

UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA

Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales



TESIS DOCTORAL

**Metodología para la Identificación de Parámetros
Dinámicos en Sistemas Mecánicos de Baja Movilidad:
Aplicación a una Suspensión de Vehículo Automóvil**

Presentada por: Luz Adriana Mejía Calderón

Dirigida por: Dr. Francisco Valero Chuliá
Dr. Xabier Iriarte Goñi

Valencia, Enero de 2016

TESIS DOCTORAL

**Metodología para la Identificación de Parámetros
Dinámicos en Sistemas Mecánicos de Baja Movilidad:
Aplicación a una Suspensión de Vehículo Automóvil**

que para la obtención
del grado de
Doctor Ingeniero Industrial

presenta
Luz Adriana Mejía Calderón

en el
Departamento de Ingeniería Mecánica y de Materiales de la
Universidad Politécnica de Valencia

Dirigida por
Dr. Francisco Valero Chuliá
Dr. Xabier Iriarte Goñi

Valencia, Enero de 2016

TESIS DOCTORAL

**Metodología para la Identificación de Parámetros
Dinámicos en Sistemas Mecánicos de Baja Movilidad:
Aplicación a una Suspensión de Vehículo Automóvil**

Presentada por: Dña. Luz Adriana Mejía Calderón

Dirigida por: Dr. D. Francisco Valero Chuliá

Dr. D. Xabier Iriarte Goñi

TRIBUNAL CALIFICADOR

PRESIDENTE: Dr. D. Juan Ignacio Cuadrado Iglesias

SECRETARIO: Dr. D. Alfonso Hernández Frías

VOCAL: Dr. D. José Luis Escalona Franco

En Valencia, a 29 de enero de 2016

Agradecimientos

La constancia vence lo que la dicha no alcanza. Un dicho popular que solía decirme mi madre cuando yo estaba niña, cada vez que dejaba de lado alguna tarea que me causaba mucho trabajo. Hoy reconozco que, como en todo, ella tiene la razón. Este proceso que está por finalizar, ha requerido de mucha constancia y paciencia, no solo mía, sino de todos los que me han acompañado estos últimos años. Para todos ellos, muchas gracias.

Agradezco a mi Director, el Doctor Francisco Valero, por su acompañamiento durante los años que estuve en la Universidad Politécnica de Valencia. A mi Co-director Xabier Iriarte, por su ayuda en ésta última etapa del trabajo. Le agradezco por el tiempo dedicado, que ha sido mucho, y por el ánimo y la energía que me ha transmitido.

Quiero agradecer muy especialmente al Doctor Vicente Mata, por el apoyo y la comprensión brindada. Por darme el voto de confianza que necesitaba para no desfallecer y por hacer este proceso más cercano, a pesar de la distancia.

A mi amigo Miguel Ángel quiero agradecerle por su permanente acompañamiento y por animarme a continuar.

Para mi familia, que ha tenido que aguantar mi falta de tiempo, mis despistes y mi desatención durante estos años, les agradezco tanta comprensión. Para mi mamá que nunca pide nada y que lo da todo, infinitos agradecimientos. A mis hijos Camila y Carlos que han vivido esta experiencia como propia, que se han trasnochado por mi culpa y han soportado mi mal genio, gracias.

Mi mayor agradecimiento para quien me apoya incondicionalmente y quien hace que todo se vea tan fácil de realizar. A mi esposo Carlos Alberto, mil gracias.

Índice general

Abstract	vii
Resum	ix
Resumen	xi
Lista de figuras	xiii
Lista de tablas	xvii
Nomenclatura	xix
1. Introducción	1
1.1. Motivación	1
1.2. Antecedentes	5
1.3. Objetivos	10
1.4. Organización de la tesis	10
2. Modelo Dinámico para Identificación de Parámetros	13
2.1. Modelización del sistema	14
2.2. Ecuaciones de movimiento en forma lineal: coordenadas dependientes	17
2.3. Otros parámetros dinámicos: Coeficientes de rigidez y amortiguamiento	24
2.4. Ecuaciones de movimiento de forma lineal: coordenadas independientes	26
2.5. Resumen	30
3. Problemática en la Aplicación de las Técnicas Numéricas de Identificación de Parámetros a Mecanismos de Baja Movilidad	31
3.1. Procedimiento estándar de cálculo de las expresiones de los parámetros base	32

3.1.1. Métodos numéricos	34
3.1.2. Métodos simbólicos	37
3.2. Estimación de parámetros dinámicos	39
3.3. Optimización de trayectorias	41
3.3.1. Criterios de optimalidad	41
3.3.2. Parametrización de la trayectoria	44
3.4. Problemática en la estimación del procedimiento estándar a mecanismos con baja movilidad	47
3.4.1. Incertidumbre en la determinación del rango	47
3.4.2. Número de condición elevado	49
3.5. Resumen	53
4. Identificación de Parámetros Dinámicos en Mecanismos con Baja Movilidad	55
4.1. Determinación de las expresiones simbólicas de parámetros base a través de la transferencia de propiedades inerciales	56
4.1.1. Parámetros base derivados de la transferencia de propiedades inerciales	61
4.1.2. Obtención de otros conjuntos de parámetros base simbólicos derivados de una transferencia de parámetros inerciales	65
4.1.3. Modelo para identificación de parámetros derivado de las expresiones simbólicas de un conjunto de parámetros base	68
4.2. Optimización de trayectorias para el modelo en parámetros base	68
4.3. Obtención de parámetros relevantes	69
4.3.1. Eliminación de parámetros por contribución dinámica	70
4.3.2. Evaluación de los parámetros relevantes identificados	71
4.4. Resumen	73
5. Aplicación del Método de Identificación de Parámetros Dinámicos a un Mecanismo de Baja Movilidad	75

5.1. Sistema mecánico	76
5.2. Cálculo de parámetros base	80
5.2.1. Cálculo simbólico por transferencia de propiedades inerciales	84
5.3. Otros modelos derivados de un conjunto de parámetros base simbólicos.	96
5.4. Optimización de trayectorias	99
5.5. Reducción del modelo con base en la contribución dinámica	104
5.5.1. Índice de contribución dinámica	105
5.5.2. Reducción a parámetros relevantes	109
5.6. Resumen	122
6. Conclusiones y Trabajos Futuros	125
6.1. Obtención del modelo en parámetros base	126
6.2. Optimización de trayectorias	128
6.3. Reducción a parámetros relevantes	128
6.4. Trabajos futuros	130
Bibliografía	133
Anexos	143

Abstract

Knowledge of the dynamic parameters of mechanical systems is required in different applications, particularly in the simulation and control problems. The Department of Mechanical and Materials Engineering at the Polytechnic University of Valencia has worked for several years in identification of dynamic parameters of serial and parallel robots. With this thesis it is to continue the process of identification of dynamic parameters, now on other mechanical systems. Given that mainly the mechanisms that make the systems and machines are closed kinematic chain, in this work the standard identification methods are discussed and a new methodology for identification of dynamic parameters is raised when the closed chain is low mobility.

After obtaining the dynamic model as a linear system with respect to the dynamic parameters, a model based on parameters that can be solved by numerical methods such as least squares. The determination of this model based on parameters depends on the linear dependence relations between the dynamic parameters. These relationships and the base parameters can be obtained by symbolic and numerical methods. In this thesis the standard methodology for the identification from the singular value decomposition, and a symbolic approach based on the concept of transfer of inertial properties is applied for obtaining base parameters. The advantages of applying symbolic methods are corroborated with the application of both methods on a closed chain of low mobility such as the automotive suspension.

Because models in base parameters are ill-conditioned, they are unfit for identification of dynamic parameters; it seeks to reduce this feature reducing the model. For this purpose, the system uses the criteria given by the dynamic contribution index of each parameter. This index accounts for the effect of the parameter on the generalized forces of the system. The reduction applied criterion requires an initial approximation of the dynamic parameters. It has been found that the use of this criterion is not significantly affected by the approach used when symbolic expressions of the base parameters are known. Such is the case of models obtained by inertial transfers.

The comparison between the different models developed, supports the conclusion that the models obtained through the symbolic methods have lower prediction errors and are insensitive to the initial approach.

Resum

Coneixer els paràmetres dinàmics dels sistemes mecànics es indispensable en diferents aplicacions, particularment en les tasques de simulació i control. En el Departament d'Enginyeria Mecànica i Materials de l'Universitat Politècnica de València s'ha treballat durant varis anys en identificació de paràmetres dinàmics de robots serie i paralel. En el present TESIS es pretén continuar en el proces d'identificació de paràmetres dinàmics, ara sobre atre tipo de sistemes mecànics. Tenint en conte que la gran majoria de mecanismes que conformen els sistemes i les maquines son de cadena cinemàtica tancada, en este treball s'analisen les metodologies d'identificació existent i se planteja una nova metodologia d'identificació per a quan la cadena tancada es de baixa mobilitat.

Despres d'obtingut el model dinàmic com sistema llinial respecte als paràmetres dinàmics, se determina un model en paràmetres base que pot ser resolt a través de metodos numerics com minims quadrats. La determinació d'este model en paràmetres base depen de les relacions de dependencia llinial que se tenen entre els paràmetres dinàmics. Estes relacions, i per tant, els conjunts de paràmetres base poden obtindre's a través de metodologies simboliques i numeriques. En este treball s'aplica la metodologia estandard d'identificació a partir de la descomposició en valors singulars, i una metodologia simbolica a partir del concepte de transferencia de propietats inerciales, per a obtindre models en paràmetres base. Les ventages d'aplicar metodos simbolics sobre els numerics son evidenciades i corroborades en l'aplicació d'abdos metodologies sobre una cadena tancada de baixa mobilitat com ho es la suspensió d'un vehicle automovil.

Com els models en paràmetres base presenten alts condicionaments numerics que els fan impropis per a tasques d'identificació, se busca disminuir esta característica reduint el model. Per a aixó, s'aplica com criteri l'ordenament donat per l'index de contribució dinàmica de cada paràmetre. Este index dona conte de l'efecte del paràmetre sobre les forces generalisades del sistema. El criteri de reducció aplicada requerix d'una aproximació inicial dels paràmetres dinàmics. S'ha pogut comprovar que l'utilisació d'este criteri no se veu afectada significativament per l'aproximació utilizada quan se

x

coneixen les expressions simbòliques dels paràmetres base. Tal es el cas dels models obtinguts per transferències inercials.

La comparança entre els diferents models elaborats, permeten afirmar que els models obtinguts a través dels metodos simbòlics presenten menors erros de predicció i son poc sensibles a l'aproximació inicial.

Resumen

Conocer los parámetros dinámicos de los sistemas mecánicos es indispensable en diferentes aplicaciones, particularmente en las tareas de simulación y control. En el Departamento de Ingeniería Mecánica y Materiales de la Universidad Politécnica de Valencia se ha trabajado durante varios años en identificación de parámetros dinámicos de robots serie y paralelo. Con la presente tesis se pretende continuar con el proceso de identificación de parámetros dinámicos, ahora sobre otro tipo de sistemas mecánicos. Teniendo en cuenta que la gran mayoría de mecanismos que conforman los sistemas y las máquinas son de cadena cinemática cerrada, en este trabajo se analizan las metodologías de identificación existente y se plantea una nueva metodología de identificación para cuando la cadena cerrada es de baja movilidad.

Una vez obtenido el modelo dinámico como sistema lineal respecto a los parámetros dinámicos, se determina un modelo en parámetros base que puede ser resuelto a través de métodos numéricos como mínimos cuadrados. La determinación de este modelo en parámetros base depende de las relaciones de dependencia lineal que se tienen entre los parámetros dinámicos. Estas relaciones, y por tanto, los conjuntos de parámetros base pueden obtenerse a través de metodologías simbólicas y numéricas. En esta tesis se aplica la metodología estándar de identificación a partir de la descomposición en valores singulares, y una metodología simbólica a partir del concepto de transferencia de propiedades inerciales, para obtener modelos en parámetros base. Las ventajas de aplicar métodos simbólicos sobre los numéricos son evidenciadas y corroboradas con la aplicación de ambas metodologías sobre una cadena cerrada de baja movilidad como lo es la suspensión de un vehículo automóvil.

Como los modelos en parámetros base presentan altos condicionamientos numéricos que los hacen impropios para tareas de identificación, se busca disminuir esta característica reduciendo el modelo. Para ello, se aplica como criterio el ordenamiento dado por el índice de contribución dinámica de cada parámetro. Este índice da cuenta del efecto del parámetro sobre las fuerzas generalizadas del sistema. El criterio de reducción aplicado requiere de una aproximación inicial de los parámetros dinámicos. Se ha podido comprobar

que la utilización de este criterio no se ve afectada significativamente por la aproximación utilizada cuando se conocen las expresiones simbólicas de los parámetros base. Tal es el caso de los modelos obtenidos por transferencias inerciales.

La comparación entre los diferentes modelos elaborados, permiten afirmar que los modelos obtenidos a través de los métodos simbólicos presentan menores errores de predicción y son poco sensibles a la aproximación inicial.

Lista de figuras

Figura 1.1.	Métodos estáticos para la medida de masas y centros de masa.	2
Figura 1.2.	Método del péndulo gravitacional aplicado a identificación de momentos de inercial en vehículos.	3
Figura 2.1.	Sistema de referencia no centroidal	15
Figura 2.2.	Definición de la convención de ángulos de Euler en vehículos.	16
Figura 2.3.	Sistema muelle – amortiguador.	25
Figura 3.1.	Clasificación de las tareas de simulación dinámica de vehículos.....	46
Figura 3.2.	Valores singulares para la matriz de observación W de un sistema de cadena cinemática cerrada de baja movilidad bajo dos trayectorias diferentes.....	47
Figura 3.3.	Dificultades encontradas en la aplicación de SVD en la identificación de parámetros dinámicos en mecanismos de baja movilidad.	52
Figura 4.1.	Sistemas de referencia para determinación del Lagrangiano.....	57
Figura 4.2.	Representacion grafica de multipolos para transferencia de propiedades inerciales	59
Figura 4.3.	Transferencia de propiedades inerciales	59
Figura 4.4.	Transformación de cadena cinemática cerrada a cadena abierta.....	62
Figura 4.5.	Transferencia de propiedades inerciales en un par R	63
Figura 4.6.	Diagrama de flujo para la obtención de otros conjunto de parámetros a partir de una transferencia de propiedades inerciales.....	67
Figura 4.7.	Diagrama de flujo en la identificación de parámetros para mecanismos de baja movilidad.....	72

Figura 5.1.	Topología de la suspensión delantera de un vehículo ligero.....	76
Figura 5.2.	Grados de libertad de la suspensión analizada.....	77
Figura 5.3.	Esquema cinemático de la suspensión	77
Figura 5.4.	Esquema cinemático de la suspensión con ubicación de los sistemas de referencia locales.	78
Figura 5.5.	Rueda dinamométrica para medida de fuerzas	79
Figura 5.6.	Grupos de trayectorias sin optimizar usadas para la determinación inicial de la matriz de observación.	81
Figura 5.7.	Valores singulares de las matrices de observación para la Trayectoria 1 en los modelos considerando en el vector de parámetros a identificar.	82
Figura 5.8.	Valores singulares de las matrices de observación para la Trayectoria 2 en los modelos considerando en el vector de parámetros a identificar	82
Figura 5.9.	Cortes para obtener una cadena abierta ramificada de la suspensión	84
Figura 5.10.	Transferencias de parámetros en las uniones cinemáticas de media suspensión.....	86
Figura 5.11.	Dimensiones significativas de los eslabones	87
Figura 5.12.	Trayectorias optimizadas mediante el criterio de minimización del número de condición de la matriz de observación de los modelos.....	100
Figura 5.13.	Trayectoria de validación.....	101
Figura 5.14.	Fuerzas generalizadas estimadas y teóricas asociadas a las coordenadas generalizadas independientes del lado derecho de la suspensión.	102
Figura 5.15.	Fuerzas generalizadas estimadas y teóricas asociadas las coordenadas generalizadas independientes del lado izquierdo de la suspensión.....	103
Figura 5.16.	Fuerzas generalizadas estimadas y teóricas asociadas a la dirección.....	103
Figura 5.17.	Variación del orden de influencia de la contribución dinámica de los parámetros base para los modelos T1 a T4, con errores de 10 y 60% en la estimación CAD.....	107
Figura 5.18.	Índices de contribución dinámica de los 20 parámetros más contributivos en cada modelo	108

Figura 5.19. Errores de predicción de las fuerzas generalizadas, validando sobre la trayectoria de identificación, considerando errores en la aproximación CAD de los parámetros y fuerzas medidas sin error.	111
Figura 5.20. Números de condición de las matrices W_{base}	112
Figura 5.21. Errores de predicción en función del número de parámetros relevantes considerando errores en la estimación de los parámetros CAD y con errores de 5% en las fuerzas de identificación.	113
Figura 5.22. Error de predicción para validación sobre la trayectoria de identificación con errores en fuerzas de 5%	114
Figura 5.23. Errores de predicción del modelo identificado sobre la trayectoria TV, sin error en CAD.	116
Figura 5.24. Errores de predicción del modelo identificado sobre la trayectoria TV, con 60% de error en CAD.	116
Figura 5.25. Fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas generalizadas independientes del lado derecho de la suspensión.	118
Figura 5.26. Fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas generalizadas independientes del lado izquierdo de la suspensión.	119
Figura 5.27. Fuerzas generalizadas asociadas a la coordenada de desplazamiento de la dirección	119
Figura 5.28. Error absoluto entre las fuerzas generalizadas exactas y las obtenidas por los modelos reducidos	119

Lista de tablas

Tabla 4.1. Transferencia de masas e inercias entre sólidos según el par cinemático que los une.....	61
Tabla 5.1. Grados de libertad 1/2 vehículo (suspensión delantera)	78
Tabla 5.2. Algunos valores singulares de la matriz de observación para el modelo con solo parámetros inerciales en el vector de parámetros a identificar	83
Tabla 5.3. Parámetros base para el modelo T1	94
Tabla 5.4. Parámetros dependientes según las transferencias realizadas en el modelo T1.....	96
Tabla 5.5. Parámetros dependientes para el modelo T2.	97
Tabla 5.6. Parámetros dependientes para el modelo T3.	98
Tabla 5.7. Número de condición de las matrices de observación	101
Tabla 5.8. Números de condición de la matriz de información de los modelos en parámetros base desarrollados.....	104
Tabla 5.9. Variación de los parámetros base identificados con la adición de errores en las fuerzas de identificación para el modelo T1. Cada parámetro tiene unidades según le corresponda de kg, kg·m y kg·m ²	105
Tabla 5.10. Variación de los errores de predicción en las fuerzas generalizadas estimadas para la trayectoria de validación	117
Tabla 5.11. Parámetros identificados para el modelo T2 con 20 parámetros relevantes. El valor teórico ha sido modificado con 20% de error en CAD.....	121

Nomenclatura

$K(\vec{q}, \dot{\vec{q}}, \ddot{\vec{q}})$	Matriz de observación
$\vec{\Phi}$	Vector de parámetros dinámicos
$\vec{\Phi}_{base}$	Vector de parámetros base
$\vec{\tau}$	Vector de fuerzas generalizadas
$\vec{\tau}_m$	Vector de fuerzas generalizadas medido
W	Matriz de observación global
W_{base}	Matriz de observación base
\vec{r}_{OO_i}	Vector posición del sistema de referencia local i -ésimo respecto al global
$\vec{\xi}_i$	Vector de ángulos de Euler del sistema de referencia i -ésimo
$\dot{\vec{\xi}}_i$	Vector de la primera derivada de los ángulos de Euler del sistema de referencia i -ésimo
\vec{q}_i	Vector de coordenadas generalizadas del sistema i -ésimo
$\vec{\omega}_i$	Vector de velocidades angulares absolutas del cuerpo i
$\vec{\alpha}_i$	Vector de aceleraciones angulares absolutas del cuerpo i
G_i	Matriz de transformación de velocidades de sistema i -ésimo
ϕ_i	Angulo Roll del sistema de referencia i -ésimo
θ_i	Angulo Pitch del sistema de referencia i -ésimo
ψ_i	Angulo Yaw del sistema de referencia i -ésimo
\vec{Q}_{in_i}	Vector de fuerzas generalizadas de inercia actuantes sobre la barra i -ésima

\vec{Q}_{ex_i}	Vector de fuerzas generalizadas externas actuantes sobre la barra i -ésima
\vec{Q}_{g_i}	Vector de fuerzas generalizadas gravitacionales actuantes sobre la barra i -ésima
\vec{Q}_{m_i}	Fuerza generalizada elástica del muelle i -ésimo
\vec{Q}_{a_i}	Fuerza generalizada del amortiguador i -ésimo
m_i	Masa de la barra i -ésima
$m x_i, m y_i, m z_i$	Primeros momentos en las direcciones x, y y z
I_{G_i}	Tensor de inercia del cuerpo i -ésimo respecto a un sistema de referencia centroidal
I_{A_i}	Tensor de inercia respecto al sistema de referencia local
\vec{v}_{G_i}	Velocidad absoluta del centro de masa i
\vec{a}_{G_i}	Aceleración absoluta del centro de masa i
\vec{v}_{A_i}	Velocidad absoluta del sistema de referencia i -ésimo
\vec{a}_{A_i}	Aceleración absoluta del sistema de referencia i -ésimo
$\vec{r}_{A_i G_i}$	Vector posición del centro de masa i respecto al sistema de referencia local
0R_i	Matriz de rotación del sistema de referencia i respecto al sistema de referencia global
K	Coefficiente de rigidez
μ	Coefficiente de amortiguamiento
C_q	Matriz jacobiana de restricciones
$\vec{\lambda}$	Vector de multiplicadores de Lagrange
R^*	Matriz de proyección de velocidades
$\vec{\varepsilon}$	Error de medición

$VAR[\hat{\Phi}_{base}]$	Varianza de los parámetros base
K	Número de condición
σ_{ϕ_j}	Desviación estándar relativa del i -ésimo parámetro
ζ_i	Índice de contribución dinámica el parámetro i -ésimo
e_p	Error de predicción
ε	Tolerancia de la máquina
R	Rango de la matriz de observación
s_{max}	Máximo valor singular
s_{min}	Mínimo valor singular

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

Para analizar el comportamiento de un sistema mecánico se requiere establecer la relación causa-efecto que ciertas variables ejercen sobre la respuesta dinámica del sistema. Tales relaciones pueden ser descritas a través de modelos que, en muchos casos, son expresiones matemáticas derivadas de la aplicación de las leyes físicas que gobiernan los fenómenos que suceden dentro y alrededor del sistema. Siendo el modelo matemático de un sistema físico una representación de la realidad, está sujeto a imprecisiones emanadas, por una parte de la pretensión de plasmar en muy pocas variables y parámetros todos esos fenómenos, y de otra, por la dificultad de medirlos con exactitud.

En la actualidad, los avances tecnológicos en hardware y software, hacen posible la inclusión de sistemas cada vez más sofisticados que requieren ser diseñados, simulados y controlados. Obtener modelos que representen con mayor exactitud el comportamiento de los sistemas y que permitan evaluar su desempeño funcional, requiere inexorablemente de la identificación de un conjunto de parámetros incluidos en las ecuaciones que gobiernan su comportamiento dinámico.

Los parámetros incluidos en los modelos dinámicos de los sistemas mecánicos se pueden clasificar en dos categorías: a) los parámetros cinemáticos o geométricos, que corresponden a dimensiones cinemáticas como distancia entre uniones, posicionamiento de sistemas de referencia,

holguras, etc; y b) *los parámetros dinámicos* entre los que se tienen los parámetros inerciales (masas, centros de masa y tensores de inercia), la fricción y los coeficientes de rigidez y amortiguamiento.

La identificación de parámetros geométricos, denominada como calibración cinemática, es una técnica ya madura en el campo de la robótica. Su reconocida importancia en el comportamiento y precisión de los robots ha llevado a que en la actualidad se disponga de información más exacta de la geometría de los componentes y del ensamble, suministrada por parte los fabricantes. Sin embargo, los parámetros dinámicos son difíciles de determinar pues requieren en su mayoría de la aplicación de diversas técnicas experimentales de identificación. Por ejemplo, si se desean determinar masas y centros de masa, puede ser suficiente técnicas como la medida de fuerza, los cables de suspensión y mesas de balanceo, Figura 1.1 [75].

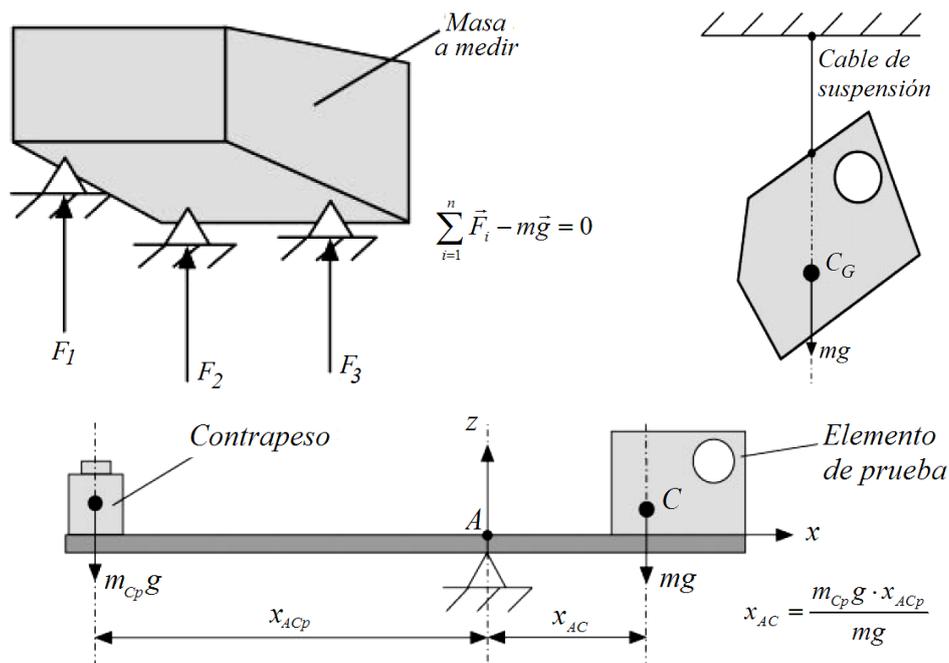


Figura 1.1. Métodos estáticos para la medida de masas y centros de masa.

Estos métodos experimentales llamados estáticos no suelen ser complejos, pero requieren del desensamble del mecanismo, si lo que se quiere es identificar cada parámetro. Por otro lado, la determinación experimental de

los tensores de inercia implica métodos más complejos basados en su respuesta dinámica, como puede ser el método del péndulo gravitacional, Figura 1.2 [86]. Generalmente estos métodos requieren montajes especiales, altos tiempos de ejecución y requieren de personal altamente cualificado. De manera que si el sistema mecánico es grande, en tamaño y en número de piezas, estas metodologías son poco prácticas.

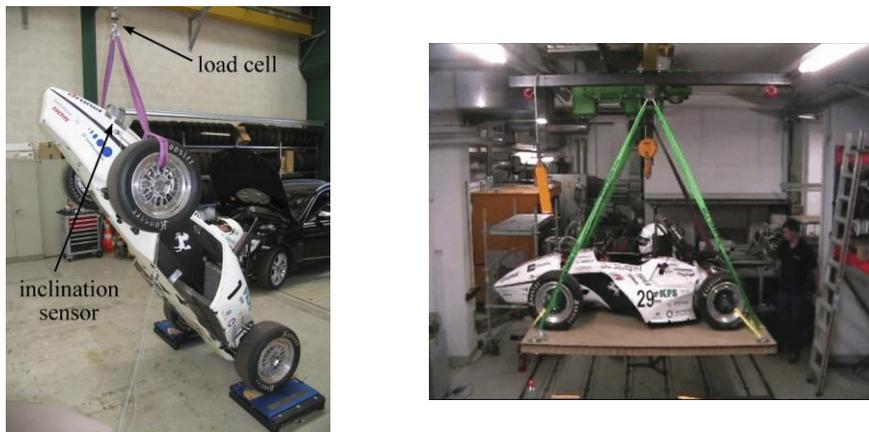


Figura 1.2. Método del péndulo gravitacional aplicado a identificación de momentos de inercial en vehículos.

Los métodos experimentales de estimación de parámetros dinámicos, no solo son difíciles de realizar desde el punto de vista del equipamiento y alistamiento, del tiempo requerido en las medidas, el análisis y ajuste de datos, sino que además, de requerirse la identificación de componentes, es necesario desensamblar el sistema mecánico. Esto hace más complejo el proceso pues se requerirá de tareas de ensamble y calibración adicionales.

De otro lado, los parámetros dinámicos pueden variar a lo largo de la vida útil del mecanismo, como suele ocurrir con parámetros asociados a la fricción, que dependen de las condiciones de operación del sistema. También, las deformaciones que pudiesen sufrir los elementos, bien sea por impactos o elevados estados de esfuerzo provocan la variación de algunos parámetros dinámicos como los centros de masas y las inercias.

La identificación de parámetros por modelo dinámico, que es la metodología utilizada en esta tesis, permite estimar en un solo experimento una cantidad elevada de parámetros dinámicos. La identificación planteada de esta manera, trata de obtener un ajuste de los parámetros desconocidos del modelo, cuando se conoce la cinemática del mecanismo y las fuerzas externas requeridas para definir los movimientos, es decir, partiendo del modelo dinámico inverso. No es necesario desacoplar físicamente el sistema, pues las medidas experimentales se limitan a las fuerzas externas que dan lugar a los movimientos de excitación del sistema y a las coordenadas generalizadas independientes y sus derivadas en el tiempo.

Un proceso de identificación de parámetros, como se verá a lo largo de esta tesis, no determina valores individuales de parámetros dinámicos, aunque para algunos parámetros si sucede así. La finalidad principal del proceso es determinar un modelo equivalente que logre predecir con el mínimo error las fuerzas generalizadas para cualquier movimiento del sistema dentro de las características de explotación para las que se diseña. Este modelo equivalente es de menor tamaño (menos parámetros) que el modelo original. Dado que en tareas de simulación y control, los modelos dinámicos suelen ser computacionalmente extensos, con tiempos de ejecución elevados, obtener modelos reducidos sin perder significativamente exactitud en la respuesta, con reducciones considerables en los tiempos de ejecución de las tareas para las que se requiere, es un trabajo que bien merece la pena realizar.

De otro lado, los procesos de identificación de parámetros dinámicos han sido trabajados hasta hoy, en extenso, sobre un campo de la mecánica en particular: la robótica. Sin embargo, para sistemas mecánicos en general, es ciertamente poco el trabajo que se ha realizado en identificación. Teniendo en cuenta que casi todos los mecanismos que conforman las máquinas corresponden a cadenas cinemáticas cerradas y que éstas se caracterizan por tener baja movilidad, se tiene la necesidad de plantear una metodología que permita identificar parámetros dinámicos en este tipo de mecanismos. El término *baja movilidad* se refiere no solo al bajo número de grados de libertad, sino también al poco espacio de trabajo y a las limitadas posibilidades de movimiento relativo entre los elementos que forman el sistema mecánico.

Es importante también reconocer que en algunas áreas motoras de la economía, como la industria automovilística, la estimación de parámetros dinámicos tiene una connotación importante, toda vez que hacen uso de modelos reducidos que describen los diferentes subsistemas que conforman el vehículo y que permiten diseñar algoritmos de observación y control. Los ritmos de desarrollo en este campo, se orientan a la implementación de sistemas de control inteligentes para estabilidad, confort y seguridad. En este sentido, la identificación de parámetros para un subsistema como la suspensión ha de ser un paso previo y obligatorio al control.

1.2. Antecedentes

El problema de identificación de parámetros dinámicos consiste en encontrar los valores de ciertos parámetros incluidos en el modelo matemático de un sistema mecánico, de manera que se logre predecir de manera cercana el comportamiento del sistema. Este proceso se realiza por comparación la respuesta del sistema con la del modelo matemático planteado. Las respuestas se determinan directamente por medidas experimentales o por simulación, cuando el modelo se emplea en tareas de diseño.

Si los parámetros a identificar corresponden a parámetros inerciales, los modelos matemáticos obtenidos son lineales en dichos parámetros, de manera que se pueden utilizar métodos numéricos simples, como los mínimos cuadrados, en la estimación de los parámetros. Este método de resolución tiene un costo computacional bajo y tiene garantizada su convergencia, por lo que siempre se encontrará una solución. Las variables cinemáticas incluidas en el modelo dinámico, en general, son fáciles de medir. Sin embargo, para el tipo de mecanismos que se quiere analizar, la medida de las fuerzas no es trivial, por lo que, aunque se tengan errores tanto en la cinemática como en las fuerzas, el mayor error de estimación se derivará del error de medición de las fuerzas externas.

La identificación de parámetros inerciales se inició en el área de la robótica con los trabajos realizados por Khosla y Kanade, 1985 [55], Atkenson *et al.*, 1986 [9] y Gautier y Khalil, 1988 [37] sobre robots serie.

Como se mencionó anteriormente, el modelo ha de ser lineal respecto a los parámetros a identificar. Siendo así, la primera tarea del proceso consiste en reescribir las ecuaciones dinámicas del movimiento de la forma,

$$K(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \vec{\ddot{q}}) \cdot \vec{\Phi} = \vec{\tau} \quad (1.1)$$

donde $K(\vec{q}, \vec{\dot{q}}, \vec{\ddot{q}})$ es la matriz de observación y $\vec{\Phi}$ es el vector de parámetros dinámicos que se quiere identificar. Este vector estará compuesto por los parámetros inerciales de los elementos que formen el sistema (masas, centro de masas y tensores de inercia) y de otros parámetros (fricción, constantes elásticas de muelles y amortiguadores), siempre que respondan a modelos lineales. $\vec{\tau}$ es el vector de fuerzas generalizadas y \vec{q} , $\vec{\dot{q}}$ y $\vec{\ddot{q}}$ son las coordenadas generalizadas y sus derivadas.

Llegar al modelo expresado en (1.1), cuando se ha modelado con un conjunto de coordenadas dependientes, requiere de la eliminación de las fuerzas internas o de restricción presentes en las uniones cinemáticas. Inicialmente se utilizó el procedimiento de partición de coordenadas propuesto por Wehage y Hang [85] para obtener un sistema que dependiese solo de las fuerzas externas. Más recientemente se aplican métodos de ortogonalización o subespacio de movimientos admisibles que emplean métodos numéricos como la descomposición en valores singulares SVD usada por Mani *et al.* [60], la descomposición QR evaluada por Díaz – Rodríguez *et al.* [24] o la triangularización de Gauss [34]. Independientemente del tipo de cadena cinemática, el modelo expresado en (1.1) tiene un número de ecuaciones igual al número de grados de libertad del sistema. Para aplicar mínimos cuadrados es necesario incrementar el número de filas de la matriz de observación hasta tener al menos tantas como parámetros desconocidos. Esto se obtiene evaluando las expresiones de (1.1) con datos para diferentes configuraciones del mecanismo. Con ello se obtiene un sistema sobre-determinado con una matriz de observación global de mayor tamaño.

La aplicación de los métodos numéricos para la solución del vector de parámetros $\vec{\Phi}$ requiere de una matriz de observación de rango completo. Sin embargo, esta matriz presenta dependencia lineal entre columnas, lo que indica que los parámetros a identificar son linealmente dependientes entre

ellos. Además, algunos parámetros dinámicos no aparecen en las ecuaciones de movimientos, por lo que las columnas asociadas a ellos en la matriz de observación son nulas. El modelo de rango completo se ha denominado *modelo en parámetros base*. Este modelo no es único para un sistema mecánico dado, sino que se tendrán tantos modelos como conjuntos de parámetros base se tengan. La determinación de conjuntos de parámetros base ha sido por tanto, un problema fundamental en la identificación y es amplia la literatura que puede encontrarse dedicada a esto, casi toda en el área de robótica. Son dos los tipos de expresiones de parámetros base que se pueden obtener, según se apliquen metodologías numéricas o simbólicas en su obtención. En un método simbólico, los coeficientes de las combinaciones lineales son expresiones simbólicas que dependen de magnitudes geométricas, mientras que en los obtenidos por métodos numéricos, los coeficientes que acompañan los parámetros son números reales.

Las metodologías numéricas son las más utilizadas hasta ahora tanto para cadenas abiertas como cerradas. La aplicación de este método hace uso de técnicas numéricas de análisis matricial como la descomposición en valores singulares y la descomposición QR. De los trabajos de Atkeson, An y Hollerbach [9] en 1986 se estableció una clasificación de parámetros atendiendo a si son identificables, identificables en combinaciones lineales y no identificables. Gautier en 1991 [35] desarrolló dos métodos generales para la determinación de las expresiones numéricas de los parámetros base de robots usando descomposiciones SVD y QR. Estos dos métodos son los más extendidos hasta el punto de convertirse en los métodos estándar de obtención de parámetros base tanto en cadenas abiertas como cerradas. En robots serie de diferentes configuraciones se pueden citar los trabajos de Pfeiffer y Holzl [68], Antonelli *et al.* [6], Bhattacharya *et al.* [13], Guegan *et al.* [43], Abdellatif *et al.* [1] y Grotjahn *et al.* [42]. En robots paralelos se utilizan ambos métodos numéricos en trabajos como los de Calafiore *et al.* [17], Farhat [31], Díaz – Rodríguez [22] e Iriarte [46]. Para mecanismos espaciales Chen y Beale [20] usan SVD para encontrar un conjunto de parámetros mínimos en un mecanismo de cuatro barras espacial. En sistemas vehiculares se tienen los trabajos de Shome y Beale [78] y Chen y Beale [21], quienes identifican parámetros inerciales de una suspensión tipo MacPherson aplicando descomposición QR. Sin embargo, en estos últimos estudios, no son considerados los errores de medida a los que están sujetas las fuerzas generalizadas usadas para identificar. Otros autores usan formalismos

robóticos en el modelado de la dinámica del vehículo como Venture *et al.* [83] quienes aplican descomposición QR para la construcción del modelo en parámetros base.

Los métodos simbólicos surgen con los trabajos de Gautier y Khalil [36] y [37] en la identificación de robots serie. Las dependencias lineales se obtienen a partir de la energía cinética y potencial del sistema. La extensión a estructuras abiertas ramificadas la realizan Khalil y Kleinfinger [53]. En estos trabajos, las expresiones obtenidas son generalizadas para sistemas con uniones cinemáticas de rotación y traslación. Otros autores como Mayeda *et al.* [65] también realizan agrupación de parámetros inerciales de manera predeterminada según la topología del robot. En cualquier caso, estos métodos están basados en una topología específica de robots por lo que no pueden aplicarse a cualquier sistema mecánico con uniones cinemáticas diferentes.

Para cadenas cinemáticas cerradas, los métodos simbólicos surgen con posterioridad. En robots paralelos, los trabajos de Bennis *et al.* [12] y Khalil y Bennis [50] parten del análisis energético del sistema para determinar simbólicamente las relaciones de dependencia cuando se tienen uniones cinemáticas rotacionales y traslacionales. Por otro lado, más recientemente, Iriarte [46] y Díaz – Rodríguez [22] plantearon una metodología basándose en el análisis dimensional de los valores que el método numérico proporciona [47]. En este método se comparan las expresiones numéricas de los parámetros base con todas las posibles expresiones simbólicas dimensionalmente coherentes hasta encontrar las expresiones simbólicas equivalentes. El concepto de transferencia de propiedades inerciales es utilizado también para obtener conjuntos de parámetros base simbólicos. El concepto se basa en la redistribución virtual de propiedades inerciales de los elementos del sistema mecánico siempre que no se altere el Lagrangiano del sistema. Chen *et al.* [19] presentan el desarrollo de este método aplicado a mecanismos planos, y en [20] lo aproxima a mecanismos espaciales. El método planteado está limitado a la transferencia de masas, las cuales son posibles solo en ciertos pares cinemáticos. La generalización del método es realizado por Ros *et al.* [73], tras la definición de propiedades inerciales llamadas monopolos, dipolos y cuadrupolos, que permiten combinar linealmente no solo masas sino también los primeros y segundos momentos de inercia. Este método simbólico se ha automatizado parcialmente en [72].

Obtenido el modelo en parámetros base, los procedimientos estándar realizan optimizaciones de trayectorias de donde se obtienen los datos para evaluar las matrices y vectores del modelo. La optimización busca obtener ciertas características tanto de la matriz de observación, como de los parámetros identificados. La característica buscada define el criterio de optimización. Así se tienen criterios basados en la minimización del número de condición de la matriz de observación usados por Farhat [31] y Gautier y Khalil [38], criterios estocásticos basados en la varianza y covarianza de los parámetros identificados como los usados por Swevers *et al.* [80] y Martín [62], y optimizaciones basadas en multicriterios como los desarrollados por Iriarte [46] y Díaz – Rodríguez [22] y [23]. En cualquier caso, la literatura reporta un alcance bajo de condicionamiento numérico en robots serie como lo reporta Pfeiffer y Holtz [68] y en robots paralelos como lo presenta Farhat [31]. En otros sistemas mecánicos de baja movilidad, como la suspensión vehicular, los valores de número de condición de la matriz de observación W_{base} reportados por Valero *et al.* [83] y Mejía *et al.* [66], luego de la optimización son extremadamente altos.

La valoración de los parámetros identificados se realiza de acuerdo a la desviación estándar obtenida para cada parámetro, según se sugiere en Khalil y Dombre [51]. Se eliminan los parámetros base con desviaciones estándar mayores a 10 veces la mínima desviación alcanzada y se procede a identificar de nuevo para el modelo resultante. Al aplicar este criterio de reducción en robots paralelos, algunos autores como Mata *et al.* [64], Farhat [32] y Díaz – Rodríguez [24] reportan valores altos de dichas desviaciones. En mecanismos de baja movilidad, este criterio no es aplicable debido a la mala estimación que se tiene de los parámetros base como consecuencia del alto condicionamiento de la matriz de observación usada en el proceso de identificación. Uno de los aspectos desarrollados en esta tesis trata precisamente de la reducción de parámetros base considerando las contribuciones dinámicas que se obtienen de cada parámetro base sobre las fuerzas generalizadas que describen el comportamiento del sistema. Algunos estudios sobre sensibilidad de los parámetros inerciales en la dinámica de sistemas mecánicos, como los realizados por Ebrahim *et al.* [28] y [29] y Eberhard *et al.* [27] apuntan a considerar este aspecto importante al momento de reducir el modelo.

1.3. Objetivos

El principal objetivo de esta tesis es desarrollar una metodología de identificación de parámetros dinámicos que sea aplicable a mecanismos de baja movilidad, caracterizados por tener una matriz de observación muy mal condicionada. Para lograr este objetivo general se han considerado los siguientes objetivos específicos:

- Obtener modelos en parámetros base derivados de la transferencia de propiedades inerciales y comparar las características de estos modelos con los obtenidos por los métodos estándar de identificación.
- Desarrollar un método de reducción del modelo en parámetros base a partir del análisis de la contribución dinámica de los parámetros.
- Determinar la influencia del error en la estimación inicial de los parámetros físicos, en los errores de predicción de los modelos reducidos.
- Comparar los resultados obtenidos con la metodología propuesta y los obtenidos con los métodos estándar, cuando se aplican sobre un sistema de baja movilidad.

1.4. Organización de la tesis

La metodología de identificación de parámetros dinámicos propuesta en esta tesis, requiere de la construcción de un modelo dinámico escrito en forma lineal con respecto a los parámetros que se quieren identificar. La elaboración del modelo y el desarrollo de las expresiones matemáticas requeridas son presentadas en el Capítulo 2 del presente documento.

En segundo lugar, se analiza la aplicación del método estándar de identificación de parámetros dinámicos a mecanismos de baja movilidad. En el Capítulo 3 se comentan las dificultades encontradas tras la aplicación de este método y se proponen algunas acciones, dentro de las que se encuentra el uso de procedimientos simbólicos, para resolver problemas como la

determinación del rango de la matriz de observación y como la determinación de las relaciones de dependencia entre parámetros.

Definido el procedimiento a seguir, basándonos en desarrollos simbólicos para la determinación de los parámetros base, en el Capítulo 4 se expone el concepto de transferencia de propiedades inerciales como un procedimiento simbólico eficiente y que da solución a algunos de los problemas descritos en el capítulo anterior. Se exponen igualmente, los criterios de reducción del modelo en la búsqueda de obtener un conjunto de parámetros base bien identificado que logre predecir con errores pequeños las fuerzas generalizadas del sistema mecánico. En este capítulo se expone la metodología de identificación de parámetros dinámicos para mecanismos de baja movilidad.

En el Capítulo 5 se aplica y se evalúa la metodología propuesta sobre un mecanismo de baja movilidad. Específicamente se realiza el proceso completo de identificación de parámetros sobre una suspensión delantera de un vehículo automóvil, simulada bajo un programa comercial de simulación. En este capítulo se valida la metodología de identificación propuesta.

Finalmente, en el Capítulo 6 se exponen las conclusiones del trabajo desarrollado en esta tesis y se enuncian algunos posibles trabajos que en el futuro pueden desarrollarse.

Capítulo 2

Modelado dinámico para identificación de parámetros

El primer paso para la identificación de parámetros dinámicos en los sistemas mecánicos es la reescritura de las ecuaciones del movimiento del sistema en forma lineal respecto a los parámetros a identificar: parámetros inerciales de las barras móviles (masas, momentos de primer orden, momentos y productos de inercia), coeficientes de fricción, coeficientes de rigidez, coeficientes de amortiguamiento, ... En las aplicaciones que afectan tanto a los robots serie como incluso a los paralelos, es muy usual que el sistema de coordenadas empleado sea el que resulta de la aplicación de la convención de Denavit – Hartenberg, en alguna de sus numerosas variantes; sin embargo, en esta tesis se emplearán para la modelización del sistema las cartesianas o de punto de referencia, por ser más habituales en el campo de la dinámica de sistemas multicuerpo y fundamentalmente para hacer más sistemática la fase de obtención de las ecuaciones del movimiento en forma lineal respecto a los parámetros a identificar.

En este capítulo se establecen, en primer lugar, las condiciones específicas en las que se aplica el sistema de coordenadas elegido al sistema mecánico. A continuación se desarrolla un procedimiento sistemático para construir las ecuaciones del movimiento en forma lineal respecto a los parámetros inerciales a identificar, asumiendo que el conjunto de coordenadas generalizadas es independiente. Este procedimiento se extiende con posterioridad a otros parámetros dinámicos como son las constantes de amortiguamiento y rigidez, presentes en la suspensión de los vehículos.

Evidentemente la aplicación del tipo de coordenadas empleado conduce inevitablemente a un conjunto de coordenadas generalizadas dependiente, que se traduce en la aparición de fuerzas generalizadas internas, de las cuales no es esperable que se disponga de la información experimental necesaria para su determinación, por lo que será precisa su eliminación. En la sección correspondiente se discutirán diversas alternativas, siempre en el contexto de la identificación de parámetros. De ese modo se llegará a un sistema de ecuaciones del movimiento, expresado en forma lineal respecto a los parámetros a identificar y que dependerá de variables cinemáticas y acciones externas que se podrían determinar experimentalmente. Sin embargo, para los sistemas mecánicos que se van a identificar, el número de ecuaciones disponibles será inferior al de incógnitas (parámetros dinámicos) a determinar. Este problema se resuelve considerando diversas configuraciones del mecanismo, planteando las ecuaciones lineales para cada una de ellas y llegando de ese modo a un sistema lineal sobre-determinado que puede ser resuelto mediante procedimientos tales como el de Mínimos Cuadrados.

2.1. Modelización del sistema

Como se ha mencionado anteriormente, una característica importante del modelo dinámico de un sistema mecánico es la linealidad que presenta respecto a los parámetros inerciales, razón por la cual es posible utilizar metodologías numéricas sencillas, como el método de los Mínimos Cuadrados (LSM), para identificarlos a partir del modelo completo del sistema. La linealidad de algunos parámetros dinámicos dentro del modelo dinámico está sujeta a la localización de los sistemas de referencia utilizados en la elaboración del modelo. Así por ejemplo, si se generan las expresiones matemáticas que representan la dinámica de un elemento a partir de un sistema de referencia coincidente con su centro de masa, las ecuaciones del modelo asociadas a las aceleraciones lineales tendrán una estructura lineal respecto a los primeros momentos, mientras que para las ecuaciones dinámicas asociadas con las aceleraciones angulares, ésta linealidad se habrá perdido. De allí la importancia que tiene la definición de la ubicación de estos sistemas de referencia en los procesos de identificación dinámica de sistemas físicos. Para obtener un modelo dinámico que dependa linealmente de todos los parámetros inerciales es necesario disponer de sistemas de referencia locales fuera del centro de masa de cada elemento, de preferencia con

ubicaciones coincidentes con los pares cinemáticos, pues esto permite obtener ecuaciones de movimiento más compactas y manipulables.

Si bien en los procesos de identificación en robots serie y paralelos se han definido las coordenadas generalizadas a partir de la notación Denavit – Hartenberg, con el fin de generalizar el proceso de identificación de parámetros a otros sistemas de cadena cerrada, se van a utilizar las coordenadas cartesianas o de punto de referencia para modelar el sistema mecánico. El usar este tipo de coordenadas permite definir la posición y orientación de un elemento cualquiera del sistema, independiente a la definición de las demás coordenadas generalizadas, con lo cual supone una cierta ventaja a la hora de sistematizar el proceso de generación de las ecuaciones del movimiento en forma lineal respecto a los parámetros a identificar. Por otra parte, hay que mencionar que este tipo de coordenadas es habitual en los sistemas vehiculares.

Para cada elemento se han de considerar sistemas de referencia no centroidales, en cuyo caso se introducen tres coordenadas cartesianas, $\vec{r}_{OA_i} = [x_i \ y_i \ z_i]^T$ y tres ángulos de Euler, $\vec{\xi}_i = [\phi_i \ \theta_i \ \psi_i]^T$, Figura 2.1.

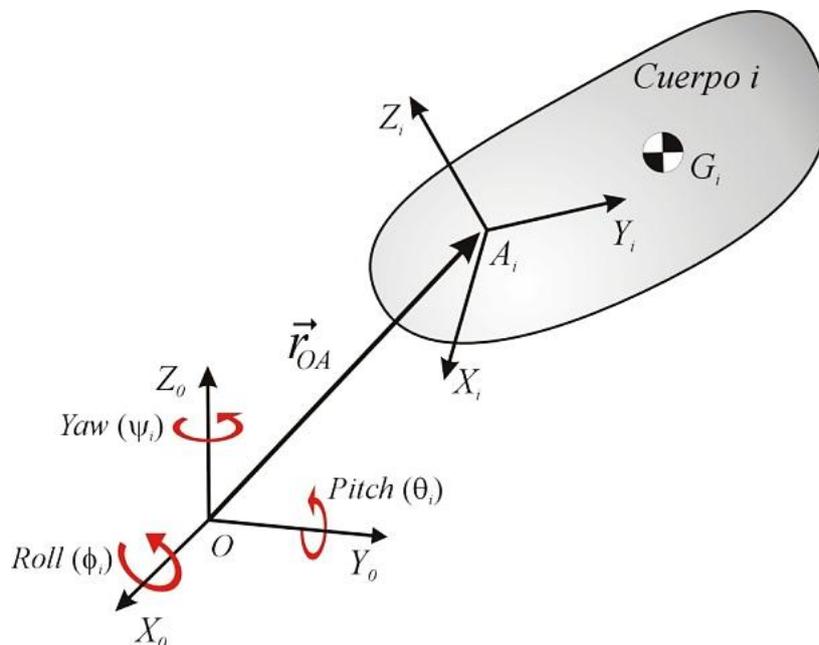


Figura 2.1. Sistema de referencia no centroidal

De entre las diversas convenciones de ángulos de Euler se empleará, por ser habitual en sistemas vehiculares, la denominada Giro-Cabeceo-Guiñada (Roll-Pitch-Yaw), que corresponde a giros sucesivos respecto a los ejes del sistema de referencia fijo $X_0-Y_0-Z_0$. Esta convención se puede interpretar también como una secuencia de rotaciones sucesivas respecto a los ejes del sistema de referencia móvil $Z_i-Y_i-X_i$. En la Figura 2.2 se muestra una convención de este tipo aplicada a un vehículo. En esta tesis se considerarán rotaciones respecto al sistema de referencia fijo (suelo), salvo que se indique expresamente lo contrario.

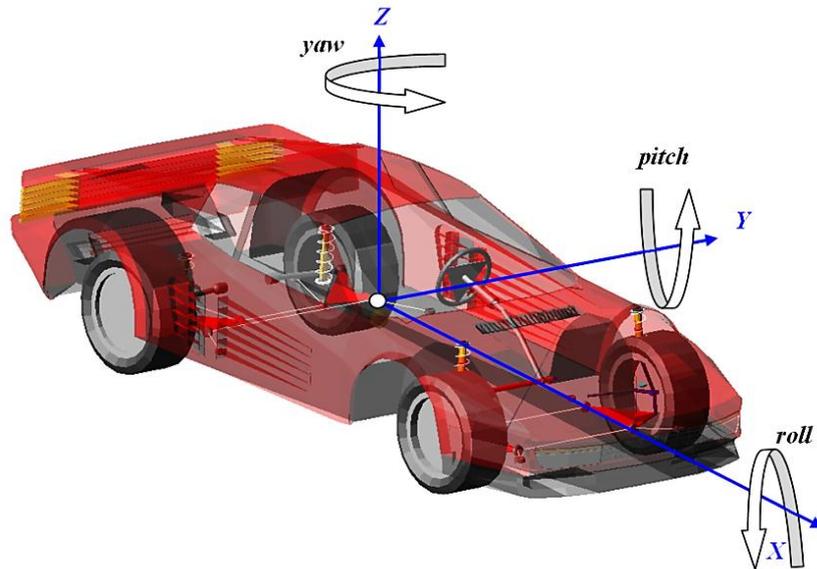


Figura 2.2. Definición de la convención de ángulos de Euler en vehículos.

De ese modo, por cada sólido rígido móvil, se tendrá un conjunto de seis coordenadas generalizadas

$$\vec{q}_i = [x_i \quad y_i \quad z_i \quad \phi_i \quad \theta_i \quad \psi_i]^T$$

Con estas convenciones, la relación entre la velocidad y aceleración angular absoluta del cuerpo y las derivadas temporales de los ángulos de Euler serán,

$$\vec{\omega}_i = G_i \cdot \vec{\xi}_i \quad \text{y} \quad \vec{\alpha}_i = \dot{G}_i \cdot \vec{\xi}_i + G_i \cdot \vec{\ddot{\xi}}_i$$

siendo

$$\dot{G}_i = \frac{\partial G_i}{\partial \dot{\phi}_i} \cdot \dot{\phi}_i + \frac{\partial G_i}{\partial \dot{\theta}_i} \cdot \dot{\theta}_i + \frac{\partial G_i}{\partial \dot{\psi}_i} \cdot \dot{\psi}_i$$

$$\vec{\xi}_i = [\dot{\phi}_i \quad \dot{\theta}_i \quad \dot{\psi}_i]^T$$

$$\vec{\xi}_i = [\ddot{\phi}_i \quad \ddot{\theta}_i \quad \ddot{\psi}_i]^T$$

La matriz G_i que relaciona las derivadas de las coordenadas generalizadas con las velocidades tiene una definición diferente según la convención de ángulos usada (fija o móvil). Así para cada caso se tiene,

$$G_{i_{m\acute{o}vil}} = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) \cdot \cos(\psi_i) & -\sin(\psi_i) & 0 \\ \cos(\theta_i) \cdot \sin(\psi_i) & \cos(\psi_i) & 0 \\ -\sin(\theta_i) & 0 & 1 \end{bmatrix}; G_{i_{fijo}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \sin(\theta_i) \\ 0 & \cos(\varphi_i) & -\sin(\varphi_i) \cos(\theta_i) \\ 0 & \sin(\varphi_i) & \cos(\varphi_i) \cos(\theta_i) \end{bmatrix}$$

Una vez seleccionadas las coordenadas generalizadas y la relación de sus derivadas con las velocidades y aceleraciones angulares de los elementos, se debe determinar la ecuación de movimiento que describa el funcionamiento del sistema.

2.2. Ecuaciones del movimiento en forma lineal: coordenadas dependientes

Sea un sistema mecánico modelizado mediante un conjunto de coordenadas generalizadas \vec{q} , supuestas en principio independientes. Por simplicidad se asume que el mecanismo está formado por una única barra móvil. La ecuación del movimiento se puede expresar en términos de coordenadas generalizadas del modo,

$$\vec{Q}_{in_i} + \vec{Q}_{ex_i} + \vec{Q}_{g_i} = 0 \quad (2.1)$$

donde $\vec{Q}_{in_i}, \vec{Q}_{ex_i}, \vec{Q}_{g_i}$ son respectivamente las fuerzas generalizadas de inercia, externas y gravitatorias actuantes sobre la barra i -ésima. Obviamente se

pueden añadir otro tipo de acciones como las de fricción, amortiguamiento viscoso, etc., siempre que se proyecten sobre el espacio de coordenadas generalizadas. Aislado en un lado aquellos términos de la ecuación del movimiento que dependen de parámetros inerciales, se tendrá que,

$$-\vec{Q}_{in_i} - \vec{Q}_{g_i} = \vec{Q}_{ex_i} \quad (2.2)$$

Las fuerzas generalizadas de inercia que se supondrían actuantes sobre la barra i -ésima, se obtendrán aplicando el Principio de los Trabajos Virtuales

$$\vec{Q}_{in_i} = -\left(\frac{\partial \vec{r}_{OG_i}}{\partial \vec{q}}\right)^T \cdot m_i \cdot \vec{a}_{G_i} - \left(\frac{\partial \vec{\xi}}{\partial \vec{q}}\right)^T \cdot \left(I_{G_i} \cdot \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \times (I_{G_i} \cdot \vec{\omega}_i)\right) \quad (2.3)$$

o lo que es lo mismo

$$\vec{Q}_{in_i} = -\left(\frac{\partial \vec{v}_{G_i}}{\partial \vec{q}}\right)^T \cdot m_i \cdot \vec{a}_{G_i} - \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}}\right)^T \cdot \left(I_{G_i} \cdot \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \times (I_{G_i} \cdot \vec{\omega}_i)\right) \quad (2.4)$$

con m_i la masa e I_{G_i} el tensor de inercia del cuerpo i -ésimo respecto a un sistema de referencia centroidal, \vec{v}_{G_i} y \vec{a}_{G_i} como los vectores de la velocidad y aceleración del centro de masa del elemento y $\vec{\omega}_i$ y $\vec{\alpha}_i$ las velocidades y aceleraciones angulares absolutas del cuerpo. Hay que indicar que todas las magnitudes vectoriales y tensoriales se asumirán expresadas en el sistema de referencia fijo, salvo que se indique lo contrario.

Teniendo en cuenta que

$$\vec{a}_{G_i} = \vec{a}_{A_i} + \vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} + \vec{\alpha}_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} \quad (2.5)$$

Para las matrices anti-simétricas definidas como

$$\vec{\omega}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\omega_{z_i} & \omega_{y_i} \\ \omega_{z_i} & 0 & -\omega_{x_i} \\ -\omega_{y_i} & \omega_{x_i} & 0 \end{bmatrix}, \quad \vec{\alpha}_i = \begin{bmatrix} 0 & -\alpha_{z_i} & \alpha_{y_i} \\ \alpha_{z_i} & 0 & -\alpha_{x_i} \\ -\alpha_{y_i} & \alpha_{x_i} & 0 \end{bmatrix},$$

se tendrá que:

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{in_i} = & -\left(\frac{\partial \vec{v}_{G_i}}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot \left(m_i \cdot \vec{a}_{A_i} + \tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} + \tilde{\alpha}_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}\right) + \\ & -\left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot \left(I_{G_i} \cdot \tilde{\alpha}_i + \tilde{\omega}_i \times \left(I_{G_i} \cdot \tilde{\omega}_i\right)\right) \end{aligned} \quad (2.6)$$

donde $\vec{r}_{A_i G_i}$ es el vector posición del centro de masa del cuerpo i -ésimo respecto al sistema de referencia local definido en el sistema global. Ahora, dado que

$$\vec{v}_{G_i} = \vec{v}_{A_i} + \tilde{\omega}_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} \quad (2.7)$$

agrupando términos en m_i y $m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}$, se tendrá que

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot m_i \cdot \vec{a}_{A_i} + \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \times \vec{r}_{A_i G_i} \cdot m_i \cdot \vec{a}_{A_i} + \left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot \left(\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}\right) + \\ & + \left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot \left(\tilde{\alpha}_i \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}\right) = \\ = & \left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot \left(m_i \cdot \vec{a}_{A_i} + \left(\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i + \tilde{\alpha}_i\right) \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}\right) + \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \times \vec{r}_{A_i G_i} \cdot m_i \cdot \vec{a}_{A_i}. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Para los restantes términos se tiene

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \times \vec{r}_{A_i G_i} \cdot \left(\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i\right) \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} + \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot \left(\tilde{\omega}_i \times I_{G_i} \cdot \tilde{\omega}_i\right) + \\ & + \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \times \vec{r}_{A_i G_i} \cdot \left(\tilde{\alpha}_i \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}\right) + \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot I_{G_i} \cdot \tilde{\alpha}_i = \\ = & \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{\vec{q}}}\right)^T \cdot \left(I_{G_i} + m_i \cdot \left(1_{3 \times 3} \cdot \left(\vec{r}_{A_i G_i}\right)^T \cdot \vec{r}_{A_i G_i} - \vec{r}_{A_i G_i} \cdot \left(\vec{r}_{A_i G_i}\right)^T\right)\right) \cdot \tilde{\alpha}_i \end{aligned} \quad (2.9)$$

donde $1_{3 \times 3}$ corresponde a la matriz identidad de rango 3. Recordando ahora el teorema de los ejes paralelos, la expresión (2.9) quedará como

$$\begin{aligned} & \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{r}_{A_i G_i} \right)^T \cdot (\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_i) \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} + \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (\vec{\omega}_i \times I_{G_i} \cdot \vec{\omega}_i) + \\ & + \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{r}_{A_i G_i} \right)^T \cdot (\vec{\alpha}_i \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}) + \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot I_{G_i} \cdot \vec{\alpha}_i = \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot I_{A_i} \cdot \vec{\alpha}_i \end{aligned} \quad (2.10)$$

siendo \vec{I}_{A_i} el tensor de inercia respecto al sistema de referencia local. Del mismo modo, se tendrá que los términos restantes de (2.6), se podrán expresar como

$$\left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{r}_{A_i G_i} \right)^T \cdot (\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_i) \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} + \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (\vec{\omega}_i \times I_{G_i} \cdot \vec{\omega}_i) = \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (\vec{\omega}_i \times I_{A_i} \cdot \vec{\omega}_i) \quad (2.11)$$

Sustituyendo (2.9), (2.10) y (2.11) en (2.6), se tiene que

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{m_i} = & - \left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (m_i \cdot \vec{a}_{A_i} + (\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_i + \vec{\alpha}_i) \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}) + \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{r}_{A_i G_i} \right)^T \cdot m_i \cdot \vec{a}_{A_i} - \\ & - \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (I_{A_i} \cdot \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \times I_{A_i} \cdot \vec{\omega}_i) \end{aligned} \quad (2.12)$$

Gracias a que $\left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{r}_{A_i G_i} \right)^T \cdot m_i \cdot \vec{a}_{A_i} = - \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{a}_{A_i} \right)^T \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}$, la ecuación (2.12) puede escribirse como

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{m_i} = & - \left\{ \left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (m_i \cdot \vec{a}_{A_i} + (\vec{\omega}_i \cdot \vec{\omega}_i + \vec{\alpha}_i) \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}) - \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{a}_{A_i} \right)^T \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \vec{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (I_{A_i} \cdot \vec{\alpha}_i + \vec{\omega}_i \times I_{A_i} \cdot \vec{\omega}_i) \right\} \end{aligned} \quad (2.13)$$

para finalmente obtener

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{in_i} = & - \left\{ \left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot m_i \cdot \vec{a}_{A_i} + \left(\left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i + \tilde{\alpha}_i) - \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{a}_{A_i} \right)^T \right) \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (I_{A_i} \cdot \tilde{\alpha}_i + \tilde{\omega}_i \times I_{A_i} \cdot \tilde{\omega}_i) \right\} \end{aligned} \quad (2.14)$$

donde se puede considerar que $I_{A_i} \cdot \tilde{\alpha}_i + \tilde{\omega}_i \times (I_{A_i} \cdot \tilde{\omega}_i) = (\hat{\alpha}_i + \tilde{\omega}_i \cdot \hat{\omega}_i) \cdot \vec{I}_{A_i}$; siendo $\vec{I}_{A_i} = [I_{xx_i} \ I_{xy_i} \ I_{xz_i} \ I_{yy_i} \ I_{yz_i} \ I_{zz_i}]^T$ el vector que agrupa los momentos y productos de inercia de la barra i -ésima respecto a un sistema de referencia paralelo al fijo pero con origen en el punto A_i .

Con todo ello, la fuerza generalizada de inercia será

$$\begin{aligned} \vec{Q}_{in_i} = & - \left\{ \left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot \vec{a}_{A_i} \cdot m_i + \left(\left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i + \tilde{\alpha}_i) - \bar{\vec{a}}_{A_i} \right) \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \right)^T \cdot (\hat{\alpha}_i + \tilde{\omega}_i \cdot \hat{\omega}_i) \cdot \vec{I}_{A_i} \right\} \end{aligned} \quad (2.15)$$

Con la definición de los operadores

$$\begin{aligned} \bar{\vec{a}}_{A_i} = \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \vec{q}} \times \vec{a}_{A_i} \right) &= \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \text{---} \\ -(\tilde{\vec{a}}_{A_i} \cdot \vec{G}_i)^T \end{bmatrix}, \quad \hat{\alpha}_i = \begin{bmatrix} \alpha_{x_i} & \alpha_{y_i} & \alpha_{z_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_{x_i} & 0 & \alpha_{y_i} & \alpha_{z_i} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{x_i} & 0 & \alpha_{y_i} & \alpha_{z_i} \end{bmatrix} \text{ y} \\ \hat{\omega}_i &= \begin{bmatrix} \omega_{x_i} & \omega_{y_i} & \omega_{z_i} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \omega_{x_i} & 0 & \omega_{y_i} & \omega_{z_i} & 0 \\ 0 & 0 & \omega_{x_i} & 0 & \omega_{y_i} & \omega_{z_i} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Si ahora se quieren emplear parámetros inerciales locales a las barras, la expresión (2.15), quedará del modo

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{in_i} = & - \left\{ \left(\frac{\partial \bar{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot \bar{a}_{A_i} \cdot m_i + \left(\left(\frac{\partial \bar{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot (\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i + \tilde{\alpha}_i) - \bar{a}_{A_i} \right) \cdot {}^0R_i \cdot m_i \cdot {}^i\bar{r}_{A_i G_i} + \right. \\ & \left. + \left(\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot {}^0R_i \cdot ({}^i\hat{\alpha}_i + {}^i\tilde{\omega}_i \cdot {}^i\hat{\omega}_i) \cdot {}^i\bar{I}_{A_i} \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

siendo 0R_i la matriz de rotación del sistema de referencia i respecto al sistema de referencia global.

Además, es inmediato que para el tipo de coordenadas consideradas

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \bar{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right) &= [1_{3 \times 3} \quad | \quad 0_{3 \times 3}] \\ \left(\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}} \right) &= G_i \cdot [0_{3 \times 3} \quad | \quad 1_{3 \times 3}] = [0_{3 \times 3} \quad | \quad G_i] \end{aligned} \quad (2.17)$$

En forma matricial, las fuerzas de inercia generalizadas correspondientes a la barra i -ésima, se determinan como se expresa en (2.18).

$$\begin{aligned} \bar{Q}_{in_i} = & - \left[\left(\frac{\partial \bar{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot \bar{a}_{A_i} \quad \middle| \quad \left(\left(\frac{\partial \bar{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot (\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i + \tilde{\alpha}_i) - \bar{a}_{A_i} \right) \cdot {}^0R_i \quad \middle| \quad \dots \right. \\ & \left. \dots \quad \middle| \quad \left(\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot {}^0R_i \cdot ({}^i\hat{\alpha}_i + {}^i\tilde{\omega}_i \cdot {}^i\hat{\omega}_i) \right] \cdot \begin{bmatrix} m_i \\ m_i \cdot \bar{r}_{A_i G_i} \\ \bar{I}_{A_i} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Las fuerzas generalizadas gravitatorias se obtienen a partir de

$$\bar{Q}_{g_i} = \left(\frac{\partial \bar{v}_{G_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot (-m_i \cdot \bar{g}) = \left(\frac{\partial \bar{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot (-\bar{g}) \cdot m_i - \left(\frac{\partial \bar{\omega}_i}{\partial \dot{q}} \times -\bar{g} \right)^T \cdot m_i \cdot \bar{r}_{A_i G_i}. \quad (2.19)$$

Agregando este término a la expresión (2.2), y considerando definiciones respecto al sistema de referencia local a la barra i -ésima, se tiene que

$$\begin{aligned}
-\vec{Q}_{in_i} - \vec{Q}_{g_i} = & \left[\left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot (\vec{a}_{A_i} + \vec{g}) \mid \left(\left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot (\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i + \tilde{\alpha}_i) - (\vec{a}_{A_i} + \vec{g}) \right) \cdot {}^0R_i \mid \dots \right. \\
& \left. \dots \mid \left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot {}^0R_i \cdot ({}^i\hat{\alpha}_i + {}^i\tilde{\omega}_i \cdot {}^i\hat{\omega}_i) \right] \cdot \begin{bmatrix} m_i \\ \dots \\ m_i \cdot {}^i\vec{r}_{A_i G_i} \\ \dots \\ {}^i\vec{I}_{A_i} \end{bmatrix}. \tag{2.20}
\end{aligned}$$

Haciendo $\overline{\overline{(\vec{a}_{A_i} + \vec{g})}} = \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{3 \times 3} \\ \dots \\ -\left((\vec{a}_{A_i} + \vec{g}) \cdot G_i \right)^T \end{bmatrix}$, las fuerzas generalizadas

correspondientes a un elemento se pueden escribir como

$$\vec{Q}_{ex_i} = -\vec{Q}_{in_i} - \vec{Q}_{g_i} = K_{rb_i} \cdot \begin{bmatrix} m_i \\ \dots \\ m_i \cdot {}^i\vec{r}_{A_i G_i} \\ \dots \\ {}^i\vec{I}_{A_i} \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

siendo,

$$\begin{aligned}
K_{rb_i} = & \left[\underbrace{\left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot (\vec{a}_{A_i} + \vec{g})}_{6 \times 1} \mid \underbrace{\left(\left(\frac{\partial \vec{v}_{A_i}}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot (\tilde{\omega}_i \cdot \tilde{\omega}_i + \tilde{\alpha}_i) - \overline{\overline{(\vec{a}_{A_i} + \vec{g})}} \right) \cdot {}^0R_i}_{6 \times 3} \mid \dots \right. \\
& \left. \dots \mid \underbrace{\left(\frac{\partial \tilde{\omega}_i}{\partial \dot{q}} \right)^T \cdot {}^0R_i \cdot ({}^i\hat{\alpha}_i + {}^i\tilde{\omega}_i \cdot {}^i\hat{\omega}_i)}_{6 \times 6} \right]_{6 \times 10} \tag{2.22}
\end{aligned}$$

Extendiendo lo anterior a las n barras móviles del mecanismo, se tendrá que

$$\vec{Q}_{ex} = -\vec{Q}_{in} - \vec{Q}_g = \begin{bmatrix} K_{rb_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & K_{rb_2} & & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \cdots & K_{rb_n} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_{rb_1} \\ \vec{\Phi}_{rb_2} \\ \vdots \\ \vec{\Phi}_{rb_n} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

donde $\vec{\Phi}_{rb_i} = \begin{bmatrix} m_i \\ m_i \cdot {}^i\vec{r}_{A_i G_i} \\ {}^i\vec{I}_{A_i} \end{bmatrix}_{10 \times 1}$ corresponde con los parámetros inerciales de la barra i -ésima a identificar.

Cada matriz K_{rb_i} es de dimensión 6×10 . Nótese que $\vec{\omega}_i = {}^0R_i \cdot {}^i\vec{\omega}_i$, lo que se cumple también para la aceleración angular.

La expresión (2.23) se puede abreviar como,

$$\vec{Q}_{ex} = K \cdot \vec{\Phi} \quad (2.24)$$

donde el vector $\vec{\Phi}$ agrupa a todos los parámetros inerciales de todos los sólidos rígidos del sistema.

2.3. Otros parámetros dinámicos: Coeficientes de rigidez y amortiguamiento

En algunos sistemas mecánicos puede ser necesario estimar también otros tipos de parámetros dinámicos. Tal es el caso de coeficientes de rigidez y amortiguamiento viscoso presentes en las suspensiones vehiculares. La inclusión de estos elementos en el modelo dinámico cambia la expresión (2.1), que tomará ahora la forma, siempre para la barra i -ésima,

$$-\vec{Q}_{in_i} - \vec{Q}_{g_i} - \vec{Q}_{m_i} - \vec{Q}_{a_i} = \vec{Q}_{ex_i} \quad (2.25)$$

donde \vec{Q}_{m_i} corresponde con la fuerza generalizada elástica del muelle y \vec{Q}_{a_i} con la fuerza generalizada del amortiguador. En ambos casos, se asumen comportamientos lineales respecto a los coeficientes a identificar, de manera que su inclusión en el vector de parámetros se realiza de forma directa. A partir de la función potencial elástica y la función de disipación de Rayleigh, se tiene que las fuerzas generalizadas vendrán dadas por

$$\vec{Q}_{m_i} = \frac{\partial V_E}{\partial q} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{2} (s - s_0)^2 \cdot k \right)}{\partial q},$$

$$\vec{Q}_{a_i} = \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = -\frac{\partial \left(\frac{1}{2} \mu \cdot \dot{s}_{rel}^2 \right)}{\partial \dot{q}},$$
(2.26)

donde k y μ son los coeficientes de rigidez y amortiguamiento, s es la longitud actual del muelle, s_0 es su longitud libre y \dot{s}_{rel} es la velocidad relativa experimentada entre los extremos el amortiguador que es función de las derivadas de las coordenadas generalizadas, Figura 2.3.

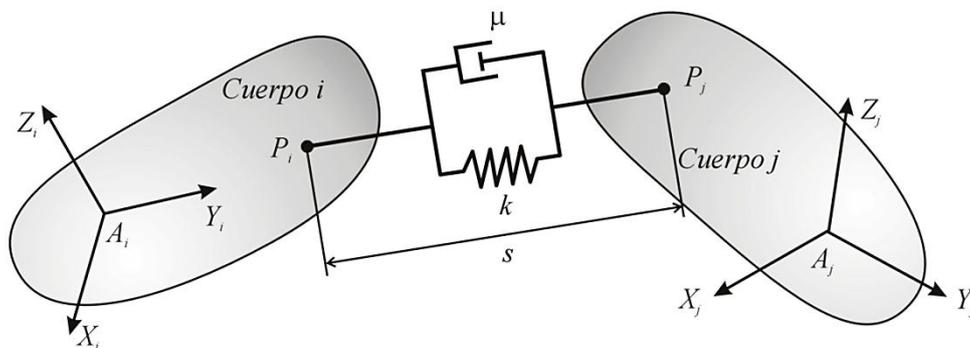


Figura 2.3. Sistema muelle – amortiguador.

Incluyendo las expresiones (2.26) y considerando la nomenclatura aplicada en la construcción de (2.24) se tendrá

$$\vec{Q}_{ex_i} = \begin{bmatrix} K_{rb_i} & K_{m_i} & K_{a_i} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_{rb_i} \\ k \\ \mu \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

con

$$K_{m_i} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial (s - s_0)^2}{\partial \vec{q}_i} \\ \vdots \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad K_{a_i} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \frac{\partial (\dot{s}_{rel}^2)}{\partial \dot{\vec{q}}_i} \\ \vdots \end{bmatrix}. \quad (2.28)$$

El modelo planteado en (2.27) puede escribirse en la misma forma de (2.24), teniendo presente que la matriz K y el vector de parámetros $\vec{\Phi}$ estará formado tanto por los términos inerciales, como también por los correspondientes al muelle y al amortiguador.

2.4. Ecuaciones de movimiento en forma lineal: coordenadas independientes

Sean F los grados de libertad del mecanismo modelizado mediante N coordenadas, ahora dependientes. Las ecuaciones de restricción que las relacionan entre sí asumiendo que no hay restricciones redundantes serán $M = N - F$. Dado el tipo de coordenadas, las ecuaciones de restricción se obtendrán a partir del tipo de par cinemático que una cada pareja de elementos. Sea el conjunto de ecuaciones de restricción

$$\vec{C} = \vec{0}$$

La ecuación (2.24) ahora se tendrá que expresar como

$$K \cdot \vec{\Phi} = \vec{Q}_{ex} - (C_q)^T \cdot \vec{\lambda} \quad (2.29)$$

donde $(C_q)^T \cdot \vec{\lambda}$ corresponde a las fuerzas internas (o de enlace) generalizadas. C_q es la matriz Jacobiana de las restricciones y $\vec{\lambda}$ el vector de multiplicadores indeterminados de Lagrange.

No es fácil obtener información acerca de las fuerzas internas que aparecen en los enlaces durante el movimiento del mecanismo, por lo que se requiere eliminar esas fuerzas internas generalizadas en la expresión (2.29). En el campo de la Dinámica de Multicuerpos se han propuesto una variedad de procedimientos que permiten esa eliminación. Estos procedimientos se pueden clasificar en dos grandes grupos:

- Partición de coordenadas
- Subespacio de movimientos admisibles

Se puede considerar que el método de partición de coordenadas, propuesto por Wehage y Hang [85], no pretende tanto la eliminación de las fuerzas internas generalizadas como la expresión de las ecuaciones del movimiento del sistema mecánico en términos de un conjunto mínimo de coordenadas, sin bien, en la práctica el resultado es la eliminación de dichas fuerzas internas generalizadas. En el área específica de la identificación de parámetros, Shome *et al* [78] utilizan esta metodología en la identificación de parámetros dinámicos de un mecanismo espacial de cuatro barras y, Chen y Beale [21] lo aplican en una suspensión tipo MacPherson.

Los procedimientos que se basan en las propiedades del subespacio de movimientos admisibles, consideran que las fuerzas internas son ortogonales a los movimientos admisibles en los pares cinemáticos, por lo que será posible su eliminación. Se obtendrá un complemento ortogonal o matriz de proyección de velocidades. En definitiva, en la proyección de velocidades, dada la expresión (2.29), se trata de obtener una matriz R^* tal que verifique que

$$\vec{\dot{q}} = R^* \cdot \vec{\dot{q}}^i \quad (2.30)$$

siendo $\vec{\dot{q}}^i$ el vector de velocidades independientes. La matriz R^* tiene propiedades tal que se puede verificar que

$$C_q \cdot R^* = 0 \quad (2.31)$$

lo que servirá para eliminar en (2.29) las fuerzas internas generalizadas.

El método de partición de coordenadas requiere escoger un conjunto de coordenadas dependientes e independientes desde la matriz jacobiana de restricciones. El único requisito en esta partición es que la submatriz del jacobiano correspondiente a las coordenadas dependientes sea invertible, situación que puede ocurrir con varios conjuntos de coordenadas generalizadas. Considerando que las matrices jacobianas de restricción obtenidas en ciertos sistemas mecánicos de baja movilidad presentan un nivel de condicionamiento pobre, cualquier consideración de sólo inversión de la submatriz jacobiana dependiente no es una garantía de solución adecuada. Es por ello que en este trabajo se opta por los métodos de proyección de velocidades en los que se logran obtener sistemas mejor condicionados. Algunos autores como Díaz – Rodríguez *et al.* [24] han evaluado esta situación, comparando el condicionamiento de la matriz de observación para un robot paralelo cuando se utiliza partición de coordenadas y complemento ortogonal, encontrando que, efectivamente, como sugiere García de Jalón [34], el método de proyección genera un sistema mejor condicionado.

De los diversos procedimientos que se han propuesto para la obtención de la matriz de proyección de velocidades R^* , se va a emplear un método de proyección basado en la Descomposición en Valores Singulares, SVD. Si bien este método es numéricamente más costoso comparado con las Descomposición QR y la Triangularización de Gauss, referencia mayor estabilidad en problemas con mal condicionamiento [34], y puesto que el proceso de identificación planteado en este trabajo es realizado off-line, el costo computacional no genera problema alguno. En el procedimiento, se descompone en valores singulares el Jacobiano de las restricciones,

$$C_q = U \cdot \Sigma \cdot V^T \quad (2.32)$$

y se eligen las últimas F filas de la matriz V^T , de modo que se tiene

$$V^T = \begin{bmatrix} V^d \\ \text{---} \\ V^i \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Se designa

$$B = V^i \quad (2.34)$$

y se forma

$$P = \begin{bmatrix} C_q \\ \text{---} \\ B \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

que debe de ser de *rango completo*, dado que se va a invertir. Se seleccionarán las filas que constituyen B de modo que se garantice la invertibilidad. En este caso se tendrá la siguiente partición

$$P^{-1} = [H \quad | \quad R] \quad (2.36)$$

y se deberá cumplir la ecuación (2.31). Evidentemente P , depende de la posición, por lo que las condiciones de invertibilidad deberán ser comprobadas en cada configuración del mecanismo. Con todo, la literatura indica que B suele permanecer constante durante un largo rango del movimiento del mecanismo.

Una vez obtenida la matriz de proyección R^* , se pueden multiplicar ambos términos de la ecuación del movimiento (2.29), teniendo que

$$R^{*T} \cdot K \cdot \vec{\Phi} = R^{*T} \cdot \vec{Q}_{ex} - R^{*T} \cdot C_q^T \cdot \vec{\lambda} \quad (2.37)$$

que será

$$R^{*T} \cdot K \cdot \vec{\Phi} = R^{*T} \cdot \vec{Q}_{ex} \quad (2.38)$$

Nótese que se obtendrán tantas ecuaciones escalares como grados de libertad tenga el sistema y que las fuerzas externas generalizadas serán las

asociadas a dichos grados de libertad, por lo que en principio se podrán determinar experimentalmente. Como cada elemento incorpora 10 parámetros inerciales al modelo, se tendrá en total $10 \cdot N$ parámetros inerciales incógnitas, siendo N el número de elementos del sistema, más los correspondientes a los coeficientes del sistema muelle-amortiguador. Por lo tanto, la expresión (2.38) corresponde a un sistema lineal no determinado. La forma de resolver este problema es la inclusión de ecuaciones correspondientes a diferentes posturas del sistema mecánico para obtener un sistema numéricamente sobre-determinado. A la matriz obtenida de esta manera se le denomina *Matriz de Observación* del sistema y el modelo dinámico expresado en forma lineal respecto a los parámetros puede expresarse como,

$$W_{n \times m} \cdot \ddot{\Phi}_{m \times 1} = \ddot{\tau}_{n \times 1} \quad (2.39)$$

siendo m el número de parámetros dinámicos y n el número de configuraciones multiplicado por los grados de libertad del sistema mecánico.

2.5. Resumen

En el presente capítulo se ha presentado la elaboración del modelo dinámico de un sistema mecánico de cadena cinemática cerrada empleando coordenadas cartesianas o de punto de referencia. Los sistemas de referencia están ubicados fuera del centro de masa, con lo cual el modelo se puede expresar de forma lineal con respecto a todos los parámetros inerciales. La linealidad de los parámetros a identificar (parámetros inerciales y coeficientes de rigidez y amortiguamiento), junto con el tipo de coordenadas empleado en la modelización, permite generar de un modo sistemático la ecuación del movimiento del sistema en forma lineal respecto a los parámetros a identificar. Las fuerzas generalizadas internas, que aparecen cuando se considera la dependencia del sistema de coordenadas, se eliminan mediante un complemento ortogonal. Dado que finalmente el número de ecuaciones disponible será, en los sistemas mecánicos considerados, muy inferior al de parámetros a identificar, se consideran diversas configuraciones sobre las que se planean las ecuaciones antes mencionadas. De ese modo se obtiene un sistema lineal sobre-determinado que podría ser resuelto mediante procedimientos tales como el método de los Mínimos Cuadrados.

Capítulo 3

Problemática en la aplicación de las técnicas numéricas de identificación de parámetros a mecanismos de baja movilidad

En este capítulo se analizan las dificultades específicas que presentan las técnicas convencionales de identificación de parámetros cuando se aplican a mecanismos de baja movilidad.

En primer lugar, se presentan las técnicas de identificación aplicadas con éxito en el campo de la robótica y, que en esencia, consisten en obtener una matriz de observación que no solo sea de rango completo, sino que esté bien condicionada numéricamente. Para conseguir este propósito, los métodos desarrollados hasta ahora, emplean fundamentalmente dos herramientas: una vez eliminados aquellos parámetros físicos con nula o muy escasa influencia en el comportamiento dinámico del sistema, se analizan las relaciones lineales entre los restantes para así conseguir un conjunto reducido de parámetros, denominados parámetros base, que den lugar a una matriz de observación de rango completo. La segunda herramienta que se aplica es la optimización de las trayectorias a partir de las que se obtienen los datos que permiten construir la matriz de observación y el vector de fuerzas generalizadas. Se han propuesto diversos criterios de optimización, pero el criterio utilizado en esta tesis se basa en obtener un número de condición de la matriz de observación lo suficientemente bajo como para que el proceso de

identificación sea viable en presencia de errores en las medidas experimentales.

En este capítulo, se ponen de manifiesto una serie de deficiencias que hacen inviable el proceso de identificación de parámetros tal y como se aplica habitualmente sobre mecanismos de baja movilidad. Estas dificultades se pueden resumir en:

- Dificultad a la hora de determinar de una forma inequívoca el rango de la matriz de observación.
- Dificultad a la hora de establecer las relaciones lineales entre los parámetros dinámicos.
- A pesar de la aplicación de técnicas de optimización de trayectorias, el número de condición de la matriz de observación correspondiente al modelo en parámetros base, continua siendo tan elevado que hace impracticable la identificación.

Además de enfatizar estos problemas, en este capítulo se apuntarán las soluciones que se desarrollarán en los siguientes capítulos.

3.1. Procedimiento estándar de cálculo de las expresiones de los parámetros base

Gracias a la linealidad que presentan los parámetros dinámicos en el modelo dinámico para identificación, es posible realizar la estimación del vector de parámetros $\vec{\Phi}$ mediante metodologías numéricas como el método de mínimos cuadrados. La utilización de estos métodos requiere de una matriz de observación W de rango completo, situación que no se presenta en el modelo descrito en el capítulo anterior. Esta deficiencia en rango se debe a que algunos parámetros dinámicos no tienen aportación a las fuerzas generalizadas del sistema, y los restantes la tienen pero no de manera independiente, sino como combinaciones lineales, por lo que existirá dependencia entre las columnas de la matriz de observación.

Para determinar los parámetros que no tienen aportación en las fuerzas generalizadas, es suficiente con analizar las columnas de la matriz de

observación. La ubicación de los sistemas de referencia locales sobre los cuales se definen ciertos parámetros inerciales como centros de masa y tensores de inercia, y los tipos de uniones cinemáticas que restringen movimientos relativos entre los cuerpos del sistema, hacen que algunos parámetros inerciales no aparezcan en las ecuaciones de movimiento. Las columnas de la matriz de observación asociadas a estos parámetros serán nulas, entendiéndose como nula la columna cuyas componentes son cero. Como en el cálculo de la matriz W se han realizado operaciones matriciales que incluyen redondeos numéricos, las componentes de la matriz W que deberían ser nulas, pueden tener valores muy pequeños pero sin llegar a ser cero. Es necesario entonces definir un criterio que establezca cuando una columna es nula. El valor 1-norma o la norma euclidiana (2-norma) pueden usarse para definir la magnitud de la columna. Esta norma deberá ser menor a una tolerancia especificada para ser considerada nula. La primera modificación en el modelo, será por tanto, la eliminación tanto de las columnas nulas de la matriz de observación, como de los parámetros asociados a ellas en el vector de parámetros dinámicos. Estos parámetros dinámicos no podrán ser identificados.

Respecto a las dependencias lineales entre las columnas de la matriz de observación, estas deben ser determinadas para obtener un sistema lineal sobre-determinado de rango completo que se denomina *modelo para identificación en parámetros base*. Estos parámetros base corresponderán a combinaciones lineales de los parámetros dinámicos originales.

Dentro de los procedimientos que permiten obtener las expresiones de conjuntos de parámetros base se tienen métodos de carácter numérico y métodos simbólicos. Los métodos numéricos son los más ampliamente usados en identificación de parámetros dinámicos gracias a la simplicidad de su ejecución.

A continuación se expone uno de los métodos numéricos basados en la Descomposición en Valores Singulares (SVD) y se resumen algunos métodos simbólicos existentes.

3.1.1. Método Numérico

Dentro de los principales métodos numéricos referenciados en los procesos de identificación se encuentran la Descomposición en Valores Singulares (SVD) y la Descomposición QR, propuestos por Gautier [35]. Estos métodos han sido ampliamente utilizados en el campo de la robótica. Es así como Calafiore *et al.* [17] utiliza SVD para realizar estimación de parámetros en robots seriales, Gautier *et al.* [35] utiliza ambos procedimientos para determinar los parámetros base a un robot serial PUMA con seis grados de libertad. Más recientemente Farhat *et al.* [32] y Díaz *et al.* [25] utilizan también la descomposición SVD en la identificación de robots paralelos tipo 3RPS y 3PRS, y Guegan *et al.* [43] realizan identificación de parámetros sobre un robot orthoglide a través de la Descomposición QR. En el campo de los mecanismos, Chen y Beale [21] usan también la descomposición SVD en la determinación de los parámetros base de una suspensión vehicular y Venture *et al* [84] aplican descomposición QR en la identificación de parámetros dinámicos de un vehículo comercial.

A continuación se expone brevemente el procedimiento de obtención de un modelo para identificación en parámetros base a partir de la Descomposición SVD, de manera que se cumpla que $W \cdot \bar{\Phi} = W_{base} \bar{\Phi}_{base}$.

La matriz de observación W , en la que ya se han eliminado sus columnas nulas, se descompone como,

$$W_{n \times m} = U_{n \times n} \cdot S_{n \times m} \cdot V_{m \times m}^T, \quad (3.1)$$

siendo U y V matrices ortogonales y S una matriz que contiene los valores singulares s_1, s_2, \dots, s_m de W .

La matriz V se puede dividir como,

$$V_{m \times m} = \begin{bmatrix} V1_{m \times r} & V2_{m \times (m-r)} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

siendo r el rango de la matriz, donde $m \geq r$. Si el sistema es de rango deficiente se tendrán $(m - r)$ valores singulares nulos,

$$W = U_{n \times n} \begin{bmatrix} S_{r \times r} & 0_{r \times (m-r)} \\ 0_{(m-r) \times r} & 0_{(m-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V1_{m \times r}^T \\ V2_{m \times (m-r)}^T \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

de donde se tiene que,

$$W \cdot V2 = 0 \quad (3.4)$$

Como muestra la anterior expresión, la matriz $V2$ define las relaciones de dependencia entre las columnas de la matriz de observación. Una columna independiente en W corresponde a una fila nula en $V2$. Reordenando las filas de $V2$ de tal manera que $V22$ sea de rango completo se determina una matriz de permutación P ,

$$P^T \cdot V2 = \begin{bmatrix} V21_{r \times (m-r)} \\ V22_{(m-r) \times (m-r)} \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

La determinación de $V22$ no es única y por lo tanto tampoco lo es la matriz de permutación. En procesos de identificación de parámetros para robots serie o paralelos se suele determinar la dependencia seleccionando filas a partir de la primera o última fila de la matriz $V2$, siempre que estas incrementen el rango de la matriz $V22$ hasta que su rango sea completo $(m-r)$. Cada fila añadida está asociada a un parámetro dependiente. El rango r de la matriz de observación W se corresponde con el número de valores singulares no nulos. Se consideran nulos aquellos valores singulares menores a una tolerancia definida como $S_{(1,1)} \times \varepsilon \times r$ [32], siendo ε la precisión de la máquina.

Las primeras r columnas de la matriz de observación permutada $W1$ son independientes,

$$W \cdot P = \begin{bmatrix} W1_{n \times r} & W2_{n \times (m-r)} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Reemplazando (3.5) y (3.6) en la expresión (3.4) se obtiene que,

$$W1 \cdot V21 + W2 \cdot V22 = 0 \quad (3.7)$$

Por tanto,

$$W2 = W1 \cdot \beta \quad (3.8)$$

siendo $\beta = -V21 \cdot V22^{-1}$.

Si \vec{X} es un vector solución del sistema expresado por (2.39),

$$W \cdot \vec{\Phi} = W \cdot P \cdot P^T \cdot \vec{\Phi} = W \cdot P \cdot P^T \cdot \vec{X} \quad (3.9)$$

Utilizando la expresión (3.8),

$$W1 \cdot \begin{bmatrix} I_{r \times r} & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = W1 \cdot \begin{bmatrix} I_{r \times r} & \beta \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{X}_1 \\ \vec{X}_2 \end{bmatrix} \quad (3.10)$$

con $I_{r \times r}$ como matriz identidad de tamaño r .

La solución para el vector \vec{X}_1 se obtiene como,

$$\vec{X}_1 = \vec{\Phi}_1 + \beta \cdot (\vec{\Phi}_2 - \vec{X}_2) \quad (3.11)$$

Existe un número infinito de soluciones, según los valores asignados por \vec{X}_2 , pero si se hace $\vec{X}_2 = 0$ se obtiene la solución para parámetros base,

$$\vec{\Phi}_{base} = \begin{bmatrix} I_{r \times r} & \beta_{r \times (m-r)} \end{bmatrix} \cdot P^T \cdot \vec{\Phi} \quad (3.12a)$$

o lo que es lo mismo,

$$\vec{\Phi}_{base} = \vec{\Phi}_1 + \beta \cdot \vec{\Phi}_2 \quad (3.12b)$$

donde el vector de parámetros $\vec{\Phi}_1$ corresponde a aquellos parámetros dinámicos que llamamos independientes y $\vec{\Phi}_2$ a los dependientes.

Por último, el modelo dinámico en términos de parámetros base, puede representarse por la expresión,

$$W1 \cdot \vec{\Phi}_{base} = \vec{\tau} \quad (3.13)$$

en lo sucesivo la matriz $W1$ será denotada como W_{base} .

3.1.2. Métodos simbólicos

Entre los métodos existentes para la determinación de las expresiones de los parámetros base se tiene un procedimiento iterativo derivado del análisis energético. Gautier y Khalil [37] y [38] lo utilizan en procesos de identificación de robots serie simple y, Khalil y Kleinfinger [53] en robots de estructura ramificada. La determinación de la dependencia lineal de los parámetros inerciales y las relaciones entre los parámetros dependientes e independientes se obtienen partiendo de la derivación de la energía cinética y potencial del sistema con respecto a los parámetros de inercia. Los autores citados terminan por generalizar estas relaciones de acuerdo al tipo de uniones cinemáticas presentes. Sin embargo, dicha generalización alcanza únicamente robots con pares de rotación y traslación. En Khalil y Kleinfinger se advierte un aumento significativo de relaciones, que corresponderían a diferentes conjuntos de parámetros base, cuando se cuenta con sistemas con tres o más grados de libertad.

Otros autores como Mayeda *et al.* [65] presentan un procedimiento para la obtención de un conjunto de parámetros base de un manipulador serie, caracterizado por disponer de pares de revolución y prismáticos cuyos ejes son paralelos y perpendiculares entre sí. La metodología se basa en agrupar ciertos parámetros inerciales de un mismo elemento (agrupación predeterminada) según la dirección del par cinemático del elemento en la topología del manipulador. El hecho de que los ejes de las uniones cinemáticas no puedan tener cualquier dirección, hace que éste método no pueda generalizarse.

En cadenas cinemáticas cerradas, las dependencias lineales de parámetros por simple inspección de la topología no constituyen una tarea trivial. En robots paralelos, los trabajos de Bennis *et al.* [12] y Khalil y Bennis [50] presentan un método para determinar los parámetros base simbólicos, partiendo del análisis energético, sin necesidad de resolver las ecuaciones de lazo cerrado del sistema. Sin embargo, no se logra generalizar la metodología, pues se desarrolla únicamente a robots de cadena cerrada con juntas cinemáticas del tipo rotacional y traslacional.

Otro método, que puede ser aplicado a cadenas cinemáticas cerradas para obtener un conjunto de parámetros base es desarrollado por Iriarte [46] y

Díaz – Rodríguez [22], basado en el análisis dimensional de los valores que el método numérico proporciona, al sustituirlos por expresiones simbólicas que cumplan con las mismas estructuras algebraicas. Esta metodología ha sido probada y validada para mecanismos planos, pero en mecanismos espaciales aún no se llega a una generalización del criterio de aplicación. El otro inconveniente del método es que se requiere analizar todas las posibles combinaciones de valores que pueda tener la estructura. Este último requerimiento es complejo, ya que pueden obtenerse millones de combinaciones para sistemas mecánicos compuestos de muchos elementos. Por otro lado, el método requiere de valores geométricos diferentes para distinguir las longitudes simbólicas correspondientes, por lo que en sistemas con simetrías podría aplicarse luego de una reducción.

Una manera eficiente de obtener simbólicamente las relaciones entre parámetros es mediante el uso del concepto de transferencia de propiedades inerciales. El concepto de transferencia de masa e inercias se basa en la redistribución virtual de propiedades inerciales de los elementos del sistema mecánico siempre que no se altere el Lagrangiano del sistema. Esta redistribución da lugar a sistemas inercialmente equivalentes que dependen de un menor número de parámetros. Dicha reducción no tiene efecto en las ecuaciones del movimiento del sistema y permite calcular la forma en la que se agrupan los parámetros para obtener un conjunto de parámetros base. Chen *et al.* [19] presentan el desarrollo de este método en mecanismos planos y posteriormente realizan una aproximación a mecanismos espaciales [20]. La limitación del método en principio radicaba en la posibilidad de transferir únicamente masas, lo cual es posible solamente en algunos pares cinemáticos (pare de rotación, esféricos y universales). Esta dificultad se resuelve gracias al trabajo realizado por Ros *et al.* [73], quienes utilizan los denominados monopolos, dipolos y cuadrupolos, que permiten las transferencias no solo de masas sino también de los primeros y segundos momentos de inercia, generalizando el concepto de transferencia a otros pares cinemáticos presentes en los sistemas mecánicos espaciales.

Independientemente del método aplicado para la obtención de las expresiones de un conjunto de parámetros base, se tendrá un modelo constituido por un sistema lineal sobre-determinado, en el cual la transmisibilidad de los errores en los datos a la solución depende del número de condición de la matriz W_{base} [39] Por ello, en el campo de la Robótica

[24], [31] y [46], se han aplicado técnicas de optimización con el fin de obtener trayectorias capaces de excitar los diversos términos dinámicos presentes en el sistema (3.13) y que en definitiva conduzcan a valores pequeños del número de condición de la matriz de observación.

3.2. Estimación de parámetros dinámicos

Construido el modelo para identificación en parámetros base de la expresión (3.13), es posible estimar el conjunto completo de parámetros base $\vec{\Phi}_{base}$. Para ello se han de realizar los experimentos que permitan determinar las coordenadas generalizadas y sus derivadas, incluidas en la matriz de observación, y las fuerzas externas con las que se calcula el vector de fuerzas generalizadas. De esta manera, la estimación de los parámetros dinámicos requiere fundamentalmente de:

- Una estructura o un modelo previo sobre el cual se estiman los parámetros (modelo en parámetros base).
- Datos de entrada y salida que evalúen la matriz W_{base} y el vector $\vec{\tau}$ (datos sobre una trayectoria).
- Estimador de los parámetros.

Dado que la ecuación de movimiento puede escribirse de forma lineal con respecto a los parámetros dinámicos, tal como se expresa en (3.13), y suponiendo que la matriz de observación W_{base} se obtiene sin error y que el vector de fuerzas medido $\vec{\tau}_m$ sí presenta errores, se tiene que

$$\vec{\tau}_m = W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base} + \vec{\varepsilon} \quad (3.14)$$

donde $\vec{\varepsilon}$ es el error de medición o residuo.

El problema a resolver en la estimación consiste en hallar el vector de parámetros $\vec{\Phi}_{base}$ tal que se minimice la función de costo correspondiente al cuadrado del error de medición,

$$\hat{\Phi}_{base} = \arg \min_{\Phi_{base}} \|\vec{\varepsilon}^T \cdot \vec{\varepsilon}\| \quad (3.15)$$

es decir,

$$\hat{\Phi}_{base} = \arg \min_{\Phi_{base}} \left((\vec{\tau}_m - W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base})^T \cdot (\vec{\tau}_m - W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base}) \right) \quad (3.16)$$

Puede obtenerse un mínimo igualando a cero la derivada parcial del residuo de manera que $\frac{\partial(\vec{\varepsilon}^T \cdot \vec{\varepsilon})}{\partial \vec{\Phi}_{base}} = 0$.

Dado que el error cuadrático corresponde con

$$\begin{aligned} \vec{\varepsilon}^T \cdot \vec{\varepsilon} &= (\vec{\tau}_m - W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base})^T \cdot (\vec{\tau}_m - W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base}) \\ &= \vec{\tau}_m^T \cdot \vec{\tau}_m - \vec{\tau}_m^T \cdot W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base} - \vec{\Phi}_{base}^T \cdot W_{base}^T \cdot \vec{\tau}_m + \vec{\Phi}_{base}^T \cdot W_{base}^T \cdot W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base} \\ &= \vec{\tau}_m^T \cdot \vec{\tau}_m - 2 \cdot \vec{\tau}_m^T \cdot W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base} + \vec{\Phi}_{base}^T \cdot W_{base}^T \cdot W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base} \end{aligned} \quad (3.17)$$

la solución a (3.15) cumplirá

$$\frac{\partial(\vec{\varepsilon}^T \cdot \vec{\varepsilon})}{\partial \vec{\Phi}_{base}} = -2 \cdot (\vec{\tau}_m^T \cdot W_{base}) + 2 \cdot (W_{base}^T \cdot W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base})^T = \vec{0} \quad (3.18)$$

Resolviendo para el vector $\vec{\Phi}_{base}$ se tiene el estimador

$$\hat{\Phi}_{base} = (W_{base}^T \cdot W_{base})^{-1} \cdot W_{base}^T \cdot \vec{\tau}_m \quad (3.19)$$

A la matriz $(W_{base}^T \cdot W_{base})^{-1} \cdot W_{base}^T$ se le conoce como *pseudoinversa* de W_{base} y al estimador se le denomina estimador de *mínimos cuadrados*.

Considerando que la matriz de observación W_{base} es determinística si cada error de medición tiene la misma varianza, la varianza del error de medición puede estimarse como

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{(\vec{\tau}_m - W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base})^T \cdot (\vec{\tau}_m - W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base})}{n - r} \quad (3.20)$$

donde n es el número de elementos del vector $\vec{\tau}_m$ y r es el número de parámetros base.

La varianza de los parámetros puede determinarse como

$$\text{VAR}[\hat{\Phi}_{base}] = \hat{\sigma}^2 \cdot (W_{base}^T \cdot W_{base})^{-1} \quad (3.21)$$

La varianza de la estimación de la n -ésima componente del vector de fuerzas generalizadas correspondiente a una configuración i del sistema es

$$\text{VAR}[\hat{\tau}(n)_i] = K(n, :)_i \cdot \text{VAR}[\hat{\Phi}_{base}] \cdot K(n, :)_i^T \quad (3.22)$$

siendo $K(n, :)_i$ la n -ésima fila de la matriz de observación correspondiente a la configuración i (en el instante i -ésimo).

3.3. Optimización de trayectorias

Como se ha indicado anteriormente, el modelo para identificación en parámetros base corresponde a un sistema sobre-determinado construido a partir de diferentes posturas que adopta el sistema mecánico. Estas configuraciones se capturan sobre trayectorias factibles desarrolladas por el sistema mecánico y la generación de dichas trayectorias constituye una parte importante del diseño experimental en los procesos de identificación de parámetros, habiéndose propuesto una variedad de criterios de optimalidad a la hora de diseñar dichas trayectorias.

Valores de condicionamiento del orden de 20 se reportan en la literatura para robots serie de 6 grados de libertad [63], y del orden de 700 para robots paralelos de 3 grados de libertad [32]. Aunque de un modo puramente cualitativo, esta diferencia en los números de condición alcanzados en robots serie y paralelos, permite prever qué ocurrirá a medida que se restrinja más la movilidad del sistema mecánico.

3.3.1. Criterios de optimalidad

La generación de trayectorias que permitan realizar una identificación correcta de los parámetros desconocidos requiere la definición de algún

criterio que permita determinar, de alguna manera, si la estimación es o no la correcta. Buscando entonces características específicas en los parámetros identificados o en los modelos resultantes, se suelen utilizar diversos criterios de optimización de trayectorias asociados a la minimización de varianza de parámetros, minimización de incertidumbre en las fuerzas, minimización del condicionamiento del sistema, etc. Algunos de estos criterios son planteados a continuación.

- **Número de condición de matriz de Observación W_{base}**

Considérese una solución del conjunto de parámetros base de forma que se minimice el error ε entre la respuesta del modelo dinámico en parámetros base y las fuerzas generalizadas medidas τ_m , bajo la hipótesis de ruido inexistente en las coordenadas generalizadas y sus derivadas,

$$\vec{\Phi}_{base} = \arg \min \{ \|\varepsilon\|_2 \} \quad (3.23)$$

donde,

$$\vec{\varepsilon} = \vec{\tau}_m - W_{base}(q, \dot{q}, \ddot{q}) \cdot \vec{\Phi}_{base} \quad (3.24)$$

La relación entre el error obtenido y los parámetros estimados se da como,

$$\frac{\|\Delta\Phi\|}{\|\Phi\|} \leq \kappa(W_{base}) \frac{\|\varepsilon\|}{\|\tau\|} \quad (3.25)$$

donde $\kappa(W_{base})$ representa el número de condición de la matriz W_{base} , obtenida como la relación entre el mayor y el menor valor singular de la matriz.

$$\kappa(W_{base}) = \frac{S(1,1)}{S(r,r)} \quad (3.26)$$

Así, como lo han realizado Gautier [39] y Farhat [31], el proceso de optimización puede reducirse a la minimización del número de condición de la matriz de observación, de manera que se minimice la transmisión de errores en el vector de fuerzas generalizadas. En estos casos la función de minimización f estará dada como,

$$f = \kappa(W_{base}) \quad (3.27)$$

Otros criterios de carácter estocástico son usados también en los procesos de optimización, dada la disponibilidad de información del ruido existente en las medidas involucradas en el proceso. Entre estos criterios se tienen:

- **A - Optimización** o criterio de la media de las varianzas. En este criterio se minimiza el promedio de las varianzas de los estimadores de los parámetros, sin tener en cuenta las covarianzas entre ellos [62],

$$f = \sum_{i=1}^r Cov(\Phi_i) \quad (3.28)$$

- **D – Optimización** o criterio del determinante. Este criterio es usado para minimizar la varianza de los parámetros [80]. Su función objetivo está dada como,

$$f = -\log(\det(W_{base}^T \cdot W_{base})) \quad (3.29)$$

- **E – Optimización** o criterio de menor valor singular [7]. Este criterio viene definido por la función objetivo,

$$f = \frac{1}{S_{\min}(W_{base}^T \cdot W_{base})} \quad (3.30)$$

siendo S_{\min} el mínimo valor singular de la matriz $(W_{base}^T \cdot W_{base})$ denominada matriz de información.

En estos tres últimos criterios, la función objetivo requiere el cálculo de la matriz de información. En esta matriz los valores singulares son el cuadrado de los valores singulares de la matriz de observación W_{base} . Por lo tanto, para la misma tolerancia en los cálculos, la $(W_{base}^T \cdot W_{base})$ tendrá un número de condición que será el cuadrado del de la matriz de observación.

Trabajos como los realizados por Díaz – Rodríguez [22] e Iriarte [46] proponen funciones objetivo multicriterio basadas en consecución de metas

donde se combinan la minimización del número de condición de la matriz de observación y la minimización de la varianza de los parámetros obtenidos a través del criterio D – Optimización. La incorporación de este criterio y otros estadísticos donde se requiere del cálculo del determinante $\det(W_{base}^T \cdot W_{base})$ suponen un coste computacional elevado. En este sentido, Jin y Gans [48] utilizan la inecuación de Hadamard para calcular el determinante con una reducción significativa de operaciones. El procedimiento ha sido ejecutado satisfactoriamente en un robot serie de 6 grados de libertad. Otras optimizaciones multicriterio como las realizadas por Presse y Gautier [70] proponen una combinación ponderada del número de condición y el inverso del menor valor singular de la matriz de observación. Sin embargo, no se aclara la forma en la que han de ajustarse los pesos en la ponderación de cada criterio.

De forma general, la optimización es un proceso no lineal sujeto a restricciones no lineales de movimiento; las restricciones deben garantizar la factibilidad de los movimientos obtenidos para el sistema mecánico.

3.3.2. Parametrización de la trayectoria

Además del criterio de optimización (función objetivo), se requiere definir los parámetros que describan la trayectoria, pues serán éstos los grados de libertad en la optimización. Uno de los procedimientos aplicados en identificación de robots consiste en tomar un conjunto finito de posturas del robot y a partir de una aproximación inicial encontrar los valores de las coordenadas generalizadas y sus derivadas que minimicen las funciones objetivo, siempre que éstas cumplan con las restricciones impuestas al sistema. Este tipo de procedimientos han sido utilizados sobre robots, por Armstrong [7], Gautier y Khalil [39] y, Presse y Gautier [70], quienes ajustan los valores obtenidos de los ángulos de las articulaciones a un polinomio, generalmente de orden cinco, para tener una trayectoria continua y determinar mediante derivación sus funciones de velocidad y aceleración.

El problema referido a este procedimiento es el alto coste computacional derivado de la necesidad de resolver el problema de posición, que es un problema no lineal, para un gran número de posturas del manipulador. Un número elevado de posturas es requerido para garantizar la excitación de una

mayor cantidad de parámetros dinámicos. Una modificación al método anterior es aplicado por Rackl *et al.* [71] quienes, para un robot serie, ajustan los puntos de las diferentes posturas a través de una función B-Spline, lo que les permite realizar ajustes locales sin afectar al resto de la trayectoria.

Para minimizar el problema de cálculo, se puede utilizar también una parametrización de la función que define la trayectoria, de manera que dependa de muy pocos parámetros. En la literatura se registra el uso de funciones senoidales en sumatoria, utilizadas por Calafiore *et al.* [17] para parametrizar la trayectoria de un robot SCARA. El problema en este tipo de funciones es que no permite representar cualquier función y además limita a la nulidad los valores iniciales de la velocidad y la aceleración. Para resolver ese problema, Swevers *et al.* [79] y [80] introducen parametrizaciones de trayectorias mediante sumas de funciones armónicas tales como las series de Fourier.

Entre las principales ventajas de esta parametrización está la posibilidad de representar cualquier función con alta precisión y su periodicidad hace posible reducir el ruido de las señales gracias a la obtención de valores promedios derivados de las repeticiones del experimento. Igualmente, el obtener las funciones de velocidades y aceleración analíticamente por derivación también representa una ventaja importante, además de que los valores de velocidad y aceleración inicial no están limitados al reposo del sistema.

Una serie finita de Fourier define la función posición, velocidad y aceleración de la forma,

$$\begin{aligned}
 f(t) &= A_0 + \sum_{j=1}^{NH} \left[\frac{a_j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot j} \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) - \frac{b_j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot j} \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right] \\
 \dot{f}(t) &= \sum_{j=1}^{NH} \left[a_j \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) + b_j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right] \\
 \ddot{f}(t) &= \sum_{j=1}^{NH} \left[-a_j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot \sin(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) + b_j \cdot 2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot \cos(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right]
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

donde NH es el número de armónicos utilizados en la serie finita de Fourier y f es la frecuencia fundamental.

En la función de posición descrita se tienen como parámetros de diseño el coeficiente A_0 , que representa el offset sobre la trayectoria de posición, y los coeficientes a_j y b_j que en número dependerán de la cantidad de armónicos proyectados. Tanto el número de armónicos como la frecuencia fundamental serán escogidos por el experimentador de acuerdo a las características de funcionamiento del sistema mecánico. Por ejemplo, en sistemas vehiculares, los modelos identificados son aplicados a una gran variedad de tareas de simulación estándar como el análisis de maniobrabilidad, manejo básico, análisis de la suspensión, confort de conducción, estabilidad y seguridad, y durabilidad. Cada tipo de análisis estará caracterizado por las frecuencias de ejecución. En la Figura 3.1 se presenta una clasificación realizada por Eichberger y Schittenhelm [30] para las tareas de simulación en vehículos en función de las frecuencias aplicadas.

Bajo las condiciones descritas, el número total de variables en el proceso de optimización de trayectorias será $(2 \cdot NH + 1)$ por cada grado de libertad cinemático.

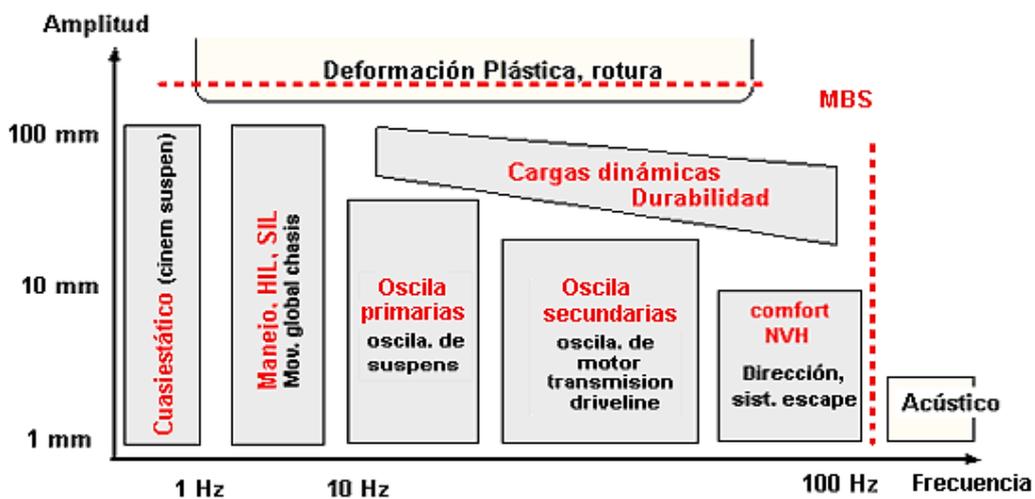


Figura 3.1. Clasificación de las tareas de simulación dinámica de vehículos [27]. NVH, noise vibration Harshness. HIL, Hardware in the loop. SIL, Software in the loop.

3.4. Problemática en la aplicación del procedimiento estándar a mecanismos con baja movilidad

Los procedimientos estándar de cálculo de las expresiones simbólicas de los parámetros base descritos anteriormente y que utilizan métodos numéricos, presentan una serie de inconvenientes cuando son aplicados a sistemas de baja movilidad, que hacen cuestionar su utilización para la identificación de los parámetros dinámicos de este tipo particular de sistemas. A continuación se exponen los problemas presentados y las posibles actuaciones que los resuelven.

3.4.1. Incertidumbre en la determinación del rango

El primer inconveniente que puede observarse tras la aplicación de un procedimiento numérico como las descomposiciones SVD y QR para la determinación de un conjunto de parámetros base, es la dificultad para determinar el rango de la matriz de observación; valor que suele determinarse a partir del análisis de los valores singulares de la matriz. En la Figura 3.2 se presentan, en escala logarítmica, los valores singulares para un sistema de baja movilidad excitado bajo dos trayectorias diferentes.

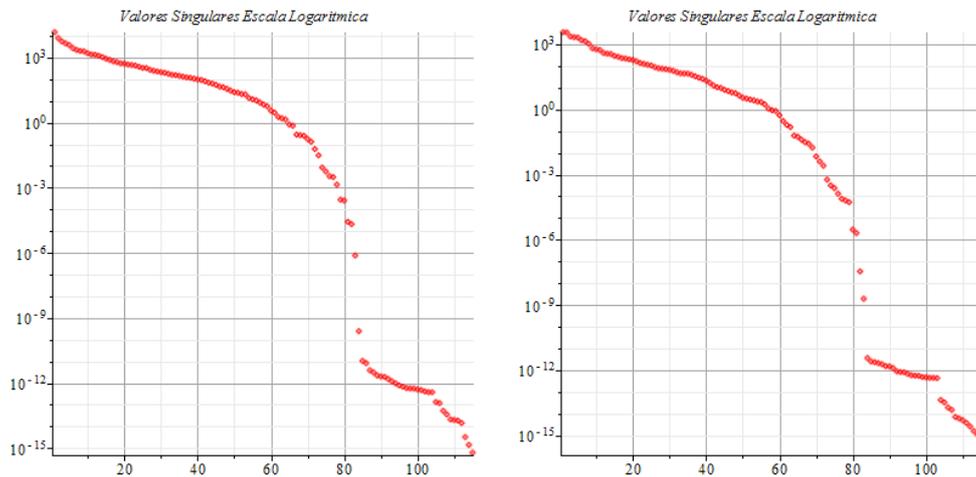


Figura 3.2. Valores singulares para la matriz de observación W de un sistema de cadena cinemática cerrada de baja movilidad bajo dos trayectorias diferentes

En la figura se observa la inexistencia de un punto de corte que con contundencia permita definir el rango de la matriz de observación y por lo tanto el número de parámetros base. Puede observarse también que los valores singulares pueden variar en un mismo sistema según la trayectoria realizada, con lo cual se tienen aún más incertidumbres al momento de calcular el rango de la matriz.

Esta observación ya había sido descrita por Shome *et al.* [78], quienes trabajaron en identificación de parámetros sobre un mecanismo de cuatro barras y Valero *et al.* [83] sobre una suspensión para un cuarto de vehículo.

En las metodologías numéricas, existe un solo requisito en la selección de los parámetros dependientes, y es que la submatriz V_{22} (ecuación 3.5) obtenida de dicha selección sea de rango completo. Nuevamente se tiene la necesidad de determinar numéricamente el rango, ahora de la submatriz que define las dependencias lineales. Tratándose de cálculos numéricos sujetos a errores de redondeo resultado de las precisiones finitas con las que trabajan los ordenadores, en la selección de la submatriz V_{22} debe tenerse especial atención en que el número de condición de dicha matriz sea pequeño, de manera que se garantice su lejanía de la singularidad.

Por otro lado, la determinación de V_{22} no es única, lo que da lugar a múltiples matrices de permutación, que darán lugar a múltiples conjuntos de parámetros base. Como se mencionó en 3.1.1, en identificación de sistemas robóticos se suele construir la submatriz V_{22} seleccionando filas a partir de la primera o la última de V_2 hasta tener una matriz cuadrada de rango completo. Sin embargo, hasta ahora no se tiene información sobre qué tan acertada es dicha selección, ni si existen otros conjuntos de parámetros que generen menores errores entre las fuerzas medidas y las estimadas.

Como en las metodologías numéricas, la obtención de un conjunto de parámetros base requiere, para la construcción de las matrices que definen las dependencias lineales de parámetros, de la definición del rango de la matriz de observación, y debido a que su determinación no es evidente desde el análisis de valores singulares, se propone como alternativa, la obtención de parámetros base a través de métodos simbólicos. El problema del rango no interfiere y no es necesario en la determinación de los parámetros base simbólicos. Más aún, a partir de las expresiones de los parámetros base simbólicos obtenidos, el rango puede determinarse sin riesgo a

equivocaciones pues no está sujeto a los errores de precisión propios de los cálculos numéricos.

Como se mencionó en la Sección 3.1, un método simbólico general y que puede ser aplicado en cadenas cerradas y en particular también a sistemas con baja movilidad, es la transferencia de parámetros inerciales. En el capítulo siguiente se expondrán las características de esta metodología y sus requerimientos de aplicación.

3.4.2. Número de condición elevado

Si el número de condición κ de la matriz de observación W_{base} es muy grande, de la ecuación (3.25) puede deducirse que por muy pequeño que sea el error de medición, la desviación en la estimación de los parámetros será elevada.

En sistemas de cadena abierta se aseguran números de condición bajos en las matrices de observación, usando trayectorias que excitan a la mayor cantidad de parámetros dinámicos. Sin embargo, en mecanismos de cadena cerrada, caracterizados por tener una baja movilidad, debido a las restricciones cinemáticas impuestas por las uniones entre elementos, esta condición está lejos de garantizarse. En este tipo de mecanismos, la optimización de trayectorias orientada a mejorar el condicionamiento de la matriz de observación, si bien mejora el condicionamiento, no permite obtener valores suficientemente bajos como para realizar un proceso de identificación de parámetros. Valero *et al.* [83] y Mejía *et al.* [66] reportan valores de número de condición de $1,0 \cdot 10^{+11}$ y $5,7 \cdot 10^{+10}$ respectivamente, ambos para estudios sobre suspensiones vehiculares con optimización de trayectorias.

Debido a la persistencia del alto condicionamiento de la matriz W_{base} aún después de la optimización, los parámetros no estarán bien calculados. Esto hace necesaria una reducción adicional del modelo dinámico en la búsqueda de una disminución considerable del condicionamiento de la matriz de observación. Eliminar algunas columnas de la matriz de observación permitiría mejorar su condicionamiento. Esta eliminación conlleva la eliminación de algunos parámetros base que finalmente no podrán ser estimados. Para estimar las fuerzas con precisión (ecuación 3.22) se requiere

que los parámetros se estimen con precisión (varianza $VAR[\hat{\Phi}_{base}]$ pequeña) y para ello se requiere que W_{base} esté bien condicionada.

Ya diferentes autores han realizado estas reducciones, en su gran mayoría indicando la alta desviación estándar obtenida en la identificación de algunos parámetros [22], [31] y [51], por el poco aporte que algunos parámetros base tienen sobre el vector de fuerzas generalizadas [51] y [69] o, porque se llegan a estimar parámetros con valores físicamente no factibles [22], [31] y [63], como por ejemplo, valores negativos en masas. El nuevo conjunto de parámetros reducidos se les llama *parámetros relevantes* [24].

La teoría de identificación aplicada a robots serie y paralelo, considera la varianza en la estimación de los parámetros identificados como un criterio al momento de evaluar que tan bien ha sido estimado cada parámetro base. Esta valoración de la calidad de los parámetros obtenidos se obtiene con la determinación de la *desviación estándar relativa* de cada parámetro. Para ello, partiendo de la matriz de covarianza de los parámetros (3.21), se determina la desviación estándar relativa como,

$$\sigma_{\Phi_j} \% = 100 \cdot \frac{\sigma_{\Phi_j}}{\hat{\Phi}_j} \quad (3.32)$$

siendo

$$\sigma_{\Phi_j} = \sqrt{VAR[\hat{\Phi}_{base}](j, j)} \quad (3.33)$$

Khalil y Dombre [51] proponen reducir el modelo eliminando de forma iterativa los parámetros base con desviaciones relativas mayores a 10 veces la mínima desviación. Para ello, se eliminan las columnas de la matriz W_{base} que corresponden al $\bar{\Phi}_{base}$ de alta desviación estándar, y este parámetro base es también eliminado. Se vuelve a estimar el nuevo conjunto de parámetros y se determina de nuevo su desviación estándar.

En robots paralelos Mata *et al.* [60], Farhat *et al.* [31] y Diaz *et al.* [24] y [25] utilizan este criterio para reducir el modelo de identificación hasta conseguir conjuntos de parámetros base que sean físicamente factibles, considerando que las masas sean positivas y los tensores de inercia sean definidos positivos. Los autores reportan desviaciones estándares elevadas

de muchos parámetros muy por encima del criterio de 10 veces planteado en [51]. Se atribuyen estas desviaciones a la poca contribución que presentan los parámetros, como consecuencia de la reducida movilidad del sistema.

Al trabajar con mecanismos de baja movilidad este criterio de reducción puede llegar incluso a ser inaplicable y su aplicabilidad dependerá del condicionamiento de la matriz de observación W_{base} .

Tratándose del aporte de los parámetros al vector de fuerzas generalizadas, Antonelli *et al.* [6] propone la eliminación de parámetros identificados que tengan un aporte a las fuerzas por debajo de un valor establecido. En Díaz – Rodríguez [22] se utiliza también este procedimiento para reducir el conjunto de parámetros base, teniendo como indicador, la norma de la diferencia entre las fuerzas medidas y las estimadas por el modelo. El problema que se tiene con este criterio es que la contribución dinámica se determina a partir de los parámetros base identificados, sin tener en cuenta que el nivel de ruido altera considerablemente la estimación, sobre todo cuando la matriz de observación está mal condicionada.

Para evitar estas incertidumbres, se plantea una reducción de los parámetros base bajo el criterio de la contribución dinámica, considerando valores a priori de cada parámetro. Estos pueden ser obtenidos de una estimación inicial desde un modelo CAD. Se tiene la ventaja de conocer, gracias a la aplicación de la transferencia de parámetros inerciales, las expresiones de los parámetros base simbólicos que pueden ser evaluados numéricamente a partir de la aproximación CAD. En este caso, es evidente que la precisión de la estimación CAD será determinante en el modelo final obtenido, por lo que la sensibilidad a dicha estimación inicial también deberá ser analizada.

La Figura 3.3 resume los inconvenientes encontrados al aplicar un método numérico como SVD en la obtención de un conjunto de parámetros base para un sistema de baja movilidad y presenta las propuestas de solución.

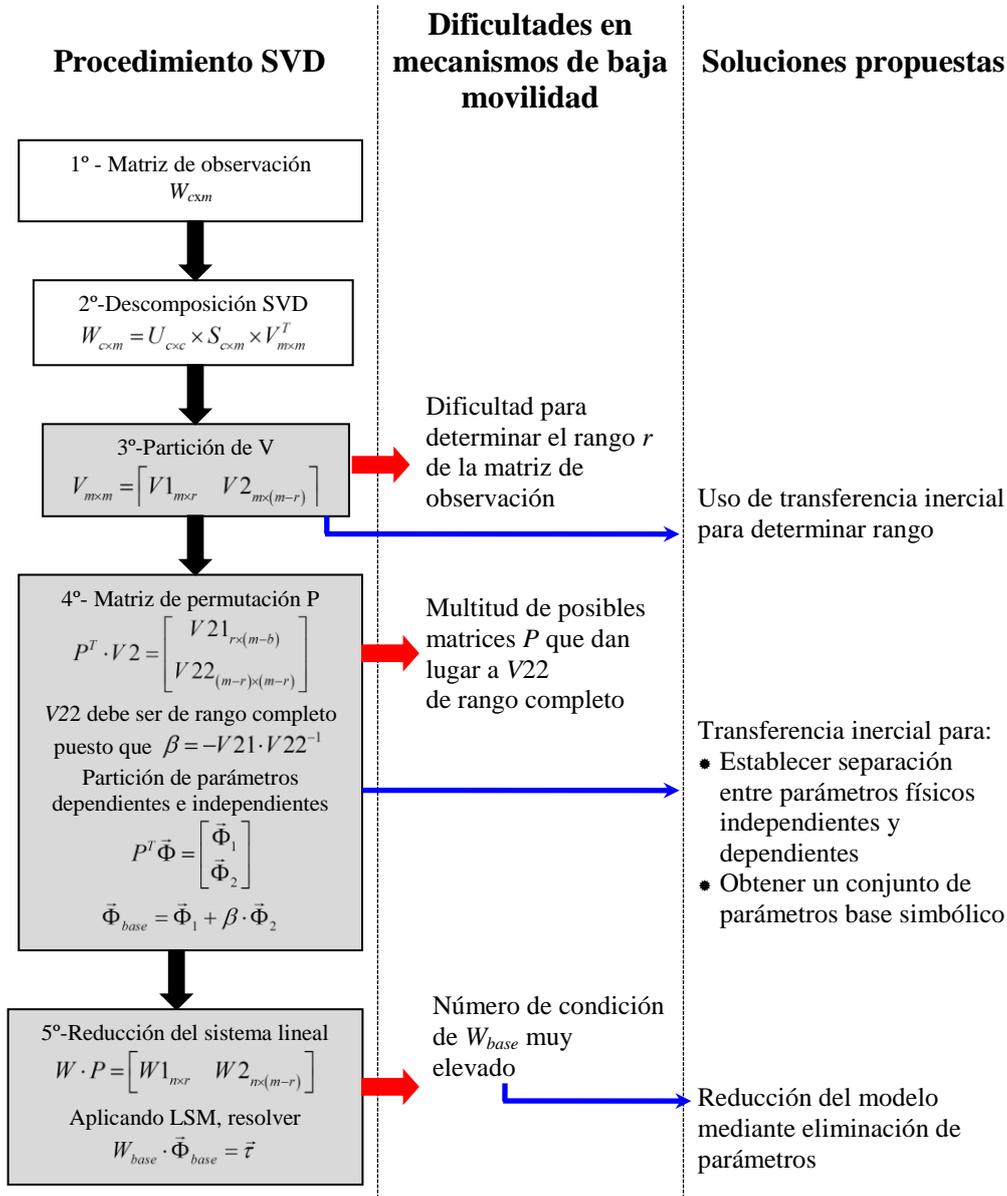


Figura 3.3. Dificultades encontradas en la aplicación de SVD en la identificación de parámetros dinámicos en mecanismos de baja movilidad.

3.5. Resumen

En este capítulo se describieron las metodologías disponibles para la determinación de un modelo en parámetros base para identificación. Se consideraron los métodos numéricos y simbólicos y su aplicación a mecanismos de baja movilidad. La aplicación del método numérico, que es el método más comúnmente utilizado, tiene inconvenientes para determinar el rango de la matriz de observación, y por tanto, determinar el número de parámetros base a identificar. Por este motivo, se propone determinar los parámetros base utilizando procedimientos simbólicos derivados de la transferencia de parámetros inerciales. El otro problema que presenta el modelo en parámetros base es el alto condicionamiento de la matriz de observación. Este condicionamiento impide el uso del modelo para propósitos de identificación de parámetros. Se observa que ni siquiera el uso de trayectorias optimizadas permite disminuir esta característica de la matriz de observación. Como solución se propone reducir el modelo en parámetros base a un modelo en parámetros relevantes, donde se obtenga una reducción considerable del número de condición de la matriz de observación de manera que se garantice una baja desviación típica en la estimación de los parámetros. De los procedimientos de reducción planteados, el basado en la contribución dinámica relativa de cada parámetro es el que mejor se adapta a las características de los modelos obtenidos en los sistemas de baja movilidad.

Capítulo 4

Identificación de parámetros dinámicos en mecanismos con baja movilidad

En el capítulo anterior se reseñaron los inconvenientes que presentan los procedimientos estándar para identificación de parámetros dinámicos cuando se aplican a mecanismos de baja movilidad. Esos inconvenientes se resumen en: dificultad para precisar con certeza el rango de la matriz de observación del sistema cuando se emplean metodologías numéricas, y mal condicionamiento numérico del modelo para identificación en parámetros base.

Buscando darle solución a estas dificultades, se propone abordar la obtención de las expresiones de los parámetros base a través de metodologías simbólicas, de manera que el rango y las relaciones de dependencia lineal entre las columnas en la matriz de observación sean determinados por estas expresiones simbólicas. En concreto, en este capítulo se expondrá el concepto de transferencia de propiedades inerciales para la determinación de las expresiones simbólicas de conjuntos de parámetros base propuesto por Ros *et al.* [73]. Este concepto se basa en las redistribuciones de masa posibles sin que varíe (salvo de forma constante con respecto al tiempo) el Lagrangiano de las ecuaciones dinámicas, y que ha sido generalizado para su aplicación en sistemas espaciales, pues a diferencia de otros métodos simbólicos, contempla transferencias inerciales en cualquier par cinemático. Además, partiendo de un solo conjunto de parámetros base, es posible obtener otros conjuntos que cumplan con las condiciones de rango máximo.

Como en sistemas de baja movilidad se obtienen modelos en parámetros base cuyas matrices de observación tienen altos números de condición, resulta imposible una correcta identificación de parámetros en presencia de

errores en las medidas experimentales. Dado que en este tipo de sistemas, las técnicas de optimización de trayectorias proporcionan mejoras muy limitadas sobre el número de condición de la matriz de observación, para disminuir dicho número se propone la supresión de ciertas columnas, es decir, la eliminación de ciertos parámetros base. Las características específicas de los sistemas de baja movilidad hacen necesaria la elección de criterios específicos en base a los cuales deberá realizarse dicha eliminación. En este capítulo se estudian estos criterios y se propone una modificación del índice de contribución dinámica de cada parámetro sobre el comportamiento del sistema.

Adicionalmente esa reducción permite obtener modelos dinámicos representativos notablemente simplificados frente al original, lo cual supone una notable ventaja cuando se requieren aplicaciones en tiempo real.

4.1. Determinación de las expresiones simbólicas de parámetros base a través de la transferencia de propiedades inerciales

Mientras el Lagrangiano de un sistema mecánico se altere solamente de manera constante en el tiempo, como producto de las transferencias virtuales de masas que se puedan dar entre elementos, la dinámica de movimiento del sistema no se verá modificada. Este es el principio utilizado por la transferencia de propiedades inerciales, la cual permite obtener las expresiones simbólicas de conjuntos de parámetros base.

Para un sólido rígido, el Lagrangiano es,

$$L_i = \frac{1}{2} \cdot \vec{v}_{G_i}^T \cdot m_i \cdot \vec{v}_{G_i} + \frac{1}{2} \cdot \vec{\omega}_i^T \cdot (I_{G_i} \cdot \vec{\omega}_i) + m_i \cdot \vec{g}^T \cdot \vec{r}_{OG_i} \quad (4.1)$$

siendo m_i la masa del cuerpo, \vec{v}_{G_i} el vector velocidad de su centro de masa, $\vec{\omega}_i$ el vector velocidad angular, \vec{g} la aceleración de la gravedad, I_{G_i} el tensor de inercia respecto a su centro de masa y \vec{r}_{OG_i} es el vector posición del

centro de masa del cuerpo, expresadas todas las variables anteriores respecto al sistema de referencia global, Figura 4.1.

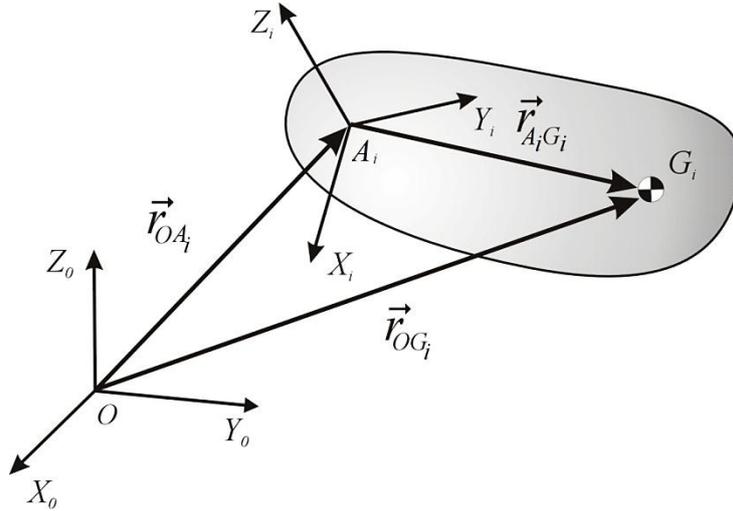


Figura 4.1. Sistemas de referencia para determinación del Lagrangiano

Considerando un punto A del sólido i , la velocidad y posición de su centro de masa pueden determinarse como,

$$\begin{aligned}\vec{r}_{OG_i} &= \vec{r}_{OA_i} + \vec{r}_{A_iG_i} \\ \vec{v}_{G_i} &= \vec{v}_{A_i} + \tilde{\omega}_i \cdot \vec{r}_{A_iG_i}\end{aligned}\quad (4.2)$$

La expresión (4.1) toma la forma

$$L_i = \left(\frac{1}{2} \cdot \vec{v}_{A_i}^T \cdot \vec{v}_{A_i} + \vec{g}^T \cdot \vec{r}_{OG_i} \right) \cdot m_i + \left(\vec{g} - \tilde{\omega}_i \cdot \vec{v}_{A_i} \right)^T \cdot m_i \cdot \vec{r}_{A_iG_i} + \left(\frac{1}{2} \cdot \tilde{\omega}_i^T \cdot \left(I_{A_i} \cdot \tilde{\omega}_i \right) \right) \quad (4.3)$$

donde $I_{A_i} = I_{G_i} + m_i \cdot r_{A_iG_i}^T \cdot r_{A_iG_i}$. La matriz $r_{A_iG_i}$ es la antisimétrica asociada al vector del centro de masa respecto al sistema de referencia local,

$$r_{A_i G_i} = \begin{bmatrix} 0 & -z_{A_i G_i} & y_{A_i G_i} \\ z_{A_i G_i} & 0 & -x_{A_i G_i} \\ -y_{A_i G_i} & x_{A_i G_i} & 0 \end{bmatrix}$$

La expresión (4.3) muestra cómo el Lagrangiano está compuesto por términos asociados al monopolo o masa m_i , al dipolo o primer momento $\bar{d}_i = m_i \cdot \vec{r}_{A_i G_i}$ y al tensor de inercia I_{A_i} que puede representarse como la suma de tres cuadrupolos en A para las direcciones principales del tensor, donde $I_{A_i} = q_i^1 + q_i^2 + q_i^3$.

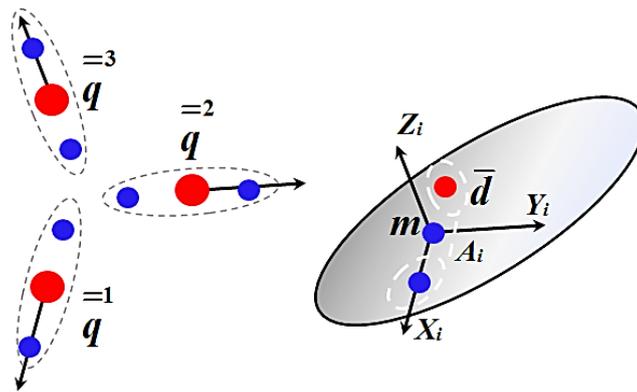


Figura 4.2. Representación gráfica de multipolos para transferencia de propiedades inerciales

En la Figura 4.2 se presenta una representación gráfica de los multipolos. Un monopolo representa la masa del cuerpo y se ubica en el origen del sistema de referencia en el cual se expresan las propiedades inerciales del cuerpo. El dipolo se representa por dos masas de igual valor pero de signo contrario, equidistantes al origen del sistema de referencia y un cuadrupolo es un conjunto de dos masas positivas de igual valor y una negativa del doble de valor. Cada cuadrupolo se determina como $q_i^1 = -\tilde{q}_i^1 \cdot \tilde{q}_i^1$ donde 1 es la dirección del cuadrupolo. De la expresión (4.3) puede verse que sobre A_i , el monopolo m_i no genera ni momentos de primer, ni de segundo orden, el dipolo \bar{d}_i no introduce masa neta, ni momentos de inercia, y ningún

cuadrupolo introduce masas o primeros momentos. Con esto, los multipolos pueden considerarse como independientes.

De la misma expresión (4.3) se observa cómo bajo ciertas condiciones, algunos términos del Lagrangiano no existirán o no existirá su derivada con respecto al tiempo, por lo que algunos parámetros inerciales no aparecerán en las ecuaciones de movimiento. Si por ejemplo $\omega_i = 0$ en (4.3), el tensor de inercia completo desaparece de la expresión. En Iriarte [46] y Ros *et al.* [72] y [73] se presentan las reglas que permiten determinar qué propiedades inerciales no aparecen en la ecuación de movimiento.

Si ahora se analiza la transferencia inercial de parámetros para dos cuerpos unidos mediante un par cinemático, en donde se transfiere una masa m , un dipolo \bar{d} y un cuadrupolo \bar{q} , desde el cuerpo i al cuerpo j en el punto A (Figura 4.3), y considerando las independencias de los multipolos entre sí, se tiene una variación del Lagrangiano igual a

$$\Delta L = \left(\frac{1}{2} \bar{v}_{A_j}^T \cdot \bar{v}_{A_j} + \bar{g}^T \cdot \bar{r}_{OA_j} - \frac{1}{2} \bar{v}_{A_i}^T \cdot \bar{v}_{A_i} - \bar{g}^T \cdot \bar{r}_{OA_i} \right) \cdot m + \left(-\bar{\omega}_j \cdot \bar{v}_{A_j} + \bar{\omega}_i \cdot \bar{v}_{A_i} \right)^T \cdot \bar{d} + \left(\frac{1}{2} \bar{\omega}_j^T \cdot \bar{q} \cdot \bar{\omega}_j - \frac{1}{2} \bar{\omega}_i^T \cdot \bar{q} \cdot \bar{\omega}_i \right) \quad (4.4)$$

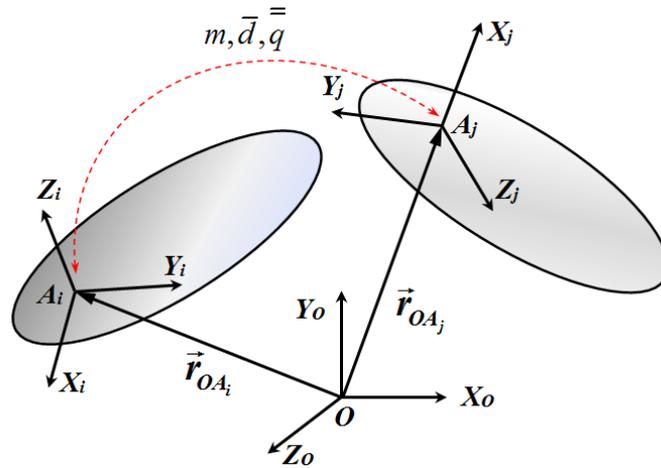


Figura 4.3. Transferencia de propiedades inerciales

El método de transferencia de parámetros inerciales requiere que $\Delta L = \text{cte}$. A partir de (4.4), se tiene las siguientes posibilidades:

- Transferencia de monopolo m
 - Si $\vec{v}_{A_i} = \vec{v}_{A_j}$ y $\vec{r}_{A_i A_j} \cdot \vec{g} = \text{cte}$. Estas condiciones se dan cuando $\vec{r}_{O A_i} = \vec{r}_{O A_j}$, es decir, cuando los sólidos comparten un punto. Los pares de revolución R, las uniones cinemáticas universales U y las uniones esféricas S cumplen este requisito.
- Transferencia de dipolo \vec{d}
 - En la dirección del giro relativo $\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i$, cuando $\vec{v}_{A_i} = \vec{v}_{A_j}$. Esto se da cuando los cuerpos comparten un eje y un punto, tal como ocurre en el par de revolución R.
 - En la dirección de $\vec{v}_{A_j} - \vec{v}_{A_i}$, cuando $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j$, lo que implica solamente traslación entre los cuerpos.
 - En cualquier dirección cuando $\vec{v}_{A_j} = \vec{v}_{A_i}$ y $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j$.
- Transferencia de cuadrupolo \vec{q}
 - En la dirección donde se comparta eje de rotación $\vec{\omega}_j - \vec{\omega}_i$ lo que ocurrirá en los pares cilíndricos C, pares helicoidales H, pares planos PP y pares de revolución R.
 - Todos los cuadrupolos si $\vec{\omega}_i = \vec{\omega}_j$. Ocurre en los pares donde no hay giro relativo como en el par prismático P.

Traducidas estas condiciones a las uniones cinemáticas que comúnmente componen un sistema mecánico, las transferencias de masa e inercias se darán como se presenta en la Tabla 4.1.

Los parámetros inerciales transferidos entre sólidos se corresponden con los parámetros combinados linealmente. Para obtener el rango es necesario transferir el mayor número de parámetros posibles en cada par cinemático, de acuerdo a las condiciones expuestas en la Tabla 4.1. Por otro lado, es necesario aclarar que el número de parámetros originales que aparecerán en

el modelo puede verse afectado por la ubicación de los sistemas de referencia locales de los elementos unidos al sistema de referencia global (base). Así por ejemplo, si un cuerpo se une al sistema de referencia global mediante un par de revolución, y el origen de su sistema de referencia local está contenido en el eje del par, la masa de dicho elemento no aparecerá en el modelo dinámico del sistema y las expresiones de los parámetros base obtenidos estarán formados por un menor número de parámetros. El número de parámetros base, en cualquier caso, no depende de la localización de los sistemas de referencia.

Tabla 4.1. Transferencia de masas e inercias entre sólidos según el par cinemático que los une.

Tipo de junta cinemática	Tipo de elementos unidos	Transferencia	Cantidad a transferir
Revolución	Móvil - móvil	Monopolo	1
		Dipolo	1 - dirección eje de giro
		Cuadripolo	1 - dirección eje de giro
	Móvil - fijo	Monopolo	1
		Dipolo	1 - dirección de $\vec{\omega}$
Prismático	Móvil - móvil	Cuadripolo	6 – todo el tensor inercia
	Móvil - fijo	Dipolo	3
		Cuadripolo	6 – todo el tensor inercia
Cilíndrica	Móvil - móvil	Cuadripolo	1- dirección eje de giro
	Móvil – fijo	Cuadripolo	1
Universal	Móvil – móvil	Monopolo	1
	Móvil – fijo	Monopolo	1
Esférica	Móvil - móvil	Monopolo	1
	Móvil - fijo	Monopolo	1

4.1.1. Parámetros base derivados de la transferencia de propiedades inerciales

La aplicación del concepto de transferencia de masa requiere de una determinación previa de los parámetros dinámicos del modelo que no pueden ser identificados, ya que éstos no presentan ninguna influencia dinámica en el modelo. Existen consideraciones de acuerdo al tipo de unión cinemática que

permiten determinar qué parámetros dinámicos no aparecen en el Lagrangiano y por tanto no se incluyen en las ecuaciones de movimiento del sistema [6].

De igual manera, la matriz de observación W permite determinar cuáles son esos parámetros. Si en W se tienen columnas nulas, significa que los parámetros asociados no están incluidos en el modelo dinámico y por lo tanto no pueden ser seleccionados en las transferencias de masa entre sólidos móviles. En la Sección 3.1 se indicó cómo determinar cuándo una columna de la matriz de observación original puede considerarse como nula.

El siguiente paso en el proceso de obtención de parámetros base, es construir una estructura de cadena cinemática abierta o ramificada, realizando cortes en la topología original del sistema, como se aprecia en la Figura 4.4. Para la estructura de árbol obtenida, se elige uno o varios sólidos hacia los cuales se realizan las transferencias. A estos sólidos se les conoce como *sólidos de convergencia*.

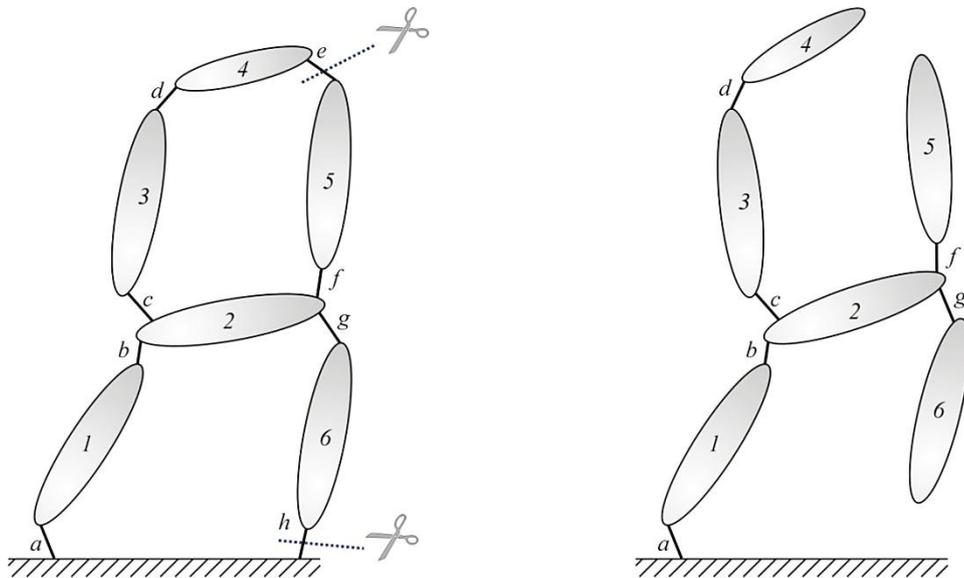


Figura 4.4. Transformación de cadena cinemática cerrada a cadena abierta

Primero se realizan las transferencias de propiedades inerciales correspondientes a los enlaces rotos, garantizando que no se eliminen

parámetros que sean luego transferibles en las cadenas cinemáticas resultantes. En segundo lugar, se realiza la transferencia de propiedades inerciales desde los elementos más alejados, hasta los sólidos de convergencia teniendo en cuenta la consideración de invarianza en el Lagrangiano.

Supóngase que en el sistema de la Figura 4.4, la unión f entre los elementos 2 y 5 corresponde a un par de revolución R. Si transferimos parámetros inerciales desde el cuerpo 5 al 2 es posible transferir un monopolo, un dipolo en la dirección del par y un cuadrupolo en una dirección del par. Si los sistemas de referencia locales de ambos cuerpos están ubicados y direccionados como se presenta en la Figura 4.5, con el eje del par coincidente con el eje X_5 .

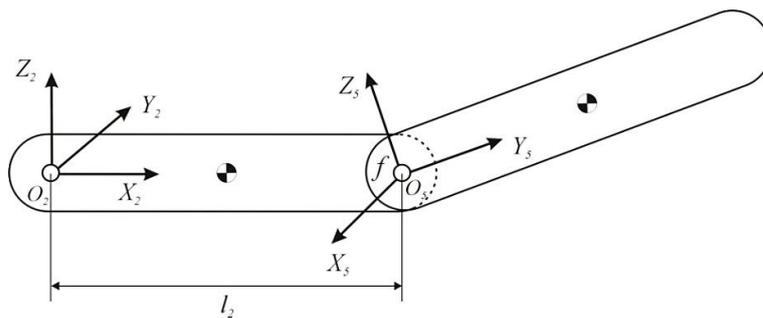


Figura 4.5. Transferencia de propiedades inerciales en un par R

Como el sistema de referencia del elemento 5 coincide con el punto de transferencia, cada multipolo del cuerpo 5 es independiente. Transferir un monopolo con la masa total del elemento 5, un dipolo y un cuadrupolo del elemento 5, definidos de sobre el eje del par f , genera los nuevos parámetros para el cuerpo 5,

$$m_5' = m_5 - m_5 = 0$$

$$\begin{bmatrix} mx_5' \\ my_5' \\ my_5' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx_5 - mx_5 \\ my_5 \\ mz_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ my_5 \\ mz_5 \end{bmatrix}$$

$$I'_5 = \begin{bmatrix} Ixx_5 & Ixy_5 & Ixz_5 \\ Ixy_5 & Iyy_5 - Izz_5 & Iyz_5 \\ Ixz_5 & Iyz_5 & 0 \end{bmatrix}$$

Por otro lado, para el cuerpo 2 cuyo sistema de referencia es diferente al punto de transferencia, la adición de los multipolos generan cambios en todas las propiedades inerciales como,

$$m'_2 = m_2 + m_5$$

$$\begin{bmatrix} mx'_2 \\ my'_2 \\ mz'_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx_2 + l_2 \cdot m_5 \\ my_2 - mx_5 \\ mz_2 \end{bmatrix}$$

$$I'_2 = \begin{bmatrix} Ixx_2 + Izz_5 & Ixy_2 + l_2 \cdot mx_5 & Ixz_2 \\ Ixy_2 + l_2 \cdot mx_5 & Iyy_2 + m_5 \cdot l_2^2 & Iyz_2 \\ Ixz_2 & Iyz_2 & Izz_2 + m_5 \cdot l_2^2 + Izz_5 \end{bmatrix}$$

De esta manera, considerando solamente estos dos cuerpos, la transferencia descrita generan los parámetros,

$$\begin{aligned} \Phi_{base1} &= m_2 + m_5; \Phi_{base2} = mx_2 + l_2 \cdot m_5; \Phi_{base3} = my_2 - mx_5; \Phi_{base4} = mz_2; \\ \Phi_{base5} &= Ixx_2 + Izz_5; \Phi_{base6} = Ixy_2 + l_2 \cdot mx_5; \Phi_{base7} = Ixz_2; \Phi_{base8} = Iyy_2 + l_2^2 \cdot m_5; \\ \Phi_{base9} &= Iyz_2; \Phi_{base10} = Izz_2 + Izz_5 + l_2^2 \cdot m_5; \Phi_{base11} = my_5; \Phi_{base12} = mz_5; \\ \Phi_{base13} &= Ixx_5; \Phi_{base14} = Ixy_5; \Phi_{base15} = Ixz_5; \Phi_{base16} = Iyy_5 - Izz_5; \Phi_{base17} = Iyz_5; \end{aligned}$$

donde m_5 , mx_5 y Izz_5 son ahora parámetros dependientes.

En el Capítulo 5 de esta tesis se presentará el procedimiento detallado para la determinación de un conjunto de parámetros base simbólicos, aplicando el concepto de propiedades inerciales sobre una suspensión vehicular.

Como se sabe, cada parámetro base inercial corresponde a una combinación lineal de los parámetros inerciales originales o físicos. Es por

tanto necesario determinar estas relaciones. Si detallamos por ejemplo el parámetro base Φ_{base6} es fácil obtener la relación de dependencia lineal,

$$\Phi_{base6} = Ixy_2 + \underset{\Phi_1}{[l_2]} \cdot \underset{\Phi_2}{[mx_5]}$$

Ahora bien, realizando este mismo procedimiento con todos los parámetros base se encontrará el vector de parámetros independientes $\vec{\Phi}_1$ (aparecen solos en cada parámetro base), el vector de parámetros dependientes $\vec{\Phi}_2$ y la matriz β que los relaciona,

$$\vec{\Phi}_{base} = \vec{\Phi}_1 + \beta \cdot \vec{\Phi}_2 \quad (4.5)$$

No hay una única posibilidad de transferencia de parámetros inerciales, considerando que en ciertos pares cinemáticos pueden eliminarse diferentes parámetros y que los sólidos de convergencia pueden variar para un mismo sistema mecánico. En trabajos previos con uso del concepto de transferencia inercial realizados por Chen *et al.* [21] y Valero *et al.* [83] para identificación de parámetros en un cuarto de vehículo, los sólidos de convergencia seleccionados son diferentes. En el primer estudio es el trapecio inferior de la suspensión y, en el segundo la convergencia se realiza hacia la mangueta. Esta selección diferente del sólido de convergencia puede generar diferencias importantes en los parámetros base resultantes. No se tiene estudio conocido que evalúe qué modelos de transferencia son mejores para ser usados en identificación de parámetros, si aquellos donde el sólido de convergencia está más cerca o más lejos de la base.

4.1.2. Obtención de otros conjuntos de parámetros base simbólicos derivados de una transferencia de parámetros inerciales

A partir de un conjunto de expresiones de parámetros base simbólicos, es posible determinar diferentes conjuntos de parámetros que también representen un conjunto válido. La denominación de *válido* se refiere a que sea de rango máximo, rango calculado a partir de las expresiones simbólicas.

Partiendo de la ecuación (4.5) se genera la matriz B formada por la matriz identidad I y la matriz β que contiene las relaciones de dependencia para la transferencia de propiedades inerciales inicial,

$$\vec{\Phi}_{base} = \vec{\Phi}_1 + \beta \cdot \vec{\Phi}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{r \times r} & \beta_{r \times (m-r)} \end{bmatrix}}_B \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

donde B es una matriz $r \times m$.

Para esta transferencia, la matriz identidad, que es de rango máximo r , está asociada al vector de parámetros independientes $\vec{\Phi}_1$. Sin embargo en B pueden encontrarse otras submatrices también de rango máximo. Se trata entonces de encontrar combinaciones de r columnas de B que generen matrices de rango máximo, de manera que sus parámetros asociados corresponderán a un nuevo vector $\vec{\Phi}_1$ independiente.

De esta manera se pueden encontrar múltiples conjuntos de parámetros base sin necesidad de realizar todo el procedimiento de transferencia de parámetros inerciales. En total se tendrán $\frac{m!}{(m-r)! \cdot r!}$ combinaciones

posibles. Cuantos más cuerpos posea el sistema mecánico, es decir cuanto mayor sea m , más costosa será la evaluación de todas las posibles combinaciones. Más simple es determinar si una combinación particular de parámetros corresponde a un conjunto de parámetros base válido, calculando el rango de las columnas de B asociadas a dichos parámetros. Analizando el sistema mecánico se pueden seleccionar a priori una serie de posibles transferencias de parámetros inerciales considerando varios sólidos de convergencia, de manera que se evalúen exclusivamente las combinaciones de parámetros asociadas a estas transferencias.

Una vez asegurada que la combinación de parámetros es válida, se crea un nuevo vector $\vec{\Phi}' = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}'_1 \\ \vec{\Phi}'_2 \end{bmatrix}$, donde $\vec{\Phi}'_1$ corresponde con los parámetros independientes para dicha combinación. Las columnas de la matriz B y el vector de parámetros se permutan en el mismo orden a través de la matriz P de forma que

$$\vec{\Phi}_B = B \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = (B \cdot P^T) \left(P \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} \right) = [B_1 \quad B_2] \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

La partición de B se realiza de forma que B_1 sea cuadrada. Si además es de rango completo entonces la selección de $\vec{\Phi}_1$ como parámetros independientes es *válida*. Pre multiplicando ambos lados de la ecuación por B_1^{-1} se tienen los nuevos parámetros base

$$\vec{\Phi}'_B = B_1^{-1} \cdot \vec{\Phi}_B = B_1^{-1} \cdot [B_1 \quad B_2] \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = [I \quad B_1^{-1} \cdot B_2] \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = B' \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

de donde se deduce que $\beta' = B_1^{-1} \cdot B_2$.

En la Figura 4.6 se presenta el diagrama de flujo del procedimiento descrito para obtener otros conjuntos de parámetros base a partir de una transferencia de parámetros inerciales.

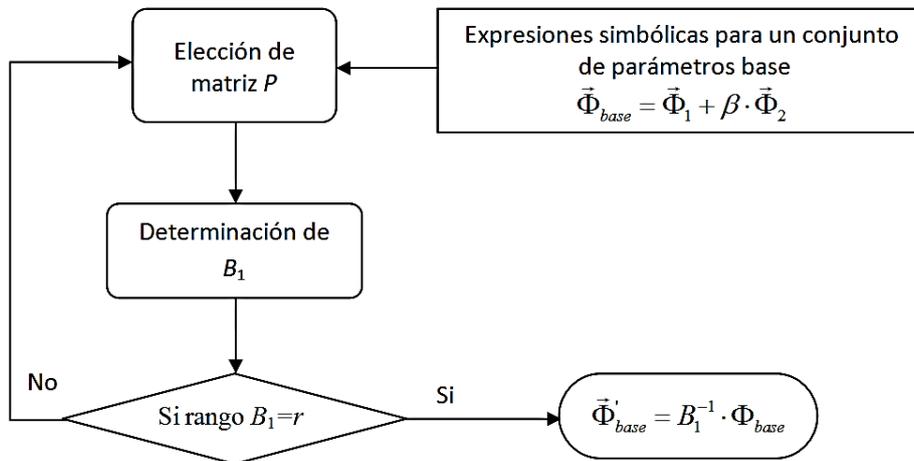


Figura 4.6. Diagrama de flujo para la obtención de otros conjunto de parámetros a partir de una transferencia de propiedades inerciales

4.1.3. Modelo para identificación de parámetros derivado de las expresiones simbólicas de un conjunto de parámetros base

La relación existente entre los parámetros físicos $\vec{\Phi}$ y la partición de parámetros dependientes e independientes para una transferencia específica se da a través de una única matriz de permutación,

$$P^T \cdot \vec{\Phi} = \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Utilizando la relación (4.8) se tiene que el modelo para identificación se puede escribir,

$$W \cdot \vec{\Phi} = W \cdot P \cdot P^T \cdot \vec{\Phi} = [W1 \quad W2] \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = [W1 \quad W1 \cdot \beta] \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

De manera que,

$$W \cdot \vec{\Phi} = W1 \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 & \beta \cdot \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix} = W_{base} \cdot \vec{\Phi}_{base} \quad (4.10)$$

siendo

$$W_{base} = W1.$$

Las expresiones de los parámetros base obtenidas por transferencia de parámetros inerciales, determinan las dependencias lineales entre parámetros inerciales, pero no consideran otros parámetros dinámicos como coeficientes de rigidez de muelles y amortiguamientos. Para sistemas mecánicos donde estos coeficientes sean parte de los parámetros a identificar, se han de considerar como independientes.

4.2. Optimización de trayectorias para el modelo en parámetros base

La optimización de la trayectoria es usada con el fin de conseguir matrices de observación del sistema mejor condicionadas numéricamente. En sistemas

de baja movilidad, el proceso de optimización, si bien mejora el condicionamiento del sistema, no permite obtener valores en el número de condición de W_{base} lo suficientemente bajos como para pensar en la identificación de los parámetros base a partir de este modelo. Sin embargo, esta optimización aunque no es suficiente, sí es necesaria en la búsqueda de un conjunto de parámetros base bien identificado.

Para cada conjunto de parámetros base obtenido se debe realizar la optimización de trayectorias usando el criterio de *minimización del número de condición de la matriz W_{base}* , tal como se expuso en el capítulo anterior. De los criterios expuestos, este es el que mejores resultados puede entregar, considerando que los demás criterios dependen de la matriz de información $(W_{base}^T \cdot W_{base})$ que presenta un peor condicionamiento.

4.3. Obtención de parámetros relevantes

Como ya se ha mencionado anteriormente, en mecanismos de baja movilidad, el alto condicionamiento en la matriz de observación W_{base} no permite obtener parámetros base bien identificados. La disminución del número de condición en W_{base} es posible si se eliminan algunas columnas de la matriz. Al eliminar algunas columnas de W_{base} , los parámetros asociados a estas columnas serán eliminados también del conjunto de parámetros base a identificar. Para obtener este nuevo conjunto de parámetros denominados *relevantes* (los parámetros no eliminados) se requiere de una serie de criterios que permitan determinar cuáles y cuántos parámetros base serán eliminados.

En el capítulo anterior se expuso la dificultad de utilizar, en sistemas de baja movilidad, las desviaciones estándar de los parámetros identificados como criterio de eliminación de parámetros. Debido al alto condicionamiento de la matriz de observación, estas varianzas estarán mal calculadas y no tendrán un significado real de la calidad de identificación de los parámetros. Un criterio alternativo se basa en la eliminación de aquellos parámetros base con un aporte pequeño en las fuerzas generalizadas [6]. Este aporte se determina a través del índice de contribución dinámica de cada parámetro. A continuación se expone su determinación.

4.3.1. Eliminación de parámetros por contribución dinámica

En un sistema para identificación de parámetros con mal condicionamiento, los aportes que los parámetros tienen sobre las fuerzas generalizadas presentan muchas variaciones, encontrándose parámetros con aportes casi insignificantes. La eliminación de estos parámetros permite disminuir el número de condición de la matriz de observación sin generar cambios significativos en las fuerzas estimadas por el modelo. Basado en este aporte se ha utilizado este criterio por Antonelli *et al.*[6], Wiens *et al.*[87] y Díaz – Rodríguez [22] para determinar qué parámetros son identificables, y por Valero *et al.*[83] y Mejia *et al.*[66] para reducir el modelo a un conjunto de parámetros relevantes. Este criterio se ha denominado *índice de contribución dinámica*,

$$\zeta_i = \frac{\sqrt{(W_{base}(:,i) \cdot \Phi_{base}(i))^T \cdot (W_{base}(:,i) \cdot \Phi_{base}(i))}}{\sqrt{\bar{\tau}^T \cdot \bar{\tau}}} \cdot 100 \quad (4.10)$$

En sistemas de baja movilidad, este índice no puede aplicarse directamente debido a que el vector de parámetros base se obtiene de resolver el sistema $W_{base} \cdot \bar{\Phi}_{base} = \bar{\tau}$, cuya matriz de observación W_{base} está muy mal condicionada (del orden de $5 \cdot 10^{+10}$) [66]. Con errores en $\bar{\tau}$, por muy pequeños que estos sean, el resultado de los parámetros identificados no será fiable y variará considerablemente con el nivel de error que se tenga en la medida de las fuerzas.

Para resolver este problema, se modifica el índice de influencia dinámica de manera que sea independiente de los errores en las fuerzas medidas. Para ello se han de emplear las expresiones simbólicas de los parámetros base determinadas en la Sección 4.1 mediante transferencia de propiedades inerciales, evaluadas con los valores de una estimación inicial desde un modelo CAD. El uso de una aproximación inicial a partir de modelos CAD se ha empleado con anterioridad en la identificación de sistemas. Autores como Callejo *et al.* [18] usan valores de estimaciones CAD para calibrar los parámetros físicos de un robot serie de 6 grados de libertad de manera que se garantice la factibilidad física del modelo planteado. También Ebrahimi *et al.* [28] y [29] utilizan una aproximación inicial para caracterizar la contribución de los parámetros inerciales en la dinámica de un sistema multicuerpo con el

fin de realizar análisis de sensibilidad de la estimación de parámetros en la dinámica del sistema.

Con estas consideraciones, el índice de contribución dinámica en mecanismos de baja movilidad se determina como,

$$\zeta_i = \frac{\sqrt{\left(W_{base}(:,i) \cdot \Phi_{base_CAD}(i)\right)^T \cdot \left(W_{base}(:,i) \cdot \Phi_{base_CAD}(i)\right)}}{\sqrt{\vec{\tau}^T \cdot \vec{\tau}}} \cdot 100 \quad (4.11)$$

Como el índice de influencia dinámica expresado en (4.11) es independiente del error en la medida de $\vec{\tau}$, se espera regularidad en la formación de un arreglo de parámetros con decrecientes índices de contribución dinámica, a partir del cual se definan los parámetros a eliminar, empezando con los de menor valor. Como se verá en el Capítulo 5, aunque se tengan estimaciones muy groseras en los parámetros CAD, el orden de los parámetros base en el arreglo generado según los índices de contribución dinámica no se ve significativamente modificado. Esta ventaja permite realizar grandes simplificaciones en los modelos CAD, lo que se traduce en un ahorro de tiempo y esfuerzo considerable.

Una vez determinado el arreglo de parámetros de acuerdo a los índices de contribución dinámica para cada parámetro base, se elimina el parámetro base de menor índice junto con la columna de W_{base} asociada a dicho parámetro. Si el número de condición de la matriz resultante $W_{relevante}$ es bajo, se aplica el método de mínimos cuadrados para determinar el valor estimado de los parámetros relevantes. Si el condicionamiento de la matriz de observación no es lo suficientemente bajo, se repite el proceso de eliminación para el siguiente parámetro con bajo índice ζ . El diagrama de flujo del proceso completo de identificación para mecanismos de baja movilidad se presenta en la Figura 4.7.

4.3.2. Evaluación de los parámetros relevantes identificados

Si bien es importante tener un modelo reducido con un bajo número de condición, no es esta la única consideración que debe hacerse en el momento de evaluar un modelo en parámetros relevantes. En presencia de errores,

cuantos más parámetros se van eliminando, el número de condición del modelo reducido será menor, con lo cual las diferencias entre las fuerzas medidas y las fuerzas estimadas también disminuyen. Sin embargo, a partir de un determinado número de parámetros eliminados, los errores entre las fuerzas medidas y estimadas pueden aumentar. Este aumento se debe a que se eliminan parámetros con índices de contribución dinámica altos que modifican considerablemente las fuerzas estimadas.

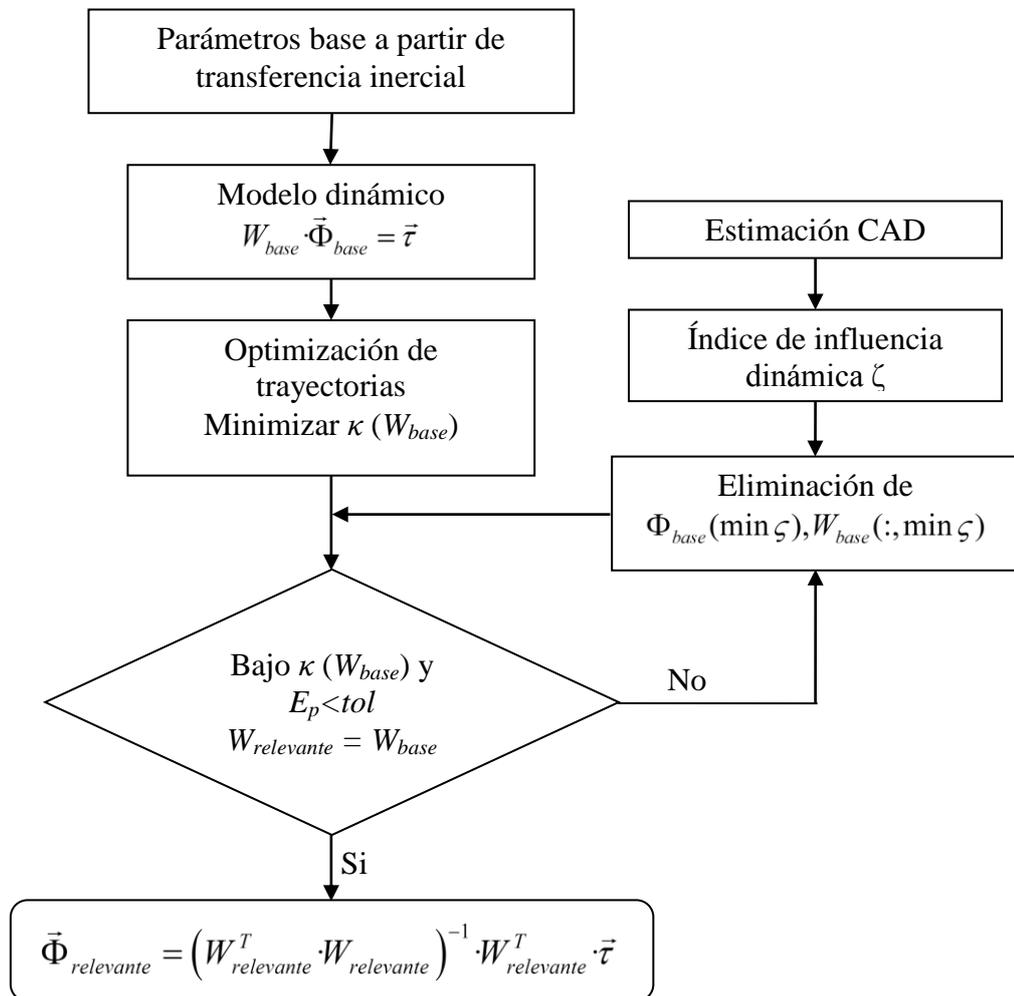


Figura 4.7. Diagrama de flujo en la identificación de parámetros para mecanismos de baja movilidad

Por este motivo es necesario determinar hasta dónde se reduce el modelo en parámetros relevantes. La forma de hacerlo es cuantificando el error entre las fuerzas medidas y las estimadas con el fin de determinar qué tan acertado es el modelo identificado. Un buen evaluador del modelo identificado es el error de predicción de fuerzas E_p definido como,

$$E_p = \sum_{i=1}^{g.d.l} \frac{\sqrt{(\vec{\tau}_{estimado} - \vec{\tau}_{medido})_i^T \cdot (\vec{\tau}_{estimado} - \vec{\tau}_{medido})_i}}{\sqrt{(\vec{\tau}_{medido}^T \cdot \vec{\tau}_{medido})_i}} \quad (4.12)$$

El índice i en la expresión del error de predicción (4.12) se utiliza para diferenciar las fuerzas medidas y estimadas correspondientes a cada grado de libertad $g.d.l$ del sistema mecánico. El vector $\vec{\tau}_{estimado}$ corresponde al $\vec{\tau}$ calculado con el modelo reducido identificado. Los vectores completos de fuerzas generalizadas $\vec{\tau}_{medido}$ y $\vec{\tau}_{estimado}$ se componen de las fuerzas generalizadas asociadas a cada grado de libertad y éstas pueden tener diferentes unidades, dado que se tienen fuerzas y momentos. La determinación de las normas de estas fuerzas requiere que se tengan las mismas unidades de medida, por lo que se debe hacer la diferenciación de cada fuerza generalizada por cada grado de libertad en la medida del error de predicción.

En el Capítulo siguiente se aplica la metodología expuesta de identificación de parámetros para mecanismos de baja movilidad a un mecanismo particular constituido por la suspensión delantera de un vehículo.

4.4. Resumen

La metodología completa de identificación de parámetros dinámicos para mecanismos de baja movilidad fue detallada en este capítulo. La incertidumbre en la determinación del rango de la matriz de observación presente en la aplicación de metodologías numéricas se resuelve con la determinación simbólica de los parámetros base, tras la aplicación del concepto de transferencias de propiedades inerciales. Las condiciones para realizar dichas transferencia fueron expuestas. Las transferencias no son únicas y dependen, para una cadena cinemática cerrada, de la ubicación de

los cortes que convierten el sistema en una cadena abierta y los sólidos de convergencia escogidos. Una manera de conseguir otros conjuntos de parámetros base sin necesidad de realizar el desarrollo completo de esas otras secuencias de transferencias inerciales se formuló partiendo de la matriz simbólica generada en la transferencia inicial. El criterio para reducir el modelo en parámetros base al *modelo final en parámetros relevantes*, de manera que el condicionamiento de la matriz de observación final mejore, se basa en la eliminación de parámetros con poco aporte en fuerzas generalizadas. Para ello se usa el índice de contribución dinámica de cada parámetro base determinado a partir de una aproximación derivada del modelado CAD del sistema.

Capítulo 5

Aplicación del método de identificación de parámetros dinámicos a un mecanismo de baja movilidad

En el capítulo anterior se describió la metodología para identificación de parámetros dinámicos propuesta para mecanismos de baja movilidad. Esta metodología contempla la aplicación de procedimientos simbólicos en la determinación de un conjunto de parámetros base, que permite definir el rango del sistema y las relaciones de dependencia entre parámetros, aún sobre sistemas mal condicionados numéricamente. Debido a la necesidad de tener un sistema para identificación bien condicionado, se realiza una reducción posterior del modelo al denominado *modelo para identificación en parámetros relevantes*. La consecución de este modelo implica la eliminación de algunos parámetros, eliminación basada en sus *índices de contribución dinámica*.

En este capítulo se aplicará el procedimiento de identificación de parámetros, a un sistema mecánico de baja movilidad. En concreto, el conjunto de la suspensión frontal (tipología brazo corto – brazo largo) de un vehículo eléctrico experimental desarrollado y construido en el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Politécnica de Valencia. El motivo para la elección de este caso de estudio es que representa perfectamente los mecanismos de lazo cerrado y baja movilidad que se quieren identificar, siendo además evidente el interés que para la industria del automóvil tendría el disponer de modelos dinámicos ajustados experimentalmente a las condiciones del vehículo.

Aplicando el concepto de transferencia de propiedades inerciales se obtienen cuatro modelos en parámetros base. Los resultados obtenidos se comparan con los derivados de los procedimientos estándar de identificación.

5.1. Sistema mecánico

La topología de la suspensión delantera propósito de este análisis está compuesta por dos mecanismos de cuadrilátero articulado a derecha e izquierda formados por doble trapecio (inferior y superior) y mangueta. Presenta además sistema muelle - amortiguador, rueda y biela de dirección en cada lado de la suspensión y una cremallera de dirección que los une. En la Figura 5.1 se presenta la configuración de la suspensión analizada.

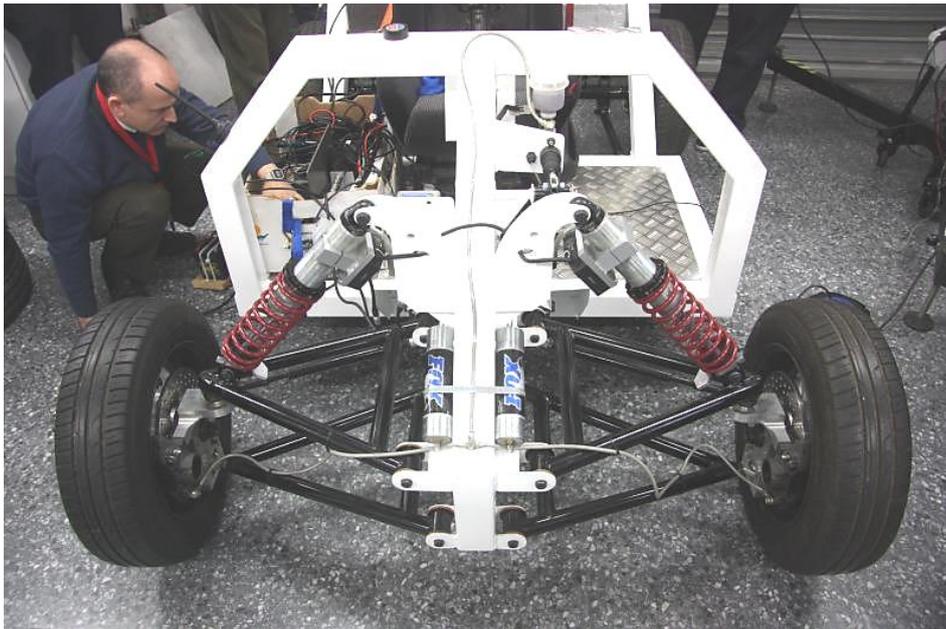


Figura 5.1. Topología de la suspensión delantera de un vehículo ligero.

En la Figura 5.2 se presenta el modelo CAD construido en MSC Adams®, y que es usado como modelo de validación de las metodologías y procedimientos aplicados a lo largo de esta tesis.

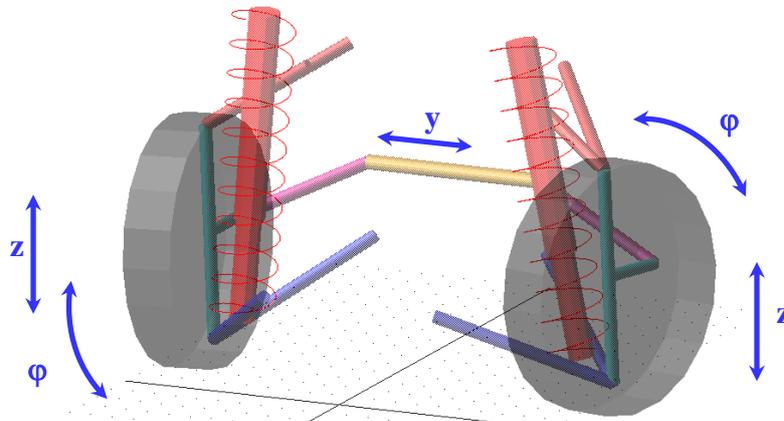


Figura 5.2. Grados de libertad de la suspensión analizada

En la Figura 5.3 se representa únicamente uno de los lados de la suspensión, dado que el sistema es simétrico a derecha e izquierda. En la figura se denotan los elementos como: trapecio inferior (1), trapecio superior (2), mangueta (3), biela de dirección (4), rueda (5), tirante superior del amortiguador (6) y tirante inferior del amortiguador (7). Cada par cinemático está indicado con una letra, denotándose por (R) los pares de revolución, (P) los Prismáticos, (U) los pares universales y (S) las uniones esféricas. Los sistemas de referencia locales no centroidales fueron ubicados de acuerdo con la Figura 5.4

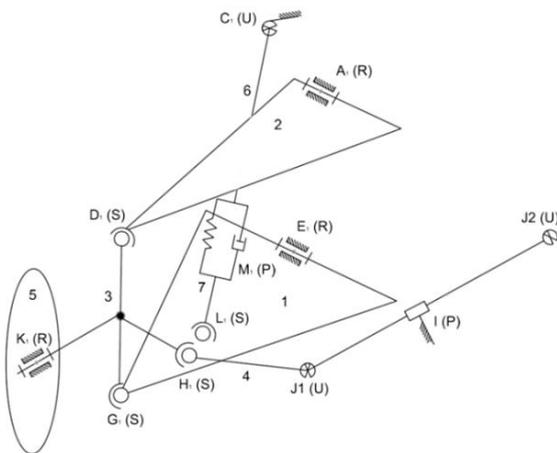


Figura 5.3. Esquema cinemático de la suspensión

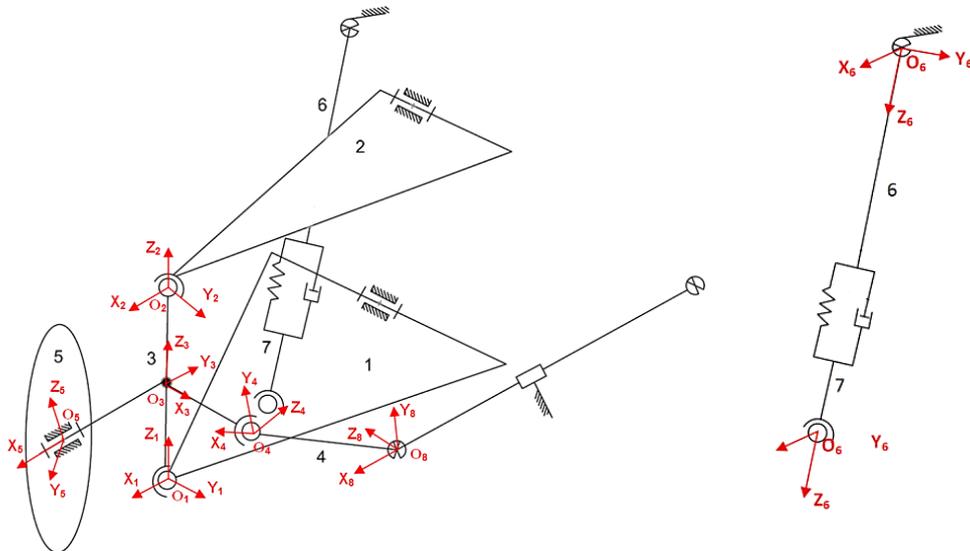


Figura 5.4. Esquema cinemático de la suspensión con ubicación de los sistemas de referencia locales.

En la Tabla 5.1 se presenta la determinación del número de grados de libertad de la suspensión en ausencia de redundancias mecánicas. Los grados de libertad corresponden a los movimientos verticales, los giros de las ruedas y el movimiento lateral de la barra de dirección, tal y como se presenta en la Figura 5.2. Para generar los movimientos verticales se aplican fuerzas sobre los tirantes bajos de los amortiguadores, teniendo componentes únicamente sobre la dirección vertical. El movimiento de la dirección se realiza por la aplicación de una fuerza sobre la cremallera en dirección lateral, es decir, a lo largo de la cremallera. Para los giros de las ruedas, se aplican pares sobre los ejes de las mismas.

Tabla 5.1. Grados de libertad 1/2 vehículo (suspensión delantera)

Componente	No/Cantidad	DOF	Σ DOF
Partes	15	6	90
Revolución	6	-5	-30
Esférica	8	-3	-24
Universal	4	-4	-16
Prismáticos	3	-5	-15
Σ DOF			5

El comportamiento del conjunto muelle - amortiguador de la suspensión se considera lineal con respecto a los coeficientes de rigidez y amortiguamiento y en la modelización de todo el sistema se han considerado los sólidos como rígidos y los pares cinemáticos como ideales, esto es sin fricción ni holguras.

El desarrollo del modelo en parámetros base que se aplica en esta tesis parte de un modelo dinámico inverso, de manera que se presume el conocimiento de la cinemática del mecanismo. Específicamente, se asumen conocidos los valores de las coordenadas generalizadas asociadas a los grados de libertad y sus derivadas respecto al tiempo. Las demás variables cinemáticas incluidas en el modelo, se obtienen del análisis cinemático del sistema. Las fuerzas externas son calculadas por el programa comercial de simulación dinámica multicuerpo Adams, a partir del modelo dinámico inverso, con los movimientos preestablecidos para los grados de libertad de la suspensión. Teniendo en cuenta que bajo condiciones reales de prueba, las fuerzas medidas tendrán errores asociados al propio sistema de medida, las fuerzas obtenidas por simulación son modificadas con un error similar al que se puede encontrar en un sistema de medida convencional. Blasco y Valero [14], Figura 5.5, han desarrollado ruedas dinamométricas para ser utilizadas en el vehículo eléctrico mencionado, reportando errores relativos por debajo del 5% en la medida de las fuerzas.



Figura 5.5. Rueda dinamométrica para medida de fuerzas

5.2. Cálculo de parámetros base

En este apartado se realiza la determinación de un conjunto de parámetros base. Se plantea inicialmente el uso de una metodología numérica (Descomposición SVD), y se verifica el problema de determinación del rango cuando se aplica al sistema mecánico de baja movilidad. Luego de aplicar la metodología simbólica basada en transferencia de propiedades inerciales, se obtiene un conjunto de parámetros base.

Como en principio no se conoce el número de parámetros base del modelo, ni se ha determinado relación alguna entre parámetros dinámicos, para la construcción de una matriz de observación con la que poder comenzar el análisis, se consideran dos grupos cualesquiera de trayectorias. Con ello, se pretende determinar el rango numérico del sistema de manera que pueda construirse el modelo en parámetros base requerido. Con estas primeras trayectorias se obtiene la matriz de observación declarada en la expresión (2.39) y, a través de ellas, se intentará determinar numéricamente el rango de la matriz de observación, tal como se realiza en los métodos numéricos por descomposición SVD. La Figura 5.6 presenta los grupos de trayectorias usadas en los desplazamientos verticales de los amortiguadores, el desplazamiento lateral de la dirección y los giros de ambas ruedas para las dos trayectorias preliminares.

Son dos los sistemas que pueden obtenerse de acuerdo a los parámetros dinámicos que se quieran identificar, considerando sólo parámetros inerciales o parámetros inerciales junto con los coeficientes de rigidez y amortiguamiento del sistema muelle – amortiguador. En el primer caso el número de parámetros dinámicos es de 150, correspondiente a 10 parámetros inerciales por cada cuerpo rígido. En el segundo caso se tienen 154 parámetros dinámicos.

De las matrices de observación para los dos grupos de trayectorias analizadas se deduce que son 35 los parámetros que no tienen influencia alguna sobre las fuerzas generalizadas (las columnas de la matriz W asociadas a ellos son nulas). Estos parámetros son: $my_1, Ixx_1, Ixy_1, Iz_1, Iyz_1, Izz_1, my_2, Ixx_2, Ixy_2, Iz_2, Iyz_2, Izz_2, m_6, mx_8, my_8, mz_8, Ixx_8, Ixy_8, Iz_8, Iyz_8, Izz_8, my_9, Ixx_9, Ixy_9, Iz_9, Iyz_9, my_{10}, Ixx_{10}, Ixy_{10}, Iz_{10}, Iyz_{10}$ y m_{14} .

Estos parámetros no pueden ser identificados ni de manera individual ni como combinación lineal. Como se planteó en la Sección 4.1, la cantidad de estos parámetros depende de la ubicación de los sistemas de referencia locales. Así, de haberse tenido sistemas de referencia local coincidentes con las uniones a la base para los trapecios superiores e inferiores derecho e izquierdo, las masas de los sólidos 1, 2, 9 y 10 tampoco aparecerían en las ecuaciones de movimiento.

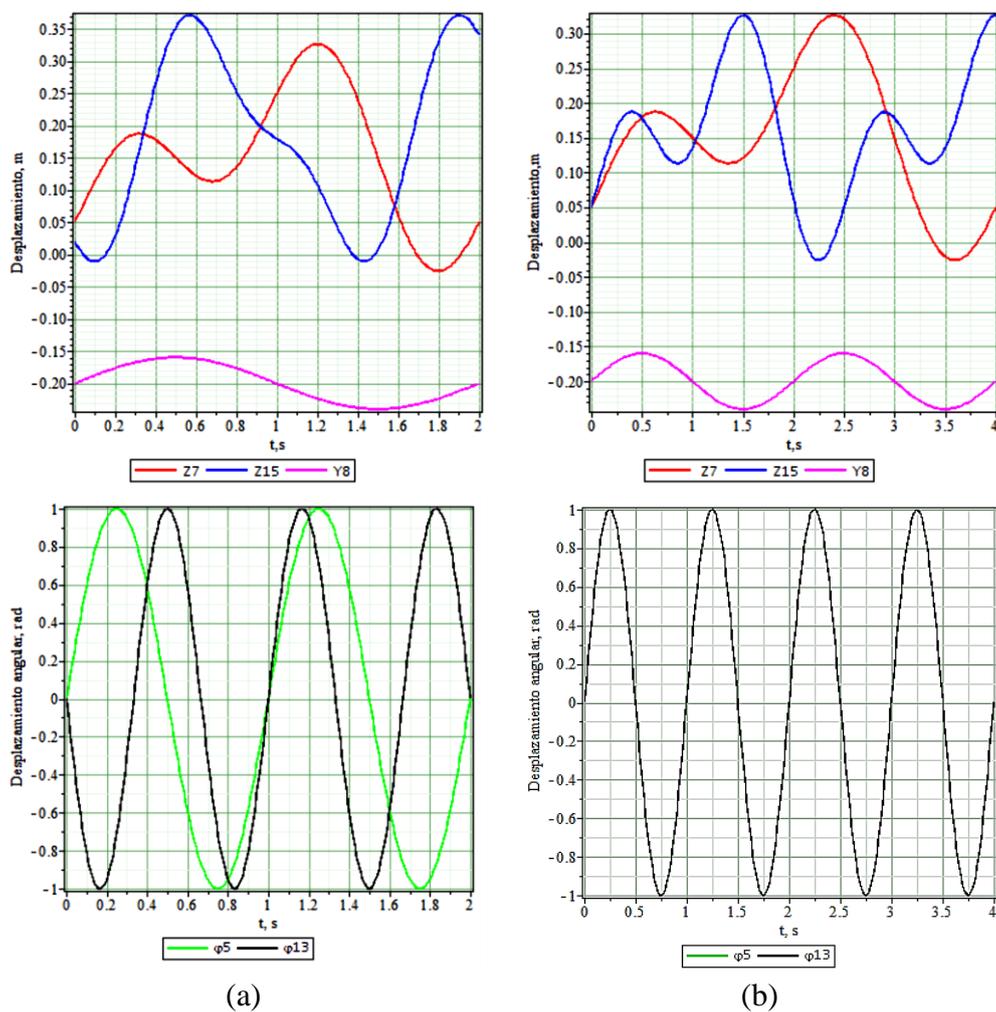


Figura 5.6. Grupos de trayectorias sin optimizar usadas para la determinación inicial de la matriz de observación. (a) Trayectoria 1 (b) Trayectoria 2

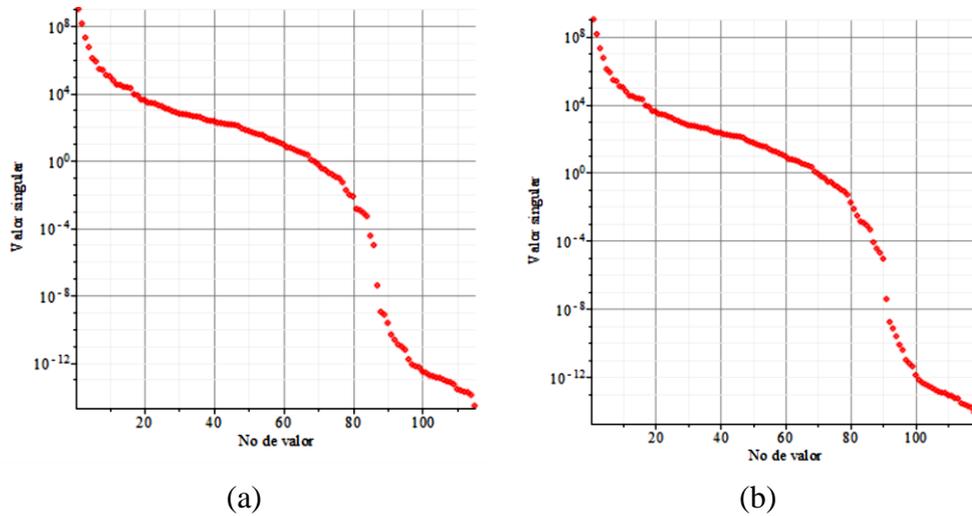


Figura 5.7. Valores singulares de las matrices de observación para la Trayectoria 1 en los modelos considerando en el vector de parámetros a identificar. (a) parámetros inerciales (b) parámetros inerciales y coeficientes rigidez y amortiguamiento.

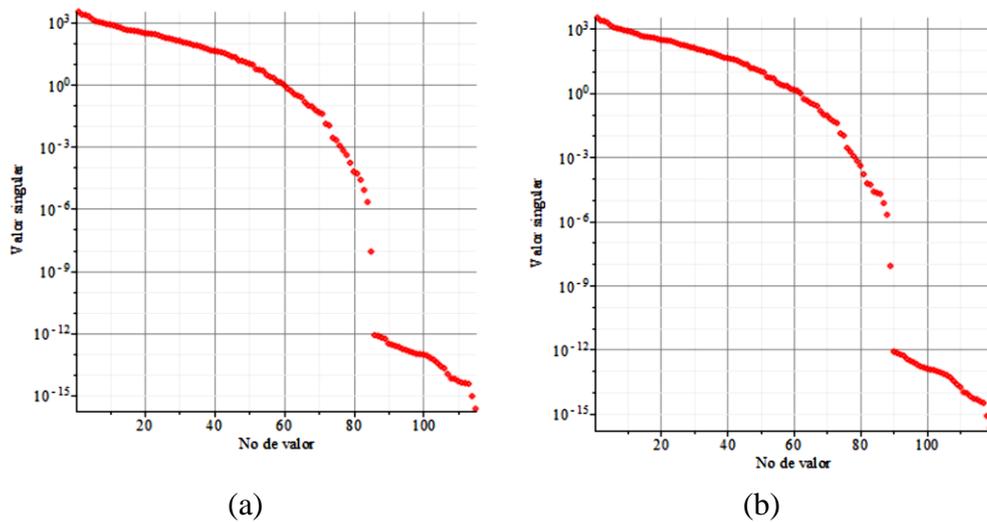


Figura 5.8. Valores singulares de las matrices de observación para la Trayectoria 2 en los modelos considerando en el vector de parámetros a identificar (a) parámetros inerciales (b) parámetros inerciales y coeficientes rigidez y amortiguamiento.

Tras la eliminación de los parámetros sin contribución dinámica se tienen dos sistemas con 115 parámetros (modelo que considera solo parámetros inerciales) y 119 parámetros (modelo con propiedades inerciales y coeficientes de rigidez y amortiguamiento) respectivamente. Luego de la descomposición en valores singulares para las matrices de observación obtenidas, en la Figura 5.7 y la Figura 5.8 se presenta los valores singulares de ambos sistemas para las trayectorias aplicadas.

En la Tabla 5.2 se presentan los primeros valores singulares para cada trayectoria, y los valores singulares en el límite de ser considerados iguales a cero por un sistema de cálculo de doble precisión.

Tabla 5.2. Algunos valores singulares de la matriz de observación para el modelo con solo parámetros inerciales en el vector de parámetros a identificar

Trayectoria 1			Trayectoria 2		
s	Valor	s/s_1	s	Valor	s/s_1
s_1	2296	1	s_1	3304	1
s_{80}	$4,31 \times 10^{-6}$	$1,87 \times 10^{-9}$	s_{80}	$6,21 \times 10^{-5}$	$1,87 \times 10^{-8}$
s_{81}	$3,25 \times 10^{-7}$	$1,41 \times 10^{-10}$	s_{81}	$5,08 \times 10^{-5}$	$1,53 \times 10^{-8}$
s_{82}	$4,91 \times 10^{-8}$	$2,13 \times 10^{-11}$	s_{82}	$2,49 \times 10^{-5}$	$7,53 \times 10^{-9}$
s_{83}	$2,36 \times 10^{-9}$	$1,02 \times 10^{-12}$	s_{83}	$8,04 \times 10^{-6}$	$2,34 \times 10^{-9}$
s_{84}	$9,92 \times 10^{-10}$	$4,31 \times 10^{-13}$	s_{84}	$2,12 \times 10^{-6}$	$6,41 \times 10^{-10}$
s_{85}	$8,95 \times 10^{-13}$	$3,89 \times 10^{-16}$	s_{85}	$8,57 \times 10^{-9}$	$2,59 \times 10^{-12}$
s_{86}	$8,83 \times 10^{-13}$	$3,84 \times 10^{-16}$	s_{86}	$7,97 \times 10^{-13}$	$2,41 \times 10^{-16}$
$Tol=4,21 \times 10^{-11}$			$Tol=6,20 \times 10^{-11}$		

El rango de la matriz de observación no es unívoco cuando su determinación está basada en sus valores singulares, pues dependerá de la tolerancia con la que se consideren los valores no nulos. Si por ejemplo se utiliza la tolerancia sugerida por Gautier $s_{\max} \cdot \varepsilon \cdot r$, donde s_{\max} es el mayor valor singular, ε es la tolerancia de la máquina y r es el rango, cuando se tiene doble precisión en el cálculo de la tolerancia el rango de W_{base} es 84 y con simple precisión de máquina el rango es 61 para la trayectoria 1. De la tabla se observa que el rango calculado con la misma métrica puede variar, como efectivamente ocurre, cuando se utilizan diferentes trayectorias. Por este motivo, es conveniente determinar el rango del sistema de forma no numérica.

En la siguiente sección se aplica el concepto de transferencia de propiedades inerciales para determinar las expresiones de un conjunto de parámetros base, a partir del cual se puede determinar el rango del sistema y las relaciones de dependencia entre las columnas de la matriz de observación.

5.2.1. Cálculo simbólico por transferencia de propiedades inerciales

En esta sección se utiliza el concepto de transferencia de propiedades inerciales para obtener un conjunto de parámetros base de la suspensión delantera en estudio. El conjunto de parámetros base contiene únicamente parámetros inerciales. Los demás parámetros (coeficientes de rigidez y amortiguación) son considerados como independientes.

La metodología de transferencia de parámetros inerciales requiere que la cadena cinemática sea del tipo abierta, por lo que es necesario realizar cortes en algunas de las uniones cinemáticas. La figura 5.9 muestra los cortes realizados en los pares de revolución que unen los trapecios inferiores y superiores de ambos lados de la suspensión al chasis y algunas transferencias realizadas en las uniones cinemáticas.

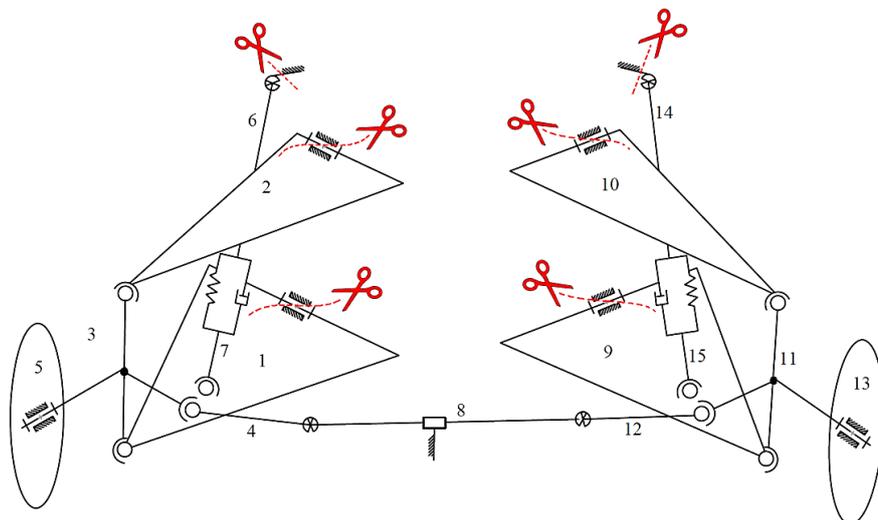


Figura 5.9. Cortes para obtener una cadena abierta ramificada de la suspensión

Son varias las posibilidades de transferencia de parámetros inerciales, pues éstas dependen en parte del lugar en el que se abran las cadenas. Hasta el momento no se conoce cómo influye la selección de los elementos de convergencia en el modelo derivado de una transferencia particular. Así por ejemplo, los sólidos unidos a la base (chasis), son los que menor movilidad tienen. Los parámetros resultantes para estos sólidos, luego de las sucesivas transferencias, deberían tener contribuciones dinámicas importantes, pues habrán tomado las contribuciones a la energía cinética del resto de elementos. Es por lo tanto importante analizar modelos construidos a partir de diferentes transferencias inerciales, considerando sólidos cercanos y lejanos a la base del sistema con el fin de evaluar si la selección de los sólidos de convergencia influyen en la predicción de las fuerzas generalizadas del sistema.

Basado en lo anterior, se obtienen modelos en parámetros base para cuatro diferentes secuencias de transferencias inerciales. En el primer modelo de transferencia, que se ha llamado Modelo T1, los sólidos de convergencia son los elementos cercanos a la base (manguetas 3 y 11). Para este modelo se realiza el desarrollo completo de las transferencias para un solo lado de la suspensión, debido a la simetría que presenta. Otros modelos son obtenidos más adelante a partir de las expresiones simbólicas generadas.

Realizados los cortes mostrados en la figura 5.9, se tienen cuatro ramificaciones alrededor de cada mangueta, Figura 5.10. En este caso desde cada ramificación se transfiere el mayor número de parámetros inerciales posibles en cada unión cinemática, desde los puntos de corte y los extremos del mecanismo.

La primera ramificación parte desde el trapecio superior que está unido al resto del mecanismo a través de dos pares cinemáticos (A_1 y D_1 en la Figura 5.10). Entre el trapecio superior y la mangueta (D_1) se tiene una unión esférica en la que es posible la transferencia únicamente de un monopolo, mientras que para el par de revolución que lo une al chasis (A_1) es posible la transferencia de un monopolo, un dipolo en la dirección del eje de giro y también un cuadrupolo en la dirección del eje de giro. El dipolo transferido eliminaría el parámetro my_1 que no aparece en las ecuaciones. Dadas estas condiciones y considerando que es necesario transferir el mayor número de parámetros posibles se realizan dos transferencias. Entre el chasis y el

trapecio superior (sólido 2) se transfiere en el punto A_1 , un monopolo m_{2A} con parte de la masa del trapecio, buscando que el momento de inercia de segundo orden del trapecio superior sea eliminado del modelo.

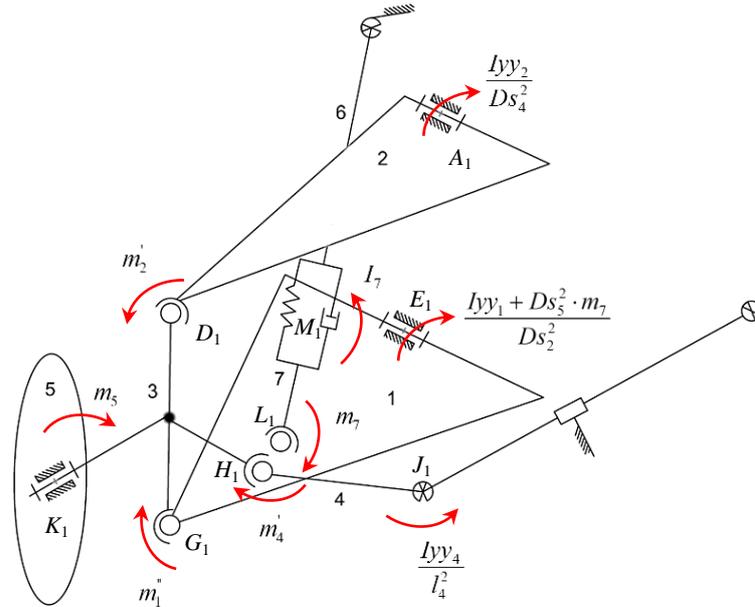


Figura 5.10. Transferencias de parámetros en las uniones cinemáticas de media suspensión

Sabiendo que el nuevo parámetro, luego de la transferencia será

$$I_{yy_2}' = I_{yy_2} - m_{2A}(Ds_4^2 + z_{o_2A}^2) \quad (5.1)$$

donde Ds_4 , Ds_3 y z_{o_2A} son las distancias según los ejes X_2, Y_2, Z_2 entre el punto O_2 y el punto A_1 , tal como lo presenta la Figura 5.11; se determina el monopolo a transferir de manera que se pueda eliminar el parámetro en la ecuación (5.1), lo que hará que $I_{yy_2}' = 0$. El valor del monopolo es,

$$m_{2A} = \frac{I_{yy_2}}{Ds_4^2 + z_{o_2A}^2} \quad (5.2)$$

siendo para la suspensión analizada $z_{o_2A} = 0$.

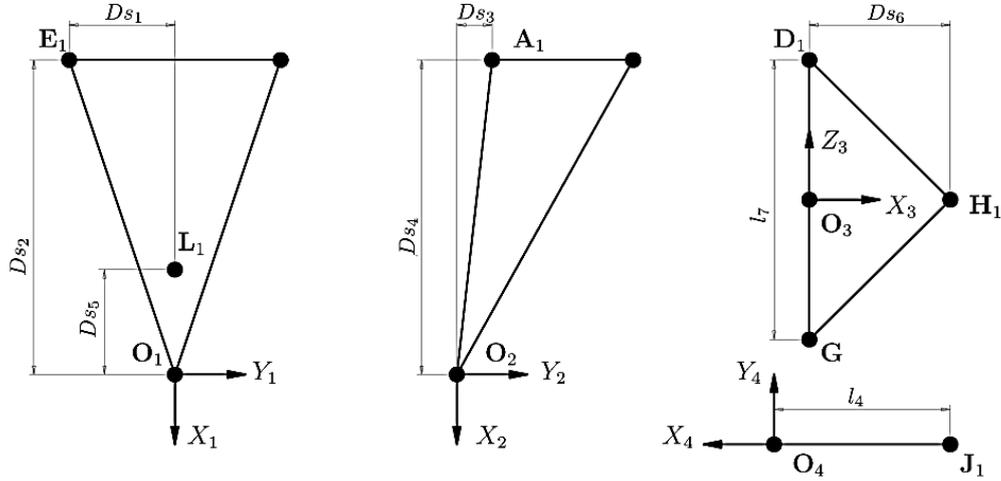


Figura 5.11. Dimensiones significativas de los eslabones

De esta manera, los nuevos parámetros para el trapecio superior son

$$m_2' = m_2 + m_{2A} = m_2 + \frac{I_{yy_2}}{Ds_4^2} \quad (5.3a)$$

$$mG_2' = mG_2 - m_{2A} \begin{bmatrix} Ds_4 \\ Ds_3 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx_2 - \frac{I_{yy_2}}{Ds_4} \\ my_2 - \frac{I_{yy_2} \cdot Ds_3}{Ds_4^2} \\ mz_2 \end{bmatrix} \quad (5.3b)$$

$$I_2' = \begin{bmatrix} Ix_2 - \frac{I_{yy_2}}{Ds_4^2} Ds_3^2 & Ixy_2 - \frac{I_{yy_2}}{Ds_4} \cdot Ds_3 & Ixz_2 \\ Ixy_2 - \frac{I_{yy_2}}{Ds_4^2} \cdot Ds_3 & 0 & Iyz_2 \\ Ixz_2 & Iyz_2 & Iz_2 - \frac{I_{yy_2} (Ds_4^2 + Ds_3^2)}{Ds_4^2} \end{bmatrix} \quad (5.3c)$$

Se observa que el parámetro I_{yy_2} aparece ahora como combinación en el nuevo conjunto de parámetros base. De manera análoga, transfiriendo la

nueva masa total del trapecio superior m_2' a la mangueta 3 en el par esférico, y gracias a que el origen del sistema de referencia de la barra 2 coincide con la posición de la unión cinemática ($x_{o_2D_1} = y_{o_2D_1} = 0$), la transferencia del monopolo no afecta a los demás parámetros inerciales del sólido 2. Luego de esta transferencia, la masa de la mangueta depende de la masa y del segundo momento de inercia del trapecio 2,

$$m_2'' = 0, \quad mG_2'' = mG_2', \quad I_2'' = I_2' \quad (5.4)$$

$$m_3' = m_3 + m_2' = m_3 + m_2 + \frac{Iyy_2}{Ds_4^2} \quad (5.5a)$$

$$mG_3' = \begin{bmatrix} mx_3 \\ my_3 \\ mz_3 + m_2 \cdot \frac{l_7}{2} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7}{2 \cdot Ds_4^2} \end{bmatrix} \quad (5.5b)$$

$$I_3' = \begin{bmatrix} Ixx_3 + m_2 \cdot \frac{l_7^2}{4} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} & Ixy_3 & Ixz_3 \\ Ixy_3 & Iyy_3 + \frac{m_2 l_7^2}{4} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} & Iyz_3 \\ Ixz_3 & Iyz_3 & Izz_3 \end{bmatrix} \quad (5.5c)$$

De la rama de la biela de dirección (sólido 4) pueden transferirse también dos parámetros, el primero a la cremallera de la dirección (sólido 8) y el segundo a la mangueta. Un monopolo $m_{4J_1} = \frac{Iyy_4}{l_4^2}$ correspondiente a parte de la masa de la biela es transferida al sólido 8 en el par universal en J_1 , para eliminar el segundo momento de inercia Iyy_4 . Luego de esta transferencia el parámetro es combinado linealmente. Los nuevos parámetros son,

$$m_4' = m_4 - m_{4J_1} = m_4 - \frac{Iyy_4}{l_4^2} \quad (5.6a)$$

$$mG'_4 = \begin{bmatrix} mx_4 - \frac{Iyy_4}{l_4} \\ my_4 \\ mz_4 \end{bmatrix} \quad (5.6b)$$

$$I'_4 = \begin{bmatrix} Ixx_4 & Ixy_4 & Ixz_4 \\ Ixy_4 & 0 & Iyz_4 \\ Ixz_4 & Iyz_4 & Izz_4 - Iyy_4 \end{bmatrix} \quad (5.6c)$$

Para la cremallera de la dirección,

$$m'_8 = m_8 + m_{4,J_1} = m_8 + \frac{Iyy_4}{l_4^2} \quad (5.7)$$

Los demás parámetros inerciales no se verán modificados gracias a la ubicación coincidente del sistema de referencia de la barra 8 con la unión (lugar de la transferencia); sin embargo, estos parámetros no aparecen en el modelo dinámico por su contribución nula al mismo.

Siguiendo por la misma ramificación, ahora la nueva masa total de la biela 4 se transfiere a la mangueta 3. Por la ubicación del sistema de referencia del sólido 4, los primeros y segundos momentos de inercia no se ven modificados,

$$m''_4 = 0, \quad mG''_4 = mG'_4, \quad I''_4 = I'_4 \quad (5.8)$$

Los nuevos parámetros para la mangueta luego de esta última transferencia son,

$$m''_3 = m_3 + m_2 + \frac{Iyy_2}{Ds_4^2} + m_4 - \frac{Iyy_4}{Ds_4^2} \quad (5.9a)$$

$$mG''_3 = mG'_3 + m''_4 \begin{bmatrix} x_{O_3H_1} \\ y_{O_3H_1} \\ z_{O_3H_1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} mx_3 + m_4 \cdot Ds_6 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6}{l_4^2} \\ my_3 \\ mz_3 + m_2 \cdot \frac{l_7}{2} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7}{2 \cdot Ds_4^2} \end{bmatrix} \quad (5.9b)$$

$$\begin{aligned}
Ixy_3'' &= Ixy_3, & Ixx_3'' &= Ixx_3 + m_2 \cdot \frac{l_7^2}{4} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2}, \\
Ixz_3'' &= Ixz_3, & Iyy_3'' &= Iyy_3 + m_2 \cdot \frac{l_7^2}{2} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} + m_4 \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6^2}{Ds_4^2}, \\
Iyz_3'' &= Iyz_3, & Izz_3'' &= Izz_3 + m_4 \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6^2}{l_4^2}
\end{aligned} \tag{5.9c}$$

En el par de revolución K_I , que une la rueda 5 y la mangueta 3, es posible transferir un monopolo, un dipolo en la dirección del eje de la unión y un cuadrupolo en la dirección del eje de giro. De manera que los nuevos parámetros inerciales son,

$$m_5' = 0 \tag{5.10a}$$

$$mG_5' = \begin{bmatrix} 0 \\ my_5 \\ mz_5 \end{bmatrix} \tag{5.10b}$$

$$I_5' = \begin{bmatrix} Ixx_5 & Ixy_5 & Ixz_5 \\ Ixy_5 & Iyy_5 - Izz_5 & Iyz_5 \\ Ixz_5 & Iyz_5 & 0 \end{bmatrix} \tag{5.10c}$$

$$m_3'' = m_3 + m_2 + \frac{Iyy_2}{Ds_4^2} + m_4 - \frac{Iyy_4}{l_4^2} + m_5 \tag{5.11a}$$

$$mG_3'' = \begin{bmatrix} mx_3 + m_4 \cdot Ds_6 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6}{l_4^2} - m_5 \cdot DKx \\ my_3 - mx_5 - m_5 \cdot DKy \\ mz_3 + m_5 \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right) \end{bmatrix} \tag{5.11b}$$

$$Ixy_3''' = Ixy_3 - m_5 \cdot DKx \cdot DKy - mx_5 \cdot DKx,$$

$$Ixx_3''' = Ixx_3 + m_2 \cdot \frac{l_7^2}{4} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} - 2mx_5 \cdot DKx + m_5 \left(DKy^2 + \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right)^2 \right) + Izz_5,$$

$$Ixz_3''' = Ixz_3 + m_5 \cdot DKx \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right),$$

$$\begin{aligned}
Iyy_3^m &= Iyy_3 + m_2 z_{O_3 D_1}^2 + \frac{Iyy_2 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} + m_4 \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6^2}{l_4^2} + m_5 \left(DKx^2 + \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right)^2 \right), \\
Iyz_3^m &= Iyz_3 + mx_5 \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right) + m_5 \cdot DKy \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right), \\
Izz_3^m &= Izz_3 + m_4 \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6^2}{l_4^2} + m_5 (DKx^2 + DKy^2) + Izz_5,
\end{aligned} \tag{5.11c}$$

Por otra parte, debido a que el origen del sistema de referencia local del tirante inferior del amortiguador coincide con la unión esférica L_1 , es posible transferir su masa del amortiguador al trapecio inferior 1 sin modificar sus demás parámetros. Al estar unidos mediante una unión prismática, los tensores de inercia completos de los sólidos 6 y 7 pueden combinarse. Los nuevos parámetros quedan,

$$m_7' = 0, \quad mG_7' = mG_7, \quad I_7' = 0 \tag{5.12}$$

$$m_1' = m_1 + m_7 \tag{5.13a}$$

$$mG_1' = \begin{bmatrix} mx_1 + m_7 \cdot Ds_5 \\ my_1 \\ mz_1 \end{bmatrix} \tag{5.13b}$$

$$I_1' = \begin{bmatrix} Ixx_1 & Ixy_1 & Ixz_1 \\ Ixy_1 & Iyy_1 + m_7 \cdot Ds_5^2 & Iyz_1 \\ Ixz_1 & Iyz_1 & Izz_1 + m_7 \cdot Ds_5^2 \end{bmatrix} \tag{5.13c}$$

$$m_6' = m_6, \quad mG_6' = mG_6, \quad I_6' = I_6 + I_7 \tag{5.14}$$

Respecto al trapecio inferior 1, pueden transferirse también dos parámetros. Primero se realiza una transferencia a través de la unión de revolución (trapecio inferior – chasis) ubicada en E_1 y luego en la unión esférica (trapecio – mangueta) ubicada en G_1 . En la primera se pueden transferir un monopolo, un dipolo y un cuadrupolo. Sin embargo, la transferencia del dipolo y monopolo anularían parámetros (Izz_1, my_1) que no aparecen en las ecuaciones, por lo que solo un monopolo con parte de la masa

del trapecio es localizado en E_1 , de forma que se anule un solo parámetro: I_{yy_1}'' . Esto se da si $m_{1E_1} = \frac{I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2}{Ds_2^2}$. Para el trapecio inferior se tienen los nuevos parámetros,

$$m_1'' = m_1 + m_7 - \frac{I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2}{Ds_2^2} \quad (5.15a)$$

$$mG_1'' = \begin{bmatrix} mx_1 + m_7 \cdot Ds_5 - \frac{(I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2)Ds_2}{Ds_2^2} \\ my_1 - \frac{(I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2)Ds_1}{Ds_2^2} \\ mz_1 \end{bmatrix} \quad (5.15b)$$

$$\begin{aligned} I_{xy_1}'' &= I_{xy_1} - \frac{(I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2)Ds_1 \cdot Ds_2}{Ds_2^2}, \quad I_{xx_1}'' = I_{xx_1} - \frac{(I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2) \cdot Ds_1}{Ds_2^2}, \\ I_{xz_1}'' &= I_{xz_1}, \quad I_{yy_1}'' = I_{yy_1} + m_7 Ds_5^2 - \frac{(I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2) \cdot Ds_2}{Ds_2^2}, \\ I_{yz_1}'' &= I_{yz_1}, \quad I_{zz_1}'' = I_{zz_1} + m_7 Ds_5^2 - \frac{(I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2)(Ds_1^2 + Ds_2^2) \cdot Ds_2}{Ds_2^2} \end{aligned} \quad (5.15c)$$

En la segunda transferencia sobre el trapecio inferior, en el punto G_1 , el monopolo restante del trapecio inferior 1 m_1'' es llevado a la mangueta 3. Con este cambio no se modifican los demás parámetros inerciales del trapecio para el que se tiene

$$m_1''' = 0, \quad mG_1''' = mG_1'', \quad I_1''' = I_1'' \quad (5.16)$$

Para la mangueta,

$$m_3''' = m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_7 + \frac{I_{yy_2}}{Ds_4^2} - \frac{I_{yy_4}}{l_4^2} - \frac{I_{yy_1} + m_7 \cdot Ds_5^2}{Ds_2^2} \quad (5.17a)$$

$$mG_3^m = \begin{bmatrix} mx_3 + m_4 \cdot Ds_6 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6}{l_4^2} - m_5 \cdot DKx \\ my_3 - mx_5 - m_5 \cdot DKy \\ mz_3 + m_5 \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right) - m_1 \cdot \frac{l_7}{2} - m_7 \cdot \frac{l_7}{2} + \frac{(Iyy_1 + m_7 \cdot Ds_5^2) \cdot l_7}{2 \cdot Ds_2^2} \end{bmatrix} \quad (5.17b)$$

$$\begin{aligned} Ixy_3^m &= Ixy_3 - m_5 \cdot DKx \cdot DKy - mx_5 \cdot DKx, \\ Ixx_3^m &= Ixx_3 + m_2 \cdot \frac{l_7^2}{2} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} - 2mx_5 \cdot DKx + m_5 \left(DKy^2 + \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right)^2 \right) + m_1 \cdot \frac{l_7^2}{4} \\ &\quad + \frac{m_7 \cdot l_7^2}{4} - \frac{(Iyy_1 + m_7 \cdot Ds_5^2) \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_2^2} + Izz_5, \\ Ixz_3^m &= Ixz_3 + m_5 \cdot DKx \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right), \end{aligned} \quad (5.17c)$$

$$\begin{aligned} Iyy_3^m &= Iyy_3 + \frac{m_2 l_7^2}{2} + \frac{Iyy_2 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} + m_4 \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6^2}{l_4^2} + \\ &\quad + m_5 \left(DKx^2 + \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right)^2 \right) + \frac{(m_1 + m_7) \cdot l_7^2}{4} - \frac{(Iyy_1 + m_7 \cdot Ds_5^2) \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_2^2}, \\ Iyz_3^m &= Iyz_3 + mx_5 \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right) + m_5 \cdot DKy \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right), \\ Izz_3^m &= Izz_3 + m_4 \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6^2}{l_4^2} + m_5 (DKx^2 + DKy^2) + Izz_5, \end{aligned}$$

En la Tabla 5.3 se presenta de forma ordenada el conjunto de parámetros base obtenido para el modelo.

Partiendo de un modelo inicial de 115 parámetros, eliminando los parámetros que no tienen ninguna influencia dinámica (35), y combinando linealmente los parámetros transferidos (32), se obtiene un sistema con rango 83.

Tabla 5.3. Parámetros base para el modelo T1

Φ_b	Parámetro base	Φ_b	Parámetro base
1	$mx_1 - m_7 \cdot Ds_5 + \frac{Iyy_1}{Ds_2} + \frac{m_7 \cdot Ds_2^2}{Ds_2}$	2	mz_1
3	$mx_2 + \frac{Iyy_2}{Ds_4}$	4	mz_2
5	$m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5 + m_7 \cdot \frac{Iyy_2}{Ds_4^2} - \frac{Iyy_4}{l_4^2} - \frac{Iyy_1}{Ds_2^2} - \frac{m_7 \cdot Ds_2^2}{Ds_2^2}$	6	$mx_3 + m_4 \cdot Ds_6 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6}{l_4^2} - m_5 \cdot DKx$
7	$my_3 - mx_5 - m_5 \cdot DKy$	8	$mz_3 + m_5 \cdot \left(\frac{l_1}{2} - DKz \right) + \frac{m_2 \cdot l_1}{2} - \frac{Iyy_2 \cdot l_1}{2Ds_4^2} - \dots$ $\dots - \frac{m_1 \cdot l_1}{2} - \frac{m_7 \cdot l_1}{2} + \frac{Iyy_1 \cdot l_1}{2Ds_2^2} - \frac{m_7 Ds_2^2 l_1}{2Ds_2^2}$
9	$Ixx_3 + m_5 \left(DKy^2 + \left(\frac{l_1}{2} - DKz \right)^2 \right) + 2mx_5 \cdot DKy + \frac{m_2 l_1^2}{4} - \dots$ $-\frac{Iyy_2 \cdot l_1^2}{4Ds_4^2} + \frac{m_1 \cdot l_1^2}{4} + \frac{m_7 \cdot l_1^2}{4} - \frac{Iyy_1 \cdot l_1^2}{4Ds_2^2} - \frac{m_7 Ds_2^2 \cdot l_1^2}{4Ds_2^2}$	10	$Ixy_3 + m_5 \cdot DKx \cdot DKy - mx_5 \cdot DKx$
11	$Ixz_3 + m_5 \cdot DKx \cdot \left(\frac{l_1}{2} - DKz \right)$	12	$Iyy_3 + m_5 \left(DKx^2 + \left(\frac{l_1}{2} - DKz \right)^2 \right) + Iz_{z5} + \frac{m_2 l_1^2}{4} - \frac{Iyy_2 \cdot l_1^2}{4Ds_4^2} + \dots$ $m_4 \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6^2}{l_4^2} + \frac{m_1 \cdot l_1^2}{4} + \frac{m_7 \cdot l_1^2}{4} - \frac{Iyy_1 \cdot l_1^2}{4Ds_2^2}$
13	$Iyz_3 + mx_5 \cdot \left(\frac{l_1}{2} - DKz \right) + m_5 \cdot DKy \cdot \left(\frac{l_1}{2} - DKz \right)$	14	$Iz_{z3} + m_4 \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_4 \cdot Ds_6^2}{l_4^2} + m_5 (DKx^2 + DKy^2) + Iz_{z5} + 2 \cdot mx_5 \cdot DKy$
15	$mx_4 + \frac{Iyy_4}{l_4}$	16	my_4
17	mz_4	18	Ixy_4
19	Ixx_4	20	Ixz_4
21	Iyz_4	22	$Iz_{z4} - Iyy_4$
23	my_5	24	mz_5
25	Ixy_5	26	Ixx_5
27	Ixz_5	28	$Iyy_5 - Iz_{z5}$
29	Iyz_5	30	mx_6
31	my_6	32	mz_6
33	$Ixy_6 + Ixy_7$	34	$Ixx_6 + Ixx_7$
35	$Ixz_6 + Ixz_7$	36	$Iyy_6 + Iyy_7$
37	$Iyz_6 + Iyz_7$	38	$Iz_{z6} + Iz_{z7}$
39	mx_7	40	my_7
41	mz_7	42	$m_8 + \frac{Iyy_4}{l_4^2} + \frac{Iyy_{12}}{l_4^2}$

Continuación Tabla 5.3...

Φ_b	Parámetro base	Φ_b	Parámetro base
43	$mx_9 - m_{15} \cdot Ds_5 + \frac{Iyy_9}{Ds_2} + \frac{m_{15} Ds_5^2}{Ds_2}$	44	mz_9
45	$mx_{10} + \frac{Iyy_{10}}{Ds_4}$	46	mz_{10}
47	$m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13} + m_{15} - \frac{Iyy_{10}}{Ds_4} - \frac{Iyy_{12}}{l_4^2} - \frac{Iyy_9}{Ds_2} - \frac{m_{15} Ds_5^2}{Ds_2^2}$	48	$mx_{11} + m_{12} \cdot Ds_6 - \frac{Iyy_{12} \cdot Ds_6}{l_4^2} - m_{13} \cdot DKx$
49	$my_{11} - mx_{13} + m_{13} \cdot DKy$	50	$mz_{11} + m_{13} \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right) + \frac{m_{10} \cdot l_7}{2} - \frac{Iyy_{10} \cdot l_7}{2 \cdot Ds_4^2} - \frac{m_9 \cdot l_7}{2} - \dots$ $\dots - \frac{m_{15} \cdot l_7}{2} + \frac{Iyy_9 \cdot l_7}{2 \cdot Ds_2^2} + \frac{m_{15} Ds_5^2 l_7}{2 Ds_2^2}$
51	$Ixx_{11} + m_{13} \left(DKy^2 + \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right)^2 \right) - 2mx_{13} \cdot DKy + \frac{m_{10} \cdot l_7^2}{4} -$ $\dots \frac{Iyy_{10} \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} + \frac{m_9 \cdot l_7^2}{4} + \frac{m_{15} \cdot l_7^2}{4} - \frac{Iyy_9 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_2^2} - \frac{m_{15} Ds_5^2 l_7^2}{4 Ds_2^2}$	52	$Ixy_{11} + m_{13} \cdot DKx \cdot DKy - mx_{13} \cdot DKx$
53	$Ixz_{11} + m_{13} \cdot DKx \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right)$	54	$Iyy_{11} + m_{13} \left(DKx^2 + \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right)^2 \right) + Iz_{13} + \frac{m_{10} l_7^2}{4} - \frac{Iyy_{10} \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_4^2} +$ $+ m_{12} \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_{12} \cdot Ds_6^2}{l_4^2} + \frac{m_9 \cdot l_7^2}{4} + \frac{m_{15} \cdot l_7^2}{4} - \frac{Iyy_9 \cdot l_7^2}{4 \cdot Ds_2^2} - \frac{m_{15} Ds_5^2 l_7^2}{4 Ds_2^2}$
55	$Iyz_{11} + mx_{13} \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right) - m_{13} \cdot DKy \cdot \left(\frac{l_7}{2} - DKz \right)$	56	$Iz_{11} + m_{13} \left(DKx^2 + DKy^2 \right) - 2 \cdot mx_{13} \cdot DKy + Iz_{13} + \dots$ $\dots + m_{12} \cdot Ds_6^2 - \frac{Iyy_{12} \cdot Ds_6^2}{l_4^2}$
57	$mx_{12} + \frac{Iyy_{12}}{l_4}$	58	my_{12}
59	mz_{12}	60	Ixx_{12}
61	Ixy_{12}	62	Ixz_{12}
63	Iyz_{12}	64	$Izz_{12} - Iyy_{12}$
65	my_{13}	66	mz_{13}
67	Ixy_{13}	68	Ixx_{13}
69	Ixz_{13}	70	$Iyy_{13} - Iz_{13}$
71	Iyz_{13}	72	mx_{14}
73	my_{14}	74	mz_{14}
75	$Ixy_{14} + Ixy_{15}$	76	$Ixx_{14} + Ixx_{15}$
77	$Ixz_{14} + Ixz_{15}$	78	$Iyy_{14} + Iyy_{15}$
79	$Iyz_{14} + Iyz_{15}$	80	$Izz_{14} + Izz_{15}$
81	mx_{15}	82	my_{15}
83	mz_{15}		

En la Tabla 5.4 se presenta un resumen de todos los parámetros inerciales que resultan dependientes luego de las transferencias (a derecha e izquierda) aplicadas para este modelo.

Tabla 5.4. Parámetros dependientes según las transferencias realizadas en el modelo T1.

Unión	Eslabones	Parámetros dependientes	Unión	Eslabones	Parámetros dependientes
K_1	5 – 3	m_5, mx_5, Izz_5	K_2	13 – 11	$m_{13}, mx_{13}, Izz_{13}$
A_1	0 – 2	Iyy_2	A_2	0 – 10	Iyy_{10}
D_1	2 – 3	m_2	D_2	10 – 11	m_{10}
H_1	4 – 3	m_4	H_2	12 – 11	m_{12}
J_1	4 – 8	Iyy_4	J_2	12 – 8	Iyy_{12}
E_1	0 – 1	Iyy_1	E_2	0 – 9	Iyy_9
G_1	1 – 3	m_1	G_2	9 – 11	m_9
L_1	7 – 1	m_7	L_2	15 – 9	m_{15}
M_1	7 – 6	$Ixy_7, Ixx_7, Ixz_7,$ Iyy_7, Iyz_7, Izz_7	M_2	15 – 14	$Ixy_{15}, Ixx_{15}, Ixz_{15},$ $Iyy_{15}, Iyz_{15}, Izz_{15}$

5.3. Otros modelos derivados de un conjunto de parámetros base simbólicos

Reagrupando los términos de los parámetros base de la forma expresada en (4.6),

$$\vec{\Phi}_{base} = \vec{\Phi}_1 + \beta \cdot \vec{\Phi}_2 = \underbrace{\begin{bmatrix} I_{r \times r} & \beta_{r \times (m-r)} \end{bmatrix}}_B \cdot \begin{bmatrix} \vec{\Phi}_1 \\ \vec{\Phi}_2 \end{bmatrix}$$

se determina la matriz B que contiene una matriz identidad asociada a los parámetros independientes en el vector de parámetros base, y la matriz β con las relaciones de dependencia. Si se desea otro conjunto de parámetros base de rango máximo calculado simbólicamente, es decir, para el sistema analizado de rango 83, es suficiente con seleccionar 83 columnas de B y verificar que su rango sea máximo. Estas combinaciones que denominaremos *válidas* corresponden a transferencias de parámetros correctamente realizadas. Considerando que se tienen 115 columnas (correspondientes a 115

parámetros físicos) para agrupar en grupos de 83, se tienen $\frac{115!}{(32)! \cdot 83!} \approx$

$2,8 \times 10^{+28}$ combinaciones para evaluar. Evaluar tal cantidad de conjuntos requiere de mucho tiempo de cálculo. Como no hay manera de saber de antemano cuáles de los conjuntos válidos obtenidos permiten realizar una mejor identificación de parámetros, se pueden seleccionar por ejemplo, unas pocas transferencias de parámetros con sólidos de convergencia cerca y lejos de la base, y evaluar los modelos en parámetros base derivados de ellos para ver si existen diferencias significativas entre los resultados que ofrece utilizar unos y otros conjuntos de parámetros base.

Como en la transferencia abordada en la sección anterior, los sólidos de convergencia eran los elementos más alejados de la base, se plantea ahora realizar transferencias considerando sólidos de convergencia a los trapecios inferiores (1 y 9), que son los sólidos más cercanos al chasis. Con ello se espera nivelar los aportes que a las fuerzas generalizadas entregan los nuevos parámetros base. Los parámetros dependientes de la combinación de parámetros base T2 se presentan en la Tabla 5.5.

Tabla 5.5. Parámetros dependientes para el modelo T2.

Unión	Eslabones	Parámetros dependientes	Unión	Eslabones	Parámetros dependientes
K_1	5 – 3	m_5, mx_5, Iy_5	K_2	13 – 11	m_{13}, mx_{13}, Iy_{13}
A_1	0 – 2	mx_2	A_2	0 – 10	mx_{10}
D_1	2 – 3	m_2	D_2	10 – 11	m_{10}
H_1	4 – 3	m_4	H_2	12 – 11	m_{12}
J_1	4 – 8	mx_4	J_2	12 – 8	mx_{12}
G_1	3 – 1	m_3	G_2	11 – 9	m_{11}
L_1	7 – 1	m_7	L_2	15 – 9	m_{15}
M_1	7 – 6	$Ixy_7, Ixx_7, Ixz_7,$ Iyy_7, Iyz_7, Izz_7	M_2	15 – 14	$Ixy_{15}, Ixx_{15}, Ixz_{15},$ $Iyy_{15}, Iyz_{15}, Izz_{15}$
E_1	0 – 1	m_1	E_2	0 – 9	m_9

Seleccionados los parámetros dependientes $\vec{\Phi}_2$, se determina el nuevo conjunto de parámetros base, como se expone en la Sección 4.1.2, reordenando las columnas de la *matriz B simbólica*, y realizando operaciones fila posteriormente.

Los parámetros base obtenidos para este modelo se presentan en el anexo A.

El siguiente modelo de transferencia T3, toma como sólidos de convergencia los trapecios superiores e inferiores de ambos lados de la suspensión. La Tabla 5.6 presenta los parámetros dependientes para este modelo.

Tabla 5.6. Parámetros dependientes para el modelo T3.

Unión	Eslabones	Parámetros dependientes	Unión	Eslabones	Parámetros dependientes
K_1	5 – 3	m_5, mx_5, Izz_5	K_2	13 – 11	$m_{13}, mx_{13}, Izz_{13}$
A_1	0 – 2	Iyy_2	A_2	0 – 10	Iyy_{10}
D_1	3 – 2	mz_3	D_2	11 – 10	mz_{11}
H_1	4 – 3	m_4	H_2	12 – 11	m_{12}
J_1	8 – 4	m_8	J_2	12 – 8	Iyy_{12}
G_1	3 – 1	m_3	G_2	11 – 9	m_{11}
L_1	7 – 1	m_7	L_2	15 – 9	m_{15}
M_1	7 – 6	$Ixy_7, Ixx_7, Ixz_7,$ Iyy_7, Iyz_7, Izz_7	M_2	15 – 14	$Ixy_{15}, Ixx_{15}, Ixz_{15},$ $Iyy_{15}, Iyz_{15}, Izz_{15}$
E_1	0 – 1	Iyy_1	E_2	0 – 9	Iyy_9

De las combinaciones válidas que se obtuvieron al evaluar aleatoriamente algunas de las posibles combinaciones existentes, se determina el modelo T4. Como se obtiene al azar desde un conjunto válido, se sabe que corresponde a un modelo de transferencia de propiedades inerciales, pero no ha de seguir necesariamente una secuencia especial de transferencia. En este modelo, los parámetros dependientes que se tienen son: $m_1, Iyy_1, m_2, Iyy_2, Izz_3, Iyy_4, m_5, mx_5, Izz_5, m_7, Ixy_7, Ixx_7, Ixz_7, Iyy_7, Iyz_7, Izz_7, mx_9, Iyy_{10}, mz_{11}, Ixx_{11}, Izz_{11}, Iyy_{12}, m_{13}, mx_{13}, Izz_{13}, m_{15}, Ixy_{15}, Ixx_{15}, Ixz_{15}, Iyy_{15}, Iyz_{15}$ y Izz_{15} .

Finalmente se tiene el modelo T5 conformado de tomar los 32 parámetros dependientes al azar. Para este modelo, el rango (calculado de forma numérica) de la matriz de observación no se corresponde con el rango calculado simbólicamente mediante los modelos de transferencia de propiedades inerciales. Por tanto este es el único modelo que no es *válido*. En este modelo, los parámetros seleccionados como dependientes son: $m_3, mx_3, Ixy_3, Ixz_3, Iyy_4, Ixy_5, Iyy_5, Ixx_6, Ixz_6, Iyy_6, Izz_6, Ixy_7, mz_9, mz_{10}, Iyy_{10}, Ixx_{11}, Ixz_{11},$

I_{zz11} , m_{12} , I_{xz12} , I_{yy12} , I_{yz12} , m_{y13} , I_{xz13} , I_{yz13} , I_{zz13} , m_{z14} , I_{xx14} , m_{z15} , I_{xy15} , I_{yy15} y I_{zz15} .

5.4. Optimización de trayectorias

Con el fin de realizar el procedimiento de identificación, se utilizan trayectorias optimizadas para obtener un menor número de condición de la matriz WI . Éstas se han parametrizado, como se ha explicado en la Sección 3.31, en series finitas de Fourier para cada modelo.

$$f(t) = A_0 + \sum_{j=1}^{NH} \left[\frac{a_j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot j} \cdot \text{sen}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) - \frac{b_j}{2 \cdot \pi \cdot f \cdot j} \cdot \text{cos}(2 \cdot \pi \cdot f \cdot j \cdot t) \right]$$

Las variables de diseño son los parámetros de las series, la función objetivo a minimizar es el número de condición de la matriz de observación y se han considerado restricciones cinemáticas en orden a garantizar la factibilidad de la trayectoria generada. Todo ello conduce a un problema de optimización no lineal sometido a restricciones también no lineales que se ha resuelto mediante un algoritmo de Programación Secuencial Cuadrática.

La Figura 5.12 presenta las trayectorias optimizadas para los modelos T1 a T5. En todos los modelos, las coordenadas que controlan el giro de ambas ruedas ϕ_5 y ϕ_{13} se establecieron como $\phi = 50 \cdot \sin(f \cdot \pi \cdot t)$

Para estas trayectorias, los números de condición alcanzados por las matrices de observación W_{base} de cada modelo se presentan en la Tabla 5.7.

De la tabla anterior, se puede observar que el condicionamiento para el modelo T5, modelo para el cual los parámetros dependientes han sido seleccionados al azar, es varios órdenes de magnitud mayor que los obtenidos por transferencia de propiedades inerciales. Sin embargo, a pesar de la optimización de la trayectoria, el número de condición de la matriz de observación de todos los modelos en parámetros base es todavía muy elevado, aun cuando el criterio de optimización ha sido la minimización del número de condición de la matriz de observación base.

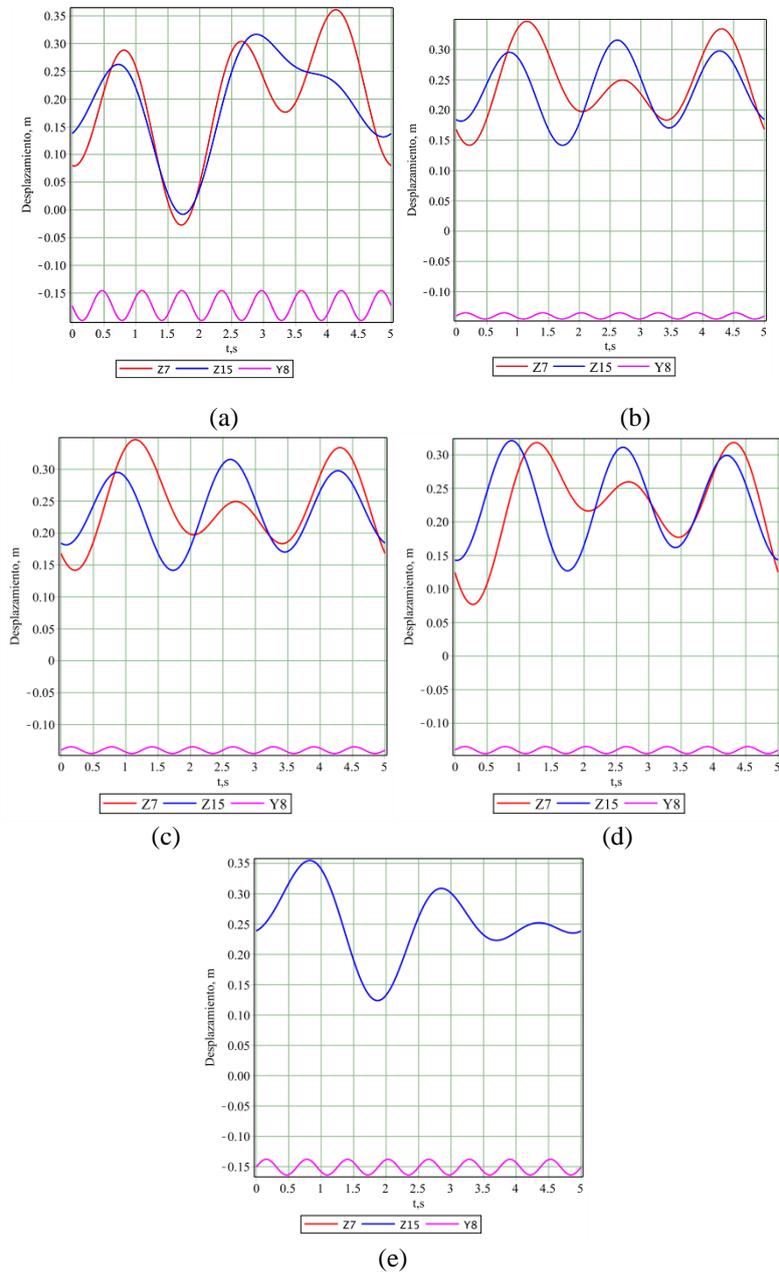


Figura 5.12. Trayectorias optimizadas mediante el criterio de minimización del número de condición de la matriz de observación de los modelos (a) T1, (b) T2, (c) T3, (d) T4 y (e) T5.

Tabla 5.7. Número de condición de las matrices de observación

Modelo	$\kappa (W_{base})$
1	$1,13 \times 10^{+12}$
2	$1,11 \times 10^{+14}$
3	$9,55 \times 10^{+13}$
4	$1,42 \times 10^{+14}$
5	$1,21 \times 10^{+19}$

Con estos condicionamientos, los parámetros identificados estarán muy mal estimados cuando las fuerzas empleadas en el proceso de identificación incluyan errores de medida. Con el fin de verificar este hecho, se considera una nueva trayectoria que servirá para validar los resultados que se obtengan con los modelos estudiados. Las características de esta Trayectoria de Validación, llamada TV, se ajustan a las consideradas en las trayectorias de identificación, es decir, con igual número de armónicos y frecuencias del mismo orden. En la Figura 5.13 se presenta la trayectoria de validación TV.

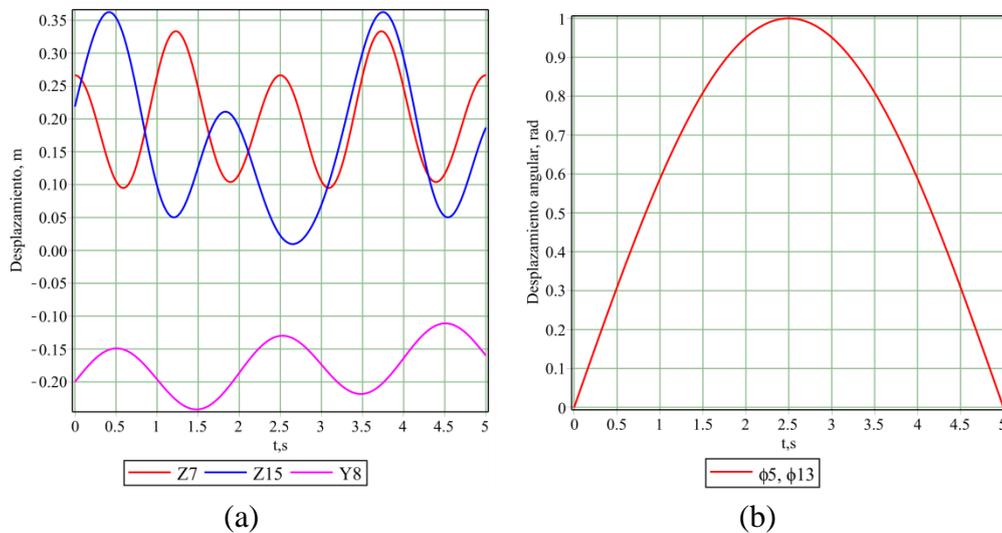


Figura 5.13. Trayectoria de validación (a) desplazamientos verticales de las ruedas y laterales de la dirección (b) giro de las ruedas

Si el vector de fuerzas generalizadas de identificación $\vec{\tau}$ usado en la identificación de los parámetros base estuviese libre de errores, el modelo en parámetros base obtenido predice de forma adecuada las fuerzas

generalizadas sobre otras trayectorias, sin importar el condicionamiento numérico de la matriz de observación. Cuando se identifican los parámetros en presencia de errores en las fuerzas, lo cual es inherente al proceso de medida, el modelo en parámetros base no es capaz de reproducir adecuadamente las fuerzas generalizadas para otras trayectorias diferentes a las de optimización.

En las figuras 5.14 - 5.16 se aprecian las fuerzas generalizadas predichas por el modelo T1 para la trayectoria de validación, cuando la identificación se ha realizado sin errores y con errores del 5% en las fuerzas externas usadas en el cálculo de las fuerzas generalizadas. Se aprecia como en presencia de errores en las fuerzas de identificación, la fuerza generalizada estimada asociada al movimiento vertical derecho, 5.14(b), difiere y por mucho de la fuerza generalizada teórica. Las fuerzas estimadas sin error y las fuerzas exactas se superponen en esta figura de manera que no se observan diferencias entre ambas.

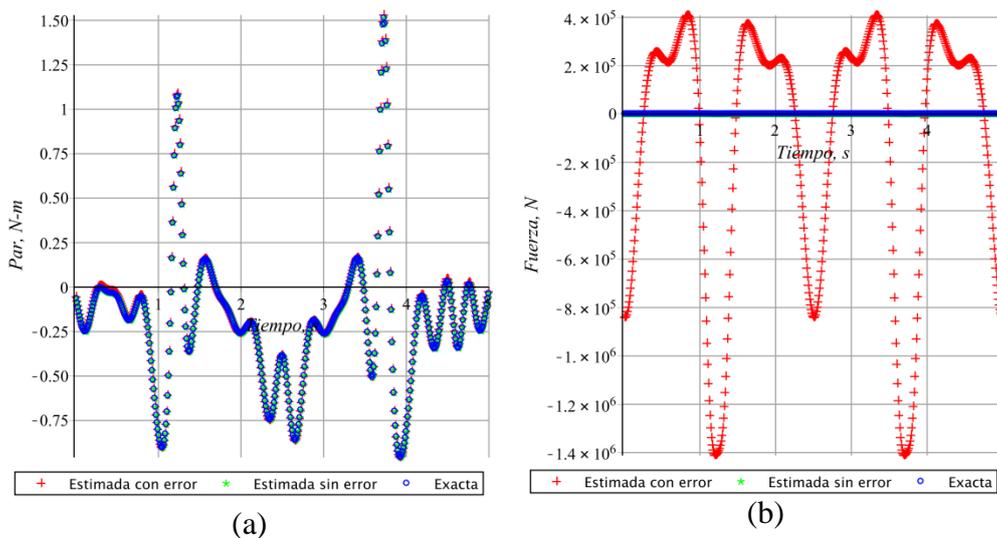


Figura 5.14. Fuerzas generalizadas estimadas y teóricas asociadas a las coordenadas generalizadas independientes del lado derecho de la suspensión. (a) giro de la rueda, (b) movimiento vertical del tirante inferior del amortiguador.

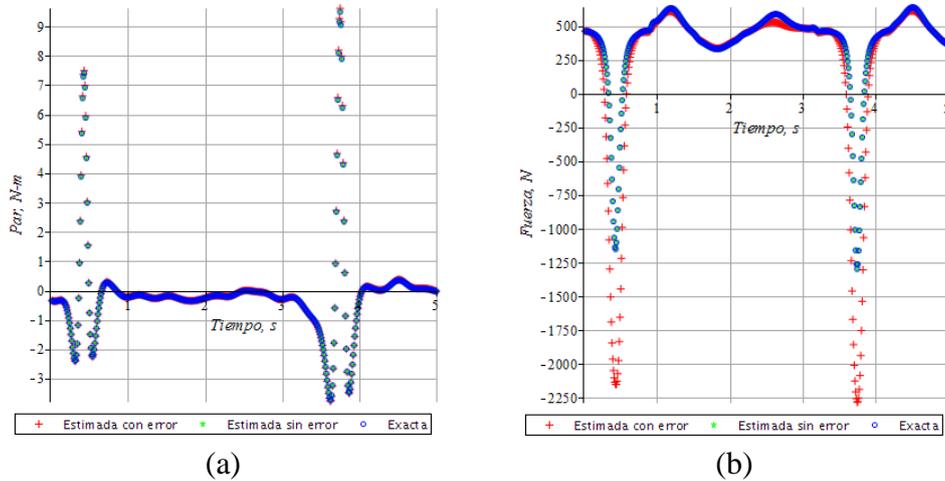


Figura 5.15. Fuerzas generalizadas estimadas y teóricas asociadas las coordenadas generalizadas independientes del lado izquierdo de la suspensión. (a) giro de la rueda, (b) movimiento vertical del tirante inferior del amortiguador

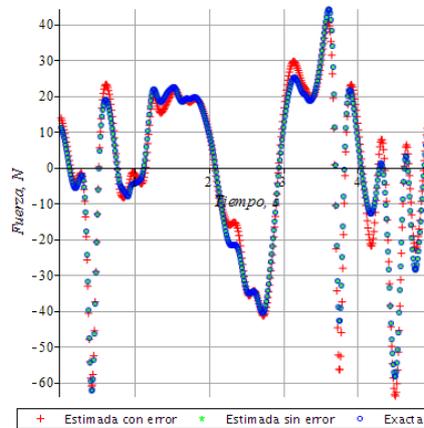


Figura 5.16. Fuerzas generalizadas estimadas y teóricas asociadas a la dirección.

Queda claro que con un alto número de condición en la matriz de observación, no es posible conseguir un modelo identificado bajo condiciones reales que pueda predecir con un bajo error las fuerzas generalizadas para cualquier trayectoria. Para lograrlo es necesario obtener

un modelo con un condicionamiento numérico mucho más bajo de lo que se tiene en parámetros base.

Eliminando columnas de la matriz de observación y por tanto eliminando parámetros base, se logra mejorar el condicionamiento del modelo. A continuación se presentan los resultados de aplicar la reducción al modelo en parámetros base.

5.5. Reducción del modelo con base en la contribución dinámica

La reducción del modelo en parámetros base a un conjunto menor de parámetros conocido como modelo en *parámetros relevantes*, se realiza buscando obtener un modelo cuyas fuerzas generalizadas logren predecir con certeza las fuerzas de un sistema para cualquier movimiento dentro de sus condiciones de operación. Como se mencionó en la Sección 3.4.2, un criterio típico de reducción, aplicado en sistemas mecánicos, es la eliminación de parámetros en base a su desviación estándar, con lo que se garantiza una adecuada estimación del parámetro. La utilización de este criterio requiere la inversión de la matriz de información ($W_{base}^T \cdot W_{base}$). En sistemas de baja movilidad como la suspensión analizada, el condicionamiento de la matriz de información es aún más crítica que la de la matriz de observación base. La Tabla 5.8 presenta los números de condición para los cinco modelos estudiados. Con estos valores de condicionamiento, el cálculo de la desviación estándar no es una medida que represente la calidad con la que se ha identificado el parámetro.

Tabla 5.8. Números de condición de la matriz de información de los modelos en parámetros base desarrollados

Modelo	$\kappa(W_{base}^T \cdot W_{base})$
1	$7,32 \times 10^{+21}$
2	$5,27 \times 10^{+22}$
3	$1,95 \times 10^{+23}$
4	$2,72 \times 10^{+24}$
5	$6,82 \times 10^{+25}$

Por lo anterior, el criterio que se propone y se aplica en esta tesis es el índice de contribución dinámica ζ , tal como se expresa en la ecuación 4.11. Con este índice de contribución se determina el ordenamiento usado para eliminar parámetros base. Los parámetros menos contributivos se eliminan del conjunto de parámetros base hasta alcanzar niveles de condicionamiento numérico de la matriz W_{base} que permitan garantizar el proceso de identificación.

5.5.1. Índice de contribución dinámica

En trabajos referenciados en la Sección 4.3.1, el índice de contribución se calcula en base a los parámetros identificados. Sin embargo, en mecanismos de baja movilidad, los parámetros $\bar{\Phi}_{base}$ identificados presentan grandes variaciones en presencia de ruido en las fuerzas generalizadas utilizadas para identificar. En la Tabla 5.9 se observa como con un 5% de error en las fuerzas externas, el valor de diez de los parámetros base identificados para el modelo T1, cambia con relación a los parámetros base teóricos determinados a partir de una aproximación CAD.

Tabla 5.9. Variación de los parámetros base identificados con la adición de errores en las fuerzas de identificación para el modelo T1. Cada parámetro tiene unidades según le corresponda de kg, kg·m y kg·m².

Φ_{base}	Teórico CAD	Identificado Error 5%
1	$-3,4 \times 10^{-1}$	$-3,5 \times 10^{+4}$
2	0	$-3,8 \times 10^{+1}$
3	$-1,6 \times 10^{-1}$	$4,9 \times 10^{+1}$
4	0	$4,5 \times 10^{+1}$
5	$3,5 \times 10^{+1}$	$1,1 \times 10^{+5}$
6	$-2,8 \times 10^{-1}$	$-1,2 \times 10^0$
7	$-1,4 \times 10^{-1}$	$-2,4 \times 10^{-1}$
8	$-1,4 \times 10^0$	$-2,4 \times 10^{+4}$
9	$5,9 \times 10^{-1}$	$5,1 \times 10^{+4}$
10	$-6,06 \times 10^{-3}$	-0,12

Debido a que los errores en la identificación de los parámetros base son enormes comparados con su valor teórico, el índice de contribución dinámica derivado de ellos no tiene nada que ver con sus verdaderas contribuciones.

Por tanto, el ordenamiento para la reducción, así obtenido, no tiene significado alguno. Por este motivo, el índice de contribución dinámica se ha modificado, de manera que los errores de las fuerzas generalizadas no sean influyentes en el orden de eliminación. Para ello, en lugar de calcular el índice de contribución ζ a partir de los parámetros identificados, éste se calcula con los valores $\bar{\Phi}_{base_CAD}$ que se obtienen de evaluar las expresiones simbólicas de los parámetros base obtenidos de las transferencias de propiedades inerciales para cada modelo, con valores de una estimación obtenida de un programa de modelado CAD.

Tratándose del modelo T5, las expresiones simbólicas de los parámetros base no se determinan a partir de una transferencia de propiedades inerciales, dado que este modelo no se obtuvo de esta manera. La determinación de la matriz β que relaciona los parámetros independientes y dependientes se debe calcular numéricamente a partir de la expresión 3.8. Para ello, es necesario invertir la matriz $V22$ que, para el caso de este modelo, presenta muy mal condicionamiento ($\kappa(V22) = 7,6 \times 10^{+19}$). Bajo estas condiciones, el índice de contribución ζ de los parámetros del modelo T5 no necesariamente representa la contribución real del parámetro.

Se puede pensar que el ordenamiento generado por el índice de contribución dinámica obtenido de una aproximación CAD también puede generar variaciones en consideración a qué tan acertada o cercana al valor real sea dicha aproximación. En la Figura 5.17 se presentan las variaciones en el orden de los índices de contribución dinámica de cada parámetro base en los modelos analizados. En color azul se representan aquellos parámetros en los que su contribución no varía más de 3 posiciones en el ordenamiento de reducción, cuando en su estimación CAD se consideran errores de 10% y 60%.

En la figura se aprecia que el aumento de error en la estimación CAD no genera una diferencia importante en el ordenamiento establecido como criterio de reducción de los modelos. Este hecho permite justificar el uso de altas incertidumbres en la aproximación de los parámetros teóricos, de

manera que un modelado con poco detalle realizado en un programa CAD será suficiente para calcular los índices de contribución dinámica.

Analizando los índices de contribución dinámica ζ obtenidos en los modelos desarrollados, se encuentra que se tienen pocos parámetros con alta contribución dinámica. En los modelos derivados de la transferencia de parámetros inerciales con menos sólidos de convergencia (modelos T1 y T2), se tienen menos parámetros con alta contribución dinámica, Figura 5.18.

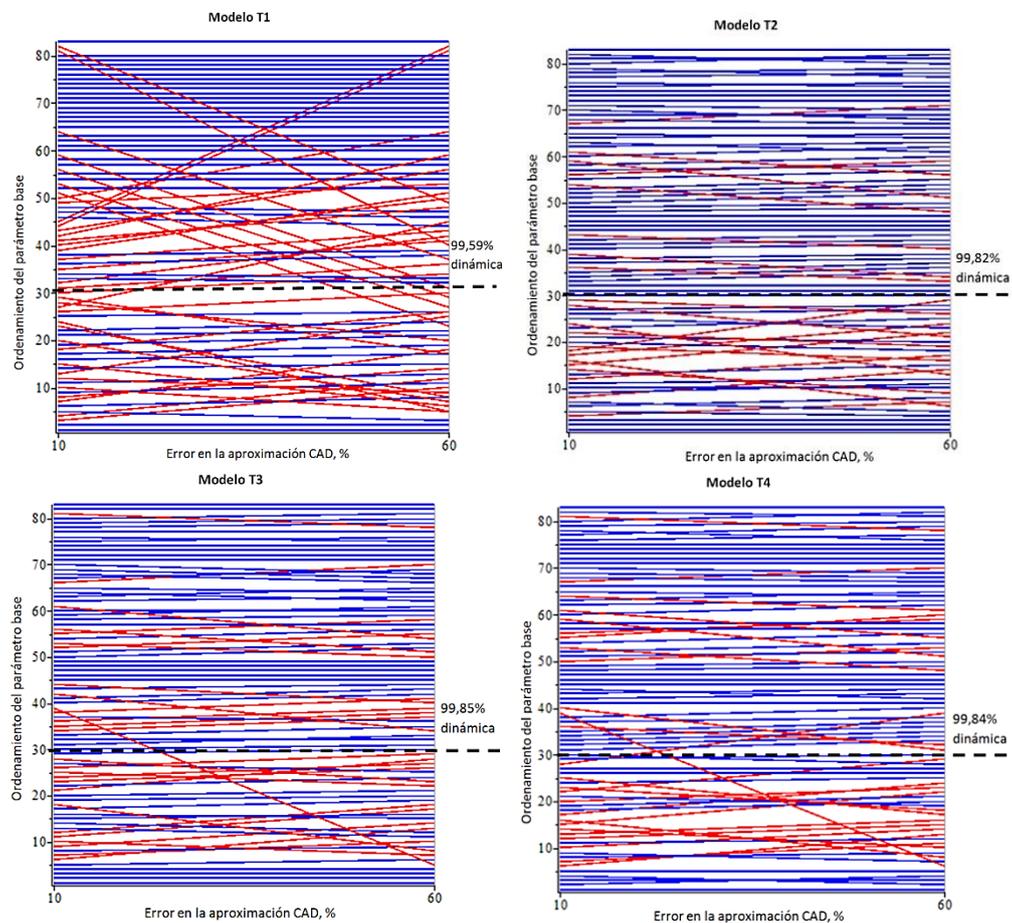


Figura 5.17. Variación del orden de influencia de la contribución dinámica de los parámetros base para los modelos T1 a T4, con errores de 10 y 60% en la estimación CAD.

Para el modelo T1, los dos parámetros más contribuyentes son,

$$\Phi_{base}(1) = m_3 + m_1 + m_2 + m_4 + m_5 + m_7 - \frac{I_{yy_2}}{Ds_4^2} - \frac{I_{yy_4}}{l_{10}^2} - \frac{I_{yy_1}}{Ds_2^2} - \frac{m_7 \cdot Ds_5^2}{Ds_2^2}$$

$$\Phi_{base}(2) = m_{11} + m_9 + m_{10} + m_{12} + m_{13} + m_{15} - \frac{I_{yy_{10}}}{Ds_4^2} - \frac{I_{yy_{12}}}{l_{10}^2} - \frac{I_{yy_9}}{Ds_2^2} - \frac{m_{15} Ds_5^2}{Ds_2^2}$$

Esto era de esperarse, puesto que estos parámetros contienen las masas completas de todos los eslabones que convergen a ellos, en este caso, a las manguetas 3 y 11. La misma situación ocurre en el modelo T2.

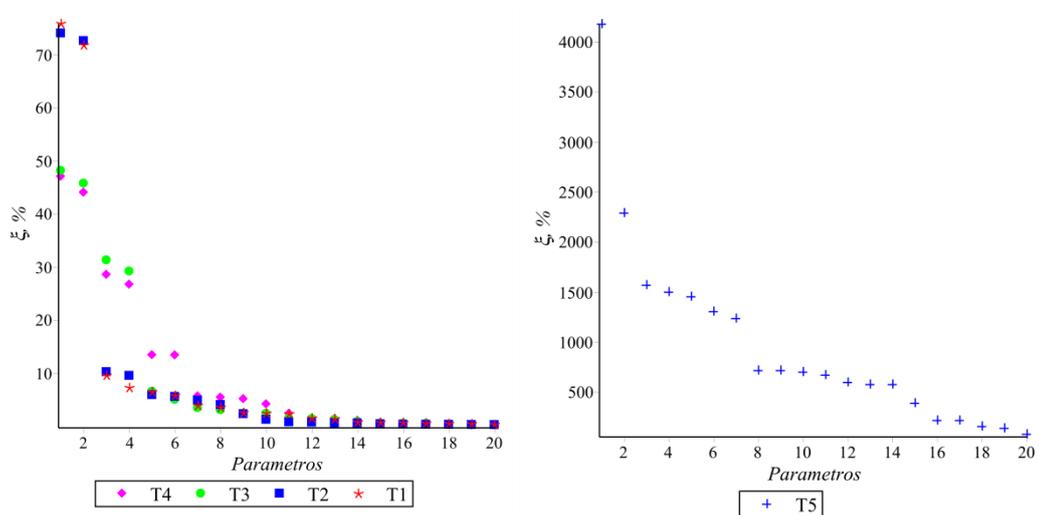


Figura 5.18. Índices de contribución dinámica de los 20 parámetros más contributivos en cada modelo

En los modelos con más sólidos de convergencia (modelos T3 y T4), los índices de contribución dinámica muestran más parámetros con alta contribución aunque con valores más bajos, de manera que es más homogénea la distribución de la contribución dinámica entre los parámetros del modelo.

En el modelo T3 los cuatro parámetros más influyentes tienen solo parte de las masas de los eslabones que convergen a ellos,

$$\begin{aligned}\Phi_{base}(1) &= \mathbf{m}_9 + \frac{m_{11} + m_{12}}{2} + \frac{DKz \cdot m_{13}}{l_7} + \frac{(Ds_2^2 - Ds_5^2) \cdot m_{15}}{Ds_2^2} - \frac{Iyy_9}{Ds_2^2} - \frac{Iyy_{12}}{2J_{10}^2} - \frac{mz_7}{l_7} \\ \Phi_{base}(2) &= \mathbf{m}_1 + \frac{m_3 + m_4 + m_8}{2} + \frac{DKz \cdot m_5}{l_7} + \frac{(Ds_2^2 - Ds_5^2)m_7}{Ds_2^2} + \frac{Iyy_{12}}{2J_{10}^2} - \frac{Iyy_1}{Ds_2^2} - \frac{mz_3}{l_7} \\ \Phi_{base}(3) &= \mathbf{m}_2 + \frac{m_3 + m_4 + m_8}{2} - \frac{(DKz - l_7) \cdot m_5}{l_7} - \frac{Iyy_2}{Ds_4^2} + \frac{Iyy_{12}}{2J_{10}^2} + \frac{mz_3}{l_7} \\ \Phi_{base}(4) &= \mathbf{m}_{10} + \frac{m_{11} + m_{12}}{2} + \frac{(DKz - l_7) \cdot m_{13}}{l_7} - \frac{Iyy_{10}}{Ds_4^2} - \frac{Iyy_{12}}{2J_{10}^2} + \frac{mz_{11}}{l_7}\end{aligned}$$

Por tanto, la selección del modelo de transferencia, específicamente el número de sólidos de convergencia seleccionados, define la manera en que se reparte la contribución dinámica entre los parámetros base.

Para el modelo T5, los parámetros base usados en el índice de contribución dinámica, al ser obtenidos numéricamente por descomposición SVD ($\vec{\Phi}_{base} = \vec{\Phi}_1 + \beta \cdot \vec{\Phi}_2$), están sujetos al condicionamiento de la submatriz V22 que define la matriz β . En este modelo en particular, como se mencionó anteriormente, la submatriz V22 presenta un número de condición muy elevado, de manera que los valores de los parámetros base estimados nada tienen que ver con los valores reales y por lo tanto no representa un verdadero criterio de reducción. De allí que se obtengan valores tan altos como los presentados en la Figura 5.18.

5.5.2. Reducción a parámetros relevantes

Siguiendo la metodología descrita en la Sección 4.3.1, con los índices de contribución dinámica de cada parámetro base se construye un arreglo con los parámetros de mayor a menor índice en cada modelo (T1 a T5). Se elimina del vector de parámetros base el parámetro con menor índice ζ y se elimina también la columna de la matriz W_{base} asociada a éste parámetro. Según se van eliminando los parámetros base con menores índices de contribución, en cada modelo se obtienen diferentes conjuntos de parámetros relevantes. Estos parámetros relevantes son identificados aplicando el método de mínimos cuadrados. Para definir el número de parámetros relevantes que finalmente tendrá cada modelo, se calcula el error de predicción de fuerzas

(expresión 4.12), entre las fuerzas estimadas por el modelo en parámetros relevantes y las fuerzas medidas para la trayectoria de identificación de cada modelo.

Como se desea determinar, para la metodología propuesta, la influencia de la estimación CAD de los parámetros originales en los resultados de la identificación, el proceso descrito se llevará a cabo considerando diferentes niveles de error en los parámetros CAD. Finalmente, con el propósito de comparar los resultados que se pueden obtener con cada modelo, las fuerzas generalizadas de la trayectoria de validación TV son estimadas a partir de cada conjunto de parámetros relevantes.

En la Figura 5.19 se presentan los errores de predicción de cada modelo en función del número de parámetros relevantes, cuando se identifica sin errores en las fuerzas medidas para la trayectoria de identificación.

Sin considerar error en la estimación CAD de los parámetros originales se tiene que hay parámetros (38 en total) que no tienen influencia y que podrían ser eliminados de cada modelo. Sin ellos se logra reducir considerablemente el número de parámetros base sin aumentar significativamente el error de predicción de las fuerzas generalizadas.

Parámetros que son nulos y por tanto sin contribución dinámica, al considerar errores en la aproximación CAD, tendrán un valor y por ende una contribución no nula sobre las fuerzas generalizadas. De allí que cuando se introducen errores en la aproximación CAD, el número de parámetros sin contribución dinámica disminuya. A pesar de esta disminución, este número es de 15 para el modelo T5 y de 23 para el T2, lo cual sigue significando una gran reducción del modelo.

En todos los modelos, el error de predicción es muy pequeño, incluso en los modelos completos (83 parámetros base), que presentan matrices de observación W_{base} con altos números de condición. Esto se debe a que la validación se realiza sobre la misma trayectoria empleada para la identificación.

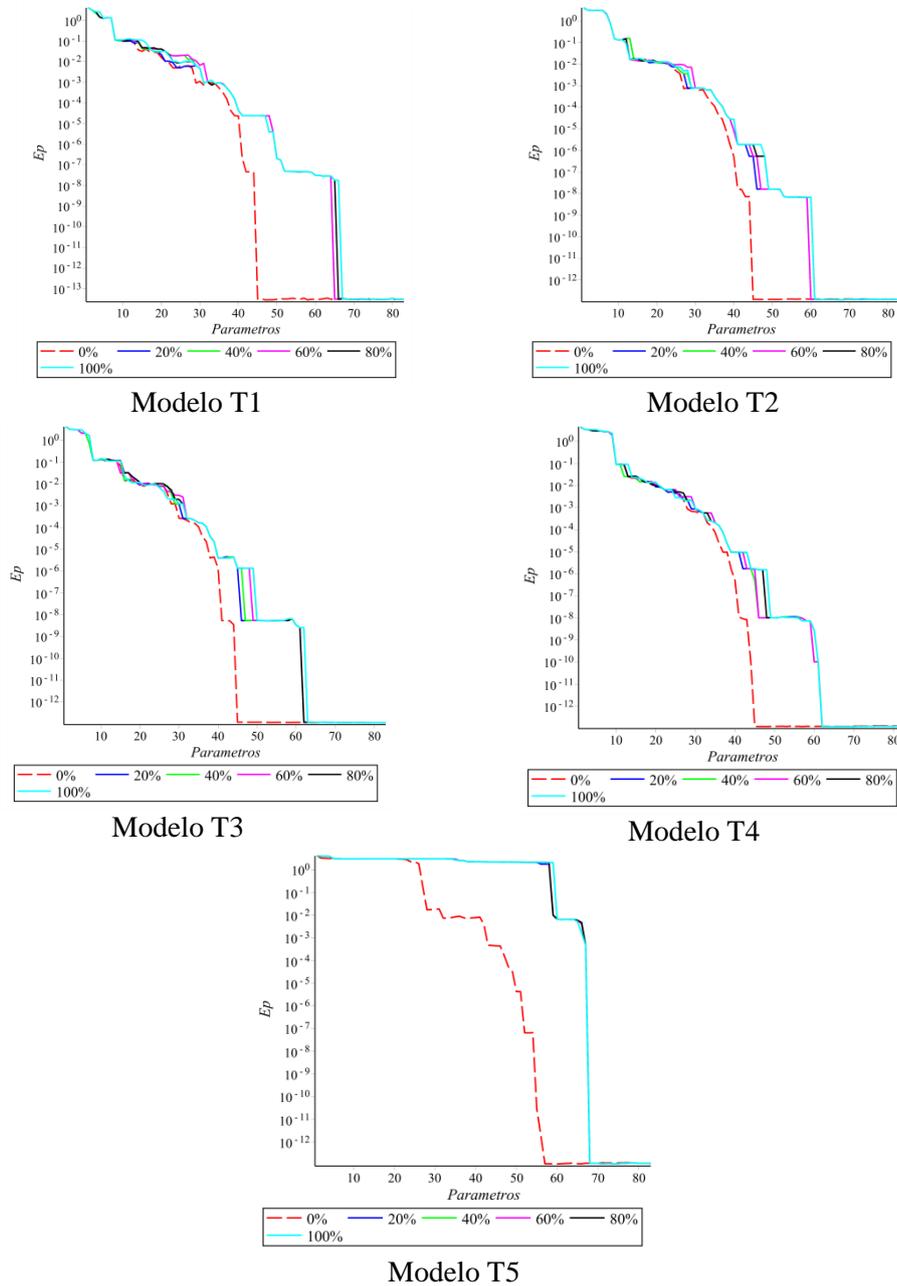


Figura 5.19. Errores de predicción de las fuerzas generalizadas, validando sobre la trayectoria de identificación, considerando errores en la aproximación CAD de los parámetros y fuerzas medidas sin error.

De la Figura 5.19 se confirma que la variación en las estimaciones CAD no genera cambios significativos en los errores de predicción en los modelos T1 a T4. Tener errores en la estimación CAD de 20% o de 100% no hace diferencia en el ordenamiento de los parámetros a eliminar y por tanto en el error de predicción. Con ello, aunque se cometa un error grande en la estimación CAD, el criterio de reducción basado en los valores de los parámetros base evaluados con una estimación CAD está justificado.

En la Figura 5.20 se observan los números de condición de las matrices de observación de todos los modelos.

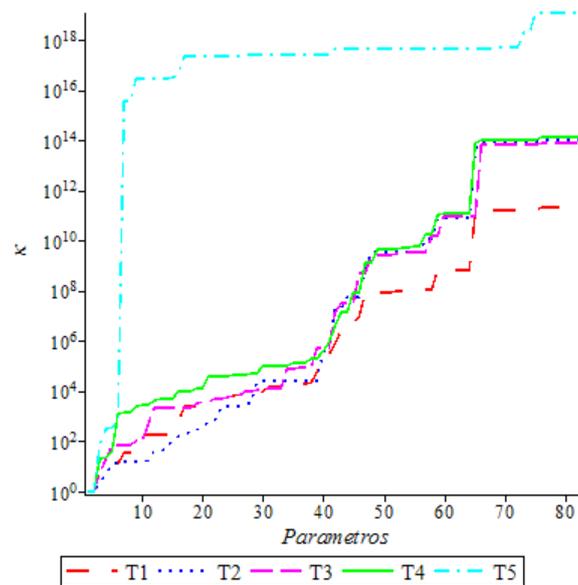


Figura 5.20. Números de condición κ de las matrices W_{base}

Con este condicionamiento se espera que con la introducción de errores en las fuerzas de identificación $\bar{\tau}$, los errores de predicción aumenten, incluso cuando se valide sobre la misma trayectoria. En la Figura 5.21 se presentan estos errores de predicción cuando las fuerzas externas para cada modelo tienen un error del 5%.

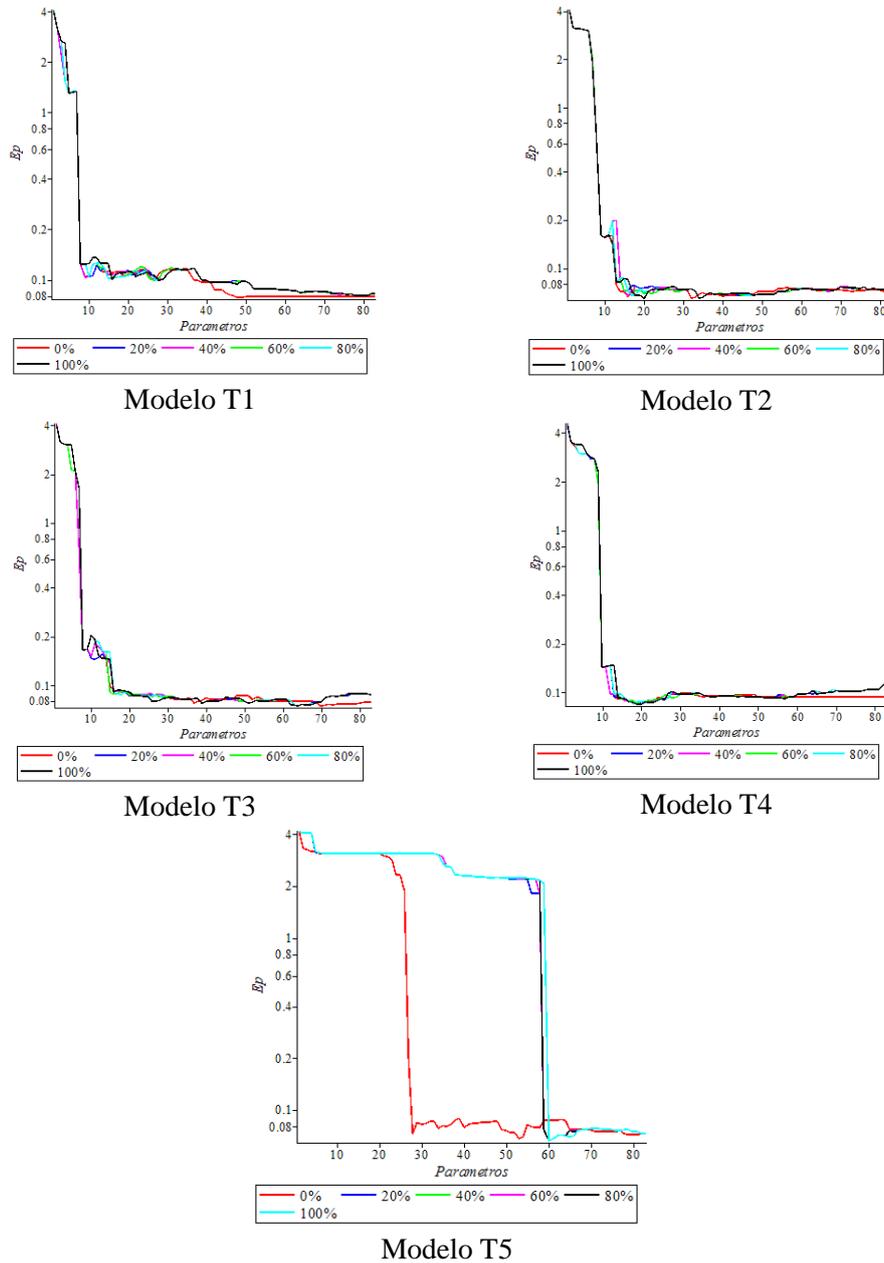


Figura 5.21. Errores de predicción en función del número de parámetros relevantes considerando errores en la estimación de los parámetros CAD y con errores de 5% en las fuerzas de identificación.

En la Figura 5.22 se pueden valorar los errores E_p de los modelos para dos niveles de estimación CAD.

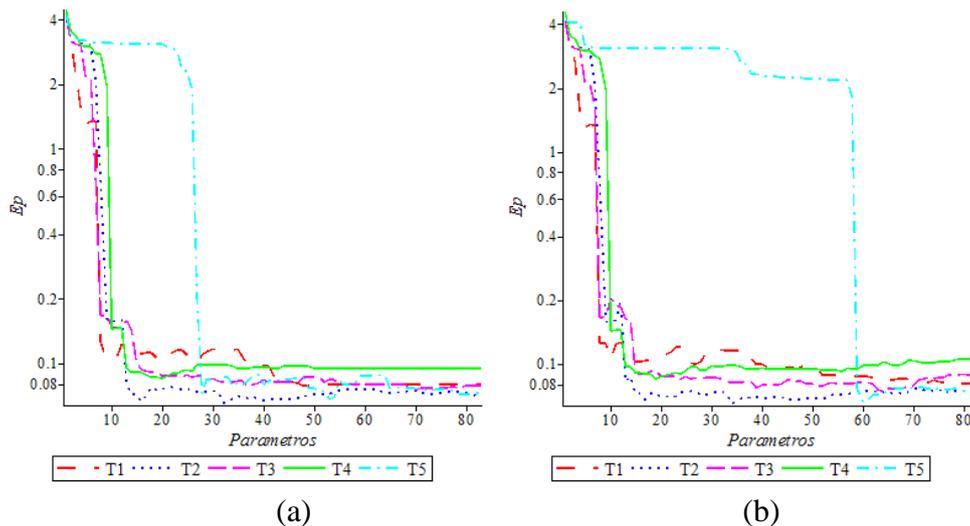


Figura 5.22. Error de predicción para validación sobre la trayectoria de identificación con errores en fuerzas de 5%. (a) estimación CAD 0% de error (b) estimación CAD 60% de error

En los modelos T1 a T5 se observa un límite de parámetros relevantes a partir del cual el error de predicción se mantiene nominalmente invariante. Para pocos parámetros relevantes (<10) el error de predicción está por encima del 300%. En la medida que aumentamos el número de parámetros relevantes, el error de predicción disminuye hasta un número a partir de cual permanece constante. Se puede por lo tanto, reducir el número de parámetros hasta tener un conjunto de parámetros relevantes de menor tamaño sin que el error de predicción varíe significativamente. En los modelos T2, T3 y T4 este valor está cercano a los 20 parámetros relevantes, en el modelo T1 este límite está cerca de los 40 parámetros relevantes.

En el modelo T5, sin embargo, se aprecia una diferencia considerable según el error CAD inducido. Cuando no se considera error en la estimación CAD, el límite del número de parámetros relevantes es cercano a 30. Para un 60% de error en la estimación CAD, este valor aumenta hasta 60 parámetros. Se debe recordar que los índices de contribución dinámica para este modelo, no corresponden ni se acercan a la realidad, debido a la obtención numérica

de los parámetros base que los definen. Por lo tanto, la estimación CAD para este modelo afecta las fuerzas generalizadas estimadas por él.

Se dispone por lo tanto de un límite inferior para el número de parámetros relevantes que garantice un error pequeño de estimación. Por debajo de ese número los errores de predicción aumentarán. Por otro lado, se ha de considerar el límite superior del número de parámetros relevantes. Si bien, aumentar el número de parámetros a partir de los límites mencionados no aumenta el error de predicción cuando se valida sobre la misma trayectoria, sí podría aumentar cuando se aplique sobre una trayectoria diferente. La causa de esto es el elevado número de condición que puede llegar a tener el modelo. Aumentar el número de parámetros implicará aumentar el número de condición del modelo reducido. De la Figura 5.20 se observa que a partir de 40 parámetros relevantes el número de condición supera el valor de 10^{+5} . Por lo tanto, se puede usar un valor máximo de número de condición para limitar el número máximo de parámetros relevantes. Adicionalmente se debe considerar que a menos parámetros relevantes, menor cálculo computacional será necesario para evaluar el modelo. Para acciones de control y optimización del mecanismo, esta característica es importante.

Si se tiene en cuenta que los errores con los que pueden medirse las fuerzas son del orden de 10^{-2} (5%), estimar con errores de predicción del mismo orden ($\approx 7\%$) permite dar por satisfactorio el modelo identificado en parámetros relevantes.

Las gráficas de error de predicción E_p y de número de condición κ en función del número de parámetros relevantes permiten obtener los valores límites máximos y mínimos de los parámetros relevantes para cada modelo. Pero dado que cada modelo se valida sobre su propia trayectoria de identificación, las anteriores gráficas no permiten comparar entre sí los diferentes modelos. Para ello, se obtienen los errores de predicción cuando el modelo en parámetros base identificados se utiliza para predecir las fuerzas generalizadas sobre la trayectoria de validación TV. En las figuras 5.23 y 5.24 se presentan los errores E_p de cada modelo validado para la misma trayectoria TV. Se presentan los resultados considerando 0% y 60% de error en la estimación CAD.

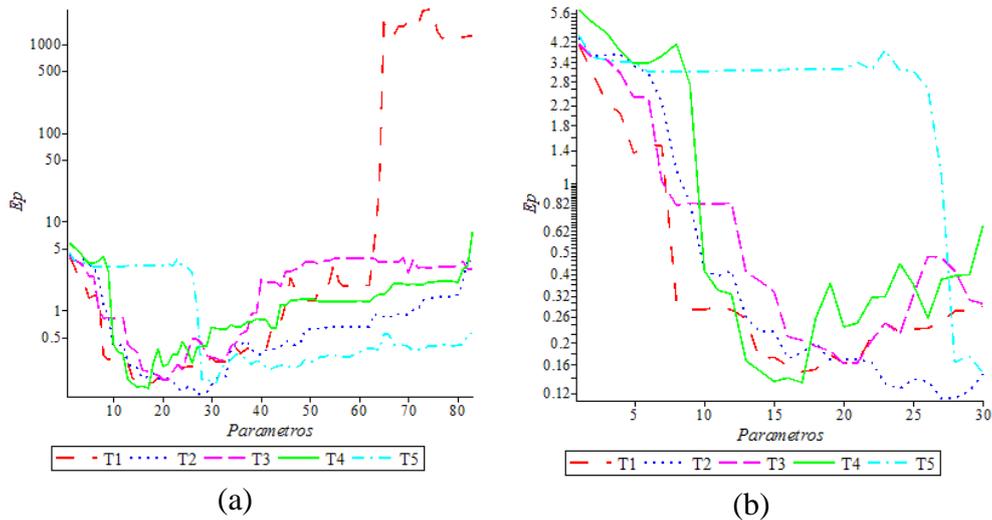


Figura 5.23. Errores de predicción del modelo identificado sobre la trayectoria TV, sin error en CAD. (a) 1- 83 parámetros relevantes
(b) 1-30 parámetros relevantes

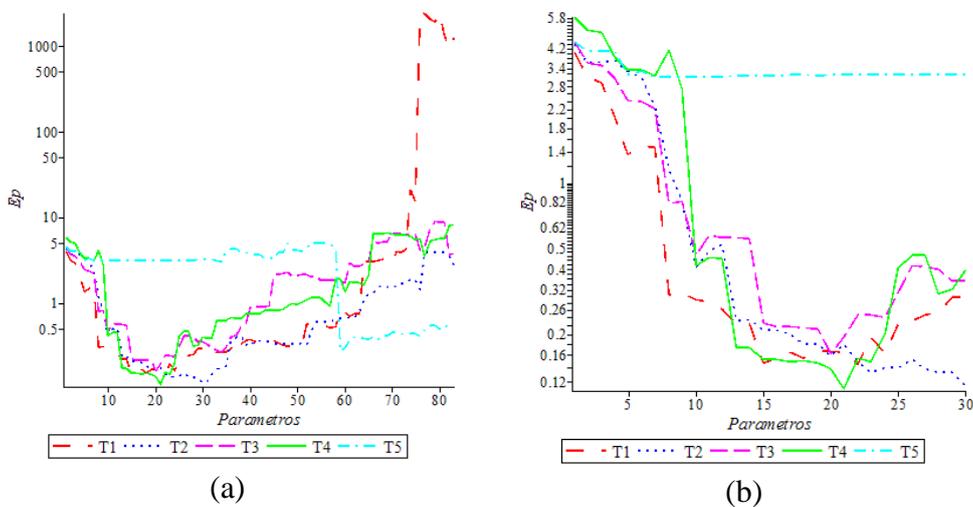


Figura 5.24. Errores de predicción del modelo identificado sobre la trayectoria TV, con 60% de error en CAD. (a) 1- 83 parámetros relevantes
(b) 1-30 parámetros relevantes

En las figuras 5.23 y 5.24 se puede observar que los errores de predicción son muy altos para los modelos completos, es decir, para el modelo en

parámetros base. Esto ocurre por el alto número de condición del modelo completo, por lo que se justifica reducirlo a un número menor de parámetros relevantes en el que se tenga una matriz de observación mejor condicionada, de manera que permita una identificación adecuada de los parámetros.

Los errores de predicción de los modelos T1 a T4, cuando se consideran diferentes porcentajes de error en la estimación CAD, presentan valores muy cercanos entorno al número óptimo de parámetros base. Este número está entre 20 y 30 parámetros base. El modelo T5, dado su mal condicionamiento, es el modelo que mayores errores presenta con pocos parámetros. Su uso como modelo predictivo del sistema no es pertinente debido a que no permite estimar las fuerzas (la respuesta dinámica) con errores bajos cuando se tiene incertidumbre en la estimación CAD.

La Tabla 5.10 presenta los errores de predicción E_p de los cinco modelos validados sobre la trayectoria de validación cuando se tienen 20 parámetros relevantes. Se corrobora que el menor error de predicción se obtiene para los modelos obtenidos por transferencia de propiedades inerciales. Para estos modelos, el que presenta el error más bajo es el modelo T4. Sin embargo, las diferencias no son significativas, de manera que los niveles de error alcanzados en los modelos derivados de las transferencias inerciales no se observa que dependan ni de la secuencia de transferencia usada, ni del número de sólidos de convergencia seleccionados.

Tabla 5.10. Variación de los errores de predicción en las fuerzas generalizadas estimadas para la trayectoria de validación

Modelo con 20 parámetros relevantes	Error de predicción E_p , %	κ de TV
T1	16,25	$3,7 \times 10^{+3}$
T2	16,83	$7,6 \times 10^{+2}$
T3	16,26	$2,5 \times 10^{+3}$
T4	12,71	$8,2 \times 10^{+3}$
T5	31,50	$6,7 \times 10^{+16}$

Aunque la trayectoria de validación es la misma para todos los modelos, lo que implica en todos los casos, partir de una misma matriz de observación global, la matriz de parámetros base es diferente en cada modelo, como

consecuencia de las diferentes selecciones de parámetros dependientes. Además, en cada modelo, el ordenamiento usado en la reducción a parámetros relevantes varía, de manera que las matrices de observación en parámetros relevantes serán diferentes en cada modelo. En la Tabla 5.10 se presentan los números de condición de las matrices en parámetros relevantes para cada modelo. De la tabla se aprecia como el modelo que no es obtenido por metodologías simbólicas presenta un condicionamiento considerablemente mayor para la trayectoria de validación.

Las figuras 5.25 a 5.27 presentan las fuerzas generalizadas estimadas usando 20 parámetros relevantes cuando se identifica con un error de 20% en los parámetros CAD. En ellas se puede apreciar que en todos los modelos obtenidos por transferencia de propiedades inerciales, y reducidos usando el índice de contribución dinámica, logran estimar de manera adecuada las fuerzas generalizadas para una trayectoria de validación TV.

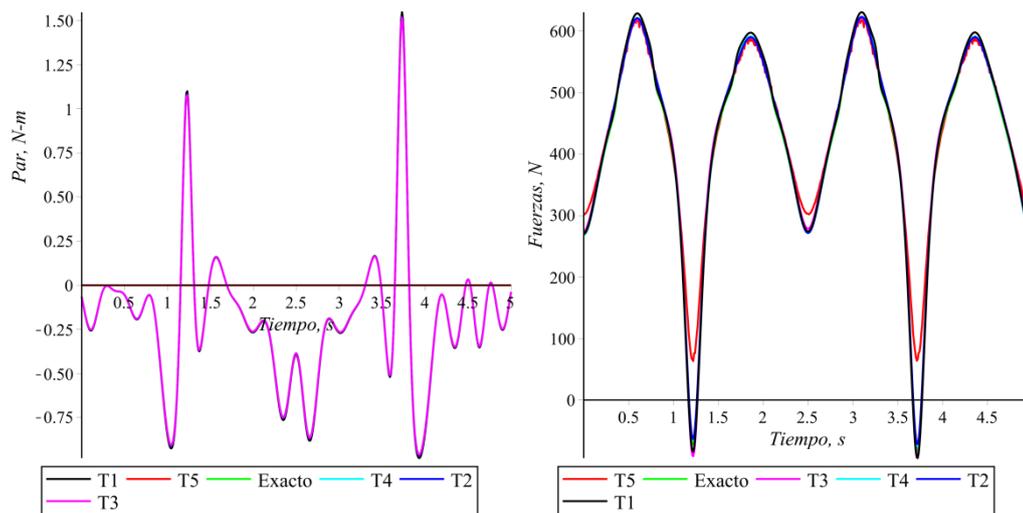


Figura 5.25. Fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas generalizadas independientes del lado derecho de la suspensión.

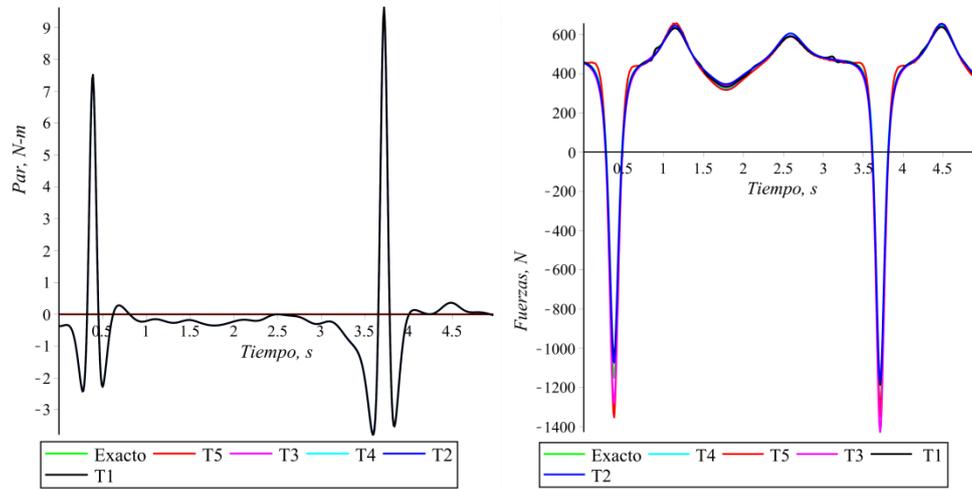


Figura 5.26. Fuerzas generalizadas asociadas a las coordenadas generalizadas independientes del lado izquierdo de la suspensión.

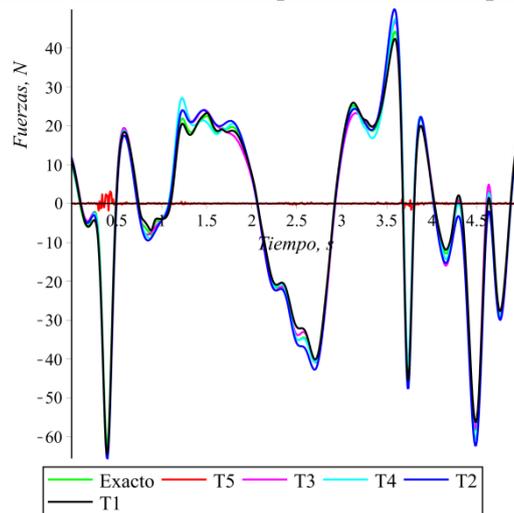


Figura 5.27. Fuerzas generalizadas asociadas a la coordenada de desplazamiento de la dirección

Para apreciar mejor las diferencias obtenidas por los modelos reducidos, en la Figura 5.28 se presentan los errores absolutos entre el modelo exacto y los reducidos, para las fuerzas generalizadas asociadas a la coordenada vertical del amortiguador derecho y a la dirección.

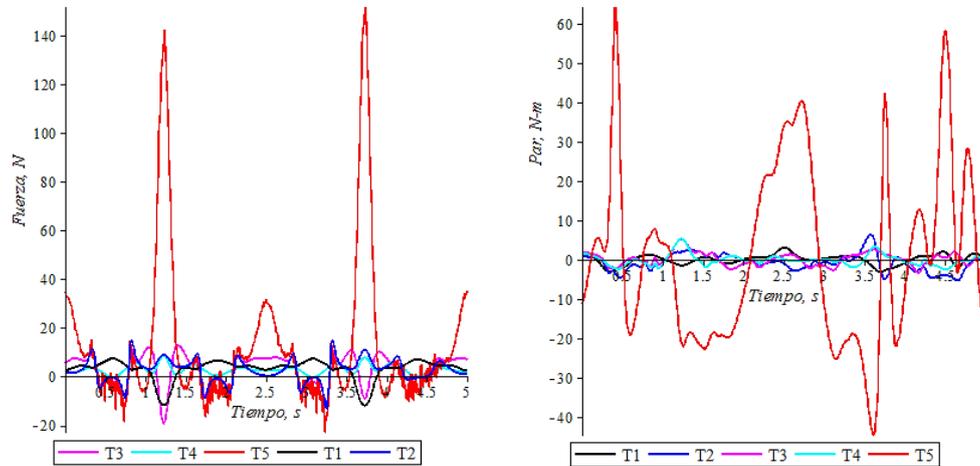


Figura 5.28. Error absoluto entre las fuerzas generalizadas exactas y las obtenidas por los modelos reducidos. a) coordenada vertical amortiguador derecho, b) coordenada de la dirección.

Por otro lado, aunque en general los parámetros relevantes son combinaciones lineales de los parámetros originales, dependiendo de la selección de los parámetros dependientes, algunos de los parámetros relevantes pueden formarse con un solo parámetro. En la Tabla 5.11 se aprecia como para un modelo de 20 parámetros relevantes, derivados de T2, es posible estimar los parámetros inerciales I_{xx5} , m_{x7} , I_{xx13} y m_{x15} . Incluso en parámetros relevantes formados por pocos parámetros originales, puede darse valor a ciertos parámetros, en general a aquellos cuya incertidumbre sea menor, y a partir del valor del parámetro relevante estimado y los parámetros originales conocidos con certidumbre, obtener aquellos que no se conocen. Por ejemplo, en el parámetro 18 de la Tabla 5.11, si fuese posible conocer con cierta exactitud el valor de I_{yy2} , se puede, a partir del valor estimado del parámetro relevante, determinar el valor de m_{x4} . Si se comparan los valores teóricos y los valores estimados para este modelo se aprecia que ambos están en los mismos órdenes de magnitud y presentan los mismos signos. En los demás modelos obtenidos por transferencia de propiedades inerciales, se obtienen resultados similares.

Tabla 5.11. Parámetros identificados para el modelo T2 con 20 parámetros relevantes. El valor teórico ha sido modificado con 20% de error en CAD

Nº	Parámetro Relevante	Teórico	Identificado
1	$Ds_2 \cdot (m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13}) + (Ds_2 - Ds_3) \cdot m_{15} + mx_9 + \frac{Ds_2 \cdot mx_{10}}{Ds_4} + \frac{Ds_2 \cdot mx_{12}}{l_{10}}$	$1,0 \times 10^{+1}$	$1,0 \times 10^{+1}$
2	$Ds_2 \cdot (m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + (Ds_2 - Ds_3) \cdot m_7 + mx_1 + \frac{Ds_2 \cdot mx_2}{Ds_4} + \frac{Ds_2 \cdot mx_4}{l_{10}}$	$1,0 \times 10^{+1}$	$1,0 \times 10^{+1}$
3	$Iyy_9 - Ds_2^2(m_9 + m_{10} + m_{11} + m_{12} + m_{13}) + (Ds_2^2 - Ds_3^2) \cdot m_{15} - \frac{Ds_2^2 \cdot mx_{10}}{Ds_4} - \frac{Ds_2^2 \cdot mx_{12}}{l_{10}}$	$-3,5 \times 10^0$	$-3,6 \times 10^0$
4	$(l_7 - DKz) \cdot m_5 - \frac{l_7(m_3 + m_4)}{2} + l_7 \cdot m_2 + mz_3 + \frac{l_7 \cdot mx_2}{Ds_4} + \frac{l_7 \cdot mx_4}{2 \cdot l_{10}}$	$9,3 \times 10^{-2}$	$2,0 \times 10^{-1}$
5	$(l_7 - DKz) \cdot m_{13} - \frac{l_7(m_{11} + m_{12})}{2} + l_7 \cdot m_{10} + mz_{11} + \frac{l_7 \cdot mx_{10}}{Ds_4} + \frac{l_7 \cdot mx_{12}}{2 \cdot l_{10}}$	$5,7 \times 10^0$	$6,3 \times 10^0$
6	$Iyy_1 - Ds_2^2(m_1 + m_2 + m_3 + m_4 + m_5) + (Ds_2^2 - Ds_3^2) \cdot m_7 - \frac{Ds_2^2 \cdot mx_2}{Ds_4} - \frac{Ds_2^2 \cdot mx_4}{l_{10}}$	$-3,5 \times 10^0$	$-3,5 \times 10^0$
7	Ixx_5	$5,7 \times 10^{-1}$	$6,2 \times 10^{-1}$
8	Ixx_{13}	$6,0 \times 10^{-1}$	$6,2 \times 10^{-1}$
9	$Izz_3 + Iyy_5 + m_5(DKx^2 + DKy^2) + m_4 \cdot Ds_6^2 + 2 \cdot mx_5 \cdot DKy + \frac{Ds_6^2 \cdot mx_4}{l_{10}}$	$3,8 \times 10^{-1}$	$3,4 \times 10^{-1}$
10	$Izz_{11} + Iyy_{13} + \frac{Ds_6^2 \cdot mx_{12}}{l_{10}} + m_{13} \cdot (DKx^2 + DKy^2) + m_{12} \cdot Ds_6^2 - 2 \cdot mx_{13} \cdot DKy$	$3,6 \times 10^{-1}$	$4,2 \times 10^{-1}$
11	$my_{11} - mx_{13} - m_{13} \cdot DKy$	$5,8 \times 10^{-1}$	$2,1 \times 10^{-1}$
12	$mx_3 - m_5 \cdot DKx + m_4 \cdot Ds_6 + \frac{Ds_6 \cdot mx_4}{l_{10}}$	$-2,9 \times 10^{-1}$	$-3,4 \times 10^{-1}$
13	$(DKy^2 - l_7 \cdot DKz + DKz^2) \cdot m_5 - \frac{l_7^2(m_3 + m_4)}{4} + Ixx_3 + Iyy_5 + 2 \cdot mx_5 \cdot DKy - \frac{l_7^2 \cdot mx_4}{4 \cdot l_{10}}$	$-6,4 \times 10^{-1}$	$-9,1 \times 10^{-1}$
14	$mx_{11} - m_{13} \cdot DKx + m_{12} \cdot Ds_6 + \frac{Ds_6 \cdot mx_{12}}{l_{10}}$	$-2,9 \times 10^{-1}$	$-2,3 \times 10^{-1}$
15	$(DKy^2 - l_7 \cdot DKz + DKz^2) \cdot m_{13} - \frac{l_7^2(m_{11} + m_{12})}{4} + Ixx_{11} + Iyy_{13} + 2 \cdot mx_{13} \cdot DKy - \frac{l_7^2 \cdot mx_{12}}{4 \cdot l_{10}}$	$-6,8 \times 10^{-1}$	$-1,2 \times 10^0$
16	$my_3 - mx_5 - m_5 \cdot DKy$	$-1,4 \times 10^{-1}$	$-2,0 \times 10^{-1}$
17	$Ds_4^2 \cdot mx_{12} + Iyy_{10}$	$-3,8 \times 10^{-2}$	$-1,9 \times 10^{-1}$
18	$Ds_4^2 \cdot mx_4 + Iyy_2$	$-3,8 \times 10^{-2}$	$-3,2 \times 10^{-2}$
19	mx_7	$-7,1 \times 10^{-1}$	$-1,6 \times 10^0$
20	mx_{15}	$-6,3 \times 10^{-1}$	$6,3 \times 10^0$

En cuanto al modelo de 20 parámetros relevantes derivado de T5, todos los parámetros relevantes están formados de muchos parámetros originales, de manera que no es tan sencillo realizar la estimación en solitario de parámetros originales de la misma manera que ocurre en los modelos T1 a T4. A manera de ejemplo, se muestra parte de los dos parámetros de mayor contribución dinámica del modelo T5,

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= 1,25 \times 10^{+2} m x_3 - 1,79 \times 10^{+3} I x y_3 + 4,63 \times 10^{+17} I x y_5 - 4,59 \times 10^{+14} m z_{10} + \dots \\ \Phi_2 &= 2,21 \times 10^{+1} m_3 - 1,40 \times 10^{+17} I x y_5 - 1,97 \times 10^{+14} I x y_5 - 4,59 \times 10^{+14} m z_9 + \dots\end{aligned}$$

Nótese además, el alto valor de los coeficientes que acompañan los parámetros en este modelo. Estos coeficientes son los que forman la matriz β del vector de parámetro base. Los valores obtenidos dan cuenta de lo mal calculados que están los parámetros base en este modelo, problema derivado de una incorrecta selección de parámetros dependientes.

5.6. Resumen

En este capítulo se aplicó la metodología propuesta de identificación de parámetros dinámicos para mecanismos de baja movilidad sobre la suspensión delantera de un vehículo. Se obtuvieron cuatro modelos derivados de la aplicación de transferencia de parámetros inerciales y un modelo donde los parámetros dependientes fueron escogidos al azar. Se obtuvieron las trayectorias optimizadas para cada modelo y a partir de ellas se realizó la identificación de los parámetros. Se pudo observar que dado el elevado número de condición de las matrices de observación, los errores de predicción son muy altos cuando se trabaja con el modelo en parámetro base, siempre que las fuerzas usadas en la identificación tuviesen errores. Para reducir el condicionamiento de la matriz, se han reducido en tamaño los modelos, aplicando como criterio de reducción el índice de contribución dinámica. Este criterio requiere de una estimación inicial de los parámetros originales. Se ha comprobado que aún con variaciones grandes en las estimaciones de los parámetros originales no se varían significativamente los resultados obtenidos para los modelos realizados por transferencia de propiedades inerciales. En estos modelos, se alcanzaron errores de predicción bajos que permiten dar como válidos los modelos identificados. Dentro de las

ventajas que se tienen en estos modelos es que se logra reducir considerablemente el tamaño del modelo original, pasando de tener 115 parámetros originales a tener 20 parámetros relevantes. Otra ventaja se aprecia es que de los parámetros relevantes identificados para los modelos derivados de transferencia es posible estimar parte de los parámetros originales del sistema.

Capítulo 6

Conclusiones y trabajos futuros

El trabajo realizado en esta tesis se orientó a desarrollar una nueva metodología para la identificación de parámetros dinámicos en mecanismos de baja movilidad. El mecanismo con el que se validó el método de identificación corresponde al de una suspensión delantera de un vehículo ligero, y que se modeló en un programa comercial de simulación dinámica.

El sistema mecánico se modeló mediante un conjunto de coordenadas cartesianas o de punto de referencia. Se aplicó un algoritmo para la obtención de las ecuaciones de movimiento en forma lineal respecto a los parámetros a identificar. El conjunto de coordenadas generalizadas constituyó uno dependiente, por lo que aparecían fuerzas internas en la formulación. Dada la dificultad para obtenerlas, se eliminaron mediante el método de la matriz de proyección de velocidades. Se desarrolló igualmente, un modelo cinemático que permitió calcular las variables cinemáticas dependientes que se requiere en el modelo dinámico, a partir de las coordenadas generalizadas independientes y sus derivadas respecto al tiempo.

El proceso de identificación de parámetros dinámicos se basó en la aplicación del método de mínimos cuadrados, para lo cual se construyó un modelo sobre-determinado con las diferentes configuraciones que adoptó el mecanismo al seguir unas determinadas trayectorias. Siendo el sistema a identificar, en principio de rango incompleto, lo que implica dependencia lineal entre columnas de la matriz de observación, se aplicaron dos métodos para determinar el número de parámetros independientes. En el primer método, el rango, que corresponde al número de parámetros independientes, se determinó mediante los valores singulares no nulos de la matriz de

observación del sistema. En el segundo método se aplicaron transferencias de parámetros inerciales para obtener un conjunto de parámetros base. De estos parámetros base se determinó el número de parámetros independientes y las relaciones de dependencia lineal entre los parámetros.

Se desarrollaron cinco modelos dinámicos en parámetros base. Cuatro de ellos derivados de las transferencias inerciales y uno seleccionando al azar los parámetros dependientes del sistema. En cada modelo en parámetros base se optimizó una trayectoria que minimizara el número de condición de la matriz de observación W_{base} , buscando con ello excitar adecuadamente todos los parámetros base del modelo. Las trayectorias optimizadas se parametrizaron en series finitas de Fourier.

Dado que los condicionamientos numéricos de las matrices de observación obtenidas en cada modelo fueron elevados, lo cual indica una alta sensibilidad del modelo al error en las fuerzas externas, se propuso y aplicó una reducción del modelo a un conjunto de parámetros denominados parámetros relevantes. Esta reducción se basó en el índice de contribución dinámica de cada parámetro base. El método de reducción consistió en eliminar de la matriz de observación las columnas correspondientes a los parámetros base de menor índice de contribución. Estos parámetros con baja contribución se eliminaron igualmente del vector de parámetros base a identificar.

Con el fin de realizar comparaciones, se validaron todos los modelos sobre una única trayectoria, diferente a las trayectorias de identificación utilizadas.

De la aplicación de la metodología de identificación propuesta en esta tesis se obtienen las conclusiones que se presentan a continuación, según el orden marcado por las diferentes etapas llevadas a cabo en ella.

6.1. Obtención del modelo en parámetros base

La aplicación del concepto de transferencia de propiedades inerciales permite obtener las expresiones simbólicas de un conjunto de parámetros base, a partir del cual se puede construir un modelo para identificación. En

comparación con los procedimientos numéricos estándar como el SVD, disponer de las expresiones simbólicas de los parámetros base tiene las siguientes ventajas:

- El número de parámetros independientes calculado depende únicamente de la topología del mecanismo, siendo independiente de los movimientos o trayectorias aplicadas al mismo.
- El tamaño del vector de parámetros base se define de acuerdo al número de transferencias de propiedades inerciales que se pueden hacer. Este cálculo se hace de manera simbólica y el rango se determina sin ambigüedad. Así, el número de parámetros base es independiente de la precisión manejada por el programa de cálculo numérico. Esto adquiere importancia dado el mal condicionamiento numérico que caracteriza los mecanismos de baja movilidad.
- Un conjunto de parámetros base derivado de transferencias inerciales permite obtener no solo el tamaño del modelo, sino también las relaciones simbólicas de dependencia lineal entre los parámetros. En los procedimientos estándar, la selección de los parámetros dependientes se realiza con la única condición de que se obtenga un sistema de rango máximo, sin considerar que tan cerca o lejos de la singularidad estén las matrices que definen las dependencias lineales.
- Para cada transferencia de propiedades inerciales se obtiene un único conjunto de parámetros base. Si en una unión cinemática, la transferencia de una propiedad inercial se da por eliminación de algún parámetro inercial, y son varios los parámetros que pueden eliminarse, para cada parámetro seleccionado se tendrá un conjunto de parámetros base diferente.
- A partir de un conjunto de expresiones simbólicas de parámetros base, es posible encontrar otro conjunto igualmente válido, reordenando las columnas y realizando operaciones fila sobre la matriz que define las relaciones de dependencia lineal.

6.2. Optimización de trayectorias

Si bien la optimización de trayectorias se aplica para reducir el número de condición de la matriz de observación W_{base} , en mecanismos de baja movilidad, este proceso no resuelve el problema del alto condicionamiento numérico. Bajo esta circunstancia, el modelo en parámetros base no se puede considerar un modelo apto para identificación.

6.3. Reducción a parámetros relevantes

Para tener menores errores en la estimación de los parámetros y por tanto en los errores de predicción de las fuerzas, es necesario tener un bajo número de condición en la matriz de observación usada en la identificación. La reducción del número de condición es posible eliminando columnas de la matriz de observación.

Las matrices de observación y de información de los modelos en parámetros base, para mecanismos de baja movilidad, presentan altos números de condición, de manera que los parámetros base identificados y las desviaciones estándar calculadas no se deben considerar criterios fiables para planificar la reducción de parámetros base.

La reducción del modelo en parámetros base se ha realizado a partir del índice de contribución dinámica de cada parámetro base, que se obtiene al evaluar las expresiones simbólicas de los parámetros base con los valores de los parámetros físicos originales estimados a partir de un modelo CAD aproximado. Del análisis de los índices de contribución dinámica se puede concluir que:

- El índice de contribución dinámica puede ser calculado cuando se conocen las expresiones simbólicas de los parámetros base. Por lo tanto, puede ser usado para reducir los modelos derivados de transferencias de propiedades inerciales. En los modelos donde los parámetros base se calculan numéricamente, este criterio no tiene validez pues no representa un indicador real de la contribución del parámetro base a las fuerzas generalizadas.

- Si bien el índice de contribución dinámica depende de la estimación inicial de los parámetros, el ordenamiento usado para reducir el modelo no se altera significativamente con los errores que pudiese presentar dicha estimación. Con ello, se asegura un criterio de reducción válido aún para estimaciones por modelos CAD muy alejados de la realidad.
- En los modelos derivados de transferencias inerciales, la cantidad de sólidos de convergencia determina el perfil de distribución de la contribución dinámica entre los parámetros base. Con menos sólidos de convergencia, se obtienen pocos parámetros con altas contribuciones dinámicas comparadas con las del resto de parámetros. Con más sólidos de convergencia, la contribución dinámica es más uniforme, por lo que las diferencias entre los índices de contribución dinámica no son tan acusadas. En cualquiera de los casos, no se observó mayor o menor sensibilidad a la estimación dada del modelo CAD.

Del análisis de los errores de predicción de los modelos reducidos se concluye que:

- Al eliminar columnas de la matriz de observación W_{base} asociadas a los parámetros de menor contribución dinámica, el número de condición de la matriz es cada vez menor.
- Las estimaciones realizadas con el modelo completo en parámetros base presentan mayores errores de predicción que los modelos reducidos. Un modelo relevante que logre predecir satisfactoriamente las fuerzas generalizadas del sistema mecánico debe tener un número mínimo de parámetros que garanticen un bajo error de predicción y un número máximo de parámetros que permita tener un bajo condicionamiento de la matriz de observación.
- Los modelos obtenidos por transferencia de propiedades inerciales y reducidos mediante el índice de contribución dinámica permiten estimar con bajos errores las fuerzas generalizadas de un sistema de baja movilidad.

- Los modelos en parámetros relevantes derivados de diferentes transferencias de propiedades inerciales tienen comportamientos similares entorno al número óptimo de parámetros relevantes. Por lo tanto, en estos modelos, para los casos estudiados se observó que ni la transferencia usada, ni el número de sólidos de convergencia seleccionados influyen en la determinación de un mejor modelo.

- Se ha desarrollado una metodología novedosa que permite identificar parámetros dinámicos en sistemas mecánicos de baja movilidad, obteniendo modelos dinámicos con pocos parámetros pero robustos frente a errores en las estimaciones de partida y que permiten reproducir con precisión el comportamiento dinámico del sistema.

A continuación se presentan algunas líneas que pueden seguirse a futuro.

6.4. Trabajos futuros

Son varios los desarrollos que pueden realizarse como continuación y complementación al trabajo llevado a cabo en esta tesis y que se resumen en:

- Trabajo orientado a incluir otras fuerzas externas aplicadas sobre la suspensión, que contemplen los efectos laterales, longitudinales y momentos autoalineantes, que surgen de la interacción del neumático con el terreno, con miras a generar modelos reducidos de suspensión que puedan usarse en la construcción de un modelo de vehículo completo.

- Trabajo orientado a la identificación del vehículo completo. Esta identificación puede abordarse de dos maneras:
 - a. Siguiendo la metodología propuesta en esta tesis, identificar cada subsistema del vehículo. Considerando como subsistemas a la suspensión trasera, a la suspensión delantera y al conjunto chasis-motor-transmisión. El modelo del vehículo completo se ha de establecer como el ensamble de los subsistemas mencionados.

- b. Identificar a partir de un solo modelo que contemple todos los elementos que conforman el vehículo.
- Estudiar la influencia de la combinación de parámetros utilizada para crear los parámetros base en sistemas que no presenten problemas de baja movilidad.

Bibliografía

- [1] Abdellatif, H., Heimann, B., Hornung, O. and Grotjahn, M. Identification and appropriate parametrization of parallel robot dynamic models by using estimation statistical properties. *International Conference on Intelligent Robots and Systems*, 2005.
- [2] Abdellatif, H., Heimann, B. and Kotlarski, J. On the robust dynamics identification of parallel manipulators: Methodology and experiments. En *Parallel Manipulators, New Developments*. I-Tech Education and Publishing, Vienna, 2008.
- [3] Allen, R.W., Klyde D., Rosenthal T. and Smith, D. Estimation of passenger vehicle inertial properties and their effect on stability and handling. *Journal of Passenger Cars - Mechanical Systems*, Vol. 112, 2003.
- [4] Almeida, R.A., Urgueira, A.P. and Mai, N. Identification of rigid body properties from vibration measurements. *Journal of Sound and Vibration* 299, 2007
- [5] Angeles, J. *Fundamentals of Robotic Mechanical Systems*. Springer-Verlag, USA, 2003.
- [6] Antonelli, G., Caccavale, F. and Chiacchio, P. A systematic procedure for the identification of dynamic parameters of robot manipulators. *Robotica*, 17(4), 1999.
- [7] Armstrong, B. On finding exciting trajectories for identification experiments involving systems with nonlinear dynamics. *International Journal of Robotics Research* 8, No. 6, 1989.
- [8] Atchonouglo, E., Vallée, C., Monnet, T. and Fortune, D. Identification of the ten inertia parameters of a rigid body. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics* 72, 2008.
- [9] Atkeson, C.G., An, C.H. and Hollerbach, J.M. Estimation of inertial parameters of manipulator loads and links. *International Journal of Robotics Research*, 5(3), 1986.

-
- [10] Benimeli, F.X. *Estimación de parámetros dinámicos en robots manipuladores*. Tesis Doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, 2005.
- [11] Benimeli, F., Mata, V. y Valero, F. A comparison between direct and indirect dynamic parameter identification methods in industrial robots. *Robotica*, 24(5), 2006.
- [12] Bennis, F., Khalil, W. and Gautier, M. Calculation of the base inertial parameters of closed-loops robots. *Proceedings of the 1992 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1992.
- [13] Bhattacharya, S., Hatwal, H. and Ghosh, A. An on-line parameter estimation scheme for generalized Stewart Platform type parallel manipulators. *Mechanism and Machine Theory*, 32(1), 1997.
- [14] Blasco J. *Diseño de una llanta dinamométrica para vehículos ligeros*. Trabajo de fin de máster. Universidad Politécnica de Valencia, 2014.
- [15] Blundell, M. and Harty, D. *Multibody Systems Approach to Vehicle Dynamics*. Society of Automotive Engineers, Inc. USA, 2004.
- [16] Brancati, R., Russo, R. and Savino, S. Method and equipment for inertia parameter identification. *Mechanical Systems and Signal Processing* 24, 2010.
- [17] Calafiore, G., Indri, M. and Bona, B. Robot dynamic calibration: optimal excitation trajectories and experimental parameter estimation, *Journal of Robotic Systems* 18, No. 2, 2001.
- [18] Callejo, A. and García de Jalón, J. Vehicle suspension identification via algorithmic computation of state and design sensitivities. *Journal of Mechanical Design* 137(2), 2014.
- [19] Chen, K., Beale, D.G. and Wang, D. A new method to determine the base inertial parameters of planar mechanisms. *Mechanism and Machine Theory* 37, 2002.
- [20] Chen, K. and Beale, D.G. A new symbolic method to determine base inertia parameters for general spatial mechanisms. *Design Engineering Technical Conferences and Computer and Information in Engineering Conference ASME*, 2002.

-
- [21] Chen, K. and Beale, D. Base Dynamic parameter estimation of a MacPherson suspension mechanisms. *Vehicle System Dynamics*, vol 39, No 3, 2003.
- [22] Díaz – Rodríguez, M. *Identificación de parámetros dinámicos de robots paralelos basada en un conjunto de parámetros significativos*. Tesis doctoral. Universidad Politécnica de Valencia, 2009.
- [23] Díaz – Rodríguez, M., Iriarte, X. Mata, V. and Ros, J. On the experiment design for direct dynamic parameter identification of parallel robots. *Advanced Robotics*, vol 23, no. 3, 2009.
- [24] Díaz – Rodríguez, M., Mata, V., Valera, A. and Provenzan, S. On the conditioning of the observation matrix for dynamic parameters identification of parallel robots. *Romansy 19 – Robot Design, Dynamics and Control, CISM International Centre for Mechanical Sciences*, Udine 2013.
- [25] Díaz – Rodríguez, M., Mata, V. Valera, A. and Page, L. A methodology for dynamic parameters identification of 3-DOF parallel robots in terms of relevant parameters. *Mechanism and Machine Theory* 45 (9), 2013.
- [26] Díaz – Rodríguez, M., Valera, A., Mata, V. and Valles, M. Model-based control of a 3-dof parallel robot based on identified relevant parameters. *IEEE/ASME Transactions on Mechatronics*, vol. 18, no. 6, 2013.
- [27] Eberhard, P., Schiehlen, W. and Sierts, J. Sensitivity analysis of inertia parameters in multibody dynamics. *In: 12th IFToMM World Congress, Besanc-on, France, 2007*.
- [28] Ebrahimi, S and Haghi, A. Characterization of the contribution of inertial parameters to the dynamics of multibody systems. *Multibody Systems Dynamics* 30, 2013.
- [29] Ebrahimi, S. and Kövecses, J. Sensitivity analysis for estimation of inertial parameters of multibody mechanical systems. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 4 (1), 2008.
- [30] Eichberger, A. and Schittenhelm, M. Implementations, applications and limits of tyre models in multibody simulation. *International Journal of Vehicle System Dynamic*, vol. 43, supplement, 2005.

-
- [31] Farhat, N. *Identificación de parámetros dinámicos en sistemas mecánicos de cadena cerrada. Aplicación a robots paralelos*. Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2006.
- [32] Farhat, N., Mata, V., Page, L. and Valero, F. Identification of dynamic parameters of a 3-DOF RPS parallel manipulator. *Mechanism and Machine Theory*, 43(1), 2008.
- [33] Farhat, N., Mata, V., Alvaro, P. and Díaz – Rodríguez, M. Dynamic simulation of a parallel robot: Coulomb friction and stick-slip in robot joints. *Robotica*, 2009.
- [34] García de Jalon, J. and Bayo, E. *Kinematic and Dynamic Simulation of Multibody Systems. The real-time challenge*. Springer – Verlag, 1994.
- [35] Gautier, M. Numerical calculation of the base inertial parameters of robots. *Journal of Robotic Systems* 8, no. 4, 1991.
- [36] Gautier, M., Briot, S. and Venture, G. Identification of consistent standard dynamic parameters of industrial robots. *IEEE/ASME International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics (AIM)*, 2013
- [37] Gautier, M. and Khalil, W. A direct determination of minimum inertial parameters of robots. *Proceedings IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1988.
- [38] Gautier, M., Khalil, W. Identification of the minimum inertial parameters of robots. *Robotics and Automation Proceedings of IEEE International Conference*, vol.3, 1989.
- [39] Gautier, M. and Khalil, W. Excitation trajectories for the Identification of base inertial parameters of robots. *International Journal of Robotics Research* 11, no. 4, 1992.
- [40] Gembicki, F. and Haimes, Y. Approach to performance and sensitivity multiobjective optimization: The goal attainment method. *Automatic Control, IEEE Transactions on*, 20(6), 1975.
- [41] Gobbi, M., Mastinu, G. and Previati, G. A method for measuring the inertia properties of rigid bodies. *Mechanical Systems and Signal Processing* 25, 2011.

-
- [42] Grotjahn, M., Heimann, B. and Abdellatif, H. Identification of friction and rigid-body dynamics of parallel kinematic structures for model-based control. *Multibody System Dynamics*, 11(3), 2004.
- [43] Guegan, S., Khalil, W. and Lemoine, P. Identification of the dynamic parameters of the Orthoglide. *En Proceedings of IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2003.
- [44] Ha, J., Fung, R., Chen, K. and Hsien, S. Dynamic modeling and identification of a slider-crank mechanism. *Journal of Sound and Vibration* 289, 2006.
- [45] Hardeman, T., Aarts, R.G. and Jonker, J.B. A finite element formulation for dynamic parameter identification of robot manipulators. *Multibody System Dynamics*, 16(1), 2006.
- [46] Iriarte Xabier. *Identificación de robots manipuladores: Reducción de modelos y diseño de experimentos*. Tesis doctoral. Universidad Pública de Navarra, 2010.
- [47] Iriarte, X., Ros, J. y Mata, V. Symbolic calculation of the base inertial parameters of robots through dimensional analysis. *En Multibody Dynamics 2009, ECCOMAS Thematic Conference*, 2009.
- [48] Jin, J. and Gans, N. Parameter identification for industrial robots with a fast and robust trajectory design approach. *Robotics and Computer-Integrated Manufacturing* 31, 2015.
- [49] Khalil, W., Bennis, F. and Gautier, M. The use of the generalized links to determine the minimum inertial parameters of robots, *Journal of Robotic Systems* 7, no. 2, 1990.
- [50] Khalil, W. and Bennis, F. Symbolic calculation of the base inertial parameters of closed-loop robots. *International Journal of Robotics Research* 14, no. 2, 1995.
- [51] Khalil, W. and Dombre, E. *Modeling Identification and Control of Robots*. Hermes Penton Ltd. London, 2002.
- [52] Khalil, W. and Kleinfinger, J. A new geometric notation for open- and closed-loop. *En Proceedings of 1986 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol 3, 1986.

- [53] Khalil, W. and Kleinfinger, J. Minimum operation and minimum parameters of the dynamic models of tree structure robots, *IEEE Journal of Robotics and Automation*, vol 3,no. 6, 1987.
- [54] Khosla, P.K. Categorization of parameters in the dynamic robot model. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 5(3), 1989.
- [55] Khosla, P. y Kanade, T. Parameter identification of robot dynamics. *En Proceedings of the 24th IEEE Conference on Decision and Control*, 1985.
- [56] Ljung, L. *State of the Art in Linear System Identification: Time and Frequency Domain Methods*. Technical Reports from the Automatic Control group in Linköping universitet. Report No: LiTH-ISY-R-2797
- [57] Ludwig, R., Gerstmayr, J., Automatic parameter identification for mechatronic systems. *Multibody System Dynamics, Robotics and Control*, 2013.
- [58] Ludwig, R., Gerstmayr, J., Automatic parameter identification for generic robot models. *Proceedings of the Multibody Dynamics ECCOMAS Thematics*, Brussels, 2013.
- [59] Khalil, W. and Kleinfinger, J. Minimum operations and minimum parameters of the dynamic models of tree structure robots. *IEEE J. Robotics and Automation*, RA-3(6), 1987.
- [60] Mani, N. K., Haug, J. and Atkinson, k. Application of singular value decomposition for analysis of mechanical system dynamics. *Journal of Mechanical Design*, volume 107, issue 1, 1985.
- [61] Marquardt, D.W., and Snee, R.D. Ridge regression in practice. *The American Statistician* 29, no. 1, 1975.
- [62] Martín, R. *Construcción de Diseños Óptimos para modelos con variables no controlables*. Tesis Doctoral. Universidad de Castilla La Mancha, 2007.
- [63] Mata, V., Benimeli, F., Farhat, N. y Valera, A. Dynamic parameter identification in industrial robots considering physical feasibility. *Journal of Advanced Robotics*, 19(1), 2005.
- [64] Mata, V., Farhat, N., Díaz-Rodríguez, M., Valera, A. and Page, A. Dynamic parameter identification for parallel manipulators. *En Parallel Manipulators, Towards New Applications*. I-Tech Education

- and Publishing, 2008.
- [65] Mayeda, H., Yoshida, K. and Osuka, K. Base parameters of manipulator dynamic models. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, Volume: 6, 1990.
 - [66] Mejia, L.A., Mata, V., Valero, F., Ros, J. and Iriarte, X. Dynamic parameter identification in the front suspension of a vehicle: on the influence of different base parameter sets. *Multibody Mechatronic Systems*, 2015. vol 25, 2014.
 - [67] Olsen, M.M. and Petersen, H.G. A new method for estimating parameters of a dynamic robot model. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, 17(1), 2001.
 - [68] Pfeiffer, F. and Holzl, J. Parameter identification for industrial robots. En *Proceedings of 1995 IEEE International Conference on Robotics and Automation*, vol 2, 1995.
 - [69] Pham, C.M. and Gautier, M. Essential parameters of robots. En *Proceedings of the 30th IEEE Conference on Decision and Control*, 1991.
 - [70] Presse, C. and Gautier, M. New criteria of exciting trajectories for robot identification. *Proceedings of the IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 1993.
 - [71] Rackl, W. Lampariello, R. and Hirzinger, G. Robot excitation trajectories for dynamic parameter estimation using optimized B-splines. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2012.
 - [72] Ros, J., Plaza, A., Iriarte, X. and Aginaga, J. Inertia transfer concept based general method for the determination of the base inertial parameters. *Multibody Systems Dynamics*, 34, 2015.
 - [73] Ros, J., Iriarte, X. and Mata, V. 3D inertia transfer concept and symbolic determination of the base inertial parameters. *Mechanism and Machine Theory* 49, 2012.
 - [74] Schaeffers, J., Xu, S.J. and Darouach, M. A parameter identification approach using optimal exciting trajectories for a class of industrial robots. *Journal of Intelligent and Robotic Systems*, 15(1), 1996.

-
- [75] Schedlinski, C and Link, M. A survey of current inertia parameter identification methods. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 15(1), 2001.
- [76] Shabana, A.A. *Computational Dynamic*. Jhon Wiley and Sons, Inc., USA, 2001.
- [77] Serban, R. and Freeman, J.S. Identification and identifiability of unknown parameters in multibody dynamic systems. *Multibody System Dynamics* 5, 2001.
- [78] Shome, S., Beale, D. and Wang, D. A general Method for Estimating Dynamic Parameters of Spatial Mechanisms. *Nonlinear Dynamic* 16, Kluwer Academic Publisher, 1998.
- [79] Swevers, J., Ganseman, C., DeShutter, J. and VanBrussel, H. Generation of Periodic Trajectories for Optimal Robot Excitation. *Journal of Manufacturing Science and Engineering – Transactions of the Asme*, vol 119, 1997.
- [80] Swevers, J., Ganseman, C., Tükel, D.B., De Schutter, J. and Van Brussel, H. Optimal robot excitation and identification. *Transactions on Robotics and Automation* 13, 1997.
- [81] Tang, L. and Shangguan, W. An improved pendulum method for the determination of the center of gravity and inertia tensor for irregular-shaped bodies. *Measurement* 44, 2011.
- [82] Uchida, T., Vyasarayani, C.P., Smart, M. and McPhee, J. Parameter identification for multibody systems expressed in differential-algebraic form. *Multibody Systems Dynamics* 31, 2014.
- [83] Valero, F., Iriarte, X., Mata, V. and Ros, J. Identification of dynamic parameters in low-mobility mechanical systems: application to short long arm vehicle suspension. *Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility*, 2013.
- [84] Venture G., Ripert J.P., Khalil W., Gautier M. and Bodson P. Modeling and Identification of Passenger Car Dynamics Using Robotics Formalism, *IEEE Transaction on Intelligent Transportation Systems*, Vol 7, No 3, 2006.
- [85] Wehage,R.A and Haug, E.J. Generalized coordinate partitioning for dimension reduction in analysis of constrained dynamic systems.

- ASME Journal of Mechanical Design*, 134, 1982.
- [86] Wewel, M., Schiehlen, W. and Tobias, C. Modelling and Parameter Identification of a Formula Student Car. *Proceeding in Applied Mathematics and Mechanics*, 10, 2010.
- [87] Wiens, G.J., Samblin, S.s. and Oh, Y.H. Characterization of PKM dynamics in terms of system identification. *Proceedings of the I MECH E Part K Journal of Multi-body Dynamics*, 216, 2002.
- [88] Wilkinson, J.H. *The Algebraic eigenvalue problem*. Oxford University Press, Inc. New York, NY, USA, 1988.
- [89] Rackl, W., Lampariello, R. and Hirzinger, G. Robot Excitation Trajectories for Dynamic Parameter Estimation using Optimized B-Splines. *IEEE International Conference on Robotics and Automation*, 2012.
- [90] Zhi-Chao, H., Yi-ning, L., Yao-xin, L. and Dan, L. A new trifilar pendulum approach to identify all inertia parameters of a rigid body or assembly. *Mechanism and Machine Theory* 44, 2009.
- [91] Zhuang, D., Yu, B. and Li, Q. Identification of Vehicle Powertrain Rigid-Body Inertia Properties. *SAE Technical Paper Series*. 2008-01-1586, 2008.

Anexos

A. Parámetros base del Modelo T2

Los parámetros presentados a continuación fueron determinados a partir de la matriz B simbólica, expresión (4.6), aplicando la metodología descrita en la Sección 4.1.2. Los parámetros se calcularon en el programa de algebra simbólica Maple.

$$\Phi base_1 = mx_1 + Ds_2 m_1 + Ds_2 m_2 + Ds_2 m_3 + Ds_2 m_4 + Ds_2 m_5 \\ + (Ds_2 - Ds_5) m_7 + \frac{Ds_2 mx_2}{Ds_4} + \frac{Ds_2 mx_4}{l_{10}}$$

$$\Phi base_2 = mz_1 ,$$

$$\Phi base_3 = Iyy_1 + (-Ds_2^2 + Ds_5^2) m_7 - Ds_2^2 m_1 - Ds_2^2 m_2 - Ds_2^2 m_3 - \\ Ds_2^2 m_4 - Ds_2^2 m_5 - \frac{Ds_2^2 mx_2}{Ds_4} - \frac{Ds_2^2 mx_4}{l_{10}}$$

$$\Phi base_4 = mz_2 , \quad \Phi base_5 = Iyy_2 + mx_2 Ds_4 ,$$

$$\Phi base_6 = mx_3 - m_5 DKx + m_4 Ds_6 + \frac{Ds_6 mx_4}{l_{10}} , \quad \Phi base_7 = my_3 - mx_5 - m_5 DKy ,$$

$$\Phi base_8 = mz_3 + (l_7 - DKz) m_5 + \frac{1}{2} l_7 m_3 + \frac{1}{2} l_7 m_4 + m_2 l_7 \\ + \frac{l_7 mx_2}{Ds_4} + \frac{1}{2} \frac{l_7 mx_4}{l_{10}}$$

$$\Phi base_9 = Ixx_3 + Iyy_5 + (DKy^2 - l_7 DKz + DKz^2) m_5 - \frac{1}{4} l_7^2 m_3 \\ - \frac{1}{4} l_7^2 m_4 + 2 mx_5 DKy - \frac{1}{4} \frac{l_7^2 mx_4}{l_{10}}$$

$$\begin{aligned}
\Phi base_{10} &= Ixy_3 - m_5 DKx DKy - mx_5 DKx , \\
\Phi base_{11} &= Ixz_3 - \frac{1}{2} DKx (-l_7 + 2 DKz) m_5 , \\
\Phi base_{12} &= Iyy_3 - \frac{1}{4} l_7^2 m_3 + \left(Ds_6^2 - \frac{1}{4} l_7^2 \right) m_4 + (DKx^2 - l_7 DKz \\
&\quad + DKz^2) m_5 + \frac{1}{4} \frac{(4 Ds_6^2 - l_7^2) mx_4}{l_{10}} \\
\Phi base_{13} &= Iyz_3 + mx_5 \left(\frac{1}{2} l_7 - DKz \right) - \frac{1}{2} DKy (-l_7 + 2 DKz) m_5 , \\
\Phi base_{14} &= Izz_3 + Iyy_5 + m_5 (DKx^2 + DKy^2) + m_4 Ds_6^2 + 2 mx_5 DKy \\
&\quad + \frac{Ds_6^2 mx_4}{l_{10}} \\
\Phi base_{15} &= my_4 , \Phi base_{16} = mz_4 , \Phi base_{17} = Ixx_4 , \Phi base_{18} = Ixy_4 , \Phi base_{19} = Ixz_4 , \\
\Phi base_{20} &= mx_4 l_{10} + Iyy_4 , \Phi base_{21} = Iyz_4 , \Phi base_{22} = mx_4 l_{10} + Izz_4 , \Phi base_{23} = my_5 , \\
\Phi base_{24} &= mz_5 , \Phi base_{25} = Ixx_5 , \Phi base_{26} = Ixy_5 , \Phi base_{27} = Ixz_5 , \Phi base_{28} = Iyz_5 , \\
\Phi base_{29} &= -Iyy_5 + Izz_5 , \Phi base_{30} = mx_6 , \Phi base_{31} = my_6 , \Phi base_{32} = mz_6 , \\
\Phi base_{33} &= Ixx_6 + Ixx_7 , \Phi base_{34} = Ixy_6 + Ixy_7 , \Phi base_{35} = Ixz_6 + Ixz_7 , \\
\Phi base_{36} &= Iyy_6 + Iyy_7 , \Phi base_{37} = Iyz_6 + Iyz_7 , \Phi base_{38} = Izz_6 + Izz_7 , \Phi base_{39} = mx_7 \\
\Phi base_{40} &= my_7 , \Phi base_{41} = mz_7 , \Phi base_{42} = m_8 - \frac{mx_4}{l_{10}} - \frac{mx_{12}}{l_{10}} , \\
\Phi base_{43} &= mx_9 + Ds_2 m_9 + Ds_2 m_{10} + Ds_2 m_{11} + Ds_2 m_{12} + Ds_2 m_{13} \\
&\quad + (Ds_2 - Ds_5) m_{15} + \frac{Ds_2 mx_{10}}{Ds_4} + \frac{Ds_2 mx_{12}}{l_{10}} \\
\Phi base_{44} &= mz_9 , \\
\Phi base_{45} &= Iyy_9 + (-Ds_2^2 + Ds_5^2) m_{15} - Ds_2^2 m_9 - Ds_2^2 m_{10} - Ds_2^2 m_{11} \\
&\quad - Ds_2^2 m_{12} - Ds_2^2 m_{13} - \frac{Ds_2^2 mx_{10}}{Ds_4} - \frac{Ds_2^2 mx_{12}}{l_{10}} \\
\Phi base_{46} &= mz_{10} , \Phi base_{47} = Iyy_{10} + mx_{10} Ds_4 , \\
\Phi base_{48} &= mx_{11} + m_{12} Ds_6 - m_{13} DKx + \frac{Ds_6 mx_{12}}{l_{10}} ,
\end{aligned}$$

$$\Phi base_{49} = my_{11} - mx_{13} + m_{13} DKy ,$$

$$\begin{aligned} \Phi base_{50} = & mz_{11} + m_{10} l_7 + (l_7 - DKz) m_{13} + \frac{1}{2} l_7 m_{11} + \frac{1}{2} l_7 m_{12} \\ & + \frac{l_7 mx_{10}}{Ds_4} + \frac{1}{2} \frac{l_7 mx_{12}}{l_{10}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi base_{51} = & Ixx_{11} + Iyy_{13} - 2 mx_{13} DKy + (DKy^2 - l_7 DKz \\ & + DKz^2) m_{13} - \frac{1}{4} l_7^2 m_{11} - \frac{1}{4} l_7^2 m_{12} - \frac{1}{4} \frac{l_7^2 mx_{12}}{l_{10}} \end{aligned}$$

$$\Phi base_{52} = Ixy_{11} + m_{13} DKx DKy - mx_{13} DKx ,$$

$$\Phi base_{53} = Ixz_{11} - \frac{1}{2} DKx (-l_7 + 2 DKz) m_{13} ,$$

$$\begin{aligned} \Phi base_{54} = & Iyy_{11} - \frac{1}{4} l_7^2 m_{11} + \left(Ds_6^2 - \frac{1}{4} l_7^2 \right) m_{12} + (DKx^2 - l_7 DKz \\ & + DKz^2) m_{13} + \frac{1}{4} \frac{(4 Ds_6^2 - l_7^2) mx_{12}}{l_{10}} \end{aligned}$$

$$\Phi base_{55} = Iyz_{11} + mx_{13} \left(\frac{1}{2} l_7 - DKz \right) + \frac{1}{2} DKy (-l_7 + 2 DKz) m_{13} ,$$

$$\begin{aligned} \Phi base_{56} = & m_{13} (DKx^2 + DKy^2) + Izz_{11} + Iyy_{13} + m_{12} Ds_6^2 \\ & - 2 mx_{13} DKy + \frac{Ds_6^2 mx_{12}}{l_{10}} \end{aligned}$$

$$\Phi base_{57} = my_{12} , \Phi base_{58} = mz_{12} , \Phi base_{59} = Ixx_{12} , \Phi base_{60} = Ixy_{12} ,$$

$$\Phi base_{61} = Ixz_{12} , \Phi base_{62} = Iyy_{12} + mx_{12} l_{10} , \Phi base_{63} = Iyz_{12} ,$$

$$\Phi base_{64} = Izz_{12} + mx_{12} l_{10} , \Phi base_{65} = my_{13} , \Phi base_{66} = mz_{13} , \Phi base_{67} = Ixx_{13} ,$$

$$\Phi base_{68} = Ixy_{13} , \Phi base_{69} = Ixz_{13} , \Phi base_{70} = Iyz_{13} , \Phi base_{71} = -Iyy_{13} + Izz_{13} ,$$

$$\Phi base_{72} = mx_{14} , \Phi base_{73} = my_{14} , \Phi base_{74} = mz_{14} , \Phi base_{75} = Ixx_{14} + Ixx_{15} ,$$

$$\Phi base_{76} = Ixy_{14} + Ixy_{15} , \Phi base_{77} = Ixz_{14} + Ixz_{15} , \Phi base_{78} = Iyy_{14} + Iyy_{15} ,$$

$$\Phi base_{79} = Iyz_{14} + Iyz_{15} , \Phi base_{80} = Izz_{14} + Izz_{15} , \Phi base_{81} = mx_{15} , \Phi base_{82} = my_{15} ,$$

$$\Phi base_{83} = mz_{15} ,$$