UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Las Matemáticas para la Gestión del Riesgo en Carteras Financieras.

Carteras con dos activos con correlaciones estadísticas extremas

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Navarro Quiles, Ana (jccortes@imm.upv.es; annaqui@posgrado.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

Las matemáticas juegan un papel fundamental en el análisis de muchos problemas financieros. En este trabajo se aborda el estudio de la formación de carteras financieras formadas por dos activos de modo que el riesgo de la cartera sea mínimo. La clave para realizar el estudio se basa en introducir el concepto de correlación estadística entre los dos activos. A partir de herramientas matemáticas elementales se ilustra cómo puede abordarse el estudio de este importante problema financiero en diferentes casos extremos del grado de correlación entre los activos. El trabajo, aunque está planteado desde un escenario elemental, arroja luz sobre las ideas claves que permiten abordar el caso de un número arbitrario de activos financieros con una matriz de varianzas-covarianzas general.

2 Introducción

Una de las estrategias básicas en la inversión financiera es la diversificación, con objeto de minimizar el riesgo global de la cartera inversora. No obstante se hace necesario comprender qué se entiende por riesgo de un activo financiero y estudiar técnicas cuantitativas para minimizar el riesgo. El objetivo de este trabajo es proporcionar una introducción a la gestión del riesgo de carteras inversoras. Como una primera aproximación al estudio se considerarán carteras formadas únicamente por dos activos, los cuales están completamente correlacionados (negativa o positivamente) o no están correlacionados (correlación nula), porque estos casos extremos arrojan luz sobre el estudio general.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Definir los conceptos y definiciones básicos que están involucrados en el estudio de la rentabilidad de carteras.
- Comprender los principios básicos que determinan el rendimiento de una cartera a partir de dos activos en el caso particular en que dichos activos tienen un grado de correlación extremo, -1, 0 ó +1.

4 Conceptos financieros básicos asociados al riesgo financiero

El objetivo principal cuando se construye una cartera inversora formada por dos (o más) activos es determinar cómo balancear la composición o peso de cada activo que compone la cartera para que el riesgo global de la misma sea mínimo (a ser posible nulo) para un retorno esperado. Lo primero que aprenderemos es, que para que este planteamiento tenga sentido, que la cartera debe estar formada por al menos dos activos, y la interacción de estos activos se medirá mediante su covarianza (o equivalentemente correlación) de los riesgos individuales de cada activo que forma la cartera.

Aunque, como se ha indicado, el estudio se restringirá a carteras formadas por dos activos, a continuación se introducen una serie de conceptos generales para carteras formadas por un número arbitrario de activos $a_1,\ldots,a_n$.

Para cada activo a_i denotaremos:

$$\left.\begin{array}{l} v_{i,0} = \textbf{valor inicial} \text{ de } a_i, \\ v_{i,T} = \textbf{valor final} \text{ de } a_i, \end{array}\right. \quad 1 \le i \le n.$$

Una **cartera** está definida por el vector

$$\vec{\theta} = (\theta_1,\ldots,\theta_n),$$

donde

$$\theta_i: \text{ número de unidades del activo } a_i,\ 1 \le i \le n.$$

El signo de θ_i admite la siguiente interpretación:

$$\begin{cases} \theta_i < 0 \Rightarrow \textbf{ posición corta} \text{ del activo } a_i, \\ \theta_i > 0 \Rightarrow \textbf{ posición larga} \text{ del activo } a_i. \end{cases}$$

Recuérdese que posición corta (larga) en Finanzas significa que el activo no (sí) se posee.

Normalmente se mide el **peso** de cada activo que compone la cartera. Así, el peso w_i del activo a_i es el porcentaje del valor del activo que contiene la cartera en el instante inicial $t = 0$,

$$w_i = \frac{\theta_i v_{i,0}}{\sum_{j=1}^{n} \theta_j v_{j,0}}, \quad 1 \le i \le n.$$

Obviamente se cumple

$$\sum_{i=1}^{n} w_i = 1.$$

El **retorno** R_i **del activo** a_i se define como

$$R_i = \frac{v_{i,T} - v_{i,0}}{v_{i,0}}, \quad 1 \le i \le n.$$

Como el valor futuro del activo a_i es desconocido porque en la práctica depende de factores muy complejos, es apropiado considerar $V_{i,T}$ como una variable aleatoria y se asocian a R_i su valor medio o **retorno esperado,** μ_i**,** y su **riesgo,** σ_i^2**,** dados por la esperanza y la varianza de la variable aleatoria R_i, respectivamente

$$\mu_i = \mathrm{E}\left[R_i\right], \quad \sigma_i^2 = \mathrm{Var}\left[R_i\right], \quad 1 \le i \le n.$$

Si $\sigma_i^2 = 0$, entonces el **activo** se dice **libre de riesgo.** En lo sucesivo supondremos $\sigma_i > 0,\ \forall i : 1 \le i \le n.$

Como consecuencia, es natural considerar el **retorno** R**,** el **retorno esperado** μ**,** y el **riesgo** σ^2 **de la cartera,** definidos por

$$R = \sum_{i=1}^{n} w_i R_i, \quad \mu = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i, \quad \sigma^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j,$$

donde para la expresión de μ se ha utilizado que como $\mu_i = \mathrm{E}[R_i]$ se tiene

$$\mu = \mathrm{E}\left[R\right] = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right] = \sum_{i=1}^{n} w_i \mathrm{E}\left[R_i\right] = \sum_{i=1}^{n} w_i \mu_i.$$

Mientras que para la expresión de σ^2 la fórmula para la varianza de una combinación lineal finita de variables aleatorias $\left\{X_i\right\}_{i=1}^{m}$ no necesariamente estadísticamente independientes de varianza σ_i^2 y coeficiente de correlación $\rho_{i,j},\ 1 \le i, j \le m$.

$$\mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{m} \alpha_i X_i\right] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j \mathrm{Cov}\left[X_i, X_j\right] = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{m} \alpha_i \alpha_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j.$$

Ecuación 1. Varianza de una combinación lineal de variables aleatorias.

En efecto, aplicamos la relación dada en la Ec.1 con $\alpha_i = w_i;\ X_i = R_i$ y $m = n$ y se obtiene

$$\sigma^2 = \mathrm{Var}\left[R\right] = \mathrm{Var}\left[\sum_{i=1}^{n} w_i R_i\right] = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} w_i w_j \rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j.$$

Es importante señalar que en Finanzas existen dos tipos de riesgos:

- **Riesgo sistemático:** el cual no está asociado a un activo particular si no a las fuerzas macroeconómicas del mercado global. Por ejemplo, el cambio en la política de tipos de interés del Banco Central Europeo o de la Reserva Federal Norteamericana pueden afectar al riesgo de un determinado activo, del mismo modo que un terremoto, un atentado terrorista, etc., podrían afectar cualquier activo cotizado en un mercado financiero.
- **Riesgo no sistemático:** está asociado a un activo particular. Por ejemplo, si un empresa fabrica muebles de bambú y este material está en riesgo de extinción, puede minimizar su riesgo de quiebra fabricando también muebles de otro material sintético.

La diferencia entre ambos riesgos, es que el riesgo no sistemático puede diversificarse y conseguir reducirlo. El objeto de la Gestión de Carteras (o *Portfolio Management*) es minimizar el riesgo no sistemático, maximizando el retorno esperado.

Finalizamos esta sección recordando la desigual mostrada en la Ec.2 que se requerirá posteriormente

$$\frac{xy}{x+y} < \min(x,y), \quad \text{si} \quad x,y > 0.$$

Ecuación 2. Desigualdad matemática que se requerirá posteriormente.

Para justificar esta desigualdad supóngase sin pérdida de generalidad que $0 < x < y$, entonces

$$\frac{xy}{x+y} < \min(x,y) = x \Leftrightarrow \frac{xy}{x} = y < x+y \Leftrightarrow 0 < x,$$

y por hipótesis $x > 0$. El resultado se obtiene también si $\min(x,y) = y$, por la simetría de los términos que constituyen la desigualdad dada por la Ec.2.

5 Estudio del riesgo de una cartera con dos activos: una aproximación mediante casos extremos

Consideremos una cartera formada por dos activos y con las características descritas en la Tabla 1.

Activos Cartera	Retorno esperado	Riesgo	Peso activo
a_1	μ_1	σ_1^2	$w_1 = t$
a_2	μ_2	σ_2^2	$w_2 = 1-t$

Tabla 1. Características de la cartera.

Claramente el retorno esperado, μ, y el riesgo, σ^2, de la cartera son los dados en la Ec.3.

$$\mu = t\mu_1 + (1-t)\mu_2, \quad \sigma^2 = t^2\sigma_1^2 + (1-t)^2\sigma_2^2 + 2t(1-t)\rho_{1,2}\sigma_1\sigma_2.$$

Ecuación 3. Retorno esperado (μ) y riesgo (σ^2) de la cartera.

Vamos a suponer, sin pérdida de generalidad, que $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$. A continuación compararemos el comportamiento del riesgo de la cartera y de los riesgos individuales, σ_1^2 y σ_2^2, de cada uno de los activos. Para ello, vamos a distinguir los tres casos mostrados en la Tabla 2 en función de los valores extremos de la correlación estadística de los dos activos que forman la cartera.

	Correlación	Activos
Caso 1	$\rho_{1,2}=0$	Incorrelados
Caso 2	$\rho_{1,2}=+1$	Correlación positiva máxima
Caso 3	$\rho_{1,2}=-1$	Correlación negativa máxima

Tabla 2. Casos objeto de estudio.

Substituyendo, en cada caso, el valor de $\rho_{1,2}$ en la segunda expresión de la Ec.3, se obtiene el valor del riesgo σ^2 de la cartera (véase Ec.4). Obsérvese que σ^2 se ha expresado como un polinomio en t del activo a_i de la cartera, por conveniencia.

$$\sigma^2=\sigma^2(t)=\begin{cases} t^2\sigma_1^2+(1-t)^2\sigma_2^2=\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)t^2-2\sigma_2^2 t+\sigma_2^2 & \text{si} \quad \rho_{1,2}=0, \quad \text{(Caso 1)} \\ t^2\sigma_1^2+(1-t)^2\sigma_2^2+2t(1-t)\sigma_1\sigma_2=\left[(\sigma_1-\sigma_2)t+\sigma_2\right]^2 & \text{si} \quad \rho_{1,2}=+1, \quad \text{(Caso 2)} \\ t^2\sigma_1^2+(1-t)^2\sigma_2^2-2t(1-t)\sigma_1\sigma_2=\left[(\sigma_1+\sigma_2)t-\sigma_2\right]^2 & \text{si} \quad \rho_{1,2}=-1. \quad \text{(Caso 3)} \end{cases}$$

Ecuación 4. Riesgo de la Cartera en los Casos 1-3 de la Tabla 2.

En todos los Casos 1-3 se desea construir una cartera de riesgo mínimo. Utilizando el Cálculo Diferencial clásico o, las propiedades elementales de las funciones cuadráticas, podemos determinar el valor t que hace mínimo el riesgo. Dichos valores los denotaremos por $t_{\min}$ y $\sigma^2_{\min}$, respectivamente, y aparecen expresados en la Tabla 3.

	$t_{\min}$	$\sigma^2_{\min}$	$1-t_{\min}$
Caso 1 ($\rho_{1,2}=0$)	$\dfrac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\in\left]0,1\right[$	$\dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}>0$	$\dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\in\left]0,1\right[$
Caso 2 ($\rho_{1,2}=+1$)	$\dfrac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}>1$	0	$\dfrac{-\sigma_1}{\sigma_2-\sigma_1}<0$
Caso 3 ($\rho_{1,2}=-1$)	$\dfrac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\in\left]0,1\right[$	0	$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_1+\sigma_2}\in\left]0,1\right[$

Tabla 3. Valores de t y $1-t$ que minimizan el riesgo σ^2. Valores del riesgo mínimo en los Casos 1-3.

En las Ecs. 5-7 se detallan los cálculos de la Tabla 3.

$$\sigma^2(t)=\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)t^2-2\sigma_2^2 t+\sigma_2^2 \xrightarrow{\sigma_1^2+\sigma_2^2>0} t_{\min} \text{ es el vértice de } \sigma^2(t).$$

$$t_{\min}=\frac{-\left(-2\sigma_2^2\right)}{2\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)}=\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\in\left]0,1\right[.$$

$$\sigma_{\min}^2=\sigma^2\left(t_{\min}\right)=\left(\sigma_1^2+\sigma_2^2\right)\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2-2\sigma_2^2\left(\frac{\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)+\sigma_2^2=\frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Ecuación 5. Determinación de los valores $t_{\min}$ y $\sigma_{\min}^2$ dados en la Tabla 3 en el Caso 1.

$$\sigma^2(t)=\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)t+\sigma_2\right]^2 \xrightarrow{\text{es mínimo}} \left(\sigma_1-\sigma_2\right)t+\sigma_2=0.$$

$$t_{\min}=\frac{-\sigma_2}{\sigma_1-\sigma_2}=\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}>0.$$

$$\sigma_{\min}^2=\sigma^2\left(t_{\min}\right)=\left[\left(\sigma_1-\sigma_2\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_2-\sigma_1}\right)+\sigma_2\right]^2=0.$$

Ecuación 6. Determinación de los valores $t_{\min}$ y $\sigma_{\min}^2$ dados en la Tabla 3 en el Caso 2.

$$\sigma^2(t)=\left[\left(\sigma_1+\sigma_2\right)t-\sigma_2\right]^2 \xrightarrow{\text{es mínimo}} \left(\sigma_1+\sigma_2\right)t-\sigma_2=0.$$

$$t_{\min}=\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\in\left]0,1\right[.$$

$$\sigma^2\left(t_{\min}\right)=\left[\left(\sigma_1+\sigma_2\right)\left(\frac{\sigma_2}{\sigma_1+\sigma_2}\right)-\sigma_2\right]^2=0.$$

Ecuación 7. Determinación de los valores $t_{\min}$ y $\sigma_{\min}^2$ dados en la Tabla 3 en el Caso 3.

Vamos a analizar cada uno de los Casos 1-3, aunque desde luego los más prometedores son los Casos 2 y 3, donde los activos están completamente correlados de forma positiva o negativa, respectivamente, ya que el riesgo de la cartera en dichos casos es nulo.

- Caso 1: $\rho_{1,2}=0$

  A partir de los cálculos mostrados en la Ec.5 y en la Figura 1 se observa que en este caso aunque el mínimo riesgo es positivo, éste es menor que los riesgos individuales de cada activo (véase Ec.8). Obsérvese que la desigualdad de la Ec.8 se deduce tomando en la Ec.2 $x=\sigma_1^2>0$ e $y=\sigma_2^2>0$.

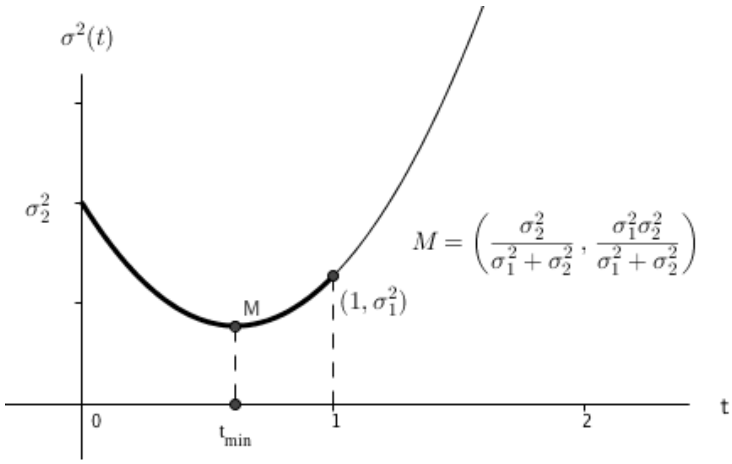

Figura 1. Gráfico del riesgo en el Caso 1 $(\rho_{1,2} = 0)$. *La parte sombreada de la curva indica que no hay venta en corto del activo* a_1.

$$0 < \sigma_{\min}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2}{\sigma_1^2+\sigma_2^2} < \min\left(\sigma_1^2, \sigma_2^2\right).$$

Ecuación 8. Relación entre el riesgo mínimo de la cartera y los riesgos individuales de cada activo en el Caso 1.

Obsérvese a partir de la Tabla 3 que como $t_{\min} > 0$ y $1 - t_{\min} > 0$, esta estrategia permite minimizar el riesgo adquiriendo ambos activos (posición larga en los activos a_1 y a_2), aunque no se consigue hacer nulo el riesgo, que sería lo más conveniente.

- Caso 2: $\rho_{1,2} = +1$

A partir de los cálculos mostrados en la Ec.6 y de la Figura 2, se observa que el mínimo riesgo es nulo, pero, atendiendo al signo de $t_{\min} > 0$ y $1 - t_{\min} < 0$ (véase Tabla 3), esto se consigue adoptando una posición de venta en corto del activo a_2, pues $1 - t_{\min} < 0$, que es el que tiene mayor riesgo (recuérdese que $0 < \sigma_1^2 \le \sigma_2^2$).

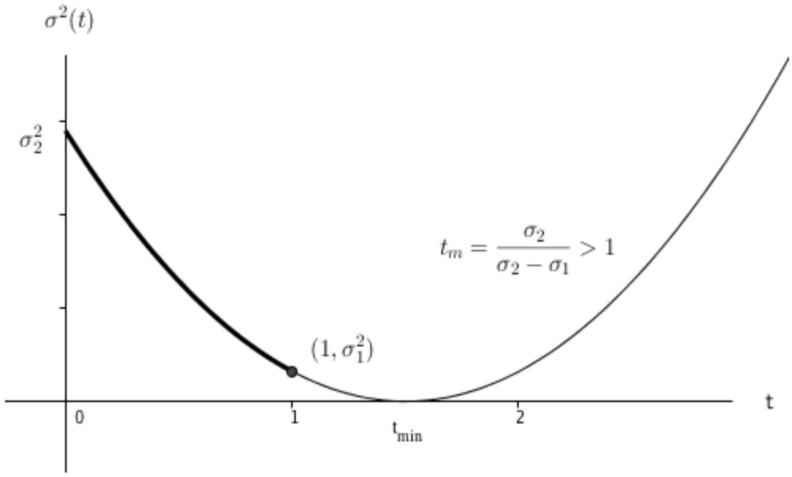

Figura 2. Gráfico del riesgo en el Caso 2 $(\rho_{1,2} = +1)$. *La parte sombreada de la curva indica que no hay venta en corto del activo* a_1.

- Caso 3: $\rho_{1,2} = -1$

  A partir de los cálculos mostrados en la Ec.7 y de la Figura 3, se observa que en este caso el mínimo riesgo es nulo. Además teniendo en cuenta que $t_{\min} > 0$ y $1 - t_{\min} > 0$ (véase Tabla 3), esta estrategia no implica la venta en corto de ninguno de los activos. Obsérvese que como $t_{\min}, 1 - t_{\min} \in \left]0,1\right[$ (véase Tabla 3), los pesos de ambos activos son una parte del total de la cartera.

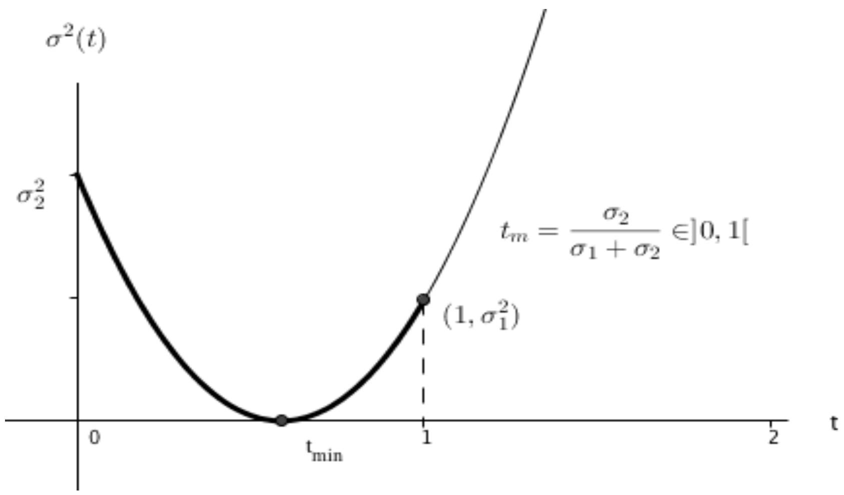

Figura 3. Gráfico del riesgo en el Caso 3 $(\rho_{1,2} = -1)$. *La parte sombreada de la curva indica que no hay venta en corto del activo* a_1.

6 Cierre

Del estudio realizado se concluye que para una cartera formada por dos activos financieros a_1 y a_2 de riesgos individuales σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, asumiendo que la correlación entre ellos solo puede ser $\rho_{1,2} \in \{-1,0,+1\}$, las únicas que implican riesgo nulo (y por lo tanto mínimo riesgo), son en las que hay correlación perfecta $(\rho_{1,2} = \pm 1)$. Sin embargo entre estas dos carteras la más adecuada es en la que los activos están correlacionados de forma negativa perfecta $(\rho_{1,2} = -1)$, ya que no implica la venta en corto de ningún activo. La venta en corto tiene importantes desventajas, en primer lugar, no siempre es posible y, cuando se puede llevar a cabo, acarrea costes. Sin embargo, es posible que en la práctica no sea factible la elección de activos que están perfectamente correlacionados de forma negativa para formar una cartera inversora. No obstante, nuestro análisis ha excluido la posibilidad de que $\rho_{1,2} \in]-1,1[- \{0\}$, es decir, de que exista correlación no perfecta. El análisis de este caso exige utilizar técnicas de optimización más avanzadas que las tratados en este trabajo.

7 Bibliografía

[1] Baxter, M. y Rennie, A.: "Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing", Cambridge University Press, 1996.

Este texto proporciona una visión rigurosa de las matemáticas que se requieren para abordar problemas financieros tales como la cobertura del riesgo ante la inversión en carteras financieras compuestas por activos subyacentes y sus derivados.

[2] Etheridge, A.: "A Course in Financial Calculus", Cambridge University Press, 2002.

Un libro riguroso donde se estudia la modelización de problemas financieros con activos con riesgo partiendo de ejemplos sencillos ilustrativos hasta los modelos más complejos.

[3] Wilmott, P. y Howison, S. y Dewynne, J.: "The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction", Cambridge University Press, 1995.

Este excelente texto presenta de forma muy elegante y asequible una introducción a los modelos financieros con riesgo haciendo uso de herramientas matemáticas para su análisis. Quizás uno de los mejores libros de referencia para el tratamiento de los problemas tratados en este trabajo docente.