UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Órdenes parciales y pre-órdenes definidos a partir de matrices inversas generalizadas

TESIS DOCTORAL

Presentada por

Araceli Elisabet Hernández

Dirigida por:

Néstor Thome Coppo

Marina B. Lattanzi

Enero de 2016

D. Néstor Thome Coppo, Profesor Titular de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politècnica de València; y Dª. Marina B. Lattanzi, Profesora Adjunta de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad Nacional de La Pampa,

CERTIFICAN:

que la presente memoria *"Órdenes parciales y pre-órdenes definidos a partir de matrices inversas generalizadas"*, ha sido realizada bajo su dirección por Araceli Elisabet Hernández, y constituye su tesis para optar al grado de Doctora por la Universitat Politècnica de València.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, se ratifican en la autorización de la presentación de la referida tesis doctoral ante la Comisión de Doctorado de la Universitat Politècnica de València, firmando el presente certificado.

Valencia, enero de 2016.

Néstor Thome Coppo | Marina B. Lattanzi

Resumen

El Análisis Matricial y sus aplicaciones constituyen un área importante de la Matemática Aplicada y son la base de muchas aplicaciones industriales y para la ingeniería en general. El presente trabajo se encuadra dentro del Análisis Matricial. Se estudian algunos órdenes parciales y pre-órdenes, definidos a partir de inversas generalizadas, sobre diferentes conjuntos de matrices complejas.

En la primera parte de esta memoria se estudia el orden parcial estrella en la clase de matrices EP. En la literatura se pueden encontrar varias propiedades y caracterizaciones para este tipo de matrices como, por ejemplo, en [53] Y. Tian y H. Wang han reunido treinta y cinco caracterizaciones para matrices EP. Varias de ellas se utilizan en esta memoria con el propósito de obtener nuevas caracterizaciones.

En [45] J. K. Merikoski y X. Liu, basándose en un estudio realizado por R. E. Hartwig y G. P. H. Styan [30], analizaron y caracterizaron el orden parcial estrella en el conjunto de matrices normales. En el presente trabajo se extienden algunos resultados obtenidos por Merikoski y Liu a la clase de matrices EP. Se caracterizan los sucesores y predecesores de una matriz EP dada y se establecen condiciones necesarias y suficientes para que éstos

pertenezcan a la misma clase. Se presentan nuevas demostraciones de algunos resultados conocidos utilizando la forma canónica de las matrices EP [53]. De esta manera se obtiene y verifica un teorema (Teorema 2.3.5) que proporciona descomposiciones para dos matrices EP comparables a través del orden parcial estrella. Este es un caso particular de una factorización dada por J. Groß en [24], para matrices de índice menor o igual que 1 relacionadas por el orden parcial grupo, ya que éste coincide con el orden parcial estrella en la clase de matrices EP. En ese trabajo J. Groß realizó la prueba usando la descomposición en valores singulares.

N. Castro-González, J. Vélez-Cerrada, D. S. Djordjević, J. J. Koliha y Y. Wei [13, 14, 15, 16, 21] son algunos de los autores que han estudiado los proyectores espectrales correspondientes al valor propio nulo de una matriz A, denotados por A^{π}. Para una matriz A fija, caracterizaron todas las matrices para las cuales dicho proyector coincide con A^{π}. En este trabajo se restringe el conjunto de estudio a la clase de matrices EP y se caracterizan los proyectores espectrales correspondientes al valor propio nulo. Más adelante, se relacionan los proyectores mencionados con los órdenes parciales estrella y grupo.

La inversa de Moore-Penrose aparece cuando se busca la solución aproximada (en norma 2) por mínimos cuadrados de un sistema de ecuaciones lineales inconsistente. En los casos en que se utilizan normas inducidas por matrices hermíticas y definidas positivas, es necesario utilizar la inversa de Moore-Penrose ponderada por dichas matrices, inversa estudiada por varios autores como Y. Wei, G. Wang, S. Qiao, H. Wu [55, 57], entre otros. En muchas situaciones reales, las matrices que modelizan el problema a resolver poseen una determinada estructura como, por ejemplo, el hecho de ser simétricas, hermíticas, normales, EP, tridiagonales, etc. En esta memoria se considera la clase de matrices $EP_{(M,N)}$, matrices EP ponderadas con respecto a dos matrices hermíticas definidas positivas M y N, y se define en ese conjunto el orden parcial estrella ponderado con respecto a M y N. Primero se estudian y analizan las matrices cuadradas que pertenecen a esta clase y luego se particulariza al caso en que M coincide con N, caracterizando los predecesores y sucesores de una matriz $EP_{(M,M)}$ (Teoremas 3.2.3 y 3.2.4, respectivamente). En [44], N. Matzakos y D. Pappas presentaron dos factorizaciones para la inversa de Moore-Penrose de una matriz EP singular y a partir de ellas implementaron dos algoritmos para calcularla. Extendiendo estos resultados para matrices EP ponderadas, se diseñan dos algoritmos para calcular la inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz $EP_{(M,M)}$.

Los resultados encontrados sobre los proyectores espectrales correspondientes al valor propio nulo en el conjunto de matrices EP son extendidos al conjunto de matrices $EP_{(M,M)}$ y se demuestra que esta clase es cerrada bajo esos proyectores (Teorema 3.4.1).

La inversa de Drazin es otra de las inversas generalizadas con las que se trabaja en esta memoria. Ha sido usada en la literatura para definir el pre-orden Drazin en el conjunto de matrices complejas cuadradas. En [48], los autores definieron este pre-orden, estudiaron algunas propiedades y obtuvieron caracterizaciones del mismo. Como ya se mencionó, este pre-orden se define en el conjunto de matrices complejas cuadradas debido a que la inversa de Drazin sólo existe para este tipo de matrices, y por lo tanto, no se puede extender directamente a matrices rectangulares. Con la finalidad de lograr tal extensión, se considera una matriz peso W no nula que transforma una matriz rectangular A en dos matrices cuadradas, AW y WA. Luego, se definen tres nuevos pre-órdenes (Definición 4.2.1) en el conjunto de matrices rectangulares complejas, $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$, usando el peso W y el pre-orden de Drazin entre ciertas matrices cuadradas. Se caracterizan las matrices que están relacionadas mediante cada uno de esos pre-órdenes, encontrando en cada caso representaciones para ellas (Teoremas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3).

En [16], N. Castro-González y J. Vélez-Cerrada consideraron, para una matriz A y un peso W, el concepto de W-soporte idempotente $A^{\sigma,W} = A(WA)^D = (AW)^D A$. Caracterizaron todas las matrices B para las cuales el proyector $B^{\sigma,W}W$ coincide con $A^{\sigma,W}W$, con A y W fijas. Hicieron lo mismo para los proyectores $WA^{\sigma,W}$ y $WB^{\sigma,W}$ y luego, como corolario de lo anterior, pudieron caracterizar las matrices rectangulares cuyos W-soportes idempotentes coinciden con el de una dada. Utilizando la misma nomenclatura, en el presente trabajo se realiza un análisis (Teorema 4.2.4) en el que se muestra bajo qué condiciones, que involucran al pre-orden $\preceq^{d,W,r}$, los proyectores $A^{\sigma,W}W$ y $B^{\sigma,W}W$ coinciden. De forma análoga se dan condiciones para que $WA^{\sigma,W}$ sea igual a $WB^{\sigma,W}$.

Los resultados anteriores fueron motivadores para definir, estudiar y caracterizar una nueva clase de matrices, la clase de aquellas matrices A cuyos proyectores de Drazin ponderados $A^{\sigma,W}W$ y $WA^{\sigma,W}$ coinciden. Se realiza un análisis de las matrices que están relacionadas mediante cada uno de los pre-órdenes $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$.

Esta memoria está organizada en cuatro capítulos. En el Capítulo 1 se presentan, de forma breve, algunos antecedentes del tema de la tesis y se introducen las notaciones y resultados preliminares necesarios para el desarrollo del resto de los capítulos. En el Capítulo 2 se presenta la clase de matrices EP, se demuestran algunas propiedades y se estudia el orden parcial estrella en dicha clase, caracterizando las matrices EP relacionadas mediante este orden. El Capítulo 3 contiene los resultados obtenidos al estudiar el orden parcial estrella ponderado en el conjunto de matrices EP ponderadas. En particular, allí se pueden encontrar las caracterizaciones halladas para las matrices $EP_{(M,M)}$ que se relacionan por medio del orden parcial estrella ponderado. Además, se presentan dos algoritmos para calcular la inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz $EP_{(M,M)}$ y se muestran los resultados obtenidos al implementarlos. Finalmente, en el Capítulo 4, con la intención de extender el pre-orden de Drazin al conjunto de matrices rectangulares, se definen tres nuevos pre-órdenes en ese conjunto. Se caracterizan las matrices que están relacionadas mediante estos pre-órdenes y, en particular, las matrices adyacentes. También se estudia la clase de las matrices que tienen proyectores de Drazin ponderados iguales y se relacionan con los pre-órdenes definidos. La tesis finaliza con un anexo en el que se indican las conclusiones finales y las líneas futuras de investigación. Los resultados obtenidos en esta memoria se pueden encontrar en [31, 32, 33].

Resum

L'Anàlisi Matricial i les seues aplicacions constitueixen una àrea important de la Matemàtica Aplicada i són la base de moltes aplicacions industrials i per a la enginyeria en general. Aquest treball s'enquadra doncs dins de l'Anàlisi Matricial. S'estudien alguns ordres parcials i pre-ordres, definits a partir d'inverses generalitzades, sobre diferents conjunts de matrius complexes.

A la primera part d'aquesta memòria s'estudia l'ordre parcial estrella en la classe de matrius EP. A la literatura es poden trobar diverses propietats i caracteritzacions per a aquest tipus de matrius com, per exemple, en [53] Y. Tian i H. Wang han reunit trenta-cinc caracteritzacions per a matrius EP. Vàries d'elles s'utilitzen en aquesta memòria amb el propòsit d'obtindre noves caracteritzacions.

En [45] J. K. Merikoski i X. Liu, basant-se en un estudi realitzat per R. E. Hartwig i G. P. H. Styan [30], varen analitzar i caracteritzar l'ordre parcial estrella en el conjunt de matrius normals. En aquest treball s'estenen alguns dels resultats obtinguts per Merikoski i Liu per a la classe de matrius EP. Es caracteritzen els successors i predecessors d'una matriu EP donada i s'estableixen condicions necessàries i suficients per a que aquests pertanyin

a la mateixa classe. Es presenten noves demostracions d'alguns resultats coneguts fent servir la forma canònica de les matrius EP [53]. D'aquesta manera s'obté i es verifica un teorema (Teorema 2.3.5) que proporciona descomposicions per a dos matrius EP comparables a través de l'ordre parcial estrella. Aquest és un cas particular d'una factorització donada per J. Groß en [24], per a matrius d'índex menor o igual a 1 relacionades amb l'ordre parcial grup, ja que aquest coincideix amb l'ordre parcial estrella a la classe de matrius EP. En aquell treball Groß va fer la prova fent servir la descomposició en valors singulars.

N. Castro-González, J. Vélez-Cerrada, D. S. Djordjević, J. J. Koliha i Y. Wei [13, 14, 15, 16, 21] són alguns dels autors que han estudiat els projectors espectrals, denotats per A^π, corresponents al valor propi nul d'una matriu A. Per a una matriu A fixa, van caracteritzar totes les matrius per a les quals aquest projector coincideix amb A^π. En aquest treball es restringeix el conjunt d'estudi a la classe de matrius EP i es caracteritzen els projectors espectrals corresponents al valor propi nul. Més endavant es relacionen els projectors mencionats amb els ordres parcials estrella i grup.

La inversa de Moore-Penrose apareix quan es busca la solució aproximada (en norma 2) per mínims quadrats d'un sistema d'equacions lineals inconsistent. En els casos en que s'utilitzen normes induïdes per matrius hermítiques i definides positives, és necessari utilitzar la inversa de Moore-Penrose ponderada per aquestes matrius, inversa estudiada per varis autors com Y. Wei, G. Wang, S. Qiao, H. Wu [55, 57], entre altres. En moltes situacions reals, les matrius que modelitzen el problema a resoldre posseeixen una determinada estructura com, per exemple, el fet de ser simètriques, hermítiques, normals, EP, tridiagonals, etc. En aquesta memòria es considera la classe de matrius $EP_{(M,N)}$, matrius EP ponderades respecte dos matrius hermítiques definides positives M i N, i es defineix en aquest conjunt l'ordre parcial estrella ponderat respecte M i N. Primer s'estudien i analitzen les matrius quadrades que pertanyen a aquesta classe i després es particularitza per al cas en que M coincideix amb N, caracteritzant els predecessors i successors d'una matriu $EP_{(M,M)}$ (Teoremes 3.2.3 i 3.2.4, respectivament). En [44], N. Matzakos i D. Pappas van presentar dues factoritzacions per a la inversa de Moore-Penrose d'una matriu EP singular i a partir d'elles van implementar dos algoritmes per a calcular-la. Estenent aquests resultats per a matrius EP ponderades, es dissenyen dos algoritmes per calcular la inversa de Moore-Penrose ponderada d'una matriu $EP_{(M,M)}$.

Els resultats trobats sobre els projectors espectrals corresponents al valor propi nul en el conjunt de matrius EP són estesos al conjunt de matrius $EP_{(M,M)}$ i es demostra que aquesta classe és tancada sota aquests projectors (Teorema 3.4.1).

La inversa de Drazin és una altra de les inverses generalitzades amb les que es treballa en aquesta memòria. A estat utilitzada a la literatura per a definir el pre-ordre de Drazin en el conjunt de matrius complexes quadrades. En [48], els autors van definir aquest pre-ordre, van estudiar algunes propietats i van obtindre les seues caracteritzacions. Tal i com ja s'ha esmentat, aquest pre-ordre es defineix en el conjunt de matrius complexes quadrades degut a que la inversa de Drazin només existeix per a aquest tipus de matrius, i per tant, no es pot estendre directament a matrius rectangulars. Amb la finalitat d'aconseguir tal extensió, es considera una matriu pes W no nul·la que transforma una matriu rectangular A en dues matrius quadrades, AW i WA. Després, es defineixen tres nous pre-ordres (Definició 4.2.1) en el conjunt de matrius rectangulars complexes, $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ i $\preceq^{d,W}$, fent servir el pes W i el pre-ordre de Drazin entre certes matrius quadrades. Es caracteritzen les matrius que estan relacionades mitjançant cada un d'aquests pre-ordres, trobant en cada cas representacions per a elles (Teoremes 4.2.1, 4.2.2 i 4.2.3).

En [16], N. Castro-González i J. Vélez-Cerrada van considerar, per a una matriu A i un pes W, el concepte de W-suport idempotent $A^{\sigma,W} = A(WA)^D = (AW)^D A$. Van caracteritzar totes les matrius B per a les quals el projector $B^{\sigma,W}W$ coincideix amb $A^{\sigma,W}W$, amb A i W fixes. Van fer el mateix per als projectors $WA^{\sigma,W}$ i $WB^{\sigma,W}$ i després, com a corol·lari de l'anterior, van poder caracteritzar les matrius rectangulars, els W-suports idempotents de les quals coincideixen amb el d'una donada. Fent servir la mateixa nomenclatura, en aquest treball es realitza un anàlisi (Teorema 4.2.4) en el qual es mostra sota quines condicions, que involucren al pre-ordre$\preceq^{d,W,r}$, els projectors $A^{\sigma,W}W$ i $B^{\sigma,W}W$ coincideixen. De forma anàloga es donen condicions per a que $WA^{\sigma,W}$ sigui igual a $WB^{\sigma,W}$.

Els resultats anteriors van ser motivadors per a definir, estudiar i caracteritzar una nova classe de matrius, la classe d'aquelles matrius A el projectors de Drazin ponderats $A^{\sigma,W}W$ i $WA^{\sigma,W}$ de les quals coincideixen. Es realitza un anàlisi de las matrius que estan relacionades mitjançant cada un dels pre-ordres $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ i $\preceq^{d,W}$.

Aquesta memòria està organitzada en quatre capítols. Al Capítol 1 es presenten, de forma breu, alguns antecedents del tema de la tesi i s'introdueixen les notacions i resultats preliminars necessaris pel desenvolupament de la resta dels capítols. Al Capítol 2 es presenta la classe de matrius EP, es demostren algunes propietats i s'estudia l'ordre parcial estrella d'aquesta classe, caracteritzant les matrius EP relacionades mitjançant aquest ordre. El Capítol 3 conté els resultats obtinguts a l'estudiar l'ordre parcial estrella ponderat en el conjunt de matrius EP ponderades. En particular, allà es poden trobar les caracteritzacions per a les matrius $EP_{(M,M)}$ que es relacionen a través de l'ordre parcial estrella ponderat. A més, es presenten dos algoritmes per a calcular la inversa de Moore-Penrose ponderada d'una matriu $EP_{(M,M)}$ i es mostren els resultats obtinguts al implementar-los. Finalment, al Capítol 4, amb la intenció d'estendre el pre-ordre de Drazin al conjunt de matrius rectangulars, es defineixen tres nous pre-ordres en aquest conjunt. Es caracteritzen les matrius que estan relacionades mitjançant aquests pre-ordres i, en particular, les matrius adjacents. També s'estudia la classe de les matrius que tenen projectors de Drazin ponderats iguals i es relacionen amb els pre-ordres definits. La tesi finalitza amb un annexe on s'indiquen les conclusions finals i les línies futures d'investigació. Els resultats obtinguts en aquesta memòria es poden trobar en [31, 32, 33].

Summary

Matrix Analysis and its applications are an important area of Applied Mathematics and are the basis of many industrial applications and for engineering in general. This work can be classified as being part of Matrix Analysis. Some partial orders and pre-orders defined in terms of generalized inverses on different sets of complex matrices are studied.

In the first part of this thesis the star partial order on the class of EP matrices is studied. In literature, several properties and characterizations for this kind of matrices can be found as, for example, in [53] H. Y. Tian and Wang have collected thirty five characterizations for EP matrices. Several of them are used in this manuscript in order to obtain new characterizations.

In [45] J. K. Merikoski and X. Liu, based on a study accomplished by R. E. Hartwig and G. P. H. Styan [30], analyzed and characterized the star partial order on the set of normal matrices. In this work some results obtained by Merikoski and Liu are extended to the class of EP matrices. Successors and predecessors of an EP matrix are characterized, and necessary and sufficient conditions are established for they to belong to the same class. New demonstrations of some known results using the canonical form of the EP matrices [53] are presented. In this way a result (Theorem 2.3.5) which

provides decompositions for two EP matrices comparable by the star partial order, is obtained and proved. This is a particular case of a factorization given by J. Groß in [24], for matrices of index less than or equal to 1 related by the group partial order, since group and star orders coincide on the class of EP matrices. In that work, the proof was made using the singular value decomposition.

N. Castro-González, J. Vélez-Cerrada, D. S. Djordjević, J. J. Koliha, and Y. Wei [13, 14, 15, 16, 21] are some authors who studied spectral projectors, denoted by A^{π}, corresponding to the eigenvalue zero of a matrix A. For a fixed matrix A, they characterized all matrices for which their spectral projectors coincides with A^{π}. In this work, we restrict our attention to the class of EP matrices and spectral projectors corresponding to the eigenvalue zero are characterized. Furthermore, the projectors mentioned above are linked to star and group partial orders.

The Moore-Penrose inverse appears when the approximate (in norm 2) least-squares solution of an inconsistent system of linear equations is found. When norms induced by Hermitian and positive definite matrices are employed, it is necessary to use the weighted Moore-Penrose inverse. This inverse has been studied by several authors such as Y. Wei, G. Wang, S. Qiao, H. Wu [55, 57], among others. In many real situations, the problem to solve is modeled by matrices having a particular structure as, for example, they are symmetric, Hermitian, normal, EP, tridiagonal, etc. In this document, the class of $EP_{(M,N)}$ matrices is considered, that is, EP matrices weighted with respect to two Hermitian and positive definite matrices M and N, and in that set the weighted star partial order with respect to M and N is defined. First, the square matrices that belong to this class are studied and analyzed and then for the case $M = N$ details are provided characterizing predecessors and successors of an $EP_{(M,M)}$ matrix (Theorems 3.2.3 and 3.2.4, respectively). In [44], N. Matzakos and D. Pappas presented two factorizations for the Moore-Penrose inverse of a singular EP matrix and from them they implemented two algorithms to calculate it. Extending these results for weighted EP matrices, two algorithms are designed to calculate the weighted Moore-Penrose inverse of a $EP_{(M,M)}$ matrix.

The results found on spectral projectors corresponding to the eigenvalue zero in the set of EP matrices are extended to the set of $EP_{(M,M)}$ matrices. Also, it is shown that the $EP_{(M,M)}$ class is closed under these projectors (Theorem 3.4.1).

The Drazin inverse is another generalized inverse considered in this memory. It has been used in the literature to define the Drazin pre-order on the set of square complex matrices. In [48], authors defined this pre-order, studied some properties and obtained characterizations of them. As mentioned before, this pre-order is defined in the set of square complex matrices because the Drazin inverse only exists for this kind of matrices, and therefore they can not be extended directly to rectangular matrices. With the purpose to achieve such an extension, a nonzero weight matrix W is considered to transform a rectangular matrix A into two square matrices, AW and WA. Then, three new pre-orders (Definition 4.2.1) on the set of rectangular complex matrices are defined, $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$, and $\preceq^{d,W}$. In this definition the weight W and the Drazin pre-order between certain square matrices are used. Matrices related by these pre-orders are characterized, finding in each case a representation for them (Theorems 4.2.1, 4.2.2, and 4.2.3).

For a given matrix A and a weight W, [16] N. Castro-González and J. Vélez-Cerrada considered the concept of idempotent W-support $A^{\sigma,W} = A(WA)^D = (AW)^D A$. They characterized all matrices B for which the projector $B^{\sigma,W}W$ coincides with $A^{\sigma,W}W$, where A and W are fixed. They did the same for the projectors $WA^{\sigma,W}$ and $WB^{\sigma,W}$ and then as a corollary, they were able to characterize all rectangular matrices whose W-support idempotent coincides with that of a given matrix. By using the same nomenclature, in the present work an analysis is performed (Theorem 4.2.4) showing under what conditions (involving the $\preceq^{d,W,r}$), the projectors $A^{\sigma,W}W$ and $B^{\sigma,W}W$ coincide. Analogously, conditions are given for $WA^{\sigma,W}$ be equal to $WB^{\sigma,W}$.

The above results motivate us to define, study and characterize a new class of matrices, the class of all matrices A whose weighted Drazin projectors $A^{\sigma,W}W$ and $WA^{\sigma,W}$ coincide. An analysis of matrices that are related through each one of the pre-orders $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$, and $\preceq^{d,W}$ is performed.

This manuscript is organized into four chapters. In Chapter 1, background on the subject of the thesis, notation and the preliminary results necessary for the development of the forthcoming chapters are briefly presented. In Chapter 2, the class of EP matrices is introduced, some properties are demonstrated and the star partial order is studied in that class, characterizing the EP matrices related by this order. Chapter 3 contains the results obtained in the study of the weighted star partial order on the set of weighted EP matrices. In particular, it contains characterizations of $EP_{(M,M)}$ matrices that are related through the weighted star partial order. In addition, two algorithms are presented to calculate the weighted Moore-Penrose inverse of an $EP_{(M,M)}$ matrix and the results obtained to implement them are shown. Finally, in Chapter 4, in order to extend the Drazin pre-order to the set of rectangular matrices, three new pre-orders on this set are defined. Matrices that are related by these pre-orders and, in particular, adjacent matrices are characterized. It is also studied the class of matrices with equal weighted Drazin projectors and they are related to the new pre-order. The thesis concludes with an annex where the final conclusions and future lines of investigation are shown. The new results provided in this manuscript can be found in [31, 32, 33].

Dedicado a los dos hombres más importantes de mi vida:

Ricky, mi gran amor y compañero desde hace años.

Ángel, mi papá y ángel de la guarda.

Agradecimientos

En primer lugar quiero agradecer a mis directores de tesis, Néstor y Marina, por la confianza depositada en mí. Gracias por sus valiosos aportes matemáticos, su paciencia y su tolerancia, por guiarme en todo momento dándome ánimo para continuar frente a las dificultades. Sin su ayuda este trabajo no hubiera sido posible.

Gracias a mi familia por su apoyo, especialmente a mi hermana que siempre me escucha y aconseja en todas las decisiones a tomar. Gracias "manita".

No puede faltar el agradecimiento a mis amigos, aquellos que siempre estuvieron presentes de una u otra manera. Gracias por las charlas amenas y por las discusiones también.

Por último, el pilar fundamental de mi vida, mi esposo. Agradezco su paciencia constante, sus palabras de aliento, su tiempo y su comprensión. Gracias por creer en mí y motivarme en los momentos difíciles.

Araceli E. Hernández

Índice general

Capítulo 1

Preliminares

1.1 Introducción

Esta memoria se encuadra en el Análisis Matricial. Se investigan algunos órdenes parciales y pre-órdenes, definidos a partir de inversas generalizadas, sobre diferentes conjuntos de matrices complejas.

En particular, se profundiza el estudio del orden parcial estrella en el conjunto de matrices EP y luego se extienden estos resultados a la clase de matrices EP ponderadas relacionadas mediante el orden parcial estrella ponderado. Se definen e investigan tres nuevos pre-órdenes que generalizan el pre-orden de Drazin, definido en el conjunto de matrices cuadradas, a matrices complejas rectangulares. En cada caso, se caracterizan los predecesores y sucesores de una matriz dada y se demuestran propiedades que son válidas para los órdenes y pre-órdenes estudiados, ya sea en general o en algún conjunto particular de matrices.

La investigación y el desarrollo del Análisis Matricial incluyen estudios tanto teóricos como prácticos, con aplicación a diferentes disciplinas. El tema de las matrices inversas generalizadas se ha desarrollado muy rápido durante los últimos años, tanto en sus aspectos teóricos como así también en sus aplicaciones. Entre estas últimas, cabe mencionar métodos de optimización utilizando mínimos cuadrados, ecuaciones diferenciales, ecuaciones en diferencias, cadenas de Markov, etc. [6, 10, 12, 46, 51, 54]. Para algunas otras aplicaciones de inversas generalizadas se pueden consultar los artículos [17, 19, 34, 39, 40, 42].

Se cree que la noción de inversa generalizada de una matriz apareció por primera vez cuando E. H. Moore definió una única inversa, llamada por él *general reciprocal*, para una matriz cualquiera. Aunque su primera publicación fue en 1920 parece ser que los resultados se obtuvieron antes. Varios años más tarde, recién en 1955, R. Penrose publicó otra definición para esta misma inversa generalizada. Esta definición es la que hoy se conoce con el nombre de inversa de Moore-Penrose. En [10] se pueden encontrar detalles más exhaustivos sobre estos hechos históricos.

La importancia que tienen las inversas generalizadas en la resolución de problemas de diferente índole no es algo nuevo. Se puede mencionar, por ejemplo, el rol que juega la inversa de Moore-Penrose para calcular en forma aproximada la solución de sistemas de ecuaciones lineales por el método de mínimos cuadrados, o la utilidad de la $\{1\}$-inversa generalizada que permite encontrar todas las soluciones de un sistema de ecuaciones lineales y una representación de las mismas. También la inversa de grupo se aplica, por ejemplo, para encontrar el estado estacionario en la teoría de cadenas de Markov, así como la inversa de Drazin permite resolver ecuaciones diferenciales matriciales cuyos coeficientes sean matrices no invertibles.

Son varios los autores que han profundizado el estudio sobre inversas generalizadas. Se pueden mencionar algunos textos de referencia general como lo son [10, 12, 51, 55] y varios artículos que investigan el tema de inversas generalizadas tales como [8, 13, 14, 15, 16, 21, 29, 43, 53], entre otros.

En 1986, R. E. Hartwig y K. Spindelböck [29] estudiaron un conjunto particular de matrices, aquellas para las cuales su traspuesta conjugada conmuta con su inversa de Moore-Penrose. Encontraron algunas propiedades que satisfacen estas matrices, dieron una representación para ellas e investigaron su relación con otras clases conocidas como matrices EP, idempotentes, etc. En [14], N. Castro-González, J. J. Koliha y Y. Wei estudiaron los proyectores espectrales correspondientes al valor propio nulo de una matriz. Estos proyectores se pueden definir usando la inversa de Drazin como $A^\pi = I - AA^D$. Fijada una matriz A, los autores caracterizaron todas las matrices para las cuales su proyector espectral correspondiente al valor propio nulo coincide con A^π. Cuatro años más tarde, en [15], N. Castro-González y J. Vélez-Cerrada trabajaron con los mismos proyectores, pero en este caso caracterizaron las matrices cuadradas B que satisfacen $B^\pi = A^\pi + S$, donde A y S son matrices fijas tales que $I - S^2$ es no singular.

En [53], Y. Tian y H. Wang consideraron la clase de matrices EP (siglas de *Equal Projectors*), formada por todas las matrices complejas cuadradas A cuyos proyectores $AA^\dagger$ y $A^\dagger A$ coinciden, donde $A^\dagger$ es la inversa de Moore-Penrose de A. Los autores reunieron en ese trabajo varias caracterizaciones para estas matrices y demostraron algunas nuevas. Con la idea de extender esta clase de matrices, definieron el concepto de matriz EP ponderada con respecto a dos matrices hermíticas definidas positivas M y N dadas. Caracterizaron este tipo de matrices utilizando en algunos casos la inversa de Moore-Penrose ponderada con respecto a las mismas matrices M y N [10].

En otros trabajos se definen nuevas inversas generalizadas en determinados conjuntos de matrices. Por ejemplo, en [18] R. E. Cline y T. N. Greville extendieron a matrices rectangulares el concepto de inversa de Drazin, definido sólo para matrices cuadradas. En un trabajo actual [43], S. B. Malik y N. Thome introdujeron una nueva inversa generalizada, la inversa DMP. Esta inversa se definió a partir de las inversas de Moore-Penrose y de Drazin y extiende la noción de inversa core, introducida por O. M. Baksalary y G. Trenkler en [8] para matrices de índice a lo sumo 1, a matrices de índice arbitrario.

Muchos resultados sobre inversas generalizadas han sido obtenidos en el campo del análisis matricial y, en particular, algunos de ellos han sido aplicados al estudio de los órdenes parciales. En la literatura se han definido e investigado varias relaciones de orden parcial o pre-orden a partir de inversas generalizadas. Por ejemplo, un orden muy conocido y estudiado es el orden parcial *estrella* que se puede definir usando la inversa de Moore-Penrose. En 1978 M. P. Drazin fue quien introdujo este concepto en [22] y probó que es un orden parcial. Sin embargo, varios años antes M. Hestenes ya había estudiado algunas propiedades de las matrices que satisfacen las igualdades que definen el orden estrella, $AA^\dagger = BA^\dagger$ y $A^\dagger A = A^\dagger B$, pero él llamaba a la matriz A *una sección de la matriz* B cuando se cumplía esta relación [48]. Dos años más tarde, en 1980, R. E. Hartwig [26] introduce el orden parcial *menos* que permite analizar la propiedad conocida como de *substractivity rank*, donde el rango de la diferencia de dos matrices es la diferencia de los rangos de cada una de ellas. En 1987, S.K. Mitra [47] definió el orden *grupo* sobre el conjunto de matrices de índice a lo sumo 1, a partir de la inversa que le otorga su nombre. El *pre-orden de Drazin* se obtuvo al intentar utilizar la misma idea con la inversa de Drazin [48].

En [1, 3, 4, 7, 8, 9, 11, 20, 21, 23, 24, 25, 38, 41, 45, 48, 50], entre otros, se pueden encontrar resultados y caracterizaciones sobre los órdenes parciales mencionados y otros conocidos.

En [1] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary y X. Liu trabajaron con algunos órdenes parciales sobre matrices complejas, entre ellos el orden estrella, y estudiaron algunas relaciones con sus potencias. En particular demostraron que si A es una matriz EP y B es un sucesor de A bajo el orden parcial estrella entonces B^2 es un sucesor de A^2 bajo el mismo orden. En [7] los autores demostraron que si A es una matriz EP menor o igual que B bajo el orden estrella, entonces A y B conmutan.

J. K. Baksalary y J. Hauke, en [4], definieron el orden parcial *singular value*, denotado por $\leq^{\sigma}$, en el conjunto de matrices complejas rectangulares. Dadas dos matrices A y B, se dice que $A \leq^{\sigma} B$ si A es menor o igual menos que B y el espectro de A está contenido en el espectro de B. Un año más tarde, usando esta relación y otras propiedades, J. Groß definió en [23] un nuevo orden parcial denotado con $\leq^{\sigma_1}$. Probó que esta relación, definida como $A \leq^{\sigma_1} B$ si y sólo si A es menor o igual menos que B y el valor singular maximal de A es menor o igual que el valor singular maximal de B, es un orden parcial y lo relacionó con otros órdenes conocidos, entre ellos, el orden parcial estrella. En el mismo trabajo demostró algunas propiedades que verifica el nuevo orden y dio contraejemplos de propiedades que son válidas para órdenes parciales conocidos, como el orden estrella, pero que no se verifican para el nuevo. El mismo autor, en 2006 [24], demostró una factorización para matrices de índice menor o igual que 1 relacionadas con el orden parcial grupo, utilizando la descomposición en valores singulares de esas matrices. En ese mismo año, J. K. Merikoski y X. Liu [45] publicaron un trabajo en el que estudiaron y caracterizaron, entre otras cosas, el orden parcial estrella en el conjunto de matrices normales.

Como se puede apreciar, en las últimas décadas se ha incrementado exponencialmente el estudio de órdenes parciales sobre matrices. Aún en la actualidad se sigue profundizando el estudio de determinados órdenes parciales conocidos sobre diferentes conjuntos de matrices, así como encontrando e investigando nuevos órdenes parciales definidos a partir de inversas generalizadas o a partir de órdenes ya conocidos. Por ejemplo, en el año 2014, S. Malik, L. Rueda y N. Thome [41] analizaron en profundidad el orden parcial core, introducido por O.M. Baksalary y G. Trenkler en [8], y encontraron nuevas caracterizaciones. Además, usando descomposiciones del tipo de Hartwig-Spindelböck para matrices cuadradas obtuvieron nuevas expresiones que caracterizan los órdenes parciales clásicos. En el mismo año, L. Lebtahi, P. Patrício y N. Thome [38] introdujeron un nuevo orden parcial sobre anillos, el orden parcial *diamond*. Éste extiende un orden parcial definido por J. K. Baksalary y J. Hauke en [2].

Todo lo expuesto justifica el interés por investigar el comportamiento de los órdenes parciales estrella y estrella ponderado, en algunos conjuntos particulares de matrices, así como también intentar extender el pre-orden de Drazin a matrices rectangulares.

R. E. Hartwig y G. P. H. Styan, en [30], caracterizaron el orden parcial estrella en el conjunto de matrices complejas. Basándose en ese trabajo, J. K. Merikoski y X. Liu caracterizaron en [45] el mismo orden parcial en el conjunto de matrices normales. Motivada por este último estudio y considerando que las matrices EP generalizan, entre otras, a las matrices normales, en esta memoria se extienden algunos de los resultados de J.

K. Merikosky y X. Liu a la clase de matrices EP. En este nuevo dominio considerado se caracterizan los predecesores y sucesores de una matriz EP dada. Pero estas matrices no necesariamente pertenecen a la misma clase, por lo tanto se demuestra bajo qué condiciones los sucesores y predecesores de una matriz EP dada también son EP. Realizando demostraciones más sencillas se obtienen algunos resultados conocidos pero ahora se prueban usando descomposiciones de las matrices EP.

En la misma clase se trabaja con el concepto de proyector espectral correspondiente al valor propio nulo de una matriz, considerado por N. Castro-González, J. Vélez-Cerrada, J. J. Koliha, Y. Wei y D. S. Djordjević [13, 14, 15, 16, 21], entre otros. Se sabe que para toda matriz cuadrada A de índice k el proyector espectral correspondiente al valor propio nulo, A^π, es la única matriz idempotente cuyos subespacios imagen y núcleo coinciden con los subespacios núcleo e imagen de A^k, respectivamente. En este trabajo se caracterizan los proyectores espectrales correspondientes al valor propio nulo de matrices EP. En general, estos proyectores se pueden calcular usando la inversa de Drazin mediante la expresión $A^\pi = I - AA^D$. Si A es una matriz EP entonces A^π se puede calcular usando la inversa de grupo o la inversa de Moore-Penrose, $A^\pi = I - AA^\# = I - AA^\dagger$. En particular, se demuestra que A^π es EP si y sólo si A es EP y se obtienen condiciones equivalentes para que $(A^\pi)^\pi$ coincida con A. Luego, se relacionan los proyectores mencionados con los órdenes parciales estrella y grupo.

Como ya se especificó, en [53], Y. Tian y H. Wang caracterizaron primero la clase de matrices EP y luego definieron y caracterizaron las matrices $EP_{(M,N)}$, matrices EP ponderadas con respecto a dos matrices hermíticas definidas positivas M y N fijas. Con el objetivo de extender algunos resultados encontrados al investigar el orden parcial estrella en la clase de matrices EP, en esta memoria se considera la clase de matrices $EP_{(M,N)}$ y se define en ese conjunto el orden parcial estrella ponderado con respecto a M y N. Primero se estudian y analizan las matrices cuadradas que pertenecen a esta clase y luego se particulariza al caso en que M coincide con N, caracterizando los predecesores y sucesores de una matriz $EP_{(M,M)}$.

En [44], N. Matzakos y D. Pappas presentaron dos factorizaciones para la inversa de Moore-Penrose de una matriz EP singular y a partir de ellas implementaron dos algoritmos para calcularla. Debido a que la inversa de Moore-Penrose ponderada con respecto a dos matrices hermíticas definidas positivas M y N se suele utilizar para caracterizar a las matrices $EP_{(M,N)}$, en este trabajo se diseñan dos algoritmos para calcular la inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz $EP_{(M,M)}$.

Los resultados encontrados con respecto a proyectores espectrales correspondientes al valor propio nulo de matrices EP también son extendidos al conjunto de matrices $EP_{(M,M)}$ y se demuestra que esta clase es cerrada bajo dichos proyectores.

El pre-orden de Drazin se definió en el conjunto de matrices complejas cuadradas debido a que la inversa de Drazin existe sólo para matrices cuadradas. S. K. Mitra, P. Bhimasankaram y S. B. Malik, en [48], definieron ese pre-orden usando el orden parcial grupo y la parte core que aparece en las descomposiciones core-nilpotente de las matrices, descartando la parte nilpotente. Luego, probaron que esta definición es equivalente a dos igualdades en las que interviene la inversa de Drazin de la matriz antecesor. Demostraron que la relación definida efectivamente es un pre-orden, estudiaron sus propiedades y obtuvieron algunas caracterizaciones del mismo. Ahora bien, este pre-orden no se puede extender directamente a matrices rectangulares ya que la inversa de Drazin sólo existe para matrices cuadradas. Para poder realizar dicha extensión, se considera una matriz no nula W la cual se puede considerar como un peso que permite convertir una matriz compleja rectangular arbitraria A en dos matrices cuadradas AW y WA. Usando esa matriz peso y el pre-orden de Drazin entre matrices cuadradas, en el último capítulo de este trabajo se definen tres nuevas relaciones binarias, $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$, las cuales son pre-órdenes en el conjunto de matrices complejas rectangulares. Se relacionan las matrices mediante cada uno de los pre-órdenes definidos y, en cada caso, se da una caracterización para las mismas. De forma similar se caracterizan también las matrices adyacentes.

N. Castro-González y J. Vélez-Cerrada consideraron, en [16], el concepto de W-soporte idempotente $A^{\sigma,W} = A(WA)^D = (AW)^D A$ para una matriz A arbitraria y un peso W fijo. Se sabe que si A es una matriz de índice k se tiene que AA^D es el proyector sobre $\mathcal{R}(A^k)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^k)$. Entonces, $A^{\sigma,W}W = (AW)^D AW$ es el proyector sobre $\mathcal{R}((AW)^{k_1})$ a lo largo de $\mathcal{N}((AW)^{k_1})$ y $WA^{\sigma,W} = WA(WA)^D$ es el proyector sobre $\mathcal{R}((WA)^{k_2})$ a lo largo de $\mathcal{N}((WA)^{k_2})$, donde k_1 y k_2 son los índices de AW y WA, respectivamente. En [16], para una matriz dada A y un peso fijo W, los autores caracterizaron todas las matrices B para las cuales el proyector $B^{\sigma,W}W$ coincide con $A^{\sigma,W}W$. De forma análoga trabajaron con los proyectores $WA^{\sigma,W}$ y $WB^{\sigma,W}$ y luego, como corolario de lo anterior, pudieron caracterizar las matrices rectangulares B cuyos W-soportes idempotentes coinciden con el de la matriz dada A. En el presente trabajo, usando la misma nomenclatura, se realiza un análisis similar, mostrando bajo qué condiciones, que involucran al pre-orden $\preceq^{d,W,r}$, los proyectores $A^{\sigma,W}W$ y $B^{\sigma,W}W$ coinciden. De igual forma se dan condiciones para que $WA^{\sigma,W}$ sea igual a $WB^{\sigma,W}$.

Ahora, para una matriz A y un peso W, los proyectores $A^{\sigma,W}W$ y $WA^{\sigma,W}$ no siempre coinciden. La primera conclusión que se obtiene es que las matrices deben ser cuadradas, pero esta única condición no es suficiente para que se verifique la igualdad. Esto motivó a definir, estudiar y caracterizar una nueva clase de matrices complejas cuadradas, la clase de todas las matrices A cuyos proyectores $A^{\sigma,W}W$ y $WA^{\sigma,W}$ coinciden. En esta nueva clase se realiza un análisis de las matrices que están relacionadas mediante cada uno de los pre-órdenes $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$.

Más tarde, fijando un peso W se considera el conjunto de todas las matrices rectangulares A tal que el índice de AW es menor o igual que 1. Se restringe el pre-orden $\preceq^{d,W,r}$ al conjunto mencionado y se demuestra bajo qué condiciones esa relación es un orden parcial. Resultados similares se obtienen al considerar el pre-orden $\preceq^{d,W,\ell}$ en el conjunto de todas las matrices A tal que el índice de WA es a lo sumo 1.

Resumiendo, en esta memoria se trabaja con algunos órdenes parciales, encontrando nuevos resultados, extendiendo otros y definiendo nuevas relaciones binarias que extienden un pre-orden conocido.

En el Capítulo 2 se profundiza el estudio del orden parcial estrella en el conjunto de matrices EP, caracterizando los sucesores y predecesores de una matriz dada y relacionando mediante los órdenes parciales estrella y grupo los proyectores espectrales correspondientes al valor propio nulo de matrices EP. Usando descomposiciones de este tipo de matrices se realizan demostraciones más sencillas de algunos resultados conocidos.

En el Capítulo 3 se extienden algunos de estos resultados a la clase de matrices EP ponderadas, relacionando estas últimas con el orden parcial estrella ponderado. Además, se presentan dos algoritmos para el cálculo de la inversa de Moore-Penrose ponderada, matriz necesaria para definir la clase de matrices EP ponderadas.

Finalmente, en el Capítulo 4 se definen nuevos pre-órdenes en el conjunto de matrices complejas rectangulares, usando una matriz peso no nula y la inversa de Drazin. Se relacionan las matrices mediante cada uno de los tres pre-órdenes definidos y, en cada caso, se encuentran caracterizaciones para todas las matrices consideradas; luego se realiza algo similar para matrices adyacentes.

1.2 Notaciones y resultados preliminares

En esta sección se recuerdan de manera breve algunos conceptos y resultados conocidos que serán utilizados en los capítulos siguientes. Se comienza indicando la notación usada en esta memoria.

El espacio de todas las matrices complejas de tamaño $m \times n$ se denota por $\mathbb{C}^{m\times n}$ e I_n indica la matriz identidad de tamaño $n \times n$. Los símbolos A^*, A^{-1}, $\sigma(A)$, $\mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A)$ se usan para denotar la traspuesta conjugada, la inversa (cuando $m = n$), el espectro (cuando $m = n$) y los subespacios imagen y núcleo de una matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, respectivamente. El rango de A se denota por $\mathrm{rg}(A)$ y, a lo largo de todo este trabajo, a y b representan los rangos de las matrices A y B, respectivamente. El índice de una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, denotado por $\mathrm{índ}(A)$, es el menor entero no negativo k tal que $\mathcal{R}(A^k) = \mathcal{R}(A^{k+1})$. Las matrices no singulares tienen índice igual a cero y la matriz nula tiene índice igual a uno. Si k es un entero no negativo, el conjunto de todas las matrices cuadradas $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de índice k se representa con $\mathbb{C}^n_k$.

Dadas dos matrices $A \in \mathbb{C}^{p\times p}$ y $B \in \mathbb{C}^{(n-p)\times(n-p)}$, se denota por $A \oplus B$ a la matriz de tamaño $n \times n$:

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} A & O \\ O & B \end{pmatrix}.$$

Si S es un subespacio vectorial de $\mathbb{C}^n$, entonces $S^\perp$ es el subespacio complementario ortogonal, con lo cual

$$\mathbb{C}^n = S \oplus S^\perp.$$

Así, $P_{S,S^\perp}$ es el proyector ortogonal sobre S a lo largo de $S^\perp$, también denotado por P_S. Una matriz cuadrada P es un proyector si y sólo si es idempotente, es decir, $P^2 = P$; y es un proyector ortogonal si también satisface $P^* = P$. Además, P es un proyector ortogonal si y sólo si existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$A = U(I_a \oplus O)U^*.$$

Es conocida la importancia que tienen las inversas generalizadas en la resolución de problemas de diferente índole. En este trabajo se estudian algunos conceptos que se definen en función de ciertas inversas generalizadas, por ejemplo, la inversa de Moore-Penrose, la inversa de Drazin o la inversa de grupo. En lo que sigue se dan definiciones de estas inversas y de algunos conceptos relacionados a las mismas.

Definición 1.2.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La inversa de Moore-Penrose de A, denotada por $A^\dagger$, es la única matriz en $\mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface las siguientes cuatro condiciones:*

(M-P1) $AA^\dagger A = A$.

(M-P2) $A^\dagger A A^\dagger = A^\dagger$.

(M-P3) $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$.

(M-P4) $(A^\dagger A)^* = A^\dagger A$.

La inversa de Moore-Penrose existe para toda matriz y además es única. A continuación se dan algunas propiedades de esta inversa que se usarán con frecuencia en las demostraciones.

Proposición 1.2.1 [12] *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $V \in \mathbb{C}^{s\times s}$ y $U, T \in \mathbb{C}^{(n+s)\times(n+s)}$, con U y T matrices unitarias, entonces*

$$(U(W \oplus V)T)^\dagger = T^*(W^\dagger \oplus V^\dagger)U^*. \tag{1.1}$$

(b) *Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ entonces:*

(I) $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*)$.

(II) $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A^\dagger)$.

(III) $A^\dagger A$ *es un proyector sobre* $\mathcal{R}(A^*)$ *a lo largo de* $\mathcal{N}(A)$.

(IV) $AA^\dagger$ *es un proyector sobre* $\mathcal{R}(A)$ *a lo largo de* $\mathcal{N}(A^*)$.

Teniendo en cuenta el apartado (b) de la última proposición se tiene que si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ entonces:

$$\mathbb{C}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*) = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^\dagger)$$

y

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(A^\dagger) \oplus \mathcal{N}(A).$$

Cuando los proyectores $A^\dagger A$ y $AA^\dagger$ coinciden se dice que la matriz A es EP, siglas de *Equal Projectors*. Este tipo de matrices satisface que $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$ y es por ello que algunos autores también las llaman RPN, *Range Perpendicular to Nullspace* [46].

Definición 1.2.2 *Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es EP (en inglés, range-Hermitian) si se satisface alguna de las siguientes condiciones:*

(EP1) $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$.

(EP2) $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.

(EP3) $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.

(EP4) $A = O$ *o existe una matriz unitaria* $U_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *y una matriz no singular* $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$ *tales que*

$$A = U_A(C_A \oplus O)U_A^*.$$

(EP5) $AA^\dagger = A^\dagger A$.

Con $\mathcal{EP}$ se denota el conjunto de todas las matrices cuadradas complejas EP de tamaño $n \times n$. Este conjunto extiende al conjunto de matrices normales (por lo tanto al de hermíticas también) y al conjunto de las matrices no singulares.

Cabe aclarar que en (EP4) los bloques nulos que aparecen pueden estar ausentes y ese caso particular no se considera en algunas demostraciones.

Notar también que una matriz no nula $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es EP si y sólo si existe una matriz unitaria $V_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz no singular $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$ tales que $A = V_A(O \oplus C_A)V_A^*$.

Otra inversa generalizada utilizada en este trabajo es la inversa de Drazin que existe para toda matriz cuadrada [12].

Definición 1.2.3 *Sea $A \in \mathbb{C}_k^n$, con k un entero no negativo. La única matriz $A^D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface las condiciones*

(a) $A^D A A^D = A^D$,

(b) $AA^D = A^D A$ *y*

(c) $A^{k+1}A^D = A^k$

se llama inversa de Drazin de A.

Es fácil de comprobar que se satisface $A^{r+1}A^D = A^r$ para todo entero $r \geq$ índ(A) y $A^{r+1}A^D = A^D A^{r+1}$ para todo entero $r \geq 0$. Las matrices AA^D y $A^D A$ coinciden siempre y además son proyectores sobre $\mathcal{R}(A^k)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^k)$.

Si la matriz A tiene índice a lo sumo 1, la inversa de Drazin de A es llamada la inversa de grupo de A y se denota por $A^\#$. Notar que en este caso, el apartado (c) de la definición anterior puede escribirse como $AA^D A = A$ [12].

Definición 1.2.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz de índice a lo sumo 1. La inversa de grupo de A, denotada por $A^\#$, es la única matriz que satisface $AA^\# A = A$, $A^\# AA^\# = A^\#$ y $AA^\# = A^\# A$.*

Una propiedad similar a (1.1) también se cumple para la inversa de grupo tomando $U = P$ y $T = P^{-1}$, donde $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz no singular.

Se sabe que para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ de índice k, los subespacios $\mathcal{R}(A^k)$ y $\mathcal{N}(A^k)$ son complementarios. El proyector espectral correspondiente al valor propio nulo, A^π, es la única matriz idempotente que verifica

$$\mathcal{R}(A^\pi) = N(A^k) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(A^\pi) = R(A^k).$$

Como AA^D es un proyector tal que $\mathcal{R}(AA^D) = \mathcal{R}(A^k)$ y $\mathcal{N}(AA^D) = \mathcal{N}(A^k)$ entonces se tiene que $I - AA^D = A^\pi$. En particular, si la matriz A es EP entonces A^π se puede calcular reemplazando la inversa de Drazin por la inversa de grupo o la inversa de Moore-Penrose: $A^\pi = I - AA^\# = I - AA^\dagger$.

En [12], S. Campbell y C. Meyer demostraron que para toda matriz cuadrada $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ singular no nula de índice k existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que

$$A = P(C \oplus N)P^{-1},$$

donde C es no singular y N es una matriz nilpotente de índice k. En este caso, la inversa de Drazin de A es

$$A^D = P(C^{-1} \oplus O)P^{-1}.$$

La descomposición core-nilpotente de A es

$$A = A_1 + A_2,$$

donde $A_1 = P(C \oplus O)P^{-1}$ y $A_2 = P(O \oplus N)P^{-1}$ son las únicas matrices que satisfacen $\text{índ}(A_1) \leq 1$, A_2 es nilpotente de índice k y $A_1A_2 = A_2A_1 = O$.

Todas las inversas generalizadas mencionadas se han utilizado para definir algunos órdenes y pre-órdenes sobre conjuntos (no vacíos) de matrices. Una relación binaria es un pre-orden si es reflexiva y transitiva; si además es antisimétrica entonces se dice que es un orden parcial. A continuación se dan algunas de estas relaciones con las que se trabajará en los capítulos siguientes.

Definición 1.2.5 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que A es menor o igual que B bajo el orden parcial estrella, y se denota por $A \leq^* B$, si se satisface alguna de las siguientes afirmaciones equivalentes:*

(OE1) $A^*A = A^*B$ *y* $AA^* = BA^*$.

(OE2) $A^\dagger A = A^\dagger B$ *y* $AA^\dagger = BA^\dagger$.

(OE3) $A^\dagger A = B^\dagger A$ *y* $AA^\dagger = AB^\dagger$.

En este caso también se dice que A es un predecesor de B o que B es un sucesor de A bajo el orden parcial estrella.

Definición 1.2.6 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que A es menor o igual que B bajo el orden parcial grupo, y se denota por $A \leq^\# B$, si se satisfacen*

$$A^\# A = A^\# B \quad \text{y} \quad AA^\# = BA^\#.$$

Si A es una matriz EP entonces satisface $A^\dagger = A^\#$, por lo tanto, en la clase de las matrices EP el orden parcial estrella coincide con el orden parcial grupo.

Definición 1.2.7 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que A está relacionada con B mediante el pre-orden de Drazin, y se denota $A \preceq^d B$, si se satisfacen*

$$A^D A = A^D B \quad y \quad AA^D = BA^D.$$

Si se consideran $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ expresadas en sus respectivas descomposiciones core-nilpotente como $A = A_1 + A_2$ y $B = B_1 + B_2$, entonces $A \preceq^d B$ si $A_1 \leq^{\#} B_1$.

Se consideran ahora dos matrices $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermíticas definidas positivas. El producto interno con peso M en $\mathbb{C}^m$ se define como

$$\langle x, y\rangle_M = y^* M x,$$

para todos $x, y \in \mathbb{C}^m$. Si S es un subespacio de $\mathbb{C}^m$, entonces $S^{\perp_M}$ denota el subespacio complementario ortogonal con respecto al producto interno con peso M. Cuando $M = I_m$, simplemente se escribe $\perp$ en lugar de $\perp_{I_m}$. Una matriz $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ se llama proyector M-ortogonal si $P^2 = P$ y $(MP)^* = MP$. Análogamente, se pueden considerar definiciones similares para la matriz N.

Definición 1.2.8 *Sean $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices hermíticas definidas positivas y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La inversa de Moore-Penrose de A, ponderada por las matrices M y N, es la única matriz $A^{\dagger_{(M,N)}} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ que satisface las siguientes afirmaciones:*

(a) $AA^{\dagger_{(M,N)}}A = A$.

(b) $A^{\dagger_{(M,N)}}AA^{\dagger_{(M,N)}} = A^{\dagger_{(M,N)}}$.

(c) $(MAA^{\dagger_{(M,N)}})^* = MAA^{\dagger_{(M,N)}}$.

(d) $(NA^{\dagger(M,N)}A)^* = NA^{\dagger(M,N)}A$.

La inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz A con respecto a las matrices $M = I_m$ y $N = I_n$ es la inversa de Moore-Penrose de A dada en la Definición 1.2.1.

Teniendo en cuenta la Definición 1.2.8 se extiende la idea de matriz EP.

Definición 1.2.9 [53] *Sean $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices hermíticas definidas positivas y $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Se dice que A es EP ponderada con respecto a las matrices M y N si*

$$AA^{\dagger(M,N)} = A^{\dagger(M,N)}A$$

y en este caso se dice que A es $EP_{(M,N)}$.

Con $\mathcal{EP}_{(M,N)}$ se denota el conjunto de todas las matrices cuadradas complejas $EP_{(M,N)}$ de tamaño $n \times n$.

También se define la traspuesta conjugada ponderada de una matriz como sigue.

Definición 1.2.10 [55, 57] *Sean $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices hermíticas definidas positivas y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$. La matriz traspuesta conjugada ponderada de A se define como*

$$A^{\circledast(M,N)} = N^{-1}A^*M.$$

Además, cuando $m = n$ se dice que A es (M,N)-hermítica si $A^{\circledast(M,N)} = A$.

Capítulo 2

Orden parcial estrella y matrices EP

2.1 Introducción

Uno de los resultados fundamentales del Álgebra Lineal es el Teorema de Descomposición Ortogonal, el cual asegura que toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ proporciona una descomposición para cada uno de los espacios $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$ como suma directa de subespacios complementarios y ortogonales:

$$\mathbb{C}^m = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^*) \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^*) \oplus \mathcal{N}(A).$$

De aquí puede verse que dada una matriz A existe un único proyector $P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A^*)} \in \mathbb{C}^{m\times m}$ que proyecta sobre $\mathcal{R}(A)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^*)$, así como también existe un único proyector $Q_{\mathcal{R}(A^*),\mathcal{N}(A)} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que proyecta sobre $\mathcal{R}(A^*)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A)$. Las matrices cuadradas $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ cuyos proyectores $P_{\mathcal{R}(A),\mathcal{N}(A^*)}$ y $Q_{\mathcal{R}(A^*),\mathcal{N}(A)}$ coinciden se denominan matrices

EP, abreviación de *Equal Projectors*. En [46], a estas matrices se las denomina RPN, que significa *Range Perpendicular to Nullspace* pues satisfacen que $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$. En ese mismo libro Meyer demuestra la equivalencia entre las siguientes cuatro condiciones, considerando $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$:

- $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$.
- $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$.
- $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$.
- $A = U(C \oplus O)U^*$, donde $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz unitaria y $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ es una matriz no singular.

Estas son algunas condiciones equivalentes que permiten caracterizar las matrices EP y pueden encontrarse en la literatura. Por ejemplo, en [53] Y. Tian y H. Wang muestran más de treinta caracterizaciones para ellas, algunas de las cuales se utilizan a lo largo de este capítulo. Las matrices EP extienden la clase de las matrices no singulares y también la clase de las matrices normales, es decir, de las matrices que conmutan con su traspuesta conjugada.

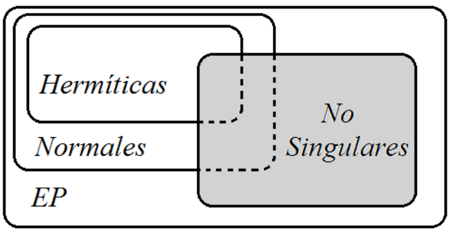

Figura 2.1

En la Figura 2.1 se puede ver que toda matriz normal es EP pero la afirmación recíproca no es verdadera. Por ejemplo, la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

es una matriz EP, pero no es normal ya que

$$A^*A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad AA^* = \begin{pmatrix} 2 & -i \\ i & 1 \end{pmatrix}.$$

En la sección que sigue se presentan algunas propiedades y descomposiciones de matrices EP que serán utilizadas más adelante. En esta clase de matrices se profundiza el estudio de algunos órdenes parciales.

El orden parcial estrella fue introducido en 1978 por M. P. Drazin en [22] para matrices complejas rectangulares y fue objeto de estudio de diversos autores. En [1], J. K. Baksalary, O. M. Baksalary y X. Liu demostraron, entre otras cosas, que si A es una matriz EP y B es un sucesor de A bajo el orden parcial estrella entonces B^2 es un sucesor de A^2 bajo el mismo orden. En [7] los autores demostraron que si A es una matriz EP menor o igual que B bajo el orden estrella, entonces A y B conmutan. Por otro lado, J. K. Merikoski y X. Liu en [45], caracterizaron el orden parcial mencionado en el conjunto de matrices normales. Con la intención de extender algunos resultados conocidos, en la sección 2.3 se estudia el orden parcial estrella en la clase de las matrices EP y se obtienen algunas caracterizaciones para los predecesores y los sucesores de una matriz EP dada.

Otro relación con la que se trabaja en este capítulo es el orden parcial grupo que fue introducido por S. K. Mitra en [47] para la clase de matrices de índice menor o igual que 1. Utilizando la descomposición en valores singulares, en [24] J. Groß caracterizó las matrices de índice a lo sumo 1 que están relacionadas con el orden parcial grupo. Partiendo de esta idea general, en el Teorema 2.3.5 se demuestra una descomposición para matrices EP relacionadas con el orden parcial estrella. En este caso, la prueba se realiza utilizando una factorización de matrices EP.

En la última sección se relaciona el proyector espectral correspondiente al valor propio nulo de una matriz con los órdenes estrella y grupo en la clase de las matrices EP.

A lo largo de todo el capítulo, se dan algunos resultados cuyas demostraciones son triviales o vacuas para una matriz no singular, por lo tanto se considera directamente el caso en que la matriz es singular.

2.2 Propiedades de las matrices EP

Se recuerda que para $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$, la matriz $AA^\dagger$ es un proyector ortogonal sobre $\mathcal{R}(A)$ a lo largo de $\mathcal{N}(A^*)$, y $A^\dagger A$ proyecta sobre $\mathcal{R}(A^*)$ paralelamente a $\mathcal{N}(A)$. Se dice que A es EP si $AA^\dagger = A^\dagger A$, o equivalentemente, si se satisface alguna de las siguientes condiciones: $\mathcal{R}(A) \perp \mathcal{N}(A)$, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$ o $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(A^*)$. Además, si $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices EP no nulas se puede asumir que ellas están dadas como

$$A = U_A(C_A \oplus O)U_A^* \tag{2.1}$$

y

$$B = U_B(C_B \oplus O)U_B^* \tag{2.2}$$

donde $U_A, U_B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son matrices unitarias y $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$, $C_B \in \mathbb{C}^{b\times b}$ son no singulares. Cabe aclarar que si las matrices A o B son no singulares, esto es, $a = n$ o $b = n$, entonces el bloque nulo está ausente. Generalmente estos casos no se consideran en las demostraciones de este capítulo.

Los primeros resultados de esta sección muestran algunas propiedades que satisfacen las matrices EP. En particular, el primer teorema caracteriza a las matrices que conmutan con una matriz EP dada.

Teorema 2.2.1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es una matriz EP no nula representada como en* (2.1)*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $AB = BA$.

(b) *Existen matrices $X \in \mathbb{C}^{a\times a}$ y $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ tales que $B = U_A(X \oplus T)U_A^*$, con $C_A X = X C_A$.*

Demostración. Se considera la siguiente descomposición de B:

$$B = U_A \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*$$

donde la partición ha sido realizada de acuerdo al tamaño de los bloques de A. La igualdad $AB = BA$ es equivalente a

$$\begin{pmatrix} C_A X & C_A Y \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X C_A & O \\ Z C_A & O \end{pmatrix},$$

que a su vez equivale a $C_A X = X C_A$, $Y = O$ y $Z = O$. ■

Cuando ambas matrices A y B son EP se obtiene el siguiente resultado sobre su conmutatividad.

Teorema 2.2.2 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices EP no nulas expresadas como en (2.1) y (2.2), respectivamente. Si $U_A^* U_B = \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$, con $X \in \mathbb{C}^{a\times b}$, $Y \in \mathbb{C}^{a\times(n-b)}$, $Z \in \mathbb{C}^{(n-a)\times b}$ y $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-b)}$, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $AB = BA$.

(b) $(X^* C_A X)\, C_B = C_B\, (X^* C_A X)$, $X^* C_A Y = O$, $Y^* C_A X = O$.

(c) $C_A(X C_B X^*) = (X C_B X^*) C_A$, $Z C_B X^* = O$, $X C_B Z^* = O$.

Demostración. (a) $\Leftrightarrow$ (b) Sustituyendo las respectivas descomposiciones de A y B en (a) y reemplazando $U_A^* U_B$ por

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$$

se obtiene $U_A(C_A X C_B \oplus O)U_B^* = U_B(C_B X^* C_A \oplus O)U_A^*$. Multiplicando a izquierda por U_B^* y a derecha por U_B ambos miembros de la igualdad y reemplazando nuevamente $U_A^* U_B$ por su descomposición en bloques se tiene

$$\begin{pmatrix} X^* C_A X C_B & O \\ Y^* C_A X C_B & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_B X^* C_A X & C_B X^* C_A Y \\ O & O \end{pmatrix},$$

que es equivalente a

$$X^* C_A X C_B = C_B X^* C_A X,\ X^* C_A Y = O \text{ y } Y^* C_A X = O$$

por ser C_A y C_B matrices no singulares.

(a) $\Leftrightarrow$ (c) Sustituyendo $U_B = U_A \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix}$ en la descomposición de B se obtiene

$$B = U_A \begin{pmatrix} XC_BX^* & XC_BZ^* \\ ZC_BX^* & ZC_BZ^* \end{pmatrix} U_A^*.$$

Reemplazando en $AB = BA$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} C_AXC_BX^* & C_AXC_BZ^* \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XC_BX^*C_A & O \\ ZC_BX^*C_A & O \end{pmatrix}$$

que es claramente equivalente a la condición (c). ■

Teorema 2.2.3 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no nula expresada como en* (2.1)*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es EP.*

(b) *Existen una matriz no singular $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ y una matriz arbitraria $Z \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ tales que $A = A^*Q$, donde*

$$Q = U_A \begin{pmatrix} (C_A^*)^{-1}C_A & O \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*.$$

(c) *Existen una matriz no singular $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ y una matriz arbitraria $Z \in \mathbb{C}^{(n-a)\times a}$ tales que $A = A^\dagger Q$, donde*

$$Q = U_A \begin{pmatrix} C_A^2 & O \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*.$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Como A es una matriz EP, por (EP2) existe una matriz no singular $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = A^*Q$. Se considera la siguiente descomposición de Q:

$$Q = U_A \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*,$$

donde la partición se realiza de acuerdo al tamaño de los bloques de A. Reemplazando en $A = A^*Q$ se obtiene

$$\begin{pmatrix} C_A^*X & C_A^*Y \\ O & O \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_A & O \\ O & O \end{pmatrix},$$

es decir, $X = (C_A^*)^{-1}C_A$ e $Y = O$. Luego

$$Q = U_A \begin{pmatrix} (C_A^*)^{-1}C_A & O \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*.$$

La no singularidad de T se deriva de la no singularidad de Q.

(b) $\Rightarrow$ (a) Si existe una matriz no singular Q tal que $A = A^*Q$ entonces A y A^* son equivalentes por columnas, esto es, $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^*)$, por lo tanto A es EP por (EP2).

(a) $\Leftrightarrow$ (c) La demostración es similar a la prueba de la equivalencia anterior teniendo en cuenta que $\mathcal{R}(A^\dagger) = \mathcal{R}(A^*)$. ■

El siguiente resultado es similar al del Teorema 2.2.3 y se puede demostrar en forma análoga al mismo.

Teorema 2.2.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no nula expresada como en* (2.1). *Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es EP.*

(b) *Existen una matriz no singular* $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ *y una matriz arbitraria* $Y \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ *tales que* $A = PA^*$*, donde*

$$P = U_A \begin{pmatrix} C_A(C_A^*)^{-1} & Y \\ O & T \end{pmatrix} U_A^*.$$

(c) *Existen una matriz no singular* $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ *y una matriz arbitraria* $Y \in \mathbb{C}^{a\times(n-a)}$ *tales que* $A = PA^\dagger$*, donde*

$$P = U_A \begin{pmatrix} C_A^2 & Y \\ O & T \end{pmatrix} U_A^*$$

Demostración. La demostración es similar a la del Teorema 2.2.3 considerando que A y B son equivalentes por filas si y sólo si $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(B)$ y usando la propiedad $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(A^\dagger)$. ■

2.3 Orden parcial estrella en el conjunto de matrices EP

En la primera parte de esta sección se muestran algunas caracterizaciones del orden parcial estrella sobre el conjunto de matrices EP. Como se mencionó en el primer capítulo, dadas dos matrices $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se tiene que $A \leq^* B$ si y sólo si se satisfacen $A^*A = A^*B$ y $AA^* = BA^*$, o equivalentemente alguna de las dos condiciones siguientes: $A^\dagger A = A^\dagger B$ y $AA^\dagger = BA^\dagger$, o bien $A^\dagger A = B^\dagger A$ y $AA^\dagger = AB^\dagger$. En este caso, las matrices A^*B, BA^*, $A^\dagger B$ y $BA^\dagger$ son hermíticas. Además, si $B = O$ entonces $A = O$.

En el resto de esta sección se caracterizan los predecesores y sucesores de una matriz EP dada y se muestran descomposiciones de dichas matrices cuando ambas son EP. Algunos resultados se obtienen de forma directa usando la forma canónica de las matrices EP.

De los Teoremas 2.2.3 y 2.2.4 se deriva la siguiente observación.

Observación 2.3.1 Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es una matriz EP no nula y $A \leq^* B$. Entonces existen matrices no singulares $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que las siguientes afirmaciones son válidas:

(a) $A^*(A^*Q - B) = O$.

(b) $(A^*Q - B)A^* = O$.

(c) $A^*(PA^* - B) = O$.

(d) $A^*(PA^* - B) = O$.

Notar que bajo las mismas hipótesis los apartados (a)-(d) también se satisfacen si se reemplaza $*$ por $\dagger$.

En el siguiente resultado se caracterizan los predecesores de una matriz EP considerando el orden parcial estrella.

Teorema 2.3.1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que B es una matriz EP no nula. Si B se representa como en* (2.2) *entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^* B$.

(b) *Existe $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tal que*

$$A = U_B(X \oplus O)U_B^*, \tag{2.3}$$

con $X \leq^* C_B$.

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Sea $B = U_B(C_B \oplus O)U_B^*$, donde $U_B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es unitaria, $C_B \in \mathbb{C}^{b\times b}$ es no singular y se considera la siguiente descomposición de A:

$$A = U_B \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U_B^*$$

donde la partición se ha realizado conforme al tamaño de los bloques de B. Entonces

$$A^*A = U_B \begin{pmatrix} X^*X + Z^*Z & X^*Y + Z^*T \\ Y^*X + T^*Z & Y^*Y + T^*T \end{pmatrix} U_B^*$$

y

$$A^*B = U_B \begin{pmatrix} X^*C_B & O \\ Y^*C_B & O \end{pmatrix} U_B^*.$$

La igualdad $A^*A = A^*B$ es equivalente a la validez de las siguientes cuatro condiciones $X^*X + Z^*Z = X^*C_B$, $X^*Y + Z^*T = O$, $Y^*X + T^*Z = Y^*C_B$ e $Y^*Y + T^*T = O$. La última igualdad puede expresarse como

$$\begin{pmatrix} Y \\ T \end{pmatrix}^* \begin{pmatrix} Y \\ T \end{pmatrix} = O$$

que es equivalente a $\begin{pmatrix} Y & T \end{pmatrix} = O$, es decir, $Y = O$ y $T = O$. Realizando un cálculo similar, de $AA^* = BA^*$ se obtiene $XX^* = C_BX^*$ y $Z = O$. Por lo tanto, $A = U_B(X \oplus O)U_B^*$ con $X \leq^* C_B$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Se puede demostrar fácilmente realizando los productos correspondientes. ■

En general, si B es una matriz EP y $A \leq^* B$, entonces A no es necesariamente una matriz EP, como se puede verificar al considerar las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Claramente, $A^*A = A^*B$, $AA^* = BA^*$ y B es una matriz EP mientras que A no lo es.

El siguiente resultado caracteriza los predecesores EP de una matriz EP dada.

Teorema 2.3.2 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que B es una matriz EP no nula y $A \leq^* B$. Bajo las descomposiciones de A y B dadas en* (2.3) *y* (2.2)*, respectivamente, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es una matriz EP.*

(b) $XC_B = C_BX$.

(c) $X^\dagger C_B = C_BX^\dagger$.

(d) $X(X^* - C_B) = C_B(X^* - X)$.

(e) $(X^* - C_B)X = (X^* - X)C_B$.

(f) *X es una matriz EP.*

Demostración. Considerando B expresada como en (2.2), por el Teorema 2.3.1, existe $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tal que $A = U_B(X \oplus O)U_B^*$, con $X \leq^* C_B$.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Como $A \leq^* B$, por (OE3) y (EP5) se tiene que A es EP si y sólo si A y $B^\dagger$ conmutan. Así, reemplazando las respectivas descomposiciones de A y B en $AB^\dagger = B^\dagger A$, usando que U_B es unitaria y que $C_B^\dagger = C_B^{-1}$, se obtiene que $XC_B = C_B X$.

De forma similar, las equivalencias (a) $\Leftrightarrow$ (c), (b) $\Leftrightarrow$ (d), (b) $\Leftrightarrow$ (e) y (c) $\Leftrightarrow$ (f) se pueden demostrar usando (OE1) y (OE2). $\blacksquare$

Observación 2.3.2 Si se satisface alguna de las afirmaciones equivalentes (a)-(f) del Teorema 2.3.2, entonces:

$$X = XC_B X^\dagger \quad \text{y} \quad X^* = X^* C_B X^\dagger = C_B^* X X^\dagger = C_B^* X^\dagger C_B = C_B^* C_B X^\dagger.$$

Corolario 2.3.1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que B es una matriz EP y $A \leq^* B$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es una matriz EP.*

(b) *$AB = BA$.*

(c) *$A(A^* - B) = B(A^* - A)$.*

(d) *$(A^* - B)A = (A^* - A)B$.*

El siguiente teorema muestra un resultado similar al del Teorema 2.3.1, pero ahora cuando el predecesor es una matriz EP.

Teorema 2.3.3 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es una matriz EP no nula expresada como en* (2.1)*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *$A \leq^* B$.*

(b) *Existe* $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ *tal que*

$$B = U_A(C_A \oplus T)U_A^*. \tag{2.4}$$

Demostración. (a) $\Rightarrow$ (b) Se considera $A = U_A(C_A \oplus O)U_A^*$ como en (2.1) y la siguiente descomposición de B:

$$B = U_A \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U_A^*$$

donde la partición se realiza de acuerdo al tamaño de los bloques de A. Reemplazando las respectivas descomposiciones de A y B en $AA^* = BA^*$ y $A^*A = A^*B$ se obtiene que $X = C_A$, $Y = O$ y $Z = O$. Es decir, $B = U_A(C_A \oplus T)U_A^*$.

(b) $\Rightarrow$ (a) Utilizando las descomposiciones mencionadas para A y B y realizando los cálculos correspondientes se puede comprobar que $AA^* = BA^*$ y $A^*A = A^*B$. ■

De forma similar a lo expresado anteriormente, si A es una matriz EP y $A \leq^* B$, entonces B no necesariamente es EP, como se puede verificar considerando las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En el siguiente teorema se caracterizan los sucesores EP de una matriz EP dada.

Teorema 2.3.4 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no nulas tales que $A \leq^* B$, A es una matriz EP representada como en* (2.1) *y se considera a B expresada como en* (2.4)*. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *B es una matriz EP.*

(b) *T es una matriz EP.*

(c) $B(A^\dagger - B^\dagger) = (A^\dagger - B^\dagger)B$.

(d) $B^\dagger(A - B) = (A - B)B^\dagger$.

Demostración. Sean $A = U_A(C_A \oplus O)U_A^*$ y $B = U_A(C_A \oplus T)U_A^*$ como en (2.1) y (2.4), respectivamente.

(a) $\Leftrightarrow$ (b) Utilizando la propiedad 1.1 se tiene que $B^\dagger = U_A(C_A^{-1} \oplus T^\dagger)U_A^*$. Por (EP5), B es una matriz EP si y sólo si T también es EP.

(a) $\Rightarrow$ (c) Usando (OE2) y (EP5) se obtiene $B(A^\dagger - B^\dagger) = BA^\dagger - BB^\dagger = A^\dagger B - B^\dagger B = (A^\dagger - B^\dagger)B$.

(c) $\Rightarrow$ (a) Como $A \leq^* B$ y A es una matriz EP, por (OE2) resulta que $A^\dagger$ y B conmutan, entonces de (c) se obtiene $BB^\dagger = B^\dagger B$, esto es, B es una matriz EP.

(a) $\Leftrightarrow$ (d) Como $A \leq^* B$ y A es una matriz EP, por (OE3) resulta que A y $B^\dagger$ conmutan. Luego, usando (EP5) se obtiene que el apartado (d) es equivalente a la condición $BB^\dagger = B^\dagger B$. ■

Observación 2.3.3 Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $AB = BA$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:

(a) $A \leq^* B$.

(b) $A(A^* - B) = B(A^* - A)$ y $(A^* - B)A = (A^* - A)B$.

Observación 2.3.4 Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A \leq^* B$ y A es una matriz EP. Por el Teorema 2.1 de [7] se obtiene que A y B conmutan. De esta manera, se satisfacen las siguientes propiedades:

(a) $A(A^* - B) = B(A^* - A)$.

(b) $(A^* - B)A = (A^* - A)B$.

(c) $BA^\dagger = A^\dagger A$.

(d) $A(A^\dagger - B^\dagger) = (A^\dagger - B^\dagger)A$.

(e) $A^\dagger(A - B) = (A - B)A^\dagger$.

El siguiente resultado generaliza el Teorema 2.1 de Merikoski y Liu dado en [45].

Teorema 2.3.5 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices EP no nulas. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^* B$.

(b) *Existe una matriz unitaria $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = V(C \oplus O \oplus O)V^*, \quad B = V(C \oplus T \oplus O)V^*,$$

donde $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ es no singular y $T \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ es no singular o no está presente.

Demostración. (a)⇒(b) Sea $B = U_B(C_B \oplus O)U_B^*$ como en (2.2). Por el Teorema 2.3.1, existe $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tal que $A = U_B(X \oplus O)U_B^*$ con $X \leq^* C_B$. Como A es no nula es claro que X también lo es. Por el Teorema 2.3.2, X es una matriz EP, entonces se puede considerar $X = U_X(C_X \oplus O)U_X^*$, donde $U_X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ es unitaria y $C_X \in \mathbb{C}^{a\times a}$ es una matriz no singular. Como $X \leq^* C_B$, por el Teorema 2.3.3 existe $T \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ tal que $C_B = U_X(C_X \oplus T)U_X^*$. Por lo tanto, T es una matriz no singular cuando $b > a$. Tomando $C = C_X$, se obtiene $B = V(C \oplus T \oplus O)V^*$, donde $V = U_B(U_X \oplus I)$ es una matriz unitaria. Mediante un cálculo similar se obtiene $A = V(C \oplus O \oplus O)V^*$.

(b) ⇒ (a) Se puede demostrar fácilmente que se satisface (OE2). ■

Observación 2.3.5 Cuando el Teorema 2.3.5 se restringe a matrices normales (respectivamente, hermíticas), los bloques C y T son matrices normales (respectivamente, hermíticas), obteniéndose de esta manera los resultados de Merikoski y Liu de [45].

R. E. Hartwig, I. J. Katz y J. J. Koliha estudiaron cuándo el producto de dos matrices EP es EP [37, 28]. En el siguiente resultado se muestra que si $A \leq^* B$, con A y B matrices EP, entonces AB es un sucesor de A (o equivalentemente un predecesor de B) si y sólo si A es un proyector ortogonal.

Teorema 2.3.6 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices EP tales que $A \leq^* B$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\text{índ}(AB) = \text{índ}(A)$, $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$, *$AB$ es una matriz EP y* $AB = A^2 = BA$.

(b) *AB es un sucesor de A (o equivalentemente un predecesor de B) si y sólo si A es un proyector ortogonal (o equivalentemente $AB = A$).*

Demostración. Si $A = O$ la conclusión es obvia. Se asume que A es no nula. Entonces B también es no nula y ambas pueden descomponerse como en el apartado (b) del Teorema 2.3.5. Así, se puede ver fácilmente que $AB = V(C^2 \oplus O \oplus O)V^*$.

(a) A partir de la expresión de AB se tiene que $\text{índ}(AB) = \text{índ}(A)$ y $\text{rg}(AB) = \text{rg}(A)$. Realizando los productos correspondientes se cumple $AB = A^2 = BA$ y por (EP4) se satisface que AB es EP.

(b) Las afirmaciones: (i) $A \leq^* AB$, (ii) $AB \leq^* B$, (iii) A es un proyector ortogonal y (iv) $A = AB$ son equivalentes. Es fácil de verificar teniendo en cuenta que A es un proyector ortogonal si y sólo si existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A = U(I_a \oplus O)U^*$. ■

Observación 2.3.6 Si $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz EP entonces A^j es también EP, para todo $j \in \mathbb{N}$. Además, $A^k \leq^* A^s$ si y sólo si A^{s-k} es un proyector ortogonal para todo $k, s \in \mathbb{N}$ con $s \geq k$.

2.4 Proyector espectral asociado al valor propio nulo de matrices EP

El propósito de esta sección es estudiar el proyector espectral correspondiente al valor propio nulo de una matriz EP y su relación con los órdenes parciales estrella y grupo. Específicamente se muestra que A es EP si y sólo si A^π es EP y se deriva una caracterización para que $(A^\pi)^\pi = A$. Se obtienen los predecesores y sucesores cuando se consideran los proyectores espectrales asociados al valor propio nulo de dos matrices comparables mediante los órdenes mencionados.

En el siguiente lema se listan algunos resultados conocidos en la literatura necesarios para lo que sigue.

Lema 2.4.1 [12, 14] *Sea $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$. Las siguientes afirmaciones son válidas:*

(a) *A^π es idempotente.*

(b) *$AA^\pi = A^\pi A = A^\# A^\pi = A^\pi A^\# = O$.*

(c) *$A^\pi = O$ si y sólo si A es no singular.*

(d) *Si $A \in \mathbb{C}_1^n$ y $a > 0$ entonces existen matrices no singulares $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ y $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*
$$A = P(C \oplus O)P^{-1}. \tag{2.5}$$
En este caso, $A^\# = P(C^{-1} \oplus O)P^{-1}$ y $A^\pi = P(O \oplus I_{n-a})P^{-1}$.

(e) *Si A^π es no singular entonces $A = O$. Recíprocamente, si $A = O$ entonces $A^\pi = I_n$.*

(f) A^π *tiene índice a lo sumo* 1.

(g) $(A^\pi)^\pi = O$ *si y sólo si* $A = O$.

(h) $\mathrm{rg}(A^\pi) = n - \mathrm{rg}(A)$.

En el siguiente lema se relaciona el proyector espectral correspondiente al valor propio nulo de una matriz con el orden parcial grupo.

Lema 2.4.2 *Sean* $A, B \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$.

(a) *Si* $A \leq^\# B$ *entonces* $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$.

(b) $A \leq^\# A^\pi$ *si y sólo si* $A = O$.

(c) $A^\pi \leq^\# A$ *si y sólo si* A *es no singular.*

(d) *Si* A *es una matriz singular, no nula, entonces* A *y* A^π *son incomparables con respecto al orden grupo.*

(e) *Si* $B^\pi \leq^\# A^\pi$ *entonces* $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$. *Además, en general, esto no implica que* $A \leq^\# B$.

(f) $A \leq^\# A + A^\pi$.

Demostración. (a) Como $\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(AA^\# A) \subseteq \mathcal{R}(AA^\#) = \mathcal{R}(BA^\#) \subseteq \mathcal{R}(B)$, se tiene que $\mathrm{rg}(A) \leq \mathrm{rg}(B)$.

(b) Si $A \leq^\# A^\pi$ entonces $A^\# A = A^\# A^\pi = A^\# - A^\# A A^\# = O$, así $A = AA^\# A = O$. Recíprocamente, si $A = O$ entonces $A \leq^\# A^\pi$.

(c) Por el Lema 2.4.1 (d) es claro que $(A^\pi)^\# = A^\pi$. Si $A^\pi \leq^\# A$ entonces $A^\pi = A^\pi A = O$, por lo tanto A es no singular por el apartado (c) del Lema

2.4.1. Recíprocamente, si A es no singular entonces por el Lema 2.4.1 (c) es $A^\pi = O$, luego $A^\pi \leq^\# A$.

(d) Se deduce usando (b) y (c).

(e) Sigue de (a) y del Lema 2.4.1 (h). Para mostrar que en general $A \not\leq^\# B$ basta con considerar las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = \mathrm{diag}(1, 0, ..., 0)$ y $B = \mathrm{diag}(2, 0, ..., 0)$

(f) Se verifica usando la definición del orden parcial grupo. ■

Se sabe que $\mathcal{EP} \subseteq \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$, donde $\mathcal{EP}$ es el conjunto de todas las matrices cuadradas complejas EP de tamaño $n \times n$; además, si $A \in \mathcal{EP}$ entonces $A^\pi = I - AA^\dagger$.

Lema 2.4.3 *Sea $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$.*

(a) *Si $A \in \mathcal{EP}$ entonces A^π es hermítica.*

(b) *Si $A^\pi \in \mathcal{EP}$ entonces $A \in \mathcal{EP}$.*

Demostración. (a) Sigue directamente de la propiedad $(AA^\dagger)^* = AA^\dagger$.

(b) Por el apartado (c) del Lema 2.4.1, si $A^\pi = O$ entonces A es no singular, por lo tanto, $A \in \mathcal{EP}$. Si A^π es una matriz EP no nula, por (EP4) existe una matriz unitaria $U \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz no singular $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ tales que $A^\pi = U(C \oplus O)U^*$. Como A^π es idempotente, se obtiene $C^2 = C$, esto es $C = I_{n-a}$. De $A^\# A = AA^\# = I_n - A^\pi$ se tiene que $AA^\# = U(O \oplus I_a)U^*$.

Considerando la siguiente descomposición de A:

$$A = U \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} U^*,$$

donde las particiones se han realizado conforme al tamaño de los bloques de A^π, de $A = (AA^\#)A$ se obtiene $X = O$, $Y = O$. De forma similar, de $A = A(A^\# A)$ se obtiene $Z = O$. Por lo tanto $A = U(O \oplus T)U^*$ y así $AA^\# = U(O \oplus TT^\#)U^*$, de donde resulta $TT^\# = I_a$. Luego, T es no singular y A es EP. ■

Notar que si A^π es EP entonces A puede no ser hermítica (es suficiente considerar una matriz A, no singular y no hermítica).

Sea $f : \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n \longrightarrow \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$ la función matricial a valores matriciales definida por $f(A) = A^\pi$ para cada $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$. Por el Lema 2.4.1, f está bien definida y $f(f(O)) = O$. Sin embargo, en general, $f(f(A)) \neq A$. Por ejemplo, si se considera la matriz $A = \mathrm{diag}(2,0)$, entonces $A^\# = \mathrm{diag}(1/2, 0)$, $A^\pi = \mathrm{diag}(0,1) = (A^\pi)^\#$ y $f(f(A)) = \mathrm{diag}(1,0)$.

En el Lema 2.4.1 (g), se ha probado que $f(f(A)) = O$ si y sólo si $A = O$.

Claramente, $f(f(A)) = I_n$ si y sólo si A es no singular.

Lema 2.4.4 *Sea f la función previamente definida y $A \in \mathbb{C}_1^n$ una matriz no nula representada como en* (2.5). *Entonces $f(f(A)) = A$ si y sólo si $C = I_a$.*

Demostración. Por el Lema 2.4.1 (d), se tiene que $AA^\# = P(I_a \oplus O)P^{-1}$ y $f(A) = P(O \oplus I_{n-a})P^{-1}$. Como $f(A)^\# = f(A)$ entonces $f(f(A)) =$

$P(I_a \oplus O)P^{-1}$. Luego, se satisface que $f(f(A)) = A$ si y sólo si $C = I_a$. ■

Observación 2.4.1 Sea $A \in \mathcal{EP}$. Entonces $f(f(A)) = A$ si y sólo si A es un proyector ortogonal.

Suponiendo que f^k denota $f^1 = f$ y la composición $f^{k+1} = f \circ f^k$, para todo entero $k \geq 1$, el siguiente resultado puede demostrarse por inducción sobre k, utilizando el Lema 2.4.1 (c)-(e).

Corolario 2.4.1 *Sea $k \geq 1$ un entero y $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si $A \in \mathbb{C}_0^n$ entonces* $f^k(A) = \begin{cases} O & \textit{si } k \textit{ es impar} \\ I_n & \textit{si } k \textit{ es par} \end{cases}$.

(b) *Si $A \in \mathbb{C}_1^n - \{O\}$ entonces* $f^k(A) = \begin{cases} f(A) & \textit{si } k \textit{ es impar} \\ I_n - f(A) & \textit{si } k \textit{ es par} \end{cases}$.

(c) *Si $A = O$ entonces* $f^k(A) = \begin{cases} I_n & \textit{si } k \textit{ es impar} \\ O & \textit{si } k \textit{ es par} \end{cases}$.

Considerando los conjuntos

$$\mathcal{EEP} = \{A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n : f(A) \in \mathcal{EP}\}$$

y

$$\mathcal{EEP}_0 = \{A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n : f(A) \in \mathcal{EP} \text{ y } f(A) \neq O\},$$

el siguiente resultado muestra una caracterización para matrices EP.

Teorema 2.4.1 *Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\mathcal{EP} = \mathcal{EEP}$.

(b) $\mathcal{EP} \cap \mathbb{C}_1^n = \mathcal{EEP}_0$.

Demostración. (a) Se puede demostrar utilizando el Lema 2.4.3.

(b) Si $A \in \mathcal{EP}$ tal que $\text{índ}(A) = 1$, entonces $f(A) \in \mathcal{EP}$ y $f(A) \neq O$ por el Lema 2.4.1 (c). Así $A \in \mathcal{EEP}_0$. Por lo tanto $\mathcal{EP} \cap \mathbb{C}_1^n \subseteq \mathcal{EEP}_0$.
Recíprocamente, sea $A \in \mathcal{EEP}_0$. Por el Lema 2.4.3 (b) y el Lema 2.4.1 (c) resulta que $A \in \mathcal{EP}$ y A es una matriz singular. Por lo tanto $\mathcal{EEP}_0 \subseteq \mathcal{EP} \cap \mathbb{C}_1^n$.

■

Por el Lema 2.4.3 (a), es claro que $f(\mathcal{EP}) \subseteq \mathcal{EP}$, pero en general no se cumple la igualdad como se puede mostrar mediante la matriz $A = \text{diag}(2, 0)$. Si existe $M \in \mathbb{C}^{2\times 2} \cap \mathcal{EP}$ tal que $A = f(M)$, entonces $2 \in \sigma(A) = \sigma(f(M))$. Esto es una contradicción pues $\sigma(f(M)) = \{0, 1\}$ por ser un proyector. Por lo tanto, $\mathcal{EP} \not\subseteq f(\mathcal{EP})$.

Observación 2.4.2 Sea $\mathcal{PO}_n$ el conjunto de todos los proyectores ortogonales de tamaño $n \times n$. Por el Lema 2.4.1, la Observación 2.4.1 y el Teorema 2.4.1 se obtiene:

(a) $f(\mathbb{C}_1^n - \{O\}) \subseteq \mathbb{C}_1^n - \{O\}$.

(b) $f(\mathcal{EEP}_0 - \{O\}) = \mathcal{PO}_n \cap (\mathbb{C}_1^n - \{O\}) = (\mathcal{PO}_n \cap \mathcal{EEP}_0) - \{O\}$.

(c) $f(\mathcal{EEP}_0) = (\mathcal{PO}_n \cap (\mathbb{C}_1^n - \{O\})) \cup \{I_n\} = ((\mathcal{PO}_n \cap \mathcal{EEP}_0) - \{O\}) \cup \{I_n\}$.

Sea $g : \mathcal{EP} \longrightarrow \mathcal{EP}$ la restricción de la función f al conjunto $\mathcal{EP}$. Por el Lema 2.4.3 (a), g está bien definida. Es claro que g no es sobreyectiva; además, g no es inyectiva como lo muestran las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que $A = \mathrm{diag}(2, 0, ..., 0)$ y $B = \mathrm{diag}(3, 0, ..., 0)$).

El siguiente lema caracteriza el intervalo

$$[O, g(A)] = \{B \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n : O \leq^* B \leq^* g(A)\},$$

donde $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz EP.

Lema 2.4.5 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz EP. Entonces*

$$[O, g(A)] = \{U(O \oplus T)U^* : U \text{ es unitaria y } T \in \mathcal{PO}_{n-a}\} \subseteq \mathcal{PO}_n.$$

Demostración. Sea $A = O$. Por el Lema 2.4.1 (e) se tiene que $g(A) = I_n$. Si $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es tal que $B \leq^* g(A)$, entonces tomando $U = I_n$ y $T = B$ se tiene que $B \in \mathcal{PO}_n$ pues $B = B^* = B^2$.

Sea $A \neq O$. Por ser A una matriz EP se puede expresarse como en (2.1), $A = U_A(C_A \oplus O)U_A^*$, con $U_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ unitaria y $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$ no singular, entonces $f(A) = U_A(O \oplus I_{n-a})U_A^*$. Sea $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $B \leq^* g(A)$. Luego, $B = U_A(O \oplus T)U_A^*$, donde $T \leq^* I_{n-a}$, esto es, $T = T^* = T^2$. ∎

Teorema 2.4.2 *La función g definida arriba es monótona decreciente.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices EP tales que $A \leq^* B$. Usando las propiedades (OE2), (OE3), (EP5) y el Teorema 2.1 de [7] se obtiene

$$AA^\dagger BB^\dagger = ABA^\dagger B^\dagger = BAA^\dagger B^\dagger = BA^\dagger AB^\dagger = BB^\dagger AB^\dagger = BB^\dagger AA^\dagger$$

y

$$BB^\dagger AA^\dagger = BA^\dagger AA^\dagger = BA^\dagger = AA^\dagger.$$

Estas últimas igualdades son equivalentes a $g(B) = g(B)g(A)$ y $g(B) = g(A)g(B)$. Por lo tanto, $g(B) \leq^* g(A)$. ■

Sin embargo, las matrices $A = \text{diag}(1, 0, ..., 0)$ y $B = \text{diag}(2, 0, ..., 0)$ son matrices EP que satisfacen $g(A) \leq^* g(B)$ pero $B \not\leq^* A$. Se puede establecer el siguiente resultado para una subclase importante de matrices.

Teorema 2.4.3 *Sean $A, B \in \mathcal{PO}_n$. Si $g(B) \leq^* g(A)$ entonces $A \leq^* B$.*

Demostración. El teorema se puede demostrar aplicando el Teorema 2.4.2 y la Observación 2.4.1. ■

Teorema 2.4.4 *Sea $A \in \mathcal{EP}$ y $B \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$ tales que $A \leq^* B$. Entonces $f(B) \leq^* f(A)$ si y sólo si $f(B) \in \mathcal{PO}_n$.*

Demostración. Sea $A = O$. Como $f(A) = I_n$, se tiene que $f(B) \leq^* f(A)$ si y sólo si $f(B) = f(B)^* = f(B)^2$, es decir, si y sólo si $f(B) \in \mathcal{PO}_n$.
Si $A \neq O$ se la considera expresada como en (2.1). Por el Teorema 2.3.3, $B = U(C_A \oplus T)U^*$ y así $f(B) = U(O \oplus f(T))U^*$. Si $f(B) \leq^* f(A)$, por el Teorema 2.3.1, se obtiene $f(B) = U(O \oplus X)U^*$ con $X \leq^* I_{n-a}$, entonces $X = f(T)$. Por lo tanto, $f(T) \in \mathcal{PO}_{n-a}$. Recíprocamente, si $f(B) \in \mathcal{PO}_n$ entonces B es EP. Por el Teorema 2.4.2 se obtiene que $f(B) \leq^* f(A)$. ■

En [14, 15] se dan condiciones necesarias y suficientes para que dos matrices dadas $A, B \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$ verifiquen $f(A) = f(B)$. En lo que sigue se muestran algunos resultados usando desigualdades con respecto al orden parcial grupo.

Si $A \in \mathbb{C}_0^n$ entonces $A^\pi \leq^\# B^\pi$ para toda matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Si $A \in \mathbb{C}_1^n$ es la matriz nula entonces la única matriz $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^\pi \leq^\# B^\pi$ es $B = O$. En lo que sigue se analiza la última desigualdad cuando A es no nula.

Teorema 2.4.5 *Sean $A, B \in \mathbb{C}_1^n$, A no nula representada como en* (2.5). *Entonces $f(A) \leq^\# f(B)$ si y sólo si existe $Q \in \mathbb{C}_0^a \cup \mathbb{C}_1^a$ tal que $B = P(Q \oplus O)P^{-1}$.*

Demostración. Si $f(A) \leq^\# f(B)$, entonces $f(A)f(B) = f(B)f(A) = f(A)$. Considerando

$$f(B) = P \begin{pmatrix} X & Y \\ Z & T \end{pmatrix} P^{-1},$$

cuya partición se realiza de acuerdo al tamaño de los bloques de A, de la igualdad $f(A)f(B) = f(B)f(A) = f(A)$ se obtiene $Y = O, Z = O, T = I_{n-a}$. Así, $f(B) = P(X \oplus I_{n-a})P^{-1}$, por lo tanto, $BB^\# = B^\# B = I_n - f(B) = P((I_a - X) \oplus O)P^{-1}$. Si se particiona

$$B = P \begin{pmatrix} Q & W \\ R & S \end{pmatrix} P^{-1}$$

de acuerdo a los bloques de $f(B)$, la igualdad $B = (BB^\#)B$ implica $R = O$, $S = O$, $XQ = O$, $XW = O$. Análogamente, de $B = B(B^\# B)$ se obtiene $W = O$, $QX = O$. Esto es, $B = P(Q \oplus O)P^{-1}$, con $QX = O$, $XQ = O$.

Ahora, es fácil ver que $Q \in \mathbb{C}^{a\times a}$ tiene índice a lo sumo 1 y que $X = f(Q)$. La implicación recíproca se obtiene realizando los productos correspondientes. ■

El siguiente resultado puede demostrarse usando una técnica similar al teorema anterior. En este caso se considera una matriz B singular ya que si $B \in \mathbb{C}_0^n$ entonces $f(B) = O$.

Teorema 2.4.6 *Sean $A, B \in \mathbb{C}_1^n$, A no nula expresada como en (2.5). Entonces $f(B) \leq^{\#} f(A)$ si y sólo si existen $S \in \mathbb{C}_0^{n-a} \cup \mathbb{C}_1^a$ y B_i de tamaños adecuados, $i \in \{1,2,3,4\}$, tales que*

$$f(B) = P(O \oplus S)P^{-1} \quad y \quad B = P \begin{pmatrix} B_1 & B_2 \\ B_3 & B_4 \end{pmatrix} P^{-1},$$

donde $B_2S = O$, $B_4S = O$, $SB_3 = O$, $SB_4 = O$.

El teorema siguiente proporciona todas las combinaciones lineales entre dos matrices EP dadas, descartando el caso trivial $A = B$.

Teorema 2.4.7 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices EP tales que $A <^* B$. Entonces las combinaciones lineales $C_{\alpha,\beta} = \alpha A + \beta B$, con $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, son matrices EP con*

$$\mathrm{rg}(C_{\alpha,\beta}) = \begin{cases} 0 & si\ \alpha = \beta = 0; \\ b - a & si\ \alpha + \beta = 0 \neq \beta; \\ a & si\ \alpha \neq 0 = \beta; \\ b & si\ \alpha + \beta \neq 0, \beta \neq 0. \end{cases}$$

Además,

(a) $A \leq^* C_{\alpha,\beta}$ *si y sólo si* $A = O$ *o* $\alpha + \beta = 1$.

(b) $C_{\alpha,\beta} \leq^* B$ *si y sólo si*

(I) $A \neq O$ *y se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:* *(i)* $\alpha = \beta = 0$, *(ii)* $\beta = 1$, $\alpha = -1$, *(iii)* $\beta = 0$, $\alpha = 1$ *o* *(iv)* $\beta = 1$, $\alpha = 0$.

(II) $A = O$ *y se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:* *(i)* $\beta = 0$ *o* *(ii)* $\beta = 1$.

(c) $C_{\alpha,\beta} \leq^* C_{\gamma,\delta}$ *si y sólo si*

(I) $A \neq O$ *y se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:* *(i)* $\alpha = \beta = 0$, *(ii)* $\alpha = -\beta = -\delta$, *(iii)* $\alpha = \gamma + \delta$, $\beta = 0$ *o* *(iv)* $\alpha = \gamma$, $\beta = \delta$.

(II) $A = O$ *y se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:* *(i)* $\beta = 0$ *o* *(ii)* $\beta = \delta$.

(d) $f(C_{\alpha,\beta}) \leq^* f(A)$ *si y sólo si* $A = O$, *o* $A \neq O$ *y se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:* *(i)* $\alpha + \beta \neq 0$, $\beta \neq 0$ *o* *(ii)* $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$.

(e) $f(B) \leq^* f(C_{\alpha,\beta})$ *si y sólo si* $A = O$, *o* $A \neq O$ *y se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:* *(i)* $\alpha + \beta \neq 0$, $\beta \neq 0$, *(ii)* $\alpha \neq 0$, $\beta = 0$, *(iii)* $\alpha + \beta = 0$, $\beta \neq 0$ *o* *(iv)* $\alpha = \beta = 0$.

Demostración. Sea $A = O$. Por ser B una matriz EP no nula puede expresarse como en (2.2), $B = U_B(C \oplus O)U_B^*$. Entonces $C_{\alpha,\beta} = U_B(\beta C \oplus O)U_B^*$ es una matriz EP para todo $\beta \in \mathbb{C}$ y se satisfacen todas las afirmaciones.

Si A es no nula, por el Teorema 2.3.5 existe $V \in \mathbb{C}^{n \times n}$ unitaria tal que

$A = V(C \oplus O \oplus O)V^*$ y $B = V(C \oplus T \oplus O)V^*$, donde $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ es no singular y $T \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ es no singular o no está presente. Entonces $C_{\alpha,\beta} = V((\alpha+\beta)C \oplus \beta T \oplus O)V^*$. Notar que $C_{\alpha,\beta}$ es una matriz EP para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ y las afirmaciones sobre los rangos siguen directamente de las condiciones dadas en cada caso. Es fácil ver que los restantes apartados pueden demostrarse usando las descomposiciones consideradas para A, B y $C_{\alpha,\beta}$. ■

Capítulo 3

Orden parcial estrella ponderado y matrices $EP_{(M,N)}$

3.1 Introducción

A lo largo de este capítulo se asumirá que $M \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son dos matrices hermíticas definidas positivas donde $M^{1/2}$ y $N^{1/2}$ representan sus raíces cuadradas, respectivamente. Es sabido que cuando se resuelve de manera aproximada por mínimos cuadrados un sistema de ecuaciones lineales (inconsistente) del tipo

$$Ax = b, \text{ con } A \in \mathbb{C}^{m\times n},\ b \in \mathbb{C}^{m\times 1},$$

el vector $x \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ de norma 2 mínima que minimiza la expresión $\|Ax-b\|_2$ está dado por $x = A^\dagger b$. Ahora, si en lugar de usar la norma 2, se consideran las normas inducidas por las matrices M y N:

$$\|x\|_M^2 = x^*Mx, \quad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^{m\times 1},$$

$$\|x\|_N^2 = x^* N x, \qquad \text{para todo } x \in \mathbb{C}^{n\times 1},$$

una generalización del problema anterior consiste en resolver de manera aproximada por mínimos cuadrados un sistema de ecuaciones lineales (inconsistente) del tipo $Ax = b$, con $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $b \in \mathbb{C}^{m\times 1}$, considerando que el residuo $Ax - b$ está afectado por distintos pesos dados por la matriz M y de modo que x tenga norma mínima ponderada de acuerdo a los pesos dados por la matriz N. Es decir, se debe minimizar la expresión

$$\|Ax - b\|_M^2 = (Ax - b)^* M (Ax - b)$$

encontrando x tal que $\|x\|_N^2 = x^* N x$ tome el valor más pequeño posible.

La solución a este problema está dada por

$$x = A^{\dagger(M,N)} b,$$

donde $A^{\dagger(M,N)}$ es la inversa de Moore-Penrose de la matriz A, ponderada por las matrices M y N. Cabe recordar que $A^{\dagger(M,N)} \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es la única matriz que satisface las cuatro condiciones siguientes:

- $AA^{\dagger(M,N)}A = A$,
- $A^{\dagger(M,N)}AA^{\dagger(M,N)} = A^{\dagger(M,N)}$,
- $(MAA^{\dagger(M,N)})^* = MAA^{\dagger(M,N)}$ y
- $(NA^{\dagger(M,N)}A)^* = NA^{\dagger(M,N)}A$.

Además, $A^{\dagger(M,N)}$ se puede representar en términos de la inversa de Moore-Penrose mediante la expresión:

$$A^{\dagger(M,N)} = N^{-1/2}\left(M^{1/2}AN^{-1/2}\right)^{\dagger} M^{1/2}. \tag{3.1}$$

Como se definió en el Capítulo 1, una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ se dice que es EP ponderada por las matrices M y N, denotada por $EP_{(M,N)}$, si se satisface

$$AA^{\dagger(M,N)} = A^{\dagger(M,N)}A.$$

A continuación se dan algunas propiedades de la inversa de Moore-Penrose ponderada, las cuales son utilizadas con frecuencia en varios resultados de este capítulo.

La equivalencia entre las siguientes afirmaciones para cualquier $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ha sido demostrada en [53]:

(w.1) A es $EP_{(M,N)}$.

(w.2) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ y $A^{\#} = A^{\dagger(M,N)}$.

(w.3) A es $EP_{(M,M)}$ y $EP_{(N,N)}$.

(w.4) MA y AN^{-1} son matrices EP.

(w.5) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ y $AA^{\#} = AA^{\dagger(M,M)} = AA^{\dagger(N,N)}$.

Lema 3.1.1 [53, 55] *Sean $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y S_m, S_n subespacios de $\mathbb{C}^m$ y $\mathbb{C}^n$, respectivamente. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) $\mathcal{R}(AA^{\dagger(M,N)}) = \mathcal{R}(A)$ *y* $\mathcal{N}(AA^{\dagger(M,N)}) = \mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)})$.

(b) $\mathcal{R}(A^{\dagger(M,N)}A) = \mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)})$ *y* $\mathcal{N}(A^{\dagger(M,N)}A) = \mathcal{N}(A)$.

(c) $S_m^{\perp_M} = M^{-1/2}(M^{1/2}S_m)^{\perp}$ *y* $S_n^{\perp_N} = N^{-1/2}(N^{1/2}S_n)^{\perp}$.

(d) $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = (\mathcal{R}(A))^{\perp_M}$.

(e) $\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) = (\mathcal{N}(A))^{\perp_N}$.

(f) $AA^{\dagger(M,N)}$ *es un proyector M-ortogonal sobre el espacio $\mathcal{R}(A)$ a lo largo del espacio $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)})$.*

(g) $A^{\dagger(M,N)}A$ *es un proyector N-ortogonal sobre el espacio $\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)})$ a lo largo del espacio $\mathcal{N}(A)$.*

(h) $$\begin{aligned} \mathbb{C}^m &= M^{1/2}\mathcal{R}(A) \oplus^{\perp} M^{1/2}\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) \\ &= M^{1/2}\mathcal{R}(A) \oplus^{\perp} M^{-1/2}\mathcal{N}(A^*). \end{aligned}$$

(i) $$\begin{aligned} \mathbb{C}^n &= N^{1/2}\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) \oplus^{\perp} N^{1/2}\mathcal{N}(A) \\ &= N^{-1/2}\mathcal{R}(A^*) \oplus^{\perp} N^{1/2}\mathcal{N}(A). \end{aligned}$$

(j) $\mathcal{R}(A^{\dagger(M,N)}) = \mathcal{R}(A^{\dagger(M,N)}A) = \mathcal{R}(N^{-1}A^*)$ *y*
$\mathcal{R}((A^{\dagger(M,N)})^*) = \mathcal{R}((AA^{\dagger(M,N)})^*) = \mathcal{R}(MA)$.

En la segunda sección de este capítulo se muestran algunas propiedades de las matrices $EP_{(M,N)}$ y se define el orden parcial estrella ponderado por las matrices M y N. Para el caso $M = N$, en esa misma sección se obtienen caracterizaciones de los predecesores y los sucesores de una matriz $EP_{(M,M)}$ dada y en la sección 3.3 se proporcionan dos algoritmos para el cálculo de la inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz $EP_{(M,M)}$.

En la última sección se relaciona el proyector espectral correspondiente al valor propio nulo de una matriz $EP_{(M,N)}$ con el orden estrella ponderado y además se demuestra que $\mathcal{EP}_{(M,M)}$ es cerrado bajo el proyector espectral mencionado.

Tal como se indicó en el capítulo anterior, en las demostraciones de los resultados que son triviales o vacuos para las matrices no singulares sólo se considera el caso de matrices singulares.

3.2 Orden estrella ponderado sobre matrices $EP_{(M,N)}$

En esta sección se define el orden parcial estrella ponderado en el conjunto de matrices rectangulares. Luego se investigan algunas propiedades que satisfacen las matrices $EP_{(M,N)}$ y se profundiza el estudio sobre estas matrices cuando M y N coinciden. Además se caracterizan los predecesores y sucesores de una $EP_{(M,M)}$ dada bajo el orden parcial estrella ponderado.

Para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se define la función matricial de variable matricial $\Psi_{(M,N)} : \mathbb{C}^{m\times n} \longrightarrow \mathbb{C}^{m\times n}$ como

$$\Psi_{(M,N)}(A) = M^{1/2}AN^{-1/2}.$$

El siguiente resultado muestra la equivalencia entre afirmaciones que involucran esta función, la inversa de Moore-Penrose ponderada y la traspuesta conjugada ponderada. Se recuerda que para $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se define su traspuesta conjugada ponderada como

$$A^{\circledast_{(M,N)}} = N^{-1}A^*M.$$

Además, si A es una matriz cuadrada, es decir $m = n$, se dice que es (M,N)-hermítica si $A^{\circledast_{(M,N)}} = A$.

Lema 3.2.1 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A^{\circledast_{(M,N)}}A = A^{\circledast_{(M,N)}}B$ *y* $AA^{\circledast_{(M,N)}} = BA^{\circledast_{(M,N)}}$.

(b) $A^{\dagger_{(M,N)}}A = A^{\dagger_{(M,N)}}B$ *y* $AA^{\dagger_{(M,N)}} = BA^{\dagger_{(M,N)}}$.

(c) $\Psi_{(M,N)}(A) \leq^* \Psi_{(M,N)}(B)$.

Demostración. (a) $\Longleftrightarrow$ (c) La igualdad $A^{\circledast(M,N)}A = A^{\circledast(M,N)}B$ se satisface si y sólo si $N^{-1}A^*MA = N^{-1}A^*MB$. Multiplicando la última igualdad a izquierda por $N^{1/2}$ y a derecha por $N^{-1/2}$, ésta es equivalente a

$$(N^{-1/2}A^*M^{1/2})(M^{1/2}AN^{-1/2}) = (N^{-1/2}A^*M^{1/2})(M^{1/2}BN^{-1/2}),$$

esto es

$$(\Psi_{(M,N)}(A))^*\Psi_{(M,N)}(A) = (\Psi_{(M,N)}(A))^*\Psi_{(M,N)}(B). \tag{3.2}$$

De manera similar se obtiene la equivalencia entre la segunda igualdad en (a) y

$$\Psi_{(M,N)}(A)(\Psi_{(M,N)}(A))^* = \Psi_{(M,N)}(B)(\Psi_{(M,N)}(A))^*. \tag{3.3}$$

Finalmente, por (3.2) y (3.3) se cumple que $\Psi_{(M,N)}(A) \leq^* \Psi_{(M,N)}(B)$.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) De (3.1), es fácil ver que $A^{\dagger(M,N)}A = A^{\dagger(M,N)}B$ se satisface si y sólo si

$$N^{-1/2}(\Psi_{(M,N)}(A))^\dagger M^{1/2}A = N^{-1/2}(\Psi_{(M,N)}(A))^\dagger M^{1/2}B.$$

Multiplicando la última igualdad a izquierda por $N^{1/2}$ y a derecha por $N^{-1/2}$, ésta es equivalente a

$$(\Psi_{(M,N)}(A))^\dagger\Psi_{(M,N)}(A) = (\Psi_{(M,N)}(A))^\dagger\Psi_{(M,N)}(B). \tag{3.4}$$

De manera similar se obtiene la equivalencia entre la segunda igualdad en (b) y

$$\Psi_{(M,N)}(A)(\Psi_{(M,N)}(A))^\dagger = \Psi_{(M,N)}(B)(\Psi_{(M,N)}(A))^\dagger. \tag{3.5}$$

Finalmente, por (3.4) y (3.5) se cumple que $\Psi_{(M,N)}(A) \leq^* \Psi_{(M,N)}(B)$. ■

Definición 3.2.1 *Dadas las matrices $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ se define la relación binaria $\leq^{\circledast(M,N)} \in \mathbb{C}^{m\times n}$ de la siguiente manera: $A \leq^{\circledast(M,N)} B$ si se satisface alguna de las condiciones equivalentes del Lema 3.2.1.*

Como $\leq^*$ es un orden parcial sobre $\mathbb{C}^{m\times n}$ se puede asegurar que la relación binaria definida arriba es también un orden parcial, denominado orden parcial estrella ponderado por las matrices M y N, o simplemente orden parcial (M, N)-estrella,

El siguiente resultado es una extensión para matrices cuadradas $EP_{(M,N)}$ del Teorema 4.3.1 de [12] y un resultado de Katz de [36].

En lo que continúa de esta sección se considera $m = n$.

Teorema 3.2.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es $EP_{(M,N)}$.*

(b) *$\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{N}(A)$.*

(c) *$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$, $(\mathcal{R}(A))^{\perp_M} = \mathcal{N}(A)$ y $(\mathcal{N}(A))^{\perp_N} = \mathcal{R}(A)$.*

(d) *Existen matrices no singulares $P, Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$A^{\circledast(M,N)} = AP \text{ y } A^{\circledast(M,N)} = QA.$$

(e) *Existen matrices $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$A^{\circledast(M,N)} = AX \text{ y } A^{\circledast(M,N)} = YA.$$

Demostración. (a) $\iff$ (b) Es claro que

$$\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{N}(A^*M) = \mathcal{N}((MA)^*)$$

y

$$\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{R}(N^{-1}A^*) = \mathcal{R}((AN^{-1})^*).$$

Por (w.4), A es $EP_{(M,N)}$ si y sólo si MA y AN^{-1} son matrices EP, lo cual es equivalente a

$$\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{N}(MA) = \mathcal{N}(A)$$

y

$$\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{R}(AN^{-1}) = \mathcal{R}(A).$$

(a) $\Longrightarrow$ (c) Los apartados (f) y (g) del Lema 3.1.1 aseguran que

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) \quad \text{y} \quad \mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) \oplus \mathcal{N}(A),$$

respectivamente. Como A es $EP_{(M,N)}$, se tiene que los proyectores $AA^{\dagger(M,N)}$ y $A^{\dagger(M,N)}A$ son iguales, es decir,

$$\mathcal{R}(A) = \mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) \quad \text{y} \quad \mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{N}(A).$$

Luego se obtiene $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$. Las igualdades que restan probar se pueden verificar usando el Lema 3.1.1 (d) y (e).

(c) $\Longrightarrow$ (a) Como $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A)$, existe un único proyector $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $\mathcal{R}(P) = \mathcal{R}(A)$ y $\mathcal{N}(P) = \mathcal{N}(A)$. Además, de $(\mathcal{R}(A))^{\perp_M} = \mathcal{N}(A)$ y del Lema 3.1.1 (d) se tiene que $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{N}(A)$. Así, del Lema 3.1.1 (f) se obtiene

$$P = AA^{\dagger(M,N)}.$$

Análogamente, de $(\mathcal{N}(A))^{\perp_N} = \mathcal{R}(A)$ y del Lema 3.1.1 (e) se tiene $\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{R}(A)$. Por lo tanto, por el Lema 3.1.1 (g),

$$P = A^{\dagger(M,N)}A.$$

Por la unicidad del proyector se tiene que A es $EP_{(M,N)}$.

(b) $\Longleftrightarrow$ (d) La igualdad $\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{R}(A)$ se satisface si y sólo si $A^{\circledast(M,N)}$ y A son equivalentes por columnas, es decir, existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^{\circledast(M,N)} = AP$. De manera similar, $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{N}(A)$ si y sólo si $A^{\circledast(M,N)}$ y A son equivalentes por filas, es decir, existe una matriz no singular $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^{\circledast(M,N)} = QA$.

(a) $\Longrightarrow$ (e) La igualdad $A = AN^{-1}(NA^{\dagger(M,N)}A)$ implica

$$A^* = (NA^{\dagger(M,N)}A)^*N^{-1}A^* = NA^{\dagger(M,N)}AN^{-1}A^*.$$

Entonces

$$A^{\circledast(M,N)} = N^{-1}A^*M = A^{\dagger(M,N)}AN^{-1}A^*M = A^{\dagger(M,N)}AA^{\circledast(M,N)}.$$

Por (a) se tiene $A^{\circledast(M,N)} = AX$, donde $X = A^{\dagger(M,N)}A^{\circledast(M,N)}$. De manera similar se puede probar que $A^{\circledast(M,N)} = A^{\circledast(M,N)}AA^{\dagger(M,N)}$. Nuevamente, por (a) se tiene $A^{\circledast(M,N)} = YA$, donde $Y = A^{\circledast(M,N)}A^{\dagger(M,N)}$.

(e) $\Longrightarrow$ (b) Sean $X, Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ matrices tales que $A^{\circledast(M,N)} = AX$ y $A^{\circledast(M,N)} = YA$. Entonces

$$\mathcal{R}(N^{-1}A^*) = \mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{R}(AX) \subseteq \mathcal{R}(A).$$

Como N^{-1} es no singular, se tiene que $\mathrm{rg}(N^{-1}A^*) = \mathrm{rg}(A^*) = \mathrm{rg}(A)$, por lo tanto, $\mathrm{rg}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathrm{rg}(A)$. Así, $\mathcal{R}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{R}(A)$. De manera similar, se obtiene $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,N)}) = \mathcal{N}(A)$. $\blacksquare$

Notar que usando los apartados (h) e (i) del Lema 3.1.1, la condición (c) del Teorema 3.2.1 puede ser reescrita como

$$\mathbb{C}^n = M^{1/2}\mathcal{R}(A) \oplus^{\perp} M^{1/2}\mathcal{N}(A) = N^{1/2}\mathcal{R}(A) \oplus^{\perp} N^{1/2}\mathcal{N}(A).$$

Lema 3.2.2 $\mathcal{EP}_{(M,N)} = \mathcal{EP}_{(M,M)} \cap \mathcal{EP}_{(N,N)}$.

Demostración. La igualdad sigue de la equivalencia entre (w.1) y (w.3). ■

Observación 3.2.1 Notar que de (w.2) y (w.3) la afirmación $A \in \mathcal{EP}_{(M,N)}$ implica $A^{\#} = A^{\dagger(M,N)} = A^{\dagger(M,M)} = A^{\dagger(N,N)}$ por la unicidad de la inversa de grupo. Recíprocamente, es inmediato que $A^{\#} = A^{\dagger(M,M)} = A^{\dagger(N,N)}$ implica (w.5). Esto lleva a la siguiente condición equivalente para que una matriz A sea $EP_{(M,N)}$:

(w.6) $\quad \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ y $A^{\#} = A^{\dagger(M,M)} = A^{\dagger(N,N)} = A^{\dagger(M,N)}$.

Notar que, en general, MA y AN^{-1} no son matrices EP en forma simultánea, salvo que $A \in \mathcal{EP}_{(M,N)}$. Por ejemplo, si se consideran las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{y} \qquad N = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \tag{3.6}$$

es fácil ver que MA es EP pero AN^{-1} no lo es.

A partir de ahora se considera que las matrices hermíticas definidas positivas $M, N \in \mathbb{C}^{n\times n}$ son iguales.

Observación 3.2.2 Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:

(a) $(A^{\dagger(M,M)})^* = M^{1/2}\left(M^{-1/2}A^*M^{1/2}\right)^{\dagger} M^{-1/2}$.

(b) $(A^{\dagger(M,M)})^{\circledast(M,M)} = \left(A^{\circledast(M,M)}\right)^{\dagger(M,M)}$.

(c) Las condiciones MA es EP y AM^{-1} es EP son equivalentes.

(d) A es una matriz idempotente (M,M)-hermítica si y sólo si A es un proyector M-ortogonal.

En efecto, los apartados (a) y (b) siguen de (3.1). Para probar (c), se supone que MA es una matriz EP. Entonces $\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(A^*M) = \mathcal{R}((MA)^*) = \mathcal{R}(MA) = M\mathcal{R}(A)$. Por lo tanto,

$$\mathcal{R}(AM^{-1}) = \mathcal{R}(A) = M^{-1}\mathcal{R}(A^*) = \mathcal{R}(M^{-1}A^*) = \mathcal{R}((AM^{-1})^*),$$

esto es AM^{-1} es EP. La demostración de la afirmación recíproca es similar. El apartado (d) sigue de las definiciones.

El apartado (c) de la última observación, la Observación 3.2.1 y el Teorema 3.5 de [53] permiten establecer algunas caracterizaciones para matrices EP ponderadas cuando $M = N$.

Proposición 3.2.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es $EP_{(M,M)}$.*

(b) *$\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ y $A^{\#} = A^{\dagger(M,M)}$.*

(c) *MA es EP.*

(d) AM^{-1} *es* EP.

(e) $\mathcal{R}(MA) = \mathcal{R}(A^*)$.

(f) $\mathcal{R}(M^{-1}A^*) = \mathcal{R}(A)$.

(g) $\mathcal{R}(A^{\dagger_{(M,M)}}) = \mathcal{R}(A)$.

(h) $\mathcal{R}((A^{\dagger_{(M,M)}})^*) = \mathcal{R}(A^*)$.

(i) $\mathcal{N}((MA)^*) = \mathcal{N}(A)$.

(j) $\mathcal{N}(AM^{-1}) = \mathcal{N}(A^*)$.

(k) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(M^{-1}A^*) \oplus^{\perp} \mathcal{N}(A^*)$.

(l) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^*) \oplus^{\perp} \mathcal{N}(A^*M)$.

(m) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(MA) \oplus^{\perp} \mathcal{N}(A)$.

(n) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus^{\perp} \mathcal{N}(AM^{-1})$.

(ñ) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^2)$ *y* $MAA^{\#}$ *es hermítica.*

Demostración. (c) $\iff$ (e) MA es EP si y sólo si $\mathcal{R}(MA) = \mathcal{R}((MA)^*) = \mathcal{R}(A^*M) = \mathcal{R}(A^*)$.

(c) $\iff$ (d) Se demostró en la Observación 3.2.2 (c).

(a) $\iff$ (c) Sigue de (w.1), (w.4) y la Observación 3.2.2 (c).

(e) $\iff$ (f) En la demostración de (c) $\iff$ (e) se probó que $\mathcal{R}(MA) = \mathcal{R}(A^*)$ es equivalente a que MA es EP. Utilizando la equivalencia (c) $\iff$ (d), sólo falta demostrar la equivalencia entre (f) y que AM^{-1} es EP. Como M es una matriz hermítica se satisface $\mathcal{R}((AM^{-1})^*) = \mathcal{R}(M^{-1}A^*)$

y $\mathcal{R}(AM^{-1}) = \mathcal{R}(A)$. Así, AM^{-1} una matriz EP si y sólo si $\mathcal{R}(M^{-1}A^*) = \mathcal{R}(A)$.

(f) $\Longleftrightarrow$ (g) y (e) $\Longleftrightarrow$ (h) siguen del Lema 3.1.1 (j).

(c) $\Longleftrightarrow$ (i) Se puede demostrar utilizando la propiedad $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}(MA)$.

(e) $\Longrightarrow$ (l) La implicación es directa recordando que siempre se cumple $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(MA) \oplus^\perp \mathcal{N}((MA)^*)$.

(d) $\Longrightarrow$ (k) La demostración es similar a la prueba de (e) $\Longrightarrow$ (l), usando la descomposición $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(AM^{-1}) \oplus^\perp \mathcal{N}((AM^{-1})^*)$.

(k) $\Longrightarrow$ (d) De $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(M^{-1}A^*) \oplus^\perp \mathcal{N}(A^*)$ es fácil ver que

$$\mathbb{C}^n = \mathcal{R}((AM^{-1})^*) \oplus^\perp \mathcal{N}((AM^{-1})^*),$$

esto es, $\mathcal{R}((AM^{-1})^*) = \mathcal{R}(AM^{-1})$. Entonces AM^{-1} es EP.

(l) $\Longrightarrow$ (c) La demostración es similar a la prueba de (k) $\Longrightarrow$ (d) pero usando ahora que la descomposición $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A^*) \oplus^\perp \mathcal{N}(A^*M)$ implica $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}((MA)^*) \oplus^\perp \mathcal{N}((MA)^*)$.

(i) $\Longrightarrow$ (m) Sigue de la identidad $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(MA) \oplus^\perp \mathcal{N}((MA)^*)$.

(m) $\Longrightarrow$ (c) Como $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(MA) \oplus^\perp \mathcal{N}(A) = \mathcal{R}(MA) \oplus^\perp \mathcal{N}(MA)$, se tiene que MA es EP.

(d) $\Longleftrightarrow$ (n) De $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(AM^{-1}) \oplus^\perp \mathcal{N}((AM^{-1})^*)$ y del apartado (d) se obtiene $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus^\perp \mathcal{N}(AM^{-1})$, que es (n). La recíproca es trivial.

(d) $\Longleftrightarrow$ (j) Como $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(M^{-1}A^*) = \mathcal{N}((AM^{-1})^*)$, es claro que AM^{-1} es EP si y sólo si $\mathcal{N}(A^*) = \mathcal{N}(AM^{-1})$.

(b) $\Longrightarrow$ (ñ) Como $A^{\#} = A^{\dagger(M,M)}$, se obtiene $MAA^{\#} = MAA^{\dagger(M,M)} = (MAA^{\dagger(M,M)})^* = (MAA^{\#})^*$.

(ñ) $\Longrightarrow$ (b) Por hipótesis $(MAA^{\#})^* = (MAA^{\#})$. Luego, por definición de inversa de grupo se satisface $AA^{\#}A = A$, $A^{\#}AA^{\#} = A^{\#}$, $(MAA^{\#})^* = (MAA^{\#})$ y $(MA^{\#}A)^* = (MA^{\#}A)$. Por la unicidad de la inversa de Moore-Penrose ponderada, $A^{\#} = A^{\dagger(M,M)}$.

(b) $\Longleftrightarrow$ (a) Es inmediato de (w.6). ■

Las caracterizaciones presentadas en el Teorema 3.2.1 se simplifican cuando $M = N$ como se muestra en el siguiente resultado, donde se da una representación para una matriz $EP_{(M,M)}$.

Teorema 3.2.2 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$.

(b) $\Psi_{(M,M)}(A) \in \mathcal{EP}$.

(c) *Si A es no nula existen una matriz unitaria $U_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz no singular $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$ tales que*

$$A = M^{-1/2}U_A(C_A \oplus O)U_A^*M^{1/2}. \tag{3.7}$$

(d) $\mathcal{R}(A^{\circledast(M,M)}) = \mathcal{R}(A)$.

(e) $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,M)}) = \mathcal{N}(A)$.

(f) $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus^{\perp_M} \mathcal{N}(A)$.

(g) *Existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^{\circledast(M,M)} = AP$.*

(h) *Existe una matriz no singular $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^{\circledast(M,M)} = QA$.*

(i) *Existe una matriz $X \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^{\circledast(M,M)} = AX$.*

(j) *Existe una matriz $Y \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^{\circledast(M,M)} = YA$.*

Si se satisface alguna de estas afirmaciones y $A \neq O$ entonces

$$A^{\dagger(M,M)} = M^{-1/2}U_A(C_A^{-1} \oplus O)U_A^*M^{1/2} \tag{3.8}$$

y

$$A^{\circledast(M,M)} = M^{-1/2}U_A(C_A^* \oplus O)U_A^*M^{1/2}.$$

Demostración. (a) $\Longleftrightarrow$ (b) De (3.1) se tiene que

$$(\Psi_{(M,M)}(A))^\dagger = \Psi_{(M,M)}(A^{\dagger(M,M)}).$$

Entonces

$$\Psi_{(M,M)}(A)(\Psi_{(M,M)}(A))^\dagger = M^{1/2}AA^{\dagger(M,M)}M^{-1/2}$$

y

$$(\Psi_{(M,M)}(A))^\dagger\Psi_{(M,M)}(A) = M^{1/2}A^{\dagger(M,M)}AM^{-1/2}.$$

Claramente se ve que $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ si y sólo si $\Psi_{(M,M)}(A) \in \mathcal{EP}$.

(b) $\Longleftrightarrow$ (c) Se puede demostrar usando la definición de $\Psi_{(M,M)}$ y aplicando el Teorema 4.3.1 de [12].

(a) $\Longleftrightarrow$ (d) Por la Proposición 3.2.1 (f) se tiene que $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ si y sólo si $\mathcal{R}(M^{-1}A^*) = \mathcal{R}(A)$. Además se sabe que $\mathcal{R}(A^{\circledast(M,M)}) = \mathcal{R}(M^{-1}A^*)$. Luego, la equivalencia es inmediata.

(a) $\Longleftrightarrow$ (e) Se puede demostrar de manera similar a la prueba de la equivalencia (a) $\Longleftrightarrow$ (d) usando la Proposición 3.2.1 (i).

(e) $\Longrightarrow$ (f) Por el Lema 3.1.1 (f) se tiene que $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus \mathcal{N}(A^{\circledast(M,M)})$ y $\mathcal{R}(A)^{\perp_M} = \mathcal{N}(A^{\circledast(M,M)})$, entonces $\mathbb{C}^n = \mathcal{R}(A) \oplus^{\perp_M} \mathcal{N}(A)$ se obtiene directamente de (e).

(f) $\Longrightarrow$ (e) Como $\mathcal{R}(A)^{\perp_M} = \mathcal{N}(A)$, del Lema 3.1.1 (d) se tiene que $\mathcal{R}(A)^{\perp_M} = \mathcal{N}(A^{\circledast(M,M)})$. Entonces $\mathcal{N}(A^{\circledast(M,M)}) = \mathcal{N}(A)$.

Las implicaciones (a) $\Longrightarrow$ (i), (a) $\Longrightarrow$ (j), (d) $\Longleftrightarrow$ (g), (e) $\Longleftrightarrow$ (h), (i) $\Longrightarrow$ (d) y (j) $\Longrightarrow$ (e) se pueden demostrar aplicando el Teorema 3.2.1. ■

Como la función $\Psi_{(M,M)} : \mathbb{C}^{n\times n} \to \mathbb{C}^{n\times n}$ definida por

$$\Psi_{(M,M)}(A) = M^{1/2} A M^{-1/2}$$

es biyectiva, el Teorema 3.2.2 garantiza que

$$\Psi_{(M,M)}\left(\mathcal{EP}_{(M,M)}\right) = \mathcal{EP}. \tag{3.9}$$

Los resultados que siguen caracterizan los predecesores y sucesores de una matriz $EP_{(M,M)}$ bajo el orden parcial (M, M)-estrella.

Notar que, por el Teorema 3.2.2, si $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz $EP_{(M,M)}$ no nula entonces existen una matriz unitaria $U_B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz no singular $C_B \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tales que

$$B = M^{-1/2} U_B (C_B \oplus O) U_B^* M^{1/2}. \tag{3.10}$$

Teorema 3.2.3 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que B es una matriz $EP_{(M,M)}$ no nula expresada como en* (3.10)*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^{\circledast(M,M)} B$.

(b) *Existe $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tal que*

$$A = M^{-1/2}U_B(X \oplus O)U_B^* M^{1/2},$$

con $X \leq^* C_B$.

Demostración. Suponer que $A \leq^{\circledast(M,M)} B$, con $B \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$. Por el Lema 3.2.1, $\Psi_{(M,M)}(A) \leq^* \Psi_{(M,M)}(B)$ y además por el Teorema 3.2.2 se tiene que $\Psi_{(M,M)}(B)$ es EP. Luego, aplicando el Teorema 2.3.1, existe $X \in \mathbb{C}^{b\times b}$ tal que $A = M^{-1/2}U_B(X \oplus O)U_A^* M^{1/2}$ y $X \leq^* C_B$. Esto prueba (a) $\Longrightarrow$ (b).

Para demostrar la implicación recíproca se considera

$$A = M^{-1/2}U_B(X \oplus O)U_B^* M^{1/2},$$

con $X \leq^* C_B$. Realizando los productos correspondientes se verifica que

$$\Psi_{(M,M)}(A) \leq^* \Psi_{(M,M)}(B),$$

es decir, $A \leq^{\circledast(M,M)} B$. ■

Teorema 3.2.4 *Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que A es una matriz $EP_{(M,M)}$ no nula expresada como en* (3.7)*. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^{\circledast(M,M)} B$.

(b) *Existe* $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ *tal que* $B = M^{-1/2}U_A(C_A \oplus T)U_A^* M^{1/2}$.

Demostración. Se asume que $A \leq^{\circledast(M,M)} B$, con $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$. Por el Lema 3.2.1, $\Psi_{(M,M)}(A) \leq^* \Psi_{(M,M)}(B)$ y además, por el Teorema 3.2.2 se tiene que $\Psi_{(M,M)}(A)$ es EP. Por el Teorema 2.3.3 existe $T \in \mathbb{C}^{(n-a)\times(n-a)}$ tal que $B = M^{-1/2}U_A(C_A \oplus T)U_A^* M^{1/2}$. Queda así probado (a) $\Longrightarrow$ (b).

Para demostrar la implicación recíproca se considera

$$B = M^{-1/2}U_A(C_A \oplus T)U_A^* M^{1/2}.$$

Realizando los productos correspondientes se verifica que

$$\Psi_{(M,M)}(A) \leq^* \Psi_{(M,M)}(B),$$

es decir, $A \leq^{\circledast(M,M)} B$. ■

El Teorema 4.5.2 y los últimos dos teoremas permiten establecer el siguiente corolario.

Corolario 3.2.1 *Sean* $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *matrices* $EP_{(M,M)}$ *y* A *no nula. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $A \leq^{\circledast(M,M)} B$.

(b) *Existe* $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ *unitaria tal que*

$$A = M^{-1/2}V(C \oplus O)V^* M^{1/2}, \quad B = M^{-1/2}V(C \oplus T \oplus O)V^* M^{1/2},$$

donde $C \in \mathbb{C}^{a\times a}$ *es no singular y* $T \in \mathbb{C}^{(b-a)\times(b-a)}$ *es no singular o no está presente.*

3.3 Cálculo de la inversa de Moore-Penrose ponderada

En [44] se presentan algoritmos para calcular la inversa de Moore-Penrose factorizada de una matriz EP singular. En esta sección se generalizan esos resultados a la clase de las matrices EP ponderadas, se da una factorización para la inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz $EP_{(M,M)}$ y se presentan dos algoritmos para calcularla.

Se considera $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz $EP_{(M,M)}$ no nula. Por el Teorema 3.2.2 existen una matriz unitaria $U_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ y una matriz no singular $C_A \in \mathbb{C}^{a\times a}$ tales que

$$A = M^{-1/2}U_A(C_A \oplus O)U_A^* M^{1/2}$$

y además $M^{1/2}AM^{-1/2} = U_A(C_A \oplus O)U_A^*$ es EP.

Luego, por el Teorema 4.3.1 de [12] se tiene que la matriz unitaria U_A tiene la forma $\begin{pmatrix} U_1 & U_2 \end{pmatrix}$, donde las columnas de $U_1 \in \mathbb{C}^{n\times a}$ forman una base ortonormal del espacio imagen de la matriz $M^{1/2}AM^{-1/2}$ y las columnas de $U_2 \in \mathbb{C}^{n\times(n-a)}$ forman una base ortonormal del espacio nulo de la matriz $M^{1/2}AM^{-1/2}$. Realizando los cálculos correspondientes se puede ver que

$$A = M^{-1/2}U_A(C_A \oplus O)U_A^* M^{1/2} = M^{-1/2}U_1C_AU_1^*M^{1/2}$$

y

$$A^{\dagger_{(M,M)}} = M^{-1/2}U_A(C_A^{-1} \oplus O)U_A^* M^{1/2} = M^{-1/2}U_1C_A^{-1}U_1^*M^{1/2}.$$

Teniendo en cuenta esta descomposición, se presenta el primer algoritmo.

Algoritmo 1

Entradas: Una matriz $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermítica definida positiva y una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que sea $EP_{(M,M)}$.

Salida: La inversa de Moore-Penrose ponderada $A^{\dagger(M,M)}$.

Paso 1: Calcular las matrices $M^{1/2}$ y $M^{-1/2}$.

Paso 2: Calcular la matriz $M^{1/2}AM^{-1/2}$.

Paso 3: Construir U_1:

- encontrar una base ortonormal $\mathcal{B}$ del espacio imagen de la matriz $M^{1/2}AM^{-1/2}$,
- construir la matriz U_1, cuyas columnas son los vectores de $\mathcal{B}$.

Paso 4: Calcular $C_A = U_1^* M^{1/2}AM^{-1/2}U_1$.

Paso 5: Calcular C_A^{-1}.

Paso 6: Calcular $A^{\dagger(M,M)} = M^{-1/2}U_1C_A^{-1}U_1^*M^{1/2}$.

En el siguiente teorema se muestra una factorización para la inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz $EP_{(M,M)}$.

Teorema 3.3.1 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no nula. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A es una matriz $EP_{(M,M)}$.*

(b) *Existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^{\dagger(M,M)} = AP = PA$.*

Demostración. (a) $\Longrightarrow$ (b) Como A es una matriz $EP_{(M,M)}$ no nula, considerando la descomposición (3.7) es suficiente tomar

$$P = M^{-1/2}U_A \begin{pmatrix} C_A^{-2} & O \\ O & I_{n-a} \end{pmatrix} U_A^* M^{1/2}.$$

(b) $\Longrightarrow$ (a) Si existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que $A^{\dagger_{(M,M)}} = AP$, tenemos que $\mathcal{R}(A^{\dagger_{(M,M)}}) = \mathcal{R}(AP) = \mathcal{R}(A)$, entonces A es $EP_{(M,M)}$ por el apartado (g) de la Proposición 3.2.1. ■

Utilizando la equivalencia demostrada en el teorema anterior se presenta el segundo algoritmo.

Algoritmo 2

Entradas: Una matriz $M \in \mathbb{C}^{n\times n}$ hermítica definida positiva y una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que sea $EP_{(M,M)}$.

Salida: La inversa de Moore-Penrose ponderada $A^{\dagger_{(M,M)}}$.

Paso 1: Calcular las matrices $M^{1/2}$ y $M^{-1/2}$.

Paso 2: Calcular la matriz $M^{1/2}AM^{-1/2}$.

Paso 3: Construir U_A:

- encontrar una base ortonormal $\mathcal{B}_R$ del espacio imagen de la matriz $M^{1/2}AM^{-1/2}$,
- encontrar una base ortonormal $\mathcal{B}_N$ del espacio nulo de la matriz $M^{1/2}AM^{-1/2}$,

- construir la matriz U_A, cuyas primeras a columnas son los vectores de $\mathcal{B}_R$ y sus últimas $n-a$ columnas son los vectores de $\mathcal{B}_N$.

Paso 4: Calcular $B = U_A^* M^{1/2} A M^{-1/2} U_A$.

Paso 5: Particionar B como $B = C_A \oplus O$

Paso 6: Calcular C_A^{-2}.

Paso 7: Calcular $P = M^{-1/2} U_A (C_A^{-2} \oplus I_{n-a}) U_A^* M^{1/2}$.

Paso 8: Calcular $A^{\dagger(M,M)} = AP$.

Observación 3.3.1 Por la Proposición 3.2.1 resulta inmediato que si M y N son matrices hermíticas y definidas positivas del mismo tamaño, entonces para toda matriz $A \in EP_{(M,N)}$, basta calcular una de las matrices $A^{\dagger(M,M)}$ o $A^{\dagger(N,N)}$ y se tiene $A^{\#} = A^{\dagger(M,N)} = A^{\dagger(M,M)} = A^{\dagger(N,N)}$.

A continuación se presenta un ejemplo del cálculo de inversas de Moore-Penrose ponderadas utilizando los algoritmos propuestos.

Ejemplo 3.3.1 Se consideran las matrices

$$M = \begin{pmatrix} 7 & 4 & 5 & 0 & 4 \\ 4 & 3 & 4 & 0 & 1 \\ 5 & 4 & 6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 & 5 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A = \begin{pmatrix} 9 & -13 & 4 & 0 & 0 \\ -13 & 22 & -10 & 0 & 0 \\ 2 & -5 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -5 & 7 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donde M es una matriz hermítica definida positiva y A es $EP_{(M,M)}$.

Usando el Algoritmo 1, se calculan $M^{1/2}$, $M^{-1/2}$ y $M^{1/2}AM^{-1/2}$ como lo indican los dos primeros pasos:

$$M^{1/2} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}, M^{-1/2} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ -2 & 4 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$M^{1/2}AM^{-1/2} = \begin{pmatrix} 8 & -12 & 2 & 0 & -4 \\ -12 & 22 & -6 & 0 & 6 \\ 2 & -6 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4 & 6 & -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se construye la matriz U_1, cuyas columnas son los vectores de una base ortonormal del espacio imagen de $M^{1/2}AM^{-1/2}$ y con ella se encuentra C_A:

$$U_1 = \begin{pmatrix} \frac{4}{57}\sqrt{57} & \frac{9}{551}\sqrt{2}\sqrt{551} & \frac{7}{435}\sqrt{2}\sqrt{435} \\ -\frac{2}{19}\sqrt{3}\sqrt{19} & \frac{11}{1102}\sqrt{1102} & \frac{1}{58}\sqrt{15}\sqrt{58} \\ \frac{1}{57}\sqrt{57} & -\frac{12}{551}\sqrt{2}\sqrt{551} & \frac{2}{87}\sqrt{10}\sqrt{87} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{57}\sqrt{57} & -\frac{9}{1102}\sqrt{1102} & -\frac{7}{870}\sqrt{870} \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$C_A = \begin{pmatrix} \frac{1807}{57} & -\frac{263}{1102}\sqrt{3}\sqrt{58} & \frac{1}{3306}\sqrt{5}\sqrt{1102} \\ -\frac{263}{1102}\sqrt{3}\sqrt{58} & \frac{1754}{551} & -\frac{4}{551}\sqrt{15}\sqrt{19} \\ \frac{1}{3306}\sqrt{5}\sqrt{1102} & -\frac{4}{551}\sqrt{15}\sqrt{19} & \frac{10}{87} \end{pmatrix}.$$

Finalmente, se calcula C_A^{-1} para luego encontrar la inversa Moore-Penrose ponderada de A:

$$A^{\dagger(M,M)} = \begin{pmatrix} \frac{19}{5} & \frac{16}{5} & \frac{21}{5} & 0 & 0 \\ \frac{16}{5} & \frac{14}{5} & \frac{19}{5} & 0 & 0 \\ \frac{21}{10} & \frac{19}{10} & \frac{29}{10} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{41}{10} & -\frac{7}{2} & -\frac{47}{10} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora se calcula nuevamente $A^{\dagger(M,M)}$, utilizando en este caso el Algoritmo 2. Los dos primeros pasos coinciden con los del Algoritmo 1, por lo tanto ya se conocen las matrices $M^{1/2}$, $M^{-1/2}$ y $M^{1/2}AM^{-1/2}$. Encontrando las bases $\mathcal{B}_R$ y $\mathcal{B}_N$ se construye la matriz U_A:

$$U_A = \begin{pmatrix} \frac{4}{57}\sqrt{57} & \frac{9}{551}\sqrt{19}\sqrt{58} & \frac{7}{435}\sqrt{5}\sqrt{174} & 0 & \frac{1}{5}\sqrt{5} \\ -\frac{2}{19}\sqrt{57} & \frac{11}{1102}\sqrt{19}\sqrt{58} & \frac{1}{58}\sqrt{5}\sqrt{174} & 0 & 0 \\ \frac{1}{57}\sqrt{57} & -\frac{12}{551}\sqrt{19}\sqrt{58} & \frac{2}{87}\sqrt{5}\sqrt{174} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{2}{57}\sqrt{57} & -\frac{9}{1102}\sqrt{19}\sqrt{58} & -\frac{7}{870}\sqrt{5}\sqrt{174} & 0 & \frac{2}{5}\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Con esta última matriz se calcula B y luego se la particiona como $C_A \oplus O$, donde

$$C_A = \begin{pmatrix} \frac{1807}{57} & -\frac{263}{1102}\sqrt{3}\sqrt{58} & \frac{1}{3306}\sqrt{5}\sqrt{1102} \\ -\frac{263}{1102}\sqrt{3}\sqrt{58} & \frac{1754}{551} & -\frac{4}{551}\sqrt{15}\sqrt{19} \\ \frac{1}{3306}\sqrt{5}\sqrt{1102} & -\frac{4}{551}\sqrt{15}\sqrt{19} & \frac{10}{87} \end{pmatrix}.$$

Calculando C_A^{-2} se obtiene la matriz no singular P:

$$P = \begin{pmatrix} \frac{67}{2} & \frac{291}{10} & \frac{403}{10} & 0 & 0 \\ \frac{291}{10} & \frac{253}{10} & \frac{351}{10} & 0 & 0 \\ \frac{403}{20} & \frac{351}{20} & \frac{489}{20} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\frac{717}{20} & -\frac{633}{20} & -\frac{879}{20} & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

y luego se calcula $A^{\dagger_{(M,M)}} = AP = PA$, como lo indica el Teorema 3.3.1.

Cabe aclarar, que para encontrar los resultados en el ejemplo anterior, se ha utilizado el programa Scientific WorkPlace ©(V5.5 E) que permite realizar cálculos simbólicos.

3.4 Proyector espectral asociado al valor propio nulo en $\mathcal{EP}_{(M,M)}$

Es sabido que $\mathcal{EP} \subseteq \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$ y además $\text{índ}(A) = \text{índ}(\Psi_{(M,M)}(A))$ para toda matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$. De (3.9) es claro que el conjunto $\mathcal{EP}_{(M,M)} \subseteq \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$. Si A es una matriz $EP_{(M,M)}$ no nula expresada como en (3.7) entonces por el apartado (b) de la Proposición 3.2.1, se tiene que $A^\pi = I - AA^{\dagger_{(M,M)}}$ y, por (3.8), se obtiene

$$A^\pi = M^{-1/2}U_A(O \oplus I_{n-a})U_A^* M^{1/2}. \tag{3.11}$$

Lema 3.4.1 *Sea $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$. Entonces*

(a) $\Psi_{(M,M)}(A^\#) = (\Psi_{(M,M)}(A))^\#$ *y* $\Psi_{(M,M)}^{-1}(A^\#) = (\Psi_{(M,M)}^{-1}(A))^\#$.

(b) $\Psi_{(M,M)}(A^\pi) = (\Psi_{(M,M)}(A))^\pi$ *y* $\Psi_{(M,M)}^{-1}(A^\pi) = (\Psi_{(M,M)}^{-1}(A))^\pi$.

(c) $(\Psi_{(M,M)}(A))^* = \Psi^{-1}_{(M,M)}(A^*)$ *y* $(\Psi^{-1}_{(M,M)}(A))^* = \Psi_{(M,M)}(A^*)$.

(d) *A es (M,M)-hermítica si y sólo si $\Psi_{(M,M)}(A)$ es una matriz hermítica.*

(e) *A es un proyector M-ortogonal si y sólo si $\Psi_{(M,M)}(A)$ es un proyector ortogonal.*

Demostración. (a) Sigue de la definición de inversa de grupo.

(b) De (a) se tiene que $\Psi_{(M,M)}(A)(\Psi_{(M,M)}(A))^{\#} = \Psi_{(M,M)}(AA^{\#})$. Entonces

$$\begin{aligned}(\Psi_{(M,M)}(A))^{\pi} &= I_n - \Psi_{(M,M)}(A)(\Psi_{(M,M)}(A))^{\#} \\ &= M^{1/2}A^{\pi}M^{-1/2} = \Psi_{(M,M)}(A^{\pi}).\end{aligned}$$

(c) Se puede demostrar a partir de la definición.

(d) La matriz A es (M,M)-hermítica si y sólo si $M^{-1}A^*M = A$. Esta igualdad es equivalente a $\Psi_{(M,M)}(A) = M^{-1/2}A^*M^{1/2} = (\Psi_{(M,M)}(A))^*$, esto es $\Psi_{(M,M)}(A)$ es hermítica.

(e) Es consecuencia de (d) y de la Observación 3.2.2 (d). ∎

Sin embargo, en general $\Psi_{(M,M)}(A^{\dagger}) \neq (\Psi_{(M,M)}(A))^{\dagger}$. De hecho, las matrices A y M dadas en (3.6) proporcionan un contraejemplo.

Lema 3.4.2 *Sea $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$. Se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si A es (M,M)-hermítica entonces $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$.*

(b) *Si $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ entonces A^π es (M,M)-hermítica. Por lo tanto, A^π es un proyector M-ortogonal sobre $M^{-1}\mathcal{N}(A^*)$ a lo largo de $\mathcal{R}(A)$.*

(c) *Si $A^\pi \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ entonces $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$.*

Demostración. (a) Si $M^{-1}A^*M = A$ entonces $(MA)^* = MA$, luego MA es EP. Por lo tanto, $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ por la Proposición 3.2.1.

(b) Como $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$, el Teorema 3.2.2 asegura que $\Psi_{(M,M)}(A)$ es EP. Así, $\Psi_{(M,M)}(A^\pi) = (\Psi_{(M,M)}(A))^\pi$ es hermítica por el Lema 3.4.1 y el Lema 2.4.3. Luego, aplicando el Lema 3.4.1 (d) se obtiene que A^π es una matriz (M,M)-hermítica. Además, se sabe que A^π proyecta sobre $\mathcal{N}(A)$ a lo largo de $\mathcal{R}(A)$. De la Proposición 3.2.1 (i), $\mathcal{N}(A) = \mathcal{N}((MA)^*) = \mathcal{N}(A^*M) = M^{-1}\mathcal{N}(A^*)$. Por otra parte, $\mathcal{N}(A^*M) = \mathcal{N}(A^{\circledast(M,M)})$. Así, la M-ortogonalidad de A^π sigue del Lema 3.1.1 (d).

(c) Usando el Teorema 3.2.2 y el Lema 3.4.1 (b) se obtiene que la matriz $(\Psi_{(M,M)}(A))^\pi$ es EP. Por el Lema 2.4.3, $\Psi_{(M,M)}(A)$ es EP. Por lo tanto, sigue del Teorema 3.2.2 que A es $EP_{(M,M)}$. ■

En lo que sigue se considera la función matricial a valores matriciales

$$f : \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n \longrightarrow \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$$

definida en el capítulo anterior como $f(A) = A^\pi$ para cada $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$.

Lema 3.4.3 *Sea $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$ una matriz $EP_{(M,M)}$. Entonces $f(f(A)) = A$ si y sólo si A es un proyector M-ortogonal.*

Demostración. Por el Teorema 3.2.2, $\Psi_{(M,M)}(A)$ es EP. Aplicando el Lema 3.4.1 (b), es claro que $f(f(A)) = A$ es equivalente a la igualdad

$f(f(\Psi_{(M,M)}(A))) = \Psi_{(M,M)}(A)$. Por la Observación 2.4.1, esta última igualdad se satisface si y sólo si $\Psi_{(M,M)}(A)$ es un proyector ortogonal. Aplicando el Lema 3.4.1 (e) se obtiene la equivalencia $f(f(A)) = A$ si y sólo si A es un proyector M-ortogonal. ■

Considerar ahora los conjuntos

$$\mathcal{EEP}_{(M,M)} = \{A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n : f(A) \in \mathcal{EP}_{(M,M)}\}$$

y

$$\mathcal{EEP}^0_{(M,M)} = \{A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n : f(A) \in \mathcal{EP}_{(M,M)} \text{ and } f(A) \neq O\}.$$

De manera similar al Teorema 2.4.1, el siguiente resultado muestra una caracterización para matrices $EP_{(M,M)}$.

Teorema 3.4.1 *Se satisfacen las siguientes afirmaciones.*

(a) $\mathcal{EEP}_{(M,M)} = \mathcal{EP}_{(M,M)}$.

(b) $\mathcal{EEP}^0_{(M,M)} = \mathcal{EP}_{(M,M)} \cap \mathbb{C}_1^n$.

Demostración. (a) Por los Teoremas 3.2.2 y 2.4.1 se sabe que $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ si y sólo si $\Psi_{(M,M)}(A) \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$ y

$$f(\Psi_{(M,M)}(A)) = \Psi_{(M,M)}(f(A)) \in \mathcal{EP}.$$

Estas últimas condiciones son equivalentes a $A \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$ y $f(A) \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$, esto es $A \in \mathcal{EEP}_{(M,M)}$.

(b) Sea $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ una matriz tal que $\text{índ}(A) = 1$. Por los apartados (a) y (b) del Lema 3.4.2, $f(A) \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ y A es una matriz singular, esto es

$f(A) \neq O$. Así $A \in \mathcal{EEP}^0_{(M,M)}$. Por lo tanto $\mathcal{EP}_{(M,M)} \cap \mathbb{C}_1^n \subseteq \mathcal{EEP}^0_{(M,M)}$. Para demostrar la otra inclusión, considerar A tal que $f(A) \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ y $f(A) \neq O$. Entonces $\text{índ}(A) = 1$ y A es $EP_{(M,M)}$ por el Lema 3.4.2 (c). Por lo tanto, $\mathcal{EEP}^0_{(M,M)} \subseteq \mathcal{EP}_{(M,M)} \cap \mathbb{C}_1^n$. ■

Observación 3.4.1 Se denota por M-$\mathcal{PO}_n$ el conjunto de todos los proyectores M-ortogonales de tamaño $n \times n$. De los Lemas 3.4.3 y 3.4.2, la Proposición 3.2.1 y el Teorema 3.4.1 se obtiene:

$$\text{(a)} \quad \begin{aligned} f(\mathcal{EEP}^0_{(M,M)} - \{O\}) &= M\text{-}\mathcal{PO}_n \cap (\mathbb{C}_1^n - \{O\}) \\ &= (M\text{-}\mathcal{PO}_n \cap \mathcal{EEP}^0_{(M,M)}) - \{O\}. \end{aligned}$$

$$\text{(b)} \quad \begin{aligned} f(\mathcal{EEP}^0_{(M,M)}) &= (M\text{-}\mathcal{PO}_n \cap (\mathbb{C}_1^n - \{O\})) \cup \{I_n\} \\ &= ((M\text{-}\mathcal{PO}_n \cap \mathcal{EEP}^0_{(M,M)}) - \{O\}) \cup \{I_n\}. \end{aligned}$$

Del Lema 3.4.2 (a) y (b), es claro que $f(\mathcal{EP}_{(M,M)}) \subseteq \mathcal{EP}_{(M,M)}$, pero en general no se cumple la igualdad como se puede mostrar mediante las matrices $M = \text{diag}(1,3)$ y $A = \text{diag}(2,0)$. En efecto, la matriz $MA = \text{diag}(2,0)$ es EP, por consiguiente A es $EP_{(M,M)}$. Si existe $B \in \mathbb{C}^{2\times 2} \cap \mathcal{EP}_{(M,M)}$ tal que $A = f(B)$, entonces $2 \in \sigma(A) = \sigma(f(B))$. Esto es una contradicción pues $f(B)$ es un proyector. Por lo tanto, $\mathcal{EP}_{(M,M)} \nsubseteq f(\mathcal{EP}_{(M,M)})$.

Sean $g : \mathcal{EP} \longrightarrow \mathcal{EP}$ y $h : \mathcal{EP}_{(M,M)} \longrightarrow \mathcal{EP}_{(M,M)}$ las restricciones de la función f a los conjuntos $\mathcal{EP}$ y $\mathcal{EP}_{(M,M)}$, respectivamente. La función g ya ha sido considerada en la sección 4 del Capítulo 2. Por el Lema 3.4.2 (a) y (b) se tiene que h está bien definida. Notar que, en relación a la composición de funciones, se tiene que $\Psi_{(M,M)} \circ h = g \circ \Psi_{(M,M)}$ en $\mathcal{EP}_{(M,M)}$. Es evidente que h no es sobreyectiva. Además, h no es inyectiva como lo muestran las matrices

$$M = \operatorname{diag}(1,3), \qquad A = \operatorname{diag}(2,0), \qquad B = \operatorname{diag}(3,0). \tag{3.12}$$

El siguiente lema caracteriza el intervalo

$$[O, h(A)] = \{B \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n : O \leq^{\circledast(M,M)} B \leq^{\circledast(M,M)} h(A)\}.$$

para alguna matriz $A \in \mathcal{EP}_{(M,M)}$ dada.

Lema 3.4.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz $EP_{(M,M)}$. Entonces*

$$\begin{aligned} [O, h(A)] &= \left\{M^{-1/2}U(O \oplus T)U^* M^{1/2} : U \text{ es unitaria y } T \in \mathcal{PO}_{n-a}\right\} \\ &\subseteq M\text{-}\mathcal{PO}_n. \end{aligned}$$

Demostración. Sea $A = O$ y sea $B \in [O, h(A)]$, es decir, $B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es una matriz tal que

$$O \leq^{\circledast(M,M)} B \leq^{\circledast(M,M)} h(A) = I_n.$$

Por la Definición 3.2.1 se satisface

$$O = \Psi_{(M,M)}(O) \leq^* \Psi_{(M,M)}(B) \leq^* \Psi_{(M,M)}(I_n) = I_n.$$

Como I_n es EP, aplicando el Lema 2.4.5 se obtiene que $\Psi_{(M,M)}(B)$ es un proyector ortogonal de la forma $\Psi_{(M,M)}(B) = U(O \oplus T)U^*$, donde U es una matriz unitaria y $T \in \mathcal{PO}_{n-a}$. Así, por el apartado (e) del Lema 3.4.1, $B = M^{-1/2}U(O \oplus T)U^* M^{1/2}$ es un proyector M-ortogonal de tamaño $n \times n$.

Sea ahora $A \neq O$. Entonces A se puede expresar como en (3.7), es decir $A = M^{-1/2}U_A(C_A \oplus O)U_A^* M^{1/2}$ donde U_A es una matriz unitaria y C_A es no singular. Así, $\Psi_{(M,M)}(A) = U_A(C_A \oplus O)U_A^*$. Sea $B \in [O, h(A)]$, esto es, $O \leq^{\circledast(M,M)} B \leq^{\circledast(M,M)} h(A)$. Por la Definición 3.2.1 se satisface

$O = \Psi_{(M,M)}(O) \leq^* \Psi_{(M,M)}(B) \leq^* \Psi_{(M,M)}(h(A))$. Como $\Psi_{(M,M)}(A)$ es EP, del Lema 3.4.1 (b) se obtiene $O \leq^* \Psi_{(M,M)}(B) \leq^* g(\Psi_{(M,M)}(A))$. Aplicando el Lema 2.4.5 se obtiene que $\Psi_{(M,M)}(B)$ es un proyector ortogonal de tamaño $n \times n$ dado por $\Psi_{(M,M)}(B) = U_A(O \oplus T)U_A^*$, con $T \in \mathcal{PO}_{n-a}$. Por el Lema 3.4.1 (e), $B = M^{-1/2}U_A(O \oplus T)U_A^* M^{1/2}$ es un proyector M-ortogonal de tamaño $n \times n$. ■

Teorema 3.4.2 *La función h definida arriba es monótona decreciente.*

Demostración. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{n\times n}$ dos matrices $EP_{(M,M)}$ que cumplen la condición $A \leq^{\circledast(M,M)} B$. Entonces $\Psi_{(M,M)}(A) \leq^* \Psi_{(M,M)}(B)$ por el Lema 3.2.1. Por el Teorema 2.4.2 se cumple $g(\Psi_{(M,M)}(B)) \leq^* g(\Psi_{(M,M)}(A))$, lo cual es equivalente a $\Psi_{(M,M)}(h(B))) \leq^* \Psi_{(M,M)}(h(A)))$ por el Lema 3.4.1 (b). Finalmente, por el Lema 3.2.1 se obtiene que $h(B) \leq^{\circledast(M,M)} h(A)$. ■

Sin embargo, al considerar las matrices dadas en (3.12) se tiene que A y B son $EP_{(M,M)}$ tales que $h(A) \leq^{\circledast(M,M)} h(B)$ pero $B \not\leq^{\circledast(M,M)} A$. Se puede establecer el siguiente resultado para una subclase importante de matrices.

Teorema 3.4.3 *Sean $A, B \in M\text{-}\mathcal{PO}_n$ tales que $h(B) \leq^{\circledast(M,M)} h(A)$. Entonces $A \leq^{\circledast(M,M)} B$.*

Demostración. Como A y B son proyectores M-ortogonales entonces $\Psi_{(M,M)}(A)$ y $\Psi_{(M,M)}(B)$ son proyectores ortogonales. Si $h(B) \leq^{\circledast(M,M)} h(A)$ entonces $\Psi_{(M,M)}(h(B)) \leq^* \Psi_{(M,M)}(h(A))$, lo cual es equivalente a $g(\Psi_{(M,M)}(B)) \leq^* g(\Psi_{(M,M)}(A))$ por el Lema 3.4.1 (b). Del Teorema 2.4.3

se obtiene

$$\Psi_{(M,M)}(A) \leq^{*} \Psi_{(M,M)}(B),$$

esto es $A \leq^{\circledast_{(M,M)}} B$. ■

Teorema 3.4.4 *Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz $EP_{(M,M)}$ y $B \in \mathbb{C}_0^n \cup \mathbb{C}_1^n$ tales que $A \leq^{\circledast_{(M,M)}} B$. Entonces $f(B) \leq^{\circledast_{(M,M)}} f(A)$ si y sólo si $f(B) \in M$-$\mathcal{PO}_n$.*

Demostración. Por definición, $f(B) \leq^{\circledast_{(M,M)}} f(A)$ significa que

$$\Psi_{(M,M)}(f(B)) \leq^{*} \Psi_{(M,M)}(f(A)),$$

y por el Lema 3.4.1 (b), esto es equivalente a

$$f(\Psi_{(M,M)}(B)) \leq^{*} f(\Psi_{(M,M)}(A)).$$

Como $f(\Psi_{(M,M)}(A)) \in \mathcal{EP}$, usando el Teorema 2.4.4 y el Lema 3.4.1 (b), la última desigualdad se satisface si y sólo si $\Psi_{(M,M)}(f(B))$ es un proyector ortogonal, esto es, $f(B)$ es un proyector M-ortogonal. ■

Observación 3.4.2 Se pueden considerar todas las combinaciones lineales $C_{\alpha,\beta} = \alpha A + \beta B$, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, entre dos matrices $EP_{(M,M)}$ dadas, A y B en $\mathbb{C}^{n\times n}$ [54]. Un resultado similar al del Teorema 2.4.7 se puede dar para la clase $EP_{(M,M)}$ cuando se usa el orden parcial (M,M)-estrella para comparar los siguientes pares de matrices: A y $C_{\alpha,\beta}$, $C_{\alpha,\beta}$ y B, $C_{\alpha,\beta}$ y $C_{\gamma,\delta}$, $f(C_{\alpha,\beta})$ y $f(A)$, $f(B)$ y $f(C_{\alpha,\beta})$, donde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$.

Capítulo 4

Pre-órdenes y la inversa de Drazin

4.1 Introducción

Tal como se definió en el Capítulo 1, dada una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ siempre existe su inversa de Drazin y ésta es la única matriz $A^D \in \mathbb{C}^{n\times n}$ que satisface las condiciones $A^D A A^D = A^D$, $AA^D = A^D A$ y $A^{k+1}A^D = A^k$, con $k = \text{índ}(A)$ [12]. Esta inversa generalizada se puede calcular usando la descomposición core-nilpotente de la matriz. Se recuerda que para una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ no nula de índice k, su descomposición core-nilpotente es $A = A_1 + A_2$, donde $A_1 = P(C \oplus O)P^{-1}$ tiene índice menor o igual que 1, $A_2 = P(O \oplus N)P^{-1}$ es nilpotente de índice k y $A_1A_2 = A_2A_1 = O$. En este caso,

$$A^D = P(C^{-1} \oplus O)P^{-1}.$$

En [48] Mitra, Bhimasankaram y Malik definieron el pre-orden de Drazin $\preceq^d$ en el conjunto de matrices complejas cuadradas utilizando la parte core de las descomposiciones core-nilpotente de las matrices y descartando la parte nilpotente. Si A y B son dos matrices cuadradas del mismo tamaño tales que $A = A_1 + A_2$ y $B = B_1 + B_2$ son sus respectivas descomposiciones core-nilpotente, definieron $\preceq^d$ como sigue: $A \preceq^d B$ si $A_1 \leq^{\#} B_1$. Luego demostraron que esta definición es equivalente a $A^D A = A^D B$ y $AA^D = BA^D$. También obtuvieron algunas caracterizaciones de este pre-orden y establecieron algunas propiedades importantes. En el mismo libro, los autores extienden este pre-orden para convertirlo en una relación de orden. Para hacerlo, agregan a la definición del pre-orden de Drazin una condición más en la que interviene la parte nilpotente, descartada anteriormente, de cada matriz. Probaron así que esa nueva relación es un orden parcial en el conjunto de matrices complejas cuadradas.

Pero, ¿qué ocurre en el conjunto de matrices complejas rectangulares? El pre-orden de Drazin no se puede extender directamente a matrices rectangulares, pues la inversa de Drazin está definida sólo para matrices cuadradas. Con la intención de poder extender algunos resultados, en este capítulo se definen nuevas relaciones binarias en el conjunto de matrices rectangulares utilizando para ello una matriz no nula, que servirá de peso para convertir una matriz rectangular en una cuadrada, y la inversa de Drazin.

El siguiente resultado es el Teorema 2 de [56] y será utilizado a lo largo de todo este capítulo.

Teorema 4.1.1 *Si $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ es una matriz no nula y $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces existen matrices no singulares $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$A = P(A_1 \oplus A_2)Q^{-1} \qquad y \qquad W = Q(W_1 \oplus W_2)P^{-1} \tag{4.1}$$

donde A_1 y W_1 son matrices no singulares; A_2W_2 y W_2A_2 son nilpotentes de índices $k_1 = \text{índ}(AW)$ y $k_2 = \text{índ}(WA)$, respectivamente.

Se observa que el Teorema 4.1.1 también se puede establecer para $k = \text{máx}\{k_1, k_2\}$. Además, la matriz W se puede considerar como un peso necesario para transformar la matriz rectangular A en dos matrices cuadradas, AW y WA.

En la sección siguiente se introducen y caracterizan tres nuevas relaciones binarias definidas sobre el conjunto de matrices rectangulares $\mathbb{C}^{m\times n}$ que son pre-órdenes: $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$, y $\preceq^{d,W}$. Se demuestran algunas caracterizaciones para matrices rectangulares relacionadas mediante cada uno de los pre-ordenes definidos. Más tarde, se realiza un análisis similar para matrices adyacentes. Además, para una matriz A y un peso W se recuerda el concepto W-soporte idempotente, $A^{\sigma,W}$, con el que trabajaron Castro-González y Vélez-Cerrada en [16] y se relacionan los W-soportes idempotentes de dos matrices con los pre-órdenes considerados.

4.2 Relaciones binarias ponderadas y la inversa de Drazin

Como se mencionó en la Introducción, el pre-orden de Drazin se define sobre el conjunto de matrices cuadradas [48] debido a que la inversa de Drazin sólo existe para este tipo de matrices. Sin embargo, este pre-orden no puede definirse de la misma forma sobre matrices complejas rectangulares. Para realizar esto, se considera una matriz peso W y se definen tres pre-órdenes en el conjunto de matrices rectangulares complejas utilizando la inversa de Drazin de ciertas matrices cuadradas. Luego se caracterizan las matrices que están relacionadas mediante estos pre-órdenes.

Definición 4.2.1 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Se dice que:*

(a) $A \preceq^{d,W,r} B$ *si y sólo si* $AW \preceq^{d} BW$.

(b) $A \preceq^{d,W,\ell} B$ *si y sólo si* $WA \preceq^{d} WB$.

(c) $A \preceq^{d,W} B$ *si y sólo si* $A \preceq^{d,W,r} B$ *y* $A \preceq^{d,W,\ell} B$.

En cada caso, la relación $\preceq^{d}$ es considerada adecuadamente sobre $\mathbb{C}^{m\times m}$ o sobre $\mathbb{C}^{n\times n}$.

Dado que $\preceq^{d}$ es un pre-orden se obtiene el siguiente resultado.

Lema 4.2.1 *Las relaciones binarias $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$ definen un pre-orden sobre $\mathbb{C}^{m\times n}$.*

Se puede comprobar que los pre-órdenes $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$ no preservan equivalencias, es decir, si Γ_1, Γ_2 son matrices no singulares, entonces $A \preceq^{\diamond} B$ no implica que $\Gamma_1 A \Gamma_2 \preceq^{\diamond} \Gamma_1 B \Gamma_2$ para cada $\preceq^{\diamond} \in \{\preceq^{d,W,r}, \preceq^{d,W,\ell}, \preceq^{d,W}\}$. El siguiente ejemplo muestra esta situación.

Ejemplo 4.2.1 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \; W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_1 = I_2 \quad \text{y} \quad \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Se cumple que $AW = BW = I_2$, sin embargo $\Gamma_1 A \Gamma_2 \not\preceq^{d,W,r} \Gamma_1 B \Gamma_2$ ya que

$$(\Gamma_1 A \Gamma_2 W)\,(\Gamma_1 A \Gamma_2 W)^D = I_2 \quad \text{y}$$

$$(\Gamma_1 B \Gamma_2 W)\,(\Gamma_1 A \Gamma_2 W)^D = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix}.$$

Este hecho muestra que al usar el Teorema 4.1.1 para caracterizar los preórdenes del Lema 4.2.1 no se pueden eliminar las matrices P y Q.

Teorema 4.2.1 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula, $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $k_1 =$ $\text{índ}(AW)$ y $k_2 = \text{índ}(WA)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \preceq^{d,W,r} B$.

(b) $(AW)^D(AW) = (AW)^D(BW) = (BW)(AW)^D$.

(c) $(AW)^{k_1}(BW) = (BW)(AW)^{k_1} = (AW)^{k_1+1}$.

(d) *Existen matrices no singulares $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$A = P(A_1 \oplus A_2)Q^{-1}, \quad W = Q(W_1 \oplus (W_1^2 \oplus W_2^2))P^{-1} \text{ y}$$

$$B = P \begin{pmatrix} A_1 & B_3 \\ O & B_1^2 \oplus B_2^2 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

donde A_1, W_1, B_1^2 y W_1^2 son matrices no singulares; $A_2(W_1^2 \oplus W_2^2)$, $(W_1^2 \oplus W_2^2)A_2$, $B_2^2 W_2^2$ y $W_2^2 B_2^2$ son nilpotentes y $B_3(W_1^2 \oplus W_2^2) = O$.

Demostración. Los apartados (a), (b) y (c) son equivalentes teniendo en cuenta la igualdad de los proyectores $(AW)(AW)^D$ y $(AW)^D(AW)$ y usando la definición de inversa de Drazin.

(b) $\Longrightarrow$ (d) Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ que satisfacen (b). Por el Teorema 4.1.1, existen matrices $P_A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q_A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que

$$A = P_A(A_1 \oplus A_2')Q_A^{-1} \quad \text{y} \quad W = Q_A(W_1 \oplus W_2)P_A^{-1},$$

donde A_1 y W_1 son no singulares; $A_2'W_2$ y W_2A_2' son nilpotentes de índices k_1 y k_2, respectivamente; $A_1, W_1 \in \mathbb{C}^{t_A\times t_A}$, $A_2' \in \mathbb{C}^{(m-t_A)\times(n-t_A)}$ y $W_2 \in \mathbb{C}^{(n-t_A)\times(m-t_A)}$.

Se considera la siguiente descomposición de B:

$$B = P_A \begin{pmatrix} B_1 & B_3' \\ B_4 & B_2 \end{pmatrix} Q_A^{-1}$$

donde la partición ha sido realizada de acuerdo al tamaño de los bloques de A. Entonces,

$$BW = P_A \begin{pmatrix} B_1W_1 & B_3'W_2 \\ B_4W_1 & B_2W_2 \end{pmatrix} P_A^{-1}.$$

Usando la igualdad $(AW)^D = P_A((A_1W_1)^{-1} \oplus O)P_A^{-1}$ se obtiene

$$(BW)(AW)^D = P_A \begin{pmatrix} B_1A_1^{-1} & O \\ B_4A_1^{-1} & O \end{pmatrix} P_A^{-1},$$

$$(AW)^D(BW) = P_A \begin{pmatrix} (A_1W_1)^{-1}B_1W_1 & (A_1W_1)^{-1}B_3'W_2 \\ O & O \end{pmatrix} P_A^{-1} \text{ y}$$

$$(AW)^D(AW) = P_A(I_{t_A} \oplus O)P_A^{-1}.$$

Por el apartado (b) se satisface $B_1 = A_1$, $B_4 = O$ y $B_3'W_2 = O$, esto es

$$B = P_A \begin{pmatrix} A_1 & B_3' \\ O & B_2 \end{pmatrix} Q_A^{-1}.$$

Si $W_2 = O$, es decir $W_1^2 = O$ y $W_2^2 = O$, el apartado (d) se satisface tomando $P = P_A$, $Q = Q_A$, $A_2 = A_2'$, $B_3 = B_3'$ y $B_1^2 \oplus B_2^2 = B_2$.

Si $W_2 \neq O$, aplicando el Teorema 4.1.1 a las matrices $B_2 \in \mathbb{C}^{(m-t_A)\times(n-t_A)}$ y $W_2 \in \mathbb{C}^{(n-t_A)\times(m-t_A)}$ existen matrices no singulares $R \in \mathbb{C}^{(m-t_A)\times(m-t_A)}$ y $S \in \mathbb{C}^{(n-t_A)\times(n-t_A)}$ tales que

$$B_2 = R(B_1^2 \oplus B_2^2)S^{-1} \quad \text{y} \quad W_2 = S(W_1^2 \oplus W_2^2)R^{-1}, \tag{4.2}$$

donde B_1^2 y W_1^2 son matrices no singulares; $B_2^2 W_2^2$ y $W_2^2 B_2^2$ son nilpotentes.

Se consideran ahora las matrices $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ siguientes:

$$P = P_A(I_{t_A} \oplus R) \qquad \text{y} \qquad Q = Q_A(I_{t_A} \oplus S). \tag{4.3}$$

Se reemplaza (4.2) y (4.3) en las expresiones de A, B y W. Tomando $A_2 = R^{-1}A_2'S$ y $B_3 = B_3'S$ se obtiene

$$A = P\left(A_1 \oplus A_2\right)Q^{-1}, \quad B = P\begin{pmatrix} A_1 & B_3 \\ O & R^{-1}B_2S \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ y}$$

$$W = Q\left(W_1 \oplus S^{-1}W^2R\right)P^{-1}.$$

(d) $\Longrightarrow$ (b) Se puede demostrar realizando los cálculos correspondientes. ■

Lema 4.2.2 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces $A \preceq^{d,W,\ell} B$ si y sólo si $A^* \preceq^{d,W^*,r} B^*$.*

Demostración. Sea $A \preceq^{d,W,\ell} B$. Usando la Definición 4.2.1 se tiene que

$$(WA)^D(WA) = (WA)^D(WB) \quad \text{y} \quad (WA)(WA)^D = (WB)(WA)^D.$$

Calculando la traspuesta conjugada en ambos miembros de las igualdades y usando la propiedad $(A^D)^* = (A^*)^D$ se obtiene

$$(A^*W^*)(A^*W^*)^D = (B^*W^*)(A^*W^*)^D \quad \text{y}$$

$$(A^*W^*)^D(A^*W^*) = (B^*W^*)(A^*W^*)^D,$$

que es equivalente a $A^* \preceq^{d,W^*,r} B^*$.

De manera similar se demuestra la implicación recíproca. ■

El siguiente resultado muestra una caracterización para $\preceq^{d,W,\ell}$.

Teorema 4.2.2 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula, $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $k_1 = \text{índ}(AW)$ y $k_2 = \text{índ}(WA)$. Las siguientes condiciones son equivalentes:*

(a) $A \preceq^{d,W,\ell} B$.

(b) $(WA)^D(WA) = (WA)^D(WB) = (WB)(WA)^D$.

(c) $(WA)^{k_2}(WB) = (WB)(WA)^{k_2} = (WA)^{k_2+1}$.

(d) *Existen matrices no singulares $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$A = P(A_1 \oplus A_2)Q^{-1}, \quad W = Q(W_1 \oplus (W_1^2 \oplus W_2^2))P^{-1} \ \ y$$

$$B = P \begin{pmatrix} A_1 & O \\ B_4 & B_1^2 \oplus B_2^2 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

donde A_1, W_1, B_1^2 y W_1^2 son matrices no singulares; $A_2(W_1^2 \oplus W_2^2)$, $(W_1^2 \oplus W_2^2)A_2$, $B_2^2 W_2^2$ y $W_2^2 B_2^2$ son nilpotentes y $(W_1^2 \oplus W_2^2)B_4 = O$.

Demostración. Se puede probar usando el Lema 4.2.2 y el Teorema 4.2.1.

■

Notar que aunque en el Teorema 4.2.2 se usan los mismos nombres de matrices que en el Teorema 4.2.1, ellas no necesariamente son las mismas. Esto es, por ejemplo, la matriz P en el Teorema 4.2.1 puede ser diferente a la matriz P en el Teorema 4.2.2. Lo mismo ocurre con las matrices que aparecen en el siguiente teorema.

Teorema 4.2.3 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula, $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, $k_1 = \text{índ}(AW)$ y $k_2 = \text{índ}(WA)$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \preceq^{d,W} B$.

(b) $(AW)^D(AW) = (AW)^D(BW) = (BW)(AW)^D$ *y*
$(WA)^D(WA) = (WA)^D(WB) = (WB)(WA)^D$.

(c) $(AW)^{k_1}(BW) = (BW)(AW)^{k_1} = (AW)^{k_1+1}$ *y*
$(WA)^{k_2}(WB) = (WB)(WA)^{k_2} = (WA)^{k_2+1}$.

(d) *Existen matrices no singulares $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$A = P(A_1 \oplus A_2)Q^{-1}, \quad W = Q(W_1 \oplus (W_1^2 \oplus W_2^2))P^{-1} \text{ y}$$

$$B = P\left(A_1 \oplus \left(B_1^2 \oplus B_2^2\right)\right)Q^{-1},$$

donde A_1, W_1, B_1^2 y W_1^2 son matrices no singulares; $A_2(W_1^2 \oplus W_2^2)$, $(W_1^2 \oplus W_2^2)A_2$, $B_2^2W_2^2$ y $W_2^2B_2^2$ son nilpotentes.

Demostración. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrices tales que $A \preceq^{d,W} B$. Esto es, $A \preceq^{d,W,r} B$ y $A \preceq^{d,W,\ell} B$. Por el Teorema 4.2.1,

$$A = P(A_1 \oplus A_2)Q^{-1}, \qquad W = Q(W_1 \oplus (W_1^2 \oplus W_2^2)P^{-1} \text{ y}$$

$$B = P \begin{pmatrix} A_1 & B_3 \\ O & B_1^2 \oplus B_2^2 \end{pmatrix} Q^{-1},$$

donde todos los bloques satisfacen las condiciones del apartado (d) del Teorema 4.2.1. Usando que $WA \preceq^d WB$ se obtiene $B_3 = O$. Esto demuestra (a) $\Longrightarrow$ (d). Las implicaciones restantes siguen directamente de los Teoremas 4.2.1 y 4.2.2. ■

Para una matriz rectangular A y un peso W de tamaños adecuados, Castro-González y Vélez-Cerrada en [16] caracterizaron todas las matrices B para las cuales los proyectores $A^{\sigma,W}W$ y $B^{\sigma,W}W$ coinciden, donde $A^{\sigma,W}$ es el W-soporte idempotente definido por $A^{\sigma,W} = A(WA)^D = (AW)^D A$. Los autores también hicieron lo mismo para los proyectores $WA^{\sigma,W}$ y $WB^{\sigma,W}$. Además, caracterizaron las matrices B tales que $A^{\sigma,W} = B^{\sigma,W}$. En lo que sigue se comparan los Teoremas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 con el Teorema 2.1, el Teorema 2.4 y el Corolario 2.7 de [16]. Para ver esto, primero se observa que si $A \preceq^{d,W,r} B$ entonces por el Teorema 4.2.1 se puede escribir

$$B = P \begin{pmatrix} A_1 & X & Y \\ O & B_1^2 & O \\ O & O & B_2^2 \end{pmatrix} Q^{-1}$$

donde B_3 ha sido particionado como $\begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix}$ de acuerdo a los bloques de $B_1^2 \oplus B_2^2$. Claramente, la matriz

$$\widetilde{B} = \begin{pmatrix} A_1 & X \\ O & B_1^2 \end{pmatrix}$$

es no singular y tomando $\widetilde{Y} = \begin{pmatrix} Y^* & O \end{pmatrix}^*$ se reescribe B:

$$B = P \begin{pmatrix} \widetilde{B} & \widetilde{Y} \\ O & B_2^2 \end{pmatrix} Q^{-1}. \tag{4.4}$$

Como $B_3(W_1^2 \oplus W_2^2) = O$, realizando el producto correspondiente se obtiene $X = O$ e $\widetilde{Y}W_2^2 = O$. Así, si $A \preceq^{d,W,r} B$ entonces B puede expresarse como en (4.4) donde $\widetilde{B} \in \mathbb{C}^{(t_A+t)\times(t_A+t)}$ es no singular, $\widetilde{Y}W_2^2 = O$ y $B_2^2W_2^2$ es nilpotente. Sin embargo, la matriz B_1 en el Teorema 2.1 (ii) de [16] y la matriz A_1 en el Lema 1.1 de [16] tienen el mismo tamaño. Esto muestra que las condiciones en el Teorema 4.2.1 no implican las condiciones en el Teorema 2.1 de [16]. Es decir, el Teorema 4.2.1 es diferente del Teorema 2.1 de [16]. Lo mismo ocurre con el Teorema 4.2.2 y el Teorema 2.4 de [16] y también con el Teorema 4.2.3 y el Corolario 2.7 de [16].

Teorema 4.2.4 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$. Entonces se satisfacen las siguientes afirmaciones:*

(a) *Si $A \preceq^{d,W,r} B$ y $B \preceq^{d,W,r} A$ entonces $A^{\sigma,W}W = B^{\sigma,W}W$.*

(b) *Si $A \preceq^{d,W,\ell} B$ y $B \preceq^{d,W,\ell} A$ entonces $WA^{\sigma,W} = WB^{\sigma,W}$.*

(c) *Si $A \preceq^{d,W} B$ y $B \preceq^{d,W} A$ entonces $A^{\sigma,W} = B^{\sigma,W}$.*

Demostración. Es suficiente probar sólo el apartado (a) ya que el segundo apartado se puede obtener de manera similar y (c) es inmediato de [16].

Sea $A \preceq^{d,W,r} B$. Por el Teorema 4.2.1 se tiene que

$$A = P(A_1 \oplus A_2)Q^{-1}, \qquad B = P\begin{pmatrix} A_1 & B_3 \\ O & B_1^2 \oplus B_2^2 \end{pmatrix} Q^{-1} \text{ y}$$

$$W = Q(W_1 \oplus (W_1^2 \oplus W_2^2))P^{-1},$$

donde A_1W_1 y $B_1^2W_1^2$ son no singulares, $B_2^2W_2^2$, $W_2^2B_2^2$, $A_2(W_1^2 \oplus W_2^2$ y $(W_1^2 \oplus W_2^2)A_2$ son matrices nilpotentes y $B_3(W_1^2 \oplus W_2^2) = O$. Entonces

$$BW = P(A_1W_1 \oplus (B_1^2W_1^2 \oplus B_2^2W_2^2))P^{-1},$$

y así

$$(BW)^D = P((A_1W_1)^{-1} \oplus ((B_1^2W_1^2)^{-1} \oplus O))P^{-1},$$

con lo que se obtiene $BW(BW)^D = P(I_{t_A} \oplus (I_t \oplus O))P^{-1}$.

Si ahora se particiona

$$A_2 = \begin{pmatrix} A_1^2 & A_3^2 \\ A_4^2 & A_2^2 \end{pmatrix},$$

se obtiene

$$A_2(W_1^2 \oplus W_2^2) = \begin{pmatrix} A_1^2W_1^2 & A_3^2W_2^2 \\ A_4^2W_1^2 & A_2^2W_2^2 \end{pmatrix}.$$

Como $B \preceq^{d,W,r} A$ se cumple $(BW)^DBW = (BW)^DAW = AW(BW)^D$, luego reemplazando por las expresiones de BW, $(BW)^D$ y AW se puede ver que $A_1^2W_1^2 = B_1^2W_1^2$, $A_3^2W_2^2 = O$, y $A_4^2 = O$. Por lo tanto, la matriz nilpotente $A_2(W_1^2 \oplus W_2^2) = B_1^2W_1^2 \oplus A_2^2W_2^2$. La matriz $B_1^2W_1^2$ es no singular, luego B_1^2 debe estar ausente en la descomposición de la matriz B. Así, por el Teorema 2.1 de [16], $A^{\sigma,W}W = B^{\sigma,W}W$. ■

Del Teorema 4.2.1 (d) se sigue que $A \preceq^{d,W,r} B$ implica $A^{\sigma,W} \preceq^{d,W,r} B^{\sigma,W}$. Análogamente, se pueden establecer implicaciones similares para las relaciones $\preceq^{d,W,r}$ y $\preceq^{d,W}$.

Es necesario enfatizar que las relaciones binarias $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$, y $\preceq^{d,W}$ son diferentes dos a dos. Por ejemplo, para probar que $A \preceq^{d,W,r} B$ no implica $A \preceq^{d,W,\ell} B$ basta considerar las matrices A, B y W del Ejemplo 4.2.1.

4.3 Proyectores de Drazin ponderados iguales

Considerando las matrices $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$, $W \neq O$, se pueden definir dos proyectores que involucran la inversa de Drazin de matrices cuadradas. Estos proyectores son $(AW)^D AW$ y $(WA)^D WA$, de tamaños $m\times m$ y $n\times n$, respectivamente. La definición que se da a continuación está inspirada en la definición de matriz EP y considera el caso en que ambos proyectores de Drazin ponderados sean iguales.

Definición 4.3.1 *Sea $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$, $W \neq O$. Una matriz $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ es llamada EDP_W si y sólo si satisface $(AW)^D AW = (WA)^D WA$.*

Para ser fieles a la definición original en [32] se mantienen las siglas en inglés EDP_W, *Equal weighted Drazin Projectors.*

Ejemplo 4.3.1 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } W = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Realizando los productos correspondientes se puede verificar que A es EDP_W pero B no lo es, pues

$$(BW)^D BW = \operatorname{diag}(1,0,0) \quad \text{y} \quad (WB)^D WB = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Sin embargo, la propiedad de ser o no una matriz EDP_W depende del peso W elegido. En efecto, A no es EDP_{W_1} para $W_1 = B$ ya que

$$(AW_1)^D AW_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad (W_1A)^D W_1A = \operatorname{diag}(1,0,0).$$

La clase de todas las matrices EDP_W se denota por $\mathcal{EDP}_W$. Notar que si $A \in \mathcal{EDP}_W$ entonces $PAP^{-1} \in \mathcal{EDP}_{PWP^{-1}}$ para toda matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ ya que $(PAP^{-1})^D = PA^DP^{-1}$. El siguiente resultado caracteriza las matrices EDP_W.

Teorema 4.3.1 *Sean $A, W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ con $W \neq O$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) $A \in \mathcal{EDP}_W$.

(b) *Existe una matriz no singular $P \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = P(A_1 \oplus A_2)P^{-1} \qquad y \qquad W = P(W_1 \oplus W_2)P^{-1},$$

donde A_1, W_1 son matrices no singulares, A_2W_2 y W_2A_2 son nilpotentes.

Demostración. Sea $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz EDP_W. Como $W \neq O$, se puede escribir

$$A = P(A_1' \oplus A_2')Q^{-1} \qquad \text{y} \qquad W = Q(W_1' \oplus W_2')P^{-1}, \tag{4.5}$$

donde los bloques de las matrices tienen las propiedades indicadas en el Teorema 4.1.1. Es fácil ver que

$$(AW)^D AW = P(I_t \oplus O)P^{-1} \qquad \text{y} \qquad (WA)^D WA = Q(I_t \oplus O)Q^{-1}.$$

Igualando y particionando

$$P^{-1}Q = \begin{pmatrix} M & N \\ R & S \end{pmatrix}$$

de acuerdo a los bloques de A, se obtiene $N = O$ y $R = O$, lo que implica $Q = P(M \oplus S)$. El apartado (b) sigue de reemplazar Q en las expresiones de A y W en (4.5) y tomando $A_1 = A_1'M^{-1}$, $A_2 = A_2'S^{-1}$, $W_1 = MW_1'$ y $W_2 = SW_2'$. La inversa es trivial realizando los cálculos correspondientes. ■

En el resultado siguiente se estudia el pre-orden $\preceq^{d,W}$ sobre la clase de matrices con proyectores de Drazin ponderados iguales. Se caracterizan cuándo dos matrices están relacionadas por medio del pre-orden indicado.

Teorema 4.3.2 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times n}$ una matriz no nula y $A \in \mathcal{EDP}_W$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *Existe $B \in \mathcal{EDP}_W$ tal que $A \preceq^{d,W} B$.*

(b) *Existe una matriz no singular $V \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tal que*

$$A = V(A_1 \oplus A_2)V^{-1}, \qquad B = V(A_1 \oplus (B_1^2 \oplus B_2^2)V^{-1} \ \textit{y} \tag{4.6}$$

$$W = V(W_1 \oplus (W_1^2 \oplus W_2^2)V^{-1}, \tag{4.7}$$

donde A_1, W_1, B_1^2 *y* W_1^2 *son matrices no singulares,* $B_2^2W_2^2$*,* $W_2^2B_2^2$*,* $A_2(W_1^2 \oplus W_2^2)$ *y* $(W_1^2 \oplus W_2^2)A_2$ *son nilpotentes y* $B_2^2 \in \mathcal{EDP}_{W_2^2}$*.*

Demostración. Como $A \in \mathcal{EDP}_W$, aplicando el Teorema 4.3.1 se puede escribir

$$A = P(A_1 \oplus A_2')P^{-1} \qquad \text{y} \qquad W = P(W_1 \oplus W_2')P^{-1} \tag{4.8}$$

donde los bloques de las matrices tienen las propiedades indicadas en dicho teorema. Se particiona

$$B = P\begin{pmatrix} B_1 & B_3 \\ B_4 & B_2 \end{pmatrix}P^{-1}$$

de acuerdo a los bloques de A. Las igualdades $(AW)^DAW = BW(AW)^D$ y $(WA)^DWA = (WA)^DWB$ son equivalentes a $B_1 = A_1$, $B_4 = O$ y $B_3 = O$. Así,

$$B = P(A_1 \oplus B_2)P^{-1}. \tag{4.9}$$

Ahora, $B \in \mathcal{EDP}_W$ si y sólo si se satisface $(BW)^DBW = (WB)^DWB$, de donde se tiene que $B_2 \in \mathcal{EDP}_{W_2'}$. Aplicando nuevamente el Teorema 4.3.1 a la matriz B_2 y al peso W_2' se obtiene $B_2 = P_1(B_1^2 \oplus B_2^2)P_1^{-1}$ y $W_2' = P_1(W_1^2 \oplus W_2^2)P_1^{-1}$, donde $B_2^2W_2^2$ y $W_2^2B_2^2$ son matrices nilpotentes.

Tomando $V = P(I_t \oplus P_1)$, $A_2 = P_1^{-1}A_2'P_1$ y reemplazando en las expresiones (4.8) y (4.9) se obtienen las matrices A y B de (4.6), y la matriz W de (4.7). Además, $B_2^2 \in \mathcal{EDP}_{W_2^2}$, $A_2(W_2^2 \oplus W_2^2)$ y $(W_1^2 \oplus W_2^2)A_2$ son nilpotentes. Por lo tanto se cumple (a) $\Longrightarrow$ (b). La implicación recíproca es trivial, realizando los productos correspondientes. ■

Las relaciones a izquierda y derecha, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W,r}$, también se pueden analizar en la clase de matrices con proyectores de Drazin ponderados iguales, obteniéndose resultados similares por lo cual no se incluyen en esta memoria.

4.4 Matrices adyacentes y pre-órdenes

Para dos matrices dadas $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$, se dice que A y B son adyacentes si $\mathrm{rg}(B-A) = 1$ [35, 52]. En esta sección se dan tres teoremas que caracterizan las matrices adyacentes relacionadas mediante los pre-órdenes $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$.

Teorema 4.4.1 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \preceq^{d,W,r} B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A y B son adyacentes.*

(b) *Existen matrices no singulares $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$B = A + P\begin{pmatrix} O & uv^* \end{pmatrix} Q^{-1},$$

donde $u \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ y $v \in \mathbb{C}^{(n-t_A)\times 1}$ son vectores no nulos.

Demostración. Sean $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ matrices que satisfacen $A \preceq^{d,W,r} B$. Por el Teorema 4.2.1,

$$A = P(A_1 \oplus A_2)Q^{-1} \qquad \text{y} \qquad B = P\begin{pmatrix} A_1 & B_3 \\ O & B_1^2 \oplus B_2^2 \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Se puede ver que $\mathrm{rg}(B-A)=1$ si y sólo si

$$\mathrm{rg}\begin{pmatrix} B_3 \\ (B_1^2 \oplus B_2^2) - A_2 \end{pmatrix} = 1$$

lo cual es equivalente a

$$\begin{pmatrix} B_3 \\ B_1^2 \oplus B_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} O \\ A_2 \end{pmatrix} + uv^*,$$

para vectores no nulos $u \in \mathbb{C}^{m\times 1}$ y $v \in \mathbb{C}^{(n-t_A)\times 1}$. Reemplazando en la expresión de arriba para B se tiene que $B = A + P\begin{pmatrix} O & uv^* \end{pmatrix}Q^{-1}$.

Se observa que $A \neq B$ en el apartado (a) es equivalente a $u \neq 0$ y $v \neq 0$ en el apartado (b). ■

Análogamente se dan los siguientes resultados, cuyas demostraciones son similares a la del teorema anterior.

Teorema 4.4.2 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \preceq^{d,W,\ell} B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A y B son adyacentes.*

(b) *Existen matrices no singulares $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$B = A + P\begin{pmatrix} O \\ uv^* \end{pmatrix}Q^{-1}$$

donde $u \in \mathbb{C}^{(m-t_A)\times 1}$ y $v \in \mathbb{C}^{n\times 1}$ son vectores no nulos.

Ejemplo 4.4.1 Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } W = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se puede ver que A y B son matrices adyacentes, pues:

$$\operatorname{rg}(B - A) = \operatorname{rg}\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 1.$$

Además $A \preceq^{d,W,r} B$ pues $AW = BW = I_2$, es decir, se satisface que $AW \preceq^{d} BW$. Pero $A \not\preceq^{d,W,l} B$ ya que:

$$(WA)^D (WA) = WA = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$(WA)^D (WB) = WB \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \neq WA.$$

Teorema 4.4.3 *Sean $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una matriz no nula y $A, B \in \mathbb{C}^{m\times n}$ tales que $A \preceq^{d,W} B$. Las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(a) *A y B son adyacentes.*

(b) *Existen matrices no singulares $P \in \mathbb{C}^{m\times m}$ y $Q \in \mathbb{C}^{n\times n}$ tales que*

$$B = A + P(O \oplus uv^*)Q^{-1},$$

donde $u \in \mathbb{C}^{(m-t_A)\times 1}$ y $v \in \mathbb{C}^{(n-t_A)\times 1}$ son vectores no nulos.

Observación 4.4.1 Si A y B son matrices adyacentes entonces se satisface alguna de las siguientes afirmaciones:

(a) $A \preceq^{d,W,r} B$ y $B \preceq^{d,W,r} A$, o bien se cumple que AW y BW son matrices adyacentes,

(b) $A \preceq^{d,W,\ell} B$ y $B \preceq^{d,W,\ell} A$, o bien se cumple que WA y WB son matrices adyacentes.

En efecto, para el caso (a), si A y B son adyacentes entonces se satisface $\operatorname{rg}(BW - AW) \leq \operatorname{rg}(B - A) = 1$. Esto es, $AW = BW$ o se cumple que AW y BW son matrices adyacentes. En el caso (b) ocurre algo similar.

4.5 Algunas consideraciones sobre órdenes parciales ponderados

Para una matriz no nula $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ se considera ahora el conjunto

$$\mathcal{M}_{W,r} = \{A \in \mathbb{C}^{m\times n} : \text{índ}(AW) \leq 1\}.$$

Cabe observar que $\mathcal{M}_{W,r} \neq \emptyset$ ya que

$$\operatorname{rg}((W^*W)^2) = \operatorname{rg}((W^*W)(W^*W)^*) = \operatorname{rg}(W^*W),$$

es decir $\text{índ}(W^*W) \leq 1$. Luego, $W^* \in \mathcal{M}_{W,r}$.

Definición 4.5.1 *Sean $A, B \in \mathcal{M}_{W,r}$. Se dice que $A \preceq^{\#,W,r} B$ si $AW \leq^{\#} BW$.*

Notar que la relación $\preceq^{\#,W,r}$ es un pre-orden y coincide con la restricción de $\preceq^{d,W,r}$ en el conjunto $\mathcal{M}_{W,r}$. Por otra parte, se tiene que el Teorema 4.2.1

de representación también es verdadero para la relación $\preceq^{\#,W,r}$ Además, teniendo en cuenta que $A \in \mathcal{M}_{W,r}$ se cumple que $A_2W_2 = O$ o bien A_2W_2 está ausente. Además, como $k_1 \in \{0,1\}$ y $|k_1 - k_2| \leq 1$ resulta que $k_2 \in \{0,1,2\}$ por el Teorema 11.1.2 de [55]. Entonces, W_2A_2 está ausente si $k_2 = 0$, $W_2A_2 = O$ si $k_2 = 1$ o $(W_2A_2)^2 = O \neq W_2A_2$ si $k_2 = 2$.

Teniendo en cuenta que $\leq^{\#}$ es un orden parcial sobre el conjunto de matrices en $\mathbb{C}^{m\times m}$ de índice a lo sumo 1, se establece el siguiente resultado.

Teorema 4.5.1 *La relación $\preceq^{\#,W,r}$ es un orden parcial sobre $\mathcal{M}_{W,r}$ siempre que W tenga rango completo por filas.*

Se considera el conjunto

$$\mathcal{P}_{W,r} = \{\mathcal{Z} \subseteq \mathbb{C}^{m\times n} : \preceq^{d,W,r} \text{ es un orden parcial sobre } \mathcal{Z}\}$$

ordenado por la inclusión de conjuntos.

Teorema 4.5.2 *Si $W \in \mathbb{C}^{n\times m}$ tiene rango completo por filas entonces $\mathcal{M}_{W,r}$ es un elemento maximal de $\mathcal{P}_{W,r}$.*

Demostración. Primero se observa que $\mathcal{M}_{W,r} \in \mathcal{P}_{W,r}$. Se asume que existe un subconjunto $\mathcal{Z} \in \mathcal{P}_{W,r}$ tal que $\mathcal{M}_{W,r} \subseteq \mathcal{Z}$. Si se supone que $A \in \mathcal{Z} - M_{W,r}$ entonces $\text{índ}(AW) > 1$ y el Teorema 4.1.1 asegura que $A = P(A_1 \oplus A_2)Q^{-1}$ y $W = Q(W_1 \oplus W_2)P^{-1}$ como se indica en (4.1). Como $\text{índ}(A_2W_2) > 1$ se obtiene $A_2W_2 \neq O$ [12]. Ahora, sea $B = P(A_1 \oplus O)Q^{-1}$. Se puede ver que $B \in \mathcal{M}_{W,r} \subseteq \mathcal{Z}$. Por el Teorema 4.2.1 se cumple que $A \preceq^{d,W,r} B$. Usando la definición es fácil ver que $B \preceq^{d,W,r} A$. Luego, se tiene que $A, B \in \mathcal{Z}$ y $\preceq^{d,W,r}$ es antisimétrica en $\mathcal{Z}$ entonces $A = B$. Por lo tanto, $A_2 = O$ lo cual es una contradicción ya que $A_2W_2 \neq O$. ■

Similarmente, si $A, B \in \mathcal{M}_{W,\ell} = \{A \in \mathbb{C}^{m\times n} : \text{índ}(WA) \leq 1\}$, se define $A \preceq^{\#,W,\ell} B$ si $WA \leq^{\#} WB$. Se obtiene que $\preceq^{\#,W,\ell}$ es un orden parcial en $\mathcal{M}_{W,\ell}$ siempre que W tenga rango completo por filas. También es válido que $\mathcal{M}_{W,\ell}$ es un elemento maximal entre todos los subconjuntos $\mathcal{Z}$ de $\mathbb{C}^{m\times n}$ que satisfacen que $\preceq^{d,W,\ell}$ es un orden parcial en $\mathcal{Z}$.

Finalmente, definiendo $A \preceq^{\#,W} B$ si $A \preceq^{\#,W,r} B$ y $A \preceq^{\#,W,\ell} B$ para $A, B \in \mathcal{M}_{W,r} \cap \mathcal{M}_{W,\ell}$, también se puede establecer que $\preceq^{\#,W}$ es un orden parcial siempre que W tenga rango completo.

Conclusiones y líneas futuras de investigación

En los últimos años se ha incrementado notablemente el estudio de órdenes parciales sobre diferentes conjuntos de matrices. Esto se ve reflejado en el gran número de artículos de investigación sobre estos temas que han sido publicados durante las últimas décadas en revistas de carácter internacional con alto índice de impacto.

Si bien eran conocidos una cantidad considerable de resultados en esta área, en la última década se incrementó este estudio a partir del libro

> [48] S. K. Mitra, P. Bhimasankaram y S. B. Malik, *Matrix partial orders, shorted operators and applications,* World Scientific Publishing Company, 2010.

De hecho nuestro grupo de trabajo está en contacto con la Prof. Saroj Malik y realiza colaboraciones científicas con ella.

Sin embargo, aún queda mucho por investigar con respecto a estos temas. En la presente memoria se profundizó el estudio sobre algunos órdenes parciales, encontrando nuevos resultados y extendiendo otros conocidos en diferentes conjuntos de matrices, y se definieron nuevas relaciones binarias que extienden el pre-orden de Drazin al conjunto de matrices rectangulares complejas.

En el Capítulo 2 se introdujo el orden parcial estrella en el conjunto de matrices EP. Más específicamente, en la Sección 2.3 se dieron algunas propiedades de este orden sobre el conjunto mencionado y se caracterizaron los predecesores y sucesores de una matriz EP dada (Teoremas 2.31 y 2.3.3, respectivamente). El principal resultado de esta sección es el Teorema 2.3.5 en el cual se mostraron descomposiciones para dos matrices EP comparables con el orden parcial estrella. Este resultado se demostró de manera directa, usando la forma canónica de las matrices EP.

En la Sección 2.4 se estudió el proyector espectral correspondiente al valor propio nulo de una matriz EP y su relación con los órdenes parciales estrella y grupo. Se demostró que el conjunto de matrices EP es cerrado bajo los proyectores estudiados y además se probó que las únicas matrices EP que satisfacen $(A^{\pi})^{\pi} = A$ son los proyectores ortogonales. El Teorema 2.4.2 muestra que, dadas dos matrices EP, si B es un sucesor de A mediante el orden parcial estrella entonces B^{π} es un predecesor de A^{π} bajo el mismo orden. Pero, existen matrices EP que no verifican la implicación recíproca. En el Teorema 2.4.3 se verificó la validez de dicha recíproca en la clase de los proyectores ortogonales. El capítulo finaliza con el cálculo de todas las combinaciones lineales posibles entre dos matrices EP diferentes, relacionadas a través del orden parcial estrella.

El conjunto de matrices $EP_{(M,N)}$ surgió en [53] con la idea de extender el conjunto de matrices EP. Con esta misma finalidad, en el Capítulo 3 se definió el orden parcial estrella ponderado por las mismas matrices hermíticas definidas positivas, M y N (Definición 2.3.1). En los Teoremas 3.2.3 y 3.2.4 se caracterizaron los predecesores y sucesores de una matriz $EP_{(M,M)}$ dada, respectivamente.

El eje central de la Sección 3.3 fue proporcionar dos algoritmos para calcular la inversa de Moore-Penrose ponderada de una matriz $EP_{(M,M)}$ arbitraria, inversa necesaria para algunas caracterizaciones de este tipo de matrices. En la última sección del Capítulo 3 se relacionó el proyector espectral correspondiente al valor propio nulo de una matriz $EP_{(M,N)}$ con el orden estrella ponderado. En particular se demostró que si M y N coinciden entonces el conjunto de matrices $EP_{(M,M)}$ es cerrado bajo el proyector espectral mencionado.

El objetivo principal del Capítulo 4 fue extender el pre-orden de Drazin al conjunto de matrices rectangulares. En este último conjunto se definieron tres nuevos pre-órdenes ($\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$) usando para ello una matriz peso W, que permitió convertir una matriz rectangular A en dos matrices cuadradas AW y WA, y el pre-orden de Drazin entre matrices cuadradas. En los Teoremas 4.2.1, 4.2.2 y 4.2.3 se caracterizaron las relaciones binarias $\preceq^{d,W,r}$, $\preceq^{d,W,\ell}$ y $\preceq^{d,W}$, respectivamente. En el Teorema 4.2.4 se mostró bajo qué condiciones, que involucran al pre-orden $\preceq^{d,W,r}$, los proyectores $A^{\sigma,W}W$ y $B^{\sigma,W}W$ coinciden. De forma análoga, se dieron condiciones para que $WA^{\sigma,W}$ sea igual a $WB^{\sigma,W}$ y para que los W-soportes idempotentes coincidan.

En la Sección 4.3, dada una matriz W, se consideró la clase $\mathcal{EDP}_W$ formado por todas las matrices cuadradas complejas A que satisfacen $(AW)^D AW = (WA)^D WA$. El Teorema 4.3.2 muestra una caracterización para este tipo de matrices y en lo que resta de la sección se relacionaron estas nuevas matrices con cada uno de los pre-órdenes definidos.

A partir del concepto de matrices adyacentes utilizado por P. Šemrl y A. R. Sourour en su artículo [52], en la Sección 4.4 se relacionaron estas matrices con cada uno de los nuevos pre-órdenes y en cada caso se encontraron caracterizaciones para ellas. Por último, en la Sección 4.5 se restringió el pre-orden $\preceq^{d,W,r}$ al conjunto de todas las matrices rectangulares A que satisfacen que el índice de AW es a lo sumo 1 y en el Teorema 4.5.1 se mostró en qué caso este pre-orden se convierte en orden parcial. Un análisis similar se realizó con el pre-orden $\preceq^{d,W,\ell}$ en el conjunto de todas las matrices A tal que el índice de WA es menor o igual que 1.

Se han cubierto los objetivos planteados al comienzo de esta tesis y, de manera natural, durante el desarrollo de la misma surgieron nuevos problemas colaterales. Algunos de ellos se resolvieron y otros serán considerados como líneas de investigación futuras.

A continuación se da una lista de algunos posibles problemas concretos o líneas de estudio para continuar este trabajo:

- Extender algunos resultados a operadores lineales acotados definidos sobre espacios de Hilbert.

  En los últimos años ha aumentado significativamente la cantidad de trabajos publicados que extienden el estudio de órdenes parciales y pre-órdenes sobre conjuntos de matrices a operadores sobre espacios de Hilbert.

- Definir y estudiar algunos órdenes parciales o pre-órdenes sobre matrices rectangulares utilizando la inversa de Drazin ponderada.

  Como ya se mencionó, en este trabajo se extiende el pre-orden de Drazin a matrices rectangulares, usando para ello una matriz peso y el pre-orden de Drazin entre ciertas matrices cuadradas. Este último pre-orden se define en [48] usando la inversa de Drazin de matrices cuadradas. En [18] R. E. Cline y T. N. E. Greville definieron la inversa de Drazin ponderada de una matriz rectangular, considerando también una matriz peso. Esto motiva plantearse si se pueden definir, de manera similar a lo realizado en el Capítulo 4, órdenes parciales o pre-órdenes en el conjunto de matrices rectangulares pero ahora utilizando la inversa de Drazin ponderada.

- Estudiar la estructura ordenada subyacente de algunos órdenes parciales en ciertos conjuntos de matrices.

  R. E. Hartwig y M. P. Drazin establecieron en [27] que el conjunto de matrices rectangulares complejas es un semireticulado inferior con respecto al orden parcial estrella. Se puede particularizar este trabajo al estudio de la estructura reticular subyacente en el conjunto de matrices EP con respecto al orden mencionado, considerando posiblemente algunos resultados obtenidos en el Capítulo 2 de esta memoria. También, esta idea se hará extensible al caso de los órdenes parciales introducidos mediante la inversa de Moore-Penrose ponderada y los introducidos mediante la inversa de Drazin.

Tabla de símbolos

$\mathbb{C}^{m\times n}$	espacio de matrices complejas de tamaño $m \times n$.
I_n	matriz identidad de tamaño $n \times n$.
$\mathbb{C}_r^{m\times n}$	conjunto de matrices de tamaño $m \times n$ y de rango r.
$\mathcal{N}(A)$	subespacio núcleo de A.
$\mathcal{R}(A)$	subespacio imagen de A.
$\mathrm{rg}(A)$	rango de la matriz A.
$\mathrm{índ}(A)$	índice de A.
A^*	traspuesta conjugada de A.
A^{-1}	inversa de A.
$A^\#$	inversa de grupo de A.
$A^\dagger$	inversa de Moore-Penrose de A.
A^D	inversa de Drazin de A.
A^π	proyector correspondiente al valor propio nulo de A.
$\sigma(A)$	espectro o conjunto de valores propios de A.
$S^\perp$	subespacio complementario ortogonal del subespacio S.
$P_{M,N}$	proyector ortogonal sobre M paralelamente a N.

$\preceq^{d}$	pre-orden de Drazin.
$\leq^{*}$	orden parcial estrella.
$A^{\dagger(M,N)}$	inversa de Moore-Penrose de A ponderada respecto a M y N.
$A^{\circledast(M,N)}$	traspuesta conjugada de A ponderada respecto a M y N.
$\leq^{\circledast(M,N)}$	orden parcial estrella ponderado con respecto a M y N.
$\preceq^{d,W,r}$	pre-orden de Drazin ponderado a derecha.
$\preceq^{d,W,\ell}$	pre-orden de Drazin ponderado a izquierda.
$\preceq^{d,W}$	pre-orden de Drazin ponderado.

Bibliografía

[1] J. K. Baksalary, O. M. Baksalary y X. Liu. "Further relationships between certain partial orders of matrices and their squares". En: *Linear Algebra and its Applications* 375 (2003), págs. 171-180.

[2] J. K. Baksalary y J. Hauke. "A further algebraic version of Cochran's theorem and matrix partial orderings". En: *Linear Algebra and its Applications* 127 (1990), págs. 157-169.

[3] J. K. Baksalary y J. Hauke. "Inheriting independence and chi-squaredness under certain matrix orderings". En: *Statistics and Probability Letters* 2 (1984), págs. 35-38.

[4] J. K. Baksalary y J. Hauke. "Partial orderings of matrices referring to singular values of matrices". En: *Linear Algebra and its Applications* 96 (1987), págs. 17-26.

[5] J. K. Baksalary, J. Hauke y G. P. H. Styan. "On some distributional properties of quadratic forms in normal variables and on some associated matrix partial ordering". En: *Multivariate Analysis and its Applicationes* 24 (1994), págs. 111-121.

[6] J. K. Baksalary y S. Puntanen. "Characterizations of the best linear unbiased estimator in the general Gauss-Markov model with the use of matrix partial orderings". En: *Linear Algebra and its Applications* 127 (1990), págs. 363-370.

[7] J. K. Baksalary, J. Hauke, X. Liu y S. Liu. "Relationships between partial orders of matrices and their powers". En: *Linear Algebra and its Applications* 379 (2004), págs. 277-287.

[8] O.M. Baksalary y G. Trenkler. "Core inverse of matrices". En: *Linear and Multilinear Algebra* 58 (2010), págs. 681-697.

[9] R. B. Bapat, S. K. Jain y L. E. Snyder. "Nonnegative idempotent Matrices and the Minus Partial Order". En: *Linear Algebra and its Applications* 261 (1997), págs. 143-154.

[10] A. Ben-Israel y T. Greville. *Generalized inverses: Theory and Applications*. Segunda Edición. John Wiley & Sons, 2003.

[11] B. Blackwood y S. K. Jain. "Nonnegative group-monotone matrices and the minus partial order". En: *Linear Algebra and its Applications* 430 (2009), págs. 121-132.

[12] S. L. Campbell y C. D. Meyer Jr. *Generalized Inverse of Linear Transformations*. Segunda Edición. Dover, New York, 1991.

[13] N. Castro-González, J. J. Koliha e Y. Wei. "Error bounds for perturbation of the Drazin inverse of closed operators with equal spectral projection". En: *Applied Analysis* 81 (2002), págs. 915-928.

[14] N. Castro-González, J. J. Koliha e Y. Wei. “Perturbation of the Drazin inverse for matrices with equal eigenprojections at zero”. En: *Linear Algebra and its Applications* 312 (2000), págs. 335-347.

[15] N. Castro-González y J. Vélez-Cerrada. “Characterizations of matrices which eigenprojections at zero are equal to a fixed perturbation”. En: *Applied Mathematics and Computation* 159 (2004), págs. 613-623.

[16] N. Castro-González y J. Vélez-Cerrada. “The weighted Drazin inverse of perturbed matrices with related sopport idempotents”. En: *Applied Mathematics and Computation* 187 (2007), págs. 756-764.

[17] J. Climent, N. Thome e Y. Wei. “A geometrical approach on generalized inverse by Neumann-type series”. En: *Linear Algebra and its Applications* 332–334 (2001), págs. 535-542.

[18] R. E. Cline y T. N. E. Greville. “A Drazin inverse for rectangular matrices”. En: *Linear Algebra and its Applications* 29 (1980), págs. 53-62.

[19] C. Coll y N. Thome. “Oblique Projectors and Group Involutory Matrices”. En: *Applied Mathematics and Computation* 140.2–3 (2003), págs. 517-522.

[20] D. S. Cvetković-Ilić. “The solutions of some operator equations”. En: *J. Korean Math. Soc.* 45 (2008), págs. 1417-1425.

[21] D. S. Djordjević e Y. Wei. “Operators with equal projections related to their generalized inverses”. En: *Applied Mathematics and Computation* 155.3 (2004), págs. 655-664.

[22] M. P. Drazin. "Natural structures on semigroups with involution". En: *Bulletin of the American Mathematical Society* 84 (1978), págs. 139-141.

[23] J. Groß. "A note on the rank-subtractivity ordering". En: *Linear Algebra and its Applications* 289 (1999), págs. 151-160.

[24] J. Groß. "Remarks on the sharp partial order and the ordering of squares". En: *Linear Algebra and its Applications* 417 (2006), págs. 87-93.

[25] A. Guterman, A. Herrero y N. Thome. "New matrix partial order based on spectrally orthogonal matrix decompsition". En: *Linear and Multilinear Algebra* http://dx.doi.org/10.1080/03081087.2015.1041365 (2016).

[26] R. E. Hartwig. "How to order regular elements?" En: *Math Japonica* 25 (1980), págs. 1-13.

[27] R. E. Hartwig y M. P. Drazin. "Lattice properties of the *-order for complex matrices". En: *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 86.2 (1982), págs. 359-378.

[28] R. E. Hartwig e I. J. Katz. "On products of EP matrices". En: *Linear Algebra and its Applications* 252.1–3 (1997), págs. 339-345.

[29] R. E. Hartwig y K. Spindelböck. "Matrices for which A^* and $A^\dagger$ commute". En: *Linear and Multilinear Algebra* 14 (1984), págs. 241-256.

[30] R. E. Hartwig y G. P. H. Styan. "On some characterizations of the star partial ordering for matrices and rank subtractivity". En: *Linear Algebra and its Applications* 82 (1986), págs. 145-161.

[31] A. Hernández, M. Lattanzi y N. Thome. "On a partial order defined by the weighted Moore-Penrose inverse". En: *Applied Mathematics and Computation* 219.14 (2013), págs. 7310-7318.

[32] A. Hernández, M. Lattanzi y N. Thome. "Weighted binary relations involving the Drazin inverse". En: *Applied Mathematics and Computation* 253 (2015), págs. 215-223.

[33] A. Hernández, M. Lattanzi, N. Thome y F. Urquiza. "The star partial order and the eigenprojection at 0 on EP matrices". En: *Applied Mathematics and Computation* 218.21 (2012), págs. 10669-10678.

[34] A. Herrero, F. Ramírez y N. Thome. "Relationships between different sets involving group and Drazin projectors and nonnegativity". En: *Linear Algebra and its Applications* 438.4 (2013), págs. 1688-1699.

[35] L. Huang y Z. Wan. "Geometry of skew-Hermitian matrices". En: *Linear Algebra and its Applications* 396 (2005), págs. 127-157.

[36] I. J. Katz. "Weigmann type theorems for EP_r matrices". En: *Duke Mathematical Journal* 32 (1965), págs. 423-427.

[37] J. J. Koliha. "A simple proof of the product theorem for EP matrices". En: *Linear Algebra and its Applications* 294 (1999), págs. 213-215.

[38] L. Lebtahi, P. Patrício y N. Thome. "The diamond partial order in rings". En: *Linear and Multilinear Algebra* 62.3 (2014), págs. 386-395.

[39] L. Lebtahi, Óscar Romero y N. Thome. "Characterizationsof $\{K, s+1\}$-Potent Matrices and Apllications". En: *Linear Algebra and its Applications* 436 (2012), págs. 293-306.

[40] L. Lebtahi y N. Thome. "The spectral characterizations of k-generalized projectors". En: *Linear Algebra and its Applications* 420 (2007), págs. 572-575.

[41] S. Malik, L. Rueda y N. Thome. "Further properties on the core partial order and other matrix partial orders". En: *Linear and Multilinear Algebra* 62.12 (2014), págs. 1629-1648.

[42] S. B. Malik y N. Thome. "A note on a revisited Moore-Penrose inverse of a lineal operator on Hilbert space". En: *Filomat* (por aparecer) ().

[43] S. B. Malik y N. Thome. "On a new generalized inverse for matrices of on arbitrary index". En: *Applied Mathematics and Computation* 226 (2014), págs. 575-580.

[44] N. Matzakos y D. Pappas. "EP matrices: computation of the Moore-Penrose inverse via factorizations". En: *Journal of Applied Mathematics and Computing* 34.1 (2010), págs. 113-127.

[45] J. K. Merikoski y X. Liu. "On the star partial ordering of normales matrices". En: *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* 7.1 (2006). Art. 17.

[46] C. D. Meyer. *Matrix Analysis and Applied Linear Algebra.* SIAM Filadelfia, 2006.

[47] S. K. Mitra. "On group inverses and the sharp order". En: *Linear Algebra and its Applications* 92 (1987), págs. 17-37.

[48] S. K. Mitra, P. Bhimasankaram y S. B. Malik. *Matrix Partial Orders, Shorted Operators and Application.* World Scientific Publishing Company, 2010.

[49] D. Mosić y D. S. Djordjević. "Partial isometries and EP elements in rings with involution". En: *Electronic Journal of Linear Algebra* 18 (2009), págs. 761-772.

[50] D. Mosić y D. S. Djordjević. "Reverse order law for the group inverse in rings". En: *Applied Mathematics and Computation* 219 (2012), págs. 2526-2534.

[51] C. R. Rao y S. K. Mitra. *Generalized inverse of Matrices and its Applications.* John Wiley & Sons, New York, 1971.

[52] P. Šemrl y A. R. Sourour. "Adjacency preserving maps on hermitian matrices". En: *Journal of the Australian Mathematical Society* 95.1 (2013), págs. 129-133.

[53] Y. Tian y H. Wang. "Characterizations of EP matrices and weighted-EP matrices". En: *Linear Algebra and its Applications* 434.5 (2011), págs. 1295-1318.

[54] M. Tośić y D. S. Cvetković-Ilić. “Invertibility of a linear combination of two matrices and partial orderings”. En: *Applied Mathematics and Computation* 218.9 (2012), págs. 4651-4657.

[55] G. Wang, Y. Wei y S. Qiao. *Generalized Inverses: Theory and Computations*. Science Press Beijing/New York, 2004.

[56] Y. Wei. “ Integral representation of the W-weighted Drazin inverse”. En: *Applied Mathematics and Computation* 144 (2003), págs. 3-10.

[57] Y. Wei y H. Wu. “The representation and approximation for the weighted Moore-Penrose inverse”. En: *Applied Mathematics and Computation* 121 (2001), págs. 17-28.