UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Tesis doctoral

La modelización como herramienta de evaluación competencial

Autor

César Gallart Palau

Directores

Dr. Luis Miguel García Raffi ***(Universitat Politècnica de València)***

Dra. Irene Ferrando Palomares ***(Universitat de València)***

València, junio de 2016

Agradecimientos

A mi mujer, María, y a mi hija, Marina, por su paciencia y comprensión. Sin su apoyo hubiera sido imposible realizar este trabajo. Ahora me toca compensarlas.

A mis directores, Irene y Lluís, por sus enseñanzas, su tiempo, y muy especialmente, su amistad. Muchas gracias por acompañarme durante estos cinco años. Espero seguir trabajando con vosotros por mucho tiempo.

A Jose Manuel Barat, que tuvo la genial idea de presentarme a Lluís.

A todos los que he podido conocer gracias a este trabajo y a todos aquellos que de una manera u otra han ayudado en su realización.

Gracias a todos.

Resumen

La creciente importancia de las competencias en nuestro sistema educativo, debida en parte a las pruebas externas de evaluación de la calidad educativa, como PISA, pone de manifiesto la necesidad, no solo de introducir cambios metodológicos en el proceso de enseñanza de las Matemáticas en la Educación Secundaria Obligatoria, sino también en el diseño de nuevos instrumentos que permitan desarrollar la competencia matemática, entendida como la capacidad de nuestros alumnos de matematizar situaciones de la vida real. En la presente tesis nos proponemos estudiar el papel que la modelización puede desempeñar en el desarrollo de la competencia matemática, en general, y en la resolución de problemas reales, en particular. Para ello diseñaremos una serie de tareas de modelización basadas en tres perspectivas diferentes y analizaremos los cambios metodológicos necesarios para implementar una actividad basada en la resolución de tareas de modelización en pequeños grupos de trabajo, en un aula de tercero de secundaria (14-15 años). A partir de las herramientas de investigación propuestas, realizaremos un doble análisis de la producción de los alumnos: de su proceso de resolución, tomando como referencia el ciclo de modelización; y de su modelo final, a partir de la terna conceptos-procedimientos-lenguajes. Analizaremos también los distintos roles asumidos por el profesor cuando interactúa con sus alumnos en dos momentos clave: durante el debate intragupo, con los alumnos de un mismo grupo mientras trabajan en el aula, y durante el debate intergrupo, entre alumnos de distintos grupos, mientras exponen públicamente sus trabajos. Mediante el análisis estadístico de las respuestas dadas a un test de competencias, analizaremos asimismo si el trabajo basado en tareas de modelización repercute positivamente en el desarrollo de las competencias necesarias para resolver problemas reales.

Resum

La creixent importància de les competències al nostre sistema educatiu, deguda en part a les proves externes d'avaluació de la qualitat educativa, com PISA, posa de manifest la necessitat, no solament d'introduir canvis metodològics al procés d'ensenyament de les Matemàtiques en l'Educació Secundària Obligatòria, sinó també pel que respecta al disseny de nous instruments que permeten desenvolupar la competència matemàtica, entesa com la capacitat dels nostres alumnes de "matematitzar" situacions de la vida real. En la present tesi ens proposem estudiar el paper que la modelització pot exercir en el desenvolupament de la competència matemàtica, en general, i en la resolució de problemes reals, en particular. Dissenyarem una sèrie de tasques de modelització basades en tres perspectives diferents i analitzarem els canvis metodològics necessaris per a implementar una activitat basada en la resolució de tasques de modelització en xicotets grups de treball, en un aula de tercer de secundària (14-15 anys). A partir de les eines de recerca proposades, realitzarem una doble anàlisi de la producció dels alumnes: del seu procés de resolució, prenent com a referència el cicle de modelització; i del seu model final, a partir de la terna conceptes-procediments-llenguatges. Analitzarem també els diferents rols assumits pel professor quan interactua amb els seus alumnes en dos moments clau: durant el debat intragup, amb els alumnes d'un mateix grup mentre treballen en l'aula, i durant el debat *intergrup, entre alumnes de diferents grups, mentre exposen públicament els seus treballs. Mitjançant l'anàlisi estadística de les respostes donades a un test de competències, analitzarem així mateix si el treball basat en tasques de modelització repercuteix positivament en el desenvolupament de les competències necessàries per a resoldre problemes reals.

Abstract

The concept of competency has become more and more important in our educational system, partly due because of external tests assessing educational quality, as PISA, highlight the need not only to introduce methodological changes in the teaching of mathematics in the Secondary education, but also to design new tools in order to develop mathematical competence, understood as the ability of our students to mathematize real life situations. In this thesis we want to study the role that modelling tasks can play in the development of mathematical competency, and, particularly, in problem solving. For this aim, we have designed a series of modelling tasks based on three different perspectives and we have analysed the methodological changes needed to implement this activity into small working groups in a ninth grade classroom (14-15 years). With the research tools designed for this thesis, we will analyse both the resolution process of the modelling tasks performed by students, having as a reference the modelling cycle and the final production, the model, under the categories of procedures, languages and concepts. We will also consider the different roles played by the teacher when interacting with students. For this aim we will analyse two key moments: the debate between students of the same working group during the development of the modelling activity in the classroom (intragroup debate), and the discussion between students from different groups during the public presentation of their works to their fellows (intergroup debate). The statistical analysis of responses to a test of competencies will give us evidences about the positive influence of modelling tasks in the development of the necessary competencies to solve real problems.

Índice

Figuras

Tablas

Capítulo I

Introducción. Preguntas y objetivos de la investigación

En este capítulo presentamos una breve introducción sobre la importancia y relevancia creciente de la modelización en la educación matemática actual, que nos lleva a plantear las preguntas que pretendemos responder y los objetivos que queremos alcanzar mediante nuestra investigación.

I.1. Introducción

Uno de los temas centrales de la didáctica de las matemáticas durante los últimos 30 años ha sido la modelización matemática y las aplicaciones de las matemáticas a campos extra-matemáticos. En efecto, ya durante la década de los años 60 del siglo pasado, en parte como reacción a la matemática moderna, se erigieron los primeros defensores de la modelización y las aplicaciones de las matemáticas (es frecuente en la literatura el uso indistinto de ambos términos) como herramienta de enseñanza y aprendizaje. En esta línea destaca la postura defendida por Hammersley (1968), que, en el primer volumen de Educational Studies, publica un artículo titulado "*On the enfeeblement of mathematicals skills by modern mathematics and suimilar soft intelectual trash in schools and universities*". En ese mismo número de la revista encontramos otros artículos recogidos del simposio organizado por Hans Freudenthal en 1967 alrededor del tema "*How to teach mathematics so as to be useful?*". También conviene destacar el artículo de Pollak (1968) en el que, desde un punto de vista irónico, el autor describe lo que son y lo que no son, a su parecer, aplicaciones de las matemáticas, y que tendrá su continuación, ya en el segundo volumen de esta revista (1969), con el artículo "*How can we teach applications of mathematics?*".

Desde entonces, la importancia de estos temas se ha refrendado a través de la riqueza de la literatura existente, incluyendo material generado en numerosas conferencias internacionales (ICME, ICTMA, entre otros). Un ejemplo de esto son las actas del ICMI XIV (Blum y otros, 2002), en las que se describe de forma detalla cómo se ha producido el desarrollo de la modelización y las aplicaciones como campo de estudio en el ámbito de la Investigación en Didáctica de las Matemáticas, partiendo de la premisa de que la modelización corresponde al proceso de resolución de un problema real. En la misma línea, Maaß (2010, p. 287) señala que "modelizar significa comprender un problema realista, establecer un modelo del problema y encontrar una solución trabajando matemáticamente sobre el modelo".

En cualquier caso, pese a que la modelización y las aplicaciones empiezan a jugar un papel en las aulas mayor que hace unos años, existe aún una brecha importante entre los ideales expresados en los debates educativos y en los programas de estudio y la práctica diaria en las aulas. Así, las recomendaciones que emanan del informe Cockroft (1982), los estándares de calidad del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM, 2000), el proyecto KOM (Niss, 2003 y 2004), el informe para la evaluación de la calidad educativa PISA (OCDE, 2014a y 2014b) y la inclusión en los diseños curriculares de las competencias clave (OCDE, 2004), en particular en nuestro sistema educativo mediante la Ley Orgánica de Educación LOE y la más reciente LOMCE (Real Decreto, 1105/2014), sitúan como foco de atención la resolución de problemas del mundo real en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas. Según Blum y Niss (1991, p. 44) la enseñanza de las matemáticas tiene que relacionarse con el papel y el uso de las matemáticas en el mundo real, y no solo ni exclusivamente, en el ámbito de las matemáticas mismas. La modelización puede actuar pues como puente entre el mundo real y el mundo de las matemáticas.

Desde el informe PISA la alfabetización matemática (*mathematical literacy*, en el original en inglés y que ha venido traduciéndose por competencia matemática), definida como la capacidad de "entender las matemáticas en el mundo, emitir juicios bien fundados y utilizar y relacionarse con las matemáticas de forma que se puedan satisfacer las necesidades de la vida de los individuos como ciudadanos constructivos, comprometidos y reflexivos" (OCDE, 2006, p. 74), se considera fundamental en el mantenimiento y formación de toda sociedad democrática al ser un componente esencial en el modo que tenemos de percibir y entender el mundo que nos rodea (Niss, 2003). Esta competencia general se desglosa en una serie de competencias específicas tomadas del proyecto danés KOM (Niss, 2004), entre las que se encuentra la competencia en modelizar (ver Maaß, 2006).

Desde esta nueva perspectiva competencial, el dominio de las matemáticas ya no puede considerarse equivalente a conocer solo un conjunto de hechos matemáticos y, por tanto, su enseñanza debe orientarse, según Goñi (2010), más hacia el “saber aplicar el conocimiento matemático” que hacía el “saber matemáticas”. En efecto, tal y como señalan Verschaffel, Vicente y Van Dooren (2008), la evaluación de la alfabetización matemática del informe PISA difiere de las realizadas tradicionalmente ya que muchos alumnos que sobresalen en las evaluaciones tradicionales a menudo tienen dificultades para poner en práctica sus conocimientos matemáticos en el mundo real. Este hecho corrobora lo afirmado por Niss (1999), el conocimiento de la teoría matemática no garantiza que ésta se transfiera a la capacidad de resolver problemas no rutinarios de la vida real.

Maaß (2006, p. 115) define las tareas de modelización como “problemas auténticos, complejos y abiertos, relacionados con la realidad”, y afirma que su integración “en la práctica diaria de la enseñanza prepara a los estudiantes para actuar con integridad como ciudadanos individuales y en sociedad y a desarrollar una competencia crítica” (Maaß, 2005, p. 70). Así, la resolución de una tarea de modelización puede ser la oportunidad para concienciar a los alumnos de la importancia de las matemáticas en la resolución de los problemas del mundo real, su aplicación a otras áreas de conocimiento, el uso de las nuevas tecnologías (Berry, 2002, Kadijevich, Haapasalo y Hvorecky, 2005) o su papel en los medios de comunicación e información (Borba, 2009, Villarreal, Esteley y Mina, 2010), pero también pueden ayudar a la construcción significativa de conocimiento matemático (Blum y Niss, 1991; Blum, 1993, Zawojewski, 2010) y a desarrollar una comprensión más profunda y fuerte de las matemáticas del currículum (Zbiek y Conner, 2006). De esta forma, la introducción de la modelización en el aula (en particular, en el aula de secundaria, como es nuestro caso), puede tener estas dos perspectivas, no excluyentes y complementarias (Julie y Mudalay, 2007): por un lado, la modelización como vehículo para introducir un conocimiento matemático concreto; por otro, la modelización como vía para desarrollar la competencia en resolución de problemas. En nuestra investigación hemos optado por esta última perspectiva, con el fin de trabajar y potenciar en nuestros alumnos aquellos procesos relacionados con la resolución de problemas situados en un contexto real y la construcción de modelos, desde un enfoque competencial y funcional de las matemáticas.

I.2. Contextualización

Como hemos visto, existe una corriente dentro de la educación matemática que demanda una enseñanza más enfocada hacia la adquisición y el desarrollo de las competencias matemáticas y a contenidos relacionados con la modelización y las aplicaciones de las matemáticas en el mundo real. Los resultados del informe PISA señalan la necesidad de introducir en las aulas la resolución de problemas con información no estrictamente matemática, que precisen matematizar la realidad y potencien el desarrollo de la competencia en resolución de problemas reales y el desarrollo integrado de las competencias matemáticas, en el sentido propuesto por el proyecto KOM. Como hemos señalado anteriormente, numerosos autores sugieren que las tareas de modelización pueden ser la respuesta a esta necesidad. Contamos con diversos ejemplos sobre cómo diseñar e implementar tareas de modelización en el aula: las *Modelling-Eliciting Ativities* (MEAs, ver Lesh y Doerr, 2003), el proyecto europeo LEMA (acrónimo en inglés de *Learning and Education in and through Modelling and Applications*), y los Proyectos Matemáticos Realistas (PMR) de Sol y el grupo Vilatzara (Sol, 2008). Además, y como se recoge desde estas perspectivas, la introducción de la modelización en el aula supone un cambio metodológico importante respecto al de una clase tradicional y conlleva una revisión profunda del papel del profesor y el alumno. En efecto, en la enseñanza de la modelización, el peso principal bascula del profesor, propio de la enseñanza más tradicional, al alumno, que pasa a asumir mayores cotas de responsabilidad e iniciativa, y esto puede suponer una dificultad añadida (Burkhardt, 2006).

En los párrafos anteriores se ha desgranado el contexto en el que se sitúa nuestra investigación, pero falta concretar qué cuestiones específicas pretendemos abordar en ella. Éstas se pueden resumir en las siguientes preguntas de investigación:

- *P1: ¿En qué sentido las tareas de modelización permiten el desarrollo integrado de las competencias matemáticas, según se describen en el proyecto KOM?*
- *P2: ¿Qué implicaciones tiene la introducción de las tareas de modelización en las actuaciones del profesor en el aula?*
- *P3: ¿La enseñanza basada en tareas de modelización repercute positivamente en el desarrollo de las competencias necesarias para resolver problemas reales?*

I.3. Objetivos de la investigación

Para dar respuesta a estas preguntas se fijaron los siguientes objetivos de investigación:

- O1: Diseñar tareas a partir de las diferentes perspectivas descritas (las MEAs, el proyecto LEMA y los PMR) con las que implementar en el aula una actividad basada en la modelización.
- O2: Analizar los procesos y los modelos producidos documentando las actuaciones de los alumnos cuando resuelven dichas tareas.
- O3: Observar y describir los cambios metodológicos necesarios para implementar una actividad de modelización en el aula de secundaria, especialmente aquellos referidos al papel del profesor y sus intervenciones con los alumnos.
- O4: Analizar si el trabajo en tareas de modelización mejora las competencias necesarias para resolver problemas reales.

En el Capítulo II, realizaremos una revisión profunda de la literatura relacionada con estas preguntas y objetivos de forma que se concrete el marco teórico en el que se ha realizado esta investigación. En el Capítulo III, describiremos el diseño de la investigación y la metodología de trabajo en el aula. Detallaremos el diseño de las tareas de modelización propuestas (lo cual cubrirá parte del objetivo O1), describiremos las herramientas necesarias para documentar el proceso de resolución de nuestros alumnos (relacionados con el objetivo O2) y se explicará la puesta en marcha del test de competencias, su diseño y evaluación (relacionado con el objetivo O4). También trataremos aquí los cambios metodológicos introducidos en el aula durante la resolución de una tarea de modelización, prestando especial atención al papel del profesor durante la actividad modelizadora de sus alumnos (en línea con el objetivo O3). En el Capítulo IV analizaremos los resultados obtenidos en nuestra investigación y que pretenden dar respuesta a las preguntas planteadas. Finalmente expondremos nuestras conclusiones y reflexiones finales en el Capítulo V.

Capítulo II

Marco Teórico

La modelización matemática es tratada desde diversos enfoques, según autores (ver Kaiser, Blomhøj y Sriraman, 2006a y 2006b, Kaiser y Sriraman, 2006, Blomhøj, 2008), y ha generado abundante literatura en el marco de la Didáctica de las Matemáticas, entre la que destacamos la colección de libros publicados por la *International Community of Teaching of Mathematical Modelling and Applications*, ICTMA, con las actas de sus congresos. En este capítulo vamos a realizar una revisión de la literatura más reciente asociada a nuestra investigación. Para dar una adecuada visión de conjunto, hemos dividido este capítulo en cinco apartados que pasamos a describir.

En el primero de ellos, "La modelización y la resolución de problemas", pretendemos analizar cómo describe la literatura el uso de la modelización desde la perspectiva de la resolución de problemas.

En el segundo apartado, "El proceso de modelización", se comentarán distintos trabajos centrados en describir el proceso de resolución de un problema de modelización, así como las fases y transiciones que conforman el denominado ciclo de modelización.

En el tercer apartado, "Distintas aproximaciones a las tareas de modelización", mostraremos diferentes perspectivas respecto a este tipo de tareas, como el proyecto LEMA, las MEAs y las PMR, que nos servirán de referencia en nuestra investigación.

En el cuarto apartado, “Las competencias y la modelización”, nos detendremos a examinar el concepto de competencia matemática, desde el punto de vista de las pruebas PISA y del proyecto danés KOM, y analizaremos la competencia en modelización.

El quinto y último apartado lo dedicaremos a ver, a través de distintos trabajos publicados, cuál parece ser la metodología recomendada para llevar a cabo una actividad de modelización en el aula, las barreras y dificultades que ello conlleva, y el papel que juega el profesor y el alumno en este tipo de enseñanza.

II.1. La modelización y la resolución de problemas

En la literatura es frecuente el uso indistinto de los términos “aplicaciones” y “modelización” para referirse a cualquier forma de relación entre el mundo real y el mundo de las matemáticas (Blum y Niss, 1991, Blum, 1993, Blum y otros, 2002). Mientras el término “modelización” se centra más en el binomio realidad-matemáticas y los procesos involucrados en esta dirección, el término “aplicación” se centra en la dirección opuesta, matemáticas-realidad y los procesos relacionados, como el uso de modelos matemáticos preexistentes que puedan ser utilizados en el mundo real (ver ejemplos del uso de estos modelos en Lingefjärd, 2006, y Stillman, 2011). Pero, como señalan Blum y Niss (1991) y Blum (1993), con el término modelización matemática, de forma más frecuente, se hace referencia a todo el proceso completo (realidad-matemáticas, matemáticas-realidad) de resolución de un problema perteneciente al mundo real, aunque autores como Maaß (2010) utilizan también el término “auténtico” para referirse al contexto en el que se sitúan este tipo de problemas (como veremos en un próximo apartado). En las actas del ICMI XIV (Blum y otros, 2002) se dan las claves y nociones necesarias para entender este proceso de resolución, denominado de modelización, del que hablaremos en detalle más adelante.

Así, la modelización matemática está asociada indiscutiblemente con la resolución de problemas (más en concreto, con la resolución de problemas reales). Blum y Niss (1991, p. 37) definen el término problema como “una situación que lleva consigo ciertas preguntas abiertas que son un desafío intelectual para alguien que no está inmediatamente en posesión de los métodos, procedimientos y algoritmos directos suficientes para resolverlo”. Ciertamente, lo que para una persona puede suponer un problema, para otra, poseedora del método, procedimiento o algoritmo necesario para su resolución, puede no serlo y tratarse simplemente de un ejercicio rutinario. Por ello, a la hora de diseñar un problema o tarea, como señala Zawojewski (2010), debemos analizar no solo la naturaleza del proceso de resolución, sino también la naturaleza del propio resolutor del problema. Desde este punto de vista, la definición de Zawojewski y Lesh (incluida en Zawojewski, 2010), pone el foco en ambos elementos, la resolución y el resolutor: "Una tarea o actividad se convierte en un problema cuando el resolutor (o grupo de resolutores) necesita desarrollar una forma productiva de pensamiento matemático acerca de la situación planteada" (p. 238).

En la literatura podemos encontrar, asociado al concepto de problema, términos, como "problema verbal", "problema real" o "problema de modelización". Estos términos suelen estar asociados a su vez con enfoques distintos sobre la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas y a ellos nos dedicaremos en los siguientes apartados.

II.1.1. Los problemas verbales

Los problemas de enunciado verbal aritmético-algebraicos presentan un texto, en lenguaje natural, "cuya lectura ha de ignorar cualquier significado que no tenga que ver con las cantidades y las relaciones de las que habla la historia del problema" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, p. 330). Así, la fase principal en el proceso de resolución de un problema verbal "es la traducción del enunciado del problema a la expresión aritmética o algebraica que proporciona su solución" (Puig y Cerdán, 1990, p. 2). Este tipo de problemas son habituales en los libros de texto, y aunque presentan enunciados que hacen referencia a la realidad (podemos ver un análisis del uso de determinadas "realidades matemáticas" en los libros de texto en Alsina, 2007), la situación dada suele ser un mero disfraz de un problema puramente matemático: "el proceso de resolución consiste simplemente en desnudar el problema" (Blum, 1993, p. 4). Según Peled y Balacheff (2011), el aspecto realista de este tipo de problemas queda relegado, en muchas ocasiones, a la aplicación de una determinada estructura matemática, sin apenas análisis de la situación en la que se enmarcan, al contrario que en los problemas de modelización, donde el resolutor "necesita involucrarse en un proceso de interpretación de la situación"

(Zawojewski, 2010, p. 238). Precisamente, en la resolución de los problemas verbales, lo “dado” y los “objetivos” son fijos e inmutables, mientras que en los problemas de modelización, lo “dado” y los “objetivos” son dinámicos, en constante reinterpretación y reformulación (Zawojewski, 2010, p. 240, Zawojewski y Lesh, 2003, pp. 318-319).

Algunos autores como Verschaffel (2012) han observado que, ante los problemas reales, donde el contexto juega un papel importante, el alumno suele dar respuestas estereotipadas “que muestran una aparente voluntad de ignorar cosas que se saben sobre el mundo, el lenguaje y la lógica” (p. 30), lo que Verschaffel denomina “suspensión de búsqueda de la realidad”. Esto le lleva a pensar que algunos factores de la vida escolar impiden a muchos estudiantes resolver correctamente este tipo de problemas, entre los que se señalan los siguientes (ver también Verschaffel, Vicente y Van Doren, 2008):

- Todo problema presentado por el profesor o el libro de texto puede resolverse y tiene sentido.
- Cada problema tiene una única respuesta, generalmente numérica (y preferiblemente un número entero pequeño, lo que se denomina también un “número limpio”).
- El problema contiene por sí mismo toda la información necesaria para generar la interpretación matemática correcta y llegar a la solución.
- El estudiante no necesita aportar su experiencia en la vida real ya que las situaciones presentadas por el enunciado suelen ser totalmente artificiales. Las personas, objetos, lugares y razonamientos no tienen nada que ver con las situaciones del mundo real, por lo que no hay que preocuparse de si la situación propuesta viola los conocimientos previos o las experiencias personales de la vida real.

Finalmente, como conclusión a las dificultades identificadas en la resolución de problemas reales, Verschaffel propone modificar, no solo los problemas de los libros texto (que en buena medida es algo que se está produciendo ya a raíz del enfoque competencial de las últimas reformas educativas en nuestro estado), sino también los métodos propios de la enseñanza tradicional de las matemáticas y la resolución de problemas, sin renunciar a una coexistencia de ambos tipos de instrucción (Verschaffel, Vicente y Van Doren, 2008, p. 403). Su solución implica complementar los problemas verbales de los libros de texto con otros que describan situaciones del mundo real y que no hayan sido previamente simplificados, “en los que sea necesario pensar en la relación entre la situación real a modelar y el modelo matemático para resolver el problema, donde además dicha relación sea cuestionable y no surja de una deducción inmediata” (Verschaffel, 2012, p. 40).

A continuación hablaremos de la resolución de problemas reales desde la perspectiva de la Educación Matemática Realista.

II.1.2. Los problemas reales y la Educación Matemática Realista

Los problemas reales, que Verschaffel define como “problemas que reproducen situaciones problemáticas presentes en la vida cotidiana y en el trabajo y para cuya resolución es necesario saber cuándo y cómo debe aplicarse el conocimiento matemático, pero también el no matemático” (Verschaffel, Vicente y Van Dooren, 2008, p. 393), se enmarcan dentro de la teoría de la Educación Matemática Realista (EMR), iniciada con Freudenthal en Holanda y que podemos situar en conexión con las teorías socio-constructivistas (De Lange, 1996, p. 59).

La EMR se fundamenta en seis principios (Freudenthal, 1968 y Heuvel-Panhuizen, 2002): principio de actividad; principio de reinvención guiada; principio de realidad; principio de niveles; principio de interrelación; y principio de interacción, que pasaremos a comentar a continuación. En efecto, según la EMR, las matemáticas se conciben como una “actividad humana” (principio de actividad), de forma que los alumnos tienen la oportunidad de reinventarlas, utilizándolas en contextos realistas, cercanos y relevantes para la sociedad (Bressan y Gallego, 2011). Desde este punto de vista, las matemáticas no se presentan como algo cerrado sino que son los propios alumnos quienes, de una manera activa (principio de reinvención guiada), las construyen a través de un doble proceso de matematización (Treffers, 1987): de matematización horizontal, mediante el que se convierte un problema real en un problema matemático; y de matematización vertical, consistente en resolver un problema dentro del mundo de las matemáticas. Según esta perspectiva, las matemáticas se aprenden haciendo matemáticas en contextos reales: situaciones reales en la vida cotidiana pero también situaciones reales en la mente de los alumnos (principio de realidad). A través de la matematización de estas situaciones reales, los alumnos transitan a lo largo de diferentes niveles de comprensión creciente (situacional, referencial, general y formal), desde los más informales a los más formales y abstractos (principio de niveles). Estas situaciones incluyen contenidos matemáticos interrelacionados, no estancados en bloques separados (principio de interrelación). Mediante la interacción social en el aula entre los alumnos (interacción horizontal) y los alumnos con el profesor (interacción vertical) se pueden alcanzar niveles más altos de comprensión (principio de interacción).

La construcción de modelos a partir del conocimiento matemático informal de los alumnos sobre una situación o contexto determinado, y su paulatina formalización y generalización a otras situaciones o contextos, en lo que viene a denominarse “modelización emergente”, se convierte en parte fundamental del proceso de matematización o modelización desde la perspectiva de la EMR (Gravemeijer, 2007, p. 139, Carreira y Baioa, 2011, p. 214).

En esta línea se enmarcan los problemas de modelización, de los que hablaremos a continuación.

II.1.3. Los problemas de modelización

Como hemos señalado en la introducción, Maaß (2006, p. 115) define los problemas de modelización como auténticos, en el sentido de pertenecientes al mundo real o a una realidad inventada pero plausible (sobre el uso del término “auténtico” hablaremos más adelante en este mismo apartado), complejos, en el sentido de que el proceso de resolución no es conocido de antemano sino que requiere de un proceso previo de reflexión, y abiertos, en el sentido de puede haber más de una vía de resolución o solución posible. Blomhøj y Kjeldsen (2006, p. 167) caracterizan las tareas de modelización del siguiente modo:

(a) Que puedan ser reconocidas y comprendidas por los estudiantes.
(b) Que ofrezcan un reto adecuado para el trabajo de los estudiantes independientemente del apoyo de los profesores.
(c) Que sean auténticas o que incluyan datos auténticos, es decir, que sean relevantes en alguna situación real fuera del contexto escolar y al uso de la propia experiencia de los alumnos.
(d) Que sean abiertas por el propio interés de los resultados, es decir, que muestren que los modelos matemáticos pueden añadir significado a la situación y proporcionar nuevos conocimientos sobre el problema.
(e) Que se abran a la crítica del modelo y/o de los resultados.
(f) Que conduzcan a actividades que sean, en algún sentido, representativas del tipo particular de situaciones susceptibles de ser modelizadas.
(g) Que desafíen a los alumnos a trabajar apropiadamente con los conceptos y métodos que son relevantes para su aprendizaje de las matemáticas.

En los problemas de modelización, “la situación y las cuestiones definidas en él pertenecen a algún segmento del mundo real y permiten que algunos conceptos, métodos y resultados matemáticos se involucren” (Blum y Niss, 1991, p. 37). El término “mundo real” o “realidad”, en el ámbito de la modelización, se refiere, según Blum y otros (2002), a todo lo que tiene que ver con la naturaleza, la sociedad o la cultura, incluyendo la vida cotidiana, la escuela, la universidad o las disciplinas académicas y científicas diferentes de las matemáticas. El uso del término “auténtico” para definir el tipo de tareas que la modelización propone (ver Maaß, 2010, p. 298), no implica que lo sean en sentido estricto, sino que pueden ser auténticas en algunos aspectos, como puedan ser su origen o finalidad, aunque contengan otros aspectos con un claro propósito educacional (ver el análisis del uso del término auténtico dentro de la enseñanza de la modelización en Vos, 2011).

La resolución de un problema de modelización (proceso del que hablaremos en detalle en el siguiente apartado) implica la construcción de un modelo matemáticamente significativo. Con el término “modelo” nos referiremos a una representación simplificada y aproximada de la realidad (Maaß, 2010, p. 287).

Finalmente, entendemos que los problemas (o tareas) de modelización son un tipo concreto de problemas reales (o afines a la realidad, como señala Maaß, 2006, p. 114), en los que la creación de un modelo es uno de los aspectos clave de su resolución.

El proceso de resolución de un problema de modelización presenta unas características diferenciadoras con respecto al de otro tipo de problemas. Algunas de estas características han sido ya esbozadas anteriormente. Dedicaremos el próximo apartado a un análisis detallado de este proceso, siendo uno de los aspectos que deberemos observar y documentar durante nuestra investigación.

II.2. El proceso de modelización

Polya (1965) estableció cuatro fases por las que un resolutor ideal transitaría a la hora de resolver un problema: comprender el problema; elaborar un plan para resolverlo; poner en marcha ese plan; y comprobar el resultado. En esta línea, la modelización puede verse también como un proceso, constituido por fases, a través del cual un resolutor ideal transitaría a la hora de resolver un problema del mundo real, en el que las matemáticas están presentes de una manera más o menos explícita. Así, la resolución de un problema de modelización es un caso particular de la resolución de problemas tal y como la plantea Polya.

Según Treffers (1987), la modelización implica un doble proceso de matematización, vertical y horizontal, entre la realidad y las matemáticas. Se parte de un problema del mundo real, que se simplifica y estructura para obtener un modelo real de la situación original planteada. Mediante suposiciones, generalizaciones y formalizaciones se transforma en un modelo matemático, identificando las matemáticas que subyacen en el modelo real. Una vez establecido el modelo matemático, se resuelve, obteniendo una solución matemática que tendrá que interpretarse en la situación inicial, en términos de una solución real. Se comprueba y valida que dicha solución real efectivamente resuelve el problema y que el modelo es el adecuado, así como su posible generalización a otras situaciones similares. Finalmente, el proceso es comunicado.

En el informe PISA (OCDE, 2006, pp. 99-101) se describe este proceso de matematización (refiriéndose al proceso completo de resolución de un problema del mundo real) mediante cinco fases, que posteriormente se concretan en un listado de acciones. Estas fases pueden variar, según autores o según intereses y objetivos (ver Borromeo-Ferri, 2006), y constituyen, desde un punto de vista teórico e idealizado, el denominado ciclo de modelización, que analizaremos con detalle a continuación.

II.2.1. El ciclo de modelización

Como hemos señalado anteriormente, entendemos la modelización matemática como el proceso de resolución de un problema de modelización, en el sentido de Maaß (2006, p.115). Las fases que constituyen este proceso forman un ciclo.

En general, el ciclo de modelización debe ser contemplado como algo que tiene que ser recorrido en sucesivas vueltas o iteraciones, y el número de fases recorridas en cada vuelta puede variar. Sin embargo, en la práctica, tal y como señala Borromeo-Ferri (2006), no se transita a lo largo de él de un modo secuencial, sino que se van dando saltos, avanzando o retrocediendo, o se inicia un nuevo ciclo antes de haber concluido el anterior, en lo que podría considerarse un proceso enmarañado. El orden de las fases y sus acciones no debe interpretarse pues como la secuencia que siguen los alumnos cuando realizan una tarea de modelización. Consideramos, por tanto, y en línea con lo afirmado por Maaß (2006), que su importancia radica en el hecho de que nos da un marco para describir los sub-procesos que se dan en la resolución de una tarea de modelización.

II.2.2. Aproximación cognitiva al proceso de modelización

En la literatura podemos encontrar diferentes aproximaciones al ciclo de modelización (ver Borromeo-Ferri, 2006). Desde la perspectiva cognitiva, el foco se centra en los procesos individuales de pensamiento vinculados a las etapas iniciales pertenecientes al mundo real (Borromeo-Ferri, 2007, p. 2081). El ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007), dentro de esta línea, es utilizado como referencia en numerosos trabajos, y presenta una secuenciación mucho más fina de las fases iniciales que no se da en otros ciclos, como los provenientes del campo de la resolución de problemas verbales o los utilizados como guía para los alumnos en la resolución de tareas de modelización (ver un ejemplo de este último tipo de ciclo en Blum y Borromeo-Ferri, 2009, p. 54). Por ello hemos escogido este ciclo como referencia en nuestra investigación.

El ciclo de Blum y Leiß está formado por siete etapas de transición entre las fases que lo conforman (Situación Real – Modelo de Situación - Modelo Real - Modelo Matemático - Solución Matemática - Solución Real), que se identifican con verbos de acción que facilitan su reconocimiento (Comprensión – Simplificación/estructuración – Matematización – Resolución matemática – Interpretación – Validación – Comunicación). Su representación se muestra en la Figura II.1.

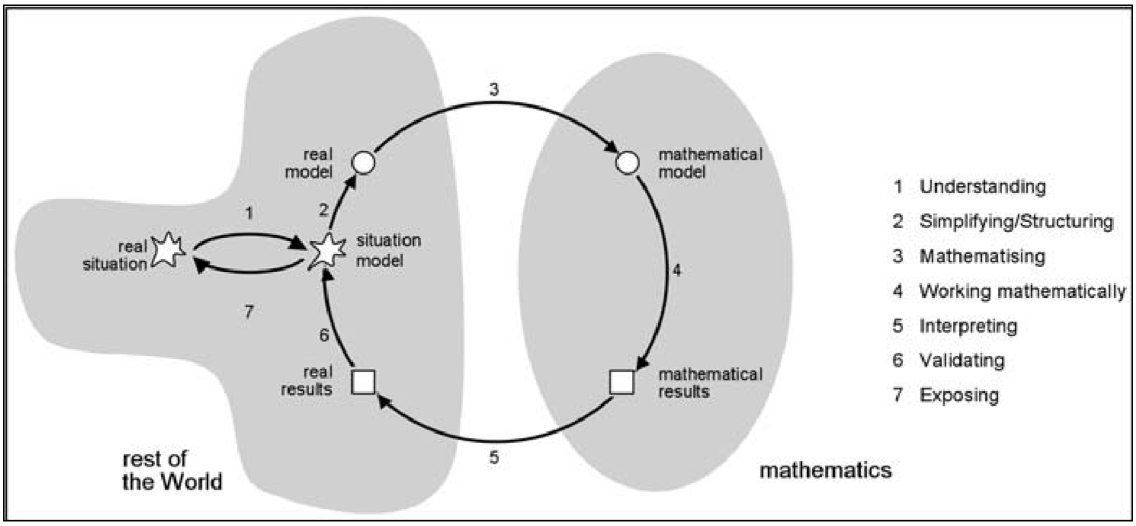


Figura II.1. El ciclo de modelización de Blum y Leiß (2007)

A continuación detallaremos cada una de las fases y transiciones de este ciclo, ayudándonos de las reflexiones que diversos autores han hecho al respecto.

II.2.3. Las fases del ciclo de modelización

Situación Real (Real Situation)

La *Situación Real* presenta la situación inicial de partida. Puede ser mediante un texto escrito (enunciado verbal), una tabla, una ilustración, etc.

Modelo de Situación (Situation Model)

Cada individuo tiene una representación o imagen mental de la situación real inicial. Esta imagen mental supone el punto de vista personal del alumno, que dependerá, según señalan Leiß y otros (2010), del conocimiento previo que tenga sobre el contexto en que se sitúa la tarea, la actitud y creencias hacia las matemáticas y el propio contexto, su grado de motivación, su competencia lectora (entendida no solo como su competencia para comprender textos escritos sino también para extraer información de gráficos, símbolos, ilustraciones o fotografías), su competencia matemática (de la que hablaremos en detalle más adelante), y las características propias de la tarea (formato, contexto, estructura semántica y matemática,…). Esta imagen mental derivará en la formulación de un problema, planteado por el propio alumno y que constituirá su *Modelo de Situación*.

Modelo Real (Real Model)

El *Modelo Real* es construido por cada individuo a partir de su propia imagen mental de la situación y lo constituyen todos aquellos elementos de la realidad relevantes en la resolución del problema que ha planteado.

Modelo Matemático (Mathematical Model)

El *Modelo Matemático* lo constituyen los objetos matemáticos necesarios para la resolución del problema planteado dentro del mundo de las matemáticas. Puede tratarse de un modelo algebraico, probabilístico, geométrico, etc. Este *Modelo Matemático*, según Blum y Niss (1991, p. 39), tiene tres elementos fundamentales:

- Un conjunto de objetos matemáticos.
- Unas relaciones y reglas matemáticas que rigen estos objetos.
- Una correspondencia entre los dos conjuntos anteriores (objetos y relaciones) y los elementos del problema real.

Lesh y Harel (2003, p. 159) señalan que los modelos matemáticos son sistemas conceptuales que se expresan mediante una variedad de representaciones interrelacionadas (como símbolos escritos, lenguaje hablado, gráficos, diagramas, esquemas o metáforas basadas en la propia experiencia) en los que se incluyen los conceptos necesarios para describir o explicar los objetos, relaciones, acciones, patrones y regularidades involucrados en la situación problemática planteada, y los procedimientos que los acompañan y que son usados para generar los constructos, manipulaciones o predicciones necesarias en su resolución. Estos tres elementos (conceptos, procedimientos y lenguajes) nos permitirán analizar, en el capítulo IV, los modelos construidos por los alumnos.

Solución Matemática (Mathematical Results)

A partir de la resolución del *Modelo Matemático* establecido, se obtiene el resultado, en términos matemáticos, del problema. Éste puede ser un número, una fórmula, un intervalo, una gráfica, etc., y constituirá la *Solución Matemática* del problema.

Solución Real (Real Results)

La Solución Matemática obtenida debe interpretarse en la situación real inicial, obteniéndose así la *Solución Real*, que posteriormente tendrá que ser validada y comunicada.

II.2.4. Transición entre las fases del ciclo de modelización

Cuando se enfrenta a una *Situación Real*, el alumno debe realizar una primera transición de "reflexión y comprensión" que le conduzca a la formación de una imagen cognitiva personal de la misma y a la "formulación" de un problema, lo que constituirá su *Modelo de Situación*.

Posteriormente, se produce un proceso de "simplificación" y "estructuración" mediante el cual se identifican y seleccionan aquellos elementos de la realidad relevantes para la resolución del problema planteado, que conformarán el *Modelo Real*. En este punto es fundamental el conocimiento extra-matemático que tenga el alumno de la situación planteada: en estas fases iniciales se hace necesario trabajar con información no estrictamente matemática, poniendo en juego la propia experiencia del alumno en la realidad en que se sitúa la tarea. Según Cabbassut (2009, p. 2159), las decisiones que se tomen en este punto pueden estar influidas por argumentos tanto matemáticos como no-matemáticos.

A partir de aquí se produce la transición desde el mundo real al mundo de las matemáticas (matematización horizontal). El alumno debe establecer una correspondencia entre los elementos seleccionados del mundo real y los objetos matemáticos que constituirán el *Modelo Matemático*, “codificando” la realidad mediante el lenguaje y las representaciones matemáticas pertinentes. A continuación el modelo matemático planteado debe resolverse mediante las estrategias heurísticas, los conceptos, herramientas y procedimientos matemáticos adecuados (matematización vertical) hasta llegar a la *Solución Matemática*. De nuevo, hay que volver al mundo real, “decodificando” e “interpretando” la *Solución Matemática* en el contexto real en que se sitúa el problema, lo que nos conducirá a una *Solución Real*.

Esta solución debe venir acompañada de un proceso de “validación” y “reflexión” sobre todo el proceso de resolución y su posible “generalización” a otras situaciones similares a la planteada, así como la toma en consideración de otras posibles vías de resolución.

Si la solución no es del todo adecuada, debe “revisarse” el modelo planteado e iniciar, en un nuevo ciclo, todo el proceso (o parte de él). En cada nueva iteración del ciclo no solo se puede mejorar el modelo, añadiendo nuevos sub-problemas que tengan en cuenta otros aspectos no considerados hasta el momento, sino además, como señala Zawojewski (2010, p. 240), se puede tener una comprensión más profunda sobre sus restricciones, limitaciones y beneficios con respecto a otros modelos.

Si la solución se considera adecuada, se “comunica” el proceso de resolución del problema y se detalla la solución obtenida, apoyada por los argumentos matemáticos, formales o no, necesarios. Conviene tener en cuenta que la solución de un problema de modelización no es única. Así, la aparición de diferentes modelos en resoluciones distintas ofrece oportunidades para comparar, contrastar y debatir las alternativas durante esta fase de comunicación.

II.3. Distintas aproximaciones a las tareas de modelización

Las tareas de modelización son, por razones obvias, elementos clave de nuestra investigación. En los apartados anteriores hemos caracterizado este tipo de tareas y hemos analizado su proceso de resolución. Las revisaremos ahora desde las perspectivas que nos ofrecen las MEAs, el proyecto LEMA y los PMR (podemos ver otras aproximaciones a la modelización matemática a nivel universitario basadas en el diseño e implementación de los denominados *Recorridos de estudio e investigación*, en Barquero y otros, 2011). Con criterios muy similares a los señalados anteriormente por Blomhøj y Kjeldsen (2006), pero mediante aproximaciones distintas, nos servirán de referencia en el diseño de nuestras propias tareas de modelización.

II.3.1. Las Modeling-Eliciting Activities

La modelización, desde la perspectiva de las MEAs[1], se define como una actividad de resolución de problemas (que generalmente pueden resolverse en una o dos sesiones de clase), construidos a partir de una serie de principios instruccionales (que pueden verse en detalle en Lesh, Hoover, Hole, Kelly y Post, 2000, p. 591-645), con los que se pretenden que los alumnos desarrollen un modelo de la situación propuesta que pueda aplicarse también a otras situaciones similares (Lesh y Doerr, 2003). Los alumnos, trabajando en pequeños grupos (en Zawojewski, Lesh y English, 2003, podemos ver un análisis del rol que juega el trabajo en grupo en la resolución de las MEAs), y ante una situación problemática significativa y relevante para ellos, deben inventar, ampliar y perfeccionar sus propias construcciones matemáticas (el “producto”) para responder a las demandas de un cliente (la “pregunta”). Este “producto” (que por lo general, no es único) va más allá de respuestas cortas a preguntas específicas (ver también English y Lesh, 2003). Lesh y Doerr (2003, p. 3) apuntan que el propio proceso de resolución se convierte a menudo en el producto demandado, que debe comunicarse al resto de compañeros (por ejemplo, en forma de carta dirigida al cliente) para que se produzcan debates e intercambio de opiniones, que pueden desembocar en la revisión del proceso seguido y la construcción de nuevos modelos. Según Ärlebäck y Doerr (2015),

[1] Ver: http://serc.carleton.edu/sp/library/mea/index.html

en una secuencia didáctica destinada a que los alumnos desarrollen sus propios modelos, las MEAs serían las actividades de partida, a las que seguirían otras relacionadas con la exploración del modelo (*Model Exploration Activities*) y la aplicación del modelo (*Model Application Activities*).

Entre las tareas que podemos encontrar dentro de las MEAs destacamos las "actividades de obtención de estructuras" (Lesh, 1997), en las que nos hemos basado a la hora de diseñar algunas de nuestras propias tareas de modelización (como veremos en el siguiente capítulo). En estas tareas el alumno debe cuantificar cierta información cualitativa (aunque no exclusivamente) para tomar una decisión razonada. Su objetivo "consiste en generar una definición operativa que estimule el concepto que tiene el resolutor del problema de cómo medir una distribución" (p. 384). Así, toman especial relevancia en este tipo de actividades las descripciones, explicaciones y justificaciones que acompañan a las respuestas.

Finalmente, desde esta perspectiva, se proponen una serie de herramientas (Lesh y Doerr, 2003, p. 32) con las que observar las formas de pensar de los alumnos mientras trabajan (*Observation Sheet*), detectar las fortalezas y debilidades de sus producciones (*Ways of Thinking Sheet*), ayudarles a reflexionar sobre los roles que pueden haber desempeñado en la solución del problema y los sentimientos y actitudes que pueden haber influido en su rendimiento (*Self Reflection Sheet*), y evaluar su trabajo (*Quality Assurance Guide*, abreviadamente QAG), categorizando en niveles de calidad su "producto", según su grado de adecuación, generalización y reutilización (en Lesh y Clarke, 2000, p. 145).

II.3.2. El proyecto LEMA

LEMA[2] es un proyecto financiado por la Unión Europea Comenius, desarrollado entre el año 2006 y 2009, con el objetivo de facilitar un cambio en las prácticas docentes a fin de incluir las actividades de modelización en la enseñanza de las

[2] Ver: http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/eu/tout.php

matemáticas (Maaß y Gurlitt, 2011). Desde este proyecto, en el que trabajan educadores matemáticos de seis países distintos (Alemania, Francia, España, Chipre, Inglaterra y Hungría), no solo se proporcionan materiales con los que implementar la modelización en el aula, si no que se plantea todo un programa de desarrollo profesional para los maestros y profesores, salvando las diferentes perspectivas educativas y curriculares de los países participantes (García, Maaß y Wake, 2010).

En las indicaciones del proyecto LEMA se dan una serie de características de las tareas de modelización: deben ser reales y auténticas; pertenecientes a un contexto relevante para los alumnos; donde el conocimiento matemático no esté determinado por completo y pertenezca a distintos dominios; donde se haga necesario explorar la situación, elaborar hipótesis, probar distintos enfoques y procedimientos para construir un modelo descriptivo de la realidad; donde la solución deba ser interpretada en la situación inicial en la que se enmarca el problema.

Además, desde LEMA se propone la creación de tareas de modelización a partir de situaciones reales, si su objetivo es desarrollar habilidades específicas de modelización, o de ejercicios de libros de texto, si el objetivo es enseñar un contenido matemático concreto (con lo que se incluyen las dos perspectivas de la modelización señaladas por Julie y Mundalay, 2007). En el primer caso se buscan contextos ricos, lo que denominan “la situación”, a partir del cual desarrollar varias “posibles tareas”, que pueden ser utilizadas o adaptadas según las necesidades del profesor. Estas tareas también se resuelven en pequeños grupos, con una fase final de comunicación, en la que los alumnos deben debatir y revisar su trabajo, razonar y justificar sus decisiones.

II.3.3. Los Proyectos Matemáticos Realistas

Como señala Sol (2008, p. 46), los PMR son “un tipo de actividad orientada a fomentar la modelización y la resolución de problemas […] dentro de un marco curricular y de desarrollo de las competencias matemáticas de tipo complejo”, con un fuerte componente creativo, social y comunicativo, que pone el énfasis en la aplicabilidad y la funcionabilidad de las matemáticas en la realidad.

Los alumnos, trabajando en pequeño grupo (dos o tres miembros) y durante dos o tres semanas, deben, a partir de una situación real, concretar el problema a resolver y formular sus propios objetivos de investigación (a diferencia de la actividad tradicional de aula, donde es el profesor el que plantea la pregunta). Son también los alumnos los que deciden qué datos deberán tener en cuenta, cómo los obtendrán y manipularán y el tipo de reflexión que esperan poder hacer a partir de ellos. Finalmente, deberán comunicar el proceso de resolución seguido al resto de compañeros, aportando sus reflexiones sobre el interés de su trabajo y sus posibles aplicaciones a otras situaciones similares (ver Vilatzara, 2001a y 2001b).

Este tipo de proyectos son utilizados por los miembros del grupo Vilatzarà para introducir la modelización en las aulas de secundaria y bachillerato (Sol, 1998; Sol y Giménez, 2004). Mientras que en la etapa de secundaria se proponen proyectos matemáticos concretos, entre los que los alumnos pueden elegir (como haremos nosotros también en nuestra investigación), en bachillerato es el alumno el que decide su propio trabajo de investigación, a partir de una serie de orientaciones, que van desde temas relacionados con las matemáticas a otros relacionados con las ciencias experimentales o sociales, en el que las matemáticas pueden jugar un papel relevante (Vilatzara, 2001a y 2001b).

En las PMR se presenta a los alumnos un contexto real y cercano a ellos (o es el propio alumno el que lo propone) a partir del cual se debe concretar un problema en cuya formulación tienen un principal protagonismo. Son tareas pensadas como auténticos proyectos de investigación de larga duración. De forma similar, las tareas que el proyecto LEMA propone presentan una situación real de la que se derivan diferentes cuestiones que los alumnos deben abordar. Por su parte, desde las MEAs se proponen problemas más estructurados y cerrados, cuyo enunciado puede incluir también información de tipo cualitativo y cuantitativo, y al que los alumnos tienen que dar respuesta en no más de una o dos sesiones de trabajo en el aula. Las tres perspectivas descritas nos ofrecen pues un amplio abanico en lo que respecta a las tareas de modelización: desde la menos estructuradas, como son los PMR, donde incluso, en su caso más extremo, es el propio alumno el que debe proponer la tarea, hasta las más estructuradas, como son las MEAs, y que, a diferencia de las primeras, no son vistas como proyectos de aula de larga duración. Como hemos comentado, las tareas propuestas en LEMA se sitúan más próximas a los PMR que a las MEAs. Sin embargo, y precisamente gracias a estas diferencias, una propuesta de tareas en la que integremos estas tres perspectivas puede resultar clave para cubrir toda la diversidad del aula. El análisis del proceso de resolución de cada una de las tareas propuestas podrá ayudarnos a deducir importantes implicaciones en lo que respecta al uso de estas tres aproximaciones y su conveniencia según las necesidades y objetivos educativos planteados.

A partir de este punto trataremos el tema de la competencia matemática, en general, para concretarla posteriormente en el marco del proyecto danés KOM y el informe PISA.

II.4. La competencia matemática y la modelización

El término competencia, utilizado en el mundo de la empresa para referirse al profesional que cumple de manera correcta y adecuada con su función, pasa, a partir del proyecto DeSeCo (*Programa para la Definición y Selección de Competencias*) de la OCDE, al mundo de la educación (ver Zabala y Arnau, 2007). En este ámbito, Goldin (1987, p. 138) define el término competencia del siguiente modo: “Una competencia describe la capacidad de un individuo para llevar a cabo con éxito una clase de tarea”.

La competencia combina habilidades, conocimientos y actitudes, dirigidas al desempeño de una determinada tarea (ver Blanco, 2012). “Cuando el individuo trata de abordar las tareas mediante las herramientas disponibles, moviliza y pone de manifiesto su competencia en la ejecución de los procesos correspondientes" (Rico y otros, 1997, citado en Rico, 2006, p. 50). El foco no se centra pues en poseer conocimientos, sino en saber aplicar estos conocimientos en distintas situaciones y tareas. Según Goñi (2011), en una enseñanza por competencias se prioriza la aplicabilidad y funcionabilidad de los conocimientos. Así, la idea de una acción competente, según Sol (2008, p. 84), se debe dar en un contexto concreto, aunando los componentes cognitivos con los sociales y afectivos.

De lo expuesto anteriormente, podemos inferir que la "competencia matemática" se corresponde, entre otras, con la capacidad del individuo para enfrentarse con una determinada situación real en la que están involucradas, directa o indirectamente, las matemáticas. Esta idea está en línea con lo defendido por Goñi (2010, p. 22), que define la competencia matemática como "el uso, de manera eficiente y responsable, del conocimiento matemático para hacer frente a situaciones relevantes".

El informe PISA tiene hoy en día una fuerte influencia en los sistemas educativos actuales. Precisamente, PISA se basa en el proyecto danés KOM para describir las capacidades que constituyen la propia competencia matemática (OCDE, 2006, p. 101). Es por esta especial relevancia internacional por lo que centraremos a continuación nuestra atención en las acepciones del término "competencia matemática" que podemos encontrar en estas dos referencias, para posteriormente tratar el de "competencia en modelización". A partir de ahora, con el término competencia, en singular, nos referiremos a la competencia en su aspecto más general, mientras que con el término competencias, en plural, nos referiremos a aquellas competencias que la constituyen.

II.4.1. La competencia matemática en el proyecto KOM

Con el fin de dar respuesta a una serie problemas detectados en el sistema educativo danés, el ministerio de educación de Dinamarca puso en marcha, en el año 2000, el proyecto KOM (acrónimo en danés de *Competencies and the Lerning of Mathematics*). Entre otras cuestiones se constató la necesidad de determinar cuáles eran las competencias matemáticas que debían ser desarrolladas por los estudiantes en las diferentes etapas del sistema educativo danés (Niss, 2003 y 2004).

En el proyecto KOM se afirma que dominar las matemáticas significa poseer la competencia matemática, y se define la competencia matemática como "la capacidad de entender, juzgar, hacer y utilizar las matemáticas en una variedad de contextos y situaciones intra y extra matemáticas en las éstas juegan o podrían desempeñar un papel" (Niss, 2004, p. 6). La competencia matemática se identifica, formula y ejemplifica en un conjunto de competencias, "que pueden ser acordadas como dimensiones independientes en la expansión de la competencia matemática" (Blomhøj y Jensen, 2007, p. 47).

Desde esta perspectiva, la competencia matemática se describe a partir de ocho competencias, englobadas en dos grupos, como se ilustra en la llamada flor de KOM (ver Figura II.2). Desde el proyecto KOM los objetivos generales de la educación matemática son reformulados en términos de desarrollo de estas competencias, incluyendo la competencia en modelización como una de las competencias que los estudiantes deben desarrollar en la escuela.

Desde el punto de vista del proyecto KOM, las competencias se dirigen a la acción: se ponen en juego ante un desafío matemático en una situación o contexto determinado. Además, según Blomhøj y Jensen (2007), el desarrollo de las competencias es algo continuo, "es absurdo hablar de alguien totalmente incompetente o totalmente competente" (p. 47). Niss (2004) afirma que cuando un alumno se embarca en la resolución de un problema de matemáticas, activa estas competencias (todas o algunas) de manera simultánea, y por tanto "las competencias están estrechamente relacionadas -forman un continuo de grupos superpuestos- pero son diferentes en el sentido de que sus centros de gravedad están claramente delimitados y son disjuntos" (p. 9).

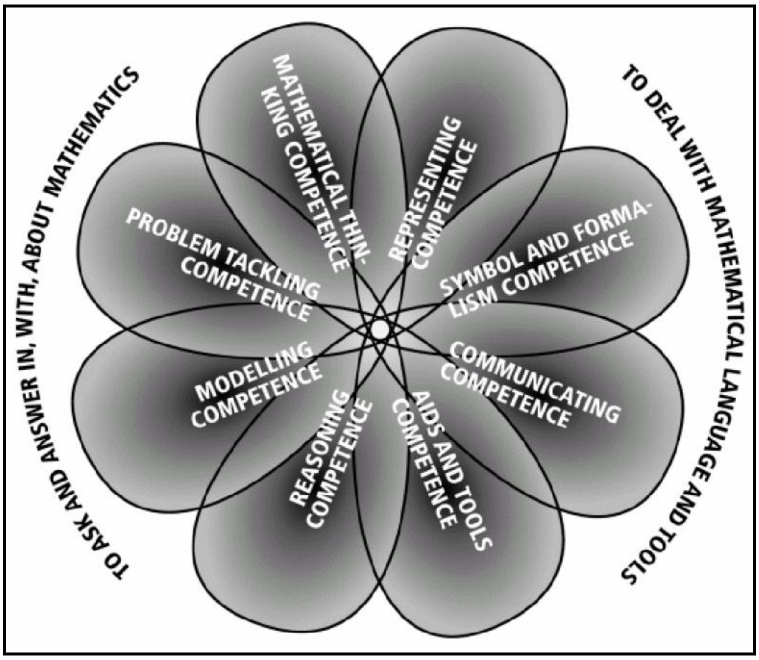


Figura II.2. La "flor de KOM", en Blomhøj y Jensen (2007, p. 47)

Las competencias presentan un doble aspecto: analítico y productivo. El aspecto analítico de una competencia se centra en la comprensión, la interpretación y la evaluación de los fenómenos y procesos matemáticos, mientras que el aspecto productivo "se centra en la construcción o ejecución activa de los procesos matemáticos, tales como la invención de una cadena de argumentos o la activación y uso de alguna representación matemática en una situación dada" (Niss, 2004, p. 9). Este último aspecto de las competencias es el que analizaremos cuando enfrentemos a los alumnos ante una tarea de modelización.

II.4.2. La competencia matemática en el informe PISA

Como comentamos en la introducción, el informe PISA de la OCDE pone el foco en lo que denominan "alfabetización matemática", *mathematical literacy* en el original en inglés (para analizar los distintos usos del término "competencia", por los del original inglés *competence*, *literacy* y *proficiency* en el informe PISA, ver Puig, 2006 y Rico, 2006). La alfabetización matemática en PISA, según

Rico (2006, p. 49) “se refiere a las capacidades de los estudiantes para analizar, razonar y comunicar eficazmente cuando resuelven o enuncian problemas matemáticos en una variedad de situaciones y dominios”. Precisamente, tomaremos a Rico (2006) como referencia principal para analizar la competencia matemática en el informe PISA.

Para identificar el nivel de competencia matemática de los alumnos, PISA analiza “cómo los estudiantes pueden utilizar lo que han aprendido en situaciones usuales de la vida cotidiana y no solo, ni principalmente, en conocer cuáles contenidos del currículo han aprendido” (Rico, 2006, p. 50). Por tanto, la evaluación de las matemáticas que hace PISA exige a los alumnos que se enfrenten con problemas matemáticos que están basados en algún contexto del mundo real. El nivel de competencia matemática de una persona se aprecia en la manera en que emplea sus conocimientos y habilidades matemáticas para resolver estos problemas (OCDE, 2006, p. 83).

Las tareas que propone PISA pueden analizarse desde tres dimensiones (Rico, 2006, p. 53):

- El contenido matemático que se debe utilizar para resolver el problema.
- La situación o contexto en que se localiza el problema.
- Las competencias o procesos que deben activarse para resolver el problema.

Respecto al tercer aspecto, Rico (2006, pp. 57-58) afirma que para resolver “los problemas que se presentan en las tareas de evaluación, los estudiantes deben poner en práctica un conjunto de procesos, es decir, mostrar su dominio en un conjunto de competencias matemáticas generales”. Estos procesos establecen capacidades específicas que se recogen en una serie de competencias, basadas en las competencias matemáticas descritas en el proyecto KOM (OCDE, 2006, p. 101).

Para cada una de las tareas propuestas, PISA establece tres clases o niveles de complejidad, que atañen “al modo en que las distintas competencias son requeridas como respuesta a los distintos tipos y niveles de demandas cognitivas planteados” (Rico, 2006, p. 60). Estas son los tres niveles definidos:

- De reproducción, que incluyen tareas que requieren de procedimientos rutinarios y la reproducción de conocimientos.
- De conexión, que abarcan tareas no rutinarias, que plantean mayores exigencias de interpretación y que requieren establecer conexiones entre diferentes representaciones o entre distintos aspectos de una situación.
- De reflexión, que comprenden tareas que exigen generalización, explicación o justificación de los resultados y un mayor nivel de comprensión y reflexión.

Estos niveles de complejidad propuestos en el informe PISA nos proporcionan un excelente marco con el que diseñar el test (del que hablaremos en el capítulo siguiente) a partir del cual vamos a medir la efectividad de la enseñanza basada en tareas de modelización.

Hemos visto en el apartado anterior que una de las competencias establecidas en el proyecto KOM es la competencia en modelización. En la literatura encontramos diferentes análisis relativos a esta competencia, que comentaremos en el siguiente apartado.

II.4.3. La competencia en modelización

Blomhøj y Jensen (2003, p. 126) definen la competencia en modelización como "la disposición intuitiva de alguien para llevar a cabo todas las partes de un proceso de modelización matemática en un cierto contexto". Blum y Kaiser (1997, citado en Maaß, 2006, p. 116) proponen un listado de competencias que conforman la competencia en modelización. Estas competencias se corresponden con las acciones necesarias para transitar por las distintas fases del ciclo de modelización. Como resultado de su estudio, Maaß (2006) señala que la competencia en modelización incluye más competencias que las meramente necesarias para recorrer las fases del ciclo, incluyendo aspectos relacionados con la metacognición, la argumentación y la motivación (p. 139):

- Competencias para llevar a cabo las fases individuales del ciclo de modelización.
- Competencias metacognitivas en modelización.
- Competencias para argumentar sobre el proceso de modelización y escribir estos argumentos.
- Competencias para ver las oportunidades que las matemáticas ofrecen en la resolución de problemas reales y considerar estas posibilidades de forma positiva.

Biccard y Wessels (2011, p. 377) estructuran la competencia en modelización en tres áreas: competencias cognitivas, competencias afectivas y competencias metacognitivas. Las competencias cognitivas son aquellas que se relacionan con las fases del ciclo de modelización; las competencias afectivas están relacionadas con las creencias sobre las matemáticas, su naturaleza, su actitud hacia las mismas, las oportunidades que ofrecen y el papel que pueden desempeñar en la resolución de problemas reales; las competencias metacognitivas se refieren a la reflexión y control sobre los propios procesos cognitivos (respecto a las competencias metacognitivas ver Lesh, Lester y Hjalmarson, 2003, y Stillman, 2011).

Respecto al desarrollo de las competencias en modelización, Blomhøj y Jensen (2003) establecen una diferencia entre lo que denominan el enfoque holístico y el enfoque atomístico: con el enfoque holístico el alumno debe recorrer el proceso completo de modelización para desarrollar sus competencias, mientras que en el enfoque atomístico el foco se centra en el proceso de construcción, resolución e interpretación del modelo matemático y no en la totalidad del ciclo. Este último enfoque facilita la comprensión de las acciones más próximas a las matemáticas, pero el enfoque holístico puede resultar más real y motivador para los alumnos, aunque también requiere de una dedicación mayor y de un análisis más complejo. En su estudio concluyen que los dos enfoques son necesarios para desarrollar las competencias de los alumnos.

Desde un enfoque holístico, se considera que la competencia en modelización se describe a través de tres dimensiones:

- El grado de cobertura, que se refiere el grado en el cual una persona es capaz de transitar con éxito a lo largo de las fases del ciclo de modelización de forma autónoma, coordinada y reflexiva (Jensen, 2007, p. 144).
- El radio de acción, que se refiere a la variedad de contextos, incluidos los extra matemáticos, en los que una persona es capaz de activar su competencia en modelización, así como la variedad y complejidad de los modelos que conoce y puede utilizar (Zöttl, Ufer y Reiss, 2011, p. 429). Haines y Crouch (2004) señalan que esta dimensión repercute directamente en su capacidad para transitar entre mundo real y el mundo matemático.
- Finalmente, el nivel técnico, que, según Zöttl, Ufer y Reiss (2011, p. 429), se refiere al nivel de las herramientas matemáticas que la persona es capaz de utilizar en el proceso de resolución de una tarea de modelización, lo que Jensen (2007, p. 144) denomina su “mathematical toolbox”.

Mousoulides (2007, también en Mousoulides, Christou y Sriraman, 2008) utiliza tareas basadas en PISA para evaluar las competencias necesarias para resolver problemas reales. Por su parte, Haines y Crouch (2001, 2005 y 2007) han desarrollado cuestionarios de elección múltiple con el fin de evaluar las competencias relacionadas con la transición entre el mundo real y las matemáticas.

De los trabajos revisados se deduce que la resolución de una tarea de modelización supone transitar entre las fases que conforman el ciclo y poner en acción una serie de destrezas y habilidades que se corresponden, en particular, y como hemos citado anteriormente, con la competencia en modelización, pero también con las restantes competencias matemáticas. A través de nuestra investigación queremos inferir si, efectivamente, las tareas de modelización son un marco de desarrollo de competencias, donde se ponen en juego de forma conjunta e integrada muchas de ellas con un esquema claro dado a través del ciclo de modelización.

II.5. El profesor y el alumno durante una actividad de modelización

Según diversos autores, la enseñanza basada en la modelización se centra en la estructuración de experiencias que enfrenten a los alumnos a la necesidad de generar y desarrollar modelos matemáticamente significativos (Lesh y Doerr, 2003, p. 32, Doerr, 2006, p. 266). La construcción de estos modelos supone expresar, probar, refinar, revisar, reorganizar, integrar y perfeccionar sus formas actuales de pensar, poniendo sus conocimientos en contexto y desarrollando sus competencias en modelización, en particular, y matemáticas, en general. Este enfoque contrasta con el de la enseñanza más tradicional, más centrada, según Lesh y Doerr (2003), en demostrar los hechos relevantes, reglas, habilidades y procesos que después se pondrán en práctica mediante actividades en las que los alumnos repiten aquello que anteriormente se les ha enseñado.

La introducción de la modelización en el aula supone pues un nuevo enfoque en cuanto a los objetivos de la enseñanza, pero también respecto al papel que el profesor y el alumno deben adoptar. Las dificultades que supone para profesores y alumnos esta nueva perspectiva ha sido fuente de numerosas investigaciones (Blum y Niss, 1991, Blum, 1993, Blomhøj y Kjeldsen, 2006, Burkhardt, 2006, Kaiser y Schwarz, 2006, Schwarz y Kaiser, 2007, Schwartz, Wissmach y Kaiser, 2008, García y Ruíz-Higueras, 2011, Schmidt, 2011, Borromeo-Ferri y Blum, 2011) y ha propiciado el nacimiento de proyectos como LEMA, del que hemos hablado anteriormente.

En la modelización las tareas son abiertas y el proceso de resolución no se presenta explícitamente ni ha sido entrenado de antemano. El profesor, por tanto, debe estar familiarizado con la tarea y ser consciente de su potencial y sus posibles vías de resolución. Debe, además, conocer una amplia gama de modos de intervención en el aula con los que apoyar de forma adecuada las estrategias de sus alumnos, evitando dirigirlos en una determinada dirección. Los alumnos por su parte, deben asumir el protagonismo y trabajar de forma autónoma e independiente (Blum y Borromeo-Ferri, 2009, p. 54, ver también Blum, 2011, p. 24), generalmente en pequeño grupo, tal y como ocurre en las MEAs, el proyecto LEMA y las PMR. En la enseñanza tradicional o imitativa, como la define Burkhardt (2006), es el profesor el que asume el papel protagonista, transmisor del conocimiento, normalmente recogido en los libros de texto. El alumno asume un papel pasivo y debe limitarse, por imitación, a seguir las indicaciones y orientaciones del profesor, normalmente trabajando de forma individual. Estas diferencias entre el papel que juegan profesor y alumno en la modelización y el que asumen en la enseñanza imitativa pueden verse en la Figura II.3.

for imitative learning	for modelling, add
Directive roles	**Facilitative roles**
Manager	Counsellor
Explainer	Fellow student
Task setter	Resource
with students as	*with students as*
Imitator	*Investigator*
Responder	*Manager*
	Explainer

Figura II.3. Rol del profesor y el alumno, en Burkhardt (2006, p. 188)

Así, un estilo de enseñanza en el que los alumnos asumen un cierto grado de autonomía, puede llevar al profesor a un dilema: por una lado, la necesidad de que el alumno sea responsable de su trabajo y tome sus propias decisiones; por otro lado, que las decisiones que tome sean las correctas y le lleven a resolver con éxito la tarea. Blomhøj y Jensen (2007, pp. 48-49) denominan a esta problemática el “dilema de la enseñanza de la autonomía dirigida” (*dilema of the teaching directed autonomy*). Para superarla, Blomhøj y Kjeldsen (2006) proponen dos formas de intervención didáctica: a través de la puesta en escena y a través del diálogo con los alumnos. Mediante la puesta en escena el profesor presenta las condiciones, expectativas, objetivos, información, documentación y material que deben aportar los alumnos en el proceso de resolución de las tareas propuestas (Blomhøj y Kjeldsen, 2006, p. 168). Mediante el diálogo, el profesor apoya a los alumnos en la superación de sus bloqueos y dificultades. Este diálogo debe tender a mantener una permanente equilibrio entre la guía del profesor, que debe ser mínima, y la independencia de los alumnos, que debe ser máxima (Blum y Leiß, 2005, Blum y Borromeo-Ferri, 2009, Borromeo-Ferri y Blum, 2011, Stender, 2012).

Según Blum y Borromeo-Ferri (2009) las intervenciones del profesor durante la actividad de sus alumnos a menudo se realizan a través de preguntas con el propósito de proporcionar indicios o sugerencias, de forma similar a las estrategias de enseñanza meta-cognitiva propuestas por Kramarsky, Mevarech y Arami (2002): ¿Qué has hecho?, ¿Qué quieres hacer? ¿Qué has calculado hasta ahora?, ¿Qué desconoces todavía?, ¿Son los resultados adecuados en la situación real?, etc. (en Blum y Borromeo-Ferri, 2009, p. 52). De acuerdo con la clasificación de Leiß y Wiegand (2005) y Borromeo-Ferri y Blum (2011), estas intervenciones pueden referirse al contenido, es decir, a las matemáticas necesarias para llevar a cabo el proceso de modelización; al meta-nivel, concernientes a aspectos generales del proceso de modelización y la resolución de problemas; afectivas, que tratan de influir en el estado mental del alumno y sus motivaciones; y organizativas, ligadas a las condiciones de trabajo del alumno (incluidas las interacciones dentro del grupo). Su objetivo puede ser diagnosticar el estado en que se encuentra el proceso de resolución de los alumnos; evaluar este proceso; aconsejar directa o indirectamente, aportando información o explicaciones, según el criterio del profesor; o simplemente no intervenir, de forma consciente, aunque los alumnos tengan dificultades. Además, pueden ser intervenciones invasivas, realizadas por iniciativa del profesor, o intervenciones receptivas, respondiendo a preguntas de los alumnos.

Como vemos, la modelización implica asumir un nuevo enfoque metodológico, con unos objetivos y un rol del profesor y el alumno distintos al de un enfoque más tradicional. En esta investigación indagaremos respecto al enfoque metodológico que debe tomarse al desarrollar una experiencia de modelización en el aula de secundaria, prestando especial atención al papel del debate entre los alumnos, y entre estos y el profesor, durante la actividad modelizadora.

En este capítulo hemos revisado en la literatura aquellos aspectos que, en el desarrollo de nuestra investigación, hemos considerado necesarios para abordar con éxito nuestras preguntas de investigación y tratar de alcanzar los objetivos fijados: los problemas de modelización y su proceso de resolución; diferentes perspectivas en cuanto al diseño y la implementación de tareas de modelización en el aula (las MEAs, el proyecto LEMA y las PMR); el enfoque competencial de las matemáticas desde la perspectiva del proyecto KOM y el informe PISA y la competencia en modelización; finalmente, el papel que el profesor y el alumno juegan en el proceso de resolución de una tarea de modelización dentro del aula. En el capítulo siguiente, y en base a esta revisión, expondremos la metodología seguida durante nuestra investigación y el trabajo de campo.

Capítulo III

Diseño de la investigación y metodología de aula

En este capítulo detallaremos la metodología utilizada en la investigación, cómo se ha desarrollado la experiencia, el diseño de las herramientas necesarias para llevarla a cabo (tareas de modelización, test de competencias, dossier de trabajo) y cómo se ha documentado la producción de los alumnos y la actuación del profesor.

A la luz de la literatura previa y en base a los objetivos propuestos y las preguntas de investigación a las que pretendemos responder en nuestra tesis, se ha diseñado una metodología de trabajo en el aula que regula tanto la actividad del alumno como la del profesor durante el proceso de resolución de las tareas de modelización. Este es un aspecto importante ya que, tal y como veremos en nuestra experiencia, la modelización llevada al aula en forma de actividad cambia radicalmente la estructura de la clase con respecto a lo que es la clase tradicional y también el rol desempeñado por el profesor y el alumno. Sobre ambos temas haremos hincapié a lo largo de este capítulo.

III.1. Introducción

Para abordar la problemática de nuestro estudio hemos desarrollado un experimento de enseñanza desde la perspectiva de la resolución de problemas de modelización, teniendo como referente, como ya hemos comentado en el capítulo anterior, las MEAs, el proyecto LEMA y las PMR.

Según Kelly y Lesh (2000) el experimento de enseñanza propone un rol del investigador que va más allá de ser un simple observador de lo que ocurre en una clase, rompiendo con la división profesor/investigador. En esta línea, en nuestra investigación el profesor asume también el papel de investigador, combinándose la práctica escolar diaria (que ocupó varias sesiones de trabajo en el aula), con la reflexión teórica (a través de la revisión continua de las herramientas e instrumentos de investigación).

Lesh y Doerr (2003) y Lesh y Clarke (2000), señalan que, para llevar a delante una actividad de modelización en el aula, es necesario desarrollar herramientas con las que observar y documentar las distintas formas de pensar de los alumnos mientras trabajan en la resolución de las tareas, detectar las fortalezas y debilidades de sus producciones, ayudarles a reflexionar sobre los roles que pueden haber desempeñado y los sentimientos y actitudes que pueden haber influido en su rendimiento, además de evaluar su trabajo. Conforme a esto, hemos diseñado una serie de herramientas para llevar a cabo la investigación que describiremos en detalle a lo largo de este capítulo:

- Tareas de modelización.
- Dossier de trabajo.
- Test de competencias.
- Herramientas de observación y documentación.

La herramienta fundamental es sin duda la tarea de modelización, sin la cual no podemos abordar nuestra problemática. Su selección y diseño forman parte del objetivo O1, *Diseñar tareas para implementar una actividad basada en la modelización*, y a ello dedicaremos un apartado de este capítulo. Estas tareas se recogen en un dossier, en el que se detalla también, brevemente, el proceso de modelización, los criterios de evaluación y la documentación que los alumnos deben generar durante la actividad. Esta documentación incluye un diario de trabajo del alumno y su presentación final, el diario elaborado por el profesor, y las grabaciones recogidas en audio de las intervenciones del profesor con sus alumnos. Todo este material nos permitirá reconstruir el proceso de modelización de los alumnos, paso previo necesario para lograr el objetivo O2, *Analizar los procesos y los modelos producidos por los alumnos*, y analizar el papel del profesor, con el fin de lograr el objetivo O3, *Observar y describir los cambios metodológicos referidos al papel del profesor*. Finalmente, el test de competencias nos permitirá valorar si el trabajo en modelización repercute de forma significativa en la mejora de las competencias en resolución de problemas reales, lo que supone el objetivo O4, *Analizar si el trabajo en modelización mejora las competencias necesarias para resolver problemas reales*. El desglose de todas las tareas propuestas durante la experiencia y las preguntas que componen el test de competencias pueden consultarse en los Anexos.

Antes de entrar en detalle en estas herramientas, hablaremos de cómo se ha desarrollado la investigación y cuál es nuestra población de estudio.

III.1.1. Desarrollo de la investigación y población de estudio

La investigación se desarrolló en un centro escolar de los alrededores de la ciudad de Valencia, a lo largo de tres cursos académicos, desde el 2011-12 hasta el 2013-14, con alumnos de 3ºESO (14-15 años) sin experiencia previa en modelización y que, hasta ese momento, habían recibido una enseñanza tradicional. La experiencia en el aula fue dirigida por el propio investigador en su doble papel de profesor-investigador.

Durante el curso 2011-12, se implementó la primera actividad de modelización en un grupo natural de 19 alumnos de 3ºESO. Ninguno de estos alumnos tenía una adaptación curricular ni por altas o bajas capacidades, ni era repetidor, siendo un grupo con un rendimiento académico medio.

La finalidad de esta primera experiencia era pilotar las tareas de modelización y el test de competencias, implementar las formas de trabajar propias de este tipo de actividad en una clase completa, teniendo en cuenta el nuevo papel del profesor y del alumno, y desarrollar las herramientas de evaluación y observación necesarias.

Durante el pilotaje se analizó la secuencia didáctica, especialmente en lo que se refiere al número de sesiones de aula necesarias para resolver la tarea, teniendo en cuenta la inexperiencia de los alumnos en este tipo de actividad, estableciéndose finalmente en tres sesiones. También se prestó atención a la documentación generada por los alumnos, su diario de trabajo. Se constataron las dificultades que tienen a la hora de justificar y razonar sus decisiones. Se observó que los alumnos no incluyen las vías alternativas que han podido seguir durante su proceso de resolución pero que finalmente han descartado, ya que se centran únicamente en las que les han llevado a resolver con éxito el problema. Esto hizo que nos replanteáramos la necesidad de complementar su diario con nueva documentación, como el diario del profesor o las grabaciones en audio de las interacciones del profesor con sus alumnos.

Además, este pilotaje permitió identificar algunas tareas que por la falta de interés que suscitaron en los alumnos o su excesiva complejidad, fueron descartas o modificadas.

Con respecto al test de competencias, se pilotaron diferentes preguntas que permitirían su selección e inclusión en un test definitivo que se implementaría en el siguiente curso. A partir de la rúbrica propuesta en el proyecto LEMA y la QAG desarrollamos una propia (de la que hablaremos en detalle más adelante), adecuada al contexto y las características de nuestra experiencia.

Con la experiencia acumulada en el curso anterior, durante el curso 2012-13, se implementó la experiencia de modelización en tres grupos naturales de 3ºESO, con un total de 55 alumnos. Los alumnos trabajaron en grupo una de las tareas propuestas durante tres sesiones completas de aula más una sesión final de exposición (la descripción del trabajo en grupo de los alumnos durante la experiencia, la actuación del profesor y la secuenciación didáctica seguida se tratará en los apartados III.6 y III.7). La documentación recogida permitió analizar el proceso de resolución y el modelo final.

Con el fin de analizar el efecto de la actividad modelizadora sobre las competencias necesarias para resolver problemas reales, se pasó un pre y un postest de competencias, utilizándose otro grupo natural de 18 alumnos, del mismo centro y del mismo nivel, como grupo de control. De nuevo, no habían alumnos con altas o bajas capacidades o repetidores en ninguno de los dos grupos, experimental y de control, siendo, académicamente, muy similares, de un nivel medio.

En el curso 2013-14, se continuó con la experiencia realizada en el curso anterior en dos grupos naturales de 3ºESO, con un total de 38 alumnos, de características similares a la de cursos anteriores.

El desarrollo de la investigación queda resumido en la Tabla III.1.

Una vez descritas las líneas generales que han marcado la investigación, vamos a pasar a detallar uno de sus aspectos clave, el diseño de las tareas.

III.2. Diseño de las tareas de modelización

En el capítulo anterior hemos revisado la caracterización de las tareas de modelización de Blomhøj y Kjeldsen (2006), el proyecto LEMA, las MEAs y las PMR, que nos proporcionan las referencias necesarias a partir de las cuales diseñar las tareas que utilizaremos en nuestra investigación.

Tabla III.1. Desarrollo de la investigación.

Curso	*Nivel*	*Participantes*	*Objetivos*
2011-12	3ºESO	19 alumnos (un grupo natural de clase) en seis grupos de trabajo.	Revisión de la literatura. Diseñar y pilotar tareas de modelización. Diseñar y pilotar una rúbrica de evaluación. Diseñar y pilotar un test para evaluar las competencias en resolución de problemas reales. Establecer las herramientas necesarias para documentar el proceso de resolución seguido por los alumnos y el papel del profesor.
2012-13	3ºESO	G. Experimental: 55 alumnos (3 grupos naturales de clase) en 18 grupos de trabajo. G. Control: 18 alumnos (un grupo natural de clase).	Implementar las tareas de modelización diseñadas. Documentar las actuaciones de los alumnos cuando resuelven estas tareas desde el punto de vista competencial y analizar los modelos construidos. Analizar las actuaciones del profesor y alumno durante el proceso de modelización. Analizar la influencia de la actividad modelizadora sobre las competencias necesarias para resolver problemas reales mediante el test.
2013-14	3ºESO	38 alumnos (2 grupos naturales de clase) en 14 grupos de trabajo.	Complementar la información referente a las actuaciones de los alumnos cuando resuelven tareas de modelización y el papel del profesor y alumno durante este proceso.

Siguiendo las directrices de estas referencias, las tareas de modelización implementadas se han diseñado según los siguientes principios:

- Que se sitúen en un contexto cercano al alumno.
- Que sean reales o incluyan datos auténticos.
- Que sean abiertas, sin una solución o procedimiento estipulado de antemano.
- Que puedan ser resueltas mediante conceptos matemáticos conocidos por los alumnos.
- Que promuevan la revisión crítica y el debate entre los alumnos.

A lo largo de la experimentación realizada en los cursos 2012-13 y 2013-14 se utilizaron un total de nueve tareas, diseñadas a partir de estos principios y pilotadas en el curso 2011-12. En la Tabla III.2 se recogen estas tareas, junto a una breve descripción de las mismas, el contexto en que se sitúan, si se aportan o no los datos de forma explícita y su relación con la realidad, las representaciones utilizadas en su enunciado y la fuente en la que se basan. Su enunciado completo puede verse en el Anexo I (también se incluye el enunciado de las dos tareas descartadas durante el pilotaje en el Anexo II).

En estos tres cursos se recogieron las producciones de 26 grupos, de un total de 38 (de los doce grupos restantes la documentación que tenemos es incompleta). En la Tabla III.3 se puede ver la distribución de estos grupos entre las nueve tareas propuestas.

Todas las tareas se sitúan en un contexto conocido por el alumno, ya sea en el propio colegio o en un entorno público de una realidad que les es cercana. Algunas están fuertemente relacionadas con la realidad y es necesario obtener de ella, o a partir de la propia experiencia, los datos para su resolución, mientras que en otros se presentan datos plausibles, en el sentido de que podrían ser reales, pero los valores numéricos que se han utilizado son inventados.

Tabla III.2. Tareas de Modelización utilizadas.

Tarea	*Situación*	*Contexto*	*Datos*	*Representaciones*	*Fuente*
La sombra en el patio de recreo	Se plantea la necesidad de plantar nuevos árboles en el patio con el fin de mejorar la zona de sombra a la hora del recreo.	Escolar	Auténticos Desconocidos	Texto Fotografías	Propia
El parque de atracciones	Hay que organizar la próxima visita a un conocido parque de atracciones.	Público	Auténticos Desconocidos	Texto Mapa	Propia
La desaparición del portátil	Ha desaparecido un portátil en el colegio. Hay que organizar su búsqueda y determinar el tiempo que se necesitará para registrar el colegio.	Escolar	Auténticos Desconocidos	Texto	Propia
Un nuevo comedor	Se propone que diseñen un nuevo modelo de comedor para los alumnos de infantil. El diseño abarca los espacios, el mobiliario, el menaje, etc.	Escolar	Auténticos Desconocidos	Texto Fotografías	Propia
Cordones	Se pide determinar cuál de las tres formas más usuales de anudarse los zapatos es la que requiere los cordones más largos y cuál los más cortos, y diseñar una nueva forma de anudarse los cordones que minimice su longitud.	Público	Auténticos Incluidos	Texto Esquema	Olimpiada Matemática
Hábitos de estudio	En esta tarea se plantea la necesidad de diseñar un cuestionario que permita medir el nivel de eficacia en el estudio de los alumnos.	Escolar	Auténticos Desconocidos	Texto Fotografía Tabla	MEA
Selección de personal	A partir de los datos presentados respecto al trabajo realizado por nueve empleados de un conocido parque de atracciones, se debe escoger quiénes serán contratados para la próxima campaña de verano.	Público	Plausibles Incluidos	Texto Fotografía Tablas	MEA
El mejor colegio	Se propone que, a partir de la información cualitativa y cuantitativa suministrada sobre algunos aspectos de varios colegios, se determine cuál es el mejor.	Público	Plausibles Incluidos	Texto Tabla	MEA
La carrera	Se colocan 10 conos a lo largo de la línea lateral de una cancha de baloncesto. Cada corredor sale desde la esquina opuesta, rodea un cono y corre hasta tocar la canasta del otro lado. Se debe escoger qué cono rodear para obtener ventaja en la carrera.	Público	Plausibles Incluidos	Texto Esquema	LEMA

Tabla III.3. Distribución de grupos por tareas

Tarea	*nº grupos*
La sombra en el patio de recreo	3
La desaparición del portátil	2
El parque de atracciones	4
Un nuevo comedor	3
Cordones	4
Hábitos de estudio	2
Selección de personal	3
El mejor colegio	3
La carrera	2

Las tareas “La sombra en el patio de recreo”, “La desaparición del portátil”, “El parque de atracciones” y “Un nuevo comedor” son de diseño propio y planteadas a partir de contextos cercanos a los alumnos (su propio colegio y el parque de atracciones al que van en su viaje de fin de curso). “La carrera” es una adaptación de una tarea propuesta en LEMA y que puede verse también en Galbraith y Stillman (2006). “Hábitos de estudio”, “Selección de personal” y “El mejor colegio” son tareas tomadas de las MEAs, que se describen en Lesh (1997) como “actividades de obtención de estructuras”. Finalmente, “Cordones” es una tarea adaptada de un problema propuesto en la primera fase de la IX Olimpiada Matemática Provincial de Guadalajara[3].

Las tareas incluyen un breve enunciado, acompañado por fotografías o ilustraciones (en la mayoría de los casos) con la única finalidad de presentar la tarea de una manera más amena y atractiva para el alumno. En algunas tareas se incluyen los datos necesarios para su resolución mediante tablas, esquemas o mapas. El enunciado de estas nueve tareas se recoge en un dossier, junto a otro tipo de contenido que pasaremos a describir a continuación.

[3] Sobre matemáticas y cordones puede verse la página web de Ian Fieggen: www.fieggen.com

III.3. El dossier de trabajo

El enunciado de todas las tareas se recoge en un dossier que se entrega a cada uno de los alumnos y que, además, incluye una pequeña explicación sobre la actividad que van a realizar. Los puntos tratados en este dossier son:

- Un breve comentario sobre algunos aspectos de la resolución de este tipo de tareas, tales como la importancia que juega el contexto en el que se enmarcan, la selección de las variables relevantes, y la interpretación y validación de los resultados en la realidad. Estos elementos, relacionados con el ciclo de modelización, son diferenciadores con respecto a otro tipo de actividades.
- La documentación a elaborar por cada grupo, que incluye un diario sobre el proceso de resolución seguido y una presentación (en diapositivas digitales) que debe describir no solo la solución final, sino además los datos utilizados, las suposiciones y estimaciones consideradas, los procedimientos matemáticos empleados y una reflexión final sobre la importancia e interés del trabajo realizado.
- Los criterios que se utilizarán en la evaluación y que incluyen los conceptos y procedimientos matemáticos utilizados, los argumentos y justificaciones aportados, el lenguaje, representaciones y recursos empleados en la presentación, así como la iniciativa y autonomía del grupo durante la realización de la tarea. La evaluación, aunque no forma parte de los objetivos de nuestra investigación, sí que es un aspecto importante a considerar en cualquier actividad que queramos implementar en el aula, por lo que le dedicaremos un apartado de este mismo capítulo.

Durante la sesión inicial de presentación el profesor lee y comenta el dossier a toda la clase. Esto permite marcar las diferencias entre la actividad de modelización que van a llevar cabo y las clases tradicionales que han seguido hasta el momento, especialmente en lo que respecta a la naturaleza de las tareas propuestas y la dinámica de trabajo a seguir durante su realización (como se comenta también en el apartado dedicado a la metodología de aula). La introducción de este dossier puede verse en el Anexo III.

Pasaremos a analizar en el próximo apartado el diseño de las preguntas que conforman el test de competencias y los criterios de evaluación de las mismas.

III.4. El test de competencias

Con el fin de evaluar las posibles consecuencias de la experiencia basada en la resolución de tareas de modelización en el desarrollo de las competencias matemáticas necesarias para resolver problemas reales, se diseñó un cuestionario de lápiz y papel. La referencia seguida para realizar este test fue el trabajo de investigación realizado por Mousoulides y presentado en detalle en su tesis doctoral (2007), que utiliza tareas del informe PISA para analizar la repercusión de la enseñanza en modelización en la mejora de las competencias para resolver problemas reales.

Como comentamos en el apartado II.4.3, el nivel de competencia en modelización alcanzado por una persona, desde un enfoque holístico, se describe a partir de tres dimensiones: grado de cobertura, referido a los aspectos de la competencia que es capaz de activar; radio de acción, referido a las situaciones y contextos en que es capaz de activarla; y nivel técnico, referido a las matemáticas que puede utilizar. Por ello se escogieron y diseñaron tareas que tuvieran en cuenta estos tres aspectos:

- Que cubrieran el ciclo completo de modelización, especialmente el proceso de matematización y de interpretación de las soluciones obtenidas en la realidad (grado de cobertura).
- Que se situaran en contextos reales, donde se tuviera que tratar tanto con información matemática como no matemática (radio de acción).
- Que incluyeran diferentes contenidos matemáticos con diferentes niveles de complejidad (nivel técnico).

El test, pilotado en el curso 2011-12, incluye tareas propuestas en las pruebas liberadas del informe PISA (OCDE, 2005), del proyecto LEMA y de los estudios de Verschaffel y otros (2000, 2008 y 2012).

III.4.1. Tareas que componen el test

A continuación describiremos las tareas que componen nuestro test de competencias (que puede verse en el Anexo IV), utilizando para ello la terminología del informe PISA (OCDE, 2006).

Respecto a las tareas tomadas de las pruebas liberadas del informe PISA (“Caminar”, “Monopatín” y “Carpintero”), se seleccionan para que cubran los tres niveles de complejidad detallados anteriormente en el apartado II.4.2: tareas sencillas de reproducción de conocimientos básicos (de reproducción); tareas no rutinarias y en las que es preciso conectar o integrar diferentes ideas clave (de conexión); y tareas en las que es necesario aportar una pequeña reflexión sobre los procesos empleados en su resolución (de reflexión). Según el tipo de contenido matemático que requieren, las tareas se sitúan en una de estas categorías: de cantidad, en el que se incluyen contenidos relacionados con los procesos de cuantificar, medir, ordenar y simbolizar mediante números; de espacio y forma, en el que se incluyen contenidos relacionados con el estudio de las formas, sus construcciones, representaciones y relaciones a través del espacio cercano; y de cambio y relaciones, que incluye contenido referido a los procesos de cambio que pueden ser descritos mediantes funciones y ecuaciones matemáticas. Las respuestas pueden ser cortas, abiertas o de elección múltiple. También se selecciona un problema PISA (“Vacaciones”), del tipo toma de decisiones (lo que PISA denomina “pruebas de solución de problemas” y que no cataloga según los niveles de complejidad descritos anteriormente), donde el alumno debe dar una respuesta que cumpla con una serie de condiciones a partir de las distintas alternativas que se le presentan.

Se incluyen además un par de problemas de estimaciones de grandes cantidades (denominados también problemas de Fermi, ver Albarracín y Gorgorió, 2013 y 2014), adaptados de PISA (“El concierto de rock”) y del proyecto LEMA (“Vecinos”). En estas tareas los alumnos deben realizar supuestos sobre la situación presentada antes de estimar, mediante cálculos sencillos, una cantidad (número de personas que asisten a un concierto o número de personas que viven en un edificio). Son, por tanto, de respuesta abierta y de un nivel de complejidad alto, de reflexión, y están relacionadas con los procesos de cuantificar, pertenecientes a la categoría de cantidad.

También se incluyen tareas utilizadas en los estudios de Verschaffel (“Dos amigos” y “La cuerda”). Según este autor, estas tareas permiten evidenciar la “suspensión de búsqueda de la realidad” (dar una solución a un problema real sin tener en cuenta si la solución matemática obtenida se ajusta o no a esa realidad). Por tanto, en ellas, los alumnos deben adecuar su respuesta (que pueden obtener también mediante cálculos sencillos) a la realidad en la que se enmarcan. Son, al igual que las dos tareas anteriores, de respuesta abierta, con contenido matemático relativo a la categoría cantidad, aunque con una complejidad menor, de conexión.

En la Tabla III.4 enumeramos las tareas utilizadas en el test, incluyendo la fuente que nos ha servido de referencia, su clasificación y su puntuación.

En la última columna de la tabla se detallan los puntos asignados a cada pregunta. De los criterios de calificación de cada tarea hablaremos en detalle en el apartado siguiente.

III.4.2. Criterios de calificación

Los criterios utilizados en la calificación de las tareas se establecieron tomando en consideración los propuestos en el propio informe PISA (ver OCDE, 2005).

Tabla III.4. Tareas incluidas en el test.

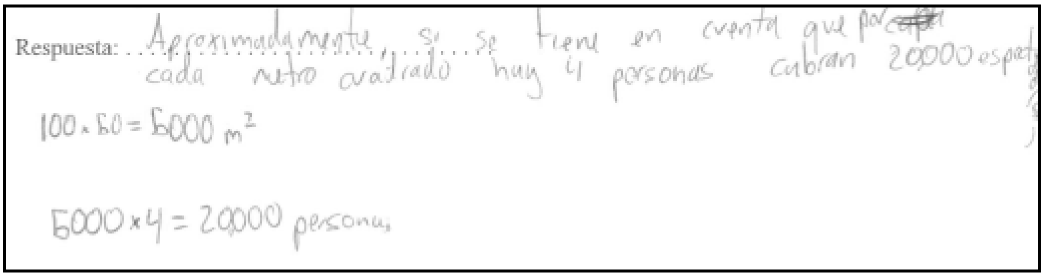
Tarea		*Fuente y tipo*	*Puntuación*
Caminar	Pregunta 1	PISA Reproducción/cambio/abierta	0-1
	Pregunta 2	PISA Conexión/cambio/abierta	0-1-2
Monopatín	Pregunta 3	PISA Reproducción/cantidad/corta	0-1
	Pregunta 4	PISA Reproducción/cantidad/elección	0-1
	Pregunta 5	PISA Conexión/cantidad/corta	0-1-2
Carpintero	Pregunta 6	PISA Conexión/espacio/elección	0-1-2
El concierto de rock	Pregunta 7	PISA Reflexión/cantidad/abierta	0-1-2
Vecinos	Pregunta 8	LEMA Reflexión/cantidad/abierta	0-1-2
Vacaciones	Pregunta 9	PISA Problema/toma de decisiones	0-1-2
Dos amigos	Pregunta 10	Verschaffel Conexión/cantidad/abierta	0-1-2
La cuerda	Pregunta 11	Verschaffel Conexión/cantidad/abierta	0-1-2

Según su nivel de complejidad, la puntuación máxima varía de 1 punto, para las preguntas de reproducción, hasta 2 puntos, para las preguntas de conexión/reflexión. En las preguntas de respuesta corta se acepta únicamente la respuesta correcta (no hay puntuación parcial); en preguntas con respuesta de elección múltiple se acepta un error para la puntuación parcial (1 punto); en las preguntas con respuesta abierta se debe tener en cuenta los argumentos y justificaciones que acompañan la solución a la hora de calificarlas con la puntuación máxima (2 puntos), parcial (1 punto) o ninguna puntuación (los criterios pueden verse en detalle para cada pregunta en el Anexo V).

A continuación detallaremos, con ejemplos, los criterios de calificación seguidos en las tareas abiertas adaptadas del proyecto LEMA y Verschaffel:

- En la tarea "El concierto de rock", se pregunta a los alumnos por el número de asistentes a un concierto, *¿Cuánta gente estimas que hubo en el concierto?*, proporcionándose la forma y las medidas del recinto. La respuesta es abierta: puede ser un número o un intervalo.

  Se puntúa con 2 puntos si la respuesta se basa en estimaciones realistas: 3 o 4 personas por metro cuadrado ya que todas las entradas están vendidas y el terreno está lleno de fans, como se especifica en el enunciado. Como el concierto ocupa una superficie de 5000 metros cuadrados, con esta estimación habrá entre 15000 y 20000 personas. En la Figura III.1 vemos un ejemplo de una respuesta puntuada con 2 puntos.



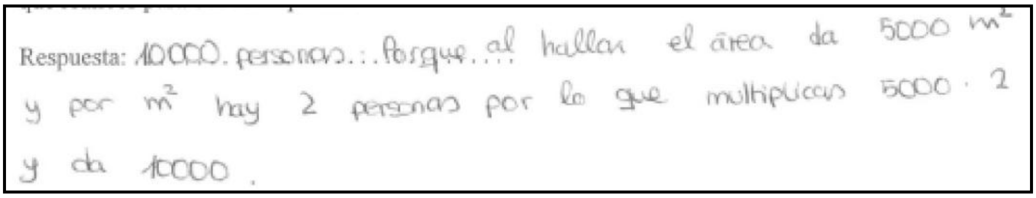
Respuesta: Aproximadamente, si se tiene en cuenta que por ~~cada~~ cada metro cuadrado hay 4 personas cabrían 20000 espect

$100 \times 50 = 5000\ m^2$

$5000 \times 4 = 20000$ personas

Figura III.1. Respuesta de 2 puntos a la tarea "El concierto de rock"

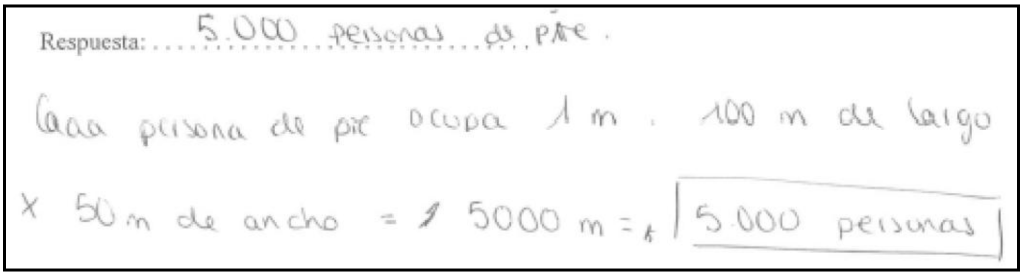
  Se puntúa con 1 punto si se utilizan otras estimaciones menos realistas, como 2 personas por metro cuadrado (unas 10000 personas). En la Figura III.2 vemos un ejemplo de este tipo de respuestas.



Respuesta: 10000 personas. Porque al hallar el área da 5000 m² y por m² hay 2 personas por lo que multiplicas 5000 · 2 y da 10000.

Figura III.2. Respuesta de 1 punto a la tarea "El concierto de rock"

Finalmente, se puntúa con 0 puntos aquellas respuestas no realistas, como una persona por metro cuadrado. Ver en la Figura III.3 un ejemplo de este tipo de respuesta.


Respuesta: 5.000 personas de pie.

Cada persona de pie ocupa 1 m. 100 m de largo x 50 m de ancho = 5000 m = 5.000 personas

Figura III.3. Respuesta de 0 puntos a la tarea "El concierto de rock"

- En la tarea "Vecinos", a partir de la fotografía de un edificio de viviendas, se pide a los alumnos que estimen el número de personas que pueden vivir en él, *¿Cuánta gente crees que vive en el bloque de pisos de la fotografía?* La respuesta, al igual que en la tarea anterior, es abierta y puede ser un único número o un intervalo.

  Se puntúa con 2 puntos si la respuesta se basa en una estimación realista: se observa que el edificio tiene ocho plantas y se puede suponer que en cada planta hay 4 viviendas. Una estimación del número de habitantes de las viviendas debe incluir: personas que vivan solas (1 habitante), parejas jóvenes sin hijos o parejas mayores cuyos hijos ya no vivan con ellos (2 habitantes), familias medias con hijos e incluso con abuelos (entre 4 y 6 habitantes). Por ejemplo, si la mitad de las viviendas las ocupan familias medias, un cuarto por familias de dos miembros y un cuarto personas que viven solas, habrá entre 88 y 120 personas. En la Figura III.4 mostramos la respuesta de un alumno puntuado con 2 puntos.

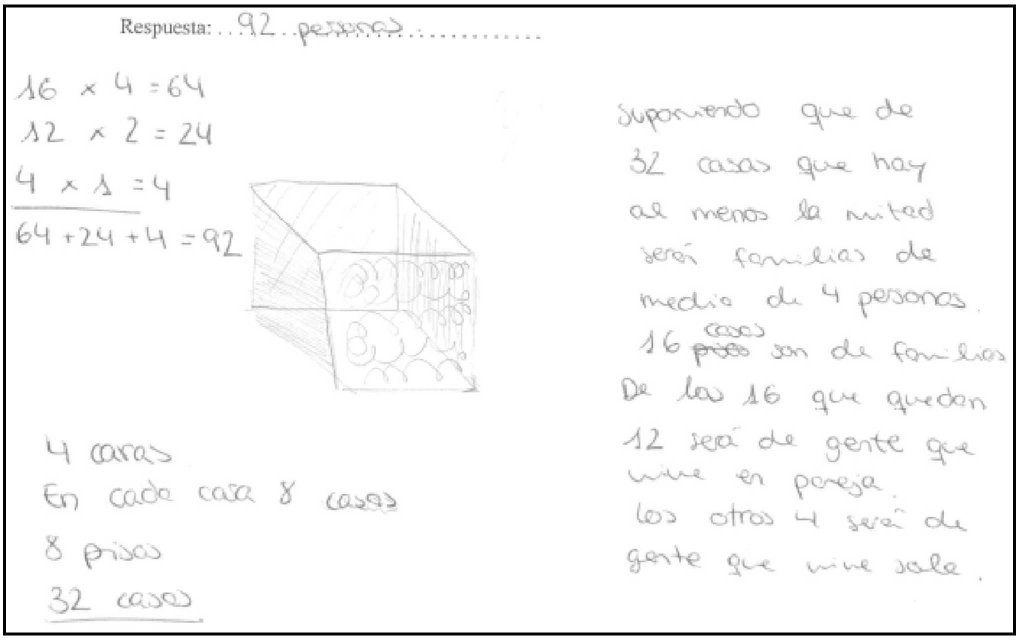


Figura III.4. Respuesta de 2 puntos a la tarea “Vecinos”

También se acepta que se estime una media de 3 personas por vivienda, lo cual daría 96 personas, aproximadamente, como en la Figura III.5.

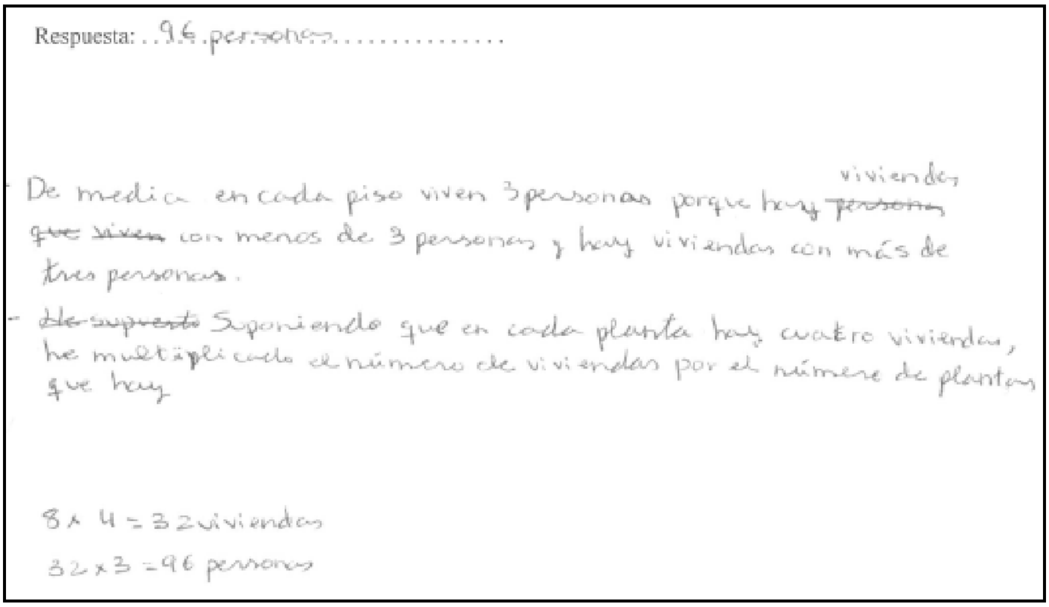


Figura III.5. Respuesta de 2 puntos a la tarea “Vecinos”

Se puntúa con 1 punto si se da el número correcto de plantas y un número razonable de viviendas por planta, pero se utilizan otras estimaciones para el número de personas por vivienda, aunque sin justificar. En la Figura III.6 mostramos una respuesta de este estilo.

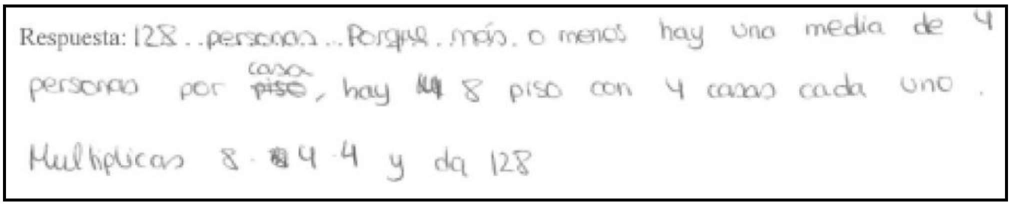

Respuesta: 128 . . personas . . . Porque . más . o menos hay una media de 4 personas por casa ~~piso~~, hay 8 piso con 4 casas cada uno .
Multiplicas 8 · 4 · 4 y da 128

Figura III.6. Respuesta de 1 punto a la tarea "Vecinos"

Finalmente, se puntúa con 0 puntos aquellas respuestas no realistas o con justificaciones u operaciones confusas, como la mostrada en la Figura III.7.

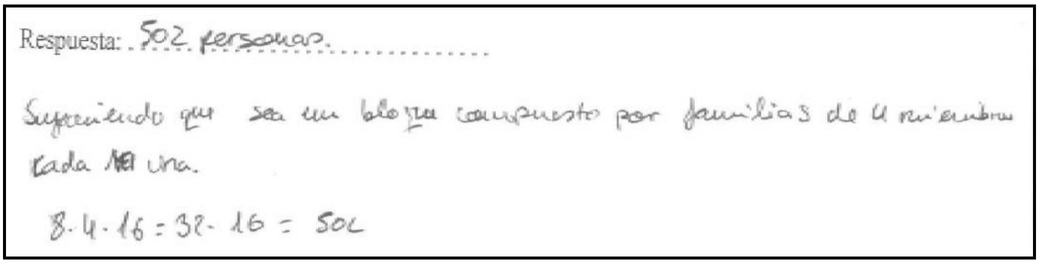

Respuesta: . 502 personas. . . . .
Suponiendo que sea un bloque compuesto por familias de 4 miembros cada una.
8 · 4 · 16 = 32 · 16 = 502

Figura III.7. Respuesta de 0 puntos a la tarea "Vecinos"

- En "Dos amigos" se pide a los alumnos que calculen a qué distancia viven uno de otro, indicándose que uno vive a tres kilómetros del instituto y el otro a ocho. Esta tarea no tiene una única solución ya que la respuesta puede ser cualquier valor del intervalo 5-11.

  En caso de dar como solución el intervalo, entre 5 y 11 kilómetros, se otorgan 2 puntos. En la Figura III.8 mostramos una respuesta de este tipo.

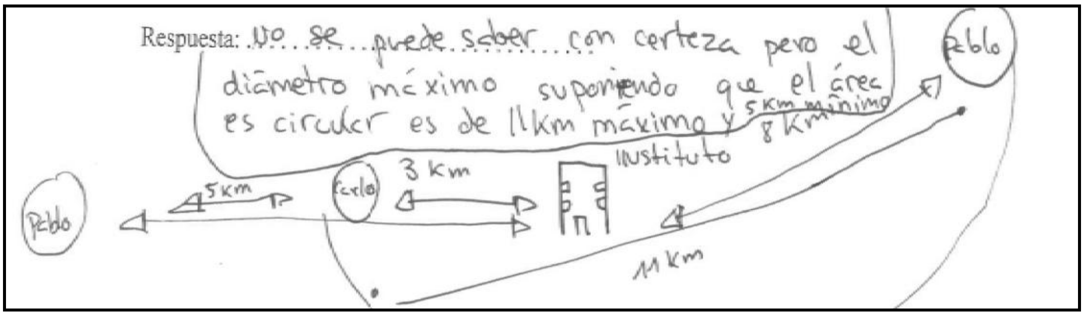


Figura III.8. Respuesta de 2 puntos a la tarea "Dos amigos"

En el caso que se den dos valores numéricos como respuesta y no un intervalo, a 11 kilómetros o a 5 kilómetros, se puntúa con 1 punto. En la Figura III.9 mostramos la respuesta de un alumno puntuada con 1 punto.

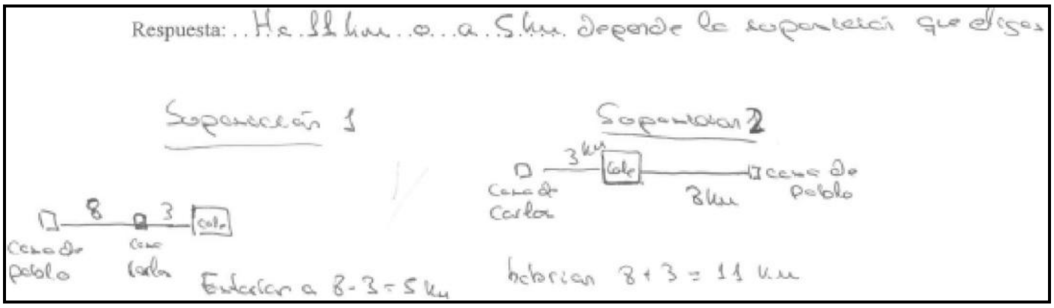


Figura III.9. Respuesta de 1 punto a la tarea "Dos amigos"

Si se da una única respuesta numérica (sumando o restando los datos numéricos del problema) se puntúa con 0 puntos. Ver como ejemplo la Figura III.10.

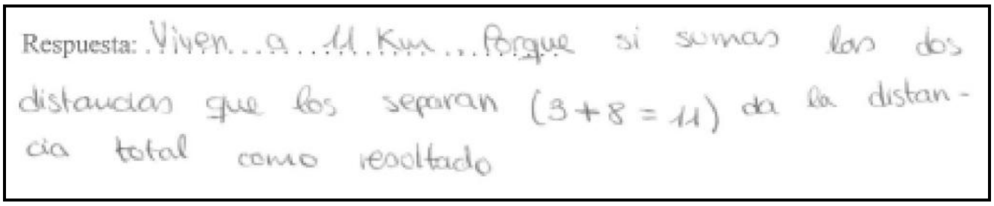


Figura III.10. Respuesta de 0 puntos a la tarea "Dos amigos"

- En "La cuerda" los alumnos deben determinar el número de trozos de cuerda de 0,5 metros de longitud que necesitarán para unir dos postes separados entre sí 4 metros. La tarea tiene una respuesta abierta que debe adecuarse a la situación real en la que se enmarca: Se necesitan 8 trozos de cuerda para unir los dos postes. Pero debemos atar estos trozos entre sí, por lo que serán necesarios más trozos de cuerda.

Si se da una respuesta realista y argumentada, por ejemplo un intervalo de entre 9 y 12 trozos de cuerda, se puntúa con 2 puntos, como se muestra en la Figura III.11.

Respuesta: Necesitarás 10 trozos. Porque de cada trozo quitas 0'1m para hacer el nudo y te queda 0'4m de cada trozo. Divides 0'4 : 4 = 10, que son los trozos que necesitas.

Figura III.11. Respuesta de 2 puntos a la tarea "La cuerda"

Si se dan respuestas poco argumentadas o sin justificar, se puntúa con 1 punto. En la Figura III.12 se da un ejemplo de este caso.

Respuesta: 17 trozos

8+9=17

π —4m— π

necesitarás 8 trozos más 9 trozos para los nudos

Figura III.12. Respuesta de 1 punto a la tarea "La cuerda"

Cualquier respuesta que no tenga en cuenta la realidad se puntúa con 0 puntos. Ver como ejemplo la Figura III.13.

Respuesta: 8 trozos de cuerda.

– Suponiendo sabiendo que entre los dos postes hay 4 m y que tenemos trozos de 0,5 m, si cogemos 8 trozos de 0,5 m obtendremos una cuerda de 4 m.

0,5 · 8 = 4 m.

Figura III.13. Respuesta de 0 puntos a la tarea "La cuerda"

Hemos descrito el test que utilizaremos para analizar, desde un punto de vista competencial, la efectividad de nuestra experiencia. Ahora nos centraremos en las herramientas que hemos empleado durante el trabajo de campo para observar y documentar las actuaciones de nuestros alumnos.

III.5. Herramientas de observación y documentación

Las tareas de modelización requieren que los grupos de alumnos generen modelos, que pueden ir refinando y mejorando en sucesivos ciclos, expliquen y justifiquen la adecuación de estos modelos y finalmente expongan públicamente su proceso de resolución. Los alumnos deben pues externalizar sus formas de pensamiento, a través del diálogo y el debate entre sus compañeros y el profesor, y también a través de una documentación que debe ser elaborada durante la realización de la tarea. De esta manera se va generando un “rastro continuo de documentación” (Lesh y Kelly, 2000, p. 202), que debemos recoger y que incluye producciones escritas y grabaciones de audio, tal y como detallamos a continuación:

- El diario del alumno, realizado por cada grupo, donde se describe su resolución de la tarea en el día a día del aula (ver un ejemplo de este material en la Figura III.14) y que incluye también borradores con sus cálculos y representaciones. En algunos casos estos diarios han sido aportados en formato digital.
- El diario del profesor-investigador, en el que se recogen las impresiones obtenidas tras la observación del trabajo realizado por los grupos de alumnos en el aula.
- Grabaciones en audio de los debates entre los alumnos y el profesor, mediante una pequeña grabadora que acompañaba al profesor a lo largo de las sesiones de trabajo en el aula. También se graba en audio la sesión final de exposición.
- La producción final de los distintos grupos, recogida en su presentación

pública mediante diapositivas digitales.

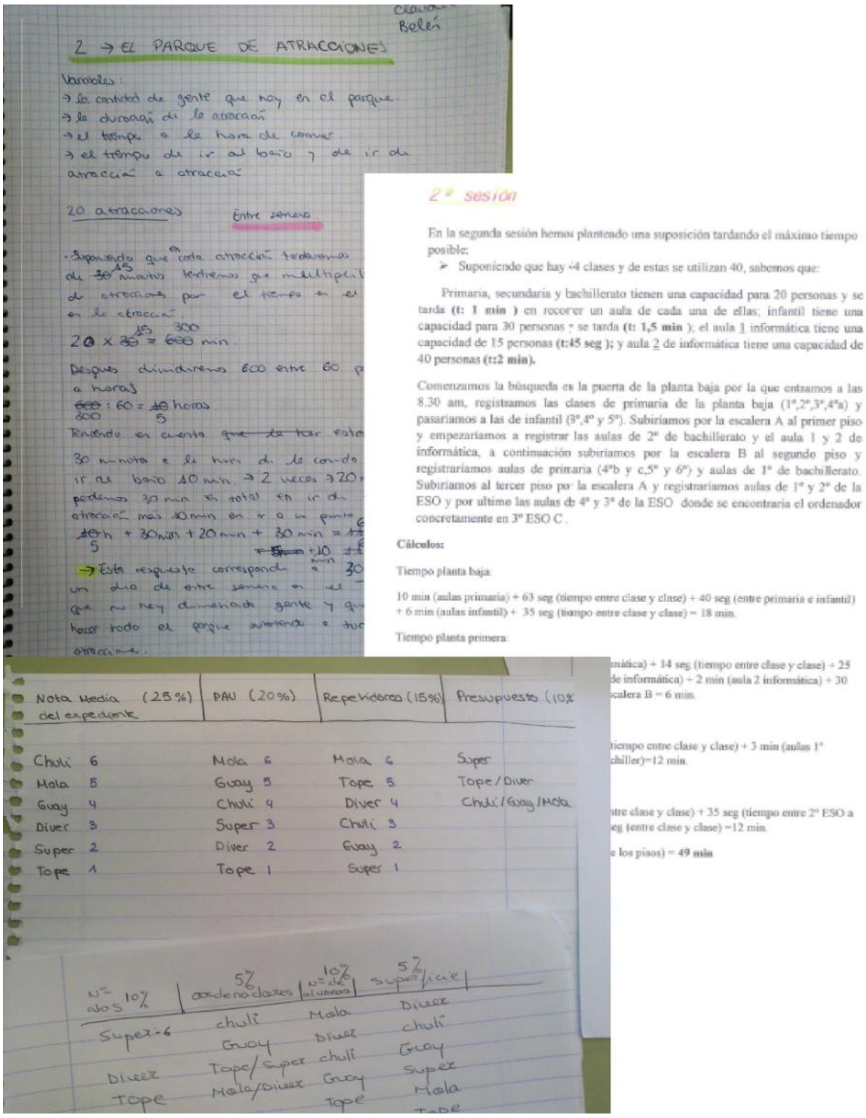


Figura III.14. Ejemplos de las producciones escritas de los alumnos

El diario del alumno, junto al diario del profesor-investigador, nos permitirá reconstruir el proceso de resolución seguido por los grupos de alumnos mientras que la presentación en diapositivas digitales nos proporcionará un elemento adicional a partir del cual analizar su modelo final. La transcripción de las grabaciones en audio nos permitirá analizar el debate entre los alumnos y el profesor y caracterizar su papel dentro del proceso de modelización de los alumnos.

En los apartados siguientes centraremos nuestra atención en la metodología introducida en el aula con el fin de implementar la actividad basada en la resolución de tareas de modelización. Describiremos también el papel del profesor y la estructura y formación de los grupos de trabajo durante la experiencia.

III.6. Metodología de aula

El trabajo en modelización en el aula de secundaria, especialmente si se viene de una enseñanza imitativa más tradicional, como es nuestro caso, supone un cambio metodológico importante, especialmente en el papel que el profesor y el alumno deben desempeñar. La metodología seguida durante nuestra experiencia y que desarrollaremos en los siguientes apartados se puede resumir en estos dos puntos:

- La actividad se realiza en pequeños grupos heterogéneos de trabajo cooperativo de tres miembros (en algunos casos se aceptaron grupos de dos o cuatro miembros), formados libremente por ellos mismos. El dossier que se entrega a los alumnos contiene el enunciado de todas las tareas para que cada grupo elija una de ellas para su resolución, siendo posible que grupos distintos escojan la misma.
- El profesor se encarga de supervisar su trabajo, pero los alumnos deben tomar la iniciativa, y en la medida de lo posible, ser autónomos: solo en caso de bloqueo pueden pedir la ayuda del profesor.

La introducción de la metodología que acabamos de describir implica, necesariamente, un cambio sustancial en la actuación del profesor respecto a las clases tradicionales. En el siguiente apartado expondremos las consideraciones que se han tenido en cuenta respecto al papel del profesor durante la experiencia.

III.6.1. El papel del profesor

Burkhardt (2006, ver Figura II.3) recoge el cambio de rol del profesor desde una enseñanza imitativa a una enseñanza basada en la modelización. Según este autor las exigencias son distintas y, en consecuencia, los modelos de intervención también deben ser distintos. En el desarrollo de la experiencia tomamos en consideración los roles descritos por Burkhardt para guiar la actuación del profesor. A continuación describiremos en detalle estos roles:

- Rol de Observador (o *fellow student*). Dado que la resolución de las tareas de modelización no es única, y que por tanto pueden surgir múltiples soluciones para una misma tarea, el centro de atención del profesor no debe ser únicamente si el alumno ha resuelto bien o mal la tarea. Siguiendo la recomendación de Lesh y Kelly (2000), éste debe fijarse, más bien, en cuál ha sido su forma de pensar y las ideas que ha ido desarrollando durante su proceso de resolución. Para ello debe observar cuidadosamente a los grupos de alumnos mientras resuelven la tarea y alentarlos a que expongan y compartan sus ideas en voz alta.
- Rol de Gestor de recursos (o *resource*), proporcionando a los alumnos nuevas vías de resolución o reflexión que les lleven replantearse todo o parte del proceso de modelización seguido hasta el momento.
- Rol de Asesor (o *counsellor*), aconsejando y resolviendo las dudas de los alumnos cuando lo soliciten, intentando no aportar más información que la necesaria para superar el bloqueo en el que se encuentren.

Es importante tener en cuenta que, en cualquier caso, las intervenciones del profesor solo deben producirse en caso de auténtico bloqueo, sin interferir ni limitar la autonomía de los alumnos durante el proceso de resolución. Es el grupo de alumnos, según Kelly y Lesh (2000), el que tiene la última palabra, siendo innecesaria la mayor parte del tiempo la presencia de una figura de autoridad.

El desarrollo de la experiencia implica un cambio metodológico relativo a la organización del trabajo en el aula. Al contrario que en las clases tradicionales en las que los alumnos trabajan individualmente, durante nuestra experiencia los alumnos trabajan en grupo. En el siguiente apartado se describen los aspectos que se han considerado para gestionar este trabajo grupal.

III.6.2. Estructura y formación de los grupos de trabajo

Como hemos señalado en la revisión de la literatura, diversos investigadores que han desarrollado experiencias de modelización, tales como las MEAs (Lesh y Doerr, 2003), el proyecto LEMA o los PMR (Sol, 2008), recomiendan el trabajo en pequeños grupos. Esta idea aparece también en los trabajos de Blomhøj y Kjeldsen (2006) y Maaß (2006). Según Gavilá (2002), las ventajas del trabajo en grupo frente al trabajo individual en las clases tradicionales pueden verse, entre otros, en el protagonismo que asumen los propios alumnos, la participación de toda la clase, el mejor aprovechamiento del tiempo, el desarrollo de habilidades de tipo social, o la gestión y planificación de su propio trabajo.

Dentro de las diferentes estructuras que pueden adoptar los grupos de trabajo, en nuestra investigación optamos por los grupos de trabajo cooperativo (ver Gavilá, 1997, Barkley, Cross y Major, 2007), cuya finalidad es alcanzar objetivos comunes, en nuestro caso la resolución de la tarea de modelización propuesta, aprovechando los conocimientos y capacidades de sus miembros, maximizando el aprendizaje de todos, de manera autónoma e independiente al resto de grupos de trabajo, y a lo largo de varias sesiones de clase.

En lo que respecta a su constitución, optamos por grupos heterogéneos, ya que, de esta forma, se favorece la diversidad de opiniones, ideas, antecedentes y experiencias, aunque, según algunos autores como Barkley, Cross y Major (2007, p. 47), también puede suponer una dificultad. En nuestra experiencia, estos grupos se formaron libremente por los propios alumnos, con la intención de acrecentar su sentimiento de responsabilidad y grado de implicación.

Una vez explicada la metodología que se ha seguido durante la experiencia, tanto desde el punto de vista del trabajo del profesor como de los alumnos, pasaremos a describir cómo se ha desarrollado la secuencia didáctica a lo largo de los distintos cursos durante los que se puso en marcha el trabajo de campo.

III.7. Secuencia didáctica

El trabajo de campo realizado durante la investigación se llevó a cabo durante cinco sesiones completas de clase de una hora de duración. La estructura de la secuencia didáctica seguida queda resumida en la Tabla III.5.

Entre la última sesión en el aula y la sesión de exposición final se dejó un fin de semana por medio, para que los alumnos dispusieran de un tiempo extra, aunque en horario extraescolar, para concluir su trabajo.

Tabla III.5. Estructura de la secuencia didáctica

Sesión	*Organización*	*Actividad*
1	Grupo clase	Presentación actividad. Selección de la tarea y formación de grupos de trabajo
2-4	Grupos de trabajo	Resolución de la tarea escogida
5	Grupo clase	Exposición de cada grupo de su resolución y debate en gran grupo

En el curso 2012-13 se pasó a los alumnos el test de competencias. El pretest se realizó una semana antes de la presentación de la actividad (primera sesión) y el postest una semana después de la exposición pública (quinta y última sesión).

A continuación describiremos el desarrollo de las sesiones de modelización propiamente dichas.

III.7.1. La presentación de la actividad

En línea con lo afirmado por Blomhøj y Kjeldsen (2006, p. 170), consideramos que, para conseguir la implicación de los alumnos y el éxito de la actividad, es importante mostrar de forma clara los objetivos, expectativas y criterios de evaluación de la misma. El profesor, en la primera sesión de aula, expuso al grupo completo de clase estas cuestiones, leyendo y comentando la introducción del dossier (en el Anexo III), incluyendo una pequeña descripción del ciclo de modelización, en la que se destacó la fase de compresión de la situación real en la que se enmarca la tarea, la selección de las variables relevantes, la interpretación y validación de los resultados en la realidad y la fase final de comunicación, para que ayudara a los alumnos en la resolución de su tarea y permitiera identificar las diferencias con respecto a otro tipo de actividades propias de una enseñanza más tradicional (precisamente la que habían seguido hasta el momento).

Durante esta sesión se constituyeron los grupos de trabajo, de tres miembros (preferiblemente) y excepcionalmente de dos o cuatro (cuando la aritmética de clase lo requería). Por último, cada uno de los grupos escogió una de las tareas del dossier para su realización.

Conviene destacar que durante todo el trabajo de campo realizado a lo largo de estos tres cursos, el profesor no intervino en la elaboración de los grupos ni en la elección de las tareas.

Trataremos a continuación de cómo se desarrolló el trabajo en modelización dentro del aula.

III.7.2. La resolución de tareas de modelización en el aula

Durante las tres sesiones de resolución en el aula, los alumnos debían sentarse por grupos, compartiendo una misma mesa de trabajo. Contaban con elementos para obtener la información y los datos necesarios para resolver su tarea y preparar el informe (ordenadores conectados a internet, aparatos de medición, etc.). Esta parte del trabajo (recopilar datos y redactar informes) pudo realizarse también fuera del aula y en horario extraescolar. El profesor se guió por los roles descritos en el apartado III.6.1, y, al menos en una ocasión por sesión, se acercó a cada uno de los grupos para interesarse por el estado en que se encontraba su proceso de resolución.

Tras la presentación de la sesión anterior, los alumnos tenían clara la dinámica a seguir durante las clases. Debatían activamente entre ellos el planteamiento y la resolución de su tarea, elaborando borradores con sus propuestas, que iban revisando y corrigiendo. Estos borradores les permitirían posteriormente elaborar su diario.

Figura III.15. Alumnos trabajando en grupo en el aula y tomando notas en un borrador

En nuestra experiencia piloto del curso 2011-12 se constató que algunos alumnos solo consignaban en su diario el producto final de su trabajo, obviando otras vías de resolución distintas que habían explorado y que finalmente habían descartado. Por ello, y durante la experiencia de los cursos 2012-13 y 2013-2014, el profesor se paseó por la clase, observando el trabajo de los grupos y preguntando directamente por él (al menos, como se ha señalado anteriormente, una vez por sesión), tomando notas en su diario y grabando sus intervenciones mediante una pequeña grabadora. Algunos de los borradores, a criterio del profesor, fueron incorporados a sus diarios, todo ello con la finalidad de rellenar las lagunas que los alumnos pudieran dejar sobre su proceso de modelización.

III.7.3. La exposición pública

Una vez finalizadas las sesiones estipuladas para la realización de las tareas, cada grupo debía preparar una pequeña presentación, con ayuda de diapositivas digitales, en la que se incluyera:

- Una breve descripción de la tarea.
- El proceso detallado de resolución.
- La solución y sus conclusiones.

En nuestra experiencia, la sesión de presentación se llevó a cabo en un aula provista de pantalla digital. Cada grupo dispuso de diez minutos para la exposición del trabajo, seguida de un turno de preguntas, formuladas tanto por los propios compañeros como por el profesor, donde se vertieron opiniones, se intercambiaron ideas y se contrastaron las soluciones obtenidas por diferentes grupos que habían resuelto la misma tarea.

Figura III.16. Varios momentos de la exposición pública

En el siguiente apartado hablaremos de la evaluación del trabajo de modelización. La evaluación cumple con el objetivo de organizar y regular la actividad del aula y forma parte del proceso de enseñanza-aprendizaje (Giménez, 1997, p. 16). Es por ello que, al desarrollar la experiencia en que se basa nuestro trabajo de campo, y queriendo darle un peso y una importancia similar a la del resto de actividades del aula, fijamos, como un aspecto metodológico más, cómo se iba a evaluar a los alumnos.

III.8. La evaluación

Cuando proponemos una actividad a nuestros alumnos, y más cuando ésta difiere del trabajo habitual en el aula, conviene que los alumnos sepan cuál es su meta y cómo deben llegar a ella, saber qué se espera de ellos. Además, la actividad en modelización no es fácil de evaluar: la misma tarea pueda dar soluciones distintas según el enfoque, las hipótesis y los métodos utilizados, y los procesos de modelización seguidos pueden resultar confusos y enmarañados. Por ello, seleccionar los aspectos del trabajo de los alumnos que debemos evaluar resulta de especial importancia.

En el proyecto LEMA y en las MEAs podemos ver dos ejemplos de evaluación. LEMA presenta una rúbrica[4] dividida en cinco categorías, cuatro basadas en el ciclo de modelización (*Establecer el modelo – Trabajar con precisión – Interpretación – Validar y reflexionar*) y una centrada en aspectos formales (*Informes*), con cuatro niveles de calidad, en los que se tiene en cuenta también el grado de independencia y autonomía mostrado por los alumnos en cada una de las categorías. La QAG de las MEAs[5] no presenta un listado de categorías si no que se centra en el producto final ya elaborado, determinando la calidad del mismo a partir de la respuesta a esta cuestión fundamental:

[4] Ver http://www.lema-project.org/web.lemaproject/web/dvd_2009/spain/assessment.html

[5] Ver https://engineering.purdue.edu/ENE/Research/SGMM/Problems/CASESTUDIESKIDSWEB/casestudies/airport/tools.htm

"¿Cuán útil es la herramienta desarrollada para los propósitos del cliente?", o más concretamente, "¿el producto cumple con las necesidades del cliente?", siendo también un aspecto a valorar la posibilidad de su reutilización en otras situaciones similares a la planteada.

Con estas referencias, al diseñar la actividad, tratamos de elaborar una rúbrica que resultara sencilla de manejar por el profesor y de comprender por los alumnos (aunque ambos carecieran de experiencia previa en modelización). En nuestra experiencia piloto del curso 2011-12 ya nos dimos cuenta de lo complicado que puede resultar en algunos casos (especialmente en tareas muy abiertas) distinguir entre las distintas fases del proceso de resolución, por lo que se decidió fijar una única categoría que se centrara, de forma global, en el proceso completo, y no en sus fases individuales, de forma similar a la QAG. También se decidió añadir una categoría referida a la información dada por los alumnos sobre su trabajo, al igual que en LEMA, y se consideró una nueva categoría, destinada a valorar la iniciativa y la autonomía del grupo y la participación activa de todos sus miembros (aspecto que LEMA utiliza para determinar el nivel de calidad de cada una de sus categorías, pero no como una categoría en sí).

De esta forma, nuestra rúbrica de evaluación (en el Anexo VI), presenta tres categorías, divididas en cinco niveles de calidad (nivel 1: Muy mal; nivel 2: Mal; nivel 3: Regular; nivel 4; Bien; nivel 5: Muy bien). Cada categoría se acompaña de una serie de preguntas que pretenden ayudar en el proceso de calificación y que exponemos a continuación:

- La categoría, *Planteamiento y resolución* se centra en la valoración del proceso de resolución seguido por los alumnos, el cumplimiento de los objetivos fijados para la tarea, la adecuación de la solución aportada, y la posible reutilización de su trabajo a otras tareas similares a la planteada: ¿se comprende y formula correctamente el problema? ¿se reconocen las entidades matemáticas subyacentes a la situación real original necesarias para resolver el problema? ¿la solución matemática obtenida es adecuada a la situación real original? ¿se revisa y valida el modelo? ¿el modelo planteado es generalizable y reutilizable en otras situaciones similares a la original?

- La categoría *Presentación y comunicación* incluye aquellos aspectos relacionados con las argumentaciones y justificaciones utilizadas, la claridad expositiva, el uso adecuado de símbolos y formalismos matemáticos, así como la inclusión de representaciones y herramientas de soporte (gráficos, tablas, etc.) que faciliten y enriquezcan la comunicación: ¿se dan argumentos válidos para justificar el proceso de resolución utilizado? ¿las explicaciones se entienden con facilidad? ¿se contesta con claridad las cuestiones planteadas? ¿se utilizan representaciones que faciliten la comprensión del problema? ¿se utiliza el lenguaje matemático de forma correcta?
- La categorí*a Iniciativa y autonomía* tiene en cuenta todo lo relacionado con el trabajo y participación activa de todos los miembros del grupo en la resolución del problema, la generación de ideas propias, la superación de obstáculos a partir de la reflexión y el debate crítico entre los compañeros, de llevar adelante los planes propios con autonomía y decisión, la falta de dependencia del profesor, y su capacidad de trabajo y esfuerzo: ¿se produce debate constructivo entre los miembros del grupo? ¿todos los miembros participan de forma activa aportando ideas? ¿se escuchan y respetan las ideas de todos los miembros? ¿se consulta con el profesor cada nuevo paso dado por el grupo o se confía en las propias capacidades? ¿se requiere de manera constante la ayuda u orientación del profesor?

La categoría *Planteamiento y resolución* está más centrada en el propio proceso de modelización, mientras que las restantes categorías se centran más en aspectos formales y actitudinales. En esta categoría las preguntas planteadas para ayudar en su evaluación giran en torno al ciclo de modelización (comprensión – simplificación – matematización – interpretación – validación) y la solución dada, su posible reutilización y generalización. Por ello, y a la hora de obtener una calificación final, se dio un peso doble a esta categoría. En *Presentación y comunicación* las preguntas se centran en las explicaciones, justificaciones y representaciones que acompañan la producción de los alumnos, tanto en su diario como en su exposición pública final (argumentos – explicaciones – representaciones – lenguaje). Finalmente, en *Iniciativa y autonomía* las preguntas pretenden centrar la atención en el nivel de participación y colaboración de todos los miembros del grupo y su grado de independencia y autonomía con respecto al profesor (participación – autonomía).

Estos aspectos (recogidos también, de forma resumida, en el dossier que se entrega a todos los alumnos) deben ser evaluados en diferentes momentos durante el desarrollo de la actividad. Así, la categoría *Iniciativa y autonomía* es evaluada a lo largo de las sesiones de trabajo en grupo en el aula, mediante la observación directa del profesor. La evaluación de la categoría *Presentación y comunicación*, se lleva a cabo durante la sesión de presentación, y en ella el profesor puede tener en cuenta también la reacción de los compañeros y el debate que se pueda generar. Finalmente, la categoría *Planteamiento y resolución*, debe realizarse tras un análisis de los documentos generados: diario del alumno y el profesor y presentación final.

A lo largo de este capítulo hemos ido desgranando los elementos y herramientas que configuran nuestra investigación y la metodología de trabajo en el aula. En el siguiente capítulo pasaremos ya a analizar los resultados de nuestro estudio, con el fin de dar respuesta a las preguntas planteadas y alcanzar los objetivos fijados.

Capítulo IV

Análisis de los resultados

Una vez descrita y justificada la metodología seguida en nuestra investigación, pasamos a presentar el análisis de los resultados de la experiencia. Este análisis nos permitirá dar respuesta a las tres preguntas de investigación propuestas.

Para abordar la pregunta P1, relativa al desarrollo integrado de las competencias matemáticas a través de la resolución de tareas de modelización (de las que hemos hablado en el capítulo anterior y a cuyo diseño hace referencia el objetivo O1), centraremos nuestro análisis en los alumnos y en sus producciones, lo que constituye nuestro objetivo O2, *Analizar los procesos y los modelos producidos por los alumnos*.

Dado que, tal y como asegura Borromeo-Ferri (2006), el proceso de resolución de una tarea de modelización puede resultar enmarañado por ser no secuencial, para analizar los trabajos de los diferentes grupos de alumnos hemos realizado una reconstrucción "racional" de sus producciones, en el sentido de Puig (1996). Esta reconstrucción, incluida en los Anexos VII-XV y efectuada a partir de la documentación recogida (diario del alumno, diario del profesor, borradores, presentación en diapositivas digitales), describe cómo los grupos de alumnos resuelven la tarea planteada, y nos ayudará a realizar un análisis de su producción desde dos vertientes complementarias: por un lado, el análisis del proceso de modelización; por otro, el análisis del modelo. Este doble análisis puede seguirse a través del siguiente esquema (ver Figura IV.1) y será explicado en detalle en los dos primeros apartados de este capítulo.

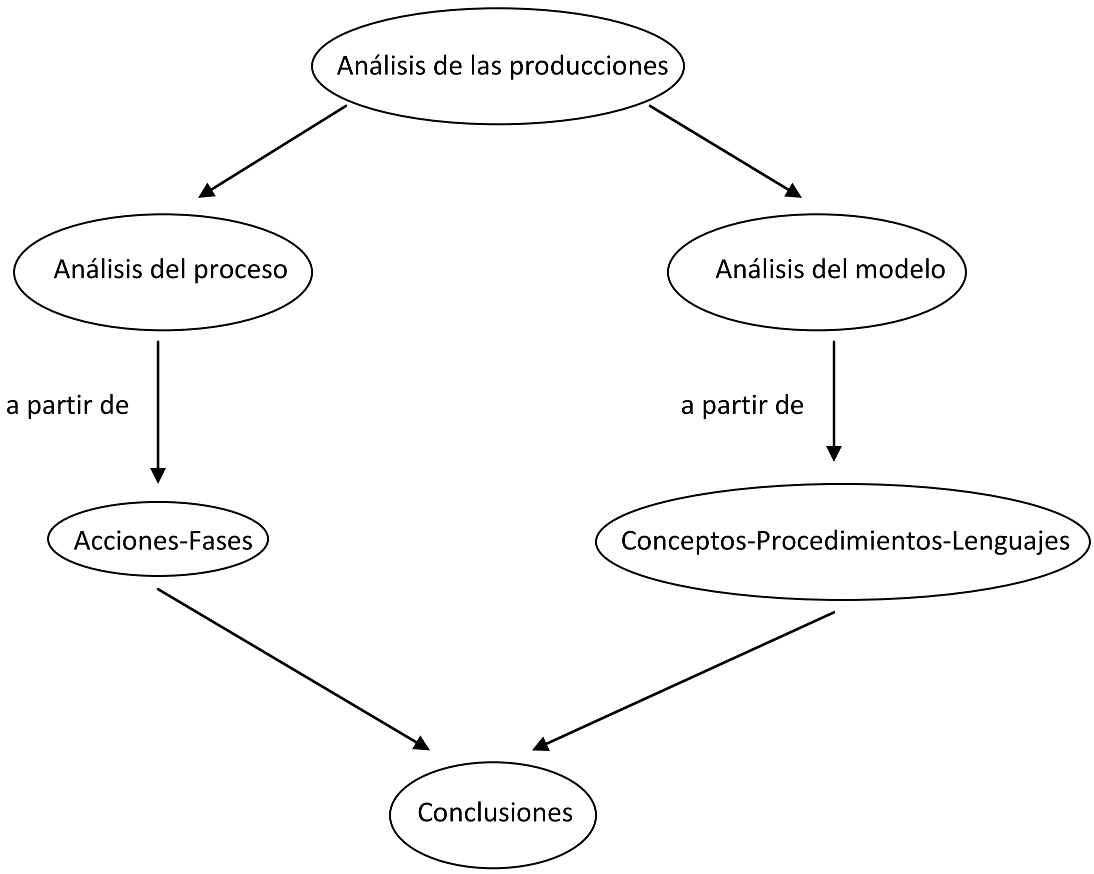


Figura IV1. Esquema del doble análisis de las producciones de los alumnos

En primer lugar, analizaremos el proceso de modelización seguido por los alumnos, a partir de las acciones que realizan para transitar por las distintas fases del ciclo de modelización. Posteriormente, analizaremos el producto final de este proceso, su modelo de resolución de la tarea escogida, a partir de la terna: conceptos – procedimientos – lenguajes. Para ello hemos creado unas herramientas específicas que describiremos en cada uno de estos apartados. Ambos análisis, uno de carácter dinámico, el del proceso, y otro de carácter estructural, el del modelo, se complementan y permiten tener una visión completa de su trabajo.

Otro de los aspectos que queremos estudiar es el del papel del profesor y sus interacciones con los alumnos durante la actividad modelizadora. Para ello, en el tercer apartado, analizaremos la transcripción de las grabaciones realizadas al profesor mientras interactúa con un grupo de alumnos. Con este análisis pretendemos dar respuesta a la segunda pregunta de investigación, P2, relativa a las implicaciones que supone, desde el punto de vista del profesor, la introducción de las tareas de modelización en el aula, y la consecución del objetivo O3, *Observar y describir los cambios metodológicos referidos al papel del profesor*.

Finalmente, en el cuarto apartado, centraremos nuestra atención en el análisis estadístico de los resultados obtenidos en el test competencial (de cuyo diseño hemos hablado ya en el apartado III.4). El contraste entre los resultados del grupo experimental y de control nos dará la respuesta a la tercera pregunta de investigación, P3, relativa a si la enseñanza basada en tareas de modelización repercute positivamente en el desarrollo de las competencias necesarias para resolver problemas reales, y cumplir con nuestro objetivo, O4, *Analizar si el trabajo en modelización mejora las competencias necesarias para resolver problemas reales*.

IV.1. Análisis del proceso de modelización

En la resolución de una tarea de modelización, los alumnos deben realizar una serie de acciones que les lleven a la construcción de un modelo, que irán revisando y refinando a lo largo de sucesivos ciclos hasta dar con una respuesta adecuada al problema real planteado. Uno de los objetivos de nuestra investigación es precisamente observar y documentar este proceso. Para ello, tomaremos como referencia el ciclo de modelización propuesto por Blum y Leiß (2007, ver Figura II.1). En él se da un listado de acciones vinculadas con las transiciones del ciclo: comprensión, simplificación/estructuración, matematización, resolución matemática, interpretación, validación y comunicación. Estas acciones nos pueden ayudar a identificar los procesos clave que se producen durante la resolución de su tarea. Así, basándonos en estas acciones, hemos diseñado una serie de preguntas que nos permitirán analizar el proceso de modelización seguido por los grupos de alumnos. Estas preguntas y su relación con las acciones necesarias para transitar por el ciclo de modelización suponen nuestra herramienta de investigación, tal y como se recoge en la Tabla IV.1.

En la primera columna de esta tabla formulamos la pregunta que nos ayudará a centrar nuestro análisis en las acciones y procesos clave que, hipotéticamente, se deben dar para transitar entre las distintas fases del ciclo de Blum y Leiß. En la segunda columna damos una descripción de la acción o acciones (en cursiva) a las que la pregunta hace referencia. En la tercera relacionamos la acción o acciones con la transición correspondiente del ciclo, según la numeración original utilizada en la Figura II.1.

Tabla IV.1. Análisis del proceso de modelización

Pregunta	*Acción*	*Ciclo Blum y Leiß*
¿Se formula un problema que pueda dar respuesta, total o parcial, a la situación original propuesta?	*Comprender* la situación en la que se enmarca la tarea, tomando decisiones, elaborando hipótesis y supuestos que lleven al planteamiento de un problema o sub-problemas	1
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?	*Simplificar* y *seleccionar* los elementos y relaciones relevantes, identificando las matemáticas que subyacen en la realidad.	2
¿Se usan representaciones?	*Utilizar* representaciones (gráficos, dibujos, esquemas,…) para *codificar* la realidad en términos matemáticos e *interpretar* los resultados obtenidos.	3, 5
¿Se utiliza el lenguaje matemático?	*Utilizar* el lenguaje formal y simbólico para codificar la realidad en términos matemáticos, *resolver matemáticamente* el problema, e *interpretar* los resultados obtenidos.	3, 4, 5
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	*Trabajar* con las herramientas y procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema planteado.	4
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	*Validar* las soluciones matemáticas en la realidad, reflexionando sobre el modelo utilizado y llegando a conclusiones razonadas.	6
¿Se comunica de forma oral y escrita el proceso de resolución de forma que resulte comprensible por parte del resto de compañeros?	*Debatir* y *comunicar*, tanto dentro como fuera del grupo, todo el proceso de modelización seguido y los resultados obtenidos.	7

La primera pregunta está relacionada con la comprensión por parte del alumno de la situación planteada en el enunciado, que le llevará a formularse un problema, el cual no tiene porqué ser exclusivamente matemático. Según la complejidad de la situación, es posible que, una vez resuelto, el alumno deba volver a plantearse nuevos sub-problemas en una nueva iteración del ciclo. De esta manera, la suma de estas resoluciones parciales permitirá dar una respuesta global a la situación inicial.

Una vez formulado un problema, el alumno deberá estructurar y simplificar la situación real para poder resolverlo, concretando y seleccionando aquellos aspectos de la realidad más relevantes. La selección de estos elementos está directamente relacionada con la comprensión por parte del alumno de la situación de partida (su imagen o representación mental de la situación) y su conocimiento matemático, aspectos que le ayudarán a identificar las matemáticas subyacentes a esta realidad. A esta parte del proceso de modelización hace referencia la segunda de las preguntas planteadas en nuestra herramienta.

La tercera y cuarta pregunta se relacionan con el proceso de matematización, mediante el cual el alumno traslada los elementos de la realidad que ha seleccionado al mundo de las matemáticas, utilizando distintos tipos de representaciones y lenguajes. Pero también, como veremos en nuestro análisis, el uso de representaciones y del lenguaje matemático permite mostrar e interpretar los resultados matemáticos obtenidos en la realidad. Aunque comparten algunas transiciones dentro del ciclo, estos dos aspectos, lenguajes y representaciones, presentan usos distintos por parte de los alumnos, por lo que hemos optado por tratarlos en preguntas separadas, para permitir un análisis más detallado de los mismos.

La quinta pregunta hace referencia al trabajo puramente matemático que permitirá al alumno obtener una solución matemática de su modelo.

La solución debe venir acompañada de argumentos que apoyen y justifiquen la adecuación de la solución y su validez, y las conclusiones que se derivan de ella, aspectos que son tratados en la sexta pregunta.

Finalmente, y cuando se ha alcanzado una respuesta satisfactoria, ésta, y el proceso completo seguido hasta llegar a ella, debe ser comunicada al resto de compañeros para que pueda ser contrastada y debatida. Esta es la última de las preguntas de nuestra herramienta.

Esta herramienta nos permitirá describir y analizar el proceso de modelización de los alumnos, obteniendo una reconstrucción racional y secuenciada de su resolución. A continuación vamos a ilustrar cómo se ha utilizado, tomando ejemplos de los diferentes grupos en las nueve tareas propuestas (los comentarios originales se muestran entrecomillados y en cursiva, también se incluyen dibujos, gráficas, tablas y cálculos extraídos de sus diarios y su presentación final, en su formato original). En los Anexos VII-XV se puede ver el análisis individual del proceso de modelización de cada uno de los grupos, realizado a partir de la documentación recogida.

La primera pregunta de nuestra herramienta se refiere a la formulación de un problema o sub-problemas que permitan la resolución total o parcial de la tarea propuesta.

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta, total o parcial, a la situación original propuesta?

Dado que algunas de las tareas planteadas presentan en su enunciado preguntas de respuesta abierta tales como, *¿Qué decisiones tomarías tú para mejorar la zona de sombra del patio?* en “La sombra en el patio de recreo”; *Necesitamos organizar bien la visita para aprovechar al máximo el tiempo, ¿cómo lo haríais?* en “El Parque de atracciones”; *¿Cómo vais a organizar la búsqueda?* en “La desaparición del portátil”; o *¿Qué decisiones tomaríais respecto a su organización?* en “Un nuevo comedor”, es preciso que los alumnos lleven a cabo una primera acción de comprensión de la realidad para concretar la situación planteada en un problema o en una serie de sub-problemas que irán resolviéndose en sucesivas iteraciones del ciclo. Estos problemas no tienen por qué aludir directamente a las matemáticas, especialmente si la tarea tiene una relación muy estrecha con la realidad. Por ejemplo, en el caso de “La sombra en el patio de recreo”, los distintos grupos se plantean como problema inicial escoger el tipo de árbol que tendrán que plantar en el patio. El grupo A resuelve esta cuestión de forma matemática, idealizando mediante figuras geométricas conocidas (triángulo, círculo y rectángulo) la sección plana de su copa: "*Coger las diferentes formas geométricas* [de las copas de los árboles] *para ir probando cual genera una mayor sombra*" (extracto del diario del grupo A). Los grupos B y C, sin embargo, basan su elección en criterios no matemáticos: el árbol debe ser de hoja perenne porque así no perderá sus hojas en invierno, proporcionando siempre la misma superficie de sombra, independientemente de la estación del año, argumentan. La elección del tipo de árbol permitirá a los tres grupos avanzar en la tarea y plantearse nuevos sub-problemas en una nueva iteración del ciclo: calcular el área de la sombra proyectada por el árbol escogido; determinar la superficie del patio a sombrear; hallar el número de árboles necesarios para hacerlo; y finalmente, y solo en caso del grupo A, distribuirlos en el patio de forma que sus sombras no se superpongan y así maximizar la superficie sombreada.

En la tarea "El parque de atracciones", los grupos A y B planean diseñar una ruta que pase por las principales atracciones y estimar el tiempo que les llevará realizar la visita en función de esta ruta: "*Crear una ruta óptima en la que se visite el mayor número de atracciones posibles en el menor tiempo*" (extracto del diario del grupo A). Para dar respuesta a este problema deben resolver antes una serie de sub-problemas: calcular la longitud de esta ruta óptima; determinar el tiempo necesario para recorrerla; estimar la duración de las colas y la duración de las atracciones. La estimación de estos tiempos dependerá de diversos factores, como la popularidad de las atracciones o la asistencia de público al parque. Finalmente, el tiempo total necesario para realizar la visita será la suma de todos estos tiempos. El grupo A irá un poco más allá y se planteará diseñar una "*ruta personalizada*", donde poder escoger las atracciones a visitar, incorporando un elemento de complejidad mayor. Los grupos C y D no se plantean diseñar una ruta óptima, su problema será estimar la duración de las atracciones, fijando el mismo tiempo para todas, según la asistencia al parque, y estimar un tiempo que incluya desplazamientos, descansos, etc. Observamos, por tanto, que la situación real de partida da lugar, según los grupos, a problemas distintos.

En la tarea “La desaparición del portátil”, los dos grupos de alumnos se plantean como problema la estimación del tiempo que les llevará registrar las aulas y diseñar una ruta de búsqueda que les permita recorrer todas las aulas del colegio en un tiempo mínimo. El análisis de la situación lleva al grupo B a plantearse incluso dos posibles circunstancias: el portátil puede ser encontrado al registrar la primera planta del colegio (en el mínimo tiempo posible), o solo se encontrará tras haber registrado todo el colegio (en el máximo tiempo posible).

En “Un nuevo comedor”, la pregunta abierta relativa a la organización del comedor lleva a los grupos A y B a formularse un primer problema: determinar la forma y dimensiones más adecuadas de bandejas y mesas, en lugar de, simplemente, utilizar las que se emplean en el comedor actual, como hace el grupo C. Se plantean también determinar la superficie que ocuparán los niños y las sillas y, finalmente, la distribución óptima de estos elementos en el comedor para aprovechar al máximo la superficie disponible. En este caso, la formulación del problema matemático relativo a la organización del espacio disponible repercutirá directamente en el número de comensales, cuestión incluida también en el enunciado de la tarea.

Observamos que en estas tareas la comprensión de la realidad permite a los alumnos crear su propia imagen mental de la situación y formular un problema o sub-problemas. Sin embargo, en las restantes tareas (“Cordones”, “Hábitos de estudio”, “La carrera”, “El mejor colegio” y “Selección de personal”) la comprensión del problema es inmediata ya que se formula una pregunta directa en el enunciado: *¿Sabríais decir cuál de estas maneras requiere los cordones más largos y cuál los más cortos?* en “Cordones”, o *¿Seréis capaces de ayudar a Andrés a decidir qué seis vendedores son los más idóneos para contratar la próxima temporada?* en “Selección de personal”, por ejemplo. No se parte, como en las tareas anteriores, de una situación abierta y poco estructurada que requiera de la formulación de varios sub-problemas, pues este queda claramente fijado desde el propio enunciado y puede ser abordado directamente tras un proceso de identificación de los elementos clave, del que nos ocuparemos en la siguiente pregunta.

La segunda pregunta de nuestra herramienta se refiere a cómo los resolutores simplifican la realidad y seleccionan los elementos relevantes necesarios para resolver el problema planteado.

¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?

La resolución del problema planteado en la transición anterior puede precisar de un proceso de simplificación y toma de decisiones previo sin el cual no puede ser abordado matemáticamente.

En "La sombra en el patio de recreo", los tres grupos deciden estudiar el caso de un único árbol. Además, los resolutores identifican que el elemento importante es el área de la sombra proyectada durante el recreo: esto les sugiere pasar de una forma tridimensional (la copa del árbol) a una figura plana (la sección de la copa). Así, todos los grupos deciden estudiar la relación entre el área de la sección plana de la copa y la de la sombra proyectada. Pese a que todos realizan el mismo proceso de simplificación (pasar de una forma tridimensional a una figura plana idealizada y establecer la relación entre sección y sombra), se observan diferencias sustanciales entre ellos. El grupo A representa la sección de la copa a través de distintas figuras planas (triángulo, círculo y rectángulo), mientras que los grupos B y C sólo usan una figura geométrica (el círculo) para representar la sección de la copa del árbol. En los tres grupos se establece que el número de árboles necesarios será directamente proporcional al área del patio que deben sombrear e inversamente proporcional al área de la sombra que proyectan. El grupo A además establece que la disposición de los árboles en el patio depende de la longitud de su sombra, pues las sombras no deben superponerse.

En "La desaparición del portátil", ambos grupos simplifican la situación planteada seleccionando las variables relevantes (número de personas que buscan, número de aulas,…). Además establecen suposiciones respecto a la organización de la búsqueda: es mejor que las personas vayan juntas a la hora de desplazarse y registrar cada una de las aulas del colegio. Esto, según ellos, supone una optimización del tiempo de búsqueda, pero también una simplificación de la realidad que facilitará sus cálculos.

En “El parque de atracciones”, a partir de su propia experiencia, los alumnos de los grupos A y B seleccionan de la realidad aquellas variables que consideran relevantes: tiempo de espera en las colas para subir a las atracciones en función de su popularidad (caso del grupo A) y la asistencia de público al parque (en los grupos A y B); duración de cada atracción (estimada por el grupo A en múltiplos de 5 para facilitar los cálculos); tiempo que se tarda en recorrer el parque, comer e ir al baño o a las tiendas. Los grupos C y D fijan una misma duración para todas las atracciones (incluyendo el tiempo de espera en la cola), según se realice la visita entre semana o en fin de semana. Esto supone una excesiva simplificación del problema que derivará en un modelo más pobre que el construido por los grupos A y B.

En “Un nuevo comedor”, los elementos considerados (mesas, sillas, personas) por los tres grupos se idealizan mediante figuras geométricas planas, para facilitar su distribución en el espacio disponible del comedor. En el caso de los grupos A y B, además, se estudia que forma es la más adecuada para las mesas (¿circular o rectangular?) y bandejas (¿platos circulares o bandejas romboidales o de nuevo diseño, como en el caso del grupo A?). También se eliminan aquellos elementos (armarios, columnas) que pueden entorpecer esta distribución.

En “La carrera” se produce una simplificación de la realidad que es necesaria para facilitar los cálculos: la velocidad del corredor es la misma en los dos tramos en que se divide la carrera. Aunque esta simplificación no se explicita, sí que se ha observa en el proceso de resolución de todos los grupos. Tanto en “Cordones” como en “La carrera”, la identificación de triángulos rectángulos, con partes del anudado de los cordones o con los tramos de la carrera, es el elemento clave sin el cual estos problemas no pueden ser resueltos.

Las tareas basadas en las MEAs, “Hábitos de estudio”, “El mejor colegio” y “Selección de personal”, incluyen en el enunciado todos los datos necesarios para su resolución. A partir de su manipulación los alumnos deben tomar decisiones y llegar a conclusiones. La selección y clasificación de las variables presentadas (cuáles son más importantes, cuáles menos, cuáles se pueden descartar o cuáles se pueden añadir) se convierte pues en el principal aspecto del que deben ocuparse inicialmente.

En “La carrera”, “Cordones”, “Selección de personal”, “El mejor colegio” y “Hábitos de estudio” hemos observado que no hay grandes diferencias entre la simplificación de la realidad establecida por grupos de alumnos distintos. Así, las dos primeras transiciones no suponen en estas tareas mayores diferencias entre unos grupos y otros, tomando especial relevancia el proceso de matematización y resolución matemática (del que trataremos a continuación). Esto puede deberse a que el contexto en el que se sitúan estas tareas, pese a ser plausible, tiene una complejidad menor que en las tareas que tienen un fuerte componente de realidad en su enunciado (“La sombra en el patio de recreo”, “La desaparición del portátil”, “Un nuevo comedor” y “El parque de atracciones”).

A continuación, siguiendo las preguntas de nuestra herramienta, analizaremos el uso de representaciones por nuestros alumnos, tanto para pasar del mundo real al mundo de las matemáticas, como de las matemáticas a la realidad.

¿Se usan representaciones?

En aquellas tareas donde se plantean problemas de carácter geométrico (“La sombra en el patio de recreo”, “Un nuevo comedor”, “La carrera” o “Cordones”) es frecuente el uso de dibujos o esquemas que modelan la realidad y ayudan en su resolución.

En la tarea “La sombra en el patio de recreo”, grupo A, los alumnos utilizan formas geométricas (aquellas que conocen) para abordar el problema geométrico del cálculo del área (la de la sombra proyectada). Construyen modelos en 2D (con un fuerte componente manipulativo) que son representaciones idealizadas de la sección plana de las copas de los árboles mediante el triángulo, el círculo y el rectángulo (ver Figura IV.2). También en

"Un nuevo comedor" el grupo A utiliza un modelo realizado en cartulina de su nueva bandeja triangular.

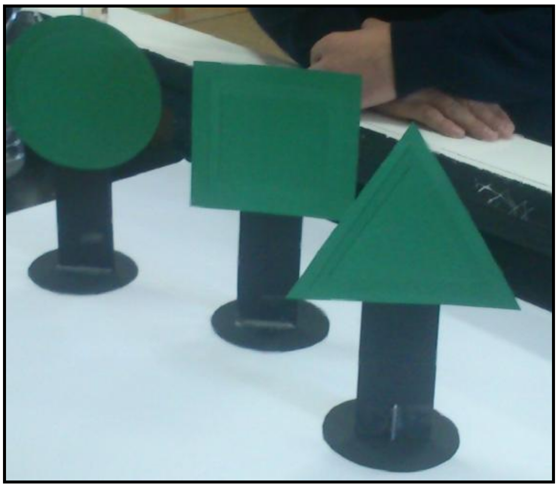


Figura IV.2. Modelos geométricos utilizados en la resolución de la tarea "La sombra en el patio de recreo" por el grupo A

En unos casos las representaciones utilizadas por los alumnos sirven para indicar los datos con los que se cuenta (ver Figura IV.3) y efectuar los cálculos necesarios a partir de ellos.

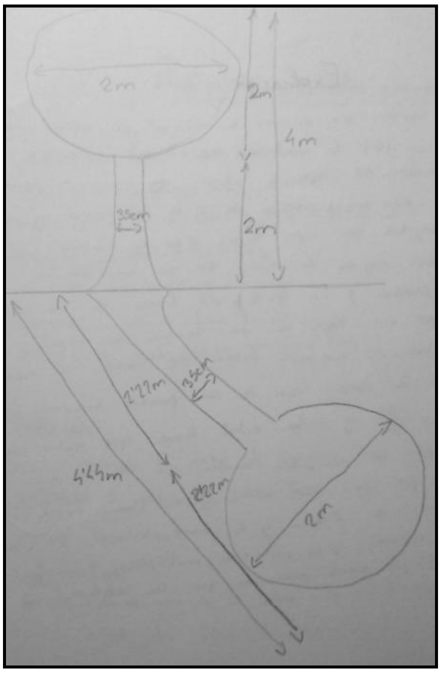


Figura IV.3. Imágenes con las dimensiones del árbol y su sombra, del grupo C en "La sombra en el patio de recreo"

En otros, los dibujos y esquemas permiten justificar los procedimientos utilizados, como la aplicación del Teorema de Pitágoras en “La carrera” o “Cordones” (ver Figura IV.4 y IV.5).

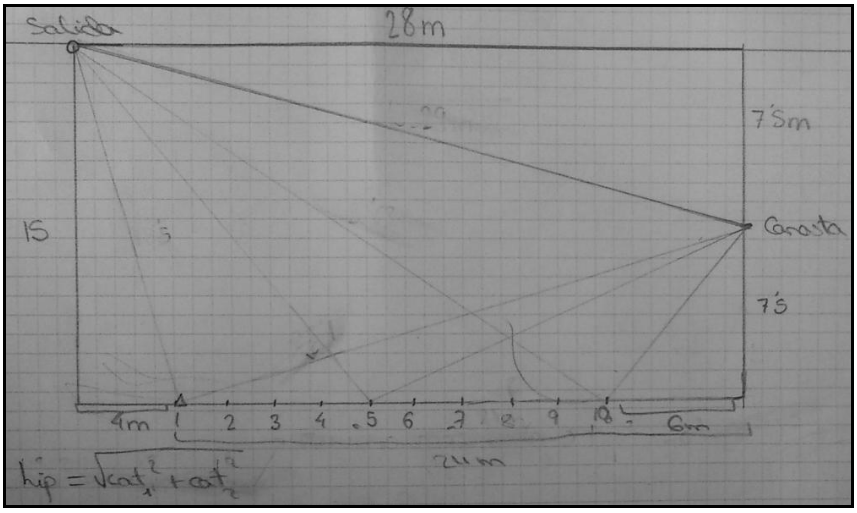


Figura IV.4. Esquema con los triángulos rectángulos necesarios para resolver el problema, incluido en el diario del grupo B, “La carrera”

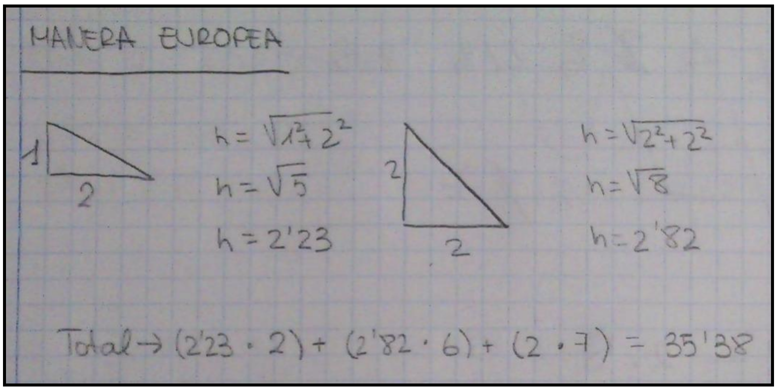


Figura IV.5. Cálculo de la longitud de los cordones en la manera europea, incluida en el diario del grupo B, “Cordones”

Las representaciones también se utilizan para mostrar los resultados del problema e interpretarlos en la realidad, como el modelo de árbol escogido (ver Figura IV.6) o su distribución en el patio (Figura IV.7), en “La sombra en el patio de recreo”.

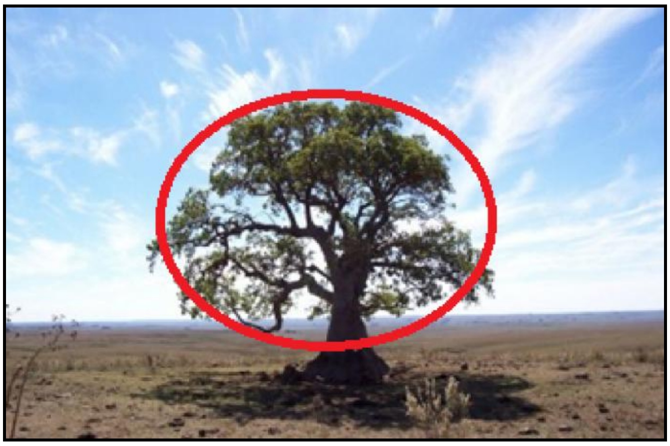


Figura IV.6. Imagen con el árbol escogido, el Ombú, con la copa idealizada mediante un círculo, incluida en la presentación final del grupo A, "La sombra en el patio de recreo"

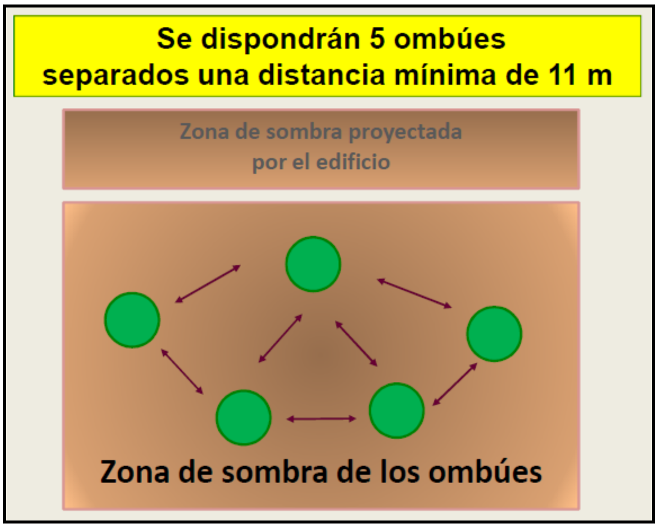


Figura IV.7. Esquema con la distribución final de los cinco ombúes, incluida en la presentación final del grupo A, "La sombra en el patio de recreo"

En "Hábitos de estudio", grupo A (Figura IV.8) y "La carrera", grupo A (Figura IV.9), se recurre al uso de programas informáticos (Excel y Graph, respectivamente) para realizar representaciones que muestren los resultados obtenidos.

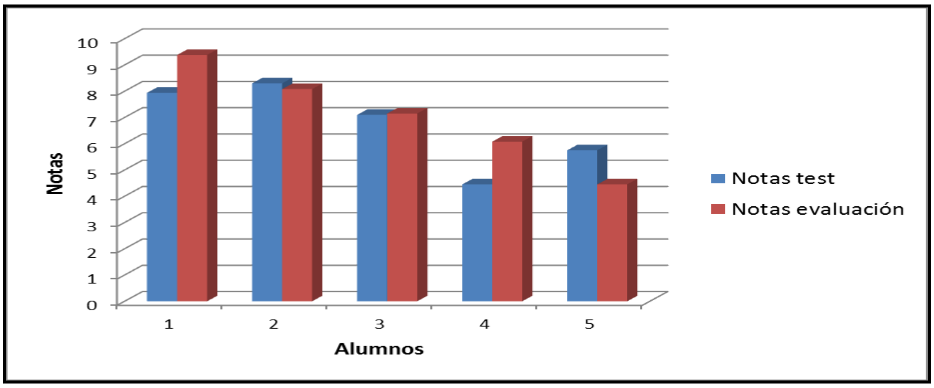


Figura IV.8. Diagrama de barras elaborado con el programa Excel realizado por el grupo A en "Hábitos de estudio"

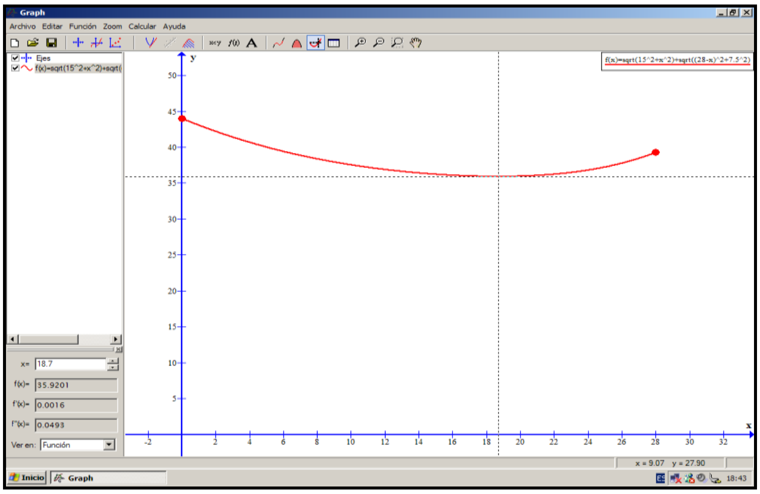


Figura IV.9. Representación gráfica realizada por el grupo A con el programa Graph, en "La carrera"

El uso de distintas representaciones del problema (diagramas, esquemas, dibujos, etc.), organizando y codificando la realidad de acuerdo con los objetos matemáticos involucrados, puede facilitar la transición entre el mundo real y el mundo de las matemáticas, mostrando los datos con los que se cuenta o justificando el uso de determinados procedimientos. Pero también permite, en la dirección contraria, matemáticas–realidad, presentar e interpretar los resultados, como hemos visto. El paradigma del uso de representaciones lo encontramos en el uso de maquetas o modelos en 2D por parte del grupo A en "La sombra en el patio de recreo".

Además de las representaciones, esta doble transición, realidad–matemáticas, matemáticas–realidad, viene acompañada del uso de los distintos lenguajes (aritmético, algebraico, etc.) que permitirán además la resolución matemática del problema. Del uso de los distintos lenguajes hablaremos en la siguiente pregunta.

¿Se utiliza el lenguaje matemático?

El uso del lenguaje matemático permite a los alumnos presentar los objetos involucrados en la resolución del problema, como fórmulas (ver Figura IV.10) o expresiones algebraicas (ver Figura IV.11), que después manipularán para obtener los resultados buscados.

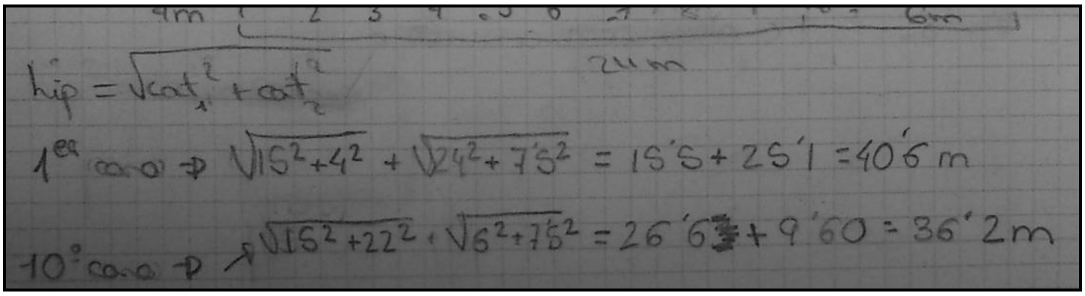


Figura IV.10. Extracto del diario del grupo B con la fórmula del Teorema de Pitágoras que utilizarán en sus cálculos, en "Cordones"

Aplicando semejanza de triángulos tendría una sombra mínima de:

$\frac{1,72}{0,53} = \frac{20}{x}$ $x = 20 \cdot 0,53 / 1,72 = 6,2$ metros

Figura IV.11. Cálculos para obtener la longitud de la sombra por semejanza, incluidos en la presentación final del grupo B, "La sombra en el patio de recreo"

En ocasiones, los alumnos logran una mayor abstracción y recurren al uso de símbolos y formalismos para presentar sus modelos. La mayor o menor competencia en el uso del lenguaje matemático les permite desarrollar modelos algebraicos más formales (grupo A en “La carrera”, grupo C en “Cordones” y grupo A en “La desaparición del portátil”, en la Figura IV.12), o pre-algebraicos, menos formales (grupo A en “La sombra en el patio de recreo, grupo B en “La desaparición del portátil” y grupo A en “El parque de atracciones”, en Figura IV.13).

TT = [H x (E x T)] / N + D / V
Donde:
TT : tiempo total de encontrar el objeto
N: número de personas que buscan
H: número de habitaciones
T: tiempo medio que tardamos en registrar los escondrijos = 5 escondrijo / segundo
E: Nº de escondrijos por clase
D: distancia total del recorrido en metros
V: velocidad de desplazamiento = 2 metro / segundos

Figura IV.12. Modelo algebraico presentado por los alumnos del grupo A para calcular el tiempo de búsqueda, en “La desaparición del portátil”

(Suma duración atracciones)+(baja, media o alta asistencia x durción de cola A/B/C/D)+(40min=tiempo total que se tarda en recorrer toda la ruta)+(1hora-para comer)

=

Tiempo total

Figura IV.13. Modelo pre-algebraico para calcular el tiempo que llevará realizar una ruta personalizada, por el grupo A en “El parque de atracciones”

A partir de la manipulación de estos modelos llegan a la solución de su problema (ver Figura IV.14).

En tareas como “El mejor colegio” y “Selección de personal” los datos se presentan en tablas con las que los alumnos trabajan (ver Figura IV.15), para ordenar, manipular o presentar sus resultados. En “Hábitos de estudio” también se utilizan tablas para recoger los datos obtenidos en sus muestreos. En estas tareas se utiliza, casi de forma exclusiva, el lenguaje tabular.

Fórmula: $(\text{No}-1)\cdot[2(\sqrt{a^2+b^2})]+a$

$(6-1)\cdot[2\cdot(\sqrt{4+1})]+2 =$

$=5\cdot(2\cdot\sqrt{5})+2=$

$=5\cdot(2\cdot 2{,}24)+2=$

$=5\cdot 4{,}48+2=$

$=22{,}4+2 =$

R=24,4cm

Figura IV.14. Cálculo de la longitud de los cordones en la manera americana a partir del modelo algebraico planteado, del grupo C en “Cordones”

	Aulas de desdoble	Ordena-dores	Alumnos	Superficie	Nota media de expedien-te	PAU	Repetido-Res	Presupuesto
Colegio Chuli	1	6	4	5	6	4	3	2
Colegio Guay	2	4,5	3	4	4	5	2	2
Colegio Mola	3	1,5	6	2	5	6	6	2
Colegio Tope	4	3	5	1	1	1	5	4
Colegio Diver	5	3	2	6	3	2	4	4
Colegio Super	6	1,5	1	3	2	3	1	6

Figura IV.15. Tabla con la puntuación de cada variable sobre 6, realizada por el grupo C en “El mejor colegio”

El uso del lenguaje matemático a través de la manipulación de símbolos, fórmulas, expresiones, tablas y otros formalismos matemáticos permite, junto a las representaciones de las que hemos hablado en el apartado anterior, llevar a cabo un proceso de matematización de la realidad. Pero también es necesario, como hemos visto, para resolver matemáticamente el problema y presentar los resultados, en algunos casos mediante modelos matemáticos formales. En el apartado IV.2 volveremos a tratar el uso de los distintos lenguajes (en los que incluiremos el gráfico) en los modelos finales.

En la siguiente pregunta de nuestra herramienta nos centraremos en la resolución matemática del problema.

¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?

Los alumnos han tenido que recurrir a diferentes procedimientos matemáticos para resolver sus tareas. A continuación describiremos, de forma resumida, algunos de ellos.

En algunas tareas los alumnos han debido realizar mediciones directas, utilizando cintas métricas y cronómetros, in situ, para obtener los datos y resultados necesarios para resolver su problema: longitudes en “La sombra en el patio de recreo” o “Un nuevo comedor”, y tiempos en “El parque de atracciones” o “La desaparición del portátil” (ver Figura IV.16). En ocasiones se han realizado estimaciones basadas en la propia experiencia, como los tiempos de espera en las colas o la duración de las atracciones en “El parque de atracciones”.

También ha sido necesario el cálculo de áreas, mediante la aplicación de las fórmulas conocidas (que no siempre se incluyen de forma explícita), en “Un nuevo comedor” y “La sombra en el patio de recreo” (ver Figura IV.17), y de longitudes, por semejanza, en “La sombra en el patio de recreo”, o mediante el Teorema de Pitágoras, en “Cordones” y “La carrera” (ver Figuras IV.18).

Tiempo planta tercera:

6 min (aulas 1º y 2º ESO) + 35 seg (tiempo entre clase y clase) + 35 seg (tiempo entre 2º ESO a 4 eso) + 5 min (aulas 4 ESO y 3º ESO) + 28 seg (entre clase y clase) =12 min.

TOTAL: 18 + 6 + 12 + 12 + 1 MIN (subida de los pisos) = **49 min**

Figura IV.16. Extracto del cálculo del tiempo que les llevará registrar las aulas de la tercera planta, por el grupo B en "La desaparición del portátil"

Área patio = 60 · 40 = 2.400 m^2

Área sombra 1 = 5 · 40 = 200 m^2

Área sombra 2 = 8 · 55 = 440 m^2

Área sombra total = 200 + 440 = 640 m^2

Área sin sombra = 2.400 – 640 = 1.760 m^2

¿ Cuánta área con sombra sobre el total queremos ?

Alrededor del 50%

Área sombra final = 2.400/2 = 1.200 m^2

Área sombra necesaria = 1.200 – 640 = 560 m^2

Figura IV.17. Imagen con los cálculos de áreas realizados por el grupo B en "La sombra en el patio de recreo"

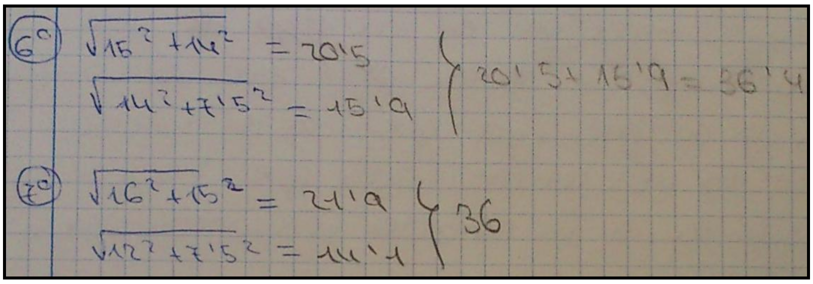


Figura IV.18. Cálculos realizados a partir del Teorema de Pitágoras por el grupo B en "La carrera"

Tal y como hemos visto en las dos primeras preguntas de nuestra herramienta, en las tareas basadas en las MEAs hay un proceso de selección previo de las variables presentadas. Este proceso lleva en algunos casos a la construcción de nuevas variables. Así, el grupo A, en “El mejor colegio”, añade una nueva variable, “*diferencia entre la nota de las PAU y la del expediente*”, construida a partir de dos variables, “*Nota media en las PAU*” y “*Nota media del expediente*”, incluidas en el enunciado. En “Selección de personal”, los tres grupos construyen la tasa, “*dinero recaudado por hora trabajada*” (ver Figura IV.19).

	dinero total	horas totales	media €/h
María	8196	159	51,54
Clara	14921	239,5	62,3
Carol	7000	174,5	40,11
Jose	11373	225,5	50,21
Ángel	9284	182,5	50,87
Ana	11062	163,5	67,66
Lidia	15271	298	51,24
Toni	13964	294,5	47,42
Raúl	9308	173	53,8

Figura IV.19. Tabla con el dinero y horas totales y la tasa euros ganados por hora trabajada para cada trabajador, por el grupo C en “Selección de personal”

En “El mejor colegio” y “Hábitos de estudio”, los distintos grupos concluyen que no todas las variables tienen la misma importancia a la hora de obtener la puntuación de cada colegio y de cada alumno, respectivamente, como mostramos en el siguiente extracto: “*Posteriormente, nos percatamos de que de las 9 preguntas seleccionadas, no todas tenían la misma importancia. En un primer momento, todos iban a valer lo mismo, pero al ver que algunas eran más decisivas añadimos un paso al proceso*” (extracto del diario del grupo B, “Hábitos de estudio”). Según la clasificación previa que hacen de las variables, les asignan una determinada puntuación, “*Puntuamos todas las preguntas: ocho preguntas de 0-15, las menos importantes, y otras ocho de 0-30, las más importantes”* (extracto del diario del grupo A en “Hábitos de estudio”, sin embargo no señalan que las preguntas *más importantes* tienen un peso doble que las *menos importantes*), o les establecen un peso específico (un sistema de puntuación más general y sencillo de reutilizar), en forma de factor de corrección (como vemos en la Figura IV.20) o de porcentaje (en la Figura IV.21).

Figura IV.20. Sistema de puntuación del test y el peso de las preguntas según su importancia, del grupo B en "Hábitos de estudio"

VARIABLES	PORCENTAJES
AULAS DE DESDOBLEBLE	10%
ORDENADORES	5%
Nº DE ALUMNOS POR AULA	10%
SUPERFICIE POR METROS CUADRADOS	5%
NOTA MEDIA DEL EXPEDIETE	25%
NOTA MEDIA EN LA PAU	20%
REPETIDORES	15%
PRESUPUESTO	10%

Figura IV.21. Asignación de porcentaje a cada variable según su importancia, del grupo C en "El mejor colegio"

En "El mejor colegio" es necesario un proceso de estandarización de los valores asignados inicialmente a las variables con el fin de realizar comparaciones. Las variables (número de aulas, ordenadores por alumno, o nota media del expediente, por ejemplo) están en escalas distintas y son de naturaleza distinta (cuantitativas discretas o continuas, e incluso cualitativas) y no se pueden comparar en valor absoluto, aspecto del que se percatan los alumnos, como vemos en la siguiente extracto del diario del grupo A: *“Después de comparar nos dimos cuenta de que estas comparaciones no nos servían para el resultado que teníamos que obtener. Decidimos pasar todos los factores a la misma escala dando a los más importantes un valor con más puntuación”* (ver Figura IV.22, podemos ver otro ejemplo de este proceso en la Figura IV.15).

	n. aulas desdoble	Ord. Por alumno	Alum. Por aula	Metros cuadrados	Media expediente	PAU	Repetidor Por curso	Presupuesto	Dif. PAU y exp.
Clgio. Chuli	1	6	4	5	6x2=12	4x2=8	3	1	1
Clgio. Guay	2	4	3	4	4x2=8	5x2=10	2	1	6
Clgio. Mola	3	1	6	2	5x2=10	6x2=12	6	1	5
Clgio Tope	4	3	2	1	1x2=2	2x2=4	5	3	4
Clgio Diver	5	1	5	6	3x2=6	1x2=2	4	3	2
Clgio Super	6	3	1	3	2x2=4	3x2=6	1	6	4

Figura IV.22. Tabla con la puntuación de los colegios del grupo A, en “El mejor colegio”

Finalmente, deben realizar los cálculos aritméticos necesarios para obtener las puntuaciones finales (ver Figura IV.23).

Como hemos visto, los alumnos aplican sus conocimientos matemáticos, con mayor o menor acierto, para resolver el problema planteado. Esto les permitirá obtener una solución que después interpretarán en la realidad y que les llevará a seguir adelante con la tarea, planteándose nuevos sub-problemas en una nueva iteración del ciclo o pasando ya a la fase final de comunicación si la solución es adecuada y cumple con los objetivos propuestos.

-COLEGIO CHULI

Nº de aulas de desdoble: 10% de 1= 1 x 10 /100= 0.1

Nº de ordenadores por alumno: 5% de 6= 0,3

Nº de alumnos por aula: 10% de 4= 0,4

Superficie en metros cuadrados: 5% de 5= 0,25

Nota media del expediente: 25% de 6= 1,5

Nota media en las PAU: 20% de 4= 0,8

Repetidores: 15% de 3= 0,45

Presupuesto: 10% de 2= 0,2

Total= 4 puntos

Figura IV.23. Cálculo de las puntuaciones del colegio Chuli realizado por el grupo C en "El mejor colegio"

La siguiente pregunta guarda relación con la fase de validación de las soluciones en la realidad y los argumentos que los alumnos utilizan para justificar su proceso de resolución.

¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?

Centraremos ahora nuestra atención en los argumentos empleados por los alumnos para justificar sus resultados y que suponen también, en algunos casos, una validación de los mismos. Así, el grupo A en "La sombra en el patio de recreo" interpreta los resultados recogidos en su tabla (ver Figura IV.24) en los términos del problema que ellos mismos han planteado: la mayor razón se corresponde con la forma geométrica de la copa del árbol que producirá una mayor superficie de sombra. Su elección del tipo de árbol (el ombú) se basa pues en criterios exclusivamente matemáticos (ver Figura IV.6), al contrario de lo que pasa con los grupos B y C, que justifican su elección del árbol en base únicamente a su tipo de hoja (perenne o caduca). Por tanto observamos que los argumentos utilizados no son necesariamente de tipo matemático.

	Círculo	Triángulo	Cuadrado
Área original	*33,18 cm2*	*38,45 cm2*	*63,86 cm2*
Área sombra	*60,79 cm2*	*51,7 cm2*	*72,93 cm2*
Relación	*1,83*	*1,34*	*1,14*

Figura IV.24. Tabla del grupo A con la relación entre el área de la copa original y el área de la sombra proyectada y que justifica la elección de un árbol con copa circular, en "La sombra en el patio de recreo"

El resultado obtenido por este grupo, cinco árboles, parece un número "*razonable, teniendo en cuenta el tamaño del patio de recreo*" (extracto de su diario) y se acompaña de un esquema de su distribución (ver Figura IV.7). El grupo B también da una solución del mismo orden, 6 árboles, mientras que el grupo C estima que son necesarios 23 árboles.

También en "La desaparición del portátil" se utilizan argumentos similares que tienen que ver la adecuación de la solución a la realidad. El grupo A considera que el resultado obtenido es razonable, que "*no es una cosa descabellada*", en el sentido de realizable. El grupo B considera que su solución, en forma de intervalo, con un tiempo mínimo y un tiempo máximo de búsqueda, resulta más "*realista*" que dar una única solución numérica (como hace el grupo A).

En "El parque de atracciones" el resultado se considera adecuado o válido si es posible su ejecución. Así, la planificación de la visita a partir de lo que el grupo A denomina la "*ruta personalizada*", puede realizarse en un día, dentro del horario de apertura del parque. Esta condición también es observada por el grupo B (no así por el grupo C y D), que indica que en caso de una alta asistencia al parque su visita tendría que realizarse en dos días.

En "Un nuevo comedor", los alumnos del grupo A y B justifican el mejor aprovechamiento del espacio mediante estimaciones y cálculos, apoyándose en esquemas para mostrar su distribución (ver Figura IV.25). Justifican así mismo su elección de las formas de mesas y bandejas. El grupo C presenta planos a escala que apoyan su nueva distribución.

Escogimos la longitud de las mesas (2'5 m) en torno al espacio que cada uno de los alumnos requiere en dicha mesa. Habíamos acordado que ese espacio es de 35x30cm, por lo que en cada uno de los lados más alargados de la mesa caben 7 niños:

35·7= 245 cm

El cuadrado que forma el asiento de la silla mide 32'6 cm.

Debido a esto, podemos colocar 7 sillas a lo largo de uno de los lados más alargados de la mesa, y todavía sobran 21'8 cm para que los niños puedan levantarse de la silla y volver a sentarse sin problemas:

32'6·7 = 228'2 cm

250-228'2 = 21'8 cm

Figura IV.25. Justificación del número de alumnos por mesa del grupo B, en “Un nuevo comedor”

En “Cordones” y “La carrera”, los distintos grupos se apoyan en esquemas y dibujos a la hora de justificar el uso del Teorema de Pitágoras (ver Figura IV.4 y IV.5). En “Cordones”, además, la reflexión sobre el proceso de resolución seguido justifica su propuesta de un modelo propio para atarse los cordones: los segmentos oblicuos son los más largos así que su nuevo diseño tendrá el menor número posible de estos segmentos, los mínimos necesarios para que el zapato quede bien sujeto. “*Nos pusimos a pensar cuál podría ser la manera más corta de atarse los cordones y, observando la respuesta a la cuestión anterior, nos dimos cuenta de que, la manera más larga, era la que más cruces en diagonal tenía (si lo aplicamos al teorema de Pitágoras, la hipotenusa siempre es más larga que cualquiera de los dos catetos). Por tanto, debíamos buscar una manera que pasara en diagonal la menor cantidad de veces posible”* (extracto del diario del grupo A).

Algunos grupos realizan dos resoluciones distintas para validar sus soluciones. Así, en “La carrera”, el grupo A utiliza dos procedimientos distintos para situar el cono que minimice la distancia total a recorrer: la construcción de una sucesión de intervalos encajados que irá aproximando el lugar en que colocar el nuevo cono, y la obtención del punto mínimo de su modelo funcional con el programa Graph (ver Figura IV.9). También el grupo A en “El parque de atracciones” y el grupo A en “La desaparición del portátil” utilizan procedimientos distintos con los que obtienen resultados similares (para más detalles ver los Anexos VIII y IX).

En “Hábitos de estudio”, el grupo A realiza un muestreo con el fin de validar su cuestionario y su sistema de puntuación, comparando el nivel de eficacia obtenido mediante su test con los resultados académicos (ver Figura IV.8). El grupo B utiliza su cuestionario para clasificar una muestra de alumnos según su nivel de estudio.

En “El mejor colegio” y “Selección de personal” la clasificación realizada (de colegios y empleados, respectivamente) se basa en la categorización y ponderación de las variables consideradas, a la que se llega tras un consenso entre los miembros del grupo, consenso que constituye su proceso de validación. En este sentido, los criterios adoptados se basan en una cuestión de gusto u opinión, aceptados y compartidos por el grupo, siendo un aspecto a valorar cómo se traduce después esta asignación de puntuaciones a un modelo que resulte fácilmente comprensible y reutilizable por otros compañeros.

Finalmente, trataremos el tema de la Comunicación durante el proceso de modelización, objeto de la última de las preguntas formuladas en nuestra herramienta de investigación.

¿Se comunica de forma oral y escrita el proceso de resolución?

Dado que la resolución de las tareas se realiza de forma grupal, la comunicación está presente en forma de debate entre los miembros del grupo. Durante el proceso de modelización se discuten las suposiciones, simplificaciones, estrategias y resultados. En ocasiones, este debate dentro del grupo, que denominaremos a partir de ahora debates “intragrupo”, se produce también con el profesor (Gallart, Ferrando y García-Raffi, 2015).

Una vez resuelta la tarea, la solución se comparte con el resto de compañeros durante la sesión final de presentación, generando, en ocasiones, debates con otros grupos que han realizado, de forma independiente, la misma tarea. Durante esta presentación, los alumnos se sirven de diapositivas digitales para mostrar sus resultados y los procedimientos utilizados para llegar a ellos, como puede verse en la Figura IV.26.

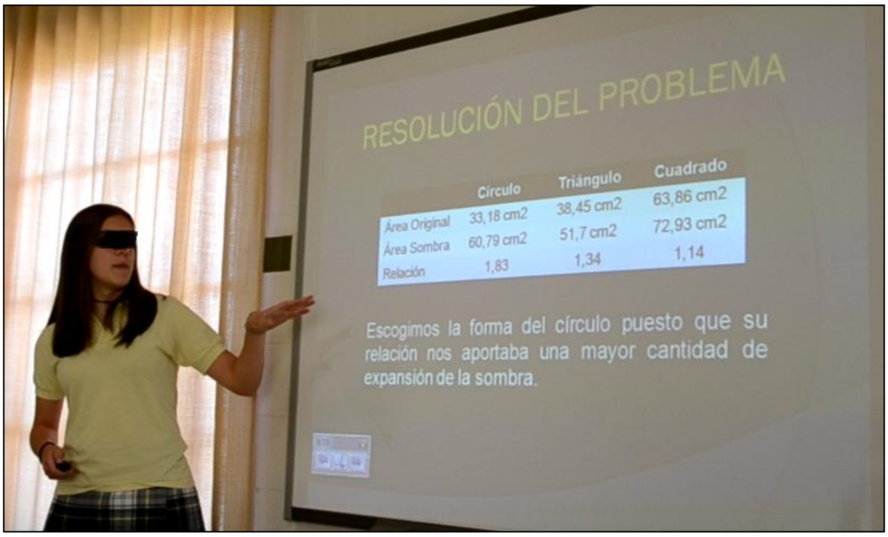


Figura IV.26. Un momento de la presentación del grupo A en la tarea “La sombra en el patio de recreo”

En este tipo de debates públicos, que denominaremos debates “intergrupo”, se plantean preguntas, se intercambian ideas y se contraponen los distintos enfoques seguidos en la resolución de las tareas. El análisis de estos dos tipos de debates (intragrupo e intergrupo) y el papel que juega en ellos el profesor será el objetivo del apartado IV.3.

IV.1.1. Resultados del análisis

La herramienta diseñada (Tabla IV.1) nos ha ayudado a reconstruir y analizar el proceso de resolución de cada una de las tareas propuestas, centrándonos en las acciones necesarias para transitar por las fases que configuran el ciclo de modelización. Estas acciones constituyen la competencia en modelización (ver apartado II.4.3), pero además, como hemos visto en nuestro análisis, activan las restantes competencias matemáticas, que se concretan durante este proceso de modelización. Según Niss (2004, p. 9), el aspecto productivo de las competencias "se centra en la construcción activa o la realización de procesos", en nuestro caso, las acciones, que de forma activa y repetida, el alumno pone en juego en su proceso de modelización. Nuestra herramienta también nos ha permitido identificar diferencias en cuanto a los procesos involucrados en la resolución de las distintas tareas.

En la primera pregunta de nuestra herramienta hemos podido ver cómo en las tareas que presentan una pregunta más abierta ("La sombra en el patio de recreo", "El parque de atracciones", "La desaparición del portátil" y "Un nuevo comedor") es necesario un proceso previo de comprensión y reflexión de la realidad que lleve a los alumnos a la formulación de sub-problemas que, en sucesivos ciclos, permitan dar respuesta a la situación inicial. De esta forma los alumnos ponen en juego su competencia en *Plantear problemas*. En estas tareas la situación real de partida ofrece una mayor riqueza de planteamientos que da lugar a la formulación de problemas distintos (y también simplificaciones distintas) según la perspectiva del resolutor. En las restantes tareas ("La carrera", "Cordones", "Selección de personal", "El mejor colegio" y "Hábitos de estudio"), no se activa esta competencia ya que, como hemos señalado, el enunciado presenta un problema claramente definido y la comprensión del mismo por parte del alumno es inmediata. Todos los grupos, en estas tareas, resuelven el mismo problema.

Posteriormente, tendrán que simplificar y estructurar la realidad para seleccionar los elementos relevantes que les permitan resolver el problema planteado. Este proceso, recogido en la segunda pregunta, pertenece al dominio de la competencia en *Pensar y razonar*. Como hemos visto, la activación de esta competencia se da de un modo distinto según la naturaleza de la tarea. De nuevo, en las más abiertas y vinculadas a la realidad, se requiere una mayor complejidad de razonamiento (cuya falta, en algunos casos, como en los grupos C y D en "El parque de atracciones", ha llevado a la construcción de modelos muy pobres), en comparación con las otras tareas. En "La carrera" y "Cordones" este parte del proceso pasa por identificar los elementos clave (triángulos rectángulos) sin los cuales el problema no puede ser resuelto matemáticamente. En las tareas basadas en las MEAs la selección y clasificación de las variables proporcionadas en el enunciado llevará a los alumnos a la resolución del problema. En todo caso, no hay grandes diferencias en este proceso de simplificación entre unos grupos y otros ya que, aunque la situación de partida es plausible, tiene una complejidad menor que en el primer grupo de tareas.

En el proceso de matematización, tercera y cuarta pregunta, los alumnos han recurrido al uso de distintos tipos de representaciones y lenguajes que les han permitido la codificación en el mundo de las matemáticas de los elementos seleccionados en la realidad. Esta codificación es fundamental para resolver con éxito el problema matemático. Sobre ello incidiremos más tarde cuando abordemos el análisis estructural del modelo construido por los alumnos. Las representaciones han ido, como hemos podido ver, desde esquemas y dibujos que permiten presentar los datos o justificar los procedimientos utilizados, hasta gráficos más elaborados con los que mostrar los resultados matemáticos obtenidos, facilitando también la transición desde el mundo de las matemáticas a la realidad. El uso de estas representaciones supone la activación de la competencia en *Representar entidades matemáticas*. Respecto a la utilización del lenguaje matemático, hemos podido ver desde grupos que hacen un uso menos formal, con abundantes cálculos aritméticos, hasta los que hacen un uso más formal, construyendo modelos pre-algebraicos o algebraicos, que permiten una mayor generalización y reutilización de los mismos, pero que exigen un mayor dominio de la competencia en *Usar símbolos y formalismos matemáticos*. Precisamente, en “La carrera” y “Cordones”, donde el proceso de resolución es prácticamente el mismo en todos los grupos, la única diferencia observable entre unos y otros se encuentra en el grado de formalización alcanzado y el mayor o menor uso de representaciones que acompañan a su solución, que por otra parte es única (de hecho, en estas dos tareas, donde los grupos parten de las mismas simplificaciones y suposiciones iniciales, sí que podemos hablar de solución correcta o incorrecta).

A través de la quinta pregunta de nuestra herramienta, hemos analizado el trabajo matemático realizado por los alumnos para resolver el problema planteado y obtener una solución matemática del mismo. El uso de las distintas herramientas y procedimientos matemáticos pone en juego su competencia en *Resolver problemas*. La menor competencia de algunos grupos ha llevado a resolver erróneamente la tarea planteada (grupos B y C en “La sombra en el patio de recreo”, en Anexo VII, grupo B en “La carrera”, en Anexo XV, y grupo C en “El parque de atracciones”, en Anexo XV, como ejemplos más significativos de los errores detectados).

Las decisiones y supuestos considerados, los procedimientos y cálculos realizados, las soluciones obtenidas y su validación en la realidad, como hemos visto en la sexta pregunta, deben venir acompañados de los razonamientos pertinentes que justifiquen y faciliten la comprensión del proceso de modelización en su conjunto, activando, de forma principal, su competencia en *Argumentar*. En las tareas más pegadas a la realidad, el proceso de validación se produce por la adecuación de la solución a la situación inicial (es “*razonable*” o “*no es una cosa descabellada*”), mientras que en las otras tareas no es posible realizar este contraste con la realidad, ya que se parte de unos datos plausibles, pero no reales. En estas tareas hemos observado otros procesos de validación, como el contraste entre las soluciones alcanzadas por procedimientos distintos (en “La carrera”), el consenso dentro del grupo de alumnos (en “El mejor colegio” y “Selección de personal”) o el muestreo entre los propios compañeros del aula (en “Hábitos de estudio”).

Los debates, tanto dentro del grupo, durante el proceso de modelización llevado a cabo en el aula, como con otros grupos, durante la sesión de presentación final, activan su competencia en *Comunicar*.

Resaltar, finalmente, que estas competencias no se trabajan de una manera estanca e independiente. Las competencias se activan, de forma conjunta e interrelacionada, para lograr transitar con éxito a lo largo del ciclo (especialmente en la transición entre la realidad y las matemáticas y viceversa), ya que éste tampoco se da de una manera lineal y secuenciada, si no que resulta de un proceso enmarañado, donde las fases se entrecruzan constantemente.

Una vez analizado el proceso de resolución centraremos nuestra atención en el análisis estructural del modelo final generado por los alumnos.

IV.2. Análisis estructural de los modelos finales

Lesh y Harel (2003), como indicamos ya en el apartado II.2.3, afirman que los modelos incluyen distintos conceptos y procedimientos (la diferenciación entre conceptos y procedimientos puede verse en el trabajo seminal de Hiebert y Lefevre, 1986) que se expresan mediantes distintas representaciones. Así, en los modelos finales construidos por los alumnos intervienen tres elementos: los sistemas conceptuales, que comprenden el conocimiento de diferentes objetos matemáticos, relacionados y vinculados entre sí, que subyacen a la tarea planteada y que los alumnos identifican; los procedimientos asociados a estos sistemas conceptuales que los alumnos ponen en práctica a través del uso de formalismos, símbolos, reglas, y cálculos en la resolución de los problemas matemáticos planteados; y por último los lenguajes (aritmético, algebraico o pre-algebraico, tabular y gráfico) utilizados para explicar, justificar, presentar y obtener los resultados de su modelo. A partir de estos tres elementos realizaremos un análisis estructural de los modelos generados, tal y como se recoge en la Tabla IV.2.

A continuación mostraremos una recopilación de aquellos aspectos más importantes recogidos en el análisis presentado en los Anexos VII-XV, incluyendo, para ilustrarlo, ejemplos tomados de los alumnos en las distintas tareas propuestas (los comentarios originales se muestran entrecomillados y en cursiva, también se incluyen dibujos, gráficas, tablas y cálculos extraídos de sus diarios y su presentación final, en su formato original).

Tabla IV.2. Elementos de análisis de los modelos matemáticos

Conceptos	Uso de diversos objetos matemáticos. Relaciones entre los diferentes objetos matemáticos para obtener resultados-conclusiones. Observación de patrones y/o regularidades en los datos.
Procedimientos	Utilización de uno o diversos procedimientos para llegar a resultados/conclusiones. Uso de formalismos, símbolos, reglas, cálculos y recetas en la resolución de los problemas matemáticos planteados.
Lenguajes y representaciones	Utilización de distinto tipo de lenguaje (literal, aritmético, pre-algebraico, algebraico, tabular) para resolver y representar el modelo. Uso de tablas, esquemas o diagramas.

En primer lugar vamos a describir cuáles son los sistemas conceptuales que hemos encontrado en las producciones de los alumnos.

Sistemas conceptuales

Para cada una de las tareas propuestas, hemos identificado los sistemas conceptuales subyacentes a los modelos presentados por los diferentes grupos de alumnos y los hemos recogido en la Tabla IV.3.

Los conceptos relacionados con las distintas magnitudes y su medida aparecen en varias tareas: longitud (en “Cordones” y “La carrera”), superficie (en “La sombra en el patio de recreo” y “Un nuevo comedor”) y tiempo (en “La desaparición del portátil” y “El parque de atracciones”). El manejo de estas magnitudes es un elemento clave en su resolución.

Las figuras planas elementales (triángulos, rectángulos, círculos) son esenciales en la resolución de “La sombra en el patio de recreo”, “Un nuevo comedor”, “Cordones” y “La carrera”, tareas de carácter geométrico. En “un nuevo comedor”, los distintos elementos que se encuentran en el comedor (mesas, sillas, personas,…) se asocian con las figuras planas y su análisis permitirá buscar su mejor distribución. También las copas de los árboles, en “La sombra en el patio de recreo”, se idealizan con figuras planas. La semejanza entre triángulos -el triángulo que forma el árbol y su sombra, de longitud desconocida, es semejante al que forma un elemento de referencia (como una persona o un palo) y su sombra, ésta de longitud conocida-, está presente también en “La sombra en el patio de recreo”.

El concepto de ruta óptima, entendido como recorrido que se realiza en el menor tiempo posible y que pasa por el mayor número de sitios de interés, se plantea en “El parque de atracciones” (grupos A y B) y “La desaparición del portátil” (en ambos grupos), para minimizar los tiempos de visita y búsqueda, respectivamente.

En “un nuevo comedor” encontramos el concepto de distribución óptima, entendida como aquella distribución que aprovecha mejor el espacio disponible para incluir el mayor número posible de comensales. En la misma línea, en “La sombra en el patio de recreo”, grupo A, identificamos esta idea de distribución óptima, entendida, en este caso, como aquella distribución de los árboles en la que sus sombras no se superponen, con el fin de maximizar la superficie de patio sombreada.

El concepto de proporcionalidad entre magnitudes está presente en la resolución de varias tareas y por parte de diferentes grupos. Por ejemplo, en “La sombra en el patio de recreo”, los tres grupos llegan a la conclusión de que el número de árboles necesarios en el patio es directamente proporcional al área del patio que deben sombrear e inversamente proporcional al área de sombra que proyectan durante el recreo. Encontramos razonamientos similares en “El parque de atracciones” (grupos A y B) a la hora de calcular los tiempos de la visita, donde se relacionan los tiempos de espera en las colas con la popularidad de las atracciones o la asistencia al parque. También en “La desaparición del portátil”, donde el tiempo de búsqueda depende de factores tales como el número de personas que buscan, el número de escondrijos (grupo A) o el número de alumnos por aula (grupo B).

En las tareas basadas en las MEAs (“El mejor colegio”, “Hábitos de estudio” y “Selección de personal”) los alumnos deben tratar con información de carácter cuantitativo y cualitativo para tomar decisiones, lo que les llevará a la manipulación de los datos y el diseño de sistemas de puntuación y elección que incluyen conceptos básicos como razones o tasas (euros por hora) relacionadas con el tiempo y el dinero (en “Selección de personal”), o procedimientos relacionados con pesos, porcentajes y proporciones (como veremos a continuación).

El concepto de muestra, como subconjunto representativo de una población mayor, a partir del cual realizar inferencias y validar resultados, es utilizado por ambos grupos en “Hábitos de estudio”.

En “La carrera”, los alumnos del grupo A, por sugerencia del profesor, utilizan la idea de dependencia funcional entre dos variables: la distancia total de la carrera (variable dependiente) depende de la distancia a la que se encuentre el cono que rodeemos del fondo izquierdo de la pista (variable independiente). En esta tarea aparece también el concepto de intervalo: el nuevo cono puede situarse en cualquier punto entre el octavo y el noveno, los que dan una menor distancia en la carrera (ver Figura IV.27).

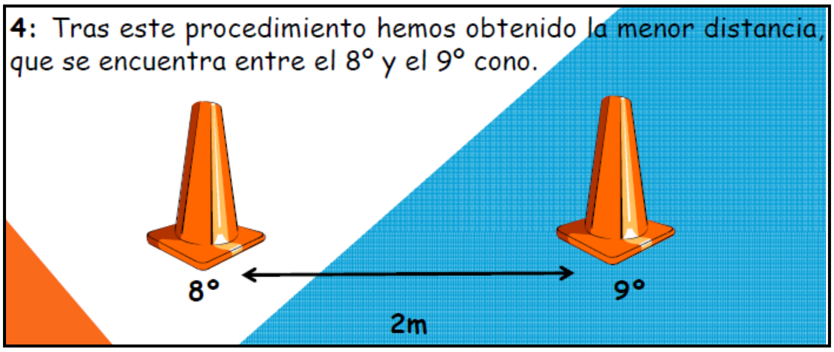


Figura IV.27. Situación del nuevo cono en un intervalo, del grupo A en “La carrera”

Del mismo modo, este concepto está presente en la resolución del grupo B en “La desaparición del portátil”: el tiempo necesario para encontrar el portátil puede ser cualquier instante comprendido entre su estimación del tiempo mínimo de búsqueda y el tiempo máximo.

Tabla IV.3. Sistemas conceptuales detectados en los modelos

	La sombra en el patio de recreo	Un nuevo comedor	La desaparición del portátil	El parque de atracciones	Cordones	La carrera	Selección de personal	Hábitos de estudio	El mejor colegio
Magnitudes y medidas	Todos	Todos	Todos	Todos	Todos	Todos	-	-	-
Figuras planas	Todos	Todos	-	-	Todos	Todos	-	-	-
Semejanza de triángulos	Todos	-	-	-	-	-	-	-	-
Tratamiento de la información	-	-	-	-	-	-	Todos	Todos	Todos
Ruta óptima/Distribución óptima	A	Todos	Todos	A y B	-	-	-	-	-
Función de una variable	-	-	-	-	-	A	-	-	-
Proporcionalidad	Todos	-	Todos	Todos	-	-	-	-	-
Tasas (euros por hora)	-	-	-	-	-	-	Todos	-	-
Muestra	-	-	-	-	-	-	-	Todos	-
Intervalos	-	-	B	-	-	A	-	-	-

A continuación describiremos los procedimientos que hemos encontrado en las producciones de los alumnos.

Procedimientos

Los procedimientos utilizados por los alumnos en la resolución de sus tareas están relacionados con los conceptos identificados en sus modelos. En la Tabla IV.4 se recoge, de forma esquemática, el resultado del análisis pormenorizado de los procedimientos.

En las tareas de carácter geométrico hemos identificado dos procedimientos asociados al concepto de figura plana. Por un lado, el uso de estas figuras planas elementales para aproximar distintas formas geométricas de la realidad, como las copas de los árboles en “La sombra en el patio de recreo”, o las mesas, sillas, personas, en “Un nuevo comedor”. Algunos grupos utilizan modelos geométricos para simular esta realidad: modelos de árboles con la sección plana de su copa idealizada mediante un triángulo, un círculo y un rectángulo, por el grupo A en “La sombra en el patio de recreo”; el diseño de su nueva bandeja con forma triangular por el grupo A en “Un nuevo comedor” (ver Figura IV.28). Por otro lado, y asociado también al concepto de figura plana, en “La sombra en el patio de recreo” y “Un nuevo comedor” se calculan las áreas de estas figuras a partir de las fórmulas conocidas (aunque no se den de una forma explícita, tal y como se observa en la Figura IV.29).

Figura IV.28. Momento durante la presentación final en que las alumnas del grupo A en “Un nuevo comedor” presentan un modelo a tamaño real de su bandeja triangular realizado con cartulina

Asociado al concepto de magnitudes y medidas, identificamos también varios procedimientos, como la toma de datos mediante mediciones directas, utilizando cintas métricas para conocer con precisión distancias (en “La desaparición del portátil”, “Un nuevo comedor”, “El parque de atracciones” y “La sombra en el patio de recreo”) y cronómetros para obtener tiempos (en “La desaparición del portátil” y “El parque de atracciones”), o por procedimientos indirectos, como la aplicación del Teorema de Pitágoras, en “La carrera” y “Cordones”, el uso de escalas, en “El parque de atracciones” (grupos A y B) y “Un nuevo comedor” (grupo C), o el cálculo de porcentajes, en “La sombra en el patio de recreo”, para deducir la medida de la longitud o superficie buscada. También se realizan estimaciones de los tiempos, basadas en supuestos y su propia experiencia (en “El parque de atracciones” y “La desaparición del portátil”).

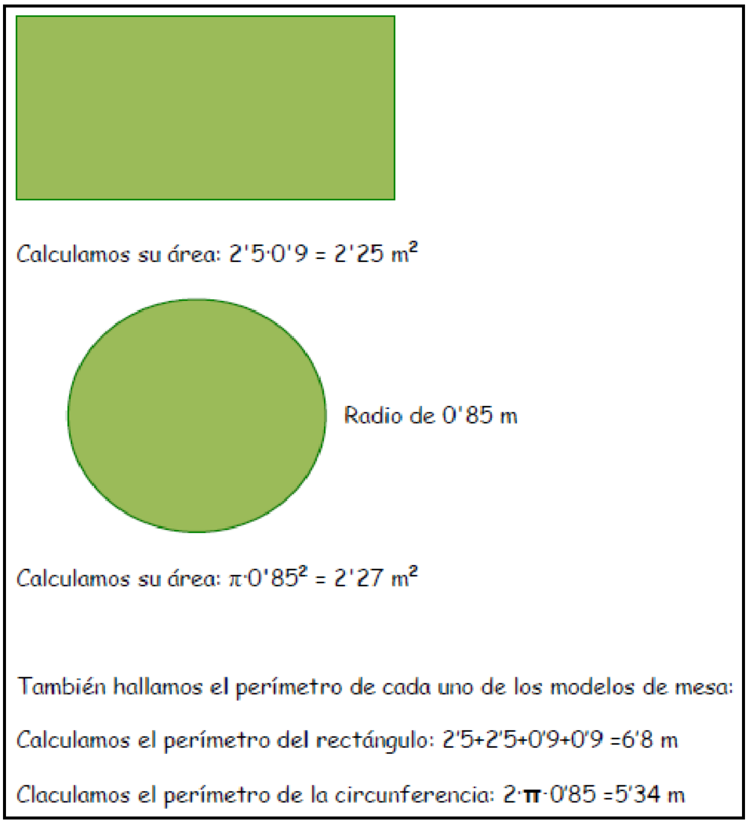


Figura IV.29. Cálculos del perímetro y del área de las mesas rectangular y circular, realizados por el grupo B en “Un nuevo comedor”

El concepto de semejanza, en “La sombra en el patio de recreo”, se asocia con procedimientos distintos con los que obtener las dimensiones de las sombras de los árboles: reglas de tres (grupo A), como vemos en el siguiente extracto del grupo A tomado de su diario, *“Con estos datos podemos realizar una regla de tres para averiguar donde se proyectará la sombra del ombú (Objeto de 12cm alto – Sombra de 13cm; Objeto de 1015cm alto – X sombra)”*; igualdad de razones (grupo B, ver Figura IV.30); o la razón de semejanza (grupos A y C), como se refleja en este extracto del diario del grupo C, “*La sombra de la morera la hemos calculado por la razón de semejanza. Hemos medido a una* *persona de estatura 1,70 m y su sombra era de 1,90m, eso lo divides y obtienes 1,11, entonces multiplicas eso por la altura del árbol*".

Nuestra altura es de 1,72 metros y da una sombra mínima de 0,53 metros (en verano).
Si hacemos triángulos semejantes, un árbol de una altura de 5 metros da una sombra de:

$\frac{1,72}{0,53} = \frac{5}{x}$ $x = 5 \cdot 0,53 / 1,72 = 1,54$ metros

Figura IV.30. Igualdad de razones para obtener la longitud de la sombra, acompañada de una ilustración tomada de internet para justificar el procedimiento utilizado, por el grupo B en "La sombra en el patio de recreo"

El grupo A en "La carrera" utiliza una sucesión de intervalos encajados (para más detalle ver el Anexo XV) para aproximar la situación del nuevo cono que minimice la distancia a recorrer.

En las tareas basadas en las MEAs los alumnos deben tomar decisiones a partir de la información presentada en el enunciado. Para ello pueden recurrir a distintos procedimientos, como construir nuevas variables a partir de las existentes (todos los grupos en "Selección de personal" y los grupos A y C en "El mejor colegio"), asignarles una puntuación (como hace el grupo A en "Hábitos de estudio" y el grupo B en "El mejor colegio", para cada una de las variables, sin especificar un peso), establecer ponderaciones o pesos, de forma explícita, ya sea a través de un factor de corrección (como hace el grupo B en "Hábitos de estudio", el grupo A en "El mejor colegio", y también el grupo A en "El parque de atracciones", para realizar estimaciones de la duración de las colas según la asistencia al parque) o de un porcentaje (como hace el grupo C en "El mejor colegio"), según la categorización previa que han hecho de las variables consideradas, y normalizar los datos en una misma escala, para poder realizar comparaciones entre variables heterogéneas (en "El mejor colegio"). También se realizan conversiones de las escalas empleadas en sus puntuaciones a una escala sobre 10, más habitual, aunque no se muestran explícitamente los cálculos realizados (ambos grupos en "Hábitos de estudio", y grupos A y C en “El mejor colegio”, ver Figura IV.31). Todos estos procedimientos han sido ya mostrados y revisados en el análisis del proceso de modelización realizado en el apartado anterior.

clasificación	colegios	Puntuación (sobre 6)	Puntuación (sobre 10)
1º	Colegio Mola	4,62	7,7
2º	Colegio Chuli	4	6,6
3º	Colegio Diver	3,52	5,8
4º	Colegio Guay	3,42	5,7
5º	Colegio Super	2,85	4,75
6º	Colegio Tope	2,4	4

Figura IV.31. Tabla con la puntuación final de los colegios en diferentes escalas, del grupo C en “El mejor colegio”

La recogida y recuento de los datos procedentes de una muestra es otro de los procedimientos utilizados en “Hábitos de estudio”, así como el cálculo de la media aritmética (también en “Selección de personal”, grupos A y B).

Los cálculos aritméticos realizados han permitido a algunos de los grupos generalizar propiedades y relaciones entre las variables implicadas y crear expresiones algebraicas o pre-algebraicas, más formales que las meramente aritméticas. Posteriormente manipularán estas expresiones para obtener los resultados necesarios. Por ejemplo, el grupo A en “La desaparición del portátil”, determina inicialmente el tiempo de búsqueda del portátil perdido basándose únicamente en estimaciones y cálculos aritméticos. A partir de estos cálculos, y tras un proceso de reflexión, infieren una fórmula general que aplicarán en varios casos particulares (su proceso de resolución puede verse en más detalle en el Anexo IX, y es objeto de un análisis más profundo en el apartado IV.3).

Hemos podido ver cómo, a partir de los conceptos identificados previamente en sus producciones, los alumnos utilizan una serie de procedimientos que les permitirán llegar a la solución de su problema. La construcción de sus modelos precisa de la utilización de distintos tipos de lenguajes, de los que nos ocuparemos a continuación.

Lenguajes

Todos los grupos analizados utilizan el lenguaje literal para explicar los procedimientos utilizados en la resolución de su tarea, tanto en el diario de trabajo como en su presentación final. A estas explicaciones la mayoría de los grupos incorporan cálculos aritméticos, dibujos, esquemas, gráficos y/o tablas que permiten mostrar los datos, justificar los procedimientos o presentar las soluciones. En algunos casos se han construido expresiones pre-algebraicas o algebraicas propias que forman parte de su modelo de resolución. En otros casos se presentan fórmulas conocidas que los alumnos manipulan. A continuación detallaremos el uso que los alumnos han realizado de estos lenguajes (literal, aritmético, gráfico, tabular, pre-algebraico y algebraico), que se recoge en la Tabla IV.5.

Algunos grupos utilizan casi exclusivamente el lenguaje literal para explicar los procedimientos utilizados. Estos grupos incluyen algunas operaciones aritméticas y/o gráficos, pero recurren de forma mayoritaria al lenguaje literal (ver como ejemplo la Figura IV.32).

Manera europea:
Conociendo la medida de separación entre los ojales en vertical y horizontal (a=2, b=1), hemos observado y llegado a la conclusión de que los cordones al pasar por los ojales forman triángulos. Para calcular la medida del cordón entero, hemos calculado los catetos que nos faltaban y las hipotenusas de estos triángulos. Y de esta manera hemos obtenido las medidas de las líneas formadas al pasar por los ojales, y al sumarlas hemos obtenido la medida del cordón entero (35,38cm).

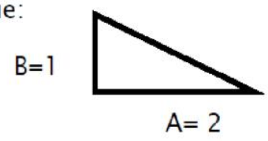
Figura IV.32. Explicación del proceso seguido para el cálculo de la longitud de la manera europea, por el grupo D en “Cordones”

Tabla IV.4. Procedimientos utilizados en la resolución de los modelos

	La sombra en el patio de recreo	Un nuevo comedor	La desaparición del portátil	El parque de atracciones	Cordones	La carrera	Selección de personal	Hábitos de estudio	El mejor colegio
Aproximación mediante figuras planas	Todos	Todos							
Uso de modelos geométricos	A	A	-	-	-	-	-	-	-
Cálculo de áreas	Todos	Todos	-	-	-	-	-	-	-
Aplicación T. Pitágoras	-	-	-	-	Todos	Todos	-	-	-
Aplicación criterios de semejanza	Todos	-	-	-	-	-	-	-	-
Toma directa de medidas	Todos	Todos	Todos	A y B	-	-	-	-	-
Estimación de medidas	-	-	Todos	Todos	-	-	-	-	-
Cálculo de porcentajes	Todos	-	-	-	-	-	-	-	C
Uso de escalas en planos	-	C	-	A y B	-	-	-	-	-
Sucesión de intervalos	-	-	-	-	-	A	-	-	-
Construcción de nuevas variables	-	-	-	-	-	-	Todos	-	A y C
Estandarización de variables	-	-	-	-	-	-	-	-	Todos
Asignación de puntuaciones	-	-	-	-	-	-	-	A	B
Asignación de pesos	-	-	-	A	-	-	-	B	A y C
Conversión de escala	-	-	-	-	-	-	-	Todos	A y C
Recogida y recuento de datos	-	-	-	-	-	-	-	Todos	-
Cálculo media aritmética	-	-	-	-	-	-	A y B	Todos	-
Generalización de propiedades	A	-	Todos	A	C	A	-	-	-
Manipulación de expresiones algebraicas	A y B	-	A	-	C	-	-	-	-

En otros grupos, las explicaciones, justificaciones y razonamientos se acompañan de operaciones aritméticas más desarrolladas y detalladas (ver Figura IV.33).

Sabiendo que:



Hallaremos la hipotenusa y la multiplicaremos por 14 y le sumaremos 2 (14 cruces y 2cm. del horizontal).

$H^2 = 1^2 + 2^2$ → $h = \sqrt{5} = 2'23$ → $2'2 \cdot 14 = 30'8$ →

30'8+2= **32'8 cm.** es la longitud que usamos al anudarlos de la forma americana.

Figura IV.33. Cálculo de la longitud del modo americano, del grupo B en "Cordones"

La reflexión sobre los procedimientos y cálculos realizados, las relaciones y propiedades observadas, lleva a algunos grupos a generalizar sus modelos mediante el uso del lenguaje pre-algebraico (ver como ejemplo la Figura IV.34) o algebraico (ver Figura IV.35).

Superficie que quieres sombrear
---.= Nª de árboles que necesitas del tipo
Relación sombra * copa de árbol

Figura IV.34. Fórmula para calcular el número de ombúes necesarios para sombrear el patio del grupo A, en "La sombra en el patio de recreo"

Fórmula: $(\mathrm{No}-1)\cdot(\sqrt{a^2+b^2}+a)+\sqrt{a^2+[(\mathrm{No}-1)b]^2}$

Figura IV.35. Fórmula para calcular la longitud de los cordones en la manera zapatería, del grupo C en "Cordones"

En otros casos el uso del lenguaje algebraico se reduce a la presentación y manipulación de fórmulas conocidas (para el cálculo de áreas en "Un nuevo comedor" y "La sombra en el patio de recreo", el Teorema de Pitágoras en "La carrera" y "Cordones", o la resolución de problemas de semejanza en "La sombra en el patio de recreo").

En "El mejor colegio" y "Selección de personal" los datos se recogen en tablas. En estas tareas, además del lenguaje literal, se manipulan los datos utilizando casi exclusivamente el lenguaje tabular (ver, por ejemplo, la Figura IV.31). Pero también se recurre a las tablas en otras tareas, de una manera más puntual y concreta, para presentar, ordenadamente, los datos o resultados obtenidos (ver como ejemplo la Figura IV.36).

	infantil	primaria	secundaria	bachiller	informática
Nº aulas	6	18	11	5	2
capacidad	30	20	20	20	1º→ 15 2º→ 40
T en recorrer 1 aula de cada tipo	1,5 min	1 min	1 min	1 min	1º→ 45 seg 2º→ 2 min

Figura IV.36. Tabla elaborada por el grupo B con las variables que han tenido en cuenta a la hora de resolver la tarea "La desaparición del portátil"

El lenguaje gráfico es frecuente en tareas tales como "La sombra en el patio de recreo", "Un nuevo comedor", "Cordones" o "La carrera", de carácter geométrico. Distinguimos, en general, tres usos de este lenguaje: para recoger los datos, para justificar o explicar algún procedimiento, y/o para presentar los resultados obtenidos. En el primer caso se usan esquemas y dibujos que acompañan los cálculos realizados a partir de los datos que en ellos se recogen (ver Figura IV.37).

Figura IV.37. Esquema del grupo A con las dimensiones del patio y la sombra proyectada por el edificio del colegio en “La sombra en el patio de recreo”

En el segundo caso los dibujos o esquemas ayudan a justificar o explicar los procedimientos, los supuestos, o las decisiones tomadas (ver Figura IV.38 y IV.39).

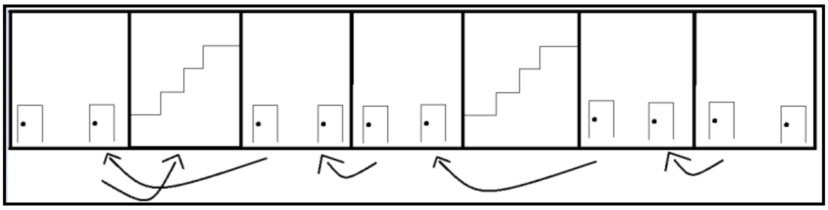


Figura IV.38. Esquema utilizado por el grupo A para ilustrar como debe realizarse la búsqueda en “La desaparición del portátil”

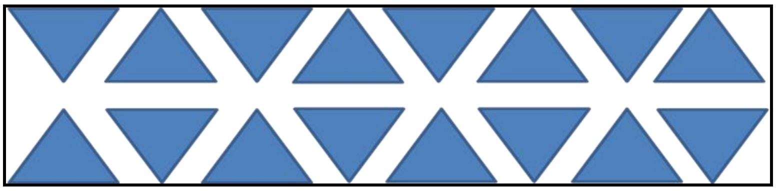


Figura IV.39. Los alumnos del grupo A utilizan este esquema para justificar el mayor aprovechamiento de la superficie de la mesa mediante sus bandejas triangulares, en “Un nuevo comedor”

En el tercer caso el lenguaje gráfico permite presentar el modelo y la resolución del problema (ver Figura IV.40 y IV.41).

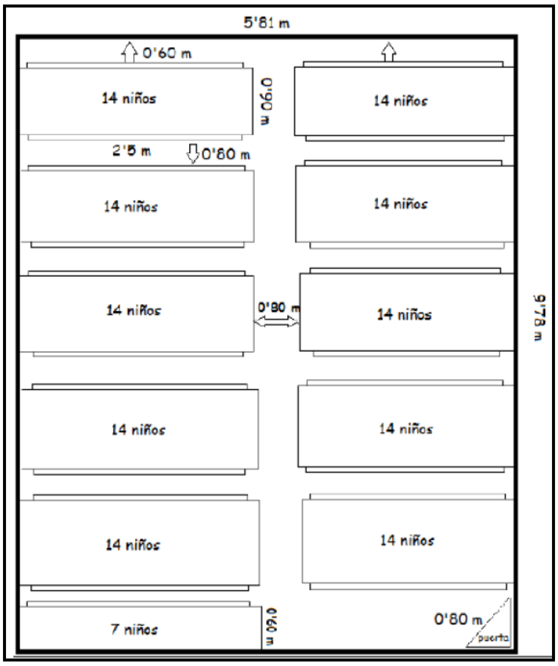


Figura IV.40. Esquema con la distribución final del comedor del grupo B en “Un nuevo comedor”

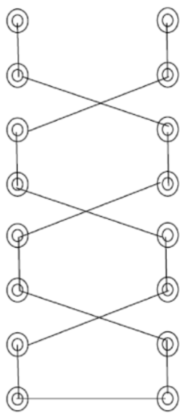


Figura IV.41. Diseño de la nueva manera de anudarse los cordones presentada por el grupo A en “Cordones”

Como hemos visto, el uso del lenguaje algebraico es el resultado de los cálculos aritméticos iniciales y permite la construcción de modelos generalizables y reutilizables. El lenguaje gráfico, por su parte, sustenta los cálculos aritméticos, recogiendo los datos necesarios, justificando determinados procedimientos, y, en algunos casos, mostrando los resultados finales. El lenguaje tabular también es utilizado para presentar los resultados.

Tabla IV.5. Lenguajes utilizados en los modelos

	La sombra en el patio de recreo	Un nuevo comedor	La desaparición del portátil	El parque de atracciones	Cordones	La carrera	Selección de personal	Hábitos de estudio	El mejor colegio
Lenguaje literal (casi exclusivo)	C	A y C	A	C y D	D	-	-	-	-
Lenguaje literal y aritmético	A y B	B	B	-	A, B y C	Todos	-	-	-
Lenguaje literal y tabular	-	-	-	A y B	-	-	Todos	Todos	Todos
Uso del lenguaje algebraico para presentar modelos propios	A	-	Todos	A	C	A	-	-	-
Uso del lenguaje algebraico para presentar fórmulas o expresiones conocidas	B	-	-	-	D	B	-	-	-
Uso de tablas para presentar datos o resultados	A	A	B	A y B	-	-	Todos	Todos	Todos
Uso de gráficos para recoger datos	Todos	Todos	-	-	A y B	-	-	-	-
Uso de gráficos para justificar procedimientos, supuestos o decisiones	A y B	A y B	A	-	A y B	Todos	-	-	-
Uso de gráficos para presentar resultados	A	Todos	-	-	Todos	A	-	A	-

IV.2.1. Resultados del análisis

En este apartado hemos realizado un análisis estructural de los modelos presentados a través de una herramienta basada en la terna conceptos-procedimientos-lenguajes. De este análisis podemos señalar algunas conclusiones que complementan las ya apuntadas en el análisis del proceso de modelización realizado en el apartado anterior.

En las tareas “La sombra en el patio de recreo”, “Un nuevo comedor”, “La desaparición del portátil” y “El parque de atracciones” podemos encontrar diferencias respecto a los conceptos y procedimientos utilizados entre unos grupos y otros. Estas diferencias se deben a los planteamientos derivados de su comprensión inicial de la situación, no siempre coincidentes. Así, en “La sombra en el patio de recreo”, aunque los tres grupos se plantean escoger el tipo de árbol más adecuado para plantar en el patio, solo el grupo A da a este problema un enfoque matemático que le lleva a utilizar como procedimiento de resolución el uso de modelos geométricos a escala. El grupo A se plantea, además, el problema de la disposición de los árboles en el patio, asociado al concepto de distribución óptima. En “Un nuevo comedor”, los grupos A y B tienen en cuenta aspectos como la forma y dimensiones de mesas y bandejas (el grupo C utiliza las formas y dimensiones de las mesas y bandejas que hay en ese momento en el comedor y no se plantean el poder cambiarlas) y que afectarán al número de comensales. En “El parque de atracciones”, los grupos A y B diseñan una ruta que recorre las principales atracciones del parque y calculan el tiempo que les llevará realizar la visita en función de esta ruta. Utilizan pues el concepto de ruta óptima, concepto que no aparece en la resolución de los grupos C y D. En “La desaparición del portátil”, el grupo B utiliza el concepto de intervalo como tipo de solución más “realista”, según su opinión, estimando un tiempo mínimo y un tiempo máximo para encontrar el portátil desaparecido, mientras que la solución que da el grupo A es un único número. Además de estas diferencias, hemos apreciado también que los grupos que han realizado una selección más fina y exhaustiva de las variables relevantes en la resolución de su tarea (grupo A en “El parque de atracciones” y grupo A en “La desaparición del portátil”) han obtenido un modelo más rico, en el sentido de generalizable y reutilizable, que aquellos grupos que han realizado una simplificación excesiva de la realidad (grupos C y D en “El parque de atracciones” y grupo B en “La desaparición del portátil”). De este modo, las dos primeras transiciones del ciclo, comprensión y formulación del problema y simplificación y elección de variables en la realidad, asociadas en nuestras conclusiones del apartado anterior a las competencias de *Plantear problemas* y *Pensar matemáticamente*, han posibilitado en estas tareas poner en juego una red de conceptos interrelacionados más compleja y rica que en las restantes tareas (ver Tablas IV.3 y IV.4).

En “Cordones” apenas han existido diferencias sustanciales entre unos grupos y otros en cuanto a los conceptos y procedimientos utilizados. Sí que las encontramos en “La carrera”, donde el grupo A utiliza el concepto de función y una sucesión de intervalos encajados en su resolución, no utilizados por el grupo B.

En las tareas basadas en las MEAs las diferencias en cuanto a los procedimientos utilizados se encuentran casi exclusivamente en la forma de establecer un peso específico a cada variable según su importancia, bien mediante un factor corrección, bien mediante un porcentaje.

Si nos centramos en el lenguaje gráfico, es en las tareas relacionadas con conceptos geométricos (“La sombra en el patio de recreo”, “La carrera” y “Cordones”) donde hemos visto un mayor uso de esquemas y dibujos (ver Tabla IV.5). Estos gráficos han servido para recoger los datos que después se utilizarán en distintos cálculos (como el cálculo del área del patio en “La sombra en el patio de recreo”) o para justificar la aplicación de determinados procedimientos (como el Teorema de Pitágoras en “Cordones” y “La carrera”). Hemos detectado también el uso de gráficos para presentar los resultados obtenidos (especialmente en “Un nuevo comedor” y “Cordones”, cuya solución final tiene carácter geométrico). En las MEAs, solo el grupo A en “Hábitos de estudio” ha recurrido a gráficos (un diagrama de barras) para presentar sus resultados.

Hemos detectado un mayor uso del lenguaje formal (algebraico o pre-algebraico) en las tareas que presentan en su enunciado una pregunta más abierta (“La sombra en el patio de recreo”, “Un nuevo comedor”, “La desaparición del portátil” y “El parque de atracciones”). Deducimos que la formulación de una pregunta cerrada en el enunciado no motiva al alumno, en la mayoría de los casos, a ir más allá en su respuesta: solo con los cálculos aritméticos se puede dar una solución a la pregunta concreta planteada. En las tareas con una pregunta abierta no hay una conclusión tan clara al problema, sino que éste se finaliza, bien por el factor tiempo, bien porque el alumno se siente satisfecho ya con la solución obtenida y la considera adecuada. Esto ha posibilitado que algunos grupos hayan ido más allá del lenguaje literal y aritmético, construyendo modelos propios mediante el uso del lenguaje algebraico y pre-algebraico, según su grado de competencia en el uso de símbolos y formalismos matemáticos. Son modelos generalizables y reutilizables, entre los que podemos destacar los realizados por el grupo A en "La sombra en el patio de recreo", el grupo A en "La desaparición del portátil" y el grupo A en "El parque de atracciones".

En las tareas basadas en las MEAs los alumnos diseñan un sistema de puntuación a partir del cual tomar decisiones y responder a la pregunta planteada en el enunciado, tanto más rico cuanto más fácilmente reproducible y reutilizable resulte. Así, aunque algunos grupos sí que han asignado pesos para reflejar la importancia de unas variables sobre otras (grupos A y C en "El mejor colegio" y grupo B en "Hábitos de estudio"), ninguno plantea la construcción de un modelo formal para presentar su sistema de puntuación. Como contraste entre las producciones de los diferentes grupos en estas tareas tenemos, en "El mejor colegio", el sistema diseñado por el grupo C, que unifica la escala para todas las variables consideradas y les otorga un peso específico, en forma de porcentaje, frente al utilizado por el grupo B, donde se dan escalas diferentes para cada variable, según su importancia, de una manera un tanto arbitraría y difícilmente reutilizable (para más detalle revisar el Anexo XIV). Dentro de las MEAs, la tarea "Selección de personal" es la que ha propiciado unos modelos más pobres en cuanto a los procedimientos utilizados. Los distintos grupos no han ido más allá de la construcción de la tasa euros por hora y la obtención de medias de esta tasa, y no han tenido en cuenta la importancia de los meses o períodos de trabajo (mediante la asignación de pesos, por ejemplo) en el diseño de sus sistemas de puntuación de los empleados.

Una vez realizado el análisis de las producciones de los alumnos, desde el proceso de resolución hasta el modelo final presentado, vamos a analizar la actuación del profesor como gestor de la actividad modelizadora en el aula.

IV.3. Gestión de la actividad modelizadora en el aula

Como hemos visto en el apartado II.5, la introducción de una actividad de modelización en el aula implica un cambio de rol del profesor y del alumno, especialmente si se viene de una enseñanza tradicional, como ocurre en nuestro caso. Según Blomhøj y Jensen (2006), esto puede suponer una dificultad añadida a la del propio proceso de resolución de la tarea: compaginar la necesidad de que el alumno sea autónomo y tome sus propias decisiones, con que estas decisiones sean correctas y le lleven a desarrollar con éxito la actividad con la mínima ayuda del profesor. Como resultado de nuestra investigación, proponemos el uso del debate como elemento fundamental para superar este tipo de dificultades, tal y como recogimos en Gallart, Ferrando y García-Raffi (2015), diferenciando dos tipos de debates: el debate intragupo, entre alumnos del mismo grupo y entre estos y el profesor, durante las sesiones de trabajo en el aula; y el debate intergrupo, entre alumnos de distintos grupos, moderados por el profesor, durante la sesión final de exposición. En este apartado vamos a analizar en más detalle los distintos roles que el profesor asume durante la actividad modelizadora. Para ello nos centraremos en el proceso completo de resolución de un único grupo a modo de ejemplo representativo de lo que ocurre en el aula, lo que nos permitirá profundizar en nuestro propósito y tener una visión más precisa de su actuación.

Seleccionamos una de las tareas más abiertas propuestas en la experiencia, “La desaparición del portátil”, realizada, de forma independiente, por dos grupos (A y B, cuyo proceso de resolución puede verse en el Anexo IX), de los que se seleccionó uno de ellos (el grupo A) para su seguimiento exhaustivo. Durante las tres sesiones de trabajo en el aula el profesor grabó en audio las conversaciones mantenidas con los tres miembros del grupo A. También se grabó, en audio, el debate que mantuvieron con el grupo B durante la sesión de presentación final. La transcripción completa de estas grabaciones puede verse en el Anexo XVI.

En los siguientes apartados mostraremos y analizaremos extractos de estas intervenciones para los dos tipos de debates identificados: el debate intragrupo y el debate intergrupo. Con el término “debate intragrupo” entendemos aquellos procesos de comunicación que se producen entre los miembros del grupo cuando exponen, consensuan o reflexionan sobre su proceso de resolución, durante las sesiones de trabajo en el aula (ver apartado III.7.2), y en el que el profesor puede participar, bien porque se solicita su ayuda o bien porque simplemente se acerca a interesarse por la marcha de su trabajo. Con el término “debate intergrupo” entendemos aquellos procesos de comunicación que se producen con otros alumnos, especialmente con los miembros de otros grupos que han realizado, de forma independiente y autónoma, la misma tarea, durante la sesión de exposición pública (ver apartado III.7.3), y en el que se intercambian ideas y se contrastan soluciones y estrategias.

Para analizar la transcripción de estos debates nos hemos basado en la terminología y el formato utilizado por Morera (2013) en su análisis de las actuaciones docentes durante la resolución de problemas de semejanza en gran grupo, que incluye una breve descripción de la intervención del profesor y la participación de los alumnos, y los objetivos de esta intervención. Incluimos en nuestro análisis una caracterización del rol asumido por el profesor en su actuación, según los modelos teóricos propuestos en el apartado III.6.1, basados en Burkhardt (2006). No se analiza la presentación de la actividad ni se incluyen las intervenciones del profesor relativas al orden y la disciplina (por otra parte, apenas existentes), centrándonos en las tres sesiones de resolución y la presentación final.

A continuación procederemos a analizar la actuación del profesor en el debate intragrupo durante el proceso de resolución del grupo A en “La desaparición del portátil”.

IV.3.1. El debate intragrupo

En la tarea “La desaparición del portátil” se pide a los alumnos que diseñen un plan de búsqueda y calculen cuánto tiempo les llevará encontrar el portátil perdido. A continuación mostraremos extractos de las actuaciones del profesor con el grupo A durante las tres sesiones de trabajo en el aula.

Primera sesión de trabajo en el aula

Transcurridos unos 15 minutos de esta primera sesión, el profesor se aproxima a la mesa en la que se encuentran trabajando y decide intervenir preguntándoles por el estado actual de su proceso de resolución.

En la Tabla IV.6 mostramos un extracto del debate acontecido durante esta sesión, en el que el profesor pregunta a sus alumnos sobre cómo están organizando su trabajo, en [1].

Tabla IV.6. Extracto del debate intragrupo durante la primera sesión

<table>
<tr><th colspan="3">Transcripción</th><th colspan="2">Interpretación</th></tr>
<tr><td>1</td><td>P</td><td>¿Cómo lo estáis organizando todo?</td><td>Intervención: Invitación a la participación</td><td>Rol: Observador</td></tr>
<tr><td>2</td><td>A1</td><td>Las tres personas van a todas las aulas.</td><td rowspan="5">Participación: Exposición de sus suposiciones y conjeturas</td><td rowspan="5"></td></tr>
<tr><td>3</td><td>A2</td><td>Van juntos.</td></tr>
<tr><td>4</td><td>A1</td><td>Hay que saber el número de aulas, lógicamente.</td></tr>
<tr><td>5</td><td>A2</td><td>La media de los alumnos para saber cuántas mesas hay, por ejemplo… o sea en cada aula.</td></tr>
<tr><td>6</td><td>A1</td><td>El tamaño del objeto porque… bueno, es un ordenador… [risas de sus compañeros] vale, vale.</td></tr>
</table>

Entendemos que la intervención del profesor en esta fase inicial debe dar pie a que los alumnos verbalicen sus conjeturas y suposiciones con el fin de documentar su proceso de resolución, adoptando el papel de "observador". En el episodio que estamos analizando a modo de ejemplo, el profesor, en [1], interviene con este propósito. Los alumnos le detallan sus supuestos (los tres irán juntos en la búsqueda) y las variables que han seleccionado (número de personas que buscan, número de aulas, mesas y casilleros por aula).

En el siguiente extracto, Tabla IV.7, los alumnos piden consejo al profesor.

Tabla IV.7. Extracto del debate intragrupo durante la primera sesión

Transcripción			*Interpretación*	
16	P	¿Alguna idea más… de qué hacer? ¿Alguna variable más?	*Invitación a la participación*	*Rol: Observador*
17	A1	Una ecuación en plan… con todo…	*Exposición*	
18	A3	Una gráfica.		
19	A1	¿Se puede hacer gráfica con 15 cosas de estas? [se refiere a las ideas clave que han seleccionado: mesas, casilleros, número de aulas].	*Petición de aclaración*	
20	P	No lo sé. No se lo qué vais a hacer o dejar de hacer.	*Aclaración*	*Rol: Asesor*
21	A1	Pues todo. Es que es muy raro esto. No se puede [se refiere a resolver el problema].	*Exposición*	
22	A2	Si que se puede…		
23	P	Pero vamos a ver. Hay que olvidarse un poco… Tú me estás hablando de una gráfica, me estás hablando de las gráficas funcionales, y las gráficas funcionales solo tienen en cuenta dos variables…	*Explicación*	*Rol: Asesor*
24	A1	Ya	*Asentimiento*	

Como "asesor", el profesor debe aclarar las dudas de los alumnos y aconsejarles, si así se lo demandan. Durante este episodio la discusión gira en torno a las creencias que tienen los alumnos sobre las matemáticas y sus aplicaciones. Se observa cómo quieren aplicar los conocimientos matemáticos que acaban de aprender en la clase tradicional (funciones y gráficas). El profesor intenta aclarar sus dudas, invitándoles a reflexionar sobre los procedimientos matemáticos a utilizar. En [19] los alumnos preguntan directamente al profesor y le plantean sus dudas. En [20], el profesor, como “asesor”, les indica que deben ser más precisos y exponer lo que pretenden hacer. Finalmente, en [23], les aconseja que no se centren en lo último que han visto.

Segunda sesión de trabajo en el aula

Esta segunda sesión se realiza dos días después de la primera, de modo que los alumnos han podido recabar la información y realizar las mediciones y estimaciones que necesitan para resolver la tarea. Esta parte del trabajo se ha realizado fuera del aula y sin el control directo del profesor. El profesor se acerca de nuevo a su mesa y les pregunta por el estado actual de su proceso de resolución. El modelo que han construido considera dos únicas variables: el número de aulas, clasificadas en dos tipos, aulas grandes (6) y aulas normales (36); y el tiempo que se tarda en registrar cada tipo de aula (7 minutos para las grandes y 5 minutos para las pequeñas), que estiman a partir de las mediciones que han tomado. Es por tanto un modelo limitado a la realidad del colegio, basado en estimaciones y simples cálculos aritméticos. Además, y como se señala durante la conversación, no se han tenido en cuenta algunos aspectos importantes (como el tiempo que se tarda en ir de una aula a otra, o la ruta óptima para recorrer todas las aulas en el menor tiempo posible). En la Tabla IV.8 se muestra un extracto del debate que se genera.

Tabla IV.8. Extracto del debate intragrupo durante la segunda sesión

Transcripción			*Interpretación*	
13	P	¿Y si en vez de 36 aulas hubieran 20?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
14	A1	Pues lo mismo, pero en vez de multiplicar por 36 multiplicas por 20.	*Aclaración*	
15	P	¿Y eso, de alguna manera, sabríais como plasmarlo… para que alguien, en su colegio, por ejemplo, pudiera averiguar cuánto tardaría? [se refiere al tiempo que tardarían en registrar el colegio]	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
16	A1	Lo que hemos hecho mentalmente lo escribimos en papel.	*Explicación*	

El profesor adopta el papel de "gestor de recursos" cuando proporciona a los alumnos ideas, estrategias y/o procedimientos que no han tenido en cuenta y que abren nuevas vías de resolución, o les ayuda a centrar y focalizar el problema que tratan de resolver. En este episodio el objetivo del profesor es incitar a los alumnos al uso del lenguaje algebraico para obtener un modelo más rico, en el sentido de generalizable y reutilizable, en [13] y [15], pero intentando no aportar más información de la estrictamente necesaria, de forma indirecta, a través de la formulación de preguntas.

Tercera sesión de trabajo en el aula

Esta es la última sesión de trabajo en el aula antes de la exposición final. Los alumnos empiezan describiendo su resolución de la tarea, que no dista demasiado de la aportada en la sesión anterior, basada en estimaciones del tiempo que se tarda en registrar cada una de las aulas del colegio. Lo que aportan como novedad es la estimación del tiempo que se tarda en recorrer el colegio en una ruta óptima que les lleve a visitar todas las aulas. En la Tabla IV.9 mostramos un extracto del debate que mantienen con el profesor.

Tabla IV.9. Extracto del debate intragrupo durante la tercera sesión

		Transcripción	*Interpretación*	
8	P	Entonces, ¿qué matemáticas utilizáis en este problema?	*Petición de aclaración*	*Rol: Asesor*
9	A1	¿Cómo vas a resolver matemáticamente el problema?	*Petición de explicación*	
10	P	¿No se utiliza ninguna?	*Petición de aclaración*	*Rol: Asesor*
11	A1	Yo es que aquí en este problema no…	*Exposición*	
12	P	¿No ves que sea un problema de matemáticas?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
13	A1	No [muy bajito]	*Asentimiento*	
14	P	¿A2? [pregunta directamente a ese miembro del grupo].	*Invitación a la participación*	
15	A2	No [contesta también muy bajito]	*Asentimiento*	
16	P	O sea, ¿qué os ha parecido entonces el problema?	*Invitación a la participación*	*Rol: Observador*
17	A1	Pues no lo sé… ¡Es que no tiene sentido este problema! [exclama enfadado] Porque tú cuando vas a buscar algo piensas, a ver, yo, ¿dónde he estado? Estaba aquí, aquí y allí. Vas allí, lo primero allí primero. O entras en un aula y dices, ¿habéis visto un portátil? No te pones a buscarlo con matemáticas.	*Exposición*	

En esta sesión el profesor invita a la reflexión y el cuestionamiento del modelo que le han presentado. Les recuerda la conversación mantenida con ellos en la última sesión. Los alumnos, en [11], muestran sus dudas respecto a la naturaleza del problema planteado y si se trata realmente de un problema de lo que ellos entienden por matemáticas. Esto les impide ir más allá de su modelo aritmético, basado en estimaciones de tiempo (prácticamente igual al presentado en la sesión anterior). El papel que adopta el profesor en este caso es el de “asesor”, en [8] y [10], y su objetivo es ayudar a los alumnos, a través de la formulación de preguntas, a superar este bloqueo propiciado por sus creencias sobre lo que tiene que ser un problema de matemáticas. En [12], como “gestor de recursos” intenta que los alumnos se centren en las matemáticas que hay tras el problema. Los alumnos, en [17], exponen su opinión respecto a la tarea, volviendo a la situación inicial de partida. Para ellos la realidad no puede ser abordada matemáticamente, y eso supone una dificultad añadida a la del propio problema.

En el siguiente apartado analizaremos la actuación del profesor durante el debate intergrupo, en la sesión de presentación final de los trabajos realizados por los grupos A y B en “La desaparición del portátil”.

IV.3.2. El debate intergrupo

La finalidad de la exposición pública de los trabajos es posibilitar su validación mediante el contraste de opiniones. Es precisamente este contraste el que fundamenta y da pie al debate intergrupo. Para analizar este debate, describiremos, brevemente, cuáles fueron las resoluciones presentadas por los dos grupos y que pueden verse, de forma más completa, en el Anexo IX.

El grupo A presenta un nuevo modelo algebraico de resolución, distinto a sus resultados previos basados en estimaciones y operaciones aritméticas (ver Figura IV.42). Este modelo supone una clara mejora con respecto al expuesto en la segunda y tercera sesión. Se definen claramente las variables relevantes (número de personas que buscan, distancia recorrida, número de escondrijos, etc.) que se relacionan en una fórmula algebraica que permite obtener el tiempo total de búsqueda. Es reutilizable y generalizable a otras situaciones y su diseño demuestra un mayor dominio del lenguaje matemático. Utilizando su fórmula y a partir de los cálculos y estimaciones que han realizado, han llegado a un resultado: son necesarios 58 minutos para encontrar el portátil. Además, muestran, mediante un ejemplo, cómo aplicar su modelo en un lugar distinto al colegio.

TT = [H x (E x T)] / N + D / V
Donde:
TT : tiempo total de encontrar el objeto
N: número de personas que buscan= 3
H: número de habitaciones= 43
T: tiempo medio que tardamos en registrar los escondrijos= 5 segundos/escondrijo
E: Nº de escondrijos por clase= 40
D: distancia total del recorrido en metros= 1200 m
V: velocidad de desplazamiento= 2 metros/segundo

TT = [H x (E x T)] / N + D / V= [43(40 x 5)] / 3 + 1200 / 2= 3466 segundos= 58 min aprox.

Figura IV.42. Fórmula general diseñada por el grupo A para calcular el tiempo de búsqueda, incluida en su presentación final

El grupo B presenta un modelo pre-algebraico (ver Figura IV.43). Calculan un tiempo máximo y un tiempo mínimo para encontrar el portátil. La solución que aportan es pues un intervalo de tiempo: entre 18 y 49 minutos. Ambos grupos incluyen además unas rutas óptimas de búsqueda.

*Dados los cálculos hechos Sumando: el tiempo de tardanza de registrar las clases + el tiempo entre clase y clase 18 min aprox	*Dados los cálculos hechos Sumando: el tiempo de tardanza de registrar las clases + el tiempo entre clase y clase + la subida de los pisos = 49 min aprox

Figura IV.43. Expresiones utilizadas por el grupo B para calcular el tiempo mínimo y máximo de búsqueda, incluidas en su presentación final

Finalizada la presentación de ambos grupos, se inicia un debate, en el que exponen por qué consideran que su modelo es mejor. En la Tabla IV.10 mostramos un extracto de este debate intergrupo e identificamos dos nuevos roles del profesor, no incluidos en el trabajo de Burkhardt (2006).

Tabla IV.10. Extracto del debate intergrupo durante la sesión de exposición

Transcripción			Interpretación	
37	P	Pero, ¿hay mucha diferencia entre lo vuestro y lo suyo? [se dirige a los alumnos del grupo A]	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*
38	B1	No porque… o sea, yo me he dado cuenta que aproximadamente da lo mismo [se refiere al resultado máximo dado como solución por su grupo, 49 minutos, y el dado por el grupo A, 58 minutos].	*Explicación*	
39	P	Con respecto al tiempo sí, lo cual puede suponer que no era descabellado ni lo vuestro [refiriéndose al grupo B] ni lo vuestro [refiriéndose al grupo A], os vais 9 minutos…	*Explicación*	*Rol: Experto*
40	P	…pero me refiero a la fórmula, respecto a cómo manejáis las variables…	*Invitación a la reflexión.*	*Rol: Moderador*
41	A1	Lo mismo, muy parecido, solo que nosotros hemos tomado unas cuantas variables más y las hemos agrupado en una fórmula, pero…	*Explicación*	
42	A2	Hemos hecho todo un poco más general.		

En efecto, durante el debate intergrupo, el profesor debe conducir y moderar el debate hacia los aspectos más relevantes del proceso de modelización. Esto nos lleva a definir un nuevo rol del profesor: el rol de "moderador", que identificamos en este episodio en [37]. Aquí, el profesor, como "moderador", invita a los alumnos de ambos grupos a que reflexionen sobre las diferencias entre sus modelos y las soluciones obtenidas a partir de ellos. Posteriormente, en [39], expone su parecer respecto a los resultados de ambos grupos, completando la información presentada. Esta intervención se corresponde a un nuevo rol, que hemos definido como "experto". En [40], de nuevo como "moderador", centra el debate en el aspecto formal del modelo presentado por el grupo A. En el contraste de los dos procesos de resolución propuestos se pone de relieve la importancia de un modelo algebraico (y generalizable) frente a un modelo aritmético (y por tanto difícilmente reutilizable), así como el tipo de solución más adecuada (un único valor numérico o un intervalo).

En la siguiente tabla mostramos otro extracto de este debate intergrupo.

Tabla IV.11. Extracto del debate intergrupo durante la sesión de exposición

Transcripción			*Interpretación*	
54	P	La única diferencia es el número de personas que buscan, que eso no lo habéis tenido en cuenta, ellos si lo ponen como variable [refiriéndose al grupo A].	*Recapitulación*	*Rol: Experto*
55	B2	Pero yo lo que no entiendo es que si ellos buscan tres y nosotros buscamos uno, como es que da prácticamente el mismo tiempo. O sea, lo habéis dividido entre las tres personas… entonces os costaría el doble [se dirige a los alumnos del grupo B].	*Petición de aclaración*	
56	A1	Un tercio.	*Aclaración*	
57	B2	Ya, pero si lo hiciera una persona os costaría el triple.	*Petición de aclaración*	
58	A1	Sí.	*Asentimiento*	

En este episodio el profesor asume el rol de “experto”, en [54]. Señala y pone de relieve aquellos aspectos del modelo construido por el grupo A que el grupo B no ha tenido en cuenta (en esta ocasión la inclusión de la variable “número de personas que buscan”), poniendo de nuevo en valor la resolución del grupo A frente a la del grupo B.

Durante este debate intergrupo hemos identificado dos nuevos roles del profesor y que tienen que ver con las especiales características y objetivos de este debate: por un lado fomentar que los alumnos expongan sus procesos e intercambien sus distintos puntos de vista al respecto, conduciéndolos hacia los aspectos matemáticos del mismo, lo que el profesor procura en el papel de “moderador”; por otro, emitir juicios sobre la validez de los resultados o los procesos seguidos, especialmente a través del contraste entre los procesos o modelos construidos por grupos distintos, para lo que el profesor adopta el papel de “experto”.

IV.3.3. Resultados del análisis

En el debate intragrupo los alumnos establecen sus estrategias de resolución a través del consenso. Durante estos debates el profesor asume el papel de “observador” para poder documentar y diagnosticar el estado de su proceso de resolución, pidiendo a los alumnos que verbalicen y expongan sus ideas. En caso de dudas, desavenencias o bloqueos, el profesor asume otros papeles distintos: “gestor de recursos”, promoviendo la exploración de nuevas vías de resolución; o “asesor”, respondiendo a sus preguntas. Estas intervenciones se hacen, como hemos visto, de forma indirecta, a través de la formulación de preguntas que sugieren, pero no imponen, una determinada dirección.

Las discusiones mostradas en los episodios utilizados como ejemplos se centran en diferentes aspectos del proceso de modelización: la simplificación de la realidad y la selección de variables (ver Tabla IV.6, en la primera sesión de trabajo), con el profesor como “observador”; las matemáticas necesarias para su resolución (ver Tabla IV.7, también durante la primera sesión), con el profesor como “asesor”; y la formalización de los modelos y su reutilización (ver Tabla IV.8, en la segunda sesión), con el profesor como “gestor de recursos”. El análisis del debate intragrupo también nos ha permitido identificar otros tipos de discusión, referidos a lo que los alumnos consideran que debe ser un problema de matemáticas y la propia naturaleza de las tareas de modelización propuestas (ver extracto de la tercera sesión, Tabla IV.9).

Ya en la exposición pública, el profesor conduce el debate intergrupo hacia aquellos aspectos que considera más relevantes. El profesor, en su rol de “moderador”, alienta a que este debate se apoye en argumentos matemáticos y no se base, únicamente, en criterios de gusto u opinión, ayudando a los alumnos, como “experto”, a reflexionar sobre aspectos propios del proceso de modelización o de las matemáticas involucradas (tal y como se observa en el episodio mostrado en Tabla IV.10). Asimismo, en su rol de "experto", emite juicios sobre la validez de los resultados y los procesos matemáticos seguidos, completando la información proporcionada, y contrastando los modelos construidos por los diferentes grupos (en Tabla IV.11). Este debate puede posibilitar también la propia validación del proceso, a través de la aceptación social de la solución entre iguales y no sólo por la aceptación del profesor. El establecimiento del nivel de adecuación de unas soluciones frente a otras puede ser abordado mediante este debate de ideas. De esta forma, el debate basado en argumentaciones, tanto matemáticas como no-matemáticas, como hemos podido ver, permite generar conocimiento contrastado entre los alumnos.

Finalmente, el papel último del profesor es posibilitar que estos dos tipos de debates, el intragrupo y el intergrupo, se den, promoviendo la participación activa, la reflexión y el pensamiento crítico de sus alumnos.

En el siguiente y último apartado de este capítulo nos centraremos en el análisis estadístico de los resultados del test de competencias.

IV.4. Análisis de los resultados obtenidos en el test de competencias

En el curso 2012-13, se pasó el test de competencias descrito en el apartado III.4 a los 55 alumnos que iban a participar en la actividad. Una vez concluida la experiencia se les volvió a pasar el mismo test (un mes después del primero). Finalmente dos alumnos no pudieron completar los dos test, por lo que no se incluyen en el análisis. Se pasó también el pre y el postest a un grupo de control, formado por 18 alumnos, al mismo tiempo que al grupo experimental. A continuación analizaremos cuantitativamente si la implementación de esta actividad basada en tareas de modelización modificaba positivamente la alfabetización matemática, en el sentido planteado por el informe PISA, contrastando los resultados obtenidos por ambos grupos en el test. Los resultados de este análisis también pueden verse en Gallart, Ferrando y García-Raffi (2014).

Para el análisis de los resultados del test se utilizó el programa SPSS. Se calcularon inicialmente los estadísticos descriptivos básicos tanto para el pretest como para el postest, en el grupo experimental y en el de control: la media como medida de tendencia central y la desviación estándar como medida de dispersión (ver Tabla IV.12).

Tabla IV.12. Estadísticos descriptivos generales

	N	*Media*	*Desv. Típica*
Pretest			
G. Experimental	53	7,42	3,171
G. Control	18	8,48	4,236
Postest			
G. Experimental	53	11,28	3,505
G. Control	18	10,44	3,568

Antes de realizar los análisis inferenciales se comprobaron los supuestos de normalidad, test de Kolmovorov-Smirnov (Tabla IV.13), y homocedasticidad, test de Levene para la igualdad de varianzas (Tabla IV.14), obteniendo en ambos un nivel de significación mayor que 0,05.

Tabla IV.13. Prueba de Kolmovorov-Smirnov de normalidad para una muestra

		Pretest Global	*Postest Global*
N		71	71
Parámetros normales	Media	7,76	11,07
	Desviación típica	3,491	3,515
Dif. Más extremas	Absoluta	,107	,116
	Positiva	,107	,116
	Negativa	-,062	-,083
Z de Kolmovorov-Smirnov		,905	,981
Sig. asintót. (bilateral)		,386	,290

Tabla IV.14. Prueba de Levene para igualdad de varianzas

		F	*Sig.*
Pretest Global	Se han asumido varianzas iguales	1,276	,263

Tanto el grupo experimental como el grupo control obtuvieron una puntuación más elevada en el postest (existen diferencias significativas entre las diferencias medias entre el pre y el postest en los dos grupos, p-valor<0,005). Sin embargo, la mejora del grupo experimental fue mayor que la del grupo control, como se observa en la Figura IV.44.

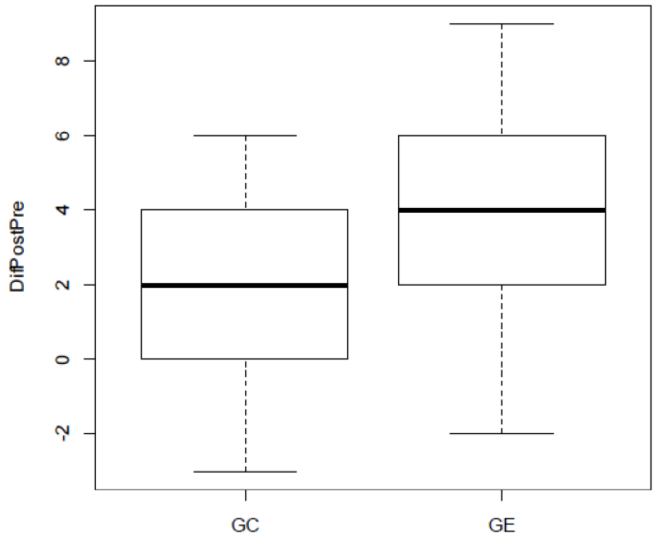


Figura IV.44. Diferencias entre las puntuaciones del pre y del postest en el grupo control (GC) y el grupo experimental (GE)

Además, se aplicaron pruebas paramétricas para comprobar el efecto del grupo (experimental y control) y el momento de la medición (pretest y postest) sobre las puntuaciones. Tomamos una variable intra-sujeto (pre/postest) y otra inter-sujeto (tratamiento) y realizamos un test ANOVA (ANalisis Of VAriance) Mixto de ambos factores, para determinar si el tratamiento en el grupo experimental frente al grupo de control muestra diferencias significativas.

Tabla IV.15. Factores intra-sujetos. Medida: TEST

Prueba	*Variable dependiente*
1	TestA
2	TestB

Tabla IV.16. Factores inter-sujetos

		Etiqueta de valor	*N*
Tratamiento	0	Control	18
	1	Experimental	53

Tabla IV.17. Estadísticos descriptivos

Tratamiento		*Media*	*Desv. típica*	*N*
Pretest Global	Control	8,78	4,236	18
	Experimental	7,42	3,171	53
	Total	7,76	3,491	71
Postest Global	Control	10,44	3,568	18
	Experimental	11,28	3,505	53
	Total	11,07	3,515	71

Los resultados mostraron un efecto global significativo del factor TEST, (F(1,69)=57,248; p-valor<0,001) y que no había un efecto global significativo del factor Tratamiento. Pero encontramos un efecto de interacción TEST*Tratamiento significativo (F(1,69)=9,056; p-valor=0,004), que indica que las diferencias entre el pre y el postest en el grupo experimental no son de la misma magnitud que en las del grupo control (ver Tabla IV.18).

Tabla IV.18. Contrastes multivariados

Efecto	*Valor*	*F*	*Gl de la hipótesis*	*Gl del error*	*Sig.*	*Eta al cuadrado parcial*
TEST						
Traza de Pillai	,453	57,248	1,000	69,000	,000	,453
Lambda de Wilks	,547	57,248	1,000	69,000	,000	,453
Traza de Hoteling	,830	57,248	1,000	69,000	,000	,453
Raíz mayor de Roy	,830	57,248	1,000	69,000	,000	,453
TEST*tratamiento						
Traza de Pillai	,116	9,056	1,000	69,000	,004	,116
Lambda de Wilks	,884	9,056	1,000	69,000	,004	,116
Traza de Hoteling	,131	9,056	1,000	69,000	,004	,116
Raíz mayor de Roy	,131	9,056	1,000	69,000	,004	,116

Estos resultados reafirmaron nuestra hipótesis de que una enseñanza basada en tareas de modelización repercute significativamente en la mejora de las competencias necesarias para resolver problemas reales, al menos, en lo que al corto plazo se refiere (recuérdese que el postest se pasó un mes después que el pretest).

Como ya señalamos en Gallart, Ferrando y García-Raffi (2014), la motivación y la predisposición positiva hacia los problemas reales planteados en el test jugó un papel importante, y difícilmente cuantificable, en la mejora de los resultados del grupo experimental, frente al desconcierto que pudo suponer para los alumnos del grupo de control enfrentarse a este tipo de problemas, alejados de los que se proponen habitualmente en los libros de texto. Tras las dificultades iniciales al comienzo de la actividad modelizadora (y que pueden verse reflejadas en el extracto de conversación que se muestra en la Tabla IV.9), los alumnos del grupo experimental parecen encontrar sentido (y lo perciben como algo más natural) el utilizar su conocimiento matemático para resolver problemas situados en un contexto real.

En este capítulo hemos expuesto los resultados del análisis de los datos recogidos con las herramientas diseñadas para la investigación. En el primer apartado el análisis efectuado se ha centrado en el propio proceso de modelización, las acciones y las competencias que ponen en juego los alumnos para transitar a lo largo del ciclo. En el segundo apartado el análisis se centra en el resultado final, el modelo, analizado a través de los conceptos, procedimientos y lenguajes utilizados en su construcción. En el tercer apartado hemos analizado la actuación del profesor durante la actividad modelizadora de los alumnos. Finalmente, en el cuarto apartado, hemos realizado un análisis cuantitativo de las consecuencias de este trabajo basado en tareas de modelización. Los análisis efectuados (del proceso y la producción de los alumnos, de la actuación del profesor, y de la eficacia de la propia actividad) pretenden dar respuesta a las preguntas fijadas en nuestra investigación. En el capítulo siguiente expondremos las conclusiones y reflexiones finales a las que hemos llegado tras estos análisis.

Capítulo V

Conclusiones y reflexiones finales

En el capítulo anterior hemos podido analizar los resultados que nos permiten dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas: en qué sentido las tareas de modelización posibilitan el desarrollo integrado de las competencias matemáticas de los alumnos, a través del análisis de su proceso de resolución y de su modelo final, en el apartado IV.1 y IV.2; cómo se gestiona la actividad de modelización en el aula, a partir del análisis de las intervenciones del profesor realizadas en el apartado IV.3; y por último, si la actividad en modelización repercute positiva y significativamente en la mejora de las competencias necesarias para resolver problemas reales, a partir del análisis estadístico efectuado en el apartado IV.4.

En este último capítulo haremos una exposición de las conclusiones a las que hemos llegado en relación a cada una de las preguntas de investigación y expondremos nuestras reflexiones finales. Para ello iremos revisando una a una las preguntas y articulando las respuestas que, en base a los diferentes análisis realizados y los resultados obtenidos, podemos darles.

V.1. ¿En qué sentido las tareas de modelización permiten el desarrollo integrado de las competencias matemáticas?

Las tareas utilizadas en nuestro trabajo de campo se han diseñado siguiendo tres perspectivas diferentes: el proyecto LEMA, las MEAs y las PMR. El doble análisis efectuado mediante nuestras herramientas de investigación, del proceso, Tabla IV.1, y del modelo, Tabla IV.2, nos reporta interesantes conclusiones sobre las posibilidades que ofrecen estas tareas en la enseñanza de la modelización y el desarrollo de las competencias matemáticas, conclusiones que han sido ya esbozadas en el capítulo anterior.

Como resultado de nuestro análisis, hemos apreciado diferencias en cuanto al proceso de modelización seguido en las nueve tareas implementadas. En las tareas más pegadas a la realidad y con una pregunta abierta ("La sombra en el patio de recreo", "La desaparición del portátil", "El parque de atracciones" y "Un nuevo comedor"), es necesario un proceso previo de comprensión de la realidad que lleve a los alumnos a la formulación de un problema, ofreciendo una mayor riqueza de planteamientos. Además, la situación de partida requiere de un proceso de estructuración y simplificación para poder abordar el problema planteado. Tras nuestro análisis, hemos asociado estas acciones con las competencias en *Plantear problemas* y *Pensar y razonar matemáticamente*. El mayor dominio en estas dos competencias, demostrado por algunos grupos de alumnos, ha permitido poner en juego una mayor variedad de conceptos y procedimientos interrelacionados, como hemos visto en el análisis estructural del modelo. Una selección más fina y exhaustiva de las variables relevantes, asociadas a las matemáticas subyacentes al problema formulado, y un mayor dominio de la competencia en *Usar símbolos y formalismos*, ha posibilitado también la construcción de modelos más ricos y formales (grupo A en "La sombra en el patio de recreo", grupo A en "El parque de atracciones", o grupo A en "La desaparición del portátil", como mejores ejemplos), en contraste con aquellas producciones que han pecado de una sobre-simplificación (como las de los grupos C y D en "El parque de atracciones"). La situación original de partida en estas tareas no solo permite un mayor nivel de complejidad en cuanto a las posibles vías de resolución, sino que juega también un papel importante en el proceso de validación. Las soluciones se consideran adecuadas si son “realizables”, “razonables” o “no son descabelladas”, de acuerdo a la experiencia del resolutor y la realidad en la que se enmarcan. Por otra parte, se finalizan cuando se considera que se ha llegado a una solución razonable, aparentemente sin contradicciones, o bien a causa de las limitaciones de tiempo, lo que no agota el problema, pues este puede seguir enriqueciéndose con el planteamiento de nuevos sub-problemas (caso del grupo A en “La sombra en el patio de recreo”, con la distribución óptima de los árboles en el patio, o del grupo A en “El parque de atracciones”, con su ruta personalizada). De este modo, este grupo de tareas ha requerido un recorrido completo y significativo del ciclo de modelización (especialmente en las producciones más originales y ricas), poniendo en juego las competencias matemáticas asociadas a las acciones necesarias para la transición entre sus fases.

En las restantes tareas (“La carrera”, “Cordones”, “Hábitos de estudio”, “Selección de personal” y “El mejor colegio”), que incluyen una pregunta más directa y cerrada en su enunciado, la compresión y formulación del problema es inmediata. En “La carrera” y “Cordones”, la situación real de partida presenta una complejidad menor (se incluyen fotografías en su enunciado que ayudan a su comprensión), siendo esencial la identificación de los elementos clave (el triángulo rectángulo) sin los cuales el problema no puede ser resuelto matemáticamente. Por otra parte, la finalización de estas dos tareas resulta para los alumnos más evidente, con una solución numérica concreta que agota el problema, resultando más cercanas al tipo de problemas a los que están habituados en las clases tradicionales. La validación se produce por la adecuación de los procesos matemáticos seguidos, y, en el caso de las tareas basadas en las MEAs, por la aceptación de todos los miembros del grupo de los criterios de selección y categorización de las variables. Así, en este segundo grupo de tareas, cobra especial relevancia las acciones más relacionadas con el mundo de las matemáticas y la construcción del modelo (matematización y resolución matemática) y las competencias asociadas a estas acciones, *Representar* (especialmente en “La carrera” y “Cordones”, para justificar el uso del Teorema de Pitágoras), *Usar símbolos y formalismos* (manejo de tablas en las MEAs, fórmulas y construcción de expresiones algebraicas propias, en el grupo A en “La carrera” y el grupo A en “Cordones”), y *Resolver problemas*. No es por tanto de extrañar que los alumnos en estas tareas hayan precisado de menos tiempo para su resolución que en las tareas más abiertas, especialmente cuando los grupos de alumnos han introducido mayores niveles de complejidad, como es el caso del grupo A en “La sombra en el patio de recreo”, por ejemplo.

Como resultado de nuestro análisis, nuestra herramienta de investigación (Tabla IV.1), con la inclusión de las competencias, podría quedar finalmente configurada tal y como se ilustra en la Tabla V.1, donde la competencia en *Modelizar* adquiere un carácter especial y diferenciador: el de meta-competencia, que aglutina y da soporte al resto de competencias matemáticas.

Respondiendo a nuestra primera pregunta de investigación, diremos que, en general, las tareas de modelización posibilitan el desarrollo integrado de todas las competencias matemáticas, tal y como se describe en la Tabla V.1, con la competencia en *Modelizar* como competencia aglutinadora y que da soporte a las demás, pues requieren para su resolución de todas las acciones asociadas a la transiciones del ciclo de modelización. Las tareas más estructuradas y que cuentan en su enunciado con preguntas más cerradas se centran más en las acciones relacionadas con la construcción y resolución matemática del modelo, y por tanto en las competencias asociadas con estas acciones. De este modo, nuestro análisis nos permite obtener una caracterización metodológica de lo que sería una tarea de modelización abierta o cerrada. Por un lado, las tareas abiertas permiten un recorrido completo y significativo de todas las fases del ciclo de modelización, mientras que en las tareas cerradas se hace un recorrido parcial del mismo, en el que no se incluyen las fases iniciales. En el primer grupo de tareas la pregunta inicial es abierta y en consecuencia, como hemos visto, los grupos de alumnos formulan diferentes sub-problemas que derivan en planteamientos distintos. En el segundo grupo de tareas el problema está mucho más definido, y en consecuencia, las diferencias entre unos grupos y otros se observan en los procedimientos de resolución matemática utilizados, y no en los planteamientos iniciales. Estas diferencias entre un grupo de tareas y otro parten inicialmente de su propio diseño, pero nuestro análisis ha mostrado que el hecho de que en las tareas más cerradas no estén incluidas las fases iniciales del ciclo no tiene implicaciones en el recorrido y la consiguiente activación de competencias en las restantes fases del ciclo.

Como conclusión final, las tareas menos abiertas del segundo grupo pueden estar más indicadas para trabajar con alumnos sin experiencia en modelización, ya que hacen especial hincapié en las acciones más relacionadas con las matemáticas, lo que puede hacer más fácil la transición desde una enseñanza tradicional a una enseñanza basada en tareas de modelización. El contraste entre lo que los alumnos entienden por un problema de matemáticas y la propia naturaleza de las tareas de modelización (especialmente en las más abiertas) es una de las dificultades con que nos hemos encontrado durante nuestro trabajo de campo (como queda reflejado en el debate mantenido entre el grupo A y el profesor en “La desaparición del portátil”) y este tipo de tareas pueden resultar, en este sentido, más asumibles por los alumnos. De esta forma, y a la hora de establecer una secuencia didáctica como introducción a la modelización, utilizaríamos primero las tareas cerradas, que pueden ser resueltas en una única sesión, para pasar después a tareas más abiertas. Estas últimas tareas serían por tanto más adecuadas para alumnos que tienen ya cierta experiencia en modelización, con el objetivo de trabajar de manera más global y completa todas las competencias matemáticas, con la competencia en *Modelizar* como soporte de todas ellas, y deben ser vistas como auténticos proyectos de aula, de mayor duración.

Finalmente, como profesor que lleva a cabo una actividad de aula hemos realizado también un proceso de evaluación y calificación de los trabajos presentados por los distintos grupos (que mostramos en el Anexo XVII) según la rúbrica planteada en el apartado III.9, evaluación en la que se consideran también algunos de los aspectos destacados en el doble análisis efectuado.

Tabla V.1. Análisis competencial de las tareas de modelización

	Competencia	*Pregunta*	*Acción*	*Ciclo Blum y Leiß*
M O D E L I Z A R	Plantear problemas	¿Se formula un problema que pueda dar respuesta, total o parcial, a la situación original propuesta?	*Comprender* la situación en la que se enmarca la tarea, tomando decisiones, elaborando hipótesis y supuestos que lleven al planteamiento de un problema o sub-problemas.	1
	Pensar y razonar	¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?	*Simplificar* y *seleccionar* los elementos y relaciones relevantes, identificando las matemáticas que subyacen en la realidad.	2
	Representar	¿Se usan representaciones?	*Utilizar* representaciones (gráficos, dibujos, esquemas,…) para *codificar* la realidad en términos matemáticos e *interpretar* los resultados obtenidos.	3, 5
	Usar símbolos y formalismos	¿Se utiliza el lenguaje matemático?	*Utilizar* el lenguaje formal y simbólico para codificar la realidad en términos matemáticos, *resolver* el problema, e *interpretar* los resultados obtenidos.	3, 4, 5
	Resolver problemas	¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?	*Trabajar* con las herramientas y procedimientos matemáticos necesarios para resolver el problema planteado.	4
	Argumentar	¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?	*Validar* las soluciones matemáticas en la realidad, reflexionando sobre el modelo utilizado y llegando a conclusiones razonadas.	6
	Comunicar	¿Se comunica de forma oral y escrita el proceso de resolución de forma que resulte comprensible?	*Debatir* y *comunicar*, tanto dentro como fuera del grupo, todo el proceso de modelización seguido y los resultados obtenidos.	7

En el siguiente apartado trataremos de dar respuesta a la segunda pregunta de investigación.

V.2. ¿Qué implicaciones tiene la introducción de las tareas de modelización en las actuaciones del profesor?

El trabajo en modelización se ha llevado a cabo con los alumnos trabajando en grupo, maximizando su independencia y autonomía y minimizando las intervenciones del profesor, destacando el papel principal del debate como herramienta para superar los posibles bloqueos y dificultades. La secuenciación didáctica que hemos seguido ha permitido diferenciar dos momentos de este debate: el debate intragrupo, durante la resolución de la tarea y entre los miembros del grupo; y el debate intergrupo, durante la exposición pública de los trabajos y entre distintos grupos de alumnos. En ambos casos el profesor interviene asumiendo distintos roles. En el apartado IV.3, hemos analizado estas intervenciones, identificando los roles ya señalados en el trabajo de Burkhardt (2006), y definiendo dos nuevos roles asociados al debate intergrupo: el rol de moderador y el rol de experto.

Durante el debate intragrupo se establecen los mecanismos de comunicación entre los miembros del grupo que permiten informar al profesor acerca de sus progresos y dificultades, confrontar los conocimientos matemáticos y experiencias previas de cada uno de ellos, y establecer los consensos necesarios para poder avanzar en la resolución de la tarea. La actuación del profesor durante este debate gira en torno a tres roles: observador, que documenta el estado del proceso de resolución de sus alumnos; asesor, que resuelve sus dudas; y gestor de recursos, que proporciona nuevas vías de resolución y reflexión. Como conclusión podríamos decir que el debate intragrupo es de exposición de hipótesis, establecimiento de consensos, y recapitulación de ideas.

Durante el debate intergrupo, los grupos exponen sus producciones frente a la de los otros grupos, posibilitando una revisión crítica y comparada. En este caso, la actuación del profesor gira en torno a dos roles: el de moderador, que conduce y centra el debate; y el de experto, que emite juicios sobre los procesos y resultados presentados. Así, y basándonos en el análisis de estos roles, diríamos que el debate intergrupo es de confrontación de ideas, establecimiento de consensos con otros grupos, reflexión sobre diferentes propuestas, y análisis de la calidad de las producciones desde un punto de vista matemático.

En la Tabla V.2, y a modo de resumen, hemos recogido los roles del profesor que hemos detectado en nuestro análisis, señalando el objetivo de su intervención, el momento en que se produce, su desencadenante y el tipo de intervención.

Respondiendo a nuestra segunda pregunta de investigación diremos que la introducción de una actividad de modelización en el aula supone un replanteamiento del papel del profesor, especialmente si se viene de una enseñanza más tradicional, que tiene como objetivo último posibilitar e incentivar el debate entre y con los alumnos, debate que se produce en dos momentos concretos, el debate intragrupo y debate intergrupo.

Como conclusión final, la caracterización del papel desempeñado por el profesor durante los dos momentos del debate que se recoge en la Tabla V.2 puede servir de ayuda a los profesores a la hora de gestionar una actividad basada en tareas de modelización, especialmente para aquellos profesores que se introducen por primera vez en la modelización y en un tipo de actividad que se aleja tanto del modelo tradicional de enseñanza basado en el profesor como única vía de transmisión del conocimiento.

Por último, trataremos de dar respuesta en el siguiente apartado a la tercera pregunta de investigación.

Tabla V.2. Rol del profesor durante la actividad modelizadora

Papel del profesor	*Objetivo*	*Momento*	*Desencadenante*	*Tipo de intervención*
Observador	Documentar el estado actual del proceso de resolución de los alumnos.	Debate intragrupo	Iniciativa del profesor.	Invitación a la participación. Petición de aclaración/explicación. Recapitulación.
Gestor de recursos	Proporcionar nuevas vías de resolución. Ayudar a centrar el problema.	Debate intragrupo	Demanda directa de los alumnos o iniciativa del profesor.	Establecimiento de consenso. Invitación a la reflexión.
Asesor	Aconsejar y resolver dudas.	Debate intragrupo	Demanda directa de los alumnos.	Aclaración. Explicación. Aconsejar. Petición de aclaración.
Moderador	Moderar y conducir el debate.	Debate intergrupo	Iniciativa del profesor.	Petición de aclaración/explicación. Invitación a la reflexión.
Experto	Emitir juicios. Completar la información. Comparar los modelos construidos por grupos distintos.	Debate intergrupo	Demanda directa de los alumnos o iniciativa del profesor.	Exposición. Explicación. Recapitulación. Establecimiento de consenso.

V.3. ¿La enseñanza basada en tareas de modelización repercute positivamente en el desarrollo de las competencias necesarias para resolver problemas reales?

Los resultados obtenidos en el test sugieren una mejora significativa de las competencias necesarias para resolver problemas reales, al menos, y como señalamos en el análisis de los resultados del apartado IV.4, en un período temporal próximo a la realización de la actividad, aunque pensamos que también puede mejorar el desarrollo competencial a largo plazo (y esta sería una de las hipótesis a contrastar en un futuro). En la Tabla V.1 hemos expuesto la manera en que las competencias matemáticas se trabajan durante la resolución de una tarea de modelización, aunque, tal y como hemos indicado anteriormente, no se trabajen por igual en todos los grupos ni en todas las tareas. Otra de las posibles vías de investigación futura, precisamente, sería contrastar el desarrollo competencial propiciado por la resolución de las tareas más abiertas, frente a las tareas menos abiertas y complejas.

Como respuesta a la tercera pregunta de nuestra investigación, diremos que la enseñanza basada en la resolución de tareas de modelización puede mejorar el desarrollo de las competencias matemáticas en general, y de modelización, en particular, y dejar una huella más sensible en los alumnos, siendo la contextualización del pensamiento matemático, a nuestro entender, la principal razón de dicha mejora. En la modelización, la necesidad de un conocimiento matemático viene a través de la toma de conciencia por parte del alumno de una necesidad, no de la propia disciplina que estudia, sino de un problema externo que el alumno debe resolver y que se relaciona directamente con una realidad que conoce y le concierne. Aunque el alumno necesite, en algunos casos, ayuda para avanzar, la presentación de este conocimiento matemático puede dejar una huella “más sensible”, ya que nace de un contexto real.

Como conclusión final a nuestra tesis, queremos poner en valor las herramientas que el análisis de los resultados ha propiciado. Por un lado, la herramienta de análisis competencial del proceso de modelización, Tabla V.1, y que parte de la herramienta inicial de análisis presentada en la Tabla IV.1, que permite ver de qué manera los alumnos trabajan las distintas competencias matemáticas cuando resuelven una tarea de modelización. Por otro, la herramienta de análisis estructural de los modelos finales construidos por los alumnos, Tabla IV.4, que permite ver la riqueza de sus producciones a partir de la terna conceptos-procedimientos-lenguajes utilizados. Finalmente la herramienta de caracterización de los roles que el profesor asume durante el proceso de modelización de sus alumnos, en la Tabla V.2, que puede servir de guía a la hora de gestionar una actividad basada en la resolución de tareas de modelización.

Bibliografía

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2013). Problemas de estimación de grandes cantidades: modelización e influencia del contexto. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), pp. 289–315.

Albarracín, L., y Gorgorió, N. (2014). Devising a plan to solve Fermi problems involving large numbers. *Educational Studies in Mathematics*, 86(1), pp. 79-96.

Alsina, C. (2007) Si Enrique VIII tuvo 6 esposas, ¿Cuántas tuvo enrique IV? El realismo en educación matemática y sus implicaciones docentes. *Revista Iberoamericana en investigación*, 43, pp. 85-101.

Ärlebäck, J. B. y Doerr, H. M. (2015). Moving beyond a single modelling activity. En G. Stillman, W. Blum y M. S. Biembengut (Eds.), *Mathematical Modelling in Education Research and Practice*. (pp. 293-303). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Barkley, E., Cross, K. y Major, C. (2007). *Técnicas de aprendizaje colaborativo.* Ministerio de Educación y Ciencia. Madrid: Ediciones Morata.

Barquero, B., Bosch, M., y Gascón, J. (2011). Los recorridos de estudio e investigación y la modelización matemática en la enseñanza universitaria de las ciencias experimentales. *Enseñanza de las ciencias*, 29(3), pp. 339-352.

Berry, J. (2002). Developing mathematical modelling skills: The role of CAS. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 34(5), pp. 212-220.

Biccard, P. y Wessels, D. (2011). Documenting the Development of Modelling Competencies of Grade 7 Mathematics Students. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 375-384). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Blanco, L. (2012). Influencias del dominio afectivo en la enseñanza y el aprendizaje. En N. Planas (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática.* (pp. 171-186). Barcelona: Graó Editorial.

Blomhøj, M. (2008). Different perspectives in research on the teaching and learning mathematical modelling. En M. Blomhøj y S. Carreira (Eds.), *Mathematical applications and modelling in the teaching and learning of mathematics.* (pp. 1-17). IMFUFA tekst. Roskilde University.

Blomhøj, M. y Jensen, T.H. (2003). Developing mathematical modelling competence: conceptual clarification and educational plannig. *Teaching mathematics and its applications,* 22(3), pp. 123-139.

Blomhøj, M. y Jensen, T.H. (2007). What's all the fuss about competencies? En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* (pp.45-56). Heidelberg: Springer.

Blomhøj, M. y Kjeldsen, T. (2006). Teaching Mathematical Modelling through project work. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), pp. 163-177.

Blum, W (2011) Can Modelling Be Taught and Learnt? Some Answers from Empirical Research. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 15-30). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Blum, W. (1993). Mathematical modelling in mathematics education and instruction. En Breiteig y otros (Eds.), *Teaching and learning mathematics in context*. (pp. 3-14). Chichester: Ellis Horwood Limited.

Blum, W. y Borromeo-Ferri, R. (2009). Mathematical Modelling: Can It Be Taught And Learnt? *Journal of Mathematical Modelling and Application*, 1(1), pp. 45-58.

Blum, W. y Leiβ D. (2007). How do students and teachers deal with mathematical modeling problems? En Haines y otros (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12): Education, Engineering and Economics*, (pp. 222-231). Chichester: Horwood Publishing.

Blum, W. y Niss, M. (1991). Applied Mathematical Problem Solving, Modeling, Applications, and Links to other Subjects – State, Trends and Issues in Mathematics Instruction. *Educational Studies in Mathematics*, 22, pp. 37-68.

Blum, W., y otros (2002). ICMI STUDY 14: Applications and modeling in mathematics education. Discussion document. *Educational Studies in Mathematics*, 51, pp. 149-171.

Borba, M. (2009). Potential scenarios for Internet use in the mathematcis classroom. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), pp. 86-95.

Borromeo-Ferri, R. (2006). Theorical and empirical differentiations of phases in the modeling process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 41, pp. 453-465.

Borromeo-Ferri, R. (2007). Personal experiences and extra-mathematical knowledge as an influence factor on modelling routes of pupils. En D. Pitta-Pantzi y Philippou (Eds.), *CERME 5 - Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2080-2089). Larnaca: University of Cyprus.

Borromeo-Ferri, R. y Blum, W. (2011). Are integrated thinkers better able to intervene adaptively? A case study in a mathematical modeling environment. En M. Pytlak, T. Rowland y E. Swoboda (Eds.), *CERME 7 - Proceedings of the Seventh Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 927-936). Poland: University of Rzeszow.

Bressan, A. y Gallego, M.A. (2011). La Educación Matemática Realista. Bases teóricas. *III Congreso Nacional de Matemática y Problemáticas de la Educación Contemporánea*. Obtenido el 2 de septiembre del 2013 en http://www.gpdmatematica.org.ar/publicaciones/emr_bases_teoricas.pdf

Burkhardt, H. (2006). Modelling in Mathematics Classrooms: reflections on past developments and the future. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), pp. 178-195.

Cabassut, R. (2009). The double transposition in mathematisation at primary school. En V. Duran-Guerrier, S. Soury-Lavergne, y F. Arzarello (Eds.), *CERME 6 – Proceedings of Sitxh Conference of European Research in Mathematics Education.* (pp. 2156-2165). Lyon.

Carreira, S. y Baioa, A. M. (2011). Student´s modelling routes in the context of object manipulation and experimentation in mathematics. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of*

Mathematical Modelling. (pp. 211-230). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Confrey, J. (2006). The evolution of design studies as methodology. En R. K. Sawyer (Ed.), *The Cambridge Handbook of the Learning Sciences* (pp. 135-152). New York: Cambridge University Press.

De Lange, J. (1996). Using and applying mathematics in education. En A.J. Bishop (Ed.), *International Handbook of Mathematics Education, Part I.* (pp. 49-97). Utrecht: Kluwer Academia Press.

Doerr, H. (2006). Teachers´ Ways of Listening and Responding to Students´ Emerging Mathematical Models. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), pp. 255-268.

English, L. y Lesh, D. (2003). Ends-in-view problems. En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. (pp. 297-316). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Filloy, E., Puig, L., y Rojano, T. (2008). El estudio teórico local del desarrollo de competencias algebraicas. *Enseñanza de las ciencias*, 25(3), pp. 327-342.

Freudenthal, H. (1968). Why to teach mathematics so as to be useful. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1-2), pp. 3-8.

Galbraith, P. y Stillman, G. (2006). A Framework for Identifying Student Blockages during Transition in the Modeling Process. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* 38(2). pp. 143-162.

Gallart C., Ferrando I. y García-Raffi, L.M. (2015). El profesor ante la actividad modelizadora en el aula de secundaria. *SUMA*, 79, pp. 9-16.

Gallart, C., Ferrando, I. y Garcia-Raffi, L.M. (2014). Implementación de tareas de modelización abiertas en el aula de secundaria. Análisis previo. En M.T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII*. (pp. 327-336). Salamanca: SEIEM.

García, F.J. y Ruíz-Higueras, L. (2011). Modifying teachers´ practices: The case of a european training course on modelling and applications. En G. Kaiser,

W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trens in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 569-578). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

García, F.J., Maa*ß*, K. y Wake, G. (2010). Theory meets practice: working pragmatically within different cultures and traditions. En R. Lesh, P. Galbraith, C. Haines y A. Hurford (Eds.), *Modeling Students´ Mathematical Modeling Competencies*. (pp. 445-457). New York: Springer.

Gavilá, P. (1997). El aprendizaje cooperativo: desde las matemáticas también es posible educar en valores. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, 13, pp. 81-94.

Gavilá, P. (2002). Comparación de modelos de resolución de problemas en una clase tradicional y en una clase cooperativa. Una experiencia con estudiantes de 3º de ESO. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, 13, pp. 34-43.

Giménez, J. (1997). *Evaluación en matemáticas. Integración de perspectivas*. Madrid: Síntesis.

Goldin (1987) Cognitive representational systems for mathematical problem solving. En C. Janvier (Ed.), *Problems of representation in the teaching and learning of mathematics* (pp. 125–145). Hillside: Lawrence Erlbaum Associates Publishers.

Goñi, J. M. (2010). El desarrollo de la competencia matemática. *Aula de Innovación Educativa*, 189, pp. 17-22.

Goñi, J. M. (2011). Las finalidades del currículo de Matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. M. Goñi (Coord.), *Didáctica de las Matemáticas*. (pp. 9-26). Barcelona: Editorial Graó.

Gravemeijer (1997). Commentary, solving word problems: a case of modeling? *Learning and instruction*, 1(4), pp. 389-397.

Gravemeijer (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* (pp.138-144). Heidelberg: Springer.

Haines, C. y Crouch, R. (2001). Recognizing constructs within mathematical modelling. *Teaching mathematics and its applications,* 20(3), pp. 129-138.

Haines, C. y Crouch, R. (2004). Mathematical modelling: transitions between the real world and the mathematical model. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology,* 35(2), pp. 197-206.

Haines, C. y Crouch, R. (2005). Applying mathematics: making multiple-choice questions work. *Teaching mathematics and its applications,* 24(2-3), pp. 107-113.

Haines, C. y Crouch, R. (2007). Mathematical modelling and applications: ability and competence frameworks. *Modelling and Applications in Mathematics Education. New ICMI Study Series*, 10, pp. 417-424.

Hammersley, J. M. (1968). On the enfeeblement of mathematicals skills by modern mathematics and suimilar soft intelectual trash in schools and universities. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1-2), p. 17.

Heuvel-Panhuizen, M. (2002). Realistic mathematics education as work in progress. En Fou-Lai Lin (Eds.), *Common sense in mathematics education. Proceedings of 2001 The Netherlands and Taiwan Conference on Mathematics Education.* (pp. 1-43). Taiwan: National Taiwan Normal University.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics. En J. Hiebert (Eds.), *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Jensen, T.H. (2007). Assessing Mathematical Modeling Competency. En C. Haines, P. Galbraith, W. Blum y S. Khan (Eds.), *Mathematical Modelling (ICTMA 12) Education, Engineering and Economics* (pp. 141-148). Chichester: Horwood.

Julie, C. y Mudalay, V. (2007). Mathematical modelling of social issues in school mathematics in South Africa. En W. Blum, P. Galbraith, H.W. Henn y M. Niss (Eds.), *Modeling and Applications in Mathematics Education. The 14th ICMI Study.* (pp. 503-510). New York: Springer.

Kadijevich, D., Haapasalo, L., y Hvorecky, J. (2005). Using technology in applications and modelling, *Teaching Mathematics and Its Applications,* 24(2-3), pp. 114-122.

Kaiser, G. y Schwarz, B. (2006). Mathematical modelling as a bridge between school and university. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), pp. 196-208.

Kaiser, G. y Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modeling in mathematic education. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), pp. 302-310.

Kaiser, G., Blomhøj, M., y Sriraman, B. (2006a). Towards a didactical theory for mathematical modelling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), pp. 82-85.

Kaiser, G., Blomhøj, M., y Sriraman, B. (2006b). A brief survey of the state of mathematical modelling around the world. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(3), pp. 212-213.

Kaiser, G., Blum, W., Borromeo, R. y Stillman, G. (Eds.) (2011). *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Kelly, A. y Lesh, R. (Eds.) (2000). *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Kramarski, B., Mevarech, Z. R., y Arami, M. (2002). The effects of metacognitive training on solving mathematical authentic tasks. *Educational Studies in Mathematics*, 49, pp. 225-250.

Leiß, D. y Wiegand, B. (2005). A classification of teacher interventions in mathematics teaching. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 37(3), pp. 240-245.

Leiß, D., Schukajlow, S., Blum, W., Messner, R., y Pekrum, R. (2010). The role of the situation model in Mathematical Modeling-Task analyses, student competencies and teacher interventions. *Journal für Didaktik Didaktik*, 31, pp. 119-141.

Lesh, R y Kelly, A. (2000). Multitiered Teaching Experiments. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* (pp. 197-230). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh, R. (1997). Matematización: La necesidad "real" de la fluidez en las representaciones. *Enseñanza de las ciencias,* 15(3), pp. 377-391.

Lesh, R. y Clarke, D. (2000). Formulating operational definitions of desired outcomes of instruction in mathematics and science education. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* (pp. 113-150). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh, R. y Doerr, H. M. (2003). Foundations of a models and modeling perspective on mathematics teaching, learning, and problem-solving. En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. (pp. 3-34). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh, R. y Harel, G. (2003). Problem solving, modeling, and local conceptual development. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(2), pp. 157-189.

Lesh, R., & Zawojewski, J. (2007). Problem solving and modeling. En F. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning.* (pp. 763-804). Charlotte, NC: Information Age Publishing.

Lesh, R., Hoover, M., Hole, B., Kelly, A., y Post, T. (2000). Principles for Developing Thought-Revealing Activities for Students and Teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education.* (pp. 591-645). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lesh, R., Lester, F., y Hjalmarson, M. (2003). A Models and Modelling Perspective on Metacognitive Functionong in Everyday Situations Where Problem Solvers Develop Mathematical Constructs. En R. Lesh y H.M. Doerr

(Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. (pp. 383-403). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Lingefjärd, T. (2006). Faces of mathematical modeling. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 38(2), pp. 96-112.

Maaß, K. (2005). Barriers and opportunities for the integration of modelling in mathematics classes: results of an empirical study. *Teaching mathematics and its applications,* 24(2-3), pp. 61-74.

Maaß, K. (2006). What are modeling competencies? *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*. 38(2), pp. 113-142.

Maaß, K. (2010) Classification scheme for modeling task. *Journal für Didaktik Didaktik*, 31, pp. 285-311.

Maaß, K. y Gurlitt, J. (2011). LEMA – Professional development of teachers in relation to mathematical modelling. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 629-639). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Mora, L. y Rosich, N. (2011) Las actividades matemáticas y su valor competencial. Un instrumento para su detección, *Números*. 76, pp. 69-82.

Morera, L. (2013). Contribución al estudio de la enseñanza y del aprendizaje de las isometrías mediante discusiones en gran grupo con el uso de tecnología. *Tesis doctoral*.

Mousoulides, N.G. (2007). The modelling perspective in the teaching and learning of mathematical problem solving at the elementary and secondary school level. *Tesis Doctoral*.

Mousoulides, N.G., Christou, C. & Sriraman B. (2008). A modeling perspective on the teaching and learning of mathematical problem solving. *Mathematical Thinking and Learning*, 10(3), pp. 293-304.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston.

Niss, M. (1999). Aspects of the nature and state of research in Mathematics Education, *Educational Studies in Mathematics,* 40, pp. 1-24.

Niss, M. (2003). Quantitative Literacy and Mathematical Competencies*.* En B.I. Madison y L.A. Steen (Eds.), *Quantitative Literacy – Why Numeracy Matters for Schools and Colleges.* (pp. 215-220). Princeton, NJ: National Council on Education and the Disciplines.

Niss, M. (2004). Mathematical competencies and the learning of mathematics: the Danish Kom project. En Gagtsis y Papastavridis (Eds.), *3rd Mediterranean Conference on mathematical education, 3-5 January 2003, Athens, Greece*. (pp. 115-124). Athens: The Hellenic mathematical society.

OCDE (2004). *La definición y selección de competencias clave. Resumen ejecutivo.* Obtenido el 2 de septiembre del 2013 en http://www.deseco.admin.ch/bfs/deseco/en/index/03/02.parsys.78532.downloadList.94248.DownloadFile.tmp/2005.dscexecutivesummary.sp.pdf

OCDE (2005) *PISA 2003. Pruebas de Matemáticas y de Solución de Problemas.* Instituto Nacional de Evaluación y Calidad del Sistema Educativo (INECSE). Ministerio de Educación y Ciencia. Obtenido el 2 de septiembre del 2013 en http://www.mecd.gob.es/dctm/ievaluacion/internacional/pisa2003liberados.pdf?documentId=0901e72b801106c6

OCDE (2006). *PISA 2006. Marco de la evaluación. Conocimientos y habilidades en Ciencias, Matemáticas y Lectura.* Obtenido el 2 de septiembre del 2013 en http://www.oecd.org/pisa/39732471.pdf

OECD. (2014a). *PISA 2012 results: Creative problem solving: students' skills in tackling real-life problems (Volume V)*. PISA, OECD Publishing.

OECD. (2014b). *PISA 2015: Draft collaborative problem solving framework*. PISA, OECD Publishing.

Peled, I., y Balacheff, N. (2011). Beyond realistic considerations: modeling conceptions and controls in task examples with simple word problems. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 43, pp. 307-315.

Planas, N. (2011). Buenas prácticas en la enseñanza de las Matemáticas en secundaria y bachillerato. En J. M. Goñi (Coord.), *Matemáticas. Investigación, innovación y buenas prácticas*. (pp. 57-160). Barcelona: Editorial Graó.

Pollak, H. O. (1968). On some of the problems of teaching applications of mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 1(1-2), pp 24-30.

Pollak, H. O. (1969). How can we teach applications of mathematics? *Educational Studies in Mathematics*, 2(2-3), pp. 393-404.

Polya, G (1965). *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas.

Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Granada: Comares, col. Mathema.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los modelos teóricos locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, Mª.J. González y M. Moreno (Eds.), *Investigación en Educación Matemática. Actas del Décimo Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática.* (pp. 107-126). Huesca: Instituto de Estudios Altoaragoneses / Universidad de Zaragoza.

Puig, L. y Cerdán, F. (1990). Acerca del carácter aritmético o algebraico de los problemas verbales. Conferencia invitada al grupo de Álgebra del Segundo Simposio Internacional de Educación Matemática, Cuernavaca, Morelos, México. Obtenido el 1 de febrero del 2016 en http://www.uv.es/puigl/cuernavaca90.pdf

Real Decreto 1105/2014, de 26 de diciembre, por el que se establece el currículo básico de la Educación Secundaria Obligatoria y el Bachillerato. BOE, 3 de enero de 2015, núm. 3, pp. 169-546.

Rico, L. (2006). La competencia matemática en PISA. *PNA*, *1*(2), pp. 47-66.

Schmidt (2011). Modelling in the classroom: Obstacles from the teacher´s perspective. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 641-652). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Schwarz, B. y Kaiser, G. (2007). Mathematical modelling in the school: Experiences from a project integrating school and university. En D. Pitta-Pantzi y Philippou (Eds.), *CERME 5 - Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. (pp. 2180-2189). Larnaca: University of Cyprus.

Schwarz, B., Wissmach, B. y Kaiser, G (2008). “Last curves not quiet correct”: diagnostic competence of future teachers with regard to modelling and graphical representations. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 40, pp. 777-790.

Sol, M. (1998). Proyectos Matemáticos en la ESO: cómo los evaluamos. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, 17, pp. 105-111.

Sol, M. (2008). Projectes matemàtics a l´Educació Secundària Obligatioria. *Tesis Doctoral.*

Sol, M. y Giménez, J. (2004). Proyectos matemáticos realistas y resolución de problemas. En J. Giménez, L. Santos, J. P. da Ponte (Coords.), *La actividad matemática en el aula. Homenaje a Paulo Abrantes*. (pp. 35-57). Barcelona: Graó Editorial. Biblioteca UNO.

Stender, P. (2012). Facilitating complex modelling activities – The role of the teacher. En Cho, Sung Je (Eds.), *12th International congress on Mathematical Education (ICME-12)*. Seoul: Springer.

Stillman, G. (2011). Applying Metacognitive Knowledge and Strategies in Applications and Modelling Tasks at Secondary School. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trens in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 165-180). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

Verschaffel, L. (2012). Los problemas aritméticos verbales y la modelización matemática. En Planas, N. (Coord.), *Teoría, crítica y práctica de la educación matemática.* (pp. 27-42). Barcelona: Graó Editorial.

Verschaffel, L., De Corte, E. y Greer, B. (2000). *Making sense of Word problems*. Lisse: Swets & Zeitlinger.

Verschaffel, L., Vicente, S. y Van Dooren, W. (2008). Usar las matemáticas para resolver problemas reales. *Cultura y Educación*, 20(4), pp. 391-406.

Vilatzara, Grup (2001a). Proyectos matemáticos en la ESO: una actividad rica. *UNO. Revista de didáctica de las matemáticas*, 27, pp. 21-36.

Vilatzara, Grup (2001b). Experiencias sobre proyectos e investigaciones matemáticas en secundaria. *Revista Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas. Sociedad Canaria Isaac Newton de Profesores de Matemáticas,* 46, pp. 29-46.

Villarreal, M., Esteley, C. y Mina, M. (2010). Modeling empowered by information and communication technologies. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik*, 42, pp. 405-419.

Vos, P. (2011). What´s is “authentic” in the Teaching and Learning of Mathematical Modelling? En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trens in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 713-722). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Zabala, A. y Arnau, L. (2007). *11 ideas clave. Cómo aprender y enseñar competencias.* Barcelona: Graó Editorial.

Zawojewski, J. (2010). Problem solving versus modelling. En R. Lesh y otros (Eds.), *Modeling Students’ Mathematical Modeling Competencies*. (pp. 237-243). Springer Science+Business Media.

Zawojewski, J. y Lesh, R. (2003). A models and modeling perspective on problem solving. En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching*. (pp. 317-336). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Zawojewski, J., Lesh, R. y English, L. (2003). A models and modelling perspective on the role of small group learning activities. En R. Lesh y H.M. Doerr (Eds.), *Beyond Constructivism: Models and modeling perspectives on* *mathematics problem solving, learning, and teaching*. (pp. 337-358). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum & Associates.

Zbiek, R. y Conner, A. (2006). Beyond motivation: exploring mathematical modelling as a context for deepening students´ understandings of curricular mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 63, pp. 89-112.

Zöttl, L., Ufer, S. y Reiss, K. (2011). Assessing Modelling Competencies Using a Multidimensional IRT-Approach. En G. Kaiser, W. Blum, R. Borromeo y G. Stillman (Eds.), *Trends in Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* (pp. 427-440). Dordrecht, Heidelberg, London, New York: Springer.

Anexo I

Tareas de modelización utilizadas

La sombra en el patio de recreo

Como os habréis dado cuenta, el picudo ha obligado a talar numerosas palmeras en el patio central del Colegio, con lo que se nos presenta el problema de seleccionar nuevos árboles para plantar en su lugar y de esta manera establecer y mejorar las zonas de sombra de los recreos. Este problema también se plantea a la hora de diseñar un parque o jardín público. ¿Qué decisiones tomarías tú para mejorar la zona de sombra del patio?

El parque de atracciones

La excursión de fin de curso es al parque de atracciones de Terra Mítica (la imagen de abajo muestra el mapa del parque, que podeis descargar en http://www.terramiticapark.com/secciones/elparque/plano-parque.asp?idioma=_esp a una escala de 1::750), pero necesitamos organizar bien la visita para aprovechar al máximo el tiempo. ¿Como lo hariaís?

Tener en cuenta que habrá que parar a comer, hacer cola para subir en las atracciones, recorrer la menor distancia posible, etc.

La desaparición del portátil

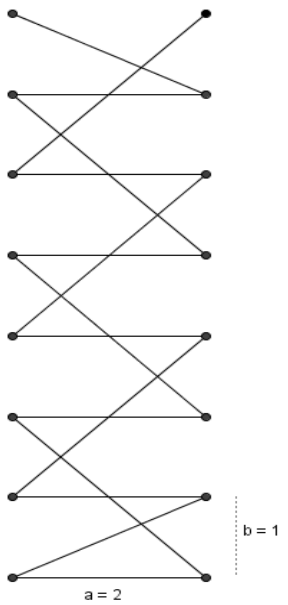
Esta mañana nos hemos dado cuenta de que ha desaparecido un de los portátiles de los que utilizamos en el colegio. Como vuestro grupo fue el último que utilizó el portátil, la directora os ha encargado que dirijáis la búsqueda. No hay pista sobre su posible localización, salvo que puede encontrarse en cualquier aula del colegio (salvo el comedor y las cocinas, donde seguro que no está). ¿Cómo vais a organizar la búsqueda? ¿Cuánto tiempo creéis que os llevara el registro del colegio?

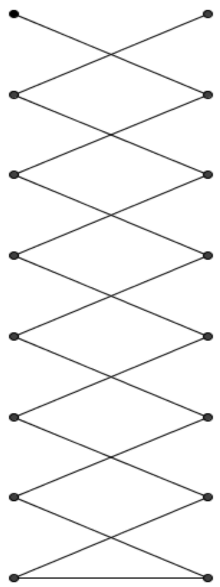
Un nuevo comedor

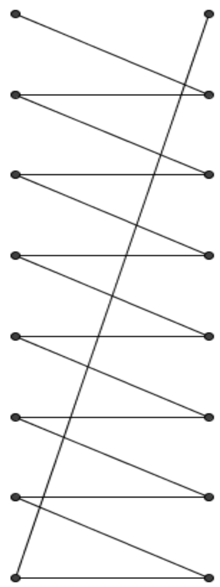
Actualmente hay un espacio vacío en el Colegio *(justo enfrente del Comedor Grande)* que pretendemos utilizar como futuro comedor para los alumnos de infantil. ¿Cuántos alumnos pueden comer en este espacio? ¿Qué decisiones tomaríais respecto a su organización?

Cordones

Existen múltiples maneras de anudarse los cordones de los zapatos. Entre las más comunes están la manera europea, la manera americana y la manera en que los suelen anudar en las zapaterías:







Manera Europea *Manera Americana* *Manera Zapatería*

¿Sabríais decir cuál de estas maneras requiere los cordones más largos, y cuál los más cortos? ¿Os atreveríais a conjeturar cuál es, de entre todas las maneras posibles de anudarse los cordones, la que necesita los cordones menos largos?

Hábitos de estudio

¿Os habéis preguntado alguna vez si estáis estudiando de forma adecuada? ¿Qué cambios deberíais hacer en vuestros hábitos de estudio para mejorar los resultados académicos? Algunos cuestionarios pueden ayudaros a detectar si las estrategias que utilizáis para estudiar son las más adecuadas.

A continuación os exponemos algunas de las preguntas que aparecen en estos test, así como los ítems que sirven para contestarlas:

- ¿Cuánto tiempo sueles dedicar al estudio cuando llegas a casa después del Colegio?

Menos de 30 minutos	*Menos de una hora*	*Entre una hora y dos horas*	*Más de dos horas*

- ¿Sueles distraerte cuando estudias?

Nunca o casi nunca	*Algunas veces*	*Bastantes veces*	*Siempre o casi siempre*

- En los libros, apuntes u otro material a estudiar, subrayas en cada párrafo las palabras, datos o frases que te parecen más importantes

Nunca o casi nunca	*Algunas veces*	*Bastantes veces*	*Siempre o casi siempre*

- ¿Estudias solo en vísperas de un examen?

Nunca o casi nunca	*Algunas veces*	*Bastantes veces*	*Siempre o casi siempre*

- ¿Cuántas veces sueles leer un texto, un enunciado, los apuntes,...?

Solo una vez	*Dos veces*	*Tres veces*	*Más de tres veces*

- Procuras que en el lugar de estudio no haya nada que pueda distraerte, como personas, ruidos, desorden, falta de luz, etc.

Nunca o casi nunca	*Algunas veces*	*Bastantes veces*	*Siempre o casi siempre*

Como habréis visto en otros cuestionarios que aparecen en revistas o en internet (test de compañerismo, test de compatibilidad, etc.), cuando termináis de contestar a las preguntas planteadas, se os otorga una puntuación final. Os proponemos que elaboréis, a partir de las preguntas anteriores (reformulando las que hay o añadiendo nuevas) vuestro propio test, y establezcáis un procedimiento para, a partir de las respuestas (¿todas las preguntas tiene la misma importancia para el test?), obtener una puntuación que indique el "nivel de eficacia" en el estudio.

Poner a prueba el test y pasárselo a vuestros compañeros. ¿Creéis que el "nivel de eficacia" que obtienen refleja bien su éxito/fracaso en sus estudios? A partir de las respuestas a vuestro test, ¿qué consejos daríais a vuestros compañeros para mejorar su nivel de eficacia en el estudio?

Selección de personal

Andrés está encargado de coordinar los vendedores ambulantes de chuches y refrescos en el parque de atracciones “Terra Mítica”.

La temporada pasada tuvo nueve vendedores y el próximo verano, por los recortes, solo puede contratar a seis, tres a tiempo completo y tres a tiempo parcial. Para ello ha recopilado el número de horas trabajadas (tabla 1) y el dinero recaudado (tabla 2) por cada vendedor durante los tres meses de verano, distinguiendo entre los días de baja asistencia, asistencia media o asistencia alta al parque. Con estos datos deberéis evaluar a los vendedores. ¿Seréis capaces de ayudar a Andrés a decidir qué seis vendedores son los más idóneos para contratar la próxima temporada?

Tabla 1: Horas trabajadas

	JUNIO			JULIO			AGOSTO		
	Alta	Media	Baja	Alta	Media	Baja	Alta	Media	Baja
MARIA	12,5	15	9	10	14	17,5	12,5	33,5	35
CLARA	5,5	22	15,5	53,5	40	15,5	50	14	23,5
CAROL	12	17	14,5	20	25	21,5	19,5	20,5	24,5
JOSE	19,5	30,5	34	20	31	14	22	19,5	36
ÁNGEL	19,5	26	0	36	15,5	27	30	24	4,5
ANA	13	4,5	12	33,5	37,5	6,5	16	24	16,5
LIDIA	26,5	43,5	27	67	26	3	41,5	58	5,5
TONI	7,5	16	25	16	45,5	51	7,5	42	84
RAÚL	0	3	4,5	38	17,5	39	37	22	12

Tabla 2: Dinero recaudado (en euros)

	JUNIO			JULIO			AGOSTO		
	Alta	Media	Baja	Alta	Media	Baja	Alta	Media	Baja
MARIA	690	780	452	699	758	835	788	1732	1462
CLARA	474	874	406	4612	2032	477	4500	834	712
CAROL	1047	667	284	1389	804	450	1062	806	491
JOSE	1263	1188	765	1584	1668	449	1822	1276	1358
ÁNGEL	1264	1172	0	2477	681	548	1923	1130	89
ANA	1115	278	574	2972	2399	231	1322	1594	577
LIDIA	2253	1702	610	4470	993	75	2754	2327	87
TONI	550	903	928	1296	2360	2610	615	2184	2518
RAÚL	0	125	64	3073	767	768	3005	1253	253

El mejor colegio

A continuación os presentamos una tabla en la que se recogen una serie de datos pertenecientes a seis Colegios diferentes. ¿Qué Colegio elegiríais para estudiar? *(ni que decir tiene que el nuestro es el mejor y no lo cambiaríamos por nada)*

Atendiendo a estos datos (o cualquier otro que te parezca relevante) debéis elaborar un procedimiento para establecer la clasificación de estos Colegios (desde el mejor Colegio para estudiar hasta el peor).

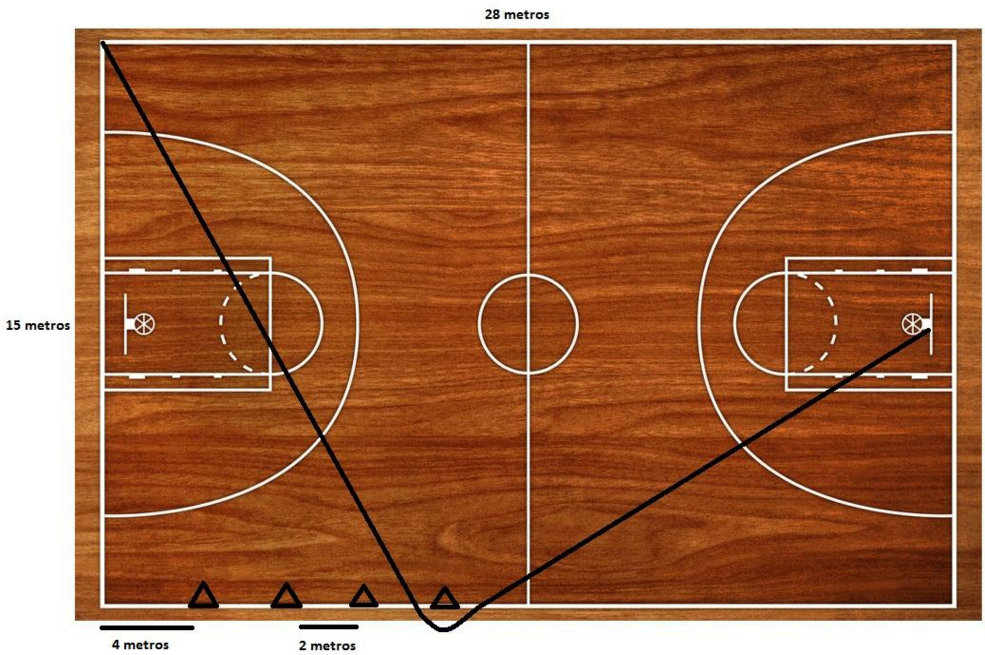
	Nº de aulas de desdoble	*Ordenadores por alumno*	*Nº de alumnos por aula*	*Superficie en metros cuadrados*	*Nota media del expediente*	*Nota media en las PAU*	*Porcentaje de repetidores (por curso)*	*Presupuesto para el próximo curso*
Colegio Chuli	7	0.6	24	13.200	7.7	6.7	5.4%	Menos
Colegio Guay	9	0.4	25	12.600	7.3	7.0	6.1%	Menos
Colegio Mola	11	0.2	20	10.500	7.5	7.1	4.7%	Menos
Colegio Tope	12	0.3	28	9800	7.0	6.5	5.2%	Mismo
Colegio Diver	13	0.2	22	18.100	7.2	6.4	5.3%	Mismo
Colegio Super	14	0.3	29	10700	7.1	6.6	6.9%	Más

Aclaraciones:

- *Nº de aulas de desdoble: Se refiere a las aulas de informática, de idiomas , de desdoble y a los laboratorios de que dispone el Colegio*
- *Superficie en metros cuadrados: Referido a la superficie total ocupada por las instalaciones del Colegio, incluido patios de recreo y pistas deportivas*

La carrera

La profesora de Educación Física ha preparado una nueva prueba de velocidad que consiste en lo siguiente: coloca 10 conos a lo largo de la línea lateral de la cancha de baloncesto, empezando a 4 metros de la línea de fondo y separados entre sí 2 metros. Cada corredor sale desde la esquina opuesta, rodea el cono que quiera y corre hasta tocar la canasta del otro lado.



¿Tiene alguna importancia el cono que decidamos rodear en la carrera? Si es así, ¿qué haríais vosotros para intentar ganarla? Si pudierais añadir un nuevo cono, ¿donde lo pondríais?

Anexo II

Tareas de modelización descartadas

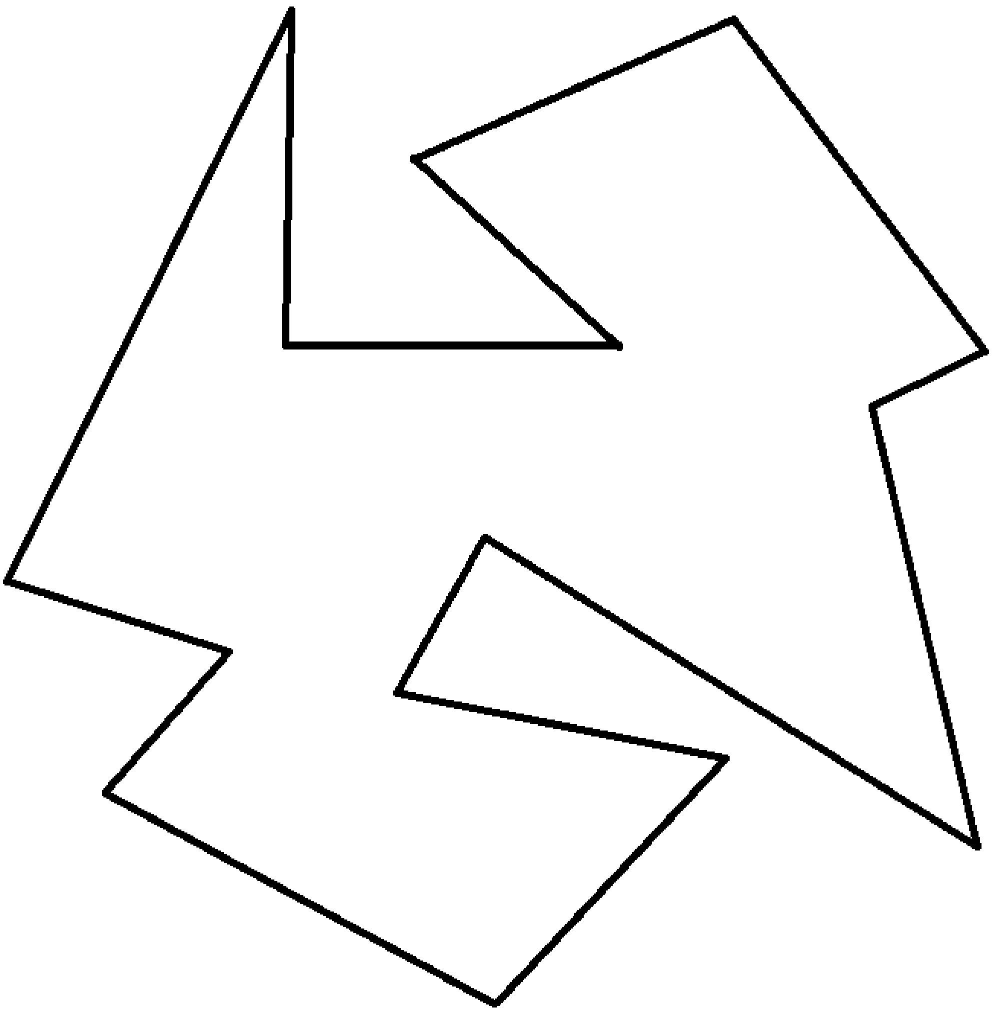
El Gulliver

Ya conoceis el parque Gulliver, que se encuentra en el antiguo cauce del rio Turia en la ciudad de Valencia, pero, a la vista de las siguientes fotografías, ¿podríais dar una altura aproximada del gigante?

El patio de recreo

A continuación te mostramos el patio de recreo de otro Colegio. ¿Cuántos monitores son necesarios para vigilar este patio? ¿Dónde los situaríamos? ¿Cuál es la ruta óptima de vigilancia?

Describe detalladamente el método que utilizas para resolver este problema



Anexo III

Dossier de trabajo

Las tareas que a continuación os proponemos tienen poco que ver con las que estáis acostumbrados a realizar en las clases habituales de Matemáticas. El proceso de resolución de estas tareas requiere que leáis atentamente su enunciado y os pongáis en la situación que os describen, pues se trata de problemas totalmente reales. Deberéis seleccionar aquellos datos que consideréis relevantes y descartéis los que no lo son, y a partir de aquí, y tras un período de reflexión y razonamiento, utilicéis los procesos matemáticos que consideréis oportunos (que no tienen porque ser complejos, ni difíciles) para obtener un resultado que posteriormente necesitareis interpretar y validar en la situación real en que se sitúe el problema.

El trabajo deberéis hacerlo en grupo, participando todos activamente en el planteamiento y resolución del problema. Tendréis que elaborar un informe describiendo todo el proceso que habéis seguido en su resolución, que datos habéis tenido en cuenta, que suposiciones o estimaciones habéis hecho, que procedimientos matemáticos habéis utilizado, así como los cálculos y operaciones necesarios para llegar al resultado final. También tendréis que preparar una pequeña presentación (un power-point o similar) para el resto de la clase. Pensar que una parte de vuestra calificación dependerá, no solo de la adecuación de la respuesta dada, sino también del interés y la originalidad que el proceso de resolución que hayáis seguido despierte en vuestros compañeros.

Los criterios que se utilizarán a la hora de evaluaros serán los siguientes:

- Que se utilicen correctamente las matemáticas.
- Que la respuesta se argumente y justifique adecuadamente.
- Que la solución sea adecuada y realista.
- Que el resultado del trabajo despierte interés y pueda resultar útil en otras situaciones similares a la planteada.
- Que la exposición sea clara, ordenada y fácil de seguir.

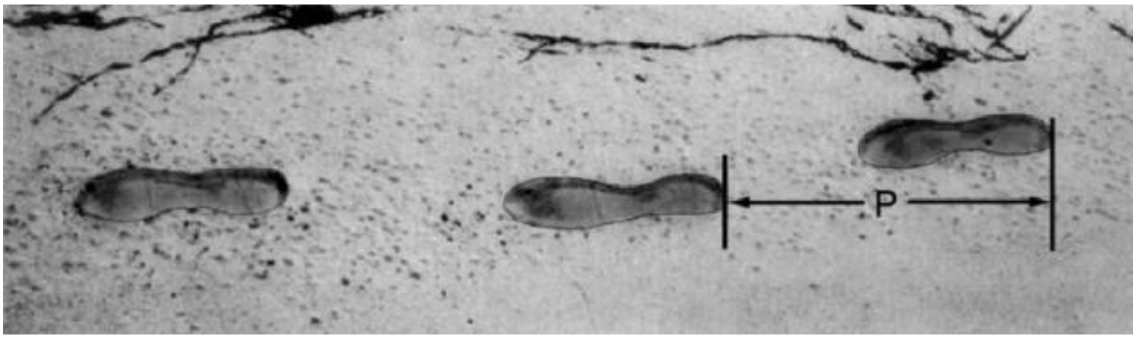
Anexo IV

Test de competencias

Nombre y apellidos: ____

Lee atentamente las preguntas antes de contestar. Justifica y razona adecuadamente las respuestas de aquellas preguntas que así lo exijan. Puedes utilizar calculadora. Responde en bolígrafo azul o negro.

CAMINAR



La foto muestra las huellas de un hombre caminando. La longitud del paso *P* es la distancia entre los extremos posteriores de dos huellas consecutivas.

Para los hombres, la fórmula $\frac{n}{P} = 140$, da una relación aproximada entre *n* y *P*, donde:

n = número de pasos por minuto, y
P = longitud del paso en metros.

Pregunta 1:

Si se aplica la fórmula a la manera de caminar de Enrique y éste da 70 pasos por minuto, ¿cuál es la longitud del paso de Enrique? Muestra tus cálculos.

Pregunta 2:

Bernardo sabe que sus pasos son de 0,80 metros. El caminar de Bernardo se ajusta a la fórmula. Calcula la velocidad a la que anda Bernardo en metros por minuto y en kilómetros por hora. Muestra tus cálculos.

MONOPATÍN

Marcos es un gran fan del monopatín. Entra en una tienda denominada PATINADORES para mirar algunos precios.

En esta tienda puedes comprar un monopatín completo, o puedes comprar una tabla, un juego de 4 ruedas, un juego de 2 ejes y un conjunto de piezas para montar, y construir tu propio monopatín.

Los precios de estos productos de la tienda son:

Producto	Precio en zeds	
Monopatín completo	82 o 84	
Tabla	40,60 o 65	
Un juego de 4 ruedas	14 o 36	
Un juego de 2 ejes	16	 
Un juego de piezas para montar (cojinetes ,almohadillas de goma, tornillos y tuercas)	10 o 20	  

Pregunta 3:

Marcos quiere montar su propio monopatín. ¿Cuál es el precio mínimo y el precio máximo de los monopatines montados por uno mismo en esta tienda?

(a) Precio máximo: . . . . .zeds

(b) Precio mínimo . . . . .zeds

Pregunta 4:

La tienda ofrece tres tablas diferentes, dos juegos diferentes de ruedas y dos conjuntos diferentes de piezas para montar. Sólo hay un juego de ejes para elegir.

¿Cuántos monopatines distintos puede construir Marcos? Rodea con un círculo la respuesta correcta:

A 6

B 8

C 10

D 12

Pregunta 5:

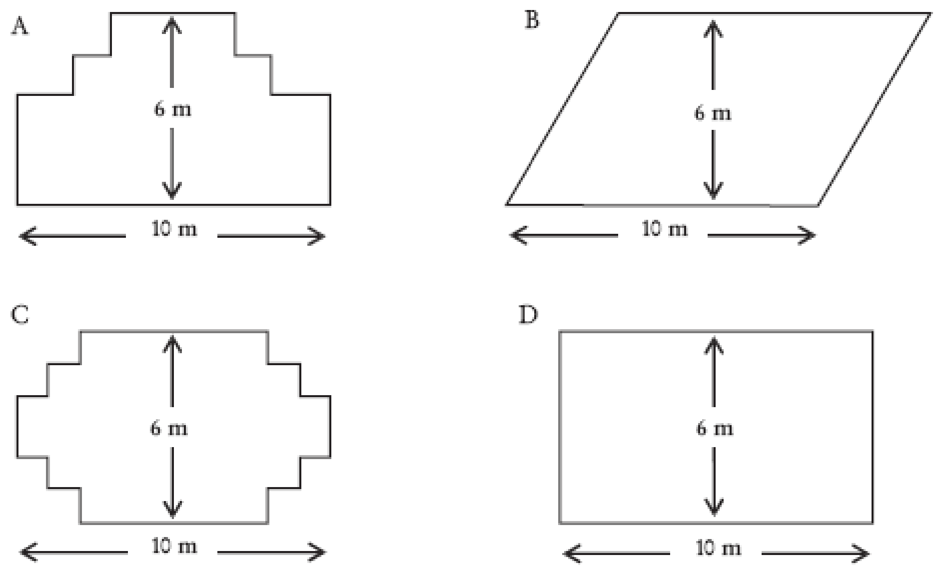
Marcos tiene 120 zeds para gastar y quiere comprar el monopatín más caro que pueda.

¿Cuánto dinero puede gastar Marcos en cada uno de los 4 componentes? Escribe tu respuesta en la tabla de abajo.

Componente	**Cantidad (zeds)**
Tabla	
Ruedas	
Ejes	
Piezas para montar	

CARPINTERO

Un carpintero tiene 32 metros de madera y quiere construir una pequeña valla alrededor de un parterre en el jardín. Está considerando los siguientes diseños para el parterre.



Pregunta 6:

Rodea con un círculo *Sí* o *No* para indicar si, para cada diseño, se puede o no construir el parterre con los 32 metros de madera.

Diseño del parterre	¿Puede construirse el parterre con 32 metros de madera utilizando el diseño?
Diseño A	Sí / No
Diseño B	Sí / No
Diseño C	Sí / No
Diseño D	Sí / No

EL CONCIERTO DE ROCK

En un concierto de rock se reservó para el público un terreno rectangular con unas dimensiones de 100 metros por 50 metros. Se vendieron todas las entradas y el terreno se llenó de fans, todos de pie.

Pregunta 7:

¿Cuánta gente estimas que hubo en el concierto?

Explica las suposiciones que tomes en consideración y detalla todos los pasos y cálculos que realices para dar tu respuesta**.**

Respuesta: . . . .

VECINOS

Pregunta 8:

¿Cuánta gente crees que vive en el bloque de pisos de la fotografía?

Explica las suposiciones que tomes en consideración y detalla todos los pasos y cálculos que realices para dar tu respuesta**.**

Respuesta: . . . .

VACACIONES

Este problema trata de cómo organizar el mejor itinerario para unas vacaciones. Las figuras 1 y 2 muestran un mapa de área y las distancias entre las ciudades.

Figura 1: Mapa de las carreteras que hay entre las ciudades.

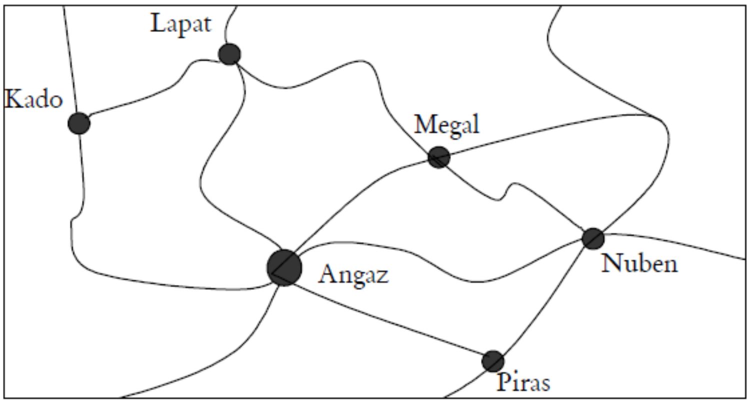


Figura 2: Distancias más cortas entre las ciudades en kilómetros.

	Angaz	Kado	Lapat	Megal	Nubes	Piras
Angaz						
Kado	550					
Lapat	500	300				
Megal	300	850	550			
Nuben	500		1000	450		
Piras	300	850	800	600	250	

Pregunta 9:

Soraya vive en Angaz. Quiere visitar Kado y Lapat. No puede viajar más de 300 kilómetros al día, aunque puede escalonar su viaje haciendo noche en cualquiera de los campings que hay entre las diferentes ciudades. Soraya estará dos noches en cada ciudad, de modo que pueda pasar un día entero visitando cada ciudad.

Escribe en la siguiente tabla el itinerario de Soraya indicando dónde se alojará cada noche.

Día	Alojamiento nocturno
1	*Camping entre Angaz y Kado*
2	
3	
4	
5	
6	
7	*Angaz*

DOS AMIGOS

Pregunta 10:

Carlos vive a tres kilómetros de su Instituto y Pablo a ocho. ¿A qué distancia viven uno del otro?

Explica las suposiciones que tomes en consideración y detalla todos los pasos y cálculos que realices para dar tu respuesta**.**

Respuesta: . . . .

LA CUERDA

Pregunta 11:

Un hombre quiere tener una cuerda lo suficientemente larga para unir dos postes separados entre sí 4 metros, pero solo le quedan trozos de cuerda de 0,5 metros. ¿Cuántos trozos necesitaría juntar para hacer la cuerda lo suficientemente larga para unir los postes?

Explica las suposiciones que tomes en consideración y detalla todos los pasos y cálculos que realices para dar tu respuesta**.**

Respuesta: . . . .

Anexo V

Criterios de corrección del Test de competencias

Caminar
Pregunta 1:
Máxima puntuación (1 punto)
0,5 m ó 50 cm, 1/2 (no es necesario especificar las unidades).
Ninguna puntuación
Otras respuestas.
Sin respuesta.
Pregunta 2:
Máxima puntuación (2 puntos)
Respuestas correctas (no es necesario especificar las unidades) para m/min y km/h:
n = 140 x 0,80 = 112.
Camina por minuto 112 × 0,80 m = 89,6 m.
Su velocidad es de 89,6 metros por minuto.
De modo que su velocidad es 5,38 o 5,4 km/h.
Se debe conceder máxima puntuación si se dan las dos respuestas correctas (89,6 y 5,4), se muestren los cálculos o no. Téngase en cuenta que los errores debidos al redondeo son aceptables. Por ejemplo, 90 metros por minuto y 5,3 km/h (89× 60) son aceptables:

- 89,6; 5,4.
- 90; 5,376 km/h.
- 89,8; 5376 m/hora [téngase en cuenta que si la segunda respuesta se da sin unidades, debe aplicarse la puntuación parcial].

Puntuación parcial (1 punto)
Responde como en el caso anterior pero falla al multiplicar por 0,80 para convertir de pasos por minuto a metros por minuto. Por ejemplo, su velocidad es 112 metros por minuto y 6,72 km/h.
La velocidad en metros por minuto es correcta (89,6 metros por minuto) pero la conversión a kilómetros por hora es incorrecta o falta:

- 89,6 m/min, 8960 km/h.
- 89,6; 5376.
- 89,6; 53,76.
- 89,6; 0,087 km/h.
- 89,6; 1,49 km/h.

Método correcto (descrito explícitamente) con errores menores de cálculo que no están cubiertos por los anteriores:

- n = 140×0,8 = 1120; 1120×0,8 = 896.
- Camina 896 m/min; 53,76km/h.
- n = 140×0,8 = 116; 116×0,8 =92,8. 92,8m/min 92,8 m/min→5,57km/h.
- Sólo se da 5,4 km/h, pero no 89,6m/min (no se muestran los cálculos intermedios).
- 5,4.
- 5,376 km/h.
- 5376 m/h.

Ninguna puntuación
Otras respuestas.
Sin respuesta.

Monopatín
Pregunta 3:
Máxima puntuación (1 punto)
Tanto el mínimo (80) como el máximo (137) correctos.
Ninguna puntuación
Otras respuestas.
Sin respuesta.

Pregunta 4:
Máxima puntuación (1 punto)
D 12
Ninguna puntuación
Otras respuestas.
Sin respuesta.
Pregunta 5:
Máxima puntuación (2 puntos)
65 zeds en una tabla, 14 en las ruedas, 16 en ejes y 20 en piezas para montar.
Puntuación parcial (1 punto)
Un solo error.
Ninguna puntuación
Más de un error.
Sin respuesta.

Carpintero
Pregunta 6:
Máxima puntuación (2 puntos)
Exactamente cuatro correctas.
Diseño A Sí.
Diseño B No.
Diseño C Sí.
Diseño D Sí.
Puntuación parcial (1 punto)
Tres respuestas correctas.
Ninguna puntuación
Dos o menos correctas.
Sin respuesta.

El concierto de rock
Pregunta 7:
Máxima puntuación (2 puntos)
Con argumentos realistas, del tipo: 3 o 4 personas por metro cuadrado ya que todas las entradas están vendidas y el terreno está lleno de fans. Como el concierto ocupa una superficie de 5000 metros cuadrados, con esta estimación habrá entre 15000 y 20000 personas.
Puntuación parcial (1 punto)
Respuesta con otras estimaciones, como 2 personas por metro cuadrado, con argumentación poco clara o confusa.
Ninguna puntuación
Otras respuestas: por ejemplo, 1 persona por m2.

Vecinos
Pregunta 8:
Máxima puntuación (2 puntos)
Se observa que el edificio tiene ocho plantas y se puede suponer que en cada planta hay 4 viviendas. Una estimación realista del número de habitantes de las viviendas debe incluir: personas que vivan solas (1 habitante), parejas jóvenes sin hijos o parejas mayores cuyos hijos ya no vivan con ellos (2 habitantes), familias medias con hijos e incluso con abuelos (entre 4 y 6 habitantes). Por ejemplo, si la mitad de los pisos los ocupan familias medias, un cuarto por familias de dos miembros y un cuarto personas viviendo solas, habrá entre 88 y 120 personas.
También se acepta que se estime una media de 3 personas por piso, lo cual daría 96 personas aproximadamente.
Puntuación parcial (1 punto)
Otras estimaciones, como que hay 2 o 4 personas de media por piso, con argumentación poco clara o confusa.
Ninguna puntuación
Otras respuestas.

Vacaciones
Pregunta 9:
Máxima puntuación (2 puntos)

Día	Alojamiento nocturno
1	*Camping entre Angaz y Kado*
2	*Kado*
3	*Kado*
4	*Lapat*
5	*Lapat*
6	*Camping entre Lapat y Angaz y Kado (o sólo "Camping")*
7	*Angaz*

Puntuación parcial (1 punto)
Un solo error.
Ninguna puntuación
Más de un error.
Sin respuesta.

Dos amigos
Pregunta 10:
Máxima puntuación (2 puntos)
Intervalo entre 5 y 11 km, con argumentos y distintas suposiciones.
Puntuación parcial (1 punto)
Dando dos valores numéricos como respuesta y no un intervalo, a 11 kilómetros o a 5 kilómetros, o con argumentos confusos o poco claros.
Ninguna puntuación
Única respuesta de tipo numérico.

La cuerda
Pregunta 11:
Máxima puntuación (2 puntos)
Intervalo de cuerda, o más de 8 trozos, pues es necesario hacer los nudos entre los trozos de cuerda o que no estén tensas, como muestra la foto (entre 8 y 12). Respuesta realista.
Puntuación parcial (1 punto)
Con rango de valores pero con argumentos confusos o poco claros o fallos en los cálculos o exagerados (más de 12, por ejemplo).
Ninguna puntuación
Única respuesta de tipo numérico (exactamente 8 trozos).

Anexo VI

Rúbrica de evaluación

Categoría/Nivel	*1 (muy mal)*	*2 (mal)*	*3 (regular)*	*4 (bien)*	*5 (muy bien)*
Planteamiento y resolución	El trabajo está mal enfocado. El problema no se ha entendido	El trabajo precisa revisarse. La solución es incorrecta	El trabajo precisa una pequeña revisión. El proceso de resolución presenta algunos errores y la solución no es totalmente adecuada	El trabajo está bien enfocado y el proceso de resolución no presenta, en general, errores. La solución es adecuada	El trabajo resuelve de forma satisfactoria el problema y el modelo puede aplicarse a otras situaciones similares a la planteada
Presentación y comunicación	La presentación está descuidada, con un mal uso, o inexistente, del lenguaje matemático. No se incluyen representaciones. Las explicaciones no se entienden o son inadecuadas	La presentación está algo descuidada, y el uso del lenguaje matemático es incorrecto o es pobre. Hay pocas representaciones o son inadecuadas. Las explicaciones son difíciles de entender. Se precisan muchas aclaraciones	La presentación es correcta, con un uso aceptable del lenguaje matemático y las representaciones. Las explicaciones presentan algunos aspectos poco claros que precisan aclaraciones	La presentación está cuidada, con un uso, en general, apropiado del lenguaje matemático y las representaciones. No se precisan, en general, aclaraciones	La presentación está cuidada, con un uso apropiado del lenguaje matemático y las representaciones, que enriquecen y facilitan su comprensión. Las explicaciones son claras y fáciles de entender
Iniciativa y autonomía	No hay trabajo en grupo. No tienen iniciativa ni presentan ideas propias. Deben ser guiados constantemente por el tutor	Tienen dificultades para entenderse entre sí y llegar a decisiones conjuntas. Tienen poca iniciativa y recurren frecuentemente al tutor	Se toman decisiones conjuntas pero no todos los miembros del grupo participan en el proceso de resolución. Requieren al tutor en algunas fases del proceso de resolución	Se toman decisiones conjuntas y todos los miembros del grupo, en mayor o menor medida, participan en el proceso de resolución. Requieren poca ayuda del tutor	Se toman decisiones conjuntas y todos los miembros del grupo participan en el proceso de resolución. No requieren del tutor en ninguna fase del proceso de resolución

Anexo VII

La sombra en el patio de recreo

Grupo A

Reconstrucción del proceso

Esta tarea presenta una situación bien conocida por los alumnos. Este curso, una plaga ha obligado a talar numerosas palmeras, por lo que el patio de recreo se ha quedado prácticamente sin zona de sombra. Se pide a los alumnos que estudien como mejorar esta zona de sombra.

La observación de la sombra proyectada por la copa de un árbol sobre el suelo lleva a los alumnos de este grupo a determinar que el problema debe ser formulado en términos geométricos: "*Coger las diferentes formas geométricas* [de las copas de los árboles] *para ir probando cual genera una mayor sombra*" (extracto de su diario).

Consideran que este problema puede resolverse estudiando el caso de un único árbol. El elemento importante es la sombra que proyecta durante el recreo (simplificación de la realidad).

Utilizan el triángulo, el círculo y el rectángulo como modelos geométricos con los que idealizar la sección plana de la copa de los árboles (nueva simplificación). Realizan con cartulina maquetas con las que simular, experimentalmente en el laboratorio del colegio, la realidad del patio a la hora del recreo (ver Figura 1).

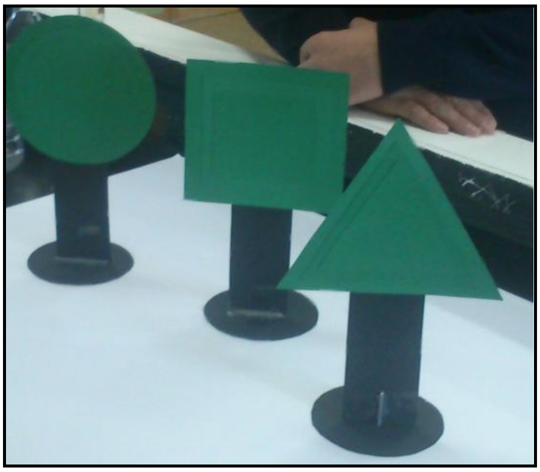


Figura 1. Modelos geométricos construidos por los alumnos

Miden en el patio el ángulo de inclinación de los rayos del Sol durante el recreo: "*Uno de nosotros se puso el extremo de una cuerda en la cabeza, otro sujetó el otro extremo justo donde acababa la sombra del primero y el tercero midió, con un transportador, el ángulo que formaban la cuerda y la sombra*" (extracto de su diario). En el laboratorio de Tecnología utilizan un flexo para emular el Sol, como fuente de emisión puntual no extensa: "*Con una cuerda fuimos cuadrando la posición del flexo hasta conseguir que la sombra de nuestros "árboles" y la cuerda formasen un ángulo de 42 grados. Calcamos las 3 sombras, pero no exactamente, sino aproximándolas a una figura regular, por ello los resultados fueron parecidos pero no iguales*" (extracto de su diario). A partir de estas mediciones obtienen las razones entre el área de la copa y la de la sombra proyectada para cada forma geométrica.

Solo a petición del grupo, ante las dudas suscitadas por los resultados obtenidos, el profesor les recomienda repetir el experimento, no ya en el laboratorio, sino en el propio patio de recreo, con el fin de obtener nuevos resultados (ver Figura 2): "*Así pues repetimos el proceso pero con luz solar […]. Y efectivamente nos dio resultados diferentes a la primera vez […]. Escogimos la forma del círculo puesto que su relación nos aportaba una mayor cantidad de expansión de la sombra"* (extracto de su diario).

	Círculo	Triángulo	Cuadrado
Área original	*33,18 cm2*	*38,45 cm2*	*63,86 cm2*
Área sombra	*60,79 cm2*	*51,7 cm2*	*72,93 cm2*
Relación	*1,83*	*1,34*	*1,14*

Figura 2. Tabla con la razón entre el área de la copa original y el área de la sombra proyectada incluida en su presentación final

Interpretan estos resultados en los términos del problema real que ellos mismos han planteado: la mayor razón se corresponde con la forma geométrica que producirá una mayor superficie de sombra. Llegan por tanto a la conclusión de que deben seleccionar un árbol con una copa circular. El árbol escogido, tras consultar internet, es el ombú, cuya copa, según ellos, se puede ajustar a un círculo (ver Figura 3). Recaban sus dimensiones medias: altura de 10,15 metros y radio de la copa de 4,5 metros.

Figura 3. Imagen con el árbol escogido, el Ombú, incluida en su presentación final

Con estos datos dan respuesta a su pregunta inicial: “*Un ombú medio produce una sombra de* $\pi \times 4{,}5^2 \times 1{,}83 = 116{,}4\ m^2$” [I] (extracto de su diario).

A continuación se plantean cuántos de estos árboles necesitan plantar en el patio para sombrear una superficie determinada del patio (ver Figura 4): *“La sombra del edificio del Colegio cubría 552,5m2 → 10,24 % del patio. Únicamente debíamos sombrear otro 10%, 510m2, para obtener un 20% de sombra, previamente acordado”* [II] (extracto de su diario).

Figura 4. Imagen con las dimensiones del patio y la sombra proyectada por el propio edificio del colegio, incluida en su presentación final

Dividen el área de la superficie que quieren sombrear entre el área de la sombra que proyecta un ombú (ver Figura 5).

> Luego dividimos 510 m2 de área por sombrear entre los 116,3 m2 de sombra que producía un ombú y obtuvimos que necesitaríamos 4,3 ombús para cubrir el 10% de nuestro patio y, junto con la sombra proyectada por el edificio, el 20% del total del patio.

Figura 5. Extracto con la explicación del cálculo final del número de ombúes necesarios para sombrear el patio, incluida en su diario

Este razonamiento les lleva a plantear la expresión general (ver Figura 6):

Superficie que quieres sombrear
---.= Nª de árboles que necesitas del tipo
Relación sombra * copa de árbol

Figura 6. Fórmula para calcular el número de ombúes necesarios para sombrear el patio, incluida en su diario

Donde la "Relación sombra" se refiere a la razón entre la forma geométrica de la sección plana de la copa del árbol y el área de sombra que proyecta, recogida en su Tabla, en la Figura 2.

La manipulación de esta expresión les lleva al resultado obtenido en la Figura 5: $\frac{510}{1{,}83 \times (\pi \times 4{,}5^2)} = 4{,}3$ [III].

Interpretan esta solución en la realidad: son necesarios cinco ombúes, concluyen, para sombrear el mínimo de superficie propuesto.

La solución aportada, cinco árboles, les parece un número "*razonable, teniendo en cuenta el tamaño del patio de recreo*" (extracto de su diario). Se plantean ahora como distribuirlos en el patio para que no se superpongan sus sombras. Para resolver esta cuestión calculan a qué distancia del árbol se proyecta la sombra de su copa: "*Sabiendo ahora la altura del árbol (10,15m) necesitábamos saber a qué distancia del tronco se proyectaría la sombra de la copa […] Con estos datos podemos realizar una regla de tres para averiguar donde se proyectará la sombra del ombú (Objeto de 12cm alto – Sombra de 13cm; Objeto de 1015cm alto – X sombra). Aproximadamente 11m de longitud sombra*" [IV] (extracto de su diario).

La solución se interpreta mediante un esquema en el que se muestra cómo quedaría el patio con los cinco árboles, separados once metros unos de otros (ver Figura 7):

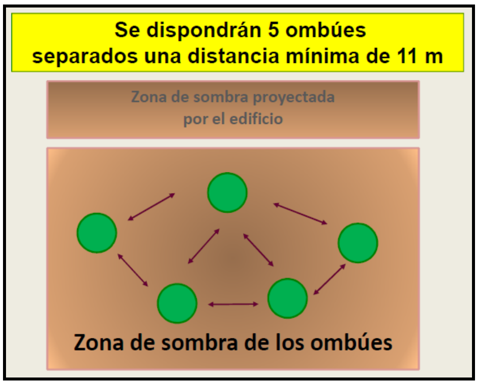


Figura 7. Esquema con la distribución final de los cinco ombúes, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Determinar el árbol que mayor sombra proyecta, según la forma de la sección plana de su copa, idealizada mediante figuras geométricas conocidas, triángulo, circulo y rectángulo: "*Coger las diferentes formas geométricas* [de las copas de los árboles] *para ir probando cual genera una mayor sombra*". Una vez escogido el modelo de árbol a plantar, se formulan nuevos sub-problemas: calcular el área de la sombra proyectada por este árbol; determinar la superficie del patio a sombrear; el número de árboles necesarios para hacerlo; y finalmente su disposición óptima en el patio.

¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Estudian el caso de un único árbol. La sección plana de la copa del árbol y su sombra se idealizan mediante figuras geométricas conocidas: triángulo, rectángulo, círculo. Pasan de un sólido tridimensional, la copa del árbol, a una figura plana, su sección plana. La razón entre el área de la figura que representa la copa y la de su sombra se estudia a partir de modelos geométricos a escala en 2D (Figura 1). Determinan que el número de árboles necesarios del tipo escogido es directamente proporcional a la superficie a sombrear e inversamente proporcional al área de sombra que proyecta (Figura 5). Esta relación se formula mediante una expresión pre-algebraica (Figura 6). Establecen que la disposición de los árboles en el patio depende de la longitud de la sombra que proyectan, pues las sombras no deben superponerse.
¿Se usan representaciones?
Utilizan distintos tipos de representaciones: modelos geométricos que simulan los árboles en 2D (Figura 1); idealizaciones de la realidad mediante las figuras planas elementales para justificar el uso de estos modelos (Figura 3); esquemas para mostrar las medidas del colegio (Figura 4) o la disposición final de los árboles en el patio (Figura 7).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Detallan los cálculos aritméticos realizados para obtener la sombra proyectada por un ombú, en [I]. Los resultados obtenidos a partir de sus mediciones se recogen y ordenan en tablas (Figura 2). La relación entre el número de árboles, el área a sombrear y el área de la sombra proyectada, se expresa mediante una fórmula pre-algebraica (Figura 6).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Para resolver el primer problema planteado obtienen la relación entre el área de la sección plana del árbol, idealizada mediante figuras geométricas conocidas, y la de su sombra. Para ello realizan mediciones a partir de sus modelos a escala y aplican las fórmulas conocidas para el cálculo del área (Figura 2). Utilizan la razón obtenida para el círculo para calcular la sombra proyecta por un ombú, en [I]. Calculan las áreas del patio y de las zonas de sombra mediante la aplicación de la fórmula correspondiente y el cálculo de porcentajes (Figura 4 y 5).

La obtención del número de árboles (segundo problema) se obtiene determinando el porcentaje de la superficie del patio a sombrear, en [II], la realización de cálculos aritméticos (Figura 5) y la manipulación de la fórmula que han planteado, en [III]. La longitud de la sombra proyecta (tercer problema) se obtienen mediante semejanza y la aplicación de cálculos aritméticos (regla de tres), en [IV].
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
La elección del ombú se realiza en base a razonamientos matemáticos. El número de ombúes necesarios se obtiene a partir de su fórmula, y lo consideran razonable (5 ombúes), en relación con el área del patio. La distancia a la que deben plantarse (11 metros unos de otros) es compatible con las dimensiones del patio.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (longitud y superficie). Figuras planas elementales (triángulos, rectángulos y círculos). Semejanza de triángulos. Proporcionalidad (número de árboles en función del área a sombrear y del área de la sombra del árbol). Distribución óptima.	Uso de modelos geométricos a escala para simular la realidad y obtener los datos (Figura 1). Cálculo de la razón de semejanza (Figura 2). Toma de medidas por procedimientos directos (longitudes con cintas métricas). Aproximación de la realidad mediante figuras planas. Cálculo de áreas mediante las fórmulas conocidas, en [I]. Cálculo de porcentajes para determinar la zona a sombrear, en [II]. Manipulación de expresiones algebraicas para obtener el número de árboles, en [III]. Uso de la regla de tres, en [IV]. Generalización de propiedades y relaciones mediante fórmulas algebraicas (Figura 6).	Uso del lenguaje algebraico para formular el modelo, en [III] y [IV]. Uso del lenguaje aritmético para el cálculo de áreas, en [I]. Uso de tablas para presentar resultados (Figura 2). Uso de gráficos para recoger datos (Figura 4), justificar procedimientos (Figura 3) y presentar resultados (Figura 7).

Grupo B

Reconstrucción del proceso

El primer problema que se plantea este grupo es calcular la sombra que proyecta un árbol en el momento del recreo. Para ello estudian el caso de un único árbol en un momento del día y del año concreto, pues señalan que "*el ángulo de incidencia del sol cambia según la estación del año y el momento del día*" (extracto de su diario).

Proponen distintos modelos de arboles, de los que muestran fotografías en su presentación final con sus dimensiones medias (altura y diámetro de la copa) y tipo de hoja (perenne o caduca). Escogen como modelo el "Castaño de indias", por ser de hoja perenne (ver Figura 1), "*así proyectará mas sombra durante todo el año, al contrario de los de hoja caduca, que proyectará menos sombra al perder sus hojas*" (extracto de su diario).

Figura 1. Fotografía del Castaño de indias, con sus dimensiones medias y su tipo de hoja, incluida en su presentación final

Calculan, mediante la igualdad de razones de semejanza, la longitud de la sombra que proyecta el árbol en el momento del recreo: "*Nuestra altura es de 1,72 metros y da una sombra mínima de 0,53 metros. Si hacemos triángulos semejantes, un árbol de una altura de 20 metros da una sombra de 6,2 metros*" (extracto de su diario). Sus cálculos se muestran en la Figura 2.

Aplicando semejanza de triángulos tendría una sombra mínima de:

$\frac{1{,}72}{0{,}53} = \frac{20}{x}$ $x = 20 \cdot 0{,}53 / 1{,}72 = 6{,}2$ metros

Figura 2. Cálculos para obtener la longitud de la sombra incluidos en su presentación final

A partir de este dato determinan el área de la sombra proyectada por la copa del árbol: "*Como la Morera mide 5 metros de diámetro, la Morera nos dará una sombra mínima de: Área sombra morera=15·6,2=9,3 m^2*" [I] (extracto de su diario). Aquí señalaremos diversos errores. Utilizan las dimensiones de un árbol distinto, la morera, al previamente seleccionado, el castaño de indias, y calculan, erróneamente, el área de su copa considerando que tiene forma circular, 19,62 m^2 en lugar de los 15 m^2 que ellos obtienen. Multiplican esta área por la longitud de la sombra proyectada, esperando obtener así la superficie de sombra que proyecta la copa, en lugar de obtener la longitud del diámetro de la sombra proyectada (y con este dato su área), a partir de la sombra proyectada por una persona.

A continuación establecen la superficie del patio que van a sombrear, el 50%. Con las dimensiones del patio y de la zona de sombra que proyecta el propio edificio del colegio (ver Figura 3), determinan el área que les falta por sombrear, 560 m^2 (ver sus cálculos en la Figura 4).

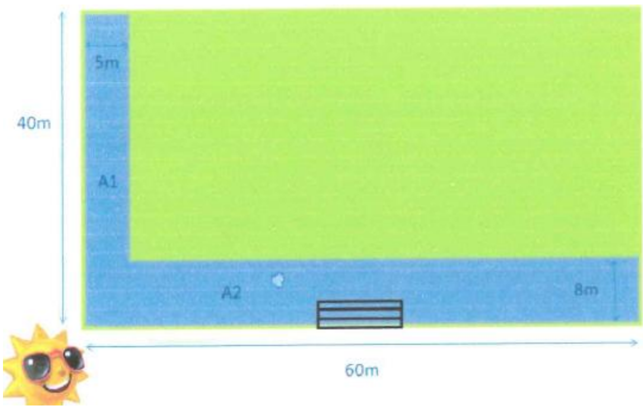


Figura 3. Imagen con las dimensiones del patio y las zonas de sombra que proyecta el edificio del colegio, A1 y A2, incluida en su presentación final

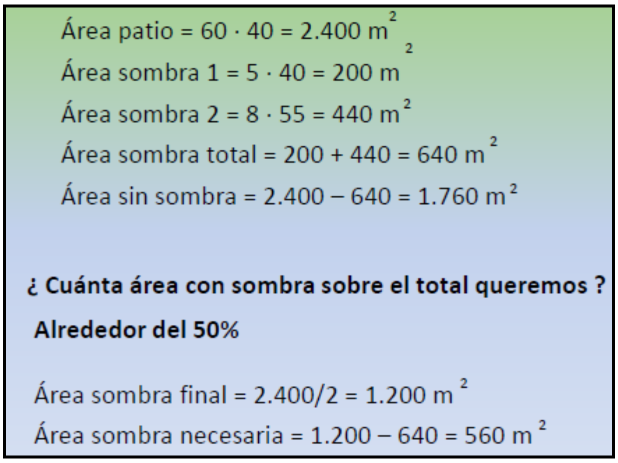


Figura 4. Imagen con los cálculos de las áreas del patio, de las zonas de sombra y de la sombra necesaria, incluida en su presentación final

Finalmente dividen el área a sombrear (560 m^2) entre el área de sombra que proyecta uno de sus árboles (9,3 m^2) para concluir que necesitan plantar 6 de estos árboles (no se detalla este cálculo final).

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular el área de la sombra proyectada por un “Castaño de indias”. Posteriormente, determinar la superficie del patio de recreo a sombrear y el número de este tipo de árboles que son necesarios para hacerlo.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Estudian el caso de un único árbol. Consideran que los elementos de la realidad tienen una sola dimensión. Del árbol (sólido tridimensional) consideran solo su altura. De su sombra (figura plana) consideran solo su longitud. Posteriormente considerarán la sección plana de la copa del árbol, que idealizarán mediante un círculo. Determinan que el número de árboles necesarios es directamente proporcional al área a sombrear e inversamente proporcional al área de la sombra que proyecta.
¿Se usan representaciones?
Utilizan un esquema para mostrar las dimensiones del colegio y de la zona de sombra que proyecta el edificio (Figura 3). El resto de imágenes incluidas en su presentación final no

aportan nada al proceso de resolución y son meramente decorativas (Figura 1).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Manipulan una expresión algebraica (Figura 2), para calcular la longitud de la sombra proyectada por el árbol. Detallan los cálculos aritméticos utilizados para calcular las áreas del patio y la zona sombreada (Figura 4).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Calculan las áreas del patio y de las zonas de sombra mediante la aplicación de la fórmula correspondiente y el cálculo de porcentajes (Figura 4). Utilizan criterios de semejanza para calcular la longitud de la sombra proyectada por el árbol (Figura 2), aunque aplican erróneamente este resultado para obtener la superficie de la sombra que proyecta, en [I].
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se aportan argumentos respecto al proceso de simplificación (la superficie de la sombra cambia según la estación del año y el momento del día). La elección del árbol no se justifica por razones matemáticas, si no por su tipo de hoja (que debe ser perenne, para que de sombra todo el año). El número de árboles obtenidos también parece razonable, 6, para las dimensiones del patio, aunque no se percatan de los errores en sus cálculos. No tienen en cuenta su posible distribución.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (longitud y superficie). Figuras planas elementales (triángulos, rectángulos y círculos). Semejanza de triángulos. Proporcionalidad (número de árboles en función del área a sombrear y del área de la sombra del árbol).	Toma de medidas por procedimientos directos (longitudes con cintas métricas). Aproximación de la realidad mediante figuras planas. Cálculo de áreas mediante las fórmulas conocidas *(aunque erróneamente en el caso del círculo, en [I]).* Cálculo de porcentajes para determinar la zona a sombrear (Figura 4). Cálculos aritméticos para obtener el número de árboles (no se incluyen). Uso de la igualdad de razones (Figura 1).	Uso del lenguaje algebraico para presentar la igualdad de razones (Figura 1). Uso del lenguaje aritmético para el cálculo de áreas, en [I] y Figura 4. Uso de gráficos para recoger datos (Figura 3) y justificar procedimientos (Figura 4).

Grupo C

Reconstrucción del proceso

El planteamiento de este grupo es similar al del grupo anterior: determinar, inicialmente, la sombra que proyecta un tipo de árbol concreto, en su caso la morera (escogido por ser de hoja perenne).

Para calcular la sombra que proyecta el árbol escogido determinan previamente la razón de semejanza entre la altura del árbol y la de su sombra: "*La sombra de la morera la hemos calculado por la razón de semejanza. Hemos medido a una persona de estatura 1,70 m y su sombra era de 1,90m, eso lo divides y obtienes 1,11, entonces multiplicas eso por la altura del árbol*" [I] (extracto de su diario). De este modo obtienen la altura de la sombra del árbol (ver Figura 1), aunque señalan en su diario que la anchura de la sombra no varía (dicen que así lo han "*observado*").

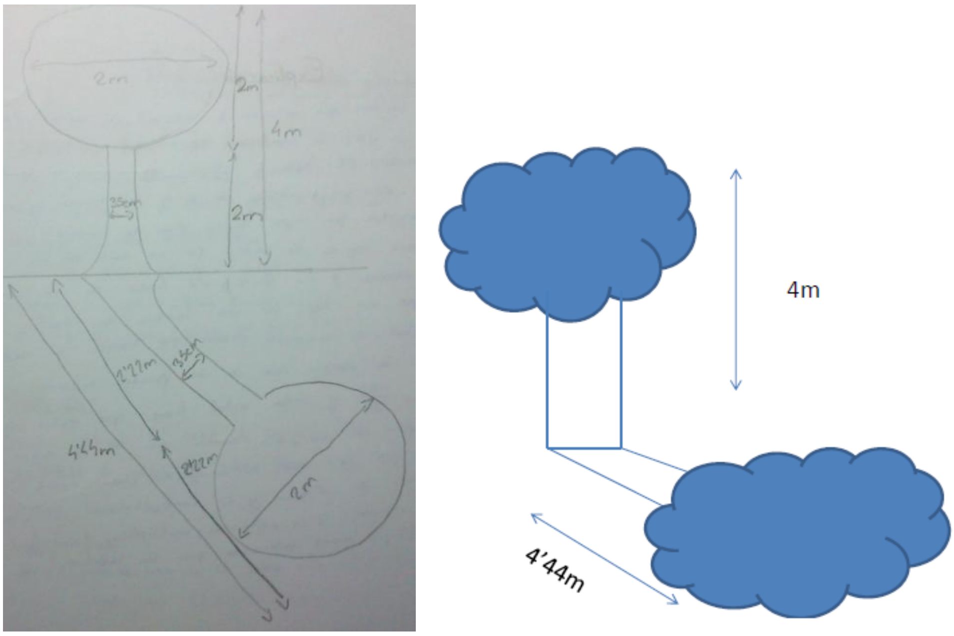


Figura 1. Imágenes con las dimensiones del árbol y su sombra, incluidas en su diario (izquierda) y su presentación final (derecha)

El área de la sombra proyectada será la suma del área de la copa y del tronco de la sombra, que calculan "*suponiendo que la copa es circular y el tronco un rectángulo*" (extracto de su diario), considerando su sección plana: "*El tronco da una sombra de 7m^2 mientras que la copa da una sombra de 14m^2. 7+14=21m^2*" [II] (extracto de su diario).

Pero sus cálculos son erróneos (no se especifican en su diario, solo se dan los resultados finales): con los datos recogidos en la Figura 1, el área de la sombra sería de 15,48+0,78=16,26m^2.

Deciden sombrear el 40% de la superficie del patio, un total de 960 m^2. Como, según sus cálculos (no incluidos), el edificio proyecta una sombra de 480 m^2, los restantes 480 los cubrirán con árboles. Determinan finalmente que necesitarán 23 árboles (ver Figura 2).

Figura 2. Cálculo del número de árboles necesarios, incluido en su diario

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular el área de la sombra proyectada por una “Morera”. Posteriormente, determinar la superficie del patio de recreo a sombrear y el número de este tipo de árboles que son necesarios para hacerlo.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Estudian el caso de un único árbol. Consideran la sección plana del árbol, idealizando su tronco y copa mediante el rectángulo y el círculo. Determinan que el número de árboles necesarios es directamente proporcional al área a sombrear e inversamente proporcional al área de la sombra que proyecta.
¿Se usan representaciones?
Los alumnos utilizan un esquema para mostrar las dimensiones del árbol y su sombra (Figura 1).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Solo utilizan cálculos aritméticos para mostrar algunos de los resultados, en [II] y Figura 2.
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Calculan las áreas del patio y de las zonas de sombra, sin mostrar los cálculos, mediante las fórmulas conocidas. Calculan el porcentaje del patio a sombrear (no se incluye). Utilizan criterios de semejanza para calcular la longitud de la sombra proyectada por el árbol, en [I], pero sin mostrar los cálculos. Este resultado es utilizado para calcular el área de su sombra (tronco más copa), manteniendo fija la anchura. Estos cálculos son erróneos, aunque solo se puede comprobar el resultado a partir de los datos mostrados en la Figura 1.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
No se aportan argumentos que expliquen las limitaciones de las simplificaciones realizadas (los cálculos de la sombra solo sirven para un momento del día y del año concretos). La elección de la morera se debe a que tiene hoja perenne y no en base a argumentos matemáticos. No se justifica que la anchura de la sombra no varíe. La mayoría de los

resultados no se acompañan de cálculos, ni se dice nada respecto al elevado número de árboles que necesitan (23), en relación con las dimensiones del patio. No tienen en cuenta su posible distribución.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (longitud y superficie). Figuras planas elementales (triángulos, rectángulos y círculos). Semejanza de triángulos. Proporcionalidad (número de árboles en función del área a sombrear y del área de la sombra del árbol).	Toma de medidas por procedimientos directos (longitudes con cintas métricas). Aproximación de la realidad mediante figuras planas. Cálculo de áreas mediante las fórmulas conocidas *(aunque erróneamente, en [II]).* Cálculo de porcentajes para determinar la zona a sombrear (no incluidos). Cálculos aritméticos para obtener el número de árboles (Figura 2). Cálculo de la razón de semejanza, en [I].	Uso del lenguaje aritmético, en [II] y Figura 2. Uso de gráficos para recoger datos (Figura 1).

Anexo VIII

El parque de atracciones

Grupo A

Reconstrucción del proceso

Todos los años, los alumnos del colegio realizan una excursión de fin de curso al parque de atracciones “Terra Mítica”. Con este punto de partida, se les plantea el problema de organizar la próxima visita al parque y calcular el tiempo que les llevará hacerlo.

Los alumnos de este grupo se fijan como objetivo: “*Crear una ruta óptima en la que se visite el mayor número de atracciones posibles en el menor tiempo*” (extracto de su diario).

Marcan sobre el mapa del parque (que obtienen a través de la web) una ruta que pasa por todas las atracciones. Miden la longitud de esta ruta sobre el mapa: “*Medimos el camino del parque con una cuerda y chinchetas (ya que no es recto), utilizando la escala 1/1000 y nos dio como resultado 3100 m = 3,1 km*” [I] (extracto de su diario). Esta escala se consensua con ayuda del profesor, pues el mapa no lleva ninguna referencia. Las distancias calculadas con esta escala parecen razonables. Posteriormente establecen el tiempo necesario para ir de una atracción a otra, según su ruta, a partir de su estimación de la velocidad: *“Calculamos una velocidad al caminar razonable: medimos 15 metros en el suelo de clase y recorrimos esta distancia, cronometrándola para hallar la velocidad (con la fórmula de espacio/tiempo), el resultado fue de 1,5 m/s”* [II] (extracto de su diario).

Después fijan su atención en el tiempo que invertirán en cada atracción, considerando, por un lado, el tiempo que tendrán que esperar haciendo cola, y por otro, el tiempo que estarán subidos en la propia atracción. Para fijar el tiempo en la cola, tienen en cuenta su propia experiencia en este tipo de parques, categorizando las atracciones según su grado de popularidad: A (5 minutos); B (10 minutos); C (15 minutos) y D (25 minutos). Estiman el tiempo que estarán subidos en cada atracción en base a su experiencia, tomándolo de 5 en 5 minutos, para facilitar así los cálculos posteriores (ver Figura 1).

Finalmente incluyen el horario de los espectáculos: *“Coordinamos los espectáculos con sus respectivos horarios con el resto de atracciones de la ruta estableciendo así la ruta óptima”* (extracto de su diario). Con estos datos y a partir de su ruta elaboran una tabla con el cronograma de la visita (ver Figura 1) y su duración total, nueve horas y media, tiempo que se ajusta al horario del parque.

Hora	**Atracción**	**Duración de la atracción**	**Duración de la cola**	**Tiempo entre atracciones**
10:00	Llegada	5 min	-	5 min
10:05	Cataratas del Nilo	5 min	C	5 min
10:30	Laberinto del minotauro	5 min	A	2 min
10:42	Sínkope	5 min	A	1 min
10:53	Titánide	5 min	C	1 min
11:15	Templo de kinetos	20 min	C	2 min
11:52	Furia de tritón	5 min	B	5 min
12:12	Los íkaros	5 min	A	5 min

Figura 1. Fragmento del cronograma de la visita al parque, incluida en su presentación final

A partir de esta primera solución, los alumnos introducen la idea de la “*ruta personalizada*”: *“Hemos hecho una ficha* [ver Figura 2] *en la que se puede seleccionar las atracciones a las que quieres ir y a los espectáculos a los que quieres asistir. Después por un cálculo podemos hallar el tiempo que tardaría el recorrido en realizarse y también el grado de asistencia al parque; de una forma sencilla y fácil”* [III] (extracto de su diario).

Atracción	Duración de la atracción	Duración de la cola	Tiempo entre atracciones
Cataratas del Nilo	5 min	C	5 min
Laberinto del minotauro	5 min	A	2 min
Sínkope	5 min	A	1 min
Titánide	5 min	C	1 min
Templo de kinetos	20 min	C	2 min
Furia de tritón	5 min	B	5 min
Los íkaros	5 min	A	5 min
Espectáculo conquista	30 min	A	5 min
Magnus Colossus	5 min	D	1 min

Figura 2. Fragmento de la "ficha" para la ruta personalizada al parque, incluida en su presentación final

Su modelo definitivo queda recogido en una expresión pre-algebraica que incluyen en su presentación final (ver Figura 3), donde la duración de la cola se multiplica por 1/2, 1, o 2, en función de la baja, media o alta asistencia al parque, respectivamente.

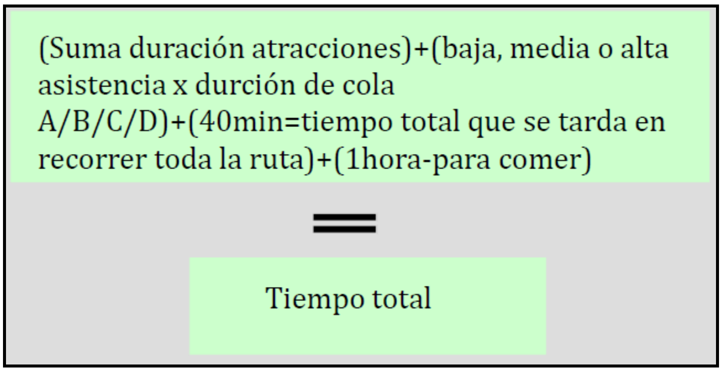


Figura 3. Expresión para calcular el tiempo que llevará realizar una ruta personalizada, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Los alumnos se fijan como primer problema, “*crear una ruta óptima en la que se visite el mayor número de atracciones posibles en el menor tiempo*” y calcular el tiempo que les llevará realizar la visita según esta ruta. A partir de aquí se plantean varios sub-problemas: determinar el tiempo necesario para poder recorrer esta ruta; estimar la duración de las colas y la duración de las atracciones. Finalmente, calcular el tiempo necesario para realizar una “*ruta personalizada*”.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se seleccionan de la realidad las variables que se consideran relevantes: tiempo de espera en las colas para subir a las atracciones; popularidad de las atracciones; duración de la atracción; afluencia al parque. Se marca la ruta sobre un mapa del parque y se mide su distancia directamente sobre él. Para calcular el tiempo que se tardará en recorrer esta ruta se toma como referencia la velocidad de una persona al caminar, en [II]. El tiempo de espera en las colas se fija en función de la popularidad de las atracciones (Figura 1). En su ruta personalizada, el tiempo de espera en las colas se multiplica por un factor de corrección que depende de la asistencia de público al parque (Figura 3). La duración de cada una de las atracciones se estima a partir de su propio conocimiento en este parque. La duración de la visita será la suma del tiempo de espera en las colas, la duración de la atracciones, y el tiempo necesario para realizar el recorrido, descansar y comer (Figura 3).
¿Se usan representaciones?
Los alumnos utilizan un mapa a escala del parque para señalar la ruta óptima de la visita.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Los datos relativos a las variables consideradas para cada atracción se organizan en una tabla (ver Figura 1 y 2). La duración de la “ruta personalizada” se obtiene aplicando una expresión pre-algebraica que han diseñado a tal fin (Figura 3). Se utilizan tablas para recoger y ordenar los datos (Figura 1 y 2).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?

La longitud de la ruta en la realidad se obtiene a partir de una escala, aunque sin mostrar los cálculos, en [I]. La velocidad al andar que toman como referencia para calcular el tiempo que se tarda en ir de una atracción a otra se obtiene por medición directa (usan cronómetro y una cinta métrica), en [II]. Se realizan estimaciones de los tiempos. Se categorizan las atracciones según su popularidad en cuatro niveles (A, B, C y D). La duración de las atracciones se estima en múltiplos de cinco (5, 10, 15,… minutos), para simplificar los cálculos (ver Figura 1 y 2). También se categoriza la asistencia al parque en tres niveles (baja, media y alta) y se fijan a partir de ellas factores de corrección para la duración de las colas (Figura 3).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
La primera estimación de la duración de la visita al parque (nueve horas y media) puede realizarse en el horario de visita. Las estimaciones de los tiempos se basan en su propia experiencia. La “ruta personalizada” permite escoger las atracciones a visitar y calcular su duración, resultando un modelo flexible y reutilizable (Figura 3), en contraste con su primera resolución, donde la visita está ya planificada (Figura 1).

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (tiempo, espacio y velocidad). Ruta óptima. Proporcionalidad (duración de las colas en función de la asistencia al parque).	Toma de medidas por procedimientos directos (uso de cronómetros y cintas métricas para determinar la velocidad), en [II]. Estimación de medidas (uso de la experiencia en la estimación de tiempos). Ponderación de variables: duración de las colas. Cálculos aritméticos para obtener la duración de la visita (no se incluyen). Uso de planos a escala, en [I]. Generalización de propiedades y relaciones.	Uso del lenguaje pre-algebraico para formular el modelo (Figura 3). Uso de tablas para presentar los datos (Figura 1 y 2).

Grupo B

Reconstrucción del proceso

Al igual que el grupo anterior, este grupo se plantea el problema de establecer una ruta de visita óptima y calcular el tiempo que se tardará en recorrerla según la alta, media o baja asistencia al parque.

Para fijar la ruta, seleccionan lo que ellos denominan las "*atracciones principales*". Su ruta de visita pasará por estas atracciones. Miden, sobre el mapa del parque, la distancia entre cada atracción (no especifican como lo han hecho), y la obtienen en la realidad a partir de la escala 1/1000, consensuada, al igual que el grupo A, con el profesor. Para calcular el tiempo necesario para ir de una atracción a otra suponen que una persona que va paseando recorre 10 metros en 30 segundos (no especifican como han hecho esta estimación). Estiman que necesitarán unas dos horas y cuarto para comer, descansar, ir al servicio, etc.

Para cada atracción, consideran el tiempo que tendrán que esperar haciendo cola y el tiempo que estarán subidos en la propia atracción. Determinan que la asistencia al parque influye directamente en el tiempo de espera en las colas (aunque este tiempo es el mismo para todas las atracciones): *"El tiempo de cola de cada atracción varía en torno a la afluencia de gente ese día en el parque. Si la afluencia es baja, el tiempo de espera será aproximadamente de 15 minutos. Si es media, será de 30 minutos. Y si es alta, la afluencia será de 60 minutos"* [I] (extracto de su diario). La duración de cada atracción se establece según su criterio y experiencia.

Organizan los datos en tres tablas, para la alta, media o baja asistencia al parque (ver Figura 1).

MEDIA AFLUENCIA		TIEMPO (MINUTOS)				
ATRACCION N	NOMBRE	ESPERA	ATRACCION	DESPLAZAMIENTO DE ATRACCION N-1 a N (m)	TIEMPO (sg)	TIEMPO (min)
1	TEMPLO DE KINETOS	30	6	54	324	5,4
2	CATARATAS DEL NILO	30	5	75,6	453,6	7,56
3	SYNCOPE	30	8	43,2	259,2	4,32
4	LABERINTO DEL MINOTAURO	30	8	15,6	93,6	1,56
5	TITÁNIDE	30	3	10,8	64,8	1,08
6	LA FURIA DEL TRITÓN	30	5	32,4	194,4	3,24
7	LOS ÍCAROS	30	8	54	324	5,4
8	MAGNUS COLOSSUS	30	4	64,8	388,8	6,48
9	INFERNO	30	2	43,2	259,2	4,32
10	EL VUELO DEL FÉNIX	30	2	64,8	388,8	6,48
11	LA CÓLERA DE AKILES	30	5	10,8	64,8	1,08
12	RÁPIDOS DE ARGOS	30	8	21,6	129,6	2,16
13	ARIETES	30	4	27	162	2,7
14	SALIDA			10,8	64,8	1,08
TOTAL		**390**	**68**	**528,6**	3171,6	52,86

Figura 1. Tabla correspondiente a la visita que han organizado para un día con una afluencia media de público, incluida en su presentación final. Se incluyen también tablas similares para la baja y la alta asistencia

Para la baja asistencia fijan en 15 minutos (en una tabla distinta) el tiempo de espera en la cola y para la alta asistencia en 60 minutos (en otra tabla).

Calculan, con estos datos, la duración de la visita, según sea alta, media o baja la asistencia al parque ese día. En el caso de una alta asistencia su solución, como ellos mismos señalan, no es viable, ya que no puede realizarse en un único día de visita:

"Tras realizar una serie de cálculos y procedimientos, hemos llegado a la conclusión de que el tiempo total que nos llevaría desplazarnos por todas las atracciones (teniendo en cuenta el tiempo de espera y de atracción) y otras necesidades unas 10 horas y media. Este número, lo hemos obtenido teniendo en cuenta que la afluencia de personas ese día es media. Con estos tiempos podríamos realizar una visita completa y bien organizada, en la que se incluyen las atracciones principales, los tiempos de descanso, comidas, compras y demás necesidades. Si la afluencia ese día fuese baja, tardaríamos 7 horas y 15 minutos. Y si ese día el parque estuviese masificado o tuviera una alta afluencia el tiempo sería de 15 horas, por lo que no podríamos subir a todas las atracciones" [II] (extracto de su presentación final).

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Diseñar una ruta que les permita visitar las "*atracciones principales*" y calcular el tiempo que les llevará realizar la visita según esta ruta y la asistencia de público al parque. Una vez fijada esta ruta, se plantean los siguientes sub-problemas: determinar el tiempo necesario para poder recorrer esta ruta; estimar el tiempo de espera y la duración de cada atracción según la asistencia de público.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se seleccionan de la realidad las variables que se consideran relevantes: tiempo de espera para subir a las atracciones; duración de la atracción; asistencia de público al parque; tiempo que se tarda en ir de una atracción a otra en su ruta de visita. Se marca la ruta sobre un mapa del parque y se mide su distancia directamente sobre él. El tiempo que se tarda en ir de una atracción a otra se establece a partir de la razón, 10 metros/30 segundos. El tiempo de espera es el mismo en todas las atracciones, y se agrupa en tres categorías, en función de la asistencia de público al parque, en [I]. La duración de cada una de las atracciones se estima a partir de su propio conocimiento en este parque. La duración de la visita será la suma del tiempo de espera en la colas (que se estable según la asistencia de público al parque), la duración de cada atracción, el tiempo necesario para ir de

una atracción a otra, y el tiempo necesario para descansar, comer y ver las actuaciones y las tiendas.
¿Se usan representaciones?
Los alumnos utilizan un mapa a escala del parque para señalar la ruta óptima de visita.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Los datos relativos a las variables consideradas según la asistencia al parque se organizan en tablas (Figura 1).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
La longitud de la ruta en la realidad se obtiene a partir de una escala, aunque sin mostrar los cálculos. Se realiza una estimación del tiempo que se tarda en recorrer una determinada distancia, aunque no especifican como lo hacen. Se realizan estimaciones de los tiempos. El tiempo de espera para las atracciones se realiza según la asistencia al parque: alta, media o baja, en [I].
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
La duración de la visita al parque puede realizarse en el horario de visita sin hay baja (7 horas y cuarto) o media (10 horas y media) asistencia al parque. En caso de alta asistencia se indica que se necesitarán dos días para realizarse, en [II]. Las estimaciones de los tiempos se basan en su propia experiencia.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (tiempo y espacio). Ruta óptima. Proporcionalidad (duración de las colas en función de la asistencia al parque)	Estimación de medidas (uso de la experiencia en la estimación de tiempos). Toma de medidas por procedimientos directos (uso de cronómetros y cintas métricas para determinar la velocidad). Cálculos aritméticos para obtener la duración de la visita (no se incluyen). Uso de planos a escala.	Uso de tablas para presentar los datos (Figura 1).

Grupo C

Reconstrucción del proceso

Este grupo se plantea calcular el tiempo que tardarán en realizar la visita a todas las atracciones del parque, tomando en consideración dos posibilidades: que la visita se realice entre semana (con poca asistencia de público) o que se realice el fin de semana (con una alta asistencia de público).

Para calcular el tiempo de visita realizan una estimación de estos tiempos basada en su propia experiencia: la duración de cada atracción será de 15 minutos entre semana y de 30 minutos los fines de semana (el mismo tiempo para todas, incluyendo también el tiempo en la cola); el tiempo que se tarda en ir de una atracción a otra es de 30 minutos (independientemente que sea un día entre semana o de fin de semana) más 10 minutos para ir al punto de encuentro; 20 minutos para ir al cuarto de baño y 30 minutos para comer (estos tiempos también son los mismos para un día entre semana que para un día de fin de semana).

Con estas estimaciones, realizan sus cálculos finales, teniendo en cuenta que van a visitar un total de 20 atracciones (ver Figura 1 y 2).

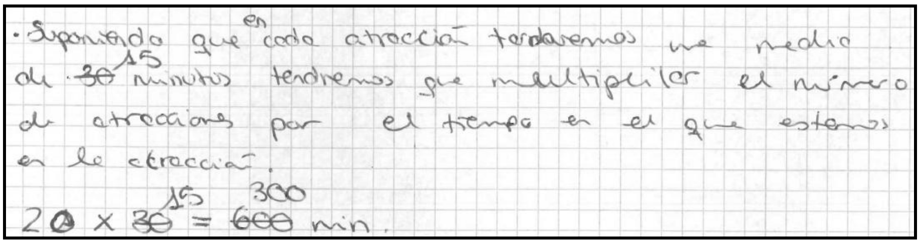

• Suponiendo que en cada atracción tardaremos una media de ~~30~~ 15 minutos tendremos que multiplicar el número de atracciones por el tiempo en el que estamos en la atracción.
20 × ~~30~~ 15 = ~~600~~ 300 min.

Figura 1. Cálculos realizados para obtener el tiempo que se tardará en visitar las 20 atracciones un día entre semana, en su diario

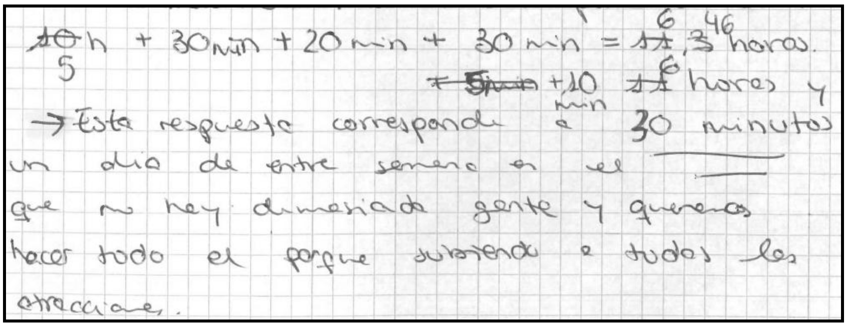
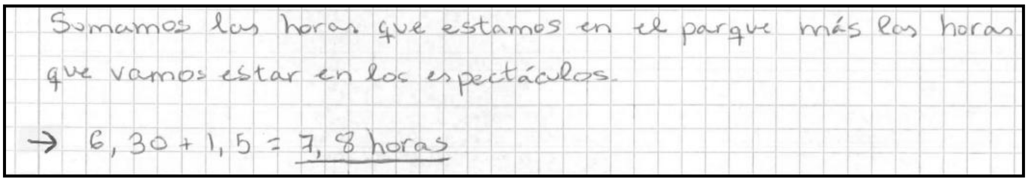

~~10~~ 5 h + 30 min + 20 min + 30 min = ~~11~~ 6 ,3 horas.
+10 min ~~11~~ 6 horas y
→ Esta respuesta corresponde a 30 minutos un día de entre semana en el que no hay demasiada gente y queremos hacer todo el parque subiendo a todas las atracciones.

Figura 2. Cálculos realizados para obtener el tiempo total que se tardará en realizar la visita completa al parque un día entre semana, en su diario

De esta manera establecen que necesitarán seis horas y media para realizar una visita completa al parque un día entre semana y once horas y media en un fin de semana (repitiendo los cálculos de forma análoga a como los han realizado en la Figura 1 y 2).

Finalmente deciden tener en cuenta los espectáculos que ofrece el parque, añadiendo a sus cálculos anteriores el tiempo que se tardaría en ver tres de estos espectáculos. Para cada espectáculo estiman que necesitan 30 minutos (independientemente que sea un día entre semana o de fin de semana), así que añaden a sus cálculos anteriores una hora y media más. Sin embargo, su cálculo final (ver Figura 3) presenta errores debido a la utilización de distintas unidades (minutos y horas).


Somamos las horas que estamos en el parque más las horas que vamos estar en los espectáculos.

→ 6,30 + 1,5 = 7,8 horas

Figura 3. Cálculos realizados para obtener el tiempo total que se tardará en realizar la visita al parque más la visita a los espectáculos un día entre semana, en su diario

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular el tiempo que les llevará realizar la visita a todas las atracciones del parque, teniendo en cuenta que la visita puede hacerse en un día entre semana o en fin de semana.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
La duración de la visita (según sea en un día entre semana o en un día de fin de semana) será la suma de la estimación de la duración de las atracciones (que será la misma para todas) más el tiempo que necesitarán para desplazarse, ir al baño o comer. Finalmente añadirán el tiempo que les llevará asistir a tres espectáculos.
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se muestran los cálculos aritméticos (ver Figura 1 y 2).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se realizan estimaciones de los tiempos. La duración de cada atracción varía si la visita se realiza entre semana o en fin de semana. Presentan errores al sumar los tiempos dados en distintas unidades (minutos y horas), en Figura 3.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?

Se justifica la estimación de la visita según se realice en un día entre semana o durante el fin de semana en la diferencia de asistencia al parque, lo que influye, según señalan, en el tiempo que emplearán en cada atracción (Figura 2). Los tiempos se estiman según su propia experiencia. La duración de la visita en fin de semana (11 horas y media más hora y media de espectáculos) no puede realizarse en un único día, pero no se indica.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (tiempo). Proporcionalidad (duración de la atracción en función de la asistencia al parque).	Estimación de medidas (uso de la experiencia en la estimación de tiempos). Cálculos aritméticos para obtener la duración de la visita (Figura 1, 2 y 3).	Uso del lenguaje literal para presentar el modelo, en Figura 1 y 2.

Grupo D

Reconstrucción del proceso

Al igual que el grupo C, este grupo se plantea calcular el tiempo que tardarán en realizar la visita a todas las atracciones del parque, según se realice en un día entre semana o se realice el fin de semana.

Estiman que necesitarán 20 minutos en cada atracción si van entre semana, en el que incluyen el tiempo de la cola y el de estar "*montados*", así que calculan que para visitar las 20 atracciones del parque necesitarán cinco horas (ver Figura 1). El cálculo no se explicita, pero es erróneo, ya que según su estimación, necesitarían seis horas y cuarenta minutos.

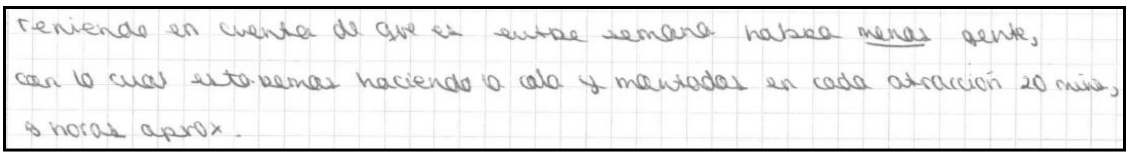

Teniendo en cuenta de que es entre semana habrá menos gente,
con lo cual estaremos haciendo la cola y montados en cada atracción 20 min,
5 horas aprox.

Figura 1. Estimación del tiempo que se tardará en visitar las 20 atracciones del parque un día entre semana, en su diario

A este tiempo suman 30 minutos en "*ir al lavabo, ir de una atracción a otra o para cualquier actividad*", 30 minutos para almorzar y una hora más para comer. Así que concluyen que necesitarán un total de 7 horas para realizar la visita al parque un día entre semana.

Para el fin de semana estiman que necesitarán 30 minutos para cada atracción, 40 minutos para ir de una atracción a otra, 30 minutos para almorzar y una hora para comer (igual que en un día entre semana). Según estas estimaciones necesitarán 12 horas y 10 minutos.

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular el tiempo que les llevará realizar la visita a todas las atracciones del parque, teniendo en cuenta que la visita puede hacerse en un día entre semana o en fin de semana.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
La duración de la visita (según sea en un día entre semana o en un día de fin de semana) será la suma de la estimación de la duración de las atracciones (que será la misma para todas) más el tiempo que necesitarán para desplazarse, ir al baño o comer.
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
No se muestran cálculos.
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se realizan estimaciones de los tiempos. La duración de cada atracción y el tiempo que se necesita para desplazarse varía si la visita se realiza entre semana o en fin de semana. Presentan errores al sumar los tiempos, en Figura 1.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación

de los resultados obtenidos a la situación real?
Se justifica la estimación de la visita según se realice en un día entre semana o durante el fin de semana por la diferencia de asistencia al parque, lo que influye, según señalan, en el tiempo que emplearán en cada atracción (Figura 1) y en el tiempo que necesitarán para ir de una atracción a otra. Los tiempos se estiman según su propia experiencia. La duración de la visita en fin de semana (12 horas y 10 minutos) no puede realizarse en un único día, pero no se indica.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (tiempo). Proporcionalidad (duración de la atracción en función de la asistencia al parque).	Estimación de medidas (uso de la experiencia en la estimación de tiempos). Cálculos aritméticos para obtener la duración de la visita (no se incluyen).	Uso del lenguaje literal para presentar el modelo, en Figura 1.

Anexo IX

La desaparición del portátil

Grupo A

Reconstrucción del proceso

En esta tarea se propone a los alumnos que organicen la búsqueda de un portátil perdido en el colegio y calculen cuanto tiempo creen que les llevará localizarlo.

Los alumnos de este grupo suponen que tienen que registrar todas las aulas del colegio para encontrarlo. Inicialmente seleccionan, como única variable, el número de aulas del colegio, clasificadas según su tamaño: 36 aulas normales (de primaria, secundaria y bachiller) y 6 aulas grandes (las de infantil). Realizan estimaciones del tiempo que les llevará registrar cada aula: de 1 a 7 minutos para las aulas más grandes; de 1 a 5 minutos para las normales. Con estos datos hacen una primera estimación del tiempo de búsqueda, 36×5+6×7=222 minutos. Como son tres alumnos, el tiempo máximo será de, 222:3=74 minutos, aproximadamente. Muestran estos resultados al profesor durante la segunda sesión de trabajo en el aula (ver la transcripción de la grabación en audio de la actuación del profesor con este grupo) pero no los incluyen finalmente en su diario (no se recoge tampoco el borrador con estos cálculos).

En la tercera sesión los alumnos introducen en su modelo la variable "*escondrijos*", referida al número de lugares que tendrán que registrar por alumno y aula. Establecen además una ruta de búsqueda.

Para cada nivel educativo (primaria, secundaria y bachillerato) estiman el número de alumnos por aula y lo multiplican por el número de aulas para obtener el total de alumnos de ese nivel. De cada alumno tendrán que registrar su mesa y su taquilla (los "*escondrijos*"). Estiman que necesitarán 10 segundos por mesa y 5 segundos por taquilla. De este modo obtienen el tiempo total que les llevará registrar cada nivel (ver Figura 1).

sitios en los que buscar. Si 396 sitios son cajones, y en buscar en cada uno tardamos 5 segundos, en total tardaremos **33 min** en buscar en **todos los cajones de primaria**. A esto hay que añadirle lo que tardamos en buscar en todas las mesas de primaria que son **396** mesas, las cuales tardamos en registrar **10 segundos cada una**, esto nos da **1h y 6 min.** Ahora sumamos el **tiempo de los cajones y mesas= 1h y 39 min.**

Figura 1. Extracto del cálculo del tiempo que se tarda en registrar las aulas de primaria, en su diario

Para las aulas de infantil estiman que necesitarán 1 minuto (porque los alumnos de infantil "*no tienen acceso a los portátiles*", pero "*algún profesor podría haberlo dejado allí*") por aula, y dos horas, en total, para las restantes aulas (desdobles, baños, despachos, capilla, etc.), aunque sin especificar los cálculos.

A continuación establecen como debe realizarse la búsqueda (ver Figura 2) y cuál será la ruta óptima a seguir: *"La búsqueda la realizaríamos los 3 juntos registrando aula por aula, las mesas y casilleros de cada una, considerados escondrijos. Empezaríamos por el aula más cercana a la entrada del colegio y continuaríamos hasta el final del pasillo, saliendo por la puerta del aula más cercana a la puerta de la siguiente aula. Luego subiríamos por las escaleras más cercanas y haríamos lo mismo con las siguientes plantas del colegio"* [II] (extracto de su diario).

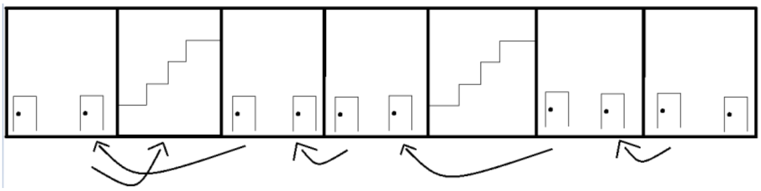


Figura 2. Esquema para ilustrar como debe realizarse la búsqueda, incluida en su presentación final

Para calcular el tiempo que tardarán en desplazarse por esta ruta miden la longitud de cada pasillo mediante una cinta métrica (250 metros de pasillo para cada una de las cuatro plantas que tiene el colegio) y estiman la velocidad de desplazamiento de una persona, 2 m/s, y el tiempo que tardan en subir las escaleras (utilizando un cronómetro), un minuto y medio.

El tiempo total que les lleva registrar todas las aulas se divide entre tres (el número de personas que buscan) a lo que suman el tiempo que les lleva desplazarse por su ruta de búsqueda (ver Figura 3).

El tiempo se calcula sumando el tiempo total de todos los cursos/el número de personas + el tiempo de desplazamiento. El tiempo de desplazamiento= 1000m totales + 200m adicionales por los que pasamos al movernos/ velocidad= 2m/s. También el tiempo de subir las escaleras, que tras contarlo y aproximarlo nos da 1 min y 30 seg. Esto es: 1h y 39 min + 57 min + 30 min + 9 min + 2 horas/3 + 5 min + 1 min 30 seg=**1h 41min .**

Figura 3. Tiempo total que les llevará encontrar el portátil, en su diario

Preguntados por el profesor sobre si son capaces de encontrar una expresión más formal y reutilizable para calcular el tiempo de búsqueda del portátil, los alumnos se embarcan en una revisión del proceso de resolución anterior, llegando a una fórmula algebraica que incluyen en su presentación final (ver Figura 4).

TT = [H x (E x T)] / N + D / V
Donde:
TT : tiempo total de encontrar el objeto
N: número de personas que buscan= 3
H: número de habitaciones= 43
T: tiempo medio que tardamos en registrar los escondrijos= 5 segundos/escondrijo
E: Nº de escondrijos por clase= 40
D: distancia total del recorrido en metros= 1200 m
V: velocidad de desplazamiento= 2 metros/segundo

TT = [H x (E x T)] / N + D / V= [43(40 x 5)] / 3 + 1200 / 2= 3466 segundos= 58 min aprox.

Figura 4. Fórmula general utilizada para calcular el tiempo de búsqueda, incluida en su presentación final

A partir de esta fórmula, determinan que el tiempo máximo para encontrar el portátil es de 58 minutos, tiempo que consideran "*realista*".

Esta misma expresión la aplican, a modo de ejemplo durante su presentación pública, en un nuevo espacio, para mostrar a sus compañeros como utilizarla en otras situaciones: *"Hemos aplicado esta fórmula a una casa para comprobar que se podía generalizar"* (extracto de su presentación final).

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular el tiempo que les llevará encontrar el portátil desaparecido registrando todas las aulas del colegio. Se plantean resolver varios sub-problemas: calcular el tiempo que les llevará registrar un aula; fijar una ruta óptima de búsqueda; calcular el tiempo que les llevará desplazarse por esta ruta.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Para encontrar el portátil suponen que tienen que registrar todas las aulas del colegio. Para el cálculo del tiempo que les llevará registrar las aulas seleccionan las siguientes variables: número de alumnos por aula en cada nivel; número de aulas por nivel; número de escondrijos; tiempo que se tarda en registrar cada escondrijo; número de personas que realizan la búsqueda (ver Figura 4). Este tiempo será directamente proporcional al número de escondrijos e inversamente proporcional al número de personas que buscan. Se establece una ruta de búsqueda (en [II]) cuyo tiempo en recorrerse se obtendrá a partir de su longitud total, la velocidad de desplazamiento y el tiempo que se tarda en subir las escaleras. La suma de estos tiempos dará el tiempo total necesario para buscar el portátil (ver Figura 3).
¿Se usan representaciones?
Los alumnos utilizan un esquema para explicar la ruta óptima de búsqueda (Figura 2).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utiliza una expresión pre-algebraica para obtener el tiempo total de búsqueda (Figura 3). Posteriormente obtendrán una fórmula algebraica general (Figura 4).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se realizan mediciones con cronómetro para estimar los tiempos de registro y la velocidad de desplazamiento. Se utiliza el razonamiento proporcional para obtener las distintas expresiones, Figura 3 y 4, que después se aplican para el caso particular del colegio y una casa.

¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se razona como debe realizarse la búsqueda para invertir el menor tiempo, en [II]. Se proporcionan argumentos sobre las estimaciones y cálculos realizados. Se calculan los tiempos utilizando varios procedimientos, en Figura 3 y 4, y se consideran ambos resultados "*realistas*", en el sentido de realizables. La fórmula algebraica obtenida se aplica a un caso distinto (una casa) para comprobar su utilidad y posible generalización durante la presentación.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (tiempo, espacio y velocidad). Ruta óptima. Proporcionalidad (tiempo de búsqueda en función del número de escondrijos y del número de personas que buscan)	Toma de medidas por procedimientos directos (uso de cronómetros y cintas métricas para determinar la velocidad). Estimación de medidas (para los tiempos de las aulas de infantil y desdobles). Cálculos aritméticos para obtener los tiempos de búsqueda (no se incluyen). Manipulación de expresiones algebraicas para calcular el tiempo de búsqueda (Figura 4). Generalización de propiedades y relaciones.	Uso de gráficos para justificar procedimientos, en Figura 2. Uso del lenguaje pre-algebraico para formular un primer modelo, en Figura 3. Uso del lenguaje algebraico para formular el modelo definitivo, en Figura 4.

Grupo B

Reconstrucción del proceso

Este grupo plantea dos posibles supuestos en la búsqueda del portátil: que tengan que registrar todas las aulas del colegio para encontrarlo ("*máximo tiempo posible*") o que lo encontrarán en la última aula de la planta baja ("*mínimo tiempo posible*"). A partir de aquí plantean dos sub-problemas: calcular el tiempo que les llevará registrar cada aula; diseñar una ruta de búsqueda; calcular el tiempo que tardarán en recorrerla, para cada uno de estos supuestos.

Para resolver el primer problema estiman la media de alumnos por aula en cada nivel educativo, redondeando a las decenas para simplificar cálculos (30 alumnos las de infantil, 20 alumnos las de primaria, secundaria y bachillerato). Cronometran el tiempo que les lleva registrar, los tres juntos, un aula de 20 alumnos de secundaria: un minuto. Por proporcionalidad, establecen los tiempos para las restantes aulas (ver Figura 1).

> Primaria, secundaria y bachillerato tienen una capacidad para 20 personas y se tarda **(t: 1 min)** en recorrer un aula de cada una de ellas; infantil tiene una capacidad para 30 personas y se tarda **(t: 1,5 min)**; el aula 1 informática tiene una capacidad de 15 personas **(t:45 seg);** y aula 2 de informática tiene una capacidad de 40 personas **(t:2 min).**

Figura 1. Estimación del tiempo que les llevará registrar las aulas, según el número de alumnos, incluida en su diario

Presentan toda esta información en una tabla (ver Figura 2).

	infantil	primaria	secundaria	bachiller	informática
Nº aulas	6	18	11	5	2
capacidad	30	20	20	20	1º→ 15 2º→ 40
T en recorrer 1 aula de cada tipo	1,5 min	1 min	1 min	1 min	1º→45seg 2º→2min

Figura 2. Tabla con las variables que han tenido en cuenta a la hora de resolver el problema, incluida en su presentación final

A continuación organizan una ruta de búsqueda y calculan el tiempo necesario para ir de un aula a otra (que estiman en 7 segundos) y el tiempo que se tarda en ir de una planta a otra (que estiman en 20 segundos).

Con estos datos calculan el tiempo mínimo que les llevará encontrar el portátil, suponiendo que lo encontrarán en la última aula de la planta baja: 18 minutos (ver Figura 3).

Tiempo planta baja:

10 min (aulas primaria) + 63 seg (tiempo entre clase y clase) + 40 seg (entre primaria e infantil) + 6 min (aulas infantil) + 35 seg (tiempo entre clase y clase) = **18 min.**

Figura 3. Cálculo del tiempo mínimo que les llevará encontrar el portátil en la planta baja, en su diario

Del mismo modo, determinan el tiempo máximo que les llevará encontrar el portátil teniendo que registrar todas las aulas del colegio. Para ello calculan el tiempo que les llevará registrar cada planta más el tiempo que tardan en subir las escaleras, 49 minutos en total (ver Figura 4).

Tiempo planta tercera:

6 min (aulas 1º y 2º ESO) + 35 seg (tiempo entre clase y clase) + 35 seg (tiempo entre 2º ESO a 4 eso) + 5 min (aulas 4 ESO y 3º ESO) + 28 seg (entre clase y clase) =12 min.

TOTAL: 18 + 6 + 12 + 12 + 1 MIN (subida de los pisos) = **49 min**

Figura 4. Extracto del cálculo del tiempo máximo que les llevará encontrar el portátil al recorrer todo el colegio, en su diario

En su presentación final describen la ruta de búsqueda y presentan una expresión pre-algebraica para el cálculo del tiempo, en los dos supuestos considerados (ver Figura 5 y 6).

*Búsqueda:

Puerta planta baja → clases primaria e infantil.

*Dados los cálculos hechos

Sumando: el tiempo de tardanza de registrar las clases + el tiempo entre clase y clase

18 min aprox

Figura 5. Ruta de búsqueda y cálculo del tiempo máximo que les llevará encontrar el portátil, en su presentación final

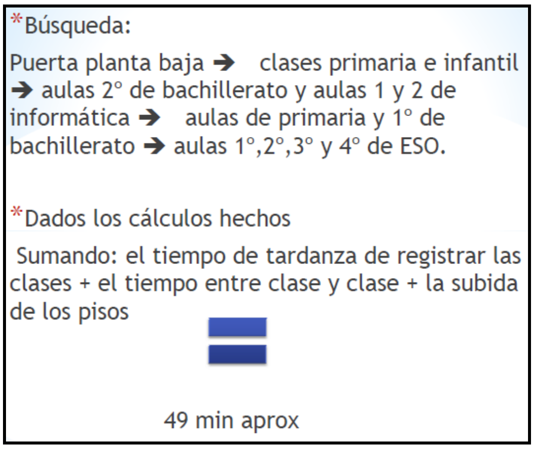


Figura 6. Ruta de búsqueda y cálculo del tiempo máximo que les llevará encontrar el portátil, en su presentación final

Finalmente, concluyen: *"Con estas dos suposiciones hemos obtenido una estimación del intervalo de tiempo que tardaríamos teniendo en cuenta factores como el número de pisos, el espacio entre clase y clase y el número de estas (sabiendo el tiempo de tardanza de una clase de 20 personas, 1 minuto, hemos hallado lo que tardaríamos con el resto). Intervalo ≅ de 18 min a 49 min aprox."* [I] (extracto de su diario)

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular el tiempo que les llevará encontrar el portátil desaparecido. Consideran dos supuestos: que encontrarán el portátil al registrar solo las aulas de la planta baja (mínimo tiempo posible) o que tendrán que registrar todas las aulas del colegio para encontrarlo (máximo tiempo posible). Para cada supuesto se plantean: calcular el tiempo que les llevará registrar un aula; fijar una ruta óptima de búsqueda y calcular el tiempo que les llevará desplazarse por esta ruta.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Suponen que los tres miembros del grupo irán juntos en la búsqueda. Para el cálculo del tiempo que les llevará registrar las aulas seleccionan las siguientes variables: número de alumnos por aula en cada nivel (redondeando a la decena); número de aulas por nivel; tiempo que se tarda en registrar cada aula.

Estiman el tiempo que les lleva registrar un aula de 20 alumnos, a partir de aquí y por proporcionalidad, estiman el tiempo que les llevará registrar el resto de aulas (Figura 1). Se establece una ruta de búsqueda y se estima el tiempo que se tarda en ir de un aula a otra y subir las escaleras. La suma de estos tiempos dará el tiempo total necesario para buscar el portátil (Figura 4).
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utiliza una tabla para presentar y organizar los datos (Figura 2). Se utilizan cálculos aritméticos para obtener los tiempos mínimo y máximo de búsqueda (Figura 3 y 4). Finalmente, se utiliza una expresión pre-algebraica para el cálculo de estos tiempos (Figura 5 y 6).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se realizan mediciones con cronómetro para estimar los tiempos de registro y de desplazamiento. Se utiliza el razonamiento proporcional para obtener los tiempos de registro de las aulas según el número de alumnos (Figura 1). Se realizan cálculos aritméticos a partir de los datos obtenidos (Figura 3 y 4).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
La solución aportada es un intervalo, en [I], que se considera una respuesta más "*realista*", que dar un único número (en referencia a la solución aportada por el grupo A). En la presentación final se dan expresiones pre-algebraicas que facilitan la comprensión de los cálculos realizados y su reutilización, aunque no se indica su posible generalización.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitudes y medida (tiempo). Ruta óptima. Intervalo. Proporcionalidad (tiempo de búsqueda en función del número de alumnos por aula)	Toma de medidas por procedimientos directos (uso de cronómetros para determinar tiempos). Cálculos aritméticos para obtener los tiempos de búsqueda (Figura 3 y 4). Generalización de propiedades y relaciones.	Uso del lenguaje aritmético, en Figura 3 y 4. Uso de tablas para presentar los datos, en Figura 2. Uso del lenguaje pre-algebraico, en Figura 5 y 6.

Anexo X

Un nuevo comedor

Grupo A

Reconstrucción del proceso

A los alumnos se les plantea la necesidad de acondicionar un nuevo espacio como comedor para los alumnos de infantil y calcular cuántos alumnos pueden comer en él, tomando las decisiones que ellos consideren más oportunas respecto a su organización.

Miden, con una cinta métrica, las dimensiones de la sala que se convertirá en nuevo comedor (de forma rectangular) y la dibujan de forma esquemática, señalando sus dimensiones (10,32x5,77m) y área (59,54m2). Para simplificar la situación eliminan la columna central del recinto y los armarios.

Los elementos que consideran (y que deben situar en el comedor) son las bandejas en las que se sirve la comida, las mesas y las personas, distinguiendo entre niños y adultos.

Idealizan estos elementos de la realidad mediante formas geométricas planas. Rediseñan las bandejas que se utilizan en el comedor actual (de forma cuadrada y romboidal) y optan por una forma triangular, de la que elaboran un modelo a escala real con cartulina: "*Decidimos elegir la bandeja triangular ya que entre ellas se pueden encajar y aprovechar mayor cantidad de espacio, y esto lo hemos comprobado al medir las bandejas anteriores*" (ver Figura 1).

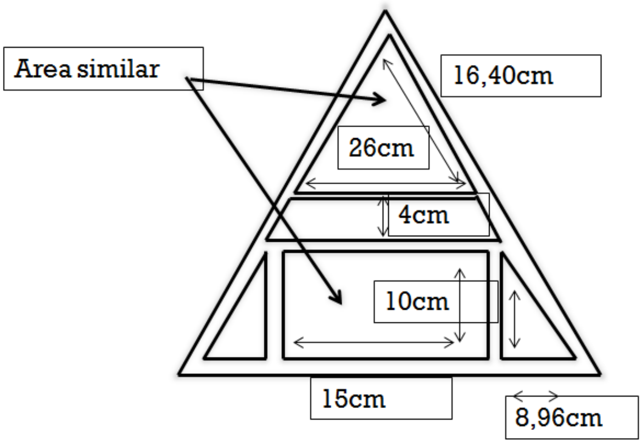


Figura 1. Modelo de bandeja diseñado por los alumnos, incluida en su presentación final

A partir de las dimensiones de estas nuevas bandejas (triángulos equiláteros de 40cm de lado), establecen las de las mesas, manteniendo la forma original rectangular, de 5x0,9 m^2, ya que *"se desperdicia menos espacio en el centro, para que quepan las bandejas en dos filas"* (extracto de su diario). Finalmente, estiman el espacio que deben dejar entre mesa y mesa, 80cm, el mínimo para que pueda pasar un adulto (estiman que un adulto equivale a 80 cm y un niño a 40 cm, aunque no indican esta medida a que corresponde, si al lado de un cuadrado o al diámetro de un círculo, formas con las que podrían estar idealizando el espacio que ocupa una persona).

Con las medidas y cálculos definitivos (los alumnos realizan, en distintas ocasiones, mediciones in situ para comprobar sus cálculos), determinan el número de rectángulos (mesas) que caben en el comedor, con la condición de que dejen un espacio entre sí (pasillo) de 80cm (mínimo para que pase una persona adulta) y el número de triángulos (bandejas) que caben en cada mesa: se tesela el rectángulo mediante triángulos equiláteros, dejando pequeños espacios entre sí (ver Figura 2).

Figura 2. Esquema de la distribución de sus bandejas triangulares en una mesa, incluida en su presentación final

Los resultados obtenidos se corresponden con el número (máximo) de mesas que caben en el comedor y el número (máximo) de alumnos que podrán comer en cada mesa (ver Figura 3). Establecen que con el diseño de sus bandejas (ver Figura 4) y la distribución de sus mesas (ver Figura 5), la capacidad máxima del nuevo comedor es de 132 niños. Comparan su organización con la distribución del comedor actual del colegio, con el fin de establecer sus ventajas.

ORGANIZACIÓN DEL ACTUAL COMEDOR	NUESTRO ORGANIZACIÓN DEL NUEVO COMEDOR
- Se han utilizado 11 mesas - La colocación de alumnos por mesas es desigual : 8 alumnos - 9 mesas 11 alumnos – 1 mesa 12 alumnos – 1 mesa - Cantidad de alumnos: 95	- Se han utilizado 6 mesas 24 alumnos por mesa excepto en la última en la que hay 12 - Cantidad de alumnos: 132 (120 niños sin contar con la última mesa)

Figura 3. Tabla comparativa con su distribución, incluida en su presentación final

Figura 4. Momento durante la presentación final en que las alumnas de este grupo presentan un modelo a tamaño real de su bandeja triangular realizado con cartulina

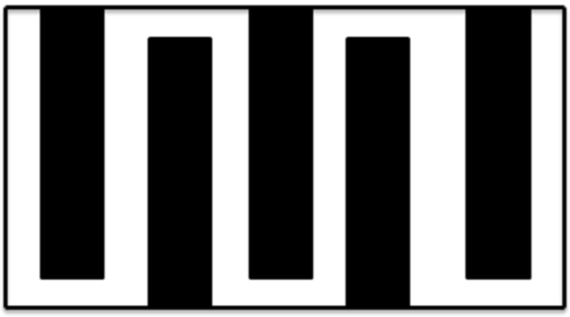


Figura 5. Esquema con la distribución de las mesas en el comedor, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Para organizar el nuevo comedor estudian primero la forma y dimensiones óptimas de bandejas y mesas, el espacio que necesita una persona para moverse y comer, y la disposición de las mesas en el comedor. Con estos datos calcular finalmente el número de comensales.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se eliminan elementos (columna, armarios) del espacio destinado al nuevo comedor para simplificar la realidad. Las bandejas, mesas y personas (distinguiendo entre niños y adultos) se idealizan mediante figuras geométricas planas conocidas. Se fijan las formas y medidas de bandejas y mesas para aprovechar al máximo el espacio disponible.
¿Se usan representaciones?
Realizan un modelo a tamaño real de su bandeja con cartulina (Figura 1 y 4). Utilizan esquemas para simular la distribución de bandejas en las mesas (Figura 2) y la disposición final de las mesas en el comedor (Figura 5).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utiliza una tabla para comparar la distribución del nuevo comedor con la distribución actual

del comedor (Figura 3). Se expresan las medidas de los elementos considerados (Figura 1).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se realizan mediciones con cinta métrica y se utiliza un modelo a tamaño real de su bandeja para realizar comprobaciones in situ. Se calcula el área del recinto mediante la fórmula del rectángulo, sin detallar. Se tesela la mesa para calcular el número de bandejas triangulares que caben.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se argumenta la selección de las formas y dimensiones de sus bandejas y mesas por el "*mejor aprovechamiento del espacio*". Se compara su distribución del nuevo comedor con la del comedor actual, para señalar su mayor capacidad (Figura 3). Se muestran esquemas con la distribución de mesas en el comedor (Figura 5).

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (longitud y superficie). Figuras planas elementales (triángulos y rectángulos). Distribución óptima.	Toma de medidas por procedimientos directos (longitudes con cintas métricas). Aproximación de la realidad mediante figuras planas. Cálculo de áreas mediante las fórmulas conocidas (rectángulo). Uso de modelos geométricos para simular la realidad y obtener los datos (Figura 4).	Uso de gráficos para recoger datos (Figura 1), justificar decisiones (Figura 2) o presentar resultados (Figura 5). Uso de tablas para presentar resultados (Figura 3).

Grupo B

Reconstrucción del proceso

Para organizar el nuevo comedor este grupo analiza primero la forma más adecuada para las mesas, "*para que ocupen menos espacios y quepan más comensales*" (extracto de su diario), y la manera de distribuirlas en el comedor.

Consideran dos posibles formas para las mesas: rectangulares y circulares. Toman medidas para estas dos formas con áreas similares y comparan sus perímetros (ver Figura 1), optando finalmente por la forma rectangular, ya que "*cabe un comensal más*" (extracto de su diario).

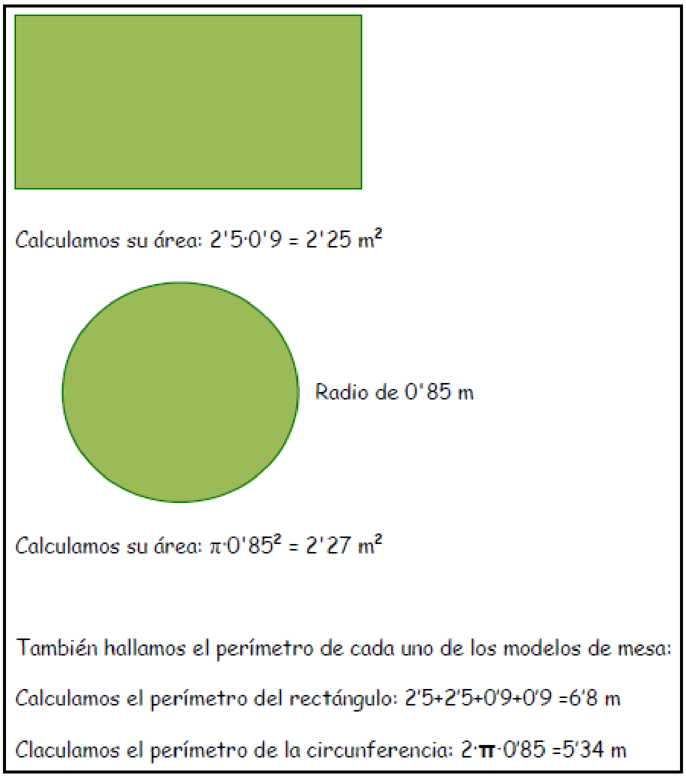


Figura 1. Cálculos del perímetro y del área de las mesas rectangular y circular, en su diario

Toman las medidas del comedor, eliminando elementos (armarios, columna central) y optan por la distribución que se muestra en la Figura 2, "*de esta manera, podemos permitirnos utilizar mesas de medida más alargada a la vez que creamos un espacio en forma de pasillo para que el monitor de comedor pueda atender a los niños sin dificultad alguna*" (extracto de su diario).

Figura 2. Esquema con la distribución del comedor, en su presentación final

Estiman el espacio que ocupará un niño de infantil en la mesa, tomando medidas con la cinta métrica: 35x30 cm. Deciden además utilizar platos en lugar de bandejas, con el propósito de ganar espacio en la mesa. Comparan las áreas de las bandejas actuales, de 33x33 cm, con el área de su modelo de plato, de radio 11,25 cm. No consideran, en esta comparativa, la necesidad de disponer de otros elementos en la mesa, como vasos, cubiertos, el segundo plato, etc., que si se recogen en las bandejas del comedor actual.

Finalmente calculan el número de niños que podrán comer en cada mesa (Figura 3) y su distribución final (Figura 4), con una capacidad total de 147 niños.

Escogimos la longitud de las mesas (2'5 m) en torno al espacio que cada uno de los alumnos requiere en dicha mesa. Habíamos acordado que ese espacio es de 35x30cm, por lo que en cada uno de los lados más alargados de la mesa caben 7 niños:

35·7= 245 cm

El cuadrado que forma el asiento de la silla mide 32'6 cm.

Debido a esto, podemos colocar 7 sillas a lo largo de uno de los lados más alargados de la mesa, y todavía sobran 21'8 cm para que los niños puedan levantarse de la silla y volver a sentarse sin problemas:

32'6·7 = 228'2 cm

250-228'2 = 21'8 cm

Figura 3. Extracto de su diario, con el número de alumnos que caben en cada mesa

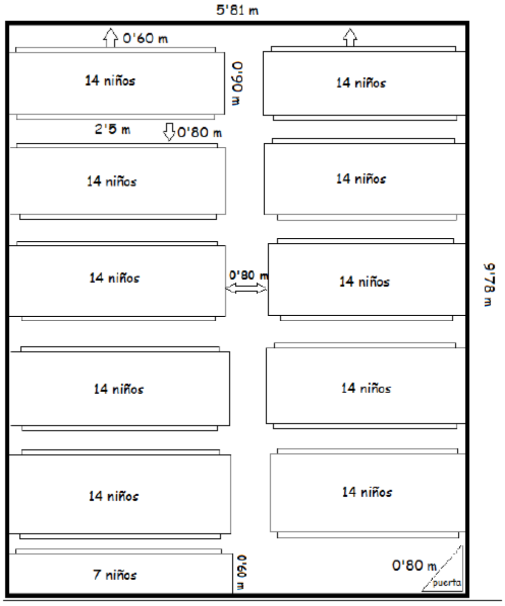


Figura 4. Esquema con la distribución del comedor, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Para organizar el nuevo comedor estudian primero la forma y dimensiones óptimas de las mesas y las bandejas, el espacio que necesita un niño para comer y la disposición de las mesas en el comedor. Con estos datos calcular finalmente el número de comensales.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se eliminan elementos del espacio del nuevo comedor para simplificar la realidad. Las mesas, bandejas, platos, sillas y niños se idealizan mediante figuras geométricas planas conocidas. Se comparan los perímetros de mesas rectangulares con mesas circulares de área similar para ver en cuál podemos poner más comensales. También se compara el área de las bandejas cuadradas actuales con la de platos circulares, para escoger cuál ocupa menos espacio en la mesa.
¿Se usan representaciones?
Utilizan esquemas para simular la distribución de las mesas en el comedor (Figura 2 y 4) y las formas de mesas, sillas y platos utilizados (Figura 1).

¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se expresan las medidas de los elementos considerados y se realizan cálculos aritméticos para el área y el perímetro de figuras conocidas (Figura 1) y para ver cuántos niños pueden comer en cada mesa (Figura 3).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se realizan mediciones con cinta métrica y se realizan esquemas con la distribución del comedor. Se calculan áreas y perímetros mediante las fórmulas conocidas (Figura 1). Se hacen cálculos aritméticos para ver cuántos niños pueden comer en cada mesa (Figura 3).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se comparan áreas y perímetros de distintas formas geométricas para justificar la elección del tipo de mesas y platos, y cálculos aritméticos para el cálculo del número de niños que pueden comer en cada mesa. El esquema presentado (Figura 4) muestra la distribución del nuevo comedor.

Análisis del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (perímetro y superficie). Figuras planas elementales (cuadrados, rectángulos y círculos). Distribución óptima.	Toma de medidas por procedimientos directos (longitudes con cintas métricas). Aproximación de la realidad mediante figuras planas. Cálculo de áreas y perímetros mediante las fórmulas conocidas (Figura 1).	Uso del lenguaje aritmético para presentar los resultados (Figura 1 y 3). Uso del lenguaje gráfico para justificar procedimientos (Figura 1 y 2), recoger datos y presentar los resultados (Figura 4).

Grupo C

Reconstrucción del proceso

Los alumnos de este grupo se plantean dos opciones: diseñar un comedor para alumnos de secundaria, y diseñarlo para alumnos de infantil exclusivamente.

Primero toman las medidas de la sala, mediante una cinta métrica, y los elementos que contiene: "*9,85x5,95 metros, 58,6 metros cuadrados, con un pilar de 0,50x0,50 metros, las basura de unos 50 cm de diámetro y la mesa de la cocina de 1x1,50 metros*" [I] (extracto de su diario). Toman las medidas de las mesas existentes en el comedor actual, 2,5x1 metros. Utilizan este mismo modelo de mesa en las dos opciones (comedor de secundaria e infantil) y solo se cambia para las sillas, de 50x50 cm en secundaria, y de 40x40 cm en infantil.

Para la primera opción (comedor de secundaria) estiman que necesitan dejar un pasillo central de 95 cm y que cada alumno necesitará medio metro de longitud en la mesa para comer, dejando un espacio de dos metros entre mesa y mesa para poder mover las sillas (50 cm) y moverse entre ellas. Con estas consideraciones realizan un plano, "*a escala 1:50*", de la distribución de su comedor (ver Figura 1). Estiman su capacidad en 50 comensales.

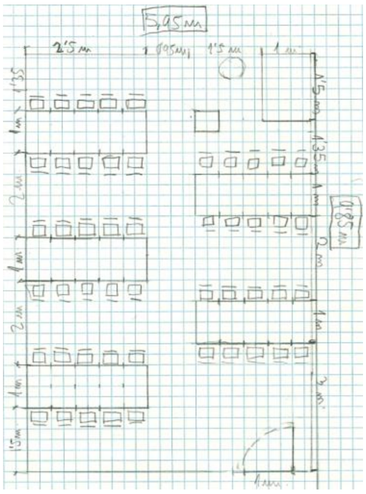


Figura 1. Esquema con la distribución de las mesas en el comedor para secundaria, incluida en su presentación final

Para la segunda opción (comedor de infantil) se basan en su anterior diseño: "*Se cambian las 5 mesas por 7 mesas reduciendo el tamaño de las sillas de 0,50m a 0,40m y el espacio entre mesa y mesa de 1m a 0,30m, con un pasillo de 0,95m igual que en el comedor 1* [se refiere al comedor de secundaria] *y con la misma cocina*" [II] (extracto de su diario). Añaden una mesa, que denominan de "*castigados*", para los niños que les cuesta comer y necesitan una atención especial (ver Figura 2). La capacidad será ahora de 70 comensales.

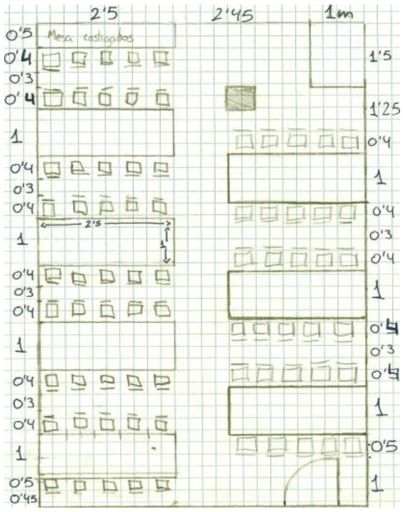


Figura 2. Esquema con la distribución de las mesas en el comedor para infantil, incluida en su presentación final

Concluyen que, "*podríamos a ver ido ajustando mas para sacar el número de comensales que nos interese pero hemos hecho solo dos que muestran el primero, una organización cómoda y el segundo, los alumnos están más incómodos pero en el comedor hay más capacidad*" [III] (extracto de su diario).

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular el número de comensales y realizar un plano a escala de su distribución. Se plantean dos opciones: diseñar un comedor para alumnos de secundaria o diseñar un comedor para alumnos de infantil.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Las mesas y sillas se representan mediante el rectángulo y el cuadrado, respectivamente. Se considera como variables las dimensiones de las sillas y el espacio entre mesa y mesa, según sea el comedor para secundaria o para infantil, en [II].
¿Se usan representaciones?
Utilizan esquemas a escala para simular la distribución de las mesas en el comedor (Figura 1 y 2).

¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se expresan las medidas de los elementos considerados, en [I] y [II].
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se realizan mediciones con cinta métrica y se realiza un esquema de los dos comedores considerados a escala 1:50. Se calcula el área del recinto mediante la fórmula del rectángulo, sin detallar.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se argumenta la distribución por la "*comodidad*" para la primera opción y por la "*mayor capacidad*" para la segunda, en [III]. Los esquemas presentados (Figura 1 y 2) muestran la distribución del nuevo comedor a escala.

Análisis del estructural modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (longitud y superficie). Figuras planas elementales (cuadrados y rectángulos). Distribución óptima.	Toma de medidas por procedimientos directos (longitudes con cintas métricas). Aproximación de la realidad mediante figuras planas. Cálculo de áreas mediante las fórmulas conocidas (rectángulo). Uso de planos a escala (Figura 1 y 2).	Uso de gráficos para recoger datos y presentar resultados (Figura 1 y 2).

Anexo XI

Cordones

Grupo A

Reconstrucción del proceso

En esta tarea se muestran las formas más comunes de anudarse los cordones de los zapatos: la manera americana, la europea y la de las zapaterías. Se pide a los alumnos que determinen cuál de estas maneras requiere una longitud menor y cuál una longitud mayor de los cordones. Posteriormente deberán diseñar una manera que requiera de los cordones más cortos.

El grupo A utiliza una zapatilla que responde a las medidas dadas por el enunciado para anudar los cordones de estas tres maneras. Comprueban de este modo que el problema es auténtico. Tras esta observación inicial, identifican las figuras geométricas que se esconden tras las diferentes maneras de anudarse los cordones: segmentos horizontales y oblicuos (o *"cruzados"* como ellos los denominan) que se corresponden con los catetos y la hipotenusa de tres de triángulos rectángulos (ver Figura 1). La identificación de estos elementos les permitirá resolver matemáticamente la cuestión planteada.

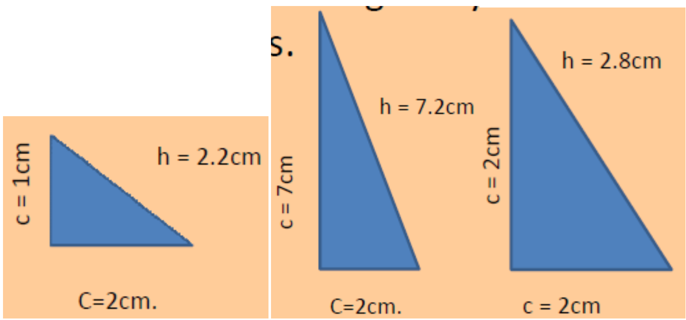
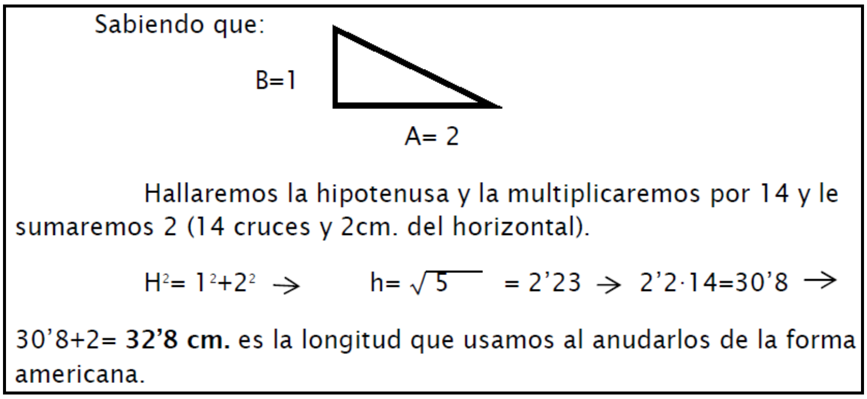


Figura 1. Triángulos rectángulos identificados, con las dimensiones de sus catetos y el cálculo de la hipotenusa a partir del Teorema de Pitágoras, incluidos en su presentación final

Empiezan por el modo americano, que les resulta, aparentemente, más fácil, ya que *"tiene todos los triángulos iguales"* (extracto de su diario). Utilizan el Teorema de Pitágoras para medir la longitud de los segmentos oblicuos o "*cruces*", que relacionan con la hipotenusa de los triángulos rectángulos. Finalmente multiplican esta longitud por el número de *"cruces"* y le suman la longitud de los segmentos horizontales (Figura 2). A la longitud obtenida suman la longitud necesaria para realizar el nudo (sin especificar).



Sabiendo que:

B=1

A= 2

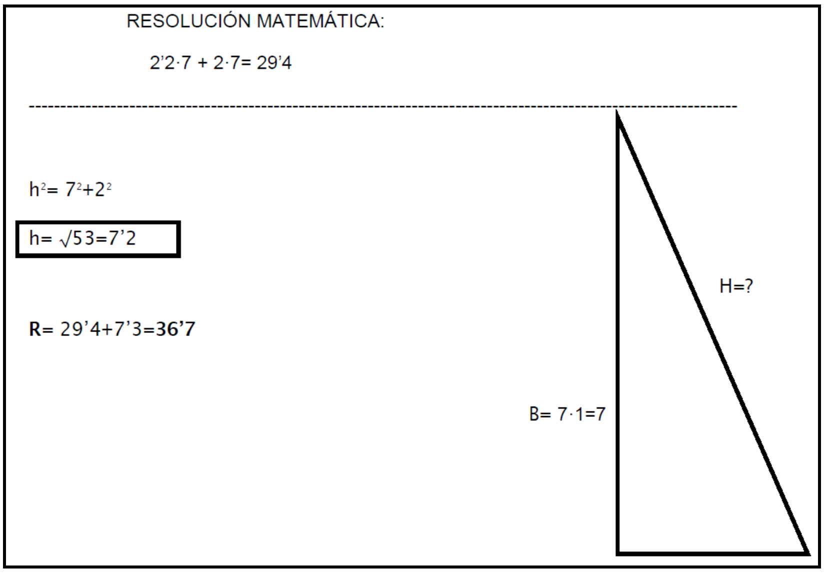
Hallaremos la hipotenusa y la multiplicaremos por 14 y le sumaremos 2 (14 cruces y 2cm. del horizontal).

$H^2= 1^2+2^2 \rightarrow \quad h= \sqrt{5} = 2'23 \rightarrow 2'2\cdot 14=30'8 \rightarrow$

30'8+2= **32'8 cm.** es la longitud que usamos al anudarlos de la forma americana.

Figura 2. Cálculo de la longitud del modo americano, en su diario

Con la manera americana ya resuelta, pasan a resolver las otras dos maneras: *"Fijándonos en el método utilizado anteriormente, vamos a proceder a su resolución mediante la aplicación del teorema de Pitágoras, gracias a que de nuevo, todos son triángulos rectángulos"* (extracto de su diario) (ver Figura 3 y 4).



RESOLUCIÓN MATEMÁTICA:

$2'2\cdot 7 + 2\cdot 7= 29'4$

$h^2= 7^2+2^2$

$\boxed{h= \sqrt{53}=7'2}$

R= 29'4+7'3=**36'7**

Figura 3. Cálculo de la longitud del modo zapatería, en su diario

Así pues, hemos hallado la medida de todos los cruces diagonales (8 en total) y la de los horizontales (7). Hemos multiplicado por el número de cruces cada medida y las hemos sumado obteniendo así el resultado final: **35'38cm.**

Figura 4. Cálculo de la longitud del modo europeo, en su diario

Concluyen que la manera de zapatería es la que utiliza una mayor longitud de cordones (36,7 cm más lazo) y la manera americana es la que utiliza una menor longitud (32,8 cm más lazo).

Para responder a la segunda cuestión, reflexionan sobre el proceso seguido: *"Nos pusimos a pensar cuál podría ser la manera más corta de atarse los cordones y, observando la respuesta a la cuestión anterior, nos dimos cuenta de que, la manera más larga, era la que más cruces en diagonal tenía (si lo aplicamos al teorema de Pitágoras, la hipotenusa siempre es más larga que cualquiera de los dos catetos). Por tanto, debíamos buscar una manera que pasara en diagonal la menor cantidad de veces posible"* [I] (extracto de su diario). Utilizando como modelo una zapatilla, prueban un modo de atarse los cordones, basado en la manera americana, en la que van sustituyendo lazadas cruzadas por lazadas verticales. Comprueban cuál es el número mínimo de "*cruces*" que necesitan para que la zapatilla se sujete bien al pie. Finalmente, muestran su diseño (ver Figura 5):

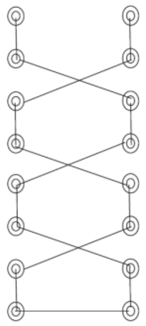


Figura 5. Diseño de la nueva manera de anudarse los cordones, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular la longitud de los cordones de cada modelo. Diseñar un nuevo modo de atarse los cordones que minimice su longitud.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Cada modo de atarse los cordones se descompone en un número de segmentos horizontales y oblicuos. Los segmentos oblicuos se identifican con las hipotenusas de triángulos rectángulos. La longitud de los cordones será la suma de todos los segmentos horizontales y oblicuos.
¿Se usan representaciones?
Se representan las formas geométricas identificadas (triángulos) con sus dimensiones (Figura 1, 2 y 3). Se presenta un esquema con su modelo de atarse los cordones (Figura 5).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se realizan cálculos aritméticos para determinar la longitud de segmentos oblicuos y la longitud total de los cordones (Figura 2 y 3).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se aplica el Teorema del Pitágoras para calcular la longitud de los segmentos oblicuos (Figura 2 y 3). La longitud total de los cordones será la suma del número de segmentos horizontales por su longitud más el número de segmentos oblicuos de cada tipo por su longitud.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se justifica el uso del Teorema de Pitágoras identificando los tres tipos de triángulos rectángulos que subyacen en cada modo de atarse los cordones (Figura 1). Se justifica su nuevo diseño tras la reflexión sobre el proceso de cálculo de la longitud de los cordones: los segmentos oblicuos son los más largos así que su nuevo diseño tendrá el menor número posible de estos segmentos, en [I].

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (longitud). Figuras planas elementales (triángulos rectángulos).	Uso del Teorema de Pitágoras para calcular longitudes (Figura 2 y 3). Cálculos aritméticos para obtener la longitud de los cordones (Figura 2 y 3).	Uso del lenguaje literal para presentar su modelo (Figura 2 y 4). Uso del lenguaje aritmético para presentar su modelo (Figura3). Uso de gráficos para recoger datos y justificar procedimientos (Figura 1, 2 y 3) y presentar resultados (Figura 5).

Grupo B

Reconstrucción del proceso

Al igual que el grupo anterior, este grupo identifica los segmentos oblicuos en que descomponen el diseño de cada modo de atarse los cordones con la hipotenusa de triángulos rectángulos. Aplicando el Teorema de Pitágoras calcularán su longitud. Para el caso de la manera europea señalan: "*Para medir este cordón se calculan las hipotenusas de los triángulos más pequeños que son el primero y el último y las de los triángulos más grandes que son los triángulos restantes. Para averiguar la longitud total del cordón se multiplica la longitud de las diferentes rectas por el número de veces que se repitan*" [I] (extracto de su diario). En el borrador que incluyen en su diario puede verse en detalle los cálculos realizados (ver Figura 1).

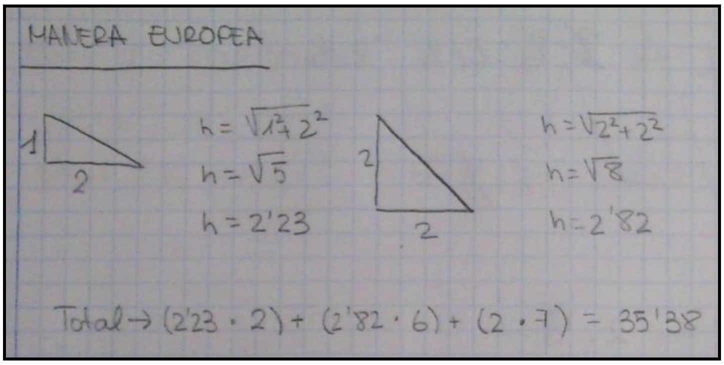


Figura 1. Cálculo de la longitud de la manera europea, incluido en un borrador

Para la manera americana, aprovechan los cálculos realizados anteriormente: "*Para averiguar el total se multiplica la medida de la diagonal por el número de* *veces que aparezca (14) más una vez la distancia que hay entre los ojales de la parte más inferior de la zapatilla*” [II] (extracto de su diario).

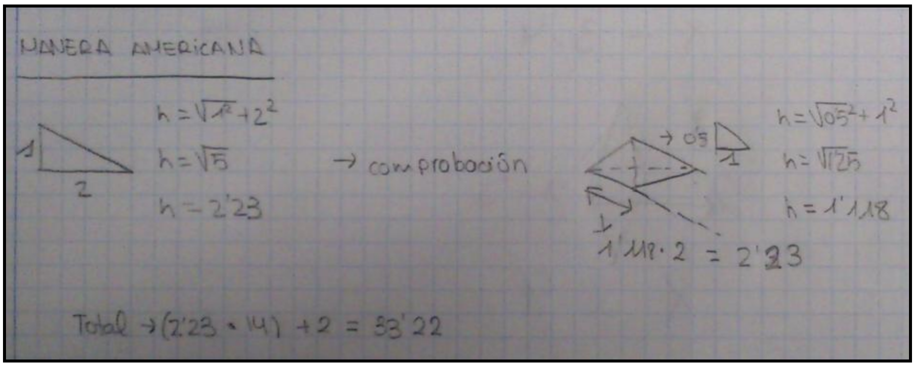


Figura 2. Cálculo de la longitud de la manera americana, incluido en un borrador

En esta figura se puede ver como los alumnos, a modo de comprobación, utilizan las medidas de otro triángulo rectángulo distinto para calcular la longitud del segmento oblicuo.

De nuevo, para el modo de zapatería, aprovechan los cálculos anteriores y realizan el cálculo de la hipotenusa de un tercer triángulo: “*Para averiguar el total de este cordón multiplicamos las diagonales más pequeñas por 7 y las rectas horizontales por 7 y a eso le sumamos la hipotenusa calculada anteriormente*” [III] (extracto de su diario).

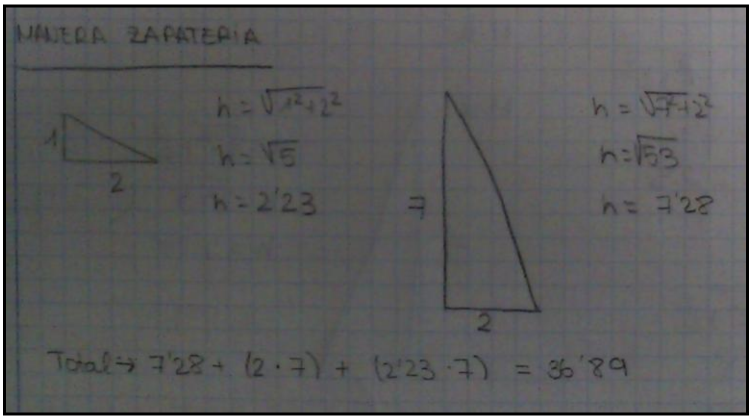


Figura 3. Cálculo de la longitud de la manera zapatería, incluida en un borrador

Finalmente, diseñan un nuevo modo de atarse los cordones, que no parece sujetar bien el pie, como se señala por otros grupos durante la presentación: “*Nosotras hemos pensado que si el hilo solo pasa de manera vertical por todos* *los ojales menos por los cuatro superiores, donde se cruza, el zapato quedará fijo y sin caerse y el hilo utilizado será mínimo*” [IV] (extracto de su diario).

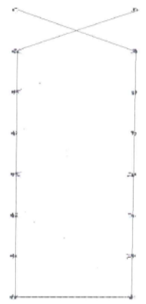


Figura 4. Diseño de la nueva manera de anudarse los cordones, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular la longitud de los cordones de cada modelo. Diseñar un nuevo modo de atarse los cordones que minimice su longitud.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Cada modo de atarse los cordones se descompone en un número de segmentos horizontales y oblicuos. Los segmentos oblicuos se identifican con las hipotenusas de triángulos rectángulos. La longitud de los cordones será la suma de todos los segmentos horizontales y oblicuos.
¿Se usan representaciones?
Se representan las formas geométricas identificadas (triángulos) con sus dimensiones (Figura 1, 2 y 3). Se presenta un esquema con su modelo de atarse los cordones (Figura 4).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se realizan cálculos aritméticos para determinar la longitud de los cordones (Figura 1, 2 y 3).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?

Se aplica el Teorema del Pitágoras para calcular la longitud de los segmentos oblicuos. La longitud total de los cordones será la suma del número de segmentos horizontales por su longitud más el número de segmentos oblicuos de cada tipo por su longitud.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se justifica el uso del Teorema de Pitágoras identificando los tres tipos de triángulos rectángulos que subyacen en cada modo de atarse los cordones (Figura 1, 2 y 3). Comprueban los resultados obtenidos en algunos casos utilizando distintos triángulos (Figura 2). Se justifica su nuevo diseño por la observación de su proceso: los cordones deben pasar solo de manera vertical y utilizar una única lazada oblicua para minimizar su longitud, en [IV].

Análisis estructural del modelo

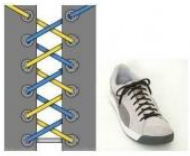
Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (longitud). Figuras planas elementales (triángulos rectángulos).	Uso del Teorema de Pitágoras para calcular longitudes (Figura 1, 2 y 3). Cálculos aritméticos para obtener la longitud de los cordones (Figura 1, 2 y 3).	Uso del lenguaje aritmético para presentar su modelo (Figura 1, 2 y 3). Uso de gráficos para recoger datos y justificar procedimientos (Figura 1, 2 y 3) y presentar resultados (Figura 4).

Grupo C

Reconstrucción del proceso

Descomponen cada diseño en segmentos horizontales y oblicuos. Los segmentos oblicuos se identifican con la hipotenusa de triángulos rectángulos. Para obtener su longitud aplican el Teorema de Pitágoras.

Al igual que los dos grupos anteriores, realizan cálculos aritméticos para calcular la longitud de cada diseño. Pero, tras realizar estos cálculos iniciales (que no incluyen en su diario pero que si son observados por el profesor), infieren fórmulas generales que después aplicarán en cada caso particular (ver Figura 1, 2 y 3). Señalar que utilizan un modelo de zapato distinto al presentado en el enunciado, con 6 ojales en lugar de 7 (*No* es el número de ojales, *a* es la longitud del segmento horizontal y *b* la longitud del segmento vertical).



Fórmula: $(No\text{-}1)\cdot[2(\sqrt{a^2+b^2})]+a$

$(6\text{-}1)\cdot[2\cdot(\sqrt{4+1})]+2 =$

$=5\cdot(2\cdot\sqrt{5})+2=$

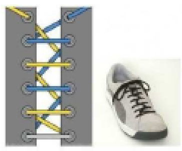
$=5\cdot(2\cdot 2{,}24)+2=$

$=5\cdot 4{,}48+2=$

$=22{,}4+2 =$

R=24,4cm

Figura 1. Cálculo de la longitud de la manera americana, incluida en su diario



Fórmula: $[2(\sqrt{a^2+b^2}+\frac{\sqrt{a^2+2b^2}}{2})+a] + [(No\text{-}3)\cdot(\sqrt{a^2+(2b)^2}+a)+a]$

$[2\cdot(\sqrt{2^2+1^2}+\frac{\sqrt{2^2+2^2}}{2})+2] + [(6\text{-}3)\cdot(\sqrt{2^2+2^2}+2)+2]=$

$=[2\cdot(2{,}24+1{,}4)+2] + [3\cdot(2{,}83+2)+2]=$

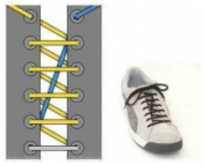
$=[2\cdot 3{,}64+2] + [3\cdot 4{,}83+2]=$

$=(7{,}28+2) + (14{,}49+2)=$

$=9{,}28 + 16{,}49=$

R=25,77cm

Figura 2. Cálculo de la longitud de la manera europea, incluida en su diario



Fórmula: $(No-1)\cdot(\sqrt{a^2+b^2}+a)+\sqrt{a^2+[(No-1)b]^2}$

$(6-1)\cdot(\sqrt{4+1}+2)+\sqrt{4+[(6-1)\cdot 1]^2} =$

$= 5\cdot(\sqrt{5}+2)+\sqrt{4+25} =$

$= 5\cdot 4{,}24+5{,}39 =$

$= 21{,}20+5{,}39 =$

R=26,59cm

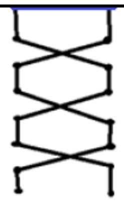
Figura 3. Cálculo de la longitud de la manera zapatería, incluida en su diario

Cada uno de estas expresiones y cálculos se acompañan de explicaciones (ver como ejemplo la Figura 4).

Esta fórmula se obtiene mediante el Teorema de Pitágoras, hayando **c** (suponiendo que **a** =2 y **b**=1, **c** =2,24). Se puede observar que el cordón amarillo forma 5 triángulos (cuyas **c**=2,24 y cuyos **a**=2), lo que es igual al **no** de un lado -1. Por último, se puede observar que el cordón azul forma un triángulo (cuya **c**=5,39 y cuyo **a**=2), pero esta vez **b**>1. En este triángulo, **b**=5, lo que vuelve a ser el **no** de un lado -1.

Figura 4. Justificación de la expresión y cálculos utilizados para la manera zapatería, incluida en su diario

Finalmente establecen un diseño propio y calculan su longitud, planteando de nuevo una fórmula general para ello (ver Figura 5): "*La manera de atarse los cordones más corta sería la forma más sencilla posible pero sin embargo no quedaría bien sujeta, para que quede bien sujeta hemos diseñado una manera que hemos comprobado que queda bien sujeta y además no precisa de mucho cordón*" [I] (extracto de su diario).



Fórmula: $\left(\frac{\mathrm{Nob}}{2}\right) \cdot \left(2\sqrt{a^2 + b^2}\right) + (\mathrm{No} \cdot b) + a$

$$\left(\frac{6}{2}\right) \cdot \left(2 \cdot \sqrt{2^2 + 1^2}\right) + [(8 \cdot 1) + 2] =$$

$$= 3 \cdot (2 \cdot 2{,}24) + [8 + 2] =$$

$$= 3 \cdot 4{,}48 + 10 =$$

$$= 13{,}44 + 10 =$$

R=23,44cm

Figura 5. Diseño de la nueva manera de anudarse los cordones y cálculo de su longitud, incluida en su diario

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular la longitud de los cordones de cada modelo. Diseñar un nuevo modo de atarse los cordones que minimice su longitud.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Cada modo de atarse los cordones se descompone en un número de segmentos horizontales y oblicuos. Los segmentos oblicuos se identifican con las hipotenusas de triángulos rectángulos. La longitud de los cordones será la suma de todos los segmentos horizontales y oblicuos.
¿Se usan representaciones?
Se muestran imágenes obtenidas en internet de cada modo de atarse los cordones que acompañan a sus fórmulas y cálculos (Figura 1, 2 y 3). Se presenta un esquema con su modelo de atarse los cordones (Figura 5).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?

Se realizan cálculos aritméticos a partir de las expresiones algebraicas planteadas para cada modo de atarse los cordones (Figura 1, 2 y 3).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se aplica el Teorema del Pitágoras para calcular la longitud de los segmentos oblicuos. La longitud total de los cordones será la suma del número de segmentos horizontales por su longitud más el número de segmentos oblicuos de cada tipo por su longitud, que se expresa mediante fórmulas algebraicas (Figura 1, 2, 3 y 5).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se justifican las expresiones algebraicas aportadas (Figura 4). Se justifica su nuevo diseño por la observación del proceso de cálculo de la longitud de los cordones: pasar por el menor número posible de segmentos oblicuos pero que quede bien sujeto, en [I].

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (longitud). Figuras planas elementales (triángulos rectángulos).	Uso del Teorema de Pitágoras para calcular longitudes (Figura 1, 2, 3 y 5). Manipulación de expresiones algebraicas para obtener la longitud de los cordones (Figura 1, 2, 3 y 5). Generalización de propiedades y relaciones.	Uso del lenguaje algebraico para formular el modelo (Figura 1, 2, 3 y 5). Uso de gráficos para presentar los resultados (Figura 5).

Grupo D

Reconstrucción del proceso

Este grupo identifica, al igual que los grupos anteriores, los segmentos oblicuos que componen el diseño de cada modo de atarse los cordones con la hipotenusa de triángulos rectángulos. Aplicando el Teorema de Pitágoras calculan su longitud, aunque no muestran sus cálculos y solo dan el resultado final (ver Figura 1).

Manera europea:
Conociendo la medida de separación entre los ojales en vertical y horizontal (a=2, b=1), hemos observado y llegado a la conclusión de que los cordones al pasar por los ojales forman triángulos. Para calcular la medida del cordón entero, hemos calculado los catetos que nos faltaban y las hipotenusas de estos triángulos. Y de esta manera hemos obtenido las medidas de las líneas formadas al pasar por los ojales, y al sumarlas hemos obtenido la medida del cordón entero (35,38cm).

Figura 1. Explicación del proceso seguido para el cálculo de la longitud de la manera europea, incluida en su diario

Repiten este proceso para las restantes maneras de atarse los cordones, sin incluir en ningún caso los cálculos, solo describiendo el proceso. En la Figura 2 puede verse como enuncian, erróneamente, el Teorema de Pitágoras, aunque lo aplican correctamente. Incluyen también la longitud de los cordones para zapatos con seis ojales.

Manera zapatería:
Al igual que en la manera americana ya tenemos las medidas calculadas, exceptuando la línea que cruza todos los ojales que la hemos obtenido con la fórmula $h^2=\sqrt{c^2+c^2}$ la suma de todas las líneas de esta manera da 36,89cm. Por lo que este es el cordón más largo de estas maneras.

Figura 2. Explicación del proceso seguido para el cálculo de la longitud de la manera zapatería, incluida en su diario

Finalmente, diseñan un nuevo modo de atarse los cordones en el que realizan solo las lazadas cruzadas indispensables para que el pie esté bien sujeto: "*Nosotros creemos que esta sería una buena forma de anudarse los zapatos con la menor cantidad posible de cordón pero sin olvidar que el pie ha de estar sujeto*" [I] (extracto de su diario). Indican que su longitud es de 29,07 cm.

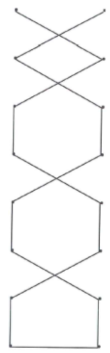


Figura 3. Diseño de la nueva manera de anudarse los cordones, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Calcular la longitud de los cordones de cada modelo. Diseñar un nuevo modo de atarse los cordones que minimice su longitud.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Cada modo de atarse los cordones se descompone en un número de segmentos horizontales y oblicuos. Los segmentos oblicuos se identifican con las hipotenusas de triángulos rectángulos. La longitud de los cordones será la suma de todos los segmentos horizontales y oblicuos.
¿Se usan representaciones?
Se presenta un esquema con su modelo de atarse los cordones (Figura 3).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
No se muestran los cálculos. Solo se presenta la fórmula del Teorema de Pitágoras (Figura 2).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se aplica el Teorema del Pitágoras para calcular la longitud de los segmentos oblicuos (no se muestran los cálculos).

La longitud total de los cordones será la suma del número de segmentos horizontales por su longitud más el número de segmentos oblicuos de cada tipo por su longitud (no se muestran los cálculos).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se justifica el uso del Teorema de Pitágoras identificando los tres triángulos rectángulos que subyacen en cada modo de atarse los cordones (Figura 1), pero no se ilustra con ningún dibujo. Tampoco se muestran los cálculos, solo se dan los resultados finales. Se justifica su nuevo diseño por la observación de su proceso: las lazadas oblicuas serán las indispensables para sujetar bien el zapato al pie, [I].

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (longitud). Figuras planas elementales (triángulos rectángulos).	Uso del Teorema de Pitágoras para calcular longitudes (no se detalla). Cálculos aritméticos para obtener la longitud de los cordones (no se incluyen).	Uso del lenguaje algebraico para presentar el Teorema de Pitágoras (Figura 2). Uso de lenguaje literal para presentar los resultados (Figura 1 y 2). Uso de gráficos para presentar resultados (Figura 3).

Anexo XII

Hábitos de estudio

Grupo A

Reconstrucción del proceso

En la tarea se plantea la necesidad de establecer un “nivel de eficacia” en el estudio para los alumnos de Secundaria con el fin de que mejoren su rendimiento académico, detectando sus flaquezas y debilidades. Para ello, se les propone diseñar un cuestionario, a partir de cuyas respuestas se pueda determinar este nivel de eficacia.

Tras analizar las nueve preguntas iniciales del test propuestas a modo de ejemplo, el grupo decide añadir nuevas preguntas (consultando cuestionarios similares en Internet) y establecer una primera clasificación de las mismas según su importancia: *“Para empezar, quisimos puntuar las 9 preguntas que el test nos proponía, cada una con 4 opciones a elegir. Había tres tipos de preguntas, de más importantes a menos importantes. Las más importantes la opción a (la menos adecuada) 0 puntos, la b 5 puntos, la c 7 puntos y la d (la más adecuada) 10 puntos. Las de importancia intermedia la opción a 0 puntos, la b 3 puntos, la c 5 puntos y la d 7 puntos y las de menor importancia la opción a 1 punto, la b 2 puntos, la c 3 puntos y la d 4 puntos. Al puntuarlas, no nos fijamos que el número de preguntas era impar, por lo que las preguntas más importantes y las menos importantes no equivalían* [se refieren a que no hay el mismo número de preguntas de cada tipo]*. Tampoco nos dimos cuenta de que tan sólo había una pregunta de importancia intermedia (ni muy importante ni muy sobrante e innecesaria), por lo que decidimos borrar todas las puntuaciones y empezar de nuevo el test, antes de preguntar a los compañeros de la clase”* (extracto de su diario).

Los alumnos vuelven a analizar cómo categorizar y puntuar las preguntas del test, buscando un método que resulte más claro y sencillo que el anterior: *“Volvimos a dividir las preguntas en más importantes y menos importantes y* *añadimos 7 preguntas más. Puntuamos todas las preguntas: ocho preguntas de 0-15, las menos importantes, y otras ocho de 0-30, las más importantes”* [I] (extracto de su diario)*.* De esta forma, indican, para cada una de las 16 preguntas, la distribución de su puntuación según la respuesta elegida. Para las preguntas *Menos importantes*, la opción *a* (la menos adecuada) 0 puntos, la *b* 5 puntos, la *c* 10 puntos y la *d* (la más adecuada) 15 puntos. Para las *Más importantes*, la opción *a* 0 puntos, la *b* 10 puntos, la *c* 20 puntos y la *d* (la más adecuada) 30 puntos. No señalan que las preguntas *Más importantes* puntúan el doble que las *Menos importantes*, con lo que hubieran obtenido un modelo más sencillo de reutilizar y generalizar.

La puntuación obtenida en el test (sobre 360) se considera su “nivel de eficacia” en el estudio. Toman una muestra de cinco compañeros de clase y comparan su puntuación en el test (sobre 10) con la media de sus resultados académicos de la última evaluación mediante un diagrama de barras que realizan con Excel (ver Figura 1).

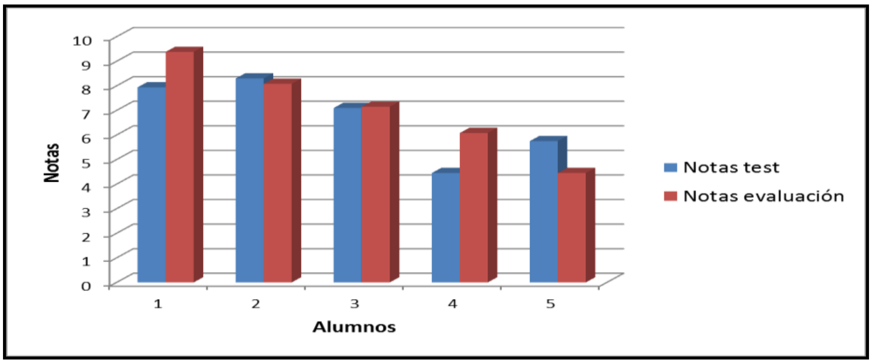


Figura 1. Diagrama de barras con el que comparan la puntuación obtenida en el test con la media de las notas de la última evaluación para una muestra de cinco alumnos, incluida en su presentación final

De este modo establecen la validez de su cuestionario y su puntuación: “*Se observa una relación entre las puntuaciones del test con las notas de los alumnos*” (extracto de su diario).

El cuestionario se pasa finalmente a toda la clase (19 alumnos en total): *“Para que todo saliera bien, tendríamos que preguntar el test a toda la clase”* (extracto de su diario). Para concluir, realizan una categorización de los alumnos según su nivel de eficacia obtenido a partir del cuestionario (señalar que este grupo no había dado todavía ninguna unidad de Estadística en el presente curso, por lo que sus conocimientos iniciales en este apartado eran muy limitados). Toman la media aritmética de la puntuación del test de toda la clase para obtener dos grupos: con puntuación por encima de la media y con puntuación por debajo de la media. A continuación, y en cada grupo, vuelven a obtener la media aritmética para obtener otros dos, con lo que establecen así cuatro grupos o niveles: *"Cuando obtuvimos la media de la clase, 207, calculamos la media de los siguientes niveles –Los que superaban la media (+207). –Y los que estaban por debajo (-207)"* (extracto de su diario).

De este modo los alumnos quedaban clasificados en cuatro bloques (ver Figura 2 y 3).

	Puntuación	
1º BLOQUE	Menos de 167	Necesitas mejorar muchas cosas
2º BLOQUE	167-207	Necesitas mejorar
3º BLOQUE	207-260	Muy bien, pero podrías hacerlo mejor
4º BLOQUE	Más de 260	Continúa así, PERFECTO!

Figura 2. Clasificación por bloques según el "nivel de eficacia" en el estudio, incluida en su presentación final

4º BLOQUE:

NOMBRE:	PUNTUACIÓN:
Juan José Serrano	315
Marcos Andreu	305
María Vilches Ventura	270
Alejandro Castell	265

Figura 3. Extracto de la puntuación de los alumnos y su clasificación por bloques, incluida en su diario

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Diseñar un sistema de puntuación de las respuestas a las preguntas del cuestionario para obtener el nivel de eficacia en el estudio. Realizar un pilotaje del cuestionario.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se eliminan algunas preguntas iniciales y se añaden nuevas de diseño propio. Se clasifican las preguntas en dos categorías. Se asigna una puntuación a cada posible respuesta, según la categoría de la pregunta. El nivel de eficacia en el estudio será la suma de la puntuación obtenida en cada pregunta de su cuestionario. Se establece una clasificación de los alumnos en base a los resultados obtenidos.
¿Se usan representaciones?
Se comparan las puntuaciones del test con las de la evaluación en una muestra de cinco alumnos utilizando un diagrama de barras (Figura 1).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utilizan tablas para ordenar y mostrar los datos finales de su muestra (Figura 2 y 3).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se establece una puntuación para cada respuesta según el tipo de pregunta. El cuestionario se valida con una muestra de cinco alumnos. La puntuación final de los alumnos de esta muestra se pasa a una escala sobre 10 (Figura 1). Se realizan cálculos aritméticos para obtener el nivel de eficacia en el estudio de cada alumno de la clase. Se calcula la media aritmética de las puntuaciones del test (no se muestra). La media aritmética se utiliza para establecer diferentes categorías. Se clasifican los alumnos según el nivel de eficacia en cuatro categorías. Se utiliza software matemático para representar los resultados obtenidos (Figura 1).

¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se busca un sistema de puntuación que sea fácilmente aplicable, aunque terminan asignando la puntuación de modo individual para cada pregunta y no buscan un modelo más generalizable. Se realiza un primer pilotaje con una pequeña muestra para validar el cuestionario. Se clasifican los alumnos de la clase según su nivel de eficacia en el estudio.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Tratamiento de la información. Muestra.	Recogida y recuento de datos. Asignación de puntuaciones para cada variable según su importancia, en [I]. Cálculo de la media aritmética. Paso de una escala sobre 360 a una sobre 10 (no se incluye). Uso de TICs para elaborar gráficas (Excel). Cálculo de las puntuaciones totales (no se incluye).	Uso de gráficos para presentar los resultados (Figura 1). Uso de tablas para presentar los resultados (Figura 2 y 3).

Grupo B

Reconstrucción del proceso

Este grupo rediseña las preguntas inicialmente presentadas para crear un test propio. Reordenan las posibles respuestas a cada pregunta, de tal manera que la opción *a* sea siempre la más negativa o inadecuada y la *d* la más positiva o adecuada. Establecen un sistema de puntuación inicial en el que todas las preguntas tienen la misma importancia y se puntúan de la misma manera: la opción *a*, 0 puntos, la *b*, 5 puntos, la *c*, 10 puntos y la *d*, 15 puntos. Pero tras revisar su cuestionario deciden replantearse este sistema: "*Posteriormente, nos percatamos de que de las 9 preguntas seleccionadas, no todas tenían la misma importancia. En un primer momento, todos iban a valer lo mismo, pero al ver* *que algunas eran más decisivas añadimos un paso al proceso*" (extracto de su diario).

Deciden, finalmente, dividir las preguntas en tres grupos y asignarles un peso dentro de la puntuación final del test: preguntas de menor importancia (2 preguntas en total); preguntas de importancia media (3 preguntas en total), "*que valdrán un medio más que las anteriores*"; y preguntas de mayor importancia (4 en total), que "*valdrán el doble que las primeras*". La puntuación de cada pregunta se reparte igual que antes (ver Figura 1). La puntuación obtenida en el test (sobre 202,5 y que después pasaran a una escala sobre 10) se considera su "nivel de eficacia" en el estudio.

Figura 1. Sistema de puntuación del test, incluida en su presentación final

Una vez establecido el sistema de puntuación definitivo, pasan el test a una muestra de quince compañeros de clase. Clasifican a los alumnos de esta muestra en tres grupos, dividiendo el intervalo de puntuación, de 0 a 202,5, en tres sub-intervalos de igual amplitud (de 0 a 67,5; de 67,5 a 135; y de 135 a 202,5). Pero la observación de los datos obtenidos les hace rectificar y buscar una nueva clasificación: "*Viendo los resultados obtenidos, podemos comprobar que la media no supera el 5* [las media aritmética de su grupo es de 99,9 sobre 202,5, aunque no se indica ni se muestran los cálculos]*. Por lo tanto, el sistema utilizado para puntuar es demasiado exigente. Hemos cambiado los barómetros según nuestro criterio para que las notas queden equilibradas"* (extracto de su diario). Su clasificación definitiva queda reflejada en la Figura 2.

Estudiante con buenos hábitos	Estudiante con hábitos medios	Estudiante con malos hábitos
Entre 202,5 y 122,5	Entre 142,5 y 81	Entre 81 y 0
Entre 10 y 6	Entre 7 y 4	Entre 4 y 0

Figura 2. Clasificación de los alumnos según su puntuación en el test, incluida en su presentación final

Con esta clasificación, seis alumnos quedarían con buenos hábitos, dos con hábitos medios y siete con malos hábitos (ver un extracto de esta clasificación en la Figura 3).

Persona	Sobre 202,5	Sobre 10	Puesto	Calificación
14	145	7,15	1°	Bueno
3	142,5	7	2°	Bueno
2	130	6,4	3°	Bueno
5	125	6,17	4°	Bueno

Figura 3. Extracto de la tabla con la puntuación de los quince alumnos y su clasificación, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Diseñar un sistema de puntuación de las respuestas a las preguntas del cuestionario para obtener el nivel de eficacia en el estudio. Realizar un pilotaje del cuestionario.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se eliminan algunas preguntas iniciales y se añaden nuevas de diseño propio. Se clasifican las preguntas en tres categorías. Se asigna una puntuación a cada posible respuesta y una ponderación para cada tipo de pregunta. El nivel de eficacia en el estudio será la suma de la puntuación obtenida en cada pregunta de su cuestionario. Se establece una clasificación de los alumnos en base a los resultados obtenidos.
¿Se usan representaciones?

No se utilizan representaciones matemáticas.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utiliza tablas para explicar y mostrar los datos finales de su muestra (Figura 1, 2 y 3).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se establece una puntuación para cada respuesta y una ponderación para tipo de pregunta (Figura 1). Se realizan cálculos aritméticos para obtener el nivel de eficacia en el estudio de cada alumno. La puntuación final de cada alumno se pasa a una escala sobre 10 (Figura 3). Cálculo de la media aritmética de la puntuación de la muestra (no se incluye). Se clasifican los alumnos según el nivel de eficacia en tres grupos (Figura 2).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se busca un criterio de puntuación que sea fácilmente aplicable (Figura 1). El test se pasa a una muestra para obtener una clasificación de los mismos. No se da ningún criterio para esta clasificación, solo se indica que debe ser “equilibrada”.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Tratamiento de la información. Muestra.	Recogida y recuento de datos. Ponderación de las variables mediante la asignación de un factor de corrección que dependerá de su importancia (Figura 1). Cálculo de la media aritmética (no se incluye). Paso de una escala sobre 202,5 a una sobre 10 (Figura 3). Cálculo de las puntuaciones totales (no se incluye).	Uso de tablas para presentar los datos y resultados (Figura 1, 2 y 3).

Anexo XIII

Selección de personal

Grupo A

Reconstrucción del proceso

En esta tarea los alumnos deben tomar decisiones respecto a la selección del personal para la próxima temporada de verano de un conocido parque de atracciones, “Terra Mítica”. A partir de los datos presentados respecto al número de horas trabajadas y dinero recaudado, clasificados por meses y la asistencia al parque, de nueve empleados, los alumnos deben escoger a tres de ellos para contratarlos a jornada completa y a otros tres para contratarlos a jornada parcial.

Los alumnos de este grupo prescinden de la clasificación de los datos por meses, centrándose únicamente en su clasificación según la asistencia al parque. Obtienen los totales de horas trabajadas y de dinero recaudado según la alta, media o baja asistencia al parque y calculan la tasa, euros/hora, que presentan en una tabla (ver Figura 1): “*Nuestro siguiente paso fue hacer una tabla combinando el dinero recaudado y las horas trabajadas por cada vendedor, tanto en la temporada alta, como en la media y en la baja, y sacar sus medias. Así podíamos comparar a los distintos empleados utilizando los datos de una forma más ordenada*” (extracto de su diario).

	ALTA		MEDIA		BAJA	
MARIA	1 h.	62.55 €	1 h.	52.40€	1 h.	44,6
CLARA	1 h.	275.4 €	1 h.	49.20€	1 h.	29,37
CAROL	1 h.	64.70€	1 h.	36.40€	1 h.	20,4
JOSÉ	1 h.	56.30€	1 h.	51	1 h.	30,61
ÁNGEL	1 h.	66.20€	1 h.	45.60€	1 h.	20,1
ANA	1 h.	86.60€	1 h.	64.70€	1 h.	39,7
LIDIA	1 h.	70.20€	1 h.	39.38 €	1 h.	21,8
TONI	1 h.	79.60€	1 h.	30.05 €	1 h.	22,28
RAÚL	1 h.	81	1 h.	50.70€	1 h.	19,54

Figura 1. Tabla con la tasa euros ganados por hora trabajada para cada trabajador según la asistencia al parque, en su presentación final

Utilizan esta tabla para realizar comparaciones, cruzar la información e ir estableciendo filtros con los que efectuar una primera selección (ver Figura 2): *“decidimos hacer una nueva tabla con tres columnas, alta/media/baja asistencia con los seis mejores empleados según los €/h. La idea era utilizar como base común para la comparación lo que cada empleado recaudaba en una hora […] hicimos una tabla con tres columnas correspondientes cada una de ellas a las temporadas alta, media y baja. En cada una de esas columnas colocamos por orden a los seis trabajadores que habían recaudado más dinero por hora en cada una de las temporada” (*extracto de su diario).

ALTA		MEDIA		BAJA	
Clara	1	Ana	1	María	1
Ana	2	María	2	Ana	2
Raúl	3	José	3	José	3
Toni	4	Raúl	4	Clara	4
Lidia	5	Clara	5	Toni	5
Ángel	6	Ángel	6	Lidia	6

Figura 2. Tabla con una primera clasificación de los empleados, incluida en su presentación final

"Para coger los seis mejores se nos ocurrió una forma. Las personas que coincidían en las tres columnas se cogían directamente [en rojo]. *Y las personas que coincidían en dos* [en azul], *se cogía su posición en cada columna y se sacaba su media, y el numero más bajo, correspondía a mejor posición* [clasifican a los empleados que aparecen en dos columnas a partir de la media entre las posiciones que ocupan, de menor a mayor, María (1,5), José (3), Raúl (3,5), Toni (4,5), Lidia (5,5) y Ángel (6)] *y se nos quedaba así: Clara / Ana / María / José / Raúl / Toni"* (extracto de su diario). Estos seis son los trabajadores que contratarán para la próxima campaña.

Finalmente establecen quiénes de estos seis trabajadores tendrán un contrato a jornada completa y quienes a jornada parcial. Para ello se fijan en los resultados de lo que denominan "Tabla de regularidad", donde incluyen una columna con la media aritmética de la tasa €/h para la alta, media y baja asistencia (ver Figura 3), y aplican criterios puramente subjetivos, acordados entre todos los miembros del grupo: *"Para los empleados a jornada parcial escogimos a las personas que mas ganaban en una hora, ya que aunque no tienen mucho tiempo pueden ganar más: Clara, con 118 €/h; Ana, con 63,30 €/h; y María, con 53,18 €/h. Para los empleados a jornada completa escogimos a los que menos recaudaban porque aunque obtenían menor cantidad de dinero, tenían más tiempo para recaudar: Raúl, con 50,40 €/h; José, con 45,90 €/h; y Toni, con 43,31 €/h"* [I] (extracto de su diario).

	ALTA		MEDIA		BAJA		
ANA	€ 1.803 H 20,80	86,6 1 H	€ 1.423 H 22	64,7 1 H	€ 4.606 H 11,60	39,7 1 H	63,6666667 1 H
CLARA	€ 3.195 H 11,60	275,4 1 H	€ 1.246,60 H 25,30	49,2 1 H	€ 531,60 H 18,10	29,37 1 H	117,99 1 H
MARÍA	€ 725,60 H 11,60	62,55 1 H	€ 1.090 H 20,80	52,4 1 H	€ 916,30 H 20,50	44,6 1 H	53,1833333 1 H
JOSÉ	€ 1.556 H 20,50	56,3 1 H	€ 1.377 H 27	51 1 H	€ 857,30 H 28	30,61 1 H	45,97 1 H
RAÚL	€ 2.026 H 25	81 1 H	€ 715,00 H 14,10	50,7 1 H	€ 361,60 H 18,50	19,54 1 H	50,4133333 1 H
TONI	€ 820,3 H 10,30	79,6 1 H	€ 1.036,80 H 34,50	30,05 1 H	€ 1.187,70 H 53,30	22,28 1 H	43,9766667 1 H

Figura 3. Tabla de regularidad con los euros por hora para cada uno de los seis trabajadores seleccionados, en su presentación final.

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Realizar una selección de los empleados a partir de los datos proporcionados.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se eliminan los criterios de clasificación por meses, centrándose únicamente en la clasificación por asistencia al parque. Se construye una nueva variable: €/h, según la alta, media o baja asistencia al parque. Se clasifican los empleados a partir de esta nueva variable.
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?

Se utilizan tablas para ordenar y mostrar los datos (Figura 1, 2 y 3).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se calcula la tasa, €/h, para la alta, media y baja asistencia al parque (Figura 1). Se ordenan y seleccionan los empleados según esta variable. Se calcula la media aritmética de esta variable para decidir el tipo de contrato (Figura 3).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
La selección de los empleados se basa en la ratio, €/h, según la alta, media o baja asistencia. El tipo de contratación dependerá de la media aritmética de esta ratio y criterios propios, en [I].

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Tratamiento de la información. Tasa (dinero recaudado en función del tiempo).	Construcción de nuevas variables a partir de las existentes, euros/hora (Figura 1). Cálculo de la media aritmética de esta variable (Figura 3).	Uso de tablas para presentar los datos y resultados (Figura 1, 2 y 3).

Grupo B

Reconstrucción del proceso

Los alumnos de este grupo obtienen inicialmente una tabla con la tasa €/h por meses y asistencia (ver Figura 1).

TABLA 3	ALTA	MEDIA	BAJA	ALTA	MEDIA	BAJA	ALTA	MEDIA	BAJA
MARÍA	55'2	52	50'2	69'9	54'14	47'7	63'04	51'7	41'77
CLARA	86'18	39'72	26'19	86'2	50'8	30'77	90	59'5	30'29
CAROL	87'25	39'2	19'58	69'45	32'16	20'93	54'46	39'3	20'04
JOSE	64'76	38'95	22'5	79'2	53'8	32'07	82'81	65'43	37'72
ÁNGEL	64'82	45'69	0	68'8	43'93	20'29	64'1	47'08	19'77
ANA	85'76	61'77	47'83	88'71	63'97	35'53	82'62	66'41	34'96
LIDIA	85'01	39'12	22'59	66'71	38'19	25	66'36	40'12	15'81
TONI	73'33	56'43	37'12	81	51'86	51'17	82	52	29'97
RAÚL	0	41'66	14'22	80'86	43'82	19'69	81'21	56'95	21'08

Figura 1. Tabla con la tasa euros por hora para cada trabajador, según los meses y la asistencia al parque, en su presentación final

A continuación deciden prescindir de los meses, quedándose únicamente con la clasificación según la asistencia al parque. Para ello obtienen las medias aritméticas para la alta, media y baja asistencia (no muestran estos cálculos). Con esto, deciden probar con cinco criterios distintos para su selección de personal: "*Tras agruparlo todo en una tabla decidimos ignorar los meses y unicamente tomar en relevancia los períodos de alta, media y baja asistencia puesto que no podemos contratar a 6 empleados diferentes para cada mes, hemos obtenido unas conclusiones/clasificaciones de las cuáles Andrés ha de decidir una. De ahí partimos a 5 clasificaciones*" (extracto de su diario).

En su primera clasificación utilizan "*lo que recaudan por hora en total, sin importar periodos de alta/media/baja asistencia, sacando la media de su recaudación por hora. Según esta clasificación se quedarían: Ana ,Toni y María a jornada completa; Jose, Clara y Raúl a media jornada; y se quedarían fuera Carol, Lidia y Ángel*" (extracto de su diario).

En su segunda clasificación, "*asignando una puntuación numérica, tras establecer un orden según los euros por hora recaudados en los periodos de alta, media y baja asistencia* [que obtienen haciendo la media aritmética de los valores correspondientes de la Figura 1]*, en ella asignamos valores de 1-9 según cada clasificación (Alta/Media/Baja) y más tarde lo sumamos como se* *puede observar a la derecha de los nombres* [Figura 2]*. Según esta clasificación se quedarían: Ana,Toni y Jose a jornada completa; María ,Clara y Raúl a media jornada ; y se quedarían fuera Carol,Lidia y Ángel*" (extracto de su diario).

	ALTA	MEDIA	BAJA
MARÍA(14)	62'71(9)	52'61(4)	46'55(1)
CLARA(17)	70'03(7)	50(5)	29'08(5)
CAROL (19)	79'83(3)	36'88(9)	20'18(7)
JOSE(12)	75'59(5)	52'72(3)	30'74(4)
ÁNGEL(23)	65'90(8)	45'56(7)	20'03(8)
ANA(4)	85'69(1)	64'05(1)	39'44(2)
LIDIA(20)	72'69(6)	39'14(8)	21'13(6)
TONI(9)	78'77(4)	53'43(2)	39'42(3)
RAÚL(17)	81'035(2)	47'47(6)	18'33(9)

Figura 2. Tabla con la ratio euros por hora para por cada trabajador según la asistencia al parque y su correspodiente puntuación, en su presentación final

No se muestra la suma de las puntuaciones de los empleados.

En su tercera clasificación "*dándole únicamente importancia a lo que recaudan por hora los días de alta asistencia. Según esta clasificación se quedarían: Ana,Toni y Jose a jornada completa; María ,Clara y Raúl a media jornada; y se quedarían fuera Ángel,Lidia y Carol*" (extracto de su diario).

En su cuarta clasificación tendrán en cuenta únicamente lo que recaudan por hora los días de media asistencia, y en su quinta clasificación, lo que recaudan por hora los días de baja asistencia.

Finalmente utilizan la segunda clasificación para su selección: "*Tuvimos en cuenta también cuál sería la clasificación más justa y apta y elegimos la 2*" [I] (extracto de su diario).

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Realizar una selección de los empleados a partir de los datos proporcionados.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Establecen cinco criterios diferentes para clasificar a los empleados basados en una nueva variable, la tasa €/h. Se construye la variable: €/h, para los meses y la asistencia al parque (Figura 1). Se clasifican los empleados según el valor de esta nueva variable, para cada uno de los cinco criterios establecidos.
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utilizan tablas para ordenar y mostrar los datos (Figura 1 y 2).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se calcula la tasa, €/h, para los meses y la asistencia al parque (Figura 1). Se calcula la media aritmética de esta variable para obtener €/h según la asistencia al parque. Se puntúan los empleados según el valor de esta variable (Figura 2).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se muestran cinco criterios distintos para clasificar a los empleados. El criterio finalmente escogido es el basado en la puntuación otorgada a los empleados según sus €/h en la alta, media y baja asistencia, que se considera un criterio "*más justo*", en [I].

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Tratamiento de la información. Tasa (dinero recaudado en función del tiempo).	Construcción de nuevas variables a partir de las existentes, euros/hora (Figura 1). Cálculo de la media aritmética de esta variable (Figura 2).	Uso de tablas para presentar los datos y resultados (Figura 1 y 2).

Grupo C

Reconstrucción del proceso

Los alumnos de este grupo prescinden de la clasificación de los datos por meses y por asistencia al parque (simplificación), centrándose únicamente en el total de dinero recaudado y las horas trabajadas. Finalmente añaden, con estos totales, una nueva variable que denominan "media €/h". Presentan sus cálculos en una tabla (ver Figura 1).

	dinero total	horas totales	media €/h
María	8196	159	51,54
Clara	14921	239,5	62,3
Carol	7000	174,5	40,11
Jose	11373	225,5	50,21
Ángel	9284	182,5	50,87
Ana	11062	163,5	67,66
Lidia	15271	298	51,24
Toni	13964	294,5	47,42
Raúl	9308	173	53,8

Figura 1. Tabla con el dinero y horas totales y la tasa euros por hora para cada trabajador, en su presentación final

Su elección final se basa en esta nueva variable: los tres empleados con una mejor tasa €/h son los contratados a jornada completa (Ana, Clara y Raúl), los tres siguientes son contratados a jornada parcial (María, Lidia y Ángel).

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Realizar una selección de los empleados a partir de los datos proporcionados.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se eliminan los criterios de clasificación por meses y asistencia al parque. Se construye una nueva variable: €/h, a partir del dinero y horas totales. Se clasifican los empleados según el valor de esta nueva variable, de mayor a menor.
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utilizan tablas para ordenar y mostrar los datos (Figura 1).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se calcula la tasa, €/h (Figura 1). Se ordenan los empleados según el valor de esta variable.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
La selección de los empleados se basa únicamente en la tasa, €/h total (Figura 1).

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Tratamiento de la información. Tasa (dinero recaudado en función del tiempo).	Construcción de nuevas variables a partir de las existentes, euros/hora (Figura 1).	Uso de tablas para presentar los datos y resultados (Figura 1).

Anexo XIV

El mejor colegio

Grupo A

Reconstrucción del proceso

A partir de la información mostrada en una tabla sobre diferentes características de seis colegios, los alumnos deben escoger el mejor de ellos para estudiar.

Este grupo analiza primero que colegio es mejor y cuál es el peor en cada una de las variables, pero llegan a la conclusión de que deben unificar los valores de las distintas variables en una misma escala para poder obtener una puntuación global de cada colegio: *"Después de comparar nos dimos cuenta de que estas comparaciones no nos servían para el resultado que teníamos que obtener. Decidimos pasar todos los factores a la misma escala dando a los más importantes un valor con más puntuación"* (extracto de su diario).

Deciden puntuar cada colegio del 1 (el peor) al 6 (el mejor) en cada variable y ponderarlas según su importancia (ver Figura 1): *"Al haber 6 apartados los clasificamos de mayor a menor con 6, 5, 4, 3, 2 y 1 puntos. A los que tienen mayor importancia, como la nota media del expediente y la nota media en las PAU aumentamos su puntuación el doble, […] después sumamos todas las puntuaciones y en cada colegio obtenemos una puntuación sobre seis […] y las transformamos a base 10"* [I] (extracto de su diario). Deciden además crear una nueva variable: "*diferencia entre la nota de las PAU y la del expediente*", que añaden a las ya presentadas en la tabla.

	n. aulas desdoble	Ord. Por alumno	Alum. Por aula	Metros cuadrados	Media expediente	PAU	Repetidor Por curso	Presupuesto	Dif. PAU y exp.
Clgio. Chuli	1	6	4	5	6x2=12	4x2=8	3	1	1
Clgio. Guay	2	4	3	4	4x2=8	5x2=10	2	1	6
Clgio. Mola	3	1	6	2	5x2=10	6x2=12	6	1	5
Clgio Tope	4	3	2	1	1x2=2	2x2=4	5	3	4
Clgio Diver	5	1	5	6	3x2=6	1x2=2	4	3	2
Clgio Super	6	3	1	3	2x2=4	3x2=6	1	6	4

Figura 1. Tabla con la puntuación de los colegios, incluida en su presentación final

De este modo reorganizan los datos de la tabla, obteniendo una puntuación para cada colegio que será la suma de sus puntuaciones en cada variable. La clasificación de los colegios se realiza en función de esta puntuación, pasando de su escala sobre 6 a una escala sobre 10, más usual (ver Figura 2). Finalmente escogen el “Colegio Mola” para estudiar.

COLEGIO MOLA	7.1
COLEGIO GUAY	6.3
COLEGIO CHULI	5.8
COLEGIO SUPER	5.2
COLEGIO DIVER	5
COLEGIO TOPE	4.3

Figura 2. Tabla con la clasificación de los colegios, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Escoger el mejor colegio a partir del diseño de un sistema de puntuación de los datos proporcionados.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se reasignan los valores de las variables para cada colegio, desde 6 (el mejor) hasta 1 (el peor), en [I]. Posteriormente esta escala sobre 6 se transforma en una escala sobre 10, más usual (Figura 2). Se ponderan las variables según su importancia. Se construyen nuevas variables: "Diferencia PAU y expediente=PAU-Media expediente". La puntuación final de cada colegio será la suma de su puntuación en cada variable.
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utilizan tablas para ordenar y mostrar los datos (Figura 1 y 2).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se ordenan los datos y se unifican los valores de las variables en una misma escala sobre 6, en [I], posteriormente se obtendrá una escala sobre 10 (Figura 2). Se realizan cálculos aritméticos para obtener el valor de las variables más importantes, que ponderan el doble, y las puntuaciones totales de los colegios (Figura 1 y 2).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se argumenta la necesidad de pasar todos los datos a una misma escala. Se basan en su propia opinión para ponderar las variables y añadir otras nuevas.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Tratamiento de la información, cualitativa y cuantitativa.	Construcción de nuevas variables a partir de las existentes. Estandarización de puntuaciones para las distintas variables, en [I]. Ponderación de las variables mediante la asignación de un factor de corrección, en [I]. Paso de una escala sobre 6 a otra sobre 10 (Figura 2). Cálculo de las puntuaciones totales. (Figura 2).	Uso de tablas para presentar los resultados (Figura 1 y 2).

Grupo B

Reconstrucción del proceso

Este grupo decide construir una nueva variable a partir de otras dos, denominada “Media total” y que será la media aritmética de las puntuaciones del expediente y de la PAU. De este modo sustituyen estas dos variables por esta nueva, lo que supone una simplificación (trabajan ahora con una variable menos).

Buscan en internet alguna referencia relacionada con su problema: “*Nos acordábamos de que El Mundo también realizaba lo mismo que nosotros, así que sacamos de Internet las pautas que seguía él para tener más o menos una idea de cómo lo haríamos*” (extracto de su diario). Con esta información, deciden asignar a cada variable una escala diferente, según su relevancia: “*Les dimos a los factores* [se refieren a las variables] *una importancia diferente, por lo que unos los puntuamos sobre 10, otros sobre 20 y otros sobre 25*” (extracto de su diario). Las variables “salas de desdoble” y “media total” se puntúan sobre 20, “alumnos por aula” y “metros cuadrados” sobre 15 y “ordenadores por aula” sobre 10. Prescinden de la variable “presupuesto para el próximo curso”, de carácter cualitativo, y de “repetidores por aula”, aunque no justifican esta decisión.

Ordenan los datos y reasignan su valor según la escala (sin indicar cómo se hace) en una nueva tabla, tal y como se presenta en la Figura 1.

14 - 20	0,6 -10	29 - 15	18100 - 15	7'3 - 20
13 - 16	0,4 - 8	28 - 12	13200 - 12	7'2 - 16
12 - 14	0,3 - 6	25 - 9	12600 - 9	7'15 - 14
11 - 12	0,2 - 4	24 - 6	10700 - 6	6'85 - 12
9 - 8		22 - 3	10500 - 3	6'8 - 8
7 – 4		20 - 1	9800 - 1	6'75 - 4

Figura 1. Tabla con la reasignación de los valores según la escala, para "salas de desdoble", "ordenadores por aula", "alumnos por aula", "metros cuadrados" y "media total", respectivamente, incluida en su presentación final

Suman finalmente las puntuaciones para cada colegio (ver Figura 2). Escogen el "Colegio Super" como el mejor.

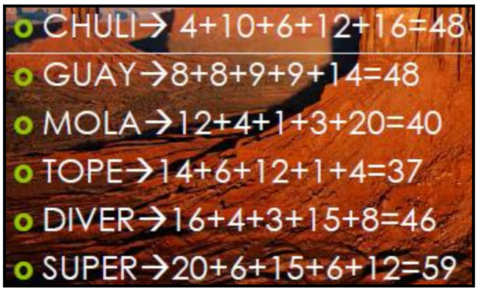


Figura 2. Lista de los colegios con sus puntuaciones, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Escoger el mejor colegio a partir del diseño de un sistema de puntuación de los datos proporcionados.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se eliminan algunas de las variables. Se categorizan las variables según su importancia. Se asigna una escala a cada variable según esta categorización.

Se reasignan los valores de cada variable según la escala escogida. Se construyen nuevas variables: Media total=(Nota expediente+Nota PAU)/2. La puntuación final de cada colegio será la suma de su puntuación en cada variable.
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utilizan tablas para ordenar y mostrar los datos (Figura 1).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se reasignan los valores de cada variable según la escala, pero no se detalla el procedimiento utilizado (Figura 1). Se realizan cálculos aritméticos para obtener las puntuaciones totales de los colegios (Figura 2).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
La categorización de las variables se justifica por la información encontrada en internet sobre test similares al propuesto en el problema. No se detalla cómo se realiza la reasignación de los datos según la escala.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Tratamiento de la información, cualitativa y cuantitativa.	Construcción de nuevas variables a partir de las existentes. Estandarización de puntuaciones para las distintas variables en una escala distinta según su importancia (Figura 1). Cálculo de las puntuaciones totales (Figura 2).	Uso de tablas para presentar los resultados (Figura 1).

Grupo C

Reconstrucción del proceso

Este grupo decide unificar la escala de puntuación de las variables presentadas. Para ello da una puntuación a cada colegio que va del mejor, 6, al peor, 1 (ver Figura 1): "*Este paso consiste en ordenar de mayor a menor (según su importancia) la posición que ocupan los colegios en función de las variables a las que nos queremos referir. En torno a seis posiciones, donde el 6 es el más importante y el 1 el menos. Hay que tener en cuenta que en ocasiones en los datos el número más alto no siempre ocupa la mejor posición, como en el caso de los alumnos* [se refieren al número de alumnos por aula]" [I] (extracto de su presentación final).

	Aulas de desdoble	Ordena-dores	Alumnos	Superficie	Nota media de expedien-te	PAU	Repetido-Res	Presupuesto
Colegio Chuli	1	6	4	5	6	4	3	2
Colegio Guay	2	4,5	3	4	4	5	2	2
Colegio Mola	3	1,5	6	2	5	6	6	2
Colegio Tope	4	3	5	1	1	1	5	4
Colegio Diver	5	3	2	6	3	2	4	4
Colegio Super	6	1,5	1	3	2	3	1	6

Figura 1. Tabla con la puntuación de cada variable, incluida en su presentación final

En el caso de la variable "número de ordenadores por alumno" se observa que en la asignación de las puntuaciones del 1 al 6 se ha seguido un criterio de proporcionalidad, no así en las restantes variables. En la variable "presupuesto", de carácter cualitativo, se asignan las puntuaciones 6 (Más), 4 (Mismo) y 2 (Menos).

A continuación otorgan a cada variable un peso de la puntuación final, en forma de porcentaje, según su importancia (ver Figura 2).

VARIABLES	PORCENTAJES
AULAS DE DESDOBLEBLE	10%
ORDENADORES	5%
Nº DE ALUMNOS POR AULA	10%
SUPERFICIE POR METROS CUADRADOS	5%
NOTA MEDIA DEL EXPEDIETE	25%
NOTA MEDIA EN LA PAU	20%
REPETIDORES	15%
PRESUPUESTO	10%

Figura 2. Tabla con la asignación de porcentaje a cada variable según su importancia, incluida en su presentación final

Finalmente, elaboran una tabla con los nuevos valores para cada variable, calculados según el porcentaje correspondiente (ver Figura 3).

	Aulas de desdoble (10%)	**Ordena-dores (5%)**	**Alumnos (10%)**	**Superficie (5%)**	**Nota media de expedien-te (25%)**	**PAU (20%)**	**Repetidores (15%)**	**Presupuesto (10%)**
Colegio Chuli	0,1	0,3	0,4	0,25	1,5	0,8	0,45	0,2
Colegio Guay	0,2	0,22	0,3	0,2	1	1	0,3	0,2
Colegio Mola	0,3	0,07	0,6	0,1	1,25	1,2	0,9	0,2
Colegio Tope	0,4	0,15	0,2	0,05	0,25	0,2	0,75	0,4
Colegio Diver	0,5	0,07	0,5	0,3	0,75	0,4	0,6	0,4
Colegio Super	0,6	0,15	0,1	0,15	0,5	0,6	0,15	0,6

Figura 3. Tabla con la puntuación final de cada variable, según su porcentaje, incluida en su presentación final

En su diario muestran, mediante un ejemplo, cómo se debe hacer este cálculo (ver Figura 4).

-COLEGIO CHULI

Nº de aulas de desdoble: 10% de 1= 1 x 10 /100= 0.1

Nº de ordenadores por alumno: 5% de 6= 0,3

Nº de alumnos por aula: 10% de 4= 0,4

Superficie en metros cuadrados: 5% de 5= 0,25

Nota media del expediente: 25% de 6= 1,5

Nota media en las PAU: 20% de 4= 0,8

Repetidores: 15% de 3= 0,45

Presupuesto: 10% de 2= 0,2

Total= 4 puntos

Figura 4. Cálculo de las puntuaciones correspondientes al colegio Chuli, en su diario

La puntuación final de cada colegio se da en una tabla (ver Figura 5), sumando sus puntuaciones para cada variable de la tabla anterior (ver Figura 3). Esta puntuación final se da también sobre 10. Finalmente, para este grupo, el mejor colegio es el "Colegio Mola".

clasificación	colegios	Puntuación (sobre 6)	Puntuación (sobre 10)
1º	Colegio Mola	4,62	7,7
2º	Colegio Chuli	4	6,6
3º	Colegio Diver	3,52	5,8
4º	Colegio Guay	3,42	5,7
5º	Colegio Super	2,85	4,75
6º	Colegio Tope	2,4	4

Figura 5. Tabla con la puntuación final de los colegios, incluida en su presentación final

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Escoger el mejor colegio a partir del diseño de un sistema de puntuación de los datos proporcionados.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Se reasignan los valores de las variables para cada colegio, desde 6 (el mejor) hasta 1 (el peor), en Figura 1. Posteriormente esta escala sobre 6 se transforma en una escala sobre 10, más usual, en Figura 5. Se da un peso, en forma de porcentaje, a cada variable, según su importancia (Figura 2). La puntuación final de cada colegio será la suma de su puntuación en cada variable.
¿Se usan representaciones?
No se utilizan representaciones.
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se utilizan tablas para ordenar y mostrar los datos (Figura 1, 2, 3, 5) y cálculos de porcentajes (Figura 4).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se reasignan los valores de cada variable según la escala correspondiente, en algunos casos siguiendo un criterio de proporcionalidad (Figura 1). Se realizan cálculos con porcentajes para obtener las puntuaciones de cada variable, según su peso (Figura 4). Se realizan cálculos aritméticos para obtener las puntuaciones totales de los colegios (Figura 4 y 5) y se cambia de escala: de una puntuación sobre 6 se pasa a una sobre 10 (aunque sin mostrar los cálculos).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se basan en su propia opinión para categorizar y dar un peso a cada una de las variables.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Tratamiento de la información, cualitativa y cuantitativa.	Estandarización de puntuaciones para las distintas variables en una misma escala (Figura 1). Ponderación de las variables mediante la asignación de un porcentaje de la puntuación final (Figura 2). Cálculo de porcentajes (Figura 4). Cálculo de las puntuaciones totales. (Figura 5). Paso de una escala sobre 6 a otra sobre 10 (Figura 5).	Uso de tablas para presentar los resultados (Figura 1,2, 3, 5). Uso del lenguaje aritmético para explicar los procedimientos utilizados (Figura 4).

Anexo XV

La carrera

Grupo A

Reconstrucción del proceso

La profesora de Educación Física ha preparado una nueva prueba de velocidad que consiste en lo siguiente: se colocan 10 conos a lo largo de la línea lateral de una cancha de baloncesto. Cada corredor sale desde la esquina opuesta, rodea un cono y corre hasta tocar la canasta del otro lado. Dos son las cuestiones principales que se plantean en el enunciado: ¿Tiene alguna importancia el cono que decidamos rodear en la carrera? Y si es así, ¿qué haríais vosotros para intentar ganarla? Si pudierais añadir un nuevo cono, ¿donde lo pondríais?

Los alumnos de este grupo, inicialmente, miden directamente con una regla, sobre el dibujo del enunciado la distancia a recorrer según el cono que se rodea: *"Lo primero que intentamos hacer fue, sin utilizar ningún procedimiento matemático y por tanteo, intentar responder a la pregunta más sencilla: ¿Importa el cono que hayamos utilizado? Concluimos que sí importaba la situación del cono, y al hacer los cálculos comprobamos que así era"* (extracto de su diario), por lo que reducen el problema a escoger el cono que minimiza la distancia total a recorrer para obtener así ventaja en la carrera.

Para resolver esta cuestión dividen en dos tramos (segmentos rectilíneos) el recorrido de la carrera: el primero, desde la salida hasta al cono, y el segundo, desde el cono a la meta. Estos segmentos son el elemento clave en la resolución del problema. Suponen además que la velocidad del corredor es la misma en los dos tramos.

Relacionan estos segmentos con la hipotenusa de dos triángulos rectángulos. Aplicando el Teorema de Pitágoras calculan su longitud para cada uno de los diez conos, como se puede ver en el borrador que adjuntan a su diario (ver Figura 1). La distancia total recorrida en la carrera será la suma de la longitud de estos dos segmentos. Los resultados se presentan mediante un diagrama de barras (ver Figura 2).

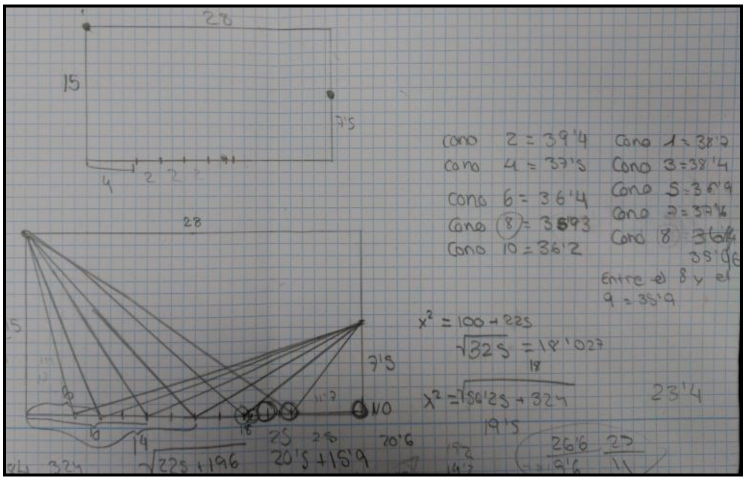


Figura 1. Esquemas y cálculos incluidos en su diario

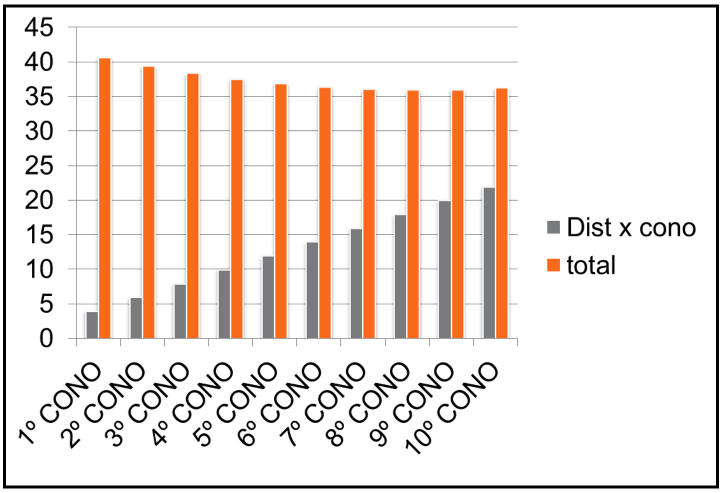


Figura 2. Gráfico con la distancia total recorrida para cada cono con el programa Excel, en su presentación final

De esta forma establecen que el cono que deben rodear es el octavo pues la distancia a recorrer es la mínima en este caso.

A continuación se plantean resolver la cuestión de poner un nuevo cono. Lo sitúan entre el octavo cono, a 18 metros del fondo izquierdo de la pista, y el noveno, a 20 metros, extremos donde la distancia total recorrida es más corta (ver Figura 3). Toman el punto medio de este primer intervalo como punto donde situar el nuevo cono, a 19 metros del fondo de la pista. Calculan la distancia total recorrida para este cono, aplicando de nuevo el Teorema de Pitágoras, y la comparan con la de los extremos del intervalo inicial, para coger un nuevo intervalo cuyos extremos sean los que den una menor distancia total. Este segundo intervalo se sitúa entre los 18 y 19 metros. Su punto medio, 18,5 metros, es donde se coloca el nuevo cono. Señalan al profesor que este procedimiento puede repetirse todo lo que se quiera para ir aproximando cada vez mejor la situación del nuevo cono, entre los 18,5 y los 19 metros, aunque no incluyen este procedimiento en su presentación final (ver un borrador con sus cálculos en la Figura 4).

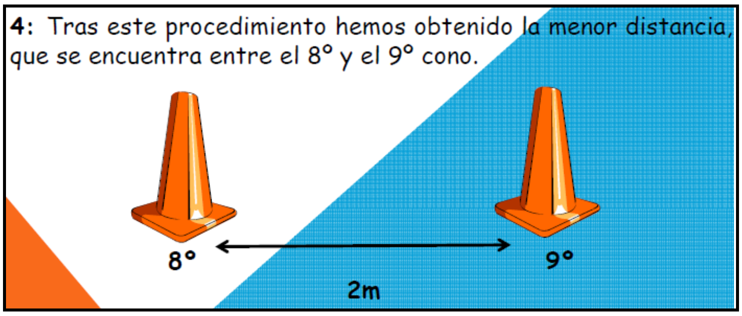


Figura 3. Situación del nuevo cono, incluida en su presentación final

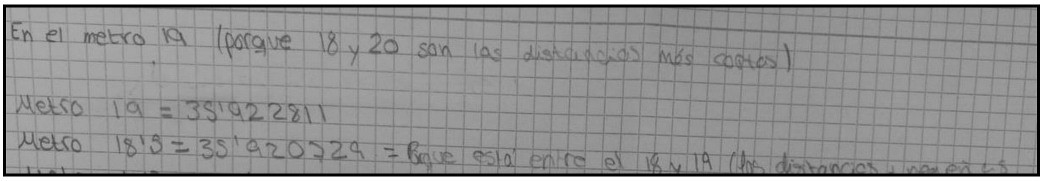


Figura 4. Aproximación de la situación del nuevo cono por intervalos, en su diario

El profesor sugiere entonces que busquen una nueva aproximación a esta cuestión. Para ello les pide que intenten relacionar la distancia total recorrida en la carrera con la distancia a la que se encuentra el cono del fondo de la pista: *"Buscamos una fórmula general que nos permitiera averiguar la distancia total dependiendo sólo de la distancia entre el cono y el fondo izquierdo. Tras haberla pensado y simplificado, utilizando sobre todo el teorema de Pitágoras: (x=distancia horizontal entre el cono y el fondo izquierdo), resultó ser la siguiente,* $d = \sqrt{15^2 + x^2} + \sqrt{(28-x)^2 + 7{,}5^2}$ ". [I] (extracto de su diario). Cuando presentan esta expresión algebraica al profesor, este les proporciona un software gratuito de representación gráfica (Graph), instalado en el ordenador del aula, y les invita a estudiar la gráfica de su función (ver Figura 5).

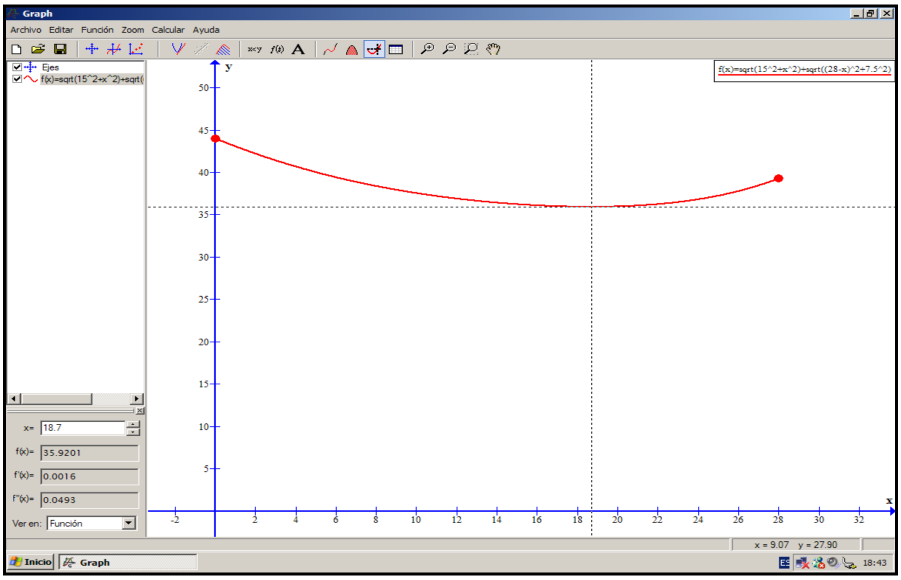


Figura 5. Imagen de la representación gráfica de la función, en su presentación final

Con este programa obtienen el punto mínimo de la gráfica, en *x*=18,7. A esta distancia del fondo izquierdo de la pista sitúan el nuevo cono que les permitirá obtener una pequeña ventaja en la carrera. Esta solución mejora (y no contradice) la obtenida inicialmente mediante la utilización de intervalos encajados, por lo que la consideran válida.

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Identificar el cono que minimice la distancia total recorrida. Situar un nuevo cono que minimice esta distancia.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Dividen en dos tramos (segmentos rectilíneos) el recorrido de la carrera. La velocidad del corredor es la misma en estos dos tramos. Relacionan estos segmentos con la hipotenusa de dos triángulos rectángulos.

La distancia total recorrida en la carrera será la suma de estos dos segmentos (hipotenusas).
¿Se usan representaciones?
Los cálculos iniciales se realizan a partir de un esquema (Figura 1). Los resultados se presentan mediante un diagrama de barras (Figura 2). Se representa la gráfica de la expresión algebraica planteada mediante el programa Graph (Figura 5).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se realizan cálculos aritméticos para determinar la distancia total de la carrera para cada cono (sin incluir). Finalmente, obtienen una expresión algebraica para calcular esta distancia, en [I].
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se aplica el Teorema del Pitágoras para calcular la distancia total de la carrera para cada cono. Se utiliza una sucesión de intervalos encajados para determinar la posición del nuevo cono que minimice la distancia recorrida en la carrera (Figura 3 y 4). Finalmente, se relaciona la distancia total recorrida en la carrera con la distancia a la que se encuentra el cono del fondo de la pista mediante una expresión algebraica, en [I]. Se utiliza software matemático para representar los resultados obtenidos (Figura 2) y la gráfica de la función (Figura 5).
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Justifican, por medición directa, que la distancia recorrida en la carrera depende del cono rodeado. Se utilizan dos procedimientos distintos (intervalos encajados y gráfica de su función) para situar el cono que minimice la distancia a recorrer en la carrera.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (longitud). Figuras planas elementales (triángulos rectángulos). Intervalo. Función de una variable.	Uso del Teorema de Pitágoras para calcular longitudes. Uso de TICs para elaborar gráficas y obtener el mínimo de una función (Excel y Graph). Cálculos aritméticos para obtener la distancia recorrida (Figura 1). Construcción de una sucesión de intervalos encajados para aproximar un valor (Figura 3 y 4). Generalización de propiedades y relaciones.	Uso de gráficos para justificar procedimientos (Figura 1) y presentar resultados (Figura 2, 3 y 5). Uso del lenguaje algebraico para formular el modelo, en [I].

Grupo B

Reconstrucción del proceso

Este grupo afirma, aunque sin justificar, que la distancia total recorrida en la carrera depende del cono rodeado. Dividen la carrera en dos segmentos rectilíneos, desde la salida hasta al cono, y desde el cono a la meta, que identifican con la hipotenusa de dos triángulos rectángulos, utilizando un esquema de la situación (ver Figura 1): "*Se trata de calcular la distancia entre la salida y un cono, y desde el cono hasta la canasta, con lo que se nos forman dos triángulos, en los que se aplica el Teorema de Pitágoras* [en la Figura 1 presentan su fórmula]*, y tras hacerla, se suman ambos resultados y hallamos la distancia total*" (extracto de su diario).

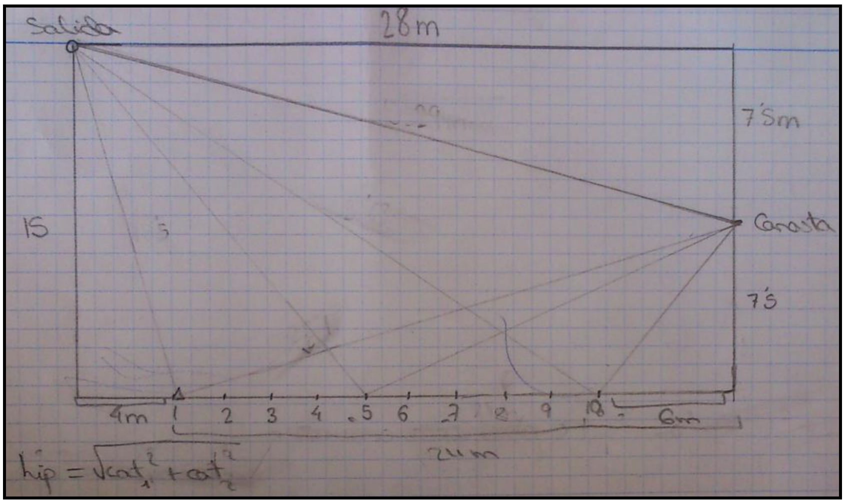


Figura 1. Esquema utilizado para identificar los elementos de los triángulos rectángulos necesarios para resolver el problema, incluido en su diario

Sus cálculos, para cada uno de los diez conos, se muestran en la Figura 2.

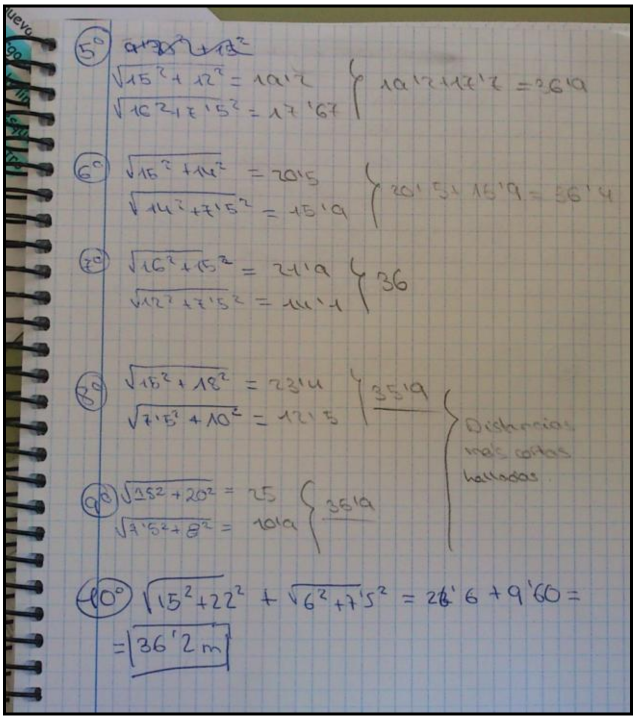


Figura 2. Cálculos de la distancia recorrida en la carrera según el cono rodeado, incluidos en su diario

Aproximan los resultados truncando a la primera cifra decimal, por lo que llegan a la conclusión de que la distancia más corta se encuentra al rodear el octavo y el noveno cono, 35,9 m. Al aproximar de este modo no se dan cuenta que la distancia no es la misma en el octavo cono (35,93 m) que en el noveno (35,96 m). No resuelven la segunda de las cuestiones planteadas: donde situar un nuevo cono para minimizar la distancia recorrida en la carrera.

Análisis del proceso

¿Se formula un problema que pueda dar respuesta a la situación original propuesta?
Identificar el cono que minimice la distancia total recorrida.
¿Se establece una correspondencia entre los elementos de la realidad y los del modelo matemático?
Dividen en dos tramos (segmentos rectilíneos) el recorrido de la carrera. La velocidad del corredor es la misma en estos dos tramos. Relacionan estos segmentos con la hipotenusa de dos triángulos rectángulos. La distancia total recorrida en la carrera será la suma de estos dos segmentos (hipotenusas).
¿Se usan representaciones?
Utilizan un esquema para identificar los dos triángulos rectángulos y sus elementos (Figura 1).
¿Se utiliza el lenguaje matemático?
Se presenta la fórmula del Teorema de Pitágoras (Figura 1). Se realizan cálculos aritméticos para determinar la distancia total de la carrera para cada cono (Figura 2).
¿Se utilizan procedimientos y herramientas matemáticas para resolver el modelo planteado?
Se aplica el Teorema del Pitágoras para calcular la distancia total de la carrera para cada cono. Se utiliza el truncamiento, y no el redondeo, para aproximar los resultados, lo que les lleva a pensar que la menor distancia se encuentra en el octavo y el noveno cono.
¿Se dan argumentos que justifiquen el proceso de resolución seguido y la adecuación de los resultados obtenidos a la situación real?
Se justifica el uso del Teorema de Pitágoras identificando los dos triángulos rectángulos mediante un esquema (Figura 1). No se responde a la última cuestión planteada en la tarea.

Análisis estructural del modelo

Conceptos	*Procedimientos*	*Lenguajes*
Magnitud y medida (longitud). Figuras planas elementales (triángulos rectángulos).	Uso del Teorema de Pitágoras para calcular longitudes. Cálculos aritméticos para obtener la distancia recorrida (Figura 2).	Uso de gráficos para justificar procedimientos (Figura 1). Uso del lenguaje algebraico para presentar el Teorema de Pitágoras (Figura 1). Uso del lenguaje aritmético para formular el modelo (Figura 2).

Anexo XVI

Transcripción del debate "La desaparición del portátil"

Primera sesión de trabajo en el aula

Transcripción			*Interpretación*	
1	P	¿Cómo lo estáis organizando todo?	*Intervención: Invitación a la participación*	*Rol: Observador*
2	A1	Las tres personas van a todas las aulas.	*Participación: Exposición de sus suposiciones y conjeturas*	
3	A2	Van juntos.		
4	A1	Hay que saber el número de aulas, lógicamente.		
5	A2	La media de los alumnos para saber cuántas mesas hay, por ejemplo… o sea en cada aula.		
6	A1	El tamaño del objeto porque… bueno, es un ordenador… [risas de sus compañeros] vale, vale.		
7	P	Más cosas [el profesor interrumpe así las risas].	*Invitación a la participación*	*Rol: Observador*
8	A1	Eeeeeh [duda]… el número de alumnos.	*Exposición*	
9	P	¿Cuándo decís la media de alumnos…?	*Petición de aclaración*	*Rol: Observador*
10	A1	Por persona… por aula.	*Aclaración*	
11	A2	Por aula. O sea, se supone que cada alumno tiene una mesa y un casillero.		
12	P	Entonces estáis teniendo en cuenta: el tamaño del objeto, aunque en este caso os dicen que es un portátil…, la media de alumnos para saber cuántos pupitres vais a registrar…	*Recapitulación*	*Rol: Observador*
13	A2	… y casilleros.	*Aclaración*	
14	P	… y casilleros, el número de aulas…, y habéis decidido que las tres personas vayan juntas, ¿no?	*Establecimiento de consenso*	*Rol: Gestor de recursos*
15	A1	Para que así cada aula sea más rápido [de	*Establecimiento de*	

		registrar].	*conjetura*	
16	P	¿Alguna idea más… de qué hacer? ¿Alguna variable más?	*Invitación a la participación*	*Rol: Observador*
17	A1	Una ecuación en plan… con todo…	*Exposición*	
18	A3	Una gráfica.		
19	A1	¿Se puede hacer gráfica con 15 cosas de estas? [se refiere a las ideas clave que han seleccionado: mesas, casilleros, número de aulas].	*Petición de aclaración*	
20	P	No lo sé. No se lo qué vais a hacer o dejar de hacer.	*Aclaración*	*Rol: Asesor*
21	A1	Pues todo. Es que es muy raro esto. No se puede [se refiere a resolver el problema].	*Exposición*	
22	A2	Si que se puede…		
23	P	Pero vamos a ver. Hay que olvidarse un poco… Tú me estás hablando de una gráfica, me estás hablando de las gráficas funcionales, y las gráficas funcionales solo tienen en cuenta dos variables…	*Explicación*	*Rol: Asesor*
24	A1	Ya.	*Asentimiento*	
25	P	… y aquí me parece que tienes más de una, ¿verdad?	*Establecimiento de consenso*	*Rol: Gestor de recursos*
26	A1	Más, más.	*Asentimiento*	
27	P	Entonces… Lo que no tenéis es que limitaros a pensar en lo último que habéis trabajado en clase [se refiere a la última unidad didáctica trabajada en la clase tradicional, antes de empezar la experiencia].	*Aconsejar*	*Rol: Asesor*
28	A1	Es verdad.	*Asentimiento*	
29	A2	No vamos a hacer gráficas.		
30	P	Entonces, ¿con todo eso qué vais a hacer? Vamos a ver, el tiempo, ¿el tiempo de que va a depender… de todo eso y cómo?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
31	A2	Espacio y tiempo que se tarda en registrar.	*Establecimiento de conjetura*	
32	P	¿Y eso como lo vais a plasmar de alguna manera?	*Petición de aclaración*	*Rol: Observador*
33	A1	Con una ecuación. Pues no sé, por ejemplo,	*Explicación*	

		tiempo igual a… número de aulas más…		
34	A2	… el tiempo que tardas en registrarlas.		
35	A1	Exacto.		
36	P	¿Por qué no empezáis a intentar escribir todo eso… plasmarlo de alguna manera?	*Aconsejar*	*Rol: Asesor*
37	A2	Hay que averiguar el espacio total y dividirlo entre la velocidad.	*Establecimiento de conjetura*	
38	P	Pero el espacio total, ¿qué es el espacio total?	*Petición de aclaración*	*Rol: Observador*
39	A2	Todo lo que hay que registrar.	*Aclaración*	
40	P	Pero a que os referís con lo del espacio, ¿la superficie de las aulas?	*Petición de aclaración*	*Rol: Observador*
41	A1	No, por ejemplo, una mesa y un armario.	*Aclaración*	
42	P	Pero eso no es espacio.	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
43	A1	Da igual. Como si lo fueran.	*Aclaración*	
44	P	Son cosas. ¿Una mesa y un armario?	*Petición de aclaración*	*Rol: Observador*
45	A2	No, el casillero de una mesa y el casillero de un armario.	*Aclaración*	
46	P	Entones eso que estáis contando, eso que ponéis vosotros, *e* [se refiere a lo que tienen escrito en un papel], ¿son espacios a registrar?	*Petición de aclaración*	*Rol: Observador*
47	A1	Número de espacios a registrar.	*Aclaración*	
48	P	Número de espacios a registrar…	*Recapitulación*	*Rol: Observador*
49	A1	Claro.	*Asentimiento*	
50	P	¿Y qué más? Una vez sepáis el número de espacios a registrar…	*Petición de explicación*	*Rol: Observador*
51	A2	El número de espacios a registrar y lo dividimos entre las velocidades.	*Formalización*	
52	P	Pero las velocidades, ¿de qué?	*Petición de aclaración*	*Rol: Observador*
53	A1	De que tardas en registrar cada espacio.	*Aclaración*	
54	A2	Eso nos dará lo que tarda una persona, luego si somos dos, tardaríamos la mitad…		
55	A1	… y si somos tres una tercera parte …		
56	A3	… en general.		

57	P	Muy bien. Luego, ¿vais a intentar plasmar todo eso que habéis dicho en una fórmula?	*Aconsejar*	*Rol: Asesor*
58	A1	Claro.	*Asentimiento*	

Segunda sesión de trabajo en el aula

		Transcripción	*Interpretación*	
1	P	¿Me podéis contar como va vuestro problema? [El alumno A3 empieza a leer lo que tienen escrito en un borrador. El profesor le interrumpe] No hace falta que lo leáis. Me lo vais contando.	*Invitación a la participación*	*Rol: Observador*
2	A2	Hay que sustituir las incógnitas por valores reales. [Los tres alumnos van dando, atropelladamente y sin orden, los valores de las estimaciones que han realizado]	*Exposición*	
3	P	Entonces hay dos tipos de aula: las de secundaria, bachiller y primaria, y las de infantil. Las de infantil tardamos de 1 a 7 minutos, y las de secundaria y demás, de 1 a 5 [se refiere al tiempo que se tarda en registrarlas]… Vale, más cosas.	*Recapitulación*	*Rol: Observador*
4	A1	Como hay 6 aulas de infantil, y…	*Exposición*	
5	A2	… multiplicamos seis aulas por los 7 minutos.		
6	A1	36 de bachiller…		
7	A2	… más primaria y secundaria…		
8	A1	… lo multiplicamos por 5 y lo sumamos… y como lo sumamos nos da 222 minutos [mira su borrador]… entonces 222 minutos lo dividimos entre tres… [vuelve a mirar su borrador] … pues nos da una hora y quince… y lo dividimos entre tres porque somos tres los que lo estamos buscando…		
9	A1	… pero eso suponiendo que está en las aulas.	*Establecimiento de conjetura*	

10	P	¿Habéis considerado el tiempo que se tarda en ir de aula a aula?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
11	A1	No.	*Aclaración*	
12	A3	Pues no, la verdad. [Siguen algunos comentarios divertidos sobre su capacidad para “teletransportarse” por no haber tenido en consideración esta cuestión]		
13	P	¿Y si en vez de 36 aulas hubieran 20?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
14	A1	Pues lo mismo, pero en vez de multiplicar por 36 multiplicas por 20.	*Aclaración*	
15	P	¿Y eso, de alguna manera, sabríais como plasmarlo… para que alguien, en su colegio, por ejemplo, pudiera averiguar cuánto tardaría? [se refiere al tiempo que tardarían en registrar el colegio]	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
16	A1	Lo que hemos hecho mentalmente lo escribimos en papel.	*Explicación*	
17	P	Pues me gustaría ver como formalizáis eso que habéis dicho…	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Asesor*
18	A2	En vez de 36, *x*.	*Explicación*	
19	A1	Y ponemos *x* igual al número de aulas.		
20	P	Pero no son todo x, porque me habéis dicho que hay aulas distintas.	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
21	A2	Pues ponemos *x* e *y*.	*Aclaración*	

Tercera sesión de trabajo en el aula

		Transcripción	*Interpretación*	
1	P	El otro día, ¿esa expresión que buscabais y que intentabais dar? [se refiere a la sesión anterior].	*Invitación a la participación*	*Rol: Observador*
2	A1	Pero eso es muy raro, porque espacio partido velocidad y espacio… no hay una medida, porque no vamos a poner metros cuadrados, eso no tiene sentido… no vas a buscar en cada metro cuadrado, o sea, con una misma vista, por decirlo así, ves todos	*Exposición*	

		los metros cuadrados…		
3	P	Estos son los cálculos que habéis hecho… ¿y ya está?, ¿se ha terminado el problema? ¿no habéis pensado hacer algo más?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
4	A1	Luego se lo sumamos a aquello [se refiere al tiempo que se tarda en recorrer el colegio según su ruta de búsqueda que se suma al tiempo estimado que se tarda en registrar las aulas].	*Exposición*	
5	A3	El de las aulas.		
6	P	¿Y se acabó?	*Invitación de reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
7	A3	Más lo que tardamos en ir de una a otra [se refiere al tiempo que se tarda de ir de un aula a otra].	*Exposición*	
8	P	Entonces, ¿qué matemáticas utilizáis en este problema?	*Petición de aclaración*	*Rol: Asesor*
9	A1	¿Cómo vas a resolver matemáticamente el problema?	*Petición de explicación*	
10	P	¿No se utiliza ninguna?	*Petición de aclaración*	*Rol: Asesor*
11	A1	Yo es que aquí en este problema no…	*Exposición*	
12	P	¿No ves que sea un problema de matemáticas?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Gestor de recursos*
13	A1	No [muy bajito]	*Asentimiento*	
14	P	¿A2? [pregunta directamente a ese miembro del grupo].	*Invitación a la participación*	
15	A2	No [contesta también muy bajito]	*Asentimiento*	
16	P	O sea, ¿qué os ha parecido entonces el problema?	*Invitación a la participación*	*Rol: Observador*
17	A1	Pues no lo sé… ¡Es que no tiene sentido este problema! [exclama enfadado] Porque tú cuando vas a buscar algo piensas, a ver, yo, ¿dónde he estado? Estaba aquí, aquí y allí. Vas allí, lo primero allí primero. O entras en un aula y dices, ¿habéis visto un portátil? No te pones a buscarlo con matemáticas.	*Exposición*	
18	P	Y tu A3 [pregunta directamente a ese miembro del grupo], ¿qué piensas?	*Invitación a la participación*	*Rol: Observador*

19	A3	Que no utilizamos matemáticas, o sea, no podemos,…hemos sumado… ¿Sumas? Y ya está.	*Exposición*	
20	P	Bueno, pues nada, Pensadlo… reflexionad sobre todo lo que hemos hablado hasta ahora y ya veremos… ya hablaremos sobre este problema.	*Aconsejar*	*Rol: Asesor y Gestor de recursos*

Sesión de exposición

Transcripción			*Interpretación*	
1	B1	Yo pienso que vuestro problema [se refiere a la resolución del grupo A] está muy bien, pero el nuestro te permite obtener un intervalo de tiempo mientras que en el vuestro solo da un tiempo determinado y pueden suceder muchas cosas, puedes encontrar algún problema durante el camino… y en el intervalo está recogido todos esos problemas que pueden haber, y en el vuestro solo da un tiempo exacto.	*Exposición*	
2	A1	Es el tiempo máximo.	*Aclaración*	
3	A2	Es registrar todo el colegio.		
4	B2	Ya, pero solo habéis dicho el tiempo máximo que tardaríais pero el mínimo no.		
5	A1	El mínimo es 0.		
6	A2	Entrar a la primera clase y que esté ahí [se refiere a la clase más cercana a la puerta de entrada al colegio].		
7	B2	Pero no…, ya solo lo que tardas en ir desde la puerta a la primera clase y registrarla ya no es 0.		
8	A2	6 minutos.		
9	B1	Pero no lo habéis dicho.		
10	P	¿Dar la solución en un intervalo es más realista? [la pregunta se lanza a ambos grupos].	*Petición de explicación*	*Rol: Moderador*
11	B1	Si, aunque la fórmula está muy bien… yo reconozco que su fórmula está muy bien	*Explicación*	

		porque te permite cambiar los datos y de hecho lo han hecho con la casa [se refiere al ejemplo que el grupo A ha presentado en su exposición como ejemplo de aplicación de su fórmula] y les da una solución, pero… yo pienso que es mejor un intervalo de tiempo.		
12	A1	De todas formas el mínimo no es 18 [se refiere al tiempo mínimo dado en la resolución del grupo A], es un minuto.	*Aclaración*	
13	B2	El mínimo no, era un… suponiendo que lo encontráramos en las primeras clases tardaríamos…		
14	A1	Ahí dice que es un intervalo, 18 y 49 [se refiere al tiempo mínimo y el tiempo máximo que da como solución el grupo A], entonces…		
15	B2	Es lo que tardas.		
16	A1	En un minuto no lo puedes encontrar [se refiere a que ellos consideran que en un minuto se podría encontrar el ordenador si estuviera en la primera clase que se registra].		
17	A3	No está dentro del intervalo.		
18	B1	Es una suposición.		
19	B2	Ellos utilizan una velocidad [se refiere al grupo B].		
20	A1	Es una velocidad normal de andar.		
21	P	El número de personas que buscan, eso vosotros no lo habéis tenido en cuenta [se refiere a los alumnos del grupo B].	*Exposición*	*Rol: Experto*
22	B2	Si porque…	*Aclaración*	
23	B3	Porque vamos juntos.		
24	B2	Claro, nosotros es que vamos todos juntos.		
25	P	Vosotros habéis supuesto que son tres personas las que buscan, ¿no? [preguntando a los alumnos del grupo A].	*Exposición*	*Rol: Experto*
26	B2	Para nosotros daría igual que fuera uno	*Aclaración*	

		que tres…porque solo va a entrar uno... hemos tenido en cuenta que solo va a entrar una persona a buscar el ordenador.		
27	A2	¿Y los otros dos mientras se esperan fuera? [los alumnos del grupo B sonríen].	*Petición de aclaración*	
28	B1	Claro.	*Aclaración*	
29	P	¿Y si fueran seis? [pregunta a los alumnos del grupo B].	*Petición de aclaración*	*Rol: Experto*
30	A1	Nosotros serían la mitad. Haces un ajuste en la fórmula y ya está.	*Aclaración*	
31	P	Habéis tenido en cuenta el número de habitaciones [se dirige a los alumnos del grupo A], que es lo mismo que ellos han tenido en cuenta, el número de aulas, el tiempo en registrar un escondrijo… ¿en eso hay alguna diferencia con lo que han hecho ellos? Vosotros habéis puesto tiempo en registrar un escondrijo [se dirige a los alumnos del grupo B] y vosotros habéis puesto 1 minuto cada 20 alumnos [se dirige a los alumnos del grupo A].	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*
32	B1	Es que nosotros lo hemos metido dentro, o sea, dentro de un minuto está…	*Aclaración*	
33	B2	… los armarios…		
34	B1	… los cajones…		
35	A1	Si en una clase hay 20 alumnos, en una mesa hay una especie de casillero y luego un armario [se refiere a las taquillas que hay en el aula para cada alumno], o sea, dos por personas [se refiere a dos escondrijos por alumno, el casillero del pupitre y la taquilla del armario], luego son más o menos 5 segundos en mirarlo y… o sea entre ir y mirar.	*Explicación*	
36	B2	Lo hemos hecho como la sabíamos hacer, no hemos utilizado ninguna fórmula.	*Exposición*	
37	P	Pero, ¿hay mucha diferencia entre lo vuestro y lo suyo? [se dirige a los alumnos del grupo A]	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*

38	B1	No porque… o sea, yo me he dado cuenta que aproximadamente da lo mismo [se refiere al resultado máximo dado como solución por su grupo, 49 minutos, y el dado por el grupo A, 58 minutos].	*Explicación*	
39	P	Con respecto al tiempo sí, lo cual puede suponer que no era descabellado ni lo vuestro [refiriéndose al grupo B] ni lo vuestro [refiriéndose al grupo A], os vais 9 minutos…	*Explicación*	*Rol: Experto*
40	P	…pero me refiero a la fórmula, respecto a cómo manejáis las variables…	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*
41	A1	Lo mismo, muy parecido, solo que nosotros hemos tomado unas cuantas variables más y las hemos agrupado en una fórmula, pero…	*Explicación*	
42	A2	Hemos hecho todo un poco más general.		
43	P	¿A qué os referís vosotros con más general? [pregunta a los alumnos del grupo A].	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
44	A1	Pues que lo puedes aplicar donde quieras… aquí [se refiere al colegio] o en una casa [como han mostrado en su exposición] o en un hospital.	*Aclaración*	
45	A2	Solo tienes que cambiar el valor de en la ecuación y ya está… en la fórmula.		
46	P	Vosotros [se dirige al grupo B], ¿si tuvierais que llevarlo a algún otro sitio os costaría mucho? [se refiere a su método de resolución] ¿Qué tendríais que hacer?	*Petición de explicación*	*Rol: Moderador*
47	B1	Las mismas suposiciones, pero…	*Explicación*	
48	B2	Dependiendo si tuviera pisos [se refiere a que el colegio tiene tres pisos y esta circunstancia la han tenido en cuenta en su resolución], del tiempo entre… o sea, habría que hacerlo… tomaríamos los mismos datos pero tendríamos que volver a hacerlo todo. […]		

49	P	¿A qué os referís con volver a hacerlo todo? ¿Tendríais que hacer nuevas mediciones?	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
50	B1	Con las mismas suposiciones.	*Aclaración*	
51	P	[Preguntando a los alumnos del grupo B] ¿Sabríais escribir, de una manera más generalizable, como dicen ellos [se refiere a los alumnos del grupo B], algo así, vuestra expresión? ¿Se podría mejorar? ¿Se os ha ocurrido mejorarla? ¿Se os ocurre ahora mejorarla después de haber visto lo que han hecho ellos? ¿Creéis que podríais con lo que tenéis ahí? [Revisan en el ordenador la expresión que han dado en la presentación].	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*
52	B2	Hemos tomado el tipo… o sea, cada aula, el tipo, el tamaño que tiene, luego hemos visto el tiempo que se tarda en registrar en cada tipo de aula y lo hemos multiplicado por el número de aulas que tenemos.	*Explicación*	
53	B1	Ahí en verdad hemos agrupado un poco las variables… igual podríamos haber desarrollado mucho más… y haber sacado una fórmula no igual pero parecida [se refiere a dar de una forma más explícita y detallada las variables que han tenido en cuenta y su relación a la hora de obtener lo que ellos han denominado "tiempo de tardanza en registrar las aulas"].		
54	P	La única diferencia es el número de personas que buscan, que eso no lo habéis tenido en cuenta, ellos si lo ponen como variable [refiriéndose al grupo A].	*Recapitulación*	*Rol: Experto*
55	B2	Pero yo lo que no entiendo es que si ellos buscan tres y nosotros buscamos uno, como es que da prácticamente el mismo tiempo. O sea, lo habéis dividido entre las tres personas… entonces os costaría el doble [se dirige a los alumnos del grupo B].	*Petición de aclaración*	

56	A1	Un tercio.	*Aclaración*	
57	B2	Ya, pero si lo hiciera una persona os costaría el triple.	*Petición de aclaración*	
58	A1	Sí.	*Asentimiento*	
59	P	¿Dónde puede estar la diferencia? [lanza la pregunta a ambos grupos].	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
60	B2	La velocidad.	*Aclaración*	
61	A1	La velocidad es una velocidad normal.		
62	B2	Pues vale… pues que ellos han utilizado… han mirado muchas más aulas.		
63	A1	Claro…		
64	B2	… capilla, baños, comedores y cosas de estas…		
65	A2	Comedores no.		
66	B2	… que nosotros no hemos tenido en cuenta. Ellos han tomado todas las aulas iguales.		
67	A2	Nosotros hemos generalizado las aulas, igual que el espacio, o sea, el tiempo de subir de piso a piso y entre clase y clase lo hemos puesto todo como un espacio [se refiere a que el grupo A ha distinguido entre tiempo que se tarda en subir los pisos y tiempo que se tarda en ir de clase en clase].		
68	P	¿Lo que habéis hecho es por término medio? [pregunta a los alumnos del grupo B].	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
69	A2	Si, tomar una media.	*Aclaración*	
70	A1	Exacto. Pero antes de sacar la fórmula teníamos mil suposiciones de esas y ahí sí que teníamos las aulas de informática, una cosa, las de no sé que, otra cosa, y otra cosa… ¿sabes? [se dirige al profesor] Cada una tenía su medida y dijimos, si tenemos que poner cada cosa, siete hojas para hacerlo, ¿sabes?		
71	P	¿El problema tal cual estaba enunciado en la ficha invitaba a utilizar las matemáticas?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*

		[lanza la pregunta a ambos grupos].		
72	A1	No [mueve la cabeza negativamente y le siguen el resto de compañeros del grupo].	*Aclaración*	
73	P	¿Se establecía alguna relación con las matemáticas de clase?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*
74	B1	Para nada.	*Aclaración*	
75	P	Ahora que lo habéis resuelto, ¿identificáis alguna de las matemáticas que hemos dado a lo largo de secundaria, en tercero, segundo o primero… con lo que habéis hecho?	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*
76	A3	Hacer fórmulas…	*Exposición*	
77	A2	Hummmm [duda]… hacer fórmulas, o sea… como una especie como de ecuación…		
78	P	¿Como parte del álgebra?	*Petición de aclaración*	*Rol: Experto*
79	B2	Nosotros hemos utilizado pues operaciones más simples…	*Exposición*	
80	B1	Pero lo hemos entendido mal… a lo mejor si hubiésemos agrupado mucho más los datos hubiésemos sacado… operaciones como divisiones…		
81	B2	No hemos hecho una fórmula		
82	P	¿A qué te refieres con eso? [pregunta a B1].	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
83	B1	Pues que nosotros hemos sumado tiempos… hemos, yo que se… hemos restado… hemos quitado las aulas.. el tiempo de las aulas que estaban desocupadas y todo eso, y que a lo mejor si hubiésemos agrupado mucho más los datos, llegando a una fórmula, hubiésemos sacado más… y aparecería el álgebra.	*Exposición*	
84	P	Vosotros os habéis limitado a operaciones aritméticas [se dirige a los alumnos del grupo A] cuando quizás, ellos [refiriéndose a los alumnos del grupo B] lo han generalizado y aparecen letras y aparece	*Recapitulación*	*Rol: Experto*

		álgebra, ¿no?		
85	B1	Si.	*Aclaración*	
86	P	Entonces, ¿vosotros veis las ecuaciones? [pregunta a los alumnos del grupo A]. Si que habéis visto ahí claramente que hay uso de lenguaje algebraico…	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
87	A1	Claramente no… al final, al final [hace un gesto significativo con la mano].	*Aclaración*	
88	B1	Pero esto al fin y al cabo [se refiere a lo que han hecho para resolver el problema] lleva a lo suyo [se refiere a la resolución del grupo A] y lo suyo es parte de lo nuestro, así que…	*Exposición*	
89	A2	Nosotros planteamos el problema como vosotros… [se dirige a los alumnos del grupo B].	*Aclaración*	
90	A1	Más o menos…		
91	A2	… y luego fuimos sacando la fórmula.		
92	B2	Sí, sí… si es lo mismo, hemos planteado el mismo problema…		
93	A2	La fórmula la hemos inventado. Primero hicimos el trabajo como vosotros y luego intentamos sacar la fórmula.		
94	P	Vale, respecto a eso, contarnos un poco cual es el proceso de… hasta que habéis llegado a la solución del problema… ¿por dónde empezasteis? Contarnos las etapas. [pregunta a los alumnos del grupo A].	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*
95	A1	El primer día intentamos la fórmula de espacio partido tiempo…	*Exposición*	
96	A2	Como lo del MRU… [se refiere al movimiento rectilíneo uniforme, que han trabajado en la materia de Física el curso anterior].		
97	A1	… como lo del MRU. Pero eso no tenía nada que ver…		
98	A3	No tiene futuro…		
99	A1	No tiene futuro. Empezamos con		

		suposiciones. Y era todo aritmética de esa.		
100	P	¿A qué te refieres con suposiciones?	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
101	A1	Pues del tipo, suponemos que lo encontramos al principio y… y suponemos que lo encontramos al final… y era todo sumar el tiempo de las aulas, el espacio y todo eso… al final, de todas las suposiciones, buscamos… de las suposiciones… de los datos… y encontramos que el número de escondrijos [se refiere a la variable que han denominado “escondrijos”] y tal, se podría multiplicar por el tiempo [se refiere al tiempo que se tarda en registrar un escondrijo] y por el número de aulas y ya teníamos todas las aulas, luego ya solo tienes que sumar el espacio porque tienes que desplazarte.	*Aclaración*	
102	P	¿Para llegar a eso?	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
103	A1	La fórmula esa la cambiamos muchas veces… porque no sabíamos cómo poner, por ejemplo, multiplicar ese por ese por ese [señala una hoja donde tiene escrita la fórmula empleada]…	*Aclaración*	
104	A2	Primero tienes que sacar los datos.	*Exposición*	
105	A3	Sacar todo…		
106	A2	Las variables que tienes que tener en cuenta y luego ya las que vas a descartar.		
107	A1	Luego ya las agrupas en una fórmula.		
108	B1	Primero, sobre todo, tener en cuenta que datos vas a utilizar, y luego después de ahí… realizar mediciones… y a partir de ahí pues crear una suposición, y a partir de la suposición llegar a una fórmula…		
109	P	¿Cómo llegasteis a la conclusión de que está fórmula era la buena?	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
110	A1	Pues haciéndola muchas veces.	*Aclaración*	

111	P	¿A qué te refieres?	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
112	A1	Sustituirla y ver que… yo que se… primero le íbamos a poner que el número de personas también dividía la velocidad y el espacio, y dijimos que no, la velocidad y el espacio lo recorren todos, pues eso lo quitamos, y poco a poco, quitando cosas así y comprobando el resultado… que no de una cosa descabellada.	*Aclaración*	
113	P	¿A qué te refieres con una cosa descabellada?	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
114	A1	Que por ejemplo te diera un minuto todo el colegio, ¿sabes? Porque a lo mejor tu divides entre una cosa y luego entre otra y ya se te queda en muy poco tiempo… o multiplicas por unas cosas mal y te da mucho tiempo…[duda y calla]	*Aclaración*	
115	P	Entonces cuando os dio 58 minutos pensasteis que ese era un resultado más o menos adecuado…	*Establecimiento de consenso*	*Rol: Experto*
116	A3	Sí.	*Asentimiento*	
117	P	Que se ajustaba a la realidad. ¿Por qué pensabais que se ajustaba a la realidad?	*Petición de explicación*	*Rol: Moderador*
118	A3	Pues porque… [duda].		
119	P	¿Si os hubiera salido 15 minutos?	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
120	A3	Pues demasiado poco.	*Aclaración*	
121	P	¿Y hora y media?	*Petición de aclaración*	*Rol: Moderador*
122	A1	Pues también podría ser.	*Aclaración*	
123	A3	Bueno… [con tono resignado].		
124	P	Bueno, podría ser aceptable.		
125	A3	Sí.		
126	P	Es una cuestión de… ¡parece razonable! [enfatiza].	*Establecimiento de consenso*	*Rol: Experto*
127	A1	Eso al final… o sea, ves que la fórmula está bien y crees que te da algo que es razonable…		

128	P	¿Y vosotros? [pregunta ahora a los alumnos del grupo B].	*Petición de explicación*	*Rol: Moderador*
129	B2	Nos cuesta cinco minutos registrar un aula de 20 personas… entonces sabiendo que tardas un minuto aproximadamente… es lo que… más o menos el número de aulas te da el tiempo…	*Explicación*	
130	B1	No puede dar el resultado final 15 minutos en registrar… cuarenta y pico de aulas [se refiere a las aulas que hay en el colegio].		
131	P	¿Os ha parecido interesante la actividad en sí? ¿Al principio que os pareció? [se dirige a ambos grupos].	*Invitación a la reflexión*	*Rol: Moderador*
132	A1	Al principio no, y al final sí…	*Exposición*	
133	B1	Es que al principio cuando lees el problema no ves nada… pero luego…		
134	B2	¡Me ha tocado lo peor! [sonríe].		
135	A1	A ver, yo, lo que hago cuando he de buscar algo es, ¿dónde está? Y entonces vas y lo buscas [dice bajito]… no empiezas a pensar en matemáticas, luego ya… luego sí… [sonríen todos].		
136	B1	Y a veces cuando haces las cosas no te das cuenta lo que estás haciendo… luego dices…		
137	B2	Realmente este problema parecía… si lo lees una vez dices, ¡huy! Este es más fácil, como por ejemplo el que pusisteis de Terra Mítica, pero realmente el de Terra Mítica te daban más datos… entonces aquí tenias que sacar todos tu, hacer más suposiciones… es diferente…		

Anexo XVII

Calificación de los grupos mediante la rúbrica de evaluación

A continuación detallaremos la evaluación que hemos realizado de los grupos de alumnos a partir de nuestra rúbrica (ver Anexo VI). La calificación de cada grupo en cada una de las categorías propuestas así como su puntuación final puede verse en la Tabla 1.

En la categoría *Planteamiento y resolución* calificamos con la máxima puntuación (un 5) a aquellos grupos que no solo han realizado un proceso de resolución adecuado y dan una respuesta correcta a la pregunta o la situación planteada, sino que además incorporan elementos de complejidad que les permiten ir más allá y obtener modelos generalizables y reutilizables. El grupo A en la tarea “La sombra en el patio de recreo” tiene en cuenta en su resolución elementos como la selección del tipo de árbol según la forma de la sección plana de su copa y la distribución óptima de los árboles en el patio. El grupo A en “La desaparición del portátil” obtiene una expresión formal en la que incluye todas aquellas variables necesarias para su aplicación en otras situaciones similares a la planteada. El grupo A en “El parque de atracciones” obtiene un modelo formal que permite, a partir de los datos recogidos en tablas, realizar una ruta personalizada. También el grupo C en “Cordones” y el grupo A en “La carrera” diseñan modelos formales que resuelven el problema y permiten su generalización. En “Un nuevo comedor” los grupos A y B consideran la forma y dimensiones de mesas y bandejas en su organización, lo que repercute directamente en el número de comensales y su distribución. En las tareas basadas en las MEAs se calificó con un 5 a aquellos grupos que diseñan sistemas de puntuación fácilmente aplicables y reutilizables (grupo B en “Selección de personal” y grupo B en “Hábitos de estudio”). En “El mejor colegio” ninguno de los grupos plantea una normalización de las variables consideradas utilizando criterios de proporcionalidad (salvo el grupo C, que hace algún intento en esta dirección y que realiza una ponderación más detalla de las variables utilizando porcentajes, como puede verse en el Anexo X), limitándose a asignar una puntuación del 1 al 6, desde el peor al mejor colegio en cada variable, sin tener en cuenta su puntuación original. Por ello ninguno de los grupos en esta tarea se calificó con la máxima puntuación.

Las puntuaciones más bajas en esta categoría se corresponden a grupos que presentan errores en su proceso de resolución o dan una solución que no es adecuada. Por ejemplo, los grupos B y C en “La sombra en el patio de recreo” se limitan a obtener el número de árboles necesarios para sombrear un área del patio predeterminada. Utilizan solo la forma circular para idealizar la sección plana de la copa del árbol escogido, indistintamente de su forma en la realidad, y solo consideran su longitud para calcular el área de la sombra proyectada. Presentan también errores en sus cálculos y en el caso del grupo D la respuesta no se adecua a las dimensiones reales del patio (para más detalles ver Anexo VII, grupos B y C). También los grupos C y D en “El parque de atracciones” realizan una simplificación excesiva de la realidad que les lleva a obtener un modelo pobre, en el que solo hacen una estimación de la duración de la visita, sin entrar en una selección detallada de las variables que pueden influir en su cálculo. El grupo B en “La carrera” da una solución incorrecta a la primera de las cuestiones planteadas (al redondear los resultados por truncamiento, utilizando una sola cifra decimal, llegan a una conclusión errónea) y deja sin contestar la segunda pregunta de la tarea (ver Anexo XV, grupo B). El grupo B en “El mejor colegio” presenta un sistema de puntuación que resulta arbitrario, difícilmente reutilizable, y en el que se prescinden de variables, sin justificación alguna (ver Anexo XIV, grupo B).

En la categoría *Presentación y comunicación* calificamos con un 5 a aquellos grupos que detallan claramente sus procesos de resolución, justifican sus resultados, e incluyen elementos que facilitan y enriquecen su comprensión y comunicación. El grupo A en “La sombra en el patio de recreo” utiliza tablas, esquemas y dibujos en su presentación con diapositivas digitales para mostrar sus procedimientos y los resultados obtenidos, de tal manera que sus explicaciones resultan fáciles de seguir por sus compañeros. Ocurre lo mismo en las presentaciones de los grupos A y B en “La desaparición del portátil”, los grupos A y B en “El parque de atracciones”, los grupos A y B en “Un nuevo comedor", y el grupo C en "El mejor colegio". En contrapartida, otros grupos presentan sus resultados sin acompañarlos de los cálculos y/o esquemas que los justifiquen (por ejemplo, el grupo C en "La sombra en el patio de recreo", o los grupos C y D en "El parque de atracciones").

En *Iniciativa y autonomía* calificamos con la máxima puntuación a aquellos grupos que no requirieron de la ayuda del profesor y todos sus miembros trabajaron de forma activa y conjunta en su resolución (como ocurrió en los grupos B y C en "Cordones" y los grupos A y B en "Un nuevo comedor"). En aquellos grupos donde el profesor intervino a petición de los alumnos la calificación fue menor (por ejemplo, en el grupo A en "La desaparición del portátil", el profesor sugirió a los alumnos la posibilidad de formalizar mediante el lenguaje algebraico el modelo inicialmente presentado, como puede verse en la transcripción de su actuación con este grupo en el Anexo XVI). En algunos grupos se constató, a través de la observación directa del profesor durante la actividad en el aula, el trabajo desigual de sus miembros, lo que redundó en una mala calificación en este apartado (por ejemplo, el grupo C en "La sombra en el patio de recreo", donde el trabajo fue casi íntegramente realizado por uno de los miembros del grupo mientras los dos restantes tuvieron una actitud pasiva y poco participativa).

Tabla 1. Calificación de los grupos según la rúbrica de evaluación

		Planteamiento y resolución	*Presentación y comunicación*	*Iniciativa y autonomía*	*Puntuación final (sobre 10)*
La sombra en el patio de recreo	A	5	5	4	9,5
	B	2	3	3	5
	C	2	2	2	4
La desaparición del portátil	A	5	5	4	9,5
	B	4	5	4	8,5
El parque de atracciones	A	5	5	4	9,5
	B	4	5	4	8,5
	C	2	2	3	4,5
	D	2	2	3	4,5
Un nuevo comedor	A	5	5	4	9,5
	B	5	5	4	9,5
	C	4	3	4	7,5
Cordones	A	4	5	4	8,5
	B	4	5	5	9
	C	5	5	5	10
	D	4	3	4	7,5
Hábitos de estudio	A	4	4	4	8
	B	5	5	4	9,5
Selección de personal	A	4	4	4	8
	B	5	4	4	9
	C	2	3	4	5,5
El mejor colegio	A	3	4	4	7
	B	2	3	3	5
	C	4	5	4	8,5
La carrera	A	5	5	4	9,5
	B	2	2	4	4,5