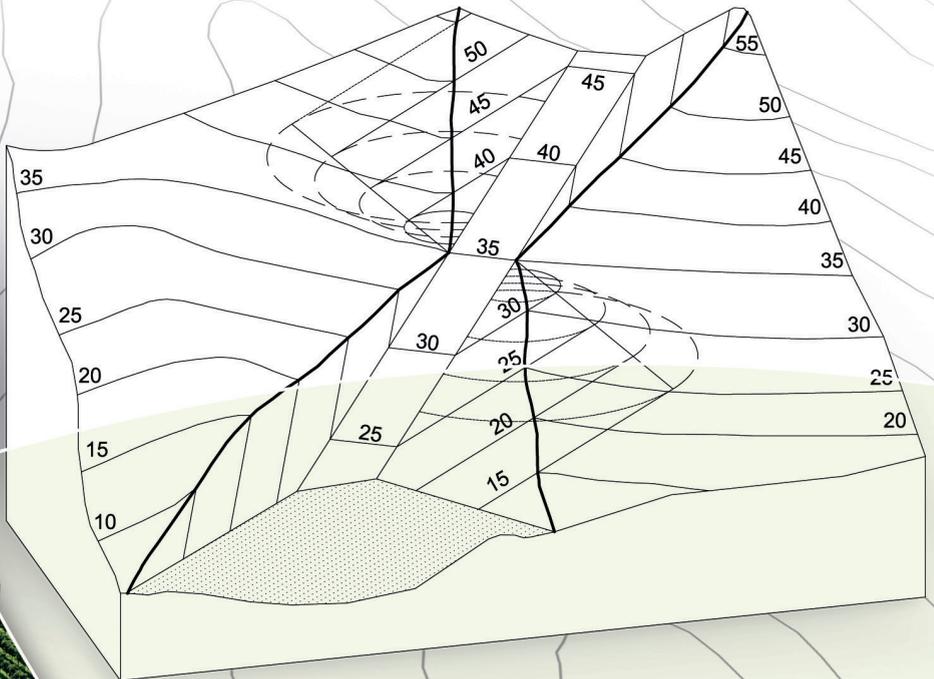


Geometría descriptiva

Sistema acotado: aplicaciones

Rodrigo Díaz Mínguez



Rodrigo Díaz Mínguez

Geometría descriptiva

El sistema acotado. Aplicaciones

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Ingeniería Gráfica de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: DÍAZ MÍNGUEZ, R. (2015) *Geometría descriptiva: Sistema acotado. Aplicaciones*. Valencia: Universitat Politècnica de València

Primera edición, 2015 (versión impresa)
Primera edición, 2015 (versión electrónica)

© Rodrigo Díaz Mínguez

© de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 6158_01_01_01

ISBN: 978-84-9048-178-3 (versión impresa)
ISBN: 978-84-9048-179-0 (versión electrónica)

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación y, en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de la totalidad o de cualquier parte de esta obra sin autorización expresa y por escrito de los autores.

A la memoria de mis padres, Mariano y Rosa,

a quienes todo les debo

A Rosa, Beatriz y Laura, por su cariño

y constante apoyo

Prólogo

Nace este libro con la idea de mejorar las publicaciones ya existentes sobre el mismo tema, no tanto por los contenidos, objetivo tal vez inalcanzable, como por conseguir facilitar el aprendizaje del sistema acotado por parte de los alumnos que, curso tras curso, van accediendo a las escuelas de ingeniería con una preparación heterogénea, y deficiente casi siempre, en geometría.

Por otra parte, aunque el sistema acotado tiene una gran importancia por ser el utilizado, preferentemente, en la elaboración de planos y mapas topográficos que son empleados posteriormente en proyectos y obras de ingeniería, siempre ha ocupado un lugar secundario, tratado con escasa profundidad, en las publicaciones en que se tratan los cuatro sistemas de representación, donde tiene prioridad el sistema diédrico. En algunas de estas publicaciones se exponen y explican los fundamentos generales de geometría en los que se basan dichos sistemas pero no ocurre lo mismo en las publicaciones que tratan exclusivamente del sistema acotado, que suelen carecer de esos axiomas y teoremas primeros y derivados con sus demostraciones correspondientes.

Con respecto a este último punto se debe decir que si bien la formación del ingeniero debe ser eminentemente práctica, no se puede prescindir de los principios en los que se apoya la técnica para resolver los problemas reales, es decir, la

formación del ingeniero debe ser en todo momento racional y, por tanto, debe partir de los fundamentos geométricos (axiomas, definiciones, etc.) continuar con las demostraciones de los primeros teoremas o, al menos, con el conocimiento de sus enunciados y finalizar con su aplicación, en este caso, al sistema de representación de planos acotados o sistema acotado.

Por tanto, con esta publicación se pretende que los alumnos dispongan de un libro que, tratando exclusivamente sobre el sistema acotado y sus aplicaciones, sea de lectura y comprensión relativamente asequible y en el que se incluyan los fundamentos de geometría necesarios para entender dicho sistema de representación.

Esta doble tarea se ha tratado de conseguir, en primer lugar, utilizando en los primeros cuatro temas de la publicación el abatimiento del plano proyectante como concepto fundamental para entender la diferencia entre proyecciones y verdaderas magnitudes, entre distancias reducidas y distancias reales, entre valores de ángulos en el plano y en el espacio, etc. y, en el tema quinto, con el abatimiento de un plano cualquiera. Todo ello acompañado de un importante número de figuras tanto en el espacio tridimensional como en el plano de proyección y de numerosos problemas resueltos y propuestos, cuidadosamente elegidos. Los temas posteriores, del sexto al noveno, son de aplicación directa de la teoría del sistema acotado a poliedros, prismas, conos, etc. y, en los últimos temas, del décimo al decimotercero, la aplicación de la teoría se realiza sobre la resolución de cubiertas de edificios y sobre la elaboración de planos topográficos y su utilidad en ingeniería (trazado de perfiles, de explanaciones, etc.).

Y, en segundo lugar, con la introducción en el temario del capítulo denominado Anejos, que incluye algunos de los fundamentos de geometría necesarios para abordar con éxito el conocimiento de la teoría del sistema acotado (axiomática, definiciones, teoremas, demostraciones, etc.).

Que se consigan los propósitos enumerados solo depende de que los lectores, en general, y los alumnos de primer curso de las distintas ingenierías a los que va dirigida, especialmente, esta publicación así lo consideren.

Agradecimientos

Sería ingratitud no citar aquí a las personas que de una u otra forma han hecho posible la terminación de este libro: a D. Eugenio Escamilla Capilla (q.e.p.d., mi admirado e inolvidable maestro); a D. Florentino Juste Pérez (Dr. Ingeniero Agrónomo y director de mi tesis doctoral, origen de mi dedicación a la docencia); a mis compañeros profesores D. Fernando López de Frías (q.e.p.d., Ingeniero Técnico de Obras Públicas, por su ayuda en la elaboración de las figuras y sus recomendaciones), D. José Manuel Navarro Jover (Dr. Ingeniero Agrónomo), D^a Marina Gascón Martínez (Ingeniero Agrónomo) y D^a Beatriz Rey Solaz (Dr. Ingeniero en Telecomunicaciones) por sus críticas y consejos; a D^a. Iciar De Echevarría Sánchez (Ingeniero en Geodesia, Cartografía y Topografía) y D^a. Carmen Fernández-Caballero Ochando (Arquitecto), por sus trabajos de delineación, maquetación y revisión.

Índice

Prólogo

Capítulo 1. Generalidades	1
1.1. Introducción	1
1.2. Proyecciones	2
1.2.1. Paralelismo en la proyección cilíndrica	5
1.2.2. Perpendicularidad en la proyección cilíndrica	6
1.3. Distancias	8
1.3.1. Distancia entre dos puntos	8
1.3.2. Distancia de un punto a una recta	8
1.3.3. Distancia de un punto a un plano	8
1.3.4. Distancia entre planos paralelos	8
1.3.5. Distancia entre rectas paralelas	8
1.3.6. Distancia de una recta a un plano paralelo	9

1.3.7. Distancia entre dos rectas que se cruzan	9
1.4. Ángulos	10
1.4.1. Ángulo de dos rectas cruzadas	10
1.4.2. Ángulo de recta y plano	11
1.4.3. Ángulo de dos planos.....	11
1.5. Escalas.....	12
1.6. Sistemas de representación.....	13
1.7. Problemas resueltos y propuestos	14
Capítulo 2. Representación del punto, de la recta y del plano	15
2.1. El sistema de planos acotados.....	15
2.2. El punto	15
2.2.1. Representación del punto.....	15
2.2.2. Posiciones del punto respecto al plano de proyección	16
2.3. La recta.....	18
2.3.1. Representación de la recta.....	18
2.3.2. Plano proyectante de la recta. Abatimiento	20
2.3.3. Ángulo de la recta con el plano horizontal.....	25
2.3.4. Pendiente y módulo de la recta.....	27
2.3.5. Graduación de la recta	30
2.3.6. Alfabeto de la recta.....	31
2.3.7. Pertenencia del punto a la recta.....	32
2.3.8. Ángulo de dos rectas en el plano proyectante.....	33
2.3.9. Perpendicularidad de dos rectas en el plano proyectante	35
2.4. El plano	35
2.4.1. Horizontales de plano	35

2.4.2.	Rectas de máxima pendiente.....	36
2.4.3.	Representación del plano.....	37
2.4.4.	Ángulo de un plano con el horizontal.....	38
2.4.5.	Alfabeto del plano.....	39
2.4.6.	Pertenencia de un punto a un plano.....	41
2.4.7.	Pertenencia de una recta a un plano.....	42
2.5.	Problemas resueltos y propuestos.....	43
Capítulo 3. Incidencia y paralelismo.....		49
3.1.	Introducción.....	49
3.2.	Intersección de rectas.....	52
3.3.	Paralelismo entre rectas.....	54
3.4.	Paralelismo entre rectas y planos.....	55
3.5.	Intersección entre planos.....	56
3.6.	Intersección entre recta y plano.....	60
3.7.	Paralelismo entre planos.....	62
3.8.	Problemas resueltos y propuestos.....	62
Capítulo 4. Perpendicularidad y distancias.....		69
4.1.	Introducción.....	69
4.2.	Perpendicularidad entre recta y plano.....	71
4.3.	Distancia de un punto a un plano.....	74
4.4.	Distancia entre rectas paralelas.....	76
4.5.	Distancia entre planos paralelos.....	78
4.6.	Distancia de un punto a una recta.....	79
4.7.	Mínima distancia entre rectas cruzadas.....	81

4.8.	Problemas resueltos y propuestos.....	83
Capítulo 5. Abatimientos y ángulos		89
5.1.	Introducción	89
5.2.	Abatimiento de un punto en un plano.....	89
5.3.	Proyección de un punto abatido	91
5.4.	Abatimiento de una recta de un plano	92
5.5.	Abatimiento de figuras notables.....	94
5.6.	Distancia de un punto a una recta por abatimiento.....	96
5.7.	Ángulo de dos rectas	98
5.8.	Ángulo de recta y plano.....	100
5.9.	Ángulo de dos planos	102
5.10.	Problemas resueltos y propuestos.....	103
Capítulo 6. Los poliedros.....		111
6.1.	Generalidades.....	111
6.2.	El tetraedro.....	111
6.3.	El hexaedro	113
6.4.	El octaedro	115
6.5.	Intersección de una recta con un poliedro.....	116
6.6.	Intersección de un plano con un poliedro	117
6.7.	Problemas resueltos y propuestos.....	117
Capítulo 7. El prisma y la pirámide.....		125
7.1.	Generalidades sobre el prisma	125
7.2.	Intersección de un prisma con una recta.....	125
7.3.	Intersección de un prisma con un plano.....	125

7.4.	Generalidades sobre la pirámide	127
7.5.	Intersección de una pirámide con una recta	127
7.6.	Intersección de una pirámide con un plano.....	127
7.7.	Problemas resueltos y propuestos.....	129
Capítulo 8. El cilindro, el cono y la esfera		131
8.1.	Generalidades sobre el cilindro	131
8.2.	Intersección de un cilindro con una recta	131
8.3.	Intersección de un cilindro con un plano	131
8.4.	Plano tangente a un cilindro por un punto de su superficie	134
8.5.	Planos tangentes a un cilindro desde un punto exterior	135
8.6.	Generalidades sobre el cono	136
8.7.	Intersección de un cono con una recta	137
8.8.	Intersección de un cono con un plano.....	137
8.9.	Plano tangente a un cono por un punto de su superficie.....	141
8.10.	Planos tangentes a un cono desde un punto exterior	142
8.11.	Generalidades sobre la esfera.....	143
8.12.	Intersección de una esfera con una recta.....	144
8.13.	Intersección de una esfera con un plano	144
8.14.	Problemas resueltos y propuestos.....	147
Capítulo 9. Intersección de superficies		149
9.1.	Generalidades.....	149
9.2.	Intersección de un prisma y una pirámide	150
9.3.	Intersección de un cilindro y un cono.....	150
9.4.	Intersección de dos cilindros de igual diámetro	153

9.5.	Intersección de dos cilindros de distintos diámetros	154
9.6.	Intersección de dos conos	155
9.7.	Intersección de cilindro y cono	156
9.8.	Intersección de una esfera y un cilindro	157
Capítulo 10.	Cubiertas de edificios	159
10.1.	Introducción	159
10.2.	Método de resolución	159
10.3.	Problemas resueltos y propuestos.....	165
Capítulo 11.	Representación del relieve	181
11.1.	Introducción	181
11.2.	Normas generales	183
11.3.	Curvas maestras e intercalares	183
11.4.	Definición del terreno entre dos curvas de nivel consecutivas	184
11.4.1.	Determinación de la cota de un punto entre curvas de nivel	185
11.4.2.	Determinación de un punto de cota dada	186
11.5.	Dibujo de las curvas de nivel	186
11.5.1.	Puntos característicos del terreno	187
11.5.2.	Croquis de campo.....	187
11.5.3.	Obtención de cotas enteras.....	188
11.5.4.	Trazado de las curvas de nivel.....	189
11.6.	Caracterización de formas del relieve.....	189
11.6.1.	Elevaciones y depresiones.....	189
11.6.2.	Divisorias, vaguadas y laderas	190
11.6.3.	Cumbre, simas y collados	192
11.6.4.	Casos especiales de representación del relieve.....	193

11.7. Problemas propuestos	194
Capítulo 12. Perfiles a partir de planos con curvas de nivel	197
12.1. Introducción	197
12.2. Perfiles longitudinales	197
12.3. Perfiles transversales	200
12.4. Otras aplicaciones de los perfiles	205
12.5. Problemas propuestos	208
Capítulo 13. Explanaciones en planos con curvas de nivel	211
13.1. Introducción	211
13.2. Explanaciones horizontales	215
13.3. Explanaciones inclinadas	224
13.3.1. Método de los conos	225
13.3.2. Método de los perfiles transversales	232
13.4. Problemas propuestos	241
Anejos	247
A.1. Sobre definiciones, axiomas, postulados y teoremas	247
A.2. Sobre la axiomática en el plano	248
I. Axiomas de existencia y enlace	248
II. Axiomas de ordenación	249
III. Axiomas de movimiento	249
IV. Axiomas de paralelismo	251
A.3. Sobre paralelismo y perpendicularidad en el plano	251
A.4. Sobre la axiomática en el espacio	252
A.5. Sobre paralelismo y perpendicularidad en el espacio	254

A.5.1. Teoremas de paralelismo	256
A.5.2. Teoremas de perpendicularidad	258
A.6. Otros teoremas	260
A.6.1. Teorema de Thales	260
A.6.2. Teorema de la altura.....	261
A.7. Sobre giros	262
A.8. Sobre cuaternas armónicas, polos, polares y homologías.....	263
A.8.1. La cuaterna armónica	263
A.8.2. Puntos conjugados respecto de una circunferencia	264
A.8.3. La homología y sus propiedades	265
A.8.3.1. Homología afín.....	267
A.8.3.2 Homología entre circunferencia y elipse	267
Bibliografía	268

Capítulo 1

Generalidades

- 1.1. Introducción
- 1.2. Proyecciones
- 1.3. Distancias
- 1.4. Ángulos
- 1.5. Escalas
- 1.6. Sistemas de representación
- 1.7. Problemas resueltos y propuestos

1. Generalidades.

1.1. Introducción.

La geometría descriptiva tiene como objetivo básico proporcionar métodos para representar cuerpos y formas del espacio sobre un plano (generalmente, el papel o el encerado).

La manera de pasar de un espacio de tres dimensiones a un plano, con solo dos, consiste en proyectar la forma del espacio sobre el plano y, utilizando posteriormente las construcciones y teoremas elementales de la geometría plana así como una serie de convenios con carácter general, resolver los problemas que se puedan presentar en la representación de los objetos del espacio. Existen cuatro modos de resolver estos problemas, dando lugar a otros tantos sistemas de representación que se definirán posteriormente.

En la inmensa mayoría de casos de representación de las formas del espacio es necesario, debido al limitado tamaño del papel, reducir las dimensiones originales. En otras ocasiones, sucederá todo lo contrario debiéndose ampliar el original ya que el objeto real presenta un tamaño muy reducido. Por último, en raras ocasiones, los objetos se dibujan según sus dimensiones reales. En los tres casos se debe mantener una proporcionalidad constante, en todos los elementos dibujados, dentro del mismo plano. A esta proporcionalidad que existe entre las dimensiones de los objetos dibujados en el plano y las dimensiones de los objetos reales se le denomina escala.

Se profundizará, en apartados posteriores, sobre los conceptos definidos anteriormente y se recordarán otros (distancias, ángulos, etc.) que facilitan el conocimiento del sistema que se utiliza, fundamentalmente, para la representación de la superficie terrestre¹ y que se denomina sistema acotado o de planos acotados.

Para iniciar y facilitar el estudio de este sistema se adoptarán las siguientes notaciones o convenios:

1. Los elementos en el espacio:

- Los puntos se representan por las primeras letras del abecedario en mayúsculas y negrita (**A, B... F**).
- Las rectas se representan por las últimas letras mayúsculas y negritas (**R, S, T...**) o por los segmentos que las definan con dos letras mayúsculas y negritas (**AB, CD...**), siendo **A** y **B** los puntos inicial y final del segmento.

¹ Recuérdese con respecto a este punto que si la superficie a representar es tan pequeña como para poder prescindir de la curvatura terrestre en su representación, a esta se la denomina plano. Mientras que, en caso contrario, la representación es un mapa. Por el hecho de que las superficies a representar en planos son menores, las escalas utilizadas son mayores que en los mapas.

- Los planos se representan con letras griegas minúsculas y negritas (α , β ...) o con letras mayúsculas y negritas intermedias del abecedario (M , N ,...).
- Los ángulos se representan con letras griegas y negritas (α , β ...) o por sus lados y vértice con el símbolo \sphericalangle antepuesto ($\sphericalangle AOB$), donde la letra central indica el vértice del ángulo.

2. Los elementos en el plano:

- En el caso de puntos se seguirá el mismo criterio de representación que en el espacio, pero con letras minúsculas (a , b ... f).
- Las rectas, con los mismos criterios que en el espacio, pero con minúsculas (r , s , t ,... ab , cd ,...).
- Los ángulos y arcos con los mismos criterios que en el espacio pero con minúsculas ($\sphericalangle aob$).

1.2. Proyecciones.

Se llama proyección sobre un plano π , de un punto A del espacio, desde otro punto fijo O , a la intersección del rayo proyectante OA con dicho plano.

Al punto O se le denomina centro de proyección y al plano π , que recibe las proyecciones, plano de proyección o plano del cuadro (PC) (véase figura 1.1).

Según la definición dada, y teniendo en cuenta los criterios establecidos anteriormente, la proyección del punto A es el punto a (véase axioma II.2 del apartado A.4 del capítulo Anejos). De forma análoga, la proyección del punto B es el punto b .

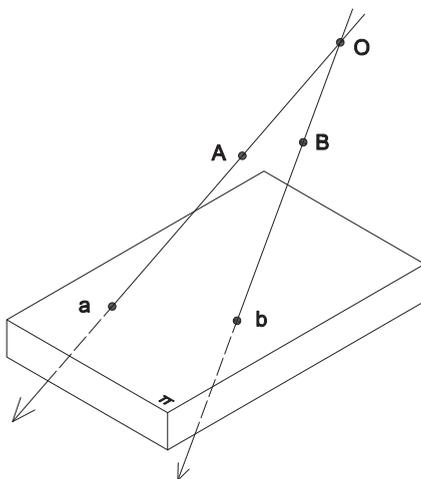


Figura 1.1. Proyecciones de puntos desde otro punto fijo O

Todos los puntos situados sobre un mismo rayo proyectante tienen la misma proyección y aquellos que están situados sobre el plano del cuadro se confunden con su proyección (figura 1.2).

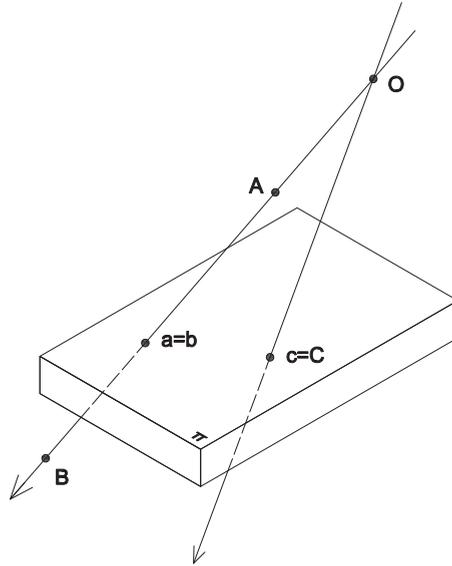


Figura 1.2. Proyecciones de tres puntos desde otro punto fijo O

A esta proyección genérica se le denomina proyección central, cónica o perspectiva (figura 1.3).

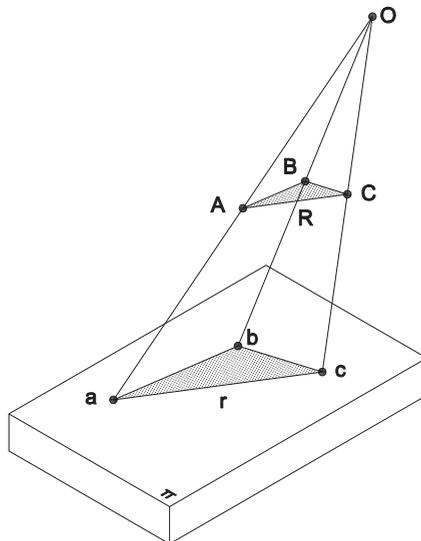


Figura 1.3. Proyección central de una figura situada en el espacio

Para seguir leyendo haga click aquí