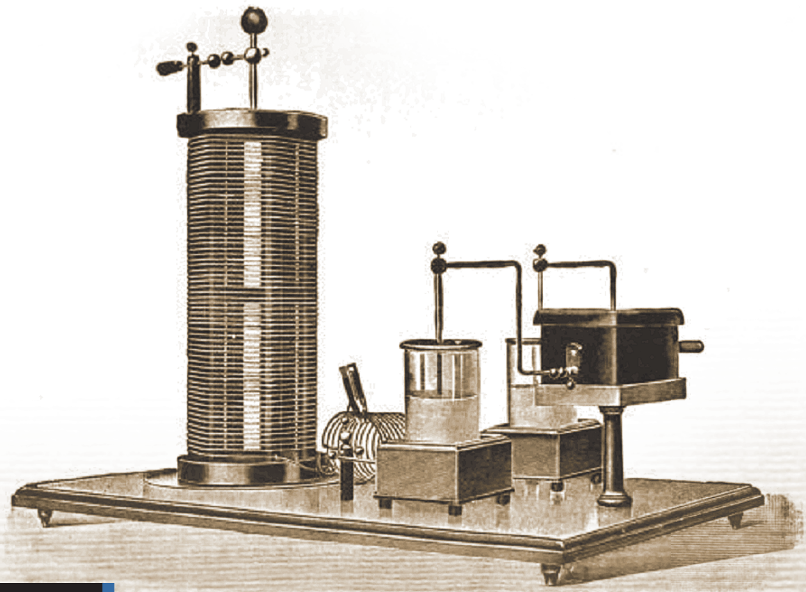


mr manual de referencia

INFORMÁTICA | TELECOMUNICACIONES

# FUNDAMENTOS DE LA TEORÍA DE FILTROS

Santiago Cogollos Borrás

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

# Fundamentos de la Teoría de Filtros

Santiago Cogollos Borrás

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Colección *Manual de Referencia*

Los contenidos de esta publicación han sido evaluados mediante el sistema *doble ciego*, siguiendo el procedimiento que se recoge en: http://bit.ly/Evaluacion_Obras


*distribución:* Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0287_04_01_03

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-443-2
Impreso bajo demanda



Impreso en España

# Prefacio

La idea de escribir un libro de filtros desde el punto de vista académico, puede parecer mala debido a que los filtros tienen un objetivo final eminentemente práctico. El enfoque de tipo “manual de instrucciones” suele imponerse en las empresas que se dedican al diseño y la fabricación, y no en un libro de texto. Aplicar recetas que resuelvan el problema y minimicen el tiempo de producción es su objetivo final. Cada profesional ha intentado seguir sus criterios, y lo que ha aprendido de otros profesionales. Sin embargo, en tiempos recientes, el diseño de filtros ha cobrado interés por la aparición de nuevas técnicas de diseño y la mejora de otras existentes. Una uniformidad de conceptos, notación, criterios y sobre todo de conocimientos del proceso, se ha revelado como una arma muy potente para acabar con el caos imperante en las metodologías propias de la empresa privada.

El uso de una convención única de polinomios y de parámetros a representar ha destapado unas carencias que existían en la teoría de filtros “clásica”, y que recientemente se han subsanado. Por ejemplo, el diseño de las respuestas en magnitud (teorema del filtro analógico) ha sido durante mucho tiempo el método habitual de diseño. El desprecio de la fase ha destapado la violación de la unitariedad en diseños sobre el papel (por la omisión de una constante compleja) que luego se subsana en la fase de producción de forma injustificada. Otra justificación que me animó a escribir el libro es la laxitud de algunos profesionales al hablar de términos referentes a filtros. Decir que el filtro tiene $N$ polos, y señalar los ceros de reflexión en un analizador de redes, diciendo que esas son las frecuencias de los polos es algo que, aparte de ser completamente falso, siempre me ha resultado molesto. Mi justificación final viene dada por la tendencia del profesional, no dedicado al mundo académico, de ocultar sus métodos y técnicas para poder hacer a su empresa supuestamente más competitiva. Esos métodos, a veces, se transmiten mal o, en el peor de los casos, no son correctos y en ningún caso benefician al progreso de la técnica. Por todo esto, considero que un libro con los conceptos fundamentales, asentados sobre una notación estándar moderna, puede ayudar tanto a estudiantes como a profesionales.

La ingeniería de comunicaciones se ha ocupado del filtrado desde que los ingenieros se dieron cuenta del simple hecho que el espectro radioeléctrico es un bien escaso. En palabras de Leo Young[1]:

> *... El espectro de microondas es un recurso finito el cual debe ser dividido, cuidado y tratado con respeto. Y aquí es donde aparecen los filtros de microondas.*

Aunque este libro está dedicado al estudio de principios generales de filtros, el hecho de que muchas aplicaciones de comunicaciones se encuentren en el campo de las microondas (o en general de la alta frecuencia donde los circuitos clásicos no son viables), ha supuesto que muchas técnicas se hayan desarrollado ex-profeso para ese campo. Algunas de ellas serán tratadas por su interés y por la genialidad e inventiva de sus autores que han conseguido empujar la tecnología más allá de lo que algunos pioneros consideraban factible.

Este libro no se ha centrado exclusivamente en los conceptos de procesado de señal, que suelen ser más conocidos, sino que se ha añadido una perspectiva desde el punto de vista de las microondas. Esto ha implicado que en muchos apartados se vea la necesidad de utilizar, no sólo la función de transferencia típicamente asociada al concepto de parámetro de transmisión, sino también el parámetro de reflexión. En la mayoría de los casos, utilizar dos parámetros relacionados entre sí, permite dar un giro más simple a desarrollos que de otra manera serían innecesariamente largos.

Espero que este libro sirva principalmente a alumnos de cursos avanzados que quieran profundizar sobre conceptos que, aunque fundamentales, no han sido tratados con detalle en los cursos correspondientes donde el concepto de filtro apareció por primera vez.

Espero que el lector lo lea sin prisas. Todo lo escrito tiene su intención. Los desarrollos, algunas veces muy largos, recogen técnicas que posiblemente al lector le sean conocidas pero en algunos casos no será así (funciones elípticas, fracciones continuas, etc.). Para hacer el libro más autónomo, se han detallado en cada apartado los pasos a seguir. Ello conlleva manejar una gran diversidad de técnicas y la probabilidad de ser poco preciso o deslizar errores aumenta con el tamaño de la obra y su nivel de detalle. Espero que si el lector encuentra errores, de los cuales asumo toda la responsabilidad, me lo haga saber para mejorar el texto en lo posible. El trabajo de mecanografiado de un texto técnico siempre es delicado y, para muchos, una tarea ingrata.

[1] Leo Young murió el 14 de Septiembre de 2006. El Dr. Young, un experto en tecnología de microondas, con 20 patentes, publicó numerosos artículos y fue autor, co-autor o editor de 14 libros incluyendo “Microwave Filters, Impedance-Matching Networks and Coupling Structures” (1964). El libro ha sido considerado “la biblia” para los expertos en el campo.

El contenido del libro puede resumirse por capítulos ordenados lógicamente:

Las capítulos 1, 2 y 3 están referidos a la definición de términos, condiciones que debe cumplir un filtro y relaciones que podemos deducir entre las diferentes formas de escribir la respuesta teórica de un filtro.

Los capítulos 4 y 5 están dedicados a los filtros más usados en la actualidad. El capítulo 4 está dedicado a los filtros sin ceros de transmisión (los más antiguos) y el capítulo 5 a los filtros con ceros de transmisión que conllevan una mayor complejidad en las funciones de transferencia.

El capítulo 6 describe las transformaciones que sufre cualquiera de los prototipos de filtro expuestos en los capítulos anteriores para que la respuesta esté situada en la banda de frecuencias de diseño deseada.

El capítulo 7 es un resumen de cómo se sintetizaban filtros básicos en electrónica antes de que la necesidad de usar frecuencias más altas forzara la intervención de los inversores de inmitancia que aparecen en el capítulo 8. En el capítulo 8 se introducen los inversores como solución a las limitaciones de la síntesis expuesta en el capítulo 7 y como forma de simplificar, escalar circuitos y poder usarlos a frecuencias más altas con diseños no concentrados.

En el capítulo 9 de diseñan los filtros distribuidos típicos de radiofrecuencia y microondas usando elementos como líneas de transmisión que no tienen sus parámetros concentrados en un punto como las bobinas o condensadores, sino distribuidos a lo largo de su estructura.

En el capítulo 10 se hace una introducción al diseño actual de filtros usando resonadores acoplados generalmente a través de elementos idealizados como inversores. La formulación con matrices de acoplo se describe de forma muy resumida para poder mostrar la potencia y flexibilidad actual de la síntesis de filtros.

La cantidad de apéndices se ha hecho necesaria para poder explicar en profundidad ciertos aspectos accesorios de los anteriores temas. Casi todos los apéndices tienen ejemplos donde se muestra su utilidad y se justifica su existencia.

La experiencia docente en clases prácticas, resolviendo problemas de diseño o en el mismo laboratorio, te enseña que el diablo está en los detalles. Pequeños errores o imprecisiones pueden llegar a arruinar diseños o desperdiciar una cantidad enorme de tiempo hasta encontrar una solución, es por ello que he intentado ser muy preciso, sobre todo en las definiciones. El lector juzgará si lo he conseguido o he fracasado en el intento.

Soy de los que piensan que no tiene sentido que se exponga una teoría sin un ejemplo práctico o un ejercicio para poder poner a punto las habilidades del lector. Al fin y al cabo, la ingeniería es una disciplina práctica y no tiene sentido si no se puede aplicar y para ello hay que ejercitar al ingeniero. Los ejemplos dentro de los temas y los ejercicios al final de cada tema, espero que aclaren muchos aspectos del diseño de filtros.

Otro hecho que me motivó a redactar este libro, fue el esfuerzo que supuso buscar la información fundamental sobre filtros requerida para labores de investigación. El lector, dada la dispersión de la bibliografía y la falta de libros de referencia (muchos de ellos agotados y nunca reimpresos), puede llegar a vislumbrar en ello cierta intencionalidad o al menos cierto oscurantismo en el campo de la síntesis y el diseño de filtros. Muchas veces se dan cosas por supuestas (y no referenciadas) como punto de partida de artículos científicos sobre el tema y esas suposiciones son demasiado críticas para poder obviarlas rápidamente.

Sirva este esfuerzo para que se dé un poco más de rigor y didáctica al trabajo encomiable que muchos ingenieros realizan en el tema, y que ese trabajo redunde en una mayor difusión de resultados relevantes que de otro modo caerían en el olvido.

Dr. Santiago Cogollos
Valencia a 17 de septiembre de 2017

# Índice general

# Capítulo 1

# Introducción

> *— Un tipo extraño. Habla de un modo preciso: claramente, sin ambigüedades, como cortando las palabras con una navaja.*
> *[...]*
> *— Un tipo científico.*
>
> *Dune, Frank Herbert (1920-1986)*

Eso es lo que todo autor de libros de texto técnicos desearía: hablar de modo preciso y sin ambigüedades. El hecho de utilizar un lenguaje científico ayuda mucho. El único inconveniente, si se le puede reprochar algo a este tipo de lenguaje, es el poco margen a la libre interpretación que proporciona. A cambio, este mismo lenguaje permite ir más allá de lo que cualquier literatura fantástica permite alcanzar: construir una tecnología que a muchos les parece ciencia-ficción. Este lenguaje y la notación que conlleva no está exento de imaginación ni de inventiva y, aunque a muchos les pueda parecer árido, a la mente habituada le proporciona una herramienta poderosa con la que diseccionar la realidad con un filo mejor que el de cualquier navaja.

## 1.1 Conocimientos previos y notación

Para la correcta comprensión de este libro, se recomienda que el lector tenga unos conocimientos básicos de sistemas lineales, teoría de circuitos, líneas de transmisión, electrónica analógica y un cierto dominio del cálculo y análisis (transformadas de Fourier y Laplace). Para sistemas lineales y transformadas de Fourier y Laplace el lector puede consultar (Oppenheim, Willsky y Hamid 1996). Para un curso de circuitos (Parra 1991a) y (Parra 1991b) son una elección excelente. Finalmente, para líneas de transmisión y temas afines a radiofrecuencia y microondas el texto (Bará 1996) es una buena referencia.

Aunque muchos conceptos se intentan explicar desde su base, es un problema del autor tener que establecer cuál es esta base, a partir de la cual construir todo el arsenal necesario para que el lector pueda manejar con soltura los conceptos y técnicas que se desarrollarán a lo largo del libro.

El bagaje técnico necesario suele ser bastante común para alumnos de ingeniería eléctrica, electrónica o de telecomunicaciones, así como ingeniería de sistemas de control. Este libro está dirigido a los que pretenden profundizar un poco en los orígenes del funcionamiento de los filtros de ondas y a sus conceptos básicos, que muchas veces se obvian en un primer contacto, con el objetivo de poder dar un enfoque práctico a los cursos de ingeniería.

Es intención del autor explicar o, al menos, referenciar adecuadamente los conceptos más importantes de la teoría de filtros.

A lo largo del libro se va a operar con números reales y complejos, y se utilizará el lenguaje universal de las matemáticas con las convenciones más habituales. Un pequeño resumen de los símbolos más utilizados es:

- Notación de conjuntos: el conjunto de los enteros se denota por $\mathbb{Z}$, el de los reales por $\mathbb{R}$ y el de los complejos por $\mathbb{C}$.
- Los símbolos: $\forall$ "para todo" o "para cualquier"; $\in$ "pertenece a"; $\approx$ "aproximadamente"; $\triangleq$ "igual por definición"; $\to$ "tiende a"; $\Rightarrow$ "implica"; $\Leftrightarrow$ "si y solo si".
- Notación compleja: $j = \sqrt{-1}$; $\Re\{z\}$ parte real de $z$; $\Im\{z\}$ parte imaginaria de $z$; $z^*$ conjugado de $z$; $\measuredangle z$ "ángulo" o "argumento" de $z$; $|z|$ "módulo" de $z$.
- Variables más comunes: $f$ para la frecuencia; $t$ para tiempo; $s$ para la variable de Laplace; $\omega$ para la variable de Fourier o para la pulsación $\omega = 2\pi f$.
- Las matrices y vectores aparecerán en negrita, $\mathbf{A}^T$ indica la traspuesta de la matriz $\mathbf{A}$, $\mathbf{A}^+$ es la matriz transpuesta y conjugada de $\mathbf{A}$ y $\mathbf{A}^{-1}$ su inversa.

Otros símbolos se irán definiendo a lo largo del texto asociados a conceptos de filtros.

Finalmente, a veces se incluye la notación $\mathcal{O}$ según el contexto:

- La expresión $N = \mathcal{O}(p)$ significa que el orden de $p$ es $N$ si $p$ es un polinomio y $N$ es un entero.

- La expresión $g = \mathcal{O}(f)$ si $f$ y $g$ son dos funciones se interpreta, siguiendo la notación de Landau[1], en el contexto de la ecuación, que su comportamiento es el mismo. De forma precisa:

$$g = \mathcal{O}(f) \Leftrightarrow \frac{g}{f} = M$$

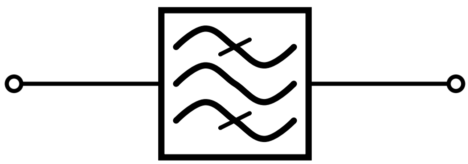
donde $M$ es una constante. Por ejemplo si se dice que $g(\omega) = \mathcal{O}(\omega^2)$ cuando $\omega \to \infty$ significa que

$$\lim_{\omega \to \infty} \frac{g(\omega)}{\omega^2} = M$$

donde $M < \infty$ es una constante.

## 1.2 Propiedades de los filtros tratados

Un filtro es un elemento que discrimina una determinada frecuencia o gama de frecuencias de una señal eléctrica que pasa a través de él, pudiendo modificar tanto su amplitud como su fase. El propósito de los filtros es separar la información de interferencias, ruido y distorsión indeseada. Este elemento se modela con su función de transferencia. Su representación es una caja con tres ondas representando bandas. La banda inferior incluye $f = 0$ Hz la superior incluye $f \to \infty$ y la intermedia cualquier rango que no incluya ninguna de estas dos frecuencias. Si no se especifica nada respecto a las bandas, lo habitual es usar el símbolo



Entre las características básicas de un filtro (aunque se supone que esto es familiar para el lector) están los conceptos de:

**Banda de paso:** Es el margen de frecuencias que el filtro permite que pase a su través sin apenas atenuación o distorsión. Generalmente se caracteriza por sus frecuencias límite inferior $f_1$ y superior $f_2$. En la figura 1.1 aparece señalada la banda de paso de un filtro genérico.

[1] Edmund Landau (1877–1938) fue un famoso matemático alemán que hizo importantes contribuciones a la matemática. En (Apostol 1989) se utiliza la notación $o$ minúscula para la fórmula de Taylor. La notación $f(x) = o(g(x))$ cuando $x \to a$ significa que $\lim_{x \to a} f(x)/g(x) = 0$. En (Apostol 2001) se emplean las dos notaciones $\mathcal{O}$ y $o$ en el contexto de las sucesiones.

**Ancho de banda:** Es simplemente la diferencia $\Delta f = f_2 - f_1$. En el caso de la figura 1.1 $\Delta f = 1$ GHz.

**Frecuencia central:** Se denota por $f_0$ y se calcula generalmente como $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$ como se verá en el capítulo 6 y que para anchos de banda estrechos es aproximadamente $f_0 \approx (f_1 + f_2)/2$. En el caso de la figura 1.1 tenemos que $f_0 \approx 4.5$ GHz.

**Ancho de banda relativo o fraccional:** Es $\mathcal{W} = \Delta f / f_0$. Si se mide en porcentaje simplemente multiplicamos la anterior cantidad por 100. En el caso de la figura 1.1 tenemos $\mathcal{W} \approx 22\,\%$.

**Banda atenuada:** Rango de frecuencias que el filtro no permite que pase a su través sin sufrir una atenuación severa[2]. En el caso de la figura 1.1 la banda atenuada superior empieza donde la transmisión es inferior a -40 dB hasta $f \to \infty$ y la banda atenuada inferior va desde 0 Hz hasta que la transmisión supera los -40 dB. En este caso el filtro se diseñó para que la atenuación de la banda atenuada fuera de 40 dB.

**Banda de transición:** Rango de frecuencias entre la banda de paso y la banda atenuada. La atenuación no es muy elevada pero mayor que la requerida en la banda de paso y menor que la deseada en la banda atenuada. Idealmente se quiere que esta banda sea lo menor posible. Esta banda aparece señalada también en la figura 1.1 (la inferior y la superior).

Se supone que el lector intuye qué es la atenuación pero será definida de manera sistemática posteriormente en la ecuación (2.42).

La clasificación de los filtros en el dominio de la frecuencia atendiendo a sus bandas de interés es de sobra conocida:

**Filtros paso-bajo:** dejan pasar la señal desde frecuencia nula hasta cierta frecuencia $f_c$ denominada de corte[3] con una atenuación baja dada por las especificaciones. A partir de esa frecuencia de corte, la señal empieza a atenuarse de forma gradual (banda de transición) y finalmente se llega a la banda atenuada donde la atenuación es la requerida en las especificaciones. En la figura 1.2 aparece un filtro típico donde la frecuencia de corte es $f_c = 1$ GHz. Se ha considerado que la atenuación de 40 dB es la especificación para la banda atenuada. En este tipo de filtros no tiene sentido el ancho de banda relativo porque se considera que la frecuencia central es $f_0 = 0$ Hz.

[2] *Severa* es un término relativo. La atenuación requerida en la banda atenuada suele ser un parámetro dado al diseñador y depende de la aplicación.

[3] En inglés este término aparece como band-edge frequency.

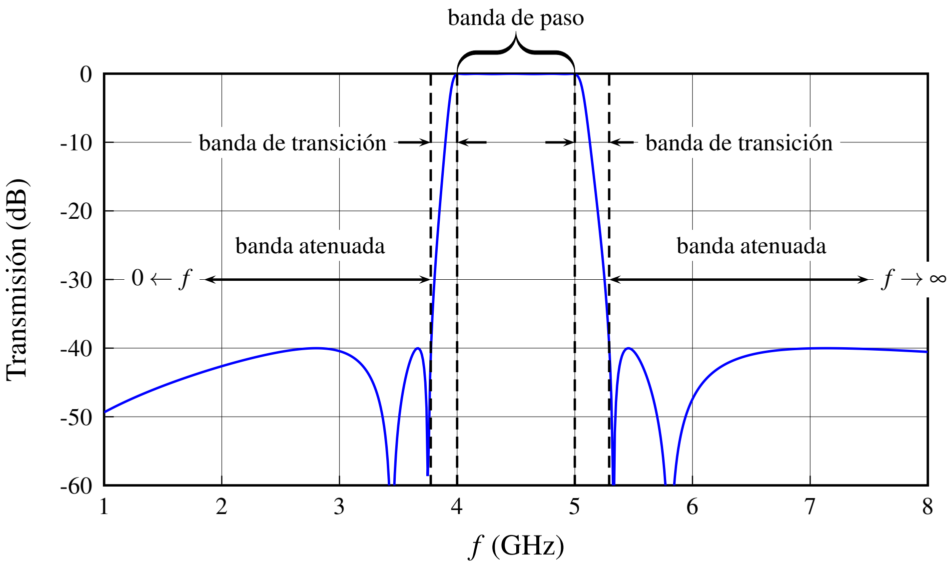



**Figura 1.1:** Filtro paso-banda con $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz. La banda de paso, de transición y atenuada aparecen señaladas. Al ser un filtro paso banda hay una banda de transición inferior y una superior así como una banda atenuada superior e inferior.

**Filtros paso-alto:** dejan pasar las frecuencias altas desde una frecuencia de corte hasta (teóricamente) frecuencia infinita. En la figura 1.3 se muestra una respuesta típica de un filtro de este tipo con $f_c = 10$ GHz.

**Filtros paso-banda:** dejan pasar un rango de frecuencias desde $f_1$ hasta $f_2$ siendo estas frecuencias $0 < f_1 < f_2 < \infty$. Un filtro típico de este tipo tiene una respuesta como la que aparece en la figura 1.1 donde $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz.

**Filtros de banda eliminada:** atenúan una banda delimitada por las frecuencias $f_1$ y $f_2$ donde $0 < f_1 < f_2 < \infty$ que marcan el límite de las bandas de paso. La banda atenuada se especifica, como siempre, dependiendo del caso. En la figura 1.4 aparece la respuesta de un filtro de este tipo con $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz, la banda atenuada se ha marcado como límite a partir de una atenuación mayor de 40 dB.

**Filtros paso-todo:** dejan pasar todas las frecuencias pero modifican la fase de la señal. El módulo de una respuesta de un filtro paso-todo es totalmente plano y por tanto la banda de paso, como tal, no existe porque "pasa todo". Sin embargo, en cierta banda útil el filtro mantiene unas especificaciones sobre la fase.

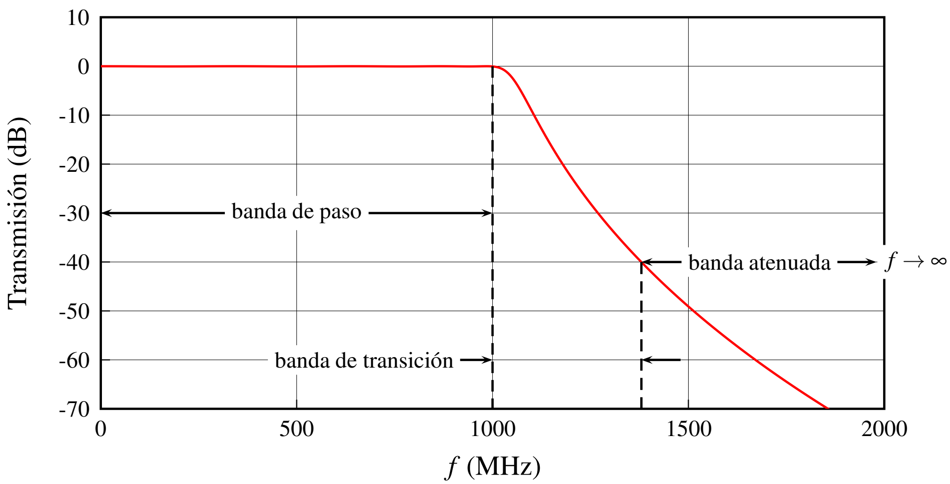



**Figura 1.2:** Filtro paso-bajo con frecuencia de corte $f_c = 1$ GHz. La banda de paso, de transición y atenuada aparecen señaladas. Se ha considerado que a partir de la frecuencia con atenuación de 40 dB (transmisión de -40 dB) empieza la banda atenuada.

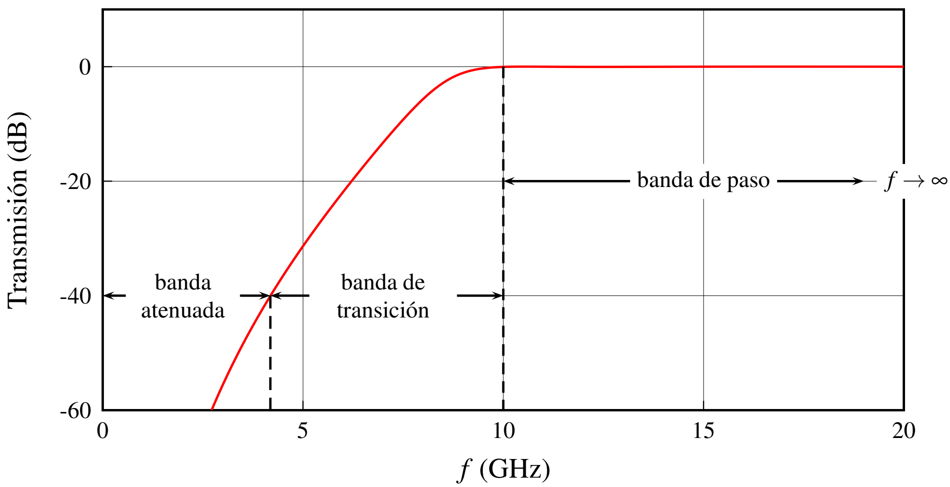



**Figura 1.3:** Filtro paso-alto con frecuencia de corte $f_c = 10$ GHz. La banda de paso, de transición y atenuada aparecen señaladas. Se ha considerado que la atenuación de 40 dB (transmisión de -40 dB) marca la banda atenuada.

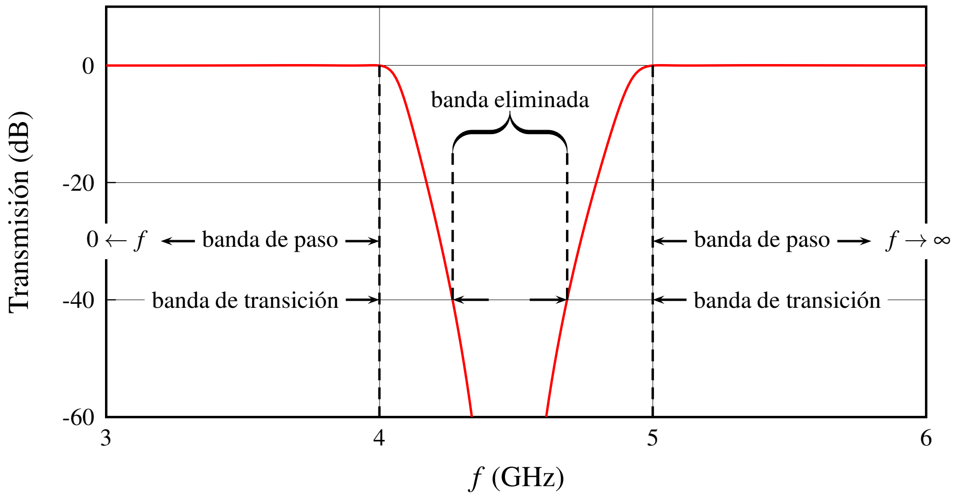



**Figura 1.4:** Filtro de banda eliminada con frecuencias $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz. La banda de paso, de transición y atenuada aparecen señaladas. Se ha considerado que la atenuación de 40 dB (transmisión de -40 dB) marca la banda eliminada.

Aunque los tipos son variados, se verá más adelante que sólo es necesario estudiar los filtros paso-bajo normalizados ($\omega_c = 1$ rad/s) y mediante transformaciones se consigue obtener cualquier otro tipo de filtros.

A lo largo de todo el libro, los tipos de filtro que se van a tratar van a tener una serie de características comunes, todas ellas deseables desde el punto de vista del análisis sistemático.

Suponemos una función de transferencia $H(s)$ que es la relación entre la señal de salida $Y(s)$ y la señal de entrada $X(s)$ donde $s$ es la variable en el dominio de Laplace.

$$H(s) = \frac{Y(s)}{X(s)} \Rightarrow h(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H(s)\} \tag{1.1}$$

donde $\mathcal{L}^{-1}\{H(s)\}$ es la transformada inversa de Laplace de $H(s)$, $X(s) = \mathcal{L}\{x(t)\}$ y $Y(s) = \mathcal{L}\{y(t)\}$ son las transformadas de Laplace de la entrada y la salida respectivamente. En el dominio del tiempo, la salida es una convolución de la entrada con la función de transferencia $y(t) = x(t) * h(t)$ (Blinchikoff y Zverev 2006). En la figura 1.5 se observan las relaciones mencionadas.

Las suposiciones para la función de transferencia que utilizaremos para modelar filtros serán:

**LTI:** La función de transferencia es lineal e invariante en el tiempo. La linealidad implica que si un filtro con entrada $x_i(t)$ provoca una salida $y_i(t)$ y si la

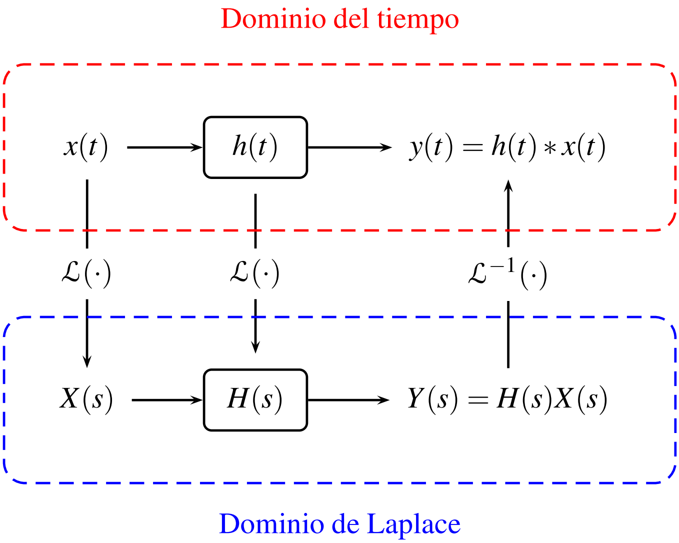



**Figura 1.5:** Función de transferencia y su relación con la entrada y la salida en el dominio del tiempo y en el dominio de Laplace.

entrada es una combinación lineal de señales de la forma

$$x(t) = \sum_i \alpha_i x_i(t) \tag{1.2}$$

la salida será de la forma

$$y(t) = \sum_i \alpha_i y_i(t) \tag{1.3}$$

La invarianza temporal indica que el filtro se comporta de la misma forma con el tiempo. Es decir, si la entrada del sistema es $x(t)$ y la salida es $y(t)$ (simbolizado como $x(t) \rightarrow y(t)$) entonces un desplazamiento temporal de la entrada provocaría un desplazamiento temporal de la salida, es decir:

$$x(t) \rightarrow y(t) \Rightarrow x(t - t_0) \rightarrow y(t - t_0) \tag{1.4}$$

**Causal:** La salida nunca se anticipa a la entrada. La salida en un instante $t$ dependerá de valores de la entrada anteriores a $t$.

**Real:** La función $h(t)$ es real. Esta condición se puede violar en filtros de microondas para conseguir respuestas con características especiales como se verá más adelante. Si no se especifica nada, asumiremos que $h(t)$ es real.

Hay que añadir que, trabajar en el domino de Laplace, de Fourier o en el dominio temporal, supone una ventaja en ciertos casos y un inconveniente en otros, debido

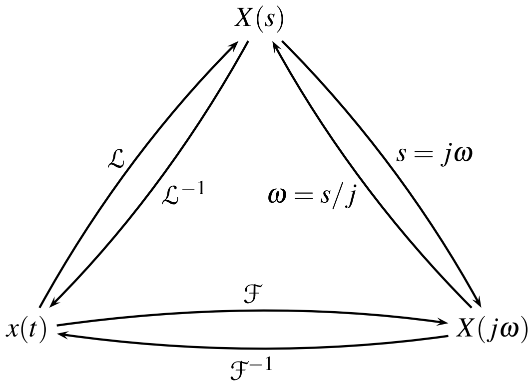



**Figura 1.6:** Relación entre los dominios del tiempo, de Fourier (o de la frecuencia) y de Laplace.

a que la relación entre unos dominios y otros se realiza a través de integrales generalmente impropias.

La salvedad aparece en la conversión del dominio de Laplace al dominio de Fourier. En nuestro caso, esta conversión será inmediata por sustitución ($s = j\omega$) si las funciones tienen ciertas características deseables que hacen que la integral de Fourier y la de Laplace sean formalmente equivalentes (ausencia de singularidades en el semiplano derecho del plano complejo). Esto provoca que se puede obtener una función en el dominio de Fourier (en función de la frecuencia) con sólo evaluar la función en la variable de Laplace en el eje imaginario. La conversión de Fourier a Laplace simplemente consiste en aplicar el principio de prolongación analítica (en un entorno sin singularidades) haciendo la sustitución $\omega = s/j$. La relación entre dominios se puede ver gráficamente en la figura 1.6.

Comúnmente se suele denominar dominio de la frecuencia al dominio de Fourier. Al dominio de Laplace se le suele denominar también dominio de la frecuencia compleja, dominio complejo o, algunas veces, dominio de la frecuencia cuando está claro por el contexto que $s = j\omega$.

## 1.3 Filtros como redes de 2 puertos

Los filtros son dispositivos de dos accesos (la entrada y la salida). En este libro se van a tratar filtros pasivos y eso da propiedades adicionales a la función de transferencia, a la impedancia y, como no, a los parámetros de dispersión (o parámetros $S$). También se va a considerar que, salvo que se diga lo contrario, los filtros van a ser recíprocos ($S_{12} = S_{21}$) y sin pérdidas.

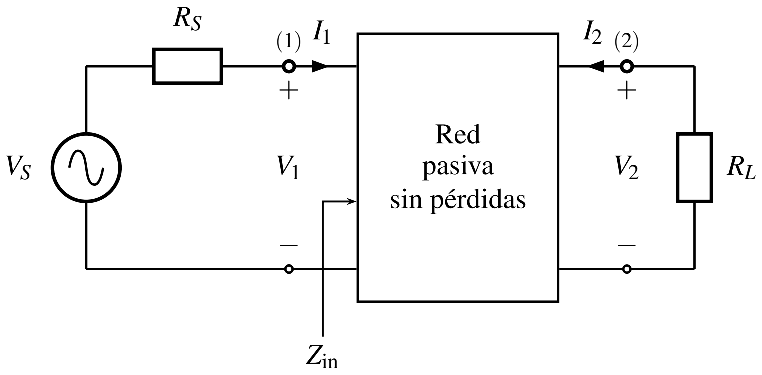



**Figura 1.7:** Red sin pérdidas conectada a un generador y una carga genéricos.

Un esquema general se muestra en la figura 1.7 donde el filtro puede estar conectado a una fuente de señal de impedancia interna $R_S$ y a una carga $R_L$.

La matriz de parámetros $S$ de un filtro es de tamaño $2 \times 2$ con la propiedad de unitariedad $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{S}^{+})$ que, eliminando las ecuaciones redundantes, proporciona las siguientes relaciones importantes:

$$|S_{11}|^2 + |S_{21}|^2 = 1 \tag{1.5a}$$

$$S_{11}S_{21}^* + S_{12}S_{22}^* = 0 \tag{1.5b}$$

donde el asterisco indica conjugación compleja. Como regla importante recordar que ningún parámetro de dispersión puede superar en módulo la unidad en una red pasiva y sin pérdidas.

## 1.4 Relación de parámetros $S$ e impedancias

La impedancia de entrada se puede relacionar con el parámetro de dispersión $S_{11}$ con la conocida relación:

$$\rho = S_{11} = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0} \tag{1.6}$$

donde $Z_0$ es la impedancia de referencia del puerto de entrada. Así mismo se puede obtener la impedancia de entrada a partir del parámetro de reflexión con:

$$Z_{in} = Z_0 \frac{1 + \rho}{1 - \rho} \tag{1.7}$$

y como la condición de unitariedad (1.5a) relaciona ambos parámetros, es posible bajo ciertas condiciones relacionar la impedancia de entrada con $S_{21}$ que es el parámetro que proporciona la información sobre la transmisión del filtro.

Este es un buen momento para recalcar que $S_{11}$ y el parámetro o coeficiente de reflexión $\rho$ no son exactamente lo mismo. Cuando se habla de parámetros de dispersión de una red siempre se elige para cada puerto (o de forma más común para todos simultáneamente) una impedancia de referencia $Z_0$ con la que se supone que se cargan los puertos. Los parámetros de dispersión dependen pues de esa impedancia. $S_{11}$ es el parámetro de reflexión de la red si la impedancia del acceso 1 es $Z_0$, es decir

$$S_{11} = \frac{Z_{\text{in}} - Z_0}{Z_{\text{in}} + Z_0} \tag{1.8}$$

Sin embargo, $\rho$ es el coeficiente de reflexión de la red teniendo en cuenta que tiene la forma que aparece en la figura 1.7 y, como la fuente suele estar representada por su equivalente de Thevenin, la impedancia que se escoge es $R_S$ y por tanto

$$\rho = \frac{Z_{\text{in}} - R_S}{Z_{\text{in}} + R_S} \tag{1.9}$$

Por ello, $\rho = S_{11}$ si $R_S = Z_0$. A lo largo del libro se considerará que éste es el caso y por tanto no se va a hacer distinción entre $\rho$ y $S_{11}$.

El problema de trabajar con impedancias o con parámetros de dispersión se presentará frecuentemente en la teoría de filtros. Históricamente se empezó a utilizar la impedancia de entrada para sintetizar una red que proporcionara dicha impedancia. Posteriormente a la invención de los parámetros $S$, toda la teoría de síntesis desarrollada pudo reutilizarse gracias a la relación existente entre ellos. Además, los parámetros de dispersión se revelaron como una herramienta muy potente para la obtención directa de redes sin la necesidad de utilizar la impedancia de entrada como medio necesario.

## 1.5 Pérdidas de retorno y pérdidas de inserción

Dos parámetros muy importantes en el diseño de filtros de microondas son las pérdidas de retorno $RL$ y las pérdidas de inserción $IL$ que suelen ser especificaciones dadas al diseñador, en unidades logarítmicas, en la banda de interés. Su definición es:

$$RL = -20 \log_{10} |S_{11}| \tag{1.10a}$$
$$IL = -20 \log_{10} |S_{21}| \tag{1.10b}$$

y sus unidades son dB. $RL$ es la abreviatura inglesa de *return loss* e $IL$ proviene de la abreviatura de *insertion loss*. Como se ha dicho, las especificaciones de ambas se suelen dar sobre la banda de paso del filtro ya que fuera de la banda $IL$ es simplemente la atenuación en la banda atenuada y $RL$ fuera de la banda de paso es prácticamente 0 dB. En capítulos posteriores se estudiarán algunas relaciones que involucran a estas definiciones.

## 1.6 Nota histórica: Darlington

Antes de que los filtros tuvieran un método de diseño evolucionado, el proceso de síntesis era bastante embrollado. Requería ajustes constantes y no tenía base sistemática.

Sin embargo, parece que los primeros intentos de síntesis sistemática tuvieron lugar en las primeras décadas del siglo XX cuando Karl Willy Wagner en Alemania y George Ashley Campbell en los Estados Unidos trabajaron independientemente en tales aproximaciones (Darlington 1999).

Otros métodos, en particular el de la síntesis por el método de las pérdidas de inserción, se empezaron a desarrollar en la década de 1930 por Darlington (EEUU) y Cauer (Alemania) de forma independiente con contribuciones de Brune. Ya en los años 30 y 40 empezaron a aparecer diseños de filtros activos entre los cuales H. Bode tiene un papel destacado. De Cauer y de Brune hablaremos más adelante, pero merece la pena detenerse en Darlington (figura 1.8) porque fue una figura muy destacada en la historia de los filtros.

Paralelamente, los diseños de filtros se formalizaron. Una función matemática lo más deseable posible y, al mismo tiempo, realista se convirtió en el Santo Grial para los pioneros del diseño. En 1930 Stephen Butterworth desarrolló el primer tipo. En los 1931 Cauer dio un golpe maestro al desarrollar los filtros elípticos[4]. Posteriormente, en 1949 se desarrollaron los filtros de Bessel por Thomson. Los filtros de Chebyshev, basados en los polinomios del conocido matemático ruso, fueron desarrollados en los 1950s a partir del trabajo póstumo de Cauer. Es curioso que los filtros de Chebyshev, aunque se estudian después de los de Butterworth en cualquier texto académico, fueron desarrollados mucho después de los filtros elípticos cuya complejidad es la mayor alcanzada hasta el momento (Paarmann 2001). De hecho, hoy en día se sabe que los filtros de Butterworth (maximalmente planos en la banda de paso y atenuada), Chebyshev (rizado constante en la banda de paso y monótonos en la banda atenuada) y Chebyshev inversos (maximalmente planos en la banda de paso y rizado constante en la banda atenuada) son un caso límite de filtros elípticos (rizado constante en la banda de paso y en la atenuada).

Siguiendo el hilo académico y no histórico, en este libro se van a estudiar los filtros de Chebyshev antes de los elípticos. Otros filtros más modernos se han desarrollado haciendo que los filtros clásicos sean casos especiales de una clase más general (por ejemplo, los filtros ultraesféficos pueden incluir como casos particulares a los filtros de Butterworth, Chebyshev y Legendre).

[4]Provocó (según confesó Darlington) que muchos ingenieros de la Bell buscaran información en la biblioteca de Nueva York sobre las funciones elípticas, al demostrar que eran los filtros más óptimos en cuanto a rapidez de aumento de la atenuación en la banda de transición. Sobre estos filtros hablaremos largo y tendido en el capítulo 5 para ver la belleza que entrañan y la complejidad que los acompaña.

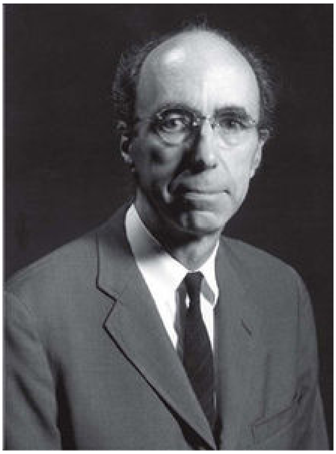
 

**Figura 1.8:** Sidney Darlington nació en Pittsburgh, Pennsylvania, el 18 de julio de 1906, y creció en Nueva Inglaterra. Recibió su B.S. en Física, Magna Cum Laude, por Harvard en 1928. En 1929 obtuvo su B.S. en ingeniería eléctrica del MIT, y su Ph.D. en Física por la universidad de Columbia en 1940. Los profesores G. W. Pierce de Harvard y E. A. Guillemin del MIT espolearon en él una fascinación por los aspectos teóricos de la ingeniería de comunicaciones. Cortesía del IEEE History Center y la Engineering and Technology History Wiki.

Toda esta historia ha supuesto un gran avance que surgió de muchos científicos trabajando por separado, pero algunos vieron un común denominador muy útil: usar las pérdidas de inserción como piedra angular de la teoría de aproximación. Darlington fue el artífice de su creación y su popularización en los Bell Telephone Laboratories. Este método empezó a dejar de lado el método de los parámetros imagen que era el preferido por usar secciones idénticas para un diseño global (aunque aproximado). El problema fue que el método de los parámetros imagen no se pudo abandonar de inmediato porque el coste de cálculo era enorme para el método de pérdidas de inserción. No había ordenadores y los cálculos involucrados eran muchas veces inasumibles en la práctica. Hoy en día el método de pérdidas de inserción es el método que ha prevalecido.

Sidney Darlington (18 de julio de 1906–31 de octubre de 1997) fue un ingeniero eléctrico (ver figura 1.8). En 1929 se unió a los Bell Labs. Su primer jefe fue Edward Lawry Norton y después fue Hendrik Wade Bode ambos con nombre propio en el campo de la ingeniería eléctrica. Darlington permaneció en los laboratorios Bell hasta que se retiró en 1971.

En 1945, recibió la medalla presidencial de la libertad, el mayor honor civil en EEUU, por sus contribuciones durante la segunda guerra mundial. En 1975 recibió la medalla Edison del IEEE y la medalla de honor del IEEE en 1981.

Publicó varios artículos sobre la historia de la síntesis de redes y filtros. Estos artículos han servido para aclarar el trabajo independiente de varios ingenieros hacia soluciones cada vez más útiles, simples y de diseño más sistemático (Darlington 1999). Su figura es omnipresente en la historia de la teoría de circuitos (Belevitch 1962) y su trabajo pionero le valió el reconocimiento recibido. Aparte de sus avances en la teoría de síntesis de filtros, también inventó en 1953 la configuración de transistores que lleva su nombre. Desarrolló el radar por compresión de pulsos chirp en 1947 y dispositivos para soltar bombas de forma precisa (bombsights). También desarrolló de forma importante las ecuaciones del guiado de cohetes integrando la información de muchas fuentes (trayectorias de blancos, datos de radar que sigue al cohete y telemetría del propio cohete) para formar un flujo de datos que guiaría al cohete a su blanco.

# PROBLEMAS PROPUESTOS

**1.1** Demostrar que:

1. $\operatorname{sen} x = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \to 0$
2. $\tan x = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \to 0$
3. $\operatorname{sen} x = x + o(x)$ cuando $x \to 0$
4. $\log(1 + x) = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \to 0$
5. $\frac{1}{1-x} = 1 + x + \mathcal{O}(x^2) = 1 + x + o(x)$ cuando $x \to 0$
6. $\frac{a_0+a_1x+a_2x^2}{b_0+b_1x} = \mathcal{O}(x)$ cuando $x \to \infty$ ($a_i$ y $b_i$ constantes)

**1.2** Demostrar que en un filtro centrado a $f_0$ de banda estrecha ($\Delta f$ pequeño respecto a $f_0$) la expresión de $f_0 = \sqrt{f_1 f_2}$ se puede aproximar por $f_0 \approx (f_1 + f_2)/2$ donde $f_1$ y $f_2$ son los límites inferior y superior respectivamente de la banda de paso.

**1.3** Sea un filtro paso-banda con $f_0 = 2.45$ GHz y $BW = 100$ MHz. Determinar los límites de la banda $f_1$ y $f_2$ y el ancho de banda fraccional $\mathcal{W}$ en tanto por cien.

**1.4** Sea un filtro paso-banda con $f_1 = 4$ GHz y $f_2 = 5$ GHz. Determinar $f_0$, $BW$, $\mathcal{W}$ en tanto por cien.

**1.5** Si un filtro en su banda de paso tiene unas pérdidas de inserción mínimas de 0.5 dB,

- ¿Cuál es el valor de $S_{21}$ máximo en escala lineal?
- Si este filtro no tiene pérdidas (y cumple unitariedad), ¿cuál debería ser su nivel máximo de pérdidas de retorno? ¿cuál es el valor correspondiente de $S_{11}$? Indicar si este valor es el mínimo o el máximo posible.

**1.6** Si un filtro sin pérdidas en su banda de paso tiene un rizado de 1 dB (su $S_{21}$ oscila entre 0 y -1 dB),

- ¿Cuál es el valor de sus pérdidas de inserción mínimas y máximas en su banda de paso?
- ¿Cuál es el valor de sus pérdidas de retorno mínimas y máximas en su banda de paso?

# Capítulo 2

# La función de transferencia

> *Empieza por el principio — dijo el Rey con gravedad — y sigue hasta llegar al final; allí te paras.*
>
> *Alicia en el país de las maravillas, Lewis Carrol (1832–1898)*

> *Lo último que uno sabe, es por donde empezar.*
>
> *Blaise Pascal (1623-1662)*

Es cierto, es difícil escribir una obra sin tener muy claro dónde acabará, pero empezar... eso si que es complicado. Elegir notación para cada término introducido y arrastrar esa notación por toda la obra, intentando ser consistente requiere bastante reflexión y planificación (y algunas veces borrar y reescribir). Algunas fuentes discrepan de los términos, las definiciones y sobretodo cómo contar de forma bien hilvanada, sin demasiados traumas para el lector, una teoría que a la vez se entienda y que sea útil. Ahí va un primer intento...

En este capítulo se tratará la función de transferencia $H(s)$, sus propiedades y su relación con los parámetros de transmisión. Esto nos permitirá saber qué funciones pueden ser funciones de transferencia a partir de sus diagramas de polos y ceros o de su expresión matemática.

Según la conveniencia se utilizará $s$ o $\omega$ como variables de la función de transferencia y de sus parámetros derivados[1].

[1] Recuérdese que $H(\omega) = H(s)|_{s=j\omega}$

**Para seguir leyendo haga click aquí**