

# Sistema de planos acotados

Conceptos básicos y ejercicios

Vicente Rioja Castellano

17

Vicente Rioja Castellano

# **SISTEMA DE PLANOS ACOTADOS**

Conceptos básicos y ejercicios

EDITORIAL

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Ingeniería Gráfica de la UPV

*Colección Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: RIOJA CASTELLANO, V. (2014) *Sistema de planos acotados. Conceptos básicos y ejercicios*. Valencia: Universitat Politècnica de València

© Vicente Rioja Castellano

Colaboradores:

Ana Rioja Castellano  
Alejandro Martínez Ferrer  
Álvaro Ciurana Tatay

© 2014, de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València  
*Distribución:* Telf. 963 877 012 / [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.: 4021\_02\_01\_05

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-9048-146-2

Impreso bajo demanda

Queda prohibida la reproducción, la distribución, la comercialización, la transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

Impreso en España

*A mi familia, presentes y ausentes, por el cariño que en todo momento he recibido de todos vosotros.  
Gracias.*



## AGRADECIMIENTOS

Una publicación técnica de estas características es el resultado de un esfuerzo y una experiencia colectiva, aunque solo aparezca uno o varios autores. Por ello quisiera agradecer, en primer lugar, a mis compañeros en las tareas docentes de la Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de la Universidad Politécnica de Valencia, los profesores Auñón López, Ferri Aranda, Gil Saurí y, de una manera especial, al profesor Cruzado Porcar (q.e.p.d), gran amigo, compañero y excelente persona, la ayuda y comprensión que de ellos he recibido.

También quisiera agradecer la colaboración de Álvaro Ciurana Tatay, antiguo alumno, actualmente graduado en Ingeniería Civil y estudiante del máster correspondiente, pronto Ingeniero de Caminos, Canales y Puertos, el cual ha realizado los dibujos y figuras de los ejercicios mediante un programa de diseño gráfico por ordenador, así como el mecanografiado de los textos, sugiriéndome al mismo tiempo la resolución de algunos ejercicios con una visión diferente a tal como se habían planteado.

Por último, he de agradecer a mis alumnos de las diferentes promociones de la UPV, las ideas y sugerencias que me han proporcionado a lo largo de todos estos años, todas ellas encaminadas a mejorar el proceso de enseñanza-aprendizaje, tan necesario y fundamental en las tareas docentes.

Valencia, septiembre de 2014

Vicente Rioja Castellano



## PRÓLOGO

En los últimos cursos, se está observando que algunos alumnos que ingresan en las Escuelas de Ingeniería comienzan el estudio de los grados sin los conocimientos adecuados de Dibujo Técnico. Esto hace que para muchos de ellos represente un esfuerzo añadido la comprensión y asimilación de las materias relacionadas con la Geometría Métrica y Descriptiva.

Por ello, este libro pretende ser una ayuda a los alumnos de nuevo ingreso en las Escuelas de Ingeniería que afronten por primera vez el estudio de los Sistemas de Representación, así como un apoyo a los alumnos ya familiarizados con la representación gráfica y que estén interesados en el estudio, mediante el Sistema de Planos Acotados, de los cuerpos y superficies más utilizadas en la Ingeniería Civil.

Así pues, se ha elaborado esta publicación con dos partes claramente diferenciadas: una primera parte -de ocho capítulos- donde se han desarrollado y comentado los conceptos y procedimientos básicos del Sistema de Planos Acotados mediante la resolución de ejercicios y cuestiones de fácil comprensión; y una segunda parte -de tres capítulos- con el estudio y representación, en este sistema, de los cuerpos y superficies más comunes en la Ingeniería, como son los Poliedros Regulares (en esta publicación solo se estudian el Tetraedro, el Octaedro y el Cubo), las Superficies Radiadas y la Esfera.

Por último, se ha de señalar que todos los ejercicios se han realizado a escala, con el objetivo de facilitar la comprensión y comprobación de los procedimientos de resolución.

Valencia, septiembre de 2014



# ÍNDICE

1.-	Conceptos fundamentales. Punto, recta y plano .....	9
2.-	Intersecciones .....	37
3.-	Paralelismo .....	57
4.-	Perpendicularidad .....	67
5.-	Distancias .....	75
6.-	Giros .....	89
7.-	Abatimientos .....	97
8.-	Triedros .....	117
9.-	Poliedros regulares .....	127
10.-	Superficies radiadas .....	159
11.-	La esfera .....	196



# **Conceptos fundamentales**

## **Punto, recta y plano**



**INTRODUCCIÓN**

**I. Fundamentos del sistema de planos acotados**

El sistema de planos acotados es un sistema de representación consistente en proyectar ortogonalmente, los cuerpos en el espacio, sobre un plano horizontal.

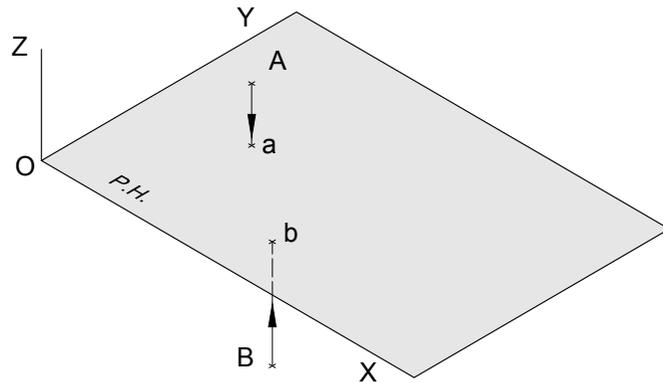


Fig. 1.I

Así pues, la proyección utilizada en este sistema será una proyección cilíndrica ortogonal, siendo los rayos que pasan por los puntos paralelos y el origen de proyección un punto impropio.

El plano horizontal de referencia toma diferentes denominaciones:

- Plano de comparación.
- Plano de referencia.
- Plano horizontal.
- Plano del cuadro.
- Plano de proyección.

**II. El punto**

Un punto, en el sistema de planos acotados, viene representado por su proyección sobre el plano de comparación y por su cota.

Cota de un punto: Distancia del punto en el espacio al plano del cuadro. Se toma positiva si el punto se encuentra por encima de dicho plano y negativa si se encuentra por debajo.

Desnivel entre dos puntos: Es la diferencia algebraica entre las cotas de dichos puntos.

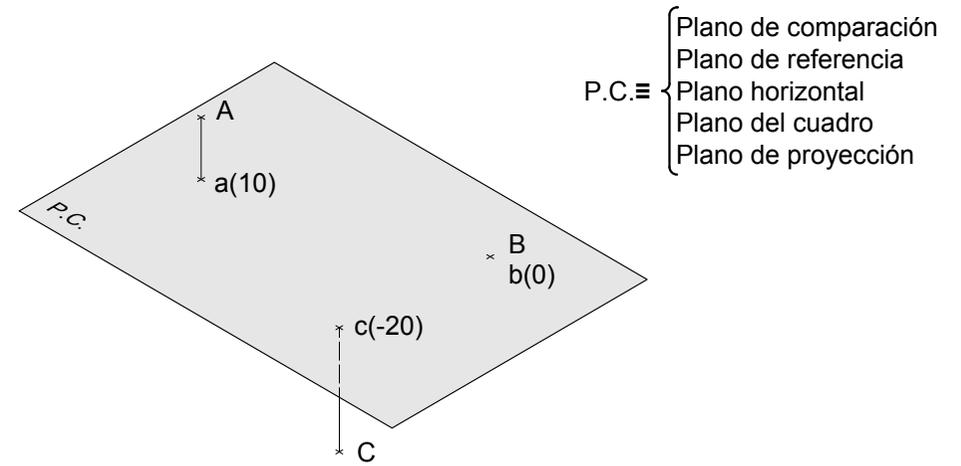


Fig. 1.II

Posiciones del punto (Fig. 1.II):

- A está 10 unidades por encima del P.C.
- B está en el P.C.
- C está 20 unidades por debajo del P.C.

**III. La recta**

Una recta *R* viene representada en el sistema de planos acotados por su proyección *r* graduada.

**Conceptos fundamentales de una recta**

- Pendiente de una recta.
- Traza de una recta.
- Módulo o intervalo de una recta.
- Graduación de una recta.
- Relación entre la pendiente y el módulo.

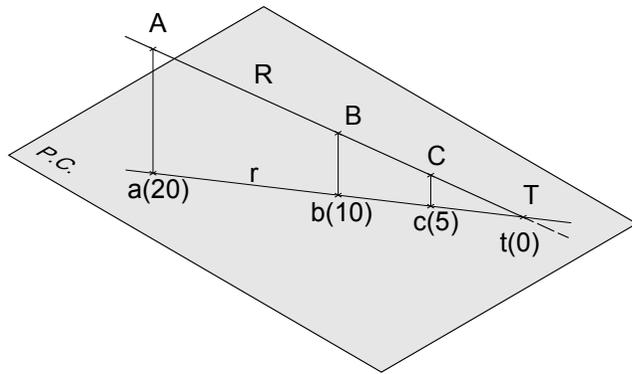


Fig. 1.III.a

- Pendiente de una recta: Es la inclinación de la recta respecto al plano horizontal. El valor de la pendiente es igual a la tangente del ángulo que forma la recta con el plano de proyección o, lo que es lo mismo, la tangente del ángulo que forman la recta y su proyección. Suele expresarse en %.

- Traza de una recta: Es el punto donde la recta corta al plano de proyección. Si el plano sobre el que se proyecta la recta es el plano horizontal la cota de la traza es 0. Se representa por *T* o *t(0)*.

- Módulo o intervalo de una recta: Es la distancia, en la proyección horizontal de la recta, entre dos puntos de cota redonda consecutiva.

- Graduar una recta: Es hallar los puntos de cota entera de la recta.

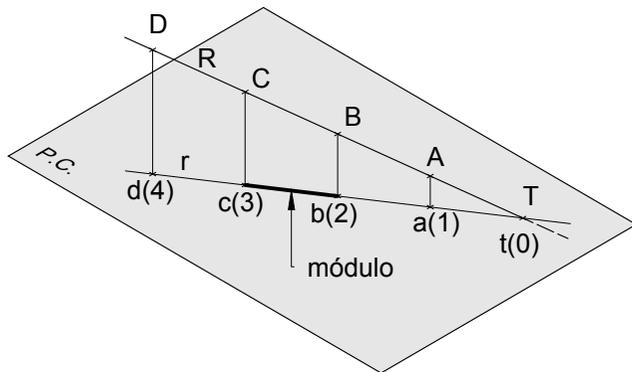


Fig. 1.III.b

- Relación entre la pendiente y el módulo:

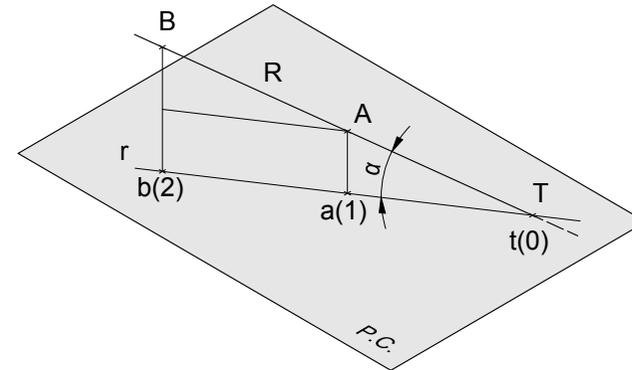


Fig. 1.III.c

$$\text{pdte. } R = \text{tg } \alpha = \frac{\text{cateto opuesto}}{\text{cateto contiguo}} = \frac{\text{dif. cota A-B}}{\text{módulo de R}} = \frac{1}{\text{mód. R}} ; \text{ luego}$$

$$\text{pdte. } R = \frac{1}{\text{mód. R}} ; \text{ mód. R} = \frac{1}{\text{pdte. R}}$$

**Tipos de rectas**

Una recta adopta tres posiciones fundamentales en el espacio respecto al plano horizontal. De ahí que se tengan tres tipos de rectas (Fig. 1.III.d):

- Recta oblicua, *R*. Es una recta inclinada respecto al plano de comparación. Todos sus puntos tienen diferente cota.

- Recta horizontal, *H*. Es paralela al plano horizontal. Todos sus puntos tienen la misma cota.

- Recta vertical, *V*. Recta perpendicular al plano horizontal. Su proyección es un punto.

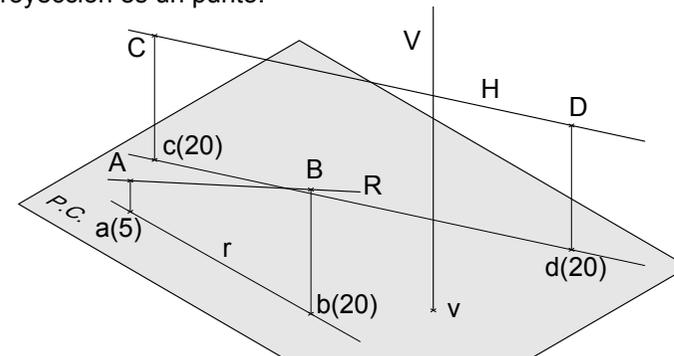


Fig. 1.III.d

**Visibilidad de una recta**

Consistirá en determinar las partes visibles (por encima del P.C.) y ocultas (por debajo del P.C.). Se representará con línea discontinua la parte oculta de una recta.

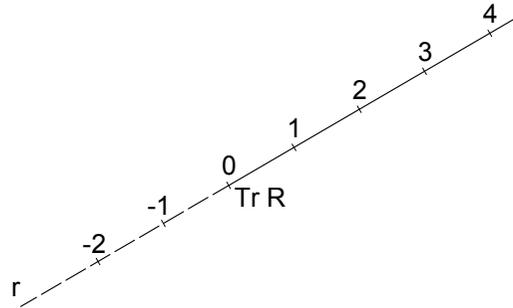


Fig. 1.III.e

**Orientación de una recta**

En las aplicaciones topográficas será necesario que las rectas estén orientadas según los puntos cardinales. Así, se puede definir que una recta *R* tiene una orientación N60°E cuando su proyección forma 60° con el Norte, medido el ángulo desde el Norte hacia el Este.

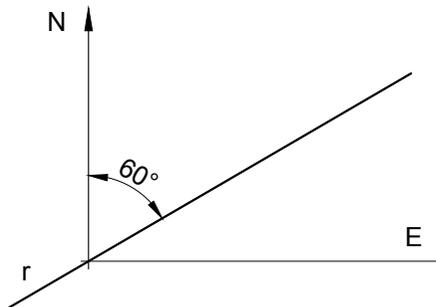


Fig. 1.III.f

**Posiciones relativas de dos rectas**

Dos rectas en el espacio pueden adoptar las siguientes posiciones entre si:

- Que se corten o sean concurrentes.

Dos rectas se cortan si el punto intersección de sus proyecciones tiene igual cota en ambas rectas. (Fig. 1.III.g)

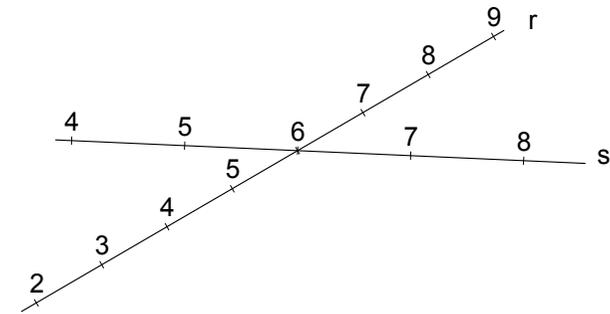


Fig. 1.III.g

- Que se crucen.

Dos rectas se cruzan en el espacio si la cota del punto intersección de sus proyecciones es distinto en cada recta. (Fig. 1.III.h)

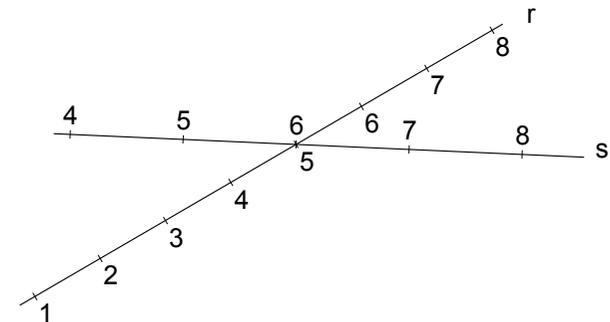


Fig. 1.III.h

- Que sean paralelas.

Dos rectas son paralelas cuando sus proyecciones son paralelas, tienen el mismo módulo o intervalo y su graduación crece en el mismo sentido. El paralelismo se comenta en el *Capítulo 3*.

**IV. El plano**

Un plano en el sistema acotado queda definido por sus rectas horizontales o por su línea de máxima pendiente (l.m.p.) graduada.

La l.m.p. es perpendicular a las horizontales del plano, por cualquier punto, tanto en el espacio como en proyección y es la recta de pendiente máxima contenida en dicho plano. Se representa por dos líneas muy próximas y paralelas con diferente grosor.

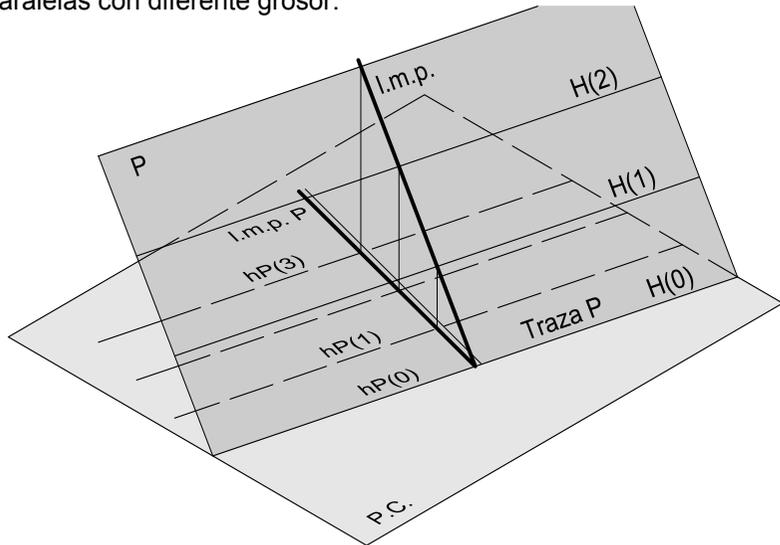


Fig. 1.IV.a

**Tipos de planos (Fig. 1.IV.b)**

- Plano horizontal, *H*. Es paralelo al plano de proyección, por lo que todos los puntos contenidos en él tienen la misma cota.
- Plano vertical, *V*. Plano perpendicular al plano de proyección. Todos los elementos contenidos en él se proyectan en la traza del plano vertical.
- Plano oblicuo, *P*. Plano inclinado.

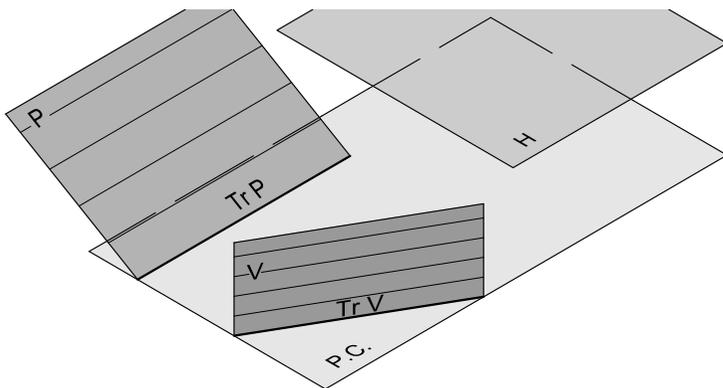


Fig. 1.IV.b

**Formas de definir un plano**

- Tres puntos no alineados.
- Dos rectas que se cortan.
- Dos rectas paralelas.
- Un punto y una recta que no contiene al punto.

Si tres puntos pertenecen a un plano *P*, dicho plano se podrá definir uniendo los puntos dos a dos, graduando las rectas obtenidas y uniendo los puntos de igual cota de ambas rectas. Con ello se obtendrán las horizontales del plano, quedando definido *P*.

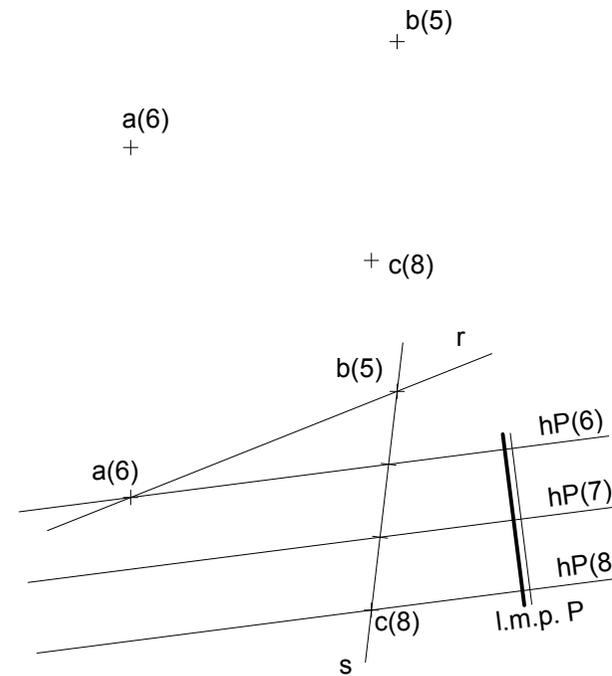


Fig. 1.IV.c

Así pues, dados los puntos *a(6)*, *b(5)* y *c(8)*, si se une *a(6)* con *b(5)* se obtiene la recta *r* y si se une *b(5)* con *c(8)* se obtiene la recta *s*. Graduando la recta *s* y uniendo *a(6)* con el punto de cota 6 de la recta *s* se obtendrá la horizontal de cota 6. Si por los puntos de cota redonda de la recta *s* se trazan paralelas a la horizontal *hP(6)* obtenida se tendrán las horizontales de cota redonda de *P* quedando definido el plano.

De la misma forma se procederá en los demás casos, graduando, uniendo puntos de igual cota y definiendo horizontales.

**V. Relaciones entre punto, recta y plano**

Un punto pertenece a una recta cuando la proyección del punto está sobre la proyección de la recta y la cota del punto coincide con la cota del punto de la recta sobre la que se proyecta. (Fig. 1.IV.d)

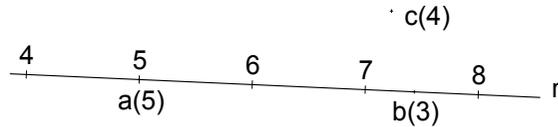


Fig. 1.V.a

Así pues, se tendrá que:

- El punto A está en la recta R.
- El punto B no está en la recta R. Su proyección está sobre la de la recta pero su cota no coincide, estando por debajo de ella, ya que la cota de B es menor que la que le correspondería si estuviese en R.
- El punto C no está en la recta, pues su proyección no está sobre la de la recta.

Un punto pertenece a un plano cuando el punto está en una horizontal de dicho plano. (Fig. 1.IV.b)

- El punto A está en el plano P.
- El punto B está por debajo del plano P.

Una recta está en un plano cuando sus puntos están en la horizontales del plano de igual cota, luego pertenecen al plano. Por una recta se pueden trazar infinitos planos que la contengan.

- La recta R está contenida en el plano P y en el plano Q.

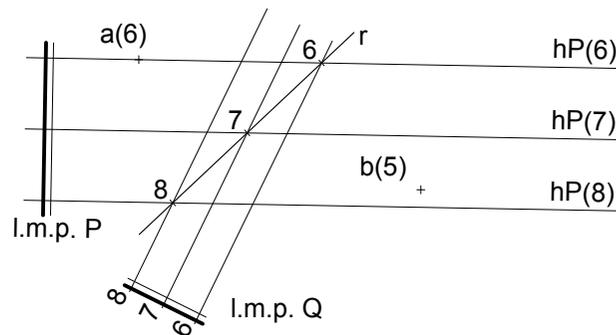


Fig. 1.V.b

**Cuestiones de aplicación**

1. Situar rectas de pendiente determinada en un plano P y que pasen por un punto A perteneciente al plano. (Fig. 1.V.c)

Se trazará por la proyección del punto A una circunferencia de radio el módulo de la recta, la cuál cortará a las horizontales de cota superior e inferior de P en cuatro puntos. Uniendo dichos puntos con la proyección de A se obtendrán las dos rectas solución R y S contenidas en P y con la pendiente dada.

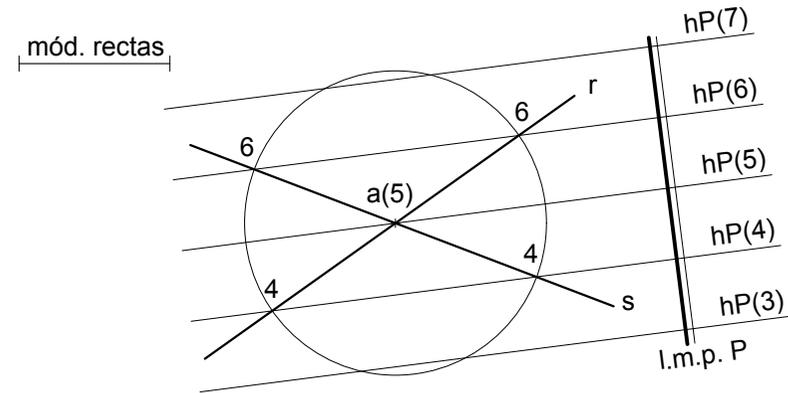


Fig. 1.V.c

Tal como se observa en la figura, la condición para situar una recta en un plano es que el módulo de la recta sea mayor que el módulo del plano (o su pendiente menor). Si el módulo de la recta fuese menor la circunferencia trazada por un punto situado en una horizontal del plano no cortaría a las horizontales de cota superior e inferior de dicho plano, por lo que no se podría trazar la recta.

2. Trazar por una recta R planos que la contengan y que tengan una pendiente determinada. (Fig. 1.V.d)

En la figura 1.V.d se da la recta R y el módulo de los planos que se quiere trazar.

mód. planos

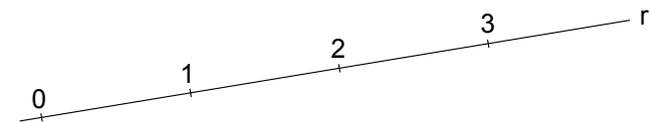


Fig. 1.V.d

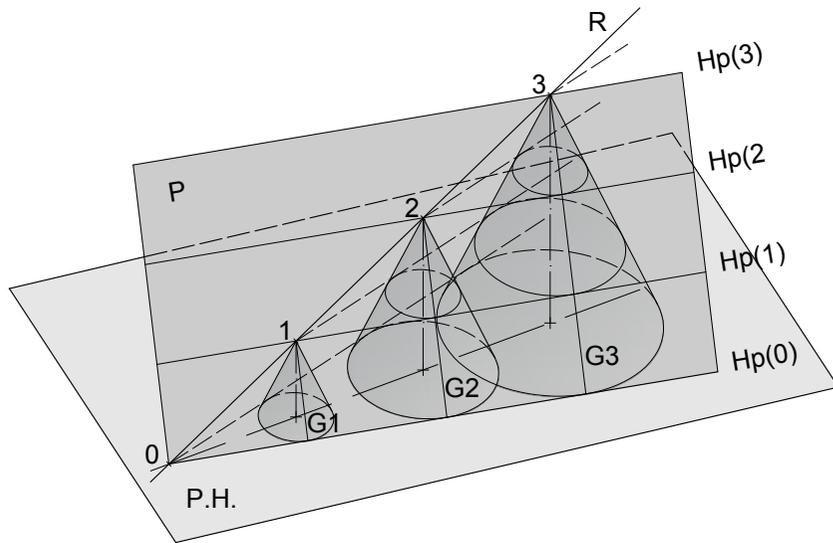


Fig. 1.V.e

El plano  $P$  buscado es el que contiene a  $R$  y a las rectas  $G1, G2, G3, \dots, GN$ . Dichas rectas,  $G1, G2, \dots$ , són las generatrices de los conos cuya pendiente será la pendiente establecida para el plano  $P$ , cuyos vértices son los puntos de cota redonda de la recta  $R$  y cuyas bases están apoyadas en el P.H.

Al proyectar sobre el P.H. se tendrá la Fig. 1.V.f.

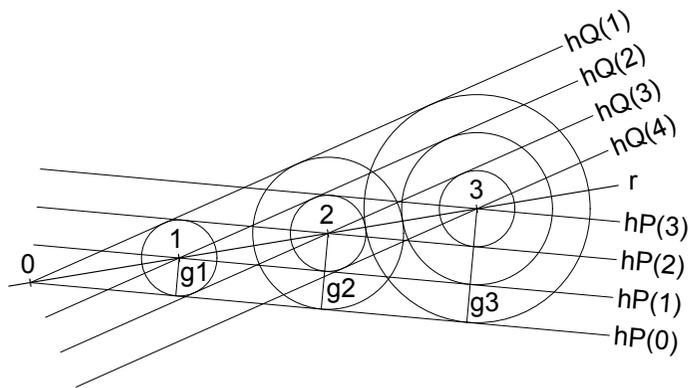


Fig. 1.V.f

Por todo ello, para trazar por una recta  $R$  planos con una pendiente determinada se trazarán por los puntos de cota redonda de la proyección  $r$  circunferencias de radio el módulo (correspondiente a la pendiente establecida para los planos) y por los puntos de cota anterior y posterior se trazarán las tangentes a las circunferencias dibujadas, obteniendo las horizontales de los planos solución. Tal como se observa en la Fig. 1.V.f se tendrán dos soluciones,  $P$  y  $Q$ .

La condición para que se puedan trazar planos con una pendiente determinada que contengan una recta es que el módulo del plano sea inferior al de la recta. La situación límite se da cuando el módulo de la recta es igual al módulo del plano, en cuyo caso la recta sería la l.m.p. del plano solución. (Fig. 1.V.g)

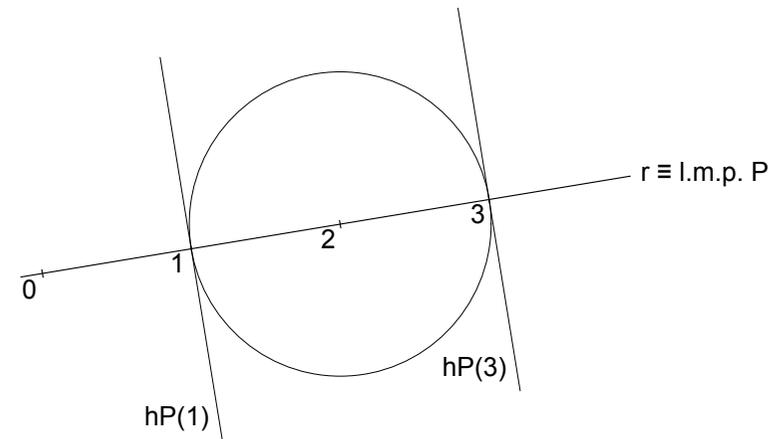


Fig. 1.V.g

**EJERCICIOS**

**EJERCICIO 1.1**

- A) Hallar gráficamente el módulo o intervalo de una recta cuya pendiente es del 30 %.
- B) Dibujar una recta con pendiente del 40% que pase por el punto A(5,5,10).
- Datos en m. E: 1/200.

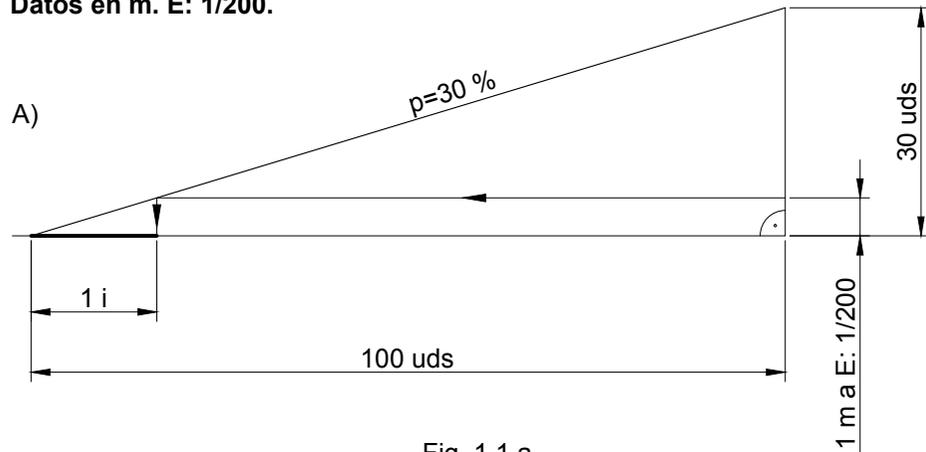
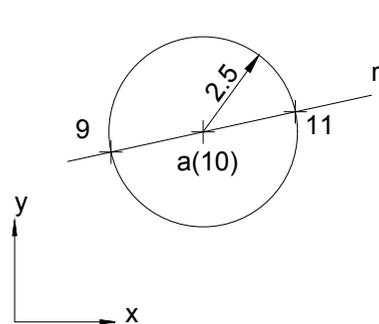


Fig. 1.1.a

- B) Cualquier recta *r* o *s* que una *a*(10) y un punto sobre la circunferencia representada tendrá pendiente del 40 %, por ser la distancia reducida entre *a*(10) y cualquier punto de la circunferencia el módulo o intervalo:



$$i = \frac{1}{p} = \frac{100}{40} = 2.5$$

Fig. 1.1.b

**EJERCICIO 1.2**

- Dada la recta *R*, que pasa por los puntos A(20,20,5) y B(60,50,10), hallar su pendiente y su intervalo. Datos en m. E: 1/1000.

La representación de la recta a E: 1/1000 es:

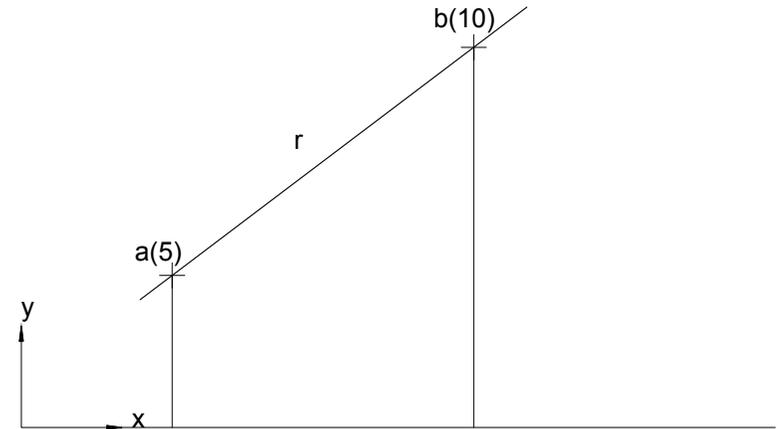


Fig. 1.2.a

- Numéricamente:

$$p = \frac{\text{cotaB} - \text{cotaA}}{d \text{ red A,B}} = \frac{10 - 5}{50} = 0.1 = 10\%; \quad i = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.1} = 10$$

- Gráficamente:

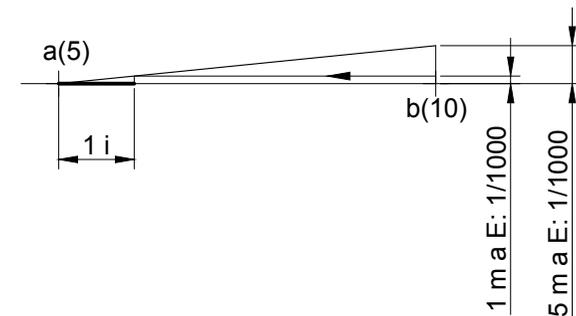


Fig. 1.2.b

**EJERCICIO 1.3**

Hallar la pendiente y el intervalo de la recta que pasa por los puntos A(60,40,40) y B(80,50,60). Datos en m. E: 1/1000.

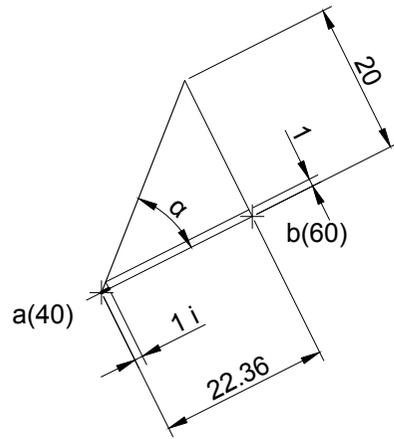


Fig. 1.3

$$p = \text{tg}(\alpha) = \frac{Z_{A,B}}{d_{\text{red } A,B}} = \frac{20}{22.36} = 0.894 = 89.4 \%$$

$$i = \frac{1}{p} = \frac{1}{0.894} = 1.12$$

**EJERCICIO 1.4**

Hallar el intervalo de una recta que forma 30° con el plano horizontal. Resolver gráficamente. Datos en m. E: 1/250.

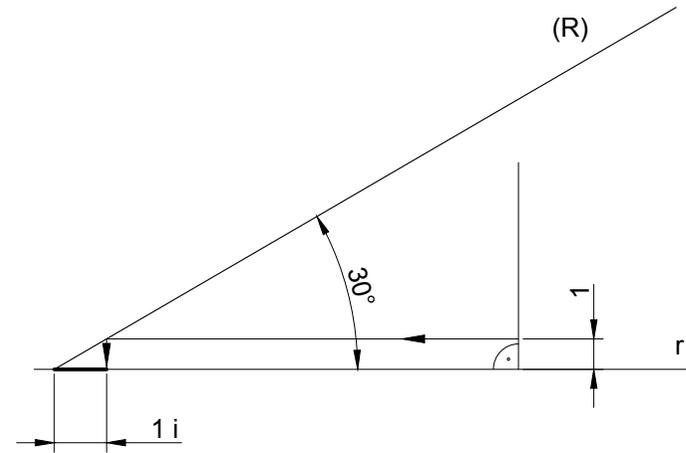


Fig. 1.4

Abatiendo la recta se obtendrá el módulo o intervalo.

**EJERCICIO 1.5**

Hallar gráficamente el intervalo de los planos cuyas pendientes son:

- Plano 1:  $p=4/5$ . E: 1/100.
- Plano 2:  $p=0.95$ . E: 1/150.
- Plano 3:  $p=17\%$ . E: 1/250.

Solución:

-Plano 1:  $p=4/5$ . E: 1/100.

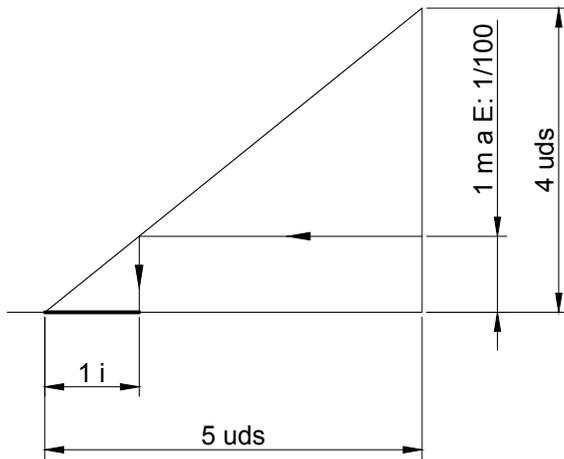


Fig. 1.5.a

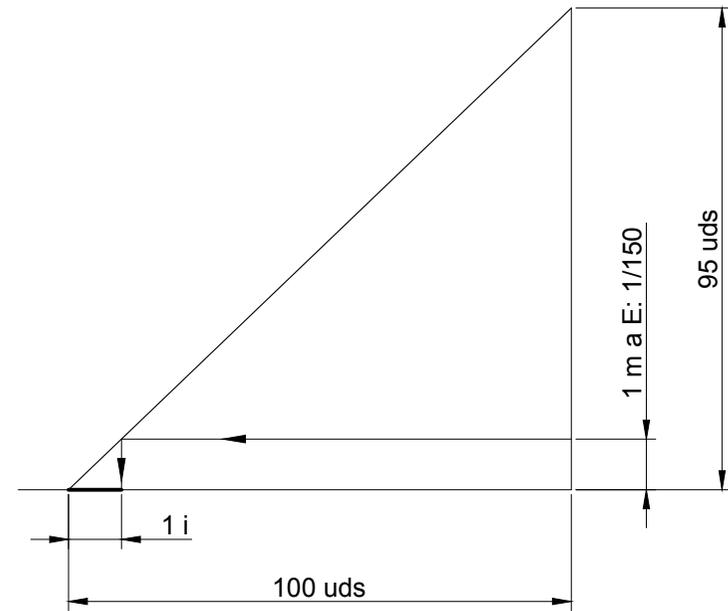


Fig. 1.5.b

- Plano 3:  $p=17\%$ . E: 1/250.

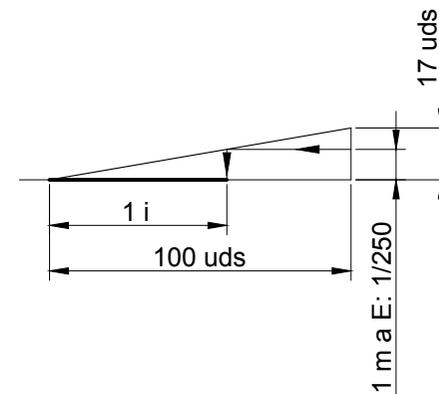


Fig. 1.5.c

**EJERCICIO 1.6**

Por el punto  $a(3)$ , dibujar una recta  $R$  cuya proyección sea paralela al eje  $OX$  y cuyo intervalo valga 2, hallando el ángulo que forma la recta  $R$  con el plano horizontal. E: 1/200.

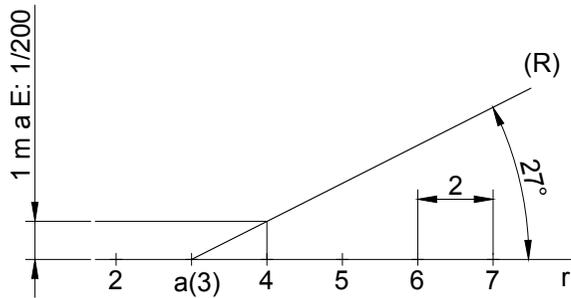


Fig. 1.6

El tamaño de un intervalo en este plano será:  $2 \times 1 \text{ m} \times \frac{1}{200} = 10 \text{ mm}$ , luego:

- 1.- Se traza una recta cualquiera  $r$  que pase por la proyección de  $A$  y sea paralela a  $OX$ .
- 2.- A partir de  $a$  y sobre  $r$  se toma el tamaño de un intervalo  $i=2$ , señalando las cotas. Se tendrá una recta  $r$  cuyo intervalo vale 2.
- 3.- Por el punto de cota 4 se levanta una perpendicular a  $r$  y sobre ella se toma 1 m a escala 1/200.
- 4.- Uniendo el punto hallado en la perpendicular con el punto  $a(3)$ , se define la recta  $(R)$  y el ángulo  $\alpha$  que forma la recta  $R$  con el plano horizontal.

**EJERCICIO 1.7**

Graduar la recta  $R$  que pasa por los puntos  $A(20,20,5)$  y  $B(50,60,12)$ . Datos en m. E: 1/1000.

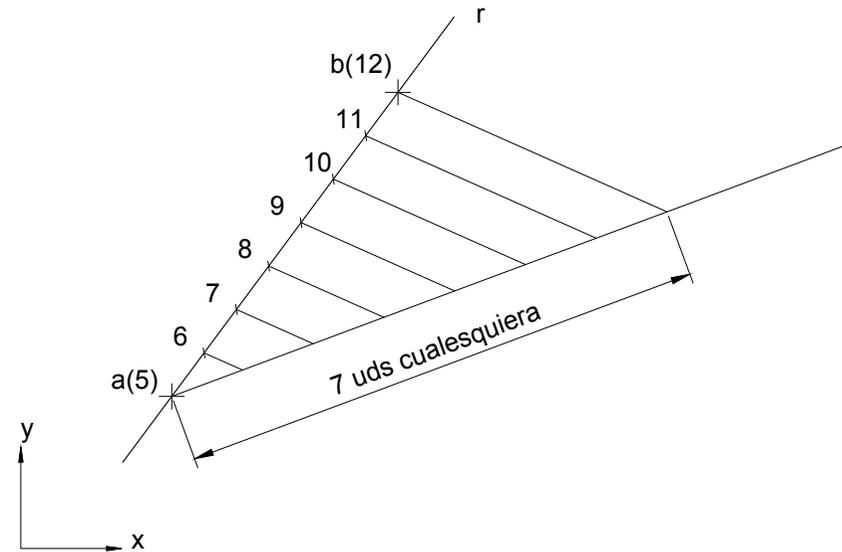


Fig. 1.7

Para graduar la recta  $R$  se dividirá el segmento  $AB$  en 7 partes iguales, que es la diferencia entre las cotas de  $A$  y  $B$ . Por Tales se resolverá el ejercicio.

**Para seguir leyendo haga click aquí**