Luis Manuel Sánchez Ruiz
Sergio Blanes Zamora

Complementos de ecuaciones diferenciales: resolución analítica, EDPs y Mathematica

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Matemática Aplicada de la Universitat Politécnica de València

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: SÁNCHEZ RUIZ, L. M. y BLANES ZAMORA, S. (2012).*Complementos de ecuaciones diferenciales: resolución analítica, EDPs y Mathematica.* Valencia: Universitat Politècnica de València

distribución: Telf.: 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 0789_03_01_09

Imprime: Byprint Percom, sl

ISBN: 978-84-8363-963-4
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Índice general

Prólogo

Esta publicación muestra como resolver ecuaciones diferenciales ordinarias por desarrollos en series de potencias y ecuaciones diferenciales en derivadas parciales, principalmente relacionadas con problemas clásicos como son la ecuación de ondas y la del calor o difusión. Está enfocada a alumnos que ya hayan adquirido las competencias referentes a temas básicos de cálculo o análisis matemático como son el desarrollo de funciones en series de potencias, de funciones periódicas en series de Fourier, la resolución de las ecuaciones diferenciales ordinarias lineales y las transformadas de Laplace. De cada tema tratado se dedica otro para su realización con el programa Mathematica que facilita su resolución y visualización de problemas matemáticos que aparecen en cursos intermedios de ingeniería. Los temas son expuestos de forma eminentemente práctica que hacen que, de modo natural, el lector asimile los métodos empleados y las posibilidades del programa.

Las ecuaciones diferenciales modelan casi todos los procesos que aparecen en la técnica en los cuales hay una relación de cambio entre las variables involucradas. Las ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) estudian el caso en que solo haya una variable independiente y las ecuaciones en derivadas parciales (EDPs) cuando haya varias. A diferencia de las EDOs, donde es posible clasificar y resolver un gran número de ecuaciones, en general cada EDP requiere sus propias técnicas. Además, necesitaremos poseer un amplio bagaje de conocimientos matemáticos sobre series de Fourier, transformadas de Laplace y, especialmente, EDOs pues a menudo las técnicas de resolución de EDPs consisten en descomponer éstas en un conjunto de EDOs a resolver. Esto se pondrá claramente de manifiesto al resolver ciertas EDPs por separación de variables.

Por otra parte al trabajar en EDPs en varias dimensiones espaciales en las que hay ciertas simetrías (cilíndrica, esférica, etc.) frecuentemente aparecen EDOs lineales con coeficientes variables que no pueden ser resueltas por técnicas tradicionales. Las soluciones de estas ecuaciones dan lugar a funciones especiales como las funciones de Bessel, o los polinomios de Laguerre, de Legendre, de Hermite, etc. que aparecen también en muchos otros campos de la ingeniería. Abordaremos estos problemas utilizando series de potencias y, como dicho método no siempre es estudiado de forma sistemática junto con la teoría de EDOs, dedicamos un primer capítulo a su resolución sin plantearnos desarrollar un tratado completo sobre resolución de ecuaciones diferenciales por series de potencias.

Con esta publicación pretendemos satisfacer las necesidades básicas que puedan tener los alumnos de ingeniería en la obtención de soluciones analíticas (en series de potencias) de EDOs, poder abordar las EDPs mas habituales y, asimismo, utilizar un programa matemático como es *Mathematica* en todos estos temas.

A lo largo de todo el texto hay una amplia exposición de ejemplos que facilitan la comprensión de los diferentes temas presentados, finalizando cada capítulo con una selección de ejercicios cuya resolución se recomienda para verificar que se ha entendido la materia desarrollada.

Los autores

Capítulo 1

Resolución analítica de EDOs

1.1. Ecuación lineal de segundo orden

En este capítulo consideraremos la resolución de ecuaciones diferenciales ordinarias (EDOs) que sean de segundo orden y lineales con coeficientes variables

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = f(x). \tag{1.1}$$

Este tipo de ecuaciones aparece en gran variedad de problemas de la ingeniería, existiendo funciones específicas como los polinomios de Legendre, de Hermite, de Laguerre o las diferentes familias de funciones de Bessel, por citar unos pocas, que son soluciones de ecuaciones diferenciales de la forma (1.1) en el caso homogéneo, es decir con $f(x) = 0$, dependiendo de la elección de las funciones $p(x), q(x)$ y $r(x)$.

Recordemos que **por el método de reducción del orden** de una EDO lineal, si sabemos resolver ecuaciones diferenciales lineales de primer orden, entonces para hallar la solución general de la EDO de segundo orden (1.1), **basta con buscar una solución particular de la ecuación homogénea asociada** a (1.1). Recordemos por qué.

Si $y_0(x)$ es una solución de la homogénea asociada, entonces el cambio

$$y(x) = z(x)y_0(x) \tag{1.2}$$

transforma (1.1) en la siguiente EDO con función incógnita $z(x)$,

$$z''y_0(x) + \left(2\,y_0'(x) + \frac{q(x)}{p(x)}y_0(x)\right) z' = \frac{f(x)}{p(x)}.$$

Haciendo el cambio, $u(x) = z'(x)$ *se reduce el orden* de la ecuación diferencial en una unidad obteniendo una ecuación lineal de primer orden cuya solución $u = u(x, C_1)$ viene dada por la expresión

$$u(x, C_1) = e^{-\int P(x)\,dx} \left(C_1 + \int e^{\int P(x)\,dx} Q(x)\,dx \right),$$

donde

$$P(x) = 2\,\frac{y_0'(x)}{y_0(x)} + \frac{q(x)}{p(x)}, \qquad Q\,(x) = \frac{1}{y_0(x)}\frac{f(x)}{p(x)}.$$

Luego la solución de (1.1) es

$$y = \left(\int u(x, C_1)dx + C_2 \right) y_0(x).$$

Ejercicio 1.1 *Comprobar que* $y_0\,(x) = \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}$ *es una solución de la ecuación diferencial*

$$x^2 y'' + 4xy' + (x^2 + 2)y = 0,$$

y hallar la solución general de la misma.

Sol.: Siguiendo el proceso descrito es fácil obtener que

$$y = C_1 \frac{\cos x}{x^2} + C_2 \frac{\operatorname{sen} x}{x^2}.$$

■

Por tanto, nuestro problema puede quedar reducido a la búsqueda de una solución de la ecuación homogénea

$$p(x)y'' + q(x)y' + r(x)y = 0 \tag{1.3}$$

o equivalentemente

$$y'' + \tfrac{q(x)}{p(x)}y' + \tfrac{r(x)}{p(x)}y = 0.$$

Diremos que $x = x_0$ es un **punto ordinario** de la ecuación diferencial si

$$\frac{q(x)}{p(x)} \qquad \text{y} \qquad \frac{r(x)}{p(x)}$$

son funciones analíticas en $x = x_0$, es decir si pueden expresarse mediante series de Taylor centradas en x_0. En caso contrario diremos que x_0 es un punto **singular**.

Un punto singular x_0 se denomina punto **singular regular** si

$$\frac{(x-x_0)\,q(x)}{p(x)} \qquad \text{y} \qquad \frac{(x-x_0)^2\,r(x)}{p(x)}$$

son analìticas en $x = x_0$.

Un punto singular no regular se denomina **irregular**.

Nota 1.1 *A veces interesa conocer el comportamiento de la solución en el* ***punto del infinito****. Para estudiar este límite haremos el cambio $x = 1/t$ y estudiaremos como es el punto $t = 0$ en la ecuación transformada.*

1.2. Resolución en series de potencias

1.2.1. Resultados generales

La búsqueda de soluciones de una EDO por su desarrollo en serie de potencias puede emplearse bajo las condiciones del Teorema de Fuchs que enunciaremos luego. Así, cuando busquemos una solución en serie de potencias alrededor de un punto ordinario, $x = x_0$, de la forma

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + a_3(x-x_0)^3 + \dots \quad (1.4)$$

determinaremos la expresión de los coeficientes a_n sustituyendo y en la ecuación diferencial. Para esto necesitamos calcular las dos primeras derivadas

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n(x-x_0)^{n-1} = a_1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n(x-x_0)^{n-2} = 2a_2 + 6a_3(x-x_0) + 12a_4(x-x_0)^2 + \dots$$

sustituir en la EDO y, según sean las expresiones de las funciones $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$, encontrar una ecuación de recurrencia para los coeficientes a_n, donde todos se pueden escribir en términos de a_0 y a_1, en la forma

$$a_n = c_n a_0 + d_n a_1$$

con c_n, d_n expresiones que dependen solo de n, por lo que la solución de la EDO se puede escribir en la forma

$$y = a_0 \left(\sum_{n=0}^{\infty} c_n (x - x_0)^n \right) + a_1 \left(\sum_{n=0}^{\infty} d_n (x - x_0)^n \right). \tag{1.5}$$

Con esto

$$y = a_0 y_1(x) + a_1 y_2(x) \tag{1.6}$$

donde $y_1(x), y_2(x)$ serán dos soluciones particulares (en general independientes) de la ecuación diferencial homogénea mientras que a_0 y a_1 se pueden ver como las constantes arbitrarias, y estarán determinadas si existen condiciones iniciales $y(x_0) = a_0, y'(x_0) = a_1$.

La solución (1.4) obtenida analíticamente tendrá un radio de convergencia, R (que puede ser infinito), en el que una cota inferior al mismo se obtiene a partir del siguiente teorema.

Teorema 1.1 ***(Teorema de Fuchs)*** *Sea la ecuación diferencial* (1.3) *con* $x = x_0$ *un punto ordinario. Si* R *es la distancia desde* x_0 *al punto singular (real o complejo) más cercano de* $q(x)/p(x)$ *o* $r(x)/p(x)$*, entonces la solución de* (1.3) *admite un desarrollo de Taylor alrededor del punto* $x = x_0$ *que converge dentro del intervalo* $]x_0 - R, x_0 + R[$.

Por Teoría de Series Potenciales, la serie de potencias mencionada en el Teorema de Fuchs converge absolutamente en $]x_0 - R, x_0 + R[$ por lo que es incondicionalmente convergente y puede ser reordenada en dicho intervalo.

1.2.2. Series de potencias alrededor del origen

Empezaremos buscando soluciones en series de potencias alrededor del origen ($x_0 = 0$) y luego adaptaremos el procedimiento a series de potencias alrededor de otro punto. Lo ilustraremos básicamente a través de ejemplos.

Ejemplo 1.1 *Obtener la solución en serie de potencias alrededor del origen de la ecuación diferencial*

$$y'' + 4y = 0.$$

Sol.: En este ejemplo de coeficientes constantes conocemos que la solución viene dada por

$$y = C_1 \cos(2x) + C_2 \operatorname{sen}(2x) \tag{1.7}$$

o equivalentemente, teniendo en cuenta el desarrollo de Taylor alrededor del origen de las funciones seno y coseno,

$$y = C_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!} x^{2n} + C_2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}. \tag{1.8}$$

Si ignorando lo anterior buscamos la solución a la ecuación diferencial original como la serie

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \tag{1.9}$$

que por el Teorema 1.1 es convergente para todo x, calculamos

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

y sustituimos en la ED

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Con el objetivo de que todas las series estén escritas en potencias de x^n, tendremos en cuenta que

$$\sum_{n=m}^{M} A_n = \sum_{n=m+k}^{M+k} A_{n-k}$$

y desplazaremos dos unidades el sumatorio de la primera serie, quedando

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n + 4 \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Ahora ambas series empiezan en $n = 0$. Esto normalmente no ocurrirá. En el siguiente ejemplo indicaremos como proceder cuando esto no ocurra. Ahora podemos agrupar ambas series en una sola

$$\sum_{n=0}^{\infty} \big[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} + 4a_n\big] x^n = 0.$$

Teniendo en cuenta que una serie de potencias es idénticamente nula si y solo si cada uno de los coeficientes vale 0, esto es

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n = 0 \quad \forall\, x \quad \Leftrightarrow \quad A_n = 0,$$

se tiene que los coeficientes a_n deben satisfacer la relación

$$(n+2)(n+1)\,a_{n+2} + 4a_n = 0$$

que es llamada la **ecuación de recurrencia** para los coeficientes de la serie. Si despejamos a_{n+2},

$$a_{n+2} = -\frac{4}{(n+2)(n+1)}a_n, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

Dando valores a n obtenemos

$$\begin{array}{ll}
n=0 & a_2 = -\frac{2^2}{2\times 1}\,a_0 \\
n=1 & a_3 = -\frac{2^2}{3\times 2}\,a_1 \\
n=2 & a_4 = -\frac{2^2}{4\times 3}\,a_2 = \frac{2^4}{4\times 3\times 2\times 1}\,a_0 \\
n=3 & a_5 = -\frac{2^2}{5\times 4}\,a_3 = \frac{2^4}{5\times 4\times 3\times 2}\,a_1 \\
n=4 & a_6 = -\frac{2^2}{6\times 5}\,a_4 = -\frac{2^6}{6\times 5\times 4\times 3\times 2\times 1}\,a_0 \\
n=5 & a_7 = -\frac{2^2}{7\times 6}\,a_5 = -\frac{2^6}{7\times 6\times 5\times 4\times 3\times 2}\,a_1 \\
\vdots & \vdots
\end{array}$$

Podemos deducir la expresión general para los términos pares e impares

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n 2^{2n}}{(2n)!}\,a_0, \qquad a_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{(-1)^n 2^{2n+1}}{(2n+1)!}\,a_1 \tag{1.10}$$

y sustituyendo obtenemos que (1.9) se puede escribir como

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n} x^{2n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1} x^{2n+1}$$

es decir

$$y = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\,(2x)^{2n} + \frac{a_1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\,(2x)^{2n+1}$$

que se corresponde con la solución buscada (1.8) donde identificamos

$$C_1 = a_0, \qquad C_2 = a_1/2.$$

■

Ejemplo 1.2 *Hallar la solución en serie de potencias de x de la ecuación diferencial (de Airy)*

$$y'' - x\,y = 0.$$

Sol.: En este caso $p(x) = 1$ y por el Teorema 1.1 se tiene que el desarrollo en serie de su solución

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

es convergente para todo x. Calculamos las dos primeras derivadas

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^{n-1}, \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2}$$

y sustituimos en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Si incluimos el factor x en el segundo sumando tendremos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\, a_n x^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 0.$$

A continuación trasladamos los índices para tener potencias de x^n en todos los sumatorios

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0.$$

Ahora los sumatorios empiezan en valores de n distintos, y sacamos fuera de los mismos los términos que necesitemos para que todos comiencen en el mismo índice. En este caso basta con sacar el primer término de la primera serie

$$2a_2 x^0 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 0,$$

y a continuación juntamos las series

$$2a_2 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - a_{n-1}\Big] x^n = 0.$$

Como todos los coeficientes de los x^n deben anularse se tiene que para

$$\begin{aligned} n &= 0 && \rightarrow \quad 2a_2 = 0, \\ n &= 1, 2, \ldots && \rightarrow \quad (n+2)(n+1)\, a_{n+2} - a_{n-1} = 0, \end{aligned}$$

y de aquí obtenemos

$$\begin{array}{lcl} n = 0 & \to & a_2 = 0 \\ n = 1, 2, \ldots & \to & a_{n+2} = \frac{a_{n-1}}{(n+2)(n+1)}. \end{array}$$

De esta relación vemos que

$$0 = a_2 = a_5 = a_8 = \ldots = a_{3n+2} = \ldots$$

es decir para subíndices de la forma $\dot{3} + 2$. Para otros subíndices,

$$a_{3n} = \frac{a_0}{(2)(3)(5)(6)\cdots(3n-1)(3n)}, \quad a_{3n+1} = \frac{a_1}{(3)(4)(6)(7)\cdots(3n)(3n+1)}.$$

Teniendo en cuenta que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n} x^{3n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n+1} x^{3n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_{3n+2} x^{3n+2}$$

y sustituyendo los valores de $a_{3n}, a_{3n+1}, a_{3n+2}$ se obtiene

$$y = a_0 \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n}}{(2)(3)(5)(6)\cdots(3n-1)(3n)} \right] + \\ + a_1 \left[x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{3n+1}}{(3)(4)(6)(7)\cdots(3n)(3n+1)} \right].$$

Si deseamos explicitar los términos de la series hasta x^5,

$$y = a_0(1 + \frac{1}{6}x^3) + a_1(x + \frac{1}{12}x^4) + O[x^6]$$

donde $O[x^6]$ indica que se han suprimido los términos con potencias de orden mayor o igual que 6. ■

Ejemplo 1.3 *Hallar la solución en serie de potencias de x hasta x^5 de la ecuación diferencial*

$$y'' - 2xy' - 2y = 0.$$

Sol.: Sustituyendo la función y sus derivadas en la ecuación, de manera similar al ejercicio anterior, llegamos a

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\, a_{n+2} x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n x^n - 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 0.$$

Como los sumatorios empiezan en valores de n distintos, sacamos los términos correspondientes a $n = 0$, y agrupamos el resto

$$2a_2 - 2a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big[(n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 2n\, a_n - 2a_n \Big] x^n = 0.$$

Teniendo en cuenta que los coeficientes de los x^n deben anularse se tiene que para

$$\begin{array}{lcl} n = 0 & \rightarrow & 2a_2 - 2a_0 = 0, \\ n = 1, 2, \ldots & \rightarrow & (n+2)(n+1)\, a_{n+2} - 2n\ a_n - 2a_n = 0, \end{array}$$

y de aquí obtenemos

$$\begin{array}{lcl} n = 0 & \rightarrow & a_2 = a_0 \\ n = 1, 2, \ldots & \rightarrow & a_{n+2} = \frac{2a_n}{(n+2)}. \end{array}$$

Si escribimos a_2, a_3, a_4, a_5 en función de a_0 y a_1 y sustituimos en la expresión de y, obtenemos

$$y = a_0 \left(1 + x^2 + \frac{x^4}{2} \right) + a_1 \left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} \right) + O[x^6].$$

En este caso podemos dar la solución analítica exacta. En efecto,

$$\begin{aligned} y &= a_0 \left(1 + \frac{x^2}{1!} + \frac{\left(x^2\right)^2}{2!} + \frac{\left(x^2\right)^3}{3!} + \ldots \right) + a_1 \left(x + \frac{2x^3}{3} + \frac{4x^5}{15} + \ldots \right) \\ &= a_0 \exp\left(x^2\right) + a_1 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{(2n+1)!!}\, x^{2n+1}. \end{aligned}$$

■

1.2.3. Series de potencias alrededor de $x_0 \neq 0$

Cuando interese conocer el comportamiento de la solución de la ecuación diferencial (1.3) entorno a un punto ordinario $x_0 \neq 0$ calcularemos la solución en serie de potencias alrededor $x = x_0$.

Si no se desea trabajar con potencias de $(x - x_0)$ podemos realizar el cambio de variable

$$t = x - x_0$$

y buscar una solución en potencias de t. Entonces (1.3) tomará la forma

$$p(t+x_0)D^2y + q(t+x_0)Dy + r(t+x_0)y = 0,$$

donde $D \equiv \frac{d}{dt}$. Ahora procederemos como en la sección anterior teniendo en cuenta las nuevas expresiones de las funciones p, q, r, que las derivadas son respecto a t y al final desharemos el cambio.

Ejemplo 1.4 *Halla la solución en serie de potencias alrededor de* $x_0 = -3$ *de la ecuación de Airy*

$$y'' - x\,y = 0.$$

Posteriormente hallar la aproximación de la solución dada por la serie de potencias hasta $(x+3)^5$.

Sol.: Buscamos la solución en serie de potencias de $(x+3)$

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x+3)^n.$$

Para obtener esta serie hacemos $t = x + 3$, es decir $x = t - 3$, con lo que la ecuación de Airy queda

$$D^2y - (t-3)\,y = 0.$$

Calculamos las dos primeras derivadas de y,

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n, \qquad Dy = \sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n t^{n-1}, \qquad D^2y = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n t^{n-2}$$

y sustituimos en la ecuación diferencial

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n t^{n-2} - (t-3)\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Si incluimos el factor t en el segundo sumando tendremos

$$\sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)\,a_n t^{n-2} - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^{n+1} + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

A continuación trasladamos los índices para tener potencias de t^n en todos los sumatorios

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)(n+1)\,a_{n+2}t^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}t^n + 3\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = 0.$$

Para seguir leyendo haga click aquí