UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Las Matemáticas para la Gestión del Riesgo en Carteras Financieras.

Carteras compuestas por dos activos con correlaciones estadísticas arbitrarias

Apellidos, nombre	Cortés López, Juan Carlos; Navarro Quiles, Ana (jccortes@imm.upv.es; annaqui@posgrado.upv.es)
Departamento	Matemática Aplicada Instituto Universitario de Matemática Multidisciplinar
Centro	Facultad de Administración y Dirección de Empresas

1 Resumen de las ideas clave

En este trabajo se determina la composición de una cartera formada por dos activos con rendimientos y riesgos individuales dados, de modo que el riesgo global de la cartera sea mínimo. La discusión está basada en el coeficiente de correlación estadístico de los dos activos que forman la cartera inversora. Se discuten diferentes soluciones, distinguiendo aquellas que no suponen la venta en corto de uno de los dos activos, así como las soluciones extremas con riesgo nulo.

2 Introducción

La composición de carteras inversoras formadas por dos o más activos tiene como finalidad reducir el riesgo individual de cada uno de los activos. Como un estadio previo a la formulación general de este interesante problema para el caso de una cartera formada por un número arbitrario de activos, es conveniente prestar atención al caso en que la cartera esta formada por dos activos. En el caso de la composición de una cartera formada por dos activos a_1 y a_2 con retornos esperados, μ_1 y μ_2, riesgos σ_1^2 y σ_2^2, y pesos $w_1 = t$ y $w_2 = 1-t$, respectivamente, de modo que dicha cartera tenga riesgo mínimo, se puede probar que la información clave para realizar el análisis está en términos de la correlación $\rho_{1,2}$ entre ambos activos a_1 y a_2. Estas páginas abordan el análisis y la discusión de este interesante problema financiero haciendo uso para su desarrollo de herramientas matemáticas elementales.

3 Objetivos

Los principales objetivos docentes de este artículo son que el alumno sea capaz de:

- Comprender los principios básicos que determinan el rendimiento de una cartera a partir de dos activos que dichos activos tienen un grado de correlación arbitrario.
- Discriminar entre diferentes carteras compuestas por dos activos que minimizan el riesgo considerando para ello las posiciones largas y cortas en la inversión.

4 Estudio general del riesgo de una cartera con dos activos

Por simplicidad en la notación, en adelante escribiremos $\rho_{1,2} = \rho$. Para el estudio distinguiremos dos casos: $-1 \le \rho < 1$ y $\rho = 1$. Sin pérdida de generalidad supondremos en adelante que $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$. En ambos casos las ecuaciones para el retorno esperado, μ, y para el riesgo σ^2 de la cartera, son

$$\mu = w_1\mu_1 + w_2\mu_2 \quad , \quad \sigma^2 = w_1^2\sigma_1^2 + w_2^2\sigma_2^2 + 2w_1w_2\rho\sigma_1\sigma_2,$$

respectivamente. Denotando por

$$w_1 = t, \qquad w_2 = 1 - t,$$

las expresiones anteriores de μ y σ^2 se reescriben de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \mu &= (\mu_1 - \mu_2)t + \mu_2, \\ \sigma^2 &= \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)t^2 - 2\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)t + \sigma_2^2. \end{aligned}$$

Ecuación 1. Ecuaciones paramétricas del retorno esperado (μ) y del riesgo (σ^2) de la cartera en términos del parámetro t que representa el peso $w_1 = t$ del activo a_1 de la cartera .

A continuación estudiaremos los casos citados anteriormente.

4.1 Caso 1: $-1 \le \rho < 1$.

Obsérvese que en este caso como $-1 \le \rho < 1$ y $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$, el coeficiente de t^2 en σ^2 dada en la Ec.1 satisface

$$\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1 - \rho) > 0,$$

Ecuación 2. Determinación del signo del coeficiente de t^2 de σ^2 en la Ec.1.

por tanto $\sigma^2 = \sigma^2(t)$ es una función cuadrática del parámetro t. Esto nos indica que la Ec.1 representa las ecuaciones paramétricas, siendo t el parámetro, del retorno esperado, μ, y del riesgo, σ^2, de la cartera, y su gráfica es una parábola "tumbada" abierta por la derecha. En el contexto del estudio del riesgo de carteras financieras se suele representar σ^2 en el eje de abscisas y μ en el eje de ordenadas. En la Figura 1 se representan dos posibles ubicaciones de los puntos $\left(\sigma_1^2, \mu_1\right)$ y $\left(\sigma_2^2, \mu_2\right)$ en la ecuación paramétrica de la parábola dada por la Ec.1.

Vamos a determinar el riesgo mínimo, $\sigma_{\min}^2$, de la cartera. Recordemos que estamos asumiendo sin pérdida de generalidad que $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$, es decir, el activo a_1 tiene un riesgo al menos tan pequeño como el activo a_2.

$$t_{\min} = -\frac{-2\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)} = \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} > 0.$$

Ecuación 3. Expresión del peso $t = w_1$ del primer activo que minimiza el riesgo de la cartera.

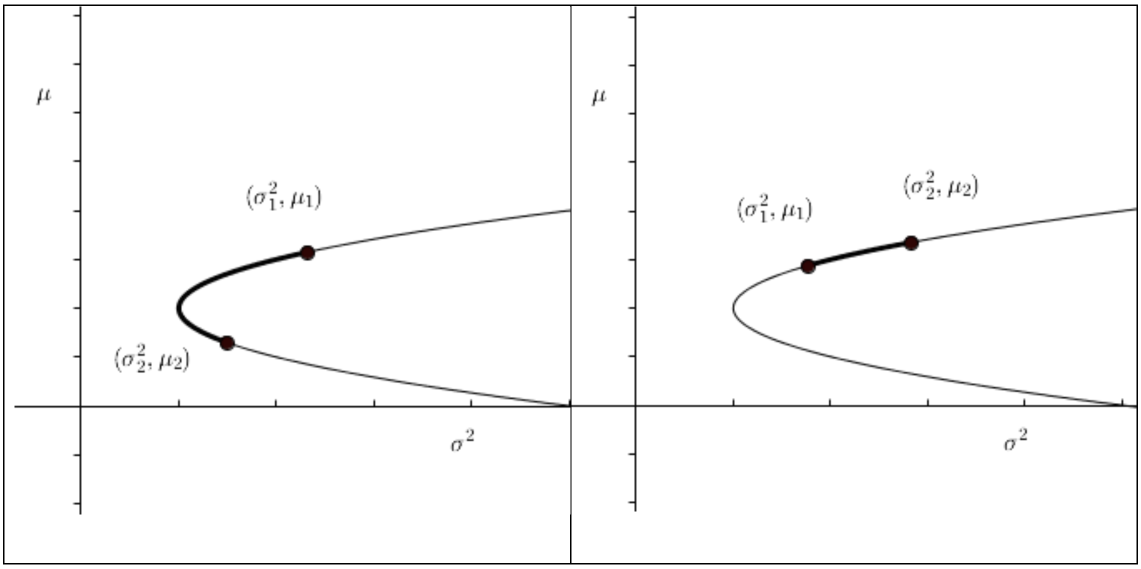

Figura 1. Representación del riesgo (σ^2) *-retorno* (μ) *en dos casos distintos. Obsérvese que* $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$.

La Ec.3 nos indica que la función $\sigma^2 = \sigma^2(t)$ dada por la Ec.1 es positiva, y por tanto legitima la notación $\sigma^2 = \sigma^2(t)$.

En este contexto el valor $t_{\min}$ dado en la Ec.3 está bien definido y es positivo, ya que, por la Ec.2 el denominador es positivo y, como $-1 \le \rho < 1$ y $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$, se cumple que $\sigma_2 - \rho\sigma_1 > 0$, y por tanto también el numerador es positivo.

El valor $t_{\min}$ se obtiene bien utilizando la conocida fórmula para el vértice (o mínimo) de una parábola (convexa), Ec.3, o utilizando el Cálculo Diferencial:

$$\frac{d}{dt}\left(\sigma^2\right) = 2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right)t - 2\sigma_2\left(\sigma_2 - \rho\sigma_1\right) = 0 \quad \Rightarrow \quad t_{\min} = \frac{\sigma_2\left(\sigma_2 - \rho\sigma_1\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2},$$

$$\frac{d^2}{dt^2}\left(\sigma^2\right) = 2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2\right) > 0,$$

donde en la segunda expresión se ha utilizado el resultado establecido en la Ec.2.

Sustituyendo en la expresión de σ^2 dada en la Ec.1 el valor $t_{\min}$ obtenido en la Ec.3, después de manipulaciones algebraicas, se deduce el valor del riesgo mínimo, $\sigma^2_{\min}$:

$$\sigma^2_{\min} = \begin{cases} \dfrac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} > 0 & \text{si} \quad 0 < \sigma_1 \le \sigma_2 \quad \text{y} \quad -1 < \rho < 1, \\ 0 & \text{si} \quad \rho = -1. \end{cases}$$

Ecuación 4. Expresión del riesgo mínimo.

En la Ec.4 se distingue el caso donde los activos tienes correlación negativa perfecta, $\rho = -1$, ya que se consigue el mínimo riesgo posible para la cartera, el riesgo nulo.

Además en este caso la cartera se compone de $w_1^* = t_{\min}$ del activo a_1 y $w_2^* = 1 - t_{\min}$ del activo a_2, siendo

$$w_1^* = t_{\min} = \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} > 0, \qquad w_2^* = 1 - t_{\min} = \frac{\sigma_1(\sigma_1 - \rho\sigma_2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}.$$

A efectos prácticos es importante saber si el riesgo mínimo dado en la Ec.4 se puede alcanzar sin adoptar posiciones cortas en la cartera. Para ello se debe buscar bajo qué condiciones $w_1^* = t_{\min} \in]0,1[$ y, en ese caso $w_2^* = 1 - t_{\min} \in]0,1[$. Esto se discute en los siguientes 4 casos, bajo las hipótesis dadas. En los primeros 3 casos consideraremos que los riesgos de ambos activos son distintos, $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ y en el último consideraremos el caso en que son iguales, $0 < \sigma_1 = \sigma_2$.

- Caso 1.1: $-1 \le \rho < \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$ **y** $0 < \sigma_1 < \sigma_2$.

Como vamos a ver en este caso no hay venta en corto de ninguno de los activos ya que

$$0 < t_{\min} < 1 \iff 0 < \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} < 1 \overset{(*)}{\iff} \frac{\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} < 1$$

$$\iff \sigma_2^2 - \rho\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 \iff \rho\sigma_1\sigma_2 < \sigma_1^2 \iff$$

$$\overset{0<\sigma_1<\sigma_2}{\iff} \rho < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \underset{0<\sigma_1<\sigma_2}{\overset{-1\le\rho<1}{\iff}} -1 \le \rho < \frac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1.$$

Ecuación 5. Condición para que haya riesgo mínimo sin necesidad de hacer una venta en corto (posición corta).

Obsérvese que en el paso (*) se ha utilizado que por la Ec.2, el denominador es positivo: $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 > 0$ y, además por hipótesis $0 < \sigma_1 < \sigma_2$ y como $\rho < 1$ se cumple: $\sigma_2 - \rho\sigma_1 > 0$ y, por tanto, también el numerador es positivo: $\sigma_2(\sigma_2 - \rho\sigma_1) > 0.$

Así, $w_1^* = t_{\min} \in]0,1[$ y $w_2^* = 1 - t_{\min} \in]0,1[$, y no hay venta en corto. Además, dado que

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho^2)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho} < \sigma_1^2 = \min\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\} \iff \sigma_2^2(1-\rho^2) < \sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\rho \iff$$

$$\iff 0 < \sigma_1^2 + \rho^2\sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2 = (\sigma_1 - \rho\sigma_2)^2 \iff \frac{\sigma_1}{\sigma_2} \ne \rho,$$

el riesgo mínimo cumple que es menor que los riesgos de cada activo

$$\sigma_{\min}^2 < \min\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\right\}.$$

Además el riesgo mínimo es nulo, $\sigma_{\min}^2 = 0$, si la correlación entre ambos activos es perfecta y negativa $\rho = -1$.

- Caso 1.2: $-1 \leq \rho = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$ **y** $0 < \sigma_1 < \sigma_2$.

En este caso únicamente se adquiere el activo a_1 para componer la cartera. Ya que si observamos la Ec.5

$$t_{\min} = 1 \Leftrightarrow \rho = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

Por lo tanto, $w_1^* = t_{\min} = 1$ y $w_2^* = 1 - t_{\min} = 0$. En este caso la cartera estaría compuesta únicamente por el activo a_1. El riesgo mínimo se obtiene sustituyendo $\rho = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}$ en la Ec.4:

$$\sigma_{\min}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1 - \dfrac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_1\sigma_2\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2}} = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2 - \sigma_1^4}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2} = \sigma_1^2 = \min\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\right\}.$$

- Caso 1.3: $-1 < \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho < 1$ **y** $0 < \sigma_1 < \sigma_2$.

A partir de la Ec.5 vemos que

$$t_{\min} > 1 \Leftrightarrow \rho > \frac{\sigma_1}{\sigma_2}.$$

En consecuencia, $w_1^* = t_{\min} > 1$ y $w_2^* = 1 - t_{\min} < 0$. Y así la cartera se forma vendiendo en corto el activo a_2. Con respecto al riesgo mínimo, este caso es análogo al Caso 1.1. y así también se consigue un menor riesgo global:

$$\sigma_{\min}^2 < \min\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\right\}.$$

- Caso 1.4: $-1 \leq \rho < 1$ **y** $0 < \sigma_1 = \sigma_2$.

En este contexto obsérvese a partir de la Ec.3 que

$$t_{\min} = \frac{\sigma_2^2(1-\rho)}{2\sigma_2^2(1-\rho)} = \frac{1}{2} > 0.$$

Así la composición de la cartera viene dada por: $w_1^* = t_{\min} = \dfrac{1}{2}$ y $w_2^* = 1 - t_{\min} = \dfrac{1}{2}$, siendo el riesgo mínimo

$$\sigma_{\min}^2 = \begin{cases} \dfrac{1+\rho}{2}\sigma_2^2 & \text{si} \quad -1<\rho<1, \\ 0 & \text{si} \quad \rho=-1. \end{cases}$$

Por lo tanto la cartera se forma a partes iguales entre ambos activos. Además, el riesgo mínimo de la cartera es nulo si la correlación entre ambos activos es perfecta y negativa $\rho=-1$. A partir de la expresión anterior de $\sigma_{\min}^2$ anterior es claro que se cumple

$$\sigma_{\min}^2 < \min\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\right\}.$$

En resumen, supongamos que tenemos dos activos a_1 y a_2 con riesgos $\sigma_1>0$ y $\sigma_2>0$, respectivamente, de modo que $0<\sigma_1\le\sigma_2$ y que su coeficiente de correlación ρ cumple $-1\le\rho<1$, es decir, que los activos no tienen correlación positiva perfecta ($\rho=+1$), entonces se puede minimizar el riesgo global de la cartera sin realizar venta en corto si se cumple

$$\rho<\frac{\sigma_1}{\sigma_2},$$

y la cartera se compone de $w_1^*=t_{\min}$ del activo a_1 y $w_2^*=1-t_{\min}$ del activo a_2, siendo

$$w_1^*=\frac{\sigma_2(\sigma_2-\rho\sigma_1)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}\in\,]0,1[, \qquad w_2^*=\frac{\sigma_1(\sigma_1-\rho\sigma_2)}{\sigma_1^2+\sigma_2^2-2\rho\sigma_1\sigma_2}\in\,]0,1[.$$

En particular, si $0<\sigma_1=\sigma_2$ y $-1\le\rho<1$, la cartera debe estar compuesta a proporciones iguales por ambos activos, a_1 y a_2, pues en ese caso

$$w_1^*=w_2^*=\frac{1}{2}.$$

El riesgo mínimo puede llegar a ser nulo en el caso (poco probable) de que la correlación entre los dos activos que forman la cartera sea perfecta y negativa ($\rho=-1$).

4.2 Caso 2: $\rho=1$.

Este caso se analizó en el trabajo [1] (véase Caso 2 de la referencia [1]), pero lo incluimos aquí para sintetizar todos los resultados. Al igual que en el Caso 1 vamos a distinguir cuando $0<\sigma_1<\sigma_2$ y $0<\sigma_1=\sigma_2$.

- **Caso 2.1:** $0<\sigma_1<\sigma_2$.

Obsérvese a partir de las Ecs.3-4 de [1] que se consigue minimizar el riesgo de la cartera a cero con la venta en corto del activo a_2, pues $w_1^*=t_{\min}>1$ (véase Ec.6 de [1]).

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

$$t_{\min} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > 1, \qquad \sigma_{\min}^2 = 0, \qquad \text{si } \sigma_1 < \sigma_2.$$

Ecuación 6. Riesgo mínimo si $\rho = 1$, con venta en corto del activo a_2.

- **Caso 2.2:** $0 < \sigma_1 = \sigma_2$

Teniendo en cuenta la Ec.1 de [1], dicho caso conduce a que $\sigma_{\min}^2 = \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ y cualquier valor de $w_1^* = t$ minimizará el riesgo. Para evitar la venta en corto se puede tomar $t \in \left]0,1\right[$.

Vamos a resumir los principales resultados establecidos a lo largo de estas páginas. Supongamos la cartera descrita en la Tabla 1, de modo que $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$ y sea $\rho = \rho_{1,2} \in \left[-1,1\right]$ su correlación estadística.

Activos Cartera	Retorno esperado activos	Riesgo activos	Peso activos	Correlación activos
a_1	μ_1	$\sigma_1^2 > 0$	$w_1 = t > 0$	$\rho \in \left[-1,1\right]$
a_2	μ_2	$\sigma_2^2 > 0$	$w_2 = 1 - t$	

Tabla 1. Características de los activos de la cartera.

Si $t_{\min} = w_1^* > 0$ denota el peso del activo a_1 en la composición de la cartera que minimiza su riesgo, entonces se cumple

$$w_1^* = t_{\min} = \frac{\sigma_2\left(\sigma_2 - \rho\sigma_1\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} > 0, \quad w_2^* = 1 - t_{\min} = \frac{\sigma_1\left(\sigma_1 - \rho\sigma_2\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}, \quad \text{si} \quad 0 < \sigma_1 \le \sigma_2 \quad \text{y} \quad -1 \le \rho < 1.$$

y en ese caso, los valores asociados del retorno esperado y del riesgo (mínimo) de la cartera son

$$\mu_{\min} = t_{\min}\mu_1 + \left(1 - t_{\min}\right)\mu_2, \qquad \sigma_{\min}^2 = \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2\left(1-\rho^2\right)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2} > 0,$$

respectivamente. Además,

1. Si $-1 \le \rho < \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} \le 1,$ y $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$, ó equivalentemente, $0 < t_{\min} < 1$, entonces el mínimo riesgo de la cartera se puede alcanzar sin adoptar una posición corta (venta en corto) de sus dos activos y

$$\sigma_{\min}^2 < \min\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\right\},$$

pero

$$\sigma^2_{\min} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \rho = -1.$$

2. Si $-1 \le \rho = \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1,$ y $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, equivale a $t_{\min} = 1$, en cuyo caso

$$\sigma^2_{\min} = \min\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\right\},$$

lo cual se alcanza adquiriendo únicamente el activo a_1.

3. Si $\dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} < \rho < 1,$ y $0 < \sigma_1 < \sigma_2$, ó equivalentemente, $t_{\min} > 1$ implica una posición corta del activo a_2 para minimizar el riesgo. En ese caso

$$\sigma^2_{\min} < \min\left\{\sigma_1^2, \sigma_2^2\right\}.$$

4. Si $\rho = 1$ y $\sigma_1 < \sigma_2$, entonces

$$\sigma^2_{\min} = 0,$$

es decir, se minimiza el riesgo de la cartera a cero. Además,

$$w_1^* = t_{\min} = \frac{\sigma_2}{\sigma_2 - \sigma_1} > 1, \qquad w_2^* = 1 - t_{\min} = -\frac{\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} < 0,$$

por lo tanto hay venta en corto del activo a_2.

5. Si $\rho = 1$ y $0 < \sigma_1 = \sigma_2$, entonces todos los pesos de los activos dan el mismo (y por tanto mínimo) riesgo

$$\sigma^2_{\min} = \sigma_1^2 = \sigma_2^2.$$

Se puede tomar por tanto:

$$t_{\min} \in \left]0,1\right[\text{ arbitrario,}$$

para evitar la venta en corto del activo a_2 al formar la cartera.

5 Cierre

Del estudio realizado se concluye que para una cartera formada por dos activos financieros a_1 y a_2 de riesgos individuales σ_1^2 y σ_2^2, respectivamente, asumiendo que hay una correlación $\rho_{1,2} = \rho$ entre ellos, solo en el caso en que $-1 \le \rho < \dfrac{\sigma_1}{\sigma_2} < 1$ y $0 < \sigma_1 \le \sigma_2$ se minimiza el riesgo global de la cartera (siendo este riesgo menor que los riesgos individuales, σ_1^2 y σ_2^2) sin necesidad de tener que efectuar una venta en corto (del activo con más riesgo, a_2). El riesgo de la cartera puede llegar a ser nulo en el caso (muy poco probable en la práctica) en que $\rho = -1$. El riesgo de la cartera se puede hacer mínimo (e incluso nulo) también en otros casos, los cuales en la práctica son muy poco probables.

6 Bibliografía

[1] Hull, J.C.: "Introducción a los Mercados de Futuros y Opciones", Ed. Pearson, 4ª Edición, 2009.

En este libro se proporciona una visión global de los principales conceptos sobre finanzas utilizando un lenguaje asequible. Es un texto valioso a nivel introductorio que motiva al lector a adentrarse en el mundo financiero desde una perspectiva rigurosa.

[2] Baxter, M. y Rennie, A.: "Financial Calculus: An Introduction to Derivative Pricing", Cambridge University Press, 1996.

Este texto proporciona una visión rigurosa de las matemáticas que se requieren para abordar problemas financieros tales como la cobertura del riesgo ante la inversión en carteras financieras compuestas por activos subyacentes y sus derivados.

[3] Etheridge, A.: "A Course in Financial Calculus", Cambridge University Press, 2002.

Un libro riguroso donde se estudia la modelización de problemas financieros con activos con riesgo partiendo de ejemplos sencillos ilustrativos hasta los modelos más complejos.

[4] Wilmott, P. y Howison, S. y Dewynne, J.: "The Mathematics of Financial Derivatives: A Student Introduction", Cambridge University Press, 1995.

Este excelente texto presenta de forma muy elegante y asequible una introducción a los modelos financieros con riesgo haciendo uso de herramientas matemáticas para su análisis. Quizás uno de los mejores libros de referencia para el tratamiento de los problemas tratados en este trabajo docente.