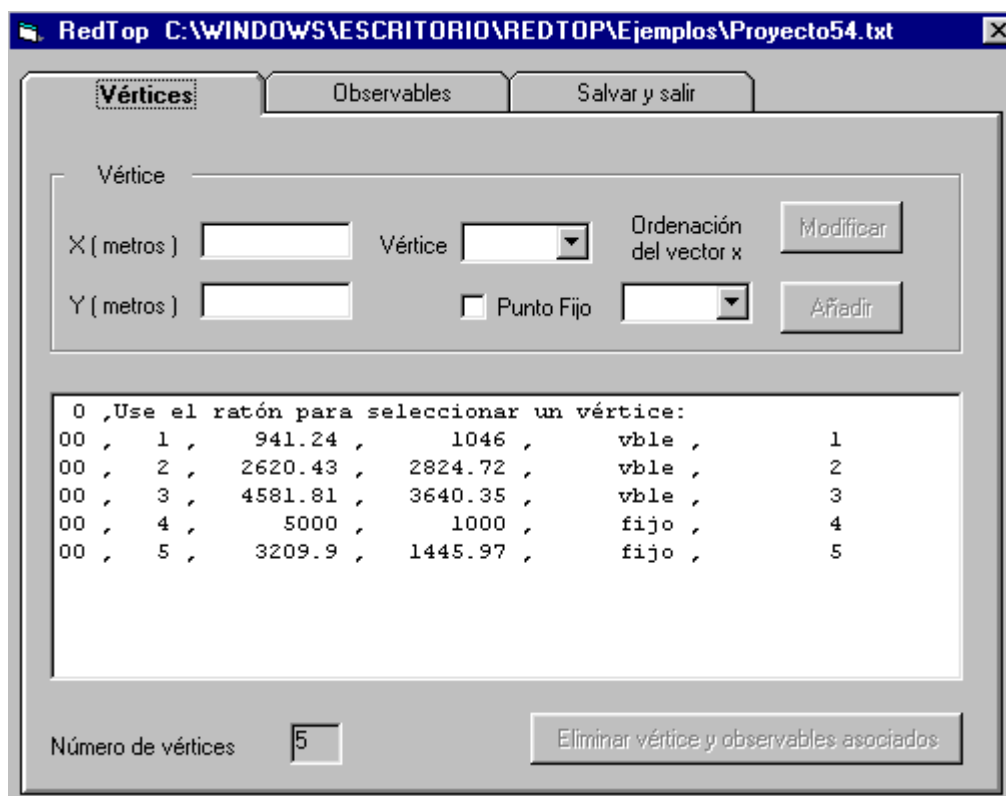


Figura 7. Editar Proyecto: menú de edición.

De este modo, una vez modificado el fichero puede ser guardado con otro nombre. En el caso de hacerlo con el nombre de un archivo ya existente el programa muestra un aviso para confirmar la sobrescritura.

## 2.4. Importar Matrices

El menú correspondiente a Importar Matrices permite designar los archivos que contienen los ficheros de texto de cada una de las matrices del sistema: matriz de diseño, A; matriz de términos independientes de las formas de observación, k; matriz de criterio de los pesos, P; y opcionalmente la matriz de constreñimientos, E.

Como ya se dijo con anterioridad, esta opción tiene gran flexibilidad: los ficheros de matrices son ficheros de texto en el que los elementos vienen en las distintas filas y separados en columnas por un punto y coma, o uno o varios espacios, o uno o varios tabuladores. Por otra parte, la existencia de un formato incorrecto o la incongruencia entre dimensiones de las matrices, además de la detección de una matriz de pesos no cuadrada o la de una ecuación entre puntos fijos en la matriz A, llaman al correspondiente mensaje informativo.

Mencionar también que el programa detecta e interpreta si el fichero de los pesos que se introduce contiene una matriz cuadrada de pesos o simplemente el vector con los elementos de la diagonal; así como la existencia de la incógnita de factor de escala, siempre que se introduzca en la última columna de la matriz A.

Cada botón **Examinar...** abre un cuadro de diálogo para la introducción del fichero de la matriz análogo al de la figura 6.

El botón de Introducir Coordenadas Aproximadas se utiliza si en la compensación se quiere obtener no sólo las correcciones sino también las coordenadas compensadas (por adición a las correcciones de las coordenadas aproximadas iniciales) y también si se quieren visualizar la red y sus figuras de error en el menú gráfico.

En la página siguiente se muestra el menú principal de Importar Matrices.

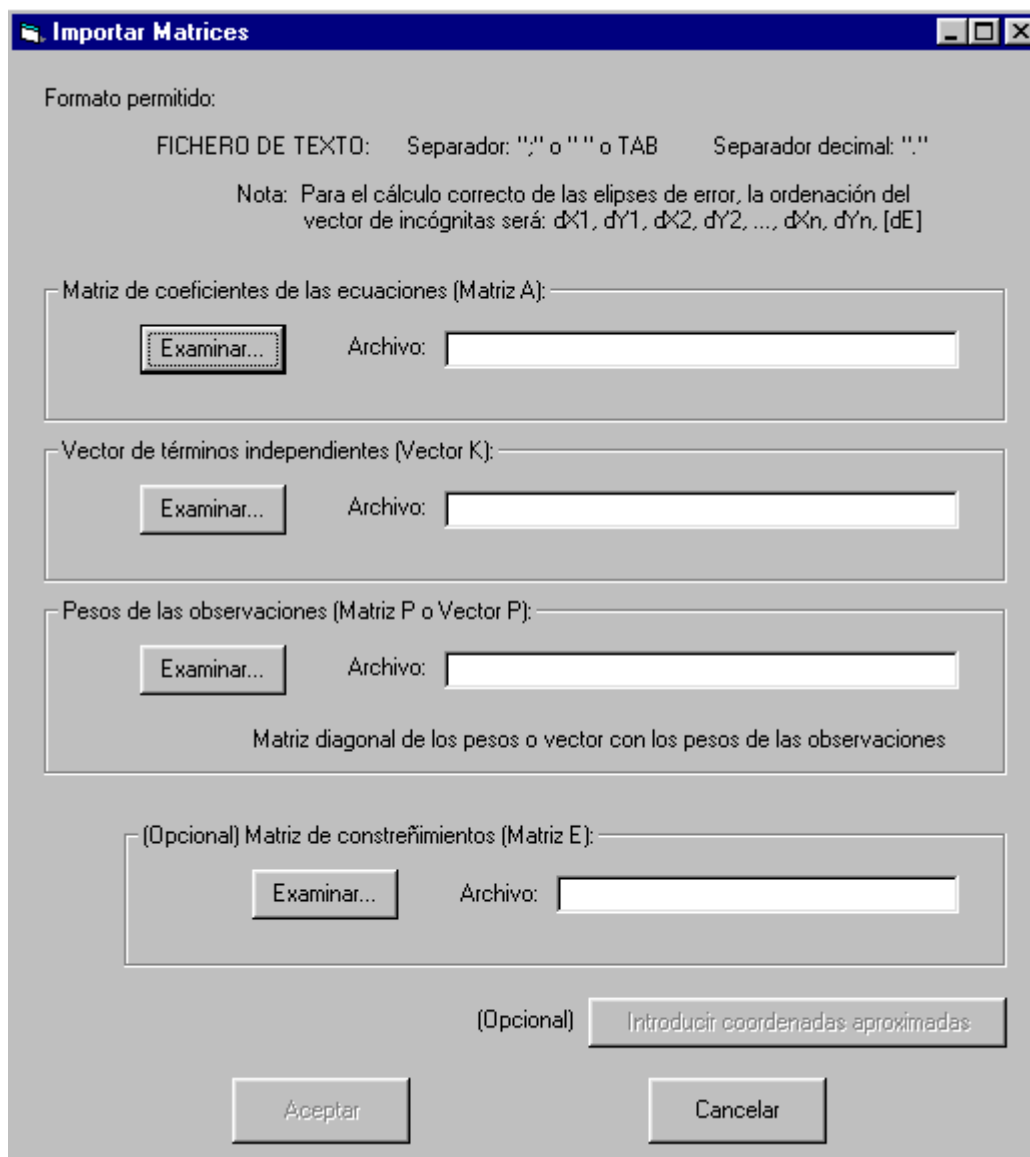


Figura 8. Importar Matrices.

### 3. Menú Editor: Editor de texto

RedTop tiene un módulo muy útil de edición de texto, muy similar al Bloc de Notas estándar de Windows.

En él se visualizan los ficheros de salida automáticamente tras la compensación y se puede utilizar para realizar cualquier otra operación relacionada con tratamiento de textos.

Es de importancia el menú Reemplazar > Reemplazar Caracteres, diseñado teniendo en consideración que, en el intercambio de datos entre distintas aplicaciones, pueden existir problemas con el hecho de

que algunas utilicen el '.' como separador decimal (es el caso, por ejemplo, de RedTop) y otras utilicen la ',' (como por ejemplo Excel). Con el menú Reemplazar caracteres es inmediato cambiar todas las comas por puntos o viceversa.

Los archivos se pueden imprimir, por supuesto, y se pueden utilizar distintos estilos y tipos de letra. Las opciones clásicas de Copiar, Cortar y Pegar, se encuentran implementadas también en el Editor.

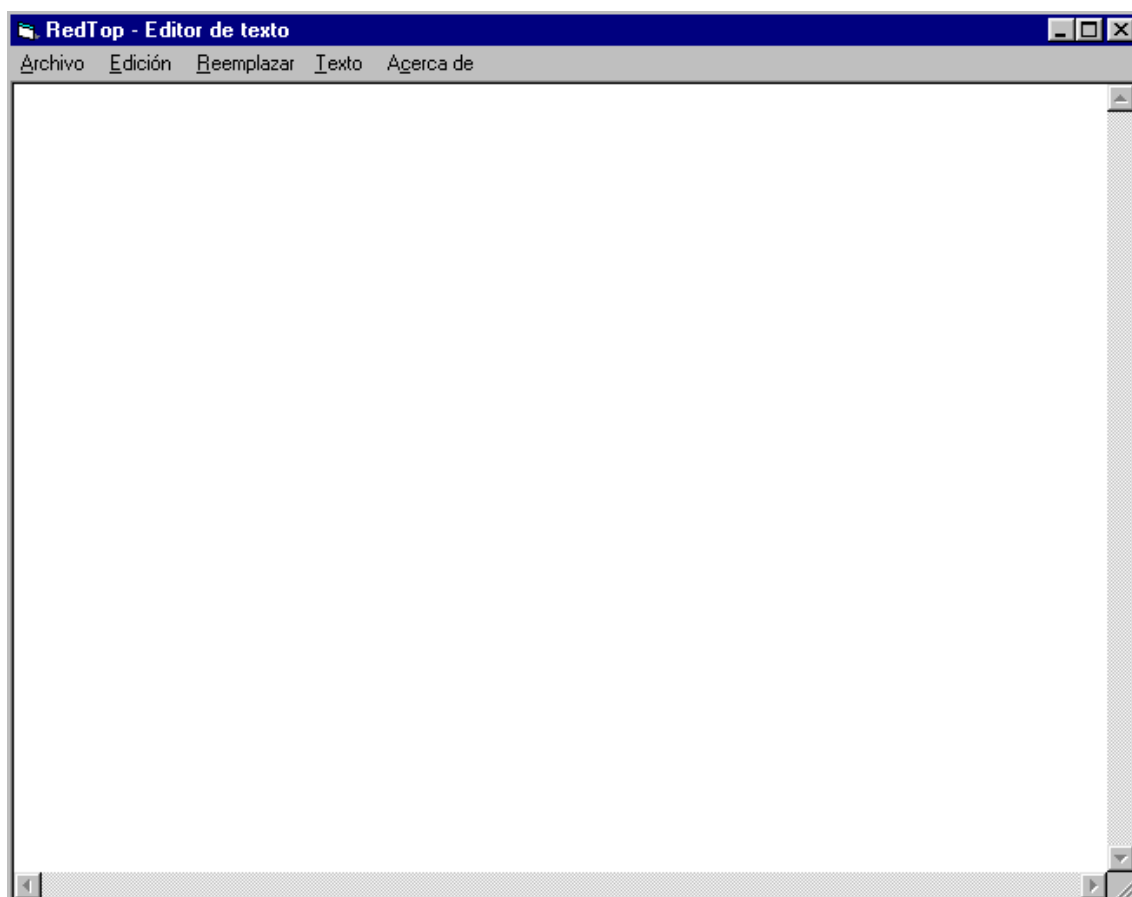


Figura 9. Editor de texto: pantalla principal.

### 3.1. Menú Archivo

Tiene las opciones clásicas de Abrir, Guardar, Guardar como, Imprimir y Salir.

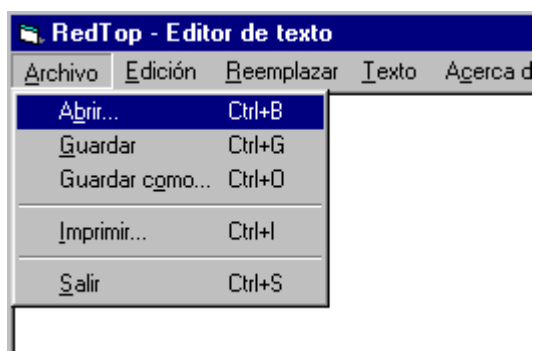


Figura 10. Editor de texto: menú Archivo.

### 3.2. Menú Edición

También con las opciones clásicas de Cortar, Copiar y Pegar.



Figura 11. Editor de texto: menú Edición.

### 3.3. Menú Reemplazar

Permite reemplazar caracteres dentro del texto. Su formulario se muestra a continuación.



Figura 12. Editor de texto: reemplazar caracteres.

### 3.4. Menú Texto

Permite utilizar distintos tipos de letra (Courier New, Arial o Symbol) y tamaños (8, 10 o 12).

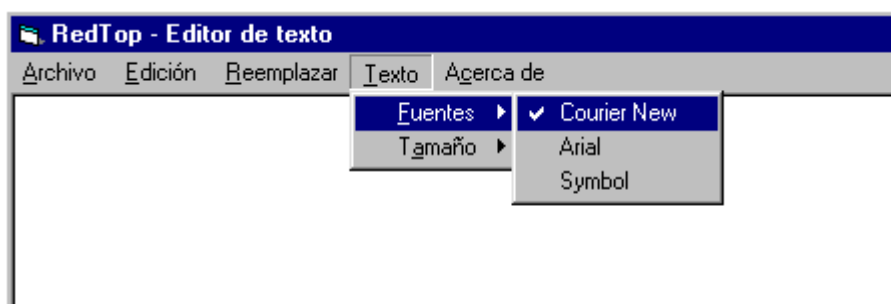


Figura 13. Editor de texto: fuente y tamaño.

#### 4. Menú Revisar

Permite modificar la situación de cada punto – fijo o variable – y el peso de los observables, y trabajar con los nuevos datos sin tener que guardarlos en disco.

En cuanto al peso de los observables, se puede modificar de manera individualizada o asignar un peso único para los observables de un tipo (ángulo o distancia).

El formulario es un control tabular con dos fichas, una para modificar los puntos y otra para los pesos. Se muestran a continuación.

Use el ratón para seleccionar un vértice:			
Vértice	1	.....	vble
Vértice	2	.....	vble
Vértice	3	.....	vble
Vértice	4	.....	fijo
Vértice	5	.....	fijo

Número de vértices:

Figura 14. Menú Revisar: Puntos Fijos.

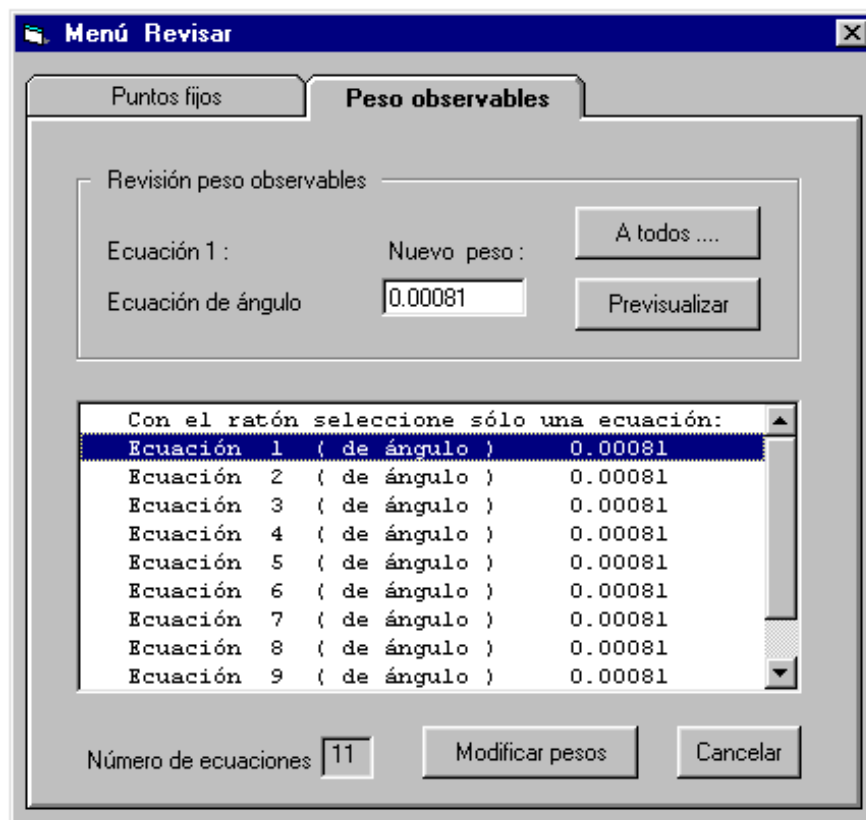


Figura 15. Menú Revisar: Peso de los observables.

## 5. Menú Ver

Con él se accede a la pantalla gráfica de la aplicación. Desde este menú puede visualizarse el gráfico de la red además de las diversas elipses de error, siempre y cuando hayan sido previamente calculadas en la compensación.

Existe la posibilidad de realizar “zooms”, para lo cual se dibujará un rectángulo con el ratón y, situándose dentro de él, se apretará el botón derecho.

Además es posible dar una salida a fichero dxf (ASCII) de la imagen que se muestra en pantalla, mediante la opción Crear Fichero DXF.

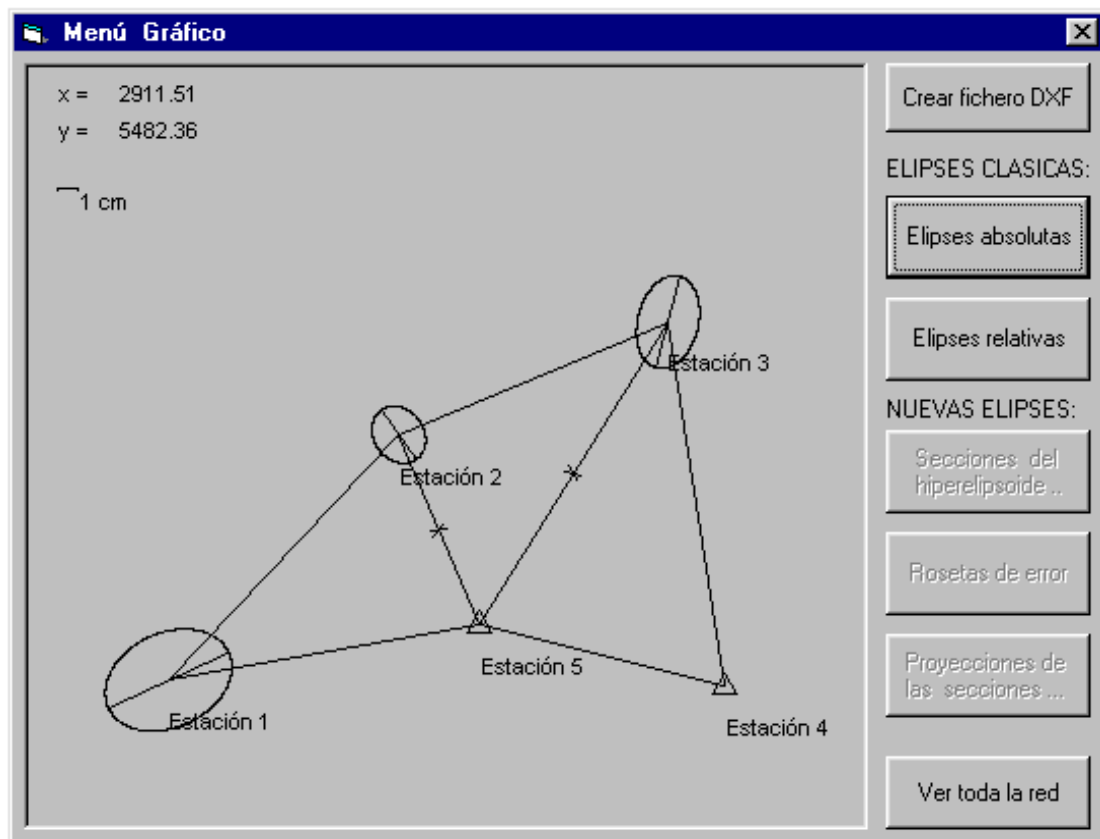


Figura 16. Menú Ver: Vértices, observaciones y elipses de error.

## 6. Menú Compensación

Es el que se utiliza cuando se quiere realizar el ajuste mínimo-cuadrático de las observaciones.

Al final de la compensación se vuelcan los resultados a un archivo de nombre seleccionado por el usuario y, si se desea, se visualiza automáticamente en el Editor de texto.

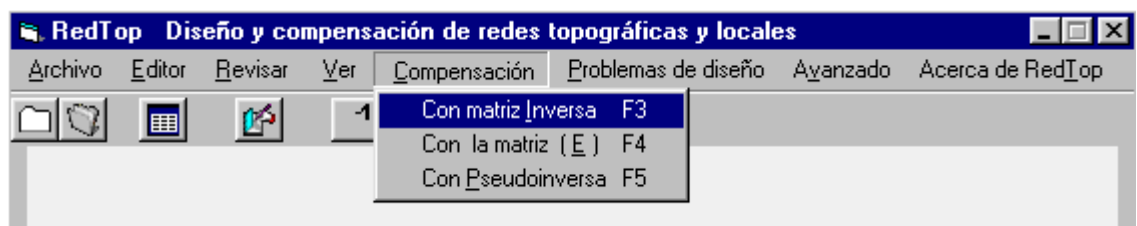


Figura 17. Menú Compensación.



## 6.1. Matriz Inversa

El proceso inicia con unas cuestiones al usuario:

- 1) Si desea incluir la incógnita de factor de escala.
- 2) Si desea añadir alguna ecuación de condición.
- 3) El parámetro de traslación deseado para el Test de Baarda.
- 4) Si se desea el cálculo de las elipses de error derivadas del hiperelipsoide.
- 5) El nombre del fichero de salida.

Concluido el ajuste y enviados los resultados al fichero de salida, se pregunta al usuario si quiere visualizarlo.

## 6.2. Matriz de constreñimientos

De modo análogo, se plantean inicialmente unas preguntas:

- 1) El parámetro de traslación deseado para el Test de Baarda.
- 2) Si se desea el cálculo de las elipses de error derivadas del hiperelipsoide.
- 3) El nombre del fichero de salida.

Concluido el ajuste y enviados los resultados al fichero de salida, se pregunta al usuario si quiere visualizarlo.

## 6.3. Matriz pseudoinversa

Como en los casos anteriores, hay inicialmente unas preguntas:

- 1) El parámetro de traslación deseado para el Test de Baarda.
- 2) Si se desea el cálculo de las elipses de error derivadas del hiperelipsoide.
- 3) El nombre del fichero de salida.

Durante el ajuste se pregunta al usuario qué autovalores pueden ser considerados cero.

Finalmente, concluido el ajuste y enviados los resultados al fichero de salida, se pregunta al usuario si quiere visualizarlo.

## 7. Menú Problemas de Diseño

Se accede a él para resolver PD0, PD1 o PD2.

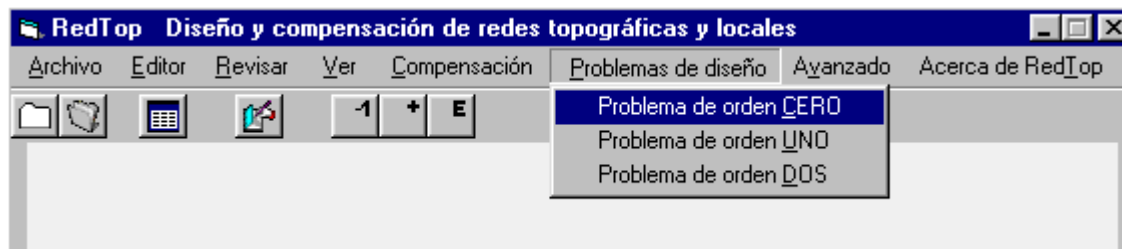


Figura 18. Menú Problemas de Diseño.

### 7.1. Problema de orden cero

Se resuelve la red con varios vértices de máxima precisión intrínseca. Así, las preguntas al usuario son cuatro:

- 1) El nombre del fichero de salida, como viene siendo usual.
- 2) El número de vértices en los que se busca la mayor precisión.
- 3) El número identificador de estos vértices.
- 4) Los autovalores a considerar como nulos.

La salida se da nuevamente por fichero y opcionalmente además por pantalla.

### 7.2. Problema de orden uno

Se obtienen las coordenadas aproximadas óptimas para determinados puntos, elegidos por el usuario.

La opción no está disponible, como ya se comentó, para la importación de matrices, pues necesita la formación de las ecuaciones a partir de observables, tipo de ecuación y coordenadas de los puntos aproximados y fijos, datos que no se conocen en la entrada por matrices.

Las preguntas que el programa hace al usuario son:

- 1) Fichero de salida.
- 2) Número de vértices en los que mejorar las aproximadas.
- 3) Identificación de dichos vértices.
- 4) Máxima variación en las coordenadas aproximadas.
- 5) Valor diferencial que se utiliza para realizar las derivadas.
- 6) Tipo de red libre con que se trabaja.

- 7) Matriz cofactor  $Q_{xx}$  deseada: cálculo automático, entrada por fichero ASCII o manualmente.
- 8) Autovalores a considerar nulos en diversas matrices.

### 7.3. Problema de orden dos

Da los pesos necesarios de los observables para alcanzar la matriz cofactor  $Q_{xx}$  deseada. Las preguntas a que se ha de responder son:

- 1) Autovalores a considerar nulos.
- 2) Varianza a priori del observable de peso unidad.
- 3) Matriz cofactor  $Q_{xx}$  deseada: matriz de criterio absoluta de Baarda, cálculo automático con las medias, entrada por fichero ASCII o manualmente.
- 4) Autovalores a considerar nulos.

### 4.8. Menú avanzado

Contiene opciones sobre los algoritmos a realizar y la visualización de las coordenadas compensadas.

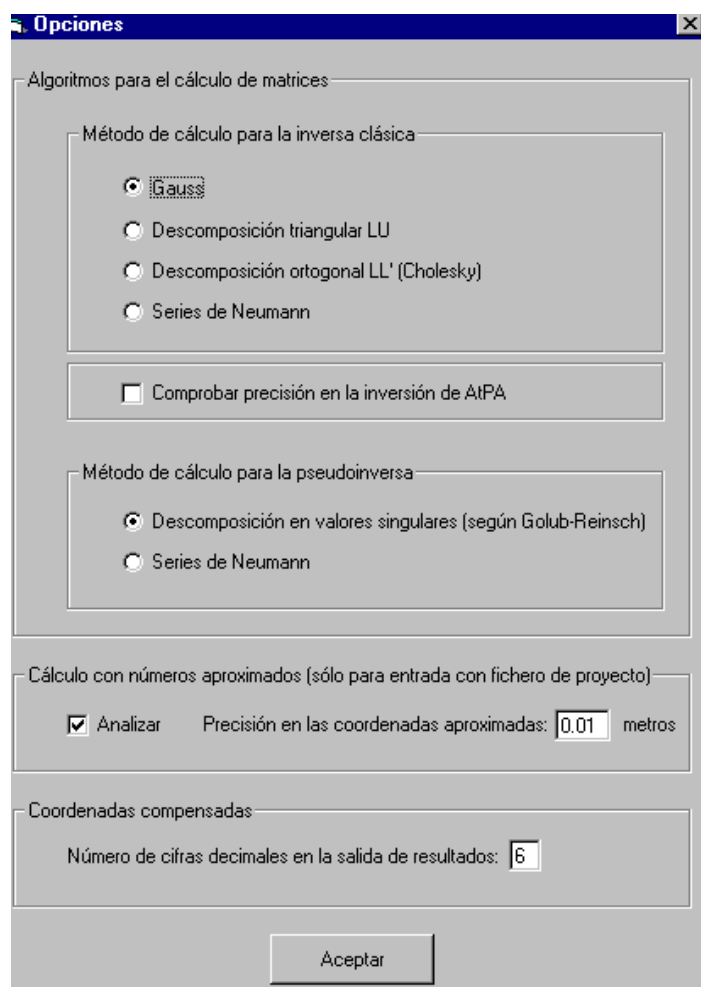


Figura 19. Avanzado: Opciones.

### **8.1. Cálculo de la inversa clásica**

Permite escoger el método entre: método de Gauss, descomposición LU, Cholesky o el método de las series de Neumann. En este último método, solo se desarrolla en el fichero de salida, la solución a las incógnitas en el sistema de ecuaciones. Por defecto se considera Gauss.

Además permite – por defecto está desactivada la opción – calcular una matriz de comprobación de la precisión en la inversión:  $(A^T P A)(A^T P A)^{-1} - I$ , teóricamente 0, da idea de los truncamientos sufridos en el proceso de cálculo.

### **8.2. Cálculo de la pseudoinversa**

Permite escoger los métodos de las series de Neumann y el método de la descomposición en valores singulares.

### **8.3. Análisis del cálculo con números aproximados**

Calcula los errores transmitidos a las matrices A y S del sistema, matrices  $\delta A$  y  $\delta S$ , a partir del error en las coordenadas aproximadas iniciales.

Esta opción – activada por defecto – sólo es utilizable en entrada por fichero de proyecto, y no en importación de matrices, pues necesita la formación de las ecuaciones a partir de observables, tipo de ecuación y coordenadas de los puntos aproximados y fijos, y estos datos no se conocen en la entrada por matrices.

## 4.- ANEXO 2. APLICACIÓN DE LA TERORIA DESARROLLADA SOBRE UNA RED.

A continuación se va a proceder a calcular toda la teoría expuesta en esta tesis doctoral, sobre una red de triangulación localizada en el término municipal de Gestalgar, en la provincia de Valencia. Esta red tiene como objetivo el control geodinámico de unas laderas situadas en este término municipal, donde los datos que se presentan corresponden a una primera campaña que se realizó en el año 1997.

A lo largo de este anexo, se compensará esta red como libre y como ligada, aplicando tanto los algoritmos de cálculo tradicionales como el método de las seres de Neumann, se calculará también las nuevas figuras de error, el hiperelipsoide de observables, y la influencia del vector  $b$ , y las matrices  $S$ ,  $S^{-1}$  y  $S^+$  sobre el vector de las incógnitas.

Las operaciones intermedias y todos los resultados del ajuste, aparecen en formato digital en el CD que acompaña a esta tesis doctoral. Todos estos datos no se han incluido en formato papel con el objetivo de no hacer demasiado voluminosa la memoria de la tesis.

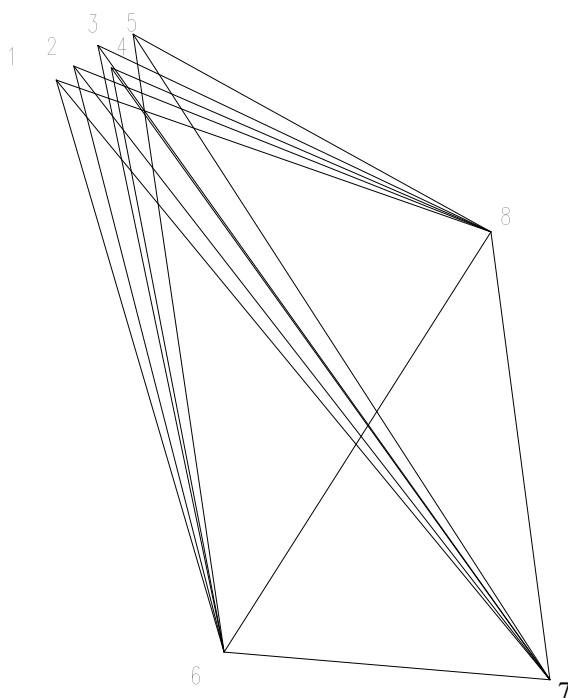
Los ficheros de resultados son los siguientes:

- Salida1.tmp** Resultados de la red compensada como libre empleando el método tradicional.
- Salida2.tmp** Resultados de la red compensada como libre empleando el método de Neumann.
- Salida3.tmp** Resultados de la red compensada como ligada empleando el método tradicional.
- Salida4.tmp** Resultados de la red compensada como ligada empleando el método de Neumann.

Se ha empleado el programa informático RedTop para todos los cálculos que se muestran a continuación.

La red observada está compuesta por 3 tres puntos de base (6,7 y 8), que se encuentran fuera del ámbito de movimiento de la ladera, y cinco puntos de control (1, 2, 3, 4, 5).

La figura formada se muestra a continuación:



**CALCULO DE LA RED COMO LIBRE.**

*CALCULO EMPLEANDO EL ALGORITMO TRADICIONAL.*

La matriz de diseño es la siguiente:



---

Dx1	Dy1	Dx2	Dy2	Dx3	Dx3	Dx4	Dy4	Dx5	Dy5	Dx6	Dy6	Dx7	Dy7	Dx8	Dy8
-767.2501	-225.7338	763.2356	196.4222	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	4.014527	29.311617	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	-763.2356	-196.4222	752.571	156.9937	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	10.66397	39.428528	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-752.57	-156.9937	785.9876	151.4486	0.00000	0.00000	-33.41598	5.545116	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	-785.9876	-151.4486	754.684	111.382	31.303480	40.066239	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	-754.68	-111.38	877.0945	1557.835505	-122.4103	-1446.453	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	-928.8242	-932.6335	122.4103	1446.453	806.4138	-513.8195
-472.4622	-390.4617	483.5289	376.7316	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	0.000000	0.000000	-11.06675	13.73012	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	-483.5289	-376.7316	496.959	355.3546	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	0.000000	0.000000	-13.43068	21.37700	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-496.95	-355.3546	513.4478	368.7744	0.00000	0.00000	0.000000	0.000000	-16.48820	-13.41979	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	-513.4478	-368.7744	519.849	336.804	0.000000	0.000000	-6.401938	31.97016	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	-519.84	-336.80	122.4103	1446.453	397.4394	-1109.648	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	-122.4103	-1446.453	-923.0065	1308.050	1045.416	138.4030
-338.5801	-975.5179	389.0221	985.0337	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-50.44198	-9.515801
0.000000	0.000000	-389.0221	-985.0337	466.973	987.4697	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-77.95084	-2.436043
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-466.97	-987.4697	455.8912	1055.719	0.00000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	11.08173	-68.24958
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	-455.8912	-1055.719	560.844	1018.56	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-104.9532	37.15896
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	-560.84	-1018.5	-806.4138	513.819555	0.000000	0.000000	1367.2583	504.74084
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.000000	0.000000	0.000000	0.00000	0.00000	806.4138	-513.8195	-1045.416	-138.4030	239.0030	652.2225



---

VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES ( K )

4.0548  
3.6750  
24.5134  
-0.9188  
-13.2174  
0.5879  
-1.5632  
-1.7135  
2.5861  
0.5793  
-18.6538  
37.3371  
6.8542  
5.9823  
-9.6698  
-1.4612  
21.3880  
0.3492

Se han ponderado los observables considerando un error a priori en los mismos de  $10^{cc}$

La solución al sistema de ecuaciones es la siguiente:

Correcciones	Variables compensadas
-----	-----
-0.016	X( 1 ) 775.312
0.000	Y( 1 ) 1763.641
-0.015	X( 2 ) 798.658
0.007	Y( 2 ) 1782.301
-0.015	X( 3 ) 830.876
0.014	Y( 3 ) 1810.662
0.019	X( 4 ) 849.538
-0.013	Y( 4 ) 1780.953
0.019	X( 5 ) 878.174
-0.015	Y( 5 ) 1825.560
0.003	X( 6 ) 1000.003
0.000	Y( 6 ) 1000.000
-0.008	X( 7 ) 1436.987
0.005	Y( 7 ) 963.023
0.013	X( 8 ) 1357.776
0.001	Y( 8 ) 1561.492

Numero de grados de libertad  $r = 6$

Estimador varianza observable peso unidad = 0.95602388

Estimador desviacion típica 0.977765

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ANALISIS ESTADISTICO DE HIPOTESIS Y RESULTADOS \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

--> Parametro de traslacion asociado : 4.12

FIABILIDAD INTERNA DE LA RED

Numeros de Minimo error Parametro de  
 Observ Residuo Vble Baarda redundancia detectable homogeneidad

Obser.	Residuo	Vble Baarda.	Redundanc.	Min. Error detectable	Homogene.
1	-2.16700	-0.520956	0.18098722	85.6945040	9.68441206
2	-2.11269	-0.508467	0.18058272	85.8116114	9.69525255
3	-2.50546	-0.606135	0.17871690	86.3565355	9.74573053
4	0.39968	0.095535	0.18307313	85.0963380	9.62908257
5	-2.72129	-0.689529	0.16292062	91.3117937	10.20726013
6	12.52292	2.207924	0.33649127	56.5676330	7.10248484
7	4.43060	0.520956	0.75657921	22.8498428	4.73663603
8	4.31934	0.507516	0.75764788	22.7835448	4.73329433
9	5.12937	0.601717	0.76010636	22.6310016	4.72563347
10	-0.78086	-0.091753	0.75759250	22.7869807	4.73346733
11	5.69030	0.695575	0.70002565	26.3703971	4.92425165
12	-10.67886	-1.762257	0.38409857	51.0112359	6.64776823
13	-1.27195	-0.520956	0.06235514	156.2120921	16.49913172
14	-1.24023	-0.511122	0.06158700	157.2476194	16.60170531
15	-1.46929	-0.609508	0.06078361	158.3511316	16.71105889
16	0.17846	0.075203	0.05890543	161.0165676	16.97538215
17	-1.62005	-0.712356	0.05409958	168.4447016	17.71333250
18	13.19822	2.239032	0.36344722	53.3123863	6.83402466

Suma de las redundancias 6.000000  
 Redundancia media .... 0.333333

Como puede observarse todos los observables tiene una variable de Baarda menor de 3.29, con lo cual se acepta la hipotesis nula de no existencia de errores groseros en las observaciones para un nivel de significación de  $\alpha=0.001$  y una potencia de test de  $\beta=0.80$ .

---

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ELIPSES DE ERROR \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

ELIPSES DE VERTICE

Vertice Semieje mayor Acimut semieje Semieje menor Acimut semieje

1 0.0192 mts 145.3715 gra 0.0086 mts 45.3715 gra  
 2 0.0142 mts 146.0555 gra 0.0062 mts 46.0555 gra  
 3 0.0118 mts 147.8806 gra 0.0048 mts 47.8806 gra  
 4 0.0120 mts 147.6360 gra 0.0053 mts 47.6360 gra  
 5 0.0169 mts 151.8837 gra 0.0073 mts 51.8837 gra  
 6 0.0099 mts 77.0845 gra 0.0046 mts 177.0845 gra  
 7 0.0047 mts 147.2555 gra 0.0034 mts 47.2555 gra  
 8 0.0146 mts 182.0097 gra 0.0059 mts 82.0097 gra

ELIPSES RELATIVAS

Vertices Semieje mayor Acimut semieje Semieje menor Acimut semieje

1 2 0.0167 mts 145.2200 gra 0.0074 mts 45.2200 gra  
 3 0.0236 mts 146.3860 gra 0.0105 mts 46.3860 gra  
 4 0.0285 mts 146.6030 gra 0.0126 mts 46.6030 gra  
 5 0.0331 mts 148.7439 gra 0.0147 mts 48.7439 gra  
 6 0.0235 mts 126.5402 gra 0.0120 mts 26.5402 gra  
 7 0.0177 mts 141.4118 gra 0.0084 mts 41.4118 gra  
 8 0.0278 mts 161.3536 gra 0.0128 mts 61.3536 gra  
 2 3 0.0169 mts 147.2221 gra 0.0073 mts 47.2221 gra  
 4 0.0234 mts 147.2561 gra 0.0102 mts 47.2561 gra  
 5 0.0289 mts 149.4874 gra 0.0126 mts 49.4874 gra  
 6 0.0190 mts 120.0420 gra 0.0096 mts 20.0420 gra  
 7 0.0125 mts 141.2825 gra 0.0061 mts 41.2825 gra  
 8 0.0242 mts 165.3856 gra 0.0107 mts 65.3856 gra  
 3 4 0.0170 mts 148.0660 gra 0.0071 mts 48.0660 gra  
 5 0.0241 mts 150.0884 gra 0.0101 mts 50.0884 gra  
 6 0.0157 mts 117.8831 gra 0.0087 mts 17.8831 gra  
 7 0.0110 mts 147.5872 gra 0.0055 mts 47.5872 gra  
 8 0.0216 mts 167.6319 gra 0.0092 mts 67.6319 gra  
 4 5 0.0161 mts 149.2437 gra 0.0071 mts 49.2437 gra  
 6 0.0124 mts 134.7132 gra 0.0106 mts 34.7132 gra  
 7 0.0137 mts 151.2497 gra 0.0067 mts 51.2497 gra  
 8 0.0169 mts 165.8366 gra 0.0089 mts 65.8366 gra  
 5 6 0.0160 mts 175.9361 gra 0.0102 mts 75.9361 gra  
 7 0.0194 mts 153.3701 gra 0.0090 mts 53.3701 gra  
 8 0.0164 mts 157.6372 gra 0.0088 mts 57.6372 gra  
 6 7 0.0125 mts 99.3731 gra 0.0052 mts 199.3731 gra  
 8 0.0186 mts 14.9770 gra 0.0087 mts 114.9770 gra  
 7 8 0.0188 mts 178.2017 gra 0.0085 mts 78.2017 gra

---

## EJES DEL HIPERELIPSOIDE STANDARD Y HOMOTETICO

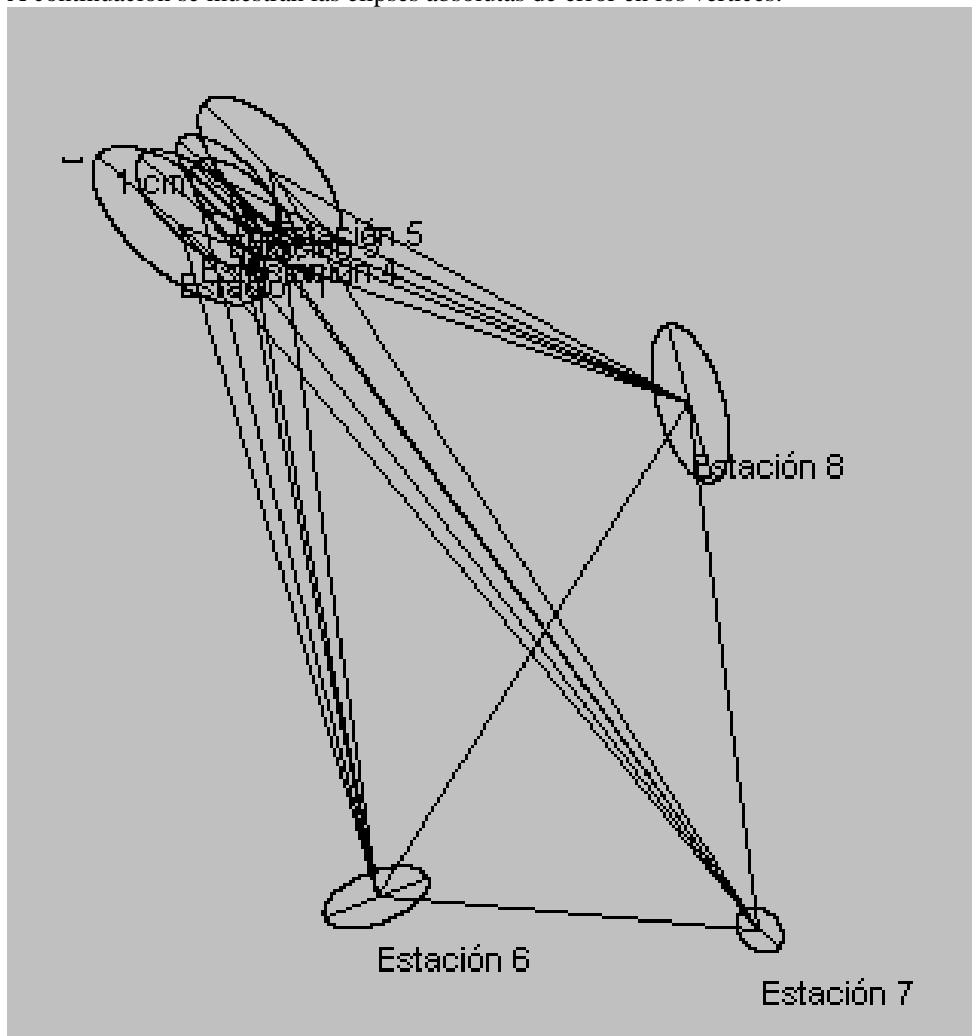
---> Factor de homotecia para el HH : 4.67

Hiperelipsoide Standard Hiperelipsoide Homotetico

-----  
0.00241123 metros 0.01126046 metros  
0.00367133 metros 0.01714510 metros  
0.00409627 metros 0.01912956 metros  
0.00484430 metros 0.02262286 metros  
0.00501928 metros 0.02344006 metros  
0.00678201 metros 0.03167197 metros  
0.00890257 metros 0.04157501 metros  
0.01019882 metros 0.04762848 metros  
0.01226390 metros 0.05727240 metros  
0.01329223 metros 0.06207472 metros  
0.01652081 metros 0.07715219 metros  
0.03035762 metros 0.14177006 metros

Las elipses calculadas por los métodos de las secciones del hiperelipsoide,, proyecciones del hiperelipsoide y proyecciones de las secciones principales, se incluyen en el fichero salidal.tmp del CD que acompaña a la tesis doctoral.

A continuación se muestran las elipses absolutas de error en los vértices:



El resto de figuras de error puede observarse directamente empleando la aplicación informática RedTop, con el fichero de partida Gestalgar.txt que aparecen en el CD que acompaña a esta tesis doctoral.

---

*CALCULO DEL HIPERELIPSOIDE DE OBSERVABLES.*

DIAGONAL DE LA MATRIZ DE AUTOVALORES DE LA MATRIZ VARIANZA COVARIANZA DE LOS OBSERVABLES COMPENSADOS.

95.602388043304600000000  
95.602388043304700000000  
95.602388043305100000000  
95.602388043304600000000  
95.602388043304800000000  
95.602388043304800000000  
95.602388043304900000000  
95.602388043304700000000  
95.602388043304800000000  
95.602388043304800000000  
95.602388043304900000000  
95.602388043305300000000  
0.000000000000009378143  
0.000000000000004189058  
0.000000000000001961626  
0.000000000000002869484  
0.0000000000000011790289  
0.0000000000000016365575

Obsérvese como aparecen 6 autovalores despreciables, que coinciden con el número de redundancias de la red.

El resto de valores, todos ellos iguales a  $95.6024 \text{ dmgr}^2$ , coincide con la varianza del observable angular, cuya raíz cuadrada,  $9.7776^{\text{cc}}$  resulta un valor muy próximo a los  $10^{\text{cc}}$  empleados en la precisión a priori del observable.

SEMIEJES DEL HIPERELIPSOIDE ESTANDAR DE OBSERVABLES

0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
0.102274091344637000000  
10326224.657729400000000000000  
15450474.523451600000000000000  
22578332.117306600000000000000  
18668014.417362700000000000000  
9209536.542239110000000000000  
7816896.620280800000000000000

Nótese como únicamente son significativos los 12 primeros valores de los semiejes del hiperelipsoide.

Calculémoslos ahora de nuevo el ajuste empleando unos nuevos pesos  $P_c=0.01046$ , resultado de introducir un error angular en los observables de  $9.7776^{\text{cc}}$ , tal y como resulta del hiperelipsoide de observables. Los resultados del mismo son los siguientes:

CORRECCIONES A LAS VARIABLES Y VARIABLES COMPENSADAS

---

Correcciones    Variables compensadas

-0.016	X( 1 )	775.312
0.000	Y( 1 )	1763.641
-0.015	X( 2 )	798.658
0.007	Y( 2 )	1782.301
-0.015	X( 3 )	830.876
0.014	Y( 3 )	1810.662
0.019	X( 4 )	849.538
-0.013	Y( 4 )	1780.953
0.019	X( 5 )	878.174
-0.015	Y( 5 )	1825.560
0.003	X( 6 )	1000.003
0.000	Y( 6 )	1000.000
-0.008	X( 7 )	1436.987
0.005	Y( 7 )	963.023
0.013	X( 8 )	1357.776
0.001	Y( 8 )	1561.492

Numero de grados de libertad  $r = 6$

Estimador varianza observable peso unidad = 0.99904496

Estimador desviacion típica 0.999522

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ESTUDIO DEL CALCULO CON NUMEROS APROXIMADOS \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A db

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 158.51 \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 44.344099$$

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A dS

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 0.000922 \|\delta S\| = 0.908273$$

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A dS<sup>+</sup>

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 0.00000000 \|\delta S^+\| = 0.00000000$$

*CALCULO EMPLEANDO EL ALGORITMO DE NEUMANN.*

Los datos de partida son exactamente los mismos que en el caso anterior, y los resultados obtenidos son los siguientes:

**CORRECCIONES A LAS VARIABLES Y VARIABLES COMPENSADAS**

Correcciones	Variables compensadas
-0.015	X( 1 ) 775.313
0.000	Y( 1 ) 1763.641
-0.015	X( 2 ) 798.658
0.007	Y( 2 ) 1782.301
-0.014	X( 3 ) 830.877
0.014	Y( 3 ) 1810.662
0.019	X( 4 ) 849.538
-0.012	Y( 4 ) 1780.954
0.019	X( 5 ) 878.174
-0.014	Y( 5 ) 1825.561
0.003	X( 6 ) 1000.003
0.000	Y( 6 ) 1000.000
-0.008	X( 7 ) 1436.987
0.005	Y( 7 ) 963.023
0.013	X( 8 ) 1357.776
0.001	Y( 8 ) 1561.492

Nótese como todos los resultados coinciden con los obtenidos en la página 227.

---

Numero de defectos de rango: 4

Numero de grados de libertad  $r = 6$

Estimador varianza observable peso unidad = 0.95642125

Estimador desviacion tipica 0.977968

\*\*\*\*\*  
\*\*\*\*\* ESTUDIO DEL CALCULO CON NUMEROS APROXIMADOS \*\*  
\*\*\*\*\*

ERROR RELATIVO EN  $x$  DEBIDO A  $\delta b$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 17.89045 \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 5.004955$$

ERROR RELATIVO EN  $x$  DEBIDO A  $\delta S$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 17.900852 \|\delta S\| = 17642.275186$$

ERROR RELATIVO EN  $x$  DEBIDO A  $\delta S^+$

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 0.00000000 \|\delta S^+\| = 0.00000000$$



## CALCULO DE LA RED COMO LIGADA.

A continuación se va a proceder a fijar las coordenadas de los puntos 6, 7, 8, dejando libres el resto de los mismos.

### SOLUCIÓN APLICANDO EL ALGORITMO TRADICIONAL.

La matriz de diseño A se expone a continuación:

#### MATRIZ DE DISEÑO ( A )

Vble X( 1 ) Vble Y( 1 ) Vble X( 2 ) Vble Y( 2 ) Vble X( 3 ) Vble Y( 3 ) Vble X( 4 ) Vble Y( 4 ) Vble X( 5 ) Vble Y( 5 )

Dx1	Dy1	Dx2	Dy2	Dx3	Dy3	Dx4	Dy4	Dx5	Dy5
-767.2501	-225.7338	763.2356	196.4222	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	-763.2356	-196.4222	752.5716	156.9937	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-752.5716	-156.9937	785.9876	151.4486	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-785.9876	-151.4486	754.6841	111.3823
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-754.6841	-111.3823
-472.4622	-390.4617	483.5289	376.7316	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	-483.5289	-376.7316	496.9596	355.3546	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-496.9596	-355.3546	513.4478	368.7744	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-513.4478	-368.7744	519.8498	336.8042
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-519.8498	-336.8042
-338.5801	-975.5179	389.0221	985.0337	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	-389.0221	-985.0337	466.9730	987.4697	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-466.9730	-987.4697	455.8912	1055.719	0.000000	0.000000
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-455.8912	-1055.719	560.8444	1018.560
0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	0.000000	-560.8444	-1018.560

#### VECTOR DE TERMINOS INDEPENDIENTES ( K )

4.0548  
 3.6750  
 24.5134  
 -0.9188  
 -13.2174  
 -1.5632  
 -1.7135  
 2.5861  
 0.5793  
 -18.6538  
 6.8542  
 5.9823  
 -9.6698  
 -1.4612  
 21.3880

Se ha empleado un peso de 0.01 para todos los observables angulares.

CORRECCIONES A LAS VARIABLES Y VARIABLES COMPENSADAS

Correcciones	Variables compensadas
-0.003	X( 1) 775.325
-0.015	Y( 1) 1763.626
-0.002	X( 2) 798.671
-0.009	Y( 2) 1782.285
-0.001	X( 3) 830.890
-0.005	Y( 3) 1810.643
0.031	X( 4) 849.550
-0.029	Y( 4) 1780.937
0.031	X( 5) 878.186
-0.034	Y( 5) 1825.541

Numero de grados de libertad r = 5

Estimador varianza observable peso unidad = 0.66848055  
 Estimador desviacion tipica 0.817607

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ANALISIS ESTADISTICO DE HIPOTESIS Y RESULTADOS \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

--> Parametro de traslacion asociado : 4.12

FIABILIDAD INTERNA DE LA RED

Observable	Residuo	Vble Baarda	Redundanci a	Min. Error detectable	Homogene.
1	-2.04913	-0.589098	0.18099925	71.6548132	9.68409030
2	-1.93757	-0.557624	0.18061109	71.7487659	9.69449090
3	-2.50643	-0.725036	0.17877393	72.1972851	9.74417593
4	0.61687	0.176296	0.18315382	71.1383439	9.62696123
5	-6.68268	-1.939183	0.17765404	72.4738503	9.77484020
7	4.18961	0.589098	0.75662949	19.1044241	4.73647865
8	3.96110	0.556549	0.75776666	19.0454316	4.73292334
9	5.13428	0.720159	0.76034953	18.9114186	4.72487775
10	-1.21980	-0.171369	0.75791838	19.0375604	4.73244959
11	13.91543	1.947863	0.76346280	18.7498322	4.71523427
13	-1.20277	-0.589098	0.06235928	130.6198789	16.49858353
14	-1.13762	-0.560627	0.06159674	131.4793369	16.60039273
15	-1.46936	-0.728824	0.06080300	132.3906956	16.70839474
16	0.30213	0.152222	0.05893065	134.6113937	16.97174967
17	-3.90436	-1.966128	0.05899134	134.5377848	16.96301615

Suma de las redundancias 5.000000  
 Redundancia media .... 0.333333

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ELIPSES DE ERROR \*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\*

ELIPSES DE VERTICE

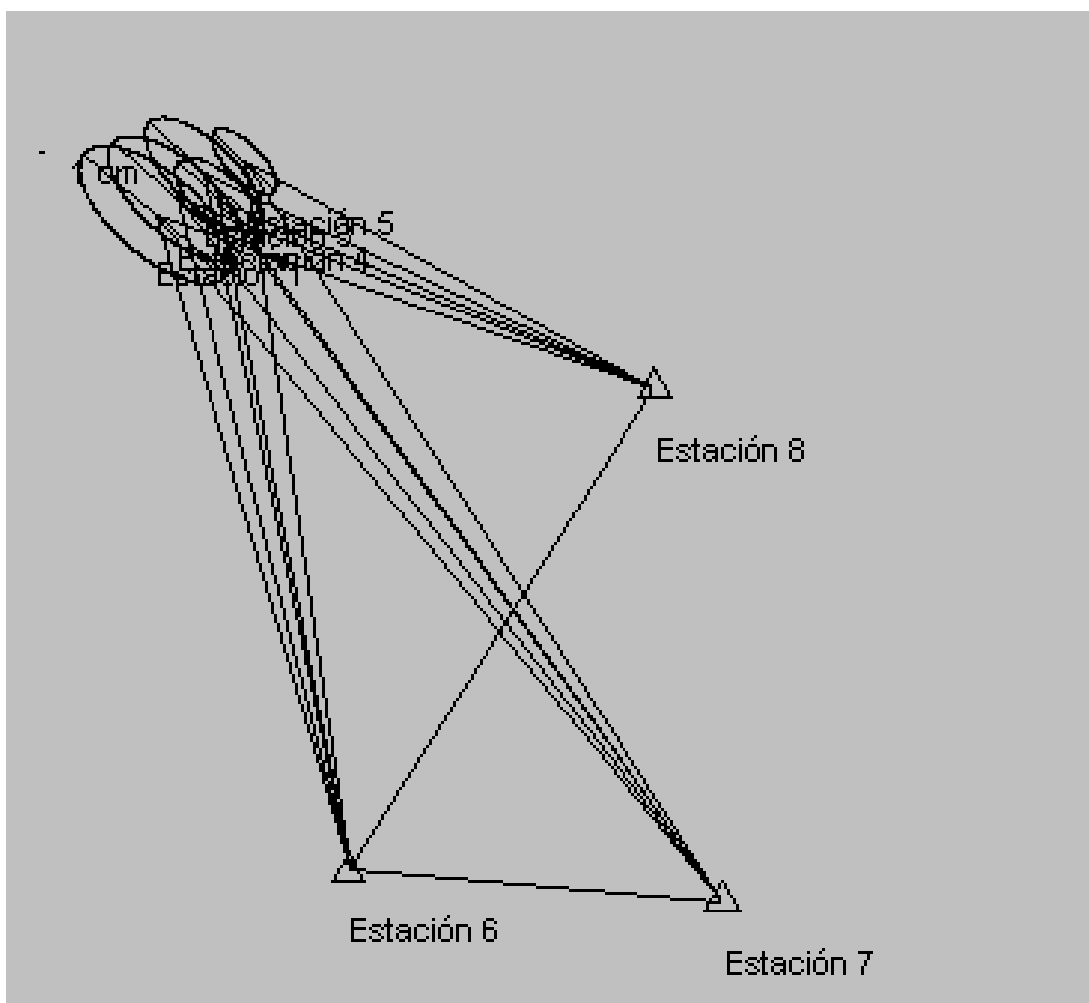
Vertice	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1	0.0312 mts	144.7617 gra	0.0139 mts	44.7617 gra
2	0.0281 mts	145.9479 gra	0.0123 mts	45.9479 gra
3	0.0250 mts	148.0110 gra	0.0105 mts	48.0110 gra
4	0.0186 mts	146.3046 gra	0.0082 mts	46.3046 gra
5	0.0143 mts	149.8289 gra	0.0058 mts	49.8289 gra

ELIPSES RELATIVAS

Vertices	Semieje mayor	Acimut semieje	Semieje menor	Acimut semieje
1 2	0.0140 mts	144.8922 gra	0.0063 mts	44.8922 gra
3	0.0198 mts	145.1900 gra	0.0090 mts	45.1900 gra
4	0.0242 mts	144.7182 gra	0.0108 mts	44.7182 gra
5	0.0280 mts	144.8960 gra	0.0125 mts	44.8960 gra
2 3	0.0141 mts	146.3063 gra	0.0062 mts	46.3063 gra
4	0.0200 mts	145.9029 gra	0.0087 mts	45.9029 gra
5	0.0244 mts	146.0461 gra	0.0107 mts	46.0461 gra
3 4	0.0145 mts	148.2594 gra	0.0061 mts	48.2594 gra
5	0.0204 mts	148.0258 gra	0.0086 mts	48.0258 gra
4 5	0.0132 mts	146.7807 gra	0.0059 mts	46.7807 gra

---

Las elipses de error absolutas resultan:



El resto de figuras de error puede observarse directamente empleando la aplicación informática RedTop, con el fichero de partida Gestalgar1.txt, correspondiente al fichero de entrada para el caso de redes ligadas, que aparecen en el CD que acompaña a esta tesis doctoral.

#### EJES DEL HIPERELIPSOIDE STANDARD Y HOMOTETICO

---> Factor de homotecia para el HH : 5.15

Hiperelipsoide Standard	Hiperelipsoide Homotetico
0.00378860 metros	0.01951128 metros
0.00434784 metros	0.02239136 metros
0.00559017 metros	0.02878938 metros
0.00875789 metros	0.04510313 metros
0.00885505 metros	0.04560353 metros
0.01013522 metros	0.05219637 metros
0.01326682 metros	0.06832414 metros
0.02024170 metros	0.10424473 metros
0.02628421 metros	0.13536370 metros
0.06018786 metros	0.30996748 metros

Las elipses calculadas por los métodos de las secciones del hiperelipsoide, proyecciones del hiperelipsoide y proyecciones de las secciones principales, se incluyen en el fichero salida1.tmp del CD que acompaña a la tesis doctoral.

\*\*\*\*\*  
 \*\*\*\*\* ESTUDIO DEL CALCULO CON NUMEROS APROXIMADOS \*\*  
 \*\*\*\*\*

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A db

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 252.3834 \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 299.889452$$

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A dS

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 0.003623 \|\delta S\| = 0.3131$$

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A dS<sup>-1</sup>

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 276.0464 \|\delta S^{-1}\| = 219.7252$$

*CALCULO DE LA RED APLICANDO LAS SERIES DE NEUMANN.*

Los datos de partida coinciden con los obtenidos en el apartado anterior.

CORRECCIONES A LAS VARIABLES Y VARIABLES COMPENSADAS

Correcciones	VARIABLES COMPENSADAS
-0.0046	X( 1 ) 775.3234
-0.0136	Y( 1 ) 1763.6274
-0.0039	X( 2 ) 798.6691
-0.0079	Y( 2 ) 1782.2861
-0.0028	X( 3 ) 830.8882
-0.0033	Y( 3 ) 1810.6447
0.0304	X( 4 ) 849.5494
-0.0282	Y( 4 ) 1780.9378
0.0310	X( 5 ) 878.1860
-0.0340	Y( 5 ) 1825.5410

Numero de grados de libertad r = 5

Estimador varianza observable peso unidad = 0.66934857  
 Estimador desviacion tipica 0.818137

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A db

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 12.26243 \frac{\|\delta b\|}{\|b\|} = 14.570596$$

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A dS

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x + \delta x\|} = 12.28 \|\delta S\| = 1061.4716$$

ERROR RELATIVO EN x DEBIDO A dS<sup>-1</sup>

$$\frac{\|\delta x\|}{\|x\|} = 0.003957 \|\delta S^{-1}\| = 0.003149$$