acadèmica

Resistencia de Materiales

Isabel Gasch Molina | Manuel Gasch Salvador
José Luis Galdón Ribes | Pedro Efrén Martín Concepción
Ignacio Ferrer Ballester

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Isabel Gasch Molina
Manuel Gasch Salvador
José Luis Galdón Ribes
Pedro Efrén Martín Concepción
Ignacio Ferrer Ballester

Resistencia de materiales

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el Departamento de Mecánica de los Medios Continuos y Teoría de Estructuras de la UPV

Colección Académica

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: GASCH-MOLINA, I. [et.al.] (2013). *Resistencia de materiales.* Valencia: Universitat Politècnica

Primera edición, 2013

Distribución: Telf. 963 877 012/ http://www.lalibreria.upv.es / Ref.0685_03_01_23

Imprime: Byprint percom sl.

ISBN: 978-84-9048-120-2

Impreso bajo demanda

Impreso en España

ÍNDICE

CAPÍTULO 1.
CONCEPTOS BÁSICOS DE LA MECÁNICA

1.1. FUERZA

En la Mecánica se define la *fuerza* como la acción de un cuerpo sobre otro.

Cuando sobre un cuerpo actúa una fuerza se producen dos tipos de efectos: uno, el cambio de movimiento del cuerpo o la oposición (reacción) a dicho cambio y otro, su deformación (cambio de forma)

Si sobre un cuerpo actúa una fuerza, éste tiende a desplazarse en la dirección de la línea de acción de la fuerza y a girar alrededor de un eje no paralelo a dicha línea de acción (véase Figura 1.1)

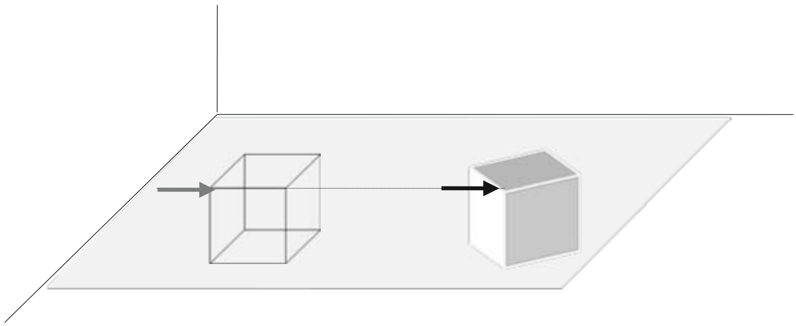


Figura 1.1

El desplazamiento y el giro dependen de la magnitud de la fuerza, del sentido de ésta, y del punto de aplicación de la misma. Así pues, las fuerzas se caracterizan por su: Dirección; Sentido; Valor, y Punto de aplicación

Todo ello hace que la fuerza sea una *magnitud vectorial* y en consecuencia para su estudio se podrá aplicar toda la teoría de vectores.

1.2. MOMENTO DE UNA FUERZA

Como se ha indicado en el apartado anterior, al actuar una fuerza **F** sobre un sólido, este tiene tendencia a girar alrededor de cualquier eje E que no sea paralelo a la fuerza ni corte su línea de acción. A esta *tendencia de giro* se le llama *momento M de la fuerza F respecto del eje E*.

Para definir correctamente el momento se necesita conocer su valor, dirección y sentido, es por consiguiente una *magnitud vectorial*.

Sea O un punto cualquiera del sólido y **r** el vector que une el punto O con un punto A. en el que hay aplicada una fuerza **F** (véase Figura 1.2). El momento $\mathbf{M_O}$ de la fuerza **F** respecto de O, viene dado por el *producto vectorial*:

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{1.1}$$

La recta de acción de $\mathbf{M_O}$ representa el eje (*la dirección*) respecto al cual giraría el sólido si estuviera sujeto en O y se le aplicara la fuerza **F**. Esta recta es perpendicular al plano definido por **F** y el punto O.

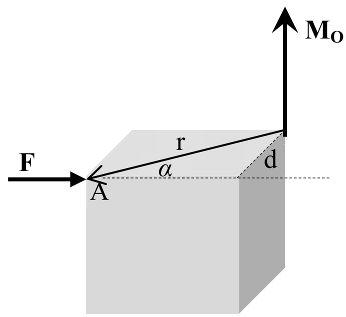


Figura 1.2

El *sentido* del vector momento puede determinarse aplicando la regla de la mano derecha.

Supuesto que $\boldsymbol{\alpha}$ es el ángulo formado por los vectores **r** y **F**, el *módulo* del vector momento puede obtenerse mediante la expresión:

$$M_O = F \cdot r \cdot \sin\alpha = F \cdot d \tag{1.2}$$

Siendo d la distancia del punto O a la línea de actuación de la fuerza **F**.

Habitualmente la fuerza se mide en *kN* o *N*. Si las distancias se miden en *m* o *mm*, las unidades del vector momento serán: *kN·m* o *N·mm*

Conocido el momento respecto de un punto O, $\mathbf{M_O}$, se puede determinar el valor del momento respecto a cualquier eje E que pase por dicho punto O (véase Figura 1.3), calculando el valor de la proyección del vector momento $\mathbf{M_O}$ sobre el eje E.

Llamando **n** al versor que define la dirección del eje E que pasa por el punto O, el módulo del vector momento de la fuerza **F** respecto del eje E es:

$$M_E = \vec{M}_O \cdot \vec{n} = M_O \cdot \cos\beta \tag{1.3}$$

Sustituyendo el módulo del momento por su valor obtenido en (1.2), se llega a la expresión:

$$M_E = F \cdot d \cdot \cos\beta \qquad (1.4)$$

De la expresión anterior se desprende que el momento de una fuerza respecto de un eje es independiente del punto O, perteneciente al eje, que se elija.

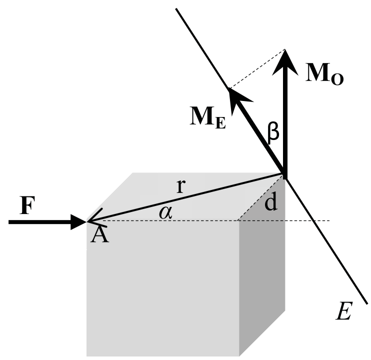


Figura 1.3

1.2.1. Teorema de Varignon

Sea **R** la resultante de tres fuerzas concurrentes en un punto A (véase Figura 1.4). Según la propiedad distributiva del producto vectorial, se puede escribir:

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{R} = \vec{r} \wedge \left(\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3\right) \qquad (1.5)$$

O bien

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F}_1 + \vec{r} \wedge \vec{F}_2 + \vec{r} \wedge \vec{F}_3 \qquad (1.6)$$

Esta igualdad se conoce como el teorema de Varignon: *El momento de la resultante de varias fuerzas concurrentes respecto de un punto cualquiera O, es igual a la suma de los momentos de cada una de las fuerzas respecto del mismo punto O.*

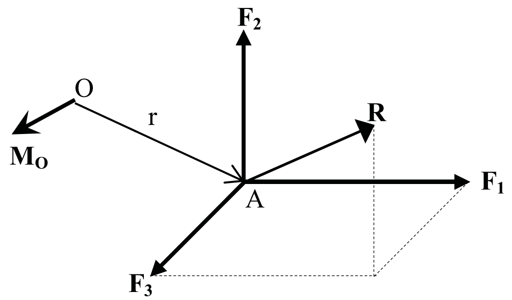


Figura 1.4

Ejercicio 1.1

Determinar el momento que las fuerzas F_1=7 N y F_2=20 N, producen en el punto O de la placa, de 10 mm de espesor, representada en la Figura 1.5.

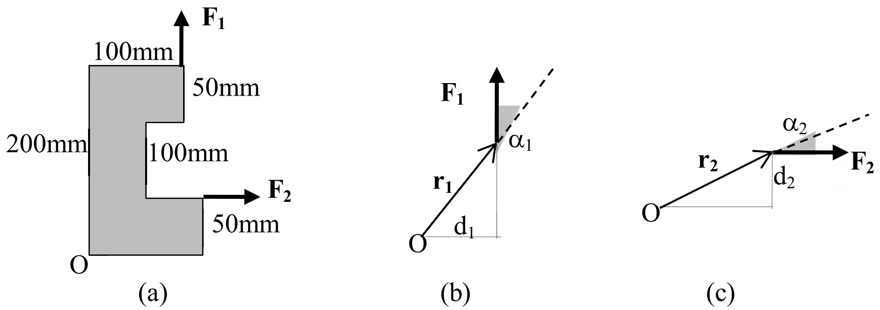


Figura 1.5

Solución

Para obtener el momento en el punto O de la placa se analizará por separado el momento producido por cada una de las fuerzas para posteriormente realizar la suma vectorial de los dos momentos.

La distancia de la fuerza $\mathbf{F_1}$ al punto O (véase Figura 1.5 (b)) es:

$$d_1 = r_1 \cdot \sin \alpha_1 = 100\, mm$$

De acuerdo con la ecuación 1.2 el módulo del momento vale:

$$M_{01} = F_1 \cdot d_1 = 700\ Nmm$$

La dirección de $\mathbf{M_{01}}$ es perpendicular al plano del papel y su sentido contrario a las agujas del reloj.

Procediendo del mismo modo para la fuerza $\mathbf{F_2}$**:**

La distancia de la fuerza $\mathbf{F_2}$ al punto O (véase Figura 1.5 (c)) es:

$$d_2 = r_2 \cdot \sin \alpha_2 = 50\, mm$$

El módulo del momento vale:

$$M_{02} = F_2 \cdot d_2 = 1000\ Nmm$$

Su dirección es perpendicular al plano del papel y su sentido horario.

Puesto que ambos vectores tienen la misma dirección, el momento resultante tendrá la dirección perpendicular al plano del papel y su módulo será la suma algebraica de ambos módulos:

$$\mathrm{M}_0 = M_{01} + M_{02} = 700 - 1000 = -300\ \mathrm{Nmm}$$

<u>Ejercicio 1.2</u>

Una placa rectangular de 500x300mm está sometida a cuatro fuerzas, tal como se indica en la Figura 1.6. Obtener, en los puntos A, B y C, el momento producido por dichas fuerzas.

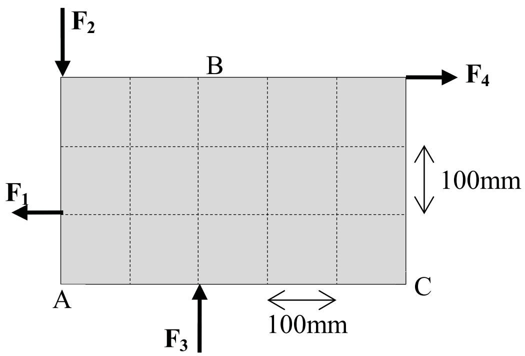


Figura 1.6

Datos: F_1= 200N, F_2= 300N, F_3= 80N, F_4= 150N.

Solución

Para cada uno de los tres casos (momento en A, B y C), tanto las fuerzas como los vectores que unen el punto donde se quiere obtener el momento con el punto de aplicación de la fuerza están en el mismo plano, luego el vector es perpendicular al plano de la figura.

En la siguiente tabla, se calcula el momento que produce cada una de las fuerzas en el punto A de acuerdo con la expresión 1.2

Fuerza	Módulo (N)	Distancia Punto. A (mm)	M_A (N mm)
F_1	200	100	20000
F_2	300	0	0
F_3	80	200	16000
F_4	150	300	-45000
			-9000

Como criterio de signos para el momento se ha tomado como positivo el giro contrario a las agujas del reloj.

El momento en el punto A, debido a las fuerzas representadas, es igual a **$-9 \cdot 10^3$ Nmm.**

De modo similar se construye la siguiente tabla para obtener el momento en el punto B.

Fuerza	**Módulo (N)**	**Distancia Punto B (mm)**	**M_B (N mm)**
F_1	200	200	-40000
F_2	300	200	60000
F_3	80	0	0
F_4	150	0	0
			20000

El momento en el punto B es igual a **$20 \cdot 10^3$ Nmm.**

Procediendo del mismo modo para el punto C

Fuerza	Módulo (N)	Distancia Punto C (mm)	M_C (N mm)
F_1	200	100	20000
F_2	300	500	150000
F_3	80	300	-24000
F_4	150	300	-45000
			1010000

El momento en el punto C es igual a $\mathbf{1010 \cdot 10^3}$ **Nmm.**

Ejercicio 1.3

Obtener la longitud necesaria de la palanca representada en la Figura 1.7 para que al aplicar una fuerza de 15N en su extremo A, se produzca un momento de 3000Nmm en el punto de anclaje B.

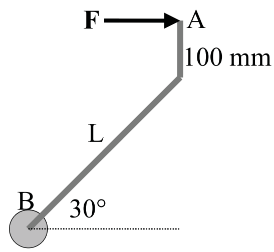


Figura 1.7

Solución

El problema se resuelve aplicando el concepto de momento (3000Nmm) de una fuerza (15N) respecto de un punto (B).

La distancia de F al punto B es:

$$d = 100 + L \cdot \sin 30^0$$

Según la expresión 1.2:

$$M_B = 3000 = F \cdot d = 15 \cdot (100 + L \cdot \sin 30^0)$$

de donde: $\boldsymbol{L = 200\ mm}$

Ejercicio 1.4

Obtener el valor del momento de la fuerza F respecto del eje OA (Figura 1.8). El módulo de la fuerza F vale $5\sqrt{29}$ N.

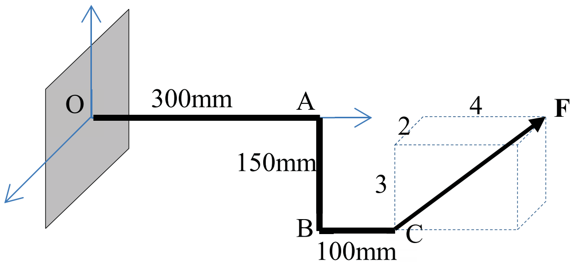


Figura 1.8

Solución

De acuerdo con la Figura 1.8, el versor director de la fuerza **F** es:

$$\vec{v} = \frac{1}{\sqrt{4^2+3^2+2^2}} \cdot \left(4\vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right)$$

En consecuencia, las componentes del vector fuerza son:

$$\vec{F} = 20\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} - 10\vec{k}$$

Tomando el sistema de referencia en O, el vector posición del punto de aplicación de la carga es:

$$\vec{r} = 400\vec{\imath} - 150\vec{\jmath}$$

Según la expresión 1.1, el momento de la fuerza **F** respecto del punto O vale

$$\vec{M}_0 = \vec{r} \wedge \vec{F} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 400 & -150 & 0 \\ 20 & 15 & -10 \end{vmatrix} = 1500\vec{\imath} + 4000\vec{\jmath} + 9000\vec{k}$$

Conocido el momento respecto del punto O, se puede obtener el momento respecto del eje OA mediante la expresión 1.3.

De acuerdo con la Figura 1.8, el versor director del eje OA es:

$$\vec{n} = \vec{\imath}$$

Sustituyendo en la ecuación 1.3, se obtiene

$$\mathrm{M_{OA}} = \left(1500\vec{\imath} + 4000\vec{\jmath} + 9000\vec{k}\right) \cdot (\vec{\imath}) = 1500\ \mathrm{Nmm}$$

Luego la fuerza **F** produce sobre el eje OA un momento positivo (dirección positiva del eje OA) de valor 1500 Nmm.

Ejercicio 1.5

Determinar el momento que la fuerza de 100 N produce en el centro de la placa rectangular representada en la Figura 1.9

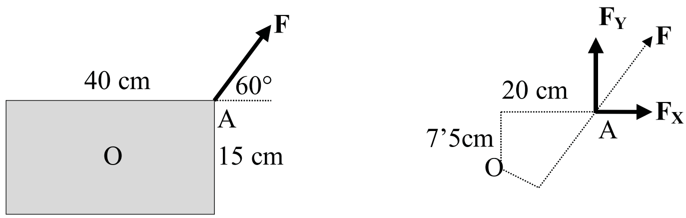


Figura 1.9

Solución

Un primer procedimiento, para contestar la pregunta, consiste en:

a) Determinar la distancia entre los puntos O y A:

$r = \sqrt{200^2 + 75^2} = 213{,}6mm$

b) Obtener el ángulo que forman los vectores $\vec{F}\ y\ \overrightarrow{OA}$

$\alpha = 60^o - atg\,\dfrac{7{,}5}{20} = 39{,}44^o$

c) Aplicar la expresión 1.2:

$$\mathrm{M_0} = 100 \cdot 213{,}6 \cdot \sin 39{,}44^o = 13569{,}4\ \ \mathrm{Nmm}$$

Según la regla de la mano derecha el sentido es contrario a las agujas del reloj.

El proceso se puede simplificar si se tiene en cuenta el teorema de Varignon.

La fuerza **F** se puede descomponer según dos direcciones perpendiculares (X, Y):

$F_X = 100 \cdot \cos 60^o = 50\ N$

$F_Y = 100 \cdot \sin 60^o = 86{,}6\ N$

La distancia de cada una de estas fuerzas al punto O son 7'5 cm y 20 cm, respectivamente.

Teniendo en cuenta el teorema de Varignon (véase Ec. 1.6) y la expresión 1.2, el momento de la fuerza **F** respecto del punto O vale:

$$\mathrm{M}_0 = -50 \cdot 75 + 86{,}6 \cdot 200 = \mathbf{1}3570 \ \mathrm{Nmm}$$

Solución que coincide con la obtenida anteriormente.

Ejercicio 1.6

Resolver el Ejercicio 1.4 teniendo en cuenta el teorema de Varignon.

Solución

Según se ha obtenido en dicho ejercicio 1.4, la fuerza **F** aplicada en el punto C es:

$\vec{F} = 20\vec{\imath} + 15\vec{\jmath} - 10\vec{k}$

luego sus componentes según los ejes coordenados son:

$F_X = 20\ N \qquad F_Y = 15\ N \qquad F_Z = -10\ N$

La componente $\boldsymbol{F_X}$ no produce momento respecto del eje OA por ser su dirección paralela a dicho eje.

La componente $\boldsymbol{F_Y}$ no produce momento respecto del eje OA porque su dirección corta a dicho eje.

La distancia de $\boldsymbol{F_Z}$ al eje OA es de 150mm y en consecuencia su momento (véase Ec. 1.2):

$$\boldsymbol{M_{OA}} = 10 \cdot 150 = \mathbf{1500}\ \boldsymbol{Nmm}$$

Resultado idéntico al obtenido en el ejercicio 1.4.

1.3. PAR DE FUERZAS

Se llama *par de fuerzas* (véase Figura 1.10) al sistema formado por dos fuerzas de igual módulo, direcciones paralelas y sentidos opuestos.

Por la propia definición *la fuerza resultante* del sistema que forman estas dos fuerzas *es nula.*

El momento del par de fuerzas en un punto cualquiera es:

$$\vec{M}_0 = \vec{r}_1 \wedge \vec{F} + \vec{r}_2 \wedge \left(-\vec{F}\right) = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \wedge \vec{F} = \vec{r} \wedge \vec{F} \tag{1.7}$$

Luego el vector momento $\mathbf{M_O}$ es perpendicular al plano definido por el par de fuerzas y su *módulo*, de acuerdo con la expresión 1.2, tiene de valor:

$$M_0 = F \cdot d \tag{1.8}$$

De la ecuación 1.8 se desprende que el valor de $\mathbf{M_O}$ depende exclusivamente del módulo de las fuerzas que forman el par y de la distancia que existe entre sus líneas de acción, siendo independiente del punto O considerado. En consecuencia $\mathbf{M_O}$ es un vector libre y puede estar aplicado en cualquier punto.

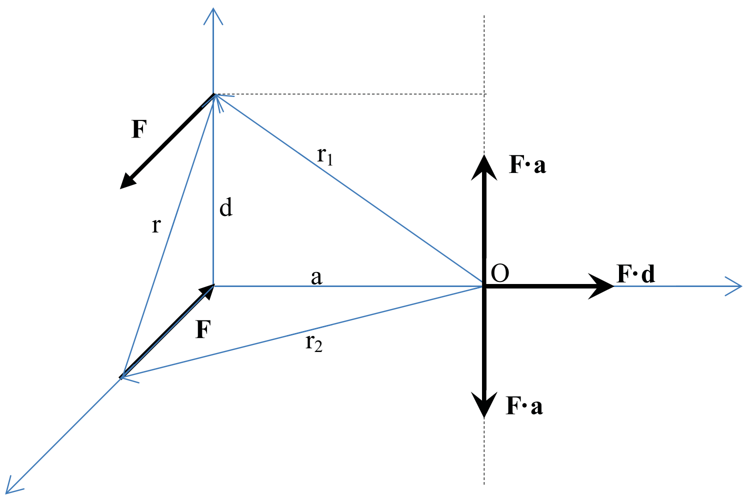
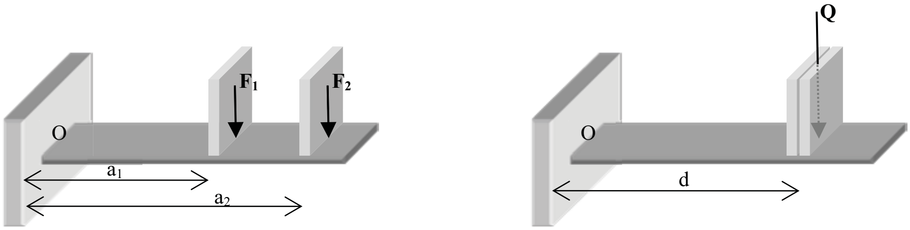


Figura 1.10

Como consecuencia, dos pares de fuerzas son equivalentes si al actuar sobre el mismo sólido producen el mismo momento. Por otra parte, al ser nula la fuerza resultante, cuando un cuerpo está sometido a un par de fuerzas tiene tendencia a girar sin trasladarse.

1.4. SISTEMAS EQUIVALENTES DE FUERZAS

Un sistema de fuerzas $\mathbf{F_1}$ que está actuando sobre un sólido podrá sustituirse por otro sistema equivalente $\mathbf{F_2}$ si cumple que su fuerza resultante $\mathbf{R_2}$ y su momento resultante $\mathbf{M_2}$ respecto de un punto arbitrario O, son iguales a la fuerza resultante $\mathbf{R_1}$ del primer sistema y al momento resultante $\mathbf{M_1}$ de este primer sistema respecto del mismo punto O.



$Q = F_1 + F_2$ $\qquad$ $M_o = F_1 \cdot a_1 + F_2 \cdot a_2 = Q \cdot d$

Figura 1.11

1.4.1. Traslación de una fuerza de un punto a otro

Cualquier fuerza F que actúa sobre un sólido rígido, en un punto A, puede trasladarse a otro punto arbitrario B, siempre que en la nueva posición el sistema sea equivalente al inicial.

Cuando se analiza la acción de una fuerza F sobre un sólido rígido, puede considerarse que dicha fuerza **F** actúa en cualquier punto de su línea de acción.

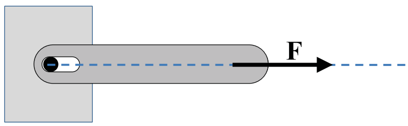


Figura 1.12

Cuando una fuerza **F**, situada en A, se traslada paralelamente a ella a un punto B, para que el sistema sea equivalente, es necesario añadir un momento de valor igual al momento de **F** respecto de B.

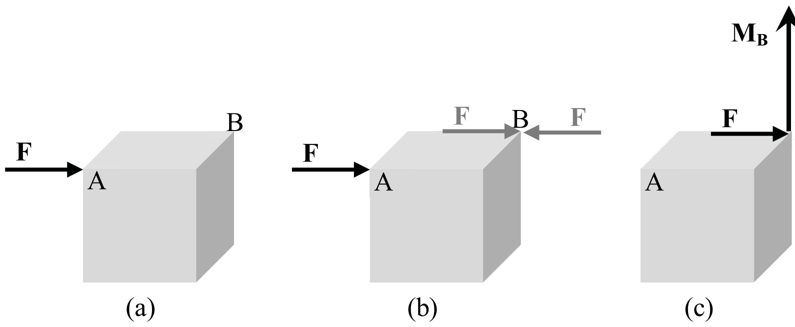


Figura 1.13

En efecto, para trasladar la fuerza **F** al punto B (véase Figura 1.13 (a)) se puede proceder del siguiente modo: En primer lugar, se colocan en dicho punto B dos fuerzas iguales y opuestas cuyo módulo sea F y su dirección paralela a la fuerza que se desea trasladar (b). El sistema formado por las tres fuerzas sigue siendo igual al primero (a) ya que se ha añadido un sistema nulo. A continuación se procede a sustituir el par de fuerzas por su valor (véase Figura 1.13 (a)).

Los sistemas (a) y (c) de la Figura 1.13 son equivalentes.

1.4.2. Reducción de un sistema de fuerzas a una fuerza y un par de fuerzas

Cualquier sistema de fuerzas, teniendo en cuenta lo indicado en el apartado anterior, siempre puede reducirse, en un punto O, a una fuerza resultante **R** y un par $\mathbf{M_O}$. La fuerza resultante **R** se obtiene mediante la suma de los vectores fuerza que forman el sistema. Para obtener el vector momento resultante $\mathbf{M_O}$ se calcula, mediante la expresión 1.1, el vector momento que produce cada una de las fuerzas del sistema en el punto O y posteriormente se realiza la suma vectorial de todos los vectores momento obtenidos.

1.4.3. Reducción de un sistema de fuerzas coplanarias

Un sistema de fuerzas coplanarias (véase Figura 1.14) se reduce a una fuerza resultante **R**, contenida en el plano de actuación del sistema de fueras y a un momento resultante $\mathbf{M_O}$ perpendicular a **R**, ya que todas las fuerzas están en un mismo plano.

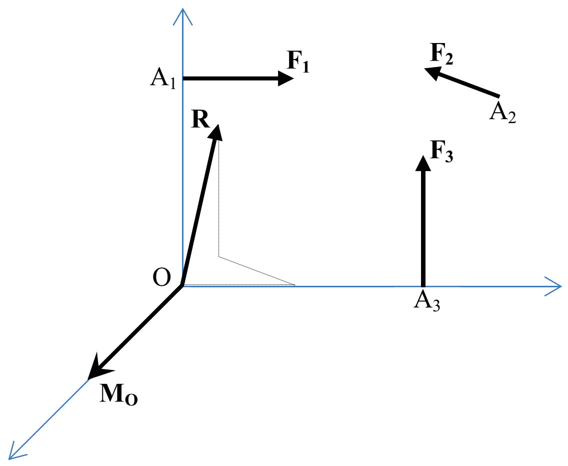


Figura 1.14

1.4.4. Reducción de un sistema de fuerzas paralelas

En un punto O, la fuerza resultante **R** de un sistema de fuerzas paralelas $\mathbf{F_i}$ (véase Figura 1.15) es paralela a dichas fuerzas y su módulo es la suma algebraica de los módulos de las fuerzas que forman el sistema.

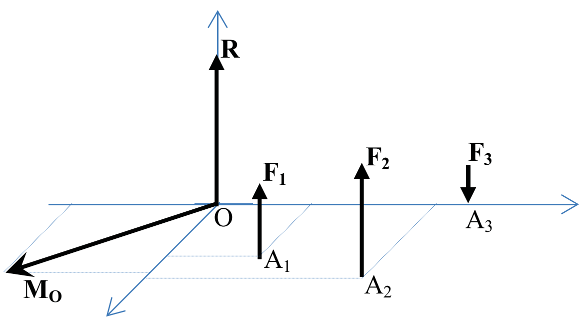


Figura 1.15

En dicho punto O, el sistema de fuerzas producen un momento (*momento resultante*) $\mathbf{M_O}$ que está contenido en el plano perpendicular al sistema $\mathbf{F_i}$.

Ejercicio 1.7

Sustituir la fuerza F, de 20 kN, aplicada en el punto A de la estructura representada en la Figura 1.16 (a), por su acción equivalente en el punto B

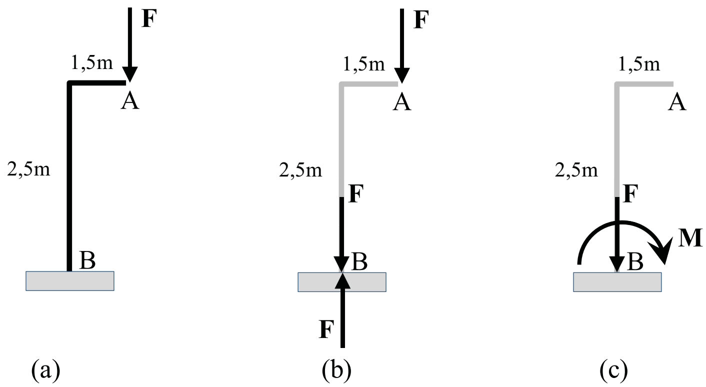


Figura 1.16

Solución

Tal como se muestra en la Figura 1.16 (b) y (c) la fuerza **F** aplicada en el punto A equivale en el punto B a:

- Una fuerza **F** *del mismo valor dirección y sentido*, más un momento $\mathbf{M_B}$ de valor (véase Ec. 1.2)

$$M_B = 20 \cdot 1{,}50 = 30 \text{ kNm}$$

Ejercicio 1.8

En el esquema representado en la Figura 1.17, sustituir las fuerzas F_1 y F_2 por su acción equivalente en el punto O. Datos F_1= 200 N y F_2= 100 N.

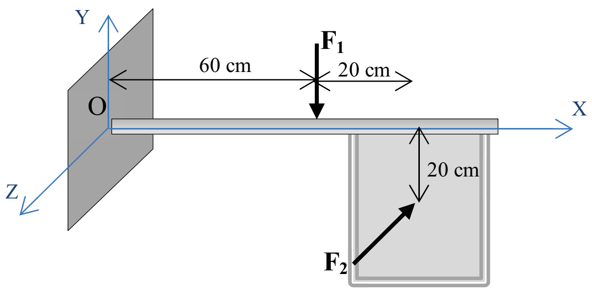


Figura 1.17

Solución

Al trasladar la fuerza $\mathbf{F_1}$ al punto O, se obtiene:

- Una fuerza vertical negativa (igual que $\mathbf{F_1}$) de valor 200 N
- Un momento de sentido contrario al eje Z y de valor:

$M_Z = 200 \cdot 600 = 12 \cdot 10^4 \ \ Nmm$

La fuerza $\mathbf{F_2}$ equivale en el punto O a:

- Una fuerza en la dirección del eje Z y sentido negativo, de valor 100 N
- Un momento en la dirección del eje Y de sentido positivo y valor:

$M_Y = 100 \cdot 800 = 8 \cdot 10^4 \ Nmm$

- Un momento en la dirección del eje X, positivo, de valor:

$M_X = 100 \cdot 200 = 2 \cdot 10^4 \ Nmm$

Sumando los correspondientes vectores, se obtiene una *fuerza resultante*

$$\boldsymbol{\vec{R} = -200\vec{j} - 100\vec{k}}$$

Siendo su módulo:

$$\mathrm{R} = \sqrt{200^2 + 100^2} = 223{,}6\ \mathrm{N}$$

El *momento resultante* es:

$$\boldsymbol{\vec{M}_{R_o} = 2 \cdot 10^4\vec{i} + 8 \cdot 10^4\vec{j} - 12 \cdot 10^4\vec{k}}$$

Y su módulo:

$$\mathrm{M_{R_o}} = \sqrt{2^2 + 8^2 + 12^2} \cdot 10^4 = 14{,}56 \cdot 10^4\ \mathrm{Nmm}$$

Ejercicio 1.9

Sustituir el sistema de fuerzas F_1, F_2, F_3 y F_4, que actúan sobre la viga en voladizo de la Figura 1.18, por su sistema equivalente en el punto A.

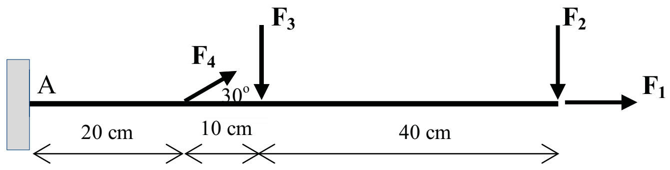


Figura 1.18

Datos: F_1= 50N, F_2= 100N, F_3= 30N, F_4= 80N (inclinada 30º).

Solución

Reducir el sistema de fuerzas en el punto A implica trasladar cada una de las fuerzas a dicho punto y sumar sus efectos.

Según se ha indicado en el apartado 1.4.1, trasladar una fuerza de su punto de aplicación al punto de destino A, implica situar en A una fuerza igual en valor dirección y sentido, más un momento cuyo valor es igual al que produce la fuerza, situada en su posición inicial, respecto del punto A.

La *fuerza resultante* se obtiene por suma vectorial de todas las fuerzas trasladadas al punto A y, del mismo modo, el *momento resultante* es la suma vectorial del momento que cada una de las fuerzas produce en A.

Al estar situadas todas las fuerzas y el punto A en el plano del papel, el vector momento resultante es perpendicular al plano de la figura.

En la siguiente tabla se resume el proceso:

Fuerza	F_x (N)	F_y (N)	Distancia Punto. A (mm)	M_A (N mm)
F_1	50	-	0	0
F_2	-	-100	700	-70000
F_3	-	-30	300	-9000
F_4	69,28	-	0	0
	-	40	200	8000
	119,28	**-90**		**-71000**

Luego la *fuerza resultante* en el punto A:

$$\vec{R} = 119,28\vec{\imath} - 90\vec{\jmath}$$

Siendo su módulo:

$$\mathrm{R} = \sqrt{119{,}28^2 + 90^2} = 149{,}4\ \mathrm{N}$$

El vector *momento resultante* es:

$$\vec{M}_{R_A} = -71 \cdot 10^3 \vec{k}$$

Y su módulo:

$$M_{R_A} = 71 \cdot 10^3\ Nmm$$

<u>Ejercicio 1.10</u>

Sustituir el sistema de fuerzas F_1, F_2, y F_3, que actúan sobre la viga en voladizo de la Figura 1.19, por su sistema equivalente en el punto A y B respectivamente.

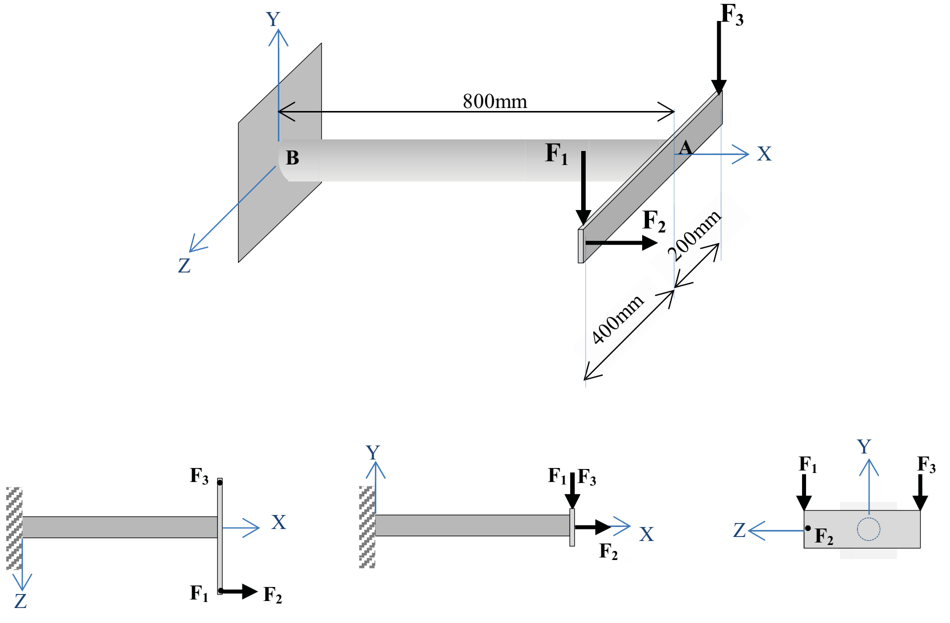


Figura 1.19

Datos: F_1= 300N, F_2= 500N, F_3= 100N.

<u>Solución</u>

- Sistema equivalente en el punto A

En la siguiente tabla se muestra el valor de la fuerza y del momento en el punto A, debido a cada una de las fuerzas del sistema representado.

Fuerza	Componentes (N)			Distancia (mm)			Momento (Nmm)		
	F_X	F_Y	F_Z	X	Y	Z	M_X	M_Y	M_Z
F_1	0	-300	0	0	0	400	$12 \cdot 10^4$	0	0
F_2	500	0	0	0	0	400		$20 \cdot 10^4$	0
F_3	0	-100	0	0	0	200	$-2 \cdot 10^4$	0	0
	500	***-400***	***0***				$\boldsymbol{10 \cdot 10^4}$	$\boldsymbol{20 \cdot 10^4}$	***0***

Luego la *fuerza resultante* en el punto A:

$$\vec{\boldsymbol{R}} = \mathbf{500}\vec{\boldsymbol{\imath}} - \mathbf{400}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Siendo su módulo:

$$\mathrm{R} = \sqrt{500^2 + 400^2} = 640{,}3 \text{ N}$$

El *momento resultante* es:

$$\vec{\boldsymbol{M}}_{\boldsymbol{R_A}} = \mathbf{10} \cdot \mathbf{10^4}\vec{\boldsymbol{\imath}} + \mathbf{20} \cdot \mathbf{10^4}\vec{\boldsymbol{\jmath}}$$

Y su módulo:

$$\mathrm{M}_{\mathrm{R_A}} = \sqrt{10^2 + 20^2} \cdot 10^4 = 22{,}36 \cdot 10^4 \text{ Nmm}$$

- Sistema equivalente en el punto B

De forma similar al caso anterior, en la siguiente tabla se muestra el valor de la fuerza y del momento en el punto B, debido a cada una de las fuerzas del sistema representado.

Fuerza	Componentes (N)			Distancia (mm)			Momento (Nmm)		
	F_X	F_Y	F_Z	X	Y	Z	M_X	M_Y	M_Z
F_1	0	-300	0	800	0	400	$12 \cdot 10^4$	0	$-24 \cdot 10^4$
F_2	500	0	0	800	0	400		$20 \cdot 10^4$	0
F_3	0	-100	0	800	0	200	$-2 \cdot 10^4$	0	$-8 \cdot 10^4$
	500	***-400***	***0***				$\boldsymbol{10 \cdot 10^4}$	$\boldsymbol{20 \cdot 10^4}$	$\boldsymbol{-32 \cdot 10^4}$

La *fuerza resultante* en el punto B es la misma en módulo dirección y sentido que la obtenida anteriormente para el punto A:

$$\boldsymbol{\vec{R} = 500\vec{\imath} - 400\vec{\jmath}} \qquad \boldsymbol{R = 640,3\ N}$$

El *momento resultante* en el punto B es:

$$\boldsymbol{\vec{M}_{R_B} = 10 \cdot 10^4\vec{\imath} + 20 \cdot 10^4\vec{\jmath} - 32 \cdot 10^4\vec{k}}$$

Y su módulo:

$$\boldsymbol{M_{R_B} = \sqrt{10^2 + 20^2 + 32^2} \cdot 10^4 = 39,04 \cdot 10^4\ Nmm}$$

A este mismo resultado se llega partiendo de la resultante del sistema situado en A, que está formado por una fuerza y un momento.

$\vec{R}_A = 500\vec{\imath} - 400\vec{\jmath} \qquad \vec{M}_{R_A} = 10 \cdot 10^4\vec{\imath} + 20 \cdot 10^4\vec{\jmath}$

Al trasladar la fuerza **R**$_{\mathbf{A}}$ al punto B, su valor dirección y sentido no se modifican, con lo cual se obtiene la misma fuerza resultante que anteriormente se ha indicado para el punto B.

Por otra parte, el momento que se produce en B, debido a esta fuerza **R**$_{\mathbf{A}}$ es, según la ecuación 1.1:

$$\vec{M}_{R_{B1}} = \vec{r} \wedge \vec{R}_A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 800 & 0 & 0 \\ 500 & -400 & 0 \end{vmatrix} = -32 \cdot 10^4\ \vec{k}$$

El momento **M**$_{\mathbf{RA}}$ que actúa en A, como vector libre, se traslada a B, con el mismo valor, dirección y sentido:

$$\vec{M}_{R_{B2}} = 10 \cdot 10^4\vec{\imath} + 20 \cdot 10^4\vec{\jmath}$$

El momento final en el punto B es la suma de los dos anteriores;

$$\vec{M}_{R_B} = \vec{M}_{R_{B1}} + \vec{M}_{R_{B2}} = 10 \cdot 10^4\vec{\imath} + 20 \cdot 10^4\vec{\jmath} - 32 \cdot 10^4\ \vec{k}$$

Valor que coincide con el obtenido anteriormente

Ejercicio 1.11

Sobre el tablero de una mesa se ha colocado un objeto en una posición tal que, el peso transmitido al suelo por cada una de las patas de la mesa es el que se muestra en la Figura 1.20. Supuesto que los ejes de las patas forman un cuadrado de 150x150cm, obtener el valor del peso del objeto y su posición.

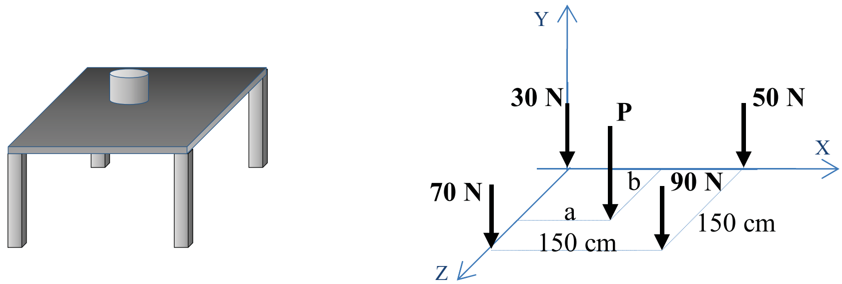


Figura 1.20

Solución

Según lo indicado en el primer párrafo de este apartado 1.4 dos sistemas de fuerzas son equivalentes si tienen la misma fuerza resultante y el momento resultante, respecto de un punto arbitrario, es el mismo.

De acuerdo con ello para resolver el problema se supondrán dos sistemas de fuerza, el primero formado por el peso transmitido por las cuatro patas, y el segundo por el peso del objeto.

Puesto que las fuerzas son todas verticales su resultante será la suma algebraica de sus módulos y este valor es el peso del objeto.

$$\boldsymbol{P} = 30 + 50 + 70 + 90 = \mathbf{240}\ \boldsymbol{N}$$

Con el fin de simplificar los cálculos, sin perder generalidad, se fija el sistema de referencia coincidiendo con una de las patas.

Plantear la igualdad de momentos respecto de un punto es equivalente a plantear la igualdad de momentos respecto de tres ejes ortogonales concurrentes.

De acuerdo con la expresión 1.4, el momento del primer sistema de fuerzas respecto de los ejes coordenados es:

- Momento respecto del eje X:

$$M_X = (90 + 50) \cdot 1500 = 210000\ Nmm$$

- El momento respecto del eje Y es nulo, al ser las fuerzas paralelas a dicho eje
- El momento respecto del eje Z vale:

$$M_Z = (70 + 90) \cdot 1500 = 240000\ Nmm$$

Debido al peso del objeto, el momento respecto de los ejes coordenados es:

$M_X = P \cdot a = 240 \cdot a \qquad M_Y = 0 \qquad M_Z = P \cdot b = 240 \cdot b$

Igualando valores se obtiene la posición del objeto sobre el tablero de la mesa

$$\boldsymbol{a = 87,5\ cm \qquad b = 100\ cm}$$

Ejercicio 1.12

Obtener el valor y punto de paso de la resultante del sistema de fuerzas representado en la Figura 1.21.

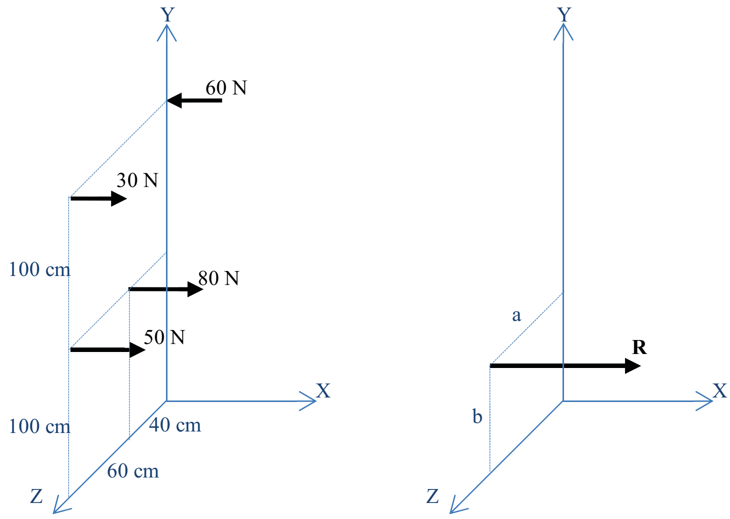


Figura 1.21

Solución

Al ser un sistema de fuerzas paralelas, la resultante será un vector en la dirección del eje X, siendo su módulo la suma de los módulos del sistema de fuerzas:

$$\mathrm{P} = 50 + 80 + 30 - 60 = 100\ \mathrm{N}$$

El punto de paso se obtiene planteando la igualdad de momentos respecto de dos ejes ortogonales (Y, Z).

Tomando momentos respecto del eje Y se obtiene la distancia horizontal de la resultante al eje Y.

$M_Y = 50 \cdot 100 + 80 \cdot 40 + 30 \cdot 40 = 9400\ Ncm = 100 \cdot a$

De donde se obtiene: ***a = 94 cm***

La distancia vertical de la resultante al eje Z se obtiene:

$$M_Y = -50 \cdot 100 - 80 \cdot 100 - 30 \cdot 200 + 60 \cdot 200 = -7000\, Ncm = -10 \cdot b$$

De donde se obtiene: ***b = 70 cm***

1.5. EQUILIBRIO DE UNA PARTÍCULA

De acuerdo con la primera ley de Newton, una partícula sobre la que está actuando un sistema de fuerzas cuya resultante es nula (véase Figura 1.22), o permanece en reposo o sigue un movimiento rectilíneo uniforme.

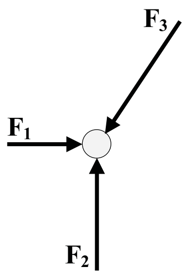


Figura 1.22

Así pues, la condición necesaria y suficiente para que una partícula sometida a un sistema de fuerzas esté en equilibrio estático es que sea nula la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre ella.

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \cdots + \vec{F}_n = \vec{R} = \vec{0} \tag{1.9}$$

La ecuación vectorial 1.9, es equivalente, en un sistema de referencia de ejes cartesianos, a las tres ecuaciones escalares siguientes:

$$R_X = 0 \qquad R_Y = 0 \qquad R_Z = 0 \tag{1.10}$$

Ejercicio 1.13

Calcular el valor de las fuerzas F_1 y F_2 para que la unión de barras representada en la Figura 1.23 esté en equilibrio.

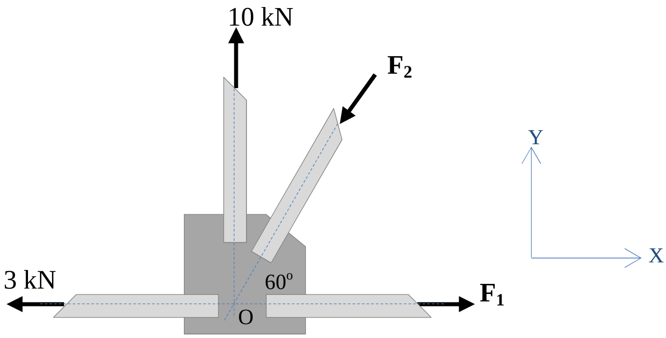


Figura 1.23

Solución

El problema se resuelve planteando el equilibrio del punto (partícula) O en el cual coinciden todos los ejes de las barras que forman el nudo representado.

Sobre este punto O están actuando cuatro fuerzas de las cuales se conocen sus direcciones y los módulos de dos de ellas. Para obtener el valor de las fuerzas $\mathbf{F_1}$ y $\mathbf{F_2}$ se aplicará el sistema de ecuaciones 1.10.

$R_X = 0 \quad \Rightarrow \quad F_1 - F_2 \cdot \cos 60^o - 3 = 0$

$R_Y = 0 \quad \Rightarrow \quad 10 - F_2 \cdot \sin 60^o = 0$

$R_Z = 0 \quad \Rightarrow \quad 0 = 0$

Resolviendo se obtiene:

$$\boldsymbol{F_1 = 14,55\ kN} \qquad \boldsymbol{F_2 = 11,55\ kN}$$

Ejercicio 1.14

Sabiendo que la fuerza que realiza el cable A es de 500 N, obtener la fuerza necesaria en los cables B y C para que la resultante de las fuerzas ejercidas por los tres cables en el punto O, situado a tres metros de altura, sea vertical (véase Figura 1.24).

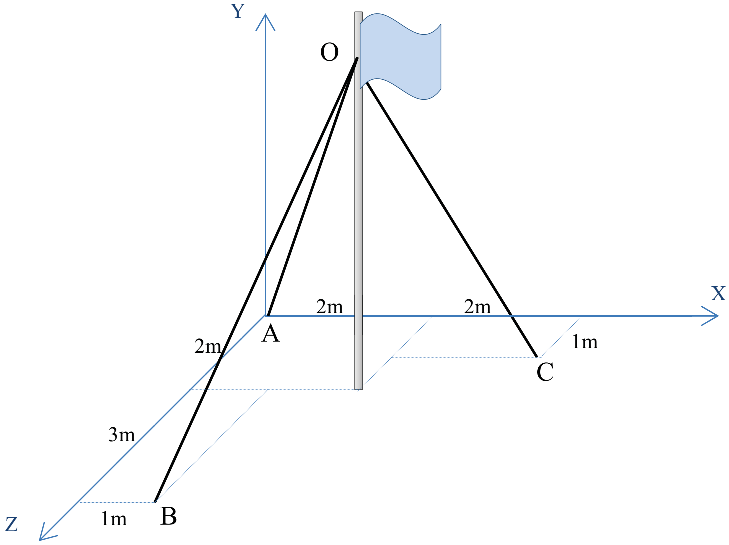


Figura 1.24

Solución

Para plantear el equilibrio en el punto O es necesario, en primer lugar, determinar los versores directores de cada cable:

$$\vec{v}_{OA} = \frac{1}{\sqrt{17}} \cdot \left(-2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}\right) = -0{,}485\vec{\imath} - 0{,}728\vec{\jmath} - 0{,}485\vec{k}$$

$$\vec{v}_{OB} = \frac{1}{\sqrt{19}} \cdot \left(-\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} + 3\vec{k}\right) = -0{,}229\vec{\imath} - 0{,}688\vec{\jmath} + 0{,}688\vec{k}$$

$$\vec{v}_{OC} = \frac{1}{\sqrt{14}} \cdot \left(2\vec{\imath} - 3\vec{\jmath} - \vec{k}\right) = 0{,}535\vec{\imath} - 0{,}802\vec{\jmath} - 0{,}267\vec{k}$$

Conocida la dirección en la que actúa cada uno de los cables, se puede expresar la fuerza ejercida por cada uno de ellos de forma vectorial:

$$\vec{F}_A = 500 \cdot \left(-0{,}485\vec{\imath} - 0{,}728\vec{\jmath} - 0{,}485\vec{k}\right) = -242{,}5\vec{\imath} - 364{,}0\vec{\jmath} - 242{,}5\vec{k}$$

$$\vec{F}_B = F_B \cdot \left(-0{,}229\vec{\imath} - 0{,}688\vec{\jmath} + 0{,}688\vec{k}\right)$$

$$\vec{F}_C = F_C \cdot \left(0{,}535\vec{\imath} - 0{,}802\vec{\jmath} - 0{,}267\vec{k}\right)$$

Para que la resultante de estas tres fuerzas sea vertical la suma de las componentes según los ejes X y Z han de ser nulas:

Para seguir leyendo haga click aquí