MATEMÀTICA DISCRETA

2ª edició

Robert Fuster Capilla

MONOGRAFIES DE LA UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Sobre ciència, tecnologia i art

Renaixença i futur

Matemàtica Discreta

2ª edició

Robert Fuster Capilla

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Revisió lingüística: Àrea de Promoció i Normalització Lingüística de la UPV

"La publicació d'aquest llibre ha rebut una ajuda de l'Àrea de Promoció i Normalització Lingüística de la Universitat Politècnica de València per a la redacció de manuals universitaris en valencià"

Primera edició, 2010
Segona edició, 2014

distribució: Telf. 963 877 012 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 3587_01_02_01

Imprimeix: Byprint Percom, sl

Imprés en paper Coral Book

ISBN: 978-84-9048-200-1
Imprés sota demanda

Imprés a Espanya

Sumari

Introducció

Defensa el teu dret a pensar, perquè fins i tot pensar de manera errada és millor que no pensar.
HIPÀTIA D'ALEXANDRIA

Matemàtica discreta

Per a l'autor d'aquest llibre resulta difícil explicar què és la matemàtica discreta. Aparentment es tracta d'una *nova* disciplina matemàtica, sorgida de les necessitats de la informàtica, atès que forma part del currículum dels estudis d'Enginyeria Informàtica i (segurament) només els estudiants d'informàtica han de cursar-la.

El terme *discret* s'empra en matemàtiques, més o menys, com un antònim de *continu*; s'entén que allò que no és continu (bàsicament, els conjunts finits o numerables) és discret. L'anàlisi i gran part de la topologia centren el seu interès en les matemàtiques d'allò continu i, en conseqüència, les matemàtiques discretes es farien càrrec d'allò què és discret. Com que els mecanismes lògics i les possibilitats físiques d'emmagatzematge de la informació propis de la informàtica tenen una natura bàsicament discreta, resulta ben lògic que aquesta matèria s'haja introduït discretament en els estudis d'aquesta enginyeria.

Tot i això, si fem una ullada a l'índex de qualsevol llibre o curs de matemàtica discreta ens trobarem, certament, amb capítols inequívocament discrets, com ara els que s'hi dediquen a la combinatòria (l'art de comptar), la teoria de grafs, l'algorísmica o l'àlgebra de Boole,[1] però, al costat d'aquests temes ens trobem amb diverses qüestions (lògica matemàtica, teoria de conjunts, relacions i estructures algèbriques, o la mateixa àlgebra de Boole, entesa com una estructura matemàtica) que, evidentment, no es poden qualificar de matemàtiques del continu, però tampoc no encaixen en la idea de les matemàtiques dels conjunts finits o numerables. És clar que no es poden classificar les matemàtiques en contínues i discretes, sinó que hi ha força àmbits dins el món de les matemàtiques que no hi caben. En realitat, aquestes *altres* matèries formen part del que s'entén per fonaments de les matemàtiques i de l'àlgebra i, de fet, la teoria de conjunts i, si més no, els principis bàsics de la lògica matemàtica estan presents implícitament en totes les matemàtiques.

Així, si atenem als continguts de les assignatures en els estudis d'Enginyeria Informàtica, probablement serà més adequat definir la matemàtica discreta com la matemàtica específica de les ciències de la computació. Totes les enginyeries requereixen un corpus matemàtic genèric, però les especificitats de cadascuna ens obliguen a aprofundir més en algunes

[1] Si s'interpreta l'àlgebra de Boole com l'aritmètica del *zero o u*, *fals o vertader*, *obert o tancat*, certament no hi ha cap matemàtica que siga més discreta que l'àlgebra de Boole.

qüestions o, fins i tot, a estudiar-ne algunes que no són necessàries en altres contextos; en el cas de la informàtica, aquestes matemàtiques específiques inclouen les tècniques pròpiament discretes de la combinatòria i els grafs, els fonaments teòrics de la lògica simbòlica i la teoria de conjunts, que inclou la formalització algèbrica de les estructures i les relacions binàries. En diversos aspectes, com ara la criptografia, es fa necessari un bon coneixement de la teoria de nombres. Tot això (i alguna cosa més) és el que entenem per matemàtica discreta, si més no, en l'àmbit d'una matèria pròpia dels estudis d'informàtica.

Sobre aquest llibre

Aquest és un llibre de text destinat als estudiants d'informàtica (o de matemàtiques, o d'alguna altra enginyeria) que cursen la matèria en un quadrimestre del primer any. Els continguts, el grau de profunditat amb què es tracten, l'ordenació amb què es presenten i —especialment— la manera en què s'estructura el llibre són els que em semblen més adequats en aquest context i s'ajusten bastant a la manera en què s'ha anat desenvolupant la docència en l'assignatura de Matemàtica Discreta i Àlgebra a l'Escola Tècnica Superior d'Informàtica Aplicada al llarg dels darrers anys; com que aquests continguts i aquestes metodologies no són gaire llunyanes de les que es fan servir en altres centres universitaris, confiem que el nostre text també hi podrà ser d'utilitat.

L'hem dividit en sis capítols, que corresponen a les sis grans àrees que hi tractem. Però, tenint en compte que es tracta d'un llibre *de text*, cada capítol es divideix en diverses *unitats temàtiques* (o *lliçons*, si fem servir un llenguatge més clàssic). Hem procurat que cada unitat continga l'explicació suficientment exhaustiva de la matèria corresponent, en el llenguatge que considerem adequat en aquest context,[2] i il·lustrar tots els conceptes i gairebé totes les propietats amb els exemples pertinents. Al final de cada unitat incloem una llista de problemes de classe, destinada a ser resolta en una sessió d'aula, i una altra de problemes proposats que els estudiants hauran de resoldre pel seu compte. Quasi sempre es tracta d'exercicis senzills, orientats a confirmar que l'estudiant ha assolit els objectius de la unitat; tot i això, en alguns casos aprofitem els exercicis proposats per a introduir conceptes, tècniques o idees que no estan presents en el text.

[2]Fugint del formalisme, però sense abandonar el rigor; amb rigor, però sense veure'ns obligats a justificar formalment sempre, i fins al darrer detall, tot allò que afirmem.

En tot cas, el nombre d'exercicis és reduït, perquè la intenció de l'autor és que tots els problemes de classe es resolguen durant el curs i que l'estudiant resolga, o almenys intente resoldre, tots els problemes proposats. El millor company d'aquest llibre és un bon llibre de problemes que proporcione molts més exercicis i —sobretot— que plantege alguns problemes interessants; els meus favorits són el de Carmen Alegre, Ana Martínez i Mari Carmen Pedraza,[3] i el de Joan Trias.[4]

Tot i estar dividit en sis capítols, el llibre s'estructura formalment sobre la base de les unitats temàtiques, que es numeren consecutivament des de la 1 fins a la 23 (com que el capítol primer conté les unitats 1, 2, 3 i 4, el capítol segon comença en la unitat 5), i la numeració de tots els altres elements (apartats, fórmules, figures...) és sempre relativa a la unitat actual (per exemple, el punt 5.3.2 és el segon subapartat del tercer apartat de la unitat temàtica 5).

Aquest llibre és el fruit d'uns quants anys de docència a la Universitat Politècnica de València en col·laboració amb uns companys magnífics. Si hi trobeu alguna cosa interessant, probablement Carmen Alegre, Pilar Bravo, Ramon Esteban, Ana Martínez, Paco Monserrat, Mari Carmen Pedraza, Tatiana Pedraza, José Antonio Verdoy i Ricardo Zalaya en són els responsables.

València, març de 2009
Robert Fuster

Segona edició

A banda de corregir les errades que he pogut trobar (i d'afegir-ne probablement unes quantes més), en aquesta segona versió del llibre, he introduït diverses modificacions; la més important, un augment del capítol dedicat a la teoria de grafs, per tal d'incloure-hi alguns temes que impartim actualment a l'Escola Tècnica Superior d'Enginyeria Informàtica (bàsicament, els algorismes de recorregut en grafs, de recerca de camins de cost mínim i de fluxos màxims en xarxes de transport). Tot i això, aquest és un tractament introductori de la teoria de grafs, que no pot substituir una assignatura específica. Paral·lelament, he reordenat els capítols, precisament per tractar els grafs més aviat.

A banda d'això, he reescrit ací i allà alguns paràgrafs que no em semblaven del tot clars, he refet quasi tots els dibuixos i, aprofitant la inclusió

[3] Carmen Alegre Gil, Ana Martínez Pastor i M. Carmen Pedraza Aguilera: *Problemas de matemática discreta*. Editorial UPV, València, 1997.

[4] Joan Trias Pairó: *Matemàtica discreta. Problemes resolts*. Edicions UPC, Barcelona, 2001.

d'alguns de nous, he donat una forma més adequada als algorismes que presente.

Per acabar, vull agrair als meus companys de la Universitat Politècnica els suggeriments que m'han fet i els elogis tan amables al meu llibre, i afegir un parell d'aclariments que em fa gràcia fer constar.

La imatge de la portada és una il·lustració de l'*Ars Magna*, de Ramon Llull, antecedent lògic de la Màquina de Turing i dels ordinadors; que Llull pretenguera fer-la servir per justificar les seues tesis teològiques no li resta cap mèrit.

L'altre aclariment fa referència a una casualitat curiosa: pràcticament alhora que es va publicar aquest llibre, l'Amenábar estrenà la seua pel·lícula *Ágora*. Puc assegurar que no en tenia ni idea, però em plau compartir amb ell l'admiració per Hipàtia, filòsofa, matemàtica, dona valenta i víctima de la intolerància.

l'Eliana, 6 de febrer de 2014

RF

Capítol primer

Introducció a la lògica matemàtica

–I com saps que tu ets boig?
–Per començar –digué el gat–, els gossos no són bojos. D'acord?
–Això supose –concedí Alícia.
–Bé. Aleshores –continuà el gat–, tu saps que els gossos grunyen quan estan emprenyats, i menegen la cua quan estan contents. Ara, jo gruny quan estic content, i menege la cua quan estic emprenyat. En conseqüència, jo sóc boig.
LEWIS CARROLL (ALÍCIA AL PAÍS DE LES MERAVELLES)

La finalitat primària de la lògica és la validació d'un determinat raonament, és a dir, la discussió sobre si aquest raonament és o no correcte. Per això, la lògica és una eina bàsica de qualsevol àrea de la ciència, teòrica o experimental, bàsica o aplicada, de les ciències de la natura i de les ciències humanes. No podem admetre com a científic un discurs que no siga (si més no) consistent des del punt de vista lògic.

Tot i això, hi ha dues disciplines en les quals la lògica té un paper central: la filosofia i les matemàtiques. De fet, la lògica és matèria específica tant en els estudis de filosofia com en els de matemàtiques. Des del punt de vista de les matemàtiques, els raonaments lògics es poden formalitzar amb un llenguatge simbòlic i, en gran part, es poden reduir a operacions algèbriques, i per això mateix parlem de *lògica matemàtica*.

Al llarg de la història hi ha hagut diversos matemàtics que s'han esforçat en la recerca d'aquesta *algebrització* de la lògica, però ha estat cap a finals del segle XIX i primeries del XX quan s'ha arribat a la formalització que coneixem ara. Aquest procés està fortament lligat als orígens i el desenvolupament de la informàtica: la lògica proporciona les bases teòriques per a dissenyar màquines capaces de reproduir (o almenys simular) els nostres raonaments, però també s'aplica en el disseny i l'avaluació de programes, en la intel·ligència artificial i en molts altres camps.

En aquest capítol dedicarem dues unitats a la *lògica proposicional* i una a la *lògica de predicats*. En la primera unitat estudiarem les proposicions, els connectors i les taules de veritat, i en la segona unitat abordarem l'objectiu bàsic de la lògica: la inferència (és a dir, l'estudi de la consistència dels raonaments) en el camp del càlcul proposicional. En la tercera unitat introduirem el càlcul de predicats per tal d'aplicar els processos d'inferència en algunes situacions on la lògica de proposicions no pot arribar. Finalment, incloem una petita unitat temàtica dedicada a la demostració en matemàtiques, que és el mecanisme fonamental de validació dels resultats en aquest camp; l'incloem ací perquè la validesa de les proves matemàtiques es fonamenta en la inferència lògica.

Sumari

Unitat temàtica 1.

Proposicions, taules de veritat i connectors

1.1. Proposicions

Els elements bàsics de la lògica són les proposicions.

Definició 1.1. (Proposició)

> *Una* proposició *és una afirmació de la qual es pot dir sense ambigüitat (i de forma excloent) que és certa o que és falsa.*

Per exemple, les afirmacions

Jaume Roig fou un home
Isabel de Villena fou una dona

són proposicions certes. En canvi,

El gos és un amfibi

és una proposició falsa.

☞ Fixeu-vos bé en la definició de proposició: una afirmació que es pot saber si és certa o falsa és una proposició, així que, **Avui plou** o **La Terra és un satèl·lit de la Lluna** són proposicions. Però no ho és, per exemple, **Et sembla que anem al teatre?** Perquè una pregunta no afirma res. Ni algunes expressions com ara **Aquest home és massa gran per a la meua filla**, perquè no està clar (és ambigu) el valor del quantitatiu *massa*.

Tampoc no és una proposició la frase **Aquesta és una proposició falsa**. (Per què?)

El nostre objectiu primer és *algebritzar* la lògica. Per això, representarem les proposicions mitjançant lletres minúscules o majúscules (p, q, r..., P, Q, R...), els assignarem un *valor* segons que siguen certes o falses, i tot seguit introduirem símbols especials per a manipular les proposicions i les relacions entre aquestes.

Definició 1.2. (Valor lògic d'una proposició)

> *El* valor lògic *d'una proposició és* 1 *quan és certa i* 0 *si és falsa.*

1.2. Connectors

Les proposicions es poden combinar entre si per fer-ne de noves mitjançant els *connectors lògics*. De seguida veurem quins són els què es fan servir habitualment, però els connectors bàsics són la *negació (no)*, la *disjunció (o)* i la *conjunció (i)*.

Vegem uns quants exemples de proposicions que fan servir aquests connectors:

Jaume Roig fou un home i Isabel de Villena fou una dona
L'argó és un gas noble o l'any té 400 dies
L'argó és un gas noble i l'any té 400 dies
Jaume Roig no fou un home

(Quines d'aquestes proposicions us semblen certes?)

Els connectors es representen amb símbols especials:

$\neg$ representa la negació lògica. Així, si P és la proposició **Jaume Roig fou un home**, aleshores la proposició **Jaume Roig no fou un home** es representa d'aquesta manera: $\neg P$ (que es llegeix «no P»).

$\vee$ representa la disjunció lògica. Si P és la proposició **L'argó és un gas noble** i Q la proposició **L'any té 400 dies**, aleshores la proposició **L'argó és un gas noble o l'any té 400 dies** es representa com $P \vee Q$ (que es llegeix «P o Q»).

$\wedge$ representa la conjunció lògica. Si P és la proposició **L'argó és un gas noble** i Q la proposició **L'any té 400 dies**, aleshores la proposició **L'argó és un gas noble i l'any té 400 dies** es representa com $P \wedge Q$ (que es llegeix «P i Q»).

Les proposicions més simples (que no inclouen connectors) s'anomenen *àtoms* o *proposicions atòmiques*. Les compostes per altres proposicions i connectors s'anomenen *molècules* o *proposicions moleculars*. Aquesta classificació es correspon, aproximadament, amb la distinció gramatical entre oracions simples i compostes (on els *connectors* són, bàsicament, les conjuncions i alguns signes de puntuació).

De vegades, es representen les proposicions (atòmiques o moleculars) amb lletres majúscules (P, Q, R...) i es reserva l'ús de les minúscules per al cas en què es vol puntualitzar que una proposició és atòmica. Nosaltres, però, farem servir indistintament les majúscules o les minúscules per a representar qualsevol tipus de proposició.

1.2.1. Els connectors més usuals

En lògica matemàtica s'admeten diversos connectors. En aquest apartat definirem els més habituals. Primer de tot, recordem els connectors bàsics que ja hem introduït:

La negació «no» (simbòlicament, $\neg$)

Definició 1.3.

Si P és una proposició, llavors la negació de P, $\neg P$ (verbalment, «no P») és una proposició que és certa només quan la proposició P és falsa.

Així que si P és falsa, $\neg P$ serà certa i si P és certa, $\neg P$ serà falsa. En electrònica i informàtica sol representar-se aquest connector amb el seu nom en anglès: **NOT**.

El connector $\neg$ és *unari* (és a dir, que *connecta* una sola proposició). La resta dels connectors que definirem tot seguit són *binaris*, en el sentit que a partir de dues proposicions en creen una de nova.

La conjunció «i» (simbòlicament, $\wedge$)

Definició 1.4.

Si P i Q són dues proposicions, llavors $P \wedge Q$ (verbalment, «P i Q») és una proposició que és certa només quan les dues proposicions P i Q ho són.

De manera que si una de les dues proposicions P i Q és falsa, també ho serà $P \wedge Q$. Aquest connector es representa també com **AND**.

La disjunció «o» (simbòlicament, $\vee$)

Definició 1.5.

Si P i Q són dues proposicions, llavors $P \vee Q$ (verbalment, «P o Q») és una proposició que és certa sempre que almenys una de les proposicions P i Q ho és.

Això vol dir que $P \vee Q$ és certa en tres casos: quan P és falsa i Q és certa; quan P és certa i Q és falsa i també quan P i Q són certes. Aquest connector es representa també com **OR**.

Potser el llenguatge natural és ambigu en aquest punt i algunes persones poden interpretar que $P \vee Q$ ha de ser certa *només* quan una de les dues (però no totes dues) proposicions P i Q és certa. En lògica es distingeix aquesta possibilitat mitjançant un altre connector lògic:

La disjunció *excloent* «o ... o ...» (simbòlicament, $\triangle$)

DEFINICIÓ 1.6.

> *Si P i Q són dues proposicions, llavors $P \triangle Q$ (verbalment, «*o *P* o *Q») és una proposició que és certa quan una de les dues proposicions P i Q ho és i l'altra, no. En qualsevol altre cas aquesta afirmació serà falsa.*

És a dir, perquè $P \triangle Q$ siga certa el que ha de passar és que P siga certa i Q falsa, o bé que P siga falsa i Q certa. Quan P i Q són les dues certes o les dues falses, llavors $P \triangle Q$ és falsa. Aquest connector es representa també com **XOR**.

Així doncs, la proposició

L'argó és un gas noble o la setmana té 7 dies

és certa (perquè es tracta d'una disjunció i les dues proposicions atòmiques que la componen són certes), però

O l'argó és un gas noble o la setmana té 7 dies

és falsa (perquè es tracta d'una disjunció excloent).[1]

El condicional «si ... aleshores ...» (simbòlicament, $\rightarrow$)

DEFINICIÓ 1.7.

> *Si P i Q són dues proposicions, llavors $P \rightarrow Q$ (verbalment, «*si *P* aleshores *Q») és una proposició que és falsa només quan P és certa i Q és falsa.*

En la proposició $P \rightarrow Q$ es diu que P és l'*antecedent* i Q és el *conseqüent.*

Cal entendre correctament el significat d'aquest connector: el que afirma és que si P és una proposició certa, aleshores Q també és certa; però no s'afirma res *sobre la certesa de P i Q*! Ni tampoc s'afirma cap relació entre P i Q. Per exemple, la proposició

Si Robert és Déu, aleshores els gats volen

[1] En el seu llibre *Cómo hablar, demostrar y resolver en Matemáticas*, el professor Miguel de Guzmán ens fa observar que en altres idiomes no existeix l'ambigüitat en la disjunció; concretament, posa els exemples del llatí, l'anglès (noteu la distinció entre «... *or* ...» i «*either* ... *or* ...») i l'alemany.

és certa, perquè les dues proposicions, **Robert és Déu** i **Els gats volen**, són falses. Mirem d'aclarir-ho amb un altre exemple: suposem que una mare li diu al seu fill:

Si aproves l'examen de lògica, aleshores et regalaré la moto

Per decidir si la mare diu la veritat o menteix haurem d'esperar que es coneguen els resultats de l'examen de lògica. Aleshores, poden passar quatre coses:

1. El fill no aprova l'examen i la mare no li regala la moto.
2. El fill no aprova l'examen i la mare li regala la moto.
3. El fill aprova l'examen i la mare no li regala la moto.
4. El fill aprova l'examen i la mare li regala la moto.

En els dos primers casos, la mare no ha mentit, perquè no s'havia compromès a res en cas que el fill no aprovés.[2] En l'últim cas, és clar que la mare tampoc no ha mentit.

Així que la mare només menteix en el tercer cas: P (**El fill aprova**) és certa i Q (**la mare li regala la moto**) és falsa.

El bicondicional «... si i només si ...» (simbòlicament, $\leftrightarrow$)

Definició 1.8.

Si P i Q són dues proposicions, llavors $P \leftrightarrow Q$ (verbalment, «P si i només si *Q») és una proposició que és certa quan les dues proposicions P i Q són certes i també quan les dues proposicions són falses, i és falsa en qualsevol altre cas.*

Per exemple, aquestes dues proposicions són certes:

Robert és Déu si i només si els gats volen
L'argó és un gas noble si i només si la setmana té set dies

1.2.2. Ús de parèntesis

Quan una proposició inclou més d'un connector caldrà evitar certes ambigüitats. El llenguatge natural inclou moltes d'aquestes ambigüitats, que no es poden admetre en el context lògic. Per exemple, l'afirmació

En aquest instant plou i fa sol o està nevant

no és precisa mentre no introduïm algun signe de puntuació. Com ara,

[2] Noteu que la mare no li ha dit al fill que si no aprova no hi ha moto!

En aquest instant plou, i fa sol o està nevant
En aquest instant plou i fa sol, o està nevant

Quan representem simbòlicament les proposicions evitarem les ambigüitats mitjançant l'ús dels parèntesis. En l'exemple que ens ocupa, l'expressió

$$P \wedge Q \vee R$$

seria ambigua (i, per tant, no pot representar cap proposició). Les possibles expressions correctes són aquestes:

$$P \wedge (Q \vee R)$$
$$(P \wedge Q) \vee R$$

En principi, el nombre de parells de parèntesis necessari és un menys que el de connectors (amb un sol connector no caldrà cap parèntesi, amb dos haurem de posar-ne un parell, amb tres, dos parells, i així successivament). Per exemple, en

$$(P \wedge (Q \vee R)) \to (P \wedge (\neg Q))$$

hi ha cinc connectors i quatre parells de parèntesis. Ara bé, per a reduir el nombre de parèntesis necessari per a representar les proposicions complexes s'estableix una *prioritat* en l'abast dels connectors. Aquesta és, de major a menor,

$$\begin{array}{cl} \leftrightarrow \quad \triangle & \text{(prioritat màxima)} \\ \to & \\ \wedge \quad \vee & \\ \neg & \text{(prioritat mínima)} \end{array}$$

Que l'abast d'un connector és més gran que la d'un altre vol dir que en absència de parèntesis el segon s'executa abans que no el primer (en altres paraules, el primer connector *abasta* una expressió més àmplia), de manera que, per exemple, en l'expressió $\neg P \leftrightarrow Q$ la negació s'ha d'aplicar únicament a la proposició P, abans d'aplicar la bicondicional; en altres paraules, $\neg P \leftrightarrow Q$ és el mateix que $(\neg P) \leftrightarrow Q$.

Cal notar que els connectors disjunció i conjunció tenen el mateix abast, així que en cap cas no es pot escriure $P \wedge Q \vee R$, perquè no hi ha cap manera de decidir si aquesta expressió representa $(P \wedge Q) \vee R$ o bé $P \wedge (Q \vee R)$.[3]

Estudiarem la possibilitat de suprimir els parèntesis amb alguns exemples.

[3]Molts autors prefereixen utilitzar els signes $+$ i $\cdot$ en comptes de $\vee$ i $\wedge$, és a dir, que en comptes de $P \vee Q$ escriuen $P + Q$. Quan s'adopta aquesta notació es dóna prioritat a la disjunció, de manera que $P \cdot Q + R$ és equivalent a $(P \cdot Q) + R$.

EXEMPLE 1.1.

Expressem lògicament l'afirmació següent amb el mínim nombre de parèntesis possible:

> **Si avui plou, aleshores demà no eixirem a pescar o pescarem un refredat.**

Definint les proposicions següents

P: **avui plou**
Q: **demà eixirem a pescar**
R: **pescarem un refredat**

podem escriure la proposició d'aquesta manera:

$$P \to ((\neg Q) \vee R)$$

Ara bé, com que la negació és el connector de menor abast, podem suprimir el parèntesi en $(\neg Q)$:

$$P \to (\neg Q \vee R)$$

D'altra banda, com que el condicional té preferència sobre la disjunció, també podem suprimir aquests parèntesis, de manera que podem escriure la nostra expressió com

$$P \to \neg Q \vee R \quad \square$$

EXEMPLE 1.2.

Fem el mateix amb l'expressió

> **Avui plou, i si demà eixim a pescar, aleshores pescarem un refredat.**

Fent servir les mateixes proposicions P, Q i R, ja hem vist que aquesta afirmació es pot expressar simbòlicament com

$$P \wedge (Q \to R)$$

però ara no hi podem suprimir els parèntesis, perquè l'expressió $P \wedge Q \to R$ significaria **Si avui plou i demà eixim a pescar, aleshores pescarem un refredat.** $\square$

Finalment, estudiem un cas més complex.

EXEMPLE 1.3.

Suprimim el màxim de parèntesis que siga possible en l'expressió

$$(P \wedge (Q \vee R)) \to (P \wedge (\neg Q))$$

Ací la negació afecta únicament la darrera aparició de Q, així que aquesta proposició és equivalent a

$$(P \wedge (Q \vee R)) \to (P \wedge \neg Q)$$

D'altra banda, entre tots els connectors que hi apareixen el condicional és el d'abast màxim, de manera que podem eliminar dos parells més de parèntesis i obtindrem

$$P \wedge (Q \vee R) \to P \wedge \neg Q$$

Els parèntesis que hi resten ja no poden suprimir-se. □

1.3. Fórmules proposicionals

El *càlcul proposicional* és la tècnica que es fa servir per determinar la certesa o falsedat d'una determinada expressió lògica. Per tal d'estudiar aquesta tècnica haurem de precisar què s'ha d'entendre per *expressió lògica*.

DEFINICIÓ 1.9. (FÓRMULA PROPOSICIONAL)

Una fórmula proposicional *(també anomenada* forma proposicional *o* funció proposicional*) és una expressió composta per*

- *símbols (normalment lletres) que representen altres fórmules proposicionals i que s'anomenen variables i constants*[a] *proposicionals, i*
- *connectors i parelles de parèntesis (que asseguren que no hi ha ambigüitats).*

[a] Més endavant concretarem què entenem per *constants* proposicionals.

Cal insistir en la manca d'ambigüitat; per exemple, $P \wedge (Q \vee R)$ és una fórmula proposicional, però $P \wedge Q \vee R$ no ho és.

☞ També hem de tenir molt clara la diferència entre els conceptes de proposició i de fórmula proposicional. Una expressió com ara

$$P \wedge (Q \vee R) \tag{1.1}$$

és una fórmula proposicional; però només és una proposició quan P, Q i R són proposicions concretes. Una proposició és necessàriament vertadera o falsa, mentre que una fórmula proposicional pot ser una cosa o l'altra *segons* quin siga el valor de veritat de les expressions que la componen. Si utilitzem el llenguatge de les matemàtiques una fórmula proposicional és una funció que pren diversos valors segons el que valguen les variables.

Per exemple, la fórmula proposicional (1.1) pot representar tant la proposició vertadera

Jaume Roig fou un home, i l'argó és un gas noble o la setmana té 8 dies

com la proposició falsa

Robert és Déu, i l'argó és un gas noble o la setmana té 8 dies

1.4. Taules de veritat

Els valors lògics de les fórmules proposicionals es visualitzen mitjançant les *taules de veritat*.

DEFINICIÓ 1.10. (TAULA DE VERITAT)

La taula de veritat d'una fórmula proposicional és un quadre en què es mostren els valors de veritat d'aquesta fórmula en funció dels valors de veritat de les variables que hi intervenen.
En una taula de veritat han d'aparèixer totes les combinacions possibles de 0 *i* 1 *per a cada una de les variables proposicionals i el corresponent valor de veritat de la fórmula proposicional.*

Les taules de veritat dels connectors definits anteriorment són aquestes:

Negació

P	$\neg P$
0	1
1	0

Conjunció

P	Q	$P \wedge Q$
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Disjunció

P	Q	$P \vee Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Disjunció excloent

P	Q	$P \triangle Q$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Condicional

P	Q	$P \rightarrow Q$
0	0	1
0	1	1
1	0	0
1	1	1

Bicondicional

P	Q	$P \leftrightarrow Q$
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	1

Explicarem la manera en què s'ha de construir la taula de veritat d'una fórmula proposicional complexa mitjançant un exemple.

EXEMPLE 1.4.

Taula de veritat de la fórmula proposicional $\neg(P \wedge Q \to R)$

- ☞ En primer lloc, preparem un quadre amb una columna per a cada variable proposicional. En el nostre cas,

$$P, Q, R$$

i una columna addicional per a cada una de les operacions que es fan amb aquestes per tal de construir l'expressió completa,

$$P \wedge Q, \qquad P \wedge Q \to R, \qquad \neg(P \wedge Q \to R)$$

De manera que el quadre ha de tenir sis columnes:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \to R$	$\neg(P \wedge Q \to R)$

- ☞ Ara combinarem de totes les maneres possibles els valors de veritat de P, Q i R. Com que cada una d'aquestes pot tenir dos valors (0 i 1), això significa que tindrem $2^3 = 8$ combinacions possibles:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \to R$	$\neg(P \wedge Q \to R)$
0	0	0			
0	0	1			
0	1	0			
0	1	1			
1	0	0			
1	0	1			
1	1	0			
1	1	1			

Us recomanem que organitzeu sempre d'aquesta manera els valors de veritat de les variables: començant per la darrera variable, on alternem zeros i uns; per a la variable anterior la seqüència és de dos zeros, dos uns, dos zeros, dos uns; a continuació, de quatre zeros i quatre uns, i així successivament. Fent-ho així, els vuit valors de la seqüència PQR es corresponen amb la representació binària amb tres dígits dels nombres $0, 1, 2, \ldots, 7$ $(000, 001, 010, \ldots, 111)$.[4]

☞ La resta de columnes es va completant tenint en compte els valors de veritat dels connectors que hi intervenen. En el nostre cas,

- ☞ Calculem, en primer lloc, els valors de $P \wedge Q$. Recordem que aquesta fórmula només és certa quan ho són simultàniament P i Q:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \rightarrow R$	$\neg(P \wedge Q \rightarrow R)$
0	0	0	0		
0	0	1	0		
0	1	0	0		
0	1	1	0		
1	0	0	0		
1	0	1	0		
1	1	0	1		
1	1	1	1		

- ☞ En segon lloc, els valors de $P \wedge Q \rightarrow R$. Aquesta fórmula és falsa únicament quan $P \wedge Q$ és certa i R, falsa:

P	Q	R	$P \wedge Q$	$P \wedge Q \rightarrow R$	$\neg(P \wedge Q \rightarrow R)$
0	0	0	0	1	
0	0	1	0	1	
0	1	0	0	1	
0	1	1	0	1	
1	0	0	0	1	
1	0	1	0	1	
1	1	0	1	0	
1	1	1	1	1	

[4] La taula de veritat d'una fórmula proposicional amb quatre variables tindria $2^4 = 16$ entrades, que es corresponen amb les representacions binàries (amb quatre dígits) dels nombres $0, 1, 2, \ldots, 15$ $(0000, 0001, 0010, \ldots, 1111)$.

Para seguir leyendo haga click aquí