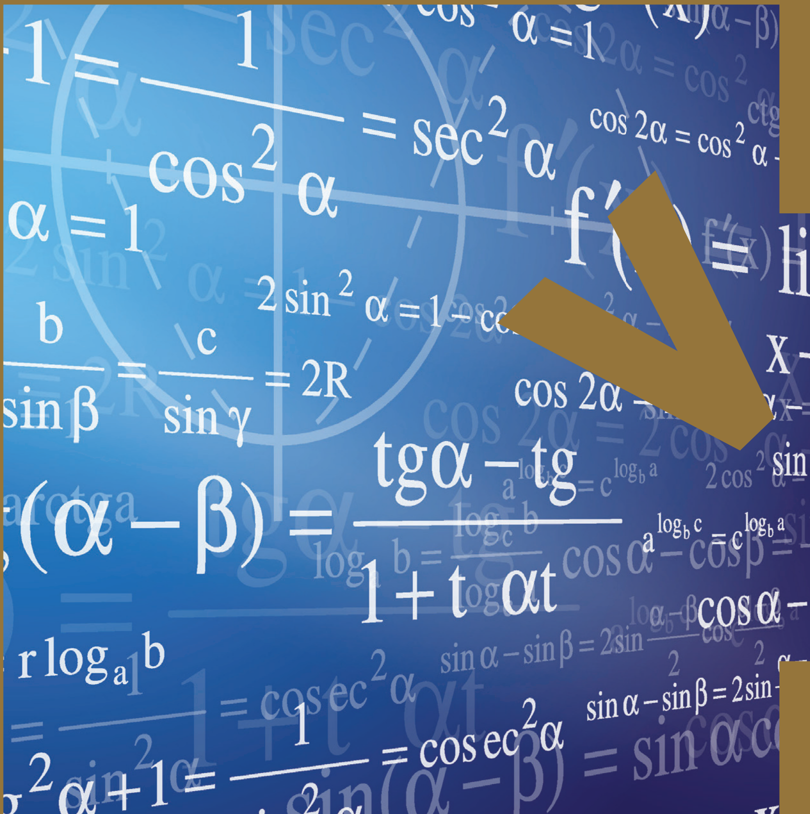
MATEMÁTICAS



CÁLCULO BÁSICO

| Francisco José Boigues Planes | Vicente D. Estruch Fuster
| Valentín Gregori Gregori | Bernardino Roig Sala
| Almanzor Sapena Piera | Anna Vidal Meló

UPV punto de partida

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Cálculo Básico

Francisco José Boigues Planes
Vicente D. Estruch Fuster
Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera
Anna Vidal Meló

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Matemática Aplicada de la UPV

Colección Punto de Partida

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: BOIGUES PLANES, FRANCISCO JOSÉ, [et. al.] (2014) *Cálculo Básico*. Valencia: Universitat Politècnica de València

Primera edición, 2014

Distribución: Telf. 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0353_05_01_01

Imprime: Byprint Percom, sl

Impreso en papel Creator Silk

ISBN: 978-84-9048-292-6
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Prólogo

En los últimos años se ha observado que algunos estudiantes llegan a la Universidad para cursar estudios técnicos, sin un nivel adecuado de conocimientos matemáticos, que no entramos aquí a analizar. Este texto, "Cálculo Básico", lo hemos elaborado, pensando en ellos, un grupo de profesores de la Escuela Politécnica Superior de Gandia (Universitat Politècnica de València), para que su contenido pueda ser impartido en un cuatrimestre o bien en un curso intensivo de verano.

Para conseguir su objetivo los autores han redactado este breve texto con un lenguaje sencillo, evitando excesiva terminología científica, y en el que, en contra del tratamiento usual de este tipo de obras, las demostraciones (en sentido clásico), sólo aparecen de forma esporádica, y generalmente en la sección de ejercicios. No obstante, el texto está escrito con rigor y con una continuada argumentación de los contenidos que se presentan.

El libro está dividido en capítulos relacionados entre sí, y en cada uno de ellos se integran con la exposición teórica, abundantes notas, ejemplos y una colección de ejercicios totalmente resueltos, con los que concluye cada capítulo. De esta manera el texto puede ser considerado un curso teórico-práctico.

Para evitar una excesiva extensión de la obra, se usa en ocasiones conceptos intuitivos, sin definir, pero cuya presencia se advierte con el uso de la letra cursiva. Otras veces se recurre a la letra pequeña para dar mayor información que no va a ser necesaria para la comprensión del resto de la obra.

Los doce capítulos seleccionados por los autores, y en este orden, han sido: Polinomios y fracciones racionales, Funciones polinómicas y racionales, Resolución de ecuaciones e inecuaciones, Cónicas, Funciones exponenciales y logarítmicas, Funciones circulares y trigonometría, Continuidad, Derivabilidad, Estudio local y gráfica de una función, Primitivas de una función, Métodos de integración y El cuerpo de los complejos.

Los autores agradecen de antemano cualquier sugerencia tendente a la mejora de este manual, por si procede una revisión del mismo, en ediciones posteriores.

Los autores.

Notación

El lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

$\forall$	Cuantificador universal. Se lee "para todo"
$\exists$	Cuantificador existencial. Se lee "existe"
$\Longleftrightarrow$	Equivalencia proposicional. Se lee "si y sólo si"
sii	Abreviatura de "si y sólo si"
$\equiv$	Equivalencia
$\approx$	Valor aproximado
$\Rightarrow$	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee "implica"
$\mid$	Se lee "tal (tales) que"
$:$	Se lee "tal (tales) que"
i.e.	En latín *id est* y se lee "es decir"
$\in$	Símbolo de pertenencia
$\subset$	Símbolo de inclusión
$\cup$	Símbolo de unión
$\cap$	Símbolo de intersección
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
$\mathbb{N}^*$	El conjunto $\mathbb{N}$ sin el cero
$\mathbb{Z}$	El anillo de los números enteros
$\mathbb{Q}$	El cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	El cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	El cuerpo de los números complejos

Índice

Capítulo 1

POLINOMIOS Y FRACCIONES RACIONALES

1.1 POLINOMIOS

1.1.1 Polinomio

Llamaremos **polinomio** en la *indeterminada* x a toda expresión de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ en donde los **coeficientes** a_i son números reales. Al conjunto de todos ellos lo representaremos por $\mathbb{R}[x]$. Los denotaremos con letras mayúsculas $P(x), Q(x), \ldots$ o simplemente $P, Q, \ldots$ si no hay duda sobre la letra indeterminada.

Se denomina **término** de un polinomio a cada uno de los sumandos. A a_0 se le llama **término independiente**. Se acostumbra a omitir los términos de coeficientes nulos. En particular, el polinomio $0 + 0x + \cdots + 0x^n$ se llama **polinomio nulo** y se denota 0.

Dos polinomios $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ y $Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$ son iguales, y se escribe $P = Q$, si $a_i = b_i$ $(i = 0, 1, 2, \ldots, n)$. Al polinomio $-a_0 - a_1x - a_2x^2 - \cdots - a_nx^n$ se le llama **opuesto** de P y se denota $-P$.

Si $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $a_n \neq 0$ se dice que el **grado** de P es n, también que a_n es el **coeficiente principal** y se escribe $\mathrm{gr}(P) = n$. Al polinomio nulo no se le asigna ningún grado.

Es habitual escribir los polinomios ordenadamente en potencias crecientes o decrecientes de x.

Monomio, binomio y trinomio son los polinomios formados por uno, dos y tres términos, respectivamente.

1.1.2 Ejemplo

El polinomio $P(x) = 1 - 2x + 0x^2 - 4x^3 + 0x^4$ se puede escribir $P = 1 - 2x - 4x^3$. Se trata pues de un trinomio de término independiente 1, coeficiente principal -4, y se tiene que $\mathrm{gr}(P) = 3$.

1.2 OPERACIONES CON POLINOMIOS

1.2.1 Suma de polinomios

Sean los polinomios $P = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ y $Q = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_nx^n$. Se define el **polinomio suma** de P y Q, y se escribe $P + Q$, como

$$P + Q = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + \cdots + (a_n + b_n)x^n$$

Por tanto $P+Q$ se obtiene sumando los coeficientes de igual grado en x. De la anterior definición se deducen, de manera inmediata, propiedades análogas a la suma de enteros:

Conmutativa: $P + Q = Q + P$

Asociativa: $(P + Q) + R = P + (Q + R)$

El 0 es elemento neutro: $P + 0 = P$

Existencia de opuesto de P: $P + (-P) = 0$

Obsérvese que si $\mathrm{gr}(P) = m$ y $\mathrm{gr}(Q) = n$ entonces

$$\mathrm{gr}(P + Q) \leq \max\{m, n\}$$

La suma $P + (-Q)$ se denomina **diferencia** de los polinomios P y Q y se escribe $P - Q$.

1.2.2 Nota

El cumplimiento de las anteriores cuatro propiedades justifica que $(\mathbb{R}[x], +)$ es un **grupo abeliano**.

1.2.3 Ejemplo

Sean $P = 1 - 2x - 4x^3$ y $Q = 2 + 5x - 2x^2 + 4x^3$. Se tiene que

$$P + Q = 1 - 2x - 4x^3 + 2 + 5x - 2x^2 + 4x^3 = 3 + 3x - 2x^2$$

Por otra parte,

$$P - Q = (1 - 2x - 4x^3) + (-2 - 5x + 2x^2 - 4x^3) = -1 - 7x + 2x^2 - 8x^3$$

Si la ocasión lo requiere se pueden disponer los cálculos de manera adecuada en forma de tabla (ver ejercicio 1.3).

1.2.4 Producto de polinomios

Sean los polinomios $P = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n$ y $Q = b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m$. Se define el **polinomio producto** de P y Q, y se escribe $P{\cdot}Q$ como

$$P{\cdot}Q = c_0 + c_1x + \cdots + c_{n+m}x^{n+m}$$

en donde $c_k = a_0b_k + a_1b_{k-1} + \cdots + a_{k-1}b_1 + a_kb_0$.

Por tanto $P{\cdot}Q$ se obtiene en la práctica considerando a x como un valor numérico y efectuando el producto usual $(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) \cdot (b_0 + b_1x + \cdots + b_mx^m)$ con tal de tener en cuenta que $x^i{\cdot}x^j = x^{i+j}$.

Es obvio que $\mathrm{gr}(P{\cdot}Q) = \mathrm{gr}(P) + \mathrm{gr}(Q)$.

De la anterior definición se deducen, de manera inmediata, propiedades análogas al producto de enteros:

Conmutativa: $P{\cdot}Q = Q{\cdot}P$

Asociativa: $(P{\cdot}Q) \cdot R = P \cdot (Q{\cdot}R)$.

El 1 es neutro: $1{\cdot}P = P$

Distributiva respecto de la suma: $(P + Q){\cdot}R = P \cdot R + Q{\cdot}R$.

1.2.5 Nota

El cumplimiento de estas propiedades justifica que $(\mathbb{R}[x], +, \cdot)$ sea un **anillo unitario conmutativo** (dado que $(\mathbb{R}[x], +)$ es grupo abeliano).

1.2.6 Nota

Cuando $\lambda \in \mathbb{R}$ y $P \in \mathbb{R}[x]$ es interesante considerar el producto $\lambda \cdot P$ como una ley externa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}[x] \to \mathbb{R}[x]$ (ya que $\mathbb{R}[x]$ es un espacio vectorial real), que obviamente, y como caso particular del producto de polinomios, viene definido por $\lambda(a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n) = \lambda a_0 + \lambda a_1x + \cdots + \lambda a_nx^n$.

El producto $P \cdots P$ (n veces) se denota P^n.

1.2.7 Ejemplo

(i) Sean $P = x^2 - 2x + 1$ y $Q = 2x^2 + 2$. Entonces, aplicando la propiedad distributiva, se tiene:

$$\begin{aligned} P \cdot Q &= (x^2 - 2x + 1) \cdot (2x^2 + 2) = 2x^4 - 4x^3 + 2x^2 + 2x^2 - 4x + 2 \\ &= 2x^4 - 4x^3 + 4x^2 - 4x + 2 \end{aligned}$$

Obsérvese que $\mathrm{gr}(P \cdot Q) = 4 (= \mathrm{gr}(P) + \mathrm{gr}(Q))$.

Si la ocasión lo requiere se pueden disponer los cálculos de manera adecuada en forma de tabla (ver ejercicio 1.4).

(ii) $\frac{1}{2} \cdot P = \frac{1}{2}(x^2 - 2x + 1) = \frac{1}{2}x^2 - x + \frac{1}{2}$

1.3 DIVISIBILIDAD DE POLINOMIOS

Si efectuamos la *división euclídea* del entero p por el entero positivo q, se obtiene un cociente c y un resto r de manera que $p = cq + r$ con $0 \leq r < q$.

De manera análoga en los polinomios se verifica el siguiente resultado.

1.3.1 División de polinomios

Si P y Q son polinomios de manera que $\mathrm{gr}(Q) \leq \mathrm{gr}(P)$ y $Q \neq 0$, entonces existen dos polinomios, únicos, C y R (llamados **cociente** y **resto**, respectivamente) de manera que $P = Q \cdot C + R$ con $\mathrm{gr}(R) < \mathrm{gr}(Q)$, o $R = 0$.

Cuando $R = 0$ se dice que la **división** es **exacta**, o que Q es un divisor de P, o que P es múltiplo de Q. Obviamente $\mathrm{gr}(P) = \mathrm{gr}(Q) + \mathrm{gr}(C)$.

1.3.2 Práctica de la división

Sean $P = 8x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2$ y $Q = 2x^2 + x$. La manera práctica de hacer la división de P por Q es similar a la de los enteros como muestra el siguiente esquema cuya interpretación se deja al lector.

$$\begin{array}{ccccc|ccc}
8x^4 & -2x^3 & -2x^2 & & +2 & 2x^2 & +x & \\ \cline{6-8}
-8x^4 & -4x^3 & & & & 4x^2 & -3x & +\frac{1}{2} \\ \cline{1-5}
/ & -6x^3 & -2x^2 & & +2 & & & \\
 & +6x^3 & +3x^2 & & & & & \\ \cline{2-5}
 & / & x^2 & & +2 & & & \\
 & & -x^2 & -\frac{1}{2}x & & & & \\ \cline{3-5}
 & & / & -\frac{1}{2}x & +2 & & &
\end{array}$$

Así pues $8x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2 = (2x^2 + x)\left(4x^2 - 3x + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}x + 2$. Puesto que $R = -\frac{1}{2}x + 2 \neq 0$, la división no ha sido exacta.

1.3.3 División por $x - a$

Cuando se divide un polinomio $P = a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0$ de grado $n \geq 1$ por otro de la forma $x - a$, se obtiene un cociente $C = c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$ que es de grado $n - 1$ y un resto R que es necesariamente un número real. Así pues se tendrá

$$a_n x^n + \cdots + a_1 x + a_0 = (x - a)(c_{n-1}x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0) + R$$

en donde se verificará

$$a_n = c_{n-1}, a_{n-1} = c_{n-2} - ac_{n-1}, \ldots, a_0 = R - ac_0$$

por lo que los coeficientes c_i del cociente C de la anterior división verificarán

$$c_{n-1} = a_n, c_{n-2} = a_{n-1} + ac_{n-1}, c_{n-3} = a_{n-2} + ac_{n-2}, \ldots$$

El anterior resultado permite obtener el cociente y el resto de la división de un polinomio P por $Q = x - a$ mediante la **regla de Ruffini** que consiste en la realización del siguiente cálculo:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & a_n & a_{n-1} & a_{n-2} & \cdots & a_0 \\
a & & ac_{n-1} & ac_{n-2} & \cdots & ac_0 \\
\hline
 & a_n & a_{n-1} + ac_{n-1} & a_{n-2} + ac_{n-2} & \cdots & a_0 + ac_0 \\
 & (= c_{n-1}) & (= c_{n-2}) & (= c_{n-3}) & \cdots & (= R)
\end{array}$$

1.3.4 Ejemplo

Vamos a dividir $x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5$ por $x + 2$. Con la terminología anterior se tiene $a = -2$, y la disposición práctica es:

$$\begin{array}{c|ccccc}
 & 1 & -2 & 3 & 0 & -5 \\
-2 & & -2 & 8 & -22 & 44 \\
\hline
 & 1 & -4 & 11 & -22 & 39 \\
 & (= c_3) & (= c_2) & (= c_1) & (= c_0) & (= R)
\end{array}$$

En consecuencia

$$x^4 - 2x^3 + 3x^2 - 5 = (x + 2)(x^3 - 4x^2 + 11x - 22) + 39$$

1.4 FRACCIONES RACIONALES

1.4.1 Fracción algebraica

Se llama **fracción algebraica** (que en ocasiones para abreviar llamaremos fracción) a una expresión de la forma $\dfrac{P}{Q}$ donde P y Q son polinomios en x, y $Q \neq 0$. A P y Q se les denomina numerador y denominador, respectivamente.

Las fracciones algebraicas $\dfrac{P}{Q}$ y $\dfrac{R}{S}$ se dicen **equivalentes**, en cuyo caso se escribe $\dfrac{P}{Q} = \dfrac{R}{S}$, si $P{\cdot}S = Q{\cdot}R$. Al conjunto de todas las fracciones algebraicas equivalentes a una fracción dada, se le denomina **fracción racional**. Una fracción racional se llama **propia** si el grado del numerador es menor que el grado del denominador.

La fracción $\dfrac{P}{\alpha}$ cuando α es un número real se identifica con el polinomio $\dfrac{1}{\alpha}{\cdot}P$.

Es evidente que si H es un polinomio no nulo entonces $\dfrac{A}{B} = \dfrac{A{\cdot}H}{B{\cdot}H}$ por lo que si se multiplica o divide (cuando es posible) numerador y denominador de una fracción algebraica por un polinomio no nulo, se obtiene otra fracción equivalente.

Simplificar una fracción algebraica es obtener otra equivalente más sencilla, es decir, con coeficientes más pequeños (en valor absoluto) o con polinomios de grados inferiores. Obviamente $\dfrac{A}{B}$ es una simplificación de $\dfrac{A \cdot H}{B{\cdot}H}$. Si una fracción no admite simplificación se llama **irreducible**.

1.4.2 Ejemplo

(i) Las tres fracciones $\dfrac{1}{x}, \dfrac{2x}{2x^2}, \dfrac{x-1}{x^2-x}$ son equivalentes. En efecto:
$\dfrac{2x}{2x^2} = \dfrac{1}{x}$ y $\dfrac{x-1}{x^2-x} = \dfrac{x-1}{x(x-1)} = \dfrac{1}{x}$.

La fracción $\dfrac{1}{x}$ es irreducible.

(ii) $\dfrac{4x^2+x}{2}$ es el polinomio $\dfrac{1}{2}(4x^2+x) = 2x^2 + \dfrac{1}{2}x$

1.4.3 Operaciones con fracciones racionales

Vamos a definir operaciones entre fracciones algebraicas, aunque, sin entrar en detalle, es más riguroso hablar de operaciones entre fracciones racionales dado que el proceso de simplificación es deseable en la práctica, durante los cálculos y en el resultado final.

Supongamos que $\frac{A}{B}$ y $\frac{C}{D}$ representan dos fracciones racionales. Se define la **suma** $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}$ **de** ambas **fracciones** como la fracción racional

$$\frac{A}{B}+\frac{C}{D}=\frac{A\cdot D+B\cdot C}{B\cdot D}$$

Se define el **producto** $\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}$ **de** ambas **fracciones** como la fracción racional

$$\frac{A}{B}\cdot\frac{C}{D}=\frac{A\cdot C}{B\cdot D}$$

La suma y el producto de fracciones racionales tienen las mismas propiedades que la suma y producto de polinomios. Además se verifica que toda fracción racional no nula $\frac{A}{B}$ posee inversa $\frac{B}{A}$ que verifica $\frac{A}{B}\cdot\frac{B}{A}=1$.

También se define la diferencia $\frac{A}{B}-\frac{C}{D}$ como

$$\frac{A}{B}-\frac{C}{D}=\frac{A}{B}+\frac{-C}{D}=\frac{A\cdot D-B\cdot C}{B\cdot D}$$

y se define el **cociente** $\frac{A}{B}:\frac{C}{D}$, que también se denota $\frac{\frac{A}{B}}{\frac{C}{D}}$ como

$$\frac{A}{B}:\frac{C}{D}=\frac{A}{B}\cdot\frac{D}{C}\left(=\frac{A\cdot D}{B\cdot C}\right)$$

Los cálculos para realizar estas operaciones son en la práctica análogos al caso de los números racionales; en particular para la suma de varias fracciones es útil recurrir al mínimo común múltiplo de los denominadores cuyo estudio se abordará en el próximo capítulo.

1.4.4 Nota

Por verificarse las propiedades comentadas, se dice que las fracciones racionales con la suma y el producto tienen estructura de **cuerpo**.

1.4.5 Ejemplos

(i) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x+2}=\dfrac{2(x+2)+3x}{x(x+2)}=\dfrac{5x+4}{x^2+2x}$

(ii) $\dfrac{3x+2}{x+1}-\dfrac{x}{x+1}=\dfrac{3x+2-x}{x+1}=\dfrac{2x+2}{x+1}=\dfrac{2(x+1)}{x+1}=2$

(iii) $\dfrac{5}{x}-\dfrac{2}{x+1}=\dfrac{5(x+1)-2x}{x(x+1)}=\dfrac{3x+5}{x^2+x}$

Para los siguientes apartados véase previamente (iii) del ejercicio 1.7.

(iv) $\dfrac{1}{x^2-1}\cdot\dfrac{x+1}{x}=\dfrac{x+1}{(x^2-1)x}=\dfrac{x+1}{(x+1)(x-1)x}=\dfrac{1}{(x-1)x}$

(v) $\dfrac{x}{x-2}:\dfrac{x^2}{x^2-4}=\dfrac{x}{x-2}\cdot\dfrac{x^2-4}{x^2}=\dfrac{x(x^2-4)}{(x-2)x^2}=\dfrac{x(x+2)(x-2)}{(x-2)x^2}=$

$=\dfrac{x+2}{x}$

1.5 EJERCICIOS

En los siguientes 4 ejercicios tomaremos:
$P=x^4-5x^2+4$, $Q=2x^2+2x+2$ y $R=3x^2-4x$.

1.1 Hallar: (i) $P+Q$ (ii) $P-Q$

Solución:

(i) $P+Q=(x^4-5x^2+4)+(2x^2+2x+2)=x^4-3x^2+2x+6$

(ii) $P-Q=(x^4-5x^2+4)-(2x^2+2x+2)=x^4-7x^2-2x+2$

1.2 Hallar: (i) $-2P+\dfrac{1}{2}Q$ (ii) $\dfrac{3}{2}Q-R$

Solución:

(i) $-2P+\dfrac{1}{2}Q=-2(x^4-5x^2+4)+\dfrac{1}{2}(2x^2+2x+2)=$

$=-2x^4+10x^2-8+x^2+x+1=-2x^4+11x^2+x-7$

(ii) $\dfrac{3}{2}Q-R=\dfrac{3}{2}(2x^2+2x+2)-(3x^2-4x)=3x^2+3x+3-3x^2+4x=$

$=7x+3$

1.3 Hallar $P+Q-R$

Solución:

Como $-R=-3x^2+4x$, vamos a efectuar la suma $P+Q+(-R)$ disponiendo en forma de tabla *adecuada* los polinomios P,Q y $-R$, y sumamos los coeficientes de igual grado en x, como sigue:

$$\begin{array}{cccc} x^4 & -5x^2 & & +4 \\ & 2x^2 & +2x & +2 \\ & -3x^2 & +4x & \\ \hline x^4 & -6x^2 & +6x & +6 \end{array}$$

Así pues, $P+Q-R=x^4-6x^2+6x+6$.

1.4 Hallar $P{\cdot}Q$.

Solución:

Dispondremos P y Q en forma de tabla de manera análoga a como se multiplican enteros, de forma que cada fila de la distribución central se obtiene de multiplicar cada uno de los términos de Q por todos los de P, y finalmente se suman los correspondientes términos, según las potencias de X, como sigue:

$$\begin{array}{ccccccc} & & x^4 & & -5x^2 & & +4 \\ & & & & 2x^2 & +2x & +2 \\ \hline & & 2x^4 & & -10x^2 & & +8 \\ & 2x^5 & & -10x^3 & & +8x & \\ 2x^6 & & -10x^4 & & +8x^2 & & \\ \hline 2x^6 & +2x^5 & -8x^4 & -10x^3 & -2x^2 & +8x & +8 \end{array}$$

Así pues, $P{\cdot}Q=2x^6+2x^5-8x^4-10x^3-2x^2+8x+8$

1.5 Hallar $(-x^3+2x-6){\cdot}(-\frac{1}{2}x^2)$

Solución:

$$(-x^3+2x-6)\cdot\left(-\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}x^5-x^3+3x^2$$

Nota: El proceso contrario (sacar factor común un monomio) conduce a una **descomposición factorial** del polinomio dado.

1.6 Descomponer factorialmente: (i) $2x^3 - 2x^2 + 4x$ (ii) $-6x^4 + 3x^2$

Solución:

(i) $2x^3 - 2x^2 + 4x = 2x \cdot (x^2 - x + 2)$

(ii) $-6x^4 + 3x^2 = 3x^2 \cdot (-2x^2 + 1)$, o también
$-6x^4 + 3x^2 = -6x^2 \cdot \left(x^2 - \dfrac{1}{2}\right)$, por ejemplo.

1.7 Hallar y memorizar los siguientes productos:

(i) $(x + a)^2$ (ii) $(x - a)^2$

(iii) $(x + a)(x - a)$ (iv) $(x + a)^3$

Solución:

(i) $(x + a)^2 = (x + a) \cdot (x + a) = x^2 + ax + ax + a^2 = x^2 + 2ax + a^2$

(ii) $(x - a)^2 = (x - a) \cdot (x - a) = x^2 - ax - ax + a^2 = x^2 - 2ax + a^2$

(iii) $(x + a)(x - a) = x^2 - ax + ax - a^2 = x^2 - a^2$

(iv) $(x + a)^3 = (x + a)^2 \cdot (x + a) = (x^2 + 2ax + a^2) \cdot (x + a) =$
$x^3 + ax^2 + 2ax^2 + 2a^2x + a^2x + a^3 = x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3$

Nota: Las anteriores expresiones admiten generalizaciones obvias (ver ejercicio 1.11).

En los ejercicios 1.8-1.10 se utiliza la asociatividad del producto de polinomios y (iii) del ejercicio 1.7.

1.8 Hallar $(x + 1)(x - 1)(x - 2)$

Solución:

$(x + 1)(x - 1)(x - 2) = ((x + 1)(x - 1))\,(x - 2) = (x^2 - 1)(x - 2) =$
$x^3 - 2x^2 - x + 2$

1.9 Hallar $(x + 2)(x + 2)(x - 1)$

Solución:

$(x+2)(x+2)(x-1) = ((x + 2)(x + 2))\,(x-1) = (x^2+4x+4)(x-1) =$
$x^3 - x^2 + 4x^2 - 4x + 4x - 4 = x^3 + 3x^2 - 4$

1.10 Hallar $(x+1)(x-1)(x+2)(x-2)$

Solución:

$(x+1)(x-1)(x+2)(x-2) = ((x+1)(x-1))\,((x+2)(x-2)) = (x^2-1)(x^2-4) = x^4-4x^2-x^2+4 = x^4-5x^2+4$

1.11 Hallar: (i) $(2x+3)(2x-3)$ (ii) $(x^2+3)(x^2-3)$ (iii) $\left(x^2+\dfrac{1}{2}\right)^2$

Solución:

Teniendo en cuenta la Nota del ejercicio 1.7 y observando (iii) del mismo ejercicio se tiene:

(i) $(2x+3)(2x-3) = (2x)^2 - 3^2 = 4x^2 - 9$

(ii) $(x^2+3)(x^2-3) = \left(x^2\right)^2 - 3^2 = x^4 - 9$

(iii) Teniendo en cuenta (i) del ejercicio 1.7 se tiene:

$$\left(x^2+\frac{1}{2}\right)^2 = \left(x^2\right)^2 + 2\frac{1}{2}x^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = x^4 + x^2 + \frac{1}{4}$$

1.12 Sean $P = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$ y $Q = x^3 - 7x + 6$. Hallar:

(i) El resto R de la división de P por Q.

(ii) $\dfrac{1}{8}R$.

Solución:

(i)

$$\begin{array}{rrrrr|rrr}
x^4 & -3x^3 & +x^2 & +3x & -2 & x^3 & -7x & +6 \\ \cline{6-8}
-x^4 & & +7x^2 & -6x & & x & -3 & \\ \cline{1-5}
/ & -3x^3 & +8x^2 & -3x & -2 & & & \\
 & 3x^3 & & -21x & +18 & & & \\ \cline{2-5}
 & / & 8x^2 & -24x & +16 & & &
\end{array}$$

El resto ha sido $R = 8x^2 - 24x + 16$.

(ii) $\dfrac{1}{8}R = \dfrac{1}{8}(8x^2 - 24x + 16) = x^2 - 3x + 2$

1.13 Sean $Q = x^3 - 7x + 6$ y $R = x^2 - 3x + 2$. Verificar que Q es múltiplo de R.

Solución:

Vamos a dividir Q por R y comprobaremos que el resto es 0.

$$
\begin{array}{rrrr|lll}
x^3 & & -7x & +6 & x^2 & -3x & +2 \\ \cline{5-7}
-x^3 & +3x^2 & -2x & & x & +3 & \\ \cline{1-4}
/ & 3x^2 & -9x & +6 & & & \\
 & -3x^2 & +9x & -6 & & & \\ \cline{2-4}
 & 0 & 0 & 0 & & &
\end{array}
$$

1.14 Sea $P = x^4 - 3x^3 + x^2 + 3x - 2$. Dividir P por $x - 1$ aplicando la regla de Ruffini.

Solución:

$$
\begin{array}{r|rrrrr}
 & 1 & -3 & 1 & 3 & -2 \\
1 & & 1 & -2 & -1 & 2 \\ \hline
 & 1 & -2 & -1 & 2 & 0
\end{array}
$$

Así pues se ha obtenido $x^4-3x^3+x^2+3x-2 = (x-1)(x^3-2x^2-x+2)$

1.15 Hállese $s \in \mathbb{R}$ para que $Q = x^3 - 7x + s$ sea múltiplo de $(x + 3)$.

Solución:

Aplicaremos la regla de Ruffini y obligaremos a que el resto sea cero:

$$
\begin{array}{r|rrrrl}
 & 1 & 0 & -7 & s & \\
-3 & & -3 & 9 & -6 & \\ \hline
 & 1 & -3 & 2 & s-6 & (=0)
\end{array}
$$

Así pues si $s = 6$ se tendrá: $Q = x^3 - 7x + 6 = (x + 3)(x^2 - 3x + 2)$

1.16 Simplificar las fracciones algebraicas

$$\text{(i)}\ \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} \qquad\qquad \text{(ii)}\ \frac{x}{x^3-2x^2+x}$$

Solución:

Teniendo en cuenta el ejercicio 1.7 se tiene:

$$\text{(i)}\ \frac{x^2+2x+1}{x^2-1} = \frac{(x+1)^2}{(x+1)(x-1)} = \frac{x+1}{x-1}$$

$$\text{(ii)}\ \frac{x}{x^3-2x^2+x} = \frac{x}{x(x^2-2x+1)} = \frac{1}{(x-1)^2}$$

1.17 Hallar $\dfrac{x^2+2x+1}{x^2-1}+\dfrac{x}{x^3-2x^2+x}$

Solución:

Teniendo en cuenta el ejercicio anterior y que $(x-1)^2$ es múltiplo de $(x-1)$, se tiene:

$$\frac{x^2+2x+1}{x^2-1}+\frac{x}{x^3-2x^2+x}=\frac{x+1}{x-1}+\frac{1}{(x-1)^2}=\frac{(x+1)(x-1)+1}{(x-1)^2}=$$
$$=\frac{x^2-1+1}{(x-1)^2}=\frac{x^2}{(x-1)^2}$$

1.18 Hallar $\dfrac{-x^2-x}{x+1}-\dfrac{x^2+x}{x^2-x}$

Solución:

$$\frac{-x^2-x}{x+1}-\frac{x^2+x}{x^2-x}=\frac{-x(x+1)}{x+1}-\frac{x(x+1)}{x(x-1)}=-x-\frac{x+1}{x-1}=$$
$$=\frac{-x^2+x-x-1}{x-1}=-\frac{x^2+1}{x-1}$$

1.19 Hallar $2\cdot\dfrac{2x+3}{x^2+x}+\dfrac{2x-4}{x^2+x}-\dfrac{4x}{x^2+x}$

Solución:

$$2\cdot\frac{2x+3}{x^2+x}+\frac{2x-4}{x^2+x}-\frac{4x}{x^2+x}=\frac{4x+6+2x-4-4x}{x^2+x}=\frac{2x+2}{x^2+x}=$$
$$=\frac{2(x+1)}{x(x+1)}=\frac{2}{x}$$

1.20 Hallar $\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x^4}+\dfrac{1}{x^2}$

Solución:

$$\frac{1}{x}-\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^3-1+x^2}{x^4}=\frac{x^3+x^2-1}{x^4}$$

1.21 Hallar $\dfrac{2x}{x^2-4}-\dfrac{1}{x-2}$

Solución:

$$\frac{2x}{x^2-4}-\frac{1}{x-2}=\frac{2x}{(x+2)(x-2)}-\frac{1}{x-2}=\frac{2x-(x+2)}{(x+2)(x-2)}=$$
$$=\frac{x-2}{(x+2)(x-2)}=\frac{1}{x+2}$$

1.22 Hallar $\dfrac{1}{x+3} \cdot \dfrac{x^2-9}{x}$

Solución:

$$\frac{1}{x+3} \cdot \frac{x^2-9}{x} = \frac{x^2-9}{(x+3)\cdot x} = \frac{(x+3)(x-3)}{(x+3)\cdot x} = \frac{x-3}{x}$$

1.23 Hallar $\dfrac{4x^2+12x+9}{x^2} \cdot \dfrac{x}{4x+6}$

Solución:

$$\frac{4x^2+12x+9}{x^2} \cdot \frac{x}{4x+6} = \frac{(2x+3)^2}{x^2} \cdot \frac{x}{2\cdot(2x+3)} = \frac{2x+3}{2x}$$

1.24 Hallar $\dfrac{1}{3x} \cdot x^2 \cdot \dfrac{2}{x^4}$

Solución:

$$\frac{1}{3x} \cdot x^2 \cdot \frac{2}{x^4} = \frac{2x^2}{3x^5} = \frac{2}{3x^3}$$

1.25 Hallar $\dfrac{x^2-\frac{1}{4}}{x^2} : \dfrac{x+\frac{1}{2}}{x}$

Solución:

$$\frac{x^2-\frac{1}{4}}{x^2} : \frac{x+\frac{1}{2}}{x} = \frac{\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(x-\frac{1}{2}\right)}{x^2} \cdot \frac{x}{x+\frac{1}{2}} = \frac{x-\frac{1}{2}}{x}$$

1.26 Hallar $(2x^2-1) : \dfrac{\sqrt{2}x+1}{\sqrt{2}x-1}$

Solución:

$$\frac{(2x^2-1)}{\frac{\sqrt{2}\,x+1}{\sqrt{2}\,x-1}} = \frac{(\sqrt{2}\,x+1)(\sqrt{2}\,x-1)}{\frac{\sqrt{2}\,x+1}{\sqrt{2}\,x-1}} = (\sqrt{2}\,x-1)^2$$

(que, desarrollado, sería $2x^2-2\sqrt{2}\,x+1$).

Capítulo 2

FUNCIONES POLINÓMICAS Y RACIONALES

2.1 FUNCIONES POLINÓMICAS

2.1.1 Función

Sean A y B conjuntos no vacíos de números reales. A toda correspondencia $f : A \to B$ que a cada real x de A le asigna un único real y de B se le llama **función**. A y B reciben el nombre de *conjunto inicial* y *conjunto final*, respectivamente, de f, y se dice que y es la imagen de x (por medio de f) o que x es la antiimagen de y. Es frecuente conocer f a través de una expresión matemática de la forma $y = f(x)$. Si de esta expresión se puede deducir una función *equivalente* $x = g(y)$ se dice que $g : B \to A$ es la **función inversa** de f.

Si $y = f(x)$ admite representación gráfica en un sistema cartesiano de ejes perpendiculares, el punto (x_1, y_1) pertenece a la gráfica si $y_1 = f(x_1)$. Resaltemos que al intercambiar x por y se tiene una gráfica simétrica de la anterior respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, como es fácil de verificar.

Es habitual dar una función f ignorando su conjunto inicial. En tal caso se la supone definida en el mayor conjunto A de números reales posibles, lo que constituye su **dominio** o **campo de existencia**.

Si un número real x_0 verifica $f(x_0) = 0$ se dice que x_0 es una **raíz** de la ecuación $f(x) = 0$.

2.1.2 Ejemplo

Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $y = f(x) = x^3 - 8$. Si escribimos $y = x^3 - 8$ entonces podemos deducir que $x = \sqrt[3]{y+8}$. Así pues, $g(y) = \sqrt[3]{y+8}$ es la función inversa de $f(x) = x^3 - 8$.

Una raíz de la ecuación $x^3 - 8 = 0$ es $x = 2$. En efecto, de $x^3 = 8$ se tiene $x = \sqrt[3]{8} = 2$ (obsérvese que $f(2) = 2^3 - 8 = 0$).

2.1.3 Función polinómica

A todo polinomio $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ le podemos hacer corresponder de manera natural una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ que denominaremos **polinómica**, con tal de dar a x cualquier valor real, y que viene dada por $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$ en donde $+$ y $\cdot$ son las leyes usuales de $\mathbb{R}$. A las raíces de la ecuación $f(x) = 0$ se les llaman **ceros** o **raíces** de la **función polinómica** $f(x)$. Habitualmente se escribe $y = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n$.

A las funciones polinómicas les es propia la terminología de polinomios.

Dado que $f(0) = a_0$, las gráficas de las funciones polinómicas cortan al eje OY (ordenada en el origen) en a_0, o dicho con más rigor en $(0, a_0)$.

La suma y producto de funciones polinómicas se corresponden con sus análogas en polinomios. En la práctica los términos polinomio y función polinómica suelen confundirse.

2.1.4 La función lineal

Se llama **función lineal** a la función polinómica $y = mx + n$, donde m y n son números reales. Su gráfica es siempre una recta, y la anterior expresión se denomina **ecuación explícita** de la recta. La **ecuación implícita o general** es $Ax + By + C = 0$ donde A, B y C son números reales.

Para dibujar cualquier recta $y = mx + n$ es suficiente conocer dos puntos. Conocemos el punto n de corte con el eje OY. Otro punto distinto cuando la recta no pasa por el origen, es el de corte x con el eje OX (si existe) que es la raíz de la ecuación $mx + n = 0$, es decir $x = -\dfrac{n}{m}$ cuando $m \neq 0$.

En el capítulo 6 se probará que m es la **pendiente** de la recta. Dos rectas de igual pendiente son paralelas. Si $m > 0$ la recta se orienta hacia el primer y tercer cuadrante, y si $m < 0$ hacia el segundo y cuarto cuadrante.

La ecuación de una recta que pasa por el origen es de la forma $y = mx$. En consecuencia, si (x_1, y_1) es un punto de la recta distinto del origen, se satisface que $y_1 = mx_1$ es decir $m = \dfrac{y_1}{x_1}$ por lo que la ecuación de la recta es $y = \dfrac{y_1}{x_1} \cdot x$ (ver Figura 2.1).

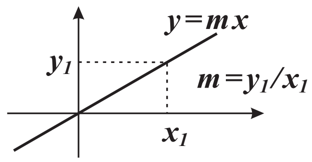


Figura 2.1: Recta que pasa por el origen.

Dado que las rectas paralelas al eje OX tienen pendiente nula, entonces su ecuación explícita es $y = n$, y por analogía, la ecuación de la recta paralela al eje OY que corta al eje OX en c se dice que es la *recta* $x = c$.

Toda recta r de ecuación $y = mx + n$, con $m \neq 0$, divide al plano en dos semiplanos que contienen a la recta r, que vienen dados por las inecuaciones (ver punto 3.4.1) $y \geq mx+n$ e $y \leq mx+n$, respectivamente. Si las anteriores desigualdades son estrictas, los semiplanos no contienen a r.

El párrafo anterior es también aplicable a las rectas paralelas a los ejes.

2.1.5 Ejemplo

Para representar la recta $y = 2x + 4$ basta observar que corta al eje OY en $y = 4$ y que de $2x + 4 = 0$ se deduce que la recta corta al eje OX en $x = -2$. Su gráfica se muestra en la Figura 2.2.

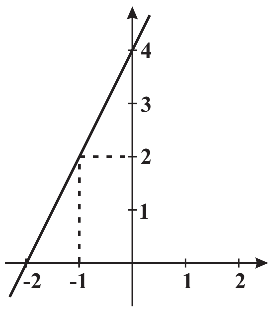


Figura 2.2: Recta de ecuación $y = 2x + 4$.

Al sustituir $x = -1$ en la ecuación $y = 2x + 4$ se obtiene $y = 2$, por lo que $(-1, 2)$ es otro punto de la recta. Sin embargo $(-1, 3)$ no es un punto de la recta pues $3 \neq 2(-1) + 4$.

El plano *por encima* de la recta sin contener a ésta viene dado por la inecuación $y > 2x + 4$ y dicho plano contiene al punto $(-1, 3)$.

2.1.6 La ecuación del haz de rectas

Haz de rectas que pasa por un punto $P(x_1, y_1)$ es el conjunto de rectas que pasan por él. Una recta cualquiera $y = mx + n$ del haz deberá verificar $y_1 = mx_1 + n$. Restando ambas expresiones se deduce la siguiente ecuación del haz de rectas por $P(x_1, y_1)$

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que satisface cualquier recta del haz.

2.1.7 Recta que pasa por dos puntos

Sea $x_1 \neq x_2$. Dos puntos distintos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ definen una sola recta que pasa por ellos. Cualquier (x, y) de dicha recta, habrá de verificar, por semejanza de triángulos (ver Figura 2.3), que

$$\frac{y - y_1}{x - x_1} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

que es la conocida **ecuación de la recta que pasa por dos puntos** $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$.

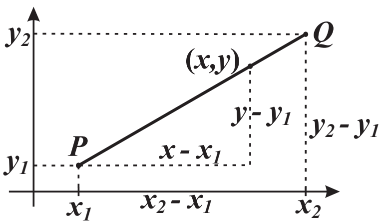


Figura 2.3: Recta que pasa por dos puntos.

2.1.8 Ecuación continua y ecuación paramétrica de la recta

La ecuación de la recta que pasa por los puntos $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ del punto anterior, también se puede escribir en la forma

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

conocida como la **ecuación continua** de la recta que pasa por $P(x_1, y_1)$ y tiene *vector director* $\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1)$.

Si escribimos

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = t$$

entonces es fácil deducir las **ecuaciones paramétricas** de la recta que pasa por $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ (o bien, que pasa por $P(x_1, y_1)$ y tiene vector director $(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$:

$$\left\{ \begin{array}{lllll} x & = & x_1 & + & t(x_2 - x_1) \\ y & = & y_1 & + & t(y_2 - y_1) \end{array} \right. , \ t \in \mathbb{R}$$

Los puntos (x, y) de una recta dada por sus ecuaciones paramétricas se obtienen dando valores reales al parámetro t. En particular, para $t = 0$ se obtiene el punto (x_1, y_1).

2.1.9 La función cuadrática y sus raíces

Se denomina **función cuadrática** a la función polinómica $y = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$. Su gráfica es siempre una parábola que tiene el vértice en el punto de abscisa $x = -\dfrac{b}{2a}$, como se demostrará en el ejercicio 9.5. La recta que es paralela al eje OY y pasa por el vértice de la parábola es eje de simetría de la parábola.

Se verifica la siguiente descomposición factorial

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$$

en donde x_1 y x_2 son las raíces de la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, que vienen dadas por la *fórmula resolutiva*

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \tag{2.1}$$

A la expresión $\Delta = b^2 - 4ac$ se le denomina **discriminante** y de éste se deduce:

Si $\Delta > 0$ la ecuación tiene dos raíces reales distintas (puntos de corte de la parábola con el eje $= X$).

Si $\Delta = 0$ la ecuación tiene una sola raíz (doble) $x = -\dfrac{b}{2a}$ (vértice de la parábola).

Si $\Delta < 0$ la ecuación no posee raíces reales (la parábola no corta al eje OX).

Con la anterior información se puede dibujar la parábola teniendo en cuenta que si $a > 0$ la parábola se abre hacia arriba, y si $a < 0$ hacia abajo (ver ejercicio 2.7).

Si denotamos $i = \sqrt{-1}$ (unidad imaginaria) las **raíces** de (2.1) cuando $\Delta < 0$ se escriben $\dfrac{-b \pm i\sqrt{4ac - b^2}}{2a}$, y se denominan **complejas** (ver capítulo 12).

2.1.10 Nota

Si designamos parábola de vértice $(0, \beta)$ a la gráfica de $y = kx^2 + \beta$ con $k \neq 0$, entonces de $ax^2 + bx + c = a\left(x + \dfrac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4a}$ se puede concluir fácilmente que $y = ax^2 + bx + c$ es una parábola con vértice $\left(-\dfrac{b}{2a}, \dfrac{4ac - b^2}{4a}\right)$.

2.1.11 Ejemplo

En la figura 2.4 (a) se ha dibujado la parábola más sencilla de escribir $y = x^2$. Compárese con la parábola $y = 2x^2$

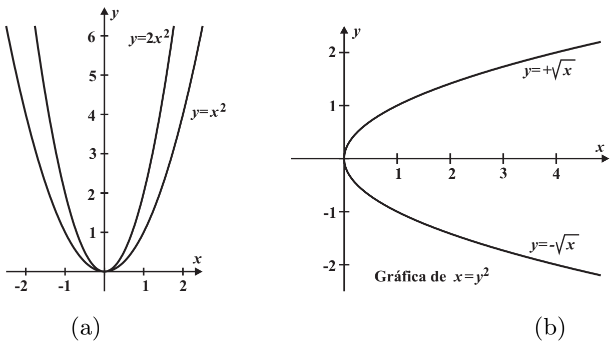


Figura 2.4: Ejemplos de parábolas

Si en la función $y = x^2$ intercambiamos x por y se obtiene $x = y^2$. La gráfica de $x = y^2$ es simétrica de $y = x^2$ respecto de la bisectriz del primer y tercer cuadrante, por lo que es de nuevo una parábola que tiene el eje OX como eje de simetría, y está dada por dos funciones $y = +\sqrt{x}$ e $y = -\sqrt{x}$ (ver figura 2.4 (b)) definidas para $x \geq 0$.

2.1.12 Nota

La **parábola** se puede definir como el lugar geométrico de los puntos del plano que equidistan de un punto (foco) y una recta (directriz) fijos.

Para seguir leyendo haga click aquí