



UNIVERSITAT  
POLITÈCNICA  
DE VALÈNCIA



Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

# ESTUDIO ANALÍTICO Y POR ELEMENTOS FINITOS DE FUSELAJES BAJO TENSION DIAGONAL

Autor

**Miguel Ángel Rosique Linares**

Director

**José Luis Pérez Aparicio**

**Universidad Politécnica de Valencia**

**Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño**

Valencia - Julio de 2016



**ESTUDIO ANALÍTICO Y POR  
ELEMENTOS FINITOS DE FUSELAJES  
BAJO TENSIÓN DIAGONAL**

**Miguel Ángel Rosique Linares**

Universidad Politécnica de Valencia  
Escuela Técnica Superior de Ingeniería del Diseño

Julio de 2016



*“Experience without theory is blind,  
but theory without experience is mere intellectual play”*

*Immanuel Kant*



## *Resumen*

El presente Trabajo de Fin de Grado aborda el análisis de pandeo de tensión diagonal de las placas y láminas que constituyen los fuselajes de las aeronaves actuales. Por un lado se analiza el pandeo inicial y postpandeo a cortante de placas planas tanto isótropas como de material compuesto, empleando para ello el método de Galerkin y las ecuaciones de von Karman, y el cálculo mediante elementos finitos basado en el programa *Abaqus*<sup>®</sup>.

Por otro lado se obtienen las cargas y modos de pandeo de láminas cilíndricamente curvas sometidas a cortante comparando métodos semianalíticos y numéricos. Finalmente se estudia la distribución de tensión diagonal en un panel curvo reforzado similar a una estructura semimonocasco, empleando para ello el método de los elementos finitos y contrastando los resultados con ensayos experimentales presentes en la literatura.



# Índice general

<b>Resumen</b>	<b>I</b>
<b>Índice general</b>	<b>II</b>
<b>Índice de figuras</b>	<b>V</b>
<b>Índice de tablas</b>	<b>IX</b>
<b>Lista de símbolos</b>	<b>XI</b>
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Motivación y estado actual . . . . .	1
1.2. Objetivos . . . . .	6
1.3. Organización de la memoria . . . . .	6
<b>2. Fundamentos teóricos</b>	<b>9</b>
2.1. Inicio de pandeo . . . . .	9
2.1.1. Métodos de equilibrio . . . . .	10
2.1.2. Métodos energéticos . . . . .	10
2.2. Condiciones de contorno y funciones de prueba . . . . .	11
2.3. Macromecánica de materiales compuestos . . . . .	13
2.3.1. Generalidades sobre láminas . . . . .	13
2.3.2. Macromecánica de un laminado . . . . .	14
2.4. Postpandeo . . . . .	16
2.4.1. Cinemática de gran deformación. Ecuaciones de von Karman . . . . .	17
<b>3. Inicio de pandeo en placas planas</b>	<b>21</b>
3.1. Formulación del problema . . . . .	21
3.1.1. Factor de pandeo . . . . .	22
3.2. Método de Galerkin . . . . .	23
3.2.1. Ejemplo de aplicación. Placa articulada a cortante . . . . .	25
3.2.2. Modos de pandeo . . . . .	30
3.2.3. Análisis mediante MEF . . . . .	32
3.3. Aplicación a diferentes casos de estudio . . . . .	35
3.3.1. Placa articulada sometida a compresión y cortante . . . . .	35
3.3.2. Placa a cortante con diferentes CdC . . . . .	37
3.4. Conclusiones generales . . . . .	42
<b>4. Postpandeo de placas a cortante</b>	<b>43</b>
4.1. Análisis mediante las ecuaciones de von Karman . . . . .	43
4.1.1. Evolución de la sollicitación cortante . . . . .	50
4.2. Análisis mediante MEF . . . . .	52
4.2.1. Algoritmo de Riks . . . . .	55
4.3. Contraste de Resultados . . . . .	58
4.4. Evolución de la deformada . . . . .	60

4.5. Evolución de las tensiones . . . . .	62
4.6. Influencia de las CdC . . . . .	65
4.6.1. Flecha en el centro de la placa . . . . .	65
4.6.2. Evolución de la deformada . . . . .	66
4.6.3. Evolución de las tensiones . . . . .	66
4.7. Aproximación a las tensiones. Tensión diagonal pura . . . . .	67
4.8. Conclusiones generales . . . . .	70
<b>5. Pandeo inicial de láminas curvas . . . . .</b>	<b>73</b>
5.1. Planteamiento del problema . . . . .	73
5.2. Ecuación de gobierno . . . . .	74
5.2.1. Formulación adimensional . . . . .	75
5.3. Láminas con lados articulados . . . . .	76
5.3.1. Análisis mediante el método de Galerkin . . . . .	76
5.3.2. Análisis mediante MEF . . . . .	78
5.3.3. Contraste de resultados . . . . .	79
5.3.4. Modos de pandeo . . . . .	82
5.4. Láminas con lados empotrados . . . . .	85
5.4.1. Láminas CCCC . . . . .	85
5.4.2. Láminas con dos lados enfrentados empotrados . . . . .	85
5.5. Conclusiones generales . . . . .	87
<b>6. Tensión diagonal en paneles curvos . . . . .</b>	<b>89</b>
6.1. Modelo MEF . . . . .	90
6.2. Análisis de inicio de pandeo . . . . .	91
6.2.1. Generación de la imperfección . . . . .	93
6.3. Análisis de postpandeo . . . . .	95
6.3.1. Evolución de las tensiones . . . . .	96
6.3.2. Tensiones Máximas. Contraste de resultados . . . . .	96
6.3.3. Tensiones en larguerillos y cuernas . . . . .	98
<b>7. Conclusiones, trabajos futuros y presupuesto . . . . .</b>	<b>101</b>
7.1. Conclusiones generales . . . . .	101
7.2. Trabajos futuros . . . . .	103
7.3. Presupuesto . . . . .	104
<b>Bibliografía . . . . .</b>	<b>104</b>

## *Índice de figuras*

1.1. Evolución histórica del ratio Empuje/Peso de diferentes aeronaves, cfr. [37].	1
1.2. Estructura de un Vickers Wellington (izquierda) junto a la estructura semimonocasco de un A380 (derecha), cfr. [38] y [39].	2
1.3. Fuselajes de un Douglas A-3B (izquierda) y un Boeing B52 (derecha) pandeados bajo tensión diagonal, cfr. [40] y [41].	3
1.4. Experimento en una viga armada sometida a tensión diagonal (NACA), cfr. [42].	3
1.5. Primer avión en incluir material compuesto, FS-24 (Izq.) junto al B-787 (Dcha.), construido al 50 % con materiales compuestos; cfr. [43] y [44].	4
2.1. Esquema de placa plana con el sistema de referencia habitual.	9
2.2. Comportamiento mecánico de diferentes materiales.	14
3.1. Esquema de placa plana.	21
3.2. Placa rectangular sometida a esfuerzos cortantes.	25
3.3. Gráficos $K - r$ para placa a cortante en función del numero de términos.	28
3.4. Gráficos $K - r$ para placa a cortante comparando un material isótropo con el compuesto de la Tabla 3.1.	29
3.5. Cuatro primeros modos de pandeo para cuatro y dieciséis términos.	31
3.6. Gráficos $K - r$ para placa a cortante comparando métodos semianalíticos con MEF.	33
3.7. Cuatro primeros modos de pandeo para placa articulada a cortante mediante el método de Galerkin con 16 términos y MEF.	34
3.8. Placa plana bajo solicitaciones de cortante y compresión.	35
3.9. Gráficos $K - r$ para placa a cortante y compresión comparando métodos semianalíticos con MEF.	35
3.10. Factor de pandeo para placas articuladas con diferentes solicitaciones.	36
3.11. Tres primeros modos de pandeo para placa articulada bajo cortante y compresión mediante el método de Galerkin con 16 términos y MEF.	37
3.12. Placa a cortante con empotramientos y articulaciones.	38
3.13. Factor de pandeo para placa con empotramientos y articulaciones.	39
3.14. Factor de pandeo para placas con diferentes CdC.	40
3.15. Diferentes relaciones de lados para la placa.	40
3.16. Cuatro primeros modos de pandeo para placa con lado $b$ articulado y lado $a$ empotrado.	41
4.1. Ensayo a cortante de un panel aeronáutico rigidizado, cfr. [45].	43
4.2. Caso de estudio. Placa articulada trabajando a cortante.	44
4.3. Función de prueba empleada para el estudio de postpandeo a cortante.	45
4.4. Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central mediante von Karman para material isótropo y compuesto.	50
4.5. Evolución de la distribución $N_{xy}(a, y)$ con el ratio de postpandeo en cara vertical derecha.	51
4.6. Modos de pandeo empleados para generar la imperfección.	53

4.7. Ejemplo típico de respuesta estática inestable. . . . .	54
4.8. Diagrama de flujo ilustrando el análisis de postpandeo mediante <i>Abaqus</i> <sup>®</sup> . . . . .	54
4.9. Representación gráfica del método de Riks . . . . .	56
4.10. Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central para una placa articulada de aluminio comparando von Karman y Riks. . . . .	59
4.11. Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central para material compuesto comparando von Karman y Riks. . . . .	59
4.12. Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central mediante MEF para material isótropo y compuesto. . . . .	60
4.13. Evolución del patrón de deformación de placa isótropa articulada conforme aumenta el ratio de postpandeo. . . . .	61
4.14. Evolución del patrón de deformación de placa de material compuesto articulada conforme aumenta el ratio de postpandeo. . . . .	62
4.15. Evolución de la tensión de von Mises para placa isótropa articulada conforme aumenta el ratio de postpandeo. . . . .	63
4.16. Evolución de la tensión de von Mises para placa de material compuesto articulada conforme aumenta el ratio de postpandeo. . . . .	64
4.17. Tensión máxima en función del ratio de postpandeo para material isótropo y compuesto mediante MEF. . . . .	64
4.18. Caso de estudio. Placa con articulaciones y empotramientos enfrentados trabajando a cortante. . . . .	65
4.19. Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central comparando placa de aluminio <i>SSSS</i> y <i>CSCS</i> mediante MEF. . . . .	66
4.20. Evolución del patrón de deformación de placa isótropa <i>CSCS</i> (lados empotrados superior e inferior) conforme aumenta el ratio de postpandeo. . . . .	67
4.21. Evolución de la tensión de von Mises para placa isótropa <i>CSCS</i> conforme aumenta el ratio de postpandeo. . . . .	68
4.22. Cambio de ejes para las componentes de la tensión. . . . .	68
4.23. Superficie diferencial para el cálculo de $\sigma_t$ . . . . .	69
4.24. Evolución de la tensión de von Mises según el modelo de tensión diagonal y en tres nodos de control mediante MEF. . . . .	70
5.1. Fragmento de fuselaje semimonocasco constituido por láminas reforzadas, cfr. [46]. . . . .	73
5.2. Sistema de referencia empleado y notación de los lados. . . . .	74
5.3. Lámina articulada con lado axial más largo que lado circunferencial. . . . .	76
5.4. Lámina articulada con lado circunferencial más largo que lado axial. . . . .	78
5.5. Diagramas $K - Z$ para láminas <i>SSSS</i> tipo I con diferentes relaciones de lados. . . . .	80
5.6. Diagramas $K - Z$ para láminas <i>SSSS</i> tipo II con diferentes relaciones de lados. . . . .	80
5.7. Comparación entre la carga de pandeo de placas planas y lámina curva (MEF) para $r = 1$ . . . . .	81
5.8. Comparativa entre los digramas $K - Z$ de lámina <i>SSSS</i> tipo I obtenidos con MEF y los resultados de [9]. . . . .	82

---

## ÍNDICE DE FIGURAS

---

5.9. Comparativa entre los digramas $K - Z$ de lámina $SSSS$ tipo II obtenidos con MEF y los resultados de [10]. . . . .	82
5.10. Modos de pandeo para una lámina a cortante con $r = 1$ y $Z = 100$ . . . . .	83
5.11. Evolución del primer modo de pandeo a cortante con la curvatura de la lámina. . . . .	84
5.12. Comparativa entre los digramas $K - Z$ de lámina $CCCC$ tipo I obtenidos con MEF y los resultados de [2]. . . . .	85
5.13. Comparativa entre los digramas $K - Z$ de lámina $CCCC$ tipo II obtenidos con MEF y los resultados de [2]. . . . .	86
5.14. Diagrama $K - Z$ de láminas a cortante en función de la localización de los empotramientos. . . . .	86
6.1. Ensayo de postpandeo de tensión diagonal en fuselaje semimonocasco, cfr. [47]. . . . .	89
6.2. Panel curvo reforzado de un fuselaje, cfr. [11]. . . . .	89
6.3. Ensayo experimental de tensión diagonal en estructuras curvas, cfr. [18]. . . . .	90
6.4. Partes que conforman el modelo MEF: Piel y larguerillos (izquierda) y cuaderna (derecha). . . . .	91
6.5. Geometría ensamblada del modelo MEF. . . . .	92
6.6. Modelo de viga armada curva mallado. . . . .	92
6.8. Convergencia de la carga crítica con el numero de elementos utilizado. . . . .	93
6.7. Modos de pandeo para viga armada curva. . . . .	94
6.9. Evolución de la tensión principal máxima con el ratio de postpandeo. . . . .	97
6.10. Relación entre tensión máxima y tensión promedio mediante MEF y ESDU. . . . .	98
6.11. Evolución de las áreas efectivas con el ratio de postpandeo según [11]. . . . .	99
6.12. Comparación de la tensión compresiva en los larguerillos mediante MEF y ESDU. . . . .	100
6.13. Comparación de la tensión compresiva en las cuadernas mediante MEF y ESDU. . . . .	100



## *Índice de tablas*

2.1. Condiciones de contorno. . . . .	11
2.2. Funciones de prueba para las diferentes CdC. . . . .	12
3.1. Propiedades del laminado considerado. . . . .	28
3.2. Propiedades de cada una de las láminas. . . . .	32
4.1. Modos de pandeo y su ponderación para generar la imperfección. . . . .	53
6.1. Parámetros del análisis de inicio de pandeo. . . . .	93
6.2. Modos de pandeo y su ponderación para generar la imperfección. . . . .	95
6.3. Parámetros del análisis de postpandeo mediante método de Riks. . . . .	95
6.4. Valores de $k$ y $T_\alpha$ obtenidos de [11]. . . . .	96



## Lista de Símbolos

### Mayúsculas

$A$	—	Área ( $\text{m}^2$ ).
$\mathbf{A}$	—	Matriz rigidez extensional ( $\text{N/m}$ ).
$\mathcal{A}$	—	Constantes definidas para el análisis de postpandeo (-).
$\mathbf{B}$	—	Matriz rigidez de acoplamiento ( $\text{N}$ ).
$D$	—	Rigidez a flexión de una placa plana ( $\text{N}\cdot\text{m}$ ).
$\mathbf{D}$	—	Matriz de rigidez a flexión ( $\text{N}\cdot\text{m}$ ).
$\mathcal{D}$	—	Rigidez adimensional (-).
$E$	—	Módulo de Young ( $\text{Pa}$ ).
$\mathbf{E}$	—	Matriz de coeficientes del sistema de pandeo.
$F$	—	Función de tensiones de Airy ( $\text{N}\cdot\text{m}$ ).
$G$	—	Módulo de cizalladura ( $\text{Pa}$ ).
$H$	—	Función resultante de derivar la función de Airy ( $\text{N/m}$ ).
$K$	—	Factor de pandeo (-).
$\mathbf{K}$	—	Matriz de rigidez tangente para un estado de equilibrio en el método de Riks.
$\mathcal{K}$	—	Constantes definidas para el análisis de postpandeo (-).
$M$	—	Momento flector ( $\text{N}$ ).
$N_x$	—	Solicitación axil en la dirección $x$ ( $\text{N/m}$ ).
$N_y$	—	Solicitación axil en la dirección $y$ ( $\text{N/m}$ ).
$N_{xy}$	—	Solicitación cortante $y$ ( $\text{N/m}$ ).
$\mathbf{P}$	—	Vector de cargas aplicadas en un modelo de elementos finitos ( $\text{N}$ ).
$\bar{\mathbf{Q}}$	—	Matriz rigidez en una dirección genérica. ( $\text{Pa}$ ).
$R$	—	Radio de curvatura de una lámina cilíndrica. ( $\text{m}$ ).
$\mathcal{R}$	—	Ratio de postpandeo (-).
$\mathbf{R}$	—	Residuo del método de Riks ( $\text{N}$ ).
$T_\alpha$	—	Tangente del ángulo que forma la tensión a tracción con la generatriz del cilindro en el estudio de postpandeo de paneles curvos (-).
$V$	—	Potencial de las cargas distribuidas ( $\text{N/m}$ ).
$W$	—	Función de prueba para el análisis de postpandeo (-).
$X$	—	Función de prueba que satisface CdC en dirección $x$ (-).
$Y$	—	Función de prueba que satisface CdC en dirección $y$ (-).
$Z$	—	Parámetro de curvatura para una lámina cilíndrica (-).

### Minúsculas

$a$	—	Dimensión total en la dirección $x$ para una placa ( $\text{m}$ ).
$b$	—	Dimensión total en la dirección $y$ para una placa ( $\text{m}$ ).
$\mathbf{c}$	—	Vector auxiliar empleado en el método de Riks.
$h$	—	Dimensión total en la dirección $z$ para una placa ( $\text{m}$ ).
$k$	—	Factor de tensión diagonal (-).
$m$	—	Contador para los sumatorios (-).

---

$n$	—	Contador para los sumatorios (-).
$p$	—	Carga superficial uniformemente repartida (N/m <sup>2</sup> ).
$q$	—	Carga superficial perpendicular al plano medio (N/m <sup>2</sup> ).
$r$	—	Relación entre los lados de una placa (-).
$t$	—	Espesor de una lámina (m).
$u$	—	Desplazamiento en la dirección $x$ de una placa (m).
$\mathbf{u}$	—	Vector de desplazamientos para un modelo de elementos finitos (m).
$v$	—	Desplazamiento en la dirección $y$ de una placa (m).
$\mathbf{v}$	—	Vector de desplazamientos tangentes para un determinado estado de equilibrio en el método de Riks (m).
$w$	—	Flecha o desplazamiento en la dirección $z$ de una viga o placa (m).
$\mathbf{w}^*$	—	Subespacio correspondiente a un modo de pandeo.
$x, y, z$	—	Componentes de los ejes espaciales (m).

Letras griegas

$\alpha$	—	Ángulo de revolución de una lámina (-).
$\beta$	—	Vector auxiliar en el método de Riks (-).
$\gamma$	—	Deformación tangencial (-).
$\Delta$	—	Constantes definidas en el análisis de postpandeo (-).
$\epsilon$	—	Deformación normal (-).
$\theta$	—	Ángulo de giro entre sistemas de referencia (-).
$\kappa$	—	Curvatura de la placa (m <sup>-1</sup> ).
$\lambda$	—	Parámetro de proporcionalidad del método de Riks (-).
$\mu$	—	Parámetro de reescalado del método de Riks (-).
$\nu$	—	Coefficiente de Poisson (-).
$\boldsymbol{\nu}$	—	Vector tangente a la trayectoria de equilibrio del método de Riks (-).
$\Pi$	—	Energía potencial (N·m).
$\sigma$	—	Tensión normal (Pa).
$\varsigma$	—	Tensión adimensional (-).
$\boldsymbol{\varsigma}$	—	Vector auxiliar empleado en el método de Riks.
$\tau$	—	Tensión tangencial (Pa).
$\boldsymbol{\nu}$	—	Vector de estado de equilibrio para el método de Riks (-).

Subíndices

0	—	Estado de equilibrio.
$I$	—	Primera tensión principal.
$II$	—	Segunda tensión principal.
$c$	—	Compresión o cuaderna.
$e$	—	Estimación o efectivo.

## LISTA DE SÍMBOLOS

---

$cr$	—	Crítico.
$l$	—	Larguerillo.
$k$	—	Lámina $k$ de un laminado.
$n$	—	Dirección normal genérica.
$o$	—	Constante de la función de prueba para la deformada de postpandeo.
$P$	—	Cortante puro.
$t$	—	Dirección tangencial genérica, o bien tracción.
$TD$	—	Tensión diagonal.
$VM$	—	Tensión de von Mises.

### Superíndices

$0$	—	Deformaciones paralelas a la superficie media de la placa.
$i$	—	Aplicado a material isotrópico.
$im$	—	Imperfección.
$T$	—	Traspuesto.



### 1.1. Motivación y estado actual

En la actualidad, el diseño aeronáutico es una rama con grandes exigencias en cuanto a seguridad, eficiencia y prestaciones. Uno de los aspectos más importantes es la inherente necesidad de reducir al máximo el peso de las aeronaves, pues esto supone menos restricciones en otras de las múltiples áreas del diseño de la aeronave en cuestión, así como más que considerables ahorros en combustible. Si esto se enfoca desde el ámbito del diseño estructural, se encuentra un compromiso entre dos factores fundamentales. Por un lado la estructura ha de ser lo más ligera posible, así como satisfacer gran cantidad de especificaciones aerodinámicas. No obstante, por otro lado, la estructura debe ser muy resistente para garantizar la seguridad ante las grandes cargas a las que se ve sometida.

Por esto se buscan alternativas diferentes a los diseños estructurales convencionales de otras áreas de la ingeniería. Se recuerda que en el diseño de vigas y columnas, cuando estas se someten a compresión y se alcanza una determinada carga crítica, la estructura entra en un estado inestable y colapsa debido a pandeo. No obstante, en estructuras tipo placa o panel –como pudiera tratarse de un fuselaje– una vez alcanzada la carga de pandeo, la estructura no colapsa, sino que entra en un determinado modo de pandeo y comienza a deformarse en dirección perpendicular al plano de aplicación, redistribuyendo las tensiones y permitiendo, en ocasiones, cargas del orden de 4 ó 5 veces la primera carga de pandeo. Resulta entonces de interés el estudio de estos comportamientos estructurales, a pesar de su dificultad, pues se estaría limitando notablemente el diseño si se considerara la carga inicial de pandeo como límite de colapso.

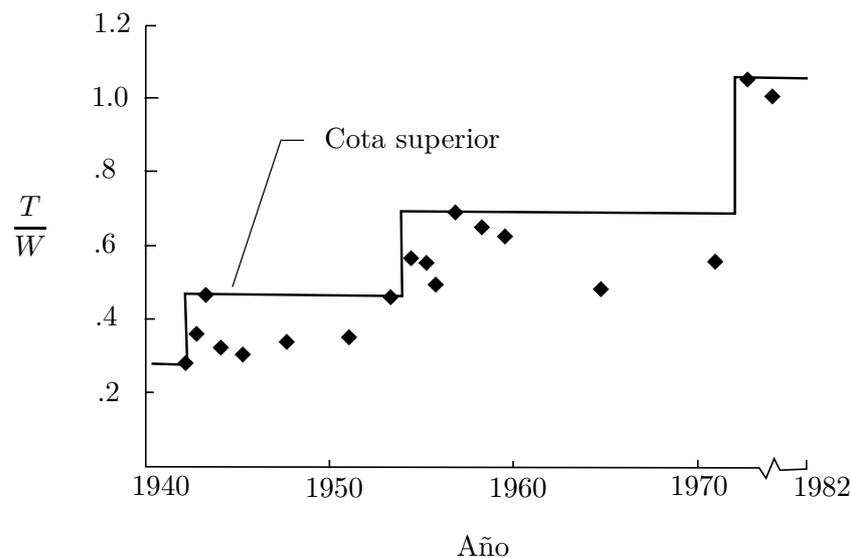


Figura 1.1: Evolución histórica del ratio Empuje/Peso de diferentes aeronaves, cfr. [37].

Históricamente, el diseño estructural de las aeronaves ha evolucionado desde estructuras más convencionales y pesadas tipo celosía, constituidas por barras y vigas, hacia estructuras constituidas por paneles formando un recubrimiento que aguanta gran parte de las cargas de forma mucho más eficiente, y reforzado con cuadernas y larguerillos. Este tipo de estructuras se denominan semimonocasco. En la Figura 1.2 se compara la estructura de un Vickers Wellington de los años treinta con una estructura semimonocasco más moderna de un Airbus A380, que permite diseños más ligeros y resistentes, en parte gracias a su capacidad de resistir cargas mayores que las críticas. A cambio, el diseño estructural se complica, ya que si se pretende diseñar por encima de la carga crítica de pandeo, es preciso adentrarse en el terreno altamente no lineal del postpandeo.

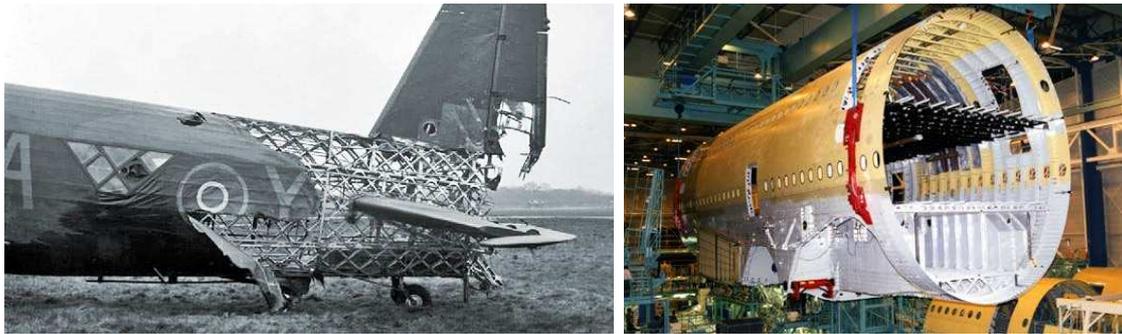


Figura 1.2: Estructura de un Vickers Wellington (izquierda) junto a la estructura semimonocasco de un A380 (derecha), cfr. [38] y [39].

Es pues de interés estudiar estructuras tipo placa o panel desde el punto de vista del pandeo. Existen muchas formas en las que una estructura tipo panel puede pandear, dependiendo de las cargas a las que esté sometida, o de su forma y sus restricciones. Un caso muy característico y muy habitual dentro del cálculo estructural aeronáutico es la tensión diagonal. El término tensión diagonal se refiere a las tensiones generadas en una viga de alma muy esbelta o alguna otra estructura del estilo de una placa fina, como un panel curvado, cuando ésta se somete a solicitaciones que generan esfuerzos cortantes. El motivo de estudiar este tipo de solicitaciones y tensiones reside en que se dan muy a menudo en las estructuras aeronáuticas. Si la estructura es lo suficientemente fina, la tensión diagonal presenta modos de pandeo muy característicos, identificables por surcos inclinados un cierto ángulo y repetidos a lo largo de la viga o panel. En la Figura 1.3 se pueden ver casos reales de este tipo de deformación. Concretamente los fuselajes de un Douglas A-3B *Skywarrior* y de un Boeing B52 que han sobrepasado la carga crítica de pandeo, presentando los típicos surcos debidos a la tensión diagonal.



Complementando a este tipo de diseños estructurales, una innovación fundamental que se ha dado en el campo de las estructuras en ingeniería en general, y en especial en la industria aeroespacial, son los materiales compuestos.

Este tipo de de materiales son una combinación de otros dos, de forma que se aprovechan las ventajas de ambos. Normalmente se combinan materiales tipo fibra (carbono, vidrio, aramidas. . .) que son capaces de resistir grandes tensiones y que presentan módulos elásticos del orden del acero o superiores, con resinas que dotan al material de una forma compacta y distribuyen las tensiones entre las fibras. Estos materiales presentan una gran cantidad de ventajas, dado que son capaces de competir en resistencia con aleaciones metálicas (aceros, aluminios. . .), pero poseen densidades mucho menores, reduciendo notablemente el peso de los vehículos. Aunque también presentan inconvenientes, han llegado a ser llamados la mayor revolución técnica desde el motor jet [14].

Posiblemente, la primera aplicación de materiales compuestos avanzados en el ámbito aeronáutico se dio en el Akaflieg Phönix FS-24, en la década de los cincuenta. Para este planeador, construido por profesores de la universidad de Stuttgart, se empleó un compuesto de fibra de vidrio. Los primeros aviones propulsados que incluyeron materiales compuestos aparecieron en torno a 1970, principalmente aviones pequeños y acrobáticos. No fue hasta la década de los ochenta cuando estos materiales se introdujeron en la aviación civil.

Lentamente, estos materiales se han ido haciendo hueco en la industria estructural aeroespacial. Hoy en día la demanda de aviones más eficientes y ligeros y con menores costes de mantenimiento hace que los materiales compuestos jueguen un papel muy importante en la construcción de aeronaves de transporte civil. Un ejemplo claro es el último modelo de avión de la empresa Boeing, el B-787 *Dreamliner*, que está construido al 50% de materiales compuestos. No obstante hay determinados elementos de las aeronaves que, por sus características, son difícilmente reemplazables por este tipo de materiales. Por ejemplo los trenes de aterrizaje, que requieren de unas excepcionales características estructurales.



Figura 1.5: Primer avión en incluir material compuesto, FS-24 (Izq.) junto al B-787 (Dcha.), construido al 50% con materiales compuestos; cfr. [43] y [44].

Así pues, el diseño estructural y los materiales compuestos forman parte de un mismo

---

problema de ingeniería. A pesar de que se siguen utilizando aleaciones metálicas de tipo aluminio, acero, y otras más sofisticadas, la tendencia actual es a construir las estructuras tipo panel en material compuesto. De este modo, al problema del postpandeo, que ya era altamente no lineal e irresoluble analíticamente, se añade la anisotropía de los materiales compuestos, lo cual dificulta más aún el estudio, al ser muy complejas las propiedades del material. Por lo tanto, este estudio no puede limitarse únicamente a procedimientos analíticos, y hoy en día no se concibe el diseño estructural sin el Método de los Elementos Finitos (MEF).

Siguiendo la máxima “*Divide y vencerás*”, estos métodos discretizan los modelos continuos de estudio dividiéndolos en nodos que delimitan diferentes elementos finitos. Pasando a tener un problema discreto, las irresolubles ecuaciones en derivadas parciales pasan a poder resolverse de forma numérica en un gran número de puntos. Estos métodos nacieron en 1943 de la mano de Richard Courant, y se han ido perfeccionando a lo largo de los años, acompañados del desarrollo de los ordenadores, debido al coste computacional que requieren. Empresa pionera en este sentido es Boeing, de hecho Turner, Clough, Martin y Topp formaban parte de ella cuando publicaron, en 1956, un artículo perfeccionando el método en el *Journal of Aeronautical Sciences*, especificando al final la siguiente frase:

“... *Considerable extension of the material presented in this paper is possible.* ”

Lo cierto es que no les faltó razón, y hoy en día, con ordenadores cada vez más potentes, las simulaciones de elementos finitos comprenden un pilar fundamental dentro del diseño estructural. Suponen un paso previo o bien una alternativa a los análisis experimentales, dando una idea previa bastante concisa de los resultados. En la mayoría de ocasiones, si se pretende estudiar un caso real, este tipo de métodos son los únicos capaces de describir la solución. No se ha de perder de vista que, para llegar a buenos resultados, deben tenerse muchos factores en cuenta y se requerirá de grandes tiempos de computación.

Hoy en día, dependiendo del problema estructural a estudiar, existen muchos tipos diferentes de métodos. Dentro del estudio del pandeo la estimación de las cargas críticas y los modos puede considerarse un problema lineal ya que los desplazamientos no son grandes, por lo que suelen usarse métodos estático-lineales. Pero una vez sobrepasado este límite, cuando el problema se adentra en el postpandeo, los desplazamientos comienzan a ser sustanciales. Muchas de las hipótesis dejan de ser válidas, por lo que las ecuaciones de gobierno pasan a ser altamente no lineales y deben emplearse otro tipo de métodos, como el método de Riks, que se basan en el algoritmo *Arc-Length*.

En contra de lo que pudiera parecer, el MEF no es sustitutivo de los procedimientos analíticos de análisis de estructuras. En primer lugar, el MEF requiere de un modelo totalmente definido para proceder al estudio, dividido de forma correcta en miles o millones de elementos. Es por ello que en las primeras etapas del diseño no es tan útil, ya que no se requiere de un gran detalle de análisis sino de establecer las bases del proyecto. En cambio sí que es necesario un conocimiento de los fundamentos teóricos del problema en estas etapas. Por otro lado, quizá lo más importante a la hora de aplicar el método es la

interpretación de los resultados obtenidos. Al fin y al cabo estos métodos resuelven las ecuaciones teóricas de forma discretizada, por lo que para realizar un análisis coherente de lo que proporcionan se ha de conocer primero la teoría que hay detrás del caso de estudio. Cuando se contempla por un lado el análisis teórico, y por otro lado el método de los elementos finitos, no tiene sentido plantearse qué es mejor: Realmente se complementan entre sí. Para realizar un buen diseño es preciso coordinar de manera correcta ambos métodos y complementarlos con ensayos experimentales, que son siempre los resultados más fiables.

## 1.2. Objetivos

A lo largo de este trabajo se plantea pues ahondar en el análisis teórico del inicio de pandeo y el postpandeo de placas planas y de láminas curvas. Tras estudiar casos generales presentes en la literatura y profundizar en los desarrollos teóricos, éstos se aplicarán al caso más concreto de las solicitaciones de tipo cortante, intentando estudiar casos con la mayor similitud posible a la tensión diagonal en los fuselajes. Se pretende que estos estudios simplificados supongan una base teórica para el estudio más complejo de una sección de fuselaje reforzada sometida a tensión diagonal.

A lo largo de la memoria, los resultados que se obtengan de forma analítica bajo diversas simplificaciones se contrastarán con los resultados proporcionados por el método de los elementos finitos. En concreto, se empleará el programa comercial *Abaqus*<sup>®</sup> para este tipo de análisis.

Para poder juzgar qué ventajas y qué inconvenientes presenta cada uno de los métodos, se compararán también los resultados obtenidos mediante ambos con información acerca de ensayos experimentales presente en la literatura.

Si bien el objetivo principal no es el estudio como tal de materiales compuestos, puede resultar muy interesante el introducir estos materiales en los estudios estructurales que se llevarán a cabo a lo largo del trabajo. De esta manera se podrá estudiar cómo se modifican los parámetros de interés (resistencia, cargas críticas, desplazamientos, modos...) al cambiar las aleaciones metálicas por este tipo de materiales, y se podrá discutir en qué aspectos suponen mejoras y en cuáles presentan inconvenientes.

## 1.3. Organización de la memoria

A parte de este primer capítulo de introducción, la memoria se organiza en otros 6 capítulos que tratan los diferentes temas listados a continuación.

- En el Capítulo 2 se establecen los fundamentos teóricos necesarios para los estudios realizados en el resto de la memoria. Concretamente inicio de pandeo, postpandeo y mecánica de materiales compuestos.

- En el Capítulo 3 se estudia el inicio de pandeo en placas planas, tanto metálicas como de material compuesto. Se emplean para ello métodos analíticos y elementos finitos. Asimismo se estudian diferentes solicitaciones y condiciones de contorno con el fin de contrastar los resultados.
- En el Capítulo 4 se analiza el comportamiento a postpandeo de placas planas trabajando a cortante. De nuevo se aborda el problema empleando métodos analíticos y elementos finitos. Se estudian diferentes materiales y condiciones de contorno de las placas, y se realiza una comparativa de las tensiones con la tensión diagonal pura.
- En el Capítulo 5 se estudia el inicio de pandeo de láminas cilíndricamente curvas a cortante similares a las que conforman un fuselaje. Se emplean métodos analíticos y numéricos, y se estudia la influencia de diferentes parámetros geométricos como la curvatura o la relación de lados. También se estudia la influencia de las condiciones de contorno de las láminas.
- En el Capítulo 6 se modela una estructura cilíndrica reforzada con larguerillos y cuernas similar a un fuselaje semimonocasco, y se estudia el desarrollo de la tensión diagonal en régimen de postpandeo mediante *Abaqus*<sup>®</sup>. Se comparan los resultados obtenidos con normas técnicas basadas en ensayos experimentales.
- Finalmente, en el Capítulo 7 se exponen las conclusiones globales del trabajo y las diferentes vías de investigación que quedan abiertas. Asimismo se presenta un presupuesto del trabajo.



# 2

## Fundamentos teóricos

### 2.1. Inicio de pandeo

Se considera una placa fina y elástica, que en principio es totalmente plana y está sometida a cargas compresivas y/o cortantes actuando en su plano medio. Si no se produjeran desplazamientos perpendiculares a este plano medio sólo habría esfuerzos de compresión paralelos al mismo, pero no habría momentos flectores a lo largo de la placa. Este estado se denomina *equilibrio inicial*.

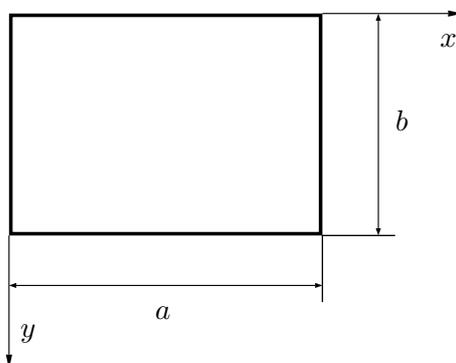


Figura 2.1: Esquema de placa plana con el sistema de referencia habitual.

No obstante, conforme aumentan las cargas aplicadas se alcanza un estado inestable en el que se producen desplazamientos perpendiculares al plano medio  $w \neq 0$ . Este fenómeno se conoce como *pandeo* o *inestabilidad estructural*. La mínima carga que provoca que la estructura abandone el equilibrio y da lugar al pandeo se denomina carga crítica de pandeo. El inicio del pandeo da lugar a un determinado patrón de deformación transversal de la placa que se denomina modo de pandeo. Existen para un cierto caso numerosas cargas de pandeo asociadas a diferentes modos: La carga crítica es el menor de todos estos valores. En el momento en que la estructura pandea el análisis cambia radicalmente, pues ya no existe equilibrio inicial, por lo que el análisis de pandeo requiere de calcular las cargas críticas que dan lugar al mismo y los diferentes patrones o modos. Este tipo de análisis se basa en las hipótesis a continuación listadas.

- i. Antes de someter a la placa a esfuerzos esta es idealmente plana, y las cargas se aplican estrictamente en el plano medio.
- ii. Se considera un régimen elástico lineal y se desprecian las deformaciones previas al pandeo.
- iii. Las cargas aplicadas no se modifican cuando la placa se deforma.
- iv. La flexión de la placa se rige por las hipótesis de Kirchhoff, ver [32].

El problema del inicio del pandeo admite diferentes formulaciones equivalentes entre sí. Se explicarán a continuación los fundamentos de los métodos de Equilibrio y los Energéticos.

### 2.1.1. Métodos de equilibrio

Los métodos de equilibrio, como su propio nombre indica, se basan en las ecuaciones de gobierno obtenidas a partir del equilibrio de fuerzas. Por ejemplo, para el caso de una placa plana isótropa se muestra en la Ec. (2.1) la ecuación diferencial de gobierno [32].

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D} \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (2.1)$$

donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  son las solicitaciones aplicadas, y  $D$  es la rigidez a flexión de la placa. Se puede apreciar que no se han incluido las cargas que producen flexión, ya que como se trata de un problema de estabilidad el inicio de pandeo es independiente de la flexión. Por lo tanto se tiene una ecuación homogénea que obviamente presenta la solución trivial  $w = 0$ . Los estados de inestabilidad correspondientes a pandeo son soluciones no triviales de esta ecuación, es decir, valores de las cargas que hagan posible una solución  $w$  diferente de cero en la ecuación serán las cargas críticas.

### 2.1.2. Métodos energéticos

Los métodos energéticos se basan en los principios generales de energía para sistemas mecánicos. La energía potencial de un sistema presenta un mínimo en los estados de equilibrio, lo que permite una reformulación de los conceptos de estabilidad. Un estado de equilibrio será estable si la energía potencial es un mínimo relativo respecto de los estados cercanos a dicho equilibrio. Si esta energía potencial es máxima, el estado será inestable, si no es máxima ni mínima, se tratará de un equilibrio neutral.

Se considera un estado de equilibrio inicial sometido a determinadas cargas en el plano, y un estado cercano al mismo en el que la superficie media se curva debido a pequeños desplazamientos virtuales aplicados a la placa. Si  $\Pi$  y  $\Pi_0$  son las energías potenciales asociadas a estos dos estados, el equilibrio será estable si  $\Pi_0 < \Pi$ , inestable si  $\Pi_0 > \Pi$  y neutro si  $\Pi_0 = \Pi$ . Las cargas críticas se dan justamente en la transición entre un equilibrio estable y uno inestable, es decir, se corresponden con estados neutrales inmediatamente previos a la inestabilidad. Por tanto se podrá calcular dicha bifurcación imponiendo que la diferencia de energía potencial sea cero.

$$\Delta\Pi = \Pi - \Pi_0 = 0 \quad (2.2)$$

La Ec. (2.2) se conoce como el criterio general de la energía para el análisis de pandeo de placas y láminas, e imponiendo dicho criterio pueden estimarse las cargas críticas y modos de pandeo. Se demuestra en [32] que este criterio es equivalente al método del

equilibrio, por tanto la formulación del problema no cambia la naturaleza del mismo.

Una vez planteada la formulación del problema y dada su complejidad, se suele recurrir a métodos denominados semi-analíticos para resolverlo. Estos métodos asumen una determinada forma para la solución buscada y buscan minimizar el error cometido. A lo largo de la memoria se empleará mayoritariamente el método de Galerkin, que se basa en la formulación de equilibrio y sigue un razonamiento similar al de los mínimos cuadrados.

## 2.2. Condiciones de contorno y funciones de prueba

De igual modo que la mayoría de problemas en ingeniería, el estudio del pandeo en placas y láminas de fuselajes se rige por procesos físicos descritos por ecuaciones diferenciales. Por tanto, para hallar una solución concreta del problema, es preciso imponer unas determinadas condiciones de contorno (CdC) al estudio. En el caso del estudio de placas y láminas las CdC vienen establecidas por las restricciones a las que está sometido el sistema de estudio.

Las CdC de mayor relevancia en las geometrías tratadas son el borde empotrado, el borde articulado y el borde libre. Cada una de ellas introducirá una restricción diferente a la formulación matemática del problema. En la Tabla 2.1 se puede observar como se representarán las diferentes CdC y las restricciones que introduce cada una de ellas en el caso de una placa plana. El eje  $n$  es el normal a cualquiera de los lados considerados, y el  $t$  es perpendicular a  $n$ .

CdC	Representación	Rest. Geométricas	Rest. Fuerzas
Empotramiento		$w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0$	-
Articulación		$w = 0$	$M_n = 0$
Borde Libre		-	$M_n = V_n = 0$

Tabla 2.1: Condiciones de contorno.

El empotramiento es la CdC más restrictiva, no permite que la placa se mueva ni tampoco que gire. La articulación no permite el movimiento de la estructura, no obstante sí que permite el giro y por eso el momento flector en la misma es nulo. Por otro lado en un borde libre sin restringir ha de verificarse que las diferentes solicitaciones sean nulas, y

lógicamente no hay ninguna restricción geométrica.

Normalmente, la formulación de los problemas tratados está representada por ecuaciones diferenciales parciales, y por tanto una solución analítica cerrada no es posible. Una práctica habitual para poder resolver los problemas de forma aproximada es considerar la función solución de la deformada como una suma de constantes a determinar multiplicadas por una serie de funciones de prueba. En el caso de una placa plana suele suponerse una solución de la forma de la Ec. (2.3)

$$w(x, y) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} X_m(x) Y_n(y) \quad (2.3)$$

Cuando se emplean técnicas como esta para buscar una solución aproximada, las CdC no se imponen de manera convencional sino que se eligen funciones de prueba que las satisfacen desde el principio. No es necesario calcular constantes de integración.

En una placa plana las CdC de los lados perpendiculares al eje  $x$  determinarán la función  $X_m(x)$ , y las perpendiculares a  $y$ ,  $Y_n(y)$ . En la Tabla 2.2 pueden verse algunas de las funciones de prueba habituales utilizadas para las diferentes CdC. Las funciones  $Y_n(y)$  tendrán formas similares dependiendo de los lados  $y$  constante.

CdC	Función de Prueba
	$X_m(x) = \sin \frac{m \pi x}{a}$
	$X_m(x) = \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m \pi x}{a} ; \quad X_m(x) = 1 - \cos \frac{2\pi m x}{a}$
	$\sum_m X_m(x) = \frac{x}{a} \left( \frac{x}{a} - 1 \right) \left( \frac{x}{2a} - 1 \right) - \sum_m \frac{1}{m\pi} \sin \frac{m\pi x}{a}$

Tabla 2.2: Funciones de prueba para las diferentes CdC.

Aparte de las aquí mostradas, puede encontrarse mucha más información sobre funciones de prueba en la referencia [33].

Se ha de tener en cuenta que las CdC aquí expuestas son casos límite que sólo en ocasiones describen bien determinadas restricciones y que facilitan la formulación. No obstante cuando se analiza un caso real, las CdC de la estructura no tienen por qué corresponderse con un empotramiento o una articulación ideal. Lo habitual es que las restricciones se encuentren a caballo entre las CdC ideales que se tratan en los análisis teóricos. Por ejemplo, un larguerillo en el extremo de una placa puede ofrecer resistencia al giro, pero no restringirlo por completo como el caso de un empotramiento. Por ello, otra práctica habitual es modelar las CdC como una distribución de muelles (longitudinales y torsionales) de una determinada rigidez, que restringen los movimientos en un cierto grado pero sin limitarlos totalmente.

## 2.3. Macromecánica de materiales compuestos

### 2.3.1. Generalidades sobre láminas

Cuando se analizan piezas de material compuesto, es preciso tener en cuenta que su comportamiento mecánico difiere de otros tipos de materiales como el acero o aluminio. La principal diferencia reside en que los materiales compuestos, por norma general, no son isótropos, sino que presentan algún grado de anisotropía. Un material isótropo es aquel cuyas propiedades mecánicas son iguales en todas direcciones, por contra, para uno anisótropo las propiedades son distintas en diferentes direcciones. Un caso particular de materiales anisótropos son los materiales ortótropos, que presentan propiedades diferentes en tres planos mutuamente perpendiculares, es decir, presentan tres planos de simetría para las propiedades del material.

Como consecuencia de estas características, los diferentes tipos de materiales presentan comportamientos distintos al ser sometidos, por ejemplo, a tensiones. En materiales isótropos la tensión normal causa tracción en la dirección de aplicación y compresión en las perpendiculares; además no se produce deformación tangencial. En el caso de materiales ortótropos sucede lo mismo al aplicar tensión normal en los ejes principales, no obstante las deformaciones son diferentes dependiendo del eje en que se aplique la tensión (se presentan diferentes módulos de Young  $E$ ). La deformación tangencial no aparece al aplicar tensión normal, además el módulo cortante  $G$  no depende de las otras características del material. En materiales anisótropos, al aplicar tensión normal no sólo aparece la correspondiente deformación normal, sino también tangencial. Todo esto puede verse ilustrado en la Figura 2.2.

Cuando estos efectos se limitan a placas planas, es asumible un estado de tensión plana. Así pues se puede expresar la relación entre tensión y deformación en una dirección

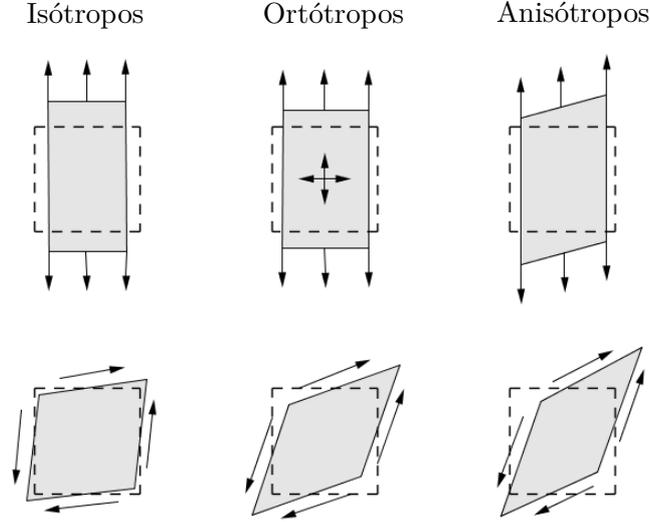


Figura 2.2: Comportamiento mecánico de diferentes materiales.

genérica  $x, y$  en una lámina de material compuesto según la Ec. (2.4).

$$\boldsymbol{\sigma} \equiv \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \bar{\mathbf{Q}} \boldsymbol{\varepsilon} \quad (2.4)$$

donde la matriz  $\bar{\mathbf{Q}}$  representa la rigidez para la orientación de los ejes considerados. Esta matriz relaciona tensiones y deformaciones y dependerá de varias constantes independientes en función del tipo de material que se considere. Así pues, como se presenta en [14] para un material isótropo se tendrán 2 constantes independientes, para un material ortótropo 4, y para un caso anisótropo 6.

Si se considera que existen desplazamientos  $u^0$  y  $v^0$  paralelos a la superficie media de la placa, entonces las deformaciones se podrán descomponer en las causadas por los desplazamientos –constantes en el espesor– más las debidas a la curvatura –lineales con  $z$ –. Se puede reescribir Ec. (2.4) como se indica en Ec. (2.5).

$$\begin{Bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} + z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \implies \boldsymbol{\sigma}_{ij} = \bar{\mathbf{Q}} (\boldsymbol{\varepsilon}_{ij}^0 + z \boldsymbol{\kappa}_{ij}) \quad (2.5)$$

### 2.3.2. Macromecánica de un laminado

Normalmente, las placas de material compuesto están formadas por varias láminas con las fibras orientadas en varias direcciones; esta composición se conoce como laminado. Dentro de un laminado, se puede aplicar la Ec. (2.5) a la lámina  $k$ -ésima, teniendo entonces

una relación entre tensión y deformación para cada lámina (Ec. (2.6)).

$$\boldsymbol{\sigma}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k \boldsymbol{\varepsilon}_k = \bar{\mathbf{Q}}_k \left( \boldsymbol{\varepsilon}_k^0 + z \boldsymbol{\kappa}_k \right) \quad (2.6)$$

Como se puede ver en la Ec. (2.7), las solicitaciones  $\mathbf{N}$  y  $\mathbf{M}$  de la placa se pueden obtener integrando las tensiones a lo largo del espesor total del laminado.

$$\mathbf{N} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} \, dz ; \quad \mathbf{M} = \int_{-h/2}^{h/2} \boldsymbol{\sigma} z \, dz \quad (2.7)$$

Debido a que las tensiones cambian entre láminas, los integrandos no serán continuos, por lo que habrá que dividir la integral en las diferentes láminas. Operando [14] se puede llegar a la relación entre solicitaciones y deformaciones que se muestra en la Ec. (2.8).

$$\begin{Bmatrix} \mathbf{N} \\ \mathbf{M} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{3 \times 3} & \mathbf{B}_{3 \times 3} \\ \mathbf{B}_{3 \times 3} & \mathbf{D}_{3 \times 3} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}^0 \\ \boldsymbol{\kappa} \end{Bmatrix} \quad (2.8)$$

donde  $\mathbf{A}$  es la matriz de rigidez extensional,  $\mathbf{B}$  es la matriz de rigidez de acoplamiento y  $\mathbf{D}$  es la matriz de rigidez a flexión. La expresión para estas matrices viene dada por las Ecs. (2.9).

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_k - z_{k-1}) ; & \mathbf{B} &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) \\ \mathbf{D} &= \frac{1}{3} \sum_{k=1}^N \bar{\mathbf{Q}}_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) \end{aligned} \quad (2.9)$$

Por lo tanto se tiene que, en el caso de un laminado general, las solicitaciones se relacionan con las deformaciones y las curvaturas por medio de una matriz  $6 \times 6$  según la Ec. (2.10). Se puede observar que si la submatriz  $\mathbf{B}$  es diferente de cero, existe relación entre fuerzas axiales y curvaturas, así como entre momentos y deformaciones en la superficie media, es decir, hay acoplamiento. Este acoplamiento no sucederá en los casos en los que la matriz  $\mathbf{B}$  sea nula.

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ & & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ & & & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ & -\mathcal{S}- & & D_{12} & D_{22} & D_{26} \\ & & & & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_x^0 \\ \varepsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (2.10)$$

El estudio de materiales compuestos requiere un aumento drástico del número de constantes con las que se trabaja, introduciendo notables complejidades en la formulación de las ecuaciones. No obstante, resulta lógico pensar que muchas de las constantes introducidas se anularán para la mayoría de materiales utilizados, ya que la Ec. (2.10) trata el caso

más general posible de anisotropía. Se destacan a continuación algunos casos habituales ampliamente utilizados y las simplificaciones que conllevan.

■ **Laminados simétricos**

Para laminados simétricos tanto en geometría como en propiedades de material con respecto a la superficie media  $z = 0$ , para cada lámina arriba de la superficie media, habrá otra abajo situada a la misma distancia y con  $\bar{\mathbf{Q}}_k$  idéntica. Por tanto, a partir de las Ecs. (2.9) resulta evidente que los términos del sumatorio para calcular  $\mathbf{B}$  se anulan dos a dos. Se tiene pues que para este tipo de laminados  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , y por tanto las relaciones entre sollicitaciones y deformaciones quedan:

$$\mathbf{N} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^0; \quad \mathbf{M} = \mathbf{D} \cdot \boldsymbol{\kappa} \quad (2.11)$$

es decir, se elimina la matriz de acoplamiento, por lo que los momentos no se relacionan con las deformaciones en el plano, y los axiles no se relacionan con las curvaturas.

■ **Laminados simétricos de capas isótropas**

Si además de ser simétrico, un laminado está constituido por láminas isótropas, no sólo se obtiene  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$ , sino que también se cancelan los términos  $A_{16}$ ,  $A_{26}$ ,  $D_{16}$  y  $D_{26}$ . Esta nulidad significa que para este caso no hay acoplamiento entre flexión y deformación en el plano. A pesar de que los laminados de capas isótropas no se dan muy a menudo, sí que suele suceder que el acoplamiento de un laminado sea despreciable, por lo que en muchas ocasiones se realizarán análisis considerando  $D_{16} \approx D_{26} \approx 0$ .

■ **Materiales isótropos**

Los materiales isótropos pueden considerarse como una particularización de todo lo anteriormente explicado. Los términos  $D_{ij}$  podrán expresarse en función de las dos únicas constantes que bastan para definir a un material isótropo,  $E$  y el coeficiente de Poisson  $\nu$ ; lógicamente  $D_{16} = D_{26} = 0$ . La expresión para el resto de constantes se muestra en Ec. (2.12).

$$D_{11} = D_{22} = \frac{E h^3}{12(1 - \nu^2)}; \quad D_{12} = D_{21} = \nu D_{11}; \quad D_{66} = \frac{1 - \nu}{2} D_{11} \quad (2.12)$$

Se aprecia que  $D_{11}$  se corresponde con la definición habitual de la rigidez a flexión para placas.

## 2.4. Postpandeo

El análisis lineal del inicio de pandeo en estructuras tipo lámina permite determinar de forma precisa los valores de las cargas críticas, ya que este fenómeno se encuentra en el

límite de la linealidad. La obtención de dichas cargas tiene una gran importancia práctica en el análisis de estabilidad de placas planas. No obstante, este análisis no es capaz de describir el comportamiento de una placa después del pandeo. El análisis de postpandeo es habitualmente más complicado que el de pandeo, básicamente debido a que se trata de un problema altamente no lineal.

El postpandeo es el régimen en el que una estructura entra después de pandear inicialmente. Este estado es de interés cuando la carga de pandeo no se considera como la de fallo, dado que en este caso la estructura presenta capacidad de soportar carga más alta. El postpandeo es de particular importancia en placas y láminas, estructuras capaces de funcionar muy por encima de la primera carga crítica de pandeo. Por el contrario, en una estructura tipo viga o columna, una vez se sobrepasa la carga crítica los desplazamientos transversales aumentan mucho más que en una lámina. Por tanto, después de pandear se desarrollan momentos flectores muy elevados que acaban causando el fallo. La capacidad de las placas para redistribuir la carga tras el pandeo, evitando deformaciones y momentos flectores elevados, es lo que las hace capaces de funcionar a postpandeo, consiguiendo de esta manera estructuras más ligeras.

Uno de los factores más importantes en los diseños a postpandeo es el ratio de postpandeo ( $\mathcal{R}$ , *post-buckling ratio*), que denota el cociente entre la carga aplicada y la carga crítica de pandeo. En el límite más conservador del espectro de diseños  $\mathcal{R} = 1,5$  lo que corresponde a estructuras sometidas a fatiga, efecto muy dañino en este tipo de diseños. En el otro extremo del espectro, se pueden encontrar ratios de hasta  $\mathcal{R} = 5$ . Este tipo de diseños son complejos y suponen todo un reto pues tanto la fatiga como los esfuerzos estáticos son muy significativos y es difícil diseñar una estructura que resista muchos ciclos.

Por otro lado, en régimen de postpandeo entran en juego nuevos modos de fallo de la estructura debidos a las grandes deformaciones que se producen. Puede encontrarse más información sobre los modos de fallo típicos del postpandeo en [15].

### 2.4.1. Cinemática de gran deformación. Ecuaciones de von Karman

Como se comentó previamente, el ámbito del postpandeo queda fuera del análisis lineal de estructuras. Esto se debe principalmente a que las deformaciones no pueden considerarse pequeñas, y se ha de incluir una cinemática de gran deformación en lugar de la cinemática lineal habitual. Cuando esta cinemática se aplica a placas, se obtienen las ecuaciones de von Karman. Para la derivación de estas ecuaciones se parte, como es habitual: 1) de las ecuaciones de equilibrio; 2) de las relaciones tensión-deformación, que dan lugar a las las Ecs. (2.10), involucrando momentos y curvaturas; 3) de las relaciones deformación-desplazamiento. Estas últimas, en gran deformación, se pueden expresar

siguiendo el proceso descrito en [15], como se ve en la Ec. (2.13).

$$\begin{aligned}\varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 ; & \varepsilon_y^0 &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \gamma_{xy}^0 &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y}\end{aligned}\tag{2.13}$$

Por otro lado, las curvaturas siguen las relaciones habituales de pequeña deformación.

$$\kappa_x = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} ; \quad \kappa_y = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} ; \quad \kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}\tag{2.14}$$

Se aplican las ecuaciones de equilibrio vertical a un diferencial de placa, y posteriormente se sustituyen los momentos por sus expresiones según la Ec. (2.10), asumiendo el caso  $\mathbf{B} = \mathbf{0}$  y  $D_{16} = D_{26} = 0$ . Si a continuación se sustituyen deformaciones y curvaturas mediante las Ecs. (2.13) y (2.14) se llega a una ecuación en derivadas parciales con  $w$  como incógnita, conocida como la primera ecuación de von Karman, Ec. (2.15). El lado izquierdo de esta ecuación describe el comportamiento a flexión de la placa, que se acopla en el lado derecho con su acortamiento. Los términos  $p_i$  denotan las cargas uniformemente distribuidas en la superficie de la placa, con unidades de presión.

$$\begin{aligned}D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \\ = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - p_x \frac{\partial w}{\partial x} - p_y \frac{\partial w}{\partial y} + p_z\end{aligned}\tag{2.15}$$

Para la segunda ecuación de von Karman se ha de introducir la función de tensiones de Airy incógnita  $F$ , que se relaciona con las sollicitaciones axiles y con el potencial  $V$  de las cargas distribuidas según la Ec. (2.16).

$$N_x = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + V ; \quad N_y = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + V ; \quad N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\tag{2.16}$$

donde  $V$  es una función tal que  $p_x = -\partial_x V$  y  $p_y = -\partial_y V$ . A partir de las Ecs. (2.13) se puede obtener la ecuación de compatibilidad Ec. (2.17).

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x^0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y^0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}^0}{\partial x \partial y} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\tag{2.17}$$

Utilizando la Ec. (2.13) y calculando la inversa de la submatriz superior diagonal  $\mathbf{A}$  de Ec. (2.10), se pueden obtener  $\varepsilon_x^0$ ,  $\varepsilon_y^0$  y  $\gamma_{xy}^0$  en función de las sollicitaciones axiles. Si dichas

expresiones se sustituyen en la Ec. (2.17) y se introduce también la función de Airy y el potencial de las fuerzas repartidas Ec. (2.16), se llega a la Ec. (2.18).

$$\frac{1}{A_d} \left[ A_{22} \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} - 2A_{12} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + A_{11} \frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + (A_{22} - A_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + (A_{11} - A_{12}) \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} \right] +$$

$$\frac{1}{A_{66}} \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} = \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (2.18)$$

donde  $A_d = A_{11} A_{22} - A_{12}^2$ . Esta ecuación es la segunda ecuación de von Karman, que relaciona el comportamiento de membrana de la placa (lado izquierdo) con las curvaturas fuera de plano (lado derecho). Se puede observar que los términos en el lado derecho son no lineales.

Se desarrollará una aplicación de estas ecuaciones ante un caso de postpandeo a cortante en el Capítulo 4.



# 3

## *Inicio de pandeo en placas planas*

En el presente capítulo se estudiará el inicio de pandeo de placas planas rectangulares. A pesar de que un fuselaje es habitualmente curvo, el estudio de placas planas es interesante por varias razones, entre las que se destacan dos. En primer lugar, los conceptos involucrados en el pandeo inicial de placas planas son similares a los que aparecen en placas curvas, por lo que suponen una buena introducción. Por otro lado se ha de tener en cuenta que, en ocasiones, los fuselajes también presentan zonas prácticamente planas constituidas esencialmente por placas. Por ejemplo, los laterales de un B-52 son prácticamente planos y, de hecho, esta parte plana del fuselaje es muy propensa a la aparición de los característicos surcos de la tensión diagonal tal y como se pudo ver en la Figura 1.3.

### 3.1. Formulación del problema

Se considerará pues una placa rectangular de lados  $a$  y  $b$  para su análisis de pandeo. El sistema de referencia utilizado se muestra en la Figura 3.1, junto con el esquema general del problema. El eje  $z$  forma un triedro a derechas.

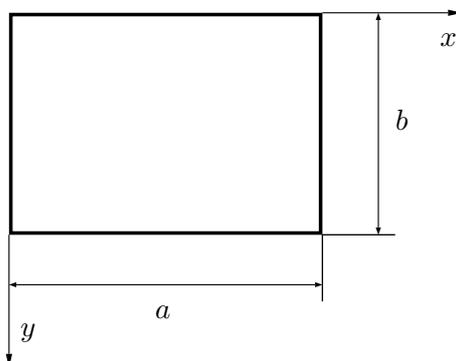


Figura 3.1: Esquema de placa plana.

Cuando se estudia el comportamiento a flexión de una placa plana isótropa, se puede ver en [32] que para describir el problema es suficiente con la Ec. (3.1), que denota la relación entre la deformada de la placa y las cargas normales al plano medio, y en la que interviene la rigidez a flexión de la placa.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \nabla^4 w = \frac{q}{D} \quad (3.1)$$

En el caso del pandeo, las cargas aplicadas relevantes no son las normales al plano medio sino que son las que se aplican paralelamente al mismo (cargas en plano). Estas cargas pueden ser de tracción, de compresión o cortantes, y cuando su combinación alcanza el valor que conlleva la inestabilidad la placa flexa con un determinado patrón; aparecen entonces momentos flectores y comportamientos característicos de flexión. Por tanto, la

ecuación de gobierno de este tipo de placas debe relacionar el comportamiento a flexión de la placa con el comportamiento de membrana asociado con las cargas en el plano. Siguiendo el proceso descrito en [27], o bien [32], se llega a la Ec. (3.2) en el caso de que se considere un material isótropo.

$$\nabla^4 w = \frac{1}{D} \left( N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.2)$$

donde  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  son las cargas en el plano; respectivamente: Axil en caras  $x$  constante, axil en caras  $y$  constante y cortante. Se puede apreciar que para el estudio de pandeo las cargas transversales  $q$  no son relevantes debido a la linealidad del problema y a la posibilidad de superposición entre flexión e inicio de pandeo.

La inestabilidad debida a pandeo únicamente podrá darse bajo cargas de compresión o de cortante, las cargas de tracción desfavorecerán el inicio de pandeo ya que tienden a estirar el plano medio.

Cuando el material de la placa no es isótropo, como en un material compuesto, la Ec. (3.2) cambia, ya que no hay una única rigidez y las relaciones entre momentos flectores y curvaturas pasan a ser más enrevesadas. El lado izquierdo de la ecuación es más complejo y las rigideces  $D_{ij}$  multiplican a las derivadas de la deformada, como se muestra en Ec. (3.3), ver [15]. Se puede apreciar que la ecuación sigue siendo lineal aunque se le haya añadido algo de complejidad.

$$\begin{aligned} D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\ N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Esta ecuación, al contrario que la de flexión presenta la solución trivial  $w = 0$ . Por lo tanto, el problema reside en encontrar soluciones no triviales de la misma, obteniendo las cargas y los modos de pandeo. Salta a la vista que resolver directamente este tipo de problemas a partir de la Ec. (3.3) no es práctico, ya que se trata de una ecuación en derivadas parciales. Por tanto se plantea en la Sección 3.2 un método semianalítico conocido como método de Galerkin para poder abordar el problema.

### 3.1.1. Factor de pandeo

A la hora de expresar la carga crítica de pandeo de una placa, es habitual utilizar el factor de pandeo  $K$  en lugar de la carga como tal. El factor de pandeo es esencialmente una adimensionalización de la carga crítica cuya definición puede verse en la Ec. (3.4).

Como puede comprobarse es adimensional.

$$K = \frac{N_{cr}}{\frac{D\pi^2}{b^2}} \quad (3.4)$$

Este factor es función únicamente de la relación de lados de la placa  $r = a/b$  y de las propiedades del material. Por tanto se puede expresar toda la información acerca de la carga de pandeo de una determinada placa sujeta a unas CdC concretas en un único gráfico  $K - r$ . Este tipo de gráficos son muy habituales para describir el comportamiento a pandeo de placas.

### 3.2. Método de Galerkin

Una de los métodos semi-analíticos basados en la formulación de equilibrio es el conocido como método de Galerkin. Fue introducido por el ingeniero y matemático ruso Boris Grigórievich Galerkin en 1915 y consiste en un método aplicable a problemas en formulación diferencial, que convierte problemas con operadores continuos en problemas discretos, pudiendo resolver de forma aproximada muchos casos irresolubles en su formulación fuerte. Este método es importante no sólo por su aplicación directa, sino que además muchos métodos de elementos finitos posteriores se basan en los algoritmos introducidos por Galerkin.

La teoría matemática detrás del método presenta cierta complejidad, no obstante su interpretación física es más simple. Se considera de forma genérica un operador diferencial  $\mathcal{L}$  que puede ser lineal o no lineal. El método de Galerkin puede aplicarse a una ecuación diferencial genérica definida por el operador  $\mathcal{L}$  en algún dominio 2D que se denotará por  $\Omega$ .

$$\mathcal{L}[w(x, y)] = p(x, y) \quad (3.5)$$

Como se puede apreciar el método permite tratar problemas no homogéneos. No obstante, para el caso del estudio de pandeo esto no es de interés ya que se pretende estudiar la estabilidad del problema y hallar las cargas que lo hacen inestable (cargas de pandeo). La información sobre la estabilidad del sistema no depende de los términos independientes, por lo que en el caso que se pretende tratar se considerará una ecuación diferencial homogénea como la que se puede ver en Ec. (3.6).

$$\mathcal{L}[w(x, y)] = 0 ; \quad (x, y) \in \Omega \quad (3.6)$$

donde  $w(x, y)$  es la función solución del problema, que en el caso de la ecuación de gobierno de placas será la flecha. Se considera ahora que  $w$  se puede describir como se presenta en

Ec. (3.7), es decir, mediante un sumatorio de  $N$  términos.

$$w_N(x, y) = \sum_{i=1}^N w_i f_i(x, y) \quad (3.7)$$

Las funciones  $f_i$  son las funciones de prueba, tal que  $w_N$  cumpla las CdC. Los coeficientes  $w_i$  serán las incógnitas que deben determinarse para obtener la solución. Se ha de tener en cuenta que como se utilizará un número finito de términos la solución no será exacta, y se tendrá por tanto  $\mathcal{L}[w_N(x, y)] \neq 0$ . El método busca pues que la magnitud de  $\mathcal{L}[w_N(x, y)]$  sea mínima, para hallar de esta manera una solución lo más aproximada posible. Se demuestra en [32] que esta condición es equivalente a imponer que  $\mathcal{L}[w_N(x, y)]$  sea ortogonal a determinadas funciones acotadas, concretamente a las funciones de prueba. Se obtiene en base a esta condición la ecuación de Galerkin, que se puede ver en la Ec. (3.8).

$$\iint_{\Omega} \left[ \mathcal{L} \left( \sum_{i=1}^N w_i f_i(x, y) \right) \right] f_j(x, y) dx dy = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.8)$$

Se tienen entonces  $N$  ecuaciones, una para cada valor de  $j$ . Cada una de ellas contiene una integral de  $N$  términos lineales, pues está compuesta por un sumatorio de  $N$  términos. Se puede dividir dicha integral en la suma de  $N$  integrales y así la Ec. (3.8) se reescribe como se muestra en Ec. (3.9).

$$\sum_{i=1}^N \left[ \left( \iint_{\Omega} \mathcal{L}[f_i(x, y)] f_j(x, y) dx dy \right) w_i \right] = 0; \quad j = 1, 2, \dots, N. \quad (3.9)$$

Se puede observar por tanto en la Ec. (3.9) que se ha convertido la ecuación diferencial original en un sistema lineal de ecuaciones homogéneo de  $N$  ecuaciones y  $N$  incógnitas. Dicho sistema se puede expresar como el producto de una matriz de coeficientes  $\mathbf{E}$  por un vector de incógnitas  $\mathbf{w}$ .

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{w} = 0 \quad (3.10)$$

Para un caso no homogéneo bastaría con resolver el sistema en cuestión para hallar la solución del problema abordado, pero no se ha de perder de vista que se está aplicando el método al estudio del pandeo. Se están buscando por tanto soluciones no triviales del sistema homogéneo, para lo que este sistema ha de ser ideterminado, es decir, el determinante de la matriz de coeficientes ha de ser nulo. Las cargas críticas se obtienen de la ecuación característica resultante:

$$\det [\mathbf{E} (N_{cr})] = 0 \quad (3.11)$$

Una vez obtenidas las cargas de pandeo, los modos correspondientes se pueden obtener sustituyendo las cargas obtenidas en el sistema de la Ec. (3.10). Esto dará lugar a un

sistema indeterminado que proporcionará como solución para los  $w_i$  un subespacio, que será dependiente de un parámetro arbitrario. Se ha de elegir un criterio para asignar un valor a dicho parámetro, obteniendo una solución concreta. Sustituyendo las diferentes soluciones obtenidas en Ec. (3.7) se obtienen las deformadas de los diferentes modos.

### 3.2.1. Ejemplo de aplicación. Placa articulada a cortante

Se aplicará ahora el método expuesto a una placa plana de material compuesto sometida a sollicitación cortante  $N_{xy}$ , como el esquema de la Figura 3.2. Se considerará que la matriz  $\mathbf{B}$  es nula (laminado simétrico). Asimismo se considerará despreciable el acoplamiento entre flexión y deformaciones en el plano ( $D_{16} \approx D_{26} \approx 0$ ).

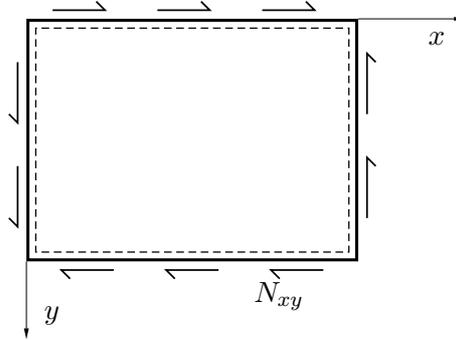


Figura 3.2: Placa rectangular sometida a esfuerzos cortantes.

En este caso, la ecuación de gobierno viene dada por la Ec. (3.12).

$$D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.12)$$

A continuación se ha de suponer una solución en serie para  $w$ . En este caso, como las CdC son articulaciones se utilizarán funciones de prueba tipo “seno-seno”.

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.13)$$

Ahora la Ec. (3.12) se multiplica por las funciones de prueba consideradas y se integra en el área de la placa, obteniendo la Ec. (3.14).

$$\int_0^a \int_0^b \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2(D_{12} + 2D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} - 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} dy dx = 0 \quad (3.14)$$

donde  $p = 1, 2, \dots, M$  y  $q = 1, 2, \dots, N$  para reflejar la diferencia entre  $f_i$  y  $f_j$  de la

Ec. (3.8). Si como en [15] se sustituye la expansión Ec. (3.13) en Ec. (3.14) y se lleva a cabo la integración se puede obtener el resultado de la Ec. (3.15).

$$\begin{aligned} & \pi^4 \left[ D_{11} p^4 + 2(D_{12} + 2D_{66}) p^2 q^2 r^2 + D_{22} q^4 r^4 \right] w_{pq} + \\ & - 32 p q r^3 b^2 N_{xy} \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N T_{mn} w_{mn} = 0 \end{aligned} \quad (3.15)$$

donde se ha incluido el factor  $T_{mn}$  dado por la Ec. (3.16) cuando los términos  $p \pm m$  y  $q \pm n$  sean impares; en caso contrario será igual a cero.

$$T_{mn} = \frac{m n}{(p^2 - m^2)(q^2 - n^2)} \quad (3.16)$$

La Ec. (3.15) es una ecuación genérica en  $p$  y  $q$ . Dando diferentes valores a estos contadores se obtienen  $M \times N$  ecuaciones independientes, cuyas incógnitas son los diferentes términos  $w_{pq}$ . Si se denota por  $\mathbf{w}$  al vector que agrupa los términos  $w_{pq}$  se obtiene el sistema de Ec. (3.17). Como se explicó previamente, los valores de las cargas críticas se obtienen calculando el determinante de  $\mathbf{E}$  e igualándolo a cero.

$$\mathbf{E}(N_{xy}) \cdot \mathbf{w} = 0 \implies \det [\mathbf{E}(N_{xy}|_{cr})] = 0 \quad (3.17)$$

Se obtienen varios valores para la carga crítica dependientes de  $a$ ,  $b$  y las diferentes  $D_{ij}$ . Como se puede apreciar, en el caso de los materiales compuestos no hay un único valor de la rigidez a flexión  $D$ , por lo que se ha de hacer una puntualización con respecto a la obtención del factor  $K$ . Cuando se trabaja con materiales compuestos se adimensionaliza la carga utilizando  $\sqrt{D_{11} D_{22}}$ , tal y como se muestra en Ec. (3.18).

$$K = \frac{N_{cr}}{\frac{\pi^2 \sqrt{D_{11} D_{22}}}{b^2}} \quad (3.18)$$

De esta forma se obtendrán factores  $K$  dependientes únicamente de la relación  $r$  y los ratios entre las distintas  $D_{ij}$ . Para simplificar la notación se denotará por  $\mathcal{D}_{ij}$  al cociente entre una determinada  $D_{ij}$  y la rigidez de adimensionalización  $\sqrt{D_{11} D_{22}}$ .

$$\mathcal{D}_{ij} = \frac{D_{ij}}{\sqrt{D_{11} D_{22}}} \quad (3.19)$$

Se ha de tener en cuenta que para cada  $r$  la carga crítica de pandeo es el mínimo de las cargas de pandeo calculadas. Por otro lado, las expresiones obtenidas para la carga crítica cambian con el número de términos empleados. Para el caso de la Figura 3.2 las expresiones siguientes se obtienen empleando cuatro términos.

$$K^I = \pm \frac{9\pi^2}{32r^3} [\mathcal{D}_{11} + 2(\mathcal{D}_{12} + 2\mathcal{D}_{66})r^2 + \mathcal{D}_{22}r^4]$$

$$K^{II} =$$

$$\pm \frac{9\pi^2}{128r^3} \sqrt{[16\mathcal{D}_{11} + 8(\mathcal{D}_{12} + 2\mathcal{D}_{66})r^2 + \mathcal{D}_{22}r^4][\mathcal{D}_{11} + 8(\mathcal{D}_{12} + 2\mathcal{D}_{66})r^2 + 16\mathcal{D}_{22}r^4]}$$

En caso de que el material fuese isótropo estas expresiones se simplificarían:

$$K^I = \pm \frac{9\pi^2}{32r^3} (1 + r^2)^2 ; \quad K^{II} = \pm \frac{9\pi^2}{128r^3} (4 + 17r^2 + 4r^4)$$

Como se puede apreciar, las cargas de pandeo se presentan por parejas de valores con signo cambiado para esfuerzos cortantes puros. Esto es lógico, ya que si se cambia el signo del esfuerzo cortante el problema es esencialmente igual desde el punto de vista del pandeo y la estructura entrará en inestabilidad para la misma intensidad de la carga. Se han obtenido cuatro soluciones, las mismas que términos tomados. Es usual obtener el mismo número de cargas críticas que de términos utilizados cuando se emplea este método de resolución. No obstante en el caso del pandeo a cortante aparece una particularidad: las cargas aparecen por parejas, obteniendo siempre un número par de cargas críticas, por lo que si se empleara un número impar de términos aparecería una aparente contradicción. Con un número de términos impar el sistema sólo aporta un número par de soluciones, y debe interpretarse que el resto de soluciones tienen valor  $\infty$ . Por ejemplo, para el caso de nueve términos únicamente se obtienen cuatro soluciones, por lo que las otras cinco tenderán a infinito. En cambio, al usar dieciséis términos aparecen dieciséis soluciones.

A continuación se particularizarán las cargas críticas obtenidas para un laminado simétrico  $[(45/-45)_2, 0_2, 90_2]_s$ , cuyas rigideces a flexión pueden verse en la Tabla 3.1. También se muestran los componentes de la matriz  $\mathbf{A}$ , que serán utilizados en el Capítulo 4.

Se puede observar que  $D_{16}$  y  $D_{26}$  presentan un valor pequeño en relación al resto de constantes, por lo que es apropiada la hipótesis que se ha asumido de considerarlos nulos. A partir de estos datos se pueden estimar las constantes  $\mathcal{D}_{ij}$  necesarias para representar  $K$  en función de la relación de lados de la placa. En la Figura 3.3 se puede ver la curva  $K - r$  cuando se utilizan cuatro, nueve y dieciséis términos en la solución. Para estas gráficas se representa el menor valor de las diferentes  $K$  obtenidas para cada  $r$ .

Valores de $A_{ij}$ (N/m) y $D_{ij}$ (N·m)					
$A_{11}$	=	$2,31 \cdot 10^8$	$A_{22}$	=	$2,31 \cdot 10^8$
$A_{12}$	=	$6,92 \cdot 10^7$	$A_{66}$	=	$8,08 \cdot 10^7$
$D_{11}$	=	65,4	$D_{66}$	=	38,6
$D_{12}$	=	37,2	$D_{16}$	=	5,4
$D_{22}$	=	51,1	$D_{26}$	=	5,4

Tabla 3.1: Propiedades del laminado considerado.

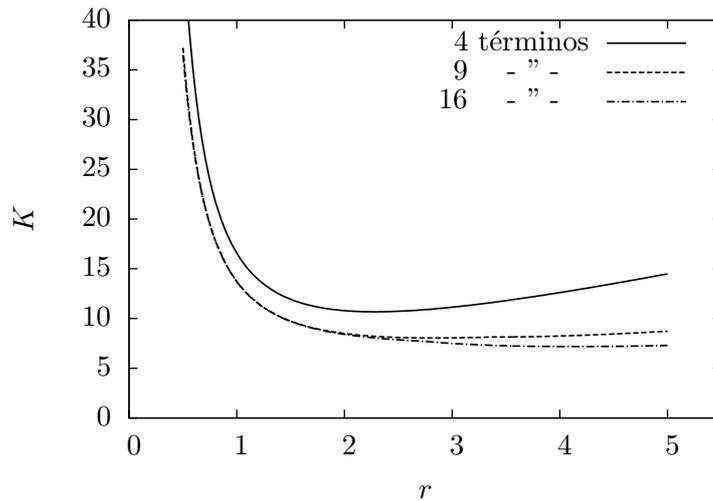


Figura 3.3: Gráficos  $K - r$  para placa a cortante en función del número de términos.

Para este caso de estudio cuatro términos no son suficientes para reproducir el pandeo de la placa con exactitud ya que los resultados difieren. No obstante esta solución puede representar una buena idea inicial antes de proceder con cálculos más completos. Por otro lado, para  $r < 2$  las soluciones de nueve y dieciséis son prácticamente equivalentes. Para relaciones de lados más elevadas las soluciones empiezan a diferir; con dieciséis términos se calculan valores menores de  $K$ , por lo tanto ésta es una solución más conservadora. Probablemente con valores de  $r$  elevados hay comportamientos y modos que la solución con nueve términos no puede reproducir con exactitud.

También se puede observar que para  $r < 1$  la carga crítica es mucho mayor que para  $r > 1$ . Intuitivamente esto resulta lógico: El lado  $b$  permanece como parámetro fijo en todo el análisis, ya que se está empleando para adimensionalizar. Por tanto valores menores de  $r$  equivalen a valores menores del lado  $a$ , y consecuentemente a placas de menor superficie. De igual modo que una columna de mayor longitud es más propensa a pandear, ocurre lo

mismo en una placa con mayor superficie. Siguiendo este razonamiento, la tendencia de la gráfica ha de ser siempre decreciente. La única solución que sigue esta correcta tendencia es la de dieciséis términos, no obstante la gráfica tiende a estabilizarse en un determinado valor. Para una placa con  $r \gg 1$  la carga crítica apenas variará si  $r$  sigue aumentando.

Se compararán ahora en la Figura 3.4 los resultados obtenidos para el factor  $K$  para un material compuesto con los que se obtendrían para un material isótropo. Para este último,  $K$  no depende de la rigidez a flexión ni de las propiedades del material sino que es una expresión adimensional función únicamente de la relación de los lados de la placa. Por tanto este  $K$  tendrá un comportamiento similar para todos los materiales isótropos en el caso de estudio. Por contra, para los materiales compuestos –que no pueden considerarse isótropos–  $K$  depende de las relaciones entre las  $D_{ij}$ , tal y como se ha visto en las expresiones previamente obtenidas.

Se ha de tener el cuenta que el hecho de comparar  $K$  no aporta directamente información sobre qué material presenta mayores cargas críticas, ya que este factor está adimensionalizado con la rigidez de cada material. Lo que esta comparación refleja es el comportamiento de la carga crítica del material conforme se modifica la geometría de la placa.

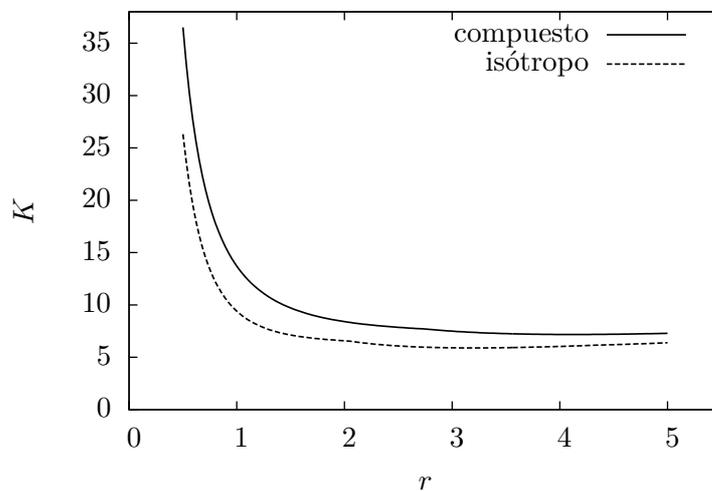


Figura 3.4: Gráficos  $K - r$  para placa a cortante comparando un material isótropo con el compuesto de la Tabla 3.1.

Tal y como se puede observar, el comportamiento entre ambos materiales difiere, especialmente para valores pequeños de  $r$ . Para valores del orden de 0,5 el  $K$  correspondiente al material compuesto es más elevado, no obstante conforme  $r$  aumenta hay menos diferencia entre ambos materiales. Por consiguiente la carga crítica de pandeo descende más rápidamente en el material compuesto conforme aumenta la relación entre lados de la placa. Por tanto, a pesar de que un material compuesto pueda ofrecer propiedades de

rigidez más elevadas que una aleación metálica, se ha de tener en cuenta en un proceso de diseño que estas propiedades no evolucionarán de igual manera en el primero que en el segundo cuando se modifica la geometría. No se deben tener en cuenta únicamente las ventajas de estos materiales sino también sus limitaciones y dificultades en el diseño.

### 3.2.2. Modos de pandeo

En la sección anterior se ha representado la carga crítica adimensionalizada en función de la relación entre los lados de la placa, no obstante se ha explicado que para cada  $r$  se obtienen varias cargas de pandeo, siendo la crítica la menor de ellas. Asociado a cada carga de pandeo hay un determinado patrón de deformación inestable que ésta origina. Para hallar dichos patrones se deben sustituir las expresiones obtenidas para las cargas de pandeo en el sistema de Ec. (3.17), obteniendo un sistema de ecuaciones indeterminado pues se ha impuesto que el determinante de la matriz sea nulo. Si se procede a resolver el sistema no se obtiene una solución determinada para los coeficientes  $w_{ij}$  sino un subespacio dependiente de un parámetro arbitrario que se denotará por  $\lambda$ . Así pues, los modos de pandeo no son una deformación de amplitud definida, simplemente describen el patrón de deformación que se origina al alcanzar la carga crítica.

Si se pretendiese estimar la deformación de forma determinada una vez que la placa ha pandeado se debe acudir al análisis de postpandeo, que abandona la linealidad del análisis del inicio de pandeo. Considerando cuatro términos las expresiones pueden ser tratadas de forma más sencilla, y se obtienen los modos de pandeo de la Ec. (3.20) al sustituir las cargas de pandeo en el sistema. Se ha denotado por  $\mathbf{w}_j^*$  al subespacio correspondiente al modo  $j$ .

$$\mathbf{w}_1^* = \begin{Bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ -\frac{\lambda}{4} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_2^* = \begin{Bmatrix} \lambda \\ 0 \\ 0 \\ \frac{\lambda}{4} \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_3^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda \\ \Psi \lambda \\ 0 \end{Bmatrix}; \quad \mathbf{w}_4^* = \begin{Bmatrix} 0 \\ \lambda \\ -\Psi \lambda \\ 0 \end{Bmatrix}$$

$$\Psi = \frac{\mathcal{D}_{11} + 8r^2(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{66}) + \mathcal{D}_{22}r^4}{\sqrt{[16\mathcal{D}_{11} + 8(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{66})r^2 + \mathcal{D}_{22}r^4][\mathcal{D}_{11} + 8(\mathcal{D}_{12} + \mathcal{D}_{66})r^2 + 16\mathcal{D}_{22}r^4]}}$$

(3.20)

En la expresión anterior se puede apreciar que la anisotropía del material no afecta a los modos 1 y 2, que se corresponden con las dos cargas de pandeo de menor valor absoluto. De hecho las expresiones son idénticas a las de un material isótropo. En cambio sí que afecta a los modos 3 y 4 (correspondientes a las  $N_{xy}$  de mayor valor absoluto), por lo que para materiales con diferentes propiedades  $\mathcal{D}_{ij}$  estos modos cambiarán, aunque no de forma muy acusada. Otra particularidad de los modos 3 y 4 es que dependen de la relación de lados de la placa, es decir, el hecho de modificar la geometría de la placa también cambia la naturaleza del modo. En la Figura 3.5 se pueden ver representados los

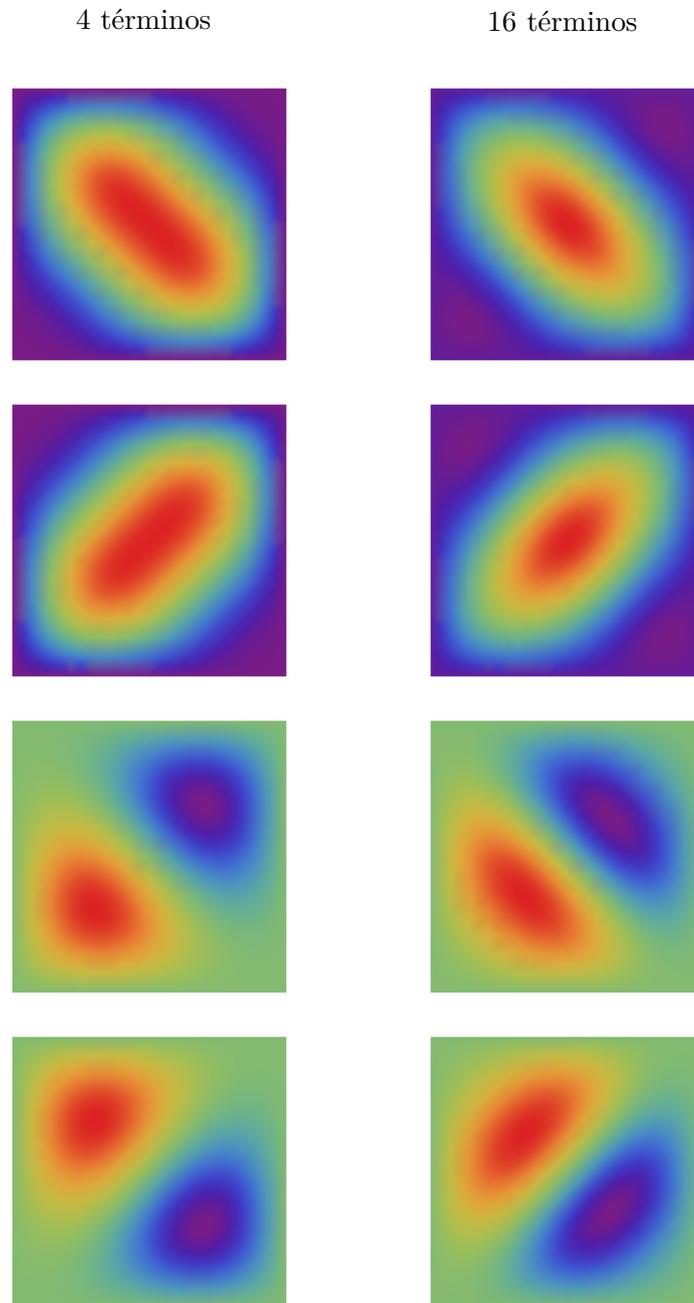


Figura 3.5: Cuatro primeros modos de pandeo para cuatro y dieciséis términos.

cuatro primeros modos de pandeo para  $r = 1$  empleando cuatro y dieciséis términos .

Los patrones obtenidos son cualitativamente similares. Para cuatro términos, la forma del modo está más condicionada por la forma impuesta en las funciones de prueba. En cambio para dieciséis términos pueden darse muchas más combinaciones de las funciones

de prueba, por lo que se obtienen formas algo más sofisticadas y que probablemente se acercarán más al comportamiento real de la placa.

### 3.2.3. Análisis mediante MEF

En la subsección anterior se ha abordado el problema empleando un procedimiento semianalítico basado en funciones de prueba. A continuación se resolverá el mismo problema mediante MEF, empleando el programa comercial de ordenador *Abaqus*<sup>®</sup>. Para realizar análisis de inicio de pandeo en *Abaqus*<sup>®</sup> en primer lugar se debe definir la geometría de estudio, en este caso una placa plana rectangular. Después se ha de indicar el material, que será el laminado de material compuesto cuyas propiedades se indicaron en la Tabla 3.1. En lugar de trabajar con las constantes  $D_{ij}$  que se usaron en el procedimiento analítico y que definen el laminado completo, se indican las propiedades mecánicas de cada una de las láminas por separado y las orientaciones de las diferentes láminas que componen el laminado. Las propiedades del material de cada lámina se muestran en la Tabla 3.2.

Propiedades de lámina					
$E_1$	=	137,9 GPa	$E_2$	=	11,7 GPa
$G_{12}$	=	4,82 GPa	$\nu_{12}$	=	0,31
		$t$	=	0,152 mm	

Tabla 3.2: Propiedades de cada una de las láminas.

Se pasa a continuación a mallar la pieza, utilizando elementos lámina cuadrados de orden lineal, concretamente 25 elementos por lado de la placa lo que proporciona un total de 625 elementos por ejecución. Se indica también que el tipo de análisis ha de ser de perturbación lineal para pandeo (*Linear perturbation, Buckle*). Por último se especifican las CdC y el tipo de carga que en este caso es simplemente una sollicitación cortante. Para introducir CdC tipo articulación se restringe el desplazamiento y giro correspondientes al eje  $z$  en los cuatro lados. Una vez introducidos todos los datos se ejecuta el programa.

Se ha de tener en cuenta que un análisis de elementos finitos mediante *Abaqus*<sup>®</sup> requiere una geometría totalmente definida, sin embargo en este capítulo se está estudiando el comportamiento de la carga crítica en función de la relación de lados. Por tanto, no basta con realizar una única ejecución sino que se estudian placas con diferentes relaciones de lados para así contrastar los resultados con las gráficas  $K - r$  de la sección anterior.

En la Figura 3.6 se muestra la evolución del factor  $K$  con la relación de lados para una placa articulada bajo sollicitación de cortante. Cada punto “o” se corresponde con una ejecución de *Abaqus*<sup>®</sup>.

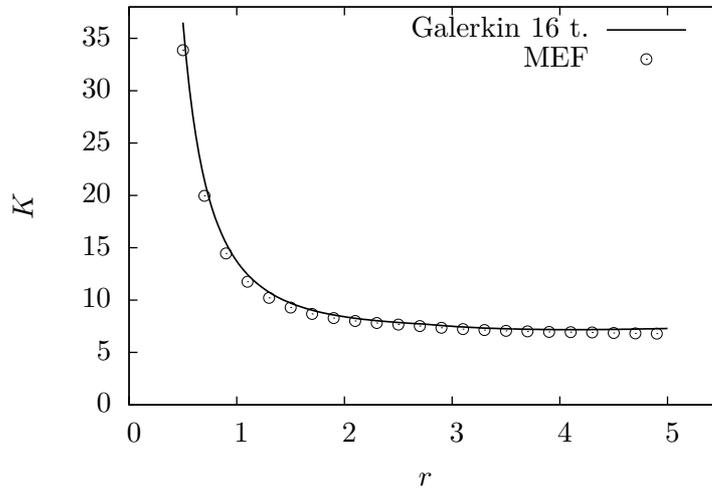


Figura 3.6: Gráficos  $K - r$  para placa a cortante comparando métodos semianalíticos con MEF.

Tal y como se puede apreciar, los resultados obtenidos mediante ambos métodos son muy similares. Para relaciones de lados menores de 4 (valores razonables en una placa) prácticamente no hay discrepancia entre los datos. En cambio, para valores de  $r$  mayores existe cierta divergencia entre ambos métodos. Como se ha mostrado previamente en la Sección 3.2.1, cuando la placa es muy alargada hacen falta más términos para hallar con precisión la carga de pandeo, harían falta más de dieciséis.

En la Figura 3.7 se muestra una comparativa entre los cuatro primeros modos de pandeo que se obtienen mediante el método de Galerkin y mediante MEF. Se puede observar que los patrones que se obtuvieron con el primer procedimiento son prácticamente idénticos a los obtenidos con el segundo. A pesar de que los métodos semianalíticos están supeditados a unas funciones de prueba relativamente sencillas, para relativamente pocos términos éstas son capaces de reproducir con bastante exactitud los patrones de deformación de pandeo.

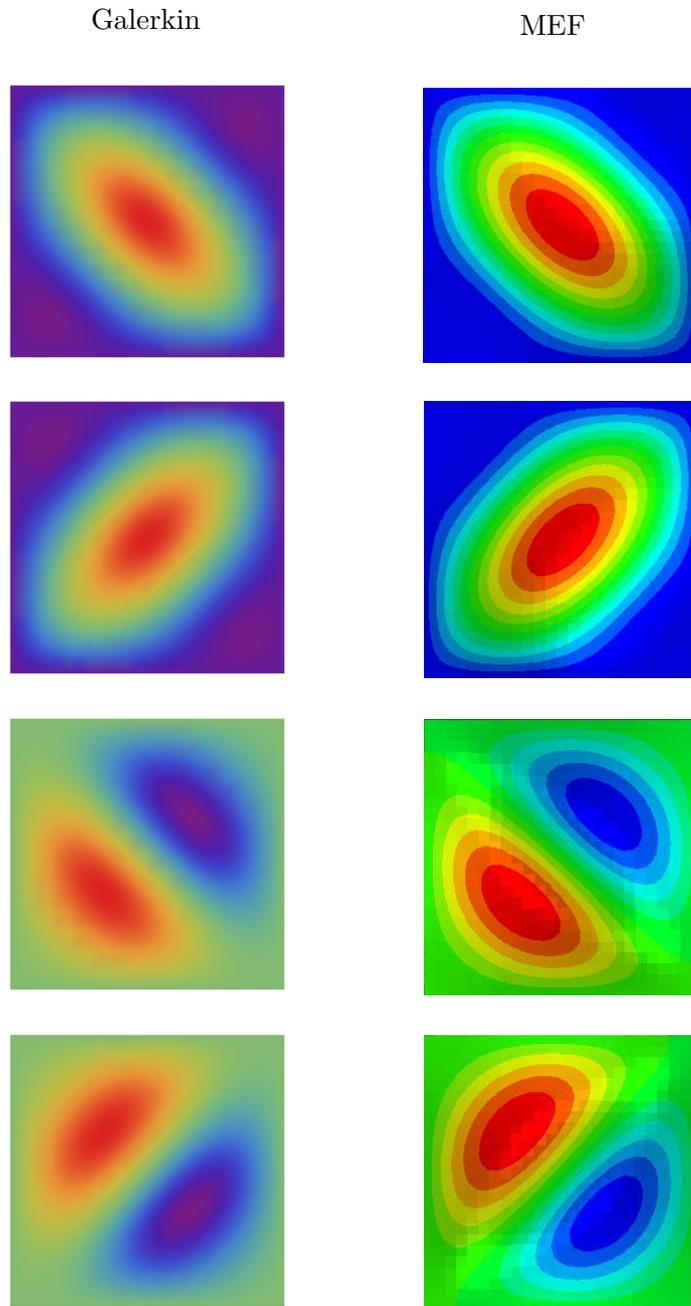


Figura 3.7: Cuatro primeros modos de pandeo para placa articulada a cortante mediante el método de Galerkin con 16 términos y MEF.

### 3.3. Aplicación a diferentes casos de estudio

A continuación se aplicarán los procedimientos analítico y numérico a casos con diferentes CdC y solicitaciones.

#### 3.3.1. Placa articulada sometida a compresión y cortante

En primer lugar se considerará una placa con las mismas CdC que en la Sección 3.2.1, pero añadiendo al cortante una solicitación de compresión  $N_x = N_{xy}$  de igual magnitud; en la Figura 3.8 se representa un esquema del caso de estudio. Como las CdC son las mismas se utilizan las funciones de prueba de la Ec. (3.13).

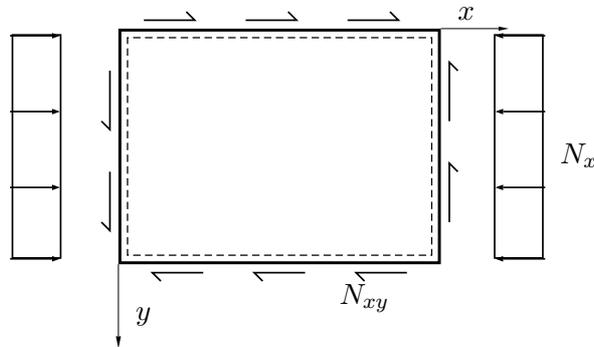


Figura 3.8: Placa plana bajo solicitaciones de cortante y compresión.

Se analiza la placa mediante el método de Galerkin (empleando cuatro, nueve y dieciséis términos) y mediante el MEF y en la Figura 3.9 se pueden observar las gráficas  $K - r$ .

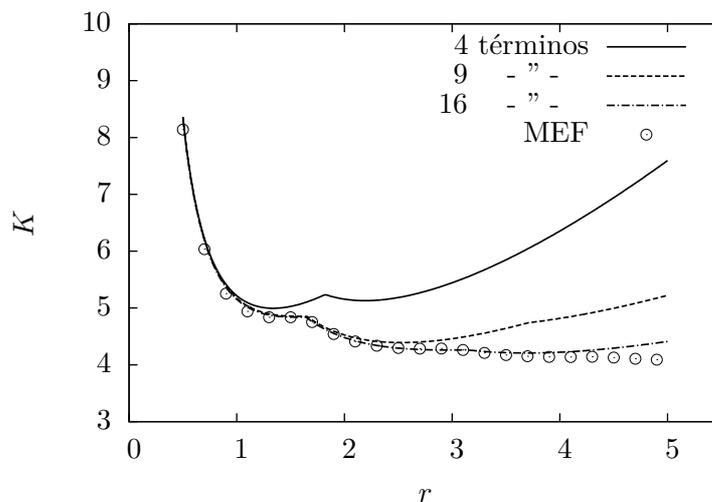


Figura 3.9: Gráficos  $K - r$  para placa a cortante y compresión comparando métodos semi-analíticos con MEF.

En este caso el resultado obtenido al emplear cuatro términos es más preciso que el de la Figura 3.4 para  $r = 1$ . Cuando la relación de lados aumenta cuatro términos no son suficientes, y para  $r > 2$  el error es demasiado grande. Y por último la solución para nueve términos es aceptable hasta aproximadamente  $r = 2,5$ . La solución para 16 términos y la obtenida mediante MEF son bastante similares en prácticamente todo el rango de estudio, pero al llegar a valores muy elevados de  $r$  (del orden de 4) ambas soluciones se separan. De nuevo se corrobora que cuanto más alargada sea la placa, más términos hacen falta para analizarla con exactitud.

En la Figura 3.10 se muestra una comparativa entre el factor de pandeo que se obtuvo cuando la única sollicitación era el cortante y para una placa sometida a cortante y compresión.

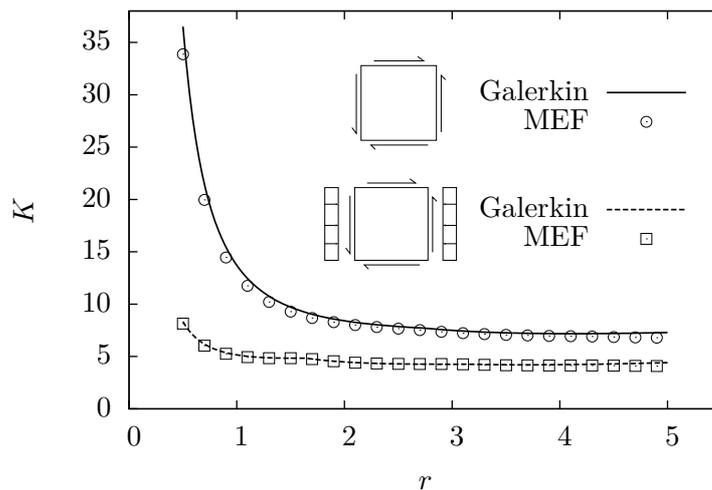


Figura 3.10: Factor de pandeo para placas articuladas con diferentes sollicitaciones.

Como cabría esperar, el hecho de añadir una sollicitación de compresión a la placa hace que ésta sea mucho más propensa a pandear, reduciéndose el valor de  $K$  a aproximadamente la mitad para  $r > 1$ . Si en lugar de añadir una carga de compresión se añadiera una de tracción, el factor de pandeo aumentaría considerablemente, pues de igual modo que la compresión favorece la aparición de pandeo, la tracción hace que sea más difícil que existan desplazamientos fuera del plano y por consiguiente las placas sometidas a tracción son menos propensas a sufrir inestabilidades de pandeo.

En la Figura 3.11 pueden verse los tres primeros modos de pandeo para  $r = 1$ . Se comparan los modos obtenidos con el método de Galerkin (y 16 términos) con los que se obtienen con el MEF. Cuando la única sollicitación era el cortante los modos aparecían por parejas simétricas debido a la simetría del problema. Sin embargo al haber añadido compresión en un único eje el problema pierde su simetría con respecto a la diagonal entre esquinas como sucedía con el cortante puro.

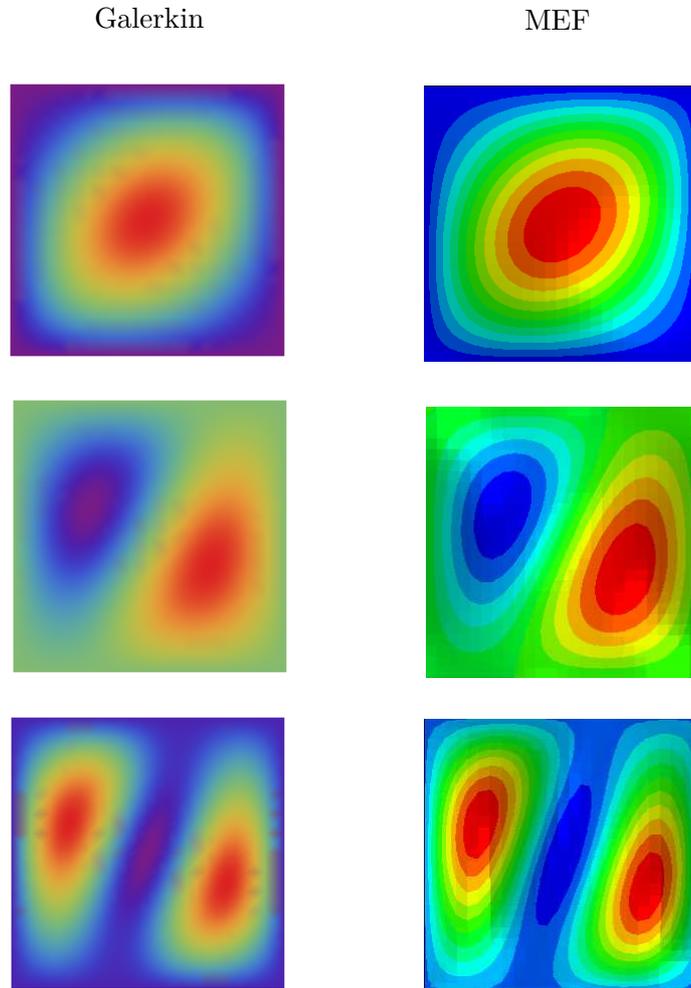


Figura 3.11: Tres primeros modos de pandeo para placa articulada bajo cortante y compresión mediante el método de Galerkin con 16 términos y MEF.

A pesar de que ahora aparecen formas más complejas en los patrones de deformación, dieciséis términos siguen siendo suficientes para reproducir estos patrones con bastante precisión.

### 3.3.2. Placa a cortante con diferentes CdC

A continuación se considerará una placa sometida a cortante puro, pero con dos empotramientos en los lados  $x$  constante, y dos articulaciones en los lados  $y$  constante. Por tanto se deben utilizar unas funciones de prueba diferentes de tal modo que se satisfagan las CdC. En la Figura 3.12 se muestra una representación esquematizada del caso de estudio.

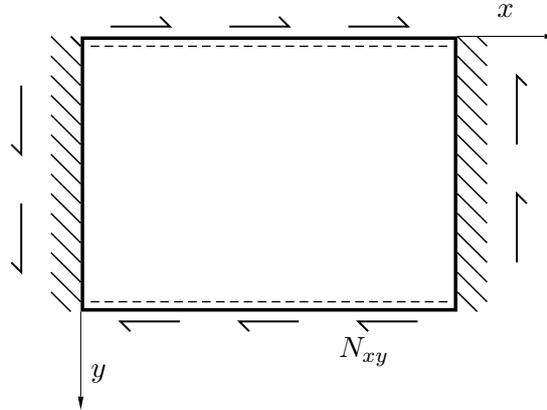


Figura 3.12: Placa a cortante con empotramientos y articulaciones.

Se puede ver la expresión de  $w(x, y)$  con las nuevas funciones de prueba en la Ec. (3.21).

$$w = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N w_{mn} \sin \frac{\pi x}{a} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (3.21)$$

De igual modo que las funciones de prueba cambian para satisfacer las nuevas CdC, se ha de restringir en *Abaqus*<sup>®</sup> el giro  $w_x$  (alrededor del eje  $y$ ) en los lados empotrados.

Al modificar las CdC las expresiones para la carga crítica cambian. A continuación se muestran las cargas de pandeo empleando cuatro términos en el método de Galerkin.

$$K^I =$$

$$\pm \frac{45 \pi^2 \sqrt{[41 \mathcal{D}_{11} + 10 (\mathcal{D}_{12} + 2\mathcal{D}_{66}) r^2 + \mathcal{D}_{22} r^4] [\mathcal{D}_{11} + 2 (\mathcal{D}_{12} + 2\mathcal{D}_{66}) r^2 + 3 \mathcal{D}_{22} r^4]}}{256 \sqrt{2} r^3}$$

$$K^{II} = \pm$$

$$\frac{45 \pi^2 \sqrt{[16 \mathcal{D}_{11} + 8 (\mathcal{D}_{12} + 2\mathcal{D}_{66}) r^2 + 3 \mathcal{D}_{22} r^4] [41 \mathcal{D}_{11} + 40 (\mathcal{D}_{12} + 2\mathcal{D}_{66}) r^2 + 16 \mathcal{D}_{22} r^4]}}{1024 \sqrt{2} r^3}$$

Para un material isótropo, estas expresiones se simplifican tal y como se muestra a continuación.

$$K^I = \pm \frac{45 \pi^2 \sqrt{(41 + 10 r^2 + r^4)(1 + 2 r^2 + 3 r^4)}}{256 \sqrt{2} r^3}$$

$$K^{II} = \pm \frac{45 \pi^2 \sqrt{(16 + 8r^2 + 3r^4)(41 + 40r^2 + 16r^4)}}{1024 \sqrt{2} r^3}$$

En la Figura 3.13 se pueden ver los diagramas  $K - r$  para la placa en cuestión empleando el método de Galerkin (para dos números de términos) y el MEF.

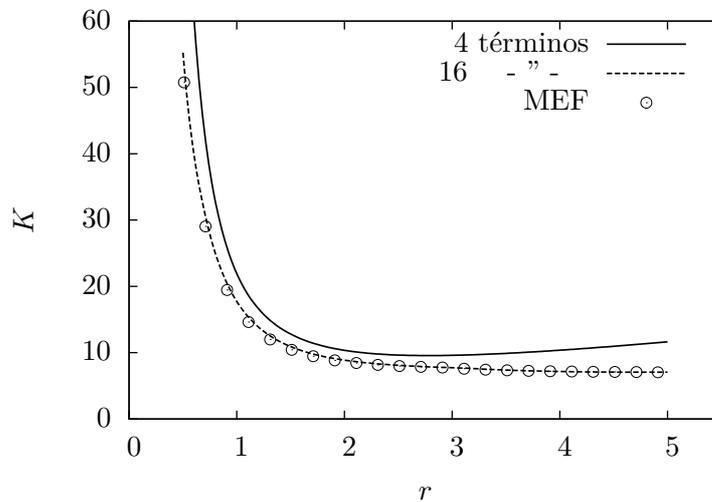


Figura 3.13: Factor de pandeo para placa con empotramientos y articulaciones.

La solución para cuatro términos proporciona un buen resultado para  $r > 1$ , no obstante el error aumenta considerablemente para  $r < 1$ . La solución con dieciséis términos se ajusta de forma muy precisa a los datos obtenidos con MEF.

En la Figura 3.14 se compara el factor de pandeo para una placa totalmente articulada con el que se obtiene para una placa con dos lados articulados y los otros dos empotrados. Para valores pequeños de  $r$  el factor de pandeo es mayor en la placa con empotramientos, ya que esta CdC es más restrictiva y por tanto hace que la placa sea menos propensa a pandear. No obstante cuando la relación entre los lados de la placa aumenta ambas gráficas tienden al mismo valor. Este comportamiento tiene sentido si se tiene en cuenta cómo se ha definido la relación entre los lados,  $r = a/b$ . Los lados de longitud  $a$  son los articulados y los lados de longitud  $b$  los empotrados, por tanto cuando  $r$  aumenta los lados articulados son mucho más largos que los empotrados, y consiguientemente el empotramiento pierde relevancia.

De hecho, cuando  $r \rightarrow \infty$  la CdC en los lados de longitud  $b$  es totalmente irrelevante, por lo que ambas placas serían iguales en el límite. Se puede apreciar que para  $r > 2$  ambas soluciones son prácticamente coincidentes. En placas alargadas no tiene sentido empotrar

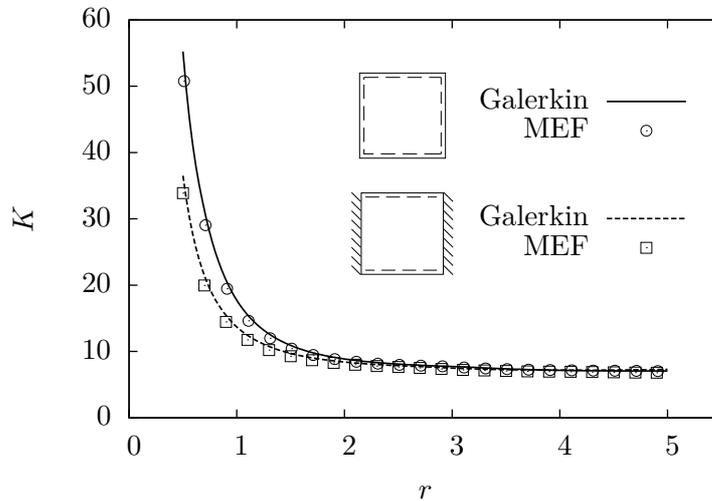


Figura 3.14: Factor de pandeo para placas con diferentes CdC.

el lado corto ya que la resistencia de la placa es prácticamente la misma; sin embargo empotrando el lado largo la carga crítica de la placa aumenta considerablemente. Para  $r < 1$  el lado  $b$  empotrado es el más largo y el factor de pandeo es considerablemente más grande.

Lo anteriormente explicado se esquematiza en la Figura 3.15. Tal y como se puede ver, cuando  $r \ll 1$  los empotramientos están en los lados largos, por lo que son muy influyentes en la placa. Por el contrario  $r \gg 1$  los empotramientos están en los lados cortos de la placa, su influencia es despreciable y se puede considerar que la placa está totalmente articulada.

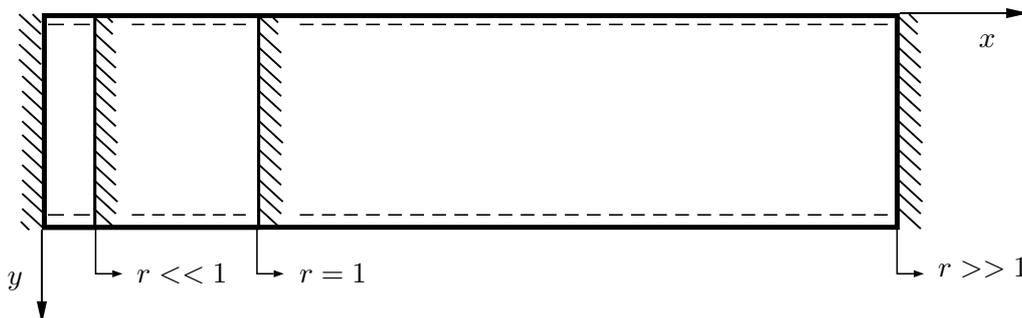


Figura 3.15: Diferentes relaciones de lados para la placa.

En la Figura 3.16 se presentan los modos de pandeo que se obtienen para la placa articulada en  $a$  y empotrada en  $b$  considerando que  $r = 1$ , con dieciséis términos en el método de Galerkin y con el MEF.

La única sollicitación es el cortante, entonces las cargas y los modos de pandeo aparecen

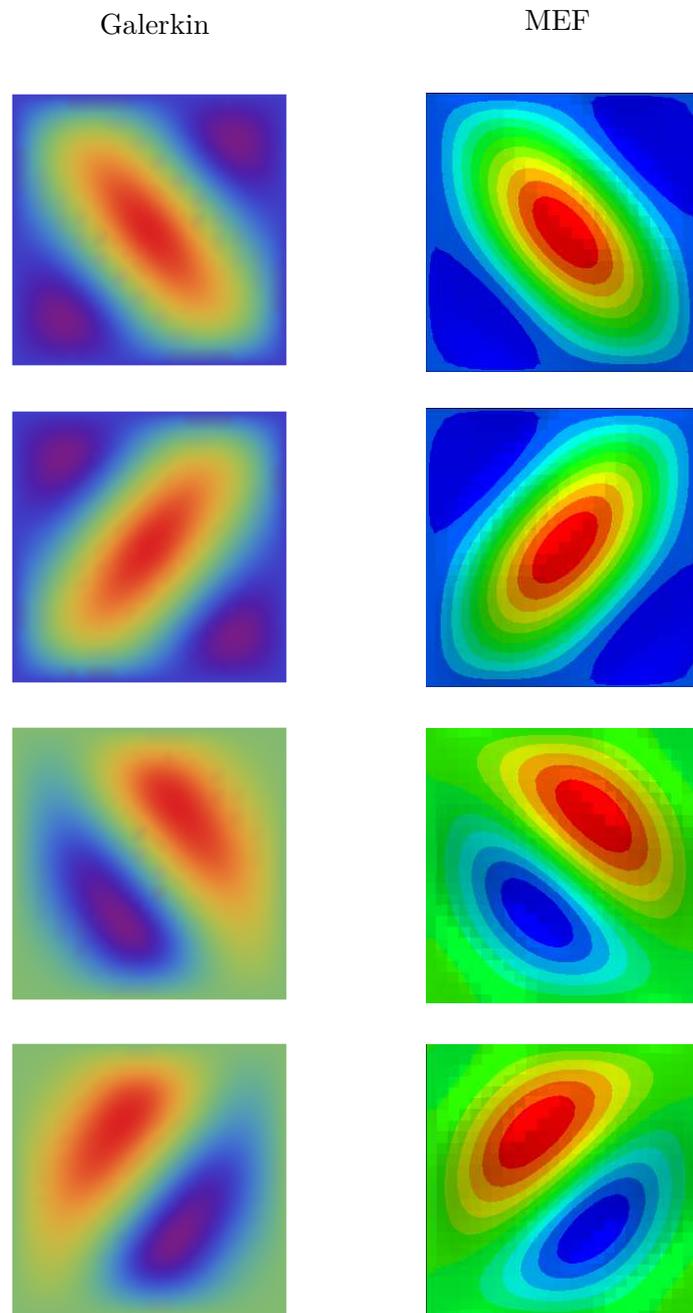


Figura 3.16: Cuatro primeros modos de pandeo para placa con lado  $b$  articulado y lado  $a$  empotrado.

de nuevo por parejas ya que la placa es igual de propensa a pandear bajo un cortante negativo que bajo uno positivo.

### 3.4. Conclusiones generales

Se puede apreciar que los resultados obtenidos mediante métodos semianalíticos y mediante MEF son bastante coherentes entre sí, siempre que se utilicen suficientes términos. Los primeros constituyen por tanto una buena herramienta para el análisis de placas con relativamente poco coste computacional. Proporcionan además funciones analíticas continuas para las diferentes variables analizadas, lo cual también es una ventaja ya que los resultados no se limitan a valores discretizados.

Por otra parte, los métodos numéricos a cambio de algo más de coste computacional permiten análisis algo más detallados y ofrecen mejores resultados en zonas en las que el estudio analítico no es lo suficientemente preciso. El problema de estos últimos reside en que las funciones de prueba consideradas no son óptimas para el análisis de placas alargadas, de hecho cuando  $r \gg 1$  se suelen utilizar funciones de prueba diferentes más adecuadas para este tipo de análisis [15]. En estas placas alargadas aparecen surcos con una determinada inclinación  $\alpha$ , por lo tanto se plantean funciones que definen directamente deformadas de este tipo. Se puede ver un ejemplo en la Ec. (3.22).

$$w(x, y) = w_o \sin \frac{\pi x}{b} \sin \frac{\pi (y - x \tan \alpha)}{L} \quad (3.22)$$

donde  $b$  es el lado corto de la placa y  $L$  la distancia entre dos surcos.

También se ha podido comprobar que las CdC pueden ser bastante influyentes en la carga crítica de pandeo, pero por otro lado pueden ser irrelevantes si están presentes en los lados cortos. Por último, aplicar varias cargas que favorecen el pandeo puede reducir drásticamente la carga crítica, por tanto para analizar placas en una aeronave no se debe obviar a priori ninguna de las cargas a las que está sometida.

# 4

## *Postpandeo de placas a cortante*

Tras haber estudiado el inicio de pandeo en placas planas trabajando a cortante, en el presente capítulo se procede a estudiar el comportamiento en régimen de postpandeo.

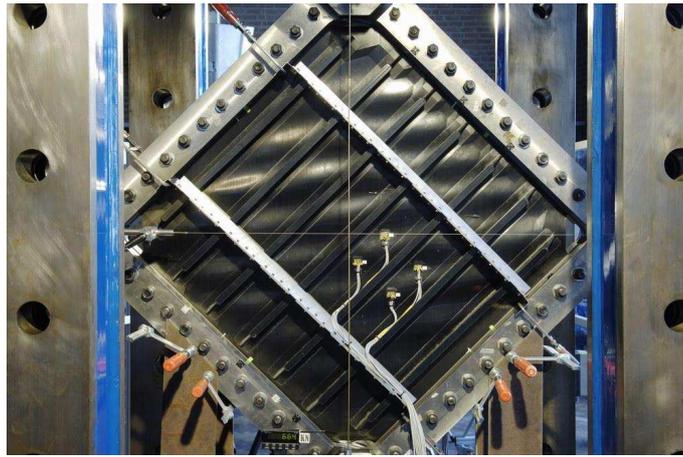


Figura 4.1: Ensayo a cortante de un panel aeronáutico rigidizado, cfr. [45].

Cuando se sobrepasa la carga de pandeo se produce una inestabilidad estructural que genera desplazamientos  $w$  fuera del plano. Dado que se trata de estados inestables la placa no vuelve a su estado indeformado inicial tras retirar las cargas. Además, la teoría de pequeñas deformaciones que se aplica en la mayoría de ámbitos del análisis de placas no es válida en general para analizar el régimen de postpandeo. En este régimen la placa se convierte en lámina con el consecuente desarrollo de tensiones de membrana y resistencia adicional.

Es importante el estudio de estos  $w$ , ya que las tensiones que se generan en una placa dependen de la flecha y sus derivadas.

### **4.1. Análisis mediante las ecuaciones de von Karman**

Se considerará ahora una placa cuadrada de lados  $a$  y espesor  $h$  sometida a un ensayo a cortante. Los lados de la placa se encuentran restringidos por barras rígidas con articulaciones en sus extremos, que impiden desplazamientos pero no giros, es decir, la placa está articulada en sus cuatro lados. Tal y como se muestra en la Figura 4.2 se aplican en dos de las esquinas fuerzas de magnitud  $P$ , que son equivalentes a cuatro fuerzas cortantes  $P_{xy}$  en los lados de la placa.

Para analizar el problema del postpandeo se deben emplear las ecuaciones específicas de von Karman, ya que en general se presentarán grandes deformaciones no lineales. Dichas ecuaciones se presentaron en las Ecs. (2.15), (2.18). Las fuerzas  $P_{xy}$  que se aplican

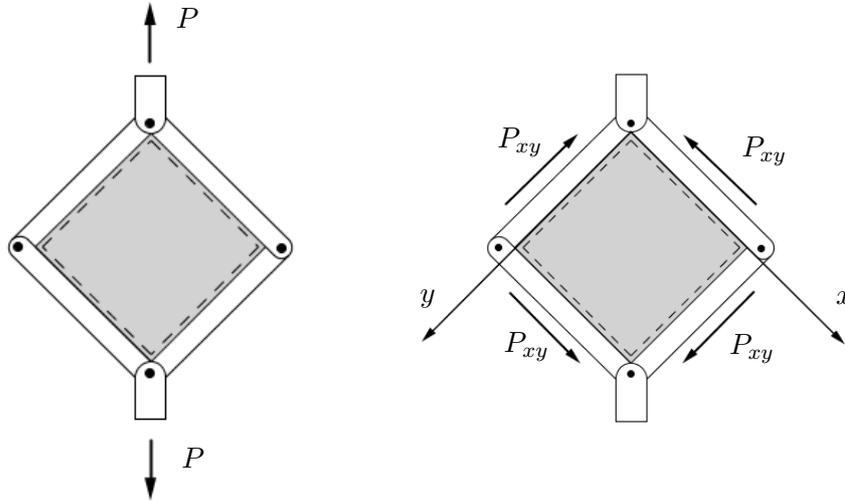


Figura 4.2: Caso de estudio. Placa articulada trabajando a cortante.

en los diferentes lados de la placa tienen unidades de fuerza propiamente dicha [N], no obstante las solicitaciones  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  de las ecuaciones de von Karman son fuerzas distribuidas a lo largo de un lado, por lo que sus unidades son [N/m]. Las fuerzas por unidad de superficie  $p_x$ ,  $p_y$  y  $p_z$  se consideran nulas, consecuentemente  $V = 0$ .

Resulta imposible resolver analíticamente el sistema de von Karman con dos ecuaciones diferenciales parciales no lineales, por lo que de nuevo se emplearán métodos semianalíticos basados en funciones de prueba para poder obtener una solución. Las funciones de prueba “seno-seno” aplicadas a este problema requieren muchos términos para describir la deformada con exactitud, por lo que la resolución se vuelve compleja y es necesario acudir a métodos numéricos. En lugar de funciones tipo “seno-seno”, basándose en los resultados numéricos se ha desarrollado la función de prueba de la Ec. (4.1), que permite simular un modo valle-montaña-valle a lo largo de la diagonal.

$$w(x, y) = w_o \cos\left(\frac{3\pi(x-y)}{2a}\right) \sin\left(\frac{\pi x}{a}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{a}\right) = w_o W(x, y) \quad (4.1)$$

Tal y como se puede comprobar la función verifica las CdC geométricas. En la Figura 4.3 se puede ver una representación de esta función de prueba.

Además del modelado de la deformada  $w$ , el estudio de postpandeo requiere desarrollar la función de Airy  $F$  también mediante funciones de prueba.

Se puede observar en la Ec. (2.18) que el lado derecho sólo depende de  $w$ : introduciendo

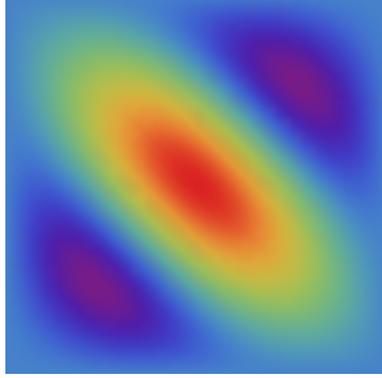


Figura 4.3: Función de prueba empleada para el estudio de postpandeo a cortante.

la función de prueba Ec. (4.1) en ese lado, se obtiene la expresión de Ec. (4.2).

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi^4 w_o^2}{8 a^4} \left[ \frac{13}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + \frac{13}{2} \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) - 9 \cos\left(\frac{2\pi(x+y)}{a}\right) \right. \\
 & - 9 \cos\left(\frac{3\pi(x-y)}{a}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi(3x-y)}{a}\right) + \frac{1}{4} \cos\left(\frac{\pi(x-3y)}{a}\right) \\
 & \left. + \frac{25}{4} \cos\left(\frac{\pi(5x-3y)}{a}\right) + \frac{25}{4} \cos\left(\frac{\pi(3x-5y)}{a}\right) \right] \quad (4.2)
 \end{aligned}$$

El lado izquierdo es función únicamente de  $F$  teniendo en cuenta el mencionado  $V = 0$ . Se debe definir ahora una función de prueba para  $F$  tal que la segunda ecuación de von Karman se satisfaga  $\forall x, y$ , por lo que al derivar la expresión de  $F$  se deben obtener las mismas funciones en  $x, y$  que en Ec. (4.2). Además, en los lados de la placa debe verificarse que la resultante de  $N_{xy}$  sea la fuerza externa  $P_{xy}$ . Por tanto la expresión adecuada viene dada por la Ec. (4.3).

$$\begin{aligned}
 F = & -P_{xy} \frac{xy}{a} + K_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + K_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) + K_3 \cos\left(\frac{2\pi(x+y)}{a}\right) \\
 & + K_4 \cos\left(\frac{3\pi(x-y)}{a}\right) + K_5 \cos\left(\frac{\pi(3x-y)}{a}\right) + K_6 \cos\left(\frac{\pi(x-3y)}{a}\right) \\
 & + K_7 \cos\left(\frac{\pi(5x-3y)}{a}\right) + K_8 \cos\left(\frac{\pi(3x-5y)}{a}\right) \quad (4.3)
 \end{aligned}$$

En la referencia [15] se resuelve el problema del postpandeo a compresión empleando una función de prueba tipo “seno-seno” para  $w$ , con lo que la función de Airy es más

sencilla.

En postpandeo, la sollicitación  $N_{xy}$  deja de ser constante a lo largo de los lados. Su variación se puede calcular a partir de la función de Airy empleando la Ec. (2.16). Integrando esta ecuación se puede verificar la equivalencia.

$$\begin{aligned}
 \int_0^a N_{xy}(0, y) \, dy &= - \int_0^a \frac{\partial^2 F(0, y)}{\partial x \partial y} \, dy = P_{xy} \\
 \int_0^a N_{xy}(a, y) \, dy &= - \int_0^a \frac{\partial^2 F(a, y)}{\partial x \partial y} \, dy = P_{xy} \\
 \int_0^a N_{xy}(x, 0) \, dx &= - \int_0^a \frac{\partial^2 F(x, 0)}{\partial x \partial y} \, dx = P_{xy} \\
 \int_0^a N_{xy}(x, a) \, dx &= - \int_0^a \frac{\partial^2 F(x, a)}{\partial x \partial y} \, dx = P_{xy}
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Una vez definidas las funciones de prueba para  $w$  y  $F$  el problema tiene como incógnitas  $w_o$  y las diferentes  $K_j$ ; la fuerza  $P_{xy}$  es dato. En primer lugar se emplea la Ec. (2.18) para hallar la expresión de las constantes  $K_j$ ; para ello se definen las constantes de las Ecs. (4.5).

$$\begin{aligned}
 \mathcal{A}_1 &= \frac{A_{11}}{A_d}; \quad \mathcal{A}_2 = \frac{A_{22}}{A_d} \\
 \mathcal{A}_3 = \mathcal{A}_4 &= \frac{A_{12}^2 - A_{11} A_{22} + (A_{11} + A_{22} - 2 A_{12}) A_{66}}{A_d A_{66}} \\
 \mathcal{A}_5 &= \frac{9 A_{12}^2 - 9 A_{11} A_{22} + (81 A_{11} - 18 A_{12} + A_{22}) A_{66}}{A_d A_{66}} \\
 \mathcal{A}_6 &= \frac{9 A_{12}^2 - 9 A_{11} A_{22} + (A_{11} - 18 A_{12} + 81 A_{22}) A_{66}}{A_d A_{66}} \\
 \mathcal{A}_7 &= \frac{225 A_{12}^2 - 225 A_{11} A_{22} + (625 A_{11} - 450 A_{12} + 81 A_{22}) A_{66}}{A_d A_{66}} \\
 \mathcal{A}_8 &= \frac{225 A_{12}^2 - 225 A_{11} A_{22} + (81 A_{11} - 450 A_{12} + 625 A_{22}) A_{66}}{A_d A_{66}}
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

Si ahora se toma el lado izquierdo de la Ec. (2.18) y se sustituye la expresión de  $F$  se

obtiene la Ec. (4.6).

$$\begin{aligned}
 & \frac{\pi^4}{a^4} \left[ 16 \mathcal{A}_1 K_1 \cos\left(\frac{2\pi x}{a}\right) + 16 \mathcal{A}_2 K_2 \cos\left(\frac{2\pi y}{a}\right) + 16 \mathcal{A}_3 K_3 \cos\left(\frac{2\pi(x+y)}{a}\right) \right. \\
 & + \frac{81 \mathcal{A}_4 K_4 \pi^4}{a^4} \cos\left(\frac{3\pi(x-y)}{a}\right) + \mathcal{A}_5 K_5 \cos\left(\frac{\pi(3x-y)}{a}\right) + \mathcal{A}_6 K_6 \cos\left(\frac{\pi(x-3y)}{a}\right) \\
 & \left. + \mathcal{A}_7 K_7 \cos\left(\frac{\pi(5x-3y)}{a}\right) + \mathcal{A}_8 K_8 \cos\left(\frac{\pi(3x-5y)}{a}\right) \right]
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

Como la Ec. (2.18) ha de satisfacerse  $\forall x, y$ , por identificación de términos entre las Ecs. (4.2) y (4.6) se pueden obtener las expresiones de las constantes  $K_j$  listadas en las Ecs. (4.7). También se definen nuevas constantes  $\mathcal{K}_j$  que serán utilizadas más adelante.

$$\begin{aligned}
 K_1 &= \frac{13 w_o^2}{256 \mathcal{A}_1} = \mathcal{K}_1 w_o^2 ; & K_2 &= \frac{13 w_o^2}{256 \mathcal{A}_2} = \mathcal{K}_2 w_o^2 \\
 K_3 &= -\frac{9 w_o^2}{128 \mathcal{A}_3} = \mathcal{K}_3 w_o^2 ; & K_4 &= -\frac{w_o^2}{72 \mathcal{A}_4} = \mathcal{K}_4 w_o^2 \\
 K_5 &= \frac{w_o^2}{32 \mathcal{A}_5} = \mathcal{K}_5 w_o^2 ; & K_6 &= \frac{w_o^2}{32 \mathcal{A}_6} = \mathcal{K}_6 w_o^2 \\
 K_7 &= \frac{25 w_o^2}{32 \mathcal{A}_7} = \mathcal{K}_7 w_o^2 ; & K_8 &= \frac{25 w_o^2}{32 \mathcal{A}_8} = \mathcal{K}_8 w_o^2
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Se observa que todas las constantes  $K_j$  son proporcionales al cuadrado de  $w_o$ , la única incógnita que falta por resolver, para lo que se empleará la primera ecuación de von Karman, Ec. (2.15). Anulando los términos de  $p_x, p_y$  y  $p_z$  y haciendo uso de las relaciones Ecs. (2.16), esta ecuación se puede reescribir como en Ec. (4.8).

$$\begin{aligned}
 D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \\
 \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Para poder resolver  $w_o$  se sustituyen  $w$  y  $F$  en la Ec. (4.8), se multiplican ambos lados

por la función de prueba  $W(x, y)$  de la Ec. (4.1) y se integra en el área de la placa.

$$\int_0^a \int_0^a \left\{ \left[ D_{11} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 (D_{12} + 2 D_{66}) \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + D_{22} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right] \cdot W(x, y) \right\} dx dy =$$

$$\int_0^a \int_0^a \left\{ \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] \cdot W(x, y) \right\} dx dy \quad (4.9)$$

Obteniéndose el resultado de la Ec. (4.10).

$$\frac{\pi^2}{a^2} \Delta_1 w_o = \frac{9 \pi^2 P_{xy}}{16 a} w_o - \frac{\pi^2}{a^2} \Delta_2 w_o^3 \quad (4.10)$$

donde las constantes  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  vienen dadas por las Ecs. (4.11).

$$\Delta_1 = \frac{1}{5760} \left[ 45 \pi^2 (331 D_{11} + 338 D_{12} + 313 D_{22} + 676 D_{66}) \right. \\ \left. - 64 (31 D_{11} - 10 D_{12} + 31 D_{22} - 20 D_{66}) \right]$$

$$\Delta_2 = \frac{136}{315} (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) + \frac{16}{35} \mathcal{K}_3 - \frac{4}{5} \mathcal{K}_4 - \frac{116}{45} (\mathcal{K}_5 + \mathcal{K}_6) - \frac{556}{1575} (\mathcal{K}_7 + \mathcal{K}_8) \\ + \pi^2 \left[ -\frac{13}{16} (\mathcal{K}_1 + \mathcal{K}_2) + \frac{9}{8} (\mathcal{K}_3 + \mathcal{K}_4) - \frac{1}{32} (\mathcal{K}_5 + \mathcal{K}_6) - \frac{25}{32} (\mathcal{K}_7 + \mathcal{K}_8) \right] \quad (4.11)$$

Tal y como se puede observar, la Ec. (4.10) presenta una solución trivial  $w_o = 0$ . Si se pretende buscar la solución no trivial  $w_o \neq 0$  se divide toda la ecuación por  $w_o$ , y se reorganizan los términos como se indica en la Ec. (4.12).

$$\Delta_2 w_o^2 = \Delta_1 \left( \frac{P_{xy}}{16 \Delta_1} - 1 \right) \quad (4.12)$$

El término que divide a  $P_{xy}$  en el lado derecho de la ecuación es la carga crítica de pandeo  $P_{xy}|_{cr}$  con la función de prueba actual. Por tanto se puede expresar el término  $w_o$  en función del ratio de postpandeo tal y como se muestra en Ec. (4.13).

$$w_o = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2} \left( \frac{P_{xy}}{P_{xy}|_{cr}} - 1 \right)} = \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2} (\mathcal{R} - 1)} \quad (4.13)$$

Cuando el ratio de postpandeo es menor que la unidad no se obtienen resultados reales para  $w_o$ , ya que aún no se ha alcanzado la carga crítica y la placa aún no ha pandeado, por tanto no ha comenzado a deformarse fuera del plano. Cuando  $\mathcal{R} < 1$  sólo tiene sentido la solución trivial  $w_o = 0$ . No obstante cuando el ratio de postpandeo es mayor que la unidad la placa ha pandeado y se obtienen soluciones reales para  $w_o$  diferentes de cero. Se puede expresar la solución para  $w_o$  de forma más correcta como se muestra en la Ec. (4.14).

$$w_o = \begin{cases} 0 & ; \quad \mathcal{R} < 1 \\ \sqrt{\frac{\Delta_1}{\Delta_2}} (\mathcal{R} - 1) & ; \quad \mathcal{R} \geq 1 \end{cases} \quad (4.14)$$

La expresión obtenida para  $w_o$  se simplifica en caso de un material isótropo, ya que las expresiones de  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son bastante más sencillas. En concreto se obtienen las expresiones de las Ecs. (4.15).

$$\Delta_1^i = E h^3 \frac{10845 \pi^2 - 832}{17280 (1 - \nu^2)} = E h^3 f(\nu)$$

$$\Delta_2^i = \frac{E h}{10080 \nu (9 \nu - 16) (225 \nu - 64)} \left\{ \left[ 54272 + 183056 \nu + 351 (2550 \nu^3 - 4657 \nu^2) \right] - \frac{315 \pi^2}{128} \left[ - 99328 + 771312 \nu - 1619613 \nu^2 + 684450 \nu^3 \right] \right\} = E h g(\nu) \quad (4.15)$$

Por tanto, para un material isótropo se puede expresar  $w_o$  según Ec. (4.16).

$$\frac{w_o}{h} = \sqrt{\frac{f(\nu)}{g(\nu)}} (\mathcal{R} - 1) \quad (4.16)$$

Se puede apreciar que el desplazamiento  $w$  no depende del módulo de Young para un material isótropo, ya que  $\Delta_1$  y  $\Delta_2$  son ambos proporcionales a  $E$ . No obstante sí que hay una dependencia altamente no lineal con el coeficiente de Poisson. Por otro lado se puede comprobar que el problema admite una formulación adimensional si se divide el desplazamiento por el espesor  $h$  de la placa.

En la Figura 4.4 se puede ver la relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento  $w$  en el centro de la placa (que es precisamente  $w_o$ ). Se comparan un aluminio isótropo  $\nu = 0,3$  con el material compuesto descrito en las Tablas 3.1 y 3.2.

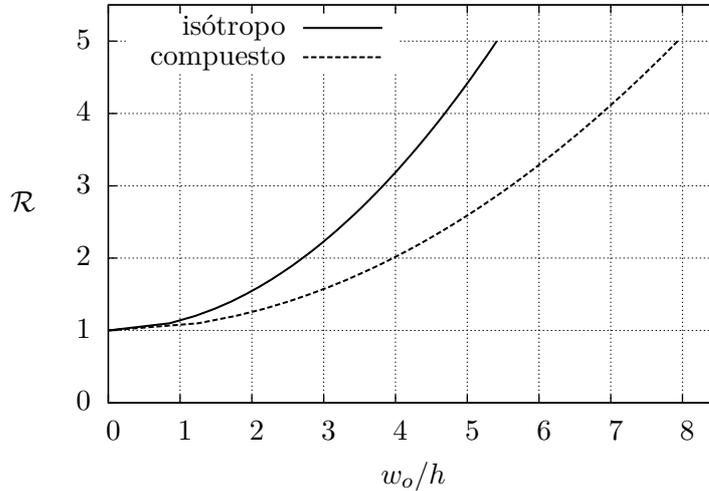


Figura 4.4: Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central mediante von Karman para material isotrópico y compuesto.

En la gráfica se observa que el modelo analítico predice un desplazamiento mucho mayor para el material compuesto que para el isotrópico. El comportamiento a postpandeo se modifica notablemente debido a la anisotropía. Lógicamente ambas curvas comienzan en  $\mathcal{R} = 1$ , ya que este es el retio en el que la placa empieza a pandear.

Este comportamiento es habitual en placas. En columnas en cambio el desplazamiento aumenta mucho más rápidamente al sobrepasar la carga de pandeo, alcanzando el colapso más rápidamente.

#### 4.1.1. Evolución de la sollicitación cortante

Una vez se ha estimado la evolución de la deformada de la placa también se puede estimar cómo se comporta la sollicitación  $N_{xy}$ . Cuando la placa pandea y se deforma se redistribuyen las tensiones y consecuentemente la fuerza  $P_{xy}$  no se reparte uniformemente a lo largo de los lados de la placa.

Derivando dos veces la función de Airy  $F$  se puede obtener  $N_{xy}$ . Como todas las constantes  $K_j$  son proporcionales a  $w_o^2$  se puede expresar la sollicitación cortante como se muestra en Ec. (4.17), donde  $H$  es la función que resulta de derivar los diferentes términos que componen la función de Airy y cuyo promedio es nulo para conservar la equivalencia.

$$N_{xy} = -\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = \frac{P_{xy}}{a} + w_o^2 H(x, y) \quad (4.17)$$

Teniendo en cuenta que  $w_o = 0$  si  $\mathcal{R} < 1$ , el segundo término se anulará si aún no se ha alcanzado la carga crítica de pandeo, y en ese caso la distribución de  $N_{xy}$  sí será

constante.

$$N_{xy}(x, y) = \begin{cases} \frac{P_{xy}}{a} & ; \quad \mathcal{R} < 1 \\ \frac{P_{xy}}{a} + w_0^2 H(x, y) & ; \quad \mathcal{R} \geq 1 \end{cases} \quad (4.18)$$

Este es el motivo por el cual el estudio del inicio de pandeo es lineal. Cuando aún no se ha entrado en régimen de postpandeo las solicitaciones son valores constantes, y por tanto la primera ecuación de von Karman es lineal. Sin embargo cuando se supera la carga crítica  $N_x$ ,  $N_y$  y  $N_{xy}$  pasan a ser funciones de  $x$ ,  $y$ , y consecuentemente la primera ecuación pasa a ser no lineal.

En la Figura 4.5 se puede ver la evolución de  $N_{xy}$  en el lado  $x = a$  conforme aumenta el ratio de postpandeo en el caso del material isótropo. Se adimensionaliza  $N_{xy}$  con  $(P_{xy}|_{cr})/a$ , que es precisamente el valor constante de  $N_{xy}$  cuando se alcanza la carga de pandeo.

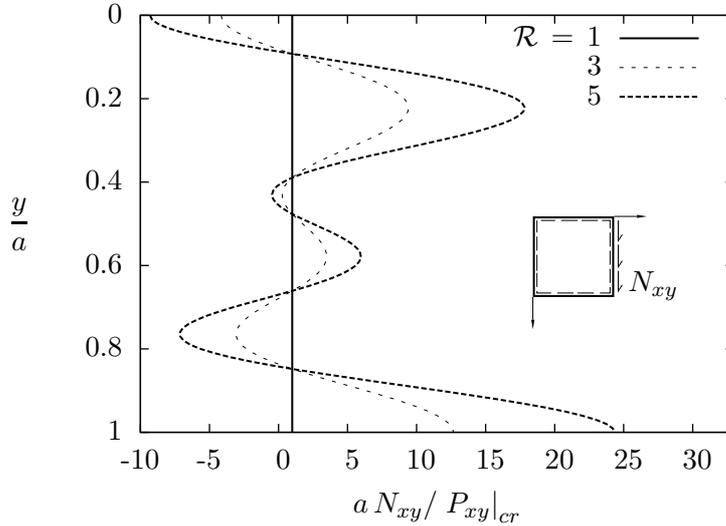


Figura 4.5: Evolución de la distribución  $N_{xy}(a, y)$  con el ratio de postpandeo en cara vertical derecha.

Dado que el problema es simétrico, las distribuciones en los otros tres lados serán equivalentes. Se aprecia que para  $\mathcal{R} = 1$  la distribución del cortante adimensional es uniforme e igual a uno, valor límite entre la estabilidad y la inestabilidad estructural. Cuando  $\mathcal{R}$  aumenta y la placa comienza a deformarse fuera de su plano medio hay zonas que ofrecen menos resistencia que otras y el esfuerzo cortante se redistribuye. Consecuentemente hay zonas en las que se alcanzan ratios de carga mucho mayores que el ratio de postpandeo.

$$\max \left( \frac{N_{xy} a}{P_{xy|cr}} \right) \gg \mathcal{R} \quad (4.19)$$

De la gráfica se deduce que cuando se consideran las cuatro solicitaciones, el valor máximo de los cortantes se da en las esquinas  $0,0$  y  $a,a$ ; por ello la tensión tangencial máxima se dará en este punto, como se verá en la Sección 4.5.

## 4.2. Análisis mediante MEF

A continuación se procederá a analizar el mismo problema, pero empleando el MEF. Tal y como se ha podido comprobar, el análisis de postpandeo es un problema no lineal y esta dificultad también se verá reflejada en el análisis mediante métodos numéricos.

Para poder analizar una placa en régimen de postpandeo empleando el programa *Abaqus*<sup>®</sup> es preciso realizar primero un estudio de inicio de pandeo para estimar las cargas y modos de pandeo que experimenta la placa. En este archivo se ejecuta una perturbación lineal hasta que la placa pandea. La inestabilidad producida servirá de base para el análisis del régimen de postpandeo.

Se emplea una malla más refinada que la utilizada en el Capítulo 3 ya que el postpandeo requiere más precisión, con cincuenta elementos tipo placa por lado y un total de 2500 elementos.

Para poder estimar la deformada de la placa tras haber pandeado, *Abaqus*<sup>®</sup> requiere que se introduzca como entrada al programa un determinado patrón de imperfección de la placa. Esta imperfección es la que desencadena la inestabilidad conforme la carga aplicada va aumentando. El patrón de imperfección que se debe introducir en el análisis es una combinación lineal de los modos de pandeo que se han obtenido previamente. Normalmente se emplean los cuatro primeros modos de pandeo para definir la imperfección inicial de la placa; no obstante en el análisis a cortante los modos de pandeo aparecen por parejas rotadas  $90^\circ$ , tal y como se vio en el Capítulo 3: La mitad de los modos se corresponden con cargas de pandeo positivas y la otra mitad con cargas de pandeo negativas de igual valor absoluto. Por tanto se usan los cuatro primeros modos que se corresponden con una carga de pandeo positiva.

Los diferentes modos se ponderan con un coeficiente proporcional a la décima parte del espesor, cuyo valor indica la relevancia que se le concede a cada modo. En la Figura 4.6 y la Tabla 4.1 se pueden ver los modos de pandeo empleados y el factor de ponderación empleado en cada uno de los mismos. En la Ec. (4.20) se muestra el cálculo del patrón de imperfección en base a los modos de pandeo.

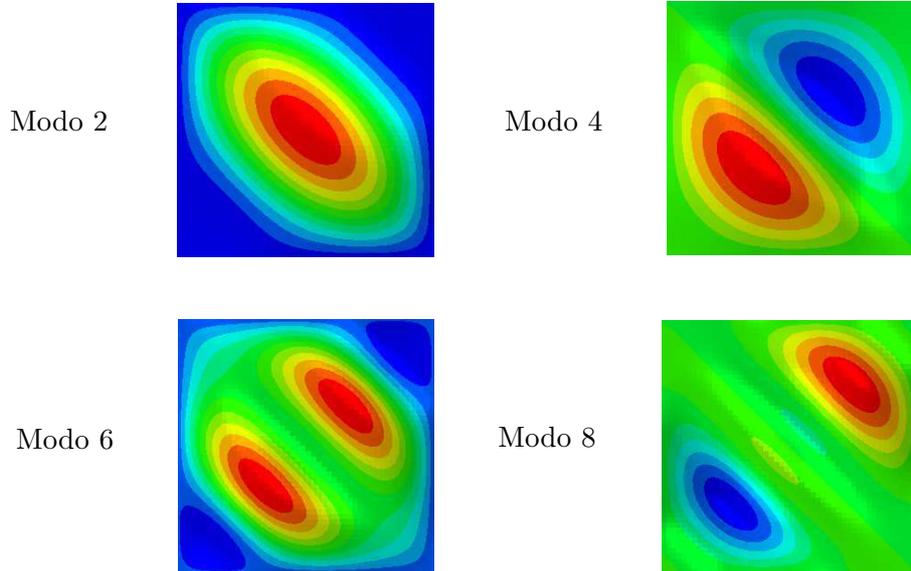


Figura 4.6: Modos de pandeo empleados para generar la imperfección.

Modo	Ponderación	Modo	Ponderación
# 2	$2 \frac{h}{10}$	# 4	$1,5 \frac{h}{10}$
# 6	$\frac{h}{10}$	# 8	$\frac{h}{10}$

Tabla 4.1: Modos de pandeo y su ponderación para generar la imperfección.

$$\mathbf{w}_1^{im} = 2 \frac{h}{10} \cdot \mathbf{w}_2^* + 1,5 \frac{h}{10} \cdot \mathbf{w}_4^* + \frac{h}{10} \cdot \mathbf{w}_6^* + \frac{h}{10} \cdot \mathbf{w}_8^* \quad (4.20)$$

Una vez se ha establecido el patrón de imperfección inicial de la placa, se debe introducir como carga el valor de la carga crítica de pandeo, y se establece un análisis estático no lineal basado en el algoritmo de Riks. Se requiere un algoritmo de este tipo cuando la relación carga-desplazamiento presenta un comportamiento altamente no lineal como pudiera ser el de la Figura 4.7. Se explica con detalle este método en la Sección 4.2.1.

La carga va aumentando y sobrepasa el valor de referencia indicado (carga crítica), simulando el comportamiento de la placa en régimen de postpandeo. Se debe indicar hasta qué  $\mathcal{R}$  se desea llevar a cabo el análisis.

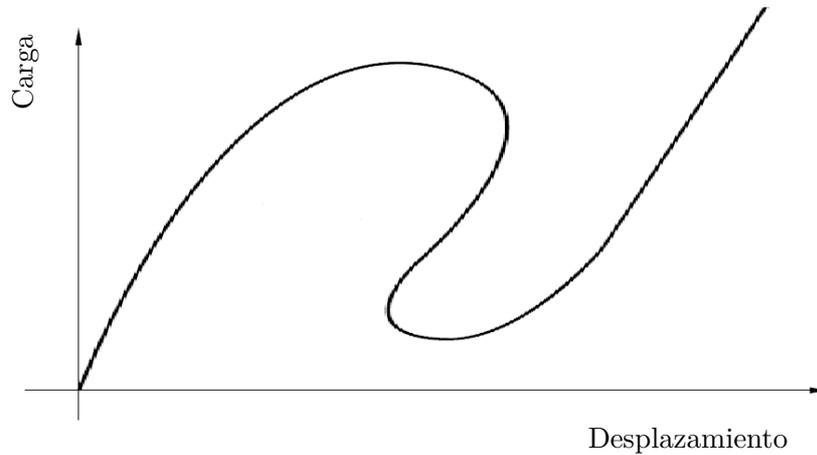


Figura 4.7: Ejemplo típico de respuesta estática inestable.

En la Figura 4.7 se muestra un comportamiento típico no lineal e inestable, que tendrá que ser discretizado con el algoritmo *Arc-Length*. Para asegurar la convergencia del método se deben también introducir: el número máximo de pasos, el incremento inicial y los incrementos máximo y mínimo de longitud de arco. Se establecen en este caso un máximo de 100 incrementos, incremento inicial 0,1, un máximo 10 y un mínimo 0,1.

En este tipo de análisis es de vital importancia la correcta definición de las CdC de la placa, ya que si ésta no se restringe de forma adecuada y existe algún movimiento de sólido rígido el algoritmo no convergerá.

Todo este proceso se esquematiza en un diagrama de flujo en la Figura 4.8.

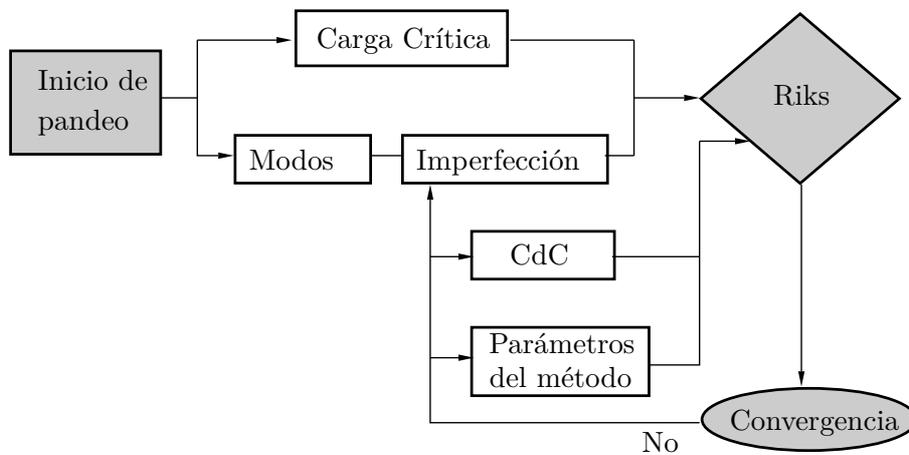


Figura 4.8: Diagrama de flujo ilustrando el análisis de postpandeo mediante *Abaqus*<sup>®</sup>.

### 4.2.1. Algoritmo de Riks

El algoritmo utilizado en *Abaqus*<sup>®</sup> para simular estructuras en régimen de postpandeo se denomina algoritmo de Riks o control por longitud del arco. Véase una explicación detallada del método en [8]. Para un determinado modelo con  $N$  grados de libertad, las cargas aplicadas en el estado inicial (definidas por el usuario en *Abaqus*<sup>®</sup>) conforman el vector  $\mathbf{P}^N$ , de dimensiones  $N \times 1$ . El método asume carga proporcional, es decir, las cargas aplicadas varían la misma proporción a través de un parámetro  $\lambda$ . Por tanto, un determinado estado de carga vendrá dado por la Ec. (4.21), donde el vector  $\mathbf{P}^N$  se adimensionaliza con su norma.

$$\lambda \frac{\mathbf{P}^N}{\|\mathbf{P}^N\|} = \lambda \tilde{\mathbf{P}}^N \quad (4.21)$$

Por otro lado, los desplazamientos correspondientes a dicho estado se denotarán por  $\mathbf{u}^N$  y se adimensionalizarán empleando el desplazamiento máximo en el estado inicial  $\bar{\mathbf{u}}^N$ .

$$\tilde{\mathbf{u}}^N = \frac{\mathbf{u}^N}{\bar{\mathbf{u}}^N} \quad (4.22)$$

El método se basa en seguir la trayectoria de equilibrio, y proporciona como resultado un conjunto de estados pertenecientes a dicha trayectoria. Un determinado estado de equilibrio queda totalmente descrito mediante un único vector  $\mathbf{v}$ , comprendido por los desplazamientos y el parámetro  $\lambda$ .

$$\mathbf{v} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{u}}^N \\ \lambda \end{array} \right\} \quad (4.23)$$

En la Figura 4.9 se muestra una representación gráfica del método. A continuación se detallan las operaciones que se llevan a cabo tomando como base dicha figura.

Se considera que se ha llegado al estado de equilibrio correspondiente al punto  $A_0$  y se toma este punto como partida para hallar el siguiente. En primer lugar se considera la matriz de rigidez tangente  $\mathbf{K}_o$  de la estructura correspondiente a dicho punto, de dimensiones  $N \times N$ .

$$\mathbf{K}_o \cdot \mathbf{v}_o^N = \lambda \mathbf{P}^N \quad (4.24)$$

A partir de la Ec. (4.24) se puede despejar el vector  $\mathbf{v}_o^N$  y a partir del mismo se obtiene en la Ec. (4.25) el vector  $\boldsymbol{\nu}_o$ . Dicho vector es tangente a la trayectoria de equilibrio en el punto  $A_0$  y su dirección define  $\overrightarrow{A_0 A_1}$ .

$$\boldsymbol{\nu}_o = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{v}_o^N / \bar{\mathbf{u}} \\ 1 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{v}}_o^N \\ 1 \end{array} \right\} \quad (4.25)$$

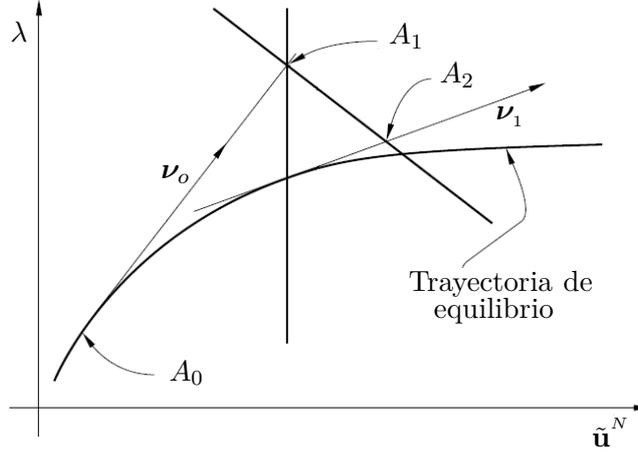


Figura 4.9: Representación gráfica del método de Riks

La longitud  $\Delta l$  entre  $A_0$  y  $A_1$  ha sido especificada por el usuario para la primera iteración, y se va reajustando para la búsqueda de los sucesivos puntos de equilibrio en función de la dificultad de convergencia. Se define el parámetro  $\Delta\lambda_o$  según la Ec. (4.26).

$$\Delta\lambda_o^2 \|\nu_o\| = \Delta l^2 \quad \Rightarrow \quad \Delta\lambda_o = \frac{\Delta l}{\sqrt{\|\tilde{\mathbf{v}}_o^N\| + 1}} \quad (4.26)$$

De este modo se tiene  $\overrightarrow{A_0 A_1} = \Delta\lambda_o \nu_o$ , por lo que sumando este vector al punto  $A_0$  se puede obtener el punto  $A_1$ .

$$A_1 = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{u}}_o^N + \Delta\lambda_o \tilde{\mathbf{v}}_o^N \\ \lambda_o + \Delta\lambda_o \end{array} \right\} \quad (4.27)$$

Una vez situado este punto, se debe corregir esta posición buscando la intersección de la trayectoria de equilibrio con el plano perpendicular a  $\nu_o$ . Para ello se lleva a cabo un proceso iterativo que converge al alcanzar los mínimos requeridos de tolerancia. Antes de comenzar se realiza la asignación inicial de parámetros.

$$\begin{aligned} \Delta\lambda_i &= \Delta\lambda_o ; \\ \Delta\mathbf{u}_i^N &= \Delta\lambda_o \mathbf{v}_o^N \end{aligned} \quad (4.28)$$

El proceso iterativo consta de las etapas descritas a continuación.

- a) En primer lugar se estima el vector de fuerzas  $\mathbf{P}_e^N$  a partir de las tensiones como se muestra en la Ec. (4.29). En base a esta magnitud se estima también la matriz de

rigidez tangente.

$$\mathbf{P}_e^N|_i = \int_V \boldsymbol{\sigma}_i \cdot \boldsymbol{\beta}^N dV; \quad \mathbf{K}_i = \frac{\partial \mathbf{P}_e^N|_i}{\partial \mathbf{u}^N} \quad (4.29)$$

La matriz  $\boldsymbol{\sigma}$  es la matriz de tensiones de dimensiones  $N \times N$ . Por otro lado  $\boldsymbol{\beta}_N$  es un vector  $N \times 1$  de funciones de forma que permite obtener la tasa de deformación virtual del modelo a partir de desplazamientos virtuales de los nodos.

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \left( \boldsymbol{\beta}^N \right)^T \cdot \delta \mathbf{v}^N \quad (4.30)$$

- b) En la trayectoria de equilibrio se ha de verificar  $\mathbf{P}_e^N|_i = (\lambda_o + \Delta \lambda_i) \mathbf{P}^N$ , por tanto se define el residuo  $\mathbf{R}^N$  como la diferencia entre estos dos términos.

$$\mathbf{R}_i^N = (\lambda_o + \Delta \lambda_i) \mathbf{P}^N - \mathbf{P}_e^N|_i \quad (4.31)$$

Este vector da una idea del error que se está cometiendo en la iteración actual. Cuando todos los términos del vector  $\mathbf{R}^N$  son menores que la tolerancia establecida, el método ha convergido. En caso contrario prosigue la iteración.

- c) En caso de que en el paso anterior no haya convergencia, se resuelven los dos sistemas de ecuaciones de Ec. (4.32).

$$\begin{aligned} \mathbf{K} \cdot \mathbf{v}_i^N &= (\lambda_o + \Delta \lambda_i) \mathbf{P}^N \\ \mathbf{K} \cdot \mathbf{c}_i^N &= \mathbf{R}_i^N \end{aligned} \quad (4.32)$$

A partir del vector  $\mathbf{v}_i^N$  se puede obtener  $\boldsymbol{\nu}_i$  se igual modo que en la Ec. (4.25). Por otro lado, a partir de  $\mathbf{c}_i^N$  se calcula el vector  $\boldsymbol{\varsigma}_i$  según la Ec. (4.33).

$$\boldsymbol{\varsigma}_i = \left\{ \begin{array}{c} \mathbf{c}_i^N / \bar{\mathbf{u}} \\ 0 \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{c}}_i^N \\ 0 \end{array} \right\} \quad (4.33)$$

- d) A continuación se ha de reescalar el vector  $\boldsymbol{\nu}_i$  mediante un parámetro  $\mu$  de tal modo que la suma de vectores  $\mu \cdot \boldsymbol{\nu}_i + \boldsymbol{\varsigma}_i$  sea perpendicular a  $\boldsymbol{\nu}_o$ . Imponiendo que el producto escalar de ambos vectores sea nulo se puede despejar el valor de  $\mu$  tal y como se puede ver en Ec. (4.34).

$$(\mu \cdot \boldsymbol{\nu}_i + \boldsymbol{\varsigma}_i)^T \cdot \boldsymbol{\nu}_o = 0 \quad \implies \quad \mu = - \frac{\tilde{\mathbf{c}}_i^N \tilde{\mathbf{v}}_o^N}{\tilde{\mathbf{v}}_i^N \tilde{\mathbf{v}}_o^N + 1} \quad (4.34)$$

El punto  $A_{i+1}$  se calcula sumando al punto  $A_i$  el vector  $\mu \cdot \boldsymbol{\nu}_i + \boldsymbol{\varsigma}_i$ , por tanto se puede obtener la expresión de Ec. (4.35) para  $A_{i+1}$ .

$$A_{i+1} = \left\{ \begin{array}{c} \tilde{\mathbf{u}}_o^N + \Delta \tilde{\mathbf{u}}_i^N + \tilde{\mathbf{c}}_i^N + \mu \tilde{\mathbf{v}}_i^N \\ \lambda_o + \Delta \lambda_i + \mu \end{array} \right\} \quad (4.35)$$

- e) Finalmente se actualizan las variables para la siguiente iteración y se regresa a la etapa a).

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{\mathbf{u}}_{i+1}^N &= \Delta \tilde{\mathbf{u}}_i^N + \tilde{\mathbf{c}}_i^N + \mu \tilde{\mathbf{v}}_i^N \\ \Delta \lambda_{i+1} &= \Delta \lambda_i + \mu \\ i &= i + 1 \end{aligned} \quad (4.36)$$

Cuando el proceso converge se llega a un nuevo punto en la trayectoria de equilibrio. Este punto pasa a ser el nuevo  $A_0$  y se repite el proceso iterativo para hallar el siguiente punto.

### 4.3. Contraste de Resultados

Una vez se ha descrito el procedimiento empleado para analizar el problema mediante *Abaqus*<sup>®</sup> se procede a comparar los resultados obtenidos mediante el MEF con los de las ecuaciones de von Karman. Concretamente se compara el desplazamiento en el nodo central de la placa. En la Figura 4.10 se muestra la gráfica  $\mathcal{R} - w_o$  comparando ambos métodos para un material isótropo con  $\nu = 0,3$ .

Tal y como se puede observar, el modelo de elementos finitos predice un desplazamiento algo mayor en el centro de la placa conforme aumenta el ratio de postpandeo. No obstante los errores cometidos son de un máximo del 10%, por lo tanto el modelo analítico resulta ser una aproximación satisfactoria para el material isótropo considerado.

Como ya se comprobó anteriormente para  $\mathcal{R} < 1$  el modelo analítico predice un desplazamiento  $w_o$  nulo, ya que la placa no ha pandeado. Sin embargo el modelo de elementos finitos no predice un desplazamiento completamente nulo, sino que debido a los algoritmos utilizados el desplazamiento aumenta de forma aproximadamente lineal con la carga hasta que ésta se acerca a la carga crítica. Por tanto el modelo de elementos finitos empleado presenta limitaciones cerca de la carga crítica de pandeo.

También se aprecia que para cargas elevadas los desplazamientos son varias veces el espesor de la placa, por lo que la teoría de pequeños desplazamientos queda totalmente descartada.

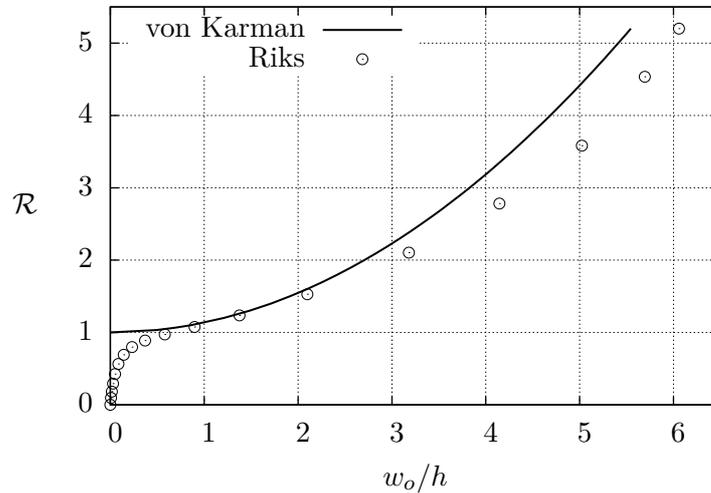


Figura 4.10: Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central para una placa articulada de aluminio comparando von Karman y Riks.

Si ahora se analiza un material compuesto, se puede apreciar en la Figura 4.11 que el modelo analítico pierde mucha precisión para ratios de postpandeo elevados. El modelo teórico es relativamente preciso hasta aproximadamente  $\mathcal{R} = 2$ , pero en ese punto la pendiente de los datos obtenidos con MEF cambia repentinamente, probablemente debido a que la placa entra en un nuevo modo de pandeo. La solución analítica no es capaz de reproducir este comportamiento con un único término.

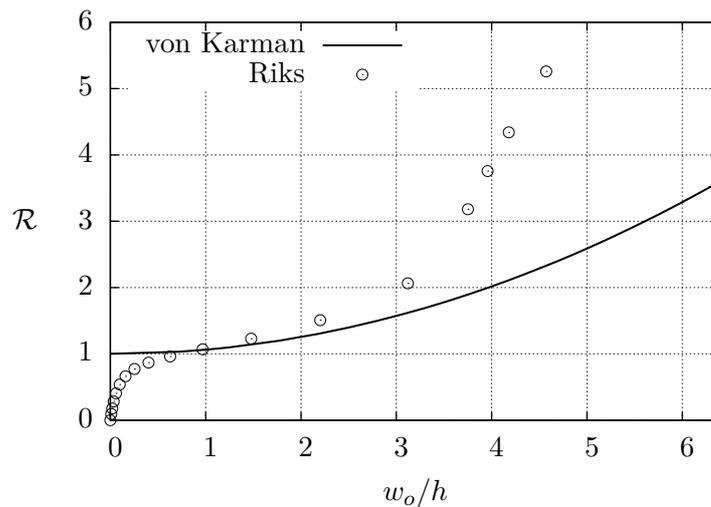


Figura 4.11: Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central para material compuesto comparando von Karman y Riks.

Por tanto se puede extraer como conclusión que si a la no linealidad inherente al postpandeo se le añade la anisotropía del material, el problema resulta difícilmente abordable

con métodos semianalíticos si se quieren resultados precisos en un amplio rango de cargas. Los materiales compuestos añaden dificultad a este tipo de análisis; añadir más términos a la solución analítica aumenta considerablemente el tiempo de computación, ya que aparecen una gran cantidad de términos adicionales en las ecuaciones y las constantes de las funciones de prueba deben ser despejadas de un sistema de ecuaciones no lineal, debiendo acudir a métodos numéricos en la mayoría de los casos.

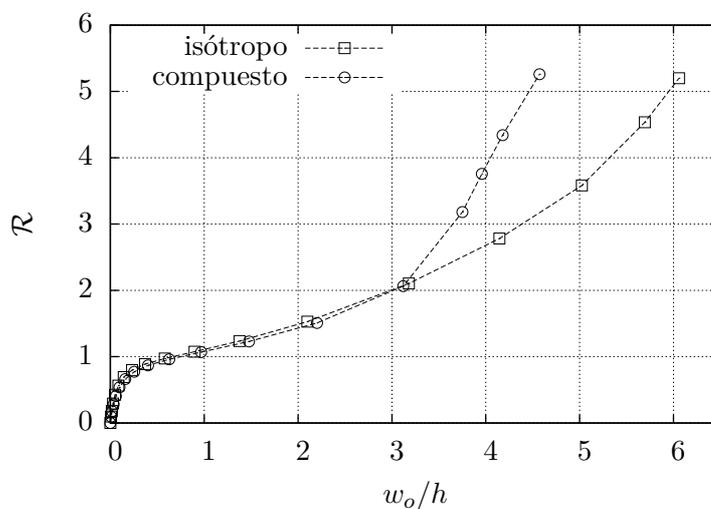


Figura 4.12: Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central mediante MEF para material isotrópico y compuesto.

Finalmente se comparan en la Figura 4.12 los resultados obtenidos con *Abaqus*<sup>®</sup> para material isotrópico y material compuesto. De esta forma se aprecia claramente el cambio de pendiente que experimenta la gráfica en el caso del material compuesto. Ambas gráficas son bastante similares hasta  $\mathcal{R} = 2$ , después las características del compuesto hacen que el comportamiento de la placa a postpandeo cambie.

#### 4.4. Evolución de la deformada

A continuación se verá cómo evoluciona el patrón de deformación de la placa completa conforme aumenta la carga aplicada. En la Figura 4.13 se muestra la deformada de una placa articulada de aluminio a cortante para diferentes valores de  $\mathcal{R}$ .

Tal y como se puede observar, para valores de  $\mathcal{R}$  de 4,5 o menores el patrón de deformación es bastante similar a la función de prueba considerada, por lo que resulta lógico que el modelo teórico sea una buena aproximación en este caso. Para valores mayores la deformada cambia y deja de ser similar, por tanto para valores muy altos de  $\mathcal{R}$  habría que considerar funciones de prueba alternativas o bien añadir más términos al análisis.

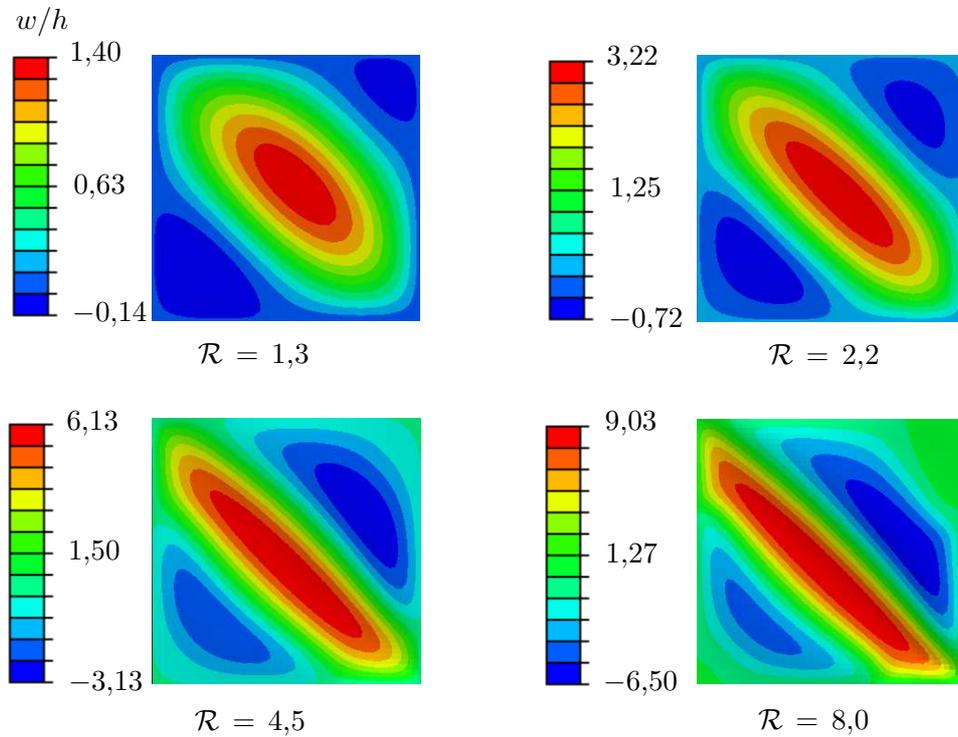


Figura 4.13: Evolución del patrón de deformación de placa isótropa articulada conforme aumenta el ratio de postpandeo.

Nótese que la deformada no es completamente simétrica debido a la adición de modos simétricos y antisimétricos, ver Figura 4.6.

En la Figura 4.14 se muestra la evolución de la deformada de la placa para material compuesto; la placa experimenta patrones de deformación diferentes a los anteriores. El hecho de que el material sea anisótropo es muy influyente en la evolución de la deformada de la placa.

La deformada no se ajusta a la función de prueba de forma tan precisa como anteriormente, ya que la anisotropía produce una marcada asimetría en el material. Por tanto es lógico que el análisis analítico proporcione mejores resultados para aluminio que para laminado considerado.

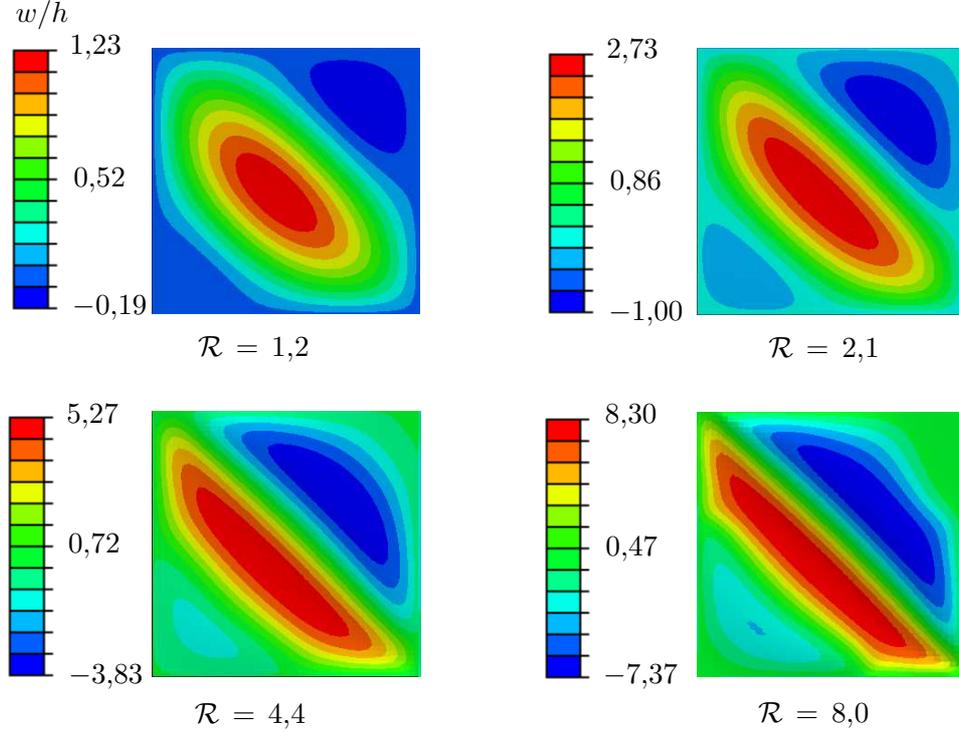


Figura 4.14: Evolución del patrón de deformación de placa de material compuesto articulada conforme aumenta el ratio de postpandeo.

## 4.5. Evolución de las tensiones

Se procede ahora a estudiar la evolución de las tensiones en la placa, concretamente la tensión equivalente de von Mises, que para una placa plana viene dada por la Ec. (4.37).

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_x^2 - \sigma_x \sigma_y + \sigma_y^2 + 3\tau_{xy}^2} \quad (4.37)$$

Se adimensionalizan las tensiones empleando el valor de esta tensión cuando se alcanza la carga crítica. Se denotará dicho valor por  $\sigma_{VM}|_{cr}$  en la Ec. (4.38).

$$\sigma_{VM}|_{cr} = \sqrt{3 \left( \frac{P_{xy}|_{cr}}{a t} \right)^2} = \sqrt{3} \frac{P_{xy}|_{cr}}{a t} \quad (4.38)$$

Por comodidad, se denotará por  $\varsigma_{VM}$  a la tensión de von Mises adimensionalizada con la crítica.

$$\varsigma_{VM} = \frac{\sigma_{VM}}{\sigma_{VM}|_{cr}} \quad (4.39)$$

En la Figura 4.15 se muestra la evolución de la tensión de von Mises adimensional para una placa articulada de aluminio. Se aprecia que la máxima tensión se da en las esquinas

$(0, 0)$  y  $(a, a)$ , tal y como se había predicho en la Sección 4.1.1 al observar la distribución de  $N_{xy}$ . En la mayoría de la superficie de la placa la tensión es mucho menor que en las esquinas, de hecho es un orden de magnitud menor.

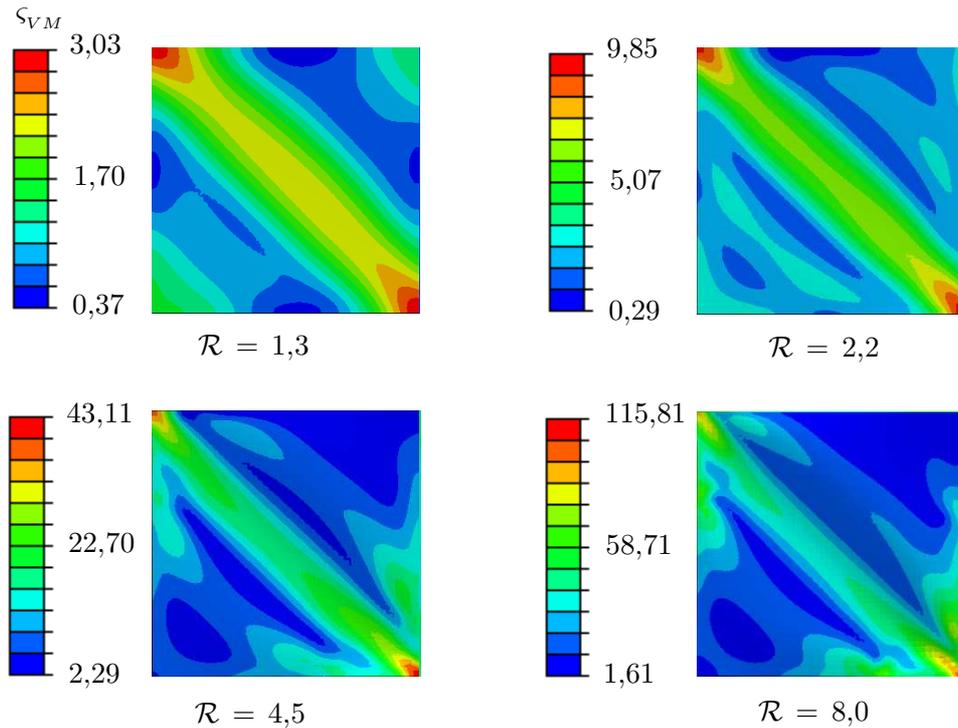


Figura 4.15: Evolución de la tensión de von Mises para placa isótropa articulada conforme aumenta el ratio de postpandeo.

En la siguiente Figura 4.16 se muestran las tensiones adimensionales para material compuesto. De nuevo los valores máximos se dan en las esquinas pero esta vez de forma mucho más local, hasta el punto de que la zona de tensión máxima es difícilmente apreciable para valores altos de  $\mathcal{R}$ , ya que es muy concentrada. La relación entre tensión en esquinas y en el resto de la placa es aún mayor que para el material isótropo.

Dadas las distribuciones de tensiones, es interesante conocer la evolución de la tensión máxima, ya que la rotura de la placa se inicia en los puntos de máxima tensión de von Mises. En la Figura 4.17 se muestra la evolución del valor de la tensión máxima conforme aumenta  $\mathcal{R}$ , comparando material compuesto y aluminio.

Tal y como se puede observar la tensión máxima es mayor en el caso del material compuesto. La concentración de tensión en las esquinas alcanza valores muy elevados que deben tenerse en cuenta a pesar de que se den en zonas muy reducidas.

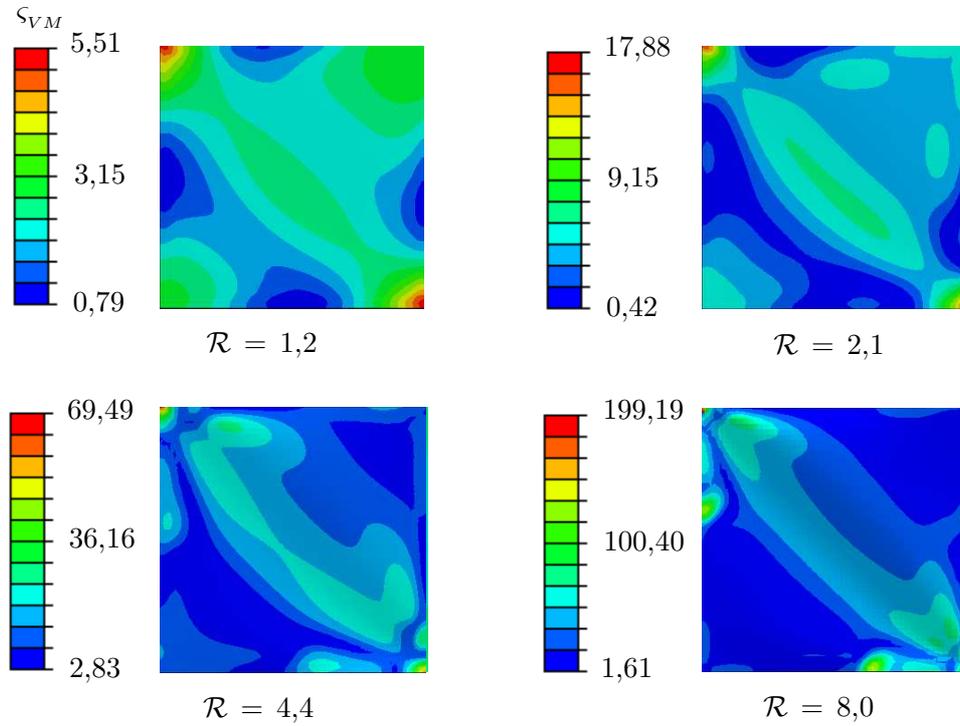


Figura 4.16: Evolución de la tensión de von Mises para placa de material compuesto articulada conforme aumenta el ratio de postpandeo.

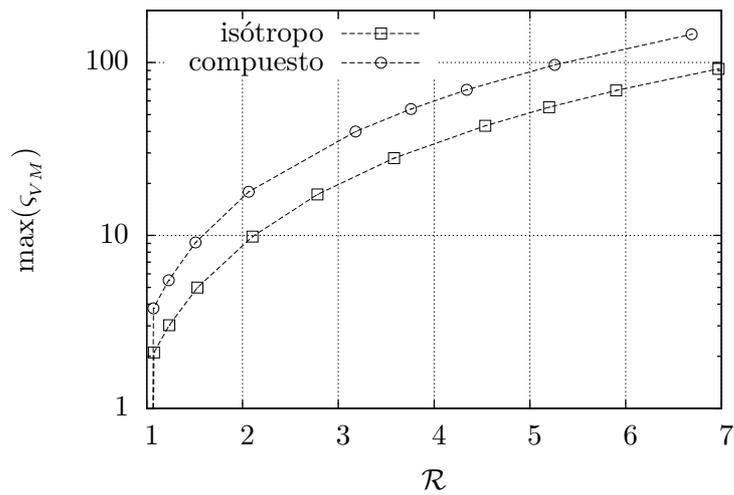


Figura 4.17: Tensión máxima en función del ratio de postpandeo para material isótropo y compuesto mediante MEF.

Para ambos materiales se tiene que una vez que la placa ha pandeado, la tensión máxima aumenta mucho más rápidamente que  $\mathcal{R}$  y de hecho es un orden de magnitud mayor.

$$\text{máx}(\sigma_{VM}) \gg \mathcal{R} \quad (4.40)$$

## 4.6. Influencia de las CdC

Con el fin de estimar la influencia de las CdC en el proceso de postpandeo de una placa, se considerará ahora una placa plana sometida a un ensayo similar al de la Figura 4.2 pero empotrada en sus lados  $x = 0, a$ . En esta ocasión sólo se permite el giro en dos lados enfrentados, y se restringe en los otros dos. Se puede ver el nuevo caso de estudio ilustrado en la Figura 4.18.

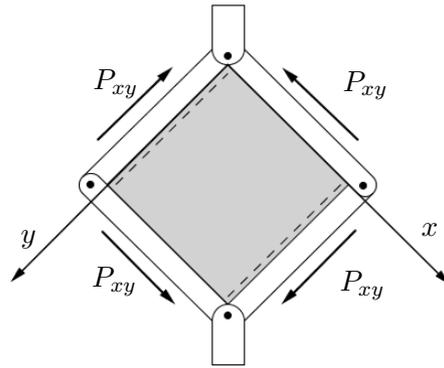


Figura 4.18: Caso de estudio. Placa con articulaciones y empotramientos enfrentados trabajando a cortante.

Por comodidad se denotará la placa con cuatro articulaciones como *SSSS* (*S: Simply supported*) y la placa con dos articulaciones como *CSCS* (*C: clamped*).

### 4.6.1. Flecha en el centro de la placa

En primer lugar se compara el valor de la flecha en el centro de la placa. En la Figura 4.19 se puede ver la flecha en el centro para una placa de aluminio calculada con *Abaqus*<sup>®</sup> comparando una placa *SSSS* con una *CSCS*.

La CdC de empotramiento es más restrictiva, y por eso quizá cupiese esperar que el desplazamiento sería menor para la placa con empotramientos. Sin embargo la flecha en el nodo central es mayor. Ciertamente la CdC de empotramiento supone una mayor restricción, y esto se ve reflejado en la carga de pandeo como se vio en el Capítulo 3. Cuando una placa articulada pandea los desplazamientos aparecen más uniformemente en la placa al haber menos restricción; sin embargo en la placa con empotramientos la placa

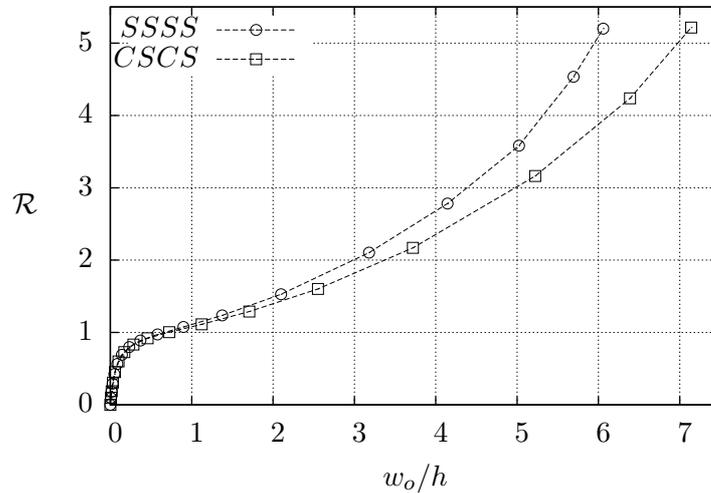


Figura 4.19: Relación entre el ratio de postpandeo y el desplazamiento central comparando placa de aluminio *SSSS* y *CSCS* mediante MEF.

se deformará menos en su cercanía, concentrándose más la deformación en la zona central. Por este motivo  $w_o/h$  es mayor para la placa *CSCS*.

#### 4.6.2. Evolución de la deformada

En la Figura 4.20 se puede ver el patrón de deformación de la placa *CSCS* de aluminio conforme aumenta el ratio de postpandeo.

La deformada es cualitativamente similar a la de la Figura 4.13 para una placa con los cuatro lados articulados, pero en este caso la flecha se reduce cerca de los lados empotrados ya que en esta zona el movimiento está más restringido. Por otro lado en la zona central de la placa los desplazamientos son similares pero algo mayores, tal y como se adelantó en la Sección 4.6.1.

#### 4.6.3. Evolución de las tensiones

Se muestra en la Figura 4.21 la evolución de la distribución de la tensión de von Mises conforme aumenta el ratio de postpandeo para la placa *CSCS*. La formulación del problema no es simétrica respecto a la diagonal principal de la placa, lo que provoca que las tensiones máximas no se den exactamente en las esquinas como sucedía con la placa *SSSS*. No obstante para valores elevados de  $\mathcal{R}$  estos máximos se van aproximando más a las esquinas.

También se aprecia que las tensiones están más uniformemente distribuidas que las que se obtenían para la placa articulada y los valores máximos locales no son tan elevados.

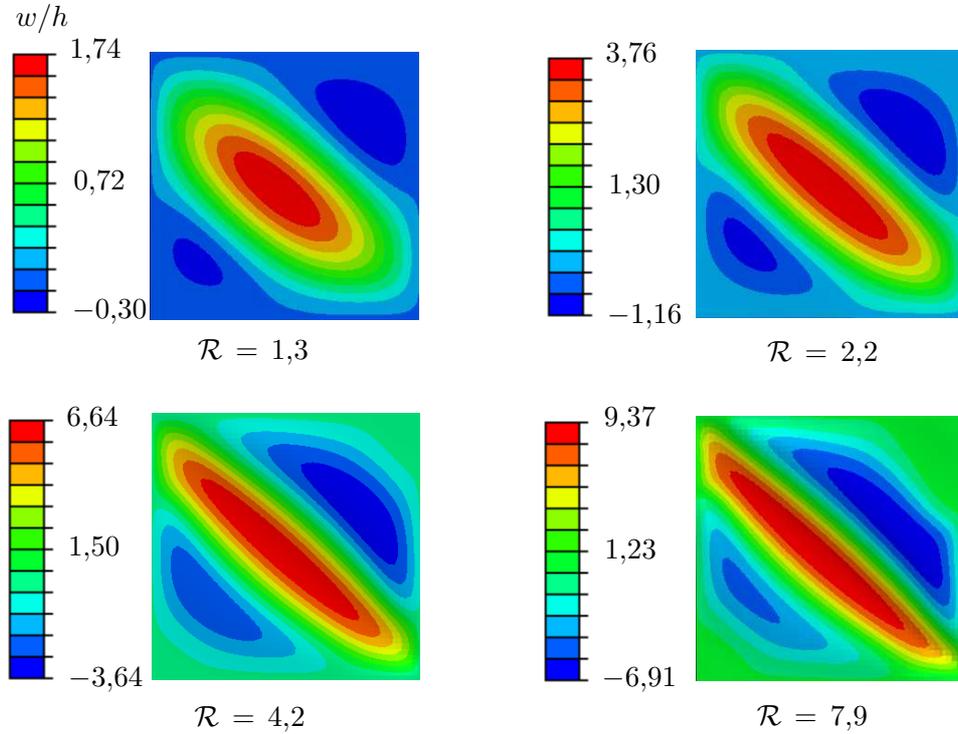


Figura 4.20: Evolución del patrón de deformación de placa isotrópica *CSCS* (ladosos empotrados superior e inferior) conforme aumenta el ratio de postpandeo.

#### 4.7. Aproximación a las tensiones. Tensión diagonal pura

Cuando se estudia el comportamiento de placas a cortante las tensiones a postpandeo se pueden calcular mediante una aproximación que se puede encontrar en [15], y que se expone reducida a continuación. Se considera una placa sometida a cortante puro, de tal modo que antes de pandear  $\sigma_x = \sigma_y = 0$ , y toda la placa está sometida a una tensión tangencial constante dada por la Ec. (4.41).

$$\tau = \frac{P_{xy}}{at} \quad (4.41)$$

Los componentes del tensor tensión se pueden trasladar a un sistema de referencia rotado  $45^\circ$ , tal y como se puede ver en la Figura 4.22.

Las tensiones previas al pandeo en el sistema de referencia de la derecha, girado un ángulo  $\theta = 45^\circ$  se pueden obtener a partir de la matriz de rotación de la Ec. (4.42). El hecho de que la tensión tangencial obtenida sea nula significa que  $\sigma_t$  y  $\sigma_c$  son tensiones

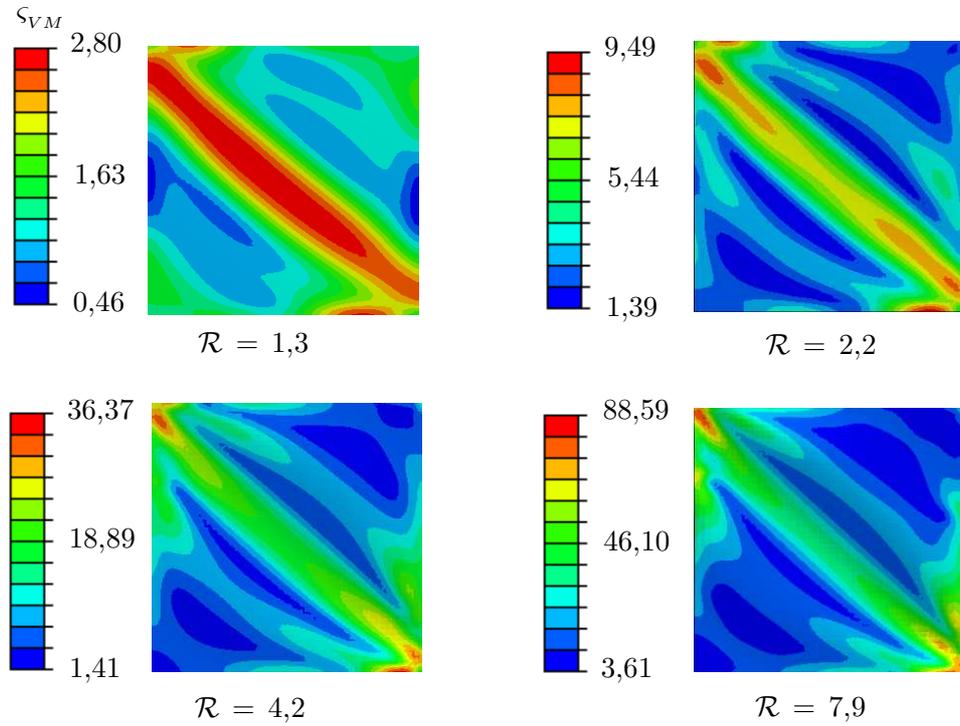


Figura 4.21: Evolución de la tensión de von Mises para placa isótropa *CSCS* conforme aumenta el ratio de postpandeo.

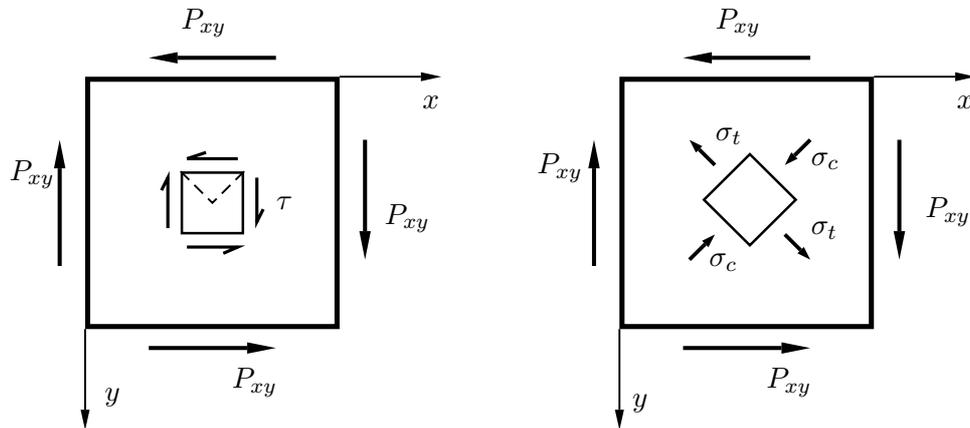


Figura 4.22: Cambio de ejes para las componentes de la tensión.

principales.

$$\begin{Bmatrix} \sigma_t \\ -\sigma_c \\ \tau_{12} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2 \sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \tau \\ -\tau \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.42)$$

es decir, antes de que la placa pandee  $\sigma_c = \sigma_t = \tau$ . Una vez que se alcanza la carga crítica se asume la hipótesis de que la placa no puede soportar más tensión de compresión  $\sigma_c$ , por lo que al seguir aumentando la carga  $\sigma_c$  permanece constante mientras que la tensión en la otra diagonal aumenta. De ahí el nombre tensión diagonal, ya que la tensión de la placa sólo aumenta en una de las diagonales. Si se denota por  $\tau_{cr}$  al valor de la tensión cuando se alcanza la carga crítica, entonces  $\sigma_c$  vendrá dado por la Ec. (4.43) en régimen de postpandeo.

$$\sigma_c = \tau_{cr} = \frac{P_{xy}|_{cr}}{at}; \quad \mathcal{R} \geq 1 \quad (4.43)$$

Por otro lado, para hallar  $\sigma_t$  se considera la superficie diferencial de la Figura 4.23 (la cuarta parte del diferencial de la Figura 4.22 izquierda), y se aplica el equilibrio horizontal de fuerzas en la Ec. (4.44).

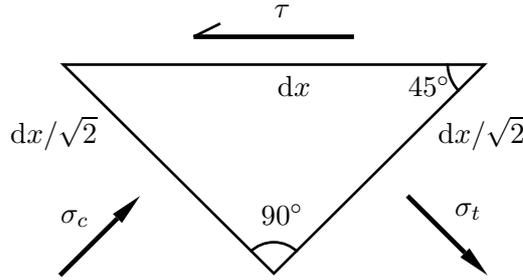


Figura 4.23: Superficie diferencial para el cálculo de  $\sigma_t$ .

$$\sigma_t \left( \frac{t dx}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} + \sigma_c \left( \frac{t dx}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{\sqrt{2}} - \tau t dx = 0 \quad (4.44)$$

Despejando y asumiendo la hipótesis de que la tensión tangencial  $\tau$  sigue siendo proporcional a la carga aplicada después del pandeo se puede obtener la expresión de Ec. (4.45).

$$\sigma_t = 2\tau - \sigma_c = \frac{2P_{xy}}{at} - \tau_{cr} \quad (4.45)$$

Una vez se han obtenido las tensiones  $\sigma_t$ ,  $\sigma_c$  en este trabajo se calcula la tensión de von Mises. Se puede emplear la Ec. (4.46), ya que las tensiones son principales en los ejes de la Figura 4.22 derecha.

$$\sigma_{VM} = \sqrt{\sigma_c^2 - (-\sigma_c) \sigma_t + \sigma_t^2} = \sqrt{\tau_{cr}^2 - \frac{2P_{xy}}{at} \tau_{cr} + 4 \left( \frac{P_{xy}}{at} \right)^2} \quad (4.46)$$

Para obtener una expresión de la tensión adimensional en función del ratio de post-

pandeo se dividen ambos lados de la ecuación por  $\sigma_{VM}|_{cr} = \sqrt{3}\tau_{cr}$ . Operando se obtiene la expresión de la Ec. (4.47).

$$\varsigma_{VM} = \sqrt{\frac{1}{3} - \frac{2}{3}\mathcal{R} + \frac{4}{3}\mathcal{R}^2} \quad (4.47)$$

A continuación se realizará una comparativa entre la expresión obtenida asumiendo Tensión Diagonal Pura (TDP) y las tensiones obtenidas mediante *Abaqus*<sup>®</sup> para una placa *SSSS*. Para ello, se establecen tres puntos de control A, B y C y se calcula la evolución de las tensiones en los mismos. En la Figura 4.24 se representa la evolución de  $\varsigma_{VM}$  en los tres nodos de control y la predicha por el modelo de TDP.

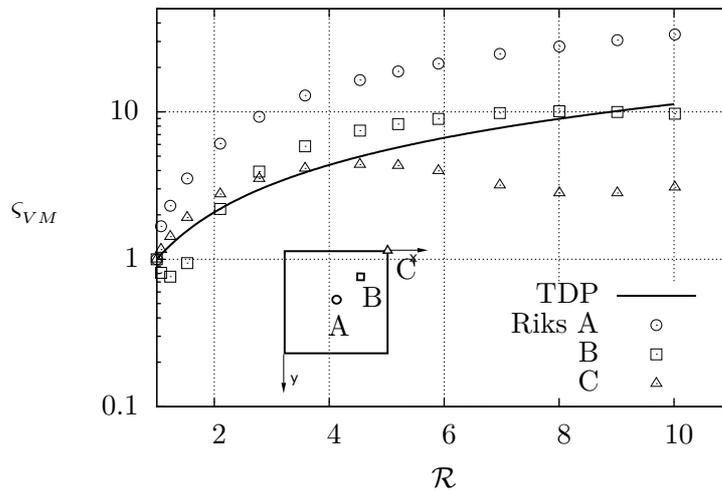


Figura 4.24: Evolución de la tensión de von Mises según el modelo de tensión diagonal y en tres nodos de control mediante MEF.

La tensión presenta comportamientos diferentes en cada uno de los nodos de control. El modelo teórico de tensión diagonal no predice con detalle la tensión en cada uno de los puntos de la placa, no obstante constituye un buen promedio global de la tensión y por tanto puede ser útil en etapas preliminares de diseño. Sin embargo se ha de tener en cuenta que existirán zonas locales en las que la tensión presenta valores mayores, lo cual ha de considerarse a la hora de estimar los límites de fallo.

## 4.8. Conclusiones generales

A partir de los análisis realizados se puede concluir que el postpandeo no es abordable de forma sencilla desde el punto de vista analítico. Las funciones de prueba tipo “seno-seno” habituales para el estudio de inicio de pandeo de placas articuladas no proporcionan buenos resultados para analizar el postpandeo a cortante, debiendo acudir a

funciones de prueba alternativas. No obstante las funciones “seno-seno” sí que proporcionan buenos resultados en postpandeo de placas a compresión.

Por otro lado, el estudio de los materiales compuestos dificulta aún más el análisis y aumentan el error de los resultados obtenidos mediante procedimientos analíticos. La anisotropía provoca patrones de deformación altamente asimétricos que hacen difícil hallar una función de prueba precisa. Cuando se trabaja con este tipo de materiales es necesario apoyarse en análisis de elementos finitos o bien en ensayos experimentales para tener certeza sobre los resultados.

El modelo aproximado de TDP para aluminio presenta la ventaja de simplificar en gran medida el problema, sin embargo proporciona resultados promedio y no es capaz de reproducir con exactitud comportamientos locales, por lo que también presenta sus limitaciones.



# 5

## *Pandeo inicial de láminas curvas*

Los fuselajes semimonocasco están esencialmente compuestos por láminas curvas formando una geometría cilíndrica reforzada con larguerillos y cuadernas. Al diseñar estas estructuras se busca que las láminas que forman la piel trabajen a pandeo, al contrario que los larguerillos que fallarían catastróficamente en caso de pandear, pues no presentan la capacidad de las láminas para redistribuir las tensiones.



Figura 5.1: Fragmento de fuselaje semimonocasco constituido por láminas reforzadas, cfr. [46].

Por tanto, el estudio del pandeo local de la piel es importante en el diseño de estructuras aeroespaciales. En el presente capítulo se estudiará el inicio de pandeo de láminas curvas sometidas a sollicitación cortante con diferentes CdC.

### **5.1. Planteamiento del problema**

En primer lugar se definirá la geometría de estudio y el sistema de referencia empleado. Se consideran láminas delgadas con un único radio de curvatura tal y como se puede ver en la Figura 5.2. De nuevo el sistema de referencia se coloca en una esquina de la lámina, pero el eje  $y$  es una coordenada curvilínea que sigue el lado circunferencial, mientras que  $x$  es una coordenada rectilínea similar a la utilizada en placas planas.

El estudio se divide en dos vertientes, por un lado se consideran láminas con la longitud axial mayor que la circunferencial (láminas tipo I), y por otro lado se consideran láminas con la longitud circunferencial mayor que la axial (láminas tipo II).

La dimensión  $a$  no se corresponderá siempre con la longitud en el eje  $x$ , sino que denotará el lado más largo (axial en láminas tipo I y circunferencial en láminas tipo II). Por otro lado  $b$  denotará la otra dimensión de la lámina, la más corta.

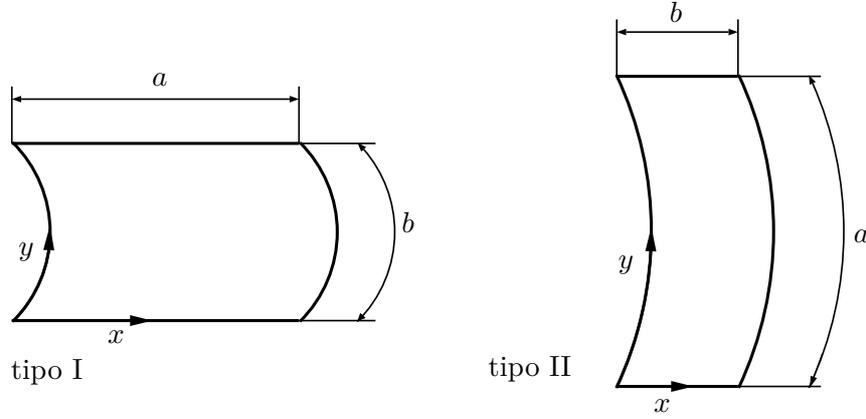


Figura 5.2: Sistema de referencia empleado y notación de los lados.

## 5.2. Ecuación de gobierno

El hecho de introducir curvatura en la lámina modifica la ecuación de gobierno para el estudio de inicio de pandeo. Según [1] el estudio de una lámina isótropa cilíndricamente curva de radio  $R$  y espesor  $h$  sometida a cargas en el plano medio se rige por el sistema de Ecs. (5.1). La curvatura añade el último término del lado izquierdo de la primera ecuación, que involucra a la función de Airy  $F$ .

$$D \nabla^4 w + \frac{h}{R} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.1)$$

$$\nabla^4 F - \frac{E}{R} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0$$

Con el objetivo de formular una ecuación de gobierno que únicamente dependa de  $w$  se despejará  $\partial_x^2 F$  de la segunda de las ecuaciones. Para ello se deriva la segunda ecuación dos veces respecto de  $x$ , obteniendo la igualdad de Ec. (5.2).

$$\nabla^4 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{E}{R} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (5.2)$$

A fin de poder aislar el término  $\partial_x^2 F$  se define (aunque no se determinará su expresión) el operador  $\nabla^{-4}$  en la Ec. (5.3).

$$\nabla^{-4} (\nabla^4 f) = \nabla^4 (\nabla^{-4} f) = f \quad (5.3)$$

Por tanto, aplicando el operador  $\nabla^{-4}$  a ambos lados de la Ec. (5.2), se obtiene la expresión mostrada a continuación para la segunda derivada de  $F$ :

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \frac{E}{R} \nabla^{-4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \quad (5.4)$$

Sustituyendo la expresión obtenida en la primera de las Ecs. (5.1) se obtiene una única ecuación de gobierno con  $w$  como incógnita que se muestra en Ec. (5.5).

$$D \nabla^4 w + \frac{E h}{R^2} \nabla^{-4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (5.5)$$

Cada uno de los términos en la Ec. (5.5) tiene un significado físico concreto. El primero del lado izquierdo representa las fuerzas por unidad de área originadas por la flexión; el segundo las fuerzas por unidad de área originadas por el acortamiento de la superficie media de la lámina. Por último, los términos del lado derecho representan la flexión inducida por las solicitaciones en el plano en configuración deformada. El segundo término de la izquierda no aparecía en placas planas, ya que la superficie media no se acortaba al deformarse la placa.

A lo largo del capítulo se considerarán láminas sometidas únicamente a solicitación cortante, por tanto la ecuación que se utilizará será Ec. (5.6).

$$D \nabla^4 w + \frac{E h}{R^2} \nabla^{-4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 2 N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.6)$$

### 5.2.1. Formulación adimensional

En lugar de trabajar directamente con la solicitación  $N_{xy}$  y las dimensiones físicas de la placa se definen los parámetros adimensionales de la Ec. (5.7). Al introducir la curvatura no se puede estudiar el valor crítico de la carga adimensional  $K$  en función de un único parámetro  $r = a/b$  como sucedía en placas planas, sino que es necesario introducir un parámetro de curvatura que se denota por  $\mathcal{Z}$  y que es inversamente proporcional al radio.

$$K = \frac{N_{xy}|_{cr} b^2}{\pi^2 D}; \quad \mathcal{Z} = \frac{b^2}{R t} \sqrt{1 - \nu^2} \quad (5.7)$$

Se ha de tener en cuenta que  $r$  es siempre la relación entre el lado mayor y el menor, en lugar de ser la relación entre la longitud en  $x$  y la longitud en  $y$  como sucedía en placas planas.

Si se toma la Ec. (5.6) y se divide por la rigidez a flexión de la placa se puede obtener la Ec. (5.8), expresada en función de los parámetros adimensionales anteriores.

$$\nabla^4 w + \frac{12 \mathcal{Z}^2}{b^4} \nabla^{-4} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 2 K \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (5.8)$$

Las soluciones no triviales de esta ecuación se obtendrán para determinados valores del factor de pandeo  $K$ , que a su vez dependen de  $r$  y el parámetro de curvatura  $\mathcal{Z}$ .

### 5.3. Láminas con lados articulados

Una vez se dispone de la expresión de la ecuación de gobierno se estudiará la evolución del factor de pandeo en función de  $r$  y  $\mathcal{Z}$  para una placa sometida a cortante cuyos lados están articulados. Se resolverá el problema mediante el método de Galerkin y también empleando el MEF mediante el programa de ordenador *Abaqus*<sup>®</sup>.

#### 5.3.1. Análisis mediante el método de Galerkin

La Ec. (5.8) no es resoluble de forma puramente analítica, por tanto se empleará el método semianalítico de Galerkin para hallar una solución que minimice el error. Se diferenciará el análisis para placas tipo I y tipo II.

##### Placas tipo I

En primer lugar se desarrollará la solución para placas con la longitud axial mayor que la circunferencial. Puede verse un esquema del caso de estudio en la Figura 5.3.

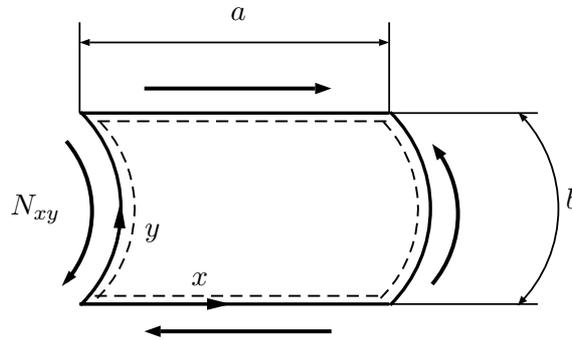


Figura 5.3: Lámina articulada con lado axial más largo que lado circunferencial.

Se desarrolla  $w$  como una serie de funciones de prueba. Una de las ventajas de definir  $y$  como una coordenada curvilínea es que las funciones de prueba empleadas son equivalentes a las que se utilizaban en placas. Por tratarse de una placa articulada se emplearán funciones tipo “seno-seno”, tal y como puede verse en Ec. (5.9).

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.9)$$

A continuación se define el operador  $\mathcal{Q}$  en la Ec. (5.10), de tal modo que la ecuación de gobierno es equivalente a  $\mathcal{Q}(w) = 0$ .

$$\mathcal{Q} \equiv \nabla^4 + \frac{12 \mathcal{Z}^2}{b^4} \nabla^{-4} - 2K \frac{\pi^2}{b^2} \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \quad (5.10)$$

Ahora se integra la ecuación de gobierno multiplicada por las funciones de prueba, tal y como se muestra en Ec. (5.11).

$$\int_0^a \int_0^b \mathcal{Q}(w) \sin \frac{p\pi x}{a} \sin \frac{q\pi y}{b} dy dx = 0 \quad (5.11)$$

donde  $p = 1, 2, \dots, M$  y  $q = 1, 2, \dots, N$ . Dentro del integrando aparecerá el término mostrado en la Ec. (5.12).

$$\nabla^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (5.12)$$

Aunque podría parecer que la evaluación de este término requiere conocer una expresión concreta para  $\nabla^{-4}$ , realmente su obtención es más sencilla. Si se tiene en cuenta la igualdad:

$$\begin{aligned} \nabla^4 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left[ \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^{-2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (5.13)$$

aplicando el operador  $\nabla^{-4}$  a ambos lados de la Ec. (5.13) se obtiene de forma directa una expresión para el término de la Ec. (5.12).

$$\begin{aligned} \nabla^{-4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} = \\ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \left[ \left( \frac{\pi m}{a} \right)^2 + \left( \frac{\pi n}{b} \right)^2 \right]^{-2} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Llevando a cabo el resto de las operaciones e integrando Ec. (5.11) se puede obtener la expresión de Ec. (5.15).

$$w_{pq} \left[ (p^2 + r^2 q^2)^2 + \frac{12 r^4 p^4 \mathcal{Z}^2}{\pi^4 (p^2 + r^2 q^2)^2} \right] + \frac{32 r^3 p q K}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} w_{mn} = 0 \quad (5.15)$$

donde el término  $T_{mn}$  ya se definió en la Ec. (3.16). Se tiene pues una ecuación genérica en  $p$  y  $q$ , que da lugar a un sistema ecuaciones cuando se asignan diferentes valores a estos contadores; este sistema es homogéneo de infinitas ecuaciones y con infinitas incógnitas. Obviamente es preciso truncar la serie para poder obtener un sistema de ecuaciones finito.

Una vez se dispone de este sistema se iguala a cero el determinante del mismo con el fin de encontrar las soluciones no triviales. De esta forma se obtienen los valores de

$K(r, \mathcal{Z})$  correspondientes a las cargas de pandeo. En el caso de la sollicitación cortante el determinante del sistema se puede descomponer en el producto de dos subdeterminantes independientes, uno para  $p \pm q$  par y otro para  $p \pm q$  impar; el primero da lugar a modos de pandeo simétricos, y el segundo a modos antisimétricos. Se pueden resolver los dos determinantes por separado y tomar como carga crítica de pandeo el menor de todos los resultados obtenidos a partir de ambos.

### Placas tipo II

Ahora se considerará una placa articulada sometida también a cortante, pero tal que su lado circunferencial es mayor que su lado axial. Se puede ver el caso de estudio ilustrado en la Figura 5.4.

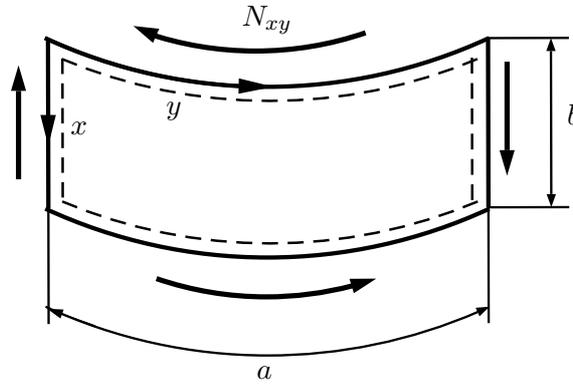


Figura 5.4: Lámina articulada con lado circunferencial más largo que lado axial.

En placas de tipo II el eje  $x$  es paralelo a los lados de longitud  $b$ , y el  $y$  a los de longitud  $a$ . Por tanto se deben modificar las funciones de prueba.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} w_{mn} \sin \frac{m\pi x}{b} \sin \frac{n\pi y}{a} \quad (5.16)$$

Se sigue un procedimiento análogo al descrito en la Sección 5.3.1 se llega de nuevo a una ecuación genérica que depende de los contadores  $p$  y  $q$ .

$$w_{pq} \left[ (r^2 p^2 + q^2)^2 + \frac{12 r^8 p^4 \mathcal{Z}^2}{\pi^4 (r^2 p^2 + q^2)^2} \right] + \frac{32 r^3 p q K}{\pi^2} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} T_{mn} w_{mn} = 0 \quad (5.17)$$

De igual modo que para las placas tipo I se obtiene un sistema de ecuaciones homogéneo a partir de la Ec. (5.17). Igualando el determinante a cero se obtienen las cargas de pandeo.

### 5.3.2. Análisis mediante MEF

Se resuelve el mismo problema empleando *Abaqus*<sup>®</sup>. El programa permite generar una lámina cilíndrica como un cuerpo de revolución. Se deben indicar la longitud del lado axial,

el radio  $R$  y el ángulo de revolución  $\alpha$  para definir la geometría. Realizando un análisis de perturbación lineal se puede obtener la carga crítica de pandeo para una geometría determinada. Como los lados de la lámina están articulados se debe imponer como CdC en todos ellos que el desplazamiento perpendicular a la lámina sea nulo.

Se desea estudiar la evolución del factor de pandeo con  $r$  y  $\mathcal{Z}$ . Para ello se realizarán estudios para diferentes valores de  $r$ , y para cada uno se realizan ejecuciones dando diferentes valores a  $\mathcal{Z}$ .

### Láminas tipo I

Para cada valor de  $\mathcal{Z}$  que se desee simular el valor del radio de giro vendrá dado por Ec. (5.18).

$$R = \frac{b^2 \sqrt{1 - \nu^2}}{\mathcal{Z} t} \quad (5.18)$$

En láminas tipo I, se define  $b = \alpha R$  y por tanto el lado axial (en este caso  $a$ ) y el ángulo de revolución para un determinado  $r$  serán:

$$\alpha = \frac{b}{R}; \quad a = r b = r \alpha R \quad (5.19)$$

donde  $b$  se toma de forma arbitraria. Se repite el proceso para diferentes valores de  $r$  para estudiar también la influencia de este parámetro.

### Láminas tipo II

Para cada valor de  $\mathcal{Z}$  el valor del radio viene nuevamente dado por la Ec. (5.18). En este caso el lado axial es  $b$ , y su valor puede establecerse de nuevo de forma arbitraria.

El ángulo de revolución para cada  $\mathcal{Z}$  en este caso viene dado por la Ec. (5.20).

$$b = \frac{a}{r} = \frac{\alpha R}{r} \quad \implies \quad \alpha = \frac{r b}{R} \quad (5.20)$$

De igual modo que para láminas tipo I se repite el proceso para diferentes  $r$ .

#### 5.3.3. Contraste de resultados

Una vez ejecutados los análisis mediante Galerkin y MEF se muestra en la Figura 5.5 el factor de pandeo en función de  $\mathcal{Z}$  y  $r$ . Los datos obtenidos mediante el MEF se ajustan en general de forma bastante precisa a los obtenidos con el método de Galerkin, especialmente para  $r = 1$ . Conforme la relación entre los lados aumenta hay algo menos de precisión del método semianalítico en torno a  $\mathcal{Z} = 10$ , aunque el resultado también es

aceptable en esta zona.

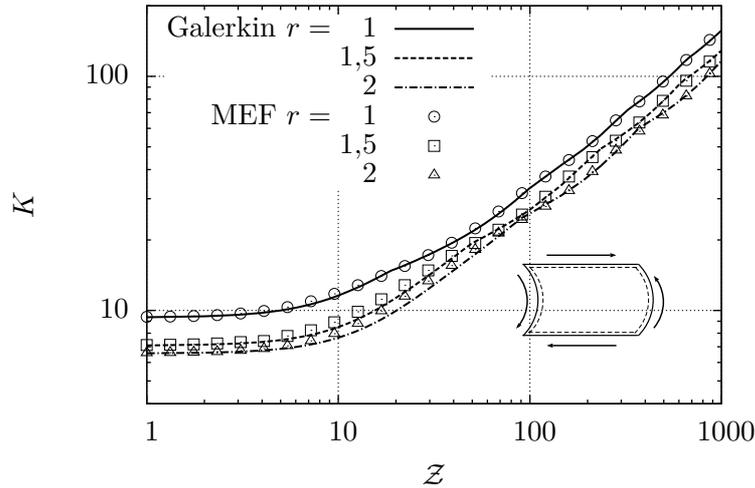


Figura 5.5: Diagramas  $K - Z$  para láminas  $SSSS$  tipo I con diferentes relaciones de lados.

La carga de pandeo aumenta con  $Z$ , es decir, conforme el radio disminuye y la placa es más curvada. Las láminas son menos propensas a pandear que las placas planas ya que distribuyen las tensiones de manera más eficiente. También se aprecia que la carga de pandeo disminuye cuando aumenta  $r$ ; las láminas más alargadas son lógicamente más propensas a pandear.

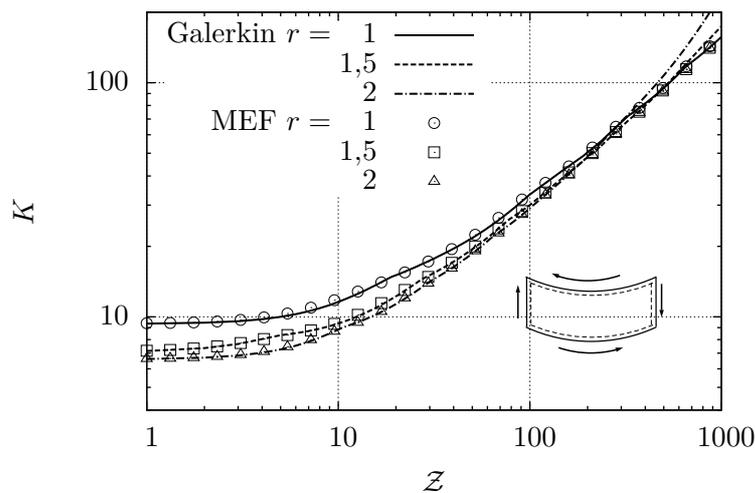


Figura 5.6: Diagramas  $K - Z$  para láminas  $SSSS$  tipo II con diferentes relaciones de lados.

Por otro lado se muestra en la Figura 5.6 el factor de pandeo para láminas tipo II. Los datos analíticos se ajustan todavía mejor a los de MEF que en las láminas tipo I; las solu-

ciones de ambos métodos son prácticamente equivalentes para  $\mathcal{Z} < 300$ . Para  $\mathcal{Z}$  mayores la solución analítica se desvía, se explica en [2] que obtener resultados analíticos precisos en este rango de  $\mathcal{Z}$  requeriría emplear demasiados términos y por tanto este método no es recomendable.

La solución para  $r = 2$  se aproxima bastante a la solución para  $r = 1,5$ . Para  $r > 2$  la carga de pandeo no decrece mucho más, y tiende a estabilizarse en un valor cercano al de  $r = 2$ . Todas las soluciones del MEF coinciden cuando la curvatura es muy elevada  $\mathcal{Z} \gg 1$ , la solución se aproxima a la de un cilindro cerrado y la longitud circunferencial es irrelevante.

De nuevo se aprecia que a mayor curvatura mayor resistencia a pandeo, de hecho añadir curvatura a una lámina articulada puede significar que ésta sea más resistente que una placa empotrada. Se presenta en la Figura 5.7 una comparativa entre las cargas de pandeo de placas planas *SSSS* y *CCCC* con una lámina *SSSS*, todo para  $r = 1$ .

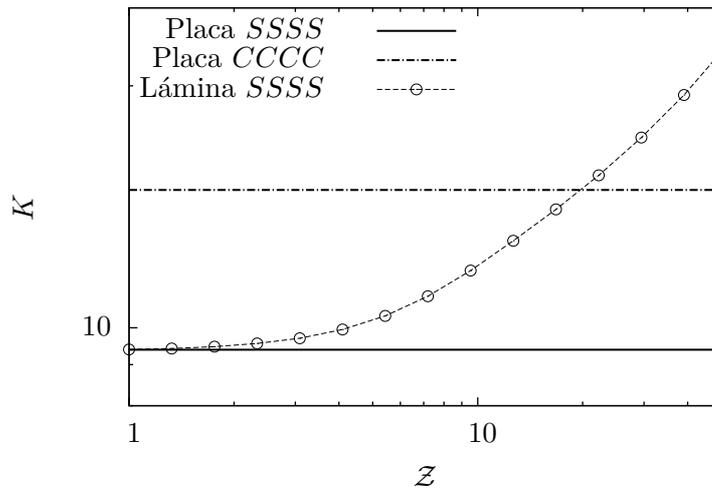


Figura 5.7: Comparación entre la carga de pandeo de placas planas y lámina curva (MEF) para  $r = 1$ .

Lógicamente para valores pequeños de  $\mathcal{Z}$  la carga de pandeo de la placa y la lámina *SSSS* son prácticamente coincidentes, pero conforme  $\mathcal{Z}$  aumenta también lo hace la carga de pandeo de la lámina, sobrepasando la carga crítica de la placa empotrada para  $\mathcal{Z}$  algo menor que 20. Si se pretende aumentar la resistencia de una placa puede sustituirse la misma por una lámina curvada en lugar de empotrarla, reduciendo así el peso del diseño.

Por último se comparan los resultados obtenidos mediante MEF con los presentes en las normas técnicas ESDU [9] y [10]. En la Figura 5.8 se muestra la comparativa para láminas tipo I, y en la Figura 5.9 para tipo II.

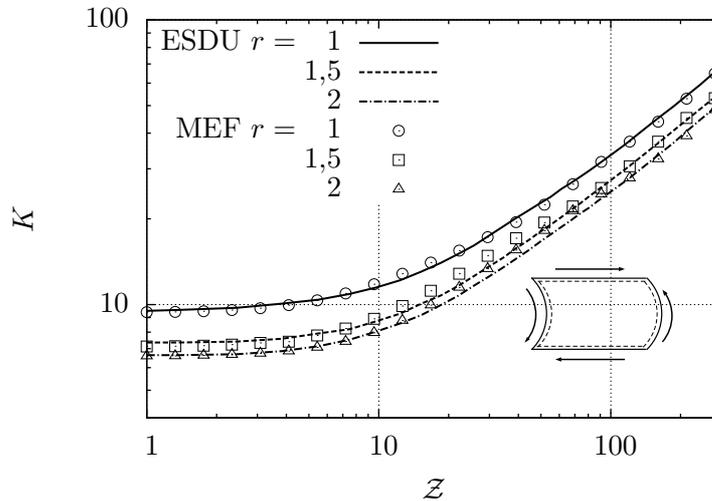


Figura 5.8: Comparativa entre los digramas  $K - Z$  de lámina  $SSSS$  tipo I obtenidos con MEF y los resultados de [9].

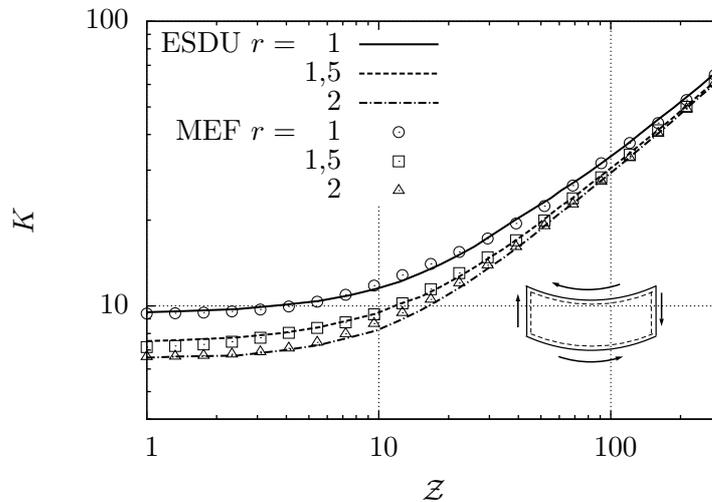


Figura 5.9: Comparativa entre los digramas  $K - Z$  de lámina  $SSSS$  tipo II obtenidos con MEF y los resultados de [10].

En general los resultados obtenidos con MEF se ajustan con bastante precisión a los datos de las normas técnicas. Hay pequeñas discrepancias debidas a comportamientos locales que no se reflejan en [9] y [10] para que las gráficas sean más simples, pero no suponen una desviación relevante.

#### 5.3.4. Modos de pandeo

El análisis con *Abaqus*<sup>®</sup> permite obtener los modos de pandeo de la lámina. Como se explicó en el Capítulo 4 es importante conocer los modos para el estudio posterior de

postpandeo. Se muestran en la Figura 5.10 los seis primeros modos para una lámina a cortante con  $r = 1$  y  $\mathcal{Z} = 100$ . Los modos aparecen por parejas rotadas como es habitual en cortante, la columna izquierda se corresponde con las cargas positivas y la derecha con las negativas.

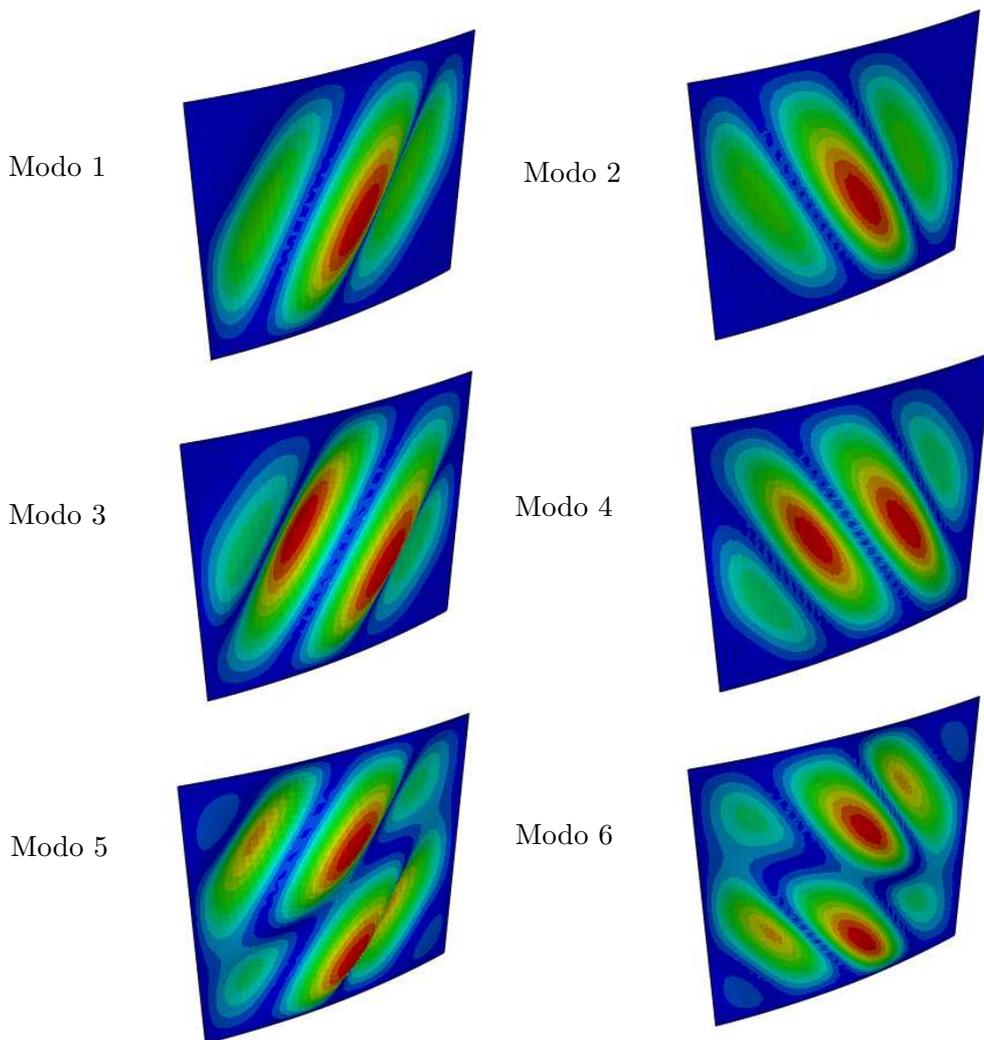


Figura 5.10: Modos de pandeo para una lámina a cortante con  $r = 1$  y  $\mathcal{Z} = 100$ .

Si se comparan estos modos con los que se obtuvieron para una placa plana con  $r = 1$  –ver Figura 3.7–, se puede apreciar que la curvatura de la lámina cambia notablemente los modos de pandeo. La curvatura modifica la distribución de tensiones en la placa (se desarrollan tensiones de membrana), y consecuentemente los patrones de deformación característicos de cada modo se modifican. Se presenta en la Figura 5.11 la evolución del primer modo de pandeo con el parámetro de curvatura  $\mathcal{Z}$ .

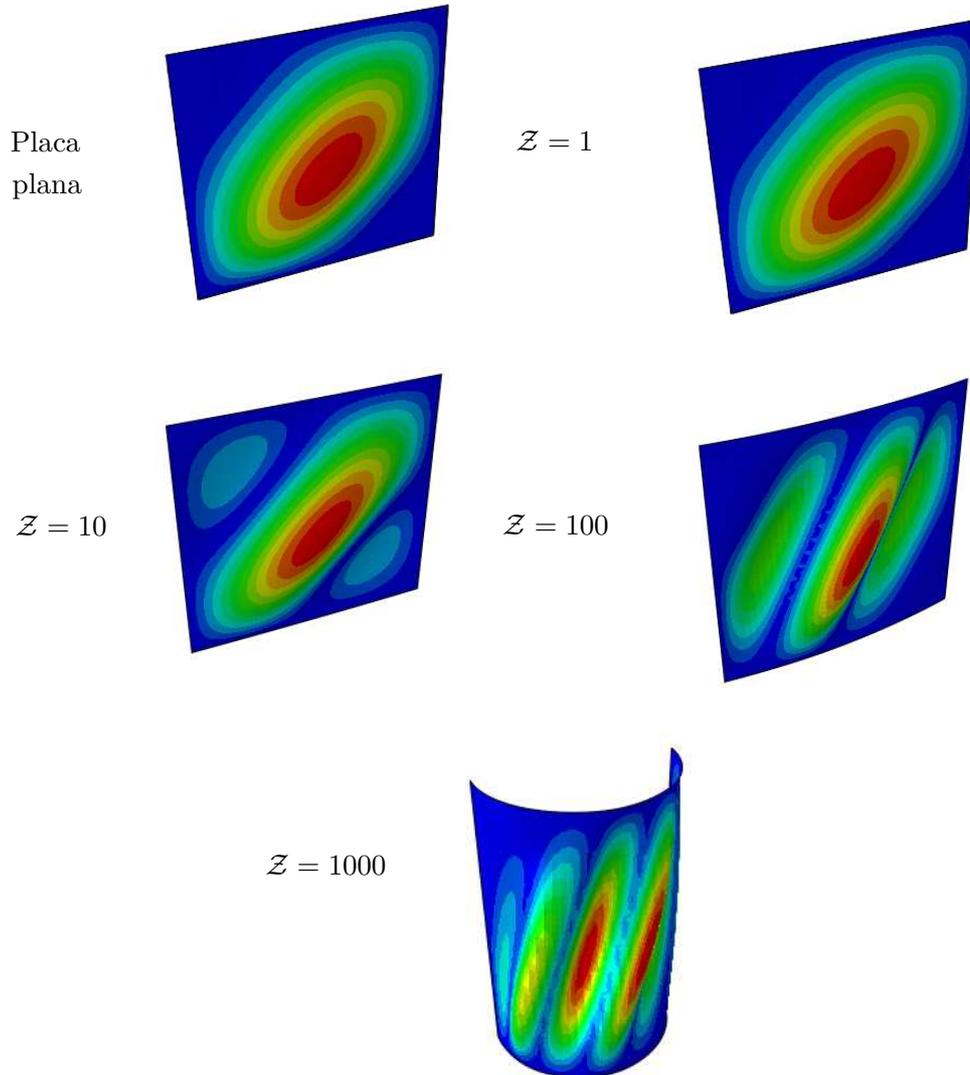


Figura 5.11: Evolución del primer modo de pandeo a cortante con la curvatura de la lámina.

La curvatura dificulta la aparición de un único surco de esquina a esquina de la lámina. Por tanto conforme la curvatura aumenta aparecen más surcos en el patrón de deformación del primer modo de pandeo, además éstos se presentan menos inclinados.

## 5.4. Láminas con lados empotrados

### 5.4.1. Láminas CCCC

A continuación se calcula la carga de pandeo para láminas cilíndricas con sus cuatro lados empotrados mediante *Abaqus*<sup>®</sup>. Para ello se debe añadir la restricción del giro en todos los lados a las CdC que se impusieron en la Sección 5.3.2. Se pueden encontrar gráficos  $K - Z$  basados en desarrollos analíticos corregidos con resultados experimentales para láminas tipo I y II en [2] y [4]. Se comparan estos resultados con los obtenidos con MEF en las Figuras 5.12 y 5.13.

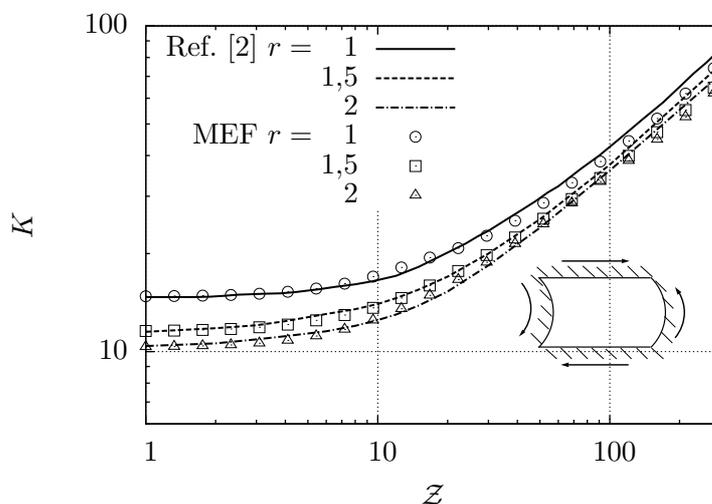


Figura 5.12: Comparativa entre los diagramas  $K - Z$  de lámina CCCC tipo I obtenidos con MEF y los resultados de [2].

Los datos obtenidos con MEF se ajustan de manera bastante precisa a las gráficas de las referencias. El análisis numérico pierde algo de precisión cuando  $Z$  aumenta, aunque ofrece una solución más conservadora.

También se puede apreciar que empotrar la lámina aumenta considerablemente la carga de pandeo si se compara con la obtenida en las Figuras 5.8 y 5.9 para lámina SSSS. El aumento es mayor del 50% para algunos valores de  $Z$ .

### 5.4.2. Láminas con dos lados enfrentados empotrados

Por último, se analizará mediante MEF una placa con dos lados opuestos empotrados y los otros dos articulados. Este caso es habitual en fuselajes ya que en una lámina comprendida entre dos larguerillos y dos cuadernas los primeros suelen ser similares a articulaciones y las segundas a empotramientos.

En la Figura 5.14 se compara para  $r = 1$  el diagrama  $K - Z$  de una placa con lados axiales empotrados y de otra con los circunferenciales.

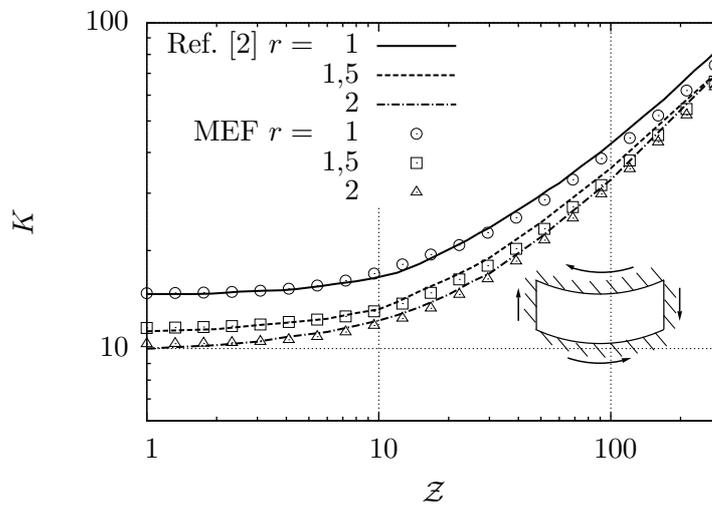


Figura 5.13: Comparativa entre los digramas  $K - Z$  de lámina  $CCCC$  tipo II obtenidos con MEF y los resultados de [2].

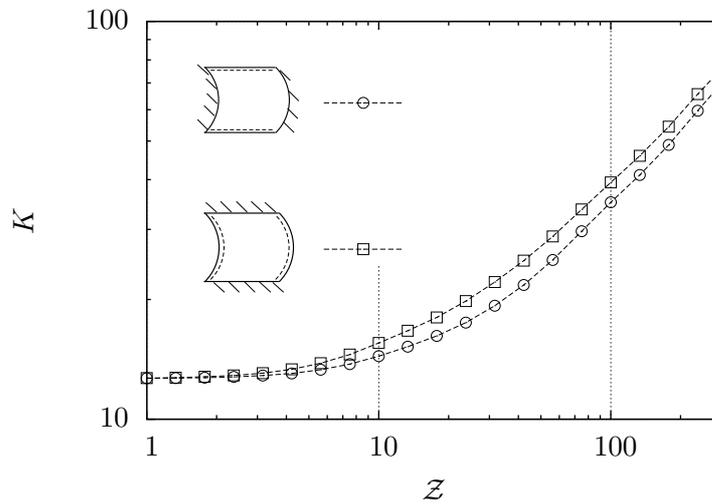


Figura 5.14: Diagrama  $K - Z$  de láminas a cortante en función de la localización de los empotramientos.

Lógicamente para curvaturas muy pequeñas ambas gráficas son coincidentes, ya que los lados curvos son prácticamente rectos y por tanto ambos casos son equivalentes. No obstante cuando  $Z$  aumenta es más conveniente reforzar los lados rectos que los curvos si se desea aumentar la carga de pandeo.

## 5.5. Conclusiones generales

Se ha podido comprobar a lo largo del capítulo que las láminas curvadas son menos propensas a pandear que las placas planas. En general las láminas con curvatura son estructuras muy eficientes ya que desarrollan tensiones de membrana y por tanto todo el espesor de la lámina trabaja por igual. Esto también se ve reflejado en las cargas de pandeo, que aumentan notablemente con la curvatura.

El análisis teórico de láminas se complica bastante respecto del de placas planas, ya que la integración de las ecuaciones en el método de Galerkin requiere de mucho tiempo de computación. Obtener una solución teórica precisa para láminas empotradas requiere de demasiados términos y tiempo de cálculo como para que el método sea eficiente.

También se ha podido comprobar que para láminas cilíndricas las CdC en los lados curvos no tienen la misma influencia que en los rectos. Antes de reforzar un lado para aumentar la carga de pandeo se debe estudiar cuál interesa más.



# 6

## *Tensión diagonal en paneles curvos*

Los fuselajes de las aeronaves están conformados por paneles curvos reforzados constituidos a su vez por láminas, larguerillos y cuadernas. Estas estructuras se diseñan para funcionar por encima de la carga de pandeo, especialmente cuando el fuselaje está torsionado generando sollicitación cortante en cada uno de los paneles. Se desarrolla entonces tensión diagonal en la estructura a postpandeo, tal y como se puede observar en la Figura 6.1, que presenta un ensayo de postpandeo de tensión diagonal en un fuselaje.



Figura 6.1: Ensayo de postpandeo de tensión diagonal en fuselaje semimonocasco, cfr. [47].

En el Capítulo 5 se estudió el inicio de pandeo a cortante de las láminas curvas que conforman los fuselajes; en el presente capítulo se estudiará el régimen de postpandeo. Resulta complicado y poco productivo el estudio de tensión diagonal en láminas aisladas, ya que una correcta definición de las condiciones de contorno tras el pandeo inicial es complicada, pues requeriría una estimación del comportamiento global del fuselaje. Por tanto, se analizarán estructuras completas tipo panel, como la que se muestra en la Figura 6.2.

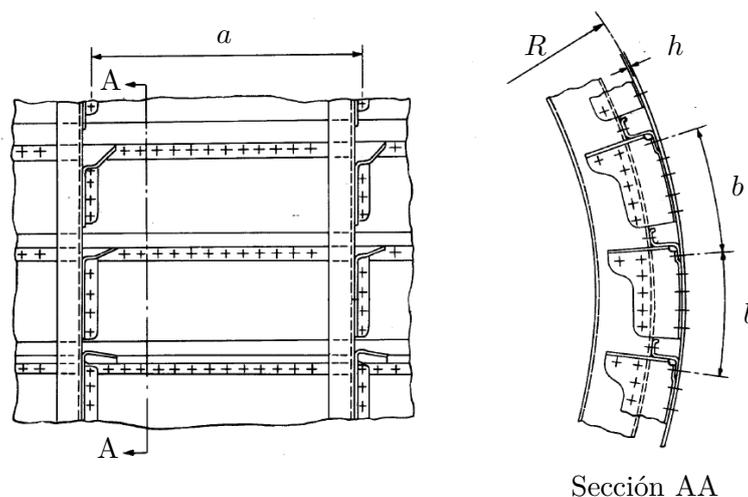


Figura 6.2: Panel curvo reforzado de un fuselaje, cfr. [11].

En 1929 Wagner realizó estudios experimentales de tensión diagonal en vigas armadas planas [34]. En 1956 Kuhn et al. consolidaron los resultados obtenidos hasta esa fecha para tensión diagonal en vigas armadas planas y realizaron también estudios experimentales en paneles curvos. Para ello se ensayaron cilindros a torsión reforzados con cuadernas y larguerillos de igual modo que un fuselaje, ver [18] y [19]. Estos estudios experimentales en estructuras tipo panel se han perfeccionado con el paso del tiempo, dando lugar a normas técnicas como la referencia [11] de 1977 que aporta resultados de carácter general para tensión diagonal en paneles aeronáuticos.

Las aportaciones a la tensión diagonal en paneles curvos son mayoritariamente experimentales, pero en este trabajo se estudiará el problema mediante MEF. Para ello se modela un cilindro reforzado similar al de los experimentos de [18] y [19], con el fin de contrastar los resultados numéricos y los experimentales.

## 6.1. Modelo MEF

Se pretende modelar una geometría similar a la de la Figura 6.3, que presenta un ejemplo de los ensayos a torsión para el estudio de tensión diagonal. Uno de los extremos de la viga ensayada se empotra, y el otro se somete a torsión de modo que cada celda trabaja a cortante. La viga está dividida en cinco secciones; se estudia mayoritariamente la sección central, ya que es la menos influenciada por los extremos debido al efecto Saint-Venant.

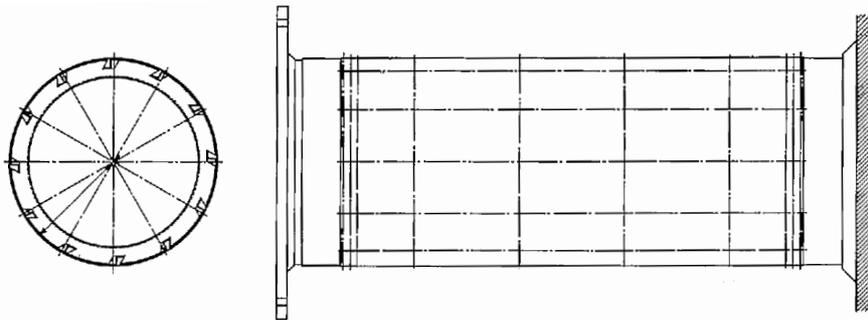


Figura 6.3: Ensayo experimental de tensión diagonal en estructuras curvas, cfr. [18].

Se construye el modelo MEF como un ensamblaje de diferentes partes; por un lado se generan las cuadernas como cuerpos de revolución, y por otro lado las láminas y los larguerillos mediante extrusión. Se pueden ver las partes utilizadas en la Figura 6.4.

Habitualmente la longitud axial de las celdas es mayor que el doble de la longitud circunferencial. La información experimental de las diversas referencias es válida para este supuesto, y por tanto el modelo MEF es tal que  $a = 2b$ . La excepción es para las celdas de los extremos para las cuales  $a_e = b$  y tienen espesor doble  $2h$ .

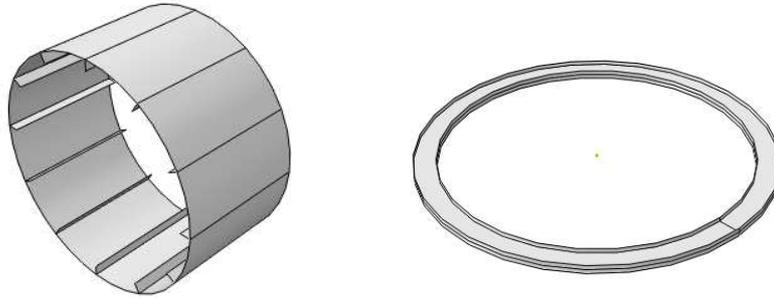


Figura 6.4: Partes que conforman el modelo MEF: Piel y larguerillos (izquierda) y cuaderna (derecha).

Las dimensiones del modelo son las siguientes:

$$R = 1 \text{ m}; \quad a = 1,05 \text{ m}; \quad h = 3 \cdot 10^{-3} \text{ m} \quad (6.1)$$

y las secciones de los larguerillos  $A_l$  y de cuadernas  $A_c$  siguen las siguientes relaciones:

$$\frac{A_c}{bh} = 0,34; \quad \frac{A_l}{bh} = 0,17 \quad (6.2)$$

Se define como material un aluminio isótropo con:

$$E = 70 \cdot 10^9 \text{ Pa}; \quad \nu = 0,3 \quad (6.3)$$

Para poder aplicar el torsor en uno de los extremos de la viga se simula también un disco rígido que se acopla al extremo izquierdo. Se aplica una carga cortante distribuida en el borde del disco rígido, equivalente al torsor. En el otro extremo de la viga no es necesario crear otro disco rígido, simplemente se impone una condición de empotramiento.

Se puede observar en la Figura 6.5 el modelo ensamblado desde dos puntos de vista diferentes. Una vez se ha definido la geometría se debe mallar el modelo, para lo que se establece un tamaño aproximado de los elementos de 0,045 m y se seleccionan elementos lineales tipo lámina con cinco nodos en el espesor. Se generan un total de 21707 elementos, por lo que el coste computacional es mucho mayor que el de los modelos de los Capítulos 3, 4 y 5. Se presenta una imagen de la estructura mallada en la Figura 6.6.

## 6.2. Análisis de inicio de pandeo

En primer lugar se debe realizar un análisis de perturbación lineal para obtener las cargas y modos de pandeo de la estructura. Como el modelo es complejo se necesitan muchas iteraciones del método numérico para alcanzar convergencia. Se presentan en la

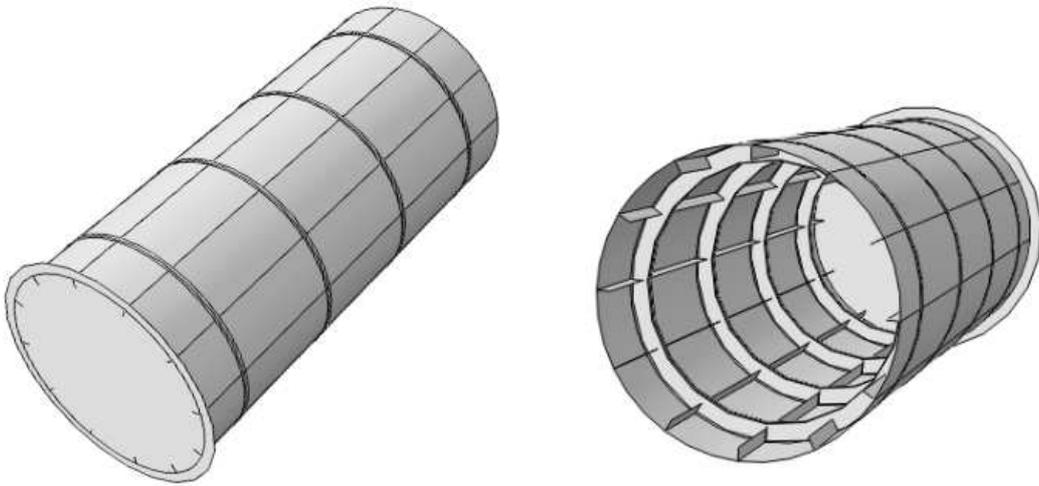


Figura 6.5: Geometría ensamblada del modelo MEF.

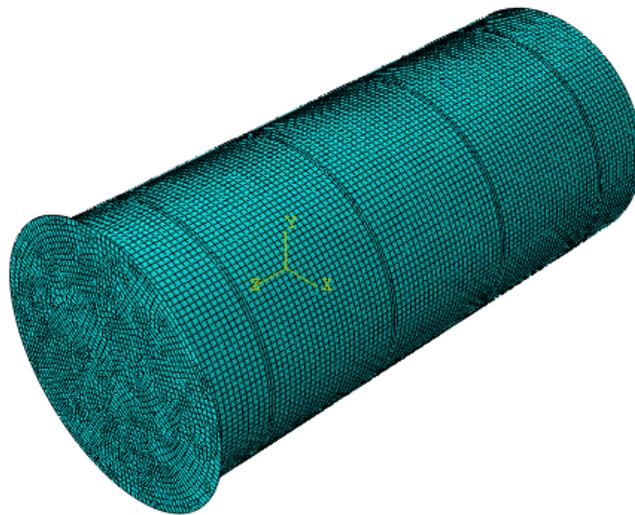


Figura 6.6: Modelo de viga armada curva mallado.

Tabla 6.1 los parámetros introducidos para el análisis en *Abaqus*<sup>®</sup>.

Se obtienen los modos de pandeo de la Figura 6.7. En la columna izquierda se presentan los modos correspondientes a cargas de pandeo positivas, y en la derecha los correspondientes a cargas negativas de igual valor absoluto. Se puede observar que el pandeo inicial se produce localmente en la piel, tal y como se busca en estructuras aeronáuticas. Las celdas de las dos secciones de los extremos no pandean ya que son menos alargadas y

---

Parámetro	Valor
Autovalores requeridos	12
Vectores usados por iteración	20
Número máximo de iteraciones	1000

---

Tabla 6.1: Parámetros del análisis de inicio de pandeo.

tienen más espesor, y por tanto su carga de pandeo es mucho mayor.

El valor obtenido para la carga crítica puede variar considerablemente si la malla no es lo suficientemente refinada: Para mallas con elementos demasiado grandes los resultados son muy imprecisos, como se muestra en la Figura 6.8 con el valor de la carga crítica en función del número de elementos. Como se puede apreciar, cuando no hay suficientes elementos los resultados son ilógicos; y conforme la malla es más refinada el valor de la carga tiende a estabilizarse en torno a un valor constante.

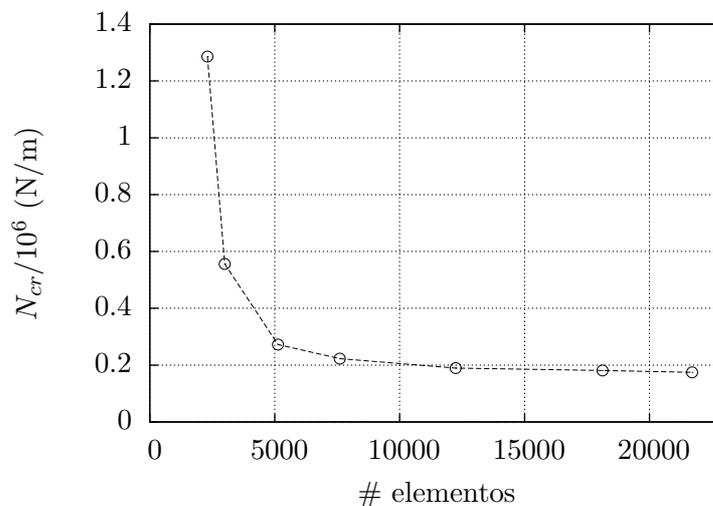


Figura 6.8: Convergencia de la carga crítica con el numero de elementos utilizado.

### 6.2.1. Generación de la imperfección

Una vez se dispone de los modos de pandeo se genera un patrón de imperfección en la estructura a partir de los mismos. En la Tabla 6.2 se presentan los modos empleados para generar la imperfección, su ponderación y los autovalores (cargas de pandeo) asociados. Se toman sólo modos correspondientes a cargas positivas.

Se puede apreciar que las cargas de pandeo presentan valores muy próximos entre sí. Este comportamiento es habitual en estructuras cilíndricas, y según [7] en estos casos se deben incluir bastantes modos para generar la imperfección. Además, como la estructura

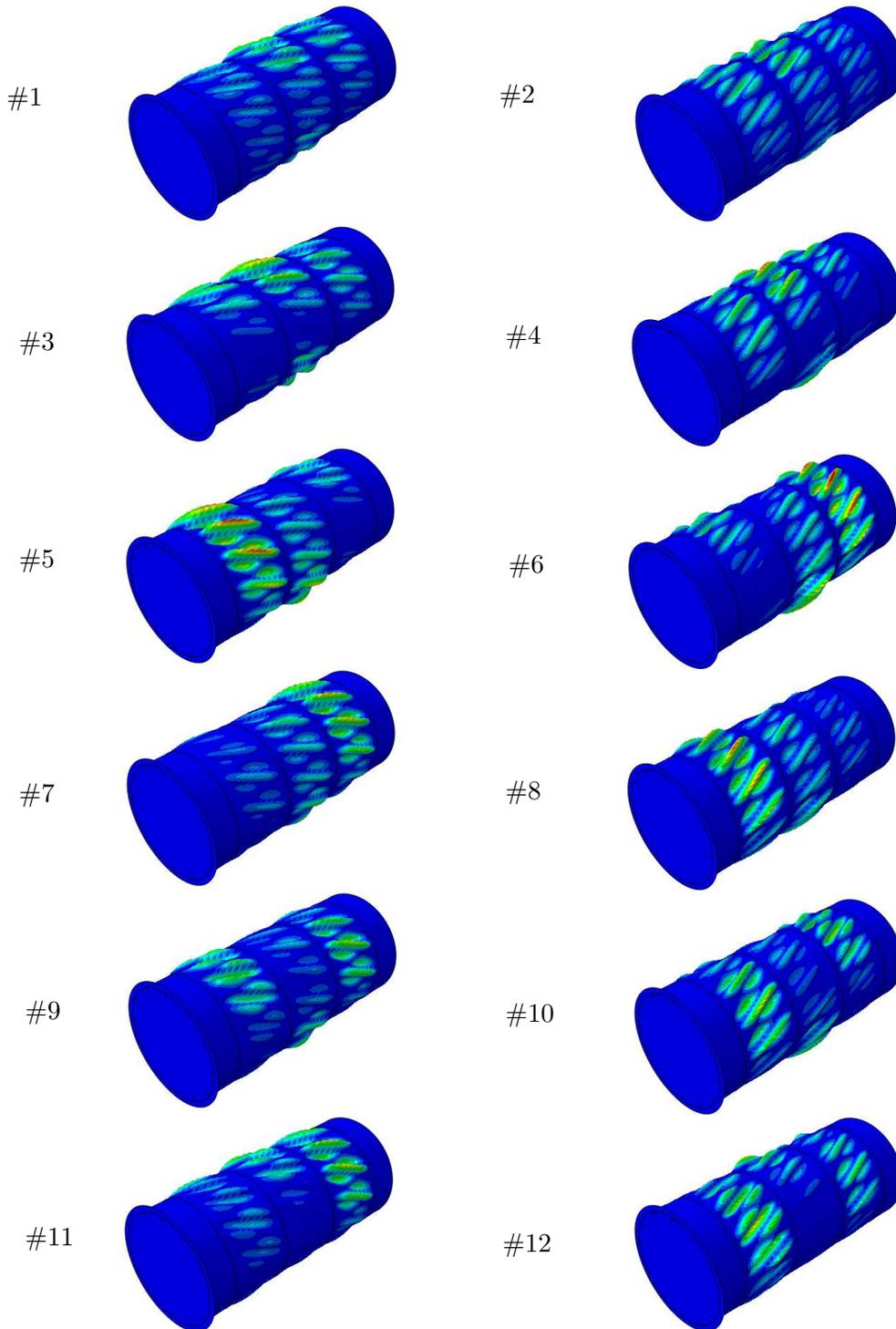


Figura 6.7: Modos de pandeo para viga armada curva.

Modo	Carga (N/m)	Ponderación	Modo	Carga (N/m)	Ponderación
# 1	$1,7436 \cdot 10^5$	$h$	# 3	$1,7539 \cdot 10^5$	$h$
# 5	$1,7595 \cdot 10^5$	$0,75 h$	# 7	$1,7611 \cdot 10^5$	$0,75 h$
# 9	$1,7693 \cdot 10^5$	$0,75 h$	# 11	$1,7732 \cdot 10^5$	$0,75 h$

Tabla 6.2: Modos de pandeo y su ponderación para generar la imperfección.

está reforzada con larguerillos y cuadernas es menos susceptible de entrar en un estado de inestabilidad estructural global, y por ello se asigna a los modos una ponderación mayor (aproximadamente el espesor completo) que la empleada en el Capítulo 4.

### 6.3. Análisis de postpandeo

Una vez se ha llevado a cabo el estudio de inicio de pandeo y se ha generado la imperfección en el modelo se ejecuta una simulación del régimen de postpandeo a tensión diagonal empleando el método de Riks, ver Sección 4.2. El estudio de un modelo complejo requiere en ocasiones incrementos muy pequeños del arco para poder seguir la trayectoria de equilibrio, por lo tanto se reduce el incremento mínimo especificado para poder asegurar la convergencia. En la Tabla 6.3 se pueden ver los parámetros introducidos para el análisis. También se amplía el número máximo de incrementos respecto del utilizado en el Capítulo 4, ya que 100 no son suficientes.

Parámetro	Valor
Incremento inicial	0,1
Incremento mínimo	0,0005
Incremento máximo	10
Longitud aproximada del arco	1
Número máximo de incrementos	500

Tabla 6.3: Parámetros del análisis de postpandeo mediante método de Riks.

### 6.3.1. Evolución de las tensiones

En la Figura 6.9 se presenta la distribución de tensión principal máxima  $\sigma_I$  para diferentes valores de  $R$ . Se denota por  $\tau_{cr}$  a la tensión cortante existente en las láminas cuando la placa pandea inicialmente. Antes de que la estructura pandee la tensión es prácticamente uniforme en las celdas, aunque presenta pequeñas fluctuaciones debidas a las imperfecciones introducidas en el modelo. La tensión en las celdas de los extremos es la mitad que en el resto debido a su espesor.

Una vez que la placa pandea la distribución de las tensiones cambia notablemente, desarrollándose en diagonales a lo largo de las celdas (tensión diagonal) y perdiendo la uniformidad.

Lógicamente la tensión máxima aumenta con  $\mathcal{R}$  y las celdas se aplanan: según [18] para valores altos de  $\mathcal{R}$  la viga circular tiende a adoptar una forma poligonal con las celdas aplanadas, con un estado cada vez más próximo a TDP.

### 6.3.2. Tensiones Máximas. Contraste de resultados

El estudio de las tensiones máximas es de vital importancia para determinar el fallo de la estructura y los factores de seguridad. En la norma técnica ESDU [11] se presenta un procedimiento basado en gráficas obtenidas empíricamente para determinar las tensiones máximas en paneles curvos reforzados. En primer lugar, a partir de  $\mathcal{R}$  y la relación  $h/R$  se puede obtener el valor para el factor de tensión diagonal  $k$ . Este factor indica qué proporción de la tensión cortante total se desarrolla como tensión diagonal. Por tanto la tensión cortante de tensión diagonal  $\tau_{TD}$  y el cortante puro  $\tau_P$  vienen dados por las siguientes relaciones.

$$\tau_{TD} = k \tau ; \quad \tau_P = (1 - k) \tau \quad (6.4)$$

Cuando  $\mathcal{R} < 1$  se tiene  $k = 0$  y sólo existe tensión cortante pura, cuando  $\mathcal{R} \rightarrow \infty$  sólo hay tensión diagonal y consecuentemente  $k = 1$ . A partir de  $k$ ,  $R$  y las áreas de los larguerillos y cuadernas se puede obtener de nuevo mediante gráficas el valor de la tangente del ángulo que forma la tensión de tracción con una generatriz del cilindro  $T_\alpha$ . En la Tabla 6.4 se muestran los valores obtenidos para  $k$  y  $T_\alpha$  para diferentes  $\mathcal{R}$ .

$\mathcal{R}$	1	1,2	1,4	1,6	1,8	2	2,2	2,4
$k$	0	0,22	0,32	0,44	0,53	0,59	0,65	0,70
$T_\alpha$	-	0,58	0,65	0,71	0,73	0,78	0,88	0,90

Tabla 6.4: Valores de  $k$  y  $T_\alpha$  obtenidos de [11].

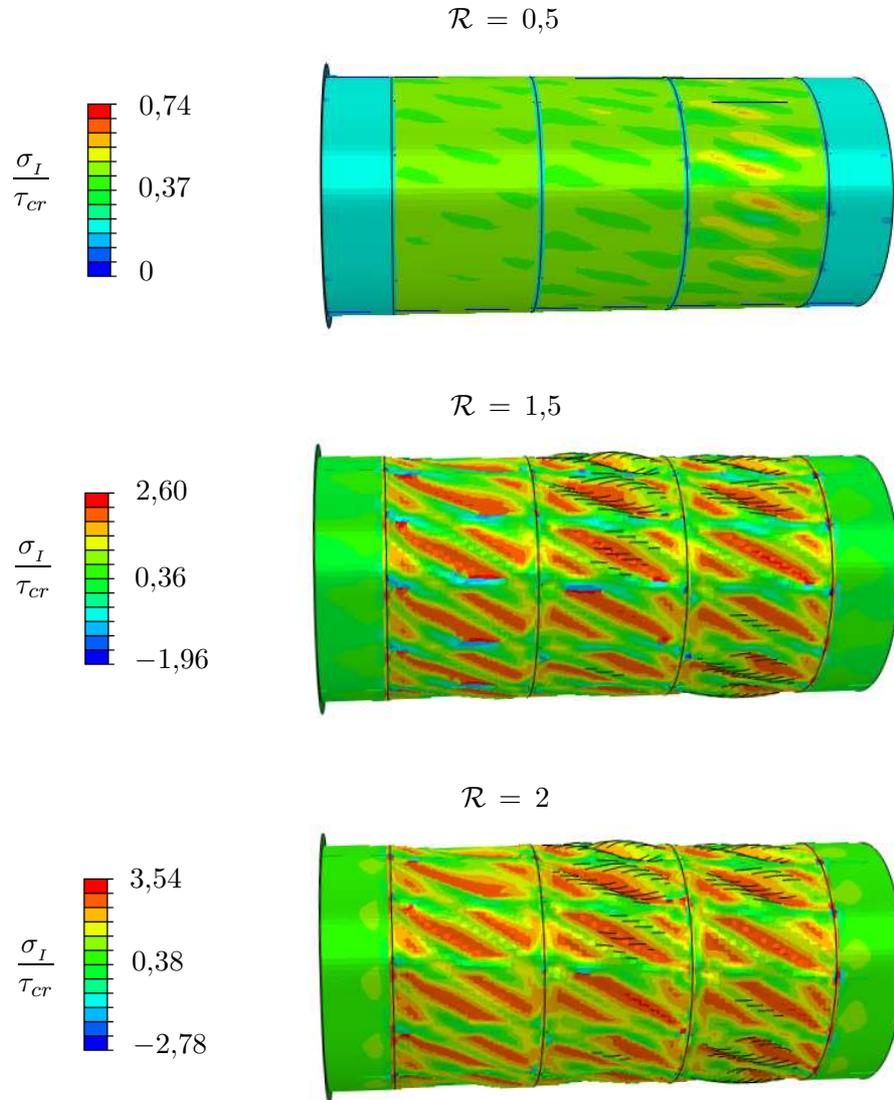


Figura 6.9: Evolución de la tensión principal máxima con el ratio de postpandeo.

Finalmente, a partir de estos valores se puede obtener en base a otra gráfica experimental la relación entre la máxima tensión principal en las celdas  $\sigma_I$  y la tensión promedio  $\bar{\tau} = \mathcal{R} \tau_{cr}$ . En la Figura 6.10 se comparan los resultados obtenidos con el método de Riks y los de [11].

Los resultados de MEF para valores cercanos a  $\mathcal{R} = 1$  son bastante imprecisos, no se aproximan al comportamiento teórico esperado debido a las imperfecciones introducidas. La estructura modelada con MEF no pandea idealmente como supone ESDU, sino que la entrada en régimen de postpandeo es un proceso gradual desencadenado por la imperfección. Por tanto para  $\mathcal{R} = 1$  el campo de tensiones es muy impreciso ya que las

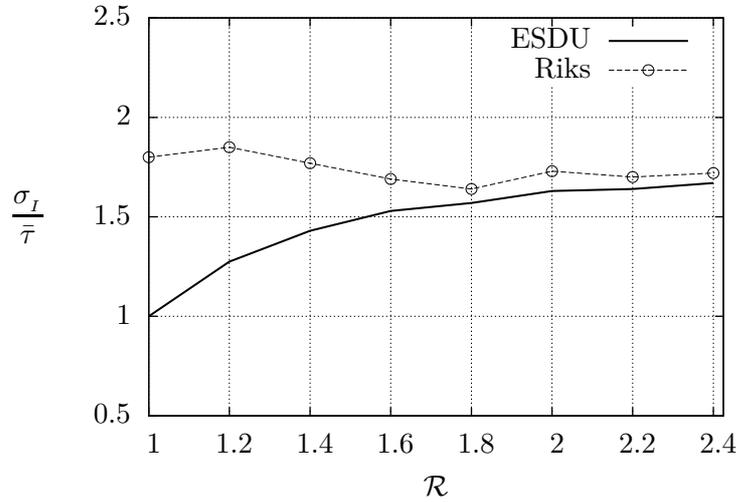


Figura 6.10: Relación entre tensión máxima y tensión promedio mediante MEF y ESDU.

tensiones se redistribuyen generando máximos locales demasiado elevados. Cabe destacar que la solución de ESDU tampoco es totalmente fiel a la realidad: el inicio de pandeo no es un proceso instantáneo e ideal como se supone en el documento.

Para  $\mathcal{R} > 1,4$  la solución MEF se ajusta bastante mejor a los datos ESDU, aun así hay algo de error que puede deberse a una gran cantidad de factores. Según se comenta en [18] el tipo de larguerillos y cuadernas puede ocasionar ligeras desviaciones en los resultados, además el modelo MEF no considera los remaches de las uniones que se dan en una estructura real. Por otro lado los resultados obtenidos en [11] admiten cierto margen de error, ya que en muchas ocasiones se obtienen a partir de interpolaciones de los datos obtenidos de diferentes gráficas.

La solución MEF predice una  $\sigma_l$  mayor, y por tanto es más conservadora. Según se puede apreciar la tensión máxima generada en estructuras tipo panel no es muy elevada en comparación con la tensión promedio conforme aumenta  $\mathcal{R}$ . La distribución de tensiones es muy eficiente en estas estructuras y por tanto son muy eficaces trabajando a postpandeo.

### 6.3.3. Tensiones en larguerillos y cuadernas

Conforme se desarrolla la tensión diagonal, se genera tensión de compresión en los larguerillos  $\sigma_l$  y en las cuadernas  $\sigma_c$ . En [11] se presenta un método para poder estimar estas tensiones, para ello es necesario calcular las áreas efectivas a compresión de los larguerillos  $A_{le}$  y las cuadernas  $A_{ce}$ . Como larguerillos y cuadernas están unidos a la piel, ésta también soporta una determinada proporción de la tensión compresiva; las áreas efectivas añaden a las áreas geométricas la aportación de la piel, y vienen dadas por:

$$\frac{A_{ce}}{bt} = \frac{A_c}{bt} + \frac{1-k}{2} r; \quad \frac{A_{le}}{bt} = \frac{A_l}{bt} + \frac{1-k}{2} \quad (6.5)$$

Nótese que cuando  $\mathcal{R} \rightarrow \infty$  y  $k = 1$  las áreas efectivas son iguales a las áreas geométricas, ya que toda la tensión en la piel es tensión diagonal y la compresión solo la resisten los larguerillos y cuadernas. En la Figura 6.11 se muestra la evolución de las áreas efectivas con  $\mathcal{R}$ , conforme este ratio aumenta las áreas efectivas se reducen ya que la piel soporta menos compresión.

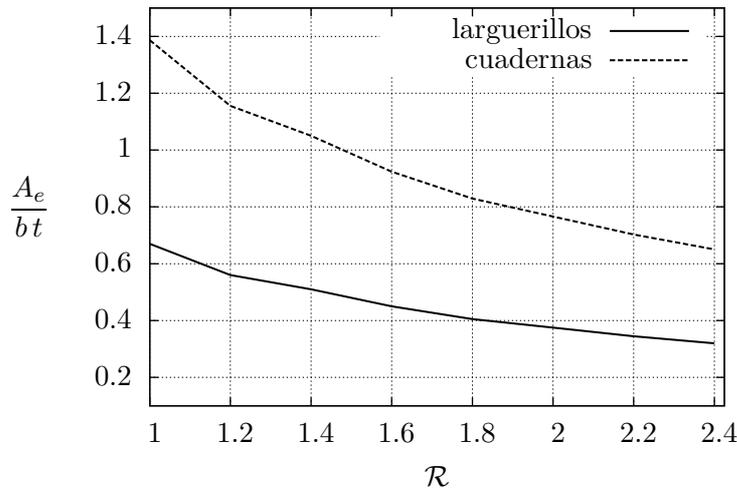


Figura 6.11: Evolución de las áreas efectivas con el ratio de postpandeo según [11].

Las tensiones de compresión en los refuerzos vienen dadas por las Ecs. (6.6). Lógicamente cuando las áreas efectivas disminuyan las tensiones en larguerillos y cuadernas aumentarán.

$$\sigma_c = k \bar{\tau} T_\alpha r \frac{bt}{A_{ce}} ; \quad \sigma_l = \frac{k \bar{\tau}}{T_\alpha} \frac{bt}{A_{le}} \quad (6.6)$$

En las Figuras 6.12 y 6.13 se comparan las tensiones en larguerillos y cuadernas obtenidas a partir de [11] con las del modelo MEF.

Los resultados obtenidos con MEF para la tensión en los larguerillos se ajustan con bastante precisión a los de ESDU para  $\mathcal{R} > 1,2$ . Para  $\mathcal{R} = 1$  la referencia predice una tensión nula, sin embargo con el modelo MEF se obtiene tensión en los larguerillos antes de alcanzar la carga de pandeo debido a que, como se explicó en la Sección 6.3.2, la inestabilidad estructural se produce gradualmente desencadenada por las imperfecciones.

Lo mismo sucede en las cuadernas: para  $\mathcal{R} = 1$  ESDU predice tensión nula pero MEF no. Para  $\mathcal{R}$  mayores la concordancia entre MEF y ESDU no es tan precisa como en los larguerillos, pero es aceptable teniendo en cuenta el margen de error de los resultados de [11].

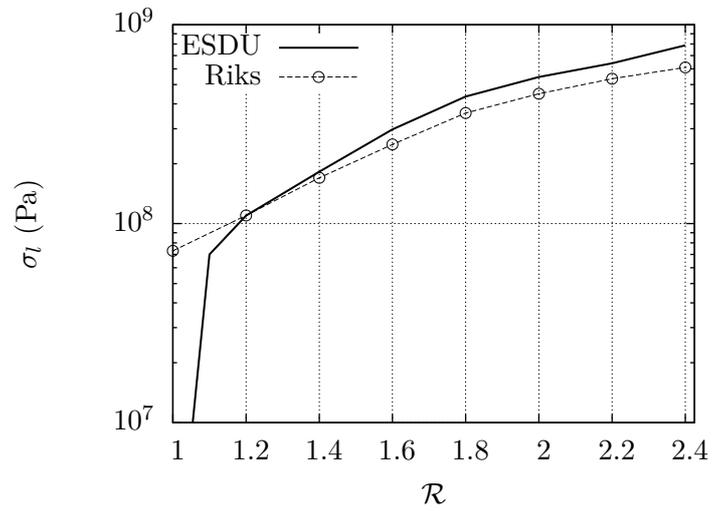


Figura 6.12: Comparación de la tensión compresiva en los largueros mediante MEF y ESDU.

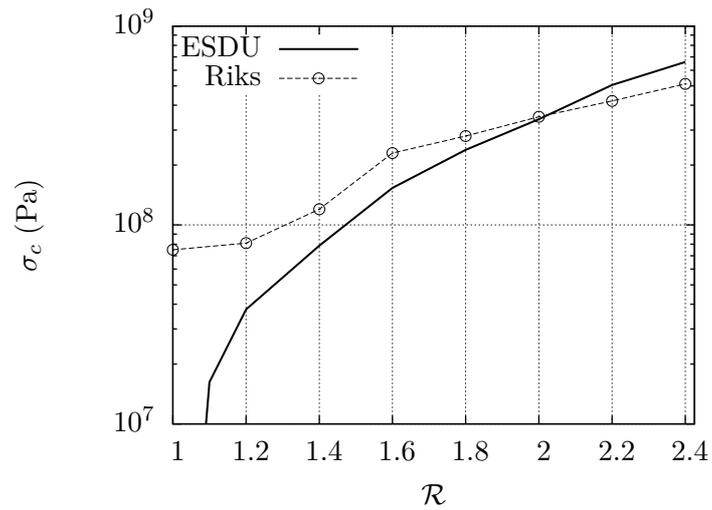


Figura 6.13: Comparación de la tensión compresiva en las cuerdas mediante MEF y ESDU.

## *Conclusiones, trabajos futuros y presupuesto*

### 7.1. Conclusiones generales

En el presente trabajo se han estudiado el inicio de pandeo y postpandeo a cortante de placas y láminas similares a las que conforman el fuselaje de una aeronave. Para ello se han empleado métodos semianalíticos utilizando programas de cálculo como *Mathematica*<sup>®</sup> y *Matlab*<sup>®</sup> y también métodos numéricos empleando *Abaqus*<sup>®</sup>. Se han considerado tanto aleaciones metálicas como materiales compuestos para el estudio de placas planas.

Según lo mencionado, las principales conclusiones que se pueden obtener a partir del trabajo realizado son las siguientes:

- La introducción de placas y láminas en las estructuras de las aeronaves permite reducir notablemente el peso de las mismas.
- En un panel aeronáutico se debe priorizar el pandeo inicial local de la piel si se desea una estructura eficiente en postpandeo.
- Un buen conocimiento de las bases teóricas es esencial para realizar un análisis crítico de los resultados de MEF, que en ocasiones son susceptibles de ser malinterpretados.
- Los resultados obtenidos con el método de Galerkin se ajustan con bastante precisión a los obtenidos con MEF para el estudio de inicio de pandeo de placas y láminas. El estudio analítico de postpandeo es más complejo y en ocasiones no es sencillo obtener resultados precisos.
- El estudio de materiales compuestos es notablemente más complejo que el de aleaciones isótropas y los resultados obtenidos son algo menos precisos. Estos materiales presentan grandes ventajas pero no deben olvidarse sus limitaciones.
- La carga crítica de pandeo en placas planas tiende a un valor asintótico cuando  $a/b > 4$ , en este rango de valores las CdC en los extremos cortos pierden relevancia.
- La curvatura hace que las estructuras sean mucho más eficientes, aumentando considerablemente el valor de la carga de pandeo.
- El análisis semianalítico de placas y láminas empotradas requiere un tiempo de computación varias veces mayor que el de placas articuladas, ya que emplea funciones de prueba más complejas. En cambio las condiciones de contorno no influyen de forma relevante en el tiempo de computación de los métodos numéricos.
- El análisis semianalítico de inicio de pandeo en láminas requiere de muchos más términos que el de placas planas si se pretende obtener resultados precisos en un amplio rango de estudio.

- La curvatura de las láminas tiene una gran influencia en los modos de pandeo. Las deformadas que se producen en estructuras curvadas son más eficientes a la hora de transmitir esfuerzos.
- La correcta definición de las condiciones de contorno en el estudio de postpandeo es crucial, ya que la convergencia y la precisión del método dependen altamente de las mismas.
- El análisis de postpandeo mediante las ecuaciones de von Karman es muy complejo cuando se incluye más de un término. Este análisis es difícilmente automatizable ya que se basa en la identificación de términos.
- La función de prueba elegida para la función de Airy debe ser compatible con la elegida para la deformada, y la distribución de las solicitaciones depende directamente de ella.
- El estudio de postpandeo mediante el método de Riks presenta limitaciones cerca del punto de bifurcación, el pandeo se produce gradualmente generando imprecisiones cerca de  $\mathcal{R} = 1$ .
- Las simplificaciones analíticas para la tensión diagonal pueden ser útiles para obtener resultados generales, pero se requieren estudios más precisos para estimar correctamente las tensiones máximas.
- Los paneles curvos reforzados son muy eficientes a la hora de redistribuir las tensiones tras el pandeo.

## 7.2. Trabajos futuros

Durante la realización del trabajo se han abierto diversas vías de investigación en el campo del pandeo de estructuras aeronáuticas, dentro de las cuales se destacan:

- Estudio de pandeo en placas de material compuesto tipo sándwich.
- Análisis de pandeo de láminas curvas de material compuesto.
- Estudio de inicio de pandeo de láminas con dos curvaturas (elipsoidales).
- Estudio del postpandeo de placas a cortante añadiendo más solicitaciones combinadas entre sí.
- Modos de fallo de delaminación y fractura de placas y láminas de material compuesto en régimen de postpandeo.
- Efecto de los gradientes térmicos en el pandeo de estructuras espaciales.
- Influencia de materiales no elásticos en el inicio de pandeo y postpandeo de placas y láminas, considerando diferentes modelos de plasticidad.
- Desarrollo de modelos más complejos de paneles curvos que incluyan el modelado de uniones y remaches.
- Estudio de la optimización de la sección de larguerillos y cuadernas en paneles curvos.
- Análisis dinámicos de placas aeronáuticas (vibraciones).

### 7.3. Presupuesto

En el siguiente desglose se contempla el coste total para la realización del presente trabajo.

Cantidad	Concepto	Precio/ud.	Precio total
210	Horas totales de ingeniero	40,00 €	8400,00 €
35	Búsqueda de información		
20	Formación en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup>		
40	Modelos analíticos en <i>Mathematica</i> <sup>®</sup>		
30	Programación en <i>Matlab</i> <sup>®</sup>		
45	Análisis numéricos en <i>Abaqus</i> <sup>®</sup>		
20	Depuración de errores		
20	Análisis de resultados		
165	Horas totales de servidor	5,00 €	825,00 €
25	Resolución métodos semianalíticos		
40	Estudios paramétricos		
100	Estudios estáticos no lineales		
1	Licencia de <i>Abaqus</i> <sup>®</sup>	1.000,00 €	1.000,00 €
1	Licencia de <i>Mathematica</i> <sup>®</sup> académica	1.515,00 €	1.515,00 €
1	Licencia de <i>Matlab</i> <sup>®</sup> académica	500,00 €	500,00 €
Coste total (sin IVA)			12.240,00 €
IVA (21 %)			2.570,40 €
<b>Total presupuestado</b>			<b>14.810,40 €</b>

El presupuesto total del proyecto asciende a la cantidad de CATORCE MIL OCHO-CIENTOS DIEZ CON CUARENTA EUROS.

## Bibliografía

- [1] Batdorf, S., *A simplified method of elastic-stability analysis for thin cylindrical shells. Part II - NACA TN 1342*, Washington, 1947.
- [2] Batdorf, S. et al., *Critical shear stress of curved rectangular panels - NACA TN 1348*, Washington, 1947.
- [3] Batdorf, S., *Handbook of structural stability. Part IV: Strength of stiffened curved plates and shells - NACA TN 3786*, Washington, 1958.
- [4] Bruhn, E. F., *Analysis and design of flight vehicle structures*, 1973.
- [5] Deo, R. & Agarwal, B., *Design methodology and life analysis of postbuckled metal and composite panels*, Northrop Corporation, California, 1985.
- [6] Donell, L., *Stability of thin-walled tubes under torsion - NACA Report 497*, California Institute of Technology, California, 1933.
- [7] DS SIMULIA, *Abaqus<sup>®</sup> analysis user's manual. Volume II: Analysis*.
- [8] DS SIMULIA, *Abaqus<sup>®</sup> theory manual*.
- [9] ESDU 02.03.18, *Buckling stress coefficients for curved plates in shear (axial length exceeding circumferential length, edges simply supported)*.
- [10] ESDU 02.03.19, *Buckling stress coefficients for curved plates in shear (circumferential length exceeding axial length, edges simply supported)*.
- [11] ESDU 77018, *Curved panels in shear. Post-buckling analysis*.
- [12] George, G. & Becker, H., *Handbook of structural stability. Part III: Buckling of curved plates and shells - NACA TN 3783*, Washington, 1957.
- [13] Jones, R., *Buckling of bars, plates and shells*, Bull Ridge, Virginia, 2006.
- [14] Jones, R., *Mechanics of composite materials*, Taylor & Francis, 2nd edition, 1998.
- [15] Kassapoglou, C., *Design and analysis of composite structures with applications to aerospace structures*, Wiley, 2010.
- [16] Kuhn, P., *Stresses in aircraft and shell structures*, McGraw-Hill, 1956.
- [17] Kuhn, P. et al., *A summary of diagonal tension. Part I - NACA TN 2661*, Washington, 1956.
- [18] Kuhn, P. et al., *A summary of diagonal tension. Part II - NACA TN 2662*, Washington, 1956.
- [19] Kuhn, P. & Griffith, G., *Diagonal tension in curved webs - NACA TN 1481*, Washington, 1956.
- [20] Leissa, A., *Buckling of laminated composite plates and shell panels*, Ohio State University, Ohio, 1985.

- 
- [21] Levy, S., *Bending of rectangular plates with large deflections- NACA TN 846*, Washington, 1942.
- [22] Megson, T., *Aircraft structures for engineering students*, BH, 2010.
- [23] Megson, T., *An Introduction to aircraft structural analysis*, BH, 4th edition, 2007.
- [24] Moisiade, C., *Beams with flat stiffened webs in incomplete diagonal tension*, Rensselaer Polytechnic Institute, Connecticut, 2009.
- [25] Schildcrout, M. & S. Stein, M., *Critical combinations of shear and direct axial stress for curved rectangular panels - NACA TN 1928*, Washington, 1949.
- [26] Segura, L., *Análisis teórico y experimental de vigas armadas de acero de canto variable*, Universitat Politècnica de Catalunya, 2010.
- [27] Szilard, R., *Theories and applications of plate analysis*, Wiley, 2004.
- [28] Timoshenko, S., *Theory of Elasticity*, McGraw-Hill, 2nd edition, 1951.
- [29] Timoshenko, S. & Gere, J., *Theory of elastic stability*, McGraw-Hill, 2nd edition, 1963.
- [30] Timoshenko, S. & Woinowsky-Krieger, S., *Theory of plates and shells*, McGraw-Hill, 2nd edition.
- [31] Tsongas, A. & Ratay, R., *Investigation of diagonal tension beams with very thin stiffened webs*, Grumman Aerospace, Nueva York, 1969.
- [32] Ventsel, E. & Krauthammer, T., *Thin plates and shells*, Marcel Dekker Inc., Nueva York, 2001.
- [33] Ugural, A., *Stresses in plates and shells*, McGraw-Hill, 1981.
- [34] Wagner, H., *Flat sheet metal girders with very thin metal webs - NACA TN 604, 605 & 606*, Washington, 1929.
- [35] Xu, J. et al., *A critical review on buckling and post-buckling analysis of composite structures*, Beijing Aeronautical S&T Research Institute, Beijing, 2013.
- [36] Yamaki, N. & Matsuda, K., *Postbuckling behavior of circular cylindrical shells under torsion*, Shendai, 1975.
- [37] <http://history.nasa.gov/SP-468/ch11-7.htm>
- [38] [https://en.wikipedia.org/wiki/Vickers\\_Wellington](https://en.wikipedia.org/wiki/Vickers_Wellington)
- [39] <http://www.airbus.com/es/>
- [40] [https://www.reddit.com/r/aviation/comments/2ca5oi/the\\_skin\\_of\\_an\\_a3b\\_skywarrior\\_wrinkles\\_under\\_the/](https://www.reddit.com/r/aviation/comments/2ca5oi/the_skin_of_an_a3b_skywarrior_wrinkles_under_the/)
-

## BIBLIOGRAFÍA

---

- [41] [http://shellbuckling.com/presentations/stiffenedCylinders/pages/page\\_114.html](http://shellbuckling.com/presentations/stiffenedCylinders/pages/page_114.html)
- [42] <http://digital.library.unt.edu/ark:/67531/metadc60912/m1/39/>
- [43] <http://www.deutsches-museum.de/en/collections/transport/aeronautics/sailplanes/phoenix/>
- [44] <http://www.boeing.com/commercial/787/>
- [45] <http://www.mmsonline.com/articles/getting-to-know-black-aluminum>
- [46] <http://www.a350xb.com/industrial-process/>
- [47] <https://avtales.wordpress.com/2015/05/30/diagonal-tension-in-fuselage-skins/>