Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

Lecciones de Álgebra

2ª edición

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

LECCIONES DE ÁLGEBRA

2ª edición

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el departamento de Matemática Aplicada de la UPV

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Gregori Gregori, Valentín [et al].(2013) *Lecciones de Álgebra (2ª edición)*. Valencia: Universitat Politècnica

Primera edición, 2010. (4 reimpresiones)
Segunda edición, 2013

Distribución: Telf.: 96 387 70 12 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 276

Imprime: Byprint Percom, sl.

Impreso en papel Coral Book

ISBN: 978-84-9048-104-2
Impreso bajo demanda

Impreso en España

Presentación

La Universidad Española emprendió la década pasada una etapa inédita con el denominado Plan Bolonia. En dicho plan el tiempo del que dispone el profesorado para la impartición de la docencia matemática se ha reducido drásticamente. De esta manera la clásica clase magistral del siglo anterior se vuelve, en ocasiones, menos expositiva y más orientada hacia la búsqueda de conocimientos en los que el universitario deberá involucrarse de una manera más activa.

El presente libro, que es una revisión del homónimo que los autores escribieron en 2010, es un texto elemental sobre Álgebra Lineal concebido para los alumnos de Ingeniería que se graduarán en estos nuevos planes aunque básicamente el contenido corresponde al curso que los autores han impartido en la Escuela Politécnica Superior de Gandia en anteriores cursos académicos. El poco tiempo de que se dispone para su impartición queda patente, en cierta manera, en la ausencia de demostraciones que sólo aparecen esporádicamente en el desarrollo del capítulo, o en algún ejercicio. Ello, sin embargo, permite una lectura fluida del texto.

No obstante lo dicho en el párrafo anterior, y aun usando terminología sencilla, la argumentación de los contenidos del texto es constante y rigurosa en su exposición. Los epígrafes que aparecen en letra pequeña contienen demostraciones o ponen énfasis en algunos aspectos matemáticos, y su lectura no es imprescindible para la comprensión del texto. En ocasiones, el uso de la letra cursiva nos permite eludir la formalización de conceptos, cuando éstos parecen intuitivos.

En esta nueva edición, como en la primera, los autores se han esmerado sobre todo en la exposición didáctica del texto que han estructurado en capítulos. La exposición de resultados de cada capítulo se ilustra con ejemplos que aclaran los conceptos. Al término de cada capítulo se dan una gran cantidad de ejercicios resueltos con todo detalle, y después se proponen unos pocos que motiven al estudioso. Acaba cada capítulo con la descripción de algún "Proyecto" que es una extensión o aplicación de la teoría del texto.

Los siete capítulos que componen el programa que se desarrolla, en este orden son: teoría de conjuntos, espacios vectoriales, matrices, aplicaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y diagonalización de matrices.

Para la comprensión del texto sólo se requieren nociones elementales del Análisis Matemático y conocimientos básicos sobre los conjuntos de los números reales y complejos, aunque es esencialmente en los primeros, sobre los que se desarrolla la teoría.

Los autores agradecerán, una vez más, cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones sucesivas.

Los autores.

NOTACIÓN:

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

$\forall$	Cuantificador universal. Se lee "para todo" o "para cada"
$\exists$	Cuantificador existencial. Se lee "existe"
$\Longleftrightarrow$	Equivalencia proposicional. Se lee "si y sólo si"
sii	Abreviatura de "si y sólo si"
$\equiv$	Equivalencia (se utiliza como cambio convencional de notación)
$\Rightarrow$	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee "implica"
$\mid$	Se lee "tal (tales) que"
$:$	Se lee "tal (tales) que"
$\square$	Indica final de una demostración
i.e.	En latín *id est* y se lee "es decir"
$\in$	Símbolo de pertenencia
$\subset$	Símbolo de inclusión
$\cup$	Símbolo de unión
$\cap$	Símbolo de intersección
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
$\mathbb{N}^*$	El conjunto $\mathbb{N}$ sin el cero
$\mathbb{Z}$	El anillo de los números enteros
$\mathbb{Q}$	El cuerpo de los números racionales
$\mathbb{R}$	El cuerpo de los números reales
$\mathbb{C}$	El cuerpo de los números complejos
$\mathbb{K}$	Cuerpo ($\mathbb{R}$ ó $\mathbb{C}$, generalmente)

Sumario

Capítulo 1

TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece una (ingenua) introducción a la teoría de conjuntos que es suficiente para establecer y estudiar los conceptos que se definen a lo largo del texto. Se ha puesto especial interés en los conceptos de aplicación y ley interna de un conjunto, para concluir con unas nociones elementales de combinatoria.

El **Principio de Inducción** establece para una *proposición* $\mathcal{P}_n$ donde $n \in \mathbb{N}$, que:

$$[\mathcal{P}_0 \text{ cierto y } (\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}) \text{ cierto }] \to (\mathcal{P}_n \text{ cierto }) \ \forall n \in \mathbb{N}$$

El Principio se basa en la **buena ordenación de** $\mathbb{N}$ (todo subconjunto de $\mathbb{N}$ posee primer elemento), y en él se fundamentan las demostraciones por inducción y los conceptos que se definen por recurrencia (o inducción).

En la práctica este Principio admite variantes.

En la prueba de $\mathcal{P}_n \to \mathcal{P}_{n+1}$ se asume (hipótesis) que $\mathcal{P}_n$ es cierta. A ello se le denomina **hipótesis de inducción**.

1.1 EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1.1 Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos. Los conjuntos suelen denotarse con letras mayúsculas. Cuando se explicitan sus elementos, éstos, sin repetirse, se encierran entre llaves separados por comas. En ciertos contextos se utilizan los términos **sistema, colección** y **familia** como sinónimos de conjunto. Así se habla de "familia de conjuntos" en vez de "conjunto de conjuntos" y sistema de vectores en vez de conjunto de vectores.

Designaremos por $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y $\mathbb{C}$ a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Así, por ejemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \ \text{ y } \ \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un **conjunto unitario** es aquél que posee un único elemento. Esta terminología se extiende a conjuntos de dos o más elementos, de manera obvia.

Para expresar que un elemento a **pertenece** a un conjunto S (o que está en S) se escribe $a \in S$. Si a no está en S se escribe $a \notin S$. Para expresar que un conjunto A está **contenido** (o **incluido**) en otro B (i.e., todo elemento de A está en B) se escribe $A \subset B$ (o $B \supset A$), en tal caso se dice que A es un **subconjunto** de B. Si A no está incluido en B se escribe $A \not\subset B$.

Se designa por $\emptyset$ al conjunto **vacío** que no posee elementos. Todo subconjunto no vacío S posee dos subconjuntos **impropios**: $\emptyset$ y S. Los demás subconjuntos de S se llaman **propios**.

Dos conjuntos A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, cuando poseen los mismos elementos, lo cual sucede sii $A \subset B$ y $B \subset A$.

Un conjunto también se describe a través de una expresión caracterizadora de sus elementos dentro de un contexto (conjunto **referencial**). Así, el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ también se puede escribir de las dos formas siguientes:

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \ \text{ o } \ \{x \in \mathbb{Z} : 0 \le x \le 4\}.$$

1.1.2 Ejemplos

(a) El conjunto V de las vocales es $V = \{a, e, i, o, u\}$ (o también $V = \{e, i, a, o, u\}$ pues el orden de aparición de los elementos es irrelevante).

Se tiene que $\{a, e, o\} \subset V$ pero $\{a, m\} \not\subset V$ pues $m \notin V$.

(b) $-2 \in \mathbb{Z}$ pero $-2 \notin \mathbb{N}$

(c) Se tienen las inclusiones *numéricas* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Sin embargo las inclusiones *contrarias* no se verifican.

(d) El conjunto *binario* $\{-1, 1\}$ se puede escribir $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \le x^2 \le 2\}$.

(e) Se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset.$$

Obsérvese que el conjunto $\emptyset$ viene determinado por una condición imposible de cumplir.

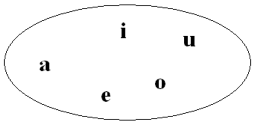
(f) El conjunto $\{0, 2, 4, \dots\}$ que contiene el 0 y los pares es el conjunto $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ por lo que habitualmente se representa por $2\mathbb{N}$. Análogamente si $p \in \mathbb{N}^*$, $p\mathbb{N}$ representa los naturales múltiples de p, que también suelen denotarse $\dot{p}$.

1.1.3 Nota

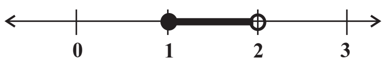
Si $a \in S$ podemos escribir $\{a\} \subset S$ pero la notación $a \subset S$ es incorrecta. En la actualidad, en argumentaciones matemáticas, se acepta la notación $a, b \in S$ para indicar que ambos elementos a y b pertenecen a S (aunque lo correcto algebraicamente es $\{a, b\} \subset S$).

1.1.4 Representaciones gráficas

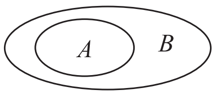
En ocasiones los conjuntos se describen (definen) mediante gráficos. Así, un **diagrama de Venn** es una representación gráfica plana de un conjunto, en la que sus elementos quedan encerrados por una línea, como se muestra en la figura siguiente en la que se representa el conjunto de vocales.



En un **diagrama lineal** los elementos del conjunto son los que resaltan sobre el segmento o la recta donde se representan. Este tipo de representación es interesante cuando se desea entrever un *orden* entre los elementos. En la figura inferior se representa en $\mathbb{R}$ el conjunto I que es el intervalo $[1, 2[$.



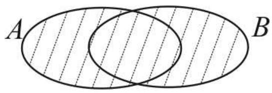
El gráfico siguiente *muestra* que $A \subset B$.



1.1.5 Unión, intersección y complementación de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Se define la **unión** de los conjuntos A y B, y se denota $A \cup B$ (se lee A unión B), como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \ \text{ o } \ x \in B\}.$$



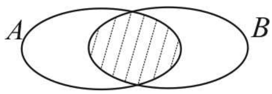
$A \cup B$ es el conjunto rayado.

Grosso modo, $A \cup B$ contiene los elementos de A o B (recordar que la "o" lógica no es excluyente). Este concepto se extiende de forma natural a una familia cualquiera de conjuntos de manera que la unión de éstos está formada por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos de la familia. En particular, cuando la familia de conjuntos es infinita numerable, por ejemplo A_1, A_2, A_3,... su unión se escribe $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots$, o también de las siguientes formas:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \ \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \ \bigcup \{A_i : i = 1, 2, 3, ...\}, \ \bigcup \{A_i : i \in \mathbb{N}^*\}, \ \bigcup_{i \geq 1} A_i, \ \bigcup_{i} A_i.$$

Se define la **intersección** de los conjuntos A y B, que se denota $A \cap B$ (se lee A intersección B), como el conjunto

$$A \cap B = \{x : \ x \in A \ \text{ y } \ x \in B\}.$$



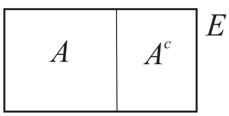
$A \cap B$ es el conjunto rayado.

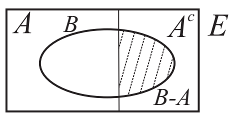
Grosso modo, $A \cap B$ contiene los elementos comunes a A y a B. Si A y B no tienen elementos comunes se dice que son **disjuntos**. Al igual que antes este concepto se generaliza a una familia cualquiera de conjuntos.

De las definiciones se desprenden las siguientes propiedades inmediatas:

$A \subset A \cup B$,
$A \cap B \ \subset A$,
$A \subset B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A$

Si A y B son conjuntos dentro de un referencial E, se define el **complementario** de A (respecto E), y se denota por A^c (se lee A complementario), como el conjunto formado por los elementos de E que no están en A. De manera más general se define el conjunto $B - A$ (**diferencia** de B y A), como el conjunto de los elementos de B que no están en A. Es fácil observar que $B - A = B \cap A^c$. En la siguiente figura $B - A$ es el conjunto rayado.





Para seguir leyendo haga click aquí