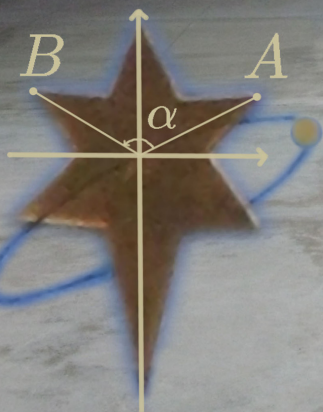


Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

LECCIONES DE **ÁLGEBRA**

2ª edición



$$B = G \cdot A$$

$$G = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\operatorname{sen} \alpha \\ \operatorname{sen} \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

LECCIONES DE ÁLGEBRA

2^a edición

EDITORIAL
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE VALÈNCIA

Los contenidos de esta publicación han sido revisados por el departamento de Matemática Aplicada de la UPV

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita: Gregori Gregori, Valentín [et al].(2013) *Lecciones de Álgebra (2ª edición)*. Valencia: Universitat Politècnica

Primera edición, 2010. (4 reimpresiones)
Segunda edición, 2013

© Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala
Almanzor Sapena Piera

©de la presente edición: Editorial Universitat Politècnica de València
Distribución: Telf.: 96 387 70 12 / www.lalibreria.upv.es / Ref.: 276

Imprime: Byprint Percom, sl.

Impreso en papel Coral Book



ISBN: 978-84-9048-104-2

Impreso bajo demanda

Queda prohibida la reproducción, distribución, comercialización, transformación, y en general, cualquier otra forma de explotación, por cualquier procedimiento, de todo o parte de los contenidos de esta obra sin autorización expresa y por escrito de sus autores.

Impreso en España

Presentación

La Universidad Española emprendió la década pasada una etapa inédita con el denominado Plan Bolonia. En dicho plan el tiempo del que dispone el profesorado para la impartición de la docencia matemática se ha reducido drásticamente. De esta manera la clásica clase magistral del siglo anterior se vuelve, en ocasiones, menos expositiva y más orientada hacia la búsqueda de conocimientos en los que el universitario deberá involucrarse de una manera más activa.

El presente libro, que es una revisión del homónimo que los autores escribieron en 2010, es un texto elemental sobre Álgebra Lineal concebido para los alumnos de Ingeniería que se graduarán en estos nuevos planes aunque básicamente el contenido corresponde al curso que los autores han impartido en la Escuela Politécnica Superior de Gandia en anteriores cursos académicos. El poco tiempo de que se dispone para su impartición queda patente, en cierta manera, en la ausencia de demostraciones que sólo aparecen esporádicamente en el desarrollo del capítulo, o en algún ejercicio. Ello, sin embargo, permite una lectura fluida del texto.

No obstante lo dicho en el párrafo anterior, y aun usando terminología sencilla, la argumentación de los contenidos del texto es constante y rigurosa en su exposición. Los epígrafes que aparecen en letra pequeña contienen demostraciones o ponen énfasis en algunos aspectos matemáticos, y su lectura no es imprescindible para la comprensión del texto. En ocasiones, el uso de la letra cursiva nos permite eludir la formalización de conceptos, cuando éstos parecen intuitivos.

En esta nueva edición, como en la primera, los autores se han esmerado sobre todo en la exposición didáctica del texto que han estructurado en capítulos. La exposición de resultados de cada capítulo se ilustra con ejemplos que aclaran los conceptos. Al término de cada capítulo se dan una gran cantidad de ejercicios resueltos con todo detalle, y después se proponen unos pocos que motiven al estudioso. Acaba cada capítulo con la descripción de algún “Proyecto” que es una extensión o aplicación de la teoría del texto.

Los siete capítulos que componen el programa que se desarrolla, en este orden son: teoría de conjuntos, espacios vectoriales, matrices, aplicaciones lineales, determinantes, sistemas de ecuaciones lineales y diagonalización de matrices.

Para la comprensión del texto sólo se requieren nociones elementales del Análisis Matemático y conocimientos básicos sobre los conjuntos de los números reales y complejos, aunque es esencialmente en los primeros, sobre los que se desarrolla la teoría.

Los autores agradecerán, una vez más, cualquier sugerencia tendente a mejorar el presente texto en ediciones sucesivas.

Los autores.

NOTACIÓN:

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

\forall	Cuantificador universal. Se lee “para todo” o “para cada”
\exists	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
\iff	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
\equiv	Equivalencia (se utiliza como cambio convencional de notación)
\Rightarrow	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
\square	Indica final de una demostración
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
\in	Símbolo de pertenencia
\subset	Símbolo de inclusión
\cup	Símbolo de unión
\cap	Símbolo de intersección
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
\mathbb{N}^*	El conjunto \mathbb{N} sin el cero
\mathbb{Z}	El anillo de los números enteros
\mathbb{Q}	El cuerpo de los números racionales
\mathbb{R}	El cuerpo de los números reales
\mathbb{C}	El cuerpo de los números complejos
\mathbb{K}	Cuerpo (\mathbb{R} ó \mathbb{C} , generalmente)

Sumario

1	TEORÍA DE CONJUNTOS	13
1.1	EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS	13
1.1.1	Conjuntos	13
1.1.2	Ejemplos	14
1.1.3	Nota	15
1.1.4	Representaciones gráficas	15
1.1.5	Unión, intersección y complementación de conjuntos	15
1.1.6	Ejemplos	17
1.1.7	El álgebra de Boole de la teoría de conjuntos	18
1.2	PRODUCTOS CARTESIANOS	19
1.2.1	Producto cartesiano	19
1.2.2	Ejemplos	19
1.2.3	Relación binaria de equivalencia	20
1.3	APLICACIONES	20
1.3.1	Correspondencias	20
1.3.2	Ejemplo	20
1.3.3	Nota	21
1.3.4	Ejemplo	21
1.3.5	Aplicaciones	22
1.3.6	Ejemplos	22
1.3.7	Clasificación de aplicaciones	23
1.3.8	Ejemplo	23
1.3.9	Sobre aplicaciones biyectivas	24
1.3.10	Ejemplo	25
1.3.11	Composición de aplicaciones	25
1.3.12	Ejemplo	26
1.4	GRUPOS, ANILLOS Y CUERPOS	27
1.4.1	Grupos	27
1.4.2	Anillos	28
1.4.3	Cuerpos	28

1.5	COMBINATORIA	29
1.5.1	Variaciones con repetición	29
1.5.2	Ejemplo	29
1.5.3	Variaciones ordinarias	29
1.5.4	Ejemplo	29
1.5.5	Permutaciones	30
1.5.6	Ejemplo	30
1.5.7	Combinaciones	30
1.5.8	Ejemplo	30
1.5.9	Nota	31
1.5.10	Combinaciones con repetición	31
1.5.11	Ejemplos	31
1.5.12	Permutaciones con repetición	31
1.5.13	Ejemplo	32
1.5.14	Números combinatorios. Propiedades	32
1.5.15	Triángulo de Tartaglia	32
1.5.16	Binomio de Newton	33
1.5.17	Ejemplo	34
1.6	EJERCICIOS RESUELTOS	34
1.7	EJERCICIOS PROPUESTOS	39
1.8	PROYECTO 1.1: Estudio del anillo $(\mathbb{Z}_n, +, \cdot)$	40
1.9	PROYECTO 1.2: Funciones booleanas	41
1.10	PROYECTO 1.3: El cuerpo de los números complejos	42
2	ESPACIOS VECTORIALES	45
2.1	ESPACIOS VECTORIALES	45
2.1.1	Espacio vectorial	45
2.1.2	El espacio vectorial \mathbb{R}^n	46
2.1.3	Representaciones geométricas	47
2.1.4	Subespacios vectoriales	47
2.1.5	Teorema (caracterización de subespacios vectoriales)	48
2.1.6	Ejemplos	48
2.1.7	Proposición	48
2.1.8	Nota	48
2.2	COMBINACIONES LINEALES	49
2.2.1	Combinaciones lineales. Espacios de dimensión finita	49
2.2.2	Ecuación continua de la recta	49
2.2.3	Ejemplo	49
2.2.4	Nota	50
2.2.5	Propiedades inmediatas	51
2.2.6	Interpretaciones geométricas	51

2.2.7	Dependencia e independencia lineal	51
2.2.8	Ejemplos	52
2.2.9	Consecuencias	52
2.2.10	Proposición	53
2.2.11	Ejemplo	53
2.3	BASE DE UN ESPACIO VECTORIAL	53
2.3.1	Base de un espacio vectorial	53
2.3.2	Ejemplo	53
2.3.3	Bases canónicas	54
2.3.4	Teorema de la dimensión	54
2.3.5	Nota	55
2.3.6	Teorema (existencia de bases)	55
2.3.7	Teorema de la base incompleta	55
2.3.8	Ejemplo	55
2.3.9	Teorema	56
2.3.10	Interpretaciones geométricas	56
2.4	PROCESO DE REDUCCIÓN DE GAUSS	56
2.4.1	Lema	57
2.4.2	Lema	57
2.4.3	Ejemplo	57
2.4.4	Nota	57
2.4.5	Ejemplo	58
2.4.6	Proceso de reducción de Gauss	58
2.4.7	Nota	59
2.4.8	Ejemplo	59
2.4.9	Nota	60
2.5	SUMAS DE SUBESPACIOS VECTORIALES	60
2.5.1	Suma de dos subespacios vectoriales	60
2.5.2	Nota	60
2.5.3	Teorema	61
2.5.4	Ejemplo	61
2.5.5	Suma directa	61
2.5.6	Teorema de caracterización de sumas directas	61
2.5.7	Nota	62
2.5.8	Ejemplo	62
2.5.9	Suma (directa) de n subespacios vectoriales	62
2.5.10	Teorema	62
2.6	EJERCICIOS RESUELTOS	62
2.7	EJERCICIOS PROPUESTOS	69
2.8	PROYECTO 2.1: El espacio euclídeo \mathbb{R}^n	70

3	MATRICES	73
3.1	EL ESPACIO VECTORIAL DE LAS MATRICES	73
3.1.1	Matriz	73
3.1.2	Ejemplos	74
3.1.3	El grupo abeliano $(\mathcal{M}_{m \times n}, +)$	74
3.1.4	El espacio vectorial $\mathcal{M}_{m \times n}$	75
3.1.5	Ejemplos	75
3.1.6	Base de $\mathcal{M}_{m \times n}$	75
3.1.7	Ejemplo	75
3.2	EL ANILLO DE LAS MATRICES CUADRADAS	76
3.2.1	El producto de matrices	76
3.2.2	Ejemplo	76
3.2.3	El anillo de las matrices cuadradas $(\mathcal{M}_n, +, \cdot)$	77
3.3	TIPOS ESPECIALES DE MATRICES	77
3.3.1	Matriz inversible	77
3.3.2	Ejemplos	78
3.3.3	Matrices triangulares	78
3.3.4	Ejemplo	79
3.3.5	Traspuesta de una matriz	79
3.3.6	Ejemplos	79
3.3.7	Nota	79
3.3.8	Propiedades de la matriz traspuesta	80
3.3.9	Otros tipos de matrices	80
3.4	RANGO DE UNA MATRIZ	80
3.4.1	Definición	80
3.4.2	Teorema	80
3.4.3	Ejemplo	81
3.5	MATRICES ELEMENTALES	81
3.5.1	Matrices elementales	81
3.5.2	Ejemplos	82
3.5.3	Inversibilidad de las matrices elementales	82
3.5.4	Nota	83
3.5.5	La inversa de una matriz por matrices elementales	83
3.5.6	Ejemplo	83
3.5.7	Teorema	84
3.5.8	Inversas de matrices triangulares	84
3.5.9	Ejemplo	85
3.5.10	Descomposición LU	85
3.5.11	Nota	85
3.5.12	Matrices escalonadas. Descomposición LS	85
3.5.13	Ejemplo	86

3.6	MATRICES POR BLOQUES	87
3.6.1	Matrices por bloques	87
3.6.2	Ejemplo	89
3.7	EJERCICIOS RESUELTOS	89
3.8	EJERCICIOS PROPUESTOS	99
3.9	PROYECTO 3.1: Introducción a la teoría de grafos	101
3.10	PROYECTO 3.2: Descomposición en valores singulares (DVS)	103
3.11	PROYECTO 3.3: Cadenas de Markov	107
4	APLICACIONES LINEALES	111
4.1	APLICACIONES LINEALES	111
4.1.1	Aplicaciones lineales	111
4.1.2	Propiedades	112
4.1.3	Ejemplos	112
4.1.4	Giro	112
4.1.5	Ejemplo	112
4.1.6	Núcleo	113
4.1.7	Teorema (caracterización de aplicaciones inyectivas)	113
4.1.8	Nota	113
4.1.9	Ejemplo	113
4.1.10	Proposición	114
4.1.11	Proposición	114
4.1.12	Teorema de la dimensión (de aplicaciones lineales)	114
4.1.13	Nota	115
4.1.14	Corolario (idoneidad de las aplicaciones lineales)	115
4.2	MATRICES Y APLICACIONES LINEALES	115
4.2.1	Matriz asociada a una aplicación lineal	115
4.2.2	Ejemplo	116
4.2.3	Rango de una aplicación lineal	117
4.2.4	Ejemplo	117
4.2.5	Matriz de la aplicación identidad I	118
4.2.6	Isomorfismo entre aplicaciones lineales y matrices	119
4.2.7	Nota	119
4.2.8	Proposición	120
4.3	APLICACIONES LINEALES Y MATRICES INVERSIBLES	120
4.3.1	Proposición	120
4.3.2	Nota	120
4.3.3	Proposición	120
4.3.4	Composición de aplicaciones lineales	120
4.3.5	Ejemplo	121
4.3.6	Proposición	121

4.3.7	Teorema	121
4.3.8	Corolario	121
4.4	CAMBIOS DE BASE	121
4.4.1	Expresión matricial del cambio de base en un espacio vectorial	121
4.4.2	Ejemplo	122
4.4.3	Matrices asociadas a una aplicación lineal	124
4.4.4	Nota	125
4.5	EJERCICIOS RESUELTOS	125
4.6	EJERCICIOS PROPUESTOS	131
4.7	PROYECTO 4.1: Códigos lineales	132
4.8	PROYECTO 4.2: Las transformaciones afines y la compresión fractal de imágenes	133
4.9	PROYECTO 4.3: Transformada de Fourier y de Laplace	136
5	DETERMINANTES	139
5.1	DETERMINANTE DE ORDEN n	139
5.1.1	Signatura de una permutación	139
5.1.2	Determinante de orden n	140
5.1.3	Determinante de orden 3 y de orden 2	141
5.1.4	Ejemplos	141
5.1.5	Propiedades de los determinantes de orden n	142
5.1.6	Ejemplos	143
5.2	DESARROLLO DE UN DETERMINANTE	144
5.2.1	Menor complementario y adjunto	144
5.2.2	Ejemplo	145
5.2.3	Proposición	145
5.2.4	Proposición (desarrollo de un determinante)	145
5.2.5	Proposición (determinante de una matriz triangular)	146
5.2.6	Cálculo práctico de determinantes	146
5.2.7	Ejemplo	146
5.3	MATRIZ INVERSIBLE	147
5.3.1	Determinante de las matrices elementales	147
5.3.2	Proposición	148
5.3.3	Nota	148
5.3.4	Proposición	148
5.3.5	Teorema	148
5.3.6	Corolario	149
5.3.7	Nota	149
5.3.8	Proposición	149
5.3.9	Cálculo de la matriz inversa	149
5.3.10	Ejemplo	150

5.3.11	Aplicación al cálculo del rango de una matriz	150
5.3.12	Ejemplo	151
5.3.13	Expresiones con determinantes	151
5.4	EJERCICIOS RESUELTOS	152
5.5	EJERCICIOS PROPUESTOS	160
5.6	PROYECTO 5.1: Aplicación de los determinantes a la Geometría Euclídea	161
6	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	165
6.1	SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	165
6.1.1	Sistemas de ecuaciones lineales	165
6.1.2	Solución de un sistema de ecuaciones lineales	166
6.1.3	Matriz ampliada	167
6.1.4	Proposición	167
6.1.5	Ejemplo	167
6.1.6	Clasificación de sistemas	168
6.1.7	Teorema de Rouché-Fröbenius	168
6.1.8	Ejemplos	169
6.2	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	172
6.2.1	Regla de Cramer	172
6.2.2	Ejemplos	173
6.2.3	Método de reducción de Gauss	174
6.2.4	Ejemplo	175
6.2.5	Sistema homogéneo	176
6.2.6	Ejemplo	176
6.2.7	Resolución de un sistema de Cramer por descomposición LU	177
6.2.8	Resolución de un sistema por descomposición LS	177
6.2.9	Interpolación polinómica	178
6.2.10	Sistemas sobredeterminados	179
6.3	ECUACIONES DE LOS SUBESPACIOS DE \mathbb{R}^n	179
6.3.1	Ecuaciones paramétricas de un subespacio vectorial	179
6.3.2	Nota	180
6.3.3	Ecuaciones de un subespacio vectorial	180
6.3.4	Nota	181
6.3.5	Eliminación de parámetros	182
6.3.6	Ejemplo	183
6.4	RESOLUCIÓN APROXIMADA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES	184
6.4.1	Aproximaciones sucesivas	184
6.4.2	Métodos iterativos. Convergencia	185
6.4.3	Método de Jacobi	186
6.4.4	Método de Gauss-Seidel	187

6.4.5	Nota	187
6.5	EJERCICIOS RESUELTOS	187
6.6	EJERCICIOS PROPUESTOS	202
6.7	PROYECTO 6.1: Programación lineal (optimización)	203
6.8	PROYECTO 6.2: Sistemas mal condicionados y pivoteo	208
7	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES	211
7.1	SUBESPACIOS PROPIOS	211
7.1.1	Introducción	211
7.1.2	Vectores propios	212
7.1.3	Nota	212
7.1.4	Subespacio propio	212
7.1.5	Ejemplo	212
7.1.6	El polinomio característico	212
7.1.7	Unicidad del polinomio característico	213
7.1.8	Ejemplo	214
7.2	DIAGONALIZACIÓN DE MATRICES	214
7.2.1	Definición	214
7.2.2	Proposición	214
7.2.3	Nota	214
7.2.4	Proposición	215
7.2.5	Corolario	215
7.2.6	Ejemplo	215
7.2.7	Teorema (caracterización de los endomorfismos diagonalizables)	216
7.2.8	Nota	216
7.2.9	Ejemplo	216
7.2.10	Corolario	216
7.2.11	Nota	216
7.2.12	Matriz de paso	217
7.2.13	Potencia de una matriz	217
7.2.14	Matrices simétricas	217
7.2.15	Nota	217
7.3	EJERCICIOS RESUELTOS	217
7.4	EJERCICIOS PROPUESTOS	226
7.5	PROYECTO 7.1: Ecuaciones diferenciales lineales homogéneas con coeficientes constantes	227
7.6	PROYECTO 7.2: Estudio de la ecuación general de cónicas y cuádricas	229
	Bibliografía	233

Capítulo 1

TEORÍA DE CONJUNTOS

En este capítulo se ofrece una (ingenua) introducción a la teoría de conjuntos que es suficiente para establecer y estudiar los conceptos que se definen a lo largo del texto. Se ha puesto especial interés en los conceptos de aplicación y ley interna de un conjunto, para concluir con unas nociones elementales de combinatoria.

El **Principio de Inducción** establece para una *proposición* \mathcal{P}_n donde $n \in \mathbb{N}$, que:

$$[\mathcal{P}_0 \text{ cierto y } (\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}) \text{ cierto}] \rightarrow (\mathcal{P}_n \text{ cierto}) \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

El Principio se basa en la **buena ordenación de \mathbb{N}** (todo subconjunto de \mathbb{N} posee primer elemento), y en él se fundamentan las demostraciones por inducción y los conceptos que se definen por recurrencia (o inducción).

En la práctica este Principio admite variantes.

En la prueba de $\mathcal{P}_n \rightarrow \mathcal{P}_{n+1}$ se asume (hipótesis) que \mathcal{P}_n es cierta. A ello se le denomina **hipótesis de inducción**.

1.1 EL ÁLGEBRA DE BOOLE DE LA TEORÍA DE CONJUNTOS

1.1.1 Conjuntos

Un **conjunto** es una colección de elementos. Los conjuntos suelen denotarse con letras mayúsculas. Cuando se explicitan sus elementos, éstos, sin repetirse, se encierran entre llaves separados por comas. En ciertos contextos se utilizan los términos **sistema**, **colección** y **familia** como sinónimos de conjunto. Así se habla de “familia de conjuntos” en vez de “conjunto de conjuntos” y sistema de vectores en vez de conjunto de vectores.

Designaremos por \mathbb{N} , \mathbb{Z} , \mathbb{Q} , \mathbb{R} y \mathbb{C} a los conjuntos de los números natu-

rales, enteros, racionales, reales y complejos, respectivamente. Así, por ejemplo:

$$\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\} \quad \text{y} \quad \mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

Un **conjunto unitario** es aquél que posee un único elemento. Esta terminología se extiende a conjuntos de dos o más elementos, de manera obvia.

Para expresar que un elemento a **pertenece** a un conjunto S (o que está en S) se escribe $a \in S$. Si a no está en S se escribe $a \notin S$. Para expresar que un conjunto A está **contenido** (o **incluido**) en otro B (i.e., todo elemento de A está en B) se escribe $A \subset B$ (o $B \supset A$), en tal caso se dice que A es un **subconjunto** de B . Si A no está incluido en B se escribe $A \not\subset B$.

Se designa por \emptyset al conjunto **vacío** que no posee elementos. Todo subconjunto no vacío S posee dos subconjuntos **improprios**: \emptyset y S . Los demás subconjuntos de S se llaman **proprios**.

Dos conjuntos A y B son **iguales**, y se escribe $A = B$, cuando poseen los mismos elementos, lo cual sucede si $A \subset B$ y $B \subset A$.

Un conjunto también se describe a través de una expresión caracterizadora de sus elementos dentro de un contexto (conjunto **referencial**). Así, el conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ también se puede escribir de las dos formas siguientes:

$$\{x \in \mathbb{N} : x < 5\} \quad \text{o} \quad \{x \in \mathbb{Z} : 0 \leq x \leq 4\}.$$

1.1.2 Ejemplos

- (a) El conjunto V de las vocales es $V = \{a, e, i, o, u\}$ (o también $V = \{e, i, a, o, u\}$ pues el orden de aparición de los elementos es irrelevante).

Se tiene que $\{a, e, o\} \subset V$ pero $\{a, m\} \not\subset V$ pues $m \notin V$.

- (b) $-2 \in \mathbb{Z}$ pero $-2 \notin \mathbb{N}$

- (c) Se tienen las inclusiones *numéricas* $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}$, $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$ y $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$. Sin embargo las inclusiones *contrarias* no se verifican.

- (d) El conjunto *binario* $\{-1, 1\}$ se puede escribir $\{x \in \mathbb{Z} : 1 \leq x^2 \leq 2\}$.

- (e) Se tiene que

$$\{x \in \mathbb{R} : x^2 = -1\} = \emptyset.$$

Obsérvese que el conjunto \emptyset viene determinado por una condición imposible de cumplir.

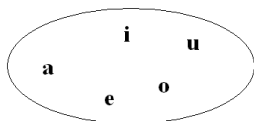
- (f) El conjunto $\{0, 2, 4, \dots\}$ que contiene el 0 y los pares es el conjunto $\{2n : n \in \mathbb{N}\}$ por lo que habitualmente se representa por $2\mathbb{N}$. Análogamente si $p \in \mathbb{N}^*$, $p\mathbb{N}$ representa los naturales múltiples de p , que también suelen denotarse \dot{p} .

1.1.3 Nota

Si $a \in S$ podemos escribir $\{a\} \subset S$ pero la notación $a \subset S$ es incorrecta. En la actualidad, en argumentaciones matemáticas, se acepta la notación $a, b \in S$ para indicar que ambos elementos a y b pertenecen a S (aunque lo correcto algebraicamente es $\{a, b\} \subset S$).

1.1.4 Representaciones gráficas

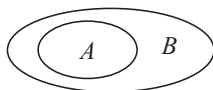
En ocasiones los conjuntos se describen (definen) mediante gráficos. Así, un **diagrama de Venn** es una representación gráfica plana de un conjunto, en la que sus elementos quedan encerrados por una línea, como se muestra en la figura siguiente en la que se representa el conjunto de vocales.



En un **diagrama lineal** los elementos del conjunto son los que resaltan sobre el segmento o la recta donde se representan. Este tipo de representación es interesante cuando se desea entrever un *orden* entre los elementos. En la figura inferior se representa en \mathbb{R} el conjunto I que es el intervalo $[1, 2]$.



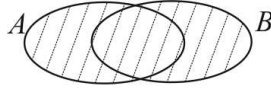
El gráfico siguiente *muestra* que $A \subset B$.



1.1.5 Unión, intersección y complementación de conjuntos

Sean A y B dos conjuntos. Se define la **unión** de los conjuntos A y B , y se denota $A \cup B$ (se lee A unión B), como el conjunto

$$A \cup B = \{x : x \in A \text{ o } x \in B\}.$$



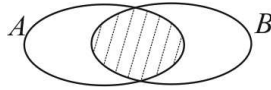
$A \cup B$ es el conjunto rayado.

Grosso modo, $A \cup B$ contiene los elementos de A o B (recordar que la “o” lógica no es excluyente). Este concepto se extiende de forma natural a una familia cualquiera de conjuntos de manera que la unión de éstos está formada por los elementos que pertenecen a alguno de los conjuntos de la familia. En particular, cuando la familia de conjuntos es infinita numerable, por ejemplo A_1, A_2, A_3, \dots su unión se escribe $A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \dots$, o también de las siguientes formas:

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i, \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i, \bigcup \{A_i : i = 1, 2, 3, \dots\}, \bigcup \{A_i : i \in \mathbb{N}^*\}, \bigcup_{i \geq 1} A_i, \bigcup_i A_i.$$

Se define la **intersección** de los conjuntos A y B , que se denota $A \cap B$ (se lee A intersección B), como el conjunto

$$A \cap B = \{x : x \in A \text{ y } x \in B\}.$$



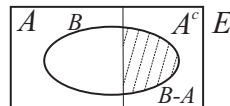
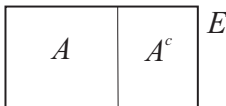
$A \cap B$ es el conjunto rayado.

Grosso modo, $A \cap B$ contiene los elementos comunes a A y a B . Si A y B no tienen elementos comunes se dice que son **disjuntos**. Al igual que antes este concepto se generaliza a una familia cualquiera de conjuntos.

De las definiciones se desprenden las siguientes propiedades inmediatas:

$$\begin{aligned} A &\subset A \cup B, \\ A \cap B &\subset A, \\ A \subset B &\Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \end{aligned}$$

Si A y B son conjuntos dentro de un referencial E , se define el **complementario** de A (respecto E), y se denota por A^c (se lee A complementario), como el conjunto formado por los elementos de E que no están en A . De manera más general se define el conjunto $B - A$ (**diferencia** de B y A), como el conjunto de los elementos de B que no están en A . Es fácil observar que $B - A = B \cap A^c$. En la siguiente figura $B - A$ es el conjunto rayado.



Para seguir leyendo haga click aquí