

**Departamento de Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría**



**UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA**

**Avances en la metodología de recuperación y  
georreferenciación continua gaussiana de una cartografía  
antigua: Aplicación al plano parcelario municipal de  
Valencia de 1929**

Tesis Doctoral

Valencia - Noviembre 2015

**Autora:** Miriam Villar Cano

**Directores:** Dr. Ángel Marqués Mateu  
Dra. M<sup>a</sup>J. Jiménez Martínez  
Dr. Manuel Chueca Pazos  
Dr. Francisco García García

## RESUMEN

El desarrollo del presente procedimiento de recuperación de cartografía antigua, viene propiciado por la necesidad manifiesta del Excmo. Ayto. de Valencia de utilizar el plano parcelario municipal (PPM) de Valencia de 1929 como herramienta de resolución de conflictos territoriales. Su valor patrimonial añadido a su utilidad como documento histórico reflejo de la Valencia de la época, hace imprescindible su digitalización con perfilado colorimétrico que asegure su óptima conservación y reproducción, así como su georreferenciación; posibilitando la inclusión en el Sistema de Información Geográfica (SIG) Municipal como una capa de información histórica al alcance de todos los servicios del Ayuntamiento.

El primer capítulo describe brevemente los objetivos de esta tesis, los antecedentes de la investigación en este campo y establece la introducción al PPM de 1929.

Después del capítulo introductorio, en el segundo capítulo centramos la atención en los documentos originales asociados al levantamiento del Plano con la intención de realizar un análisis exhaustivo de cada una de las fases o etapas. Para ello, se rehacen los cálculos desde un punto de vista actual y contemporáneo al plano auxiliados por la bibliografía de referencia de la época.

En un tercer capítulo de la tesis se pretende cifrar la calidad técnica de la red de triangulación primaria observada en 1929 y comprobar la precisión esperada por la escala del levantamiento, para lo que se aplica el método gaussiano determinista en ajuste por incrementos de coordenadas que permite realizar un análisis de errores. Se avanza en el último apartado del capítulo en la aplicación del problema de diseño de orden dos (PD2) al ajuste de redes que proporciona ventajas significativas en la interpretación de los resultados. De este estudio histórico-técnico



se sacan conclusiones acerca de la calidad de la fuente cartográfica presente y se justifica el inicio de la segunda fase de investigación que da comienzo con el capítulo cuatro.

El capítulo cuarto presenta como objetivos, la georreferenciación del Plano, que se consigue mediante la medición por técnicas GNSS de puntos homólogos y una transformación afín 2D para llevar la cartografía al sistema ETRS89 y proyección UTM. Así como, el ajuste de una serie de redes cuyos vértices forman parte de la red de 1929 siguiendo el método gaussiano por incrementos de coordenadas, completándolo con la interpretación rigurosa de resultados con establecimiento de recintos de error cifrados geométrica y probabilísticamente, mediante la aplicación de Análisis Multivariante teniendo en cuenta la teoría de podarias e hiperpodarias.

El capítulo quinto nos permite estudiar la evolución de una red microgeodésica en su conjunto y a lo largo del tiempo, definiendo y evaluando las posibles deformaciones que hayan podido afectarla, entendiendo como deformación las diferencias existentes entre la cartografía levantada en 1929 y georreferenciada al datum oficial siguiendo nuestra metodología y el levantamiento GNSS actual. El resultado se obtiene en forma de vector deformación cuyas componentes cifran la variación de cada una de las coordenadas de la red, vértice a vértice. Se establece un límite razonado de sensibilidad o umbral que permite la discriminación del resultado obtenido por diversos procedimientos, estudiando y valorando el poder de afirmación estadístico de los resultados obtenidos, en conjunto o por zonas separadas aplicando Análisis Multivariante. Del mismo modo, es factible realizar la densificación virtual de la red con suficiente rigor y el mismo nivel de precisión, punto a punto, que los de observación y cálculos directos. Para completar lo expuesto, se aborda el problema de fraccionar la red, hasta llegar a efectuar el control

de la misma por zonas arbitrarias e incluso vértice a vértice, identificando y aislando zonas de interés relevante, con posibilidad de extraer conclusiones sobre la previsible evolución en el tiempo del vector de deformaciones, mediante sucesivas campañas de observación y ajuste de la parte de la red fraccionada, manteniendo siempre el condicionado previo establecido de invariancia. Siendo entonces de aplicación la teoría de zonas de distinta significación, a través de la que llegamos a la conclusión de que el óptimo resultado responderá a una transformación local que mejora notablemente los resultados.

Finalmente el capítulo sexto recopila las conclusiones a las que se ha llegado una vez ultimado el trabajo, junto con algunas reflexiones a tener en cuenta para su discusión. En último lugar se mencionan las líneas futuras que puede tomar esta investigación.

Cuatro apéndices cierran el trabajo: el primero está dedicado a la exposición teórica de zonas de distinta significación aplicada en el capítulo quinto, el segundo hace referencia a los detalles del método de resolución por arcos capaces llevado a cabo para realizar la densificación de puntos necesaria para obtener los mejores resultados en la georreferenciación del plano, con la ventaja añadida de poder evitar el estacionamiento en vértices de difícil acceso. El tercero trata la adquisición de los planos en formato digital, y un último apéndice se reserva para la programación e integración del trabajo en un entorno SIG.

## ABSTRACT

The development of the cartographic recovery procedure presented in this thesis was started by the need of the Valencia Council to make use of the urban map of 1929 as a tool for territory conflict resolution. Its patrimonial and historical values make the digitization with colorimetric profiling an essential effort for conservation and reproduction purposes as well as for its integration in the municipal geographical information system. The first chapter briefly describes the aims of the research, the state of the art together with previous research on the subject, and also establishes an introduction to urban cartography.

Chapter two focuses on the original documents related to the urban map survey with the purpose of performing an in-depth analysis of every stage of the computation procedure. With this goal in mind, calculations have been rerun both with modern computing tools as well as with the original calculation techniques with the aid of the bibliographic references of the time.

The third chapter intends estimating the technical quality of the surveying triangulation network observed in 1929 and checking the expected accuracy considering the map scale. With this objective, a Gaussian network adjustment using the so-called coordinate increment method is applied, and a complete error analysis is obtained. The last section in this chapter explores the application of the two order design problem (PD2) in the adjustment, providing significant advantages in the interpretation of results. From this historical-technical research, some conclusions are drawn about the quality of the present cartographic source and the beginning of the second phase of research starting in the fourth chapter is justified.

The fourth chapter introduces two objectives. The first one is to perform the georeferencing procedure using GNSS measurement techniques of matching

points together with a two dimensional 2D affine transformation for representing the map on the ETRS89 reference system and the UTM projection system. The second is to adjust a series of networks, whose vertexes are part of the network surveyed in 1929, according to the Gaussian method of coordinate increment adjustment which provides rigorous interpretation of the results. It also establishes error figures both geometrically and probabilistically by means of multivariate analysis based on the theory of pedal and hyperpedal curves.

Chapter five studies the evolution of a micro geodetic network over time, defining and evaluating possible deformations that could occur and affect it. In this context, “deformation” refers to the differences between the georeferenced cartography of 1929 obtained with our procedure with respect to modern official reference systems. The results are obtained in the form of a deformation vector. The vector elements, quantifies numerically the variation of each one of the net coordinates on a vertex by vertex basis. The establishment of a threshold allows the discrimination of the results obtained by different procedures, studying and assessing the statistical power about the results as a whole or in isolated areas by means of multivariate analysis. Furthermore, it is possible to make a rigorous virtual densification of the net with the same level of accuracy as provided from observation and direct calculation. In order to complete the previous work, the topic of dividing the network is developed which gives total control of it either in arbitrary areas or even vertex by vertex. The procedure allows one to identify and isolate specific areas making it possible to draw conclusions about the predictable evolution of the deformation vector through periodical observation campaigns and adjustments of the individual areas without modifying the prior condition of invariance. Therefore, this methodology is applicable to the study of areas of different importance, and allows reaching optimum results with a local

transformation that significantly improves those results.

Finally, the sixth chapter collects the conclusions and some reflections that are considered in the discussion. The chapter ends with a list of future research lines that could follow this thesis.

The research closes with four appendices. The first one collects the theory named as areas of different importance that was applied in the fifth chapter: The second one contains some the details of the geometric method based on circumscribing circles that was used to obtain the best results in the georeferencing of the map, which has the advantage of avoiding stations in vertexes with difficult access. Third one develops the maps acquisition in digital format, and the last one is reserved for the programming and work integration in a GIS environment.

## RESUM

El desenvolupament del present procediment de recuperació de cartografia antiga, es afavorit per la necessitat manifesta de l'Excel·lentíssim Ajuntament de València d'utilitzar el plànol parcel·lari municipal de València (PPM) de l'any 1929 com a eina de resolució de conflictes territorials. El seu valor patrimonial afegit a la seva utilitat com a document històric reflex de la València de l'època, fa imprescindible la seua digitalització amb perfilat colorimètric per a assegurar la seua òptima conservació i reproducció, així com la seua georreferenciació fa possible la inclusió en el Sistema d'Informació Geogràfica (SIG) municipal com una capa d'informació històrica, que puga estar a l'abast de tots els serveis de l'Ajuntament.

El primer capítol descriu breument els objectius del treball, els antecedents de la recerca i s'estableix la introducció del plànol parcel·lari municipal de 1929.

En el segon capítol preem atenció als documents originals associats amb l'alçament del Plànol amb l'intenció de realitzar una anàlisi exhaustiva de cadascuna de les fases o etapes. Per a això, cal refer els càlculs des d'un punt de vista actual i contemporani al plànol, per al qual ens dóna ajut la bibliografia de referència de l'època.

En un tercer capítol de la tesi es pretén xifrar la qualitat tècnica de la xarxa de triangulació primària observada al 1929 i comprovar la precisió esperada segons l'escala de l'alçament, per al qual s'aplica el mètode gaussià determinista, en ajust per increments de coordenades que permeten realitzar una anàlisi d'errors. S'avança a l'últim apartat del capítol en l'aplicació del problema de disseny d'ordre dos (PD2) a l'ajust de xarxes, el qual proporciona avantatges significatius en la interpretació dels resultats. D'aquest estudi històrico-tècnic es trauen conclusions

sobre la qualitat de la font cartogràfica present i es justifica l'inici de la segona fase d'investigació que ofereix el començament del capítol quatre.

El capítol quart presenta com a objectius, la georreferenciació del Plànol, el qual s'aconsegueix mitjançant la medició per tècniques GNSS de punts homòlegs i una transformació afí 2D per a portar la cartografia al sistema ETRS89 i projecció UTM. Així com, l'ajust d'una sèrie de xarxes els vèrtexs dels quals formen part de la xarxa de 1929 seguint el mètode gaussià per increments de coordenades, completant-ho amb l'interpretació rigorosa de resultats amb establiment de recintes d'error xifrats geomètricament i probabilísticament, mitjançant l'aplicació d'Anàlisi Multivariant prestant atenció a la teoria de podaries i hiperpodaries.

El capítol cinquè ens permet estudiar l'evolució d'una xarxa microgeodèsica en el seu conjunt i al llarg del temps, per a definir i avaluar les possibles deformacions que hagen pogut afectar-la, ja que entenem com a deformació les diferències existents entre la cartografia del 1929 i georreferenciada al datum oficial seguint la nostra metodologia i l'alçament GNSS actual. El resultat s'obté en forma de vector deformació, els components del qual xifren la variació de cadascuna de les coordenades de la xarxa, vèrtex a vèrtex. S'estableix un límit raonat de sensibilitat que permet la discriminació del resultat obtingut per diversos procediments, en estudiar i valorar el poder d'afirmació estadístic dels resultats obtinguts, en conjunt o per zones separades aplicant Anàlisi Multivariant. Així mateix, és factible realitzar la densificació virtual de la xarxa amb suficient rigor i el mateix nivell de precisió, punt a punt, que els d'observació i càlculs directes. Per a completar el que s'ha exposat, s'aborda el problema de fraccionar la xarxa, fins a arribar a efectuar el control de la mateixa xarxa per zones arbitràries i fins i tot vèrtex a vèrtex, identifiquem i aïllem zones d'interès rellevant, amb possibilitat d'extraure

conclusions sobre la previsible evolució en el temps del vector de deformacions, mitjançant successives campanyes d'observació i ajust de la part de la xarxa fraccionada, per mantenir sempre el condicionat previ establert d'invariància. És llavors d'aplicació la teoria de zones de diferent significació, a través de la qual arribem a la conclusió que l'òptim resultat respondrà a una transformació local que millora notablement els resultats.

Finalment el capítol sisè recopila les conclusions a les quals s'ha arribat una vegada ultimada el treball, juntament amb algunes reflexions a tenir en compte per a la seua discussió. En últim lloc s'esmenten les línies futures que pot prendre aquesta recerca.

Quatre apèndixs tanquen el treball: el primer està dedicat a l'exposició teòrica de zones de diferent significació aplicada en el capítol cinquè y el segon fa referència als detalls del mètode de resolució per arcs capaços dut a terme per a realitzar la densificació de punts necessària per a obtenir els millors resultats en la georeferenciació del plànol, amb l'avantatge afegit de poder evitar l'estacionament en vèrtexs de difícil accés. El tercer tracta l'adquisició dels plànols en format digital, i un últim apèndix es reserva per a la programació i integració del treball en un entorn SIG.



## Índice

<b>1</b>	<b>Introducción y Objetivos</b>	<b>1</b>
1.1	Antecedentes . . . . .	1
1.2	Introducción . . . . .	3
1.3	Objetivos de la tesis . . . . .	6
<b>2</b>	<b>Proyecto de levantamiento del PPM de 1929</b>	<b>9</b>
2.1	Introducción . . . . .	9
2.2	Medida de Bases . . . . .	11
2.2.1	Método de medición directa de distancias: Hilos de Invar .	14
2.2.2	Medida de bases del PPM 1929 . . . . .	18
2.3	Determinación del acimut por observaciones a la Polar . . . . .	24
2.3.1	Consideraciones previas de orientación de un plano . . . . .	25
2.3.2	Orientación del plano parcelario municipal de Valencia, 1929 . . . . .	26
2.4	Estudio geodésico . . . . .	50
2.4.1	Descripción de los documentos . . . . .	50
2.4.2	Contexto histórico . . . . .	51
2.4.3	Breve estudio de las proyecciones . . . . .	59
2.5	Triangulación . . . . .	90

2.6	Métodos planimétricos: Itinerario y Radiación . . . . .	134
2.6.1	Radiación . . . . .	134
2.6.2	Itinerario o Poligonación . . . . .	138
2.7	Red Altimétrica . . . . .	153
<b>3</b>	<b>Análisis y estudio de redes en el sistema de referencia del PPM</b>	<b>169</b>
3.1	Introducción. Ajuste gaussiano por Incrementos de Coordenadas .	169
3.1.1	Obtención del sistema de formas lineales por el método de Incrementos de coordenadas. Estudio de la Red formada por 14 formas lineales y 7 variables. . . . .	170
3.1.2	Coordenadas aproximadas . . . . .	172
3.1.3	Formas lineales específicas de los incrementos de coordenadas. La matriz de diseño $A$ de elementos exactos, el vector $K$ de términos independientes y la matriz de pesos .	172
3.2	Síntesis y resultados del ajuste de la Red 14-7 . . . . .	179
3.2.1	Análisis de resultados del ajuste . . . . .	180
3.3	Síntesis y resultados del ajuste de la Red 12-4 . . . . .	192
3.3.1	Análisis de resultados del ajuste . . . . .	194
3.4	Aplicación del Problema de Diseño de Orden Dos . . . . .	200
3.4.1	Síntesis, resultados y análisis del ajuste de la Red de doce formas lineales y cuatro variables por el método de Incrementos de Coordenadas aplicado el PD2 . . . . .	207
<b>4</b>	<b>Análisis y Estudio de redes en un sistema de referencia moderno</b>	<b>217</b>
4.1	Georreferenciación del Plano de 1929 . . . . .	217
4.1.1	Metodología e Instrumentación para la medición de puntos	218
4.1.2	Sistemas de coordenadas y relaciones entre ellos . . . . .	221

4.1.3	Transformación de coordenadas . . . . .	231
4.2	Ajuste e interpretación de redes en el sistema ETRS89 . . . . .	235
4.2.1	Elementos teóricos sobre recintos de error . . . . .	235
4.2.2	Síntesis y resultados del ajuste. Red 20-7 . . . . .	239
4.2.3	Síntesis y resultados del ajuste. Red 18-7 . . . . .	254
4.2.4	Síntesis y resultados del ajuste. Red 35-7 . . . . .	264
4.2.5	Síntesis y resultados del ajuste. Red 14-7 con PD2 . . . . .	278
<b>5</b>	<b>Control de deformaciones</b>	<b>287</b>
5.1	Introducción . . . . .	287
5.2	Umbral de sensibilidad de la red . . . . .	288
5.2.1	Sistema de formas lineales . . . . .	290
5.2.2	Sensibilidad Práctica . . . . .	295
5.2.3	Sensibilidad Teórica . . . . .	298
5.3	Transformación Global ETRS89 . . . . .	303
5.3.1	Introducción . . . . .	303
5.3.2	Definición de la deformación . . . . .	305
5.3.3	Cálculo de la deformación . . . . .	308
5.3.4	Definición de la deformación $d_{n,1}$ con densificación por puntos correlativos . . . . .	327
5.4	Transformación próxima . . . . .	334
5.4.1	Introducción . . . . .	334
5.4.2	Umbral de precisión de la transformación I . . . . .	339
5.4.3	Deformación de la transformación II . . . . .	347
5.5	Umbral de sensibilidad en la identificación de puntos . . . . .	351
5.5.1	Introducción . . . . .	351

5.5.2	Sistema de formas lineales . . . . .	352
5.5.3	Sensibilidad Práctica . . . . .	353
5.5.4	Sensibilidad Teórica . . . . .	356
5.5.5	Fiabilidad externa . . . . .	358
5.6	Aplicación del F-Test de Fisher-Snedecor . . . . .	360
<b>6</b>	<b>Conclusiones y Discusión</b>	<b>367</b>
6.1	Conclusiones . . . . .	367
6.2	Discusión . . . . .	371
6.3	Lineas Futuras . . . . .	379
	<b>Bibliografía</b>	<b>383</b>
<b>A</b>	<b>Las zonas de distinta significación en control de deformaciones</b>	<b>391</b>
A.1	Sobre la aplicación del F-Test de Fisher Snedecor y su generalización . . . . .	411
A.1.1	Generalización del F-Test . . . . .	416
<b>B</b>	<b>Resolución por arcos capaces</b>	<b>423</b>
<b>C</b>	<b>Adquisición del PPM de Valencia de 1929 en formato digital</b>	<b>427</b>
<b>D</b>	<b>Programación e Integración en un SIG</b>	<b>431</b>

## Lista de Figuras

1.1	Elementos destacables del PPM de Valencia de 1929 . . . . .	5
2.1	Instrumental utilizado en la medida de la Base de Madridejos (IGN-2002) . . . . .	12
2.2	Medición con hilos de Invar . . . . .	16
2.3	Trípode sustentando peso tensor . . . . .	16
2.4	Operando en un extremo de la base . . . . .	17
2.5	Enrollando el Invar en su tambor de embalaje . . . . .	17
2.6	Correcciones practicadas a los hilos de invar . . . . .	19
2.7	Medida del tramo número 1 de la base de la carretera del Saler en medición de vuelta . . . . .	20
2.8	Corrección de pendiente negativa . . . . .	21
2.9	Distancia de la base A-B en el estadillo de cálculo de la triangulación	22
2.10	Distancia de la base C-D en el estadillo de cálculo de la triangulación	23
2.11	Triángulo esférico en el que se resuelve el acimut de la Polar . . .	26
2.12	Serie de observaciones a la referencia y a la Polar . . . . .	29
2.13	Cálculos para la orientación de la base de la carretera de Liria . . .	31
2.14	Base de la carretera de Liria . . . . .	32
2.15	Base del Saler . . . . .	33

2.16 Estadillo para el cálculo del estado del reloj, mediante método culminación del Sol . . . . .	36
2.17 Estadillo para el cálculo del estado del reloj, mediante método culminación del Sol . . . . .	37
2.18 Estadillo para el cálculo de la latitud en los extremos de la Base. Primer método . . . . .	38
2.19 Estadillo para el cálculo de la latitud en los extremos de la Base. Segundo método . . . . .	40
2.20 Relación entre el cero (0) del instrumento, acimut astronómico ( $\theta_A^B$ ) y descentrado ( $\omega$ ) . . . . .	41
2.21 Fragmento de la tabla de cálculo del acimut de la Estrella Polar para el año 1929 . . . . .	45
2.22 Tabla de cálculo de corrección por acimut . . . . .	45
2.23 Red geodésica calculada en los trabajos de 1929 . . . . .	51
2.24 Calculos de coordenadas, acimutes y lados . . . . .	52
2.25 Calculos de coordenadas, acimutes y lados . . . . .	53
2.26 Reseña del vértice Cullera de la red geodésica española . . . . .	54
2.27 Reseña del vértice Faro de la red geodésica española . . . . .	55
2.28 Reseña del vértice Rebalsadores de la red geodésica española . . . . .	56
2.29 Desarrollo cónico . . . . .	67
2.30 Izquierda: Desarrollo cónico tangente al paralelo 40 y derecha secante a dos paralelos próximos . . . . .	68
2.31 Proyección poliédrica o policéntrica . . . . .	69
2.32 Edición especial MTN 1:50000 con cuadrícula Lambert superpuesta. 1937 . . . . .	70

2.33	Detalle del vértice Faro de Canet incluido en la hoja Sagunto N° 668 del MTN 1:50000 publicada en 1938 . . . . .	71
2.34	Tabla de radios . . . . .	77
2.35	Reseña del vértice Miguelete en el trabajo geodésico . . . . .	85
2.36	Reseña del vértice Almacera en el trabajo geodésico . . . . .	86
2.37	Reseña del vértice Miguelete en el trabajo de triangulación . . . . .	87
2.38	Reseña del vértice Almacera en el trabajo de triangulación . . . . .	88
2.39	Ángulo de giro entre los dos sistemas analizados . . . . .	89
2.40	Modo de señalización de los vértices de la red de triangulación primaria . . . . .	91
2.41	Cálculo de un triángulo de la red primaria . . . . .	93
2.42	Base Norte de la Red . . . . .	94
2.43	Base Sur de la Red . . . . .	95
2.44	Red de triangulación primaria . . . . .	96
2.45	Fachada y torre de la Iglesia del Santísimo Sacramento de Almacera	98
2.46	Vértice Almacera replanteado sobre el pavimento de la Torre Norte de la Iglesia . . . . .	99
2.47	Reseña del vértice Almacera . . . . .	100
2.48	Taladro practicado en el pavimento de la torre de la Parroquia San Vicente Mártir de Benimámet . . . . .	101
2.49	Fachada de la Parroquia San Vicente Mártir de Benimámet . . . . .	102
2.50	Reseña del vértice Benimámet . . . . .	103
2.51	Pavimento de la parte superior de la torre de la Parroquia Nuestra Señora de Lepanto de Castellar . . . . .	104
2.52	Fachada de la Parroquia Nuestra Señora de Lepanto de Castellar . . . . .	105
2.53	Reseña del vértice Castellar . . . . .	106

2.54 Pavimento de la parte superior de la torre de la Iglesia de Santa María del Mar en el barrio del Grao . . . . .	108
2.55 Fachada de la Iglesia de Santa María del Mar en el barrio del Grao	109
2.56 Reseña del vértice Grao . . . . .	110
2.57 Taladro practicado sobre el pavimento de la parte superior de la torre del Miguelete para señalar el vértice denominado Miguelete II . . . . .	111
2.58 Vista de la torre del Miguelete . . . . .	112
2.59 Reseña del vértice Miguelete II . . . . .	113
2.60 Arandela sobre punto replanteado en el pavimento de la parte su- perior de la torre de la Parroquia Nuestra Señora de los Ángeles en Mislata . . . . .	114
2.61 Vista de la torre de la Parroquia Nuestra Señora de los Ángeles en Mislata . . . . .	115
2.62 Reseña del vértice Mislata . . . . .	117
2.63 Plataforma de la terraza superior del Chalet Sancho en el Barrio de Nazaret . . . . .	118
2.64 Reseña del vértice Sancho . . . . .	120
2.65 Observación en campo de los vértices implicados en la resolución del primer triángulo de la red de triangulación primaria . . . . .	121
2.66 Observación en campo de los vértices implicados en la resolución del primer triángulo de la red de triangulación primaria . . . . .	122
2.67 Cálculo de los lados del triángulo 1 de la Red de triangulación primaria del PPM de Valencia de 1929 . . . . .	123
2.68 Fragmento de las tablas de Schrön . . . . .	127
2.69 Fragmento de las tablas de Schrön . . . . .	127



2.70	Fragmento de las tablas de Schrön . . . . .	128
2.71	Fragmento de las tablas de Schrön . . . . .	129
2.72	Calculo de las coordenadas del vértice Desamparados en el triángulo denominado 1 . . . . .	130
2.73	Calculo de acimuts en el triángulo 1 . . . . .	131
2.74	Observación de ángulos Acimutales . . . . .	136
2.75	Cálculo del punto destacado 314A en los cuadernos de 1929 . . .	137
2.76	Ángulo y acimut al destacado 314A . . . . .	137
2.77	Itinerario del 59 al 315 . . . . .	139
2.78	Itinerario del 59 al 315 . . . . .	140
2.79	Polígono 125 del que forma parte el itinerario estudiado . . . . .	141
2.80	Itinerario estudiado sobre la cartografía levantada . . . . .	142
2.81	Croquis de la poligonación por tramos (Eje 313 al 314). . . . .	143
2.82	Ángulo y acimut en el eje 59 al 58 . . . . .	144
2.83	Ángulo y acimut en el eje 58 al 310 . . . . .	145
2.84	Ángulo y acimut en el eje 310 al 312 . . . . .	146
2.85	Ángulo y acimut en el eje 312 al 313 . . . . .	147
2.86	Ángulo y acimut en el eje 313 al 314 . . . . .	148
2.87	Ángulo y acimut en el eje 314 al 315 . . . . .	149
2.88	Croquis de los puntos 58, 59 y 310 del Itinerario . . . . .	151
2.89	Croquis de los puntos 312, 313, 314 y 315 del Itinerario . . . . .	152
2.90	Línea de doble nivelación que enlaza con puntos de nivelación de precisión . . . . .	155
2.91	Cotas de los puntos que forman parte de la red de precisión . . . .	156
2.92	Punto de la red de alta precisión localizado en la Estación Alfafar- Benetúser . . . . .	157

2.93 Nivelación topográfica o red de relleno por pendientes . . . . .	158
2.94 Líneas de doble nivelación por alturas . . . . .	159
2.95 Instrumental utilizado en la nivelación sencilla . . . . .	161
2.96 Nivel modelo III de la casa Wild . . . . .	162
2.97 Modelo oficial de mira alimétrica del Instituto Geográfico . . . . .	163
2.98 Libreta de nivelación sencilla . . . . .	164
2.99 Libreta de nivelación sencilla . . . . .	165
2.100 Libreta de nivelación sencilla . . . . .	166
2.101 Croquis auxiliar para la compensación expedita de la nivelación . . . . .	168
3.1 Croquis de la primera red en estudio . . . . .	171
3.2 Coordenadas aproximadas de una parte de la red de triangulación primaria . . . . .	173
3.3 Incremento en X utilizado en la forma lineal Burriel-Miguelete I . . . . .	176
3.4 Croquis de la Red formada por 4 vértices libres y 4 vértices fijos . . . . .	192
3.5 Croquis de la Red formada por 4 vértices libres y 4 vértices fi- jos. Las líneas de observación eliminadas se representan en línea discontinua. . . . .	207
4.1 Concepto de VRS . . . . .	220
4.2 Flujo en la conversión de sistemas de coordenadas . . . . .	225
4.3 Situación no canónica en el sistema x . . . . .	237
4.4 Situación canónica en el sistema z . . . . .	238
5.1 Vértice 86-A perteneciente a la red de poligonación de 1929 . . . . .	292
5.2 Índice de hojas del PPM de 1929. Imagen cedida por el Servicio de Patrimonio del Excmo. Ayuntamiento de Valencia . . . . .	304

5.3	De izquierda a derecha: Cartografía en el sistema UTM-ETRS89, superposición de la Cartografía sobre ortofoto del PNOA y superposición de la Cartografía sobre el parcelario urbano municipal de Valencia (en trazo rojo) y sobre ortofoto. Antigua facultad de ciencias de la U.V. izquierda y Colegio Esclavas derecha. . . . .	306
5.4	Vértices de control utilizados en la transformación Global . . . . .	307
5.5	Vértices densificados a partir de la red inicial . . . . .	328
5.6	Vértices correlativos con menor deformación . . . . .	329
5.7	Vértices escogidos para la solución pseudoinversa . . . . .	331
5.8	Partición de la hoja 46I . . . . .	335
5.9	Vértices escogidos para realizar la transformación (1) . . . . .	338
5.10	Vértice de una poligonal definido por un punto negro cuyo diámetro es de 38 mm . . . . .	339
5.11	Detalle de los 12 vértices empleados para calcular el umbral de precisión de la transformación (I) . . . . .	341
5.12	Curvas F y F' de izquierda a derecha . . . . .	362
5.13	Curvas F y F' de izquierda a derecha . . . . .	364
6.1	Geometría en el espacio UTM . . . . .	373
6.2	Determinación del punto correlativo en el sistema de coordenadas de 1929 . . . . .	374
6.3	Levantamiento de la Alquería de Solache . . . . .	380
6.4	Parcelario Topográfico de Madrid a escala 1:500 . . . . .	382
B.1	Arcos capaces . . . . .	423
C.1	Escaneado de una de las hojas del parcelario . . . . .	428

C.2	Perfil obtenido para el intervalo de hojas 3II a 7IV . . . . .	429
C.3	Carta de color KODAK Q-60 modelo IT8.7/2 . . . . .	429
D.1	Herramientas que permiten la georreferenciación del mapa antiguo	432
D.2	Datos de entrada de la herramienta Puntos Correlativos . . . . .	433
D.3	Ejecución de la herramienta Puntos Correlativos . . . . .	433
D.4	Imagen izquierda muestra los puntos de control y la imagen derecha los puntos correlativos . . . . .	434
D.5	Código Python de la herramienta Puntos Correlativos . . . . .	436
D.6	Ajuste por mínimos cuadrados en lenguaje MATLAB a la izquierda y en lenguaje Python a la derecha . . . . .	437
D.7	Datos de entrada y salida de la herramienta Umbral de sensibilidad	438
D.8	Ejecución de la herramienta Umbral de sensibilidad . . . . .	438

## Lista de Tablas

2.1	Resultados obtenidos en los diferentes tramos de la Base C-D carretera del Saler en medición de vuelta expresados en milímetros . . . . .	23
2.2	Resultados obtenidos en las bases de la red del PPM 1929 expresados en milímetros . . . . .	24
2.3	Notaciones . . . . .	62
2.4	Diferencias entre coordenadas rectangulares . . . . .	74
2.5	Diferencias entre coordenadas rectangulares . . . . .	76
2.6	Diferencias entre métodos de cálculo . . . . .	80
2.7	Coordenadas de los vértices en los dos sistemas . . . . .	81
2.8	Clasificación de los vértices empleados en la triangulación primaria del levantamiento . . . . .	97
2.9	Compensación expedita de coordenadas en poligonal según cuatro métodos diferentes . . . . .	153
2.10	Coordenadas absolutas y relativas del Itinerario . . . . .	153
3.1	Coordenadas aproximadas en metros . . . . .	172
3.2	Lineas observadas en la subred 1 [ $\Delta X$ ] y subred 2 [ $\Delta Y$ ] . . . . .	177
3.3	Formulación para el análisis del ajuste de redes . . . . .	179
3.4	Variables o parámetros en metros . . . . .	181

3.5	Coordenadas aproximadas, correcciones y coordenadas compensadas de los vértices libres en metros . . . . .	181
3.6	Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad . . . . .	181
3.7	Residuos ( $R_i$ ) de las Subredes en metros . . . . .	182
3.8	Semiejes de la superficie de error en metros . . . . .	183
3.9	Parámetros en la aplicación del test de Baarda . . . . .	184
3.10	Test de Baarda subred 1 . . . . .	184
3.11	Test de Baarda subred 2 . . . . .	185
3.12	Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros . . . . .	186
3.13	Fiabilidad interna subred 1 . . . . .	187
3.14	Fiabilidad interna subred 2 . . . . .	187
3.15	Fiabilidad externa subred 1 . . . . .	189
3.16	Fiabilidad externa subred 2 . . . . .	189
3.17	Vectores de fiabilidad externa $\nabla_{X_{oi}}$ subred 1 . . . . .	190
3.18	Vectores de fiabilidad externa $\nabla_{X_{oi}}$ subred 2 . . . . .	190
3.19	Coordenadas aproximadas, correcciones y coordenadas compensadas de los vértices libres en metros . . . . .	195
3.20	Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad . . . . .	195
3.21	Residuos ( $R_i$ ) de las Subredes 1 y 2 en metros . . . . .	195
3.22	Semiejes de la superficie de error en metros . . . . .	196
3.23	Test de Baarda subred 1 . . . . .	197
3.24	Test de Baarda subred 2 . . . . .	197
3.25	Redundancias de las Subredes 1 y 2 expresadas en metros . . . . .	198
3.26	Fiabilidad interna subred 1 . . . . .	198
3.27	Fiabilidad interna subred 2 . . . . .	199
3.28	Fiabilidad externa subred 1 . . . . .	199

3.29	Fiabilidad externa subred 2 . . . . .	200
3.30	Vectores de fiabilidad externa subred 1 . . . . .	200
3.31	Vectores de fiabilidad externa subred 2 . . . . .	201
3.32	Lineas observadas en la subred 1 [ $\Delta X$ ] . . . . .	208
3.33	Lineas observadas en la subred 2 [ $\Delta Y$ ] . . . . .	208
3.34	Variables o parámetros del ajuste de las subredes 1 y 2 en metros .	210
3.35	Coordenadas aproximadas, correcciones y coordenadas compen- sadas de los vértices libres en metros . . . . .	210
3.36	Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad . . . . .	211
3.37	Residuos de las Subredes 1 y 2 en metros . . . . .	211
3.38	Semiejes de las superficies de error de los vértices considerados libres . . . . .	212
3.39	Test de Baarda subred 1 . . . . .	212
3.40	Test de Baarda subred 2 . . . . .	213
3.41	Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros . . . . .	213
3.42	Fiabilidad interna subred 1 . . . . .	214
3.43	Fiabilidad interna subred 2 . . . . .	214
3.44	Fiabilidad externa subred 1 . . . . .	215
3.45	Fiabilidad externa subred 2 . . . . .	215
3.46	Vectores de fiabilidad externa subred 1 . . . . .	216
3.47	Vectores de fiabilidad externa subred 2 . . . . .	216
4.1	Parámetros de los elipsoides de referencia seleccionados . . . . .	224
4.2	Parámetros de transformación . . . . .	234
4.3	Residuos de la transformación RL-ETRS89 . . . . .	234
4.4	Residuos de la transformación UTM-ETRS89 . . . . .	234

4.5	Variables o parámetros de las subredes en metros . . . . .	241
4.6	Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad . . . . .	241
4.7	Residuos de las subredes en metros . . . . .	242
4.8	Semiejes de la superficie de error en metros . . . . .	243
4.9	Semiejes de la superficie de error en metros . . . . .	245
4.10	Estudio de recintos de error . . . . .	247
4.11	Fiabilidades compuestas . . . . .	247
4.12	Test de Baarda subredes 1 y 2 . . . . .	248
4.13	Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros . . . . .	249
4.14	Fiabilidad interna subredes 1 y 2 . . . . .	250
4.15	Fiabilidad externa subredes 1 y 2 . . . . .	251
4.16	Vectores de fiabilidad externa subred 1 . . . . .	252
4.17	Vectores de fiabilidad externa subred 2 . . . . .	253
4.18	Variables o parámetros de las subredes en metros . . . . .	255
4.19	Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad . . . . .	255
4.20	Residuos de las subredes en metros . . . . .	256
4.21	Semilados de la superficie de error en metros . . . . .	257
4.22	Semiejes de la superficie de error en metros . . . . .	259
4.23	Estudio de recintos de error . . . . .	260
4.24	Fiabilidades compuestas . . . . .	260
4.25	Test de Baarda subredes 1 y 2 . . . . .	261
4.26	Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros . . . . .	261
4.27	Fiabilidad interna subredes 1 y 2 . . . . .	262
4.28	Fiabilidad externa subredes 1 y 2 . . . . .	263
4.29	Vectores de fiabilidad externa subred 1 . . . . .	263
4.30	Vectores de fiabilidad externa subred 2 . . . . .	264



4.31	Variables o parámetros de las subredes en metros . . . . .	265
4.32	Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad . . . . .	266
4.33	Residuos de las subredes en metros . . . . .	266
4.34	Semiejes de la superficie de error en metros . . . . .	267
4.35	Semiejes de la superficie de error en metros . . . . .	269
4.36	Estudio de recintos de error . . . . .	270
4.37	Fiabilidades compuestas . . . . .	270
4.38	Test de Baarda subredes 1 y 2 . . . . .	271
4.39	Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros . . . . .	272
4.40	Fiabilidad interna subredes 1 y 2 . . . . .	273
4.41	Fiabilidad externa subredes 1 y 2 . . . . .	275
4.42	Vectores de fiabilidad externa subred 1 . . . . .	276
4.43	Vectores de fiabilidad externa subred 2 . . . . .	277
4.44	Variables o parámetros de las subredes en metros . . . . .	279
4.45	Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad . . . . .	279
4.46	Residuos de las subredes en metros . . . . .	279
4.47	Semilados de la superficie de error en metros . . . . .	280
4.48	Fiabilidades compuestas . . . . .	281
4.49	Test de Baarda subredes 1 y 2 . . . . .	282
4.50	Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros . . . . .	282
4.51	Fiabilidad interna subredes 1 y 2 . . . . .	283
4.52	Fiabilidad externa subredes 1 y 2 . . . . .	284
4.53	Vectores de fiabilidad externa subred 1 . . . . .	285
4.54	Vectores de fiabilidad externa subred 2 . . . . .	285

5.1	Deformación $d_{n,1}$ existente entre las coordenadas procedentes de la transformación global y las que provienen de la observación medida en metros . . . . .	305
5.2	Líneas observadas en las dos subredes . . . . .	310
5.3	Vectores de las variables deformación $d_{n,1}$ con solución pseudoinversa medidas en metros . . . . .	314
5.4	Líneas observadas en las dos subredes . . . . .	315
5.5	Vectores de las variables deformación $d_{n,1}$ con solución inversa de Cayley medidas en metros . . . . .	318
5.6	Vectores de las variables deformación $d_{n,1}$ con solución inversa de Cayley y pseudoinversa medidas en metros . . . . .	321
5.7	Vectores de las variables deformación $d_{n,1}$ con condición de nulidad medidas en metros . . . . .	324
5.8	Vectores de las variables deformación $d_{n,1}$ con condición de nulidad medidas en metros . . . . .	325
5.9	Vectores de las variables deformación $dx$ con distintas soluciones medidas en metros . . . . .	326
5.10	Vectores de las variables deformación $dy$ con distintas soluciones medidas en metros . . . . .	326
5.11	Vectores de las variables deformación $d_{n,1}$ de vértices densificados	330
5.12	Vectores de las variables deformación $d_{n,1}$ con solución pseudoinversa medidas en metros . . . . .	334
5.13	Coordenadas pixel del mapa digitalizado y coordenadas rectangulares en el sistema 1929 obtenidas de las coordenadas de gabinete	337

5.14	Deformación $d_{n,1}$ existente entre los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la transformación TPI y los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la observación . . . . .	349
5.15	Deformación $d_{n,1}$ existente entre los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la transformación TPI y los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la observación . . . . .	350
5.16	Deformación $d_{n,1}$ existente entre los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la transformación TII y los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la observación . . . . .	351
6.1	Diferencias con punto correlativo calculado como simple intersección . . . . .	375
6.2	Diferencias con punto correlativo calculado mediante arco capaz .	375
6.3	Diferencias en las transformaciones con varios puntos correlativos calculados con arco capaz y sin él . . . . .	376
6.4	Diferencias entre las coordenadas rectangulares locales calculadas con $h = 0$ y las $h$ originales de cada punto . . . . .	378
6.5	Diferencias entre las coordenadas rectangulares locales calculadas con $h = 79.11$ y las $h$ originales de cada punto . . . . .	378



## **Capítulo 1**

### **Introducción y Objetivos**

#### **1.1 Antecedentes**

La Cartografía es una herramienta fundamental para el análisis y la ordenación del territorio y en cada momento de la historia se ha ido adaptando a las necesidades de progreso de la sociedad, aportando soluciones válidas en la localización de los lugares idóneos para el desarrollo de diferentes actividades en cada época.

En la actualidad cualquier análisis de dinámica territorial ha de servirse de bases cartográficas de diferentes naturalezas y fechas. Por ello es tan importante recuperar cartografías antiguas que reflejen la realidad del momento de su levantamiento y así, poder llevar a cabo un trabajo de superposición cartográfica precisa, con cartografías de estándares oficiales actuales, en base a un procedimiento que defina la interoperabilidad de datos de manera precisa.

La literatura científica ha dado gran cantidad de soluciones de diversa índole a esta función que se ha llamado en muchos casos georreferenciación (Roset Arissó and Ramos, 2011; Bitelli and Gatta, 2011; Dávila Martínez et al., 2012) en función de los niveles de precisión requeridos.

Numerosas referencias bibliográficas señalan hacia el software de licencia libre MapAnalyst (Jenny et al., 2007; Jenny and Hurni, 2011; Roset Arissó and

Ramos, 2011; Bitelli et al., 2009; Bitelli and Gatta, 2011; Bitelli et al., 2014) desarrollado por la Universidad Estatal de Oregon, que ayudado por la cartografía actualizada OpenStreetMap es capaz de georreferenciar cualquier cartografía antigua y realizar un estudio de errores en la transformación elegida. Se trata de una herramienta muy potente que da una solución eficaz a la mayor parte de los requerimientos de los usuarios de cartografía antigua.

Sin embargo, este método general es insuficiente cuando tenemos presente una cartografía de detalle levantada por procedimientos geodésicos a la que queremos sacarle el máximo partido desde el punto de vista geométrico. En esta línea no hemos encontrado referencias bibliográficas que utilicen la red del levantamiento original como los vértices de mayor calidad métrica, como base para llevar a cabo la georreferenciación.

Cabe destacar que todas las soluciones encontradas se adaptan especialmente a cartografías pre-geodésicas que no son tan exigentes en cuanto a precisión y en otros casos se trata de cartografías levantadas a escalas muy pequeñas. Los sistemas de información geográfica (SIG) son herramientas que tienen implementados diversos algoritmos de transformación, siendo muy recomendables para estos casos tal como apuntan numerosas referencias bibliográficas. (Bitelli et al., 2014; Bitelli and Gatta, 2011; del Bosque González et al., 2010; Brovelli and Minghini, 2012; Cajthaml, 2013; Chías and Abad, 2009; Livieratos, 2006; Manzano Agugliaro et al., 2012; Manzano-Agugliaro et al., 2013; Tucci and Giordano, 2011).

En este contexto, creemos que puede resultar novedosa la aplicación de algoritmos gaussianos que aporten altas fiabilidades a los resultados de recuperación cartográfica obtenidos, ya que no se han encontrado referencias que hagan hincapié en ese tema concreto con un enfoque riguroso.

## 1.2 Introducción

El momento histórico que enmarca el levantamiento del plano parcelario municipal (PPM) de 1929, está definido por el impulso que Calvo Sotelo da al Estatuto Municipal que centra sus objetivos en las mejoras de la infraestructura municipal, estableciendo como obligatoria la aprobación de los planos de urbanización de la zona de extrarradio del municipio de Valencia. Es por ello que el Excmo. Ayuntamiento de Valencia muestra su voluntad de disponer de un levantamiento fiable, en primer lugar del extrarradio previendo su crecimiento, así como de la zona de ensanche y casco antiguo posteriormente. Por diferentes acuerdos plenarios del Ayuntamiento, se aprobaron los diversos encargos al Instituto Geográfico y Catastral (IGC) para el levantamiento del PPM de Valencia a escala 1:500. Esta serie de levantamientos se realizó según el Reglamento de Catastro de 30 de mayo de 1928 (Amando Llopis and Perdigón Fernández, 2011; Sigalat, 2006, 2008; Altés et al., 2008).

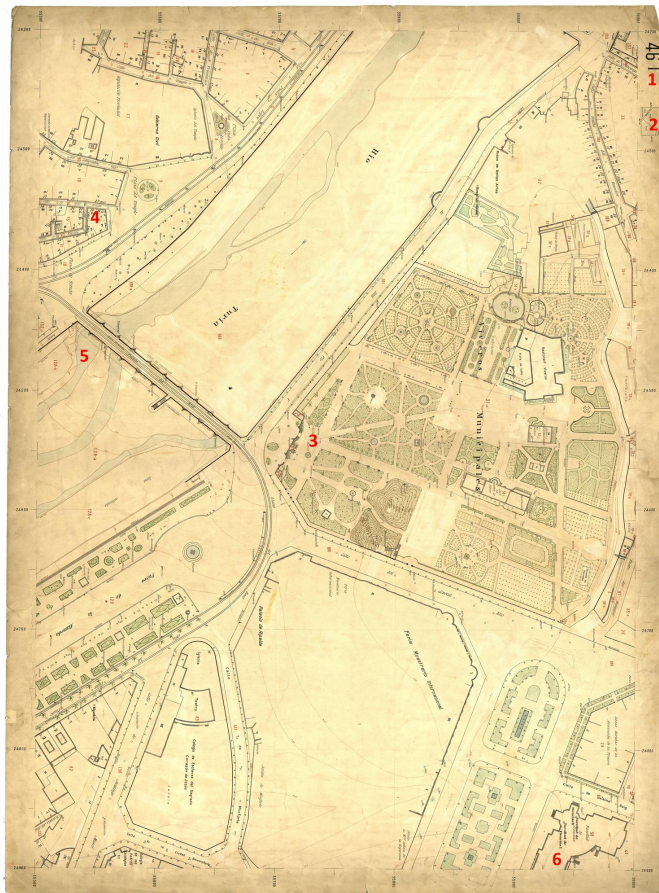
Tenemos conocimiento de la existencia de una cartografía gestada en similares condiciones por el Ayuntamiento de Madrid quien encargó al mismo organismo a través de un convenio firmado en 1925, el levantamiento de un plano topográfico parcelario de la ciudad (Mora Palazón, 1995; Sigalat, 2006). Entendemos que ambas cartografías deben tener las mismas características métricas en cuanto a su levantamiento, ya que se produjeron ambas en fecha similar y bajo las instrucciones del mismo organismo, el IGC. Una investigación más profunda de este parcelario, podría aportar luz sobre las condiciones de su conservación y determinar en su caso si sería posible su recuperación al igual que se ha planteado con el PPM valenciano.

Volviendo a la cartografía municipal valenciana, sabemos que se compone

de 124 secciones, subdivididas cada una de ellas en cuatro cuadrantes con numeración romana que aparece en la esquina superior izquierda de cada una de las hojas, junto a un croquis en miniatura de la zona. Los 421 planos están levantados a mano y rotulados con tintas de distintos colores para diferenciar los elementos cartografiados en ellos (Figura 1.1).

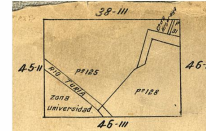


**ELEMENTOS DESTACABLES DEL PLANO**



46 I

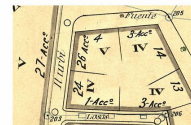
1. Numeración y cuadrante



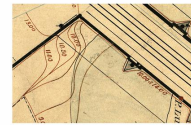
2. Croquis de término y hojas colindantes



3. Detalle de zonas ajardinadas y ejes de poligonación



4. Detalle y numeración de manzanas



5. Equidistancia en curvas de nivel 0.5 m



6. Vértices de triangulación

**Figura 1.1:** Elementos destacables del PPM de Valencia de 1929

### 1.3 Objetivos de la tesis

El objetivo fundamental de la presente tesis es desarrollar un procedimiento general, original y riguroso capaz de recuperar cartografía histórica y utilizarla en proyectos modernos junto con información espacial obtenida con metodología e instrumentación actuales.

La solución general investigada y propuesta no obstante debe ser interpretada en el contexto particular de cada proyecto debido lógica y fundamentalmente a que la calidad y el estado físico del material original determina en gran medida la calidad de los datos recuperados. Este será un factor limitante que aparecerá varias veces a lo largo del trabajo. En el caso particular de esta tesis el procedimiento general se ha aplicado a una cartografía urbana parcelaria a escala 1:500 de la ciudad de Valencia que data de 1929. Esta cartografía es la más ambiciosa existente en cuanto a nivel de detalle para su tiempo, realizada además con un enfoque moderno desde el punto de vista geodésico.

El objetivo principal se ha conseguido resolviendo otros varios parciales que se han acoplado entre sí. A saber:

- Determinar las características geodésicas y geométricas de la cartografía original
- Aplicar conceptos topocartográficos novedosos del ámbito de la cartografía digital gaussiana con la finalidad de mejorar la interpretación de los resultados
- Escribir un programa de ordenador que implemente todas las tareas de computación necesarias para desarrollar el procedimiento

- Integrar el procedimiento en el entorno de trabajo de un sistema de información geográfica

El resultado perfecto inalcanzable corresponde a la ucronía de obtener la imagen rigurosa topográfica de Valencia de 1929 como si se hubieran aplicado metodologías de vanguardia del siglo XXI. Consideramos que como mínimo, el resultado real obtenido es útil e innovador, y propone soluciones en cuestiones de Ingeniería Cartográfica Histórica hasta la fecha muy poco investigadas. Aplicando técnicas de ajustes gaussianos innovados, fruto del trabajo del equipo de investigación constituido bajo el título *Avances e Innovación en Migrogeodesia y Redes Locales Gaussianas ajustadas e interpretadas por Incrementos de coordenadas y Análisis Multivariante* con la dirección y coordinación de D. Manuel Chueca Pazos, y del que forma parte la autora.



## Capítulo 2

### Proyecto de levantamiento del PPM de 1929

#### 2.1 Introducción

En virtud de lo expuesto, es condición *sine qua non* el completo conocimiento del Plano Parcelario Municipal de Valencia (PPM) de 1929, en todos sus aspectos para obtener el fruto deseado hasta el límite asequible. Así pues, entendemos necesario desarrollar la cuestión en detalle y para ello ha sido preciso conjuntar la investigación documental en los Archivos del Ayuntamiento de Valencia, con las Instrucciones entonces vigentes en el Instituto Geográfico y Catastral, autor del levantamiento, su documentación reglamentaria, y los cálculos realmente efectuados y su valoración. La tarea de recuperación de estos archivos ha supuesto gran esfuerzo ya que el paradero de los mismos era desconocido. La primera iniciativa partió de D. Manuel Chueca Pazos, redactando una carta dirigida al ya fallecido D. Juan Antonio Altés, entonces jefe del servicio de Planeamiento del Ayuntamiento de Valencia con la esperanza de poder recuperar este singular trabajo. Transcribimos aquí un fragmento en el que hace referencia a su localización en años anteriores a la fecha de redacción de la misma (17 de noviembre de 2005).

*“ Sería estupendo que pudiéramos mostrar al público (e incluso recuperar y preservar si menester fuera) la magnífica triangulación*

*básica que realizaron por los años 40 con los medios artesanales de la época los Ingenieros Geógrafos Alfredo Cabañes y Victor Gosálvez y la documentación literal y gráfica que en ella se apoyó. Te puedo dar la pista de que recuerdo que había un pequeño local habilitado al efecto como “Plano de Valencia”, llamado el palomar, en una de las torres del Ayuntamiento viejo, que yo he conocido y frecuentado. Y que los últimos topógrafos conservadores del Plano, que fueron subordinados míos, se llamaban Ricardo González Andreu y José Feliú. Desconozco su paradero actual... Poco es, pero sería doloroso que se hubiera extraviado todo. Mi última esperanza es que lo encuentres tú.”*

Gracias al esfuerzo conjunto del personal del Ayuntamiento y nuestro equipo de investigación, ha sido posible que la documentación al completo esté hoy perfectamente custodiada en el archivo histórico del Ayuntamiento de Valencia ubicado en el Palacio Cervelló, al alcance de todo investigador o profesional interesado en esta Cartografía.

La elaboración de un mapa urbano con las características del PPM de Valencia de 1929 requiere una planificación cuidadosa, con una división clara de las etapas que constituyen el proyecto. Este capítulo contiene descripciones de las operaciones geodésicas y topográficas básicas que permiten en primer lugar determinar el datum de la cartografía, en particular la orientación y la escala. A continuación se realiza un estudio de la proyección cartográfica adoptada para representar los datos cartográficos. Finalmente se estudia las operaciones de mayor detalle como son las redes topográficas y las poligonales que permiten calcular las coordenadas finales del levantamiento.

En todos los casos se han hecho los cálculos con los medios manuales de la época, comparando en algunos puntos del desarrollo los resultados de 1929 con resultados correspondientes obtenidos por procedimientos computacionales modernos.

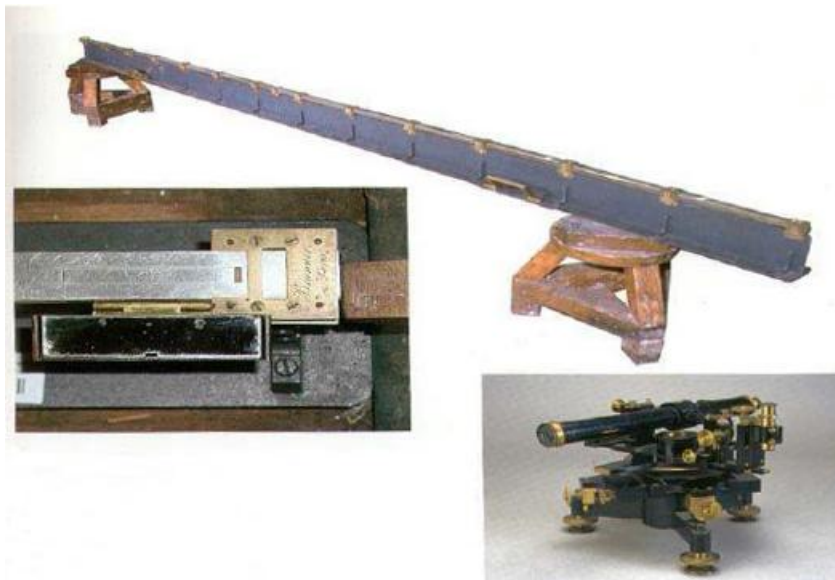
Con todo ello se contrasta la calidad del PPM original que informa evidentemente la del producto final propuesto, que en modo alguno pretende mejorarla.

## 2.2 Medida de Bases

El enfoque clásico para realizar levantamientos geodésicos y trabajos topográficos de cierta envergadura requiere la medición de una o varias bases dependiendo de la extensión de la red a levantar. Las bases constituyen la infraestructura sobre la que se apoyará todo el trabajo posterior.

Se trata de la operación de mayor importancia, ya que el error cometido en ellas se transmite a toda la cartografía. Bajo la Institución denominada Dirección de la Carta Geográfica de España creada en 1853 se inician las operaciones que más tarde darán lugar a la creación del Mapa Topográfico Nacional (MTN) a escala 1:50000 del que se hará cargo el Instituto Geográfico Nacional a partir de su creación en 1870. Según Real Decreto de 14 de octubre de 1853 se elige una alineación en la llanura cercana a Madridejos de unos 14.6 km que servirá de base fundamental de la Geodesia Española. Se utilizó la regla Ibáñez-Saavedra de 4 metros, la mejor disponible en la época gracias a la cual Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero consiguió fama internacional (Chueca Pazos et al., 2008).

Según el procedimiento usual de la época, una base geodésica debía medirse en ida y vuelta a efectos de comprobación y promedio, aunque dadas las dimensiones de la base de Madridejos se midió por tramos independientes de unos 3



**Figura 2.1:** Instrumental utilizado en la medida de la Base de Madrideojos (IGN-2002)

km y solo se midió dos veces el tramo central cuya discrepancia entre la ida y la vuelta fue de 0.797 mm siendo su error relativo el correspondiente a 1 : 3470000 dejando patente la excelente calidad del trabajo (Soler, 1997). El uso de los hilos de metal suspendidos libremente en catenarias como procedimiento de precisión en medidas de bases geodésicas fue ideado por E. Jäderin en 1885 (Jäderin, 1885) y en 1905 Benoît et Guillaume (Benoît, 1917) introdujeron los hilos de Invar, una aleación de acero y níquel al 36 por 100 con una cuidada selección de coladas y especiales procedimientos de fabricación que aseguraban una mayor estabilidad en sus propiedades físicas y químicas. La introducción de los hilos de Invar resolvió el problema de la medición mediante reglones metálicos o de madera, operación mucho más laboriosa que requería mayor número de personal, obras semipermanentes sobre el terreno y un tiempo considerable, consiguiendo exac-



titudes similares. La diferencia entre el empleo del Invar y las reglas geodésicas es importante, ya que la velocidad máxima de medición con reglas era de 30 m la hora, mientras que con Invar pudo llegar a 222 m la hora. El error probable obtenido en la medida de la base de Madrideojos fue de  $\pm 2.508$  mm y un error relativo de 1:5850000 calificado por los académicos de París como insuperable (de la Puente, 1925).

El documento histórico que nos ha servido de referencia a lo largo de este capítulo analítico-descriptivo del trabajo topográfico para el levantamiento del PPM de Valencia en 1929 y al que realizaremos múltiples llamadas en adelante, corresponde a *Las instrucciones para los trabajos topográficos* publicadas en Madrid por la Dirección General del Instituto Geográfico y Estadístico en 1907 (VV.AA., 1907). En su artículo 16, menciona la conveniencia de la medición mediante cinta metálica previamente comparada y señalada de las bases elegidas a falta de red geodésica de tercer orden.

El año de publicación de estas instrucciones como hemos dicho es 1907, años antes de las primeras pruebas de medición con hilos de Invar practicadas en Cartagena primero y posteriormente en el extrarradio de Madrid.

El Instituto Geográfico realizó un primer ensayo de medida con Invar en 1924 en Cartagena, y en 1925, por necesidad de realizar el levantamiento del plano del extrarradio de Madrid a escala 1:1000 que sirvió como base para el proyecto de urbanismo que se había planteado años antes, se utilizó por primera vez en España el nuevo método dado el nivel de detalle del plano (de la Puente, 1925). Casi simultáneamente durante los años 1925 y 1926 se midieron tres bases en la triangulación del archipiélago Canario para el enlace Geodésico con la Península que dio fruto a la publicación de referencia para la medida de bases con este nuevo método, sustituyendo a todos los anteriores y que corresponde al título *Medida de*

*Bases Geodésicas y Topográficas con equipos de Hilos Invar* redactada por D. Manuel Chueca Martínez y publicada en Madrid por el Instituto Geográfico y Catastral en 1931. Con estas referencias históricas y sabiendo que la medición con hilos de Invar fue el método practicado en el proyecto topográfico de nuestro PPM 1929, explicaremos brevemente en qué consiste el novedoso método de la época.

### **2.2.1 Método de medición directa de distancias: Hilos de Invar**

El hilo que se utiliza es de sección circular, de 1.65 mm de diámetro y 24 metros de longitud; en cada uno de sus extremos lleva una regleta de metal Invar de un decímetro de longitud y sección triangular, uno de cuyos bordes es coaxial con el hilo y lleva una escala en la que pueden apreciarse décimas de milímetro. Las regletas terminan en una manillas que además de utilizarse para transportar el hilo sirven para enganchar en ellas, por medio de mosquetones, dos cuerdas muy flexibles que pasan por las poleas de que están provistos dos trípodes de forma especial. Para conseguir la tensión conveniente del hilo se suspende en cada extremo de dichas cuerdas un peso de 10 kilogramos, de este modo se consigue la constancia de la flecha de la catenaria que forma el hilo al quedar suspendido y tenso.

La operación se efectúa midiendo con el hilo la distancia entre cada dos referencias consecutivas de una serie de ellas que comprende el equipo y que se van situando previamente en la alineación de la base a distancias aproximadas de 24 m. Estas referencias, soportadas por plataformas nivelantes de tres tornillos, sustentadas por un ligero trípode, están constituidas por un cilindro de eje vertical en cuya base superior hay un chaflán, destinado a apoyar en él el borde de las regletas en que termina el hilo, y una línea de la que permite efectuar lecturas en aquellas.

La manera de operar entre dos referencias consecutivas es la siguiente: Se sitúan los trípodes portadores de las poleas, por medio de tanteos, de modo que cada una de las regletas apoye en el chaffán de la referencia respectiva, después de haber suspendido los pesos en los extremos de las cuerdas, y a una voz del jefe de los trabajos, dos operadores, situados uno en cada extremo, hacen simultáneamente la lectura que acusa la línea de fe de su referencia en la escala grabada en la regleta respectiva. Dichas lecturas, sumada una y restada otra con 24 m, que es la longitud del hilo (la graduación de las regletas crece en sentidos contrarios), dan exactamente la distancia entre ambas líneas de fe (la tensión ejercida por los pesos se ha calculado de manera que la distancia de 24 m que existe entre los extremos del hilo, en el supuesto de que éste descansa sobre un plano horizontal, permanezca invariable e igual a la cuerda de la catenaria cuando queda suspendido y tirante).

Acompaña el equipo un pequeño anteojo que se va colocando en cada referencia y que al mismo tiempo sirve para poner en alineación la siguiente. Se utiliza para hallar el tanto por ciento de pendiente entre cada dos referencias consecutivas, leyéndose directamente este dato en una escalita grabada en el retículo del anteojo, visando a pequeñas niveletas que se colocan en los trípodes portadores de aquellas. Para las fracciones menores de 24 m que quedan en la última referencia que se sitúa y el extremo de la base se utilizan un hilo corto de 8 metros y una cinta métrica de 4 m, de metal Invar, en la que pueden leerse décimas de milímetros, que también forman parte del equipo y que se manejan de igual modo que el hilo largo, situando los trípodes portadores de los pesos a distancia conveniente.

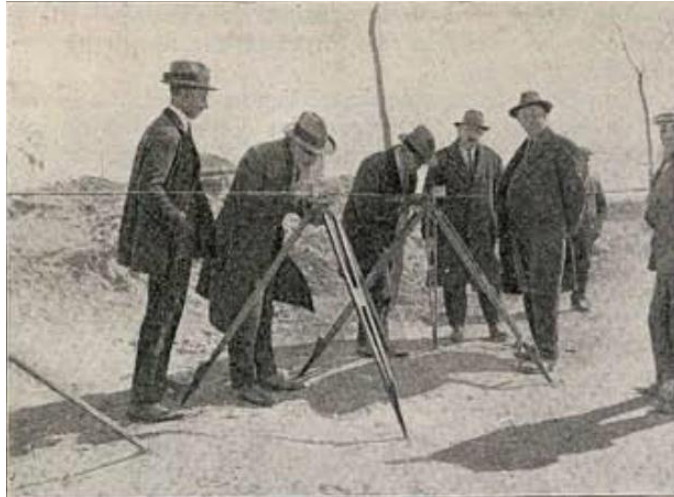
Falta sólo corregir en gabinete cada distancia parcial por pendiente y por temperatura para lo cual se anotó la que marcaba al aire libre un termómetro en el momento de cada lectura y efectuar la suma de todos los tramos (de la Puente, 1925).



**Figura 2.2:** Medición con hilos de Invar



**Figura 2.3:** Trípode sustentando peso tensor



**Figura 2.4:** Operando en un extremo de la base



**Figura 2.5:** Enrollando el Invar en su tambor de embalaje

### 2.2.2 Medida de bases del PPM 1929

Se tiene constancia de que se han calculado dos bases sobre las que se asienta la triangulación primaria posterior, una al norte llamada A-B en la carretera de Liria, (Figura 2.9) y otra llamada C-D en la carretera del Saler (Figura 2.10). Pero sólo de la base C-D en su medición de vuelta se han encontrado los cuadernillos de cálculo, con los que se trabajará para exponer los siguientes resultados.

Aunque los hilos de metal de Invar son muy estables, fue necesario realizar diferentes correcciones atendiendo a los errores de base mural y cambios progresivos hasta 1923 según las tablas que se adjuntan en la Figura 2.6. Los valores de corrección de la tabla deben volverse a corregir cuando las condiciones de temperatura en el momento de la medición son distintas a las de su construcción ( $15^{\circ}\text{C}$ ) estableciéndose diferencias en cuanto al modelo de hilo utilizado (Figura 2.6).

Vamos a estudiar con detalle el tramo número uno de la medición de vuelta en la base C-D de la carretera del Saler realizada el mes de mayo de 1929. El hilo utilizado en este caso está identificado con el número 660 y la temperatura ambiente medida es de  $20^{\circ}\text{C}$  por lo que la medida del hilo (H), practicadas todas las correcciones necesarias, será de 24000.895 mm.

La medición de la pendiente se realiza desde un punto intermedio entre otras dos referencias, tomando pendientes a un lado y otro, y anotando las lecturas que se expresan en la tabla de la Figura 2.7 como pendientes de frente y de espalda. Se adopta el valor promedio como el valor de la pendiente que así aumenta su precisión eliminando los posibles errores del anteojo. La corrección por pendiente que debe practicarse a la longitud natural del tramo (T) para obtener la proyección horizontal de éste (L) se calcula de la siguiente manera:

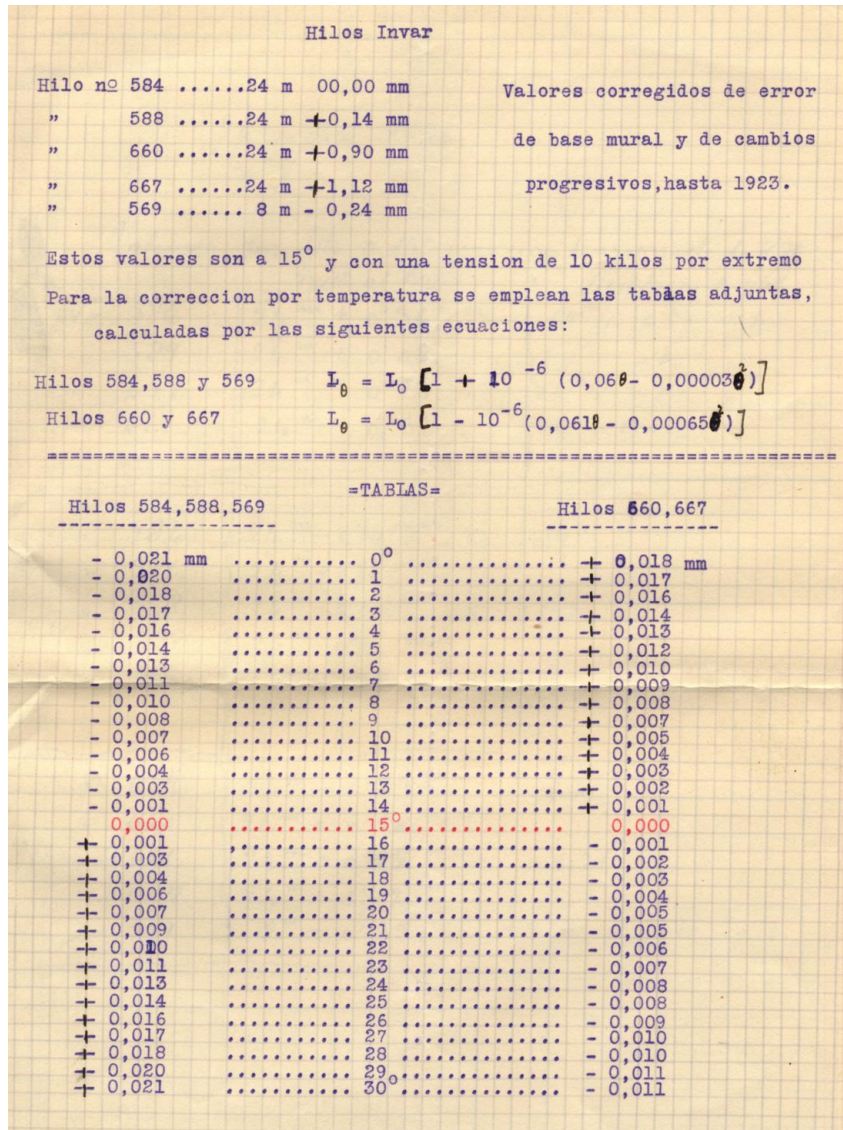


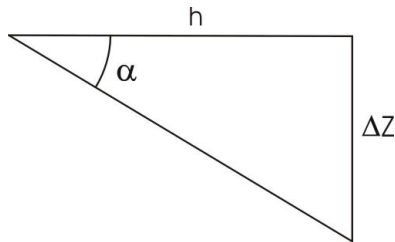
Figura 2.6: Correcciones practicadas a los hilos de invar







Tenemos como dato el promedio de las lecturas de frente y espalda, en este caso 1.425 que corresponde al porcentaje de pendiente en el tramo que estudiamos.



**Figura 2.8:** Corrección de pendiente negativa

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\Delta Z}{h} = 1.425$$

$$\alpha = \operatorname{arctg} \left( \frac{1.425}{100} \right) = \operatorname{arctg} 0.0142$$

$$\Delta T = 48 \cdot \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \cdot \alpha = 2.436 \cdot 10^{-3} \text{ m}$$

Como sabemos que la corrección por pendiente es siempre negativa (Figura 2.8) la cantidad  $\Delta T$  es  $-2.44 \text{ mm}$ .

Así la longitud del tramo se calculará como sigue:

$$L = H + (l' - l) + \Delta T$$

siendo

$L$ : la longitud del tramo

$H$ : la longitud del hilo

$l$ : la lectura detrás

$l'$ : la lectura delante

$$L = 24000.895 + 39.300 + (-2.44) = 24037.755 \text{ mm}$$

Los errores asociados a este tramo número uno son:

$$\text{Error cuadrático: } e_c = \sqrt{\frac{\sum e^2}{n-1}} = 0.01 \text{ mm}$$

$$\text{Error medio cuadrático: } e_{mc} = \frac{e_c}{\sqrt{n}} = 0.004 \text{ mm}$$

$$\text{Error relativo: } e_r = \frac{e_{mc}}{L} = 1.86 \cdot 10^{-7} = \frac{1}{5375005}$$

Por otra parte, se ha efectuado la suma de cada uno de los 24 tramos de los que consta la medida de la base obteniéndose una distancia total de 524362.716 mm, cantidad contrastada con la que aparece como apunte en lápiz en los cuadernillos de cálculo de la triangulación primaria tal como se aprecia en la Figura 2.10.

Número de los tramos	Vértices	Ángulos		Cálculo de las longitudes de los lados	Lados	
		Reducidos al centro	Corregidos		Longitudes	Denominaciones
	B-base					
	A-base					
				lg. V I = lg. L. =		
				lg. sen. D. =		
				lg. D I. =		
				C. lg. sen. V. =		
				lg. sen. I. =	502.888	B-base
				lg. V D. = log. B =		A-base

Figura 2.9: Distancia de la base A-B en el estadillo de cálculo de la triangulación

Se ha comprobado la homogeneidad de los errores relativos cometidos en los diferentes tramos medidos de la base, que demuestra la constancia en el método empleado (Tabla 2.1).

Asimismo se ha calculado el error relativo cometido para toda la base, comparando la distancia medida mediante hilos de Invar con la distancia calculada a

$$VD = DI \frac{\text{sen } I}{\text{sen } V} ; VI = DI \frac{\text{sen } D}{\text{sen } V}$$

Número de las mediciones	Vértices	Ángulos		Cálculo de las longitudes de los lados	Lados	
		Reducidos al centro	Corregidos		Longitudes	Denominaciones
28	C-base	72 08 40	72 08 43	$\text{lg. } VI = \text{lg. } L = 2.7197554$	524.50	C-base
	Rebisanchos	35 09 31	35 9 24	$\text{lg. sen. } D = 7.7603722$	76	D-base
				$\text{lg. } DI = 2.9380056$	76	
	D-base	72 41 40	72 41 43	$\text{C. lg. sen. } V = 8.2463112$	869.61	C-base
			$\text{lg. sen. } I = 7.9798304$			
			$\text{lg. } VD = \text{lg. } L = 2.9593265$			Rebisanchos

Figura 2.10: Distancia de la base C-D en el estadillo de cálculo de la triangulación

Tabla 2.1: Resultados obtenidos en los diferentes tramos de la Base C-D carretera del Saler en medición de vuelta expresados en milímetros

Número de tramo	Medida reducida	Error relativo
1	24037.755	1 : 5375005
2	24056.485	1 : 601412
3	24032.414	1 : 490560
4	24037.934	1 : 642441
5	24028.154	1 : 600704
6	24039.568	1 : 1201978
7	24047.532	1 : 490868
8	24042.568	1 : 642849
9	24034.967	1 : 1201748
10	24032.854	1 : 981137
11	24032.528	1 : 981320
12	23990.533	1 : 999606
13	24019.447	1 : 600486
14	24002.330	1 : 759020
15	24045.674	Sin error
16	24020.191	1 : 537108
17	24016.523	1 : 366249
18	24018.791	1 : 620163
19	24051.940	1 : 760589
20	23993.973	1 : 1199699
21	24009.395	1 : 536866
22	8041.621	1 : 328298
23	8015.993	1 : 253488
24	3713.546	1 : 151605

través de la triangulación primaria para comprobar la calidad del trabajo (Tabla 2.2). Para concluir esta fase de estudio se ha calculado la distancia aproximada

**Tabla 2.2:** Resultados obtenidos en las bases de la red del PPM 1929 expresados en milímetros

<i>Base</i>	<i>Medida reducida</i>	<i>Triangulación topográfica</i>	<i>Diferencia</i>	<i>Error relativo</i>
<i>A – B</i>	508888.627	–	–	–
<i>C – D</i>	524362.716	524510.0	147.284	1:3561

entre la base norte y sur de la red a través de las coordenadas que ofrece el cuadernillo de cálculo de la triangulación primaria (Figuras 2.9 y 2.10), obteniéndose una cifra de 16940780 mm; con ella y la diferencia entre la base medida sur (C-D) y el cierre de la triangulación que corresponde a 147.284 mm se ha calculado un parámetro de error relativo del trabajo de triangulación que estimamos en 8.7 ppm. A escala 1:500 nos hubiera gustado un resultado mejor, en el entorno de los 10 cm de apreciación gráfica. Pero es el que es, aceptable solamente y debe ser tenido en cuenta en lo que sigue.

### 2.3 Determinación del acimut por observaciones a la Polar

La orientación angular respecto a una referencia fija y única es una de las operaciones básicas en cualquier levantamiento topográfico. Históricamente, la orientación se ha realizado mediante observaciones astronómicas que permiten calcular el acimut de una o varias bases a partir de las cuales se transmite dicha orientación al resto de elementos cartográficos obtenidos a través del levantamiento (Martín Asín, 1982). En este apartado se describe el procedimiento de cálculo previsto por la normativa de la época basado en la observación de la estrella Polar, añadiendo como referencia otro texto histórico para realizar el estudio. Se trata del *Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid*, publicado

en 1928 por el Instituto Geográfico y Catastral para su consulta en el año 1929 (VV.AA., 1928).

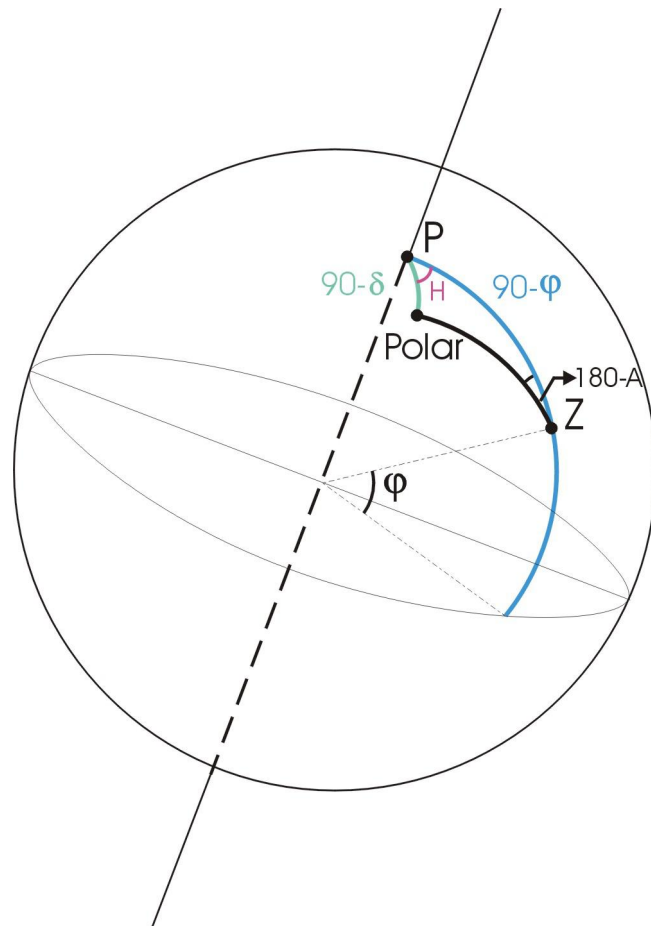
### **2.3.1 Consideraciones previas de orientación de un plano**

Recordaremos brevemente algunos conceptos Astronómicos. Llamamos tiempo medio al tiempo referido a un sol ficticio que se mueve por el Ecuador con velocidad constante. Este sol medio se define como el cuerpo que al moverse por el ecuador con velocidad constante y obligado a coincidir con otro sol ficticio que recorre la eclíptica con movimiento uniforme coincidiendo con el sol verdadero en apogeo y perigeo en los puntos equinocciales Aries y Libra, proporciona una referencia constante en el movimiento y al cual podemos ajustar nuestros relojes. Referido a este sol, definimos el día medio como el intervalo de tiempo transcurrido entre dos pasos consecutivos del sol medio por el meridiano del lugar y la hora media como el tiempo transcurrido desde que el sol medio pasa por el meridiano superior.

La orientación de un plano se puede llevar a cabo con observaciones de la estrella polar (Martín Asín, 1982). Elegimos la estrella polar porque es siempre visible en nuestras latitudes. Tiene una declinación media aproximada de  $89^\circ$  es decir, orbita a una distancia polar de  $1^\circ$ , que define una estrella circumpolar sin orto ni ocaso.

Llamamos meridiana o línea Norte-Sur, a la intersección del meridiano del lugar con el plano del horizonte. La determinación de esta línea es simple, a partir de observaciones de estrellas y en particular a la estrella Polar. La obtención de la meridiana es un requisito fundamental en un proyecto cartográfico ya que permite transmitir la orientación a todos los elementos del mapa final.

### 2.3.2 Orientación del plano parcelario municipal de Valencia, 1929



**Figura 2.11:** Triángulo esférico en el que se resuelve el acimut de la Polar

A cada posición en que observemos a la Polar le corresponderá un triángulo esférico Polo-Cenit-Astro, cuya resolución nos llevará a calcular el ángulo Z, con el que determinaremos la línea Norte-Sur. En este triángulo, (Figura 2.11), tenemos  $PZ = 90^\circ - \varphi$ , dato que suponemos conocido, al igual que  $P - Polar = 90^\circ - \delta$ . Conocemos por lo tanto dos elementos del triángulo, por lo que

necesitaremos uno más, en nuestro caso calcularemos el ángulo horario de la estrella Polar  $\hat{H}$  que es la diferencia entre la hora de observación y la hora del paso de la estrella por el meridiano del lugar. El triángulo tendrá solución ya que conocemos dos lados y el ángulo comprendido entre ellos. A partir de aquí tenemos dos maneras de resolver el acimut que buscamos, con ayuda del Anuario del Observatorio Astronómico de Madrid (VV.AA., 1928) o sin él tal como expresamos a continuación mediante trigonometría esférica elemental: Suponiendo conocidos  $\varphi$ ,  $\delta$ , y  $H$ , obtendremos el ángulo  $Z$  mediante la expresión  $Z = 180^\circ - A$

siendo

$$tgA = \frac{senH}{sen\varphi \cdot cosH - tg\delta \cdot cos\varphi}$$

Es importante aclarar que al resolver directamente esta fórmula el ángulo horario  $H$  debe estar expresado en unidades sidéreas, para lo que aplicaremos el factor de transformación 1.00273791 (VV.AA., 1928). Vamos ahora a explicar cómo operar con ayuda de las tablas que proporciona el Anuario: Se hace uso del método basado en los acimutes de la estrella Polar, cuyos valores están tabulados obteniendo los ángulos reducidos al horizonte, que la visual a la Polar forma con la meridiana, para los horarios en tiempo medio de 3 a 9 horas, de 5 en 5 minutos y latitudes de nuestra Península. Se dan los acimutes para horarios expresados en tiempo medio solar, que regula la actividad humana en relojes o cronómetros. Los números de esta tabla se han calculado con la declinación media de la polar para el año 1929 igual a  $88^\circ 55' 24''$ , que después se deberán corregir de latitud, de declinación y de horario (Martín Asín, 1987).

Antes de seguir con la metodología empleada en el cálculo propiamente dicho, nos pararemos a explicar la obtención de los datos que se requieren para trazar

la meridiana o determinar el acimut de un lado del plano topográfico tal como se realizaba en la época del levantamiento. El observador se proveerá de dos linternas pequeñas de campaña, una para iluminar el retículo del anteojo, colocándola de soslayo delante del objetivo, y otra para servir de blanco o punto de mira por la noche. Con este último objeto se buscará o levantará un apoyo estable a 50, 100, 200 o más metros de distancia del lugar de observación, bien al este o al oeste del meridiano, de manera que no haya duda del lado al cual está situado, y sobre el apoyo se situará la linterna, interponiendo entre ella y el observador una pantalla provista de un pequeño taladro circular por donde únicamente pueda salir la luz. Preparado el teodolito, se apuntará en seguida a la señal luminosa terrestre y se leerá en el círculo horizontal la graduación correspondiente. En caso de utilizar un teodolito excéntrico, se invertirá el círculo vertical y se repetirá la operación anterior; el término medio de ambas lecturas expresará la dirección de la primera visual. Acto seguido se enfilará con el anteojo la Polar dos veces seguidas, y juntamente con la hora, minuto y hasta segundo en que se efectuaron las punterías, se anotarán las lecturas hechas en el círculo horizontal del instrumento. Sea o no excéntrico el teodolito, se invertirá la parte superior del mismo y se repetirá, apuntando a la estrella lo acabado de exponer. Por último, se enfilará de nuevo el objeto terrestre conforme se hizo al empezar la operación (Figura 2.12). Cabe mencionar que el Anuario Astronómico para 1929 explica que “con teodolitos de la casa Brunner de tercer orden, la variación de 12'' es claramente perceptible, consiguiendo una incertidumbre de 2 a 4 minutos en la determinación del estado del reloj”. Las dos primeras observaciones de la Polar, combinadas con el término medio de las dos primeras punterías al objeto terrestre, darán dos ángulos, y otros dos las observaciones posteriores. Estos cuatro ángulos serán distintos, (Figura 2.13) principalmente por la variación de la Polar en el cielo durante las



Orientación de la base de la carretera de Liria por medio de la estrella Polar haciendo estación en el extremo A

La observación se verificó el día 30 civil de Junio de 1929

Objetos.	Anteje.	Tiempos de la observación.			Lecturas.					
		h.	m.	s.	Nonio I.			Nonio II.		
					o.	'	"	o	'	"
B	I				111	42	27			
	D				291	42	10			
Polar...	D	0	20	30	334	02	33			
	D	0	22	30	334	00	33			
Polar...	I	0	28	15	154	00	11			
	I	0	31	20	154	00	12			
B	I				111	42	38			
	D				291	42	14			
Polar...	D	0	46	00	334	02	13			
	D	0	50	40	334	02	25			
Polar...	I	1	08	10	154	01	23			
	I	1	07	40	154	01	25			
Polar...	I									
	D									
	D									
	D									
	I									
	I									

Figura 2.12: Serie de observaciones a la referencia y a la Polar

operaciones; pero, corregidos del acimut de la estrella con auxilio de las tablas que dan los pasos superiores y los acimutes de la Polar, deben resultar iguales, porque entonces los cuatro expresarán la distancia angular del objeto terrestre a la meridiana que pasa por el lugar de observación, o de manera equivalente el acimut de la visual al objeto o marca luminosa, del cual depende la orientación de todo el plano (VV.AA., 1928).

En el caso de nuestro plano parcelario de 1929, a falta de red geodésica de tercer orden, se eligieron otras bases dentro de la red que abarca el levantamiento, más concretamente dos, una al Norte de la red llamada base de la carretera de Liria (Figura 2.14) y otra al sur llamada base del Saler (Figura 2.15).

Las instrucciones del Instituto Geográfico y Catastral (VV.AA., 1907), en su artículo 32 dicen así:

*“Para la orientación de la base o bases se empezará por determinar el estado del reloj que se emplee, observando la culminación de una o varias estrellas en la misma noche en que se observe la polar: a cuyo fin se circularán anualmente por la dirección general las tablas auxiliares necesarias, formadas por la misma. Los resultados de esta operación preliminar se consignarán como indica el formulario número 8 en tiempo medio civil, de cero a 24 horas”.*

En el artículo siguiente se explica cómo observar la culminación de las estrellas:

*“Quince o veinte minutos antes de culminar, o sea de pasar por el meridiano apúntese con el anteojo del teodolito la estrella que se hubiese elegido entre las comprendidas en una de las tablas mencionadas, y en el momento en que se halle próximamente en la intersección de los hilos centrales del retículo y en coincidencia*

Cálculo para la orientación de la base **A-B** por medio de la estrella Polar.  $J = 88^{\circ} 55' 12''$   
 haciendo estación en el extremo **A** cuya latitud es  $37^{\circ} 28' 30''$  **Longitud**  $13^{\circ} 14' 8'' - E$   
 La observación se verificó el día 30 de **Junio** de 1887 Término municipal de **Valencia**

Provincia de **Valencia**

	D	I	D	I	D	I	D	I
Tempos del reloj corregidos de estado	0 23 30	0 22 70	0 21 15	0 20 20	0 19 40	0 18 10	0 17 40	0 17 40
Paso de la Polar por el meridiano	7 05 53	7 05 53	7 05 53	7 05 53	7 05 53	7 05 53	7 05 53	7 05 53
Horario de la Polar	6 45 23	6 47 23	6 47 23	6 47 53	6 47 40	6 47 40	6 47 40	6 47 40
Azmut inmediato superior a los 40' de latitud	1 21 48	1 22 06	1 22 20	1 22 45	1 22 24	1 22 42	1 22 42	1 22 42
Corrección	- 02	+ 15	- 02	+ 15	- 02	+ 15	- 02	+ 15
Corrección por horario	- 02	+ 15	- 02	+ 15	- 02	+ 15	- 02	+ 15
Corrección por latitud	+ 11	+ 01	+ 01	+ 01	+ 12	+ 12	+ 12	+ 12
Azmut de la Polar en el lugar y hora de la observación	1 21 57	1 22 07	1 22 01	1 22 05	1 22 25	1 22 06	1 22 15	1 22 15
Promedios de Lecturas a la Polar	334 00	33 334 00 22	154 00 11	154 00 12	224 02 12	224 02 25	154 01 22	154 01 15
Promedios de Lecturas corregidas a la Polar	332 28	34 22 28 26	152 27 40	152 27 40	222 28 45	222 28 49	152 27 20	152 27 20

	Lecturas a la Polar	Lecturas al objeto terrestre	Lecturas corregidas a la Polar	Lecturas al objeto terrestre	Lecturas corregidas a la Polar
Lectura al objeto terrestre	291	42	111	42	291
Lecturas corregidas a la Polar	332	38	332	38	332
Suma	77	182	52	182	52
Promedio	17	38	13	38	13
Promedio de lecturas a la Polar	332	38	332	38	332
Idem al objeto terrestre	291	42	291	42	291
Azmut	319	04	319	04	319

Suma . . . . . 319 04 17  
 Orientación de la base . . . . . 180  
 Azmut de la base . . . . . 179 04 17

de **Valencia** 9 de **Agosto** de 1887  
 HECHO POR DUPLICADO Y CONFORME.  
 EL INGENIERO GEÓGRAFO **Ramón Clain**  
 EL JEFE DE LOS TRABAJOS DE . . . . .  
 CONFORME.

Figura 2.13: Cálculos para la orientación de la base de la carretera de Liria



Hoja n.º .....

**INSTITUTO GEOGRÁFICO**

—————  
**TRABAJOS TOPOGRÁFICOS**  
—————

*Provincia de Valencia*

Término municipal de id. Plano de  
Mod. T. 9. *populación*

*7<sup>a</sup>* brigada.

Orientación de la base de la carretera de  
*Liria* por medio  
de observaciones a la estrella Solar.

Teodolito de *Wild* núm. ....

Observador: D. *Santiago García*

**Figura 2.14:** Base de la carretera de Liria

Hoja n.º .....

**INSTITUTO GEOGRÁFICO**

—————  
TRABAJOS TOPOGRÁFICOS  
—————

Provincia de *Valencia*

Término municipal de *id. - Plano de*  
*población*

*2ª* brigada.

Orientación de la base *del Saler (C-D)*  
..... por medio  
de observaciones a la estrella Solar.

Teodolito de *Wild* ..... núm. *285*

Observador: *D. Ramón Climent*

**Figura 2.15:** Base del Saler

*perfecta con el horizonte, véase qué hora, minuto y segundo señala el reloj. Anótese esta indicación, la graduación correspondiente a la puntería leída en el círculo vertical del teodolito y las lecturas de nivel. Sin perder tiempo se repite la operación de puntería a la estrella y de lectura y anotación de lo que el reloj y el círculo vertical del teodolito indicasen. Mientras las graduaciones del círculo varíen en el mismo sentido, aumentando de continuo o disminuyendo, según la posición del anteojo a una u otra mano del observador, es señal de que la estrella no ha llegado todavía a su culminación y la operación no debe interrumpirse. Se continúa hasta advertir que las graduaciones varían decididamente en sentido contrario que al principio. La graduación intermedia, máxima o mínima, corresponde al momento de la culminación y comparando lo que el reloj señalaba entonces con lo que debía señalar, según la tabla de culminaciones, se concluirá, con algún minuto de incertidumbre, lo que en realidad adelanta o atrasa. La determinación completa de la hora, o del estado del reloj, ha de comprender por lo menos ocho punterías, distribuidas con cierta simetría o uniformidad: cuatro antes de la culminación y otras cuatro después, y por vía de comprobación, conviene que se repita con otra estrella, después de invertir la posición del círculo vertical y anteojo del teodolito, y cuidando siempre de que éste se halle rectificado del mejor modo posible. Antes y después de la observación de las culminaciones, se observará además un objeto terrestre, en posiciones inversas de aquel instrumento, o con el anteojo alternativamente a derecha e izquierda del observador, para deducir cual es en el círculo vertical*

*la graduación correspondiente a la línea del mismo nombre, o a la horizontal”.*

Los estadillos publicados en estas mismas instrucciones para el cálculo del estado del reloj se observan en las Figuras 2.16 y 2.17. No entraremos en más detalle de cálculo ya que no disponemos de los mismos en nuestros documentos históricos, ya sea por haberse perdido o bien por darse por buenas las indicaciones del reloj empleado por trabajos anteriores muy próximos al que mencionamos aquí. Así que siguiendo con la lectura de los artículos posteriores, el siguiente paso será la determinación de la latitud del lugar, dato que necesitaremos para la determinación del acimut que buscamos.

El Instituto Geográfico y Catastral (VV.AA., 1907) propone dos procedimientos de obtención de la latitud aproximada de los extremos de la Base que servirá para orientar el plano, con un error de algún minuto de arco.

El primero consiste en la observación entre la vertical y la dirección del astro en el momento de su culminación sobre el horizonte, la diferencia entre ellas expresará la distancia cenital meridiana, que deberá corregirse después de refracción para deducir la distancia cenital verdadera que llamaremos  $\zeta$ . Así la latitud geográfica  $\varphi$  podrá calcularse como

$$\varphi = \delta - \zeta$$

considerando  $\delta$  la declinación del astro, valor que se toma de las tablas variables de un año para otro que distribuye a los observadores el Instituto Geográfico y Catastral. El cálculo para la determinación de la latitud se encuentra en el formulario número 27 de las instrucciones para los trabajos topográficos (Figura 2.18).

*Parte observada del disco del Sol: Inferior.*

NOMBRE del astro observado.	Antojos y dia	TIEMPOS del reloj.			EXTREMOS del nivel.		Nivel	LECTURAS			PROMEDIOS		
		H.	M.	S.	$a'$	$a''$		$a' + a''$	°	'	''	°	'
Sol.	I.	12	6	16	$a' = 7,5$	$a'' = 19,5$	I.	146	09	00	146	09	05
					$a' + a'' = 27,0$	II.		326	09	10			
Idem.	I.	12	7	20	$a' = 7,5$	$a'' = 19,5$	I.	146	08	50	146	09	00
					$a' + a'' = 27,0$	II.		326	09	10			
Idem.	I.	12	8	10	$a' = 7,5$	$a'' = 19,5$	I.	146	08	30	146	08	40
					$a' + a'' = 27,0$	II.		326	08	50			
Idem.	I.	12	9	24	$a' = 7,5$	$a'' = 19,5$	I.	146	08	00	146	08	10
					$a' + a'' = 27,0$	II.		326	08	20			
Idem.	I.	12	10	13	$a' = 7,5$	$a'' = 19,5$	I.	146	07	30	146	07	40
					$a' + a'' = 27,0$	II.		326	07	50			
Idem.	I.	12	11	10	$a' = 7,5$	$a'' = 19,5$	I.	146	07	10	146	07	20
					$a' + a'' = 27,0$	II.		326	07	30			
					$a' =$	$a'' =$	I.						
					$a' + a'' =$		II.						
					$a' =$	$a'' =$	I.						
					$a' + a'' =$		II.						
					$a' =$	$a'' =$	I.						
					$a' + a'' =$		II.						

**Figura 2.16:** Estadillo para el cálculo del estado del reloj, mediante método culminación del Sol



NOMBRE DEL OBJETO TERRESTRE	Amojo a la	EXTREMOS DEL NIVEL	Nombres	LECTURAS			PROMEDIOS		
				°	'	''	°	'	''
Carretera.	I.	$a' = 9,0$	I.	99	42	50	99	42	45
		$a'' = 21,0$		II.	279	42			
		$a' + a'' = 30,0$							
	D.	$a_r = 7,0$	I.	279	37	50	279	37	40
		$a_s = 19,0$		II.	99	37			
		$a_r + a_s = 26,0$							
	D.	$a_r = 6,0$	I.	279	37	50	279	37	40
		$a_s = 18,0$		II.	99	37			
		$a_r + a_s = 24,0$							
	I.	$a' = 8,5$	I.	99	43	10	99	42	55
		$a'' = 20,5$		II.	279	42			
		$a' + a'' = 29,0$							
	I.	$a' =$	I.						
		$a'' =$	II.						
		$a' + a'' =$							
	D.	$a_r =$	I.						
		$a_s =$	II.						
		$a_r + a_s =$							
	D.	$a_r =$	I.						
		$a_s =$	II.						
		$a_r + a_s =$							
	I.	$a' =$	I.						
		$a'' =$	II.						
		$a' + a'' =$							

	H.	M.	S.
Culmina el astro observado á las.....	12	9	38
Promedio de tiempos de la lectura (máxima ó mínima).....	12	3	10
Estado del reloj: atrasa.....	12	6	28

de ..... de 19

EL JEFE DE LA ..... BRIGADA,  
Ingeniero Geógrafo,

de ..... de 19

CONFORME:

El Jefe de los trabajos de .....

Figura 2.17: Estadillo para el cálculo del estado del reloj, mediante método culminación del Sol

Formulario núm. 27.

PROVINCIA DE ..... TÉRMINO MUNICIPAL DE .....

**Cálculo de la latitud, determinada por observaciones de la estrella  $\beta$  Orionis, hechas el día 2 de Enero de 1878, en el extremo Raso del Monte, de la base Raso del Monte-Carretera.**

$\zeta = z + \rho$        $\varphi = \delta - \zeta$

Promedios de lecturas al Extremo Carretera, corregidas de inclinación.....	$\left\{ \begin{array}{l} D - \frac{n}{2}(a, + a_{..}) \\ I - \frac{n}{2}(a' + a'') \end{array} \right.$	279	52	12
Gradación del cenit: $\frac{D+I}{2} - \frac{n}{4}((a, + a_{..}) + (a' + a''))$	$\left( \begin{array}{l} D + I - \frac{n}{2}((a, + a_{..}) + (a' + a'')) \\ \frac{D+I}{2} - \frac{n}{4}((a, + a_{..}) + (a' + a'')) \end{array} \right)$	379	20	48
Gradación (máxima ó mínima) de la estrella, corregida de inclinación.....		140	56	33
Distancia cenital aparente..... $z =$		48	43	51
Refracción correspondiente á z..... $\rho =$		8	20	35 S.
Distancia cenital verdadera..... $\zeta = z + \rho =$		40	24	22
Declinación de la estrella observada..... $\delta =$				
Latitud del extremo Raso del Monte..... $\varphi =$				

286

287

de ..... de 19.....

HECHO POR DUPLICADO Y CONFORME:  
El Ingeniero Geógrafo,

de ..... de 19.....

CONFORME: El Ingeniero Geógrafo,  
El Jefe de los trabajos de .....

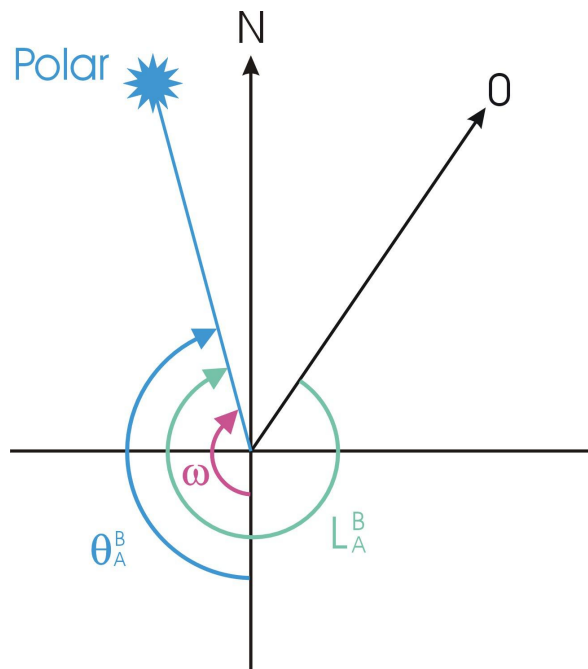
**Figura 2.18:** Estadillo para el cálculo de la latitud en los extremos de la Base. Primer método

El segundo emplea la observación al Sol, en el que las correcciones para obtener la verdadera distancia cenital meridiana serán tres: la corrección por refracción, por paralaje y por semidiámetro aparente del Sol. Se debe tener en cuenta además que la declinación que se toma de las tablas en este caso, se refiere al meridiano de Greenwich, por lo que deberá calcularse por interpolación su valor sobre el meridiano donde se realizó la observación, previo conocimiento de la longitud que separa los dos meridianos. En este caso para determinar la latitud es necesario conocer el estado de reloj que también se hallará por observaciones al sol, según se detalla en el estadillo de la Figura (2.19).

Debido a que se omite el cálculo de la latitud de los puntos extremos de las bases medidas en el plano de 1929, por elegir el vértice geodésico Valencia de coordenadas geográficas conocidas por el Anuario Astronómico de Madrid para el año 1929 respecto al meridiano origen Madrid, no entraremos en detallar su cálculo y nos ceñiremos simplemente al cálculo del acimut de esas bases. El artículo 169 de las instrucciones del Instituto Geográfico (VV.AA., 1907) apunta que, “sabiendo a qué hora de tiempo medio se observó la Polar, y a cuál otra en el día de la fecha pasó por el meridiano (y para esto último bastará consultar una tabla preparada al efecto), la diferencia de horas expresará el horario oriental y occidental de la misma estrella en el momento de su observación; y con este argumento y el valor aproximado de latitud geográfica, el azimut de su dirección en el mismo momento se deducirá por interpolación de la tabla especial de acimutes, valedera para todos los paralelos de la Península y horarios de tres a nueve horas. Obtenido el azimut de la polar, el de la dirección al objeto terrestre se deducirá sin dificultad agregando al ángulo de las dos direcciones, a la estrella y al objeto, el azimut obtenido por medio de las tablas, o restándole del mismo ángulo según los casos: lo primero, cuando la estrella se halle al Oeste



o al Este del meridiano, y al Oeste o al Este también de la estrella el objeto terrestre, y lo segundo, cuando el objeto o señal terrestre y la estrella corresponda a distintos lados del meridiano. Los azimutes así obtenidos, con relación al punto cardinal Norte, se referirán después al Sur, y se contarán hacia el Oeste desde cero a  $360^{\circ}$  (Figura 2.20). Su cálculo se dispondrá conforme al formulario 29 de las instrucciones (Figura 2.13). Centrando nuestra atención en los estadillos



**Figura 2.20:** Relación entre el cero (0) del instrumento, acimut astronómico ( $\theta_A^B$ ) y descentrado ( $\omega$ )

recuperados para el trabajo de 1929, vemos en la Figura 2.12 cómo se realiza una serie de lecturas, tanto del vértice B, extremo de la base conocida que se quiere orientar, como de la estrella Polar, en graduación sexagesimal con estación en el vértice A. En este caso concreto las lecturas al objeto terrestre se efectúan en un

solo nonio alternando el antejo a izquierda y derecha del aparato, repitiéndose la operación dos veces. En el caso de la observación a la Polar se efectúan cuatro lecturas antes de su culminación y otras cuatro después de la misma, alternando igualmente los antejos a izquierda y derecha del instrumento y anotando los tiempos de observación en horas, minutos y segundos. El trabajo de observación de la base de la carretera de Liria se realizó el día 30 de junio de 1929 y aparece firmado por el Ingeniero Geógrafo Santiago García, (Figura 2.14) como también ocurre con el siguiente estadillo donde se realiza el cálculo del acimut de la base del Saler al que se añade la firma del también Ingeniero Geógrafo Ramón Climent. (Figura 2.15).

El siguiente formulario que analizaremos consta como número 29 en las Instrucciones del Instituto Geográfico (VV.AA., 1907) y es el empleado en el cálculo para la orientación de la base A-B de la carretera de Liria, por medio de la estrella Polar, haciendo estación en el extremo A. A la vista del trabajo deducimos que la latitud que aparece como perteneciente al vértice A, es en realidad la del vértice geodésico Valencia, ubicada en la torre del Miguelete, y que así consta en el Anuario Astronómico de Madrid para el año 1929, como ya habíamos dicho anteriormente. Creemos que la explicación subyace en una simplificación de los trabajos por ser este punto aproximadamente el centro de la red de triangulación. Dado que no se efectúa el cálculo de la latitud del vértice A perteneciente a la base que se quiere orientar, no centraremos nuestro estudio en él y avanzaremos en la obtención del acimut de la base.

Siguiendo una lectura ordenada del estadillo que aparece en la Figura 2.13, la primera fila hace referencia a los tiempos de reloj corregidos de estado, en este caso coinciden con los tiempos de observación a la polar referidos en la Figura 2.12. Simplificando los cálculos, han creído innecesaria la corrección de



estado del reloj seguramente porque en trabajos anteriores se hayan realizado comprobaciones. A partir de aquí y para seguir analizando los cálculos que aparecen en este estadillo nos haremos servir de las tablas publicadas en el *Anuario del Observatorio Astronómico* para 1929 (VV.AA., 1928). En estas tablas podemos averiguar el paso de la estrella Polar por el meridiano de Greenwich calculando fácilmente después el paso por el meridiano del lugar que efectivamente coincide con lo apuntado en el estadillo para el día 30 de junio de 1929 en que se hizo la observación (Figura 2.13). tal y como se describe a continuación.

El tiempo medio civil (TMC) del paso de la estrella polar por Greenwich que nos da la tabla son  $7^h4^m23^s$ , conocemos la longitud del vértice geodésico Valencia respecto al meridiano de Madrid que aparece como dato tanto en el anuario como en el estadillo que estamos estudiando, es decir  $13^m14.8^sE$  así que para referirla al meridiano de Greenwich solo debemos restarle  $14^m45.1^s$  por estar al Este de Madrid.

$$13^m14.8^s - 14^m45.1^s = -1^m30.3^s$$

es decir,  $1^m30.3^sW$  por lo tanto, el TMC del paso de la Polar por el meridiano del lugar será:

$$7^h4^m23^s + 1^m30.3^s = 7^h5^m53.3^s$$

El siguiente dato necesario será el horario de la Polar que no es más que restar el tiempo de la observación de la estrella a la hora de su paso por el meridiano del lugar. Escogemos como ejemplo de cálculo la primera columna del estadillo que hace referencia al “Horario de la Polar”(H)

$$7^h5^m53.3^s - 0^h20^m30^s = 6^h45^m23^s$$

Siguiendo en orden los items del estadillo, debemos calcular ahora el acimut inmediato superior a los  $39^{\circ}30'$  de latitud corregidos a mano de los originales  $40^{\circ}$  que apunta el estadillo. Para ello debemos consultar la tabla de la Figura 2.21 de doble entrada que encontramos en el anuario astronómico para los argumentos  $H = 6^h45^m$  y  $\phi = 39^{\circ}30'$  teniendo en cuenta una declinación media anual de la estrella Polar de  $88^{\circ}55'24''$ .

Del cruce de estos datos obtenemos el acimut  $\theta = 81.8'$  que equivale a  $\theta = 1^{\circ}21'48''$ . Debemos ahora corregir este acimut por horario, declinación y latitud.

Comenzamos por la corrección por horario y como en anteriores ocasiones centramos el ejemplo en la primera observación. En la tabla para obtener el acimut de la Polar (Figura 2.21), el argumento H aparece en intervalos de  $5'$  por lo que realizaremos una interpolación para saber exactamente cual es la diferencia entre la H de entrada a la tabla y nuestra H real. Entraremos en la tabla con los valores  $6^h45^m$  y  $6^h50^m$  de H, cuya diferencia en acimut corresponde a  $0.4'$ .

$$\frac{0.4'}{5'} = \frac{z}{0.383'}$$

resultando  $z = 0.03'$  es decir  $1.8'' \approx 2''$  que deberemos restar al resultado de la casilla correspondiente al acimut inmediato superior a los  $39^{\circ}30'$  de latitud.

La corrección por declinación será independiente de la observación por lo que el ejemplo servirá para todas las observaciones que se hayan realizado. Elegimos ahora la tabla de doble entrada en la que los argumentos son declinación y acimut para la estrella Polar del Anuario Astronómico, y operamos de la misma manera que para la corrección anterior (Figura 2.22). Entramos en la tabla con los valores de declinación entre los que está comprendida la declinación de la Polar para el



1929.—I. Acimutes de la Polar para  $\delta = 88^{\circ} 55' 24''$ .—

H		36°	36 1/2	37°	37 1/2	38°	38 1/2	39°	39 1/2	40°
h	m	'	'	'	'	'	'	'	'	'
6	0	79,8	80,3	80,9	81,4	82,0	82,5	83,1	83,7	84,3
	5	79,7	80,2	80,8	81,3	81,9	82,5	83,1	83,7	84,3
	10	79,7	80,2	80,7	81,2	81,8	82,4	83,0	83,6	84,2
	15	79,5	80,0	80,6	81,1	81,7	82,3	82,9	83,4	84,0
	20	79,4	79,9	80,4	80,9	81,5	82,1	82,7	83,2	83,8
	25	79,2	79,7	80,2	80,7	81,3	81,9	82,5	83,0	83,6
6	30	79,0	79,5	80,0	80,5	81,1	81,6	82,2	82,8	83,4
	35	78,7	79,2	79,7	80,2	80,8	81,3	81,9	82,5	83,1
	40	78,4	78,9	79,4	79,9	80,5	81,0	81,6	82,1	82,7
	45	78,0	78,5	79,0	79,5	80,1	80,6	81,2	81,8	82,4
	50	77,6	78,1	78,6	79,1	79,7	80,2	80,8	81,4	82,0
	55	77,2	77,7	78,2	78,7	79,3	79,8	80,3	80,9	81,5

**Figura 2.21:** Fragmento de la tabla de cálculo del acimut de la Estrella Polar para el año 1929. (Anuario Astronómico de Madrid, 1929)

1929.—II. Acimutes de la Polar: Corrección por declinación.  
Argumentos: Declinación y acimut.

Acimut		Declinación					Acimut	
		55'	65'	75'	85'	95'		
o	'	"	'	'	'	'	'	"
88	54	59	+ 0,3	+ 0,4	+ 0,5	+ 0,5	+ 0,6	88 54 59
88	55	4	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	88 55 4
88	55	9	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	88 55 9
88	55	14	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	88 55 14
88	55	19	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,1	+ 0,1	88 55 19
88	55	24	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0	88 55 24
88	55	29	- 0,1	- 0,1	- 0,1	- 0,1	- 0,1	88 55 29
88	55	34	0,1	0,2	0,2	0,2	0,2	88 55 34
88	55	39	0,2	0,2	0,3	0,3	0,4	88 55 39
88	55	44	0,3	0,3	0,4	0,4	0,5	88 55 44
88	55	49	- 0,3	- 0,4	- 0,5	- 0,5	- 0,6	88 55 49

**Figura 2.22:** Tabla de cálculo de corrección por acimut. (Anuario Astronómico de Madrid, 1929)

día 30 de junio de 1929 en que se realizó la observación, estos son:  $88^{\circ}55'9''$  y  $88^{\circ}55'14''$  y la segunda entrada la realizamos para los valores de acimut entre los que está comprendido el dato de acimut inmediato superior a los  $39^{\circ}30'$  de latitud previamente calculado, que en este caso serán:  $75'$  y  $85'$  Del cruce en la tabla entre el valor de declinación  $88^{\circ}55'9''$  y el valor de acimut entre  $75'$  y  $85'$  obtenemos una corrección por declinación de  $+0.3'$  que equivale a  $18''$  Por otra parte del cruce entre el valor de declinación  $88^{\circ}55'14''$  y el valor de acimut comprendido entre  $75'$  y  $85'$  obtenemos una corrección por declinación de  $+0.2'$  que equivale a  $12''$  La diferencia entre estos dos resultados será  $6''$ . Estos valores permiten formular la siguiente relación de proporcionalidad:

$$\frac{D_{cd}}{D_{ved}} = \frac{V_c}{D_{vdvei}}$$

siendo  $D_{cd}$  la diferencia en corrección por declinación,  $D_{ved}$  la diferencia en segundos de valores extremos de declinación,  $V_c$  el valor de corrección y  $D_{vdvei}$  la diferencia en segundos entre el valor de declinación y el valor extremo inferior del intervalo en que se encuentra el real.

$$\frac{6''}{5''} = \frac{z}{3''}$$

resultando  $z = 3.6''$  es decir, el valor resultante de la corrección será:

$$3.6'' + 12'' \approx 15''$$

La última corrección que debemos realizar es la corrección por latitud, de la que se calculará su valor solamente para la primera observación como hemos venido realizando con las demás correcciones. Para calcularla echaremos mano

de nuevo a la tabla que hemos consultado para calcular la corrección por horario. Figura 2.21. Dado que la tabla nos da la posibilidad de entrada con valores de latitud que varían en  $0.5^{\circ}$  deberemos interpolar el valor de nuestra latitud real. Realizaremos entonces dos cruces en la tabla con la entrada de  $H$  como  $6^h45^m$  y el valor de latitud  $\varphi = 39^{\circ}30'$  obteniendo un valor de acimut de  $81.8'$  El siguiente cruce lo realizaremos con los valores de entrada  $H = 6^h45^m$  y  $\varphi = 39^{\circ}$  obteniendo un valor de acimut de  $81.2'$ . Se establece la diferencia entre ambos valores de acimut en  $0.6'$

$$\frac{D_{val}}{D_l} = \frac{V_c}{D_{ltr}}$$

siendo  $D_{val}$  la diferencia en el valor de acimut para dos latitudes dadas, en minutos,  $D_l$  la diferencia de latitud, en minutos,  $V_c$  el valor de corrección y  $D_{ltr}$  la diferencia en minutos de la latitud en la tabla y la latitud real.

$$\frac{0.6'}{30'} = \frac{z}{28.5'}$$

resultando  $z = 0.57'$  que equivale a  $34.2''$ . Así al resultado de la diferencia de acimutes obtenidos para la misma  $H$  pero latitudes distintas, le restaremos el valor equivalente de acimut correspondiente al valor real de latitud que está dentro del intervalo de las latitudes para las que hemos consultado el cruce en la tabla. Por lo que el resultado será

$$36'' - 34.2'' = 1.8'' \approx 2''$$

La siguiente casilla en el estadillo corresponde a la suma de estas tres correcciones que hemos realizado. La primera y la tercera son correcciones negativas y la segunda positiva. Por lo tanto lo que en el estadillo llaman corrección por horario y latitud para la primera observación corresponderá a  $11''$  que deberán sumarse

al resultado de la casilla que hace referencia al acimut inmediato superior a los  $39^{\circ}30'$ . Por lo que en la casilla acimut de la Polar en el lugar y hora de la observación deberemos de colocar la suma siguiente

$$1^{\circ}21'48'' + 11'' = 1^{\circ}21'59''$$

La siguiente casilla hace referencia al promedio de lecturas a la Polar, que en este caso no es más que colocar la lectura del circulo vertical que se ha obtenido en la primera observación, es decir  $334^{\circ}00'33''$  y por último la casilla promedios de lecturas corregidas a la Polar la calcularemos de la siguiente manera para la primera observación

$$334^{\circ}00'33'' - 1^{\circ}21'59'' = 332^{\circ}38'34''$$

Ahora ya estamos en disposición de promediar las lecturas realizadas al objeto terrestre con el anteojo alternativamente a derecha e izquierda del instrumento en dos sesiones, una anterior a la observación de la Polar y otra inmediatamente posterior, que promediaremos por separado. De la primera obtendremos la lectura  $291^{\circ}42'19''$  y de la segunda  $291^{\circ}42'26''$ . Procedemos de igual manera con las lecturas corregidas a la Polar, promediando primero la observación realizada entre las observaciones al objeto terrestre que corresponde a  $332^{\circ}38'02''$  y después promediando la observación realizada inmediatamente posterior a la última observación al objeto terrestre que corresponde a  $332^{\circ}38'09''$ . Aprovechando los promedios realizados por separado, calcularemos el acimut correspondiente a cada pareja de lecturas al objeto terrestre y a la Polar, siendo en el primer caso

$$291^{\circ}42'19'' + \left(360^{\circ} - 332^{\circ}38'02''\right) = 319^{\circ}4'17''$$

Y teniendo en cuenta la segunda pareja de lecturas al objeto terrestre y a la Polar obtendremos

$$291^{\circ}42'26'' + (360^{\circ} - 332^{\circ}38'09'') = 319^{\circ}4'17''$$

Queda así definido el acimut desde el punto A al B de la base, que referiremos al Sur según instrucciones para los trabajos topográficos del Instituto Geográfico y Catastral.

$$319^{\circ}4'17'' - 180^{\circ} = 139^{\circ}4'17''$$

Procediendo de la misma manera pero esta vez estacionando en el extremo B de la base que queremos orientar, y estableciendo la misma latitud media, es decir la correspondiente al vértice geodésico Valencia obtenemos el acimut  $\theta_A^B = 319^{\circ}03'29''$  que difiere del  $\theta_A^B$  en  $180^{\circ} - 179^{\circ}59'12'' = 48''$  Se escogió otra base en el extremo sur de la red llamada base del Saler cuyos extremos corresponden a los vértices C y D, en este caso al igual que en la base norte de la red llamada Carretera de Liria se ha escogido la misma latitud media de referencia, realizándose la observación el día 1 de julio de 1929 y calculando los acimutes correspondientes  $\theta_D^C = 351^{\circ}11'35''$  y  $\theta_D^C = 171^{\circ}11'30''$  cuya diferencia es  $180^{\circ}00'05'' - 180^{\circ} = 5''$  Ambos trabajos de orientación de las bases fueron realizados por los ingenieros geógrafos, Ramón Climent y Santiago García, ya que su rubrica aparece en todos los estadillos de cálculo de orientación de bases. Ingenieros que ya mencionamos como encargados también de otros trabajos para el levantamiento topográfico del plano parcelario municipal.

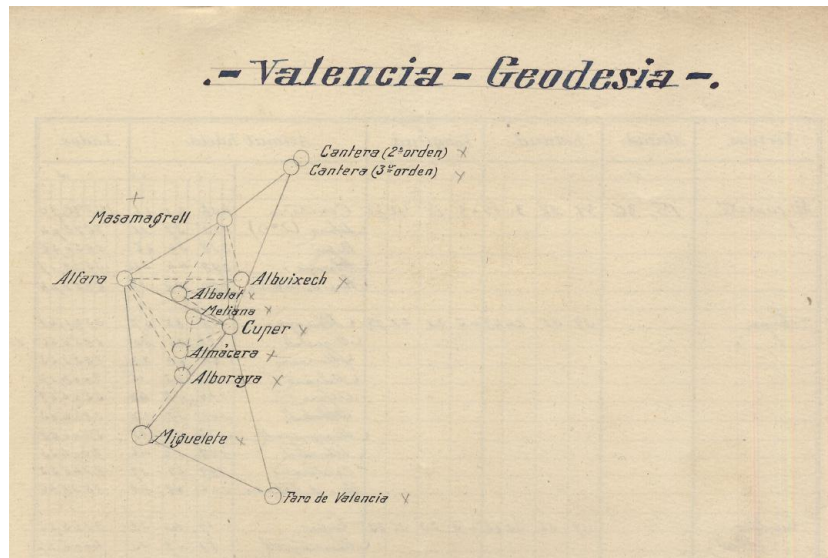
A modo de comparación de los dos métodos expuestos para el cálculo del acimut de la base del plano, con ayuda del Anuario y sin ella, se han realizado los cálculos comparativos solamente para la orientación de la base A-B haciendo

estación en el extremo A. A la vista de los resultados, se establecen unas diferencias de tan solo  $2''$  que pueden provenir perfectamente de los redondeos en los cálculos 2.21. Las precisiones conseguidas con el instrumental de la época, un teodolito de la casa Wild número 285, y con el método empleado de los acimutes entendemos que se consiguen como mínimo  $1'$  o  $2'$  de aproximación en la determinación del acimut de la base tal y como se expone en el Anuario Astronómico de 1929, para el instrumental de la casa Brunner. Aunque la documentación del levantamiento no contiene el modelo de teodolito Wild utilizado en los trabajos de campo, entendemos que debe de tener prestaciones similares o superiores al mencionado en el Anuario. En cualquier caso, el resultado obtenido puede calificarse de muy bueno.

## **2.4 Estudio geodésico**

### **2.4.1 Descripción de los documentos**

A modo de evaluación inicial de la documentación, realizaremos en primer lugar un estudio del cuadernillo titulado Valencia-Geodesia encontrado entre los cuadernos del trabajo de campo del plano parcelario municipal de 1929 de Valencia. La Red geodésica fundamental está formada por 12 vértices tal como muestra la Figura 2.23. Las Figuras 2.24 y 2.25 contienen las dos partes de un estadillo donde aparecen detalladas las coordenadas geográficas de cada vértice de la red, el acimut calculado hacia otros vértices de la red y la distancia calculada entre los dos vértices implicados en el cálculo del acimut. Como documentación auxiliar, aparecen las reseñas de los vértices de la red geodésica española que enmarcan la zona del levantamiento.



**Figura 2.23:** Red geodésica calculada en los trabajos de 1929

#### 2.4.2 Contexto histórico

Nuestro objetivo con este apartado es averiguar si el sistema de coordenadas empleado en el levantamiento del plano parcelario municipal de 1929 se asienta sobre alguna proyección conocida en la época, idea que surge de la presencia de este trabajo geodésico descrito en la documentación asociada al mencionado plano. Para ello analizaremos las reseñas de los vértices geodésicos Cullera, Faro de Canet y Rebalsadores, todos ellos pertenecientes a la red de triangulación geodésica Española de primer, segundo y tercer orden. (Figuras 2.26, 2.27 y 2.28). Cada una de estas reseñas nos aporta información sobre la descripción del vértice y su localización viene expresada en coordenadas geográficas y rectangulares. Debemos tener en cuenta que en la época en que se realiza el levantamiento del plano parcelario municipal, existe una preocupación por parte de todos los



Vértices.	Altitud.		Latitud.		Longitud.		Azimut hacia		Lados.	
	m.		"		"		"		m.	
Miguelste	15, 36	37 28	30 89 + 3	18 42 88	208	31 11	1489, 610			
					173	57	767, 204			
					218	34	685, 056			
					238	44	353, 917			
					294	40	695, 144			
					38	25	202, 141			
					38	36	685, 056			
					64	04	285, 163			
					102	03	200, 217			
					114	08	616, 509			
					142	27	282, 400			
					175	34	520, 068			
					188	54	370, 433			
					199	39	814, 555			
					246	08	851, 146			
					19	40	514, 555			
					57	39	100, 528			
					26	03	222, 110			
					58	01	535, 083			
					231	38	140, 031			
					245	33	300, 592			
					255	24	520, 668			

Figura 2.24: Calculos de coordenadas, acimutes y lados







Triangulación geodésica de 1<sup>ra</sup> orden.

Vértice Cullera

Situado en la provincia de Valencia término de Cullera

El vértice es la parte más culminante del monte aislado de Cullera, sobre la misma costa de la provincia de Valencia, la más avanzada hacia el N. y como dependiente de las sierras de Corbera y Sanvta y grupo de Vallidigna para dejar paso a la corriente del Tucay que la cruza por el Sur y forma al E con sus descensos el notable cañ de Cullera; era el otro extremo del último lado de la cadena francesa del meridiano de Sanquergue y tiene al del que dista tres horas, es el siguiente:

Señalado con un taladro cilíndrico de 10 centímetros de profundidad y muy vasto. Se reconoció la sierra de las Cabras que la tradición señala de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras en el país como la estación que ocuparon los franceses Reot y Aragón en sus tres mediciones del gran triángulo de Cullera, Monjo y Sanvta descubriendo un taladro hecho en la zona viva de 0,12 m. de profundidad en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado en negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

centro del pilar de observación de 1,96 m. de alto y se rodeó con una plataforma de tierra y piedra. El (Croquis) pilar tenía 0,87 m. por 0,60 m. La señal en refinar.

Coordenadas geográficas  $\left\{ \begin{array}{l} L = 39^{\circ} 16' 33",51 \\ M = 3^{\circ} 26' 11",34 \\ H = 223,24 \end{array} \right.$

Coordenadas rectangulares  $\left\{ \begin{array}{l} X = 896559,61 \\ Y = 514338,07 \\ Z = 223,24 \end{array} \right.$

Matrícula de kilometraje 89-51.

Figura 2.26: Reseña del vértice Cullera de la red geodésica española

*Tranquilación geodésica de 3<sup>ra</sup> orden.*

Vértice Faro

Situado en la provincia de Tahúma término de .....

*está situado en el faro de Canchis de Perangue en la parte más  
alta de él o sea en el arranque de la colina*

*Desde la población de Canchis de Perangue una línea y medio  
por el camino del mar que se recorre como diez minutos y  
después se toma a la derecha el camino del Faro. Se le colocó*

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de .....

del que dista ..... horas, es el siguiente: .....

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y .....  
de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras  
tres .....

en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma  
de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado  
de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

*Matrícula de Colombia 37-56*

(Croquis.)

*Coordenadas geográficas*  $\left\{ \begin{array}{l} \bar{\lambda} = 79^{\circ} 40' 27'' 90 \\ \mu = 3^{\circ} 28' 47'' 34 \\ H = 3.91 \end{array} \right.$

	X	Y	H
<i>Coordenadas rectangulares</i>	898140,2	527714,63	3,91

Figura 2.27: Reseña del vértice Faro de la red geodésica española



Triangulación geodésica de 2.º orden

Vértice Rebalsadores (1.º orden)

Situado en la provincia de Palencia partido judicial de Lagunilla  
 término de .....  
 Situado en las montañas de Castrocelino en la división de  
 de aguas entre el Suadadalaroa y el Palencia en el terreno  
 municipal de Sorra y terreno de monte bajo y pinos  
 entre las poblaciones de Sorra y hacia S. E. por el camino de  
Satorra (¿Patorra?) hasta la corralera donde se toma a la izquierda  
 de el camino de los montes que llega casi hasta la fuente más  
 alta donde está el vértice. El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de .....  
 del que dista ..... horas, es el siguiente: La señal definitiva consistió  
en un pilar de 2,60 metros  
de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras  
tres  
en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma  
de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado  
de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

$L = 39 - 41 - 54,02$   
 $M = 5 - 14 - 15,84$   
 $H = 298,99$

Coordenadas geográficas

	X.	Y.	H.
(Croquis.)			
Coordenadas rectangulares	877 212, 30	571 584, 14	298, 99
Coordenadas astronómicas	87-57		

Figura 2.28: Reseña del vértice Rebalsadores de la red geodésica española

organismos productores de Cartografía en buscar la manera más apropiada de proyectar la figura de la tierra acorde a sus necesidades. Es por ello que el Estado Mayor Central del Ejército publica en 1934 *el reglamento de Cartografía Militar* donde realiza una comparativa razonada de las proyecciones conocidas que se adecuan mejor al levantamiento de un mapa de una zona poco extensa en latitud como es el caso Español (VV.AA., 1934). Se argumenta técnicamente la preferencia del sistema de proyección Lambert sobre el sistema Tissot para la realización de los trabajos geodésicos para este organismo a partir de la fecha de publicación del mencionado reglamento. Anterior a éste y tal como se menciona en el libro *A propósito del nuevo reglamento de Cartografía* publicado por el Instituto Geográfico en 1937 (VV.AA., 1937), los trabajos que se venían realizando en el sistema Tissot (proyección provisional de este cuerpo en los años precedentes) debían trasladarse al sistema Lambert, de modo muy sencillo, mediante un método tabular que se explica en el texto.

Por su parte, el Instituto Geográfico y Catastral bajo la dirección de Carlos Ibáñez de Ibero había elegido la proyección poliédrica o policónica de Gauss para el levantamiento del Mapa Nacional a escala 1:50000, que permite considerar cada hoja por separado como representación exacta del terreno y tomar sobre ella cualquier medida lineal, superficial o angular de acuerdo con la escala. El proyecto comenzó en 1875 con la publicación de la primera hoja con numeración 559 Madrid, y finalizó en 1968 con la publicación de la hoja de San Nicolás de Tolentino, provincia de las Palmas de Gran Canaria, con la colaboración del Servicio Geográfico del Ejército quien se encargó de la realización de 219 hojas (Paladini, 1991).

Hacía muchos años que se perseguía la idea de levantar un mapa de España en la escala 1:200000, ya que la minuciosa perfección con que se estaba

levantando el 1:50000 obligaba a trabajos tales que llevarían mucho tiempo terminar. Es por eso, que el Instituto Geográfico, al tratar de llevar a cabo el levantamiento del plano de España a escala 1:200000, necesitaba elegir un sistema de proyección. Y encargó en 1891 el estudio comparativo entre los diversos sistemas que podrían emplearse, a los comandantes de Artillería e Ingenieros, respectivamente, D. Príamo Cebrián y Yuste y D. Antonio Los Arcos y Miranda; quienes comprendiendo la importancia de las ideas emitidas por Tissot, dedicaron a este sistema la atención que merece, en la obra titulada *Teoría general de las proyecciones geográficas y aplicación a la construcción del mapa de España*, publicada en 1895 por el Instituto Geográfico y Estadístico en Madrid (Cebrián and Los Arcos, 1895), que acaba con el croquis del plano de España encerrado en la cuadrícula que se conceptúa más conveniente, según la teoría expuesta. Por todo ello según consta en el Diario Oficial del Ministerio de la Guerra. Año VII, Núm 259, Tomo IV, págs. 524-526 con fecha Martes 27 de noviembre de 1894, mediante Junta Consultiva de Guerra y en virtud del reglamento de recompensas, se concedió a los autores la cruz de segunda clase del Mérito Militar, con distintivo blanco y pensión del 10 por 100 del sueldo de su actual empleo, hasta su ascenso inmediato.

En el trabajo se expone la teoría de Tissot al tiempo que se empieza a realizar la aplicación al plano de España, empleando el sistema de la elipse envolvente y encontrando que la que tiene su eje inclinado a  $45^\circ$  es la que encierra el perímetro español de la Península mejor y más completamente. Se expone también el método que sigue Tissot para reducir estas a la mitad. A partir del examen de los sistemas de proyección más usuales, las proyecciones cónicas, deducen que el método Tissot es el más conveniente por ser casi nulas las anamorfosis angulares, más pequeñas en general las lineales y superficiales, y conservar en el

mapa aproximadamente la misma relación que existe en el globo entre los arcos de meridiano y paralelo y dar fórmulas mucho más sencillas y prácticas para los cálculos.

Tomamos en consideración a su vez, que los ingenieros encargados de los trabajos topográficos del plano parcelario municipal de 1929, objeto de estudio, que rubrican en los documentos son Ramón Climent Vela, capitán de artillería en 1932 y destinado al IGN, Santiago García Hernández, licenciado en ciencias exactas, ingeniero Jefe de segunda clase y destinado al IGN y por último Alfredo Cabañes Marzal, capitán de artillería. Todos ellos han prestado servicio o bien al cuerpo militar español, al Instituto Geográfico Nacional o a ambos. Estos antecedentes nos hacen pensar que los autores del plano parcelario de 1929 conocían perfectamente la publicación de Cebrián y Los Arcos y nos llevan a emprender un estudio de las dos proyecciones mencionadas con el objetivo de averiguar a qué sistema hacen referencia las coordenadas rectangulares que aparecen en las reseñas de los trabajos.

### **2.4.3 Breve estudio de las proyecciones**

#### **Sistema de proyección Tissot**

Nicolas Auguste Tissot (1824-1897) nació en Nancy, Meurthe-et-Moselle, Francia, formado como ingeniero en la Armada francesa, donde se graduó como capitán del cuerpo de ingenieros militares. En 1860 fue profesor de geodesia en la Escuela Politécnica de París y en la misma fecha, escribió un estudio sobre la determinación de la mejor proyección para una zona particular presentado a la Academia de ciencias francesa. Fue uno de los contribuyentes a la aplicación de principios matemáticos determinantes en la ciencia de proyección de mapas.

La teoría expuesta en su obra “*Memoire sur la représentation des surfaces et les projections des cartes géographiques*” publicada en 1881 por Gauthier-Villars, causó una verdadera revolución en la manera de considerar las proyecciones geográficas; no porque de su empleo resultasen notables diferencias de forma, comparando los que se obtenían según ese sistema con los otros, sino porque su idea de servirse de una elipse como indicatriz de las deformaciones y de las tangentes, principales ejes de esa elipse, para ligar las mismas deformaciones a las que experimentan los arcos de meridiano y paralelo, permite conocer las fórmulas exactas que expresan esas anamorfosis para cada caso (Tissot, 1881).

Convencido de la imposibilidad de anular totalmente y a la vez los errores angulares y superficiales en ningún sistema de proyección se propuso minimizarlos al máximo. Estudiaremos brevemente las características fundamentales de esta proyección particularizadas para la época y lugar que nos concierne.

Tissot argumenta que cualquiera que sea el sistema de transformación, hay para cada punto de la superficie esférica por lo menos un par de direcciones ortogonales que también lo son en la proyección. Empleó un recurso gráfico que llamó elipse indicatriz o círculo de distorsión y sugirió que el ángulo y la extensión de la elongación del círculo distorsionado representa la cantidad de distorsión angular en el mapa, mientras que el tamaño de la elipse corresponde a la cantidad de distorsión en las superficies.

La Cartografía puede decirse que ha sido completamente empírica y carente de sentido topográfico hasta que lo introduce Tissot en 1860 (Cebrián and Los Arcos, 1895). La condición primordial para que impere el criterio topográfico, es la relativa a la conservación de los ángulos; aunque no es necesario que el método de proyección los conserve de una manera rigurosa, pero exigiendo que se alteren tan sólo en cantidades muy pequeñas o despreciables, para que cada parte u hoja de la



carta constituya un verdadero levantamiento topográfico. Siendo inevitablemente modificadas las distancias, desde el momento que no pueden conservarse todas en ningún sistema de proyección, la escala del dibujo variará más o menos de una hoja o parte a otra hoja o parte de la carta, siendo preciso que esa variación sea lo más pequeña posible para reducir al mínimo la mayor alteración longitudinal. En el capítulo II de su obra, Tissot enuncia la regla precisa para encontrar entre las proyecciones de mínima deformación, la que conviene mejor a una zona o país determinado, es decir, aquella que reduce al mínimo el mayor valor de la alteración lineal. En síntesis, puede decirse que esa regla de Tissot, consiste en resolver gráficamente este problema: “encontrar una cónica-límite envolvente del contorno del país que ha de representarse tal que el diámetro bisector de los ejes de dicha cónica sea el menor posible”.

Las proyecciones de mínima deformación de Tissot están estudiadas de una manera detallada, y precisamente aplicadas a la construcción del Mapa de España, en la obra publicada por Cebrián y Los Arcos citada anteriormente, de donde se extrae lo que sigue. Tissot llevó a cabo la determinación de la cónica envolvente mínima por procedimientos gráficos sencillos, aplicados sobre un mapa de España definidor del contorno peninsular. De las cónicas envolventes ensayadas, la útil resultó ser la que satisface la relación de 0.7 entre sus ejes. A ella pertenece el menor valor de la deformación elemental y se hace coincidir el centro con la intersección del meridiano de Madrid y el paralelo de 40°.

La representación gráfica del sistema de proyección que para nuestra península produce una deformación mínima, conforme a los principios de Tissot, corresponde a un sistema cónico, donde los meridianos terrestres se hallan representados en el mapa por líneas rectas concurrentes en un punto común, siendo el ángulo que cada uno de ellos forma con el meridiano principal, igual

Tabla 2.3: Notaciones

Elementos	Notación clásica	Notación actual
Latitud geográfica	$L$	$\varphi$
Longitud geográfica	$M$	$\lambda$
Colatitud geográfica	$Z$	$\zeta$
Latitud del paralelo central	$L_0$	$\varphi_0$
Radio del paralelo central	$r_0$	$r_0$
Radio del paralelo	$r$	$r_p$
Convergencia de meridianos	$\omega$	$\theta$

al producto del seno de  $40^\circ$  por el valor angular de la longitud geográfica de cada uno de ellos, que es  $m$ , y la transformada de los paralelos del esferoide terrestre, son arcos de círculos, que tienen por centro común el punto de intersección de todos los meridianos rectilíneos, siendo el valor del radio la expresión

$$r = r_0 - s - \frac{s^3}{6 \cdot N_0^2}$$

Como  $r_0 = N_0 \cdot \cot L_0$  representa el radio en el mapa del paralelo medio, su valor corresponde al de la tangente al meridiano terrestre trazada por el punto, cuya latitud es de  $40^\circ$ , prolongada hasta su intersección con el eje de la esfera, y un radio de cualquier otro paralelo es igual al del paralelo medio aumentado o disminuido en la cantidad  $\left[ s + \frac{s^3}{6 \cdot N_0^2} \right]$  valor del arco de meridiano contado desde el paralelo central. Como sabemos que el valor del arco de meridiano  $s$  es (Tabla 2.3)

$$s = \rho_0 \cdot l + \frac{3}{4} \cdot \rho_0 \cdot e^2 \cdot \text{sen} 2L_0 \cdot l^2$$

por lo tanto

$$r = r_0 - \left( \rho_0 \cdot l + \frac{3}{4} \cdot \rho_0 \cdot e^2 \cdot \text{sen} 2L_0 \cdot l^2 \right) - \frac{1}{6N_0^2} \left( \rho_0 \cdot l + \frac{3}{4} \cdot \rho_0 \cdot e^2 \cdot \text{sen} 2L_0 \cdot l^2 \right)^3$$

despreciando los términos superiores al tercer grado:

$$R = r - \left( \rho_0 \cdot l + \frac{3}{4} \cdot \rho_0 \cdot e^2 \cdot \text{sen}2L_0 \cdot l^2 \right) - \frac{\rho_0^3 \cdot l^3}{6 \cdot N_0^2}$$

haciendo  $\rho_0 = N_0$ , resulta

$$r = r_0 - \rho_0 \left( l + \frac{3}{4} \cdot e^2 \cdot \text{sen}2L_0 \cdot l^2 + \frac{l^3}{6} \right)$$

Esta expresión para cada valor de  $l$  que es la diferencia entre las latitudes  $L_0$  y  $L$  nos dará el radio de la transformada sobre el mapa del paralelo correspondiente. El ángulo que deben formar en el mapa las rectas que representan los meridianos se calcula fácilmente con la fórmula  $\phi = m \cdot \text{sen}L_0$ , y por lo tanto, queda analítica y gráficamente definido el tercer sistema de proyección de Tissot, de manera muy sencilla, por medio de las formulas:

$$x = r_0 - r \cdot \cos\phi$$

$$y = r \cdot \text{sen}\phi$$

en las que

$$r_0 = N_0 \cdot \cot L_0$$

$$\phi = m \cdot \text{sen}L_0$$

y

$$r = r_0 - \rho_0 \left( l + \frac{3}{4} \cdot e^2 \cdot \text{sen}2L_0 \cdot l^2 + \frac{l^3}{6} \right)$$

En estas fórmulas entran los valores de la normal y radio de curvatura a la latitud de  $40^\circ$ , después necesitaremos sus valores y los de los radios de los paralelos del

globo a diferentes latitudes; y por lo tanto debemos calcularlos de manera precisa. Como las dimensiones del globo no se conocen de un modo tan exacto como sería de desear, aceptaremos entre diversos elipsoides el de Struve, por ser el que emplea la Dirección General del Instituto Geográfico para los trabajos relativos a España en esta época (Cebrián and Los Arcos, 1895), y cuyos elementos son:

$$a = 6378298.3 \text{ m}$$

$$e^2 = 0.00677436$$

con estos elementos y valiéndonos de las siguientes fórmulas, estaremos en condiciones de calcular los radios de los paralelos para cualquier latitud dada.

$$N = a \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot e^2 \cdot \text{sen}^2 L \right)$$

$$\rho = a (1 - e^2) \left( 1 + \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot \text{sen}^2 L \right)$$

$$R = N \cdot \cos L$$

La mayor anamorfosis lineal en el sentido del meridiano es 1.002424 y la máxima en la dirección del paralelo es 1.002384; calculadas para la latitud extrema de 36°. Estos valores demuestran que la elipse indicatriz es casi una circunferencia y, por tanto, que las deformaciones angulares deben ser insignificantes, como en efecto sucede, ya que el cálculo de ellas determina que alcanzan el valor de 9",2 prácticamente despreciable. Queda por enunciar un artificio ingenioso de Tissot, que convierte virtualmente la cónica tangente en cónica secante intermedia. Así las deformaciones elementales en el centro, puede entenderse que pasan a ser negativas; siendo los paralelos automecicos de esta segunda cónica desarrollable

los de  $37^{\circ}10'17''.61$  y  $42^{\circ}49'42''.38$  acortando las distancias entre ellos en el mapa y reducidas las superficies y ampliadas al N del segundo paralelo y al S del primero como en toda cónica secante, no extrema. Si se aplica tal artificio al tercer sistema, para lo cual habría que multiplicar los coeficientes de los radios por un factor que se determina en función de la máxima anamorfosis lineal, el mapa construido con los elementos así modificados, presentará deformaciones elementales iguales a 0.001214 y 0.001171 en las direcciones del meridiano y paralelo, respectivamente. Estos valores son la mitad de las que antes presentaba, sin que por ello se altere el carácter de proyección conforme.

### **Sistema de proyección Lambert**

Johann Heinrich Lambert, nació en Mulhouse el 26 de agosto de 1728, fue autodidacta, consiguiendo un puesto en la Academia Real de Ciencias y Bellas letras en Berlín, el 10 de enero de 1765. Allí permaneció presentando regularmente sus estudios hasta su muerte el 25 de septiembre de 1777.

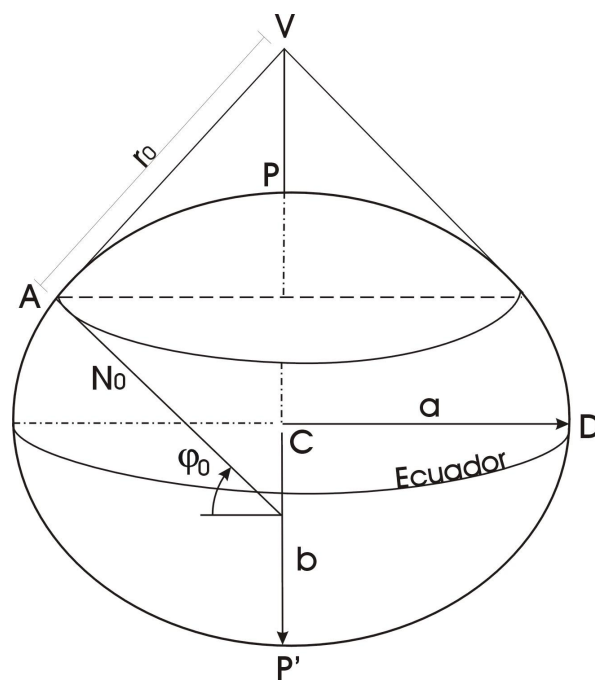
Los intereses de Lambert abarcaban desde la filosofía, lógica y semántica por una parte, hasta el diseño de instrumental, detalles prácticos en cartografía y construcción de útiles tablas matemáticas. El estudio de Lambert sobre las proyecciones cartográficas se basa en la unión de las características teóricas y aspectos matemáticos con la práctica. Su preocupación porque la producción cartográfica fuera útil se remonta a 1758, cuando corrigió un levantamiento en una zona montañosa de Francia, y a menudo discutía sobre los problemas prácticos en levantamientos, en referencia por ejemplo a la refracción atmosférica.

Escribió su estudio teórico sobre las proyecciones cartográficas, en “*Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der land und Himmelscharten*” en 1772. Este trabajo trata la imposibilidad de representar todas las propiedades de la es-

fera terrestre o esferoide en un mapa. Esta imposibilidad surge porque la suma de los ángulos en un triángulo geodésico sobre la esfera excede los  $180^\circ$ . Además trata varias proyecciones entre ellas, la ortográfica, estereográfica, central, Mercator conforme, incluyendo su propia cónica ortomorfa con dos paralelos estándar. (Gray and Tilling, 1978)

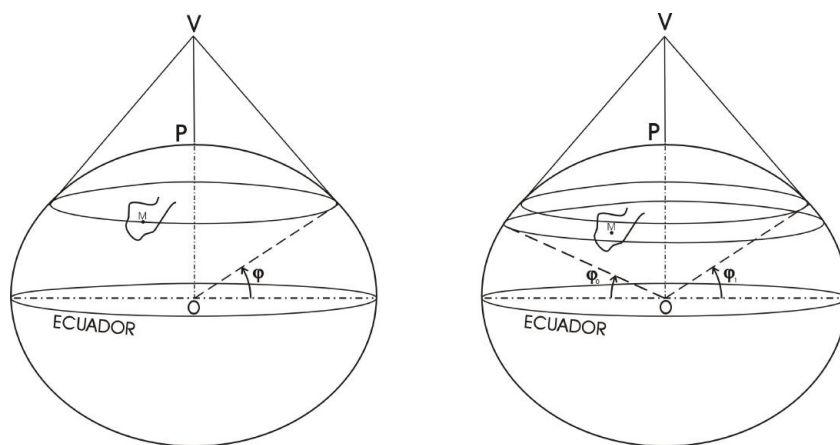
La proyección Lambert es un desarrollo cónico en el que esta superficie es tangente a lo largo de un paralelo, variando este paralelo en función de la zona a representar. Mediante la correspondencia de puntos de la esfera y de la superficie cónica, se obtiene la representación de los meridianos como rectas concurrentes en el vértice del cono y cuyos ángulos con respecto al meridiano central serán lo que se denomina convergencia de meridianos. Los paralelos se representarán como arcos de circunferencia con centro en dicho punto. (Figura 2.29) Este sistema de representación que considera la Tierra como un elipsoide ha sido utilizado en la cartografía militar española según explicábamos en la introducción del capítulo tal como dicta el Reglamento de Cartografía Militar editado en 1935 por el Estado Mayor Central del Ejército. En su artículo 9 del capítulo I explica que, “la proyección reglamentaria para la cartografía militar que haya de formarse de nuevo es la Lambert, se establece como principio también reglamentario el cuadrículado kilométrico rectangular en la misma proyección que el Mapa o plano de que se trate”. En este reglamento se estudian las mejores proyecciones para realizar el mapa topográfico militar, entre las que se baraja el tercer sistema de mínima deformación de Tissot y la proyección ortomorfa de Lambert, siendo ésta segunda elegida por razones de tendencia y aplicación geodésica. Se toma como paralelo origen el correspondiente a la latitud  $40^\circ$ , como meridiano origen Madrid y como elipsoide de referencia el de Struve.

En el mapa así obtenido va aumentando el coeficiente de anamorfosis al



**Figura 2.29:** Desarrollo cónico (Modificada de Martín Asín, 1992)

separarse del paralelo de tangencia, con el objetivo de disminuirla se recurrió al artificio de Tissot que no es más que sustituir el cono tangente a lo largo del paralelo de  $40^\circ$  por otro secante a lo largo de los paralelos de latitudes  $37^\circ 10' 41'', 06$  y  $42^\circ 49' 18'', 94$ . Estos dos paralelos serán automecoicos y las deformaciones máximas disminuirán considerablemente (Figura 2.30). En la

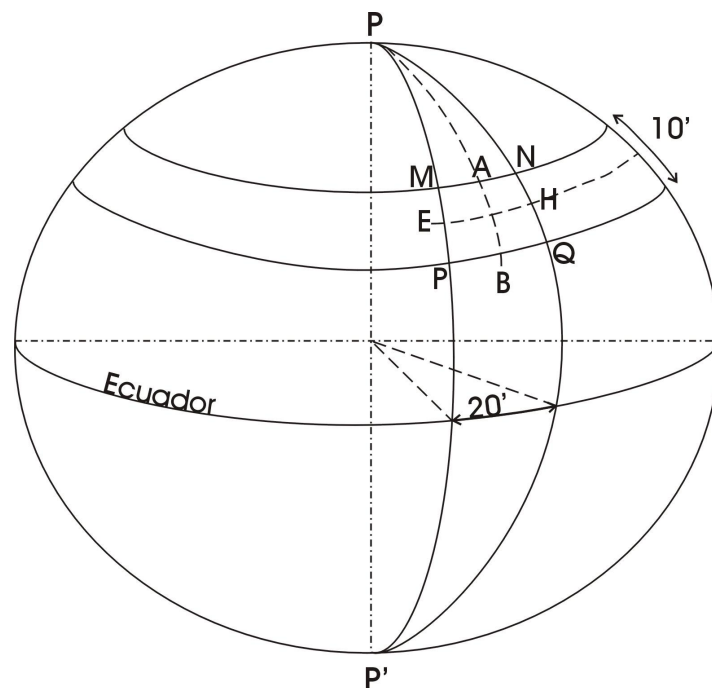


**Figura 2.30:** Izquierda: Desarrollo cónico tangente al paralelo  $40^\circ$  y derecha secante a dos paralelos próximos (Modificada de Martín Asín, 1992)

cartografía militar española se tiene en cuenta otra modificación más, dado que el origen de los ejes coordenados rectangulares es el punto de intersección del meridiano de Madrid con el paralelo de  $40^\circ$ , muchos puntos del estado tendrían coordenadas negativas. Para evitar esa situación se resolvió trasladar el origen sumando 600 km en el eje X y en el eje Y. Las coordenadas medidas en este sistema de ejes coordenados se denominan coordenadas Lambert. La cuadrícula Lambert así definida se dibujaba sobre los planos, incluyéndose también en una tirada especial de cada hoja del Mapa Topográfico Nacional en escala 1:50000 realizada por el Instituto Geográfico Nacional en el que coexistía con la propia de la proyección policéntrica en la que se sustituye la superficie de la



Tierra elipsóidica por una superficie poliédrica, cada una de cuyas caras puede considerarse tangente a la Tierra en el centro de cada uno de los trapecios curvilíneos cuya extensión abarca  $20'$  a lo largo del paralelo y  $10'$  a lo largo del meridiano (Figura 2.31). Se debe tener en cuenta que las líneas que son rectas



**Figura 2.31:** Proyección poliédrica o policéntrica (Modificada de Martín Asín, 1992)

en el sistema Lambert no lo son sobre el sistema de proyección adoptado para realizar el mapa topográfico nacional 1:50000 (MTN50), aunque dada la escala de representación estas líneas prácticamente lo son en las hojas que se sitúan a lo largo del meridiano y el paralelo origen, como se aprecia en la hoja de Aranjuez que aparece centrada en el origen de la proyección (Figura 2.32).





$$e^2 = 0.00677436$$

En primer lugar obtendremos el radio del paralelo de tangencia ( $r_0$ ), correspondiente a la latitud  $\varphi_0 = 40^\circ$  mediante

$$r_0 = N_0 \cdot \cotg 40^\circ$$

siendo

$$N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi)}}$$

resultando

$$r_0 = 7611998.027 \text{ m}$$

y aplicando el factor de anamorfosis  $k = 0.99878922$  queda

$$r_0 = 7602781.572 \text{ m}$$

Calculamos ahora el radio de curvatura del meridiano a la latitud  $40^\circ$  ( $\rho_0$ ) mediante

$$\rho_0 = a(1 - e^2)\left(1 + \frac{3}{2} \cdot e^2 \cdot \text{sen}^2 L_0\right) = 6361687.309 \text{ m}$$

y el radio del paralelo correspondiente al vértice Rebaladores de la red geodésica nacional de coordenadas geográficas

$$\varphi = 39^\circ 41' 54''.02 \text{ N}$$

$$\lambda = 3^{\circ} 14' 15''.84 E$$

$$r_p = r_0 - \rho_0 \left( l + \frac{3}{4} e^2 \sin^2 L_0 l^2 + \frac{l^3}{6} \right) = 7636234.423 \text{ m}$$

En este punto ya estamos en condiciones de conocer las coordenadas rectangulares aplicando las siguientes fórmulas

$$X = 600000 + r_p \cdot \sin \theta$$

$$Y = 600000 + r_0 - r_p \cdot \cos \theta$$

siendo  $\theta$  la convergencia de meridianos

$$\theta = \Delta\lambda \cdot \sin \varphi_0 = 2.08117487$$

Con la formulación descrita y con ayuda de cualquier programa de cálculo matemático o calculadora llegamos a las siguientes coordenadas rectangulares del vértice Rebalsadores en proyección Tissot

$$X = 877312.6548 \text{ m}$$

$$Y = 571584.1654 \text{ m}$$

Operando de la misma manera calculamos las coordenadas rectangulares para los vértices Cullera y Faro (Tabla 2.4).

Llama la atención la similitud de errores en abcisas y ordenadas consideradas

**Tabla 2.4:** Diferencias entre coordenadas rectangulares

Vértice	Coordenadas Tissot	Coordenadas Reseña	Diferencias
$X_{Rebalsadores}$	877312.65	877312.30	0.35
$Y_{Rebalsadores}$	571584.17	571584.14	0.03
$X_{Cullera}$	896560.14	896559.61	0.53
$Y_{Cullera}$	514338.09	514338.07	0.02
$X_{Faro}$	898140.52	898140.20	0.32
$Y_{Faro}$	569714.64	569714.62	0.02

en grupos separados y la diferencia entre éstos. En nuestra opinión, no es posible ni relevante profundizar en el tema. De nuevo, los resultados son los que son, mostrando un trabajo excelente para las posibilidades de la época.

Realizaremos la misma operación para calcular las coordenadas rectangulares en proyección Lambert, tomando como referencia el elipsoide de Struve también en este caso.

En primer lugar obtendremos el radio del paralelo de tangencia ( $r_0$ ), correspondiente a la latitud  $\varphi_0 = 40^\circ$  mediante:

$$r_0 = N_0 \cdot \cot g 40^\circ$$

siendo

$$N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \cdot \text{sen}^2 \varphi)}}$$

resultando

$$r_0 = 7612020.41 \text{ m}$$

y aplicando el factor de anamorfosis  $k = 0.9988085293$  queda

$$r_0 = 7602950.908 \text{ m}$$

Calculamos ahora el radio del Ecuador ( $r_e$ ) mediante:

$$r_e = \frac{r_0}{\left[ \operatorname{tg} \frac{50^\circ}{2} \left( \frac{1 + e \cdot \cos 50^\circ}{1 - e \cdot \cos 50^\circ} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\operatorname{sen} 40^\circ}} = 12380512.98 \text{ m}$$

y el radio del paralelo del vértice Rebalsadores

$$r_p = r_e \left[ \operatorname{tg} \frac{\zeta}{2} \left( \frac{1 + e \cdot \cos \zeta}{1 - e \cdot \cos \zeta} \right)^{\frac{e}{2}} \right]^{\operatorname{sen} \varphi_0} = 7636404.92 \text{ m}$$

Ya estamos en condiciones de conocer las coordenadas rectangulares aplicando las siguientes formulas (Tabla 2.3)

$$X = 600000 + r_p \cdot \operatorname{sen} \theta$$

$$Y = 600000 + r_0 - r_p \cdot \operatorname{cos} \theta$$

siendo  $\theta$  la convergencia de meridianos

$$\theta = \Delta\lambda \operatorname{sen} \varphi_0 = 2.08117487$$

Los cálculos proporcionan las siguientes coordenadas rectangulares en proyección Lambert

$$X = 877318.85 \text{ m}$$

$$Y = 571583.12 \text{ m}$$

Operando de manera análoga calcularemos las coordenadas rectangulares para los vértices Cullera y Faro (Tabla 2.5).

**Tabla 2.5:** Diferencias entre coordenadas rectangulares

Vértice	Coordenadas Lambert	Coordenadas Reseña	Diferencias
$X_{Rebalsadores}$	877318.85	877312.30	+6.55
$Y_{Rebalsadores}$	571583.12	571584.14	-1.02
$X_{Cullera}$	896566.78	896559.61	+7.17
$Y_{Cullera}$	514335.15	514338.07	-2.92
$X_{Faro}$	898147.18	898140.20	+6.98
$Y_{Faro}$	569713.54	569714.62	-1.08

A la vista de los resultados, resulta evidente que las coordenadas rectangulares en proyección Tissot se acercan mucho más al valor que nos aportan las reseñas, es por eso que centraremos nuestro estudio en ella pero sin establecer todavía lo que en su día se adoptó para el levantamiento, cuestión relevante que se trata de confirmar o no en cuanto sigue.

Aparcamos ya las reseñas que nos han ayudado a descubrir el sistema de proyección que subyace en el trabajo, para pasar a calcular según método de la época, las coordenadas rectangulares de los vértices que forman parte del trabajo geodésico anexo a la documentación perteneciente a 1929, de los que hasta ahora solo teníamos las coordenadas geodésicas o geográficas. Todo ello siguiendo el método que indica el *Reglamento de Cartografía militar de 1935* cuyo procedimiento se basa en el cálculo logarítmico y se detalla a continuación. Las fórmulas utilizadas en este caso son (Tabla 2.3)

$$\omega = dM \cdot \text{sen}40^\circ$$



$$x = r \cdot \text{sen}\omega$$

$$y = r_0 - r + 2 \cdot r \cdot \text{sen}^2 \frac{\omega}{2}$$

En primer lugar para el vértice Almacera de coordenadas geodésicas:

$$\varphi = 39^\circ 30' 44.05''$$

$$\lambda = 3^\circ 19' 54.36''$$

Entraremos en la tabla de radios con los valores  $39^\circ 30'$  y  $39^\circ 40'$  y obtendremos un valor de  $z = 1356.8973$  como indica la Figura 2.34

39° 0'	13675,4782	82,8099
10	695193,0669	82,4083
20	76710,9066	82,1633
30	58228,8317	81,0749
40	39746,6886	82,1431
50	21264,3207	82,3679
40° 0'	02781,5714	82,7493

**Figura 2.34:** Tabla de radios (Cebrián y Los Arcos, 1895)

$$\frac{18482.1431}{10'} = \frac{z}{0.7342'}$$

resultando  $z = 1356.8973$  y por tanto

$$r = 7658228.8317 - 1356.8973 = 7656871.934 \text{ m}$$

Tomaremos ahora las tablas de logaritmos de 7 decimales de Schrön (Schrön, 1893) para calcular el logaritmo del radio y entraremos con la cantidad inicial de

7656.8 a la que le corresponde la mantisa 8840473.

Interpolaremos después sabiendo la diferencia que hay de una décima a dos décimas de la cantidad de entrada en las tablas

$$57 \cdot 0,71934 = 41.00238$$

sumando las cantidades obtendremos la mantisa definitiva

$$8840473 + 41.00238 = 8840514$$

y la parte entera o característica del logaritmo será el número de cifras enteras que tiene el número inicial de entrada a las tablas sin contar la primera

$$\log r = 6.8840514$$

En un segundo paso calcularemos el ángulo  $\omega$

$$\textit{Para } 3^{\circ}10' \dots \omega = 2^{\circ}2'7''.77875$$

$$\textit{Para } 9' \dots \omega = 5'47''.10530$$

$$\textit{Para } 54'' \dots \omega = 34''.71053$$

$$\textit{Para } 0''.36 \dots \omega = 0''.23140$$

$$\textit{Total} = 2^{\circ}8'29''.82598$$

En el siguiente paso calcularemos  $\log \text{sen } 2^{\circ}8'29''.82598$  y entrando en las tablas de logaritmos de Schrön obtenemos  $\bar{2}.5725183$ .

En estas circunstancias ya podemos obtener el  $\log x = \log r + \log \operatorname{sen} \omega = 5.4565697$  de modo que el valor de la coordenada X será

$$X = 600000 + 286134.1447 = 886134.1447 \text{ m}$$

Para calcular la coordenada Y seguimos los siguientes pasos

$$\log \operatorname{sen} \frac{1}{2} \omega = \bar{2}.2715638$$

$$\log \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \omega = \bar{4}.5431306$$

$$\log 2 = 0.30103$$

$$\log 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \omega = \bar{4}.8441606$$

$$\log r + \log 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \omega = 3.7282120$$

que entrando en las tablas de Schrön equivale al valor 5348.254

$$r_0 - r + 2r \operatorname{sen}^2 \frac{\omega}{2} = 7602781.5714 - 7656871.934 + 5348.254 = -48742.1086$$

$$Y = 600000 + (-48742.1086) = 551257.8914 \text{ m}$$

Seguimos el mismo procedimiento para el vértice Miguelete:

$$\varphi = 39^\circ 28' 30''.89$$

$$\lambda = 3^\circ 18' 42''.88$$

Y obtenemos las coordenadas rectangulares:

$$X = 884582.0395 \text{ m}$$

$$Y = 547095.3374 \text{ m}$$

Los resultados de los dos métodos se recogen en la Tabla 2.6, siendo muy consistentes entre sí, ya que las diferencias son de orden centimétrico, valorando así la exactitud de los cálculos de la época que encaja perfectamente con la tecnología y limitaciones de cálculo de que disponían a principios del siglo XX.

**Tabla 2.6:** Diferencias entre métodos de cálculo

Vértice	Cálculo moderno	Método logarítmico	Diferencias
$X_{Almacera}$	886134.11	886134.14	-0.03
$Y_{Almacera}$	551257.86	551257.89	-0.03
$X_{Miguelete}$	884582.10	884582.04	+0.06
$Y_{Miguelete}$	547095.35	547095.34	+0.01

### Estudio comparativo del sistema de proyección Tissot y el sistema de coordenadas planas de 1929

Para estudiar la relación entre estos sistemas se escogieron dos puntos de la red geodésica cuyas denominaciones son vértice Miguelete y vértice Almacera, dos vértices que comparten denominación en la red topográfica, sin embargo y después de comprobar sus respectivas reseñas no son coincidentes aunque sí muy próximos, lo que nos permite realizar un análisis comparativo.

Queremos comprobar en particular cuál es la relación entre los dos sistemas en términos de transformaciones geométricas simples, es decir, si estos dos sistemas son paralelos y por lo tanto solo existe una traslación entre ellos, para lo que

**Tabla 2.7:** Coordenadas de los vértices en los dos sistemas

Proyección	XMiguelete	YMiguelete	XAlmácera	YAlmácera
Tissot	884588.51	547092.27	886134.11	551257.86
Planas	23908.07	35473.72	25616.76	39589.87

calcularemos en primer lugar las distancias entre los vértices en los dos sistemas.

$$D_{Tissot} = \sqrt{(X_{Almacera} - X_{Miguelete})^2 + (Y_{Almacera} - Y_{Miguelete})^2} = 4440.109878 \text{ m}$$

Aplicando el factor de anamorfosis quedará

$$D_{Tissot} = \frac{4440.109878}{0.99878922} = 4445.492391 \text{ m}$$

$$D_{1929} = \sqrt{(X_{Almacera} - X_{Miguelete})^2 + (Y_{Almacera} - Y_{Miguelete})^2} = 4456.71542 \text{ m}$$

La discrepancia en la distancia entre los puntos Almácera y Miguelete (5.382513 m) es debida muy probablemente a la no correspondencia existente entre las reseñas que bajo la misma denominación hacen referencia a la red topográfica y geodésica.

A continuación comprobaremos el ángulo de giro que existe entre ambos sistemas para lo que necesitaremos averiguar el acimut de Miguelete a Almácera. Conocemos además el ángulo de convergencia en el vértice Miguelete calculado anteriormente  $2^{\circ}.128855427$ .

En el sistema de proyección Tissot:

$$\theta_M^A = \arctg \left( \frac{X_{Almacera} - X_{Miguelete}}{Y_{Almacera} - Y_{Miguelete}} \right) = 20^{\circ}.51717273$$

En el sistema 1929:

$$\theta_M^A = \arctg \left( \frac{X_{Almacera} - X_{Miguelite}}{Y_{Almacera} - Y_{Miguelite}} \right) = 22^\circ .54424165$$

$$\theta_{1929} - \theta_{Tissot} = 2^\circ .02706892$$

Así podemos confirmar que el ángulo de giro que presentan ambos sistemas es prácticamente coincidente con el valor del ángulo de convergencia (Figura 2.39).

Un tercer análisis va encaminado a determinar los factores de traslación en X e Y en cada vértice:

Para el vértice Miguelite:

$$\Delta X = X_{1929} - X_{Tissot} = 23908.07 - 884577.9 = -860669.83 \text{ m}$$

$$\Delta Y = Y_{1929} - Y_{Tissot} = 35473.72 - 547099.4 = -511625.68 \text{ m}$$

Para el vértice Almacera:

$$\Delta X = X_{1929} - X_{Tissot} = 25616.76 - 886134.1057 = -860517.3457 \text{ m}$$

$$\Delta Y = Y_{1929} - Y_{Tissot} = 39589.87 - 551257.8612 = -511667.9912 \text{ m}$$

Y las diferencias entre los factores de traslación de ambos vértices serán:

$$\Delta X_{Miguelite} - \Delta X_{Almacera} = -152.4843 \text{ m}$$

$$\Delta Y_{Miguelite} - \Delta Y_{Almacera} = 42.3112 \text{ m}$$

Las diferencias tan altas entre factores de traslación se deben a que no se ha tenido la precaución de tomar un origen cercano o coincidente con los vértices del trabajo, por lo que una mínima discrepancia en el ángulo de rotación entre los sistemas se traduce en una amplia discrepancia en los ejes o distancias. Teniendo esto en cuenta, es decir, tomando como origen el vértice Miguelete y aplicando la rotación del ángulo de convergencia Tissot, conseguiremos aproximarnos a los resultados de traslaciones reales. Escribiremos así las coordenadas Tissot del vértice Almacera afectadas de giro:

$$X'_{Tissot} = X_{TissotA} - X_{TissotM} \cdot \cos \theta + Y_{TissotA} - Y_{TissotM} \cdot \sen \theta$$

$$Y'_{Tissot} = -(X_{TissotA} - X_{TissotM}) \cdot \sen \theta + Y_{TissotA} - Y_{TissotM} \cdot \cos \theta$$

$$\begin{aligned} X'_{Tissot} &= 1556.2057 \cdot \cos 2^\circ \cdot 128855427 + 4158.4612 \cdot \sen 2^\circ \cdot 128855427 = \\ &= 1709.605934 \text{ m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Y'_{Tissot} &= -1556.2057 \cdot \sen 2^\circ \cdot 128855427 + 4158.4612 \cdot \cos 2^\circ \cdot 128855427 = \\ &= 4097.782728 \text{ m} \end{aligned}$$

Ahora la traslación para X e Y de ambos sistemas para el vértice Almacera será:

$$\Delta X = X_{1929} - X_{Tissot} = 25616.76 - 1709.605934 = 23907.15407 \text{ m}$$

$$\Delta Y = Y_{1929} - Y_{Tissot} = 39589.87 - 4097.782728 = 35492.08727 \text{ m}$$

Y para el vértice Miguelete

$$\Delta X = X_{1929} - X_{Tissot} = 23908.07 - 0 = 23908.07 \text{ m}$$

$$\Delta Y = Y_{1929} - Y_{Tissot} = 35473.72 - 0 = 35473.72 \text{ m}$$

Así las diferencias entre factores de traslación de ambos vértices serán:

$$\Delta X_{Almacera} - \Delta X_{Miguelete} = -0.91593 \text{ m}$$

$$\Delta Y_{Almacera} - \Delta Y_{Miguelete} = 18.36727 \text{ m}$$

que son dos valores consistentes con la comparación de dos sistemas de coordenadas ortogonales paralelos.

Por último queremos comprobar la ortogonalidad del sistema Tissot en comparación con la cuadrícula adoptada en 1929 como referencia. Mediante procedimientos geométricos elementales y tomando como origen el vértice Miguelete, obtenemos un resultado que nos permite confirmar la ortogonalidad del sistema.

$$91^{\circ}.46399204 - 2^{\circ}.106938949 = 89^{\circ}.35705309 = 89^{\circ}21'25''.39$$

Todos los cálculos realizados se deben interpretar en el contexto de la tecnología, instrumentación y procedimientos de cálculo de la época, sin olvidar las limitaciones de la propia información disponible en las libretas de campo. Teniendo esto en cuenta, no hemos obtenido pruebas concluyentes que nos lleven



*Provincia de Talcahuco*      *Triangulación Geodésica de 2ª orden*  
*Partido judicial de ...*

**Vértice** *Miguelito*

Situado en la provincia de ..... término de .....  
*Seo. determina el catenar superior del templete levantado*  
*en un d. para superior de la torre de la iglesia Catedral de*  
*Talcahuco en el barrión municipal de id.*

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de .....  
 del que dista ..... horas, es el siguiente: .....  
 Mod. T. 4 a.

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y .....  
 de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras  
 tres .....  
 en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma  
 de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado  
 de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

(Croquis.)	<i>Latitud</i>	<i>Longitud</i>
<i>Coordenadas geográficas</i>	<i>39° 28' 30,85</i>	<i>+ 73° 18' 42,88</i>
<i>" rectangular</i>	<i>884577,9</i>	<i>547099,4</i>
	<i>x</i>	<i>y</i>
		<i>H</i>

*(del baluarte de San Carlos)*  
*Note. del vertice Miguelito (1º ord.) " el eje del pilar y el*  
*vertice Miguelito (2º ord.) " el arranque de la cruz de hierro de la*  
*upedana.*

**Figura 2.35:** Reseña del vértice Miguelite en el trabajo geodésico

Vértice Almácer

Situado en la provincia de ..... término de .....

*No es vértice de la red, se estableció en el sermendo de un punto de cruce donde los vértices Alfara y Lopez el arranque del pararrayos de la iglesia para evitar de dicha población cuya altura es de 21,75 metros.*

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de .....

del que dista ..... horas, es el siguiente: .....

Mod. T. 4 a.

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y ..... de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras tres .....

en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

(Croquis.)

**Figura 2.36:** Reseña del vértice Almácer en el trabajo geodésico



Vértice.....Miguelote.....(Primer orden)

Situado en la provincia de Valencia..... término de id, ciudad.....  
 ..... de id......

en el pilar de observación levantado en la plataforma su-  
perior de la torre del Miguelote. En realidad el  
vértice de primer orden es el extremo superior del  
templete levantado en la citada plataforma......

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de .....  
 del que dista ..... horas, es el siguiente: .....

Nota.-El vértice es el centro geométrico de la cara  
superior del pilar de observación......

.....

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y .....  
 de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras  
 tres .....

en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma  
 de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado  
 de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

(Croquis.)

**Figura 2.37:** Reseña del vértice Miguelote en el trabajo de triangulación

Vértice Almácera

Situado en la provincia de Valencia término de Almácera

en el centro del penúltimo piso de la torre de la Iglesia del pueblo de su nombre.

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de Valencia del que dista 1/2 horas, es el siguiente: en tren a Almácera

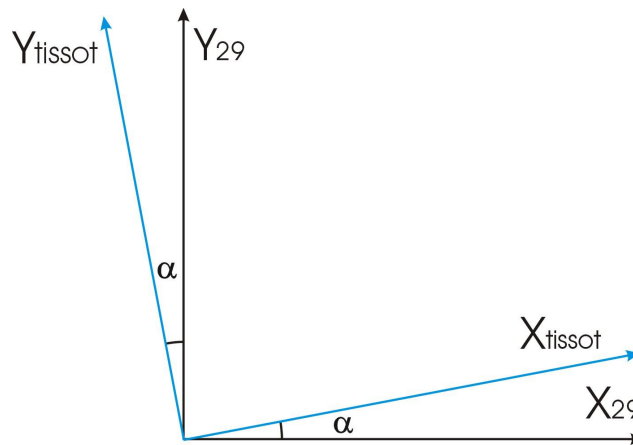
Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y ..... de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras tres ..... en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

(Croquis.)

MODE. I. 4. 6.

**Figura 2.38:** Reseña del vértice Almácera en el trabajo de triangulación

a pensar que el sistema empleado en el trabajo de 1929 provenga de la aplicación rigurosa de la proyección cartográfica de Tissot. En este sentido pensamos que aunque se utilizaron algunos vértices geodésicos de la red existente en la década de 1920, finalmente se adoptó un sistema arbitrario en cuanto a origen y orientación para la realización del plano parcelario municipal, circunstancia a tener en cuenta en el posible supuesto futuro de tratar de enlazar el PPM con otro trabajo cartográfico, antiguo o moderno. Puede ya establecerse que serán mucho más rigurosas las aplicaciones de superficie reducida que las de ámbito general.



**Figura 2.39:** Ángulo de giro entre los dos sistemas analizados

## 2.5 Triangulación

Como sabemos hay tres métodos fundamentales en un levantamiento planimétrico: la triangulación, la poligonación y la radiación. En las anteriores secciones hemos ido estudiando todas las partes de que consta el levantamiento topográfico del PPM de Valencia de 1929. Es el turno ahora de las triangulaciones, realizadas por el método de intersección directa para la determinación de los vértices que sirvieron de base al posterior relleno por métodos más sencillos. En este levantamiento topográfico existen varias redes de triangulación. La denominada triangulación primaria, comparte el vértice Miguelete I con la Red Geodésica de primer orden. El resto de vértices que la conforman fueron escogidos cuidadosamente para cumplir con las instrucciones dictadas por el Instituto Geográfico (VV.AA., 1907), teniendo en cuenta las indicaciones respecto a la longitud máxima de los lados de los triángulos y la magnitud de sus ángulos, limitados a un máximo de 5 km y un mínimo de 20° respectivamente. En cuanto a la ubicación, el artículo 11 de estas instrucciones indica que las mejores corresponden a torres principales, caseríos, casas aisladas, ermitas, etc. que ofrezcan mejores condiciones de visibilidad y permanencia. El artículo 14 por su parte nos ofrece información sobre la señalización de los vértices. Dice así:

*“ Los vértices se señalarán en el terreno con un taladro de 6 a 8 centímetros de diámetro y de 40 a 50 centímetros de profundidad[...]”*

Particularizando en nuestro trabajo mostramos a continuación las especificaciones que aparecen en el cuaderno de reseñas de los vértices que formaron parte de la red de triangulación primaria (Figura 2.40) y que introducen alguna modificación respecto a las medidas. El artículo 15 se refiere a la información que debe aparecer

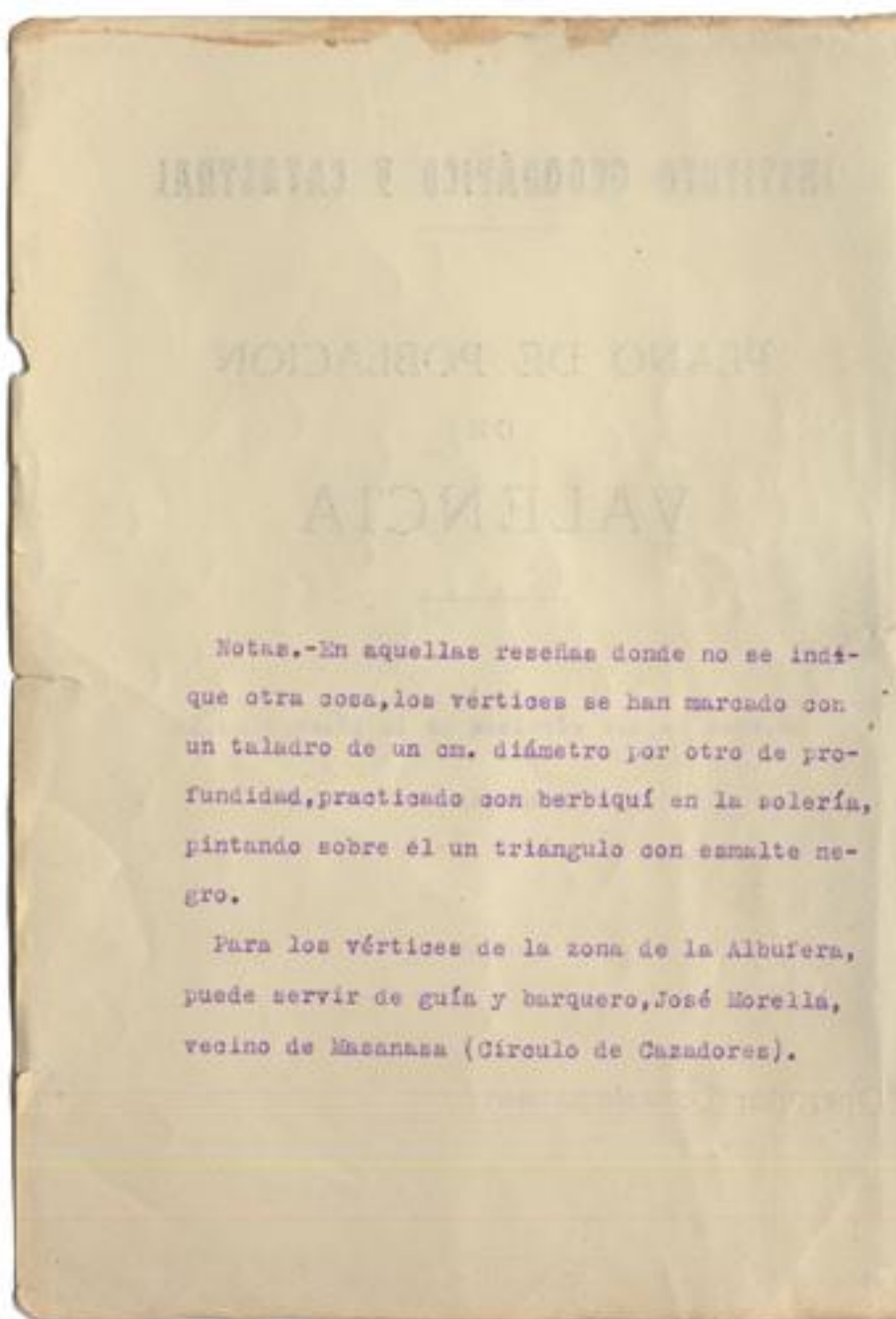


Figura 2.40: Modo de señalización de los vértices de la red de triangulación primaria

en las reseñas (Por ejemplo la Figura 2.53) de cada uno de estos vértices.

*“ Se indicará el itinerario que se deba seguir para llegar a cada vértice...se acompañarán los dibujos acotados de las referencias[...]*”

Los vértices de esta red de triangulación primaria sirven de apoyo a la red de triangulación secundaria y estos a su vez a la red de triangulación llamada topográfica. Dada la extensión del término municipal de Valencia, mucho más alargado en el sentido del meridiano, el tipo de red más apropiada para su levantamiento es sin duda la cadena de triángulos. En este tipo de redes como sabemos, el método clásico consiste en medir dos bases en los dos extremos Norte y Sur de la red para poder comprobar o compensar el trabajo (Dominguez García-Tejero, 1989). Así, se parte de la base medida mediante hilos de Invar denominada A-B o base de la carretera de Liria al Norte de la red, cuya señalización hoy perdida, recuperamos en la Figura 2.42 y se dan coordenadas arbitrarias al vértice A, extremo de la base, cuyas coordenadas X e Y son respectivamente (20.000, 40.000) de manera que se eviten las coordenadas negativas en todo el levantamiento y que corresponderá al origen de éstas. Recordamos aquí la comprobación que se hizo en la sección en la que estudiamos las bases de la red, y que se reducía a comparar la longitud deducida en el cálculo a través de la triangulación y la medida directa mediante hilos Invar de la base Sur, llamada C-D o base del Saler, de la que también recuperamos su localización en la Figura 2.43. La discrepancia resultante es de 14.7 cm, cifrando así la precisión del trabajo.

La red de triangulación primaria (Figura 2.44) consta de 28 triángulos de configuración lo más equilátera posible y 23 vértices. Del estudio pormenorizado de todos ellos, se ha propuesto una clasificación de cuatro grupos atendiendo



$VD = DI \frac{\text{sen } I}{\text{sen } D} ; VI = DI \frac{\text{sen } D}{\text{sen } I}$									
Número de las litas	Vértices	Ángulos		Cálculo de las longitudes de los lados				Lados	
		Medidas al centro	completos					Longitudes	Denominaciones
1	Desamparado	33 23 48	2 3 23 44	$\log. V I = \log. L = 29530126$				897.45	Desamparado
	A-brce	1005424	1035419	$\log. \text{sen. } D = 79870815$				B-brce	
	B-brce	4242102	4241157	$\log. DI = 37066222$				626.98	Desamparado
		180014		$\log. \text{sen. } V = 22593089$				A-brce	
				$\log. \text{sen. } I = 18313251$					
				$\log. V D = \log. L = 29972562$					
Puntos cuyas coordenadas se conocen y valores de éstas									
		Azimut		Cálculo de las coordenadas parciales				Promedio de las coordenadas locales	
		Z.		$x = L \text{ sen. } \alpha ; y = L \text{ cos. } \alpha$				X'	Y'
		v.							
	A-brce	35	929	$\log. \text{sen. } \alpha = 74602973$	$\log. \text{cos. } \alpha = 79125222$				
	X=20.000			$\log. L = 29972562$	$\log. L = 29972562$				
	X=40.000			$\log. x = 25575535$	$\log. y = 27097794$				
				$-x = 16104$	$-y = 51260$				
				$X = 20000$	$Y = 40000$				
				$X' = 1963896$	$Y' = 3948740$			19638.94	39487.40
				$\log. \text{sen. } \alpha = 94886217$	$\log. \text{cos. } \alpha = 79997929$				
				$\log. L = 29530126$	$\log. L = 29530126$				
				$\log. x = 14416343$	$\log. y = 29528065$				
				$-x = 2465$	$-y = 89703$				
				$X = 1966659$	$Y = 4028444$				
				$X' = 1963896$	$Y' = 3948741$				

Figura 2.41: Cálculo de un triángulo de la red primaria



**Figura 2.42:** Base Norte de la Red





**Figura 2.43:** Base Sur de la Red

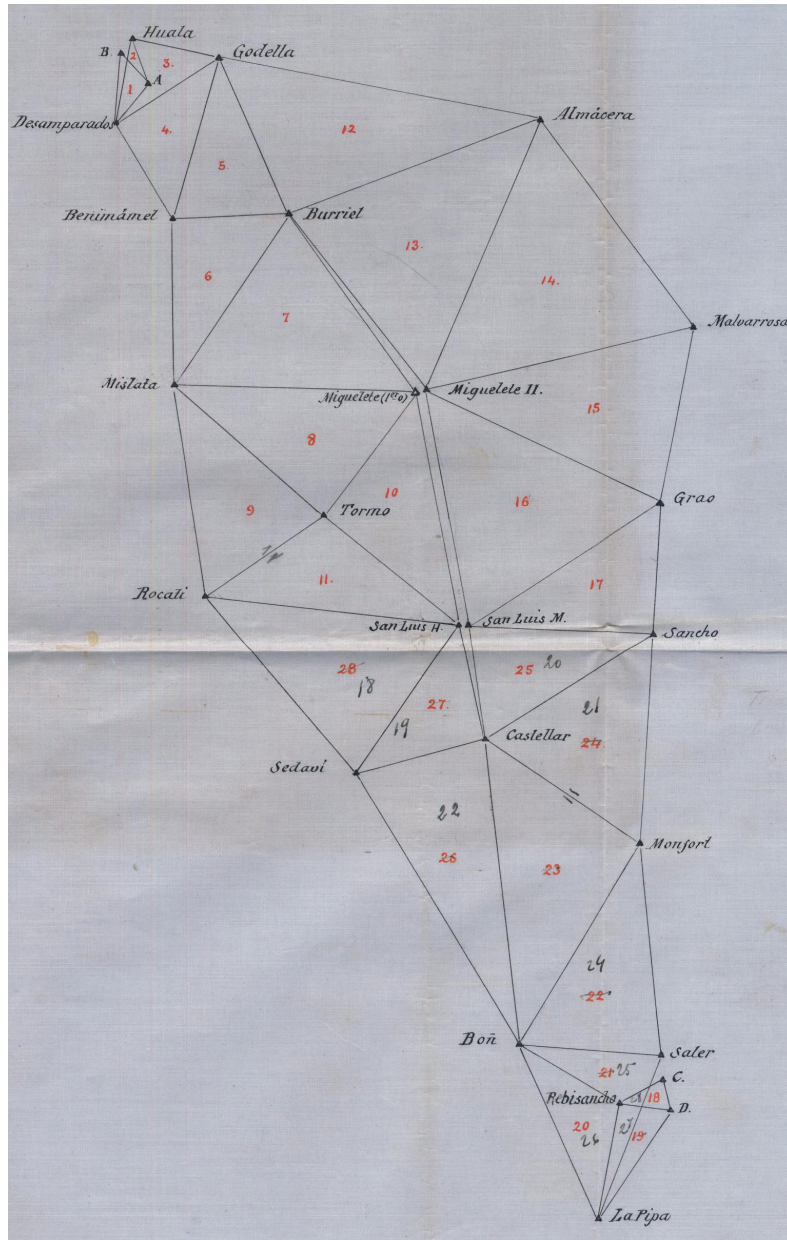


Figura 2.44: Red de triangulación primaria

a sus características de permanencia sobre el territorio, facilidad de acceso y posibilidad de medición tal como se detalla en la Tabla 2.8. La labor de campo e investigación toponímica previa para la identificación de los vértices no ha sido una tarea sencilla, ya que la alta relevancia de los lugares elegidos en la época para la ubicación de los vértices en muchos casos se ha visto alterada, siendo costoso averiguar el lugar exacto únicamente con la ayuda de las reseñas que aportan los trabajos de 1929, con indicaciones a veces obsoletas por los cambios de trazado sufridos en la ciudad.

**Tabla 2.8:** Clasificación de los vértices empleados en la triangulación primaria del levantamiento

<b>Características</b>	<b>Vértices</b>
Vértices materializados sobre el terreno y/o replanteables con horizonte despejado	Almácera, Benimámet, Castellar, Grao, MII, Mislata y Sancho
Vértices materializados sobre el terreno y/o replanteables sin horizonte despejado	Godella, S. Luis H. y S. Luis M.
Vértices degradados y/o no replanteables	Burriel, La Pipa, MI, Monfort, Rocatí y Saler
Vértices desaparecidos	A, B, Boñ, C, D, Desamparados, Huala, Malvarrosa, Rebisancho, Sedaví y Tormo

A lo largo de la redacción de esta sección vamos a describir cada uno de los vértices pertenecientes al primer grupo de esta clasificación, puesto que son los que posteriormente constituirán la red que nos permitirá georreferenciar el PPM de Valencia de 1929.

Los vértices que han sobrevivido hasta la actualidad se han identificado sin ninguna duda comprobando las acotaciones de las reseñas. Asimismo, los vértices

replanteados se han materializado comprobando especialmente la existencia de los puntos de referencia para las cotas.

Siguiendo un orden alfabético comenzamos por el vértice **Almácer** que se encuentra situado en la plataforma superior de la torre de la Iglesia del Santísimo Sacramento ubicada en la Plaza Mayor del municipio que le da nombre. El



**Figura 2.45:** Fachada y torre de la Iglesia del Santísimo Sacramento de Almería

taladro practicado sobre el pavimento para su señalización, ha desaparecido por



las reformas sufridas a lo largo de estos años, por lo que hubo que replantearlo debidamente gracias a las indicaciones de la reseña que puede verse en la Figura 2.47.



**Figura 2.46:** Vértice Almacera replanteadado sobre el pavimento de la Torre Norte de la Iglesia

El vértice **Benimámet**, por el contrario, no ha requerido replanteo ya que el taladro sobre el pavimento de la Torre de la Iglesia San Vicente Mártir del municipio de Benimámet se ha conservado hasta hoy. En las Figuras 2.48, 2.49 y 2.50 se muestra el vértice señalizado, la Torre de la Parroquia y la reseña correspondiente.

Continuamos con el vértice **Castellar** que está ubicado en el piso superior de la torre de la Parroquia Nuestra Señora de Lepanto ubicada en la Plaza Virgen de Lepanto de la pedanía Castellar-Oliveral. En este caso, el punto original

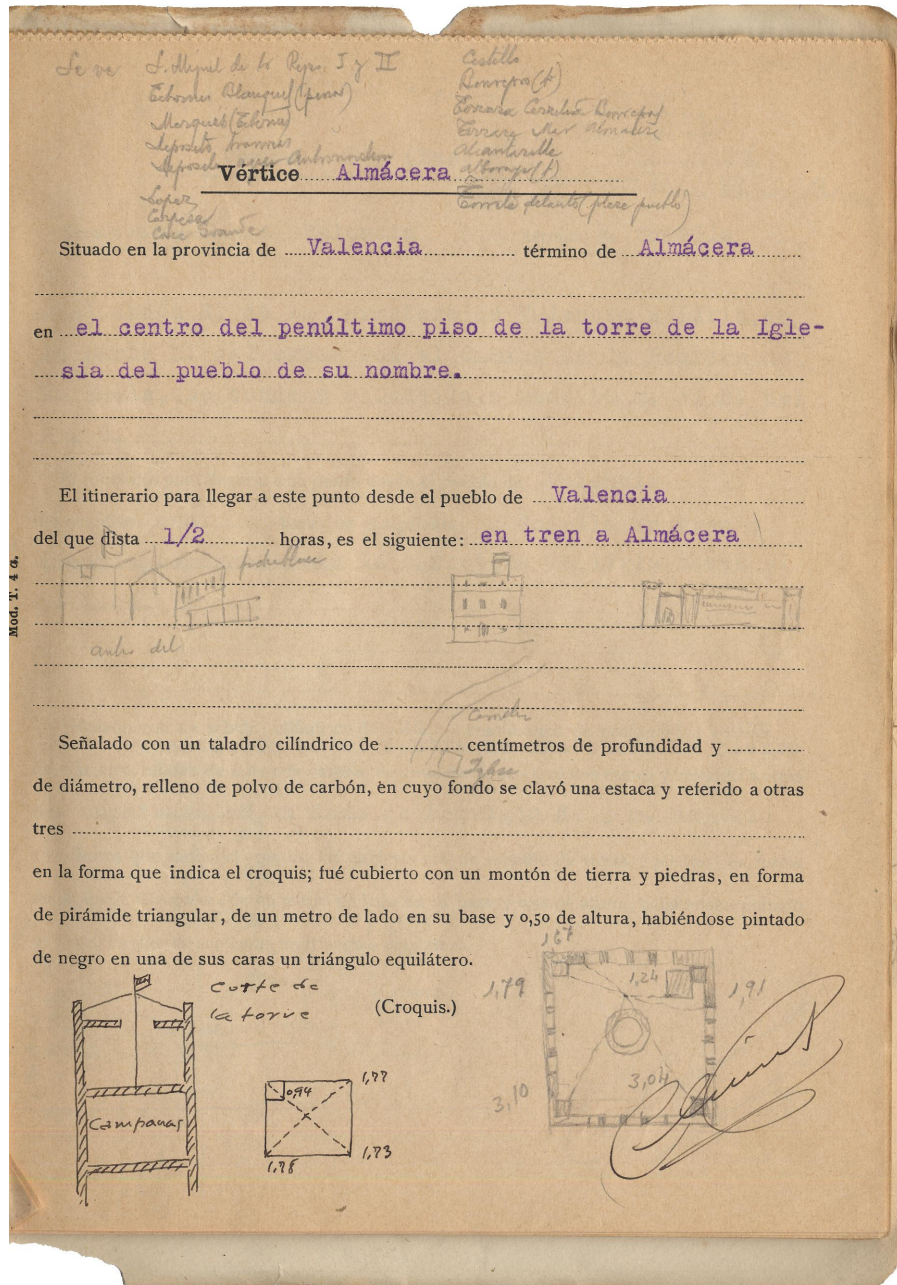
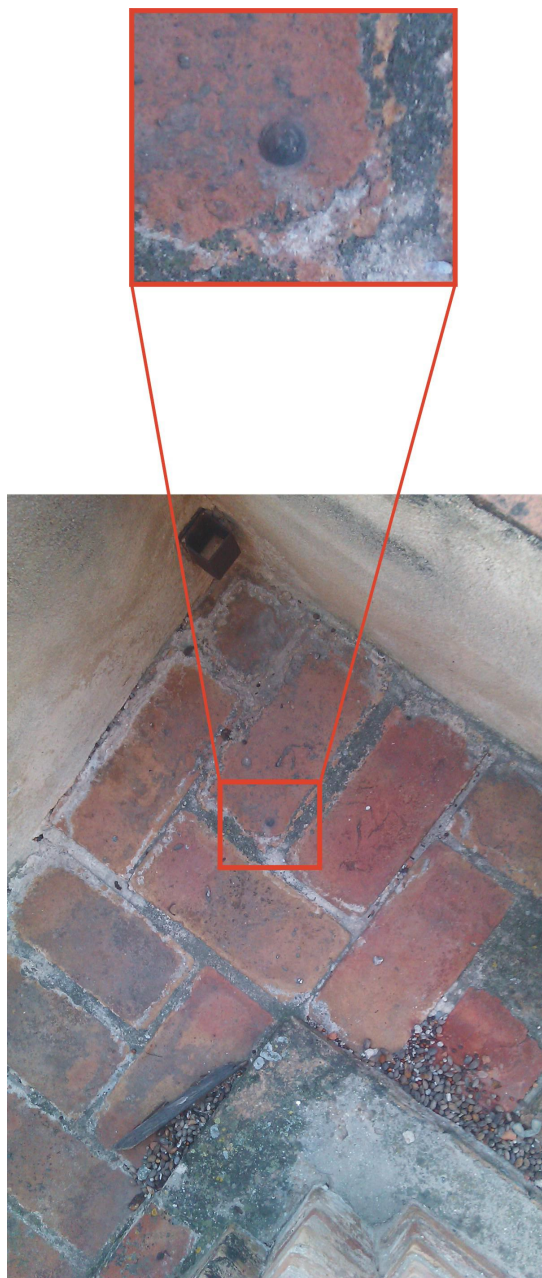


Figura 2.47: Reseña del vértice Almácer





**Figura 2.48:** Taladro practicado en el pavimento de la torre de la Parroquia San Vicente Mártir de Benimámet



**Figura 2.49:** Fachada de la Parroquia San Vicente Mártir de Benimámet

460

Vértice Benimámet

Situado en la provincia de Valencia término de Benimámet

en el ángulo N. E. de la plataforma superior de la torre de la Iglesia del pueblo de su nombre.

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de Valencia del que dista 1/2 horas, es el siguiente: en tren hasta Benimámet

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y ..... de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras tres .....

en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

299  
297  
0,49  
0,37  
294  
2,73  
(Croquis.)

The croquis shows a right-angled triangle with a vertical side of 0.37, a horizontal base of 0.49, and a hypotenuse. A dashed line indicates a height of 0.50 from the top vertex to the base. The total height from the base to the top vertex is 2.73. The top vertex is labeled with the number 299, and the bottom-left vertex is labeled with 297. The bottom-right vertex is labeled with 294. A signature is written in the bottom right corner of the page.

Figura 2.50: Reseña del vértice Benimámet



ha desaparecido por lo que ha sido necesario su replanteo con ayuda de la información que aporta la reseña antigua.



**Figura 2.51:** Pavimento de la parte superior de la torre de la Parroquia Nuestra Señora de Lepanto de Castellar

El vértice **Grao** está situado en la plataforma superior de la torre de la Iglesia de Santa María del Mar en el barrio del Grao. Ha sido necesario su replanteo dadas las reformas que se han llevado a cabo. Las Figuras 2.54, 2.55 y 2.56 muestran como en los casos anteriores una vista de la torre, de la plataforma superior y la



**Figura 2.52:** Fachada de la Parroquia Nuestra Señora de Lepanto de Castellar

*Desaparecida la señal = Replantada*

**Vértice** Castellar .....

Situado en la provincia de Valencia término de id. .....

en el lado S.O. del piso superior de la torre de la  
Iglesia de Na. Sa. del Rosario del Castellar, del  
poblado de su nombre .....

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de Valencia .....

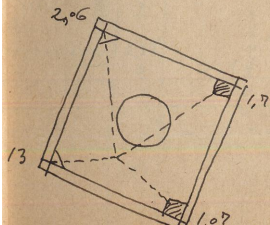
del que dista  $\frac{1}{2}$  horas, es el siguiente: en el autobús de Pi-  
nedo que parte de la plaza del Mercado de Ruzafa,  
hasta la puerta de la Iglesia. .....

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y .....

de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras  
tres .....

en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma  
de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado  
de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

(Croquis.)



*[Handwritten signature]*

**Figura 2.53:** Reseña del vértice Castellar

reseña tomada de la documentación antigua.

El siguiente vértice a describir corresponde a la denominación **Miguelete II**, ubicado en la Torre homónima y definido en la reseña de la documentación de 1929 como un taladro de un respiradero en la plataforma superior de la misma y frente a la puerta de acceso. Señalización que encontramos en su versión original como se puede observar en la Figura 2.57.

El vértice denominado **Mislata** lo encontramos en la plataforma superior de la torre de la Parroquia Nuestra Señora de los Ángeles en la Plaza Constitución del municipio del mismo nombre. El pavimento de la plataforma ha sido reformado recientemente como puede observarse en la Figura 2.60 por lo que ha sido necesario replantearlo con ayuda de la reseña tal como muestra la Figura 2.62.





**Figura 2.54:** Pavimento de la parte superior de la torre de la Iglesia de Santa María del Mar en el barrio del Grao





**Figura 2.55:** Fachada de la Iglesia de Santa María del Mar en el barrio del Grao

Vértice G r a o

---

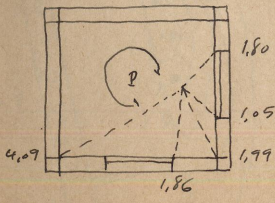
Situado en la provincia de Valencia término de id.

en el lado E. del piso superior de la torre de la Iglesia de Santa María del Mar, del barrio del Grao.

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de Valencia del que dista 1/4 horas, es el siguiente: tranvía del Grao, que parte de la Plaza de Emilio Castelar, hasta la puerta de la Iglesia.

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y ..... de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras tres ..... en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

(Croquis.)



*[Handwritten signature]*

**Figura 2.56:** Reseña del vértice Grao



**Figura 2.57:** Taladro practicado sobre el pavimento de la parte superior de la torre del Miguelete para señalar el vértice denominado Miguelete II





**Figura 2.58:** Vista de la torre del Miguelete, extraída de <http://www.jdiezarnal.com/valencianimiguelete.html> (22/9/14)

**Vértice** Miguelote II

---

Situado en la provincia de Valencia término de id.

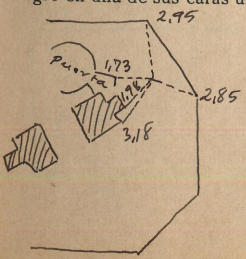
en el lado N.E. de la plataforma superior de la torre del Miguelote, frente a la puerta de acceso a dicha plataforma. El vértice es el taladro de un respiradero. En la misma plataforma está el vértice geodésico de primer orden de su nombre.

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de .....

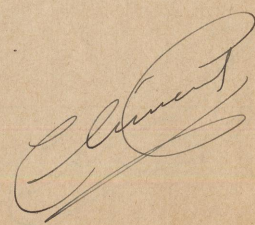
del que dista ..... horas, es el siguiente: .....

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y ..... de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras tres .....

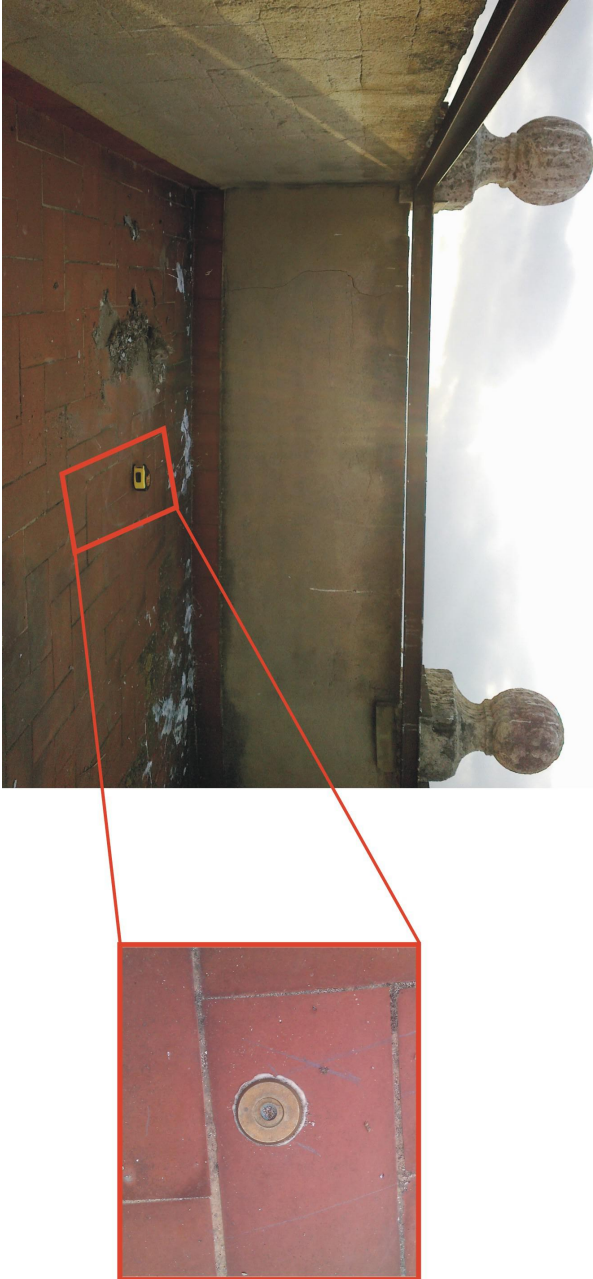
en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.



(Croquis.)



**Figura 2.59:** Reseña del vértice Miguelote II



**Figura 2.60:** Arandela sobre punto replantado en el pavimento de la parte superior de la torre de la Parroquia Nuestra Señora de los Angeles en Mislatá





**Figura 2.61:** Vista de la torre de la Parroquia Nuestra Señora de los Ángeles en Mislata

Por último, el vértice **Sancho**, denominado así por hallarse en la terraza del chalet de este antiguo propietario, hoy propiedad municipal. Está ubicado en la intersección entre la calle Algemés y el Camino del Canal del Barrio de Nazaret. Aunque el interior de la casa se encuentra en mal estado de conservación, no es el caso de su terraza que aunque ha sido reformada, fue posible el replanteo del vértice con ayuda como siempre de la reseña (Figura 2.64).



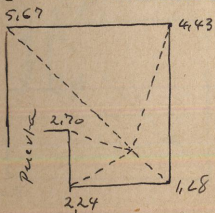
Vértice Mislata

Situado en la provincia de Valencia término de id.

en el ángulo S.E. de la plataforma superior de la torre de la Iglesia del pueblo de su nombre.

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de Valencia del que dista 1/4 horas, es el siguiente: en tranvía hasta Mislata.

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y ..... de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras tres ..... en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.



(Croquis.)




Figura 2.62: Reseña del vértice Mislata



**Figura 2.63:** Plataforma de la terraza superior del Chalet Sancho en el Barrio de Nazaret

No creemos necesario continuar con la descripción del resto de vértices de la red de triangulación primaria ya que no es relevante para la continuidad del trabajo.

Apoyándonos en la Figura 2.41 y siguiendo la notación establecida en las instrucciones del Instituto Geográfico (VV.AA., 1907), reharemos el cálculo del primer triángulo de la red de triangulación primaria por el método de intersección directa, con un objetivo de documentación histórica, tal como se realizó en la época.

Antes de comenzar con los cálculos pertinentes, estudiamos la observación en campo necesaria para averiguar los ángulos interiores del triángulo que queremos resolver. En las Figuras 2.65 y 2.66 aparecen encuadrados en rojo los valores promedios de los ángulos interiores del triángulo que queremos definir, obtenidos de las observaciones realizadas con un teodolito de la casa Wild y catalogado en el Instituto Geográfico con el código numérico 285. Respecto al instrumental de observación, las instrucciones del Instituto Geográfico (VV.AA., 1907) en su artículo 20 describen las precisiones necesarias que deben ofrecer,  $10'$  en cada uno de los círculos acimutal y cenital, lo que nos aporta información para realizar alguna hipótesis sobre el modelo de instrumento que podría haberse utilizado, teniendo en cuenta la fecha de observación. El Ingeniero a cargo de este trabajo fue D. Ramón Climent quien lo firma en Valencia el 30 de junio de 1929. Podemos observar además que se trata de un teodolito de visión invertida dada la forma de los objetos que se detallan en los documentos (Figuras 2.65 y 2.66). Contrastando toda la información acerca del instrumental, podría tratarse del modelo T1 cuya lectura directa da una exactitud de  $6''$  a  $2'$ , según las especificaciones técnicas de la casa Wild recogidas en el trabajo de Dña. Ana Flor Bertomeu *Análisis histórico de un siglo de instrumentación clásica* realizado en 2011 (Flor Bertomeu, 2011).



Vértice S. A. N. C. H. O

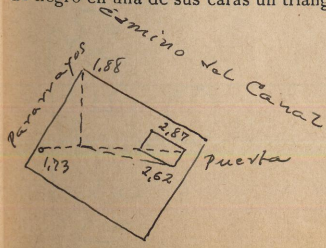
Situado en la provincia de Valencia término de id

en el ángulo O. de la terraza del "chalet" de D. José Sancho, situado en "La Punta", con puerta recayente al Camino del Canal.

El itinerario para llegar a este punto desde el pueblo de Valencia del que dista una horas, es el siguiente: de Valencia al Grao en tranvía; camino de Caro, del puerto a Nazaret, y Camino del Canal al vértice.

Señalado con un taladro cilíndrico de ..... centímetros de profundidad y ..... de diámetro, relleno de polvo de carbón, en cuyo fondo se clavó una estaca y referido a otras tres ..... en la forma que indica el croquis; fué cubierto con un montón de tierra y piedras, en forma de pirámide triangular, de un metro de lado en su base y 0,50 de altura, habiéndose pintado de negro en una de sus caras un triángulo equilátero.

(Croquis.)



*[Handwritten signature]*

**Figura 2.64:** Reseña del vértice Sancho

Se empezó la observación el día de 19... a las... k m s

Estaciones	Puntos observados	Lecturas		Promedios	Direcciones	Forma de los objetos (Figuras)
		Nonio I	Nonio II			
B. (Base)	A. (Base)	558.37 3	78.36 46	0 0 00	0 0 00	
	De un punto a otro	3.17 1	12.18 59	42.42 1	42.42 1	
A. (Base)	H. (Base)	231.4 53	57.54 52	0 0 00	0 0 00	
	De un punto a otro	273.56 56	73.56 54	42.42 4	42.42 4	
H. (Base)	De un punto a otro	173.00 31	353.00 24	0 0 00	0 0 00	
	B. (Base)	276.54 57	76.54 57	107.54 28	107.54 28	
	H. (Base)	273.26 50	173.26 44	120.26 20	120.26 20	
H. (Base)	De un punto a otro	147.28 5	571.9 28 5	0 0 00	0 0 00	
	B. (Base)	253.22 36	107.54 27	107.54 27	107.54 27	
	H. (Base)	269.54 17	89.54 16	120.26 12	120.26 16	
H. (Base)	De un punto a otro	157.22 57	337.22 57	0 0 00	0 0 00	
	H. (Base)	212.48 49	22.48 27	0 0 00	0 0 00	
	De un punto a otro	249.25 7	62.25 4	584.2 14	584.2 14	

Med. T. G. B. Koenig-Madrid

Figura 2.65: Observación en campo de los vértices implicados en la resolución del primer triángulo de la red de triangulación primaria



Figura 2.66: Observación en campo de los vértices implicados en la resolución del primer triángulo de la red de triangulación primaria

Se empezó la observación el día ..... de ..... de 19... a las ..... h m s

Estaciones	Puntos observados	Lecturas	
		Notio I	Notio II
Lascaña	San Felice	0° 0' 0"	0° 0' 0"
	H. (Barcel)	173.37 12	138.57 10
	Descomposición	85.52 3	65.52 5.5
		276.29 4.2	76.29 4.5
<b>Descomposición</b>	B. (Barcel)	369.44 38	378.44 38.8
	H. (Lascaña)	278 11 1.2	74 11 6
	H. (Barcel)	3.2	8.2 1.23 8 1.6
	San Felice	122.02 4.7	160.22 2.5
	Descomposición	67	8.00 2.07 7 5.8
	Descomposición	13 (1.75.20)	227.27 10.52 27 8
	H. (Lascaña)	242 0 58 6.2 0 45	
	H. (Barcel)	271 1 6 71 2.0 5.8	
	San Felice	271.85 7.0 11 8.5 7.9	
	Descomposición	25 0.0 55 2.5 0.0 4.8	

Med. T. G. S. Kocher-Madrid.

Promedios	Direcciones		Forma de los objetos Elevaciones
	0	1	
173.37	13	0 00 00	00 00
85.52	57	52 45 46	52 45 47
276.29	24	84 2 21	84 2 17
369.44	38	0 00 00	
278 11	9	4 26 37	
3.2	16	53 23 44	
122.02	41	51 46 9	
67	7	157 20 27	
227.27	9	0 00 00	0 00 00
242 0	5	4 26 41	4 26 39
271 1	2	71 22 53	71 22 48
271.85	8	52 46 15	52 46 12
25 0.0	51	157 20 42	157 20 24

3





Debemos tener en cuenta antes de comenzar los cálculos algunas consideraciones previas del Instituto Geográfico al respecto. El artículo 183 de las instrucciones (VV.AA., 1907) se refiere al cálculo logarítmico:

*“Los cálculos logarítmicos correspondientes a las triangulaciones topográficas se harán con 6 cifras en las mantisas. Tanto en los números como en los logaritmos se despreciarán las cifras decimales que excedan del número prescrito para cada caso [...] Todos los logaritmos se escribirán tal como sean, con su característica natural, para conocer el lugar de la coma, en su respectivo número, sin necesidad de buscar el origen del logaritmo. Cuando se escriba el logaritmo de un número que entra en el cálculo son signo negativo, se indicará esta circunstancia con una  $n$  a la derecha de la última cifra y un poco más baja. Cuando hubiere que emplear senos de ángulos menores de  $12'$ , ó cosenos de ángulos mayores de  $89^{\circ}.48'$  se obtendrán sus logaritmos haciendo uso de la tabla de senos naturales.”*

Circunstancias que como veremos no se cumplen estrictamente sino que están adaptadas al PPM de Valencia. El número de cifras en las mantisas pasa a ser 7 y la forma de escribir el logaritmo negativo pasa a ser una barra sobre la cifra de la característica.

En referencia a las tolerancias de cierre de las triangulaciones es el artículo 18 el que se refiere a ellas.

*“ La diferencia máxima que se admitirá entre la suma de los tres ángulos observados en cada triángulo y  $180^{\circ}$ , será de un minuto [...]”*

Ahora ya estamos en disposición de retomar la primera parte del estadillo modelo T 26 del Instituto Geográfico (Figura 2.67), que establece la notación de los triángulos como VDI, donde V corresponde al vértice a levantar, D el vértice que queda a la derecha de éste e I el que queda a la izquierda. La formulación para determinar los lados no conocidos del triángulo la transcribimos aquí:

$$VD = DI \cdot \frac{\text{sen}\hat{I}}{\text{sen}\hat{V}} \quad (2.1)$$

$$VI = DI \cdot \frac{\text{sen}\hat{D}}{\text{sen}\hat{V}}$$

Siguiendo la lectura ordenada del estadillo, se obtienen en primer lugar los ángulos reducidos al centro y corregidos después por cierre del triángulo, repartiendo el exceso que en este caso corresponde a 14'' y que se encuentra dentro de tolerancia tal como dictan las instrucciones del Instituto. Así, a partir de éstos últimos, ya pueden obtenerse las longitudes de los lados. Veamos cómo resolverlo tomando logaritmos, método que facilitaba enormemente las operaciones mediante el uso de las tablas de Schrön (1893), tal y como hemos venido haciendo en las anteriores secciones en las que hemos creído necesario reproducir los cálculos de la época. Todo ello, no solo por atender debidamente a la componente histórica de este trabajo, sino por observar el rigor debido a la comparación de su precisión con la obtenible con la tecnología actual. Es claro que en el siglo XXI abandonar la Informática y sustituirla por el antiguo cálculo logarítmico, aparte de ser un esfuerzo no desdeñable, refuerza el poder de afirmación de las futuras conclusiones.

Comenzamos con el cálculo del lado VI, es decir la longitud que separa el vértice Desamparados y el vértice B de la Base Norte de la Red. En primer lugar

averiguaremos el valor del logaritmo que corresponde al seno del ángulo interior corregido del vértice A de la Base Norte de la Red, en este caso denominado (D). Como sabemos, el valor del ángulo corresponde a  $\alpha = 103^{\circ}54'19''$  medido en grados sexagesimales, que debemos reducir al primer cuadrante por la limitación que imponen las tablas de logaritmos, ya que únicamente tienen entrada los ángulos menores de  $90^{\circ}$ . Nos queda así el ángulo  $\alpha = 13^{\circ}54'19''$  del que calcularemos su coseno, equivalente al seno del ángulo original buscado. Los valores de entrada de las tablas aparecen en intervalos de  $10''$  por lo que será necesario hacer uso de la interpolación lineal para encontrar el ángulo exacto. Entrando en la tabla (Figura 2.68) con el ángulo por exceso ( $\alpha = 13^{\circ}54'20''$ ), obtenemos el logaritmo de su coseno que corresponde a  $\bar{1}.9870820$ , siendo el correspondiente a la entrada del ángulo por defecto ( $\alpha = 13^{\circ}54'10''$ ),  $\bar{1}.9870872$ , por lo que la diferencia entre ellos es de 52 unidades en la mantisa. La expresión para el cálculo de la parte proporcional es:

$$\frac{52}{10''} = \frac{z}{1''}$$

Al valor del logaritmo obtenido por la entrada del ángulo en exceso le restaremos la parte proporcional obtenida por interpolación como  $z = 5.2$ , quedando el valor final buscado el correspondiente a  $\bar{1}.9870815$  que vemos reflejado en la casilla que hace referencia a  $Lg \operatorname{sen} D$  del estadillo.

Realizamos la misma operación para averiguar el valor del logaritmo que corresponde al seno del ángulo interior corregido del vértice Desamparados (V). En este caso el valor del ángulo es inferior a  $90^{\circ}$  por lo que entraremos directamente en las tablas de logaritmos con  $\alpha = 33^{\circ}23'44''$  buscando los dos valores por exceso y defecto del ángulo dada la limitación de las mismas como

54	0	9,3806 237	851	9,3935 313	903	0,6064 687	9,9870 924	52
	10	9,3807 088	851	9,3936 216	903	0,6063 784	9,9870 872	52
	20	9,3807 938	850	9,3937 118	902	0,6062 882	9,9870 820	52
	30	9,3808 789	851	9,3938 021	903	0,6061 979	9,9870 768	52
	40	9,3809 639	850	9,3938 923	902	0,6061 077	9,9870 716	53
	50	9,3810 489	850	9,3939 825	902	0,6060 175	9,9870 663	52

Figura 2.68: Fragmento de las tablas de Schrön

en la anterior ocasión (Figura 2.69). Tomamos el valor correspondiente al ángulo por defecto ( $\alpha = 33^\circ 23' 40''$ ),  $\bar{1}.7406783$  y la parte proporcional entre este valor y el siguiente en la tabla corresponde a 319 unidades en la mantisa. La expresión es análoga al ángulo en (D):

$$\frac{319}{10''} = \frac{z}{4''}$$

Así, al valor del logaritmo obtenido le sumaremos la parte proporcional obtenida por interpolación lineal como  $z = 127.6$ , quedando el valor final buscado el correspondiente a  $\bar{1}.7406910$ . Como este término que acabamos de determinar

23	0	9,7405 505
	10	9,7405 824
	20	9,7406 144
	30	9,7406 463
	40	9,7406 783
	50	9,7407 102

Figura 2.69: Fragmento de las tablas de Schrön

aparece en el denominador de la formulación, calcularemos su cologaritmo con el fin de reducir los cálculos a una simple suma y que corresponderá a 0.2593089.

El último dato que nos falta averiguar es el logaritmo del lado DI que corresponde al segmento de la Base medida de la carretera de Liria o Base A-B y

que como ya sabíamos corresponde a 508.888 m. Entrando en las tablas (Figura 2.70) buscamos el número 508 al que le corresponde el logaritmo 2.7058637. La parte decimal del número la averiguaremos de nuevo por interpolación lineal y posteriormente la sumaremos al resultado de la parte entera.

$$\frac{8541}{1} = \frac{z}{0.888}$$

La parte decimal corresponde a  $z = 7584.408$  que añadiremos a la mantisa del logaritmo obtenido para la parte entera, con el fin de obtener el logaritmo completo 2.7066222 que viene reflejado en la casilla *Lg DI* del estadillo.

"	Num.	Log.
50	<b>500</b>	698 9700
	501	699 8377
	502	700 7037
	503	701 5680
	504	702 4305
	505	703 2914
	506	704 1505
	507	705 0080
	508	705 8637
	509	706 7178

**Figura 2.70:** Fragmento de las tablas de Schrön

Ya tenemos todos los datos necesarios que entran en la formulación para determinar el lado VI.

Tomando logaritmos en la expresión 2.1 quedará:

$$LgVI = LgDI + LgsenD + CLgsenV = 2.9530126$$

Ya en este punto, volvemos a entrar en las tablas (Figura 2.71) y buscamos el

número asociado a este logaritmo calculado, que corresponde a 897.45 m

8970	7924	7973	8021	8070	8118	8167	8215	8263	8312	8360
8971	8409	8457	8505	8554	8602	8651	8699	8747	8796	8844
8972	8893	8941	8989	9038	9086	9135	9183	9231	9280	9328
8973	9377	9425	9473	9522	9570	9619	9667	9715	9764	9812
8974	9861	9909	9957	*0006	*0054	*0103	*0151	*0199	*0248	*0296
8975	953	0345	0393	0441	0490	0538	0587	0635	0683	0732
8976	0828	0877	0925	0974	1022	1070	1119	1167	1215	1264
8977	1312	1361	1409	1457	1506	1554	1603	1651	1699	1748
8978	1796	1844	1893	1941	1989	2038	2086	2135	2183	2231
8979	2280	2328	2376	2425	2473	2522	2570	2618	2667	2715

Figura 2.71: Fragmento de las tablas de Schrön

Se opera de la misma manera para la obtención del lado VD, es decir, el lado que une los vértices Desamparados y el vértice A de la Base A-B, y corresponde al valor 626.98 m. No insistiremos en el procedimiento de cálculo puesto que la rutina es análoga.

Una vez se han definido los lados del triángulo, ya se pueden calcular las coordenadas del vértice a levantar, en este caso el vértice Desamparados (V). Y para ello volvemos a fijarnos en el estadillo (Figura 2.72). En la primera columna se define el acimut que se expresa como z. Estos acimuts se calculan desde el Sur, al contrario que en la práctica actual, tomando los ángulos  $\hat{D}$  e  $\hat{I}$  en cada caso, reducidos al centro sin corregir, con la formulación conocida:

$$\theta_I^V = \theta_I^D + I \tag{2.2}$$

$$\theta_D^V = \theta_D^I - D$$

La sustitución de los valores numéricos proporciona los siguientes resultados:

$$\theta_D^V = \theta_D^I - D = 139^\circ 3' 53'' - 103^\circ 54' 24'' = 35^\circ 9' 29''$$

Puntos cuyos coordenadas se conocen y valores de estas		Puntos cuyos coordenadas se buscan		Ángulos		Cálculo de las coordenadas parciales				Promedio de las coordenadas parciales	
		Z'	Z''	x = L sen. $\alpha$		y = L cos. $\alpha$		X'	Y'		
D. = A-bme		35	929	lg sen. $\alpha$ = 79602973	lg cos. $\alpha$ = 79125202						
X = 20.000				lg L = 29992562	lg L = 29992562						
				lg. x = 25575535	lg. y = 29097994						
X = 40.000		139	353	-x = 16104	-y = 51260						
				X = 20000000	Y = 40000000						
				X' = 1963896	Y' = 3948740						
I. = A-bme		019		lg sen. $\alpha$ = 94886217	lg cos. $\alpha$ = 79999939						
X = 19666.59				lg L = 29530126	lg L = 29530126						
				lg. x = 14416343	lg. y = 29528065						
				-x = 2965	-y = 89703						
				X = 1966659	Y = 4038444						
				X' = 1963892	Y' = 3948741						
X = 40.384.44											

Figura 2.72: Cálculo de las coordenadas del vértice Desamparados en el triángulo denominado I



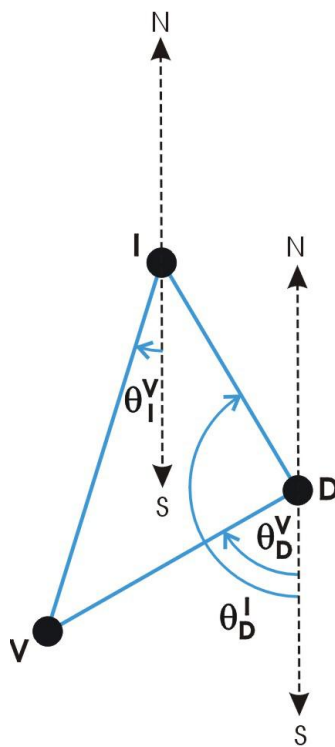


Figura 2.73: Calculo de acimuts en el triángulo 1

$$\theta_I^V = \theta_I^D + I = ((139^\circ 3' 53'' + 180^\circ) + 42^\circ 42' 02'') - 360^\circ = 1^\circ 45' 55''$$

$$\theta_D^I = 139^\circ 3' 53''$$

Siguiendo el estadillo, en la columna central se realiza el cálculo de las coordenadas parciales del vértice obtenidas respecto a las coordenadas del vértice I por una parte y a las coordenadas del vértice D por otra, de las que después se hallará su promedio para obtener finalmente las coordenadas locales tal como apunta la última columna. Con la formulación 2.3 y 2.4, una vez más tomaremos logaritmos tal como se realizaba en la época. Las mencionadas fórmulas son bien conocidas en la práctica habitual, pero con diferente notación y se transcriben en 2.3 y 2.4 tal y como aparecen en el estadillo. En esta ocasión no repetiremos los cálculos con el mismo nivel de detalle utilizado en el cálculo de los lados de los triángulos, ya que la manera de operar tanto con las tablas como después en el cálculo de logaritmos es esencialmente la misma. Por esta razón nos limitamos ahora a comprobar que los resultados son correctos y así los transcribimos.

$$x = L \cdot \text{sen } z \quad (2.3)$$

$$y = L \cdot \text{cos } z \quad (2.4)$$

Tomando logaritmos en la fórmula 2.3 de obtención de la coordenada x parcial,

$$\text{Lg } x = \text{Lg } L + \text{Lg } \text{sen } z$$

$$2.79972562 + \bar{1}.7602973 = 2.5575535$$

El número que equivale al logaritmo 2.5575535 corresponde según las tablas de Schrön a 361.04, que se restará a la coordenada X del Vértice A(D) para obtener

la coordenada X del vértice Desamparados por este camino.

Vemos a continuación el resultado de la coordenada X obtenida desde el Vértice B(I):

Tomando logaritmos,

$$Lg x = Lg L + Lg \operatorname{sen} z$$

$$2.9530126 + \bar{2}.4886217 = 1.4416343$$

El número que equivale al logaritmo 1.4416343 corresponde según las tablas de Schrön a 27.65, que de nuevo se restará a la coordenada X del Vértice B(I) para obtener la coordenada X del vértice Desamparados por este otro camino.

Por lo tanto, el promedio de las coordenadas X obtenidas por ambos caminos corresponde a:

$$X_{\text{Desamparados}} = \frac{19638.96 + 19638.92}{2} = 19638.94$$

De manera análoga se obtiene la coordenada Y del vértice Desamparados obtenida desde el vértice A(D).

Tomando logaritmos en la fórmula de obtención de la coordenada Y,

$$Lg y = Lg L + Lg \operatorname{cos} z$$

$$2.79972562 + \bar{1}.9125232 = 2.7097794$$

El número que equivale al logaritmo 2.7097794 corresponde según las tablas de Schrön a 512.60, que se restará a la coordenada Y del Vértice A(D) para obtener la coordenada Y del vértice Desamparados por este camino.

Vemos a continuación el resultado de la coordenada Y obtenida desde el

Vértice B(I). Tomando logaritmos,

$$2.9530126 + \bar{1}.9997939 = 2.9528065$$

El número que equivale al logaritmo 2.9528065 corresponde según las tablas de Schrön a 897.03, que se restará a la coordenada Y del Vértice B(I) para obtener la coordenada Y del vértice Desamparados por este camino.

Así el promedio de las coordenadas Y obtenidas por ambos caminos corresponde a:

$$Y_{Desamparados} = \frac{39487.40 + 39487.41}{2} = 39487.40$$

## 2.6 Métodos planimétricos: Itinerario y Radiación

### 2.6.1 Radiación

Este procedimiento consiste en el levantamiento desde un solo vértice o punto de estación de la superficie circundante. Los puntos pertenecientes a esta superficie se denominan puntos destacados y se relacionan con el vértice por distancia y acimut con el objetivo de levantar puntos de relleno o detalle en un plano (Chueca Pazos, 1982). El método consiste en estacionar el instrumento que, en el caso particular de este trabajo de 1929 es un taquímetro o teodolito que aprecia 1' (VV.AA., 1907), en el vértice y realizar las punterías necesarias. El aparato se ha utilizado orientado para que cada puntería proporcione directamente el acimut del destacado. La distancia se define con cinta metálica, según se apunta en el artículo 104 de las instrucciones topográficas publicadas por el Instituto Geográfico (VV.AA., 1907) donde se hace referencia a los lados de la poligonación, pero que entendemos se hace extensible a la medida de las

distancias en el método de radiación. Y dice así:

*“ Los lados de los polígonos se medirán dos veces directamente con una cinta metálica o por otros medios ”*

No disponemos del formulario de observación de ángulos acimutales para la radiación y el itinerario del trabajo de 1929, sin embargo la Figura 2.74 muestra un formulario tipo para la época en la que se desarrolló.

Para pasar de las coordenadas polares obtenidas en campo a las coordenadas cartesianas para representar los vértices destacados en un plano es necesario la utilización de las conocidas formulas de la radiación (Dominguez García-Tejero, 1989; Chueca Pazos, 1982):

$$x = D \cdot \text{sen } \theta$$

$$y = D \cdot \text{cos } \theta$$

siendo D la distancia,  $\theta$  el acimut entre los puntos de estación y radiado y x e y los incrementos entre dichos puntos. Esta es precisamente la manera de proceder en el trabajo que estudiamos, como se aprecia en la Figura 2.75.

Siendo su cálculo como sigue:

**Acimut lado 314-314A:**

Acimut de partida  $\theta_{314}^{315} = 200^{\circ}48'32''$

Ángulo medido  $72^{\circ}23'53''$

Distancia medida 45.92 m

$$\theta_{313}^{314} = 200^{\circ}48'32'' + 72^{\circ}23'53'' = 273^{\circ}12'25''$$

Reducción a primer cuadrante ( $\alpha$ ) =  $3^{\circ}12'25''$

$$x = D \cdot \text{cos } \alpha = 45.85 \text{ m}$$

*Se empezó la observación el día 1 de Mayo de 1877 á las 8<sup>as</sup> 30<sup>ms</sup>.*

ESTACIONES	PUNTOS OBSERVADOS	LECTURAS							
		NOXIO I		NOXIO II		PROXIMIO			
		°	'	°	'	°	'		
22	29	163	44	343	43	163	43	30	30
2	Torre de San Juan.	304	09	124	08	304	08	30	30
3	21	328	39	148	39	328	39	00	00
4	26	58	12	238	11	58	11	30	30

DIRECCIONES	DISTANCIAS		
	1. <sup>a</sup> MEDICIÓN	2. <sup>a</sup> MEDICIÓN	PROMEDIOS
°	'	''	
00	00	00	92,18
140	25	00	92,16
164	55	30	52,45
254	28	00	37,64
			52,46
			37,62
			37,62

Figura 2.74: Observación de ángulos Acimutales (V.V.A.A., 1907)





### 2.6.2 Itinerario o Poligonación

El artículo 98 de las instrucciones publicadas por el Instituto Geográfico dice así:

*“ Para elegir los vértices más convenientes para la poligonación, se empezará por inscribir el casco de la población y los arrabales en un gran polígono cuyos lados tengan una longitud de 1000 a 2000 m y cuyos vértices se referirán al mayor número posible de los de la triangulación topográfica. Apoyándose en los vértices del polígono exterior y marchando por las calles principales se dividirá aquel en otros polígonos interiores. Los polígonos de los distritos se dividirán a su vez en otros menores hasta que cada manzana quede encerrada en un polígono.”*

Siguiendo estas instrucciones y de modo análogo al cálculo de los puntos destacados mediante radiación, se calculan también los puntos de la poligonación. En general debemos tener en cuenta que el cálculo de las líneas trigonométricas en graduación sexagesimal en este caso, que hoy resulta tan sencillo con ayuda de cualquier herramienta de cálculo, no lo era tanto en la época y debían ayudarse de tablas para arcos comprendidos entre 0 y 45°, por lo que debían de reducir el acimut al primer cuadrante restando 90°, 180° o 270° según el caso. Además al estar los acimutes referidos al Sur como ocurría en el cálculo de la orientación de las bases del plano, obligaba a tomar signos contrarios en el cálculo de estas líneas trigonométricas.

La documentación histórica encontrada nos ha permitido hacer un estudio en profundidad de una pequeña poligonal en la calle General Elio, lindante en su lado Este con el parque de los Viveros que pertenece al polígono numerado como 125 (Figuras 2.80 y 2.81).

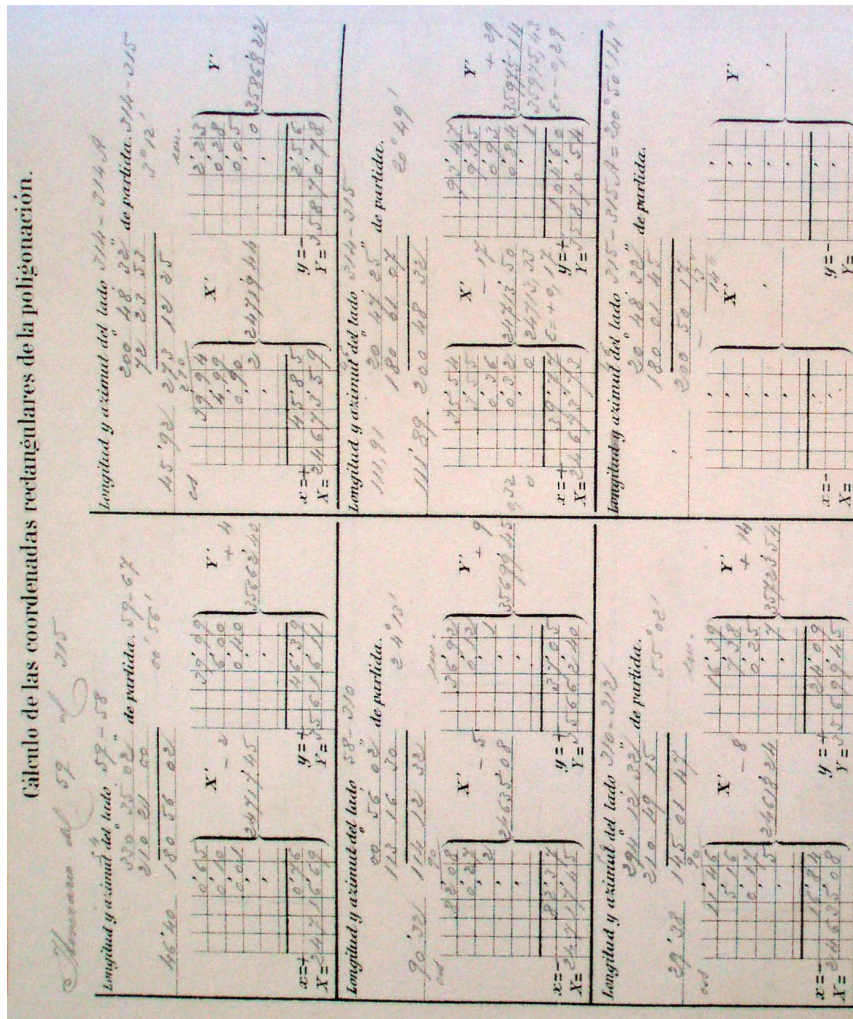


Figura 2.77: Itinerario del 59 al 315

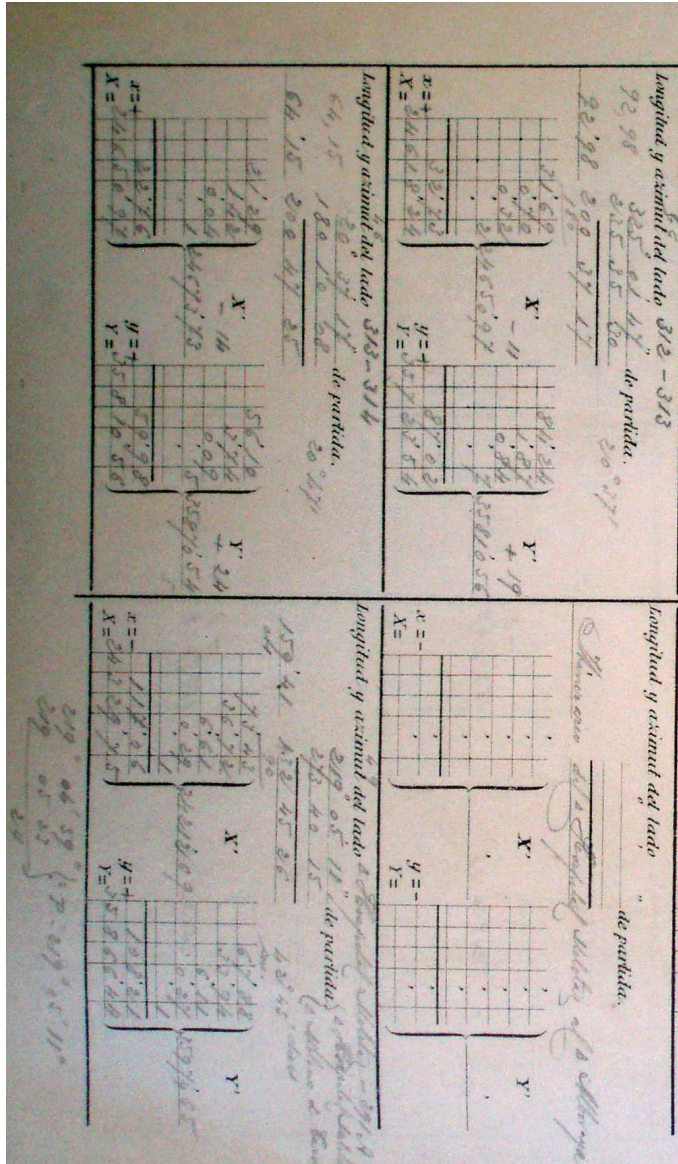


Figura 2.78: Itinerario del 59 al 315



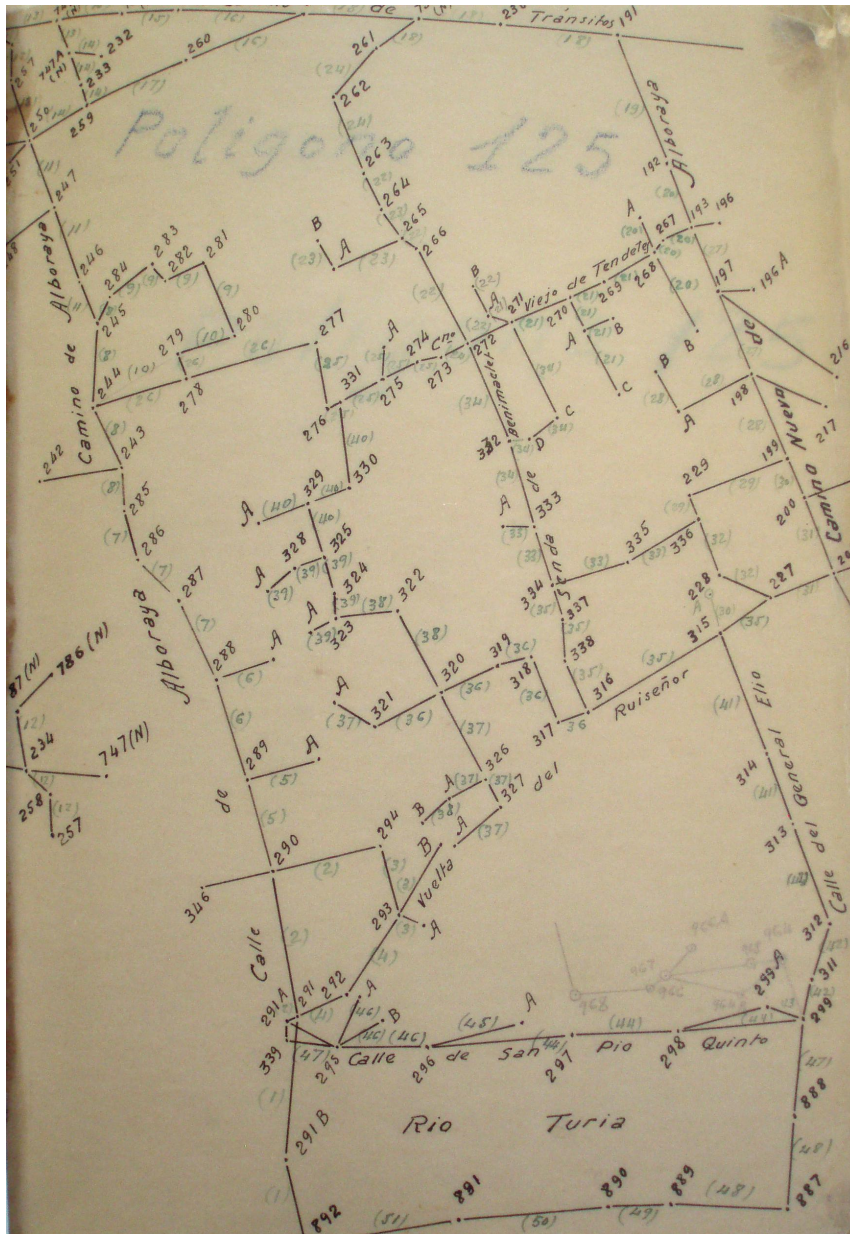


Figura 2.79: Polígono 125 del que forma parte el itinerario estudiado

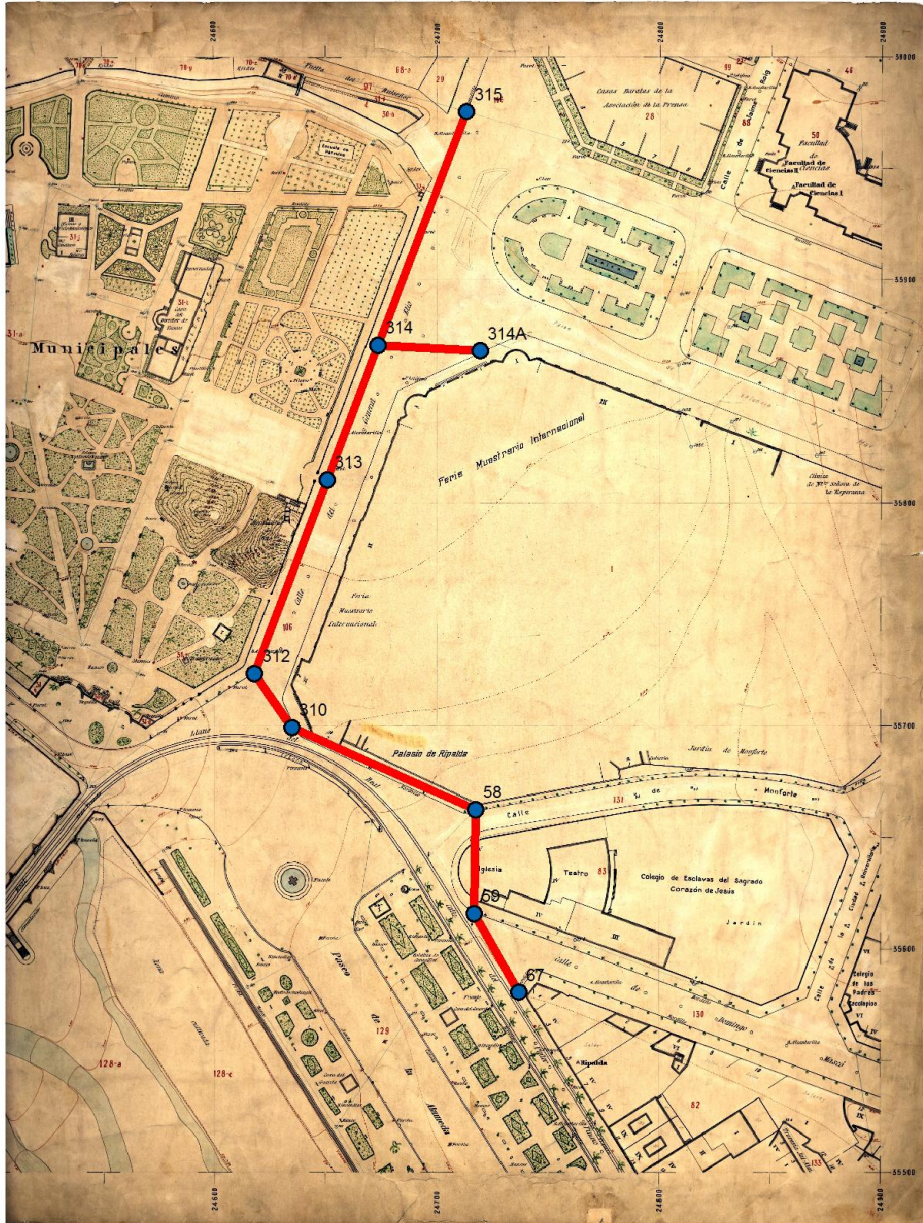


Figura 2.80: Itinerario estudiado sobre la cartografía levantada





El cálculo de las coordenadas cartesianas parciales en cada uno de los ejes del Itinerario que va del vértice 59 al 315 se muestra a continuación, junto con un croquis que recrea su geometría.

**Eje 59-58:**

Acimut de partida  $\theta_{59}^{67} = 330^{\circ}35'02''$

Ángulo medido  $210^{\circ}21'00''$

Distancia medida 46.40 m

$$\theta_{59}^{58} = 330^{\circ}35'02'' + 210^{\circ}21'00'' - 360^{\circ} = 180^{\circ}56'02''$$

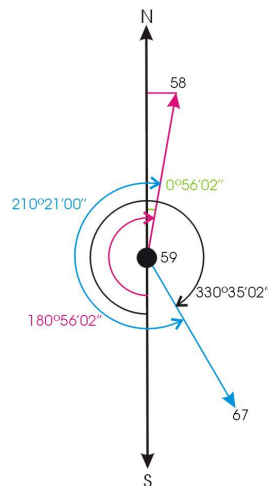
Reducción a primer cuadrante ( $\alpha$ ) =  $0^{\circ}56'02''$

$$x = D \cdot \sin \alpha = 0.76 \text{ m}$$

$$X_{58} = 24717.45$$

$$y = D \cdot \cos \alpha = 46.39 \text{ m}$$

$$Y_{58} = 35662.40$$



**Figura 2.82:** Ángulo y acimut en el eje 59 al 58



**Eje 58-310:**

Acimut de partida  $\theta_{58}^{59} = 0^{\circ}56'02''$

Ángulo medido  $113^{\circ}16'30''$

Distancia medida 90.32 m

$$\theta_{58}^{310} = 0^{\circ}56'02'' + 113^{\circ}16'30'' = 114^{\circ}12'32''$$

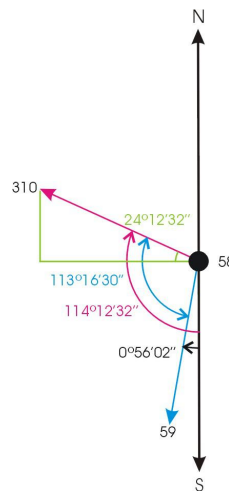
Reducción a primer cuadrante ( $\alpha$ ) =  $24^{\circ}12'32''$

$$x = D \cdot \cos \alpha = -82.37 \text{ m}$$

$$X_{310} = 24635.08$$

$$y = D \cdot \sen \alpha = 37.05 \text{ m}$$

$$Y_{310} = 35699.45$$



**Figura 2.83:** Ángulo y acimut en el eje 58 al 310

**Eje 310-312:**

Acimut de partida  $\theta_{310}^{58} = 294^{\circ}12'32''$

Ángulo medido  $210^{\circ}49'15''$

Distancia medida 29.38 m

$$\theta_{310}^{312} = 294^{\circ}12'32'' + 210^{\circ}49'15'' - 360^{\circ} = 145^{\circ}01'47''$$

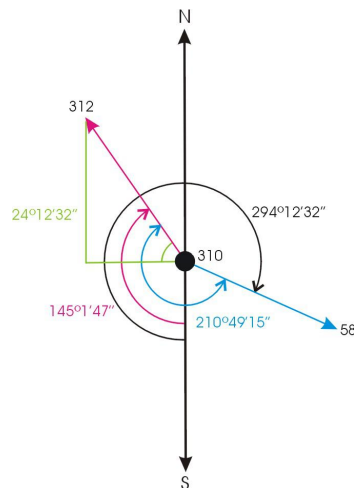
Reducción a primer cuadrante ( $\alpha$ ) =  $55^{\circ}01'47''$

$$x = D \cdot \cos \alpha = -16.84 \text{ m}$$

$$X_{312} = 24618.24$$

$$y = D \cdot \sin \alpha = 24.09 \text{ m}$$

$$Y_{312} = 35723.54$$



**Figura 2.84:** Ángulo y acimut en el eje 310 al 312

### Eje 312-313:

Acimut de partida  $\theta_{312}^{310} = 325^{\circ}01'47''$

Ángulo medido  $235^{\circ}35'30''$

Distancia medida 92.98 m

$$\theta_{312}^{313} = 325^{\circ}01'47'' + 235^{\circ}35'30'' - 360^{\circ} = 200^{\circ}37'17''$$

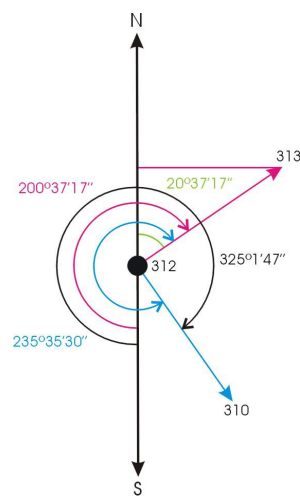
Reducción a primer cuadrante ( $\alpha$ ) =  $20^{\circ}37'17''$

$$x = D \cdot \text{sen } \alpha = 32.73 \text{ m}$$

$$X_{313} = 24650.97$$

$$y = D \cdot \text{cos } \alpha = 87.02 \text{ m}$$

$$Y_{313} = 35810.56$$



**Figura 2.85:** Ángulo y acimut en el eje 312 al 313

### Eje 313-314:

Acimut de partida  $\theta_{313}^{312} = 20^{\circ}37'17''$

Ángulo medido  $180^{\circ}10'08''$

Distancia medida 64.15 m

$$\theta_{313}^{314} = 20^{\circ}37'17'' + 180^{\circ}10'08'' = 200^{\circ}47'25''$$

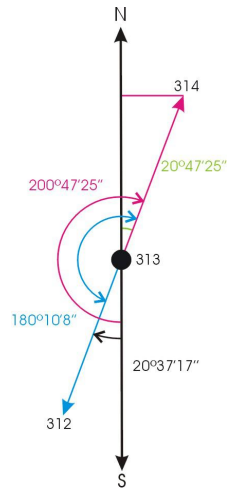
Reducción a primer cuadrante ( $\alpha$ ) =  $20^{\circ}47'25''$

$$x = D \cdot \text{sen } \alpha = 22.76 \text{ m}$$

$$X_{313} = 24673.73$$

$$y = D \cdot \cos \alpha = 59.98 \text{ m}$$

$$Y_{313} = 35870.54$$



**Figura 2.86:** Ángulo y acimut en el eje 313 al 314

### Eje 314-315:

Acimut de partida  $\theta_{314}^{313} = 20^{\circ}47'25''$

Ángulo medido  $180^{\circ}01'07''$

Distancia medida 111.91 m

$$\theta_{314}^{315} = 20^{\circ}47'25'' + 180^{\circ}01'07'' = 200^{\circ}48'32''$$

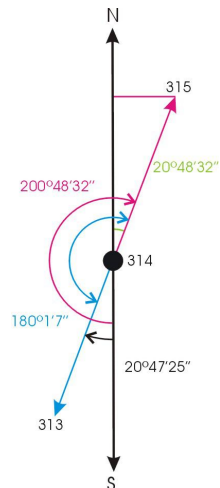
Reducción a primer cuadrante ( $\alpha$ ) =  $20^{\circ}48'32''$

$$x = D \cdot \sin \alpha = 39.77 \text{ m}$$

$$X_{315} = 24713.50$$

$$y = D \cdot \cos \alpha = 104.60 \text{ m}$$

$$Y_{315} = 35975.14$$



**Figura 2.87:** Ángulo y acimut en el eje 314 al 315

Al tratarse de una poligonal encuadrada donde se conocen las coordenadas del punto inicial y final obtenidos por diferentes métodos como triangulación o poligonación, conocemos las coordenadas reales del vértice final 315 que corresponden a (24713.33, 35975.43) y las coordenadas calculadas a través de la poligonal que corresponden a (24713.50, 35975.14), expresadas en metros, por lo que el error de cierre se cifra en:

$$\varepsilon_x = X_{calculada} - X_{real} = 0.17 \text{ m}$$

$$\varepsilon_y = Y_{calculada} - Y_{real} = -0.29 \text{ m}$$

que bastará con repartir de forma expedita entre los vértices involucrados en el itinerario para arbitrar repercusiones en error por vértice inferiores a 10 cm totalmente aceptables.

Los métodos de compensación expedita de una poligonal tienen tres variantes:

1. Mediante reparto proporcional a la longitud de los lados de cada eje.

2. Mediante reparto proporcional respecto a las proyecciones o incrementos.

En este segundo caso existen dos métodos:

- (a) Reparto del error en X con respecto al  $\Delta X$  y reparto del error en Y con respecto al  $\Delta Y$
- (b) Reparto del error en X con respecto al  $\Delta Y$  y reparto del error en Y con respecto al  $\Delta X$

Existe un método expedito más sencillo que consiste en repartir el error total tanto en X como en Y dividiendo por el número de tramos siempre que las distancias entre ejes sean más o menos homogéneas, que es precisamente el método que se utilizó en el trabajo de 1929, muy probablemente por las limitaciones de cálculo en la época y que corresponde a las columnas  $\epsilon_{x_4}$  y  $\epsilon_{y_4}$  de la tabla 2.9.

En la tabla 2.9 se muestran todos los métodos de compensación estudiados, siendo las columnas  $\epsilon_{x_1}$  y  $\epsilon_{y_1}$  derivadas del método de compensación 1, las  $\epsilon_{x_2}$  y  $\epsilon_{y_2}$  correspondientes al método 2a y las  $\epsilon_{x_3}$  y  $\epsilon_{y_3}$  al método 2b. Las coordenadas compensadas de los vértices de los ejes del itinerario aparecen reflejadas en la tabla 2.10.

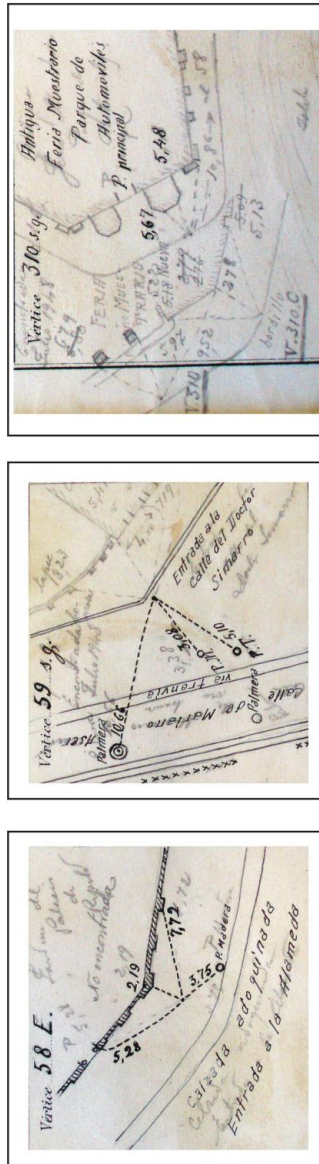
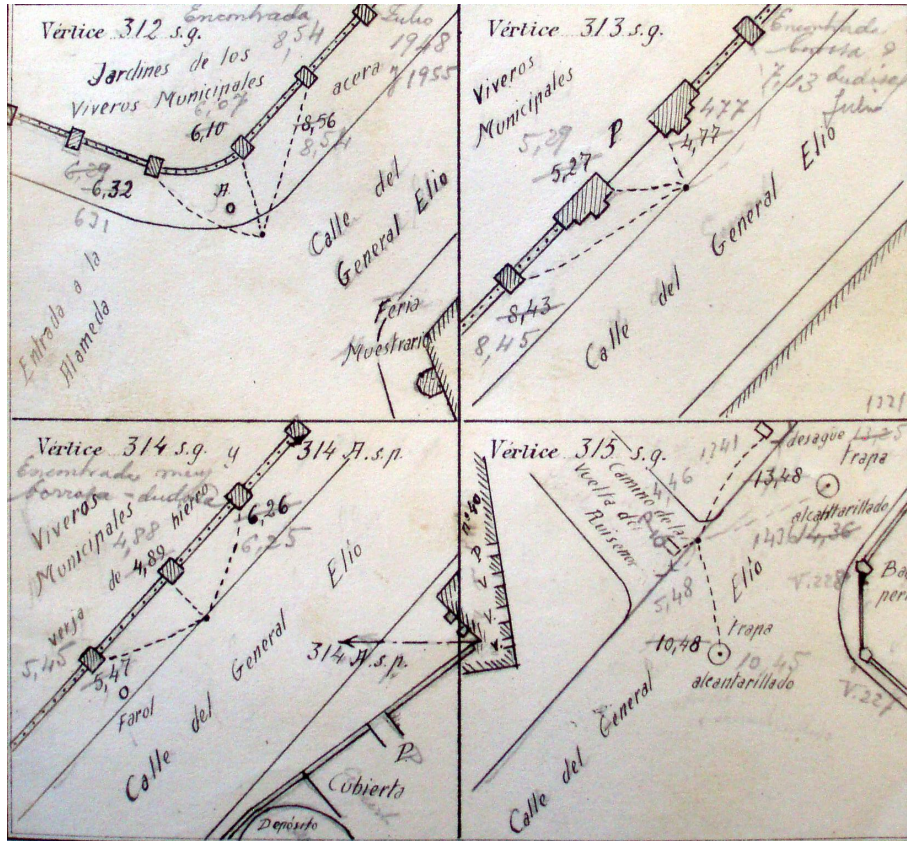


Figura 2.88: Croquis de los puntos 58, 59 y 310 del Itinerario





**Figura 2.89:** Croquis de los puntos 312, 313, 314 y 315 del Itinerario

En definitiva, y aunque la red poligonométrica tiene teóricamente una importancia menor que la trigonométrica para nuestro trabajo, es muy satisfactorio y en ocasiones, decisivo, comprobar que sus vértices pueden también emplearse en la densificación del modelo digital que propondremos con aproximación cifrable y aceptable, inferior al límite de percepción gráfica.

**Tabla 2.9:** Compensación expedita de coordenadas en poligonal según cuatro métodos diferentes

<i>Nº de tramo</i>	<i>Distancia</i>	$ \Delta_x $	$ \Delta_y $	$\epsilon_{x_1}$	$\epsilon_{x_2}$	$\epsilon_{x_3}$	$\epsilon_{x_4}$	$\epsilon_{y_1}$	$\epsilon_{y_2}$	$\epsilon_{y_3}$	$\epsilon_{y_4}$
1	46.40	0.76	46.39	0.022	0.001	0.018	0.028	0.001	0.037	0.03	0.048
2	136.72	83.13	83.44	0.04	0.072	0.053	0.056	0.12	0.067	0.09	0.097
3	166.10	99.97	107.53	0.051	0.087	0.065	0.085	0.148	0.086	0.065	0.145
4	259.08	132.70	194.55	0.092	0.116	0.101	0.113	0.197	0.157	0.17	0.193
5	323.23	155.46	254.53	0.12	0.135	0.126	0.142	0.23	0.205	0.215	0.242
6	435.14	195.23	359.13	0.17	0.17	0.17	0.17	0.29	0.29	0.29	0.29

**Tabla 2.10:** Coordenadas absolutas y relativas del Itinerario

<i>Vértice</i>	$X_{aproximada}$	$X_{compensada}$	$Y_{aproximada}$	$Y_{compensada}$
59	-	24715.69	-	35616.11
58	24717.45	24717.43	35662.40	35662.44
310	24635.08	24635.03	35699.45	35699.54
312	24618.24	24618.16	35723.54	35723.68
313	24650.97	24650.86	35810.56	35810.37
314	24673.73	24673.59	35870.54	35870.78
315	24713.50	24713.33	35975.14	35975.43

## 2.7 Red Altimétrica

La red de nivelación de precisión en España, necesaria para el levantamiento primero del MTN y en general de cualquier cartografía, se inició en 1872 y concluyó en 1924. Para ello se utilizó el nivel de la firma Kern con sensibilidad de 4" sexagesimales (de Cifuentes Rodríguez, 1924). Las instrucciones para los trabajos geodésicos de 1878 redactadas por el Instituto Geográfico fijaban como tolerancia máxima en el cierre de un polígono de doble nivelación  $5mm \cdot \sqrt{K}$ , donde  $K$  es la longitud del polígono de nivelación en  $Km$ .

En la XVII Conferencia General de la Asociación Geodésica Internacional celebrada en Hamburgo en Septiembre de 1912, se normalizó la Figura de Red de Alta Precisión cuyas tolerancias se fijaron en  $1 mm/Km$  de error probable accidental y sistemático  $0.2 mm/Km$ . Así en España se iniciaron estos trabajos

en 1926 y ultimaron en 1972.

Paralelamente, en el PPM de Valencia de 1929 era necesario dar cotas con valores referidos al nivel del mar, por lo que se necesitaba disponer de un punto altimétrico fundamental, de altitud conocida, al que pudieran referirse los desniveles calculados. Esta señal fundamental de la red (señal NP-1) se estableció en el Ayuntamiento de Alicante, a 3.4095 m sobre el nivel medio del mar en el puerto de la misma población, definido por mareógrafo, en promedio obtenido entre junio de 1870 y junio de 1872 (Chueca Pazos et al., 2008).

El Instituto Geográfico desarrolla la manera de proceder en los trabajos de nivelación que describe en las instrucciones publicadas en 1907, en las que nos apoyamos para realizar nuestro estudio. El procedimiento descrito propone que se ejecuten líneas de doble y simple nivelación por alturas e itinerarios de relleno por pendientes con brújula taquimétrica (VV.AA., 1907).

Las líneas de doble nivelación refieren toda la nivelación a la red de precisión (Figuras 2.90 y 2.94). Sobre ellas se apoyan las de simple nivelación (Figuras 2.98, 2.99 y 2.100) y en todas ellas el relleno (Figura 2.93). Las tolerancias son  $30mm \cdot \sqrt{K(Km)}$  de discrepancia de cierre en cada tramo y  $40mm \cdot \sqrt{K(Km)}$  en el total, en la línea de ida y la de vuelta de una doble nivelación, mientras que en las simples se acepta  $70mm \cdot \sqrt{K(Km)}$  (Chueca Pazos et al., 2008; VV.AA., 1907).

Respecto al instrumental utilizado en los trabajos de nivelación, sabemos que en el año 1925 el Instituto Geográfico contaba ya con cuatro niveles de precisión modelo III de las casas Zeiss y Wild (Figura 2.96), de burbuja partida, retículo de cuña y placa plano-paralela (Chueca Pazos et al., 2008). No sabemos con exactitud si el nivel de la casa Wild al que se refieren los documentos que hacen referencia a los trabajos de nivelación sencilla (Figura 2.95), se corresponde a este modelo, aunque dada la proximidad de la fecha es muy probable que se tratara de

INSTITUTO GEOGRÁFICO Y CATASTRAL

TRABAJOS TOPOGRÁFICOS. *Plano de Valencia*

NIVELACIÓN. *1*

PROVINCIA *Valencia*  
 REGIÓN *Región de Levante*  
 Brigada *9ª Brigada*  
 TÉRMINO MUNICIPAL *Valencia*

*Línea de doble nivelación, que principia en la señal n.º 21 en la estación de Alfara del Puerto y termina en la señal n.º 22 en la casilla n.º 8 del F.º de Barcelona Valencia, Sección 1.ª, 6.ª.*

*Altitudes obtenidas en las líneas de doble nivelación.*

Distancias entre cada dos puntos.	Altitudes.	Notas.	Distancias entre cada dos puntos.	Altitudes.	Notas.
		<i>Señal n.º 21 estación Alfara del Puerto</i>		<i>8,387</i>	<i>Verde 171</i>
		<i>por Benifonso</i>		<i>8,295</i>	<i>" 135</i>
<i>12,928</i>		<i>Verde 254</i>		<i>8,218</i>	<i>" 124</i>
<i>10,342</i>		<i>" 253</i>		<i>8,246</i>	<i>" 123</i>
<i>10,425</i>		<i>" 252</i>		<i>7,949</i>	<i>" 122</i>
<i>10,408</i>		<i>" 250</i>		<i>7,686</i>	<i>" 121</i>
<i>10,789</i>		<i>" 249</i>		<i>7,381</i>	<i>" 120</i>
<i>10,867</i>		<i>" 248</i>		<i>7,163</i>	<i>" 99</i>
<i>11,290</i>		<i>" 146</i>		<i>7,126</i>	<i>" 98</i>
<i>9,870</i>		<i>" 145</i>		<i>6,804</i>	<i>" 97</i>
<i>9,630</i>		<i>" 144</i>		<i>6,768</i>	<i>" 176</i>
<i>9,035</i>		<i>" 143</i>		<i>6,939</i>	<i>" 177</i>
<i>8,857</i>		<i>" 142</i>		<i>6,754</i>	<i>" 178</i>
<i>8,390</i>		<i>" 141</i>		<i>6,926</i>	<i>" 179</i>
<i>8,300</i>		<i>" 140</i>		<i>6,994</i>	<i>" 180</i>
<i>8,095</i>		<i>" 139</i>		<i>6,868</i>	<i>" 181</i>
<i>7,875</i>		<i>" 138</i>		<i>6,870</i>	<i>" 182</i>
<i>7,906</i>		<i>" 175</i>		<i>6,747</i>	<i>" 184</i>
<i>8,036</i>		<i>" 174</i>		<i>6,678</i>	<i>" 8</i>
<i>8,253</i>		<i>" 170</i>		<i>6,240</i>	<i>" 7</i>
<i>8,539</i>		<i>" 170</i>			

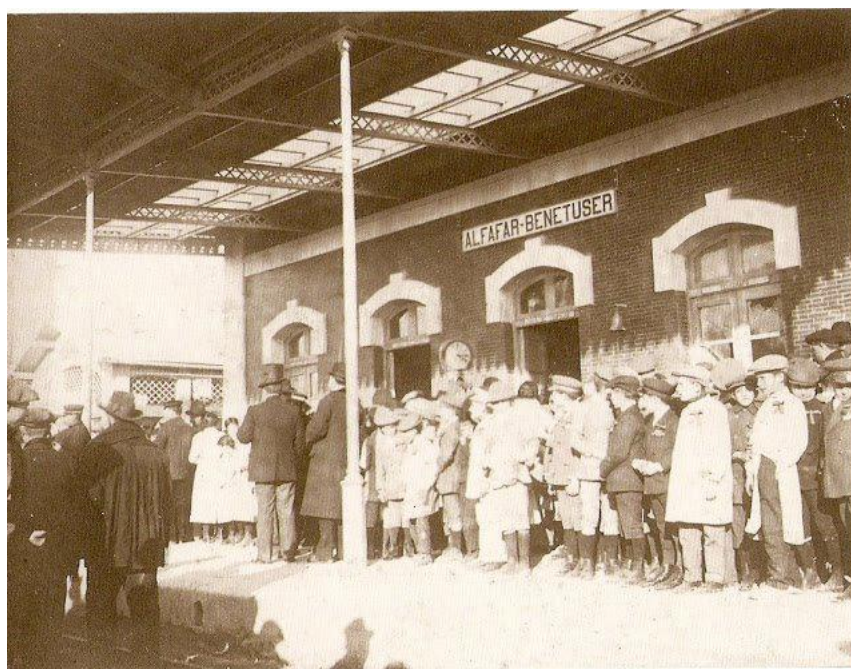
*Mod. T. 4.º*

Figura 2.90: Línea de doble nivelación que enlaza con puntos de nivelación de precisión



DÁTOS DE NIVELACIONES DE PRECISION.		Altitudes
VALENCIA.-	Iglesia de San Agustin: en el batiente de la puerta..	13.817
Id.	Casa Ayuntamiento: en el Primer escalon de piedra de la subida principal.....	13.321
Id.	Puente de Serranos: junto al pretil 0 del primer estribo del tajamar.....	18.256
TABERNES BLANQUES.-	Iglesia parroquial: en el batiente de la puerta.....	12.353
CUART DE POBLET.-	Iglesia parroquial: en el interior y junto a la puerta.....	29.979
VALENCIA.-	Universidad: sobre el batiente de la puerta interior a la derecha de la principal de entrada.....	11.787
Id.	Estacion nueva del ferrocarril del Norte: en el batiente de la puerta central de la fachada principal del anden.....	13.577
VIA FERREA DE VALENCIA A TARRAGONA.-	En el estribo S, extremo S, del puente sobre el Turia.....	9.107
VIA FERREA DE VALENCIA A TARRAGONA.-	En la tapa N de una atarjea entre los hectometros 4 y 5 del kilómetro 6.....	2.895
VIA FERREA DE VALENCIA A TARRAGONA.-	En el extremo S, imposta 0, de una alcantarilla inmediata al kilómetro 11.....	3.232
CABANAL.-	Estacion: en un sillar al pié de la fachada principal junto a la puerta de salida.....	3.381
EL MACHITRE.-	Estacion: en un sillar al pié de la fachada principal y en su centro.....	3.430

Figura 2.91: Cotas de los puntos que forman parte de la red de precisión



**Figura 2.92:** Punto de la red de alta precisión localizado en la Estación Alfajar-Benetúser







éste u otro de prestaciones similares. Como complemento del nivel necesitamos la mira para medir alturas. En ellas es preciso apreciar con los niveles hasta el milímetro. Así lo hace constar las instrucciones en su artículo 133.

*“ Es prescripción general, para toda clase de nivelaciones, que formen parte integrante de la observación el color correspondiente al decímetro en que se hace la lectura. En todas las lecturas de mira se apreciará el milímetro. ”*

Todas las grandes casas de instrumentos topográficos tenían sus propias miras, aunque la elegida como modelo oficial por el Instituto Geográfico (Figura 2.97), con la que se realizaron todas las nivelaciones de precisión y muy probablemente también los trabajos de nivelación del PPM de Valencia, es la que describimos a continuación. Esta mira es una regla de una sola pieza de tres metros de largo, 10 cm de ancho y 2 de espesor, provista por la parte posterior, de una costilla para darle rigidez y evitar alabeos. También dispone de dos manillas desmontables para sostenerla y de una plomada o nivel esférico para asegurar su verticalidad. Termina en cantoneras metálicas, la inferior con un pivote, que se apoya, al estacionar la mira, en un zócalo o pie de hierro de forma triangular, que lleva una abolladura semiesférica en el centro de la plancha y va provista de tres pinchos, a modo de patas. La mira, por tanto, no descansa sobre el suelo, sino en la abolladura del zócalo, que se clava en la tierra, y de este modo es posible girar la mira para la visual de frente y de espalda sin que varíe la altura, aunque sea en pequeñísimas magnitudes, como ocurriría en caso de apoyarla en el suelo. En el frente de la mira va dibujada la doble escala de centímetros blancos y negros y a un lado se señalan los decímetros, con numeración invertida, mientras por el otro, dejando una faja blanca intermedia, lleva otra nueva división

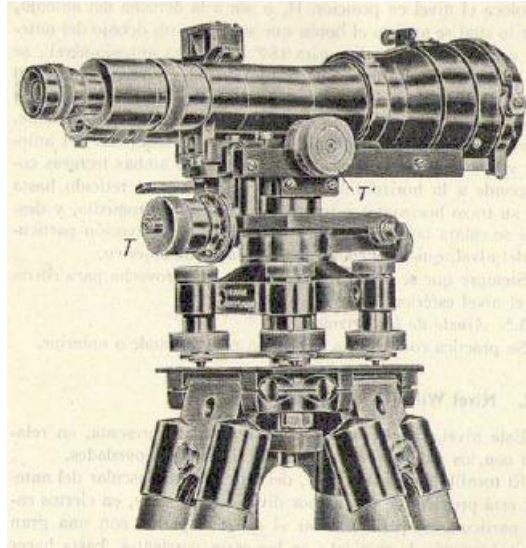
(1)

Folio núm. 1

Altitudes Metros	Notas
	1 = 81
	2 =
	3 =
	4 =
	Notas = El nivel con que se ha operado es el Wild n.º 372
	Las iniciales N. B. N., contiguas a esta casilla de "Colores", signi- ficar, respectivamente, Negro, Blanco, Rojo.
	Esta cote cuaderno de 152 folios y contiene 1588 citaciones.
	M. de Vera

Mod. T. 20. u.

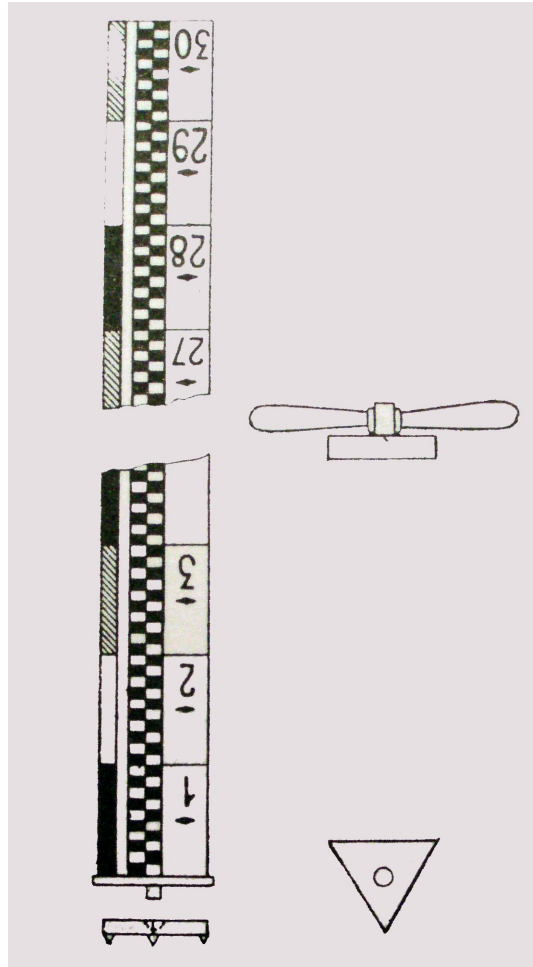
Figura 2.95: Instrumental utilizado en la nivelación sencilla



**Figura 2.96:** Nivel modelo III de la casa Wild

en decímetros, alternando los colores negro, blanco y rojo. Al hacer una lectura en la mira deberán anotarse los metros, decímetros, centímetros y milímetros que señale el hilo horizontal de la cruz filar y además el color del decímetro seccionado por dicho hilo. Esta disposición de los colores constituye un ingenioso y original sistema de impedir equivocaciones, evitando tener que volver al campo a rectificar después de terminado el trabajo (Dominguez García-Tejero, 1989). El número de decímetros de la lectura, si es múltiplo de tres, debía proyectarse en negro; si es múltiplo de tres más uno, en blanco; y los múltiplos de tres más dos, en rojo. Haciendo referencia de nuevo al artículo 133 de las instrucciones (VV.AA., 1907) (Figura 2.95).

En las Figuras 2.98, 2.99 y 2.100 están recogidos los puntos que forman parte de la poligonal estudiada en el apartado de planimetría. De ello se deriva que las referencias de ejes realizadas con brújula o taquímetro en campo para la



**Figura 2.97:** Modelo oficial de mira alimétrica del Instituto Geográfico (Imagen tomada de Topografía General y Aplicada, F.Domínguez)





Folio núm. 24

Elevación mód. m.	Niveladas de espalda		Niveladas de frente		Diferencias en - m. Metros
	Anterior Metros	Posterior Metros	Anterior Metros	Posterior Metros	
191.0828	N 1504	N 0678	N 0678	N 0678	
192.0260	N 1988	D 1288	D 1288	D 1288	0129
193	D 1472	N 1997	N 1997	N 1997	
194.0003	D 1474	D 1409	D 1409	D 1409	
195.0507	N 1997	D 0790	D 0790	D 0790	
196.0558	D 1650	N 1292	N 1292	N 1292	
197	D 1385	D 1428	D 1428	D 1428	0080
198.0682	D 1408	D 0754	D 0754	D 0754	
199.0196	D 1678	D 1482	D 1482	D 1482	
200.0642	D 1482	D 0820	D 0820	D 0820	
201.0190	N 1522	D 1222	D 1222	D 1222	
202	N 1267	N 1548	N 1548	N 1548	0285
203	D 1402	D 1429	D 1429	D 1429	0022

Altitudes Metros	Notas	
10.421	191 -	Nota de repunte al 65-A
10.483	6 = + 0.002	
10.519	" "	65 repunte + 56.
10.026	191 -	" " 66
10.025	" "	" " 66-A
10.212	194	" " 66
10.212	191	" " 66-A
10.830	191	" " 66
10.833	7 = + 0.003	
10.508	196	" " 66
10.508	197	" " 67
10.428	197	" " 67-A
10.427	198	Cor. al 10.18
11.111	198	" " 67-A
11.112	199	" " 67-A
10.633	199	" " 67-A
10.626	200	Cor. al 10.18
11.270	200	" " 202
11.285	8 = - 0.005	
10.516	201	" " 202
10.514	201	" " 202
10.533	202	" " 58
10.530	202	" " 59
10.509	203	" " 59
10.517	8 = + 0.002	

M. de 1925

Figura 2.99: Libreta de nivelación sencilla



Estación de observación		Nivelación de espalda		Nivelación de frente		Mpeoración	
Modelo	or +	vertical	horizontal	vertical	horizontal	or -	Metros
Metros	Metros	Metros	Metros	Metros	Metros	Metros	Metros
204	0795	N 1983	Q 0788	N 1914	Q 0788	0726	
209		Q 0288		Q 1770		0256	
206		N 1914		Q 1770			
209	0091	N 1868		Q 1770			
208	1701	Q 1770		N 0026			
209	0131	N 1868		Q 1770			
Sección de 158							
210		N 1550		Q 1744			
211		Q 1046		N 1140			
		2599		2882		0285	
212		Q 1204		Q 1788		0084	
217	1005	Q 2853		Q 1078			

Altitudes	Notas
Metros	
11.608	101 - Nivel de espalda de 187 de punto 310.
10.881	" "
10.882	" "
10.625	" "
11.906	" "
11.599	" "
13.410	" "
13.700	" "
11.229	" "
10.816	" "
10.579	" "
10.531	" "
10.448	" "
11.456	" "
11.416	" "

Folio núm. 2

Mod. T. 20. a

N. de 1023

Figura 2.100: Libreta de nivelación sencilla

planimetría (Figura 2.81) sirven de referencia también para la altimetría, siendo un trabajo simultáneo en campo aunque en gabinete sus cálculos sean independientes.

La compensación de los itinerarios de nivel se realiza siguiendo el mismo criterio que se establece en la poligonación, es decir, repartiendo los errores de cierre en cada tramo proporcionalmente al número de estaciones, y ésta puede verse facilitada mediante el dibujo de un croquis representativo de la poligonación, suponiendo que con el nivel se hubiese seguido el mismo camino (Figura 2.101).



Figura 2.101: Croquis auxiliar para la compensación expedita de la nivelación

## **Capítulo 3**

### **Análisis y estudio de redes en el sistema de referencia del PPM**

#### **3.1 Introducción. Ajuste gaussiano por Incrementos de Coordenadas**

En este capítulo se pretende cifrar la calidad de la red de triangulación primaria observada en 1929 y comprobar la tolerancia en precisión debida a la escala del levantamiento cifrada en 10 cm. Para ello aplicaremos el método gaussiano determinista por incrementos de coordenadas que nos permitirá determinar la precisión de la red y realizar un análisis de errores.

La ventaja principal que nos aporta este método frente a otros es conseguir la independencia entre las variables y la redundancia de observables que nos asegure la aplicación de ajustes gaussianos mínimo cuadráticos, lo que es posible separando las parejas de incrementos en subredes distintas, consiguiendo así matrices diagonales de varianzas y pesos, sin covarianzas.

Para llevar a cabo este objetivo se han estudiado diversas redes, aunque en ningún caso se ha pretendido ajustar la red completa observada en 1929. La práctica habitual en la época del levantamiento en la que no era asequible realizar ningún ajuste mínimo cuadrático, era comprobar en varios vértices intermedios de la red la determinación de sus coordenadas por diferentes caminos y compensar sus discrepancias mediante el cálculo de las coordenadas medias. Desde una

óptica actual, esa práctica nos plantea el problema de la posible introducción en el ajuste de errores inadmisibles repartidos por la red sin que sepamos su localización. Es por esta razón, que las redes estudiadas han sido siempre fragmentos derivados de la red de triangulación primaria de 1929.

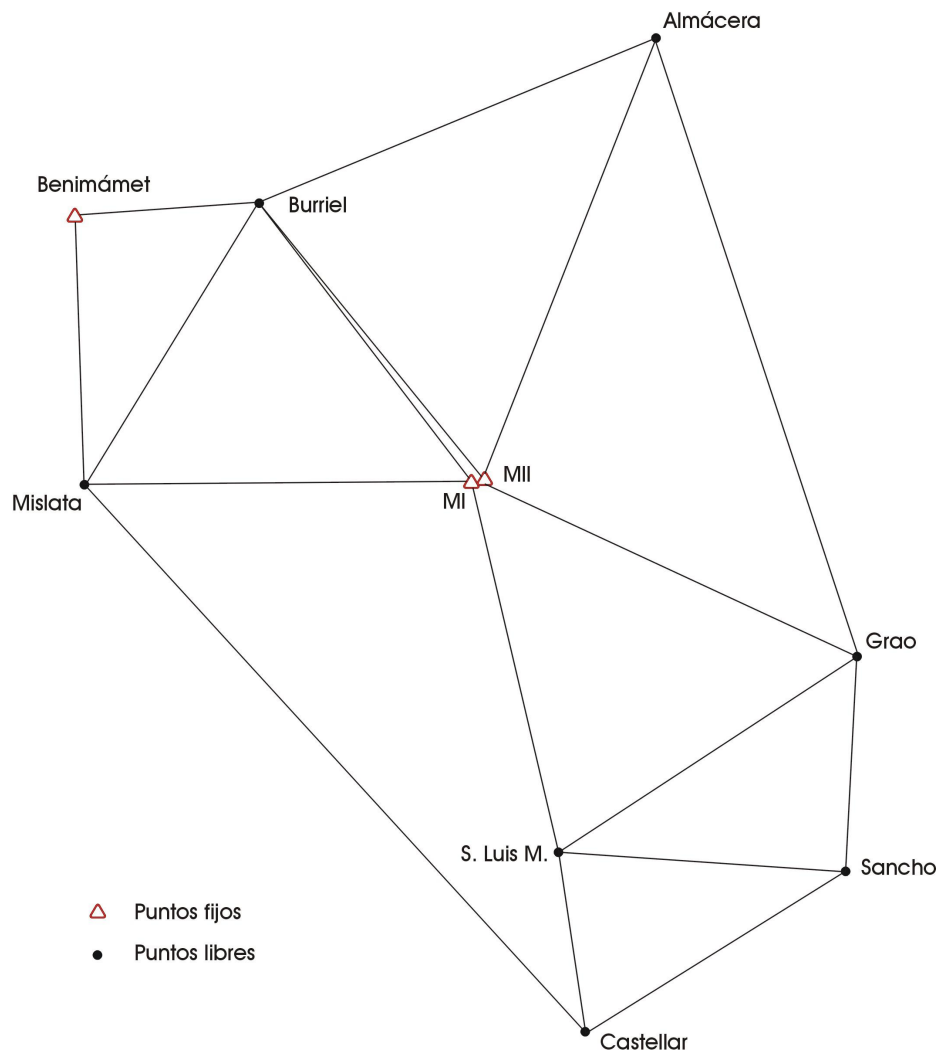
De todas las redes parciales estudiadas, se han escogido dos para su análisis en detalle por diferentes motivos. La primera de ellas por ofrecer el resultado más acorde con los estudios de precisión de la época, es decir el error detectado en la base de comprobación llamada C-D o base del Saler cifrado en 14.7 cm tal como apuntábamos en la sección 1.2.4. Y la segunda, por ofrecer la posibilidad de emplear el problema de diseño de orden dos que como veremos más adelante en este mismo apartado, es capaz de proporcionar ventajas significativas en la interpretación de los resultados.

### **3.1.1 Obtención del sistema de formas lineales por el método de Incrementos de coordenadas. Estudio de la Red formada por 14 formas lineales y 7 variables.**

A partir de los observables provenientes de lecturas de azimuth y distancia recuperados de la campaña de observación en 1929 de la red de triangulación primaria, se propone su ajuste según la teoría del método gaussiano determinista por incrementos de coordenadas extendido al caso más general de más de un vértice libre, siguiendo el protocolo propuesto y desarrollado con detalle en la tesis de Jiménez Martínez (2013).

La red a ajustar en este primer caso corresponde a la de la Figura 3.1. Los vértices escogidos como libres son *Burriel*, *Mislata*, *Grao*, *Almácer*, *Sancho*, *Castellar* y *S. Luis M.* y como vértices fijos tenemos *Benimámet*, *Miguelete I* y *Miguelete II*.

En el primer paso obtendremos el sistema de formas lineales que matricial-



**Figura 3.1:** Croquis de la primera red en estudio

mente se expresa como

$$Ax = K + R$$

mediante el cual se realiza el ajuste de la red por mínimos cuadrados y proporciona directamente las correcciones de coordenadas a los vértices libres *Almácer*, *Burriel*, *Castellar*, *Grao*, *Mislata*, *Sancho* y *S. Luis M.*, y sus coordenadas compensadas.

### 3.1.2 Coordenadas aproximadas

Las coordenadas aproximadas que se emplean son las calculadas por el grupo de operadores que realizaron la medición en 1929 disponibles en el estadillo recuperado que muestra la Figura 3.2.

**Tabla 3.1:** Coordenadas aproximadas en metros

<i>Vértice</i>	$X_a$	$Y_a$
Almácer	25616.76	39589.87
Burriel	21930.63	38069.11
Castellar	24961.98	30377.44
Grao	27488.37	33846.34
Mislata	20310.29	35452.40
Sancho	27377.67	31860.15
S. Luis M	24723.88	32034.15

### 3.1.3 Formas lineales específicas de los incrementos de coordenadas. La matriz de diseño $A$ de elementos exactos, el vector $K$ de términos independientes y la matriz de pesos

Los observables genéricos los escribimos con la notación  $\Delta X_{ij}$ ,  $\Delta Y_{ij}$ ,  $\Delta Z_{ij}$ , y son las proyecciones sobre los ejes de la distancia entre los vértices  $V_i (X_i, Y_i, Z_i)$  y  $V_j$



VERTICES	COORDENADAS	
	X.	Y.
A.	20000,00	40000,00
B.	19666,57	40384,44
Desamparados	19638,94	39487,40
Huals	19753,70	40542,83
Codella	20837,52	40309,15
Benimamet	20225,56	37946,63
Barriel	21930,63	38069,11
Mislata	20310,29	35452,40
Miguelote (1 <sup>a</sup> O.)	23908,07	35473,72
Tormo	22563,03	33613,49
<del>XXXXXX</del>	<del>XXXXXX</del>	<del>XXXXXX</del>
Rocafí	20857,45	32372,13
Almoera	25618,76	39589,57
Miguelote II	23915,46	35480,59
Malvarrosa	27994,72	36417,30
Grac	27488,37	33846,34

$$\begin{array}{r} 23908,07 \\ 23915,46 \\ \hline 07,39 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35473,72 \\ 35480,59 \\ \hline 6,87 \end{array}$$

$$3682,81$$

Figura 3.2: Coordenadas aproximadas de una parte de la red de triangulación primaria

$(X_j, Y_j, Z_j)$  que forman una línea de observación genérica.

A partir de las observaciones clásicas que se realizaron en 1929, hemos calculado los incrementos entre los vértices de la red escogida. Esos incrementos constituyen los observables que forman el sistema lineal de ecuaciones del ajuste gaussiano determinista de la red.

### Formas lineales de incrementos de coordenadas

Entre dos vértices genéricos  $V_i$  y  $V_j$  se podrá escribir:

$$x_i - x_j = \Delta X_{ij_o} - \Delta X_{ij_a} + R_{x_{ij}} \quad (3.1)$$

$$y_i - y_j = \Delta Y_{ij_o} - \Delta Y_{ij_a} + R_{y_{ij}} \quad (3.2)$$

Siendo  $x_i, y_i, x_j, y_j$  las incógnitas, que equivalen a las correcciones que queremos calcular de los vértices libres  $V_i, V_j$ ;  $\Delta X_{ij_o}, \Delta Y_{ij_o}$ , los valores observados y  $\Delta X_{ij_a}, \Delta Y_{ij_a}$  los valores aproximados (Tabla 3.1) de los que se obtienen los valores calculados.

Se detalla a continuación cómo se obtiene la matriz  $A$  y el vector  $K$  de la red en estudio.

### Matriz de diseño $A$ y vector $K$

Las variables desconocidas son las correcciones  $(x_i, x_j)$  y  $(y_i, y_j)$ . La covarianza a priori entre  $(x_i, y_i)$  y entre  $(x_j, y_j)$  se define en teoría como

$$\hat{\sigma}_{\Delta X_{ij_o}, \Delta Y_{ij_o}} = \frac{\Sigma(\Delta X_{ij_o} - \bar{\Delta X}_{ij_o}) \cdot (\Delta Y_{ij_o} - \bar{\Delta Y}_{ij_o})}{n_{ij} - 1}$$

Esta covarianza se puede evitar separando en dos subsistemas el ajuste de la red denominados  $S_1$  para las variables  $(x_i, x_j)$  y  $S_2$  para las variables  $(y_i, y_j)$ .

A modo de ejemplo calculamos paso a paso los elementos de la matriz  $A_1$  y el vector  $K_1$  que hacen referencia a la línea  $\Delta X$  *Burriel – Miguelete I*, extensible al resto de observables.

La ecuación del observable incremento de coordenada  $X$  entre *Burriel (B)* y *Miguelete I (MI)* siguiendo la expresión 3.1 es:

$$x_{MI} - x_B = 0 - x_B = \Delta X_{B-MI(o)} - \Delta X_{B-MI(a)} + R_{x_{B-MI}}$$

En el conjunto del sistema de ecuaciones se puede expresar como:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & & & & & \ddots \\ \vdots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \ddots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{Burriel} \\ x_{Mislata} \\ x_{Grao} \\ x_{Almácer} \\ x_{Sancho} \\ x_{Castellar} \\ x_{S.LuisM.} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$$

La corrección  $x_{MI}$  es igual a cero, porque el vértice *Miguelete I* lo hemos considerado fijo.

$\Delta X_{B-MI(o)} = -1977.44 m$ , corresponde al valor calculado a través del lado y acimut del triángulo parcial corregido según muestra la Figura 3.3 del cálculo del triángulo numerado como 7 en el estadillo de 1929.

$\Delta X_{B-MI(a)} = -1977.64 m$ , se obtiene a partir del valor calculado a través del lado y acimut del triángulo parcial sin corregir.



Y el valor del elemento del vector  $K$  del observable  $\Delta X$  *Burriel – Miguelete I* será la diferencia entre el incremento observado y calculado:

$$K_1 = \Delta X_{B-MI(o)} - \Delta X_{B-MI(a)} = -1977.44 - (-1977.64) = 0.2 m$$

La red está constituida por 28 formas lineales, las catorce primeras formarán la matriz  $A_1$  y las catorce últimas la matriz  $A_2$ , con sus vectores  $K_1$  y  $K_2$  respectivamente. Las líneas observadas se encuentra en la Tabla 3.2.

**Tabla 3.2:** Líneas observadas en la subred 1 [ $\Delta X$ ] y subred 2 [ $\Delta Y$ ]

Número	Forma lineal
1	<i>Mislata – Miguelete I</i>
2	<i>Burriel – Miguelete I</i>
3	<i>Miguelete II – Grao</i>
4	<i>Almácer – Miguelete II</i>
5	<i>Benimámet – Burriel</i>
6	<i>Benimámet – Mislata</i>
7	<i>Grao – Sancho</i>
8	<i>Sancho – Castellar</i>
9	<i>Burriel – Almácer</i>
10	<i>S.Luis M. – Sancho</i>
11	<i>S.Luis M. – Castellar</i>
12	<i>Miguelete II – S.Luis M.</i>
13	<i>Grao – S.Luis M.</i>
14	<i>Burriel – Miguelete II</i>

Las dos expresiones matriciales completas de los sistemas de formas lineales de nuestra red con 7 vértices libres y 3 ligados se observan en las ecuaciones 3.3 y 3.4.

$$A_1 \cdot x = K_1 \quad (3.3)$$

$$A_2 \cdot y = K_2 \quad (3.4)$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{\text{Burriel}} \\ x_{\text{Misalta}} \\ x_{\text{Grao}} \\ x_{\text{Almácer}} \\ x_{\text{Sancho}} \\ x_{\text{Castellar}} \\ x_{\text{S.LuisM.}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.3512 \\ 0.1998 \\ 0.2649 \\ -0.1326 \\ 0.1438 \\ 0.0079 \\ -0.0161 \\ -0.3234 \\ 0.3209 \\ 0.3268 \\ 0.0196 \\ 0.0673 \\ -0.2431 \\ 0.1871 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{\text{Burriel}} \\ y_{\text{Misalta}} \\ y_{\text{Grao}} \\ y_{\text{Almácer}} \\ y_{\text{Sancho}} \\ y_{\text{Castellar}} \\ y_{\text{S.LuisM.}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0021 \\ -0.2627 \\ -0.1208 \\ -0.3210 \\ 0.0103 \\ -0.2285 \\ -0.2886 \\ -0.1982 \\ 0.1324 \\ -0.0215 \\ -0.1365 \\ -0.2869 \\ -0.1595 \\ -0.2445 \end{pmatrix}$$

Una característica destacable de las matrices de diseño  $A_1$  y  $A_2$  es que están formadas por elementos exactos, como sucede en las redes GNSS y de nivelación (Strang and Borre, 1997). Los coeficientes pueden tener valores 0, 1 y -1.

### Matriz de Pesos $P$

Los pesos en este caso se consideran iguales, ya que no es posible establecer una ponderación con los datos de observación de 1929 al contar únicamente con dos observaciones en CD y CI respectivamente. Por tanto las matrices de pesos serán matrices identidad.

### 3.2 Síntesis y resultados del ajuste de la Red formada por 14 formas lineales y 7 variables, por el método de Incrementos de Coordenadas

Para facilitar el seguimiento del análisis de los resultados del ajuste de la Red, se adjunta la Tabla 3.3 donde se muestra una síntesis de la formulación empleada, centrada en matrices de criterio, análisis de fiabilidad interna y externa. Se presentan aquí los resultados más relevantes del ajuste de la Red.

**Tabla 3.3:** Formulación para el análisis del ajuste de redes

Parámetro	Notación	Formulación
Matriz varianza covarianza de parámetros	$\sigma_{xx}$	$\sigma_o^2 \cdot (A^T P A)^{-1}$
Matriz varianza covarianza de residuos	$\sigma_{RR}$	$\sigma_o^2 \cdot (P^{-1} - A S^{-1} A^T)$
Matriz varianza covarianza de observables compensados	$\sigma_{CC}$	$\sigma_o^2 \cdot (P^{-1} - Q_{RR})$
Residuo estandarizado	$\omega_i$	$\frac{R_i}{\sigma_{Ri}}$
Número de Redundancia	$r_i$	$p_i \cdot q_i$
Mínimo error detectable	$\nabla_{oi}$	$\frac{\delta_o \cdot \sigma_C}{\sqrt{r_i}}$
Parámetro de homogeneidad (Fiabilidad interna)	$\mu_{INi}$	$\frac{\delta_o}{\sqrt{r_i}}$
Parámetro de homogeneidad (Fiabilidad externa)	$\mu_{EXi}$	$\delta_o \cdot \frac{1 - r_i}{r_i}$
Vector de error mínimo	$\nabla_{Xoi}$	$(A^T P A)^{-1} A^T P e_i \nabla_{oi}$



### 3.2.1 Análisis de resultados del ajuste

#### Matrices $S$ de ecuaciones normales

Las matrices  $S$  de la subredes 1 y 2 respectivamente se muestran a continuación.

$$S_1 = A_1^T P A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = A_2^T P A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 3 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

#### Vectores de variables y residuos. Varianzas a posteriori

Los vectores de variables o parámetros de las subredes 1 y 2 son las correcciones que aplicaremos a las coordenadas aproximadas de los vértices libres de los que partíamos según la tabla 3.4.

Conocidas las coordenadas aproximadas de los vértices libres según la tabla 3.1,

**Tabla 3.4:** Variables o parámetros en metros

<i>Vértices</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
Burriel	-0.0964	0.1748
Mislata	-0.1717	-0.1153
Grao	0.2972	-0.1040
Almácer	0.1786	0.3141
Sancho	0.3327	-0.3356
Castellar	0.0319	-0.4870
S.Luis M	0.0349	-0.3037

podemos establecer las coordenadas compensadas de los vértices libres de la red como se observa en la tabla 3.5. Las desviaciones típicas y varianzas de la medida de peso unidad se indican en la tabla 4.6 y los residuos del ajuste en la tabla 3.7.

**Tabla 3.5:** Coordenadas aproximadas, correcciones y coordenadas compensadas de los vértices libres en metros

<i>Vértices</i>	$X_a$	$x$	$X$	$Y_a$	$y$	$Y$
Burriel	21930.63	-0.0964	21930.53	38069.11	0.1748	38069.28
Mislata	20310.29	-0.1717	20310.12	35452.40	-0.1153	35452.28
Grao	27488.37	0.2972	20310.67	33846.34	-0.1040	35452.24
Almácer	25616.76	0.1786	25616.94	39589.87	0.3141	39590.18
Sancho	27377.67	0.3327	27378.00	31860.15	-0.3356	31859.81
Castellar	24961.98	0.0319	24692.01	30377.44	-0.1040	30377.34
S.Luis M	24723.88	0.0349	24723.91	32034.15	-0.3037	32033.85

**Tabla 3.6:** Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad

<i>Subred</i>	$\sigma [m]$	$\sigma^2 [m^2]$
S1	0.15	$2.18 \cdot 10^{-2}$
S2	0.10	$1.08 \cdot 10^{-2}$

**Tabla 3.7:** Residuos ( $R_i$ ) de las Subredes en metros

<i>Línea observada</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
<i>Mislata – Miguelete I</i>	-0.1796	0.1132
<i>Burriel – Miguelete I</i>	-0.1034	0.0879
<i>Miguelete II – Grao</i>	0.0323	0.0169
<i>Almácer – Miguelete II</i>	-0.0460	0.0069
<i>Benimámet – Burriel</i>	-0.2401	0.1645
<i>Benimámet – Mislata</i>	-0.1796	0.1132
<i>Grao – Sancho</i>	0.0516	0.0570
<i>Sancho – Castellar</i>	0.0226	0.0467
<i>Burriel – Almácer</i>	-0.0460	0.0069
<i>S.Luis M. – Sancho</i>	-0.0290	-0.0103
<i>S.Luis M. – Castellar</i>	-0.0226	-0.0467
<i>Miguelete II – S.Luis M.</i>	-0.0323	-0.0169
<i>Grao – S.Luis M.</i>	-0.0193	-0.0402
<i>Burriel – Miguelete II</i>	-0.0908	0.0697

### Matrices de criterio

Las matrices varianza covarianza son:

$$\sigma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0062 & 0 & 0 & 0.0031 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0109 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0135 & 0 & 0.0104 & 0.0093 & 0.0083 \\ 0.0031 & 0 & 0 & 0.0124 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0104 & 0 & 0.0197 & 0.0155 & 0.0114 \\ 0 & 0 & 0.0093 & 0 & 0.0155 & 0.0249 & 0.0124 \\ 0 & 0 & 0.0083 & 0 & 0.0114 & 0.0124 & 0.0135 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0031 & 0 & 0 & 0.0015 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0054 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0067 & 0 & 0.0051 & 0.0046 & 0.0041 \\ 0.0015 & 0 & 0 & 0.0061 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0051 & 0 & 0.0097 & 0.0077 & 0.0056 \\ 0 & 0 & 0.0046 & 0 & 0.0077 & 0.0123 & 0.0061 \\ 0 & 0 & 0.0041 & 0 & 0.0056 & 0.061 & 0.0067 \end{pmatrix}$$

Los semiejes de la elipse de error de los vértices *Burriel*, *Mislata*, *Grao*, *Almácer*, *Sancho*, *Castellar* y *S. Luis M.*, se calculan a partir de estas matrices varianza covarianza y se encuentran en la tabla 3.8.

**Tabla 3.8:** Semiejes de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma_x$	$\sigma_y$
Burriel	0.0787	0.0557
Mislata	0.1044	0.0735
Grao	0.1162	0.0819
Almácer	0.1114	0.0781
Sancho	0.1404	0.0985
Castellar	0.1549	0.1109
S.Luis M	0.1162	0.0819

Los valores obtenidos en la diagonal de la matriz varianza covarianza de las variables nos permiten estimar los errores de los vértices en estudio. Las desviaciones típicas alcanzan valores próximos a los 10 cm (Tabla 3.8) así se puede concluir que la calidad de la triangulación de la época es la prevista por la escala del mapa final.

### Estudio de la Fiabilidad Interna

El test de Baarda se utiliza en la exploración de posibles errores groseros cometidos en el ajuste de la Red. Para ello se seleccionan los parámetros que se consideran de aplicación general,  $\alpha = 0.001$ ,  $\beta = 0.80$  y parámetro de traslación asociado  $\delta_0 = 4.12$ . En el caso de que el resultado no fuera satisfactorio pueden realizarse pruebas con las ternas de valores que se muestran en la Tabla 3.9.

**Tabla 3.9:** Parámetros en la aplicación del test de Baarda

$\alpha$	$\beta$	$\delta_0$
0.050	0.80	2.80
0.025	0.80	3.10
0.001	0.80	4.12
0.050	0.90	3.24
0.025	0.90	3.52
0.001	0.90	4.57

Un residuo estandarizado que cumple  $\omega_i \geq 3.29$  (ver Tabla 3.3) se encuentra en situación de rechazo.

**Tabla 3.10:** Test de Baarda subred 1

Observación	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	-0.1796	0.1043	-1.7217
2	-0.1034	0.1247	-0.8294
3	0.0323	0.0910	0.3553
4	-0.0460	0.0966	-0.4760
5	-0.2401	0.1247	-1.9262
6	-0.1796	0.1043	-1.7217
7	0.0516	0.0966	0.5344
8	0.0226	0.0910	0.2483
9	-0.0460	0.0966	-0.4760
10	-0.0290	0.1068	-0.2716
11	-0.0226	0.0910	-0.2483
12	-0.0323	0.0910	-0.3553
13	-0.0193	0.1068	-0.1803
14	-0.0908	0.1247	-0.7281

**Tabla 3.11:** Test de Baarda subred 2

<i>Observación</i>	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	0.1132	0.0733	1.5436
2	0.0879	0.0876	1.0030
3	0.0169	0.0640	0.2634
4	0.0069	0.0679	0.1017
5	0.1645	0.0876	1.8769
6	0.1132	0.0733	1.5436
7	0.0570	0.0679	0.8404
8	0.0467	0.0640	0.7304
9	0.0069	0.0679	0.1017
10	-0.0103	0.0750	-0.1373
11	-0.0467	0.0640	-0.7304
12	-0.0169	0.0640	-0.2634
13	-0.0402	0.0750	-0.5360
14	0.0697	0.0876	0.7951

En la subred 1 los valores se reparten dentro del intervalo [-1.9262, 0.5344] por debajo del umbral de rechazo 3.29, por lo tanto los observables son aceptados al completo (Tabla 3.10). En la subred 2 los valores se reparten en el intervalo [-0.7304, 1.8769] siendo igualmente aceptados como en el caso de la anterior subred (Tabla 3.11).

La Fiabilidad Interna de la red entendida como la capacidad de detección y control de posibles errores groseros en los observables, queda definida por tres elementos (Tabla 3.3):

- Números de redundancia  $r_i$
- Parámetros  $\mu_{INi}$  de homogeneidad de la Red
- Valores  $\nabla_{oi}$ , mínimo error detectable o índice de sensibilidad de la Red.

**Tabla 3.12:** Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros

<i>Lineas observadas</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
<i>Mislata – Miguelete I</i>	0.5	0.5
<i>Burriel – Miguelete I</i>	0.7143	0.7143
<i>Miguelete II – Grao</i>	0.3810	0.3810
<i>Almácer – Miguelete II</i>	0.4286	0.4286
<i>Benimámet – Burriel</i>	0.7143	0.7143
<i>Benimámet – Mislata</i>	0.5	0.5
<i>Grao – Sancho</i>	0.4286	0.4286
<i>Sancho – Castellar</i>	0.3810	0.3810
<i>Burriel – Almácer</i>	0.4286	0.4286
<i>S.Luis M. – Sancho</i>	0.5238	0.5238
<i>S.Luis M. – Castellar</i>	0.3810	0.3810
<i>Miguelete II – S.Luis M.</i>	0.3810	0.3810
<i>Grao – S.Luis M.</i>	0.5238	0.5238
<i>Burriel – Miguelete II</i>	0.7143	0.7143
Suma	7	7

Tanto en la Subred 1 como en la Subred 2 las redundancias son homogéneas y próximas a la redundancia media que en este caso corresponde a 0.5 El error máximo que puede deslizarse en nuestros observables en la subred 1 y no ser detectado corresponde a 0.7747 m en los observables 3, 8, 11 y 12, y en estos mismos observables en la subred 2 el error máximo deslizado y no detectado corresponde a 0.5446 m, según indican las Tablas 3.13 y 3.14.



**Tabla 3.13:** Fiabilidad interna subred 1

<i>Observación</i>	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.1043	0.7071	0.6077	5.8266
2	0.0788	0.8452	0.3843	4.8748
3	0.1161	0.6172	0.7747	6.6752
4	0.1115	0.6547	0.7017	6.2934
5	0.0788	0.8452	0.3843	4.8748
6	0.1043	0.7071	0.6077	5.8266
7	0.1115	0.6547	0.7017	6.2934
8	0.1161	0.6172	0.7747	6.7552
9	0.1115	0.6547	0.7017	6.2934
10	0.1018	0.7237	0.5794	5.6926
11	0.1161	0.6172	0.7747	6.6752
12	0.1161	0.6172	0.7747	6.6752
13	0.1018	0.7237	0.5794	5.6926
14	0.0788	0.8452	0.3843	4.8748

**Tabla 3.14:** Fiabilidad interna subred 2

<i>Observación</i>	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.0733	0.7071	0.4272	5.8266
2	0.0554	0.8452	0.2702	4.8748
3	0.0816	0.6172	0.5446	6.6752
4	0.0784	0.6547	0.4933	6.2934
5	0.0554	0.8452	0.2702	4.8748
6	0.0733	0.7071	0.4272	5.8266
7	0.0784	0.6547	0.4933	6.2934
8	0.0816	0.6172	0.5446	6.6752
9	0.0784	0.6547	0.4933	6.2934
10	0.0716	0.7237	0.4073	5.6926
11	0.0816	0.6172	0.5446	6.6752
12	0.0816	0.6172	0.5446	6.6752
13	0.0716	0.7237	0.4073	5.6926
14	0.0554	0.8452	0.2702	4.8748

### Estudio de la Fiabilidad Externa

La Fiabilidad Externa establece la influencia de los errores deslizados en los observables sobre los valores ajustados de parámetros o variables, quedando definida por los siguientes elementos (ver Tabla 3.3):

- Parámetros  $\mu_{EXi}$  de homogeneidad de la Red
- Vectores  $\nabla_{Xoi}$  de errores mínimos detectables en variables o parámetros a través del test de Baarda ocasionado por un error grosero localizado en un observable  $O_i$

El error no detectado  $\nabla_{oi}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable según los valores de los vectores  $\nabla_{Xoi}$  calculados, en los que  $e_i = (0, 0, \dots, 1, \dots, 0)^T$  es un vector que permite evaluar el efecto del mínimo error no detectado en la observación de orden  $i$ . Se muestran en las tablas 3.17 y 3.18. Así el error no detectado afectaría de media en décimas de metro a las variables. Los parámetros de homogeneidad de la red ofrecen información acerca del nivel de control entre unas zonas y otras. Los valores muy altos ofrecen una merma en la calidad, siendo deseables los valores bajos en este parámetro. Las tablas 3.15 y 3.16 muestran unos parámetros bastante homogéneos en las dos subredes analizadas.

**Tabla 3.15:** Fiabilidad externa subred 1

<i>Observación</i>	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.7071	4.1200
2	0.5345	2.6057
3	0.7868	5.2520
4	0.7560	4.7574
5	0.5345	2.6057
6	0.7071	4.1200
7	0.7559	4.7574
8	0.7868	5.2520
9	0.7559	4.7574
10	0.6901	3.9283
11	0.7868	5.2520
12	0.7868	5.2520
13	0.6901	3.9283
14	0.5345	2.6057

**Tabla 3.16:** Fiabilidad externa subred 2

<i>Observación</i>	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.7071	4.1200
2	0.5345	2.6057
3	0.7868	5.2520
4	0.7559	4.7574
5	0.5345	2.6057
6	0.7071	4.1200
7	0.7559	4.7574
8	0.7868	5.2520
9	0.7559	4.7574
10	0.6901	3.9283
11	0.7868	5.2520
12	0.7868	5.2520
13	0.6901	3.9283
14	0.5345	2.6057

**Tabla 3.17:** Vectores de fiabilidad externa  $\nabla_{X_{oi}}$  subred 1

<i>Observación</i>	$x_{Burriel}$	$x_{Mislata}$	$x_{Grao}$	$x_{Almácer}$	$x_{Sancho}$	$x_{Castellar}$	$x_{S.Luis M.}$
1	0	-0.3038	0	0	0	0	0
2	-0.1098	0	0	-0.0549	0	0	0
3	0	0	0.4796	0	0.3689	0.3320	0.2951
4	-0.1002	0	0	-0.4010	0	0	0
5	0.1098	0	0	0.0549	0	0	0
6	0	0.3038	0	0	0	0	0
7	0	0	-0.1002	0	0.3007	0.2005	0.1002
8	0	0	-0.0369	0	-0.1476	0.3320	0.0369
9	-0.1002	0	0	0.3007	0	0	0
10	0	0	0.0552	0	0.2207	0.0828	-0.0522
11	0	0	0.0369	0	0.1476	0.4427	-0.0369
12	0	0	0.2951	0	0.4058	0.4427	0.4796
13	0	0	-0.1380	0	0.0276	0.0828	0.1380
14	-0.1098	0	0	-0.0549	0	0	0

**Tabla 3.18:** Vectores de fiabilidad externa  $\nabla_{Y_{oi}}$  subred 2

<i>Observación</i>	$y_{Burriel}$	$y_{Mislata}$	$y_{Grao}$	$y_{Almácer}$	$y_{Sancho}$	$y_{Castellar}$	$y_{S.Luis M.}$
1	0	-0.2136	0	0	0	0	0
2	-0.0772	0	0	-0.0386	0	0	0
3	0	0	0.3371	0	0.2593	0.2334	0.2075
4	-0.0705	0	0	-0.2819	0	0	0
5	0.0772	0	0	0.0386	0	0	0
6	0	0.2136	0	0	0	0	0
7	0	0	-0.0705	0	0.2114	0.1409	0.0705
8	0	0	-0.0259	0	-0.1037	0.2334	0.0259
9	-0.0705	0	0	0.2114	0	0	0
10	0	0	0.0388	0	0.1552	0.0582	-0.0388
11	0	0	0.0259	0	0.1037	0.3112	-0.0259
12	0	0	0.2075	0	0.2853	0.3112	0.3371
13	0	0	-0.0970	0	0.0194	0.0582	0.0970
14	-0.0772	0	0	-0.0386	0	0	0

### Test F

El  $F$ -test permite estudiar dos muestras de observables bajo la misma hipótesis nula, así, en este caso contrastamos las varianzas a priori  $\sigma_0^2$  y a posteriori  $\hat{\sigma}_0^2$  de cada subred, a partir de su cociente  $\hat{\sigma}_0^2/\sigma_0^2$ , siendo el valor óptimo  $F_{\text{óptimo}} = 1$ .

Se escribe:

$$\frac{\hat{\sigma}_0^2}{\sigma_0^2} \sim F_{u-R(A),\alpha} = F$$

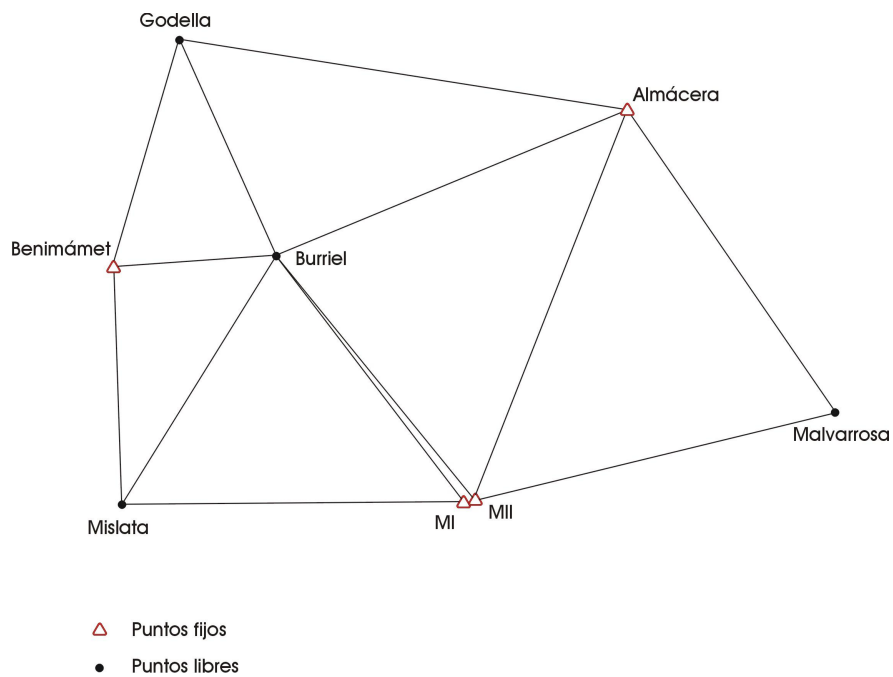
$$F_{v1,\infty,1-\frac{1}{2}\alpha} = F = F_{v1,\infty,\frac{1}{2}\alpha}$$

El valor de  $F$  obtenido para la Subred 1 de la red formada por 14 formas lineales y 7 variables corresponde a  $F = \frac{2.1756 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-2}} = 2.1756$  y pertenece al intervalo teórico [0.2372-2.2868] calculado para un  $\alpha = 0.05$ . Valor relativamente próximo al óptimo, que es 1.

El valor de  $F$  obtenido para la Subred 2 de esta misma red corresponde a  $F = \frac{1.0752 \cdot 10^{-2}}{1 \cdot 10^{-2}} = 1.0752$  que también pertenece al intervalo teórico [0.2372-2.2868] y cuyo valor es muy próximo al óptimo. Aceptando en ambas redes la hipótesis nula ( $H_0$ ) de igualdad de varianzas.

### 3.3 Síntesis y resultados del ajuste de la Red formada por 12 formas lineales y 4 variables por el método de Incrementos de Coordenadas

Los vértices escogidos en este caso como libres son *Burriel*, *Godella*, *Mislata* y *Malvarrosa*. Como vértices fijos se adoptan *Almácer*, *Benimámet*, *Miguelete I* y *Miguelete II*. La red a ajustar corresponde a la de la Figura 3.4.



**Figura 3.4:** Croquis de la Red formada por 4 vértices libres y 4 vértices fijos

Las expresiones matriciales de las subredes formadas por 12 formas lineales y 4 variables son las que siguen:

$$A_1 \cdot x = K_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{God} \\ x_{Bur} \\ x_{Mis} \\ x_{Mal} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0515 \\ 0.0901 \\ 0.1438 \\ 0.0079 \\ 0.1998 \\ -0.1611 \\ 0.3512 \\ 0.4358 \\ 0.3209 \\ 0.1871 \\ 0.1824 \\ 0.3151 \end{pmatrix}$$

$$A_2 \cdot y = K_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{God} \\ y_{Bur} \\ y_{Mis} \\ y_{Mal} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1993 \\ -0.1847 \\ 0.0103 \\ -0.2285 \\ -0.2627 \\ -0.2601 \\ 0.0021 \\ -0.0653 \\ 0.1324 \\ -0.2445 \\ -0.2432 \\ 0.0723 \end{pmatrix}$$



### 3.3.1 Análisis de resultados del ajuste

#### Matrices S de ecuaciones normales

Las matrices S de ecuaciones normales de la subredes 1 y 2 respectivamente se muestran a continuación.

$$S_1 = A_1^T P A_1 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = A_2^T P A_2 = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 6 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

#### Vectores de variables y residuos. Varianza a posteriori

Los vectores de variables o parámetros de las subredes 1 y 2 son las correcciones que practicaremos a las coordenadas aproximadas de los vértices libres de los que partíamos según la Tabla 3.1.

Conocidas las coordenadas aproximadas de los vértices libres podemos establecer las coordenadas compensadas de los vértices libres de la red (Tabla 3.19).

**Tabla 3.19:** Coordenadas aproximadas, correcciones y coordenadas compensadas de los vértices libres en metros

<i>Vértices</i>	$X_a$	$x$	$X$	$Y_a$	$y$	$Y$
Godella	20837.52	-0.1981	20837.32	40309.15	0.1777	40309.33
Burriel	21930.63	-0.1198	21930.51	38069.11	0.0838	38069.19
Mislata	20310.29	-0.2081	20309.08	35452.40	-0.1356	35452.26
Malvarrosa	27994.72	0.2488	27994.97	36417.30	-0.0855	36417.21

**Tabla 3.20:** Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad

<i>Subred</i>	$\sigma$ [m]	$\sigma^2$ [m <sup>2</sup> ]
S1	0.20	$4.01 \cdot 10^{-2}$
S2	0.16	$2.61 \cdot 10^{-2}$

**Tabla 3.21:** Residuos ( $R_i$ ) de las Subredes 1 y 2 en metros

<i>Lineas observadas</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
Godella-Benimámet	0.2496	0.0216
Godella-Burriel	-0.0118	0.0908
Benimámet-Burriel	-0.2636	0.0734
Benimámet-Mislata	-0.2160	0.0929
Burriel-Miguelete I	-0.0799	0.1789
Burriel-Mislata	0.0729	0.0407
Mislata-Miguelete I	-0.1431	0.1335
Godella-Almácer	-0.2377	-0.1124
Burriel-Almácer	-0.2011	-0.2161
Burriel-Miguelete II	-0.0673	0.1607
Almácer-Malvarrosa	0.0663	0.1578
Miguelete II-Malvarrosa	-0.0663	-0.1578

### Matrices de criterio

Las matrices varianza covarianza son:

$$\sigma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0142 & 0.0025 & 0.0008 & 0 \\ 0.0025 & 0.0075 & 0.0025 & 0 \\ 0.0008 & 0.0025 & 0.0142 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0201 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0093 & 0.0016 & 0.0005 & 0 \\ 0.0016 & 0.0049 & 0.0016 & 0 \\ 0.0005 & 0.0016 & 0.0093 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0131 \end{pmatrix}$$

Los semiejes de la elipse de error de los vértices *Godella*, *Burriel*, *Mislata* y *Malvarrosa*, se calculan a partir de estas matrices varianza covarianza y se encuentran en la tabla 3.22.

**Tabla 3.22:** Semiejes de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma_x$	$\sigma_y$
Godella	0.1192	0.0964
Burriel	0.0866	0.0700
Mislata	0.1192	0.0964
Malvarrosa	0.1418	0.1145

Los valores obtenidos rondando los 10 cm nos vuelven a confirmar la calidad en precisión de la triangulación de la época (Tabla 3.22).

### Estudio de Fiabilidad Interna

En la subred 1 los valores de la variable de Baarda  $\omega_i$  forman parte del intervalo  $[-1.4768, 1.5503]$  por debajo del umbral de rechazo 3.29, por lo tanto los observables son aceptados al completo. En la subred 2 los valores se reparten en el intervalo  $[-1.4828, 1.3800]$  siendo igualmente aceptados como en el caso de la anterior subred (Tablas 3.23 y 3.24).

**Tabla 3.23:** Test de Baarda subred 1

<i>Observación</i>	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	0.2496	0.1610	1.5503
2	-0.0118	0.1530	-0.0774
3	-0.2636	0.1806	-1.4598
4	-0.2160	0.1610	-1.3417
5	-0.0799	0.1806	-0.4426
6	0.0729	0.1530	0.4762
7	-0.1431	0.1610	-0.8891
8	-0.2377	0.1610	-1.4768
9	-0.2011	0.1806	-1.1135
10	-0.0673	0.1806	-0.3727
11	0.0663	0.1416	0.4683
12	-0.0663	0.1416	-0.4683

**Tabla 3.24:** Test de Baarda subred 2

<i>Observación</i>	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	0.0216	0.1300	0.1662
2	0.0908	0.1235	0.7348
3	0.0734	0.1458	0.5039
4	0.0929	0.1300	0.7146
5	0.1789	0.1458	1.2276
6	0.0407	0.1235	0.3293
7	0.1335	0.1300	1.0275
8	-0.1124	0.1300	-0.8646
9	-0.2161	0.1458	-1.4828
10	0.1607	0.1458	1.1026
11	0.1578	0.1143	1.3800
12	-0.1578	0.1143	-1.3800

Tanto en la Subred 1 como en la 2 las redundancias son homogéneas y próximas a la redundancia media que en este caso corresponde a 0.67 (Tabla 3.25).

**Tabla 3.25:** Redundancias de las Subredes 1 y 2 expresadas en metros

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
1	0.6458	0.6458
2	0.5833	0.5833
3	0.8125	0.8125
4	0.6458	0.6458
5	0.8125	0.8125
6	0.5833	0.5833
7	0.6458	0.6458
8	0.6458	0.6458
9	0.8125	0.8125
10	0.8125	0.8125
11	0.5000	0.5000
12	0.5000	0.5000
Suma	8	8

El error máximo que puede deslizarse en nuestros observables de la subred 1 y no ser detectado corresponde a 0.82 m en los observables 11 y 12, y en estos mismos observables de la subred 2 el error máximo deslizado y no detectado corresponde a 0.66 m, según indican las Tablas 3.26 y 3.27.

**Tabla 3.26:** Fiabilidad interna subred 1

<i>Observación</i>	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.1192	0.8036	0.6112	5.1267
2	0.1293	0.7638	0.6975	5.3943
3	0.0867	0.9014	0.3965	4.5707
4	0.1192	0.8036	0.6112	5.1267
5	0.0867	0.9014	0.3965	4.5707
6	0.1293	0.7638	0.6975	5.3943
7	0.1192	0.8036	0.6112	5.1267
8	0.1192	0.8036	0.6112	5.1267
9	0.0867	0.9014	0.3965	4.5707
10	0.0867	0.9014	0.3965	4.5707
11	0.1416	0.7071	0.8253	5.8266
12	0.1416	0.7071	0.8253	5.8266

**Tabla 3.27:** Fiabilidad interna subred 2

<i>Observación</i>	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.0962	0.8036	0.4934	5.1267
2	0.1044	0.7638	0.5631	5.3943
3	0.0700	0.9014	0.3200	4.5707
4	0.0962	0.8036	0.4934	5.1267
5	0.0700	0.9014	0.3200	4.5707
6	0.1044	0.7638	0.5631	5.3943
7	0.0962	0.8036	0.4934	5.1267
8	0.0962	0.8036	0.4934	5.1267
9	0.0700	0.9014	0.3200	4.5707
10	0.0700	0.9014	0.3200	4.5707
11	0.1143	0.7071	0.6662	5.8266
12	0.1143	0.7071	0.6662	5.8266

### Estudio de la Fiabilidad Externa

Los parámetros de homogeneidad de la red muestran valores homogéneos en la subred 1 y 2, ofreciendo un control similar entre todas sus zonas. Tablas 3.28 y 3.29.

El error no detectado  $\nabla_{oi}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable según los valores de las tablas 3.30 y 3.31. Así el error no detectado afectaría de media en décimas de metro a las variables.

**Tabla 3.28:** Fiabilidad externa subred 1

<i>Observación</i>	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.5951	3.0510
2	0.6455	3.4820
3	0.4330	1.9792
4	0.5951	3.0510
5	0.4330	1.9792
6	0.6455	3.4820
7	0.5951	3.0510
8	0.5951	3.0510
9	0.4330	1.9792
10	0.4330	1.9792
11	0.7071	4.12
12	0.7071	4.12

**Tabla 3.29:** Fiabilidad externa subred 2

<i>Observación</i>	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.5951	3.0510
2	0.6455	3.4820
3	0.4330	1.9792
4	0.5951	3.0510
5	0.4330	1.9792
6	0.6455	3.4820
7	0.5951	3.0510
8	0.5951	3.0510
9	0.4330	1.9792
10	0.4330	1.9792
11	0.7071	4.12
12	0.7071	4.12

**Tabla 3.30:** Vectores de fiabilidad externa subred 1

<i>Observación</i>	$x_{Godella}$	$x_{Burriel}$	$x_{Mislata}$	$x_{Malvarrosa}$
1	-0.2165	-0.0382	-0.0127	0
2	-0.2034	0.0872	0.0291	0
3	0.0248	0.0743	0.0248	0
4	0.0127	0.0382	0.2165	0
5	-0.0248	-0.0743	-0.0248	0
6	-0.0291	-0.0872	0.2034	0
7	-0.0127	-0.0382	-0.2165	0
8	-0.2165	-0.0382	-0.0127	0
9	-0.0248	-0.0743	-0.0248	0
10	-0.0248	-0.0743	-0.0248	0
11	0	0	0	0.4127
12	0	0	0	0.4127

### 3.4 Aplicación del Problema de Diseño de Orden Dos

Una de las cuestiones fundamentales en este trabajo es el estudio riguroso de la fiabilidad simultánea de varios recintos de error referidos a sus correspondientes vértices en el ajuste gaussiano de una Red. La solución resulta muy sencilla si la matriz varianza covarianza de las variables o parámetros a posteriori del ajuste



**Tabla 3.31:** Vectores de fiabilidad externa subred 2

<i>Observación</i>	<i>yGodella</i>	<i>yBurriel</i>	<i>yMislata</i>	<i>yMalvarrosa</i>
1	-0.1747	-0.0308	-0.0103	0
2	-0.1642	0.0704	0.0235	0
3	0.0200	0.0600	0.0200	0
4	0.0103	0.0308	0.1747	0
5	-0.0200	-0.0600	-0.0200	0
6	-0.0235	-0.0704	0.1642	0
7	-0.0103	-0.0308	-0.1747	0
8	-0.1747	-0.0308	-0.0103	0
9	-0.0200	-0.0600	-0.0200	0
10	-0.0200	-0.0600	-0.0200	0
11	0	0	0	0.3331
12	0	0	0	0.3331

es diagonal, lo cual es posible aplicando el denominado problema de diseño de orden dos o PD2 (Grafarend and Sansó, 1985).

Tras el ajuste de una red por el método de incrementos de coordenadas se puede obtener a posteriori una matriz de criterio varianza covarianza de las coordenadas. En el caso de red ligada y supuesto determinista la solución será:

$$\sigma_{xx} = \sigma_0^2 \cdot Q_{xx} = \sigma_0^2 \cdot S^{-1} = \sigma_0^2 \cdot (A^T P A)^{-1}$$

Según la teoría expuesta sobre el PD2 en Jiménez Martínez (2013), se puede obtener una matriz de pesos que haga cumplir con el requisito impuesto a la matriz varianza covarianza. Para lograrlo se obtienen unos nuevos pesos a partir de la expresión 3.5:

$$vec P = (A^T \otimes A^T)^{-} \cdot vec Q_{xx}^{-} \tag{3.5}$$

En la expresión 3.5 se utilizan dos conceptos no introducidos hasta ahora. El primero es el operador  $\otimes$  producto de Kronecker-Zehfuss. El segundo es la

operación matricial inversa generalizada. Dentro de las inversas generalizadas hemos elegido la que cumple las cuatro condiciones de Moore-Penrose, resultando la expresión 3.6 en nuestro caso:

$$\text{vec } P = (A^T \otimes A^T)^+ \cdot \text{vec } Q_{xx}^{-1} \quad (3.6)$$

siendo

$A^T$  : Matriz de diseño  $A$  traspuesta

$\text{vec } P$  : Aplicación que escribe todos los elementos de la matriz  $P$  en una sola columna, resultado de ordenar una debajo de otra y en la misma sucesión que en la matriz inicial correspondía de izquierda a derecha las  $n$  columnas de  $P$ , conservando también el orden inicial de cada elemento dentro de cada columna de origen.

$\text{vec } Q_{xx}^{-1}$  : Idéntica aplicación que en el caso anterior para escribir todos los elementos de la matriz  $Q_{xx}^{-1}$  en una sola columna.

$A^T \otimes A^T$  : Producto de Kronecker-Zehfuss, aplicación resultante de la siguiente operación:  $A_{p,q}^T \otimes A_{m,n}^T = (A_{i,j}^T \cdot A^T)_{pm,qn}$

Una vez resuelta la expresión 3.6 y calculado  $\text{vec } P$ , ya conocemos la nueva matriz de pesos. Con la nueva matriz de pesos, proveniente de la reordenación de  $\text{vec } P$ , ajustamos de nuevo la red según

$$Ax = K + R$$

y obtenemos, entre sus resultados parciales la matriz cofactor diagonal

$$Q_{xx} = S^{-1} = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1}$$

y la matriz varianza covarianza

$$\sigma_{xx} = (\sigma_0^2 \cdot Q_{xx}) \tag{3.7}$$

que en teoría debe ser diagonal.

Se aplica ahora el PD2, según la teoría expuesta, a las subredes 1 y 2 de incrementos de coordenadas, estudiadas como parte de la Red formada por 12 formas lineales y 4 variables en la sección anterior, formando las expresiones matriciales siguientes, idénticas para las dos subredes:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

A partir de la matriz de diseño A del ajuste obtenemos:



La matriz cofactor  $Q_{xx}$  diagonal es:

$$Q_{xx} = \begin{pmatrix} 0.3542 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1875 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.3542 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

a partir de la cual calcularemos  $vec Q_{xx}^{-1}$

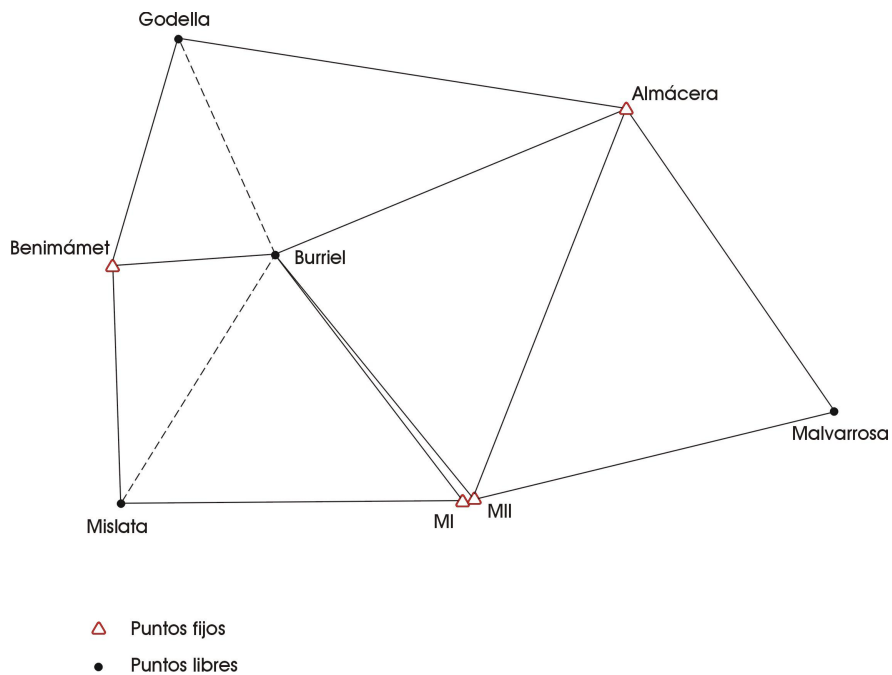
$$vec Q_{xx}^{-1} = \begin{pmatrix} 2.8235 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5.3333 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2.8235 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Los nuevos pesos obtenidos para las 12 formas lineales que constituyen las subredes son:

$$\text{vec } P = \begin{pmatrix} 1.4118 \\ 0 \\ 1.3333 \\ 1.4118 \\ 1.3333 \\ 0 \\ 1.4118 \\ 1.4118 \\ 1.3333 \\ 1.3333 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Una vez calculada la nueva matriz de pesos, siguiendo los algoritmos propios del PD2, observamos que las ecuaciones números 2 y 6 de ambas subredes se les asigna el valor cero. Si eliminamos las dos ecuaciones de peso nulo y ajustamos de nuevo los dos sistemas de formas lineales, las matrices de criterio  $S$ ,  $Q_{xx}$  y  $\sigma_{xx}$ , resultan ser diagonales, y con ello es directa la aplicación del análisis multivariante a sus recintos de error. Práctica que no llevaremos a cabo en esta sección de nuestro trabajo ya que estamos estudiando redes genéricas con el objetivo de establecer estrictamente la calidad del levantamiento de 1929. Sin embargo, para otros propósitos, como puede ser un estudio de detalle, podría ser de gran interés, y para entonces lo reservamos. (Capítulo 4)

**3.4.1 Síntesis, resultados y análisis del ajuste de la Red de doce formas lineales y cuatro variables por el método de Incrementos de Coordenadas aplicado el PD2**



**Figura 3.5:** Croquis de la Red formada por 4 vértices libres y 4 vértices fijos. Las líneas de observación eliminadas se representan en línea discontinua.

La aplicación del PD2 a la red inicial de 12 formas lineales ha desvelado que el peso de dos ecuaciones que intervienen en el ajuste es cero. Se realiza la comprobación práctica del funcionamiento teórico del PD2 ajustando un nuevo sistema con las 10 formas lineales restantes por incrementos de coordenadas (Figura3.5). Las líneas observadas se encuentran en las tablas 3.32 y 3.33.



**Tabla 3.32:** Líneas observadas en la subred 1 [ $\Delta X$ ]

<i>Número</i>	<i>Forma lineal</i>
1	<i>Godella – Benimámet I</i>
2	<i>Benimámet – Burriel I</i>
3	<i>Benimámet – Mislata</i>
4	<i>Burriel – Miguelete I</i>
5	<i>Mislata – Miguelete I</i>
6	<i>Godella – Almacera</i>
7	<i>Burriel – Almacera</i>
8	<i>Burriel – Miguelete II</i>
9	<i>Almacera – Malvarrosa</i>
10	<i>Miguelete II – Malvarrosa</i>

**Tabla 3.33:** Líneas observadas en la subred 2 [ $\Delta Y$ ]

<i>Número</i>	<i>Forma lineal</i>
11	<i>Godella – Benimámet I</i>
12	<i>Benimámet – Burriel I</i>
13	<i>Benimámet – Mislata</i>
14	<i>Burriel – Miguelete I</i>
15	<i>Mislata – Miguelete I</i>
16	<i>Godella – Almacera</i>
17	<i>Burriel – Almacera</i>
18	<i>Burriel – Miguelete II</i>
19	<i>Almacera – Malvarrosa</i>
20	<i>Miguelete II – Malvarrosa</i>

Las dos expresiones matriciales del sistema de formas lineales serán:

$$A'_1 \cdot x = K_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{God} \\ x_{Bur} \\ x_{Mis} \\ x_{Mal} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0515 \\ 0.1438 \\ 0.0079 \\ 0.1998 \\ 0.3512 \\ 0.4358 \\ 0.3209 \\ 0.1871 \\ 0.1824 \\ 0.3151 \end{pmatrix}$$

$$A'_2 \cdot y = K_2 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_{God} \\ y_{Bur} \\ y_{Mis} \\ y_{Mal} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.1993 \\ 0.0103 \\ -0.2285 \\ -0.2627 \\ 0.0021 \\ -0.0653 \\ 0.1324 \\ -0.2445 \\ -0.2432 \\ 0.0723 \end{pmatrix}$$

**Matrices  $S^{-1}$**

La matrices cofactor de las variables o parámetros  $Q_{xx} = (A^T \cdot P \cdot A)^{-1} = S^{-1}$  de las subredes 1 y 2 se muestran a continuación:

$$S_1^{-1} = A_1^T P A_1 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

$$S_2^{-1} = A_2^T P A_2 = \begin{pmatrix} 0.5 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.5 \end{pmatrix}$$

### Vectores de variables y residuos. Varianza a posteriori

Las variables obtenidas en los ajustes de las dos subredes se pueden ver en la Tabla 3.34. Conocidas las coordenadas aproximadas de los vértices libres según la Tabla 3.1 y las variables según la Tabla 3.34, se puede establecer el valor de las coordenadas compensadas de los vértices libres de la red tras el ajuste como se indica en la Tabla 3.35.

**Tabla 3.34:** Variables o parámetros del ajuste de las subredes 1 y 2 en metros

<i>Variables o parámetros</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
Godella	0.1323	-0.1922
Burriel	0.0963	-0.1410
Mislata	-0.1153	-0.1717
Malvarrosa	-0.0855	0.2488

**Tabla 3.35:** Coordenadas aproximadas, correcciones y coordenadas compensadas de los vértices libres en metros

<i>Vértices</i>	$X_a$	$x$	$\mathbf{X}$	$Y_a$	$y$	$\mathbf{Y}$
Godella	20837.52	0.1323	20837.65	40309.15	-0.1922	40308.96
Burriel	21930.63	0.0963	21930.73	38069.11	-0.1410	38068.97
Mislata	20310.29	-0.1153	20310.17	35452.40	-0.1717	35452.23
Malvarrosa	27994.72	-0.0855	27994.63	36417.30	0.2488	36417.05

Los vectores de residuos los encontramos en la Tabla 3.37.

**Tabla 3.36:** Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad

<i>Subred</i>	$\sigma [m]$	$\sigma^2 [m^2]$
S1	0.18	$3.23 \cdot 10^{-2}$
S2	0.23	$5.18 \cdot 10^{-2}$

**Tabla 3.37:** Residuos de las Subredes 1 y 2 en metros

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
1	0.0670	0.2437
2	0.0860	-0.2848
3	0.1132	-0.1796
4	0.1664	-0.0587
5	0.1132	-0.1796
6	-0.0670	-0.2437
7	-0.2287	-0.1799
8	0.1482	-0.0461
9	0.1578	0.0663
10	-0.1578	-0.0663

**Matrices de criterio**

Las matrices varianza covarianza de las variables o parámetros  $\sigma_{xx} = \sigma_o^2 \cdot Q_{xx}$  que provienen de las matrices cofactor de las variables diagonales, lógicamente también son diagonales.

$$\sigma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0161 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0081 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0161 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0161 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0259 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0130 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0259 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0259 \end{pmatrix}$$

Los semiejes de la elipse de error de los vértices *Godella*, *Burriel*, *Mislata* y *Malvarrosa* se calculan a partir de la matriz varianza covarianza y son los que muestra la Tabla 3.38. Como en los casos anteriores los resultados se aproximan nuevamente a los 10 cm.

**Tabla 3.38:** Semiejes de las superficies de error de los vértices considerados libres

<i>Vértice</i>	$\sigma_x$	$\sigma_y$
Godella	0.1269	0.1609
Burriel	0.09	0.1140
Mislata	0.1269	0.1609
Malvarrosa	0.1269	0.1609

### Estudio de la Fiabilidad Interna

En la subred 1 los valores de la variable de Baarda se reparten dentro del intervalo [-1.4694, 1.2419] por debajo del umbral de rechazo 3.29, por lo tanto los observables son aceptados al completo. En la subred 2 la totalidad de los valores forman parte del intervalo [-1.4441, 1.5134] siendo igualmente aceptados como en el caso de la anterior subred (Tablas 3.39 y 3.40).

**Tabla 3.39:** Test de Baarda subred 1

<i>Observación</i>	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	0.0670	0.1271	0.5271
2	0.0860	0.1556	0.5524
3	0.1132	0.1271	0.8909
4	0.1664	0.1556	1.0694
5	0.1132	0.1271	0.8909
6	-0.0670	0.1271	-0.5271
7	-0.2287	0.1556	-1.4694
8	0.1482	0.1556	0.9524
9	0.1578	0.1271	1.2419
10	-0.1578	0.1271	-1.2419

**Tabla 3.40:** Test de Baarda subred 2

<i>Observación</i>	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	0.2437	0.1610	1.5134
2	-0.2848	0.1972	-1.4441
3	-0.1796	0.1610	-1.1153
4	-0.0587	0.1972	-0.2979
5	-0.1796	0.1610	-1.1153
6	-0.2437	0.1610	-1.5134
7	-0.1799	0.1972	-0.9123
8	-0.0461	0.1972	-0.2339
9	0.0663	0.1610	0.4120
10	-0.0663	0.1610	-0.4120

En ambas subredes las redundancias son homogéneas y próximas a la redundancia media que en este caso corresponde a 0.6 (Tabla 3.41).

**Tabla 3.41:** Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros

<i>Lineas observadas</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
<i>Godella – Benimámet I</i>	0.5	0.5
<i>Benimámet – Burriel I</i>	0.75	0.75
<i>Benimámet – Mislata</i>	0.5	0.5
<i>Burriel – Miguelete I</i>	0.75	0.75
<i>Mislata – Miguelete I</i>	0.5	0.5
<i>Godella – Almacera</i>	0.5	0.5
<i>Burriel – Almacera</i>	0.75	0.75
<i>Burriel – Miguelete II</i>	0.75	0.75
<i>Almacera – Malvarrosa</i>	0.5	0.5
<i>Miguelete II – Malvarrosa</i>	0.5	0.5
Suma	6	6

El error máximo que puede deslizarse en nuestros observables de la subred 1 y no ser detectado corresponde a 0.74 m para los observables 1, 3, 5, 6, 9 y 10 y en estos mismos observables de la subred 2 el error máximo deslizado y no detectado corresponde a 0.94 m (Tablas 3.42 y 3.43).

**Tabla 3.42:** Fiabilidad interna subred 1

<i>Observación</i>	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.1271	0.7071	0.7403	5.8266
2	0.0898	0.8660	0.4274	4.7574
3	0.1271	0.7071	0.7403	5.8266
4	0.0898	0.8660	0.4274	4.7574
5	0.1271	0.7071	0.7403	5.8266
6	0.1271	0.7071	0.7403	5.8266
7	0.0898	0.8660	0.4274	4.7574
8	0.0898	0.8660	0.4274	4.7574
9	0.1271	0.7071	0.7403	5.8266
10	0.1271	0.7071	0.7403	5.8266

**Tabla 3.43:** Fiabilidad interna subred 2

<i>Observación</i>	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.1610	0.7071	0.9381	5.8266
2	0.1138	0.8660	0.5416	4.7574
3	0.1610	0.7071	0.9381	5.8266
4	0.1138	0.8660	0.5416	4.7574
5	0.1610	0.7071	0.9381	5.8266
6	0.1610	0.7071	0.9381	5.8266
7	0.1138	0.8660	0.5416	4.7574
8	0.1138	0.8660	0.5416	4.7574
9	0.1610	0.7071	0.9381	5.8266
10	0.1610	0.7071	0.9381	5.8266



**Estudio de la Fiabilidad Externa**

Los parámetros de homogeneidad de la red muestran valores homogéneos en la subred 1 y 2, ofreciendo un control similar entre todas sus zonas (Tablas 3.44 y 3.45).

**Tabla 3.44:** Fiabilidad externa subred 1

<i>Observación</i>	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.7071	4.1200
2	0.5000	2.3787
3	0.7071	4.1200
4	0.5000	2.3787
5	0.7071	4.1200
6	0.7071	4.1200
7	0.5000	2.3787
8	0.5000	2.3787
9	0.7071	4.1200
10	0.7071	4.1200

**Tabla 3.45:** Fiabilidad externa subred 2

<i>Observación</i>	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.7071	4.1200
2	0.5000	2.3787
3	0.7071	4.1200
4	0.5000	2.3787
5	0.7071	4.1200
6	0.7071	4.1200
7	0.5000	2.3787
8	0.5000	2.3787
9	0.7071	4.1200
10	0.7071	4.1200

El error no detectado  $\nabla_{oi}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable según los valores de las tablas 3.46 y 3.47. Así el error no detectado afectaría en décimas de metro a las variables.

**Tabla 3.46:** Vectores de fiabilidad externa subred 1

<i>Observación</i>	$x_{Godella}$	$x_{Burriel}$	$x_{Mislata}$	$x_{Malvarrosa}$
1	-0.3702	0	0	0
2	0	0.1069	0	0
3	0	0	0.3702	0
4	0	-0.1069	0	0
5	0	0	-0.3702	0
6	-0.3702	0	0	0
7	0	-0.1069	0	0
8	0	-0.1069	0	0
9	0	0	0	0.3702
10	0	0	0	0.3702

**Tabla 3.47:** Vectores de fiabilidad externa subred 2

<i>Observación</i>	$y_{Godella}$	$y_{Burriel}$	$y_{Mislata}$	$y_{Malvarrosa}$
1	-0.4690	0	0	0
2	0	0.1354	0	0
3	0	0	0.4690	0
4	0	-0.1354	0	0
5	0	0	-0.4690	0
6	-0.4690	0	0	0
7	0	-0.1354	0	0
8	0	-0.1354	0	0
9	0	0	0	0.4690
10	0	0	0	0.4690

## **Capítulo 4**

### **Análisis y Estudio de redes en un sistema de referencia moderno**

#### **4.1 Georreferenciación del Plano de 1929**

Es conveniente recordar en este punto que el objeto de nuestro trabajo es ajustar la cartografía de 1929 basada en un sistema plano, al sistema de referencia ETRS89, estándar a nivel europeo adoptado en España por Real Decreto 1071/2007 de 27 de julio como sistema geodésico oficial de referencia, equivalente al WGS84 propio del GNSS en la aplicación cartográfica que tratamos aquí. Para ello se escogieron puntos identificables a día de hoy sobre el terreno y que formaron parte en su mayoría de la red topográfica, base del levantamiento del PPM de 1929, según se explica en la sección 2.5 a cuyos puntos hace referencia la Tabla 2.8. Sobre esta base de puntos se añadieron dos, que se han denominado Pechina y Pte. del Mar, pertenecientes a la poligonación cuya marca sobre el pavimento permanece conservada todavía hoy, con la ventaja de evitar errores de replanteo y con el objetivo de proporcionar una mejor cobertura del terreno. Sobre estos puntos se ha realizado una campaña de medición GNSS para obtener sus coordenadas en ETRS89, que se transformarán tanto a la proyección UTM como al sistema rectangular local (RL). Así, mediante la aplicación de transformaciones de coordenadas, es posible llevar a cabo la georreferenciación del PPM de 1929.

#### **4.1.1 Metodología e Instrumentación para la medición de puntos**

El posicionamiento mediante sistemas GNSS (Global Navigation Satellite Systems) se basa en el procesamiento de señales electromagnéticas enviadas desde satélites que orbitan en el espacio hasta receptores situados en la superficie terrestre y en la medición del tiempo. Uno de estos sistemas, es el sistema de posicionamiento global llamado GPS que proporciona de forma continua y en un sistema de referencia tridimensional, la posición, la información de la velocidad y la precisión alcanzada a cualquier usuario equipado con un receptor adecuado. Un procedimiento análogo a la trilateración en el espacio de tres dimensiones, conociendo las coordenadas de al menos cuatro satélites, permitirá obtener las coordenadas del punto donde se encuentre ubicado el receptor (Jiménez Martínez, 2009).

El método de posicionamiento según el sistema de referencia puede ser relativo o absoluto, en general este último mucho menos preciso que el posicionamiento relativo entre dos estaciones, en el que la mayor parte de los errores están altamente correlados con la distancia y para minimizarlos, en lugar de utilizar coordenadas absolutas se determinan diferencias de coordenadas con respecto a una estación de referencia conocida. Los dos sistemas más conocidos para determinar la medición de distancias entre las antenas emisoras de los satélites y la antena receptora de los equipos de observación, son la medida de pseudodistancias o de código basada en la medición de la diferencia de tiempo entre emisión y recepción y la medida de diferencias de fase, en la que se mide el desfase entre la señal recibida y la generada en el receptor. El posicionamiento por medida de fase es el que permite obtener mayores precisiones (Núñez García del Pozo et al., 1992). A este método resuelto en tiempo real se le llama GPS

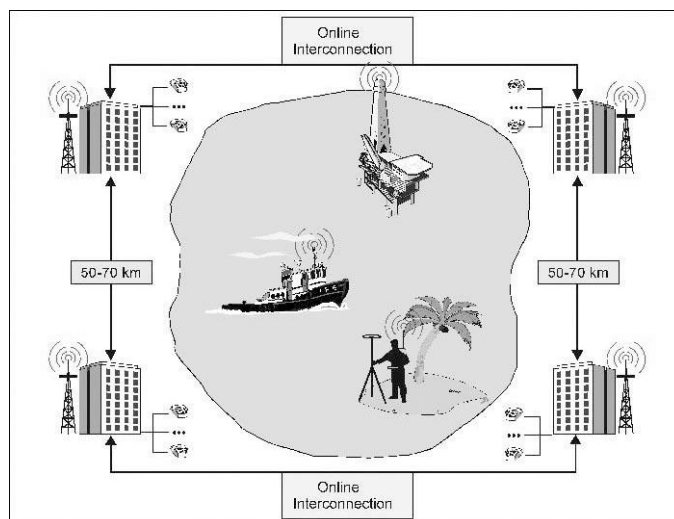
diferencial preciso (PDGPS) o Real-Time kinematic (RTK) con el que los usuarios pueden obtener un nivel de precisión en posicionamiento centimétrico en tiempo real sobre pequeñas distancias con instrumentación integrada y fácil de manejar (Seeber, 2003).

El método de medición cinemático en tiempo real (RTK) consiste en establecer correcciones diferenciales a partir de dos o más instrumentos GPS (como mínimo una estación fija de referencia, y otra estación móvil que se desplaza por el área del levantamiento) con el fin de eliminar los errores propios del sistema GPS, calculando las correcciones desde el equipo de referencia al móvil. La gran ventaja de este método es que los errores de posicionamiento son muy similares en ambos puntos, prácticamente no afectan a los incrementos de coordenadas, y al estar referidas las ecuaciones a cada satélite en particular, el error del satélite es el mismo y el error orbital casi idéntico. Además, debido a la proximidad de las estaciones, los retardos troposféricos e ionosféricos se reducen notablemente (Núñez García del Pozo et al., 1992).

Una limitación de este método es el hecho de que los errores (orbitales, ionosféricos y troposféricos) y el tiempo necesario para fijar ambigüedades crezca con la distancia a la estación de referencia, por eso, para largas distancias, más de 10 kilómetros (Jiménez Martínez, 2009), el uso de múltiples estaciones de referencia interconectadas, y la transmisión de sus datos medidos en tiempo real a la estación central de procesamiento, resuelve el problema.

En los últimos años el incremento de redes de estaciones permanentes de referencia GNSS y los nuevos algoritmos que resuelven la red RTK, como es el VRS (Virtual Reference Station) término registrado por la empresa Trimble Navigation, han hecho posible alcanzar precisiones centimétricas en el posicionamiento cinemático en tiempo real con un solo receptor y apoyándose en los datos

procedentes de estas estaciones permanentes (Figura 4.1).



**Figura 4.1:** Concepto de VRS (Adaptación Seeber, 2003)

El método VRS funciona siguiendo la secuencia que se explica a continuación. En primer lugar el receptor móvil envía su posición aproximada al centro de control, éste acepta la posición y responde enviando correcciones diferenciales DGPS al receptor móvil. En el momento en que se reciben, el receptor móvil resuelve ambigüedades y calcula una posición diferencial DGPS, que servirá para actualizar su posición y enviarla de nuevo al centro de control. Como resultado del procedimiento, el receptor móvil es capaz de determinar su posición en tiempo real con una precisión que varía según autores. Algunos experimentos obtienen precisiones de  $\pm 5$  cm en bases de hasta 35 km (Retscher, 2002), 3 cm para coordenadas horizontales y 1 – 5 cm para la componente vertical, con un tiempo de inicialización de dos minutos (Hu et al., 2003) o 2 cm para coordenadas horizontales e inferior a 4 cm para la componente vertical (WU et al., 2004; Kislig, 2011) independientemente de la distancia a la estación de referencia.

Enumeraremos a continuación las ventajas que ofrece el método VRS respecto al convencional RTK. En primer lugar, únicamente se precisa un receptor. Es el centro de control el encargado de enviar al receptor móvil una serie de parámetros de corrección que provienen del modelado de la red o de una parte de ella. Además todos los usuarios trabajan en un marco de referencia global, pudiendo acceder a las coordenadas oficiales de los puntos porque se han definido unos parámetros de transformación oficiales. La desventaja que advertimos en este método es la dependencia de las restricciones propias de la cobertura de telefonía móvil (Jiménez Martínez, 2009; Kislig, 2011).

El sistema VRS descrito permite obtener coordenadas de una manera rápida teniendo en cuenta la dificultad de acceso y condiciones de medición de los vértices de la red utilizada para el levantamiento del plano parcelario municipal de 1929, además de una precisión suficiente. Por todos los motivos comentados en la presente tesis usaremos este sistema para la obtención de coordenadas que serán los observables con los que se formularán las ecuaciones matriciales de las redes calculadas.

#### **4.1.2 Sistemas de coordenadas y relaciones entre ellos**

Tal como se decía al comienzo del capítulo, para cumplir los objetivos de esta tesis debemos trabajar con coordenadas en proyección UTM y en el sistema rectangular local. Será necesario por tanto, establecer las relaciones necesarias entre sistemas de coordenadas partiendo del sistema cartesiano geocéntrico cuyas coordenadas obtenemos directamente de la medición con instrumental GNSS. Para ello, introduciremos algunos conceptos de geodesia claves para entender el flujo de trabajo a seguir. Todo el contenido está disponible en textos estándar (Wolf and Dewitt, 2000; Snyder, 1987) pero se agrupan aquí como referencia.

### **Sistemas de coordenadas**

Un sistema de coordenadas es una creación artificial para permitir la definición analítica de un objeto o de un fenómeno (García-Asenjo and Hernández, 2003). Se establece una clasificación según el tipo de coordenadas. Entre las coordenadas cartesianas más utilizadas encontramos las geocéntricas y las rectangulares locales. Entre las coordenadas curvilíneas encontramos las coordenadas geodésicas y entre las coordenadas en una proyección, nos interesan especialmente las Universal Transversa Mercator conocidas por sus siglas UTM.

**Sistema geodésico** El sistema de coordenadas geodésico proporciona las coordenadas  $\phi \lambda h$  de un punto basadas en un elipsoide de referencia. Al no ser ortogonales son poco apropiadas para nuestro propósito, ya que queremos establecer la relación con un sistema cartesiano plano, como el sistema origen descrito en el primer capítulo de la presente tesis.

**Sistema cartesiano geocéntrico y rectangular local** El sistema de coordenadas geocéntrico en cambio, es un sistema cartesiano tridimensional con origen en el centro de masas de la tierra. Se trata de un sistema apropiado para aplicaciones geodésicas para toda la tierra, sin embargo presenta la desventaja de proporcionar valores de coordenadas muy altas y sin relación con las direcciones cardinales en un área local. Por estas razones es mucho más adecuado el sistema rectangular local que tiene su origen en la propia zona del levantamiento.

**Proyección UTM** Una proyección es la correspondencia matemática biunívoca entre los puntos de la superficie de aproximación a la tierra elegida (elipsoide) y sus transformados en un plano. Esta correspondencia se expresa en función



de las coordenadas geodésicas, longitud y latitud de cada punto del elipsoide y se traducen en el plano en coordenadas cartesianas. En la proyección Universal Transversa de Mercator (UTM) se considera a la Tierra como un elipsoide de revolución tangente interiormente a un cilindro, cuyo eje está situado en el plano del Ecuador. La proyección UTM es conforme, siendo el meridiano central de cada huso automecoico y representado según una línea recta. La utilidad de esta proyección, por su conformidad, la hace recomendable para la representación de casi todos los países del globo, excepto aquellas zonas situadas en latitudes cercanas a los polos (Martín Asín, 1990). En el Real Decreto 2303/1970 de 16 de julio se adopta en España como sistema de representación cartográfico.

**Datum** El datum es el conjunto mínimo de parámetros que permiten definir de forma única, la situación, orientación y constantes físicas de un determinado sistema de referencia. Existen diferentes formas de situar un sistema de coordenadas cartesiano. Desde el punto de vista geométrico se puede determinar mediante un conjunto de coordenadas. La definición de unos ejes cartesianos exige fijar seis parámetros: tres coordenadas para situar el origen y tres giros para situar los ejes.

Los sistemas de referencia más comunes y modernos de referencia global son el WGS84, empleado para definir las órbitas de los satélites de GPS y el ETRS89 que comparten origen en el geocentro y sus elipsoides de revolución asociados corresponden al WGS84 y GRS80 respectivamente (Wolf and Dewitt, 2000). Los parámetros de estos dos elipsoides son equivalentes para los usos más comunes (Tabla 4.1).

**Elipsoide de referencia** Para definir el tamaño y forma del elipsoide de referencia, son necesarias al menos dos constantes. Generalmente se trata del semieje mayor del elipsoide  $a$  y el aplanamiento  $f$ . A partir de estas dos constantes, se derivan otros parámetros, como son el semieje menor de la elipse  $b$ , la primera excentricidad  $e$  y la segunda excentricidad  $e'$ . Todos estos parámetros intervienen en la formulación que se emplea en las conversiones entre coordenadas que llevaremos a cabo después. Las fórmulas son las siguientes:

$$f = 1 - \frac{b}{a}$$

$$b = a(1 - f)$$

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

$$e^2 = f(2 - f) = \frac{a^2 - b^2}{a^2}$$

$$e' = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{b}$$

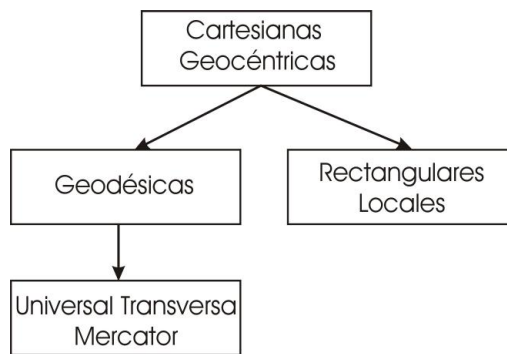
$$e'^2 = \frac{e^2}{(1 - f^2)} = \frac{a^2 - b^2}{b^2}$$

**Tabla 4.1:** Parámetros de los elipsoides de referencia seleccionados

<i>Elipsoide de referencia</i>	<i>Semieje mayor a[m]</i>	<i>Aplanamiento f</i>
GRS80	6378137	1/298.25722210088
WGS84	6378137	1/298.257223563

### Relaciones entre sistemas de coordenadas

El flujo de trabajo que seguimos se indica en la Figura 4.2. Los datos iniciales son las coordenadas cartesianas geocéntricas obtenidas de la observación GPS. El camino a seguir para la obtención de coordenadas en proyección UTM pasa por relacionar las coordenadas geocéntricas con las cartesianas geodésicas, y estas últimas con las coordenadas en proyección UTM. Por otra parte, la obtención de coordenadas rectangulares locales se establece mediante la relación directa con las coordenadas de partida es decir, coordenadas cartesianas geocéntricas.



**Figura 4.2:** Flujo en la conversión de sistemas de coordenadas

**Coordenadas Geocéntricas-Geodésicas** En primer lugar se establece la relación entre las coordenadas cartesianas geocéntricas y las coordenadas geodésicas. El problema directo se resume con la siguiente formulación matemática que convierte coordenadas geodésicas en cartesianas geocéntricas (Wolf and Dewitt, 2000).

$$X = (N + h) \cos \phi \cos \lambda$$

$$Y = (N + h) \cos \phi \operatorname{sen} \lambda$$

$$Z = [N(1 - e^2) + h] \operatorname{sen} \phi$$

donde

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \operatorname{sen}^2 \phi}}$$

El problema inverso permite convertir coordenadas cartesianas geocéntricas en coordenadas geodésicas, que es precisamente lo que nos interesa en este trabajo y en adelante se detalla la formulación necesaria.

$$\lambda = \operatorname{arctg} \left( \frac{Y}{X} \right)$$

teniendo en cuenta que el rango de valores que puede tomar la longitud pertenece al intervalo  $[-180^\circ, +180^\circ]$ .

Los métodos existentes para calcular la latitud  $\phi$  y la altura elipsoidal  $h$  son múltiples. Para la precisión requerida en nuestro trabajo, es suficiente un método no iterativo como el de Bowring (1976) cuya formulación indicamos a continuación.

$$\beta = \operatorname{arctg} \left( \frac{Z}{(1 - f)\sqrt{X^2 + Y^2}} \right)$$

$$\phi = \operatorname{arctg} \left( \frac{Z + e'^2 b \operatorname{sen}^3 \beta}{\sqrt{X^2 + Y^2} - ae^2 \cos^3 \beta} \right)$$

$$h = \frac{\sqrt{X^2 + Y^2}}{\cos \phi} - N$$

**Coordenadas Geodésicas-UTM** Se establece aquí la relación entre coordenadas geodésicas y coordenadas en proyección Universal Transversa Mercator (UTM). De nuevo existen múltiples métodos de conversión, en este caso hemos elegido el método que sigue Snyder (1987) y que también utiliza Wolf and Dewitt (2000) basado en un desarrollo en serie. Dependiendo del número de términos en que se detenga el desarrollo y el valor del término complementario, el método proporcionará mayor o menor precisión (VV.AA., 1976). Con la formulación siguiente conseguimos una precisión subcentimétrica que cubre perfectamente nuestras necesidades.

Definimos una serie de constantes que se tendrán en cuenta a lo largo del cálculo:

$k_0$  factor de escala sobre el meridiano central

$\phi_0, \lambda_0$  latitud y longitud del origen de coordenadas, ésta última referida a la longitud del meridiano central

$E_0, N_0$  falso Este y falso Norte

El problema directo, es decir la conversión de coordenadas geodésicas a coordenadas UTM en el que estamos interesados, se resume con la siguiente formulación:

El primer parámetro a calcular es M

$$M = a \left[ \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} \right) \phi - \left( \frac{3e^2}{8} + \frac{3e^4}{32} + \frac{45e^6}{1024} \right) \text{sen } 2\phi + \left( \frac{14e^4}{256} + \frac{45e^6}{1024} \right) \text{sen } 4\phi - \frac{35e^6}{3072} \text{sen } 6\phi \right]$$

donde debemos tener en cuenta que permite una precisión de 1 mm para cualquier latitud.

Los siguientes parámetros necesarios son  $T, C$  y  $A$  que se calculan con las siguientes expresiones:

$$T = \operatorname{tg}^2 \phi$$

$$C = e'^2 \cos^2 \phi$$

$$A = (\lambda - \lambda_0) \cos \phi$$

Ahora ya estamos en condiciones de calcular las coordenadas  $X$  e  $Y$  como sigue:

$$X = k_o \cdot N \left[ A + (1 - T + C) \frac{A^3}{6} + (5 - 18T + T^2 + 72C - 58e'^2) \frac{A^5}{120} \right] + E_o$$

$$Y = k_o \cdot \left( M - M_o + N \operatorname{tg} \phi \left( \frac{A^2}{2} + (5 - T + 9C + 4C^2) \frac{A^4}{24} + (61 - 58T + T^2 + 600C - 330e'^2) \frac{A^6}{720} \right) \right) + N_o$$

El problema inverso es decir, la conversión de coordenadas en proyección UTM a coordenadas geodésicas comienza con el cálculo de la latitud  $\phi_1$ . Es la latitud sobre el meridiano central que tiene la misma coordenada  $Y$  que el punto  $(\phi, \lambda)$ .

$$M = M_o + \frac{Y - N_o}{k_o}$$

$$\mu = \frac{M}{a \left( 1 - \frac{e^2}{4} - \frac{3e^4}{64} - \frac{5e^6}{256} \right)}$$

$$e_1 = \frac{1 - \sqrt{1 - e^2}}{1 + \sqrt{1 - e^2}}$$

$$\begin{aligned}\phi_1 = \mu + & \left( \frac{3e_1}{2} - \frac{27e_1^3}{32} \right) \text{sen}(2\mu) + \left( \frac{21e_1^2}{16} - \frac{55e_1^4}{32} \right) \text{sen}(4\mu) \\ & + \frac{151e_1^3}{96} \text{sen}(6\mu) + \frac{1097e_1^4}{512} \text{sen}(8\mu)\end{aligned}$$

$R_1$  es el radio del arco de meridiano a la latitud  $\phi_1$  y se calcula de la siguiente manera:

$$R_1 = \frac{a(1-e^2)}{(1-e^2 \text{sen}^2 \phi_1)^{\frac{3}{2}}}$$

Se calculan el resto de parámetros para la latitud  $\phi_1$

$$C_1 = e'^2 \cos^2 \phi_1$$

$$T_1 = \text{tg}^2 \phi_1$$

$$N_1 = \frac{a}{\sqrt{1-e^2 \text{sen}^2 \phi_1}}$$

Por último la  $D$  se obtiene de:

$$D = \frac{X - E_o}{N_1 k_o}$$

Ahora ya solo nos queda el cálculo de  $\phi$  y  $\lambda$ :

$$\begin{aligned}\phi = \phi_1 - \frac{N_1 \text{tg} \phi_1}{R_1} & \left[ \frac{D^2}{2} - (5 + 3T_1 + 10C_1 - 4C_1^2 - 9e'^2) \frac{D^4}{24} \right. \\ & \left. + (61 + 90T_1 + 298C_1 + 45T_1^2 - 252e'^2 - 3C_1^2) \frac{D^6}{720} \right]\end{aligned}$$

$$\lambda = \lambda_0 + \frac{1}{\cos \phi_1} \left[ D - (1 + 2T_1 + C_1) \frac{D^3}{6} + (5 - 2C_1 + 28T_1 - 3C_1^2 + 8e'^2 + 24T_1^2) \frac{D^5}{120} \right]$$

**Coordenadas Geocéntricas-Locales Rectangulares** Se establece ahora la relación entre las coordenadas cartesianas geocéntricas y las coordenadas rectangulares locales, comenzando con el problema directo, es decir la conversión de coordenadas cartesianas geocéntricas a rectangulares locales que buscamos. Y se expresa con la siguiente formulación.

$$\begin{pmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \end{pmatrix} = M \cdot \begin{pmatrix} X - X_0 \\ Y - Y_0 \\ Z - Z_0 \end{pmatrix}$$

siendo

$$M = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \lambda_0 & \cos \lambda_0 & 0 \\ -\operatorname{sen} \phi_0 \cos \lambda_0 & -\operatorname{sen} \phi_0 \operatorname{sen} \lambda_0 & \cos \phi_0 \\ \cos \phi_0 \cos \lambda_0 & \cos \phi_0 \operatorname{sen} \lambda_0 & \operatorname{sen} \phi_0 \end{pmatrix}$$

donde el subíndice 0 corresponde al punto origen elegido para el sistema.

El camino inverso, es decir la conversión de coordenadas rectangulares locales a coordenadas geocéntricas será como sigue:

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = M^T \cdot \begin{pmatrix} X_l \\ Y_l \\ Z_l \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} X_0 \\ Y_0 \\ Z_0 \end{pmatrix}$$



### 4.1.3 Transformación de coordenadas

Partimos de dos conjuntos de coordenadas: RL-ETRS89 por una parte y UTM-ETRS89 por otra, obtenidas según se ha explicado en el apartado anterior. Un tercer conjunto de coordenadas lo obtenemos directamente del levantamiento del mapa de 1929 que como ya dedujimos en el epígrafe 2.4 del capítulo 2 se trataba de un sistema local plano, al que llamaremos RL-1929. Nuestro propósito ahora es transformar las coordenadas en el sistema RL-1929 a RL-ETRS89 y UTM-ETRS89, para lo que aplicaremos una transformación. Este procedimiento requiere que algunos puntos llamados de control se conozcan en los dos sistemas origen y destino. Este objetivo se puede conseguir a través de diferentes procedimientos matemáticos. Una primera opción es la **transformación conforme 2D, de semejanza o de Helmert**, conforme porque conserva los ángulos y 2D porque se trata de un sistema plano. Esta transformación incluye dos traslaciones en los ejes  $x$  e  $y$ , un giro y un factor de escala. Es necesario conocer dos puntos comunes como mínimo en los dos sistemas. **La transformación afín 2D** es una modificación de la conforme 2D, que incluye diferentes factores de escala en las direcciones de los ejes  $x$  e  $y$  y una compensación por la falta de ortogonalidad del sistema de ejes.

Planteamos en este apartado la elección del tipo de transformación que más se ajusta a las necesidades del trabajo, en este caso la Transformación afín 2D.

#### **Transformación afín 2D**

La Transformación afín 2D, también llamada transformación de seis parámetros, incluye dos factores de escala diferentes para cada eje,  $x$  e  $y$ , una corrección para compensar la no perpendicularidad entre ejes, una rotación y una traslación para

cada eje. El modelo matemático para la transformación afín es bien conocido en la literatura técnica (Wolf and Dewitt, 2000; Lerma García, 2002).

$$X = A + Bx + Cy$$

$$Y = D + Ex + Fy$$

donde  $(x,y)$  son las coordenadas del sistema origen y  $(X,Y)$  las coordenadas transformadas.

Como mínimo serán necesarios tres puntos de control u homólogos (conocidas sus coordenadas en ambos sistemas) para construir el sistema con seis ecuaciones. Si tenemos disponibles más de tres puntos como en este caso, nueve, podemos obtener una solución mínimo cuadrática expresada matricialmente como  $Ax = K + R$ , donde

$$\begin{pmatrix} x_1 & y_1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_1 & y_1 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & \\ \vdots & & & & \ddots & \vdots \\ x_9 & y_9 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & x_9 & y_9 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X_1 \\ Y_1 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ X_9 \\ Y_9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_{x_1} \\ R_{y_1} \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ R_{x_9} \\ R_{y_9} \end{pmatrix}$$

Los valores obtenidos de los parámetros de la transformación son útiles para llevar a cabo la misma, sin embargo tienen una difícil interpretación geométrica. Para facilitarla se convierten en los parámetros geométricos traslación  $T_x, T_y$  rotación  $\theta$ , corrección de no ortogonalidad de ejes  $\epsilon$  y factor de escala  $S_x$  y  $S_y$ .

Las correspondientes fórmulas son: (Wolf and Dewitt, 2000)

$$\theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{E}{B}\right)$$

$$\varepsilon - \theta = \operatorname{arctg}\left(\frac{C}{F}\right)$$

$$\varepsilon = (\varepsilon - \theta) + \theta$$

$$S_x = \frac{B}{\cos \theta}$$

$$S_y = F \frac{\cos \varepsilon}{\cos(\varepsilon - \theta)}$$

$$T_x = A$$

$$T_x = D$$

Las tablas 4.2, 4.3 y 4.4 muestran los parámetros geométricos de las transformaciones y los residuos obtenidos mediante las mismas. A priori cabe esperar que el sistema RL-ETRS89 encaje mejor con el sistema RL-1929 ya que ambos están basados en un sistema de coordenadas rectangular que elimina los efectos de deformación producidos por una proyección. Se aprecia como tanto los residuos como los factores de escala en ambas transformaciones son homogéneos. Los residuos expresados en metros de las transformaciones RL-ETRS89 y UTM-ETRS89 pertenecen a los intervalos [0.06-0.59] y [0.08-0.57] respectivamente. La única discrepancia se da en el ángulo de rotación, más alto en la transformación UTM-ETRS89 que puede explicarse por el valor que toma la convergencia de la cuadrícula UTM en el vértice Miguelete, origen de coordenadas en el sistema RL-ETRS89. Se puede considerar que los valores son suficientemente consistentes para poder afirmar que los sistemas comparados aunque no son completamente coincidentes sí son homogéneos y por lo tanto nos permiten trabajar

directamente con ellos. Al no producirse diferencias significativas que puedan hacer decantarnos por trabajar en alguno de los dos sistemas, elegiremos el sistema UTM-ETRS89 por tratarse de una proyección ampliamente conocida tanto por parte de los usuarios como de los técnicos en cartografía y topografía, además de ser el sistema de proyección oficial.

**Tabla 4.2:** Parámetros de transformación

	<i>RL-ETRS89</i>	<i>UTM-ETRS89</i>
$s_x$	0.99993	1.00014
$s_y$	0.99998	1.00144
$\theta$	-0.02695 <sup>g</sup>	1.82776 <sup>g</sup>

**Tabla 4.3:** Residuos de la transformación RL-ETRS89

<i>Vértice</i>	$r_x$	$r_y$	$r_{xy}$
Grao	-0.3641	-0.5353	0.6474
Castellar	0.2164	0.2178	0.3071
Mislata	0.0684	0.0148	0.0700
Almácer	0.2707	0.3129	0.4138
Benimámet	-0.2242	-0.1985	0.2994
Sancho	0.0191	0.1590	0.1602
Miguelte II	0.0628	0.0024	0.0628
Pte. Mar	-0.0406	-0.0158	0.0436
Pechina	-0.0087	0.0427	0.0435

**Tabla 4.4:** Residuos de la transformación UTM-ETRS89

<i>Vértice</i>	$r_x$	$r_y$	$r_{xy}$
Grao	-0.3038	-0.5503	0.6286
Castellar	0.1478	0.2383	0.2804
Mislata	0.0927	0.0409	0.1013
Almácer	0.2196	0.3361	0.4015
Benimámet	-0.2040	-0.2616	0.3318
Sancho	0.0423	0.1187	0.1261
Miguelte II	0.0581	0.0213	0.0619
Pte. Mar	-0.0327	-0.0019	0.0327
Pechina	-0.0200	0.0584	0.0618

En este punto, disponemos de todo lo necesario para poder ajustar una serie de redes cuyos observables serán ahora los transformados desde el sistema original RL-1929 al sistema UTM-ETRS89.

## **4.2 Ajuste e interpretación de redes en el sistema ETRS89**

Un segundo objetivo en este capítulo es ajustar y estudiar una serie de redes en las que los observables han sido transformados del sistema original 1929 al sistema ETRS89. El ajuste sigue el método gaussiano por incrementos de coordenadas,(capítulo 3) completándolo con la interpretación de resultados, estableciendo recintos de error con la fiabilidad asociada que más se ajuste a las necesidades del proyecto, a partir de un método novedoso que implica Análisis Multivariante junto con la teoría de podarias e hiperpodarias y que presenta ciertas ventajas respecto al método tradicional basado en los hiperelipsoides de error.

### **4.2.1 Elementos teóricos sobre recintos de error**

La interpretación rigurosa de resultados en ajustes gaussianos de redes locales y microgeodésicas con establecimiento de recintos de error cifrados geométrica y probabilísticamente se ha tratado tradicionalmente mediante procedimientos y análisis basados en el método de hiperelipsoides de error (Chueca Pazos et al., 1996; Mikhail and Ackerman, 1981; Richardus, 1977; Teunissen and Kleusberg, 1996). Las aportaciones introducidas en Jiménez Martínez (2013) consisten en la aplicación de un método mixto, con aplicación de Análisis Multivariante teniendo en cuenta la teoría de las curvas podarias e hiperpodarias que presenta algunas ventajas en rigor, precisión y práctica y será el que se llevará a cabo en nuestras aplicaciones. El recinto de error a posteriori de cualquier vértice de la red está

definido por la podaria o curva pedal de la elipse bidimensional con semiejes  $a$  y  $b$ . A modo de simplificación se trata la ecuación en coordenadas cartesianas de la podaria estándar en dos dimensiones:

$$PS \equiv \sigma_x^2 \cdot x^2 + \sigma_y^2 \cdot y^2 + 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot x \cdot y = (x^2 + y^2)^2$$

Geoméricamente se trata de la curva pedal del centro de la elipse standard:

$$ES \equiv \sigma_x^2 \cdot y^2 - 2 \cdot \sigma_{xy} \cdot x \cdot y + \sigma_y^2 \cdot x^2 = (\sigma_x^2 \sigma_y^2 - \sigma_{xy}^2)$$

Siendo respectivamente  $\sigma_x$  y  $\sigma_y$  la abscisa y ordenada en valores absolutos de las rectas tangentes a la elipse paralelas a los ejes de coordenadas.

Las elipses de error siempre resultan tangentes al rectángulo de centro en el origen y lados paralelos a los ejes de coordenadas de longitud respectivamente  $2 \cdot \sigma_x$  y  $2 \cdot \sigma_y$ . En el caso canónico dichos lados y proyecciones coinciden con los ejes  $2 \cdot a$  y  $2 \cdot b$  de la elipse de que se trate. Y aunque la elipse genérica estudiada es morfológicamente constante (siempre de semiejes  $a$  y  $b$ ), el rectángulo exinscrito y tangente de lados paralelos a los ejes de coordenadas será de área  $4 \cdot \sigma_x \cdot \sigma_y$  y dimensiones  $2 \cdot \sigma_x$  y  $2 \cdot \sigma_y$  esencialmente variables.

Si consideramos todos los recintos de error de los  $n$  vértices libres de la red se demuestra (Jiménez Martínez, 2013), que la hipersuperficie recinto de error  $n$ -dimensional es la hiperpodaria standard  $HPS$  que en coordenadas cartesianas tiene la siguiente expresión:

$$HPS = \left( \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 \right)^2 = \sum_{i/j=1}^{i/j=n} [\sigma_{xi}^2 \cdot x_i^2 + 2 \cdot \sigma_{xixj} \cdot x_i \cdot x_j]_{i \neq j}$$

La definición y generación geométrica de podaria como curva o superficie

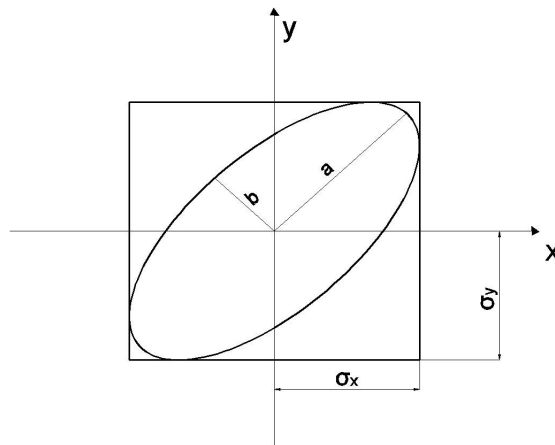
pedal única solo es válida para dos o tres dimensiones. Hay en general un hiperelipsoide escaleno estándar HES asociado a la hipersuperficie HPS con ejes  $a_i$  y cuya expresión canónica es

$$HESC \equiv \sum_{i=1}^{i=n} \frac{x_i^2}{a_i^2} = 1$$

Resultando patente la coincidencia de los ejes y vértices de hiperpodarias e hiperelipsoides asociados.

El recinto de incertidumbre rectangular para dos dimensiones ahora se convierte en un hiperparalelepípedo recto rectángulo.

Para conocer la probabilidad de que un vértice compensado se encuentre dentro de su recinto de error y a su vez suceda lo mismo con los demás vértices simultáneamente, es necesario conocer las hipersuperficies de error en posición no canónica en el sistema de referencia que llamamos  $x$  que se sitúa plano a plano y por parejas de ejes en el plano del levantamiento (Figura 4.3). El hiperelipsoide



**Figura 4.3:** Situación no canónica en el sistema x

y el hiperparalelepípedo exinscrito a él, son unívocos y más representativos que la hiperpodaria a partir de tres dimensiones. En segundo lugar, es necesario aplicar una rotación a los ejes del hipervolumen hasta su posición canónica en el sistema llamado  $z$  según:

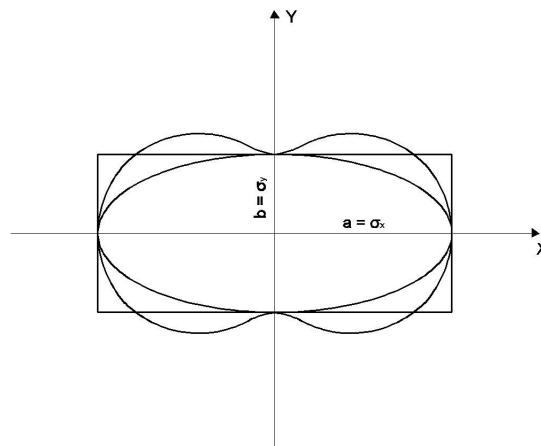
$$\sigma_{zz} = \Gamma \cdot \sigma_{xx} \cdot \Gamma^T \quad (4.1)$$

siendo

$\Gamma$  = matriz de autovectores columna de  $\sigma_{xx}$

$\sigma_{zz} = V$  = matriz diagonal de autovalores de  $\sigma_{xx}$

Se consigue así un hiperparalelepípedo con sus correspondientes hiperelipsoide e hiperpodaria canónicos en el sistema  $z$ , obtenidos a partir de la rotación del hiperelipsoide e hiperpodaria no canónicos en general y correspondientes al sistema  $x$  (Figura 4.4). Todos los ejes  $x$ :  $\sigma_{xi}, \sigma_{yj}$  están sobre el plano del levantamiento, sin



**Figura 4.4:** Situación canónica en el sistema  $z$

embargo todos los ejes  $z$ :  $\sigma_{x'i}, \sigma_{y'j}$  están en general fuera de la realidad física.



Es precisamente la posición canónica del hipervolumen estándar en el sistema  $z$  la que nos permite calcular la probabilidad o fiabilidad conjunta.

$$P_{K\Psi} = 2^n \cdot \left[ (N(0, 1))_0^K \right]^n \quad (4.2)$$

Por otra parte, la aplicación del PD2 introducida en el capítulo II, permite mediante la modificación de la matriz de pesos inicial, que la matriz  $\sigma_{xx}$  llegue a ser diagonal. Si es diagonal, el hipervolumen que constituye el recinto de error es canónico. En este caso es posible aplicar la expresión (4.2) para obtener la fiabilidad conjunta de los recintos de error en el plano  $x$  del levantamiento, y así resolver rigurosamente por análisis multivariante los recintos de error simultáneos.

A continuación se presentan los resultados de varios ajustes con distintos planteamientos en cuanto al conjunto de observaciones y la aplicación del PD2.

#### **4.2.2 Síntesis y resultados del ajuste de la red con 20 formas lineales y 7 variables por el método de Incrementos de Coordenadas**

Tomando como puntos fijos Benimámet y Miguelete II, que como ya sabemos ofrecen mayor garantía de inmovilidad y como puntos libres Almacera, Grao, Mislata, Sancho, Castellar, Pechina y Pte. del Mar se realiza el primer ajuste formado por 20 formas lineales por el método de Incrementos de Coordenadas. Los resultados se presentan a continuación.

##### **Análisis de resultados del ajuste**

**Matrices S** Las matrices S de la subredes 1 y 2 respectivamente se muestran a continuación.

$$S_1 = A_1^T P A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = A_2^T P A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 5 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

**Vectores de variables y residuos. Varianza a posteriori** Los vectores de variables o parámetros de las subredes 1 y 2 (Tabla 4.5) son las correcciones que se aplican a las coordenadas aproximadas de los vértices libres, obtenidas mediante instrumental GNSS que ofrece mejores precisiones que las alcanzadas en la observación clásica de 1929, como se ha visto en el capítulo anterior. Las desviaciones típicas y varianzas de peso unidad se indican en la tabla 4.6 y los residuos del ajuste en la tabla 4.7.

**Tabla 4.5:** Variables o parámetros de las subredes en metros

<i>Vértices</i>	<i>Variables o parámetros subred 1</i>	<i>Variables o parámetros subred 2</i>
Almácerca	-0.1894	-0.3362
Grao	0.2521	0.4271
Mislata	-0.0479	-0.1970
Sancho	-0.1313	-0.2879
Castellar	-0.0565	-0.0341
Pechina	0.0326	-0.0494
Pte. Mar	-0.0280	-0.1501

**Tabla 4.6:** Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad

<i>Subred</i>	$\sigma$ [m]	$\sigma^2$ [m <sup>2</sup> ]
S1	0.09	$7.32 \cdot 10^{-3}$
S2	0.10	$1.02 \cdot 10^{-2}$

**Tabla 4.7:** Residuos de las subredes en metros

<i>Observación</i>	<i>Residuos subred 1</i>	<i>Residuos subred 2</i>
1	-0.1894	-0.2097
2	0.0429	0.0504
3	-0.0093	-0.0104
4	0.0967	0.1122
5	0.0496	0.0575
6	-0.0030	-0.0005
7	-0.0038	-0.0005
8	-0.0188	-0.0224
9	0.0256	0.0323
10	-0.0008	0.0000
11	0.0314	0.0372
12	-0.0158	-0.0175
13	-0.0179	-0.0246
14	0.0321	0.0372
15	-0.0150	-0.0175
16	-0.0217	-0.0246
17	-0.0538	-0.0618
18	-0.5039	0.0607
19	0.1667	0.1993
20	-0.1070	-0.1282

**Matrices de criterio** Las matrices varianza covarianza son:

$$\sigma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0024 & 0.0005 & 0.0013 & 0.0012 & 0.0012 & 0.0009 & 0.0003 \\ 0.0005 & 0.0019 & 0.0008 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0007 & 0.0007 \\ 0.0013 & 0.0008 & 0.0031 & 0.0014 & 0.0013 & 0.0008 & 0.0004 \\ 0.0012 & 0.0005 & 0.0014 & 0.0028 & 0.0012 & 0.0006 & 0.0003 \\ 0.0012 & 0.0005 & 0.0013 & 0.0013 & 0.0024 & 0.0009 & 0.0003 \\ 0.0009 & 0.0007 & 0.0008 & 0.0006 & 0.0009 & 0.0021 & 0.0007 \\ 0.0003 & 0.0007 & 0.0004 & 0.0003 & 0.0003 & 0.0007 & 0.0022 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0033 & 0.0007 & 0.0018 & 0.0017 & 0.0016 & 0.0012 & 0.0004 \\ 0.0007 & 0.0027 & 0.0012 & 0.0006 & 0.0007 & 0.0010 & 0.0009 \\ 0.0018 & 0.0012 & 0.0042 & 0.0020 & 0.0018 & 0.0011 & 0.0006 \\ 0.0017 & 0.0006 & 0.0020 & 0.0039 & 0.0017 & 0.0009 & 0.0004 \\ 0.0016 & 0.0007 & 0.0018 & 0.0017 & 0.0033 & 0.0012 & 0.0005 \\ 0.0012 & 0.0010 & 0.0011 & 0.0009 & 0.0012 & 0.0029 & 0.0010 \\ 0.0005 & 0.0009 & 0.0006 & 0.0004 & 0.0005 & 0.0010 & 0.0030 \end{pmatrix}$$

**Semilados de los rectángulos de error a partir de las matrices varianza covarianza de las subredes 1 y 2 en el sistema de referencia x** A partir de las matrices varianza covarianza de las variables  $\sigma_{xx_1}$  y  $\sigma_{xx_2}$ , se obtienen los semiejes de la figura de error, que constituyen los semilados de los rectángulos canónicos de error a partir de las elipses no canónicas (Tabla 4.10).

**Tabla 4.8:** Semiejes de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma_{x_1}$	$\sigma_{x_2}$
Grao	0.0490	0.0574
Castellar	0.0436	0.0520
Mislata	0.0557	0.0648
Almácer	0.0529	0.0624
Sancho	0.0490	0.0574
Pte. Mar	0.0458	0.0539
Pechina	0.0469	0.0548

**Semiejes de las figuras de error a partir de los autovalores** Aplicando una rotación a los semiejes no canónicos obtenidos a partir de  $\sigma_{xx}$  hasta su posición canónica según la expresión (4.1) nos permite conocer los semiejes del hiperelipsoide de error inscrito en el hiperparalelepípedo en el sistema canónico  $z$ .

Los autovectores y autovalores de las matrices varianza covarianza  $\sigma_{xx_1}$  y  $\sigma_{xx_2}$  se indican a continuación.

Matriz de autovectores en la Subred 1:

$$\Gamma_{xx1} = \begin{pmatrix} 0.4192 & 0.1418 & -0.3982 & -0.2165 & -0.3054 & 0.7071 & 0.3731 \\ 0.2472 & -0.4275 & 0.2962 & -0.0798 & -0.3224 & -0.0000 & -0.6806 \\ 0.5036 & 0.1631 & 0.5525 & -0.3872 & 0.2154 & 0.0000 & 0.2801 \\ 0.4399 & 0.3206 & 0.2077 & 0.7338 & 0.2448 & -0.0000 & -0.1966 \\ 0.4262 & 0.1641 & -0.3546 & -0.0131 & -0.4680 & -0.7071 & -0.2235 \\ 0.3174 & -0.3715 & -0.5021 & -0.2937 & 0.6743 & -0.0000 & -0.1062 \\ 0.1837 & -0.7091 & 0.1656 & 0.4147 & -0.1511 & 0.0000 & 0.4683 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovectores en la Subred 2:

$$\Gamma_{xx2} = \begin{pmatrix} 0.4144 & 0.1633 & -0.2643 & -0.3275 & -0.3689 & 0.7071 & -0.6406 \\ 0.2507 & -0.4405 & 0.4670 & -0.1614 & -0.4533 & 0.0000 & -0.1425 \\ 0.5041 & 0.1379 & 0.6653 & -0.1001 & 0.3668 & -0.0000 & 0.0946 \\ 0.4472 & 0.3762 & -0.1729 & 0.6699 & 0.0799 & 0.0000 & -0.1117 \\ 0.4166 & 0.1279 & -0.2906 & -0.1842 & -0.3322 & -0.7071 & 0.7311 \\ 0.3171 & -0.3880 & -0.3628 & -0.3012 & 0.6327 & 0.0000 & -0.0584 \\ 0.1930 & -0.6722 & -0.1535 & 0.5323 & -0.0827 & -0.0000 & 0.1000 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovalores en la Subred 1:

$$V_{xx1} = \begin{pmatrix} 0.0075 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0026 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0017 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0016 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0010 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0012 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0012 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovalores en la Subred 2:

$$V_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0105 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0036 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0023 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0021 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0015 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0017 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0017 \end{pmatrix}$$

Así, a partir de las matrices  $V$  de autovalores obtenemos los valores que se muestran en la tabla 4.9.

**Tabla 4.9:** Semiejes de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma'_{x_1}$	$\sigma'_{x_2}$
Grao	0.0412	0.0480
Castellar	0.0436	0.0520
Mislata	0.0866	0.1025
Almácer	0.0510	0.0600
Sancho	0.0412	0.0480
Pte. Mar	0.0346	0.0412
Pechina	0.0346	0.0412

Si comparamos estos semiejes con los semilados del epígrafe anterior “Semilados de los rectángulos de error a partir de las matrices varianza covarianza”, la diferencia entre la posición canónica y la no canónica, varía de milímetros a pocos centímetros.

Es la posición canónica la que nos permite calcular la fiabilidad conjunta con varios vértices libres. Sin embargo, existe un problema y es que se puede comprobar, por las matrices de autovectores, que la rotación de los ejes del hipervolumen de error hasta su posición canónica no mantiene las figuras de error dentro del plano del levantamiento sino que las proyecta fuera de él, es

decir no mantiene la realidad física. Por lo tanto se complica enormemente su interpretación.

**Recintos de error y fiabilidades compuestas** Para aplicar Análisis Multivariante se realiza un estudio previo de los parámetros de error obtenidos según ejes no canónicos y canónicos para comprobar su relación, siendo óptima para el valor unidad. La tolerancia se ha definido por el intervalo [0.5-1.5]. Siempre que los valores resultantes de la relación pertenezcan a él, nos permitirá elegir el parámetro con significación física como aproximación suficiente.

Para evitar que el hipervolumen de la hiperpodaria supere al del hiperparalelepípedo y siendo las longitudes de los semiejes arbitrarios  $a$  y  $b$  del hiperelipsoide

$$a = b \cdot \operatorname{tg}(71^{\circ}.25) = b \cdot 2.06 \quad (4.3)$$

$$a = b \cdot \operatorname{tg}(28^{\circ}.75) = b \cdot 0.48 \quad (4.4)$$

deberá cumplirse

$$0.48 = \operatorname{tg}(28^{\circ}.75) < \frac{a}{b} < \operatorname{tg}(71^{\circ}.25) = 2.06 \quad (4.5)$$

con óptimo en  $\frac{a}{b} = 1 = \operatorname{tg} 50^{\circ}$ , caso en el que el círculo es equivalente a la elipse (Jiménez Martínez, 2013).

La relación entre los semilados  $a = x_1 = \sigma_{x_1}$  y  $b = x_2 = \sigma_{x_2}$  del recinto rectangular de error de cada vértice pertenece al intervalo [0.48-2.06] como se puede observar en la columna 8 de la Tabla 4.10.

Las fiabilidades compuestas de los siete vértices libres se han obtenido con probabilidades del 96.42% y 52.03%. Además de la fiabilidad para cada uno de los vértices libres individualizados con una probabilidad del 99.48%. Estas probabi-



**Tabla 4.10:** Estudio de recintos de error

<i>Vértices</i>	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma'_{x1}$	$\sigma'_{x2}$	$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma'_{x1}}$	$\frac{\sigma_{x2}}{\sigma'_{x2}}$	$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x2}}$	$\sigma''_{x1}$	$\sigma''_{x2}$
Grao	0.0490	0.0574	0.0412	0.0480	1.19	1.20	0.85	0.0490	0.0574
Castellar	0.0436	0.0520	0.0316	0.0387	1.38	1.34	0.84	0.0436	0.0520
Mislata	0.0557	0.0648	0.0866	0.1025	0.64	0.63	0.86	0.0557	0.0648
Almácer	0.0529	0.0624	0.0510	0.0600	1.04	1.04	0.85	0.0529	0.0624
Sancho	0.0490	0.0574	0.0412	0.0480	1.19	1.20	0.85	0.0490	0.0574
Pte. Mar	0.0458	0.0539	0.0346	0.0412	1.32	1.31	0.85	0.0458	0.0539
Pechina	0.0469	0.0548	0.0346	0.0412	1.36	1.33	0.86	0.0469	0.0548

$\sigma''_{x1}$  y  $\sigma''_{x2}$  = Semilados corregidos

lidades se han obtenido por aplicación de la expresión (4.2) y se muestran en la Tabla 4.11.

**Tabla 4.11:** Fiabilidades compuestas

<i>Vértices</i>	n = 14, k = 3, P = 96.42 %		n = 14, k = 2, P = 52.03 %		n = 2, k = 3, P = 99.48 %	
	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>
Grao	0.1470	0.1722	0.0980	0.1148	0.1470	0.1722
Castellar	0.1308	0.1560	0.0872	0.1040	0.1308	0.1560
Mislata	0.1671	0.1944	0.1114	0.1296	0.1671	0.1944
Almácer	0.1587	0.1872	0.1058	0.1248	0.1587	0.1872
Sancho	0.1470	0.1722	0.0980	0.1148	0.1470	0.1722
Pte. Mar	0.1374	0.1617	0.0916	0.1078	0.0938	0.1096
Pechina	0.1407	0.1644	0.0938	0.1096	0.1407	0.1644

**Estudio de la Fiabilidad Interna** En la subred 1 los valores de la variable de Baarda  $\omega_i$  se reparten dentro del intervalo [-2.4473, 2.3226] por debajo del umbral de rechazo 3.29, por lo tanto los observables son aceptados al completo. En la subred 2 los valores se reparten en el intervalo [-2.4165, 2.3548] siendo igualmente aceptados (Tabla 4.12).

**Tabla 4.12:** Test de Baarda subredes 1 y 2

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>			<i>Subred 2</i>		
	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	-0.1800	0.0736	-2.4473	-0.2097	0.0868	-2.4165
2	0.0429	0.0689	0.6235	0.0504	0.0812	0.6199
3	-0.0093	0.0675	-0.1371	-0.0104	0.0796	-0.1303
4	0.0967	0.0736	1.3153	0.1122	0.0868	1.2932
5	0.0496	0.0637	0.7790	0.0575	0.0751	0.7654
6	-0.0030	0.0676	-0.0446	-0.0049	0.0798	-0.0617
7	-0.0038	0.0676	-0.0558	-0.0049	0.0798	-0.0617
8	-0.0188	0.0657	-0.2861	-0.0224	0.0775	-0.2896
9	0.0256	0.0673	0.3802	0.0323	0.0794	0.4068
10	-0.0008	0.0698	-0.0109	-0.0000	0.0824	-0.0000
11	0.0314	0.0703	0.4463	0.0372	0.0829	0.4487
12	-0.0158	0.0672	-0.2348	-0.0175	0.0793	-0.2210
13	-0.0179	0.0678	-0.2634	-0.0246	0.0800	-0.3079
14	0.0321	0.0703	0.4572	0.0372	0.0829	0.4487
15	-0.0150	0.0672	-0.2235	-0.0175	0.0793	-0.2210
16	-0.0217	0.0678	-0.3194	-0.0246	0.0800	-0.3079
17	-0.0538	0.0722	-0.7447	-0.0618	0.0852	-0.7257
18	-0.0504	0.0668	-0.7548	-0.0607	0.0788	-0.7712
19	0.1666	0.0717	2.3226	0.1993	0.0846	2.3548
20	-0.1070	0.0717	-1.4914	-0.1282	0.0846	-1.5147

Tanto en la Subred 1 como en la 2 las redundancias son homogéneas y próximas a la redundancia media que en este caso corresponde a 0.65 (Tabla 4.13).

El error máximo que puede deslizarse en nuestros observables en la subred 1 y no ser detectado corresponde a 0.32 m en el observable 5, y en este mismo observable en la subred 2 el error máximo deslizado y no detectado corresponde a 0.37 m, según indica la Tabla 4.14.

Recordamos que dichos valores, obviamente excesivos para un trabajo moderno, se están refiriendo a la recuperación de un plano de 1929 a escala 1:500. Esta reflexión es válida para todo lo que sigue.

**Tabla 4.13:** Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
1	0.7394	0.7394
2	0.6482	0.6482
3	0.6221	0.6221
4	0.7394	0.7394
5	0.5537	0.5537
6	0.6251	0.6251
7	0.6251	0.6251
8	0.5896	0.5896
9	0.6189	0.6189
10	0.6667	0.6667
11	0.6756	0.6756
12	0.6170	0.6170
13	0.6284	0.6284
14	0.6756	0.6756
15	0.6170	0.6170
16	0.6284	0.6284
17	0.7134	0.7134
18	0.6091	0.6091
19	0.7036	0.7036
20	0.7036	0.7036
Suma	13	13

**Tabla 4.14:** Fiabilidad interna subredes 1 y 2

Observación	Subred 1				Subred 2			
	$\sigma_C$	$\sqrt{F_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$	$\sigma_C$	$\sqrt{F_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.0437	0.8599	0.2092	4.7913	0.0515	0.8599	0.2468	4.7913
2	0.0507	0.8051	0.2596	5.1173	0.0599	0.8051	0.3063	5.1173
3	0.0526	0.7888	0.2746	5.2234	0.0620	0.7888	0.3240	5.2234
4	0.0437	0.8599	0.2092	4.7913	0.0515	0.8599	0.2468	4.7913
5	0.0571	0.7441	0.3164	5.5366	0.0674	0.7441	0.3732	5.5366
6	0.0524	0.7907	0.2729	5.2109	0.0618	0.7907	0.3219	5.2109
7	0.0524	0.7907	0.2729	5.2109	0.0618	0.7907	0.3219	5.2109
8	0.0548	0.7678	0.2940	5.3657	0.0646	0.7678	0.3469	5.3657
9	0.0528	0.7867	0.2766	5.2371	0.0623	0.7867	0.3262	5.2371
10	0.0494	0.8165	0.2492	5.0459	0.0583	0.8165	0.2940	5.0459
11	0.0487	0.8220	0.2442	5.0124	0.0575	0.8220	0.2881	5.0124
12	0.0529	0.7855	0.2777	5.2451	0.0624	0.7855	0.3276	5.2451
13	0.0521	0.7927	0.2710	5.1973	0.0615	0.7927	0.3197	5.1973
14	0.0487	0.8220	0.2442	5.0124	0.0575	0.8220	0.2881	5.0124
15	0.0529	0.7855	0.2777	5.2451	0.0624	0.7855	0.3276	5.2451
16	0.0521	0.7927	0.2710	5.1973	0.0615	0.7927	0.3197	5.1973
17	0.0458	0.8446	0.2234	4.8780	0.0540	0.8446	0.2635	4.8780
18	0.0535	0.7805	0.2823	5.2789	0.0631	0.7805	0.3330	5.2789
19	0.0466	0.8388	0.2287	4.9118	0.0549	0.8388	0.2698	4.9118
20	0.0466	0.8388	0.2287	4.9118	0.0549	0.8388	0.2698	4.9118

**Estudio de la Fiabilidad Externa** Los parámetros de homogeneidad de la red muestran valores homogéneos en la subred 1 y 2, ofreciendo un control similar entre todas sus zonas (Tabla 4.15).

El error no detectado  $\nabla_{oi}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable según los valores de las Tablas 4.16 y 4.17. Así el error no detectado afectaría de media en décimas de metro a las variables.

**Tabla 4.15:** Fiabilidad externa subredes 1 y 2

Observación	Subred 1		Subred 2	
	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.5105	2.4458	0.5105	2.4458
2	0.5931	3.0352	0.5931	3.0352
3	0.6147	3.2108	0.6147	3.2108
4	0.5105	2.4458	0.5105	2.4458
5	0.6680	3.6986	0.6680	3.6986
6	0.6123	3.1904	0.6123	3.1904
7	0.6123	3.1904	0.6123	3.1904
8	0.6406	3.4375	0.6406	3.4375
9	0.6173	3.2331	0.6173	3.2331
10	0.5774	2.9133	0.5774	2.9133
11	0.5695	2.8548	0.5695	2.8548
12	0.6189	3.2461	0.6189	3.2461
13	0.6096	3.1683	0.6096	3.1683
14	0.5695	2.8548	0.5695	2.8548
15	0.6189	3.2461	0.6189	3.2461
16	0.6096	3.1683	0.6096	3.1683
17	0.5354	2.6117	0.5354	2.6117
18	0.6252	3.3004	0.6252	3.3004
19	0.5444	2.6742	0.5444	2.6742
20	0.5444	2.6742	0.5444	2.6742

**Tabla 4.16:** Vectores de fiabilidad externa subred 1

<i>Observación</i>	$x_{Grao}$	$x_{Castellar}$	$x_{Mislata}$	$x_{Almácer}$	$x_{Sancho}$	$x_{Pte.Mar}$	$x_{Pechina}$
1	-0.0171	-0.0643	-0.0285	-0.0157	-0.0171	-0.0241	-0.0221
2	0.0155	-0.0499	-0.0030	0.0070	0.0154	0.0579	0.0020
3	-0.0071	-0.0554	-0.0195	-0.0084	-0.0071	-0.0005	0.0670
4	-0.0171	-0.0643	-0.0285	-0.0157	-0.0171	-0.0241	-0.0221
5	0.0410	-0.0541	0.1124	0.0486	0.0410	0.0030	-0.0128
6	-0.0024	0.0018	-0.0047	-0.0695	0.0512	0.0107	0.0031
7	0.0512	0.0018	-0.0047	-0.0695	-0.0024	0.0107	0.0031
8	0.0048	0.0181	0.0774	-0.0650	0.0048	0.0068	0.0062
9	-0.0539	-0.0207	-0.0632	-0.1243	-0.0539	-0.0281	-0.0122
10	0.0490	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0490	0.0000	0.0000
11	-0.0385	-0.0169	-0.0437	-0.0404	-0.0792	-0.0292	-0.0115
12	0.0060	0.0129	0.0660	0.0079	0.0403	-0.0038	0.0023
13	-0.0103	0.0077	-0.0199	-0.0214	-0.0555	0.0452	0.0132
14	-0.0792	-0.0169	-0.0437	-0.0404	0.0385	-0.0292	-0.0115
15	-0.0403	0.0129	0.0660	0.0079	0.0060	-0.0038	0.0023
16	-0.0555	0.0077	-0.0199	-0.0214	-0.0103	0.0452	0.0132
17	0.0267	0.0218	0.0236	0.0193	0.0267	0.0640	0.0215
18	-0.0205	-0.0023	-0.0143	-0.0138	-0.0205	-0.0538	0.0566
19	0.0108	0.0205	0.0127	0.0086	0.0108	0.0220	0.0678
20	0.0108	0.0205	0.0127	0.0086	0.0108	0.0220	0.0678

**Tabla 4.17:** Vectores de fiabilidad externa subred 2

<i>Observación</i>	<i>YGrao</i>	<i>YCastellar</i>	<i>YMislata</i>	<i>YAlmácer</i>	<i>YSancho</i>	<i>YPte.Mar</i>	<i>YPechina</i>
1	-0.0145	-0.0545	-0.0242	-0.0133	-0.0145	-0.0204	-0.0187
2	0.0131	-0.0423	-0.0025	0.0059	0.0131	0.0490	0.0017
3	-0.0060	-0.0470	-0.0166	-0.0072	-0.0060	-0.0005	0.0568
4	-0.0145	-0.0545	-0.0242	-0.0133	-0.0145	-0.0204	-0.0187
5	0.0348	-0.0459	0.0953	0.0412	0.0348	0.0258	-0.0108
6	-0.0021	0.0016	-0.0040	-0.0589	0.0434	0.0091	0.0027
7	0.0434	0.0016	-0.0040	-0.0589	-0.0021	0.0091	0.0027
8	0.0041	0.0153	0.0656	-0.0551	0.0041	0.0057	0.0053
9	-0.0457	-0.0176	-0.0536	-0.1054	-0.0457	-0.0239	-0.0104
10	0.0415	0.0000	0.0000	0.0000	0.0415	0.0000	0.0000
11	-0.0454	-0.0199	-0.0516	-0.0476	-0.0934	-0.0345	-0.0136
12	0.0070	0.0152	0.0779	0.0093	-0.0476	-0.0045	0.0027
13	-0.0121	0.0091	-0.0234	-0.0253	-0.0654	0.0534	0.0156
14	-0.0934	-0.0199	-0.0516	-0.0476	0.0454	-0.0345	-0.0136
15	-0.0476	0.0152	0.0779	0.0093	-0.0045	-0.0045	0.0027
16	-0.0654	0.0091	-0.0252	-0.0253	-0.0121	0.0534	0.0156
17	0.0315	0.0258	0.0279	0.0227	0.0315	0.0755	0.0253
18	-0.0241	-0.0027	-0.0168	-0.0163	-0.0241	-0.0635	0.0667
19	0.0127	0.0242	0.0149	0.0101	0.0127	0.0259	0.0800
20	0.0127	0.0242	0.0149	0.0101	0.0127	0.0259	0.0800

### 4.2.3 Síntesis y resultados del ajuste de la red de 18 formas lineales y 7 variables por el método de Incrementos de Coordenadas

En este caso entran en el ajuste solo 18 formas lineales pero respetando los mismos vértices libres y ligados.

#### Análisis de resultados del ajuste

**Matrices S** Las matrices S de la subredes 1 y 2 respectivamente se muestran a continuación.

$$S_1 = A_1^T P A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = A_2^T P A_2 = \begin{pmatrix} 4 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 4 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & 4 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 4 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$



**Vectores de variables y residuos. Varianza a posteriori** Los vectores de variables o parámetros de las subredes 1 y 2 (Tabla 4.18) son las correcciones que se aplican a las coordenadas aproximadas de los vértices libres. Las desviaciones típicas y varianzas de peso unidad se indican en la Tabla 4.19 y los residuos del ajuste en la Tabla 4.20.

**Tabla 4.18:** Variables o parámetros de las subredes en metros

<i>Vértices</i>	<i>subred 1</i>	<i>subred 2</i>
Almácerca	-0.1041	-0.3076
Grao	0.2521	0.4402
Mislata	0.0539	-0.1559
Sancho	0.0312	-0.2642
Castellar	-0.1032	-0.0344
Pechina	0.0545	-0.0247
Pte. Mar	0.0579	-0.0397

**Tabla 4.19:** Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad

<i>Subred</i>	$\sigma [m]$	$\sigma^2 [m^2]$
S1	0.13	$1.62 \cdot 10^{-2}$
S2	0.08	$6.53 \cdot 10^{-3}$

**Tabla 4.20:** Residuos de las subredes en metros

<i>Observación</i>	<i>Residuos subred 1</i>	<i>Residuos subred 2</i>
1	-0.1801	-0.2227
2	0.0648	0.0619
3	0.0186	0.0616
4	0.0967	0.0992
5	0.1355	0.0000
6	0.0770	-0.0051
7	-0.1369	0.0086
8	-0.0755	-0.0036
9	-0.0886	0.0375
10	-0.0254	0.0238
11	0.1326	0.0003
12	0.0797	0.0086
13	0.0510	-0.0051
14	0.0048	-0.0036
15	-0.1026	-0.0137
16	-0.1838	-0.0372
17	0.0572	-0.0179
18	0.0136	0.0250

**Matrices de criterio** Las matrices varianza covarianza son:

$$\sigma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0059 & 0.0005 & 0.0024 & 0.0027 & 0.0010 & 0.0010 & 0.0024 \\ 0.0005 & 0.0050 & 0.0007 & 0.0005 & 0.0019 & 0.0019 & 0.0007 \\ 0.0024 & 0.0007 & 0.0057 & 0.0024 & 0.0019 & 0.0010 & 0.0014 \\ 0.0027 & 0.0005 & 0.0024 & 0.0059 & 0.0010 & 0.0010 & 0.0024 \\ 0.0010 & 0.0019 & 0.0019 & 0.0010 & 0.0055 & 0.0021 & 0.0010 \\ 0.0010 & 0.0019 & 0.0010 & 0.0010 & 0.0021 & 0.0055 & 0.0019 \\ 0.0024 & 0.0007 & 0.0014 & 0.0024 & 0.0010 & 0.0019 & 0.0057 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0024 & 0.0002 & 0.0010 & 0.0011 & 0.0004 & 0.0004 & 0.0010 \\ 0.0002 & 0.0020 & 0.0003 & 0.0002 & 0.0008 & 0.0008 & 0.0003 \\ 0.0010 & 0.0003 & 0.0023 & 0.0010 & 0.0007 & 0.0004 & 0.0006 \\ 0.0011 & 0.0002 & 0.0010 & 0.0024 & 0.0004 & 0.0004 & 0.0010 \\ 0.0004 & 0.0008 & 0.0007 & 0.0004 & 0.0022 & 0.0008 & 0.0004 \\ 0.0004 & 0.0008 & 0.0004 & 0.0004 & 0.0008 & 0.0022 & 0.0007 \\ 0.0010 & 0.0003 & 0.0006 & 0.0010 & 0.0004 & 0.0007 & 0.0023 \end{pmatrix}$$

**Semilados de los rectángulos de error a partir de las matrices varianza covarianza de las subredes 1 y 2** A partir de las matrices varianza covarianza de las variables  $\sigma_{xx_1}$  y  $\sigma_{xx_2}$ , se obtienen los semilados de la superficie de error (Tabla 4.21).

**Tabla 4.21:** Semilados de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma_{x_1}$	$\sigma_{x_2}$
Grao	0.0768	0.0490
Castellar	0.0707	0.0447
Mislata	0.0755	0.0480
Almácer	0.0768	0.0490
Sancho	0.0742	0.0469
Pte. Mar	0.0742	0.0469
Pechina	0.0755	0.0480

**Semiejes de las figuras de error a partir de los autovalores** Se aplica una rotación a los semiejes no canónicos obtenidos a partir de  $\sigma_{xx}$  hasta su posición canónica según la expresión 4.1. Lo que permite conocer los semiejes del hiper-elipsoide de error inscrito en el hiperparalelepípedo en el sistema canónico  $z$ .

Los autovectores y autovalores de las matrices varianza covarianza  $\sigma_{xx_1}$  y  $\sigma_{xx_2}$  son como siguen.

Matriz de autovectores en la Subred 1:

$$\Gamma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.3486 & 0.0000 & 0.7071 & 0.2447 & -0.0000 & 0.3599 & 0.4348 \\ -0.2879 & -0.0000 & -0.0000 & 0.7686 & 0.0000 & -0.5226 & 0.2309 \\ -0.5127 & 0.3717 & -0.0000 & -0.2158 & -0.6015 & 0.1467 & 0.4111 \\ 0.3486 & 0.0000 & -0.7071 & 0.2447 & -0.0000 & 0.3599 & 0.4348 \\ 0.2722 & -0.6015 & 0.0000 & -0.3134 & -0.3717 & -0.4609 & 0.3395 \\ 0.2722 & 0.6015 & 0.0000 & -0.3134 & 0.3717 & -0.4609 & 0.3395 \\ -0.5127 & -0.3717 & 0.0000 & -0.2158 & 0.6015 & 0.1467 & 0.4111 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovectores en la Subred 2:

$$\Gamma_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.3615 & -0.0000 & -0.2375 & 0.7071 & -0.0000 & 0.3423 & 0.4424 \\ -0.2805 & 0.0000 & -0.7632 & 0.0000 & 0.0000 & -0.5336 & 0.2325 \\ -0.5118 & 0.3717 & 0.2094 & -0.0000 & -0.6015 & 0.1501 & 0.4144 \\ 0.3615 & 0.0000 & -0.2094 & -0.7071 & 0.0000 & 0.3423 & 0.4424 \\ 0.2609 & -0.6015 & 0.3294 & -0.0000 & -0.3717 & -0.4668 & 0.3248 \\ 0.2609 & 0.6015 & 0.3294 & -0.0000 & 0.3717 & -0.4668 & 0.3248 \\ -0.5118 & -0.3717 & 0.2094 & 0.0000 & 0.6015 & 0.1501 & 0.4144 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovalores en la Subred 1:

$$V_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0027 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0028 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0032 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0034 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0049 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0073 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0150 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovalores en la Subred 2:

$$V_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0011 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0012 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0013 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0013 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0019 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0030 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0061 \end{pmatrix}$$

Así, a partir de las matrices  $V$  de autovalores obtenemos los semiejes de la superficie de error (Tabla 4.22).

**Tabla 4.22:** Semiejes de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma'_{x_1}$	$\sigma'_{x_2}$
Grao	0.1225	0.0780
Castellar	0.0520	0.0332
Mislata	0.0700	0.0436
Almácer	0.1225	0.0780
Sancho	0.0566	0.0361
Pte. Mar	0.0566	0.0361
Pechina	0.0700	0.0436

Comparando los semiejes provenientes del sistema canónico con los semilados del sistema no canónico, se observan diferencias que oscilan entre milímetros en algunos casos y algunos centímetros en otros, como ocurría en el estudio de la red anterior de 20 formas lineales.

**Recintos de error y fiabilidades compuestas** Como ocurre en el epígrafe homónimo de la red anterior, se realiza el mismo estudio de los parámetros de error obtenidos según ejes no canónicos y canónicos, definiendo la tolerancia para el intervalo [0.5-1.5]. Como los valores de las columnas 6 y 7 de la Tabla 4.23 pertenecen a dicho intervalo, podemos elegir los parámetros con significación física como aproximación suficiente, es decir, los valores de las columnas 9 y 10.

Se toma también la precaución de que el hipervolumen de la hiperpodaria no supere al del hiperparalelepípedo estudiando la relación existente entre los semilados del recinto rectangular de error de cada vértice que debe pertenecer al intervalo [0.48-2.06], como así sucede en todos los casos, tal y como se observa en la columna 8 (Tabla 4.23).

Las fiabilidades compuestas de los siete vértices libres se han obtenido con probabilidades del 96.42% y 52.03%. Además de la fiabilidad para cada uno de

**Tabla 4.23:** Estudio de recintos de error

<i>Vértices</i>	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma'_{x1}$	$\sigma'_{x2}$	$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma'_{x1}}$	$\frac{\sigma_{x2}}{\sigma'_{x2}}$	$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x2}}$	$\sigma''_{x1}$	$\sigma''_{x2}$
Grao	0.0768	0.0490	0.1225	0.0781	0.63	0.63	1.57	0.0768	0.0490
Castellar	0.0707	0.0447	0.0520	0.0332	1.36	1.35	1.58	0.0707	0.0447
Mislata	0.0755	0.0480	0.0700	0.0436	1.08	1.10	1.57	0.0755	0.0480
Almácer	0.0768	0.0490	0.1225	0.0781	0.63	0.63	1.57	0.0768	0.0490
Sancho	0.0742	0.0469	0.0566	0.0361	1.32	1.30	1.58	0.0742	0.0469
Pte. Mar	0.0742	0.0469	0.0566	0.0361	1.32	1.30	1.58	0.0742	0.0469
Pechina	0.0755	0.0480	0.0700	0.0436	1.08	1.10	1.57	0.0755	0.0480

$\sigma''_{x1}$  y  $\sigma''_{x2}$  = Semilados corregidos

los vértices libres individualizados con una probabilidad del 99.48% siguiendo la expresión (4.2) y se muestran en la Tabla 4.24.

**Tabla 4.24:** Fiabilidades compuestas

<i>Vértices</i>	n = 14, k = 3, P = 96.42 %		n = 14, k = 2, P = 52.03 %		n = 2, k = 3, P = 99.48 %	
	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>
Grao	0.2304	0.1470	0.1536	0.0980	0.2304	0.1470
Castellar	0.2121	0.1341	0.1414	0.0894	0.2121	0.1341
Mislata	0.2265	0.1440	0.1510	0.0960	0.2265	0.1440
Almácer	0.2304	0.1470	0.1536	0.0980	0.2304	0.1470
Sancho	0.2226	0.1407	0.1484	0.0938	0.2226	0.1407
Pte. Mar	0.2226	0.1407	0.1484	0.0938	0.2226	0.1407
Pechina	0.2265	0.1440	0.1510	0.0960	0.2265	0.1440

**Estudio de la Fiabilidad Interna** En la subred 1 los valores de la variable de Baarda  $\omega_i$  se reparten dentro del intervalo [-1.7796, 1.3757] por debajo del umbral de rechazo 3.29, por lo tanto los observables son aceptados al completo. En la subred 2 los valores se reparten en el intervalo [-3.3161, 1.4763] siendo sólo una observación la que supera muy ligeramente el umbral de rechazo, el resto son igualmente aceptados como en el caso de la anterior subred (Tabla 4.25).

Tanto en la Subred 1 como en la 2 las redundancias son homogéneas y próximas a la redundancia media que en este caso corresponde a 0.61 (Tabla 4.26).

**Tabla 4.25:** Test de Baarda subredes 1 y 2

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>			<i>Subred 2</i>		
	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	-0.1801	0.1057	-1.7034	-0.2227	0.0672	-3.3161
2	0.0648	0.0973	0.6654	0.0619	0.0618	1.0015
3	0.0186	0.0973	0.1913	0.0619	0.0618	0.9967
4	0.0967	0.1057	0.9146	0.0992	0.0672	1.4763
5	0.1355	0.0985	1.3757	0.0000	0.0626	0.0000
6	0.0770	0.0966	0.7969	-0.0051	0.0614	-0.0825
7	-0.1369	0.1013	-1.3513	0.0086	0.0644	0.1341
8	-0.0755	0.0966	-0.7819	-0.0036	0.0614	-0.0582
9	-0.0886	0.1033	-0.8576	0.0375	0.0656	0.5719
10	-0.0254	0.0931	-0.2728	0.0238	0.0592	0.4026
11	0.1326	0.0968	1.3704	0.0003	0.0615	0.0048
12	0.0797	0.1013	0.7865	0.0086	0.0644	0.1341
13	0.0510	0.0966	0.5281	-0.0051	0.0614	-0.0825
14	0.0048	0.0966	0.0494	0.0036	0.0614	-0.0582
15	-0.1026	0.1023	-1.0025	-0.0137	0.0650	-0.2107
16	-0.1838	0.1033	-1.7796	-0.0372	0.0656	-0.5674
17	0.0572	0.1023	0.5586	-0.0179	0.0650	-0.2747
18	0.0136	0.0931	0.1459	0.0250	0.0592	0.4227

**Tabla 4.26:** Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
1	0.6912	0.6912
2	0.5859	0.5859
3	0.5859	0.5859
4	0.6912	0.6912
5	0.6000	0.6000
6	0.5772	0.5772
7	0.6353	0.6353
8	0.5772	0.5772
9	0.6594	0.6594
10	0.5364	0.5364
11	0.5789	0.5789
12	0.6353	0.6353
13	0.5772	0.5772
14	0.5772	0.5772
15	0.6478	0.6478
16	0.6594	0.6594
17	0.6478	0.6478
18	0.5364	0.5364
Suma	11	11

El error máximo que puede deslizarse en nuestros observables en la subred 1 y no ser detectado corresponde a 0.49 m en los observables 10 y 18 y en este mismo observable en la subred 2 el error máximo deslizado y no detectado corresponde a 0.31 m, según indica la Tabla 4.27.

**Tabla 4.27:** Fiabilidad interna subredes 1 y 2

Observación	Subred 1				Subred 2			
	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.0707	0.8314	0.3502	4.9557	0.0449	0.8314	0.2225	4.9557
2	0.0818	0.7654	0.4404	5.3825	0.0520	0.7654	0.2798	5.3825
3	0.0818	0.7654	0.4404	5.3825	0.0520	0.7654	0.2798	5.3825
4	0.0707	0.8314	0.3502	4.9557	0.0449	0.8314	0.2225	4.9557
5	0.0804	0.7746	0.4277	5.3189	0.0511	0.7746	0.2718	5.3189
6	0.0827	0.7598	0.4483	5.4227	0.0525	0.7598	0.2848	5.4227
7	0.0768	0.7971	0.3969	5.1690	0.0488	0.7971	0.2522	5.1690
8	0.0827	0.7598	0.4483	5.4227	0.0525	0.7598	0.2848	5.4227
9	0.0742	0.8121	0.3765	5.0735	0.0471	0.8121	0.2392	5.0735
10	0.0866	0.7324	0.4871	5.6255	0.0550	0.7324	0.3095	5.6255
11	0.0825	0.7609	0.4468	5.4147	0.0524	0.7609	0.2839	5.4147
12	0.0768	0.7971	0.3969	5.1690	0.0488	0.7971	0.2522	5.1690
13	0.0827	0.7598	0.4483	5.4227	0.0525	0.7598	0.2848	5.4227
14	0.0827	0.7598	0.4483	5.4227	0.0525	0.7598	0.2848	5.4227
15	0.0755	0.8049	0.3863	5.1188	0.0479	0.8049	0.2454	5.1188
16	0.0742	0.8121	0.3765	5.0735	0.0471	0.8121	0.2392	5.0735
17	0.0755	0.8049	0.3863	5.1188	0.0479	0.8049	0.2454	5.1188
18	0.0866	0.7324	0.4871	5.6255	0.0550	0.7324	0.3095	5.6255

**Estudio de la Fiabilidad Externa** Los parámetros de homogeneidad de la red muestran valores homogéneos en las subredes 1 y 2, ofreciendo un control similar entre todas sus zonas (Tabla 4.28).

El error no detectado  $\nabla_{oi}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable según los valores de las Tablas 4.29, y 4.30. Así el error no detectado afectaría en centímetros a las variables.



**Tabla 4.28:** Fiabilidad externa subredes 1 y 2

Observación	Subred 1		Subred 2	
	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.5557	2.7540	0.5557	2.7540
2	0.6435	3.4636	0.6435	3.4636
3	0.6435	3.4636	0.6435	3.4636
4	0.5557	2.7540	0.5557	2.7540
5	0.6325	3.3640	0.6325	3.3640
6	0.6502	3.5258	0.6502	3.5258
7	0.6039	3.1216	0.6039	3.1216
8	0.6502	3.5258	0.6502	3.5258
9	0.5836	2.9608	0.5836	2.9608
10	0.6809	3.8304	0.6809	3.8304
11	0.6489	3.5135	0.6489	3.5135
12	0.6039	3.1216	0.6039	3.1216
13	0.6502	3.5258	0.6502	3.5258
14	0.6502	3.5258	0.6502	3.5258
15	0.5934	3.0377	0.5934	3.0377
16	0.5836	2.9608	0.5836	2.9608
17	0.5934	3.0377	0.5934	3.0377
18	0.6809	3.8304	0.6809	3.8304

**Tabla 4.29:** Vectores de fiabilidad externa subred 1

Observación	$x_{Grao}$	$x_{Castellar}$	$x_{Mislata}$	$x_{Almácer}$	$x_{Sancho}$	$x_{Pre.Mar}$	$x_{Pechina}$
1	-0.0103	-0.1081	-0.0154	-0.0103	-0.0412	-0.0412	-0.0154
2	0.0130	-0.0842	0.0078	0.0130	0.0055	0.0982	0.0310
3	0.0130	-0.0842	0.0310	0.0130	0.0982	0.0055	0.0078
4	-0.0103	-0.1081	-0.0154	-0.0103	-0.0412	-0.0412	-0.0154
5	0.0855	0.0000	0.0000	-0.0855	0.0000	0.0000	0.0000
6	-0.0079	0.0066	0.0920	-0.0976	0.0250	0.0014	-0.0260
7	-0.0654	-0.0117	-0.0584	-0.1448	-0.0233	-0.0233	-0.0584
8	-0.0079	0.0066	-0.0260	-0.0976	0.0014	0.0250	0.0920
9	-0.0221	-0.0443	-0.0431	-0.0221	-0.1282	-0.0490	-0.0233
10	0.0430	-0.0358	0.1157	0.0430	-0.1101	-0.0332	0.0132
11	0.0000	0.0000	-0.0235	0.0000	-0.0941	0.0941	0.0235
12	-0.1448	-0.0117	-0.0584	-0.0654	-0.0233	-0.0233	-0.0584
13	-0.0976	0.0066	0.0920	-0.0079	0.0250	0.0014	-0.0260
14	-0.0976	0.0066	-0.0260	-0.0079	0.0014	0.0250	0.0920
15	0.0568	0.0170	0.1360	0.0568	0.0442	0.0239	0.0344
16	0.0221	0.0443	0.0233	0.0221	0.0490	0.1282	0.0431
17	0.0568	0.0170	0.0344	0.0568	0.0239	0.0442	0.1360
18	0.0430	-0.0358	0.0132	0.0430	-0.0332	-0.1101	0.1157

**Tabla 4.30:** Vectores de fiabilidad externa subred 2

<i>Observación</i>	<i>yGrao</i>	<i>yCastellar</i>	<i>yMislata</i>	<i>yAlmácer</i>	<i>ySancho</i>	<i>yPte.Mar</i>	<i>yPechina</i>
1	-0.0065	-0.0687	-0.0098	-0.0065	-0.0262	-0.0262	-0.0098
2	0.0082	-0.0535	0.0050	0.0082	0.0035	0.0624	0.0197
3	0.0082	-0.0535	0.0197	0.0082	0.0624	0.0035	0.0050
4	-0.0065	-0.0687	-0.0098	-0.0065	-0.0262	-0.0262	-0.0098
5	0.0544	0.0000	0.0000	-0.0544	0.0000	0.0000	0.0000
6	-0.0050	0.0042	0.0584	-0.0620	0.0159	0.0009	-0.0165
7	-0.0415	-0.0074	-0.0371	-0.0920	-0.0148	-0.0148	-0.0371
8	-0.0050	0.0042	-0.0165	-0.0620	0.0009	0.0159	0.0584
9	-0.0141	-0.0281	-0.0274	-0.0141	-0.0815	-0.0311	-0.0148
10	0.0273	-0.0228	0.0735	0.0273	-0.0700	-0.0211	0.0084
11	0.0000	0.0000	-0.0149	0.0000	-0.0598	0.0598	0.0149
12	-0.0920	-0.0074	-0.0371	-0.0415	-0.0148	-0.0148	-0.0371
13	-0.0620	0.0042	0.0584	-0.0050	0.0159	0.0009	-0.0165
14	-0.0620	0.0042	-0.0165	-0.0050	0.0009	0.0159	0.0584
15	0.0361	0.0108	0.0864	0.0361	0.0281	0.0152	0.0218
16	0.0141	0.0281	0.0148	0.0141	0.0311	0.0815	0.0274
17	0.0361	0.0108	0.0218	0.0361	0.0152	0.0281	0.0864
18	0.0273	-0.0228	0.0084	0.0273	-0.0211	-0.0699	0.0735

#### 4.2.4 Síntesis y resultados del ajuste de la red de 35 formas lineales y 7 variables por el método de Incrementos de Coordenadas

En este caso entran en el ajuste todas las formas lineales posibles, es decir 35, pero respetando los mismos vértices libres y ligados.

#### Análisis de resultados del ajuste

**Matrices S** Las matrices S de la subredes 1 y 2 respectivamente se muestran a continuación.

$$S_1 = A_1^T P A_1 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = A_2^T P A_2 = \begin{pmatrix} 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 8 \end{pmatrix}$$

**Vectores de variables y residuos. Varianza a posteriori** Los vectores de variables o parámetros de las subredes 1 y 2 (Tabla 4.31) son las correcciones que se aplican a las coordenadas aproximadas de los vértices libres. Las desviaciones típicas y varianzas de peso unidad se indican en la Tabla 4.32 y los residuos del ajuste en la tabla 4.33.

**Tabla 4.31:** Variables o parámetros de las subredes en metros

<i>Vértices</i>	<i>subred 1</i>	<i>subred 2</i>
Almácerca	0.2308	0.4302
Grao	-0.2208	-0.3584
Mislata	-0.1656	-0.1610
Sancho	-0.2926	-0.4563
Castellar	-0.1153	-0.2389
Pechina	-0.0403	-0.1182
Pte. Mar	-0.0530	-0.1786

**Tabla 4.32:** Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad

<i>Subred</i>	$\sigma$ [m]	$\sigma^2$ [m <sup>2</sup> ]
S1	0.09	$8.59 \cdot 10^{-3}$
S2	0.10	$1.00 \cdot 10^{-2}$

**Tabla 4.33:** Residuos de las subredes en metros

<i>Residuos subred 1</i>	<i>Residuos subred 2</i>
$-2.2222 \cdot 10^{-6}$	$+5.5555 \cdot 10^{-6}$
$+8.3267 \cdot 10^{-17}$	$-3.3333 \cdot 10^{-6}$
$-2.2222 \cdot 10^{-6}$	$-2.2222 \cdot 10^{-6}$
$-1.3100 \cdot 10^{-1}$	$-1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+1.1111 \cdot 10^{-6}$	$-2.2222 \cdot 10^{-6}$
$+1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$-4.4444 \cdot 10^{-6}$	$-1.1111 \cdot 10^{-6}$
$+4.4444 \cdot 10^{-6}$	$-3.3333 \cdot 10^{-6}$
$+2.2222 \cdot 10^{-6}$	$+1.1111 \cdot 10^{-6}$
$-1.1102 \cdot 10^{-16}$	$+2.2222 \cdot 10^{-6}$
$-1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+3.3333 \cdot 10^{-6}$	$+2.2222 \cdot 10^{-6}$
$+1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$-2.2222 \cdot 10^{-6}$	$+3.3333 \cdot 10^{-6}$
$-3.3333 \cdot 10^{-6}$	$+1.1111 \cdot 10^{-6}$
$-2.2222 \cdot 10^{-6}$	$+1.1111 \cdot 10^{-6}$
$-1.3100 \cdot 10^{-1}$	$-1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+1.1111 \cdot 10^{-6}$	$+1.1111 \cdot 10^{-6}$
$+1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+5.5555 \cdot 10^{-6}$	$+2.2222 \cdot 10^{-6}$
$+4.4444 \cdot 10^{-6}$	$-2.7756 \cdot 10^{-17}$
$-1.3100 \cdot 10^{-1}$	$-1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+3.3333 \cdot 10^{-6}$	$-2.7756 \cdot 10^{-17}$
$+1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$-2.2222 \cdot 10^{-6}$	$+1.1111 \cdot 10^{-6}$
$-3.3333 \cdot 10^{-6}$	$-1.1111 \cdot 10^{-6}$
$+1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+1.3100 \cdot 10^{-1}$	$+1.4150 \cdot 10^{-1}$
$+4.4444 \cdot 10^{-6}$	$+1.1111 \cdot 10^{-6}$
$+3.3333 \cdot 10^{-6}$	$-1.1111 \cdot 10^{-6}$
$-1.3100 \cdot 10^{-1}$	$-1.4150 \cdot 10^{-1}$
$-1.3100 \cdot 10^{-1}$	$-1.4150 \cdot 10^{-1}$
$-1.1111 \cdot 10^{-6}$	$-2.2222 \cdot 10^{-6}$

**Matrices de criterio** Las matrices varianza covarianza son:

$$\sigma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0014 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0014 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0014 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0014 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0014 & 0.0005 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0014 & 0.0005 \\ 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0005 & 0.0014 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0017 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0006 & 0.0017 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0006 & 0.0006 & 0.0017 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0017 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0017 & 0.0006 & 0.0006 \\ 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0017 & 0.0006 \\ 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0006 & 0.0017 \end{pmatrix}$$

**Semilados de los rectángulos de error a partir de las matrices varianza covarianza de las subredes 1 y 2** A partir de las matrices varianza covarianza de las variables  $\sigma_{xx_1}$  y  $\sigma_{xx_2}$ , se obtienen los valores de semiejes de las figuras de error como muestra la Tabla 4.36.

**Tabla 4.34:** Semiejes de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma_{x_1}$	$\sigma_{x_2}$
Grao	0.0374	0.0412
Castellar	0.0374	0.0412
Mislata	0.0374	0.0412
Almácer	0.0374	0.0412
Sancho	0.0374	0.0412
Pte. Mar	0.0374	0.0412
Pechina	0.0374	0.0412

**Semiejes de las figuras de error a partir de los autovalores** Los autovectores y autovalores de las matrices varianza covarianza  $\sigma_{xx_1}$  y  $\sigma_{xx_2}$  se muestran a continuación.

Matriz de autovectores en la Subred 1:

$$\Gamma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.1980 & -0.8327 & 0.2370 & 0.1543 & -0.2101 & 0.0224 & 0.3780 \\ 0.1980 & 0.4910 & 0.6408 & 0.1543 & -0.2101 & 0.3134 & 0.3780 \\ 0.1980 & 0.2307 & -0.1669 & 0.1543 & -0.2101 & -0.8179 & 0.3780 \\ 0.1980 & 0.1109 & -0.7109 & 0.1543 & -0.2101 & 0.4821 & 0.3780 \\ 0.1187 & -0.0000 & -0.0000 & 0.1543 & 0.9051 & 0.0000 & 0.3780 \\ -0.9106 & -0.0000 & -0.0000 & 0.1543 & -0.0647 & 0.0000 & 0.3780 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & -0.9258 & 0.0000 & 0.0000 & 0.3780 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovectores en la Subred 2:

$$\Gamma_{xx_2} = \begin{pmatrix} -0.2036 & 0.2084 & 0.8571 & -0.1297 & -0.0528 & -0.1342 & 0.3780 \\ -0.0706 & -0.8263 & 0.0905 & 0.3721 & -0.0692 & 0.1338 & 0.3780 \\ -0.2755 & 0.4571 & -0.2378 & 0.6932 & 0.1759 & -0.0662 & 0.3780 \\ -0.2479 & 0.1452 & -0.2933 & -0.2915 & -0.6947 & 0.3479 & 0.3780 \\ -0.1455 & -0.1547 & -0.3263 & -0.3837 & 0.1582 & -0.7303 & 0.3780 \\ 0.0530 & 0.0337 & -0.0901 & -0.3517 & 0.6520 & 0.5443 & 0.3780 \\ 0.8901 & 0.1367 & 0.0000 & 0.0914 & -0.1696 & -0.0954 & 0.3780 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovalores en la Subred 1:

$$V_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0009 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0009 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0009 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0009 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0009 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0009 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0044 \end{pmatrix}$$

Matriz de autovalores en la Subred 2:

$$V_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0011 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0011 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0011 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0011 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0011 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0011 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0053 \end{pmatrix}$$

A partir de las matrices  $V$  de autovalores obtenemos los semiejes de las figuras de error en el sistema canónico según la Tabla 4.35.

**Tabla 4.35:** Semiejes de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma'_{x_1}$	$\sigma'_{x_2}$
Grao	0.0300	0.0332
Castellar	0.0300	0.0332
Mislata	0.0300	0.0332
Almácer	0.0300	0.0332
Sancho	0.0300	0.0332
Pte. Mar	0.0300	0.0332
Pechina	0.0300	0.0332

Comparando los semiejes provenientes del sistema canónico con los semilados del sistema no canónico, se observan diferencias milimétricas en todos los casos.

**Recintos de error y fiabilidades compuestas** Los cocientes entre los parámetros de error obtenidos según ejes no canónicos y canónicos pertenecen en su totalidad al intervalo [0.5-1.5] como puede observarse en las columnas 6 y 7 de la tabla 4.36, lo que nos permite elegir el parámetro con significación física como aproximación suficiente. Comprobamos en la columna 8 de la Tabla 4.36 que el hipervolumen de la hiperpodaria no supere al del hiperparalelepípedo, estudiando la relación entre los semilados de la figura de error de cada vértice que deben pertenecer al intervalo [0.48-2.06], como efectivamente se cumple.

**Tabla 4.36:** Estudio de recintos de error

<i>Vértices</i>	$\sigma_{x1}$	$\sigma_{x2}$	$\sigma'_{x1}$	$\sigma'_{x2}$	$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma'_{x1}}$	$\frac{\sigma_{x2}}{\sigma'_{x2}}$	$\frac{\sigma_{x1}}{\sigma_{x2}}$	$\sigma''_{x1}$	$\sigma''_{x2}$
Grao	0.0374	0.0412	0.0300	0.0332	1.25	1.24	0.90	0.0374	0.0412
Castellar	0.0374	0.0412	0.0300	0.0332	1.25	1.24	0.90	0.0374	0.0412
Mislata	0.0374	0.0412	0.0300	0.0332	1.25	1.24	0.90	0.0374	0.0412
Almácer	0.0374	0.0412	0.0300	0.0332	1.25	1.24	0.90	0.0374	0.0412
Sancho	0.0374	0.0412	0.0300	0.0332	1.25	1.24	0.90	0.0374	0.0412
Pte. Mar	0.0374	0.0412	0.0300	0.0332	1.25	1.24	0.90	0.0374	0.0412
Pechina	0.0374	0.0412	0.0300	0.0332	1.25	1.24	0.90	0.0374	0.0412

$\sigma''_{x1}$  y  $\sigma''_{x2}$  = Semilados corregidos

Las fiabilidades compuestas de los siete vértices libres se han obtenido con probabilidades del 96.42% y 52.03%. Además de la fiabilidad para cada uno de los vértices libres individualizados con una probabilidad del 99.48% y se muestran en la Tabla 4.37.

**Tabla 4.37:** Fiabilidades compuestas

<i>Vértices</i>	n = 14, k = 3, P = 96.42 %		n = 14, k = 2, P = 52.03 %		n = 2, k = 3, P = 99.48 %	
	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>
Grao	0.1122	0.1236	0.0748	0.0824	0.1122	0.1236
Castellar	0.1122	0.1236	0.0748	0.0824	0.1122	0.1236
Mislata	0.1122	0.1236	0.0748	0.0824	0.1122	0.1236
Almácer	0.1122	0.1236	0.0748	0.0824	0.1122	0.1236
Sancho	0.1122	0.1236	0.0748	0.0824	0.1122	0.1236
Pte. Mar	0.1122	0.1236	0.0748	0.0824	0.1122	0.1236
Pechina	0.1122	0.1236	0.0748	0.0824	0.1122	0.1236

**Fiabilidad Interna** En la subred 1 los valores de la variable de Baarda  $\omega_i$  se reparten dentro del intervalo [-1.5492, 1.5492] por debajo del umbral de rechazo 3.29, por lo tanto los observables son aceptados al completo. En la subred 2 los valores se reparten en el intervalo [-1.5493, 1.5492] siendo igualmente aceptados como en el caso de la anterior subred (Tabla 4.38).



**Tabla 4.38:** Test de Baarda subredes 1 y 2

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>			<i>Subred 2</i>		
	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	-0.0000	0.0817	-0.0000	0.0000	0.0882	0.0001
2	0.0000	0.0817	0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
3	-0.0000	0.0817	-0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
4	-0.1310	0.0846	-1.5491	-0.1415	0.0913	-1.5492
5	0.0000	0.0817	0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
6	0.1310	0.0846	1.5492	0.1415	0.0913	1.5492
7	-0.0000	0.0817	-0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
8	0.0000	0.0817	0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
9	0.0000	0.0817	0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
10	-0.0000	0.0817	-0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
11	-0.1311	0.0846	-1.5492	-0.1415	0.0913	-1.5492
12	0.0000	0.0817	0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
13	0.1310	0.0846	1.5492	0.1415	0.0913	1.5492
14	-0.0000	0.0817	-0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
15	-0.0000	0.0817	-0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
16	-0.0000	0.0817	-0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
17	-0.1311	0.0846	-1.5492	-0.1415	0.0913	-1.5492
18	0.0000	0.0817	0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
19	0.1310	0.0846	1.5492	0.1415	0.0913	1.5492
20	0.0000	0.0817	0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
21	0.0000	0.0817	0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
22	-0.1311	0.0846	-1.5492	-0.1415	0.0913	-1.5491
23	0.0000	0.0817	0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
24	0.1310	0.0846	1.5492	0.1415	0.0913	1.5492
25	-0.0000	0.0817	-0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
26	-0.0000	0.0817	-0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
27	0.1310	0.0846	1.5491	0.1415	0.0913	1.5491
28	0.1310	0.0846	1.5492	0.1415	0.0913	1.5492
29	0.1310	0.0846	1.5492	0.1415	0.0913	1.5492
30	0.1310	0.0846	1.5492	0.1415	0.0913	1.5492
31	0.0000	0.0817	0.0000	0.0000	0.0882	0.0000
32	0.0000	0.0817	0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000
33	-0.1311	0.0846	-1.5492	-0.1415	0.0913	-1.5493
34	-0.1311	0.0846	-1.5492	-0.1415	0.0913	-1.5492
35	-0.0000	0.0817	-0.0000	-0.0000	0.0882	-0.0000

Tanto en la Subred 1 como en la 2 las redundancias son homogéneas y próximas a la redundancia media que en este caso corresponde a 0.8 (Tabla 4.39).

**Tabla 4.39:** Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
1	0.7778	0.7778
2	0.7778	0.7778
3	0.7778	0.7778
4	0.8333	0.8333
5	0.7778	0.7778
6	0.8333	0.8333
7	0.7778	0.7778
8	0.7778	0.7778
9	0.7778	0.7778
10	0.7778	0.7778
11	0.8333	0.8333
12	0.7778	0.7778
13	0.8333	0.8333
14	0.7778	0.7778
15	0.7778	0.7778
16	0.7778	0.7778
17	0.8333	0.8333
18	0.7778	0.7778
19	0.8333	0.8333
20	0.7778	0.7778
21	0.7778	0.7778
22	0.8333	0.8333
23	0.7778	0.7778
24	0.8333	0.8333
25	0.7778	0.7778
26	0.7778	0.7778
27	0.8333	0.8333
28	0.8333	0.8333
29	0.8333	0.8333
30	0.8333	0.8333
31	0.7778	0.7778
32	0.7778	0.7778
33	0.8333	0.8333
34	0.8333	0.8333
35	0.7778	0.7778
Suma	28	28

El error máximo que puede deslizarse en nuestros observables en la subred 1 y no ser detectado corresponde a 0.20 m en los observables 1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10, 12, 14, 15, 16, 18, 20, 21, 23, 25, 26, 31, 32 y 35 y en estos mismos observables

en la subred 2 el error máximo deslizado y no detectado corresponde a 0.2203 m, según indica la Tabla 4.40.

**Tabla 4.40:** Fiabilidad interna subredes 1 y 2

Observación	Subred 1				Subred 2			
	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
2	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
3	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
4	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
5	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
6	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
7	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
8	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
9	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
10	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
11	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
12	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
13	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
14	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
15	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
16	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
17	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
18	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
19	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
20	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
21	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
22	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
23	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
24	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
25	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
26	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
27	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
28	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
29	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
30	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
31	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
32	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716
33	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
34	0.0378	0.9129	0.1707	4.5132	0.0408	0.9129	0.1843	4.5132
35	0.0437	0.8819	0.2041	4.6716	0.0472	0.8819	0.2203	4.6716

**Fiabilidad Externa** Los parámetros de homogeneidad de la red muestran valores homogéneos en las subredes 1 y 2, ofreciendo un control similar entre todas sus zonas (Tabla 4.41).

El error no detectado  $\nabla_{oi}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable según los valores de las Tablas 4.42, y 4.43. Así el error no detectado afectaría en centímetros a las variables.

**Tabla 4.41:** Fiabilidad externa subredes 1 y 2

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>		<i>Subred 2</i>	
	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
2	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
3	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
4	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
5	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
6	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
7	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
8	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
9	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
10	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
11	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
12	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
13	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
14	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
15	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
16	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
17	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
18	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
19	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
20	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
21	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
22	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
23	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
24	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
25	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
26	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
27	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
28	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
29	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
30	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
31	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
32	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022
33	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
34	0.4082	1.8425	0.4082	1.8425
35	0.4714	2.2022	0.4714	2.2022

**Tabla 4.42:** Vectores de fiabilidad externa subred 1

<i>Observación</i>	$x_{Grao}$	$x_{Castellar}$	$x_{Mislata}$	$x_{Almácer$	$x_{Sancho}$	$x_{Pre.Mar}$	$x_{Pechina}$
1	-0.0227	0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.0227	0.0000	0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0227	0.0000	0.0000	0.0000
4	-0.0285	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095
5	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0227	0.0000	0.0000
6	-0.0285	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095
7	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0227	0.0000
8	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0227
9	0.0000	-0.0227	0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0227	0.0000	0.0000	0.0000
11	-0.0095	-0.0285	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095
12	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0227	0.0000	0.0000
13	-0.0095	-0.0285	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095
14	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0227	0.0000
15	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0227
16	0.0000	-0.0227	-0.0227	0.0227	0.0000	0.0000	0.0000
17	-0.0095	-0.0095	-0.0285	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095
18	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0227	0.0000	0.0000
19	-0.0095	-0.0095	-0.0285	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0095
20	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0227	0.0000
21	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0000	0.0227
22	-0.0095	-0.0095	-0.0095	0.0000	-0.0095	-0.0095	-0.0095
23	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0227	0.0000	0.0000
24	-0.0095	-0.0095	-0.0095	-0.0227	-0.0095	-0.0095	-0.0095
25	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0227	0.0000
26	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0000	0.0227
27	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0285	0.0095	0.0095
28	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0285	0.0095
29	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0285
30	-0.0095	-0.0095	-0.0095	0.0095	-0.0285	-0.0095	-0.0095
31	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0227	0.0000
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0000	0.0227
33	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0285	0.0095
34	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0095	0.0285
35	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0227	0.0227

**Tabla 4.43:** Vectores de fiabilidad externa subred 2

<i>Observación</i>	<i>yGrao</i>	<i>yCastellar</i>	<i>yMislata</i>	<i>yAlmácer</i>	<i>ySancho</i>	<i>yPre.Mar</i>	<i>yPechina</i>
1	-0.0245	0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
2	-0.0245	0.0000	0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
3	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0245	0.0000	0.0000	0.0000
4	-0.0307	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102
5	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0245	0.0000	0.0000
6	-0.0307	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102
7	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0245	0.0000
8	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0245
9	0.0000	-0.0245	0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000
10	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0245	0.0000	0.0000	0.0000
11	-0.0102	-0.0307	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102
12	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0245	0.0000	0.0000
13	-0.0102	-0.0307	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102
14	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0245	0.0000
15	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0245
16	0.0000	-0.0245	-0.0245	0.0245	0.0000	0.0000	0.0000
17	-0.0102	-0.0102	-0.0307	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102
18	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0245	0.0000	0.0000
19	-0.0102	-0.0102	-0.0307	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0102
20	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0245	0.0000
21	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0000	0.0245
22	-0.0102	-0.0102	-0.0102	0.0000	-0.0102	-0.0102	-0.0102
23	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0245	0.0000	0.0000
24	-0.0102	-0.0102	-0.0102	-0.0307	-0.0102	-0.0102	-0.0102
25	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0245	0.0000
26	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0000	0.0245
27	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0307	0.0102	0.0102
28	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0307	0.0102
29	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0307
30	-0.0102	-0.0102	-0.0102	0.0102	-0.0307	-0.0102	-0.0102
31	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0245	0.0000
32	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0000	0.0245
33	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0307	0.0102
34	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0102	0.0307
35	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	0.0000	-0.0245	0.0245

#### 4.2.5 Síntesis y resultados del ajuste de la red de 14 formas lineales y 7 variables por el método de Incrementos de Coordenadas y PD2

En este caso entran en el ajuste 14 formas lineales posibles, asignando los mismos vértices a libres y ligados y aplicando PD2.

##### Análisis de resultados del ajuste

**Matrices S** Las matrices S de la subredes 1 y 2 respectivamente se muestran a continuación.

$$S_1 = A_1^T P A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$S_2 = A_2^T P A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

**Vectores de variables y residuos. Varianza a posteriori** Los vectores de variables o parámetros de las subredes 1 y 2 (Tabla 4.44) son las correcciones que se aplican a las coordenadas aproximadas de los vértices libres. Las desviaciones típicas y varianzas de peso unidad se indican en la Tabla 4.45 y los residuos del ajuste en la Tabla 4.46.



**Tabla 4.44:** Variables o parámetros de las subredes en metros

<i>Vértices</i>	<i>subred 1</i>	<i>subred 2</i>
Almácer	-0.2956	-0.4599
Grao	0.2104	0.3784
Mislata	-0.1391	-0.3032
Sancho	-0.2427	-0.4165
Castellar	-0.1635	-0.1607
Pechina	-0.0519	-0.1504
Pte. Mar	-0.0582	-0.1856

**Tabla 4.45:** Desviaciones y varianzas de la medida de peso unidad

<i>Subred</i>	$\sigma$ [m]	$\sigma^2$ [m <sup>2</sup> ]
S1	0.20	$3.81 \cdot 10^{-2}$
S2	0.23	$5.25 \cdot 10^{-2}$

**Tabla 4.46:** Residuos de las subredes en metros

<i>Observación</i>	<i>Residuos subred 1</i>	<i>Residuos subred 2</i>
1	-0.1384	-0.1601
2	0.1384	0.1601
3	-0.1370	-0.1601
4	0.1370	0.1601
5	-0.1384	-0.1638
6	0.1384	0.1638
7	-0.1384	-0.1601
8	0.1384	0.1601
9	-0.1384	-0.1601
10	0.1384	0.1601
11	-0.1384	-0.1629
12	0.1384	0.1629
13	-0.1372	-0.1638
14	0.1372	0.1638

**Matrices de criterio** Las matrices varianza covarianza son:

$$\sigma_{xx_1} = \begin{pmatrix} 0.0190 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0190 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0190 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0190 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0190 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0190 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0190 \end{pmatrix}$$

$$\sigma_{xx_2} = \begin{pmatrix} 0.0263 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0263 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0263 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0263 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0263 & 0.0000 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0263 & 0.0000 \\ 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0000 & 0.0263 \end{pmatrix}$$

**Semilados de los rectángulos de error a partir de las matrices varianza covarianza de la subred 1 y 2** A partir de las matrices varianza covarianza de las variables  $\sigma_{xx_1}$  y  $\sigma_{xx_2}$ , se obtienen los resultados de la Tabla 4.47.

**Tabla 4.47:** Semilados de la superficie de error en metros

<i>Vértices</i>	$\sigma_{x_1}$	$\sigma_{x_2}$
Grao	0.1378	0.1622
Castellar	0.1378	0.1622
Mislata	0.1378	0.1622
Almácer	0.1378	0.1622
Sancho	0.1378	0.1622
Pte. Mar	0.1378	0.1622
Pechina	0.1378	0.1622

**Recintos de error y fiabilidades compuestas** En este caso a partir de las matrices varianza covarianza diagonales podemos aplicar directamente análisis

multivariante mediante la expresión 4.1. Los resultados se indican en la Tabla 4.48.

Las fiabilidades compuestas de los siete vértices libres se han obtenido con probabilidades del 96.42% y 52.03%. Además de la fiabilidad para cada uno de los vértices libres individualizados con una probabilidad del 99.48% (Tabla 4.48).

**Tabla 4.48:** Fiabilidades compuestas

<i>Vértices</i>	<i>n = 14, k = 3, P = 96.42 %</i>		<i>n = 14, k = 2, P = 52.03 %</i>		<i>n = 2, k = 3, P = 99.48 %</i>	
	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>	<i>Semilado1</i>	<i>Semilado2</i>
Grao	0.4134	0.4866	0.2756	0.3244	0.4134	0.4866
Castellar	0.4134	0.4866	0.2756	0.3244	0.4134	0.4866
Mislata	0.4134	0.4866	0.2756	0.3244	0.4134	0.4866
Almácer	0.4134	0.4866	0.2756	0.3244	0.4134	0.4866
Sancho	0.4134	0.4866	0.2756	0.3244	0.4134	0.4866
Pte. Mar	0.4134	0.4866	0.2756	0.3244	0.4134	0.4866
Pechina	0.4134	0.4866	0.2756	0.3244	0.4134	0.4866

**Fiabilidad Interna** En la subred 1 los valores de la variable de Baarda  $\omega_i$  se reparten dentro del intervalo  $[-1.0028, 1.0028]$  por debajo del umbral de rechazo 3.29, por lo tanto los observables son aceptados al completo. En la subred 2 los valores se reparten en el intervalo  $[-1.0111, 1.0111]$  siendo igualmente aceptados como en el caso de la anterior subred (Tabla 4.49).

**Tabla 4.49:** Test de Baarda subredes 1 y 2

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>			<i>Subred 2</i>		
	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$	$R_i$	$\sigma_R$	$\omega_i$
1	-0.1384	0.1380	-1.0027	-0.1609	0.1620	-0.9932
2	0.1384	0.1380	1.0027	0.1609	0.1620	0.9932
3	-0.1370	0.1380	-0.9926	-0.1609	0.1620	-0.9932
4	0.1370	0.1380	0.9926	0.1609	0.1620	0.9932
5	-0.1384	0.1380	-1.0027	-0.1638	0.1620	-1.0111
6	0.1384	0.1380	1.0027	0.1638	0.1620	1.0111
7	-0.1384	0.1380	-1.0027	-0.1609	0.1620	-0.9932
8	0.1384	0.1380	1.0027	0.1609	0.1620	0.9932
9	-0.1384	0.1380	-1.0027	-0.1609	0.1620	-0.9932
10	0.1384	0.1380	1.0027	0.1609	0.1620	0.9932
11	-0.1384	0.1380	-1.0028	-0.1629	0.1620	-1.0051
12	0.1384	0.1380	1.0028	0.1629	0.1620	1.0051
13	-0.1372	0.1380	-0.9938	-0.1638	0.1620	-1.0107
14	0.1372	0.1380	0.9938	0.1638	0.1620	1.0107

Tanto en la Subred 1 como en la 2 las redundancias son homogéneas y próximas a la redundancia media que en este caso corresponde a 0.5 (Tabla 4.50).

**Tabla 4.50:** Redundancias en las subredes 1 y 2 expresadas en metros

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>	<i>Subred 2</i>
1	0.5	0.5
2	0.5	0.5
3	0.5	0.5
4	0.5	0.5
5	0.5	0.5
6	0.5	0.5
7	0.5	0.5
8	0.5	0.5
9	0.5	0.5
10	0.5	0.5
11	0.5	0.5
12	0.5	0.5
13	0.5	0.5
14	0.5	0.5
Suma	7	7

El error máximo que puede deslizarse en nuestros observables en la subred 1 y no ser detectado corresponde a 0.80 m en el observable 5 y en este mismo observable en la subred 2 el error máximo deslizado y no detectado corresponde a 0.94 m, según indica la Tabla 4.51.

**Tabla 4.51:** Fiabilidad interna subredes 1 y 2

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>				<i>Subred 2</i>			
	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$	$\sigma_C$	$\sqrt{r_i}$	$\nabla_{oi}$	$\mu_{IN_i}$
1	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
2	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
3	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
4	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
5	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
6	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
7	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
8	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
9	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
10	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
11	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
12	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
13	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266
14	0.1380	0.7071	0.8041	5.8266	0.1620	0.7071	0.9442	5.8266

**Fiabilidad Externa** Los parámetros de homogeneidad de la red muestran valores homogéneos en la subred 1 y 2, ofreciendo un control similar entre todas sus zonas (Tabla 4.52).

**Tabla 4.52:** Fiabilidad externa subredes 1 y 2

<i>Observación</i>	<i>Subred 1</i>		<i>Subred 2</i>	
	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$	$\sqrt{1-r_i}$	$\mu_{EX_i}$
1	0.7071	4.12	0.7071	4.12
2	0.7071	4.12	0.7071	4.12
3	0.7071	4.12	0.7071	4.12
4	0.7071	4.12	0.7071	4.12
5	0.7071	4.12	0.7071	4.12
6	0.7071	4.12	0.7071	4.12
7	0.7071	4.12	0.7071	4.12
8	0.7071	4.12	0.7071	4.12
9	0.7071	4.12	0.7071	4.12
10	0.7071	4.12	0.7071	4.12
11	0.7071	4.12	0.7071	4.12
12	0.7071	4.12	0.7071	4.12
13	0.7071	4.12	0.7071	4.12
14	0.7071	4.12	0.7071	4.12

El error no detectado  $\nabla_{oi}$  en el observable de orden  $i$  afectaría a cada variable según los valores de las Tablas 4.53 y 4.54. Así el error no detectado afectaría en centímetros a las variables.







## **Capítulo 5**

### **Control de deformaciones**

#### **5.1 Introducción**

En este capítulo se evalúan las deformaciones existentes entre las coordenadas en el sistema RL-1929 transformadas al sistema UTM-ETRS89 y las coordenadas obtenidas directamente por observación GNSS en el sistema UTM-ETRS89. Para ello el primer epígrafe estará dedicado a definir el umbral de sensibilidad de la observación GNSS de los vértices de la red de triangulación primaria, que será propio de la instrumentación utilizada y el método empleado. A continuación, el segundo epígrafe trata en detalle la transformación global estudiada en el capítulo cuarto, con diferentes soluciones gaussianas, la solución pseudoinversa y las soluciones obtenidas por zonas de distinta significación, cuyos resultados permiten realizar una valoración conjunta de toda la cartografía. El tercer epígrafe estudia la deformación producida en una hoja del plano previamente digitalizada, definiéndose en este caso la deformación como las discrepancias existentes entre la transformación de las coordenadas imagen del plano digital a coordenadas en el sistema rectangular 1929 y las coordenadas que provienen de observaciones directas de la época. La segunda parte del epígrafe centra la atención en la ventaja que supone una transformación con puntos próximos a la

zona de estudio. El último epígrafe determina la precisión en la identificación de los puntos homólogos para realizar la transformación de coordenadas desde el sistema imagen al sistema del plano de 1929, con ayuda de test estadísticos.

## 5.2 Umbral de sensibilidad de la red

Se pretende estimar la precisión de la observación GNSS de los vértices que forman parte en su mayoría de la red de triangulación primaria y otros a las redes de poligonación del PPM de 1929 con la ventaja en estos últimos de poder hacer estación directamente sobre la señal, por permanecer intacta hasta la actualidad. Así, se puede establecer el umbral de sensibilidad propio de la instrumentación utilizada y del método empleado. Una vez definido y aceptado el concepto de umbral de sensibilidad, se presenta como referente válido de cualquier estudio posterior que se realice del PPM de 1929.

Para llevar a cabo este propósito, se calcula la sensibilidad o umbral de precisión, por debajo del cual no se podrá establecer ninguna conclusión con respecto a la posible deformación producida en la red medida. Por lo tanto, supone caracterizar la precisión del trabajo específico que se presente, formado por una instrumentación concreta y un método de ajuste gaussiano. Una vez conocido el umbral se podrá interpretar y aceptar o desestimar el proyecto si no alcanza la precisión requerida.

Para definir el límite de precisión se presenta un procedimiento formado por dos métodos complementarios que confluyen en un resultado único, con alta probabilidad de comisión y que permite dar un resultado algebraico y estadístico muy sólido.

Llamamos vector  $d$  al límite de precisión buscada. Mediante un estudio

estadístico de errores de primer orden se plantea el rechazo de la Hipótesis nula

$$H_0 : d = 0$$

siendo cierta con un nivel de significación  $\alpha$ . Asimismo se plantea el de segundo orden con rechazo de la hipótesis alternativa

$$H_1 : d \neq 0$$

siendo cierta y con potencia de test  $\beta$ .

En ambos casos se implica la aceptación de las hipótesis  $H_1$  en el primer caso y  $H_0$  en el segundo, siendo falsas.

El umbral de sensibilidad  $d$  está definido por el desplazamiento bidimensional  $d_x$  y  $d_y$  de un número  $n$  de variables, con  $n = 2 \cdot \text{número de vértices}$ . Quedando el vector de la siguiente manera:

$$d = \left( d_{x_1}, d_{x_2} \dots d_{x_{\frac{n}{2}}}, d_{y_1}, d_{y_2} \dots d_{y_{\frac{n}{2}}} \right)$$

La obtención del umbral de sensibilidad se desglosa en dos ( $d_T$  y  $d_P$ ), llamados umbral de sensibilidad teórica y umbral de sensibilidad práctica respectivamente, que *a priori* se espera sean homogéneos y en adelante se comprobará.

El procedimiento de obtención del umbral de sensibilidad está dividido en las siguientes partes:

- Cálculo del vector más probable de sensibilidad práctica  $d_P$ , a partir de ajustes gaussianos.
- Aplicación de la teoría de errores de Baarda para la obtención del vector

más probable de sensibilidad teórica  $d_T$ .

- Aplicación de la variable estadística denominada J/Q a partir de las sensibilidades calculadas previamente.

La variable estadística J/Q se define como (Jiménez Martínez et al., 2014):

$$J/Q - variable = \frac{d^T \cdot (Q_{dd})^{-1} \cdot d}{\sigma_{OT}^2} = \lambda = \rho \quad (5.1)$$

Los parámetros  $\lambda$  y  $\rho$  permitirán conocer el nivel de significación  $\alpha$  y la potencia de test  $\beta$  de cumplimiento de las  $H_0$  y  $H_1$  en las funciones de distribución  $\chi_n^2$  y  $\chi_{n,\lambda}^2$  tanto para la sensibilidad teórica como para la práctica. Es necesario para ello conocer los grados de libertad, iguales al número de componentes del vector  $d$  y el parámetro de traslación  $\lambda$ . Según la teoría desarrollada en (Jiménez Martínez et al., 2014), la aplicación de ajustes coordinados (Sevilla, 1989) permite obtener el valor de la variable  $\rho$ , demostrándose además que el parámetro de traslación  $\lambda$  de la curva de distribución  $\chi_{n,\lambda}^2$  cumple que  $\lambda = \rho$ . El único requerimiento que se impone para pasar el test J/Q será la observación de la red con certeza de no desplazamiento o deformación de ninguno de sus vértices, como sucede en este trabajo, ya que se trata de puntos localizados en lugares permanentes, de modo que el vector  $d$  que siempre será distinto de cero necesariamente, permita realizar una valoración específica del error del proyecto de que se trate.

### 5.2.1 Sistema de formas lineales

En el ejemplo presente se ha observado con instrumentación GNSS y mediante el sistema VRS, un conjunto de 12 vértices pertenecientes a puntos medibles, por estar señalizados o por ser replanteables, de la red levantada en 1929 para la

realización del plano parcelario municipal de Valencia. Estos vértices servirán para definir la sensibilidad y reciben las siguientes denominaciones: Viveros, Micer-Mascó, 86-A, Pechina, Puente del Mar, Grao, Castellar, Mislata, Almacera, Benimámet, Miguelete II, y Sancho. El método utilizado será el ajuste gaussiano por Incrementos de Coordenadas con aplicación del Problema de Diseño de Orden Dos (PD2), que permite modificar la matriz de pesos del sistema de formas lineales inicial con el objetivo de obtener una matriz cofactor diagonal. En la práctica el sistema de formas lineales del método de incrementos de coordenadas debe ser siempre tomado entre vértice libre y vértice ligado de la red (Jiménez Martínez, 2013).

Se establece como vértice fijo el punto de poligonación llamado 86A en la red levantada en 1929, ubicado en la Alameda (Figura 5.1) cuyas coordenadas en el sistema UTM-ETRS89 son (726845.895, 4372427.538). La elección del punto fijo es arbitraria puesto que al corresponderse el mismo en los dos intervalos de tiempo medidos, el vector  $d$  del sistema se formará simplemente por la resta de las coordenadas observadas en los intervalos sin que intervenga el observable calculado. La obtención de las coordenadas de los 11 vértices que se consideran libres se ha realizado en dos intervalos de tiempo de 6 minutos, teniendo la certeza de no haber existido desplazamiento entre los dos, consideración básica para poder valorar el error cometido en la observación.

El sistema de formas lineales que determina la red en estudio será:

$$A_d \cdot d - K_d = R_d \quad (5.2)$$

siendo

$A_d$ : matriz de diseño



**Figura 5.1:** Vértice 86-A perteneciente a la red de poligonación de 1929

$K_d$ : vector de términos independientes

$R_d$ : vector de residuos

$d$ : variables del sistema

En el diseño de la matriz  $A_d$  se deben tener en cuenta una serie de factores como son (Jiménez Martínez, 2013):

- La previsión de recintos de error. Se sabe que a medida que aumenta el número de formas lineales por cada variable, disminuye la varianza a posteriori.
- El número mínimo de formas lineales por cada variable. En este caso corresponde a dos.
- El número de observables disponible.



siendo

$$K_2 = \text{Incrementos Observados}_2 - \text{Incrementos Calculados}$$

$$K_1 = \text{Incrementos Observados}_1 - \text{Incrementos Calculados}$$

La variación en el tiempo o deformación experimentada por la red se expresará por el vector  $d$  de  $n$  componentes, tantas como variables del ajuste:

$$d = d_{2-1} = X_2 - X_1 = (X_{a2} + x_2) - (X_{a1} + x_1) = x_2 - x_1$$

donde

$X_a = X_{a1} = X_{a2}$  : vector de coordenadas aproximadas de vértices en la primera y segunda campaña de observación

$x_2, x_1$  : vector de correcciones en la primera y segunda campaña de observación

Por lo tanto el vector de deformaciones en los vértices de la red producidas entre ambas campañas será:

$$d_{2-1} = x_2 - x_1 \quad (5.4)$$

Una vez definido el sistema, se aplica el PD2 (Capítulo 3) a la red con el objetivo de obtener una matriz cofactor diagonal  $Q_{dd}$  y por tanto una matriz varianza covarianza también diagonal  $\sigma_{dd}$ . A efectos prácticos, se definen los observables como incrementos de coordenadas entre el vértice fijo elegido, 86A y los 11 vértices libres a los que se hizo referencia al principio de este capítulo.

Del ajuste gaussiano por incrementos de coordenadas y aplicación del PD2 se obtiene una matriz cofactor  $Q_{dd}$  diagonal, y todos sus elementos no nulos iguales



si se tiene en cuenta la introducción en el sistema del mismo número de observables para cada una de las variables (Jiménez Martínez, 2013), en este caso 6.

$$Q_{dd} = \begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 & 0 & 0.1667 \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

(22,22)

Es sabido que en este caso se cumple que la deformación es nula, por lo tanto cualquier discrepancia entre ambas campañas que se detecte solo puede deberse a un defecto de observación y cálculo producido a lo largo del proceso y cifran el umbral de sensibilidad del mismo.

**5.2.2 Sensibilidad Práctica**

Del ajuste (5.2) tal como se explica en el epígrafe 5.2.1 obtenemos el vector deformación  $d_{P_{1-2}} = d_P$  que corresponde a la expresión (5.6) cuya norma es  $|d_P| = 0.0225 m$ . Se obtiene también la varianza *a priori* y *a posteriori* de los observables que corresponde a  $\sigma_{OT}^2 = \sigma_{on}^2 = 4.0165 \cdot 10^{-5} m^2$ , iguales en este caso debido a la aplicación del PD2. Los elementos de la diagonal de la matriz  $Q_{dd}$  (5.5) corresponden a  $q_{ii} = 0.2$ .

$$d_P = \begin{pmatrix} d_{x_1} \\ d_{x_2} \\ d_{x_3} \\ d_{x_4} \\ d_{x_5} \\ d_{x_6} \\ d_{x_7} \\ d_{x_8} \\ d_{x_9} \\ d_{x_{10}} \\ d_{x_{11}} \\ d_{y_1} \\ d_{y_2} \\ d_{y_3} \\ d_{y_4} \\ d_{y_5} \\ d_{y_6} \\ d_{y_7} \\ d_{y_8} \\ d_{y_9} \\ d_{y_{10}} \\ d_{y_{11}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0047 \\ -0.0012 \\ -0.0018 \\ 0.0073 \\ 0.0048 \\ -0.0107 \\ -0.0052 \\ 0.0035 \\ -0.0017 \\ 0.0005 \\ -0.0025 \\ 0.0027 \\ -0.0010 \\ 0.0045 \\ -0.0070 \\ 0.0052 \\ 0.0033 \\ -0.0078 \\ 0.0010 \\ 0.0075 \\ -0.0018 \\ -0.0018 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

Conocidos todos los elementos necesarios, se está en condiciones de calcular la variable  $J/Q$  mediante la expresión (5.1) que corresponderá también a  $\lambda_{P_{1-2}} = \rho$

$$\begin{aligned} J/Q - \text{variable}_P = \rho = \lambda_{P_{1-2}} &= \frac{d_P^T \cdot (Q_{dd})^{-1} \cdot d_P}{\sigma_{OT}^2} = \frac{d_P^T \cdot (\text{diag } q)^{-1} \cdot d_P}{\sigma_{OT}^2} \\ &= \frac{|d_P|^2}{q \cdot \sigma_{OT}^2} = \text{constante} \cdot |d_P|^2 = 75.6087 \end{aligned}$$

Como se deduce de la expresión anterior y en virtud de la metodología empleada,

el parámetro  $\lambda = \rho$  es proporcional al cuadrado del módulo del vector deformación  $d$ , lo que es innovación esencial tanto en teoría como en la práctica que sigue, al ser evidente que  $\lambda/\rho$  crecen con el cuadrado de  $|d|$ . Así, cualquier valor  $|d'| > |d|$  dará lugar a  $|\lambda'| > |\lambda|$  y en el test  $J/Q$  un  $\alpha' > \alpha$ ,  $\beta' > \beta$ , e interpretación más favorable a deformación apreciable.

La variable estadística normal  $\lambda = \rho$  proporcionará en cada caso, el límite práctico de apreciación en el vector de sensibilidad  $d = d_p$  con la información estadística y probabilística necesaria, bajo  $H_0$  y  $H_1$  cuyas expresiones respectivamente con  $v$  grados de libertad (22 en este caso) y parámetro de no centralidad o traslación  $\lambda$  son:

$$F = F(\chi_v^2) = F(\rho)$$

$$G = G(\chi_{v,\lambda}^2) = G(\rho)$$

Ambas curvas de distribución son ampliamente conocidas en la bibliografía científica (Montgomery and Runger, 1996; Chueca Pazos et al., 1996). Particularizando en el caso presente, se obtiene un  $\alpha$  o nivel de significación para la función  $\chi_v^2 = \chi_{22}^2$  de  $1.7188 \cdot 10^{-13}$  y una potencia de test  $\beta$  para la función  $\chi_{v,\lambda}^2 = \chi_{22,75.6087}^2$  de 0.9784. Conservando constante la norma o módulo  $|d_p| = 0.0225m$  bastaría un cambio en el n-edro de referencia (Icosakaidiedro en este caso) para modificar sus componentes, que resultan variables. Se puede expresar como vector más probable el de 22 componentes iguales a la media cuadrática de los iniciales  $|d_{p_m}|$ , cuyo resultado se expresa en (5.7).

$$d_{P_m} = \begin{pmatrix} 0.0048 \\ 0.0048 \\ 0.0048 \\ 0.0048 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ 0.0048 \\ 0.0048 \\ 0.0048 \\ 0.0048 \end{pmatrix}_{22,1} \quad (5.7)$$

El vector  $d_{P_m}$  es único y constante donde se mantienen invariables los parámetros  $\lambda$ ,  $\alpha$  y  $\beta$ . Geométricamente, la deformación diferencial estudiada mediante el vector  $d_{P_m}$  se resuelve en planimetría en una traslación de módulo  $|t_{ip}| = 0.0048 \cdot \sqrt{2} = \pm 0.0068$  metros y argumento  $\omega_{t_{ip}} = \pm \frac{\pi}{4}$ , donde  $i \in 1, 2, 3, \dots, 22$ .

### 5.2.3 Sensibilidad Teórica

Se establece una estimación estadística teórica, basada en los conocidos criterios y test de Baarda, que se definen como sensibilidad teórica de la red a partir del estudio de la fiabilidad interna y externa de la misma, ajustada en nuestro caso tal como se explica en el epígrafe 5.2.1 siguiendo el método de incrementos de coordenadas y aplicando el PD2.

#### Fiabilidad interna

Rescatando la formulación empleada en los capítulos de análisis de redes precedentes que hacen referencia a la Fiabilidad interna (Capítulos 3 y 4), se puede

definir el valor de la redundancia media  $r_m$  como:

$$r_m = \frac{m-n}{m} = \frac{132-22}{132} = 0.83$$

donde  $m$  es el número de formas lineales y  $n$  es el número de variables.

La redundancia  $r_i$  de cada uno de los 132 observables del ajuste corresponde a 0.8, lo que significa que se encuentran bien controlados ya que  $1 \leq r_i \leq 0.4$ . Además  $r_m \simeq r_i$  y la suma de las redundancias  $\sum r_i = 110$ . El test de Baarda permite determinar para cada observable el valor mínimo de error detectable, a partir de la variable de Baarda.

$$\omega_i = \frac{R_i}{\hat{\sigma}_{R_i}}$$

El umbral de rechazo establecido para un nivel de significación  $\alpha = 0.0005$  corresponde a 3.4. Por lo que un observable será rechazado cuando se encuentre por encima de ese valor. En este caso todos los parámetros de Baarda calculados se encuentran en el intervalo  $[-2.9672, 3.1401] < 3.4$  por lo que no será rechazado ninguno de ellos.

El mínimo error detectable calculado en función del parámetro de traslación  $\delta_0$ , a su vez función de  $\alpha$  y  $\beta$ , 5, 0.0005 y 0.9505 respectivamente, es constante y tiene un valor de  $\nabla_{O_i} = 0.014m$ . Tanto el nivel de significación  $\alpha$  como la potencia de test  $\beta$  se establecen arbitrariamente. Así, para evaluar el test de Baarda se han elegido valores similares a los aplicados en el test J/Q, para lograr resultados comparables entre ambos test estadísticos. El mínimo error detectable  $\nabla_{O_i}$  es en general variable para cada observable, con la excepción de este caso, en el que la aplicación del método de incrementos de coordenadas junto con el PD2 hace que en cada observable aceptado se espere el mismo error máximo no detectado.

El Parámetro de homogeneidad interna,  $\mu_{IN_i}$  reafirma la información facilitada

por los números de redundancia. Cuanto menor sea la variación relativa de este parámetro mejor será la red. Manteniendo los mismos parámetros elegidos  $\alpha$  y  $\beta$ , el parámetro de homogeneidad interna resulta 5.472 para todos los observables. Situación ideal puesto que la variación es nula. El análisis de la fiabilidad externa de la red dará información acerca de la influencia de los errores no detectados e inferiores a  $\nabla_{O_i}$ .

### Fiabilidad externa

Sabemos por la teoría de Baarda que la calidad del ajuste es inversamente proporcional al valor de los parámetros de homogeneidad  $\mu_{Exi}$  y  $\mu_{Ini}$ . Ambos pueden dar información sobre las diferencias en el control entre unas zonas y otras de la red. Como sucedía con el parámetro  $\mu_{Ini}$ , el parámetro de homogeneidad externa  $\mu_{Exi}$  es el mismo para todos los observables siendo su valor 2.236.

La Fiabilidad externa de cualquier coordenada de la red será también constante debido a la aplicación del método de ajuste elegido. Es decir, el error máximo que pueda afectar a la red debido a un error  $\nabla_{O_i}$  no detectado corresponde al valor 0.0024 m.

Una vez conocido el error que provoca en las variables el error no detectado  $\nabla_{O_i}$ , se está en condiciones de poder calcular la sensibilidad teórica. En el peor de los casos el error para cada una de las 22 variables sería  $0.0024 \cdot \sqrt{6} = 0.0059$  m. Con este error máximo que provoca en las variables el error máximo no detectado, podemos calcular el vector de sensibilidad teórica del ajuste  $d_{T_{1-2}}$  expresado en metros cuya norma es  $|d_T| = 0.0059 \cdot \sqrt{22} = 0.0277$  m. Se conoce también la varianza *a priori* y *a posteriori* de los observables que corresponde a  $\sigma_{OT}^2 = \sigma_{on}^2 = 4.0165 \cdot 10^{-5} m^2$ . Los elementos de la diagonal de la matriz  $Q_{dd}$  (5.5) corresponden a  $q_{ii} = 0.2$



Conocidos todos los elementos necesarios, se calcula la variable  $J/Q$  mediante la expresión (5.1) que corresponderá también a  $\lambda_{T_{1-2}} = \rho$

$$\begin{aligned} J/Q - variable_T = \rho = \lambda_{T_{1-2}} &= \frac{d_T^T \cdot (Q_{dd})^{-1} \cdot d_P}{\sigma_{OT}^2} = \frac{d_T^T \cdot (diag\ q)^{-1} \cdot d_T}{\sigma_{OT}^2} \\ &= \frac{|d_T|^2}{q \cdot \sigma_{OT}^2} = constante \cdot |d_T|^2 = 110 \end{aligned}$$

Los valores de  $\alpha$  y  $\beta$  que se desprenden del valor del parámetro de traslación  $\lambda_{T_{1-2}}$  corresponden respectivamente a  $4.5356 \cdot 10^{-14}$  para la función  $\chi^2$ , prácticamente la certeza y 0.9879 para la función  $\chi'^2$ . Geométricamente, la deformación diferencial estudiada mediante el vector  $d_{T_m}$  se resuelve en planimetría en una traslación de módulo  $|t_{ip}| = 0.0058 \cdot \sqrt{2} = \pm 0.0082$  metros y argumento  $\omega_{t_{ip}} = \pm \frac{\pi}{4}$ , donde  $i \in 1, 2, 3, \dots, 22$ .

Teoría y práctica resultan muy congruentes comparando las normas del vector deformación teórico y práctico:  $|d_T| = 2.77\text{ cm}$  y  $|d_P| = 2.25\text{ cm}$ , y así se puede asumir que el umbral que define la sensibilidad de este trabajo, por debajo del cual no se puede asegurar ningún desplazamiento o deformación de los once vértices de la red puede estudiarse y establecerse a partir de los parámetros  $\lambda$  y  $\rho$ , en función de los módulos de los vectores  $|d_T| = 2.77\text{ cm}$ ,  $|d_P| = 2.25\text{ m}$ , que conducen a una traslación plana afectando a toda la red de módulo comprendido entre 2.77 cm y 2.25 cm, según se defina de forma teórica o práctica. Todo ello con una fiabilidad cercana a la certeza.

Queda definida la sensibilidad de la red, pero solamente para el caso contemplado, a partir de la cual pueden determinarse con el debido rigor las deformaciones que pudieran aparecer.

Dado que los valores reales de desplazamiento  $d_P$  se encuentran por debajo del umbral no se puede decir que exista deformación apreciable, y el desplazamiento



aparente de cada uno de los vértices se debe al error de instrumentación GNSS y al método empleado.

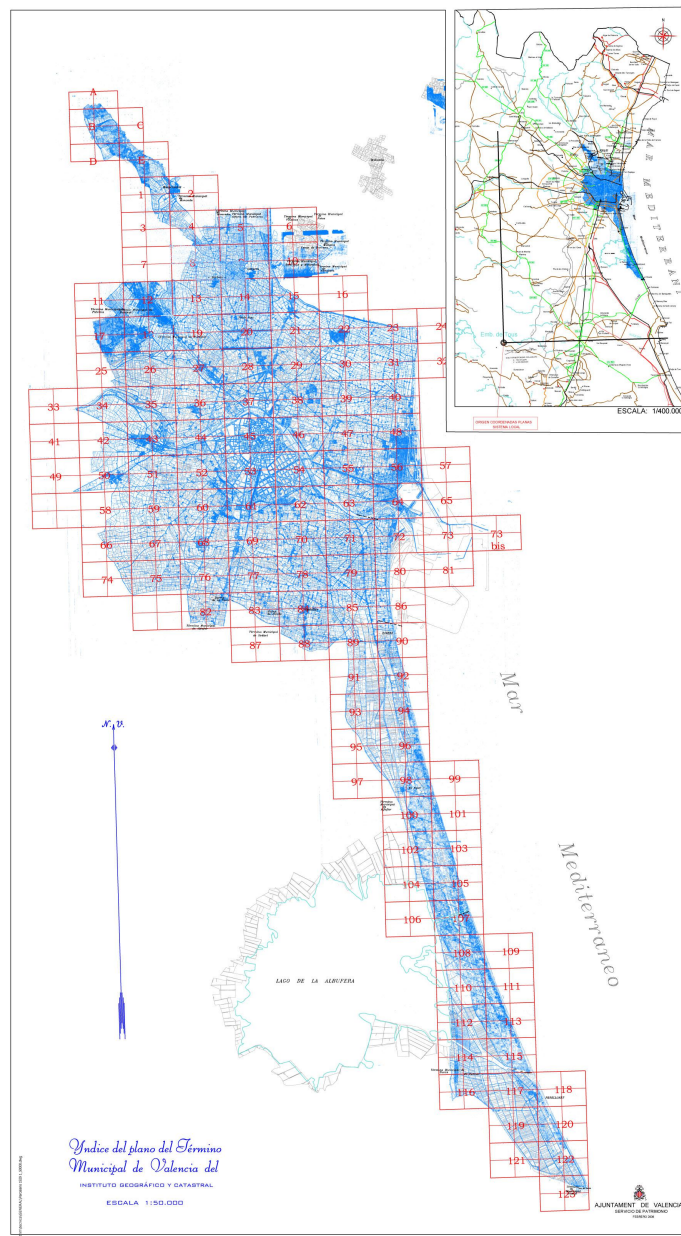
### **5.3 Transformación Global ETRS89. Zonas de distinta significación en control de deformaciones**

#### **5.3.1 Introducción**

La variable  $d$  introducida en el capítulo anterior y que nos ha permitido valorar el umbral de sensibilidad de nuestra metodología, nos vuelve a ser útil ahora para evaluar la diferencia o deformación  $d_{n,1}$  existente entre las coordenadas transformadas UTM-ETRS89 del sistema RL-1929 y las coordenadas UTM-ETRS89 obtenidas por observación GNSS. Recordamos que los parámetros de la transformación que llamaremos global obtenidos mediante transformación afín 2D, provienen de la batería de puntos que sirvieron como puntos de control en la misma y que se pueden consultar en la Tabla 4.4 del Capítulo 4. Estos puntos se encuentran distribuidos de forma homogénea y nos permitirán evaluar la deformación del modelo conjunto del plano de 1929 formado por 421 hojas (Figura 5.2) y cifrar el máximo desplazamiento del conjunto del plano.

Se sabe por el Epígrafe 5.2 que el umbral de sensibilidad de la observación GNSS ronda los 3 centímetros y no se considera necesaria la compensación de la red que ha servido para valorar este umbral ya que la precisión supera claramente la precisión requerida por la cartografía de 1929, 10 centímetros según se sabe.

Ahora el objetivo será interpretar y cifrar la deformación de la cartografía de 1929 tomando como exactas las coordenadas UTM-ETRS89 de la observación GNSS.



**Figura 5.2:** Índice de hojas del PPM de 1929. Imagen cedida por el Servicio de Patrimonio del Excmo. Ayuntamiento de Valencia

Los resultados de la aplicación de la transformación global aparecen en la Figura 5.3, mediante la superposición de la ortofoto del PNOA y del parcelario urbano de Catastro actual.

### 5.3.2 Definición de la deformación

Una primera evaluación de la deformación  $d_{n,1}$  existente entre las coordenadas de los 9 vértices repartidos de manera homogénea por el territorio, se obtiene a partir de la resta de coordenadas. Estas diferencias  $d_{n,1}$  se encuentran en la Tabla 5.1, y el mapa de posición de los 9 vértices en la Figura 5.4.

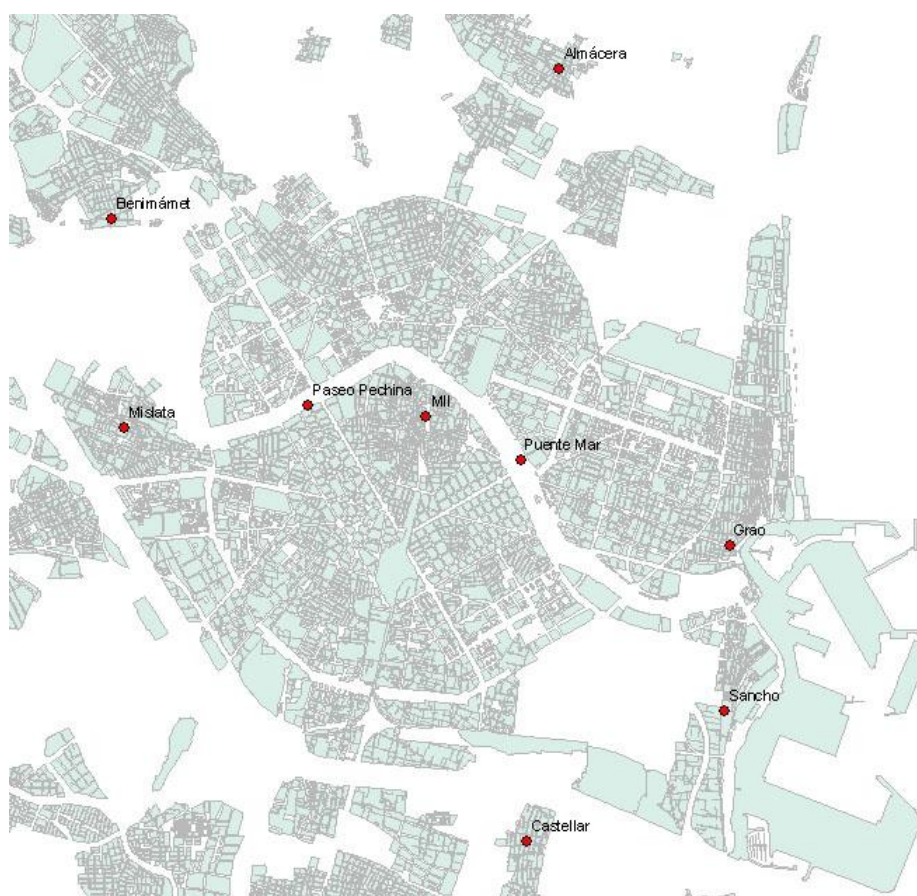
**Tabla 5.1:** Deformación  $d_{n,1}$  existente entre las coordenadas procedentes de la transformación global y las que provienen de la observación medida en metros

<i>Vértice</i>	<b>Deformación</b>	
	<i>dx</i>	<i>dy</i>
Grao	0.2928	0.4874
Castellar	-0.1595	-0.3075
Mislata	-0.0822	-0.0485
Almácer	-0.2142	-0.3506
Benimámet	0.2198	0.2705
Sancho	-0.0571	-0.1936
Puente del Mar	0.0301	-0.0387
Pechina	0.0253	-0.0785
Miguelete II	-0.0567	-0.0514

De la Tabla 5.1 se desprende que los cuatro vértices de mayor deformación corresponden a Benimámet y Almácer al Norte y Castellar y Grao al Sur. Las mínimas deformaciones se encuentran en los vértices Puente del Mar, Pechina y Miguelete II, coincidiendo con los vértices que se conservan desde 1929 sin variaciones sobre el terreno en la actualidad. Sin embargo, los seis vértices restantes se localizaron y replantearon gracias a los croquis de las reseñas de la época, conservados en el archivo histórico del Excmo. Ayto. de Valencia.



**Figura 5.3:** De izquierda a derecha: Cartografía en el sistema UTM-ETRS89, superposición de la Cartografía sobre ortofoto del PNOA y superposición de la Cartografía sobre el parcelario urbano municipal de Valencia (en trazo rojo) y sobre ortofoto. Antigua facultad de ciencias de la U.V. izquierda y Colegio Esclavas derecha.



**Figura 5.4:** Vértices de control utilizados en la transformación Global

### 5.3.3 Cálculo de la deformación. Diferentes soluciones

Es necesario abordar el problema de fraccionar la red, hasta llegar a efectuar el control de la misma por zonas arbitrarias e incluso vértice a vértice, identificando y aislando zonas de interés relevante, con posibilidad de extraer conclusiones sobre la previsible evolución del vector deformaciones, mediante ajuste de la parte fraccionada y manteniendo el condicionado previo establecido de invariancia. Siendo entonces de aplicación la teoría de zonas de distinta significación. Distintas soluciones gaussianas permitirán realizar una valoración de la red global. Estas son: solución pseudoinversa por Ajustes coordinados con adición de funciones o parámetros, solución determinista con inversa de Cayley, solución inversa generalizada recíproca con zonas de distinta significación, y solución con condición de nulidad de las deformaciones.

#### **Solución pseudoinversa por Ajustes coordinados con adición de funciones de variables o parámetros**

Refiriéndonos siempre al Método de Observaciones Indirectas y ajuste por Incrementos de Coordenadas, puede establecerse la solución pseudoinversa, única, que da lugar a mínima corrección en módulo del vector de variables o parámetros,  $|x|$ , mínimo de una red local cualquiera. Así se escribirá mediante el sistema de ecuaciones normales las expresiones (5.9) y (5.10) provenientes de la teoría desarrollada en Chueca Pazos et al. (1996, 2007) sobre deformaciones:

$$\begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & E^T \\ E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_2 \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.9)$$

que sustituyendo el vector de variables  $x$  por el de deformaciones  $d$  resulta:

$$\begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & E^T \\ E & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.10)$$

donde  $|d| = \text{mínimo}$

Esta es la solución llamada pseudoinversa, asociada a la matriz de dicha denominación. Bastará con utilizar la matriz de constreñimientos  $E$  según se desarrolla en la teoría de ajuste coordinado (Sevilla, 1989; Chueca Pazos et al., 1996; Jiménez Martínez, 2013; Jiménez Martínez et al., 2014).

Para evitar las covarianzas dividiremos el sistema de formas lineales en dos subsistemas (Jiménez Martínez, 2013):

$$\begin{pmatrix} dx \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & E_{dx}^T \\ E_{dx} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.11)$$

$$\begin{pmatrix} dy \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & E_{dy}^T \\ E_{dy} & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.12)$$

Prescindiendo del vértice Grao por su excesiva deformación como se ve en la Tabla 5.1, la matriz  $E$  para cada uno de esos subsistemas será la siguiente:

$$E_{dx} = E_{dy} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

**Solución a partir de 8 vértices** Al dividir la red en dos subredes, obtenemos dos subsistemas uno con las variables deformación  $dx$  y otro con las  $dy$  respectivamente. Los componentes de dichos sistemas se muestran a continuación.



**Tabla 5.2:** Líneas observadas en las dos subredes

<i>Número</i>	<i>Formas lineales</i>
1	Castellar-Mislata
2	Castellar-Almácer
3	Castellar-Benimámet
4	Castellar-Sancho
5	Castellar-Pte. del Mar
6	Castellar-Pechina
7	Castellar-Miguelete II
8	Mislata-Almácer
9	Mislata-Benimámet
10	Mislata-Sancho
11	Mislata-Pte. del Mar
12	Mislata-Pechina
13	Mislata-Miguelete II
14	Almácer-Benimámet
15	Almácer-Sancho
16	Almácer-Pte. del Mar
17	Almácer-Pechina
18	Almácer-Miguelete II
19	Benimámet-Sancho
20	Benimámet-Pte. del Mar
21	Benimámet-Pechina
22	Benimámet-Miguelete II
23	Sancho-Pte. del Mar
24	Sancho-Pechina
25	Sancho-Miguelete II
26	Pte. del Mar-Pechina
27	Pte. del Mar-Miguelete II
28	Pechina-Miguelete II



$$A_d = A_{dx} = A_{dy} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad (28.8)$$

$$\begin{array}{r}
 K_{dx} = \left( \begin{array}{c}
 0.0773 \\
 -0.0547 \\
 0.3793 \\
 0.1024 \\
 0.1896 \\
 0.1848 \\
 0.1028 \\
 -0.1320 \\
 0.3020 \\
 0.0251 \\
 0.1123 \\
 0.1075 \\
 0.0255 \\
 0.4340 \\
 0.1571 \\
 0.2443 \\
 0.2395 \\
 0.1575 \\
 -0.2769 \\
 -0.1897 \\
 -0.1945 \\
 -0.2765 \\
 0.0872 \\
 0.0824 \\
 0.0004 \\
 -0.0048 \\
 -0.0868 \\
 -0.0820
 \end{array} \right)_{(28,1)}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 K_{dy} = \left( \begin{array}{c}
 0.2590 \\
 -0.0431 \\
 0.5780 \\
 0.1139 \\
 0.2688 \\
 0.2290 \\
 0.2561 \\
 -0.3021 \\
 0.3190 \\
 -0.1451 \\
 0.0098 \\
 -0.0300 \\
 -0.0029 \\
 0.6211 \\
 0.1570 \\
 0.3119 \\
 0.2721 \\
 0.2992 \\
 -0.4641 \\
 -0.3092 \\
 -0.3490 \\
 -0.3219 \\
 0.1549 \\
 0.1151 \\
 0.1422 \\
 -0.0398 \\
 -0.0127 \\
 0.0271
 \end{array} \right)_{(28,1)}
 \end{array}$$

Conocidas las matrices de diseño  $A_d$  para los subsistemas x e y, siendo la matriz de pesos igual a la matriz identidad  $P_x = P_y = I$ , y conocidos también los vectores  $K_{dx}, K_{dy}, E_{dx}^T$  y  $E_{dy}^T$  aplicamos las expresiones 5.11 y 5.12, y resultan los subsistemas de formas lineales siguientes:

$$\begin{pmatrix} d_x \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -0.9815 \\ -0.3631 \\ -1.4191 \\ 2.0529 \\ -0.1623 \\ 0.5353 \\ 0.4969 \\ -0.1591 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d_y \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -1.6617 \\ 0.4103 \\ -2.0065 \\ 2.9623 \\ -0.7505 \\ 0.4887 \\ 0.1703 \\ 0.3871 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Resolviendo los dos sistemas por inversa de Cayley se obtiene la solución pseudoinversa de la Tabla 5.3 con  $\lambda_2 = 0$ .

**Tabla 5.3:** Vectores de las variables deformación  $d_{n,1}$  con solución pseudoinversa medidas en metros

<i>Vértices</i>	$dx[m]$	$dy[m]$
Castellar	-0.1227	-0.2077
Mislata	-0.0454	0.0513
Almácer	-0.1774	-0.2508
Benimámet	0.2566	0.3703
Sancho	-0.0203	-0.0938
Puente del Mar	0.0669	0.0611
Pechina	0.0621	0.0213
Miguelete II	-0.0199	0.0484

### Solución determinista con inversa de Cayley

En esta solución la elección de puntos fijos se ha realizado en función de la deformación calculada en la Tabla 5.1. Nos interesan en este caso los puntos con deformación por debajo de los 10 centímetros, umbral máximo que nos permite la escala del plano. Por esta razón se consideran fijos los vértices Mislata, Puente del Mar, Pechina y Miguelete II y el resto, Castellar, Almácer, Benimámet y Sancho se consideran libres.

De la misma manera que hacíamos con la solución anterior dividimos la red en dos subredes, una de ellas con las variables deformación  $dx$  y otra con las  $dy$ .

**Tabla 5.4:** Líneas observadas en las dos subredes

<i>Numero</i>	<i>Linea observada</i>
1	Castellar-Mislata
2	Castellar-Almácer
3	Castellar-Benimámet
4	Castellar-Sancho
5	Castellar-Pte. del Mar
6	Castellar-Pechina
7	Castellar-Miguelete II
8	Mislata-Almácer
9	Mislata-Benimámet
10	Mislata-Sancho
11	Almácer-Benimámet
12	Almácer-Sancho
13	Almácer-Pte. del Mar
14	Almácer-Pechina
15	Almácer-Miguelete II
16	Benimámet-Sancho
17	Benimámet-Pte. del Mar
18	Benimámet-Pechina
19	Benimámet-Miguelete II
20	Sancho-Pte. del Mar
21	Sancho-Pechina
22	Sancho-Miguelete II

$$A_d = A_{dx} = A_{dy} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (22.4)$$

$$K_{dx} = \begin{pmatrix} 0.1595 \\ -0.0547 \\ 0.3793 \\ 0.1024 \\ 0.1896 \\ 0.1848 \\ 0.1028 \\ -0.1320 \\ 0.3020 \\ 0.0251 \\ 0.4340 \\ 0.1571 \\ 0.2142 \\ 0.2142 \\ 0.2142 \\ -0.2769 \\ -0.2198 \\ -0.2198 \\ -0.2198 \\ 0.0571 \\ 0.0571 \\ 0.0571 \end{pmatrix}_{(22,1)} \quad K_{dy} = \begin{pmatrix} 0.3075 \\ -0.0431 \\ 0.5780 \\ 0.1139 \\ 0.3075 \\ 0.3075 \\ 0.3075 \\ 0.3021 \\ 0.3190 \\ -0.1451 \\ 0.6211 \\ 0.1570 \\ 0.3506 \\ 0.3506 \\ 0.3506 \\ -0.4641 \\ -0.2705 \\ -0.2705 \\ -0.2705 \\ 0.1936 \\ 0.1936 \\ 0.1936 \end{pmatrix}_{(22,1)}$$

Conocidas las matrices de diseño,  $A_{dx}$ ,  $A_{dy}$ ,  $P_x = P_y = I$ , y los vectores  $K_{dx}$ ,  $K_{dy}$  obtenemos las deformaciones  $dx$  y  $dy$  variables del sistema de ecuaciones  $A \cdot dx = K$  como se ve en la Tabla 5.5.

**Tabla 5.5:** Vectores de las variables deformación  $d_{n,1}$  con solución inversa de Cayley medidas en metros

<i>Vértices</i>	$dx[m]$	$dy[m]$
Castellar	-0.1518	-0.3030
Almácer	-0.1962	-0.3400
Benimámet	0.2378	0.2811
Sancho	-0.0391	-0.1830

**Solución con zonas de distinta significación. Solución inversa generalizada recíproca con zonas de distinta significación**

Dentro de la teoría de las zonas de distinta significación (Chueca Pazos et al., 2007; Jiménez Martínez, 2013; Jiménez Martínez et al., 2014) la cuestión que abordamos ahora es el hecho de que sea cual sea la red que se trate, siempre existen dos zonas de muy distinta significación en la misma:

Zona A: contendrá los vértices que se consideran libres, Castellar, Almácer, Benimámet y Sancho.

Zona B: de vértices o puntos de apoyo que se considerarán fijos, cuyas coordenadas en principio se consideran invariables y conocidas *a priori*. Contendrá los puntos Mislata, Puente del Mar, Pechina y Miguelete II.

Aunque la calidad del trabajo de apoyo de la red sea muy alta, y cuanto mayor sea la precisión exigida, consideramos más riguroso tomar como zona B la zona de coordenadas de corrección mínima que representaremos por el vector  $x_b$  y como zona A la zona de coordenadas de corrección libre *a priori* que representamos por el vector  $x_a$ . Con este supuesto el conjunto de la red se estudiará y resolverá como red libre. El vector solución se expresará según la expresión (5.13)



$$x = \begin{pmatrix} x_a \\ x_b \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

que sustituyendo el vector de variables  $x$  por el de deformaciones  $d$  resulta:

$$d_{n,1} = \begin{pmatrix} d_{a_{i,1}} \\ d_{b_{n-i,1}} \end{pmatrix}$$

La solución inversa generalizada recíproca con zonas de distinta significación se expresa mediante el sistema de formas lineales (5.14).

$$\begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.14)$$

y sustituyendo las variables  $d$  de la zona A y B resulta:

$$\begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d_{a_{i,1}} \\ d_{b_{n-i,1}} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Despejando las variables obtenemos el sistema

$$\begin{pmatrix} d_{a_{i,1}} \\ d_{b_{n-i,1}} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este caso puede formularse el resultado fraccionado mediante dos matrices específicas, una pseudoinversa cuya solución es  $d_{b_{n-i,1}}$  con la condición específica de vector de deformación de módulo mínimo y otra inversa de Cayley cuya solución es  $d_{a_{i,1}}$ .

Como viene siendo práctica habitual dividimos la red en dos subredes, la primera para las variables deformación  $dx_a, dx_b$ .

$$\begin{pmatrix} dx_a \\ dx_b \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.15)$$

y la segunda con las variables  $dy_a, dy_b$ .

$$\begin{pmatrix} dy_a \\ dy_b \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P_1 \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.16)$$

La matriz  $A_2$  para cada uno de esos subsistemas será:

$$A_2 = A_{2dx} = A_{2dy} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

De la expresión 5.15, subsistema que contiene las deformaciones en  $x$  se obtiene la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix} dx_a \\ dx_b \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} -0.9815 \\ -0.3631 \\ -1.4191 \\ 2.0529 \\ -0.1623 \\ 0.5353 \\ 0.4969 \\ -0.1591 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Y de la expresión 5.16, subsistema que contiene las deformaciones en  $y$  y se

obtiene:

$$\begin{pmatrix} dy_a \\ dy_b \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1.6617 \\ 0.4103 \\ -2.0065 \\ 2.9623 \\ -0.7505 \\ 0.4887 \\ 0.1703 \\ 0.3871 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Las soluciones  $dx$  y  $dy$  de los vértices de la zona A con inversa de Cayley y los de la zona B por pseudoinversa se muestran en la tabla 5.6.

**Tabla 5.6:** Vectores de las variables deformación  $d_{n,1}$  con solución inversa de Cayley y pseudoinversa medidas en metros

Vértices	$dx[m]$	$dy[m]$
Castellar	-0.1386	-0.2532
Mislata	-0.0613	0.0058
Almácer	-0.1933	-0.2963
Benimámet	0.2407	0.3248
Sancho	-0.0362	-0.1393
Pte. del Mar	0.0510	0.0156
Pechina	0.0462	-0.0242
Miguelete II	-0.0358	0.0029

**Solución con la condición de nulidad de las deformaciones de índice 1, 2, 3, ...v en el vector  $d$**

La teoría y los detalles sobre esta solución puede consultarse en el epígrafe *Las zonas de distinta significación en control de deformaciones* del Apéndice A. Conocidas las matrices de diseño  $A_{dx}$ ,  $A_{dy}$  y los vectores  $K_{dx}$ ,  $K_{dy}$  del epígrafe



Subdividimos de nuevo el sistema en dos, uno corresponderá a las variables  $dx$  y otro a las variables  $dy$ . El subsistema 1 que contiene las variables  $dx$  quedará definido por la expresión (5.19).

$$\begin{pmatrix} dx_{n,1} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0.9815 \\ -1.4191 \\ 2.0529 \\ -0.1623 \\ -0.3631 \\ 0.5353 \\ 0.4969 \\ -0.1591 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.19)$$

El subsistema 2 que contiene las variables  $dy$  quedará definido por la expresión (5.20).

$$\begin{pmatrix} dy_{n,1} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1.6617 \\ -2.0065 \\ 2.9623 \\ -0.7505 \\ 0.4103 \\ 0.4887 \\ 0.1703 \\ 0.3871 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Los vectores  $dx$  y  $dy$  con este ajuste se observan en la tabla 5.7.

En el segundo supuesto los vértices de deformación nula inducida corresponden a Castellar, Almacera, Benimámet y Sancho para confirmar como contrario al primer supuesto, ya que sabemos que las deformaciones reales en los vértices

**Tabla 5.7:** Vectores de las variables deformación  $d_{n,1}$  con condición de nulidad medidas en metros

<i>Vértices</i>	$dx[m]$	$dy[m]$
Castellar	-0.1386	-0.2532
Almácer	-0.1933	-0.2963
Benimámet	0.2407	0.3248
Sancho	-0.0362	-0.1393
Mislata	0	0
Pte. del Mar	0	0
Pechina	0	0
Miguelete II	0	0

escogidos son apreciables y las mayores del conjunto de vértices. En este caso la matriz de constreñimientos corresponde a la expresión (5.21).

$$\left( I_{v,v} \quad 0 \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (5.21)$$

resultando una deformación  $dx_{n,1}$  según:

$$\begin{pmatrix} dx_{n,1} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -0.9815 \\ -0.3631 \\ -0.1623 \\ -1.4191 \\ 2.0529 \\ 0.5353 \\ 0.4969 \\ -0.1591 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

y una deformación  $dy_{n,1}$  según:

$$\begin{pmatrix} dy_{n,1} \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} -1.6617 \\ 0.4103 \\ -2.0065 \\ 2.9623 \\ -0.7505 \\ 0.4887 \\ 0.1703 \\ 0.3871 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Los vectores  $dx$  y  $dy$  con este ajuste se observan en la tabla 5.8.

**Tabla 5.8:** Vectores de las variables deformación  $d_{n,1}$  con condición de nulidad medidas en metros

Vértices	$dx[m]$	$dy[m]$
Castellar	0	0
Almácer	0	0
Benimámet	0	0
Sancho	0	0
Mislata	-0.0295	0.0968
Pte. del Mar	0.0828	0.1066
Pechina	0.0780	0.0668
Miguelete II	-0.0040	0.0939

Los resultados son inferiores a los 10 centímetros, precisión máxima exigible al mapa de 1929, que corroboran la solidez del método y su fiabilidad interna y externa, en el sentido más amplio. Así, se podrá rechazar *a priori* la solución gaussiana, pero si se acepta, no cabe duda de que es la mejor propuesta. Y siempre, en caso de rechazo, debería justificarse una solución mejor alternativa.

### Resumen de las soluciones de los ajustes

Las Tablas 5.9 y 5.10 recogen las soluciones de todos los ajustes del epígrafe 5.3.3

Si analizamos  $dx$  y  $dy$  todos los valores son congruentes.

La hipótesis nula  $H_0 : d = 0$  en los vértices Castellar, Almacera, Benimámet y Sancho es irreal. A pesar de todo, al ajuste resiste (fiabilidad externa) con solidez.

Y las correcciones en los otros vértices son razonables.

**Tabla 5.9:** Vectores de las variables deformación  $dx$  con distintas soluciones medidas en metros

Vértices	$dx$				
	Pseudoinversa	Determinista	Inv.Generalizada	Nulidad 1	Nulidad 2
Castellar	-0.1227	-0.1389	-0.1386	-0.1386	0
Mislata	-0.0454	0	-0.0613	0	-0.0295
Almacera	-0.1774	-0.1936	-0.1933	-0.1933	0
Benimámet	0.2566	0.2404	0.2407	0.2407	0
Sancho	-0.0203	-0.0365	-0.0362	-0.0362	0
Pte. del Mar	0.0669	0	0.0510	0	0.0828
Pechina	0.0621	0	0.0462	0	0.0780
Miguelete II	-0.0199	0	-0.0358	0	-0.0040

**Tabla 5.10:** Vectores de las variables deformación  $dy$  con distintas soluciones medidas en metros

Vértices	$dy$				
	Pseudoinversa	Determinista	Inv.Generalizada	Nulidad 1	Nulidad 2
Castellar	-0.2077	-0.2954	-0.2532	-0.2532	0
Mislata	0.0513	0	0.0058	0	0.0968
Almacera	-0.2508	-0.3385	-0.2963	-0.2963	0
Benimámet	0.3703	0.2826	0.3248	0.3248	0
Sancho	-0.0938	-0.1815	-0.1393	-0.1393	0
Pte. del Mar	0.0611	0	0.0156	0	0.1066
Pechina	0.0213	0	-0.0242	0	0.0668
Miguelete II	0.0484	0	0.0029	0	0.0939



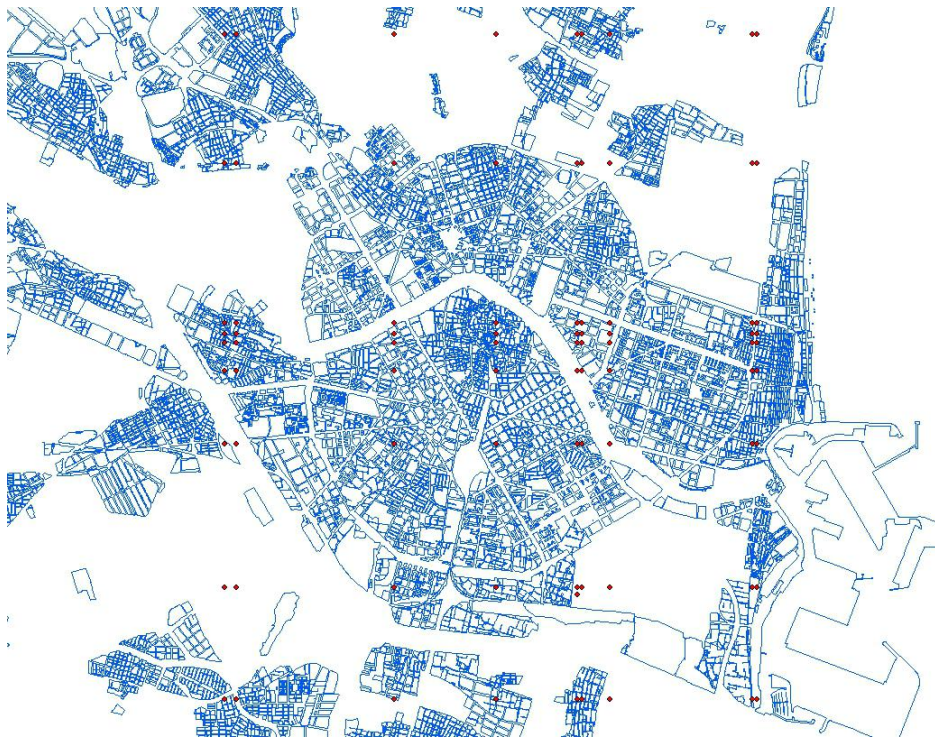
### 5.3.4 Definición de la deformación $d_{n,1}$ con densificación por puntos correlativos

Aceptando la solución gaussiana propuesta, puede densificarse la red original de 9 puntos con puntos llamados correlativos hasta obtener un total de  $9^2 = 81$  para conseguir así una cobertura homogénea del terreno a levantar.

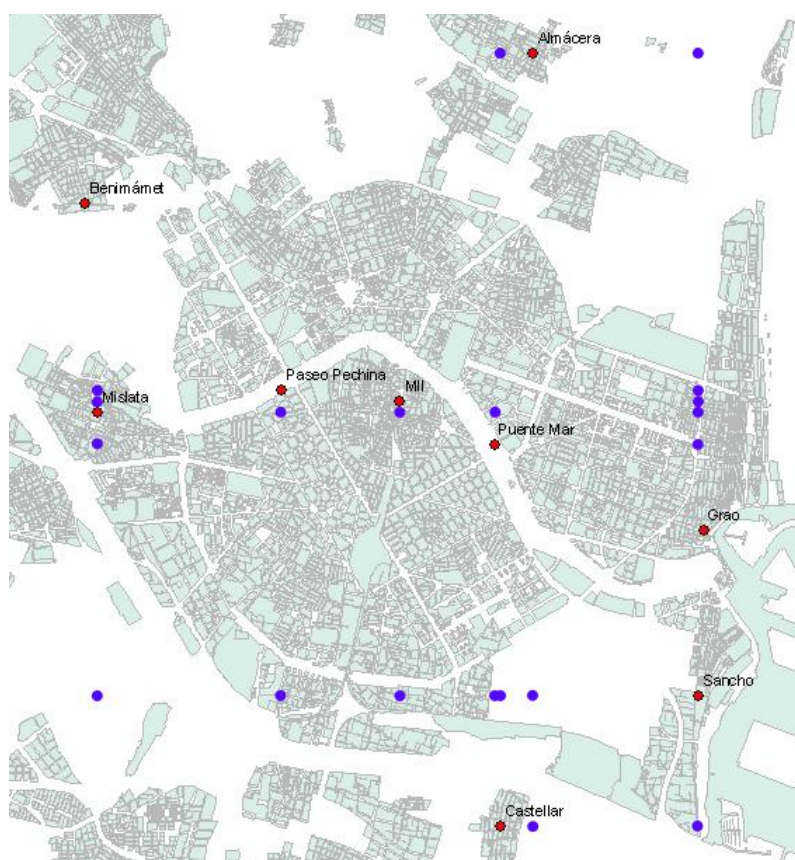
El principio del método de puntos correlativos se basa en tomar la intersección de las rectas que contienen la coordenada X y la coordenada Y de los puntos desde donde se levantará el tercero que llamamos correlativo. El método no es inmediato cuando la geometría de los sistemas donde se actúa no es idéntica, caso en el que nos encontramos (Ver la discusión del Capítulo 6).

Del primer estudio de la deformación realizado en la Tabla 5.1 se toma la decisión de prescindir del vértice Grao porque presenta unos valores significativamente altos respecto a los demás vértices sin que ello suponga disminuir la homogeneidad de la red inicial. Así en este caso de una red inicial de 8 vértices podremos alcanzar un total de 64 vértices correlativos. La información que se desprenda de cada uno de ellos tendrá la misma calidad que la de los vértices iniciales de los que proceden (Jiménez Martínez, 2013), suponiendo el trabajo de replanteo imprescindible, correcto. De esta manera la densificación lograda es claramente importante como se aprecia en la Figura 5.7. Del total de vértices correlativos realizamos una selección de puntos distribuidos por las zonas marginales y con deformaciones  $dx$  y  $dy$  bajas (Tabla 5.11).

Los 20 puntos correlativos podrían ser vértices de la red primaria de la cartografía de 1929, que una vez replanteados, monumentados y reseñados sustituirían a algunos vértices de campanarios, mejorando notablemente el acceso y con ello el estacionamiento para su medición.



**Figura 5.5:** Vértices densificados a partir de la red inicial



**Figura 5.6:** Vértices correlativos con menor deformación





**Figura 5.7:** Vértices escogidos para la solución pseudoinversa





**Tabla 5.12:** Vectores de las variables deformación  $d_{n,1}$  con solución pseudoinversa medidas en metros

<i>Vértices</i>	$dx[m]$	$dy[m]$
Mislata	-0.1223	-0.0667
Pte. del Mar	-0.0100	-0.0569
Pechina	-0.0148	-0.0967
Miguelete II	-0.0968	-0.0696
Castellar-Almácer	-0.0948	-0.0613
Castellar-Sancho	0.0623	0.0957
Mislata-Sancho	-0.0150	-0.1633
Mislata-Pte. del Mar	0.0722	-0.0084
Mislata-Pechina	0.0674	-0.0482
Mislata-Miguelete II	-0.0146	-0.0211
Almácer-Sancho	0.1170	0.1388
Sancho-Pte. del Mar	0.0471	0.1367
Sancho-Pechina	0.0423	0.0969
Sancho-Miguelete II	-0.0397	0.1240

esta red de vértices como red de coincidencia y apoyo. Podría ser de gran utilidad monumental los puntos correlativos en la ciudad con sus respectivas reseñas. Tras este estudio por pseudoinversa, se pueden determinar las zonas de la cartografía de 1929 transformada al sistema UTM-ETRS89 de deformación no apreciable. Si se trabaja exclusivamente sobre una hoja de la cartografía, podremos redefinir los vértices que más se ajusten a la zona de trabajo y a partir de ellos calcular los nuevos parámetros de transformación.

## 5.4 Transformación próxima

### 5.4.1 Introducción

En este epígrafe estudiaremos la deformación de la parte B de la hoja 46I (Figura 5.8) digitalizada de la cartografía municipal de 1929. El método que proponemos en este ejemplo se podrá aplicar a cualquier otra de las que componen el PPM de 1929.





Entendemos por Transformación Próxima la que está constituida por:

1. La transformación de Coordenadas pixel a Coordenadas 1929.
2. La transformación de Coordenadas 1929 a Coordenadas UTM-ETRS89.

Una vez definida la transformación (1), se evalúan las discrepancias  $d_{n,1}$  existentes entre las coordenadas pixel transformadas a coordenadas de 1929 y las coordenadas de 1929 obtenidas directamente de los cálculos de gabinete de la época, que llamaremos coordenadas transformadas 1929 (CT29) y coordenadas de gabinete 1929 (CG29) respectivamente. La diferencia entre unas y otras permite conocer los errores acumulados debidos a las posibles deformaciones del soporte del mapa, el trabajo de delineación, el proceso del escaneo (Apéndice C) y la calidad de las coordenadas de los vértices de las poligonales. De este modo se evaluará la precisión esperable. Una vez conocida la deformación se interpretará y aceptará, o desestimaré en consecuencia el proyecto si no alcanza la precisión requerida.

El umbral de error óptimo será de 10 centímetros, límite de precisión establecido por la percepción visual y la escala de la cartografía al que hemos hecho referencia durante todo este capítulo de deformaciones. En este caso el límite establecido por la escala es cuestionable, ya que la rotulación del mapa supera ampliamente los 0.2 milímetros. El dibujo inicial con lápiz probablemente se aproximaba a este valor, pero generalmente ese trazo fino queda encubierto por el entintado posterior.

Las coordenadas CT29 que se analizarán provienen de una transformación afín con 8 vértices pertenecientes a poligonales que aparecen dibujadas en la propia la hoja digitalizada. Las coordenadas pixel y las de gabinete que hemos utilizado para obtener los parámetros de transformación se encuentran en la Tabla

5.13 y la posición de los vértices sobre la cartografía de 1929 se puede ver en la Figura 5.9. Cada hoja sobre la que se trabaje necesitará esta transformación de coordenadas pixel a coordenadas rectangulares 1929, y el umbral de error será el propio de cada manta. Es conveniente repetir la transformación afín con vértices diferentes en cada caso y desestimar aquellos que puedan tener algún error grosero. Se entiende que el dibujo manual del mapa, tanto de los vértices de las poligonales como del propio canevas, puede estar acompañado de errores no esperados del dibujante de la época. Resulta difícil obtener las coordenadas pixel de los vértices de poligonal sobre la cartografía, porque el diámetro del punto que lo señala tiene aproximadamente 0.6 milímetros y su centro no siempre define la intersección de los dos lados de la poligonal a la que pertenece (Figura 5.10).

**Tabla 5.13:** Coordenadas pixel del mapa digitalizado y coordenadas rectangulares en el sistema 1929 obtenidas de las coordenadas de gabinete

<i>Vértices</i>	Coordenadas pixel		Coordenadas gabinete 1929	
	<i>X</i> [m]	<i>Y</i> [m]	<i>X</i> [m]	<i>Y</i> [m]
985	5.411	13.558	24671.83	35691.81
213	3.561	30.724	24890.26	35986.64
314	13.917	28.206	24858.43	35854.54
204	12.56	13.689	24673.59	35870.78
964	24.077	5.191	24565.68	35723.43
57	27.552	24.556	24812.40	35680.59
302	33.114	12.901	24664.18	35608.96
67	35.365	18.589	24736.67	35580.69

Una vez definido el umbral de precisión de la transformación (1) de Coordenadas pixel a Coordenadas 1929, evaluamos la precisión de la transformación (2) de Coordenadas 1929 a Coordenadas UTM-ETRS89. Si el proyecto exige la georreferenciación al datum oficial es imprescindible determinar la deformación de esta segunda transformación. Una vez aplicadas las dos transformaciones el usuario final será capaz de replantear cualquier punto sobre el terreno con técnicas

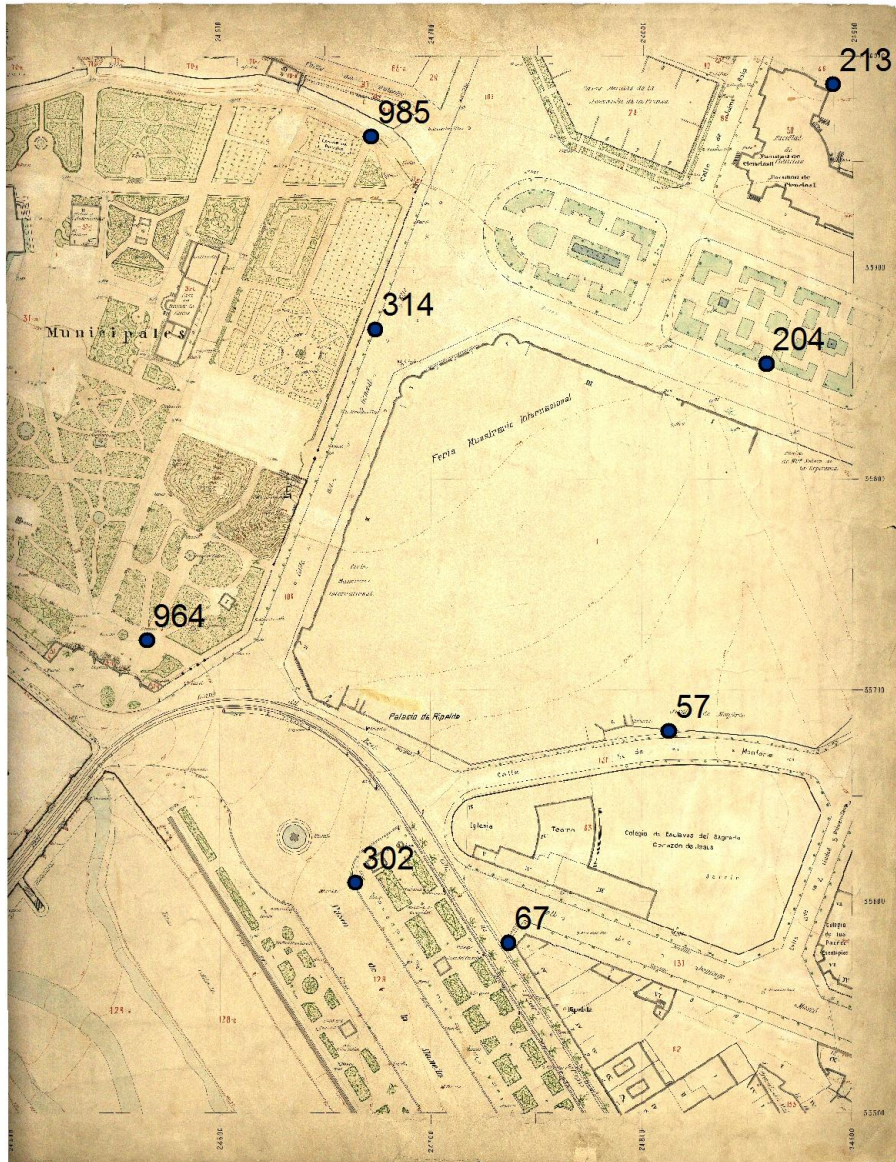


Figura 5.9: Vértices escogidos para realizar la transformación (1)





**Figura 5.10:** Vértice de una poligonal definido por un punto negro cuyo diámetro es de 38 mm

GNSS y también podrá solapar o superponer cualquier cartografía con datum oficial, siendo fácil actualizar la información de la cartografía de 1929 o de cualquier otra.

En el epígrafe 5.4.2 se estudia la deformación de la transformación (1) entre las coordenadas transformadas 1929 (CT29) y las coordenadas de gabinete 1929 (CG29) y en el epígrafe 5.4.3 la transformación (2) de coordenadas 1929 a coordenadas UTM-ETRS89.

El objetivo final es interpretar, la evidente existencia de deformación de la cartografía de 1929 y cifrarla, con parámetros estadísticos de alta fiabilidad refiriéndola a la red observada con técnicas GNSS.

#### **5.4.2 Umbral de precisión de la transformación I**

El procedimiento de obtención del umbral de sensibilidad se ha definido con el método que permite calcular el vector más probable de sensibilidad práctica  $d_p$ , entre las coordenadas pixel y las de gabinete, a partir de ajustes gaussianos.

### Sistema de formas lineales

Se pretende calcular la sensibilidad o umbral de precisión por debajo del cual no es posible determinar la deformación producida en una red. En definitiva supone caracterizar la precisión del trabajo específico que se presente, en este caso, se trata de la cartografía transformada 1929 (de coordenadas CT29). Una vez conocido el umbral se podrá interpretar y aceptar, o desestimar en consecuencia el proyecto, si no alcanza la precisión requerida. El primer paso será la definición de las matrices de diseño del ajuste gaussiano que nos permitirá obtener el desplazamiento  $d$ .

Una vez transformada la hoja digitalizada (46I-b) de la cartografía de 1929 aplicando los parámetros que provienen de la transformación afín con 8 vértices previa, se obtendrán las coordenadas CT29 de cualquier punto de la hoja digitalizada. En este caso se han observado 12 veces las coordenadas de 12 vértices que se muestran en la Figura 5.11, pertenecientes todos a poligonales, para obtener sus coordenadas transformadas 1929 (CT29).

Con 12 vértices se tendrán 12 abscisas y 12 ordenadas, que hacen un total de 24 variables. Con 24 variables observadas 12 veces se tendrá un total de 288 observaciones. Se han elegido vértices de poligonales porque se conocen las coordenadas rectangulares de gabinete 1929 (CG29) de todas las poligonales de cualquiera de las hojas de la cartografía en estudio, ya que se trata de datos de archivo.

La diferencia entre las coordenadas CT29 y CG29 permitirá conocer el desplazamiento  $d$  de los 12 vértices, y hacer una valoración algebraica y estadística de los resultados, definiendo así un umbral de sensibilidad de la hoja (46I-b) sobre la que se está trabajando, y no de otra.



**Figura 5.11:** Detalle de los 12 vértices empleados para calcular el umbral de precisión de la transformación (I)

El sistema de formas lineales que determina la red en estudio será el correspondiente a la expresión 4.2.

Se aplica el PD2 a la red con el objetivo prioritario de obtener una matriz cofactor diagonal  $Q_{dd}$  y por tanto una matriz varianza covarianza  $\sigma_{dd}$  también diagonal. Según la teoría propia del PD2 y simplificando mucho la cuestión, es obligado definir siempre los observables como incrementos de coordenadas entre vértice fijo y vértice libre (Jiménez Martínez, 2013). Y así el PD2 determina la configuración de la matriz de diseño  $A_d$ , que en este caso presenta  $p = 12$  formas lineales por variable lo que supone un total de 288 formas lineales. Teniendo en cuenta para su diseño, como se comentaba en el epígrafe anterior, la previsión de recintos de error, el número mínimo de formas lineales por variable y el número de observaciones de que se dispone.





El vector  $K_d$  se obtiene como diferencia de las coordenadas CT29 y las coordenadas CG29,  $K_d = K_{CT29} - K_{CG29}$  tal como sucedía en el epígrafe homónimo de la sección anterior, cuyas componentes se reparten dentro del intervalo  $[-0.095, 0.089]$  expresadas en metros.

El vector deformación  $d$ , representa la deformación experimentada por la red y está formado por  $n$  componentes, tantos como variables del ajuste. Su expresión queda como

$$d = x_{CT29} - x_{CG29}$$

donde

$x_{CT29}$  es el vector de correcciones a las coordenadas transformadas.

$x_{CG29}$  es el vector de correcciones a las coordenadas de gabinete.

Por lo tanto  $d$  es el vector columna específico y único en aplicación a cualquier caso arbitrario en estudio expresado en metros según la expresión (5.22).

$$d_P = \begin{pmatrix} d_{x_1} \\ d_{x_2} \\ d_{x_3} \\ d_{x_4} \\ d_{x_5} \\ d_{x_6} \\ d_{x_7} \\ d_{x_8} \\ d_{x_9} \\ d_{x_{10}} \\ d_{x_{11}} \\ d_{x_{12}} \\ d_{y_1} \\ d_{y_2} \\ d_{y_3} \\ d_{y_4} \\ d_{y_5} \\ d_{y_6} \\ d_{y_7} \\ d_{y_8} \\ d_{y_9} \\ d_{y_{10}} \\ d_{y_{11}} \\ d_{y_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -0.0716 \\ -0.0200 \\ 0.0166 \\ 0.0507 \\ 0.0443 \\ -0.0171 \\ -0.0552 \\ -0.0587 \\ 0.0697 \\ -0.0673 \\ 0.0433 \\ 0.0829 \\ 0.0101 \\ -0.0079 \\ -0.0025 \\ 0.0219 \\ 0.0336 \\ 0.0543 \\ -0.0105 \\ -0.0021 \\ 0.0596 \\ 0.0138 \\ 0.0752 \\ 0.0458 \end{pmatrix} \quad (5.22)$$

La matriz cofactor  $Q_{dd}$  obtenida es diagonal tal como se había previsto, y si el número de observables es el mismo para cada una de las variables, se consigue que los elementos de la diagonal de  $Q_{dd}$  sean iguales (Jiménez Martínez, 2013), en el caso presente 12 observables por variable (como ya se ha mencionado, variables  $d$ , entendidas como deformaciones,  $x$  e  $y$ , que sufren cada uno de los 12 vértices  $d = d_{x1}, d_{x2}, d_{x3}, \dots, d_{x12}, d_{y1}, d_{y2}, d_{y3}, \dots, d_{y12}$ ).

Resultando una matriz cofactor  $Q_{dd}$  diagonal de elementos iguales:

$$Q_{dd} = (\text{diag } q) = \begin{pmatrix} 0.0833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.0833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.0833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.0833 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0833 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0833 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0833 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0833 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.0833 \end{pmatrix} \quad (5.23)$$

(24,24)

### Sensibilidad Práctica

Del vector deformación  $d$  obtenido según la expresión (5.22) se calcula su norma  $|d| = |d_{Pm}| = 0.227 \text{ m}$ . Conservando constante la norma o módulo  $|d_{Pm}| = 0.227 \text{ m}$  bastaría un cambio del n-edro de referencia para modificar sus componentes, que resultan así esencialmente variables. Podemos expresar como vector más probable el de 24 componentes iguales a la media cuadrática de los iniciales como sigue.

$$d_{P_m} = \begin{pmatrix} \frac{|d_{P_m}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{P_m}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{P_m}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{P_m}|}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{|d_{P_m}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{P_m}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{P_m}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{P_m}|}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.227}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.227}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.227}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.227}{\sqrt{24}} \\ \vdots \\ \frac{0.227}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.227}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.227}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.227}{\sqrt{24}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.046 \\ 0.046 \\ 0.046 \\ 0.046 \\ \vdots \\ 0.046 \\ 0.046 \\ 0.046 \end{pmatrix} \quad (24,1)$$

Geoméricamente, la deformación diferencial estudiada se resuelve en planimetría en una traslación de módulo  $|t_{ip}| = 0.046 \cdot \sqrt{2} = \pm 0.0656$  metros y argumento  $w_{t_{ip}} = \pm \frac{\pi}{4}$ ,  $i \in 1, 2, 3, 4$ , que es completamente coherente con la teoría. Los  $\pm 0.0655$  metros de umbral de sensibilidad, evalúan la primera transformación (define un error relativo), que transforma coordenadas píxel a coordenadas rectangulares 1929.

Como conclusión primera, y en este caso aplicado, se puede afirmar que en la obtención de superficies, perímetros y lindes, sobre la hoja (46I-b) transformada, se ofrece una precisión suficiente y superior a la percepción visual. Los errores relativos del mapa no son apreciables si se aplica el procedimiento descrito.

**5.4.3 Deformación de la transformación II**

Como se enunció en la introducción del capítulo se pretende hacer una valoración de la deformación de la transformación próxima de coordenadas en el sistema RL-1929 a coordenadas UTM-ETRS89. Se entiende como transformación próxima o específica, la que se obtiene con vértices que se encuentran sobre la hoja en estudio, en este caso la hoja (46I-b), no a partir de los parámetros globales que permiten la transformación conjunta de todas las hojas que forman el Parcelario.

Una vez conocidas las coordenadas rectangulares 1929 de la hoja (46I-b) y los parámetros de transformación se obtienen las coordenadas UTM-ETRS89 de la hoja (46I-b). Por último se evalúa la deformación  $d_{n,1}$  existente en la hoja (46I-b) transformada.

### **Transformación de coordenadas del sistema RL-1929 al RL-ETRS89**

Antes de evaluar la deformación de la hoja (46I-b) transformada de coordenadas UTM-ETRS89 es imprescindible decidir qué vértices de la triangulación primaria y correlativos utilizaremos de manera que sean próximos o estén sobre la zona de trabajo. A partir de los puntos de coordenadas conocidas en los dos sistemas de coordenadas: RL-1929 y RL-ETRS89, se obtienen los parámetros de transformación de la hoja (46I-b).

Una vez conocidos los parámetros de transformación se aplican a cualquier punto de la hoja (46I-b) y a continuación se convierten a coordenadas UTM-ETRS89. Como sabemos el objetivo final es conocer en el datum oficial las coordenadas de cualquier punto cartografiado sobre la hoja en la que se trabaja.

**Transformación próxima I (TPI)** Se realiza una primera transformación local sobre la hoja en estudio eligiendo 11 vértices que enmarcan la zona. Esta batería de vértices está formada por puntos pertenecientes tanto a la triangulación primaria, como a poligonales y correlativos provenientes de las dos fuentes anteriores. De todos ellos se conocen las coordenadas (CG29) en el sistema RL-1929 y también en el sistema RL-ETRS89 mediante observación GNSS, lo que permite averiguar los parámetros de transformación requeridos para llevar a cabo la determinación de las coordenadas en el sistema RL-ETRS89. La deformación entre las coordenadas transformadas y observadas en el sistema RL-ETRS89

puede verse en la Tabla 5.14. Se debe tener en cuenta que el origen de coordenadas de ambos sistemas se sitúan en el que se estima el centro de la red, es decir el vértice Miguelete II. Con los parámetros de transformación provenientes de

**Tabla 5.14:** Deformación  $d_{n,1}$  existente entre los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la transformación TPI y los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la observación

Vértices	Sistema RL-ETRS89(TPI)		Sistema RL-ETRS89		Deformación	
	X[m]	Y[m]	X[m]	Y[m]	dx[m]	dy[m]
Miguelete II	0.0883	-0.1593	0	0	-0.0883	0.1593
Pte. del Mar II	933.7298	-568.5787	933.6259	-568.4618	-0.1039	0.1170
Pte. del Mar	1113.3931	-555.4782	1113.4339	-555.5801	0.0407	-0.1018
298	537.4050	265.0612	537.5366	264.8976	0.1316	-0.1636
298-Miguelete II	537.3982	-0.1714	537.5366	0	0.1384	0.1714
298-Pte. del Mar	537.3841	-555.4652	537.5366	-555.4782	0.1525	-0.0130
Pte. del Mar-Miguelete II	1113.4072	-0.1844	1113.4339	0	0.0266	0.1844
Pte. del Mar-298	1113.4140	265.0482	1113.4339	264.8976	0.0199	-0.1506
Miguelete II-Pte. del Mar	0.0742	-555.4531	0	-555.5801	-0.0742	-0.1270
Pte. del Mar II-298	933.7510	265.0523	933.6259	264.8976	-0.1250	-0.1546
Pte. del Mar II-Miguelete II	933.7442	-0.1803	933.6259	0	-0.1183	0.1803

TPI, se han obtenido las coordenadas en el sistema RL-ETRS89 de tres vértices que no han intervenido en la transformación de los que disponemos también de sus coordenadas observadas directamente con instrumental GNSS. Estos puntos medidos son Grao proveniente de la triangulación primaria, y Pechina y 67A provenientes de poligonales, formando parte este último del área cubierta por el fragmento de hoja estudiada. Así, podemos establecer las diferencias entre las coordenadas transformadas y observadas en el sistema RL-ETRS89 y se muestran en la Tabla 5.15. Se establece un aumento de la deformación en función de la distancia a la zona de estudio, tal como se puede apreciar con el vértice Pechina y el vértice Grao, más alejados. Dado que el punto de poligonal 67A se encuentra dentro de la hoja de estudio, sus deformaciones asociadas guardan gran similitud con respecto a otros vértices que son cercanos o se encuentran dentro del área

**Tabla 5.15:** Deformación  $d_{n,1}$  existente entre los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la transformación TPI y los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la observación

Vértices	Sistema RL-ETRS89(TPI)		Sistema RL-ETRS89		Deformación	
	X[m]	Y[m]	X[m]	Y[m]	dx[m]	dy[m]
67A	772.2437	89.5546	772.3587	89.4342	0.1150	-0.1205
Pechina	-1400.5209	181.7258	-1401.2471	182.4203	-0.7262	0.6945
Grao	3571.0589	-0635.0705	3571.3668	-1636.2816	0.3079	-1.2112

de interés. Podemos concluir que esta transformación se ajusta a la superficie definida por los 11 vértices de la transformación (TPI) pero no al resto de las hojas de la cartografía de 1929. Por lo que parece muy útil cuando el objetivo es un estudio local.

**Transformación próxima II (TPII)** En este caso el objetivo ha consistido en la elección de vértices que se encuentren completamente dentro del área de estudio para realizar una transformación afín que a priori debe ajustarse mejor a la zona. Se han escogido para ello 9 puntos, 3 de ellos pertenecientes a poligonales y 6 correlativos. A través de la transformación que hemos llamado TPII se obtienen las coordenadas de estos 9 puntos en el sistema RL-ETRS89, que compararemos con las coordenadas observadas en este mismo sistema RL-ETRS89, y podemos definir unas deformaciones mínimas que se pueden ver en la Tabla 5.16.

Estos resultados de la deformación están muy por debajo de la escala de representación,  $< 0.10m$ , ya que el elemento de mayor valor del vector  $d$  no alcanza los 2 centímetros.



**Tabla 5.16:** Deformación  $d_{n,1}$  existente entre los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la transformación TII y los incrementos de coordenadas en el sistema RL-ETRS89 provenientes de la observación

Vértices	Sistema RL-ETRS89(TPII)		Sistema RL-ETRS89		Deformación	
	X[m]	Y[m]	X[m]	Y[m]	dx[m]	dy[m]
Pte. del Mar	1113.4405	-555.5765	1113.4339	-555.5801	-0.0066	-0.0035
67A	772.3426	89.4177	772.3587	89.4342	0.0162	0.0165
298	537.5461	264.9106	537.5366	264.8976	-0.0096	-0.0129
298-Pte. del Mar	537.5461	-555.5765	537.5366	-555.5801	-0.0096	-0.0035
298-67A	537.5461	89.4177	537.5366	89.4342	-0.0096	0.0165
Pte. del Mar-298	1113.4405	264.9106	1113.4339	264.8976	-0.0066	-0.0129
Pte. del Mar-67A	1113.4405	89.4177	1113.4339	89.4342	-0.0066	0.0165
67A-298	772.3426	264.9106	772.3587	264.8976	0.0162	-0.0129
67A-Pte. del Mar	772.3426	-555.5765	772.3587	-555.5801	0.0162	-0.0035

## 5.5 Umbral de sensibilidad en la identificación de puntos

### 5.5.1 Introducción

En el epígrafe anterior, aplicando una doble transformación se ha conseguido migrar a datum oficial ETRS89 el fragmento de hoja en estudio del plano parcelario municipal digital de Valencia. Con el protocolo algebraico y estadístico seguido se han evaluado las deformaciones y probabilidades asociadas a ellas en la hoja transformada a datum oficial, a partir de vértices observados con técnicas GNSS, que como se vió en el epígrafe 5.2 carecen de error representable en la cartografía a escala 1:500 (el umbral de precisión es inferior a los 3 centímetros). El método seguido se podría aplicar a cualquier hoja del PPM de Valencia.

En este epígrafe pretendemos definir exclusivamente el umbral de precisión del usuario en la identificación con el cursor de cualquier punto de la cartografía digital. Aplicamos el test J/Q (con el mismo protocolo seguido en el epígrafe 5.2, dedicado a la obtención del umbral de sensibilidad de la metodología llevada a cabo mediante GNSS) y para confirmar los resultados emplearemos la teoría que

puede consultarse en el Apéndice A sobre la generalización del F-Test.

El umbral de sensibilidad propio del usuario obtenido, aporta una valoración previa de los resultados exigibles en la deformación de la transformación próxima de la hoja (46I-b) del epígrafe 5.4, ya que el proceso exige identificar manualmente los vértices sobre las imágenes raster.

Como sabemos, un requerimiento básico del test J/Q será la observación de la red con certeza de no desplazamiento o deformación de ninguno de sus vértices, de modo que el vector  $d$ , que siempre es distinto de cero, nos permita hacer una valoración específica del error del proyecto. En el ejemplo de aplicación se realizan 6 observaciones en la campaña 1 y 6 observaciones en la campaña 2 de cada uno de los 12 vértices que definirán la red del ajuste. Entre las dos campañas no ha habido ninguna variación en la cartografía digitalizada, no ha cambiado el observador ni el software ni hardware utilizado.

### 5.5.2 Sistema de formas lineales

La diferencia entre las coordenadas obtenidas digitalmente sobre la cartografía de 1929 en dos campañas diferentes, permitirá conocer el desplazamiento  $d$  de los 12 vértices, y hacer una valoración algebraica y estadística de los resultados, definiendo así un umbral de sensibilidad de la hoja (46I-b) sobre la que se está trabajando, y también del usuario.

El sistema de formas lineales que determina la red en estudio será el de la expresión (5.2), donde la matriz de diseño  $A_d$  en este caso presenta 6 formas lineales por variable (24), lo que supone un total de 144 formas lineales.

$$A_d = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \ddots & & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & \ddots & & & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & \ddots & & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & & \ddots & & & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & & & & & \ddots & & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & & & & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & \ddots & & & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & & \ddots & & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & & & \ddots & & & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \ddots & & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (144,24)$$

El vector de términos independientes se obtiene como diferencia de los valores de las coordenadas de los 12 vértices en dos campañas o momentos, siguiendo la expresión 5.3. Sus componentes pertenecen al intervalo  $[-0.031 - 0.076]$  expresadas en metros.

### 5.5.3 Sensibilidad Práctica

Tras el ajuste con la expresión (5.2) se obtiene el siguiente vector  $d$  que llamaremos  $d_P$  en este epígrafe cuya norma corresponde a  $|d_P| = 0.0406$  m.

$$d_P = \begin{pmatrix} d_{x_1} \\ d_{x_2} \\ d_{x_3} \\ d_{x_4} \\ d_{x_5} \\ d_{x_6} \\ d_{x_7} \\ d_{x_8} \\ d_{x_9} \\ d_{x_{10}} \\ d_{x_{11}} \\ d_{x_{12}} \\ d_{y_1} \\ d_{y_2} \\ d_{y_3} \\ d_{y_4} \\ d_{y_5} \\ d_{y_6} \\ d_{y_7} \\ d_{y_8} \\ d_{y_9} \\ d_{y_{10}} \\ d_{y_{11}} \\ d_{y_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0245 \\ -0.0097 \\ 0.0028 \\ 0.0037 \\ -0.0002 \\ -0.0015 \\ 0.0042 \\ 0.0247 \\ -0.0043 \\ -0.0015 \\ -0.0002 \\ 0.0005 \\ -0.0062 \\ -0.0002 \\ 0.0037 \\ 0.0002 \\ 0.0085 \\ 0.0050 \\ 0.0043 \\ -0.0028 \\ 0.0042 \\ 0.0010 \\ 0.0083 \\ 0.0043 \end{pmatrix} \quad (5.24)$$

Obtenemos también la varianza a priori y a posteriori de los observables que corresponde a  $\sigma_{OT}^2 = \sigma_{on}^2 = 1.7655 \cdot 10^{-4} m^2$ , iguales como sabemos por la aplicación del PD2. Los elementos de la diagonal de la matriz  $Q_{dd}$  (5.25)

corresponden a  $q_{ii} = 0.1667, i \in 1, 2, 3, \dots, 24$ .

$$Q_{dd} = \begin{pmatrix} 0.1667 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1667 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.1667 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0.1667 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0.1667 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0.1667 \end{pmatrix} \quad (5.25)$$

(24,24)

Conocido el vector de deformación  $d_P$ , podemos aplicar la expresión (5.1) y obtener  $\lambda_P$ , cuyo valor corresponde en este caso a 55.9643.

El valor del nivel de significación  $\alpha$  de la función  $\chi^2_v = \chi^2_{24}$  es  $\alpha = 7.2614 \cdot 10^{-5}$  y la potencia  $\beta$  de la función  $\chi^2_{v,\lambda} = \chi^2_{24,55.963}$  es  $\beta = 0.9910$ .

Podemos expresar como vector más probable el de 24 componentes iguales a la media cuadrática de los iniciales que presenta  $d_P$ , conservando constante la norma o módulo del mismo  $|d_P| = 0.0406$ . Es decir, en general

$$d_{Pm} = \begin{pmatrix} \frac{|d_{Pm}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{Pm}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{Pm}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{Pm}|}{\sqrt{n}} \\ \vdots \\ \frac{|d_{Pm}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{Pm}|}{\sqrt{n}} \\ \frac{|d_{Pm}|}{\sqrt{n}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{0.0406}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.0406}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.0406}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.0406}{\sqrt{24}} \\ \vdots \\ \frac{0.0406}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.0406}{\sqrt{24}} \\ \frac{0.0406}{\sqrt{24}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0083 \\ 0.0083 \\ 0.0083 \\ 0.0083 \\ \vdots \\ 0.0083 \\ 0.0083 \\ 0.0083 \end{pmatrix} \quad (24,1)$$

con  $n$  componentes iguales.

Geoméricamente, la deformación diferencial estudiada se resuelve en planimetría en una traslación de módulo  $|t_{ip}| = 0.0083 \cdot \sqrt{2} = \pm 0.0117$  metros y argumento  $w_{t_{ip}} = \pm \frac{\pi}{4}, i \in 1, 2, 3, \dots, 24$ , que es completamente coherente con la teoría.

#### 5.5.4 Sensibilidad Teórica

Como se ha venido realizando en el cálculo de la sensibilidad Teórica, nos basaremos en el estudio de la fiabilidad interna y externa de la red ajustada por incrementos de coordenadas. Se detallan todos los cálculos intermedios de la fiabilidad interna y externa del ajuste, a partir de ahí obtendremos la sensibilidad teórica.

##### Fiabilidad interna

A partir de la matriz cofactor de los residuos a posteriori del ajuste  $Q_{RR}$  obtenemos las redundancias, iguales todas al valor de la redundancia media  $r_m$  que corresponde a:

$$r_m = \frac{m - n}{m} = \frac{144 - 24}{144} = 0.83.$$

La redundancia  $r_i$  (Tabla 3.3) de cada uno de los 144 observables de este ajuste es  $r_i = 0.8333$ . Los observables están muy bien controlados ya que  $1 \leq r_i \leq 0.4$ . En este caso particular se está en una situación privilegiada porque  $r_m = r_i$ . Y la suma de redundancias es 120.

Se calcula la variable de Baarda para cada uno de los observables y se pasa el test homónimo cuya región de rechazo se establece en  $w_i > 3.4$  para un nivel de significación  $\alpha = 0.0005$ . Encontramos dos parámetros de Baarda dentro de la región de rechazo, cuyos valores son superiores al punto 3.4, lo que indica errores groseros detectables en los observables, que corresponden a los valores 4.5757 y 3.9298. Se decide no eliminar estos observables por dos motivos, en primer lugar no se trata de valores especialmente altos y el segundo por la exigencia del test JQ que se empleará después de que la matriz cofactor  $Q_{dd}$  sea diagonal y con todos sus elementos iguales (Jiménez Martínez et al., 2014).

El mínimo error detectable  $\nabla_{O_i}$  para un observable se obtiene como sabemos, a partir de la expresión que aparece en la Tabla 3.4.

Siendo  $\delta_0 = 5$  el parámetro de traslación, función del nivel de significación  $\alpha = 0.0005$  y de la potencia del test  $\beta = 0.9505$ . Es de resaltar que el nivel de significación  $\alpha$  y la potencia de test  $\beta$ , se establecen arbitrariamente por el proyectista y en función de ellos se determinan el parámetro de traslación  $\delta_o$  y el mínimo error detectable para un observable  $\nabla_{O_i}$ . En nuestro caso hemos adoptado unos valores  $\alpha$  y  $\beta$  en el test de Baarda similares a los aplicados en el test J/Q, y así lograr que los resultados sean comparables entre ambos test estadísticos.

El mínimo error detectable  $\nabla_{O_i}$  en general es variable para cada observable, con la fundamental excepción si se utiliza el método de incrementos de coordenadas que hemos propuesto y aplicamos. En dicho supuesto, en cada observable aceptado puede esperarse un mismo error esperable máximo no detectado. El error máximo que puede deslizarse en uno de nuestros observables y no ser detectado, es igual para los 144 observables, y tiene un valor de  $\nabla_{O_i} = 0.0297$  metros que se mantiene constante.

Por último, el parámetro de homogeneidad interna,  $\mu_{INi}$  se obtiene directamente de la expresión que se puede consultar en la Tabla 3.3, y confirma la información facilitada por los números de redundancia. Cuanto menor sea la variación relativa de  $\mu_{INi}$  mejor será la red. Con un nivel de significación  $\alpha = 0.0005$ , potencia del test  $\beta = 0.9505$ , y parámetro de traslación  $\delta_o = 5$ , el parámetro de homogeneidad es 5.4772, para todos los observables.

El análisis de la fiabilidad externa de la red nos dirá cómo influirá en dichos resultados los errores no detectados e inferiores a  $\nabla_{O_i}$ .

### 5.5.5 Fiabilidad externa

La calidad del ajuste es inversamente proporcional al valor de los parámetros de homogeneidad  $\mu_{E.xi}$  y  $\mu_{I.Ni}$ . En una red amplia como ésta puede ser muy importante poner de manifiesto las diferencias de nivel de control entre unas zonas y otras.

El parámetro de homogeneidad externa  $\mu_{E.xi}$ , es el mismo en todos los observables de la red, siendo su valor 2.2361. Y el error no detectado  $\nabla_{O_i}$  obtenido en el observable de orden  $i$  afectaría a las variables  $d_{xi}$ ,  $d_{yi}$ , con  $i \in 1, 2, 3, \dots, 24$ , en un valor de 0.0050 m.

Una vez conocido el error que provoca en las variables el error no detectado  $\nabla_{O_i} = 0.0297$  m, podremos calcular la sensibilidad teórica. En el peor de los casos el error para cada una de la 24 variables sería  $0.0050 \cdot \sqrt{6} = 0.0121$  m. Con el error máximo 0.0121 m que provoca en las variables el error no detectado, podremos calcular el vector de sensibilidad teórica del ajuste como sigue:



$$d_T = \begin{pmatrix} d_{x_1} \\ d_{x_2} \\ d_{x_3} \\ d_{x_4} \\ d_{x_5} \\ d_{x_6} \\ d_{x_7} \\ d_{x_8} \\ d_{x_9} \\ d_{x_{10}} \\ d_{x_{11}} \\ d_{x_{12}} \\ d_{y_1} \\ d_{y_2} \\ d_{y_3} \\ d_{y_4} \\ d_{y_5} \\ d_{y_6} \\ d_{y_7} \\ d_{y_8} \\ d_{y_9} \\ d_{y_{10}} \\ d_{y_{11}} \\ d_{y_{12}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.0121 \\ 0.0121 \end{pmatrix}$$

cuya norma corresponde a  $|d_T| = 0.0121 \cdot \sqrt{24} = 0.0594$  m. Conocido el vector de deformación  $d_T$ , podemos aplicar la expresión (5.1) y obtener  $\lambda_T$ , cuyo valor corresponde en este caso a 120. El valor del nivel de significación  $\alpha$  de la función  $\chi^2$  es  $3.9793 \cdot 10^{-15}$ , es prácticamente la certeza y la potencia  $\beta$  de la función  $\chi'^2$  es 0.9890.

Geoméricamente, la deformación diferencial estudiada se resuelve, conocido

$|d_T|$  en planimetría en una traslación de módulo  $|t_{it}| = |d_T| \cdot \sqrt{2} = 0.0121 \cdot \sqrt{2} = \pm 0.0171$  m y argumento  $w_{t_{it}} = \pm \frac{\pi}{4}$ ,  $i \in 1, 2, 3, \dots, 24$ .

Podemos comprobar cómo  $|t_{it}| = |d_T| \cdot \sqrt{2} = 0.0121 \cdot \sqrt{2} = \pm 0.0171 > |t_{ip}| = |d_P| \cdot \sqrt{2} = 0.0083 \cdot \sqrt{2} = \pm 0.0117$  m, como debía ser.

## 5.6 Aplicación del F-Test de Fisher-Snedecor

Se define la distribución  $F'$  con parámetro de no centralidad o traslación (ver Apéndice A) según:

$$F' = \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{To}^2} = \frac{\frac{1}{v_1} \cdot \chi_{v_1, \lambda}^2}{\frac{1}{v_2} \cdot \chi_{v_2}^2} = \frac{v_2 \cdot \chi_{v_1, \lambda}^2}{v_1 \cdot \chi_{v_2}^2} = \frac{v_2 \sum_1^{v_1} \theta_i^2}{v_1 \sum_{v_1+1}^{v_1+v_2} \xi_i^2} = F'_{v_1, v_2, \lambda}$$

donde

$$\theta_i \sim N(\theta_{\mu i}, 1)$$

$$\xi_i \sim N(0, 1)$$

$$v_1 = \text{grados de libertad de } \chi^2$$

$$v_2 = \text{grados de libertad de } \chi^2$$

$$\lambda = \sum_1^{v_1} \theta_{\mu i}^2 \text{ parámetro de no centralidad o de traslación}$$

demostrándose que media y varianza valen (Jiménez Martínez et al., 2014):

$$media = \mu_{F'} = \frac{v_2 \cdot (v_1 + \lambda)}{v_1 \cdot (v_2 - 2)}$$

$$varianza = \sigma_{F'}^2 = \frac{v_2^2 \cdot [(v_1 + \lambda)^2 + 2 \cdot (v_1 + 2 \cdot \lambda)]}{(v_2 - 2) \cdot (v_2 - 4) \cdot v_1^2} - \frac{v_2^2 \cdot (v_1 + \lambda)^2}{v_1^2 \cdot (v_2 - 2)^2}$$

y la función de distribución conocida según las expresiones (A230 y A231) del Apéndice A permiten aplicar el doble test J/Q, con potencia  $\beta$  y nivel de significación  $\alpha$ , bajo la hipótesis de existencia de un cierto  $\lambda = \lambda_o \neq 0$ . Se demuestra y es fundamental que particularizando con  $\lambda = 0$  se obtiene la distribución clásica  $F$ . La aplicación de la distribución descrita en el  $F' - Test$  se realiza en la misma forma y con igual criterio empleados con la distribución y  $\chi^2 - Test$ , (Jiménez Martínez et al., 2014) test simple y doble, puesto que ambas tienen el mismo parámetro de no centralidad  $\lambda$  con idéntico significado, y así lo hacemos sobre la sensibilidad teórica y práctica calculada.

Para mejor comprensión de la práctica remitimos al lector al desarrollo teórico del Apéndice A, epígrafe “Generalización del  $F - Test$ ”.

Retomamos la sensibilidad práctica calculada, cuyo umbral está definido por el vector  $d_p$  con un valor en planimetría de  $\pm 0.0117$  metros para cualquiera de las variables, según se ha visto.

El parámetro  $\lambda_p$  que obtenemos a partir de la expresión (4.1) corresponde a 55.9643. Los grados de libertad  $v_1 = v_2 = 24$  son los utilizados en este caso para la aplicación del  $F - test$  cuya abcisa se obtiene:

$$F \approx \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{To}^2} = \frac{1}{n} \chi_{n,\lambda}^{\prime 2} = F'(n, \infty, \lambda) = \frac{1}{n} \cdot p = \frac{1}{24} \cdot 55.9643 = 2.3318$$

Así el valor del nivel de significación  $\alpha$  de la función  $F$  es  $\alpha = 0.0513$ . y la potencia  $\beta$  de la función  $F'$  es  $\beta = 0.7183$ . El gráfico de las dos funciones  $F$  y  $F'$  se encuentra en la Figura 5.12.

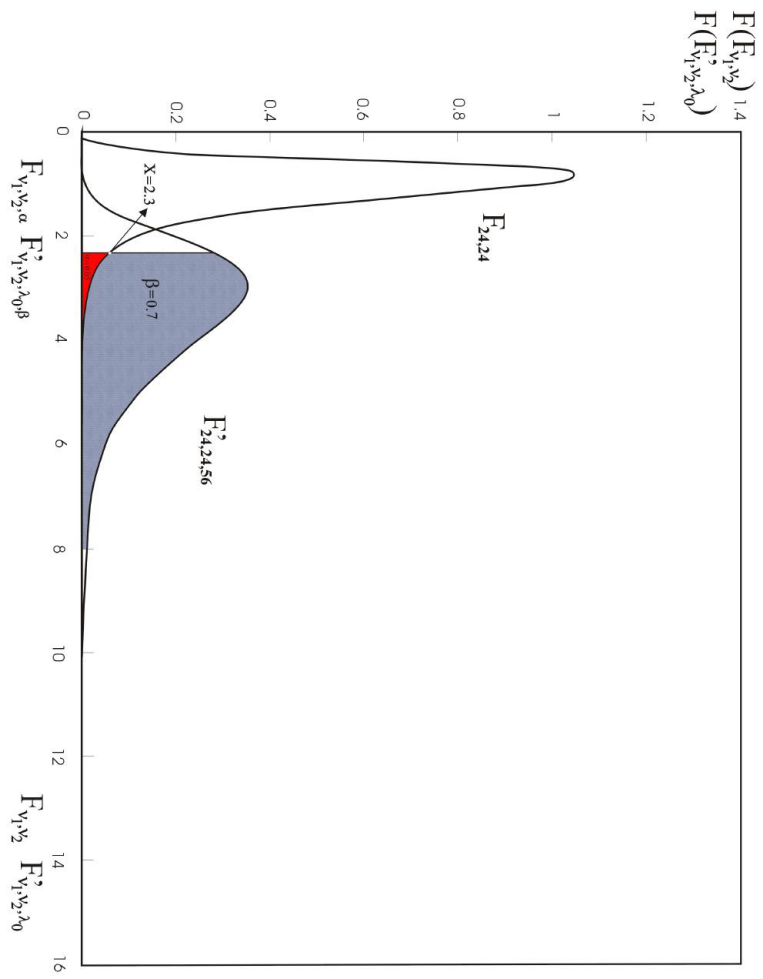


Figura 5.12: Curvas F y F' de izquierda a derecha

Sabemos que la sensibilidad teórica es superior a la práctica, como debe suceder siempre que se cuide la aplicación del test  $J/Q$ . Tenemos un umbral de sensibilidad teórica definido por el vector  $d_T$  con un valor en planimetría de  $\pm 0.0171$  metros para cualquiera de las variables.

El parámetro  $\lambda_T$  obtenido en este caso corresponde a 120. Volvemos a aplicar el  $F$ -test con  $\nu_1 = \nu_2 = 24$  grados de libertad y valor de abscisa  $F \approx \frac{\hat{\sigma}_{om}^2}{\hat{\sigma}_{To}^2} = \frac{1}{n} \chi_{n,\lambda}^2 = F'(n, \infty, \lambda) = \frac{1}{n} \cdot \rho = \frac{1}{24} \cdot 120 = 5$ .

Así el valor del nivel de significación  $\alpha$  de la función  $F$  es  $\alpha = 1.6719 \cdot 10^{-4}$  y la potencia  $\beta$  de la función  $F'$  es  $\beta = 0.7955$ . El gráfico de las funciones  $F$  y  $F'$  se encuentra en la Figura 5.13.

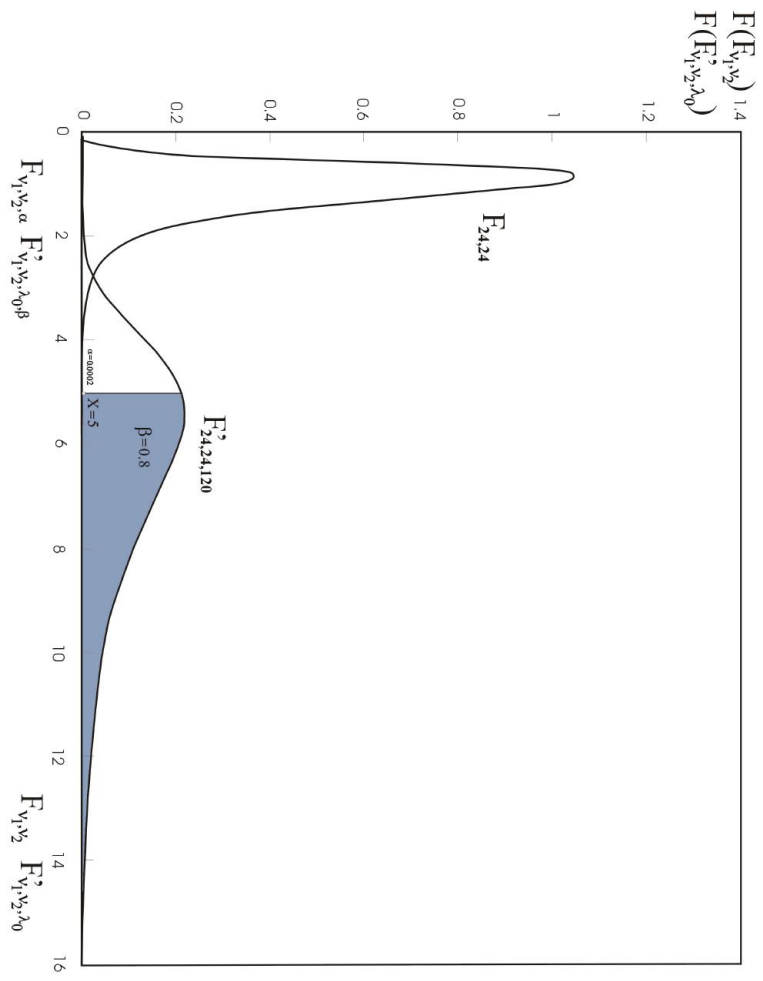


Figura 5.13: Curvas F y F' de izquierda a derecha

Es claro que el  $F - Test$  con  $F = \frac{\hat{\sigma}_{gn}^2}{\hat{\sigma}_{To}^2} = 1$  garantiza la calidad comparativa de los observables a priori y a posteriori. El mismo  $F - Test$  y su extensión al  $F' - Test$  pretende garantizar la calidad de los observables a posteriori. Todos pertenecen a la misma población y pueden utilizarse muestras de ellos de cualquier dimensión, bajo la hipótesis nula  $H_o : d_1 = 0$  y la hipótesis alternativa  $H_1 : d_1 \neq 0$ , en zonas de distinta significación, en una misma determinación y a lo largo del tiempo, supuesta por hipótesis estricta observación de instrumentación, metodología, condicionado y precauciones establecidas. Y todo ello a partir de una cierta sensibilidad rigurosamente establecida. Por debajo de ella y bajo hipótesis alternativa  $H_1 : d_1 \neq 0$ , inevitablemente  $F_1 \rightarrow 1$  a posteriori,  $\alpha$  y  $\beta$  resultarán inaceptables  $d_1 \rightarrow 0$ , se mantendrán constantes los vectores de observables y residuos y nada podrá decirse del ajuste. Supónganse abscisa igual a uno en las Figuras 5.12 y 5.13 y el test resulta de muy oscura interpretación.





## **Capítulo 6**

### **Conclusiones y Discusión**

#### **6.1 Conclusiones**

El objetivo principal de esta tesis es la recuperación y georreferenciación del Plano parcelario municipal de Valencia levantado en 1929 con tecnología de la época. Para llevarlo a cabo fue necesario un intenso trabajo de búsqueda y adquisición de información de los archivos referentes al levantamiento del plano que se encontraban deslocalizados, hoy inventariados y conservados en el archivo histórico del Excmo. Ayto. de Valencia ubicado en el Palacio de Cervelló. Esta cartografía actualmente se encuentra en uso en diversos servicios del Ayuntamiento de Valencia, que resuelven su georreferenciación, a nuestro entender, sin una metodología adecuada en su uso conjunto con cartografías actuales y de estándares oficiales. Su utilidad se evidencia en la detección de irregularidades en la ocupación del suelo de propiedad municipal, localización de caminos antiguos de trazado desconocido, o en la definición y recuperación de áreas con alto valor paisajístico entre muchos otros usos. El método de georreferenciación que proponemos en este trabajo permitirá su automatización según el protocolo presentado aportando rigor y fiabilidad en los resultados que se ofrecen.

El acceso tanto a la documentación original del proyecto en todas las etapas del levantamiento, como los textos de instrucciones redactados por el propio Instituto Geográfico y Catastral, autor del Plano, nos ha permitido comprobar la gran calidad del trabajo reproduciendo en cada caso sus cálculos de modo tradicional así como aplicando metodologías actuales. Es precisamente la calidad del trabajo lo que da mayor sentido a la realización del resto del trabajo de investigación.

A partir de la exploración y estudio de los archivos originales del proyecto de levantamiento del Plano, podemos constatar una serie de características que lo definen, como el hecho de que se trate de una proyección plana, con un sistema de coordenadas local con origen arbitrario que permita que el territorio a representar presente coordenadas todas positivas, aunque se hayan tenido en cuenta algunos vértices conocidos que recaen en el territorio valenciano y que pertenecen a las redes geodésicas de primer, segundo o tercer orden.

El trabajo de recuperación cartográfica comenzó con el estudio de la red de triangulación primaria de 1929, cuyos vértices fueron seleccionados con el mayor rigor. Confirmamos así la calidad del levantamiento, aunque manifiesta cierta falta de homogeneidad que inevitablemente se arrastrará en las fases posteriores de la tesis. La aplicación de algoritmos gaussianos mediante el ajuste por incrementos de coordenadas nos ha permitido valorar la precisión que alcanza los 10 cm, que es precisamente el umbral de percepción visual para la escala del plano.

La localización en campo y replanteo de la selección de vértices que forman parte de la red de 1929 a los que su acceso era posible, así como su medición mediante técnicas GNSS, supuso un arduo trabajo tanto de investigación como de acceso y estacionamiento.

La medición rigurosa mediante técnicas GNSS de los vértices seleccionados

que conforman la red definitiva que hemos llamado GNSS nos brinda la posibilidad de poder georreferenciar la totalidad del plano, que mediante una transformación afín evidencia zonas de distinta precisión.

El test  $J/Q$  nos permite establecer un umbral de precisión del método e instrumental utilizado en la medición de los vértices, que se establece en torno a los 3 cm claramente superior al umbral de 10 cm debido al denominador de la escala.

La medición GNSS nos permite tener la superabundancia de datos necesaria para realizar un estudio estadístico del ajuste de las redes que se han considerado. Así, en este trabajo se han puesto en práctica novedosas aportaciones teóricas en la interpretación rigurosa de resultados en ajuste de redes locales con establecimiento de recintos de error cifrados geométrica y probabilísticamente, mediante la aplicación de Análisis Multivariante teniendo en cuenta la teoría de podarias e hiperpodarias que presenta considerables ventajas en rigor, precisión y aplicación.

Con este avance teórico, se han podido establecer los recintos de error de los vértices tratados cifrando sus probabilidades o fiabilidades conjuntas y no exclusivamente vértice a vértice, lo que supone una gran ventaja. De todos los ajustes realizados, llamamos la atención en el formado por 35 formas lineales y 7 incógnitas cuyas figuras de error son rectángulos de semilados de 11 y 12 cm respectivamente para las componentes  $x$  e  $y$  con una probabilidad de 0.96. De nuevo plenamente acorde con la escala del levantamiento.

En la última parte del trabajo se han aplicado algoritmos gaussianos a la variable  $d$  conocida como deformación, término que en esta tesis se ha asignado a las diferencias existentes entre la cartografía en el sistema RL-1929 y la cartografía transformada al sistema UTM-ETRS89. Una serie de ajustes, con

solución determinista, pseudoinversa, inversa generalizada y con condición de nulidad nos ha permitido definir la deformación, obteniendo en todos los casos correcciones a los vértices congruentes entre sí en el orden de la decena de centímetros. Recordamos en este punto el umbral obtenido de la metodología de medición GNSS mediante el test  $J/Q$ , que nos permite determinar por encima del mismo la existencia o no de deformación entre ambas cartografías.

Con intención de mejorar la georreferenciación y como novedad en este trabajo, se ha diseñado una técnica de densificación de vértices para conseguir una cobertura homogénea del territorio, de modo que una vez aceptada la solución gaussiana propuesta aportará información probabilística de la misma calidad que los vértices de donde proceden. Las deformaciones así obtenidas evidencian zonas de deformación no apreciable, es decir, por debajo del umbral de percepción visual que se ha cifrado en 10 cm. Esta técnica de densificación podría evitar el estacionamiento en vértices de difícil acceso como resultan los templetos de las torres de iglesias, gran mayoría de los casos encontrados en nuestro trabajo por corresponderse con los lugares más altos con intervisibilidad entre ellos.

Por último y con objeto de mejorar la precisión con que se consigue realizar la transformación al sistema UTM-ETRS89, se demuestra que tomar puntos cercanos al área de trabajo como puntos de referencia para la transformación, mejora sensiblemente la precisión, llegando a valores muy por debajo del umbral de los 10 cm. En el caso estudiado los valores de deformación se encuentran en el intervalo [0.4-1.0] expresado en centímetros.

En resumen, podemos concluir que siguiendo el método y todas las consideraciones propuestas en esta tesis, se pueden alcanzar precisiones en el entorno de los 10 cm junto a altas fiabilidades en cada una de las etapas del proyecto, características no presentes en otros métodos menos rigurosos. Así se

ha podido demostrar sobre la hoja de estudio 46I-b, logrando un buen trabajo de recuperación de cartografía antigua a escala 1:500.

Todo ese trabajo realizado se constituye en una tecnología perfectamente aplicable a la recuperación de cartografías antiguas con la ucronía de transformarlas y explorarlas como si se hubieran levantado y publicado con tecnologías del siglo XXI. Disponiendo de los archivos originales del trabajo de campo y gabinete con las reseñas de los vértices de la red de triangulación primaria y contando con la cartografía digitalizada además del levantamiento con instrumentación moderna, será posible aplicar la metodología propuesta a cartografías antiguas de similares características a la estudiada. Pudiendo hacer una valoración métrica de la cartografía antigua y de la misma transformada a los estándares oficiales actuales con fiabilidades próximas a 0.90.

## 6.2 Discusión

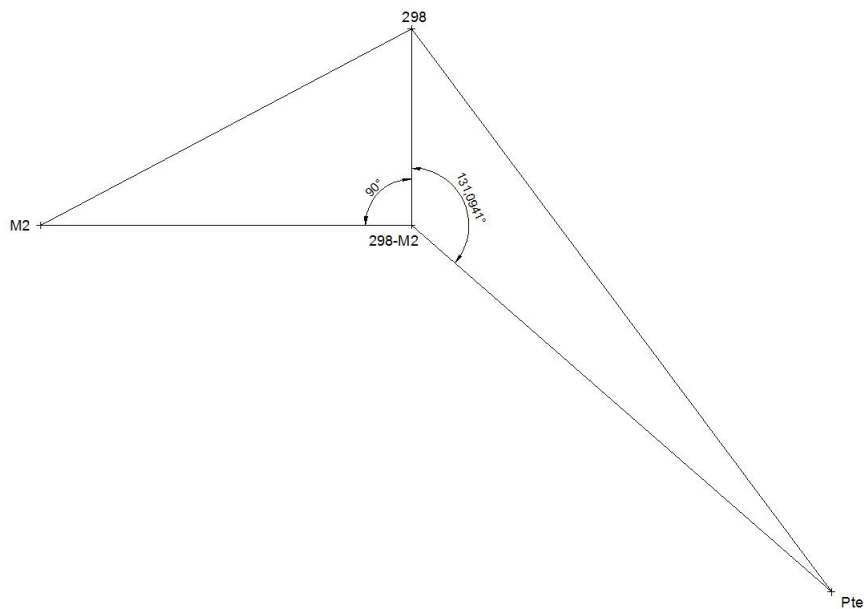
La campaña de medición GNSS sobre los puntos de la triangulación primaria de 1929 se llevó a cabo para obtener sus coordenadas en un sistema de referencia actual. En particular se han obtenido dos conjuntos de coordenadas, UTM por ser el sistema de proyección con el que se trabaja habitualmente y rectangulares locales (RL) por corresponder a un sistema tridimensional procedente de la transformación del sistema geocéntrico en el que operan los sistemas GNSS. Con estos conjuntos de coordenadas, UTM-ETRS89 y RL-ETRS89 por una parte y coordenadas planas del sistema 1929 (RL-1929) por otra, realizaremos una transformación afín con el objetivo de conseguir unos parámetros de transformación para así disponer de coordenadas en el sistema ETRS89 de cualquier punto de la red levantada en 1929. A partir de estas dos

transformaciones afines, cada una realizada con un sistema de coordenadas, y observando los parámetros de traslación, giro y homotecia, podemos afirmar que aunque los sistemas comparados no son completamente coincidentes, sí se observan unos valores suficientemente consistentes para poder afirmar que los sistemas son homogéneos. De otra forma no nos permitiría trabajar directamente con ellos.

En el caso de las coordenadas UTM, los parámetros son ligeramente mayores, el valor referente al giro es perfectamente coherente, ya que es muy próximo al valor de la convergencia de meridianos que presenta la cuadrícula UTM en nuestra zona de levantamiento. Aunque para otros trabajos no se pueda considerar un factor limitante el hecho de que el giro entre los sistemas sea superior en este caso, sí lo es cuando nuestro propósito es realizar una densificación de puntos mediante el método de puntos correlativos, método que consideramos fundamental para conseguir una cobertura homogénea del terreno a levantar. Si los sistemas de coordenadas que estamos tratando fueran coincidentes, los puntos correlativos se obtendrían de manera tan sencilla como la intersección de las rectas paralelas a los ejes coordenados que contienen la coordenada X y la coordenada Y de los dos puntos desde donde se levantará el tercero que llamamos correlativo (Figura 6.2). Sin embargo, sabemos que hay presente un giro de 1.8274 grados y unos factores de escala de 1.00014 y 1.00145 en X e Y respectivamente, y teniendo en cuenta la posición del origen de coordenadas de la cuadrícula UTM, un pequeño giro supone un diferencial de arco considerable que nos llevaría a un punto cuyas coordenadas nada tendrán que ver con las obtenidas en el sistema de 1929. Este inconveniente se puede solventar mediante una solución geométrica. De acuerdo con los numerosos estudios y publicaciones sobre la proyección UTM sabemos que se trata de una proyección conforme, por lo que

conserva los ángulos. Así el problema queda reducido al cálculo de estos puntos correlativos mediante el procedimiento de los arcos capaces o cualquier otro método geométrico equivalente (Apéndice B).

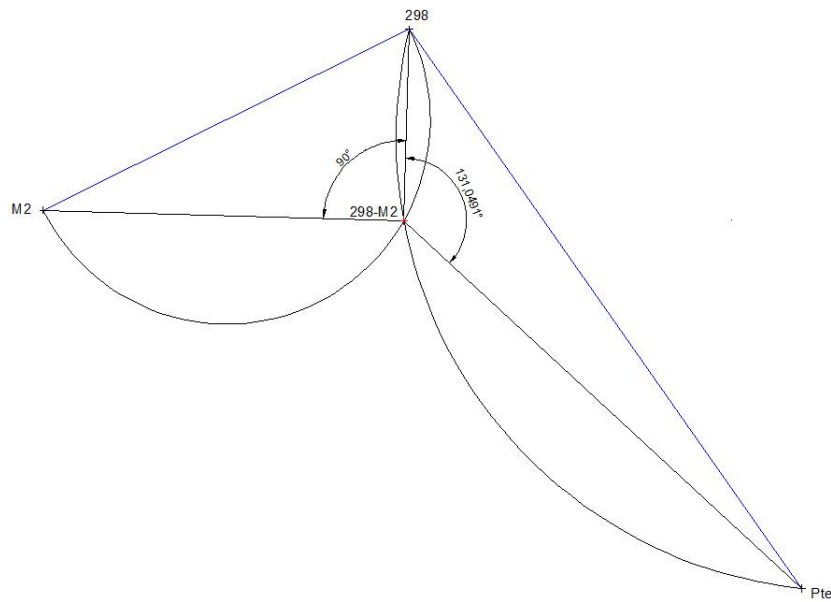
El procedimiento es bien conocido y consiste en escoger tres puntos desde donde se levantará nuestro punto correlativo. El punto buscado se localizará bajo un arco capaz de  $90^\circ$  respecto a una de las bases y bajo un ángulo que deberemos calcular respecto a la otra base. El ángulo que desconocemos lo hallaremos en



**Figura 6.1:** Geometría en el espacio UTM

uno de los dos sistemas, hemos elegido el sistema UTM para poder calcularlo con mayor precisión ya que proviene de la observación GNSS que suponemos más precisa que la observación clásica realizada en 1929. Una vez calculado el ángulo necesario y por lo tanto definida la geometría en el sistema UTM, nos trasladamos al sistema de 1929 para hallar el punto correlativo buscado

que cumple con los requisitos geométricos impuestos mediante la intersección de los dos arcos capaces. Así conseguimos la correspondencia del conjunto de puntos correlativos en ambos sistemas. Si trabajamos con las coordenadas



**Figura 6.2:** Determinación del punto correlativo en el sistema de coordenadas de 1929

rectangulares locales RL-ETRS89 y las coordenadas planas de 1929 RL-1929, no encontramos ese inconveniente, ya que como decíamos antes los parámetros giro y homotecia son tan pequeños que a efectos prácticos podemos afirmar que los sistemas son coincidentes. De la experimentación con varios conjuntos de puntos en coordenadas rectangulares planas y sus correspondientes en coordenadas 1929, en los que se han incluido un número variable de puntos correlativos para calcular la transformación afín, obtenemos diferentes resultados.

La primera experimentación se realiza con objeto de descubrir cómo afectan



los parámetros de giro y homotecia entre los dos sistemas. Para ello se han calculado las coordenadas de un vértice correlativo al que llamamos 298-MigueloteII como intersección de la recta vertical que contiene la coordenada X del vértice 298 y la recta horizontal que contiene la coordenada Y del vértice MigueloteII. Junto con este punto, se han escogido cinco puntos adicionales pertenecientes a la red topográfica de 1929, que corresponden a la denominación MigueloteII, 298, 67A, Pte.Mar y Pechina y se ha realizado una transformación afín con ellos. (Tabla 6.1).

**Tabla 6.1:** Diferencias con punto correlativo calculado como simple intersección

<i>Vértice</i>	$X_{GNSS}$	$X_{Transformada}$	<i>Diferencia</i>	$Y_{GNSS}$	$Y_{Transformada}$	<i>Diferencia</i>
<i>MigueloteII</i>	0.0	-0.0834	0.0834	0.0	0.0468	0.0468
<i>Pte.Mar</i>	1113.4339	1113.4697	0.03	-555.5801	-555.5396	0.04
67A	772.3587	772.4279	0.07	89.4342	89.4362	0.002
298	537.5366	537.5593	0.02	264.8976	264.9821	0.08
298 – MII	537.5366	537.4500	0.09	0.0	-0.1729	0.1729
<i>Pechina</i>	-1401.2471	-1401.2049	0.04	182.4203	182.4196	0.0007

Por otra parte, conservando el mismo conjunto de puntos, MigueloteII, 298, 67A, Pte. Mar y Pechina y calculando el vértice correlativo 298-MigueloteII mediante el método de arcos capaces con la idea de evitar los efectos que el giro y la homotecia entre los sistemas pueda introducir, se ha realizado una nueva transformación afín. (Tabla 6.2).

**Tabla 6.2:** Diferencias con punto correlativo calculado mediante arco capaz

<i>Vértice</i>	$X_{GNSS}$	$X_{Transformada}$	<i>Diferencia</i>	$Y_{GNSS}$	$Y_{Transformada}$	<i>Diferencia</i>
<i>MigueloteII</i>	0.0	-0.1005	0.1005	0.0	0.0112	0.0112
<i>Pte.Mar</i>	1113.4339	1113.4503	0.016	-555.5801	-555.5800	0.0001
67A	772.3587	772.4002	0.0413	89.4342	89.3786	0.055
298	537.5366	537.5311	0.0056	264.8976	264.9232	0.025
298 – MII	537.5366	537.5468	0.01	0.0	0.0286	0.0286
<i>Pechina</i>	-1401.2471	-1401.2093	0.038	182.4203	182.4104	0.009

La Tablas 6.1 y 6.2 contienen los resultados de las dos transformaciones realizadas. Para comparar los dos resultados nos fijaremos en las diferencias calculadas como la resta de coordenadas rectangulares locales provenientes de la transformación de las coordenadas geocéntricas obtenidas por GNSS y las coordenadas rectangulares locales obtenidas al aplicar los parámetros de la transformación afín calculada.

Las diferencias de las coordenadas tanto en su componente X como Y en cada uno de los puntos no son significativas, ya que rondan los mismos valores. Sin embargo no sucede lo mismo si nos fijamos en el punto correlativo 298-MiguelteII, que presenta unos valores mayores en la transformación donde se ha utilizado el método de intersección para calcularlo.

Siguiendo con la experimentación, modificaremos el conjunto de datos con los que se trabaja, aumentando el número de puntos correlativos que entrarán en la transformación y disminuyendo el número de puntos pertenecientes a la red topográfica de 1929. En la Tabla 6.3 podemos observar cómo las diferencias son varios órdenes de magnitud superiores en prácticamente todos los puntos que entran en la transformación cuando los puntos correlativos se calculan mediante arcos capaces.

**Tabla 6.3:** Diferencias en las transformaciones con varios puntos correlativos calculados con arco capaz y sin él

<i>Vértice</i>	<i>Diferencia<sub>x</sub></i>	<i>Diferencia<sub>x</sub><sub>ArcoCapaz</sub></i>	<i>Diferencia<sub>y</sub></i>	<i>Diferencia<sub>y</sub><sub>ArcoCapaz</sub></i>
<i>Pte.Mar</i>	-0.0066	0.1077	-0.0035	-0.0692
67A	0.0162	0.0086	0.0165	0.0213
298	-0.0096	0.0370	-0.0129	-0.0489
298 – <i>Pte.Mar</i>	-0.0096	-0.0711	-0.0035	0.0576
298 – 67A	-0.0096	0.0772	0.0165	-0.0079
<i>Pte.Mar</i> – 298	-0.0066	-0.0541	-0.0129	0.0144
<i>Pte.Mar</i> – 67A	-0.0066	-0.0239	0.0165	0.0554
67A – 298	0.0162	-0.0316	-0.0129	-0.0197
67A – <i>Pte.Mar</i>	0.0162	-0.0498	-0.0035	-0.0032

Así no podemos concluir que el hecho de obtener puntos con una geometría más similar en ambos sistemas, proporcione los mejores resultados. Los observables que entran en el sistema no son ángulos sino coordenadas, algo que hace más compleja su interpretación. Por ello y a la vista de los resultados obtenidos, es recomendable trabajar solo cuando sea necesario obtener coordenadas en proyección UTM con el método de arcos capaces y en general con coordenadas rectangulares locales siempre que necesitemos una densificación por puntos correlativos en nuestra zona de trabajo.

Por otra parte, el flujo de conversión entre sistemas de coordenadas desde las coordenadas geocéntricas obtenidas por GNSS hasta llegar a las coordenadas rectangulares locales, pasa por la obtención de las coordenadas geodésicas  $\varphi, \lambda, h$  como paso intermedio (Capítulo 4). Debemos tener en cuenta que los puntos de la red topográfica de 1929 presentan diferentes alturas elipsoidales que pueden afectar en la determinación de las coordenadas rectangulares locales  $x$  e  $y$ . Para realizar esta comprobación se han llevado todos los puntos a altura elipsoidal cero, simulando un entorno plano y se han calculado las diferencias obtenidas entre la conversión de coordenadas geodésicas con  $h = 0$  a rectangulares locales y la conversión de coordenadas geodésicas con sus  $h$  correspondientes a rectangulares locales.

La Tabla 6.4 muestra cómo las máximas diferencias que se dan están en torno a los 6 cm.

Otra comprobación realizada ha consistido en el cálculo de una  $h_{media}$  de todos los puntos implicados en la transformación para llevar el entorno plano a una  $h = 79.11m$ . Así de la Tabla 6.5 se desprende que las diferencias máximas en este caso están en torno a 1 cm.

Las diferencias en  $h$  entre los puntos implicados en la transformación son

**Tabla 6.4:** Diferencias entre las coordenadas rectangulares locales calculadas con  $h = 0$  y las  $h$  originales de cada punto

<i>Vértice</i>	<i>Diferencia<sub>x</sub></i>	<i>Diferencia<sub>y</sub></i>
<i>Grao</i>	-0.0457	-0.021
<i>Castellar</i>	-0.012	-0.0592
<i>Mislata</i>	-0.0581	-0.0004
<i>Almcacera</i>	-0.0245	-0.0594
<i>Benimamet</i>	-0.063	-0.0422
<i>Sancho</i>	-0.0332	-0.0349
<i>MigueleteII</i>	0.0	0.0
<i>Pte.Mar</i>	-0.0107	-0.0054
<i>Pte.Mar2</i>	-0.009	-0.0056
298	-0.0053	-0.0026
67A	-0.0073	-0.0009
<i>Pechina</i>	-0.0151	-0.002

**Tabla 6.5:** Diferencias entre las coordenadas rectangulares locales calculadas con  $h = 79.11$  y las  $h$  originales de cada punto

<b>Vértice</b>	<i>Diferencia<sub>x</sub></i>	<i>Diferencia<sub>y</sub></i>
<i>Grao</i>	-0.0014	-0.0006
<i>Castellar</i>	0.0009	0.0043
<i>Mislata</i>	-0.0135	-0.0001
<i>Almcacera</i>	-0.0034	-0.0083
<i>Benimamet</i>	-0.0173	-0.0115
<i>Sancho</i>	0.0096	0.0101
<i>MigueleteII</i>	0.0	0.0
<i>Pte.Mar</i>	0.0031	0.0015
<i>Pte.Mar2</i>	0.0026	0.0015
298	0.0014	0.0007
67A	0.0023	0.0002
<i>Pechina</i>	0.0022	0.0003

variables, pero nunca superiores a 54 m, por eso llevando todos los puntos a  $h = 0$ , se valora el error cometido en la determinación de las coordenadas rectangulares locales por exceso, mientras que si se toma el plano definido por  $h_{media}$ , la valoración del error cometido se realizará por defecto. Así se puede estimar que el error real estará comprendido en el intervalo [1-6 cm], cifras que se mantienen muy por debajo de los residuos de la transformación entre coordenadas planas del PPM de 1929 y coordenadas ETRS89, cuyos valores máximos rondan los 50 cm.

### 6.3 Líneas Futuras

La utilidad de la metodología propuesta en esta tesis ha quedado confirmada en la aplicación llevada a cabo para la hoja 46I del Plano Parcelario Municipal. Cabe destacar que ésta es extensible y aplicable al resto de hojas que conforman el Plano. En esa línea se ha avanzado para la aplicación sobre un caso real en la zona de nueva edificación Av. Juan XXIII ante la problemática resuelta por los técnicos del Ayto. de Valencia, en la que se debía averiguar la localización del trazado de un camino antiguo de propiedad municipal para evitar las edificaciones que se habían proyectado sobre él. En este caso la señalización de poligonales o vértices de triangulación sobre el terreno no se encuentran accesibles o han desaparecido, por lo que debemos auxiliarnos de elementos permanentes como es, la Alquería de Solache, muy próxima al lugar de la intervención. Se procedió a su levantamiento para obtener una nube de puntos necesaria para establecer puntos homólogos entre el sistema del plano inicial y el sistema de destino ETRS89. Para dar solución a esta cuestión queda pendiente la aplicación de la metodología investigada en este trabajo (Figura 6.3).

En general el sistema de densificación por puntos correlativos aplicado en



**Figura 6.3:** Levantamiento de la Alquería de Solache

este trabajo podría no ser suficiente o idóneo para la búsqueda de una nube de puntos para realizar una transformación local que permita georreferenciar la zona de interés de manera precisa. Es por ello que se debería abundar en la aplicación de nuevos métodos de densificación, como puede ser el sistema de ejes oblicuos aplicados a zonas que lo requieran, diferentes a la que ha sido objeto de estudio en esta tesis.

Debido al gran aparato matemático necesario para llevar a cabo la propuesta metodológica, el desarrollo de un software en un entorno SIG que permita automatizar el proceso, se convierte en una herramienta muy útil de recuperación cartográfica. Muchas funciones necesarias ya se encuentran implementadas, sin embargo, podría mejorarse y depurarse para convertirse en una herramienta de aplicación para un usuario no experto aunque con algunas nociones en cartografía.

En último lugar cabe destacar que el procedimiento automatizado se podría aplicar a cartografías de similares características como la que se encuentra conservada en el Ayuntamiento de Madrid (Figura 6.4), de gran riqueza informativa y calidad técnica, por lo que creemos que resultaría muy interesante su recuperación.



**Figura 6.4:** Parcelario Topográfico de Madrid a escala 1:500



## Bibliografía

- Altés, J., de la Calle, J., y Bonilla, E. (2008). La Cartografía Urbanística en el Ajuntament de València. *Revista de la CECEL*, I.
- Amando Llopis, A. y Perdigón Fernández, L. (2011). *Cartografía histórica de la ciudad de València, 1608-1944*. Univesitat Politècnica de València.
- ANR (2010). AnaLyse diachronique de l'espace urbain PARisien: approche Geomàtique. <http://alpage.huma-num.fr> [23/03/2015].
- Bayer, T. (2014). Estimation of an unknown cartographic projection and its parameters from the map. *Geoinformatica*, 18:621–669.
- Benoît, J.R. et Guillaume, C. E. (1917). *La mesure rapide des bases géodésiques*. Gauthier-Villars.
- Bitelli, G., Cremonini, S., and Gatta, G. (2009). Ancient map comparisons and georeferencing techniques: a case study from the po river delta (Italy). *E-perimetron*, 4:221–228.
- Bitelli, G., Cremonini, S., and Gatta, G. (2014). Cartographic heritage: Toward unconventional methods for quantitative analysis of pre-geodetic maps. *Journal of Cultural Heritage*, 15:183–195.
- Bitelli, G. and Gatta, G. (2011). Experiences on georeferencing of maps from the XIX century Gregorian Cadastre of Bologna (Italy). *e-Perimetron*, 6:270–275.
- BOE (1970). Decreto 2303/1970 de 16 de julio, por el que se adopta la proyección Universal Transversa de Mercator (U.T.M.) para la revisión y nueva edición del Mapa Topográfico Nacional. *Boletín Oficial del Estado*, (202):13751.
- BOE (2007). Real decreto 1071/2007, de 27 de julio, por el que se regula el Sistema Geodésico de referencia oficial en España. *Boletín Oficial del Estado*, 207:35986–35989.

- Bowring, B. (1976). Transformation from spatial to geodetic coordinates. *Survey Review*, 23:323–327.
- Brovelli, M. A. and Minghini, M. (2012). Georeferencing old maps: a polynomial-based approach for Como historical cadastres. *e-Perimetron*, 7:97–110.
- Cajthaml, J. (2013). Polynomial georeferencing method for old map series. *13th SGEM GeoConference on Informatics, Geoinformatics And Remote Sensing*, 1:859–866.
- Casals, R. (1994). *Escáneres: descripción y glosario*. Tecnoteca.
- Cebrián, P. y Los Arcos, A. (1895). *Teoría General de las Proyecciones Geográficas y su Aplicación a la Formación de un Mapa de España*. Dirección General del Instituto Geográfico y Estadístico.
- Chías, P. and Abad, T. (2009). Gis tools for comparing historical and contemporary landscapes through local map series. *e-Perimetron*, 4:61–72.
- Chueca Pazos, M. (1982). *Topografía Clásica*. Editorial dossat, s.a.
- Chueca Pazos, M., Anquela Julián, A., y Baselga Moreno, S. (2007). *Diseño de redes y control de deformaciones: los problemas del datum y principal del diseño*. Universidad Politécnica de Valencia.
- Chueca Pazos, M., Berné Valero, J., Anquela Julián, A., y Baselga Moreno, S. (2003). *Microgeodesia y Redes locales: Complementos Docentes*. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- Chueca Pazos, M., García García, F., Jiménez Martínez, M.J., y Villar Cano, M. (2008). *Compendio de Historia de la Ingeniería Cartográfica*. Editorial Universidad Politécnica de Valencia.
- Chueca Pazos, M., Herráez Boquera, J., y Berné Valero, J. (1995). *Ampliación de Redes Topográficas y Locales. Cuestiones de diseño*. Universidad Politécnica de Valencia.
- Chueca Pazos, M., Herráez Boquera, J., y Berné Valero, J. (1996). *Redes Topográficas y Locales. Microgeodesia*. Editorial Paraninfo.
- Cintra, J. P. (2012). Digital Cartography and Historical Maps: techniques, applications and peculiarities. *Revista Brasileira de Cartografia*, 64/4.

- Costa, L. and Noizet, H. (2012). Le Programme Alpage. Analyse diachronique de l'espace parisien. Approche Géomatique. *La lettre de l'INSHS*, 17:21–24.
- CSIC (2013). IDE histórica de la ciudad de Madrid. Patrimonio cartográfico y demográfico a principios del siglo XX. [www.idehistoricamadrid.org](http://www.idehistoricamadrid.org) [21/07/2014].
- Dávila Martínez, F. J., Camacho Arranz, E., et al. (2012). Georreferenciación de documentos cartográficos para la gestión de archivos y cartotecas:” propuesta metodológica”. *Revista Catalana de Geografia*, 27.
- de Cifuentes Rodríguez, M. (1924). *Informe sobre los trabajos del Servicio de Nivelaciones de Precisión en España desde 1912 a 1924*. Instituto Geográfico y Catastral.
- de la Puente, J. M. (1925). La medida de bases con hilos Invar en el plano del Extrarradio de Madrid. *Ingeniería y Construcción*, III:254–256.
- del Bosque González, I., García Ferrero, S., Gómez Nieto, I., Martín-Forero Morente, L., Ramiro Fariñas, D., et al. (2010). Cartografía y demografía histórica en una IDE. WMS del plano de Madrid de Facundo Cañada. *Revista Catalana de Geografia*.
- DO (1894). *Diario Oficial del Ministerio de la Guerra*, IV(259):524–526.
- Dominguez García-Tejero, F. (1989). *Topografía General y Aplicada*. Editorial dossat, s.a.
- Ferrer Torio, R. y Piña Paton, B. (1996). *Topografía aplicada a la Ingeniería. Primera parte*. Instituto Geográfico Nacional.
- Flor Bertomeu, A. M. (2011). Análisis histórico de un siglo de instrumentación clásica. Trabajo fin de carrera, Universidad Politécnica de Valencia.
- Fraser, B., Murphy, C., y Bunting, F. (2003). *Uso y administración del color*. Anaya Multimedia.
- García-Asenjo, L. y Hernández, D. (2003). *Geodesia*. Universidad Politécnica de Valencia.
- Gatta, G. (2010). *Valorizzazione di cartografia storica attraverso moderne tecniche geomatiche: recupero metrico, elaborazione e consultazione in ambiente digitale*. Tesi di Dottorato, Università di Bologna.

- Ghilani, C. D. and Wolf, P. R. (2006). *Adjustment Computations*. Wiley.
- GM (1928). Real decreto 994/1928, de 30 de mayo, por el que se regula la formación y servicios del catastro parcelario. *Gaceta de Madrid*, 157:1303–1306.
- Grafarend, E. W. and Sansó, F. (1985). *Optimization and Design of Geodetic Networks*. Springer Verlag.
- Gray, J. and Tilling, L. (1978). Johann Heinrich Lambert, Mathematician and Scientist, 1728-1777. *Historia Mathematica*, 5:13–41.
- Haasbroek, N. (1968). *Gemma Frisius, Tycho Brahe and Snellius and their Triangulations*. Netherlands Geodetic Commission.
- Hu, G., Khoo, H., Goh, P., and Law, C. (2003). Development and assessment of GPS virtual reference stations for rtk positioning. *Journal of Geodesy*, 77:292–302.
- Irigoyen, J., Villar, M., Marqués, A., y García, F. (2013). Administración del color en los fondos cartográficos de la Fundación Giménez Lorente. *X Congreso Nacional del Color*, 1:426–430.
- Jäderin, E. (1885). *Geodätische Längeumessung mit Stahlbändern und Metalldrähten*. Norstedt & söner.
- Jenny, B. and Hurni, L. (2011). Studying cartographic heritage: Analysis and visualization of geometric distortions. *Computers & Graphics*, 35:402–411.
- Jenny, B., Weber, A., and Hurni, L. (2007). Visualizing the planimetric accuracy of historical maps with MapAnalyst. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 42:89–94.
- Jiménez Martínez, M.J. (2009). *Descripción y uso del método RTK en los equipos GPS leica system 1200*. Editorial UPV.
- Jiménez Martínez, M.J. (2013). *Innovación y avances en Ajustes Gaussianos de Redes Locales: métodos de Triangulación homogénea y de incrementos de Coordenadas. Interpretación de resultados, densificación virtual equiprecisa y evolución en el tiempo*. PhD thesis, Universidad Politécnica de Valencia.
- Jiménez Martínez, M.J., Quesada Olmos, N., y Villar Cano, M. (2014). Sobre el control microgeodésico de deformaciones. *RACV Digital*.

- Kislig, L. (2011). GNSS solutions: Virtual Reference Stations. *InsideGNSS*, July/August:28–31.
- Kyriazi, E., Soulakellis, N., Tataris, G., and Lappas, S. (2010). *Digital Heritage: Use of geoinformatics for the digitization and visualization of cartographic heritage: the case of an early 1920s Mytilene town map*. Springer.
- Leick, A., Rapoport, L., and Tatarnikov, D. (2015). *GPS Satellite Surveying*. Wiley.
- Lerma García, J. L. (2002). *Fotogrametría moderna: Analítica y Digital*. Universidad Politécnica de Valencia.
- Livieratos, E. (2006). On the study of the geometric properties of historical cartographic representations. *Cartographica: The International Journal for Geographic Information and Geovisualization*, 41:165–176.
- Manzano Agugliaro, F., Martínez García, J., and San Antonio Gómez, J. C. (2012). Gis analysis of the accuracy of Tomás Lopez's historical cartography in the Canary Islands (1742-1746). *Scientific Research and Essays*, 7:199–210.
- Manzano-Agugliaro, F., San Antonio Gómez, C., López, S., Montoya, F., and Gil, C. (2013). Pareto-based evolutionary algorithms for the calculation of transformation parameters and accuracy assessment of historical maps. *Computers & Geosciences*, 57:124–132.
- Martín Asín, F. (1982). *Astronomía*. Paraninfo S.A.
- Martín Asín, F. (1983). *Geodesia y Cartografía Matemática*. Paraninfo S.A.
- Martín Asín, F. (1987). *Problemas de Astronomía*. Paraninfo S.A.
- Martín Asín, F. (1990). *Geodesia y Cartografía Matemática*. Paraninfo S.A.
- Martín López, J. (2002). *Historia de la Cartografía y de la Topografía*. CNIG.
- Mikhail, E. and Ackerman, F. (1981). *Analysis and Adjustments of Survey Measurements*. Van Nostrand.
- Montgomery, D. C. y Runger, G. (1996). *Probabilidad y Estadística aplicadas a la Ingeniería*. McGraw-Hill.
- Mora Palazón, A. (1995). Plano topográfico parcelario del Ayuntamiento de Madrid. *Anales del Instituto de Estudios Madrileños*, 37:535–547.

- Murdin, P. (2009). *Full Meridian of Glory*. Springer.
- Navarro Brotóns, V. (2004). *Jerónimo Muñoz. Introducción a la Astronomía y la Geografía*. Consell Valencià de Cultura.
- Núñez García del Pozo, A., Valbuena Durán J.L. y Velasco Gómez, J. (1992). *G.P.S. La nueva era de la topografía*. Ediciones de las Ciencias Sociales, S.A.
- Paladini, A. (1991). Notas para la historia del Mapa Topográfico Nacional de España. *Militaria. Revista de Cultura Militar*, Número 3:83–100.
- Retscher, G. (2002). Accuracy Performance of Virtual Reference Station (VRS) Networks. *Journal of Global Positioning Systems*, 1(1):40–47.
- Richardus, P. (1977). *Project Surveying*. A.Balkema.
- Roset Arissó, R. y Ramos, N. (2011). Georeferenciación de mapas antiguos con herramientas de código abierto: un caso práctico. *Mapping: Map and Sig consulting*, 146:16–30.
- Rosselló i Verger, V. M. (2000). Jeroni Munyós i la primera Triangulació Valenciana. *Cuadernos de Geografía*, 67/68:137–146.
- Rosselló i Verger, V. M. (2008). *Cartografia històrica dels països catalans*. Universitat de València i Institut d'Estudis Catalans.
- Rossignoli, J. L., Dalda, A., y Boyero, F. (1976). *Proyección Universal Transversa Mercator. Volúmen I*. Servicio Geográfico del Ejército.
- Sánchez Cortadellas, A. (2009). Estudio de la operatividad en el posicionamiento con GPS utilizando VRS en el post proceso. Trabajo fin de carrera, Universidad Politécnica de Cataluña.
- Sánchez Menéndez, F. (2004). *Geodesia y Cartografía: Los conceptos y su aplicación práctica*. EOSGIS S.L.
- Schrön, L. (1893). *Tables de Logarithmes a Sept Décimales*. Gauthier-Villars et Cie.
- Seeber, G. (2003). *Satellite Geodesy*. Walter de Gruyter.
- Segura, A. y Ribes, I. (1988). *El Catastro en España II. De 1906 a la época actual*. Ministerio de Economía y Hacienda.

- Sevilla, M. (1989). *Soluciones progresivas en el método de mínimos cuadrados*. Servicio Geográfico del Ejército.
- Sigalat, C. (2006). Estudio de los trazados de la ciudad de Valencia según plano parcelario municipal realizado por el Instituto Geográfico y Catastral en 1929. Trabajo fin de máster, Universidad Politécnica de Valencia.
- Sigalat, C. (2008). Estudio de los trazados de la ciudad de Valencia según plano parcelario municipal realizado por el Instituto Geográfico y Catastral en 1929. *IX Congreso Internacional (CICOP) de Rehabilitación del Patrimonio Arquitectónico y Edificación*.
- Snyder, J. P. (1987). *Map projections-A working manual*. United States Government printing office.
- Soler, T. (1997). A profile of General Carlos Ibáñez e Ibáñez de Ibero: first president of the International Geodetic Association. *Jornal of Geodesy*, 71:176–188.
- Strang, G. (2007). *Álgebra Lineal y sus aplicaciones*. Ediciones Paraninfo.
- Strang, G. and Borre, K. (1997). *Linear algebra, geodesy, and GPS*. Wellesley-Cambridge Press.
- Teunissen, P. and Kleusberg, A. (1996). *GPS for Geodesy*. Springer.
- Tissot, M. (1881). *Mémoire sur la Représentation des Surfaces et les Projections des Cartes Géographiques*. Imprimerie de Gauthier-Villars.
- Tucci, M. and Giordano, A. (2011). Positional accuracy, positional uncertainty, and feature change detection in historical maps: Results of an experiment. *Computers, Environment and Urban Systems*, 35:452–463.
- Villar Cano, M. y Chueca Pazos, M. (2012). Un apunte sobre la Historia de la Ingeniería Cartográfica en el mundo occidental: Páginas Valencianas. *Aula de Humanidades y Ciencias*, 32:153–329.
- Villar Cano, M., García García, F., Marqués Mateu, A., y Jiménez Martínez, M.J. (2012). Análisis de la Primera Red Topográfica Urbana de Valencia de 1929. *X Congreso TOPCART*.
- VV.AA. (1907). *Instrucciones para los trabajos topográficos*. Dirección General del Instituto Geográfico y Estadístico.

- VV.AA. (1928). *Anuario del observatorio astronómico de Madrid*. Instituto Geográfico y Catastral.
- VV.AA. (1934). *Reglamento de Cartografía militar*. Estado Mayor Central del Ejército.
- VV.AA. (1937). *A Propósito del Nuevo Reglamento de Cartografía*. Talleres del Instituto Geográfico.
- VV.AA. (1970-1971). *Apuntes de Cartografía*. Servicio Geográfico del Ejército.
- VV.AA. (1976). *Proyección Universal Transversa Mercator. Volúmen I*. Servicio Geográfico del Ejército.
- VV.AA. (2002). *Instrumentos Históricos del Instituto Geográfico Nacional*. Dirección General del Instituto Geográfico Nacional.
- VV.AA. (2011). Proceso de digitalización en la Biblioteca Nacional de España. Informe técnico, Biblioteca Nacional de España.
- Wanninger, L. (2003). Virtual reference stations (VRS). *GPS Solutions*, 7:143–144.
- Wolf, P. R. and Dewitt, B. A. (2000). *Elements of Photogrammetry with Applications in GIS*. Mc Graw Hill.
- WU, X., Mishima, K., Sasagawa, T., Mishima, Y., Tatibana, K., and Honji, K. (2004). Assessment of VRS-GPS for practical application to local control surveying. In *XX ISPRS Congress Technical Commision III*.



## Apéndice A

### Las zonas de distinta significación en control de deformaciones

Según lo desarrollado en el artículo *Sobre el control microgeodésico de deformaciones* (Jiménez Martínez et al., 2014), podemos estudiar la evolución de una red microgeodésica en su conjunto y a lo largo del tiempo, definiendo y evaluando las posibles deformaciones que hubieran podido afectarla. El resultado se obtiene en forma de vector  $d_{n,1}$  cuyas componentes cifran la variación de cada una de las  $n$  coordenadas de la red, vértice a vértice. Se establece un límite razonado de sensibilidad o umbral que permite la discriminación del resultado obtenido por diversos procedimientos, estudiando y valorando el poder de afirmación estadístico de los resultados obtenidos, en conjunto o por zonas separadas aplicando Análisis Multivariante. Del mismo modo, es factible densificar virtualmente la red hasta el límite que sea preciso con suficiente rigor, y el mismo nivel de precisión, punto a punto, que los de observación y cálculo directos.

Para completar la teoría y práctica expuestas, es necesario abordar el problema de fraccionar la red, hasta llegar a efectuar el control de la misma por zonas arbitrarias e incluso vértice a vértice, identificando y aislando zonas de interés relevante, con posibilidad de extraer conclusiones sobre la previsible evolución en el tiempo del vector de deformaciones  $d_i = d_1 - d_i$ , referido a origen,

mediante sucesivas campañas de orden  $i$  de observación y ajuste de la parte de la red fraccionada, manteniendo siempre el condicionado previo establecido de invariancia. Siendo entonces de aplicación la teoría de zonas de distinta significación.

El vector de deformaciones individualiza en cada vértice de la red o correlativo y para cada coordenada las alteraciones sufridas, pero su análisis estadístico se ha realizado en conjunto, pudiendo ser importante fraccionarlo para parte de la red, para un vértice e incluso una determinada coordenada.

El Test F de Snedecor relaciona y compara  $\hat{\sigma}_{on}^2$ , varianza a posteriori del observable de peso unidad de una muestra de  $n$  observables de la red afectada de deformación nula forzada en definida en  $A \cdot d - K_d = R_d$  y  $d = 0$  con  $\hat{\sigma}_{od}^2$ , varianza del resultado de un ajuste de la misma red en situación inicial  $A \cdot d - K_d = R_d$ , cuya deformación se pretende contrastar. Por tanto se deberá reducir la muestra de deformación nula a los límites que se requieran y aplicar el F-Test. Su resultado es controlar estadísticamente la deformación en el ámbito indicado.

Evidentemente la aplicación del método en redes de pocos vértices, caso muy común en Microgeodesia, tiene menor importancia que en redes de un número de vértices más elevado, por ejemplo, en el estudio de la modelización de una cartografía antigua apoyándose en su red trigonométrica donde puede ser decisivo el estudio por zonas de distinta deformación relativa respecto a un levantamiento moderno de control.

Partiendo del Método de Observaciones Indirectas, en primer lugar la solución inversa generalizada de una red local cualquiera puede escribirse mediante el sistema de ecuaciones normales (Chueca Pazos et al., 2007; Jiménez Martínez,

2013).

$$\begin{pmatrix} A_1^T \cdot P \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

donde el modelo  $F_i$  se ha linealizado como

$$F_i \cong A_{1_{m1,n}} \cdot x_{n,1} - K_{1_{m1,1}} = R_{1_{m1,1}} \quad (\text{A.2})$$

que corresponde a una red libre de defecto de rango definido por  $\delta$ , para evitar ambigüedad con la usual  $d$  que se ha utilizado para designar al vector de deformaciones. Así escribimos

$$\delta = n - R(A_1^T \cdot P \cdot A_1) = n - R(S) = n - R(A_1) \quad (\text{A.3})$$

y siendo el modelo  $F_j$  linealizado

$$F_j \cong A_{2_{\delta1,n}} \cdot x_{n,1} = 0 \quad (\text{A.4})$$

tal que  $A_{2_{\delta1,n}}$  resulte una matriz arbitraria de rango completo, condición necesaria pero no suficiente

$$R(A_2) = \delta_1 \geq \delta \quad (\text{A.5})$$

Además, condición necesaria y suficiente, es fácil ver que los elementos de las filas y columnas de  $A_{2_{\delta1,n}}$  no deben ser combinación lineal de los correspondientes en sus paralelas de  $S_1 = A_1^T \cdot P \cdot A_1$ . Ya que si así fuera el resultado del determinante

$|N| = \begin{vmatrix} A_1^T \cdot P \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{vmatrix}$  sería nulo. Ésta debe ser una comprobación necesaria

durante la fase previa del proyecto, para la aceptación de  $A_{2_{\delta1,n}}$  o rechazo en caso contrario.

Supondremos en cualquier caso, que el defecto de rango del ajuste definido por el modelo  $F_i$  se ha logrado compensar por  $F_j$ , desapareciendo la indeterminación.

Particularizando para  $\delta_1 = \delta$ , caso muy habitual, que permite acceder a la solución pseudoinversa y a las inversas generalizadas recíprocas de aplicación en zonas de distinta significación. Se puede escribir

$$\begin{pmatrix} A_{1_{n,m}}^T \cdot P_{m,m} \cdot A_{1_{m,n}} & A_{2_{n,\delta}}^T \\ A_{2_{\delta,n}} & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2_{\delta,1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1_{n,m}}^T \cdot P_{m,m} \cdot K_{1_{m,1}} \\ 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.6})$$

$$N_{n+\delta,n+\delta} \cdot \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2_{\delta,1}} \end{pmatrix}_{n+\delta,1} = W_{n+\delta,1}$$

$$R(N_{n+\delta,n+\delta}) = R(N) = n + \delta = \text{completo} \quad (\text{A.7})$$

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2_{\delta,1}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1_{n,m}}^T \cdot P_{m,m} \cdot A_{1_{m,n}} & A_{2_{n,\delta}}^T \\ A_{2_{\delta,n}} & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{1_{n,m}}^T \cdot P_{m,m} \cdot K_{1_{m,1}} \\ 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.8})$$

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2_{\delta,1}} \end{pmatrix}_{n+\delta,1} = N_{n+\delta,n+\delta}^{-1} \cdot W_{n+\delta,1}$$

Solución ajustada de red libre con infinitas soluciones asegadas y consistentes asociadas a matrices inversas generalizadas recíprocas generadas al variar  $A_2$  arbitrariamente, según las características específicas del proyecto.

Así, también puede establecerse la solución pseudoinversa única, que da lugar a mínima corrección en módulo del vector de variables o parámetros  $|x| = \text{mínimo}$  que implica  $\sum_1^n x_i^2 = \text{mínimo}$  y basta con particularizar  $A_{2_{\delta,n}} = E_{2_{\delta,n}} =$  matriz de constreñimientos dando lugar a la expresión de la solución

pseudoinversa,

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2\delta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1,n,m}^T \cdot P_{m,m} \cdot A_{1,m,n} & E_{2n,\delta}^T \\ E_{2\delta,n} & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{1,n,m}^T \cdot P_{m,m} \cdot K_{1,m,1} \\ 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Y siendo también una primera solución general.

Continuando con la teoría de las zonas de distinta significación (Chueca Pazos et al., 2007; Jiménez Martínez, 2013) es relevante que, a partir de la matriz de constreñimientos, se pueda dividir el espacio cubierto por una red libre en dos zonas diferentes, siendo una de ellas definida por cualquier circunstancia física o geométrica y representada por el vector

$$x_{a_i} \text{ para } i \in 1, 2, 3, \dots, i$$

y la otra zona se considera que presentará mínima corrección en módulo del vector de variables

$$x_{b_j} \text{ para } j \in i+1, i+2, i+3, \dots, n$$

siendo evidentemente la expresión total del vector de la correcciones de la red

$$x_{n,1} = \begin{pmatrix} x_{a_i,1} \\ x_{b_{n-i,1}} \end{pmatrix}_{n,1} \quad (\text{A.10})$$

bastará con utilizar en ajuste coordinado la matriz de constreñimientos correspondiente a la red de que se trate, sustituyendo por ceros todos los elementos de las coordenadas aproximadas a priori  $X_a$  correspondientes a las correcciones  $x_a$ . Así, por ejemplo si el defecto de rango corresponde a  $\delta = 4$  máximo en planimetría, se

escribirá:

$$A_{2\delta,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & \dots & 0 & -Y_{i+1} & X_{i+1} & \dots & -Y_n & X_n \\ 0 & \dots & 0 & X_{i+1} & Y_{i+1} & \dots & X_n & Y_n \end{pmatrix} \quad (\text{A.11})$$

y el problema se resuelve, considerando la división del vector de correcciones en sus dos fracciones, según las expresiones siguientes

$$\begin{pmatrix} x_{a_{i,1}} \\ x_{b_{n-i,1}} \\ -\lambda_{2\delta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1_{n,m}}^T \cdot P_{m,m} \cdot A_{1_{m,n}} & A_{2_{n,\delta}}^T \\ & A_{2\delta,n} & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{1_{n,m}}^T \cdot P_{m,m} \cdot K_{1_{m,1}} \\ & 0_{\delta,\delta} \end{pmatrix} \quad (\text{A.12})$$

$$\begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2\delta,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_{a_{i,1}} \\ x_{b_{n-i,1}} \\ -\lambda_{2\delta,1} \end{pmatrix} = N_{n+\delta,n+\delta}^{-1} \cdot W_{n+\delta,1}$$

Es importante subrayar que en la práctica utilizaremos casi exclusivamente observables GNSS o similares con metodología de ajustes coordinados por incrementos de coordenadas, que reducen en el supuesto planimétrico el número de constreñimientos o defecto de rango a  $\delta = 2$  con importante ventaja de cálculo e interpretación geométrica. Así la expresión de la matriz A.11 se reducirá a las dos primeras filas, procedentes de dos traslaciones ortogonales según los ejes coordenados y quedará

$$A_{2\delta,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

El resultado será único y podrá obtenerse según la expresión A.12, solución asociada también a una infinidad de matrices inversas generalizadas recíprocas operando con las matrices  $A_2$ , variable arbitraria y la matriz de constreñimientos  $E$ , fija. En este caso se puede formular el resultado fraccionado mediante dos matrices específicas, una pseudoinversa cuya solución es  $x_b$  y otra matriz inversa de Cayley cuya solución es  $x_a$  (Chueca Pazos et al., 2007; Jiménez Martínez, 2013).

En resumen, el método de ajustes coordinados permite obtener con cierta sencillez y alto rendimiento los resultados del vector de correcciones  $x$  en todos los supuestos que se consideren necesarios. Sin embargo, la presencia de los parámetros de Lagrange  $\lambda_2$  dificultan la formulación de las matrices, vectores y estimadores generales de criterio a posteriori. Se considera muy útil en fase de proyecto, diseño y simulación, ya que ahorra tiempo y cálculo. También como comprobación de los resultados definitivos a adoptar en cuanto al vector  $x$  determinado por el método usual, y en las fases de interpretación de resultados.

En cualquier caso, la expresión A.12 es una primera posibilidad de aplicación dividiendo la red en dos zonas reiteradamente mediante criterios lógicos ajustados a la realidad a interpretar y eligiendo siempre una de ellas con la condición específica de vector de deformación de módulo mínimo.

Aplicando lo expuesto anteriormente al ajuste e interpretación del vector de deformaciones  $d$ , se deducirá la formulación adecuada sustituyendo el vector de variables  $x$  por el vector de deformaciones  $d$  en la expresión

$$\begin{pmatrix} A_1^T \cdot P \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

de manera que obtenemos

$$\begin{pmatrix} A_1^T \cdot P \cdot A_1 & A_2^T \\ A_2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.13})$$

Donde  $A_2$ , a efectos de calcular la solución pseudoinversa, se particularizará por la matriz de constreñimientos  $E_2$  o bien con la matriz de la expresión A.11 deducida con zonas de distinta significación.

En nuestro supuesto, aplicando el método de incrementos de coordenadas y utilizando observables GNSS, se tendrá para dichas matrices

$$E_{22,n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_{22,n} = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & 0 & \dots & 1 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Se obtiene como solución pseudoinversa de toda la red

$$\begin{pmatrix} d_{n,1} \\ -\lambda_{22,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1n,m}^T \cdot P_{m,m} \cdot A_{1m,n} & E_{2n,2}^T \\ E_{22,n} & 0_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{1n,m}^T \cdot P_{m,m} \cdot K_{1m,1} \\ 0_{2,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.14})$$

Y como solución inversa generalizada con zonas de distinta significación

$$\begin{pmatrix} d_{n,1} \\ -\lambda_{22,1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_{1n,m}^T \cdot P_{m,m} \cdot A_{1m,n} & A_{2n,2}^T \\ A_{22,n} & 0_{2,2} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} A_{1n,m}^T \cdot P_{m,m} \cdot K_{1m,1} \\ 0_{2,2} \end{pmatrix} \quad (\text{A.15})$$



$$\text{con } d_{n,1} = \begin{pmatrix} d_{a_{i,1}} \\ d_{b_{n-i,1}} \end{pmatrix}_{n,1}$$

Siendo el modelo más general  $F_j \equiv A_2 \cdot d = 0$ , particularizamos para deformación nula virtual forzada extendida a toda la red. En ese caso se tendrá  $F_j \equiv A_2 \cdot d \equiv d = 0$ , es decir  $A_2 = I$ , resultando en definitiva

$$\begin{pmatrix} A_1^T \cdot P \cdot A_1 & I \\ I & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d \\ -\lambda_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1^T \cdot P \cdot K_1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.16})$$

Obteniendo la segunda solución general.

Y con la expresión de dimensiones de matrices y vectores componentes.

$$\begin{pmatrix} A_{1,n,m}^T \cdot P_{1,m,m} \cdot A_{1,m,n} & A_{2,n,n}^T \\ A_{2,n,n} & -P_{2,n,n}^{-1} \end{pmatrix}_{2n,2n} \cdot \begin{pmatrix} x_{n,1} \\ -\lambda_{2n,1} \end{pmatrix}_{2n,1} = \begin{pmatrix} A_{1,n,m}^T \cdot P_{1,m,m} \cdot K_{1,m,1} \\ K_{2,n,1} \end{pmatrix}_{2n,1} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{pmatrix} A_{n,m}^T \cdot P_{d,m,m} \cdot A_{m,n} & I_{n,n} \\ I_{n,n} & 0_{n,n} \end{pmatrix}_{2n,2n} \cdot \begin{pmatrix} d_{n,1} \\ -\lambda_{2n,1} \end{pmatrix}_{2n,1} = \begin{pmatrix} A_{n,m}^T \cdot P_{d,m,m} \cdot K_{d,m,1} \\ 0_{n,1} \end{pmatrix}_{2n,1} \quad (\text{A.18})$$

de acuerdo con la teoría de deformaciones y poniendo de manifiesto la conservación de invariancias.

Generalizamos las siguientes expresiones  $A \cdot d - K_d = R_d$  y  $d = 0$  e imponemos la condición de nulidad de las deformaciones específicamente a las componentes arbitrarias de índice 1,2,3...v en el vector d, que representamos como

$$d = \begin{pmatrix} d_i \\ d_{n-v} \end{pmatrix}_{n,1} \quad (\text{A.19})$$

$$i \in 1, 2, 3, \dots, v$$

$$n \in 2v + 1, 2v + 2, 2v + 3, \dots, 2v + (n - v)$$

podemos escribir así el sistema de ajustes coordinados

$$A \cdot d - K_d = R_d \quad (\text{A.20})$$

$$A_2 \cdot d = 0 \quad (\text{A.21})$$

donde  $A_2 = \begin{pmatrix} I_v & 0 \\ & \end{pmatrix}_{v,n}$ , de rango completo  $R(A_2) = v$

$I_v$  = matriz unidad de orden  $v$

$0$  = matriz de elementos nulos y dimensiones  $v, n - v$

O lo que es lo mismo, desarrollando vectores y matrices

$$A_{m,n} \cdot \begin{pmatrix} d_i \\ d_{n-v} \end{pmatrix}_{n,1} - K_{d_{m,1}} = R_{d_{m,1}} \quad (\text{A.22})$$

$$\begin{pmatrix} I_{v,v} & 0_{v,n-v} \end{pmatrix}_{v,n} \cdot \begin{pmatrix} d_i \\ d_{n-v} \end{pmatrix}_{n,1} = 0_{v,1}$$

cuya solución, según A.17 y A.18 se obtiene despejando  $d$  en

$$\begin{pmatrix} A_{n,m}^T \cdot P_{d_{m,m}} \cdot A_{m,n} & \begin{pmatrix} I_{v,v} \\ 0_{n-v,v} \end{pmatrix}_{n,v} \\ \begin{pmatrix} I_{v,v} & 0_{v,n-v} \end{pmatrix}_{v,n} & 0_{v,v} \end{pmatrix}_{n+v,n+v} \cdot \begin{pmatrix} d_{n,1} \\ -\lambda_{2_{v,1}} \end{pmatrix}_{n+v,1} = \begin{pmatrix} A_{n,m}^T \cdot P_{d_{m,m}} \cdot K_{d_{m,1}} \\ 0_{v,1} \end{pmatrix}_{n+v,1} \quad (\text{A.23})$$

y planteando cualquier supuesto del proyecto con la condición previa a cumplir

$$R(A_2) = R \left( \begin{array}{cc} I_{v,v} & 0_{v,n-v} \end{array} \right) = v = \text{completo}$$

$$v \geq \delta = n - R(A^T \cdot P \cdot A) = n - R(S) = n - R(A)$$

con lo que

$$R \cdot \left( \begin{array}{cc} A_{n,m}^T \cdot P_{d_{m,m}} \cdot A_{m,n} & \left( \begin{array}{c} I_{v,v} \\ 0_{n-v,v} \end{array} \right)_{n,v} \\ \left( \begin{array}{cc} I_{v,v} & 0_{v,n-v} \end{array} \right)_{v,n} & 0_{v,v} \end{array} \right)_{n+v,n+v} = n + v = \text{completo}$$

se podrá despejar con inversa de Cayley en A.23, resultando

$$\left( \begin{array}{c} d_{n,1} \\ -\lambda_{2v,1} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc} A_{n,m}^T \cdot P_{d_{m,m}} \cdot A_{m,n} & \left( \begin{array}{c} I_{v,v} \\ 0_{n-v,v} \end{array} \right)_{n,v} \\ \left( \begin{array}{cc} I_{v,v} & 0_{v,n-v} \end{array} \right)_{v,n} & 0_{v,v} \end{array} \right)^{-1} \cdot \left( \begin{array}{cc} A_{n,m}^T \cdot P_{d_{m,m}} \cdot K_{d_{m,1}} & \\ & 0_{v,1} \end{array} \right) \quad (\text{A.24})$$

en su caso más general.

Las expresiones A.24 junto a A.12, es la segunda posibilidad de aplicación dividiendo la red en dos zonas reiteradamente mediante criterios lógicos ajustados a la realidad a interpretar y eligiendo una con la condición específica de vector de deformación de módulo nulo.

Las dos soluciones generales A.9 con su particularización A.14, A.15 y A.16 y la aplicación lógica y reiterada de las A.12 con su particularización A.14, A.15 y A.24 deben resolver satisfactoriamente cualquier aplicación usual.

Siguiendo la rutina de cálculo, se tendrá

$$D(R_{d^T} \cdot P_d \cdot R_d) = (A_2 \cdot d_1 - K_2)^T \cdot T_{2^{-1}} \cdot (A_2 \cdot d_1 - K_2) = (A_2 \cdot d_1)^T \cdot T_{2^{-1}} \cdot (A_2 \cdot d_1) \quad (\text{A.25})$$

Y teniendo en cuenta

$$\begin{aligned} T_2 &= A_2 \cdot S_{d^{-1}} \cdot A_{2^T} = \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix} \cdot S_{d^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}^T = \\ &= \begin{pmatrix} S_{d^{-1}} & 0 \end{pmatrix}_{v,n} \cdot \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}_{n,v} = (S_{d^{-1}})_{v,v} = (Q_{d1v})_{v,v} = (2 \cdot Q_{xxv})_{v,v} \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

$(S_{d^{-1}})_{v,v}$ ,  $(Q_{d1v})_{v,v}$ ,  $(2 \cdot Q_{xxv})_{v,v}$ , menores de orden  $v$  formados por las  $v$  primeras filas y las  $v$  primeras columnas en  $(S_{d^{-1}})_{n,n}$ ,  $(Q_{d1})_{n,n}$ ,  $(2 \cdot Q_{xx})_{n,n}$  y es inmediata la generalización de la expresión, poniendo de manifiesto el dimensionado de las matrices de cálculo

$$\begin{aligned} D(R_d^T \cdot P_d \cdot R_d) &= \left( \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix} \cdot d_1 \right)^T \cdot Q_{d1v}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix} \cdot d_1 = \\ &= d_{1,n}^T \cdot \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}_{n,v} \cdot Q_{d1v}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}_{v,n} \cdot d_{1,n,1} = \quad (\text{A.27}) \\ d_i^T \cdot Q_{d1v}^{-1} \cdot d_i &= d_i^T \cdot (2 \cdot Q_{xxv})^{-1} \cdot d_i = R_{d2}^T \cdot P_{d2} \cdot R_{d2} \end{aligned}$$

parai  $\in 1, 2, 3, \dots, v$

expresión de la forma cuadrática fundamental generalizada

$$D_d = -S_d^{-1} \cdot A_2^T \cdot T_2^{-1} \cdot (A_2 \cdot d_1 - K_2) = -Q_{d1} \cdot \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}^T \cdot Q_{d1v}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix} \cdot d_1 =$$

$$\begin{aligned}
& Q_{d1_{n,n}} \cdot \begin{pmatrix} I_v \\ 0 \end{pmatrix}_{n,v} \cdot Q_{d1_{v,v}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}_{v,n} \cdot d_{1_{n,1}} = \\
& - \begin{pmatrix} Q_{d1_v} \\ M_1 \end{pmatrix}_{n,v} \cdot Q_{d1_{v,v}}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}_{v,n} \cdot d_{1_{n,1}} = \\
& - \begin{pmatrix} I_v \\ M_2 \end{pmatrix}_{n,v} \cdot \begin{pmatrix} I_v & 0 \end{pmatrix}_{v,n} \cdot d_{1_{n,1}} = - \begin{pmatrix} I_v & 0 \\ M_2 & 0 \end{pmatrix}_{n,n} \cdot d_{1_{n,1}} \quad (\text{A.28})
\end{aligned}$$

$$Dd = - \begin{pmatrix} d_i \\ d'_{n-v} \end{pmatrix} \quad (\text{A.29})$$

donde  $M_1, M_2$ , matrices no nulas,  $d'_{n-v} \neq d_{n-v}$ , vector no nulo, que resultan del cálculo.

Se tendrá finalmente

$$d = d_1 + Dd = \begin{pmatrix} d_i \\ d_{n-v} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} d_i \\ d'_{n-v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_i & -d_i \\ d_{n-v} & d'_{n-v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_i \\ d''_{n-v} \end{pmatrix} \quad (\text{A.30})$$

con la notación establecida, que pone de manifiesto la deformación nula forzada en las  $v$  primeras coordenadas.

Basta con hacer  $v = n$  para obtener la solución particular de deformación nula forzada a toda la red.

El método estudiado, unido a la teoría conocida de zonas de distinta significación, permite gran flexibilidad en el control de deformaciones por zonas aplicando distintos criterios hasta llegar al control únicamente de un vértice o una coordenada.

Por lo tanto, se puede particularizar y aplicar la teoría expuesta para toda la

red en conjunto a las zonificaciones que estudiamos. Por ejemplo, el estimador a posteriori de la varianza del observable de peso unidad en una campaña de orden  $k$  de control de deformaciones referido a las  $v$  coordenadas será de la forma

$$\hat{\sigma}_{odki}^2 = \frac{R_{d2ki}^T \cdot P_{d2ki} \cdot R_{d2ki}}{i} = \frac{d_{ki}^T \cdot Q_{dki}^{-1} \cdot d_{ki}}{i} = \frac{d_{ki}^T \cdot (2 \cdot Q_{xxi}^{-1}) \cdot d_{ki}}{i} \quad (\text{A.31})$$

con  $i = v$

$d_{ki}$  = vector de deformaciones en las coordenadas de índice  $i \in 1, 2, 3, \dots, v$  obtenido del  $d_k$ , correspondiente a toda la red.

$Q_{dki} = 2 \cdot Q_{xxi}$  matriz cofactor de las coordenadas  $i$  obtenida de  $Q_{xx}$  mediante los elementos de subíndices indicados.

$R_{d2ki}^T \cdot P_{d2ki} \cdot R_{d2ki}$  = suma ponderada de cuadrados de residuos de los observables - deformación.

Por lo tanto y siendo coherentes con la teoría desarrollada para deformación nula impuesta a toda la red, al imponer ahora a las  $v$  componentes del vector parcial de deformaciones  $d_{ki}$  la condición de nulidad virtual, los  $v$  residuos  $R_{d2ki}$  a posteriori de los observables virtuales deformación concernidos resultan en general distintos de cero y se cumple la ecuación A.31 siendo  $d_{ki}$  el mismo vector parcial de deformaciones obtenido inicialmente, supuesto su módulo  $|d_{ki}| \neq 0$  y sin imposición virtual.

En consecuencia, la varianza *a posteriori* del observable de peso unidad  $\hat{\sigma}_{odki}^2$  de la muestra elegida podrá contrastarse con la varianza *a priori* del observable de peso unidad  $\sigma_{To}^2$  de la población inicial a través del F-Test, según rutina y bajo la hipótesis nula  $H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{To}^2$ , con  $F_{opt} = 1$  que implica  $H_0 = d_k \neq 0$ , más general, o lo que es lo mismo  $H_0 = |d_k| \neq 0$ . Siendo el caso particular de inexistencia

supuesta *a priori* de deformación  $H_0 = d_k = 0$ , que implica  $H_0 = |d_k| = 0$  con  $F_{opt} = 0$ .

Es por tanto evidente que, siendo comparables mediante el F-Test los observables reales *a priori* y los virtuales *a posteriori* según hemos visto, en un trabajo bien proyectado y ejecutado, las precisiones de todos ellos también lo serán. Y veremos más adelante que con observables reales equiprecisos *a priori* y siguiendo la metodología que se propondrá se seguirán no solo observables virtuales equiprecisos *a posteriori*, sino que además con  $H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{To}^2$  se obtendrá el óptimo  $F_{opt} = 1$ , que implica mantenimiento de la precisión inicial en observables *a priori* y *a posteriori*, reales y virtuales.

Considerando el caso del F-Test correspondiente a la muestra escogida en control planimétrico respecto de toda la red en su conjunto quedará

$$H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{To}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{To}^2} = F \approx F_{v,\infty} \quad (\text{A.32})$$

$$F_{optimo} = 1$$

En F-Test de dos puntas y con nivel de significación  $\alpha$  exigible se puede generalizar a comparar la muestra elegida con otra finita procedente de la red. Así se puede aplicar también el  $\chi_v^2$ -Test como sigue

$$H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \sigma_{To}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{To}^2} = F \approx F_{v,\infty} = \frac{1}{v} \cdot \rho = \frac{1}{v} \cdot \chi_v^2 \quad (\text{A.33})$$

$$F_{optimo} = 1$$

$$\chi_v^2 = \rho_{optimo} = v$$

o adoptando otra hipótesis nula

$$H_0 : d_k = 0$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_{ki}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_{xxi}^{-1} \cdot d_{ki}}{v \cdot \sigma_{To}^2} = F = \frac{d_{ki}^T \cdot Q_{dki}^{-1} \cdot d_{ki}}{v \cdot \sigma_{To}^2} \approx F_{v,\infty} = \frac{1}{v} \cdot \rho = \frac{1}{v} \cdot \chi_v^2 \quad (A.34)$$

$$F_{optimo} = 0$$

$$\chi_{v,optimo}^2 = \rho = 0$$

siendo  $\rho$  la variable J/Q.

Siguiendo el estudio bajo la hipótesis alternativa

$$H_1 : d_k \neq 0$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_{ki}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_{xxi}^{-1} \cdot d_{ki}}{v \cdot \sigma_{To}^2} = \frac{d_{ki}^T \cdot Q_{dki}^{-1} \cdot d_{ki}}{v \cdot \sigma_{To}^2} = \frac{1}{v} \cdot \rho = \frac{1}{v} \cdot \chi_{v,\lambda}^{\prime 2} \quad (A.35)$$

$$\rho = \frac{d_{ki}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_{xxi}^{-1} \cdot d_{ki}}{v \cdot \sigma_{To}^2} = \frac{d_{ki}^T \cdot Q_{dki}^{-1} \cdot d_{ki}}{v \cdot \sigma_{To}^2} \approx \frac{1}{v} \cdot \chi_{v,\lambda}^{\prime 2}$$

$\chi_{v,\lambda,optimo}^{\prime 2}$  = variable en función de  $\lambda$ , que hay que determinar

Caso determinista, que deberá ser seguido del J/Q doble Test, siendo banales las aplicaciones en redes libres que no se considera necesario reproducir. Siempre con  $i = v$  y la interpretación adecuada, según supuestos, hipótesis y doctrina anterior, junto con las salvedades varias veces indicadas. Del mismo modo se operará con todas las metodologías de aplicación y los instrumentos, estadísticos



o no, de interpretación y control desarrollados en las páginas anteriores.

Vemos con mayor detalle y claridad el supuesto de control planimétrico definido en A.27 a la muestra de los dos observables-deformación del vector  $d_{ki}$  = vector de deformaciones en las coordenadas de índice  $i \in j, j + 1$  referidas a un vértice en estudio cualquiera.

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_{kj} & d_{k(j+1)} \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} d_{kjj} & q_{kj(j+1)} \\ q_{kj(j+1)} & q_{kj(j+1)(j+1)} \end{pmatrix}^{-1} \cdot \begin{pmatrix} d_{kj} \\ d_{k(j+1)} \end{pmatrix} = \\ = R_{d2ki}^T \cdot P_{d2ki} \cdot R_{d2ki} \end{aligned} \quad (\text{A.36})$$

$$d_{ki}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_{xxi}^{-1} \cdot d_{ki} = d_{ki}^T \cdot Q_{di}^{-1} \cdot d_{ki} = R_{d2ki}^T \cdot P_{d2ki} \cdot R_{d2ki} \quad (\text{A.37})$$

en aplicación directa de A.31, aceptándose la condición  $C_i \approx C_1$  y sus consecuencias, siendo  $i \in j, (j + 1)$

La varianza *a posteriori* del observable de peso unidad de la muestra escogida será:

$$\hat{\sigma}_{odki}^2 = \frac{d_{ki}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_{xxi}^{-1} \cdot d_{ki}}{2} = \frac{d_{ki}^T \cdot Q_{di}^{-1} \cdot d_{ki}}{2} \quad (\text{A.38})$$

Y por lo tanto, el F-Test o su alternativo  $\chi_2^2$ -Test correspondiente al vértice  $V$  en control planimétrico y en cualquier caso con dos grados de libertad se formulará como sigue

$$\begin{aligned} H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 &= \sigma_{To}^2 \\ \frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{To}^2} &= F \approx F_{2,\infty} \approx \frac{1}{2} \cdot \chi_2^2 \end{aligned} \quad (\text{A.39})$$

$$F_{optimo} = 1$$

$$\chi_{2optimo}^2 = 2$$

Y con la única posibilidad de aplicación mediante F-Test

$$H_0 : \hat{\sigma}_{odki}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{2,(m-n)} \quad (\text{A.40})$$

$$F_{optimo} = 1$$

seguida de la interpretación adecuada, según la teoría anterior, y las salvedades anteriormente indicadas.

Del mismo modo y en secuencia con el J/Q-Test se aplicará el  $\chi_v^2$ -Test en supuesto análogo al antes estudiado particularizado para  $v = 2$

$$H_0 : d_{ki} = 0$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{odki}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_{ki}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_{xxi}^{-1} \cdot d_{ki}}{2 \cdot \sigma_{To}^2} = F = \frac{d_{ki}^T \cdot Q_{di}^{-1} \cdot d_{ki}}{2 \cdot \sigma_{To}^2} \approx F_{2,\infty} = \frac{1}{2} \cdot \rho = \frac{1}{2} \cdot \chi_2^2 \quad (\text{A.41})$$

$$F_{optimo} = 0$$

$$\chi_{2\,optimo}^2 = \rho_{optimo} = 0$$

junto con el  $\chi_{v,\lambda}^2$ -Test

$$H_1 : d_k \neq 0$$

$$\rho = \frac{d_{ki}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_{xxi}^{-1} \cdot d_{ki}}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_{ki}^T \cdot Q_{di}^{-1} \cdot d_{ki}}{\sigma_{To}^2} \approx \frac{1}{2} \cdot \chi_{2,\lambda}^2 \quad (\text{A.42})$$

$$F_{optimo} = \text{variable}$$

siendo necesario estimar  $\lambda$

Repitiendo el test en todos los vértices pueden llegar a individualizarse las deformaciones planimétricas probables sufridas por cada uno de ellos.

La aplicación a red tridimensional con  $W = 3$  es inmediata, aunque es más frecuente que si se desea control planimétrico y altimétrico en uno o varios vértices individualizados o en conjunto se efectúen por separado con  $W = 2$ , según hemos visto, y con  $W = 1$  en altimetría.

Finalmente, y en la generalidad de la práctica profesional es necesaria la aplicación de criterios de interpretación sobre el conjunto del vector de deformaciones y para ello se impone la aplicación del Método de Ajustes por Incrementos de Coordenadas con observables GNSS y ejes de punto fijo a variable. En dicho supuesto se puede conseguir que la matriz cofactor de deformaciones  $Q_{d1}$  resulte diagonal y de elementos iguales, por lo que escribiremos

$$H_1 : d_k \neq 0$$

$$\rho = \frac{d_{ki}^T \cdot \frac{1}{2} \cdot Q_{xxi}^{-1} \cdot d_{ki}}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_{ki}^T \cdot Q_{di}^{-1} \cdot d_{ki}}{\sigma_{To}^2} \approx \frac{1}{2} \cdot \chi_{2,\lambda}'^2$$

$$F_{optimo} = variable$$

$$\begin{aligned} \rho = \chi_n^2 = \chi_{n,\lambda}'^2 &= \frac{\sum_{m+1}^{m+n} \cdot P_{d2i} \cdot R_{d2i}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_1^T \cdot Q_{d1}^{-1} \cdot d_1}{\sigma_{To}^2} = \frac{d_1^T \cdot (diag q)^{-1} \cdot d_1}{\sigma_{To}^2} = \\ &= \frac{1}{q} \cdot \frac{\sum_{m+1}^{m+n} \cdot d_{1i}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{1}{q \cdot \sigma_{To}^2} \cdot |d_1|^2 = Cte \cdot |d_1|^2 = J/Q - variable \end{aligned} \quad (A.43)$$

La J/Q-variable resulta proporcional al cuadrado del módulo del vector deformación resultado del ajuste, con las favorables consecuencias analíticas y geométricas que sabemos.

Entre otras, la expresión de las probabilidades máximas con particulariza-

ciones para  $\rho = n$  y  $\rho = \lambda + n$ . Así se conocerán los valores

$$F_{\text{máx}} = F(\chi_n^2) = F(\rho) = F(n) = \text{constante y conocido} \quad (\text{A.44})$$

$$G_{\text{máx}} = G(\chi_{n,\lambda}^{\prime 2}) = G(\rho) = G(n + \lambda) = \text{conocido para cada } \lambda \quad (\text{A.45})$$

Con lo expuesto estamos teóricamente en condiciones de aplicar con rigor el J/Q-Test y toda la teoría de sensibilidades esencial en cualquier supuesto planteado.

Y todo ello fraccionando reiteradamente la red más general  $Ad - k_d = R_d$  linealizada de forma arbitraria en dos zonas de distinta significación hasta adoptar la modelización que se entienda más procedente y representativa de la realidad física.

En una de ellas con aplicación adecuada de la matriz  $A_{2\delta,n}$  obtenida a partir de la matriz de constreñimientos  $E$  según la expresión A.11 y resolviendo la zona de deformación mínima a través de una matriz pseudoinversa, resolviéndose la zona restante por inversa de Cayley y siendo equivalente el resultado a una solución conjunta por matriz inversa generalizada recíproca.

En el segundo supuesto definiendo  $A_{2\delta,n} = \begin{pmatrix} I_{v,v} & 0_{v,n-v} \end{pmatrix}$  según la expresión A.23 resolviendo por inversa de Cayley A.24.

Y es claro que los resultados de los dos supuestos anteriores finalmente elegidos deberán ser coherentes entre sí y con la solución pseudoinversa general del conjunto de la red.

Conseguido el resultado favorable deseado de los tres algoritmos, la determinación, en sus distintas acepciones estudiadas, de la sensibilidad conjunta de la red y sensibilidades parciales de sus zonas, hasta la individualización vértice a vértice si se precisara, es aplicación directa de la doctrina expuesta y su rigor y

poder de afirmación difícilmente discutible.

Resuelta la cuestión de la sensibilidad, el ajuste, cálculo e interpretación de resultados no debe ofrecer mayor dificultad, siendo aplicación directa de la doctrina conocida, incluyendo la densificación o densificaciones que se consideren necesarias, sea directamente por puntos correlativos o arcos capaces de cualquier amplitud.

Finalmente y para completar la exposición, cabe considerar que las baterías de tests empleadas hasta ahora han comparado siempre estadísticos referidos a muestras con los correspondientes a toda la población o poblaciones correspondientes. Puede ser indudablemente útil en la práctica profesional comparar estadísticos referidos a dos muestras por definición, finitas y de la misma población. Ello conduce a revisar y generalizar el bien conocido F-Test de Fisher-Snedecor.

### **A.1 Sobre la aplicación del F-Test de Fisher Snedecor y su generalización**

La formulación general del F-Test aparece desarrollada en Jiménez Martínez et al. (2014) con parámetro  $\sigma_{T_0}^2$  como estimador *a priori* de toda una población e infinitos grados de libertad, sustituible por el  $\chi_n^2$ -Test por sus ventajas de aplicación y sobre todo, de interpretación de resultados.

Sin embargo en este caso queremos completar la doctrina de estudio y determinación de sensibilidad de redes volviendo al F-Test, estudiando su comportamiento y adelantando su obligada aplicación en tanto y cuanto se comparen muestras de extensión finita, como será el caso que planteamos aquí.

Expresamos en la red de control directo de deformación  $Ad - K_d = R_d$ , la relación entre los parámetros bajo la hipótesis nula de igualdad de estimadores *a priori* y *a posteriori*, estableciendo con el nivel de significación  $\alpha$  que sea

adecuado lo que sigue:

$$H_0 : \sigma_{To}^2 = \hat{\sigma}_{on}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{To}^2} = F \approx F_{n,\infty} \approx \frac{1}{n} \cdot \chi_n^2 \quad (\text{A.46})$$

en caso determinista

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{To}^2} = F \approx F_{R(Q_{d1}),\infty} \approx \frac{1}{R(Q_{d1})} \cdot \chi_n^2 \quad (\text{A.47})$$

en caso de red libre

con  $F_{optimo} = 1$  en ambos casos y aceptándose la hipótesis nula, en test de dos puntas y con mayor cautela cuanto más se separe F del óptimo si

$$F_{n,\infty,1-\frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{n,\infty,\frac{1}{2}\alpha} \quad (\text{A.48})$$

en caso determinista

$$F_{R(Q_{d1}),\infty,1-\frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{R(Q_{d1}),\infty,\frac{1}{2}\alpha} \quad (\text{A.49})$$

en caso de red libre

Es interesante ratificar que la desviación típica *a posteriori* de los  $n$  observables virtuales adicionales que fuerzan deformación nula en ajustes coordinados, *a priori* de peso infinito y residuo cero, se comportan *a posteriori* tras el ajuste conjunto como observables cualquiera si existe deformación  $d_1$ , idénticamente nula, puede ser cierta, pero inasequible como resultado de un tratamiento sobre observables reales a través de un algoritmo de cálculo, sea cual fuera. La práctica del cálculo siempre arrojará un resultado, tal vez muy

pequeño, pero siempre será  $d_1 \neq 0$ , aun cuando solo se deba a los inevitables errores de redondeo en el ordenador. Por ello es esencial definir las sensibilidades del trabajo en cada caso. Esto se hace evidente a partir de las expresiones  $D_d = -S_d^{-1} \cdot A_2^T \cdot T_2^{-1} \cdot (A_2 d_1 - K_2) = -S_d^{-1} \cdot S_d (d_1 - 0) = -d_1$  y  $d = d_1 - d_1 = 0$  y supone un nuevo criterio de interpretación de la red  $Ad - K_d = R_d$ .

Bajo un criterio purista reiteramos la necesidad de determinar cuidadosamente el valor de  $\sigma_{T_o}^2$ , evitando igualarlo a la unidad.

Se debe tener en cuenta que durante las sucesivas campañas deben permanecer sensiblemente iguales y constantes los estimadores de la varianza de los observables de peso unidad  $\hat{\sigma}_o^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$ , según

$$\hat{\sigma}_{o1}^2 \approx \hat{\sigma}_{o2}^2 = \hat{\sigma}_o^2$$

$$\sigma_{dd1} = \frac{1}{2} (\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2) \approx \hat{\sigma}_o^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$$

y tampoco diferirá de ellos el estimador *a priori*  $\sigma_{T_o}^2$ . En resumen, se deberá vigilar y mantener a lo largo de todo el proceso la mejor cumplimentación posible de  $\hat{\sigma}_o^2 \approx \hat{\sigma}_{od}^2 = \sigma_{T_o}^2$ . Lo que requiere gran atención, siendo un índice de la calidad del trabajo.

Los observables deberán ser equiprecisos aunque distintos en cada campaña, especialmente si existe deformación, así los sucesivos valores de ésta vendrán dados por la variación de los correspondientes términos independientes  $K$ . Retomando el desarrollo teórico, los supuestos A.46 y A.47 pueden resolverse también con el  $\chi^2$ -Test. Sin embargo para algunos casos es específica la aplicación del F-Test.

La comparación de  $\hat{\sigma}_{on}^2$  y  $\hat{\sigma}_{od}^2 = \hat{\sigma}_{od1}^2$ , de imprescindible aplicación en la gran

mayoría de los supuestos prácticos se formula según:

$$H_0 : \hat{\sigma}_{on}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{n,(m-n)} \quad (\text{A.50})$$

que puede escribirse también como

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = \frac{\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{To}^2}}{\frac{\hat{\sigma}_{od}^2}{\sigma_{To}^2}} = \frac{F_{n,\infty}}{F_{(m-n),\infty}} = \frac{\frac{1}{n} \cdot \chi_n^2}{\frac{1}{m-n} \cdot \chi_{m-n}^2} = F \approx F_{n,(m-n)}$$

siempre con  $\hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{1}{2} \cdot (\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2)$

siendo igual el número de observables  $m$  en las dos campañas de partida. En caso contrario se aplicaría la expresión ponderada siguiente

$$\hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{o1}^2 \cdot (m_1 - n) + \hat{\sigma}_{o2}^2 \cdot (m_2 - n)}{(m_1 - n) + (m_2 - n)} \quad (\text{A.51})$$

en supuesto determinista.

En red libre las expresiones son como siguen:

$$H_0 : \hat{\sigma}_{on}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{R(Q_{d1}), (m-R(Q_{d1}))} \quad (\text{A.52})$$

con

$$\hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{1}{2} \cdot (\hat{\sigma}_{o1}^2 + \hat{\sigma}_{o2}^2)$$



o bien

$$\hat{\sigma}_{od}^2 = \frac{\hat{\sigma}_{o1}^2 \cdot (m_1 - R(Q_{xx1})) + \hat{\sigma}_{o2}^2 \cdot (m_2 - R(Q_{xx2}))}{(m_1 - R(Q_{xx1})) + (m_2 - R(Q_{xx2}))} \quad (A.53)$$

según el número de observables de las dos campañas sea el mismo e igual a  $m$  o sean  $m_1$  y  $m_2$ , distintos, como antes.

La aceptación de la hipótesis nula se producirá en el supuesto de que

$$F_{n,(m-n),1-\frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{n,(m-n),\frac{1}{2}\alpha} \quad (A.54)$$

red ligada

$$F_{R(Q_{d1}), (m-R(Q_{d1})), 1-\frac{1}{2}\alpha} \leq F \leq F_{R(Q_{d1}), (m-R(Q_{d1})), \frac{1}{2}\alpha} \quad (A.55)$$

red libre, teniendo en cuenta, como siempre que pueden utilizarse también cualquiera de las expresiones.

$$R(A) = R(S) = R(Q_{xx}) = R(Q_{d1}) \quad (A.56)$$

*Concluimos que el F-Test aplicado bajo la hipótesis nula de igualdad de varianzas de observables de peso unidad, cualquiera que sea el caso, relacionable siempre con el o los supuestos estudiados  $H_0 : \hat{\sigma}_{on}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2 = \sigma_{To}^2$ , representa específicamente el contraste de un requisito de cumplimentación obligada para calibrar la calidad del trabajo, calificarlo y aceptarlo o, en su caso, proceder a su rechazo y repetición, en todo o parte.*

*No ofrece información directa sobre existencia o no de deformación ni por supuesto, cuantía de ella, y presenta serias dificultades parcialmente*

*compensadas por su interés teórico contrastar la hipótesis alternativa.*

Sin embargo, es procedente considerar que otra cosa es lo que plantea la práctica profesional mostrando sus cifras de resultados reales, distintos en su gran mayoría de la aceptación o rechazo indiscutibles. Ello conduce a la permanente necesidad de establecer el grado de cumplimentación y fiabilidad estadística de ambas hipótesis, en orden a adoptar decisiones razonables. La cuestión se centra en el nivel de significación  $\alpha$  más adecuado en cada caso. Y fundándose en el conocimiento *a priori* de la realidad física fundada en una larga experiencia que normalmente se posee, la decisión generalizada de aceptar valores muy pequeños de  $\alpha$ , del orden de las centésimas, es tan lícita como bayesiana.

Finalmente, y en especial a efectos de determinación de sensibilidades debe tenerse en cuenta que la F-distribución con parámetro de no centralidad de expresión  $H = H\left(F'_{v_1, v_2, \lambda}\right)$  como veremos a continuación permite generalizar el doble J/Q-Test simultaneando su aplicación sobre las mismas hipótesis nula y alternativa de existencia o no de deformación, en función de la misma variable estadística y pudiendo operar además solamente con estimadores de muestras finitas.

### A.1.1 Generalización del F-Test

Del mismo modo que se trabaja con la distribución  $\chi'^2$ , se define también la distribución  $F'$  con parámetro de no centralidad o traslación según

$$F' = \frac{\frac{1}{v_1} \cdot \chi'_{v_1, \lambda}{}^2}{\frac{1}{v_2} \cdot \chi_{v_2}^2} = \frac{v_2 \cdot \chi'_{v_1, \lambda}{}^2}{v_1 \cdot \chi_{v_2}^2} = \frac{v_2 \cdot \sum_1^{v_1} \cdot \theta_i^2}{v_1 \cdot \sum_{v_1+1}^{v_1+v_2} \cdot \xi_i^2} = F'_{v_1, v_2, \lambda} \quad (\text{A.57})$$

donde

$$\theta_i \sim N(\theta_{\mu i}, 1)$$

$$\xi_i \sim N(0, 1)$$

$$v_1 = \text{grados de libertad de } \chi'^2$$

$$v_2 = \text{grados de libertad de } \chi^2$$

$$\lambda = \sum_1^{v_1} \cdot \theta^2 \cdot \mu_i = \text{parámetro de no centralidad o de traslación} \quad (\text{A.58})$$

demostrándose que media y varianza valen

$$\text{media} = \mu F' = \frac{v_2 (v_1 + \lambda)}{v_1 (v_2 - \lambda)} \quad \text{para } v_2 > 2 \quad (\text{A.59})$$

$$\begin{aligned} \text{varianza} = \sigma^2 F' &= \frac{v_2^2 \left[ (v_1 + \lambda)^2 + 2 \cdot (v_1 + 2\lambda) \right]}{(v_2 - 2) \cdot (v_2 - 4) \cdot v_1^2} \\ &= \frac{v_2^2 (v_1 + \lambda)^2}{v_1^2 (v_2 - 2)^2} \quad \text{para } v_2 > 4 \end{aligned} \quad (\text{A.60})$$

y la función de distribución es

$$\begin{aligned} H &= H(F'_{v_1, v_2, \lambda}) = \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \left[ \frac{e^{-\frac{1}{2}\lambda} \cdot \left(\frac{1}{2}\lambda\right)^j}{j! \cdot B\left(\frac{1}{2} \cdot v_1 + j, \frac{1}{2} \cdot v_2\right)} \cdot \left(\frac{v_1}{v_2}\right)^{\frac{1}{2}v_1 + j} \cdot (F'_{v_1, v_2, \lambda})^{\frac{1}{2}v_1 - 1 + j} \right. \\ &\quad \left. \cdot \left(1 + \frac{v_1}{v_2} F'_{v_1, v_2, \lambda}\right)^{-\frac{1}{2}(v_1 + v_2) - j} \right] \end{aligned} \quad (\text{A.61})$$

en que B es la conocida función euleriana definida por las integrales de igual

denominación

$$B(p, q) = \frac{\Gamma p \cdot \Gamma q}{\Gamma(p+q)} = \int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1} dx \quad (\text{A.62})$$

$$\Gamma p = \int_0^\infty e^{-x} x^{p-1} dx$$

permitiendo aplicar el doble test antes desarrollado, con potencia  $\beta$  y nivel de significación  $\alpha$ , bajo la hipótesis de existencia de un cierto

$$\lambda = \lambda_0 \neq 0 \quad (\text{A.63})$$

se demuestra y es fundamental que particularizando con  $\lambda = 0$  se obtiene la distribución clásica F ya estudiada y que hemos utilizado hasta ahora. Así se tendrá

$$F' = \frac{\frac{1}{v_1} \cdot \chi_{v_1,0}^2}{\frac{1}{v_2} \cdot \chi_{v_2}^2} = \frac{\frac{1}{v_1} \cdot \chi_{v_1}^2}{\frac{1}{v_2} \cdot \chi_{v_2}^2} = F_{v_1, v_2} \quad (\text{A.64})$$

y recordemos que la función de distribución de F es

$$F = F(F_{v_1, v_2}) = \frac{\left(\frac{v_1+v_2-2}{2}\right)!}{\left(\frac{v_1-2}{2}\right)! \cdot \left(\frac{v_2-2}{2}\right)!} \cdot \frac{v_1^{\frac{1}{2}v_1} \cdot v_2^{\frac{1}{2}v_2} \cdot F_{v_1, v_2}^{\frac{1}{2}(v_1-2)}}{(v_2 + v_1, F_{v_1, v_2})^{\frac{1}{2}(v_1+v_2)}} \quad (\text{A.65})$$

$$\mu_{F_{v_1, v_2}} = \frac{v_2}{v_2 - 2} \quad \text{para } v_2 > 4$$

$$\sigma^2_{F_{v_1, v_2}} = \frac{v_2^2}{(v_2 - 2)^2(v_2 - 4) \cdot v_1} \cdot [2 \cdot (v_1 + v_2) - 2] \quad \text{para } v_2 > 4$$

siendo trivial que para  $v_2 \rightarrow \infty$

$$F_{v_1, \infty} = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} F_{v_1, v_2} = F(F_{v_1, \infty}) = \frac{1}{v_1} \chi_{v_1}^2$$

siendo

$$G = G(\chi_{v_1}^2) = \frac{1}{2^{\frac{1}{2}v_1} \cdot \left(\frac{v_1-2}{2}\right)} \cdot (\chi_{v_1}^2)^{\frac{v_1-2}{2}} \cdot e^{-\frac{1}{2}\chi_{v_1}^2} \quad (A.66)$$

$$\mu_{\chi_{v_1}^2} = v_1$$

$$\sigma_{\chi_{v_1}^2}^2 = 2v_1$$

y por tanto

$$\mu_{F_{v_1, \infty}} = \frac{1}{v_1} \mu_{\chi_{v_1}^2} = \frac{v_1}{v_1} = 1$$

$$\sigma_{F_{v_1, \infty}}^2 = \frac{1}{v_1} \sigma_{\chi_{v_1}^2}^2 = \frac{1}{v_1} 2v_1 = 2$$

y también

$$\mu_{F_{v_1, \infty}} = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} \frac{v_2}{v_2 - 2} = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} \frac{v_2}{v_2} = 1 \quad (A.67)$$

$$\sigma_{F_{v_1, \infty}}^2 = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} \frac{v_2^2}{(v_2 - 2)^2 (v_2 - 4) v_1} [2(v_1 + v_2) - 2] = \lim_{v_2 \rightarrow \infty} \frac{2v_2^3}{v_2^3} = 2$$

resultando evidente que la formulación de un estadístico F cualquiera por cociente de estimadores de varianzas de observables de peso unidad, por ejemplo el expresado en (A.50)

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{n, (m-n)}$$

bajo la hipótesis nula  $H_0 : \hat{\sigma}_{on}^2 = \hat{\sigma}_{od}^2$  se refiere al valor óptimo  $F_{\text{óptimo}} = 1$ , al que tenderá a la media  $\mu_F$ , valor más probable, con  $F_{n, (m-n)} \rightarrow F_{n, \infty}$ , según se ha visto en (A.67). Es claro que las distintas distribuciones se relacionan entre sí de forma que posibilitan comprobaciones imprescindibles en la práctica profesional, como veremos más adelante. La aplicación de la distribución descrita en el  $F' - Test$  se realiza en la misma forma y con igual criterio empleados en la distribución  $\chi'^2 - Test$ , simple y doble, puesto que ambas tienen el mismo parámetro de no

centralidad  $\lambda$  con idéntico significado (Jiménez Martínez et al., 2014). La práctica de la aplicación del F'-Test para nuestros fines es sencilla. En efecto y como caso más general, supongamos el control de deformación de la red definido en su orden "k" por el modelo matemático:

$$Ad - K_{dk} = R_{dk} \quad (\text{A.68})$$

donde

$\hat{\sigma}_{odk}^2$  = estimador *a posteriori* de la varianza del observable de peso unidad.

$d = d_k$  = vector de deformaciones solución del ajuste.

Y aplicando las expresiones

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{n,m-n}$$

$$\frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{od}^2} = F \approx F_{R(Q_{d1}),m-R(Q_{d1})}$$

se tendrá el F-test de una punta

$$H_0 : d = 0$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{odk}^2} = \frac{dk^T Q_{dk}^{-1} dk}{n \hat{\sigma}_{odk}^2} = F_{n,g} \quad (\text{A.69})$$

siendo

$g = m - n$  = grados de libertad del ajuste (A.68)

$m$  = número de observables del ajuste (invariante)

$Q_{dk} = Q_{d1} = 2Q_{xx}$  invariante por hipótesis exigible

en caso determinista, y entendiéndose, según rutina, que podemos acceder al caso de red libre sustituyendo  $g$  por  $m - R(Q_{dk})$  y  $Q_{dk}^{-1}$  por  $Q_{dk}^+$ , o  $Q_{dk}^-$  en el caso más general. La práctica de aplicación, con  $F_{\acute{o}ptimo} = 0$  y test de una punta es ya trivial. Ciñéndonos al primer caso, red ligada, para fijar ideas y bajo la hipótesis alternativa de existencia de deformación apreciable escribimos

$$H_1 = d \neq 0$$

$$F = \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{odk}^2} = \frac{\sigma_{To}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{\hat{d}_k^T Q_{dk}^{-1} \hat{d}_k}{n \sigma_{To}^2} = \frac{\frac{1}{n} \chi_{n,\lambda}^2}{F_{g,\infty}} = \frac{\frac{1}{n} \chi_{n,\lambda}^2}{\frac{1}{g} \chi_g^2} = F'(n, g, \lambda) \quad (A.70)$$

siguiéndose el mismo razonamiento que en la distribución  $\chi'^2$  (Jiménez Martínez et al., 2014) y deduciéndose también que el parámetro de no centralidad tiene la misma expresión podemos escribir ahora

$$\lambda_o = E(\lambda) = \hat{\lambda} = \frac{\hat{d}_{\mu k}^T Q_{dk}^{-1} \hat{d}_{\mu k}}{\sigma_{To}^2} = \frac{\hat{d}_{\mu k}^T (2Q_{xx}^{-1}) \hat{d}_{\mu k}}{\sigma_{To}^2} = \frac{\hat{d}_{\mu k}^T Q_{xx}^{-1} \hat{d}_{\mu k}}{\sigma_{To}^2} \quad (A.71)$$

con  $E(d_{\mu k})$  determinado según teoría conocida y generalizando a una campaña  $k$  arbitraria. Y la práctica de aplicación del test de deformación significativa es completamente análoga a la correspondiente al  $\chi'_{v,\lambda}$ -Test explicada en detalle en (Jiménez Martínez et al., 2014). En el caso que nos ocupa, con nivel de significación  $\alpha$  y potencia de test  $\beta$  y grados de libertad  $v_1$  y  $v_2$ . Y siempre cifrando y teniendo en cuenta la sensibilidad de la red, en sus diversas acepciones.

La flexibilidad de aplicación del F'-Test es mayor que la del  $\chi'_{v,\lambda}$ -Test permitiendo comparar dos campañas cualquiera bajo la hipótesis alternativa, fraccionando la red o en su conjunto, siendo evidentemente posible también el seguimiento de un vértice, en planimetría, altimetría y en las tres dimensiones del

espacio simultáneamente.

Es subrayable que el  $\chi'_{v,\lambda}$ -Test es un caso particular del F'-Test. En efecto, en (A.70) se tendrá con la sustitución perfectamente lícita en alta precisión

$$\hat{\sigma}_{odk}^2 \approx \sigma_{To}^2 \quad (\text{A.72})$$

$$F \approx \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{To}^2} = \frac{\sigma_{To}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{\frac{\hat{d}_k^T Q_{dk}^{-1} \hat{d}_k}{n\sigma_{To}^2}}{\frac{\sigma_{To}^2}{\sigma_{To}^2}} = \frac{\frac{1}{n}\chi'_{n,\lambda}}{1} = \frac{1}{n}\chi'_{n,\lambda} = F'(n, \infty, \lambda) = \frac{1}{n}\rho \quad (\text{A.73})$$

$$F \approx \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\sigma_{To}^2} = \frac{1}{n}\chi'_{n,\lambda} = F'(n, \infty, \lambda) = \frac{1}{n}\rho$$

caso determinista, generalizable de inmediato a

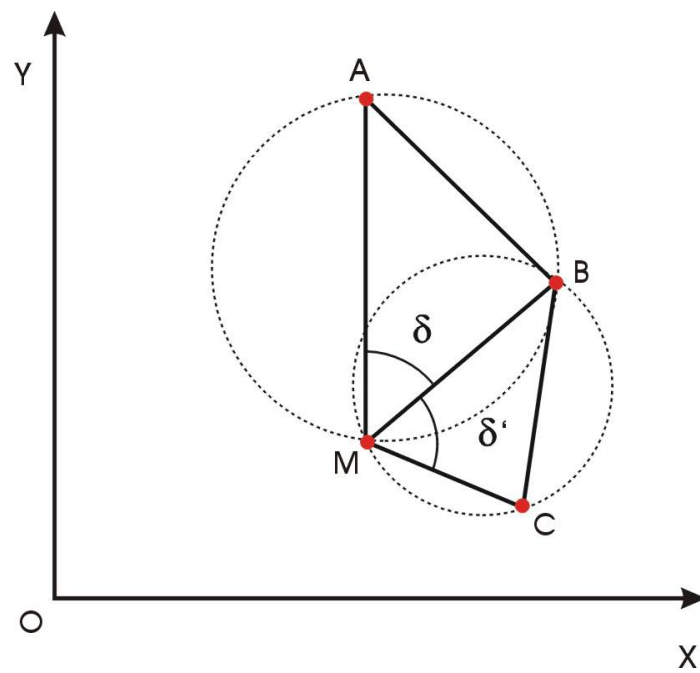
$$F \approx \frac{\hat{\sigma}_{on}^2}{\hat{\sigma}_{To}^2} = \frac{1}{R(Q_{dk})\chi'_{R(Q_{dk},\lambda)}} = F'(R(Q_{dk}), \infty, \lambda) = \frac{1}{R(Q_{dk})}\rho \quad (\text{A.74})$$

red libre. De nuevo se trata de interpretar  $\rho$ , que es la conocida J/Q-variable. Y siendo conocidas las dos distribuciones F y F' y establecidas las hipótesis nula y alternativa el resto es trivial.



## Apéndice B

### Resolución por arcos capaces de la correspondencia homográfica involutiva de dos puntos homólogos



**Figura B.1:** Arcos capaces

Resolución por arcos capaces de la correspondencia homográfica involutiva de dos puntos homólogos:

De acuerdo con la teoría conocida y para el supuesto práctico de que se trate, aceptamos dentro de tolerancia y con suficiente fiabilidad la hipótesis geométrica de correspondencia involutiva homográfica conforme entre los dos espacios planos considerados. Sea uno de los espacios homólogos el de la Figura B.1 y en él tres vértices conocidos por sus coordenadas planas  $A(x_A, y_A), B(x_B, y_B), C(x_C, y_C)$ . Se considera el punto arbitrario  $M(x_M, y_M)$  y se tendrá:

$$\text{Pendiente de la recta } AM \equiv m_{AM} = \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} \quad (\text{B.1})$$

$$\text{Pendiente de la recta } BM \equiv m_{BM} = \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B} \quad (\text{B.2})$$

$$\text{tg } \delta = \frac{m_{AM} - m_{BM}}{1 + m_{AM} \cdot m_{BM}} = \frac{\frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} - \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B}}{1 + \frac{y_M - y_A}{x_M - x_A} \cdot \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B}} \quad (\text{B.3})$$

y se sigue

$$\text{tg } \delta = \frac{(y_M - y_B) \cdot (x_M - x_A) - (x_M - x_B) \cdot (y_M - y_A)}{(x_M - x_B) \cdot (x_M - x_A) + (y_M - y_B) \cdot (y_M - y_A)} \quad (\text{B.4})$$

ecuación del arco capaz lugar geométrico de los puntos M que unidos a los extremos del segmento AB forman un ángulo constante  $\delta$ . Avanzando ideas, los dos vértices correlativos definidos por A y B estarán evidentemente en el arco capaz de  $\delta = \frac{\Pi}{2}$  sobre AB. En dicho supuesto  $\text{tg } \delta \rightarrow \infty$  que implica la anulación del denominador en (B.4). Se tendrá

$$(x_M - x_B) \cdot (x_M - x_A) + (y_M - y_B) \cdot (y_M - y_A) = 0 \quad (\text{B.5})$$

ecuación de la circunferencia de diámetro AB. Volviendo a (B.4) y operando

escribiremos sucesivamente

$$(y_M - y_B) \cdot (x_M - x_A) - (x_M - x_B) \cdot (y_M - y_A) - (x_M - x_B) \cdot (x_M - x_A) \\ + (y_M - y_B) \cdot (y_M - y_A) \cdot \operatorname{tg} \delta = 0$$

$$x_M^2 \cdot \operatorname{tg} \delta + y_M^2 \cdot \operatorname{tg} \delta - x_M[(x_B + x_A) \cdot \operatorname{tg} \delta - (y_B - y_A)] \\ - y_M[(y_B + y_A) \cdot \operatorname{tg} \delta + (x_B - x_A)] + (x_B \cdot x_A + y_B \cdot y_A) \cdot \operatorname{tg} \delta \quad (\text{B.6}) \\ - (y_B \cdot x_A - x_B \cdot y_A) = 0$$

$$x_M^2 + y_M^2 - x_M[(x_B + x_A) - (y_B - y_A) \cdot \operatorname{cotg} \delta] \\ - y_M[(y_B + y_A) + (x_B - x_A) \cdot \operatorname{cotg} \delta] + (x_B \cdot x_A + y_B \cdot y_A) \quad (\text{B.7}) \\ - (y_B \cdot x_A - x_B \cdot y_A) \cdot \operatorname{cotg} \delta = 0$$

ecuación de la circunferencia que pasa por A, B, M, lugar buscado. Los dos vértices correlativos definidos por A y B se obtienen particularizando en (B.7)  $\delta = \frac{\Pi}{2}$  y  $\operatorname{cotg} \delta \rightarrow 0$ , resultando

$$x_M^2 + y_M^2 - x_M(x_B + x_A) - y_M(y_B + y_A) + (x_B \cdot x_A + y_B \cdot y_A) = 0 \quad (\text{B.8})$$

que es la (B.5) desarrollada, c.d.s.

Es claro que el mismo punto M estará en el arco capaz de  $\delta'$  sobre BC. Directamente escribimos su ecuación, sustituyendo  $A(x_A, y_A)$  por  $C(x_C, y_C)$  en (B.7), obteniéndose:

$$x_M^2 + y_M^2 - x_M[(x_B + x_C) - (y_B - y_C) \cdot \operatorname{cotg} \delta'] \\ - y_M[(y_B + y_C) + (x_B - x_C) \cdot \operatorname{cotg} \delta'] + (x_B \cdot x_C + y_B \cdot y_C) \quad (\text{B.9}) \\ - (y_B \cdot x_C - x_B \cdot y_C) \cdot \operatorname{cotg} \delta' = 0$$

circunferencia que pasa por B,C,M, con

$$\operatorname{tg} \delta = \frac{m_{CM} - m_{BM}}{1 + m_{CM} \cdot m_{BM}} = \frac{\frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} - \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B}}{1 + \frac{y_M - y_C}{x_M - x_C} \cdot \frac{y_M - y_B}{x_M - x_B}} \quad (\text{B.10})$$

particularizando en (B.3). Las coordenadas del vértice  $M(x_M, y_M)$ , intersección de las dos circunferencias definidas se obtendrán resolviendo el sistema formado por sus ecuaciones (B.7) y (B.9), desechando la solución trivial  $B(x_B, y_B)$ .

Escribiendo el sistema en forma simplificada según

$$\begin{aligned} x_M^2 + y_M^2 - 2 \cdot a \cdot x_M - 2 \cdot b \cdot y_M + 2 \cdot c &= 0 \\ x_M^2 + y_M^2 - 2 \cdot a' \cdot x_M - 2 \cdot b' \cdot y_M + 2 \cdot c' &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.11})$$

donde  $a, b, c, a', b', c'$  son inmediatos a partir de los coeficientes de los términos (B.7) y (B.9) su resolvente será, restando ambas ecuaciones

$$\begin{aligned} x_M^2 + y_M^2 - 2 \cdot a \cdot x_M - 2 \cdot b \cdot y_M + 2 \cdot c &= 0 \\ (a' - a) \cdot x_M + (b' - b) \cdot y_M - (c' - c) &= 0 \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

y despejando  $x_M$  en la segunda ecuación

$$x_M = -\frac{(b' - b) \cdot y_M - (c' - c)}{(a' - a)}$$

y sustituyendo en la primera del sistema (B.12) anterior, en definitiva resulta una ecuación de segundo grado en  $y_M$  que resuelve el problema en su caso más general, sea cual fuere el espacio en que sea incógnita el vértice  $M(x_M, y_M)$ , resultando banal si es correlativo de A y B o de B y C.

## **Apéndice C**

### **Adquisición del PPM de Valencia de 1929 en formato digital**

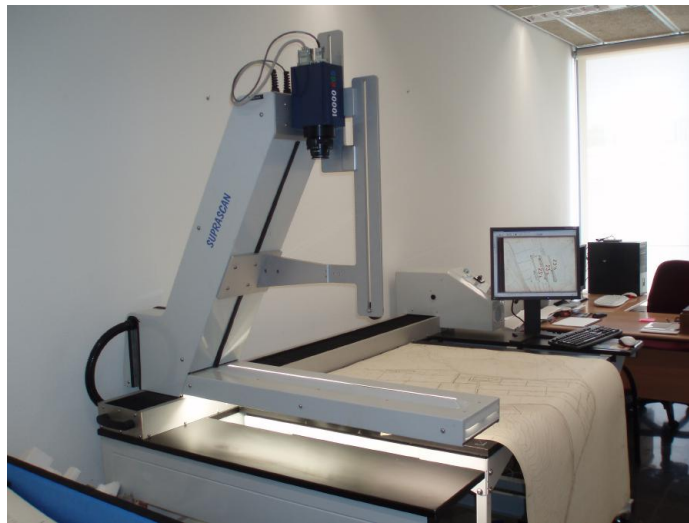
Los 421 planos originales coloreados que conforman el PPM de 1929 de dimensiones 110 x 150 cm fueron digitalizados mediante un proyecto financiado por la Fundación Luis Giménez Lorente de la Comunidad Valenciana adscrita a la Universidad Politécnica de Valencia, en virtud de un Convenio firmado con el Excmo. Ayto. de Valencia.

La operación de digitalización siguió las mismas directrices que se adoptaron en la Biblioteca Nacional (BNE) (VV.AA., 2011), para lo que se eligió un escáner plano de gran formato, el modelo digibook Suprascan A0 cenital 10.000 RGB (Casals, 1994), teniendo en cuenta no solo las dimensiones de los documentos sino también el estado de conservación de los mismos que hizo desestimar otro tipo de escáneres como los de tambor.

El escáner seleccionado (Figura C.1) viene provisto de un sistema de aspiración que favorece la máxima planeidad del documento cartográfico para un escaneo de máxima precisión, sistema fundamental para documentos antiguos en los que el paso del tiempo y el uso ha dañado el soporte. De otra forma la curvatura del material soporte produciría errores inadmisibles en el proceso de digitalización que habría que corregir.

La resolución óptica obtenida en las imágenes corresponde a 300 puntos por

pulgada (ppp). El sistema de iluminación que incorpora el escáner se encuentra tan próximo a la superficie de escaneo que prácticamente no está influenciado por la luz ambiente, sin embargo se tuvo la precaución de que fuera lo más homogénea posible durante el proceso de escaneo.



**Figura C.1:** Escaneado de una de las hojas del parcelario

Se realizaron los correspondientes perfiles de entrada mediante el escaneo de la carta de color KODAK Q-60 modelo IT8.7/2 (Figura C.3) y el software MonacoPROFILER. Los perfiles obtenidos en formato .icm (Figura C.2) fueron incrustados a cada una de las imágenes escaneadas con ayuda del software Adobe Photoshop CS2 (Fraser et al., 2003; Irigoyen et al., 2013) para conseguir una reproducción facsímil del original en caso de que fuese necesaria.

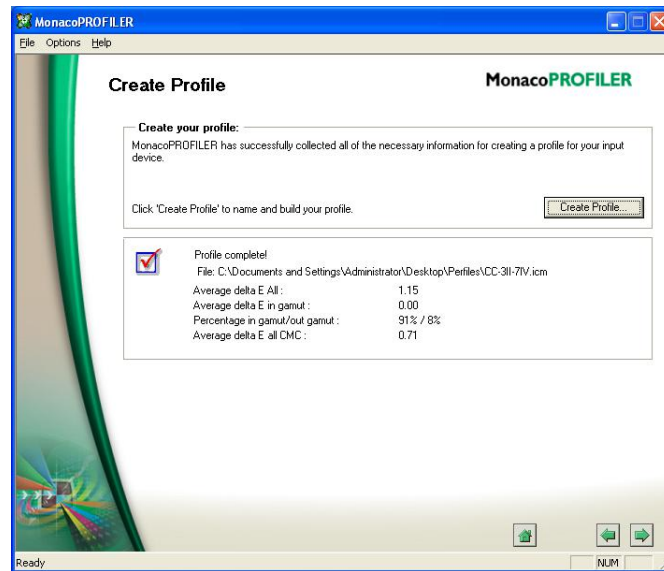


Figura C.2: Perfil obtenido para el intervalo de hojas 3II a 7IV

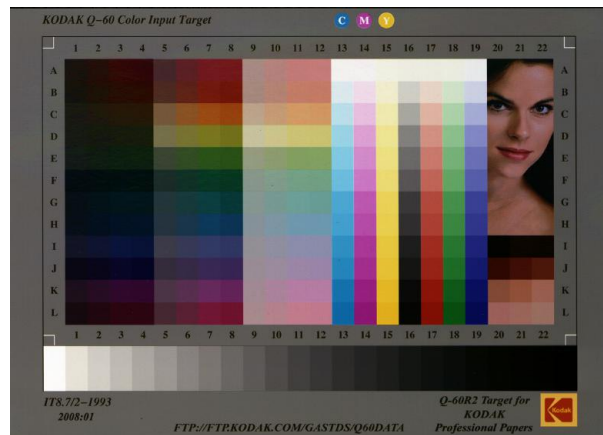


Figura C.3: Carta de color KODAK Q-60 modelo IT8.7/2





## **Apéndice D**

### **Programación e Integración en un Sistema de Información Geográfica**

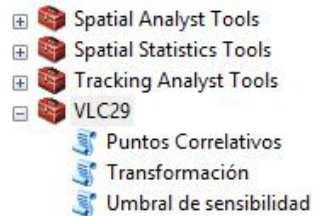
La computación y los cálculos requeridos para el desarrollo de esta tesis se han programado en dos lenguajes: MATLAB y Python. Los primeros prototipos de cálculo se realizaron con MATLAB por su facilidad en el tratamiento de datos matriciales y distribuciones estadísticas, fundamentales en este trabajo. En las fases finales de la tesis se observó la necesidad de unificar todo el desarrollo de programas de aplicación con un lenguaje único. La idea consistía en integrar todo el proceso en un Sistema de Información Geográfica (SIG), por las ventajas que proporciona el tratamiento en el entorno de trabajo de un SIG. Se escogió para ello el lenguaje de desarrollo Python disponible en los entornos SIG más utilizados y en nuestro caso particular Arcmap, donde se ha decidido trabajar.

Por ello, la migración a este nuevo lenguaje se encuentra todavía en fase de desarrollo. Sin embargo, a continuación se detallan algunos de los módulos completos. Es necesario aclarar que lo que se presenta aquí es un prototipo que podrá ser mejorado para que adquiera la máxima potencialidad.

El resultado final pretende ser un módulo escrito completamente en lenguaje Python e integrado en el entorno SIG de Arcmap.

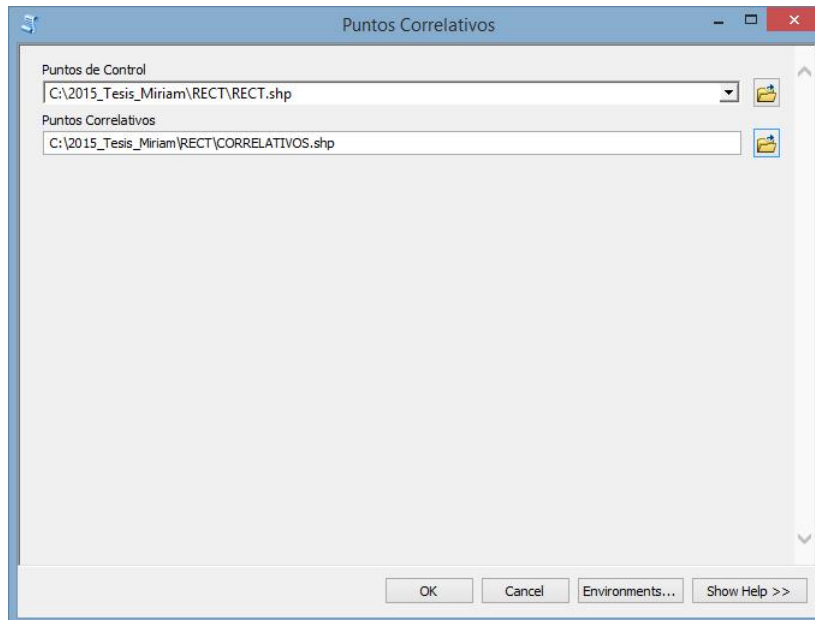
El procedimiento que se propone se lleva a cabo desde diferentes módulos con el fin de realizar las transformaciones necesarias para llevar el mapa antiguo desde

el sistema pixel inicial hasta el sistema ETRS89 pasando por el sistema local de 1929 y calculando todos los parámetros estadísticos necesarios para la correcta interpretación de los resultados. Para ello se han desarrollado las herramientas **Puntos Correlativos**, **Transformación** y **Umbral de sensibilidad** que nos han servido para poder realizar lo que hemos llamado en el capítulo 4 de esta tesis, transformación próxima, y umbral de sensibilidad para definir la precisión de las transformaciones empleadas. Las herramientas están completamente integradas en el entorno de trabajo de Arcmap bajo la denominación VLC29 (Figura D.1).

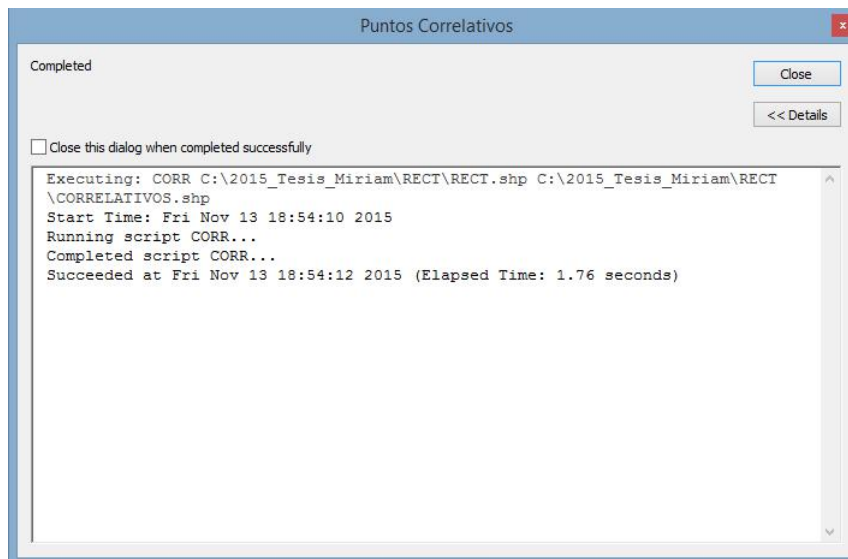


**Figura D.1:** Herramientas que permiten la georreferenciación del mapa antiguo

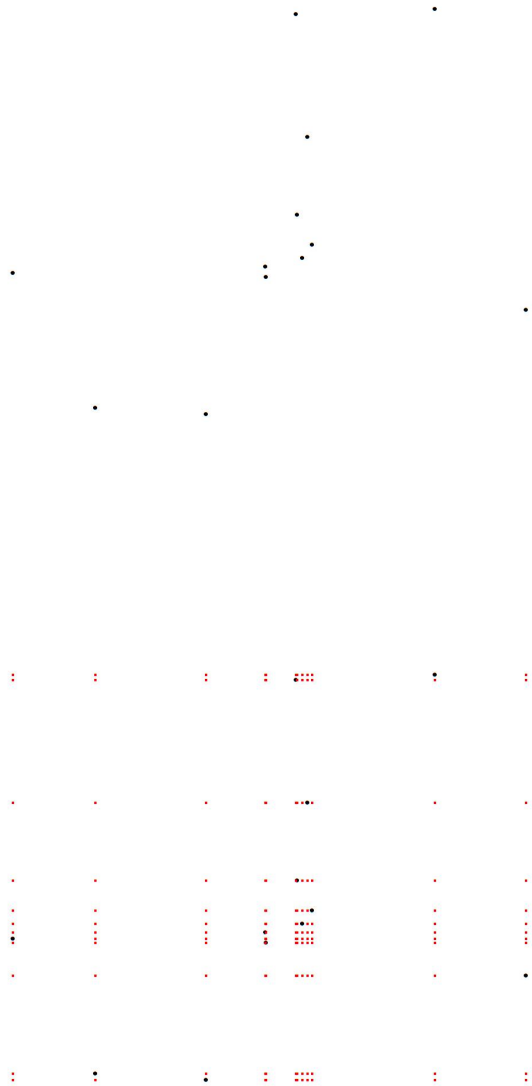
Describimos a continuación la herramienta Puntos Correlativos (Figuras D.2 y D.3) que permite densificar la red en el entorno de Arcmap a partir de unos pocos puntos de control, tal como muestra la Figura D.4. El resultado es una nueva capa de puntos sobre la cual el usuario podrá seleccionar o eliminar puntos para posteriores operaciones.



**Figura D.2:** Datos de entrada de la herramienta Puntos Correlativos



**Figura D.3:** Ejecución de la herramienta Puntos Correlativos



**Figura D.4:** Imagen izquierda muestra los puntos de control y la imagen derecha los puntos correlativos

El código que permite esta densificación se observa en la Figura D.5, desglosada en 8 bloques detallados a continuación. El primer bloque contiene la importación de los módulos `os`, `sys` y `arcpy`. El primero de ellos se utiliza para procesar nombres de fichero, el segundo para abortar el programa en caso de que el bloque 4 produzca un error y el último se utiliza para la creación de las nuevas capas de datos.

En el segundo bloque se obtienen los dos parámetros de entrada de la herramienta y se activa el modo de sobrescritura, de manera que si la capa de salida ya existe se sobrescribirán los datos.

El tercer bloque nos sirve para obtener la ruta completa de la capa de puntos de control, en este caso se trata de la capa de entrada indicada por el usuario (Figura D.2)

El código del bloque cuarto crea una lista con los puntos de control originales, de manera que para cada punto de control se almacena el identificador, la coordenada `x` y la coordenada `y`. Se utiliza una variable de tipo `SearchCursor` que permite recorrer todos los registros de la tabla de atributos. El identificador de cada punto debe estar almacenado en un campo que se debe llamar `CTRL_ID` obligatoriamente, por lo que será necesario que el usuario cree este campo.

En el quinto bloque se crea una nueva capa de puntos donde se almacenarán los vértices correlativos y en el bloque sexto añadimos un nuevo campo (`CORR_ID`) a la capa que se acaba de crear.

En el bloque séptimo se añaden todos los registros que contendrán los vértices correlativos. Los registros contienen un identificador `CORR_ID` formado a partir de los identificadores de los dos puntos de control que generan el punto correlativo. Por último el bloque octavo añade la capa de puntos correlativos recién creada a la tabla de contenidos de Arcmap.

```

import os
import sys
import arcpy

ctrl_fn = arcpy.GetParameterAsText(0)
corr_fn = arcpy.GetParameterAsText(1)

arcpy.env.overwriteOutput = True

mxd = arcpy.mapping.MapDocument('CURRENT')
df = arcpy.mapping.ListDataFrames(mxd)[0]
lyr = arcpy.mapping.ListLayers(mxd)

lyrd = {}
for l in lyr:
    lyrd[l.name] = l.dataSource

try:
    ctrl_path = lyrd[ctrl_fn]
except:
    ctrl_path = ctrl_fn

ctrl = []
with arcpy.da.SearchCursor(ctrl_path, ['SHAPE@XY', 'CTRL_ID']) as csc:
    try:
        for row in csc:
            ctrl.append([row[1], row[0][0], row[0][1]])
    except:
        arcpy.AddError('Field CTRL_ID not found.')
        sys.exit()

del csc

corr_ws = os.path.dirname(corr_fn)
corr_fc = os.path.basename(corr_fn)

arcpy.CreateFeatureclass_management(corr_ws, corr_fc, 'POINT')

try:
    arcpy.AddField_management(corr_fn, 'CORR_ID', 'TEXT', 15)
except:
    corr_fn += '.shp'
    arcpy.AddField_management(corr_fn, 'CORR_ID', 'TEXT', 15)

with arcpy.da.InsertCursor(corr_fn, ['SHAPE@XY', 'CORR_ID']) as cic:
    for p1 in ctrl:
        for p2 in ctrl:
            if p1 != p2:
                cid = p1[0] + '-' + p2[0]
                cic.insertRow((p1[1], p2[2], cid))

del cic

corr_lyr = arcpy.mapping.Layer(corr_fn)
arcpy.mapping.AddLayer(df, corr_lyr, 'TOP')

```

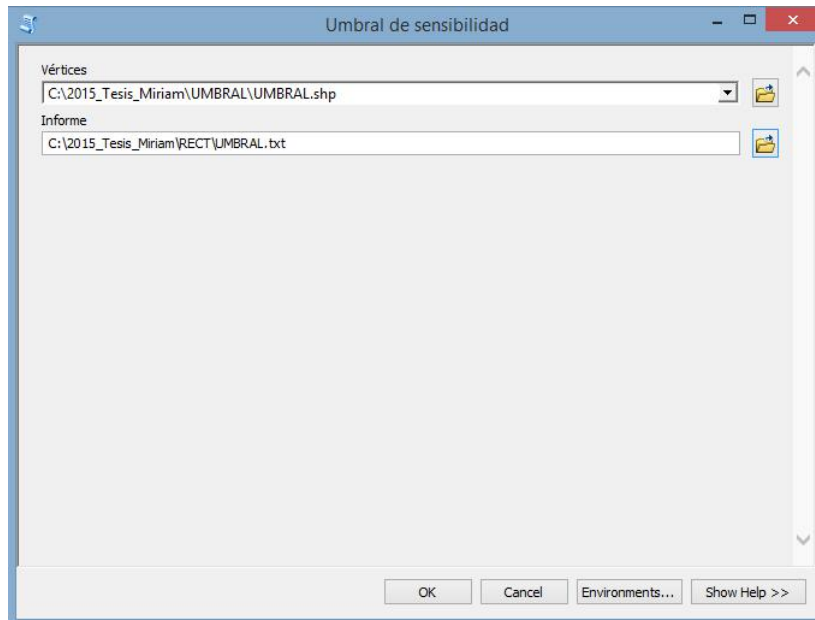
**Figura D.5:** Código Python de la herramienta Puntos Correlativos

Otra de las herramientas que ya se había resuelto con el programa MATLAB y se ha migrado al lenguaje Python, corresponde al **Umbral de sensibilidad** que nos da información de la precisión alcanzada en la transformación entre sistemas de referencia. Como ejemplo se adjunta un fragmento de código de ajuste por mínimos cuadrados, de la herramienta en ambos lenguajes (Figura D.6).

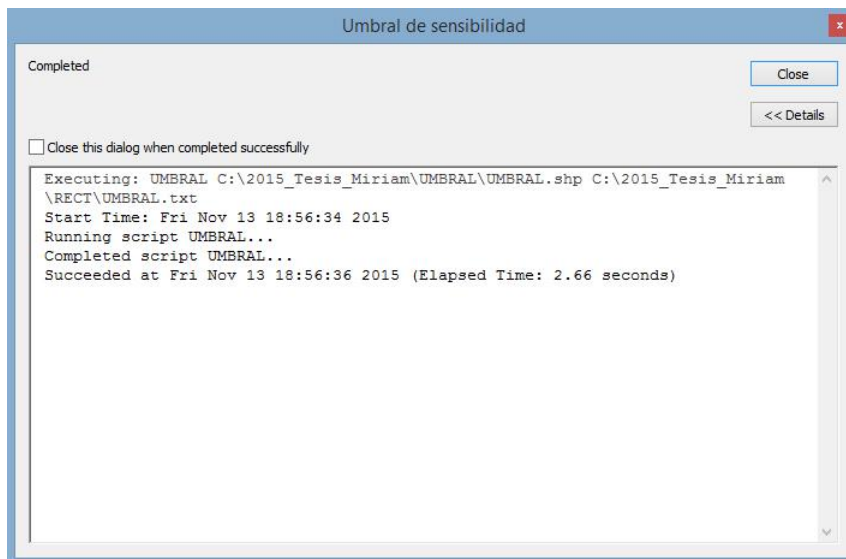
MATLAB	Python
» <b>At = transpose(A)</b>	<b>a = numpy.array(alst)</b>
» <b>S = At*P*A</b>	<b>k = numpy.array(klst)</b>
» <b>S1 = inv(S)</b>	<b>d_vect = numpy.linalg.lstsq(a, k)[0]</b>
» <b>d = S1*At*P*K</b>	

**Figura D.6:** Ajuste por mínimos cuadrados en lenguaje MATLAB a la izquierda y en lenguaje Python a la derecha

La programación en Python de la herramienta completa gestionada dentro del entorno de Arcmap proporciona un archivo informativo de salida en formato de texto como se observa en las Figuras D.7 y D.8. El contenido del fichero de salida incluye las matrices del sistema de ecuaciones, el vector de deformación y el umbral de sensibilidad.



**Figura D.7:** Datos de entrada y salida de la herramienta Umbral de sensibilidad



**Figura D.8:** Ejecución de la herramienta Umbral de sensibilidad