UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE VALENCIA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA APLICADA

SOLUCIONES NUMÉRICAS ESTABLES DE SISTEMAS ACOPLADOS MIXTOS DE ECUACIONES EN DERIVADAS PARCIALES

TESIS DOCTORAL

Presentada por:
María Consuelo Casabán Bartual
Dirigida por:
Dr.D. Lucas Jódar Sánchez

Valencia, abril de 2002

D. LUCAS JÓDAR SÁNCHEZ, Catedrático de Universidad del Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia

CERTIFICA

Que la presente memoria *Soluciones Numéricas Estables de Sistemas Acoplados Mixtos de Ecuaciones en Derivadas Parciales* ha sido realizada bajo su dirección, en el Departamento de Matemática Aplicada de la Universidad Politécnica de Valencia, por la licenciada MARÍA CONSUELO CASABÁN BARTUAL y constituye su tesis para optar al grado de Doctor en Ciencias Matemáticas.

Para que conste, en cumplimiento de la legislación vigente, autoriza la presentación de la referida tesis doctoral ante la comisión de Doctorado de la Universidad Politécnica de Valencia, firmando el presente certificado.

Valencia, abril de 2002

Fdo: Lucas Jódar Sánchez

A la meua família, en especial a ma mare per haver-me animat a realitzar els estudis de 3er cicle

“ Tended a ser un poco aprendices de todo, para vuestro bien, y maestros en algo, para bien de los demás ”.

“ No existe problema alguno en ingeniería que no esté subordinado a una imagen o representación de carácter matemático, cuya solución, fácil o difícil, significará el total dominio del campo correspondiente. La Matemática es la ciencia de los esquemas aplicables a tales problemas ”.

P. Puig Adam

Agradecimientos

Cuando hace unos años empecé mi andadura por el difícil camino de la investigación, siendo becaria de este departamento y dirigida por mi apreciado profesor Dr. Lucas Jódar, nunca imaginé, que tal día como hoy, llegaría a escribir estas letras, que de algún modo concluyen mis estudios de tercer ciclo y que serán el principio de una nueva etapa.

No sin antes terminar, quisiera hacer constar en estas líneas, mi más sincero agradecimiento al Dr. Lucas Jódar, mi director de tesis, por su ayuda y constancia en la realización de la misma, y por transmitirme sus innumerables conocimientos sobre cómo investigar y ser un buen docente.

Así también, agradezco a mis amigos Dolors, Lola y Emilio su constante apoyo y ánimo.

Resumen

Esta memoria trata sobre la construcción de soluciones numéricas estables de sistemas parabólicos e hiperbólicos acoplados. Las etapas características de esta memoria son: la construcción de soluciones discretas utilizando diferencias finitas y una técnica de separación de variables discreta, el estudio de la estabilidad y la consistencia de la solución calculada, y el empleo de un método de proyecciones para extender los resultados obtenidos a una clase más general de funciones de valores iniciales.

Mediante la aplicación de un método de separación de variables discreto, la solución numérica propuesta a los problemas, es la solución exacta de un sistema en diferencias acoplado, que se obtiene de la discretización en diferencias finitas del sistema acoplado en derivadas parciales continuo.

Las condiciones de contorno de los problemas aquí tratados son acopladas y de tipo no-Dirichlet.

Nuestro enfoque metodológico es alternativo frente al tratamiento algebraico más tradicional que escribe el esquema matricialmente, y ofrece la ventaja de no tener que resolver los sistemas algebraicos de gran tamaño con bloques matriciales que aparecen en el método de diferencias finitas estándar, gracias al empleo de un método de separación de variables discreto.

Las técnicas de desacoplamiento no son aplicables salvo para hipótesis excesivamente restrictivas. Aún desacoplando la ecuación en derivadas parciales, las condiciones de contorno no tienen porqué estarlo, por lo que las técnicas de desacoplamiento son poco convenientes.

Los problemas tratados modelizan, entre otros, problemas de difusión, conducción nerviosa y problemas del armamento (capítulo 2), calentamiento por microondas, óptica, cardiología y flujos del suelo (capítulo 3).

Resum

Aquesta memòria tracta sobre la construcció de solucions numèriques estables de sistemes parabòlics e hiperbòlics acoblats. Les etapes característiques d'aquesta memòria són: la construcció de solucions discretes utilitzant diferències finites i una tècnica de separació de variables discreta, l'estudi de l'estabilitat i la consistència de la solució calculada, i l' ús d'un mètode de projeccions per a estendre els resultats obtinguts a una classe més general de funcions de valors inicials.

Mitjançant l'aplicació d'un mètode de separació de variables discret, la solució numèrica proposta als problemes, és la solució exacta d'un sistema en diferències acoblat, que s'obté de la discretització en diferències finites del sistema acoblat en derivades parcials continu.

Les condicions de contorn dels problemes ací tractats són acoblades i de tipus no-Dirichlet.

El nostre enfocament metodològic és alternatiu front al tractament algebraic més tradicional que escriu l'esquema matricialment, i ofereix l'avantatge de no haver de resoldre els sistemes algebraics de gran tamany amb blocs matricials que apareixen en el mètode de diferències finites estàndard, gràcies a l' ús d'un mètode de separació de variables discret.

Les tècniques de desacoblament no són aplicables excepte per a hipòtesis excessivament restrictives. Fins i tot desacoblant l'equació en derivades parcials, les condicions de contorn no tenen per què estar-ho, per la qual cosa les tècniques de desacoblament són poc convenients.

Els problemes tractats modelen, entre altres, problemes de difusió, conducció nerviosa i problemes de l'armament (capítol 2), calfament per microones, òptica, cardiologia i fluixes del sòl (capítol 3).

Abstract

This memory deals with the construction of stable numerical solutions of coupled parabolic and hyperbolic systems. The characteristic stages of this memory are: the construction of discrete solutions using difference schemes and a discrete separation of variables method, the study of the stability and the consistency of the calculated solution, and the use of a method of projections in order to extend the obtained results to a more general class of initial value functions.

By the application of a discrete separation of variables method, the proposed numerical solution to the problems, is the exact solution of a coupled difference system, which is obtained from the discretization in finite differences of the coupled mixed partial differential system.

The boundary conditions of the problems which have been dealt here are coupled and of non-Dirichlet type.

Our methodological approach is alternative to the more traditional algebraic treatment which writes the scheme in matrix form, and offers the advantage of not having to solve the big-sized algebraic systems with matrix blocks appearing in the standard difference method, thanks to the use of a discrete separation of variables method.

The uncoupled techniques aren't applied except for excessively restrictive hypotheses. Even uncoupling the partial differential equation, the boundary conditions don't necessarily have to be so, hence the uncoupled techniques aren't very suitable.

The treated problems model, among others, diffusion problems, nerve conduction and armament models (chapter 2), microwave heating processes, optics, cardiology and soil flows (chapter 3).

Índice general

Capítulo 1

Introducción, motivación y preliminares

0.4pt0.4pt 0pt0.4pt

1.1. Introducción y motivación

Esta memoria trata sobre la construción de soluciones numéricas estables de sistemas parabólicos e hiperbólicos acoplados con condiciones de contorno acopladas. Las etapas características de esta memoria son: la construcción de soluciones discretas utilizando diferencias finitas y una técnica de separación de variables discreta, el estudio de la estabilidad y la consistencia de la solución calculada, y el empleo de un método de proyecciones para extender los resultados obtenidos a una clase más general de funciones de valores iniciales.

En este sentido, la memoria es una continuación de las tesis [28, 41], aunque en este trabajo la ecuación matricial en derivadas parciales de los sistemas parabólicos considerados es más general y además se incluye el estudio de sistemas hiperbólicos.

Debido a la complejidad que involucra el acoplamiento de los sistemas matriciales, los métodos usuales para la resolución de estos problemas transforman el sistema acoplado en un nuevo sistema desacoplado para poder abordarlo escalarmente [9, 42]. Estas técnicas de desacoplamiento, a pesar de ser tan utilizadas, tienen desventajas bien conocidas tales como: asumir hipótesis innecesarias, incrementar el orden de derivabilidad del sistema desacoplado, ser técnicas de aplicación limitada ya que la matriz de coeficientes tiene que ser simétrica, y otras [8]. Además el desacoplamiento de la ecuación en derivadas parciales no permite desacoplar las condiciones de contorno.
Nuestra oferta metodológica es alternativa frente al tratamiento tradicional que trata de resolver el problema algebraico discretizado involucrando matrices por bloques cuyo espectro es muy difícil de conocer o controlar, y ofrece la ventaja de no tener que resolver los sistemas algebraicos de gran tamaño con bloques matriciales que aparecen en el método de diferencias finitas estándar, gracias al empleo de un método de separación de variables discreto. Además la construcción de las soluciones de los problemas planteados se hace de forma exacta.

La memoria está estructurada en dos capítulos. En el capítulo 2 se construyen soluciones numéricas estables para sistemas parabólicos, considerando primeramente, condiciones de contorno acopladas particulares y después de tipo más general. El estudio de estos dos casos se ha desarrollado en los apartados 2.1 y 2.2. Los sistemas parabólicos estudiados son del tipo:

$$\left.\begin{array}{rcll} u_t(x,t) - Au_{xx}(x,t) - Bu(x,t) & = & 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) & = & 0, & t > 0, \\ Cu(1,t) + Du_x(1,t) & = & 0, & t > 0, \\ u(x,0) & = & F(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{array}\right\}, \tag{1.1}$$

$$\left.\begin{array}{rcll} u_t(x,t) - Au_{xx}(x,t) - Bu(x,t) & = & 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ A_1\, u(0,t) + B_1\, u_x(0,t) & = & 0, & t > 0, \\ A_2\, u(1,t) + B_2\, u_x(1,t) & = & 0, & t > 0, \\ u(x,0) & = & F(x), & 0 \leq x \leq 1, \end{array}\right\}, \tag{1.2}$$

siendo A, B, C, D, A_k, B_k, $k = 1, 2$, matrices cuadradas en $\mathbb{C}^{s\times s}$, y la incógnita u y F vectores en $\mathbb{C}^s$.

Los sistemas mixtos difusivos de ecuaciones en derivadas parciales acoplados del tipo (1.1) y (1.2) aparecen en el estudio de muchos campos de la ciencia tales como, geomecánica [42]; física-química; mecánica [36]; en problemas de dispersión de mecánica cuántica [2, 31]; en la modelización termoelastoplástica; en problemas de conducción nerviosa [30, 17, 30]; en modelos del armamento [14]; en el encendido de una única componente de un gas no reactivo en un recipiente cilíndrico cerrado con conservación de masa [27]; o en el estudio de la muerte cardíaca repentina como consecuencia de la fibrilación ventricular [48].

Las soluciones numéricas discretas para la ecuación

$$u_t(x,t) - Au_{xx}(x,t) = 0\,, \tag{1.3}$$

considerándose las mismas condiciones de contorno que en los problemas (1.1) y (1.2), han sido tratadas en [26], y sus soluciones analítico-numéricas en [23].

La enorme profusión de los procesos de difusión se debe en parte, a la gran sencillez de las dos ecuaciones que se requieren para poder establecer la ecuación de difusión. La primera de ellas, denominada *Primera ley de difusión*, afirma que *"la materia tiende a repartirse de forma natural en el interior del sistema que lo contiene"*. Aquí el concepto de materia debe entenderse en su sentido más amplio, ya que nos referiremos por igual a las moléculas de una sustancia, que tienden a desplazarse de las zonas de mayor concentración hacia las zonas de menor concentración; o a las cargas, que se desplazan en contra de un gradiente de potencial eléctrico; o al calor, que se reparte en un sólido.
La segunda ecuación de difusión, denominada *Ley de la conservación de la materia/energía*, o también *Ecuación de continuidad*, es una ecuación de cumplimiento más general que la

anterior pues afirma que, *"dado un volumen arbitrario, la variación de la cantidad de materia es igual a lo que entra en el volumen, menos lo que sale, más lo que se crea en su interior, menos lo que se destruye".*
Como consecuencia de lo que se ha comentado, se concluye que un problema de difusión es de naturaleza intrínsecamente escalar, debido a que no concierne más que a la descripción de una determinada sustancia cuya caracterización se realiza por medio de una magnitud escalar como puede ser la concentración. A pesar de que no existe ninguna magnitud conocida que verifique la ecuación de difusión, sí que existe relación entre la difusión de distintas magnitudes en un mismo medio. Esto nos va a permitir expresar el modelo de un problema mediante una ecuación de difusión matricial, donde cada entrada del vector incógnita será una de las magnitudes cuya difusión simultánea estamos estudiando.
El acoplamiento entre varios problemas escalares se puede expresar de forma más elegante mediante una formulación matricial. Atendiendo a [42, 34, 46] podemos modelar diferentes fenómenos de conducción mediante el siguiente sistema general, transcrito en su versión unidimensional:

$$\frac{\partial}{\partial t}(AU) + \frac{\partial}{\partial x}(BU) - \frac{\partial}{\partial x}\left(D\frac{\partial U}{\partial x}\right) + EU + F = 0\,, \qquad x \in \Omega\,,\ \ t > 0\,. \tag{1.4}$$

El vector incógnita U es el vector de variables de estado, que en el caso más general contendrá la temperatura, el potencial eléctrico, etc. A, B, D y E son matrices de coeficientes y F es un vector de términos fuente.
Notemos que si A es invertible, D no depende de x, $B = 0$ y $F = 0$, entonces la ecuación de difusión matricial (1.4) se transforma en la ecuación de los problemas (1.1) y (1.2) que se estudian en el capítulo 2 de esta memoria, pero particularizada a la matriz $A^{-1}D$. Estas condiciones corresponden a problemas físicos en los que no tenemos convección ($B = 0$), no hay términos fuente ($F = 0$), existen especies que se transforman en otras especies ($E \neq 0$), y el medio es homogéneo (D es constante). Estas condiciones son las que se estudian en la presente memoria.

Esta memoria concluye con el capítulo 3 en el que construyen soluciones numéricas estables de sistemas hiperbólicos acoplados del tipo:

$$\left.\begin{array}{rcll} Au_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) & = & 0, & 0 < x < 1,\ t > 0, \\ u(0,t) & = & 0, & t > 0, \\ Bu(1,t) + Cu_x(1,t) & = & 0, & t > 0, \\ u(x,0) & = & F(x), & 0 \le x \le 1, \\ u_t(x,0) & = & V(x), & 0 \le x \le 1. \end{array}\right\} , \tag{1.5}$$

siendo A, B, C matrices cuadradas en $\mathbb{C}^{s\times s}$, y la incógnita u y F, V vectores en $\mathbb{C}^s$.
Los sistemas hiperbólicos fuertemente acoplados de ecuaciones en derivadas parciales del tipo (1.5) surgen en procesos de calentamiento por microondas [32], [15], óptica [10], cardiología [47], flujos del suelo [42, 49], y otros.
0.4pt0.4pt 0pt0.4pt

1.2. Preliminares

A lo largo del trabajo vamos a utilizar una serie de definiciones, notación y resultados que creemos conveniente enunciar en este apartado de preliminares para facilitar su lectura.

Definición 1.1 *Si v es un vector en $\mathbb{C}^m$, denotamos por $\|v\|_2 = \left(v^H v\right)^{1/2}$ la norma euclídea usual de v. Si A es una matriz en $\mathbb{C}^{n\times m}$, su norma 2 la denotamos por $\|A\|$, y está definida por* [13, pág. 56]

$$\|A\| = \sup_{v\neq 0} \frac{\|A\,v\|_2}{\|v\|_2}\,.$$

Definición 1.2 *Si v es un vector en $\mathbb{C}^m$, su norma infinito la denotamos por $\|v\|_\infty$, y está definida por* [13, pág. 52]

$$\|v\|_\infty = \max_{1\leq j\leq m} |v_j|\ .$$

Definición 1.3 *Una matriz A se dice convergente si la sucesión $\{A^n\}$ tiende a la matriz nula cuando $n \longrightarrow \infty$.*

El conjunto de todos los *valores propios* de una matriz A en $\mathbb{C}^{m\times m}$ lo denotaremos por $\sigma(A)$, y el *radio espectral* de A definido por el conjunto

$$\max\left\{|z|\,;\,z\in\sigma(A)\right\}\ ,$$

lo denotaremos por $\rho(A)$.
El *núcleo de una matriz A*, se denota por $\operatorname{Nuc} A$, y la *imagen de una matriz A* por $\operatorname{Im} A$.

Una caracterización del concepto de matriz convergente nos la proporciona el *lema 5.2* de [4, pág. 163]:

LEMA 1.1

$$A\ \textit{ es convergente} \Longleftrightarrow \rho(A) < 1\,.$$

Definición 1.4 [3]. *Dadas dos sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_n\}$ tales que $b_n \geq 0$ para todo n, escribiremos*

$$a_n = O(b_n)\,,$$

si existe una constante $M > 0$ tal que $|a_n| \leq M b_n$ para todo n. Por tanto, una ecuación de la forma

$$a_n = c_n + O(b_n)$$

significa que

$$a_n - c_n = O(b_n)\,.$$

En este trabajo utilizaremos un tipo de inversa generalizada, *la inversa generalizada de Moore-Penrose*, que nos interesará para expresar en forma cerrada, finita y computable, tanto la condición de compatibilidad como la solución general del sistema algebraico:

$$A\,x = b\,, \qquad A\in\mathbb{C}^{m\times n}\,,\ x\in\mathbb{C}^n\,,\ b\in\mathbb{C}^m. \tag{1.6}$$

Definición 1.5 *Si $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$, entonces su inversa generalizada Moore-Penrose se denota por $A^\dagger$ y se define como la única matriz que cumple:*

(i) $AA^\dagger A = A$

(ii) $A^\dagger AA^\dagger = A^\dagger$

(iii) $\left(AA^\dagger\right)^H = AA^\dagger$

(iv) $\left(A^\dagger A\right)^H = A^\dagger A$

donde A^H denota la traspuesta conjugada de A.

Un estudio más detallado de las propiedades y aplicaciones de este concepto se puede ver en [6] y [39].

Para calcular las soluciones de (1.6) necesitaremos métodos eficaces para el cálculo de $A^\dagger$, como por ejemplo el programa *Matlab*, véase [16].

TEOREMA 1.1 (Teorema de Mitra) [39]. *Sea $A \in \mathbb{C}^{m\times n}$ y sea $A^G \in \mathbb{C}^{n\times m}$ una inversa generalizada de A. Sea $b \in \mathbb{C}^m$, entonces el sistema*

$$Ax = b\,,$$

es compatible (i.e. tiene solución) si y sólo si

$$AA^G b = b\,.$$

Además en este caso, la solución general de $Ax = b$ viene dada por

$$x = A^G b + (I - A^G A)z\,,$$

donde z es un vector arbitrario de $\mathbb{C}^n$.

Observación 1.1 [6]. *Los siguientes resultados relacionan el núcleo y la imagen de una matriz:*

$$\operatorname{Nuc} B = \operatorname{Im}\left(I - B^\dagger B\right)\ ; \quad \operatorname{Im} B = \operatorname{Nuc}\left(I - BB^\dagger\right)\,.$$

Definición 1.6 [13, pág. 311]. *Un subespacio E de $\mathbb{C}^m$ es invariante por la matriz $A \in \mathbb{C}^{m\times m}$ si*

$$\forall x \in E \Longrightarrow Ax \in E\,.$$

Observación 1.2 *Si tenemos $v \in \mathbb{C}^m$ tal que $v \in \operatorname{Nuc} B$ y además $\operatorname{Nuc} B$ es un subespacio invariante por A entonces $A^j v \in \operatorname{Nuc} B$, $\forall j \geq 0$, i.e. $BA^j v = 0$, $\forall j \geq 0$. En efecto, puesto que $v \in \operatorname{Nuc} B$ y $\operatorname{Nuc} B$ es un subespacio invariante por A tenemos que $Av \in \operatorname{Nuc} B$. Si ahora utilizamos de nuevo que $\operatorname{Nuc} B$ es un subespacio invariante por A pero tomando $Av \in \operatorname{Nuc} B$ se obtiene que $A^2 v \in \operatorname{Nuc} B$. Por recurrencia, razonando análogamente se obtiene que $A^j v \in \operatorname{Nuc} B$, $\forall j \geq 0$.*

Observación 1.3 *Como consecuencia de la observación 1.1 se obtienen las siguientes equivalencias:*

$$\operatorname{Nuc} B \ \textit{ subespacio invariante por la matriz } A \iff BA\left(I - B^\dagger B\right) = 0\,,$$
$$\operatorname{Im} B \ \textit{ subespacio invariante por la matriz } A \iff \left(I - BB^\dagger\right) AB = 0\,.$$

LEMA 1.2 [23]. *Sean M y N matrices en $\mathbb{C}^{s\times s}$, entonces:*

$$\begin{aligned}&\operatorname{Nuc} M \cap \operatorname{Nuc} N \\ &\qquad = \operatorname{Im}\left\{\left(I - M^\dagger M\right)\left\{I - \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]^\dagger \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]\right\}\right\}.\end{aligned}$$

Demostración.

$\boxed{\subset}$

Si $v \in \operatorname{Nuc} M \cap \operatorname{Nuc} N$ entonces $Mv = 0$ y $Nv = 0$. Por el *teorema 2.3.2* de [1, pág. 24] obtenemos que $Mv = 0$ implica $v \in \operatorname{Im}\left(I - M^\dagger M\right)$, i.e., $v = \left(I - M^\dagger M\right) d$, donde d es un vector arbitrario en $\mathbb{C}^s$. Multiplicando v por N obtenemos:

$$0 = Nv = N\left(I - M^\dagger M\right) d\,,$$

i.e., $d \in \operatorname{Nuc} N\left(I - M^\dagger M\right)$. Aplicando nuevamente el *teorema 2.3.2* obtenemos:

$$d = \left\{I - \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]^\dagger \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]\right\} c\,, \qquad c \in \mathbb{C}^s\,.$$

Multiplicando d por $\left(I - M^\dagger M\right)$:

$$\begin{aligned} v &= \left(I - M^\dagger M\right) d \\ &= \left(I - M^\dagger M\right)\left\{I - \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]^\dagger \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]\right\} c\,,\end{aligned}$$

i.e.,

$$v \in \operatorname{Im}\left\{\left(I - M^\dagger M\right)\left\{I - \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]^\dagger \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]\right\}\right\}.$$

Por tanto:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Nuc} M \cap \operatorname{Nuc} N \\ &\qquad \subset \operatorname{Im}\left\{\left(I - M^\dagger M\right)\left\{I - \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]^\dagger \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]\right\}\right\}.\end{aligned}$$

$\boxed{\supset}$

Sea $v \in \operatorname{Im}\left\{\left(I - M^\dagger M\right)\left\{I - \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]^\dagger \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]\right\}\right\}$.
Entonces para algún $z \in \mathbb{C}^s$ se tiene:

$$v = \left(I - M^\dagger M\right)\left\{I - \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]^\dagger \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]\right\} z\,.$$

De aquí multiplicando por M y N respectivamente y utilizando

$$M = MM^{\dagger}M,$$

por ser $M^{\dagger}$ la inversa de Moore-Penrose, se sigue:

$$Mv = \left(M - MM^{\dagger}M\right)\left\{I - \left[N\left(I - M^{\dagger}M\right)\right]^{\dagger}\left[N\left(I - M^{\dagger}M\right)\right]\right\} z = 0\,,$$

$$Nv = \left\{N\left(I - M^{\dagger}M\right) - N\left(I - M^{\dagger}M\right)\left[N\left(I - M^{\dagger}M\right)\right]^{\dagger}\left[N\left(I - M^{\dagger}M\right)\right]\right\} z = 0\,.$$ De esta forma $v \in \operatorname{Nuc} M \cap \operatorname{Nuc} N$. ■

En todo el trabajo denotaremos por i a la unidad imaginaria, $i = \sqrt{-1}$.

Definición 1.7 *Toda matriz compleja A en $\mathbb{C}^{m\times m}$ se puede descomponer de la siguiente forma*

$$A = A_1 + i\,A_2\,,$$

donde A_1 y A_2 representan a la parte real e imaginaria de A respectivamente, las cuales se definen por

$$A_1 = \frac{A + A^H}{2}\,; \quad A_2 = \frac{A - A^H}{2i}\,,$$

donde A^H denota la traspuesta conjunda de A.
Las matrices A_1 y A_2 son matrices hermíticas, es decir:

$$A_k^H = A_k\,, \quad \textit{para } k = 1, 2.$$

TEOREMA 1.2 [4]. *Para una matriz A arbitraria se verifica*

$$\|A\| = \sqrt{\rho\left(A^H A\right)}\,.$$

COROLARIO 1.1 [4]. *Si P es una matriz hermítica (o real, simétrica) entonces*

$$\|P\| = \rho(P)\,.$$

Observación 1.4 [4]. *Para una matriz arbitraria se verifica*

$$\rho(A) \leq \|A\|\,.$$

Observación 1.5 *Sea P una matriz diagonalizable y Q una matriz invertible tal que $Q^{-1}PQ$ es una matriz diagonal, entonces $\|P\| \leq \left\|Q^{-1}\right\| \|Q\| \rho(P)$.*

TEOREMA 1.3 (Teorema de Bromwich) [33, pág. 389]. *Sea A cualquier matriz compleja. Sean μ y M el menor y el mayor valor propio de la matriz hermítica $\frac{1}{2}\left(A + A^H\right)$, y ν y N el menor y el mayor valor propio de la matriz hermítica $\frac{1}{2i}\left(A - A^H\right)$. Si λ es cualquier valor propio de A, entonces,*

$$\mu \leq \operatorname{Re}(\lambda) \leq M\,, \qquad \nu \leq \operatorname{Im}(\lambda) \leq N\,.$$

TEOREMA 1.4 [44, pág. 25]. *Sean A y B matrices hermíticas, $n \times n$, y $\widetilde{A} = A + B$. Sean $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \ldots \geq \lambda_n$ los valores propios de A, y $\widetilde{\lambda}_1 \geq \widetilde{\lambda}_2 \geq \ldots \geq \widetilde{\lambda}_n$ los valores propios de $\widetilde{A}$. Si μ_n es el valor propio de B más pequeño, entonces*

$$\widetilde{\lambda}_i \geq \lambda_i + \mu_n \,, \qquad i = 1, \ldots, n \,.$$

Si A es una matriz hermítica denotaremos

$$\lambda_{\text{mín}}(A) = \text{mín}\,(\sigma(A)) \quad \text{y} \quad \lambda_{\text{máx}}(A) = \text{máx}\,(\sigma(A)) \,.$$

TEOREMA 1.5 (Teorema de Gershgorin) [4, pág. 127]. *Dada una matriz $A = [a_{ij}]$ se verifica que $\sigma(A)$ está contenido en la unión de los discos*

$$\mathcal{F}_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ij}| \right\} , \quad 1 \leq i \leq n \,,$$

y en la unión de los discos

$$\mathcal{G}_i = \left\{ z \in \mathbb{C} \, : \, |z - a_{ii}| \leq \sum_{j \neq i} |a_{ji}| \right\} , \quad 1 \leq i \leq n \,,$$

es decir,

$$\sigma(A) \subset \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{F}_i \right) \bigcap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \mathcal{G}_i \right) \,.$$

Definición 1.8 *Sea $f : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ y A una matriz, diremos que f pertenece al espacio $\mathcal{F}(A)$ si existe un entorno V de $\sigma(A)$ sobre el cual f es analítica.*

TEOREMA 1.6 (Teorema de la Aplicación Espectral) [11].
Si $f \in \mathcal{F}(A)$, entonces

$$f\left(\sigma(A)\right) = \sigma\left(f(A)\right) \,,$$

donde $f\left(\sigma(A)\right) = \{f(\lambda) \, : \, \lambda \in \sigma(A)\}$.

LEMA 1.3 (Lema de Banach) [13]. *Si P y Q son matrices de $\mathbb{C}^{n \times n}$ y P es invertible, entonces si $\|P - Q\| < \left\|P^{-1}\right\|^{-1}$ se verifica que*

$$Q \quad \text{es invertible}\,, \;\; \text{y} \;\; \left\|P^{-1} - Q^{-1}\right\| < \|P\|\|Q\|\|P - Q\| \,.$$

Observación 1.6 (Complemento de Schur) [4, pág. 92]. *Sea A una matriz cuadrada de orden n, con una partición en bloques*

$$A = \begin{bmatrix} E & F \\ G & H \end{bmatrix} ,$$

donde la submatriz E es invertible y H cuadrada (E y H pueden ser de tamaños distintos), se llama complemento de Schur de E en A a la matriz

$$W = H - GE^{-1}F \,.$$

Ya que E es invertible, se tiene que

$$A = \begin{bmatrix} I & 0 \\ GE^{-1} & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E & 0 \\ 0 & H - GE^{-1}F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I & E^{-1}F \\ 0 & I \end{bmatrix}, \tag{1.7}$$

y puesto que el primer y el tercer factor del segundo miembro de (1.7) son invertibles se deduce que A es invertible si y sólo si el complemento de Schur $H - GE^{-1}F$ es invertible.

Observación 1.7 *Dada una ecuación diferencial de 2º orden*

$$Lu = a_0(x)u'' + a_1(x)u' + a_2(x)u = f\,, \quad 0 \le x \le 1\,,$$

se requieren las condiciones generales de la forma

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_{0,1}u(0) + \alpha_{1,1}u'(0) + \beta_{0,1}u(1) + \beta_{1,1}u'(1) = \gamma_1 \\ \alpha_{0,2}u(0) + \alpha_{1,2}u'(0) + \beta_{0,2}u(1) + \beta_{1,2}u'(1) = \gamma_2 \end{array}\right\}, \tag{1.8}$$

tales que

$$\text{rango} \begin{bmatrix} \alpha_{0,1} & \alpha_{1,1} & \beta_{0,1} & \beta_{1,1} \\ \alpha_{0,2} & \alpha_{1,2} & \beta_{0,2} & \beta_{1,2} \end{bmatrix} = 2\,, \tag{1.9}$$

i.e., que ambas condiciones de contorno sean linealmente independientes.

Ahora trasladamos ésto a un sistema de ecuaciones en derivadas parciales de 2º orden con coeficientes matriciales en las condiciones de contorno:

$$\left.\begin{array}{l} A_1u(0,t) + B_1u_x(0,t) = 0 \\ A_2u(1,t) + B_2u_x(1,t) = 0 \end{array}\right\}, \tag{1.10}$$

donde A_k, B_k, $k = 1, 2$ son matrices cuadradas en $\mathbb{C}^{m\times m}$. Las condiciones de (1.10) son un caso particular de las dadas en (1.8). Por tanto, en vista de la condición (1.9) se tiene que verificar:

$$\mathcal{A} = \text{rango} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} = 2m\,, \tag{1.11}$$

i.e., $\mathcal{A}$ es una matriz invertible (ya que $\mathcal{A}$ es una matriz cuadrada de tamaño $2m \times 2m$) .

Los bloques de condiciones de contorno que aparecen en los problemas (1.1), (1.2) y (1.5) son:

$$I) \begin{bmatrix} I & 0 \\ C & D \end{bmatrix}, \quad II) \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}, \quad III) \begin{bmatrix} I & 0 \\ B & C \end{bmatrix},$$

que por (1.11) tienen que ser invertibles. Por tanto, bajo la hipótesis de que A_1 es invertible y utilizando el complemento de Schur, véase la observación 1.6, obtenemos las siguientes condiciones equivalentes:

$$\begin{array}{lcl} I) \text{ invertible} & \leftrightarrow & D \text{ invertible} \\ II) \text{ invertible} & \leftrightarrow & B_2 - A_2A_1^{-1}B_1 \text{ invertible} \\ III) \text{ invertible} & \leftrightarrow & C \text{ invertible}. \end{array}$$

Definición 1.9 *Un polinomio $p(\lambda)$, no nulo, se dice que es un polinomio anulador de A si $p(A) = 0$.*

Definición 1.10 *Sea $q(\lambda)$ el polinomio anulador de A de grado mínimo. Entonces a $q(\lambda)$ se le llama polinomio minimal de A.*

TEOREMA 1.7 (Teorema de Cayley-Hamilton) [33, pág. 206].
Sea A una matriz cuadrada con polinomio característico $\varphi(\lambda)$, entonces $\varphi(A) = 0$. En otras palabras, toda matriz cuadrada satisface su propia ecuación característica.
Como consecuencia se tiene que el polinomio minimal de una matriz divide a su polinomio característico.

Para calcular el polinomio minimal de una matriz será suficiente tener en cuenta la *definición 1.10* y el *teorema 1.7*.

Observación 1.8 *El teorema 1.7 nos proporciona un método fácil para expresar cualquier polinomio en A como otro, también en A, de grado menor que el del polinomio característico de A.*
En efecto, si $p(\lambda)$ es cualquier polinomio de grado mayor que n, entonces por el algoritmo de la división, existen polinomios $c(\lambda)$ y $r(\lambda)$ no nulos tales que:

$$p(\lambda) = c(\lambda)\varphi(\lambda) + r(\lambda) \tag{1.12}$$

donde $\varphi(\lambda)$ es el polinomio característico de A de grado n y $r(\lambda)$ tiene grado menor que n. Por tanto, aplicando el teorema 1.7 y utilizando (1.12) se tiene:

$$p(A) = c(A)\varphi(A) + r(A) = r(A)\,,$$

i.e., el polinomio en A de grado mayor que n, $p(A)$, se expresa como otro polinomio en A de grado menor que n.
Notar que el mismo argumento también es válido si en lugar de considerar el polinomio característico de A se toma su polinomio minimal.

Definición 1.11 *Se dice que los polinomios $R_1(x)$, $R_2(x)$, $\ldots$, $R_k(x)$ son primos 2 a 2 (coprimos), si $R_i(x)$ y $R_j(x)$ no tienen ningún divisor común, $i \neq j$. Se dice que son primos entre sí, si no tienen ningún divisor común a todos ellos.*

Observación 1.9 *En general, ser primos 2 a 2 implica ser primos entre sí, pero ser primos entre sí no implica ser primos 2 a 2.*

TEOREMA 1.8 (Teorema de Bezout) [12]. *Si $Q_1(x)$ y $Q_2(x)$ son dos polinomios primos entre sí, entonces existen dos polinomios $H_1(x)$ y $H_2(x)$ de forma que se satisface la relación:*

$$1 = H_1(x)Q_1(x) + H_2(x)Q_2(x)\,.$$

TEOREMA 1.9 (Teorema de descomposición) [12, pág. 538].
Sea $R(x) = R_1(x)R_2(x)\cdots R_k(x) \in \mathbb{C}[x]$ un polinomio factorizado, donde los factores $R_1(x)$, $R_2(x)$, $\cdots$, $R_k(x)$ son primos 2 a 2. Consideremos el endomorfismo $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. Entonces:

$$\operatorname{Nuc} R(f) = \operatorname{Nuc} R_1(f) \oplus \operatorname{Nuc} R_2(f) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Nuc} R_k(f)\,.$$

TEOREMA 1.10 [11, pág. 567]. *Si $P \in \mathbb{C}^{s\times s}$, $f(w)$ es una función holomorfa definida en un conjunto abierto Ω del plano complejo y $\sigma(P)$ está en Ω, el cálculo funcional matricial holomórfico define a $f(P)$ como una matriz que puede ser calculada como un polinomio en P de grado más pequeño que el polinomio minimal de P.*

COROLARIO 1.2 [40, pág. 76]. *En particular, si P es invertible, entonces $\sigma(P)$ está en $D_\alpha = \mathbb{C} \sim H_\alpha$, $H_\alpha = \left\{-re^{i\alpha} : r \geq 0\right\}$ y considerando $f(w) = \log_\alpha(w)$ una rama del logaritmo complejo asociado, holomórfico en D_α, entonces para $w \in D_\alpha$, la función $\sqrt{w} = \exp\left(\frac{1}{2}\log_\alpha(w)\right)$ es holomorfa y $P = \exp\left(\frac{1}{2}\log_\alpha(P)\right)$ es una raíz cuadrada de P.*

Observación 1.10 *Si J_P es la forma canónica de Jordan de P, $P = SJ_PS^{-1}$ y $\sqrt{J_P}$ es la raíz cuadrada de J_P, entonces $Q = S\sqrt{J_P}S^{-1}$ es una raíz cuadrada de P.*

ESQUEMAS EN DIFERENCIAS FINITAS [45, pág. 13].

El método de diferencias finitas es uno de los métodos más utilizados para resolver problemas de valores frontera. Dicho método consiste en reemplazar cada una de las derivadas de la ecuación diferencial por el cociente incremental adecuado. A la ecuación discreta resultante se le llama *esquema en diferencias finitas.*
Para poder realizar esta aproximación necesitamos definir una red (mallado) de puntos en el plano (x, t). Tomando h (paso espacial) y k (paso temporal) números positivos, el mallado estará formado por los puntos $(x_m, t_n) = (mh, nk)$ siendo m y n números enteros arbitrarios.

La propiedad más básica que un esquema en diferencias finitas debe tener para ser útil es la de ser un *esquema convergente.*

Definición 1.12 (Esquema en diferencias convergente) *Sea $Pu = f$ una ecuación en derivadas parciales siendo P un operador diferencial, y sea $P_{k,h}v = f$ su esquema en diferencias finitas. Se dice que el esquema $P_{k,h}v = f$ es convergente si su solución tiende a la solución de la ecuación en derivadas parciales cuando $h, k \longrightarrow 0$.*

Pero como probar la convergencia de un esquema en general no es fácil, se utilizan dos conceptos relacionados con la convergencia que son más fáciles de analizar: la *consistencia* y la *estabilidad.* Utilizaremos que la consistencia y la estabilidad implican la convergencia (*teorema de Lax*).

Definición 1.13 (Esquema en diferencias consistente)
Dada una ecuación en derivadas parciales $Pu = f$ y su esquema en diferencias finitas $P_{k,h}v = f$, diremos que el esquema en diferencias finitas es consistente respecto a la ecuación en derivadas parciales si para cualquier función $\phi(x, t)$ suave (suficientemente derivable para el contexto) se satisface

$$P\phi - P_{k,h}\phi \longrightarrow 0\,, \quad \text{cuando } k, h \to 0,$$

donde la convergencia es puntual en cada punto del mallado.
En otras palabras, un esquema $P_{k,h}v = f$ es consistente respecto a la ecuación $Pu = f$ si la solución de la ecuación, si ésta es suave, es una solución aproximada del esquema en diferencias.

Definición 1.14 (Esquema en diferencias estable) *Sea $v(mh, nk)$ una solución del esquema $P_{k,h}v = f$. Diremos que el esquema es estable si para un h_0 (paso espacial) fijado, la solución $v(mh_0, nk)$ permanece acotada cuando $n \to \infty$.*

Definición 1.15 (Estabilidad en el sentido de estación fija) [43, pág. 109] *Consideremos una solución $v(mh, nk)$ del esquema $P_{k,h}v = f$. Diremos que el esquema es estable si dado un punto del mallado (X, T), donde $X = mh_0 = \frac{m}{M}$ siendo h_0 fijo y $T = Jk$ finito, entonces la solución $v(mh_0, Jk)$ permanece acotada a medida que el paso temporal k decrece ($k \to 0$), i.e., a medida que n crece, dependiendo del valor de k, hasta tomar el valor J donde se alcanza el tiempo T.*

El estudio de la estabilidad numérica es relevante, dado que las aproximaciones numéricas siempre están sometidas a pequeñas perturbaciones: los *errores de redondeo*. Estos errores son debidos a que en los cálculos prolongados es probable que se realicen muchos redondeos, donde cada uno de ellos desempeña el papel de un error de entrada para el resto del cálculo y cada uno tiene un efecto sobre la consiguiente salida. La obtención de soluciones estables nos garantizará el tener controlados estos errores.

En esta memoria el estudio de la estabilidad se ha realizado diferenciando entre una estabilidad uniforme en el tiempo, es decir, independientemente de t (véase la *definición 1.14*) y una estabilidad puntual, es decir, relativa a un punto concreto del mallado (véase la *definición 1.15*). En ambas definiciones se ha considerado que el paso espacial h está fijo.

A continuación comentaremos varios teoremas y definiciones de los problemas de Sturm-Liouville discretos, que serán de gran utilidad en este trabajo. Todos los resultados y sus demostraciones pueden encontrarse en [1, cap. 11].

PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE DISCRETOS

Obviamente, los problemas de valores frontera lineales homogéneos pueden tener soluciones no triviales. Si los coeficientes de la ecuación en diferencia y/o los de las condiciones de frontera dependen de un parámetro, entonces uno de los problemas pioneros de la física matemática es determinar el/los valor(es) del parámetro para el cual tales soluciones no triviales existan. Esos valores especiales del parámetro se llaman *autovalores o valores propios* y las correspondientes soluciones no triviales se llaman *autofunciones o funciones propias.*

El problema de valores frontera formado por la ecuación en diferencias

$$\Delta\left(p(k-1)\Delta u(k-1)\right) + q(k)u(k) + \lambda r(k)u(k) = 0\,, \qquad k \in N(1, K)\,, \tag{1.13}$$

y las condiciones de frontera

$$u(0) = \alpha u(1)\,, \qquad u(K+1) = \beta u(K)\,, \tag{1.14}$$

se llama **problema de Sturm-Liouville discreto (P.S.L.D.)**. Donde el operador de diferencia, Δ, viene dado por

$$\Delta p(k-1) = p(k) - p(k-1)\,, \quad \text{y} \quad \Delta^2 p(k) = \Delta\left(\Delta p(k)\right)\,.$$

En la ecuación de diferencia (1.13), λ es el parámetro, y las funciones p, q y r están definidas sobre los conjuntos $N(0,K)$, $N(1,K)$ y $N(1,K)$ respectivamente, y $p(k)>0$, $k\in N(0,K)$, $r(k)>0$, $k\in N(1,K)$. Los conjuntos $N(0,K)$ y $N(1,K)$ están definidos como sigue

$$N(0,K)=\{a\in\mathbb{N}\,/\,0\leq a\leq K\}\ ,$$

$$N(1,K)=\{b\in\mathbb{N}\,/\,1\leq b\leq K\}\ .$$

En las condiciones de frontera (1.14), α y β son constantes conocidas.
Los siguientes resultados, en los cuales se asume tácitamente la existencia de los valores propios del P.S.L.D. (1.13)-(1.14), son fundamentales.

TEOREMA 1.11 *Los autovalores del P.S.L.D. (1.13)-(1.14) son simples, i.e., si λ es un autovalor de (1.13)-(1.14) y $\phi_1(k)$ y $\phi_2(k)$ son sus respectivas autofunciones, entonces $\phi_1(k)$ y $\phi_2(k)$ son linealmente dependientes en $N(0,K+1)$.*

Definición 1.16 *El conjunto de funciones $\{\phi_m(k)\,/\,m=1,2,\ldots\}$ cada una de las cuales está definida en $\overline{\mathbb{N}}=\mathbb{N}\cup\{0\}$ se dice ortogonal en $\overline{\mathbb{N}}$ con respecto a la función no negativa $r(k)$, $k\in\overline{\mathbb{N}}$ si*

$$\sum_{l\in\overline{\mathbb{N}}} r(l)\phi_\mu(l)\phi_\nu(l)=0\,,\qquad \forall\mu\neq\nu\,.$$

La función $r(k)$ se llama función peso.

TEOREMA 1.12 *Sean λ_m; $m=1,2,\ldots$, los autovalores del P.S.L.D. (1.13)-(1.14), y $\phi_m(k)$; $m=1,2,\ldots$, las correspondientes autofunciones. Entonces, el conjunto $\{\phi_m(k)\,/\,m=1,2,\ldots\}$ es ortogonal en $N(1,K)$ con respecto a la función peso $r(k)$.*

TEOREMA 1.13 *Sean λ_1 y λ_2 dos autovalores del P.S.L.D. (1.13)-(1.14) y sean $\phi_1(k)$ y $\phi_2(k)$ las correspondientes autofunciones. Entonces $\phi_1(k)$ y $\phi_2(k)$ son linealmente dependientes en $N(0,K+1)$ si y sólo si $\lambda_1=\lambda_2$.*

TEOREMA 1.14 *Para el P.S.L.D. (1.13)-(1.14), los autovalores son reales.*

FORMULACIÓN MATRICIAL DE PROBLEMAS DE STURM-LIOUVILLE DISCRETOS

Al desarrollar la ecuación en diferencia (1.13), utilizando la definición del operador de diferencia Δ, obtenemos para $k\in N(1,K)$:

$$\begin{aligned}p(k)u(k+1)-(p(k)+p(k-1))\,u(k)+(q(k)+\lambda r(k))\,u(k)&\\ +p(k-1)u(k-1)=0\,.&\end{aligned}\tag{1.15}$$

Si denotamos $s(k)=p(k)+p(k-1)-q(k)$, con $k\in N(1,K)$, entonces la ecuación (1.15) se puede reescribir así

$$-p(k-1)u(k-1)+s(k)u(k)-p(k)u(k+1)=\lambda r(k)u(k)\,. \qquad k\in N(1,K)\tag{1.16}$$

Por tanto, para $k = 1, \ldots, K$, tenemos las siguientes ecuaciones:

$$-\,p(0)u(0) + s(1)u(1) - p(1)u(2) = \lambda r(1)u(1)\,, \tag{1.17}$$

y

$$-\,p(K-1)u(K-1) + s(K)u(K) - p(K)u(K+1) = \lambda r(K)u(K)\,, \tag{1.18}$$

las cuales en vista de las condiciones de contorno (1.14) toman la forma

$$\overline{s}(1)u(1) - p(1)u(2) = \lambda r(1)u(1)\,, \tag{1.19}$$

$$-\,p(K-1)u(K-1) + \overline{s}(K)u(K) = \lambda r(K)u(K)\,, \tag{1.20}$$

donde $\overline{s}(1) = s(1) - \alpha p(0)$ y $\overline{s}(K) = s(K) - \beta p(K)$.
Las K ecuaciones: (1.19), (1.16) para $k \in N(2, K-1)$ y (1.20) pueden ser escritas como un problema de autovalores matricial

$$\widetilde{A}\,u = \lambda\,R\,u\,, \tag{1.21}$$

donde $\widetilde{A}$ es la matriz real, $K \times K$, simétrica y tridiagonal de la forma $H_K(\mathcal{F}, \mathcal{G})$, con

$$\mathcal{F} = (\overline{s}(1), s(2), \ldots, s(K-1), \overline{s}(K))\,,$$

y

$$\mathcal{G} = (-p(1), -p(2), \ldots, -p(K-1))\,;$$

R es la matriz diagonal $K \times K$ definida como $R = diag(r(1), \ldots, r(K))$, y la incógnita $u = (u(1), u(2), \ldots, u(K))$.
Ya que $p(k) > 0$, $k \in N(0, K)$ y $r(k) > 0$, $k \in N(1, K)$ se sigue que:

(i) el P.S.L.D (1.13)-(1.14) tiene exactamente K autovalores reales λ_m, $1 \leq m \leq K$, los cuales son distintos;

(ii) correspondiendo a cada autovalor, λ_m, existe un autofunción $\phi_m(k)$, $k \in N(1, K)$. Esas autofunciones $\phi_m(k)$, $1 \leq m \leq K$ son mútuamente ortogonales con respecto a la función peso $r(k)$. En particular, esas autofunciones son linealmente independientes en $N(1, K)$.

SERIES DE FOURIER DISCRETAS

Sean a, $b \in \mathbb{Z}$ y $\{\phi_m(k)\,/\,a \leq m \leq b\}$ un conjunto ortogonal de funciones en $N(a, b)$ con respecto a la función peso positiva $r(k)$, $k \in N(a, b)$. Ya que la ortogonalidad de esas funciones $\phi_m(k)$, $a \leq m \leq b$, en particular, implica su independencia lineal en $N(a, b)$, entonces cualquier función $u(k)$, $k \in N(a, b)$ puede ser expresada como una combinación lineal de $\phi_m(k)$, $a \leq m \leq b$, i.e.,

$$u(k) = \sum_{m=a}^{b} c_m \phi_m(k)\,, \qquad k \in N(a, b)\,, \tag{1.22}$$

donde las constantes c_m, $a \leq m \leq b$, pueden ser determinadas como sigue:

(1) multiplicando ambos lados de (1.22) por $r(k)\phi_n(k)$, $a \leq n \leq b$;

(2) sumando el resultado desde $k = a$ hasta $k = b$;

(3) utilizando la ortogonalidad de las funciones $\phi_m(k)$, $a \leq m \leq b$, en $N(a, b)$.

Por tanto, obtenemos:

$$\begin{aligned}\sum_{k=a}^{b} r(k)\phi_n(k)u(k) &= \sum_{m=a}^{b} c_m \left(\sum_{k=a}^{b} r(k)\phi_n(k)\phi_m(k) \right) \\ &= c_n \sum_{k=a}^{b} r(k)\phi_n^2(k)\,,\end{aligned}$$

y entonces

$$c_m = \frac{\sum\limits_{k=a}^{b} r(k)\phi_m(k)u(k)}{\sum\limits_{k=a}^{b} r(k)\phi_m^2(k)}\,, \qquad a \leq m \leq b\,. \tag{1.23}$$

En particular, si las funciones $\phi_m(k)$, $a \leq m \leq b$ son ortonormales, i.e., para cada m, $\sum\limits_{k=a}^{b} r(k)\phi_m^2(k) = 1$, entonces las constantes c_m se simplifican a

$$c_m = \sum_{k=a}^{b} r(k)\phi_m(k)u(k)\,, \qquad a \leq m \leq b\,.$$

Definición 1.17 *La relación (1.22) se llama la serie de Fourier discreta, y las constantes c_m definidas en (1.23) son los correspondientes coeficientes de Fourier discretos.*

Capítulo 2

Sistemas parabólicos

2.1. Caso particular

0.4pt0.4pt 0pt0.4pt

2.1.1. Introducción

Este capítulo trata sobre la construcción de soluciones numéricas convergentes de problemas mixtos con condiciones de contorno acopladas del tipo:

$$
\begin{aligned}
u_t(x,t) - Au_{xx}(x,t) - Bu(x,t) &= 0, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0, && (2.1)\\
u(0,t) &= 0, \qquad t > 0, && (2.2)\\
Cu(1,t) + Du_x(1,t) &= 0, \qquad t > 0, && (2.3)\\
u(x,0) &= F(x), \quad 0 \le x \le 1, && (2.4)
\end{aligned}
$$

donde $u = (u_1, u_2, \ldots, u_s)^T$ y $F(x) = (f_1, \ldots, f_s)^T$ son vectores s-dimensionales, elementos de $\mathbb{C}^s$ y A, B, C y D son $s \times s$ matrices complejas, elementos de $\mathbb{C}^{s\times s}$ verificando ciertas propiedades a determinar. La solución numérica propuesta es la solución exacta del esquema en diferencias obtenido al discretizar el problema continuo (2.1)–(2.4). Dicha solución se obtiene utilizando un método discreto de separación de variables que evita el cálculo de los sistemas algebraicos de gran tamaño con bloques matriciales que aparecen en el método de diferencias estándar. Para el caso $D = 0$ y C invertible, el problema (2.1)–(2.4) ha sido tratado en [37] utilizando un método de separación de variables matricial. El acoplamiento en la condición de contorno (2.3) y la ley de conmutatividad entre matrices hace difícil el tratamiento analítico del problema (2.1)–(2.4) utilizando un método de separación de variables.

En el apartado 2.1.2, estudiaremos la discretización del problema mixto (2.1)–(2.4) utilizando aproximaciones en diferencias centradas para la derivada de segundo orden u_{xx}, y aproximaciones en diferencias progresivas para u_t. En el apartado 2.1.3, trataremos la existencia y construcción de soluciones no triviales para el problema de contorno (2.1)–(2.3) utilizando un método de separación de variables discreto. En el apartado 2.1.4 se comprobará que el esquema en diferencias finitas es consistente respecto a la ecuación (2.1) y se buscarán condiciones suficientes para garantizar que las soluciones construidas sean estables. De esta forma aseguraremos la convergencia de las soluciones. En el apartado 2.1.5, se construirán soluciones para el problema mixto (2.1)–(2.4) discretizado. En el apartado 2.1.6, utilizaremos un método de proyecciones que nos permitirá extender los resultados del apartado 2.1.5 a clases más amplias de funciones de valores iniciales $F(x)$. Finalmente, en el apartado 2.1.7 desarrollaremos algunos ejemplos para aplicar los resultados teóricos obtenidos.

2.1.2. La discretización del problema

Para la discretización del dominio $[0,1] \times [0,+\infty[$, se considera una discretización de $[0,1]$ tomando un número entero $M > 0$ y un paso espacial, $h = \frac{1}{M}$ que consideraremos fijo para simplificar, i.e., se construye el conjunto de puntos:

$$\{x_m = mh, \quad m = 0, 1, \ldots, M, \} \ ,$$

por otra parte, se toma un paso temporal $k > 0$ (también fijo por la misma razón), y se discretiza el tiempo, $[0,+\infty[$, considerando la sucesión de puntos:

$$\{t_n = nk, \quad n = 0, 1, \ldots\} \, .$$

Con esto hemos construido una red rectangular del dominio $[0,1] \times [0,+\infty[$, formada por los puntos $(x_m, t_n) = (mh, nk)$. En cada uno de ellos utilizaremos un esquema en diferencias finitas progresivas en el que se reemplazarán las derivadas parciales u_t y u_{xx}, de la ecuación (2.1), convirtiendo el problema continuo en uno discreto. Para reemplazar u_t desarrollamos $u(mh,(n+1)k)$ en serie de Taylor, en t, alrededor del punto (mh, nk) obteniendo:

$$u\,(mh,(n+1)k) = u(mh,nk) + ku_t(mh,nk) + \mathrm{O}(k^2)\,,$$

despejando $u_t(mh, nk)$:

$$u_t(mh,nk) = \frac{u\,(mh,(n+1)k) - u(mh,nk)}{k} + \mathrm{O}\ (k)\,. \tag{2.5}$$

De la misma forma que para u_t, podemos reemplazar u_{xx} por una aproximación en diferencias finitas centradas desarrollando $u\,((m+1)h, nk)$ y $u\,((m-1)h, nk)$ en serie de Taylor, en x, alrededor del punto (mh, nk):

$$u\,((m+1)h,nk) = \\ u(mh,nk) + hu_x(mh,nk) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(mh,nk) + \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(mh,nk) + \mathrm{O}(h^4)\,,$$

$$u\,((m-1)h,nk) = \\ u(mh,nk) - hu_x(mh,nk) + \frac{h^2}{2!}u_{xx}(mh,nk) - \frac{h^3}{3!}u_{xxx}(mh,nk) + \mathrm{O}(h^4)\,.$$

Sumando estas dos últimas expresiones y despejando el término u_{xx} tenemos:

$$u_{xx}(mh, nk) = \frac{u\left((m+1)h, nk\right) - 2u(mh, nk) + u\left((m-1)h, nk\right)}{h^2} + \mathrm{O}(h^2)\,. \tag{2.6}$$

Entonces sustituyendo en el problema (2.1)–(2.4) las expresiones (2.5) y (2.6), y denotando $U(m,n) = u(mh, nk)$ obtenemos el siguiente problema mixto discreto

$$\begin{aligned} &rA\left[U(m+1,n) + U(m-1,n)\right] \\ &\qquad + \left(I + \frac{rB}{M^2} - 2rA\right) U(m,n) - U(m,n+1) = 0\,, \quad 0 < m < M,\ n > 0 \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$U(0,n) = 0\,, \qquad n > 0, \tag{2.8}$$

$$CU(M,n) + MD\left[U(M,n) - U(M-1,n)\right] = 0\,, \qquad n > 0, \tag{2.9}$$

$$U(m,0) = f(m)\,,\ \ 0 \le m \le M, \tag{2.10}$$

donde

$$r = \frac{k}{h^2}\,, \qquad h = \frac{1}{M}\,, \qquad f(m) = F(mh)\,. \tag{2.11}$$

2.1.3. El problema de contorno discreto

En este apartado buscamos soluciones no triviales del problema de contorno (2.7)–(2.9) de la forma

$$U(m,n) = G(n)H(m),\ \ G(n) \in \mathbb{C}^{s\times s}\ ,\ \ H(m) \in \mathbb{C}^{s}\ . \tag{2.12}$$

Sustituyendo (2.12) en (2.7) obtenemos

$$\begin{aligned} &rAG(n)\left[H(m+1) + H(m-1)\right] + \\ &\qquad \left(I + \frac{rB}{M^2} - 2rA\right) G(n)H(m) - G(n+1)H(m) = 0. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Tomando un número real ρ, la ecuación (2.13) puede escribirse de la forma

$$\begin{aligned} &rAG(n)\left[H(m+1) - \left(\frac{2r+\rho}{r}\right) H(m) + H(m-1)\right] \\ &\quad + \left[\left(I + \frac{rB}{M^2} + \rho A\right) G(n) - G(n+1)\right] H(m) = 0\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

y (2.14) se cumple si $\{H(m)\}$, $\{G(n)\}$ satisfacen

$$G(n+1) - \left(I + \frac{rB}{M^2} + \rho A\right) G(n) = 0\ , \quad n > 0\,, \tag{2.15}$$

$$H(m+1) - \left(\frac{2r+\rho}{r}\right) H(m) + H(m-1) = 0\ , \quad 1 \le m \le M-1\ . \tag{2.16}$$

Observar que si ρ satisface

$$-\,4r < \rho < 0\,, \tag{2.17}$$

entonces $\left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2 \leq 1$. Por tanto la ecuación algebraica

$$z^2 - \left(\frac{2r+\rho}{r}\right) z + 1 = 0 \,, \tag{2.18}$$

tiene dos soluciones diferentes dadas por

$$\left.\begin{array}{l} z_0 = \frac{2r+\rho}{2r} + i\sqrt{1-\left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2} = e^{i\theta}\,, \\ \\ z_1 = \frac{2r+\rho}{2r} - i\sqrt{1-\left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2} = e^{-i\theta}\,, \\ \\ \text{donde } \ 0 < \theta < \pi\,, \ \ \cos\theta = \frac{2r+\rho}{2r}\,, \ \ \rho = -4r\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\,, \ \ i^2 = -1 \end{array}\right] , \tag{2.19}$$

y observamos que

$$z_0^n = \cos(n\theta) + i\,\mathrm{sen}(n\theta); \quad z_1^n = \cos(n\theta) - i\,\mathrm{sen}(n\theta)\,.$$

Ya que la ecuación vectorial (2.16) tiene coeficientes escalares, sus soluciones pueden escribirse de la forma

$$H(m) = \cos(m\theta)\,c + \mathrm{sen}(m\theta)\,d\,, \qquad c, d \in \mathbb{C}^s, \quad 1 \leq m \leq M-1. \tag{2.20}$$

Por (2.8) y (2.12), teniendo en cuenta que $\{G(n)\}$ no puede ser idénticamente cero, se sigue que $H(0) = 0$ y por (2.20) obtenemos

$$H(m) = \mathrm{sen}(m\theta)d\,, \qquad d \in \mathbb{C}^s\,, \ 1 \leq m \leq M-1\,. \tag{2.21}$$

La solución de (2.15) verificando $G(0) = I$ viene dada por

$$G(n) = \left(I + \frac{rB}{M^2} + \rho A\right)^n\,, \qquad n > 0\,. \tag{2.22}$$

Sustituyendo (2.21) y (2.22) en (2.12) obtenemos

$$U(m,n) = \left(I + \frac{rB}{M^2} + \rho A\right)^n \mathrm{sen}(m\theta)\,d\,, \quad d \in \mathbb{C}^s\,, \ n > 0\,, \ 1 \leq m \leq M-1\,,$$

e imponiendo la condición de contorno (2.9), resulta que el vector d debe satisfacer

$$\{C\,\mathrm{sen}(M\theta) + MD\left[\mathrm{sen}(M\theta) - \mathrm{sen}\left((M-1)\theta\right)\right]\}\left(I + \rho(A + wB)\right)^n d = 0\,, \tag{2.23}$$

donde

$$w = \frac{r}{\rho M^2} \neq 0\,, \tag{2.24}$$

y ρ viene dado por (2.19). Ya que por el *teorema de Cayley-Hamilton*, véase el *teorema 1.7*, las potencias $(A + wB)^n$ pueden expresarse en términos de I, $A + wB$, $(A + wB)^2$, ..., $(A+wB)^{p-1}$, donde p es el grado del polinomio minimal de la matriz $A+wB$, se tiene que la condición (2.23) es equivalente a la condición

$$\{C \operatorname{sen}(M\theta) + MD\left[\operatorname{sen}(M\theta) - \operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)\right]\}(A + wB)^n d = 0\,, \qquad 0 \le n < p\,. \tag{2.25}$$

Como estamos interesados en soluciones no nulas, el vector d debe ser no nulo y por tanto es suficiente que

$$L(\theta) = C \operatorname{sen}(M\theta) + MD\left[\operatorname{sen}(M\theta) - \operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)\right] \text{ es singular}\,, \qquad 0 < \theta < \pi\,. \tag{2.26}$$

Observar que si $\theta_\ell = \frac{\ell\pi}{M}$ para $1 \le \ell \le M-1$, entonces $\operatorname{sen}(M\theta) = 0$ y se obtiene que en este caso la matriz $L(\theta_\ell) = MD(-1)^\ell \operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi}{M}\right)$ es invertible si D es invertible, puesto que $\operatorname{sen}(\frac{\ell\pi}{M}) \neq 0$. Por tanto bajo la hipótesis

$$D \text{ es invertible}\,, \tag{2.27}$$

véase la *observación 1.7*, los valores de θ para los cuales se verifica (2.26) deben satisfacer que el $\operatorname{sen}(M\theta) \neq 0$ y podemos escribir (2.26) de la forma

$$D^{-1}C + \frac{M\left[\operatorname{sen}(M\theta) - \operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)\right]}{\operatorname{sen}(M\theta)} I \quad \text{es singular.} \tag{2.28}$$

Asumamos que

$$\text{Existe } \mu \in \sigma(-D^{-1}C) \cap \mathbb{R}\,. \tag{2.29}$$

La condición (2.28) se cumple si existen θ para la ecuación escalar

$$\frac{M\left[\operatorname{sen}(M\theta) - \operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)\right]}{\operatorname{sen}(M\theta)} = \mu\,. \tag{2.30}$$

La ecuación (2.30) es equivalente a

$$\cot(M\theta) = \frac{\cos\theta - \left(1 - \frac{\mu}{M}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\,. \tag{2.31}$$

Observamos que para cada ℓ con $1 \le \ell \le M-1$, en el intervalo $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$ se satisface

$$\lim_{\theta \to \frac{(\ell-1)}{M}\pi^+} \cot(M\theta) = +\infty\,; \quad \lim_{\theta \to \frac{\ell}{M}\pi^-} \cot(M\theta) = -\infty\,; \ \cot(M\theta) \text{ decrece en } J_\ell\,, \tag{2.32}$$

porque $\frac{d}{d\theta}\left(\cot(M\theta)\right) = -\frac{M}{\operatorname{sen}^2(M\theta)} < 0$. Para buscar las raíces de la ecuación (2.31) distinguiremos los siguientes casos sobre el valor propio real μ de la matriz $-D^{-1}C$.

CASO 1. $\boxed{\mu < 0}$

Para este caso la función $e_M(\theta)$ definida por

$$e_M(\theta) = \frac{\cos\theta - \left(1 - \frac{\mu}{M}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\,, \tag{2.33}$$

es continua, negativa y tiene un máximo en $\theta = \arccos\left(\frac{M}{M-\mu}\right)$ a lo largo de $]0,\pi[$.

CASO 2. $\boxed{\mu = 0}$

Si C es singular, μ toma el valor 0 y (2.30) es equivalente a la ecuación

$$\operatorname{sen}(M\theta) = \operatorname{sen}((M-1)\theta)\,,$$

que tiene $M-1$ soluciones dadas por $\theta_\ell = \frac{(2\ell-1)\pi}{2M-1}$ para $1 \le \ell \le M-1$. Observamos entonces que la matriz $L(\theta_\ell)$ es singular para los valores de $\{\theta_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ obtenidos, puesto que C es singular, $\operatorname{sen}\left(\left(\frac{\ell-M}{2M-1}\right)\pi\right) \neq 0$ para $1 \le \ell \le M-1$ y $L(\theta_\ell)$ toma la forma

$$\begin{aligned} L(\theta_\ell) &= 2MD\operatorname{sen}\left(\frac{(2\ell-1)}{2(2M-1)}\pi\right)\cos\left(\left(\frac{(2\ell-1)}{2}\right)\pi\right) \\ &\quad + C\operatorname{sen}\left(M\left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\right) \\ &= (-1)^\ell C\operatorname{sen}\left(\left(\frac{\ell-M}{2M-1}\right)\pi\right), \qquad 1 \le \ell \le M-1\,. \end{aligned}$$

Por tanto, por lo visto en los *Casos 1* y *2*, se obtiene que si $\mu \le 0$ existe una única raíz, $\theta_\ell \in J_\ell$ de la ecuación (2.31) para $1 \le \ell \le M-1$, es decir, existen $M-1$ soluciones θ_ℓ de la ecuación (2.31) en $]0,\pi[$.

CASO 3. $\boxed{\mu \in\,]0,+\infty[}$

En el intervalo $J_1 = \left]0, \frac{\pi}{M}\right[$ no podemos garantizar analíticamente la existencia de solución para la ecuación (2.31). En cambio para el resto de intervalos, $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)}{M}\pi, \frac{\ell}{M}\pi\right[$, $2 \le \ell \le M-1$, existe una única solución $\theta_\ell \in J_\ell$ de la ecuación (2.31) porque la función $e_M(\theta)$ es continua, decreciente y acotada en cada J_ℓ (ya que $\lim_{\theta\to\frac{(\ell-1)}{M}\pi^+} e_M(\theta)$ y $\lim_{\theta\to\frac{\ell}{M}\pi^-} e_M(\theta)$ son números reales).
Por tanto, si $\mu \in\,]0,+\infty[$ existe una única raíz, $\theta_\ell \in J_\ell$ de la ecuación (2.31) para $2 \le \ell \le M-1$, es decir, existen $M-2$ soluciones θ_ℓ de la ecuación (2.31) en $]0,\pi[$.

Sea μ un valor propio real de $-D^{-1}C$ y θ_ℓ la solución de (2.31) en cada J_ℓ. Recordemos que si $\mu \le 0$ entonces $1 \le \ell \le M-1$ y que para $\mu \in\,]0,+\infty[$ se tiene $2 \le \ell \le M-1$.

Introducimos las matrices $G(\mu) \in \mathbb{C}^{s\times s}$ y $\widetilde{G}\,(\mu,\theta_\ell) \in \mathbb{C}^{sp_\ell \times s}$ definidas por

$$G(\mu) = \frac{D^{-1}L(\theta_\ell)}{\operatorname{sen}(M\theta_\ell)} = D^{-1}C + \mu I\,, \tag{2.34}$$

$$\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)=\begin{bmatrix} G(\mu) \\ G(\mu)\left(A+w_\ell B\right) \\ G(\mu)\left(A+w_\ell B\right)^2 \\ \vdots \\ G(\mu)\left(A+w_\ell B\right)^{p_\ell-1} \end{bmatrix}, \qquad w_\ell=\frac{-1}{4M^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)}, \tag{2.35}$$

donde p_ℓ es el grado del polinomio minimal de la matriz $A+w_\ell B$. Se observa que utilizando la matriz $\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)$, la condición (2.25) toma la forma

$$\left\{C\operatorname{sen}\left(M\theta_\ell\right)+2MD\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta_\ell\right)\right\}\left(A+w_\ell B\right)^n d_\ell=0,$$
$$0\leq n<p_\ell\,,$$

es decir,

$$L(\theta_\ell)\left(A+w_\ell B\right)^n d_\ell=0\,,\quad 0\leq n<p_\ell\,, \tag{2.36}$$

que es equivalente a la condición

$$\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)d_\ell=0, \qquad d_\ell\in\mathbb{C}^s. \tag{2.37}$$

La ecuación (2.37) tiene soluciones no triviales si y sólo si

$$\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)\right)<s\,, \tag{2.38}$$

y por el *teorema de Mitra*, véase el *teorema 1.1*, bajo la hipótesis (2.38) el conjunto de soluciones de la ecuación algebraica (2.37) viene dado por

$$d_\ell=\left(I-\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)^\dagger\,\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)\right)S_\ell, \qquad S_\ell\in\mathbb{C}^s\sim\{0\}. \tag{2.39}$$

Resumiendo, bajo las hipótesis (2.27) y (2.29), si θ_ℓ son las soluciones de (2.31) y $\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)$ la matriz definida por (2.35), el conjunto de soluciones no triviales del problema de contorno (2.7)–(2.9) viene dado por

$$\left.\begin{array}{r} U_\ell(m,n)=\left(I-r\left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A-\frac{B}{M^2}\right)\right)^n\operatorname{sen}(m\theta_\ell)\,d_\ell \\ 1\leq m\leq M-1,\ n>0 \\ \\ d_\ell=\left(I-\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)^\dagger\,\widetilde{G}\left(\mu,\theta_\ell\right)\right)S_\ell,\quad S_\ell\in\mathbb{C}^s\sim\{0\} \end{array}\right\}, \tag{2.40}$$

donde $1\leq\ell\leq M-1$ si $\mu\leq 0$ y $2\leq\ell\leq M-1$ si $\mu\in\,]0,+\infty[$.

Supongamos ahora que $\rho=0$, lo cual corresponde a $\theta=0$ en (2.19). En este caso la ecuación (2.18) toma la forma:

$$z^2-2z+1=(z-1)^2=0,$$

y el conjunto de soluciones de la ecuación (2.16) viene dado por:

$$H(m) = 1^m\, c + m\, 1^m\, d_1 = c + m\, d_1, \qquad c, d_1 \in \mathbb{C}^s,\ \ 1 \leq m \leq M-1. \tag{2.41}$$

Sabíamos que era necesario que $H(0) = 0$ para no tener soluciones triviales del *problema de frontera discreto* (2.7)–(2.9). Por tanto, de (2.16) para $m = 1$ y $\rho = 0$, y de (2.41) para $m = 1, 2$, se sigue que $c = 0$. Por otro lado, de (2.16) para $m = M-1$ y $\rho = 0$, y de (2.41) para $m{=}M-2, M-1$, obtenemos $H(M) = M\, d_1$. De esta forma se llega a que

$$H(m) = m\, d_1, \qquad d_1 \in \mathbb{C}^s, \quad 1 \leq m \leq M. \tag{2.42}$$

Como $\rho = 0$, de (2.15) se sigue que:

$$G(n) = \left(I + \frac{r}{M^2} B\right)^n, \qquad n > 0. \tag{2.43}$$

Si sustituimos (2.42) y (2.43) en la condición frontera (2.9) llegamos a la siguiente expresión:

$$\begin{aligned} &C\left(I + \frac{r}{M^2} B\right)^n M d_1 \\ &\qquad + M D\left[\left(I + \frac{r}{M^2} B\right)^n M d_1 - \left(I + \frac{r}{M^2} B\right)^n (M-1)\, d_1\right] = 0\,,\ n > 0\,, \end{aligned}$$

o equivalentemente

$$(C + D)\left(I + \frac{r}{M^2} B\right)^n d_1 = 0, \qquad d_1 \in \mathbb{C}^s,\ n > 0. \tag{2.44}$$

Por el *teorema de Cayley-Hamilton*, véase el *teorema 1.7*, si t es el grado del polinomio minimal de B entonces para $n \geq t$, las potencias B^n pueden ser expresadas en términos de las matrices $I, B, B^2, \ldots, B^{t-1}$. Como $\frac{r}{M^2} = k \neq 0$, para que se cumpla (2.44) es suficiente considerar:

$$(C + D) B^n d_1 = 0, \qquad d_1 \in \mathbb{C}^s, \quad 0 \leq n < t. \tag{2.45}$$

Como D es invertible, la ecuación (2.45) equivale a

$$\left(D^{-1} C + I\right) B^n d_1 = 0, \qquad d_1 \in \mathbb{C}^s, \quad 0 \leq n < t. \tag{2.46}$$

Puesto que $d_1 \in \mathbb{C}^s$ debe ser no nulo, para que se verifique (2.46) es suficiente que se cumpla:

$$D^{-1} C + I \qquad \text{singular}\,. \tag{2.47}$$

La condición (2.47) es equivalente a que $\mu = 1 \in \sigma\left(-D^{-1} C\right)$. Supongamos que $\exists\, \mu = 1 \in \sigma(-D^{-1}C)$. A fin de determinar el vector d_1, introducimos la matriz $\widetilde{R}(1) \in \mathbb{C}^{st \times s}$ definida por:

$$\widetilde{R}(1) = \begin{bmatrix} G(1) \\ G(1)B \\ G(1)B^2 \\ \vdots \\ G(1)B^{t-1} \end{bmatrix}, \tag{2.48}$$

donde la matriz $G(1)$ ha sido definida en (2.34). Observamos que utilizando $\widetilde{R}(1)$, la condición (2.46) es equivalente a :

$$\widetilde{R}(1)\, d_1 = 0, \qquad d_1 \in \mathbb{C}^s \,. \tag{2.49}$$

La ecuación (2.49) tiene una solución no nula

$$d_1 \in \mathbb{C}^s \Longleftrightarrow \text{rango}\left(\widetilde{R}(1)\right) < s \,,$$

y bajo esta condición, por el *teorema de Mitra*, véase el *teorema 1.1*, el conjunto solución de (2.49) viene dado por:

$$d_1 = \left(I - \widetilde{R}(1)^{\dagger}\widetilde{R}(1)\right) S_1, \qquad S_1 \in \mathbb{C}^s \sim \{0\}. \tag{2.50}$$

Por tanto, para $\mu = 1$ obtenemos la solución no trivial del *problema de frontera* (2.7)–(2.9):

$$\left.\begin{array}{ll} U(m,n) = m\left(I + \frac{r}{M^2}B\right)^n d_1, & 1 \leq m \leq M-1,\ n > 0 \\ d_1 = \left(I - \widetilde{R}(1)^{\dagger}\widetilde{R}(1)\right) S_1, & S_1 \in \mathbb{C}^s \sim \{0\} \end{array}\right\} . \tag{2.51}$$

Resumiendo, hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 2.1 *Consideremos el problema de frontera (2.7)–(2.9) y asumamos la condición (2.27). Sea μ un número real verificando (2.29). Sea $G(\mu)$ la matriz en $\mathbb{C}^{s\times s}$ definida por (2.34). Si $M > 0$, $r = \frac{k}{h^2}$, sean w_ℓ, $\widetilde{G}(\mu, \theta_\ell)$ y $\widetilde{R}(1)$ definidas por (2.35) y (2.48) respectivamente, donde θ_ℓ es una solución de (2.31). Sean p_ℓ y t los grados de los polinomios minimales de las matrices $A + w_\ell B$ y B respectivamente.*

(i) Si $\mu \in \mathbb{R}$, existen valores $\theta \in \,]0, \pi[$ tales que la matriz $L(\theta)$ definida por (2.26) es singular. Bajo la hipótesis (2.26) el problema (2.7)–(2.9) tiene soluciones no triviales de la forma (2.12) si rango $\left(\widetilde{G}(\mu, \theta)\right) < s$.

(ii) Si C es singular, se toma el valor propio $\mu = 0$ entonces $\theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi$ para $1 \leq \ell \leq M-1$ son soluciones de (2.31). Si rango $\left(\widetilde{G}(0, \theta_\ell)\right) < s$ *entonces $\{U_\ell(m,n)\}_{\ell=1}^{M-1}$ dadas por (2.40) define $M-1$ soluciones no triviales del problema de contorno (2.7)–(2.9).*

(iii) Si $\mu < 0$, entonces para $1 \leq \ell \leq M-1$ existe una solución θ_ℓ de la ecuación (2.31) en $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$ para la cual la matriz $L(\theta_\ell)$ es singular. Bajo la hipótesis rango $\left(\widetilde{G}(\mu, \theta_\ell)\right) < s$*, la sucesión $\{U_\ell(m,n)\}_{\ell=1}^{M-1}$ dada por (2.40) define $M-1$ soluciones no triviales del problema de contorno (2.7)–(2.9).*

(iv) *Si* $\mu = 1$, *entonces para* $2 \leq \ell \leq M-1$ *existe una solución* θ_ℓ *de la ecuación (2.31) en* $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$ *para la cual la matriz* $L(\theta_\ell)$ *es singular. Bajo las hipótesis* rango $\left(\widetilde{G}\,(1,\theta_\ell)\right) < s$ *y* rango $\left(\widetilde{R}(1)\right) < s$, *existen dos conjuntos de soluciones no triviales del problema de contorno (2.7)–(2.9) dadas por (2.40) y (2.51).*

(v) *Si* $\mu \in\,]0,+\infty[\sim \{1\}$, *entonces para* $2 \leq \ell \leq M-1$ *existe una solución* θ_ℓ *de la ecuación (2.31) en* $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$ *para la cual la matriz* $L(\theta_\ell)$ *es singular. Bajo la hipótesis* rango $\left(\widetilde{G}\,(\mu,\theta_\ell)\right) < s$, *la sucesión* $\{U_\ell(m,n)\}_{\ell=2}^{M-1}$ *dada por (2.40) define* $M-2$ *soluciones no triviales del problema de contorno (2.7)–(2.9).*

2.1.4. Consistencia y estabilidad de las soluciones

Veamos que el esquema en diferencias (2.7) es *consistente* respecto a la ecuación (2.1) en el sentido de la *definición 1.13*. Denotamos

$$\Lambda[u] = u_t(x,t) - Au_{xx}(x,t) - Bu(x,t)\ , \tag{2.52}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{k,h}[u] = {} & \frac{u\,(mh,(n+1)k) - u(mh,nk)}{k} - Bu(mh,nk) \\ & - A\frac{[u\,((m+1)h,nk) - 2u(mh,nk) + u\,((m-1)h,nk)]}{h^2}\,.\end{aligned} \tag{2.53}$$

Sea $\phi(x,t)$ una función suave, i.e. suficientemente derivable para el contexto, y sea $\Phi(m,n) = \phi(mh,nk)$. Considerando el desarrollo de Taylor de Φ para el punto $(m,n+1)$ con respecto a la variable t, y para los puntos $(m+1,n)$, $(m-1,n)$ respecto de x, se sigue

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(m,n+1) &= \Phi(m,n) + k\Phi_t(m,n) + \tfrac{k^2}{2!}\Phi_{tt}(m,n) + \tfrac{k^3}{3!}\Phi_{ttt}(m,n) + \mathrm{O}(k^4) \\
\Phi(m+1,n) &= \Phi(m,n) + h\Phi_x(m,n) + \tfrac{h^2}{2!}\Phi_{xx}(m,n) + \tfrac{h^3}{3!}\Phi_{xxx}(m,n) + \mathrm{O}(h^4) \\
\Phi(m-1,n) &= \Phi(m,n) - h\Phi_x(m,n) + \tfrac{h^2}{2!}\Phi_{xx}(m,n) - \tfrac{h^3}{3!}\Phi_{xxx}(m,n) + \mathrm{O}(h^4)
\end{aligned}\right] \tag{2.54}$$

Sustituyendo (2.54) en $\Lambda_{k,h}[\phi]$, dada por (2.53), se sigue que

$$\begin{aligned}\Lambda_{k,h}[\phi] \;\; = \;\; & \Phi_t(m,n) + \frac{k}{2}\Phi_{tt}(m,n) + \frac{k^2}{6}\Phi_{ttt}(m,n) \\ & -A\left[\Phi_{xx}(m,n) + \frac{h^2}{12}\Phi_{xxxx}(m,n)\right] \\ & -B\Phi(m,n) + \mathrm{O}(k^3) + \mathrm{O}(h^4)\,.\end{aligned} \tag{2.55}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $\Lambda[\phi]$, dada por (2.52), y la expresión (2.55) se sigue que

$$\Lambda[\phi] - \Lambda_{k,h}[\phi] = -\frac{k}{2}\Phi_{tt}(m,n) + A\frac{h^2}{12}\Phi_{xxxx}(m,n) + \mathrm{O}(k^2+h^4)\,. \tag{2.56}$$

Tomando normas en (2.56) obtenemos

$$\|\,\Lambda[\phi] - \Lambda_{k,h}[\phi]\,\| \leq \mathrm{O}(k) + \|A\|\mathrm{O}(h^2) \longrightarrow 0\,, \quad \text{cuando } \ k,h \to 0\,. \tag{2.57}$$

Por tanto el esquema en diferencias (2.7) es *consistente* respecto a la ecuación (2.1).

Estudiemos ahora la estabilidad, véase la *definición 1.14*, de las soluciones construidas en el *teorema 2.1*, a fin de tener controlados los errores de redondeo que pueden aparecer en el cómputo de dichas soluciones a medida que n crezca. A continuación buscaremos condiciones suficientes para garantizar la estabilidad de las expresiones

$$\left[I - r\left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{1}{M^2}B\right)\right]^n , \quad n > 0 \tag{2.58}$$

$$\left(I + \frac{r}{M^2}B\right)^n , \quad n > 0 \tag{2.59}$$

cuando $n \to \infty$, es decir para garantizar que las expresiones matriciales

$$I - \frac{r}{M^2}\left(-B + \alpha^2 A\right) , \tag{2.60}$$

$$I + \frac{r}{M^2}B , \tag{2.61}$$

donde se ha tomado $\alpha = 2M\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)$, sean matrices convergentes, véase el *lema 1.1*. Comenzaremos nuestro estudio con la expresión matricial dada en (2.60).

Por el *teorema de la aplicación espectral*, véase el *teorema 1.6*, se sabe que

$$\sigma\left(I - \frac{r}{M^2}\left(-B + \alpha^2 A\right)\right) = \left\{1 - \frac{r}{M^2}z \;:\; z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right)\right\} . \tag{2.62}$$

Si z está en $\sigma\left(-B + \alpha^2 A\right)$ entonces

$$\left|1 - \frac{r}{M^2}z\right|^2 = \left(1 - \frac{r}{M^2}\operatorname{Re}(z)\right)^2 + \left(-\frac{r}{M^2}\operatorname{Im}(z)\right)^2 = 1 + \frac{r^2}{M^4}|z|^2 - \frac{2r}{M^2}\operatorname{Re}(z) . \tag{2.63}$$

Por (2.62), (2.63) la matriz dada en (2.60) es convergente si

$$\operatorname{Re}(z) > 0 \quad \text{y} \quad \frac{r}{M^2} < \frac{2\operatorname{Re}(z)}{|z|^2} \text{ para todo } z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right) . \tag{2.64}$$

Puesto que A y B son matrices complejas en $\mathbb{C}^{s\times s}$ se pueden descomponer de la siguiente forma, véase la *definición 1.7*:

$$A = A_1 + i\,A_2 , \qquad B = B_1 + i\,B_2 ,$$

donde A_k, B_k, para $k = 1, 2$, son las matrices hermíticas definidas por

$$B_1 = \frac{B + B^H}{2} \,;\, B_2 = \frac{B - B^H}{2i} \,;\, A_1 = \frac{A + A^H}{2} \,;\, A_2 = \frac{A - A^H}{2i} , \tag{2.65}$$

entonces

$$-B + \alpha^2 A = \left[-B_1 + \alpha^2 A_1\right] + i\,\left[-B_2 + \alpha^2 A_2\right] . \tag{2.66}$$

Ya que $\alpha^2 A_k - B_k$, $k = 1, 2$, son matrices hermíticas podemos aplicar el *teorema de Bromwich*, véase el *teorema 1.3*, obteniendo

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_{\text{mín}}\left(-B_1 + \alpha^2 A_1\right) \leq \operatorname{Re}(z) \leq \lambda_{\text{máx}}\left(-B_1 + \alpha^2 A_1\right) \\[2ex] \lambda_{\text{mín}}\left(-B_2 + \alpha^2 A_2\right) \leq \operatorname{Im}(z) \leq \lambda_{\text{máx}}\left(-B_2 + \alpha^2 A_2\right) \\[2ex] z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right) \end{array}\right] . \tag{2.67}$$

Por el *teorema 1.4* se sigue que

$$\begin{aligned} \lambda_{\text{mín}}\left(-B_1 + \alpha^2 A_1\right) &\geq \lambda_{\text{mín}}\left(-B_1\right) + \alpha^2 \lambda_{\text{mín}}(A_1) \\ &= \alpha^2 \lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1) , \end{aligned} \tag{2.68}$$

y por (2.67), (2.68) se obtiene

$$\text{mín}\left\{\operatorname{Re}(z) \,:\, z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right)\right\} \geq \alpha^2 \lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1) . \tag{2.69}$$

Bajo las hipótesis

$$x > 0 \;\text{ para todo }\; x \in \sigma(A_1) \quad \text{e} \quad y \leq 0 \;\text{ para todo }\; y \in \sigma(B_1) , \tag{2.70}$$

por (2.69) se obtiene que

$$\operatorname{Re}(z) > 0 \quad \text{para todo} \quad z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right) , \tag{2.71}$$

es decir, imponiendo condición (2.70), tenemos garantizada una de las condiciones suficientes para la convergencia de la matriz (2.60). Bajo la condición (2.70), se obtiene

$$\underset{z \in \sigma(-B + \alpha^2 A)}{\text{mín}} \frac{2 \operatorname{Re}(z)}{|z|^2} = \frac{2\, \text{mín}\left\{\operatorname{Re}(z) \,:\, z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right)\right\}}{\text{máx}\left\{|z|^2 \,:\, z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right)\right\}} . \tag{2.72}$$

Por (2.71) y (2.72) la condición (2.64) se satisface si

$$\frac{r}{M^2} < \frac{2\, \text{mín}\left\{\operatorname{Re}(z) \,:\, z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right)\right\}}{\text{máx}\left\{|z|^2 \,:\, z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right)\right\}} . \tag{2.73}$$

Puesto que A_k y B_k, $k = 1, 2$, son matrices hermíticas, por el *teorema de Gershgorin*, véase el *teorema 1.5*, si denotamos $\sigma(A_k) = \{\lambda_j(A_k);\, 1 \leq j \leq s\}$, $k = 1, 2$, y

$$G_j(k) = \left\{z \in \mathbb{C} \,:\, \left|z - \alpha^2 \lambda_j(A_k)\right| \leq \rho(B_k)\right\} = D\left(\alpha^2 \lambda_j(A_k), \rho(B_k)\right) ,$$

se sigue que

$$\sigma\left(-B_k + \alpha^2 A_k\right) \subset \bigcup_{j=1}^{s} G_j(k) , \quad 1 \leq k \leq 2 . \tag{2.74}$$

Por tanto

$$\lambda_{\text{máx}}\left(-B_k + \alpha^2 A_k\right) \leq \alpha^2 \lambda_{\text{máx}}(A_k) + \rho(B_k) , \quad 1 \leq k \leq 2 , \tag{2.75}$$

y por (2.67), (2.75) obtenemos

$$\mathrm{Re}(z) \leq \alpha^2 \lambda_{\text{máx}}(A_1) + \rho(B_1)\,, \quad z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right); \tag{2.76}$$

$$\mathrm{Im}(z) \leq \alpha^2 \lambda_{\text{máx}}(A_2) + \rho(B_2)\,, \quad z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right). \tag{2.77}$$

Utilizando en (2.76) y (2.77) que

$$0 < \alpha = 2M \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) < 2M,$$

se obtiene

$$\left.\begin{array}{r} |z|^2 \leq \left(4M^2\lambda_{\text{máx}}(A_1) + \rho(B_1)\right)^2 + \left(4M^2\lambda_{\text{máx}}(A_2) + \rho(B_2)\right)^2 \\ z \in \sigma\left(-B + \alpha^2 A\right) \end{array}\right]. \tag{2.78}$$

Por (2.64), (2.69), (2.73) y (2.78) se concluye que la matriz dada en (2.60) es convergente si

$$r < \frac{M^2\left[4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1)\right]}{\left[4M^2\lambda_{\text{máx}}(A_1) + \rho(B_1)\right]^2 + \left[4M^2\lambda_{\text{máx}}(A_2) + \rho(B_2)\right]^2}\,. \tag{2.79}$$

Resumiendo hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 2.2 *Sea $r > 0$ y A, B matrices en $\mathbb{C}^{s\times s}$ tales que si $B_1 = \frac{B+B^H}{2}$, $A_1 = \frac{A+A^H}{2}$, $B_2 = \frac{B-B^H}{2i}$, $A_2 = \frac{A-A^H}{2i}$ se cumple*

$$x > 0\,, \quad \forall x \in \sigma(A_1) \qquad e \qquad y \leq 0\,, \quad \forall y \in \sigma(B_1)\,. \tag{2.80}$$

Entonces para valores suficientemente pequeños de r que cumplan la condición (2.79), se obtiene que la matriz $I - r\left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{1}{M^2}B\right)$ es convergente.

Ahora estudiaremos cuándo la expresión matricial dada por (2.59) es convergente, es decir qué condiciones se han de verificar para que

$$\rho\left(I + \frac{r}{M^2}B\right) < 1\,. \tag{2.81}$$

Para que la condición (2.81) se verifique será suficiente que

$$\left|1 + \frac{r}{M^2}z\right| < 1\,, \qquad \forall z \in \sigma(B)\,, \tag{2.82}$$

puesto que por el *teorema de la aplicación espectral*, véase el *teorema 1.6*, se sabe que

$$\sigma\left(I + \frac{r}{M^2}B\right) = \left\{1 + \frac{r}{M^2}z \;\; / \;\; z \in \sigma(B)\right\}.$$

En efecto,

$$\begin{aligned}\left|1+\frac{r}{M^2}z\right|^2 &= \left|1+\frac{r}{M^2}\operatorname{Re}(z)+i\frac{r}{M^2}\operatorname{Im}(z)\right|^2\\ &= \Big(1+\frac{r}{M^2}\operatorname{Re}(z)\Big)^2+\Big(\frac{r}{M^2}\operatorname{Im}(z)\Big)^2\\ &= 1+\frac{r^2}{M^4}\Big([\operatorname{Re}(z)]^2+[\operatorname{Im}(z)]^2\Big)+\frac{2r}{M^2}\operatorname{Re}(z)\\ &= 1+\frac{r^2}{M^4}|z|^2+\frac{2r}{M^2}\operatorname{Re}(z)\\ &\le 1+\frac{r^2}{M^4}\left(\rho(B)\right)^2+\frac{2r}{M^2}\operatorname{Re}(z)\,, \qquad \forall z\in\sigma(B)\,.\end{aligned}$$

por tanto, para que se cumpla (2.82) será suficiente imponer las condiciones

$$r<-\frac{2M^2\operatorname{Re}(z)}{\left(\rho(B)\right)^2} \qquad \text{y} \qquad \operatorname{Re}(z)<0\,,\ \forall z\in\sigma(B)\,. \tag{2.83}$$

Resumiendo, hemos obtenido que las soluciones proporcionadas por el *teorema 2.1* son *estables*, es decir, permanecen acotadas cuando $n\to\infty$, si los vectores $\{d_\ell\}$ están acotados, si se verifican las hipótesis del *teorema 2.2* y además se satisfacen las condiciones dadas en (2.83).

Observación 2.1 *El análisis de la estabilidad de las soluciones construidas en el teorema 2.1 se puede hacer, como se verá en el capítulo 3 para los sistemas hiperbólicos, utilizando el concepto de estabilidad en el sentido de estación fija (véase la definición 1.15). Con este tipo de estabilidad se puede demostrar que las soluciones dadas en el teorema 2.1 son estables sin imponer restricciones sobre el espectro de las matrices A y B (involucradas en la solución) ni sobre el parámetro r.*
En efecto, dado un punto del mallado (X,T) donde $X=\frac{m}{M}=mh_0$, h_0 fijo y $T=Jk$ finito, se debe verificar que las siguientes expresiones estén acotadas:

$$\left.\begin{array}{c}\left(I-r\left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A-\frac{B}{M^2}\right)\right)^n, \quad \left(I+\frac{r}{M^2}B\right)^n\ ,\ \textit{cuando}\, k\longrightarrow 0,\\ \textit{i.e., } n \textit{ crece, dependiendo del valor de } k,\ \textit{con } 0\le n\le J\end{array}\right]. \tag{2.84}$$

Puesto que h_0 está fijo y $r=\frac{k}{h^2}$ se tiene:

$$\left\|I-r\left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A-\frac{B}{M^2}\right)\right\|\le 1+O(k) \quad y \quad \left\|I+\frac{r}{M^2}B\right\|\le 1+O(k), \tag{2.85}$$

o equivalentemente

$$\left\|I-r\left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A-\frac{B}{M^2}\right)\right\|\le 1+S_1k \quad y \quad \left\|I+\frac{r}{M^2}B\right\|\le 1+S_2k,$$

para algunas constantes positivas S_1, S_2.

De las condiciones dadas en (2.85) se obtiene que:

$$\left.\begin{array}{r}\left\|\left(I - r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n\right\| \ \textit{y} \ \left\|\left(I + \frac{r}{M^2}B\right)^n\right\| \ \textit{acotadas cuando } k \longrightarrow 0, \\ \textit{i.e., } n \textit{ crece, dependiendo del valor de } k, \ \textit{con } 0 \leq n \leq J\end{array}\right], \tag{2.86}$$

ya que

$$\begin{aligned}\left\|\left(I - r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n\right\| &\leq \left\|I - r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right\|^n \leq (1+O(k))^n \\ &\leq (1+O(k))^J \leq e^{J\,O(k)} \leq e^{Jck} = e^{Tc} = O(1),\end{aligned}$$

siendo c una constante positiva; y además

$$\begin{aligned}\left\|\left(I + \frac{r}{M^2}B\right)^n\right\| \leq \left\|I + \frac{r}{M^2}B\right\|^n &\leq (1+O(k))^n \\ &\leq (1+O(k))^J \leq e^{J\,O(k)} \leq e^{Jsk} = e^{Ts} = O(1),\end{aligned}$$

siendo s una constante positiva.

Hemos visto que las condiciones que aparecen en (2.85) son suficientes para garantizar que las potencias dadas en (2.84) estén acotadas cuando n crece, a medida que decrece k, hasta tomar el valor J donde se alcanza el tiempo T, (T = Jk). Por tanto las soluciones dadas en el teorema 2.1 son estables en el sentido de estación fija.

2.1.5. El problema mixto discreto

En este apartado construiremos una solución exacta del problema (2.7)–(2.10). Observemos que al separar variables en el problema de contorno (2.7)–(2.9), se llega al problema de contorno vectorial:

$$\left.\begin{array}{rl}-H(m+1) + 2H(m) - H(m-1) & = -\dfrac{\rho}{r}H(m) \\ H(0) & = 0 \\ CH(M) + MD\left[H(M) - H(M-1)\right] & = 0\end{array}\right\}. \tag{2.87}$$

Bajo las hipótesis (2.27) y la existencia de $\mu \in \mathbb{R}$, $\mu \in \sigma(-D^{-1}C)$, por el *teorema de la aplicación espectral* el problema (2.87) es equivalente al siguiente problema de Sturm-Liouville discreto, véase el apartado 1.2:

$$\left.\begin{array}{r}-H(m+1) + 2H(m) - H(m-1) = -\dfrac{\rho}{r}H(m)\,, \\ H(0) = 0, \ \ H(M) = \dfrac{M}{M-\mu}H(M-1)\,, \ 1 \leq m \leq M-1\end{array}\right\} \tag{2.88}$$

donde $-4r < \rho \leq 0$, entonces por el apartado 2.1.3, las soluciones del problema (2.88) son

$$H_\ell(m) = \operatorname{sen}(m\theta_\ell)\, d_\ell\,, \quad d_\ell \in \operatorname{Nuc}\widetilde{G}\,(\mu,\theta_\ell)$$

donde $\theta_\ell \in \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$ verifican la ecuación

$$\cot(M\theta_\ell) = \frac{\cos\theta_\ell - \left(1-\frac{\mu}{M}\right)}{\operatorname{sen}\theta_\ell}\,. \tag{2.89}$$

Como los coeficientes del problema (2.88) son escalares, consideramos el problema de Sturm-Liouville escalar discreto

$$\left.\begin{aligned} -h(m+1)+2h(m)-h(m-1) &= -\frac{\rho}{r}h(m)\,, \\ h(0)=0\,; \quad h(M) &= \frac{M}{M-\mu}h(M-1)\,, \quad 1\leq m\leq M-1 \end{aligned}\right\} \tag{2.90}$$

Por el apartado 1.2, el problema (2.90) puede escribirse como un problema de valores propios matricial

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \frac{M-2\mu}{M-\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(M-2) \\ h(M-1) \end{bmatrix} = -\frac{\rho}{r} \begin{bmatrix} h(1) \\ h(2) \\ h(3) \\ \vdots \\ h(M-2) \\ h(M-1) \end{bmatrix}.$$

El problema (2.90) tiene exactamente $M-1$ valores propios reales dados por $\left\{\frac{-\rho_\ell}{r}\right\}_{\ell=1}^{M-1}$, donde $\rho_\ell = -4r\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)$ y θ_ℓ verifica (2.89). Para cada valor propio $\frac{-\rho_\ell}{r}$ existe una función propia $\{h_\ell(m)\} = \{\operatorname{sen}(m\theta_\ell)\}$. Estas funciones propias son ortogonales en

$$N(1,M-1) = \{k\in\mathbb{N} \,:\, 1\leq k\leq M-1\}\,,$$

con respecto a la función peso 1, véase el apartado 1.2.

Se ha considerado el problema de Sturm-Liouville discreto escalar (2.90), para poder identificar los vectores d_ℓ y d_1 que aparecen en las soluciones (2.40) y (2.51) respectivamente.

CASO 1. $\boxed{\mu = 0}$ (C singular)

Supongamos que rango $\left(\widetilde{G}\left(0,\theta_\ell\right)\right) < s$, $\theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi$, $1 \leq \ell \leq M-1$. Por superposición de las soluciones del problema de contorno (2.7)–(2.9) obtenidas en el *teorema 2.1-(ii)*, se sigue que la sucesión vectorial

$$\left.\begin{aligned} U(m,n) &= \sum_{\ell=1}^{M-1} \left(I - r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n \mathrm{sen}\left(m\theta_\ell\right)\, d_\ell\,, \\ d_\ell &= \left(I - \widetilde{G}\left(0,\theta_\ell\right)^\dagger \widetilde{G}\left(0,\theta_\ell\right)\right) S_\ell\,, \quad S_\ell \in \mathbb{C}^s \sim \{0\} \end{aligned}\right] \tag{2.91}$$

es una solución del problema (2.7)–(2.9). Imponiendo la condición inicial (2.10) a la solución (2.91) obtenemos que los vectores d_ℓ deben verificar

$$f(m) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \mathrm{sen}\left(m\theta_\ell\right)\, d_\ell\,, \qquad 1 \leq m \leq M-1\,. \tag{2.92}$$

Denotemos por $f_q(m)$ la q-ésima componente del vector $f(m) \in \mathbb{C}^s$ y $d_{\ell,q}$ la q-ésima componente del vector d_ℓ. De (2.92) se sigue que

$$f_q(m) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \mathrm{sen}\left(m\theta_\ell\right)\, d_{\ell,q}\,, \qquad 1 \leq m \leq M-1\,. \tag{2.93}$$

La expresión (2.93) es una serie de Fourier discreta, y $\{\mathrm{sen}\left(m\theta_\ell\right)\}_{\ell=1}^{M-1}$ son las funciones propias del problema de Sturm-Liouville discreto (P.S.L.D.) escalar (2.90). Para determinar las constantes $d_{\ell,q}$, i.e., los coeficientes de Fourier de (2.93), multiplicaremos ambos lados de (2.93) por $\mathrm{sen}\left(m\theta_\gamma\right)$ para $1 \leq \gamma \leq M-1$, sumaremos el resultado desde $m=1$ hasta $m = M-1$ y utilizaremos la ortogonalidad de las funciones propias del P.S.L.D., véase el apartado 1.2. Es decir:

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{sen}\left(m\theta_\gamma\right)\, f_q(m) =& \sum_{m=1}^{M-1} \left(\sum_{\ell=1}^{M-1} \mathrm{sen}\left(m\theta_\gamma\right) \mathrm{sen}\left(m\theta_\ell\right)\, d_{\ell,q}\right) \\ =& \sum_{m=1}^{M-1} \Big(\,\mathrm{sen}\left(m\theta_\gamma\right) \mathrm{sen}\left(m\theta_1\right)\, d_{1,q} + \cdots \\ & \qquad \cdots + \mathrm{sen}\left(m\theta_\gamma\right) \mathrm{sen}\left(m\theta_{M-1}\right)\, d_{M-1,q}\Big) \\ =& \sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2\left(m\theta_\gamma\right)\, d_{\gamma,q} \\ =& d_{\gamma,q} \sum_{m=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2\left(m\theta_\gamma\right)\,, \qquad 1 \leq \gamma \leq M-1\,, \end{aligned}$$

y entonces

$$\begin{aligned} d_{\ell,q} &= \frac{\sum\limits_{m=1}^{M-1} \operatorname{sen}\left(m\left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\right)\ f_q(m)}{\sum\limits_{m=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(m\left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\right)} \\ &= \frac{4}{2M-1}\sum_{m=1}^{M-1} \operatorname{sen}\left(m\left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\right) f_q(m)\,,\ \ 1 \le q \le s\,, \end{aligned}$$

o escrito en forma vectorial

$$d_\ell = \frac{4}{2M-1}\sum_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}\left(\nu\left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\right)\ f(\nu)\,, \qquad 1 \le \ell \le M-1\,. \tag{2.94}$$

Ya que $d_\ell \in \operatorname{Nuc}\widetilde{G}\,(0,\theta_\ell)$ para $1 \le \ell \le M-1$, en vista de (2.94) se debe verificar la siguiente condición

$$f(m) \in \operatorname{Nuc}\widetilde{G}\,(0,\theta_\ell)\,, \qquad \theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\,, \quad 1 \le \ell \le M-1\,. \tag{2.95}$$

Por tanto bajo la hipótesis (2.95), la expresión

$$\left.\begin{array}{r} U(m,n) = \sum\limits_{\ell=1}^{M-1}\left(I - r\left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n \operatorname{sen}\left(m\theta_\ell\right)\ d_\ell\,, \\ d_\ell = \dfrac{4}{2M-1}\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}\left(\nu\theta_\ell\right)\ f(\nu)\,, \quad \theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi \end{array}\right] , \tag{2.96}$$
$$1 \le m \le M-1\,,\ n > 0\ 1 \le \ell \le M-1$$

es una solución del problema (2.7)–(2.10). Por la expresión (2.35) la condición (2.95) se satisface si

$$f(m) \in \operatorname{Nuc} G(0)\,, \qquad 1 \le m \le M-1\,, \tag{2.97}$$

y

$$\operatorname{Nuc} G(0) \text{ es subespacio invariante por } A + w_\ell B\,, \quad 1 \le \ell \le M-1, \tag{2.98}$$

véase la *observación 1.2*, donde $\{w_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ se han definido en (2.35). La condición (2.98) puede escribirse de la forma:

$$G(0)\left(A + w_\ell B\right)\left(I - G(0)^\dagger G(0)\right) = 0\,, \qquad 1 \le \ell \le M-1\,, \tag{2.99}$$

véase la *observación 1.3*.

CASO 2. $\boxed{\mu < 0}$

Sea $\mu \in \sigma(-D^{-1}C)$ y supongamos que rango $\left(\widetilde{G}(\mu, \theta_\ell)\right) < s$ donde $\{\theta_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ vienen dadas por el *teorema 2.1-(iii)*. Bajo las hipótesis

$$f(m) \in \operatorname{Nuc} G(\mu)\,, \qquad 1 \leq m \leq M-1\,, \tag{2.100}$$

y

$$\operatorname{Nuc} G(\mu) \text{ es subespacio invariante por } A + w_\ell B\,, \quad 1 \leq \ell \leq M-1\,. \tag{2.101}$$

donde $\{w_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ se han definido en (2.35), o equivalentemente

$$G(\mu)\,(A + w_\ell B)\left(I - G(\mu)^\dagger G(\mu)\right) = 0\,, \qquad 1 \leq \ell \leq M-1\,, \tag{2.102}$$

entonces una solución del problema (2.7)-(2.10) viene definida por

$$\left.\begin{array}{r} U(m,n) = \sum\limits_{\ell=1}^{M-1}\left(I - r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n \mathrm{sen}\,(m\theta_\ell)\; d_\ell\,, \\ d_\ell = \dfrac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1}\mathrm{sen}\,(\nu\theta_\ell)\; f(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1}\mathrm{sen}^2\,(\nu\theta_\ell)}\,, \\ 1 \leq m \leq M-1\,,\;\; n > 0\,,\;\; 1 \leq \ell \leq M-1 \end{array}\right]. \tag{2.103}$$

CASO 3. $\boxed{\mu = 1}$

Supongamos que rango $\left(\widetilde{G}\,(1, \theta_\ell)\right) < s$, $2 \leq \ell \leq M-1$ y rango $\left(\widetilde{R}(1)\right) < s$, entonces por el *teorema 2.1-(iv)* la sucesión vectorial

$$\left.\begin{array}{r} U(m,n) = \sum\limits_{\ell=2}^{M-1}\left(I - r\left(4\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n \mathrm{sen}(m\theta_\ell)d_\ell + m\left(I + \frac{r}{M^2}B\right)^n d_1 \\ d_\ell \in \operatorname{Nuc}\widetilde{G}(1,\theta_\ell)\,, \quad d_1 \in \operatorname{Nuc}\widetilde{R}(1) \\ 1 \leq m \leq M-1\,,\;\; n > 0\,,\;\; 2 \leq \ell \leq M-1 \end{array}\right], \tag{2.104}$$

es una solución del problema de contorno (2.7)–(2.9). Imponiendo la condición inicial (2.10) a la solución (2.104) obtenemos que los vectores $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ deben verificar

$$f(m) = \sum_{\ell=2}^{M-1} \mathrm{sen}\,(m\theta_\ell)\; d_\ell + m d_1\,, \qquad 1 \leq m \leq M-1\,. \tag{2.105}$$

Denotemos por $f_q(m)$ la q-ésima componente del vector $f(m) \in \mathbb{C}^s$ y $d_{\ell,q}$ la q-ésima componente del vector $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$. De (2.105) se sigue que

$$f_q(m) = \sum_{\ell=2}^{M-1} \operatorname{sen}(m\theta_\ell)\; d_{\ell,q} + m d_{1,q}\,, \qquad 1 \le m \le M-1\,. \tag{2.106}$$

Para poder identificar los coeficientes $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ necesitamos tener la ortogonalidad de las funciones propias

$$h_\ell(m) = \{\operatorname{sen}(m\theta_\ell)\}_{\ell=2}^{M-1}\,, \tag{2.107}$$

y

$$h_1(m) = m\,, \tag{2.108}$$

las cuales son las soluciones de los problemas de Sturm-Liouville (2.90) para los valores propios $\left\{-\dfrac{\rho_\ell}{r}\right\}_{\ell=2}^{M-1} = \left\{4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right\}_{\ell=2}^{M-1}$ y 0 respectivamente. Observemos que los $M-1$ valores propios son distintos entre sí.

Por la teoría de Sturm-Liouville, véase el apartado 1.2, sabemos que las funciones propias dadas en (2.107) son ortogonales en $N(1, M-1)$ respecto a la función peso 1, por tanto para garantizar que el conjunto de las funciones propias:

$$h_\ell(m) = \begin{cases} m\,, & \text{para } \ell = 1 \\ \operatorname{sen}(m\theta_\ell)\,, & \text{para } 2 \le \ell \le M-1 \end{cases}$$

es ortogonal en $N(1, M-1)$ respecto a la función peso 1, sólo tendremos que estudiar si una función cualquiera de (2.107) y la función definida en (2.108) son ortogonales en $N(1, M-1)$ a la función peso 1.
En efecto, puesto que una función $h_\ell(m)$ de (2.107) y $h_1(m)$ son funciones propias del problema (2.90) verifican su ecuación

$$-\operatorname{sen}((m+1)\theta_\ell) + 2\operatorname{sen}(m\theta_\ell) - \operatorname{sen}((m-1)\theta_\ell) + \frac{\rho}{r}\operatorname{sen}(m\theta_\ell) = 0\,, \tag{2.109}$$

$$-(m+1) + 2m - (m-1) = 0\,, \tag{2.110}$$

Multiplicando la ecuación (2.109) por $h_1(m)$ y (2.110) por $h_\ell(m)$, y restando las ecuaciones resultantes obtenemos:

$$\frac{\rho}{r}\, m \operatorname{sen}(m\theta_\ell) = -m\left[\operatorname{sen}((m+1)\theta_\ell) + \operatorname{sen}((m-1)\theta_\ell) - 2\operatorname{sen}(m\theta_\ell)\right]. \qquad 1 \le m \le M-1$$

Si sumamos m, desde 1 hasta $M-1$, para cada miembro de la igualdad anterior obtenemos

$$\frac{\rho}{r}\sum_{m=1}^{M-1} m \operatorname{sen}(m\theta_\ell) = \sum_{m=1}^{M-1} \operatorname{sen}(m\theta_\ell)\,(-2m + 2m) = 0$$

y puesto que $\frac{\rho}{r} \neq 0$ se obtiene

$$\sum_{m=1}^{M-1} m \operatorname{sen}(m\theta_\ell) = 0$$

es decir, son ortogonales en $N(1, M-1)$ respecto a la función peso 1. Ahora ya podemos pasar a determinar los vectores $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$. Para ello procederemos de la misma forma que se vio en el *Caso 1*. Por un lado obtenemos la expresión de los vectores $\{d_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M-1} \operatorname{sen}(m\theta_\gamma)\ f_q(m) &= \sum_{m=1}^{M-1}\left(\sum_{\ell=2}^{M-1} \operatorname{sen}(m\theta_\gamma) \operatorname{sen}(m\theta_\ell)\ d_{\ell,q}\right) + d_{1,q}\sum_{m=1}^{M-1} m \operatorname{sen}(m\theta_\gamma) \\ &= d_{\gamma,q}\sum_{m=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2(m\theta_\gamma)\ , \qquad 1 \le \gamma \le M-1\,,\end{aligned}$$

es decir

$$d_{\ell,q} = \frac{\sum\limits_{m=1}^{M-1} \operatorname{sen}(m\theta_\ell)\ f_q(m)}{\sum\limits_{m=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2(m\theta_\ell)}, \qquad 1 \le q \le s\,,$$

o escrito en forma vectorial

$$d_\ell = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell)\ f(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2(\nu\theta_\ell)}, \qquad 2 \le \ell \le M-1\,. \tag{2.111}$$

Por otro lado, para obtener el vector d_1 procedemos de la siguiente forma

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{M-1} m\, f_q(m) &= \sum_{m=1}^{M-1}\left(\sum_{\ell=2}^{M-1} m\, sen\,(m\theta_\ell)\, d_{\ell,q}\right) + \sum_{m=1}^{M-1} m^2 d_{1,q} \\ &= d_{1,q}\sum_{m=1}^{M-1} m^2 = \left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right) d_{1,q}\,.\end{aligned}$$

Por tanto

$$d_{1,q} = \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum_{m=1}^{M-1} m\, f_q(m) \quad 1 \le q \le s\,,$$

o escrito en forma vectorial

$$d_1 = \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum_{\nu=1}^{M-1} \nu\, f(\nu)\,. \tag{2.112}$$

Además como se tiene que verificar que $d_\ell \in \operatorname{Nuc} \widetilde{G}\,(1, \theta_\ell)$, $2 \le \ell \le M-1$ y que $d_1 \in \operatorname{Nuc} \widetilde{R}(1)$, en vista de (2.111) y (2.112) será suficiente exigir las siguientes condiciones

$$f(m) \in \operatorname{Nuc} G(1)\,, \tag{2.113}$$

$$\mathrm{Nuc}\, G(1) \text{ subespacio invariante por las matrices } A + w_\ell B \text{ y } B\,, \tag{2.114}$$

donde $\{w_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$ están definidos en (2.35) y $\{\theta_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$ son las soluciones de la ecuación (2.89) en $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)}{M}\pi, \frac{\ell}{M}\pi\right[$ para $2 \leq \ell \leq M-1$.
Las condiciones dadas en (2.114) son equivalentes a

$$G(1)\,(A + w_\ell B)\left(I - G(1)^\dagger G(1)\right) = 0\,, \quad 2 \leq \ell \leq M-1, \tag{2.115}$$

y

$$G(1) B\left(I - G(1)^\dagger G(1)\right) = 0\,, \tag{2.116}$$

respectivamente.

CASO 4. $\boxed{\mu \in]0, +\infty[, \ \ \mu \neq 1}$

En este caso habíamos probado analíticamente la existencia de $M-2$ soluciones, $\theta_\ell \in J_\ell$, $2 \leq \ell \leq M-1$, para la ecuación (2.89) y por el *teorema 2.1-(v)* obtuvimos que bajo la hipótesis de que $\mathrm{rango}\left(\widetilde{G}\,(\mu, \theta_\ell)\right) < s$, la sucesión $\{U_\ell(m,n)\}_{\ell=2}^{M-1}$ dada por (2.40) definía $M-2$ soluciones no triviales del problema (2.7)–(2.9). Ahora bien, notemos que la teoría de Sturm-Liouville para problemas de valores propios matriciales nos garantiza la existencia de $M-1$ valores propios, $\left\{-\frac{\rho_\ell}{r}\right\} = -4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)$ en $]0, \pi[$. Y puesto que las ecuaciones (2.89) y $h(M) = \frac{M}{M-\mu} h(M-1)$ siendo $h(m) = \mathrm{sen}(m\theta_\ell)$ son la misma, se garantiza que en el primer subintervalo, $]0, \frac{\pi}{M}[$, también hay solución para la ecuación (2.89) y por tanto existen $M-1$ soluciones para el problema de contorno (2.7)–(2.9). Por superposición de las $M-1$ soluciones y bajo las hipótesis

$$\left.\begin{array}{r} \mathrm{rango}\left(\widetilde{G}(\mu, \theta_\ell)\right) < s\,, \\[2ex] f(m) \in \mathrm{Nuc}\, G(\mu)\,, \\[2ex] G(\mu)(A + w_\ell B)\left(I - G(\mu)^\dagger G(\mu)\right) = 0 \end{array}\right\} \ 1 \leq \ell \leq M-1\,,\ \ 1 \leq m \leq M-1,$$

obtenemos la siguiente solución para el problema mixto (2.7)–(2.10)

$$\left.\begin{array}{r} U(m,n) = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{M-1} \left(I - r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n \mathrm{sen}\,(m\theta_\ell)\; d_\ell\,, \\[3ex] d_\ell = \dfrac{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}\,(\nu\theta_\ell)\; f(\nu)}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2\,(\nu\theta_\ell)}\,, \end{array}\right]\,.$$

$$1 \leq m \leq M-1\,,\ \ n > 0\,,\ \ 1 \leq \ell \leq M-1$$

Notemos que las condiciones que se han exigido para la existencia de solución del problema mixto (2.7)–(2.10) son las mismas que para el caso $\mu < 0$, al igual que sucede con la solución construida.

Observación 2.2 *A la vista de los resultados obtenidos para cualquier valor propio real, μ, de la matriz $-D^{-1}C$, podemos establecer una cota más concreta del parámetro r que la dada en (2.79). Utilizando que* $\operatorname{sen}\theta$ *es creciente en* $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ *concluimos que*

$$4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1) \geq 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1) \qquad (si\ \ \mu \neq 1)$$

$$4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1) \geq 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1) \qquad (si\ \ \mu = 1)$$

Por tanto obtenemos las siguientes cotas de r:

- *Si $\mu \neq 1$*

$$r < \frac{M^2\left[4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1)\right]}{\left[4M^2\lambda_{\text{máx}}(A_1) + \rho(B_1)\right]^2 + \left[4M^2\lambda_{\text{máx}}(A_2) + \rho(B_2)\right]^2}. \tag{2.117}$$

- *Si $\mu = 1$*

$$r < \frac{M^2\left[4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\lambda_{\text{mín}}(A_1) - \lambda_{\text{máx}}(B_1)\right]}{\left[4M^2\lambda_{\text{máx}}(A_1) + \rho(B_1)\right]^2 + \left[4M^2\lambda_{\text{máx}}(A_2) + \rho(B_2)\right]^2}. \tag{2.118}$$

Resumiendo hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 2.3 *Con la notación y las hipótesis de los teoremas 2.1 y 2.2, asumamos las condiciones dadas en (2.80) y que $\{f(m)\}$ está acotado.*

(i) Si C es singular, $\mu = 0$, $\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}\left(0, \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\right)\right) < s$, *$1 \leq \ell \leq M-1$, y $\{f(m)\}_{m=1}^{M-1}$ y las matrices $A + w_\ell B$ verifican las condiciones (2.97) y (2.99) respectivamente, entonces si r verifica (2.117), $\{U(m,n)\}$ definida por (2.96) es una solución exacta estable del problema mixto (2.7)–(2.10).*

(ii) Si $\mu = 1$, $\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}(1, \theta_\ell)\right) < s$, *donde $\{\theta_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$ son las soluciones de (2.89) en $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell}{M}\pi\right[$, $2 \leq \ell \leq M-1$,* $\operatorname{rango}\left(\widetilde{R}(1)\right) < s$, *$\{f(m)\}_{m=1}^{M-1}$ verifica (2.113), y las matrices $\{A + w_\ell B\}_{\ell=2}^{M-1}$ y B verifican las condiciones (2.115) y (2.116) respectivamente, entonces si además se verifica la condición (2.83) y r satisface (2.118), obtenemos que $\{U(m,n)\}$ definida por (2.104) es una solución exacta estable del problema mixto (2.7)–(2.10), siendo $\{d_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$ y d_1 los vectores definidos en (2.111) y (2.112) respectivamente.*

(iii) Si $\mu \in \mathbb{R} \sim \{0,1\}$, $\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}(\mu, \theta_\ell)\right) < s$, *donde $\{\theta_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ son las soluciones de (2.89) en $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell}{M}\pi\right[$, $1 \leq \ell \leq M-1$, y $\{f(m)\}_{m=1}^{M-1}$ y las matrices $\{A + w_\ell B\}_{\ell=1}^{M-1}$ verifican las condiciones (2.100) y (2.102) respectivamente, entonces si r verifica (2.118), $\{U(m,n)\}$ definida por (2.103) es una solución exacta estable del problema mixto (2.7)–(2.10).*

2.1.6. El método de las proyecciones

En este apartado abordaremos la construcción de soluciones del problema (2.7)–(2.10) para una función $f(m)$ satisfaciendo condiciones más generales que las exigidas en el apartado 2.1.5. Supongamos que

$$\{\mu_1, \ldots, \mu_q\} \subset \sigma\left(-D^{-1}C\right) \cap \mathbb{R}\,, \tag{2.119}$$

donde $\mu_j \neq \mu_k$ para $1 \leq j, k \leq q$, $j \neq k$. Introducimos la matriz $G(\mu_j)$ en $\mathbb{C}^{s\times s}$

$$G(\mu_j) = D^{-1}C + \mu_j I\,, \quad 1 \leq j \leq q. \tag{2.120}$$

Como los polinomios $x - \mu_j$ son mútuamente coprimos (primos 2 a 2), por el *teorema de descomposición*, véase el *teorema 1.9*, si $L(x)$ es el polinomio

$$L(x) = (x-\mu_j)(x-\mu_1)(x-\mu_2)\cdots(x-\mu_{j-1})(x-\mu_{j+1})\cdots(x-\mu_q)\ , \tag{2.121}$$

entonces

$$S = \operatorname{Nuc} L\left(-D^{-1}C\right) = \operatorname{Nuc} G\left(\mu_1\right) \oplus \operatorname{Nuc} G\left(\mu_2\right) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Nuc} G\left(\mu_q\right)\ . \tag{2.122}$$

Consideremos la sucesión de polinomios coprimos de grado $q-1$ definidos por

$$Q_j(x) = \prod_{k=1, k\neq j}^{q} (x - \mu_k)\,, \qquad 1 \leq j \leq q\ . \tag{2.123}$$

Entonces por el *teorema de Bezout*, véase el *teorema 1.8*, tomando los escalares α_j de la forma

$$\alpha_j = \left\{ \prod_{k=1, k\neq j}^{q} (\mu_j - \mu_k) \right\}^{-1}\,, \qquad 1 \leq j \leq q\ ,$$

obtenemos

$$1 = Q(x) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j Q_j(x)\,. \tag{2.124}$$

Notemos que $Q(x)$ es el *polinomio de interpolación de Lagrange* satisfaciendo $Q(\mu_j) = 1$ para $1 \leq j \leq q$.

Considerando el polinomio

$$T(\mu_j) = G\left(\mu_1\right)\cdots G\left(\mu_{j-1}\right) G\left(\mu_{j+1}\right)\cdots G\left(\mu_q\right)\ , \tag{2.125}$$

y aplicando el cálculo funcional matricial sobre la matriz $-D^{-1}C$, de (2.120), (2.121), (2.124) y (2.125) se sigue que

$$
\begin{aligned}
I &= Q\left(-D^{-1}C\right) \\
&= \sum_{j=1}^{q} \alpha_j Q_j\left(-D^{-1}C\right) \\
&= (-1)^{q-1} \sum_{j=1}^{q} \alpha_j G(\mu_1)G(\mu_2)\cdots G(\mu_{j-1})G(\mu_{j+1})\cdots G(\mu_q) \\
&= (-1)^{q-1} \sum_{j=1}^{q} \alpha_j T(\mu_j)\,. \qquad (2.126)
\end{aligned}
$$

Dado el problema (2.7)–(2.10) consideramos la proyección de la sucesión $\{f(m)\}_{m=0}^{M}$ sobre el subespacio $\operatorname{Nuc} G(\mu_j)$ definida por

$$
\widehat{f}_j(m) = (-1)^{q-1}\alpha_j T(\mu_j) f(m)\,, \quad 1 \leq j \leq q\,,\ 0 \leq m \leq M\,, \qquad (2.127)
$$

y observar que por (2.126) y (2.127) se sigue que

$$
\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{q} \widehat{f}_j(m) &= (-1)^{q-1} \sum_{j=1}^{q} \alpha_j T(\mu_j) f(m) \\
&= \left[(-1)^{q-1} \sum_{j=1}^{q} \alpha_j T(\mu_j) \right] f(m) \qquad (2.128) \\
&= I f(m) = f(m)\,. \qquad (2.129)
\end{aligned}
$$

Supongamos que $f(m) \in S$, $0 \leq m \leq M$, i.e.,

$$
L(-D^{-1}C) f(m) = 0\,, \quad 0 \leq m \leq M\,, \qquad (2.130)
$$

entonces por (2.121), (2.127) y (2.130) obtenemos

$$
\begin{aligned}
G(\mu_j)\widehat{f}_j(m) &= (-1)^{q-1}\alpha_j G(\mu_j) T(\mu_j) f(m) \\
&= (-1)^{q-1}(-1)^{q}\alpha_j L(-D^{-1}C) f(m) = 0 \\
&\qquad\qquad 1 \leq j \leq q\,,\ 0 \leq m \leq M\,,
\end{aligned}
$$

o equivalentemente

$$
\widehat{f}_j(m) \in \operatorname{Nuc} G(\mu_j)\,, \qquad 1 \leq j \leq q\,,\ 0 \leq m \leq M\,. \qquad (2.131)
$$

Por tanto se consideran q problemas diferentes obtenidos al reemplazar la condición inicial (2.10) por

$$
U(m,0) = \widehat{f}_j(m)\,, \qquad 0 \leq m \leq M\,,\ 1 \leq j \leq q\,. \qquad (2.132)
$$

Sea (P_j), $1 \leq j \leq q$, el problema definido por (2.7)–(2.9) y (2.132). Observar que por resultados previos, el cambio de la condición inicial en cada problema (P_j) sólo modifica a los vectores $\{d_\ell\}$ que aparecen en (2.94), (2.103), (2.111) ó (2.112) porque ahora los coeficientes de Fourier discretos involucran a las proyecciones $\left\{\widehat{f}_j(m)\right\}$ en lugar de al vector de la condición inicial $\{f(m)\}$. Notemos que para los problemas (P_j), los coeficientes de Fourier toman la forma

si $\mu_j \in \mathbb{R} \sim \{1\}$:

$$d_\ell^{(j)} = (-1)^{q-1}\,\alpha_j\,T\left(\mu_j\right) \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}\left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right) f(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right)}\,,\quad 1 \le \ell \le M-1\,, \tag{2.133}$$

o si $\mu_j = 1$

$$\left.\begin{aligned} d_\ell^{(j)} &= (-1)^{q-1}\,\alpha_j\,T\left(\mu_j\right) \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}\left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right) f(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right)}\,,\quad 2 \le \ell \le M-1 \\ d_1^{(j)} &= (-1)^{q-1}\,\alpha_j\,T(1) \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3}-\frac{M^2}{2}+\frac{M}{6}\right)} \sum_{\nu=1}^{M-1} \nu f(\nu) \end{aligned}\right\} \tag{2.134}$$

donde el superíndice (j) denota que se está trabajando con el valor propio μ_j. Si denotamos

$$d_\ell^{(j)}\left(f(\nu)\right) = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}\left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right) f(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right)}\,,$$

$$d_1^{(j)}\left(f(\nu)\right) = \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3}-\frac{M^2}{2}+\frac{M}{6}\right)} \sum_{\nu=1}^{M-1} \nu f(\nu),$$

entonces los coeficientes de Fourier que involucran a $\left\{\widehat{f}_j(m)\right\}$ dados por (2.133) y (2.134) pueden escribirse en función de $\{f(m)\}$ por medio de la expresión

si $\mu_j \in \mathbb{R} \sim \{1\}$:

$$d_\ell^{(j)} = (-1)^{q-1}\,\alpha_j\,T\left(\mu_j\right) d_\ell^{(j)}\left(f(\nu)\right)\,,\ 1 \le \ell \le M-1, \tag{2.135}$$

o si $\mu_j = 1$:

$$\left.\begin{aligned} d_\ell^{(j)} &= (-1)^{q-1}\alpha_j T(1) d_\ell^{(j)}\left(f(\nu)\right),\ 2 \le \ell \le M-1 \\ d_1^{(j)} &= (-1)^{q-1}\alpha_j T(1) d_1^{(j)}\left(f(\nu)\right) \end{aligned}\right\}. \tag{2.136}$$

Resumiendo hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 2.4 *Con la notación del teorema 2.3, sean $\mu_1, \dots, \mu_q$ valores propios reales y distintos de la matriz $-D^{-1}C$. Sean $G(\mu_j)$, $L(x)$ y $T(\mu_j)$ matrices en $\mathbb{C}^{s\times s}$ definidas por (2.120), (2.121) y (2.125) respectivamente. Sean $\widetilde{R}(1)$ y $\widetilde{G}\left(\mu_j, \theta_\ell^{(j)}\right)$ las matrices definidas por*

$$\widetilde{R}(1) = \begin{bmatrix} G(1) \\ G(1)B \\ \vdots \\ G(1)B^{t-1} \end{bmatrix}, \quad \widetilde{G}\left(\mu_j, \theta_\ell^{(j)}\right) = \begin{bmatrix} G(\mu_j) \\ G(\mu_j)\left(A + w_\ell^{(j)}B\right) \\ \vdots \\ G(\mu_j)\left(A + w_\ell^{(j)}B\right)^{p_\ell^{(j)}-1} \end{bmatrix},$$

donde t y $p_\ell^{(j)}$ es el grado del polinomio minimal de las matrices B y $A + w_\ell^{(j)}B$, respectivamente. Supongamos que $\{f(m)\}$ es acotado y verifica (2.130) (i.e. $\left\{\widehat{f}_j(m)\right\}$ verifican (2.131)), y que las condiciones dadas en (2.80) se satisfacen.

(i) Si $\mu_j \in \mathbb{R} \sim \{1\}$, definimos $w_\ell^{(j)} = -\dfrac{1}{4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(j)}}{2}\right)}$, $1 \le \ell \le M-1$, donde $\theta_\ell^{(j)} = \left(\dfrac{2\ell - 1}{2M - 1}\right)\pi$ si $\mu_j = 0$, y $\theta_\ell^{(j)} \in \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$, $1 \le \ell \le M-1$, son las soluciones de la ecuación

$$\cot\left(M\theta_\ell^{(j)}\right) = \frac{\cos\left(\theta_\ell^{(j)}\right) - \left(1 - \frac{\mu_j}{M}\right)}{\operatorname{sen}\left(\theta_\ell^{(j)}\right)}, 1 \le \ell \le M-1\,.$$

En este caso, supongamos que rango $\left(\widetilde{G}\left(\mu_j, \theta_\ell^{(j)}\right)\right) < s$, *$1 \le \ell \le M-1$, que las matrices $A + w_\ell^{(j)}B$ verifican*

$$G(\mu_j)\left(A + w_\ell^{(j)}\right)\left(I - G(\mu_j)^\dagger\, G(\mu_j)\right) = 0\,, \quad 1 \le \ell \le M-1\,.$$

y que el parámetro r satisface (2.117).

(ii) Si $\mu_j = 1$, definimos $w_\ell^{(j)} = -\dfrac{1}{4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(j)}}{2}\right)}$, $2 \le \ell \le M-1$, donde $\theta_\ell^{(j)} \in \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$, $2 \le \ell \le M-1$, son las soluciones de la ecuación

$$\cot\left(M\theta_\ell^{(j)}\right) = \frac{\cos\left(\theta_\ell^{(j)}\right) - \left(1 - \frac{\mu_j}{M}\right)}{\operatorname{sen}\left(\theta_\ell^{(j)}\right)}, \quad 2 \le \ell \le M-1.$$

En este caso, supongamos que rango $\left(\widetilde{G}\left(1, \theta_\ell^{(j)}\right)\right) < s$, *para $2 \le \ell \le M-1$ y que* rango $\left(\widetilde{R}(1)\right) < s$; *que se verifica la condición (2.83); las matrices $\left\{A + w_\ell^{(j)}B\right\}_{\ell=2}^{M-1}$ y B verifican las condiciones*

$$G(1)\left(A+w_\ell^{(j)}B\right)\left(I-G(1)^\dagger G(1)\right)=0\,,\quad 2\leq \ell\leq M-1\,,$$

$$G(1)B\left(I+G(1)^\dagger G(1)\right)=0\,;$$

y el parámetro r satisface (2.118).

Entonces bajo las hipótesis consideradas anteriormente en (i)-(ii) se obtiene que

$$U(m,n)=\sum_{j=1}^{q}U_j(m,n)\,,\qquad 1\leq m\leq M-1\,,\ n>0\,, \tag{2.137}$$

es una solución convergente (por ser consistente y estable) a la solución del problema mixto continuo (2.1)–(2.4), donde

si $\mu_j\in\mathbb{R}\sim\{1\}$:

$$U_j(m,n)=\sum_{\ell=1}^{M-1}\left[I-r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(j)}}{2}\right)A-\frac{B}{M^2}\right)\right]^n\mathrm{sen}\left(m\,\theta_\ell^{(j)}\right)d_\ell^{(j)}\,,$$

siendo $\left\{d_\ell^{(j)}\right\}_{\ell=1}^{M-1}$ los vectores definidos en (2.135);

o si $\mu_j=1$:

$$U_j(m,n)=\sum_{\ell=2}^{M-1}\left(I-r\left(4\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(j)}}{2}\right)A-\frac{B}{M^2}\right)\right)^n\mathrm{sen}\left(m\theta_\ell^{(j)}\right)d_\ell^{(j)}+m\left(I\frac{r}{M^2}B\right)^n d_1^{(j)}$$

siendo $\left\{d_\ell^{(j)}\right\}_{\ell=2}^{M-1}$ y $d_1^{(j)}$ los vectores definidos en (2.136).

2.1.7. Ejemplos

A continuación presentamos dos ejemplos para ilustrar el funcionamiento del método y un tercero, a modo de problema test, para comparar la solución teórica exacta con la solución numérica construida.

EJEMPLO 2.1 *Consideremos el problema (2.1)-(2.4) con las matrices:*

$$A=\begin{bmatrix}\frac{11}{2} & -\frac{25}{2} & \frac{3}{2}\\ -9 & 79 & -9\\ -3 & 25 & 1\end{bmatrix},B=\begin{bmatrix}-\frac{13}{6} & -\frac{1}{6} & 0\\ 1 & -1 & 0\\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -2\end{bmatrix},C=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 0\\ 4 & -1 & -2\\ 3 & -\frac{1}{2} & -1\end{bmatrix},$$

$$D=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 1\end{bmatrix},\ F(mh)=f(m)=(f_1(m),f_2(m),f_3(m))^T\in\mathbb{C}^3$$

$h=\frac{1}{M}\,,\ 1\leq m\leq M-1\,.$

Tenemos

$$-D^{-1}C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

por tanto $\sigma(-D^{-1}C) = \left\{0, \frac{1}{2}, 1\right\}$. Denotamos $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$, $\mu_3 = 1$.

Veamos si se cumplen las siguientes condiciones:

(a) rango $\left(\widetilde{G}\left(\mu_j, \theta_\ell^{(j)}\right)\right) < 3$, para cada $1 \leq j \leq 2$ con $1 \leq \ell \leq M-1$;

(b)

$$\begin{cases} \text{rango}\left(\widetilde{R}(1)\right) < 3\,; \\ \\ \text{rango}\left(\widetilde{G}\left(1, \theta_\ell^{(3)}\right)\right) < 3, \;\; 2 \leq \ell \leq M-1\,. \end{cases}$$

En nuestro caso tenemos

$$A + w_\ell^{(j)} B = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} - \frac{13}{6} w_\ell^{(j)} & -\frac{w_\ell^{(j)}}{6} - \frac{25}{2} & \frac{3}{2} \\ \\ w_\ell^{(j)} - 9 & 79 - w_\ell^{(j)} & -9 \\ \\ \frac{w_\ell^{(j)}}{3} - 3 & \frac{w_\ell^{(j)}}{3} + 25 & 1 - 2w_\ell^{(j)} \end{bmatrix}, 1 \leq j \leq 3\,.$$

El polinomio minimal de las matrices $A + w_\ell^{(j)} B$, $\forall w_\ell^{(j)}$, $1 \leq j \leq 3$, coincide con su polinomio característico, por tanto, $p_\ell^{(j)} = 3$, $\forall j$ tal que $1 \leq j \leq 3$. Por otro lado tenemos que el polinomio minimal de B es de grado 2, es decir, $t = 2$. Por tanto tendremos que estudiar el rango de las siguientes matrices:

$$\widetilde{G}\left(\mu_j, \theta_\ell^{(j)}\right) = \begin{bmatrix} G(\mu_j) \\ \\ G(\mu_j)\left(A + w_\ell^{(j)} B\right) \\ \\ G(\mu_j)\left(A + w_\ell^{(j)} B\right)^2 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 3\,,$$

y

$$\widetilde{R}(1) = \begin{bmatrix} G(1) \\ \\ G(1)B \end{bmatrix}.$$

Se comprueba que los valores propios $\mu_1 = 0$ y $\mu = \frac{1}{2}$ no verifican la condición (a).

Para $\mu_3 = 1$ tenemos:

$$G(1) = D^{-1}C + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{G}(1,\theta_\ell) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 2\,(2-w_\ell) & 2-w_\ell & 2w_\ell-4 \\ 8-4w_\ell & 0 & 4-2w_\ell \\ 0 & 0 & 0 \\ 4\left(w_\ell^2-4w_\ell+4\right) & 2\left(w_\ell^2-4w_\ell+4\right) & -4\left(w_\ell^2-4w_\ell+4\right) \\ 8\left(w_\ell^2-4w_\ell+4\right) & 0 & 4\left(w_\ell^2-4w_\ell+4\right) \end{bmatrix},$$

$$\widetilde{R}(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & \frac{1}{2} & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -2 & -1 & 2 \\ -4 & 0 & -2 \end{bmatrix}.$$

Por tanto, rango $\left(\widetilde{G}\,(1,\theta_\ell)\right) = 2 < 3$, $\forall w_\ell$, $2 \le \ell \le M-1$ y rango $\left(\widetilde{R}(1)\right) = 2 < 3$. Además

$$G(1)^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & \frac{12}{41} & \frac{14}{41} \\ 0 & \frac{10}{41} & -\frac{2}{41} \\ 0 & -\frac{24}{41} & \frac{13}{41} \end{bmatrix},$$

y $\operatorname{Nuc} G(1)$ es subespacio invariante por las matrices $A + w_\ell B$, $2 \le \ell \le M-1$, y B, es decir

$$G(1)\,(A + w_\ell B)\left(I - G(1)^\dagger G(1)\right) = 0\,,\;\; 2 \le \ell \le M-1\,,$$

y

$$G(1)B\left(I - G(1)^{\dagger}G(1)\right) = 0\,.$$

Para que el vector $\{f(m)\} \in \operatorname{Nuc} G(1)$ debemos exigir

$$f(m) = \begin{bmatrix} f_1(m) \\ -6f_1(m) \\ -2f_1(m) \end{bmatrix}\,,$$

y por el *teorema 2.3-(ii)* la solución numérica del problema viene dada por

$$U(m,n) = \sum_{\ell=2}^{M-1} \left(I - r\left(4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n \operatorname{sen}(m\theta_\ell)d_\ell + m\left(I + \frac{r}{M^2}B\right)^n d_1$$

donde

$$d_\ell = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}\left(\nu\theta_\ell\right)\ f(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell\right)}\,, \qquad 2 \leq \ell \leq M-1\,.$$

con $\theta_\ell \in \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$, $2 \leq \ell \leq M-1$, la solución de

$$\cot\left(M\theta_\ell\right) = \frac{\cos\left(\theta_\ell\right) - \left(1 - \frac{1}{M}\right)}{\operatorname{sen}\left(\theta_\ell\right)}\,,$$

y

$$d_1 = \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum_{\nu=1}^{M-1} \nu f(\nu)$$

En este caso tenemos que las matrices

$$A_1 = \begin{bmatrix} \frac{11}{2} & -\frac{43}{4} & -\frac{3}{4} \\ -\frac{43}{4} & 79 & 8 \\ -\frac{3}{4} & 8 & 1 \end{bmatrix}; \quad \sigma(A_1) = \{4, 81{,}3417, 0{,}1583\}\ ,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\frac{13}{6} & \frac{5}{12} & \frac{1}{6} \\ \frac{5}{12} & -1 & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & -2 \end{bmatrix}; \quad \sigma(B_1) = \{-2, -0{,}8287, -2{,}3379\}\ ,$$

y además

$$\sigma(B) = \left\{-2, -\frac{7}{6}\right\}\ ,$$

es decir, se verifican las condiciones dadas en (2.80) y (2.83). Entonces tomando $\{f(m)\}$ acotado y r satisfaciendo simultáneamente las condiciones (2.83) y (2.118) se garantiza la estabilidad de la solución construida.

EJEMPLO 2.2 *Consideremos el problema (2.1)–(2.4) con los datos*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 3 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \; F(mh) = f(m) = (f_1(m), f_2(m), f_3(m))^T \in \mathbb{C}^3,$$

$h = \frac{1}{M}$, $1 \leq m \leq M-1$.

En este caso tenemos

$$-D^{-1}C = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix};$$

$$\sigma(-D^{-1}C) = \left\{-1, 0, \frac{1}{2}\right\}, \; \mu_1 = 0, \mu_2 = \frac{1}{2}, \mu_3 = -1,$$

y con la notación utilizada en la teoría tomando μ_1 y μ_2 obtenemos

$$G(\mu_1) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}; \qquad G(\mu_2) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix}.$$

Notemos que para cada μ_j tenemos

$$\widetilde{G}\left(\mu_j, \theta_\ell^{(j)}\right) = \begin{bmatrix} G(\mu_j) \\ G(\mu_j)\left(A + w_\ell^{(j)}B\right) \\ G(\mu_j)\left(A + w_\ell^{(j)}B\right)^2 \end{bmatrix}, 1 \leq j \leq 2, \;\; 1 \leq \ell \leq M-1 .$$

Para $\mu_1 = 0$ se tiene

$$\widetilde{G}\left(\mu_1, \theta_\ell^{(1)}\right) = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ w_\ell^{(1)} - 1 & 0 & 0 \\ w_\ell^{(1)} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 - 5w_\ell^{(1)} \\ -2(w_\ell^{(1)} - 1)^2 & 0 & 0 \\ -2(w_\ell^{(1)} - 1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (5w_\ell^{(1)} - 2)^2 \end{bmatrix}, \qquad 1 \leq \ell \leq M - 1\,.$$

Por tanto, rango $\left(\widetilde{G}\left(\mu_1, \theta_\ell^{(1)}\right)\right) = 2 < 3$ para cualquier $w_\ell^{(1)}$ con $1 \leq \ell \leq M-1$. Además

$$G(\mu_1)^\dagger = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

y $\operatorname{Nuc} G(\mu_1)$ es un subespacio invariante por la matriz $A + w_\ell^{(1)} B$, para $1 \leq \ell \leq M - 1$, porque

$$G(\mu_1)\left(A + w_\ell^{(1)} B\right)\left(I - G(\mu_1)^\dagger G(\mu_1)\right) = 0\,.$$

Para $\mu_2 = \frac{1}{2}$ se tiene

$$\widetilde{G}\left(\mu_2, \theta_\ell^{(2)}\right) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1-w_\ell^{(2)}}{2} & \frac{1-w_\ell^{(2)}}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\left(2-5w_\ell^{(2)}\right)}{2} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\left(w_\ell^{(2)}-1\right)^2}{2} & \frac{\left(w_\ell^{(2)}-1\right)^2}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3\left(5w_\ell^{(2)}-2\right)^2}{2} \end{bmatrix}, \qquad 1 \le \ell \le M-1\,.$$

Para este valor propio obtenemos

$$G(\mu_2)^\dagger = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix},$$

y que $\operatorname{Nuc} G(\mu_2)$ es un subespacio invariante por $A + w_\ell^{(2)} B$, $1 \le \ell \le M-1$, porque

$$G(\mu_2)\left(A + w_\ell^{(2)} B\right)\left(I - G(\mu_2)^\dagger G(\mu_2)\right) = 0\,.$$

Consideremos el *teorema 2.4* con $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = \frac{1}{2}$, $q = 2$. Para garantizar que $f(m) \in S = \operatorname{Nuc} L(-D^{-1}C) = \operatorname{Nuc} G(\mu_1) \oplus \operatorname{Nuc} G(\mu_2)$, imponemos la condición equivalente de que las proyecciones $\widehat{f_1}(m) \in \operatorname{Nuc} G(\mu_1)$ y $\widehat{f_2}(m) \in \operatorname{Nuc} G(\mu_2)$. Teniendo en cuenta las expresiones de $G(\mu_1)$ y $G(\mu_2)$ es fácil comprobar que

$$\widehat{f_1}(m) = \begin{bmatrix} 0 \\ \widehat{f}_{1,2}(m) \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{y} \qquad \widehat{f_2}(m) = \begin{bmatrix} \widehat{f}_{2,1}(m) \\ \widehat{f}_{2,1}(m) \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por tanto

$$f(m) = \widehat{f_1}(m) + \widehat{f_2}(m) = \begin{bmatrix} \widehat{f}_{2,1}(m) \\ \widehat{f}_{1,2}(m) + \widehat{f}_{2,1}(m) \\ 0 \end{bmatrix},$$

y por el *teorema 2.4* la solución numérica del problema viene dada por

$$U(m,n) = \sum_{j=1}^{2} U_j(m,n)\,,$$

donde

$$U_1(m,n) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left[I - r\left(4A\,\mathrm{sen}^2\left(\tfrac{2\ell-1}{2(2M-1)}\pi\right) - \tfrac{B}{M^2}\right)\right]^n \mathrm{sen}\left(m\left(\tfrac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\right) d_\ell^{(1)}$$

$$1 \le m \le M-1\,, \quad n > 0\,,$$

$$d_\ell^{(1)} = \frac{8}{2M-1} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{3}{2} \end{bmatrix} \sum_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}\left(\nu\left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi\right) f(\nu)\,,$$

$$1 \le \ell \le M-1\,,$$

y

$$U_2(m,n) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left[I - r\left(4\,A\;\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(2)}}{2}\right) - \frac{B}{M^2}\right)\right]^n \mathrm{sen}\left(m\theta_\ell^{(2)}\right) d_\ell^{(2)}\,,$$

$$1 \le m \le M-1\,, \quad n > 0\,,$$

con $\theta_\ell^{(2)} \in \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$, $1 \le \ell \le M-1$, la solución de

$$\cot\left(M\theta_\ell^{(2)}\right) = \frac{\cos\left(\theta_\ell^{(2)}\right) - \left(1 - \frac{\mu_2}{M}\right)}{\mathrm{sen}\left(\theta_\ell^{(2)}\right)}\,,$$

y

$$d_\ell^{(2)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \frac{\sum_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}\left(\nu\theta_\ell^{(2)}\right) f(\nu)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2\left(\nu\theta_\ell^{(2)}\right)}\,, \quad 1 \le \ell \le M-1\,.$$

En este caso tenemos

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}; \qquad \sigma(A_1) = \left\{\frac{2174}{985}, \frac{781}{985}, 2\right\}\,,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -2 & -\frac{1}{2} & 0 \\ \\ -\frac{1}{2} & -1 & 0 \\ \\ 0 & 0 & -5 \end{bmatrix}; \qquad \sigma(B_1) = \left\{ -\frac{2174}{985}, -\frac{781}{985}, -5 \right\},$$

y tomando $\{f(m)\}$ acotado y r satisfaciendo (2.117) se garantiza la estabilidad de la solución construida.

Observación 2.3 *Es fácil comprobar que para el valor propio $\mu_3 = -1$ no se satisfacen las hipótesis (i) del teorema 2.4.*

EJEMPLO 2.3 *Consideremos el problema (2.1)-(2.4) con las matrices:*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ y el vector } F(x) = (x, x, x)^T \in \mathbb{C}^3.$$

Fácilmente se prueba que

$$u(x,t) = (xe^{-t}, xe^{-t}, xe^{-t})^T\,, \tag{2.138}$$

es la única solución teórica del problema dado.
Ahora vamos a utilizar los resultados teóricos obtenidos para calcular una solución numérica del problema dado. Posteriormente compararemos ambas soluciones.

Tenemos:

$$-D^{-1}C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

por tanto $\sigma(-D^{-1}C) = \{1\}$. Denotamos $\mu = 1$. Estamos en el caso del *teorema 2.3-(ii)*. Veamos que se cumplen las siguientes condiciones:

(a)

$$\begin{cases} \text{rango}\left(\widetilde{G}\,(1,\theta_\ell)\right) < 3, \quad 2 \le \ell \le M-1; \\ \\ \text{rango}\left(\widetilde{R}(1)\right) < 3; \end{cases}$$

(b)

$$\begin{cases} G(1)\,(A + w_\ell B)\left(I - G(1)^\dagger G(1)\right) = 0, \quad 2 \le \ell \le M-1; \\ \\ G(1)B\left(I - G(1)^\dagger G(1)\right) = 0\,. \end{cases}$$

En nuestro caso tenemos

$$A + w_\ell B = \begin{bmatrix} 2-w_\ell & 0 & 0 \\ 0 & 1-w_\ell & 1 \\ 0 & 0 & 1-w_\ell \end{bmatrix}, \quad 2 \le \ell \le M-1 .$$

El polinomio minimal de las matrices $A + w_\ell B$ coincide con su polinomio característico, por tanto, $p_\ell = 3$, para $2 \le \ell \le M-1$. Por otro lado tenemos que el polinomio minimal de B es de grado 1, i.e., $t = 1$. Por tanto tendremos que estudiar el rango de las siguientes matrices:

$$\widetilde{G}\,(1,\theta_\ell) = \begin{bmatrix} G(1) \\ G(1)\,(A + w_\ell B) \\ G(1)\,(A + w_\ell B)^2 \end{bmatrix}, \quad 2 \le \ell \le M-1\ ,$$

y

$$\widetilde{R}(1) = G(1) = D^{-1}C + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Obtenemos que rango $\left(\widetilde{G}\,(1,\theta_\ell)\right)$ = rango $\left(\widetilde{R}(1)\right) = 0 < 3$. Además puesto que $G(1)$ es la matriz nula, se verifican las condiciones de (b). Notemos que el vector de la condición inicial $f(m) = (mh, mh, mh)^T$ está acotado y pertenece al $\operatorname{Nuc} G(1)$. Por tanto, por el *teorema 2.3-(ii)* la solución numérica del problema viene dada por

$$U(m,n) = \sum_{\ell=2}^{M-1} \left(I - r\left(4\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)A - \frac{B}{M^2}\right)\right)^n \mathrm{sen}(m\theta_\ell) d_\ell + m\left(I + \frac{r}{M^2}B\right)^n d_1$$
$$1 \le m \le M-1, \quad n > 0$$

donde

$$d_\ell = \frac{\sum_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}\,(\nu\theta_\ell)\ f(\nu)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2\,(\nu\theta_\ell)}, \qquad 2 \le \ell \le M-1\,,$$

siendo $\theta_\ell \in \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$, $2 \le \ell \le M-1$, la solución de

$$\cot\,(M\theta_\ell) = \frac{\cos\,(\theta_\ell) - \left(1 - \frac{1}{M}\right)}{\mathrm{sen}\,(\theta_\ell)}\,, \tag{2.139}$$

y

$$d_1 = \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum_{\nu=1}^{M-1} \nu f(\nu) \, .$$

Notemos que

$$A_1 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix} ; \quad \sigma(A_1) = \left\{2, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}\right\} \, ,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ \\ 0 & -1 & 0 \\ \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} ; \quad \sigma(B_1) = \{-1\} \, ; \quad \sigma(B) = \{-1\} \, .$$

Para que la solución numérica construida sea estable se han de verificar simultáneamente las siguientes condiciones sobre el parámetro $r > 0$:

$$r < \frac{M^2 \left[-\lambda_{\text{máx}}(B_1) + 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \lambda_{\text{mín}}(A_1)\right]}{\left[4M^2 \lambda_{\text{máx}}(A_1) + \rho(B_1)\right]^2 + \left[4M^2 \lambda_{\text{máx}}(A_2) + \rho(B_2)\right]^2} \, , \tag{2.140}$$

donde θ_2 es la única solución de la ecuación (2.139) en $\left]\frac{\pi}{M}, \frac{2\pi}{M}\right[$, que es el segundo subintervalo de $]0, \pi[$, y

$$r < -\frac{2M^2 \operatorname{Re}(z)}{\left(\rho(B)\right)^2} \, , \quad \forall z \in \sigma(B) \, . \tag{2.141}$$

Para poder comparar numéricamente la solución construida con la solución teórica exacta, tomaremos distintos valores de M.

Caso 1. $\boxed{M = 10}$

Para la elección de r en (2.140) necesitamos averiguar el valor de $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$, $\theta_2 \in \left]\frac{\pi}{M}, \frac{2\pi}{M}\right[$. Sabemos que $\left\{-\frac{\rho_\ell}{r}\right\}_{\ell=2}^{M-1} = 4 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)$ son los valores propios del problema escalar de *Sturm-Liouville* (2.90) para $\mu = 1$, i.e., son los valores propios de la matriz tridiagonal $\widetilde{A}$, $(M-1 \times M-1)$, de la forma:

$$\widetilde{A} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 & \frac{M-2\mu}{M-\mu} \end{bmatrix}, (9 \times 9),$$

que se pueden calcular de forma eficiente con el paquete informático *Matlab*. Por otro lado, $\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)$ es creciente en $]0,\pi[\Longrightarrow \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) \geq \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) > \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_1}{2}\right)$, $\forall \ell$ tal que $2 \leq \ell \leq M-1 \Longrightarrow 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right)$ es el segundo valor propio más pequeño de la matriz $\widetilde{A}$, es decir,

$$4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = 0{,}2199803986793. \tag{2.142}$$

Sustituyendo (2.142) en la expresión (2.140) y teniendo en cuenta (2.141) se obtiene que r debe satisfacer simultáneamente las condiciones:

$$r < 0{,}00176041700848 \quad \text{y} \quad r < 200\,,$$

donde se ha tenido en cuenta que

$$A_2 = \frac{A - A^H}{2i} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2i} \\ 0 & \frac{1}{2i} & 0 \end{bmatrix}; \qquad \sigma(A_2) = \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\},$$

$$B_2 = \frac{B - B^H}{2i} = 0; \quad \sigma(B_2) = \{0\}\,.$$

Tomemos $r = 0{,}0017$. Por tanto, el paso temporal k será $k = 0{,}000017$. Para calcular numéricamente la solución $U(m,n)$ necesitamos conocer los valores de $\{\theta_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$, ya que en $U(m,n)$ nos aparece el término $\operatorname{sen}(m\theta_\ell)$. Por teoría sabemos que la sucesión $\{\theta_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$ verifica la ecuación

$$\cos(\theta_\ell) = \frac{2r + \rho_\ell}{2r}, \quad 2 \leq \ell \leq M-1\,,$$

de donde obtenemos que

$$\theta_\ell = \arccos\left[-\frac{1}{2}\left(-2 + \left(-\frac{\rho_\ell}{r}\right)\right)\right], \quad 2 \leq \ell \leq M-1\,, \tag{2.143}$$

siendo $\left\{-\frac{\rho_\ell}{r}\right\}_{\ell=2}^{M-1}$ los valores propios de la matriz $\widetilde{A}$. Se comprueba fácilmente que los θ_ℓ obtenidos utilizando la ecuación (2.143) son las soluciones de la ecuación (2.139). Notar que se ha utilizado este procedimiento alternativo para el cálculo de los valores de $\{\theta_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$ porque calcular directamente las $M-2$ soluciones de la ecuación (2.139) es difícil.

A continuación mostramos algunos de los valores numéricos que la solución vectorial $U(m,n)$ y la solución exacta $u(x,t)$ (evaluada en $u(mh,nk)$), toman en algunos puntos del mallado cuando $t=1$ segundo:

- Valor de la solución en el nodo $x_1 = \frac{1}{10}$ para $t=1$ segundo:

$$U(1,58824)= \begin{bmatrix} 0{,}03678733711496 \\ 0{,}03678733711496 \\ 0{,}03678733711496 \end{bmatrix}, \quad u\left(\frac{1}{10},1\right)= \begin{bmatrix} 0{,}03678794411714 \\ 0{,}03678794411714 \\ 0{,}03678794411714 \end{bmatrix},$$

- Valor de la solución en el nodo $x_4 = \frac{4}{10}$ para $t=1$ segundo:

$$U(4,58824)= \begin{bmatrix} 0{,}14714934845983 \\ 0{,}14714934845983 \\ 0{,}14714934845983 \end{bmatrix}, \quad u\left(\frac{2}{5},1\right)= \begin{bmatrix} 0{,}14715177646858 \\ 0{,}14715177646858 \\ 0{,}14715177646858 \end{bmatrix},$$

- Valor de la solución en el nodo $x_6 = \frac{6}{10}$ para $t=1$ segundo:

$$U(6,58824)= \begin{bmatrix} 0{,}22072402268975 \\ 0{,}22072402268975 \\ 0{,}22072402268975 \end{bmatrix}, u\left(\frac{3}{5},1\right)= \begin{bmatrix} 0{,}2207276647028654 \\ 0{,}2207276647028654 \\ 0{,}2207276647028654 \end{bmatrix},$$

- Valor de la solución en el nodo $x_9 = \frac{9}{10}$ para $t=1$ segundo:

$$U(9,58824)= \begin{bmatrix} 0{,}33108603403462 \\ 0{,}33108603403462 \\ 0{,}33108603403462 \end{bmatrix}, u\left(\frac{9}{10},1\right)= \begin{bmatrix} 0{,}3310914970542981 \\ 0{,}3310914970542981 \\ 0{,}3310914970542981 \end{bmatrix}.$$

Para comparar numéricamente ambas soluciones vectoriales calcularemos el *error global*:

$$\|U(m,n)-u(mh,nk)\|_\infty \ , \ \text{ y } \ \|U(m,n)-u(mh,nk)\|_2 \ .$$

Los errores globales para cada uno de los nodos considerados anteriormente son:

$$\left\|U(1,58824)-u\left(\frac{1}{10},1\right)\right\|_\infty = 0{,}06070021862092 \cdot 10^{-5},$$

$$\left\|U(4,58824)-u\left(\frac{2}{5},1\right)\right\|_\infty = 0{,}24280087448370 \cdot 10^{-5},$$

$$\left\|U(6,58824)-u\left(\frac{3}{5},1\right)\right\|_\infty = 0{,}36420131172832 \cdot 10^{-5},$$

$$\left\|U(9,58824)-u\left(\frac{9}{10},1\right)\right\|_\infty = 0{,}54630196759109 \cdot 10^{-5};$$

y para la *norma 2*

$$\left\| U(1,58824) - u\left(\frac{1}{10},1\right) \right\|_2 = 0{,}10513586268198\cdot 10^{-5}\,,$$

$$\left\| U(4,58824) - u\left(\frac{2}{5},1\right) \right\|_2 = 0{,}42054345072791\cdot 10^{-5}\,,$$

$$\left\| U(6,58824) - u\left(\frac{3}{5},1\right) \right\|_2 = 0{,}63081517609668\cdot 10^{-5}\,,$$

$$\left\| U(9,58824) - u\left(\frac{9}{10},1\right) \right\|_2 = 0{,}94622276414261\cdot 10^{-5}\,.$$

Considerando los errores globales en todos los nodos, i.e., en $x_m = \frac{m}{10}$, $1 \leq m \leq 9$, podemos decir que:

$$\left\| U(m,58824) - u\left(\frac{m}{10},1\right) \right\|_\infty \leq 0{,}54630196759109\cdot 10^{-5}\,, \qquad 1 \leq m \leq 9\,;$$

$$\left\| U(m,58824) - u\left(\frac{m}{10},1\right) \right\|_2 \leq 0{,}94622276414261\cdot 10^{-5}\,, \qquad 1 \leq m \leq 9\,,$$

i.e., la precisión obtenida es de 4 dígitos.

Caso 2. $\boxed{M = 20}$

Para calcular numéricamente la solución vectorial $U(m,n)$ de este caso, necesitaremos conocer los 19 valores propios de la matriz tridiagonal $\tilde{A}$, pues ahora será de dimensión 19×19; averiguar los valores de $\{\theta_\ell\}_{\ell=2}^{19}$, definidos en (2.143); y elegir un nuevo valor para el parámetro r, ya que éste depende de M y de θ_2 (solución de la ecuación (2.139)).

Para este caso se tiene que $-\frac{\rho_2}{r} = 4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = 0{,}05288712479686$ y que el parámetro r debe ser simultáneamente

$$r < 7{,}23046661988181\cdot 10^{-4} \quad \text{y} \quad r < 800\,.$$

Tomaremos $r = 7{,}2\cdot 10^{-4}$. Por tanto, el paso temporal k será $k = rh^2 = 1{,}8\cdot 10^{-6}$. Notar que al disminuir el valor de k se necesitará un mayor número de iteraciones, n, para llegar al mismo momento temporal $t = 1$.
Se muestra a continuación algunos de los valores obtenidos para este caso.

Para $t = 1$ los valores de $U(m,n)$ y $u(x,t)$ respectivamente, para algunos nodos del mallado, son:

$$U(1,555556) = \begin{bmatrix} 0{,}01839394078811 \\ 0{,}01839394078811 \\ 0{,}01839394078811 \end{bmatrix},\ u\left(\frac{1}{20},1\right) = \begin{bmatrix} 0{,}0183939720585721 \\ 0{,}0183939720585721 \\ 0{,}0183939720585721 \end{bmatrix},$$

$$U(6,555556)=\begin{bmatrix}0{,}11036364472864\\0{,}11036364472864\\0{,}11036364472864\end{bmatrix},\ u\left(\frac{3}{10},1\right)=\begin{bmatrix}0{,}1103638323514327\\0{,}1103638323514327\\0{,}1103638323514327\end{bmatrix},$$

$$U(9,555556)=\begin{bmatrix}0{,}16554546709296\\0{,}16554546709296\\0{,}16554546709296\end{bmatrix},\ u\left(\frac{9}{20},1\right)=\begin{bmatrix}0{,}1655457485271491\\0{,}1655457485271491\\0{,}1655457485271491\end{bmatrix},$$

$$U(15,555556)=\begin{bmatrix}0{,}27590911182161\\0{,}27590911182161\\0{,}27590911182161\end{bmatrix},\ u\left(\frac{3}{4},1\right)=\begin{bmatrix}0{,}2759095808785818\\0{,}2759095808785818\\0{,}2759095808785818\end{bmatrix},$$

$$U(19,555556)=\begin{bmatrix}0{,}34948487497404\\0{,}34948487497404\\0{,}34948487497404\end{bmatrix},\ u\left(\frac{19}{20},1\right)=\begin{bmatrix}0{,}3494854691128702\\0{,}3494854691128702\\0{,}3494854691128702\end{bmatrix}.$$

Los errores globales en cada uno de estos nodos son:

$$\left\|U(1,555556)-u\left(\frac{1}{20},1\right)\right\|_\infty=0{,}03127046500559\cdot 10^{-6},$$

$$\left\|U(6,555556)-u\left(\frac{3}{10},1\right)\right\|_\infty=0{,}18762279004048\cdot 10^{-6},$$

$$\left\|U(9,555556)-u\left(\frac{9}{20},1\right)\right\|_\infty=0{,}28143418503990\cdot 10^{-6},$$

$$\left\|U(15,555556)-u\left(\frac{3}{4},1\right)\right\|_\infty=0{,}46905697509425\cdot 10^{-6},$$

$$\left\|U(19,555556)-u\left(\frac{19}{20},1\right)\right\|_\infty=0{,}59413883518600\cdot 10^{-6}.$$

y para la *norma 2*

$$\left\|U(1,555556)-u\left(\frac{1}{20},1\right)\right\|_2=0{,}00541620341660\cdot 10^{-5},$$

$$\left\|U(6,555556)-u\left(\frac{3}{10},1\right)\right\|_2=0{,}03249722050079\cdot 10^{-5},$$

$$\left\|U(9,555556)-u\left(\frac{9}{20},1\right)\right\|_2=0{,}04874583074758\cdot 10^{-5},$$

$$\left\|U(15,555556)-u\left(\frac{3}{4},1\right)\right\|_2=0{,}08124305125078\cdot 10^{-5},$$

$$\left\| U(19,555556) - u\left(\frac{19}{20},1\right) \right\|_2 = 0{,}10290786492919{\cdot}10^{-5}\,.$$

Considerando los errores globales en todos los nodos, i.e., en $x_m = \frac{m}{20}$, $1 \leq m \leq 19$, podemos decir que:

$$\left\| U(m,555556) - u\left(\frac{m}{20},1\right) \right\|_\infty \leq 0{,}59413883518600{\cdot}10^{-6}\,, \qquad 1 \leq m \leq 19\,;$$

$$\left\| U(m,555556) - u\left(\frac{m}{20},1\right) \right\|_2 \leq 0{,}10290786492919{\cdot}10^{-5}\,, \qquad 1 \leq m \leq 19\,,$$

i.e., la precisión obtenida para la *norma infinito* es de 5 dígitos.

Observamos numéricamente, que a medida que hacemos el mallado más fino, i.e. aumentamos el valor de M, conseguimos mayor precisión.

Caso 3. $\boxed{M = 40}$

Para calcular numéricamente la solución vectorial $U(m,n)$ de este caso, necesitaremos conocer los 39 valores propios de la matriz tridiagonal $\tilde{A}$, pues ahora será de dimensión 39×39; averiguar los valores de $\{\theta_\ell\}_{\ell=2}^{39}$, definidos en (2.143); y elegir un nuevo valor para el parámetro r.

Para este caso se tiene que $-\frac{\rho_2}{r} = 4\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_2}{2}\right) = 0{,}01292813159293$ y que el parámetro r debe ser simultáneamente

$$r < 8{,}858563511939551{\cdot}10^{-4} \quad \text{y} \quad r < 3200\,.$$

Tomaremos $r = 8{,}8{\cdot}10^{-4}$. Por tanto, el paso temporal k será $k = 5{,}5{\cdot}10^{-7}$.

Para $t = 1$ los valores de $U(m,n)$ y $u(x,t)$, para algunos nodos del mallado, son:

$$U(1,1818182) = \begin{bmatrix} 0{,}00919698258114 \\ 0{,}00919698258114 \\ 0{,}00919698258114 \end{bmatrix},\ u\left(\frac{1}{40},1\right) = \begin{bmatrix} 0{,}0091969860292861 \\ 0{,}0091969860292861 \\ 0{,}0091969860292861 \end{bmatrix},$$

$$U(10,1818182) = \begin{bmatrix} 0{,}09196982581135 \\ 0{,}09196982581135 \\ 0{,}09196982581135 \end{bmatrix},\ u\left(\frac{1}{4},1\right) = \begin{bmatrix} 0{,}0919698602928606 \\ 0{,}0919698602928606 \\ 0{,}0919698602928606 \end{bmatrix},$$

$$U(21,1818182) = \begin{bmatrix} 0{,}19313663420384 \\ 0{,}19313663420384 \\ 0{,}19313663420384 \end{bmatrix},\ u\left(\frac{21}{40},1\right) = \begin{bmatrix} 0{,}1931367066150072 \\ 0{,}1931367066150072 \\ 0{,}1931367066150072 \end{bmatrix},$$

$$U(28,1818182) = \begin{bmatrix} 0{,}25751551227179 \\ 0{,}25751551227179 \\ 0{,}25751551227179 \end{bmatrix},\ u\left(\frac{7}{10},1\right) = \begin{bmatrix} 0{,}2575156088200096 \\ 0{,}2575156088200096 \\ 0{,}2575156088200096 \end{bmatrix},$$

$$U(35,1818182)=\begin{bmatrix}0{,}32189439033973\\0{,}32189439033973\\0{,}32189439033973\end{bmatrix},u\left(\frac{7}{8},1\right)=\begin{bmatrix}0{,}3218945110250120\\0{,}3218945110250120\\0{,}3218945110250120\end{bmatrix},$$

$$U(39,1818182)=\begin{bmatrix}0{,}35868232066427\\0{,}35868232066427\\0{,}35868232066427\end{bmatrix},u\left(\frac{39}{40},1\right)=\begin{bmatrix}0{,}3586824551421563\\0{,}3586824551421563\\0{,}3586824551421563\end{bmatrix}.$$

Los errores globales en $t=1$ son:

$$\left\|U(1,1818182)-u\left(\frac{1}{40},1\right)\right\|_\infty=0{,}00344815085339\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(10,1818182)-u\left(\frac{1}{4},1\right)\right\|_\infty=0{,}03448150853735\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(21,1818182)-u\left(\frac{21}{40},1\right)\right\|_\infty=0{,}07241116792289\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(28,1818182)-u\left(\frac{7}{10},1\right)\right\|_\infty=0{,}09654822391569\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(35,1818182)-u\left(\frac{7}{8},1\right)\right\|_\infty=0{,}12068527982523\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(39,1818182)-u\left(\frac{39}{40},1\right)\right\|_\infty=0{,}13447788327348\cdot10^{-6}\,;$$

y para la *norma 2*

$$\left\|U(1,1818182)-u\left(\frac{1}{40},1\right)\right\|_2=0{,}00597237247023\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(10,1818182)-u\left(\frac{1}{4},1\right)\right\|_2=0{,}05972372470832\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(21,1818182)-u\left(\frac{21}{40},1\right)\right\|_2=0{,}12541982187785\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(28,1818182)-u\left(\frac{7}{10},1\right)\right\|_2=0{,}16722642920252\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(35,1818182)-u\left(\frac{7}{8},1\right)\right\|_2=0{,}20903303638296\cdot10^{-6}\,,$$

$$\left\|U(39,1818182)-u\left(\frac{39}{40},1\right)\right\|_2=0{,}23292252632398\cdot10^{-6}\,.$$

Considerando los errores globales en todos los nodos, i.e., en $x_m=\frac{m}{40}$, $1\le m\le 39$, podemos decir que:

$$\left\|U(m,555556)-u\left(\frac{m}{40},1\right)\right\|_\infty\le 0{,}13447788327348\cdot10^{-6}\,,\qquad 1\le m\le 39\,;$$

$$\left\| U(m, 555556) - u\left(\frac{m}{40}, 1\right) \right\|_2 \leq 0{,}23292252632398 \cdot 10^{-6}, \qquad 1 \leq m \leq 39,$$

i.e., la precisión obtenida es de 5 dígitos.

Notemos que la precisión obtenida para $M = 40$ es mayor o igual que para los casos $M = 10$ y $M = 20$. Pero, a cambio de aumentar en exactitud debemos realizar un mayor número de iteraciones, n, para calcular la solución en el mismo instante de tiempo $t = 1$. Además también se ha observado numéricamente que el primer sumando de la solución aproximada:

$$\sum_{\ell=2}^{M-1} \left(I - r \left(4 \operatorname{sen}^2 \left(\frac{\theta_\ell}{2} \right) A - \frac{B}{M^2} \right) \right)^n \operatorname{sen}(m\theta_\ell)\, d_\ell, \tag{2.144}$$

es de magnitud despreciable al sumarse con el otro término de la solución

$$m \left(I + \frac{r}{M^2} B \right)^n d_1, \tag{2.145}$$

por tanto, el valor numérico de la solución aproximada construida nos lo da el término (2.145). Pero la expresión (2.144) nos proporciona una cota para el parámetro de estabilidad r que hace que la solución numérica construida sea una buena aproximación a la solución exacta.

2.2. Caso general

0.4pt0.4pt 0pt0.4pt

2.2.1. Introducción

En este capítulo trabajaremos con sistemas de ecuaciones en derivadas parciales difusivos fuertemente acoplados del tipo:

$$\begin{aligned}
u_t(x,t) - Au_{xx}(x,t) - Bu(x,t) &= 0, \qquad 0 < x < 1,\ \ t > 0, && (2.146)\\
A_1\, u(0,t) + B_1\, u_x(0,t) &= 0, \qquad t > 0, && (2.147)\\
A_2\, u(1,t) + B_2\, u_x(1,t) &= 0, \qquad t > 0, && (2.148)\\
u(x,0) &= F(x), \quad 0 \leq x \leq 1, && (2.149)
\end{aligned}$$

donde $u = (u_1, \ldots, u_s)^T$ y $F = (f_1, \ldots, f_s)^T$ son vectores s-dimensionales, elementos de $\mathbb{C}^s$, y A_i, B_i, para $i = 1, 2$ son matrices complejas $s \times s$, elementos de $\mathbb{C}^{s \times s}$ verificando ciertas propiedades a determinar.

Supondremos que

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix} \text{ y } A_1 \text{ son matrices invertibles}, \tag{2.150}$$

véanse las *observaciones 1.6* y *1.7*.

En este capítulo la construcción de soluciones numéricas discretas convergentes del problema (2.146)–(2.150) se realizará de la misma forma que en el apartado 2.1, es decir, utilizando esquemas en diferencias finitas, aplicando un método de separación de variables discreto y resolviendo explícitamente el problema mixto (2.146)–(2.149) discretizado. Es importante hacer notar, que el método de separación de variables discreto aquí propuesto, evita la resolución de sistemas algebraicos de gran tamaño con bloques matriciales como occurre al utilizar los métodos en diferencias estándares.
En el apartado 2.2.2 estudiaremos la discretización del problema (2.146)–(2.149) bajo la hipótesis (2.150) y trataremos la existencia y construcción de soluciones no triviales para el problema de contorno (2.146)–(2.149) discretizado. En el apartado 2.2.3 construiremos soluciones discretas convergentes para el problema mixto (2.146)–(2.149) discretizado y utilizaremos el método de las proyecciones, visto en el apartado 2.1, para extender los resultados obtenidos a una clase más amplia de funciones de valores iniciales $F(x)$. Finalmente en el apartado 2.2.4 desarrollaremos dos ejemplos a modo de ilustración.

Citaremos ahora el *lema 1.2* puesto que es un resultado algebraico que jugará un papel importante en posteriores apartados de este capítulo y cuya demostración se encuentra en el apartado 1.2:

Sean M y N matrices en $\mathbb{C}^{s\times s}$, entonces:

$$\begin{aligned}&\operatorname{Nuc} M \cap \operatorname{Nuc} N \\ &\qquad = \operatorname{Im}\left\{\left(I - M^\dagger M\right)\left\{I - \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]^\dagger \left[N\left(I - M^\dagger M\right)\right]\right\}\right\}.\end{aligned}$$

2.2.2. El problema de contorno discreto

Dividimos el dominio $[0,1]\times[0,\infty[$ en rectángulos iguales de lados $\Delta x = h$ y $\Delta t = k$, introducimos las coordenadas de un punto típico del mallado (mh, nk) y denotamos $U(m,n) = u(mh,nk)$. Aproximamos la derivada parcial de segundo orden u_{tt} mediante diferencias centradas y u_t mediante diferencias progresivas (véase el apartado 2.1.2) :

$$\left.\begin{aligned} u_t(mh,nk) &\approx \frac{U(m,n+1)-U(m,n)}{k} \\ u_{xx}(mh,nk) &\approx \frac{U(m+1,n)-2U(m,n)+U(m,n-1)}{h^2} \end{aligned}\right], \tag{2.151}$$

sustituyendo (2.151) en (2.146)–(2.149) y denotando

$$r = \frac{k}{h^2}, \qquad h = \frac{1}{M}, \tag{2.152}$$

obtenemos la discretización del sistema de ecuaciones en derivadas parciales (2.146)–(2.149):

$$\left.\begin{array}{c} U(m,n+1) \\ = rA\left[U(m+1,n)+U(m-1,n)\right]+\left(I+\frac{rB}{M^2}-2rA\right)U(m,n) \end{array}\right], \tag{2.153}$$
$$1 \le m \le M-1,\ n \ge 0,$$

$$A_1 U(0,n) + M B_1 \left[U(1,n) - U(0,n)\right] = 0\ , \qquad n \ge 0 \tag{2.154}$$
$$A_2 U(M,n) + M B_2 \left[U(M,n) - U(M-1,n)\right] = 0\ , \qquad n \ge 0 \tag{2.155}$$
$$U(m,0) = F(mh) = f(m)\ ,\ \ 0 \le m \le M \tag{2.156}$$

Como se ha visto en el apartado 2.1.4, el esquema en diferencias (2.153) es *consistente* con la ecuación (2.146) en el sentido de la *definición 1.13*. Mediante un método de separación de variables discreto buscamos soluciones no triviales $\{U(m,n)\}$ del problema de contorno (2.153)–(2.155) de la forma

$$U(m,n) = G(n)\,H(m)\,, \quad G(n) \in \mathbb{C}^{s\times s}\,, \quad H(m) \in \mathbb{C}^{s}\,. \tag{2.157}$$

Sustituyendo (2.157) en (2.153) y teniendo en cuenta el apartado 2.1.3 obtenemos que $\{U(m,n)\}$ dada por (2.157) satisface (2.153) si $\{G(n)\}$, $\{H(m)\}$ verifican

$$G(n+1) - \left(I + \frac{r\,B}{M^2} + \rho\,A\right) G(n) = 0\,, \quad n \ge 0\,, \tag{2.158}$$

$$H(m+1) - \left(\frac{2r+\rho}{r}\right) H(m) + H(m-1) = 0\,, \quad 1 \le m \le M-1\,, \tag{2.159}$$

donde ρ es un número real. Observar que la solución de (2.158) verificando $G(0)=I$, viene dada por

$$G(n) = \left(I + \frac{r\,B}{M^2} + \rho\,A\right)^n\,, \quad n \ge 0\,. \tag{2.160}$$

Si ρ verifica

$$-4r < \rho < 0\,, \tag{2.161}$$

entonces la ecuación algebraica

$$z^2 - \left(\frac{2r+\rho}{r}\right) z + 1 = 0\,, \tag{2.162}$$

tiene dos soluciones diferentes z_0, z_1 dadas por

$$\left.\begin{array}{c} z_0 = \frac{2r+\rho}{2r} + i\left(1 - \left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = e^{i\theta}\,, \\[2ex] z_1 = \frac{2r+\rho}{2r} - i\left(1 - \left(\frac{2r+\rho}{2r}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}} = e^{-i\theta}\,, \\[2ex] 0<\theta<\pi\,, \qquad \cos\theta = \frac{2r+\rho}{2r}\,, \qquad \rho = -4r\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\,, \quad i^2=-1 \end{array}\right]. \tag{2.163}$$

Ya que la ecuación vectorial (2.159) tiene coeficientes escalares, su solución puede escribirse de la forma

$$H(m) = \cos(m\theta)\, c + \operatorname{sen}(m\theta)\, d\,, \qquad c, d \in \mathbb{C}^s, \quad 1 \le m \le M-1. \tag{2.164}$$

Observación 2.4 *Por (2.150) sabemos que A_1 no es singular, y puesto que los bloques A_2, B_1, B_2 pueden ser o no singulares, si en el problema de frontera discreto (2.153)–(2.155) la matriz A_i (respectivamente B_i) es invertible, premultiplicando la correspondiente condición de contorno por A_i^{-1} (respectivamente por B_i^{-1}) el problema queda simplificado a estudiar los siguientes 4 casos para las condiciones de contorno:*

$$\mathit{I)} \begin{bmatrix} I & B_1 \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}, \quad \mathit{II)} \begin{bmatrix} A_1 & I \\ A_2 & B_2 \end{bmatrix}, \quad \mathit{III)} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ I & B_2 \end{bmatrix}, \quad \mathit{IV)} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & I \end{bmatrix},$$

puesto que los otros casos posibles, i.e., cuando 3 ó 4 de los bloques de $\mathcal{A}$ son invertibles, son casos particulares de los cuatro arriba mencionados. Por tanto, suponer que $A_i = I$ para $i = 1$, ó 2, o $B_i = I$ para $i = 1$ ó 2, no involucra pérdida de generalidad. Notemos que en el caso I), por motivos de simplicidad, la matriz B_1 representa en realidad a la nueva matriz $A_1^{-1} B_1 \neq I$. Con el resto de los casos sucedería su correspondiente análogo.

Suponiendo que $A_1 = I$, de (2.157) obtenemos que la condición de contorno (2.154) toma la forma

$$G(n)\, H(0) + M\, B_1\, G(n)\, [H(1) - H(0)] = 0\,, \quad n \ge 0\,. \tag{2.165}$$

Utilizando la ecuación (2.159) para $m = 1$, la ecuación (2.164) con $m = 1, 2$ y que $\cos\theta = \frac{2r+\rho}{2r}$ (al ser z_0 y z_1 raíces complejas unitarias), obtenemos $H(0) = c$ y considerando (2.165) para $n = 0$, se sigue que

$$[I - (1 - \cos\theta)\, M\, B_1]\ c = -(M\ \operatorname{sen}\theta)\, B_1\, d\,. \tag{2.166}$$

Premultiplicando (2.164) por $[I - (1 - \cos\theta)\, M\, B_1]$ y teniendo en cuenta (2.166) obtenemos

$$\left.\begin{array}{c} [I - (1 - \cos\theta)\, M\, B_1]\ H(m) \\[2mm] = -M\, B_1 \cos(m\theta) \operatorname{sen}\theta\, d + \operatorname{sen}(m\theta)\, [I - (1 - \cos\theta)\, M\, B_1]\ d \\[2mm] = \left[\operatorname{sen}(m\theta) I - 2M\, B_1 \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{2m-1}{2}\right)\theta\right)\right] d \\[2mm] 1 \le m \le M-1\ . \end{array}\right] . \tag{2.167}$$

Por el *teorema de la aplicación espectral*, véase el *teorema 1.6*, los valores propios de la matriz $I - (1 - \cos\theta)\, M\, B_1$ son $\{1 - (1 - \cos\theta)\, M\, w\,;\ w \in \sigma(B_1)\}$ y la parte real de esos valores propios son

$$1 - (1 - \cos\theta)\, M\, w_1\,; \qquad w = w_1 + i\, w_2 \in \sigma(B_1)\,.$$

Si $w_1 \le 0$ entonces $1 - (1 - \cos\theta)\, M\, w_1 \neq 0$. Si $w_1 > 0$, tomando

$$M > \frac{1}{(1 - \cos\theta) w_1}\,,$$

obtenemos $1-(1-\cos\theta)\,M\,w_1 < 0$. Por tanto, tomando M suficientemente grande de manera que

$$M > \frac{1}{(1-\cos\theta)\,\gamma(B_1)}\,, \tag{2.168}$$

donde

$$\gamma(B_1)=\begin{cases} \text{mín}\,\{\mathrm{Re}(w) : w\in\sigma(B_1)\}\,, & \text{si } \exists w\in\sigma(B_1),\ \mathrm{Re}(w)>0 \\ (1-\cos\theta)^{-1}\,, & \text{si } \mathrm{Re}(w)\le 0\ \ \forall w\in\sigma(B_1) \end{cases} \tag{2.169}$$

obtenemos que

$$I-(1-\cos\theta)\,M\,B_1 \qquad \text{es invertible}\,, \tag{2.170}$$

y entonces para $1\le m\le M-1$

$$H(m)=\left[\mathrm{sen}(m\theta)\,I-2M\ \mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2m-1}{2}\right)\theta\right)B_1\right]d\ , \tag{2.171}$$

es también una solución de la ecuación (2.159) para cualquier vector $d\in\mathbb{C}^s$. Notar que $\rho=-4r\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$ para $\theta\in\,]0,\pi[$, puesto que si $\theta=\{0,\pi\}$ entonces $H(m)=0$, $1\le m\le M-1$ y por (2.157) obtendríamos $U(m,n)=G(n)\cdot 0=0$, i.e., la solución trivial.
Teniendo en cuenta (2.159) para $m=1$, (2.171) para $m=1,2$, que $\cos\theta=\frac{2r+\rho}{2r}$ y (2.165), obtenemos

$$H(0)=-(M\,\mathrm{sen}\,\theta)\,B_1 d\,. \tag{2.172}$$

Sustituyendo (2.160), (2.171) y (2.172) en (2.165), para $n>0$ se tiene

$$-M\,\mathrm{sen}\,\theta\left[\left(I+\frac{rB}{M^2}+\rho\,A\right)^n B_1-B_1\left(I+\frac{rB}{M^2}+\rho\,A\right)^n\right]d=0\,,\ n>0. \tag{2.173}$$

Ya que $\mathrm{sen}\,\theta\neq 0$ para $\theta\in\,]0,\pi[$, por (2.163) tenemos

$$w=\frac{r}{M^2\rho}=\frac{-1}{4M^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)}\neq 0\,, \tag{2.174}$$

y (2.173) puede reescribirse de la siguiente forma

$$\left[(I+\rho\,(A+w\,B))^n\,B_1-B_1\,(I+\rho\,(A+w\,B))^n\right]d=0\,,\quad d\in\mathbb{C}^s\,,\ \ n>0\,. \tag{2.175}$$

Considerando (2.159) para $m=M-1$, es fácil probar que

$$H(M)=\left[\mathrm{sen}(M\theta)\,I-2M\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)\,B_1\right]d\,,\quad d\in\mathbb{C}^s\,. \tag{2.176}$$

Imponiendo a $U(m,n)$, dada por (2.157), la condición de contorno (2.155) para $n\ge 0$ y haciendo uso de (2.160), (2.171) y (2.176) obtenemos

$$\{A_2\,(I+\rho(A+wB))^n\,\mathrm{sen}(M\theta)$$

$$-2M\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)A_2\left(I+\rho(A+wB)\right)^n B_1$$
$$+2M\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)B_2\left(I+\rho(A+wB)\right)^n$$
$$\left.+\,4M^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{sen}((M-1)\theta)B_2\left(I+\rho(A+wB)\right)^n B_1\right\}d=0\,,\quad n\geq 0. \tag{2.177}$$

Sustituyendo (2.175) en (2.177) para $n>0$ y utilizando (2.177) para $n=0$, se sigue que para $n\geq 0$

$$\left\{A_2\,\mathrm{sen}(M\theta)-2M\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)A_2B_1\right.$$
$$+2M\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)B_2$$
$$\left.+4M^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{sen}((M-1)\theta)B_2B_1\right\}(I+\rho(A+wB))^n\,d=0. \tag{2.178}$$

Sea p el grado del polinomio minimal de $A+w\,B$, entonces por el *teorema de Cayley-Hamilton*, véase el *teorema 1.7*, para $n\geq p$ las potencias $(A+w\,B)^n$ se expresan en términos de I, $A+w\,B$, $(A+w\,B)^2,\ldots,(A+w\,B)^{p-1}$. Ya que $w\neq 0$, las condiciones (2.175) y (2.178) se cumplen si:

$$[(A+wB)^nB_1-B_1(A+wB)^n]\,d=0\,,\qquad 0<n<p\,. \tag{2.179}$$

y

$$\left\{2M\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)(B_2-A_2B_1)+A_2\,\mathrm{sen}(M\theta)\right.$$
$$\left.+4M^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{sen}((M-1)\theta)B_2B_1\right\}(A+wB)^n\,d=0\,, \tag{2.180}$$
$$0\leq n<p\,.$$

respectivamente. Para garantizar que $\{U(m,n)\}$ sea una solución no trivial, el vector d que aparece en (2.180) debe ser no nulo. Por (2.180), existirá un vector no nulo d verificando la condición (2.180) si la matriz

$$L(\theta)=2M\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)(B_2-A_2B_1)+A_2\,\mathrm{sen}(M\theta)$$
$$+4M^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\mathrm{sen}((M-1)\theta)\,B_2B_1\ \text{ es singular,} \tag{2.181}$$
$$0<\theta<\pi.$$

Observemos que sumando y restando el término $A_2\,\mathrm{sen}((M-1)\theta)$ la matriz $L(\theta)$ puede reescribirse de la forma:

$$L(\theta)=2M\,\mathrm{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)\left[(B_2-A_2B_1)+\frac{A_2}{M}\right]$$
$$+\,\mathrm{sen}((M-1)\theta)\left[A_2+4M^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)B_2B_1\right]. \tag{2.182}$$

Por las propiedades del *complemento de Schur* de una matriz, véasen las *observaciones 1.6* y *1.7*, junto con la hipótesis (2.150) y $A_1 = I$, se sigue que

$$B_2 - A_2 B_1 \quad \text{es invertible.} \tag{2.183}$$

Por (2.183) y el *lema de Banach*, véase el *lema 1.3*, se sigue que

$$(B_2 - A_2 B_1) + \frac{A_2}{M} \qquad \text{es invertible si} \quad M > \|A_2\| \left\| (B_2 - A_2 B_1)^{-1} \right\| . \tag{2.184}$$

Por tanto si M satisface la condición (2.184), los valores de $\theta \in \,]0, \pi[$ para los cuales la matriz $L(\theta)$ definida por (2.182) es singular deberán verificar que $\operatorname{sen}((M-1)\theta) \neq 0$. Consecuentemente $L(\theta)$ es singular si y sólo si

$$\begin{aligned} & A_2 + 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) B_2 B_1 + \\ & \quad + \frac{2M \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta)} \left[(B_2 - A_2 B_1) + \frac{A_2}{M} \right] \text{ es singular,} \end{aligned} \tag{2.185}$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned} & \frac{\operatorname{sen}(M\theta)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta)} (B_2 - A_2 B_1)^{-1} A_2 + 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) (B_2 - A_2 B_1)^{-1} B_2 B_1 + \\ & \qquad \frac{2M \operatorname{sen}\left(\frac{\theta}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{2M-1}{2}\right)\theta\right)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta)} I \,, \quad \text{es singular,} \;\; 0 < \theta < \pi. \end{aligned} \tag{2.186}$$

Para simplificar la expresión (2.186) introducimos las matrices

$$\widehat{A}_2 = (A_2 B_1 - B_2)^{-1} A_2 \,, \qquad \widehat{B}_2 = (A_2 B_1 - B_2)^{-1} B_2 = \widehat{A}_2 B_1 - I \,. \tag{2.187}$$

Utilizando las matrices $\widehat{A}_2$, $\widehat{B}_2$ definidas en (2.187) y el *teorema de la aplicación espectral* la condición (2.186) significa que

$$\left.\begin{array}{l} M \left(\dfrac{\operatorname{sen}(M\theta)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta)} - 1 \right) \;\; \text{es un valor propio de la matriz} \\ \dfrac{\operatorname{sen}(M\theta)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta)} \widehat{A}_2 + 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \left(\widehat{A}_2 B_1^2 - B_1 \right) , \quad 0 < \theta < \pi \end{array} \right] . \tag{2.188}$$

Supongamos que

$$\left.\begin{array}{l} \text{Existen } \; \alpha \in \sigma\left(\widehat{A}_2\right) \cap \mathbb{R} \,; \;\; \beta \in \sigma(B_1) \cap \mathbb{R} \;\; \text{y} \;\; v \in \mathbb{C}^s \sim \{0\} \\ \text{tales que } \; \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) v = (B_1 - \beta I)\, v = 0 \end{array} \right] . \tag{2.189}$$

Por (2.189) se sigue que

$$\left[\frac{\operatorname{sen}(M\theta)}{\operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)}\widehat{A}_2+4M^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\widehat{A}_2B_1^2-B_1\right)\right]v=$$
$$=\left[\frac{\operatorname{sen}(M\theta)}{\operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)}\alpha+4M^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\alpha\beta^2-\beta\right)\right]v\,,\quad 0<\theta<\pi\,,$$

o equivalentemente

$$\left.\begin{array}{c} v \text{ es un vector propio de la matriz} \\ \dfrac{\operatorname{sen}(M\theta)}{\operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)}\widehat{A}_2+4M^2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\widehat{A}_2B_1^2-B_1\right) \\ \text{asociado al valor propio real} \\ \dfrac{\operatorname{sen}(M\theta)}{\operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)}\alpha+4M^2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta}{2}\right)\left(\alpha\beta^2-\beta\right) \end{array}\right]. \tag{2.190}$$

Tomando M suficientemente grande de manera que

$$M>\alpha\,,$$

la condición (2.188) y (2.190) hacen posible encontrar soluciones de la ecuación escalar

$$\frac{\operatorname{sen}(M\theta)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta)}=\frac{M}{M-\alpha}+4M^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\frac{\left(\alpha\beta^2-\beta\right)}{M-\alpha}\,,\quad 0<\theta<\pi\,,$$

o equivalentemente

$$\begin{aligned}&\cot\left((M-1)\,\theta\right)\\ &\qquad=-\cot\theta+\frac{M}{M-\alpha}\left[\frac{1}{\operatorname{sen}\theta}+2M\left(\alpha\beta^2-\beta\right)\tan\left(\frac{\theta}{2}\right)\right],\ 0<\theta<\pi.\end{aligned} \tag{2.191}$$

Para cada entero ℓ con $1\le\ell\le M-1$, en el intervalo $J_\ell=\left]\frac{(\ell-1)\pi}{M-1},\frac{\ell\pi}{M-1}\right[$ se satisface

$$\left.\begin{array}{c} \lim_{\theta\to\frac{(\ell-1)\pi}{M-1}+}\cot((M-1)\theta)=+\infty\,; \\ \lim_{\theta\to\frac{\ell\pi}{M-1}-}\cot((M-1)\theta)=-\infty\,; \\ \cot((M-1)\theta) \text{ decreciente en } J_\ell, \end{array}\right] \tag{2.192}$$

donde la última condición se cumple porque

$$\frac{d}{d\theta}\left(\cot((M-1)\theta)\right)=-\frac{M-1}{\operatorname{sen}^2((M-1)\theta)}<0\,.$$

Además la función $e_M(\theta)$ describiendo la parte derecha de la igualdad (2.191) es continua y creciente en $]0,\pi[$ si se satisface alguna de las siguientes condiciones

$$\left.\alpha < 1 \ \ \text{y} \quad \begin{array}{c} \beta = 0\,, \\ \text{ó} \\ \alpha\beta = 1\,, \\ \text{ó} \\ \beta > 0 \ \text{ y } \ \alpha\beta > 1\,, \\ \text{ó} \\ \beta < 0 \ \text{ y } \ \alpha\beta < 1\,. \end{array} \right] . \tag{2.193}$$

Entonces por (2.192)–(2.193) existe una única solución θ_ℓ de (2.191) en el intervalo J_ℓ, verificando

$$\left.\begin{array}{c} \cot\left((M-1)\,\theta_\ell\right) \\ = -\cot\theta_\ell + \dfrac{M}{M-\alpha}\left[\dfrac{1}{\operatorname{sen}\theta_\ell} + 2M\left(\alpha\beta^2 - \beta\right)\tan\left(\dfrac{\theta_\ell}{2}\right)\right] \\ 1 \le \ell \le M-1\,, \quad \theta_\ell \in J_\ell \end{array}\right] . \tag{2.194}$$

Por tanto la condición (2.180) puede escribirse de la forma

$$\begin{array}{c} S(\alpha,\beta,\theta_\ell)\,(A + w_\ell\, B)^n\ d_\ell = 0\,, \\ 0 \le n \le p_\ell - 1\,,\ \ 1 \le \ell \le M-1\,, \end{array} \tag{2.195}$$

donde

$$\begin{aligned} S(\alpha,\beta,\theta_\ell) = {} & \frac{\operatorname{sen}(M\theta_\ell)}{\operatorname{sen}\left((M-1)\theta_\ell\right)}\widehat{A}_2 + 4M^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\left(\widehat{A}_2 B_1^2 - B_1\right) + \\ & - \left[\frac{\operatorname{sen}(M\theta_\ell)}{\operatorname{sen}\left((M-1)\theta_\ell\right)}\alpha + 4M^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\left(\alpha\beta^2 - \beta\right)\right] I\,, \end{aligned} \tag{2.196}$$

p_ℓ es el grado del polinomio minimal de la matriz $A + w_\ell\, B$, siendo θ_ℓ la solución de (2.194) y

$$w_\ell = \frac{-1}{4M^2\operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta_\ell}{2}\right)}\,, \quad 1 \le \ell \le M-1\,. \tag{2.197}$$

Además en vista de (2.194) la ecuación (2.179) toma la forma

$$\left[(A + w_\ell\, B)^n\, B_1 - B_1\,(A + w_\ell\, B)^n\right]\, d_\ell = 0\,, \quad 0 < n < p_\ell\,. \tag{2.198}$$

A fin de determinar los vectores $d_\ell \in \mathbb{C}^s \sim \{0\}$ que verifican las condiciones (2.195) y (2.198) introducimos la matriz por bloques definida por

$$T(\alpha,\beta,\theta_\ell) = \begin{bmatrix} B_1(A+w_\ell B) - (A+w_\ell B)B_1 \\ B_1(A+w_\ell B)^2 - (A+w_\ell B)^2 B_1 \\ \vdots \\ B_1(A+w_\ell B)^{p_\ell -1} - (A+w_\ell B)^{p_\ell -1} B_1 \\ S(\alpha,\beta,\theta_\ell) \\ S(\alpha,\beta,\theta_\ell)(A+w_\ell B) \\ S(\alpha,\beta,\theta_\ell)(A+w_\ell B)^2 \\ \vdots \\ S(\alpha,\beta,\theta_\ell)(A+w_\ell B)^{p_\ell -1} \end{bmatrix} . \tag{2.199}$$

Entonces utilizando la definición de $T(\alpha,\beta,\theta_\ell)$ los vectors d_ℓ deberán satisfacer

$$T(\alpha,\beta,\theta_\ell)d_\ell = 0\,, \qquad 1 \le \ell \le M-1\,, \quad d_\ell \in \mathbb{C}^s \sim \{0\}\,. \tag{2.200}$$

La ecuación (2.200) tendrá soluciones no nulas $d_\ell \in \mathbb{C}^s$ si sólo si

$$\text{rango}\,(T(\alpha,\beta,\theta_\ell)) < s\,.$$

Pero no vamos a utilizarla porque es muy indirecta. Así que buscaremos condiciones suficientes más fáciles de comprobar que nos garanticen que $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ cumplen la ecuación (2.200).

Imponiendo que los vectores $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ satisfagan las condiciones:

$$(B_1 - \beta I)\, d_\ell = \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) d_\ell = 0\,, \quad d_\ell \in \mathbb{C}^s \sim \{0\}\,, \quad 1 \le \ell \le M-1\,, \tag{2.201}$$

y

$$\{(A+w_\ell B)^n\, d_\ell\,;\ 1 \le n \le p_\ell - 1\} \subset \text{Nuc}\left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) \cap \text{Nuc}\,(B_1 - \beta I)\ , \quad 1 \le \ell \le M-1\,, \tag{2.202}$$

garantizamos que los $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ verifiquen (2.195) y (2.198), es decir, garantizamos que $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ sean soluciones no nulas de la ecuación (2.200) para cada $\theta_\ell \in J_\ell$, $1 \le \ell \le M-1$, de la ecuación (2.194).

En efecto,

$$\begin{aligned} \text{(i)}\quad & [B_1(A+w_\ell B)^n - (A+w_\ell B)^n B_1]\; d_\ell \\ &= B_1(A+w_\ell B)^n\, d_\ell - (A+w_\ell B)^n B_1\, d_\ell \\ &= B_1(A+w_\ell B)^n\, d_\ell - \beta\,(A+w_\ell B)^n\, d_\ell \\ &\qquad + \beta\,(A+w_\ell B)^n\, d_\ell - (A+w_\ell B)^n B_1\, d_\ell \\ &= (B_1-\beta I)(A+w_\ell B)^n\, d_\ell - (A+w_\ell B)^n (B_1 - \beta\, I)\, d_\ell = 0\,, \end{aligned}$$

ya que de (2.201) y (2.202) tenemos que

$$(B_1 - \beta\, I)\, d_\ell = 0 \quad \text{y} \quad (A+w_\ell B)^n\, d_\ell \in \text{Nuc}(B_1 - \beta\, I)\,.$$

(ii) $S(\alpha, \beta, \theta_\ell)(A + w_\ell B)^n\, d_\ell$

$$\begin{aligned}
&= \frac{\operatorname{sen}(M\theta_\ell)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta_\ell)} \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right)(A + w_\ell B)^n\, d_\ell \\
&\quad + 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) \cdot \\
&\quad \left[\left(\widehat{A}_2 B_1^2 - B_1\right) - (\alpha\beta^2 - \beta)I\right](A + w_\ell B)^n\, d_\ell \\
&= \frac{\operatorname{sen}(M\theta_\ell)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta_\ell)} \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right)(A + w_\ell B)^n\, d_\ell \\
&\quad + 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) \cdot \\
&\quad \left[\widehat{A}_2 B_1^2 - \widehat{A}_2\beta^2 + \widehat{A}_2\beta^2 - B_1 - (\alpha\beta^2 - \beta)I\right](A + w_\ell B)^n\, d_\ell \\
&= \frac{\operatorname{sen}(M\theta_\ell)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta_\ell)} \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right)(A + w_\ell B)^n\, d_\ell \\
&\quad + 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) \left[\widehat{A}_2 (B_1 + \beta I)(B_1 - \beta I)(A + w_\ell B)^n\, d_\ell \right. \\
&\quad \left. + \beta^2 \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right)(A + w_\ell B)^n\, d_\ell - (B_1 - \beta I)(A + w_\ell B)^n\, d_\ell\right], \\
&\qquad\qquad 0 \le n \le p_\ell - 1 \,.
\end{aligned}$$

Para $n = 0$ obtenemos:

$$\begin{aligned}
S(\alpha, \beta, \theta_\ell)\, d_\ell &= \frac{\operatorname{sen}(M\theta_\ell)}{\operatorname{sen}((M-1)\theta_\ell)} \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) d_\ell \\
&\quad + 4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) \cdot \\
&\quad \left[\widehat{A}_2 (B_1 + \beta I)(B_1 - \beta I) + \beta^2 \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) - (B_1 - \beta I)\right] d_\ell = 0 \,,
\end{aligned}$$

ya que se cumple la condición (2.201). Para $1 \le n \le p_\ell - 1$ obtenemos que:

$$S(\alpha, \beta, \theta_\ell)(A + w_\ell B)^n\, d_\ell = 0 \,,$$

ya que se cumple la condición (2.202). Reemplazando θ por θ_ℓ en (2.160) y (2.171); utilizando (2.157); y que d_ℓ son vectores propios de la matriz B_1, es decir $(B_1 - \beta\, I)d_\ell = 0$, se sigue que

$$\begin{aligned}
U_\ell(m, n) &= \left[I - r\left(4 \sin^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) A - \frac{B}{M^2}\right)\right]^n \cdot \\
&\quad \cdot \left[\operatorname{sen}(m\theta_\ell) - 2M\beta \operatorname{sen}\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) \cos\left(\left(\frac{2m-1}{2}\right)\theta_\ell\right)\right] d_\ell,
\end{aligned} \tag{2.203}$$

para $1 \le m \le M - 1$, $n \ge 0$, define soluciones no triviales del problema de contorno (2.153)–(2.155).

Resumiendo se ha demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 2.5 *Consideremos el problema de contorno (2.153)–(2.155) bajo la hipótesis (2.150) con* $A_1 = I$*, sea* $M > 0$ *un entero positivo suficientemente grande de manera que se cumplen las condiciones (2.168) y (2.184), y consideremos la matriz* $\widehat{A}_2 = (A_2 B_1 - B_2)^{-1} A_2$.

(i) Asumimos las condiciones (2.189) y (2.193). Entonces existen soluciones θ_ℓ *de (2.194),* $\theta_\ell \in \left] \frac{(\ell-1)\pi}{M-1}, \frac{\ell\pi}{M-1} \right[= J_\ell$*,* $1 \leq \ell \leq M-1$*, para las cuales la matriz* $L(\theta_\ell)$ *definida por (2.182) es singular.*

(ii) Bajo las hipótesis vistas en (i), consideremos d_ℓ *vectores in* $\mathbb{C}^s$ *verificando (2.201) y (2.202) para* $1 \leq \ell \leq M-1$*, entonces* $\{U_\ell(m,n)\}$ *dada por (2.203) define soluciones no triviales del problema de contorno (2.153)–(2.155).*

Observación 2.5 *El caso donde además de la invertibilidad de* $\mathcal{A}$ *tenemos* $B_1 = I$ *se trata de forma análoga al caso estudiado, teniendo en cuenta las propiedades del complemento de Schur, véase la observación 1.6. Por otro lado, considerando el cambio*

$$m \to M - m\,, \quad 0 \leq m \leq M\,,$$

los casos donde $A_2 = I$ *o* $B_2 = I$ *se transforman en los casos anteriores.*

2.2.3. El problema mixto discreto

En este apartado estudiaremos la construcción de soluciones exactas del problema mixto discreto (2.153)–(2.156). Asumimos la notación y las hipótesis del *teorema 2.5-(i) y (ii).* Por superposición de las $M-1$ soluciones obtenidas para el problema de contorno (2.153)–(2.155) obtenemos

$$\left.\begin{array}{c} U(m,n) \\ = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{M-1} \left[I - r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) A - \frac{B}{M^2}\right)\right]^n \cdot \\ \cdot \left[\left(1 - \dfrac{\beta M \rho_\ell}{2r}\right)\mathrm{sen}(m\theta_\ell) - \beta M \cos(m\theta_\ell)\,\mathrm{sen}(\theta_\ell)\right] d_\ell\,, \\ \rho_\ell = -4r\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{\theta_\ell}{2}\right)\,, \quad 1 \leq \ell \leq M-1 \end{array}\right] . \tag{2.204}$$

Imponiendo a $\{U(m,n)\}$, dada por (2.204), la condición (2.156) obtenemos que los vectores d_ℓ que aparecen en (2.204) deben satisfacer

$$f(m) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left[\left(1 + \frac{\beta M \rho_\ell}{2r}\right)\mathrm{sen}(m\theta_\ell) - \beta M \cos(m\theta_\ell)\,\mathrm{sen}(\theta_\ell)\right] d_\ell\,. \tag{2.205}$$

Bajo la hipótesis (2.150), si $\{H_\ell(m)\}_{\ell=1}^{M-1}$ son las soluciones del problema de Sturm-Liouville discreto:

$$\left.\begin{aligned} -H(m+1)+2H(m)-H(m-1) &= -\frac{\rho}{r}H(m) \\ H(0) &= \frac{\beta M}{\beta M-1}H(1) \\ H(M) &= \frac{M(\alpha\beta-1)}{\alpha+M(\alpha\beta-1)}H(M-1) \end{aligned}\right\}, \tag{2.206}$$

entonces por el apartado 2.2.2 se obtiene que:

$$H_\ell(m) = \left\{\left(1+\frac{\beta M\rho_\ell}{2r}\right)\operatorname{sen}(m\theta_\ell) - \beta M\cos(m\theta_\ell)\operatorname{sen}(\theta_\ell)\right\} d_\ell\,, \qquad 1 \le m \le M-1$$

donde $\{\theta_\ell\}_{\ell=1}^{M-1} \in \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M-1}, \frac{\ell\pi}{M-1}\right[$ son las soluciones de la ecuación (2.194) y los vectores $\{d_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ verifican las condiciones (2.201) y (2.202).
Como los coeficientes del problema (2.206) son escalares, consideramos el siguiente problema de Sturm-Liouville discreto escalar:

$$\left.\begin{aligned} -h(m+1)+2h(m)-h(m-1) &= -\frac{\rho}{r}h(m) \\ h(0) &= \frac{\beta M}{\beta M-1}h(1) \\ h(M) &= \frac{M(\alpha\beta-1)}{\alpha+M(\alpha\beta-1)}h(M-1) \end{aligned}\right\}, \ 1 \le m \le M-1. \tag{2.207}$$

Por el apartado 1.2, el problema (2.207) tiene exactamente $M-1$ valores propios dados por $\left\{\frac{-\rho_\ell}{r}\right\}_{\ell=1}^{M-1}$, donde $\rho_\ell = -4r\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)$ y θ_ℓ verifica (2.194). Para cada valor propio $\frac{-\rho_\ell}{r}$ existe una función propia

$$\{h_\ell(m)\} = \left\{\left(1+\frac{\beta M\rho_\ell}{2r}\right)\operatorname{sen}(m\theta_\ell) - \beta M\cos(m\theta_\ell)\operatorname{sen}(\theta_\ell)\right\}, \tag{2.208}$$

y estas funciones propias son ortogonales en $N(1, M-1)$ con respecto a la función peso $w(m) = 1$, para $1 \le m \le M-1$.
Puesto que $f(m)$ y d_ℓ son vectores en $\mathbb{C}^s$ podemos escribir (2.205) de forma escalar:

$$f_q(m) = \sum_{\ell=1}^{M-1}\left\{\left(1+\frac{\beta M\rho_\ell}{2r}\right)\operatorname{sen}(m\theta_\ell) - \beta M\cos(m\theta_\ell)\operatorname{sen}(\theta_\ell)\right\} d_{\ell,q}\,, \tag{2.209}$$

donde $f_q(m)$ y $d_{\ell,q}$ denotan la q-ésima componente de los vectores $f(m)$ y d_ℓ respectivamente. Por la ortogonalidad de las funciones propias $\{h_\ell(m)\}$ que aparecen en (2.205) y la teoría de las series de Fourier discretas, véase el apartado 1.2, se sigue que

$$d_{\ell,q} = \frac{\sum_{\nu=1}^{M-1} \left\{ \left(1 + \frac{\beta M \rho_\ell}{2r}\right) \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell) - \beta M \cos(\nu\theta_\ell) \operatorname{sen}(\theta_\ell) \right\} f_q(\nu)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \left\{ \left(1 + \frac{\beta M \rho_\ell}{2r}\right) \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell) - \beta M \cos(\nu\theta_\ell) \operatorname{sen}(\theta_\ell) \right\}^2}, \quad 1 \le \ell \le M-1, \quad 1 \le q \le s, \tag{2.210}$$

o equivalentemente en forma vectorial

$$d_\ell = \frac{\sum_{\nu=1}^{M-1} \left\{ \left(1 + \frac{\beta M \rho_\ell}{2r}\right) \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell) - \beta M \cos(\nu\theta_\ell) \operatorname{sen}(\theta_\ell) \right\} f(\nu)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \left\{ \left(1 + \frac{\beta M \rho_\ell}{2r}\right) \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell) - \beta M \cos(\nu\theta_\ell) \operatorname{sen}(\theta_\ell) \right\}^2}, \quad 1 \le \ell \le M-1. \tag{2.211}$$

La expresión (2.211) para vectores d_ℓ debe ser compatible con las condiciones (2.201) y (2.202). Esto significa que $\{f(m)\}$ debe verificar

$$(B_1 - \beta I)\, f(m) = \left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) f(m) = 0\,, \quad 1 \le m \le M-1\,, \tag{2.212}$$

y si w_ℓ está definido en (2.197),

$$\{(A + w_\ell B)^n f(m)\,,\ 1 \le n \le p_\ell - 1\} \subset \operatorname{Nuc}\left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) \cap \operatorname{Nuc}\left(B_1 - \beta I\right)\,, \tag{2.213}$$

para $1 \le m \le M-1$, $1 \le \ell \le M-1$.

Si $\{f(m)\}_{m=1}^{M-1}$ verifica (2.212) y (2.213) entonces $\{U(m,n)\}$ definida por (2.204), donde d_ℓ están dados en (2.211), es una solución del problema (2.153)–(2.156). Observar que las condiciones (2.212) y (2.213) se satisfacen si

$$f(m) \in \operatorname{Nuc}\left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) \cap \operatorname{Nuc}\left(B_1 - \beta I\right), \quad 1 \le m \le M-1\,, \tag{2.214}$$

y

$$\left.\begin{array}{l} \operatorname{Nuc}\left(\widehat{A}_2 - \alpha I\right) \cap \operatorname{Nuc}\left(B_1 - \beta I\right) \ \text{ es un subespacio invariante} \\ \text{por la matriz } \ A + w_\ell B\,, \quad 1 \le \ell \le M-1\,. \end{array}\right]\,, \tag{2.215}$$

véase la *observación 1.2*.
Utilizando el *lema 1.2*, las condiciones (2.214) y (2.215) se reescriben de la forma

$$f(m) \in \operatorname{Im} L(\alpha,\beta)\,, \quad 1 \le m \le M-1\,, \tag{2.216}$$

$$\left(I - L(\alpha,\beta)L(\alpha,\beta)^{\dagger}\right)(A + w_{\ell}\, B)\, L(\alpha,\beta) = 0\,, \quad 1 \le \ell \le M-1\,, \tag{2.217}$$

donde

$$\left.\begin{aligned} & L(\alpha,\beta) = \left(I - P_{\alpha}^{\dagger}P_{\alpha}\right)\left\{I - \left[Q_{\beta}\left(I - P_{\alpha}^{\dagger}P_{\alpha}\right)\right]^{\dagger}\left[Q_{\beta}\left(I - P_{\alpha}^{\dagger}P_{\alpha}\right)\right]\right\} \\ & P_{\alpha} = \widehat{A}_2 - \alpha\, I\,, \quad Q_{\beta} = B_1 - \beta\, I\,, \end{aligned}\right] \tag{2.218}$$

Notemos que la condición (2.217) significa que $\operatorname{Im} L(\alpha,\beta)$ es un subespacio invariante por la matriz $A + w_{\ell}\, B$, para $1 \le \ell \le M-1$, véase la *observación 1.3*. La solución $\{U(m,n)\}$ del problema mixto discreto (2.153)–(2.156), definida por (2.204), (2.211), es estable, i.e. permanece acotada cuando $n \to \infty$ si $\{f(m)\}$ está acotado y las matrices

$$I - r\left(4\,A\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_{\ell}}{2}\right) - \frac{B}{M^2}\right)\,, \quad 1 \le \ell \le M-1\,,$$

son convergentes, véase el *lema 1.1*. Por el *teorema 2.2* del apartado 2.1 esto ocurre si

$$x > 0 \quad \text{para todo} \quad x \in \sigma\left(\frac{A + A^H}{2}\right), \tag{2.219}$$

$$y \le 0 \quad \text{para todo} \quad y \in \sigma\left(\frac{B + B^H}{2}\right), \tag{2.220}$$

y si $\widetilde{A}_1 = \frac{A+A^H}{2}$, $\widetilde{B}_1 = \frac{B+B^H}{2}$, $\widetilde{A}_2 = \frac{A-A^H}{2i}$, $\widetilde{B}_2 = \frac{B-B^H}{2i}$ y θ_1 es la única solución de (2.194) en $\left]0, \frac{\pi}{M-1}\right[$, r debe verificar

$$r < \frac{M^2\left[\left(2M\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\right)^2 \lambda_{\text{mín}}\left(\widetilde{A}_1\right) - \lambda_{max}\left(\widetilde{B}_1\right)\right]}{\left[4M^2\lambda_{max}\left(\widetilde{A}_1\right) + \rho\left(\widetilde{B}_1\right)\right]^2 + \left[4M^2\lambda_{max}\left(\widetilde{A}_2\right) + \rho\left(\widetilde{B}_2\right)\right]^2}\,. \tag{2.221}$$

Resumiendo se ha demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 2.6 *Consideremos el problema mixto (2.153)-(2.156) con las hipótesis (2.189) y (2.150) con $A_1 = I$. Sea $\widehat{A}_2 = \left(A_2 B_1 - B_2\right)^{-1} A_2$ y $M > 0$ un número entero suficientemente grande de forma que verifique las condiciones (2.168), (2.184) y (2.193). Sea θ_{ℓ} la solución de (2.194) y w_{ℓ} definido por (2.197) para $1 \le \ell \le M-1$. Supongamos que $\{f(m)\}$ satisface la condición (2.216) y las matrices $A + w_{\ell}B$ verifican (2.217), donde $L(\alpha,\beta)$ está definida por (2.218). Entonces $\{U(m,n)\}$ definida por (2.204), donde d_{ℓ} vienen dados por (2.211), es una solución del problema mixto discreto (2.153)–(2.156). Además, $\{U(m,n)\}$ es estable si: las matrices A, B satisfacen las condiciones (2.219)–(2.220), $\{f(m)\}$ está acotado y r es suficientemente pequeño de manera que se cumple (2.221), entonces .*

Ahora estudiaremos condiciones más generales que las consideradas en el *teorema 2.6*. Supongamos que

$$\Lambda = \{\alpha_1, \ldots, \alpha_t\} \subset \mathbb{R} \cap \sigma\left(\widehat{A}_2\right) , \tag{2.222}$$

$$\Omega = \{\beta_1, \ldots, \beta_q\} \subset \mathbb{R} \cap \sigma(B_1) . \tag{2.223}$$

Por el *lema 1.2* la condición

$$L(\alpha_i, \beta_j) \neq 0 , \quad 1 \leq i \leq t , \; 1 \leq j \leq q , \tag{2.224}$$

es equivalente a

$$\operatorname{Nuc}\left(\widehat{A}_2 - \alpha_i I\right) \cap \operatorname{Nuc}(B_1 - \beta_j I) \neq \emptyset , \quad 1 \leq i \leq t , \; 1 \leq j \leq q . \tag{2.225}$$

Consideramos el conjunto $\mathcal{F} \subset \Lambda \times \Omega$ definido por

$$\mathcal{F} = \left\{ \begin{array}{l} (\alpha_{i_\ell}, \beta_{j_\ell}) \in \Lambda \times \Omega \text{, cumpliendo alguna condición de (2.193)} \\ \left(\widehat{A}_2 - \alpha_{i_\ell} I\right) v_\ell = (B_1 - \beta_{i_\ell} I)\, v_\ell = 0 \,,\; v_\ell \in \mathbb{C}^s \sim \{0\} \,, \\ L(\alpha_{i_\ell}, \beta_{j_\ell}) \neq 0 \end{array} \right\} \tag{2.226}$$

y la matriz por bloques

$$\mathcal{L} = \left[L(\alpha_{i_1}, \beta_{j_1}) , L(\alpha_{i_2}, \beta_{j_2}) , \ldots , L\left(\alpha_{i_p}, \beta_{j_p}\right) \right] \in \mathbb{C}^{s \times ps} , \tag{2.227}$$

y supongamos que $f(m) \in \operatorname{Im} \mathcal{L}$ para $0 \leq m \leq M$, o equivalentemente

$$\left(I - \mathcal{L}\mathcal{L}^\dagger\right) f(m) = 0 , \quad 0 \leq m \leq M , \tag{2.228}$$

porque $\operatorname{Im} \mathcal{L} = \operatorname{Nuc}\left(I - \mathcal{L}\mathcal{L}^\dagger\right)$. Por el *lema 1.2* obtenemos

$$\mathcal{S}_\delta = \operatorname{Im} L(\alpha_{i_\delta}, \beta_{j_\delta}) = \operatorname{Nuc}\left(\widehat{A}_2 - \alpha_{i_\delta} I\right) \cap \operatorname{Nuc}(B_1 - \beta_{j_\delta} I) , \quad 1 \leq \delta \leq p \tag{2.229}$$

y por (2.227), (2.229), el subespacio $\operatorname{Im} \mathcal{L}$ es suma directa de los subespacios $\mathcal{S}_\delta$,

$$\operatorname{Im} \mathcal{L} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2 \oplus \cdots \oplus \mathcal{S}_p . \tag{2.230}$$

Sea $\left\{\widehat{f}_\delta(m)\right\}_{m=0}^{M}$ la proyección de $\{f(m)\}_{m=0}^{M}$ sobre el subespacio S_δ, definida por

$$\widehat{f}_\delta(m) = [0, \ldots, 0, L(\alpha_{i_\delta}, \beta_{j_\delta}) , 0, \ldots, 0]\, \mathcal{L}^\dagger f(m) , \quad 1 \leq \delta \leq p , \; 0 \leq m \leq M . \tag{2.231}$$

Ya que $\widehat{f}_\delta(m)$ está en $\mathcal{S}_\delta$, por (2.228) se sigue que

$$\sum_{\delta=1}^{p} \widehat{f}_\delta(m) = \mathcal{L}\mathcal{L}^\dagger f(m) = f(m)\,, \quad 0 \le m \le M\,. \tag{2.232}$$

Supongamos que $\operatorname{Im} L\left(\alpha_{i_\delta}, \beta_{j_\delta}\right)$ es un subespacio invariante por la matriz $A + w_\ell^{(\delta)} B$, i.e.

$$\left.\begin{array}{r} \left[I - L\left(\alpha_{i_\delta}, \beta_{j_\delta}\right) L\left(\alpha_{i_\delta}, \beta_{j_\delta}\right)^\dagger\right]\left(A + w_\ell^{(\delta)} B\right) L\left(\alpha_{i_\delta}, \beta_{j_\delta}\right) = 0\,, \\[2ex] w_\ell^{(\delta)} = \dfrac{-1}{4M^2 \operatorname{sen}^2\left(\dfrac{\theta_\ell^{(\delta)}}{2}\right)}\,, \quad 1 \le \ell \le M-1, \end{array}\right]\,, \tag{2.233}$$

véase la *observación 1.3*, donde $\theta_\ell^{(\delta)}$ es la solución de (2.194) asociada al par $\left(\alpha_{i_\delta}, \beta_{j_\delta}\right)$ en J_ℓ.
Consideramos el problema (P_δ) definido por (2.153)–(2.155) junto con la condición inicial

$$U(m,0) = \widehat{f}_\delta(m)\,, \quad 0 \le m \le M\,, \;\; 1 \le \delta \le p\,, \tag{2.234}$$

y observemos que la solución $\{U_\delta(m,n)\}$ del problema (P_δ) está definida por (2.204) donde $d_\ell^{(\delta)}$ viene dados por

$$d_\ell^{(\delta)} = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1}\left\{\left(1 - \dfrac{\beta_{j_\delta} M \rho_\ell^{(\delta)}}{2r}\right)\operatorname{sen}\left(\nu\theta_\ell^{(\delta)}\right) - \beta_{j_\delta} M \cos\left(\nu\theta_\ell^{(\delta)}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_\ell^{(\delta)}\right)\right\}\widehat{f}_\delta(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1}\left\{\left(1 - \dfrac{\beta_{j_\delta} M \rho_\ell^{(\delta)}}{2r}\right)\operatorname{sen}\left(\nu\theta_\ell^{(\delta)}\right) - \beta_{j_\delta} M \cos\left(\nu\theta_\ell^{(\delta)}\right)\operatorname{sen}\left(\theta_\ell^{(\delta)}\right)\right\}^2}\,, \tag{2.235}$$

para $1 \le \ell \le M-1\,,\;\; 1 \le \delta \le p\,,\;\; 1 \le j \le q$, donde

$$\begin{aligned} U_\delta(m,n) = \sum_{\delta=1}^{M-1} &\left[I - r\left(4A \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(\delta)}}{2}\right) - \frac{B}{M^2}\right)\right]^n \cdot \\ &\cdot \left[\left(1 - \frac{\beta_{j_\delta} M \rho_\ell^{(\delta)}}{2r}\right)\operatorname{sen}(m\theta_\ell^{(\delta)}) - \beta_{j_\delta} M \cos(m\theta_\ell^{(\delta)}) \operatorname{sen}(\theta_\ell^{(\delta)})\right] d_\ell^{(\delta)}. \end{aligned} \tag{2.236}$$

Por linealidad y (2.232), (2.236) se sigue que

$$U(m,n) = \sum_{\delta=1}^{p} U_\delta(m,n)\,, \quad 1 \le m \le M-1\,,\;\; n \ge 0\,, \tag{2.237}$$

es una solución del problema mixto discreto (2.153)–(2.156). Además (2.237) es una solución estable si se cumplen las condiciones (2.219)–(2.220), $\{f(m)\}$ está acotado y el parámetro r verifica

$$r < \min_{1\le\delta\le p}\left\{\frac{M^2\left[\left(2M\operatorname{sen}\left(\frac{\theta_1^{(\delta)}}{2}\right)\right)^2\lambda_{\text{mín}}\left(\widetilde{A}_1\right)-\lambda_{max}\left(\widetilde{B}_1\right)\right]}{\left[4M^2\lambda_{max}\left(\widetilde{A}_1\right)+\rho\left(\widetilde{B}_1\right)\right]^2+\left[4M^2\lambda_{max}\left(\widetilde{A}_2\right)+\rho\left(\widetilde{B}_2\right)\right]^2}\right\}. \tag{2.238}$$

Resumiendo el siguiente resultado es una consecuencia del *teorema 2.6.*

TEOREMA 2.7 *Consideremos el problema (2.153)–(2.156) bajo la hipótesis (2.150) con* $A_1 = I$*, supongamos que se satisfacen las condiciones (2.222) y (2.223) y sea* M *un número entero verificando (2.168) y (2.184). Sean* $\mathcal{F}$ *y* $\mathcal{L}$ *definidas por (2.226) y (2.227) respectivamente, supongamos que* $\{f(m)\}$ *está acotado, que las condiciones (2.219)–(2.220) se satisfacen y que* r *es suficientemente pequeño de manera que (2.238) se cumple. Sea* $\left\{\widehat{f}_\delta(m)\right\}_{m=0}^{M}$ *definida por (2.231),* $w_\ell^{(\delta)}$ *definida por (2.233) y supongamos que se verifica la condición (2.233). Si* $\{U_\delta(m,n)\}$ *viene dada por (2.236) entonces* $\{U(m,n)\}$ *definida por (2.237) es una solución estable del problema mixto discreto (2.153)–(2.156) .*

2.2.4. Ejemplos

EJEMPLO 2.4 *Consideramos el problema (2.146)–(2.149) con los datos:*

$$A=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & \frac{1}{2} & 0\\ -1 & 0 & 2\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & 1\\ 0 & -\frac{1}{4} & 0\\ -1 & 0 & -\frac{1}{6}\end{bmatrix},\quad A_1=I\,,$$

$$B_1=\begin{bmatrix}\frac{1}{2} & 0 & 1\\ 1 & -1 & 1\\ 0 & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix},\quad A_2=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ 0 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix},\quad B_2=\begin{bmatrix}-\frac{1}{2} & 0 & \frac{4}{3}\\ -1 & 0 & \frac{1}{3}\\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3}\end{bmatrix},$$

$f(m) = F(mh) = (f_1(m), f_2(m), f_3(m))^T$, *y* $h = \frac{1}{M}$, $1 \le m \le M-1$.

La hipótesis (2.150) se satisface, y además tenemos $\widehat{A}_2 = (A_2B_1 - B_2)^{-1}A_2 = A_2$ con

$$\sigma\left(\widehat{A}_2\right) = \{-1, 0, 2\}\ , \qquad \sigma(B_1) = \left\{-1, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right\}.$$

Sean $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 0$, $\alpha_3 = 2$, $\beta_1 = -1$ y $\beta_2 = \frac{1}{2}$. Los pares de valores propios que verifican al menos una de las condiciones dadas en (2.193) son

$$(\alpha_1, \beta_1) = (-1, -1)\,,$$

$$
\begin{aligned}
(\alpha_2, \beta_1) &= (0, -1)\,, \\
(\alpha_3, \beta_1) &= (2, -1)\,, \\
(\alpha_3, \beta_2) &= \left(2, \frac{1}{2}\right)\,.
\end{aligned}
$$

Ahora debemos seleccionar aquellos pares de valores propios que tengan un vector propio común asociado a ellos.

$$
\left(\widehat{A}_2 - \alpha_1\, I\right)\, v_1 = 0 \iff v_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ v_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = v_{1,2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\;;
$$

$$
\left(\widehat{A}_2 - \alpha_2\, I\right)\, v_2 = 0 \iff v_2 = \begin{bmatrix} v_{2,1} \\ -v_{2,1} \\ v_{2,3} \end{bmatrix} = v_{2,1} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} + v_{2,3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\;;
$$

$$
\left(\widehat{A}_2 - \alpha_3\, I\right)\, v_3 = 0 \iff v_3 = \begin{bmatrix} v_{3,1} \\ \frac{1}{3} v_{3,1} \\ v_{3,3} \end{bmatrix} = v_{3,1} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{1}{3} \\ 0 \end{bmatrix} + v_{3,3} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\;;
$$

$$
\left(\widehat{B}_1 - \beta_1\, I\right)\, w_1 = 0 \iff w_1 = \begin{bmatrix} 0 \\ w_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = w_{1,2} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\;;
$$

$$
\left(\widehat{B}_1 - \beta_2\, I\right)\, w_2 = 0 \iff w_2 = \begin{bmatrix} w_{2,1} \\ \frac{2}{3} w_{1,2} \\ 0 \end{bmatrix} = w_{2,1} \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{2}{3} \\ 0 \end{bmatrix}\,.
$$

Por tanto $\exists\, v = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, tal que

$$
\left(\widehat{A}_2 - \alpha_1\, I\right)\, v = \left(B_1 - \beta_1\, I\right)\, v = 0\,,
$$

y sólo podremos trabajar con el par de valores propios $(\alpha_1, \beta_1) = (-1, -1)$. Ahora debemos asegurarnos de que las matrices $A + w_\ell B$, $1 \le \ell \le M - 1$, satisfacen la condición (2.217), i.e.:

$$
\left[I - L_1\left(\alpha_1, \beta_1\right) L_1\left(\alpha_1, \beta_1\right)^\dagger\right] \left(A + w_\ell\, B\right) L_1\left(\alpha_1, \beta_1\right) = 0\,,\;\; 1 \le \ell \le M - 1\,,
$$

donde

$$
L_1\left(\alpha_1, \beta_1\right) = \left(I - P_{\alpha_1}^\dagger P_{\alpha_1}\right) \left\{I - \left[Q_{\beta_1}\left(I - P_{\alpha_1}^\dagger P_{\alpha_1}\right)\right]^\dagger \left[Q_{\beta_1}\left(I - P_{\alpha_1}^\dagger P_{\alpha_1}\right)\right]\right\}\,,
$$

$$
P_{\alpha_1} = \widehat{A}_2 - \alpha_1\, I\,,\quad Q_{\beta_1} = B_1 - \beta_1\, I\,.
$$

Para nuestro caso obtenemos:

$$P_{\alpha_1}=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, P_{\alpha_1}^{\dagger}=\begin{bmatrix} \frac{4}{7} & -\frac{2}{7} & -\frac{1}{7} \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{3}{14} & \frac{5}{14} & \frac{3}{7} \end{bmatrix}, Q_{\beta_1}=\begin{bmatrix} \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix};$$

$$I-P_{\alpha_1}^{\dagger}P_{\alpha_1}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, Q_{\beta_1}\left(I-P_{\alpha_1}^{\dagger}P_{\alpha_1}\right)=\left[Q_{\beta_1}\left(I-P_{\alpha_1}^{\dagger}P_{\alpha_1}\right)\right]^{\dagger}=0\,.$$

Por tanto tenemos:

$$\left.\begin{aligned} L\left(\alpha_1,\beta_1\right) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \\ I-L\left(\alpha_1,\beta_1\right)L\left(\alpha_1,\beta_1\right)^{\dagger} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}\right] . \tag{2.239}$$

Además

$$A+w_\ell B=\begin{bmatrix} 1-\frac{w_\ell}{2} & 0 & 1+w_\ell \\ 0 & \frac{1}{2}-\frac{w_\ell}{4} & 0 \\ -1-w_\ell & 0 & 2-\frac{w_\ell}{6} \end{bmatrix}. \tag{2.240}$$

Por (2.239) y (2.240) se sigue que

$$\begin{aligned} \left[I-L(-1,-1)L(-1,-1)^{\dagger}\right]\left(A+w_\ell B\right)L(-1,-1)=0\,, \\ 1\leq \ell\leq M-1\,, \end{aligned} \tag{2.241}$$

La condición (2.228) se satisface para cualquier función vectorial $\{f(m)\}$ de la forma

$$f(m)=(0,f_2(m),0))^T\ .$$

Observamos que

$$\frac{A+A^H}{2}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix},\quad \sigma\left(\frac{A+A^H}{2}\right)=\left\{\frac{1}{2},1,2\right\};$$

$$\frac{B+B^H}{2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{4} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, \quad \sigma\left(\frac{B+B^H}{2}\right) = \left\{-\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, -\frac{1}{6}\right\},$$

y por tanto las condiciones de estabilidad (2.219)–(2.220) se satisfacen. Tomando r suficientemente pequeño de forma que verifique la condición (2.238), y M verificando (2.168) y (2.184), por el *teorema 2.7* se obtiene que la sucesión vectorial

$$\left.\begin{array}{c} U(m,n) \\ = \displaystyle\sum_{\ell=1}^{M-1} \left[I - r\left(4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) A - \frac{B}{M^2}\right)\right]^n \cdot \\ \cdot \left[\left(1 + \dfrac{\beta_1 M \rho_\ell}{2r}\right) \mathrm{sen}(m\theta_\ell) - \beta_1 M \cos(m\theta_\ell)\,\mathrm{sen}(\theta_\ell)\right] d_\ell\,, \\ \rho_\ell = -4r\,\mathrm{sen}^2\left(\dfrac{\theta_\ell}{2}\right), \quad 1 \le \ell \le M-1 \end{array}\right] ,$$

es una solución numérica exacta del problema (2.153)–(2.156) donde

$$d_\ell = \frac{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{M-1} \left\{\left(1 + \tfrac{M\beta_1\rho_\ell}{2r}\right) \mathrm{sen}(\nu\theta_\ell) - M\beta_1 \cos(\nu\theta_\ell)\,\mathrm{sen}(\theta_\ell)\right\} f(\nu)}{\displaystyle\sum_{\nu=1}^{M-1} \left\{\left(1 + \tfrac{M\beta_1\rho_\ell}{2r}\right) \mathrm{sen}(\nu\theta_\ell) - M\beta_1 \cos(\nu\theta_\ell)\,\mathrm{sen}(\theta_\ell)\right\}^2}.$$

$$1 \le \ell \le M-1$$

y $\{\theta_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ son las soluciones de la ecuación (2.194).

EJEMPLO 2.5 *Consideremos el problema (2.146)–(2.149) con los datos:*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 0 \\ 0 & -8 & 0 \\ 0 & 5 & -3 \end{bmatrix}, \; A_1 = I \,,$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 & -\frac{1}{2} \end{bmatrix}, \; A_2 = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -1 \end{bmatrix}, \; B_2 = \begin{bmatrix} 5 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{9}{4} & -\frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

$f(m) = F(mh) = (f_1(m), f_2(m), f_3(m))^T$, *y* $h = \frac{1}{M}$, $1 \leq m \leq M-1$.

La hipótesis (2.150) se satisface, y $\widehat{A}_2 = (A_2 B_1 - B_2)^{-1} A_2 = A_2$ con

$$\sigma\left(\widehat{A}_2\right) = \{-1, 2\} \,, \qquad \sigma(B_1) = \left\{-\frac{1}{2}, 3\right\} .$$

Sean $\alpha_1 = -1$, $\alpha_2 = 2$, $\beta_1 = -\frac{1}{2}$, $\beta_2 = 3$ y observemos que ambos pares (α_1, β_1), (α_2, β_2) satisfacen alguna de las condiciones dadas en (2.193) y además

$$v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad \left(\widehat{A}_2 - \alpha_1 I\right) v = (B_1 - \beta_1 I)\, v = 0 \,,$$

$$w = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \left(\widehat{A}_2 - \alpha_2 I\right) w = (B_1 - \beta_2 I)\, w = 0 \,.$$

Para el par $(\alpha_1, \beta_1) = (-1, -1/2)$ la matriz $L(\alpha_1, \beta_1)$ definida por (2.218) toma el valor

$$\left.\begin{aligned} L(-1,-1/2) &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \neq 0 \\ I - L(-1,-1/2)\, L(-1,-1/2)^{\dagger} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}\right] . \tag{2.242}$$

Sean $\left\{\theta_\ell^{(1)}\right\}_{\ell=1}^{M-1}$ las soluciones de (2.194) correspondientes al par $(-1, -1/2)$ y sea

$$w_\ell^{(1)} = \frac{-1}{4M^2 \sin^2\left(\frac{\theta_\ell^{(1)}}{2}\right)}, \quad 1 \leq \ell \leq M-1 \,.$$

Por tanto,

$$A + w_\ell^{(1)} B = \begin{bmatrix} 1 - 3w_\ell^{(1)} & -1 + 2w_\ell^{(1)} & 0 \\ 0 & 2 - 8w_\ell^{(1)} & 0 \\ 0 & 2 + 5w_\ell^{(1)} & 1 - 3w_\ell^{(1)} \end{bmatrix} . \tag{2.243}$$

Por (2.242) y (2.243) se sigue que

$$\left[I - L\left(-1, -1/2\right) L\left(-1, -1/2\right)^{\dagger} \right] \left(A + w_\ell^{(1)} B \right) L\left(-1, -1/2\right) = 0 \, , \qquad 1 \leq \ell \leq M - 1 \, . \tag{2.244}$$

Consideremos ahora el par $(\alpha_2, \beta_2) = (2, 3)$. Haciendo cálculos obtenemos

$$L(2,3) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \neq 0 \quad \text{y} \quad I - L(2,3)L(2,3)^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} .$$

Sean $\left\{ \theta_\ell^{(2)} \right\}_{\ell=1}^{M-1}$ las soluciones de (2.194) correspondientes al par $(2, 3)$ y sea

$$w_\ell^{(2)} = \frac{-1}{4M^2 \sin^2 \left(\dfrac{\theta_\ell^{(2)}}{2} \right)} \, , \quad 1 \leq \ell \leq M - 1 \, .$$

Notemos que

$$A + w_\ell^{(2)} B = \begin{bmatrix} 1 - 3w_\ell^{(2)} & -1 + 2w_\ell^{(2)} & 0 \\ 0 & 2 - 8w_\ell^{(2)} & 0 \\ 0 & 2 + 5w_\ell^{(2)} & 1 - 3w_\ell^{(2)} \end{bmatrix} .$$

Obtenemos que la matriz $\mathcal{L} = \left[L\left(\alpha_1, \beta_1\right), L\left(\alpha_2, \beta_2\right) \right]$ es

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

La condición (2.228) se satisface para cualquier función vectorial $\{f(m)\}$ de la forma

$$f(m) = \left(f_1(m), 0, f_3(m)\right)^T .$$

Las proyecciones $\left\{ \widehat{f}_1(m) \right\}$, $\left\{ \widehat{f}_2(m) \right\}$ definidas por (2.231) toman la forma

$$\widehat{f}_1(m) = \left[L\left(\alpha_1, \beta_1\right), 0 \right] \mathcal{L}^{\dagger} f(m) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ f_3(m) \end{bmatrix} , \tag{2.245}$$

$$\widehat{f_2}(m) = [0, L(\alpha_2, \beta_2)]\, \mathcal{L}^{\dagger} f(m) = \begin{bmatrix} f_1(m) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} . \tag{2.246}$$

Notemos que

$$\frac{A+A^H}{2} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{1}{2} & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \sigma\left(\frac{A+A^H}{2}\right) = \left\{\frac{1079}{396}, \frac{297}{1079}, 1\right\} ;$$

$$\frac{B+B^H}{2} = \begin{bmatrix} -3 & 1 & 0 \\ 1 & -8 & \frac{5}{2} \\ 0 & \frac{5}{2} & -3 \end{bmatrix}, \quad \sigma\left(\frac{B+B^H}{2}\right) = \left\{-\frac{1211}{132}, -3, -\frac{1729}{947}\right\} ,$$

y por tanto las condiciones de estabilidad (2.219), (2.220) se satisfacen. Tomando r suficientemente pequeño de forma que la condición (2.238) se verifica, y M verificando (2.168), (2.184) y (2.238), por el *teorema 2.7* la función vectorial

$$U(m,n) = \sum_{\delta=1}^{2} U_\delta(m,n) ,$$

donde $\{U_\delta(m,n)\}$ están definidas en (2.235), (2.236) y $\left\{\widehat{f_\delta}(m)\right\}$ por (2.245)–(2.246), es una solución estable del problema mixto discreto (2.153)–(2.156).

Capítulo 3

Sistemas hiperbólicos

0.4pt0.4pt 0pt0.4pt

3.1. Introducción

En este capítulo utilizaremos esquemas matriciales en diferencias finitas para construir soluciones numéricas discretas de problemas mixtos de tipo hiperbólico modelizados por

$$\begin{aligned} Au_{xx}(x,t) - u_{tt}(x,t) &= 0, \qquad 0 < x < 1, \quad t > 0, && (3.1)\\ u(0,t) &= 0, \qquad t > 0, && (3.2)\\ Bu(1,t) + Cu_x(1,t) &= 0, \qquad t > 0, && (3.3)\\ u(x,0) &= F(x), \quad 0 \leq x \leq 1, && (3.4)\\ u_t(x,0) &= V(x), \quad 0 \leq x \leq 1. && (3.5) \end{aligned}$$

donde A, B, C son $s \times s$ matrices complejas, elementos de $\mathbb{C}^{s\times s}$, y la incógnita u y F, V, son vectores s-dimensionales, elementos de $\mathbb{C}^s$. Asumiremos que

$$C \ \text{ invertible}\,, \tag{3.6}$$

véase la *observación 1.7.*

Es importante notar que incluso en el caso donde A es una matriz diagonalizable el problema permanece acoplado si las matrices B y C no son simultáneamente diagonalizables con A.

En el apartado 3.2 estudiaremos la discretización del problema (3.1)–(3.5) utilizando aproximaciones en diferencias centradas para las derivadas de segundo orden u_{xx}, u_{tt}, aproximaciones en diferencias progresivas para u_t y en diferencias regresivas para u_x. En el apartado 3.3 estudiaremos la existencia y construcción de soluciones no triviales para el problema de contorno sin considerar las condiciones iniciales, utilizando un método de separación de variables discreto. En el apartado 3.4 construiremos soluciones no triviales para el problema mixto discreto haciendo uso del método de separación de variables discreto del apartado 3.3. En el apartado 3.5 comprobaremos que el esquema en diferencias finitas utilizado en el apartado 3.2 es consistente respecto a la ecuación (3.1) y analizaremos la estabilidad de las soluciones construidas para el problema mixto discreto. En el apartado 3.6 utilizaremos un método de proyecciones que nos permitirá extender los resultados del apartado 3.4 a clases más amplias de funciones de valores iniciales $F(x)$ y $V(x)$. Finalmante, en el apartado 3.7 desarrollaremos algunos ejemplos para ilustrar los resultados teóricos obtenidos.

3.2. La discretización del problema

Dividimos el dominio $[0,1] \times [0,\infty[$ en rectángulos iguales de lados $\Delta x = h$ y $\Delta t = k$, introducimos las coordenadas de un punto típico de la malla (mh, nk) y representamos $U(m,n) = u(mh,nk)$. Utilizando aproximaciones en diferencias centradas para u_{xx} y u_{tt}, diferencias progresivas para u_t y regresivas para u_x (véase el apartado 2.1.2):

$$
\begin{aligned}
u_t(mh,nk) &\approx \frac{U(m,n+1)-U(m,n)}{k}\,,\\
u_{tt}(mh,nk) &\approx \frac{U(m,n+1)-2U(m,n)+U(m,n-1)}{k^2}\,,\\
u_x(mh,nk) &\approx \frac{U(m,n)-U(m-1,n)}{h}\,,\\
u_{xx}(mh,nk) &\approx \frac{U(m+1,n)-2U(m,n)+U(m-1,n)}{h^2}\,,
\end{aligned}
$$

obtenemos la discretización del problema (3.1)–(3.5):

$$
\begin{aligned}
&r^2A\left[U(m+1,n)+U(m-1,n)\right]+2(I-r^2A)U(m,n)\\
&\qquad\qquad -\left[U(m,n+1)+U(m,n-1)\right]=0\,,\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad 1\le m\le M-1, \quad n>0 \qquad (3.7)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
U(0,n) &= 0\,, & n>0 \qquad (3.8)\\
BU(M,n)+MC\left[U(M,n)-U(M-1,n)\right] &= 0\,, & n>0 \qquad (3.9)\\
U(m,0)=F(mh) &= f(m)\,, & 0\le m\le M \qquad (3.10)\\
\frac{U(m,1)-U(m,0)}{k}=V(mh) &= v(m)\,, & 0\le m\le M \qquad (3.11)
\end{aligned}
$$

donde

$$
r=\frac{k}{h}\,, \quad h=\frac{1}{M}\,. \qquad (3.12)
$$

3.3. El problema de contorno discreto

En este apartado buscamos soluciones no triviales del problema de contorno (3.7)–(3.9) de la forma:

$$U(m,n) = G(n)H(m)\ , \qquad G(n) \in \mathbb{C}^{s\times s}\ , \quad H(m) \in \mathbb{C}^{s}\ . \tag{3.13}$$

Exigiendo la condición (3.13), el esquema en diferencias finitas dado en (3.7) se escribe de la forma

$$\begin{aligned} r^2 AG(n)\left[H(m+1) + H(m-1)\right] + 2\left(I - r^2 A\right)G(n)H(m) \\ - \left[G(n+1) + G(n-1)\right]H(m) = 0\,. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Tomamos ρ un número real y escribimos la ecuación (3.14) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} r^2 AG(n)\left[H(m+1) - \left(2 + \frac{\rho}{r^2}\right)H(m) + H(m-1)\right] \\ - \left[G(n+1) - (2I + \rho A)G(n) + G(n-1)\right]H(m) = 0\,. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Notemos que la ecuación (3.15) se satisface si las sucesiones $\{G(n)\}$ y $\{H(m)\}$ cumplen:

$$H(m+1) - \left(2 + \frac{\rho}{r^2}\right)H(m) + H(m-1) = 0\ , \quad 1 \le m \le M-1\,, \tag{3.16}$$

$$G(n+1) - (2I + \rho A)\,G(n) + G(n-1) = 0\ , \quad n > 0\,. \tag{3.17}$$

Tomemos $\rho \in \mathbb{R}$ tal que

$$-4r^2 < \rho < 0\,. \tag{3.18}$$

Entonces $\left(\frac{2r^2+\rho}{2r^2}\right)^2 < 1$ y existe $\theta \in]0,\pi[$ tal que

$$\cos\theta = \frac{2r^2+\rho}{2r^2}\,, \quad \rho = 2r^2(\cos\theta - 1) = -4r^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)\,. \tag{3.19}$$

Sean

$$z_0 = \frac{2r^2+\rho}{2r^2} + i\sqrt{1 - \left(\frac{2r^2+\rho}{2r^2}\right)^2} = e^{i\theta}\,,$$

$$z_1 = \frac{2r^2+\rho}{2r^2} - i\sqrt{1 - \left(\frac{2r^2+\rho}{2r^2}\right)^2} = e^{-i\theta}\,,$$

con $i^2 = -1$, las soluciones de la ecuación escalar

$$z^2 - \left(2 + \frac{\rho}{r^2}\right)z + 1 = 0\ , \tag{3.20}$$

y observemos que

$$z_0^n = \cos(n\theta) + i\operatorname{sen}(n\theta)\,; \qquad z_1^n = \cos(n\theta) - i\operatorname{sen}(n\theta)\,. \tag{3.21}$$

La solución general de la ecuación (3.16) verificando que $H(0) = 0$ es de la forma

$$H(m) = \operatorname{sen}(m\theta)E\ , \qquad E \in \mathbb{C}^s\ , \qquad 1 \le m \le M-1\,. \tag{3.22}$$

Por tanto se verifica la condición de contorno (3.8) y la condicón (3.9) se satisface si

$$L(\theta)G(n)E = 0\,, \quad n > 0\,, \tag{3.23}$$

donde $\{G(n)\}$ es una solución de (3.17) y $L(\theta)$ es la matriz definida por

$$L(\theta) = B\,\mathrm{sen}(M\theta) + MC\left[\mathrm{sen}(M\theta) - \mathrm{sen}\left((M-1)\theta\right)\right]\,. \tag{3.24}$$

Para resolver (3.17) consideramos la ecuación matricial algebraica

$$W^2 - (2I + \rho A)\,W + I = 0\,, \quad W \in \mathbb{C}^{s\times s}\,. \tag{3.25}$$

Suponiendo que

$$A \text{ tiene todos los valores propios positivos}\,, \tag{3.26}$$

tomando

$$r < \frac{1}{\sqrt{\rho(A)}} = \mathrm{mín}\left\{a^{-\frac{1}{2}}\ ;\ a \in \sigma(A)\right\}\,, \tag{3.27}$$

y utilizando que $\rho = -4r^2\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$, se sigue que las matrices

$$\left.\begin{array}{l} W_0 = I + \dfrac{\rho A}{2} + \sqrt{\left(I + \dfrac{\rho A}{2}\right)^2 - I} \\[2ex] W_1 = I + \dfrac{\rho A}{2} - \sqrt{\left(I + \dfrac{\rho A}{2}\right)^2 - I} \end{array}\right\}\,, \tag{3.28}$$

son soluciones de (3.25) tales que

$$W_0 - W_1 = 2\sqrt{\left(I + \frac{\rho A}{2}\right)^2 - I} \qquad \text{es invertible,} \tag{3.29}$$

i.e., W_0 y W_1 forman un sistema fundamental de soluciones de (3.25).
En efecto, por el *teorema de la aplicación espectral*, véase el *teorema 1.6*, se tiene

$$\sigma\left(W_0 - W_1\right) = \left\{2\sqrt{\left(1 + \frac{\rho a}{2}\right)^2 - 1}\ ;\ a \in \sigma(A)\right\} \tag{3.30}$$

y

$$\left(1 + \frac{\rho a}{2}\right)^2 - 1 = \frac{\rho^2 a^2}{4} + \rho a = \rho a\left(1 + \frac{\rho a}{4}\right) \neq 0\,, \tag{3.31}$$

ya que se verifican las condiciones (3.26) y (3.27).

Por (3.29), véasen [18], [22], la solución general de (3.17) viene dada por

$$G(n) = W_0^n P + W_1^n Q \qquad P, Q \in \mathbb{C}^{s\times s}\,. \tag{3.32}$$

Por las propiedades del cálculo funcional matricial las matrices W_0 y W_1 son polinomios en la matriz A de grado $p-1$, véase el *teorema 1.10*, donde

$$p \text{ es el grado del polinomio minimal de } A\,. \tag{3.33}$$

Por tanto, la condición (3.23) es equivalente a la condición

$$L(\theta)A^j(P,Q)=0\,,\quad 0\le j<p\,,\ \ P,Q\in\mathbb{C}^s. \tag{3.34}$$

Por tanto, el problema de valores frontera (3.7)–(3.9) admite soluciones no triviales de la forma (3.13) si existen vectores P, Q no nulos simultáneamente, verificando (3.34). Una condición suficiente para tener soluciones no nulas P y Q es que la matriz

$$L(\theta) \text{ sea singular}\,. \tag{3.35}$$

Obsérvese que si $\theta_\ell=\frac{\ell\pi}{M}$ para $1\le\ell\le M-1$, entonces $\operatorname{sen}(M\theta)=0$ y se obtiene que en este caso la matriz $L(\theta_\ell)=MC(-1)^\ell\operatorname{sen}\left(\frac{\ell\pi}{M}\right)$ es invertible ya que se verifica (3.6) y $\operatorname{sen}(\frac{\ell\pi}{M})\neq 0$. Por tanto los valores de θ para los cuales se verifica (3.35) deben satisfacer que el $\operatorname{sen}(M\theta)\neq 0$ y podemos escribir (3.35) de la forma

$$C^{-1}B+\frac{M\left[\operatorname{sen}(M\theta)-\operatorname{sen}((M-1)\theta)\right]}{\operatorname{sen}(M\theta)}I \text{ es singular}\,. \tag{3.36}$$

Asumamos que

$$\text{Existe } \mu\in\sigma(-C^{-1}B)\cap\mathbb{R}\,. \tag{3.37}$$

La condición (3.36) se cumple si existen θ para la ecuación escalar

$$\frac{M\left[\operatorname{sen}(M\theta)-\operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)\right]}{\operatorname{sen}(M\theta)}=\mu\,. \tag{3.38}$$

La ecuación (3.38) es equivalente a

$$\cot(M\theta)=\frac{\cos\theta-\left(1-\frac{\mu}{M}\right)}{\operatorname{sen}\theta}\,. \tag{3.39}$$

Por el apartado 2.1.3 del capítulo 2.1 sabemos que

- Si $\mu<0$, existe una solución θ_ℓ de la ecuación (3.39) en $J_\ell=\left]\frac{(\ell-1)\pi}{M},\frac{\ell\pi}{M}\right[$ para $1\le\ell\le M-1$, de forma que la matriz $L(\theta_\ell)$ es singular.
- Si $\mu=0$, entonces B es singular y la ecuación (3.38) es equivalente a la ecuación

  $$\operatorname{sen}(M\theta)=\operatorname{sen}\left((M-1)\theta\right)\,,$$

  cuyas soluciones son $\theta_\ell=\frac{(2\ell-1)\pi}{2M-1}$, para $1\le\ell\le M-1$.
- Si $\mu>0$, existe una solución θ_ℓ de la ecuación (3.39) en $J_\ell=\left]\frac{(\ell-1)\pi}{M},\frac{\ell\pi}{M}\right[$ para $2\le\ell\le M-1$, de forma que la matriz $L(\theta_\ell)$ es singular. Por tanto en este caso sólo podemos garantizar analíticamente la existencia de $M-2$ soluciones de la ecuación (3.39).

Definiendo la matriz

$$G(\mu) = \frac{C^{-1}L(\theta)}{\operatorname{sen}(M\theta)} = C^{-1}B + \mu I\,, \tag{3.40}$$

obtenemos entonces que la condición (3.34) es equivalente a

$$G(\mu)A^j(P,Q) = 0 \quad 0 \le j < p\,. \tag{3.41}$$

Si definimos la matriz por bloques $\widetilde{G}(\mu)$ como

$$\widetilde{G}\,(\mu) = \begin{bmatrix} G(\mu) \\ G(\mu)A \\ G(\mu)A^2 \\ \vdots \\ G(\mu)A^{p-1} \end{bmatrix}, \tag{3.42}$$

entonces (3.41) puede escribirse de la forma

$$\widetilde{G}(\mu)(P,Q) = 0\,. \tag{3.43}$$

Por el *teorema de Mitra*, véase el *teorema 1.1*, el sistema algebraico (3.43) admite soluciones no nulas (P,Q) si rango $\left(\widetilde{G}(\mu)\right) < s$, y en este caso el conjunto solución de (3.43) se expresa por

$$(P,Q) = \left(I - \widetilde{G}(\mu)^{\dagger}\widetilde{G}(\mu)\right)(P_0,Q_0)\ , \quad P_0,Q_0 \in \mathbb{C}^s.$$

Resumiendo, bajo las hipótesis (3.6) y (3.37), si θ_ℓ son las soluciones de (3.39) y $\widetilde{G}(\mu)$ la matriz definida por (3.42), el conjunto de soluciones no triviales del problema de contorno (3.7)–(3.9) viene dado por

$$\left.\begin{array}{r} U_\ell(m,n) = (W_0^n P_\ell + W_1^n Q_\ell)\operatorname{sen}(m\theta_\ell) \\ 1 \le m \le M-1,\ n > 0 \\[2ex] W_0 = I - 2Ar^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) + \sqrt{\left(I - 2Ar^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right)^2 - I} \\[2ex] W_1 = I - 2Ar^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) - \sqrt{\left(I - 2Ar^2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right)^2 - I} \\[2ex] (P_\ell,Q_\ell) = \left(I - \widetilde{G}(\mu)^{\dagger}\widetilde{G}(\mu)\right)(P,Q)\,, \quad P,Q \in \mathbb{C}^s \end{array}\right\}, \tag{3.44}$$

donde $1 \le \ell \le M-1$ si $\mu \le 0$ y $2 \le \ell \le M-1$ si $\mu > 0$.

Supongamos ahora que el parámetro real introducido en la ecuación (3.15) toma el valor $\rho = 0$. En este caso la ecuación característica (3.20) toma la forma:

$$z^2 - 2z + 1 = (z-1)^2 = 0,$$

y el conjunto de soluciones de la ecuación vectorial (3.16) viene dado por:

$$H(m) = 1^m\,\widetilde{c} + m\,1^m\,\widetilde{d} = \widetilde{c} + m\,\widetilde{d}, \qquad \widetilde{c}, \widetilde{d} \in \mathbb{C}^s,\ \ 1 \le m \le M-1. \tag{3.45}$$

Teniendo en cuenta que es necesario que $H(0) = 0$, para no tener soluciones triviales del problema de frontera discreto (3.7)–(3.9), se obtiene

$$H(m) = m\,\widetilde{d}, \qquad \widetilde{d} \in \mathbb{C}^s, \quad 1 \le m \le M. \tag{3.46}$$

Por otro lado, puesto que $\rho = 0$, la ecuación matricial (3.17) toma la forma:

$$G(n+1) - 2G(n) + G(n-1) = 0\,, \quad n > 0\,,\ \ G(n) \in \mathbb{C}^{s\times s}\,. \tag{3.47}$$

Por tanto una solución para la ecuación (3.47) viene dada por

$$G(n) = I^n\widetilde{D} + nI^n\widetilde{F} = \widetilde{D} + n\widetilde{F}, \quad \widetilde{D}, \widetilde{F} \in \mathbb{C}^{s\times s}\ \ n > 0. \tag{3.48}$$

Si sustituimos (3.46) y (3.48) en la condición de contorno (3.9) llegamos a la siguiente expresión:

$$BG(n)H(M) + MC\,[G(n)H(M) - G(n)H(M-1)] = 0\,,$$

o equivalentemente

$$(B+C)\left(\widetilde{D} + n\widetilde{F}\right)\widetilde{d} = 0\,, \quad B, C, \widetilde{D}, \widetilde{F} \in \mathbb{C}^{s\times s},\ \widetilde{d} \in \mathbb{C}^s\,. \tag{3.49}$$

Utilizando que C es invertible podemos expresar (3.49) de la forma

$$(C^{-1}B + I)\,(c + nd) = 0\,, \qquad c, d \in \mathbb{C}^s,\ n > 0\,. \tag{3.50}$$

En vista de (3.50), el problema de contorno discreto (3.7)–(3.9) admitirá soluciones no triviales de la forma (3.13) si existen vectores c, d, no nulos simultáneamente verificando

$$(C^{-1}B + I)\,(c, d) = 0 \quad c, d \in \mathbb{C}^s\,. \tag{3.51}$$

Una condición suficiente para que se verifique (3.51) es que la matriz $G(1) = C^{-1}B + I$ sea singular, o equivalentemente

$$\text{Exista}\ \ \mu = 1 \in \sigma\left(-C^{-1}B\right). \tag{3.52}$$

Bajo la hipótesis (3.52), la ecuación

$$G(1)(c, d) = 0, \quad c, d \in \mathbb{C}^s\,, \tag{3.53}$$

tiene soluciones c y d no nulas si y sólo si $\operatorname{rango}(G(1)) < s$, y bajo esta condición por el *teorema de Mitra*, véase el *teorema 1.1*, el conjunto solución de (3.53) viene dado por

$$(c, d) = \left(I - G(1)^{\dagger}G(1)\right)(c_0, d_0)\ , \quad c_0, d_0 \in \mathbb{C}^s\,.$$

Por tanto, para $\mu = 1$ obtenemos la solución no trivial del problema de contorno (3.7)–(3.9):

$$\left.\begin{array}{r} U(m,n) = m\,(c + n\,d)\,, \quad 1 \le m \le M-1,\ n > 0 \\[2ex] (c, d) = \left(I - G(1)^{\dagger}G(1)\right)(c_0, d_0)\ , \qquad c_0, d_0 \in \mathbb{C}^s \sim \{0\} \end{array}\right\}. \tag{3.54}$$

Resumiendo, hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 3.1 *Consideremos el problema de frontera (3.7)–(3.9) y asumamos la condición (3.6). Sea μ un número real verificando (3.37). Sean $G(\mu)$ y $\widetilde{G}(\mu)$ las matrices en $\mathbb{C}^{s\times s}$ definidas por (3.40) y (3.42) respectivamente. Sea $M > 0$; $r = \frac{k}{h}$ verificando la condición (3.27) y p el grado del polinomio minimal de la matriz A.*

(i) Si $\mu \in \mathbb{R}$, existen valores $\theta \in]0, \pi[$ tales que la matriz $L(\theta)$ definida por (3.24) es singular. Bajo la hipótesis (3.35) el problema de contorno (3.7)–(3.9) tiene soluciones no triviales de la forma (3.13) si $\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}(\mu)\right) < s$.

(ii) Si C es singular, se toma el valor propio $\mu = 0$ entonces $\theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi$ para $1 \le \ell \le M-1$ son soluciones de (3.39). Si $\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}(0)\right) < s$ *entonces $\{U_\ell(m,n)\}_{\ell=1}^{M-1}$ dadas por (3.44) define $M-1$ soluciones no triviales del problema de contorno (3.7)–(3.9).*

(iii) Si $\mu < 0$, entonces para $1 \le \ell \le M-1$ existe una solución θ_ℓ de la ecuación (3.39) en $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$ para la cual la matriz $L(\theta_\ell)$ es singular. Bajo la hipótesis $\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}(\mu)\right) < s$*, la sucesión $\{U_\ell(m,n)\}_{\ell=1}^{M-1}$ dada por (3.44) define $M-1$ soluciones no triviales del problema de contorno (3.7)–(3.9).*

(iv) Si $\mu = 1$, entonces para $2 \le \ell \le M-1$ existe una solución θ_ℓ de la ecuación (3.39) en $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$ para la cual la matriz $L(\theta_\ell)$ es singular. Bajo las hipótesis $\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}(1)\right) < s$ *y* $\operatorname{rango}(G(1)) < s$*, existen dos conjuntos de soluciones no triviales del problema de contorno (3.7)–(3.9) dadas por (3.44) y (3.54).*

(v) Si $\mu \in]0, +\infty[\sim \{1\}$, entonces para $2 \le \ell \le M-1$ existe una solución θ_ℓ de la ecuación (3.39) en $J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$ para la cual la matriz $L(\theta_\ell)$ es singular. Bajo la hipótesis $\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}(\mu)\right) < s$*, la sucesión $\{U_\ell(m,n)\}_{\ell=2}^{M-1}$ dada por (3.44) define $M-2$ soluciones no triviales del problema de contorno (3.7)–(3.9).*

3.4. El problema mixto discreto

En este apartado construiremos una solución exacta del problema mixto (3.7)–(3.11). Asumiremos las hipótesis y la notación del apartado 3.3.
Por el apartado 2.1.5 del capítulo 2.1 sabemos que las condiciones de contorno (3.8)–(3.9) y las hipótesis (3.6) y (3.37) nos conducen al siguiente problema de Sturm-Liouville escalar discreto

$$\left.\begin{aligned} -h(m+1) + 2h(m) - h(m-1) &= -\frac{\rho}{r^2} h(m)\,, \\ h(0) = 0\,; \quad h(M) &= \frac{M}{M-\mu} h(M-1)\,, \quad 1 \le m \le M-1 \end{aligned}\right\} . \tag{3.55}$$

Además en el apartado 2.1.5, vimos que el problema (3.55) tiene exactamente $M-1$ valores propios reales dados por $\left\{\frac{-\rho_\ell}{r^2}\right\}_{\ell=1}^{M-1}$, donde $\rho_\ell = -4r^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)$ y θ_ℓ verifica (3.39). Para cada valor propio $\frac{-\rho_\ell}{r^2}$ existe una función propia $\{h_\ell(m)\} = \{\mathrm{sen}(m\theta_\ell)\}$. Estas funciones propias son ortogonales con respecto a la función peso 1, véase el apartado 1.2.

Notemos que se ha considerado el problema de Sturm-Liouville discreto escalar (3.55) a fin de identificar los vectores P_ℓ, Q_ℓ y c, d que aparecen en las soluciones (3.44) y (3.54) respectivamente.

CASO 1. $\boxed{\mu = 0}$ (B singular)
Supongamos que rango $\left(\widetilde{G}(0)\right) < s$, $\theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi$, $1 \leq \ell \leq M-1$. Por superposición de las soluciones del problema de contorno (3.7)–(3.9) obtenidas en el *teorema 3.1-(ii)*, se sigue que la sucesión vectorial

$$U(m,n) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left(W_0^n P_\ell + W_1^n Q_\ell\right) \mathrm{sen}\,(m\theta_\ell)\ , \quad 1 \leq m \leq M-1\,,\ n > 0\,, \tag{3.56}$$

es una solución del problema de contorno (3.7)–(3.9), donde los vectores P_ℓ y Q_ℓ están en $\mathrm{Nuc}\,\widetilde{G}(\mu)$ y deben ser elegidos de forma que se satisfagan las condiciones (3.10) y (3.11).

Imponiendo las condiciones iniciales (3.10) y (3.11) a la sucesión vectorial $U(m,n)$ definida por (3.56) se sigue que

$$f(m) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left(P_\ell + Q_\ell\right) \mathrm{sen}\,(m\theta_\ell)\ , \tag{3.57}$$

$$kv(m) + f(m) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left\{W_0 P_\ell + W_1 Q_\ell\right\} \mathrm{sen}\,(m\theta_\ell)\ . \tag{3.58}$$

Por la teoría de las series de Fourier discretas, véase el apartado 1.2, trabajando componente a componente en (3.57) y (3.58) se sigue que

$$P_\ell + Q_\ell = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}(\nu\theta_\ell) f(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2\,(\nu\theta_\ell)}\ , \tag{3.59}$$

$$W_0 P_\ell + W_1 Q_\ell = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \left\{kv(\nu) + f(\nu)\right\} \mathrm{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2\,(\nu\theta_\ell)}\ . \tag{3.60}$$

Premultiplicando (3.59) por W_0 y restando (3.60) obtenemos

$$\left(W_0 - W_1\right) Q_\ell = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \left\{\left(W_0 - I\right) f(\nu) - kv(\nu)\right\} \mathrm{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2\,(\nu\theta_\ell)}\ . \tag{3.61}$$

Premultiplicando (3.59) por $(-W_1)$ y sumando (3.60) se sigue que

$$(W_0 - W_1)\, P_\ell = \frac{\sum_{\nu=1}^{M-1} \{kv(\nu) - (W_1 - I)\, f(\nu)\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2(\nu\theta_\ell)} . \tag{3.62}$$

Puesto que $W_0 - W_1$ es invertible, de (3.61)–(3.62) obtenemos

$$P_\ell = \frac{(W_0 - W_1)^{-1} \sum_{\nu=1}^{M-1} \{kv(\nu) - (W_1 - I)\, f(\nu)\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2(\nu\theta_\ell)} , \tag{3.63}$$

y

$$Q_\ell = \frac{(W_0 - W_1)^{-1} \sum_{\nu=1}^{M-1} \{(W_0 - I)\, f(\nu) - kv(\nu)\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2(\nu\theta_\ell)} . \tag{3.64}$$

Ya que por (3.28), (3.29) las matrices W_0, W_1 y $(W_0 - W_1)^{-1}$ son polinomios en la matriz A de grado $p-1$ (véase el *teorema 1.10*), por (3.42), (3.63), (3.64) los vectores P_ℓ y Q_ℓ satisfacen (3.43) si

$$\{f(m), v(m)\,,\ \ 1 \le m \le M-1\} \subset \operatorname{Nuc} G(0)\,, \tag{3.65}$$

y

$$\operatorname{Nuc} G(0) \ \text{ es un subespacio invariante por la matriz } \ A\,, \tag{3.66}$$

véase la *definición 1.2*. La condición (3.66) se puede expresar de la forma

$$G(0)A\left(I - G(0)^\dagger G(0)\right) = 0\,, \tag{3.67}$$

véase la observación 1.3.

Por tanto, bajo las hipótesis (3.65) y (3.67), la expresión

$$\left.\begin{array}{r}
U(m,n) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left(W_0^n P_\ell + W_1^n Q_\ell\right) \operatorname{sen}\left(m\theta_\ell\right)\,, \\[2ex]
P_\ell = \dfrac{\left(W_0 - W_1\right)^{-1} \sum_{\nu=1}^{M-1} \left\{kv(\nu) - \left(W_1 - I\right) f(\nu)\right\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell\right)}\,, \\[2ex]
Q_\ell = \dfrac{\left(W_0 - W_1\right)^{-1} \sum_{\nu=1}^{M-1} \left\{\left(W_0 - I\right) f(\nu) - kv(\nu)\right\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell\right)}\,, \\[2ex]
\theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi
\end{array}\right\}\,, \tag{3.68}$$

$$1 \leq m \leq M-1\,,\ \ n > 0\,,\ 1 \leq \ell \leq M-1$$

donde W_0 y W_1 están definidas en (3.44), es una solución del problema mixto discreto (3.7)–(3.11).

CASO 2. $\boxed{\mu < 0}$

Sea $\mu \in \sigma(-C^{-1}B)$ y supongamos que rango $\left(\widetilde{G}(\mu)\right) < s$ donde $\{\theta_\ell\}_{\ell=1}^{M-1}$ vienen dadas por el *teorema 3.1-(iii)*. Bajo las hipótesis

$$\{f(m), v(m)\,,\ \ 1 \leq m \leq M-1\} \subset \operatorname{Nuc} G(\mu)\,, \tag{3.69}$$

y

$$\operatorname{Nuc} G(\mu) \text{ es subespacio invariante por la matriz } A\,, \tag{3.70}$$

o equivalentemente

$$G(\mu)A\left(I - G(\mu)^\dagger G(\mu)\right) = 0\,, \tag{3.71}$$

se obtiene que la expresión

$$\left.\begin{array}{c} U(m,n) = \sum\limits_{\ell=1}^{M-1} \left(W_0^n P_\ell + W_1^n Q_\ell\right) \operatorname{sen}\left(m\theta_\ell\right) \,, \\[2ex] P_\ell = \dfrac{\left(W_0 - W_1\right)^{-1} \sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \left\{kv(\nu) - \left(W_1 - I\right) f(\nu)\right\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell\right)} \,, \\[2ex] Q_\ell = \dfrac{\left(W_0 - W_1\right)^{-1} \sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \left\{\left(W_0 - I\right) f(\nu) - kv(\nu)\right\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell\right)} \,, \end{array}\right\} \,, \tag{3.72}$$

$$1 \le m \le M-1 \,, \quad n > 0 \,, \quad 1 \le \ell \le M-1$$

donde W_0 y W_1 están definidas en (3.44), es una solución del problema mixto discreto (3.7)–(3.11).

CASO 3. $\boxed{\mu = 1}$

Supongamos que rango $\left(\widetilde{G}(1)\right) < s$, y rango $(G(1)) < s$. Por superposición de las soluciones del problema de contorno (3.7)–(3.9) obtenidas en el *teorema 3.1-(iv)*, se sigue que la sucesión vectorial

$$\left.\begin{array}{r} U(m,n) = \sum\limits_{\ell=2}^{M-1} \left(W_0^n P_\ell + W_1^n Q_\ell\right) \operatorname{sen}\left(m\theta_\ell\right) + m\left(c + n\,d\right) \,, \\ \left(P_\ell, Q_\ell\right) \in \operatorname{Nuc} \widetilde{G}(1) \,, \quad (c,d) \in \operatorname{Nuc} G(1) \end{array}\right] \tag{3.73}$$

$$1 \le m \le M-1 \,, \quad n > 0 \,, \quad 2 \le \ell \le M-1$$

es una solución del problema de contorno (3.7)–(3.9). Imponiendo las condiciones iniciales (3.10) y (3.11) a la solución (3.73) obtenemos que los vectores (P_ℓ, Q_ℓ) y (c,d) deben verificar

$$f(m) = \sum_{\ell=2}^{M-1} \left(P_\ell + Q_\ell\right) \operatorname{sen}\left(m\theta_\ell\right) + mc \,, \tag{3.74}$$

$$kv(m) + f(m) = \sum_{\ell=2}^{M-1} \left(W_0 P_\ell + W_1 Q_\ell\right) \operatorname{sen}\left(m\theta_\ell\right) + m(c+d) \,. \tag{3.75}$$

En el apartado 2.1.5, se probó que las funciones propias del problema escalar discreto de Sturm-Liouville (3.55):

$$h_\ell(m) = \left\{\operatorname{sen}\left(m\theta_\ell\right)\right\}_{\ell=2}^{M-1}$$

asociadas a los valores propios $\left\{-\frac{\rho_\ell}{r^2}\right\}_{\ell=2}^{M-1} = \left\{4\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right\}_{\ell=2}^{M-1}$, y

$$h_1(m) = m$$

asociada al valor propio 0, son ortogonales respecto a la función peso 1. Por tanto en vista de (3.74) y razonando como en el apartado 2.1.5 obtenemos

$$P_\ell + Q_\ell = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}(\nu\theta_\ell) f(\nu)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2(\nu\theta_\ell)}, \tag{3.76}$$

y

$$c = \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum_{\nu=1}^{M-1} \nu f(\nu). \tag{3.77}$$

De la misma forma, de (3.75) se obtiene

$$W_0 P_\ell + W_1 Q_\ell = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \{kv(\nu) + f(\nu)\} \,\mathrm{sen}(\nu\theta_\ell)}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2(\nu\theta_\ell)}, \tag{3.78}$$

y

$$c + d = \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum_{\nu=1}^{M-1} \nu \{kv(\nu) + f(\nu)\}. \tag{3.79}$$

Razonando análogamente al Caso 1 de este apartado, de (3.76) y (3.78) obtenemos los vectores $\{P_\ell, Q_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$ definidos en (3.63) y (3.64) respectivamente. Sustituyendo (3.77) en (3.79) obtenemos

$$d = \frac{k}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum_{\nu=1}^{M-1} \nu\, v(\nu). \tag{3.80}$$

Además como se tiene que verificar que $(P_\ell, Q_\ell) \in \mathrm{Nuc}\,\widetilde{G}(1)$ y $(c, d) \in \mathrm{Nuc}\,G(1)$, en vista de (3.63), (3.64), (3.77) y (3.80) será suficiente exigir las condiciones (3.69) y (3.71).

CASO 4. $\boxed{\mu \in \,]0, +\infty[, \;\; \mu \neq 1}$

En este caso razonado análogamente al Caso 4 del apartado 2.1.5 obtenemos, bajo las condiciones rango $\left(\widetilde{G}(1)\right) < s$, (3.69) y (3.71), las $M-1$ soluciones dadas por (3.72).

Resumiendo, hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 3.2 *Bajo las hipótesis (3.69) y (3.71) junto con el teorema 3.1, se obtiene:*

(i) Si $\mu \in \mathbb{R} \sim \{1\}$, *la sucesión vectorial* $\{U(m,n)\}$ *definida por (3.72) es una solución exacta del problema mixto (3.7)–(3.11), donde para el caso* $\mu = 0$ *se tiene* $\theta_\ell = \left(\frac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi$, $1 \leq \ell \leq M-1$.

(ii) Si $\mu = 1$, *la sucesión vectorial* $\{U(m,n)\}$ *definida por (3.73), (3.63), (3.64), (3.77) y (3.80) es una solución exacta del problema mixto (3.7)–(3.11).*

3.5. Consistencia y estabilidad de las soluciones

Veamos que el esquema en diferencias (3.7) es *consistente* respecto a la ecuación (3.1) en el sentido de la *definición 1.13*. Denotemos:

$$\Lambda[u] = u_{tt}(x,t) - Au_{xx}(x,t) \;, \tag{3.81}$$

$$\begin{aligned}\Lambda_{k,h}[u] = & \frac{u\,(mh,(n+1)k) - u(mh,nk) + u(mh,(n-1)k)}{k^2} \\ & - A\frac{[u\,((m+1)h,nk) - 2u(mh,nk) + u\,((m-1)h,nk)]}{h^2}\,.\end{aligned} \tag{3.82}$$

Sea $\phi(x,t)$ una función suficientemente derivable y sea $\Phi(m,n) = \phi(mh,nk)$. Considerando el desarrollo de Taylor de Φ alrededor del punto (m,n) para: $(m,n+1)$, $(m,n-1)$ con respecto a la variable t y para los puntos: $(m+1,n)$ y $(m-1,n)$ con respecto a la variable x, se sigue que:

$$\left.\begin{aligned}
\Phi(m,n+1) &= \Phi(m,n) + k\Phi_t(m,n) + \tfrac{k^2}{2!}\Phi_{tt}(m,n) + \tfrac{k^3}{3!}\Phi_{ttt}(m,n) + \mathrm{O}(k^4)\\
\Phi(m,n-1) &= \Phi(m,n) - k\Phi_t(m,n) + \tfrac{k^2}{2!}\Phi_{tt}(m,n) - \tfrac{k^3}{3!}\Phi_{ttt}(m,n) + \mathrm{O}(k^4)\\
\Phi(m+1,n) &= \Phi(m,n) + h\Phi_x(m,n) + \tfrac{h^2}{2!}\Phi_{xx}(m,n) + \tfrac{h^3}{3!}\Phi_{xxx}(m,n) + \mathrm{O}(h^4)\\
\Phi(m-1,n) &= \Phi(m,n) - h\Phi_x(m,n) + \tfrac{h^2}{2!}\Phi_{xx}(m,n) - \tfrac{h^3}{3!}\Phi_{xxx}(m,n) + \mathrm{O}(h^4)
\end{aligned}\right] \tag{3.83}$$

Sustituyendo (3.83) en $\Lambda_{k,h}[\phi]$, dada por (3.82), obtenemos:

$$\Lambda_{k,h}[\phi] \;\; = \;\; \Phi_{tt}(m,n) - A\Phi_{xx}(m,n) + \mathrm{O}(k^2) + \mathrm{O}(h^2)\,. \tag{3.84}$$

Teniendo en cuenta la expresión de $\Lambda[\phi]$, dada por (3.81), y la expresión (3.84) se obtiene:

$$\|\Lambda[\phi] - \Lambda_{k,h}[\phi]\| \leq \;\; \mathrm{O}(k^2) + \mathrm{O}(h^2) \longrightarrow 0\,, \quad \text{cuando } k,h \to 0\,. \tag{3.85}$$

Por tanto, el esquema en diferencias (3.7) es *consistente* con la ecuación (3.1).

Ahora estudiaremos la estabilidad de las soluciones discretas construidas en el *teorema 3.2*. Por el *teorema de la aplicación espectral*, véase el *teorema 1.6*, el espectro de las matrices W_0 y W_1 definidas en (3.44) viene dado por

$$\sigma\left(W_0\right) = \left\{ 1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) + \sqrt{\left(1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right)^2 - 1} \;:\; a \in \sigma(A) \right\},$$

y

$$\sigma\left(W_1\right) = \left\{ 1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) - \sqrt{\left(1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right)^2 - 1} \;:\; a \in \sigma(A) \right\}.$$

No podemos garantizar la estabilidad en el sentido de la *defínción 1.14*, es decir, no podemos exigir que las matrices W_0 y W_1 sean convergentes, véase el *lema 1.1*, i.e. no podemos exigir que:

$$\rho\left(W_0\right)\ ,\ \rho\left(W_1\right) < 1\,,$$

o equivalentemente

$$\left| 1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) \pm \sqrt{\left(1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right)^2 - 1} \right| < 1\,,$$

ya que

$$\left| 1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) + \sqrt{\left(1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right)^2 - 1} \right| \cdot$$

$$\cdot \left| 1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right) - \sqrt{\left(1 - 2ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell}{2}\right)\right)^2 - 1} \right| = 1\,.$$

Por tanto analizaremos la estabilidad de las soluciones construidas en el *teorema 3.2* en el sentido de la *definición 1.15*. Esto significa que dado un punto del mallado (X,T) donde $X = \frac{m}{M} = mh_0$, $h_0 = \frac{1}{M}$ fijo, y $T = Jk$ finito, estamos interesados en el comportamiento de las soluciones $\{U(m,n)\}$ cuando $k \to 0$, i.e., cuando n crece, dependiendo del valor de k, hasta tomar el valor J necesario para alcanzar el tiempo T. Por (3.26) y por la forma de las matrices W_0 y W_1 definidas en (3.44) se sigue

$$\left.\begin{array}{l} \|W_0\| \le 1 + \mathrm{O}(r);\ \ \|W_0 - I\| = \mathrm{O}(r);\ \ \left\|\left(W_0 - W_1\right)^{-1}\right\| = \mathrm{O}(r^{-1}), \\ \\ \|W_1\| \le 1 + \mathrm{O}(r);\ \ \|W_1 - I\| = \mathrm{O}(r);\ \ r \to 0 \end{array}\right\} \tag{3.86}$$

Puesto que $h_0 = \frac{1}{M}$ está fijado y $r = \frac{k}{h}$, la expresión (3.86) significa

$$\left.\begin{array}{l} \|W_0\| \le 1 + \mathrm{O}(k);\ \ \|W_0 - I\| = \mathrm{O}(k);\ \ \left\|\left(W_0 - W_1\right)^{-1}\right\| = \mathrm{O}(k^{-1}), \\ \\ \|W_1\| \le 1 + \mathrm{O}(k);\ \ \|W_1 - I\| = \mathrm{O}(k);\ \ k \to 0 \end{array}\right\} \tag{3.87}$$

Por (3.63), (3.64) y (3.87) se sigue que

$$\|P_\ell\| = \mathrm{O}(1), \quad \|Q_\ell\| = \mathrm{O}(1), \;\; k \to 0\,. \tag{3.88}$$

Por (3.88) se obtiene que $\{U(m,n)\}$ permanece acotada cuando n crece, si los números

$$\left.\begin{array}{r} \|W_0^n\|\,,\ \|W_1^n\| \;\; \text{permanecen acotados cuando } n \to \infty \\ \text{siendo } \; 0 \le n \le J,\; T = Jk \,\text{finito} \end{array}\right\}.$$

En efecto, ya que se tiene $\|W_0\| \le 1 + \mathrm{O}(k)$ podemos tomar $\|W_0\| \le 1 + kS$, para alguna constante positiva S, y entonces para $0 \le n \le J$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|W_0^n\| \le \|W_0\|^n \le (1+\mathrm{O}(k))^n \le (1+\mathrm{O}(k))^J \\ \le e^{J\mathrm{O}(k)} \le e^{JkS} = e^{TS} = \mathrm{O}(1). \end{aligned} \tag{3.89}$$

Lo mismo ocurre para $\|W_1^n\|$. Por tanto, por (3.88)–(3.89), las soluciones definidas en (3.72) para $\mu \in \mathbb{R} \sim \{1\}$ son estables, i.e.,

$$\left.\begin{array}{r} \|U(m,n)\| = \mathrm{O}(1)\,, \quad 1 \le m \le M-1,\, h_0 = \frac{1}{M} \;\text{fijo} \\ n \to \infty,\; \text{siendo } 0 \le n \le J,\;\; T = Jk \;\text{finito} \end{array}\right\}. \tag{3.90}$$

Por otro lado para el caso $\mu = 1$ también tenemos que la solución $\{U(m,n)\}$ definida por (3.73), (3.63), (3.64), (3.77) y (3.80) es estable. En efecto, en vista de la definición de estabilidad, en el sentido de la *definición 1.15*, tenemos

$$\|m(c+nd)\| \le k_1\, m, \quad \text{para alguna constante positiva } k_1, \quad 1 \le m \le M, \tag{3.91}$$

puesto que se considera $T = Jk$ finito con $0 \le n \le J$, y los vectores (c,d) verifican

$$\|c\| = \mathrm{O}(1)\,, \quad \|d\| = \mathrm{O}(k)\,, \quad k \to 0.$$

Además como se fija el paso espacial $h_0 = \frac{1}{M}$ y $1 \le m \le M$, de (3.91) podemos concluir que

$$\|m(c+nd)\| = \mathrm{O}(1)\,, \quad k \to 0. \tag{3.92}$$

Resumiendo, hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 3.3 *Bajo las hipótesis del teorema 3.2, tomando los vectores $f(m)$ y $v(m)$ acotados, y la matriz A y el parámetro $r > 0$ verificando (3.26) y (3.27) respectivamente se tiene:*

(i) Si $\mu \in \mathbb{R} \sim \{1\}$, la sucesión vectorial $\{U(m,n)\}$ definida por (3.72) es una solución estable del problema mixto (3.7)–(3.11), en el sentido de (3.90).

(ii) Si $\mu = 1$, la sucesión vectorial $\{U(m,n)\}$ definida por (3.73), (3.63), (3.64), (3.77) y (3.80) es una solución estable del problema mixto (3.7)–(3.11), en el sentido de (3.90)–(3.92).

3.6. El método de las proyecciones

En este apartado abordaremos la construcción de soluciones del problema mixto discreto (3.7)–(3.9) para funciones $f(m)$ y $v(m)$ satisfaciendo condiciones más generales que las exigidas en el apartado 3.4. Supongamos que existen

$$\{\mu_1, \ldots, \mu_q\} \subset \sigma\left(-C^{-1}B\right) \cap \mathbb{R}\,, \tag{3.93}$$

donde $\mu_j \neq \mu_k$ para $1 \leq j, k \leq q$, $j \neq k$. Introducimos la matriz $G(\mu_j)$ en $\mathbb{C}^{s\times s}$

$$G(\mu_j) = C^{-1}B + \mu_j I\,, \quad 1 \leq j \leq q\,. \tag{3.94}$$

Como los polinomios $x - \mu_j$ son mútuamente coprimos (primos 2 a 2), véase la *definición 1.11*, entonces por el *teorema de descomposición*, véase el *teorema 1.9*, si $L(x)$ es el polinomio

$$L(x) = (x-\mu_j)(x-\mu_1)(x-\mu_2)\cdots(x-\mu_{j-1})(x-\mu_{j+1})\cdots(x-\mu_q)\,, \tag{3.95}$$

entonces

$$S = \operatorname{Nuc} L\left(-C^{-1}B\right) = \operatorname{Nuc} G(\mu_1) \oplus \operatorname{Nuc} G(\mu_2) \oplus \cdots \oplus \operatorname{Nuc} G(\mu_q)\,. \tag{3.96}$$

Consideramos la sucesión de polinomios coprimos de grado $q-1$ definidos por

$$Q_j(x) = \prod_{k=1,k\neq j}^{q} (x-\mu_k)\,, \qquad 1 \leq j \leq q\,. \tag{3.97}$$

Entonces por el *teorema de Bezout*, véase el *teorema 1.8*, tomando los escalares α_j de la forma

$$\alpha_j = \left\{ \prod_{k=1,k\neq j}^{q} (\mu_j - \mu_k) \right\}^{-1}, \qquad 1 \leq j \leq q\,,$$

obtenemos

$$1 = Q(x) = \sum_{j=1}^{q} \alpha_j Q_j(x)\,. \tag{3.98}$$

Considerando el polinomio

$$T(\mu_j) = G(\mu_1)\cdots G(\mu_{j-1})\, G(\mu_{j+1})\cdots G(\mu_q)\,, \tag{3.99}$$

y aplicando el cálculo funcional matricial sobre la matriz $-C^{-1}B$, de (3.94), (3.95), (3.98) y (3.99) se sigue que

$$I = (-1)^{q-1} \sum_{j=1}^{q} \alpha_j T(\mu_j)\,. \tag{3.100}$$

Por tanto consideraremos las proyecciones de $f(m)$ y $v(m)$ sobre el subespacio $\operatorname{Nuc} G(\mu_j)$ definidas por

$$\left.\begin{aligned} \widehat{f}_j(m) &= (-1)^{q-1}\alpha_j T(\mu_j) f(m) \\ \widehat{v}_j(m) &= (-1)^{q-1}\alpha_j T(\mu_j) v(m) \end{aligned}\right\}, \quad 1 \le j \le q\,,\ 0 \le m \le M \tag{3.101}$$

donde por (3.100) y (3.101) se satisface

$$f(m) = \sum_{j=1}^{q} \widehat{f}_j(m)\,, \quad v(m) = \sum_{j=1}^{q} \widehat{v}_j(m)\,, \ \ 0 \le m \le M\,. \tag{3.102}$$

Supongamos que $f(m), v(m) \in S$, $0 \le m \le M$, i.e.,

$$L\left(-C^{-1}B\right) f(m) = L\left(-C^{-1}B\right) v(m) = 0\,, \quad 0 \le m \le M\,, \tag{3.103}$$

o equivalentemente por (3.95), (3.101) y (3.103) que se cumple

$$\left\{\widehat{f}_j(m)\,,\ \widehat{v}_j(m),\ \ 1 \le j \le q\,,\ \ 0 \le m \le M\right\} \subset \operatorname{Nuc} G\left(\mu_j\right)\,. \tag{3.104}$$

Por tanto consideraremos q problemas diferentes obtenidos al reemplazar las condiciones iniciales (3.10)–(3.11) por:

$$\left.\begin{aligned} U(m,0) &= \widehat{f}_j(m) \\ \frac{U(m,1) - U(m,0)}{k} &= \widehat{v}_j(m) \end{aligned}\right\}, \ 1 \le j \le q\,,\ \ 0 \le m \le M\,. \tag{3.105}$$

Sea (P_j), $1 \le j \le q$, el problema definido por (3.7)–(3.9) y (3.105). Observar que por resultados previos, el cambio de las condiciones iniciales en cada problema (P_j) sólo modifica a los vectores (P_ℓ, Q_ℓ) y (c,d) que aparecen en (3.63), (3.64), (3.77) y (3.80), porque ahora los coeficientes de Fourier discretos involucran a las proyecciones $\left\{\widehat{f}_j(m)\right\}$ y $\{\widehat{v}_j(m)\}$ en lugar de a los vectores de las condiciones iniciales $\{f(m)\}$ y $\{v(m)\}$. Notemos que para los problemas (P_j), los coeficientes de Fourier toman la forma

si $\mu_j \in \mathbb{R} \sim \{1\}$, para $1 \le \ell \le M-1$ se obtiene:

$$\left.\begin{aligned} P_\ell^{(j)} &= \frac{\left(W_{0,j} - W_{1,j}\right)^{-1} \sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \left\{k\widehat{v}_j(\nu) - \left(W_{1,j} - I\right)\widehat{f}_j(\nu)\right\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell^{(j)})}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right)} \\ Q_\ell^{(j)} &= \frac{\left(W_{0,j} - W_{1,j}\right)^{-1} \sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \left\{\left(W_{0,j} - I\right)\widehat{f}_j(\nu) - k\widehat{v}_j(\nu)\right\} \operatorname{sen}(\nu\theta_\ell^{(j)})}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \operatorname{sen}^2\left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right)} \end{aligned}\right], \tag{3.106}$$

o si $\mu_j = 1$, para $2 \leq \ell \leq M-1$ se obtiene:

$$\left.\begin{array}{l} P_\ell^{(j)} = \dfrac{(W_{0,j} - W_{1,j})^{-1} \sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \left\{ k\widehat{v}_j(\nu) - (W_{1,j} - I)\, \widehat{f}_j(\nu) \right\} \mathrm{sen}(\nu\theta_\ell^{(j)})}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2 \left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right)} \\[2em] Q_\ell^{(j)} = \dfrac{(W_{0,j} - W_{1,j})^{-1} \sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \left\{ (W_{0,j} - I)\, \widehat{f}_j(\nu) - k\widehat{v}_j(\nu) \right\} \mathrm{sen}(\nu\theta_\ell^{(j)})}{\sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \mathrm{sen}^2 \left(\nu\theta_\ell^{(j)}\right)} \\[2em] c^{(j)} = \frac{1}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \nu \widehat{f}_j(\nu)\,; \quad d^{(j)} = \frac{k}{\left(\frac{M^3}{3} - \frac{M^2}{2} + \frac{M}{6}\right)} \sum\limits_{\nu=1}^{M-1} \nu\, \widehat{v}_j(\nu) \end{array}\right] , \tag{3.107}$$

donde el superíndice (j) y $W_{0,j}, W_{1,j}$ denota que se está trabajando con el valor propio μ_j. Denotando $U_j(m,n)$ a la solución del problema mixto discreto (3.7)–(3.9) y (3.105) asociado al valor propio μ_j, $1 \leq j \leq q$, se obtiene que por construcción de las proyecciones la solución del problema mixto discreto original (3.7)–(3.11) es de la forma:

$$U(m,n) = \sum_{j=1}^{q} U_j(m,n)\,.$$

Resumiendo, hemos demostrado el siguiente resultado.

TEOREMA 3.4 *Con la notación del teorema 3.1, sean $\mu_1, \ldots, \mu_q$ valores propios reales y distintos de la matriz $-C^{-1}B$. Sean $G(\mu_j)$ y $T(\mu_j)$ matrices en $\mathbb{C}^{s\times s}$ definidas por (3.94) y (3.99). Sea $\widetilde{G}(\mu_j)$ la matriz en $\mathbb{C}^{ps\times s}$ definida por*

$$\widetilde{G}\,(\mu_j) = \begin{bmatrix} G(\mu_j) \\ G(\mu_j)A \\ \vdots \\ G(\mu_j)A^{p-1} \end{bmatrix} , \tag{3.108}$$

siendo p el grado del polinomio minimal de A. Supongamos que las proyecciones $\widehat{f}_j(m)$ y $\widehat{v}_j(m)$, definidas en (3.101), verifican (3.104); que la matriz A satisface la condición (3.26) y además

$$G\,(\mu_j)\,A\left(I - G\,(\mu_j)^\dagger\, G\,(\mu_j)\right) = 0\,, \quad 1 \leq j \leq q\,, \tag{3.109}$$

y que el parámetro r satisface (3.27).

(i) Si $\mu_j \in \mathbb{R} \sim \{1\}$, se tiene que $\theta_\ell^{(j)} \in J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$, $1 \leq \ell \leq M-1$, denotan las $M-1$ soluciones de la ecuación

$$\cot\left(M\theta_\ell^{(j)}\right) = \frac{\cos\left(\theta_\ell^{(j)}\right) - \left(1 - \frac{\mu_j}{M}\right)}{\mathrm{sen}\left(\theta_\ell^{(j)}\right)}\,, 1 \leq \ell \leq M-1\,, \tag{3.110}$$

donde $\theta_\ell^{(j)} = \left(\dfrac{2\ell-1}{2M-1}\right)\pi$ *si* $\mu = 0$. *Para este caso asumiremos que* rango $\left(\widetilde{G}\left(\mu_j\right)\right) < s$.

(ii) *Si* $\mu_j = 1$, *se tiene que* $\theta_\ell^{(j)} \in J_\ell = \left]\frac{(\ell-1)\pi}{M}, \frac{\ell\pi}{M}\right[$, $2 \leq \ell \leq M-1$, *denotan las* $M-2$ *soluciones de la ecuación*

$$\cot\left(M\theta_\ell^{(j)}\right) = \frac{\cos\left(\theta_\ell^{(j)}\right) - \left(1 - \frac{\mu_j}{M}\right)}{\operatorname{sen}\left(\theta_\ell^{(j)}\right)}\,, 2 \leq \ell \leq M-1\,, \tag{3.111}$$

Para este caso asumiremos que rango $\left(\widetilde{G}(1)\right) < s$ *y* rango $(G(1)) < s$.

Entonces bajo todas las hipótesis consideradas anteriormente se obtiene que

$$U(m,n) = \sum_{j=1}^{q} U_j(m,n)\,, \qquad 1 \leq m \leq M-1\,,\ n > 0\,, \tag{3.112}$$

es una solución convergente (por ser consistente y estable) a la solución del problema mixto continuo (3.1)–(3.5), donde

si $\mu_j \in \mathbb{R} \sim \{1\}$*:*

$$U_j(m,n) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left\{W_{0,j}^n\, P_\ell^{(j)} + W_{1,j}^n\, Q_\ell^{(j)}\right\} \operatorname{sen}\left(m\,\theta_\ell^{(j)}\right)\,, \qquad 1 \leq m \leq M-1\,,\ \ n > 0$$

siendo

$$\left.\begin{aligned} W_{0,j} &= I - 2Ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(j)}}{2}\right) + \sqrt{\left(I - 2Ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(j)}}{2}\right)\right)^2 - I} \\ W_{1,j} &= I - 2Ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(j)}}{2}\right) - \sqrt{\left(I - 2Ar^2 \operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta_\ell^{(j)}}{2}\right)\right)^2 - I} \end{aligned}\right] \tag{3.113}$$

y $\left\{P_\ell^{(j)}, Q_\ell^{(j)}\right\}_{\ell=1}^{M-1}$ *los vectores definidos en (3.106);*

o si $\mu_j = 1$*:*

$$U_j(m,n) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left\{W_{0,j}^n\, P_\ell^{(j)} + W_{1,j}^n\, Q_\ell^{(j)}\right\} \operatorname{sen}\left(m\,\theta_\ell^{(j)}\right) + m\left(c^{(j)} + nd^{(j)}\right)\,, \qquad 1 \leq m \leq M-1\,,\ \ n > 0$$

siendo $\left\{W_{0,j}^n\,, W_{1,j}^n\right\}$ *las matrices definidas en (3.113) para* $2 \leq \ell \leq M-1$, *y* $\left\{P_\ell^{(j)}, Q_\ell^{(j)}\right\}_{\ell=2}^{M-1}$ *y* $\left(c^{(j)}, d^{(j)}\right)$ *los vectores definidos en (3.107).*

3.7. Ejemplos

EJEMPLO 3.1 *Consideremos el problema (3.1)–(3.5) con los datos*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

$f(m) = (f_1(m), f_2(m), f_3(m))^T$, $v(m) = (v_1(m), v_2(m), v_3(m))^T \in \mathbb{C}^3$,
$h = \frac{1}{M}\,,\ 1 \leq m \leq M-1\,.$

La matriz C es invertible y $-C^{-1}B$ viene dada por

$$-C^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \\ 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En este caso tenemos $\sigma\left(-C^{-1}B\right) = \{-1, 1\}$. Denotamos $\mu_1 = -1$, $\mu_2 = 1$. Veamos primeramente si se verifican las siguientes condiciones

$$\text{rango}\left(\widetilde{G}\left(\mu_j\right)\right) < 3\,,\ \ 1 \leq j \leq 2\,, \quad \text{y} \quad \text{rango}\left(G(1)\right) < 3\,.$$

Puesto que el grado del polinomio minimal de A es $p = 3$ las matrices $\widetilde{G}\left(\mu_j\right)$, $1 \leq j \leq 2$ toman la forma

$$\widetilde{G}\left(\mu_j\right) = \begin{bmatrix} G\left(\mu_j\right) \\ G\left(\mu_j\right) A \\ G\left(\mu_j\right) A^2 \end{bmatrix}, \quad 1 \leq j \leq 2\,,$$

siendo

$$G\left(\mu_1\right) = C^{-1}B - I = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 \\ -2 & -2 & 2 \\ -2 & 0 & 0 \end{bmatrix}, G(1) = C^{-1}B + I = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

Únicamente podemos trabajar con el valor propio $\mu_2 = 1$, ya que para el valor propio $\mu_1 = -1$ se verifica que rango$\left(\widetilde{G}\left(\mu_1\right)\right) = 3$. Estamos en el caso *(ii)* del *teorema 3.3*. Para $\mu_2 = 1$ se satisface que el Nuc $G(1)$ es subespacio invariante por la matriz A, es decir:

$$G(1)A\left(I - G(1)^{\dagger}G(1)\right) = 0\,,$$

siendo

$$G(1)^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & -\frac{1}{8} & -\frac{1}{8} \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} \end{bmatrix},$$

y además $\sigma(A) = \{1, 2\}$, i.e., todos los valores propios de A son positivos.
Por otro lado, para que los vectores $\{f(m)\}$ y $\{v(m)\}$ satisfagan

$$\{f(m),\ v(m)\,,\ 1 \le m \le M-1\} \subset \operatorname{Nuc} G(1)\,,$$

debemos exigir que sean de la forma

$$f(m) = (f_1(m), f_2(m), f_1(m))^T\ , \quad v(m) = (v_1(m), v_2(m), v_1(m))^T\ .$$

Entonces tomando $0 < r < \frac{1}{\sqrt{\rho(A)}} = \frac{1}{2}$, por *(ii)* del *teorema 3.3* la solución numérica *estable* del problema viene dada por

$$U(m,n) = \sum_{\ell=2}^{M-1} (W_0^n P_\ell + W_1^n Q_\ell) \operatorname{sen}(m\theta_\ell) + m\,(c + n\,d)\ ,$$

donde los vectores $\{P_\ell, Q_\ell\}_{\ell=2}^{M-1}$ y (c, d) están definidos en (3.63)–(3.64), (3.77) y (3.80) respectivamente.

EJEMPLO 3.2 *Consideremos el problema (3.1)–(3.5) con los datos*

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & \frac{1}{3} \\ -24 & 1 & -4 \\ 6 & 0 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -1 & \frac{1}{2} & 2 \\ -\frac{2}{3} & 1 & \frac{7}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & 1 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} -3 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$f(m) = (f_1(m), f_2(m), f_3(m))^T$, $v(m) = (v_1(m), v_2(m), v_3(m))^T \in \mathbb{C}^3$,
$h = \frac{1}{M}\,,\ 1 \le m \le M-1\,.$

La matriz C es invertible y $-C^{-1}B$ viene dada por

$$-C^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ 1 & -\frac{1}{2} & -\frac{5}{3} \\ -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}.$$

En este caso tenemos $\sigma\left(-C^{-1}B\right) = \left\{-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}\right\}$. Denotamos $\mu_1 = -\frac{1}{2}$, $\mu_2 = \frac{1}{6}$, $\mu_3 = \frac{1}{3}$. Veamos primeramente si se verifican las siguientes condiciones:

$$\operatorname{rango}\left(\widetilde{G}\,(\mu_j)\right) < 3\,,\ \ 1 \le j \le 3\,,$$

Puesto que el grado del polinomio minimal de A es $p = 2$ las matrices $\widetilde{G}\,(\mu_j)$, $1 \le j \le 3$ toman la forma

$$\widetilde{G}\,(\mu_j) = \begin{bmatrix} G\,(\mu_j) \\ G\,(\mu_j)\,A \end{bmatrix}, \quad 1 \le j \le 3\,,$$

siendo

$$G(\mu_1)=\begin{bmatrix} -\frac{2}{3} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{5}{6} \end{bmatrix}, G(\mu_2)=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & \frac{1}{3} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{6} \end{bmatrix}, G(\mu_3)=\begin{bmatrix} \frac{1}{6} & 0 & 0 \\ -1 & \frac{5}{6} & \frac{5}{3} \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Únicamente podemos trabajar con los valores propios $\mu_1 = -\frac{1}{2}$, y $\mu_2 = \frac{1}{6}$, ya que para el valor propio $\mu_3 = \frac{1}{3}$ se verifica que rango $\left(\widetilde{G}(\mu_3)\right) = 3$. Estamos en el caso del *teorema 3.4*. Para $\mu_1 = -\frac{1}{2}$, y $\mu_2 = \frac{1}{6}$ se satisface que el $\operatorname{Nuc} G(\mu_j)$, $1 \le j \le 2$, es subespacio invariante por la matriz A, es decir:

$$G(\mu_j)\, A \left(I - G(\mu_j)^{\dagger}\, G(\mu_j)\right) = 0\,, \quad 1 \le j \le 2\,,$$

siendo

$$G(\mu_1)^{\dagger} = \begin{bmatrix} -\frac{3}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -\frac{9}{10} & \frac{12}{25} & -\frac{6}{25} \end{bmatrix}, G(\mu_2)^{\dagger} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{18}{77} & \frac{27}{11} \\ 0 & \frac{15}{77} & \frac{6}{11} \\ 0 & \frac{54}{77} & \frac{15}{11} \end{bmatrix},$$

y además $\sigma(A) = \{1, 4\}$, i.e., todos los valores propios de A son positivos.
Por otro lado, para que las proyecciones $\left\{\widehat{f}_j(m)\right\}_{j=1}^{2}$ y $\{\widehat{v}_j(m)\}_{j=1}^{2}$ cumplan

$$\left\{\widehat{f}_j(m),\ \widehat{v}_j(m)\,,\ 1 \le m \le M-1\right\} \subset \operatorname{Nuc} G(\mu_j)\ ,\ 1 \le j \le 2,$$

debemos exigir que sean de la forma

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{f}_1(m) = (0, f_{1,2}(m), 0)^T \\ \widehat{f}_2(m) = \left(\frac{1}{3} f_{2,3}(m), -4 f_{2,3}(m), f_{2,3}(m)\right)^T \end{array}\right\}\,,$$

y

$$\left.\begin{array}{r} \widehat{v}_1(m) = (0, v_{1,2}(m), 0)^T \\ \widehat{v}_2(m) = \left(\frac{1}{3} v_{2,3}(m), -4 v_{2,3}(m), v_{2,3}(m)\right)^T \end{array}\right\}\,,$$

donde se ha denotado a los vectores $\widehat{f}_j(m)$ y $\widehat{v}_j(m)$ de la siguiente forma

$$\widehat{f}_j(m) = (f_{j,1}(m), f_{j,2}(m), f_{j,3}(m))^T \ \text{ y } \ \widehat{v}_j(m) = (v_{j,1}(m), v_{j,2}(m), v_{j,3}(m))^T\ .$$

Entonces tomando $0 < r < \frac{1}{2}$, por el *teorema 3.4* la solución numérica *estable* del problema viene dada por

$$U(m,n) = \sum_{j=1}^{2} U_j(m,n)\,, \qquad 1 \le m \le M-1\,,\ n > 0\,,$$

siendo

$$U_j(m,n) = \sum_{\ell=1}^{M-1} \left\{ W_{0,j}^n \, P_\ell^{(j)} + W_{1,j}^n \, Q_\ell^{(j)} \right\} \operatorname{sen}\left(m \, \theta_\ell^{(j)} \right) \, ,$$

$$1 \le m \le M-1 \, , \quad n > 0$$

$W_{0,j}$ y $W_{1,j}$ las matrices definidas en (3.113), $\left\{ P_\ell^{(j)}, Q_\ell^{(j)} \right\}_{\ell=1}^{M-1}$ los vectores definidos en (3.106) y $\left\{ \theta_\ell^{(j)} \right\}_{\ell=1}^{M-1}$ las soluciones de la ecuación (3.110).

Bibliografía

[1] R.P. Agarwal, *Difference Equations and Inequalities. Theory, Methods and Applications*, Marcel Dekker, New York, 1992.

[2] M.H. Alexander and D.E. Manolopoulos, *A Stable linear reference potential algorithm for solution of the quantum close-coupled equations in molecular scattering theory*, J. Chem. Phys. 86 (1987), 2044–2050.

[3] T.M. Apostol, *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, MA, 1977.

[4] O. Axelsson, *Iterative Solution Methods*, Cambridge Univ. Press., Cambridge, 1996.

[5] F.L. Bauer and A.S. Householder, *Absolute norms and characteristic roots*, Numerische Math. 3 (1961), 241–246 .

[6] S.L. Campbell and C.D. Meyer, Jr., *Generalized Inverses of Linear Transformations*, Pitman, London, 1971.

[7] M.C. Casabán and L. Jódar, J.A. Sánchez Cano, *Stable numerical solution of strongly coupled mixed diffusion problems*, Applied Math. Lett. 15, (2002), 115–119.

[8] H.H. Chiu, *Theory of irreducible linear systems*, Quant. Appl. Math. XXVII, (1969), 87–104.

[9] R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics*, Vol. II, Interscience, New York, 1962.

[10] P.K. Das, *Optical Signal Processing*, Springer, New York, 1991.

[11] N. Dunford and J. Schwartz, *Linear Operators, Part I*, Interscience, New York, 1957.

[12] R. Godement, *Course d'Algebre*, Hermann, Paris, 1957.

[13] G. Golub and C.F. Van Loan, *Matrix Computations*, Johns Hopkins Univ. Press, Baltimore, M.A., 1989.

[14] K. Gopolsamy, *An arms race with deteriorating armaments*, Math. Biosci, 37 (1977), 191–203.

[15] A.F. Harvey, *Microwave Engineering*, Academic Press, New York, 1963.

[16] D.J. Higham and N.J. Higham, *MATLAB guide*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), cop. 2000, Philadelphia.

[17] A.L. Hodgkin and A.F. Huxley, *A quantitative description of membrane current and its applications to conduction in the giant axon of Loligo*, J. Physiol., Vol. 117, pp. 500–544, (1952).

[18] L. Jódar, *Algebraic and differential operator equations*, Linear Algebra Appl., 102 (1988), 35–53.

[19] L. Jódar and M.C. Casabán, *Convergent matrix pencils*, Applied Math. Lett. 14 (5), 549–551, (2001).

[20] L. Jódar and M.C. Casabán, *Convergent discrete numerical solution of coupled mixed partial differential systems*, Math. Comput. Model. 34, 283–297, (2001).

[21] L. Jódar and M.C. Casabán, *Convergent discrete numerical solutions of strongly coupled mixed parabolic systems*, Utilitas Math. Paper (2002), (por aparecer).

[22] L. Jódar, E. Navarro *On complete sets of solutions of polynomial matrix equations*, Applied Math. Lett. Vol. 3, No. 1 (1990), 15–18.

[23] L. Jódar, E. Navarro and J.A. Martín, *Exact and analytic-numerical solutions of strongly coupled mixed diffusion problems*, Proc. Edinburgh Math. Soc. 43 (2000), 269–293.

[24] L. Jódar and J.A. Sánchez, *Constructive stable numerical solutions of strongly coupled diffusion mixed partial differential systems*, Int. J. Computer Math. 73 No.2, 225–242, (1999).

[25] L. Jódar, J.A. Sánchez and M.V. Ferrer, *Stable numerical solutions of strongly coupled mixed diffusion problems*, Computers Math. Appl. 39 No. 1–2 (2000), 169–182.

[26] L. Jódar and J.A. Sánchez Cano, *Discrete numerical solution of strongly coupled mixed diffusion problems*, Computers Math. Appl. 40 (2000), 471–489.

[27] R.J. Kee and L.R. Petzold, *A differential/algebraic equation formulation of the method of lines solution to systems of partial differential equations*, Tech. Rep. SAND86–8893, Sandia National Laboratories, 1986.

[28] M.P. Legua Fernández, *Ecuaciones matriciales diferenciales, en diferencias y en derivadas parciales*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 1990.

[29] J.A. Martín, E. Navarro, L. Jódar, *Exact and analytic-numerical solutions of strongly coupled mixed diffusion problems*, Proc. Edinburg Math. Soc. 43 (2000), 1–25.

[30] M. Mascagni, *A critical-boundary value problem of physiological significance for equations of nerve conduction*, Com. Pure Appl. Math., XLII (1989), 213–227.

[31] V.S. Melezhik, I.V. Puzhynin, T.P. Puzhynina and L.N. Somov, *Numerical solution of a system of integrodifferential equations arising from the quantum-mechanical three-body problem with Coulomb interaction*, J. Comput. Phys. 54, 221–236, (1984).

[32] A.C. Metaxas, R.J. Meredith, *Industrial Microwave Heating*, Peter Peregrinus, London, 1983.

[33] L. Mirsky, *An Introduction to Linear Algebra*, Dover, New York, 1990.

[34] J.K. Mitchell, *Conduction phenomena: from theory to geotechnical practice*, Geotechnique, Vol. 41, No. 3 (1991), 229-340.

[35] H. Morimoto, *Stability in the wave equation coupled with heat flows*, Numer. Math. 4 (1962), 136–145.

[36] P.M. Morse and H. Feshbach, *Methods of Theoretical Physics*, McGraw-Hill, Tokio, 1953.

[37] E. Navarro, E. Ponsoda and L. Jódar, *A matrix approach to the analytic-numerical solution of mixed partial differential systems*, Computers Math. Appl. 30 (1), 99–109, (1995).

[38] J.M. Ortega, *Numerical Analysis. A Second Course*. Academic Press, New York, 1972.

[39] C.R. Rao and S.K. Mitra, *Generalized Inverse of Matrices and its Applications*, John-Wiley, New York, 1971.

[40] S. Saks, A. Zygmund, *Analytic Functions*, Elsevier, Amsterdam, 1971.

[41] J.A. Sánchez Cano, *Construcción de soluciones numéricas estables de problemas de difusión fuertemente acoplados*, Tesis Doctoral, Universidad Politécnica de Valencia, 2000.

[42] D. Sheng and K. Axelsson, *Uncoupling of coupled flow in soil. A finite element method*, Int. J. Numer. and Analytical Meth. in Geomechanics, Vol. 19, pp. 537–553, (1995).

[43] G.D. Smith, *Numerical Solution of Partial Differential Equations: Difference Methods*, Claredon, Oxford, 1978.

[44] G.W. Stewart and Ji-Guang Sun, *Matrix Perturbation Theory*, Academic Press, New York, 1990.

[45] J.C. Strikwerda, *Finite Difference Schemes and Partial Differential Equations*, Chapman and Hall, New York, 1990.

[46] J.R. Weston and M. Stacey, *Fusion Plasma Analysis*, John Wiley ans Sons, New York, 1981.

[47] A.T. Winfree, *When Times Breaks Down*, Princeton Univ. Princeton, 1987.

[48] A.T. Winfree, *Heart Muscle as a Reaction-Diffusion Medium: the Roles of Electrical Potential Diffusion, Activation Front Curvature, and Anisotropy*, Int. J. Bif. Chaos 7, 487–526, (March 1997).

[49] A.T. Yeung, J.K. Mitchell, *Coupled fluid, electrical and chemical flows in soil*, Geothchnique vol. 43, No. 1 (1993), 121–134.