

Càlcul de coordenades geogràfiques a partir de les estrelles: una proposta didàctica entre les matemàtiques i l'astronomia
Use of stars for calculus of geographic coordinates : a didactic proposal between mathematics and astronomy

Irene Ferrando Palomares
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
Irene.Ferrando@uv.es

María Luisa Pedro Ferrer
UNIVERSITAT DE VALÈNCIA
mapefe8@alumni.uv.es

Abstract

Aquest treball presenta una proposta didàctica per als alumnes de Primer de Batxillerat que mostra la relació de les matemàtiques amb l'astronomia, concretament amb el càlcul de les dues coordenades geogràfiques: latitud i longitud. La metodologia emprada en la proposta fomenta el treball autònom dels alumnes mitjançant l'ús d'aplicacions digitals interactives i materials manipulables, els quals permeten als alumnes treballar amb més facilitat amb conceptes de geometria tridimensional que, d'altra forma, resultarien abstractes per a ells. La proposta es fonamenta en un problema clàssic: l'obtenció de la posició geogràfica exacta d'un punt qualsevol sobre la superfície terrestre.

This paper presents a didactical proposal for 11th grade students. The purpose of the activities is to show the relationship between astronomy and mathematics, specifically with the calculation of both geographic coordinates: latitude and longitude. The methodology used encourages independent work of students by using interactive digital applications and manipulative materials. These resources allow students to work more easily with three-dimensional geometry concepts that, otherwise, are abstract for them. The proposal is based on a classic problem: find the exact geographic position of any point on the Earth.

Keywords: Geographical coordinates; Interactive digital applications
Paraules clau: Coordenades geogràfiques; Aplicacions digitals interactives

1. Introducció

La matemàtica és una ciència que destaca, entre altres coses, per la seua relació amb altres ciències. En aquest sentit, coincidim amb Rodríguez (2011) quan assegura que

S'ha d'oferir a l'estudiant un apropament a altres ciències des de la matemàtica i viceversa, percebent que tots els camps del saber estan relacionats d'alguna manera; mostrar la profunda transdisciplinarietat de les ciències. (p.36)

Aquesta relació s'ha anat fomentant al llarg de les distintes lleis educatives. En la LOE, per exemple, es destaca la relació de les matemàtiques amb el món físic,

El desenvolupament del pensament matemàtic contribueix a la competència en el coneixement i la interacció amb el món físic perquè fa possible una comprensió més bona i una descripció més ajustada de l'entorn. En primer lloc, amb el desenvolupament de la visualització (concepció espacial), les xiquetes i els xiquets milloren la seua capacitat per a fer construccions i manipular mentalment figures en el pla i en l'espai, la qual cosa els serà de gran utilitat en l'ús de mapes, la planificació de rutes, el disseny de plans, l'elaboració de dibuixos, etc. En segon lloc, a través de la mesura s'aconsegueix un millor coneixement de la realitat i s'augmenten les possibilitats d'interactuar-hi i de transmetre informacions cada vegada més precises sobre aspectes quantificables de l'entorn. Finalment, la destresa en la utilització de representacions gràfiques per a interpretar la informació aporta una ferramenta molt valuosa per a conèixer i analitzar millor la realitat. (Diari Oficial de la Generalitat Valenciana, 2007, p.30389)

No obstant això, encara que cada vegada pareix que es fomenta més la relació entre les distintes ciències i les matemàtiques, segons alguns autors, no hi ha fins el moment, suficients connexions entre les competències matemàtiques i les d'altres ciències (Íñiguez Porrás, 2015, p.118).

L'objectiu d'aquest treball és presentar una proposta didàctica que fomenti en l'alumnat de Primer de Batxillerat la relació entre les matemàtiques i l'astronomia a partir d'un problema històric molt important: el càlcul de la latitud i la longitud de qualsevol punt de la Terra. A més, aquesta proposta es va implementar en abril de 2015 a les aules de primer de Batxillerat de dues modalitats, Ciències i Ciències Socials, de l'IES Matemàtic Vicent Caselles Costa ubicat en Gata de Gorgos, un municipi de la Marina Alta, província d'Alacant. S'ha escollit aquest curs perquè considerem que per a la realització del càlcul de les coordenades amb detall es requereix que els alumnes tinguen nocions bàsiques de trigonometria i una visió espacial una mica desenvolupada. Com veurem posteriorment, en la part dedicada a la descripció del disseny, hem intentat que la proposta permeta treballar als alumnes de forma col·laborativa mitjançant materials manipulables i aplicacions digitals interactives per a arribar a la recerca de la solució del problema i està dissenyada perquè puguen desenvolupar-la amb la major autonomia possible. L'alumnat de primer de Batxillerat encara té molt poques nocions de la geometria tridimensional, tal i com es reflexa en el temari de Batxillerat de la LOE publicat en el Diari Oficial de la Generalitat Valenciana 2008, per això farem ús d'un material manipulable i d'aplicacions digitals interactives, que explicarem amb més detall posteriorment, per a facilitar-los aquesta visualització. Com que pràcticament aquests conceptes són nous per als alumnes, no es formalitzaran matemàticament. Per això, com assenyalen Vinner (1991) i Van Hiele (1986) és rellevant la primera imatge mental que generen els alumnes sobre aquests. D'ací la importància de les aplicacions i dels materials manipulables, per tal que els alumnes generen una imatge mental correcta i completa.

Els continguts desenvolupats en la proposta combinen la introducció de nous conceptes d'astronomia junt amb eines matemàtiques, que exposarem més detalladament en la següent secció la qual es centra amb el disseny de la proposta. Respecte als conceptes d'astronomia, només s'introdueixen aquells que són rellevants i necessaris per al càlcul de la latitud i de la longitud; càlcul que es realitzarà a partir de les estrelles.

2. Disseny de la proposta

El punt de partida de la proposta és un problema històric que va estar diversos segles sense resoldre's: l'obtenció la posició geogràfica exacta d'un punt qualsevol sobre la superfície terrestre. És relativament senzill calcular la latitud, però la longitud va ser un vertader repte. Trobar aquesta segona coordenada va ser un dels problemes científics més importants de la història. Al llarg del segle XVIII moltes vides i riqueses es perdien en naufragis dins la mar per no saber la seua posició exacta, sabien la latitud del punt on es trobaven però no la longitud. Va ser un problema tan important que, fins i tot, el parlament britànic va publicar un decret en el qual s'oferien 20.000 lliures a qui trobara la solució.

Per tal que els alumnes puguin entendre el plantejament del problema, la proposta s'inicia amb la introducció als sistemes de referència. Es dona la definició d'un sistema de referència com un origen i un sistema de coordenades. Així, partint de sistemes de referència coneguts pels alumnes com són les coordenades cartesianes o, inclús, les coordenades polars, es presenten les coordenades geogràfiques. Per a la modelització del problema és necessari introduir també diferents conceptes geomètrics com per exemple la projecció estereogràfica d'un punt, la identificació representació del pla de l'horitzó, pla tangent a una esfera, o l'altura d'un astre, angle que forma el pla de l'horitzó amb l'astre. Aquests dos últims conceptes són els que s'empren per a obtenir la latitud d'un punt, la qual s'obté a partir de l'altura de l'estrella polar. En efecte, aquesta estrella, que ja utilitzaven els antics navegants per a orientar-se per la nit ens permet calcular la latitud de qualsevol punt. En relació a aquest concepte s'introdueix la construcció i la utilització d'un quadrant, un instrument de mesura de angles simple que permet calcular, fàcilment, la latitud d'un punt. L'última part de la proposta pretén introduir als alumnes la relació entre el càlcul de la longitud i el trànsit de les estrelles, la qual s'obté a partir de la interpretació d'una gràfica del trànsit de les estrelles per a un port base.

2.1. Continguts

En la unitat didàctica s'empren molts conceptes d'astronomia que seran nous per a l'alumnat, ara bé, molts d'ells estan lligats a una definició matemàtica; com per exemple el pla de l'horitzó o l'altura d'un astre, que hem comentat anteriorment. A banda d'aquests nous conceptes introduïts, també es fan ús de diversos conceptes matemàtics. Entre tots ells destaquem:

- Treballar en un nou sistema de coordenades: Les coordenades geogràfiques.
- Introducció a les projeccions: Projecció estereogràfica.
- Raons trigonomètriques i relacions d'angles.
- Interpretació de gràfiques.
- Càlcul d'interseccions: intersecció entre una esfera i un plànol.
- Identificació de gràfiques i llocs geomètrics: rectes i circumferències.
- Representació d'una recta tangent a una circumferència i d'un pla tangent a una esfera.

- Definició de l'angle que formen un pla i una recta.

Com ja hem assenyalat en la introducció, no tots els conceptes es formalitzaran matemàticament. Els que no es formalitzaran seran els relacionats amb la geometria tridimensional, ja que no corresponen al currículum del curs de primer de Batxillerat.

Alguns dels continguts a desenvolupar en el treball es troben reflectits en la publicació del 20 de juliol del 2007 en el Diari Oficial de la Generalitat Valenciana en la LOE. Entre ells, destaquem els següents:

- Fases en la resolució de problemes: formulació, elaboració de conjectures, disseny i execució de l'estratègia d'actuació, interpretació dels possibles resultats. (1ºBatxillerat. Bloc 1. Resolució de problemes, p.71478)
- Utilització de les ferramentes algebraiques en la resolució de problemes. (1ºBatxillerat. Bloc 2. Aritmètica i Àlgebra, p.71478)
- Resolució i interpretació gràfica d'equacions i inequacions de primer i segon grau i d'equacions, exponencials i logarítmiques senzilles. (1ºBatxillerat. Bloc 2. Aritmètica i Àlgebra, p.71478)
- Ampliació del concepte d'angle. Raons trigonomètriques d'un angle qualsevol. El radiant. Resolució de triangles rectangles i no rectangles. Identitats i equacions trigonomètriques. (1ºBatxillerat. Bloc 3. Geometria, p.71478)
- Sistemes de referència en el pla. Coordenades cartesianes. (1ºBatxillerat. Bloc 3. Geometria, p.71478)
- Llocs geomètrics del pla. Còniques. Equacions i problemes d'Incidència. (1ºBatxillerat. Bloc 3. Geometria, p.71478)
- Funcions reals de variable real. Classificació i característiques bàsiques de les funcions elementals: Funcions lineals, quadràtiques, polinòmiques, racionals, valor absolut, part sencera, exponencials, logarítmiques, circulars i circulars inverses. (1ºBatxillerat. Bloc 4. Anàlisi, p.71478)
- Representació gràfica de funcions senzilles expressades de manera analítica o gràfica, a partir de l'anàlisi de les seues característiques globals i locals, que descriuen en algun cas situacions reals. (1ºBatxillerat. Bloc 4. Anàlisi, p.71478)

2.2. Materials i Recursos

Per a desenvolupar la unitat es dona als alumnes un dossier amb els continguts i les activitats. També, per tal de facilitar-los la visualització, s'han elaborat distintes aplicacions informàtiques i un material manipulable. Amb aquest material de reforç, es pretén que els alumnes tinguin un primer contacte complet amb la geometria tridimensional i que experimentant siguin capaços de construir els conceptes correctament i elaborar les respostes a les activitats. La visualització completa és fonamental en el primer contacte amb els conceptes per formar una imatge mental correcta d'aquests la qual, amb el pas del temps, anirà millorant els aspectes matemàtics que la defineixen. Totes les aplicacions digitals interactives, excepte una d'elles que s'extrau d'internet, han sigut elaborades amb el CABRI 3D exclusivament per al desenvolupament d'aquesta unitat didàctica, per tant serà necessari que els alumnes disposen d'aquest programa per a l'execució de les aplicacions. També, el material manipulable s'ha creat amb aquesta finalitat. A continuació explicarem detalladament la finalitat de cadascuna d'elles.

- **Aplicació dels Meridians i Paral·lels Terrestres:** donat un punt qualsevol de la Terra ens indica el paral·lel i el meridià del lloc, la latitud i la longitud d'aquest punt. També apareix la mesura de l'equador i del meridià de Greenwich i dels distints paral·lels i meridians que es dibuixen del punt, que indiquem en centímetres. Açò permetrà veure als alumnes si la mesura dels paral·lels i dels meridians es manté constant o no. L'alumne només ha de moure el punt roig de l'aplicació per veure el que s'ha explicat en el punt de la Terra que vulga.

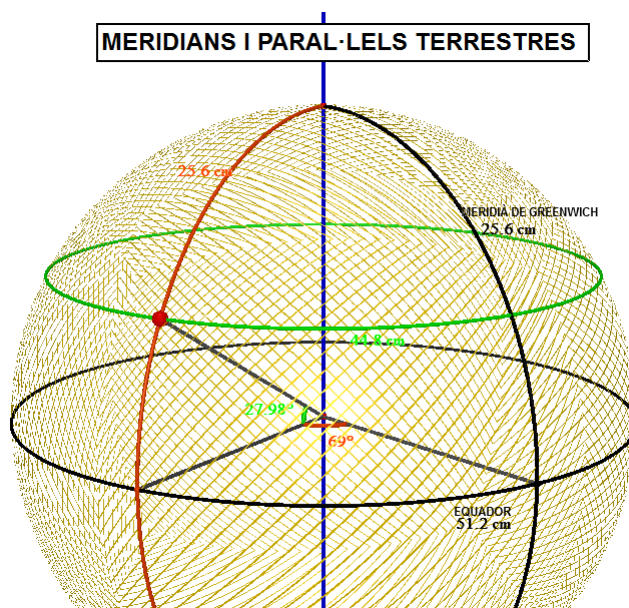


Figura 1: Aplicació Meridians i Paral·lels Terrestres

- **Aplicació de la Intersecció Esfera Plànel:** Permet visualitzar quina és la intersecció entre una esfera i un plànel. En aquesta aplicació l'alumne només ha de moure els dos punts rojos que apareixen si vol canviar el plànel de posició i observar les distintes interseccions que es generen, que venen marcades per la línia fúcsia.

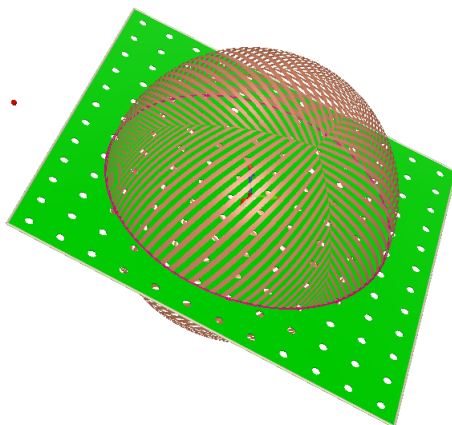


Figura 2: Aplicació Intersecció Esfera Plànel

- **Aplicació del Pla de l'Horitzó:** Permet visualitzar a l'alumne quin és el pla de l'horitzó en un punt qualsevol de la superfície terrestre, és a dir, quin és el pla tangent a l'esfera en un punt. L'alumne només haurà de moure el punt roig que es marca sobre l'esfera i l'aplicació dibuixa el pla tangent en cadascun dels casos.

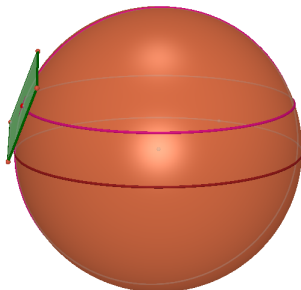


Figura 3: Aplicació Pla de l'Horitzó

- **Aplicació de les Projeccions de Paral·lels i Meridians en el Plànol:** Permet visualitzar a l'alumne quina és la projecció estereogràfica dels paral·lels i dels meridians d'un punt qualsevol de la Terra. L'alumne només haurà de col·locar el punt blau on vulga i l'aplicació dibuixa directament el paral·lel i el meridià del punt; quan es dóna al *PLAY*, l'aplicació dibuixa la projecció d'aquest paral·lel i meridià sobre el plànol situat en el punt inferior de l'esfera, tal i com es realitza en la projecció estereogràfica.

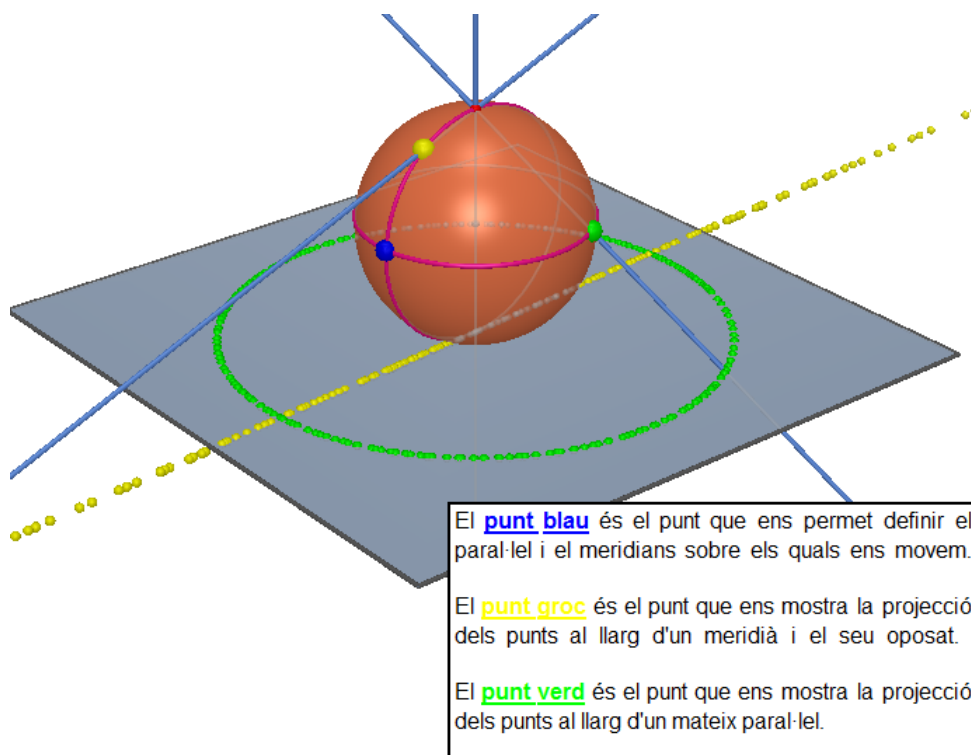


Figura 4: Aplicació Projeccions de Paral·lels i Meridians en el Plànol

- **Aplicació del Simulador de l'Esfera Celeste:** Aquesta aplicació és l'única que no ha sigut elaborada amb el CABRI 3D, s'ha extret de la pàgina d'Educació d'Astronomia de la Universitat de Nebraska-Lincoln¹. S'empra per a observar el moviment aparent de les estrelles. Ens permet col·locar-nos en un punt qualsevol de la Terra i tenir una visió tant global com local del moviment aparent de les estrelles.

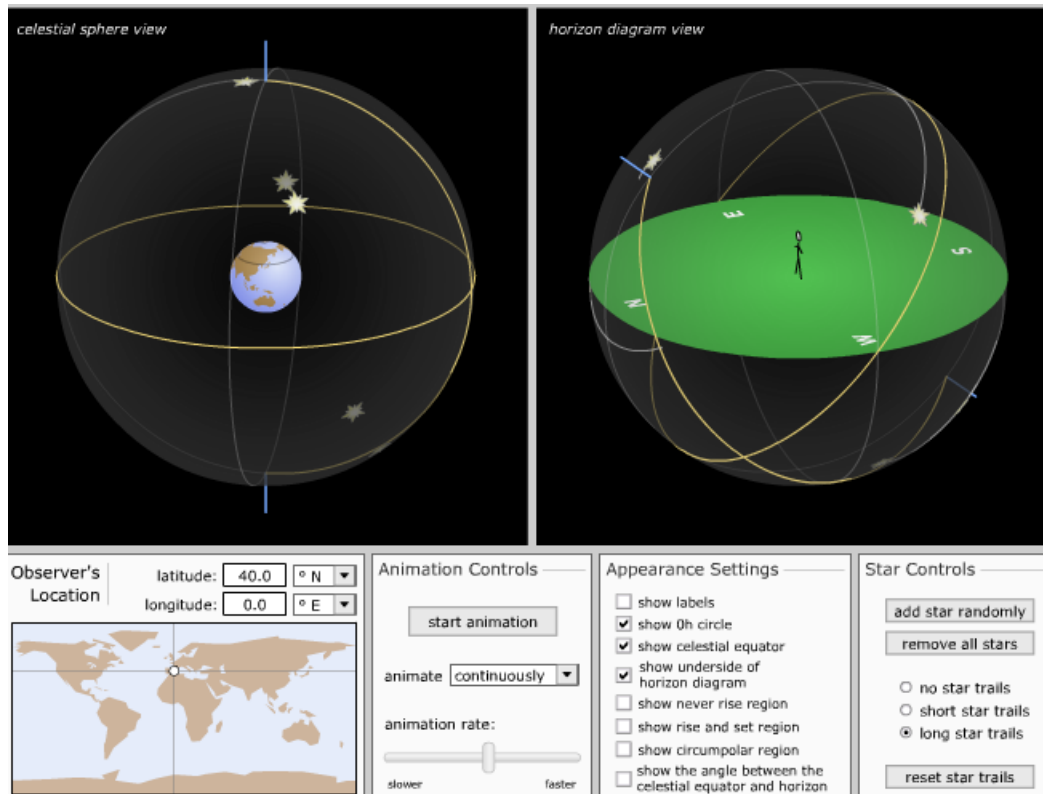


Figura 5: Aplicació Simulador de l'Esfera Celeste

- **Material manipulable Intersecció Esfera Plànol:** Per veure la intersecció de l'esfera amb un plànol s'ha partit una pilota per la meitat i s'ha col·locat una cartolina que passa pel punt del centre. Amb açò, els alumnes observaran que tallant l'esfera amb qualsevol pla, que passe pel seu centre, la intersecció sempre és la mateixa.

Tal i com assenyala Gutiérrez Rodríguez (2006), un dels problemes en l'ensenyament de la geometria és no tenir la estructura física adequada. Aquest material és complementari junt amb l'aplicació de la Intersecció de l'Esfera amb el Plànol, ja que es tenen dues visions distintes, una on l'esfera és opaca i l'altra on és transparent. Aquestes propietats, que en un principi poden ser intrascendents, ajudaran a l'alumnat a millorar la visualització i a formar una millor imatge mental del concepte.

- **Material manipulable Pla de l'Horitzó:** Per a veure el plànol tangent en un punt i l'orientació Nord-Sud, Est-Oest, s'han elaborat distints plànols amb cartró i ninots, com

¹L'aplicació es troba en <http://astro.unl.edu>, la pàgina d'Educació d'Astronomia de la Universitat de Nebraska-Lincoln.

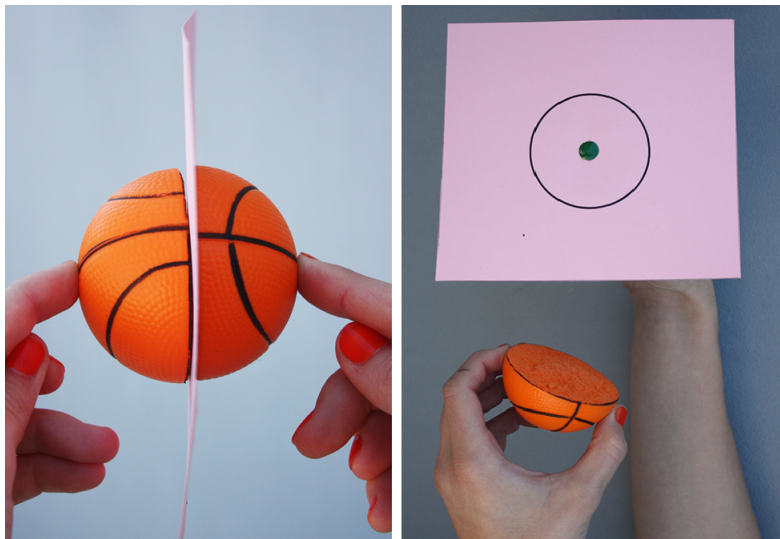


Figura 6: Material Manipulable Intersecció Esfera plànol

es mostra en la figura. Així cada alumne col·locant-lo en el lloc adient podrà veure com dibuixar el plànol tangent en qualsevol punt de la Terra.



- **Material manipulable Quadrant:** Aquest és un quadrant, el qual permet que els alumnes observen com es mesura l'altura d'una estrella.

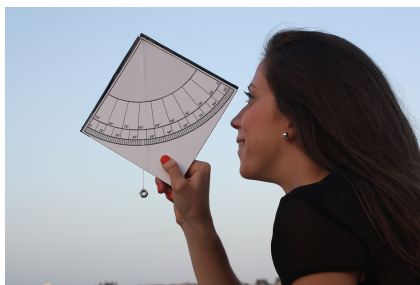


Figura 7: Material Manipulable Quadrant

3. Implementació de la proposta

El desenvolupament de la part pràctica del treball s'ha planificat per dur-se a terme en quatre sessions d'una hora cadascuna. Respecte a la metodologia que proposem coincidim amb Fortea Bagán (2009) en que aquesta és l'estratègia d'ensenyament amb base científica que el docent proposa en la seua aula perquè els estudiants adquirisquen determinats aprenentatges. També assenyalava que no s'ha demostrat que una metodologia siga millor que una altra i que l'eficàcia d'aquestes depèn de molts factors com són: els resultats d'aprenentatge, característiques dels estudiants, característiques del professor, característiques de la matèria a ensenyar i de les condicions físiques i mentals. La majoria d'ells incontrolables o no modificables, per tant no hi ha un mètode ideal. Concloem, per tant, que la millor metodologia, és en realitat, una combinació de metodologies. Per això, per tal de millorar l'aprenentatge, en la unitat didàctica que proposem s'empren quatre tipus distints de metodologies:

- El primer tipus és la metodologia basada en exposicions magistrals, en la qual els alumnes han d'atendre per a adquirir certs coneixements que hauran d'emprar per realitzar les activitats.
- El segon tipus es basa en un aprenentatge individual. Es duu a terme quan contesten activitats individualment. Aquestes són activitats senzilles i són pràcticament resultat de l'aplicació de les noves definicions adquirides. En aquest tipus de treball es fomenta el treball autònom perquè cadascú empre el temps necessari, sempre dins d'un límit establert, per comprendre els conceptes.
- El tercer tipus està orientat al treball en grup. Són activitats més complexes, les quals requereixen més temps per a pensar i reflexionar. Treballant en grup s'aconsegueix la complementació, la discussió i l'aportació de diferents punts de vista entre els membres del grup. Aquesta forma de treball fomenta la cooperació i l'intercanvi d'impressions entre l'alumnat.
- L'últim tipus es realitza mitjançant l'experimentació dels distints materials i recursos perquè amb l'ús d'ells els alumnes puguen elaborar respostes a distintes activitats. Aquest tipus d'aprenentatge s'empra sobretot en la part de visualització en tres dimensions. Aquesta última metodologia s'inclou dins del segon tipus i del tercer dependent de les activitats plantejades per a resoldre.

Quasi totes les metodologies es desenvolupen en totes les sessions. Segons l'activitat a realitzar es suggereix als alumnes que empren una o altra, buscant així obtindre el màxim rendiment en cadascuna d'elles. Com que en quasi totes les sessions s'empren materials i recursos, que són aplicacions d'ordinador, aquestes es realitzaran en l'aula d'informàtica. Les activitats en grup es realitzen en parelles o en tríos. A continuació desenvoluparem la planificació i l'organització de cadascuna de les sessions.

3.1. Primera sessió

En aquesta primera sessió l'objectiu és explicar les coordenades geogràfiques, plantejar el problema que es vol resoldre i explicar la projecció estereogràfica. Es fan ús dels següents materials i recursos:

- * Aplicació dels Meridians i Paral·lels Terrestres.
- * Aplicació de la Intersecció de l'esfera i el Plànol.

- * Aplicació de la Projecció dels Paral·lels i dels Meridians en el Plànol.
- * Material manipulable per a veure la intersecció d'una esfera amb un plànol.

Les coordenades geogràfiques ja han sigut estudiades pels alumnes en cursos anteriors, però caldrà fer constància de la seua importància al llarg del treball, ja que en tot moment estan presents. Per això, no només es dona la definició, sinó que es proposen dues activitats individuals perquè els alumnes assenten bé els conceptes, aquestes són les activitats 1 i 2.

A.1

- a) Quina és la latitud de tots els punts de l'Equador?
- b) Quina és la latitud del Pol Nord?
- c) Quina és la latitud del Pol Sud?

A.2

- a) Quina cosa en comú tenen tots els punts situats sobre un mateix meridià?
- b) Quina cosa tenen en comú tots els punts situats sobre un mateix paral·lel?

Tot seguit es plantejarà el problema que es pretén resoldre, el qual serà l'objectiu de tota la unitat.

Saber la posició geogràfica exacta d'un punt sobre la superfície de la Terra ha sigut de gran importància en les expedicions i exploracions tan terrestres com marines. És relativament senzill calcular una de les dues coordenades, però l'altra va ser un vertader repte. Trobar aquesta segona coordenada va ser un dels problemes científics més importants de la història. Al llarg del segle XVIII moltes vides i riqueses es perdien en naufragis dins la mar per no saber la seua posició exacta, sabien fer el càlcul de la coordenada més senzilla del punt on es trobaven però no de l'altra.

Va ser un problema tan important que, fins i tot, el parlament britànic va publicar un decret en el qual s'oferien 20.000 lliures a aquell que trobara la solució.

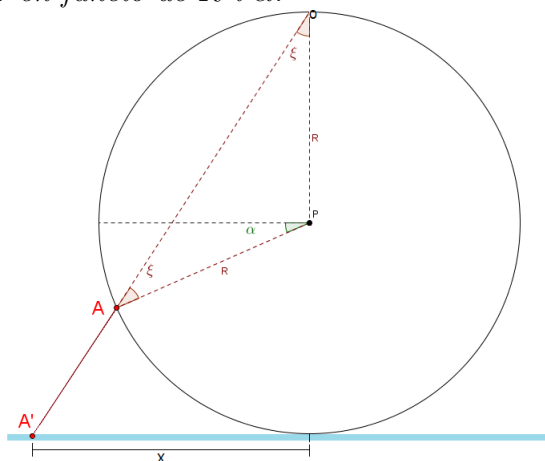
Nosaltres anem a veure com calcular la latitud i la longitud d'un punt terrestre qualsevol a partir de les estrelles. I també a contestar a la pregunta següent, quina era la coordenada més difícil de calcular? Quins instruments van ajudar a resoldre el problema?

Es planteja en aquest moment perquè els alumnes tinguen clar l'objectiu de la unitat i els genere curiositat per a la recerca de la solució.

Finalment s'expliquen les projeccions, que s'empraran en quasi totes les activitats per simplificar, és a dir, per passar de tres dimensions a dues dimensions. Veuran que és una projecció en general i s'explicarà amb més detall com es realitza la projecció estereogràfica, que és la més emprada al llarg de la unitat. Per fer-ho es proposen diverses activitats d'experimentació i de realització en grups.

A.3 Què obtindrem en tallar una esfera amb un plànol que passa pel seu centre? (Aplicació: Intersecció Esfera Plànol)

A.4 *Calcula la distància X en funció de R i α .*

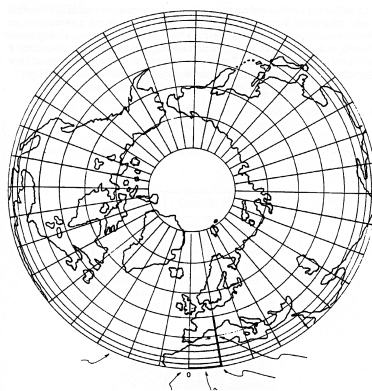


A.5 *Considerem la semirecta de les imatges anteriors que passa O i A. Aquesta ens dona la projecció del punt A, A'. Quina figura geomètica es projectaria sobre el plànol si anarem girant el punt A sobre el mateix paral·lel en el qual es troba? (Aplicació: Projecció de paral·lels i meridians en el plànol)*

A.6 *Raonant de la mateixa manera que ocorrerà si moguérem el punt A sobre el meridià on es troba? (Aplicació: Projecció de paral·lels i meridians en el plànol)*

Al final d'aquesta sessió es proposa el càlcul de la distància entre dues ciutats situades en un mateix meridià.

A.7 *Busca dues ciutats que estiguen sobre el mateix meridià. Suposant que la Terra és una esfera i que el seu radi és de 6378 Km. Quina distància, en quilòmetres, que separa aquestes dues ciutats?*



Per a seleccionar les ciutats es proporciona una projecció estereogràfica des de l'hemisferi nord de la Terra. L'activitat es realitzarà en grups. Per tal que tots els grups obtinguen el mateix resultat es fixaran dues ciutats que buscaran els alumnes en el mateix moment.

3.2. Segona sessió

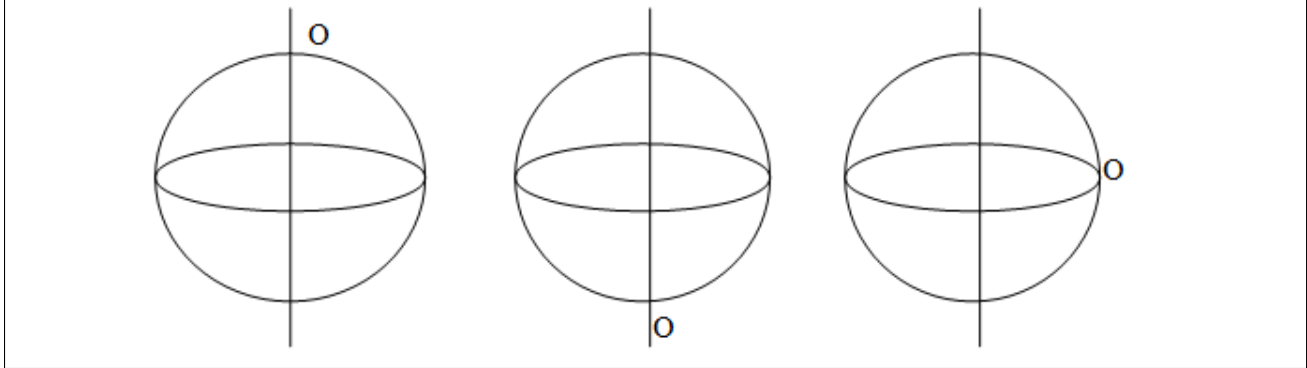
En aquesta segona sessió l'objectiu és arribar a veure com saber la latitud d'un punt qualsevol de la Terra a partir de les estrelles. Per això, prèviament s'ha d'explicar alguns conceptes. En aquesta sessió els materials i recursos que s'empren seran els següents:

- * Aplicació del Pla de l'Horitzó.

* Material manipulable per a observar el pla tangent a una esfera.

Primer es defineix la línia de l'horitzó i el pla de l'horitzó. En aquesta part els alumnes han de saber dibuixar el pla tangent a una esfera, per això es recolzen tant en l'aplicació del Pla de l'Horitzó com en material manipulable per a veure el pla tangent a una esfera. Aquest material l'empraran per resoldre l'activitat 8.

A.8 *Dibuixa un home O situat al Pol Nord, al Pol Sud i a l'Equador. Dibuixa el pla de l'horitzó en aquestos tres punts. Si cadascun d'aquestos observadors deixara caure una pedra, dibuixa la trajectòria que seguiria aquesta. (Aplicació: Pla Horitzó)*



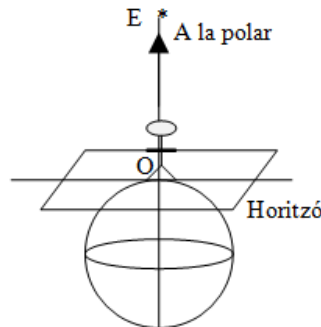
L'altre concepte important, que s'explica a continuació, és l'altura d'un astre. Per això els alumnes han d'emprar el pla de l'horitzó i saber calcular l'angle entre un pla i una recta. Es proposen una sèrie d'activitats individuals.

A.9 *Quina és l'altura del Sol quan ix per l'horitzó?*

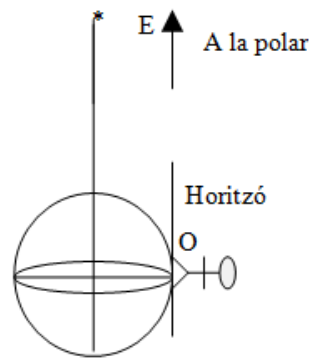
A.10 *Quina és l'altura d'una estrella quan està en el zenit (punt que està damunt del cap de l'observador)?*

A.11 *Describeu com varia l'altura del Sol al llarg d'un dia? Per fer-ho suposarem que el sol ix a les 6:00h, que culmina a les 12:00h i que s'amaga a les 18:00h (Temps universal).*

A.12 *Quina seria l'altura de la Polar per a un observador col·locat al Pol Nord?*

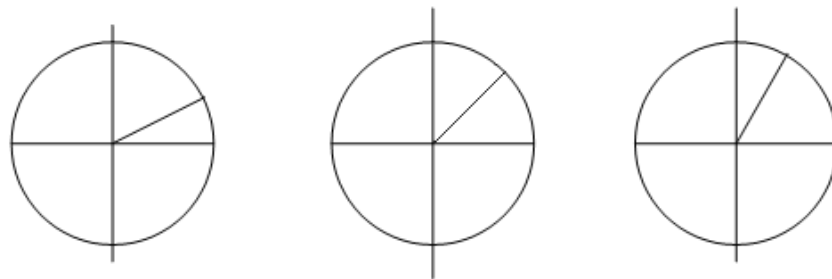


A.13 Quina seria l'altura de la Polar per a un observador col·locat a l'equador?



A continuació es proposa l'activitat 14 perquè els alumnes relacionen diverses latituds concretes donades amb l'altura de l'estrella polar.

A.14 Dibuixa l'horitzó per a un observador col·locat a una latitud Nord de 30° , 45° i 60° . Calcula l'altura de la Polar per a cada observador.



Per finalitzar es presenta l'activitat 15, que és una generalització de l'exercici anterior. Aquestes dues activitats són més laborioses i es realitzaran en grups.

A.15 Quina relació hi ha entre l'altura de la polar i la latitud de l'observador? Dibuixa-ho per a una latitud Nord α qualsevol.

Per finalitzar la sessió es fa un breu resum per a recopilar el que ja s'ha resolt del problema inicialment plantejat i el que falta per resoldre en les properes sessions. També es mostra als alumnes un instrument per mesurar l'altura d'una estrella, el quadrant, i s'explicarà com fer-lo i utilitzar-lo.

3.3. Tercera sessió

El càlcul de la longitud és més complex que el de la latitud per això, a aquesta coordenada se li dedicaran dues sessions. Els conceptes previs que s'han d'explicar per poder arribar a la solució són més difícils, i encara que s'expliquen sense entrar en massa detall, per la seua complexitat, cal que els alumnes els tinguin ben assentats per poder deduir després els càlculs de la longitud.

En aquesta sessió només es fa ús del següent material:

- * Aplicació del Simulador de l'Esfera Celeste.

Primer s'explica un concepte clau, el moviment aparent de les estrelles. Es compara el moviment

d'una estrella qualsevol per a un observador situat en la Terra amb el d'un altre situat en l'espai. Per a observar-ho millor s'emprarà l'aplicació del Simulador de l'Esfera Celeste. També s'explica el moviment de la Terra al voltant del Sol i les conseqüències que té aquest. A continuació es planteja una activitat en grup, l'activitat 16, perquè els alumnes calculen quant de temps abans ix una determinada estrella que el dia anterior.

A.16 *Demostra per què cada dia una determinada estrella ix aproximadament 4 minuts abans que el dia anterior.*

Després es dona una gràfica que estableix la relació entre el càlcul de la longitud i el trànsit de les estrelles per a unes coordenades geogràfiques concretes. Cal saber interpretar-la, per això s'explica i els alumnes realitzaran l'activitat 17 individualment.

A.17 *Quina és la màxima altura que assoleix l'estrella Vega? A quina hora culminarà el 9 d'agost? I el 9 de setembre?*

Finalment es plantegen dues activitats per a saber que ocorre, si se sap la posició d'un observador i l'hora del trànsit d'una determinada estrella per a aquesta posició, per a un observador situat a l'Est i a l'Oest d'aquest. L'activitat 18 es realitza en grups i l'activitat 19 és realitza individualment amb l'ajuda de l'aplicació del Simulador de l'Esfera Celeste.

A.18 *Si sabem que el dia en la Terra dura 24 hores i que la Terra dona una volta a sí mateixa en un dia, quin angle girarà en una hora? I en un minut? I en un segon?*

A.19 *Suposem que des d'una longitud de 0° i una latitud Nord qualsevol una estrella transita a les 2:00A.M. A quina hora s'haurà produït el trànsit o transitarà aquesta estrella per a un observador situat en una longitud $15^\circ E$? I per a un situat a $15^\circ W$? (Aplicació: Simulador Esfera Celeste)*

3.4. Quarta sessió

Aquesta és la última sessió de la unitat, on es contesta a la pregunta que ens falta per resoldre del problema: com es calcula la longitud d'un punt qualsevol?

Per començar es repassa el que varen donar l'altre dia, i es pregunta als alumnes com troben que es pot realitzar el càlcul a partir de la gràfica del port base donada, aquesta pregunta es plantejarà en la classe perquè els alumnes la comenten i reflexionen.

A continuació es presenta un exemple sobre com es calcula la longitud d'un punt sabent l'hora a la qual transita una determinada estrella i l'ajuda de la gràfica del port base. Com que aparentment sembla un càlcul senzill, s'explica als alumnes que no ho va ser, degut a la imprecisió que tenien els rellotges de l'època. També es convé mostrar com es va aconseguir arribar a la solució d'aquest problema al llarg de la història, algunes explicacions al respecte es poden trobar en el llibre de Sobel (1998).

Saber l'hora exacta no era tan senzill, sobretot en les expedicions marines. Els vaixells viatjaven amb rellotges de pèndols i era molt fàcil que es desequilibraren per qualsevol moviment. Encara que en aquesta època existien rellotges mecànics, eren tan grans i tan pesats que no es podien portar dalt dels vaixells. En 1736 en un viatge a Lisboa va ser quan es va posar a prova el primer rellotge portàtil dissenyat per **John Harrison**, anomenat *H1*. Va ser tot un èxit, fins i tot va servir per a corregir alguns càlculs de la longitud que s'havien fet per mètodes astronòmics clàssics. Però no es va rendir ací, va continuar treballant i desenvolupant nous models. En 1761, el seu fill, va embarcar cap a Jamaica per provar el seu quart model, el rellotge *H4*. Després de 80 dies de navegació, només es va obtenir una impressió de 5.1 segons en el càlcul de la longitud. Es realitzaren més expedicions amb l'*H4* per posar-lo a prova, però tots els càlculs presentaven uns errors petits. A pesar del descobriment realitzat, el parlament Britànic només li va donar la meitat dels diners del premi i li van exigir que si volia tots els diners havia d'elaborar dos rellotges més. John Harrison va dissenyar un altre rellotge més precís l'anomenat *H5* mentre que un altre rellotger anomenat Kendall va realitzar una còpia de l'*H4*, el qual va ser emprat per a l'expedició del capità Cook de 3 anys al voltant de la Terra i es va demostrar que amb un rellotge adequat es podia calcular la longitud d'una manera exacta. Actualment els seus rellotges es troben en distints museus britànics.

Es plantegen dues activitats individuals, la 20 i la 21, per veure si han entès com calcular la longitud. Després l'activitat 22, de treball en grup, perquè discutisquen si es pot donar una fórmula general per calcular la latitud d'un punt qualsevol.

A.20 *Si l'estrella Vega el 3 de juny culminara a les 21:00 hores, a quina longitud ens trobaríem?*

A.21 *Suposem que el 6 de maig en la nostra posició l'estrella Spica culminara a les 21:15, quina seria la nostra longitud?*

A.22 *Expressa una fórmula general per a calcular la longitud en funció del temps.*

També es realitza l'activitat 23 en grups, perquè els alumnes se n'adonen dels vertaders problemes que suposava un error d'un segon en la mesura del temps en el càlcul de la longitud per a les distintes latituds.

A.23 *Serà el mateix una imprecisió de ± 0.5 segons en el càlcul de la longitud en l'equador que en un paral·lel molt a prop dels pols? Comprova la distància que pot suposar aquest error en l'equador i en un paral·lel situat a $60^\circ N$ sabent que el radi de la Terra $R=6380\text{km}$.*

Per acabar la unitat es fa una pregunta per fer reflexionar als alumnes sobre quina de les dues coordenades era la que va resultar difícil de calcular i sobre què impedia el càlcul exacte d'aquesta coordenada.

A.24 *Una vegada vist el càlcul de la latitud i la longitud, quina és la coordenada que va resultar més difícil de calcular? Quins instruments impediuen un càlcul adequat d'aquesta coordenada?*

4. Breu descripció del resultats de l'experimentació i conclusions

El nostre objectiu en aquest treball consisteix en descriure el disseny d'una proposta didàctica que mostre la relació que hi ha entre les matemàtiques i l'astronomia. Aquesta es va posar en pràctica durant 4 dies del mes d'abril de 2015 amb un grup de 15 alumnes de primer de Batxillerat de l'IES Matemàtic Vicent Caselles Costa situat en una localitat de la província

Alacant, Gata de Gorgos. Com que les sessions es van dur a terme en l'hora de Ciències del Món Contemporani, hi havia alumnes de dues modalitats, cinc alumnes de Ciències i la resta de Ciències Socials. Tot i això, quasi tots els alumnes havien cursat matemàtiques B en quart d'ESO, així que la majoria d'ells ja havia estudiat les raons trigonomètriques.

Les sessions es van desenvolupar en l'aula d'informàtica. No obstant això, no va ser possible que l'alumnat fera ús de les aplicacions digitals interactives elaborades en el CABRI 3D per motius tècnics. De fet, aquest programa només pot instal·lar-se en ordinadors amb sistema operatiu Windows o Mac, i a l'institut els ordinadors empenen el sistema operatiu Lliurex. Aleshores, per a resoldre aquest impediment, el que es va fer va ser projectar les aplicacions amb el canó en el moment en que eren necessàries i explicar el seu funcionament. Com els alumnes no les van poder emprar, es va elaborar el suficient material manipulable perquè tots els alumnes en disposaren a l'hora de resoldre les activitats.










Per recollir les conclusions i les reaccions de l'alumnat es va elaborar un diari de notes, on s'anotaven tots els fets que ocorrien cada dia, i també es recollien els dossiers d'activitats per tenir un millor seguiment. Finalment es va passar als alumnes un test de valoració de la proposta. L'objectiu del test era analitzar l'actitud dels estudiants quan apliquen coneiximents matemàtics a la resolució d'un problema d'una altra disciplina, en aquest cas, d'astronomia. A més, també ens interessava conèixer les seues reaccions a l'introduir en l'aula suports no habituals per a ells, tals com aplicacions digitals interactives o materials manipulables.

Pel que fa a l'actitud de l'alumnat respecte a la nostra proposta, els resultats del test mostren que a la majoria dels alumnes els ha interessat l'activitat, per tant considerem que es tracta de una activitat motivadora. No obstant això, varen comentar que no la veien com a una activitat del propi temari, ja que no estan habituats a treballar aquest tipus de propostes. D'altra banda, encara que no van poder emprar directament les aplicacions elaborades amb el CABRI 3D, l'alumnat va reaccionar bé a aquesta nova forma de treball. De fet, gairebé tots van respondre correctament als exercicis que es resolien mitjançant materials manipulables o aplicacions.

Aleshores, concloem que és important fomentar aquest tipus d'activitats, ja que donen una visió de les matemàtiques més general i els alumnes veuen la seua aplicació en la vida real. De fet, aquesta metodologia respondria a una de les preguntes que sempre realitzen els estudiants, *"I açò per a què ens aprofita? O per a què ho utilitzen?"*. D'altra banda, considerem que un dels problemes que pot implicar la implementació d'aquesta proposta és que els alumnes, encara que motivats, no li donen importància dins del desenvolupament de l'assignatura. Per tant, caldria incloure en la programació del curs més activitats d'aquest tipus per a realitzar-les regularment. Respecte a l'ús de recursos alternatius als habituals (llapis, paper i llibre de text), hem observat que, en el nostre cas, són fonamentals perquè els alumnes treballen còmodament amb continuguts de geometria tridimensional ja que afavoreixen la visualització.

Per últim, respecte al context que hem utilitzat, considerem que és molt interessant ja que el desenvolupament de les Matemàtiques s'ha realitzat, moltes vegades, mitjançant el plantejament de problemes extra matemàtics que van requerir la introducció de nous conceptes. Per exemple, Newton, per donar una descripció matemàtica del moviment dels cossos celestes (i terrestres) va haver d'introduir, a més de les lleis del moviment, el càlcul diferencial. En el nostre cas, mostrem un problema històric de gran importància que permet introduir alguns conceptes nous (relacionats amb la geometria tridimensional), a més d'aplicar conceptes matemàtics coneguts. Així, considerem que és important començar les unitats didàctiques problematitzant-les i contextualitzant-les per mostrar la necessitat d'introduir nous conceptes que ens permeten resoldre aquests problemes.

Referències

-  **Forteza Bagán, M. A. (2009).**
Curso CEFIRE 2009: Competencias en el ámbito de las ciencias experimentales. Programar y trabajar por competencias.
Castelló, Espanya: Universitat Jaume I.
-  **Gutiérrez Rodríguez, A. (2006).**
La investigación sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas, en Flores, P., Ruiz, F. i de la Fuente, M. (Eds).
Geometría para el siglo XXI, FESPM-Sociedad Andaluza de Educación Matemática Tales. (Badajoz-Cádiz).
-  **Íñiguez Porras, F. J. (2015).**
El desarrollo de competencia matemática en ciencias experimentales.
Revista Iberoamericana de la educación, 67 (2), 117–130.
-  **LOE (2007, 20 Juliol).**
Diari Oficial de la Comunitat Valenciana.
Disponible en: http://www.docv.gva.es/datos/2007/07/24/pdf/2007_9730.pdf.
-  **LOE (2008, 15 Juliol).**
Diari Oficial de la Comunitat Valenciana.
Disponible en: www.docv.gva.es/datos/2008/07/15/pdf/2008_8761.pdf.
-  **Ródiguez, M. E. (2011).**
Matemáticas y su relación con las ciencias como recurso pedagógico.
Revista Números, 27, 35–49.
-  **Sobel, D. (1995).**
Longitud (2a ed.).
Madrid: Editorial Debate.
-  **Van Hiele, P.M. (1986).**
Structure and insight. A theory of mathematics education.
Londres: Academic Press.
-  **Vinner, S. (1991).**
The role of definitions in the teaching and learning of mathematics, en Tall, D. (ed.), Advanced mathematical thinking.
Kluwer: Dordrecht, Holanda: Kluwer.