

# La transformada de Fourier.

## Aplicación al filtrado de imágenes

<b>Apellidos, nombre</b>	Ruiz Fernández, Luis Ángel (laruiz@cgf.upv.es)
<b>Departamento</b>	Ingeniería Cartográfica, Geodesia y Fotogrametría
<b>Centro</b>	ETSI. Geodésica, Cartográfica y Topográfica



## 1 Introducción

El filtrado de imágenes digitales puede abordarse de manera más intuitiva cuando se realiza en el espacio de las frecuencias, una vez aplicada la transformada de Fourier a la imagen. La generación de filtros paso-bajo, paso-alto y paso banda es directa, aunque su mayor potencial reside en la creación de filtros para la eliminación del ruido periódico. Para la interpretación del espectro (imagen transformada) y el diseño de filtros se requiere conocer algunos elementos clave que permitan identificar los patrones asociados al ruido. En este tema se describen los principios teóricos básicos de la transformada de Fourier en funciones continuas y discretas, se enumeran algunas propiedades de la transformada, en particular el teorema de la convolución, y se definen los pasos básicos para la interpretación del espectro de Fourier y la definición de filtros en el dominio de las frecuencias.

## 2 Objetivos

- Identificar los principios básicos de la transformada de Fourier sobre una imagen discreta, así como sus propiedades.
- Interpretar los patrones típicos en las imágenes transformadas (dominio de las frecuencias) y su relación con las imágenes en el dominio espacial.
- Diseñar filtros en el dominio de las frecuencias para la reducción del ruido genérico (paso-bajo), el realce de las altas frecuencias (paso-alto) y la eliminación del ruido periódico.

## 3 La transformada de Fourier

Una imagen se puede representar como la suma de dos componentes con diferentes escalas espaciales: la versión de la imagen con las bajas frecuencias y la de la imagen con las altas frecuencias. La transformada de Fourier supone la extensión de esta idea a muchas escalas. Una señal unidimensional se puede descomponer en un conjunto infinito de señales de tipo seno con diferentes frecuencias, amplitudes y fases. El primer componente representa la amplitud media de la señal y tiene frecuencia cero. El siguiente componente, o fundamental, presenta la misma frecuencia que la señal original. Los demás componentes van adquiriendo frecuencias sucesivamente superiores y se denominan armónicos. A medida que se van añadiendo los sucesivos componentes, la suma se va aproximando cada vez más a la señal original, aunque se necesita un número infinito de aquéllos para obtener ésta de forma exacta. A la suma total de componentes se le denomina serie de Fourier de la función original.

Una imagen digital puede entenderse como una señal discreta bidimensional, de forma que su serie de Fourier es una suma finita de senos y cosenos. Para obtener la imagen original será preciso sumar todos los términos de la serie. La suma parcial de los primeros componentes, con frecuencias más bajas, producirá una versión de las bajas frecuencias de la imagen similar al resultado de aplicar un filtro o máscara paso-bajo a la imagen original. Análogamente, la suma de los últimos componentes de la serie, con frecuencias superiores, producirá versión de la imagen de altas frecuencias similar a la obtenida al aplicar un filtro paso-alto. La



frecuencia espacial de una imagen representa la distribución espacial de las intensidades o niveles de gris y sigue una ley sinusoidal, caracterizada por su amplitud, fase, frecuencia y orientación.

### 3.1 Transformada continua

La transformada de Fourier de una función continua unidimensional  $f(x)$  viene dada por la expresión

$$F(u) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \cdot e^{-j2\pi ux} dx$$

donde  $u$  es la variable en el espacio de la frecuencia, y  $j = (-1)^{1/2}$

Análogamente, dada  $F(u)$ , puede obtenerse la función  $f(x)$  calculando la transformada inversa de Fourier

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(u) \cdot e^{j2\pi ux} du$$

Ambas transformadas existen siempre que  $f(x)$  sea continua e integrable y que  $F(u)$  sea integrable, condiciones que casi siempre se satisfacen en la práctica. La transformada de Fourier de una función real  $f(x)$  consta, en general, de una parte real  $R(u)$  y otra imaginaria  $I(u)$ , de forma que

$$F(u) = R(u) + j I(u)$$

o también puede expresarse en términos de amplitud  $|F(u)|$  y fase  $\phi(u)$ :

$$F(u) = |F(u)| \cdot e^{-j\phi(u)}$$

donde

$$|F(u)| = \sqrt{R^2(u) + I^2(u)}$$

y

$$\phi(u) = \operatorname{arctg} \left[ \frac{I(u)}{R(u)} \right]$$

A  $|F(u)|$  se le conoce normalmente como el espectro de Fourier o módulo del espectro, y a  $\phi(u)$  como su ángulo de fase. Al cuadrado del módulo,  $|F(u)|^2$ , se le denomina espectro de energía de  $f(x)$ .

El término exponencial complejo puede escribirse, siguiendo el teorema de Euler, de la forma

$$e^{j2\pi ux} = \cos 2\pi ux + j \operatorname{sen} 2\pi ux$$

Interpretando la ecuación de la transformada inversa de Fourier como una suma de términos discretos, resulta que la función inicial  $f(x)$  está compuesta por un



número infinito de funciones seno y coseno, y el valor de  $u$  representa la frecuencia de los respectivos pares seno y coseno.

La transformada de Fourier puede extenderse a una función bidimensional  $f(x,y)$ :

$$F(u, v) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi(ux+vy)} dx dy$$

y su transformada inversa

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} F(u, v) \cdot e^{j2\pi(ux+vy)} du dv$$

donde  $u$  y  $v$  son las variables de frecuencia, y el módulo y la fase pueden calcularse de forma análoga al caso unidimensional.

### 3.2 Transformada discreta

Suponiendo funciones bidimensionales discretas, como es el caso de las imágenes digitales, la transformada discreta de Fourier ó DFT (*Discrete Fourier Transform*) se obtiene empleando sumatorios en lugar de integrales:

$$F(u, v) = \frac{1}{M \cdot N} \sum_{x=0}^{M-1} \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

donde  $M$  representa el número de columnas (píxeles en la dirección X) y  $N$  el número de filas (píxeles en la dirección Y). La transformación inversa viene dada por la expresión:

$$f(x, y) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} F(u, v) \cdot e^{j2\pi\left(\frac{ux}{M} + \frac{vy}{N}\right)}$$

El espectro de Fourier, la fase y el espectro de energía se calculan de la misma forma que en el caso de una función continua, con la única diferencia de que las variables independientes son ahora discretas. El componente de fase es relevante en cuanto a la estructura espacial de la imagen y contiene información sobre la posición relativa de las características u objetos en la imagen.

El rango dinámico del espectro de Fourier de una imagen es, en general, mucho mayor que el que puede reproducir un monitor o pantalla de visualización, por lo que sólo son visibles las zonas con intensidad más elevada en la imagen. Para compensarlo, la visualización del espectro se realiza aplicando la función

$$D(u, v) = c \cdot \log [1 + |F(u, v)|]$$

en lugar de  $|F(u,v)|$ , donde  $c$  es una constante de escalado. De esta forma, la función logarítmica realiza una compresión del rango dinámico, facilitándose considerablemente la visualización e interpretación del espectro de Fourier.



### 3.3 Propiedades de la transformada discreta

Algunas propiedades importantes de la transformada discreta de Fourier son:

- La **separabilidad** o posibilidad de escribir la transformada de la forma (suponiendo una imagen cuadrada de dimensión  $N \times N$ ):

$$F(u, v) = \frac{1}{N} \sum_{x=0}^{N-1} e^{-j\frac{2\pi ux}{N}} \cdot \sum_{y=0}^{N-1} f(x, y) \cdot e^{-j\frac{2\pi vy}{N}}$$

cuya principal ventaja es que, tanto  $f(x, y)$  como  $F(u, v)$ , pueden obtenerse en dos pasos sucesivos, aplicando la transformada de Fourier unidimensional o su inversa para cada fila y después para cada columna.

- La **traslación** o desplazamiento de la función  $f(x, y)$  no afecta a la magnitud de su transformada de Fourier. Resulta interesante debido a que el análisis visual de la transformada suele limitarse al estudio de su magnitud o módulo.
- **Periodicidad:** La DFT tiene un período de longitud  $N$ . La magnitud de la transformada está centrada en el origen. Para visualizar un período completo, basta con desplazar el origen de la transformada al centro de la imagen ( $U=N/2, V=N/2$ ). De esta forma, al trasladar  $F(0,0)$  al centro de la imagen, el pixel central en la imagen de la transformada de Fourier representa el valor de la intensidad media en la imagen.
- La **rotación** de  $f(x, y)$  en un ángulo  $\theta$  genera una rotación de  $F(u, v)$  en el mismo ángulo, y viceversa.
- La transformada y su inversa son **distributivas en la suma**, pero no en la multiplicación:

$$\mathfrak{F}[f_1(x, y) + f_2(x, y)] = \mathfrak{F}[f_1(x, y)] + \mathfrak{F}[f_2(x, y)]$$

sin embargo

$$\mathfrak{F}[f_1(x, y) \cdot f_2(x, y)] \neq \mathfrak{F}[f_1(x, y)] \cdot \mathfrak{F}[f_2(x, y)]$$

- **Valor medio:** El primer componente de la transformada,  $F(0,0)$ , representa el valor medio de la función discreta original, tal y como se ha comentado anteriormente.

Para el cálculo práctico de la DFT de una imagen de dimensión  $N \times N$  es preciso realizar un número proporcional a  $N^2$  operaciones de multiplicación. Por ello, en la práctica se emplea un algoritmo basado en la **transformada rápida de Fourier** ó **FFT** (*Fast Fourier Transform*), el cual se basa en la descomposición de la ecuación genérica de la DFT, de manera que el número de operaciones necesarias para implementar la transformada queda reducido a  $N \times \log_2(N)$ . Este método supone un gran ahorro de necesidades de cálculo y tiempo de procesado. El inconveniente del método de la FFT es que su aplicación queda restringida a imágenes cuyas dimensiones (número de píxeles) en X e Y sean potencias de 2.



### 3.4 Teorema de la convolución

La operación de convolución de una imagen digital en el dominio espacial  $(x,y)$  consiste, tal y como ya se ha estudiado anteriormente, en la aplicación de un filtro o máscara de un tamaño dado  $(3 \times 3, 5 \times 5, \dots)$ , pixel a pixel, operando con los valores de la imagen en el vecindario de cada pixel y con los pesos o coeficientes de ponderación que conforman el filtro, los cuales se eligen en función del objetivo del mismo. Así, la convolución discreta de una imagen digital  $f(x,y)$  mediante el filtro  $h(x,y)$ , según un vecindario definido por  $W$  viene dada por la expresión

$$f(x, y) * h(x, y) = g(x, y) = \sum_{i,j \in W} f_{ij}(x, y) \cdot h(i, j)$$

Si  $F(u,v)$  es la transformada de Fourier de  $f(x,y)$ , y  $H(u,v)$  es la transformada de Fourier de  $h(x,y)$ , entonces  $f(x,y) * h(x,y)$  tiene como transformada  $F(u,v) \cdot H(u,v)$ . Esto es,

$$f(x, y) * h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) \cdot H(u, v)$$

En otras palabras, la convolución en el dominio espacial  $(x,y)$  puede obtenerse también calculando la transformada inversa de Fourier del producto de  $F(u,v)$  por  $H(u,v)$ .

Análogamente, la convolución en el dominio de la frecuencia se reduce a la multiplicación en el dominio espacial:

$$f(x, y) \cdot h(x, y) \Leftrightarrow F(u, v) * H(u, v)$$

Ambos resultados son conocidos como **teorema de la convolución**. La importancia práctica de este teorema radica en que cualquier convolución de una imagen puede obtenerse como el producto de dos imágenes en el dominio de la frecuencia, lo que aporta como ventajas:

- El **diseño** de un filtro en el dominio de Fourier es **directo**, en función de la respuesta en frecuencias que se espere conseguir. Además, a partir de la respuesta en frecuencias se puede calcular la máscara de convolución equivalente en el dominio espacial mediante la transformada inversa de la matriz de filtrado.
- Mientras que la convolución en el dominio espacial tan solo es viable para máscaras pequeñas, debido al notable incremento en el tiempo de procesado, la convolución en el dominio de la frecuencia es independiente de este parámetro, siendo así indicada cuando se deseen aplicar **convoluciones de gran tamaño**.

## 4 Diseño de filtros en el espacio de las frecuencias

Como hemos visto anteriormente, una convolución puede aplicarse transformando ambos, imagen y filtro, al dominio de la frecuencia, multiplicando ambas transformadas entre sí y calculando la transformada inversa del resultado, tal y como se indica gráficamente en el esquema de la figura 1.

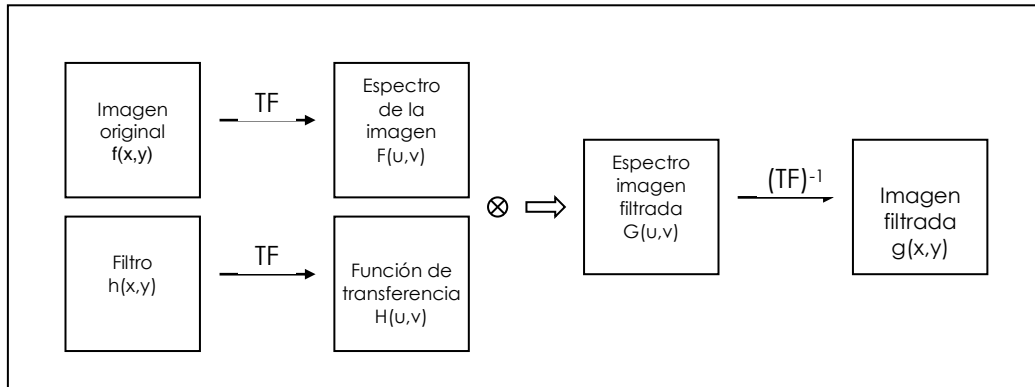


Figura 1.- Diseño y aplicación de filtros en el dominio de la frecuencia, mediante la utilización de la transformada de Fourier (TF) y de su inversa  $(TF)^{-1}$

La función de transferencia se refiere a la respuesta en frecuencias de un filtro. Dado que el tamaño del filtro es menor que el de la imagen, deberá completarse con ceros hasta alcanzar el mismo tamaño que la imagen antes de calcular su transformada. Los filtros se definen directamente en el espacio de Fourier sobre el propio espectro de la imagen original.

Los valores de los píxeles en la imagen de la transformada de Fourier,  $F(u,v)$ , representan los componentes de frecuencia espacial, verticales y horizontales, de la imagen original, análogamente a la frecuencia de una señal en el tiempo. Así, una señal sinusoidal con alta frecuencia, por ejemplo, varía muy rápidamente, mientras que otra con una frecuencia baja varía lentamente en el tiempo. De la misma forma, una imagen con una elevada frecuencia espacial en la dirección horizontal, contiene cambios frecuentes de intensidad en la dirección horizontal.

En la figura 2 se muestran ejemplos de tres imágenes con sus respectivas transformadas. En ellas se pueden ver tres distribuciones espaciales distintas y el efecto que tienen sobre la representación en forma de imagen de sus transformadas, incluyendo el claro componente direccional de las frecuencias. La primera de ellas representa una escena agrícola con profusión de pequeñas parcelas de distintos cultivos, lo que conlleva a una gran cantidad de altas frecuencias en varias direcciones, generando una apariencia de estrella en su transformada, cuyos brazos son perpendiculares a las orientaciones dominantes

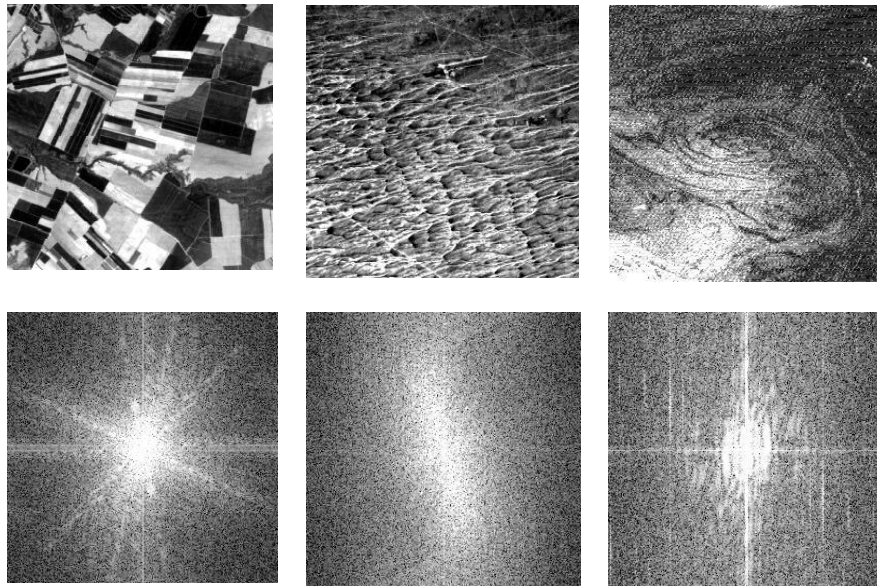


Figura 2.- Ejemplo de tres imágenes (arriba) con sus respectivas transformadas (abajo).

La segunda imagen representa un paisaje dunar, con una orientación dominante (NE-SW) debida a la acción de los vientos en la zona. Su transformada de Fourier se muestra en forma de nube, debido a que existe poca definición en la orientación dominante, alargada según la dirección perpendicular a la orientación de las dunas, es decir, según la dirección con mayor variación de la frecuencia espacial.

Por último, la tercera imagen representa una zona oceánica en la que se aprecian corrientes en forma helicoidal, lo cual se transforma en el espacio de Fourier, en una serie de pequeñas manchas próximas al origen (bajas frecuencias) y poco definidas linealmente (falta de periodicidad). Nótese que, en todas ellas, existe una línea vertical de elevada amplitud que pasa por el origen, debida al patrón periódico generado por el efecto de barrido transversal de los sensores, el cual tan solo se aprecia visualmente en la imagen inferior.

Un filtro **paso-bajo** consiste en la eliminación o atenuación de las altas frecuencias de la imagen. Para ello, bastará definir una máscara binaria de forma que al aplicarla sobre el espectro de frecuencias mantenga los valores bajos, situados en el centro de la imagen, y elimine los altos. Esto se consigue mediante círculos binarios de valor uno en el interior y cero en el exterior. Cuanto menor sea el radio del círculo, mayor será el efecto del filtro, ya que el intervalo de altas frecuencias que se elimina en la multiplicación ( $F(u,v) \times H(u,v)$ ) será mayor. Al contrario, cuanto mayor sea el radio del círculo, menor es el efecto del filtro (figura 3).

También puede determinarse la *discriminación* del filtro, entendida como la suavidad con la que pasa de la zona de corte a la de paso. Así, si en vez de definirse un círculo binario, el filtro se diseña como una función gaussiana con valores de 0 a 1, la elección de la desviación típica de la misma permite controlar la pendiente del corte de las frecuencias del filtro. En la figura 4 se muestran dos ejemplos, uno con una función gaussiana con  $\sigma=0,2$ , y en el otro con  $\sigma=0,8$  \*. Tal y

---

\*  $\sigma$  representa la desviación típica de la función gaussiana de filtrado



como se aprecia en los gráficos de los perfiles de los filtros, el primero realiza un filtrado de las altas frecuencias mucho más severo que el segundo.

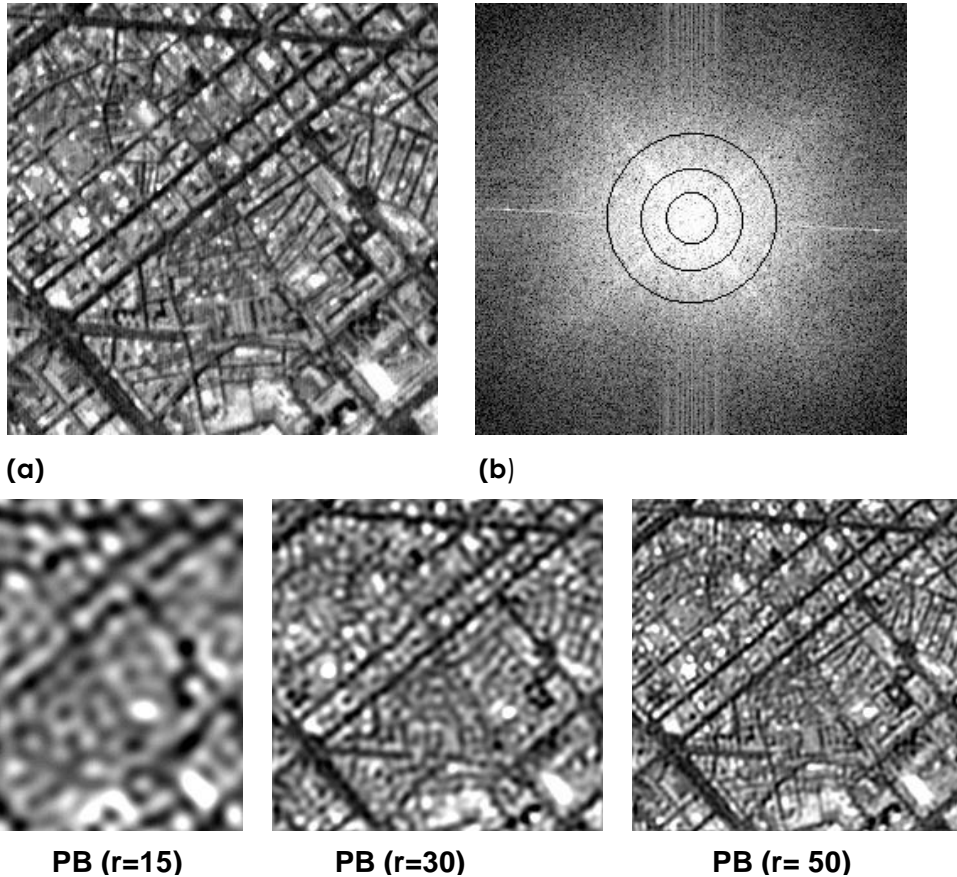


Figura 3.- Diseño de filtros paso-bajo en el espacio de la frecuencia: (a) Imagen original. (b) Espectro de Fourier con indicación de tres círculos de radio 15, 30 y 50 píxeles. En la fila inferior se representan las imágenes resultantes de aplicar los tres filtros paso-bajo definidos mediante los círculos binarios.

Análogamente, un filtro **paso-alto** podrá diseñarse de forma sencilla mediante una máscara binaria circular, tal que dentro del círculo tenga como valor cero, y fuera del mismo la unidad. Cuanto mayor sea el radio del círculo, mayor será el intervalo de bajas frecuencias que se elimina y, por lo tanto, más severo será el efecto del filtrado (figura 5a), al contrario de los que ocurría en el diseño de filtros paso-bajo.

Si el filtro se define mediante una máscara binaria en forma de anillo, con un radio interno y otro externo, el efecto que se consigue es el filtrado de las frecuencias intermedias o extremas. Estos filtros se denominan **paso-banda** (figuras 5b y 5c).

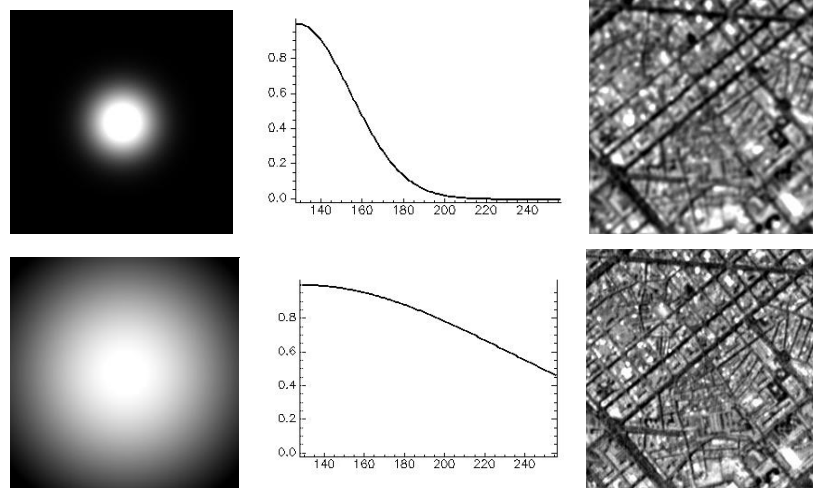


Figura 4.- Izquierda: Funciones de transferencia de dos filtros gaussianos,  $\sigma=0,2$  (arriba) y  $\sigma=0,8$  (abajo). Centro: Semiperfiles de ambos filtros. Derecha: Resultados de las imágenes filtradas.

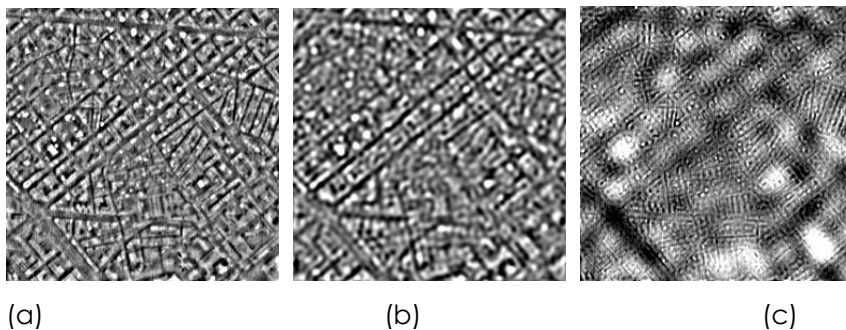


Figura 5.- Imágenes resultantes de aplicar diferentes filtros en el espacio de las frecuencias: (a) filtro paso-alto circular de radio=15; (b) paso-banda circular de frecuencias intermedias (entre 10 y 40); y (c) el mismo paso-banda circular pero de frecuencias extremas.

El **diseño de filtros específicos** en el espacio de Fourier es especialmente relevante cuando se trata de eliminar el **ruido periódico** en la imagen. Por ejemplo, supongamos la imagen de la figura 6a en la que se representa un detalle del mar Mediterráneo. En ella se aprecia claramente el bandeo horizontal provocado por el sucesivo barrido transversal del sensor TM de Landsat. El espectro de frecuencias refleja este efecto en forma de líneas verticales con diferentes frecuencias (figura 6b). El diseño de un filtro binario que enmascare o elimine estas líneas (figura 6c), y su multiplicación sobre el espectro, permite obtener la imagen filtrada en la que el patrón de bandeo horizontal o ruido periódico ha desaparecido (figura 6d). Nótese además cómo en el resultado aparecen ligeramente más realzadas las altas frecuencias que en la imagen original, debido a que el filtro elimina una pequeña parte de las bajas frecuencias correspondientes a la zona central (origen) del espectro.

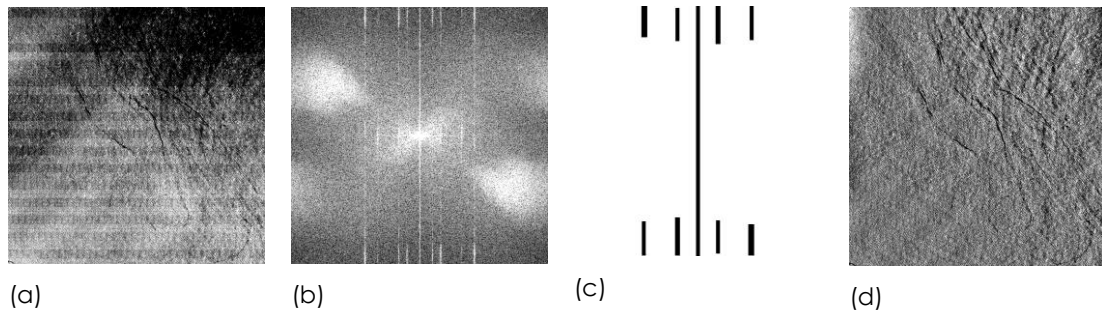


Figura 6.- Eliminación de ruido periódico: (a) Imagen original; (b) espectro de Fourier; (c) filtro binario específico; (d) resultado del filtrado.

**Ejercicio práctico:** Diseña un filtro en el espacio de Fourier que elimine el ruido periódico de la imagen de la figura 7.

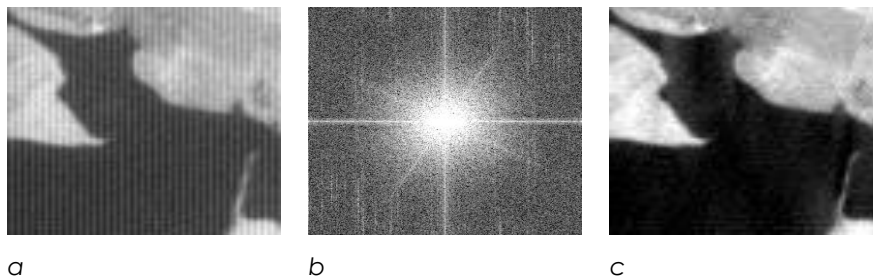


Figura 7.- a) imagen original; b) espectro de Fourier; y c) resultado del filtrado

## 5 Conclusiones

La transformada de Fourier puede emplearse para diseñar operaciones de filtrado en imágenes en el dominio de las frecuencias. Ello presenta algunas ventajas con respecto a las convoluciones realizadas mediante máscaras en el dominio espacial. Por un lado, es indicada cuando se trabaja con tamaños de filtro muy grandes. Además, el diseño de los filtros es más intuitivo, ya que el ruido está asociado a determinadas frecuencias, fácilmente identificables en el espectro de Fourier.

Su aplicación principal en este campo es el diseño de filtros para la eliminación del ruido periódico. Si bien se requiere interpretar las imágenes transformadas e identificar los patrones debidos al ruido, una vez hecho esto su eficiencia es muy superior y, en ocasiones, la única alternativa viable de filtrado.

## 6 Bibliografía

- Remote Sensing. Models and Methods for Image Processing. Robert A. Schowengerdt. Academic Press, 1997.