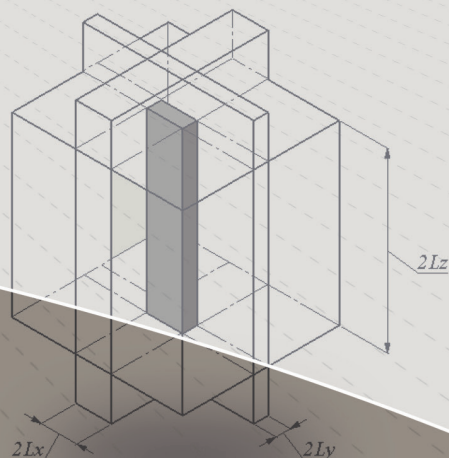
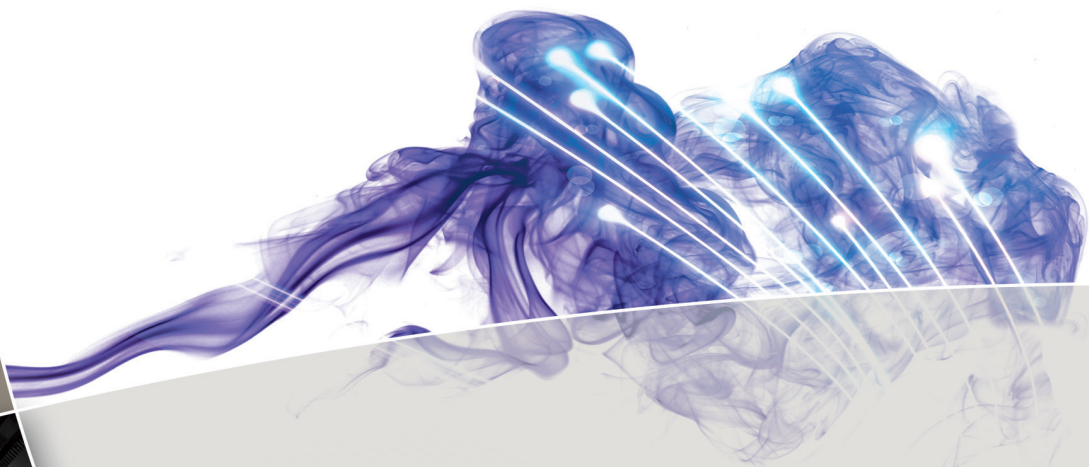


Transferencia de Masa y Energía: Ejercicios resueltos

José M. Desantes | Santiago Molina
F. Javier Salvador | Pablo Fajardo



$$\left(\frac{T_{(x,y,z,t)} - T_{\infty}}{T_i - T_{\infty}} \right)_{3D}$$

Transferencia de Masa y Energía: Ejercicios Resueltos

José M. Desantes
Santiago Molina
Francisco Javier Salvador Rubio
Pablo Fajardo

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Máquinas y Motores Térmicos de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: DESANTES FERNÁNDEZ, J. M. [et al] (2014) *Transferencia de masa y energía: ejercicios resueltos*. Valencia: Universitat Politècnica de València

Primera edición, 2014 (versión impresa)
Primera edición, 2014 (versión electrónica)

© José M. Desantes Fernández
Santiago Molina Alcaide
Francisco Javier Salvador Rubio
Pablo Fajardo Peña

© de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València
distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.:6162_01_01_01

ISBN: 978-84-9048-207-0 (versión impresa)
ISBN: 978-84-9048-210-0 (versión electrónica)

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

Índice general

Índice general	III
Nomenclatura	V
Introducción	VII
1 Conceptos generales de transferencia de masa y energía	1
1.1 Convección - difusión de una especie	3
1.2 Difusión de helio en plástico	6
1.3 Función disipación - capa límite	8
1.4 Ley de Stokes	10
1.5 Conducción - Convección - Radiación	17
1.6 Placa plana inmersa en una corriente de aire	21
2 Transferencia de energía con campo de velocidad	25
2.1 Campo de velocidades entre dos placas	27
2.2 Campo de velocidades entre dos placas con gradiente de presión	30
2.3 Campo de velocidades y temperatura entre dos placas	36
2.4 Campo de velocidades y de temperaturas entre dos placas con gradiente de presión	42
3 Transferencia de calor: Conducción - convección	53
3.1 Ventana de una aeronave	55
3.2 Depósito de oxígeno líquido	62
3.3 Radio crítico	69
3.4 Tubería cilíndrica. Espesor crítico de aislamiento	73

4	Transferencia de calor en superficies extendidas	93
4.1	Cilindro de motor con aletas	95
4.2	Distribución de temperatura en una aleta rectangular	99
4.3	Alabe de una turbina de gas	108
5	Transitorios térmicos	119
5.1	Enfriamiento del papel de aluminio	121
5.2	Tiempo de cocinado	125
5.3	Termopar	133
5.4	Medida de temperatura con un hilo delgado	141
5.5	Cilindro en una corriente de aire	153
5.6	Transitorio térmico de una esfera	163
5.7	Aislamiento térmico de un misil	172
5.8	Satélite en el espacio	183
5.9	Transitorio de un cuerpo sumergido en un recipiente	191
5.10	Placa de titanio	204
5.11	Lata de leche condensada	214
5.12	Tratamiento térmico de recocido	220
	Anexos	231
	Bibliografía	235

Tabla de símbolos

Latinos

A	Área	m^2
a	Velocidad del sonido	m/s
c	Concentración molar	$kmol/m^3$
C_p	Calor específico a presión constante	$kJ/kg \cdot K$
C_D	Coefficiente de resistencia	— — —
D	Difusividad másica	m^2/s
D_h	Diámetro hidráulico	m
e	espesor	m
F	Fuerza	N
g	Aceleración de la gravedad	m/s^2
h	Coefficiente de película	$W/m^2 \cdot K$
J	Flujo molar	$kmol/m^2$
k	Conductividad	$W/m \cdot K$
L	Longitud	m
L_c	Longitud característica	m
m	Masa	kg
\dot{M}	Flujo másico	$kg/s \cdot m^2$
\dot{m}	Gasto másico	kg/s
p	Presión	bar, Pa
P	Perímetro mojado	m
PM	Peso molecular	$kg/kmol$
q, Q	Calor	J
\dot{q}	Potencia calorífica	W
R	Constante específica del gas	$J/kg \cdot K$
T	Temperatura	$^{\circ}C, K$
t	Tiempo	s
u	velocidad	m/s
V	Volumen	m^3
Y	Fracción másica	— —
x	Fracción molar	— —
x, y, z	Coordenadas geométricas	m

Griegos

α	Difusividad térmica	m^2/s
β	Coefficiente de expansión volumétrica	$1/\text{K}$
γ	Relación de calores específicos	--
Δ	Variación de un parámetro	--
ϵ	Emisividad	--
ρ	Densidad	kg/m^3
μ	Viscosidad dinámica	$\text{kg}/\text{m} \cdot \text{s}$
ν	Viscosidad cinemática	m^2/s
θ	Temperatura adimensional	--
σ	Constante de Stefan-Boltzmann ($5,67 \cdot 10^{-8}$)	$\text{W}/\text{m}^2 \cdot \text{K}^4$
τ	Cortante - Tiempo característico	$\text{N}/\text{m}^2 - \text{s}$
Φ	Función disipación	$\text{kg}/\text{m}^2 \cdot \text{s}^2$

Subíndices y superíndices

<i>A</i>	Especie A
<i>ac</i>	Acero
<i>ai</i>	Aire
<i>c</i>	Correlación
<i>cu</i>	Cobre
<i>e</i>	Experimental
<i>w</i>	Cable (wire)

Números adimensionales

Bi	Número de Biot	$h \cdot L/k$
Br	Número de Brinkman	$\mu \cdot u^2/(k \cdot \Delta T)$
Fo	Número de Fourier	$\alpha \cdot t/L^2$
Fr	Número de Froude	$u^2/(g \cdot L)$
Gr	Número de Grashof	$g \cdot \beta \cdot L^3 \cdot \Delta T/\nu^2$
Le	Número de Lewis	α/D
M	Número de Mach	u/a
Nu	Número de Nusselt	$h \cdot L/k$
Pe	Número de Peclet (térmico)	$u \cdot L/\alpha$
	Número de Peclet (másico)	$u \cdot L/D$
Pl	Número de Planck	$(k/L)/(\sigma \cdot \epsilon \cdot T^4)$
Pr	Número de Prandtl	$C_p \cdot \mu/k$
Ra	Número de Rayleigh	$\text{Gr} \cdot \text{Pr}$
Re	Número de Reynolds	$u \cdot L/\nu$
Sc	Número de Schmidt	ν/D
St	Número de Stokes	$\rho_o \cdot u_o \cdot d_o/(18 \cdot \rho_a \cdot \nu_a)$

Introducción

En este libro se recogen una serie de ejercicios enmarcados en los contenidos de un curso de transferencia de masa y energía. El objetivo principal del libro es que sirva de ayuda a la hora de aplicar los conocimientos adquiridos del estudio de los conceptos teóricos de los temas aquí desarrollados.

Para que el libro sea de utilidad, se recomienda que el lector intente resolver los ejercicios por sí solo, utilizando para ello sus apuntes, los libros de la bibliografía y/o cualquier material que considere oportuno. Una vez efectuado este paso el libro debe servir para verificar si los razonamientos han sido correctos o no. Probablemente si el lector sigue el desarrollo de cualquiera de los problemas aquí resueltos no tendrá ningún problema en entenderlos ya que estos están explicados paso a paso y con riguroso detalle, sin embargo, no habrá adquirido una de las destrezas más importante que debe poseer un Ingeniero, que es la capacidad de resolver (o al menos intentar) un problema nuevo, como los que probablemente se le presenten en su vida profesional.

El libro está dividido en cinco capítulos, los dos primeros abordan temas básicos de transferencia de masa y energía en diferentes tipos de aplicaciones, con ellos se pretende que el lector se familiarice con los conceptos y con la aplicación de los números adimensionales y como estos sirven para comprender y/o cuantificar un problema.

El tercer capítulo está dedicado a ejercicios de transferencia de calor por conducción y convección de forma individual y combinada. Con estos ejercicios se pretende que se pueda asimilar los conceptos fundamentales de los fenómenos involucrados en la transferencia de calor.

El cuarto capítulo aborda una aplicación muy común en transferencia de calor como son las superficies extendidas (aletas). El objetivo de estos ejercicios es que el lector sea capaz de plantear y resolver problemas donde se ha incrementado la transferencia de calor por medio de estos elementos.

Para finalizar el último capítulo, y el más extenso, está destinado a ejercicios de transferencia de calor durante transitorios térmicos. Se abordan problemas de medida de temperatura, tratamientos térmicos y otra serie de cuestiones generales, que sirven para que el lector comprenda que los conceptos que ha aprendido tienen un gran campo de aplicación en la vida cotidiana. Los ejercicios planteados en este capítulo también son en su mayoría problemas combinados, donde el lector además

de saber plantear la ecuación de la energía deberá ser capaz de aplicar los conceptos de las tres formas de transmisión de calor.

La bibliografía que se encuentra al final del libro debe servir al lector para revisar y/o estudiar los conceptos teóricos necesarios para la resolución de los ejercicios planteados en este libro. Se ha dividido en bibliografía básica y de consulta de forma tal de que aquella persona que quiera profundizar algún tema en particular pueda recurrir a esta última.

Para concluir, es nuestro deseo que el libro sea de utilidad para el lector y siendo este una herramienta más para el aprendizaje de los fenómenos de transferencia de masa y energía.

Capítulo 1

Conceptos generales de transferencia de masa y energía

1.1 Convección - difusión de una especie

Si se considera una especie A , con una velocidad característica u , en un sistema multicomponente.

Se pide:

1. Encontrar un número adimensional que relacione el transporte de masa de la especie A por convección y por difusión. Para ello tomar L_c como longitud característica.
2. Cuantificar en órdenes de magnitud la relación entre los números de Re y Sc para el caso que la especie A sea H_2 difundándose en aire a 300 K y 1 bar.
3. Cuantificar en órdenes de magnitud la relación entre los números de Re y Sc para el caso que la especie A sea etanol difundándose en agua a 300 K.

Apartado 1

El problema se puede plantear empleando magnitudes físicas o de forma adimensional.

Para el primer caso se analiza con qué parámetros se escala el transporte de masa convectivo y el difusivo.

- Convectivo: $\sim \rho \cdot u \cdot Y_A$
- Difusivo: $\sim \rho \cdot D_A \cdot Y_A / L_c$

Calculando la relación entre ambos se puede obtener:

$$\frac{\rho \cdot u \cdot Y_A}{\rho \cdot D_A \cdot Y_A / L_c} = \frac{u \cdot L_c}{D_A}$$

La relación adimensional obtenida se conoce como número de Peclet (Pe).

En un problema dado, si el número de Peclet es grande, indica que el proceso convectivo es el dominante y si es pequeño el proceso dominante es el difusivo.

De forma adimensional se puede llegar al mismo número adimensional, para ello se aplica el teorema II.

Las variables del problema son:

$$\begin{aligned} u & \text{ [L/T]} \\ D_A & \text{ [L}^2\text{/T]} \\ \rho & \text{ [M/L}^3\text{]} \\ L_c & \text{ [L]} \end{aligned}$$

Dado que hay 4 variables y 3 magnitudes independientes, el problema se resuelve con un número adimensional.

$$\pi_1 = u \cdot \rho^a \cdot D_A^b \cdot L_c^c \quad \Rightarrow \quad \pi_1 = \left(\frac{\text{L}}{\text{T}}\right) \cdot \left(\frac{\text{M}}{\text{L}^3}\right)^a \cdot \left(\frac{\text{L}^2}{\text{T}}\right)^b \cdot \text{L}^c$$

$$[\text{M}] \Rightarrow a = 0$$

$$[\text{T}] \Rightarrow -1 - b = 0 \Rightarrow b = -1$$

$$[\text{L}] \Rightarrow 1 - 3a + 2b + c = 0 \Rightarrow 1 - 2 + c = 0 \Rightarrow c = 1$$

$$\pi_1 = u \cdot \rho^0 \cdot D_A^{-1} \cdot L_c^1 \quad \Rightarrow \quad \frac{u \cdot L_c}{D_A}$$

Que es el mismo número adimensional obtenido del primer análisis del problema.

El número de Peclet también se puede expresar de la siguiente forma:

$$\text{Peclet} = \text{Pe} = \frac{u \cdot L_c}{D_A} = \frac{u \cdot L_c}{\nu_A} \cdot \frac{\nu_A}{D_A} = \text{Re} \cdot \text{Sc}$$

Donde ν_A es la viscosidad cinemática del fluido, Sc el número de Schmidt y Re el número de Reynolds.

Apartado 2

El coeficiente de difusión del H_2 en aire es $D_{\text{H}_2\text{-aire}} = 7,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$ y las propiedades del hidrógeno sacadas de tablas y son:

$$\mu_{\text{H}_2} = 8,9 \cdot 10^{-6} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho_{\text{H}_2} = 0,09 \text{ kg/m}^3$$

$$\nu_{\text{H}_2} = \mu_{\text{H}_2} / \rho_{\text{H}_2} = 9,9 \cdot 10^{-5} \text{ m}^2/\text{s}$$

Reemplazando los valores de las propiedades en la ecuación correspondiente se puede obtener el número de Schmidt.

$$Sc = \frac{\nu_A}{D_A} = \frac{9,9 \cdot 10^{-5}}{7,9 \cdot 10^{-5}} = 1,25$$

Para este caso en que el fluido que fluye es un gas en otro gas el número de Schmidt es del orden de 1, por lo tanto los números de Reynolds y Peclet deben ser magnitudes similares.

Apartado 3

El coeficiente de difusión del etanol en agua es $D_{etanol-agua} = 1,2 \cdot 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$ y las propiedades del etanol sacadas de tablas y son:

$$\mu_{etanol} = 1,1 \cdot 10^{-3} \text{ Pa} \cdot \text{s}$$

$$\rho_{etanol} = 790 \text{ kg}/\text{m}^3$$

$$\nu_{etanol} = \mu_{etanol} / \rho_{etanol} = 1,49 \cdot 10^{-6} \text{ m}^2/\text{s}$$

Reemplazando los valores de las propiedades se puede obtener el número de Schmidt.

$$Sc = \frac{\nu_A}{D_A} = \frac{1,49 \cdot 10^{-6}}{1,2 \cdot 10^{-9}} = 1,2 \cdot 10^3$$

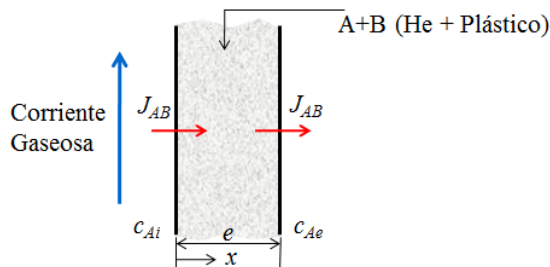
Para este caso en que el fluido que fluye es un líquido en otro líquido el número de Schmidt es del orden de 10^3 , por lo tanto, los números de Reynolds y Peclet deben diferir en tres órdenes de magnitud.

1.2 Difusión de helio en plástico

Se emplea una membrana de plástico de espesor e para separar helio de una corriente gaseosa, siendo D_{AB} el coeficiente de difusividad del helio respecto del plástico y c_{Ai} y c_{Ae} (kmol/m^3) la concentración molar de helio en las superficies interna y externa de la membrana respectivamente.

Se pide:

1. Determinar cuál es el flujo molar de helio J_{AB} separado de la corriente gaseosa.
2. Determinar el flujo másico de helio separado, de la corriente gaseosa, considerando los siguientes datos: $e = 1 \text{ mm}$, $D_{AB} = 10^{-9} \text{ m}^2/\text{s}$, $c_{Ai} = 0,01 \text{ kmol}/\text{m}^3$, $c_{Ae} = 0,005 \text{ kmol}/\text{m}^3$



Apartado 1

La concentración molar en la membrana de plástico será:

$$c = c_A + c_B$$

Teniendo en cuenta que $c_B \gg c_A$ se puede asumir que: $c \approx c_B = cte$ y que depende sólo de la composición de la membrana.

Para determinar el flujo molar de helio a través de la membrana empleamos la ley de Fick. En realidad la ley de Groot que es el caso general de la ley de Fick sin suponer el sistema isobárico e isotermo.

$$J_{AB} [\text{kmol}/\text{m}^2 \cdot \text{s}] = -c \cdot D_{AB} \cdot \frac{dx_A}{dx}$$

Donde x_A es la fracción molar de la especie A, definida como $x_A = c_A/c$.

Reemplazando se obtiene:

$$J_{AB} \text{ [kmol/m}^2 \cdot \text{s]} = -D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dx}$$

Si el sistema es estacionario y se considera que la membrana es suficientemente delgada para que el proceso sea unidimensional, J_{AB} debe ser independiente de x , por lo tanto:

$$D_{AB} \cdot \frac{dc_A}{dx} = cte = D_{AB} \cdot \frac{c_{Ai} - c_{Ae}}{e}$$

De este modo el flujo molar de helio J_{AB} es:

$$J_{AB} = D_{AB} \cdot \frac{c_{Ai} - c_{Ae}}{e} \text{ [kmol/m}^2 \cdot \text{s]}$$

Apartado 2

Reemplazando valores en la ecuación obtenida en el apartado anterior se obtiene el flujo molar de helio.

$$J_{AB} = D_{AB} \cdot \frac{c_{Ai} - c_{Ae}}{e} = 10^{-9} \cdot \frac{0,01 - 0,005}{0,001}$$

$$J_{AB} = 5 \cdot 10^{-9} \text{ kmol/m}^2 \cdot \text{s}$$

El flujo másico de helio será:

$$\dot{M}_A = PM_A \cdot J_{AB}$$

Siendo PM_A el peso molecular del helio, que tiene un valor de 4 kg/kmol.

$$\dot{M}_A = 4 \cdot 5 \cdot 10^{-9} = 2 \cdot 10^{-8} \text{ kg/m}^2 \cdot \text{s}$$

1.3 Función disipación - capa límite

En la capa límite incompresible el perfil de velocidad se puede representar por:

$$\frac{u_x}{u_\infty} = \frac{3}{2} \cdot \frac{y}{\delta} - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^3 \quad \text{para } y \leq \delta$$

Donde u_∞ la velocidad del fluido fuera de la capa límite, δ es el espesor de la capa límite e y la distancia perpendicular a la superficie que limita el flujo.

Se pide:

1. Identificar un parámetro que caracterice la función de disipación adimensional.
2. Analizar como varía este parámetro en función de y/δ .

Apartado 1

La función disipación, particularizada a este problema unidimensional es:

$$\Phi = \mu \cdot \left(\frac{\partial u_x}{\partial y}\right)^2$$

Derivando el perfil de velocidades, se obtiene:

$$\frac{\partial u_x}{\partial y} = u_\infty \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\delta} - \frac{3}{2 \cdot \delta} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right]$$

Reemplazando en la función disipación.

$$\Phi = \mu \cdot \left[u_\infty \cdot \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\delta} - \frac{3}{2 \cdot \delta} \cdot \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right] \right]^2$$

Operando y agrupando convenientemente se puede encontrar un número de disipación adimensional.

$$\Phi^* = \frac{\Phi \cdot \delta^2}{\mu \cdot u_\infty^2} = \left[\frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right) \right]^2$$

El mismo análisis se puede realizar para el esfuerzo cortante τ . Partiendo de la definición del esfuerzo cortante, reemplazando el valor de la derivada de la velocidad y ordenando convenientemente se puede obtener:

$$\tau = \mu \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \tau^* = \frac{\tau \cdot \delta}{\mu \cdot u_\infty} = \frac{3}{2} \cdot \left(1 - \left(\frac{y}{\delta}\right)^2\right)$$

Observar que la función disipación adimensional es igual al cuadrado del esfuerzo cortante adimensional $\Phi^* = \tau^{*2}$.

Apartado 2

Particularizando para los extremos de la capa límite las ecuaciones obtenidas en el apartado 1 se obtiene:

$$\text{Para } y/\delta = 0 \quad \Rightarrow \quad \Phi^* = 9/4 \quad \text{y} \quad \tau^* = 3/2$$

$$\text{Para } y/\delta = 1 \quad \Rightarrow \quad \Phi^* = 0 \quad \text{y} \quad \tau^* = 0$$

Las ecuaciones obtenidas y el perfil de velocidades se pueden representar en función de y/δ como se muestra en la figura 1.3.1.

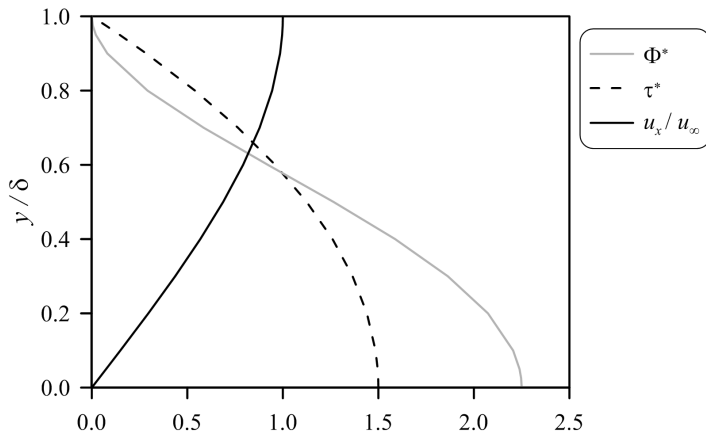
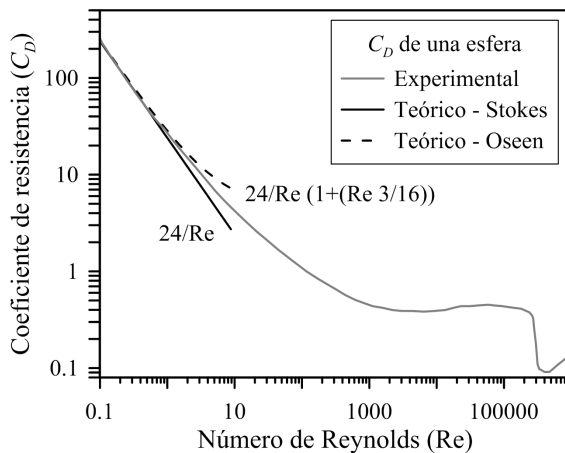


Figura 1.3.1: Perfil de velocidades, Φ^* y τ^* en función del parámetro y/δ .

1.4 Ley de Stokes

Una esfera de radio r y densidad ρ_E inmersa en un fluido de densidad ρ_A y viscosidad cinemática ν_A se deja caer desde el reposo. Se supone que el coeficiente de resistencia sigue la ley de Stokes ($C_D = 24/\text{Re}$).



Se pide:

1. Encontrar una expresión para la fuerza de resistencia viscosa en función de las propiedades del fluido.
2. Plantear la ecuación diferencial que permite obtener la velocidad u de la esfera en función del tiempo y hallar la velocidad límite.
3. Comprobar que la solución a la ecuación obtenida en el apartado anterior es de la forma:

$$u/u_L = 1 - e^{-t/\tau}$$

Donde u_L es la velocidad límite en condiciones laminares y τ un tiempo característico que cumple la ecuación $\tau = m/k$, siendo m la masa de la esfera y $k = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho_A \cdot \nu_A$

4. Determinar el valor del cociente t/τ para el que la velocidad de la esfera alcanza el 95 % de la velocidad terminal. ¿Cómo se puede reducir este tiempo?
5. Teniendo en cuenta que el régimen laminar o régimen de Stokes se extiende hasta $\text{Re} = 1$, determinar una expresión que relacione la viscosidad cinemática mínima del fluido con el radio de la esfera para garantizar condiciones laminares y confirmar que $\nu_A \sim r^{3/2}$.

6. Determinar el valor de la velocidad límite, el tiempo para alcanzarla y el número de Reynolds máximo para los datos siguientes, correspondientes a una bola de aluminio ($\rho_E = 2700 \text{ kg/m}^3$ y $r = 2 \cdot 10^{-3} \text{ m}$) inmersa en aceite ($\rho_E = 2700 \text{ kg/m}^3$, $\rho_A = 880 \text{ kg/m}^3$ y $\nu_A = 4,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2/\text{s}$).
7. Calcular el número de Stokes (St) y el de Froude (Fr) y analizar la influencia de las fuerzas de inercia, las viscosas y las debidas la gravedad.

Apartado 1

El flujo alrededor de una esfera en la corriente de Stokes tiene solución analítica y la fuerza de resistencia en el movimiento relativo esfera-fluido está controlada por el gradiente de velocidad y la viscosidad del fluido. Es decir, la fuerza de resistencia es proporcional a un gradiente de velocidad que puede representarse como u/r , la viscosidad μ y a un área que prescindiendo de las constantes será proporcional a r^2 .

$$F_R \sim \mu_A \cdot \frac{u}{r} \cdot r^2$$

Otra forma de hallar la fuerza de resistencia para la esfera es a partir de la definición del coeficiente de resistencia C_D .

$$\frac{F_R}{A} = C_D \cdot \frac{\rho_A \cdot u^2}{2}$$

Donde A es el área proyectada y el término que multiplica a C_D es la energía cinética por unidad de volumen o presión de parada (o de remanso).

$$F_R = C_D \cdot \frac{\rho_A \cdot u^2}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$

Combinando la ecuación anterior con el coeficiente de resistencia dado en el enunciado se obtiene:

$$F_R = \frac{24 \cdot \nu_A}{u \cdot 2 \cdot r} \cdot \frac{\rho_A \cdot u^2}{2} \cdot \pi \cdot r^2$$

$$F_R = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho_A \cdot \nu_A \cdot u = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \mu_A \cdot u$$

Ecuación conocida como la fórmula de Stokes para la resistencia de una esfera.

A los efectos del problema se define como k a los términos que multiplican a la velocidad, es decir:

$$k = 6 \cdot \pi \cdot r \cdot \rho_A \cdot \nu_A \quad \Rightarrow \quad F_R = k \cdot u$$

Apartado 2

La ecuación de conservación de la cantidad de movimiento para la esfera se puede plantear como:

$$m \cdot \frac{du}{dt} = F_g - F_R$$

Siendo F_R la fuerza de resistencia obtenida en el apartado anterior y F_g la fuerza gravitacional que se puede calcular como:

$$F_g = (\rho_E - \rho_A) \cdot g \cdot \frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3$$

La velocidad límite se alcanza cuando la velocidad alcanza un valor constante en el tiempo, es decir cuando $du/dt = 0$, para este caso $F_R = F_g$.

$$F_r = F_g = k \cdot u_L \quad \Rightarrow \quad u_L = F_g/k$$

Reemplazando F_g y k por sus valores correspondientes se obtiene:

$$u_L = \frac{F_g}{k} = \frac{2}{9} \cdot \frac{r^2 \cdot g \cdot (\rho_E - \rho_A)}{\rho_A \cdot \nu_A}$$

Apartado 3

La ecuación diferencial planteada en el apartado anterior es de variables separadas y se puede escribir como:

$$m \cdot \frac{du}{dt} = F_g - k \cdot u \quad \Rightarrow \quad dt = \frac{du}{\frac{F_g}{m} - \frac{k \cdot u}{m}}$$

$$\frac{k}{m} \cdot dt = \frac{du}{\frac{F_g}{k} - u}$$

Integrando:

$$-\frac{k}{m} \cdot t = \ln \left(\frac{F_g}{k} - u \right) + cte$$

Aplicando la condición inicial, para $t = 0 \rightarrow u = 0$.

$$cte = -\ln \left(\frac{F_g}{k} \right)$$

Remplazando el valor de la constante y operando se obtiene:

$$-\frac{k}{m} \cdot t = \ln \left(\frac{F_g}{k} - u \right) - \ln \left(\frac{F_g}{k} \right)$$

$$-\frac{k}{m} \cdot t = \ln \left(1 - \frac{u}{F_g/k} \right)$$

$$\frac{u}{F_g/k} = 1 - e^{-\frac{k}{m} \cdot t}$$

Finalmente, teniendo en cuenta que $u_L = F_g/k$ y definiendo el tiempo característico como $\tau = m/k$ se llega a:

$$\frac{u}{u_L} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}}$$

Apartado 4

Para obtener el tiempo para el que se alcanza el 95 % de la velocidad límite se remplaza los valores en la ecuación obtenida en el apartado anterior.

$$\frac{u}{u_L} = 1 - e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,95 \quad \Rightarrow \quad e^{-\frac{t}{\tau}} = 0,05$$

$$-\frac{t}{\tau} = \ln(0,05) = -2,996$$

$$\frac{t}{\tau} \sim 3 \quad \Rightarrow \quad t = 3\tau$$

Para seguir leyendo haga click aquí