

MÁSTER UNIVERSITARIO EN
INVESTIGACIÓN MATEMÁTICA



UNIVERSITAT
POLITÈCNICA
DE VALÈNCIA



UNIVERSITAT
DE VALÈNCIA

Reflexión de ondas acústicas en medios periódicos

TRABAJO FIN DE MÁSTER

Autor:

Luis J. Salmerón Contreras

Tutores:

Lluís M. García Raffi

Víctor J. Sánchez Morcillo

València, 2014

Reflexión de ondas acústicas en medios periódicos

Autor: Luis J. Salmerón Contreras
Tutores: Lluís M. García Raffi
Víctor J. Sánchez Morcillo

Resumen:

En las últimas décadas el control de la propagación de ondas de luz, elásticas y acústicas a través de medios periódicos ha despertado un gran interés. Son los conocidos como cristales fotónicos, fonónicos o de sonido, respectivamente. Estos medios consisten en distribuciones periódicas de un material que presenta un alto contraste de sus propiedades físicas con respecto al medio material en el que está inmerso. Su principal y más importante característica es la presencia de “Band gaps”, bandas de frecuencia en las cuales las ondas no se transmiten a través de ellos. Sin embargo estos medios presentan particularidades al respecto de cómo las ondas se reflejan en ellos, siendo, a fecha de hoy, un tema muy poco estudiado. En este proyecto nos proponemos estudiar el campo reflejado por los cristales de sonido mediante técnicas numéricas.

Palabras Clave: Cristal de sonido, MEF, acústica, reflexión, dispersión

Abstract:

In the last decades, the control of the propagation of light, elastic and acoustic waves through periodic media has aroused great interest. These are known as photonic, phononic or sound crystals, respectively. These media consist of periodic distributions of a material which represents a high contrast of their physical properties regarding the material media in which it is embedded. Its main and most important feature is the presence of band gaps, or frequency bands in which the waves are not transmitted through them. However these media have peculiarities with respect of how waves are reflected in them and nowadays they remain largely unexplored. In this project, we will study the sound field reflected by sonic crystals by using numerical techniques.

Key words: Sonic crystals, FEM, acoustics, reflection, scattering

Autor: Luis J. Salmerón Contreras, e-mail: [luisalco\(at\)epsg.upv.es](mailto:luisalco(at)epsg.upv.es)

Fecha de entrega: Septiembre 2014

Índice general

1	Objetivos	1
2	Introducción	3
2.1	Cristales de Sonido	3
2.2	Sistemas periódicos	6
2.3	Propagación acústica en medios periódicos	7
2.4	Band Gap	9
2.5	Reflexión producida por un dispersor cilíndrico	10
2.6	Método de elementos finitos (FEM)	11
2.7	Transformación a campo lejano	13
3	Análisis numérico	15
3.1	Dispersor cilíndrico	16
3.2	Fila de dispersores	16
3.3	Fila de dispersores con pared reflectante	18
3.4	Cristal de sonido	19
3.5	Cristal de sonido con pared reflectante	21
4	Conclusiones	23
	Bibliografía	25

CAPÍTULO

1

Objetivos

El control de la reflexión del sonido ha sido uno de los temas principales en el estudio de la acústica arquitectónica, desde que esta rama de acústica fue fundada a finales del siglo XIX por el físico W. C. Sabine (1868-1919). Este control permite que el campo sonoro confinado en una sala cumpla las condiciones de calidad acústica, las cuales tanto legislación como usuarios demandan con más exigencia. Sin embargo, el fenómeno de la reflexión no solo acontece dentro de un espacio cerrado, si no que en campo libre resulta ser incluso un tema de mayor importancia y dificultad debido al menor confinamiento de la onda. Hoy en día, numerosas fuentes de ruido rodean la actividad humana, y en muchos casos el control directo sobre la fuente no es posible, teniendo que actuar fuera de ésta. Por ejemplo, el uso de barreras acústicas en las vías de comunicación terrestre cercanas a núcleos de población. En estos casos, es primordial poder redirigir la onda acústica a zonas donde no pueda ser perjudicial para la salud.

En la actualidad, diversos elementos tanto activos como pasivos permiten controlar el flujo de la energía, dando como resultado difusores, filtros espaciales, guías de ondas, lentes acústicas, etc... Dentro de estos materiales están los **cristales fonónicos**, análogos a sus respectivos ópticos conocidos como cristales fotónicos. Estos dispositivos son el resultado de la unión de dos materiales con propiedades físicas distintas, distribuido uno de ellos de forma periódica a lo largo del otro material, dando como resultado un dispositivo que modifica las propiedades de la onda a su paso por él. Se puede encontrar numerosa biografía muy reciente sobre las propiedades de transmisión de éstos, sin embargo, sus propiedades en reflexión siguen siendo un campo aún por explorar. Por tanto, este trabajo se centra en el estudio numérico de las propiedades de reflexión de los cristales de sonido.

La motivación de este trabajo, surge de la necesidad de la Agencia Espacial Europea (ESA, *European Space Agency*) para controlar el ruido durante la fase de despegue de la nueva lanzadera VEGA. En este procedimiento, los motores ejercen una fuerza de impulso para vencer la

fuerza gravitacional y así elevar la lanzadera espacial y la carga que ella contiene. Esta reacción extremadamente violenta, provoca unos niveles de ruido extremos, superando incluso a los de una detonación nuclear. Dicho ruido, se propaga por el aire y, en los instantes iniciales del despegue, se refleja en la propia plataforma de despegue y vuelve a la aeronave en forma de fuertes vibraciones que pueden ser críticas para la estabilidad de los sistemas de telecomunicación, la estructura mecánica del vehículo o incluso para la carga (p.e. satélites), la cual actualmente se diseña específicamente para soportar estas fuerzas durante el despegue. Es por tanto, una preocupación importante para la ESA dado que podría poner en peligro la misión espacial. El objetivo, es pues, evitar la reflexión acústica sobre la aeronave, siendo los cristales de sonido buenos candidatos para alcanzar dicho objetivo.

Este proyecto, pretende abordar las bases para el estudio del contrato concedido por parte de la ESA a la Universitat Politècnica de València, llamado *Sonic Crystals for Noise Reduction at the Launch Pad*, cuyo objetivo es demostrar que el uso de los cristales fonónicos puede reducir la reflexión acústica sobre el vehículo espacial. Para ello, también será necesario el estudio de una configuración que pueda ser llevada a la práctica, es decir, una solución que se pueda incluir en la plataforma de despegue y que no afecte al resto de sistemas, como el de evacuación de gases. En este tema, los cristales de sonido son idóneos dado que al estar compuestos de dos medios, uno de ellos puede ser el aire, permitiendo así el flujo a través de la estructura y afectando solo a la propagación de la onda acústica.

En este trabajo, se presenta un estudio numérico utilizando los elementos finitos para estudiar el problema de la reflexión y difusión de las ondas acústicas por parte de los cristales de sonido.

CAPÍTULO

2

Introducción

En este capítulo se abordan los conocimientos matemáticos y acústicos relacionados con la propagación del sonido en un medio material periódico y su reflexión.

2.1 Cristales de Sonido

Un cristal de sonido es una estructura compuesta por un material distribuido de forma periódica en el espacio, que esta inmerso en otro medio distinto, por tanto, presenta simetría traslacional con respecto al periodo de repetición. Usualmente, tanto cristal sónico como fonónico hace referencia al mismo tipo de estructuras, sin embargo, históricamente son llamados de diferente manera en función de la ecuación que gobierna el sistema que lo modeliza. En general, un cristal sónico hace referencia a un sistema periódico, el cual uno de los medios es un fluido (generalmente aire o agua) y se modeliza por la ecuación de ondas acústicas, en ocasiones imponiendo condiciones de contorno al otro medio para evitar su propagación a través de él; mientras que, un cristal fonónico es más genérico, hace referencia a un medio gobernado por la ecuación de ondas elásticas (generalmente ondas que se propagan en sólidos). La principal diferencia radica en que en el caso acústico no se contempla la propagación de ondas transversales (inexistentes o despreciables en fluidos) y en el caso de ondas elásticas, sí. De hecho, un sistema elástico restringido exclusivamente a la propagación de ondas longitudinales es equivalente a un sistema acústico (una onda acústica no deja de ser más que una onda elástica longitudinal que generalmente se propagada por un fluido). En el contexto de este trabajo ambos términos son usados como sinónimos.

Estas estructuras periódicas, no son exclusivas de sistemas acústicos, de hecho, heredan el nombre del campo de la cristalografía (véase Fig. 2.1) donde fueron caracterizadas matemática-

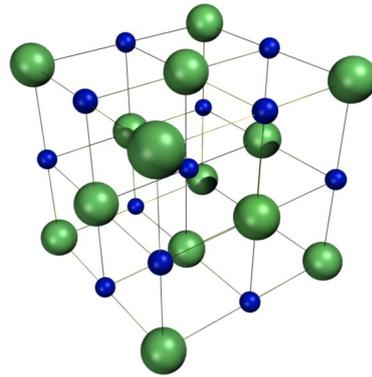


Figura 2.1: Estructura atómica periódica (cristalina) del cloruro de sodio (sal común). Los átomos más grandes y de color verde representan el cloro (Cl^-) y los más pequeños y azules el sodio (Na^+).

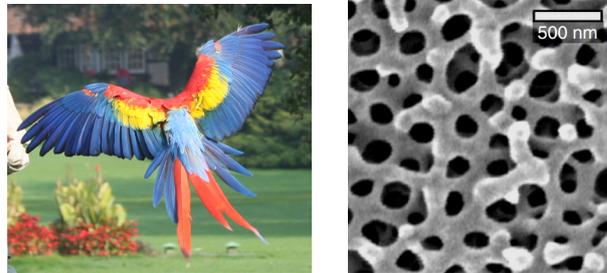


Figura 2.2: (Izquierda) Imagen del guacamayo bandera (Ara macao), (Derecha) Imagen SEM de la estructura de queratina presente en las plumas correspondientes al color azul [1].

mente por primera vez con teoría de grupos y físicamente con teoría del estado sólido. También, existe el caso análogo en electromagnetismo, los conocidos como cristales fotónicos. Estos medios son visibles en la naturaleza, por ejemplo, en piedras preciosas, conchas de moluscos, alas de insectos e incluso algún ave (Fig. 2.2). A priori, se puede pensar que el patrón de color, es debido a una pigmentación, sin embargo, un análisis a pequeña escala puede demostrar que la coloración es debida a una estructura ordenada que actúa como filtro óptico.

Como se puede observar, el hecho de que un medio presente periodicidad espacial es sus propiedades físicas modifica el comportamiento de la propagación de la onda. Esta periodicidad se puede presentar en una, dos o en las tres direcciones del espacio (véase Fig. 2.3). El fenómeno más característico producido por esta periodicidad, al igual que en sus equivalentes ópticos o sólidos cristalinos, es la presencia de *band gaps* o bandas prohibidas, es decir, frecuencias para las cuales la propagación de la onda a través del material no se produce. La primera evidencia experimental de esta propiedad en el campo de la acústica, se encontró en 1995 [Martinez95] al medir la atenuación producida por una obra del escultor alicantino Eusebio Sempere (1923-1985). Esta escultura formada por cilindros verticales (Fig. 2.4), se puede modelar como un cristal de sonido en 2 dimensiones.

Hasta ahora, solo se han visto ejemplos de las estructuras clásicas de los cristales de sonido en dos dimensiones formados por dispersores cilíndricos, que son los que se pretenden abordar en este trabajo, y la existencia de *band gaps*, demostrados de forma teórica en [2]. Sin embargo, tanto diversas formas de dispersores como su distribución espacial hacen de este campo, un interesante ámbito de estudio. Por ejemplo, entre algunas propiedades ya demostradas de

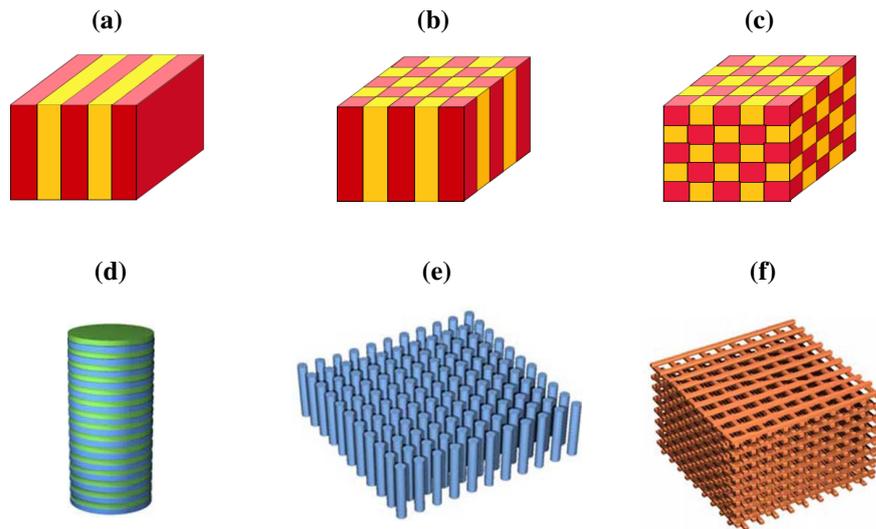


Figura 2.3: Esquema de medios periódicos en 1D (a), 2D (b) y 3D (c). Ejemplos de cristales en 1D (d), 2D (e) y 3D (f)



Figura 2.4: Escultura de E. Sempere (Órgano) situada en la fundación Juan March en Madrid

los cristales fotónicos con diferentes configuraciones se encuentran, el filtrado espacial, la conformación de haces (como la colimación o la focalización), el confinamiento o guiado de la energía, la formación de materiales cuyas propiedades físicas son equivalentes a las de otro, o incluso, metamateriales, cuyas propiedades físicas no se pueden encontrar en un medio común (generalmente, por que equivalen a propiedades negativas). Éste, es pues, un ámbito de estudio muy amplio y que permite su aplicabilidad no solo a los campos ya mencionados de la óptica y sólidos cristalinos, sino por ejemplo, a ondas sísmicas o mareas.

2.2 Sistemas periódicos

La geometría de un sistema periódico, se puede entender como la expansión lineal entera de una base en \mathbb{R}^n , siendo los extremos de dichos vectores, los puntos de la red periódica, llamada **red directa (o de Bravais)**, cuya posición viene descrita por el vector de posición en la red \mathbf{R} :

$$\mathbf{R} = \left\{ \sum_{i=1}^n n_i \mathbf{a}_i \right\} \quad (2.1)$$

siendo $n_i \in \mathbb{Z}$, \mathbf{a}_j los vectores de la base, y $i = 1, \dots, n$. Desde cualquier punto de la red, se observa la misma distribución de puntos, por lo que se tiene invarianza bajo traslación periódica. Este hecho nos permite, caracterizar la red simplemente por el paralelepípedo formado por la base \mathbf{a}_i llamado **celda unidad**, cuya repetición a lo largo del espacio consigue teselarla de forma regular. Si se considera, un cristal infinito, en un espacio real, se puede comprobar por teoría de grupos que un cristal en una dimensión solo existe un tipo de celda unidad; en dos dimensiones, de los diecisiete posibles grupos simétricos en el plano, solo cinco presentan invarianza rotacional de la celda unidad (condición necesaria para que al replicarlos se consiga periodicidad restringida únicamente a la celda unidad); y en tres dimensiones existen catorce celdas unidad [3]. Asociado con la red directa, se define la red recíproca \mathbf{b}_i como:

$$(\mathbf{a}_i \cdot \mathbf{b}_j) = \delta_{i,j} \quad \left\{ \begin{array}{l} i = 1, \dots, n \\ j = 1, \dots, n \end{array} \right\}, \quad (2.2)$$

siendo $\delta_{i,j}$ la delta de Kronecker, definida como:

$$\delta_{i,j} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases}. \quad (2.3)$$

Nótese, que los vectores de la red recíproca son ortogonales con respecto a los de la red directa y el producto de las áreas del paralelogramo que forman es la unidad (las áreas de la celda unidad en la red directa y recíproca también son recíprocas).

En el caso bi-periódico, objeto de estudio en este trabajo, las cinco posibles celdas unidad son las que se muestran en la Fig. 2.5– 2.9

• **Oblicua:** $|\mathbf{a}_1| \neq |\mathbf{a}_2|$

• **Cuadrada:** $|\mathbf{a}_1| = |\mathbf{a}_2|$, $\varphi = 90^\circ$

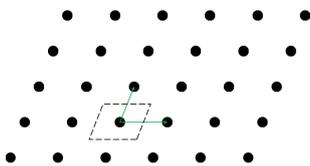


Figura 2.5: Red oblicua.

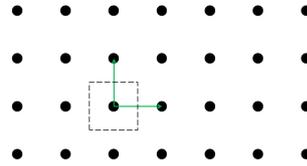


Figura 2.6: Red cuadrada.

- **Rectangular:** $|a_1| \neq |a_2|, \varphi = 90^\circ$
- **Triangular (Hexagonal):** $|a_1| = |a_2|, \varphi = 120^\circ$

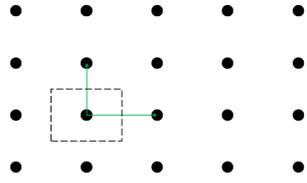


Figura 2.7: Red rectangular.

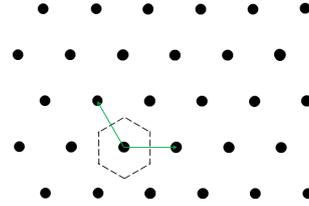


Figura 2.9: Red hexagonal.

- **Rectangular centrada:** $|a_1| \neq |a_2|, \varphi = 90^\circ$

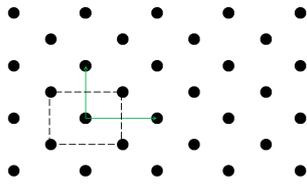


Figura 2.8: Red rectangular centrada.

De las posibles celdas unidad, este trabajo se centrará en la red cuadrada, siendo $a = |a_i|$ el **paso de red**. Esta constante, además de definir matemáticamente la red, es muy importante para caracterizar las propiedades físicas de la propagación a través de la estructura como se verá más adelante, pudiendo definir el *band gap*.

Una vez definida la geometría de la red, falta definir la geometría de la celda unidad. Para este estudio se contempla el caso de dispersores cilíndricos rígidos de radio r centrados en la celda unidad. Con ello, se puede definir otro parámetro, también relacionado con la propagación a través de la estructura, llamado el **factor de llenado** (*filling fraction*):

$$ff = \frac{\pi r^2}{a^2}, \tag{2.4}$$

este parámetro relaciona el área ocupada por el dispersor, con respecto a la celda unidad.

2.3 Propagación acústica en medios periódicos

Las ecuaciones de Maxwell en electromagnetismo, la ecuación vectorial de Navier para cuerpos elásticos, la de Schödinger en mecánica cuántica y la ecuación de ondas en acústica, son ejemplos de sistemas que presentan un carácter ondulatorio, cuyo desarrollo matemático es equivalente en cualquiera de todos ellos. En esta sección, se presenta el del caso acústico.

En régimen lineal a bajas amplitudes y sin flujo de materia, el sistema de ecuaciones en derivadas parciales acopladas que describe el campo acústico en un fluido es:

$$\nabla p(\mathbf{r}, t) + \rho(\mathbf{r}) \frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \tag{2.5a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}, t) + \kappa(\mathbf{r}) \frac{\partial p(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = 0 \tag{2.5b}$$

siendo:

- $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}^3$, velocidad de partícula en el instante t y origen \mathbf{r} .
- $p(\mathbf{r}, t) \in \mathbb{C}$, presión acústica (dinámica) del fluido en el instante t y posición \mathbf{r} .
- $\rho(\mathbf{r}), \kappa(\mathbf{r}) \in \mathbb{R}$, densidad en reposo y coeficiente de compresibilidad ($\kappa = B^{-1}$, siendo B módulo de Bulk) del fluido, respectivamente.

Suponiendo una oscilación armónica y desacoplo entre tiempo y espacio se puede asumir que $\mathbf{u}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{u}(\mathbf{r})e^{-i\omega t}$ y $p(\mathbf{r}, t) = p(\mathbf{r})e^{-i\omega(k)t}$, llegando a:

$$\nabla p(\mathbf{r}) + i\omega\rho(\mathbf{r}) \mathbf{u}(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.6a)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r}) + i\omega\kappa(\mathbf{r})p(\mathbf{r}) = 0 \quad (2.6b)$$

El sistema (2.6) se puede desacoplar para obtener la solución modal de $p(\mathbf{r})$. Se divide (2.6a) por $\rho(\mathbf{r})$ y se realiza la divergencia. Seguidamente, se despeja $\nabla \cdot \mathbf{u}(\mathbf{r})$ de (2.6b), se substituye la expresión obtenida en función de $p(\mathbf{r})$ en (2.6a) y arreglando términos se obtiene

$$\rho(\mathbf{r})\nabla \cdot \left(\frac{1}{\rho(\mathbf{r})} \nabla p(\mathbf{r}) \right) = - \left(\frac{\omega}{c} \right)^2 p(\mathbf{r}), \quad (2.7)$$

siendo $c = \sqrt{1/\kappa\rho}$, la velocidad de propagación en el medio. Con esta ecuación, dado un medio caracterizado por su distribución de densidades, es posible resolver el campo de presiones para cada modo(s) ω que sea solución del sistema. En caso de no ser suficiente la información proporcionada por este campo escalar, se puede recurrir al campo vectorial de velocidades, mediante (2.6b).

Para relacionar este sistema con el de un medio periódico, se aplica el conocido teorema de Bloch-Floquet que se puede enunciar de la siguiente manera.

Teorema 2.3.1 (Teorema de Bloch-Floquet). *La solución $(\Theta_{\mathbf{k}})$ de toda ecuación de ondas con condiciones periódicas de periodo \mathbf{R} , bajo un operador lineal e invariante traslacional, se puede descomponer como una onda plana modulada con el mismo periodo \mathbf{R} . Es decir:*

$$\Theta_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r})e^{i\mathbf{k}\mathbf{r}} \quad (2.8)$$

siendo,

$$\Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = \Psi_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R}) \quad (2.9)$$

Aplicando este teorema podemos particularizar la ecuación de ondas (2.7) para el caso de un medio periódico:

$$\nabla^2 p_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) + \left(\frac{\omega(\mathbf{k})}{c} \right)^2 p_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = 0, \quad (2.10)$$

siendo: $p_{\mathbf{k}}(\mathbf{r}) = p_{\mathbf{k}}(\mathbf{r} + \mathbf{R})$, donde \mathbf{k} es el vector de Bloch e indica la dirección del espacio hacia la que se propaga la onda y toma valores de la zona irreducible de Brillouin debido a la simetría rotacional del problema.

La ecuación (2.10) plantea un problema de valores propios cuya solución da una colección de valores infinitos pero discretos de $\omega(\mathbf{k})$ para cada valor de \mathbf{k} , es decir, para una dirección del espacio dada, multiples frecuencias separadas entre ellas son posibles modos de vibración en dicha dirección para la celda unidad (que por periodicidad es extensible al resto de la estructura). Al ser valores dicretos, se pueden separar por un índice n que se denomina índice de banda existiendo para cada banda una función continua $\omega_n(\mathbf{k})$ que representa, para esa banda,

los modos de vibración para todas las direcciones del espacio. Esta función, es denominada relación de dispersión cuya derivada representa la velocidad de propagación de la onda para una frecuencia y dirección dada $c = d\omega_n(\mathbf{k})/d|\mathbf{k}|$.

En la Fig. 2.10 se representa la estructura de bandas para un caso concreto de cristal de sonido, es decir, se representan la relación de dispersión para distintos índices de banda n . Nótese como para este caso existe un rango de frecuencias para las cuales no existe ningún valor asociado a una banda de dispersión para cualquier dirección del espacio, esto es el band gap.

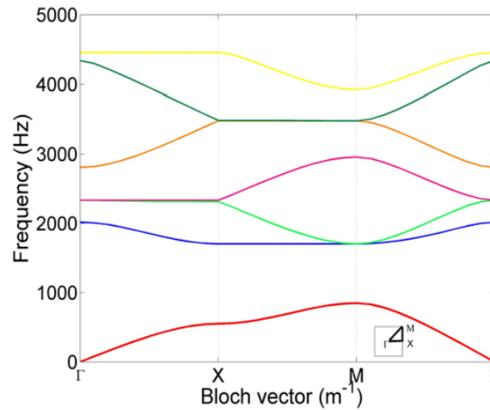


Figura 2.10: Estructura de bandas de una red cuadrada de dispersores cilíndricos de radio $r = 0,07\text{m}$ y paso de red $a = 0,15\text{m}$. Corresponde con un factor de llenado de $f_f = 68,4\%$ [?]

2.4 Band Gap

Como se ha podido observar en apartados anteriores, la presencia de periodicidad en un sistema provoca que la propagación de la onda se ve restringida a valores discretos de ω y \mathbf{k} relacionados con la periodicidad del sistema. En los cristales de sonido, donde dos medios componen la celda unidad es posible que no exista una solución real que cumpla la ecuación de ondas. Matemáticamente esto significa que \mathbf{k} toma valores imaginarios, mientras que físicamente corresponde con la aparición de una **onda evanescente**. Esto quiere decir, que ante una excitación a una frecuencia no soportada por el sistema la amplitud de la onda decrece exponencialmente. Sea $\mathbf{k} \in \mathbb{C}^n$ y la solución a la ecuación de ondas $p(\mathbf{r}) = Ae^{i\mathbf{k}\mathbf{r}}$, podemos descomponer dicha solución como:

$$p(\mathbf{r}) = Ae^{i\Re\{\mathbf{k}\}\mathbf{r}}e^{-\Im\{\mathbf{k}\}\mathbf{r}} \quad (2.11)$$

siendo el término $e^{-\Im\{\mathbf{k}\}\mathbf{r}}$ el responsable de que $p(\mathbf{r}) \rightarrow 0$, para $r \rightarrow \infty$. Si este fenómeno ocurre para cualquier dirección del espacio se dice que la estructura presenta una banda donde la propagación esta prohibida. Si se representa junto con la estructura de bandas, la parte compleja del vector de Bloch, se puede observar como el *band gap* esta formado por soluciones imaginarias (Fig. 2.11) [4].

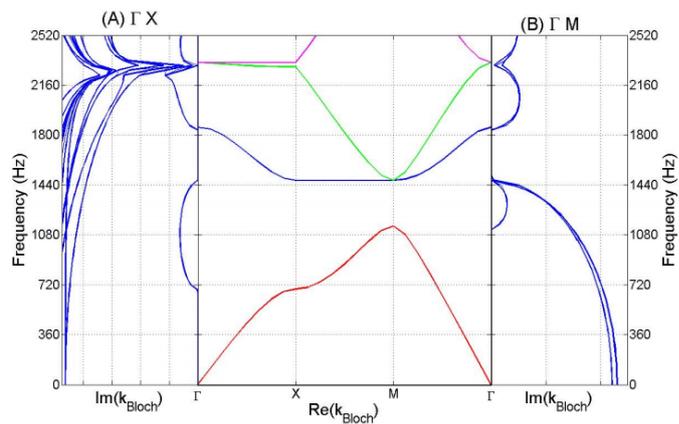


Figura 2.11: Estructura de bandas compleja de una red cuadrada de dispersores cilíndricos de radio $r = 0,07\text{m}$ y paso de red $a = 0,15\text{m}$. Corresponde con un factor de llenado de $ff = 68,4\%$ [?]. (Izquierda) Parte imaginaria del vector de Bloch en la dirección ΓX , (derecha) parte imaginaria en la dirección ΓM .

Esta separación entre las bandas depende exclusivamente de la proporción de volumen ocupada por cada medio, esta relación viene dada por el factor de llenado (ff eq. 2.4). En la Fig. 2.12 se puede observar la diferencia en la estructura de bandas a medida que se aumenta el factor de llenado. La primera corresponde con un factor de llenado prácticamente 0 y se puede apreciar la ausencia de *band gaps*. A medida que se aumenta este factor se aprecia la separación entre las bandas en algunas direcciones del espacio (conocido como *pseudogap*). Finalmente, una vez aumentado este factor lo suficiente se produce el *band gap* completo.

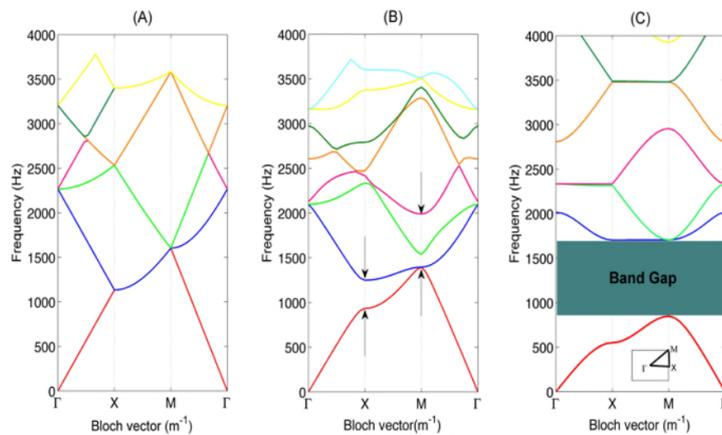


Figura 2.12: Estructura de bandas de cilindros rígidos en aire con paso de red $a = 0,15\text{m}$. (A) $ff \rightarrow 0$. (B) $ff = 12,57\%$. (C) $ff = 68,42\%$

2.5 Reflexión producida por un dispersor cilíndrico

El primer caso de estudio para entender la fenomenología que acontece dentro de un cristal de sonido con dispersores cilíndricos, es evaluar que dispersión produce un único elemento sin condiciones de periodicidad. Por tanto, supongase un cilindro de longitud infinita y de radio a y una onda plana incidiendo sobre él perpendicularmente con respecto al eje del cilindro. Las condiciones del problema nos llevan a poder abordar este problema en dos dimensiones, debido

a la gran longitud del cilindro y a expresar los resultados en coordenadas polares debido a la simetría radial que presenta. Según [5], la expresión para la onda dispersada por el cilindro a una distancia considerable de él, $(r, \phi)(kr \gg 1)$, es,

$$p_s(r, \phi, t) \simeq \sqrt{\frac{2\rho c I a}{\pi r}} \psi_s(\phi) e^{ik(r-ct)}, \quad (2.12)$$

siendo: ρ la densidad del medio, c la velocidad de propagación en el medio, I la intensidad de la onda incidente y k el vector de onda (relacionado con la longitud de onda por $k = 2\pi/\lambda$). Lo interesante de esta expresión es el desacoplo existente entre las variables, contiene una contribución debida a la distancia con respecto al centro del dispersor (r) que decrece con respecto a $1/\sqrt{r}$ (patrón típico de la divergencia de una onda cilíndrica), una contribución temporal armónica (en régimen lineal se conserva la excitación armónica) y un patrón de dispersión dado por $\psi_s(\phi)$,

$$|\psi_s(\phi)|^2 = \frac{1}{ka} \sum_{m,n=0}^{\infty} \epsilon_m \epsilon_n \sin \gamma_m \sin \gamma_n \cos(\gamma_m - \gamma_n) \cos(m\phi) \cos(n\phi) \quad (2.13)$$

donde $\epsilon_0 = 1$ y $\epsilon_i = 2 \forall i > 0$, y

$$\gamma_i = \begin{cases} \tan^{-1} \left(-\frac{J_1(ka)}{Y_1(ka)} \right) & i = 0 \\ \tan^{-1} \left(\frac{J_{i-1}(ka) - J_{i+1}(ka)}{Y_{i+1}(ka) - Y_{i-1}(ka)} \right) & i > 0 \end{cases}, \quad (2.14)$$

siendo J_i y N_i las funciones de Bessel de primer y segunda especie de orden i .

2.6 Método de elementos finitos (FEM)

El método de elementos finitos (FEM, *Finite Elements Method*), es un método numérico para aproximar la solución de ecuaciones en derivadas parciales (EDP). Este método es ampliamente utilizado en ingeniería para resolver problemas particulares, cuya resolución analítica se desconoce o podría llevar a un desarrollo difícil de abordar. Su ventaja principal reside en la flexibilidad para trabajar con geometrías complejas, dado que para la resolución del problema se reemplaza el dominio de la solución $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, por la aproximación de la unión de subdominios disjuntos más pequeños $\cup \Omega^{(e)}$, llamados elementos finitos y cuyos vértices son los nodos del problema. En general, la geometría de Ω no tiene por que coincidir con la de $\cup \Omega^{(e)}$, dado que para $\Omega^{(e)}$ se suelen tomar triángulos equiláteros para el caso bidimensional (véase Fig. 2.13), y tetraedros para el caso tridimensional donde las condiciones en el contorno $\partial \Omega^{(e)}$ son conocidas. Esta subdivisión permite el cálculo de dominios con distintas propiedades físicas.

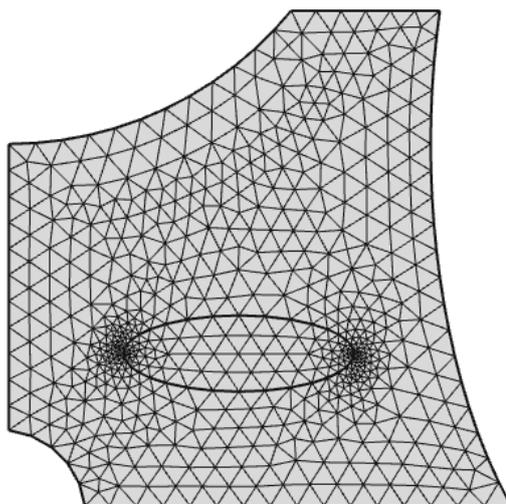


Figura 2.13: Mallado triangular no uniforme de una geometría arbitraria, con dos dominios distintos. En los contornos más abruptos el mallado se realiza más fino mientras que en el interior es más regular

El primer paso para resolver un problema con elementos finitos es reformular el problema en su forma débil. Dada una ecuación diferencial de la forma $-\nabla^2 u(x) = f(x) \in \Omega$ y siendo las condiciones de contorno $u(x) = 0 \forall x \in \partial\Omega$, se tiene la siguiente formulación débil:

$$\int_{\Omega} f v \, dS = \int_{\Omega} \nabla^2 u \cdot \nabla^2 v \, dS \equiv \phi(u, v) \tag{2.15}$$

siendo v la función peso, que escogida de forma adecuada garantiza la unicidad de la solución.

El segundo paso, es la discretización del problema. En vez de buscar la solución de u en su espacio original, se busca la solución en un subespacio V donde se cumpla que $\forall v^h \in V, \phi(u^h, v^h) = \int f v$. La elección de este subespacio, suele marcar el carácter de la solución, por ejemplo, se podría escoger el espacio de las funciones polinómicas definidas a trozos. Para completar la discretización, se selecciona una base para el espacio V . Por ejemplo, para el caso de una dimensión se puede escoger la siguiente función:

$$v_k(x) = \begin{cases} \frac{x-x_{k-1}}{x_k-x_{k-1}} & \text{si } x \in [x_{k-1}, x_k], \\ \frac{x_{k+1}-x}{x_{k+1}-x_k} & \text{si } x \in [x_k, x_{k+1}], \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \tag{2.16}$$

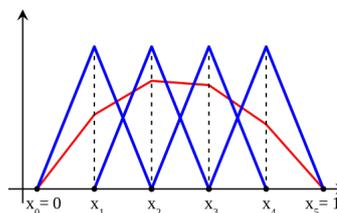


Figura 2.14: (Azul) bases de del espacio y una combinación lineal de ellas (rojo).

El tercer, y último paso antes de la resolución, es la formulación matricial. Para ello, expresamos $u(x) = \sum_{k=1}^n u_k v_k(x)$ y $f(x) = \sum_{k=1}^n f_k v_k(x)$ con respecto a la base, obteniéndose:

$$\sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \phi_{ij}(u^h)_i (v^h)_j = \sum_{j=1}^N (f)_j (v^h)_j \Rightarrow \sum_{j=1}^N \left(\sum_{i=1}^N \phi_{ij}(u^h)_i - (f)_j \right) (v^h)_j = 0$$

siendo n el numero de nodos de la discretización.

Si se denota, \mathbf{u} y \mathbf{f} como los vectores columna de la forma $(u_1, \dots, u_n)^t$ y $(f_1, \dots, f_n)^t$, respectivamente, el problema se puede reformular de la siguiente forma matricial:

$$\mathbf{L}\mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (2.17)$$

generalmente, la matriz $L = \phi_{ij}$ se obtiene mediante integración numérica, lo cual introduce una segunda fuente de error al método, después de la aproximación geométrica.

Este método, se puede formular con la ecuación de presión para el campo acústico (2.7), permitiendo resolver el problema planteado en este trabajo de forma numérica. Además, permite la descomposición del campo total calculado como campo incidente (parámetro de entrada del cálculo) y campo reflejado, $p_t = p_i + p_s$, con lo cual se puede abordar cómo se dispersa la energía acústica en el espacio para una geometría e incidencia dada.

2.7 Transformación a campo lejano

Una vez, vez abordado el problema numéricamente, hace falta tener una última consideración. Cualquier objeto que radia energía, ya sea como fuente de la propia energía, como un altavoz o una antena, o como elemento reflector tiene dos zonas de interés que afectan a la distribución espacial de esa energía. La zona próxima al radiador o campo cercano, donde las ondas con diferentes direcciones interactúan unas con otras con diferencias de fase que pueden provocar fuertes focalizaciones y cancelaciones de la energía; y el campo lejano, donde cada onda encuentra su dirección de propagación y no interfiere con el resto. Normalmente, suele ser esta segunda zona, también llamada región de Fraunhofer, la zona de interés, ya que nos marca el patrón por el cual la energía se distribuye.

Naturalmente, la distinción entre campo cercano y campo lejano no es abrupta, suele ser progresiva y suele venir dada por el tamaño del objeto con respecto a la longitud de onda de la onda. Por lo tanto, para nuestro estudio sería conveniente la elección de un dominio muy grande para poder ver como radia la estructura a una distancia considerable. Sin embargo, ello supondría un coste computacional tan elevado que podría hacer inabordable el problema.

Sin embargo, para un medio homogéneo, la solución para la presión fuera de una superficie cerrada que encierre a todos los objetos que causen algún tipo de radiación (ya sean emisores o dispersores) es conocida. Para ello, necesitamos saber el valor de la presión y su derivada normal (relacionada con la velocidad (2.5b)) con respecto a dicha superficie,

$$p(\mathbf{r}) = \int_S (G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) \nabla p(\mathbf{r}) - \nabla G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) p(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n}) dS, \quad (2.18)$$

siendo \mathbf{r} el vector de posición en el espacio, \mathbf{s} el vector que parametriza la superficie que encierra el problema, \mathbf{n} el vector unitario normal a la superficie apuntando en la dirección del medio exterior infinito y $G(\mathbf{r}, \mathbf{s})$ la función de Green que en dos dimensiones se formula,

$$G(\mathbf{r}, \mathbf{s}) = \frac{i}{4} H_0^{(2)}(k|\mathbf{s} - \mathbf{r}|), \quad (2.19)$$

siendo $H_0^{(2)}$ la segunda función de Hankel (o función de Bessel de tercera especie), definida con respecto a las funciones de Bessel de primera y segunda especie: $H_n^{(2)}(x) = J_n(x) - iY_n(x)$.

Sustituyendo (2.19) en (2.18) se obtiene:

$$p(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4} \int_S \left(H_0^{(2)}(k|\mathbf{s} - \mathbf{r}|) \nabla p(\mathbf{r}) + kp(\mathbf{r}) \frac{H_0^{(2)}(k|\mathbf{s} - \mathbf{r}|)}{|\mathbf{s} - \mathbf{r}|} (\mathbf{s} - \mathbf{r}) \right) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.20)$$

En este caso, todavía se puede hacer una particularización más que simplifique 2.20. Dado que no se requiere evaluar el campo en cada punto del dominio exterior que encierra S , si no, solo su distribución muy lejos de la fuente, se puede tomar el límite para \mathbf{r} tendiendo a infinito y dado que la función de Hankel se aproxima asintóticamente a una exponencial, se puede expresar el campo lejano radiado por el dispersor (p_{far}) como:

$$p_{far}(\mathbf{r}) = -\frac{i}{4\sqrt{\pi k}} \int_S e^{ik\frac{\mathbf{s}\cdot\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}} \left(\nabla p(\mathbf{r}) - ikp(\mathbf{r}) \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \right) \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.21)$$

Nótese, que el parámetro que se desea obtener es $|p_{far}(\mathbf{r})|$, más que $p_{far}(\mathbf{r})$. Además, en la simplificación también se ha despreciado la componente de fase, por lo que el carácter ondulatorio de la onda en el espacio se ha perdido, aunque no es relevante para el caso dado que en este régimen ya no existen interferencias. Realmente, el único factor importante para el estudio es su valor en función de la dirección de \mathbf{r} , o lo que es lo mismo, después de la integración numérica, obtener $|p_{far}(\theta)|$.

CAPÍTULO

3

Análisis numérico

En este capítulo se muestran los resultados numéricos obtenidos para distintas geometrías. Se comienza por el caso más sencillo, un dispersor cilíndrico cuya solución analítica es conocida, para comprobar la idoneidad del método para este estudio (3.1). En segundo lugar, se analiza una fila de diecinueve dispersores de radio r y separados un paso de red a , y se analizan los ordenes de difracción para esta estructura (3.2). A continuación, se propone el caso anterior pero con una pared reflectante a una distancia d de la estructura en su parte inferior (3.3) y se analiza nuevamente la reflexión producida. Los siguientes casos, ya contemplan el caso real de un cristal de sonido con siete filas (3.4) y el mismo caso nuevamente con un elemento reflectante 3.5, comandolos con los casos anteriores.

Para realizar el estudio numérico se ha utilizado el software comercial Comsol Multiphysics 4.2, el cual nos permite realizar los cálculos necesarios en FEM de forma transparente para el usuario. Las simulaciones, se han realizado en un servidor de cálculo dotado del software, dos procesadores *Intel Xenon* de 12 núcleos cada uno y 48 Gb de memoria RAM. Obteniendose un promedio de 7 u 8 horas por simulación realizada.

Todos los casos, han sido mallados con triángulos cuyo tamaño máximo es ocho veces la mínima longitud de onda ($\lambda = f/c$) para la que se ha simulado y con un tamaño mínimo de veinte veces la longitud de onda. Con ello, aseguramos que en el peor de los casos existirán ocho elementos por longitud de onda, con lo cual se asegura la convergencia a la solución del método FEM. Como excitación de entrada, en todos los casos, se ha escogido una onda plana en la dirección $-y$, incidiendo así de forma normal en la estructura. Dado que, estas estructuras son escalables en función de su paso de red (periódico) y del medio en el que esta sumergida, la frecuencia se representará de forma normalizada como $\bar{f} = fa/c$. Con esto, la frecuencia de estudio queda definida en el rango de 0.1 a 4 en pasos de 0.1.

En cuanto al dominio del sistema y su geometría, se suponen cilindros de longitud infinita (2D) completamente rígidos que reflejan toda la energía incidente y la onda no hace vibrar su estructura. El medio por el que se propaga la onda es aire a temperatura ambiente (velocidad de propagación $c = 343\text{m/s}$). Además para simular un entorno libre de reflexiones ajenas al problema, se ha introducido alrededor de todo el dominio un subdominio de PML (*Perfectly Mached Layer*) que absorbe la onda que le llega, asegurando así esta condición. Los radios de todos los cilindros son iguales y de radio $r = 0,2\text{m}$ y el paso de red $a = 0,85\text{m}$, obteniéndose un factor de llenado $ff = 17,4\%$. Las paredes reflectantes, al igual que los cilindros, son completamente rígidas y tienen, un grosor igual al radio de los cilindros y una longitud necesaria para abarcar la anchura o altura de todo el sistema.

Además, para evaluar el campo lejano de la radiación del sistema según la ecuación 2.21, se ha escogido una superficie circular envolvente a toda la estructura. Como origen de coordenadas para la variable angular se ha escogido el eje de las y positivas (dirección de reflexión especular) y se ha tomado el sentido positivo en sentido horario y en negativo en sentido anti-horario.

3.1 Dispensor cilíndrico

En este caso se evalúa la fiabilidad del código numérico utilizado y su transformación a campo lejano (sección 2.7). Para ello, se realiza una simulación en 2 dimensiones de un dispensor circular rodeado por una línea de integración. En ella, se calcula el campo lejano para $r \rightarrow \infty$. Finalmente, se comparan los resultados numéricos con la expresión analítica expuesta en la sección 2.5. En la Fig.3.1 se observa como la solución numérica se aproxima a la solución analítica, lo cual da confianza sobre la fiabilidad del cálculo numérico para las siguientes secciones.

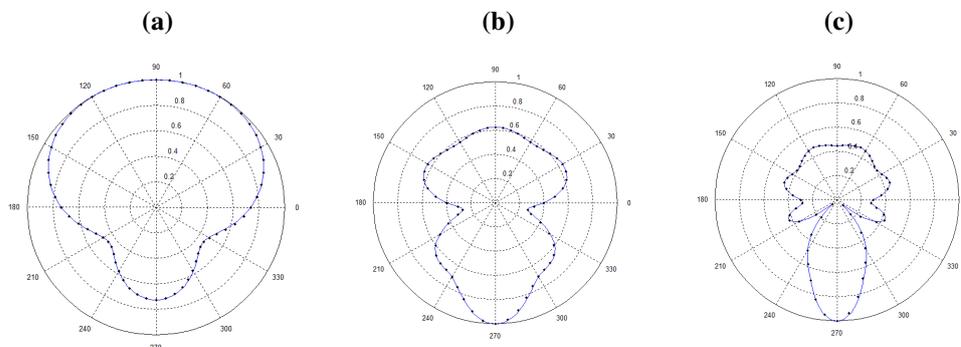


Figura 3.1: Presion acústica en campo lejano calculada de forma semi-analítica (línea azul) y de forma numérica (punteado negro) en función del ángulo para frecuencias: (a) $f = 282,5\text{Hz}$ ($kr \approx 1$), (b) $f = 807,1\text{Hz}$ ($kr \approx 3$) y (c) $f = 1331,6\text{Hz}$ ($kr \approx 5$).

3.2 Fila de dispersores

Cuando analicemos el caso de un cristal con varias filas, la primera fila es la interfase entre el medio externo (el aire) y el medio periódico (el cristal), esta interfase se comportará como una red de difracción. Sin embargo, en el caso de una única fila lo que hay detrás de ella vuelve a

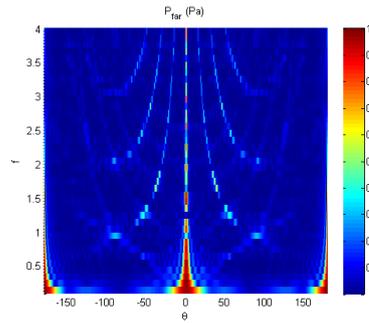


Figura 3.2: Diagrama polar de la presión en campo lejano reflejado por una fila de dispersores

ser un medio homogéneo (el aire). En el caso de un cristal con varias filas, lo que habrá detrás de la interfase es un medio periódico. Si se quiere ver la influencia de este medio periódico en la reflexión se debe primeramente estudiar como es la reflexión de una onda en una única fila que es lo que se estudia en esta sección.

La fila esta compuesta por 19 dispersores circulares que, como se ha mencionado en la introducción de este capítulo, tienen un radio de 0,2m separados entre ellos por un paso de red de 0,85m, sobre la que se incide una onda plana de forma perpendicular. El rango de frecuencias normalizadas para la onda incidente es desde 0 a 4. En la figura 3.2 se ha representado la magnitud del campo lejano normalizado en función del ángulo y de la frecuencia. Cuando hablamos de difracción nos referimos a que cada dispersor refleja la onda convirtiéndose en un foco emisor y produciéndose un desfase entre las ondas reflejadas que da lugar a interferencias constructivas y destructivas. Se puede observar los distintos órdenes de difracción en función de la frecuencia. Existe un orden central a 0 deg y a medida que aumenta, los órdenes superiores adquieren energía.

En la Fig. 3.3 se representa el diagrama polar para una frecuencia normalizada, correspondiente a $\bar{f} = 0,5$ que utilizaremos posteriormente para la comparación. Esta frecuencia, es la correspondiente a la frecuencia central del *band gap* de la estructura periódica que se analizará con posterioridad.

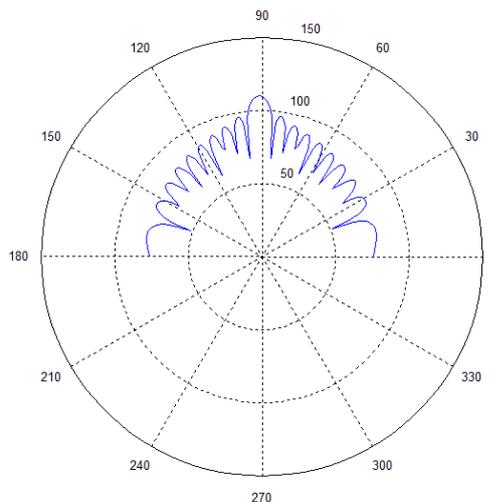


Figura 3.3: Presión del campo lejano en función del ángulo de reflexión y la frecuencia

Como se puede observar en la figura 3.3, la presencia de una fila de dispersores, produce una dispersión angular, donde se ve el citado lóbulo central que corresponde con la onda que se ve reflejada en la dirección de la fuente (orden de difracción 0) y una serie de lóbulos laterales que corresponden a ordenes de difracción superiores.

3.3 Fila de dispersores con pared reflectante

Para el problema de reflexión que pretendemos abordar, hemos de considerar una superficie reflectante detrás de las estructuras que vayamos a analizar, dado que en la plataforma de despegue del cohete el suelo ejerce el papel de superficie reflectante. En esta sección se presenta el caso de una fila de dispersores donde se ha situado una pared reflectante a diferentes distancias. En particular se analizan las distancias $d = 0$, $d = a$ y $d = 2a$, para poder comparar posteriormente con el caso de una red periódica donde consideraremos una frecuencia situada en el *band gap* y estas distancias tendrán relación con la longitud de onda correspondiente a dicha frecuencia.

En la Fig. 3.4 se representa, para los tres valores de d , el mapa equivalente al representado en la sección anterior. Para ver si se ha producido alguna alteración en los órdenes de difracción se representa en la Fig. 3.5 el diagrama polar para la frecuencia $\bar{f} = 0,5$, donde se observa que la presencia de la pared tiene como consecuencia el aumento de la energía en todos los órdenes de difracción y una modificación de su distribución angular. Luego, el efecto del suelo modelizado por esta pared reflectante es necesario considerarlo.

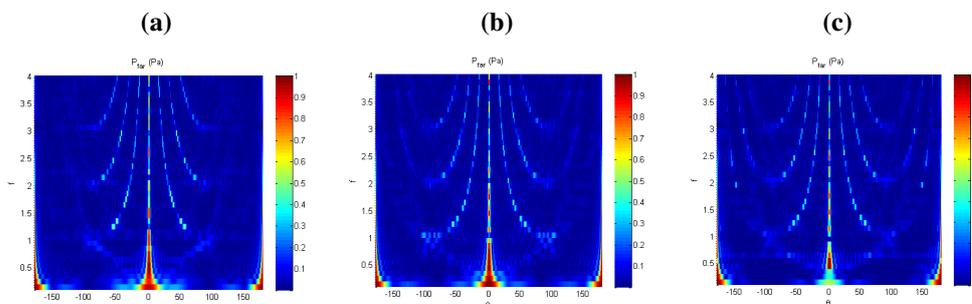


Figura 3.4: Presión del campo lejano en función del ángulo de reflexión y la frecuencia. (a) $d = 0m$, $d = a$ y $d = 2a$

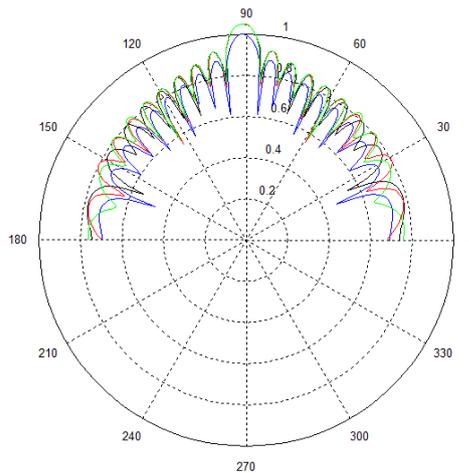


Figura 3.5: Diagrama polar de (azul) fila de dispersores sin elemento reflectante, (verde) con pared reflectante a $d = 0m$, (rojo) $d = a$ y (negro) $d = 2a$

3.4 Cristal de sonido

A continuación vamos a analizar como es el campo reflejado en un cristal de sonido de siete filas y diecinueve columnas sin pared reflectante. En la figura ??, se observan los diferentes órdenes de difracción en función de la frecuencia. Se aprecia muy claramente que el lóbulo central aparece fracturado por islas de color claro, frente a otras de rojo intenso. Como estamos analizando la reflexión, las de color rojo intenso representan frecuencias que están en el *band gap* y por tanto reflejan la onda incidente, mientras que las zonas azul claro corresponden a bandas de frecuencia que son transmitidas por la estructura. Es el fenómeno de la periodicidad que se ha comentado en la introducción de este trabajo. Ahora pues, se representa el diagrama polar para dos frecuencias una correspondiente al *band gap* y otra correspondiente a la transmisión de la onda a través del cristal. En la figura 3.7a se ha representado el caso para frecuencia $\bar{f} = 0,5$ y se compara con el caso de una fila sin pared. Se puede observar que se produce un aumento de intensidad en los órdenes de difracción entre los ángulos comprendidos entre 30° y -30° . En la figura 3.7b se ha representado la frecuencia $\bar{f} = 0,8$ que se encuentra en la segunda banda de propagación y se observa que aumenta la reflexión en los órdenes cercanos a 90° y -90° .

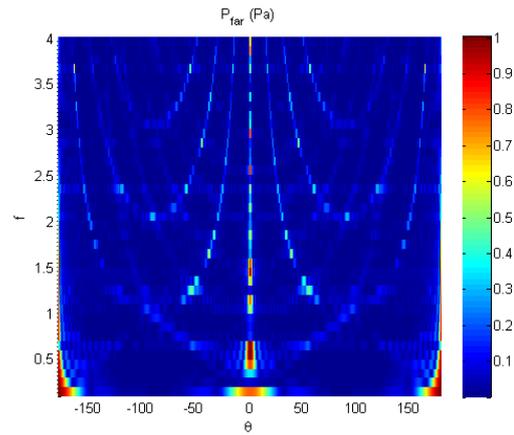


Figura 3.6: Presión del campo lejano en función del ángulo de reflexión y la frecuencia para el cristal de sonido.

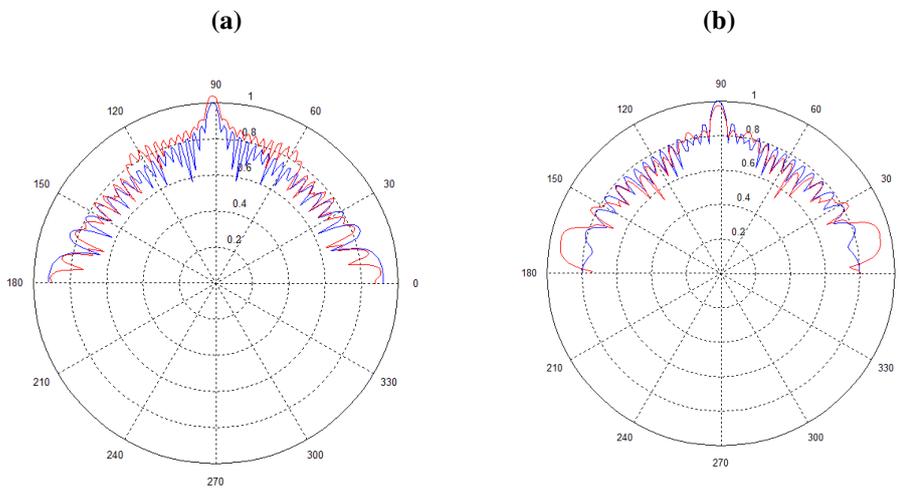


Figura 3.7: Diagrama polar de (azul) cristal de sonido sin elemento reflectante, (verde) con pared reflectante, para (a) $\bar{f} = 0,5$ y (b) $\bar{f} = 0,8$.

3.5 Cristal de sonido con pared reflectante

En este caso vamos a estudiar el caso donde se sitúa una pared reflectante a continuación de cristal. En nuestra modelización corresponde con un grado más de proximidad al caso real. Según se puede observar en la Fig. 3.8b, aumentan la intensidad de los órdenes de difracción aumenta dado que las frecuencias en bandas de transmisión, aunque penetran el cristal, se encuentran con la pared y se reflejan hacia atrás. Esta situación se ve claramente en el diagrama polar 3.9b donde se representa la frecuencia $\bar{f} = 0,8$. Se observa, sin embargo que el hecho de que las ondas de estas frecuencias atraviesan el cristal, se reflejen en la pared final y vuelvan a atravesar de nuevo el cristal, tiene como consecuencia una mayor difusividad del campo reflejado. Se observa en la figura, que, aunque la intensidad aumenta en todos los órdenes, el campo fuera de 0 deg es más disperso, se uniformiza entre las direcciones 90 deg y -90 deg. Para el caso de *band gap* (Fig. 3.9a), frecuencia $\bar{f} = 0,5$, se ve que hay poca diferencia entre los órdenes de difracción, lo que nos indica que efectivamente la onda no penetra el cristal, es reflejada practicamente en la interfase y no detecta la presencia de la pared reflectante.

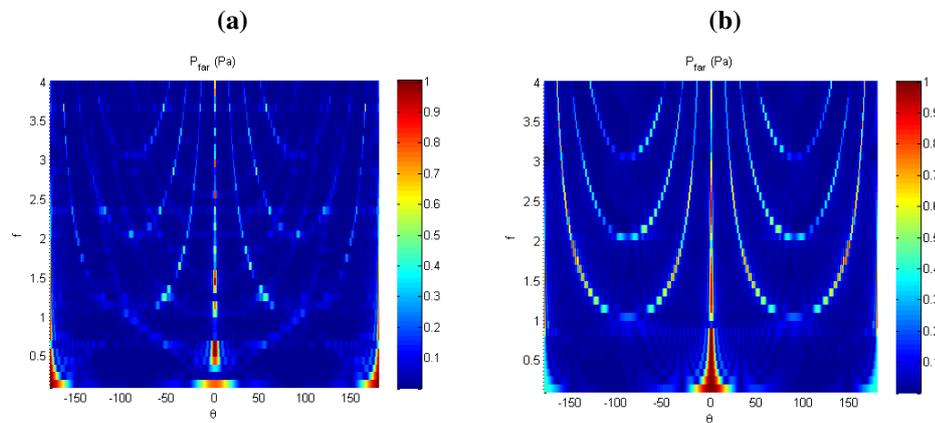


Figura 3.8: Presión del campo lejano en función del ángulo de reflexión y la frecuencia para el cristal de sonido (a) sin pared reflectante y (b) con pared reflectante

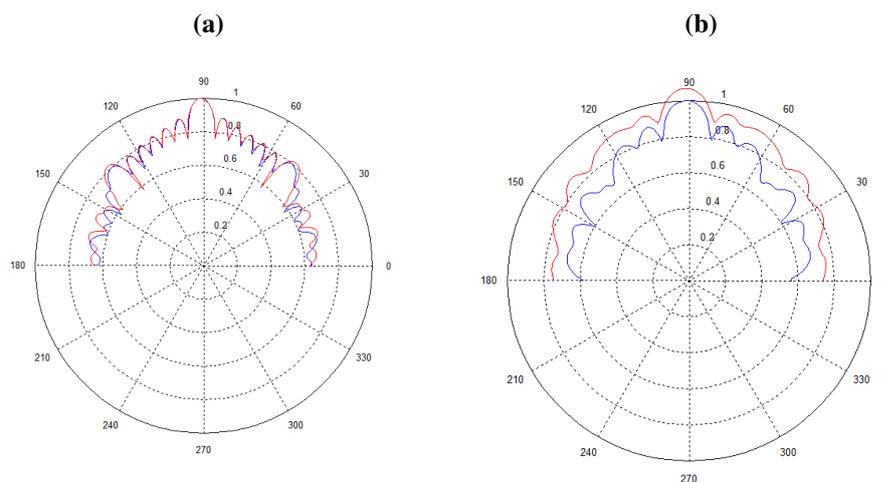


Figura 3.9: Diagrama polar de (azul) cristal de sonido con elemento reflectante, (verde) con pared reflectante, para (a) $\bar{f} = 0,5$ y (b) $\bar{f} = 0,8$.

CAPÍTULO

4

Conclusiones y líneas futuras

En este trabajo se ha realizado un modelo sencillo de la onda acústica emitida por un cohete en la operación de despegue cuando es reflejada en la plataforma de lanzamiento.

Se ha considerado que el cohete emite una onda plana sobre una estructura formada por cilindros rígidos y que detrás puede tener o no una pared reflectante. Se ha estudiado el caso de un cristal de sonido con siete filas contra el caso de una fila de dispersores. Para el estudio se ha considerado también el campo lejano, es decir la onda reflejada lejos de la estructura.

En el caso de una única fila de dispersores, el campo reflejado presenta, para las diferentes frecuencias analizadas, el patrón típico de una rejilla de difracción. Cuando una onda plana incide sobre la estructura, la onda reflejada presenta un máximo en la dirección central y lóbulos en las direcciones angulares entre 90° y -90° , y la presencia de una pared reflectora detrás de dicha fila solo viene a aumentar la intensidad reflejada sin prácticamente modificar su distribución angular.

Cuando se introduce un cristal de sonido y lo comparamos con el caso de una fila, observamos que para frecuencias del *band gap* se produce una alteración de intensidad que va a los órdenes de difracción en el intervalo comprendido entre 30° y -30° . En el caso de frecuencias en transmisión, el medio es transparente y la presencia del cristal no altera los órdenes de difracción reflejados.

Sin embargo, el situar la pared reflectante, mientras que no altera las frecuencias situadas en el *band gap*, resultado que era esperado, pues se trata de ondas que no se transmiten a lo largo de la estructura y por tanto la presencia de la pared, si que aparece un efecto para frecuencias en bandas de transmisión, donde el efecto cristal más pared parece generar un campo con mayor difusividad, es decir, la energía no se concentra en órdenes de difracción si no que parece que se distribuye más equiangularmente.

Como conclusión general del trabajo, se concluye que si bien los cristales de sonido alteran los órdenes de difracción por si solos no son capaces de disminuir la onda que se refleja directamente sobre la fuente (cohetes). Pero sí son capaces de:

- a. Por un lado mandar energía a órdenes de difracción que están situados fuera de la dirección cero grados, donde se encuentra la fuente.
- b. Aumentar la difusividad del campo reflejado.

Los siguientes pasos de actuación de este proyecto serán

1. Hacer un estudio de como es el campo reflejado en función del número de filas y el factor de llenado del cristal.
2. Considerar otros tipos de fuentes como haces o fuente puntual. Este punto es importante ya que es conocido en la literatura que cuando la simetría del campo incidente no coincide con la simetría de los modos de Bloch, esas frecuencias también se reflejan aunque no estén en *band gap*, son las llamadas bandas sordas. La simetría de los modos de Bloch se obtienen a partir de los vectores propios asociados a los valores propios del problema de autovalores.
3. Incorporar en los dispersores cavidades resonantes sintonizadas a las frecuencias de transmisión del cristal para reducir la energía global reflejada. En el calculo, se han considerado cilindros completamente rígidos, lo cual implica una condición tipo Neuman en la pared del dispersor para la resolución de la ecuación de ondas, por lo tanto, podemos considerar los dispersores huecos y, a partir de ellos, generar una cavidad resonante simplemente abriendo una abertura en su pared.
4. Considerar variaciones de la periodicidad con la profundidad, de tal manera que la estructura sólo sea periódica localmente, son las denominadas estructuras *chirped*.
5. Se ha considerado que el cristal como un sistema conservativo y que por tanto transmite o refleja toda la energía que le llega. Sin embargo, se sabe que existen pérdidas por viscosidad en capas muy próximas a la superficie de los dispersores. Esto requerirá de métodos numéricos con mallados no uniformes, dado que el mallado de estas capas ha de ser muy fino. Por lo tanto, todos los cálculos representan una sobrestimación del campo reflejado.

Bibliografía

- [1] M. Saba, M. Thiel, M. D. Turner, S. T. Hyde, M. Gu, K. Grosse-Brauckmann, D. N. Neshev, K. Mecke, and G. E. Schröder-Turk. Circular dichroism in biological photonic crystals and cubic chiral nets. *Phys. Rev. Lett.*, 106:103902, Mar 2011.
- [2] Isabel Pérez-Arjona, Víctor J Sánchez-Morcillo, Javier Redondo, Víctor Espinosa, and Kestutis Staliunas. Theoretical prediction of the nondiffractive propagation of sonic waves through periodic acoustic media. *Physical Review B*, 75(1):014304, 2007.
- [3] Charles Kittel and Paul McEuen. *Introduction to solid state physics*, volume 8. Wiley New York, 1976.
- [4] V Romero-García, JV Sánchez-Pérez, and LM Garcia-Raffi. Evanescent modes in sonic crystals: Complex dispersion relation and supercell approximation. *Journal of Applied Physics*, 108(4):044907, 2010.
- [5] Philip M. Morse and K. Uno Ingard. *Theoretical acoustics*. Princeton University Press, 1986.