

RECURSOS, EXPERIENCIAS Y PROPUESTAS PARA EL AULA

UN MODELO SIMPLE DE PROPAGACIÓN DE INCENDIOS FORESTALES CON ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS¹

E

S. Pueblas¹, L.M. García Raffi^{2*}, E.A. Sánchez Pérez²,
J.V. Sánchez Pérez³

1. Universidad del Sur. Bahía Blanca. Argentina.

2. Dep. de Matemática Aplicada. Uni. Pol. de Valencia. España.

3. Dep. de Física Aplicada. Uni. Pol. de Valencia. España.

RESUMEN. En este trabajo damos un ejemplo de contextualización de la enseñanza de las matemáticas. En concreto se presenta una práctica de modelización matemática de la propagación de incendios forestales. La modelización es la herramienta didáctica propuesta por los autores para una enseñanza de las matemáticas multidisciplinar e inserta dentro del esquema general del estudio de las ciencias. La actividad propuesta atañe a la enseñanza de las ecuaciones diferenciales ordinarias, tema de gran importancia dentro de los temarios de Cálculo de primer curso.

SUMMARY In this paper we present an example of a contextual approach to teaching mathematics. In particular, we present an activity concerning a mathematical model for a forest fire. Modelling is the tool selected by the authors in order to produce a contextual mathematical knowledge inserted in the framework of the general study of science. The subject selected in this paper is the theory of ordinary differential equations which is very important in the teaching of Calculus in the first course of Engineering education.

* Autor responsable. E-mail: lmgarcia@mat.upv.es

1. Queremos agradecer la colaboración prestada por D. Jorge Suárez Torres, Ingeniero de Montes de la Dirección General de Recursos Forestales de la Consellería de Medio Ambiente de la Comunidad Valenciana.

1. INTRODUCCIÓN

En el contexto de las enseñanzas científico técnicas, uno de los principales retos que plantea la reforma de los planes de estudio dentro de la universidad es el de configurar el conjunto de conocimientos y habilidades que deberán poseer los futuros científicos y tecnólogos. La dificultad en el diseño de los currícula estriba fundamentalmente en que el entorno tecnológico en permanente cambio en el que vivimos establece unas prioridades para la formación de los ingenieros y tecnólogos que muchas veces son muy difíciles de compatibilizar con las prioridades de la formación y la docencia, aunque ésta esté sometida a un continuo proceso de revisión y actualización. La tecnología puesta al servicio de la docencia ha sido y es una herramienta muy útil que ha venido a paliar en cierta medida estos desajustes, produciendo en el caso de algunas disciplinas una auténtica revolución que sigue en marcha. Sin embargo, el debate sobre el auténtico trasfondo de la reforma educativa sigue presente, y aunque se ha escrito mucho y muy diverso sobre el tema, está abierto y pendiente de resolución.

El "Grup de Modelització Matemàtica" de la Escuela de Caminos de la Universitat Politècnica de Valencia está formado por un grupo de profesores de matemáticas y física de la de la universidad desde hace algunos años trabaja en temas de innovación educativa, especialmente en la puesta en marcha de nuevas metodologías docentes en el aula (véanse por ejemplo los artículos [3], [7] y [8], y el libro de texto [9]). Nuestra propuesta se basa en dos puntos fundamentales:

1. El entorno tecnológico cambiante tiene como consecuencia la pronta caducidad del conocimiento técnico específico. Por lo tanto apostamos por una enseñanza de las habilidades, de las capacidades.
2. El conocimiento meramente acumulativo carece cada vez más de sentido. Y esto es importante que lo entendamos los docentes que hoy tenemos la responsabilidad de enseñar y que nos hemos educado y formado en un sistema que podríamos calificar de enciclopédico. Además, resulta evidente a nuestro entender que el conocimiento que será útil a los profesionales del futuro será el que esté sólidamente interrelacionado sobre una base multidisciplinar. No es posible seguir considerando nuestros conocimientos científicos y asignaturas compartimentos estancos aislados del resto de las ciencias.

Para poner en marcha estas ideas, proponemos una actividad que forme a nuestros alumnos en ciertas habilidades, y con el requisito de la multidisciplinariedad. Esta actividad la constituyen las prácticas de modelización matemática que hemos puesto en marcha dentro de una asignatura optativa de segundo curso de la ETSI de Caminos Canales y Puertos de nuestra universidad. La idea de introducir la modelización dentro del curriculum de matemáticas es una idea que viene cobrando fuerza en los últimos años (véanse [6], [1] y [5]). Tal y como nosotros hemos organizado dichas prácticas, en ellas, además de perseguir objetivos propios de la enseñanza en matemáticas, deseamos introducir a nuestros alumnos en la descripción de la naturaleza a través de las mismas, como la herramienta más poderosa de la que

dispone la ciencia y la técnica para el planteamiento y resolución de problemas. Además, en la organización de las prácticas perseguimos también que los alumnos se inicien en el desarrollo de un espíritu crítico basado en ideas científicas frente a las pre-científicas, el trabajo en equipo y el reparto de tareas y la responsabilidad compartida, la búsqueda de información, y la presentación y exposición de objetivos dentro de un proyecto. Un enfoque en la enseñanza de las matemáticas por lo tanto que utilice la contextualización como herramienta para la integración de los conceptos (véanse [2] y [4]).

El objetivo del presente trabajo es presentar un ejemplo de modelización sencillo que sería la base de la actividad que hemos presentado anteriormente como proyectos de modelización. Como se verá, se trata de involucrar conocimientos de matemáticas y de otras ciencias si procede, pero a un nivel no muy elevado, como corresponde a los alumnos que van a desarrollar la actividad. El objetivo no es otro que el de desarrollar la capacidad argumentativa y la manipulación matemática dentro de un contexto aplicado, donde además, las hipótesis, aproximaciones y simplificaciones, tienen consecuencias sobre la capacidad de nuestro modelo para responder a la situación real y establecer conclusiones sobre el comportamiento, que para los estudiantes suelen ser mucho más clarificadoras que las meras ecuaciones, aunque provengan de la resolución matemática de las mismas. Esta es la gran ventaja que en nuestra opinión tienen este tipo de actividades. Como se verá en el siguiente ejemplo, la exigencia de adaptación al nivel matemático de nuestros estudiantes produce un modelo quizá no excesivamente realista, pero rico en tanto en cuanto, con un aparato matemático relativamente simple, permite al estudiante analizar los principales elementos que intervienen, elaborar hipótesis o modificar las propuestas por los profesores, y sobre todo, ver el resultado que producen sus modificaciones respecto al comportamiento del sistema de una forma sencilla y visual. El tema de este trabajo es la modelización de la propagación del frente de un incendio, teniendo en cuenta algunos de los distintos factores que afectan al desarrollo del frente, la distribución de biomasa y humedad en el terreno, la velocidad y dirección del viento, y la orografía del terreno. En el desarrollo del modelo, se utilizarán algunas técnicas de cálculo, como son la resolución analítica y numérica de ecuaciones diferenciales ordinarias, así como también algunos elementos de cálculo vectorial. Durante todo el desarrollo, se utilizará el software *Mathematica* para realizar los cálculos necesarios.

Pasamos pues a continuación a describir el problema y la modelización planteada.

2. DESCRIPCIÓN DEL MODELO

El modelo matemático básico propuesto para modelizar la propagación de incendios es representar el frente del fuego por medio de una curva que describa la proyección de la frontera de la zona quemada sobre el plano horizontal. Una forma para representar esa curva es utilizar coordenadas polares, es decir, una función $\rho = \rho(\theta, t)$ que da el valor del vector radial para cada ángulo azimutal y tiempo dados. Con el

fin de simplificar al máximo el modelo, se asume que la propagación del frente en una dirección es independiente de la propagación en las otras direcciones. Por lo tanto, se utilizará una ecuación del tipo

$$\dot{\rho}(\theta, t) = \frac{\partial \rho}{\partial t}(\theta, t) = \Psi(\rho(\theta, t), \theta)$$

donde Ψ es una función de la posición que tiene en cuenta los factores de humedad del terreno, orografía, biomasa, y viento. La ecuación anterior no es más que una ecuación diferencial ordinaria con un parámetro angular θ . Al utilizar esta ecuación, se asume también que los factores citados sólo afectan localmente a la velocidad radial de propagación del frente. Además, se van a considerar casos en los que Ψ es no negativa. Esto tiene sentido en el caso en que el fuego se origine en el origen de coordenadas, de forma que el frente de ondas se aleje del origen. El hecho de que así se pueda representar simple y satisfactoriamente el comportamiento del frente del fuego justifica estas asunciones.

3. REPRESENTACIÓN DE LOS FACTORES QUE AFECTAN AL MOVIMIENTO DEL FRENTE DE FUEGO

3.1. Biomasa y humedad

Una forma de modelizar la función Ψ para representar la biomasa y la humedad del terreno es considerar ambas contribuciones en forma conjunta. La falta de biomasa puede corresponderse en cierta forma con el exceso de humedad: en ambos casos no puede haber fuego. Por consiguiente, se debe elegir la función Ψ de forma que sea mayor en las zonas donde haya más probabilidad de incendio.

Un primer caso a considerar puede ser la situación en que la región es homogénea con respecto a los factores citados. En ese caso, la función Ψ sería constante. La resolución es entonces trivial:

$$\rho(\theta, t) = Ct.$$

donde C es una constante positiva. Evidentemente, esta solución corresponde a una circunferencia que va creciendo en radio conforme el tiempo avanza, como era de esperar. Otro caso bastante simple aparecería bajo la consideración de que, por ejemplo, la humedad disminuye a medida de que nos alejamos de un eje; por ejemplo, el eje y . Esta situación podría corresponder a la extencia de un río que fluya a lo largo del eje y . Una posible elección de la función Ψ es

$$\Psi_h(\rho, \theta) = k_h ((\rho \cos \theta)^2 + 1)$$

dentro de cierto dominio. Para hallar la solución de la ecuación diferencial correspondiente, consideremos una ecuación un poco más general:

$$\frac{dy}{dx} = \dot{y} = a y^2 + b$$

donde a y b son constantes. La solución correspondiente es

$$y(x) = \sqrt{\frac{b}{a}} \operatorname{tg}(\sqrt{ab} x + C)$$

siendo C una constante de integración. En el caso que se está tratando, las constantes toman los valores $a = k \cos^2 \theta$ y $b = k$. Por lo tanto, la solución es

$$\rho(\theta, t) = \sec \theta \operatorname{tg}(k_h \cos \theta t + C)$$

La constante C es una constante de integración que puede ser función del ángulo θ y puede ser calculada a partir del conocimiento de una condición inicial para $\rho(\theta, 0)$. Una elección natural para el caso en que el fuego se inicie en $t=0$ en el origen de coordenadas es $\rho(\theta, 0) = 0$. En ese caso, la constante C se anula idénticamente para todo valor del ángulo. Una observación es que la función $\rho(\theta, t)$ es divergente para valores de t suficientemente grandes. Esto es debido a que la función que representa la humedad y la biomasa es no acotada, lo cual carece de sentido.

3.1.1. Representación gráfica

La representación gráfica es muy sencilla utilizando el programa *Mathematica*. Eligiendo la constante $k_h=1$, la función a representar es

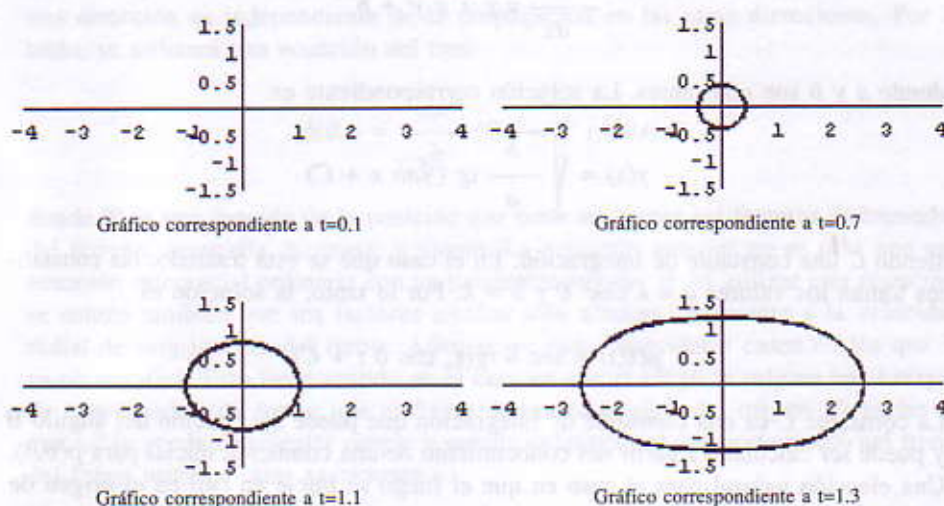
$$\rho(\theta, t) = \sec \theta \operatorname{tg}(\cos \theta t)$$

La instrucción de *Mathematica* más adecuada para dibujar esta curva en coordenadas polares es *PolarPlot*. Ésta se encuentra en la librería *Graphics'Graphics'*. Para dibujar el frente de fuego a diferentes instantes de tiempo, se puede realizar el siguiente programa en *Mathematica*:

```
Needs["Graphics'Graphics'"]
For[t=0, t<1.4, t=t+0.1,
  PolarPlot[Tan[t Cos[theta]]/Cos[theta], {theta, 0, 2 Pi}, PlotRange->{{-4,
  4}, {-1.5, 1.5}}]
]
```

En la figura 1 vemos el resultado de la evolución del frente de fuego en diferentes instantes de tiempo.

FIGURA 1



3.2. Viento

El aporte del viento es distinto al de la biomasa y la humedad debido a que es de naturaleza vectorial. Para simplificar, consideraremos un viento que sólo tiene dirección horizontal y es constante en todo el terreno. La forma en la que el viento afectará al avance del frente es que la velocidad radial de avance crecerá conforme la dirección del viento y la dirección radial se asemejen. Esto puede modelizarse mediante la expresión

$$\Psi_v(\rho, \theta) = k_v [1 + \cos(\theta - \alpha)],$$

donde α es el ángulo que hay entre la dirección del viento y el eje polar. De esta forma hay una contribución nula en el caso en que el viento sopla en la dirección contraria a la dirección radial, y es máxima cuando el viento va a favor de la dirección radial. Si consideramos el aporte de biomasa y humedad junto con el del viento en el caso en que la probabilidad de que un punto sea quemado aumenta conforme se aleja del eje y , tenemos la ecuación

$$\rho = \Psi_h(\rho, \theta) + \Psi_v(\rho, \theta) = k_h \cos^2 \theta \rho^2 + (k_h + k_v [1 + \cos(\theta - \alpha)])$$

que se corresponde a la ecuación modelo anterior, tomando

$$\begin{aligned} a &= k_h \cos^2 \theta, \\ b &= k_h + k_v [1 + \cos(\theta - \alpha)] \end{aligned}$$

3.2.1. Representación gráfica

La representación gráfica se puede llevar a cabo de la misma forma que en 3.1.1.

```

kh=1
kv=1
alpha=Pi/4
For[t=0, t<0.9, t=t+0.1,
  PolarPlot[Sqrt[(k1(Cos[theta-alpha]+1)+k2)/k2] Sec[theta]
    Tan[Sqrt[k2(k2+k1(1+Cos[theta-alpha]))] Cos[theta] t], {theta, 0, 2 Pi},
    PlotRange->{{-4, 4}, {-5, 5}}]
]

```

En la figura 2 vemos la representación del frente de fuego en diferentes instantes de tiempo y se puede observar claramente la influencia del viento en comparación con el caso mostrado en la figura 1 (página siguiente).

3.3. Topografía

Otro factor a tener en cuenta en la propagación del frente de fuego es la forma del terreno. Es sabido que el fuego avanza más rápidamente cuesta arriba por un efecto de chimenea y que prácticamente se detiene al llegar al punto más alto de una elevación. Para modelizar el terreno, utilizaremos una función que aplique a cada punto del plano horizontal la altura correspondiente del suelo. De esta forma, la gráfica de la función (inmersa en $\mathbb{R}^3$) corresponde al gráfico del terreno. A partir de esta función es fácil saber si en una dirección determinada se nos estamos desplazando hacia arriba o hacia abajo: si la derivada direccional de la función de la superficie en la dirección en cuestión es positiva, se está subiendo, si es negativa se está bajando. Por lo tanto, es útil definir la contribución de la topografía como

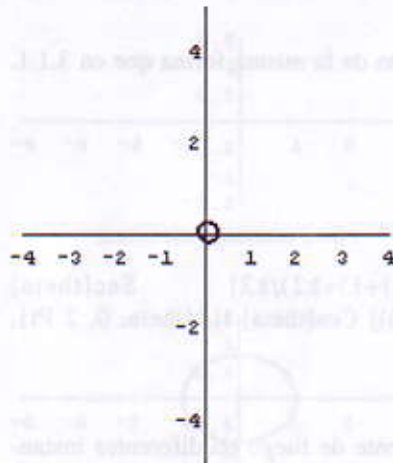
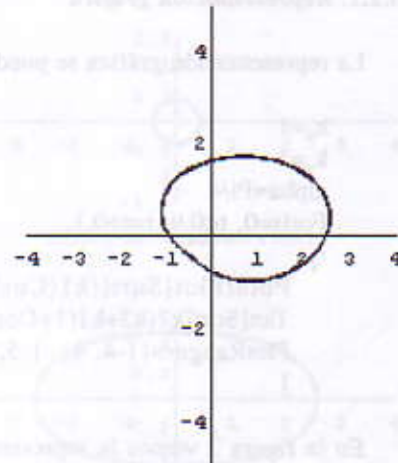
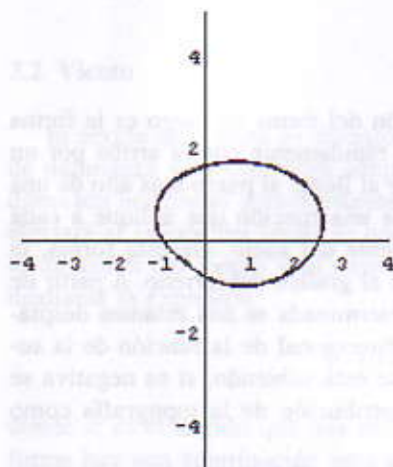
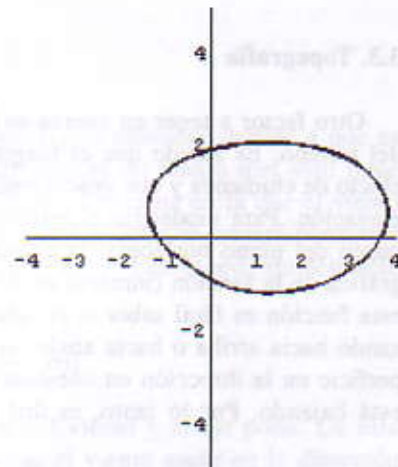
$$\Psi_i^{(c)}(x,y) = \frac{\partial S}{\partial e_p}(x,y) = \nabla S(x,y) \cdot \frac{xi + yj}{\sqrt{x^2 + y^2}},$$

siendo S la función de la superficie. El superíndice indica que la función está en coordenadas cartesianas. Esto facilita el cálculo del gradiente, pero no es inmediatamente utilizable en la ecuación diferencial. Para adecuarla, simplemente es necesario hacer la composición

$$\Psi_i(\rho, \theta) = \Psi_i^{(c)}(\rho \cos \theta, \rho \sin \theta).$$

Esta función, para un valor de θ determinado, varía conforme varía ρ . Es decir, que toma valores positivos o negativos según vaya hacia arriba o hacia abajo alejándose del origen de coordenadas, y cero en los puntos más bajos o más altos del

FIGURA 2

Gráfico correspondiente a $t=0.1$ Gráfico correspondiente a $t=0.4$ Gráfico correspondiente a $t=0.6$ Gráfico correspondiente a $t=0.7$

terreno. Estos ceros son puntos fijos de la ecuación $\dot{\rho} = \Psi_r$, por lo que, obviando otra contribución, si el fuego va subiendo la cuesta, se queda quieto al alcanzar el punto más alto. Esto muestra de una forma intuitiva que, al menos cualitativamente, esta función da cuenta del fenómeno deseado.

3.3.1. Cálculo numérico

Debido a la posible complejidad de la función Ψ_r , la resolución analítica de la ecuación diferencial resulta inconveniente si no impracticable. Por esto, es neces-

rio recurrir a métodos numéricos para la resolución de ecuaciones diferenciales, implementados, por ejemplo, en el programa *Mathematica*. La principal dificultad para llevar a cabo la resolución numérica es que la ecuación diferencial contiene un parámetro, θ , que impide una resolución directa. Una forma de salvar esa dificultad es resolver la ecuación diferencial para varios valores del ángulo de forma de tener cubierta toda la circunferencia, tomando, por ejemplo, 20 ó 30 valores para θ entre 0 y 2π . Así se obtiene un conjunto de soluciones que corresponden a los valores de θ elegidos. Un programa en *Mathematica* que realice esta operación puede ser

```
kv=1;
kh=2;
kt=50;
alpha=Pi/4;
tmax=20;
gridt=30;
gridtheta=100;

For[theta=0; n=0, n<=gridtheta, theta=theta+2*N[Pi]/gridtheta; n=n+1,
sol[n]=NDSolve[

ro'[t]==kv(Cos[theta-alpha]+1)+kh((ro[t] Cos[theta])^2+1)+
kt topo[ro[t] Cos[theta], ro[t] Sin[theta]],

ro[0]==0] , ro[t], {t, 0, tmax}][[1, 2, 0]];
th[n]=theta;
]
```

donde $tmax$ es el tiempo máximo para la resolución de la ecuación diferencial, $gridtheta$ es la cantidad de valores de θ igualmente espaciados entre 0 y 2π tenidos en cuenta, y $topo$ es la función cartesiana de aporte de la topografía. La ejecución de este programa da un vector de soluciones, tantas como indique $gridtheta$, con números naturales como índices. Este vector es el vector $sol[n]$.

Resulta más adecuado disponer de una función $\rho(\theta, t)$ en lugar de un conjunto de funciones $sol[n](t)$. Una solución a este problema es realizar una interpolación de las funciones $sol[n]$. Para esto es necesario construir una lista con la información de la función, es decir, una lista donde cada uno de los elementos es una terna $\{\theta, t, \rho(\theta, t)\}$. Esto es realizado por el siguiente programa

```
For[lista={ }; i=0, i<=gridtheta, i=i+1,
For[j=0, j<=gridt, j=j+1,
lista=Append[lista, {th[i], tmax*j/gridt, sol[i][tmax*j/gridt]}]
]
]

solucion = Interpolation[lista]
```

La variable *gridt* indica en cuántas partes iguales se divide el tiempo para hacer la lista. Este pequeño programa da como resultado la función *solucion*, que es simplemente la $\rho(\theta, t)$ buscada.

A modo de ejemplo, exponemos a continuación un programa completo donde utilizamos el método descrito anteriormente para la interpolación numérica con una función de superficie particular, considerando la biomasa constante y la contribución del viento. Esta función concreta representa una región en la que aparecen cuatro elevaciones y la cuenca de un río entre ellas. De esta forma, se añade un grado de complejidad en la ejecución del problema, pero también se gana en verosimilitud, puesto que permite a los estudiantes, mediante los soportes gráficos oportunos, imaginar y contrastar los resultados del modelo con lo que intuitivamente debe suceder en la propagación de un incendio forestal.

Declaración de las librerías necesarias

```
Needs["Graphics`Graphics`"]
Needs["Graphics`ParametricPlot3D`"]
```

Declaración de la superficie

```
s[x_, y_] = 0.5 Exp[-((x+5)^2/8+(y)^2/30)] + 0.6 Exp[-((x-7)^2+(y+6)^2)/3] + 0.7
Exp[-((x-5)^2+(y-6)^2)] + 0.5 Exp[-((x-8)^2+(y-1)^2)];
```

Definición de la función de topografía

```
gra[x_, y_] = {D[s[x, y], x], D[s[x, y], y]};
topo[ro_, theta_] = gra[ro Cos[theta], ro Sin[theta]].{Cos[theta], Sin[theta]};
```

Resolución numérica de la ecuación diferencial

```
k1=1;
k2=2;
k3=50;
alpha=Pi/4;
tmax=20;
gridt=30;
gridtheta=100;

For[theta=0; n=0, n<=gridtheta, theta=theta+2*N[Pi]/gridtheta; n=n+1,
sol[n]=NDSolve[{
```

```
ro'[t]==k1(Cos[theta-alpha]+1)+k2+k3 (topo[ro[t], theta]),
```

```
ro[0]==0.1} , ro[t, {t, 0, tmax}][[1, 1, 2, 0]]:
```

```
th[n]=theta;
```

```
}
```

Creación de la lista e interpolación

```
For[lista={}; i=0, i<=gridtheta, i=i+1,
```

```
For[j=0, j<=gridt, j=j+1,
```

```
lista=Append[lista, {th[i], tmax*j/gridt, sol[i][tmax*j/gridt]}]
```

```
]
```

```
]
```

```
solucion = Interpolation[lista];
```

Presentación gráfica

```
g = Plot3D[s[x, y], {x, -10, 10}, {y, -10, 10},
```

```
PlotRange -> {{-10, 10}, {-10, 10}, {0, 1.5}}, PlotPoints -> 30,
```

```
Boxed -> False];
```

```
t=0.5
```

```
g05=ParametricPlot3D[{solucion[theta, t] Cos[theta], solucion[theta, t]
```

```
Sin[theta],
```

```
s[solucion[theta, t] Cos[theta], solucion[theta, t] Sin[theta]]+0.002,
```

```
RGBColor[0.941176, 0.0705882, 0]], {theta, 0, 2 Pi}, PlotRange->{{-10, 10}, {-10, 10}, {0, 1.5}}];
```

```
t=1
```

```
g10=ParametricPlot3D[{solucion[theta, t] Cos[theta], solucion[theta, t]
```

```
Sin[theta],
```

```
s[solucion[theta, t] Cos[theta], solucion[theta, t] Sin[theta]]+0.002,
```

```
RGBColor[0.941176, 0.0705882, 0]], {theta, 0, 2 Pi}, PlotRange->{{-10, 10}, {-10, 10}, {0, 1.5}}];
```

```
t=1.8
```

```
g18=ParametricPlot3D[{solucion[theta, t] Cos[theta], solucion[theta, t]
```

```
Sin[theta],
```

```
s[solucion[theta, t] Cos[theta], solucion[theta, t] Sin[theta]]+0.002,
```

```
RGBColor[0.941176, 0.0705882, 0]], {theta, 0, 2 Pi}, PlotRange->{{-10, 10}, {-10, 10}, {0, 1.5}}];
```

```

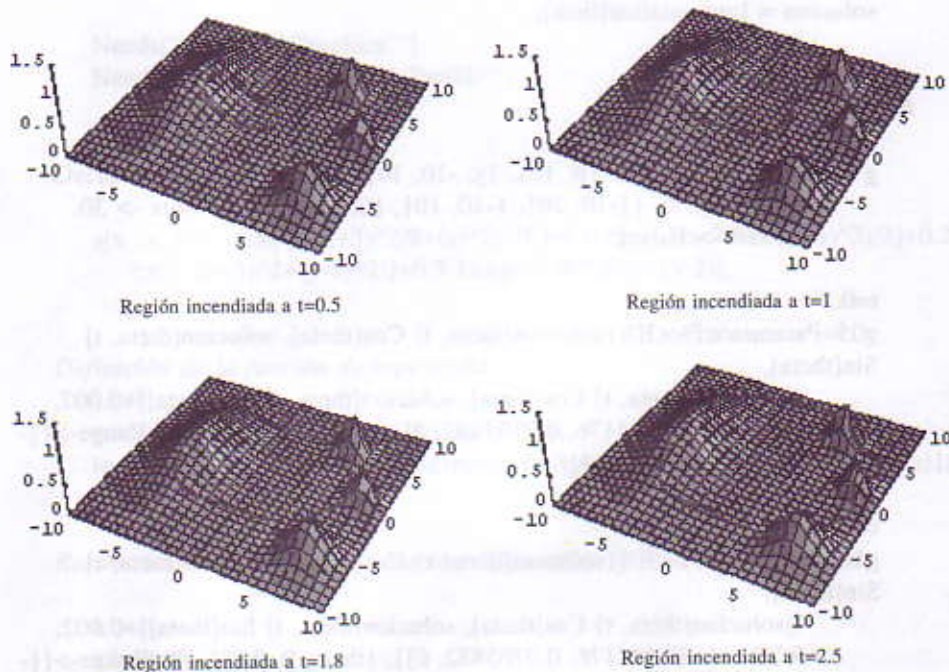
t=2.5
g25=ParametricPlot3D[{solucion[theta, t] Cos[theta], solucion[theta, t]
Sin[theta],
s[solucion[theta, t] Cos[theta], solucion[theta, t] Sin[theta]]+0.002,
RGBColor[0.941176, 0.0705882, 0]}, {theta, 0, 2 Pi}, PlotRange->{{-
10, 10},{-10,10},{0, 1.5}}];

Show[g, g05]; Show[g, g10]; Show[g, g18]; Show[g, g25];

```

Nota: los textos en letra itálica no son parte del programa sino sólo comentarios. El programa da como resultado los gráficos que se muestran en la figura 3 y que describen la evolución del frente de fuego para diferentes instantes.

FIGURA 3



CONCLUSIONES

En este artículo hemos presentado un ejemplo de modelización de incendios utilizando la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias, que es un tema que forma parte del curriculum de prácticamente todas las carreras de Ingeniería Técnica o Superior dentro de una asignatura de Cálculo de primero.

El primer punto que queremos destacar es que este tipo de actividades abren una vía clara para una enseñanza de las matemáticas mucho más motivada desde el punto

de vista del alumno. Aquí la cuestión, desde nuestro punto de vista, no es la elaboración de problemas de enunciado relacional con otras ciencias que den al estudiante la sensación de que lo que está estudiando, aunque sea a nivel básico, le va a ser muy útil y por eso debe aprenderlo. El mensaje que desde nuestro punto de vista se puede y se debe transmitir sobre todo a estudiantes para los que la formación en matemáticas entra dentro del ámbito de conocimientos de básicos (al igual que la física o la química), es que las matemáticas son una herramienta imprescindible para el estudio y aplicación de la ciencia y la técnica.

Establecer un modelo es obtener una representación de la realidad. En el caso de un modelo matemático, el fin es que esa representación pueda ser cuantificada y por tanto representada a través de ecuaciones y funciones. En el planteamiento que hemos hecho de este problema, hemos tratado de ir describiendo ejemplos sencillos de los elementos que intervienen en el modelo, que podrían ser perfeccionados en base a otras ciencias, como la biología, la meteorología y la química. Estos elementos toman a posteriori forma de función dentro de una ecuación que trata de describir un proceso. Como hemos presentado en este artículo, la utilización de asistentes matemáticos (tipo Derive, MATLAB o Mathematica) de manejo más sencillo que el de los lenguajes de programación tipo FORTRAN o C, y con un entorno gráfico de fácil acceso, abre nuevas y muy importantes posibilidades en la metodología que estamos planteando. Y es que, una vez hemos introducido los elementos del modelo que nos parecen relevantes para el estudio de la evolución del sistema, el asistente matemático no sólo nos facilita la resolución de las ecuaciones que describen el comportamiento del sistema, sino que la fácil representación de las mismas le da al estudiante una imagen rápida de cual ha sido el resultado y la predicción que sobre el sistema hace el modelo. Evidentemente no hemos tratado de dar una descripción realista de la propagación del fuego. Nos interesa más que el estudiante tome conciencia de los diversos elementos que intervienen en una modelización:

1. La representación de efectos que se verbalizan fácilmente (influencia del viento, a más masa para quemar más posibilidad de fuego,...) en forma de ecuaciones. Esta es la clave de la elaboración de cualquier modelo y es una habilidad que involucra a las matemáticas, pero que debe ser aprendida en un contexto propio. En el caso de los profesores firmantes de este artículo, se hace en el contexto de las ya nombradas prácticas de modelización matemática, dentro de la asignatura optativa de segundo curso *Matemáticas Asistidas por Ordenador*.
2. El test del modelo propuesto. Se plantean algunas situaciones sencillas; la comprobación de que las asunciones o simplificaciones hechas a la hora de introducir las variables relevantes del sistema se mantienen en la solución dada de las ecuaciones se puede hacer directamente *via* la representación de las soluciones alcanzadas. En pocas palabras, el alumno puede obtener una *validación* gráfica del modelo.
3. El "Feedback". El modelo se puede ir mejorando e ir haciendo más próximo a la realidad mediante la introducción de nuevos efectos. Esta introducción conlleva una nueva validación que nos conduce otra vez al primer punto con

la introducción de nuevos efectos y por tanto la sofisticación del modelo, con el fin de que reproduzca cada vez de una forma más fiable el posible comportamiento del sistema.

4. En general, los modelos sobre realidades muy complejas sólo describen parcialmente algunas características del comportamiento del sistema. Los estudiantes, si han tenido alguna vez acceso a algún modelo matemático sobre algún efecto físico o algún sistema particular, éste siempre se presenta acabado y completo. Esto crea entre los estudiantes la falsa opinión de que los modelos en su génesis deben ser así, completos y acabados, describiendo en su totalidad el comportamiento del sistema dadas unas ciertas condiciones iniciales. Esta forma de plantear la modelización en muchas asignaturas muy poco o nada tiene que ver con la génesis de los modelos y con la actividad de modelizar.

Como comentario final, no podemos olvidar un hecho fundamental en nuestro planteamiento didáctico. La actividad de modelizar hace partícipe al estudiante de la construcción de su propio conocimiento, acercándolo a las estrategias científicas de la investigación. En general, dentro de un planteamiento constructivista, pensamos que contribuye de forma fundamental a que los conocimientos que adquiere el estudiante sean más significativos y duraderos. En cualquier caso no se debe hacer una lectura contraria a otras estrategias de aula como la lección magistral o las clases de problemas. En absoluto. La actividad que planteamos complementa a las anteriores, y por ello pensamos que debe estar presente a lo largo de los cursos y de las diversas asignaturas de matemáticas, en la proporción que corresponda en cada caso, y así pasar a formar parte de forma definitiva de los currícula de las diversas ingenierías.

BIBLIOGRAFÍA

- M. BELMONTE, J.L. RODRÍGUEZ ILLERA. *Simulación por ordenador y enseñanza de la Física*. Comunicación, Lenguaje y Educación, 28, pp. 63-72, 1995.
- CORRAL, A. Más allá del pensamiento lógico-formal en la enseñanza de las matemáticas. *Tarbiya*, 10, 65-75, 1995.
- L.M. GARCÍA RAFFI, F. MARTÍNEZ GIMÉNEZ, E.A. SÁNCHEZ PÉREZ. *El ordenador como instrumento de renovación de los currícula: Una propuesta didáctica para la búsqueda de soluciones de problemas de contorno*. Epsilon, 43-44, pp. 185-195, 1999.
- HERNÁNDEZ, E. Métodos y contenidos de la enseñanza de la matemática en la Universidad. *Tarbiya*, 10, 55-63, 1995.
- A. PONTES PEDRAJAS. *Utilización del ordenador en la enseñanza de las ciencias*. Alambique, 19, pp. 53-64, 1999.
- S. RÍOS. *Modelización*. Alianza Universidad, Madrid 1995.
- E.A. SÁNCHEZ-PÉREZ, L.M. GARCÍA-RAFFI, J.V. SÁNCHEZ-PÉREZ. *Introducción de las Técnicas de Modelización para el Estudio de la Física y las Matemáticas en los primeros Cursos de las Carreras Técnicas*. Enseñanza de las Ciencias, 17,1, pp. 119-129, 1999.
- E.A. SÁNCHEZ-PÉREZ, L.M. GARCÍA-RAFFI, J.V. SÁNCHEZ-PÉREZ. *La influencia de los errores conceptuales en la enseñanza de las Matemáticas en la Universidad*. *Tarbiya*, 22, pp. 61-72, 1999.
- J.V. SÁNCHEZ-PÉREZ, E.A. SÁNCHEZ-PÉREZ, L.M. GARCÍA RAFFI. *Curso de prácticas de matemáticas para primeros cursos de ingeniería*. Servei de Publicacions de la Universitat Politècnica de València. 1997.